

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΤΥΠΟΥ
SHEWHART ΜΕ ΚΑΝΟΝΕΣ ΔΙΑΚΟΠΗΣ
ΠΟΥ ΒΑΣΙΖΟΝΤΑΙ ΣΕ ΡΟΕΣ**

Αθανάσιος Χ. Ρακιτζής

Διπλωματική Εργασία

*που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική*

*Πειραιάς
Οκτώβριος 2004*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΤΥΠΟΥ
SHEWHART ΜΕ ΚΑΝΟΝΕΣ ΔΙΑΚΟΠΗΣ
ΠΟΥ ΒΑΣΙΖΟΝΤΑΙ ΣΕ ΡΟΕΣ**

Αθανάσιος Χ. Ρακιτζής

Διπλωματική Εργασία

*που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική*

*Πειραιάς
Οκτώβριος 2004*

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. 9/11.5.04 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Δημήτριος Αντζουλάκος, Επικ. Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Μάρκος Κούτρας, Καθηγητής
- Μπούτσικας Μιχαήλ, Λέκτορας

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**SHEWHART CONTROL CHARTS WITH
STOPPING RULES BASED ON RUNS**

By

Rakitzis C. Athanasios

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of
the requirements for the degree of Master of Science in
Applied Statistics

Piraeus, Greece
October 2004

*Στους γονείς μου
Χρήστο και Ιωάννα
και στον αδερφό μου
Βασίλη*

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου αλλά και τον αδερφό μου για την αμέριστη συμπαράσταση που μου έχουν δείξει όλα αυτά τα χρόνια, χωρίς τη βοήθεια των οποίων δεν θα είχα πετύχει σχεδόν τίποτα από τα όσα έχω κάνει μέχρι σήμερα, τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Αντζουλάκο Δημήτριο για την άψογη συνεργασία που είχαμε αλλά και για την πραγματικά μεγάλη βοήθεια που μου προσέφερε προκειμένου να φέρω σε πέρας αυτή τη διπλωματική εργασία καθώς και τα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ.κ. Κούτρα Μάρκο (καθηγητή), Μπούτσικα Μιχαήλ (λέκτορα) για την επίβλεψη της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Περίληψη

Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart για την παρακολούθηση του μέσου μ μιας διεργασίας δίνουν σήμα ότι μια διεργασία είναι εκτός ελέγχου (μετατόπιση του μέσου) όταν ένα σημείο του διαγράμματος βρεθεί εκτός της ζώνης που ορίζεται από το κάτω (LCL) και το άνω (UCL) όριο ελέγχου του διαγράμματος. Είναι γνωστό ότι τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart δεν είναι ευαίσθητα σε μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας. Η αύξηση της ευαισθησίας του διαγράμματος ως προς την ικανότητά του να ανιχνεύει μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας επιτυγχάνεται με χρήση προειδοποιητικών ορίων (εσωτερικών των LCL και UCL) και με χρήση κανόνων διακοπής (Stopping Rules) που σχετίζονται με την εμφάνιση ειδικών σχηματισμών από σημεία (patterns) στο διάγραμμα. Η εμφάνιση ενός τέτοιου ειδικού σχηματισμού από σημεία δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας. Τέτοιοι κανόνες παρουσιάστηκαν και εφαρμόστηκαν για πρώτη φορά το 1956 από την εταιρεία Western Electric Company.

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι η ανάπτυξη και η μελέτη της επίδρασης κανόνων διακοπής που σχετίζονται με στατιστικές συναρτήσεις ροών (runs) στα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart.

Abstract

The Shewhart type control charts for monitoring the mean of a manufacturing process gives signal of an out of control process (shift of the mean) when a plotted point falls outside the area specified by the lower (LCL) and upper (UCL) control limit of chart. It is well known that Shewhart type control charts are not sensitive in detecting small shifts of the process mean. The sensitization of the chart to detect small shifts of the process mean is usually achieved by the use of warning limits (internal of LCL and UCL) and the adoption of stopping rules related with the appearance of special patterns of plotted points in the chart. The appearance of a special pattern of points gives signal of an out of control process. Such rules were introduced and applied for the first time in 1956 by the *Western Electric Company*.

The main purpose of the dissertation is the development and the study of the effect of stopping rules that are related to run statistics in the Shewhart type control charts.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Abstract

Κατάλογος Σχημάτων xvii

Κατάλογος Συντομογραφιών xix

1. Εισαγωγή 1

1.1 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart 1

1.2 Διάγραμμα ελέγχου Shewhart για τη μέση τιμή ενός συνεχούς
χαρακτηριστικού 4

1.3 Μέσο μήκος ροής στα διαγράμματα ελέγχου 7

1.4 Κανόνες ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart 9

1.5 Ανάλυση του χρόνου αναμονής ενός σχηματισμού 11

1.5.1 Η περίπτωση του απλού σχηματισμού 12

1.5.2 Η περίπτωση του σύνθετου σχηματισμού 15

1.6 Υπολογισμός του μέσου μήκους ροής στα διαγράμματα ελέγχου
Shewhart υπό την παρουσία κανόνων ευαισθητοποίησης 16

1.6.1 Μελέτη του σύνθετου κανόνα C_{12} 18

1.6.2 Μελέτη του σύνθετου κανόνα C_{15} 23

**2. Κανόνες ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart που
βασίζονται σε ροές** 28

2.1 Εισαγωγή 28

2.2 Μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου Shewhart τύπου k . 30

2.3 Μελέτη του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k . 35

2.3.1 Μελέτη του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k με
 $ARL_k(0) = 161.04$ για $k = 1(1)5$. 36

2.3.2 Μελέτη του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k με 46

	$ARL_k(0) = 740.8$ για $k = 1(1)5$.	
2.3.3	Μελέτη του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k με $ARL_k(0) = 4298.7$ για $k = 1(1)5$.	55
2.4	Δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) .	64
2.5	Μελέτη του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) .	70
2.5.1	Μελέτη του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) με $ARL_{k,k}(0) = 80.52$ για $k = 1(1)5$.	71
2.5.2	Μελέτη του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) με $ARL_{k,k}(0) = 370.4$ για $k = 1(1)5$.	81
2.5.3	Μελέτη του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) με $ARL_{k,k}(0) = 2149.34$ για $k = 1(1)5$.	90
2.6	Αξιολόγηση των δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) .	99
3.	Κανόνες ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart που βασίζονται σε σχηματισμούς τύπου $2/r$	107
3.1	Εισαγωγή	107
3.2	Δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$	107
3.3	Μελέτη του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$	113
3.3.1	Μελέτη του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ με $ARL_{2/r} = 80.52$ για $r = 3, 4, 5$.	114
3.3.2	Μελέτη του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ με $ARL_{2/r} = 370.4$ για $r = 3, 4, 5$.	121
3.3.3	Μελέτη του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ με $ARL_{2/r} = 2149.34$ για $r = 3, 4, 5$.	128
3.4	Αξιολόγηση των δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$	135
3.4.1	Αξιολόγηση των δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart	136

τύπου $2/r$ με εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r} = 80.52$	
3.4.2 Αξιολόγηση των δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart	139
τύπου $2/r$ με εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r} = 370.4$	
3.4.3 Αξιολόγηση των δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart	141
τύπου $2/r$ με εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r} = 2149.34$	
Παραρτήματα	145
Προγράμματα <i>MATHEMATICA</i>	145
Βιβλιογραφία	173

Κατάλογος Πινάκων

1.1	Δεδομένα για την επίδειξη ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart	4
1.2	Επιπρόσθετα δεδομένα	6
1.3	Μέσο μήκος ροής για διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart με χρήση κανόνων ευαισθητοποίησης	17
1.4	Μέση τιμή και διακύμανση του μήκους ροής T για τον κανόνα C_{12}	21
1.5	Ποσοστιαία σημεία και $ARL(\delta)$ του μήκους ροής $T(\delta)$ για τον κανόνα C_{12}	21
1.6	Μέση τιμή και διακύμανση του μήκους ροής T για τον κανόνα C_{15}	25
1.7	Ποσοστιαία σημεία και $ARL(\delta)$ του μήκους ροής $T(\delta)$ για τον κανόνα C_{15}	25
2.1	Μέσο μήκος ροής $ARL_k(\delta)$ για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου k για $k = 1(1)5$ με $ARL_k(0) = 161.04$	37
2.2	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 1 με $ARL_k(0) = 161.04$	44
2.3	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 2 με $ARL_k(0) = 161.04$	44
2.4	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 3 με $ARL_k(0) = 161.04$	45
2.5	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 4 με $ARL_k(0) = 161.04$	45
2.6	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το άνω διάγραμμα	45

	ελέγχου Shewhart τύπου 5 με $ARL_k(0) = 161.04$	
2.7	Μέσο μήκος ροής $ARL_k(\delta)$ για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου k για $k = 1(1)5$ με $ARL_k(0) = 740.8$	46
2.8	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 1 με $ARL_k(0) = 740.8$	53
2.9	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 2 με $ARL_k(0) = 740.8$	53
2.10	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 3 με $ARL_k(0) = 740.8$	54
2.11	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 4 με $ARL_k(0) = 740.8$	54
2.12	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 5 με $ARL_k(0) = 740.8$	54
2.13	Μέσο μήκος ροής $ARL_k(\delta)$ για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου k για $k = 1(1)5$ με $ARL_k(0) = 4298.7$	55
2.14	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 1 με $ARL_k(0) = 4298.7$	62
2.15	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 2 με $ARL_k(0) = 4298.7$	62
2.16	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 3 με $ARL_k(0) = 4298.7$	63
2.17	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 4 με $ARL_k(0) = 4298.7$	63
2.18	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 5 με $ARL_k(0) = 4298.7$	63
2.19	Μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}(\delta)$ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου	72

	Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ με $ARL_{k,k}(0) = 80.52$	
2.20	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $(1, 1)$ με $ARL_{k,k}(0) = 80.52$	79
2.21	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $(2, 2)$ με $ARL_{k,k}(0) = 80.52$	79
2.22	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $(3, 3)$ με $ARL_{k,k}(0) = 80.52$	80
2.23	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $(4, 4)$ με $ARL_{k,k}(0) = 80.52$	80
2.24	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $(5, 5)$ με $ARL_{k,k}(0) = 80.52$	80
2.25	Μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}(\delta)$ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ με $ARL_{k,k}(0) = 370.4$	83
2.26	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $(1, 1)$ με $ARL_{k,k}(0) = 370.4$	88
2.27	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $(2, 2)$ με $ARL_{k,k}(0) = 370.4$	88
2.28	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $(3, 3)$ με $ARL_{k,k}(0) = 370.4$	89
2.29	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $(4, 4)$ με $ARL_{k,k}(0) = 370.4$	89
2.30	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $(5, 5)$ με $ARL_{k,k}(0) = 370.4$	89
2.31	Μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}(\delta)$ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ με	90

	$ARL_{k,k}(0) = 2149.34$	
2.32	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (1,1) με $ARL_{k,k}(0) = 2149.34$	97
2.33	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (2,2) με $ARL_{k,k}(0) = 2149.34$	97
2.34	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (3,3) με $ARL_{k,k}(0) = 2149.34$	98
2.35	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (4,4) με $ARL_{k,k}(0) = 2149.34$	98
2.36	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (5,5) με $ARL_{k,k}(0) = 2149.34$	98
2.37	Μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}(\delta)$ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ με $ARL_{k,k}(0) = 225.44$	100
2.38	Μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}(\delta)$ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ με $ARL_{k,k}(0) = 278.03$	102
2.39	Μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}(\delta)$ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ με $ARL_{k,k}(0) = 91.75$	104
2.40	Μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}(\delta)$ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ με $ARL_{k,k}(0) = 133.21$	105
3.1	Μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r}(\delta)$ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ για $r = 3, 4, 5$ με $ARL_{2/r}(0) = 80.52$	115

3.2	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/3$ με $ARL_{2/3}(0) = 80.52$	120
3.3	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/4$ με $ARL_{2/4}(0) = 80.52$	120
3.4	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/5$ με $ARL_{2/5}(0) = 80.52$	121
3.5	Μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r}(\delta)$ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ για $r = 3, 4, 5$ με $ARL_{2/r}(0) = 370.4$	122
3.6	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/3$ με $ARL_{2/3}(0) = 370.4$	127
3.7	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/4$ με $ARL_{2/4}(0) = 370.4$	127
3.8	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/5$ με $ARL_{2/5}(0) = 370.4$	128
3.9	Μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r}(\delta)$ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ για $r = 3, 4, 5$ με $ARL_{2/r}(0) = 2149.34$	129
3.10	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/3$ με $ARL_{2/3}(0) = 2149.34$	134
3.11	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/4$ με $ARL_{2/4}(0) = 2149.34$	134
3.12	Τιμές για τις ποσότητες Q_1, M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/5$ με $ARL_{2/5}(0) = 2149.34$	135
3.13	Μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r}(\delta)$, $ARL_{k,k}(\delta)$ για $r = 3, 4, 5$ και $k = 1(1)5$ με $ARL_{in} = 80.52$	136
3.14	Μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r}(\delta)$, $ARL_{k,k}(\delta)$ για $r = 3, 4, 5$ και	139

$k = 1(1)5$ με $ARL_{in} = 370.4$

3.15 Μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r}(\delta)$, $ARL_{k,k}(\delta)$ για $r = 3, 4, 5$ και

142

$k = 1(1)5$ με $ARL_{in} = 2149.34$

Κατάλογος Διαγραμμάτων

1.1	Τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart	2
1.2	Διάγραμμα ελέγχου Shewhart για τα δεδομένα του Πίνακα 1.1	5
1.3	Διάγραμμα ελέγχου Shewhart για τα δεδομένα των Πινάκων 1.1, 1.2	6
1.4	Γραφική παράσταση του μέσου μήκους ροής ARL ($W \sim N(10, (0.25)^2/2)$)	9
1.5	Διάγραμμα ελέγχου Shewhart και προειδοποιητικά όρια	10
1.6	Ζώνες του διαγράμματος ελέγχου Shewhart για τον κανόνα C_{12}	19
1.7	Συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής $T(\delta)$ για τον κανόνα C_{12} για $\delta = 0$	22
1.8	Συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής $T(\delta)$ για τον κανόνα C_{12} για $\delta = 0.5$	22
1.9	Συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής $T(\delta)$ για τον κανόνα C_{12} για $\delta = 1.0$	22
1.10	Συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής $T(\delta)$ για τον κανόνα C_{12} για $\delta = 2.0$	22
1.11	Ζώνες του διαγράμματος ελέγχου Shewhart για τον κανόνα C_{15}	23
1.12	Συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής $T(\delta)$ για τον κανόνα C_{15} για $\delta = 0$	26
1.13	Συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής $T(\delta)$ για τον κανόνα C_{15} για $\delta = 0.5$	26
1.14	Συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής $T(\delta)$ για τον κανόνα C_{15} για $\delta = 1.0$	26
1.15	Συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής $T(\delta)$ για τον κανόνα C_{15} για $\delta = 2.0$	26
2.1	Γραφική παράσταση του $I_k(\delta)$ για $k = 2(1)5$ με $ARL_m = 161.04$	38

2.2	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(0)$	39
2.3	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(0.5)$	39
2.4	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(1)$	39
2.5	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(2)$	39
2.6	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(0)$	40
2.7	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(0.5)$	40
2.8	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(1)$	40
2.9	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(2)$	40
2.10	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(0)$	41
2.11	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(0.5)$	41
2.12	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(1)$	41
2.13	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(2)$	41
2.14	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(0)$	42
2.15	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(0.5)$	42
2.16	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(1)$	42
2.17	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(2)$	42
2.18	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(0)$	43
2.19	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(0.5)$	43
2.20	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(1)$	43
2.21	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(2)$	43
2.22	Γραφική παράσταση του $I_k(\delta)$ για $k = 2(1)5$ με $ARL_m = 740.8$	47
2.23	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(0)$	48
2.24	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(0.5)$	48
2.25	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(1)$	48
2.26	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(2)$	48
2.27	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(0)$	49
2.28	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(0.5)$	49

2.29	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(1)$	49
2.30	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(2)$	49
2.31	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(0)$	50
2.32	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(0.5)$	50
2.33	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(1)$	50
2.34	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(2)$	50
2.35	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(0)$	51
2.36	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(0.5)$	51
2.37	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(1)$	51
2.38	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(2)$	51
2.39	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(0)$	52
2.40	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(0.5)$	52
2.41	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(1)$	52
2.42	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(2)$	52
2.43	Γραφική παράσταση του $I_k(\delta)$ για $k = 2(1)5$ με $ARL_m = 4298.7$	56
2.44	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(0)$	57
2.45	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(0.5)$	57
2.46	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(1)$	57
2.47	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(2)$	57
2.48	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(0)$	58
2.49	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(0.5)$	58
2.50	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(1)$	58
2.51	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(2)$	58
2.52	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(0)$	59
2.53	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(0.5)$	59
2.54	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(1)$	59
2.55	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(2)$	59

2.56	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(0)$	60
2.57	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(0.5)$	60
2.58	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(1)$	60
2.59	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(2)$	60
2.60	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(0)$	61
2.61	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(0.5)$	61
2.62	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(1)$	61
2.63	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(2)$	61
2.64	Γραφική παράσταση του $I_{k,k}(\delta)$ για $k = 2(1)5$ με $ARL_{in} = 80.52$	73
2.65	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(0)$	74
2.66	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(0.5)$	74
2.67	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(1)$	74
2.68	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(2)$	74
2.69	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(0)$	75
2.70	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(0.5)$	75
2.71	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(1)$	75
2.72	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(2)$	75
2.73	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(0)$	76
2.74	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(0.5)$	76
2.75	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(1)$	76
2.76	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(2)$	76
2.77	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(0)$	77
2.78	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(0.5)$	77

2.79	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(1)$	77
2.80	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(2)$	77
2.81	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(0)$	78
2.82	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(0.5)$	78
2.83	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(1)$	78
2.84	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(2)$	78
2.85	Γραφική παράσταση του $I_{k,k}(\delta)$ για $k = 2(1)5$ με $ARL_{in} = 370.4$	82
2.86	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(0)$	83
2.87	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(0.5)$	83
2.88	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(1)$	83
2.89	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(2)$	83
2.90	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(0)$	84
2.91	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(0.5)$	84
2.92	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(1)$	84
2.93	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(2)$	84
2.94	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(0)$	85
2.95	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(0.5)$	85
2.96	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(1)$	85
2.97	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(2)$	85
2.98	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(0)$	86
2.99	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(0.5)$	86

2.100	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(1)$	86
2.101	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(2)$	86
2.102	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(0)$	87
2.103	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(0.5)$	87
2.104	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(1)$	87
2.105	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(2)$	87
2.106	Γραφική παράσταση του $I_{k,k}(\delta)$ για $k = 2(1)5$ με $ARL_{in} = 2149.34$	91
2.107	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(0)$	92
2.108	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(0.5)$	92
2.109	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(1)$	92
2.110	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(2)$	92
2.111	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(0)$	93
2.112	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(0.5)$	93
2.113	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(1)$	93
2.114	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(2)$	93
2.115	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(0)$	94
2.116	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(0.5)$	94
2.117	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(1)$	94
2.118	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(2)$	94
2.119	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(0)$	95
2.120	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(0.5)$	95

2.121	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(1)$	95
2.122	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(2)$	95
2.123	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(0)$	96
2.124	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(0.5)$	96
2.125	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(1)$	96
2.126	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(2)$	96
2.127	Γραφική παράσταση του $I_{k,k}^{12}(\delta)$ για $k = 2(1)5$ με $ARL_{in} = 225.44$	101
2.128	Γραφική παράσταση του $I_{k,k}^{15}(\delta)$ για $k = 2(1)5$ με $ARL_{in} = 278.03$	103
2.129	Γραφική παράσταση του $I_{k,k}^{1234}(\delta)$ για $k = 1(1)5$ με $ARL_{in} = 91.75$	104
2.130	Γραφική παράσταση του $I_{k,k}^{1456}(\delta)$ για $k = 1(1)5$ με $ARL_{in} = 133.21$	105
3.1	Γραφική παράσταση του $I_{2/r}(\delta)$ για $r = 3(1)5$ με $ARL_{in} = 80.52$	116
3.2	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(0)$	117
3.3	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(0.5)$	117
3.4	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(1)$	117
3.5	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(2)$	117
3.6	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(0)$	118
3.7	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(0.5)$	118
3.8	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(1)$	118
3.9	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(2)$	118
3.10	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(0)$	119
3.11	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(0.5)$	119
3.12	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(1)$	119
3.13	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(2)$	119

3.14	Γραφική παράσταση του $I_{2/r}(\delta)$ για $r = 3(1)5$ με $ARL_{in} = 370.4$	123
3.15	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(0)$	124
3.16	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(0.5)$	124
3.17	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(1)$	124
3.18	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(2)$	124
3.19	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(0)$	125
3.20	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(0.5)$	125
3.21	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(1)$	125
3.22	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(2)$	125
3.23	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(0)$	126
3.24	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(0.5)$	126
3.25	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(1)$	126
3.26	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(2)$	126
3.27	Γραφική παράσταση του $I_{2/r}(\delta)$ για $r = 3(1)5$ με $ARL_{in} = 2149.34$	130
3.28	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(0)$	131
3.29	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(0.5)$	131
3.30	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(1)$	131
3.31	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(2)$	131
3.32	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(0)$	132
3.33	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(0.5)$	132
3.34	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(1)$	132
3.35	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(2)$	132

3.36	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(0)$	133
3.37	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(0.5)$	133
3.38	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(1)$	133
3.39	Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(2)$	133
3.40	Γραφική παράσταση του $I_{k;3}(\delta)$ για $k = 1(1)5$ με $ARL_{in} = 80.52$	137
3.41	Γραφική παράσταση του $I_{k;4}(\delta)$ για $k = 1(1)5$ με $ARL_{in} = 80.52$	138
3.42	Γραφική παράσταση του $I_{k;5}(\delta)$ για $k = 1(1)5$ με $ARL_{in} = 80.52$	138
3.43	Γραφική παράσταση του $I_{k;3}(\delta)$ για $k = 1(1)5$ με $ARL_{in} = 370.4$	140
3.44	Γραφική παράσταση του $I_{k;4}(\delta)$ για $k = 1(1)5$ με $ARL_{in} = 370.4$	140
3.45	Γραφική παράσταση του $I_{k;5}(\delta)$ για $k = 1(1)5$ με $ARL_{in} = 370.4$	141
3.46	Γραφική παράσταση του $I_{k;3}(\delta)$ για $k = 1(1)5$ με $ARL_{in} = 2149.34$	143
3.47	Γραφική παράσταση του $I_{k;4}(\delta)$ για $k = 1(1)5$ με $ARL_{in} = 2149.34$	143
3.48	Γραφική παράσταση του $I_{k;5}(\delta)$ για $k = 1(1)5$ με $ARL_{in} = 2149.34$	144

Κατάλογος Συντομογραφιών

CL	(Center Line) Κεντρική γραμμή
UCL	(Upper Control Limit) Άνω όριο ελέγχου
LCL	(Lower Control Limit) Κάτω όριο ελέγχου
ARL	(Average Run Length) Μέσο μήκος ροής
ARL_{in}	(In Control Average Run Length) Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής
ARL_{out}	(Out of Control Average Run Length) Εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής
Q_1	1 ^ο Τεταρτημόριο
M	Διάμεσος
Q_3	3 ^ο Τεταρτημόριο
ARL_k	Μέσο μήκος ροής άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k
T_k	Μήκος ροής άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k
$ARL_{k,k}$	Μέσο μήκος ροής δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k)
$T_{k,k}$	Μήκος ροής δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k)
$ARL_{2/r}$	Μέσο μήκος ροής δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$
$T_{2/r}$	Μήκος ροής δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

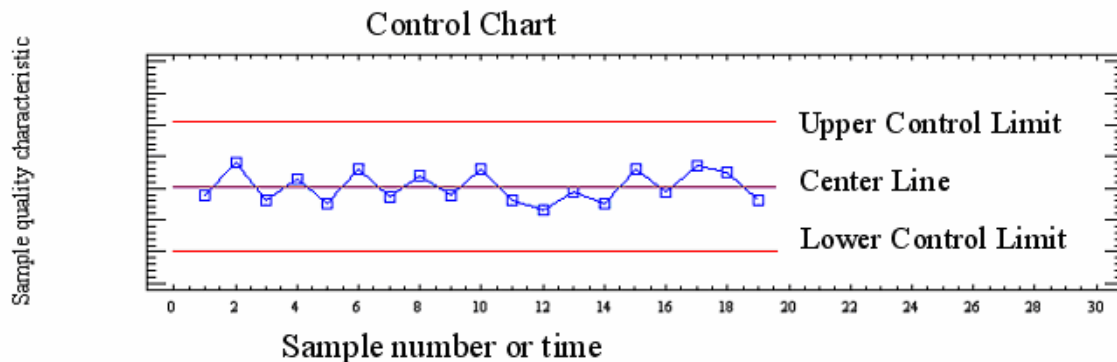
Διαγράμματα ελέγχου Shewhart

1.1 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart

Στις παραγωγικές διεργασίες μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της συμπεριφοράς μιας κρίσιμης ποσότητας ενός (μετρήσιμου) χαρακτηριστικού X (τυχαία μεταβλητή) των προϊόντων που παράγονται (για παράδειγμα το χαρακτηριστικό X μπορεί να είναι μήκος, βάρος, όγκος προϊόντων). Η διαδικασία παρακολούθησης της κρίσιμης ποσότητας βασίζεται σε μετρήσεις του χαρακτηριστικού X (τυχαία μεταβλητή), όπως προκύπτουν από την επιλογή τυχαίων δειγμάτων προϊόντων από την παραγωγή σε διαφορετικές χρονικές στιγμές στα οποία αντιστοιχούν τυχαία δείγματα τιμών του χαρακτηριστικού X , έστω τα $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$. Χρησιμοποιώντας τα τυχαία δείγματα $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ υπολογίζουμε την τιμή $W_t = g(\mathbf{X}_t)$, $t = 1, 2, \dots$, μιας κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης (τυχαίας μεταβλητής) που εκτιμά (συνήθως αμερόληπτη εκτιμήτρια) την κρίσιμη ποσότητα που μας ενδιαφέρει (π.χ. μέση τιμή ή διακύμανση της X). Έτσι η (διαχρονική) παρακολούθηση της συμπεριφοράς της κρίσιμης ποσότητας επιτυγχάνεται με την παρακολούθηση των τιμών που λαμβάνει η στατιστική συνάρτηση W στα διάφορα δείγματα.

Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά της μέσης τιμής της διαμέτρου X των κυλίνδρων που παράγει μια μηχανή. Για το σκοπό αυτό επιλέγονται τυχαία δείγματα μεγέθους n ($n \geq 1$) κυλίνδρων από την παραγωγή της μηχανής σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη στατιστική συνάρτηση $W_t = g(\mathbf{X}_t) = (X_{t1} + X_{t2} + \dots + X_{tn})/n$ (η οποία είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του μέσου της X) για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της μέσης τιμής.

Ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart είναι μια γραφική παράσταση με την ακόλουθη μορφή



Διάγραμμα 1.1: Τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart

όπου στο Διάγραμμα 1.1, εκτός από τις παρατηρούμενες τιμές W_i , που έχουν απεικονιστεί με σημεία (τετραγωνάκια) τα οποία έχουν συνδεθεί με μια τεθλασμένη γραμμή, έχουν σχεδιαστεί και άλλες τρεις γραμμές. Η κεντρική γραμμή (*center line, CL*) ή μέσο επίπεδο της διεργασίας παριστάνει συνήθως τη μέση τιμή (*mean value*) της W όπως προκύπτει από τη λειτουργία μιας εντός (στατιστικού) ελέγχου διεργασίας, δηλαδή μιας διεργασίας που λειτουργεί μόνο με την παρουσία φυσικής μεταβλητότητας (*chance causes of variation*). Οι δύο άλλες γραμμές που εμφανίζονται στο παραπάνω διάγραμμα ονομάζονται άνω και κάτω όριο ελέγχου του διαγράμματος (*upper and lower control limit, UCL and LCL*). Όσο οι τιμές της W βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου και η συμπεριφορά τους είναι “τυχαία” μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου και δεν χρειάζεται να προβούμε σε κάποια διορθωτική ενέργεια. Αν όμως κάποιο σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου λέμε ότι υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου και πρέπει να προχωρήσουμε σε έρευνα για να ανακαλύψουμε τις ειδικές αιτίες μεταβλητότητας (*assignable causes of variation*) που είναι υπεύθυνες για αυτή τη συμπεριφορά και αν κριθεί απαραίτητο να προβούμε σε διορθωτικές ενέργειες. Ωστόσο, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ακόμη και στην περίπτωση που όλα τα σημεία του διαγράμματος βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου αλλά συμπεριφέρονται με ένα συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο τότε και αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Ως (ακραίο) παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε την περίπτωση όπου όλα τα σημεία στο Διάγραμμα 1.1 βρίσκονται μεταξύ την κεντρικής γραμμής και του κάτω ορίου ελέγχου.

Στο ακόλουθο πλαίσιο δίνεται ένα γενικό μοντέλο, το μοντέλο ορίων σίγμα (*sigma limits model*), για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart

Μοντέλο ορίων σίγμα	
UCL	$= \mu_W + L\sigma_W$
$Center\ Line$	$= \mu_W$
LCL	$= \mu_W - L\sigma_W$

Οι ποσότητες μ_W και σ_W δηλώνουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης W που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου (συνήθως γίνεται η υπόθεση ότι ακολουθεί κανονική κατανομή). Η ποσότητα L δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Συνήθως $L = 3$, οπότε ομιλούμε για διαγράμματα ελέγχου Shewhart με 3σ όρια ελέγχου.

Εκτός από το μοντέλο ορίων σίγμα για την κατασκευή διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, υπάρχει και το μοντέλο ορίων πιθανότητας (*probability limits model*) που παρουσιάζεται στο ακόλουθο πλαίσιο (μοντέλο ορίων πιθανότητας $a/2$) για κανονική ή προσεγγιστικά κανονική κατανομή της W

Μοντέλο ορίων πιθανότητας $a/2$	
UCL	$= \mu_W + z_{a/2}\sigma_W$
$Center\ Line$	$= \mu_W$
LCL	$= \mu_W - z_{a/2}\sigma_W$

Στις ΗΠΑ χρησιμοποιούνται αποκλειστικά τα 3σ όρια ελέγχου ενώ στη Μεγάλη Βρετανία και σε άλλες Δυτικές χώρες χρησιμοποιούνται όρια με πιθανότητα 0.001 ($a/2 = 0.001$). Στις παρούσες σημειώσεις θα χρησιμοποιήσουμε αποκλειστικά 3σ όρια.

Τα δύο μοντέλα κατασκευής διαγραμμάτων ελέγχου που μόλις περιγράψαμε αποτελούν μοντέλα κατασκευής δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου αφού υπάρχει και άνω και κάτω όριο ελέγχου. Στη βιβλιογραφία αναφέρονται και τα μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου στα οποία απουσιάζει είτε το άνω είτε το κάτω όριο ελέγχου.

Στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart διακρίνουμε δύο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με το αν το χαρακτηριστικό X είναι συνεχής ή διακριτή τυχαία μεταβλητή. Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 , τότε υπάρχουν διαγράμματα ελέγχου

Shewhart για την παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διασποράς της X . Στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή υπάρχουν διαγράμματα ελέγχου Shewhart για την παρακολούθηση του ποσοστού (και του αριθμού) των ελαττωματικών προϊόντων που αποδίδει η παραγωγική διεργασία, καθώς επίσης και για τον αριθμό (και το μέσο αριθμό) των ελαττωμάτων (ατελειών) σε μια μονάδα ελέγχου (για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε Αντζουλάκος (2003), Δαμιανού (1996), Καφφές (1996)).

Το πιο απλό και πλέον διαδεδομένο διάγραμμα ελέγχου Shewhart είναι το διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής ενός συνεχούς χαρακτηριστικού X , το οποίο θα αναπτύξουμε εν συντομία στην επόμενη παράγραφο μέσω ενός παραδείγματος.

1.2 Διάγραμμα ελέγχου Shewhart για τη μέση τιμή ενός συνεχούς χαρακτηριστικού

Στον Πίνακα 1.1 παρουσιάζονται μετρήσεις μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X που δηλώνει την εσωτερική διάμετρο κυλινδρικών εμβόλων όπως προέκυψαν από την επιλογή δέκα τυχαίων δειγμάτων μεγέθους δύο από την παραγωγή ενός εργοστασίου. Έστω ότι, υπό συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας (εντός ελέγχου διεργασία), η κατανομή της X είναι κανονική κατανομή με $\mu = 10$ και $\sigma = 0.25$, και ότι ενδιαφερόμαστε να παρακολουθήσουμε τη διαχρονική συμπεριφορά της μέσης τιμής μ της X .

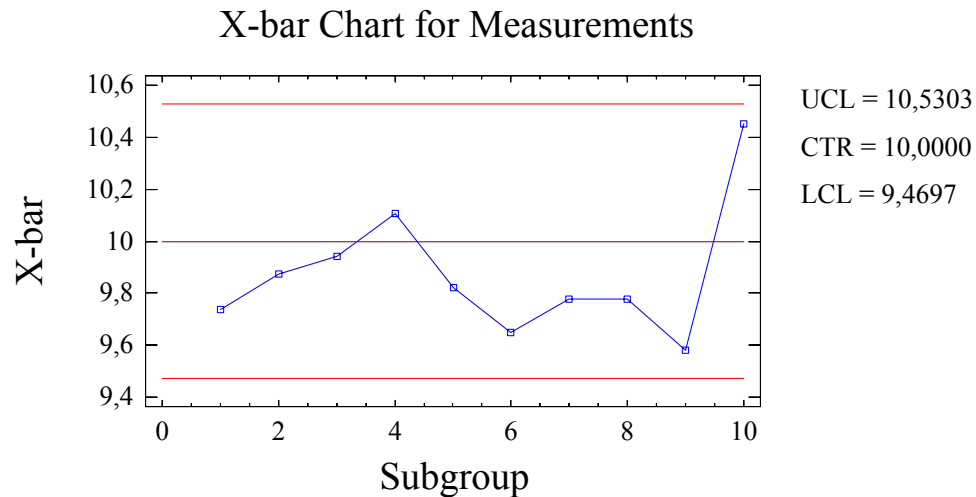
Πίνακας 1.1: Δεδομένα για την επίδειξη ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart

Δείγμα	Πρώτη μέτρηση	Δεύτερη μέτρηση	Μέση τιμή
1	9.84422	9.62656	9.73539
2	9.80879	9.93767	9.87323
3	10.50880	9.37680	9.94280
4	9.94629	10.2645	10.10540
5	9.55296	10.09280	9.82288
6	9.58023	9.71789	9.64906
7	9.40171	10.15210	9.77691
8	9.59285	9.95854	9.77570
9	9.54142	9.62176	9.58159
10	10.66530	10.23660	10.45095

Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση της μέσης τιμής μ της διεργασίας σε κάθε δείγμα το δειγματικό μέσο του αντίστοιχου δείγματος $W_t = \bar{X}_t = (X_{t1} + X_{t2})/2$, έχουμε ότι

$$W_t = \bar{X}_t \sim N(\mu_{\bar{X}_t}, \sigma_{\bar{X}_t}^2), \quad \mu_{W_t} = \mu_{\bar{X}_t} = \mu = 10, \quad \sigma_{W_t}^2 = \sigma_{\bar{X}_t}^2 = \sigma^2/2 = 0.03125, \quad 1 \leq t \leq 10,$$

Κατασκευάζοντας ένα διάγραμμα ελέγχου Shewhart με 3σ όρια ελέγχου όπου απεικονίζονται τα σημεία (t, W_t) , έχουμε ότι $CL = \mu_w = 10$, $UCL = \mu_w + 3\sigma_w = 10.5303$, και $LCL = \mu_w - 3\sigma_w = 9.4697$. Το διάγραμμα ελέγχου είναι το ακόλουθο



Διάγραμμα 1.2: Διάγραμμα ελέγχου Shewhart για τα δεδομένα του Πίνακα 1.1

Εφόσον όλα τα σημεία του διαγράμματος βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ο μέσος δεν έχει αλλάξει (μετατοπιστεί) και επομένως η παραγωγική διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου.

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί μια σειρά από ελέγχους υποθέσεων (10 το πλήθος) που αφορούν τη μέση τιμή ενός κανονικού πληθυσμού. Πράγματι, αν X_1, X_2, \dots, X_n είναι ένα τυχαίο δείγμα από ένα πληθυσμό που περιγράφεται από μια κανονική κατανομή τότε για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : \mu = \mu_0 - H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad (\sigma \text{ γνωστό})$$

σε επίπεδο σημαντικότητας α , η περιοχή απόρριψης K (κρίσιμη περιοχή) της μηδενικής υπόθεσης είναι η

$$K : \bar{X} > \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{ή} \quad \bar{X} < \mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Επιλέγοντας $z_{\alpha/2} = 3$, δηλαδή $\alpha = 0.0027$, για το παράδειγμά μας ($\mu_0 = 10$, $\sigma = 0.25$, $n = 2$) έχουμε ότι

$$K : \bar{X} > 10.5303 \quad \text{ή} \quad \bar{X} < 9.4697$$

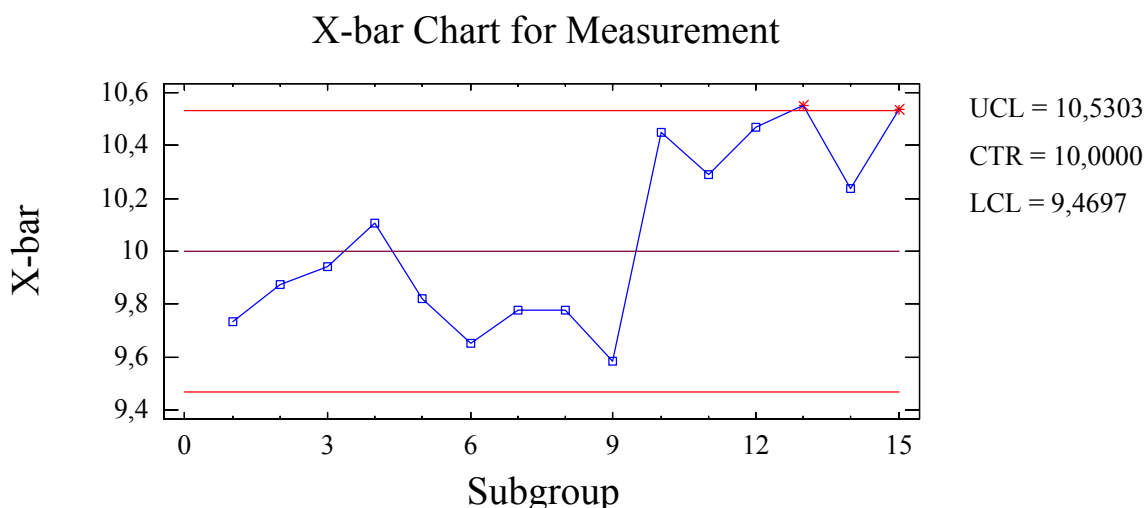
και επομένως τα όρια του διαγράμματος ελέγχου συμπίπτουν με τις δύο τιμές που καθορίζουν την κρίσιμη περιοχή K . Εφόσον τα σημεία $W_i = \bar{X}_i = (X_{i1} + X_{i2})/2$ βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου αυτό σημαίνει ότι σε κάθε έλεγχο (ένας για κάθε δείγμα) η τιμή της \bar{X} δεν βρίσκεται στην κρίσιμη περιοχή και συνεπώς δεν μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.0027$.

Στη συνέχεια επιλέξαμε άλλα 5 δείγματα από την παραγωγική διαδικασία (σε μεταγενέστερες χρονικές στιγμές) η οποία όμως λόγω κάποιας εσφαλμένης ρύθμισης της μηχανής που παράγει τα έμβολα (εμφάνιση ειδικής μεταβλητότητας) παράγει κυλίνδρους με $\mu = 10.5$ και $\sigma = 0.25$. Τα επιπρόσθετα δεδομένα παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα

Πίνακας 1.2: Επιπρόσθετα δεδομένα

Δείγμα	Πρώτη μέτρηση	Δεύτερη μέτρηση	Μέση τιμή
11	10.2548	10.3272	10.291
12	10.29200	10.65150	10.47175
13	10.60560	10.50070	10.55315
14	10.16910	10.30080	10.23495
15	10.51150	10.56130	10.5364

Το διάγραμμα ελέγχου είναι το ακόλουθο



Διάγραμμα 1.3: Διάγραμμα ελέγχου Shewhart για τα δεδομένα των Πινάκων 1.1, 1.2

Από το παραπάνω διάγραμμα προκύπτει καθαρά ότι έχουμε ενδείξεις που δηλώνουν ότι ο μέσος της διεργασίας έχει μετατοπιστεί σε υψηλότερο επίπεδο και επομένως θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου.

1.3 Μέσο μήκος ροής στα διαγράμματα ελέγχου

Μια βασική έννοια που σχετίζεται με τα διαγράμματα ελέγχου είναι το μέσο μήκος ροής ARL (*average run length*) του διαγράμματος. Η τυχαία μεταβλητή T που δηλώνει το πλήθος των σημείων που πρέπει να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου έως ότου πάρουμε ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου ονομάζεται μήκος ροής (*run length*) του διαγράμματος. Το μέσο μήκος ροής ARL ορίζεται ως ο αναμενόμενος αριθμός των σημείων που πρέπει να σχεδιαστούν στο διάγραμμα έως ότου λάβουμε για πρώτη φορά ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, δηλαδή $ARL = E(T)$.

Στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart με απεικονιζόμενη ποσότητα τη W η οποία έχει εντός ελέγχου μέσο μ , τυπική απόκλιση σ και συνάρτηση κατανομής $F_{in}(\cdot)$, έχουμε ότι η πιθανότητα p_{in} εμφάνισης ενός σημείου του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου είναι ίση με

$$p_{in} = 1 - P(LCL \leq W \leq UCL) = 1 - F_{in}(\mu + L\sigma) + F_{in}(-(\mu - L\sigma))$$

και το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι ίσο με

$$ARL_{in} = \frac{1}{p_{in}}$$

αφού το μήκος ροής T ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p_{in} . Φυσικά για μια διεργασία που βρίσκεται εντός ελέγχου θέλουμε να έχουμε μεγάλη τιμή για το ARL_{in} έτσι ώστε να μειωθεί ο αριθμός των λανθασμένων ενδείξεων εκτός ελέγχου διεργασίας ή αλλιώς ο αριθμός των λανθασμένων συναγερμών (*false alarms*).

Για μια εκτός ελέγχου διεργασία, όπου η συνάρτηση κατανομή της τυχαίας μεταβλητής W είναι η $F_{out}(\cdot)$, έχουμε ότι η πιθανότητα p_{out} εμφάνισης ενός σημείου εκτός των ορίων ελέγχου του διαγράμματος είναι ίση με

$$p_{out} = 1 - P(LCL \leq W \leq UCL) = 1 - F_{out}(\mu + L\sigma) + F_{out}(-(\mu - L\sigma))$$

και το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι ίσο με

$$ARL_{out} = \frac{1}{p_{out}}.$$

Φυσικά για μια διεργασία που βρίσκεται εκτός ελέγχου θέλουμε να έχουμε μικρή τιμή για το ARL_{out} έτσι ώστε να μειωθεί ο αριθμός των δειγμάτων (και συνεπώς ο χρόνος) που απαιτούνται για να γίνει αντιληπτό ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου.

Αν για την τυχαία μεταβλητή W είναι γνωστό ότι $W \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε έχουμε ότι το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι ίσο με

$$ARL_{in} = \frac{1}{p_{in}} = \frac{1}{2\Phi(-L)}$$

αφού

$$\begin{aligned} p_{in} &= 1 - P(LCL \leq W \leq UCL \mid W \sim N(\mu, \sigma^2)) \\ &= 1 - P(\mu - L\sigma \leq W \leq \mu + L\sigma \mid W \sim N(\mu, \sigma^2)) \\ &= 1 - \Phi(L) + \Phi(-L) = 2\Phi(-L). \end{aligned}$$

Για $L = 3$ προκύπτει ότι

$$ARL_{in} \cong \frac{1}{0.0027} \cong 370.$$

Αν κατά τη διάρκεια της παραγωγικής διεργασίας η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής W μετατοπιστεί από τη θέση μ στη θέση $\mu^* = \mu + \delta\sigma$ (μετατόπιση εκφρασμένη σε μονάδες τυπικής απόκλισης) και η διακύμανσή της δεν αλλάξει έχουμε ότι

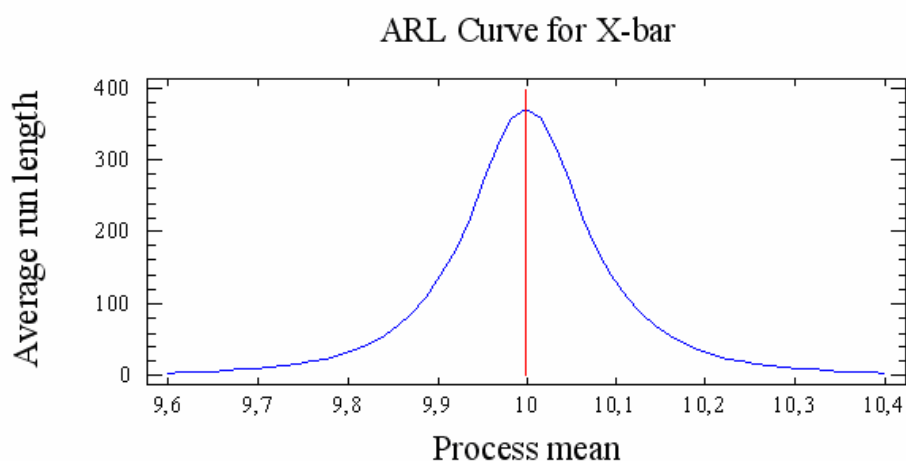
$$\begin{aligned} p_{out} &= 1 - P(LCL \leq W \leq UCL \mid W \sim N(\mu + \delta\sigma, \sigma^2)) \\ &= 1 - P(\mu - L\sigma \leq W \leq \mu + L\sigma \mid W \sim N(\mu + \delta\sigma, \sigma^2)) \\ &= 1 - \Phi(L - \delta) + \Phi(-L - \delta) = 1 - \Phi(L - \delta) - \Phi(-L - \delta) \end{aligned}$$

και

$$ARL_{out} = \frac{1}{p_{out}} = \frac{1}{2 - \Phi(L - \delta) - \Phi(L + \delta)}.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $ARL(\delta)$ για να δηλώσουμε το μέσο μήκος ροής ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart όταν ο μέσος της διεργασίας μετατοπιστεί από τη θέση μ στη θέση $\mu + \delta\sigma$. Φυσικά για $\delta = 0$ προκύπτει το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής. Επίσης με ανάλογο τρόπο γίνεται ο υπολογισμός του ARL στα μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου.

Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση του μέσου μήκους ροής ARL για το παράδειγμα που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο ($W \sim N(10, (0.25)^2/2)$) συναρτήσει της μετατόπισης του μέσου μ .

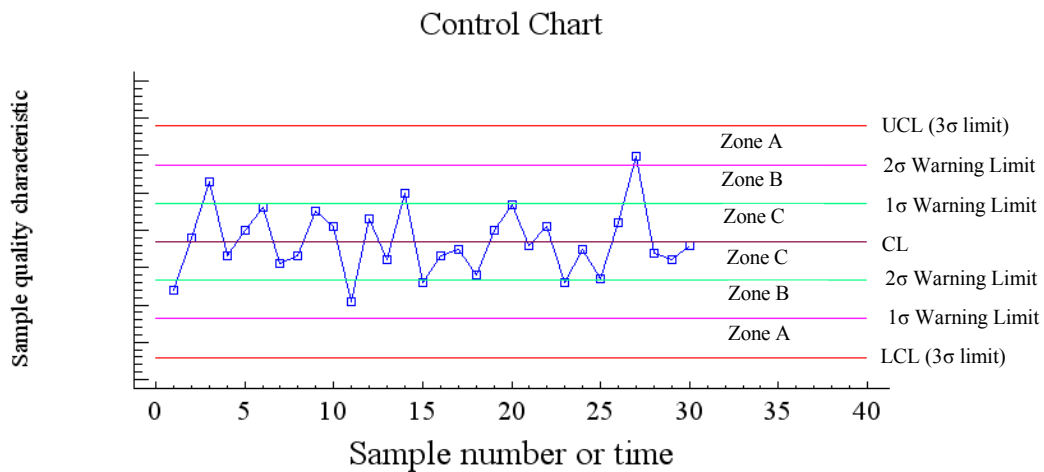


Διάγραμμα 1.4: Γραφική παράσταση του μέσου μήκους ροής ARL ($W \sim N(10, (0.25)^2 / 2)$)

Η χρήση του ARL ως μέτρου για την περιγραφή της απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου έχει υποστεί αρκετή κριτική τα τελευταία χρόνια γιατί το ARL που παρατηρείται στην πράξη διαφέρει συνήθως αρκετά από το “θεωρητικό” ARL (είτε είναι αρκετά μεγαλύτερο είτε είναι αρκετά μικρότερο). Αυτό συμβαίνει επειδή η κατανομή του μήκους ροής T είναι μια γεωμετρική κατανομή και συνεπώς η μέση τιμή της δεν μπορεί να θεωρηθεί ως αντιπροσωπευτικό μέτρο κεντρικής τάσης της κατανομής, ιδίως για μικρές τιμές του p , αφού σε αυτή την περίπτωση η διακύμανση της γεωμετρικής κατανομής γίνεται αρκετά μεγάλη. Έτσι κρίνεται αναγκαίο η μέση τιμή της T ($E(T) = ARL$) να συνοδεύεται από την διακύμανση της T ή ακόμα και από ποσοστιαία σημεία της.

1.4 Κανόνες ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart

Από μελέτες έχει διαπιστωθεί ότι για μικρές μετατοπίσεις του μέσου μ της W (έως και 1.5σ) το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL του διαγράμματος ελέγχου Shewhart δεν είναι ικανοποιητικό (είναι αρκετά μεγάλος αριθμός). Για να γίνει περισσότερο ευαίσθητο ένα διάγραμμα ελέγχου Shewhart με 3σ όρια ως προς την ικανότητά του να ανιχνεύει πιο γρήγορα εκτός ελέγχου διεργασίες, εκτός από τη σχεδίαση των ορίων ελέγχου, σχεδιάζουμε επίσης και προειδοποιητικά όρια εσωτερικά των ορίων ελέγχου όπως δείχνει το ακόλουθο διάγραμμα



Διάγραμμα 1.5: Διάγραμμα ελέγχου Shewhart και προειδοποιητικά όρια

Τα προειδοποιητικά όρια χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη κανόνων ευαισθητοποίησης (*sensitizing rules*) οι οποίοι περιγράφουν ενδεχόμενα που σχετίζονται με την εμφάνιση ειδικών ακολουθιών σημείων (*patterns*) σε ένα διάγραμμα ελέγχου. Στην περίπτωση που συμβεί το ενδεχόμενο που περιγράφει ο κανόνας, τότε θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου χωρίς απαραίτητα να έχουμε κάποιο σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου (*UCL* και *LCL*).

Οι σημαντικότεροι κανόνες που χρησιμοποιούνται για την ευαισθητοποίηση ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart είναι οι ακόλουθοι:

- Κανόνας 1. Ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου
- Κανόνας 2. Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία στην Ζώνη *A* (σε μια από τις δύο ζώνες *A*)
- Κανόνας 3. Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία πέραν της Ζώνης *C* (σε μια από τις δύο περιοχές)
- Κανόνας 4. Οκτώ συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (επάνω ή κάτω) της κεντρικής γραμμής
- Κανόνας 5. Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη
- Κανόνας 6. Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική Ζώνη *C*
- Κανόνας 7. Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή “πάνω-κάτω”
- Κανόνας 8. Οκτώ συνεχόμενα σημεία εκτός της ολικής Ζώνης *C*
- Κανόνας 9. Οποιαδήποτε ασυνήθιστη ή μη τυχαία ακολουθία σημείων

Κανόνας 10. Ένα ή περισσότερα σημεία κοντά στα προειδοποιητικά όρια ή τα όρια ελέγχου.

Οι πρώτοι τέσσερις κανόνες είναι γνωστοί ως *Western Electric rules*. Η χρήση πολλών κανόνων ταυτοχρόνως θα πρέπει να γίνεται με ιδιαίτερη προσοχή γιατί ένας μεγάλος αριθμός λανθασμένων συναγερμών συνεπάγεται και αντίστοιχο αριθμό λανθασμένων διακοπών της παραγωγικής διαδικασίας για την ανίχνευση ειδικών αιτιών μεταβλητότητας με αποτέλεσμα την αύξηση του κόστους παραγωγής.

Επίσης η χρήση πολλών κανόνων ταυτοχρόνως καθιστά εξαιρετικά δύσκολο τον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής *ARL* του διαγράμματος ελέγχου. Η πρώτη σημαντική εργασία που αντιμετώπισε το προαναφερθέν πρόβλημα με ένα ενοποιητικό τρόπο ήταν των Champ και Woodall (1987). Στην επόμενη παράγραφο θα αναπτύξουμε την αναγκαία θεωρία για τον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής *ARL* ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart υπό την παρουσία κανόνων ευαισθητοποίησης χρησιμοποιώντας μια παρόμοια προσέγγιση που βασίζεται σε πρόσφατες εργασίες των Fu (1996), Koutras (1997), και Antzoulakos (1999, 2001)).

1.5 Ανάλυση του χρόνου αναμονής ενός σχηματισμού

Έστω $\{X_t, t \geq 1\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με σύνολο τιμών $A = \{a_1, a_2, \dots, a_\lambda\}$, $\lambda \geq 2$, και έστω ότι

$$P(X_t = a_i) = p_i, \quad 1 \leq i \leq \lambda, \quad t \geq 1.$$

Θα καλούμε την τυχαία μεταβλητή X_t ως t -οστή δοκιμή. Ας θεωρήσουμε επίσης ένα ενδεχόμενο E για το οποίο μπορούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα αν αυτό έχει συμβεί στη t -οστή δοκιμή της πεπερασμένης ακολουθίας X_1, X_2, \dots, X_t , και ότι το ενδεχόμενο E συμβαίνει τουλάχιστον μια φορά με πιθανότητα 1 σε μια επαρκώς μεγάλη ακολουθία δοκιμών. Επίσης ας συμβολίσουμε με T την τυχαία μεταβλητή που δηλώνει το χρόνο αναμονής εμφάνισης του ενδεχομένου E για πρώτη φορά.

Στην περίπτωση που το ενδεχόμενο E μπορεί να γραφεί αναλυτικά συναρτήσει στοιχείων του συνόλου τιμών $A = \{a_1, a_2, \dots, a_\lambda\}$ (για παράδειγμα $E = \{a_1 a_3 a_1\}$ που είναι ένα απλός σχηματισμός, ή $E = E_1 \cup E_2 = \{a_1 a_3 a_1\} \cup \{a_1 a_3 a_2\} = \{a_1 a_3 a_1, a_1 a_3 a_2\}$ που είναι ένας σύνθετος σχηματισμός) η μελέτη της τυχαίας μεταβλητής T μπορεί να επιτευχθεί με χρήση της

μεθόδου της εμφύτευσης των τυχαίων μεταβλητών X_t σε μια ομογενή διακριτή αλυσίδα Markov.

1.5.1 Η περίπτωση του απλού σχηματισμού

Έστω ότι $A = \{a_1, a_2, \dots, a_\lambda\}$ και $E = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}$ (απλός σχηματισμός μήκους m). Αποσυνθέτουμε το ενδεχόμενο E στα ακόλουθα m κομμάτια (όσο και το μήκος του σχηματισμού)

$$2 \equiv a_{i_1}, \quad 3 \equiv a_{i_1} a_{i_2}, \quad \dots, \quad m+1 \equiv a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}$$

(τους αριθμούς $2, 3, \dots, m$ τους αποκαλούμε ταμπέλες των αντίστοιχων κομματιών). Ορίζουμε μια διακριτή ομογενή αλυσίδα Markov $\{Y_t, t \geq 1\}$ με χώρο καταστάσεων $\Omega = \{1, 2, \dots, m, m+1\}$, όπου η κατάσταση $m+1$ είναι απορροφητική. Η $\{Y_t, t \geq 1\}$ λειτουργεί παράλληλα με την ακολουθία $\{X_t, t \geq 1\}$ και οι καταστάσεις στις οποίες μεταπηδά σε κάθε βήμα της καθορίζονται σύμφωνα με τον ακόλουθο κανόνα

Κανόνας: Η Y_t βρίσκεται στην κατάσταση j , $2 \leq j \leq m+1$, αν το μέγιστο τελικό κομμάτι της ακολουθίας $X_1 X_2, \dots, X_t$, κοιτώντας προς τα πίσω, αντιστοιχεί στο κομμάτι $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_j}$, δηλαδή $X_{t-j+1} = a_{i_1}$, $X_{t-j+2} = a_{i_2}$, \dots , $X_t = a_{i_j}$. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση καθορίζουμε ως τιμή της Y_t την τιμή 1.

Οι αρχικές πιθανότητες

$$\boldsymbol{\pi}'_1 = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m, \pi_{m+1}] = [P(Y_1 = 1), P(Y_1 = 2), \dots, P(Y_1 = m), P(Y_1 = m+1)]$$

και ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης

$$\mathbf{P} = (p_{ij})_{(m+1) \times (m+1)} = \left[\begin{array}{cccccc|c} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1m} & p_{1,m+1} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2m} & p_{2,m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{im} & p_{i,m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mj} & \cdots & p_{mm} & p_{m,m+1} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right]_{(m+1) \times (m+1)} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{1} \\ \hline \mathbf{0}' & 1 \end{array} \right]_{(m+1) \times (m+1)}$$

της αλυσίδας $\{Y_t, t \geq 1\}$ μπορούν να προκύψουν εύκολα συναρτήσει των πιθανοτήτων $P(X_i = a_i) = p_i, 1 \leq i \leq \lambda$.

Θεώρημα 1: Για την τυχαία μεταβλητή T έχουμε ότι

- i. $P(T \leq n) = \boldsymbol{\pi}'_1 \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{e}_{m+1}, n \geq 1$
- ii. $P(T > n) = \boldsymbol{\alpha}'_1 \mathbf{R}^{n-1} \mathbf{1}, n \geq 1$
- iii. $P(T = n) = \begin{cases} \boldsymbol{\pi}'_1 \mathbf{e}_{m+1} & , n = 1 \\ \boldsymbol{\pi}'_1 \mathbf{P}^{n-2} (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{e}_{m+1} & , n \geq 2 \end{cases}$

όπου $\mathbf{e}_{m+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)'$ και $\boldsymbol{\alpha}'_1 = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m]$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, αν ισχύει ότι $Y_n = m + 1$ τότε αυτό σημαίνει ότι συνέβη το ενδεχόμενο $\{T \leq n\}$, δηλαδή

$$P(T \leq n) = P(Y_n = m + 1), \quad n = 1, 2, \dots$$

Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε ότι

$$P(T \leq n) = P(Y_n = m + 1) = \boldsymbol{\pi}'_1 \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{e}_{m+1} \quad n = 1, 2, \dots$$

όπου $\mathbf{e}_{m+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)'$. Επίσης

$$P(T > n) = 1 - P(T \leq n) = P(Y_n \neq m + 1) = \boldsymbol{\pi}'_1 \mathbf{P}^{n-1} (\mathbf{1} - \mathbf{e}_{m+1}) \quad n = 1, 2, \dots$$

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$\mathbf{P}^n = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}^n & (\mathbf{I} - \mathbf{R}^n) \mathbf{1} \\ \hline \boldsymbol{\theta}' & 1 \end{array} \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

οπότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$P(T > n) = \boldsymbol{\alpha}'_1 \mathbf{R}^{n-1} \mathbf{1} \quad n = 1, 2, \dots$$

όπου

$$\boldsymbol{\alpha}'_1 = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m] = [P(Y_1 = 1), P(Y_1 = 1), \dots, P(Y_1 = m)]. \quad \square$$

Για τη μέση τιμή και τη διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής T έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2: Η ροπογεννήτρια $M(s)$, η μέση τιμή $E(T)$ και η δεύτερη ροπή $E(T^2)$ της τυχαίας μεταβλητής T δίνονται από τις σχέσεις

$$(i) \quad M(s) = E(e^{sT}) = e^s [1 + (e^s - 1) \boldsymbol{\alpha}'_1 (\mathbf{I} - e^s \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}]$$

$$(ii) \quad E(T) = 1 + \boldsymbol{\alpha}'_1 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}$$

$$(iii) \quad E(T^2) = 1 + \mathbf{a}'_1(3\mathbf{I} - \mathbf{R})(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-2} \mathbf{1}$$

Απόδειξη: Για τη ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής T έχουμε τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} M(s) &= E(e^{sT}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} P(T = n) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} [P(T > n-1) - P(T > n)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} P(T > n-1) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} P(T > n) = e^s + \sum_{n=2}^{\infty} e^{sn} P(T > n-1) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} P(T > n) \\ &= e^s + \sum_{n=1}^{\infty} e^{s(n+1)} P(T > n) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} P(T > n) \\ &= e^s + e^s \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} P(T > n) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} P(T > n) \\ &= e^s + e^s \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} P(T > n) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} P(T > n) = e^s + (e^s - 1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} P(T > n) \\ &= e^s + (e^s - 1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} \mathbf{a}'_1 \mathbf{R}^{n-1} \mathbf{1} = e^s + e^s (e^s - 1) \mathbf{a}'_1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (e^s \mathbf{R})^n \right) \mathbf{1} \\ &= e^s [1 + (e^s - 1) \mathbf{a}'_1 (\mathbf{I} - e^s \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}]. \end{aligned}$$

Η μέση τιμή $E(T)$ και η δεύτερη ροπή $E(T^2)$ της τυχαίας μεταβλητής T προκύπτουν εύκολα από τις σχέσεις

$$E(T) = \left. \frac{d}{ds} M(s) \right|_{s=0}, \quad E(T^2) = \left. \frac{d^2}{ds^2} M(s) \right|_{s=0}$$

κάνοντας χρήση της ιδιότητας

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{I} - e^s \mathbf{R})^{-1} = e^s \mathbf{R} (\mathbf{I} - e^s \mathbf{R})^{-2}. \quad \square$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η μέση τιμή $E(T)$ μπορεί να προκύψει και ως ακολούθως

$$E(T) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T > n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(T > n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}'_1 \mathbf{R}^{n-1} \mathbf{1} = 1 + \mathbf{a}'_1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{R}^n \right) \mathbf{1} = 1 + \mathbf{a}'_1 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}.$$

Παράδειγμα: Έστω ότι $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $E = \{a_1 a_3 a_1\}$ και $P(X_t = a_i) = p_i = i/6$, $1 \leq i \leq 3$.

Τότε $m = 4$, και

$$2 \equiv a_1, \quad 3 \equiv a_1 a_3, \quad 4 \equiv a_1 a_3 a_1.$$

Στην περίπτωση που παρατηρηθεί η ακολουθία

$$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_7 \cdots = a_2 a_1 \underline{a_1 a_3 a_1} a_3 a_2 \cdots$$

τότε έχουμε ότι $T = 5$ και

$$Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6 Y_7 \dots = 1223444.$$

Οι αρχικές πιθανότητες είναι ίσες με

$$\boldsymbol{\pi}'_1 = [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4] = [P(Y_1 = 1), P(Y_1 = 2), P(Y_1 = 3), P(Y_1 = 4)] = [1 - p_1, p_1, 0, 0] = [5/6, 1/6, 0, 0]$$

και ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης είναι ο ακόλουθος

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-p_1 & p_1 & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & p_3 & 0 \\ 1-p_1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 2/6 & 1/6 & 3/6 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & (\mathbf{I}-\mathbf{R})\mathbf{1} \\ \hline \mathbf{0}' & 1 \end{array} \right].$$

Επομένως

$$\boldsymbol{\alpha}'_1 = [\pi_1, \pi_2, \pi_3] = [5/6, 1/6, 0]$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 \\ 2/6 & 1/6 & 3/6 \\ 5/6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(T > n) = \boldsymbol{\alpha}'_1 \mathbf{R}^{n-1} \mathbf{1} = [5/6, 1/6, 0, 0] \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 \\ 2/6 & 1/6 & 3/6 \\ 5/6 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$M(s) = e^s [1 + (e^s - 1) \boldsymbol{\alpha}'_1 (\mathbf{I} - e^s \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}] = e^s \left(1 + (e^s - 1) \frac{72 + 5e^s}{72 - 72e^s + 6e^{2s} - 5e^{3s}} \right)$$

$$E(T) = 1 + \boldsymbol{\alpha}'_1 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1} = 78$$

$$E(T^2) = 1 + \boldsymbol{\alpha}'_1 (3\mathbf{I} - \mathbf{R})(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-2} \mathbf{1} = 11802.$$

1.5.2 Η περίπτωση του σύνθετου σχηματισμού

Στην περίπτωση που το ενδεχόμενο E είναι σύνθετο, δηλαδή

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_r,$$

όπου τα ενδεχόμενα E_i ($1 \leq i \leq r$) είναι απλά, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη γενική μέθοδο που περιγράψαμε στην Παράγραφο 1.5.1 με την εξής διαφοροποίηση ως προς την αποσύνθεση του ενδεχομένου E σε κομμάτια (η υπόλοιπη φιλοσοφία παραμένει η ίδια). Αποσυνθέτουμε κάθε απλό ενδεχόμενο E_i σε κομμάτια. Από το σύνολο των κομματιών που προκύπτουν απομακρύνουμε τυχόν επαναλήψεις, δηλαδή από τα κομμάτια που εμφανίζονται

περισσότερες από μια φορές κρατάμε μόνο ένα. Επίσης για να μειωθούν οι ταμπέλες που θα χρησιμοποιήσουμε για την κατασκευή του πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κοινή ταμπέλα (μια ταμπέλα) για τις r το πλήθος ταμπέλες που αντιστοιχούν στην εμφάνιση του ενδεχομένου E (κάθε μια από αυτές αντιστοιχεί στο πλήρες μήκος του ενδεχομένου E_i ($1 \leq i \leq r$)).

Η εφαρμογή της παραπάνω μεθοδολογίας θα επιδειχθεί στην επόμενη παράγραφο όπου θα μελετήσουμε το μέσο μήκος ροής στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart με χρήση κανόνων ευαισθητοποίησης.

1.6 Υπολογισμός του μέσου μήκους ροής στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart υπό την παρουσία κανόνων ευαισθητοποίησης.

Οι κανόνες ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart στο οποίο απεικονίζεται μια τυχαία μεταβλητή W με εντός ελέγχου μέσο μ και τυπική απόκλιση σ ($LCL = \mu - L\sigma$, $UCL = \mu + L\sigma$) μπορούν να κωδικοποιηθούν με τον ακόλουθο τρόπο που πρότειναν οι Champ και Woodall (1987). Ο συμβολισμός $T(k, m, a, b)$ θα δηλώνει ότι k από m διαδοχικά σημεία του διαγράμματος βρίσκονται στο διάστημα $(\mu + a\sigma, \mu + b\sigma)$, $a < b$. Έτσι στο σύνηθες διάγραμμα ελέγχου Shewhart, $L = 3$, ο Κανόνας 1 της Παραγράφου 1.4, που είναι ο κλασικός κανόνας λήψης ένδειξης εκτός ελέγχου διεργασίας, μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$C_1 = \{T(1,1,-\infty,-3), T(1,1,3,\infty)\},$$

και ο Κανόνας 2 της Παραγράφου 1.4 μπορεί να αποδοθεί ως

$$C_2 = \{T(2,3,-3,-2), T(2,3,2,3)\}$$

Οι Champ και Woodall (1987) μελέτησαν τους ακόλουθους κανόνες ευαισθητοποίησης

$$1^{\text{ος}} \text{ Κανόνας: } C_1 = \{T(1,1,-\infty,-3), T(1,1,3,\infty)\}$$

$$2^{\text{ος}} \text{ Κανόνας: } C_2 = \{T(2,3,-3,-2), T(2,3,2,3)\}$$

$$3^{\text{ος}} \text{ Κανόνας: } C_3 = \{T(4,5,-3,-1), T(4,5,1,3)\}$$

$$4^{\text{ος}} \text{ Κανόνας: } C_4 = \{T(8,8,-3,0), T(8,8,0,3)\}$$

$$5^{\text{ος}} \text{ Κανόνας: } C_5 = \{T(2,2,-3,-2), T(2,2,2,3)\}$$

$$6^{\text{ος}} \text{ Κανόνας: } C_6 = \{T(5,5,-3,-1), T(5,5,1,3)\}$$

$$7^{\text{ος}} \text{ Κανόνας } C_7 = \{T(1,1,-\infty,-3.09), T(1,1,3.09,\infty)\}$$

8^{ος} Κανόνας: $C_8 = \{T(2,3,-3.09,-1.96), T(2,3,-1.96,3.09)\}$

9^{ος} Κανόνας: $C_9 = \{T(8,8,-3.09,0), T(8,8,0,3.09)\}$

Με το συμβολισμό

$$C_{ij\dots k} = C_i \cup C_j \cup \dots \cup C_k$$

δηλώνεται ένα διάγραμμα ελέγχου Shewhart το οποίο δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν συμβεί τουλάχιστον ένα ενδεχόμενο από αυτά που περιγράφουν οι κανόνες C_i, C_j, \dots, C_k . Ο κανόνας $C_{ij\dots k}$ ονομάζεται σύνθετος κανόνας.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τον πίνακα που έδωσαν οι Champ και Woodall (1987) για το μέσο μήκος ροής ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart ($LCL = \mu - L\sigma$, $UCL = \mu + L\sigma$) υπό την παρουσία κανόνων ευαισθητοποίησης και υπό την υπόθεση ότι η απεικονιζόμενη τυχαία μεταβλητή W ακολουθεί κατανομή $N(\mu + \delta\sigma, \sigma^2)$ (εντός ελέγχου μέσος και τυπική απόκλιση μ και σ αντιστοίχως).

Πίνακας 1.3. Μέσο μήκος ροής για διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart με χρήση κανόνων ευαισθητοποίησης

δ	$ARL(\delta)$															
	C_1	C_7	C_{12}	C_{78}	C_{15}	C_{13}	C_{14}	C_{79}	C_{16}	C_{123}	C_{156}	C_{124}	C_{789}	C_{134}	C_{1456}	C_{1234}
0.0	370.40	499.62	225.44	239.75	278.03	166.05	152.73	170.41	349.38	132.89	266.82	122.05	122.05	105.78	133.21	91.75
0.2	308.43	412.01	177.56	185.48	222.59	120.70	110.52	120.87	279.53	97.86	208.82	89.14	89.14	76.01	96.37	66.80
0.4	200.08	262.19	104.46	106.15	134.17	63.88	59.76	63.80	165.48	52.93	119.47	48.71	48.71	40.95	51.94	36.61
0.6	119.67	153.86	57.92	57.80	75.27	33.99	33.64	35.46	89.07	28.70	63.70	27.49	27.49	23.15	29.01	20.90
0.8	71.55	90.41	33.12	32.75	42.96	19.78	21.07	22.09	48.40	16.93	34.96	17.14	17.14	14.62	17.94	13.25
1.0	43.89	54.55	20.01	19.70	25.61	12.66	15.58	15.26	27.74	10.95	20.43	11.73	11.73	10.19	12.19	9.22
1.2	27.82	34.03	12.81	12.62	16.06	8.84	10.90	11.42	17.05	6.78	12.83	8.61	8.61	7.66	8.90	6.89
1.4	18.25	21.97	8.69	8.58	10.60	6.62	8.60	9.05	11.28	5.76	8.65	6.63	6.63	6.08	6.84	5.41
1.6	12.38	14.68	6.21	6.16	7.36	5.24	7.03	7.44	7.98	4.54	6.22	5.27	5.27	5.01	5.42	4.41
1.8	8.69	10.15	4.66	4.64	5.36	4.33	5.85	6.24	5.97	3.73	4.71	4.27	4.27	4.24	4.39	3.68
2.0	6.30	7.25	3.65	3.65	4.07	3.68	4.89	5.25	4.67	3.14	3.72	3.50	3.50	3.65	3.61	3.13
2.2	4.72	5.36	2.96	2.98	3.22	3.18	4.08	4.41	3.78	2.70	3.04	2.91	2.91	3.17	3.01	2.70
2.4	3.65	4.08	2.48	2.51	2.64	2.78	3.38	3.67	3.14	2.35	2.55	2.47	2.47	2.77	2.54	2.35
2.6	2.90	3.20	2.13	2.17	2.22	2.43	2.81	3.05	2.64	2.07	2.19	2.13	2.13	2.43	2.19	2.07
2.8	2.38	2.59	1.87	1.91	1.93	2.14	2.35	2.54	2.26	1.85	1.91	1.87	1.87	2.14	1.91	1.85
3.0	2.00	2.15	1.68	1.71	1.70	1.89	1.99	2.14	1.95	1.67	1.70	1.68	1.68	1.89	1.70	1.67

δ : Μετατόπιση του εντός ελέγχου μέσου μ σε μονάδες τυπικής απόκλισης

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι το μέσο μήκος ροής μειώνεται για μικρές μετατοπίσεις του μέσου στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε τον κανόνα C_1 (ή τον ισοδύναμο κανόνα C_7) μαζί με ένα τουλάχιστον επιπρόσθετο κανόνα ευαισθητοποίησης, σε σχέση με την αποκλειστική χρησιμοποίηση του κλασικού κανόνα C_1 . Παρατηρούμε επίσης ότι σε αυτή την περίπτωση μειώνεται το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής που ισοδυναμεί με αύξηση των λανθασμένων συναγερωμών. Ωστόσο μπορούμε να επιτύχουμε οποιοδήποτε εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής αυξάνοντας απλά το πλάτος (L) των ορίων ελέγχου.

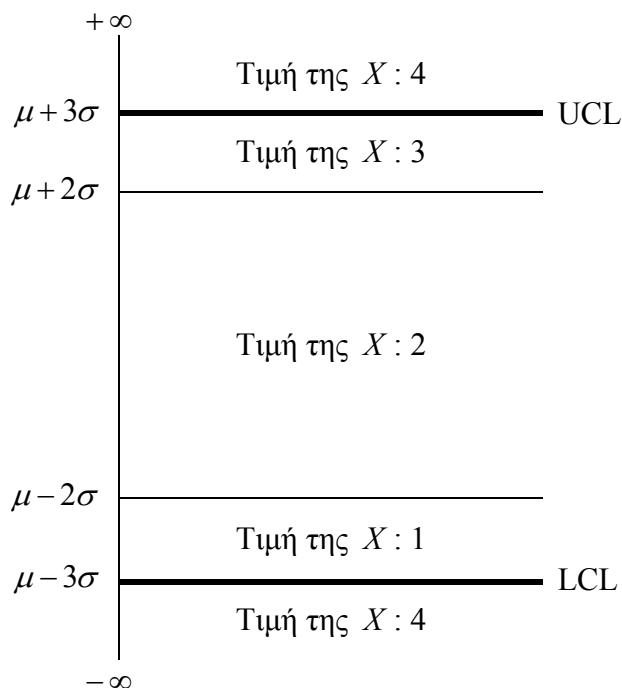
Στη συνέχεια θα επιδείξουμε τη μεθοδολογία της Παραγράφου 1.5 για την εξαγωγή των τιμών του μέσου μήκους ροής του Πίνακα 1.3 που αντιστοιχούν στους κανόνες C_{12} και C_{15} . Επιπρόσθετα θα δώσουμε τη διάμεσο (M), το πρώτο (Q_1), το τρίτο (Q_3) τεταρτημόριο και τη διακύμανση του T , όπως επίσης και γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής της T .

1.6.1 Μελέτη του σύνθετου κανόνα C_{12}

Ας θεωρήσουμε ένα διάγραμμα ελέγχου Shewhart με 3σ όρια ελέγχου στο οποίο απεικονίζονται διαδοχικές τιμές $\{W_t, t \geq 1\}$ της τυχαίας μεταβλητής $W(\delta)$ για την οποία υποθέτουμε ότι ακολουθεί κατανομή $N(\mu + \delta\sigma, \sigma^2)$ (για $\delta = 0$ έχουμε εντός ελέγχου διεργασία). Ο σύνθετος κανόνας C_{12} μπορεί να γραφεί ως

$$C_{12} = C_1 \cup C_2 = \{T(1,1,-\infty,-3), T(1,1,3,\infty), T(2,3,-3,-2), T(2,3,2,3)\}.$$

Χωρίζουμε το διάγραμμα ελέγχου Shewhart με 3σ όρια ελέγχου στις ζώνες που φαίνονται στο ακόλουθο διάγραμμα



Διάγραμμα 1.6: Ζώνες του διαγράμματος ελέγχου Shewhart για τον κανόνα C_{12} .

Θεωρούμε μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X , η οποία παίρνει τις τιμές 1, 2, 3 ή 4 ανάλογα με το διάστημα στο οποίο κινείται η τυχαία μεταβλητή $W(\delta)$, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα

$W(\delta)$	$X(\delta)$
$(\mu - 3\sigma, \mu - 2\sigma)$	1
$(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$	2
$(\mu + 2\sigma, \mu + 3\sigma)$	3
$(-\infty, \mu - 3\sigma) \cup (\mu + 3\sigma, +\infty)$	4

Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $X(\delta)$ καθορίζεται από τις σχέσεις

$$p_1(\delta) = p_1 = P(X(\delta) = 1) = P(\mu - 3\sigma < W(\delta) < \mu - 2\sigma) = \Phi(-2 - \delta) - \Phi(-3 - \delta)$$

$$p_2(\delta) = p_2 = P(X(\delta) = 2) = P(\mu - 2\sigma < W(\delta) < \mu + 2\sigma) = \Phi(2 - \delta) - \Phi(-2 - \delta)$$

$$p_3(\delta) = p_3 = P(X(\delta) = 3) = P(\mu + 2\sigma < W(\delta) < \mu + 3\sigma) = \Phi(3 - \delta) - \Phi(2 - \delta)$$

$$p_4(\delta) = p_4 = P(X(\delta) = 4) = P(-\infty < W(\delta) < \mu - 3\sigma) + P(\mu + 3\sigma < W(\delta) < +\infty) \\ = 1 + \Phi(-3 - \delta) - \Phi(3 - \delta)$$

Είναι προφανές από την παραπάνω ανάλυση ότι η διαδικασία απεικόνισης των σημείων $\{W_t, t \geq 1\}$ στο διάγραμμα ελέγχου είναι ισοδύναμη με μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων

μεταβλητών $\{X_t, t \geq 1\}$ που κατανέμονται όπως η τυχαία μεταβλητή $X(\delta)$ που ορίσαμε παραπάνω. Ο αριθμός των σημείων που πρέπει να απεικονιστούν στο διάγραμμα ελέγχου έως ότου πάrouμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας ισοδυναμεί με τον αριθμό $T(\delta)$ των δοκιμών της ακολουθίας $\{X_t, t \geq 1\}$ που πρέπει να εκτελεστούν έως ότου συμβεί για πρώτη φορά το σύνθετο ενδεχόμενο

$$E = \{4, 11, 121, 131, 33, 313, 323\}$$

και θα έχουμε ότι $ARL(\delta) = E(T(\delta))$.

Για τη μελέτη της τυχαίας μεταβλητής $T(\delta)$ ακολουθούμε τη μεθοδολογία της Παραγράφου 1.5. Αποσυνθέτοντας το ενδεχόμενο E παίρνουμε τα ακόλουθα κομμάτια

$$4, 1, 11, 1, 12, 121, 1, 13, 131, 3, 33, 3, 31, 313, 3, 32, 323.$$

Απομακρύνουμε τα κομμάτια που επαναλαμβάνονται καταλήγουμε στα ακόλουθα

$$4, 1, 11, 12, 121, 13, 131, 3, 33, 31, 313, 32, 323.$$

Εισάγουμε το κομμάτι 2 (είναι το κομμάτι που αντιστοιχίστηκε στην ταμπέλα 1 της γενικής μεθοδολογίας) και καταλήγουμε στα ακόλουθα κομμάτια

$$2, 4, 1, 11, 12, 121, 13, 131, 3, 33, 31, 313, 32, 323.$$

Στα παραπάνω κομμάτια αντιστοιχούμε τις ταμπέλες

$$1 \equiv 1, \quad 2 \equiv 2, \quad 3 \equiv 3, \quad 4 \equiv 12, \quad 5 \equiv 13, \quad 6 \equiv 31, \quad 7 \equiv 32, \quad 8 \equiv 4, 11, 121, 131, 33, 313, 323$$

όπου στην ταμπέλα 8 (η οποία θα παίζει το ρόλο της απορροφητικής κατάστασης) αντιστοιχούμε όλα τα κομμάτια που οδηγούν στην εμφάνιση του ενδεχομένου E .

Για την αντίστοιχη αλυσίδα Markov $\{Y_t, t \geq 1\}$ έχουμε ότι οι αρχικές πιθανότητες είναι οι ακόλουθες

$$\boldsymbol{\pi}'_1 = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_7, \pi_8] = [P(Y_1 = 1), P(Y_1 = 2), \dots, P(Y_1 = 7), P(Y_1 = 8)] = [p_1, p_2, p_3, 0, 0, 0, 0, p_4]$$

και ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης είναι ίσος με

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{cccccc|cc} 0 & 0 & 0 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & p_1 + p_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 + p_4 \\ 0 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 + p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_1 + p_3 + p_4 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & p_1 + p_3 + p_4 \\ p_1 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 + p_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{1} \\ \mathbf{0}' & 1 \end{array} \right]_{8 \times 8}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2 της Παραγράφου 1.5 λαμβάνουμε τον ακόλουθο πίνακα

Πίνακας 1.4: Μέση τιμή και διακύμανση του μήκους ροής T για τον κανόνα C_{12}

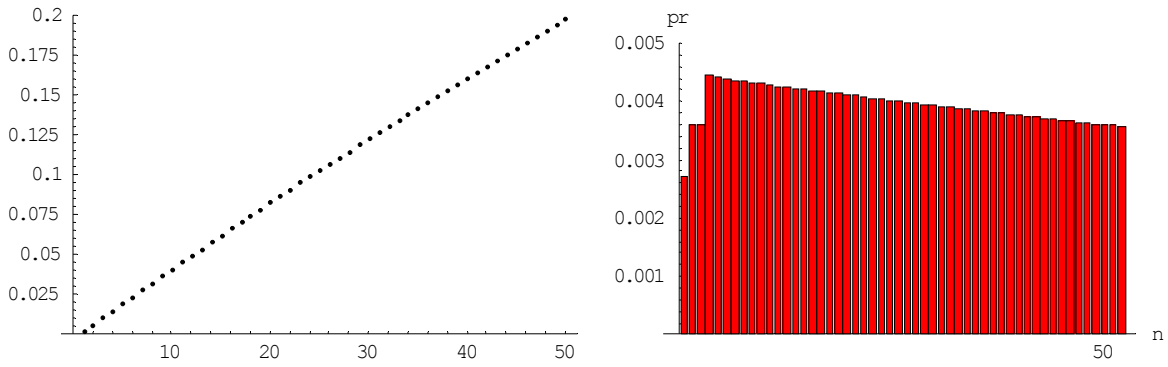
δ	$ARL(\delta) = E(T(\delta))$	$E(T^2(\delta))$	$Var(T(\delta))$
0	225.44	101167	50344.2
0.2	177.56	62662	31136.2
0.4	104.46	21582.2	10671.1
0.6	57.92	6573.97	3219.21
0.8	33.12	2117.4	1020.18
1.0	20.01	755.02	354.82
1.2	12.81	300.40	136.22
1.4	8.69	132.93	57.43
1.6	6.21	64.97	26.37
1.8	4.66	34.79	13.07
2.0	3.65	20.24	6.94
2.2	2.96	12.68	3.92
2.4	2.48	8.49	2.35
2.6	2.13	6.03	1.49
2.8	1.87	4.50	0.99
3.0	1.68	3.50	0.69

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1 μπορούμε να βρούμε τη διάμεσο (M), το πρώτο (Q_1) και το τρίτο (Q_3) τεταρτημόριο της $T(\delta)$ για διάφορες τιμές του δ που δίνονται στον ακόλουθο πίνακα

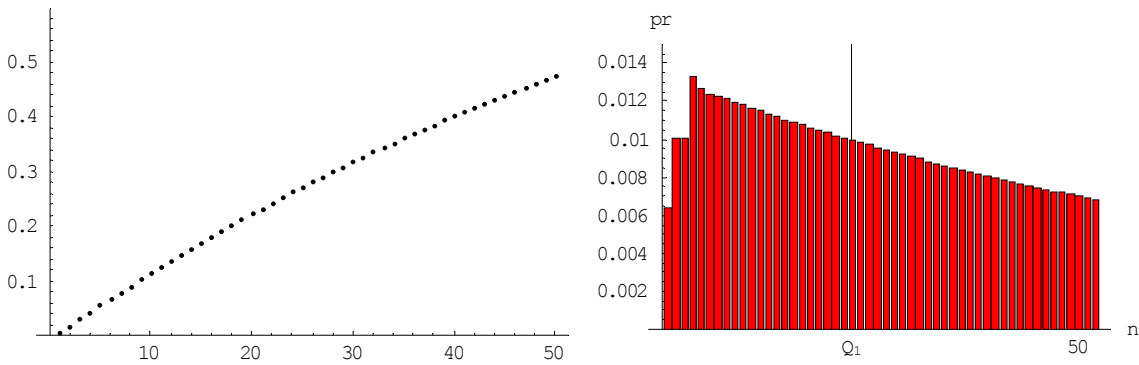
Πίνακας 1.5: Q_1 , M , Q_3 και $ARL(\delta)$ του μήκους ροής $T(\delta)$ για τον κανόνα C_{12}

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL(\delta)$
0	66	157	312	225.44
0.2	52	123	246	177.56
0.4	31	73	144	104.46
0.6	18	41	80	57.92
0.8	10	23	45	33.12
1.0	7	14	27	20.01
1.2	4	9	17	12.81
1.4	3	6	12	8.69
1.6	3	5	8	6.21
1.8	2	4	6	4.66
2.0	2	3	5	3.65
2.2	2	2	4	2.96
2.4	1	2	3	2.48
2.6	1	2	3	2.13
2.8	1	2	2	1.87
3.0	1	2	2	1.68

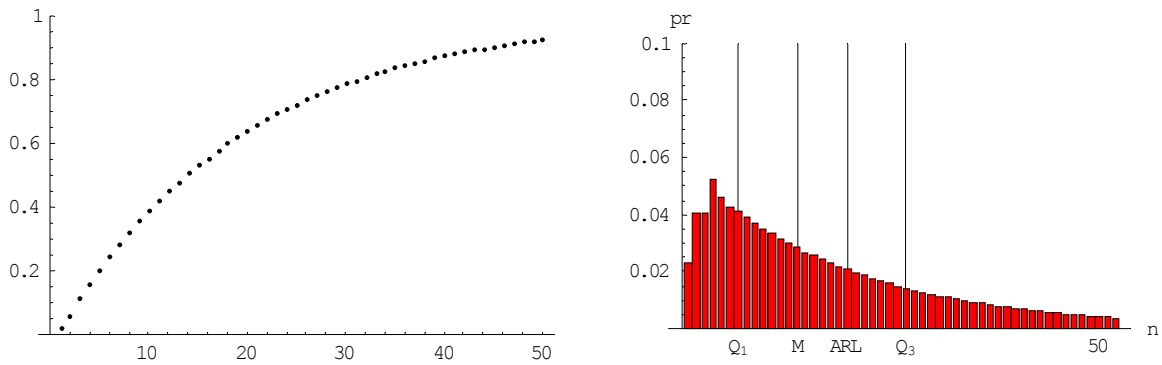
Στα ακόλουθα διαγράμματα δίνονται γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής της $T(\delta)$ για $\delta = 0, 0.5, 1, 2$.



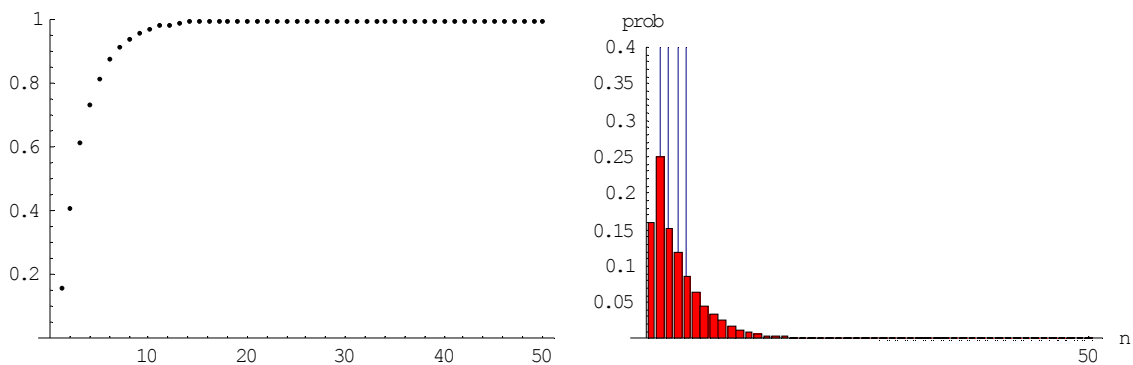
Διάγραμμα 1.7 : Συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής $T(0)$



Διάγραμμα 1.8 : Συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής $T(0.5)$



Διάγραμμα 1.9 : Συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής $T(1)$



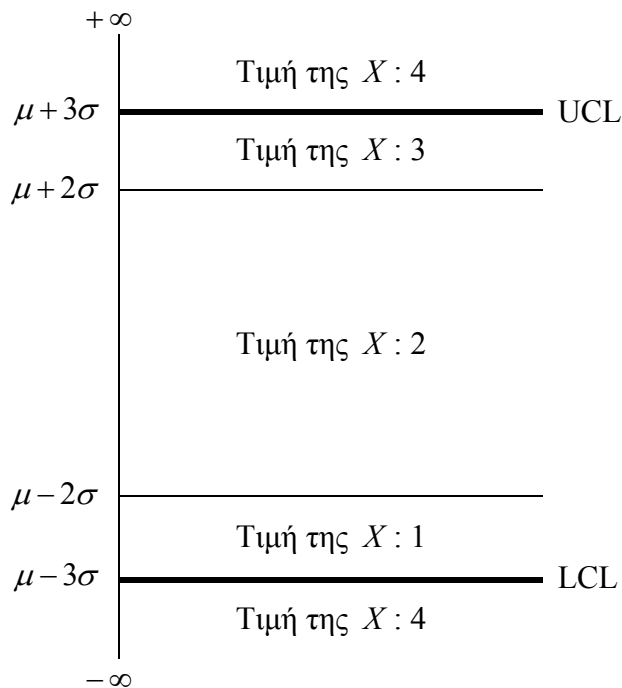
Διάγραμμα 1.10 : Συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής $T(2)$

1.6.2 Μελέτη του σύνθετου κανόνα C_{15}

Ο σύνθετος κανόνας C_{15} μπορεί να γραφεί ως

$$C_{15} = C_1 \cup C_5 = \{T(1,1,-\infty,-3), T(1,1,3,\infty), T(2,2,-3,2), T(2,2,2,3)\}.$$

Χωρίζουμε το διάγραμμα ελέγχου Shewhart με 3σ όρια ελέγχου στις ζώνες που φαίνονται στο ακόλουθο διάγραμμα



Διάγραμμα 1.11: Ζώνες του διαγράμματος ελέγχου Shewhart για τον κανόνα C_{15} .

Για κάθε τιμή της τυχαίας μεταβλητής $W(\delta)$ που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου, για την οποία υποθέτουμε ότι ακολουθεί κατανομή $N(\mu + \delta\sigma, \sigma^2)$ (για $\delta = 0$ έχουμε εντός ελέγχου διεργασία), ορίζουμε μια διακριτή τυχαία μεταβλητή $X(\delta)$ με τιμές που καθορίζονται στο ακόλουθο πλαίσιο

Τιμή της $W(\delta)$	Τιμή της $X(\delta)$
$(\mu - 3\sigma, \mu - 2\sigma)$	1
$(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$	2
$(\mu + 2\sigma, \mu + 3\sigma)$	3
$(-\infty, \mu - 3\sigma) \cup (\mu + 3\sigma, +\infty)$	4

Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $X(\delta)$ καθορίζεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
p_1(\delta) &= p_1 = P(X(\delta) = 1) = P(\mu - 3\sigma < W(\delta) < \mu - 2\sigma) = \Phi(-2 - \delta) - \Phi(-3 - \delta) \\
p_2(\delta) &= p_2 = P(X(\delta) = 2) = P(\mu - 2\sigma < W(\delta) < \mu + 2\sigma) = \Phi(2 - \delta) - \Phi(-2 - \delta) \\
p_3(\delta) &= p_3 = P(X(\delta) = 3) = P(\mu + 2\sigma < W(\delta) < \mu + 3\sigma) = \Phi(3 - \delta) - \Phi(2 - \delta) \\
p_4(\delta) &= p_4 = P(X(\delta) = 4) = P(-\infty < W(\delta) < \mu - 3\sigma) + P(\mu + 3\sigma < W(\delta) < +\infty) \\
&= 1 + \Phi(-3 - \delta) - \Phi(3 - \delta)
\end{aligned}$$

Είναι προφανές από την παραπάνω ανάλυση ότι η διαδικασία απεικόνισης των σημείων $\{W_t, t \geq 1\}$ στο διάγραμμα ελέγχου είναι ισοδύναμη με μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $\{X_t, t \geq 1\}$ που κατανέμονται όπως η τυχαία μεταβλητή $X(\delta)$ που ορίσαμε παραπάνω. Ο αριθμός των σημείων που πρέπει να απεικονιστούν στο διάγραμμα ελέγχου έως ότου πάρουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας ισοδυναμεί με τον αριθμό $T(\delta)$ των δοκιμών της ακολουθίας $\{X_t, t \geq 1\}$ που πρέπει να εκτελεστούν έως ότου συμβεί για πρώτη φορά το σύνθετο ενδεχόμενο

$$E = \{4, 11, 33\}.$$

Αποσυνθέτοντας το ενδεχόμενο E παίρνουμε τα ακόλουθα 5 κομμάτια

$$4, 1, 11, 3, 33$$

Στα παραπάνω κομμάτια αντιστοιχούμε τις ταμπέλες

$$1 \equiv 1, \quad 2 \equiv 2, \quad 3 \equiv 3, \quad 4 \equiv 4, 11, 33$$

όπου η ταμπέλα 4 θα παίζει το ρόλο της απορροφητικής κατάστασης.

Για την αντίστοιχη αλυσίδα Markov $\{Y_t, t \geq 1\}$ έχουμε ότι οι αρχικές πιθανότητες είναι οι ακόλουθες

$$\boldsymbol{\pi}'_1 = [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4] = [P(Y_1 = 1), P(Y_1 = 2), P(Y_1 = 3), P(Y_1 = 4)] = [p_1, p_2, p_3, p_4]$$

και ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης είναι ίσος με

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & p_2 & p_3 & p_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 \\ p_1 & p_2 & 0 & p_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{1} \\ \mathbf{0}' & 1 \end{array} \right]_{4 \times 4}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2 της Παραγράφου 1.5 λαμβάνουμε τον ακόλουθο πίνακα

Πίνακας 1.6: Μέση τιμή και διακύμανση του μήκους ροής T για τον κανόνα C_{15}

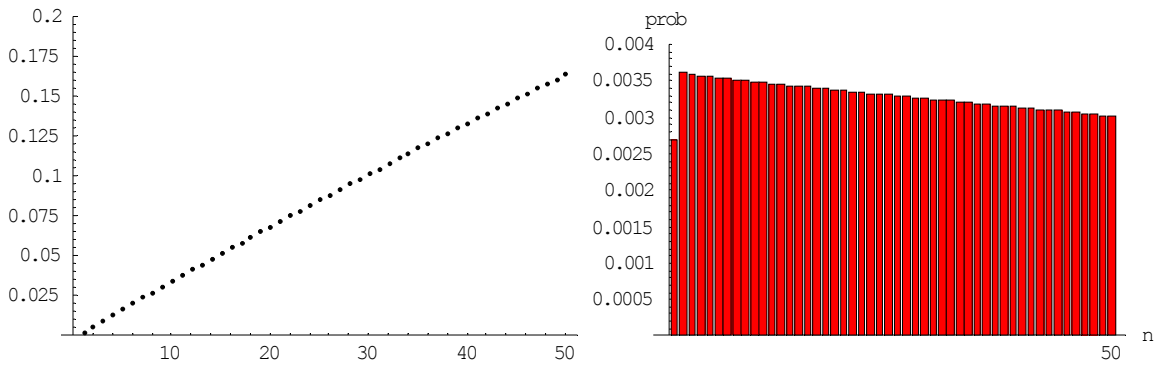
δ	$ARL(\delta) = E(T(\delta))$	$E(T^2(\delta))$	$Var(T(\delta))$
0	278.045	154204.0	76895
0.2	222.59	98748.8	49203
0.4	134.17	35784.7	17783.1
0.6	75.27	11203.8	5538.24
0.8	42.96	3617.36	1771.61
1.0	25.61	1267.58	611.59
1.2	16.06	488.29	230.34
1.4	10.60	207.03	94.57
1.6	7.36	96.31	42.11
1.8	5.36	48.91	20.20
2.0	4.07	26.96	10.37
2.2	3.22	16.02	5.65
2.4	2.64	10.20	3.25
2.6	2.22	6.91	1.97
2.8	1.93	4.95	1.25
3.0	1.70	3.73	0.82

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1 μπορούμε να βρούμε τη διάμεσο (M), το πρώτο (Q_1) και το τρίτο (Q_3) τεταρτημόριο της $T(\delta)$ για διάφορες τιμές του δ που δίνονται στον ακόλουθο πίνακα

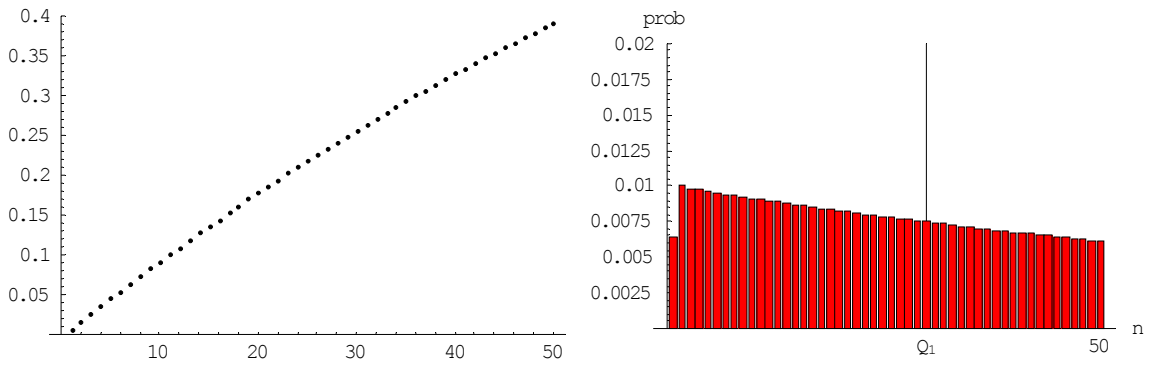
Πίνακας 1.7: Q_1 , M , Q_3 και $ARL(\delta)$ του μήκους ροής $T(\delta)$ για τον κανόνα C_{15}

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL(\delta)$
0	81	193	385	278.045
0.2	65	155	308	222.59
0.4	39	93	186	134.17
0.6	22	52	104	75.27
0.8	13	30	59	42.96
1.0	8	18	35	25.61
1.2	5	11	22	16.06
1.4	4	8	14	10.60
1.6	3	5	10	7.36
1.8	2	4	7	5.36
2.0	2	3	5	4.07
2.2	2	2	4	3.22
2.4	1	2	3	2.64
2.6	1	2	3	2.22
2.8	1	2	2	1.93
3.0	1	2	2	1.70

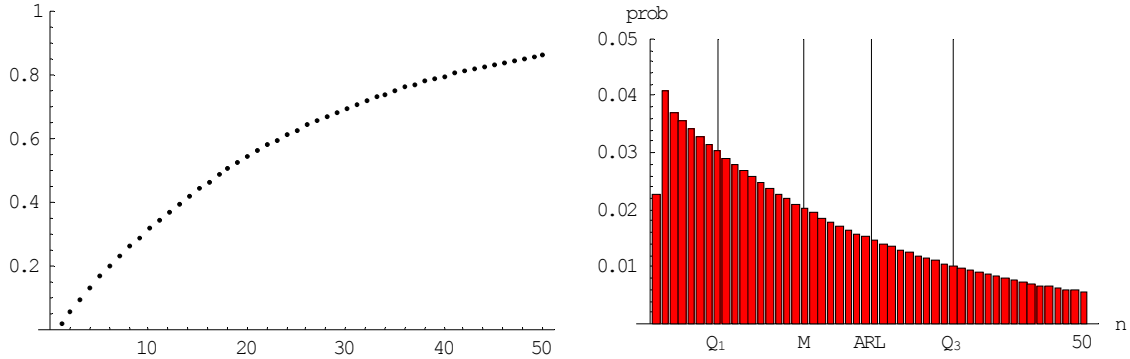
Στα ακόλουθα διαγράμματα δίνονται γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής της $T(\delta)$ για $\delta = 0, 0.5, 1, 2$



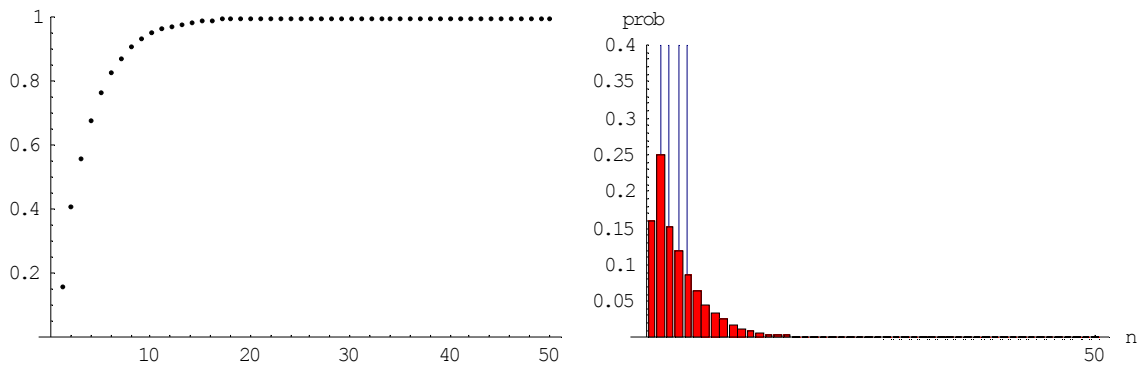
Διάγραμμα 1.12 : Συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής $T(0)$



Διάγραμμα 1.13 : Συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής $T(0.5)$



Διάγραμμα 1.14 : Συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής $T(1)$



Διάγραμμα 1.15 : Συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ροής $T(2)$

Κλείνοντας το πρώτο κεφάλαιο τονίζουμε ότι η εύρεση των ποσοτήτων Q_1 , M και Q_3 (ή και περισσότερων ποσοστιαίων σημείων του μήκους ροής T) κρίνεται περισσότερο σημαντική από την εύρεση μόνο του $ARL = E(T)$ για την περιγραφή της απόδοσης των διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart (Palm(1990)). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η κατανομή της T για εντός ελέγχου διεργασία ($\delta = 0$) και για μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας (μικρές τιμές του δ) είναι αρκετά λοξή με «δεξιά ουρά» η οποία φθίνει αργά. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η χρήση ποσοστιαίων σημείων μας δίνει περισσότερες πληροφορίες για την απόδοση της διεργασίας σε σχέση με την αποκλειστική χρήση του ARL . Παρατηρούμε επίσης ότι, καθώς το δ αυξάνει (ολοένα και μεγαλύτερη μετατόπιση του μέσου της διεργασίας), υψηλές πιθανότητες τείνουν να συγκεντρώνονται στις μικρές τιμές. Για μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας (μικρές τιμές του δ) παρατηρούμε ότι η τιμή του ARL για τους κανόνες C_{12} και C_{15} είναι αρκετά μεγαλύτερη από τη διάμεσο (M), γεγονός που αποκαλύπτει τη λοξότητα της αντίστοιχης κατανομής του μήκους ροής T . Για παράδειγμα, στον κανόνα C_{15} έχουμε ότι για $\delta = 0$ ένας λανθασμένος συναγερμός (λανθασμένη ένδειξη για εκτός ελέγχου διεργασία) συμβαίνει κατά μέσο όρο κάθε 278 δείγματα ($ARL = 278$). Η πληροφορία αυτή δεν κρίνεται επαρκής σε σχέση με την πληροφορία που μας δίνει η διάμεσος, δηλαδή ότι εντός των πρώτων 192 δειγμάτων ($M = 192$) θα συμβεί λανθασμένος συναγερμός με πιθανότητα 0.5. Επίσης, αν χρησιμοποιήσουμε το πρώτο τεταρτημόριο μπορούμε να πούμε ότι στα πρώτα 81 δείγματα ($Q_1 = 81$) δεν θα έχουμε λανθασμένο συναγερμό με πιθανότητα 0.75.

Συνοψίζοντας, έχουμε ότι, είτε η διάμεσος είτε κάποιο άλλο ποσοστιαίο σημείο μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να μετρήσουμε σωστά την επίδραση που έχει η προσθήκη κανόνων ευαισθητοποίησης σε διαγράμματα ελέγχου Shewhart αφού η αποκλειστική χρήση του ARL μπορεί να μας οδηγήσει σε λανθασμένες εκτιμήσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Κανόνες ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart που βασίζονται σε ροές

2.1 Εισαγωγή

Ένα σημαντικό μειονέκτημα της χρήσης των κανόνων ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart για την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων του μέσου της διεργασίας που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι ότι οι κανόνες αυτοί εφαρμόζονται αποκλειστικά όταν έχουμε 3σ όρια ελέγχου. Στην πράξη όμως είναι συνήθης η επιλογή 2.5σ και 3.5σ ορίων ελέγχου οπότε σε αυτές τις περιπτώσεις δεν μπορούν να εφαρμοστούν.

Ένα εξίσου σημαντικό μειονέκτημα της χρήσης κανόνων ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart για την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων του μέσου της διεργασίας είναι η επιλογή του κανόνα ευαισθητοποίησης που θα χρησιμοποιήσουμε στην πράξη. Για παράδειγμα, αν μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε μετατόπιση του μέσου της διεργασίας από την εντός ελέγχου τιμή μ στην εκτός ελέγχου τιμή $\mu + 0.2\sigma$, τότε από τον Πίνακα 1.3 φαίνεται ότι θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον σύνθετο κανόνα C_{1234} αφού στον κανόνα αυτό αντιστοιχεί η μικρότερη τιμή $ARL(0.2) = 66.8$. Ωστόσο για να επιλεγεί ο κανόνας C_{1234} έναντι των υπόλοιπων κανόνων του Πίνακα 1.3 θα πρέπει να υπάρχει κοινή βάση σύγκρισης. Ως κοινή βάση σύγκρισης μεταξύ δύο διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart θεωρείται η τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής $ARL(0)$. Για την επιλογή, μεταξύ δύο διαγραμμάτων ελέγχου τα οποία έχουν κοινή τιμή $ARL(0)$, του καταλληλότερου διαγράμματος ελέγχου για την ανίχνευση μετατόπισης του μέσου της διεργασίας από την

εντός ελέγχου τιμή μ στην εκτός ελέγχου τιμή $\mu + \delta\sigma$, θα επιλέξουμε εκείνο που έχει την μικρότερη τιμή $ARL(\delta)$. Από τη στιγμή που στους διάφορους κανόνες ευαισθητοποίησης του Πίνακα 1.3 αντιστοιχεί διαφορετική τιμή για το $ARL(0)$ στα αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου, απουσιάζει εκ των πραγμάτων το αντικειμενικό κριτήριο σύγκρισης των διαγραμμάτων με αποτέλεσμα να δυσχεραίνεται η επιλογή του βέλτιστου διαγράμματος για κάθε συγκεκριμένη μετατόπιση του μέσου.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, στο παρόν κεφάλαιο θα αναπτύξουμε διαγράμματα ελέγχου Shewhart με κανόνες ευαισθητοποίησης που βασίζονται σε ροές στα οποία μπορούμε να έχουμε οποιαδήποτε τιμή για το $ARL(0)$. Φυσικά κάτι τέτοιο μπορεί να επιτευχθεί μόνο όταν τα όρια ελέγχου μεταβάλλονται ανάλογα με την τιμή του $ARL(0)$. Τυπική τιμή για το $ARL(0)$ θεωρείται το 740.8 για μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου και το 370.4 για δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου (αντιστοιχούν στο κλασικό μονόπλευρο και το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart για $L = 3$).

Κλασικό άνω διάγραμμα ελέγχου	
UCL	$= \mu_w + L\sigma_w$
$Center\ Line$	$= \mu_w$

Κλασικό κάτω διάγραμμα ελέγχου	
$Center\ Line$	$= \mu_w$
LCL	$= \mu_w - L\sigma_w$

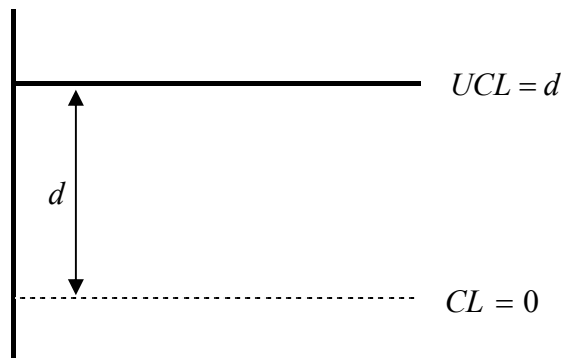
Κλασικό δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου	
UCL	$= \mu_w + L\sigma_w$
$Center\ Line$	$= \mu_w$
LCL	$= \mu_w - L\sigma_w$

Τα μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται όταν θέλουμε να ανιχνεύσουμε μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας είτε σε υψηλότερο επίπεδο (άνω διάγραμμα ελέγχου) είτε σε χαμηλότερο επίπεδο (κάτω διάγραμμα ελέγχου). Τα δίπλευρα διαγράμματα χρησιμοποιούνται όταν θέλουμε να ανιχνεύσουμε ταυτόχρονα μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας σε υψηλότερο και σε χαμηλότερο επίπεδο.

2.2 Μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου Shewhart τύπου k .

Ορίζουμε το άνω (μονόπλευρο) διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου k ως το διάγραμμα ελέγχου το οποίο έχει μόνο άνω όριο ελέγχου (UCL) και το οποίο δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν k συνεχόμενα σημεία του διαγράμματος βρεθούν πάνω από το άνω όριο ελέγχου (το k είναι ένας θετικός ακέραιος). Προφανώς για $k=1$ αναγόμαστε στον κλασικό κανόνα ανακήρυξης μιας διεργασίας εκτός ελέγχου σε ένα άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart.

Το βασικότερο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε στην ανάπτυξη του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k είναι η εύρεση του άνω ορίου ελέγχου έτσι ώστε να έχουμε προκαθορισμένη τιμή για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL_k ($ARL_k \equiv ARL_k(0)$). Ας υποθέσουμε ότι στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζονται οι τιμές W_t , $t \geq 1$, μιας εντός ελέγχου στατιστικής συνάρτησης W που ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή ($W \sim N(0,1)$), δηλαδή $\mu=0$ και $\sigma=1$ (αν η στατιστική συνάρτηση W δεν ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή τότε στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζουμε τυποποιημένες τιμές της W). Η εύρεση του άνω ορίου ελέγχου UCL ισοδυναμεί με την εύρεση της απόστασης d του UCL από την κεντρική γραμμή CL όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα



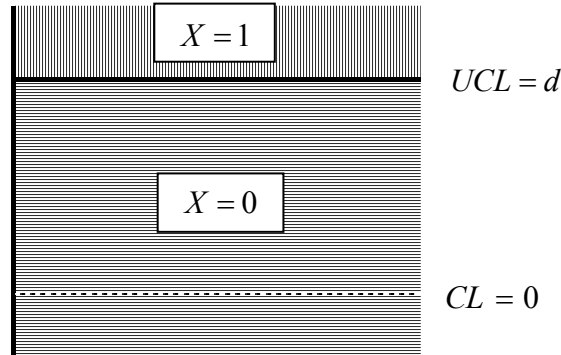
Ορίζουμε μια ακολουθία δίτιμων $\{0,1\}$ τυχαίων μεταβλητών $\{X_t, t \geq 1\}$ σύμφωνα με τις σχέσεις

$$P(X_t = 1) = P(W_t > d) = 1 - \Phi(d) = p, \quad P(X_t = 0) = P(W_t \leq d) = \Phi(d) = 1 - p = q, \quad t \geq 1.$$

Αφού οι τυχαίες μεταβλητές W_t , $t \geq 1$, αποτελούν τυχαίο δείγμα από την W προκύπτει ότι και οι τυχαίες μεταβλητές X_t , $t \geq 1$, αποτελούν τυχαίο δείγμα από την X με

$$P(X = 1) = P(W > d) = 1 - \Phi(d) = p, \quad P(X = 0) = P(W \leq d) = \Phi(d) = 1 - p = q.$$

Με αυτό τον τρόπο το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου k χωρίζεται σε δύο ζώνες ανάλογα με τις τιμές που παίρνει η τυχαία μεταβλητή X που δίνονται στο ακόλουθο σχήμα



Η κατανομή του (εντός ελέγχου) μήκους ροής T_k του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k είναι ίδια με την κατανομή του αριθμού N_k των ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας

$$p = P(X = 1) = P(W > d)$$

έως ότου εμφανιστούν k συνεχόμενες επιτυχίες για πρώτη φορά. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής N_k αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως γεωμετρική κατανομή τάξης k (*geometric distribution of order k*) και με αυτή έχουν ασχοληθεί αρκετοί ερευνητές (δείτε για παράδειγμα Feller (1968), Philipou and Muwafi (1982), Philippou *et al.* (1983a), Aki *et al.* (1984), Aki (1985), Viveros and Balakrishnan (1993), Koutras (1997a, 1997b), Antzoulakos (1999), Balakrishnan and Koutras (2001)). Φυσικά για $k = 1$ έχουμε ότι η τυχαία μεταβλητή N_1 ακολουθεί τη συνήθη γεωμετρική κατανομή. Για την τυχαία μεταβλητή N_k που δηλώνει το πλήθος των δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p που πρέπει να εκτελεστούν έως ότου εμφανιστούν k συνεχόμενες επιτυχίες για πρώτη φορά έχουμε ότι η πιθανογεννήτρια συνάρτησή της $G(z)$ δίδεται από τον τύπο

$$G(z) = E(z^{N_k}) = \frac{(pz)^k}{1 - qzA(z)},$$

όπου

$$A(z) = \frac{1 - (pz)^k}{1 - pz},$$

και

$$E(N_k) = \frac{1-p^k}{qp^k}, \quad \text{Var}(N_k) = \frac{1-(2k+1)qp^k - p^{2k+1}}{(qp^k)^2}.$$

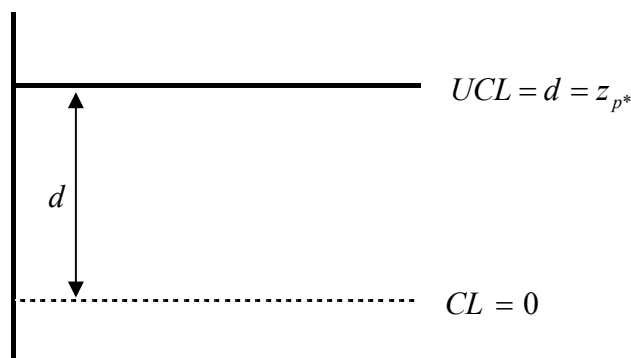
Επομένως, το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k δίνεται από τη σχέση

$$ARL_k = E(T_k) = \frac{1-p^k}{qp^k}, \quad p = 1 - \Phi(d).$$

Η συνάρτηση $g(p) = (1-p^k)/(1-p)p^k$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $(0, 1)$ και ισχύει ότι $\lim_{p \rightarrow 0} g(p) = +\infty$, $\lim_{p \rightarrow 1} g(p) = k$. Συνεπώς η εξίσωση $g(p) = c$, όπου $c > k$ έχει μοναδική λύση ως προς p στο διάστημα $(0, 1)$.

Έχουμε τώρα στη διάθεσή μας όλα τα απαραίτητα εργαλεία για την ανάπτυξη του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k που περιγράφεται στα ακόλουθα βήματα

- Βήμα 1. Επιλέγουμε το k και το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL_k που επιθυμούμε.
- Βήμα 2. Λύνουμε την εξίσωση $ARL_k = (1-p^k)/(1-p)p^k$ ως προς p ($p \in (0,1)$) και έστω ότι προέκυψε η λύση p^* .
- Βήμα 3. Καθορίζουμε το άνω όριο ελέγχου $UCL = d$ από τη σχέση $p^* = P(W > d) = 1 - \Phi(d)$, δηλαδή $UCL = d = \Phi^{-1}(1 - p^*) = z_{p^*}$.
- Βήμα 4. Ανακηρύσσουμε τη διεργασία εκτός ελέγχου αν k συνεχόμενα σημεία του διαγράμματος βρεθούν πάνω από το άνω όριο ελέγχου.



Από τη στιγμή που καθορίστηκε το άνω όριο ελέγχου του (άνω) διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής. Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης W έχει αλλάξει λόγω μετατόπισης

του μέσου σε υψηλότερο επίπεδο (από τη θέση $\mu = 0$ στη θέση $\mu + \delta\sigma = \delta$) ενώ η διακύμανσή της δεν έχει αλλάξει. Επομένως η στατιστική συνάρτηση $W(\delta)$ που απεικονίζεται στο άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου k ακολουθεί την κατανομή $N(\mu + \delta\sigma, \sigma^2) = N(\delta, 1)$, $\delta \geq 0$. Ορίζοντας την τυχαία μεταβλητή $X(\delta)$ ως ακολούθως

$$p(\delta) = P(X(\delta) = 1) = P(W(\delta) > d) = 1 - \Phi(d - \delta)$$

$$1 - p(\delta) = P(X(\delta) = 0) = P(W(\delta) \leq d) = \Phi(d - \delta)$$

έχουμε ότι η κατανομή του μήκους ροής $T_k(\delta)$ ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή τάξης k με πιθανότητα επιτυχίας $p(\delta)$. Συνεπώς το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_k(\delta)$ δίνεται από τη σχέση

$$ARL_k(\delta) = E(T_k(\delta)) = \frac{1 - (p(\delta))^k}{[1 - p(\delta)](p(\delta))^k}$$

Φυσικά για $\delta = 0$ έχουμε ότι η ποσότητα $ARL_k(0)$ είναι ίση με το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής αφού σε αυτή την περίπτωση σύμφωνα με τους συμβολισμούς που έχουμε εισάγει, $W \sim W(0)$, $X \sim X(0)$, $T_k \sim T_k(0)$, $p = p(0)$ οπότε $ARL_k = ARL_k(0)$.

Ο υπολογισμός της συνάρτησης πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής του μήκους ροής $T_k(\delta)$ ανάγεται στον υπολογισμό των αντίστοιχων ποσοτήτων για την τυχαία μεταβλητή N_k . Για τη συνάρτηση πιθανότητας και τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής N_k υπάρχουν ακριβείς αλλά και αναδρομικοί τύποι (δείτε για παράδειγμα Philipou and Mufawi (1982), Uppuluri and Patil (1983), Philipou and Makri (1985), Philipou and Makri (1986), Museli (1996), Koutras (1997a), Antzoulakos (1999), Balakrishnan and Koutras (2001)). Στη συνέχεια θα δώσουμε τύπους για τη συνάρτηση κατανομής και τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής N_k βασιζόμενοι στη μεθολογία που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 1. Στην περίπτωση μας έχουμε μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli $\{X_t, t \geq 1\}$ με πιθανότητα επιτυχίας p , $A = \{0, 1\}$ και μας ενδιαφέρει η εμφάνιση του ενδεχομένου $E = \underbrace{11\dots 1}_k$ για πρώτη φορά. Αποσυνθέτουμε το ενδεχόμενο E στα ακόλουθα k κομμάτια (όσο και το μήκος του ενδεχομένου)

$$2 \equiv 1, \quad 3 \equiv 11, \quad \dots, \quad k + 1 \equiv \underbrace{11\dots 1}_k$$

και ορίζουμε επιπρόσθετα

$$1 \equiv 0.$$

Ορίζουμε μια διακριτή ομογενή αλυσίδα Markov $\{Y_t, t \geq 1\}$ με χώρο καταστάσεων $\Omega = \{1, 2, \dots, k, k+1\}$, όπου η κατάσταση $k+1$ είναι απορροφητική. Οι αρχικές πιθανότητες είναι ίσες με

$$\boldsymbol{\pi}'_1 = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k, \pi_{k+1}] = [P(Y_1 = 1), P(Y_1 = 2), \dots, P(Y_1 = k), P(Y_1 = k+1)] = [q, p, 0, \dots, 0]$$

και ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης είναι ίσος με

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{ccccc|c} q & p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ q & 0 & 0 & \dots & 0 & p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]_{(k+1) \times (k+1)}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1 του Κεφαλαίου 1 έχουμε ότι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής N_k δίνεται από τον τύπο

$$F_{N_k}(n) = P(N_k \leq n) = \boldsymbol{\pi}'_1 \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{e}_{k+1} = (\mathbf{e}'_1 \mathbf{P}) \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{e}'_1 \mathbf{P}^n \mathbf{e}_{k+1} \quad n = 1, 2, \dots$$

όπου $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)'$ και $\mathbf{e}_{k+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)'$. Επίσης, η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής N_k δίνεται από τον τύπο

$$f_{N_k}(n) = F_{N_k}(n) - F_{N_k}(n-1) = \mathbf{e}'_1 \mathbf{P}^{n-1} (\mathbf{P} - \mathbf{I}) \mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{e}'_1 \mathbf{P}^{n-1} p \mathbf{e}_k = p \mathbf{e}'_1 \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{e}_k \quad n = 1, 2, \dots$$

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση πιθανότητας και τη συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_k(\delta)$ του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k αντικαθιστώντας απλά την πιθανότητα επιτυχίας p με την πιθανότητα

$$p(\delta) = 1 - \Phi(d - \delta).$$

Από τη στιγμή που είναι διαθέσιμη η συνάρτηση πιθανότητας (και η συνάρτηση κατανομής) του μήκους ροής $T_k(\delta)$ μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε ποσοστιαία σημεία του μήκους ροής $T_k(\delta)$.

Κλείνοντας τη μελέτη του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k σημειώνουμε ότι με ανάλογο τρόπο μπορεί να αναπτυχθεί και το κάτω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου k .

Όλα τα αποτελέσματα που θα δοθούν στη συνέχεια για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου k μπορούν αυτομάτως να αναχθούν σε αντίστοιχα αποτελέσματα για το κάτω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου k λαμβάνοντας υπόψη ότι η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης W που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου είναι συμμετρική κατανομή.

2.3 Μελέτη του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k

Στο κλασικό άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart απεικονίζονται οι διαδοχικές τιμές μιας στατιστικής συνάρτησης W η οποία ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή και επομένως έχουμε ότι

$$UCL = \mu_w + L\sigma_w = L$$

(επαναλαμβάνουμε ότι αν η στατιστική συνάρτηση W δεν ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή τότε στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζουμε τυποποιημένες τιμές της W). Η διεργασία ανακηρύσσεται εκτός ελέγχου όταν βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος πάνω από το άνω όριο ελέγχου UCL .

Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής του παραπάνω διαγράμματος δίνεται από τη σχέση

$$ARL_{in} = \frac{1}{p_{in}}$$

όπου

$$p_{in} = \Pr(W > L | W \sim N(0,1)) = 1 - \Phi(L).$$

Στην πράξη, οι πιο συνήθεις τιμές για το L είναι οι 2.5, 3 και 3.5. Για αυτές τις τιμές του L έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα για τις ποσότητες p_{in} και ARL_{in}

L	p_{in}	ARL_{in}
2.5	0.00621	161.04
3	0.0027	740.8
3.5	0.000233	4298.7

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 2.2 θα δώσουμε στη συνέχεια αποτελέσματα που αφορούν το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου k για $k=1(1)5$ με τιμές για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_k(0)$ ίσες με 161.04, 740.8 και 4298.7 έτσι ώστε να υπάρχει κοινή βάση σύγκρισης των νέων διαγραμμάτων ελέγχου με το κλασικό άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart για $L=2.5, 3$ και 3.5 αντίστοιχα. Φυσικά το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 1 με εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_1(0) = 161.04, 740.8$ και 4298.7 συμπίπτει με το κλασικό άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart για $L=2.5, 3$ και 3.5 αντίστοιχα.

2.3.1 Μελέτη του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k με $ARL_k(0) = 161.04$ για $k = 1(1)5$.

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τιμές για το μέσο μήκος ροής $ARL_k(\delta) = E(T_k(\delta))$ του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k για $k=1(1)5$ και για $\delta=0(0.2)3$ με $ARL_k(0) = 161.04$. Τα σκιασμένα τετράγωνα δηλώνουν το $\min\{ARL_k(\delta); k=1(1)5\}$.

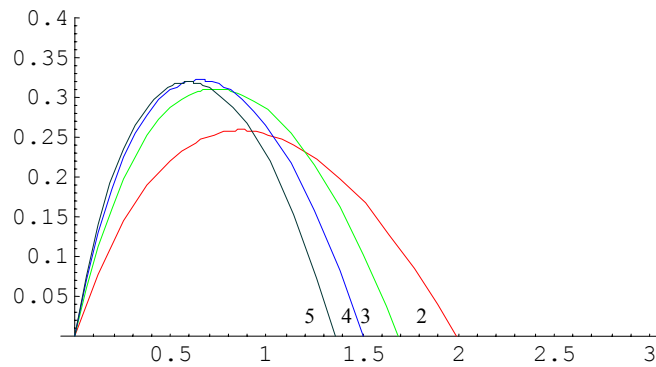
Πίνακας 2.1: Μέσο μήκος ροής $ARL_k(\delta)$ για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου k για $k=1(1)5$ με $ARL_k(0)=161.04$

δ	$ARL_1(\delta)$	$ARL_2(\delta)$	$ARL_3(\delta)$	$ARL_4(\delta)$	$ARL_5(\delta)$
0	161.04	161.04	161.04	161.04	161.04
0.2	93.25	82.08	77.63	75.46	74.36
0.4	55.98	44.99	41.39	39.97	39.47
0.6	34.82	26.47	24.26	23.66	23.71
0.8	22.44	16.65	15.51	15.46	15.85
1.0	14.97	11.16	10.71	11.01	11.59
1.2	10.33	7.92	7.92	8.43	9.12
1.4	7.37	5.94	6.22	6.85	7.62
1.6	5.43	4.67	5.13	5.85	6.67
1.8	4.13	3.83	4.42	5.20	6.06
2.0	3.24	3.26	3.95	4.78	5.67
2.2	2.62	2.87	3.62	4.49	5.41
2.4	2.17	2.59	3.41	4.31	5.25
2.6	1.85	2.40	3.26	4.19	5.15
2.8	1.62	2.27	3.16	4.11	5.08
3.0	1.45	2.17	3.10	4.06	5.05
p^*	0.00620964	0.0819672	0.197265	0.306981	0.40003
UCL	2.5	1.39196	0.851431	0.504426	0.253269

Από τις τιμές του παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι χρησιμοποιώντας άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου k , $k \geq 2$, έχουμε σαφή βελτίωση στην τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής όταν θέλουμε να ανιχνεύσουμε μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας σε σχέση με το αντίστοιχο κλασικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart που προκύπτει για $k=1$. Παρατηρούμε επίσης ότι δεν υπάρχει βελτίωση για μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου. Τόσο το εύρος δ της μετατόπισης του μέσου της διεργασίας όσο και το ποσοστό βελτίωσης του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής δεν είναι ομοιόμορφο για τις διάφορες τιμές του k . Το ποσοστό βελτίωσης στην τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k , $k \geq 2$, σε σχέση με το αντίστοιχο κλασικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart δίνεται από τον τύπο

$$I_k(\delta) = \frac{ARL_1(\delta) - ARL_k(\delta)}{ARL_1(\delta)}$$

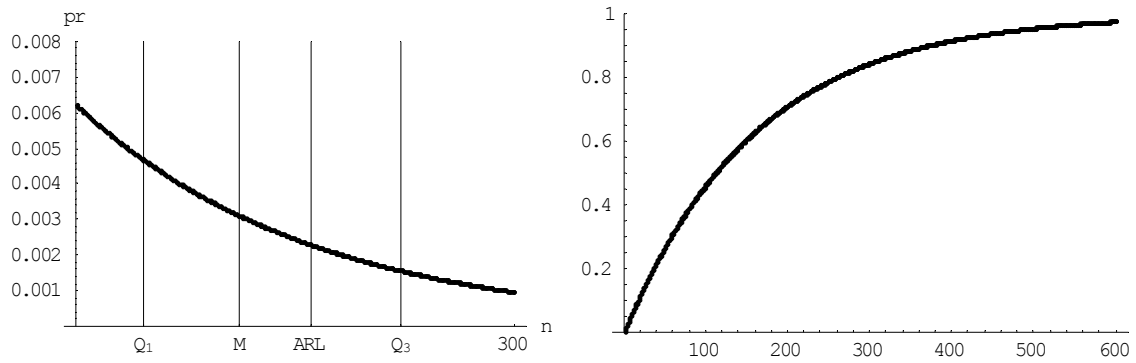
Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $I_k(\delta)$ για $k=2,3,4,5$.



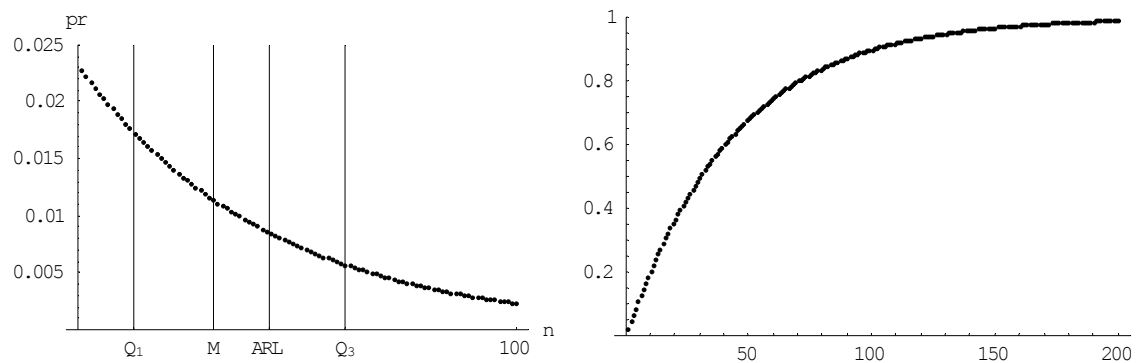
Διάγραμμα 2.1: Γραφική παράσταση του $I_k(\delta)$ για $k = 2(1)5$ με $ARL_{in} = 161.04$

Από τη στιγμή που θα καθοριστεί η μετατόπιση του μέσου της διεργασίας που μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε όσο το δυνατόν πιο γρήγορα, τότε χρησιμοποιώντας το παραπάνω διάγραμμα μπορούμε να επιλέξουμε στην πράξη την τιμή του k ($k = 2,3,4,5$) και συνεπώς το κατάλληλο άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου k που επιτυγχάνει το σκοπό μας.

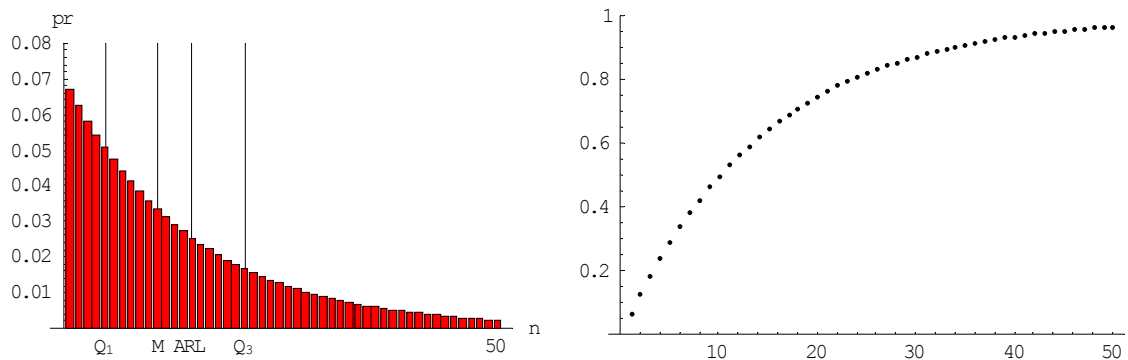
Στα ακόλουθα διαγράμματα δίνονται γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής του μήκους ροής $T_k(\delta)$ του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k για $k = 1(1)5$ και για $\delta = 0, 0.5, 1, 2$.



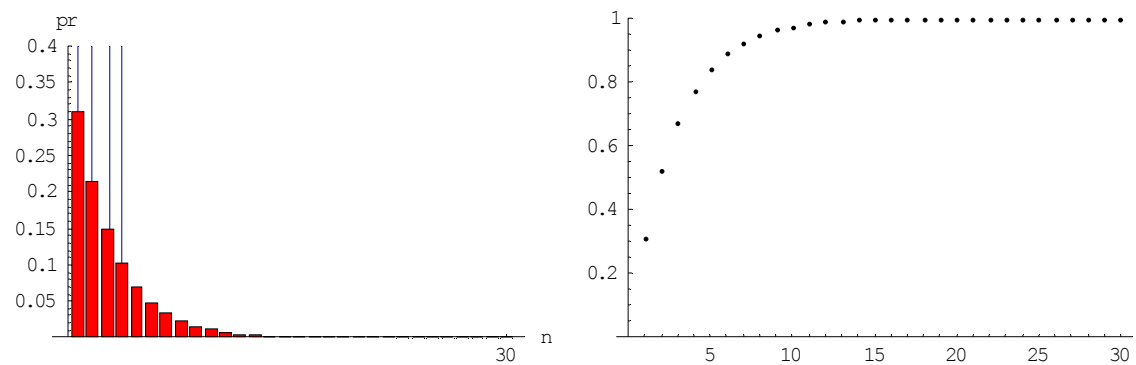
Διάγραμμα 2.2: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(0)$



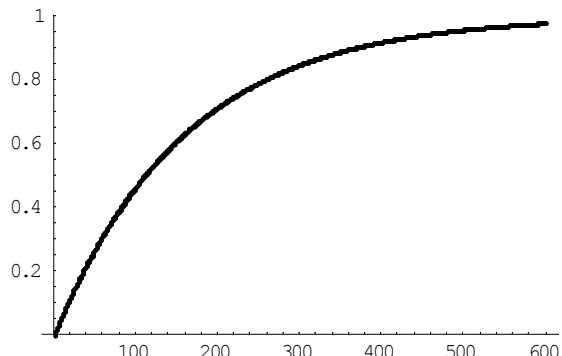
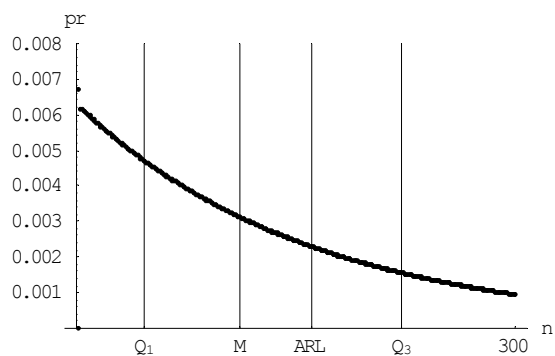
Διάγραμμα 2.3: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(0.5)$



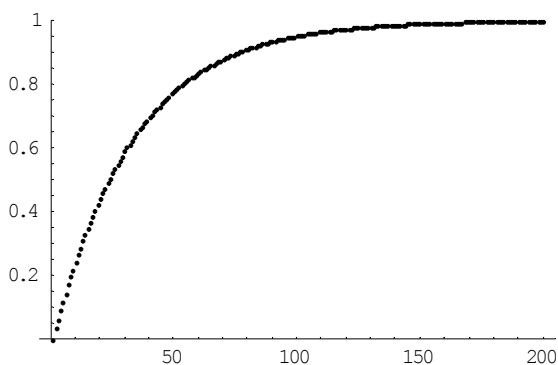
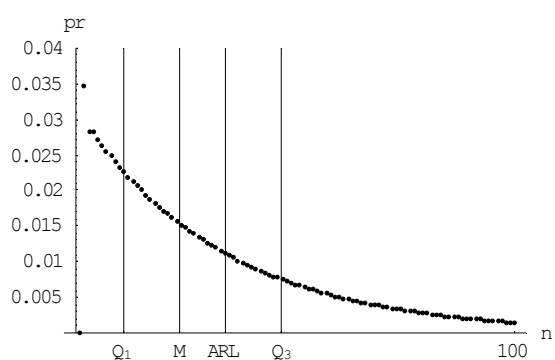
Διάγραμμα 2.4: Συνάρτηση πιθανότητας και κατανομής του μήκους ροής $T_1(1)$



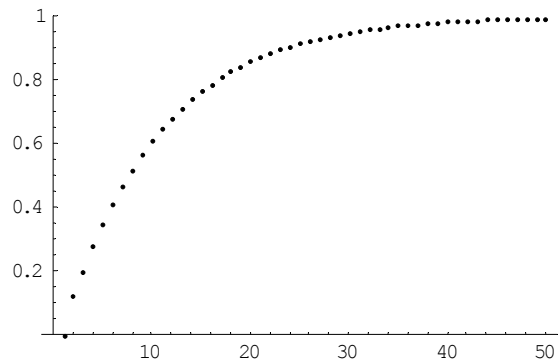
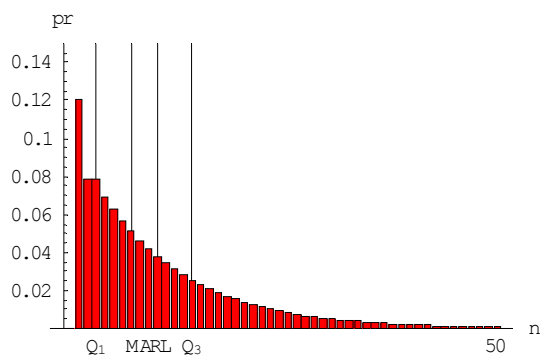
Διάγραμμα 2.5: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(2)$



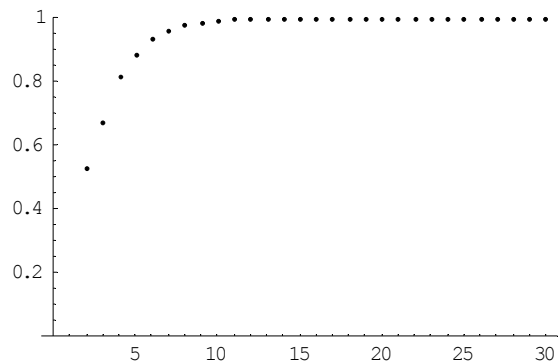
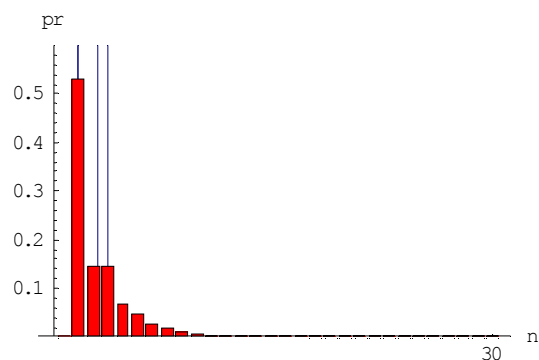
Διάγραμμα 2.6: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(0)$



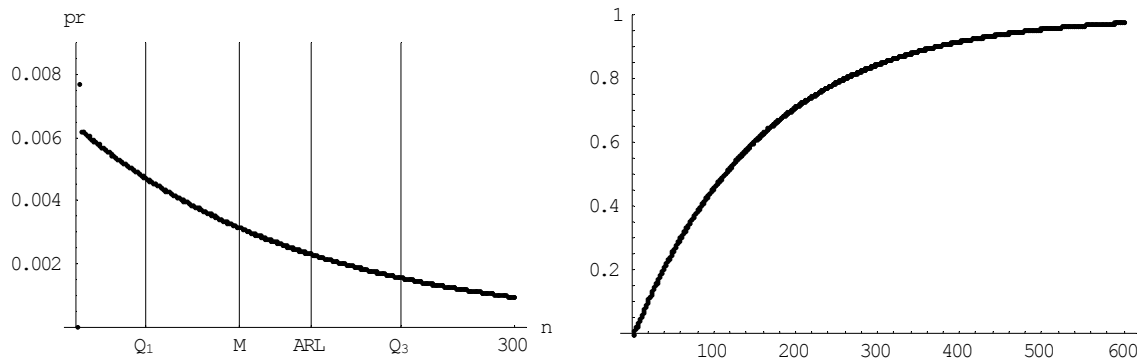
Διάγραμμα 2.7: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(0.5)$



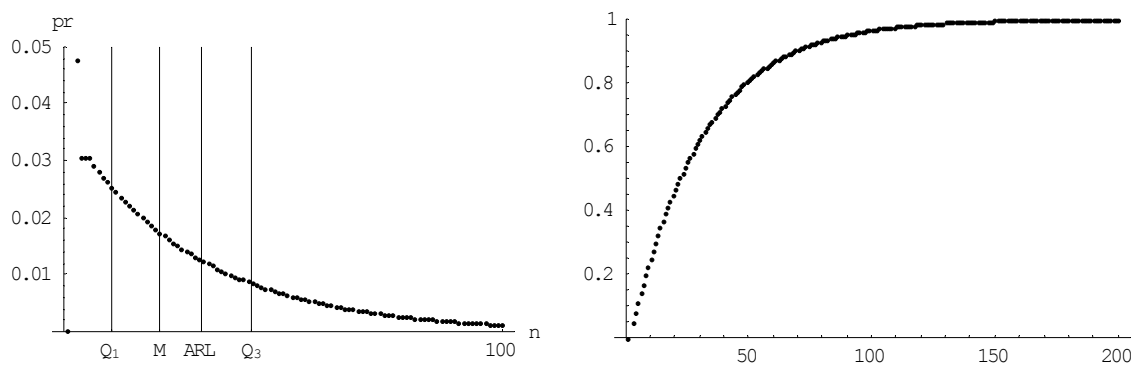
Διάγραμμα 2.8: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(1)$



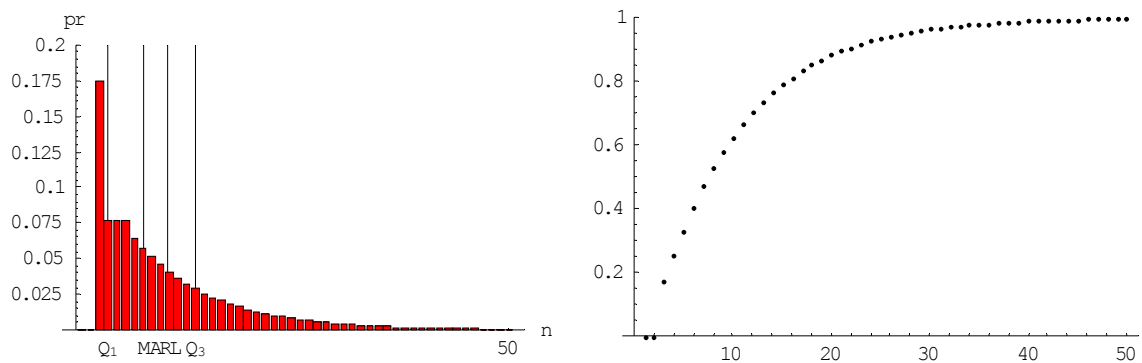
Διάγραμμα 2.9: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(2)$



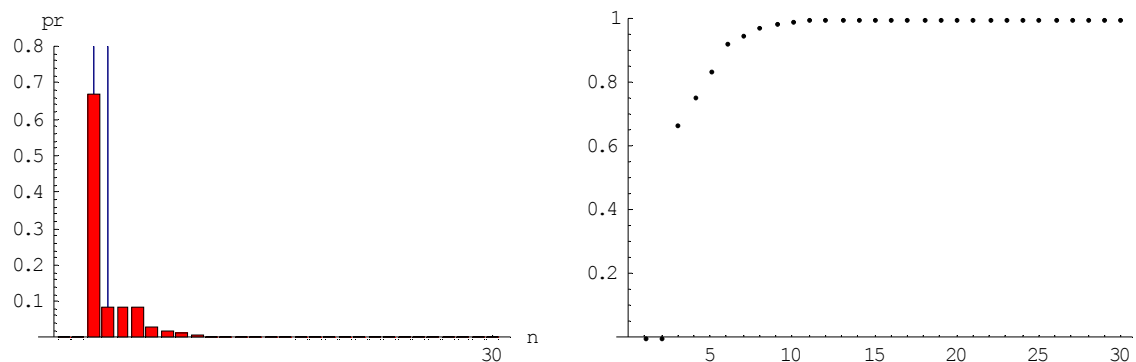
Διάγραμμα 2.10: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(0)$



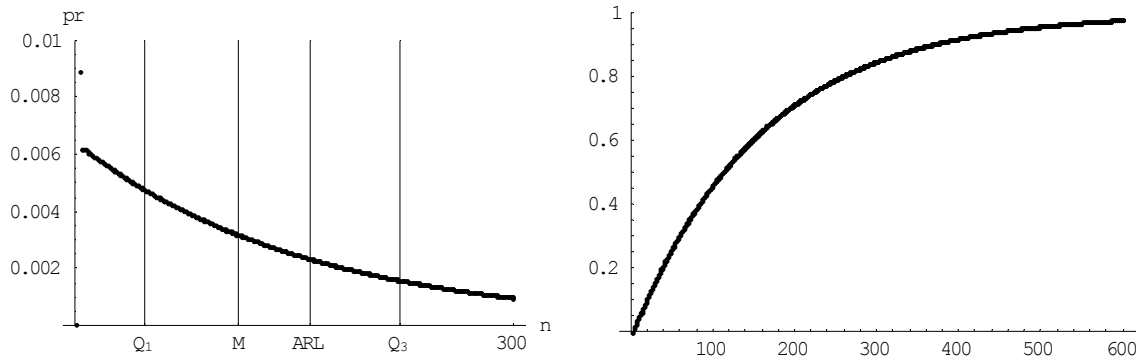
Διάγραμμα 2.11: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(0.5)$



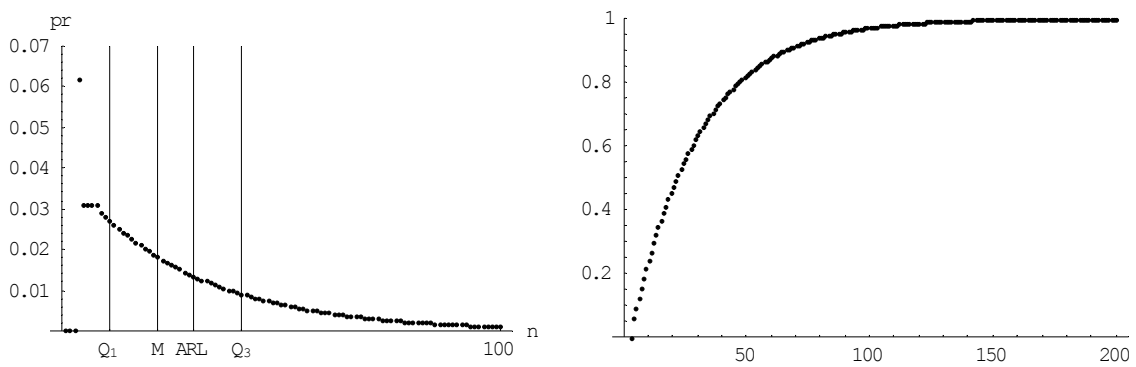
Διάγραμμα 2.12: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(1)$



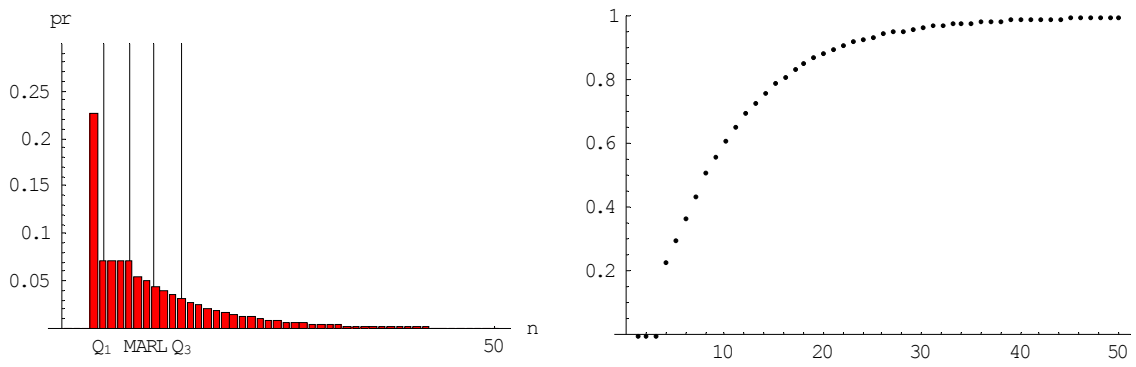
Διάγραμμα 2.13: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(2)$



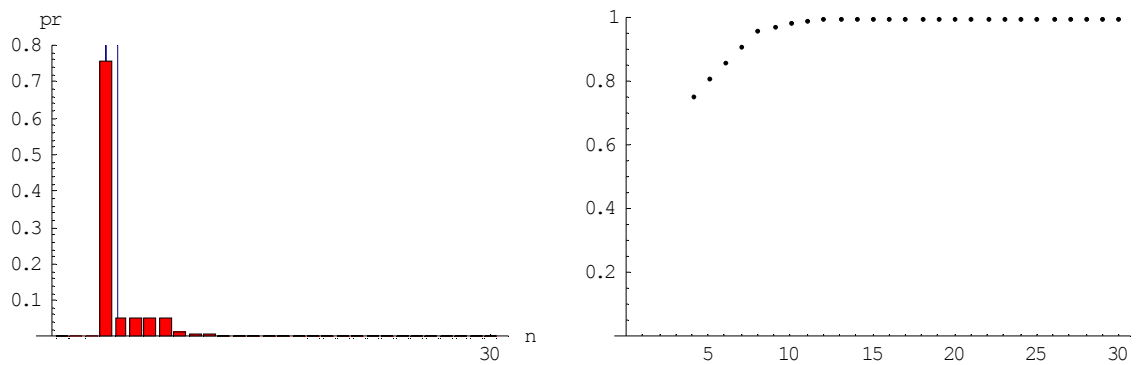
Διάγραμμα 2.14: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(0)$



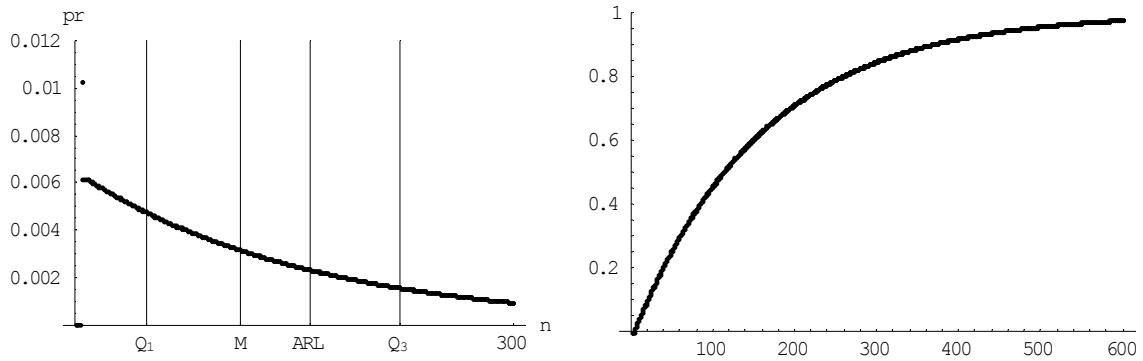
Διάγραμμα 2.15: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(0.5)$



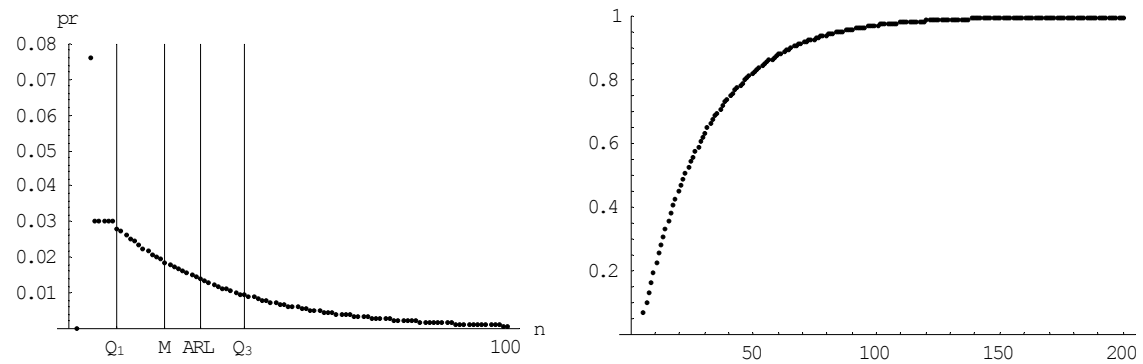
Διάγραμμα 2.16: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(1)$



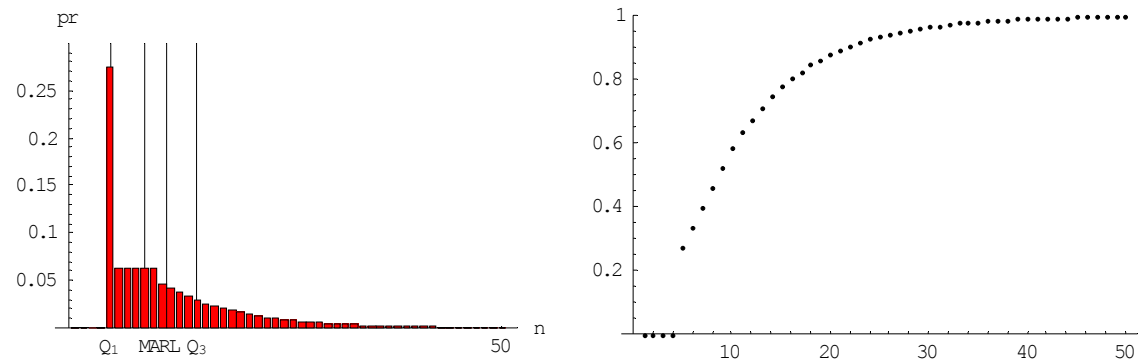
Διάγραμμα 2.17: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(2)$



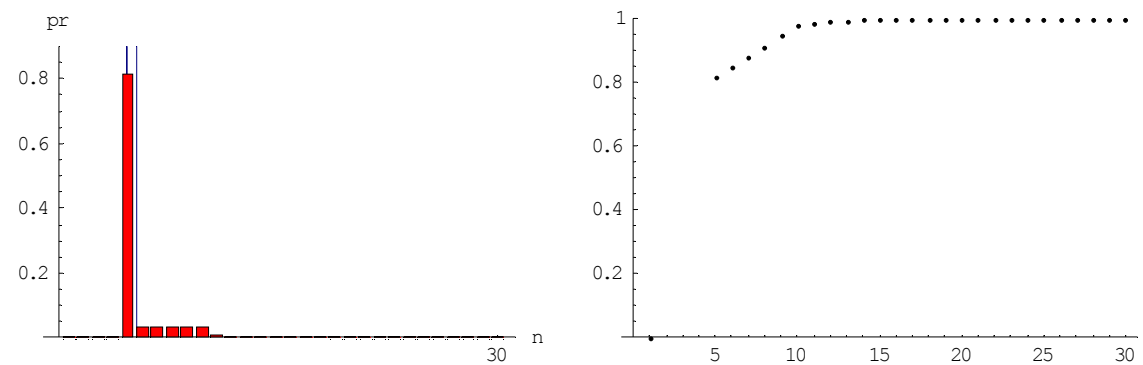
Διάγραμμα 2.18: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(0)$



Διάγραμμα 2.19: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(0.5)$



Διάγραμμα 2.20: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(1)$



Διάγραμμα 2.21: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(2)$

Στους ακόλουθους πίνακες δίνονται τιμές των ποσοτήτων Q_1 , M και Q_3 του μήκους ροής $T_k(\delta)$ του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k για $k=1(1)5$ και για $\delta=0(0.2)3$ που μας βοηθούν στην αξιολόγηση της “αξιοπιστίας” του μέσου μήκους ροής των διαγραμμάτων

Πίνακας 2.2: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 1 με $ARL_1(0) = 161.04$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_1(\delta)$
0	47	112	223	161.04
0.2	27	65	129	93.25
0.4	16	39	77	55.98
0.6	10	24	48	34.82
0.8	7	16	31	22.44
1.0	5	11	21	14.97
1.2	3	7	14	10.33
1.4	2	5	10	7.37
1.6	2	4	7	5.43
1.8	2	3	6	4.13
2.0	1	2	4	3.24
2.2	1	2	3	2.62
2.4	1	2	3	2.17
2.6	1	1	2	1.85
2.8	1	1	2	1.62
3.0	1	1	2	1.45

Πίνακας 2.3: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 2 με $ARL_2(0) = 161.04$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_2(\delta)$
0	47	112	223	161.04
0.2	25	57	113	82.08
0.4	14	32	62	44.99
0.6	9	19	36	26.47
0.8	6	12	23	16.65
1.0	4	8	15	11.16
1.2	3	6	10	7.92
1.4	2	4	8	5.94
1.6	2	4	6	4.67
1.8	2	3	5	3.83
2.0	2	2	4	3.26
2.2	2	2	3	2.87
2.4	2	2	3	2.59
2.6	2	2	2	2.40
2.8	2	2	2	2.27
3.0	2	2	2	2.17

Πίνακας 2.4: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 3 με $ARL_3(0) = 161.04$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_3(\delta)$
0	48	112	222	161.04
0.2	24	54	107	77.63
0.4	13	29	57	41.39
0.6	8	17	33	24.26
0.8	6	11	21	15.51
1.0	4	8	14	10.71
1.2	3	6	10	7.92
1.4	3	5	8	6.22
1.6	3	4	6	5.13
1.8	3	3	5	4.42
2.0	3	3	4	3.95
2.2	3	3	3	3.62
2.4	3	3	3	3.41
2.6	3	3	3	3.26
2.8	3	3	3	3.16
3.0	3	3	3	3.10

Πίνακας 2.5: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 4 με $ARL_4(0) = 161.04$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_4(\delta)$
0	49	113	222	161.04
0.2	24	53	103	75.46
0.4	14	29	54	39.97
0.6	9	17	32	23.66
0.8	6	12	20	15.46
1.0	5	8	14	11.01
1.2	4	7	11	8.43
1.4	4	5	8	6.85
1.6	4	4	7	5.85
1.8	4	4	6	5.20
2.0	4	4	4	4.78
2.2	4	4	4	4.49
2.4	4	4	4	4.31
2.6	4	4	4	4.19
2.8	4	4	4	4.11
3.0	4	4	4	4.06

Πίνακας 2.6: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 5 με $ARL_5(0) = 161.04$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_5(\delta)$
0	49	113	222	161.04
0.2	24	53	102	74.36
0.4	14	28	53	39.47
0.6	9	17	31	23.71
0.8	7	12	21	15.85
1.0	5	9	15	11.59
1.2	5	7	11	9.12
1.4	5	5	9	7.62
1.6	5	5	8	6.67
1.8	5	5	6	6.06
2.0	5	5	5	5.67
2.2	5	5	5	5.41
2.4	5	5	5	5.25
2.6	5	5	5	5.15
2.8	5	5	5	5.08
3.0	5	5	5	5.05

2.3.2 Μελέτη του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k με $ARL_k(0) = 740.8$ για $k = 1(1)5$.

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τιμές για το μέσο μήκος ροής $ARL_k(\delta) = E(T_k(\delta))$ του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k για $k=1(1)5$ και για $\delta=0(0.2)3$ με $ARL_k(0) = 740.8$. Τα σκιασμένα τετράγωνα δηλώνουν το $\min\{ARL_k(\delta); k=1(1)5\}$.

Πίνακας 2.7: Μέσο μήκος ροής $ARL_k(\delta)$ για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου k για $k=1(1)5$ με $ARL_k(0) = 740.8$

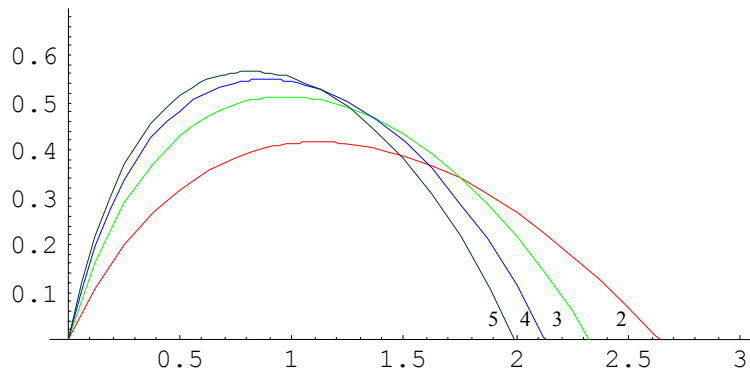
δ	$ARL_1(\delta)$	$ARL_2(\delta)$	$ARL_3(\delta)$	$ARL_4(\delta)$	$ARL_5(\delta)$
0	740.8	740.8	740.8	740.8	740.8
0.2	391.4	326.5	296.5	279.3	268.1
0.4	214.5	155.1	132.2	120.5	113.6
0.6	122.00	79.4	65.4	59.1	55.8
0.8	71.9	43.7	35.8	32.6	31.3
1.0	44.0	25.8	21.5	20.1	19.7
1.2	27.8	16.3	14.00	13.5	13.7
1.4	18.2	10.9	9.9	9.9	10.4
1.6	12.4	7.8	7.4	7.8	8.4
1.8	8.7	5.9	5.9	6.4	7.2
2.0	6.3	4.6	4.9	5.6	6.4
2.2	4.7	3.8	4.3	5.0	5.9
2.4	3.6	3.2	3.9	4.7	5.5
2.6	2.9	2.8	3.6	4.4	5.3
2.8	2.4	2.6	3.4	4.3	5.2
3.0	2.0	2.4	3.2	4.2	5.1
p^*	0.00135	0.037422	0.115055	0.202766	0.285135
UCL	3	1.78142	1.20008	0.831783	0.567653

Από τις τιμές του παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι χρησιμοποιώντας άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου k , $k \geq 2$, έχουμε σαφή βελτίωση στην τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής όταν θέλουμε να ανιχνεύσουμε μικρές και μεσαίες μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας σε σχέση με το αντίστοιχο κλασικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart που προκύπτει για $k=1$. Παρατηρούμε επίσης ότι δεν υπάρχει βελτίωση για μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου. Τόσο το εύρος δ της μετατόπισης του μέσου της διεργασίας όσο και το ποσοστό βελτίωσης του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής δεν είναι ομοιόμορφο για τις διάφορες τιμές του k . Το ποσοστό βελτίωσης στην τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους

ροής του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k , $k \geq 2$, σε σχέση με το αντίστοιχο κλασικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart δίνεται από τον τύπο

$$I_k(\delta) = \frac{ARL_1(\delta) - ARL_k(\delta)}{ARL_1(\delta)}$$

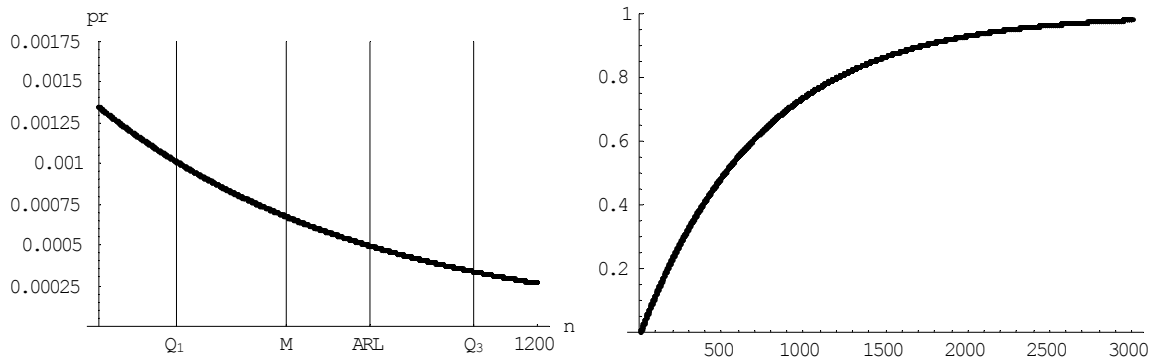
Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $I_k(\delta)$ για $k = 2, 3, 4, 5$.



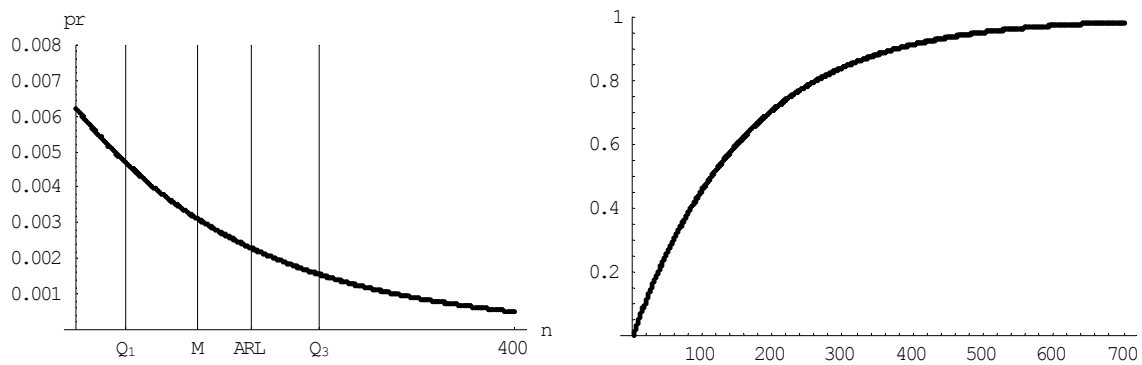
Διάγραμμα 2.22: Γραφική παράσταση του $I_k(\delta)$ για $k = 2(1)5$ με $ARL_{in} = 740.8$

Από τη στιγμή που θα καθοριστεί η μετατόπιση του μέσου της διεργασίας που μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε όσο το δυνατόν πιο γρήγορα, τότε χρησιμοποιώντας το παραπάνω διάγραμμα μπορούμε να επιλέξουμε στην πράξη την τιμή του k ($k = 2, 3, 4, 5$) και συνεπώς το κατάλληλο άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου k που επιτυγχάνει το σκοπό μας.

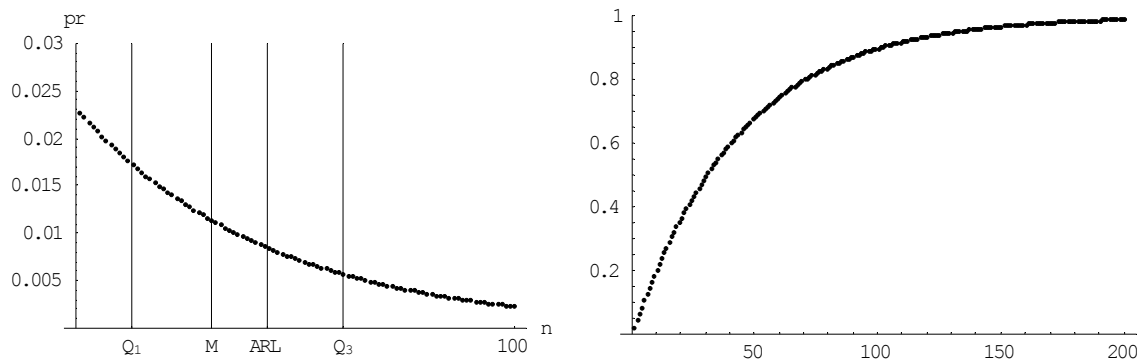
Στα ακόλουθα διαγράμματα δίνονται γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής του μήκους ροής $T_k(\delta)$ του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k για $k = 1(1)5$ και για $\delta = 0, 0.5, 1, 2$.



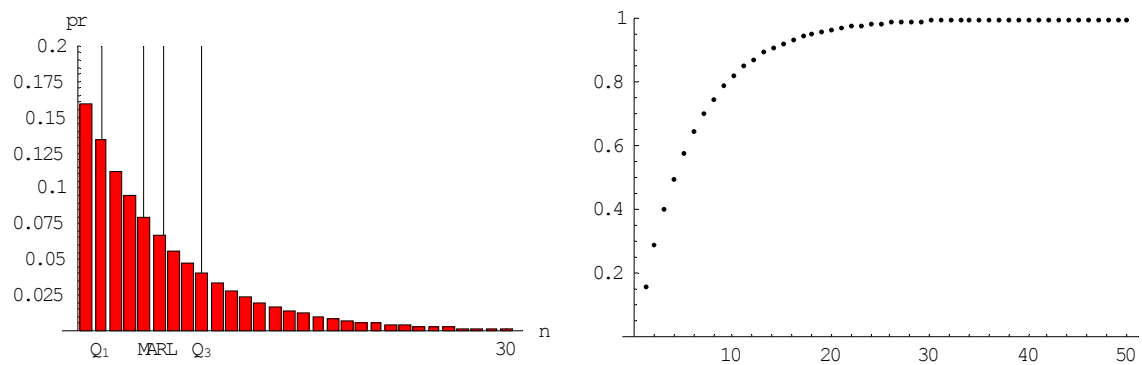
Διάγραμμα 2.23: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(0)$



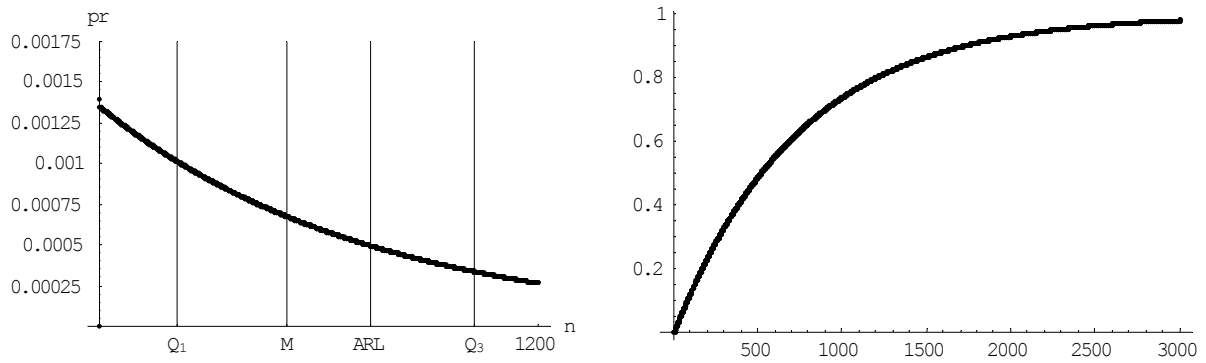
Διάγραμμα 2.24: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(0.5)$



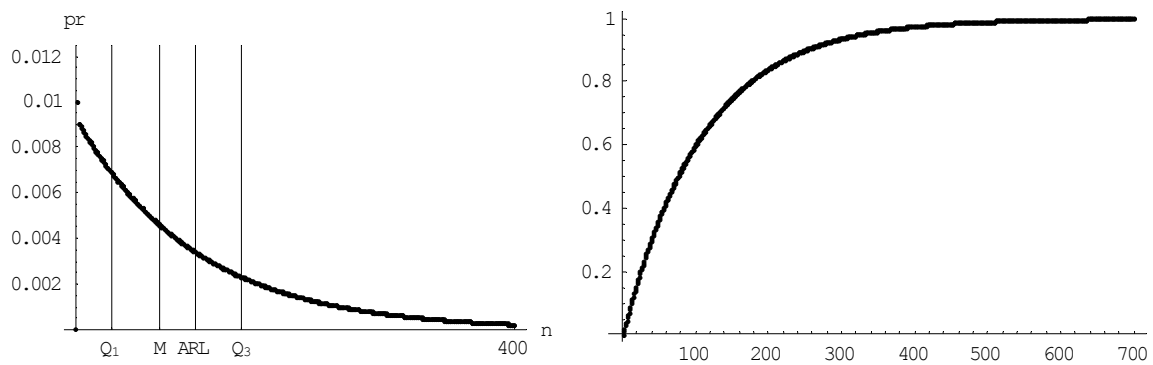
Διάγραμμα 2.25: Συνάρτηση πιθανότητας και κατανομής του μήκους ροής $T_1(1)$



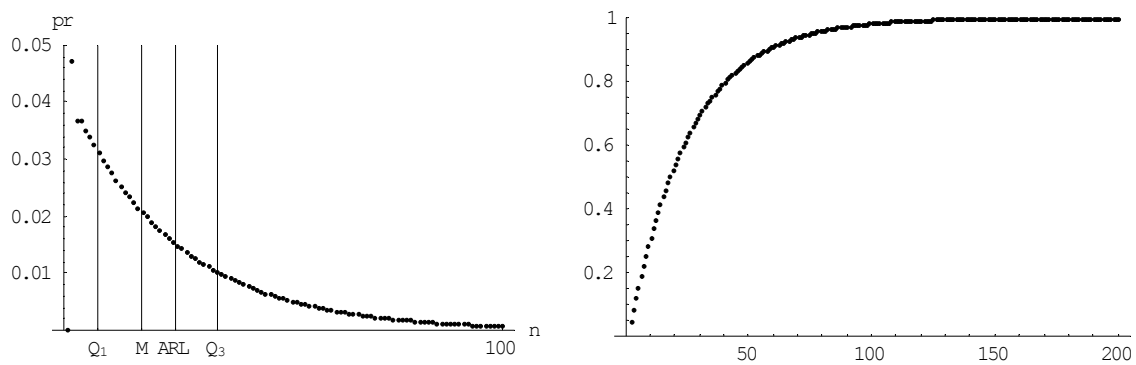
Διάγραμμα 2.26: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(2)$



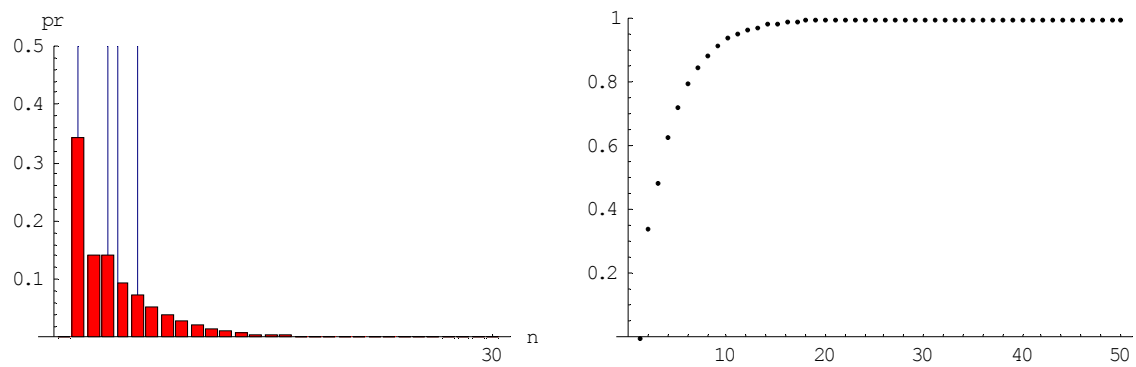
Διάγραμμα 2.27: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(0)$



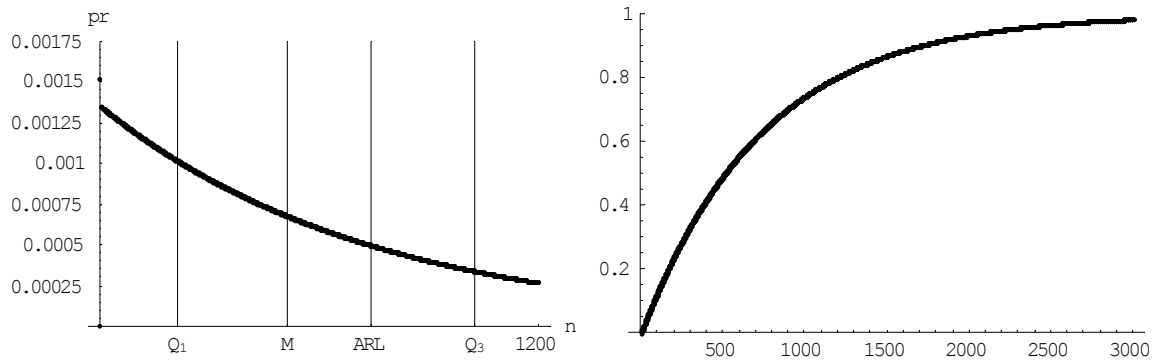
Διάγραμμα 2.28: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(0.5)$



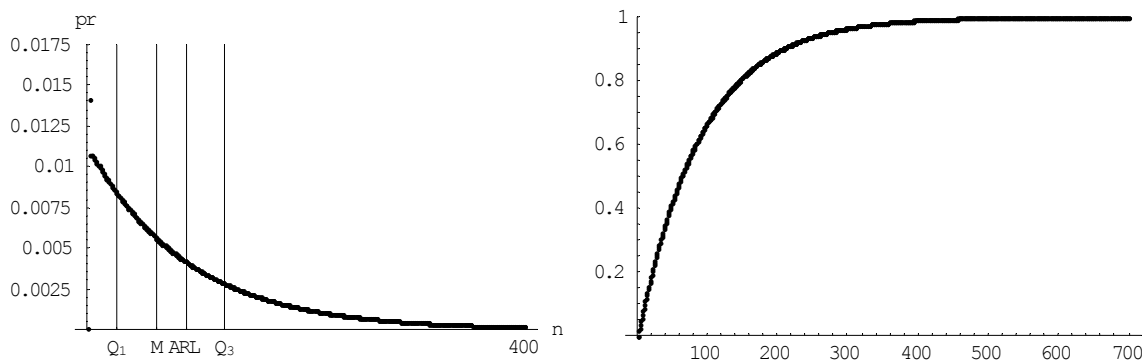
Διάγραμμα 2.29: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(1)$



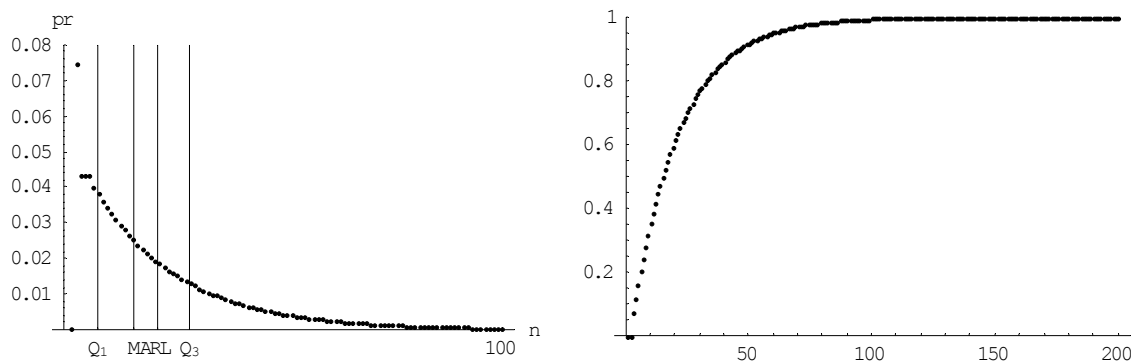
Διάγραμμα 2.30: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(2)$



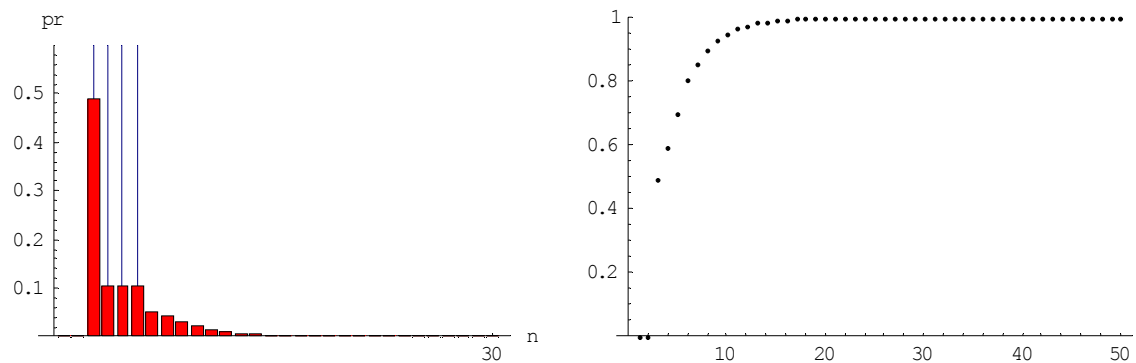
Διάγραμμα 2.31: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(0)$



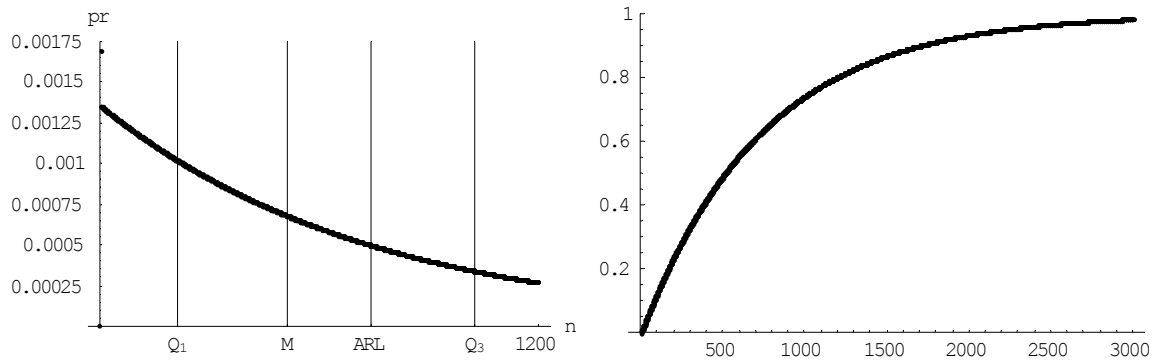
Διάγραμμα 2.32: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(0.5)$



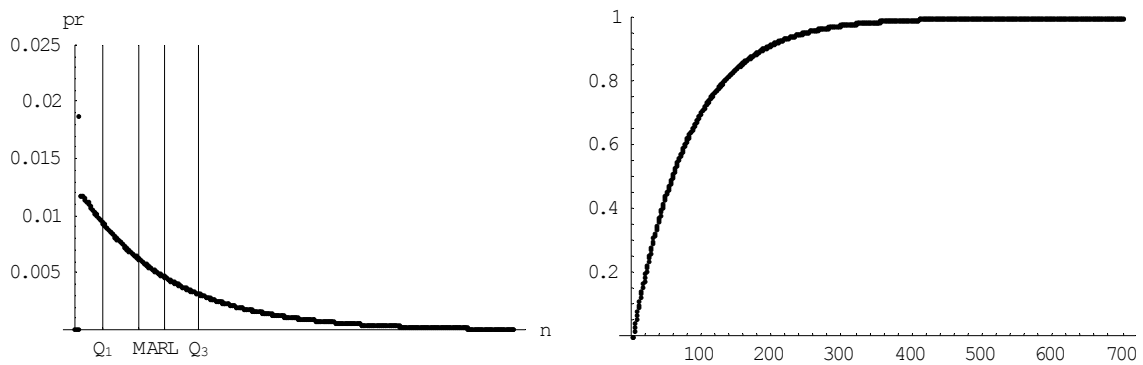
Διάγραμμα 2.33: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(1)$



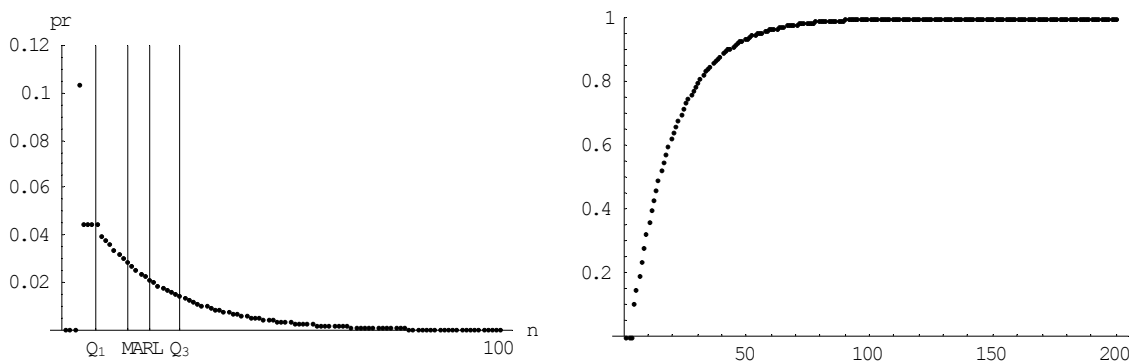
Διάγραμμα 2.34: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(2)$



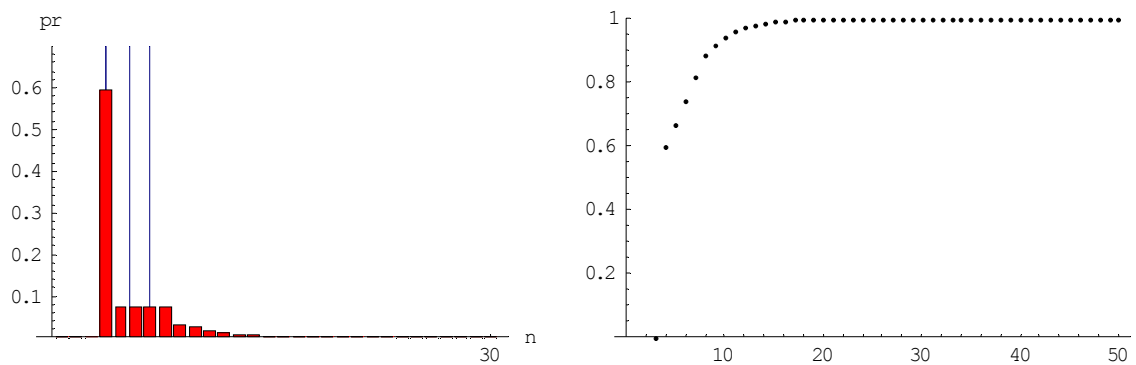
Διάγραμμα 2.35: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(0)$



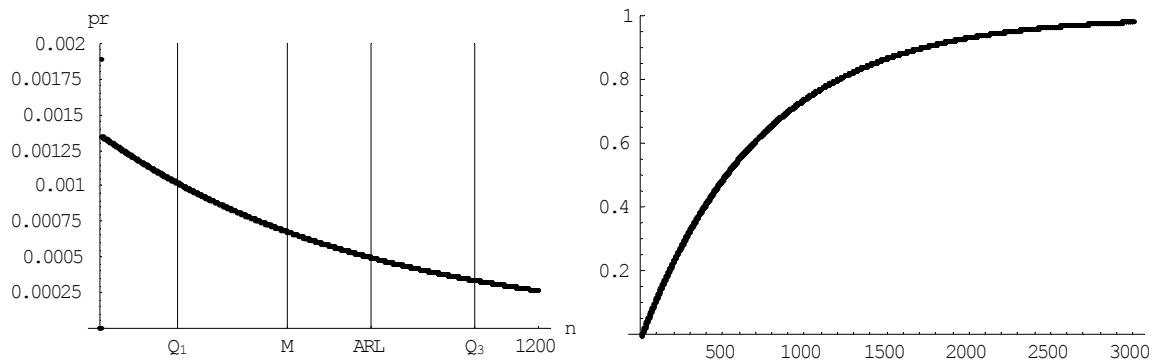
Διάγραμμα 2.36: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(0.5)$



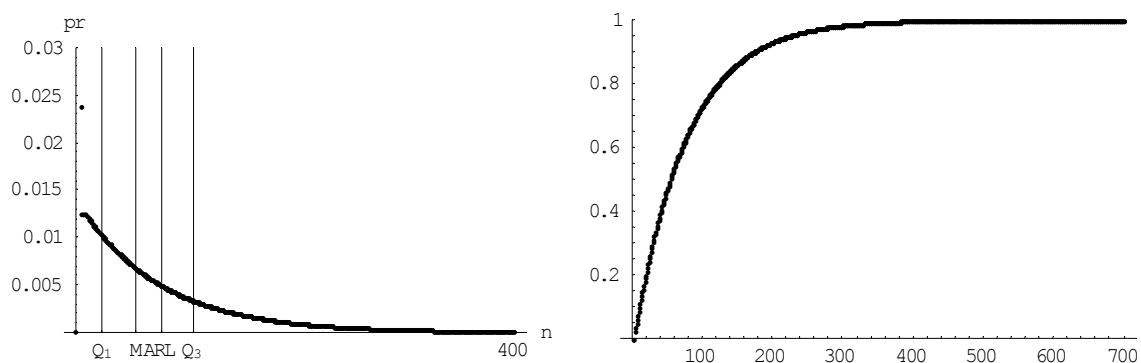
Διάγραμμα 2.37: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(1)$



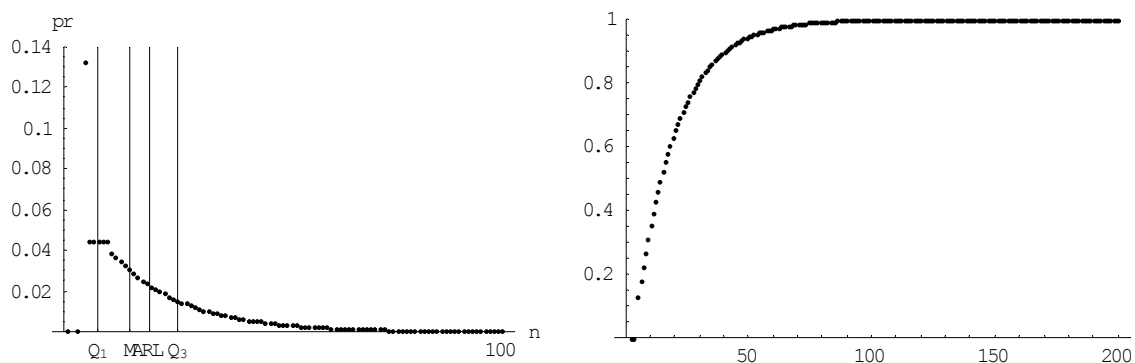
Διάγραμμα 2.38: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(2)$



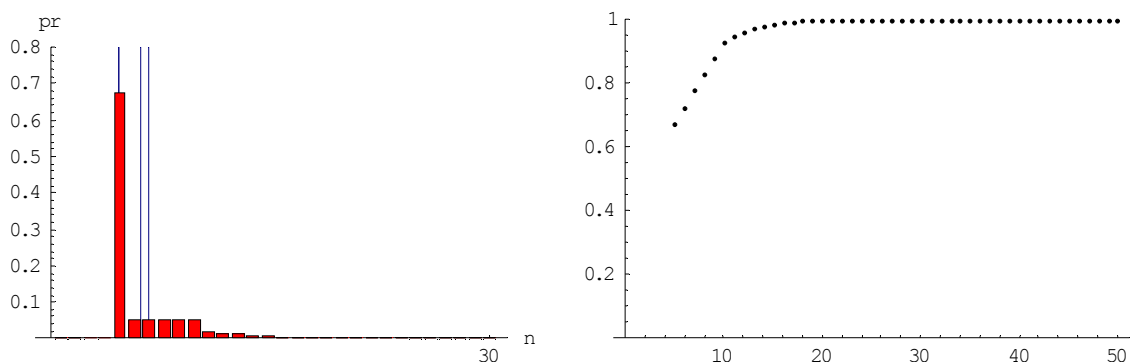
Διάγραμμα 2.39: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(0)$



Διάγραμμα 2.40: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(0.5)$



Διάγραμμα 2.41: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(1)$



Διάγραμμα 2.42: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(2)$

Στους ακόλουθους πίνακες δίνονται τιμές των ποσοτήτων Q_1 , M και Q_3 του μήκους ροής $T_k(\delta)$ του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k για $k=1(1)5$ και για $\delta=0(0.2)3$ που μας βοηθούν στην αξιολόγηση της “αξιοπιστίας” του μέσου μήκους ροής των διαγραμμάτων

Πίνακας 2.8: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 1 με $ARL_1(0) = 740.8$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_1(\delta)$
0	213	514	1027	740.8
0.2	113	271	542	391.4
0.4	62	149	297	214.5
0.6	35	85	169	122.00
0.8	21	50	100	71.9
1.0	13	31	61	44.0
1.2	8	19	38	27.8
1.4	6	13	25	18.2
1.6	4	9	17	12.4
1.8	3	6	12	8.7
2.0	2	5	9	6.3
2.2	2	3	6	4.7
2.4	1	3	5	3.6
2.6	1	2	4	2.9
2.8	1	2	3	2.4
3.0	1	2	2	2.0

Πίνακας 2.9: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 2 με $ARL_2(0) = 740.8$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_2(\delta)$
0	214	514	1026	740.8
0.2	95	227	452	326.55
0.4	46	108	215	155.13
0.6	24	55	109	79.38
0.8	14	31	60	43.68
1.0	8	18	35	25.78
1.2	6	12	22	16.28
1.4	4	8	15	10.94
1.6	3	6	10	7.79
1.8	2	4	8	5.85
2.0	2	4	6	4.61
2.2	2	3	5	3.79
2.4	2	2	4	3.23
2.6	2	2	3	2.85
2.8	2	2	3	2.58
3.0	2	2	2	2.39

Πίνακας 2.10: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 3 με $ARL_3(0) = 740.8$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_3(\delta)$
0	215	514	1026	740.8
0.2	87	206	410	296.5
0.4	40	92	182	132.2
0.6	20	46	90	65.4
0.8	12	25	49	35.8
1.0	8	16	29	21.5
1.2	6	10	19	14.00
1.4	4	7	13	9.9
1.6	3	6	9	7.4
1.8	3	5	7	5.9
2.0	3	4	6	4.9
2.2	3	3	5	4.3
2.4	3	3	4	3.9
2.6	3	3	3	3.6
2.8	3	3	3	3.4
3.0	3	3	3	3.2

Πίνακας 2.11: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 4 με $ARL_4(0) = 740.8$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_4(\delta)$
0	215	514	1026	740.8
0.2	83	195	386	279.3
0.4	37	84	166	120.5
0.6	19	42	81	59.1
0.8	11	23	44	32.6
1.0	8	15	27	20.1
1.2	6	10	18	13.5
1.4	4	8	13	9.9
1.6	4	6	10	7.8
1.8	4	5	8	6.4
2.0	4	4	7	5.6
2.2	4	4	5	5.0
2.4	4	4	4	4.7
2.6	4	4	4	4.4
2.8	4	4	4	4.3
3.0	4	4	4	4.2

Πίνακας 2.12: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 5 με $ARL_5(0) = 740.8$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_5(\delta)$
0	216	515	1025	740.8
0.2	80	187	370	268.1
0.4	35	80	156	113.6
0.6	19	40	76	55.8
0.8	12	23	42	31.3
1.0	8	15	26	19.7
1.2	6	10	18	13.7
1.4	5	8	13	10.4
1.6	5	6	10	8.4
1.8	5	5	9	7.2
2.0	5	5	7	6.4
2.2	5	5	5	5.9
2.4	5	5	5	5.5
2.6	5	5	5	5.3
2.8	5	5	5	5.2
3.0	5	5	5	5.1

2.3.3 Μελέτη του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k με $ARL_k(0) = 4298.7$ για $k = 1(1)5$.

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τιμές για το μέσο μήκος ροής $ARL_k(\delta) = E(T_k(\delta))$ του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k για $k=1(1)5$ και για $\delta=0(0.2)3$ με $ARL_k(0) = 4298.7$. Τα σκιασμένα τετράγωνα δηλώνουν το $\min\{ARL_k(\delta); k=1(1)5\}$.

Πίνακας 2.13: Μέσο μήκος ροής $ARL_k(\delta)$ για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου k για $k = 1(1)5$ με $ARL_k(0) = 4298.7$

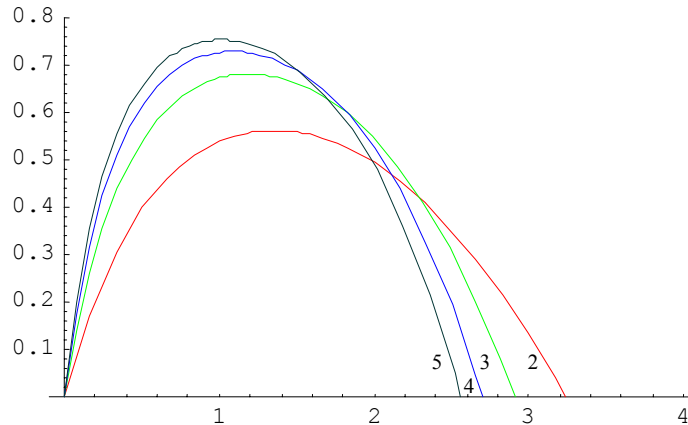
δ	$ARL_1(\delta)$	$ARL_2(\delta)$	$ARL_3(\delta)$	$ARL_4(\delta)$	$ARL_5(\delta)$
0	4298.7	4298.7	4298.7	4298.7	4298.7
0.2	2068.58	1643.69	1434.07	1308.11	1223.02
0.4	1033.48	677.44	534.22	458.44	411.70
0.6	535.96	300.97	221.97	184.38	162.91
0.8	288.44	144.109	102.629	84.62	75.07
1.0	161.04	74.31	52.60	43.96	39.77
1.2	93.25	41.19	29.71	25.58	23.86
1.4	55.98	24.49	18.36	16.47	15.93
1.6	34.82	15.57	12.31	11.57	11.63
1.8	22.44	10.53	8.87	8.76	9.15
2.0	14.97	7.55	6.81	7.06	7.63
2.2	10.33	5.70	5.51	5.99	6.68
2.4	7.37	4.51	4.67	5.29	6.07
2.6	5.43	3.72	4.11	4.83	5.67
2.8	4.13	3.19	3.74	4.53	5.41
3.0	3.24	2.82	3.48	4.33	5.25
p^*	0.00023263	0.015369	0.0628417	0.127785	0.196
UCL	3.5	2.16045	1.53135	1.13692	0.855996

Από τις τιμές του παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι χρησιμοποιώντας άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου k , $k \geq 2$, έχουμε σαφή βελτίωση στην τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής όταν θέλουμε να ανιχνεύσουμε μικρές, μεσαίες αλλά και μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας σε σχέση με το αντίστοιχο κλασικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart που προκύπτει για $k = 1$. Τόσο το εύρος δ της μετατόπισης του μέσου της διεργασίας όσο και το ποσοστό βελτίωσης του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής δεν είναι ομοιόμορφο για τις διάφορες τιμές του k . Το ποσοστό βελτίωσης στην τιμή του εκτός

ελέγχου μέσου μήκους ροής του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k , $k \geq 2$, σε σχέση με το αντίστοιχο κλασικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart δίνεται από τον τύπο

$$I_k(\delta) = \frac{ARL_1(\delta) - ARL_k(\delta)}{ARL_1(\delta)}$$

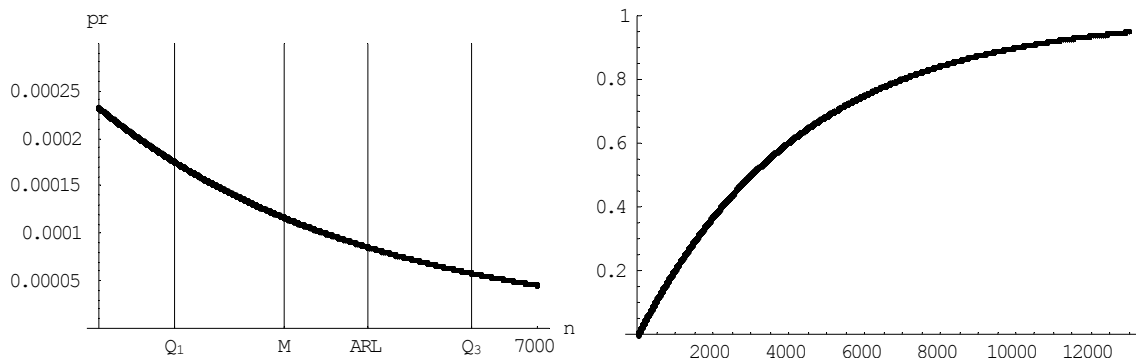
Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $I_k(\delta)$ για $k = 2, 3, 4, 5$.



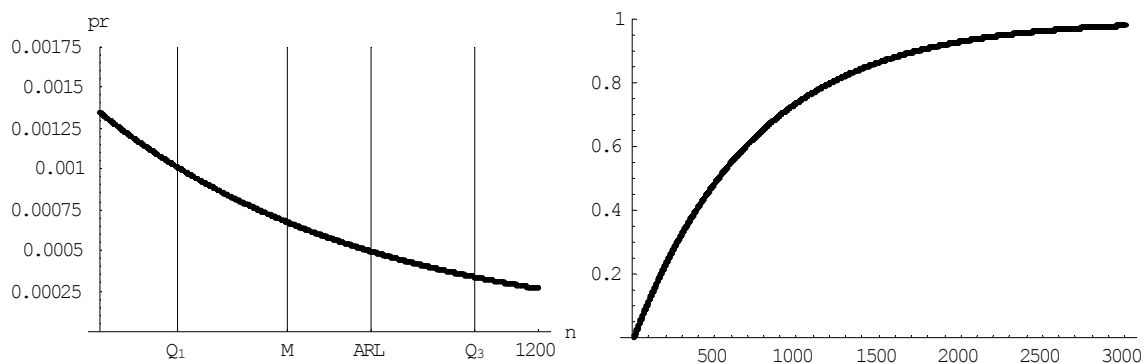
Διάγραμμα 2.43: Γραφική παράσταση του $I_k(\delta)$ για $k = 2(1)5$ με $ARL_{in} = 4298.7$

Από τη στιγμή που θα καθοριστεί η μετατόπιση του μέσου της διεργασίας που μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε όσο το δυνατόν πιο γρήγορα, τότε χρησιμοποιώντας το παραπάνω διάγραμμα μπορούμε να επιλέξουμε στην πράξη την τιμή του k ($k = 2, 3, 4, 5$) και συνεπώς το κατάλληλο άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου k που επιτυγχάνει το σκοπό μας.

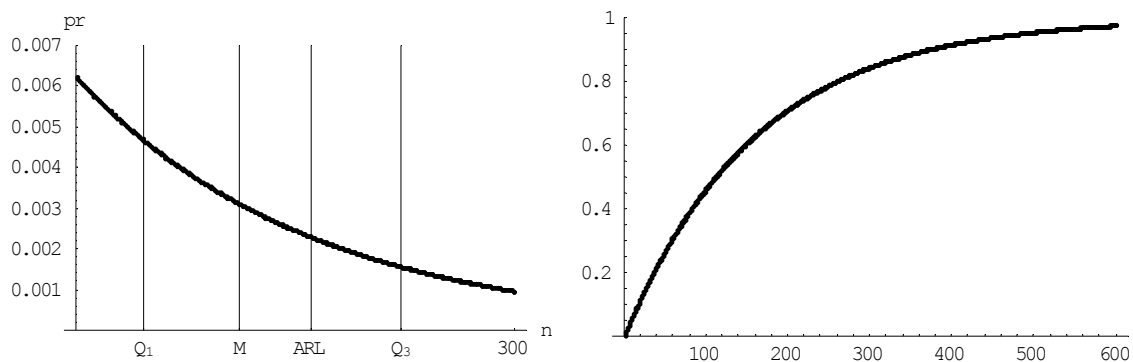
Στα ακόλουθα διαγράμματα δίνονται γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής του μήκους ροής $T_k(\delta)$ του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k για $k = 1(1)5$ και για $\delta = 0, 0.5, 1, 2$.



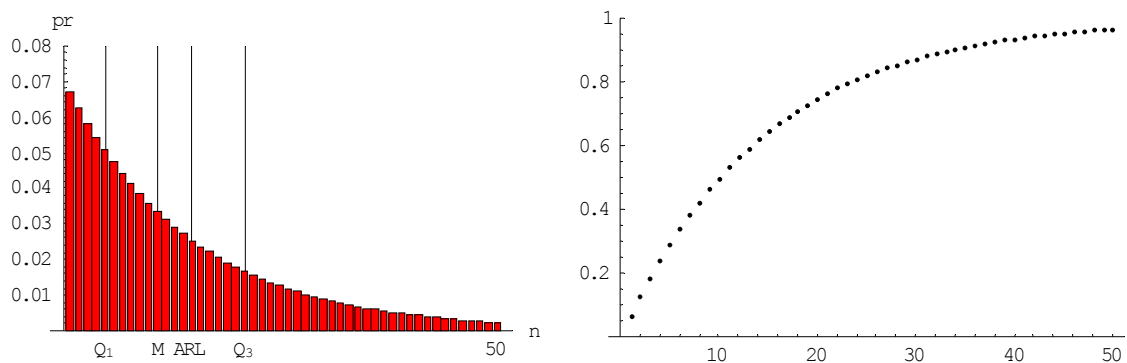
Διάγραμμα 2.44: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(0)$



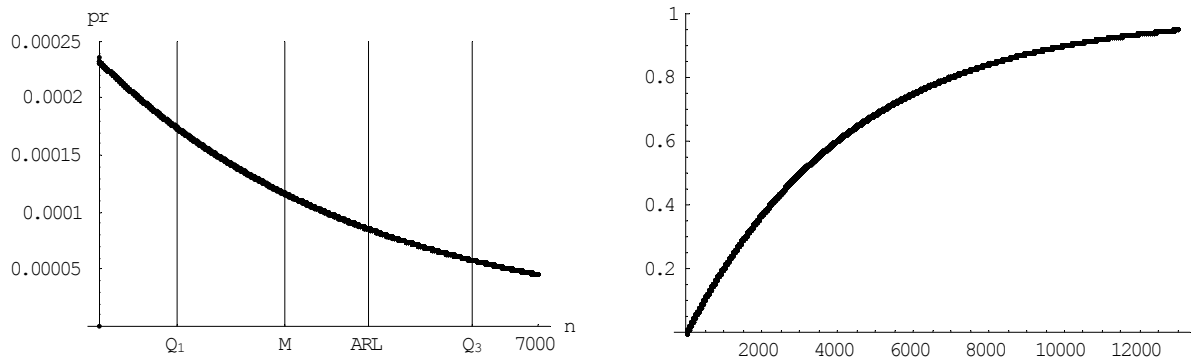
Διάγραμμα 2.45: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(0.5)$



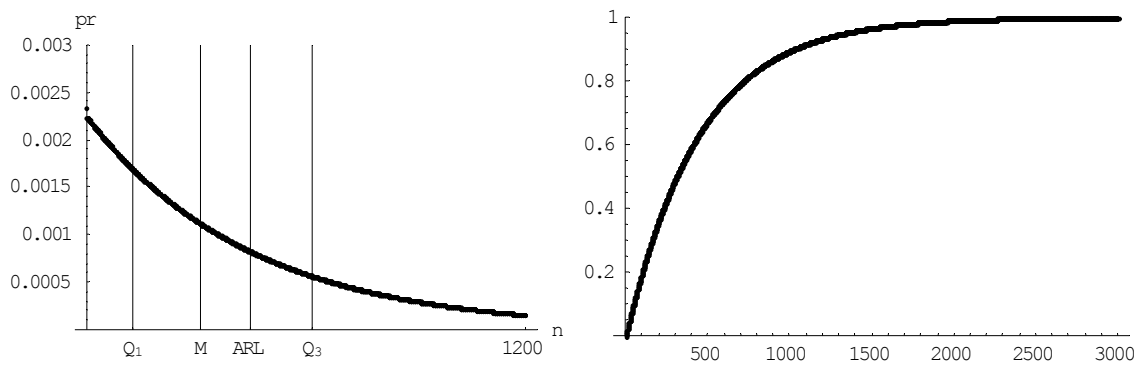
Διάγραμμα 2.46: Συνάρτηση πιθανότητας και κατανομής του μήκους ροής $T_1(1)$



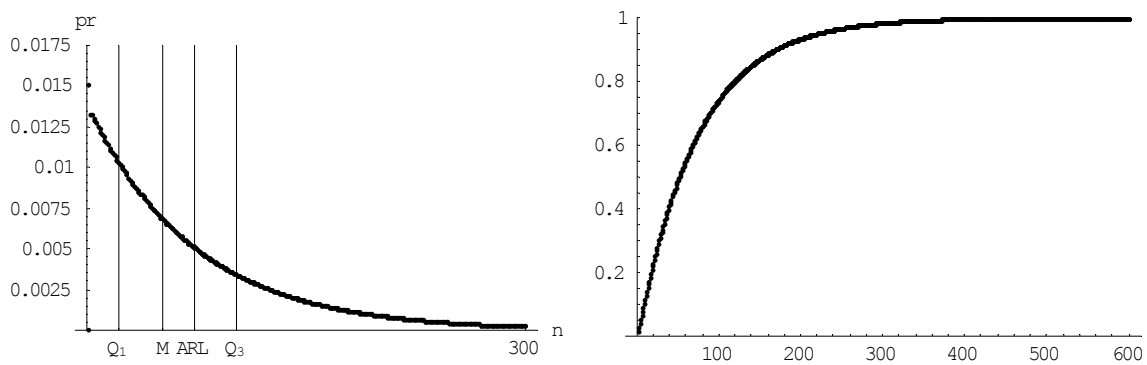
Διάγραμμα 2.47: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_1(2)$



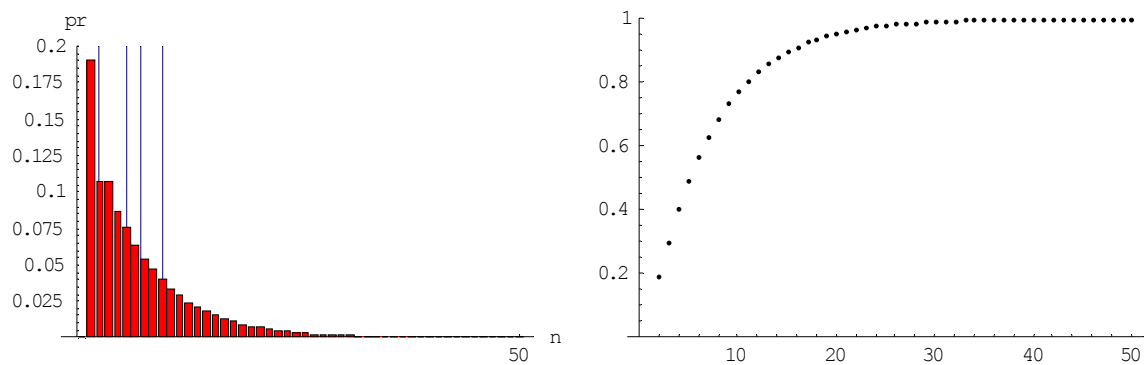
Διάγραμμα 2.48: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(0)$



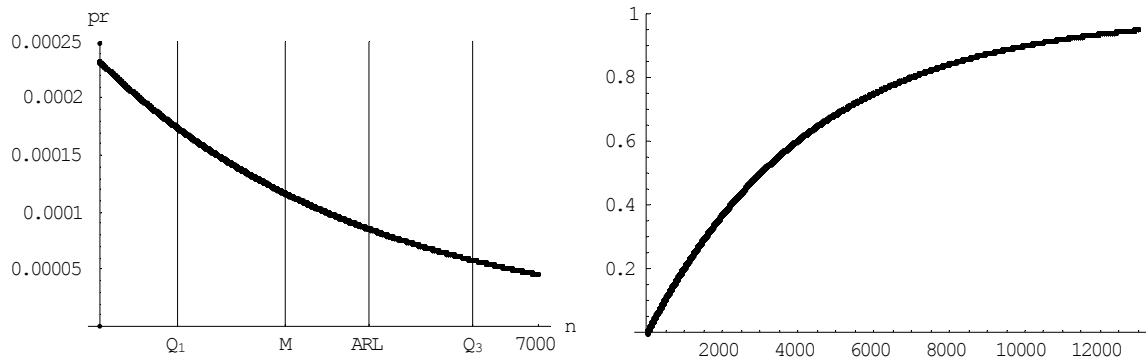
Διάγραμμα 2.49: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(0.5)$



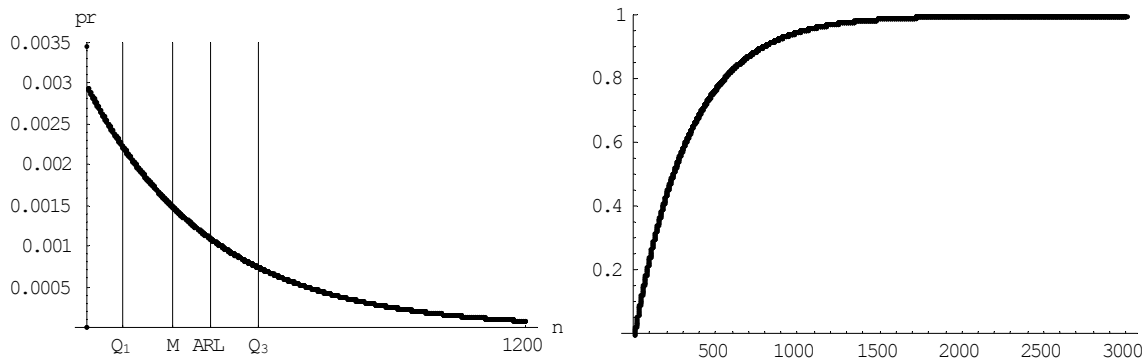
Διάγραμμα 2.50: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(1)$



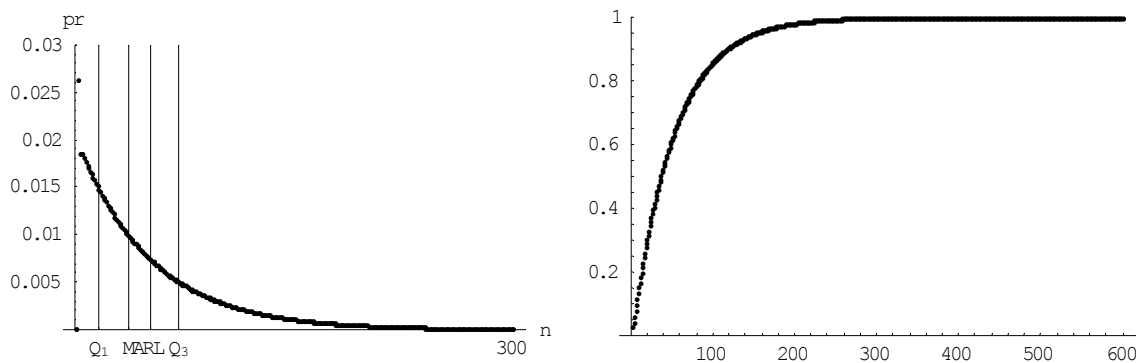
Διάγραμμα 2.51: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_2(2)$



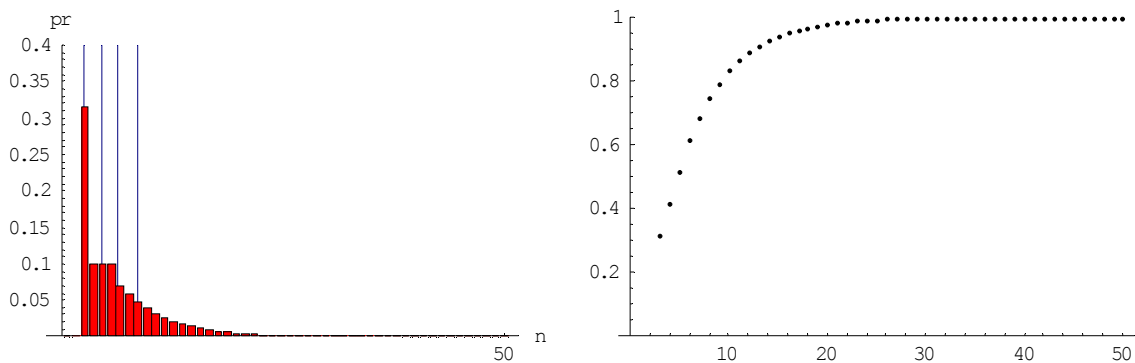
Διάγραμμα 2.52: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(0)$



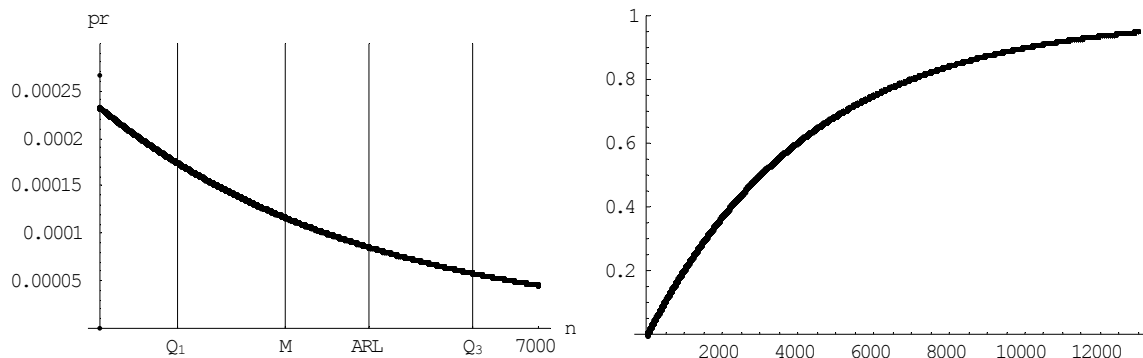
Διάγραμμα 2.53: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(0.5)$



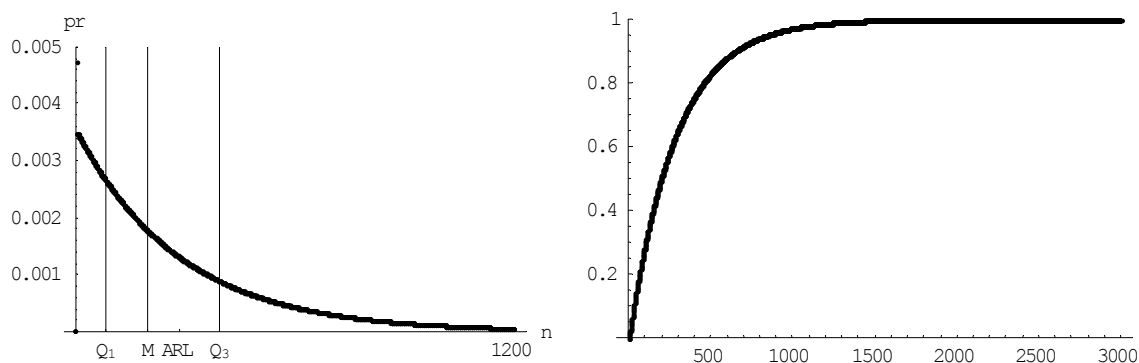
Διάγραμμα 2.54: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(1)$



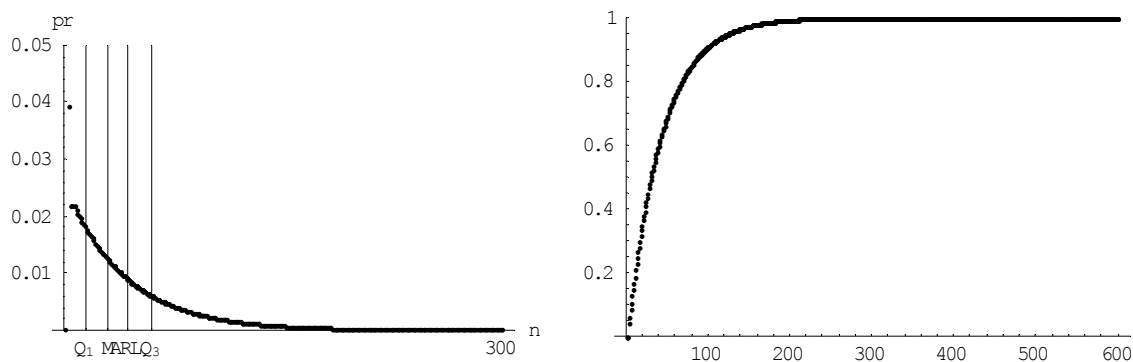
Διάγραμμα 2.55: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_3(2)$



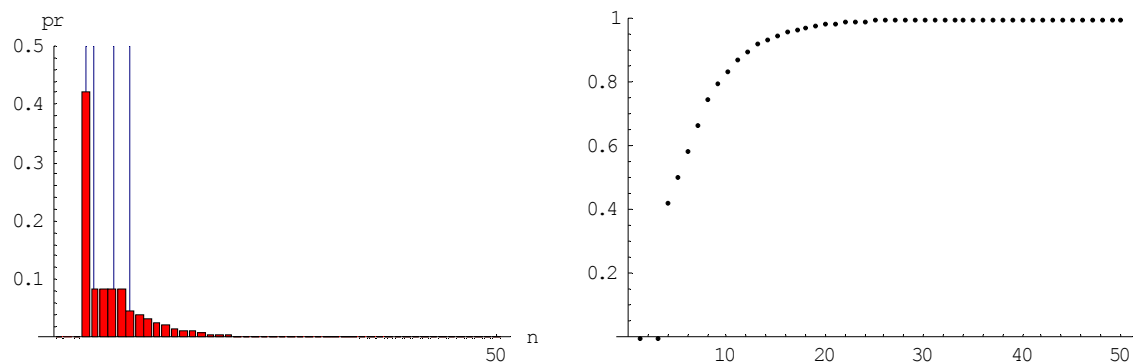
Διάγραμμα 2.56: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(0)$



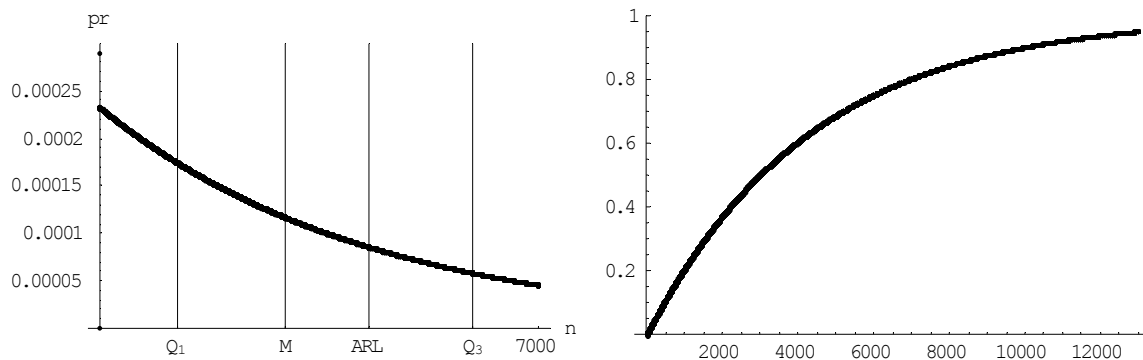
Διάγραμμα 2.57: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(0.5)$



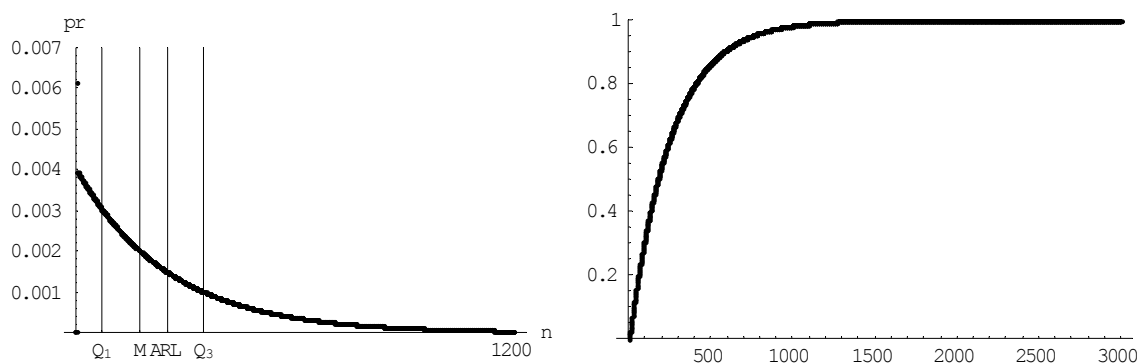
Διάγραμμα 2.58: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(1)$



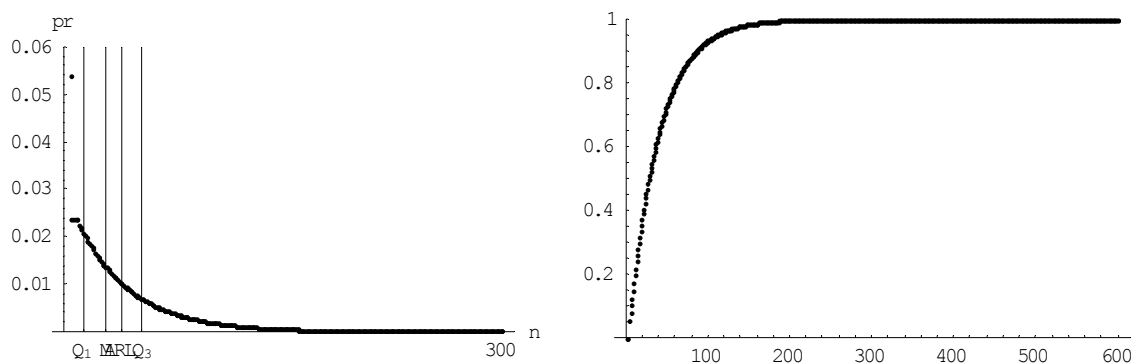
Διάγραμμα 2.59: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_4(2)$



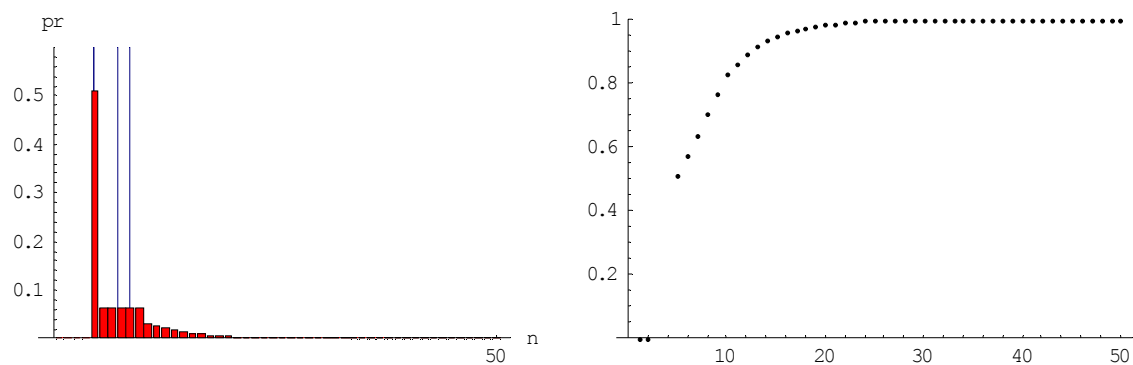
Διάγραμμα 2.60: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(0)$



Διάγραμμα 2.61: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(0.5)$



Διάγραμμα 2.62: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(1)$



Διάγραμμα 2.63: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_5(2)$

Στους ακόλουθους πίνακες δίνονται τιμές των ποσοτήτων Q_1 , M και Q_3 του μήκους ροής $T_k(\delta)$ του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k για $k=1(1)5$ και για $\delta=0(0.2)3$ που μας βοηθούν στην αξιολόγηση της “αξιοπιστίας” του μέσου μήκους ροής των διαγραμμάτων

Πίνακας 2.14: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 1 με $ARL_1(0) = 4298.7$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_1(\delta)$
0	1237	2980	5959	4298.7
0.2	595	1434	2867	2068.58
0.4	298	717	1433	1033.48
0.6	155	372	743	535.96
0.8	83	200	400	288.44
1.0	47	112	223	161.04
1.2	27	65	129	93.25
1.4	16	39	77	55.98
1.6	10	24	48	34.82
1.8	7	16	31	22.44
2.0	5	11	21	14.97
2.2	3	7	14	10.33
2.4	2	5	10	7.37
2.6	2	4	7	5.43
2.8	2	3	6	4.13
3.0	1	2	4	3.24

Πίνακας 2.15: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 2 με $ARL_2(0) = 4298.7$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_2(\delta)$
0	1238	2980	5959	4298.7
0.2	474	1140	2278	1643.69
0.4	196	470	939	677.44
0.6	88	209	417	300.97
0.8	42	100	199	144.109
1.0	22	52	102	74.31
1.2	13	29	57	41.19
1.4	8	17	33	24.49
1.6	5	11	21	15.57
1.8	4	8	14	10.53
2.0	3	6	10	7.55
2.2	2	4	7	5.70
2.4	2	4	6	4.51
2.6	2	3	5	3.72
2.8	2	2	4	3.19
3.0	2	2	3	2.82

Πίνακας 2.16: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 3 με $ARL_3(0) = 4298.7$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_3(\delta)$
0	1238	2980	5958	4298.7
0.2	414	995	1987	1434.07
0.4	155	371	740	534.22
0.6	66	155	307	221.97
0.8	31	72	141	102.629
1.0	17	37	72	52.60
1.2	10	21	40	29.71
1.4	7	13	25	18.36
1.6	5	9	16	12.31
1.8	4	7	11	8.87
2.0	3	5	9	6.81
2.2	3	4	7	5.51
2.4	3	3	6	4.67
2.6	3	3	5	4.11
2.8	3	3	4	3.74
3.0	3	3	3	3.48

Πίνακας 2.17: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 4 με $ARL_4(0) = 4298.7$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_4(\delta)$
0	1239	2981	5958	4298.7
0.2	379	908	1812	1308.11
0.4	134	319	634	458.44
0.6	55	129	254	184.38
0.8	27	60	116	84.62
1.0	15	31	60	43.96
1.2	9	19	34	25.58
1.4	7	12	22	16.47
1.6	5	9	15	11.57
1.8	4	7	11	8.76
2.0	4	5	9	7.06
2.2	4	4	7	5.99
2.4	4	4	6	5.29
2.6	4	4	5	4.83
2.8	4	4	4	4.53
3.0	4	4	4	4.33

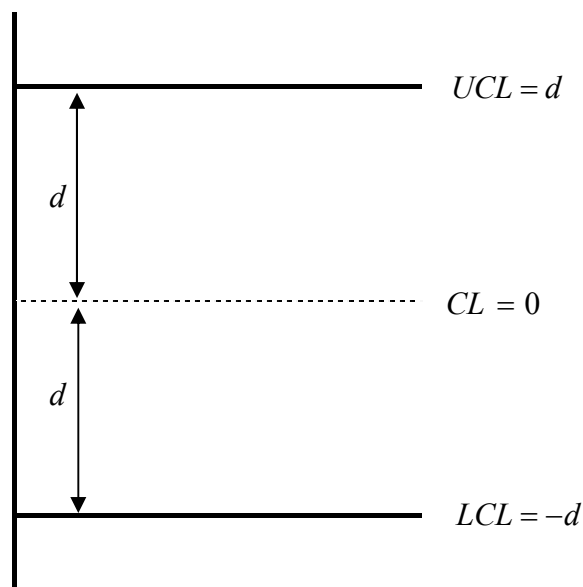
Πίνακας 2.18: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 5 με $ARL_5(0) = 4298.7$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_5(\delta)$
0	1240	2981	5958	4298.7
0.2	355	849	1694	1223.02
0.4	121	287	569	411.70
0.6	50	114	224	162.91
0.8	24	53	103	75.07
1.0	14	29	54	39.77
1.2	9	18	32	23.86
1.4	7	12	21	15.93
1.6	5	9	15	11.63
1.8	5	7	11	9.15
2.0	5	5	9	7.63
2.2	5	5	8	6.68
2.4	5	5	6	6.07
2.6	5	5	5	5.67
2.8	5	5	5	5.41
3.0	5	5	5	5.25

2.4 Δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου Shewhart τύπου (k,k) .

Ορίζουμε το (δίπλευρο) διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) ως το διάγραμμα ελέγχου το οποίο έχει άνω και κάτω όριο ελέγχου που ισαπέχουν από την κεντρική γραμμή και το οποίο δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν k συνεχόμενα σημεία του διαγράμματος βρεθούν είτε πάνω από το άνω όριο ελέγχου είτε κάτω από το κάτω όριο ελέγχου (το k είναι ένας θετικός ακέραιος). Προφανώς για $k=1$ αναγόμαστε στον κλασικό κανόνα ανακήρυξης μιας διεργασίας εκτός ελέγχου σε ένα δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart.

Το βασικότερο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε στην ανάπτυξη του (δίπλευρου) διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) είναι η εύρεση του άνω και του κάτω ορίου ελέγχου έτσι ώστε να έχουμε προκαθορισμένη τιμή για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}$ ($ARL_{k,k} \equiv ARL_{k,k}(0)$). Ας υποθέσουμε ότι στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζονται οι τιμές W_t , $t \geq 1$, μιας εντός ελέγχου στατιστικής συνάρτησης W που ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή ($W \sim N(0,1)$), δηλαδή $\mu=0$ και $\sigma=1$ (αν η στατιστική συνάρτηση W δεν ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή τότε στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζουμε τυποποιημένες τιμές της W). Η εύρεση του άνω (UCL) και του κάτω (LCL) ορίου ελέγχου ισοδυναμεί με την εύρεση της απόστασης d του UCL (ή του LCL) από την κεντρική γραμμή CL όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα



Ορίζουμε μια ακολουθία τρίτιμων $\{0, 1, 2\}$ τυχαίων μεταβλητών $\{X_t, t \geq 1\}$ σύμφωνα με τις σχέσεις

$$P(X_t = 1) = P(W_t > d) = 1 - \Phi(d) = p_U, \quad t \geq 1$$

$$P(X_t = 2) = P(W_t < -d) = 1 - \Phi(d) = p_L = p_U, \quad t \geq 1$$

$$P(X_t = 0) = P(-d \leq W_t \leq d) = 1 - p_U - p_L, \quad t \geq 1.$$

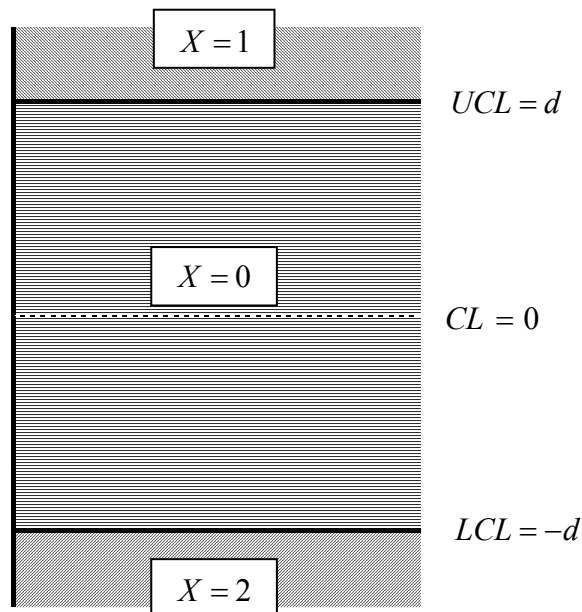
Αφού οι τυχαίες μεταβλητές W_t , $t \geq 1$, αποτελούν τυχαίο δείγμα από την W προκύπτει ότι και οι τυχαίες μεταβλητές X_t , $t \geq 1$, αποτελούν τυχαίο δείγμα από την X με

$$P(X = 1) = P(W > d) = 1 - \Phi(d) = p_U$$

$$P(X = 2) = P(W < -d) = 1 - \Phi(d) = p_L = p_U$$

$$P(X = 0) = P(-d \leq W \leq d) = q = 1 - p_U - p_L.$$

Με αυτό τον τρόπο το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) χωρίζεται σε τρεις ζώνες ανάλογα με τις τιμές που παίρνει η τυχαία μεταβλητή X που δίνονται στο ακόλουθο σχήμα



Η κατανομή του (εντός ελέγχου) μήκους ροής $T_{k,k}$ του (δίπλευρου) διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) ισοδυναμεί με την κατανομή του αριθμού $N_{k,k}$ ανεξάρτητων δοκιμών με τρία δυνατά αποτελέσματα $\{0,1,2\}$ και αντίστοιχες πιθανότητες $q = 1 - p_U - p_L$, p_U , p_L ($p_U = p_L$) που πρέπει να εκτελεστούν έως ότου εμφανιστούν k διαδοχικά «1» ή k διαδοχικά «2», οτιδήποτε από τα δύο συμβεί νωρίτερα.

Στη γενική περίπτωση που αναμένουμε να συμβούν k διαδοχικά «1» ή r διαδοχικά «2», οτιδήποτε από τα δύο συμβεί νωρίτερα, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $N_{k,r}$ έχει μελετηθεί από αρκετούς ερευνητές (δείτε για παράδειγμα Feller (1968), Ebneshahrashoob and Sobel (1990), Aki and Hirano (1993), Ling and Low (1993), Balasubramanian *et al.* (1995), Antzoulakos and Philippou (1996), Koutras and Alexandrou (1997b), Aki and Hirano (1999), Balakrishnan and Koutras (2001)). Η γεννήτρια συνάρτηση $G(z)$ της $N_{k,r}$ δίδεται από τον τύπο

$$G(z) = E(z^{N_{k,r}}) = \frac{(p_U z)^k G_L(z) + (p_L z)^r G_U(z)}{G_U(z) + G_L(z) - (2 - p_U - p_L)G_U(z)G_L(z)}$$

όπου

$$G_U(z) = \frac{1 - (p_U z)^k}{1 - p_U z}, \quad G_L(z) = \frac{1 - (p_L z)^r}{1 - p_L z}$$

και η μέση τιμή της από τον τύπο

$$E(N_{k,r}) = \frac{1}{p_U + p_L + \frac{p_U - p_U^k}{1 - p_U^k} + \frac{p_L - p_L^r}{1 - p_L^r}}$$

Επομένως, το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) δίνεται από τη σχέση ($k = r$, $p_U = p_L = p$)

$$ARL_{k,k} = E(T_{k,k}) = E(N_{k,k} | p_U = p_L) = \frac{1 - p^k}{2p^k(1 - p)}, \quad p = 1 - \Phi(d).$$

Η συνάρτηση $g(p) = (1 - p^k) / 2p^k(1 - p)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $(0, 1)$ και ισχύει ότι $\lim_{p \rightarrow 0} g(p) = +\infty$, $\lim_{p \rightarrow 1} g(p) = \frac{k}{2}$. Συνεπώς η εξίσωση $g(p) = c$ όπου $c > \frac{k}{2}$ έχει μοναδική λύση ως προς p στο διάστημα $(0, 1)$.

Έχουμε τώρα στη διάθεσή μας όλα τα απαραίτητα εργαλεία για την ανάπτυξη του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) που περιγράφεται στα ακόλουθα βήματα

Βήμα 1. Επιλέγουμε το k και το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}$ που επιθυμούμε.

Βήμα 2. Λύνουμε την εξίσωση $ARL_{k,k} = (1 - p^k) / 2(1 - p)p^k$ ως προς p ($p \in (0,1)$), και έστω ότι προέκυψε η λύση p^* .

Βήμα 3. Καθορίζουμε το άνω όριο ελέγχου $UCL = d$ από τη σχέση $p^* = P(W > d) = 1 - \Phi(d)$, δηλαδή $UCL = d = \Phi^{-1}(1 - p^*) = z_{p^*}$, και θέτουμε $LCL = -UCL = -d$.

Βήμα 4. Ανακηρύσσουμε τη διεργασία εκτός ελέγχου αν k συνεχόμενα σημεία του διαγράμματος βρεθούν πάνω από το άνω όριο ελέγχου ή κάτω από το κάτω όριο ελέγχου, οτιδήποτε από τα δύο συμβεί νωρίτερα.

Από τη στιγμή που καθορίστηκαν το άνω και το κάτω όριο ελέγχου του (δίπλευρου) διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής. Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης W έχει αλλάξει λόγω μετατόπισης του μέσου σε υψηλότερο επίπεδο (από τη θέση $\mu = 0$ στη θέση $\mu + \delta\sigma = \delta$) ενώ η διακύμανσή της δεν έχει αλλάξει. Επομένως η στατιστική συνάρτηση $W(\delta)$ που απεικονίζεται στο άνω διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) ακολουθεί την κατανομή $N(\mu + \delta\sigma, \sigma^2) = N(\delta, 1)$. Ορίζοντας την τυχαία μεταβλητή $X(\delta)$ ως ακολούθως

$$P(X(\delta) = 1) = P(W(\delta) > d) = 1 - \Phi(d - \delta) = p_U(\delta)$$

$$P(X(\delta) = 2) = P(W(\delta) < -d) = 1 - \Phi(d + \delta) = p_L(\delta)$$

$$P(X(\delta) = 0) = P(-d \leq W(\delta) \leq d) = q(\delta) = 1 - p_U(\delta) - p_L(\delta)$$

έχουμε ότι η κατανομή του μήκους ροής $T_{k,k}(\delta)$ ισοδυναμεί με την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $N_{k,k}$ που δηλώνει τον αριθμό των ανεξάρτητων δοκιμών με τρία δυνατά αποτελέσματα $\{0,1,2\}$ και αντίστοιχες πιθανότητες $1 - p_U(\delta) - p_L(\delta)$, $p_U(\delta)$, $p_L(\delta)$ που πρέπει να εκτελεστούν έως ότου εμφανιστούν k διαδοχικά «1» ή k διαδοχικά «2», οτιδήποτε από τα δύο συμβεί νωρίτερα. Συνεπώς το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}(\delta)$ δίνεται από τη σχέση

$$ARL_{k,k}(\delta) = E(T_{k,k}(\delta)) = \frac{1}{p_U(\delta) + p_L(\delta) + \frac{p_U(\delta) - (p_U(\delta))^k}{1 - (p_U(\delta))^k} + \frac{p_L(\delta) - (p_L(\delta))^k}{1 - (p_L(\delta))^k}}$$

Φυσικά για $\delta = 0$ έχουμε ότι η ποσότητα $ARL_{k,k}(0)$ είναι ίση με το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής αφού σύμφωνα με τους συμβολισμούς που έχουμε εισάγει $W \sim W(0)$, $X \sim X(0)$, $T_{k,k} \sim T_{k,k}(0)$, $p_U = p_L = p_U(0) = p_L(0)$ οπότε $ARL_{k,k} = ARL_{k,k}(0)$.

Ο υπολογισμός της συνάρτησης πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής του μήκους ροής $T_{k,k}(\delta)$ ανάγεται στον υπολογισμό των αντίστοιχων ποσοτήτων για την τυχαία μεταβλητή $N_{k,k}$. Για τη συνάρτηση πιθανότητας και τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $N_{k,r}$ υπάρχουν ακριβείς αλλά και αναδρομικοί τύποι (δείτε για παράδειγμα Balasubramanian *et al.* (1993), Aki *et al.* (1996), Antzoulakos and Philippou (1996), Koutras and Alexandrou (1997b), Balakrishnan and Koutras (2001)). Στη συνέχεια θα δώσουμε τύπους για τη συνάρτηση κατανομής και τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $N_{k,r}$ βασιζόμενοι στη μεθολογία που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 1. Στην περίπτωσή μας έχουμε μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών $\{X_t, t \geq 1\}$ με τρία δυνατά αποτελέσματα $\{0,1,2\}$ και αντίστοιχες πιθανότητες $q = 1 - p_U - p_L$, p_U , p_L που πρέπει να εκτελεστούν έως ότου εμφανιστούν k διαδοχικά «1» ή r διαδοχικά «2», οτιδήποτε από τα δύο συμβεί νωρίτερα. Συνεπώς μας ενδιαφέρει η εμφάνιση του σύνθετου ενδεχομένου $E = \{\underbrace{11\dots 1}_k, \underbrace{22\dots 2}_r\}$ για πρώτη φορά. Αποσυνθέτουμε το ενδεχόμενο E στα ακόλουθα $k+r-1$ κομμάτια

$$2 \equiv 1, \quad 3 \equiv 11, \quad \dots, \quad k \equiv \underbrace{11\dots 1}_{k-1},$$

$$k+1 \equiv 2, \quad k+2 \equiv 22, \quad \dots, \quad k+r-1 \equiv \underbrace{22\dots 2}_{r-1},$$

$$k+r = \{\underbrace{11\dots 1}_k, \underbrace{22\dots 2}_r\}$$

και ορίζουμε επιπρόσθετα

$$1 \equiv 0.$$

Ορίζουμε μια διακριτή ομογενή αλυσίδα Markov $\{Y_t, t \geq 1\}$ με χώρο καταστάσεων $\Omega = \{1, 2, \dots, k+r\}$, όπου η κατάσταση $k+r$ είναι απορροφητική. Οι αρχικές πιθανότητες είναι ίσες με

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}'_1 &= [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k, \pi_{k+1}, \dots, \pi_{k+r}] \\ &= [P(Y_1 = 1), P(Y_1 = 2), \dots, P(Y_1 = k), P(Y_1 = k+1), \dots, P(Y_1 = k+r)] = [q, p_U, \dots, 0, p_L, \dots, 0] \end{aligned}$$

και ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης είναι ίσος με

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q & p_U & 0 & \cdots & 0 & p_L & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q & 0 & p_U & \cdots & 0 & p_L & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_L & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_L & 0 & \cdots & 0 & p_U \\ \hline q & p_U & 0 & \cdots & 0 & 0 & p_L & \cdots & 0 & 0 \\ q & p_U & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q & p_U & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_L \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{(k+r) \times (k+r)}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1 του Κεφαλαίου 1 έχουμε ότι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $N_{k,r}$ δίνεται από τον τύπο

$$F_{N_{k,r}}(n) = P(N_{k,r} \leq n) = \boldsymbol{\pi}'_1 \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{e}_{k+r} = (\mathbf{e}'_1 \mathbf{P}) \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{e}_{k+r} = \mathbf{e}'_1 \mathbf{P}^n \mathbf{e}_{k+r} \quad n = 1, 2, \dots$$

όπου $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)'$ το μοναδιαίο διάνυσμα στήλη του χώρου R^{k+r} το οποίο έχει 1 στην i συνιστώσα και 0 στις υπόλοιπες συνιστώσες. Επίσης, χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$(\mathbf{P} - \mathbf{I}) \mathbf{e}_{k+r} = p_U \mathbf{e}_k + p_L \mathbf{e}_{k+r-1}$$

παίρνουμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $N_{k,r}$ δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} f_{N_{k,r}}(n) &= F_{N_{k,r}}(n) - F_{N_{k,r}}(n-1) = \mathbf{e}'_1 \mathbf{P}^{n-1} (\mathbf{P} - \mathbf{I}) \mathbf{e}_{k+r} \\ &= \mathbf{e}'_1 \mathbf{P}^{n-1} (p_U \mathbf{e}_k + p_L \mathbf{e}_{k+r-1}) = p_U \mathbf{e}'_1 \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{e}_k + p_L \mathbf{e}'_1 \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{e}_{k+r-1}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση πιθανότητας και τη συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{k,k}(\delta)$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) θέτοντας $k=r$ και αντικαθιστώντας τις

πιθανότητες $q = 1 - p_U - p_L$, p_U και p_L με τις πιθανότητες $q(\delta) = 1 - p_U(\delta) - p_L(\delta)$, $p_U(\delta)$ και $p_L(\delta)$ όπου

$$p_U(\delta) = 1 - \Phi(d - \delta), \quad p_L(\delta) = 1 - \Phi(d + \delta).$$

Από τη στιγμή που είναι διαθέσιμη η συνάρτηση πιθανότητας (και η συνάρτηση κατανομής) του μήκους ροής $T_{k,k}(\delta)$ μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε ποσοστιαία σημεία του μήκους ροής $T_{k,k}(\delta)$.

2.5 Μελέτη του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k,k)

Στο κλασικό δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart απεικονίζονται οι διαδοχικές τιμές μιας στατιστικής συνάρτησης W η οποία ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή και επομένως έχουμε ότι

$$UCL = \mu_W + L\sigma_W = L, \quad LCL = \mu_W - L\sigma_W = -L$$

(επαναλαμβάνουμε ότι αν η στατιστική συνάρτηση W δεν ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή τότε στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζουμε τυποποιημένες τιμές της W). Η διεργασία ανακηρύσσεται εκτός ελέγχου όταν βρεθεί σημείο του διαγράμματος πάνω από το άνω όριο ελέγχου UCL ή κάτω από το κάτω όριο ελέγχου.

Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής του παραπάνω διαγράμματος δίνεται από τη σχέση

$$ARL_{in} = \frac{1}{P_{in}}$$

όπου

$$P_{in} = 1 - \Pr(-L \leq W \leq L | W \sim N(0,1)) = 2 - 2\Phi(L).$$

Στην πράξη, οι πιο συνήθεις τιμές για το L είναι οι 2.5, 3 και 3.5. Για αυτές τις τιμές του L έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα για τις ποσότητες P_{in} και ARL_{in}

L	P_{in}	ARL_{in}
2.5	0.01242	80.52
3	0.0027	370.4
3.5	0.00046526	2149.34

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 2.4 θα δώσουμε στη συνέχεια αποτελέσματα που αφορούν το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k=1(1)5$ με τιμές για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}(0)$ ίσες με 80.52, 370.4 και 2149.34 έτσι ώστε να υπάρχει κοινή βάση σύγκρισης των νέων διαγραμμάτων ελέγχου με το κλασικό δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart για $L=2.5, 3$ και 3.5 αντίστοιχα. Φυσικά το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $(1, 1)$ με εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_{1,1}(0) = 80.52, 370.4$ και 2149.34 συμπίπτει με το κλασικό δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart για $L=2.5, 3$ και 3.5 αντίστοιχα.

2.5.1 Μελέτη του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k,k) με $ARL_{k,k}(0) = 80.52$ για $k = 1(1)5$.

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τιμές για το μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}(\delta) = E(T_{k,k}(\delta))$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ και για $\delta = 0(0.2)3$ με $ARL_{k,k}(0) = 80.52$. Τα σκιασμένα τετράγων δηλώνουν το $\min\{ARL_{k,k}(\delta); k = 1(1)5\}$.

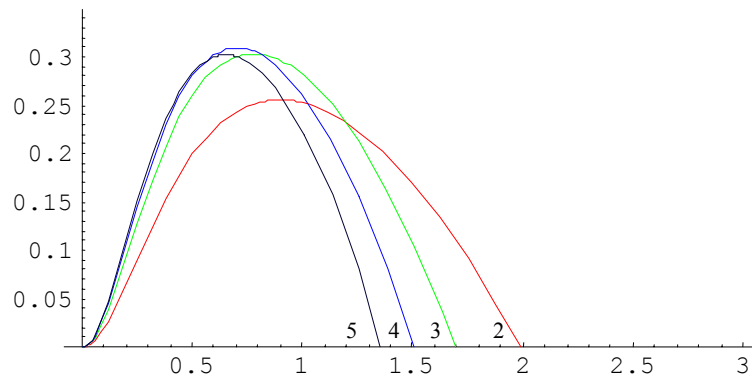
Πίνακας 2.19: Μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}(\delta)$ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ με $ARL_{k,k}(0) = 80.52$

δ	$ARL_{1,1}(\delta)$	$ARL_{2,2}(\delta)$	$ARL_{3,3}(\delta)$	$ARL_{4,4}(\delta)$	$ARL_{5,5}(\delta)$
0	80.52	80.52	80.52	80.52	80.52
0.2	70.47	66.13	64.20	63.27	62.85
0.4	50.68	42.52	39.67	38.56	38.21
0.6	33.69	26.10	24.05	23.50	23.58
0.8	22.20	16.59	15.48	15.45	15.84
1.0	14.92	11.15	10.71	11.01	11.59
1.2	10.32	7.92	7.92	8.43	9.12
1.4	7.37	5.94	6.22	6.85	7.62
1.6	5.43	4.67	5.13	5.85	6.67
1.8	4.13	3.83	4.42	5.20	6.06
2.0	3.24	3.26	3.94	4.78	5.66
2.2	2.62	2.87	3.62	4.49	5.41
2.4	2.17	2.59	3.41	4.31	5.25
2.6	1.85	2.40	3.26	4.19	5.15
2.8	1.62	2.27	3.16	4.11	5.08
3.0	1.45	2.17	3.10	4.06	5.05
p^*	0.00620964	0.0819672	0.197265	0.306981	0.40003
UCL	2.5	1.39196	0.851431	0.504426	0.253269
LCL	-2.5	-1.39196	-0.851431	-0.504426	-0.253269

Από τις τιμές του παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι χρησιμοποιώντας δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) , $k \geq 2$, έχουμε σαφή βελτίωση στην τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής όταν θέλουμε να ανιχνεύσουμε μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας σε σχέση με το αντίστοιχο κλασικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart που αντιστοιχεί στην τιμή $k=1$. Παρατηρούμε επίσης ότι δεν υπάρχει βελτίωση για μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου. Τόσο το εύρος δ της μετατόπισης του μέσου της διεργασίας όσο και το ποσοστό βελτίωσης του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής δεν είναι ομοιόμορφο για τις διάφορες τιμές του k . Το ποσοστό βελτίωσης στην τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) , $k \geq 2$, σε σχέση με το αντίστοιχο κλασικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart δίνεται από τον τύπο

$$I_{k,k}(\delta) = \frac{ARL_{1,1}(\delta) - ARL_{k,k}(\delta)}{ARL_{1,1}(\delta)}$$

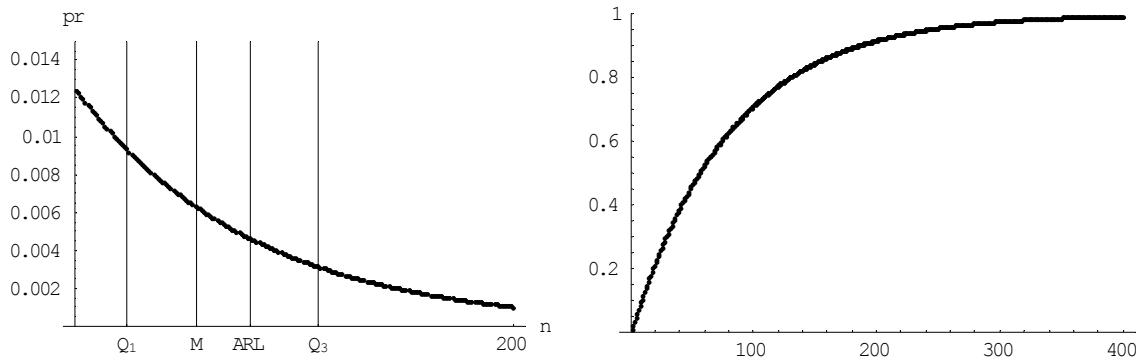
Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $I_{k,k}(\delta)$ για $k = 2,3,4,5$



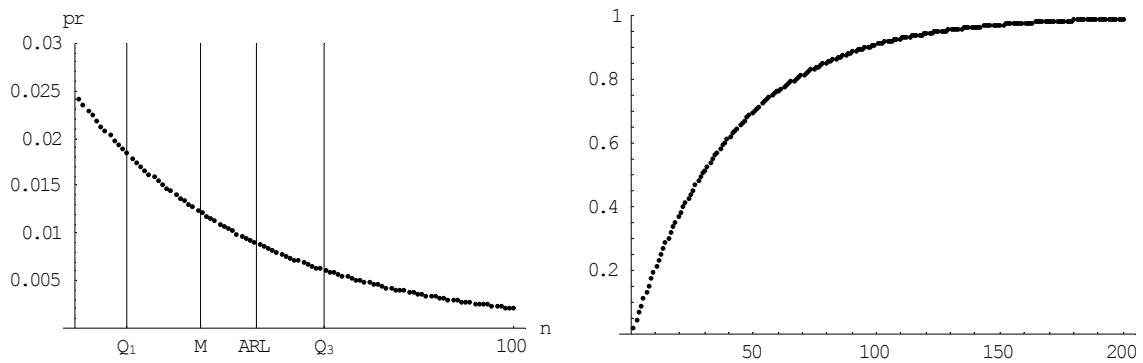
Διάγραμμα 2.64: Γραφική παράσταση του $I_{k,k}(\delta)$ για $k = 2(1)5$ με $ARL_{in} = 80.52$

Από τη στιγμή που θα καθοριστεί η μετατόπιση του μέσου της διεργασίας που μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε όσο το δυνατόν πιο γρήγορα, τότε χρησιμοποιώντας το παραπάνω διάγραμμα μπορούμε να επιλέξουμε στην πράξη την τιμή του k ($k = 2,3,4,5$) και συνεπώς το κατάλληλο δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) που επιτυγχάνει το σκοπό μας.

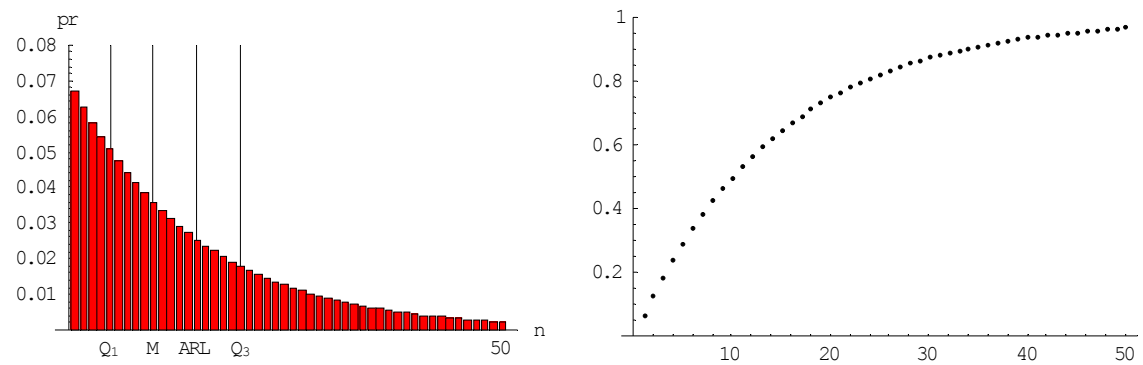
Στα ακόλουθα διαγράμματα δίνονται γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής του μήκους ροής $T_{k,k}(\delta)$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ και για $\delta = 0, 0.5, 1, 2$.



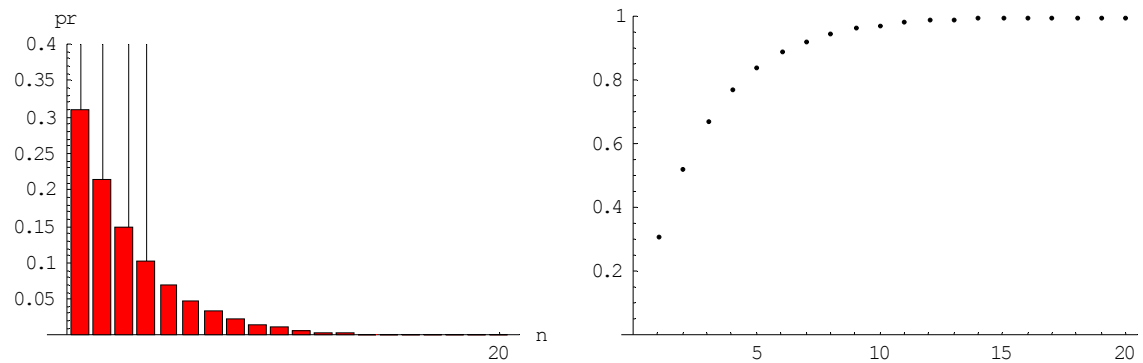
Διάγραμμα 2.65: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(0)$



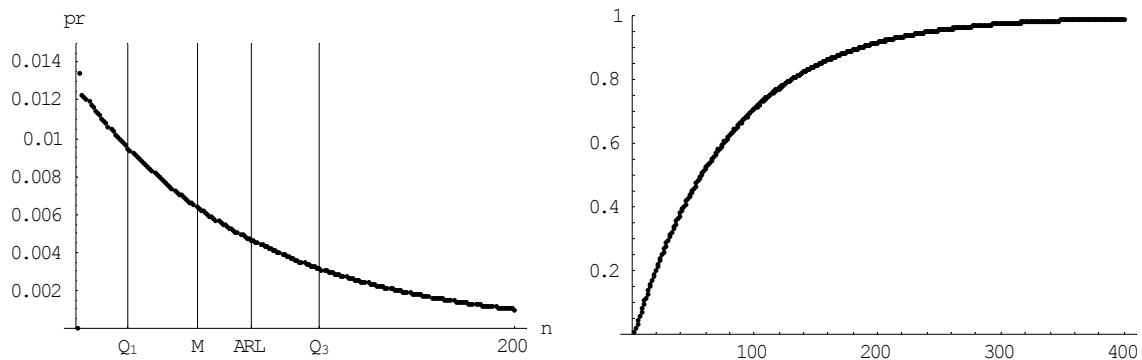
Διάγραμμα 2.66: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(0.5)$



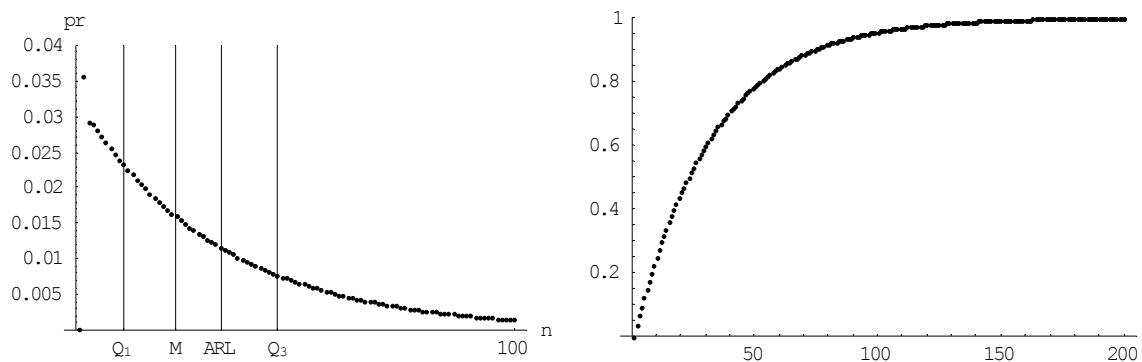
Διάγραμμα 2.67: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(1)$



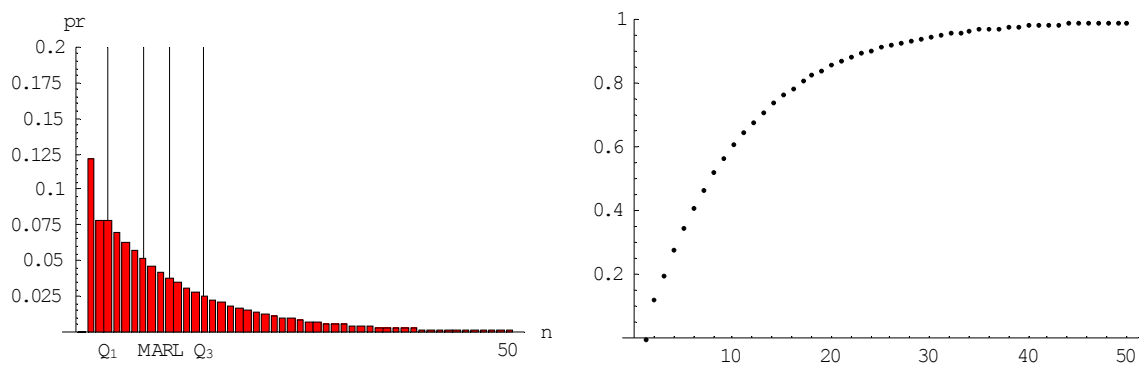
Διάγραμμα 2.68: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(2)$



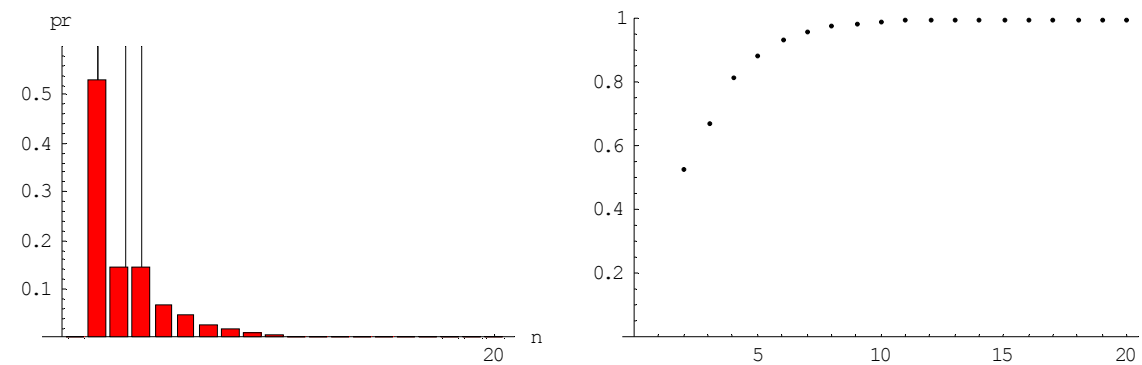
Διάγραμμα 2.69: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(0)$



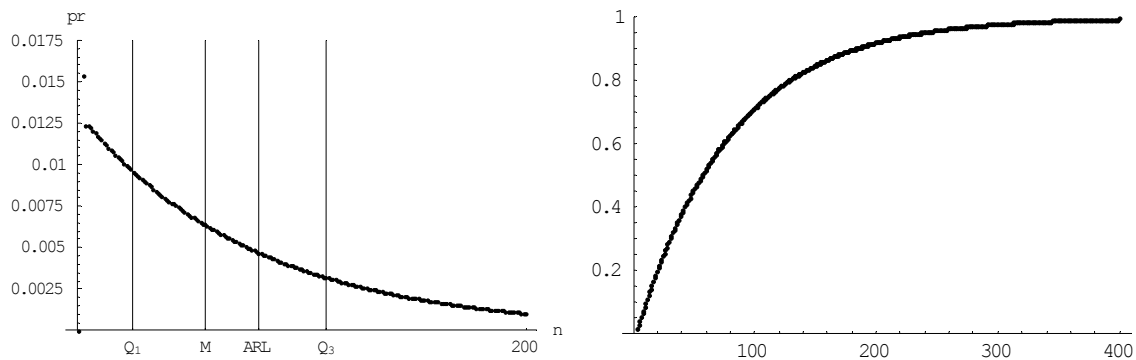
Διάγραμμα 2.70: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(0.5)$



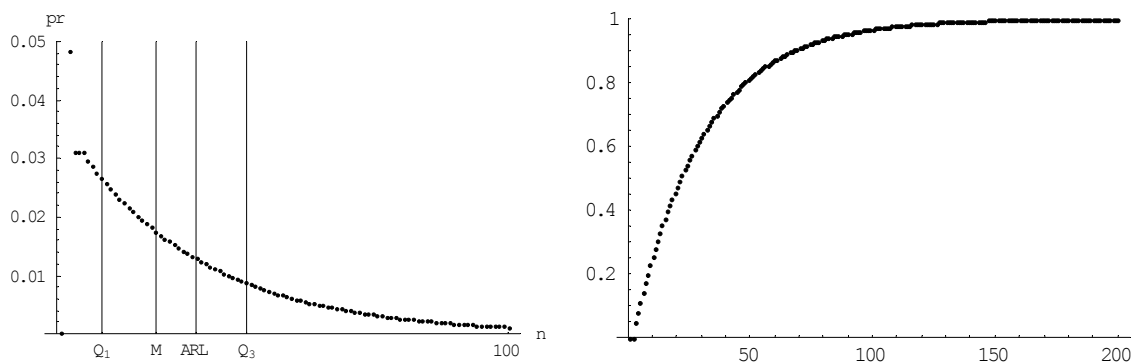
Διάγραμμα 2.71: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(1)$



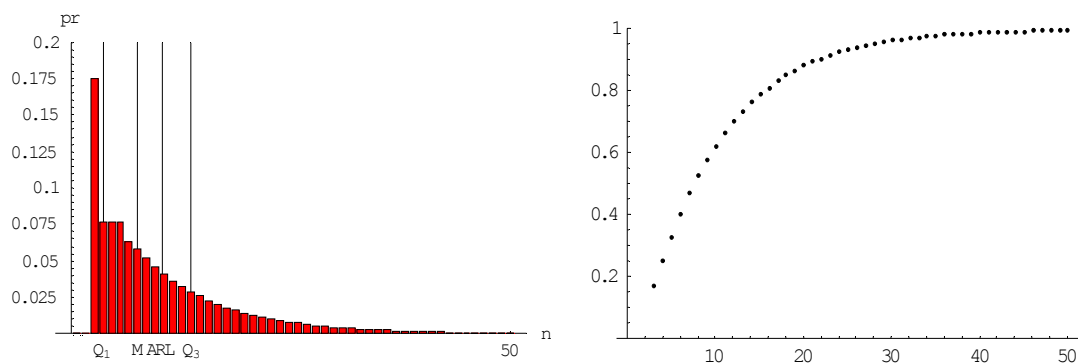
Διάγραμμα 2.72: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(2)$



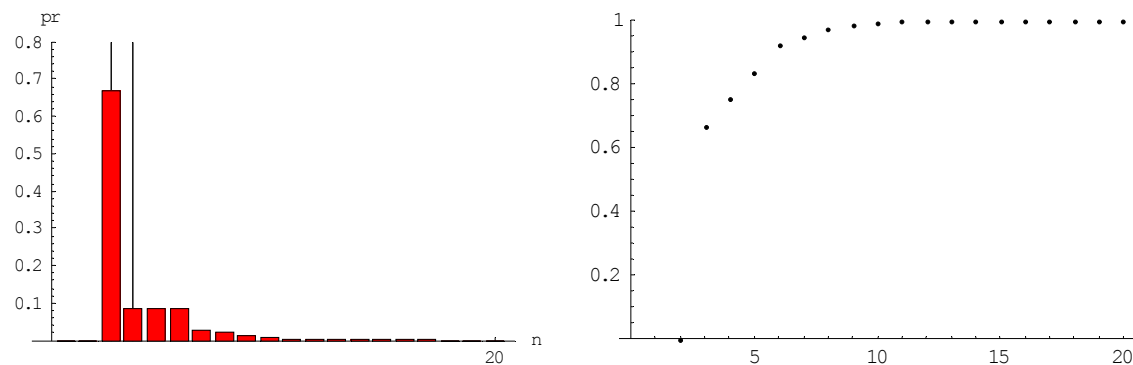
Διάγραμμα 2.73: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(0)$



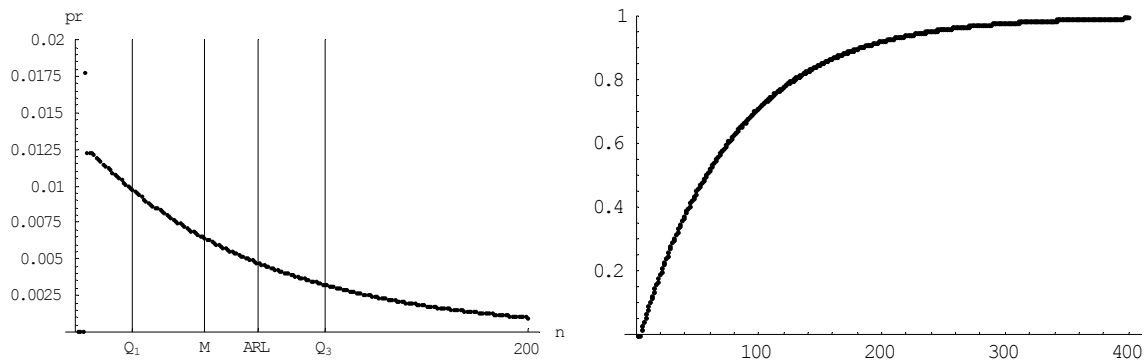
Διάγραμμα 2.74: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(0.5)$



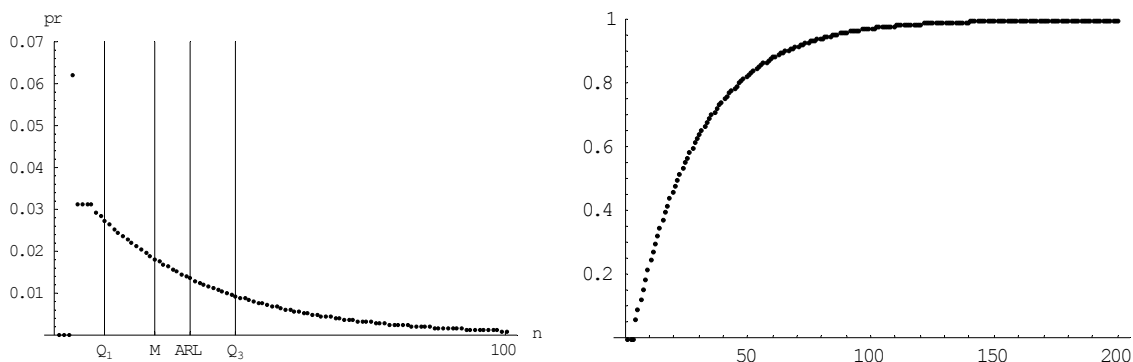
Διάγραμμα 2.75: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(1)$



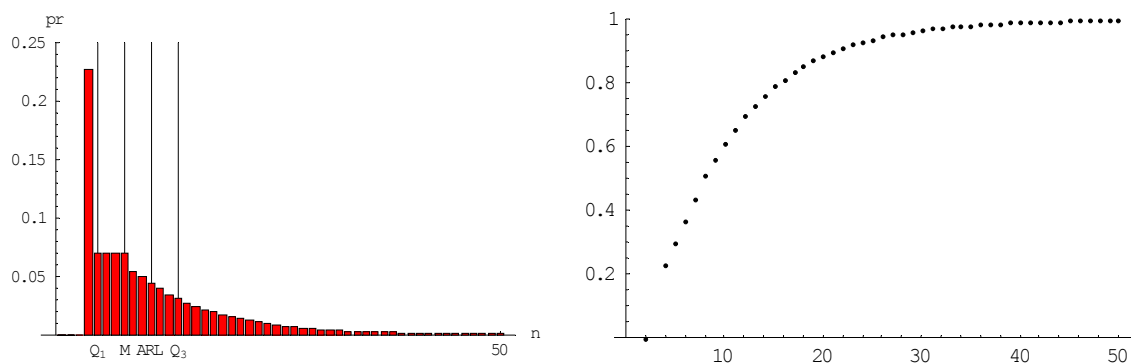
Διάγραμμα 2.76: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(2)$



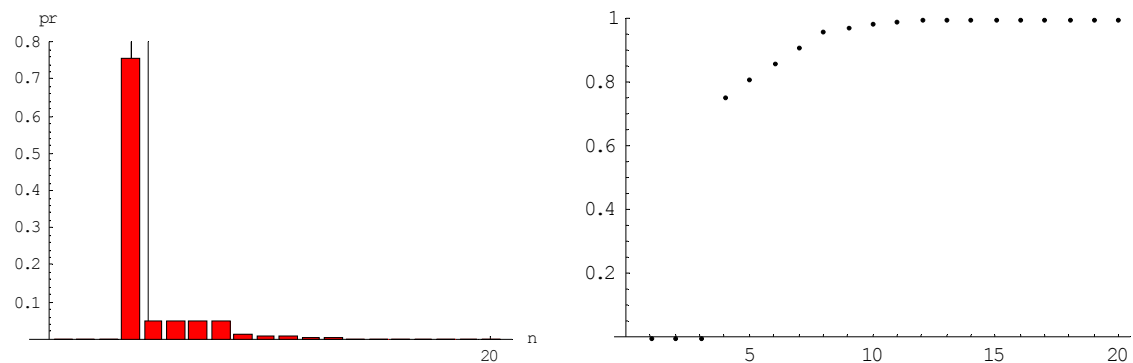
Διάγραμμα 2.77: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(0)$



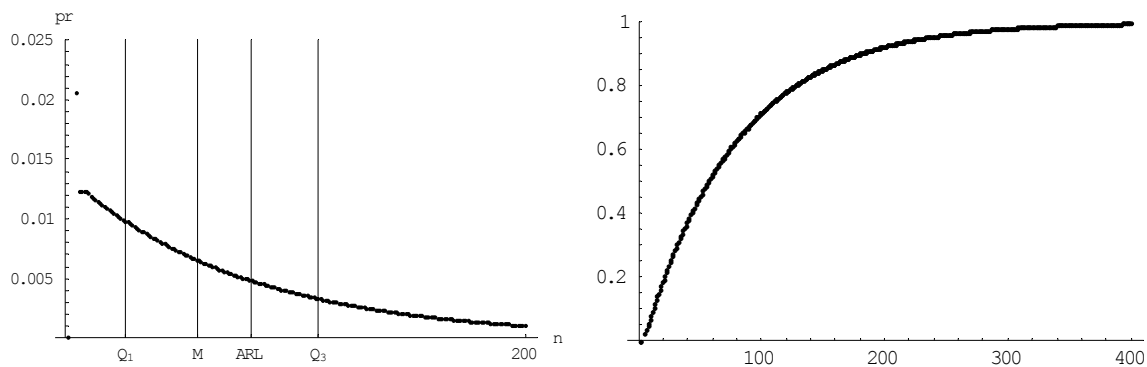
Διάγραμμα 2.78: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(0.5)$



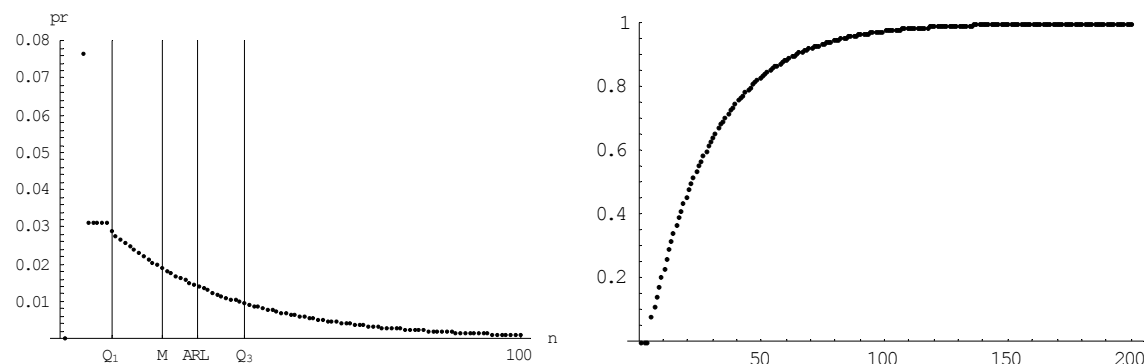
Διάγραμμα 2.79: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(1)$



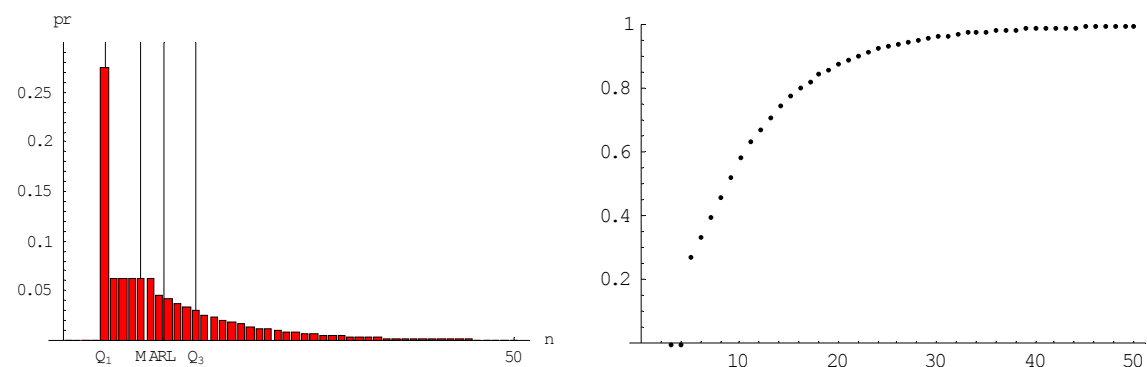
Διάγραμμα 2.80: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(2)$



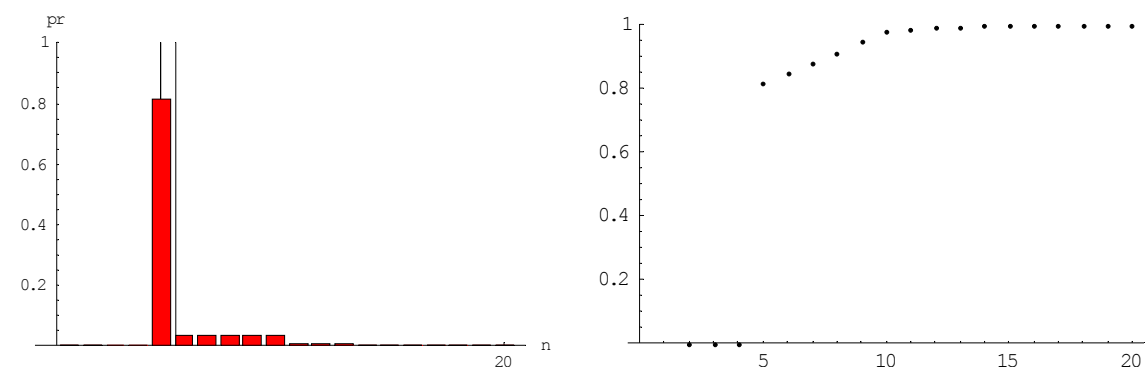
Διάγραμμα 2.81: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(0)$



Διάγραμμα 2.82: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(0.5)$



Διάγραμμα 2.83: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(1)$



Διάγραμμα 2.84: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(2)$

Στους ακόλουθους πίνακες δίνονται τιμές των ποσοτήτων Q_1 , M και Q_3 του μήκους ροής $T_{k,k}(\delta)$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ και για $\delta = 0(0.2)3$ που μας βοηθούν στην αξιολόγηση της “αξιοπιστίας” του μέσου μήκους ροής των διαγραμμάτων

Πίνακας 2.20: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (1,1) με $ARL_{1,1}(0) = 80.52$				
δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{1,1}(\delta)$
0	24	56	111	80.52
0.2	21	49	97	70.47
0.4	15	35	70	50.68
0.6	10	24	47	33.69
0.8	7	16	31	22.20
1.0	5	10	20	14.92
1.2	3	7	14	10.32
1.4	2	5	10	7.37
1.6	2	4	7	5.43
1.8	2	3	6	4.13
2.0	1	2	4	3.24
2.2	1	2	3	2.62
2.4	1	2	3	2.17
2.6	1	1	2	1.85
2.8	1	1	2	1.62
3.0	1	1	2	1.45

Πίνακας 2.21: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (2,2) με $ARL_{2,2}(0) = 80.52$				
δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{2,2}(\delta)$
0	24	56	111	80.52
0.2	20	46	91	66.13
0.4	13	30	58	42.52
0.6	8	19	36	26.10
0.8	6	12	22	16.59
1.0	4	8	15	11.15
1.2	3	6	10	7.92
1.4	2	4	8	5.94
1.6	2	4	6	4.67
1.8	2	3	5	3.83
2.0	2	2	4	3.26
2.2	2	2	3	2.87
2.4	2	2	3	2.59
2.6	2	2	2	2.40
2.8	2	2	2	2.27
3.0	2	2	2	2.17

Πίνακας 2.22: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (3,3) με $ARL_{3,3}(0) = 80.52$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{3,3}(\delta)$
0	24	57	111	80.52
0.2	20	45	88	64.20
0.4	13	28	54	39.67
0.6	8	17	33	24.05
0.8	6	11	21	15.48
1.0	4	8	14	10.71
1.2	3	6	10	7.92
1.4	3	5	8	6.22
1.6	3	4	6	5.13
1.8	3	3	5	4.42
2.0	3	3	4	3.95
2.2	3	3	3	3.62
2.4	3	3	3	3.41
2.6	3	3	3	3.26
2.8	3	3	3	3.16
3.0	3	3	3	3.10

Πίνακας 2.23: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (4,4) με $ARL_{4,4}(0) = 80.52$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{4,4}(\delta)$
0	25	57	110	80.52
0.2	20	45	87	63.27
0.4	13	28	52	38.56
0.6	9	17	31	23.50
0.8	6	12	20	15.45
1.0	5	8	14	11.01
1.2	4	7	11	8.43
1.4	4	5	8	6.85
1.6	4	4	7	5.85
1.8	4	4	6	5.20
2.0	4	4	4	4.78
2.2	4	4	4	4.49
2.4	4	4	4	4.31
2.6	4	4	4	4.19
2.8	4	4	4	4.11
3.0	4	4	4	4.06

Πίνακας 2.24: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (5,5) με $ARL_{5,5}(0) = 80.52$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{5,5}(\delta)$
0	25	57	110	80.52
0.2	21	45	86	62.85
0.4	14	28	52	38.21
0.6	9	17	31	23.58
0.8	7	12	21	15.84
1.0	5	9	15	11.59
1.2	5	7	11	9.12
1.4	5	5	9	7.62
1.6	5	5	8	6.67
1.8	5	5	6	6.06
2.0	5	5	5	5.67
2.2	5	5	5	5.41
2.4	5	5	5	5.25
2.6	5	5	5	5.15
2.8	5	5	5	5.08
3.0	5	5	5	5.05

2.5.2 Μελέτη του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k,k) με $ARL_{k,k}(0) = 370.4$ για $k = 1(1)5$.

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τιμές για το μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}(\delta) = E(T_{k,k}(\delta))$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ και για $\delta = 0(0.2)3$ με $ARL_{k,k}(0) = 370.4$. Τα σκιασμένα τετράγων δηλώνουν το $\min\{ARL_{k,k}(\delta); k = 1(1)5\}$.

Πίνακας 2.25: Μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}(\delta)$ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ με $ARL_{k,k}(0) = 370.4$

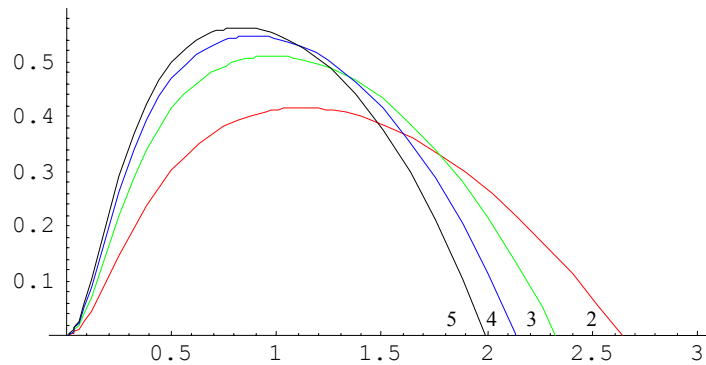
δ	$ARL_{1,1}(\delta)$	$ARL_{2,2}(\delta)$	$ARL_{3,3}(\delta)$	$ARL_{4,4}(\delta)$	$ARL_{5,5}(\delta)$
0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
0.2	308.43	276.67	259.3	248.54	241.32
0.4	200.1	150.25	129.55	118.7	112.26
0.6	119.67	78.91	65.25	58.99	55.71
0.8	71.55	43.63	35.76	32.63	31.28
1.0	43.9	25.78	21.45	20.06	19.72
1.2	27.82	16.28	14.00	13.54	13.72
1.4	18.25	10.94	9.85	9.91	10.37
1.6	12.38	7.79	7.41	7.77	8.39
1.8	8.7	5.85	5.89	6.44	7.16
2.0	6.3	4.61	4.92	5.59	6.38
2.2	4.7	3.79	4.28	5.03	5.87
2.4	3.65	3.23	3.85	4.66	5.54
2.6	2.9	2.85	3.56	4.42	5.33
2.8	2.38	2.58	3.36	4.26	5.20
3.0	2.0	2.39	3.23	4.16	5.11
p^*	0.00135	0.037422	0.115055	0.202766	0.285135
UCL	3	1.78142	1.20008	0.831782	0.567654
LCL	-3	-1.78142	-1.20008	-0.831782	-0.567654

Από τις τιμές του παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι χρησιμοποιώντας δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) , $k \geq 2$, έχουμε σαφή βελτίωση στην τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής όταν θέλουμε να ανιχνεύσουμε μικρές και μεσαίες μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας σε σχέση με το αντίστοιχο κλασικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart που αντιστοιχεί στην τιμή $k=1$. Παρατηρούμε επίσης ότι δεν υπάρχει βελτίωση για αρκετά μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου). Τόσο το εύρος δ της μετατόπισης του μέσου της διεργασίας όσο και το ποσοστό βελτίωσης του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής δεν είναι ομοιόμορφο για τις διάφορες τιμές του k . Το ποσοστό βελτίωσης στην τιμή του εκτός

ελέγχου μέσου μήκους ροής του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) , $k \geq 2$, σε σχέση με το αντίστοιχο κλασικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart δίνεται από τον τύπο

$$I_{k,k}(\delta) = \frac{ARL_{1,1}(\delta) - ARL_{k,k}(\delta)}{ARL_{1,1}(\delta)}$$

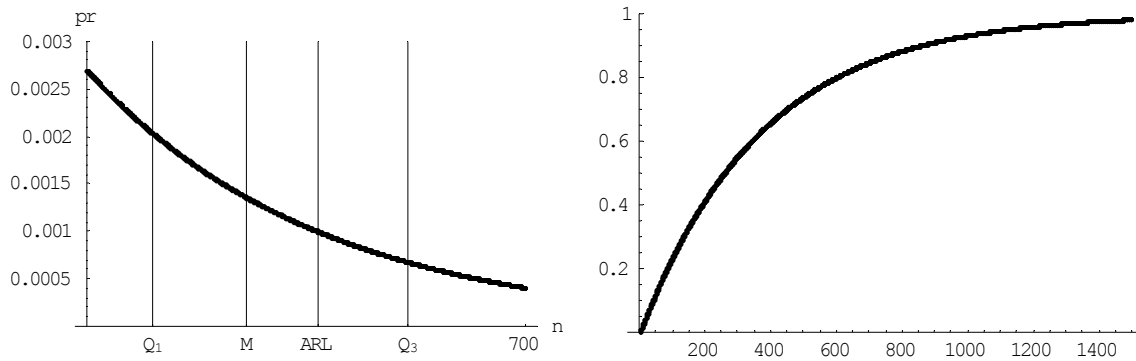
Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $I_{k,k}(\delta)$ για $k = 2, 3, 4, 5$



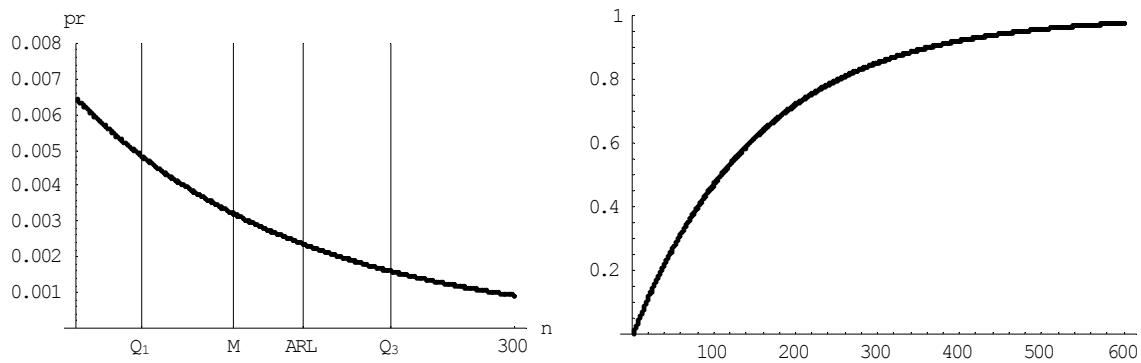
Διάγραμμα 2.85: Γραφική παράσταση του $I_{k,k}(\delta)$ για $k = 2(1)5$ με $ARL_{in} = 370.4$

Από τη στιγμή που θα καθοριστεί η μετατόπιση του μέσου της διεργασίας που μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε όσο το δυνατόν πιο γρήγορα, τότε χρησιμοποιώντας το παραπάνω διάγραμμα μπορούμε να επιλέξουμε στην πράξη την τιμή του k ($k = 2, 3, 4, 5$) και συνεπώς το κατάλληλο δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) που επιτυγχάνει το σκοπό μας.

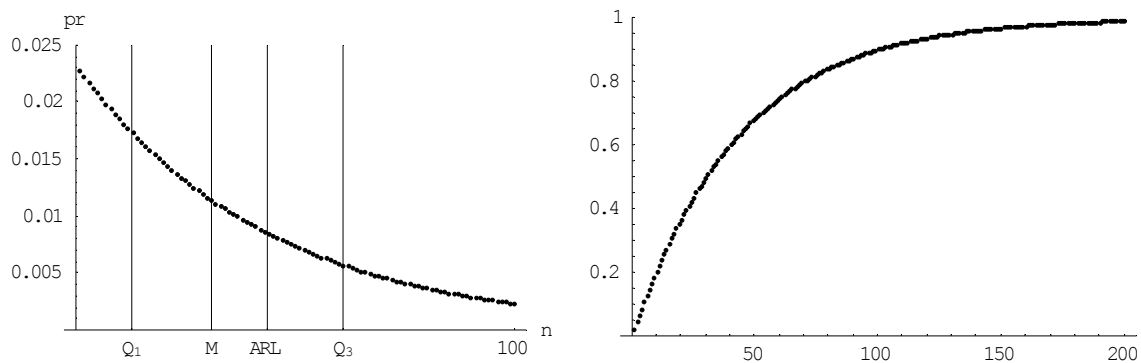
Στα ακόλουθα διαγράμματα δίνονται γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής του μήκους ροής $T_{k,k}(\delta)$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ και για $\delta = 0, 0.5, 1, 2$.



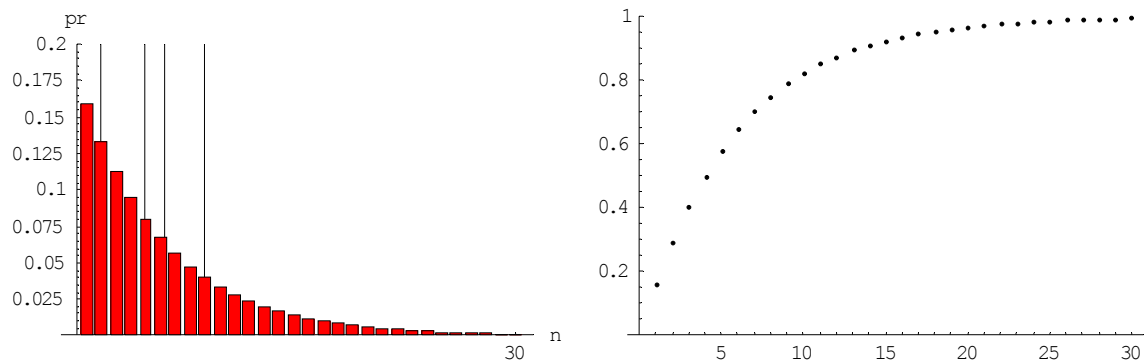
Διάγραμμα 2.86: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(0)$



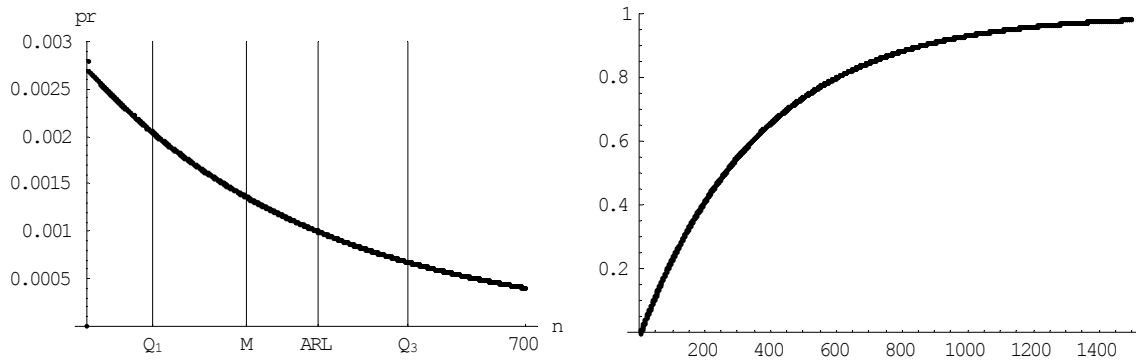
Διάγραμμα 2.87: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(0.5)$



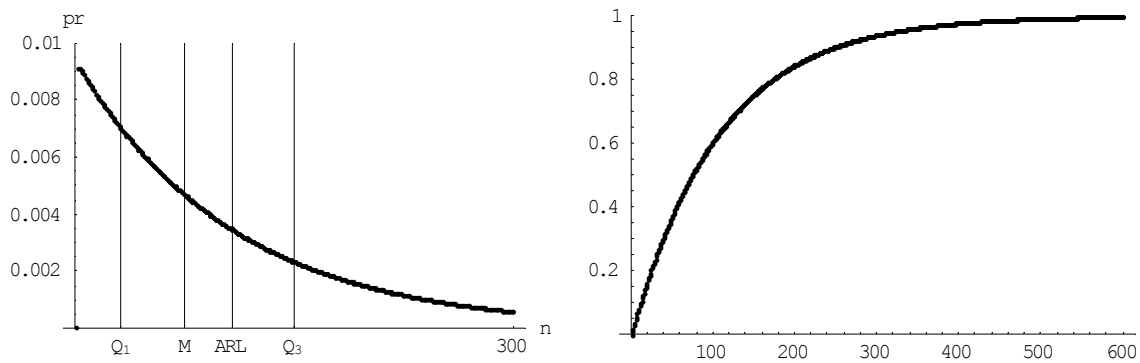
Διάγραμμα 2.88: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(1)$



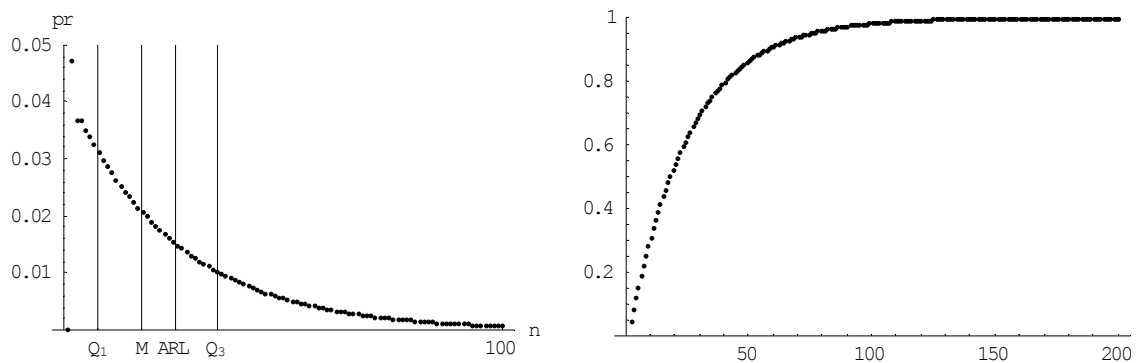
Διάγραμμα 2.89: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(2)$



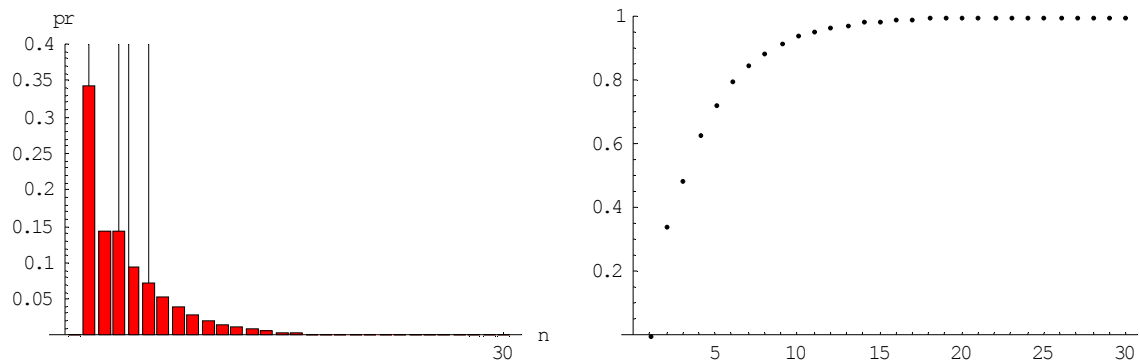
Διάγραμμα 2.90: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(0)$



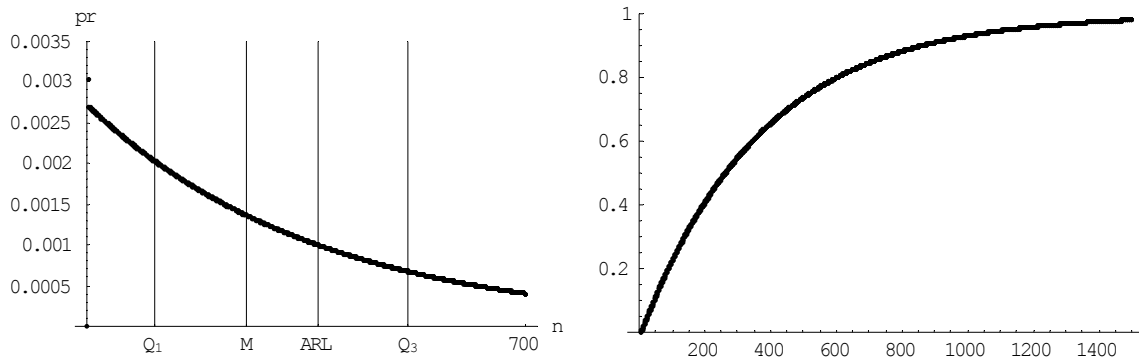
Διάγραμμα 2.91: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(0.5)$



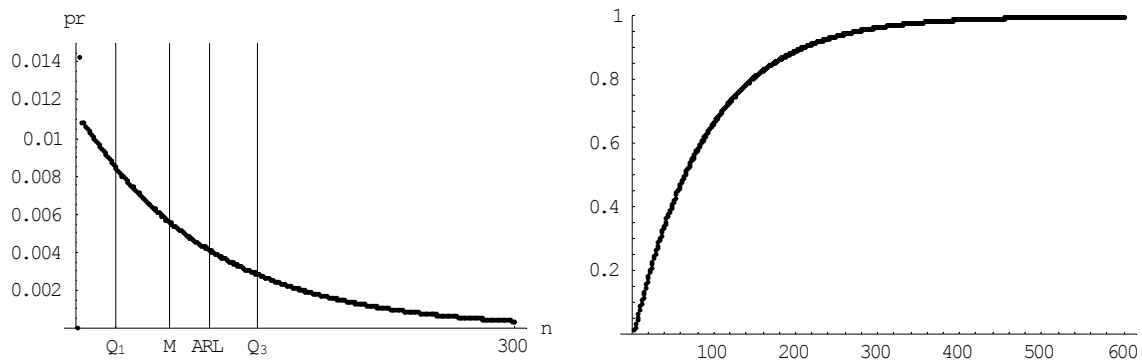
Διάγραμμα 2.92: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(1)$



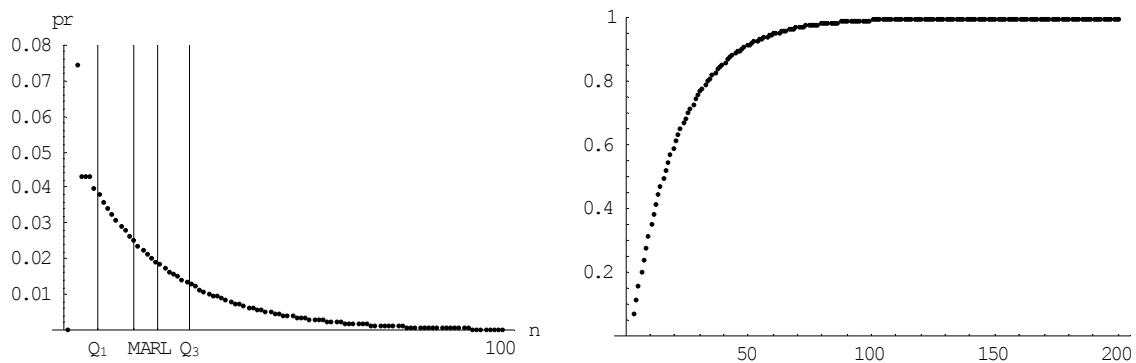
Διάγραμμα 2.93: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(2)$



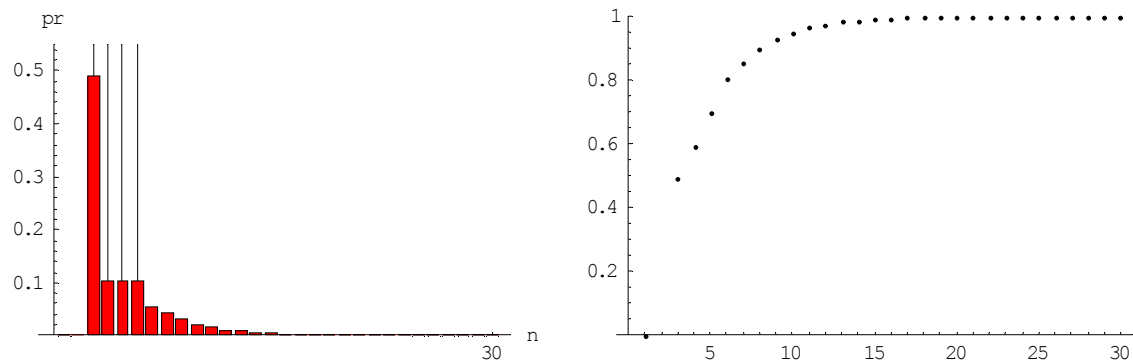
Διάγραμμα 2.94: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(0)$



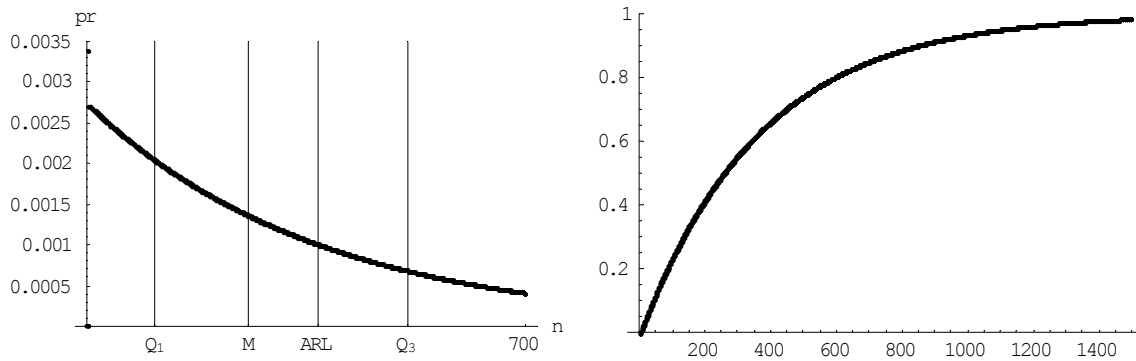
Διάγραμμα 2.95: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(0.5)$



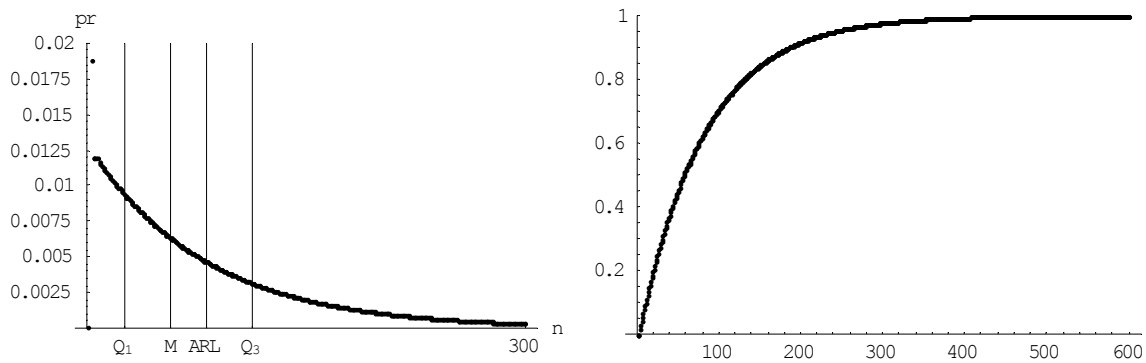
Διάγραμμα 2.96: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(1)$



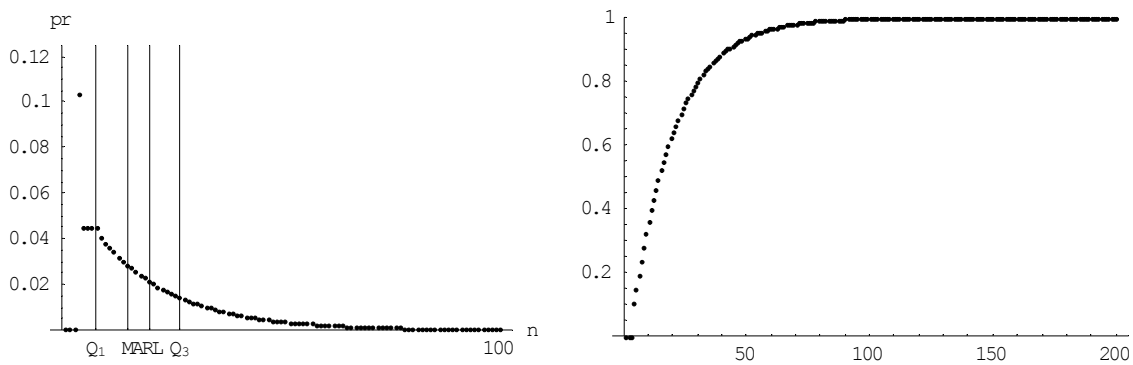
Διάγραμμα 2.97: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(2)$



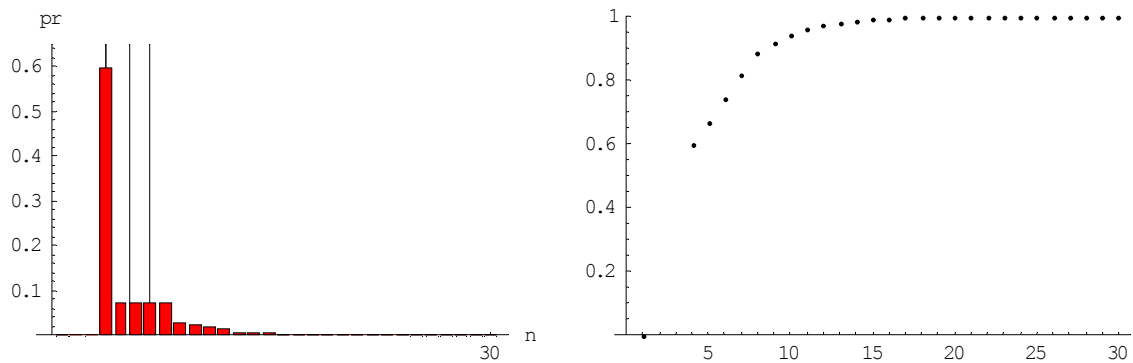
Διάγραμμα 2.98: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(0)$



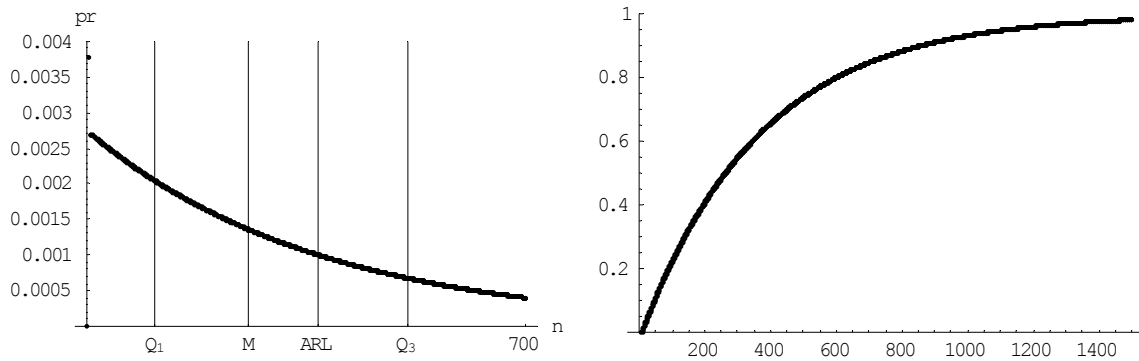
Διάγραμμα 2.99: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(0.5)$



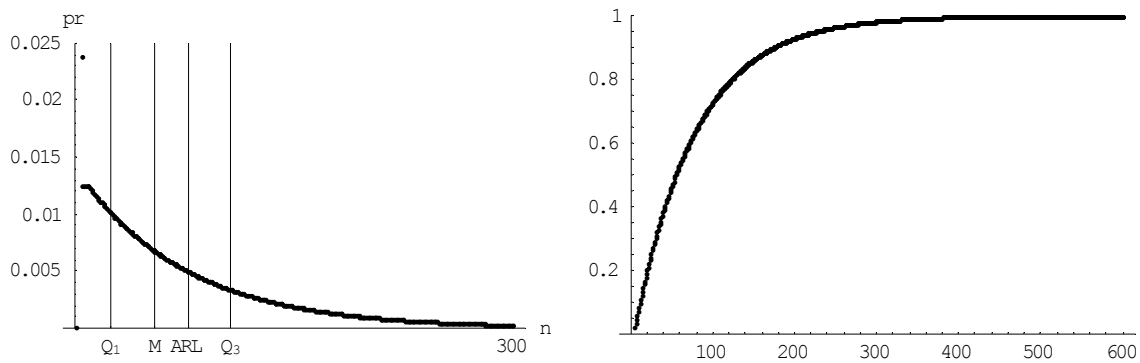
Διάγραμμα 2.100: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(1)$



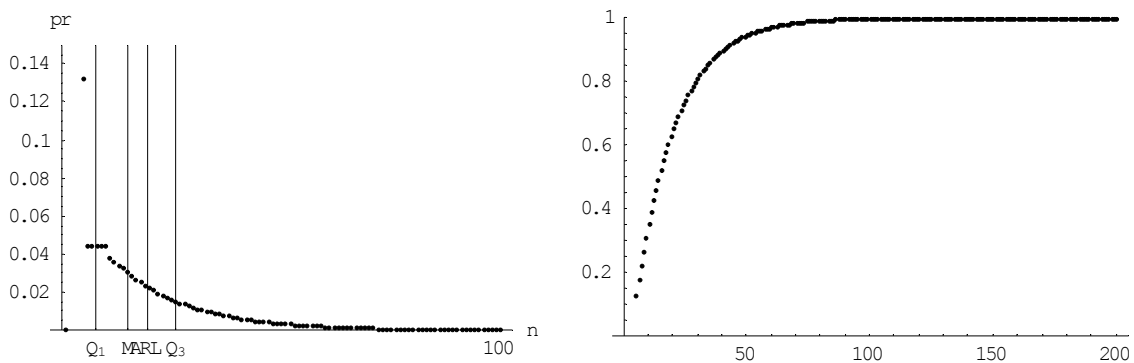
Διάγραμμα 2.101: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(2)$



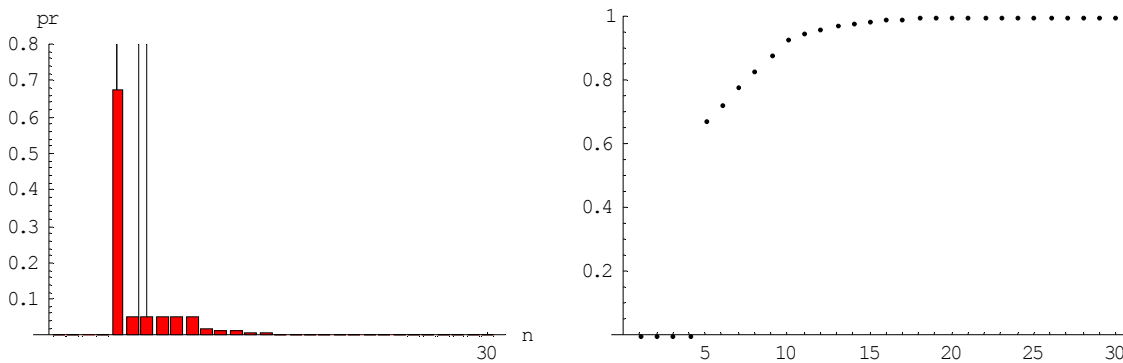
Διάγραμμα 2.102: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(0)$



Διάγραμμα 2.103: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(0.5)$



Διάγραμμα 2.104: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(1)$



Διάγραμμα 2.105: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(2)$

Στους ακόλουθους πίνακες δίνονται τιμές των ποσοτήτων Q_1 , M και Q_3 του μήκους ροής $T_{k,k}(\delta)$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ και για $\delta = 0(0.2)3$ που μας βοηθούν στην αξιολόγηση της “αξιοπιστίας” του μέσου μήκους ροής των διαγραμμάτων

Πίνακας 2.26: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $(1, 1)$ με $ARL_{1,1}(0) = 370.4$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{1,1}(\delta)$
0	107	257	513	370.4
0.2	89	214	427	308.43
0.4	58	139	277	200.1
0.6	35	83	166	119.67
0.8	21	50	99	71.55
1.0	13	31	61	43.9
1.2	8	19	38	27.82
1.4	6	13	25	18.25
1.6	4	9	17	12.38
1.8	3	6	12	8.7
2.0	2	5	9	6.3
2.2	2	3	6	4.7
2.4	1	3	5	3.65
2.6	1	2	4	2.9
2.8	1	2	3	2.38
3.0	1	1	2	2.0

Πίνακας 2.27: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $(2, 2)$ με $ARL_{2,2}(0) = 370.4$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{2,2}(\delta)$
0	108	257	513	370.4
0.2	81	192	383	276.67
0.4	44	105	208	150.25
0.6	24	55	109	78.91
0.8	14	31	60	43.63
1.0	8	18	35	25.78
1.2	6	12	22	16.28
1.4	4	8	15	10.94
1.6	3	6	10	7.79
1.8	2	4	8	5.85
2.0	2	4	6	4.61
2.2	2	3	5	3.79
2.4	2	2	4	3.23
2.6	2	2	3	2.85
2.8	2	2	3	2.58
3.0	2	2	2	2.39

Πίνακας 2.28: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (3, 3) με $ARL_{3,3}(0) = 370.4$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{3,3}(\delta)$
0	108	257	513	370.4
0.2	76	108	359	259.3
0.4	39	90	179	129.55
0.6	20	46	90	65.25
0.8	12	25	49	35.76
1.0	8	16	29	21.45
1.2	6	10	19	14.00
1.4	4	7	13	9.85
1.6	3	6	9	7.41
1.8	3	5	7	5.89
2.0	3	4	6	4.92
2.2	3	3	5	4.28
2.4	3	3	4	3.85
2.6	3	3	3	3.56
2.8	3	3	3	3.36
3.0	3	3	3	3.23

Πίνακας 2.29: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (4, 4) με $ARL_{4,4}(0) = 370.4$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{4,4}(\delta)$
0	109	258	512	370.4
0.2	74	173	343	248.54
0.4	36	83	163	118.7
0.6	19	42	81	58.99
0.8	11	23	44	32.63
1.0	8	15	27	20.06
1.2	6	10	18	13.54
1.4	4	4	13	9.91
1.6	4	6	10	7.77
1.8	4	5	8	6.44
2.0	4	4	7	5.59
2.2	4	4	5	5.03
2.4	4	4	4	4.66
2.6	4	4	4	4.42
2.8	4	4	4	4.26
3.0	4	4	4	4.16

Πίνακας 2.30: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (5, 5) με $ARL_{5,5}(0) = 370.4$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{5,5}(\delta)$
0	110	258	512	370.4
0.2	72	169	333	241.32
0.4	35	79	154	112.26
0.6	19	40	76	55.71
0.8	12	23	42	31.28
1.0	8	15	26	19.72
1.2	6	10	18	13.72
1.4	5	8	13	10.37
1.6	5	6	10	8.39
1.8	5	5	9	7.16
2.0	5	5	7	6.38
2.2	5	5	5	5.87
2.4	5	5	5	5.54
2.6	5	5	5	5.33
2.8	5	5	5	5.20
3.0	5	5	5	5.11

2.5.3 Μελέτη του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k,k) με $ARL_{k,k}(0)=2149.34$ για $k=1(1)5$.

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τιμές για το μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}(\delta) = E(T_{k,k}(\delta))$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ και για $\delta = 0(0.2)3$ με $ARL_{k,k}(0) = 2149.34$. Τα σκιασμένα τετράγωνα δηλώνουν το $\min\{ARL_{k,k}(\delta); k = 1(1)5\}$.

Πίνακας 2.31: Μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}(\delta)$ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ με $ARL_{k,k}(0) = 2149.34$

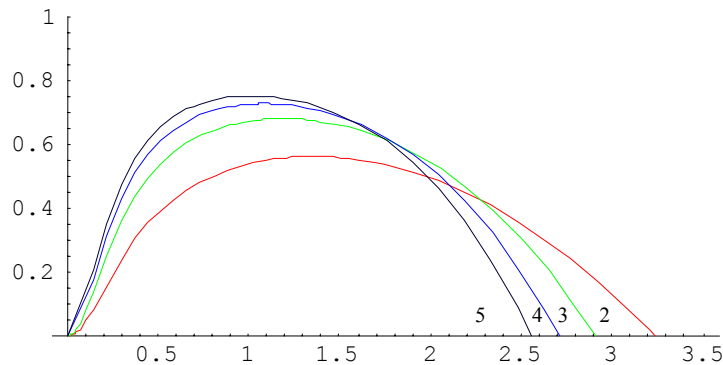
δ	$ARL_{1,1}(\delta)$	$ARL_{2,2}(\delta)$	$ARL_{3,3}(\delta)$	$ARL_{4,4}(\delta)$	$ARL_{5,5}(\delta)$
0	2149.34	2149.34	2149.34	2149.34	2149.34
0.2	1691.41	1447.33	1304.15	1210.94	1145.02
0.4	984.54	665.19	529.0	455.52	409.81
0.6	530.09	300.22	221.75	184.28	162.86
0.8	287.73	144.06	102.62	84.62	75.07
1.0	160.95	74.30	52.60	43.96	39.77
1.2	93.24	41.19	29.71	25.58	23.86
1.4	55.98	24.49	18.36	16.47	15.93
1.6	34.82	15.57	12.31	11.57	11.63
1.8	24.44	10.53	8.87	8.76	9.15
2.0	14.97	7.55	6.81	7.06	7.63
2.2	10.33	5.70	5.51	6.00	6.68
2.4	7.37	4.51	4.67	5.29	6.07
2.6	5.43	3.72	4.11	4.83	5.67
2.8	4.13	3.19	3.74	4.53	5.41
3.0	3.24	2.82	3.48	4.33	5.25
p^*	0.00023263	0.015369	0.0628417	0.127785	0.196
UCL	3.5	2.16045	1.53135	1.13692	0.855996
LCL	-3.5	-2.16045	-1.53135	-1.13692	-0.855996

Από τις τιμές του παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι χρησιμοποιώντας δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) , $k \geq 2$, έχουμε σαφή βελτίωση στην τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής όταν θέλουμε να ανιχνεύσουμε μικρές, μεσαίες αλλά και μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας σε σχέση με το αντίστοιχο κλασικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart που αντιστοιχεί στην τιμή $k=1$. Τόσο το εύρος δ της μετατόπισης του μέσου της διεργασίας όσο και το ποσοστό βελτίωσης του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής δεν είναι ομοιόμορφο για τις διάφορες τιμές του k . Το ποσοστό βελτίωσης στην τιμή του

εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής του άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) , $k \geq 2$, σε σχέση με το αντίστοιχο κλασικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart δίνεται από τον τύπο

$$I_{k,k}(\delta) = \frac{ARL_{1,1}(\delta) - ARL_{k,k}(\delta)}{ARL_{1,1}(\delta)}$$

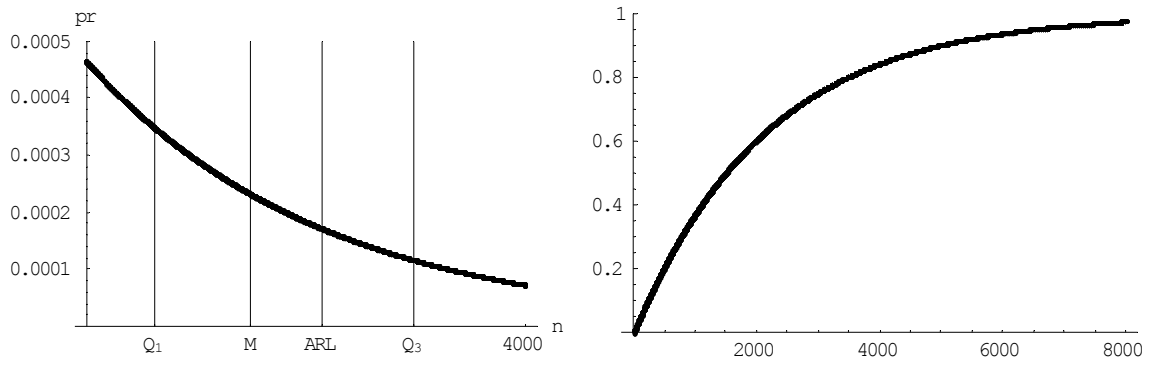
Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $I_{k,k}(\delta)$ για $k = 2, 3, 4, 5$.



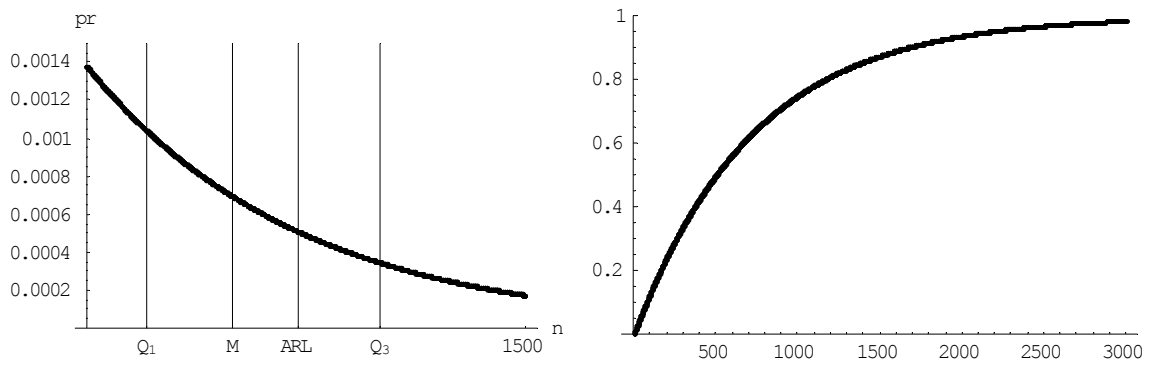
Διάγραμμα 2.106: Γραφική παράσταση του $I_{k,k}(\delta)$ για $k = 2(1)5$ με $ARL_{in} = 2149.34$

Από τη στιγμή που θα καθοριστεί η μετατόπιση του μέσου της διεργασίας που μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε όσο το δυνατόν πιο γρήγορα, τότε χρησιμοποιώντας το παραπάνω διάγραμμα μπορούμε να επιλέξουμε στην πράξη την τιμή του k ($k = 2, 3, 4, 5$) και συνεπώς το κατάλληλο δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) που επιτυγχάνει το σκοπό μας.

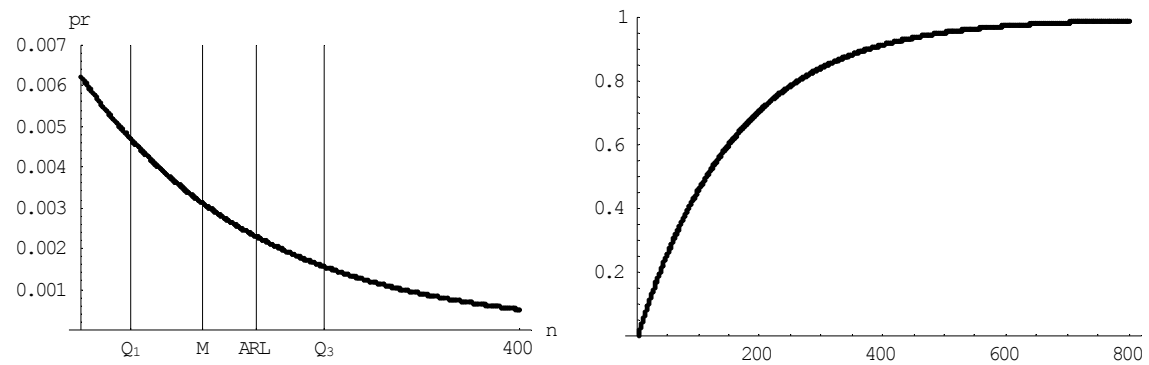
Στα ακόλουθα διαγράμματα δίνονται γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής του μήκους ροής $T_{k,k}(\delta)$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ και για $\delta = 0, 0.5, 1, 2$.



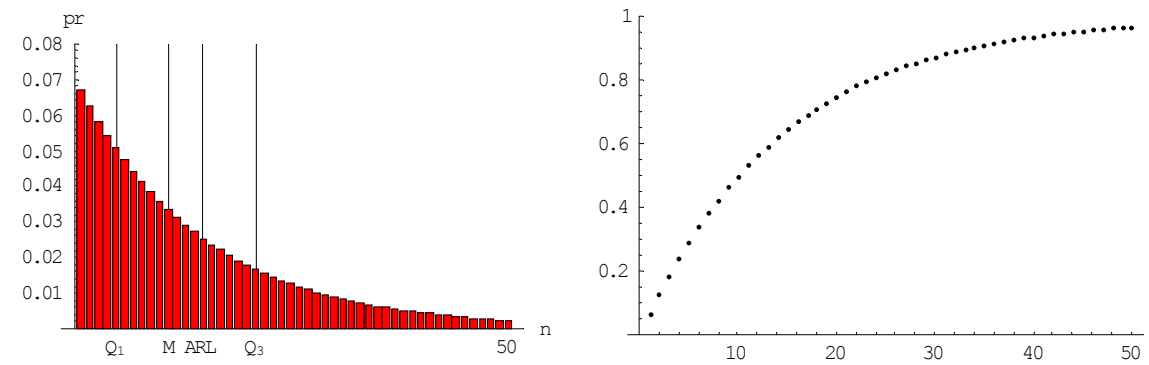
Διάγραμμα 2.107: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(0)$



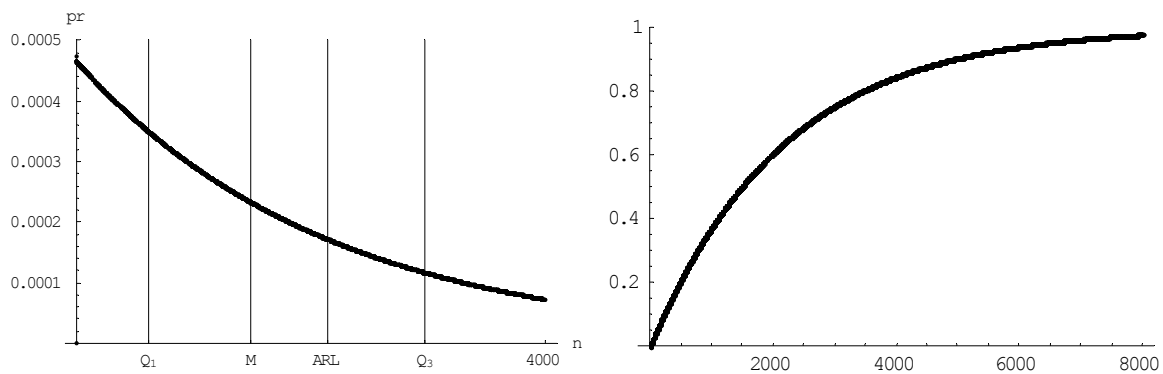
Διάγραμμα 2.108: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(0.5)$



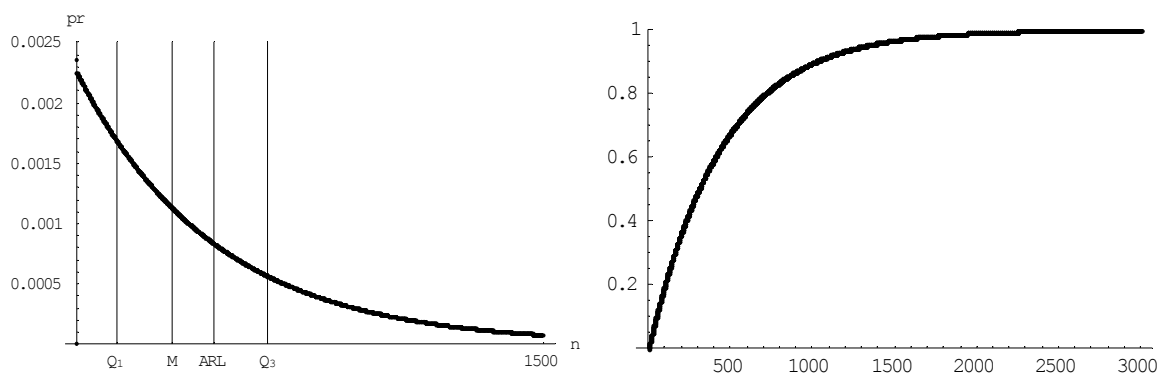
Διάγραμμα 2.109: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(1)$



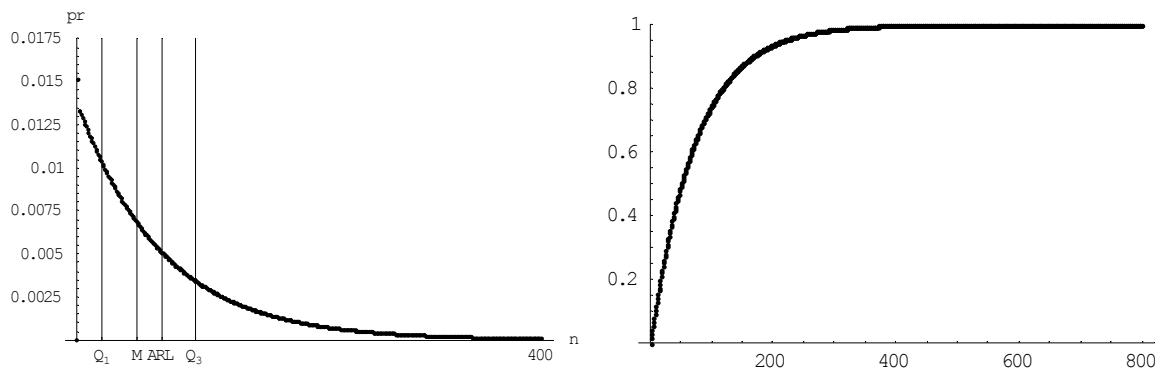
Διάγραμμα 2.110: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{1,1}(2)$



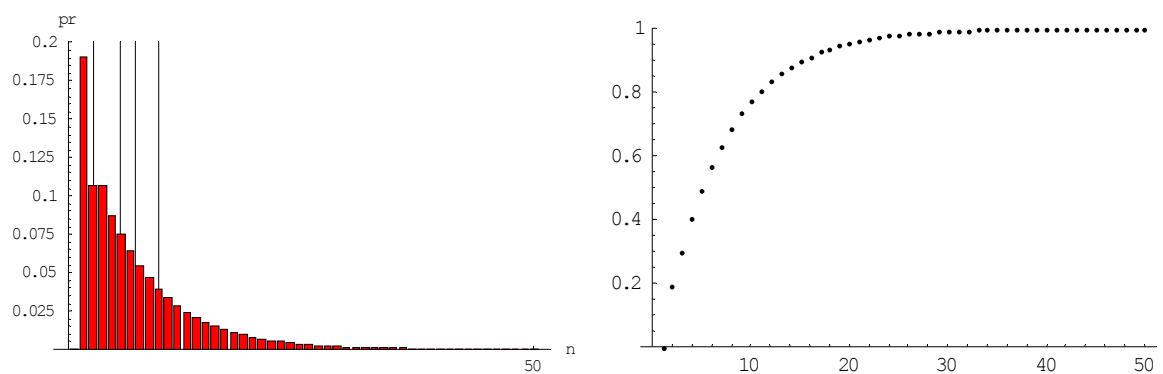
Διάγραμμα 2.111: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(0)$



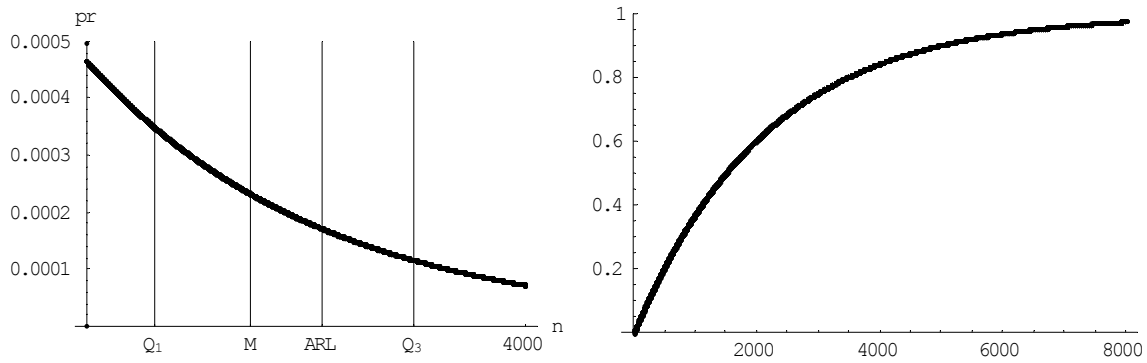
Διάγραμμα 2.112: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(0.5)$



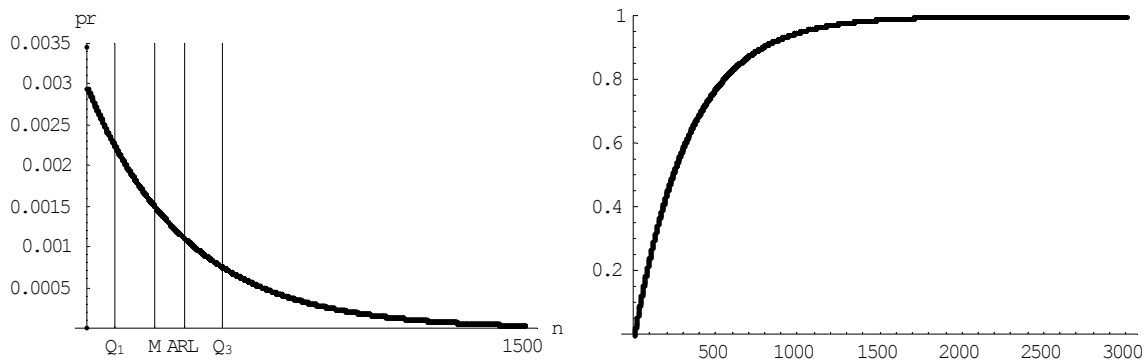
Διάγραμμα 2.113: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(1)$



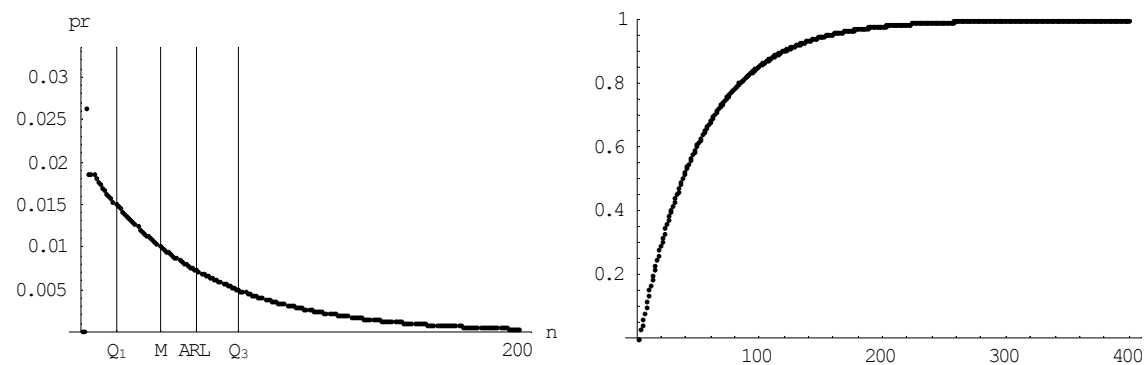
Διάγραμμα 2.114: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2,2}(2)$



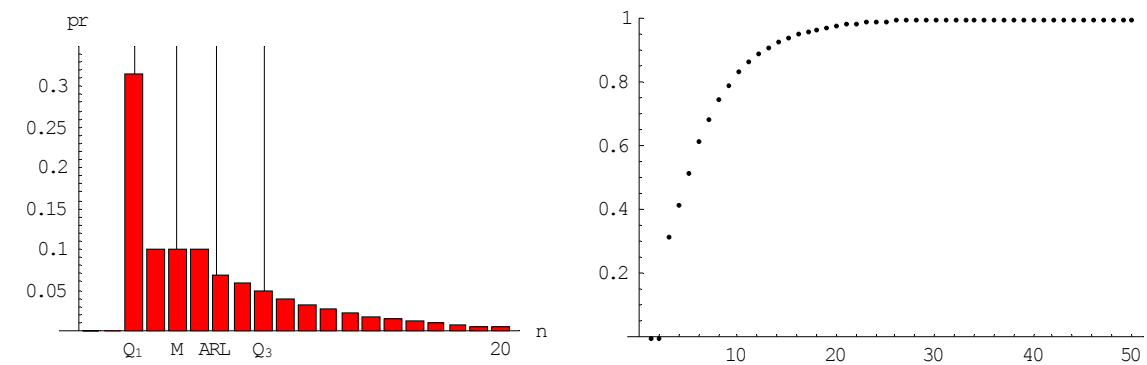
Διάγραμμα 2.115: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(0)$



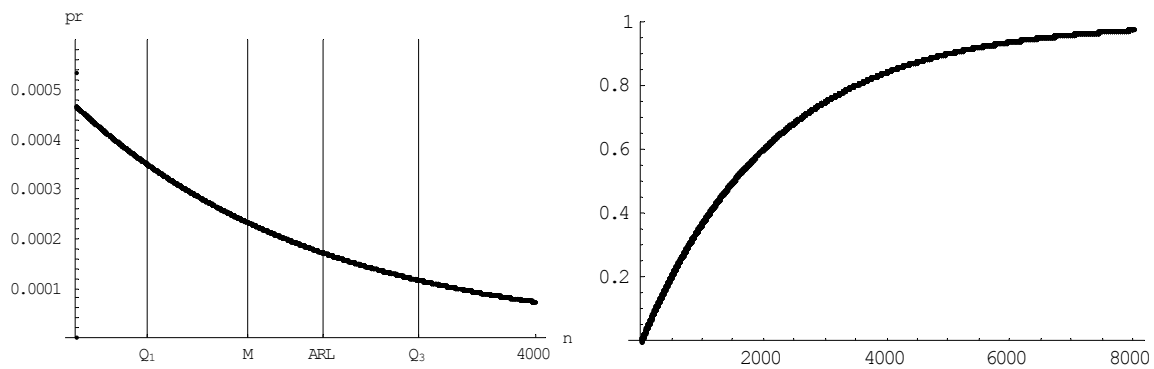
Διάγραμμα 2.116: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(0.5)$



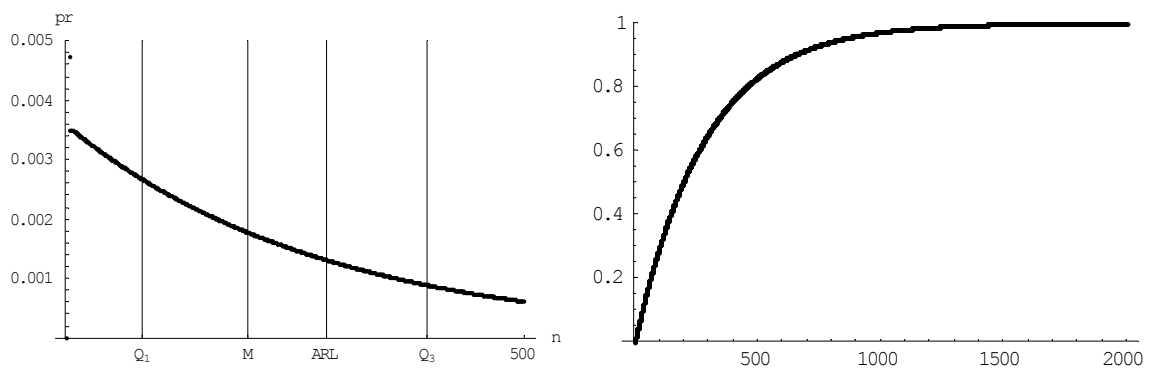
Διάγραμμα 2.1176: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(1)$



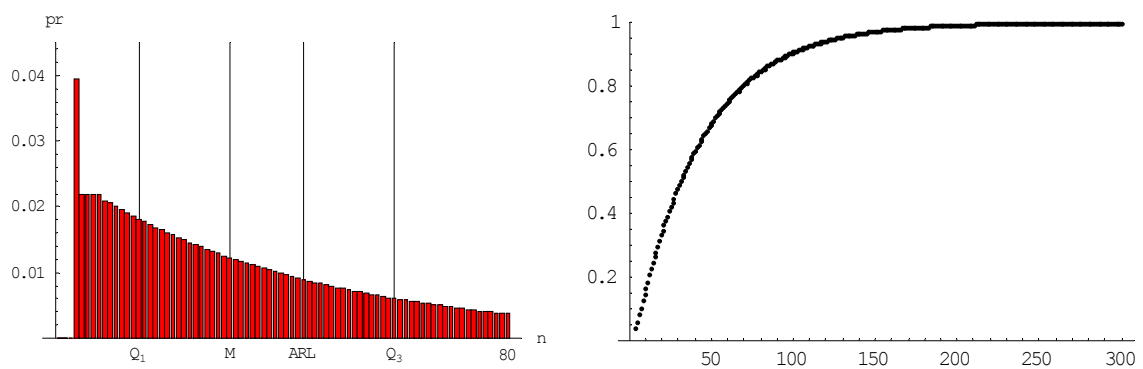
Διάγραμμα 2.118: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{3,3}(2)$



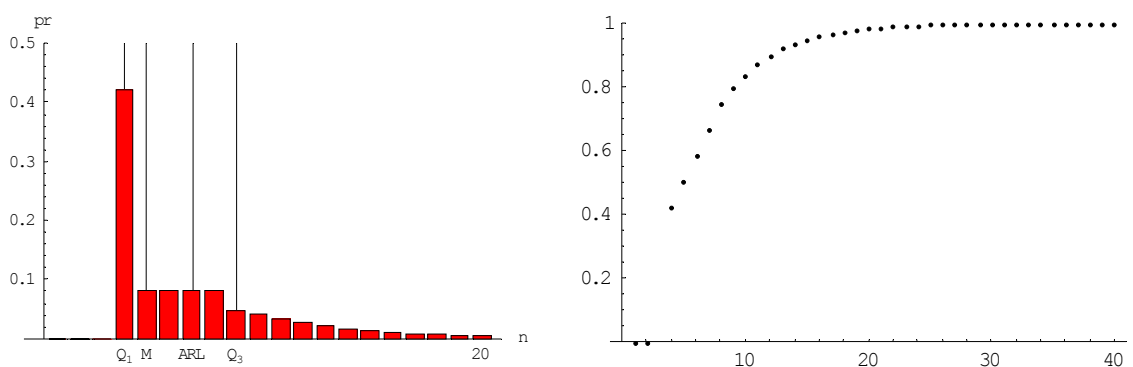
Διάγραμμα 2.119: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(0)$



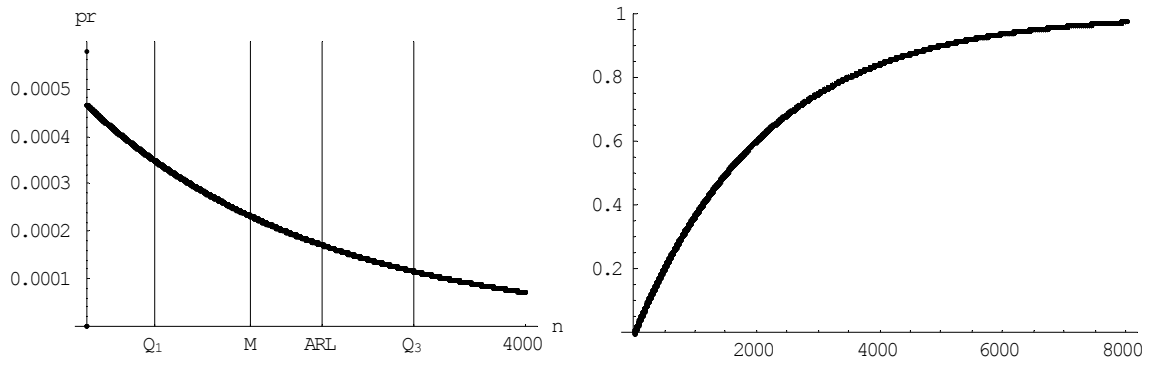
Διάγραμμα 2.120: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(0.5)$



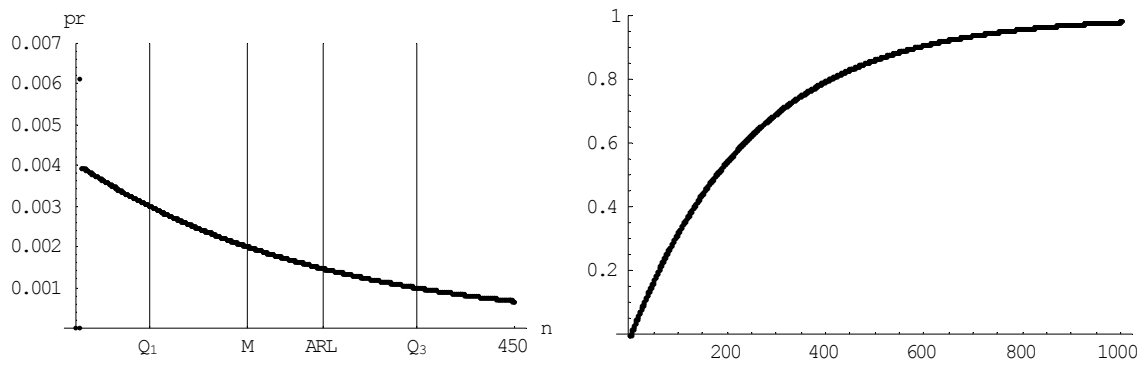
Διάγραμμα 2.121: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(1)$



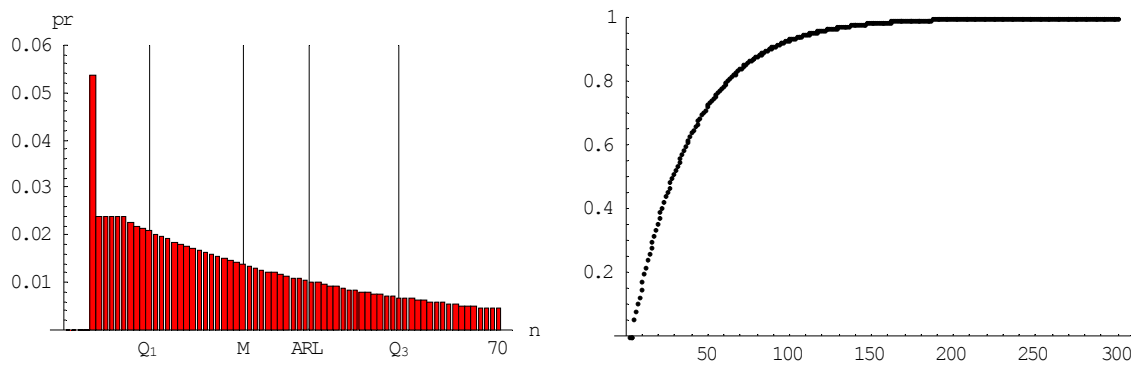
Διάγραμμα 2.122: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{4,4}(2)$



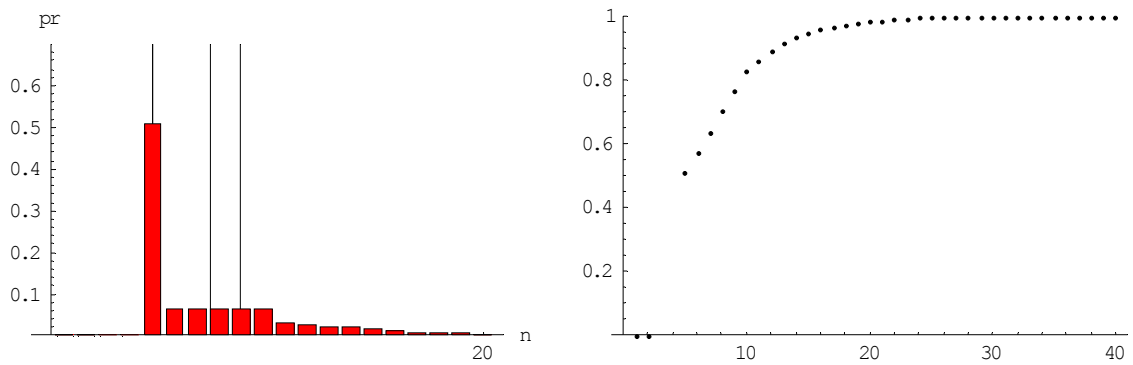
Διάγραμμα 2.123: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(0)$



Διάγραμμα 2.124: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(0.5)$



Διάγραμμα 2.125: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(1)$



Διάγραμμα 2.126: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{5,5}(2)$

Στους ακόλουθους πίνακες δίνονται τιμές των ποσοτήτων Q_1 , M και Q_3 του μήκους ροής $T_{k,k}(\delta)$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ και για $\delta = 0(0.2)3$ που μας βοηθούν στην αξιολόγηση της “αξιοπιστίας” του μέσου μήκους ροής των διαγραμμάτων

Πίνακας 2.32: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $(1, 1)$ με $ARL_{1,1}(0) = 2149.34$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{1,1}(\delta)$
0	619	1490	2979	2149.34
0.2	487	1173	2345	1691.41
0.4	284	683	1365	984.54
0.6	153	368	735	530.09
0.8	83	200	399	287.73
1.0	47	112	223	160.95
1.2	27	65	129	93.24
1.4	16	39	77	55.98
1.6	10	24	48	34.82
1.8	7	16	31	24.44
2.0	5	11	21	14.97
2.2	3	7	14	10.33
2.4	2	5	10	7.37
2.6	2	4	7	5.43
2.8	2	3	6	4.13
3.0	1	2	4	3.24

Πίνακας 2.33: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $(2, 2)$ με $ARL_{2,2}(0) = 2149.34$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{2,2}(\delta)$
0	619	1490	2979	2149.34
0.2	417	1004	2006	1447.33
0.4	192	462	922	665.19
0.6	87	209	416	300.22
0.8	42	100	199	144.06
1.0	22	52	102	74.30
1.2	13	29	57	41.19
1.4	8	17	33	24.49
1.6	5	11	21	15.57
1.8	4	8	14	10.53
2.0	3	6	10	7.55
2.2	2	4	6	5.70
2.4	2	4	6	4.51
2.6	2	3	5	3.72
2.8	2	2	4	3.19
3.0	2	2	3	2.82

Πίνακας 2.34: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (3, 3) με $ARL_{3,3}(0) = 2149.34$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{3,3}(\delta)$
0	620	1491	2979	2149.34
0.2	377	905	1807	1304.15
0.4	154	367	732	529.0
0.6	65	154	307	221.75
0.8	31	72	141	102.62
1.0	17	37	72	52.60
1.2	10	21	40	29.71
1.4	7	13	25	18.36
1.6	5	9	16	12.31
1.8	4	7	11	8.87
2.0	3	5	9	6.81
2.2	3	4	7	5.51
2.4	3	3	6	4.67
2.6	3	3	5	4.11
2.8	3	3	4	3.74
3.0	3	3	3	3.48

Πίνακας 2.35: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (4, 4) με $ARL_{4,4}(0) = 2149.34$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{4,4}(\delta)$
0	621	1491	2978	2149.34
0.2	351	840	1677	1210.94
0.4	133	317	630	455.52
0.6	55	129	254	184.28
0.8	27	60	116	84.62
1.0	15	31	60	43.96
1.2	9	19	34	25.58
1.4	7	12	22	16.47
1.6	5	9	15	11.57
1.8	4	7	11	8.76
2.0	4	5	9	7.06
2.2	4	4	7	6.00
2.4	4	4	6	5.29
2.6	4	4	5	4.83
2.8	4	4	4	4.53
3.0	4	4	4	4.33

Πίνακας 2.36: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (5, 5) με $ARL_{5,5}(0) = 2149.34$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{5,5}(\delta)$
0	621	1491	2978	2149.34
0.2	332	795	1586	1145.02
0.4	121	285	567	409.81
0.6	50	114	224	162.86
0.8	24	53	103	75.07
1.0	14	29	54	39.77
1.2	9	18	32	23.86
1.4	7	12	21	15.93
1.6	5	9	15	11.63
1.8	5	7	11	9.15
2.0	5	5	9	7.63
2.2	5	5	8	6.68
2.4	5	5	6	6.07
2.6	5	5	5	5.67
2.8	5	5	5	5.41
3.0	5	5	5	5.25

2.6 Αξιολόγηση των δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart τύπου (k, k)

Στην παρούσα παράγραφο θα προβούμε σε μια συγκριτική αξιολόγηση των δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) με αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου Shewhart που βασίζονται σε κανόνες ευαισθητοποίησης που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 1. Θα δώσουμε πίνακες με τιμές για το μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}(\delta)$ για τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ και θα τις συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες τιμές $ARL_{rule}(\delta)$ των διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart που βασίζονται στους κανόνες $rule = C_{12}, C_{15}, C_{1234}, C_{1456}$. Υπενθυμίζουμε ότι οι απλοί κανόνες C_1, C_2, \dots, C_6 είναι οι ακόλουθοι

$$C_1 = \{T(1,1,-\infty,-3), T(1,1,3,\infty)\}$$

$$C_2 = \{T(2,3,-3,-2), T(2,3,2,3)\}$$

$$C_3 = \{T(4,5,-3,-1), T(4,5,1,3)\}$$

$$C_4 = \{T(8,8,-3,0), T(8,8,0,3)\}$$

$$C_5 = \{T(2,2,-3,-2), T(2,2,2,3)\}$$

$$C_6 = \{T(5,5,-3,-1), T(5,5,1,3)\}.$$

Φυσικά για να είναι συγκρίσιμες οι τιμές του μέσου μήκους ροής θα πρέπει τα διαγράμματα ελέγχου να έχουν ίδιο εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής. Για τον κανόνα C_{12} έχουμε τον ακόλουθο πίνακα. Τα σκιασμένα τετράγωνα δηλώνουν το $\min\{ARL_{C_{12}}, ARL_{k,k}; k = 1(1)5\}$.

Πίνακας 2.37: Μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}(\delta)$ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου

Shewhart τύπου (k, k) για $k=1(1)5$ με $ARL_{k,k}(0) = 225.44$

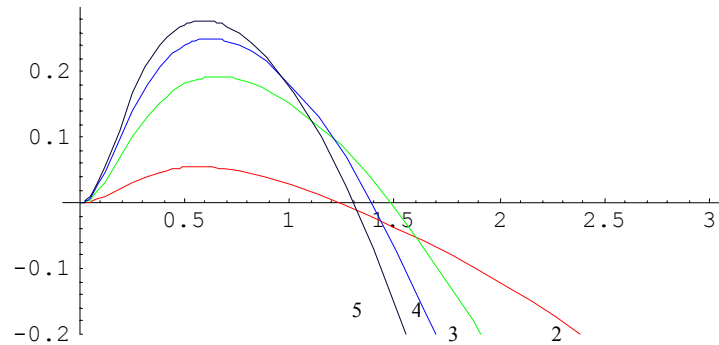
δ	$ARL_{C_{12}}(\delta)$	$ARL_{1,1}(\delta)$	$ARL_{2,2}(\delta)$	$ARL_{3,3}(\delta)$	$ARL_{4,4}(\delta)$	$ARL_{5,5}(\delta)$
0	225.44	225.44	225.44	225.44	225.44	225.44
0.2	177.56	190.77	173.60	164.58	159.21	155.75
0.4	104.46	127.85	99.34	87.81	81.97	78.70
0.6	57.92	79.01	54.73	46.83	43.40	41.80
0.8	33.12	48.68	31.61	27.00	25.36	24.85
1.0	20.01	30.72	19.45	16.96	16.36	16.45
1.2	12.81	20.01	12.76	11.53	11.51	11.93
1.4	8.69	13.48	8.88	8.41	8.73	9.32
1.6	6.21	9.39	6.53	6.52	7.04	7.74
1.8	4.66	6.76	5.05	5.33	5.97	6.75
2.0	3.65	5.03	4.08	4.55	5.28	6.11
2.2	2.96	3.86	3.43	4.03	4.83	5.70
2.4	2.48	3.05	2.99	3.68	4.53	5.43
2.6	2.13	2.48	2.68	3.45	4.33	5.26
2.8	1.87	2.08	2.46	3.29	4.20	5.15
3.0	1.68	1.78	2.31	3.18	4.12	5.09
p^*	0.0044357	0.00221789	0.0482164	0.13685	0.231621	0.317776
UCL	3	2.84538	1.6624	1.09458	0.733519	0.473927
LCL	-3	-2.84538	-1.6624	-1.09458	-0.733519	-0.473927

Στον παραπάνω πίνακα έχουν σκιαστεί τα κελιά που περιέχουν την μικρότερη τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για τις διάφορες τιμές του δ . Όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα, το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (5,5) είναι το πλέον ευαίσθητο για τον εντοπισμό μετατοπίσεων του μέσου έως 0.8σ , δηλαδή είναι ευαίσθητο για μικρές μετατοπίσεις. Για μετατοπίσεις της τάξης του $1\sigma-1.5\sigma$ προτιμάται το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (4,4) ή το (3,3). Για μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου πάνω από 1.5σ το διάγραμμα που χρησιμοποιεί τον κανόνα C_{12} είναι το πλέον ευαίσθητο.

Το ποσοστό βελτίωσης στην τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) , $k \geq 2$, σε σχέση με το αντίστοιχο διάγραμμα ελέγχου Shewhart που χρησιμοποιεί τον κανόνα C_{12} δίνεται από τον τύπο

$$I_{k,k}^{12}(\delta) = \frac{ARL_{C_{12}}(\delta) - ARL_{k,k}(\delta)}{ARL_{C_{12}}(\delta)}$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $I_{k,k}^{12}(\delta)$ για $k = 2,3,4,5$



Διάγραμμα 2.127: Γραφική παράσταση του $I_{k,k}^{12}(\delta)$ για $k = 2(1)5$ με $ARL_{in} = 225.44$

Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι το ποσοστό βελτίωσης μπορεί να φτάσει μέχρι το 20% - 30% και αυτό επιτυγχάνεται με χρήση του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (5,5) και αφορά μετατοπίσεις κοντά στο 0.5σ . Επίσης, την ίδια περίπου συμπεριφορά έχει και το αντίστοιχο διάγραμμα ελέγχου τύπου (4,4), ενώ το διάγραμμα ελέγχου τύπου (3,3) παρουσιάζει μικρότερο ποσοστό βελτίωσης. Το διάγραμμα ελέγχου τύπου (2,2) εμφανίζει το μικρότερο ποσοστό βελτίωσης.

Αντίστοιχα αποτελέσματα που αφορούν τον κανόνα C_{15} παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα. Τα σκιασμένα τετράγωνα δηλώνουν το $\min\{ARL_{C_{15}}, ARL_{k,k}; k = 1(1)5\}$.

Πίνακας 2.38: Μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}(\delta)$ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου

Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ με $ARL_{k,k}(0) = 278.03$

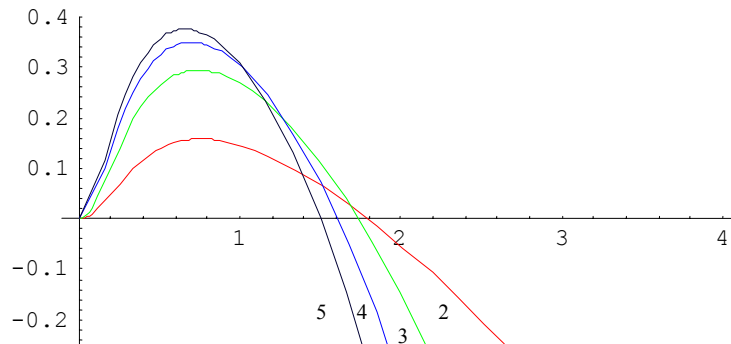
δ	$ARL_{C_{15}}(\delta)$	$ARL_{1,1}(\delta)$	$ARL_{2,2}(\delta)$	$ARL_{3,3}(\delta)$	$ARL_{4,4}(\delta)$	$ARL_{5,5}(\delta)$
0	278.03	278.03	278.03	278.03	278.03	278.03
0.2	222.59	233.68	211.35	199.40	192.14	187.37
0.4	134.17	154.45	118.26	103.43	95.79	91.38
0.6	75.27	94.12	63.83	53.82	49.36	47.15
0.8	42.96	57.25	36.19	30.87	28.18	27.36
1.0	25.61	35.70	21.89	18.71	17.81	17.74
1.2	16.06	22.98	14.12	12.50	12.32	12.64
1.4	10.60	15.31	9.69	8.98	9.20	9.75
1.6	7.36	10.54	7.03	6.88	7.33	8.00
1.8	5.36	7.51	5.37	5.56	6.16	6.92
2.0	4.07	5.52	4.30	4.70	5.41	6.22
2.2	3.22	4.19	3.58	4.13	4.91	5.77
2.4	2.64	3.28	3.09	3.75	4.58	5.48
2.6	2.22	2.65	2.75	3.49	4.37	5.29
2.8	1.93	2.19	2.51	3.32	4.22	5.17
3.0	1.70	1.87	2.34	3.20	4.13	5.10
p^*	0.0035967	0.00179837	0.0433159	0.12716	0.218926	0.303507
UCL	3	2.91152	1.71344	1.13992	0.775826	0.51434
LCL	-3	-2.91152	-1.71344	-1.13992	-0.775826	-0.51434

Όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα, το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (5,5) είναι το πλέον ευαίσθητο για τον εντοπισμό μετατοπίσεων του μέσου μέχρις 1σ , δηλαδή είναι ευαίσθητο για μικρές μετατοπίσεις. Για μετατοπίσεις της τάξης του $1\sigma - 1.5\sigma$ προτιμάται το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (4,4) ή το (3,3). Για μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου πάνω από 1.5σ το διάγραμμα που χρησιμοποιεί τον κανόνα C_{15} είναι το πλέον ευαίσθητο.

Το ποσοστό βελτίωσης στην τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) , $k \geq 2$, σε σχέση με το αντίστοιχο διάγραμμα ελέγχου Shewhart που χρησιμοποιεί τον κανόνα C_{15} δίνεται από τον τύπο

$$I_{k,k}^{15}(\delta) = \frac{ARL_{C_{15}}(\delta) - ARL_{k,k}(\delta)}{ARL_{C_{15}}(\delta)}$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση του ποσοστού βελτίωσης $I_{k,k}^{15}(\delta)$ για $k = 2,3,4,5$, όπου



Διάγραμμα 2.128: Γραφική παράσταση του $I_{k,k}^{15}(\delta)$ για $k = 2(1)5$ με $ARL_{in} = 278.03$

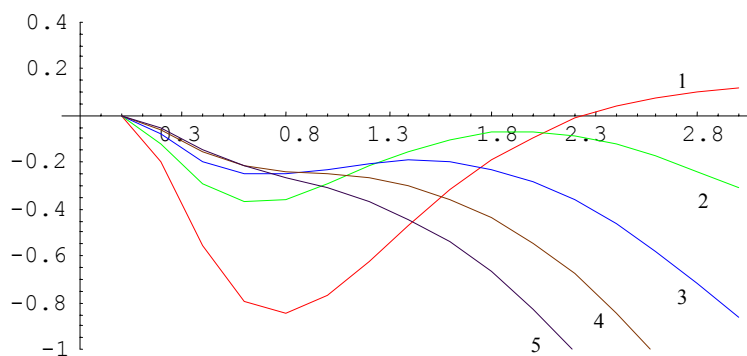
Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι το ποσοστό βελτίωσης μπορεί να φτάσει μέχρι το 30% - 40% και αυτό επιτυγχάνεται με χρήση του δίπλευρου διάγραμματος ελέγχου Shewhart τύπου (5,5) και αφορά μετατοπίσεις κοντά στο 0.5σ . Επίσης, την ίδια περίπου συμπεριφορά έχει και το αντίστοιχο διάγραμμα ελέγχου τύπου (4,4), ενώ το διάγραμμα ελέγχου τύπου (3,3) παρουσιάζει μικρότερο ποσοστό βελτίωσης. Το αντίστοιχο διάγραμμα ελέγχου τύπου (2,2) εμφανίζει μικρότερο ποσοστό βελτίωσης.

Στη συνέχεια δίνουμε αντίστοιχα αποτελέσματα για το μέσο μήκος ροής που αφορούν τους κανόνες C_{1234} και C_{1456} . Αντίστοιχα, τα σκιασμένα τετράγωνα δηλώνουν το $\min\{ARL_{C_{1234}}, ARL_{k,k}; k = 1(1)5\}$ και το $\min\{ARL_{C_{1456}}, ARL_{k,k}; k = 1(1)5\}$.

Πίνακας 2.39: Μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}(\delta)$ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου

Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ με $ARL_{k,k}(0) = 91.75$

δ	$ARL_{C_{1234}}(\delta)$	$ARL_{1,1}(\delta)$	$ARL_{2,2}(\delta)$	$ARL_{3,3}(\delta)$	$ARL_{4,4}(\delta)$	$ARL_{5,5}(\delta)$
0	91.75	91.75	91.75	91.75	91.75	91.75
0.2	66.80	79.95	74.73	72.34	71.13	70.52
0.4	36.61	56.98	47.32	43.84	42.39	41.84
0.6	20.90	37.51	28.63	26.13	25.36	25.31
0.8	13.25	24.50	17.97	16.58	16.42	16.73
1.0	9.22	16.32	11.94	11.33	11.55	12.09
1.2	6.89	11.20	8.40	8.29	8.75	9.42
1.4	5.41	7.94	6.23	6.45	7.05	7.80
1.6	4.41	5.81	4.86	5.28	5.98	6.79
1.8	3.68	4.39	3.95	4.52	5.29	6.14
2.0	3.13	3.42	3.35	4.01	4.83	5.72
2.2	2.70	2.74	2.93	3.67	4.53	5.44
2.4	2.35	2.26	2.63	3.44	4.33	5.27
2.6	2.07	1.92	2.43	3.28	4.20	5.16
2.8	1.85	1.67	2.29	3.17	4.12	5.09
3.0	1.67	1.48	2.19	3.11	4.07	5.05
p^*	0.0108991	0.00544959	0.0765964	0.188224	0.296052	0.388328
UCL	3	2.54591	1.42834	0.88446	0.53579	0.28368
LCL	-3	-2.54591	-1.42834	-0.88446	-0.53579	-0.28368

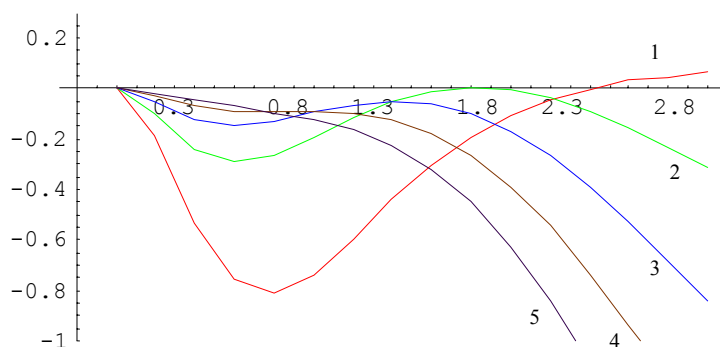


Διάγραμμα 2.129: Γραφική παράσταση του $I_{k,k}^{1234}(\delta)$ για $k = 1(1)5$ με $ARL_{in} = 91.75$

Πίνακας 2.40: Μέσο μήκος ροής $ARL_{k,k}(\delta)$ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου

Shewhart τύπου (k, k) για $k = 1(1)5$ με $ARL_{k,k}(0) = 133.21$

δ	$ARL_{C_{1456}}(\delta)$	$ARL_{1,1}(\delta)$	$ARL_{2,2}(\delta)$	$ARL_{3,3}(\delta)$	$ARL_{4,4}(\delta)$	$ARL_{5,5}(\delta)$
0	133.21	133.21	133.21	133.21	133.21	133.21
0.2	96.37	114.68	105.99	101.72	99.35	97.97
0.4	51.94	79.64	64.29	58.39	55.64	54.29
0.6	29.01	51.03	37.37	33.19	31.60	31.07
0.8	17.94	32.51	22.64	20.23	19.60	19.65
1.0	12.19	21.17	14.57	13.34	13.30	13.69
1.2	8.90	14.21	9.95	9.47	9.77	10.36
1.4	6.84	9.86	7.19	7.18	7.68	8.38
1.6	5.42	7.07	5.47	5.75	6.38	7.15
1.8	4.39	5.23	4.36	4.83	5.55	6.37
2.0	3.61	3.99	3.62	4.22	5.01	5.87
2.2	3.01	3.15	3.12	3.81	4.64	5.54
2.4	2.54	2.55	2.77	3.53	4.41	5.33
2.6	2.19	2.12	2.52	3.34	4.25	5.20
2.8	1.91	1.82	2.35	3.22	4.15	5.11
3.0	1.70	1.59	2.23	3.13	4.09	5.06
p	0.0075069	0.00375347	0.0631711	0.164776	0.26718	0.357065
UCL	3	2.67348	1.52869	0.975017	0.621364	0.366315
LCL	-3	-2.67348	-1.52869	-0.975017	-0.621364	-0.366315



Διάγραμμα 2.130: Γραφική παράσταση του $I_{k,k}^{1456}(\delta)$ για $k = 1(1)5$ με $ARL_{in} = 133.21$

Από τους δύο παραπάνω πίνακες και διαγράμματα προκύπτει ότι σε σχέση με τους κανόνες C_{1234} και C_{1456} τα δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) δεν παρέχουν βελτίωση στην τιμή του εκτός ελέγχου μήκους ροής. Για μεσαίες μετατοπίσεις του μέσου είναι χειρότερα σε ποσοστό 10-20%. Ωστόσο θα πρέπει να σημειώσουμε ότι είναι

απλούστερα και πιο εύχρηστα στην εφαρμογή τους σε σχέση με αυτά που χρησιμοποιούν τους κανόνες C_{1234} και C_{1456} .

Ένα άλλο σημαντικό σημείο που πρέπει να τονιστεί είναι ότι τα διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούν τους κανόνες C_{1234} και C_{1456} έχουν πολύ μικρή τιμή για το ARL_{in} που δεν είναι μια επιθυμητή κατάσταση. Από την άλλη, τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) έχουν αυξανόμενη απόδοση όσο το ARL_{in} αυξάνει. Αυτό γίνεται άμεσα αντιληπτό από τις γραφικές παραστάσεις βελτίωσης 2.64, 2.35 και 2.106, όπου τόσο το ποσοστό βελτίωσης όσο και το εύρος μετατοπίσεων του μέσου στο οποίο υπάρχει βελτίωση του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής, αυξάνει όσο το ARL_{in} γίνεται ολοένα και μεγαλύτερο. Την ίδια συμπεριφορά παρουσιάζουν και τα (μονόπλευρα) διαγράμματα ελέγχου Shewhart τύπου k .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Κανόνες ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart που βασίζονται σε σηματισμούς τύπου $2/r$

3.1 Εισαγωγή

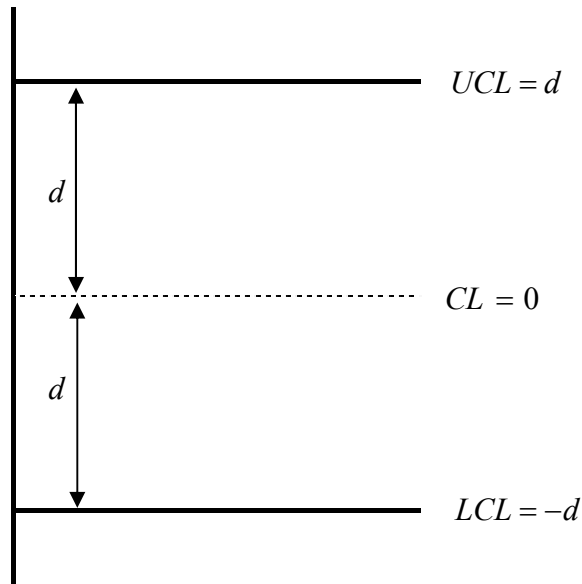
Στο παρόν κεφάλαιο, θα αναπτύξουμε δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου Shewhart με κανόνες ευαισθητοποίησης που βασίζονται σε ειδικούς σηματισμούς (τύπου $2/r$). Οι κανόνες αυτοί είναι διαφορετικοί από τους αντίστοιχους του Κεφαλαίου 2. Στα διαγράμματα ελέγχου που θα αναπτύξουμε, μπορούμε να έχουμε οποιαδήποτε τιμή για το $ARL(0)$ και για να το πετύχουμε αυτό, τα όρια ελέγχου θα μεταβάλλονται ανάλογα με την τιμή του $ARL(0)$. Η κατασκευή μονόπλευρων διαγραμμάτων μπορεί να γίνει με ανάλογο τρόπο.

3.2 Δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$

Ορίζουμε το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ ως το διάγραμμα ελέγχου το οποίο έχει άνω και κάτω όριο ελέγχου και το οποίο δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν εμφανιστούν δύο σημεία πάνω από το άνω όριο ελέγχου που μεταξύ τους παρεμβάλλονται το πολύ $r - 2$ ($r \geq 2$) σημεία που βρίσκονται μεταξύ της κεντρικής γραμμής και του άνω ορίου ελέγχου, είτε όταν εμφανιστούν δύο σημεία κάτω από το κάτω όριο ελέγχου που μεταξύ τους παρεμβάλλονται το πολύ $r - 2$ ($r \geq 2$) σημεία που βρίσκονται μεταξύ της κεντρικής γραμμής και του κάτω ορίου ελέγχου.

Το βασικότερο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε στην ανάπτυξη του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ είναι, όπως και στα διαγράμματα του Κεφαλαίου 2, η εύρεση του άνω και κάτω ορίου ελέγχου έτσι ώστε να έχουμε

προκαθορισμένη τιμή για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r}$ ($ARL_{2/r} \equiv ARL_{2/r}(0)$) του διαγράμματος. Ας υποθέσουμε ότι στο διάγραμμα απεικονίζονται οι τιμές W_t , $t \geq 1$, μιας εντός ελέγχου στατιστικής συνάρτησης W που ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή ($W \sim N(0,1)$), δηλαδή $\mu=0$ και $\sigma=1$ (αν η στατιστική συνάρτηση W δεν ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή, τότε στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζουμε τυποποιημένες τιμές της W). Η εύρεση του άνω (UCL) και του κάτω (LCL) ορίου ελέγχου ισοδυναμεί με την εύρεση της απόστασης d του UCL (ή του LCL) από την κεντρική γραμμή CL όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα



Ορίζουμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_t, t \geq 1\}$ με τιμές στο $\{1,2,3,4\}$ σύμφωνα με τις σχέσεις

$$P(X_t = 1) = P(W_t > d) = 1 - \Phi(d) = p_U$$

$$P(X_t = 2) = P(W_t < -d) = 1 - \Phi(d) = p_L$$

$$P(X_t = 3) = P(0 < W_t \leq d) = \Phi(d) - \Phi(0) = \Phi(d) - (1/2) = q_U$$

$$P(X_t = 4) = P(-d \leq W_t < 0) = \Phi(0) - \Phi(-d) = q_L = 1 - p_U - p_L - q_U.$$

Αφού οι τυχαίες μεταβλητές W_t , $t \geq 1$ αποτελούν τυχαίο δείγμα από την W , προκύπτει ότι και οι τυχαίες μεταβλητές X_t , $t \geq 1$ αποτελούν τυχαίο δείγμα από την X με

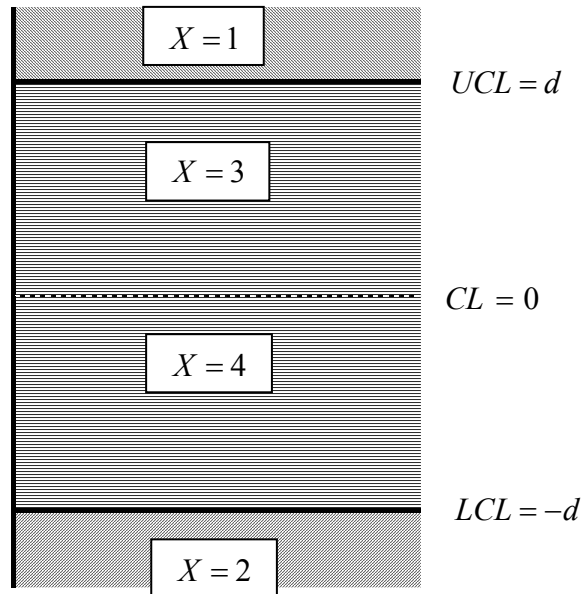
$$P(X = 1) = P(W > d) = 1 - \Phi(d) = p_U$$

$$P(X = 2) = P(W < -d) = 1 - \Phi(d) = p_L$$

$$P(X = 3) = P(0 < W \leq d) = \Phi(d) - \Phi(0) = \Phi(d) - (1/2) = q_U$$

$$P(X = 4) = P(-d \leq W < 0) = \Phi(0) - \Phi(-d) = (1/2) - \Phi(-d) = q_L = 1 - p_U - p_L - q_U.$$

Με αυτόν τον τρόπο το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ χωρίζεται σε τέσσερις ζώνες ανάλογα με τις τιμές που παίρνει η τυχαία μεταβλητή X που δίνονται στο ακόλουθο σχήμα



Η κατανομή του (εντός ελέγχου) μήκους ροής $T_{2/r}$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ ισοδυναμεί με την κατανομή του αριθμού $N_{2/r}$ ανεξάρτητων δοκιμών με τέσσερα δυνατά αποτελέσματα $\{1,2,3,4\}$ και αντίστοιχες πιθανότητες $p_U, p_L, q_U, q_L = 1 - p_U - p_L - q_U, (p_U = p_L, q_U = q_L)$ που πρέπει να εκτελεστούν έως ότου εμφανιστεί το σύνθετο ενδεχόμενο

$$E = \{11, 131, 1331, \dots, \underbrace{133\dots31}_{r-2}, 22, 242, 2442, \dots, \underbrace{244\dots42}_{r-2}\}.$$

Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $N_{2/r}$ δεν έχει κάποιο γνωστό τύπο (μόνο στην περίπτωση $r = 2$ αφού τότε $N_{2/r} \sim N_{2,2}$). Βασιζόμενοι στη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 1, μπορούμε να δώσουμε τύπους για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής, τη συνάρτηση κατανομής και τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $N_{2/r}$.

Έτσι, ακολουθώντας τη μεθοδολογία του Κεφαλαίου 1 έχουμε ότι η αποσύνθεση του σύνθετου ενδεχομένου E αποδίδει τα ακόλουθα $2r - 1$ κομμάτια

$$\begin{aligned}
2 &\equiv 1, \quad 3 \equiv 13, \quad 4 \equiv 133, \quad \dots, \quad r-1 \equiv \underbrace{133\dots 3}_{r-3}, \quad r \equiv \underbrace{133\dots 3}_{r-2} \\
r+1 &\equiv 2, \quad r+2 \equiv 24, \quad r+3 \equiv 244, \quad \dots, \quad 2r-2 \equiv \underbrace{244\dots 4}_{r-3}, \quad 2r-1 \equiv \underbrace{244\dots 4}_{r-2}, \\
2r &\equiv \{11, 131, 1331, \dots, \underbrace{133\dots 31}_{r-2}, 22, 242, 2442, \dots, \underbrace{244\dots 42}_{r-2}\}
\end{aligned}$$

και ορίζουμε επιπρόσθετα

$$1 \equiv \{3,4\}.$$

Ορίζουμε μια διακριτή ομογενή αλυσίδα Markov $\{Y_t, t \geq 1\}$ με χώρο καταστάσεων $\Omega = \{1, 2, \dots, 2r\}$, όπου η κατάσταση $2r$ είναι απορροφητική. Οι αρχικές πιθανότητες είναι ίσες με

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}'_1 &= [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r, \pi_{r+1}, \dots, \pi_{2r}] \\
&= [P(Y_1 = 1), P(Y_1 = 2), \dots, P(Y_1 = r), P(Y_1 = r+1), \dots, P(Y_1 = 2r)] \\
&= [q_U + q_L, p_U, \dots, 0, p_L, \dots, 0]
\end{aligned}$$

και ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπηδήσης πρώτης τάξης είναι ίσος με

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix}
q_U + q_L & p_U & 0 & 0 & \dots & 0 & p_L & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
q_L & 0 & q_U & 0 & \dots & 0 & p_L & 0 & 0 & \dots & 0 & p_U \\
q_L & 0 & 0 & q_U & \dots & 0 & p_L & 0 & 0 & \dots & 0 & p_U \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
q_L & 0 & 0 & 0 & \dots & q_U & p_L & 0 & 0 & \dots & 0 & p_U \\
q_U + q_L & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_L & 0 & 0 & \dots & 0 & p_U \\
q_U & p_U & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & q_L & 0 & \dots & 0 & p_L \\
q_U & p_U & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & q_L & \dots & 0 & p_L \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
q_U & p_U & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_L & p_L \\
q_U + q_L & p_U & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_L \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{pmatrix}_{(2r) \times (2r)}$$

Επομένως, το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ δίνεται από τη σχέση $(p_U = p_L = p = 1 - \Phi(d), q_U = q_L = (1/2) - p = \Phi(d) - (1/2))$

$$\begin{aligned}
ARL_{2/r} &= E(T_{2/r}) = E(N_{2/r} | p_U = p_L = p, q_U = q_L = (1/2) - p) \\
&= 1 + \boldsymbol{\alpha}'(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}_{p_U = p_L = p, q_U = q_L = (1/2) - p}
\end{aligned}$$

όπου

$$\boldsymbol{\alpha} = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r, \pi_{r+1}, \dots, \pi_{2r-1}] = (q_U + q_L, p_U, 0, \dots, 0, p_L, \dots, 0)', \quad \mathbf{1} = (1, 1, 1, \dots, 1)'$$

είναι διανύσματα του χώρου R^{2r-1} . Σημειώνουμε εδώ ότι για $r=3$, το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι ίσο με

$$ARL_{2/3} = \frac{(p-2)(1+2p)}{2p^2(2p-3)} = g_3(p)$$

για $r=4$ είναι ίσο με

$$ARL_{2/4} = \frac{(4+7p-8p^2+4p^3)}{2p^2(7-8p+4p^2)} = g_4(p)$$

ενώ για $r=5$ είναι ίσο με

$$ARL_{2/5} = \frac{8+15p-22p^2+20p^3-8p^4}{30p^2-44p^3+40p^4-16p^5} = g_5(p).$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις $g_r(p)$ ($r=3,4,5$) ως προς p είναι γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις στο διάστημα $(0, 1)$ και ισχύει

$$\lim_{p \rightarrow 0} g_3(p) = +\infty, \lim_{p \rightarrow 1} g_3(p) = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} g_4(p) = +\infty, \lim_{p \rightarrow 1} g_4(p) = \frac{7}{6} = 1.1667$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} g_5(p) = +\infty, \lim_{p \rightarrow 1} g_5(p) = \frac{13}{10} = 1.3$$

Μπορούμε πάντοτε να επιλέξουμε προκαθορισμένη τιμή για το $ARL_{2/r} = c > 2$, καθορίζοντας στην κατάλληλη απόσταση από την κεντρική γραμμή τα όρια ελέγχου.

Έχουμε τώρα στη διάθεσή μας όλα τα απαραίτητα εργαλεία για την ανάπτυξη του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ ($r=3,4,5$) που περιγράφεται στα ακόλουθα βήματα

- Βήμα 1. Επιλέγουμε το r και το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r}$ που επιθυμούμε.
- Βήμα 2. Λύνουμε την εξίσωση $ARL_{2/r} = g_r(p)$, $r=3,4,5$, ως προς p , $p \in (0,1)$, και έστω ότι προέκυψε η λύση p^* .
- Βήμα 3. Καθορίζουμε το άνω όριο ελέγχου $UCL = d$ από τη σχέση $p^* = P(W > d) = 1 - \Phi(d)$, δηλαδή $UCL = d = \Phi^{-1}(1 - p^*) = z_{p^*}$ και θέτουμε $LCL = -UCL = -d$.

Βήμα 4. Ανακηρύσσουμε τη διεργασία εκτός ελέγχου όταν εμφανιστούν δύο σημεία πάνω από το άνω όριο ελέγχου που μεταξύ τους παρεμβάλλονται το πολύ $r - 2$ ($r \geq 2$) σημεία που βρίσκονται μεταξύ της κεντρικής γραμμής και του άνω ορίου ελέγχου, είτε όταν εμφανιστούν δύο σημεία κάτω από το κάτω όριο ελέγχου που μεταξύ τους παρεμβάλλονται το πολύ $r - 2$ ($r \geq 2$) σημεία που βρίσκονται μεταξύ της κεντρικής γραμμής και του κάτω ορίου ελέγχου, οτιδήποτε από τα δύο συμβεί νωρίτερα.

Από τη στιγμή που καθορίστηκαν το άνω και το κάτω όριο ελέγχου του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ μπορούμε να υπολογίσουμε το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής. Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης W έχει αλλάξει λόγω μετατόπισης του μέσου σε υψηλότερο επίπεδο (από τη θέση $\mu = 0$ στη θέση $\mu + \delta\sigma = \delta$) ενώ η διακύμανσή της δεν έχει αλλάξει. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $W(\delta)$ που απεικονίζεται στο δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ ακολουθεί την κατανομή $N(\mu + \delta\sigma, \sigma^2) = N(\delta, 1)$. Ορίζοντας την τυχαία μεταβλητή $X(\delta)$ ως ακολούθως

$$P(X(\delta) = 1) = P(W(\delta) > d) = 1 - \Phi(d - \delta) = p_U(\delta)$$

$$P(X(\delta) = 2) = P(W(\delta) < -d) = 1 - \Phi(d + \delta) = p_L(\delta)$$

$$P(X(\delta) = 3) = P(0 < W(\delta) < d) = \Phi(d - \delta) - \Phi(-\delta) = q_U(\delta)$$

$$P(X(\delta) = 4) = P(-d < W(\delta) < 0) = q_L(\delta) = 1 - p_U(\delta) - p_L(\delta) - q_U(\delta)$$

έχουμε ότι η κατανομή του μήκους ροής $T_{2/r}(\delta)$ ισοδυναμεί με την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $N_{2/r}$ που δηλώνει τον αριθμό των ανεξάρτητων δοκιμών με τέσσερα δυνατά αποτελέσματα $\{1, 2, 3, 4\}$ και αντίστοιχες πιθανότητες $p_U(\delta)$, $p_L(\delta)$, $q_U(\delta)$, $q_L(\delta) = 1 - p_U(\delta) - p_L(\delta) - q_U(\delta)$ που πρέπει να εκτελεστούν έως ότου εμφανιστεί το σύνθετο ενδεχόμενο

$$E = \{11, 131, 1331, \dots, \underbrace{133\dots31}_{r-2}, 22, 242, 2442, \dots, \underbrace{244\dots42}_{r-2}\}.$$

Συνεπώς, το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r}(\delta)$ δίνεται από τη σχέση

$$ARL_{2/r}(\delta) = E(T_{2/r}(\delta)) = E(N_{2/r} | p_U = p_U(\delta), p_L = p_L(\delta), q_U = q_U(\delta), q_L = q_L(\delta))$$

Φυσικά για $\delta = 0$ έχουμε ότι η ποσότητα $ARL_{2/r}(0)$ είναι ίση με το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής αφού σύμφωνα με τους συμβολισμούς που έχουμε εισάγει $W \sim W(0)$, $X \sim X(0)$,

$T_{2/r} \sim T_{2/r}(0)$, $p_U = p_L = p_U(0) = p_L(0)$, $q_U = q_L = q_U(0) = q_L(0)$, οπότε
 $ARL_{2/r} = ARL_{2/r}(0)$.

Ο υπολογισμός της συνάρτησης πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής του μήκους ροής $T_{2/r}(\delta)$ ανάγεται στον υπολογισμό των αντίστοιχων ποσοτήτων για την τυχαία μεταβλητή $N_{2/r}$. Για τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $N_{2/r}$ έχουμε

$$F_{N_{2/r}}(n) = P(N_{2/r} \leq n) = \boldsymbol{\pi}'_1 \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{e}_{2r} = (\mathbf{e}'_1 \mathbf{P}) \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{e}_{2r} = \mathbf{e}'_1 \mathbf{P}^n \mathbf{e}_{2r} \quad n = 1, 2, \dots$$

όπου $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)'$ το μοναδιαίο διάνυσμα στήλη του χώρου R^{2r} το οποίο έχει 1 στην i συνιστώσα και 0 στις υπόλοιπες συνιστώσες. Επίσης, χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$(\mathbf{P} - \mathbf{I})\mathbf{e}_{2r} = p_U \sum_{i=2}^r \mathbf{e}_i + p_L \sum_{i=r+1}^{2r-1} \mathbf{e}_i$$

παίρνουμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $N_{2/r}$ δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} f_{N_{2/r}}(n) &= F_{N_{2/r}}(n) - F_{N_{2/r}}(n-1) = \mathbf{e}'_1 \mathbf{P}^{n-1} (\mathbf{P} - \mathbf{I}) \mathbf{e}_{2r} \\ &= p_U \mathbf{e}'_1 \mathbf{P}^{n-1} \sum_{i=2}^r \mathbf{e}_i + p_L \mathbf{e}'_1 \mathbf{P}^{n-1} \sum_{i=r+1}^{2r-1} \mathbf{e}_i, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση πιθανότητας και τη συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/r}(\delta)$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ αντικαθιστώντας τις πιθανότητες $p_U, p_L, q_U, q_L = 1 - p_U - p_L - q_U$ με τις πιθανότητες $p_U(\delta), p_L(\delta), q_U(\delta), q_L(\delta) = 1 - p_U(\delta) - p_L(\delta) - q_U(\delta)$. Από τη στιγμή που είναι διαθέσιμη η συνάρτηση πιθανότητας (και η συνάρτηση κατανομής) του μήκους ροής $T_{2/r}(\delta)$ μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε ποσοστιαία σημεία του μήκους ροής $T_{2/r}(\delta)$.

3.3 Μελέτη του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$

Στο κλασικό δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart απεικονίζονται οι διαδοχικές τιμές μιας στατιστικής συνάρτησης W η οποία ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή και επομένως έχουμε ότι

$$UCL = \mu_W + L\sigma_W = L, \quad UCL = \mu_W - L\sigma_W = -L$$

(επαναλαμβάνουμε ότι αν η στατιστική συνάρτηση W δεν ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή τότε στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζουμε τυποποιημένες τιμές της W). Η διεργασία ανακηρύσσεται εκτός ελέγχου όταν βρεθεί σημείο του διαγράμματος πάνω από το άνω όριο ελέγχου UCL ή κάτω από το κάτω όριο ελέγχου.

Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής του παραπάνω διαγράμματος δίνεται από τη σχέση

$$ARL_{in} = \frac{1}{p_{in}}$$

όπου

$$p_{in} = 1 - P(-L \leq W \leq L | W \sim N(0,1)) = 2 - 2\Phi(L).$$

Στην πράξη, οι πιο συνήθεις τιμές για το L είναι οι 2.5, 3 και 3.5. Για αυτές τις τιμές του L έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα για τις ποσότητες p_{in} και ARL_{in}

L	p_{in}	ARL_{in}
2.5	0.01242	80.52
3	0.0027	370.4
3.5	0.00046526	2149.34

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 3.2 θα δώσουμε στη συνέχεια αποτελέσματα που αφορούν το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ για $r=3,4,5$ με τιμές για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_r(0)$ ίσες με 80.52, 370.4 και 2149.34 έτσι ώστε να υπάρχει κοινή βάση σύγκρισης των νέων διαγραμμάτων ελέγχου με το κλασικό δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart για $L=2.5, 3$ και 3.5 αντίστοιχα.

3.3.1 Μελέτη του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ με

$$ARL_{2/r} = 80.52 \text{ για } r = 3, 4, 5$$

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τιμές για το μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r}(\delta) = E(T_{2/r}(\delta))$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ για $r=3,4,5$ και για $\delta = 0(0.2)3$ καθώς επίσης και τιμές του μέσου μήκους ροής για το (κλασικό) δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart (1,1). Τα σκιασμένα τετράγωνα δηλώνουν το $\min\{ARL_{2/r}(\delta); r=3,4,5\}$.

Πίνακας 3.1: Μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r}(\delta)$ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου

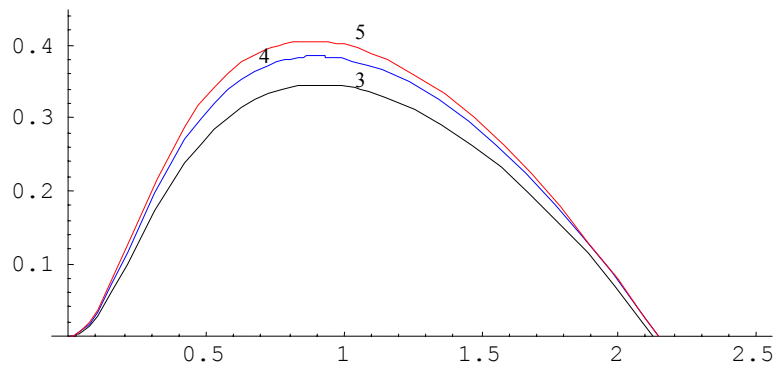
Shewhart τύπου $2/r$ για $r = 3, 4, 5$ με $ARL_{2/r}(0) = 80.52$

δ	$ARL_{1,1}(\delta)$	$ARL_{2/3}(\delta)$	$ARL_{2/4}(\delta)$	$ARL_{2/5}(\delta)$
0	80.52	80.52	80.52	80.52
0.2	70.47	64.14	63.04	62.39
0.4	50.68	39.28	37.63	36.68
0.6	33.69	23.35	22.04	21.31
0.8	22.20	14.62	13.74	13.26
1.0	14.92	9.79	9.23	8.93
1.2	10.32	7.00	6.64	6.47
1.4	7.37	5.30	5.08	4.98
1.6	5.43	4.22	4.09	4.04
1.8	4.13	3.52	3.44	3.42
2.0	3.24	3.04	3.00	2.99
2.2	2.62	2.71	2.70	2.70
2.4	2.17	2.49	2.48	2.49
2.6	1.85	2.33	2.33	2.34
2.8	1.62	2.22	2.22	2.23
3.0	1.45	2.14	2.15	2.15
p^*	0.00620964	0.0690531	0.0650148	0.0634395
UCL	2.5	1.48288	1.51399	1.52653
LCL	-2.5	-1.48288	-1.51399	-1.52653

Από τις τιμές του παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι χρησιμοποιώντας δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ για $r = 3, 4, 5$ έχουμε σαφή βελτίωση στην τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής όταν θέλουμε να ανιχνεύσουμε μικρές και μεσαίες μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας (από τη θέση $\mu = 0$ στη θέση $\mu = \delta$) σε σχέση με το αντίστοιχο (κλασικό) διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (1,1) (παρατηρούμε επίσης ότι δεν υπάρχει βελτίωση για μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου). Το ποσοστό βελτίωσης στην τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ για $r = 3, 4, 5$ σε σχέση με το αντίστοιχο κλασικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart δίνεται από τον τύπο

$$I_{2/r}(\delta) = \frac{ARL_{1,1}(\delta) - ARL_{2/r}(\delta)}{ARL_{1,1}(\delta)}.$$

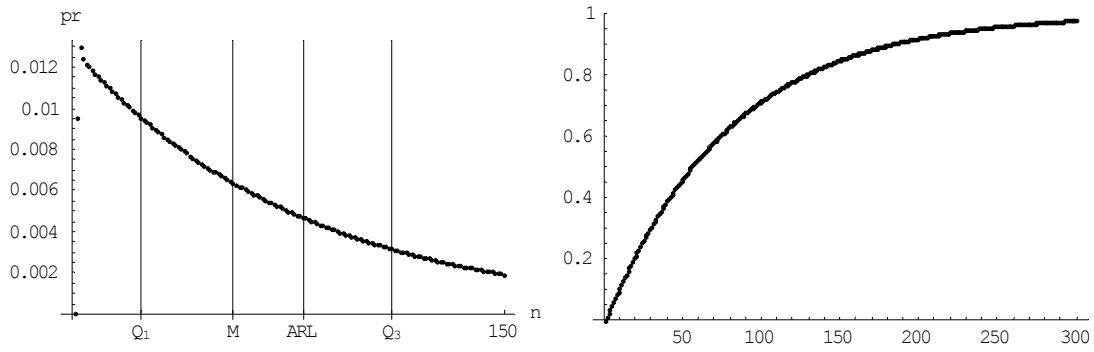
Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $I_{2/r}(\delta)$ για $r = 3, 4, 5$



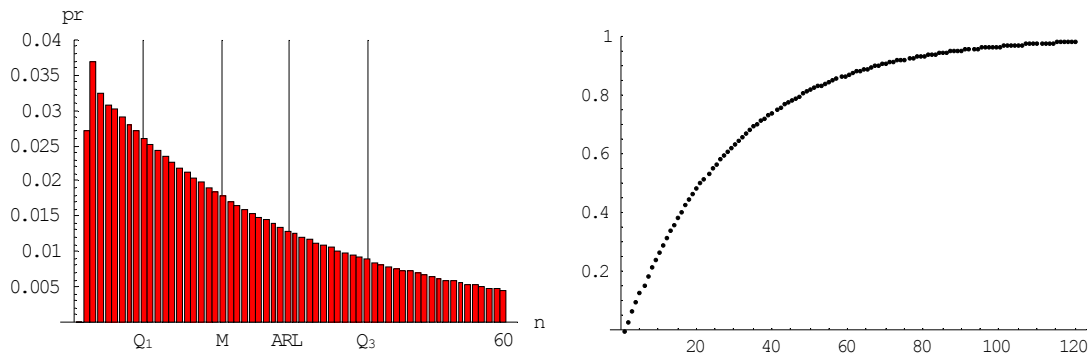
Διάγραμμα 3.1: Γραφική παράσταση του $I_{2/r}(\delta)$ για $k = 3, 4, 5$ με $ARL_{in} = 80.52$

Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι έχουμε μια αναμενόμενη ομοιόμορφη αύξηση του ποσοστού βελτίωσης που μας παρέχουν τα δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart τύπου $2/r$ έναντι του (κλασικού) δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (1,1) καθώς αυξάνει το r . Άρα, για $r = 5$ έχουμε το μεγαλύτερο ποσοστό βελτίωσης, το οποίο φτάνει στα επίπεδα του 40%.

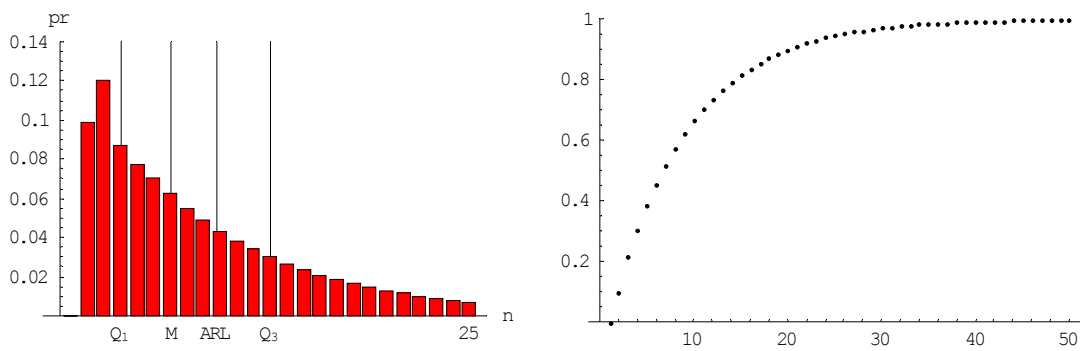
Στα ακόλουθα διαγράμματα δίνονται γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής του μήκους ροής $T_{2/r}(\delta)$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ για $r = 3, 4, 5$ και για $\delta = 0, 0.5, 1, 2$.



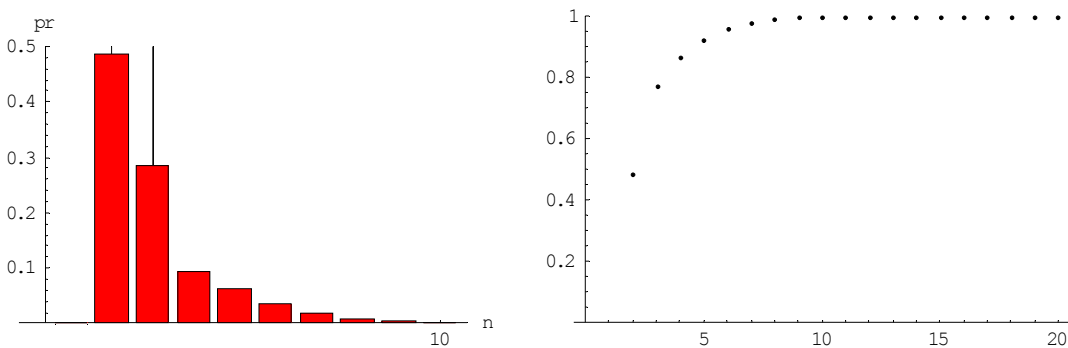
Διάγραμμα 3.2: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(0)$



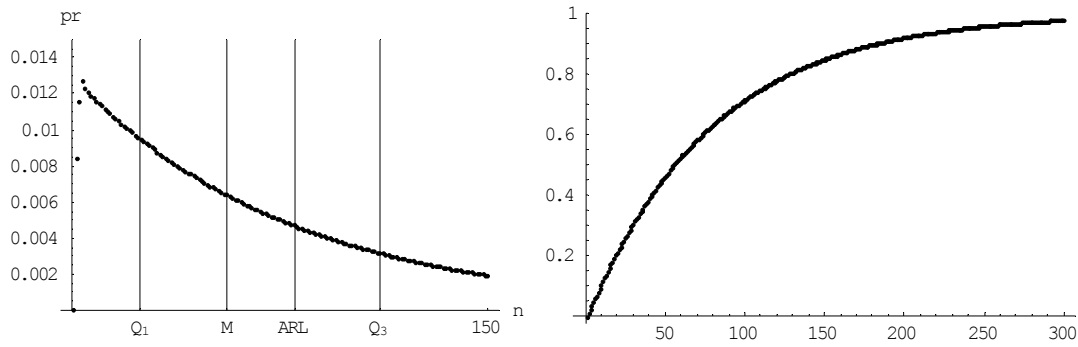
Διάγραμμα 3.3: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(0.5)$



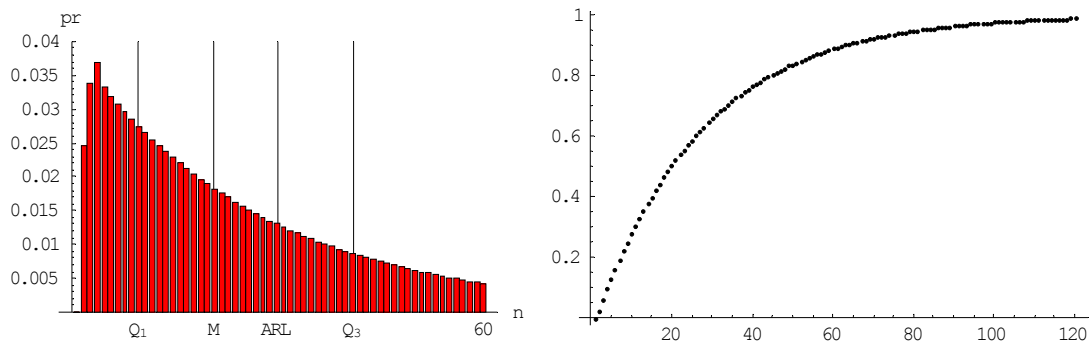
Διάγραμμα 3.4: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(1)$



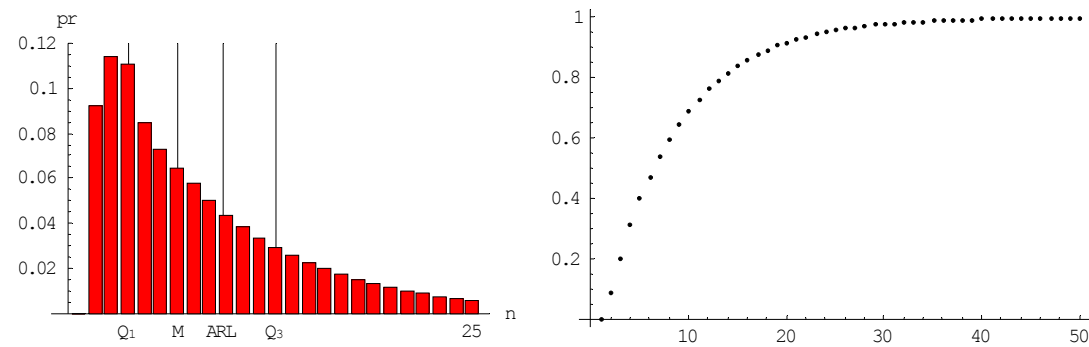
Διάγραμμα 3.5: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(2)$



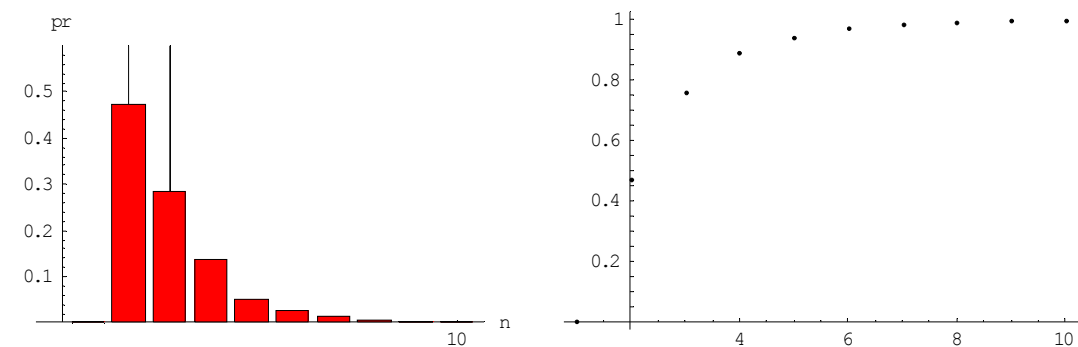
Διάγραμμα 3.6: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(0)$



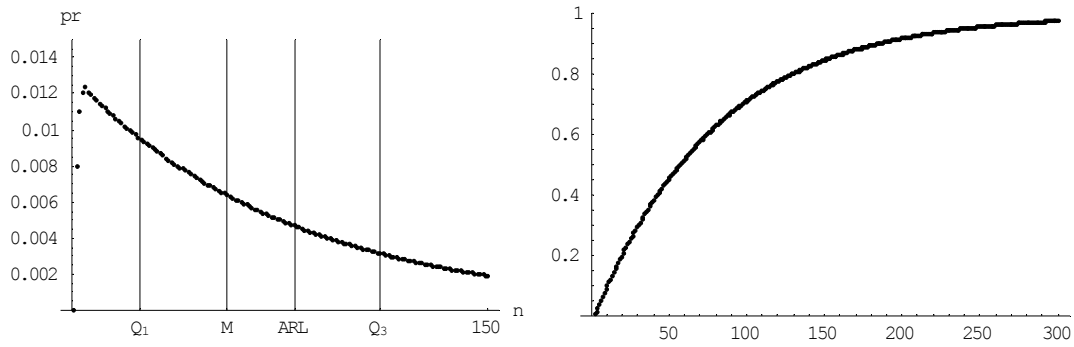
Διάγραμμα 3.7: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(0.5)$



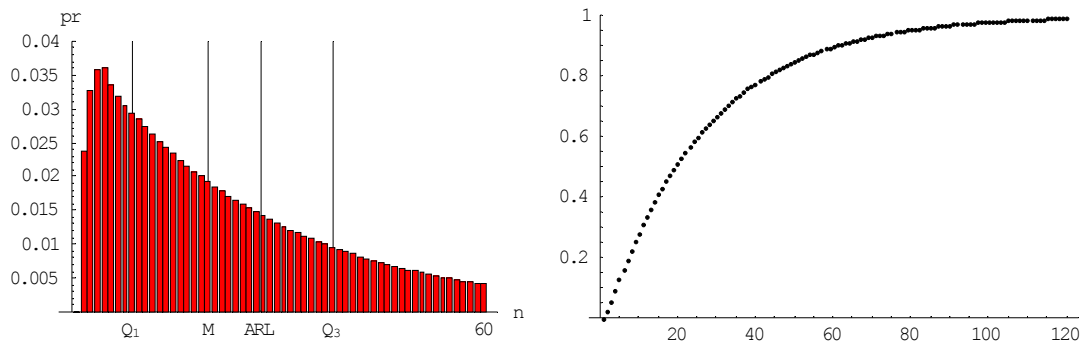
Διάγραμμα 3.8: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(1)$



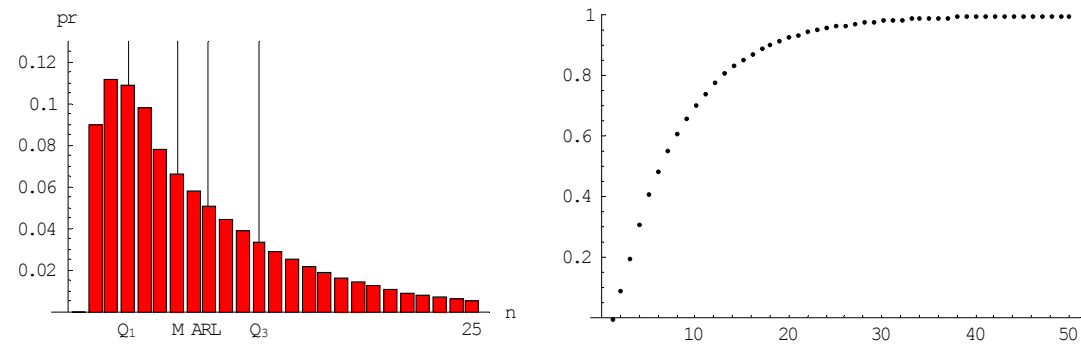
Διάγραμμα 3.9: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(2)$



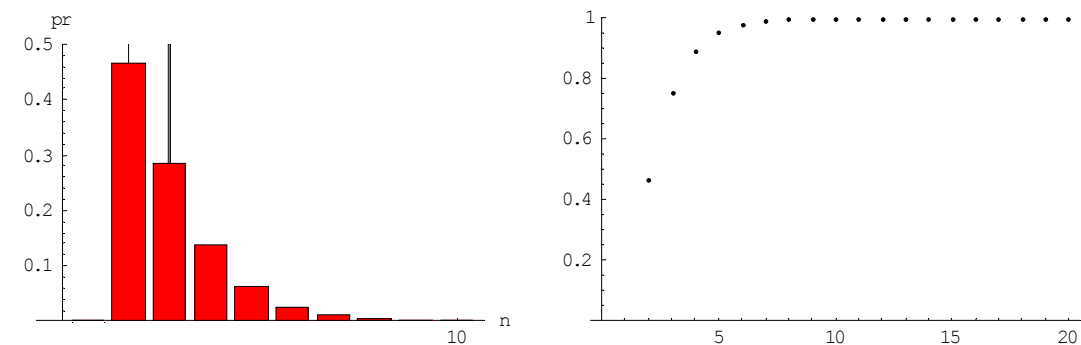
Διάγραμμα 3.10: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(0)$



Διάγραμμα 3.11: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(0.5)$



Διάγραμμα 3.12: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(1)$



Διάγραμμα 3.13: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(2)$

Στους ακόλουθους πίνακες δίνονται τιμές των ποσοτήτων Q_1 , M και Q_3 του μήκους ροής $T_{2/r}(\delta)$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ για $r=3,4,5$ και για $\delta = 0(0.2)3$ που μας βοηθούν στην αξιολόγηση της “αξιοπιστίας” του μέσου μήκους ροής των διαγραμμάτων

Πίνακας 3.2: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/3$ με $ARL_{2/3}(0) = 80.52$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{2/3}(\delta)$
0	24	56	111	80.52
0.2	20	45	88	64.14
0.4	12	28	54	39.28
0.6	8	17	32	23.35
0.8	5	11	20	14.62
1.0	4	7	13	9.79
1.2	3	5	9	7.00
1.4	3	4	7	5.30
1.6	2	3	5	4.22
1.8	2	3	4	3.52
2.0	2	3	3	3.04
2.2	2	2	3	2.71
2.4	2	2	3	2.49
2.6	2	2	2	2.33
2.8	2	2	2	2.22
3.0	2	2	2	2.14

Πίνακας 3.3: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/4$ με $ARL_{2/4}(0) = 80.52$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{2/4}(\delta)$
0	25	56	111	80.52
0.2	19	44	87	63.04
0.4	12	27	51	37.63
0.6	8	16	30	22.04
0.8	5	10	18	13.74
1.0	4	7	12	9.23
1.2	3	5	9	6.64
1.4	3	4	6	5.08
1.6	2	3	5	4.09
1.8	2	3	4	3.44
2.0	2	3	3	3.00
2.2	2	2	3	2.70
2.4	2	2	3	2.48
2.6	2	2	3	2.33
2.8	2	2	2	2.22
3.0	2	2	2	2.15

Πίνακας 3.4: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/5$ με $ARL_{2/5}(0) = 80.52$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{2/5}(\delta)$
0	25	56	111	80.52
0.2	19	44	86	62.39
0.4	12	26	50	36.68
0.6	7	15	29	21.31
0.8	5	10	18	13.26
1.0	4	7	12	8.93
1.2	3	5	8	6.47
1.4	3	4	6	4.98
1.6	2	3	5	4.04
1.8	2	3	4	3.42
2.0	2	3	3	2.99
2.2	2	2	3	2.70
2.4	2	2	3	2.49
2.6	2	2	3	2.34
2.8	2	2	2	2.23
3.0	2	2	2	2.15

3.3.2 Μελέτη του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ με $ARL_{2/r} = 370.4$ για $r = 3, 4, 5$

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τιμές για το μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r}(\delta) = E(T_{2/r}(\delta))$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ για $r = 3, 4, 5$ και για $\delta = 0(0.2)3$ καθώς επίσης και τιμές του μέσου μήκους ροής για το (κλασικό) δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart (1,1). Τα σκιασμένα τετράγων δηλώνουν το $\min\{ARL_{2/r}(\delta); r = 3, 4, 5\}$

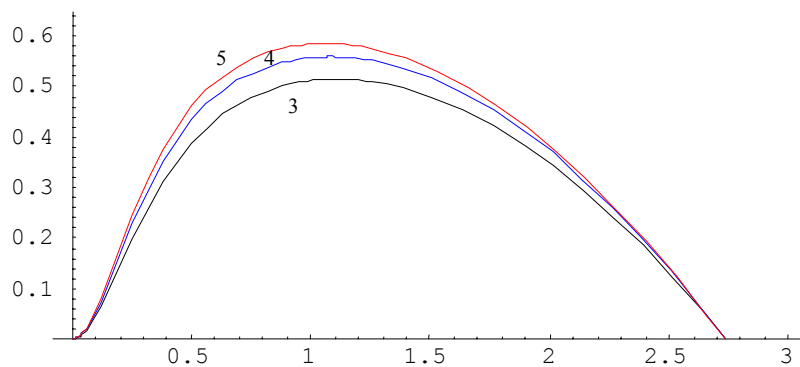
Πίνακας 3.5: Μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r}(\delta)$ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ για $r = 3, 4, 5$ με $ARL_r(0) = 370.4$

δ	$ARL_{1,1}(\delta)$	$ARL_{2/3}(\delta)$	$ARL_{2/4}(\delta)$	$ARL_{2/5}(\delta)$
0	370.4	370.4	370.4	370.4
0.2	308.43	264.79	257.81	253.39
0.4	200.1	134.92	126.61	121.52
0.6	119.67	67.89	62.24	58.85
0.8	71.55	36.64	33.22	31.21
1.0	43.9	21.44	19.42	18.26
1.2	27.82	13.56	12.37	11.70
1.4	18.25	9.21	8.49	8.11
1.6	12.38	6.67	6.23	6.02
1.8	8.7	5.10	4.84	4.72
2.0	6.3	4.10	3.95	3.89
2.2	4.7	3.44	3.35	3.33
2.4	3.65	2.99	2.95	2.94
2.6	2.9	2.68	2.66	2.66
2.8	2.38	2.47	2.46	2.46
3.0	2.0	2.32	2.32	2.32
p^*	0.00135	0.0309961	0.0289202	0.0280702
UCL	3	1.86635	1.89691	1.90994
LCL	-3	1.86635	-1.89691	-1.90994

Από τις τιμές του παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι χρησιμοποιώντας δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ για $r = 3, 4, 5$, έχουμε σαφή βελτίωση στην τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής όταν θέλουμε να ανιχνεύσουμε μικρές και μεσαίες μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας σε σχέση με το αντίστοιχο (κλασικό) διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (1,1). Παρατηρούμε επίσης ότι δεν υπάρχει βελτίωση για μεγάλες σχετικά μετατοπίσεις του μέσου. Το ποσοστό βελτίωσης στην τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$, $r = 3, 4, 5$ σε σχέση με το αντίστοιχο κλασικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart δίνεται από τον τύπο

$$I_{2/r}(\delta) = \frac{ARL_{1,1}(\delta) - ARL_{2/r}(\delta)}{ARL_{1,1}(\delta)}$$

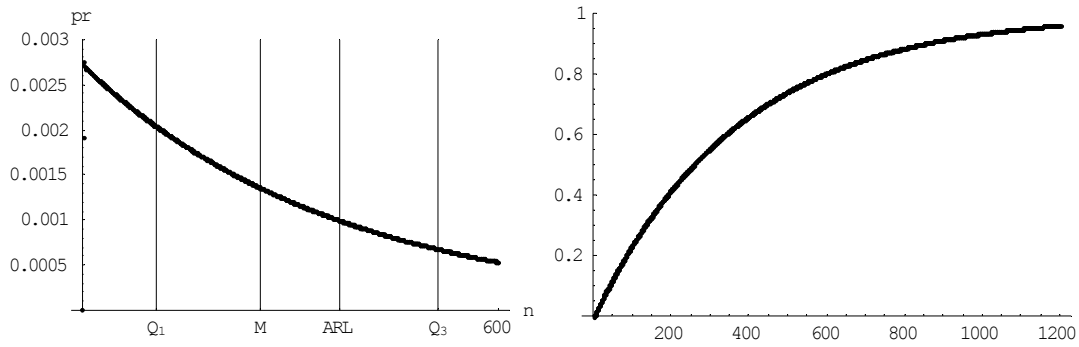
Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $I_{2/r}(\delta)$ για $r = 3, 4, 5$



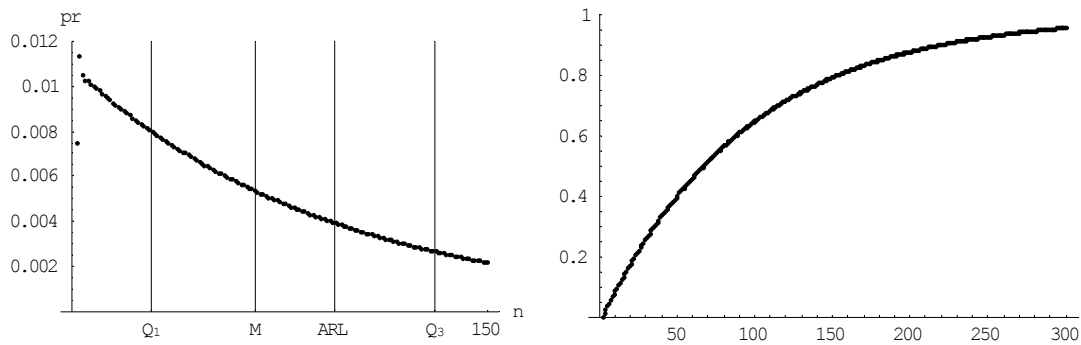
Διάγραμμα 3.14: Γραφική παράσταση του $I_{2/r}(\delta)$ για $r=3,4,5$ με $ARL_{in} = 370.4$

Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι έχουμε μια αναμενόμενη ομοιόμορφη άξηση του ποσοστού βελτίωσης που μας παρέχουν τα δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart τύπου $2/r$ έναντι του (κλασσικού) δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (1,1) καθώς αυξάνει το r . Άρα, για $r=5$ έχουμε το μεγαλύτερο ποσοστό βελτίωσης, το οποίο φτάνει στα επίπεδα του 60%.

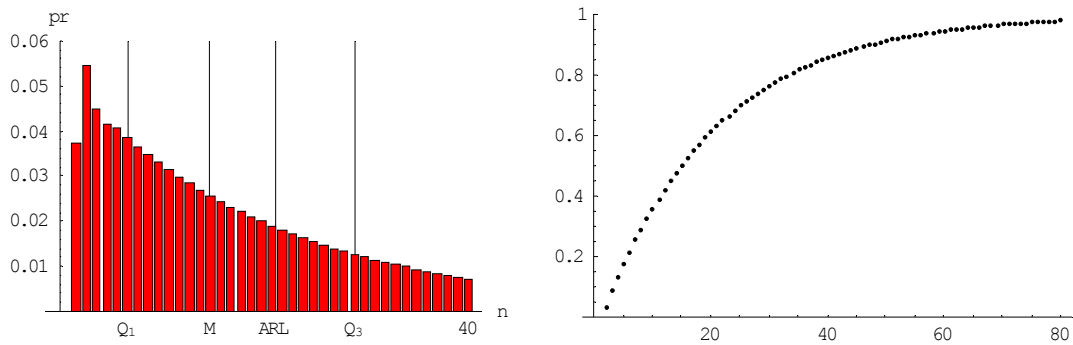
Στα ακόλουθα διαγράμματα δίνονται γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής του μήκους ροής $T_{2/r}(\delta)$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$, $r=3,4,5$ και για $\delta=0, 0.5, 1, 2$.



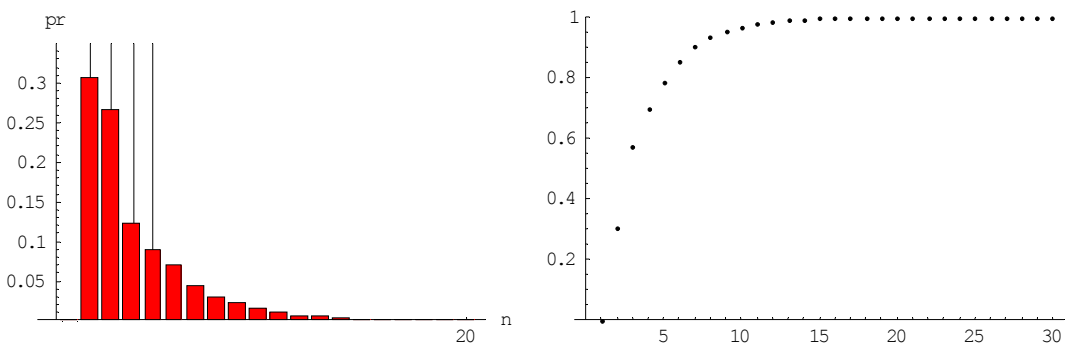
Διάγραμμα 3.15: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(0)$



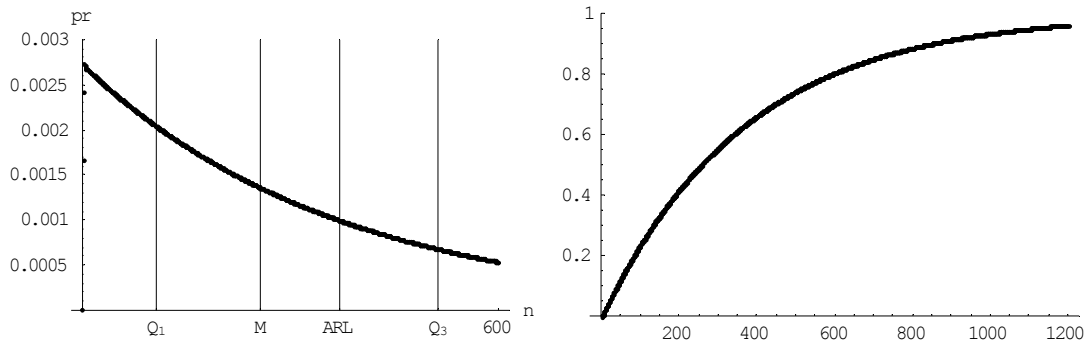
Διάγραμμα 3.16: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(0.5)$



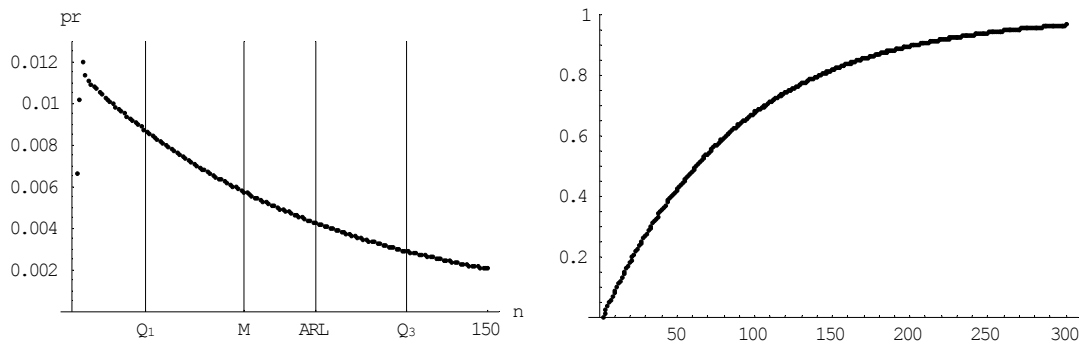
Διάγραμμα 3.17: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(1)$



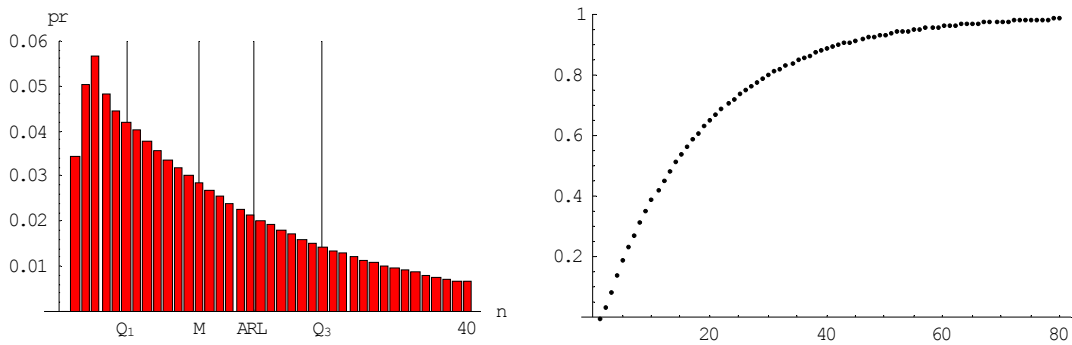
Διάγραμμα 3.18: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(2)$



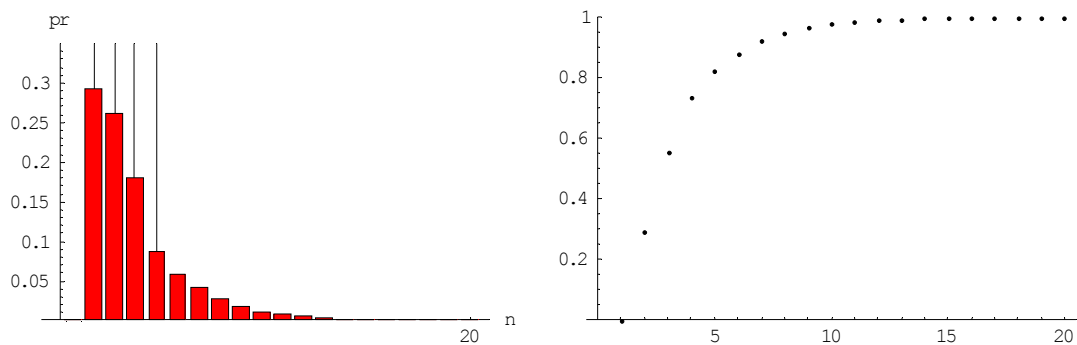
Διάγραμμα 3.19: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(0)$



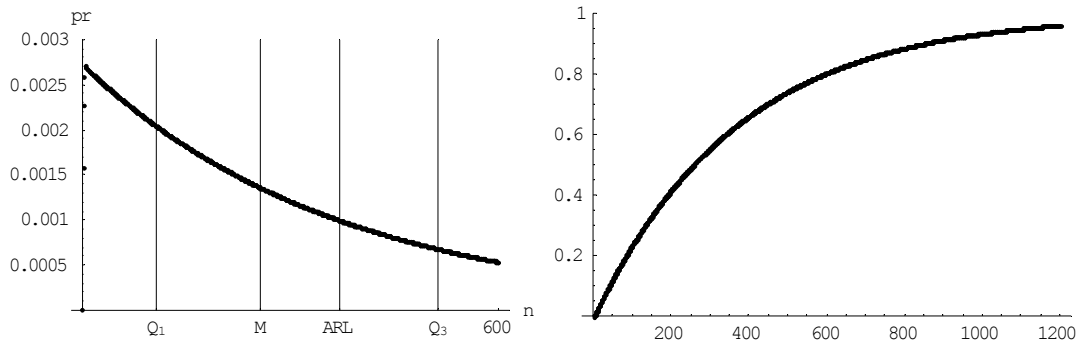
Διάγραμμα 3.20: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(0.5)$



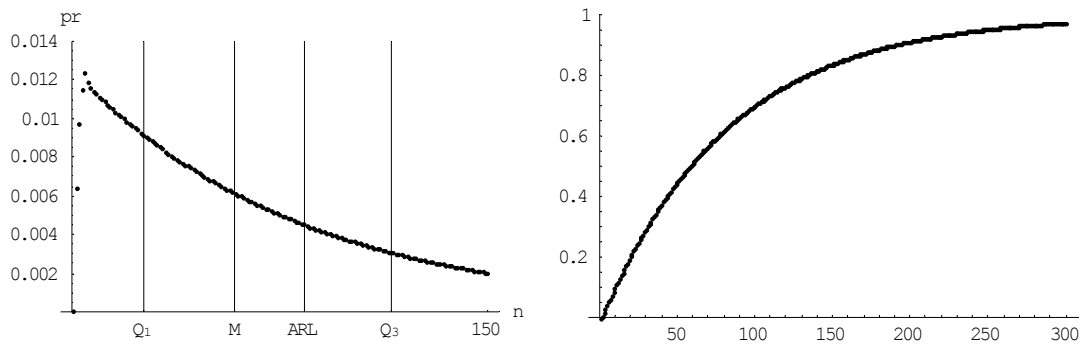
Διάγραμμα 3.21: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(1)$



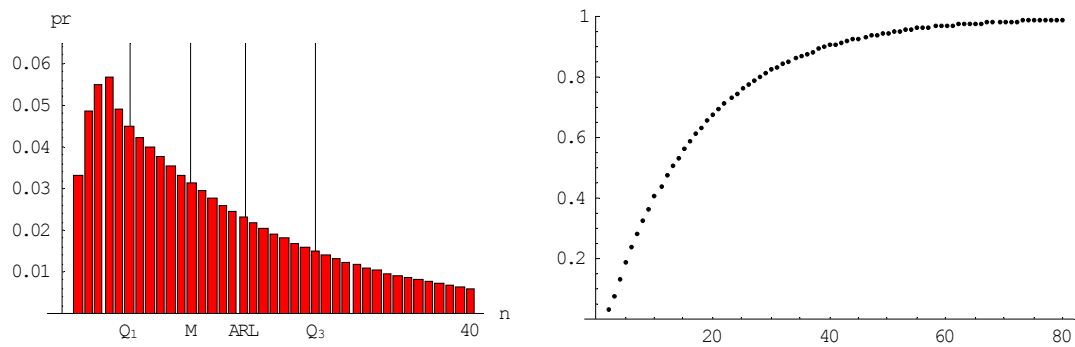
Διάγραμμα 3.22: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(2)$



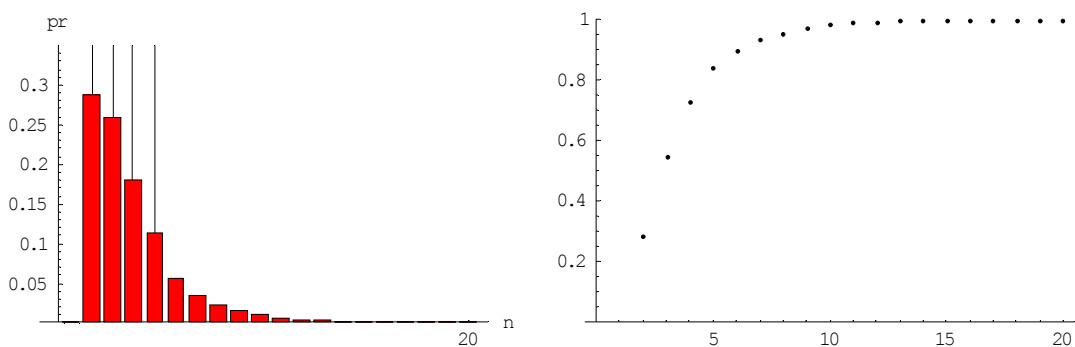
Διάγραμμα 3.23: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(0)$



Διάγραμμα 3.24: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(0.5)$



Διάγραμμα 3.25: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(1)$



Διάγραμμα 3.26: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(2)$

Στους ακόλουθους πίνακες δίνονται τιμές των ποσοτήτων Q_1 , M και Q_3 του μήκους ροής $T_{2/r}(\delta)$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$, $r = 3, 4, 5$ και για $\delta = 0(0.2)3$ που μας βοηθούν στην αξιολόγηση της “αξιοπιστίας” του μέσου μήκους ροής των διαγραμμάτων

Πίνακας 3.6: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/3$ με $ARL_{2/3}(0) = 370.4$				
δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{2/3}(\delta)$
0	108	257	513	370.4
0.2	77	184	366	264.79
0.4	40	94	186	134.92
0.6	21	48	93	67.89
0.8	12	26	50	36.64
1.0	7	15	29	21.44
1.2	5	10	18	13.56
1.4	4	7	12	9.21
1.6	3	5	9	6.67
1.8	3	4	6	5.10
2.0	2	3	5	4.10
2.2	2	3	4	3.44
2.4	2	3	3	2.99
2.6	2	2	3	2.68
2.8	2	2	3	2.47
3.0	2	2	2	2.32

Πίνακας 3.7: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/4$ με $ARL_{2/4}(0) = 370.4$				
δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{2/4}(\delta)$
0	108	257	513	370.4
0.2	76	179	357	257.81
0.4	38	88	175	126.61
0.6	19	44	86	62.24
0.8	11	24	45	33.22
1.0	7	14	26	19.42
1.2	5	9	16	12.37
1.4	4	6	11	8.49
1.6	3	5	8	6.23
1.8	3	4	6	4.84
2.0	2	3	5	3.95
2.2	2	3	4	3.35
2.4	2	3	3	2.95
2.6	2	2	3	2.66
2.8	2	2	3	2.46
3.0	2	2	3	2.32

Πίνακας 3.8: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 2/5 με $ARL_{2/3}(0) = 370.4$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{2/5}(\delta)$
0	108	257	513	370.4
0.2	74	176	350	253.39
0.4	37	85	168	121.52
0.6	18	41	81	58.85
0.8	10	22	42	31.21
1.0	7	13	25	18.26
1.2	5	9	15	11.70
1.4	4	6	11	8.11
1.6	3	5	8	6.02
1.8	3	4	6	4.72
2.0	2	3	5	3.89
2.2	2	3	4	3.33
2.4	2	3	3	2.94
2.6	2	2	3	2.66
2.8	2	2	3	2.46
3.0	2	2	3	2.32

3.3.3 Μελέτη του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου 2/ r με $ARL_{2/r} = 2149.34$ για $r = 3, 4, 5$

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τιμές για το μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r}(\delta) = E(T_{2/r}(\delta))$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου 2/ r για $r = 3, 4, 5$ και για $\delta = 0(0.2)3$ καθώς επίσης και τιμές του μέσου μήκους ροής για το (κλασικό) δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart (1,1). Τα σκιασμένα τετράγων δηλώνουν το $\min\{ARL_{2/r}(\delta); r = 3, 4, 5\}$

Πίνακας 3.9: Μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r}(\delta)$ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου

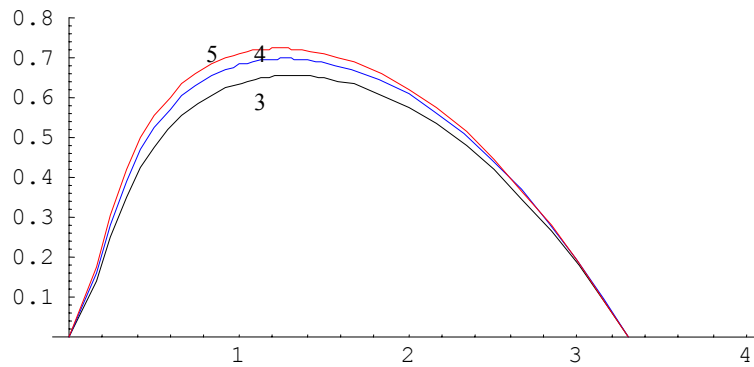
Shewhart τύπου $2/r$ για $r=3,4$ με $ARL_{2/r}(0) = 2149.34$

δ	$ARL_{1,1}(\delta)$	$ARL_{2/3}(\delta)$	$ARL_{2/4}(\delta)$	$ARL_{2/5}(\delta)$
0	2149.34	2149.34	2149.34	2149.34
0.2	1691.41	1371.47	1325.81	1296.24
0.4	984.54	586.14	541.95	514.14
0.6	530.09	251.09	224.93	208.70
0.8	287.73	116.31	102.15	93.49
1.0	160.95	58.79	51.20	46.64
1.2	93.24	32.39	28.26	25.83
1.4	55.98	19.36	17.06	15.74
1.6	34.82	12.48	11.17	10.44
1.8	24.44	8.62	7.85	7.44
2.0	14.97	6.32	5.87	5.64
2.2	10.33	4.89	4.62	4.50
2.4	7.37	3.97	3.81	3.75
2.6	5.43	3.35	3.26	3.24
2.8	4.13	2.93	2.89	2.88
3.0	3.24	2.64	2.62	2.62
p^*	0.00023263	0.012623	0.011724	0.0113484
UCL	3.5	2.23762	2.26606	2.2785
LCL	-3.5	-2.23762	-2.26606	-2.2785

Από τις τιμές του παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι χρησιμοποιώντας δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ για $r=3,4,5$, έχουμε σαφή βελτίωση στην τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής όταν θέλουμε να ανιχνεύσουμε μικρές, μεσαίες αλλά και μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας σε σχέση με το αντίστοιχο (κλασικό) διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (1,1). Παρατηρούμε επίσης ότι υπάρχει βελτίωση ακόμα και για μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου. Το ποσοστό βελτίωσης στην τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$, $r=3,4,5$, σε σχέση με το αντίστοιχο κλασικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart δίνεται από τον τύπο

$$I_{2/r}(\delta) = \frac{ARL_{1,1}(\delta) - ARL_{2/r}(\delta)}{ARL_{1,1}(\delta)}$$

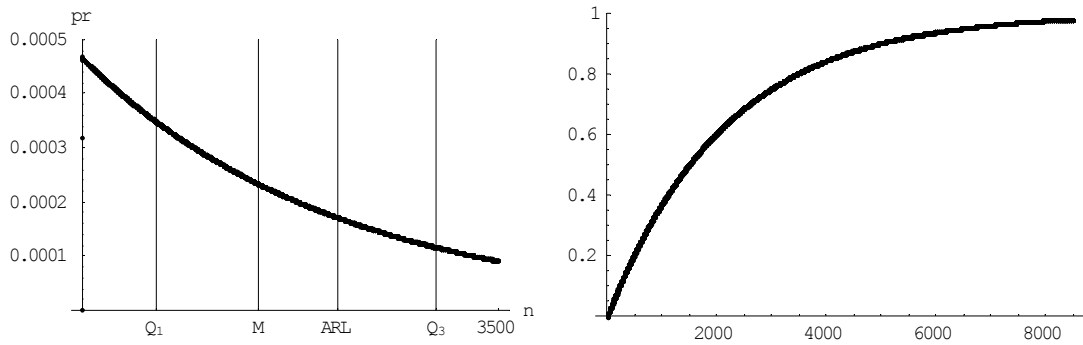
Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $I_{2/r}(\delta)$ για $r=3,4,5$



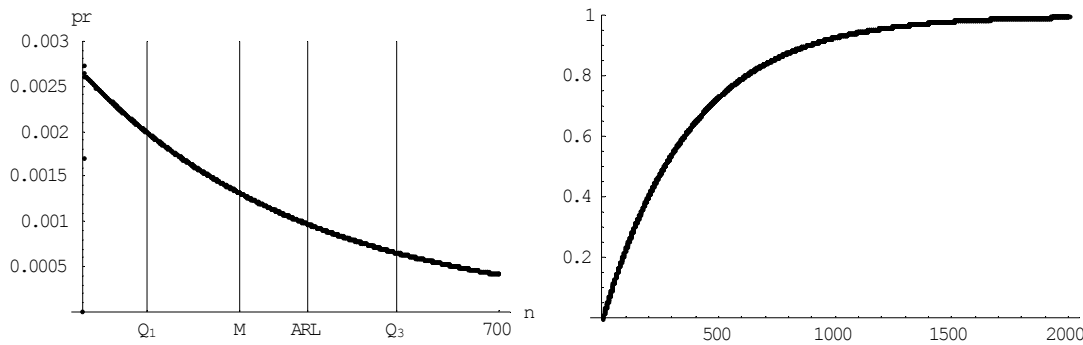
Διάγραμμα 3.27: Γραφική παράσταση του $I_{2/r}(\delta)$ για $r=3,4,5$ με $ARL_{in} = 2149.34$

Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι έχουμε μια ομοιόμορφη αύξηση του ποσοστού βελτίωσης που μας παρέχουν τα δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart τύπου $2/r$ έναντι του (κλασσικού) δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (1,1) καθώς αυξάνει το r . Άρα, για $r=5$ έχουμε το μεγαλύτερο ποσοστό βελτίωσης, το οποίο φτάνει στα επίπεδα του 70%.

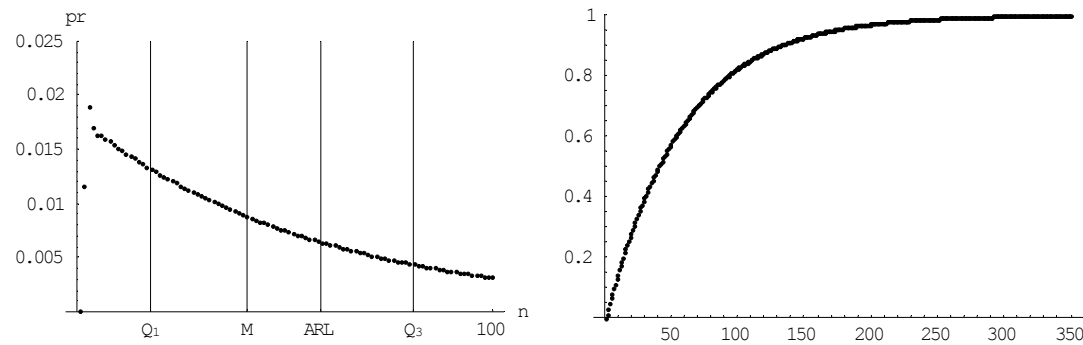
Στα ακόλουθα διαγράμματα δίνονται γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής του μήκους ροής $T_{2/r}(\delta)$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$, $r=3,4,5$ και για $\delta=0, 0.5, 1, 2$.



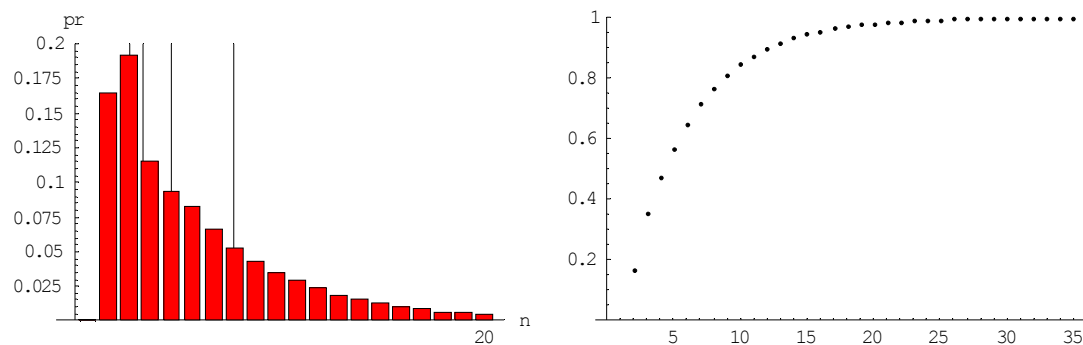
Διάγραμμα 3.28: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(0)$



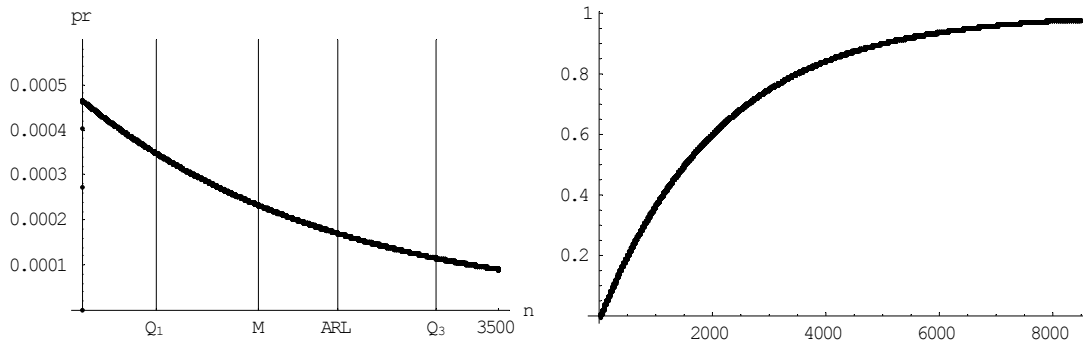
Διάγραμμα 3.29: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(0.5)$



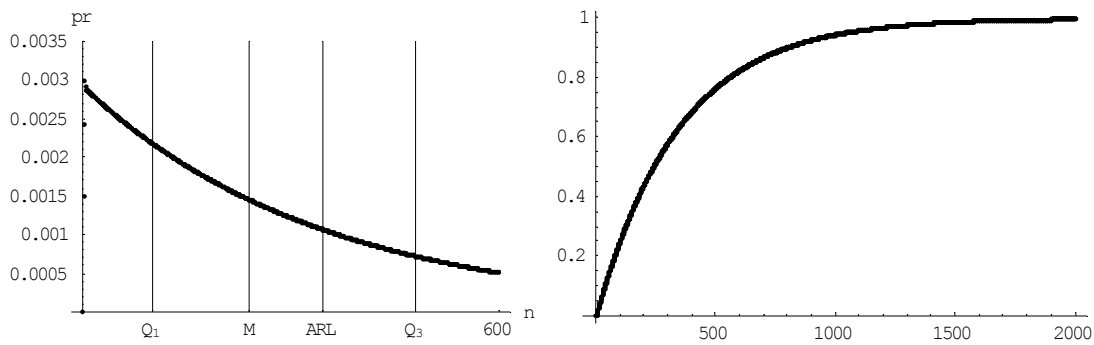
Διάγραμμα 3.30: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(1)$



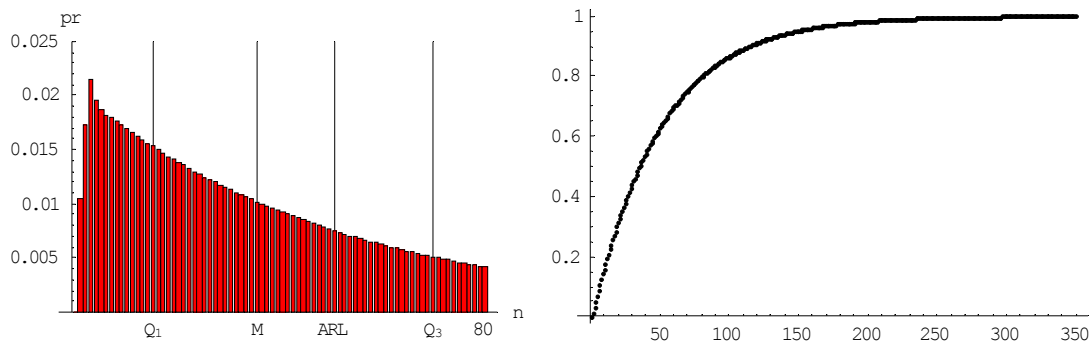
Διάγραμμα 3.31: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(2)$



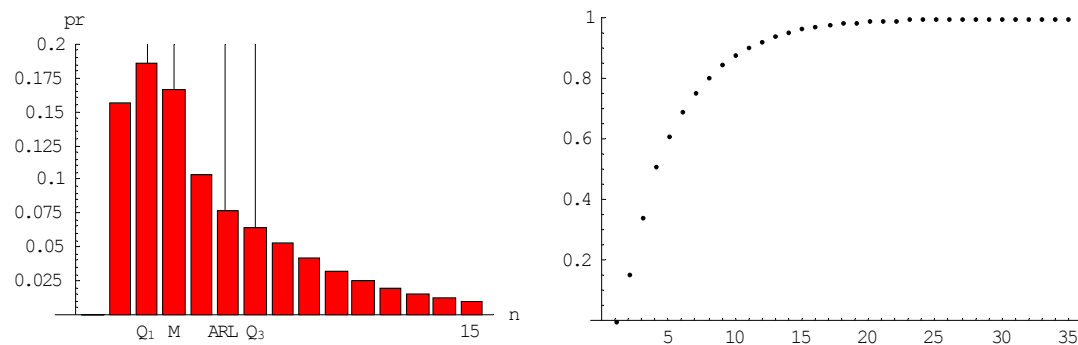
Διάγραμμα 3.32: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(0)$



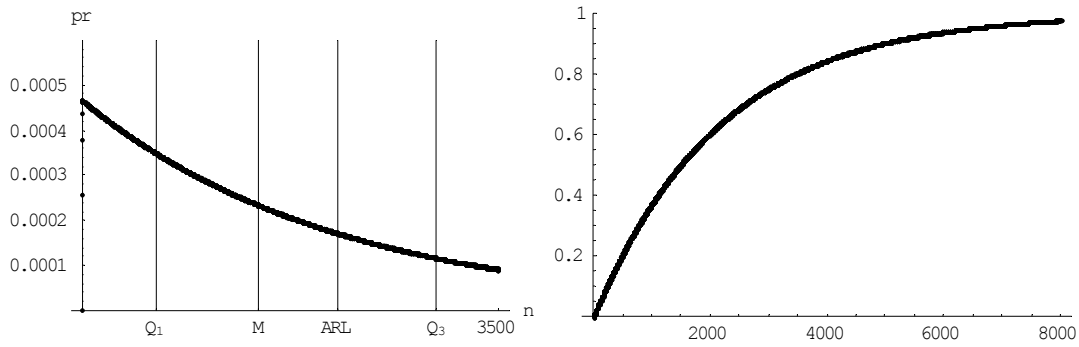
Διάγραμμα 3.33: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(0.5)$



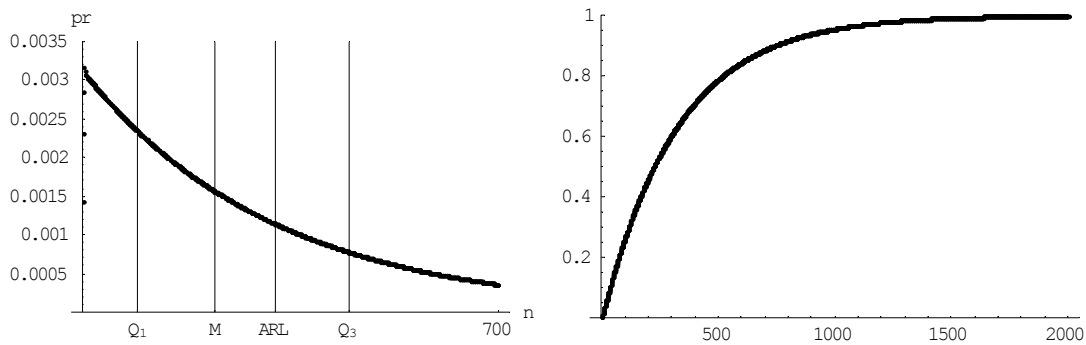
Διάγραμμα 3.34: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(1)$



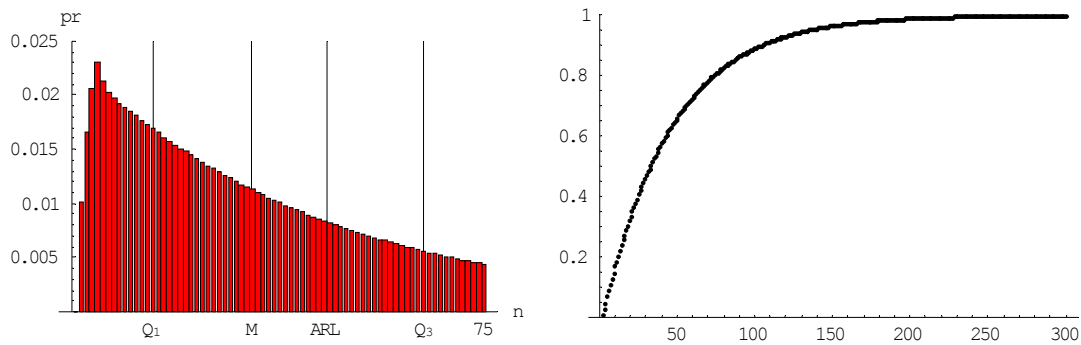
Διάγραμμα 3.35: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/4}(2)$



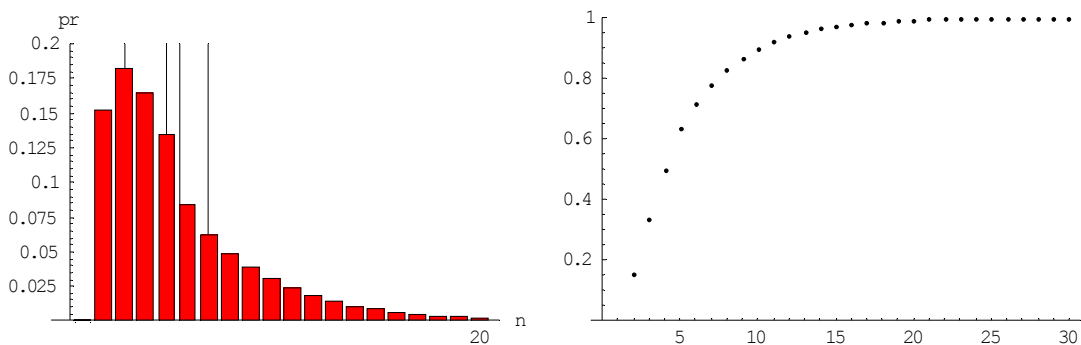
Διάγραμμα 3.36: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(0)$



Διάγραμμα 3.37: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(0.5)$



Διάγραμμα 3.38: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(1)$



Διάγραμμα 3.39: Συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής του μήκους ροής $T_{2/5}(2)$

Στους ακόλουθους πίνακες δίνονται τιμές των ποσοτήτων Q_1 , M και Q_3 του μήκους ροής $T_{2/r}(\delta)$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ για $r=3,4,5$ και για $\delta=0(0.2)3$ που μας βοηθούν στην αξιολόγηση της “αξιοπιστίας” του μέσου μήκους ροής των διαγραμμάτων

Πίνακας 3.10: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/3$ με $ARL_{2/3}(0) = 2149.34$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{2/3}(\delta)$
0	620	1490	2979	2149.34
0.2	396	951	1901	1371.47
0.4	170	407	812	586.14
0.6	74	175	347	251.09
0.8	35	81	161	116.31
1.0	18	41	81	58.79
1.2	11	23	44	32.39
1.4	7	14	26	19.36
1.6	5	9	17	12.48
1.8	3	6	11	8.62
2.0	3	5	8	6.32
2.2	3	4	6	4.89
2.4	2	3	5	3.97
2.6	2	3	4	3.35
2.8	2	2	3	2.93
3.0	2	2	3	2.64

Πίνακας 3.11: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/4$ με $ARL_{2/4}(0) = 2149.34$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{2/4}(\delta)$
0	620	1490	2979	2149.34
0.2	383	920	1837	1325.81
0.4	157	376	750	541.95
0.6	66	157	311	224.93
0.8	31	71	141	102.15
1.0	16	36	70	51.20
1.2	9	20	38	28.26
1.4	6	12	23	17.06
1.6	4	8	15	11.17
1.8	4	6	10	7.85
2.0	3	4	7	5.87
2.2	3	4	6	4.62
2.4	2	3	4	3.81
2.6	2	3	4	3.26
2.8	2	3	3	2.89
3.0	2	2	3	2.62

Πίνακας 3.12: Τιμές για τις ποσότητες Q_1 , M και Q_3 για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 2/5 με $ARL_{2/5}(0) = 2149.34$

δ	Q_1	M	Q_3	$ARL_{2/5}(\delta)$
0	620	1490	2979	2149.34
0.2	375	899	1796	1296.24
0.4	150	357	712	514.14
0.6	62	145	288	208.70
0.8	29	66	129	93.49
1.0	15	33	64	46.64
1.2	9	19	35	25.83
1.4	6	12	21	15.74
1.6	5	8	14	10.44
1.8	4	6	10	7.44
2.0	3	5	7	5.64
2.2	3	4	5	4.50
2.4	2	3	4	3.75
2.6	2	3	4	3.24
2.8	2	3	3	2.88
3.0	2	2	3	2.62

3.4 Αξιολόγηση των δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart τύπου 2/r

Στην παρούσα παράγραφο θα προβούμε σε μια συγκριτική αξιολόγηση των δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart τύπου 2/r με τα αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου Shewhart τύπου (k,k) του Κεφαλαίου 2. Θα δώσουμε πίνακες με τιμές για το μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r}(\delta)$ για τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart τύπου 2/r για $r = 3, 4, 5$ και θα τις συγκρίνουμε με αντίστοιχες τιμές $ARL_{k,k}(\delta)$ των διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart τύπου (k,k) για $k = 1(1)5$. Υπενθυμίζουμε ότι στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart τύπου (k,k) έχουμε ως ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου όταν k συνεχόμενα σημεία του διαγράμματος βρεθούν είτε πάνω από το άνω όριο ελέγχου είτε κάτω από το κάτω όριο ελέγχου, οποιοδήποτε συμβεί νωρίτερα.

Φυσικά για να είναι συγκρίσιμες οι τιμές του μέσου μήκους ροής θα πρέπει τα διαγράμματα ελέγχου να έχουν ίδιο εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής. Θα δώσουμε πίνακες και γραφικές παραστάσεις με το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής να παίρνει τιμές ίσες με 80.52,

370.4 και 2149.34 έτσι ώστε να υπάρχει κοινή βάση σύγκρισης των νέων διαγραμμάτων ελέγχου με το κλασικό δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart για $L = 2.5, 3$ και 3.5 .

3.4.1 Σύγκριση δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ και τύπου (k,k) με $ARL_{in} = 80.52$

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τιμές του ARL_{out} για τα δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ και τύπου (k,k) , για $r = 3, 4, 5$ και για $k = 1(1)5$, με $ARL_{in} = 80.52$. Τα σκιασμένα τετράγωνα δηλώνουν το $\min\{ARL_{2/r}(\delta), ARL_{k,k}(\delta); r = 3, 4, 5, k = 1(1)5\}$.

Πίνακας 3.13: Μέσο μήκος ροής $ARL_{in}(\delta)$, $ARL_{k,k}(\delta)$ για $r = 3, 4, 5$ και για $k = 1(1)5$ με

$$ARL_{in} = 80.52$$

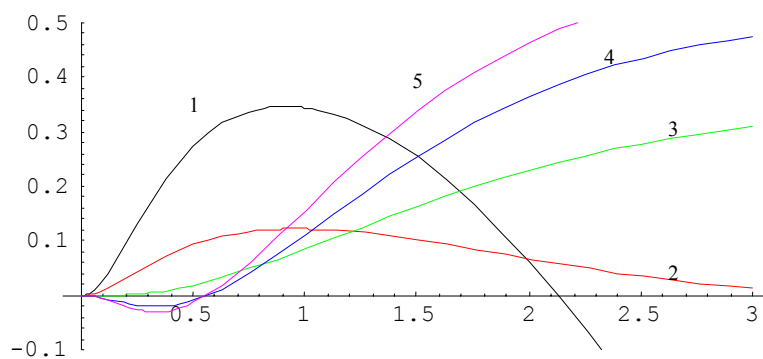
δ	$ARL_{1,1}(\delta)$	$ARL_{2,2}(\delta)$	$ARL_{3,3}(\delta)$	$ARL_{4,4}(\delta)$	$ARL_{5,5}(\delta)$	$ARL_{2/3}(\delta)$	$ARL_{2/4}(\delta)$	$ARL_{2/5}(\delta)$
0	80.52	80.52	80.52	80.52	80.52	80.52	80.52	80.52
0.2	70.47	66.13	64.20	63.27	62.85	64.14	63.04	62.39
0.4	50.68	42.52	39.67	38.56	38.21	39.28	37.63	36.68
0.6	33.69	26.10	24.05	23.50	23.58	23.35	22.04	21.31
0.8	22.20	16.59	15.48	15.45	15.84	14.62	13.74	13.26
1.0	14.92	11.15	10.71	11.01	11.59	9.79	9.23	8.93
1.2	10.32	7.92	7.92	8.43	9.12	7.00	6.64	6.47
1.4	7.37	5.94	6.22	6.85	7.62	5.30	5.08	4.98
1.6	5.43	4.67	5.13	5.85	6.67	4.22	4.09	4.04
1.8	4.13	3.83	4.42	5.20	6.06	3.52	3.44	3.42
2.0	3.24	3.26	3.94	4.78	5.66	3.04	3.00	2.99
2.2	2.62	2.87	3.62	4.49	5.41	2.71	2.70	2.70
2.4	2.17	2.59	3.41	4.31	5.25	2.49	2.48	2.49
2.6	1.85	2.40	3.26	4.19	5.15	2.33	2.33	2.34
2.8	1.62	2.27	3.16	4.11	5.08	2.22	2.22	2.23
3.0	1.45	2.17	3.10	4.06	5.05	2.14	2.15	2.15
p^*	0.00620964	0.0819672	0.197265	0.306981	0.40003	0.0690531	0.0650148	0.0634395
UCL	2.5	1.39196	0.851431	0.504426	0.253269	1.48288	1.51399	1.52653
LCL	-2.5	-1.39196	-0.851431	-0.504426	-0.253269	-1.48288	-1.51399	-1.52653

Στον παραπάνω πίνακα έχουν σκιαστεί τα κελιά που περιέχουν την μικρότερη τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για τις διάφορες τιμές του δ . Όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα, το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/5$ είναι το πλέον ευαίσθητο για τον εντοπισμό μετατοπίσεων του μέσου έως 2σ δηλαδή για μικρές μετατοπίσεις του μέσου. Για μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου πάνω από 2σ το δίπλευρο διάγραμμα Shewhart τύπου $(1,1)$ είναι το πλέον ευαίσθητο.

Το ποσοστό βελτίωσης στην τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$, $r=3,4,5$ σε σχέση με τα αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου Shewhart τύπου (k,k) για $k \geq 1$, δίνεται από τον τύπο

$$I_{k;r}(\delta) = \frac{ARL_{k,k}(\delta) - ARL_{2/r}(\delta)}{ARL_{k,k}(\delta)}$$

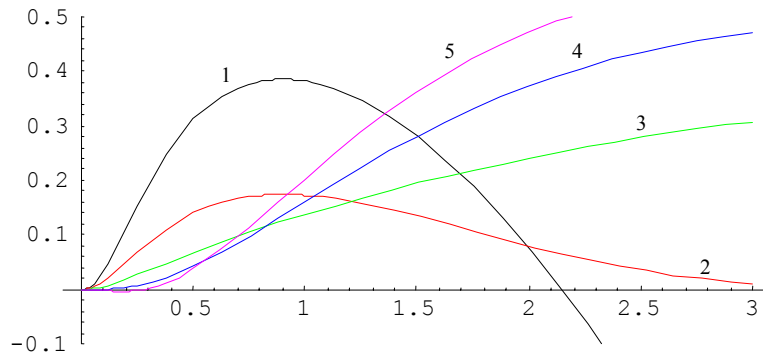
Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $I_{k;3}(\delta)$ για $k=1(1)5$



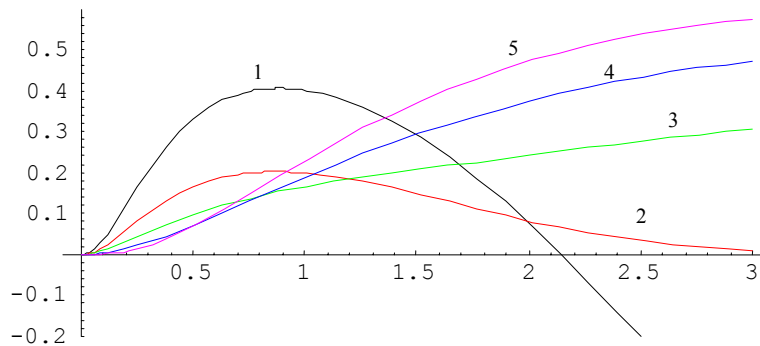
Διάγραμμα 3.40: Γραφική παράσταση του $I_{k;3}(\delta)$ για $k=1(1)5$ με $ARL_{in} = 80.52$

Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι το ποσοστό βελτίωσης μπορεί να φτάσει μέχρι το 35% έναντι του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $(1,1)$ και αφορά μετατοπίσεις κοντά στο 1σ . Επίσης, την ίδια περίπου συμπεριφορά με ποσοστό βελτίωσης μέχρι 10% έχει το διάγραμμα τύπου $2/3$ έναντι του διαγράμματος τύπου $(2,2)$, ενώ έναντι των διαγραμμάτων τύπου $(3,3)$, $(4,4)$ και $(5,5)$ το ποσοστό βελτίωσης βαίνει συνεχώς αυξούμενο για μετατοπίσεις μεγαλύτερες του 0.5σ .

Στο ακόλουθα διαγράμματα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $I_{k;4}(\delta)$ και $I_{k;5}(\delta)$ για $k=1(1)5$



Διάγραμμα 3.41: Γραφική παράσταση του $I_{k;4}(\delta)$ για $k=1(1)5$ με $ARL_{in}=80.52$



Διάγραμμα 3.42: Γραφική παράσταση του $I_{k;5}(\delta)$ για $k=1(1)5$ με $ARL_{in}=80.52$

Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι το ποσοστό βελτίωσης μπορεί να φτάσει μέχρι το 40% έναντι του δίπλευρου διάγραμματος ελέγχου Shewhart τύπου (1,1) και αφορά μετατοπίσεις κοντά στο 1σ . Επίσης, την ίδια περίπου συμπεριφορά με ποσοστό βελτίωσης μέχρι 20% έχει το διάγραμμα τύπου 2/4 έναντι του διαγράμματος τύπου (2,2), ενώ έναντι των διαγραμμάτων τύπου (3,3), (4,4) και (5,5) το ποσοστό βελτίωσης είναι θετικό ακόμη και για μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας.

Γενικότερα, μπορούμε να πούμε ότι κάθε ένα από τα διαγράμματα ελέγχου τύπου $2/r$ για $r=3,4,5$ που αναπτύξαμε στο κεφάλαιο 3, έχουν καλύτερη απόδοση από τα διαγράμματα ελέγχου τύπου (k,k) για $k=1(1)5$ όταν το $ARL_{in}=80.52$.

3.4.2 Αξιολόγηση των δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ με εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r} = 370.4$

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τιμές του ARL_{out} για τα δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$ και τύπου (k, k) , για $r = 3, 4, 5$ και για $k = 1(1)5$, με $ARL_{in} = 80.52$. Τα σκιασμένα τετράγωνα δηλώνουν το $\min\{ARL_{2/r}(\delta), ARL_{k,k}(\delta); r = 3, 4, 5, k = 1(1)5\}$

Πίνακας 3.14: Μέσο μήκος ροής $ARL_{in}(\delta)$, $ARL_{k,k}(\delta)$ για $r = 3, 4, 5$ και για $k = 1(1)5$ με $ARL_{in} = 370.4$

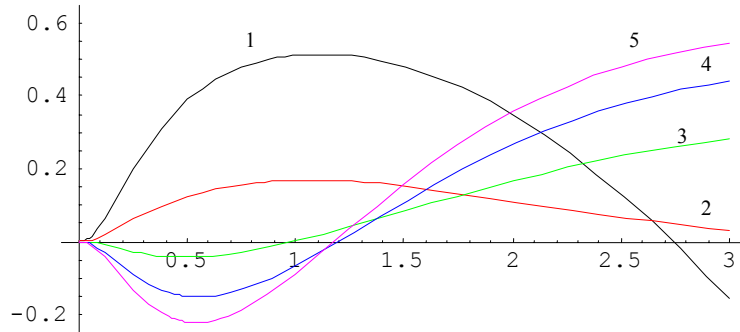
δ	$ARL_{1,1}(\delta)$	$ARL_{2,2}(\delta)$	$ARL_{3,3}(\delta)$	$ARL_{4,4}(\delta)$	$ARL_{5,5}(\delta)$	$ARL_{2/3}(\delta)$	$ARL_{2/4}(\delta)$	$ARL_{2/5}(\delta)$
0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
0.2	308.43	276.67	259.3	248.54	241.32	264.79	257.81	253.39
0.4	200.1	150.25	129.55	118.7	112.26	134.92	126.61	121.52
0.6	119.67	78.91	65.25	58.99	55.71	67.89	62.24	58.85
0.8	71.55	43.63	35.76	32.63	31.28	36.64	33.22	31.21
1.0	43.9	25.78	21.45	20.06	19.72	21.44	19.42	18.26
1.2	27.82	16.28	14.00	13.54	13.72	13.56	12.37	11.70
1.4	18.25	10.94	9.85	9.91	10.37	9.21	8.49	8.11
1.6	12.38	7.79	7.41	7.77	8.39	6.67	6.23	6.02
1.8	8.7	5.85	5.89	6.44	7.16	5.10	4.84	4.72
2.0	6.3	4.61	4.92	5.59	6.38	4.10	3.95	3.89
2.2	4.7	3.79	4.28	5.03	5.87	3.44	3.35	3.33
2.4	3.65	3.23	3.85	4.66	5.54	2.99	2.95	2.94
2.6	2.9	2.85	3.56	4.42	5.33	2.68	2.66	2.66
2.8	2.38	2.58	3.36	4.26	5.20	2.47	2.46	2.46
3.0	2.0	2.39	3.23	4.16	5.11	2.32	2.32	2.32
p^*	0.00135	0.037422	0.115055	0.202766	0.285135	0.0309961	0.0289202	0.0280702
UCL	3	1.78142	1.20008	0.831782	0.567654	1.86635	1.89691	1.90994
LCL	-3	-1.78142	-1.20008	-0.831782	-0.567654	-1.86635	-1.89691	-1.90994

Στον παραπάνω πίνακα έχουν σκιαστεί τα κελιά που περιέχουν την μικρότερη τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για τις διάφορες τιμές του δ . Όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα, το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $(5,5)$ είναι το πλέον ευαίσθητο για τον εντοπισμό μετατοπίσεων του μέσου έως 0.6σ . Το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου $2/5$ είναι το πλέον ευαίσθητο για τον εντοπισμό μεσαίων μετατοπίσεων του μέσου από 0.8σ έως 2.6σ . Για μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου πάνω από 2.6σ το δίπλευρο διάγραμμα Shewhart τύπου $(1,1)$ είναι το πλέον ευαίσθητο.

Το ποσοστό βελτίωσης στην τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$, $r = 3, 4, 5$ σε σχέση με τα αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k \geq 1$, δίνεται από τον τύπο

$$I_{k;r}(\delta) = \frac{ARL_{k,k}(\delta) - ARL_{2/r}(\delta)}{ARL_{k,k}(\delta)}$$

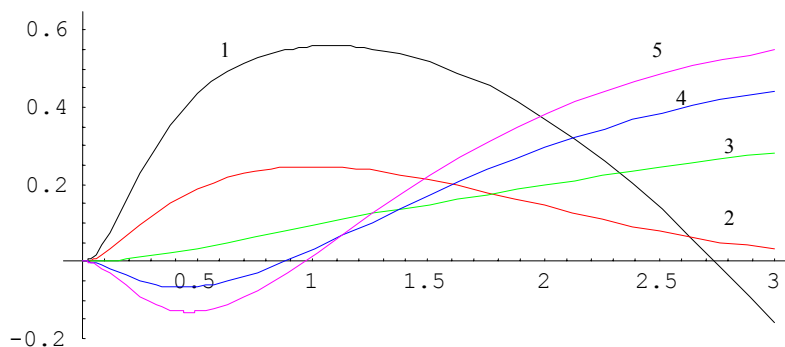
Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $I_{k;3}(\delta)$ για $k = 1(1)5$



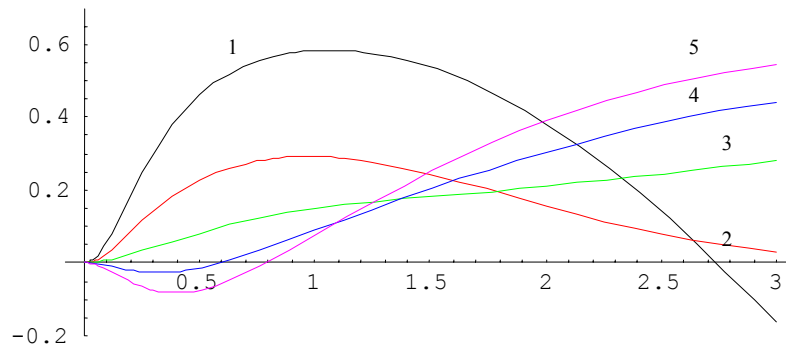
Διάγραμμα 3.43: Γραφική παράσταση του $I_{k;3}(\delta)$ για $k = 1(1)5$ με $ARL_{in} = 370.4$

Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι το ποσοστό βελτίωσης μπορεί να φτάσει μέχρι το 50% έναντι του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (1,1) και αφορά μετατοπίσεις κοντά στο $1\sigma - 1.5\sigma$. Επίσης, την ίδια περίπου συμπεριφορά με ποσοστό βελτίωσης μέχρι 15% έχει το διάγραμμα ελέγχου τύπου 2/3 έναντι του διαγράμματος ελέγχου τύπου (2,2), ενώ έναντι των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου (3,3), (4,4) και (5,5) το ποσοστό βελτίωσης αυξάνει για μετατοπίσεις μεγαλύτερες του $1\sigma - 1.2\sigma$. Για μικρότερη τάξης μετατόπιση του μέσου της διεργασίας, τα διαγράμματα (3,3), (4,4) και (5,5) είναι καλύτερα έναντι του διαγράμματος ελέγχου τύπου 2/3.

Στα ακόλουθα διαγράμματα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $I_{k;4}(\delta)$ και $I_{k;5}(\delta)$ για $k = 1(1)5$



Διάγραμμα 3.44: Γραφική παράσταση του $I_{k;4}(\delta)$ για $k=1(1)5$ με $ARL_{in}=370.4$



Διάγραμμα 3.45: Γραφική παράσταση του $I_{k;5}(\delta)$ για $k=1(1)5$ με $ARL_{in}=370.4$

Η συμπεριφορά του $I_{k;4}(\delta)$ και του $I_{k;5}(\delta)$ είναι παρόμοια με αυτή του $I_{k;3}(\delta)$

Γενικότερα, μπορούμε να πούμε ότι η τα διαγράμματα ελέγχου τύπου (5,5) και (4,4) είναι τα πιο ευαίσθητα για μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας μέχρι σχεδόν 0.6σ όταν το $ARL_{in} = 370.4$. Το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 2/5 εμφανίζει το καλύτερο ποσοστό βελτίωσης για μετατόπιση του μέσου από 0.6σ έως 2.6σ (οι συγκρίσεις γίνονται σε σχέση με το κλασικό δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart με $ARL_{in} = 370.4$).

3.4.3 Αξιολόγηση των δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart τύπου 2/r με εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_{2/r} = 2149.34$

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τιμές του ARL_{out} για τα δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου Shewhart τύπου 2/r και τύπου (k,k), για $r = 3, 4, 5$ και για $k = 1(1)5$, με $ARL_{in} = 80.52$. Τα σκιασμένα τετράγωνα δηλώνουν το $\min\{ARL_{2/r}(\delta), ARL_{k,k}(\delta); r = 3, 4, 5, k = 1(1)5\}$.

Πίνακας 3.15: Μέσο μήκος ροής $ARL_{in}(\delta)$, $ARL_{k,k}(\delta)$ για $r = 3, 4, 5$ και για $k = 1(1)5$ με

$$ARL_{in} = 2149.34$$

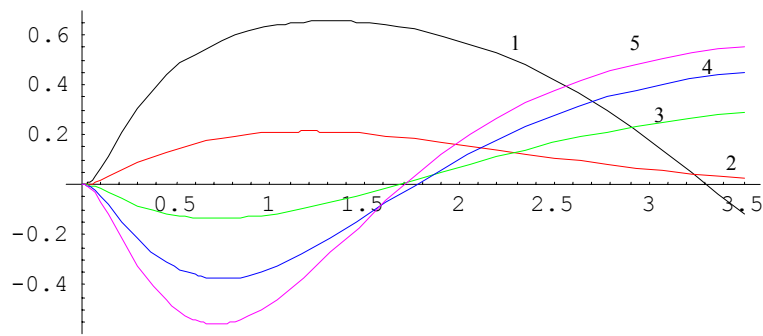
δ	$ARL_{1,1}(\delta)$	$ARL_{2,2}(\delta)$	$ARL_{3,3}(\delta)$	$ARL_{4,4}(\delta)$	$ARL_{5,5}(\delta)$	$ARL_{2/3}(\delta)$	$ARL_{2/4}(\delta)$	$ARL_{2/5}(\delta)$
0	2149.34	2149.34	2149.34	2149.34	2149.34	2149.34	2149.34	2149.34
0.2	1691.41	1447.33	1304.15	1210.94	1145.02	1371.47	1325.81	1296.24
0.4	984.54	665.19	529.0	455.52	409.81	586.14	541.95	514.14
0.6	530.09	300.22	221.75	184.28	162.86	251.09	224.93	208.70
0.8	287.73	144.06	102.62	84.62	75.07	116.31	102.15	93.49
1.0	160.95	74.30	52.60	43.96	39.77	58.79	51.20	46.64
1.2	93.24	41.19	29.71	25.58	23.86	32.39	28.26	25.83
1.4	55.98	24.49	18.36	16.47	15.93	19.36	17.06	15.74
1.6	34.82	15.57	12.31	11.57	11.63	12.48	11.17	10.44
1.8	24.44	10.53	8.87	8.76	9.15	8.62	7.85	7.44
2.0	14.97	7.55	6.81	7.06	7.63	6.32	5.87	5.64
2.2	10.33	5.70	5.51	6.00	6.68	4.89	4.62	4.50
2.4	7.37	4.51	4.67	5.29	6.07	3.97	3.81	3.75
2.6	5.43	3.72	4.11	4.83	5.67	3.35	3.26	3.24
2.8	4.13	3.19	3.74	4.53	5.41	2.93	2.89	2.88
3.0	3.24	2.82	3.48	4.33	5.25	2.64	2.62	2.62
p^*	0.00023263	0.015369	0.0628417	0.127785	0.196	0.012623	0.011724	0.0113484
UCL	3.5	2.16045	1.53135	1.13692	0.855996	2.23762	2.26606	2.2785
LCL	-3.5	-2.16045	-1.53135	-1.13692	-0.855996	-2.23762	-2.26606	-2.2785

Στον παραπάνω πίνακα έχουν σκιαστεί τα κελιά που περιέχουν την μικρότερη τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για τις διάφορες τιμές του δ . Όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα, το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου (5,5) είναι το πλέον ευαίσθητο για τον εντοπισμό μικρών και μεσαίων μετατοπίσεων του μέσου, δηλαδή έως 1.2σ . Το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 2/5 είναι το πλέον ευαίσθητο για τον εντοπισμό μεγάλων μετατοπίσεων του μέσου, δηλαδή πάνω από 1.2σ .

Το ποσοστό βελτίωσης στην τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/r$, $r = 3, 4, 5$ σε σχέση με τα αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) για $k \geq 1$ δίνεται από τον τύπο

$$I_{k;r}(\delta) = \frac{ARL_{k,k}(\delta) - ARL_{2/r}(\delta)}{ARL_{k,k}(\delta)}$$

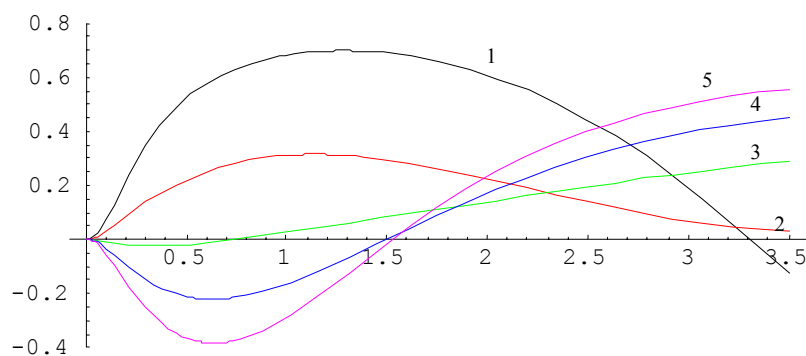
Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $I_{k;3}(\delta)$ για $k = 1(1)5$



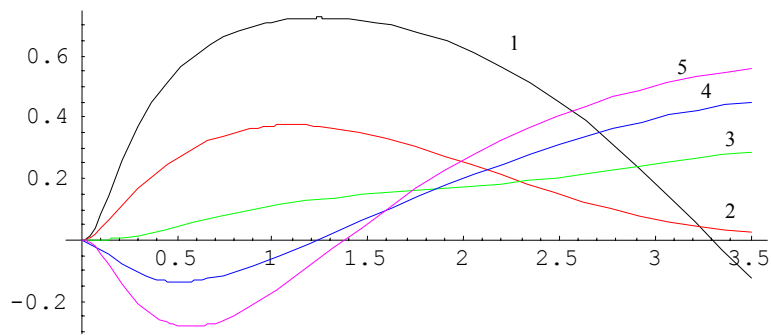
Διάγραμμα 3.46: Γραφική παράσταση του $I_{k;3}(\delta)$ για $k=1(1)5$ με $ARL_{in} = 2149.34$

Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι το ποσοστό βελτίωσης μπορεί να φτάσει μέχρι το 60% έναντι του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (1,1) και αφορά μετατοπίσεις κοντά στο 1.5σ . Επίσης, την ίδια περίπου συμπεριφορά με ποσοστό βελτίωσης μέχρι 20% έχει το διάγραμμα ελέγχου τύπου 2/3 έναντι του διαγράμματος ελέγχου τύπου (2,2), ενώ έναντι των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου (3,3), (4,4) και (5,5) το ποσοστό βελτίωσης βαίνει συνεχώς αυξανόμενο για μετατοπίσεις μεγαλύτερες του 1.5σ . Για μικρότερες μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας, τα διαγράμματα τύπου (3,3) (4,4) και (5,5) είναι καλύτερα έναντι του διαγράμματος τύπου 2/3.

Ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν από τη σύγκριση των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου 2/4 και 2/5, με τα διαγράμματα ελέγχου τύπου (k, k) , για $k=1(1)5$, όπως αποκαλύπτουν οι ακόλουθες δύο γραφικές παραστάσεις των ποσοστών βελτίωσης $I_{k;4}(\delta)$ και $I_{k;5}(\delta)$.



Διάγραμμα 3.47: Γραφική παράσταση του $I_{k;4}(\delta)$ για $k=1(1)5$ με $ARL_{in} = 2149.34$



Διάγραμμα 3.48: Γραφική παράσταση του $I_{k;5}(\delta)$ για $k=1(1)5$ με $ARL_{in} = 2149.34$

Γενικότερα, μπορούμε να πούμε ότι τα διαγράμματα ελέγχου τύπου (4,4) και (5,5) είναι τα πιο ευαίσθητα για μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας μέχρι 1.5σ όταν το $ARL_{in} = 2149.34$. Το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart τύπου 2/5 εμφανίζει το καλύτερο ποσοστό βελτίωσης για μετατοπίσεις του μέσου από $1.5\sigma - 3.5\sigma$ (οι συγκρίσεις γίνονται σε σχέση με το κλασικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart με $ARL_{in} = 2149.34$).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ *MATHEMATICA*

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 1 : Μελέτη Κανόνα C_{15}

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ 2, 3 : Μελέτη Άνω Διαγράμματος Ελέγχου Shewhart
τύπου 4**

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ 4, 5 : Μελέτη Δίπλευρου Διαγράμματος Ελέγχου
Shewhart τύπου (4,4)**

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ 6, 7 : Μελέτη Δίπλευρου Διαγράμματος Ελέγχου
Shewhart τύπου 2/3**

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

- Υπολογισμός $ARL(\delta)$ για τον κανόνα C_{15} : Πίνακας 1.6
- Υπολογισμός Διασποράς του $ARL(\delta)$ για τον κανόνα C_{15} : Πίνακας 1.6
- Υπολογισμός Ποσοστιαίων Σημείων της κατανομής του μήκους ροής $T(\delta)$ για τον κανόνα C_{15} : Πίνακας 1.7
- Γραφικές παραστάσεις αθροιστικής συνάρτησης κατανομής και συνάρτησης πιθανότητας για το μήκος ροής $T(\delta)$: Διάγραμμα 1.10

```
<< Statistics `ContinuousDistributions`
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ARL@ D ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΑΝΟΝΑ C15 ΓΙΑ =0 H0.2L 3 -- L
dist= NormalDistribution@0, 1D;
@x_D= CDF@dist, xD;
p1@_D= @2- D- @3- D;
p2@_D= @2- D- @2- D;
p3@_D= @3- D- @2- D;
p4@_D= @3- D+1- @3- D;
a= 8p1@ D, p2@ D, p3@ D<;
l1= 8l, 1, 1<;
R= 880, p2@ D, p3@ D<, 8p1@ D, p2@ D, p3@ D<, 8p1@ D, p2@ D, 0<<;
ARL@_D= 1+ a.Inverse@IdentityMatrix@3D- RD.l1;
Do@Print@ , " ", N@ARL@ DDD, 8 , 0, 3, 0.2<D

0 278.045
0.2 222.589
0.4 134.17
0.6 75.2701
0.8 42.9622
1. 25.6122
1.2 16.0608
1.4 10.6047
1.6 7.36207
1.8 5.35817
2. 4.07297
```


2.2 3.21986

2.4 2.63542

2.6 2.22335

2.8 1.92509

3. 1.70397

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ E Ht²L -- L

MTS@_D=

N@l+a.HB IdentityMatrix@3D-Rl.

MatrixPower@IdentityMatrix@3D-R, -2D.11D;

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ E HtL -- L

MT@_D=1+a.Inverse@IdentityMatrix@3D-RD.11;

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΤΟΥ ARL H L,

VAR HtL=E Ht²L-E² HtL -- L

Do@Print@ , " " , N@MT@ DD, " " , N@MTS@ DD, " " ,

N@MTS@ D-HMT@ DL^2DD, 8 , 0, 3, 0.2<D

H -- , E HtL=ARL H L, E Ht²L, Var HtL -- L

0 278.045 154204. 76895.+0.á

0.2 222.589 98748.8 49203.

0.4 134.17 35784.7 17783.1

0.6 75.2701 11203.8 5538.24

0.8 42.9622 3617.36 1771.61

1. 25.6122 1267.58 611.59

1.2 16.0608 488.289 230.341

1.4 10.6047 207.03 94.5706

1.6 7.36207 96.3145 42.1144

1.8 5.35817 48.9147 20.2047

2. 4.07297 26.9567 10.3675

2.2 3.21986 16.0182 5.65072

2.4 2.63542 10.1975 3.25205

2.6 2.22335 6.91025 1.96695

2.8 1.92509 4.95174 1.24578

3. 1.70397 3.72699 0.823479

```

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ & ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΡΟΗΣ Τ Η Λ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΑΝΟΝΑ C15 -- L
= 2.0; H --ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΤΗΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΑΣ -- L
ARL@_D= 1+a.Inverse@IdentityMatrix@3D- RD.11

S@n_D= a.MatrixPower@R, n-1D.11;
S@1D= a.11;
F@n_D= 1-S@nD; H --ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ -- L

H --ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ -- L
f@n_D= F@nD- F@n-1D;
f@1D= 1-S@1D;

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΡΟΗΣ
Τ Η Λ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΑΝΟΝΑ C15 ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΤΙΜΗ ΤΟΥ -- L
Do@Print@n , " ", N@F@nDDD, &n, 1, 15<D

1 0.158656
2 0.408656
3 0.560734
4 0.679441
5 0.76475
6 0.827665
7 0.873682
8 0.907428
9 0.932155
10 0.950278
11 0.96356
12 0.973294
13 0.980428
14 0.985656
15 0.989487

<<Graphics`Graphics`

```

H --ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΚΑΙ
 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΡΟΗΣ Τ Η Λ ΓΙΑ
 ΤΟΝ ΚΑΝΟΝΑ C₁₅ ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΤΙΜΗ ΤΟΥ -- L

H --ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ -- L

t1 = Table@N@f@nDD, 8n, 1, 50<D;

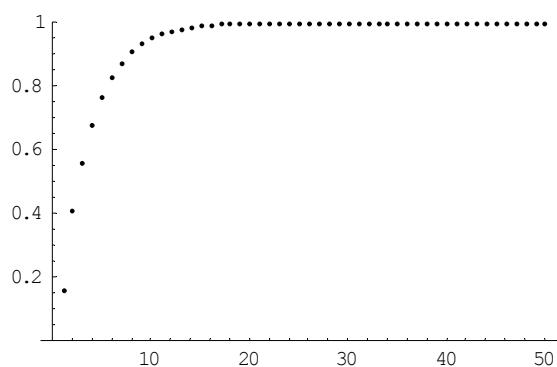
ListPlot@t1, PlotRange 80, 1<D

H --ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ -- L

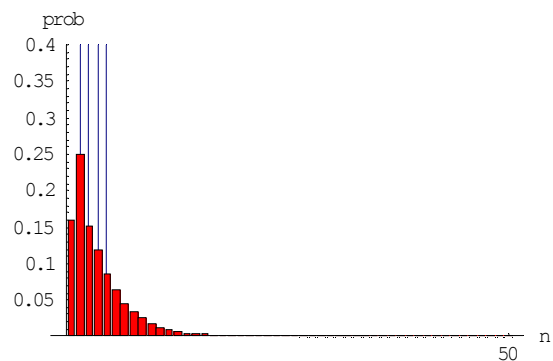
t2 = Table@N@f@nDD, 8n, 1, 50<D;

BarChart@t2, AxesLabel 8n, prob<, Ticks 8850<, Automatic<,

GridLines -> 882, 3, 4.07, 5<, None<, PlotRange 80, 0.4<D



y Graphics y



y Graphics y

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

- Υπολογισμός $ARL_4(\delta)$ και ποσοστιαίων σημείων για την κατανομή του μήκους ροής $T_4(\delta)$: Πίνακας 2.11
- Γραφικές παραστάσεις αθροιστικής συνάρτησης κατανομής και συνάρτησης πιθανότητας του μήκους ροής $T_4(\delta)$: Διαγράμματα 2.37

```
<<Statistics`ContinuousDistributions`
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΛΥΣΗΣ p ΟΠΩΣ ΑΝΑΦΕΡΕΤΑΙ ΣΤΟ ΒΗΜΑ 2-- L
h@x_, k_D = (1 - x^k) / (H1 - xL x^k);
Solve@h@x_, 4D ~ 740.8, xD
x = x ê. %

88x -0.183713<, 8x -0.00885152 - 0.190157 á<,
8x -0.00885152 + 0.190157 á<, 8x 0.202766<<

8-0.183713, -0.00885152 - 0.190157 á, -0.00885152 + 0.190157 á, 0.202766<

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΩ ΟΡΙΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΟΠΩΣ ΑΝΑΦΕΡΕΤΑΙ ΣΤΟ ΒΗΜΑ 3-- L
UCL = Quantile@NormalDistribution@0, 1D, 1 - 0.202766D;
Print@" OneSided_UCL=", UCLD

OneSided_UCL=0.831782

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ  $ARL_4$  Η Λ ΓΙΑ  $\delta = 0$  Η 0.2L 3 -- L
p4@_D = 1 - CDF@NormalDistribution@0, 1D, UCL - D;
q4@_D = 1 - p4@ D;
ARL4@_D = h@p4@ D, 4D;
Do@Print@ , " ", ARL4@ DD, 8 , 0, 3, 0.2<D

0 740.796
0.2 279.261
0.4 120.491
0.6 59.0942
0.8 32.6345
1. 20.0585
1.2 13.5444
1.4 9.91447
```

1.6 7.76746
 1.8 6.43741
 2. 5.58553
 2.2 5.02826
 2.4 4.66009
 2.6 4.41692
 2.8 4.25778
 3. 4.15538

H --ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ & ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΓΙΑ
 ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΡΟΗΣ T₄ H L ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΤΙΜΗ ΤΟΥ -- L
 = 1.0; H --ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΤΗΣ ΔΙΑΡΤΑΣΙΑΣ-- L
 p@_D= 1- CDF@NormalDistribution@0, 1D, UCL- D;
 q@_D= 1- p@ D;
 e1 = 81, 0, 0, 0, 0<;
 e5 = 80, 0, 0, 0, 1<;
 P= 88q@ D, p@ D, 0, 0, 0<, 8q@ D, 0, p@ D, 0, 0<, 8q@ D, 0, 0, p@ D, 0<,
 8q@ D, 0, 0, 0, p@ D<, 80, 0, 0, 0, 1<<; H --ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΜΕΤΑΠΗΛΗΣΗΣ-- L

H --ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ-- L
 F@n_D= e1.MatrixPower@P, nD.e5;

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ -- L
 Do@Print@n, " ", Re@F@nDDD, 8n, 1, 20<D

1 2.22045 × 10⁻¹⁶
 2 2.22045 × 10⁻¹⁶
 3 4.44089 × 10⁻¹⁶
 4 0.103205
 5 0.147914
 6 0.192623
 7 0.237332
 8 0.282041
 9 0.322136
 10 0.360232
 11 0.396329
 12 0.430427
 13 0.462527

```

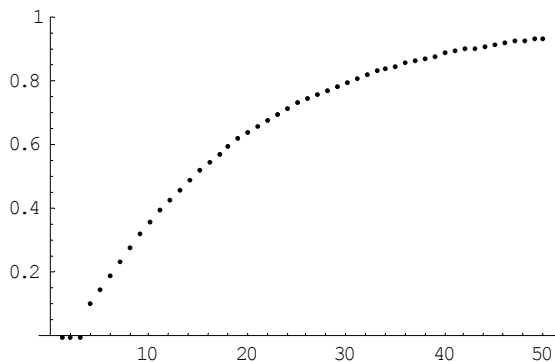
14 0.492833
15 0.521437
16 0.548426
17 0.573891
18 0.597921
19 0.620596
20 0.641992

```

```

H --ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΡΟΗΣ
  T4 H L ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΤΙΜΗ ΤΟΥ -- L
t1 = Table@Re@f@nDD, 8n, 1, 50<D;
ListPlot@t1, PlotRange 80, 1<D

```



```
y Graphics y
```

```
<<Graphics`Graphics`
```

```

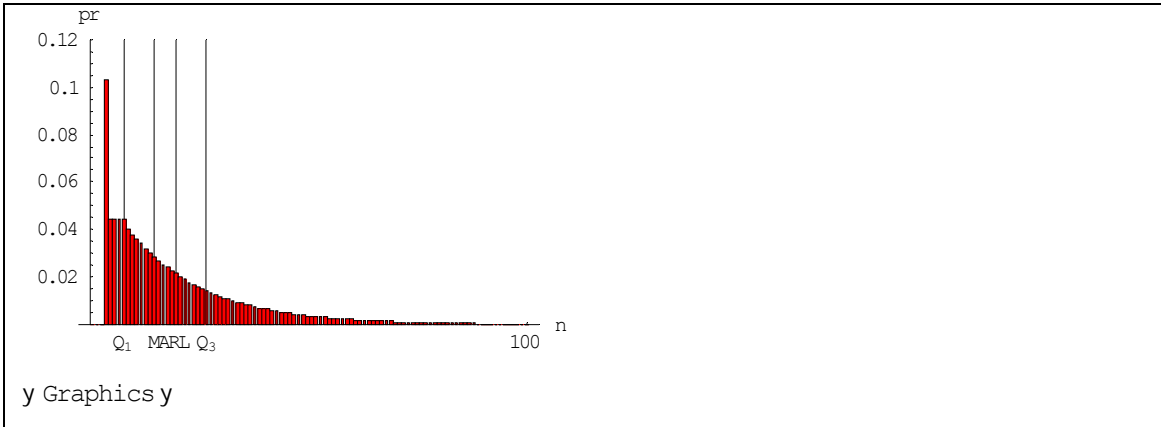
H --ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΡΟΗΣ T4 H L ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΤΙΜΗ ΤΟΥ -- L
e4 = 80, 0, 0, 1, 0<;
f@n_D = p@ D e1.MatrixPower@P, n - 1D.e4;
f@0D = p@ D e1.e4;

```

```

H --ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΡΟΗΣ
  T4 H L ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΤΙΜΗ ΤΟΥ -- L
t2 = Table@Re@f@nDD, 8n, 1, 100<D;
BarChart@t2, PlotRange 80, 0.12<, AxesLabel 8n, pr<,
  Ticks 8888, Q1<, 815, M<, 820.1, ARL<, 827, Q3<, 100<, Automatic<,
  GridLines 8888, Q1<, 815, M<, 820.1, ARL<, 827, Q3<<, None<, PlotRange 80, 0.12<,
  PlotStyle PointSize@.01DD

```



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

- Γραφικές παραστάσεις βελτίωσης άνω διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου k :
Διάγραμμα 2.22

```
<< Statistics `ContinuousDistributions`
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ p ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 2, ΓΙΑ k=1 -- L
h@x_, k_D =  $\frac{1 - x^k}{H1 - xL x^k}$ ;
Solve@h@x, 1D ~ 740.8, xD
x = x ê. %
88x 0.00134989<<
80.00134989<
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΩ ΟΠΙΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 3, ΓΙΑ k=1 -- L
d1 = Quantile@NormalDistribution@0, 1D, 1 - 0.00134989D;
Print@' OneSided_UCL= ", d1D
OneSided_UCL= 3.
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ARL1 H L -- L
p@_D = 1 - CDF@NormalDistribution@0, 1D, d1 - D;
q@_D = 1 - p@ D;
ARL@_D = h@p@ D, 1D;
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ p ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 2, ΓΙΑ k=2 -- L
Solve@h@z, 2D ~ 740.8, zD
z = z ê. %
88z -0.0360721<, 8z 0.037422<<
8-0.0360721, 0.037422<
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΩ ΟΠΙΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 3, ΓΙΑ k=2 -- L
d2 = Quantile@NormalDistribution@0, 1D, 1 - 0.037422D;
Print@' OneSided_UCL= ", d2D
OneSided_UCL= 1.78142
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ARL2 H L -- L
p2@_D = 1 - CDF@NormalDistribution@0, 1D, d2 - D;
q2@_D = 1 - p2@ D;
ARL2@_D = h@p2@ D, 2D;
```



```

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΥΞΗΣ p ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 2, ΓΙΑ k=3 -- L
Solve@h@y, 3D~ 740.8, yD
y = yê. %
88y -0.0568528 - 0.0921971 á<, 8y -0.0568528 + 0.0921971 á<, 8y 0.115055<<
8-0.0568528 - 0.0921971 á, -0.0568528 + 0.0921971 á, 0.115055<

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΩ ΟΠΙΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 3, ΓΙΑ k=3 -- L
d3 = Quantile@NormalDistribution@0, 1D, 1 - 0.115055D;
Print@' OneSided_UCL= ", d3D
OneSided_UCL= 1.20008

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ARL3 H L -- L
p3@_D = 1 - CDF@NormalDistribution@0, 1D, d3 - D;
q3@_D = 1 - p3@D;
ARL3@_D = h@p3@D, 3D;

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΥΞΗΣ p ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 2, ΓΙΑ k=4 -- L
Solve@h@u, 4D~ 740.8, uD
u = uê. %
88u -0.183713<, 8u -0.00885152 - 0.190157 á<,
8u -0.00885152 + 0.190157 á<, 8u 0.202766<<
8-0.183713, -0.00885152 - 0.190157 á, -0.00885152 + 0.190157 á, 0.202766<

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΩ ΟΠΙΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 3, ΓΙΑ k=4 -- L
d4 = Quantile@NormalDistribution@0, 1D, 1 - 0.202766D;
Print@' OneSided_UCL= ", d4D
OneSided_UCL= 0.831782

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ARL4 H L -- L
p4@_D = 1 - CDF@NormalDistribution@0, 1D, d4 - D;
q4@_D = 1 - p4@D;
ARL4@_D = h@p4@D, 4D;

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΥΞΗΣ p ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 2, ΓΙΑ k=5 -- L
Solve@h@w, 5D~ 740.8, wD
w = wê. %
88w -0.21088 - 0.145639 á<, 8w -0.21088 + 0.145639 á<,
8w 0.0689875 - 0.25946 á<, 8w 0.0689875 + 0.25946 á<, 8w 0.285135<<
8-0.21088 - 0.145639 á, -0.21088 + 0.145639 á,
0.0689875 - 0.25946 á, 0.0689875 + 0.25946 á, 0.285135<

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΩ ΟΠΙΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 3, ΓΙΑ k=5 -- L
d5 = Quantile@NormalDistribution@0, 1D, 1 - 0.285135D;
Print@' OneSided_UCL= ", d5D
OneSided_UCL= 0.567654

```

```

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ARL5 H L -- L
p5@_D=1-CDF@NormalDistribution@0,1D,d5-D;
q5@_D=1-p5@D;
ARL5@_D=h@p5@D,5D;

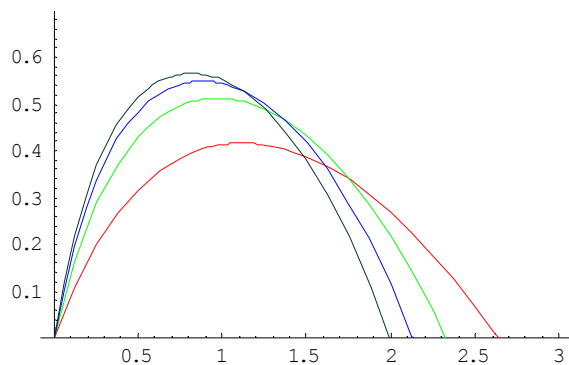
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ Ik H L, k=2 H L 5-- L
I12@_D=  $\frac{ARL@D-ARL2@D}{ARL@D}$ ;
I13@_D=  $\frac{ARL@D-ARL3@D}{ARL@D}$ ;
I14@_D=  $\frac{ARL@D-ARL4@D}{ARL@D}$ ;
I15@_D=  $\frac{ARL@D-ARL5@D}{ARL@D}$ ;

H --ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΒΕΛΤΙΩΣΗΣ-- L
im12=Plot@I12@D,8,0,3<,PlotStyle RGBColor@1,0,0D,
      DisplayFunction IdentityD
im13=Plot@I13@D,8,0,3<,PlotStyle RGBColor@0,1,0D,
      DisplayFunction IdentityD
im14=Plot@I14@D,8,0,3<,PlotStyle RGBColor@0,0,1D,
      DisplayFunction IdentityD
im15=Plot@I15@D,8,0,3<,PlotStyle RGBColor@0,0.2,0.2D,
      DisplayFunction IdentityD

y Graphics y
y Graphics y
y Graphics y
y Graphics y

Show@im12,im13,im14,im15,PlotRange 80,0.7<,DisplayFunction $DisplayFunctionD

```



y Graphics y

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

- Υπολογισμός $ARL_{4,4}(\delta)$ και ποσοστιαίων σημείων για την κατανομή του μήκους ροής $T_{4,4}(\delta)$: Πίνακας 2.29
- Γραφικές παραστάσεις αθροιστικής συνάρτησης κατανομής και συνάρτησης πιθανότητας του μήκους ροής $T_{4,4}(\delta)$: Διάγραμμα 2.101

```
<< Statistics `ContinuousDistributions`
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΛΥΣΗΣ p , ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 2-- L
h@p_ , k_D= 
$$\frac{1}{2Jp - \frac{p-p^k}{1-p^k} N}$$
;
Solve@h@p, 4D ~ 370.4, pD
p = p ê. %
88p -0.183713<, 8p -0.00885152 - 0.190157 á<,
8p -0.00885152 + 0.190157 á<, 8p 0.202766<<
8-0.183713, -0.00885152 - 0.190157 á, -0.00885152 + 0.190157 á, 0.202766<
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΟΡΙΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 3-- L
dU4 = Quantile@NormalDistribution@0, 1D, 1 - 0.202766D;
dL4 = -dU4;
Print@' TwoSided_UCL= ", dU4, " TwoOneSided_LCL= ", dL4D
TwoSided_UCL= 0.831782 TwoOneSided_LCL= -0.831782
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ  $ARL_{4,4}$  Η Λ ΓΙΑ  $\delta = 0$  Η 0.2L 3 -- L
pU@_D = 1 - CDF@NormalDistribution@0, 1D, 0.831782 - D;
pL@_D = CDF@NormalDistribution@0, 1D, -0.831782 - D;
q@_D = 1 - pU@D - pL@D;
ARL@_ , k_D= 
$$\frac{1}{1 - q@D - \frac{pU@D - HpU@D \cdot k}{1 - HpU@D \cdot k} - \frac{pL@D - HpL@D \cdot k}{1 - HpL@D \cdot k}}$$
;
Do@Print@ , " " , ARL@ , 4DD, 8 , 0 , 3 , 0.2<D
0 370.398
0.2 248.542
0.4 118.691
0.6 58.9861
0.8 32.6275
1. 20.058
```

1.2 13.5443
 1.4 9.91446
 1.6 7.76746
 1.8 6.43741
 2. 5.58553
 2.2 5.02826
 2.4 4.66009
 2.6 4.41692
 2.8 4.25778
 3. 4.15538

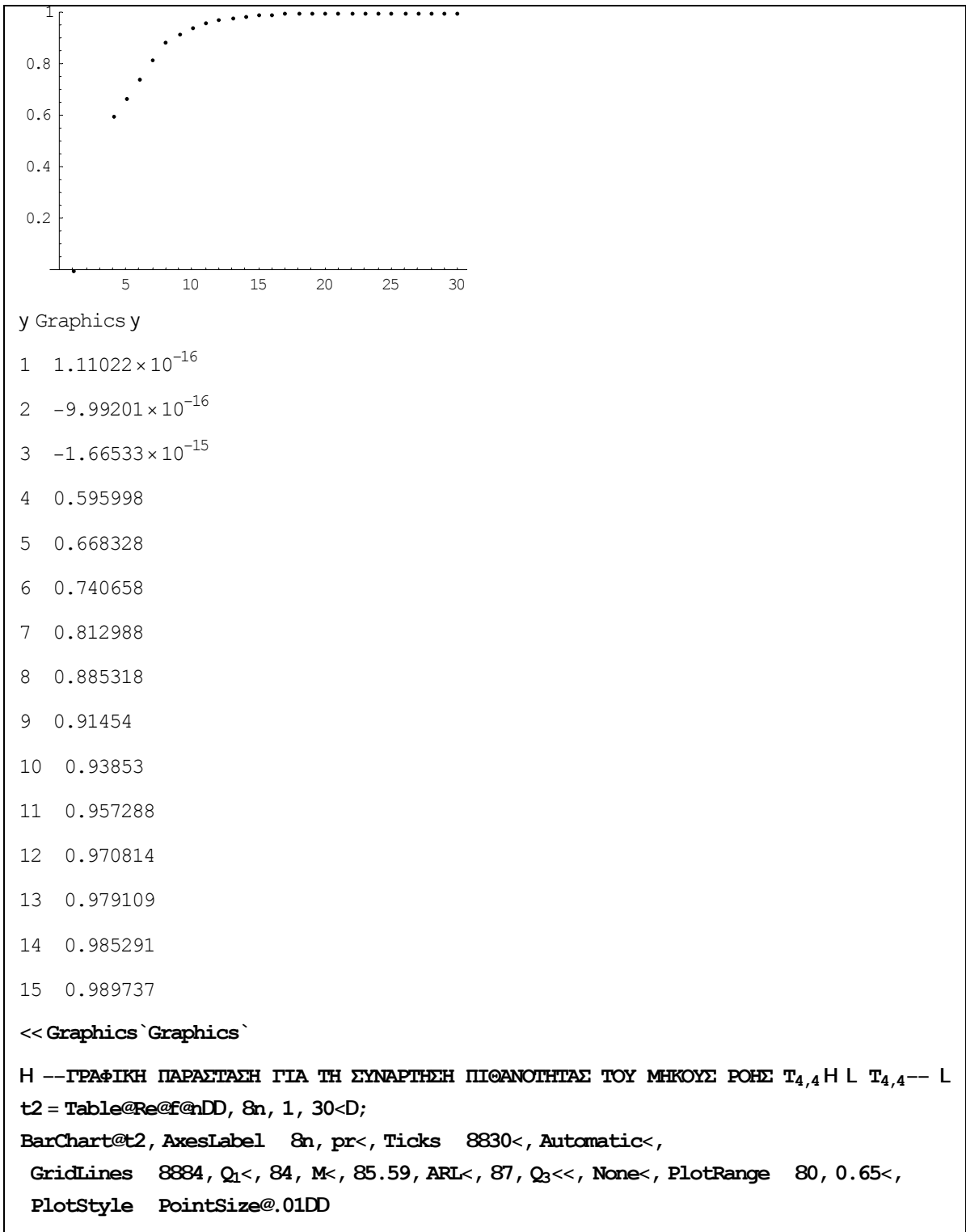
```
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ
  ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΡΟΗΣ T4,4 H L ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΤΙΜΗ ΤΟΥ -- L
  = 2.0; H --ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΤΗΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΑΣ-- L
pU@_D= 1-CDF@NormalDistribution@0, 1D, 0.831782- D;
pL@_D= CDF@NormalDistribution@0, 1D, -0.831782- D;
q@_D= 1- pU@ D- pL@ D;
P= 8q@ D, pU@ D, 0, 0, pL@ D, 0, 0, 0<, 8q@ D, 0, pU@ D, 0, pL@ D, 0, 0, 0<,
  8q@ D, 0, 0, pU@ D, pL@ D, 0, 0, 0<, 8q@ D, 0, 0, 0, pL@ D, 0, 0, pU@ D<,
  8q@ D, pU@ D, 0, 0, 0, pL@ D, 0, 0<, 8q@ D, pU@ D, 0, 0, 0, 0, pL@ D, 0<,
  8q@ D, pU@ D, 0, 0, 0, 0, 0, pL@ D<, 80, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1<<;
H --ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΜΕΤΑΠΗΛΗΣΗΣ-- L
a0= 81, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0<;

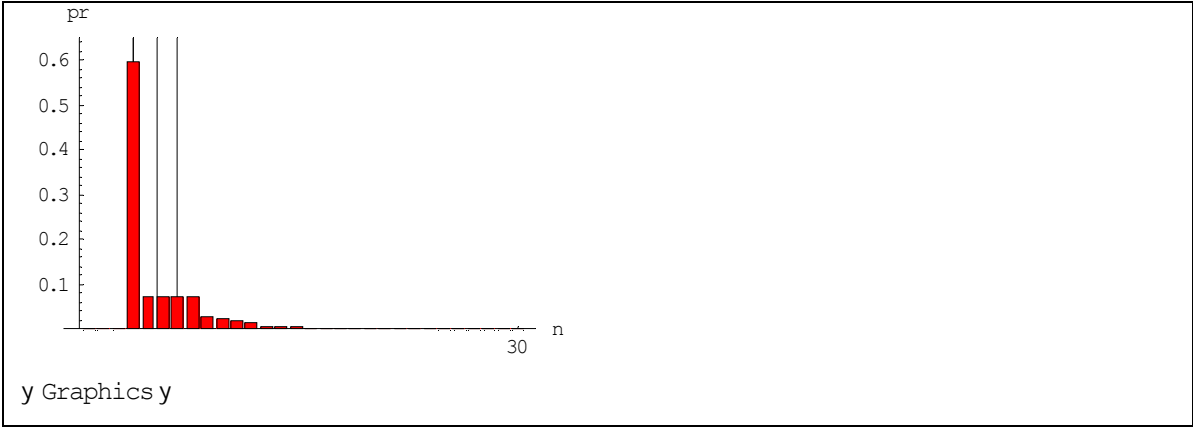
H --ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΡΟΗΣ T4,4 H L-- L
f@_D= a0.MatrixPower@P, n-1D.HP- IdentityMatrix@4 + 4DL.80, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1<;
f@1D= a0.HP- IdentityMatrix@4 + 4DL.80, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1<;

H --ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΡΟΗΣ T4,4 H L-- L
F@_D= a0.MatrixPower@P, nD.80, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1<;
t1= Table@Re@F@nDD, 8n, 1, 30<D;

H --ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ
  ΡΟΗΣ T4,4 H L -- L
ListPlot@t1, PlotRange 80, 1<D

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΡΟΗΣ T4,4 H L-- L
Do@Print@n, " ", Re@F@nDDD, 8n, 1, 15<D
```





ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

- Γραφικές παραστάσεις βελτίωσης δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου (k, k) : Διάγραμμα 2.85

```

<<Statistics`ContinuousDistributions`
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ p ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 2, ΓΙΑ k=1 -- L
h@p_, k_D =  $\frac{1}{2Jp - \frac{p-p^k}{1-p^k}N}$ ;
Solve@h@p, 1D ~ 370.4, pD
p = p ê. %
88p 0.00134989<<
80.00134989<
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΟΡΙΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 3, ΓΙΑ k=1 -- L
dU1 = Quantile@NormalDistribution@0, 1D, 1 - 0.00135D;
dL1 = -dU1;
Print@"TwoSided_UCL=", dU1, " TwoSided_LCL=", dL1D
TwoSided_UCL=2.99998 TwoSided_LCL=-2.99998
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ARL1,1 H L -- L
pU1@_D = 1 - CDF@NormalDistribution@0, 1D, dU1 - D;
pL1@_D = CDF@NormalDistribution@0, 1D, -dU1 - D;
q1@_D = 1 - pU1@D - pL1@D;
ARL1@_, k_D =  $\frac{1}{1 - q1@D - \frac{pU1@D - HpU1@D^k}{1 - HpU1@D^k} - \frac{pL1@D - HpL1@D^k}{1 - HpL1@D^k}}$ ;
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ p ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 2, ΓΙΑ k=2 -- L
Solve@h@x, 2D ~ 370.4, xD
x = x ê. %
88x -0.0360721<, 8x 0.037422<<
8-0.0360721, 0.037422<
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΟΡΙΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 3, ΓΙΑ k=2 -- L
dU2 = Quantile@NormalDistribution@0, 1D, 1 - 0.037422D;
dL2 = -dU2;
Print@"TwoSided_UCL=", dU2, " TwoSided_LCL=", dL2D
TwoSided_UCL=1.78142 TwoSided_LCL=-1.78142

```

```

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ARL2,2 H L -- L
pU2@_D= 1-CDF@NormalDistribution@0, 1D, dU2- D;
pL2@_D= CDF@NormalDistribution@0, 1D, -dU2- D;
q2@_D= 1- pU2@ D- pL2@ D;
ARL2@_ , k_D= 
$$\frac{1}{1 - q2@ D - \frac{pU2@ D - HpU2@ DL^k}{1 - HpU2@ DL^k} - \frac{pL2@ D - HpL2@ DL^k}{1 - HpL2@ DL^k}}$$
;
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ p ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 2, ΓΙΑ k=3 -- L
Solve@h@y, 3D~ 370.4, yD
y= yê. %
88y -0.0568528 - 0.0921971 á<, 8y -0.0568528 + 0.0921971 á<, 8y 0.115055<<
8-0.0568528 - 0.0921971 á, -0.0568528 + 0.0921971 á, 0.115055<
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΟΡΙΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 3, ΓΙΑ k=3 -- L
dU3= Quantile@NormalDistribution@0, 1D, 1 - 0.115055D;
dL3= -dU3;
Print@"TwoSided_UCL=", dU3, " TwoSided_LCL=", dL3D
TwoSided_UCL=1.20008 TwoSided_LCL=-1.20008
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ARL3,3 H L -- L
pU3@_D= 1-CDF@NormalDistribution@0, 1D, dU3- D;
pL3@_D= CDF@NormalDistribution@0, 1D, -dU3- D;
q3@_D= 1- pU3@ D- pL3@ D;
ARL3@_ , k_D= 
$$\frac{1}{1 - q3@ D - \frac{pU3@ D - HpU3@ DL^k}{1 - HpU3@ DL^k} - \frac{pL3@ D - HpL3@ DL^k}{1 - HpL3@ DL^k}}$$
;
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ p ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 2, ΓΙΑ k=4 -- L
Solve@h@z, 4D~ 370.4, zD
z= zê. %
88z -0.183713<, 8z -0.00885152 - 0.190157 á<,
8z -0.00885152 + 0.190157 á<, 8z 0.202766<<
8-0.183713, -0.00885152 - 0.190157 á, -0.00885152 + 0.190157 á, 0.202766<
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΟΡΙΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 3, ΓΙΑ k=4 -- L
dU4= Quantile@NormalDistribution@0, 1D, 1 - 0.202766D;
dL4= -dU4;
Print@"TwoSided_UCL=", dU4, " TwoSided_LCL=", dL4D
TwoSided_UCL=0.831782 TwoSided_LCL=-0.831782

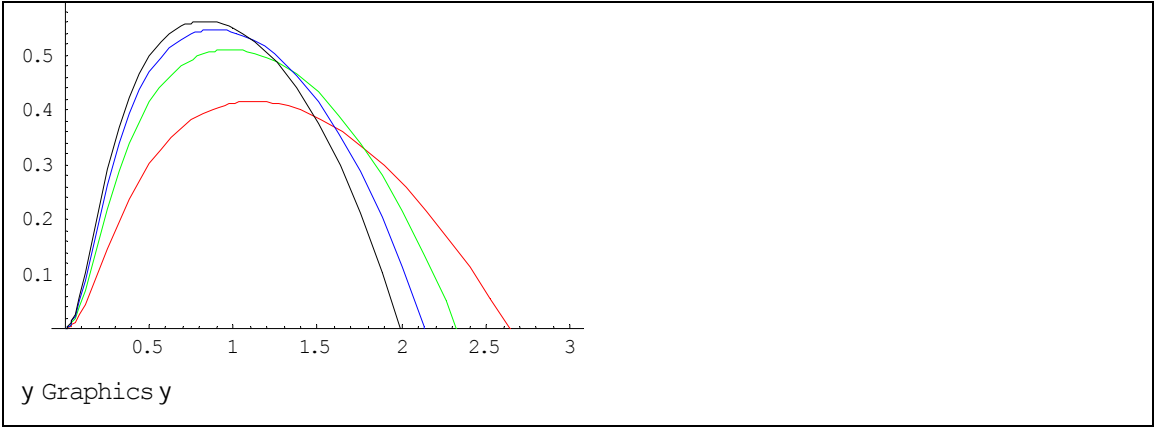
```



```

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ARL4,4 H L -- L
pU4@_D= 1-CDF@NormalDistribution@0, 1D, dU4- D;
pL4@_D= CDF@NormalDistribution@0, 1D, -dU4- D;
q4@_D= 1- pU4@ D- pL4@ D;
ARL4@_, k_D= 
$$\frac{1}{1 - q4@ D - \frac{pU4@ D - HpU4@ D^k}{1 - HpU4@ D^k} - \frac{pL4@ D - HpL4@ D^k}{1 - HpL4@ D^k}}$$
;
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ p ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 2, ΓΙΑ k=5 -- L
Solve@h@w, 5D~ 370.4, wD
w = w ê. %
88w -0.21088 - 0.145639 á<, 8w -0.21088 + 0.145639 á<,
8w 0.0689875 - 0.25946 á<, 8w 0.0689875 + 0.25946 á<, 8w 0.285135<<
8-0.21088 - 0.145639 á, -0.21088 + 0.145639 á,
0.0689875 - 0.25946 á, 0.0689875 + 0.25946 á, 0.285135<
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΟΡΙΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 3, ΓΙΑ k=5 -- L
dU5= Quantile@NormalDistribution@0, 1D, 1 - 0.285135D;
dL5= -dU5;
Print@"TwoSided_UCL=", dU5, " TwoSided_LCL=", dL5D
TwoSided_UCL=0.567654 TwoSided_LCL=-0.567654
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ARL5,5 H L -- L
pU5@_D= 1-CDF@NormalDistribution@0, 1D, dU5- D;
pL5@_D= CDF@NormalDistribution@0, 1D, -dU5- D;
q5@_D= 1- pU5@ D- pL5@ D;
ARL5@_, k_D= 
$$\frac{1}{1 - q5@ D - \frac{pU5@ D - HpU5@ D^k}{1 - HpU5@ D^k} - \frac{pL5@ D - HpL5@ D^k}{1 - HpL5@ D^k}}$$
;
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ Ik,k H L ΓΙΑ k=2 H L 5, ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΒΕΛΤΙΩΣΗΣ-- L
I12@_D= 
$$\frac{-ARL2@, 2D + ARL1@, 1D}{ARL1@, 1D}$$
;
I13@_D= 
$$\frac{-ARL3@, 3D + ARL1@, 1D}{ARL1@, 1D}$$
;
I14@_D= 
$$\frac{-ARL4@, 4D + ARL1@, 1D}{ARL1@, 1D}$$
;
I15@_D= 
$$\frac{-ARL5@, 5D + ARL1@, 1D}{ARL1@, 1D}$$
;
Plot@8I12@ D, I13@ D, I14@ D, I15@ D<, 8, 0, 3<,
PlotStyle 88RGBColor@1, 0, 0D<, 8RGBColor@0, 1, 0D<, 8RGBColor@0, 0, 1D<,
8RGBColor@0, 0, 0D<<, PlotRange 80, 0.6<D

```



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

- Υπολογισμός $ARL_{2/3}(\delta)$ και ποσοστιαίων σημείων της κατανομής του μήκους ροής $T_{2/3}(\delta)$: Πίνακας 3.6
- Γραφικές παραστάσεις αθροιστικής συνάρτησης κατανομής και συνάρτησης πιθανότητας του μήκους ροής $T_{2/3}(\delta)$: Διάγραμμα 3.18

```

<<Statistics`ContinuousDistributions`
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΛΥΣΗΣ p -- L
SolveA  $\frac{Hp - 2L Hl + 2 pL}{2 p^2 H2 p - 3L} \sim 370.4, pE$ 
p = p ê. %
88p -0.0290452<, 8p 0.0309961<, 8p 1.4994<<
8-0.0290452, 0.0309961, 1.4994<
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ UCL ΚΑΙ LCL ΓΙΑ ΤΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ Shewhart ΤΥΠΟΥ 2êk ,k=3-- L
dist = NormalDistribution@0, 1D;
Print@TwoSided_QLCL= ", Quantile@dist, 0.0309961D, " TwoSided_UCL= ",
Quantile@dist, 1-0.0309961DD
TwoSided_QLCL= -1.86635 TwoSided_UCL= 1.86635
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ARL@ D ΓΙΑ ΤΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ Shewhart ΤΥΠΟΥ 2êk ,k=3,
ΓΙΑ =0 H0.2L 3-- L
p_u@_D = 1 - CDF@dist, 1.86635 - D;
p_L@_D = CDF@dist, -1.86635 - D;
q_u@_D = CDF@dist, 1.86635 - D - CDF@dist, - D;
q_L@_D = CDF@dist, - D - CDF@dist, -1.86635 - D;
R = 88q_u@_D + q_L@_D, p_u@_D, 0, p_L@_D, 0<, 8q_L@_D, 0, q_u@_D, p_L@_D, 0<,
8q_u@_D + q_L@_D, 0, 0, p_L@_D, 0<, 8q_u@_D, p_u@_D, 0, 0, q_L@_D<,
8q_u@_D + q_L@_D, p_u@_D, 0, 0, 0<<;H --ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΜΕΤΑΠΗΛΗΞΗΣ -- L
a = 8q_u@_D + q_L@_D, p_u@_D, 0, p_L@_D, 0<;
l1 = 8l, 1, 1, 1, 1<;
ARL@_D = 1 + a.Inverse@IdentityMatrix@5D - RD.11;
Do@Print@ , " ", ARL@ DD, 8 , 0, 3, 0.2<D
0 370.397
0.2 264.786
0.4 134.924
0.6 67.8891

```

0.8 36.6352

1. 21.4383

1.2 13.5603

1.4 9.21014

1.6 6.66647

1.8 5.1035

2. 4.10268

2.2 3.44045

2.4 2.99139

2.6 2.68172

2.8 2.46609

3. 2.31547

<<Graphics`Graphics`

H --ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ
ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΡΟΗΣ $T_{2\epsilon_3} H L$ ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΟ -- L

= 2.0; H --ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΤΗΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΑΣ-- L

S@n_D = a.MatrixPower@R, n - 1D.11;

H --ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΡΟΗΣ $T_{2\epsilon_3} H L$ -- L

F@n_D = 1 - S@nD;

S@1D = a.11;

H --ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ
ΡΟΗΣ $T_{2\epsilon_3} H L$ -- L

T1 = Table@Re@F@nDD, &n, 1, 30<D;

ListPlot@T1, PlotRange 80, 1<D

H --ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΡΟΗΣ $T_{2\epsilon_3} H L$ -- L

f@n_D = a.MatrixPower@R, n - 2D.HIdentityMatrix@5D - RL.11;

f@1D = 1 - S@1D;

H --ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΡΟΗΣ $T_{2\epsilon_3} H L$ -- L

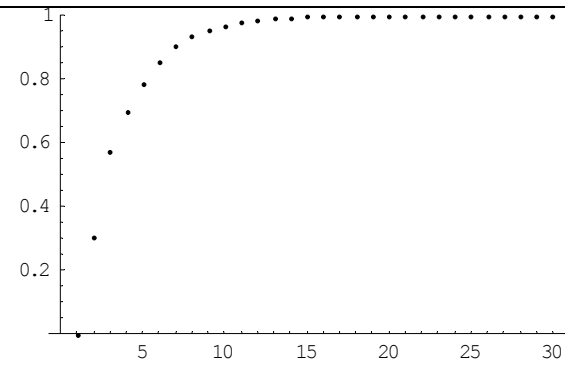
T2 = Table@Re@f@nDD, &n, 1, 20<D;

BarChart@T2, PlotRange 80, 0.35<, AxesLabel &n, pr<, PlotStyle -> PointSize@.01D,

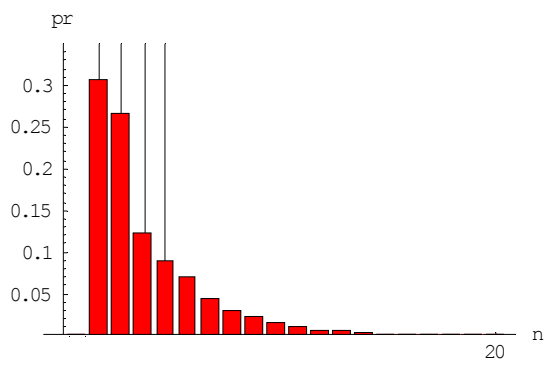
Ticks 8820<, Automatic<, GridLines 8882, Q1<, 83, M<, 84.10, ARL<, 85, Q3<<, None<D

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΣΟΕΤΙΑΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΡΟΗΣ $T_{2\epsilon_3} H L$ -- L

Do@Print@n, " ", Re@F@nDDD, &n, 1, 15<D



y Graphics y



y Graphics y

1	0.
2	0.305986
3	0.572479
4	0.695409
5	0.785767
6	0.855625
7	0.900863
8	0.931428
9	0.952978
10	0.967734
11	0.977802
12	0.984746
13	0.989522
14	0.992799
15	0.995052

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

- Γραφικές παραστάσεις βελτίωσης δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου Shewhart τύπου $2/k$: Διάγραμμα 3.14

```
<< Statistics `ContinuousDistributions`
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΛΥΣΗΣ p , ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 2 ΓΙΑ k=4 -- L
SolveA  $\frac{4 + 7x - 8x^2 + 4x^3}{2x^2 H7 - 8x + 4x^2L} \sim 370.4, xE$ 
x = xê. %
88x -0.0266874<, 8x 0.0289202<,
8x 0.999559 - 0.865962 á<, 8x 0.999559 + 0.865962 á<<
8-0.0266874, 0.0289202, 0.999559 - 0.865962 á, 0.999559 + 0.865962 á<
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΟΡΙΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ, ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 3 ΓΙΑ k=4 -- L
dist = NormalDistribution@0, 1D;
Print@"TwoSided_LCL= ", Quantile@dist, 0.0289202D, " TwoSided_UCL= ",
Quantile@dist, 1 - 0.0289202DD
TwoSided_LCL= -1.89691 TwoSided_UCL= 1.89691
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ARL2σ4 H L ΓΙΑ =0 H0.2L 3 -- L
p4_u@_D = 1 - CDF@dist, 1.89691 - D;
p4_L@_D = CDF@dist, -1.89691 - D;
q4_u@_D = CDF@dist, 1.89691 - D - CDF@dist, - D;
q4_L@_D = CDF@dist, - D - CDF@dist, -1.89691 - D;
R4 = 88q4_u@_D + q4_L@_D, p4_u@_D, 0, 0, p4_L@_D, 0, 0<, 8q4_L@_D, 0, q4_u@_D, 0, p4_L@_D, 0, 0<,
8q4_L@_D, 0, 0, q4_u@_D, p4_L@_D, 0, 0<, 8q4_u@_D + q4_L@_D, 0, 0, 0, p4_L@_D, 0, 0<,
8q4_u@_D, p4_u@_D, 0, 0, 0, q4_L@_D, 0<, 8q4_u@_D, p4_u@_D, 0, 0, 0, 0, q4_L@_D<,
8q4_u@_D + q4_L@_D, p4_u@_D, 0, 0, 0, 0, 0<<; H --ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΜΕΤΑΠΗΔΗΣΗΣ -- L
a4 = 8q4_u@_D + q4_L@_D, p4_u@_D, 0, 0, p4_L@_D, 0, 0<;
l14 = 8l, 1, 1, 1, 1, 1, 1<;
ARL4@_D = 1 + a4.Inverse@IdentityMatrix@7D - R4D.l14;
H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΛΥΣΗΣ p , ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 2 ΓΙΑ k=3 -- L
SolveA  $\frac{Hy - 2L H1 + 2yL}{2y^2 H2 y - 3L} \sim 370.4, yE$ 
y = yê. %
88y -0.0290452<, 8y 0.0309961<, 8y 1.4994<<
8-0.0290452, 0.0309961, 1.4994<
```

```

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΟΡΙΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ, ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 3 ΓΙΑ k=3 -- L
dist = NormalDistribution@0, 1D;
Print@TwoSided_LCL= " , Quantile@dist, 0.0309961D, " TwoSided_UCL= " ,
Quantile@dist, 1-0.0309961DD

TwoSided_LCL= -1.86635 TwoSided_UCL= 1.86635

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ARL2e3 H L ΓΙΑ =0 H 0.2L 3 -- L
p3u@_D = 1 - CDF@dist, 1.86635 - D;
p3L@_D = CDF@dist, -1.86635 - D;
q3u@_D = CDF@dist, 1.86635 - D - CDF@dist, - D;
q3L@_D = CDF@dist, - D - CDF@dist, -1.86635 - D;
R3 = 8q3u@_D + q3L@_D, p3u@_D, 0, p3L@_D, 0<, 8q3L@_D, 0, q3u@_D, p3L@_D, 0<,
8q3u@_D + q3L@_D, 0, 0, p3L@_D, 0<, 8q3u@_D, p3u@_D, 0, 0, q3L@_D<,
8q3u@_D + q3L@_D, p3u@_D, 0, 0, 0<<; H --ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΜΕΤΑΠΗΛΗΣΗΣ -- L
a3 = 8q3u@_D + q3L@_D, p3u@_D, 0, p3L@_D, 0<;
l13 = 8l, 1, 1, 1, 1<;
ARL3@_D = 1 + a3.Inverse@IdentityMatrix@5D - R3D.l13;

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ARL1,1 H L ΓΙΑ =0 H 0.2L 3 -- L
ARL1@_D =  $\frac{1}{1 - CDF@dist, 3 - D + CDF@dist, -3 - D}$ ;

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΛΥΣΗΣ p, ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 2 ΓΙΑ k=5 -- L
SolveA  $\frac{8 + 15z - 22z^2 + 20z^3 - 8z^4}{30z^2 - 44z^3 + 40z^4 - 16z^5} \sim 370.4, zE$ 
z = z ê. %

8z -0.0256631<, 8z 0.0280702<,
8z 0.499622 - 0.999947 á<, 8z 0.499622 + 0.999947 á<, 8z 1.4997<<

8-0.0256631, 0.0280702, 0.499622 - 0.999947 á, 0.499622 + 0.999947 á, 1.4997<

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΟΡΙΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ, ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΗΜΑ 3 ΓΙΑ k=5 -- L
dist = NormalDistribution@0, 1D;
Print@TwoSided_LCL= " , Quantile@dist, 0.0280702D, " TwoSided_UCL= " ,
Quantile@dist, 1-0.0280702DD

TwoSided_LCL= -1.90994 TwoSided_UCL= 1.90994

```

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ARL₂₆₅ Η Λ ΓΙΑ =0 Η 0.2 L 3 -- L

p_{5 u@} _D = 1 - CDF@dist, 1.90994 - D;
 p_{5 l@} _D = CDF@dist, -1.90994 - D;
 q_{5 u@} _D = CDF@dist, 1.90994 - D - CDF@dist, - D;
 q_{5 l@} _D = CDF@dist, - D - CDF@dist, -1.90994 - D;
 R5 = 8

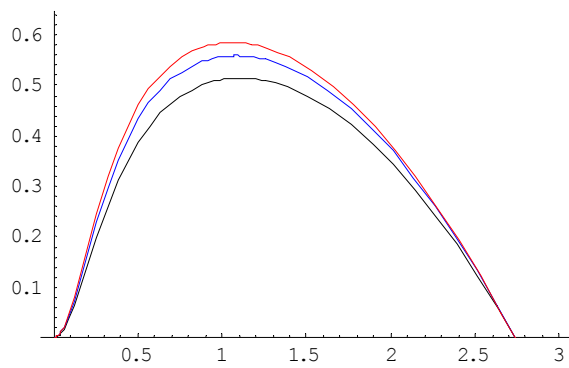
8q_{5 u@} D + q_{5 l@} D, p_{5 u@} D, 0, 0, 0, p_{5 l@} D, 0, 0, 0<,
 8q_{5 l@} D, 0, q_{5 u@} D, 0, 0, p_{5 l@} D, 0, 0, 0<,
 8q_{5 l@} D, 0, 0, q_{5 u@} D, 0, p_{5 l@} D, 0, 0, 0<,
 8q_{5 l@} D, 0, 0, 0, q_{5 u@} D, p_{5 l@} D, 0, 0, 0<,
 8q_{5 u@} D + q_{5 l@} D, 0, 0, 0, 0, p_{5 l@} D, 0, 0, 0<,
 8q_{5 u@} D, p_{5 u@} D, 0, 0, 0, 0, q_{5 l@} D, 0, 0<,
 8q_{5 u@} D, p_{5 u@} D, 0, 0, 0, 0, 0, q_{5 l@} D, 0<,
 8q_{5 u@} D, p_{5 u@} D, 0, 0, 0, 0, 0, 0, q_{5 l@} D<,
 8q_{5 u@} D + q_{5 l@} D, p_{5 u@} D, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0<<;
 a5 = 8q_{5 u@} D + q_{5 l@} D, p_{5 u@} D, 0, 0, 0, p_{5 l@} D, 0, 0, 0<;
 l15 = 8l, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1<;
 ARL5@ _D = 1 + a5.Inverse@IdentityMatrix@9D - R5D.l15;

H --ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ I_{1,3} Η Λ, I_{1,4} ΚΑΙ I_{1,5} Η Λ -- L

$I_{1,3@}$ _D = $\frac{ARL1@ D - ARL3@ D}{ARL1@ D}$;
 $I_{1,4@}$ _D = $\frac{ARL1@ D - ARL4@ D}{ARL1@ D}$;
 $I_{1,5@}$ _D = $\frac{ARL1@ D - ARL5@ D}{ARL1@ D}$;

H --ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΒΕΛΤΙΩΣΗΣ -- L

Plot@8I_{1,3@} D, I_{1,4@} D, I_{1,5@} D<, 8, 0, 3<,
 PlotStyle RGBColor@0, 0, 0D, RGBColor@0, 0, 1D, RGBColor@1, 0, 0D<,
 PlotRange 80, 0.65<D



y Graphics y

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

- Αντζουλάκος, Δ. (2003). *Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας*, Σημειώσεις παραδόσεων, Πανεπιστήμιο Πειραιά, Πειραιάς.
- Δαμιανού, Χ. (1996). *Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας και Αξιοπιστία*, Σημειώσεις παραδόσεων, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα.
- Καφρές, Δ. Γ. (1996). *Στατιστικός Ποιοτικός Έλεγχος*, Σημειώσεις παραδόσεων, Πανεπιστήμιο Πειραιά, Πειραιάς.

Ξένη

- Aki, S. (1985). Discrete distributions of order k on a binary sequence, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **37**, 205-223.
- Aki, S., Balakrishnan, N. and Mohanty, S. G. (1996). Sooner and later waiting time problems for success and failure runs in higher order Markov dependent trials, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **48**, 773-787.
- Aki, S. and Hirano, K. (1993). Discrete distributions related to succession events in a two-state Markov chain, *In Statistical Science and Data Analysis* (Eds., K.Matusita, M.L. Puri and T.Hayakawa), pp.467-474, VSP International Science Publishers, Zeist.
- Aki, S. and Hirano, K. (1999). Sooner and later waiting time problems for runs in Markov dependent bivariate trials, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **51**, 17-29.
- Aki, S., Kuboki H. and Hirano, K. (1984). On discrete distributions of order k , *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **36**, 431-440.
- Antzoulakos, D. L. (1999). On waiting time problems associated with runs in Markov dependent trials, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **51**, 323-330.
- Antzoulakos, D. L. and Philippou, A. N. (1996). Derivation of the probability distribution functions for succession quota random variables, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **48**, 551-561.
- Balakrishnan N. and Koutras M. V. (2002). *Runs and Scans with Applications*, New York: John Wiley.
- Balasubramanian, K., Viveros, R. and Balakrishnan, N. (1993). Sooner and later waiting time problems for Markovian Bernoulli trials, *Statistics & Probability Letters*, **18**, 153-161.
- Champ, C. W., Woodall, W. H. (1987). Exact results for Shewhart Control Charts with supplementary runs rules, *Technometrics*, **29**, 393-399.
- Ebneshahrashoob, M. and Sobel, M. (1990). Sooner and later waiting time problems for Bernoulli trials: frequency and run quotas, *Statistics & Probability Letters*, **9**, 5-11.
- Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. I*, Third edition, John Wiley & Sons, New York.

- Klein M. (2000). Two alternatives to the Shewhart \bar{X} $c > \frac{k}{2}$ $c > k$ $g(p) = c$ $g(p) = (1-p^k)/(1-p)p^k$ $g_r(p)$ ($r = 3,4,5$) Control Chart, *Journal of Quality Technology*, **32**, 427-431.
- Koutras, M. V. (1997a). Waiting time distributions associated with runs of fixed length in two-state Markov chains, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **49**, 123-139.
- Koutras, M. V. (1997b). Waiting times and number of appearances of events in a sequence of discrete random variables, *In Advances in Combinatorial Methods and Applications to Probability and Statistics* (Eds., N. Balakrishnan), pp. 363-384, Birkhauser, Boston.
- Koutras M. V. and Alexandrou V. A. (1997). Sooner waiting time problems in a sequence of trinary trials, *Journal of Applied Probability*, **34**, 593-609.
- Koutras M. V., Antzoulakos D. L. and Bersimis S. (2004). Improving the performance of the Chi-Square Control Chart via Runs Rules, Submitted.
- Ling, K. D. and Low, T. (1993). On the soonest and latest waiting time distributions: succession quotas, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **22**, 2207-2221.
- Montgomery, D. C. (2001). *Introduction to Statistical Quality Control*, New York: John Wiley.
- Museli, M. (1996). Simple expressions for success run distributions in Bernoulli trials, *Statistics & Probability Letters*, **31**, 121-128.
- Philippou, A. N., Georgiou, C. and Philippou, G. N. (1983). A generalized geometric distribution and some of its properties, *Statistics & Probability Letters*, **1**, 171-175.
- Philippou, A. N. and Makri, F. S. (1985). Longest success runs and Fibonacci-type polynomials, *The Fibonacci Quarterly*, **23**, 338-346.
- Philippou, A. N. and Makri, F. S. (1986). Success runs and longest runs, *Statistics and Probability Letters*, **4**, 211-215.
- Ryan, T. P. (2000). *Statistical Methods for Quality Improvement* (2nd ed.), New York: John Wiley.
- Shmueli G. , Cohen A. (2003). Run-Length Distribution for Control Charts with Runs and Scans Rules, *Communication in Statistics, Part A – Theory and Methods*, **32**, 475-495.
- Uppuluri, V. R. R. and Patil, S. A. (1983). Waiting times and generalized Fibonacci sequences, *The Fibonacci Quarterly*, **21**, 242-249.
- Viveros, R. and Balakrishnan, N. (1993). Statistical inference from start-up demonstration test data, *Journal of Quality Technology*, **22**, 119-130.



