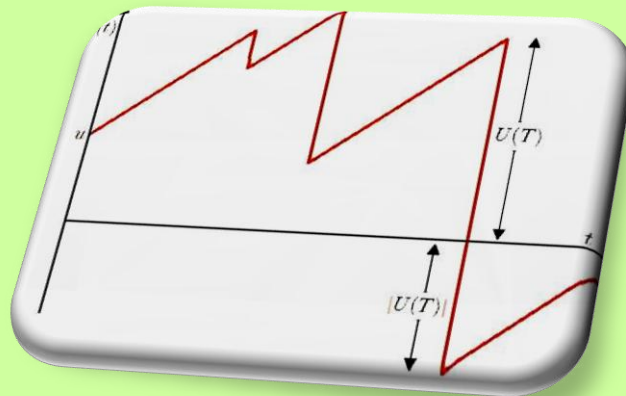


Π.Μ.Σ Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου  
Πανεπιστήμιο Πειραιώς



## Χρονική Αξία της Χρεοκοπίας για Σταθερό Επιτόκιο

Φοιτητής: Νίκας Πασχάλης

Τριμελής Επιτροπή:

Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος (Επιβλέπων)

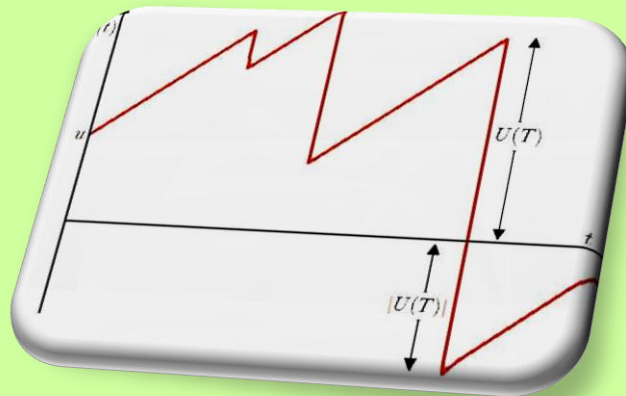
Πανοπούλου Αικατερίνη

Βρόντος Σπυρίδων

Μεταπτυχιακή Διατριβή στη Θεωρία Κινδύνου

Νοέμβριος 2009

M.Sc. in Actuarial Science and Risk Management  
University of Piraeus



## The Time Value of Ruin with Constant Interest

Author: Nikas Paschalis

### Committee:

Chadjikonstantinidis Stathis (Supervisor)

Panopoulou Ekaterini

Vrodos Spyridon

M.Sc. Thesis in Risk Theory

November 2009



## Περίληψη

Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος αποτελεί ένα από τα πιο δημοφιλή αντικείμενα μελέτης της Θεωρίας Κινδύνου. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας κινδύνου γίνεται συχνά η υπόθεση ότι το πλεόνασμα δεν επενδύεται. Ωστόσο, όπως γνωρίζουμε, ένα μεγάλο μέρος των εσόδων μίας ασφαλιστικής επιχείρησης προέρχεται από την επένδυση του πλεονάσματός της.

Έτσι, σε αυτή την εργασία θα μελετήσουμε το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου, όταν το πλεόνασμα επενδύεται με σταθερό επιτόκιο. Χρησιμοποιώντας την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu, θα εξετάσουμε μέτρα κινδύνου όπως ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, η πιθανότητα χρεοκοπίας, η περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, και η περιθώρια συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Τέλος, θα μελετήσουμε το κλασικό μοντέλο της με επιτόκιο υπό την παρουσία σταθερού μερίσματος.

## Abstract

The surplus process has traditionally been one of the most popular research aspects of Risk Theory. In the classic risk model it is frequently assumed that there are no surplus investment returns. However, a large source of income for an insurance company stems from the investment of its surplus. In this thesis we will study the classic risk model when the surplus is invested at a constant rate of interest. Using the Gerger-Shiu discounted penalty function we will study risk measures such as the Laplace transform of the time of ruin, the probability of ultimate ruin, the distribution of the surplus prior to ruin and the distribution of the deficit at ruin. Finally we will examine the classic risk model with constant interest, when a constant dividend barrier strategy is enforced.

## Ευχαριστίες

Έχοντας ολοκληρώσει τη μεταπτυχιακή μου διατριβή, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου κο. Χατζηκωνσταντινίδη που μου έδωσε τη δυνατότητα να ασχοληθώ με ένα τόσο πολυσύνθετο και ενδιαφέρον θέμα. Οι προτάσεις και οι ιδέες του διαμόρφωσαν το μεγαλύτερο κομμάτι αυτής της εργασίας. Τελειώνοντας τις μεταπτυχιακές μου σπουδές αφιερώνω την εργασία μου στους φίλους μου, τους καθηγητές μου και την οικογένειά μου.

## **Acknowledgements**

Having completed my master thesis, i would like to thank my supervisor mr. Chadjikonstantinidis for giving me the opportunity to work on such a multiplex and interesting subject. His suggestions and ideas formed most of this work. As my Master studies come to an end, i dedicate my thesis to my friends, my professors and my family.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>2</b>
1.1	Το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου	5
1.2	Ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra	16
1.3	Martingales	19
1.4	Οι οικογένειες κατανομών NBUC και NWUC	22
<b>2</b>	<b>Η συνάρτηση των Gerber-Shiu</b>	<b>25</b>
2.1	Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο	25
2.2	Ορισμός της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής και ειδικές περιπτώσεις	27
2.3	Ολοκληρωτική εξίσωση για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$	29
2.4	Η ακριβής λύση για $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$	33
<b>3</b>	<b>Υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και της πιθανότητας χρεοκοπίας</b>	<b>39</b>
3.1	Η ολοκληρωτική εξίσωση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και η λύση της	40
3.2	Η πιθανότητα χρεοκοπίας	42
3.3	Αναλυτικά αποτελέσματα για εκθετικά μεγέθη ζημιών	45
3.4	Αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων Volterra	50
<b>4</b>	<b>Φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας</b>	<b>56</b>
4.1	Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος τις χρονικές στιγμές εμφάνισης των ζημιογόνων ενδεχομένων	56
4.2	Άνω φράγματα μέσω martingales	57
4.3	Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές	63
4.4	Χρεοκοπία με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο	70
4.5	Αριθμητικά αποτελέσματα	76



<b>5 Κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας</b>	<b>80</b>
5.1 Η προεξοφλημένη από κοινού κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας . . . . .	81
5.2 Περιθώρια κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία . . . . .	86
5.3 Περιθώρια κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας . . . . .	91
5.4 Αριθμητικά αποτελέσματα . . . . .	96
<b>6 Φράγματα για την κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας</b>	<b>101</b>
6.1 Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές . . . . .	101
6.2 Φράγματα για μηδενικό αρχικό κεφάλαιο . . . . .	107
<b>7 Το κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο και σταθερό μέρισμα και η συνάρτηση των Gerber-Shiu</b>	<b>114</b>
7.1 Ολοκληροδιαφορική εξίσωση για την $m_b(u)$ . . . . .	115
7.2 Η λύση για $m_b(u)$ . . . . .	118
7.3 Αναλυτικά αποτελέσματα για εκθετικά μεγέθη ζημιών . . . . .	120
<b>A' Εντολές στο Mathematica και το Maple</b>	<b>126</b>
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>132</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Η Θεωρία Συλλογικών Κινδύνων ξεκίνησε το 1903 με τη διδακτορική διατριβή του Σουηδού αναλογιστή Filip Lundberg. Έκτοτε η ανάπτυξή της ήταν ραγδαία και σήμερα αποτελεί έναν επιστημονικό κλάδο γεμάτο χρήσιμες ιδέες και προηγμένες μαθηματικές τεχνικές. Η εξέλιξη των τιμών των συνολικών αποζημιώσεων ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου κατά τη διάρκεια του χρόνου αποτελούσε ανέκαθεν ένα από τα βασικά αντικείμενα μελέτης της Θεωρίας Κινδύνου. Τα αποτελέσματα τέτοιων μελετών αξιολογούνται από τις ασφαλιστικές εταιρείες που διαθέτουν οργανωμένα τμήματα αναγνώρισης, πρόβλεψης και ποσοτικοποίησης των ασφαλιστικών κινδύνων που έχουν αναλάβει εξαιτίας των διαφόρων δραστηριοτήτων τους. Έτσι, κάθε ασφαλιστική εταιρεία είναι σε θέση να υπολογίσει τα κεφάλαια που αναμένει να της χρειαστούν ώστε να μπορέσει να ανταπεξέλθει στις υποχρεώσεις της (που περιλαμβάνουν κυρίως την καταβολή αποζημιώσεων προς τους ασφαλισμένους). Αυτά είναι τα αναλογιστικά αναμενόμενα κεφάλαια που θα πρέπει να διαθέτει η εταιρεία. Ωστόσο κάθε εταιρεία πρέπει να έχει και κάποια πρόσθετα κεφάλαια (δηλαδή μία θετική διαφορά μεταξύ Ενεργητικού και Παθητικού) για να αντιμετωπίσει δυσμενείς αποκλίσεις από τα αναλογιστικά αναμενόμενα. Τα επιπρόσθετα αυτά κεφάλαια αποτελούν το πλεόνασμα (surplus) κάθε ασφαλιστικής επιχείρησης.

Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου γίνεται συχνά η υπόθεση ότι δεν υπάρχουν έσοδα από επενδύσεις. Ωστόσο, όπως γνωρίζουμε, ένα μεγάλο μέρος των εσόδων μιας ασφαλιστικής επιχείρησης προέρχεται από την επένδυση του πλεονάσματός της. Τα τελευταία χρόνια λοιπόν έχει παρουσιαστεί ένα μεγάλο ενδιαφέρον από πλευράς ερευνητών για τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος, όταν αυτό επενδύεται. Οι Sundt-Teugels (1995,1997) μελέτησαν το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου όταν το πλεόνασμα επενδύεται με σταθερή ένταση ανατοκισμού. Μεταξύ άλλων, βρήκαν εξισώσεις και φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Μεγάλο ενδιαφέρον όμως παρουσιάζουν και μεταγενέστερες μελέτες του ίδιου μοντέλου μέσω της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής (expected discounted penalty function) που εισήγαγαν για πρώτη φορά οι Gerber-Shiu (1998). Μεταξύ αυτών οι Cai-Dickson (2002), Liu-Mao (2006) κ.ά.

Σε αυτή την εργασία λοιπόν θα προσπαθήσουμε να συνθέσουμε και να παρουσιάσουμε όσο το δυνατόν περισσότερα αποτελέσματα πάνω στο κλασικό μοντέλο με σταθερό επιτόκιο. Συγκεκριμένα, από τη σχετική βιβλιογραφία, θα αντλήσουμε πληροφορίες για :

- την συνάρτηση των Gerber-Shiu, (Κεφάλαιο 2)
- τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και την πιθανότητα χρεοκοπίας (Κεφάλαια 3 και 4),
- την κατανομή του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος μετά την χρεοκοπία (Κεφάλαια 5 και 6), καθώς και
- το κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο και σταθερό μέρισμα (Κεφάλαιο 7).

Ωστόσο στα πλαίσια του μοντέλου που μελετάμε, η εύρεση αναλυτικών εξισώσεων για τα μέτρα κινδύνου που μας ενδιαφέρουν είναι δύσκολη υπόθεση. Επομένως θα αφιερώσουμε ένα μεγάλο μέρος αυτής της εργασίας στην εύρεση φραγμάτων για τις ποσότητες που μας ενδιαφέρουν. Τέλος, θα παρουσιάσουμε αρκετές ειδικές περιπτώσεις καθώς και αριθμητικές εφαρμογές βασισμένες στη θεωρία που θα αναλύσουμε.

Η σημαντικότερη ποσότητα που θα μας απασχολήσει σε αυτή την εργασία είναι η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος που περιγράφει την εξέλιξη των τιμών του πλεονάσματος στην πορεία του χρόνου. Σε κάποια τυχαία χρονική στιγμή το ύψος του πλεονάσματος εξαρτάται από τρεις παράγοντες:

1. το αρχικό κεφάλαιο,
2. τα ασφάλιστρα που έχουν εισπραχθεί μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή και
3. τις αποζημιώσεις που έχουν καταβληθεί μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή.

Για παράδειγμα σε μία τυχαία χρονική στιγμή  $t$  (όπου  $t > 0$ ) θα ισχύει

$$\left( \begin{array}{l} \text{Πλεόνασμα} \\ \text{τη χρονική} \\ \text{στιγμή } t \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{Αρχικό} \\ \text{κεφάλαιο} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{Ασφάλιστρα που} \\ \text{εισπράττονται} \\ \text{μέχρι το χρόνο } t \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{Αποζημιώσεις που} \\ \text{καταβάλλονται} \\ \text{μέχρι το χρόνο } t \end{array} \right)$$

Σε αυτό το σημείο θα αναφερθούμε εν συντομία σε κάθε έναν από τους προσδιοριστικούς παράγοντες της στοχαστικής διαδικασίας του πλεονάσματος.

### Το αρχικό κεφάλαιο

Κατά την έναρξη των εργασιών της, κάθε ασφαλιστική εταιρεία υποχρεούται από το νόμο να διαθέτει κάποιο αρχικό κεφάλαιο. Αυτό το αρχικό κεφάλαιο αποτελεί και το πλεόνασμα της εταιρείας κατά τη χρονική στιγμή  $t = 0$ . Αν λοιπόν συμβολίσουμε με  $u$  το αρχικό κεφάλαιο, τότε θα ισχύει  $U(0) = u$ .

### Η στοχαστική διαδικασία εισπραξης των ασφαλίσεων

Ως αντάλλαγμα για τους κινδύνους που αναλαμβάνουν, οι ασφαλιστικές εταιρείες εισπράτουν ασφάλιστρα από τους ασφαλισμένους. Η στοχαστική διαδικασία εισπραξης των ασφαλίσεων μας

πληροφορεί για το ύψος των ασφαλίσεων στη διάρκεια του χρόνου. Αν την συμβολίσουμε με  $P(t)$  για μία τυχαία χρονική στιγμή  $t > 0$ , τότε

$P(t)$  είναι τα ασφάλιστρα που εισπράττει η εταιρεία στο διάστημα  $[0, t]$ .

Η μοντελοποίηση της  $P(t)$  δεν είναι εύκολη καθώς η καταβολή των ασφαλίσεων εξαρτάται από πολλούς παράγοντες (θνησιμότητα, νοσηρότητα, κ.ά.). Παρ' όλα αυτά όμως συνηθίζεται η  $P(t)$  να λαμβάνεται ως ντετερμινιστική συνάρτηση του χρόνου. Ο λόγος για τον οποίο γίνεται αυτή η απλούστευση είναι η αποφυγή των περίπλοκων μαθηματικών υπολογισμών που προκύπτουν αν θεωρήσουμε την  $P(t)$  ως στοχαστική διαδικασία. Εναλλακτικά, μπορούμε να χωρίσουμε την  $P(t)$  σε δύο μέρη, για παράδειγμα

$$P(t) = p(t) + H(t),$$

όπου

$p(t)$  είναι μία ντετερμινιστική συνάρτηση, και

$H(t)$  είναι μία στοχαστική διαδικασία που σχετίζεται με τις διακυμάνσεις στο ρυθμό εισπραξης των ασφαλίσεων.

### Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων

Ως αντάλλαγμα για τα ασφάλιστρα που εισπράττει μία ασφαλιστική εταιρεία, έχει την υποχρέωση να καταβάλλει αποζημιώσεις στους ασφαλισμένους της κατά την επέλευση των ζημιών που καλύπτονται από τα ασφαλιστήρια συμβόλαιά τους. Κάθε ασφαλιστική εταιρεία λοιπόν θα πρέπει να έχει στην κατοχή της όσο το δυνατόν περισσότερα στοιχεία αναφορικά με το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων που ενδέχεται να καταβάλλει στους ασφαλισμένους της. Για το λόγο αυτό οι ασφαλιστικές εταιρείες μοντελοποιούν το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων, αποκτώντας έτσι μία πληρέστερη εικόνα για την ενδεχόμενη εξέλιξή τους. Οι συνολικές αποζημιώσεις εξαρτώνται άμεσα από:

- το χρονικό διάστημα αναφοράς,
- το πλήθος των ζημιογόνων ενδεχομένων που επέρχονται στο συγκεκριμένο διάστημα, και
- το μέγεθος των επιμέρους ζημιών που προκαλούνται.

Θα συμβολίσουμε  $S(t)$  τη στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται έως το χρόνο  $t$ . Για να συνθέσουμε τη στοχαστική διαδικασία  $S(t)$ , ορίζουμε τα εξής:

$\{W_n, n \geq 1\}$  μια ακολουθία τ.μ. που εκφράζει τους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των ζημιογόνων ενδεχομένων,

$T_n$  τον χρόνο επέλευσης του  $n$ -οστού ζημιογόνου ενδεχομένου.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, θα ισχύει:

$$T_n = \sum_{i=1}^n W_i. \quad (1.1)$$

Επίσης αν θεωρήσουμε ότι

$N(t) = \sup \{n : T_n < t\}$  είναι η στοχαστική διαδικασία του πλήθους των ζημιογόνων ενδεχομένων

που εμφανίζονται στο διάστημα  $[0, t]$ , και

$X_n$  είναι η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το μέγεθος της ζημιάς που προκαλείται από την επέλευση του  $n$ -οστού ζημιογόνου ενδεχομένου,

τότε το μέγεθος των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται έως το χρόνο  $t$  θα είναι

$$S(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)}. \quad (1.2)$$

Οι τυχαίες μεταβλητές  $\{X_n, n \geq 1\}$  είναι γνωστές και ως *Μεγέθη Ατομικών Ζημιών*. Για το υπόλοιπο αυτής της εργασίας θα θεωρήσουμε ότι οι  $\{W_n, n \geq 1\}$  και  $\{X_n, n \geq 1\}$  είναι δύο ανεξάρτητες ακολουθίες αποτελούμενες από ανεξάρτητες, ισόνομες και θετικά ορισμένες τυχαίες μεταβλητές.

### Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος

Μία ασφαλιστική επιχείρηση μπορεί να υπολογίσει το πλεόνασμά της σε μία δεδομένη χρονική στιγμή αφαιρώντας από τα Έσοδά της (αρχικό κεφάλαιο, ασφάλιστρα), τα αντίστοιχα Έξοδα (αποζημιώσεις). Έτσι αν συμβολίσουμε ως  $U(t)$  το πλεόνασμα κατά την χρονική στιγμή  $t$ , αυτό θα είναι

$$U(t) = u + P(t) - S(t) \quad (1.3)$$

Σημειώνουμε ότι όλοι οι συμβολισμοί που έχουμε δώσει έως τώρα ισχύουν και για το υπόλοιπο αυτή της εργασίας, εκτός από τον συμβολισμό για τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος, τον οποίο θα διαφοροποιήσουμε για τις ανάγκες του μοντέλου με επιτόκιο.

## 1.1 Το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου

Το πιο γνωστό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου είναι το κλασσικό μοντέλο. Το μοντέλο αυτό γνώρισε μεγάλη απήχηση γιατί μας οδηγεί σε απλούστερους μαθηματικούς υπολογισμούς σε σχέση με άλλα μοντέλα, ενώ τα αποτελέσματα που μπορεί κανείς να πάρει αν το υιοθετήσει είναι πολύ περισσότερα. Θα παρουσιάσουμε λοιπόν ορισμένα από τα κυριότερα χαρακτηριστικά του κλασσικού μοντέλου της Θεωρίας Κινδύνου που θα αποτελέσει τη βάση για να κατανοήσουμε και να αναπτύξουμε το μοντέλο με σταθερό επιτόκιο. Καθώς όμως η εκ βάθους ανάλυση του κλασσικού μοντέλου ξεφεύγει από τους στόχους αυτής της εργασίας, θα αρκεστούμε στη μελέτη εκείνων των παραμέτρων που θα μας χρειαστούν και στη συνέχεια για το μοντέλο με το σταθερό επιτόκιο.

### Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος

Στη μελέτη μίας στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος παίζει σημαντικό ρόλο ο τρόπος άφιξης των ζημιογόνων ενδεχομένων. Συγκεκριμένα στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου θεωρούμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των ζημιογόνων ενδεχομένων είναι εκθετικά κατανομημένοι, δηλαδή οι τυχαίες μεταβλητές  $\{W_n, n \geq 1\}$  έχουν κοινή εκθετική κατανομή

$$\Pr(W_1 \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0$$

Η στοχαστική διαδικασία  $N(t)$  στο κλασσικό μοντέλο είναι μία στοχαστική διαδικασία Poisson. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα να εμφανιστεί ένα ενδεχόμενο σε ένα διάστημα είναι ανάλογη του μήκους αυτού του διαστήματος. Επομένως  $N(t) \sim P(\lambda t)$  και

$$\Pr [N(t) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Επίσης θεωρούμε ότι οι τ.μ.  $X_1, X_2, \dots$  και  $N(t)$  είναι ανεξάρτητες, ενώ οι τ.μ.  $X_n, n = 1, 2, \dots$  είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ισόνομες, με από κοινού συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx, \quad \text{όπου } f(x) = \Pr(X = x)$$

και συνάρτηση δεξιάς ουράς

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \int_x^\infty f(x)dx.$$

Θα συμβολίσουμε με  $\mu$  το αναμενόμενο μέγεθος ζημιάς, δηλαδή

$$\mu = E(X) = \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty \bar{F}(x)dx,$$

ενώ  $F_e(x)$  θα είναι ο συμβολισμός μας για την κατανομή ισορροπίας της τ.μ.  $X$ , ήτοι

$$F_e(x) = 1 - \bar{F}_e(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(x)dx, \quad f_e(x) = \frac{\bar{F}(x)}{\mu}$$

Φυσικά και εδώ θα ισχύει  $S(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)}$ .

Αυτό που μας μένει για να ορίσουμε πλήρως τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος είναι η στοχαστική διαδικασία των ασφαλίσεων  $P(t)$ . Στο κλασσικό μοντέλο θεωρούμε ότι η  $P(t)$  είναι ντετερμινιστική (δηλαδή δεν έχει κάποιο βαθμό τυχαιότητας). Συγκεκριμένα αν θεωρήσουμε ότι ο ρυθμός εισπραξης των ασφαλίσεων είναι σταθερός και ίσος με  $c$ , τότε τα ασφάλιστρα που εισπράττονται στο διάστημα  $[0, t]$  είναι:  $P(t) = ct$ . Για να υπολογίσουμε το  $c$ , απαιτούμε να ισχύει η συνθήκη  $ct \geq E[S(t)]$ , δηλαδή τα ασφάλιστρα που εισπράττουμε στο  $[0, t]$  να επαρκούν για να καλύψουμε τις αναμενόμενες συνολικές αποζημιώσεις.

Όμως στο κλασσικό μοντέλο  $N(t) \sim P(\lambda t)$ , επομένως θα ισχύει  $E[N(t)] = \lambda t$  και

$$E[S(t)] = E[N(t)]E[X] = \lambda tE[X].$$

Θέλουμε λοιπόν να ισχύει

$$ct \geq \lambda tE[X] \Rightarrow c \geq \lambda E[X].$$

Έτσι, ορίζουμε μία παράμετρο  $\theta > 0$  τέτοια ώστε

$$c = (1 + \theta)\lambda E[X] \tag{1.4}$$

Η θετική παράμετρος  $\theta$  ονομάζεται *περιθώριο ασφάλειας*. Από την εξίσωση (1.4) διαπιστώνουμε ότι στο κλασικό μοντέλο το  $c$  υπακούει στο νόμο της επιβάρυνσης του ασφαλιστρού.

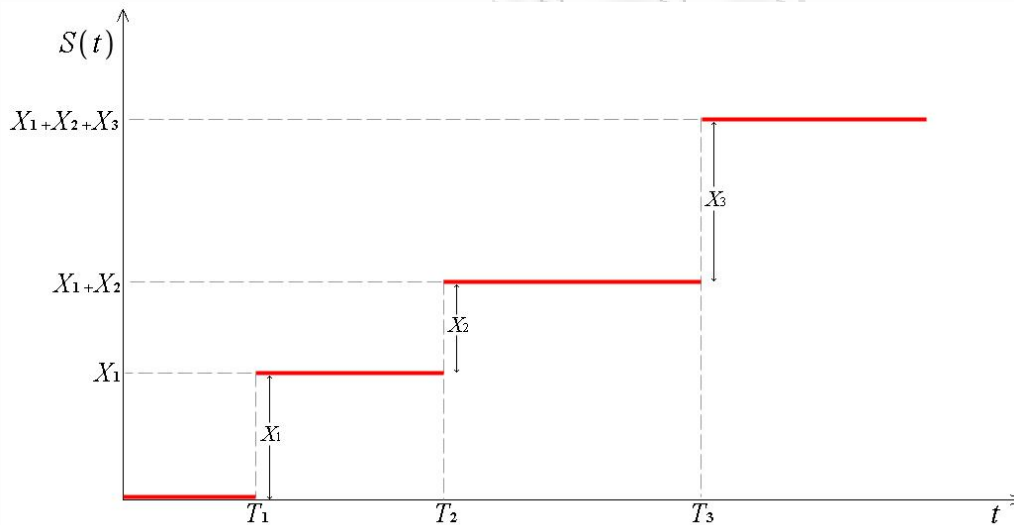
Έτσι αν θεωρήσουμε ότι το αρχικό κεφάλαιο (δηλαδή το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή  $t = 0$ ) είναι  $U(0) = u$ , τότε το πλεόνασμα σε μία τυχαία χρονική στιγμή  $t$  θα είναι  $U(t) = U(0) + P(t) - S(t)$ , δηλαδή

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0, \quad u > 0 \quad (1.5)$$

ή εναλλακτικά για  $t \geq 0$ ,  $\theta > 0$ , και  $u > 0$ , ισχύει

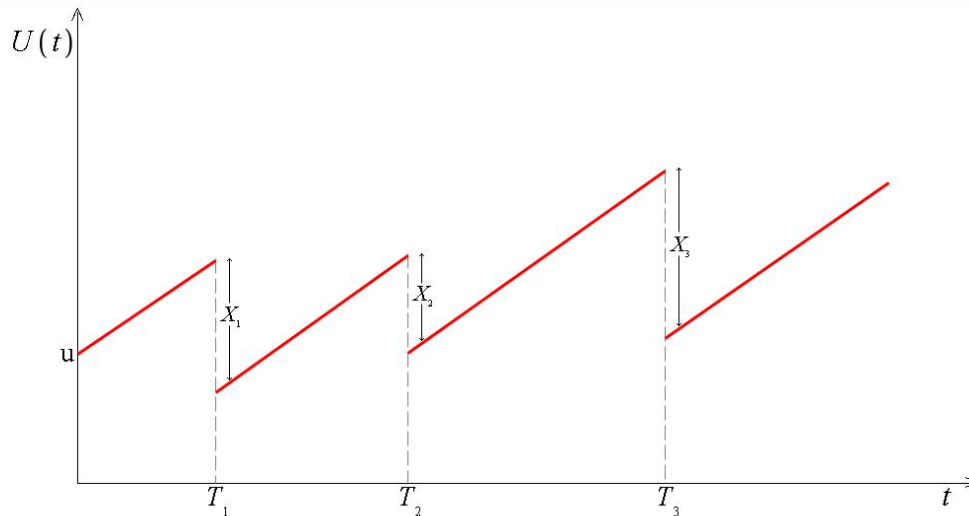
$$U(t) = u + (1 + \theta)\lambda E(X)t - S(t). \quad (1.6)$$

Για να κατανοήσουμε καλύτερα όλα τα παραπάνω ας δούμε το Σχήμα 1.1 που απεικονίζει τη δειγματοσυνάρτηση μιας στοχαστικής διαδικασίας συνολικών αποζημιώσεων που περιγράφεται από την (1.2)



Σχήμα 1.1: Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων

Όπως βλέπουμε και στο παραπάνω σχήμα, μέχρι την επέλευση του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου οι συνολικές αποζημιώσεις είναι μηδενικές. Στη συνέχεια η γραφική παράσταση εμφανίζει «άλματα» ύψους ίσου με το μέγεθος ατομικής ζημιάς, ενώ παραμένει σταθερή όταν δεν επέρχονται κίνδυνοι. Όμως οι συνολικές αποζημιώσεις συνδέονται με το πλεόνασμα μέσω της σχέσης (1.18). Επομένως οποιαδήποτε μεταβολή του ύψους των αποζημιώσεων, επιφέρει και μία μεταβολή στη τιμή του πλεονάσματος. Στο Σχήμα 1.2 βλέπουμε την γραφική παράσταση της δειγματοσυνάρτησης μιας στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος.



Σχήμα 1.2: Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος

Παρατηρούμε ότι η τιμή του πλεονάσματος εμφανίζει «άλματα προς τα κάτω», το ύψος των οποίων είναι ίσο με αυτό των αποζημιώσεων του Σχήματος 1.1.

## Η πιθανότητα χρεοκοπίας

Μία ποσότητα που συνδέεται άμεσα με τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας. Η πιθανότητα χρεοκοπίας αποτελούσε ανέκαθεν ένα από τα πιο δημοφιλή αντικείμενα έρευνας της Θεωρίας Κινδύνου και θα μας απασχολήσει αρκετά σε αυτή την εργασία. Η χρεοκοπία επέρχεται όταν το πλεόνασμα πάρει για πρώτη φορά αρνητική τιμή. Η αντίστοιχη χρονική στιγμή κατά την οποία το πλεόνασμα γίνεται για πρώτη φορά αρνητικό είναι ο χρόνος χρεοκοπίας. Αν λοιπόν  $T$  είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, τότε

$$T = \inf \{t : U(t) < 0\} \quad (1.7)$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας αποτελεί ένα από τα βασικότερα κριτήρια οικονομικής σταθερότητας μίας επιχείρησης και αν την συμβολίσουμε ως  $\psi(u)$ , θα ισχύει

$$\psi(u) = \Pr(T < \infty | U(0) = u) = \Pr(U(T) < 0 | U(0) = u). \quad (1.8)$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι μία συνάρτηση του αρχικού κεφαλαίου, γι' αυτό συχνά αναφερόμαστε στην (1.8) ως πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό κεφάλαιο  $u$ .

Μπορούμε να ορίσουμε και την πιθανότητα μη χρεοκοπίας  $\bar{\psi}(u)$  ως την συμπληρωματική της  $\psi(u)$ , δηλαδή

$$\bar{\psi}(u) = 1 - \psi(u). \quad (1.9)$$



Στα πλαίσια του κλασσικού μοντέλου μπορεί κανείς να βρεί αναλυτικούς τύπους υπολογισμού τόσο για την  $\psi(u)$  όσο και για την  $\bar{\psi}(u)$ . Ωστόσο εμάς μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασσικό μοντέλο για επιτόκιο, οπότε προς το παρόν θα αρκεστούμε στους παραπάνω ορισμούς.

## Ο συντελεστής προσαρμογής (adjustment coefficient)

Μία ποσότητα που εμφανίζεται πολύ συχνά όταν κάνουμε υπολογισμούς είναι ο συντελεστής προσαρμογής. Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ο συντελεστής προσαρμογής συμβολίζεται  $R$  και ορίζεται ως η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης

$$1 + (1 + \theta)E(x)r = M_X(r), \quad (1.10)$$

όπου  $M_X(r)$  η ροπογεννήτρια της τυχαία μεταβλητή  $X$  στο σημείο  $r$ , δηλαδή

$$M_X(r) = E[e^{rX}] = \int_0^{\infty} e^{rx} f(x) dx.$$

Η (1.10) είναι γνωστή και ως εξίσωση του συντελεστή προσαρμογής στο το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου, και μετά από μία γρήγορη ματιά παρατηρούμε τα εξής:

1. Για να μπορεί να οριστεί ο συντελεστής προσαρμογής, πρέπει η τυχαία μεταβλητή  $X$  να έχει ροπογεννήτρια, και
2. Για  $r = 0$  έχουμε λύση ( $1=1$ ), όμως ο συντελεστής προσαρμογής ορίζεται ως η μοναδική θετική ρίζα της (1.10)

Για να διερευνήσουμε αν η (1.10) έχει μοναδική θετική ρίζα, ορίζουμε τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$y_1(r) = 1 + (1 + \theta)E(x)r, \quad \text{και} \quad y_2(r) = M_X(r).$$

Οι  $y_1, y_2$  τέμνονται στο  $(0,1)$ , αφού για  $r = 0$  έχουμε  $y_1(0) = 1 = M_X(0) = y_2(0)$ .

Επίσης για την  $y_2$  ισχύει

$$y_2(r) = M_X(r) = E[e^{rX}] = \int_0^{\infty} e^{rx} f(x) dx.$$

επομένως

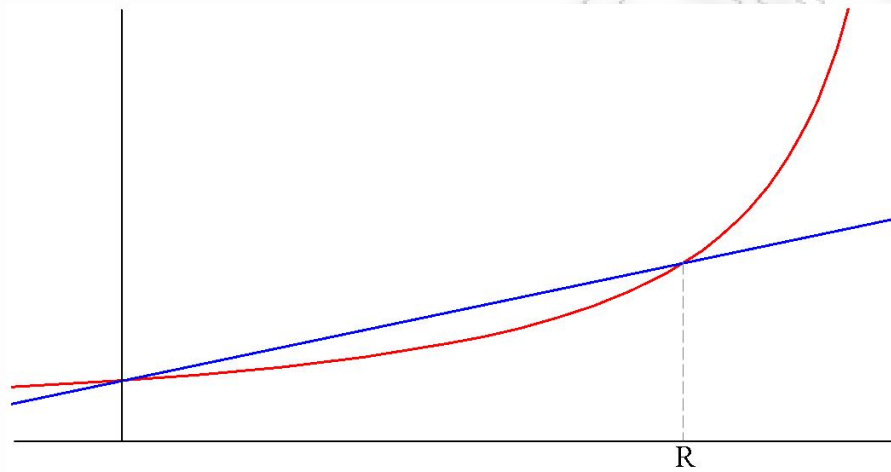
$$y_2'(r) = E[Xe^{rX}] = \int_0^{\infty} xe^{rx} f(x) dx > 0, \quad \text{αφού } x > 0 \text{ (άρα η } y_2 \text{ είναι αύξουσα)}$$

$$y_2''(r) = E[X^2 e^{rX}] = \int_0^{\infty} x^2 e^{rx} f(x) dx > 0, \quad \text{(άρα η } y_2 \text{ είναι κυρτή)}$$

Ενώ συγκρίνοντας τις  $y_1, y_2$  βρίσκουμε ότι

$$y_1'(r) = (1 + \theta)E(X) \quad \text{και} \quad y_2'(r) = M_X'(r) \\ y_1(0) = (1 + \theta)E(X) \quad \text{και} \quad y_2(0) = E(X).$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι στο σημείο  $r = 0$  :  $y_2'(0) < y_1'(0)$ , δηλαδή στο  $r = 0$  ο ρυθμός αύξησης της  $y_2(r)$  είναι μικρότερος από τον ρυθμό αύξησης της  $y_1(r)$ . Η από κοινού γραφική παράσταση αυτών των δύο συναρτήσεων θα μοιάζει με το Σχήμα (1.3)



Σχήμα 1.3: Ο συντελεστής προσαρμογής στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

Τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε από την παραπάνω ανάλυση είναι:

1. Υπάρχουν περισσότερες από μία, λύσεις της εξίσωσης  $1 + (1 + \theta)E(X)r = M_X(r)$ . Ως συντελεστής προσαρμογής ορίζεται η ελάχιστη θετική.
2. Όταν η τυχαία μεταβλητή  $X$  έχει ροπογεννήτρια, τότε υπάρχει συντελεστής προσαρμογής  $R$ .

## Ανισότητα Lundberg

Η πιο γνωστή ανισότητα στο κλασσικό μοντέλο είναι η ανισότητα Lundberg. Η ανισότητα αυτή συνδέει την πιθανότητα χρεοκοπίας και τον συντελεστή προσαρμογής με έναν άμεσο και απλό τρόπο, ενώ ταυτόχρονα μας δίνει άνω φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας συναρτήσει τόσο του συντελεστή προσαρμογής όσο και του αρχικού κεφαλαίου. Ο ορισμός και η απόδειξη της ανισότητας Lundberg παρατίθενται στα πλαίσια του ακόλουθου Θεωρήματος.

### Θεώρημα 1.1.

Όταν υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής  $R$ , ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό κεφάλαιο  $u \geq 0$  είναι

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}. \quad (1.11)$$

### Απόδειξη

Έστω  $\psi_n(u)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  η πιθανότητα να εμφανιστεί χρεοκοπία πριν ή κατά την εμφάνιση του  $n$ -οστού ζημιογόνου ενδεχομένου. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής θα αποδείξουμε ότι

$$\psi_n(u) \leq e^{-Ru}, \text{ για κάθε } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.12)$$

Για  $n = 0$  έχουμε  $\psi_0(u) = 0 \leq e^{-Ru}$ . Άρα για  $n = 0$  ισχύει η (1.12)

Υποθέτοντας λοιπόν ότι η (1.12) ισχύει για κάποια τυχαία τιμή  $n$ , θα δείξουμε ότι ισχύει και για  $n + 1$ , δηλαδή ότι

$$\psi_{n+1}(u) \leq e^{-Ru}. \quad (1.13)$$

Για να αποδείξουμε την (1.13) θα χρειαστούμε μία αναδρομική σχέση για την  $\psi_n(u)$ . Αυτή τη σχέση θα την πάρουμε δεσμεύοντας ως προς τον χρόνο επέλευσης και ως προς το μέγεθος του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου.

Έστω λοιπόν ότι το πρώτο ζημιογόνο ενδεχόμενο εμφανίζεται τη χρονική στιγμή  $t$ , δηλαδή  $T_1 = t$ . Όμως  $T_1 = W_1$  και στο κλασσικό μοντέλο οι τυχαίες μεταβλητές  $W_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  έχουν από κοινού συνάρτηση κατανομής  $G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ . Επομένως η πιθανότητα να επέλθει το πρώτο ζημιογόνο ενδεχόμενο κατά τη χρονική στιγμή  $t$  είναι  $g(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ .

Μέχρι τη χρονική στιγμή  $t$  το πλεόνασμα θα είναι  $u + ct$ . Χρεοκοπία θα έχουμε αν το ύψος της ζημιάς ξεπεράσει το πλεόνασμα, δηλ. αν  $X > u + ct$ . Η πιθανότητα να συμβεί αυτό είναι  $\Pr(X > u + ct) = \bar{F}(u + ct)$ .

Επομένως αν ο κίνδυνος επέλθει τη χρονική στιγμή  $t$ , η πιθανότητα χρεοκοπίας με την επέλευση του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου είναι

$$\int_0^\infty g(t) \bar{F}(u + ct) dt.$$

Υπάρχει όμως και το ενδεχόμενο το πρώτο ζημιογόνο ενδεχόμενο να μην επιφέρει τη χρεοκοπία. Αυτό θα συμβεί αν  $X < u + ct$ , δηλαδή αν το μέγεθος της πρώτης ζημιάς είναι μικρότερο από το πλεόνασμα που έχει συσσωρευτεί έως εκείνη τη χρονική στιγμή.

Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε τον χρόνο επέλευσης του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου ως χρόνο μηδέν και ξεκινάμε με νέο αρχικό κεφάλαιο  $u + ct - x$ . Η διαδικασία αυτή καλείται *ανανεωτική*.

Διακρίνουμε λοιπόν δύο περιπτώσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας πριν ή κατά την εμφάνιση του  $n + 1$ -ζημιογόνου ενδεχομένου:

1. Χρεοκοπία με την επέλευση του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου, ή

2. χρεοκοπία με την επέλευση ενός εκ των επόμενων  $n$ -ζημιογόνων ενδεχομένων.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω περιπτώσεις, παίρνουμε ότι

$$\psi_{n+1}(u) = \int_0^\infty g(t) \bar{F}(u+ct) dt + \int_0^\infty g(t) \left( \int_0^{u+ct} \psi_n(u+ct-x) f(x) dx \right) dt$$

Τα όρια του ολοκληρώματος στην παρένθεση δηλώνουν ότι  $0 \leq X \leq u+ct$ , δηλαδή ότι η επέλευση του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου δεν έχει επιφέρει χρεοκοπία.

Επίσης γνωρίζουμε ότι στο κλασσικό μοντέλο ισχύει  $g(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ , οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left[ \bar{F}(u+ct) dt + \int_0^{u+ct} \psi_n(u+ct-x) f(x) dx \right] dt \\ &= \int_0^\infty \left[ \int_{u+ct}^\infty f(x) dx + \int_0^{u+ct} \psi_n(u+ct-x) f(x) dx \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \end{aligned}$$

Σύμφωνα όμως με την υπόθεση της επαγωγής  $\psi_n(u) \leq e^{-Ru}$ , άρα

$$\psi_n(u+ct-x) \leq e^{-R(u+ct-x)}.$$

Επίσης ισχύει

$$x \geq u+ct \Rightarrow u+ct-x \leq 0 \Rightarrow -R(u+ct-x) \geq 0 \Rightarrow e^{-R(u+ct-x)} \geq 1$$

επομένως

$$\int_{u+ct}^\infty f(x) dx \leq \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} f(x) dx.$$

Συνολικά λοιπόν για την  $\psi_{n+1}(u)$  θα ισχύει

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) &\leq \int_0^\infty \left[ \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} f(x) dx + \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)} f(x) dx \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \int_0^\infty \left( \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} f(x) dx \right) \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda e^{-Ru} \int_0^\infty \left( \int_0^\infty e^{Rx} f(x) dx \right) e^{-Rct} e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda e^{-Ru} M_X(R) \int_0^\infty e^{-(\lambda+Rc)t} dt = \frac{\lambda M_X(R)}{\lambda + Rc} e^{-Ru} \end{aligned}$$

Δηλαδή ισχύει

$$\psi_{n+1}(u) \leq \frac{\lambda M_X(R)}{\lambda + Rc} e^{-Ru} \quad (1.14)$$

όμως  $c = (1 + \theta)\lambda E(X) \Rightarrow (1 + \theta)E(X) = \frac{c}{\lambda}$ , άρα η εξίσωση του συντελεστή προσαρμογής

$$1 + (1 + \theta)E(X)R = M_X(R)$$

γίνεται

$$1 + \frac{c}{\lambda}R = M_X(R) \Rightarrow \lambda + Rc = \lambda M_X(R) \Rightarrow \frac{\lambda M_X(R)}{\lambda + Rc} = 1$$

και αντικαθιστώντας στην (1.14) παίρνουμε

$$\psi_{n+1}(u) \leq e^{-Ru}$$

οπότε θα ισχύει και

$$\psi_n(u) \leq e^{-Ru}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Τέλος έχουμε

$$\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-Ru} = e^{-Ru},$$

δηλαδή

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$

Σχέση που ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 1.1

□

Αν έχουμε στη διάθεσή μας τον συντελεστή προσαρμογής μπορούμε, μέσω της ανισότητας Lundberg, να βρούμε πολύ εύκολα μία προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας και μάλιστα για διάφορες τιμές του αρχικού κεφαλαίου. Στην βιβλιογραφία υπάρχουν ακόμα καλύτερα άνω φράγματα για την  $\psi(u)$  από το  $e^{-Ru}$ , όμως η μεθοδολογία που χρησιμοποιήσαμε για να την αποδείξουμε αποτελεί μία από τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες μεθόδους ακόμα και σε πολύ πιο σύνθετα μοντέλα της Θεωρίας Κινδύνου. Φράγματα όπως αυτό της σχέσης (1.11) είναι γνωστά ως φράγματα τύπου Lundberg. Ολοκληρώνοντας την αναφορά μας στην ανισότητα Lundberg θα θέλαμε να δώσουμε δύο ερμηνείες της (1.11):

- για δεδομένο αρχικό κεφάλαιο  $u$ , όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής προσαρμογής, τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, ενώ
- για μία δεδομένη τιμή του συντελεστή προσαρμογής  $R$ , όσο μεγαλώνει το αρχικό κεφάλαιο, τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Βλέπουμε λοιπόν ότι στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου, η πιθανότητα χρεοκοπίας και ο συντελεστής προσαρμογής είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά (για σταθερό αρχικό κεφάλαιο). Στο Κεφάλαιο 4 θα εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ της πιθανότητας χρεοκοπίας και του συντελεστή προσαρμογής στα πλαίσια του κλασσικού μοντέλου με σταθερό επιτόκιο.

## Η συνάρτηση των Gerber-Shiu.

Το 1998 οι Hans Gerber και Elias Shiu, δημοσίευσαν την εργασία τους με τίτλο *On the time value of ruin*. Στην εργασία αυτή, οι δύο ερευνητές εισήγαγαν για πρώτη φορά μία συνάρτηση μέσω της οποίας μπορούσαν να μελετήσουν ταυτόχρονα, μέτρα κινδύνου που μέχρι τότε προσεγγίζονταν μεμονομένα. Αρχικά μελέτησαν την από κοινού κατανομή του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία και του χρόνου χρεοκοπίας. Στη συνέχεια ενσωμάτωσαν στη μελέτη τους τον χρόνο χρεοκοπίας (μέσω προεξόφλησης) και το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και έδειξαν πώς υπολογίζεται μία *αναμενόμενη προεξοφλημένη ποινή* που οφείλεται στη χρεοκοπία και εξαρτάται από το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας. Θεωρώντας λοιπόν ότι:

$T = \inf \{t : U(t) < 0\}$  είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, δηλαδή η χρονική στιγμή κατά την οποία το πλεόνασμα παίρνει για πρώτη φορά μία αυστηρά αρνητική τιμή, ενώ

$U(T^-)$  είναι το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία και  
 $|U(T)|$  το έλλειμμα ακριβώς μετά την χρεοκοπία,

τότε η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu είναι:

$$\Phi_\alpha(u) = E[e^{-\alpha T} w(U(T^-), |U(T)|) I(T < \infty) | U(0) = u] \quad (1.15)$$

### Σχόλια:

- Η ποσότητα  $e^{-\alpha T}$  επιδέχεται διπλής ερμηνείας. Μπορεί να ερμηνευτεί ως προεξοφλητικός παράγοντας ή εναλλακτικά ως μετασχηματισμός Laplace. Τονίζουμε ωστόσο ότι η παράμετρος  $\alpha$  παίρνει αυστηρά θετικές τιμές.
- Η δείκτρια  $I(T < \infty)$  μας πληροφορεί για το γεγονός ότι έχει επέλθει χρεοκοπία.
- Τέλος, θεωρούμε ότι η  $w$  (συνάρτηση ποινής) είναι μία θετική συνάρτηση.

Η (2.1) είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως “αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu” ή απλά ως “συνάρτηση Gerber-Shiu”.

Ο “κινητήριοις μοχλός” της  $\Phi_\alpha(u)$  είναι η συνάρτηση ποινής  $w$ . Επιλέγοντας κατάλληλα αυτή την συνάρτηση μπορούμε να πάρουμε τα διάφορα μέτρα κινδύνου που μας ενδιαφέρουν. Οι χαρακτηριστικότερες ειδικές περιπτώσεις της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής είναι:

1. Η πιθανότητα χρεοκοπίας.  
Θέτοντας  $w(x_1, x_2) = 1$  και  $\alpha = 0$  η (1.15) γίνεται

$$\Phi_\alpha(u) = E[I(T < \infty) | U(0) = u] = \psi(u)$$

2. Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.  
Για  $w(x_1, x_2) = 1$  και  $\alpha > 0$  παίρνουμε

$$\Phi_\alpha(u) = E[e^{-\alpha T} I(T < \infty) | U(0) = u] = \psi_\alpha(u)$$

3. Η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία.  
Για  $w(x_1, x_2) = I(x_1 \leq x)$  η (1.15) μας δίνει

$$\Phi_\alpha(u) = E[e^{-\alpha T} I(U(T^-) \leq x) I(T < \infty) | U(0) = u] = F_\alpha(u, x)$$

Η  $F_\alpha(u, x)$  εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία με αρχικό κεφάλαιο  $u$  και το μέγεθος του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ  $x$ .

4. Η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας (deficit at ruin.)  
Για  $w(x_1, x_2) = I(x_2 \leq y)$  έχουμε

$$\Phi_\alpha(u) = E[e^{-\alpha T} I(|U(T)| \leq y) I(T < \infty) | U(0) = u] = G_\alpha(u, y)$$

Η  $G_\alpha(u, y)$  αντιπροσωπεύει το ενδεχόμενο να επέλθει χρεοκοπία με αρχικό κεφάλαιο  $u$  και το μέγεθος του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ  $y$ .

5. Η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.  
Για  $w(x_1, x_2) = I(x_1 \leq x)I(x_2 \leq y)$

$$\Phi_\alpha(u) = E[e^{-\alpha T} I(U(T^-) \leq x) I(|U(T)| \leq y) I(T < \infty) | U(0) = u] = H_\alpha(u, x, y)$$

Φυσικά  $H_\alpha(u, x, y)$  είναι η πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία με αρχικό κεφάλαιο  $u$  και το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ  $x$ , ενώ το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ  $y$ .

6. Ο μετασχηματισμός Laplace του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.  
Για  $\alpha = 0$  και  $w(x_1, x_2) = e^{-rx_2}$ ,  $r > 0$  η (1.15) μας δίνει

$$\Phi_\alpha(u) = E[e^{-r|U(T)|} I(T < \infty) | U(0) = u] = \tilde{W}(u, r)$$

Ομοίως θέτοντας  $w(x_1, x_2) = e^{-r(x_1+x_2)}$ ,  $r > 0$  παίρνουμε τον μετασχηματισμό Laplace της τυχαίας μεταβλητής  $U(T^-) + |U(T)|$ , δηλαδή του μεγέθους της ζημιάς που προκαλεί την χρεοκοπία (όταν επέρχεται χρεοκοπία με αρχικό κεφάλαιο  $u$ ).

Όπως φαίνεται και από τις παραπάνω σχέσεις η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να προκύψει ως ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας για  $\alpha = 0$ .

Επίσης οι προεξοφλημένες συναρτήσεις κατανομής  $F_\alpha(u, x)$  και  $G_\alpha(u, y)$  αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της προεξοφλημένης από κοινού συνάρτησης κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας καθώς

$$F_\alpha(u, x) = \lim_{y \rightarrow \infty} H_\alpha(u, x, y) \quad \text{και} \quad G_\alpha(u, y) = \lim_{x \rightarrow \infty} H_\alpha(u, x, y)$$

Τέλος να σημειώσουμε ότι από τις προεξοφλημένες συναρτήσεις κατανομή μπορούμε να πάρουμε τις μη-προεξοφλημένες θέτοντας  $\alpha = 0$ , ενώ παραγωγίζοντας τις συναρτήσεις κατανομής παίρνουμε τις αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας προκύπτει από τη σχέση

$$h_\alpha(u, x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H_\alpha(u, x, y)$$

Στα επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε εκτενέστερα με την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu καθώς και με τις ειδικές της περιπτώσεις, στα πλαίσια του κλασσικού μοντέλου με επιτόκιο.

## 1.2 Ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις θα αποτελέσουν ένα από τα σημαντικότερα μαθηματικά εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε τόσο για να μελετήσουμε, όσο και για να προσεγγίσουμε ποσοτικά ορισμένα από τα μέτρα κινδύνου που μας ενδιαφέρουν. Ιδιαίτερα στο μοντέλο μας θα συναντήσουμε συχνά εξισώσεις της μορφής

$$\phi(x) = \ell(x) + \int_0^x k(x, s)\phi(s)ds \quad (1.16)$$

που είναι γνωστές ως *ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra δεύτερου τύπου* (βλ. Tricomi (1957)). Οι εξισώσεις αυτές οφείλουν την ονομασία τους στον Ιταλό Vito Volterra (1860-1940), έναν από τους θεμελιωτές της θεωρίας των *ολοκληρωτικών εξισώσεων*, και για συντομία θα τις αποκαλούμε και *εξισώσεις Volterra*.

Η (1.16) μπορεί να λυθεί άμεσα αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard. Ξεκινάμε θέτοντας  $\phi_0(x) = \ell(x)$  και στην συνέχεια υπολογίζουμε την  $\phi_1(x)$  ως:

$$\phi_1(x) = \ell(x) + \int_0^x k(x, s)\ell(s)ds.$$

Συνεχίζοντας κατά τον ίδιο τρόπο παίρνουμε μία άπειρη σειρά από συναρτήσεις

$$\phi_0(x), \quad \phi_1(x), \quad \phi_2(x), \quad \dots, \quad \phi_n(x), \quad \dots,$$



που ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$\phi_n(x) = \ell(x) + \int_0^x k(x, s)\phi_{n-1}(s)ds, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

και θέτοντας

$$\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x) = \theta_n(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

παρατηρούμε ότι

$$\phi_n(x) = \sum_{i=0}^n \theta_i(x), \quad (1.18)$$

όπου

$$\theta_n(x) = \int_0^x k(x, y)\theta_{n-1}(y)dy, \quad n = 1, 2, \dots$$

με αρχική τιμή  $\theta_0(x) = \ell(x)$ . Επομένως θα έχουμε

$$\theta_1(x) = \int_0^x k(x, y)\theta_0(y)dy = \int_0^x k(x, y)\ell(y)dy$$

ενώ

$$\theta_2(x) = \int_0^x k(x, y)\theta_1(y)dy = \int_0^x k(x, y) \int_0^y k(y, z)\ell(z)dzdy.$$

Αλλάζοντας την σειρά ολοκλήρωσης στη εξίσωση της  $\theta_2(x)$ , παίρνουμε

$$\theta_2(x) = \int_0^x \int_z^x k(x, y)k(y, z)\ell(z)dydz = \int_0^x \ell(z) \int_z^x k(x, y)k(y, z)dydz$$

και αν θέσουμε

$$k_2(x, z) = \int_z^x k(x, y)k(y, z)dy$$

τότε

$$\theta_2(x) = \int_0^x k_2(x, y)\ell(y)dz.$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι γενικά

$$\theta_n(x) = \int_0^x k_n(x, y)\ell(y)dz, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

όπου οι αλγόριθμοι  $k_1(x, y) \equiv k(x, y)$ ,  $k_2(x, y)$ ,  $k_3(x, y)$ , ... ορίζονται από τον αναδρομικό τύπο

$$k_n(x, z) = \int_z^x k(x, y)k_{n-1}(y, z)dy, \quad m = 2, 3, \dots \quad (1.20)$$

Έχοντας προσδιορίσει λοιπόν την  $\theta_n(x)$  παίρνουμε την λύση της (1.16) από την εξίσωση (1.18) για  $n \rightarrow \infty$ , δηλαδή

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i(x). \quad (1.21)$$

Μία άλλη λύση για την (1.16) μπορεί να προκύψει αν συνδυάσουμε τις εξισώσεις (1.18) και (1.19), από τις οποίες παίρνουμε

$$\phi_n(x) = \sum_{i=0}^n \theta_i(x) = \theta_0(x) + \sum_{i=1}^n \theta_i(x) = \ell(x) + \int_0^x \left[ \sum_{i=1}^n k_i(x, y) \right] \ell(y) dy.$$

Η λύση λοιπόν της (1.16) παίρνει τη μορφή

$$\phi_n(x) = \ell(x) + \int_0^x K(x, y) \ell(y) dy$$

όπου

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^n k_i(x, y)$$

Η δεύτερη αυτή μορφή λύσης μιας εξίσωσης Volterra δεύτερου τύπου παρουσιάζεται συγκεντρωτικά στο επόμενο θεώρημα

**Θεώρημα 1.2.** Έστω η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δεύτερου τύπου

$$\phi(x) = \ell(x) + \int_0^x k(x, s) \phi(s) ds.$$

Αν η συνάρτηση  $\ell$  είναι ολοκληρώσιμη και η  $k$  συνεχής, τότε για οποιοδήποτε  $x > 0$  η μοναδική λύση της παραπάνω εξίσωσης έχει τη μορφή

$$\phi(x) = \ell(x) + \int_0^x K(x, s) \ell(s) ds, \quad (1.22)$$

όπου

$$\begin{aligned} K(x, s) &= \sum_{m=1}^{\infty} k_m(x, s), \quad x > s \geq 0, \\ k_m(x, s) &= \int_s^x k(x, t) k_{m-1}(t, s) dt, \quad m = 2, 3, \dots, \quad x > s \geq 0, \\ k_1(x, s) &= k(x, s). \end{aligned}$$

□

## 1.3 Martingales

Μία ειδική κλάση στοχαστικών διαδικασιών είναι οι διαδικασίες martingale, ο ρόλος των οποίων είναι ιδιαίτερα σημαντικός στη στοχαστική ανάλυση. Η βασική ιδέα των martingales ήταν γνωστή από τις αρχές του 20ου αιώνα, ωστόσο το μεγαλύτερο μέρος της μαθηματικής θεωρίας τους εμφανίστηκε αργότερα και οφείλεται κυρίως στον Αμερικανό πιθανοθεωρητικό Doob. Η θεωρία των martingales είναι ιδιαίτερα εκτενής και στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα αρκεστούμε στην παράθεση των ιδιοτήτων τους που σχετίζονται με τα θέματα που εξετάζουμε. Για τις αποδείξεις των ιδιοτήτων και γενικότερα για μία πιο ολοκληρωμένη μελέτη των διαδικασιών martingales, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εξής πηγές: Γιαννακόπουλος (2003), Lawler (1995). Για να κατανοήσουμε καλύτερα μία διαδικασία martingale θα αναφέρουμε αρχικά ορισμένες χαρακτηριστικές ιδιότητες της υπό συνθήκη μέσης τιμής. Θεωρούμε λοιπόν μία τυχαία μεταβλητή  $Y$  που μετράει το αποτέλεσμα κάποιου τυχαίου πειράματος. Η δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ.  $Y$  ως προς ένα πεπερασμένο πλήθος τυχαίων μεταβλητών  $X_1, \dots, X_n$  συμβολίζεται

$$E[Y \mid X_1, \dots, X_n], \quad (1.23)$$

και είναι μία τυχαία μεταβλητή. Ένα χαρακτηριστικό αυτής της τυχαίας μεταβλητής είναι ότι εξαρτάται μόνο από τις τιμές των  $X_1, \dots, X_n$ , δηλαδή μπορούμε να γράψουμε

$$E[Y \mid X_1, \dots, X_n] = \phi(X_1, \dots, X_n)$$

για κάποια συνάρτηση  $\phi$ . Η συνάρτηση  $\phi$  λέμε ότι είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση. Γενικότερα ισχύει ο παρακάτω ορισμός.

### Ορισμός 1.1.

Αν μία τυχαία μεταβλητή  $Z$  μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση των  $X_1, \dots, X_n$ , τότε ονομάζεται μετρήσιμη ως προς τις  $X_1, \dots, X_n$ .  $\square$

Ας απλοποιήσουμε όμως λίγο τους συμβολισμούς μας. Αν  $X_1, X_2, \dots$  μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, θα συμβολίσουμε με  $\mathcal{F}_n$  την “πληροφορία που εμπεριέχεται στις  $X_1, \dots, X_n$ ”. Έτσι θα μπορούμε να γράφουμε  $E[Y \mid \mathcal{F}_n]$  αντί για  $E[Y \mid X_1, \dots, X_n]$ . Η γνωστή μας λοιπόν σχέση  $E(Y) = E[E(Y \mid X_1, \dots, X_n)]$  γράφεται πλέον  $E(Y) = E[E(Y \mid \mathcal{F}_n)]$ .

Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό των martingales παραθέτουμε τις παρακάτω ιδότητες της υπό συνθήκη μέσης τιμής:

1. Αν  $a$  και  $b$  σταθερές, τότε

$$E[aY_1 + bY_2 \mid \mathcal{F}_n] = aE[Y_1 \mid \mathcal{F}_n] + bE[Y_2 \mid \mathcal{F}_n] \quad (1.24)$$

2. Αν η τυχαία μεταβλητή  $Y$  είναι ήδη μία συνάρτηση των  $X_1, \dots, X_n$ , τότε

$$E[Y \mid \mathcal{F}_n] = Y \quad (1.25)$$

3. Για  $m < n$ , ισχύει

$$E[E(Y \mid \mathcal{F}_n) \mid \mathcal{F}_m] = E[Y \mid \mathcal{F}_m] \quad (1.26)$$

4. Αν η τυχαία μεταβλητή  $Y$  είναι ανεξάρτητη των  $X_1, \dots, X_n$ , τότε η πληροφορία που εμπεριέχεται στις  $X_1, \dots, X_n$  δεν μας χρησιμεύει για τον προσδιορισμό της  $Y$ , δηλαδή

$$E(Y \mid \mathcal{F}_n) = E(Y) \quad (1.27)$$

**Παράδειγμα 1.1:** Θεωρούμε τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές  $X_1, X_2, \dots$  με μέση τιμή  $\mu$  και το πεπερασμένο άθροισμα

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Αν  $\mathcal{F}_n$  είναι η πληροφορία που περιέχεται στις  $X_1, \dots, X_n$  και  $m < n$ , τότε από την ιδιότητα 1, έχουμε

$$E[S_m \mid \mathcal{F}_m] = E[X_1 + \dots + X_m \mid \mathcal{F}_m] + E[X_{m+1} + \dots + X_n \mid \mathcal{F}_m]$$

Όμως από την ιδιότητα 2, παίρνουμε ότι

$$E[X_1 + \dots + X_m \mid \mathcal{F}_m] = X_1 + \dots + X_m = S_m$$

αφού η  $S_m$  είναι μετρήσιμη ως προς τις  $X_1, \dots, X_m$ . Επίσης εφόσον το άθροισμα  $X_{m+1} + \dots + X_n$  είναι ανεξάρτητο των  $X_1, \dots, X_m$ , τότε εφαρμόζοντας την ιδιότητα 4 διαπιστώνουμε ότι

$$E[X_{m+1} + \dots + X_n \mid \mathcal{F}_m] = E[X_{m+1} + \dots + X_n] = (n - m)\mu$$

Επομένως συνολικά έχουμε

$$E[S_n \mid \mathcal{F}_m] = S_m + (n - m)\mu$$

□

### Ορισμός 1.2.

Έστω  $X_0, X_1, \dots$  μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και  $\mathcal{F}_n$  η πληροφορία που εμπεριέχεται στις  $X_0, \dots, X_n$ . Θεωρούμε επίσης μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών  $M_0, M_1, \dots$  με  $E[|M_i|] < \infty$ . Αν κάθε  $M_n$  είναι μετρήσιμη σε σχέση με τις  $X_0, \dots, X_n$ , τότε

1. Η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών  $M_0, M_1, \dots$ , είναι μία διαδικασία **martingale** ως προς την  $\mathcal{F}_n$  αν για κάθε  $m < n$ ,

$$E[M_n \mid \mathcal{F}_m] = M_m \quad (1.28)$$

ή εναλλακτικά

$$E[M_n - M_m \mid \mathcal{F}_m] = 0,$$

2. Η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών  $M_0, M_1, \dots$ , είναι μία διαδικασία **supermartingale** ως προς την  $\mathcal{F}_n$  αν για κάθε  $m < n$ ,

$$E[M_n \mid \mathcal{F}_m] \leq M_m \quad (1.29)$$

ή εναλλακτικά

$$E[M_n - M_m \mid \mathcal{F}_m] \leq 0,$$

3. Η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών  $M_0, M_1, \dots$ , είναι μία διαδικασία **submartingale** ως προς την  $\mathcal{F}_n$  αν για κάθε  $m < n$ ,

$$E[M_n \mid \mathcal{F}_m] \geq M_m \quad (1.30)$$

ή εναλλακτικά

$$E[M_n - M_m \mid \mathcal{F}_m] \geq 0,$$

□

Η συνθήκη  $E[|M_i|] < \infty$ , χρειάζεται για να εξασφαλίσουμε ότι ορίζονται οι υπό συνθήκη μέσες τιμές. Στην πράξη, για να επαληθεύσουμε την (1.28) αρκεί να αποδείξουμε ότι  $\forall n$ ,

$$E[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n, \quad (1.31)$$

αφού αν ισχύει κάτι τέτοιο, τότε από την ιδιότητα 3 της υπό συνθήκη μέσης τιμής έχουμε

$$E[M_{n+2} \mid \mathcal{F}_n] = E[E(M_{n+2} \mid \mathcal{F}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] = E[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n$$

και συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι ικανοποιείται η εξίσωση (1.28) του Ορισμού 1.2. Αντίστοιχα για να επαληθεύσουμε την (1.29) αρκεί να δείξουμε ότι

$$E[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq M_n, \quad (1.32)$$

ενώ για να επαληθεύσουμε την (1.30) αρκεί να δείξουμε ότι

$$E[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq M_n, \quad (1.33)$$

### Επιλεκτική Στάση

Η επιλεκτική στάση (optional stopping) μας πληροφορεί σχετικά με το τι μπορεί να συμβεί αν σταματήσουμε μια διαδικασία martingale ή μία διαδικασία super(sub)martingale σε κάποιο χρόνο στάσης  $T$ . Η επιλεκτική στάση αποτελεί μία ιδιαίτερα χρήσιμη τεχνική στη στοχαστική ανάλυση και διευκολύνει τους υπολογισμούς μέσω των τιμών καθώς και ποσοτήτων που σχετίζονται με τους χρόνους στάσης.

### Ορισμός 1.3.

Αν  $T$  είναι ένας χρόνος στάσης τότε μπορούμε να ορίσουμε την σταματημένη διαδικασία (stopped process)  $X_{t \wedge T}$ .  $\square$

Η σταματημένη διαδικασία  $X_{t \wedge T}$  έχει ακριβώς τις ίδιες τροχιές με την  $X_t$  μέχρι το χρόνο στάσης  $T$ , ενώ μετά το χρόνο στάσης  $T$  η  $X_{t \wedge T}$  είναι “παγωμένη” στην τιμή  $X_T$ .

### Θεώρημα 1.3. (Μία σταματημένη martingale είναι μία martingale)

1. Αν  $X_t$  είναι μία διαδικασία martingale ως προς την  $\mathcal{F}_t$  και  $T$  είναι ένας χρόνος στάσης ως προς την ίδια πληροφορία  $\mathcal{F}_t$ , τότε η σταματημένη διαδικασία  $X_{t \wedge T}$  είναι και αυτή μία martingale ως προς την  $\mathcal{F}_t$  και ισχύει

$$E[X_{t \wedge T}] = E[X_0] \quad (1.34)$$

2. Αν η  $X_t$  είναι μία super(sub)martingale τότε η σταματημένη διαδικασία είναι επίσης μία super(sub)martingale και ισχύει

$$E[X_{t \wedge T}] \leq (\geq) E[X_0] \quad (1.35)$$

$\square$

## 1.4 Οι οικογένειες κατανομών NBUC και NWUC

Στη Θεωρία Αξιοπιστίας ορίζονται οικογένειες (κλάσεις) κατανομών για τη μελέτη ζημιοκατανομών, χρόνων ζωής συστημάτων, συσκευών, κ.ά. Αυτές οι κλάσεις συχνά χαρακτηρίζονται από την βαθμίδα αποτυχίας καθώς και την δεσμευμένη κατανομή του υπολοίπου χρόνου ζωής. Παραδείγματα αυτών των κλάσεων είναι η οικογένεια κατανομών με αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας ή IFR (increasing failure rate), η οικογένεια κατανομών με φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας ή DFR (decreasing failure rate), η οικογένεια κατανομών NBU (new better than used), η κλάση NWU (new worse than used), καθώς και οι οικογένειες κατανομών NBUC (new better than used in convex ordering), και NWUC (new worse than used in convex ordering). Σε αυτή την παράγραφο θα αναφερθούμε στις παραπάνω κλάσεις κατανομών από τη Θεωρία Αξιοπιστίας, κυρίως για να κατανοήσουμε τις κλάσεις NBUC και NWUC. Ξεκινάμε με μία αναφορά στη βαθμίδα αποτυχίας, τη βασικότερη συνάρτηση μέσω της οποίας θα ορίσουμε τις κλάσεις κατανομών που μας ενδιαφέρουν.

### Η βαθμίδα αποτυχίας (failure rate)

Έστω μία τυχαία μεταβλητή  $Y$  με συνάρτηση κατανομής  $F(y) = \Pr(Y \leq y)$ ,  $y > 0$  που αντιπροσωπεύει το μέγεθος ατομικής ζημιάς σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο. Για υπολογιστικούς

σκοπούς, είναι σημαντικό να ποσοτικοποιήσουμε και να αναλύσουμε το βάρος της δεξιάς ουράς της κατανομής της τ.μ.  $Y$ . Έτσι ορίζουμε την βαθμίδα αποτυχίας της τυχαίας μεταβλητής  $Y$  μέσω της σχέσης:

$$\mu(y) = \frac{-\bar{F}'(y)}{\bar{F}(y)} = -[\ln \bar{F}(y)]' \quad (1.36)$$

όπου  $\bar{F}(y) = 1 - F(y)$  η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τ.μ.  $Y$ . Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της (1.36) προκύπτει ότι

$$\bar{F}(y) = e^{\int_0^y \mu(x) dx} \quad (1.37)$$

Επομένως μικρές τιμές της βαθμίδας αποτυχίας είναι ένδειξη βαριάς δεξιάς ουράς, ενώ μεγάλες τιμές της βαθμίδας αποτυχίας είναι ένδειξη ελαφριάς δεξιάς ουράς. Σε πολλές περιπτώσεις η βαθμίδα αποτυχίας  $\mu(y)$  είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του  $y$  και το γεγονός αυτό συνδυάζεται με περιπτώσεις κατανομών με βαριές δεξιές ουρές. Αντίστοιχα όταν η βαθμίδα αποτυχίας  $\mu(y)$  είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του  $y$ , έχουμε κατανομή με ελαφριά δεξιά ουρά. Με γνώμονα λοιπόν την μονοτονία της  $\mu(y)$  (καθώς και άλλες ιδιότητες) κατηγοριοποιούμε τις κατανομές σε κλάσεις.

### Οι κλάσεις κατανομών NBUC και NWUC

Θα παραθέσουμε τους ορισμούς των κλάσεων κατανομών NBUC και NWUC, αφού πρώτα δούμε πώς ορίζονται οι κλάσεις DFR, IFR, NBU, και NWU.

#### Ορισμός 1.4.

1. Η συνάρτηση κατανομής  $F(y)$  ανήκει στην οικογένεια κατανομών DFR (Decreasing Failure Rate) αν η ποσότητα  $\frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(y)}$  είναι αύξουσα συνάρτηση του  $y$  για σταθερό  $x \geq 0$ .
2. Η συνάρτηση κατανομής  $F(y)$  ανήκει στην οικογένεια κατανομών IFR (Increasing Failure Rate) αν η ποσότητα  $\frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(y)}$  είναι φθίνουσα συνάρτηση του  $y$  για σταθερό  $x \geq 0$ .  $\square$

Είναι φανερό ότι η οικογένεια κατανομών DFR συμπεριλαμβάνει κατανομές με φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας  $\mu(y)$  ως προς  $y$ , ενώ η οικογένεια κατανομών IFR συμπεριλαμβάνει κατανομές με αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας  $\mu(y)$  ως προς  $y$ .

#### Παρατηρήσεις:

1. Για την οικογένεια κατανομών DFR, η  $h(y) = \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(y)}$  είναι αύξουσα συνάρτηση του  $y$  για σταθερό  $x \geq 0$ . Επομένως για  $y \geq 0$ ,  $x \geq 0$  θα ισχύει

$$h(y) \geq h(0) \Rightarrow \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(y)} \geq \bar{F}(x) \Rightarrow \bar{F}(x+y) \geq \bar{F}(y)\bar{F}(x)$$

2. Ομοίως την την οικογένεια κατανομών IFR, θα ισχύει

$$\bar{F}(x+y) \leq \bar{F}(y)\bar{F}(x), \quad y \geq 0, \quad x \geq 0$$

### Ορισμός 1.5.

1. Η συνάρτηση κατανομής  $F(y)$  ανήκει στην οικογένεια κατανομών NWU (new worse than used) όταν για κάθε  $x \geq 0$  και  $y \geq 0$  ισχύει

$$\bar{F}(x+y) \geq \bar{F}(y)\bar{F}(x)$$

2. Η συνάρτηση κατανομής  $F(y)$  ανήκει στην οικογένεια κατανομών NBU (new better than used) όταν για κάθε  $x \geq 0$  και  $y \geq 0$  ισχύει

$$\bar{F}(x+y) \leq \bar{F}(y)\bar{F}(x)$$

□

Το όνομα new worse than used προέρχεται από το γεγονός ότι η ανισότητα  $\bar{F}(x+y) \geq \bar{F}(x)\bar{F}(y)$  είναι ένας διαφορετικός τρόπος έκφρασης της σχέσης  $\Pr[T(y) > x] \geq \Pr(Y > x)$ , όπου

$$T(y) = Y - y / Y > y.$$

Επομένως ένα χαρακτηριστικό της κλάσης NWU είναι το γεγονός ότι ο υπολοιπόμενος χρόνος ζωής ενός ατόμου ηλικίας  $y$  είναι στοχαστικά μεγαλύτερος από τον υπολοιπόμενο χρόνο ζωής ενός νεογέννητου ατόμου (που εκφράζεται από την τυχαία μεταβλητή  $Y$ ). Αντίστοιχα, η κλάση κατανομών NBU χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι  $\Pr[T(y) > x] \leq \Pr(Y > x)$ .

Φυσικά η κλάση DFR είναι υποσύνολο της κλάσης NWU, ενώ η κλάση IFR είναι υποσύνολο της κλάσης NBU.

### Ορισμός 1.6.

1. Η συνάρτηση κατανομής  $F(y)$  ανήκει στην οικογένεια κατανομών NWUC (new worse than used in convex ordering) όταν για κάθε  $x \geq 0$  και  $y \geq 0$  ισχύει

$$\bar{F}_e(x+y) \geq \bar{F}_e(y)\bar{F}(x)$$

2. Η συνάρτηση κατανομής  $F(y)$  ανήκει στην οικογένεια κατανομών NBUC (new better than used in convex ordering) όταν για κάθε  $x \geq 0$  και  $y \geq 0$  ισχύει

$$\bar{F}_e(x+y) \leq \bar{F}_e(y)\bar{F}(x)$$

□

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι η κλάση κατανομών NWUC χαρακτηρίζεται από το γεγονός ο υπολοιπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής ισορροπίας είναι στοχαστικά μεγαλύτερος από αυτόν της τ.μ.  $Y$ . Αντίστοιχα η κλάση NBUC χαρακτηρίζεται από το γεγονός ο υπολοιπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής ισορροπίας είναι στοχαστικά μικρότερος από αυτόν της τ.μ.  $Y$ . Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τις κλάσεις κατανομών, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εξής πηγές: Willmot-Lin (2001), και Cao-Wang (1991).



## Κεφάλαιο 2

# Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ξεκινήσουμε τη μελέτη του κλασικού μοντέλου της Θεωρίας Κινδύνου όταν το πλεόνασμα επενδύεται με σταθερή ένταση ανατοκισμού. Βασικός σκοπός μας είναι η εύρεση ολοκληρωτικών εξισώσεων για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu. Οι εξισώσεις αυτές θα μας δώσουν τη δυνατότητα να βρούμε αρκετά αποτελέσματα για τα μέτρα κινδύνου που μας ενδιαφέρουν στα επόμενα κεφάλαια. Αναφορικά με την ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu, θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα των Cai-Dickson (2002). Επίσης θα παρουσιάσουμε τη λύση των Liu-Mao (2006) για την συνάρτηση των Gerber-Shiu όταν  $u = 0$ . Προηγουμένως όμως θα δούμε τη γενική μορφή μίας στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος που επενδύεται με σταθερό επιτόκιο.

### 2.1 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο με επιτόκιο

Θεωρούμε ότι το πλεόνασμα επενδύεται με σταθερή ένταση ανατοκισμού  $\delta$ . Θα συμβολίσουμε με  $U_\delta(t)$  το πλεόνασμα κατά τη χρονική στιγμή  $t$ , με τον δείκτη  $\delta$  να παραπέμπει στη σταθερή ένταση ανατοκισμού. Αν ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλιστρών είναι σταθερός και ίσος με  $c$ , τότε στο χρόνο  $t$  θα ισχύει (βλ. Sundt-Teugels (1995) )

$$dU_\delta(t) = cdt + U_\delta(t)\delta dt - dS(t). \quad (2.1)$$

**Λήμμα 2.1.** Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με σταθερό επιτόκιο η συσσωρευμένη αξία του πλεονάσματος κατά τη χρονική στιγμή  $t$ , δίνεται από τη σχέση

$$U_\delta(t) = ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\overline{t}|}^{(\delta)} - \int_0^t e^{\delta(t-y)} dS(y), \quad (2.2)$$

ενώ η παρούσα αξία του πλεονάσματος κατά τη χρονική στιγμή  $t$ , δίνεται από τη σχέση

$$V_\delta(t) = e^{-\delta t} U_\delta(t) = u + c \bar{\alpha}_{\bar{t}|}^{(\delta)} - \int_0^t e^{-\delta y} dS(y) \quad (2.3)$$

όπου

$$\bar{s}_{\bar{t}|}^{(\delta)} = \int_0^t e^{\delta x} dx = \begin{cases} t, & \delta = 0 \\ \frac{e^{\delta t} - 1}{\delta}, & \delta > 0 \end{cases}$$

και

$$\bar{\alpha}_{\bar{t}|}^{(\delta)} = \int_0^t e^{-\delta x} dx = e^{\delta t} \bar{s}_{\bar{t}|}^{(\delta)} = \begin{cases} t, & \delta = 0 \\ \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta}, & \delta > 0 \end{cases}$$

είναι οι γνωστές μας συνεχείς χρηματοοικονομικές ράντες.

#### Απόδειξη:

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (2.1) με  $e^{-\delta t}$  παίρνουμε:

$$e^{-\delta t} dU_\delta(t) = c e^{-\delta t} dt + \delta e^{-\delta t} U_\delta(t) dt - e^{-\delta t} dS(t). \quad (2.4)$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της (2.4) από 0 έως  $t$  έχουμε

$$\int_0^t e^{-\delta y} dU_\delta(y) = c \int_0^t e^{-\delta y} dy + \delta \int_0^t e^{-\delta y} U_\delta(y) dy - \int_0^t e^{-\delta y} dS(y). \quad (2.5)$$

Όμως, θεωρώντας ότι  $U_\delta(0) = u$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^t e^{-\delta y} dU_\delta(y) &= e^{-\delta y} U_\delta(y) \Big|_{y=0}^t + \delta \int_0^t e^{-\delta y} U_\delta(y) dy \\ &= e^{-\delta t} U_\delta(t) - u + \delta \int_0^t e^{-\delta y} U_\delta(y) dy, \quad \text{και} \end{aligned}$$

$$\bullet \int_0^t e^{-\delta y} dy = \bar{a}_{\bar{t}|}^{(\delta)}$$

άρα η (2.5) γίνεται

$$e^{-\delta t} U_\delta(t) - u = c \bar{\alpha}_{\bar{t}|}^{(\delta)} - \int_0^t e^{-\delta y} dS(y),$$

και πολλαπλασιάζοντας με  $e^{\delta t}$  παίρνουμε

$$U_\delta(t) = u e^{\delta t} + c e^{\delta t} \bar{\alpha}_{\bar{t}|}^{(\delta)} - e^{\delta t} \int_0^t e^{-\delta y} dS(y).$$

Καταλήξαμε λοιπόν ότι η Συσσωρευμένη Αξία του πλεονάσματος κατά τη χρονική στιγμή  $t$  δίνεται από τη σχέση

$$U_\delta(t) = ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} - \int_0^t e^{\delta(t-y)} dS(y).$$

Αντίστοιχα η Παρούσα Αξία του πλεονάσματος θα είναι

$$V_\delta(t) = e^{-\delta t} U_\delta(t) = u + c\bar{a}_{\bar{t}}^{(\delta)} - \int_0^t e^{-\delta y} dS(y),$$

σχέση που ολοκληρώνει την απόδειξη του Λήμματος 2.1 □

## 2.2 Ορισμός της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής και ειδικές περιπτώσεις

Για το κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο θα συμβολίσουμε με  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$  την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu, ακολουθώντας τον συμβολισμό των Cai-Dickson (2002). Ο δείκτης  $\delta$  μας θυμίζει ότι στο υπό εξέταση μοντέλο το πλεόνασμα επενδύεται σε σταθερό επιτόκιο (του οποίου η ένταση ανατοκισμού είναι  $\delta$ ).

Έτσι αν  $T_\delta = \inf \{t : U_\delta(t) < 0\}$  είναι ο χρόνος χρεοκοπίας για το μοντέλο μας, ενώ

$U_\delta(T_\delta^-)$  είναι το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και  $|U_\delta(T_\delta)|$  το έλλειμμα ακριβώς μετά τη χρεοκοπία,

τότε, αν η χρεοκοπία επέρχεται συναρτήσει του αρχικού κεφαλαίου  $U_\delta(0) = u$ , η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = E \left[ e^{-\alpha T_\delta} w(U_\delta(T_\delta^-), |U_\delta(T_\delta)|) I(T_\delta < \infty) \mid U_\delta(0) = u \right] \quad (2.6)$$

Όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, επιλέγοντας κατάλληλα τη συνάρτηση ποινής  $w$ , παίρνουμε τα διάφορα μέτρα κινδύνου που μας ενδιαφέρουν από την (2.6). Οι κυριότερες ειδικές περιπτώσεις της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής που θα μας απασχολήσουν στα επόμενα κεφάλαια είναι:

1. Η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Για  $w(x_1, x_2) = 1$  και  $\alpha = 0$  η (2.6) γίνεται

$$\Phi_{\delta,0}(u) = E[I(T_\delta < \infty) \mid U_\delta(0) = u] = \psi_\delta(u)$$

Για το κλασσικό μοντέλο με σταθερή ένταση ανατοκισμού  $\delta$ ,  $\psi_\delta(u)$  είναι η πιθανότητα το πλεόνασμα να πάρει μία αυστηρά αρνητική τιμή.

2. Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.  
Για  $w(x_1, x_2) = 1$  και  $\alpha > 0$  παίρνουμε

$$\Phi_{\delta, \alpha}(u) = E[e^{-\alpha T_\delta} I(T_\delta < \infty) | U_\delta(0) = u] = \psi_{\delta, \alpha}(u)$$

3. Η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία.  
Για  $w(x_1, x_2) = I(x_1 \leq x)$  η (2.6) μας δίνει

$$\Phi_{\delta, \alpha}(u) = E[e^{-\alpha T_\delta} I(U_\delta(T_\delta^-) \leq x) I(T_\delta < \infty) | U_\delta(0) = u] = F_{\delta, \alpha}(u, x)$$

Για το κλασσικό μοντέλο με σταθερό επιτόκιο, η  $F_{\delta, \alpha}(u, x)$  εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία με αρχικό κεφάλαιο  $u$  και το μέγεθος του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ  $x$ .

4. Η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας (deficit at ruin.)  
Για  $w(x_1, x_2) = I(x_2 \leq y)$  έχουμε

$$\Phi_{\delta, \alpha}(u) = E[e^{-\alpha T_\delta} I(|U_\delta(T_\delta)| \leq y) I(T_\delta < \infty) | U_\delta(0) = u] = G_{\delta, \alpha}(u, y)$$

Για το κλασσικό μοντέλο με σταθερό επιτόκιο, η  $G_{\delta, \alpha}(u, y)$  αντιπροσωπεύει το ενδεχόμενο να επέλθει χρεοκοπία με αρχικό κεφάλαιο  $u$  και το μέγεθος του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ  $y$ .

5. Η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.  
Για  $w(x_1, x_2) = I(x_1 \leq x)I(x_2 \leq y)$

$$\Phi_{\delta, \alpha}(u) = E[e^{-\alpha T_\delta} I(U(T_\delta^-) \leq x) I(|U_\delta(T_\delta)| \leq y) I(T < \infty) | U(0) = u] = H_{\delta, \alpha}(u, x, y)$$

Στα πλαίσια του κλασσικού μοντέλου με σταθερό επιτόκιο,  $H_\alpha(u, x, y)$  είναι η πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία με αρχικό κεφάλαιο  $u$  και το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ  $x$ , ενώ το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ  $y$ .

### Παρατηρήσεις:

- Το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου (χωρίς επιτόκιο) αποτελεί ειδική περίπτωση του μοντέλου με σταθερό επιτόκιο για  $\delta = 0$ .
- Από τις προεξοφλημένες συναρτήσεις κατανομής μπορούμε να πάρουμε τις αντίστοιχες μη-προεξοφλημένες θέτοντας  $\alpha = 0$ .

Στα επόμενα κεφάλαια θα εξετάσουμε αναλυτικότερα τις ειδικές μορφές της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινης.

## 2.3 Ολοκληρωτική εξίσωση για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με την εύρεση ολοκληρωτικών εξισώσεων για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu. Ξεκινάμε με την διατύπωση ενός Λήμματος που θα μας χρησιμεύσει στη συνέχεια.

**Λήμμα 2.2.** *Ισχύει*

$$\int_0^u \int_0^t \Phi_{\delta,\alpha}(t-x)f(x)dxdt = \int_0^u \Phi_{\delta,\alpha}(u-x)F(x)dx \quad (2.7)$$

**Απόδειξη:** Υπολογίζουμε το εσωτερικό ολοκλήρωμα ξεχωριστά

$$\begin{aligned} \int_0^t \Phi_{\delta,\alpha}(t-x)f(x)dx &= \int_0^t \Phi_{\delta,\alpha}(t-x)F'(x)dx = \Phi_{\delta,\alpha}(t-x)F(x) \Big|_{x=0}^t \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x}(t-x) \int_0^t \Phi'_{\delta,\alpha}(t-x)F(x)dx \\ &= \Phi_{\delta,\alpha}(0)F(t) + \int_0^t \Phi'_{\delta,\alpha}(t-x)F(x)dx \end{aligned}$$

Συνολικά λοιπόν θα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^u \int_0^t \Phi_{\delta,\alpha}(t-x)f(x)dxdt &= \int_0^u \Phi_{\delta,\alpha}(0)F(t)dt + \int_0^u \int_0^t \Phi'_{\delta,\alpha}(t-x)F(x)dxdt \\ &= \Phi_{\delta,\alpha}(0) \int_0^u F(t)dt + \int_0^u \int_x^u \Phi'_{\delta,\alpha}(t-x)F(x)dt dx \\ &= \Phi_{\delta,\alpha}(0) \int_0^u F(t)dt + \int_0^u F(x) [\Phi_{\delta,\alpha}(u-x) - \Phi_{\delta,\alpha}(0)] dx \\ &= \int_0^u \Phi_{\delta,\alpha}(u-x)F(x)dx, \end{aligned}$$

□

Για να καταλήξουμε σε μία ολοκληρωτική εξίσωση για την  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$ , θα εκμεταλλευτούμε την ανανεωτική της ιδιότητα. Αρχικά εστιάζουμε την προσοχή μας στην επέλευση του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου και δεσμεύουμε ως προς τον χρόνο επέλευσής του ( $T_1 = t$ ) και ως προς το μέγεθός του ( $X_1 = x$ ). Έχουμε δηλαδή

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi_{\delta,\alpha}(u|t, x)dF(x)g(t)dt$$

Όμως στο κλασσικό μοντέλο  $g(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ , οπότε

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty E(e^{-\alpha T_\delta} w(U(T_\delta^-), |U(T_\delta)|) I(T_\delta < \infty) | X_1 = x, T_1 = t) dF(x) dt$$

Δοθέντος λοιπόν ότι  $T_1 = t$  και  $X_1 = x$ , η συσσωρευμένη αξία του πλεονάσματος μετά την επέλευση του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου θα είναι  $ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\frac{\delta}{\Gamma}}^{(\delta)} - x$ . Επομένως, ανάλογα με το μέγεθος της πρώτης απαίτησης, διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

1. Εμφανίζεται ζημιά αλλά δεν προκαλεί χρεοκοπία.

Δηλαδή σε κάποια χρονική στιγμή  $t \in [0, \infty)$  προκαλείται ζημιά τέτοια ώστε  $x < ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\frac{\delta}{\Gamma}}^{(\delta)}$  (το μέγεθος της είναι μικρότερο από το πλεόνασμα που είχε συσσωρευτεί μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή). Στην περίπτωση αυτή, η διαδικασία πλεονάσματος ανανεώνεται και το νέο αρχικό κεφάλαιο ακριβώς μετά την επέλευση του ζημιογόνου ενδεχομένου είναι  $ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\frac{\delta}{\Gamma}}^{(\delta)} - x$ .

2. Εμφανίζεται ζημιά και επιφέρει χρεοκοπία.

Για να συμβεί αυτό θα πρέπει να ισχύει  $x > ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\frac{\delta}{\Gamma}}^{(\delta)}$ ,  $\forall t \in [0, \infty)$ .

Λαμβάνοντας υπ' όψη τις παραπάνω περιπτώσεις, έχουμε

$$\begin{aligned} \Phi_{\delta,\alpha}(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\alpha)t} \int_0^{ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\frac{\delta}{\Gamma}}^{(\delta)}} \Phi_{\delta,\alpha}(\delta t + c\bar{s}_{\frac{\delta}{\Gamma}}^{(\delta)} - x) dF(x) dt \\ &\quad + \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\alpha)t} \int_{ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\frac{\delta}{\Gamma}}^{(\delta)}}^\infty w(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\frac{\delta}{\Gamma}}^{(\delta)}, x - ue^{\delta t} - c\bar{s}_{\frac{\delta}{\Gamma}}^{(\delta)}) dF(x) dt \end{aligned} \quad (2.8)$$

Θέτουμε  $y = ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\frac{\delta}{\Gamma}}^{(\delta)}$ , οπότε

$$t = \frac{1}{\delta} \ln \frac{c + \delta y}{c + \delta u} \Rightarrow dt = \frac{dy}{c + \delta y},$$

ενώ

$$\lambda e^{-(\lambda+\alpha)t} = \lambda e^{-\frac{\lambda+\alpha}{\delta} \ln \left( \frac{c+\delta y}{c+\delta u} \right)} = \lambda \left( \frac{c + \delta y}{c + \delta u} \right)^{-\frac{\lambda+\alpha}{\delta}} = \lambda \left( \frac{c + \delta u}{c + \delta y} \right)^{\frac{\lambda+\alpha}{\delta}}$$

Αντικαθιστώντας στην (2.8) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Phi_{\delta,\alpha}(u) &= \lambda (c + \delta u)^{\frac{\lambda+\alpha}{\delta}} \int_u^\infty (c + \delta y)^{-\left(\frac{\lambda+\alpha}{\delta} + 1\right)} \int_0^y \Phi_{\delta,\alpha}(y - x) dF(x) dy \\ &\quad + \lambda (c + \delta u)^{\frac{\lambda+\alpha}{\delta}} \int_u^\infty (c + \delta y)^{-\left(\frac{\lambda+\alpha}{\delta} + 1\right)} \int_y^\infty w(y, x - y) dF(x) dy \end{aligned}$$

Θέτοντας  $A(t) = \int_t^\infty w(t, s - t) dF(s)$ , η παραπάνω εξίσωση μας δίνει

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \lambda (c + \delta u)^{\frac{\lambda+\alpha}{\delta}} \int_u^\infty (c + \delta y)^{-\left(\frac{\lambda+\alpha}{\delta} + 1\right)} \left( \int_0^y \Phi_{\delta,\alpha}(y - x) dF(x) + A(y) \right) dy$$

Παραγωγίζοντας ως προς  $u$  και εφαρμόζοντας τον κανόνα του Leibniz<sup>1</sup> έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}\Phi_{\delta,\alpha}(u) &= \frac{d}{du} \left[ \lambda(c + \delta u)^{\frac{\lambda+\alpha}{\delta}} \right] \left[ \int_u^\infty (c + \delta y)^{-\left(\frac{\lambda+\alpha}{\delta}+1\right)} \left( \int_0^y \Phi_{\delta,\alpha}(y-x)dF(x) + A(y) \right) dy \right] \\
&\quad + \lambda(c + \delta u)^{\frac{\lambda+\alpha}{\delta}} \frac{d}{du} \left[ \int_u^\infty (c + \delta y)^{-\left(\frac{\lambda+\alpha}{\delta}+1\right)} \left( \int_0^y \Phi_{\delta,\alpha}(y-x)dF(x) + A(y)dy \right) \right] \\
&= \frac{\lambda + \alpha}{\delta} \lambda(c + \delta u)^{\frac{\lambda+\alpha}{\delta}-1} \delta \frac{\Phi_{\delta,\alpha}(u)}{\lambda(c + \delta u)^{(\lambda+\alpha)/\delta}} \\
&\quad + \lambda(c + \delta u)^{\frac{\lambda+\alpha}{\delta}} \left\{ 0 - \left[ (c + \delta u)^{-\frac{\lambda+\alpha}{\delta}-1} \left( \int_0^u \Phi_{\delta,\alpha}(u-x)dF(x) + A(u) \right) \right] + 0 \right\} \\
&= \frac{\lambda + \alpha}{c + \delta u} \Phi_{\delta,\alpha}(u) - \frac{\lambda}{c + \delta u} \left( \int_0^u \Phi_{\delta,\alpha}(u-x)dF(x) + A(u) \right)
\end{aligned}$$

Οπότε καταλήγουμε στην εξής ολοκληροδιαφορική εξίσωση για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής:

$$(c + \delta t)\Phi'_{\delta,\alpha}(t) = (\lambda + \alpha)\Phi_{\delta,\alpha}(t) - \lambda \int_0^t \Phi_{\delta,\alpha}(t-x)dF(x) - \lambda A(t) \quad (2.9)$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της (2.9) απο 0 έως  $u$ , παίρνουμε

$$\int_0^u (c + \delta t)\Phi'_{\delta,\alpha}(t)dt = (\lambda + \alpha) \int_0^u \Phi_{\delta,\alpha}(t)dt - \lambda \int_0^u \int_0^t \Phi_{\delta,\alpha}(t-x)dF(x)dt - \lambda \int_0^u A(t)dt \quad (2.10)$$

Όμως

$$\begin{aligned}
\int_0^u (c + \delta t)\Phi'_{\delta,\alpha}(t)dt &= (c + \delta t)\Phi_{\delta,\alpha}(t) \Big|_{t=0}^u - \delta \int_0^u \Phi_{\delta,\alpha}(t)dt \\
&= (c + \delta u)\Phi_{\delta,\alpha}(u) - c\Phi_{\delta,\alpha}(0) - \delta \int_0^u \Phi_{\delta,\alpha}(t)dt,
\end{aligned}$$

ενώ εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.1 στο διπλό ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της (2.10) παίρνουμε

$$\int_0^u \int_0^t \Phi_{\delta,\alpha}(t-x)dF(x)dt = \int_0^u \Phi_{\delta,\alpha}(u-x)F(x)dx$$

<sup>1</sup>Κανόνας του Leibniz για την παραγωγή ολοκληρωμάτων:

$$\frac{d}{dx} \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} g(x, s)ds = g(x, f_2(x))f_2'(x) - g(x, f_1(x))f_1'(x) + \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{d}{dx}g(x, s)ds$$

Συνολικά λοιπόν η (2.10) γίνεται

$$(c + \delta u)\Phi_{\delta,\alpha}(u) - c\Phi_{\delta,\alpha}(0) - \delta \int_0^u \Phi_{\delta,\alpha}(t)dt = (\lambda + \alpha) \int_0^u \Phi_{\delta,\alpha}(t)dt - \lambda \int_0^u \Phi_{\delta,\alpha}(t)F(u-t)dt - \lambda \int_0^u A(t)dt$$

ή διαφορετικά

$$(c + \delta u)\Phi_{\delta,\alpha}(u) = c\Phi_{\delta,\alpha}(0) - \lambda \int_0^u A(t)dt + \int_0^u [\delta + \alpha + \lambda\bar{F}(u-t)] \Phi_{\delta,\alpha}(t)dt. \quad (2.11)$$

Λύνοντας την (2.11) ως προς  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$ , καταλήγουμε στη διατύπωση του ακόλουθου θεωρήματος

**Θεώρημα 2.1.** Στο κλασικό μοντέλο με επιτόκιο, η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu είναι

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u, t)\Phi_{\delta,\alpha}(t)dt, \quad (2.12)$$

όπου

$$k_{\delta,\alpha}(u, t) = \frac{\delta + \alpha + \lambda\bar{F}(u-t)}{c + \delta u}$$

□

Η (2.12) είναι μία ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δεύτερου τύπου και η (2.11) αποτελεί μία εναλλακτική μορφή γραφής της. Σύμφωνα με τους Cai, Dickson (2002), η λύση της (2.12) δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \ell(u) + \int_0^u K_{\delta,\alpha}(u, t)\ell(t)dt, \quad (2.13)$$

όπου

$$\ell(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt$$

και

$$K_{\delta,\alpha}(u, t) = \sum_{i=0}^{\infty} k_{\delta,\alpha}^i(u, t)$$

$$k_{\delta,\alpha}^1(u, t) = k_{\delta,\alpha}(u, t) = \frac{\delta + \alpha + \lambda\bar{F}(u-t)}{c + \delta u}$$

$$k_{\delta,\alpha}^i(u, t) = \int_t^u k_{\delta,\alpha}^1(u, x)k_{\delta,\alpha}^{i-1}(x, t)dx, \quad i = 2, 3, \dots$$



## 2.4 Η ακριβής λύση για $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$

Ένα ακόμη σημαντικό βήμα στη μελέτη της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής είναι η εύρεση της  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$ . Αυτό θα μας επιτρέψει να πάρουμε αρκετά αποτελέσματα από την συγκεκριμένη συνάρτηση για διάφορα μέτρα κινδύνου, τα οποία και θα παρουσιάσουμε στα επόμενα κεφάλαια αυτής της εργασίας. Για την εύρεση της  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$  θα χρειαστεί να ορίσουμε την εξής συνάρτηση:

$$Z_{\delta,\alpha}(u) = \frac{\Phi_{\delta,\alpha}(0) - \Phi_{\delta,\alpha}(u)}{\Phi_{\delta,\alpha}(0)} \quad (2.14)$$

Ιδιότητες της  $Z_{\delta,\alpha}(u)$ :

1.  $Z_{\delta,\alpha}(0) = 0$
2. Από τους Cai, Dickson (2002) γνωρίζουμε ότι  $\Phi_{\delta,\alpha}(u) < \Phi_{\delta}(u)$  (για κανονικές κατανομές ζημιών). Όμως  $\Phi_{\delta,\alpha}(u) \rightarrow 0$  καθώς  $u \rightarrow \infty$ . Έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} Z_{\delta,\alpha}(u) = 1$$

$$3. \int_0^u Z_{\delta,\alpha}(t) dt = tZ_{\delta,\alpha}(t) \Big|_{t=0}^u - \int_0^u t dZ_{\delta,\alpha}(t) dt = uZ_{\delta,\alpha}(u) - \int_0^u t dZ_{\delta,\alpha}(t)$$

Επίσης, λύνοντας την (2.14) ως προς  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$ , παίρνουμε ότι

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \Phi_{\delta,\alpha}(0) - \Phi_{\delta,\alpha}(0)Z_{\delta,\alpha}(u) \quad (2.15)$$

Στην προηγούμενη ενότητα όμως είχαμε βρεί ότι

$$(c + \delta u)\Phi_{\delta,\alpha}(u) = c\Phi_{\delta,\alpha}(0) - \lambda \int_0^u A(t) dt + \int_0^u [\delta + \alpha + \lambda \bar{F}(u-t)]\Phi_{\delta,\alpha}(t) dt.$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν την (2.15) στην παραπάνω εξίσωση, έχουμε

$$\begin{aligned} c\Phi_{\delta,\alpha}(0) - c\Phi_{\delta,\alpha}(0)Z_{\delta,\alpha}(u) + \delta u\Phi_{\delta,\alpha}(0) - \delta u\Phi_{\delta,\alpha}(0)Z_{\delta,\alpha}(u) &= c\Phi_{\delta,\alpha}(0) - \lambda \int_0^u A(t) dt \\ + (\delta + \alpha) \int_0^u [\Phi_{\delta,\alpha}(0) - \Phi_{\delta,\alpha}(0)Z_{\delta,\alpha}(t)] dt + \lambda \int_0^u \bar{F}(u-t) [\Phi_{\delta,\alpha}(0) - \Phi_{\delta,\alpha}(0)Z_{\delta,\alpha}(t)] dt \end{aligned}$$

κάνοντας μερικές απλοποιήσεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} \delta u\Phi_{\delta,\alpha}(0) - (c + \delta u)\Phi_{\delta,\alpha}(0)Z_{\delta,\alpha}(u) &= -\lambda \int_0^u A(t) dt + (\delta + \alpha)u\Phi_{\delta,\alpha}(0) \\ -(\delta + \alpha)\Phi_{\delta,\alpha}(0) \int_0^u Z_{\delta,\alpha}(t) dt + \lambda\Phi_{\delta,\alpha}(0) \int_0^u \bar{F}(u-t) dt - \lambda\Phi_{\delta,\alpha}(0) \int_0^u \bar{F}(u-t)Z_{\delta,\alpha}(t) dt &\Rightarrow \\ -(c + \delta u)Z_{\delta,\alpha}(u) &= -\frac{\lambda}{\Phi_{\delta,\alpha}(0)} \int_0^u A(t) dt + \alpha u - (\delta + \alpha) \int_0^u Z_{\delta,\alpha}(t) dt \\ &\quad + \lambda \int_0^u \bar{F}(t) dt - \lambda \int_0^u \bar{F}(u-t)Z_{\delta,\alpha}(t) dt \end{aligned}$$

δηλαδή

$$(c + \delta u)Z_{\delta,\alpha}(u) = (\delta + \alpha) \int_0^u Z_{\delta,\alpha}(t)dt - \alpha u + \frac{\lambda\mu_A}{\Phi_{\delta,\alpha}(0)}A_1(u) - \lambda\mu F_e(u) + \lambda\mu F_e * Z_{\delta,\alpha}(u) \quad (2.16)$$

όπου

$$\mu_A = \int_0^\infty A(t)dt, \quad A_1(u) = \frac{1}{\mu_A} \int_0^u A(t)dt$$

και

$$F_e * Z_{\delta,\alpha}(u) = \int_0^u Z_{\delta,\alpha}(t)f_e(u-t)dt$$

Εφαρμόζοντας την Ιδιότητα 3 της  $Z_{\delta,\alpha}(u)$  γράφουμε την εξίσωση (2.16) σε μια μορφή που θα μας χρησιμεύσει στη συνέχεια, όταν θα δουλεύουμε με μετασχηματισμούς Laplace:

$$\begin{aligned} (c + \delta u)Z_{\delta,\alpha}(u) &= (\delta + \alpha) \left[ uZ_{\delta,\alpha}(u) - \int_0^u t dZ_{\delta,\alpha}(t) \right] - \alpha u + \frac{\lambda\mu_A}{\Phi_{\delta,\alpha}(0)}A_1(u) \\ &\quad - \lambda\mu F_e(u) + \lambda\mu F_e * Z_{\delta,\alpha}(u) \Rightarrow \\ cZ_{\delta,\alpha}(u) + \delta uZ_{\delta,\alpha}(u) &= \delta uZ_{\delta,\alpha}(u) - \delta \int_0^u t dZ_{\delta,\alpha}(t) + \alpha \left[ uZ_{\delta,\alpha}(u) - \int_0^u t dZ_{\delta,\alpha}(t) \right] \\ &\quad - \alpha u + \frac{\lambda\mu_A}{\Phi_{\delta,\alpha}(0)}A_1(u) - \lambda\mu F_e(u) + \lambda\mu F_e * Z_{\delta,\alpha}(u) \end{aligned}$$

άρα

$$cZ_{\delta,\alpha}(u) + \delta \int_0^u t dZ_{\delta,\alpha}(t) = \alpha \int_0^u Z_{\delta,\alpha}(t)dt - \alpha u + \frac{\lambda\mu_A}{\Phi_{\delta,\alpha}(0)}A_1(u) - \lambda\mu F_e(u) + \lambda\mu F_e * Z_{\delta,\alpha}(u) \quad (2.17)$$

Τώρα παίρνουμε μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της (2.17), αφού πρώτα ορίσουμε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{\delta,\alpha}(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} dZ_{\delta,\alpha}(x) \\ \tilde{f}_e(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} f_e(x)dx = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{-sx} \bar{F}(x)dx \\ \tilde{a}_1(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} dA_1(x)dx = \frac{1}{\mu_A} \int_0^\infty e^{-sx} A(x)dx \end{aligned}$$

Παραθέτουμε λοιπόν αναλυτικά τα αποτελέσματα για τον κάθε όρο της (2.17) ξεχωριστά:

- $\int_0^\infty e^{-su} cZ_{\delta,\alpha}(u)du = c \left[ -\frac{e^{-su}}{s} Z_{\delta,\alpha}(u) \Big|_{u=0}^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-su} dZ_{\delta,\alpha}(u) \right] = \frac{c}{s} \tilde{z}_{\delta,\alpha}(s)$

- $$\int_0^\infty e^{-su} \delta \int_0^u t Z'_{\delta,\alpha}(t) dt du = \delta \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-su} t Z'_{\delta,\alpha}(t) du dt = \delta \int_0^\infty t Z'_{\delta,\alpha}(t) \int_t^\infty e^{-su} du dt$$

$$= \delta \int_0^\infty t Z'_{\delta,\alpha}(t) \frac{e^{-st}}{s} dt = \frac{\delta}{s} [-\tilde{z}'_{\delta,\alpha}(s)]$$
- $$\int_0^\infty e^{-su} \alpha \int_0^u Z_{\delta,\alpha}(t) dt du = \alpha \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-su} Z_{\delta,\alpha}(t) du dt = \alpha \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s} Z_{\delta,\alpha}(t) dt$$

$$= \alpha \left[ -\frac{e^{-st}}{s^2} Z_{\delta,\alpha}(t) \Big|_{t=0}^\infty + \frac{1}{s^2} \int_0^\infty e^{-st} dZ_{\delta,\alpha}(t) \right] = \frac{\alpha}{s^2} \tilde{z}_{\delta,\alpha}(s)$$
- $$\int_0^\infty e^{-su} \frac{\lambda \mu_A}{\Phi_{\delta,\alpha}(0)} A_1(u) du = \frac{\lambda \mu_A}{\Phi_{\delta,\alpha}(0)} \left[ -\frac{e^{-su}}{s} A_1(u) \Big|_{u=0}^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-su} dA_1(u) \right]$$

$$= \frac{\lambda \mu_A}{\Phi_{\delta,\alpha}(0)} \frac{\tilde{a}_1(s)}{s}$$
- $$\int_0^\infty e^{-su} \lambda \mu F_e(u) du = \lambda \mu \left[ -\frac{e^{-su}}{s} F_e(u) \Big|_{u=0}^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-su} dF_e(u) \right] = \lambda \mu \frac{\tilde{f}_e(s)}{s}$$
- $$\int_0^\infty e^{-su} \lambda \mu \int_0^u f_e(u-t) Z_{\delta,\alpha}(t) dt du = \lambda \mu \tilde{f}_e(s) \int_0^\infty e^{-st} Z_{\delta,\alpha}(t) dt = \lambda \mu \tilde{f}_e(s) \frac{\tilde{z}_{\delta,\alpha}(s)}{s}$$

Επίσης έχουμε  $\int_0^\infty e^{-su} \alpha u du = \frac{\alpha}{s^2}$

Οπότε το συνολικό μας αποτέλεσμα θα είναι:

$$\frac{c}{s} \tilde{z}_{\delta,\alpha}(s) - \frac{\delta}{s} \tilde{z}'_{\delta,\alpha}(s) = \frac{\alpha}{s^2} \tilde{z}_{\delta,\alpha}(s) - \frac{\alpha}{s^2} + \frac{\lambda \mu_A}{\Phi_{\delta,\alpha}(0)} \frac{\tilde{a}_1(s)}{s} - \lambda \mu \frac{\tilde{f}_e(s)}{s} + \lambda \mu \tilde{f}_e(s) \frac{\tilde{z}_{\delta,\alpha}(s)}{s}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με  $s$  και κάνοντας παραγοντοποίηση παίρνουμε

$$-\delta \tilde{z}'_{\delta,\alpha}(s) + \left[ c - \lambda \mu \tilde{f}_e(s) - \frac{\alpha}{s} \right] \tilde{z}_{\delta,\alpha}(s) = \frac{\lambda \mu_A}{\Phi_{\delta,\alpha}(0)} \tilde{a}_1(s) - \lambda \mu \tilde{f}_e(s) - \frac{\alpha}{s} \quad (2.18)$$

Η (2.18) είναι μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης για την  $\tilde{z}_{\delta,\alpha}(s)$ . Για να τη λύσουμε πρέπει πρώτα να την φέρουμε στη μορφή:  $y' + P(x)y = Q(x)$ . Αρχικά θέτουμε

$$L(s) = c - \lambda \mu \tilde{f}_e(s)$$

και

$$M(s) = \frac{\lambda \mu_A}{\Phi_{\delta,\alpha}(0)} \tilde{a}_1(s) - \lambda \mu \tilde{f}_e(s)$$

οπότε η (2.18) γίνεται

$$-\delta \tilde{z}'_{\delta,\alpha}(s) + \left[ L(s) - \frac{\alpha}{s} \right] \tilde{z}_{\delta,\alpha}(s) = M(s) - \frac{\alpha}{s}$$

Διαιρώντας με  $\delta$  φέρνουμε την παραπάνω εξίσωση στην επιθυμητή μορφή  $y' + P(x)y = Q(x)$  που λύνεται πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της με  $\exp(\int P(x)dx)$  και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας. Έχουμε λοιπόν

$$\tilde{z}'_{\delta,\alpha}(s) - \frac{1}{\delta} \left[ L(s) - \frac{\alpha}{s} \right] \tilde{z}_{\delta,\alpha}(s) = -\frac{1}{\delta} \left[ M(s) - \frac{\alpha}{s} \right] \quad (2.19)$$

Επομένως πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (2.19) με

$$e^{\int_0^s -\frac{1}{\delta} [L(t) - \frac{\alpha}{t}] dt} = e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^s L(t) dt} e^{\frac{\alpha}{\delta} \int_0^s \frac{1}{t} dt} = e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^s L(t) dt} e^{\frac{\alpha}{\delta} \ln s} = s^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^s L(t) dt}$$

οπότε η (2.19) γίνεται

$$\tilde{z}'_{\delta,\alpha}(s) s^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^s L(t) dt} - \frac{1}{\delta} \left[ L(s) - \frac{\alpha}{s} \right] \tilde{z}_{\delta,\alpha}(s) s^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^s L(t) dt} = -\frac{1}{\delta} \left[ M(s) s - \alpha \right] s^{\frac{\alpha}{\delta}-1} e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^s L(t) dt}$$

Όμως το πρώτο μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι η ποσότητα

$$\frac{d}{ds} \left[ \tilde{z}_{\delta,\alpha}(s) s^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^s L(t) dt} \right]$$

άρα έχουμε

$$\frac{d}{ds} \left[ \tilde{z}_{\delta,\alpha}(s) s^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^s L(t) dt} \right] = -\frac{1}{\delta} \left[ M(s) - \frac{\alpha}{s} \right] s^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^s L(t) dt}$$

Τώρα ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη από  $s$  έως  $\infty$ , και επειδή

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{z}_{\delta,\alpha}(s) s^{\frac{\alpha}{\delta}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} s^{\frac{\alpha}{\delta}} dZ_{\delta,\alpha}(x) = 0$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_s^{\infty} d \left[ \tilde{z}_{\delta,\alpha}(y) y^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^y L(t) dt} \right] &= -\frac{1}{\delta} \int_s^{\infty} \left[ M(y)y - \alpha \right] y^{\frac{\alpha}{\delta}-1} e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^y L(t) dt} dy \Rightarrow \\ 0 - \tilde{z}_{\delta,\alpha}(s) s^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^s L(t) dt} &= -\frac{1}{\delta} \int_s^{\infty} \left[ M(y)y - \alpha \right] y^{\frac{\alpha}{\delta}-1} e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^y L(t) dt} dy \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\tilde{z}_{\delta,\alpha}(s) s^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^s L(t) dt} = \frac{1}{\delta} \int_s^{\infty} \left[ M(y)y - \alpha \right] y^{\frac{\alpha}{\delta}-1} e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^y L(t) dt} dy$$

Θέτοντας  $s = 0$ , έχουμε  $\left( L(s) = c - \lambda \mu \tilde{f}_e(s), M(s) = \frac{\lambda \mu_A}{\Phi_{\delta,\alpha}(0)} \tilde{a}_1(s) - \lambda \mu \tilde{f}_e(s) \right)$

$$0 = \frac{\lambda \mu_A}{\Phi_{\delta,\alpha}(0)} \int_0^{\infty} \tilde{a}_1(y) y^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^y [c - \lambda \mu \tilde{f}_e(t)] dt} dy - \frac{1}{\delta} \int_0^{\infty} \left( \lambda \mu \tilde{f}_e(y) y + \alpha \right) y^{\frac{\alpha}{\delta}-1} e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^y [c - \lambda \mu \tilde{f}_e(t)] dt} dy$$

απόπου μπορούμε να λύσουμε ως προς  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$ :

$$\Phi_{\delta,\alpha}(0) = \frac{\lambda\mu_A \int_0^\infty \tilde{a}_1(y) y^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^y [c - \lambda\mu \tilde{f}_e(t)] dt} dy}{\int_0^\infty (\lambda\mu \tilde{f}_e(y) y + \alpha) y^{\frac{\alpha}{\delta} - 1} e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^y [c - \lambda\mu \tilde{f}_e(t)] dt} dy}$$

Θα απλοποιήσουμε το ολοκλήρωμα του παρονομαστή

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty (\lambda\mu \tilde{f}_e(y) y + \alpha) y^{\frac{\alpha}{\delta} - 1} e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^y [c - \lambda\mu \tilde{f}_e(t)] dt} dy = \\ & = \lambda\mu \int_0^\infty \tilde{f}_e(y) y^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^y [c - \lambda\mu \tilde{f}_e(t)] dt} dy + \alpha \int_0^\infty y^{\frac{\alpha}{\delta} - 1} e^{-\frac{1}{\delta} \int_0^y [c - \lambda\mu \tilde{f}_e(t)] dt} dy \end{aligned}$$

θέτουμε  $y = \delta v$  ( $dy = \delta dv$ ) και  $t = \delta s$  ( $dt = \delta ds$ )

$$= \lambda\mu \int_0^\infty \tilde{f}_e(\delta v) (\delta v)^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} \delta dv + \alpha \int_0^\infty (\delta v)^{\frac{\alpha}{\delta} - 1} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} \delta dv$$

οπότε έχουμε

$$\Phi_{\delta,\alpha}(0) = \frac{\lambda\mu_A \delta^{\frac{\alpha}{\delta}} \int_0^\infty \tilde{a}_1(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} \delta dv}{\delta^{\frac{\alpha}{\delta}} \delta \left[ \lambda\mu \int_0^\infty \tilde{f}_e(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv + \frac{\alpha}{\delta} \int_0^\infty v^{\frac{\alpha}{\delta} - 1} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv \right]}$$

Θέτουμε

$$\zeta_{\delta,\alpha} = \lambda\mu \int_0^\infty \tilde{f}_e(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$

και

$$\begin{aligned} \iota_{\delta,\alpha} &= \int_0^\infty \frac{\alpha}{\delta} v^{\frac{\alpha}{\delta} - 1} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv = \int_0^\infty (v^{\frac{\alpha}{\delta}})' e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv = \\ &= v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} \Big|_{v=0}^\infty - \int_0^\infty [-c + \lambda\mu \tilde{f}_e(\delta v)] v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv \\ &= \int_0^\infty [c - \lambda\mu \tilde{f}_e(\delta v)] v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv \end{aligned}$$

και φτάνουμε στην απλοποιημένη μορφή

$$\Phi_{\delta,\alpha}(0) = \frac{\lambda\mu_A}{\zeta_{\delta,\alpha} + \iota_{\delta,\alpha}} \int_0^\infty \tilde{a}_1(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$

Αναλύοντας την ποσότητα  $\iota_{\delta,\alpha}$  φτάνουμε σε μία ακόμα πιο απλή μορφή για την  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$ . Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \iota_{\delta,\alpha} &= \int_0^\infty [c - \lambda\mu \tilde{f}_e(\delta v)] v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv = \\ &= c \int_0^\infty v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv - \lambda\mu \int_0^\infty \tilde{f}_e(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv \end{aligned}$$

και αν θέσουμε

$$\kappa_{\delta,\alpha} = c \int_0^\infty v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv+\lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$\iota_{\delta,\alpha} = \kappa_{\delta,\alpha} - \zeta_{\delta,\alpha},$$

οπότε

$$\zeta_{\delta,\alpha} + \iota_{\delta,\alpha} = \zeta_{\delta,\alpha} + \kappa_{\delta,\alpha} - \zeta_{\delta,\alpha} = \kappa_{\delta,\alpha}$$

Με αυτούς τους τελευταίους υπολογισμούς ολοκληρώνεται ο υπολογισμός της  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$  που ήταν και ο αρχικός σκοπός μας. Το Θεώρημα που ακολουθεί αποτελεί το βασικό συμπέρασμα αυτής της παραγράφου.

**Θεώρημα 2.2.** Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με σταθερό επιτόκιο ισχύει

$$\Phi_{\delta,\alpha}(0) = \lambda\mu_A \left( c \int_0^\infty v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv+\lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv \right)^{-1} \int_0^\infty \tilde{a}_1(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv+\lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$

ή διαφορετικά

$$\Phi_{\delta,\alpha}(0) = \frac{\lambda\mu_A}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^\infty \tilde{a}_1(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv+\lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$

όπου

$$\kappa_{\delta,\alpha} = c \int_0^\infty v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv+\lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$

□

## Κεφάλαιο 3

# Υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και της πιθανότητας χρεοκοπίας

Οι Liu-Mao (2006) χρησιμοποίησαν την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu και έδωσαν την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε αναλυτικά αυτό το αποτέλεσμα, ενώ θα βρούμε και την αντίστοιχη εξίσωση για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Στη συνέχεια θα παραθέσουμε την αναλυτική λύση για την πιθανότητα χρεοκοπίας, όταν τα μεγέθη ζημιών ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Τέλος θα δώσουμε ορισμένες αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων Volterra.

Έχουμε συμβολίσει με  $\psi_\delta(u)$  την πιθανότητα χρεοκοπίας για το κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο, όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι  $u$ . Θυμίζουμε ότι η  $\psi_\delta(u)$  εκφράζει τη πιθανότητα το πλεόνασμα να πέσει κάτω από το μηδέν, όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι  $u$ . Αν λοιπόν  $T_\delta$  είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, δηλαδή η πρώτη φορά που το πλεόνασμα λαμβάνει μία αυστηρά αρνητική τιμή, τότε

$$T_\delta = \inf \{t : U_\delta(t) < 0\}$$

και

$$\psi_\delta(u) = \Pr[U_\delta(t) < 0] = E[I(T_\delta < \infty)]. \quad (3.1)$$

Ένα άλλο πολύ σημαντικό μέτρο κινδύνου που θα εξετάσουμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, ήτοι

$$\psi_{\delta,\alpha}(u) = E[e^{-\alpha T_\delta} I(T_\delta < \infty)] \quad (3.2)$$

Από τις (3.1) και (3.2) διαπιστώνουμε εύκολα ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας αποτελεί μία ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, καθώς για  $\alpha = 0$  ισχύει

$$\psi_{\delta,0}(u) = \psi_\delta(u).$$

Στις επόμενες δύο παραγράφους θα βρούμε τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra που ικανοποιούν ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και η πιθανότητα χρεοκοπίας αντίστοιχα.

### 3.1 Η ολοκληρωτική εξίσωση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και η λύση της

Όπως τονίσαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας αποτελεί μία ειδική περίπτωση της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu. Συγκεκριμένα, για  $w(x_1, x_2) = 1$  έχουμε

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = E [e^{-\alpha T_\delta} I(T_\delta < \infty)] = \psi_{\delta,\alpha}(u).$$

Στο Κεφάλαιο 2 βρήκαμε την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu (βλ. Θεώρημα 2.1). Στα πλαίσια του ακόλουθου Θεωρήματος θα καταλήξουμε στην ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και τη λύση της.

**Θεώρημα 3.1.** Η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας είναι

$$\psi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\psi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u K_{\delta,\alpha}(u, t) \left[ \frac{c\psi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta t} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta t} F_e(t) \right] dt, \quad (3.3)$$

όπου

$$K_{\delta,\alpha}(u, t) = \sum_{m=1}^{\infty} k_{\delta,\alpha}^m(u, t), \quad u > t \geq 0$$

$$k_{\delta,\alpha}^m(u, t) = \int_t^u k_{\delta,\alpha}(u, x) k_{\delta,\alpha}^{m-1}(x, t), \quad m = 2, 3, \dots$$

$$k_{\delta,\alpha}^1(u, t) = k_{\delta,\alpha}(u, t) = \frac{\delta + \alpha + \lambda \bar{F}(u - t)}{c + \delta u}.$$

και η ποσότητα  $\psi_{\delta,\alpha}(0)$  δίνεται από τη σχέση:

$$\psi_{\delta,\alpha}(0) = \frac{\zeta_{\delta,\alpha}}{\kappa_{\delta,\alpha}}, \quad (3.4)$$

όπου

$$\kappa_{\delta,\alpha} = c \int_0^\infty v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$

και

$$\zeta_{\delta,\alpha} = \lambda\mu \int_0^\infty \tilde{f}_e(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$



### Απόδειξη:

Για  $w(x_1, x_2) = 1$  ισχύουν τα εξής:

$$A(t) = \int_t^\infty f(x)dx = \bar{F}(t)$$

$$\mu_A = \int_0^\infty A(t)dt = \int_0^\infty \bar{F}(t)dt = E(X) = \mu$$

$$\tilde{\alpha}_1(\delta v) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{-\delta vt} A(t)dt = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{-\delta vt} \bar{F}(t)dt = \int_0^\infty e^{-\delta vt} f_e(t)dt = \tilde{f}_e(\delta v)$$

Θυμίζουμε ότι η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu είναι:

$$\Phi_{\delta, \alpha}(u) = \frac{c\Phi_{\delta, \alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt + \int_0^u k_{\delta, \alpha}(u, t)\Phi_{\delta, \alpha}(t)dt$$

όπου

$$k_{\delta, \alpha}(u, t) = \frac{\delta + \alpha + \lambda\bar{F}(u-t)}{c + \delta u}.$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν τις ποσότητες που βρήκαμε όταν  $w(x_1, x_2) = 1$  παίρνουμε ότι

$$\psi_{\delta, \alpha}(u) = \frac{c\psi_{\delta, \alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u \bar{F}(t)dt + \int_0^u k_{\delta, \alpha}(u, t)\psi_{\delta, \alpha}(t)dt.$$

Δηλαδή η ολοκληρωτική εξίσωση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας είναι

$$\psi_{\delta, \alpha}(u) = \frac{c\psi_{\delta, \alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u k_{\delta, \alpha}(u, t)\psi_{\delta, \alpha}(t)dt. \quad (3.5)$$

Για  $\delta > 0$  και  $\alpha > 0$  η (3.5) είναι μία ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δεύτερου τύπου. Θέτοντας λοιπόν

$$\ell(u) = \frac{c\psi_{\delta, \alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u)$$

καθώς και

$$k_{\delta, \alpha}^1(u, t) = k_{\delta, \alpha}(u, t) = \frac{\delta + \alpha + \lambda\bar{F}(u-t)}{c + \delta u}$$

η (3.5) παίρνει τη μορφή

$$\phi(u) = \ell(u) + \int_0^u k_{\delta, \alpha}(u, t)\phi(t)dt. \quad (3.6)$$

Επομένως αν

$$k_{\delta, \alpha}^m(u, t) = \int_t^u k_{\delta, \alpha}(u, x)k_{\delta, \alpha}^{m-1}(x, t), \quad m = 2, 3, \dots$$

και

$$K_{\delta,\alpha}(u,t) = \sum_{m=1}^{\infty} k_{\delta,\alpha}^m(u,t), \quad u > t \geq 0$$

τότε η μοναδική λύση της (3.6) θα είναι:

$$\phi(u) = \ell(u) + \int_0^u K_{\delta,\alpha}(u,t)\ell(t)dt$$

ή αναλυτικότερα

$$\psi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\psi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u}F_e(u) + \int_0^u K_{\delta,\alpha}(u,t) \left[ \frac{c\psi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta t} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta t}F_e(t) \right] dt. \quad (3.7)$$

Επίσης στο προηγούμενο κεφάλαιο είχαμε βρει ότι η ποσότητα  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$  δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi_{\delta,\alpha}(0) = \frac{\lambda\mu_A}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^{\infty} \tilde{a}_1(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$

όπου

$$\kappa_{\delta,\alpha} = c \int_0^{\infty} v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$

Όμως όταν  $w(x_1, x_2) = 1$

$$\lambda\mu_A \int_0^{\infty} \tilde{a}_1(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv = \lambda\mu \int_0^{\infty} \tilde{f}_e(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv = \zeta_{\delta,\alpha}$$

Επομένως ισχύει

$$\psi_{\delta,\alpha}(0) = \frac{\zeta_{\delta,\alpha}}{\kappa_{\delta,\alpha}},$$

σχέση που ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1. □

## 3.2 Η πιθανότητα χρεοκοπίας

Έχουμε ήδη ορίσει την πιθανότητα την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω της σχέσης (3.1). Σε σχέση με τις ποσότητες που έχουμε ήδη μελετήσει, η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να προκύψει με δύο τρόπους:

1. Από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu, καθώς για  $w(x_1, x_2) = 1$  και  $\alpha = 0$  ισχύει

$$\Phi_{\delta,0}(u) = E [I(T_{\delta} < \infty) | U_{\delta}(0) = u] = \psi_{\delta}(u), \quad \text{ή}$$

2. Από τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, αφού όπως έχουμε ήδη αναφέρει

$$\psi_{\delta,0}(u) = \psi_{\delta}(u)$$

Από τις παραπάνω μεθοδολογίες θα προτιμήσουμε την δεύτερη που είναι πιο άμεση. Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας από την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί το συγκεκριμένο μέτρο κινδύνου.

**Πρόταση 3.1.** Η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση:

$$\psi_{\delta}(u) = \frac{c\psi_{\delta}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u k_{\delta}(u, t)\psi_{\delta}(t)dt, \quad (3.8)$$

όπου

$$k_{\delta}(u, t) = \frac{\delta + \lambda\bar{F}(u - t)}{c + \delta u}.$$

**Απόδειξη:**

Η (3.8) προκύπτει άμεσα από την (3.5) για  $\alpha = 0$ . □

Έχοντας στη διάθεσή μας της ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορούμε:

1. Να την λύσουμε, καθώς είναι μία ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δεύτερου τύπου, ή
2. Να την παραγωγίσουμε για να πάρουμε μία ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Εκμεταλλευόμενοι τις παραπάνω επιλογές, παρουσιάζουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα στα Θεώρηματα που ακολουθούν.

**Θεώρημα 3.2.** Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας, δίνεται από την σχέση

$$\psi_{\delta}(u) = \frac{c\psi_{\delta}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u K_{\delta}(u, t) \left[ \frac{c\psi_{\delta}(0)}{c + \delta t} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta t} F_e(t) \right] dt, \quad (3.9)$$

όπου

$$K_{\delta}(u, t) = \sum_{m=1}^{\infty} k_{\delta}^m(u, t), \quad u > t \geq 0$$

$$k_\delta^m(u, t) = \int_t^u k_\delta(u, x) k_\delta^{m-1}(x, t), \quad m = 2, 3, \dots$$

$$k_\delta^1(u, t) = k_\delta(u, t) = \frac{\delta + \lambda \bar{F}(u - t)}{c + \delta u}.$$

Επίσης ισχύει

$$\psi_\delta(0) = \frac{\kappa_\delta - 1}{\kappa_\delta}, \quad (3.10)$$

όπου

$$\kappa_\delta = c \int_0^\infty e^{-cv + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$

**Απόδειξη:**

Η απόδειξη της (3.9) προκύπτει από την (3.5) για  $\alpha = 0$ .

Επίσης, για  $\alpha = 0$  αποδεικνύεται ότι  $\zeta_\delta = \kappa_\delta - 1$  καθώς

$$\begin{aligned} \zeta_\delta &= \lambda \mu \int_0^\infty \tilde{f}_e(\delta v) e^{-cv + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv = \int_0^\infty e^{-cv} d \left( e^{\lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} \right) = \\ &= e^{-cv} e^{\lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} \Big|_{v=0}^\infty + c \int_0^\infty e^{-cv} e^{\lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv = 0 - 1 + \kappa_\delta = \kappa_\delta - 1 \end{aligned}$$

οπότε

$$\psi_{\delta,0}(0) = \psi_\delta(0) = \frac{\kappa_\delta - 1}{\kappa_\delta},$$

σχέση που ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2. □

**Θεώρημα 3.3.** Στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο, η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$(c + \delta u) \psi'_\delta(u) = \lambda \psi_\delta(u) - \lambda \int_0^u \psi_\delta(u - x) f(x) dx - \lambda \bar{F}(u) \quad (3.11)$$

**Απόδειξη:**

Η (3.8) γράφεται

$$(c + \delta u) \psi_\delta(u) = c \psi_\delta(0) + \int_0^u [\delta + \lambda \bar{F}(u - x)] \psi_\delta(x) dx - \lambda \mu F_e(u)$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς  $u$ , παίρνουμε

$$\delta \psi_\delta(u) + (c + \delta u) \psi'_\delta(u) = \delta \psi_\delta(u) + \lambda \bar{F}(0) \psi_\delta(u) - \lambda \int_0^u f(u - x) \psi_\delta(x) dx - \lambda \bar{F}(u).$$

Δηλαδή ισχύει

$$(c + \delta u)\psi'_\delta(u) = \lambda\psi_\delta(u) - \lambda \int_0^u f(u-x)\psi_\delta(x)dx - \lambda\bar{F}(u),$$

σχέση που ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3, διότι

$$\int_0^u f(u-x)\psi_\delta(x)dx = \int_0^u \psi_\delta(u-x)f(x)dx.$$

□

Παρατηρούμε ότι η εύρεση αναλυτικών αποτελεσμάτων για την πιθανότητα χρεοκοπίας στα πλαίσια του κλασικού μοντέλου με επιτόκιο, δεν είναι εύκολη υπόθεση. Ωστόσο κάνοντας χρήση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης του Θεωρήματος 3.3, μπορούμε να πάρουμε αναλυτικές λύσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας για εκθετικά μεγέθη ζημιών. Στην παράγραφο που ακολουθεί θα εφαρμόσουμε τη συγκεκριμένη μεθοδολογία.

### 3.3 Αναλυτικά αποτελέσματα για εκθετικά μεγέθη ζημιών

Η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση του Θεωρήματος 3.3 γράφεται

$$(c + \delta u)\psi'_\delta(u) = \lambda\psi_\delta(u) - \lambda \int_0^u f(u-x)\psi_\delta(x)dx - \lambda\bar{F}(u) \quad (3.12)$$

Υποθέτουμε ότι  $X \sim \text{Exp}(\beta)$ . Τότε για  $\beta > 0$  θα ισχύει

$$f(u-x) = \beta e^{-\beta(u-x)} \quad \text{και} \quad \bar{F}(x) = e^{-\beta x},$$

οπότε  $X \sim \text{Exp}(\beta)$  η (3.12) δίνει

$$(c + \delta u)\psi'_\delta(u) = \lambda\psi_\delta(u) - \lambda\beta e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta x}\psi_\delta(x)dx - \lambda e^{-\beta u} \quad (3.13)$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (3.13) ως προς  $u$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \delta\psi'_\delta(u) + (c + \delta u)\psi''_\delta(u) &= \lambda\psi'_\delta(u) + \lambda\beta^2 e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta x}\psi_\delta(x)dx \\ &\quad - \lambda\beta e^{-\beta u} e^{\beta u}\psi_\delta(u) + \lambda\beta e^{-\beta u} \\ &\stackrel{(3.13)}{=} \lambda\psi'_\delta(u) + \beta [\lambda\psi_\delta(u) - (c + \delta u)\psi'_\delta(u) - \lambda e^{-\beta u}] \\ &\quad - \lambda\beta\psi_\delta(u) + \lambda\beta e^{-\beta u} \end{aligned}$$

Επομένως η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$(c + \delta u)\psi''_{\delta}(u) + [\beta(c + \delta u) + \delta - \lambda]\psi'_{\delta}(u) = 0 \quad (3.14)$$

Θέτοντας

$$q_{\delta}(u) = \frac{\beta(c + \delta u) + \delta - \lambda}{c + \delta u}$$

η (3.14) γίνεται

$$\psi''_{\delta}(u) + q_{\delta}(u)\psi'_{\delta}(u) = 0$$

ή διαφορετικά

$$\frac{\psi''_{\delta}(u)}{\psi'_{\delta}(u)} = -q_{\delta}(u) \quad (3.15)$$

Μπορούμε λοιπόν να λύσουμε την (3.15) ως προς  $\psi'_{\delta}(u)$  και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας να βρούμε την  $\psi_{\delta}(u)$ . Αρχικά ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της (3.15) από 0 έως  $u$ :

$$\int_0^u \frac{\psi''_{\delta}(t)}{\psi'_{\delta}(t)} dt = - \int_0^u q_{\delta}(t) dt \Rightarrow \ln [\psi'_{\delta}(t)] \Big|_{t=0}^u = - \int_0^u q_{\delta}(t) dt.$$

Δηλαδή ισχύει

$$\ln \left[ \frac{\psi'_{\delta}(u)}{\psi'_{\delta}(0)} \right] = - \int_0^u q_{\delta}(t) dt \Rightarrow \psi'_{\delta}(u) = \psi'_{\delta}(0) e^{- \int_0^u q_{\delta}(t) dt}$$

και αν θέσουμε

$$b_{\delta}(u) = e^{- \int_0^u q_{\delta}(t) dt},$$

παίρνουμε

$$\psi'_{\delta}(u) = \psi'_{\delta}(0) b_{\delta}(u) \quad (3.16)$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της (3.16) από 0 έως  $u$  παίρνουμε:

$$\int_0^u \psi'_{\delta}(t) dt = \psi'_{\delta}(0) \int_0^u b_{\delta}(t) dt$$

Δηλαδή η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση

$$\psi_{\delta}(u) = \psi_{\delta}(0) + \psi'_{\delta}(0) \int_0^u b_{\delta}(t) dt.$$

Για να ολοκληρωθεί ο υπολογισμός της  $\psi_{\delta}(u)$  πρέπει να προσδιορίσουμε τις ποσότητες  $\psi_{\delta}(0)$  και  $\psi'_{\delta}(0)$ . Από την (3.12) για  $u = 0$  προκύπτει η εξής οριακή συνθήκη για την  $\psi'_{\delta}(0)$ :

$$c\psi'_{\delta}(0) = \lambda\psi_{\delta}(0) - \lambda \Rightarrow \psi'_{\delta}(0) = \frac{\lambda}{c} [\psi_{\delta}(0) - 1] \quad (3.17)$$

Οπότε αυτό που μας μένει είναι να βρούμε και την  $\psi_\delta(0)$ .

**Υπολογισμός της  $\psi_\delta(0)$  :**

Από την εξίσωση (3.10) του Θεωρήματος 3.2 γνωρίζουμε ότι

$$\psi_\delta(0) = \frac{\kappa_\delta - 1}{\kappa_\delta} = 1 - \frac{1}{\kappa_\delta},$$

όπου

$$\kappa_\delta = c \int_0^\infty e^{-cv} e^{\lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv.$$

Στην περίπτωση μας ισχύει

$$\tilde{f}_e(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_e(x) dx = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{-sx} \bar{F}(x) dx = \beta \int_0^\infty e^{-sx} e^{-\beta x} dx = \frac{\beta}{\beta + s}.$$

Άρα

$$\kappa_\delta = c \int_0^\infty e^{-cv + \frac{\lambda}{\beta} \int_0^v \frac{\beta}{\beta + \delta s} ds} dv.$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\beta} \int_0^v \frac{\beta}{\beta + \delta s} ds &= \lambda \int_0^v \frac{1}{\beta + \delta s} ds = \frac{\lambda}{\delta} \int_0^v \frac{\delta}{\beta + \delta s} ds = \frac{\lambda}{\beta} \left[ \ln(\beta + \delta s) \Big|_{s=0}^v \right] \\ &= \frac{\lambda}{\beta} [\ln(\beta + \delta v) - \ln \beta] = \frac{\lambda}{\delta} \ln \left( \frac{\beta + \delta v}{\beta} \right) \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\kappa_\delta = c \int_0^\infty e^{-cv + \frac{\lambda}{\delta} \ln \left( \frac{\beta + \delta v}{\beta} \right)} dv.$$

και κατά συνέπεια, για  $X \sim Exp(\beta)$ , ισχύει

$$\psi_\delta(0) = 1 - \frac{1}{c \int_0^\infty e^{-cv + \frac{\lambda}{\delta} \ln \left( \frac{\beta + \delta v}{\beta} \right)} dv} \quad (3.18)$$

Ως ένα τελευταίο βήμα μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικότερα και την ποσότητα  $b_\delta(u)$ . Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \int_0^u q_\delta(t) dt &= \int_0^u \frac{\beta(c + \delta t) + \delta - \lambda}{c + \delta t} dt = \beta u + \int_0^u \frac{\delta}{c + \delta t} dt - \frac{\lambda}{\delta} \int_0^u \frac{\delta}{c + \delta t} dt \\ &= \beta u + \left(1 - \frac{\lambda}{\delta}\right) \int_0^u \frac{\delta}{c + \delta t} dt = \beta u + \left(1 - \frac{\lambda}{\delta}\right) \left[ \ln(c + \delta t) \Big|_{t=0}^u \right] dt \\ &= \beta u + \ln \left( \frac{c + \delta u}{c} \right)^{\frac{\delta - \lambda}{\delta}} \end{aligned}$$

Άρα ισχύει

$$b_{\delta}(u) = e^{-\beta u} \left( \frac{c + \delta u}{c} \right)^{-\frac{\delta-\lambda}{\delta}}$$

Στη πρόταση που ακολουθεί συνοψίζουμε την αναλυτική λύση για την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν τα μεγέθη ατομικών ζημιών ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παραμετρο  $\beta$ .

**Πρόταση 3.2.** Στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου με σταθερό επιτόκιο, όταν  $X \sim \text{Exp}(\beta)$ , τότε για  $u > 0$  ισχύει

$$\psi_{\delta}(u) = \psi_{\delta}(0) + \psi'_{\delta}(0) \int_0^u b_{\delta}(t) dt, \quad (3.19)$$

όπου

$$b_{\delta}(u) = e^{-\beta u} \left( \frac{c + \delta u}{c} \right)^{-\frac{\delta-\lambda}{\delta}},$$

$$\psi_{\delta}(0) = 1 - \frac{1}{c \int_0^{\infty} e^{-cv + \frac{\lambda}{\delta} \ln \left( \frac{\beta + \delta v}{\beta} \right) dv}} \quad \text{και} \quad \psi'_{\delta}(0) = \frac{\lambda}{c} [\psi_{\delta}(0) - 1].$$

□

**Παράδειγμα 3.1.** Έστω ότι τα μεγέθη ατομικών ζημιών ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παραμετρο  $\beta = 2$ , δηλαδή

$$f(x) = 2e^{-2x}, \quad x \geq 0 \quad \text{και} \quad E[X] = \mu = \frac{1}{\beta} = 0.5$$

Έστω επίσης  $\lambda = 55$  και  $c = 30.25$ .

Εφαρμόζοντας τους τύπους της Πρότασης 3.2 για τις τιμές των παραμέτρων που ορίσαμε παραπάνω, υπολογίσαμε την πιθανότητα χρεοκοπίας στο Mathematica για  $\delta = 0.05, \delta = 0.07, \delta = 0.1$  και διάφορες τιμές του αρχικού κεφαλαίου  $u$ . Τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα που ακολουθεί

Πίνακας 1

Η πιθανότητα χρεοκοπίας όταν  $X \sim \text{Exp}(2)$

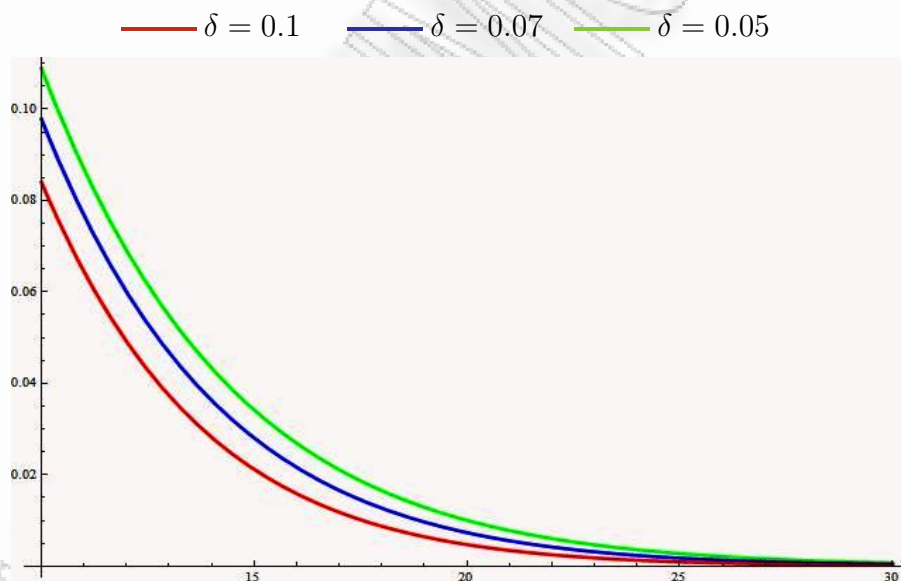
u	$\delta = 0.05$	$\delta = 0.07$	$\delta = 0.1$
0	0.90199	0.89959	0.89629
5	0.32445	0.31097	0.29299
10	0.10892	0.09781	0.08400
20	0.03415	0.02802	0.02117
30	0.01001	0.00732	0.00470
40	0.00274	0.00175	0.00092



## Σχόλια:

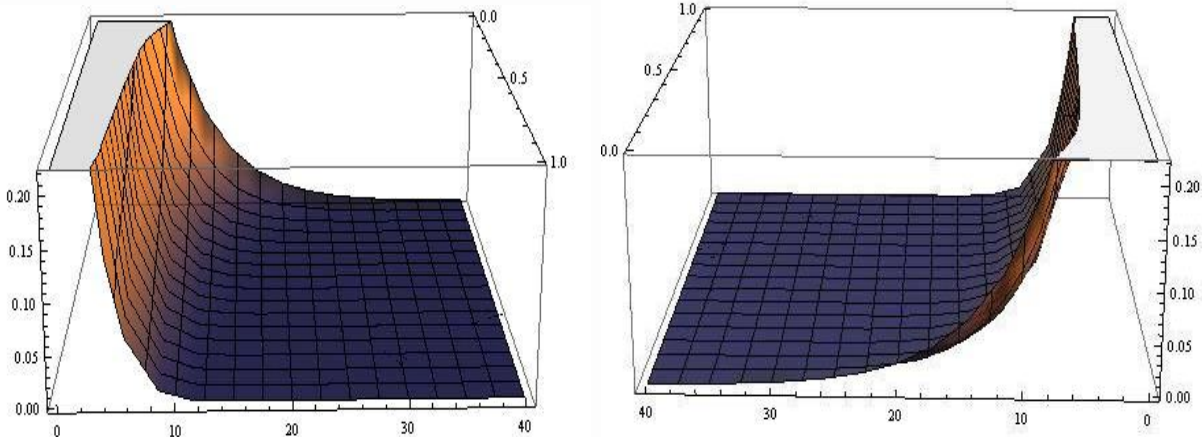
1. Παρατηρούμε στον Πίνακα 1 ότι όσο αυξάνεται η ένταση ανατοκισμού, τόσο μειώνεται η πιθανότητα χρεοκοπίας. Αυτό είναι απολύτως αναμενόμενο, αφού στο μοντέλο μας το πλεόνασμα επενδύεται. Επομένως όσο μεγαλύτερη απόδοση έχει η επένδυσή μας, τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα το πλεόνασμα να “πέσει” κάτω από το μηδέν. Αυτή είναι και η ανταμοιβή μας για το επενδυτικό ρίσκο που αναλαμβάνουμε.
2. Όσο αυξάνεται το αρχικό κεφάλαιο, τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας. Αυτή η ιδιότητα της πιθανότητας χρεοκοπίας μας είναι γνωστή και από το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου χωρίς επιτόκιο.

Η επίδραση που έχει η μεταβολή της έντασης ανατοκισμού πάνω στην πιθανότητα χρεοκοπίας φαίνεται καλύτερα στο παρακάτω (Σχήμα 3.1). Εκεί βλέπουμε μία γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας για τρεις διαφορετικές τιμές της έντασης ανατοκισμού όταν το αρχικό κεφάλαιο παίρνει τιμές στο διάστημα  $[10, 30]$ . Βλέπουμε χαρακτηριστικά ότι για τη μικρότερη ένταση ανατοκισμού (πράσινη γραμμή) παίρνουμε τη μεγαλύτερη πιθανότητα χρεοκοπίας.



Σχήμα 3.1: Η πιθανότητα χρεοκοπίας με  $\delta = 0.05$ ,  $\delta = 0.07$  και  $\delta = 0.1$ .

Μορούμε ακόμη να δούμε την πιθανότητα χρεοκοπίας ως συνάρτηση τόσο του αρχικού κεφαλαίου, όσο και της έντασης ανατοκισμού. Στο Σχήμα 3.2 βλέπουμε πώς επηρεάζεται η πιθανότητα χρεοκοπίας όταν μεταβάλλονται ταυτόχρονα η ένταση ανατοκισμού και το αρχικό κεφάλαιο.



Σχήμα 3.2: Η πιθανότητα χρεοκοπίας με  $0 < \delta < 1$  και  $0 < u < 40$ .

### 3.4 Αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων Volterra

Στις Παραγράφους 3.1 και 3.2 είδαμε ότι τόσο η πιθανότητα χρεοκοπίας όσο και ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, ικανοποιούν ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra δεύτερου τύπου. Οι συγκεκριμένες εξισώσεις λύνονται με αριθμητικές μεθόδους στις οποίες έχουμε ήδη αναφερθεί. Στα παραδείγματα που ακολουθούν θα επιχειρήσουμε να πάρουμε ορισμένα αριθμητικά αποτελέσματα για τα δύο μέτρα κινδύνου που μας ενδιαφέρουν. Θα πρέπει ωστόσο να τονίσουμε ότι τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου είναι προσεγγιστικά και δεν αποτελούν ακριβείς λύσεις για τα μέτρα που μελετάμε.

**Παράδειγμα 3.2.** Έστω ότι τα μεγέθη ατομικών αποζημιώσεων ακολουθούν την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους  $\alpha$  και  $\beta$ , δηλαδή

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x \geq 0 \text{ και } \alpha, \beta > 0.$$

Επιλέγουμε τις τιμές  $\alpha = 2$  και  $\beta = 2$  για τις παραμέτρους, ενώ θα θεωρήσουμε ότι  $\lambda = 55$  και  $c = 60$ .

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\psi_\delta(0) = 1 - \frac{1}{\kappa_\delta},$$

όπου

$$\kappa_\delta = c \int_0^\infty e^{-cx} + \lambda \mu \int_0^x \tilde{f}_e(\delta s) ds dx$$

και

$$\tilde{f}_e(s) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{F}(x) dx$$

υπολογίσαμε ότι για  $\delta = 0.05$ ,  $\delta = 0.07$ , και  $\delta = 0.1$  αντίστοιχα, οι τιμές της ποσότητας  $\psi_\delta(0)$  ήταν  $\psi_{0.05}(0) = 0.910681$ ,  $\psi_{0.07}(0) = 0.908631$ , και  $\psi_{0.1}(0) = 0.905796$ . Στην συνέχεια ορίσαμε την συνάρτηση

$$k_\delta^1(u, t) = \frac{\delta + \lambda \bar{F}(u-t)}{c + \delta u}.$$

Για μία κατανομή  $G(2, 2)$  ισχύει  $\bar{F}(x) = e^{-2x}(1 + 2x)$ . Με τη βοήθεια της  $k_\delta^1(u, t)$ , ορίσαμε τις  $k_\delta^i(u, t)$ ,  $i = 2, 3, \dots$  μέσω της αναδρομικής σχέσης

$$k_\delta^i(u, t) = \int_t^u k_\delta^1(u, x) k_\delta^{i-1}(x, t) dx.$$

Ακόμη, χρησιμοποιώντας μία “ForLoop” μπορούμε εύκολα να ορίσουμε και την συνάρτηση

$$K_\delta(u, t) = \sum_{i=1}^{\infty} k_\delta^i(u, t)$$

Τέλος θέτοντας

$$\ell(u) = \frac{c\psi_\delta(0)}{c + \delta u} + \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u),$$

μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω της σχέσης

$$\psi_\delta(u) = \ell(u) + \int_0^u K_\delta(u, t) \ell(t) dt$$

Οι σχετικοί υπολογισμοί έγιναν στο πρόγραμμα Maple και οι εντολές συμπεριλαμβάνονται στο Παράρτημα. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον ακόλουθο Πίνακα.

Πίνακας 2

Η πιθανότητα χρεοκοπίας όταν  $X \sim G(2, 2)$

u	$\delta = 0.05$	$\delta = 0.07$	$\delta = 0.1$
0	0.91068	0.90863	0.90580
5	0.50663	0.49626	0.48207
10	0.47873	0.46182	0.43885
20	0.43921	0.40976	0.37034
30	0.40059	0.35933	0.30481
40	0.36282	0.31043	0.24203

Και σε αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το αρχικό κεφάλαιο και η ένταση ανατοκισμού, τόσο μειώνεται η πιθανότητα χρεοκοπίας. Ωστόσο τα αποτελέσματά μας δεν είναι τόσο “ξεκάθαρα” όσο τα ακριβή αποτελέσματα του Παραδείγματος 3.1. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για την εύρεση της συνάρτησης  $K_\delta(u, t)$  χρησιμοποιήσαμε μόνο τους τρεις πρώτους όρους του αθροίσματος (δηλαδή τις συναρτήσεις  $k_\delta^1(u, t)$ ,  $k_\delta^2(u, t)$  και  $k_\delta^3(u, t)$ ). Δυστυχώς όσο αυξάνεται το  $i$  προστίθεται ένα ακόμη ολοκλήρωμα στην συνάρτηση  $k_\delta^i(u, t)$ , πράγμα που καθιστά τους υπολογισμούς αρκετά δύσκολους.

Επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία και για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας. Η διαφορά εδώ ήταν ότι χρησιμοποιήσαμε τη σχέση

$$\psi_{\delta, \alpha}(0) = \frac{\zeta_{\delta, \alpha}}{\kappa_{\delta, \alpha}}$$

όπου

$$\zeta_\delta = \lambda\mu \int_0^\infty \tilde{f}_e(\delta x) x^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cx} + \lambda\mu \int_0^x \tilde{f}_e(\delta s) ds dx$$

και

$$\kappa_{\delta, \alpha} = c \int_0^\infty x^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cx} + \lambda\mu \int_0^x \tilde{f}_e(\delta s) ds dx.$$

Επίσης για την εύρεση της  $\psi_{\delta, \alpha}(u)$ , η συνάρτηση  $k_{\delta, \alpha}^1(u, t)$  ορίζεται ως εξής

$$k_{\delta, \alpha}^1(u, t) = \frac{\delta + \alpha + \lambda \bar{F}(u - t)}{c + \delta u}.$$

Έτσι, αν

$$\ell(u) = \frac{c\psi_{\delta, \alpha}(0)}{c + \delta u} + \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u),$$

υπολογίζουμε την  $\psi_{\delta, \alpha}(u)$  μέσω της σχέσης

$$\psi_\delta(u) = \ell(u) + \int_0^u K_{\delta, \alpha}(u, t) \ell(t) dt$$

Και πάλι λόγω της πολυπλοκότητας των παραστάσεων που είχαμε να υπολογίσουμε, κάναμε την απλούστευση

$$K_{\delta, \alpha}(u, t) = k_{\delta, \alpha}^1(u, t) + k_{\delta, \alpha}^2(u, t) + k_{\delta, \alpha}^3(u, t)$$

Παίρνοντας  $\alpha = 0.1$  βρήκαμε τα εξής αποτελέσματα

Πίνακας 3

Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας για  $X \sim G(2, 2)$  και  $\alpha = 0.1$ 

u	$\delta = 0.05$	$\delta = 0.07$	$\delta = 0.1$
0	0.90047	0.89889	0.89665
5	0.46144	0.45359	0.44257
10	0.40249	0.38988	0.37235
20	0.29884	0.27737	0.24799
30	0.19348	0.16404	0.12437
40	0.08647	0.04995	0.00148

Παρατηρούμε ότι οι μεταβολές του αρχικού κεφαλαίου και της έντασης ανατοκισμού έχουν σφοδρότερη επίδραση στον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας σε σχέση με την αντίστοιχη επίδρασή τους στην πιθανότητα χρεοκοπίας. Το γεγονός αυτό οφείλεται στον παράγοντα  $\alpha$  που στο παράδειγμά μας θα μπορούσε να ερμηνευτεί και ως προεξοφλητικός παράγοντας.

**Παράδειγμα 3.3.** Έστω ότι η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής που αντιπροσωπεύει το μέγεθος ατομικής ζημιάς δίνεται από τη σχέση

$$f(x) = A_1\beta_1 e^{-\beta_1 x} + A_2\beta_2 e^{-\beta_2 x}, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad A_1 + A_2 = 1. \quad (3.20)$$

Υποθέτουμε δηλαδή ότι οι ατομικές αποζημιώσεις ακολουθούν μία μίξη εκθετικών κατανομών. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα επιλέγουμε τις εξής τιμές για τις παραμέτρους της κατανομής ζημιών:  $A_1 = 0.4$ ,  $A_2 = 0.6$ ,  $\beta_1 = 2$ , και  $\beta_2 = 3$ . Επίσης θεωρούμε ότι  $\lambda = 55$  και  $c = 24.2$ .

Έτσι η (3.20) γίνεται

$$f(x) = 0.8e^{-2x} + 1.8e^{-3x}, \quad x > 0.$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\bar{F}(x) = \int_x^\infty f(t)dt = e^{-3x}(0.6 + 0.4e^x),$$

ενώ

$$E[X] = \mu = \int_0^\infty \bar{F}(x)dx = 0.4$$

Έχοντας στη διάθεσή μας την κατανομή ζημιών υπολογίσαμε την πιθανότητα χρεοκοπίας και τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας εφαρμόζοντας τις ίδιες προσεγγίσεις και υποθέσεις με αυτές του Παραδείγματος 3.2. Συγκεκριμένα, και σε αυτό το παράδειγμα χρησιμοποιήσαμε την απλοποιημένη μορφή

$$K_{\delta,\alpha}(u, t) = k_{\delta,\alpha}^1(u, t) + k_{\delta,\alpha}^2(u, t) + k_{\delta,\alpha}^3(u, t).$$

Κάναμε υπολογισμούς για διάφορες τιμές του αρχικού κεφαλαίου και για εντάσεις ανατοκισμού  $\delta = 0.05$ ,  $\delta = 0.07$  και  $\delta = 0.1$  αντίστοιχα. Για την εύρεση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας θεωρήσαμε ότι  $\alpha = 0.05$ . Τα αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

Πίνακας 4

Η πιθανότητα χρεοκοπίας για  $f(x) = 0.8e^{-2x} + 1.8e^{-3x}$

u	$\delta = 0.05$	$\delta = 0.07$	$\delta = 0.1$
0	0.90174	0.89926	0.89587
5	0.64038	0.61723	0.58613
10	0.58257	0.54173	0.48788
15	0.52644	0.46903	0.39478
20	0.47176	0.39903	0.30639
25	0.41853	0.33156	0.22231

Παρατηρούμε ότι σε αυτό το παράδειγμα καταλλήγουμε σε ελαφρά μεγαλύτερες τιμές για την πιθανότητα χρεοκοπίας (για  $u = 5, 10, 20$ ) σε σχέση με τις αντίστοιχες τιμές του Παραδείγματος 3.2. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι σε αυτό το παράδειγμα έχουμε μικρότερη μέση τιμή ( $E[X] = \mu = 0.4$ ). Για τον υπολογισμό λοιπόν του ρυθμού είσπραξης των ασφαλιστρών χρησιμοποιήσαμε την σχέση

$$c = (1 + \theta)\lambda E[X]$$

και βρήκαμε ότι για  $\theta = 0.1$  παίρνουμε  $c = 24.2$ . Για όλες τις υπόλοιπες ποσότητες, χρησιμοποιήσαμε τους ίδιους τύπους με αυτούς του προηγούμενου παραδείγματος και τα συμπεράσματα στα οποία καταλλήγουμε για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι τα ίδια. Στη συνέχεια προχωρήσαμε στην εύρεση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας. Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματά μας στον ακόλουθο Πίνακα.

Πίνακας 5

Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας για  $f(x) = 0.8e^{-2x} + 1.8e^{-3x}$  και  $\alpha = 0.05$

u	$\delta = 0.05$	$\delta = 0.07$	$\delta = 0.1$
0	0.89526	0.89314	0.89017
5	0.58176	0.56771	0.54104
10	0.48227	0.44843	0.40296
15	0.37771	0.33083	0.26893
20	0.27349	0.21483	0.13866
25	0.16961	0.10036	0.01190

Παρατηρούμε ότι οι μεταβολές του αρχικού κεφαλαίου και της έντασης ανατοκισμού έχουν ακόμη σφοδρότερη επίδραση στον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας σε σχέση με τη αντίστοιχη επίδραση όταν  $X \sim G(2, 2)$ , παρόλο που έχουμε επιλέξει μικρότερη παράμετρο  $\alpha$ .



## Κεφάλαιο 4

# Φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας

Όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο οι τύποι υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι αρκετά περίπλοκοι. Μόνο στην περίπτωση των εκθετικά κατανομημένων ζημιών βρήκαμε ακριβή λύση της εξίσωσης που ικανοποιεί η  $\psi_\delta(u)$ . Επομένως είναι λογικό να στραφούμε στην αναζήτηση φραγμάτων που θα μας δώσουν μία προσεγγιστική αλλά απλούστερη περιγραφή για αυτό το μέτρο κινδύνου. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τα αποτελέσματα των Cai-Dickson (2003) καθώς και των Sundt-Teugels (1995) αναφορικά με την εύρεση φραγμάτων για την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο.

### 4.1 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος τις χρονικές στιγμές εμφάνισης των ζημιογόνων ενδεχομένων.

Ως ειδική περίπτωση θα αναφερθούμε στο πλεόνασμα κατά τις χρονικές στιγμές επέλευσης των ζημιών, κυρίως για να πάρουμε κάποιες σχέσεις που θα μας χρησιμεύσουν στα επόμενα κεφάλαια. Έχουμε ήδη συμβολίσει με  $T_n$  τη χρονική στιγμή κατά την οποία επέρχεται  $n$ -οστό ζημιογόνο ενδεχόμενο, ενώ  $\{W_n, n > 0\}$  είναι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των ζημιών. Η σχέση μεταξύ  $W_n$  και  $T_n$  φαίνεται καλύτερα στο Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Οι χρονικές στιγμές επέλευσης των ζημιογόνων ενδεχομένων και οι ενδιάμεσοι χρόνοι

Παρατηρούμε ότι  $W_n$  είναι ο χρόνος ανάμεσα στο  $n - 1$  και το  $n$  ζημιογόνο ενδεχόμενο. Ισχύει δηλαδή

$$W_n = T_n - T_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$



Για την συσσωρευμένη αξία του πλεονάσματος τις χρονικές στιγμές  $T_1, T_2, \dots, T_n$  ισχύει

$$U_\delta(T_1) = ue^{\delta W_1} + c \frac{e^{\delta W_1} - 1}{\delta} - X_1$$

$$U_\delta(T_2) = U_\delta(T_1)e^{\delta W_2} + c \frac{e^{\delta W_2} - 1}{\delta} - X_1 = ue^{\delta(W_1+W_2)} + c \frac{e^{\delta(W_1+W_2)} - 1}{\delta} - X_1e^{\delta W_1} - X_2$$

⋮

$$\begin{aligned} U_\delta(T_n) &= U_\delta(T_{n-1})e^{\delta W_n} + c \frac{e^{\delta W_n} - 1}{\delta} - X_n \\ &= ue^{\delta(T_{n-1}+W_n)} + c \frac{e^{\delta T_{n-1}} - 1}{\delta} e^{\delta W_n} + c \frac{e^{\delta W_n} - 1}{\delta} - X_1e^{\delta(W_2+\dots+W_n)} + \dots + X_{n-1}e^{\delta W_n} + X_n \\ &= ue^{\delta T_n} + c \frac{e^{\delta T_n} - 1}{\delta} - \sum_{\kappa=1}^n X_\kappa \exp \left[ \delta \sum_{i=\kappa+1}^n W_i \right], \end{aligned}$$

αν θεωρήσουμε ότι  $\sum_a^b = 0$  για  $b < a$ . Μπορούμε επίσης να βρούμε μία σχέση και για την παρούσα αξία του πλεονάσματος κατά την χρονική στιγμή  $T_n$ , καθώς  $V_\delta(T_n) = U_\delta(T_n)e^{-\delta T_n}$ . Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} V_\delta(T_n) &= U_\delta(T_n)e^{-\delta T_n} = u + c \frac{1 - e^{-\delta T_n}}{\delta} - \sum_{\kappa=1}^n X_\kappa \exp \left[ -\delta \left( \sum_{i=1}^n W_i - \sum_{i=\kappa+1}^n W_i \right) \right] \\ &= u + c\bar{\alpha}_{T_n}^{(\delta)} - \sum_{\kappa=1}^n X_\kappa \exp \left[ -\delta \sum_{i=1}^{\kappa} W_i \right] \\ &= u + c\bar{\alpha}_{T_n}^{(\delta)} - \sum_{\kappa=1}^n X_\kappa e^{-\delta T_\kappa} \end{aligned}$$

## 4.2 Άνω φράγματα μέσω martingales

Σε αυτή την παράγραφο θα βρούμε ένα φράγμα τύπου Lundberg για την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο με επιτόκιο. Ξεκινάμε με τη διατύπωση ενός Λήμματος που θέτει τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες ορίζεται το συγκεκριμένο φράγμα.

**Λήμμα 4.1.** Στο κλασικό μοντέλο με επιτόκιο υπάρχει μία μοναδική θετική ποσότητα  $R_1$  που ορίζεται ως η ρίζα της εξίσωσης

$$E \left[ e^{-R_1 c \bar{\alpha}_{W}^{(\delta)}} M_X (R_1 e^{-\delta W}) \right] = 1 \quad (4.1)$$

και δίνεται από τη σχέση

$$\int_0^{c/\delta} e^{-R_1 y} \left(1 - \frac{\delta y}{c}\right)^{\lambda/\delta-1} M_X \left[ R_1 \left(1 - \frac{\delta y}{c}\right) \right] dy = \frac{c}{\lambda} \quad (4.2)$$

### Απόδειξη

Η (4.1) γράφεται και  $h(r) = y(r)$ , όπου

$$h(r) = E \left[ e^{-rc\bar{\alpha}_{\overline{W}}^{(\delta)}} M_X (re^{-\delta W}) \right] = E \left[ e^{-r \left( c\bar{\alpha}_{\overline{W}}^{(\delta)} - Xe^{-\delta W} \right)} \right] \text{ και } y(r) = 1$$

Για  $r = 0$  έχουμε λύση, ωστόσο εμείς ενδιαφερόμαστε για τη θετική ρίζα της (4.1). Παραγωγίζοντας την  $h(r)$  ως προς  $r$ , παίρνουμε

$$h'(r) = E \left[ - \left( c\bar{\alpha}_{\overline{W}}^{(\delta)} - Xe^{-\delta W} \right) e^{-r \left( c\bar{\alpha}_{\overline{W}}^{(\delta)} - Xe^{-\delta W} \right)} \right]$$

και για  $r = 0$ , ισχύει

$$h'(0) = -E \left[ c\bar{\alpha}_{\overline{W}}^{(\delta)} - Xe^{-\delta W} \right]$$

Όμως ο ρυθμός εισπραξης των ασφαλίσεων  $c$  υπολογίζεται έτσι ώστε η αναμενόμενη παρούσα αξία των ασφαλίσεων να είναι μεγαλύτερη από την αναμενόμενη παρούσα αξία των ζημιών. Επομένως αν  $E \left[ c\bar{\alpha}_{\overline{W}}^{(\delta)} \right]$  είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία των ασφαλίσεων που εισπράττονται στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών ζημιών και  $E \left[ Xe^{-\delta W} \right]$  είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία των ζημιών που αντιστοιχεί στο ίδιο διάστημα, τότε θέλουμε να ισχύει

$$E \left[ c\bar{\alpha}_{\overline{W}}^{(\delta)} \right] > E \left[ Xe^{-\delta W} \right].$$

Με άλλα λόγια θέλουμε ο σταθερός ρυθμός εισπραξης των ασφαλίσεων  $c$  να είναι τέτοιος, ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα

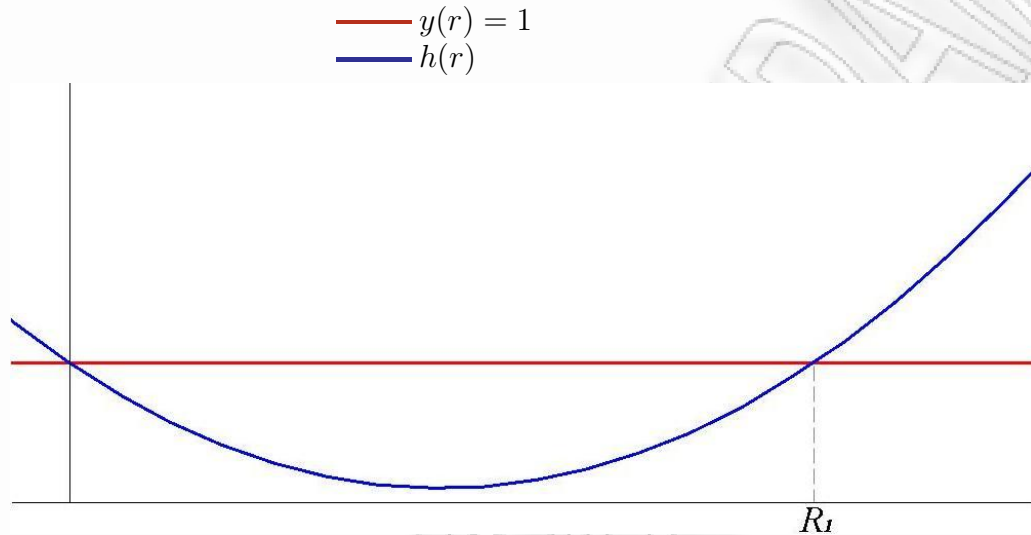
$$E \left[ c\bar{\alpha}_{\overline{W}}^{(\delta)} - Xe^{-\delta W} \right] > 0,$$

όπου  $c\bar{\alpha}_{\overline{W}}^{(\delta)} - Xe^{-\delta W}$  είναι η κατανομή της παρούσας αξίας του τυχαίου κέρδους στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών ζημιών.

Διαπιστώνουμε δηλαδή ότι  $h'(0) = -E \left[ c\bar{\alpha}_{\overline{W}}^{(\delta)} - Xe^{-\delta W} \right] < 0$ , άρα η  $h(r)$  είναι φθίνουσα στο  $r = 0$ . Παίρνοντας τη δεύτερη παράγωγο της  $h(r)$  ως προς  $r$ , έχουμε

$$h''(r) = E \left[ \left( c\bar{\alpha}_{\overline{W}}^{(\delta)} - Xe^{-\delta W} \right)^2 e^{-r \left( c\bar{\alpha}_{\overline{W}}^{(\delta)} - Xe^{-\delta W} \right)} \right] > 0. \text{ (άρα η } h(r) \text{ είναι κυρτή)}$$

Αντίστοιχα για την  $y(r) = 1$  έχουμε  $y'(r) = 0$  και  $y''(r) = 0$ ,  $\forall r$ . Συγκριτικά λοιπόν ισχύει  $h'(0) < y'(0)$ , δηλαδή στο σημείο  $r = 0$  ο ρυθμός αύξησης της  $h(r)$  είναι μικρότερος από τον αντίστοιχο ρυθμό αύξησης της  $y(r) = 1$ . Τα συμπεράσματα αυτά φαίνονται καλύτερα στο σχήμα που ακολουθεί



Σχήμα 4.1: Οι λύσεις της εξίσωσης (4.1).

Είναι φανερό λοιπόν ότι η εξίσωση (4.1) έχει θετική ρίζα  $R_1$ . Για να δείξουμε ότι η θετική ποσότητα  $R_1$  δίνεται από την (4.2), εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι στο κλασσικό μοντέλο ισχύει

$$G(x) = \Pr(W \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0$$

Έχουμε λοιπόν

$$E \left[ e^{-R_1 c \bar{\alpha}_{\overline{W}}^{(\delta)}} M_X(R_1 e^{-\delta W}) \right] = \int_0^\infty e^{-c R_1 \frac{1-e^{-\delta x}}{\delta}} M_X(R_1 e^{-\delta x}) \lambda e^{-\lambda x} dx \quad (4.3)$$

Θέτουμε  $y = \frac{1 - e^{-\delta x}}{\delta}$ , οπότε ισχύει

$$1 - e^{-\delta x} = \frac{\delta y}{c} \Rightarrow e^{-\delta x} = 1 - \frac{\delta y}{c} \Rightarrow x = -\frac{1}{\delta} \ln \left( 1 - \frac{\delta y}{c} \right)$$

Επίσης έχουμε

$$dx = -\frac{1}{\delta} \left( 1 - \frac{\delta y}{c} \right)^{-1} \left( -\frac{\delta}{c} \right) dy = \frac{1}{c} \left( 1 - \frac{\delta y}{c} \right)^{-1} dy,$$

ενώ

$$-\lambda x = \frac{\lambda}{\delta} \ln \left( 1 - \frac{\delta y}{c} \right) \Rightarrow e^{-\lambda x} = \left( 1 - \frac{\delta y}{c} \right)^{\lambda/\delta}$$

Άρα η (4.3) γίνεται

$$E \left[ e^{-R_1 c \bar{\alpha}_{\overline{W}}^{(\delta)}} M_X (R_1 e^{-\delta W}) \right] = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-cR_1} \left( 1 - \frac{\delta y}{c} \right)^{\lambda/\delta-1} M_X \left[ R_1 \left( 1 - \frac{\delta y}{c} \right) \right] dy$$

και εφαρμόζοντας την (4.1) παίρνουμε

$$\int_0^\infty e^{-cR_1} \left( 1 - \frac{\delta y}{c} \right)^{\lambda/\delta-1} M_X \left[ R_1 \left( 1 - \frac{\delta y}{c} \right) \right] dy = \frac{c}{\lambda},$$

σχέση που ολοκληρώνει την απόδειξη του Λήμματος 4.1. □

### Παρατηρήσεις:

1. Αξίζει να σημειώσουμε ότι παρόλο που οι εξισώσεις του Λήμματος 4.1 είναι ισοδύναμες, κάθε μία εξυπηρετεί το δικό της σκοπό. Η (4.1) μας χρησιμεύει για αποδείξεις και ταιριάζει καλύτερα ως ορισμός του  $R_1$ , ενώ μέσω της (4.2) μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την ποσότητα  $R_1$ .
2. Είναι χαρακτηριστικές οι ομοιότητες μεταξύ της ποσότητας  $R_1$  και του συντελεστή προσαρμογής  $R$  που είχαμε δει στην Εισαγωγή. Εκεί είχαμε δει επίσης ένα φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας που περιλάμβανε τον  $R$  (ανισότητα Lundberg). Κατά απόλυτη αντιστοιχία λοιπόν θα βρούμε ένα φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο με επιτόκιο που θα περιλαμβάνει την ποσότητα  $R_1$ . Το συγκεκριμένο φράγμα καθώς και ο τρόπος εύρεσής του δίνονται στα πλαίσια του θεωρήματος που ακολουθεί.

**Θεώρημα 4.1.** Όταν η θετική ποσότητα  $R_1$  ορίζεται σύμφωνα με το Λήμμα 4.1, τότε για κάθε  $u \geq 0$  ισχύει:

$$\psi_\delta(u) \leq e^{-R_1 u} \quad (4.4)$$

### Απόδειξη

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι η παρούσα αξία του πλεονάσματος κατά τη χρονική στιγμή επέλευσης του  $n$ -οστού ζημιογόνου ενδεχομένου είναι

$$V_\delta(T_n) = u + c \bar{\alpha}_{\overline{T_n}}^{(\delta)} - \sum_{\kappa=1}^n X_\kappa e^{-\delta T_\kappa},$$

επομένως, κατά τη χρονική στιγμή επέλευσης του  $n + 1$  ζημιογόνου ενδεχομένου θα ισχύει

$$V_\delta(T_{n+1}) = V_\delta(T_n) + e^{-\delta T_n} \left[ c \bar{\alpha}_{\overline{W_{n+1}}}^{(\delta)} - X_{n+1} e^{-\delta W_{n+1}} \right]$$

Επομένως αν συμβολίσουμε με  $\mathcal{F}_n$  την “πληροφορία που περιέχεται στις  $T_1, T_2, \dots, T_n$ ,” τότε για  $n \geq 0$  ισχύει:

$$E \left[ e^{-R_1 V_\delta(T_{n+1})} \mid \mathcal{F}_n \right] = E \left[ e^{-R_1 V_\delta(T_n)} e^{-R_1 e^{-\delta T_n} [c\bar{\alpha}_{\bar{W}|_{n+1}}^{(\delta)} - X_{n+1} e^{-\delta W_{n+1}}]} \mid \mathcal{F}_n \right]$$

Χρησιμοποιώντας την Ιδιότητα 2 της υπο συνθήκη μέσης τιμής (βλ. Παράγραφο 1.4) η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned} E \left[ e^{-R_1 V_\delta(T_{n+1})} \mid \mathcal{F}_n \right] &= e^{-R_1 V_\delta(T_n)} E \left[ e^{-R_1 e^{-\delta T_n} [c\bar{\alpha}_{\bar{W}|_{n+1}}^{(\delta)} - X_{n+1} e^{-\delta W_{n+1}}]} \mid \mathcal{F}_n \right] \\ &= e^{-R_1 V_\delta(T_n)} E \left[ \left( e^{-R_1 [c\bar{\alpha}_{\bar{W}|_{n+1}}^{(\delta)} - X_{n+1} e^{-\delta W_{n+1}}]} \right)^{e^{-\delta T_n}} \mid \mathcal{F}_n \right] \end{aligned}$$

Όμως  $0 < e^{-\delta T_n} < 1$ , οπότε αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $u(x) = x^\alpha$ , όπου  $\alpha = e^{-\delta T_n}$  και  $x > 0$ , τότε ισχύει

$$\begin{aligned} u'(x) &= \alpha x^{\alpha-1} > 0, \text{ ενώ} \\ u''(x) &= (\alpha - 1)\alpha x^{\alpha-2} < 0, \text{ διότι } \alpha - 1 < 0 \text{ (αφού ισχύει } 0 < \alpha < 1). \end{aligned}$$

Κάνοντας λοιπόν χρήση της *Ανισότητας Jensen* για την υπο συνθήκη μέση τιμή<sup>1</sup> έχουμε:

$$E \left[ \left( e^{-R_1 [c\bar{\alpha}_{\bar{W}|_{n+1}}^{(\delta)} - X_{n+1} e^{-\delta W_{n+1}}]} \right)^{e^{-\delta T_n}} \mid \mathcal{F}_n \right] \leq E \left[ e^{-R_1 [c\bar{\alpha}_{\bar{W}|_{n+1}}^{(\delta)} - X_{n+1} e^{-\delta W_{n+1}}]} \mid \mathcal{F}_n \right]^{e^{-\delta T_n}}$$

οπότε συνολικά θα ισχύει

$$E \left[ e^{-R_1 V_\delta(T_{n+1})} \mid \mathcal{F}_n \right] \leq e^{-R_1 V_\delta(T_n)} E \left[ e^{-R_1 [c\bar{\alpha}_{\bar{W}|_{n+1}}^{(\delta)} - X_{n+1} e^{-\delta W_{n+1}}]} \mid \mathcal{F}_n \right]^{e^{-\delta T_n}}.$$

Ωστόσο οι τυχαίες μεταβλητές  $X_{n+1}$  και  $W_{n+1}$  είναι ανεξάρτητες της  $\mathcal{F}_n$ , οπότε σύμφωνα με την Ιδιότητα 4 της υπο συνθήκη μέσης τιμής (βλ. Παράγραφο 1.4) η πληροφορία  $\mathcal{F}_n$  δεν μας χρησιμεύει για τον υπολογισμό της μέσης τιμής. Έτσι έχουμε

$$E \left[ e^{-R_1 V_\delta(T_{n+1})} \mid \mathcal{F}_n \right] \leq e^{-R_1 V_\delta(T_n)} E \left[ e^{-R_1 [c\bar{\alpha}_{\bar{W}|_{n+1}}^{(\delta)} - X_{n+1} e^{-\delta W_{n+1}}]} \right]^{e^{-\delta T_n}}.$$

<sup>1</sup>Σύμφωνα με την ανισότητα Jensen για την υπο συνθήκη μέση τιμή αν  $X$  είναι μία τυχαία μεταβλητή και για την συνάρτηση  $u(w)$  ισχύει  $u''(w) > 0$ , ενώ η  $u$  είναι μετρήσιμη ως προς τις  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , τότε ισχύει  $E[u(X)|\mathcal{F}_n] \geq u(E[X|\mathcal{F}_n])$ . Διαφορετικά αν  $u''(w) < 0$  τότε ισχύει  $E[u(X)|\mathcal{F}_n] \leq u(E[X|\mathcal{F}_n])$

Επίσης έχουμε υποθέσει ότι η ποσότητα  $R_1$  ορίζεται σύμφωνα με το Λήμμα 4.1, οπότε θα ισχύει

$$E \left[ e^{-R_1 [c\bar{\alpha}^{(\delta)} W_{n+1} - X_{n+1} e^{-\delta W_{n+1}}]} \right] = 1$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$E \left[ e^{-R_1 V_\delta(T_{n+1})} \mid \mathcal{F}_n \right] \leq e^{-R_1 V_\delta(T_n)} \quad (4.5)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (4.5) η στοχαστική ανέλιξη  $\{e^{-R_1 V_\delta(T_{n+1})}, n \geq 0\}$  είναι μία διαδικασία supermartingale (βλ. εξίσωση (1.32) στην Παράγραφο 1.4).

Ο χρόνος χρεοκοπίας  $T_\delta$  είναι χρόνος στάσης για τη διαδικασία  $\{e^{-R_1 V_\delta(T_{n+1})}, n \geq 0\}$ , επομένως ο χρόνος  $T_\delta \wedge n$  θα είναι ένας πεπερασμένος χρόνος στάσης. Έτσι, εφαρμόζοντας το Θεώρημα επιλεκτικής στάσης των supermartingales (βλ. Θεώρημα 1.3 στην Παράγραφο 1.4), έχουμε:

$$E \left[ e^{-R_1 V_\delta(T_{T_\delta \wedge n})} \right] \leq E \left[ e^{-R_1 V_\delta(T_0)} \right] = e^{-R_1 u} \quad (4.6)$$

Επίσης, η παρούσα αξία του πλεονάσματος τη στιγμή της χρεοκοπίας θα είναι αρνητική, δηλαδή  $V_\delta(T_\delta) < 0$  ή διαφορετικά  $-R_1 V_\delta(T_\delta) > 0$ . Επομένως θα ισχύει

$$e^{-R_1 V_\delta(T_\delta)} > 1. \quad (4.7)$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} E \left[ e^{-R_1 V_\delta(T_{T_\delta \wedge n})} \right] &\geq E \left[ e^{-R_1 V_\delta(T_{T_\delta \wedge n})} I(T_\delta \leq n) \right] = E \left[ e^{-R_1 V_\delta(T_\delta)} I(T_\delta \leq n) \right] \\ &\stackrel{\text{από (4.7)}}{\geq} E \left[ I(T_\delta \leq n) \right] \end{aligned}$$

Αν συμβολίσουμε  $\psi_\delta(u; n)$  την πιθανότητα χρεοκοπίας μέχρι το χρόνο  $n$ , όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι  $u$ , τότε  $\psi_\delta(u; n) = E \left[ I(T_\delta \leq n) \right]$ . Ισχύει δηλαδή

$$E \left[ e^{-R_1 V_\delta(T_{T_\delta \wedge n})} \right] \geq \psi_\delta(u; n) \quad (4.8)$$

Από τις εξισώσεις (4.6) και (4.8) συμπεραίνουμε ότι

$$\psi_\delta(u; n) \leq e^{-R_1 u},$$

οπότε τελικά παίρνουμε ότι

$$\psi_\delta(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_\delta(u; n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-R_1 u} = e^{-R_1 u},$$

σχέση που ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.  $\square$

Το Θεώρημα 4.1 αποτελεί μία γενίκευση της ανισότητας Lundberg για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με σταθερό επιτόκιο.

### 4.3 Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

Στην προηγούμενη παράγραφο χρησιμοποιήσαμε την κατανομή της παρούσας αξίας του τυχαίου κέρδους στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών ζημιών (ήτοι  $c\bar{\alpha}_{\overline{W}|}^{(\delta)} - Xe^{-\delta W}$ ), για να βρούμε ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Σε αυτή την παράγραφο θα βρούμε ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας χρησιμοποιώντας την κατανομή της συσσωρευμένης αξίας του τυχαίου κέρδους στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών ζημιογόνων ενδεχομένων. Η συσσωρευμένη αυτή αξία είναι  $c\bar{s}_{\overline{W}|}^{(\delta)} - X$ . Η μέθοδος ωστόσο που θα χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε το άνω φράγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι διαφορετική.

Αρχικά θα διατυπώσουμε ένα Λήμμα που θέτει τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες υπάρχει το εν λόγω φράγμα.

**Λήμμα 4.2.** Στο κλασικό μοντέλο με επιτόκιο υπάρχει μία μοναδική θετική ποσότητα  $R_2$  που ορίζεται ως η ρίζα της εξίσωσης

$$E \left[ e^{-R_2(c\bar{s}_{\overline{W}|}^{(\delta)} - X)} \right] = 1 \quad (4.9)$$

και δίνεται από τη σχέση

$$\left[ E \left( e^{R_2 X} \right) \right]^{-1} = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y}}{(1 + \delta y)^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dy \quad (4.10)$$

#### Απόδειξη

Γράφουμε την (4.9) στη μορφή  $h(r) = y(r)$ , όπου

$$h(r) = E \left[ e^{-r(c\bar{s}_{\overline{W}|}^{(\delta)} - X)} \right] \text{ και } y(r) = 1$$

Για  $r = 0$  έχουμε λύση, όμως η ποσότητα  $R_2$  ορίζεται ως η θετική ρίζα της (4.9). Παραγωγίζουμε την  $h(r)$  ως προς  $r$  και παίρνουμε

$$h'(r) = E \left[ -(c\bar{s}_{\overline{W}|}^{(\delta)} - X) e^{-r(c\bar{s}_{\overline{W}|}^{(\delta)} - X)} \right]$$

και για  $r = 0$  ισχύει

$$h'(0) = -E \left[ c\bar{s}_{\overline{W}|}^{(\delta)} - X \right].$$

Όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 4.1, έτσι κι εδώ υπολογίζουμε τον ρυθμό είσπραξης των ασφαλιστρών  $c$  έτσι ώστε η αναμενόμενη συσσωρευμένη αξία του τυχαίου κέρδους κατά το χρονικό

διάστημα που μεσολβεί μεταξύ δύο διαδοχικών ζημιογόνων ενδεχομένων να είναι θετική. Με άλλα λόγια απαιτούμε να ισχύει

$$E \left[ c\bar{s}_{\overline{W}|}^{(\delta)} - X \right] > 0.$$

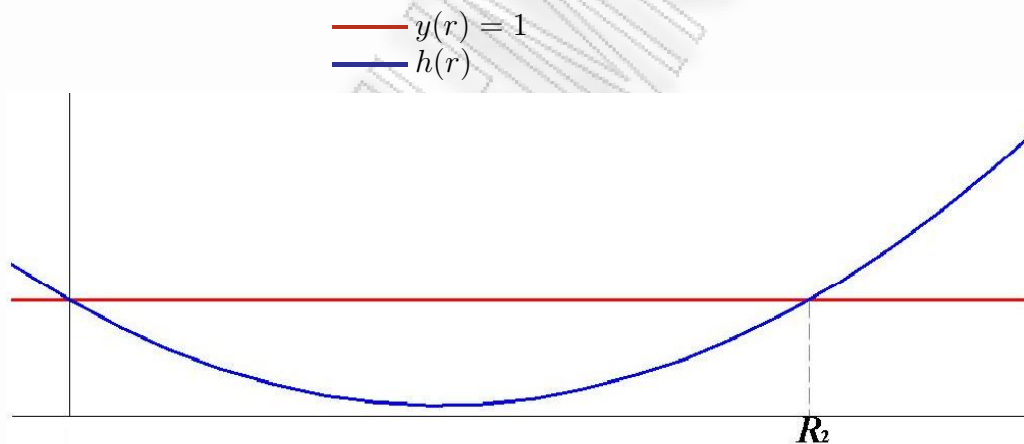
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η  $h(r)$  είναι φθίνουσα στο σημείο  $r = 0$ , αφού  $h'(0) < 0$ . Η δεύτερη παράγωγος της  $h(r)$  είναι

$$h''(r) = E \left[ (c\bar{s}_{\overline{W}|}^{(\delta)} - X)^2 e^{-r(c\bar{s}_{\overline{W}|}^{(\delta)} - X)} \right] > 0 \text{ άρα η } h(r) \text{ είναι κυρτή}$$

Αντίστοιχα η πρώτη και δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης  $y(r) = 1$  είναι

$$y'(r) = 0 \text{ και } y''(r) = 0, \forall r.$$

Συγκρίνοντας λοιπόν τις συναρτήσεις  $h(r)$  και  $y(r)$  βρίσκουμε ότι  $h'(0) < y'(0)$ , δηλαδή στο σημείο  $r = 0$  ο ρυθμός αύξησης της  $h(r)$  είναι μικρότερος από τον αντίστοιχο ρυθμό αύξησης της  $y(r) = 1$ . Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η εξίσωση (4.9) έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα. Το σχήμα που ακολουθεί μας δίνει μία καλύτερη εικόνα αυτού του συμπεράσματος.



Σχήμα 4.1: Οι λύσεις της εξίσωσης (4.9).

Για τον υπολογισμό ωστόσο της θετικής ποσότητας  $R_2$ , μπορούμε να εκεταλλευτούμε το γεγονός ότι στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των ζημιογόνων ενδεχομένων ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Έτσι από την εξίσωση (4.9) καταλήγουμε στην εξίσωση (4.10) που είναι σαφώς πιο χρήσιμη για υπολογισμούς. Συγκεκριμένα έχουμε

$$E \left[ e^{-R_2(c\bar{s}_{\overline{W}|}^{(\delta)} - X)} \right] = \int_0^{\infty} E[e^{R_2 X}] e^{-R_2 c \frac{e^{\delta t} - 1}{\delta}} g(t) dt.$$



Όμως  $g(t) = \Pr(W = t) = \lambda e^{-\lambda t}$ , οπότε

$$E \left[ e^{-R_2(c\bar{s}(\delta) - X)} \right] = E[e^{R_2 X}] \lambda \int_0^\infty e^{-R_2 c \frac{e^{\delta t} - 1}{\delta}} e^{-\lambda t} dt. \quad (4.11)$$

Θέτουμε  $y = c \frac{e^{\delta t} - 1}{\delta}$ , δηλαδή ισχύει

$$e^{\delta t} - 1 = \frac{\delta y}{c} \Rightarrow e^{\delta t} = 1 + \frac{\delta y}{c} \Rightarrow t = \frac{1}{\delta} \ln\left(1 + \frac{\delta y}{c}\right).$$

Επίσης έχουμε

$$dt = \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{\delta y}{c}\right)^{-1} \left(\frac{\delta}{c}\right) dy = \frac{1}{c} \frac{1}{1 + \frac{\delta y}{c}} dy$$

ενώ

$$-\lambda t = -\frac{\lambda}{\delta} \ln\left(1 + \frac{\delta y}{c}\right) \Rightarrow e^{-\lambda t} = \left(1 + \frac{\delta y}{c}\right)^{-\frac{\lambda}{\delta}}.$$

Έτσι η (4.11) γίνεται

$$E \left[ e^{-R_2(c\bar{s}(\delta) - X)} \right] = E \left[ e^{R_2 X} \right] \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y \left(1 + \frac{\delta y}{c}\right)^{-\frac{\lambda}{\delta}}}}{\left(1 + \frac{\delta y}{c}\right)} dy$$

Εφαρμόζοντας λοιπόν την (4.9) παίρνουμε

$$\left[ E \left( e^{R_2 X} \right) \right]^{-1} = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y}}{\left(1 + \frac{\delta y}{c}\right)^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dy,$$

σχέση που ολοκληρώνει την απόδειξη του Λήμματος 4.2. □

Βάσει της ποσότητας  $R_2$  μπορούμε να ορίσουμε φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Στο θεώρημα που ακολουθεί παραθέτουμε αναλυτικά τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες υπάρχουν τα εν λόγω φράγματα καθώς και τον τρόπο υπολογισμού τους.

**Θεώρημα 4.2.** Όταν η θετική ποσότητα  $R_2$  ορίζεται σύμφωνα με το Λήμμα 4.2, τότε για κάθε  $u \geq 0$  ισχύει

$$\psi_\delta(u) \leq \beta E \left[ e^{R_2 X} \right] \frac{\lambda}{c} e^{-R_2 u} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y \left(1 + \frac{\delta y}{c}\right)^{-\frac{\lambda}{\delta}}}}{\left(1 + \frac{\delta y}{c}\right)^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dy, \quad (4.12)$$

όπου

$$\beta^{-1} = \inf_{t \geq 0} \frac{\int_t^\infty e^{R_2 y} f(y) dy}{e^{R_2 t} \bar{F}(t)}. \quad (4.13)$$

Ειδικότερα όταν η κατανομή  $F$  είναι μία *NWUC* (new worse than used in convex ordering), τότε για κάθε  $u \geq 0$  ισχύει

$$\psi_\delta(u) \leq \frac{\lambda}{c} e^{-R_2 u} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y (1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta y}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dy, \quad (4.14)$$

### Απόδειξη

Η ονομασία “φράγματα με αναδρομικές τεχνικές” που δώσαμε στη συγκεκριμένη παράγραφο, οφείλεται στο ότι για να βρούμε τα συγκεκριμένα φράγματα χρησιμοποιούμε μία αναδρομική σχέση για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Την σχέση αυτή μπορούμε να την πάρουμε δεσμεύοντας ως προς τον χρόνο επέλευσης ( $W_1 = t$ ) και το μέγεθος ( $X_1 = x$ ) του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου. Έτσι λοιπόν αν συμβολίσουμε με  $\psi_\delta(u; n)$  την πιθανότητα χρεοκοπίας πριν ή κατά την επέλευση του  $n$ -οστού ζημιογόνου ενδεχομένου για το μοντέλο μας, τότε ισχύει

$$\psi_\delta(u; n+1) = \int_0^\infty \int_0^\infty \psi_\delta(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} - y; n) f(y) dy g(t) dt$$

Όπως γνωρίζουμε όμως, χρεοκοπία πριν ή κατά την επέλευση του  $(n+1)$ -ζημιογόνου ενδεχομένου μπορεί να επέλθει

1. Με την επέλευση του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου αν το μέγεθός του είναι μεγαλύτερο από το πλεόνασμα που έχει συσσωρευτεί μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή ( $x > ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)}$ )
2. Με τη επέλευση οποιουδήποτε εκ των επόμενων  $n$ -ζημιογόνων ενδεχομένων και με νέο αρχικό κεφάλαιο  $ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} - y$  (ανανεωμένο μετά την επέλευση της πρώτης ζημιάς).

Έτσι έχουμε

$$\psi_\delta(u; n+1) = \int_0^\infty \left[ \bar{F}(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)}) + \int_0^{ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)}} \psi_\delta(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} - y; n) f(y) dy \right] g(t) dt \quad (4.15)$$

Θυμίζουμε ότι στο κλασσικό μοντέλο  $g(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ .

Επίσης από τον ορισμό του  $\beta$  σύμφωνα με την (4.13), για κάθε  $x > 0$  έχουμε

$$\bar{F}(t) \leq \beta e^{-R_2 t} \int_t^\infty e^{R_2 y} f(y) dy \quad (4.16)$$

ή γενικότερα

$$\bar{F}(t) \leq \beta e^{-R_2 t} E [e^{R_2 X}] \quad (4.17)$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας με την επέλευση του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου είναι

$$\psi_\delta(u; 1) = \int_0^\infty \bar{F}(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)}) \lambda e^{-\lambda t} dt$$

και μέσω της (4.17) παίρνουμε

$$\psi_\delta(u; 1) \leq \beta E [e^{R_2 X}] \lambda \int_0^\infty e^{-R_2(ue^{\delta t} + c\bar{s}_t^{(\delta)})} e^{-\lambda t} dt \quad (4.18)$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της (4.18) ξεχωριστά θέτοντας  $y = c\bar{s}_t^{(\delta)} = c\frac{e^{\delta t}-1}{\delta}$ . Προκύπτει λοιπόν ότι

$$t = \frac{1}{\delta} \ln \left( 1 + \frac{\delta y}{c} \right), \text{ και } e^{-\lambda t} = \left( 1 + \frac{\delta y}{c} \right)^{-\frac{\lambda}{\delta}}$$

ενώ

$$dt = \frac{1}{\delta} \frac{1}{1 + \frac{\delta y}{c}} \left( 1 + \frac{\delta y}{c} \right)' = \frac{1}{c} \frac{1}{1 + \frac{\delta y}{c}}.$$

Συνολικά λοιπόν έχουμε

$$\int_0^\infty e^{-R_2(ue^{\delta t} + c\bar{s}_t^{(\delta)})} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2[u(1+\frac{\delta y}{c})+y]}}{\left(1 + \frac{\delta y}{c}\right)^{\frac{\lambda}{\delta}+1}} dy = \frac{1}{c} e^{-R_2 u} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y(1+\frac{\delta u}{c})}}{\left(1 + \frac{\delta y}{c}\right)^{\frac{\lambda}{\delta}+1}} dy.$$

Άρα η (4.18) γίνεται

$$\psi_\delta(u; 1) \leq \beta E [e^{R_2 X}] e^{-R_2 u} \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y(1+\frac{\delta u}{c})}}{\left(1 + \frac{\delta y}{c}\right)^{\frac{\lambda}{\delta}+1}} dy \quad (4.19)$$

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η (4.12) ισχύει για  $n = 1$ . Έστω λοιπόν ότι ισχύει και για κάποιο αέραιο  $n > 1$ , δηλαδή

$$\psi_\delta(u; n) \leq \beta E [e^{R_2 X}] e^{-R_2 u} \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y(1+\frac{\delta u}{c})}}{\left(1 + \frac{\delta y}{c}\right)^{\frac{\lambda}{\delta}+1}} dy \quad (4.20)$$

Όμως απο το δεξί μέλος της (4.20) έχουμε

$$\beta E [e^{R_2 X}] e^{-R_2 u} \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y(1+\frac{\delta u}{c})}}{\left(1 + \frac{\delta y}{c}\right)^{\frac{\lambda}{\delta}+1}} = \beta E [e^{R_2 X}] E \left[ e^{-R_2(ue^{\delta W} + c\bar{s}_W^{(\delta)})} \right] = \frac{\beta E [e^{R_2 X}]}{E \left[ e^{R_2(ue^{\delta W} + c\bar{s}_W^{(\delta)})} \right]}$$

Άρα ισχύει

$$\psi_\delta(u; n) \leq \frac{\beta E [e^{R_2 X}]}{E \left[ e^{R_2(ue^{\delta W} + c\bar{s}_W^{(\delta)})} \right]}$$

και επειδή  $e^{\delta W} > 1$ , συμπεραίνουμε ότι

$$\psi_\delta(u; n) \leq \frac{\beta E [e^{R_2 X}]}{E \left[ e^{R_2(u+c\bar{s}_W^{(\delta)})} \right]} = \beta e^{-R_2 u} \quad (4.21)$$

αφού από το Λήμμα 4.2 γνωρίζουμε ότι

$$E \left[ e^{-R_2(c\bar{s}^{(\delta)} - X)} \right] = 1.$$

Συνδυάζοντας λοιπόν τις σχέσεις (4.16) και (4.21) με την εξίσωση (4.15) προκύπτει η παρακάτω ανισότητα

$$\begin{aligned} \psi_\delta(u; n+1) &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \beta e^{-R_2(ue^{\delta t} + c\bar{s}^{(\delta)}_t)} \int_{ue^{\delta t} + c\bar{s}^{(\delta)}_t}^\infty e^{R_2 y} f(y) dy dt \\ &\quad + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{ue^{\delta t} + c\bar{s}^{(\delta)}_t} \beta e^{-R_2(ue^{\delta t} + c\bar{s}^{(\delta)}_t)} e^{R_2 y} f(y) dy dt \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \beta e^{-R_2(ue^{\delta t} + c\bar{s}^{(\delta)}_t)} \left( \int_0^\infty e^{R_2 y} f(y) dy \right) dt \\ &= \beta E [e^{R_2 X}] \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-R_2(ue^{\delta t} + c\bar{s}^{(\delta)}_t)} dt \end{aligned}$$

Όμως έχουμε ήδη υπολογίσει ότι

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-R_2(ue^{\delta t} + c\bar{s}^{(\delta)}_t)} dt = \frac{\lambda}{c} e^{-R_2 u} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y(1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta y}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dy$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι

$$\psi_\delta(u; n+1) \leq \beta E [e^{R_2 X}] \frac{\lambda}{c} e^{-R_2 u} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y(1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta y}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dy,$$

επομένως ισχύει και η (4.12) αφού  $\psi_\delta(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_\delta(u; n)$ .

Τέλος γνωρίζουμε ότι όταν η  $F$  είναι μία NWUC τότε ισχύει

$$\beta = [E (e^{R_2 X})]^{-1},$$

οπότε σε αυτή την περίπτωση η (4.12) μας δίνει

$$\psi_\delta(u) \leq \frac{\lambda}{c} e^{-R_2 u} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y(1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta y}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dy,$$

σχέση που ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2. □

**Σχόλιο:** Όταν η κατανομή του μεγέθους ατομικής ζημιάς ανήκει στην κλάση κατανομών N-WUC, που περιλαμβάνει τις κατανομές με φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας (decreasing failure rate),

τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (4.14) για να υπολογίσουμε ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Για όλες τις άλλες περιπτώσεις, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (4.12) με  $\beta = 1$  για να φράξουμε την  $\psi_\delta(u)$ , καθώς

$$[E(e^{R_2 X})]^{-1} \leq \beta \leq 1 \quad (4.22)$$

Είναι προφανές ότι τα άνω φράγματα των Θεωρημάτων 4.1 και 4.2 διαφέρουν. Αυτό θα το διαπιστώσουμε και στα αριθμητικά μας παραδείγματα. Ωστόσο μέσω της σχέσης (4.22) και του γεγονότος ότι  $e^{\delta W} \geq 1$ , μπορούμε να υπολογίσουμε ένα άνω φράγμα τύπου Lundberg για την  $\psi_\delta$ . Αυτό το άνω φράγμα παρουσάζεται στα πλαίσια του ακόλουθου πορίσματος.

**Πόρισμα 4.1.** *Κάτω από τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4.2, για κάθε  $u \geq 0$ , ισχύει*

$$\psi_\delta(u) \leq e^{-R_2 u} \quad (4.23)$$

**Απόδειξη**

$$\begin{aligned} \psi_\delta(u) &\leq \beta \frac{E[e^{R_2 X}]}{E\left[e^{\frac{R_2(ue^{\delta W} + c\bar{s}(\delta))}{W}}\right]} \leq \beta \frac{E[e^{R_2 X}]}{E\left[e^{\frac{R_2(u+c\bar{s}(\delta))}{W}}\right]} = \beta e^{-R_2 u} E\left[e^{-R_2(c\bar{s}(\delta)/W)X}\right] \\ &= \beta e^{-R_2 u} \leq e^{-R_2 u}. \end{aligned}$$

□

Φυσικά το φράγμα τύπου Lundberg της (4.23), αν και ασθενέστερο, υπολογίζεται πιο εύκολα σε σχέση με τα φράγματα (4.12) και (4.14) του Θεωρήματος 4.2.

Τέλος, μπορούμε να βρούμε δύο απλοποιημένα φράγματα για την  $\psi_\delta(u)$  σε σχέση με εκείνα του Θεωρήματος 4.2, εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι

$$\int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y(1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta y}{c})^{\lambda+1}} dy \leq \int_0^\infty e^{-R_2 y(1 + \frac{\delta u}{c})} dy = \frac{1}{R_2(1 + \frac{\delta u}{c})} \quad (4.24)$$

Εφαρμόζοντας την (4.24) στο Θεώρημα 4.2, προκύπτει το παρακάτω Πόρισμα.

**Πόρισμα 4.2.** *Κάτω από τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4.2, για κάθε  $u \geq 0$  ισχύει*

$$\psi_\delta(u) \leq \beta E[e^{R_2 X}] \frac{\lambda}{cR_2} \frac{e^{-R_2 u}}{1 + \frac{\delta u}{c}}. \quad (4.25)$$

Ειδικότερα όταν η κατανομή  $F$  είναι μία NWUC (new worse than used in convex ordering), τότε για κάθε  $u \geq 0$  ισχύει

$$\psi_\delta(u) \leq \frac{\lambda}{cR_2} \frac{e^{-R_2 u}}{1 + \frac{\delta u}{c}}. \quad (4.26)$$

□

### Παρατηρήσεις:

1. Τα απλοποιημένα φράγματα του Πορίσματος 4.2 δεν είναι αξιόπιστα για μικρές τιμές του αρχικού κεφαλαίου  $u$ , καθώς σε αυτή την περίπτωση μπορεί να πάρουν τιμή μεγαλύτερη από 1.
2. Συγκρίνοντας τα απλοποιημένα φράγματα του Πορίσματος 4.2 με το εκθετικό  $e^{-R_2 u}$ , συμπεραίνουμε ότι καθώς το αρχικό κεφάλαιο αυξάνεται, τα φράγματα του Θεωρήματος 4.2 τείνουν γρηγορότερα στο μηδέν σε σχέση με το  $e^{-R_2 u}$ .

## 4.4 Χρεοκοπία με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο

Θυμόμαστε από την Εισαγωγή ότι στο κλασικό μοντέλο θέλουμε να ισχύει  $c > \lambda\mu$ , όπου  $\mu = E(X)$ . Υπολογίζουμε λοιπόν τον ρυθμό είσπραξης των ασφαλιστών  $c$  από την σχέση

$$c = (1 + \theta)\lambda\mu, \quad \theta > 0.$$

Για ευκολία στους υπολογισμούς που θα ακολουθήσουν θέτουμε

$$\rho = \lambda\mu.$$

Επίσης ορίζουμε την ποσότητα  $m$  από τις παρακάτω ισοδύναμες σχέσεις

$$m = \frac{\rho}{c} = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{1}{1 + \theta} = \psi_0(0).$$

Σύμφωνα με τους ορισμούς που δώσαμε θα ισχύει

$$c - \lambda\mu = c \left( 1 - \frac{\lambda\mu}{c} \right) = c(1 - m) = c\bar{\psi}_0(0).$$

Στο Κεφάλαιο 3 είχαμε βρεί ότι η λύση για την πιθανότητα χρεοκοπίας με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο ήταν

$$\bar{\psi}_\delta(0) = \frac{1}{\kappa_\delta}, \quad \kappa_\delta = c \int_0^\infty e^{-ct} + \lambda\mu \int_0^t \tilde{f}_e(\delta z) dz dt \quad (4.1)$$

Αν συμβολίσουμε με  $h(s)$  τον μετασχηματισμό Laplace της κατανομής ισορροπίας τη τ.μ.  $X$ , δηλ

$$h(s) = \tilde{f}_e(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_e(x) dx,$$

τότε έχουμε

$$\kappa_\delta = c \int_0^\infty e^{-ct} + \rho \int_0^t h(\delta z) dz dt,$$

και σε συνδυασμό με την (4.1) προκύπτει άμεσα ότι

$$[c\bar{\psi}_\delta(0)]^{-1} = \int_0^\infty e^{-ct} + \rho \int_0^t h(\delta z) dz dt \quad (4.2)$$

Σε αυτή την υποενότητα λοιπόν θα χρησιμοποιήσουμε την (4.2) για να πάρουμε λεπτομερέστερες πληροφορίες σχετικά με την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι μηδέν. Επίσης, θα εξετάσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν η ένταση ανατοκισμού  $\delta$  είναι μικρή.

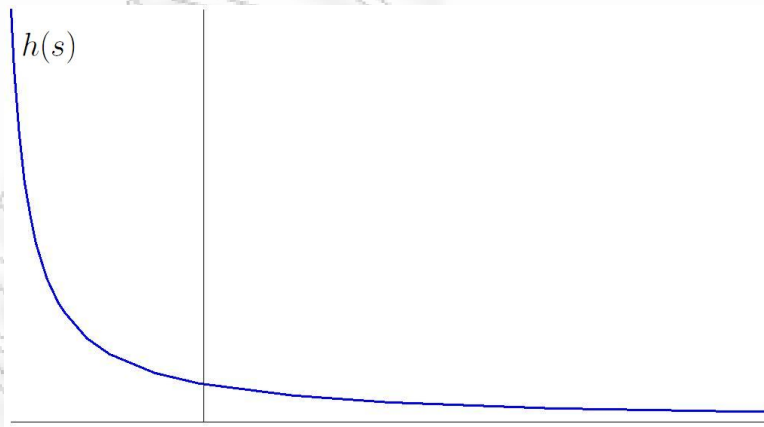
Μία παρατήρηση που θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στη συνέχεια είναι το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Laplace της κατανομής ισορροπίας τη τ.μ.  $X$  είναι μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση που στρέφει τα κοίλα προς τα άνω. Αυτό προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες της συνάρτησης  $h(s)$  αφού

$$h(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_e(x) dx$$

$$h'(s) = \int_0^\infty -xe^{-sx} f_e(x) dx < 0$$

$$h''(s) = \int_0^\infty x^2 e^{-sx} f_e(x) dx > 0$$

Αυτά τα χαρακτηριστικά της  $h(s)$  φαίνονται καλύτερα στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 4.1: Ο μετασχηματισμός Laplace της κατανομής ισορροπίας της τ.μ.  $X$

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, για οποιοδήποτε  $\alpha$  και για  $b > 0$  θα ισχύει

$$h(\alpha) \geq h(\alpha + b) \geq h(\alpha) + bh'(\alpha) \quad (4.3)$$

### Ανισότητες για την $\bar{\psi}_\delta(0)$

Για να βρούμε ανισότητες για την  $\bar{\psi}_\delta(0)$  θα χρησιμοποιήσουμε την (4.3) για  $\alpha = 0$  και  $b = \delta z$ . Όμως για  $\alpha = 0$  ισχύει

$$h'(0) = - \int_0^\infty x f_e(x) dx$$

και αν συμβολίσουμε με  $\nu_1$  την μέση τιμή της τ.μ.  $X_e$ , δηλαδή

$$\nu_1 = \int_0^\infty x f_e(x) dx,$$

τότε

$$h'(0) = -\nu_1.$$

Επιπλέον ισχύει

$$h(0) = \int_0^\infty f_e(x) dx = 1.$$

Άρα για  $\alpha = 0$  και  $b = \delta z$  η (4.3) μας δίνει

$$1 \geq h(\delta z) \geq 1 - \delta z \nu_1 \quad (4.4)$$

Από το αριστερό μέλος της (4.4) θα πάρουμε την πρώτη μας ανισότητα για την  $\bar{\psi}_\delta(0)$ . Συγκεκριμένα έχουμε

$$\begin{aligned} h(\delta z) \leq 1 &\Rightarrow \int_0^t h(\delta z) dz \leq \int_0^t 1 dz \Rightarrow -ct + \rho \int_0^t h(\delta z) dz \leq -ct + \rho t \\ \Rightarrow e^{-ct} + \rho \int_0^t h(\delta z) dz &\leq e^{-(c-\rho)t} \Rightarrow \int_0^\infty e^{-ct} + \rho \int_0^t h(\delta z) dz dt \leq \int_0^\infty e^{-(c-\rho)t} dt \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\int_0^\infty e^{-ct} + \rho \int_0^t h(\delta z) dz dt \leq \frac{1}{c-\rho}$$

οπότε κάνοντας χρήση της (4.2) βρίσκουμε ότι

$$[c\bar{\psi}_\delta(0)]^{-1} \leq \frac{1}{c-\rho}$$

Επίσης αναγνωρίζουμε ότι  $c - \rho = c - \lambda\mu = c(1 - \frac{\lambda\mu}{c}) = c(1 - m)$ , οπότε έχουμε

$$\frac{1}{c\bar{\psi}_\delta(0)} \leq \frac{1}{c(1-m)}$$



δηλαδή ένα κάτω φράγμα για την  $\bar{\psi}_\delta(0)$  είναι

$$\bar{\psi}_\delta(0) \geq 1 - m \quad (4.5)$$

Πριν προχωρήσουμε στην εύρεση της άλλης ανισότητας για την  $\bar{\psi}_\delta(0)$  ας σχολιάσουμε λίγο τη σχέση (4.5). Είναι χαρακτηριστικό το γεγονός ότι η ισότητα στην (4.5) ισχύει για το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου χωρίς επιτόκιο. Θυμίζουμε ότι για  $\delta = 0$  ισχύει

$$\bar{\psi}(0) = \frac{\theta}{1+\theta} = 1 - \frac{1}{1+\theta} = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} = 1 - \frac{\rho}{c} = 1 - m.$$

Επιπλέον αν αντικαταστήσουμε στην (4.5)  $\bar{\psi}_\delta(0) = 1 - \psi_\delta(0)$ , παίρνουμε ότι

$$\psi_\delta(0) \leq m$$

όμως

$$m = 1 - \bar{\psi}(0) = \psi(0)$$

Άρα ισχύει

$$\psi_\delta(0) \leq \psi(0). \quad (4.6)$$

Η (4.6) δηλώνει ξεκάθαρα ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο είναι μικρότερη στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο σε σχέση με την αντίστοιχη πιθανότητα στο κλασσικό μοντέλο χωρίς επιτόκιο. Αυτό είναι απολύτως φυσιολογικό διότι το πλεόνασμα στο μοντέλο με το επιτόκιο επενδύεται.

Η δεύτερη ανισότητα για την  $\bar{\psi}_\delta(0)$  προκύπτει από το δεξί μέλος της (4.4):

$$\begin{aligned} h(\delta z) &\geq 1 - \nu_1 \delta z \Rightarrow \int_0^t h(\delta z) dz \geq \int_0^t (1 - \nu_1 \delta z) dz \\ &\Rightarrow -ct + \rho \int_0^t h(\delta z) dz \geq -ct + \rho \int_0^t (1 - \nu_1 \delta z) dz \\ &\Rightarrow e^{-ct + \rho \int_0^t h(\delta z) dz} \geq e^{-ct + \rho t - \frac{1}{2} \rho \nu_1 \delta t^2} \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας λοιπόν και τα δύο μέλη της τελευταίας ανισότητας από 0 έως  $\infty$  έχουμε

$$\int_0^\infty e^{-ct + \rho \int_0^t h(\delta z) dz} \geq \int_0^\infty e^{-ct + \rho t - \frac{1}{2} \rho \nu_1 \delta t^2} dt$$

και μέσω της (4.2) φτάνουμε στην εξής σχέση

$$[c\bar{\psi}_\delta(0)]^{-1} \geq \int_0^\infty e^{-(c-\rho)t - \frac{1}{2} \rho \nu_1 \delta t^2} dt \quad (4.7)$$

Για να απλοποιήσουμε την (4.7) θα εκφράσουμε το ολοκλήρωμα υπό την μορφή μίας κανονικής κατανομής  $N(0, 1)$ . Συγκεκριμένα θέλουμε να φέρουμε το εκθετικό κομμάτι στη μορφή  $e^{-\frac{1}{2}u^2}$ . Ξεκινάμε αναλύοντας τον εκθέτη ξεχωριστά αφού πρώτα θέσουμε

$$A = -(c - \rho)t - \frac{1}{2}\rho\nu_1\delta t^2.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} [2(c - \rho)t + \rho\nu_1\delta t^2] = -\frac{1}{2} \left[ 2\frac{(c - \rho)}{\sqrt{\rho\nu_1\delta}} \sqrt{\rho\nu_1\delta}t + (\sqrt{\rho\nu_1\delta}t)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[ 2\frac{(c - \rho)}{\sqrt{\rho\nu_1\delta}} \sqrt{\rho\nu_1\delta}t + (\sqrt{\rho\nu_1\delta}t)^2 + \left( \frac{(c - \rho)}{\sqrt{\rho\nu_1\delta}} \right)^2 - \left( \frac{(c - \rho)}{\sqrt{\rho\nu_1\delta}} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$\alpha = \frac{(c - \rho)}{\sqrt{\rho\nu_1\delta}} = \frac{c(1 - m)}{\sqrt{\rho\nu_1\delta}} \quad (4.8)$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} \left[ 2\alpha \sqrt{\rho\nu_1\delta}t + (\sqrt{\rho\nu_1\delta}t)^2 + \alpha^2 - \alpha^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2} \left( \sqrt{\rho\nu_1\delta}t + \alpha \right)^2 \end{aligned}$$

και για  $\sqrt{\rho\nu_1\delta}t + \alpha = u$  ισχύει

$$A = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{u^2}{2}$$

Επίσης ισχύει  $dt = \frac{1}{\sqrt{\rho\nu_1\delta}} du$ . Αντικαθιστώντας στην (4.7), προκύπτει η ανισότητα

$$[c\bar{\psi}_\delta(0)]^{-1} \geq \frac{1}{\sqrt{\rho\nu_1\delta}} e^{\frac{\alpha^2}{2}} \int_\alpha^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (4.9)$$

Παρατηρούμε ότι με την αλλαγή μεταβλητής άλλαξαν και τα όρια ολοκλήρωσης. Επίσης από την (4.8) έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{\rho\nu_1\delta}} = \frac{\alpha}{c(1 - m)},$$

ενώ αναγνωρίζουμε και την ποσότητα

$$R(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

ως τον γνωστό δείκτη Mills. Έτσι η (4.9) μας δίνει

$$\frac{1}{c\bar{\psi}_\delta(0)} \geq \frac{\alpha}{c(1-m)}R(\alpha)$$

ή ισδύναμα ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα μη χρεοκοπίας δίνεται από την σχέση

$$\bar{\psi}_\delta(0) \leq (1-m)\frac{1}{\alpha R(\alpha)} \quad (4.10)$$

Συνδυάζοντας τις (4.5) και (4.10) προκύπτει η διπλή ανισότητα

$$1-m \leq \bar{\psi}_\delta(0) \leq (1-m)\frac{1}{\alpha R(\alpha)}. \quad (4.11)$$

Μάλιστα μπορούμε να βελτιώσουμε το άνω φράγμα που δίνεται από την (4.10) καθώς ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις (βλ. Mitrinovic (1970) )

$$\frac{1}{\alpha R(\alpha)} \leq 1 + \frac{1}{\alpha^2} \quad (4.12)$$

ή ακριβέστερα

$$\frac{1}{\alpha R(\alpha)} \leq \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{4}{\alpha^2} \right)^{1/2} \right]$$

όμως από την (4.8) παίρνουμε ότι

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{\rho\nu_1\delta}{c^2(1-m)^2} = \frac{m\nu_1}{(1-m)^2} \left( \frac{\delta}{c} \right) \quad (4.13)$$

επομένως οι (4.12) και (4.13) σε συνδυασμό με την (4.10) μας δίνουν

$$\bar{\psi}_\delta(0) \leq (1-m) \left[ 1 + \frac{m\nu_1}{(1-m)^2} \left( \frac{\delta}{c} \right) \right] \quad (4.14)$$

και

$$\bar{\psi}_\delta(0) \leq (1-m) \left( 1 + \left[ 1 + \frac{4m\nu_1}{(1-m)^2} \left( \frac{\delta}{c} \right) \right]^{1/2} \right) \quad (4.15)$$

αντίστοιχα. Οι (4.14) και (4.15) περιγράφουν τα βελτιωμένα άνω φράγματα για την  $\bar{\psi}_\delta(0)$ .

## 4.5 Αριθμητικά αποτελέσματα

Στα παραδείγματα που ακολουθούν θα υπολογίσουμε αριθμητικά τα φράγματα των Θεωρημάτων 4.1 και 4.2. Στο κάθε παράδειγμα θα επιλέγουμε και μία διαφορετική κατανομή για το μέγεθος ατομικής ζημιάς, ώστε να μπορέσουμε να καλύψουμε τις διάφορες ειδικές περιπτώσεις που έχουμε αναφέρει ως τώρα. Οι αριθμητικοί υπολογισμοί έχουν γίνει με τη βοήθεια του λογισμικού *Mathematica* και οι εντολές που χρησιμοποιήθηκαν βρίσκονται στο Παράρτημα της εργασίας.

**Παράδειγμα 4.1.** Έστω ότι η κατανομή του μεγέθους ατομικής ζημιάς είναι η εκθετική με παράμετρο  $\mu$ , δηλαδή

$$F(x) = 1 - e^{-\mu x}, \quad x \geq 0, \quad \mu > 0. \quad (4.27)$$

Η ροπογεννήτρια της τ.μ.  $X$  θα είναι

$$M_X(t) = \frac{\mu}{\mu - t}, \quad t < \mu. \quad (4.28)$$

Ορίζουμε τις τιμές των παραμέτρων για το παράδειγμά μας ως εξής:  $c = 60$ ,  $\lambda = 55$  και  $\mu = 1$  έτσι ώστε  $E(X) = Var(X) = 1$ . Επίσης θα θεωρήσουμε τρεις διαφορετικές τιμές για την ένταση ανατοκισμού  $\delta$ : 0.01, 0.07 και 0.15. Για τους αριθμητικούς υπολογισμούς αυτού του παραδείγματος παραπέμπουμε στο “Παράδειγμα 4.1” του Παραρτήματος.

Αρχικά υπολογίζουμε τους συντελεστές προσαρμογής  $R_1$  και  $R_2$  σύμφωνα με τις προϋποθέσεις των Λημμάτων 4.1 και 4.2. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Πίνακας 1

Οι συντελεστές προσαρμογής στο Παράδειγμα 4.1

$\delta$	$R_1$	$R_2$
0.01	0.08335	0.08349
0.07	0.08343	0.08440
0.15	0.08354	0.08562

Στη συνέχεια υπολογίσαμε τα φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Στους Πίνακες 2, 3 και 4 βλέπουμε τα φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας με εντάσεις ανατοκισμού  $\delta = 0.01$ ,  $\delta = 0.07$  και  $\delta = 0.15$  αντίστοιχα. “Αναδρομικό” είναι το φράγμα μέσω αναδρομικών τεχνικών σύμφωνα με τη σχέση (4.14) του Θεωρήματος 4.2, ενώ “Martingale” είναι το φράγμα μέσω martingales σύμφωνα με τη σχέση (4.4) του Θεωρήματος 4.1.

Πίνακας 2

Άνω φράγματα στο Παράδειγμα 4.1 με  $\delta = 0.01$ 

u	Martingale	Αναδρομικό
0	1.0000	0.9165
5	0.6592	0.6037
10	0.4345	0.3976
15	0.2864	0.2619
20	0.1889	0.1725
25	0.1245	0.1136

Πίνακας 3

Άνω φράγματα στο Παράδειγμα 4.1 με  $\delta = 0.07$ 

u	Martingale	Αναδρομικό
0	1.0000	0.9156
5	0.6589	0.6000
10	0.4341	0.3933
15	0.2861	0.2578
20	0.1885	0.1690
25	0.1242	0.1107

Πίνακας 4

Άνω φράγματα στο Παράδειγμα 4.1 με  $\delta = 0.15$ 

u	Martingale	Αναδρομικό
0	1.0000	0.9144
5	0.6586	0.5953
10	0.4337	0.3876
15	0.2856	0.2523
20	0.1881	0.1643
25	0.1239	0.1070

Παρατηρούμε ότι τα άνω φράγματα μέσω αναδρομικών τεχνικών είναι καλύτερα από τα άνω φράγματα μέσω martingales. Επίσης παρατηρούμε ότι η διαφορά μεταξύ αυτών των δύο φραγμάτων αυξάνεται όσο αυξάνεται η ένταση ανατοκισμού  $\delta$ .

**Παράδειγμα 4.2.** Έστω ότι το μέγεθος ατομικής ζημιάς ακολουθεί την κατανομή Γάμμα, δηλαδή

$$f(x) = \frac{\gamma^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\gamma x}, \quad x \geq 0, \quad \gamma > 0, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.29)$$

Επιλέγουμε να ισχύει  $0 < \alpha < 1$ , έτσι ώστε η κατανομή μας να έχει φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας. Η ροπογεννήτρια της τ.μ.  $X$  θα είναι

$$M_X(t) = \left( \frac{\gamma}{\gamma - t} \right)^\alpha, \quad t < \gamma. \quad (4.30)$$

Σε αυτό το παράδειγμα θα κάνουμε υπολογισμούς για  $\delta = 0.07$ . Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, ορίζουμε τις τιμές των βασικών μας παραμέτρων:  $c = 60$ ,  $\lambda = 55$  και  $\alpha = \gamma = 0.5$  έτσι ώστε

$$E[X] = \frac{\alpha}{\gamma} = 1 \quad (\text{όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα}), \quad \text{και}$$

$$Var[X] = \frac{\alpha}{\gamma^2} = 2 \quad (\text{μεγαλύτερη από τη διακύμανση στο Παράδειγμα 4.1})$$

Λόγω της μεγαλύτερης διακύμανσης αναμένουμε μεγαλύτερα φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε σχέση με τα αντίστοιχα φράγματα του Παραδείγματος 4.1. Αρχικά βρίσκουμε ότι  $R_1 = 0.05509$  και  $R_2 = 0.05574$ . Με βάση τους νέους συντελεστές προσαρμογής καθώς και τη νέα ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής που αναπαριστά το μέγεθος ατομικής ζημιάς για το μοντέλο μας, βρήκαμε τα φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με τις σχέσεις (4.4) και (4.14) των Θεωρημάτων 4.1 και 4.2 αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα αυτά παρουσιάζονται στον Πίνακα 5 και θυμίζουμε ότι υπολογίστηκαν για ένταση ανατοκισμού  $\delta = 0.07$ .

Πίνακας 5

Άνω φράγματα στο Παράδειγμα 4.2 με  $\delta = 0.07$

u	Martingale	Αναδρομικό
0	1.0000	0.9426
5	0.7592	0.7131
10	0.5764	0.5395
15	0.4376	0.4081
20	0.3323	0.3087
25	0.2523	0.2336

Βλέπουμε ότι όντως τα φράγματα που βρήκαμε σε αυτό το παράδειγμα είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα του Παραδείγματος 4.1 (Πίνακας 3) όπου είχαμε μικρότερη διακύμανση.

**Παράδειγμα 4.3.** Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το μέγεθος ατομικής ζημιάς ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με συνάρτηση πυκνότητας που δίνεται από την σχέση (4.29), και  $\alpha > 1$ .

Σε αυτή την περίπτωση επιλέξαμε την κατανομή μας έτσι ώστε να μην έχει φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας ( $\alpha > 1$ ). Και εδώ θα υπολογίσουμε τους συντελεστές προσαρμογής  $R_1$  και  $R_2$ , καθώς και τα φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Ωστόσο σε αυτό το παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (4.12) του Θεωρήματος 4.2 για να βρούμε το αναδρομικό άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας, αφού η κατανομή μας δεν ανήκει στην οικογένεια κατανομών *NWUC*. Ορίζουμε λοιπόν  $c = 60$ ,  $\lambda = 55$ , και  $\alpha = \gamma = 1.6$ .

Για ένταση ανατοκισμού  $\delta = 0.07$  βρήκαμε ότι  $R_1 = 0.10337$  και  $R_2 = 0.10456$ . Ο Πίνακας 6 συνοψίζει τα άνω φράγματα που βρήκαμε με τη βοήθεια των συντελεστών προσαρμογής.

Πίνακας 6

Άνω φράγματα στο Παράδειγμα 4.3 με  $\delta = 0.07$

u	Martingale	Αναδρομικό
0	1.0000	1.0000
5	0.5964	0.5925
10	0.3557	0.3511
15	0.2121	0.2080
20	0.1265	0.1232
25	0.0755	0.0730

Παρατηρούμε ότι για άλλη μία φορά τα φράγματα μέσω αναδρομικών τεχνικών είναι καλύτερα σε σχέση με τα φράγματα μέσω μαρτινγαλες. Επίσης συγκρίνοντας τα φράγματα των Πινάκων 3, 5 και 6 διαπιστώνουμε ότι στο τελευταίο μας παράδειγμα εμφανίζονται τα μικρότερα άνω φράγματα. Αυτό συμβαίνει διότι στο Παράδειγμα 4.5 έχουμε τη μικρότερη διακύμανση σε σχέση με τα Παραδείγματα 4.1 και 4.2, καθώς

$$\text{Var}[X] = \frac{\alpha}{\gamma^2} = \frac{1.6}{1.6^2} \leq 1$$

Μοναδική εξαίρεση στο παραπάνω συμπέρασμα αποτελεί το αναδρομικό φράγμα για  $u = 0$ . Αυτό πιθανότατα οφείλεται στο γεγονός ότι στη χρήση της σχέσης (4.12) για την εύρεση του συγκεκριμένου φράγματος, κάναμε την απλούστευση  $\beta = 1$  (αφού  $\beta \leq 1$ ) βρίσκοντας πιθανώς λίγο μεγαλύτερα φράγματα από ότι αν λαμβάναμε υπ' όψιν μας κι την παράμετρο  $\beta$ .

## Κεφάλαιο 5

# Κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

Θα συμβολίσουμε με  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι  $u$ . Όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο 2, η  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  προκύπτει από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu για  $w(x_1, x_2) = I(U_\delta(T_\delta) \leq x)I(|U_\delta(T_\delta)| \leq y)$ . Έτσι λοιπόν έχουμε

$$H_{\delta,\alpha}(u, x, y) = E [e^{-\alpha T_\delta} I(U_\delta(T_\delta^-) \leq x, |U_\delta(T_\delta)| \leq y) I(T_\delta < \infty) | U_\delta(0) = u ] \quad (5.1)$$

Παραγωγίζοντας κατάλληλα την  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας  $h_{\delta,\alpha}(u, x, y)$ . Συγκεκριμένα,

$$h_{\delta,\alpha}(u, x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H_{\delta,\alpha}(u, x, y). \quad (5.2)$$

Επίσης αν συμβολίσουμε με  $F_{\delta,\alpha}(u)$  την προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, τότε

$$F_{\delta,\alpha}(u, x) = E [e^{-\alpha T_\delta} I(U(T_\delta^-) \leq x) I(T_\delta < \infty) | U_\delta(0) = u ]. \quad (5.3)$$

Απο την προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής  $F_{\delta,\alpha}(u)$  παίρνουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία

$$f_{\delta,\alpha}(u, x) = \frac{\partial}{\partial x} F_{\delta,\alpha}(u). \quad (5.4)$$

Οι αντίστοιχες προεξοφλημένες συναρτήσεις για το έλλειμμα τη στιγμή τη χρεοκοπίας θα είναι

$$G_{\delta,\alpha}(u, y) = E [e^{-\alpha T_\delta} I(|U_\delta(T_\delta)| \leq y) I(T_\delta < \infty) | U_\delta(0) = u ], \text{ και} \quad (5.5)$$



$$g_{\delta,\alpha}(u, y) = \frac{\partial}{\partial y} G_{\delta,\alpha}(u, y). \quad (5.6)$$

Μέσω των προεξοφλημένων αυτών συναρτήσεων μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στις μη-προεξοφλημένες, θέτοντας  $\alpha = 0$ . Για ευκολία λοιπόν θα γράφουμε  $F_\delta(u, x)$  αντί για  $F_{\delta,0}(u, x)$ ,  $G_\delta(u, y)$  αντί για  $G_{\delta,0}(u, y)$ , κτλ.

Έχοντας ορίσει τις βασικότερες συναρτήσεις που θα μας απασχολήσουν σε αυτή την ενότητα, μπορούμε να ξεκινήσουμε τη μελέτη της βασικότερης από αυτές, δηλαδή της  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$ .

## 5.1 Η προεξοφλημένη από κοινού κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με την εύρεση της ολοκληρωτικής εξίσωσης που ικανοποιεί η  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  καθώς και τη λύση αυτής της εξίσωσης. Επίσης θα αναφερθούμε και στην προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας  $h_{\delta,\alpha}(u, x, y)$ .

**Θεώρημα 5.1.** Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με σταθερό επιτόκιο η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας ικανοποιεί την εξής ολοκληρωτική εξίσωση Volterra:

$$H_{\delta,\alpha}(u, x, y) = \frac{cH_{\delta,\alpha}(0, x, y)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} [F_e(u \wedge x) + F_e(y) - F_e(u \wedge x + y)] + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u, t)H_{\delta,\alpha}(x, y|t)dt \quad (5.7)$$

### Απόδειξη:

Είναι φανερό από την (5.1) ότι η  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  προκύπτει από την συνάρτηση των Gerber-Shiu. Συγκεκριμένα για  $w(x_1, x_2) = I(x_1 \leq x)I(x_2 \leq y)$  ισχύει  $\Phi_{\delta,\alpha}(u) = H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  Επίσης θα είναι

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_t^\infty w(t, s-t)f(s)ds = \int_t^\infty I(t \leq x)I(s-t \leq y)f(s)ds \\ &= I(t \leq x) \int_t^\infty I(s \leq y+t)f(s)ds = I(t \leq x) \int_t^{y+t} f(s)ds = I(t \leq x) [\bar{F}(t) - \bar{F}(y+t)]. \end{aligned}$$

Θυμίζουμε ότι η ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση πωινής των Gerber-Shiu είναι

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u, t)\Phi_{\delta,\alpha}(t)dt.$$

οπότε για  $w(x_1, x_2) = I(x_1 \leq x)I(x_2 \leq y)$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} H_{\delta,\alpha}(u, x, y) &= \frac{cH_{\delta,\alpha}(0, x, y)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^{u \wedge x} [\bar{F}(t) - \bar{F}(y + t)] dt + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u, t) H_{\delta,\alpha}(x, y|t) dt \\ &= \frac{cH_{\delta,\alpha}(0, x, y)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} \int_0^{u \wedge x} [f_e(t) - f_e(y + t)] + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u, t) H_{\delta,\alpha}(x, y|t) dt \\ &= \frac{cH_{\delta,\alpha}(0, x, y)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} [F_e(u \wedge x) - F_e(0) - F_e(u \wedge x + y) + F_e(y)] \\ &\quad + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u, t) H_{\delta,\alpha}(x, y|t) dt \end{aligned}$$

δηλαδή ισχύει

$$\begin{aligned} H_{\delta,\alpha}(u, x, y) &= \frac{cH_{\delta,\alpha}(0, x, y)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} [F_e(u \wedge x) + F_e(y) - F_e(u \wedge x + y)] \\ &\quad + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u, t) H_{\delta,\alpha}(x, y|t) dt, \end{aligned}$$

σχέση που ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1. □

Η (5.7) είναι μία ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δεύτερου τύπου και στα πλαίσια του Θεωρήματος που ακολουθεί δίνουμε τη λύση της.

**Θεώρημα 5.2.** Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με σταθερό επιτόκιο, η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση

$$H_{\delta,\alpha}(u, x, y) = \begin{cases} H_{\delta,\alpha}^1(x, y) \left( \frac{1}{c + \delta u} + \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \right) + \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u + y) \\ \quad + \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t + y) dt + \psi_{\delta,\alpha}(u), & u < x \\ H_{\delta,\alpha}^2(x, y) \left( \int_x^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \\ \quad - \lambda\mu \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} [F_e(t) + F_e(y) - F_e(t + y)] dt, & u \geq x \end{cases} \quad (5.8)$$

όπου

$$\begin{aligned} H_{\delta,\alpha}^1(x, y) &= cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) - c\psi_{\delta,\alpha}(0) - \lambda\mu F_e(y), \\ H_{\delta,\alpha}^2(x, y) &= cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) - \lambda\mu [F_e(x) + F_e(y) - F_e(x + y)] \end{aligned}$$

και η  $H_{\delta,\alpha}(0, x, y)$  δίνεται παρακάτω στην Πρόταση 5.1.

### Απόδειξη:

Η γενική μορφή μίας ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra δεύτερου τύπου (βλ. Εισαγωγή) είναι

$$\phi(u) = \ell(u) + \int_0^u K(u, t)\phi(t)dt, \quad (5.9)$$

και η μοναδική λύση της δίνεται από τη σχέση

$$\phi(u) = \ell(u) + \int_0^u K(u, t)\ell(t)dt \quad (5.10)$$

όπου

$$K(u, t) = \sum_{m=1}^{\infty} k^m(u, t)$$
$$k^m(u, t) = \int_t^u k(u, s)k^{m-1}(s, t)ds, \quad m = 2, 3, \dots$$

και

$$k^1(u, t) = k(u, t)$$

Στην περίπτωση της εξίσωσης (5.7) έχουμε

$$\ell(u) = \frac{cH_{\delta, \alpha}(0, x, y)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} [F_e(u \wedge x) + F_e(y) - F_e(u \wedge x + y)], \text{ και} \quad (5.11)$$

$$K_{\delta, \alpha}(u, t) = \sum_{m=1}^{\infty} k_{\delta, \alpha}^m(u, t)$$
$$k_{\delta, \alpha}^m(u, t) = \int_t^u k_{\delta, \alpha}(u, s)k_{\delta, \alpha}^{m-1}(s, t)ds, \quad m = 2, 3, \dots$$
$$k_{\delta, \alpha}^1(u, t) = k_{\delta, \alpha}(u, t)$$

Επομένως, σύμφωνα με την (5.10), η λύση της εξίσωσης (5.7) θα είναι

$$H_{\delta, \alpha}(u, x, y) = \ell(u) + \int_0^u K_{\delta, \alpha}(u, t)\ell(t)dt.$$

Στην παραπάνω εξίσωση αντικαθιστούμε την ποσότητα  $\ell(u)$  (όπως την βρήκαμε μεσω της εξίσωσης (5.11)), και παίρνουμε

$$H_{\delta, \alpha}(u, x, y) = \frac{cH_{\delta, \alpha}(0, x, y)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} [F_e(u \wedge x) + F_e(y) - F_e(u \wedge x + y)]$$
$$+ cH_{\delta, \alpha}(0, x, y) \int_0^u \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt - \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t \wedge x) dt$$
$$- \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(y) dt + \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t \wedge x + y) dt \quad (5.12)$$

Λόγω της ποσότητας  $(u \wedge x)$ , από την (5.12) θα πάρουμε δύο λύσεις. Μία για  $u < x$  και μία για  $u \geq x$ .

Για  $u < x$  η (5.12) μας δίνει:

$$\begin{aligned} H_{\delta,\alpha}(u, x, y) &= \frac{cH_{\delta,\alpha}(0, x, y)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} [F_e(u) + F_e(y) - F_e(u + y)] \\ &\quad + cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt - \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t) dt \\ &\quad - \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(y) dt + \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t + y) dt \end{aligned} \quad (5.13)$$

Όμως από τη λύση για την πιθανότητα χρεοκοπίας είχαμε δει ότι

$$\psi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\psi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + c\psi_{\delta,\alpha}(0) \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u)}{c + \delta u} dt - \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u)}{c + \delta u} F_e(t) dt$$

δηλαδή

$$-\lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u)}{c + \delta u} F_e(t) dt = \psi_{\delta,\alpha}(u) - \frac{c\psi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} + \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + c\psi_{\delta,\alpha}(0) \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u)}{c + \delta u} dt \quad (5.14)$$

αντικαθιστώντας την (5.14) στην (5.13), παίρνουμε

$$\begin{aligned} H_{\delta,\alpha}(u, x, y) &= \frac{c}{c + \delta u} [H_{\delta,\alpha}(0, x, y) - \psi_{\delta,\alpha}(0)] - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} [F_e(u) + F_e(y) - F_e(u + y) - F_e(u)] \\ &\quad + [cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) - c\psi_{\delta,\alpha}(0) - \lambda\mu F_e(y)] \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \\ &\quad + \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t + y) dt + \psi_{\delta,\alpha}(u) \\ &= \frac{[cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) - c\psi_{\delta,\alpha}(0) - \lambda\mu F_e(y)]}{c + \delta u} + \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u + y) \\ &\quad + [cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) - c\psi_{\delta,\alpha}(0) - \lambda\mu F_e(y)] \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \\ &\quad + \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t + y) dt + \psi_{\delta,\alpha}(u) \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$H_{\delta,\alpha}^1(x, y) = cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) - c\psi_{\delta,\alpha}(0) - \lambda\mu F_e(y)$$

οπότε

$$\begin{aligned} H_{\delta,\alpha}(u, x, y) &= H_{\delta,\alpha}^1(x, y) \left( \frac{1}{c + \delta u} + \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \right) + \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u + y) \\ &\quad + \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t + y) dt + \psi_{\delta,\alpha}(u) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Αντίστοιχα για  $u \geq x$  η (5.12) μας δίνει:

$$\begin{aligned} H_{\delta,\alpha}(u, x, y) &= \frac{cH_{\delta,\alpha}(0, x, y)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} [F_e(x) + F_e(y) - F_e(x + y)] \\ &\quad - \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} [F_e(t \wedge x) + F_e(y) - F_e(t \wedge x + y)] dt \\ &\quad + cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \end{aligned}$$

Σαυτό το σημείο πρέπει να προσδιορίσουμε την ποσότητα  $t \wedge x$ , γνωρίζοντας ότι  $x \leq u$  και  $0 < t < u$ . Επομένως διακρίνουμε δύο διαστήματα:

στο διάστημα  $[0, x) : t \wedge x = t$ , ενώ

στο διάστημα  $[x, u] : t \wedge x = x$ .

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} H_{\delta,\alpha}(u, x, y) &= \frac{cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) - \lambda\mu [F_e(x) + F_e(y) - F_e(x + y)]}{c + \delta u} \\ &\quad + \{cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) - \lambda\mu [F_e(x) + F_e(y) - F_e(x + y)]\} \int_x^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \\ &\quad + cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt - \lambda\mu \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} [F_e(t) + F_e(y) - F_e(t + y)] dt \end{aligned}$$

και αν θέσουμε

$$H_{\delta,\alpha}^2(x, y) = cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) - \lambda\mu [F_e(x) + F_e(y) - F_e(x + y)]$$

τότε έχουμε

$$\begin{aligned} H_{\delta,\alpha}(u, x, y) &= H_{\delta,\alpha}^2(x, y) \left( \frac{1}{c + \delta u} + \int_x^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \right) + cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \\ &\quad - \lambda\mu \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} [F_e(t) + F_e(y) - F_e(t + y)] dt \end{aligned} \quad (5.16)$$

Με την εύρεση των εξισώσεων (5.15) και (5.16) ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος 5.2 που μας δίνει τη λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος λίγο πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας για το κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο.  $\square$

Στην πρόταση που ακολουθεί υπολογίζουμε την ποσότητα  $H_{\delta,\alpha}(0, x, y)$ . Αυτή προκύπτει από την αντίστοιχη  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$ , αφού για  $w(x_1, x_2) = I(x_1 < x)I(x_2 < y)$  ισχύει  $\Phi_{\delta,\alpha}(0) = H_{\delta,\alpha}(0, x, y)$ .

**Πρόταση 5.1.** Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με σταθερό επιτόκιο η  $H_{\delta,\alpha}(0, x, y)$  δίνεται από τη σχέση

$$H_{\delta,\alpha}(0, x, y) = \frac{\lambda}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^\infty \int_0^x e^{-\delta vt} [\bar{F}(t) - \bar{F}(y+t)] dt v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda \mu \int_0^v \bar{f}_e(\delta s) ds} dv, \quad (5.17)$$

όπου

$$\kappa_{\delta,\alpha} = c \int_0^\infty v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda \mu \int_0^v \bar{f}_e(\delta s) ds} dv$$

**Απόδειξη:**

Θυμίζουμε ότι

$$\Phi_{\delta,\alpha}(0) = \frac{\lambda \mu_A}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^\infty \tilde{a}_1(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda \mu \int_0^v \bar{f}_e(\delta s) ds} dv \quad (5.18)$$

Η μόνη ποσότητα που επηρεάζεται από την επιλογή  $w(x_1, x_2) = I(x_1 < x)I(x_2 < y)$  είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $A(t)$ . Συγκεκριμένα έχουμε

$$\tilde{a}_1(\delta v) = \int_0^\infty e^{-\delta vx} dA_1(x) = \frac{1}{\mu_A} \int_0^\infty e^{-\delta vx} A(x) dx.$$

Όμως δεδομένης της συνάρτησης  $w$  έχουμε

$$A(t) = [\bar{F}(t) - \bar{F}(y+t)] I(t \leq x).$$

Έτσι

$$\tilde{a}_1(\delta v) = \frac{1}{\mu_A} \int_0^\infty e^{-\delta vt} [\bar{F}(t) - \bar{F}(y+t)] I(t \leq x) dt = \frac{1}{\mu_A} \int_0^x e^{-\delta vt} [\bar{F}(t) - \bar{F}(y+t)] dt$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν την ποσότητα  $\tilde{a}_1(\delta v)$  στην εξίσωση (5.18) καταλήγουμε στη σχέση (5.17) για την  $H_{\delta,\alpha}(0, x, y)$ .  $\square$

## 5.2 Περιθώρια κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με το πλεόμασμα πριν τη χρεοκοπία. Συγκεκριμένα, θα βρούμε την προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος καθώς και τη προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητάς του, ενώ θα ανακαλύψουμε έναν ιδιαίτερο και πολύ σημαντικό ρόλο που παίζει αυτή η κατανομή.

Η εύρεση της προεξοφλημένης συνάρτησης κατανομής του πλεονάσματος  $F_{\delta,\alpha}(u, x)$ , που ορίσαμε

στην αρχή αυτού του κεφαλαίου σύμφωνα με την (5.3), είναι σχετικά απλή όταν έχει κανείς στη διάθεσή του την  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$ . Και αυτό διότι

$$F_{\delta,\alpha}(u, x) = \lim_{y \rightarrow \infty} H_{\delta,\alpha}(u, x, y).$$

Όμως στην προηγούμενη παράγραφο βρήκαμε τη λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  (βλ. Θεώρημα 5.2). Μέσω αυτής της λύσης λοιπόν μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε και την λύση της αντίστοιχης εξίσωσης που ικανοποιεί η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία. Το Λήμμα που ακολουθεί περιλαμβάνει τους σχετικούς υπολογισμούς.

**Λήμμα 5.1.** *Η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι*

$$F_{\delta,\alpha}(u, x) = \begin{cases} c[F_{\delta,\alpha}(0, x) - \psi_{\delta,\alpha}(0)] \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + \psi_{\delta,\alpha}(u), & u < x \\ = (cF_{\delta,\alpha}(0, x) - \lambda\mu F_e(x)) \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) \\ + \lambda\mu \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} [F_e(x) - F_e(t)] dt, & u \geq x \end{cases} \quad (5.19)$$

και η  $F_{\delta,\alpha}(0, x)$  δίνεται παρακάτω στο Πρόσχημα 5.1.

**Απόδειξη:**

Παίρνουμε το όριο για  $y \rightarrow \infty$ , του κάθε κλάδου της (5.8) ξεχωριστά.

Για  $u < x$  έχουμε τα εξής επιμέρους αποτελέσματα:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} H_{\delta,\alpha}^1(x, y) = \lim_{y \rightarrow \infty} (cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) - c\psi_{\delta,\alpha}(0) - \lambda\mu F_e(y)) = c[F_{\delta,\alpha}(0, x) - \psi_{\delta,\alpha}(0)]$$

αφού

$$\lim_{y \rightarrow \infty} H_{\delta,\alpha}(0, x, y) = F_{\delta,\alpha}(0, x)$$

και

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F_e(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(y)}{\mu} = 0.$$

Και εφόσον το όριο της κατανομής ισορροπίας όταν  $y \rightarrow \infty$  είναι 0, θα έχουμε

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left( \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u + y) \right) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t + y) dt \right) = 0$$

Επομένως συνολικά για  $u < x$  θα ισχύει

$$F_{\delta,\alpha}(u, x) = c[F_{\delta,\alpha}(0, x) - \psi_{\delta,\alpha}(0)] \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + \psi_{\delta,\alpha}(u). \quad (5.20)$$

Αντίστοιχα για  $u \geq x$  θα έχουμε τα επιμέρους αποτελέσματα

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow \infty} H_{\delta, \alpha}^2(x, y) &= \lim_{y \rightarrow \infty} (cH_{\delta, \alpha}(0, x, y) - \lambda\mu [F_e(x) + F_e(y) - F_e(x + y)]) \\ &= cF_{\delta, \alpha}(0, x) - \lambda\mu F_e(x)\end{aligned}$$

και

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left( \lambda\mu \int_0^x \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} [F_e(t) + F_e(y) - F_e(t + y)] dt \right) = \lambda\mu \int_0^x \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t) dt$$

Άρα για  $u \geq x$  θα ισχύει

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow \infty} H_{\delta, \alpha}(u, x, y) &= (cF_{\delta, \alpha}(0, x) - \lambda\mu F_e(x)) \left( \int_x^u \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) \\ &\quad + cF_{\delta, \alpha}(0, x) \int_0^x \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt - \lambda\mu \int_0^x \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t) dt\end{aligned}$$

όμως

$$\int_x^u \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt = \int_0^u \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt - \int_0^x \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt$$

οπότε

$$\begin{aligned}&(cF_{\delta, \alpha}(0, x) - \lambda\mu F_e(x)) \left( \int_x^u \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) = \\ &= (cF_{\delta, \alpha}(0, x) - \lambda\mu F_e(x)) \left( \int_0^u \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt - \int_0^x \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) \\ &= (cF_{\delta, \alpha}(0, x) - \lambda\mu F_e(x)) \left( \int_0^u \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) - cF_{\delta, \alpha}(0, x) \int_0^x \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \\ &\quad + \lambda\mu F_e(x) \int_0^x \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt\end{aligned}$$

Συνολικά λοιπόν για  $u \geq x$  θα έχουμε

$$\begin{aligned}F_{\delta, \alpha}(u, x) &= (cF_{\delta, \alpha}(0, x) - \lambda\mu F_e(x)) \left( \int_0^u \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) \\ &\quad + \lambda\mu \int_0^x \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} [F_e(x) - F_e(t)] dt\end{aligned} \tag{5.21}$$

Οι εξισώσεις (5.20) και (5.21) συνθέτουν την εξίσωση (5.19) και ολοκληρώνουν την απόδειξη του Λήμματος 5.1.  $\square$



**Πόρισμα 5.1.** Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου με σταθερό επιτόκιο η  $F_{\delta,\alpha}(0, x)$  δίνεται από τη σχέση

$$F_{\delta}(0, x) = \frac{\lambda \int_0^{\infty} \left( \int_0^x e^{-\delta vt} \bar{F}(t) dt \right) e^{-cv} + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds dv}{c \int_0^{\infty} e^{-cv} + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds dv} \quad (5.22)$$

**Απόδειξη:**

Κάνοντας χρήση της Πρότασης 5.1, βρίσκουμε ότι

$$F_{\delta,\alpha}(0, x) = \lim_{y \rightarrow \infty} H_{\delta,\alpha}(0, x, y) = \frac{\lambda}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^{\infty} \left( \int_0^x e^{-\delta vt} \bar{F}(t) dt \right) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv} + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds dv \quad (5.23)$$

δηλαδή ισχύει

$$F_{\delta}(0, x) = \frac{\lambda \int_0^{\infty} \left( \int_0^x e^{-\delta vt} \bar{F}(t) dt \right) e^{-cv} + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds dv}{c \int_0^{\infty} e^{-cv} + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds dv}$$

□

Όπως τονίσαμε και στην αρχή αυτής της παραγράφου η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι μία πολύ σημαντική κατανομή και στο Θεώρημα που ακολουθεί δείχνουμε το γιατί!

**Θεώρημα 5.3.** Αν η τ.μ. που εκφράζει το μέγεθος ατομικής ζημιάς είναι συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας  $f(x) = \Pr(X = x)$  και συνάρτηση δεξιάς ουράς  $\bar{F}(x) = \Pr(X > x)$ , τότε

$$h_{\delta,\alpha}(u, x, y) = \frac{f(x+y)}{\bar{F}(x)} f_{\delta,\alpha}(u, x), \quad \text{όπου} \quad (5.24)$$

$h_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας που ορίσαμε μέσω της (5.2), και  $f_{\delta,\alpha}(u, x)$  η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία που ορίσαμε μέσω της (5.4).

**Απόδειξη:**

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η (5.24) ισχύει για  $u = 0$ , δηλαδή

$$h_{\delta,\alpha}(0, x, y) = \frac{f(x+y)}{\bar{F}(x)} f_{\delta,\alpha}(0, x) \quad (5.25)$$

Από την Πρόταση 5.1 της προηγούμενης παραγράφου γνωρίζουμε ότι

$$H_{\delta,\alpha}(0, x, y) = \frac{\lambda}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^\infty \int_0^x e^{-\delta vt} [\bar{F}(t) - \bar{F}(y+t)] dt v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv+\lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv.$$

Παραγωγίζουμε την  $H_{\delta,\alpha}(0, x, y)$  διαδοχικά ως προς  $x$  και  $y$ , έτσι ώστε να πάρουμε την  $h_{\delta,\alpha}(0, x, y)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} H_{\delta,\alpha}(0, x, y) &= \frac{\lambda}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^\infty e^{-\delta vx} [\bar{F}(x) - \bar{F}(y+x)] v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv+\lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv, \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H_{\delta,\alpha}(0, x, y) &= h_{\delta,\alpha}(0, x, y) = \frac{\lambda}{\kappa_{\delta,\alpha}} f(x+y) \int_0^\infty v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-(c+\delta x)v+\lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Επίσης έχουμε

$$F_{\delta,\alpha}(0, x) = \lim_{y \rightarrow \infty} H_{\delta,\alpha}(0, x, y) = \frac{\lambda}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^\infty \int_0^x e^{-\delta vt} \bar{F}(t) dt v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv+\lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv,$$

οπότε θα είναι

$$f_{\delta,\alpha}(0, x) = \frac{\partial}{\partial x} F_{\delta,\alpha}(0, x) = \frac{\lambda}{\kappa_{\delta,\alpha}} \bar{F}(x) \int_0^\infty v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-(c+\delta x)v+\lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv. \quad (5.27)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (5.26) και (5.27) παίρνουμε

$$\frac{h_{\delta,\alpha}(0, x, y)}{f_{\delta,\alpha}(0, x)} = \frac{f(x+y)}{\bar{F}(x)}.$$

Επομένως ισχύει η εξίσωση (5.25).

Για  $u > 0$ , ακολουθούμε μια αντίστοιχη διαδικασία παραγωγίζοντας κατάλληλα τις εξισώσεις (5.8) και (5.19). Από την (5.19) παίρνουμε

$$f_{\delta,\alpha}(u, x) = \frac{\partial}{\partial x} F_{\delta,\alpha}(u, x) = \begin{cases} cf_{\delta,\alpha}(0, x) \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right), & u < x \\ (cf_{\delta,\alpha}(0, x) - \lambda \bar{F}(x)) \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) \\ + \lambda \bar{F}(x) \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt, & u \geq x \end{cases} \quad (5.28)$$

Παραγωγίζοντας τώρα την (5.8), έχουμε

$$h_{\delta,\alpha}(u, x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H_{\delta,\alpha}(u, x, y) = \begin{cases} ch_{\delta,\alpha}(0, x, y) \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right), & u < x \\ (ch_{\delta,\alpha}(0, x, y) - \lambda f(x + y)) \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) \\ + \lambda f(x + y) \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt, & u \geq x. \end{cases} \quad (5.29)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (5.29) και (5.28) παίρνουμε

$$h_{\delta,\alpha}(u, x, y) = \frac{f(x + y)}{\bar{F}(x)} f_{\delta,\alpha}(u, x),$$

σχέση που ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 5.3. □

**Σχόλιο:** Από το Θεώρημα 5.3 συμπεραίνουμε ότι οι προσδιοριστικοί παράγοντες της προεξοφλημένης απο κοινού συνάρτησης πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι:

1. Η κατανομή του μεγέθους ατομικής ζημιάς, και
2. η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία.

### 5.3 Περιθώρια κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

Πέρα από το πότε και με ποιά πιθανότητα θα επέλθει η χρεοκοπία, ένα ενδιαφέρον ερώτημα στη θεωρία χρεοκοπίας είναι το πόσο σημαντική θα είναι η επίπτωση αυτού του συμβάντος. Ποσοτική απάντηση σε αυτό το ερώτημα μας δίνει η συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Για τις ανάγκες του κλασικού μοντέλου με επιτόκιο θα συμβολίσουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας,  $G_{\delta,\alpha}(u, y)$ . Όπως γνωρίζουμε η  $G_{\delta,\alpha}(u, y)$  προκύπτει από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu για  $w(x_1, x_2) = I(x_2 \leq y)$ , δηλαδή

$$G_{\delta,\alpha}(u, y) = E [e^{-\alpha T_\delta} I(|U_\delta(T_\delta)| \leq y), T(T_\delta < \infty) | U_\delta(0) = u] \quad (5.30)$$

Ωστόσο, η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας προκύπτει και από την  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  για  $x \rightarrow \infty$ , δηλαδή ισχύει

$$G_{\delta,\alpha}(u, y) = \lim_{x \rightarrow \infty} H_{\delta,\alpha}(u, x, y) \quad (5.31)$$

**Λήμμα 5.2.** Η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση

$$G_{\delta,\alpha}(u, y) = G_{\delta,\alpha}^1(y) \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u + y) + \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t + y) dt + \psi_{\delta,\alpha}(u), \quad (5.32)$$

όπου

$$G_{\delta,\alpha}^1(y) = c [G_{\delta,\alpha}(0, y) - \psi_{\delta,\alpha}(0)] - \lambda\mu F_e(y)$$

και η  $G_{\delta,\alpha}(0, y)$  δίνεται παρακάτω στο Πόρισμα 5.2.

#### Απόδειξη:

Για την απόδειξη του παραπάνω Λήμματος θα εκμεταλλευτούμε τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 5.2 και την εξίσωση (5.31). Σημειώνουμε ότι από τους δύο κλάδους της  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  θα μας χρησιμεύσει μόνο ο κλάδος για τον οποίο ισχύει  $u < x$ , καθώς υποθέτουμε ότι  $x \rightarrow \infty$ . Θυμίζουμε ότι για  $u < x$  ισχύει (βλ. Θεώρημα 5.2)

$$H_{\delta,\alpha}(u, x, y) = H_{\delta,\alpha}^1(x, y) \left( \frac{1}{c + \delta u} + \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \right) + \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u + y) + \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t + y) dt + \psi_{\delta,\alpha}(u),$$

όπου

$$H_{\delta,\alpha}^1(x, y) = c H_{\delta,\alpha}(0, x, y) - c \psi_{\delta,\alpha}(0) - \lambda\mu F_e(y), \text{ και}$$

Με τα παραπάνω δεδομένα λοιπόν βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} G_{\delta,\alpha}^1(y) &= \lim_{x \rightarrow \infty} H_{\delta,\alpha}^1(x, y) = \lim_{x \rightarrow \infty} [c H_{\delta,\alpha}(0, x, y) - c \psi_{\delta,\alpha}(0) - \lambda\mu F_e(y)] \\ &= c [G_{\delta,\alpha}(0, y) - \psi_{\delta,\alpha}(0)] - \lambda\mu F_e(y) \end{aligned}$$

Πέρα από την ποσότητα  $H_{\delta,\alpha}^1(x, y)$ , το υπόλοιπο μέρος της  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  δεν επηρεάζεται από την επιλογή του  $x$  και καταλήγουμε άμεσα στη σχέση (5.32), ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του Λήμματος 5.2.  $\square$

**Πόρισμα 5.2.** Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου με σταθερό επιτόκιο η  $G_{\delta,\alpha}(0, y)$  δίνεται από τη σχέση

$$G_{\delta}(0, y) = \frac{\lambda \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} e^{-\delta vt} [\bar{F}(t) - \bar{F}(y+t)] dt \right) e^{-cv + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv}{c \int_0^{\infty} e^{-cv + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv} \quad (5.33)$$

**Απόδειξη:**

Έχουμε διαδοχικά

$$G_{\delta,\alpha}(0, y) = \lim_{x \rightarrow \infty} H_{\delta,\alpha}(0, x, y) \stackrel{(5.17)}{=} \frac{\lambda}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} e^{-\delta vt} [\bar{F}(t) - \bar{F}(y+t)] dt \right) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv \quad (5.34)$$

Θέτοντας  $\alpha = 0$  στην εξίσωση (5.34) προκύπτει ότι

$$G_{\delta}(0, y) = \frac{\lambda \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} e^{-\delta vt} [\bar{F}(t) - \bar{F}(y+t)] dt \right) e^{-cv + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv}{c \int_0^{\infty} e^{-cv + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv}$$

□

Από την προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του ελλείματος μπορούμε εύκολα να πάρουμε την αντίστοιχη μη-προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής, θέτοντας  $\alpha = 0$ . Ισχύει δηλαδή  $G_{\delta}(u, y) = G_{\delta,0}(u, y)$ , ενώ

$$G_{\delta}(u, y) = \Pr(T_{\delta} < \infty, -y < U_{\delta}(T_{\delta}) < 0 \mid U_{\delta}(0) = u). \quad (5.35)$$

Η  $G_{\delta}(u, y)$  εκφράζει την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι  $u$  και το έλλειμμα (αρνητικό πλεόνασμα) αμέσως μετά τη ζημιά που προκαλεί τη χρεοκοπία είναι το πολύ  $y$  (όπου  $y > 0$ ).

Η συνάρτηση  $H$   $G_{\delta}(u, y)$  είναι άμεσα συνδεδεμένη με τη πιθανότητα χρεοκοπίας, καθώς

$$\psi_{\delta}(u) = \lim_{y \rightarrow \infty} G_{\delta}(u, y).$$

Επίσης μπορούμε να ορίσουμε και τη συνάρτηση δεξιάς ουράς του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, την οποία θα συμβολίσουμε  $\bar{G}_{\delta}(u, y)$ . Η  $\bar{G}_{\delta}(u, y)$  εκφράζει την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι  $u$  και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι μεγαλύτερο από  $y$  (όπου  $y > 0$ ). Θα ισχύει λοιπόν

$$\bar{G}_{\delta}(u, y) = \Pr(T_{\delta} < \infty, U_{\delta}(T_{\delta}) < -y \mid U_{\delta}(0) = u). \quad (5.36)$$

Από τους ορισμούς των συναρτήσεων  $G_\delta(u, y)$  και  $\bar{G}_\delta(u, y)$ , προκύπτει ότι

$$G_\delta(u, y) + \bar{G}_\delta(u, y) = \psi_\delta(u) \quad (5.37)$$

Στα πλαίσια του Θεωρήματος που ακολουθεί θα δώσουμε τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra που ικανοποιούν οι παραπάνω συναρτήσεις. Οι εξισώσεις αυτές θα μας φανούν χρήσιμες στο επόμενο κεφάλαιο για να βρούμε κάποια ασυμπτωτικά αποτελέσματα για την κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.

**Θεώρημα 5.4.** Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με σταθερό επιτόκιο ισχύει

$$\begin{aligned} \bar{G}_\delta(u, y) = & \frac{c}{c + \delta u} \bar{G}_\delta(0, y) + \frac{1}{c + \delta u} \int_0^u \bar{G}_\delta(u - t, y) [\delta + \lambda \bar{F}(t)] dt \\ & - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u \bar{F}(t) dt - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^y [\bar{F}(t) - \bar{F}(u + t)] dt, \end{aligned} \quad (5.38)$$

και

$$\begin{aligned} G_\delta(u, y) = & \frac{c}{c + \delta u} G_\delta(0, y) + \frac{1}{c + \delta u} \int_0^u G_\delta(u - t, y) [\delta + \lambda \bar{F}(t)] dt \\ & + \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^y [\bar{F}(t) - \bar{F}(u + t)] dt, \end{aligned} \quad (5.39)$$

**Απόδειξη:**

Χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu για  $w(x_1, x_2) = I(x_2 > y)$  καταλήγουμε στη εξίσωση (5.38). Θυμίζουμε ότι η εν λόγω εξίσωση είναι

$$\Phi_{\delta, \alpha}(u) = \frac{c\Phi_{\delta, \alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t) dt + \frac{1}{c + \delta u} \int_0^u \Phi_{\delta, \alpha}(t) [\delta + \alpha + \lambda \bar{F}(u - t)] dt \quad (5.40)$$

Όμως για  $w(x_1, x_2) = I(x_2 > y)$  ισχύει

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_t^\infty w(t, s - t) f(s) ds = \int_t^\infty I(s - t > y) f(s) ds = \int_t^\infty I(s > y + t) f(s) ds \\ &= \int_{y+t}^\infty f(s) ds = \bar{F}(y + t) \end{aligned}$$

Επομένως για  $\alpha = 0$  και  $w(x_1, x_2) = I(x_2 > y)$  η (5.40) μας δίνει

$$\bar{G}_\delta(u, y) = \frac{c\bar{G}_\delta(0, y)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u \bar{F}(y + t) dt + \frac{1}{c + \delta u} \int_0^u \bar{G}_\delta(t, y) [\delta + \alpha + \lambda \bar{F}(u - t)] dt$$

Αναλύοντας το ολοκλήρωμα της δεξιάς ουράς έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^u \bar{F}(y+t)dt &= \int_y^{u+y} \bar{F}(z)dz = \left( \int_y^u \bar{F}(z)dz \right) + \left( \int_u^{u+y} \bar{F}(z)dz \right) \\ &= \left( \int_0^u \bar{F}(z)dz - \int_0^y \bar{F}(z)dz \right) + \left( \int_0^y \bar{F}(u+z)dz \right) \\ &= \int_0^u \bar{F}(z)dz - \int_0^y [\bar{F}(z) - \bar{F}(u+z)] dz\end{aligned}$$

Με την τελευταία αυτή σχέση καταλλήγουμε άμεσα στην (5.38).

Για την απόδειξη της εξίσωσης (5.39) χρειαζόμαστε την εξίσωση (5.38), την σχέση (5.37) καθώς και την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας, ήτοι

$$\psi_\delta(u) = \frac{c\psi_\delta(0)}{c+\delta u} - \frac{\lambda}{c+\delta u} \int_0^u \bar{F}(t)dt + \frac{1}{c+\delta u} \int_0^u \psi_\delta(t)[\delta + \lambda\bar{F}(u-t)]dt \quad (5.41)$$

Από την (5.37) έχουμε

$$\bar{G}_\delta(u, y) = \psi_\delta(u) - G_\delta(u, y)$$

Αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα στην (5.38) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\psi_\delta(u) - G_\delta(u, y) &= \frac{c}{c+\delta u} (\psi_\delta(0) - G_\delta(0, y)) + \frac{1}{c+\delta u} \int_0^u (\psi_\delta(u) - G_\delta(u, y)) [\delta + \lambda\bar{F}(u-t)] dt \\ &\quad - \frac{\lambda}{c+\delta u} \int_0^u \bar{F}(t)dt - \frac{\lambda}{c+\delta u} \int_0^y [\bar{F}(t) - \bar{F}(u+t)] dt,\end{aligned}$$

Κάνοντας μερικές απλοποιήσεις στην παραπάνω εξίσωση λόγω της (5.41), προκύπτει η σχέση

$$\begin{aligned}G_\delta(u, y) &= \frac{c}{c+\delta u} G_\delta(0, y) + \frac{1}{c+\delta u} \int_0^u G_\delta(u-t, y) [\delta + \lambda\bar{F}(t)] dt \\ &\quad + \frac{\lambda}{c+\delta u} \int_0^y [\bar{F}(t) - \bar{F}(u+t)] dt.\end{aligned}$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος 5.4. □

Μία ακόμη ποσότητα που θέλουμε να προσδιορίσουμε και που θα μας απασχολήσει ξανά στο επόμενο κεφάλαιο είναι η  $\bar{G}_\delta(0, y)$ .

**Πρόταση 5.2.** Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με σταθερή ένταση ανατοκισμού  $\delta$ , ισχύει

$$\bar{G}_\delta(0, y) = \lambda\mu \left( c \int_0^\infty e^{-\int_0^v [c-\lambda\mu\tilde{f}_e(\delta s)]ds} dv \right)^{-1} \int_0^\infty e^{\delta yv} \tilde{f}_e(\delta z; y) e^{-\int_0^v [c-\lambda\mu\tilde{f}_e(s)]ds} dv, \quad (5.42)$$

όπου

$$\tilde{f}_e(s; y) = \int_y^\infty e^{-sx} f_e(x) dx.$$

### Απόδειξη:

Από τη μελέτη της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu στο Κεφάλαιο 2 είχαμε βρεί ότι

$$\Phi_{\delta, \alpha}(0) = \lambda \mu_A \left( c \int_0^\infty v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv \right)^{-1} \int_0^\infty \tilde{\alpha}_1(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv. \quad (5.43)$$

Επομένως για  $\alpha = 0$  και  $w(x_1, x_2) = I(x_2 > y)$  έχουμε

$$A(t) = \int_t^\infty w(t, s-t) f(s) ds = \int_t^\infty I(s > y+t) f(s) ds = \int_{y+t}^\infty f(s) ds = \bar{F}(y+t).$$

Επίσης,

$$\tilde{\alpha}_1(s) = \frac{1}{\mu_A} \int_0^\infty e^{-sx} A(x) dx = \frac{1}{\mu_A} \int_0^\infty e^{-sx} \bar{F}(y+x) dx$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης θέτουμε  $y+x=t$ , οπότε έχουμε

$$\tilde{\alpha}_1(s) = \frac{1}{\mu_A} \int_y^\infty e^{-s(t-y)} \bar{F}(t) dt = \frac{\mu}{\mu_A} e^{sy} \int_y^\infty e^{-st} f_e(t) dt = \frac{\mu}{\mu_A} e^{sy} \tilde{f}_e(s; y)$$

Άρα για  $\alpha = 0$  και  $w(x_1, x_2) = I(x_2 > y)$  η (5.43) μας δίνει

$$\bar{G}_\delta(0, y) = \lambda \mu \left( c \int_0^\infty e^{-\int_0^v [c - \lambda \mu \tilde{f}_e(\delta s)] ds} dv \right)^{-1} \int_0^\infty e^{\delta y v} \tilde{f}_e(\delta z; y) e^{-\int_0^v [c - \lambda \mu \tilde{f}_e(\delta s)] ds} dv,$$

σχέση που ολοκληρώνει την απόδειξη της Πρότασης 5.2. □

## 5.4 Αριθμητικά αποτελέσματα

Όπως είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους αυτού του κεφαλαίου, οι κατανομές του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας ακολουθούν ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra δεύτερου τύπου. Σε αυτή την παράγραφο θα προσπαθήσουμε να λύσουμε αυτές τις εξισώσεις για κάποιες συγκεκριμένες κατανομές ζημιών. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα επιλέξουμε τις κατανομές που χρησιμοποιήσαμε και στα Παραδείγματα 3.2 και 3.3 της Παραγράφου 3.4, όπου υπολογίσαμε την πιθανότητα χρεοκοπίας και τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.



**Παράδειγμα 5.1.** Έστω ότι τα μεγέθη ατομικών αποζημιώσεων ακολουθούν την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους  $\alpha$  και  $\beta$ , δηλαδή

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0 \text{ και } \alpha, \beta > 0.$$

Επιλέγουμε τις τιμές  $\alpha = 2$  και  $\beta = 2$  για τις παραμέτρους, ενώ θα θεωρήσουμε ότι  $\lambda = 55$  και  $c = 60$ .

Από το Πόρισμα 5.1, γνωρίζουμε ότι

$$F_\delta(0, x) = \frac{\lambda \int_0^\infty \left( \int_0^x e^{-\delta vt} \bar{F}(t) dt \right) e^{-cv} + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds dv}{c \int_0^\infty e^{-cv} + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds dv} \quad (5.44)$$

Επίσης από το Λήμμα 5.1 προκύπτει ότι για  $\alpha = 0$ , η συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία δίνεται από τη σχέση

$$F_\delta(u, x) = \begin{cases} c [F_\delta(0, x) - \psi_\delta(0)] \left( \int_0^u \frac{K_\delta(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + \psi_\delta(u), & u < x \\ = (cF_\delta(0, x) - \lambda \mu F_e(x)) \left( \int_0^u \frac{K_\delta(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) \\ + \lambda \mu \int_0^x \frac{K_\delta(u, t)}{c + \delta t} [F_e(x) - F_e(t)] dt, & u \geq x \end{cases} \quad (5.45)$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις εξισώσεις (5.44) και (5.45), καθώς και τα ευρήματά μας για την πιθανότητα χρεοκοπίας από το Παράδειγμα 3.2 του Κεφαλαίου 3, υπολογίσαμε τις τιμές της συνάρτησης κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία για  $\delta = 0.05$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $\delta = 0.05$  και διάφορες τιμές του αρχικού κεφαλαίου. Για τους υπολογισμούς θεωρήσαμε ότι  $x = 5$ . Δηλαδή για διάφορες τιμές του αρχικού κεφαλαίου και της έντασης ανατοκισμού, υπολογίσαμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας όταν η τιμή του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία είναι μικρότερη του 5. Τα αποτελέσματα βρίσκονται στον Πίνακα που ακολουθεί.

Πίνακας 1

Η συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία όταν  $X \sim G(2, 2)$  και  $x = 5$

u	$\delta = 0.05$	$\delta = 0.07$	$\delta = 0.1$
0	0.91044	0.90840	0.90557
5	0.50398	0.49363	0.47948
10	0.47488	0.45761	0.43473
20	0.43133	0.40199	0.36277
30	0.38916	0.34811	0.29394
40	0.34792	0.29586	0.22799

Παρατηρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι αρκετά κοντά στις τιμές της πιθανότητας χρεοκοπίας που υπολογίσαμε στο Κεφάλαιο 3 (βλ. Παράδειγμα 3.2). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν επέλθει το ενδεχόμενο της χρεοκοπίας, είναι αρκετά πιθανό η τιμή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία να είναι μικρότερη του 5.

Ακολουθώντας μία παρόμοια διαδικασία με αυτή που μόλις περιγράψαμε, μπορούμε να υπολογίσουμε και τις τιμές της συνάρτησης κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα, από το Πρόβλημα 5.2, γνωρίζουμε ότι

$$G_{\delta}(0, y) = \frac{\lambda \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} e^{-\delta vt} [\bar{F}(t) - \bar{F}(y+t)] dt \right) e^{-cv} + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds dv}{c \int_0^{\infty} e^{-cv} + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds dv} \quad (5.46)$$

Επίσης από το Λήμμα 5.2 προκύπτει ότι για  $\alpha = 0$ , η συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση

$$G_{\delta}(u, y) = G_{\delta}^1(y) \left( \int_0^u \frac{K_{\delta}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + \frac{\lambda \mu}{c + \delta u} F_e(u + y) + \lambda \mu \int_0^u \frac{K_{\delta}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t + y) dt + \psi_{\delta}(u), \quad (5.47)$$

όπου

$$G_{\delta}^1(y) = c [G_{\delta}(0, y) - \psi_{\delta}(0)] - \lambda \mu F_e(y)$$

Μέσω των εξισώσεων (5.46) και (5.47), υπολογίσαμε τις τιμές της συνάρτησης κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας για  $\delta = 0.05$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $\delta = 0.05$  και διάφορες τιμές του αρχικού κεφαλαίου. Για τους υπολογισμούς θεωρήσαμε ότι  $y = 5$  τα αποτελέσματά μας συνοψίζονται στον παρακάτω Πίνακα.

Πίνακας 2

Η συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας όταν  $X \sim G(2, 2)$  και  $y = 5$

u	$\delta = 0.05$	$\delta = 0.07$	$\delta = 0.1$
0	0.91043	0.90838	0.90555
5	0.50653	0.49616	0.48197
10	0.47864	0.46171	0.43882
20	0.43913	0.40966	0.37026
30	0.40052	0.35924	0.30474
40	0.36277	0.31034	0.24197

Στον παραπάνω πίνακα βλέπουμε τις πιθανότητες να επέλθει χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ 5. Αυτές οι πιθανότητες είναι επίσης πολύ κοντά στην πιθανότητα

χρεοκοπίας που υπολογίσαμε στο Κεφάλαιο 3 (Παράδειγμα 3.2). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν επέλθει χρεοκοπία, τότε είναι αρκετά πιθανό το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ 5 (δηλαδή να ισχύει  $-5 \leq U_\delta(T_\delta^+) < 0$ ).

Υπενθυμίζουμε τον προσεγγιστικό χαρακτήρα των υπολογισμών μας, καθώς και σε αυτή την παράγραφο χρησιμοποιείται η απλουστευμένη σχέση

$$K_\delta(u, t) = k_\delta^1(u, t) + k_\delta^2(u, t) + k_\delta^3(u, t).$$

**Παράδειγμα 5.2.** Έστω ότι η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής που αντιπροσωπεύει το μέγεθος ατομικής ζημιάς δίνεται από τη σχέση

$$f(x) = A_1\beta_1 e^{-\beta_1 x} + A_2\beta_2 e^{-\beta_2 x}, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad A_1 + A_2 = 1. \quad (5.48)$$

Υποθέτουμε δηλαδή ότι οι ατομικές αποζημιώσεις ακολουθούν μία μίξη εκθετικών κατανομών. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα επιλέγουμε τις εξής τιμές για τις παραμέτρους της κατανομής ζημιών:  $A_1 = 0.4$ ,  $A_2 = 0.6$ ,  $\beta_1 = 2$ , και  $\beta_2 = 3$ . Επίσης θεωρούμε ότι  $\lambda = 55$  και  $c = 24.2$ .

Χρησιμοποιώντας τους ίδιους τύπους με το προηγούμενο παράδειγμα υπολογίσαμε τις συναρτήσεις κατανομής  $F_\delta(u, y)$  και  $G_\delta(u, y)$  για διάφορες τιμές του αρχικού κεφαλαίου και της έντασης ανατοκισμού. Τα αποτελέσματά μας φαίνονται στους ακόλουθους πίνακες.

Πίνακας 3

Η συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία όταν  $f(x) = 0.8e^{-2x} + 1.8e^{-3x}$  και  $x = 5$

u	$\delta = 0.05$	$\delta = 0.07$	$\delta = 0.1$
0	0.90172	0.89924	0.89585
5	0.64019	0.61704	0.58596
10	0.58224	0.54140	0.48758
15	0.52586	0.46860	0.39433
20	0.47101	0.39848	0.30581
25	0.41760	0.33087	0.22161

Πίνακας 4

Η συνάρτηση κατανομής του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας όταν  $f(x) = 0.8e^{-2x} + 1.8e^{-3x}$  και  $y = 5$

u	$\delta = 0.05$	$\delta = 0.07$	$\delta = 0.1$
0	0.90172	0.89924	0.89585
5	0.64039	0.61721	0.58610
10	0.58256	0.54172	0.43790
15	0.52637	0.46890	0.39475
20	0.47168	0.39898	0.30635
25	0.41843	0.33150	0.22230

Παρατηρούμε ότι οι πιθανότητες σε αυτό το παράδειγμα είναι μικρότερες σε σχέση με τις αντίστοιχες του Παραδείγματος 5.1.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑΣ

## Κεφάλαιο 6

# Φράγματα για την κατανομή του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

Όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η συνάρτηση κατανομής του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας λύνεται μόνο με αριθμητικές μεθόδους. Σε αυτό το κεφάλαιο λοιπόν θα στραφούμε στην αναζήτηση φραγμάτων για την κατανομή του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα θα εφαρμόσουμε αναδρομικές τεχνικές αντίστοιχες με αυτές του Κεφαλαίου 4 για να βρούμε φράγματα για την συνάρτηση  $\bar{G}_\delta(u, y)$ . Επίσης θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα των Yang, Zhang (2001) αναφορικά με την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης  $G(u, y)$  καθώς και την εύρεση φραγμάτων για την  $\bar{G}_\delta(u, y)$  όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι μηδέν.

### 6.1 Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

Όπως γνωρίζουμε, το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με σταθερό επιτόκιο είναι ένα ανανεωτικό μοντέλο. Στα πλαίσια του Λήμματος που ακολουθεί θα εκμεταλλευτούμε την ανανεωτική ιδιότητα της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος για να καταλήξουμε σε μία αναδρομική σχέση για την συνάρτηση  $\bar{G}_\delta(u, y)$ . Θυμίζουμε ότι η  $\bar{G}_\delta(u, y)$  ορίζεται από τη σχέση

$$\bar{G}_\delta(u, y) = \Pr [T_\delta < \infty, |U_\delta(T_\delta)| > y \mid U_\delta(0) = u] \quad (6.1)$$

και εκφράζει την πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό κεφάλαιο  $u$  και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι τουλάχιστον  $y$ .

**Λήμμα 6.1.** Για  $n = 1, 2, \dots$ , και  $u \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , ισχύει

$$\begin{aligned} \bar{G}_\delta(u, y; n+1) = & \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left[ \bar{F}(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} + y) \right. \\ & \left. + \int_0^{ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)}} \bar{G}_\delta(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} - x, y; n) f(x) dx \right] dt \end{aligned} \quad (6.2)$$

### Απόδειξη:

Αναζητούμε την πιθανότητα χρεοκοπίας πριν ή κατά την επέλευση του  $n + 1$ -ζημιογόνου ενδεχομένου και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι τουλάχιστον  $y$ . Με δεδομένο λοιπόν ότι το αρχικό κεφάλαιο είναι  $u$ , διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Χρεοκοπία με την επέλευση του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι μεγαλύτερο του  $y$ .
2. Χρεοκοπία με την επέλευση ενός εκ των επόμενων  $n$ -ζημιογόνων και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι μεγαλύτερο του  $y$ , δθέντος ότι ο χρόνος επέλευσης του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου είναι  $W_1 = t$  και το μέγεθός του είναι  $X_1 = x$ .

Η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο της περίπτωσης 1. είναι:

$$\begin{aligned}\bar{G}_\delta(u, y; 1) &= \Pr\left(X_1 - ue^{\delta t} - c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} > y \mid W_1 = t\right) \\ &= \int_0^\infty \Pr\left(X_1 > ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} + y\right) \Pr(W_1 = t) dt\end{aligned}$$

Όμως στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο ισχύει  $g(t) = \Pr(W_1 = t) = \lambda e^{-\lambda t}$ , οπότε έχουμε

$$\bar{G}_\delta(u, y; 1) = \int_0^\infty \bar{F}\left(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} + y\right) \lambda e^{-\lambda t} dt. \quad (6.3)$$

Μετά την επέλευση του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος ανανεώνεται και το νέο αρχικό κεφάλαιο είναι  $ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} - x$ . Επομένως η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο της περίπτωσης 2. είναι:

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)}} \bar{G}_\delta(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} - x, y; n) f(x) dx dt \quad (6.4)$$

Τα όρια του εσωτερικού ολοκληρώματος της (6.4), δηλώνουν ότι αν  $X_1 = x$  είναι το μέγεθος του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου, τότε θα πρέπει να ισχύει  $0 < x < ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)}$ , γιατί διαφορετικά θα είχαμε χρεοκοπία με την επέλευση της πρώτης ζημιάς (ενδεχόμενο που εξετάσαμε στην περίπτωση 1.). Συνδυάζοντας τις (6.3) και (6.4) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\bar{G}_\delta(u, y; n + 1) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \bar{F}\left(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} + y\right) dt \\ &\quad + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)}} \bar{G}_\delta(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} - x, y; n) f(x) dx dt,\end{aligned}$$

σχέση που ολοκληρώνει την απόδειξη του Λήμματος 6.1. □

Στο Κεφάλαιο 4 είχαμε αποδείξει (βλ. Λήμμα 4.2) ότι στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο υπέρχει μία μοναδική θετική ποσότητα  $R_2$  που ορίζεται ως η ρίζα της εξίσωσης

$$E \left[ e^{-R_2(c\bar{s}_{\overline{w}}^{(\delta)} - X)} \right] = 1 \quad (6.5)$$

και δίνεται από τη σχέση

$$\left[ E \left( e^{R_2 X} \right) \right]^{-1} = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y}}{(1 + \delta y)^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dy \quad (6.6)$$

Σε αντιστοιχία λοιπόν με τη μεθοδολογία που ακολουθήσαμε στο Κεφάλαιο 4, στα πλαίσια του Θεωρήματος που ακολουθεί, θα βρούμε ένα άνω φράγμα για την συνάρτηση  $\bar{G}_\delta(u, y)$  βασιζόμενοι στην ποσότητα  $R_2$  και την αναδρομική σχέση του Λήμματος 6.1.

**Θεώρημα 6.1.** Όταν η θετική ποσότητα  $R_2$  ορίζεται σύμφωνα με το Λήμμα 4.2, τότε για κάθε  $u \geq 0$  ισχύει

$$\bar{G}_\delta(u, y) \leq \beta E \left[ e^{R_2 X} \right] \frac{\lambda}{c} e^{-R_2(u+y)} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 z(1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta z}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dz, \quad (6.7)$$

όπου

$$\beta^{-1} = \inf_{t \geq 0} \frac{\int_t^\infty e^{R_2 y} f(y) dy}{e^{R_2 t} \bar{F}(t)}. \quad (6.8)$$

Ειδικότερα όταν η κατανομή  $F$  είναι μία NWUC (new worse than used in convex ordering), τότε για κάθε  $u \geq 0$  ισχύει

$$\bar{G}_\delta(u, y) \leq \frac{\lambda}{c} e^{-R_2(u+y)} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 z(1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta z}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dz, \quad (6.9)$$

#### Απόδειξη:

Για να αποδείξουμε ότι ισχύει η (6.8) θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής και την αναδρομική σχέση (6.2).

Από το Λήμμα 6.1 γνωρίζουμε ότι για  $n = 0$  ισχύει

$$\bar{G}_\delta(u, y; 1) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \bar{F}(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\overline{w}}^{(\delta)} + y) dt \quad (6.10)$$

Επίσης από τον ορισμό του  $\beta$  σύμφωνα με την (6.8), για κάθε  $x > 0$  έχουμε

$$\bar{F}(t) \leq \beta e^{-R_2 t} \int_t^\infty e^{R_2 z} f(z) dz \quad (6.11)$$

ή γενικότερα

$$\bar{F}(t) \leq \beta e^{-R_2 t} E [e^{R_2 X}], \quad (6.12)$$

αφού

$$\int_t^\infty e^{R_2 y} f(z) dz \leq \int_0^\infty e^{R_2 z} f(z) dz = E [e^{R_2 X}].$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (6.10) και (6.12) προκύπτει η παρακάτω ανισότητα

$$\bar{G}_\delta(u, y; 1) \leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \beta E [e^{R_2 X}] e^{-R_2(u e^{\delta t} + c \bar{s} \frac{(\delta)}{W} + y)} dt \quad (6.13)$$

Στο Κεφάλαιο 4 όμως είχαμε βρει ότι

$$E \left[ e^{-R_2(u e^{\delta W} + c \bar{s} \frac{(\delta)}{W})} \right] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-R_2(u e^{\delta t} + c \bar{s} \frac{(\delta)}{W} + y)} dt = e^{R_2 u} \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 z(1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta z}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dz.$$

Άρα η (6.13) γίνεται

$$\bar{G}_\delta(u, y; 1) \leq \beta E [e^{R_2 X}] e^{-R_2(u+y)} \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 z(1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta z}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dz \quad (6.14)$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η (6.8) ισχύει για  $n = 0$ . Έστω ότι ισχύει και για κάποιο ακέραιο  $n > 0$ , δηλαδή

$$\bar{G}_\delta(u, y; n) \leq \beta E [e^{R_2 X}] e^{-R_2(u+y)} \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 z(1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta z}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dz \quad (6.15)$$

Θα μετατρέψουμε την υπόθεση (6.15) σε μία ισοδύναμη απλούστερη υπόθεση. Από το δεξί μέλος της (6.15) έχουμε

$$\begin{aligned} \beta E [e^{R_2 X}] e^{-R_2(u+y)} \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 z(1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta z}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dz &= \beta E [e^{R_2 X}] e^{-R_2 y} E \left[ e^{-R_2(u e^{\delta W} + c \bar{s} \frac{(\delta)}{W})} \right] \\ &= \frac{\beta E [e^{R_2 X}]}{E \left[ e^{R_2(u e^{\delta W} + c \bar{s} \frac{(\delta)}{W})} \right]} \end{aligned}$$

Άρα ισχύει

$$\bar{G}_\delta(u, y; n) \leq \frac{\beta E [e^{R_2 X}] e^{-R_2 y}}{E \left[ e^{R_2(u e^{\delta W} + c \bar{s} \frac{(\delta)}{W})} \right]}$$

και επειδή  $e^{\delta W} > 1$ , συμπεραίνουμε ότι

$$\bar{G}_\delta(u, y; n) \leq \frac{\beta E [e^{R_2 X}] e^{-R_2 y}}{E \left[ e^{R_2(u + c \bar{s} \frac{(\delta)}{W})} \right]} = \beta e^{-R_2(u+y)} E \left[ e^{-R_2(c \bar{s} \frac{(\delta)}{W} - X)} \right] = \beta e^{-R_2(u+y)} \quad (6.16)$$



αφού από το Λήμμα 4.2 γνωρίζουμε ότι η θετική ποσότητα  $R_2$  ορίζεται έτσι ώστε να ισχύει

$$E \left[ e^{-R_2(c\bar{s}_{\bar{W}}^{(\delta)} - X)} \right] = 1.$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν τις σχέσεις (6.11) και (6.16) στην αναδρομική σχέση (6.2) του Λήμματος 6.1 προκύπτει η παρακάτω ανισότητα

$$\begin{aligned} \bar{G}_\delta(u, y; n+1) &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \beta e^{-R_2(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} + y)} \int_{ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} + y}^\infty e^{R_2 z} f(z) dz dt \\ &\quad + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)}} \beta e^{-R_2(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} - x + y)} f(z) dz dt \\ &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \beta e^{-R_2(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} + y)} \int_{ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} + y}^\infty e^{R_2 z} f(z) dz dt \\ &\quad + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \beta e^{-R_2(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} + y)} \int_0^{ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} + y} e^{R_2 z} f(z) dz dt \\ &= \beta e^{-R_2 y} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-R_2(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)})} \left( \int_0^\infty e^{R_2 z} f(z) dz \right) dt \\ &= \beta E [e^{R_2 X}] e^{-R_2 y} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \beta e^{-R_2(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)})} dt \end{aligned}$$

Όμως έχουμε ήδη υπολογίσει ότι

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-R_2(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)})} dt = \frac{\lambda}{c} e^{-R_2 u} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 z(1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta z}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dz$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι για οποιοδήποτε ακέραιο  $n$ , ισχύει

$$\bar{G}_\delta(u, y; n) \leq \beta E [e^{R_2 X}] e^{-R_2(u+y)} \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 z(1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta z}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dz,$$

επομένως ισχύει και η (6.7) αφού

$$\bar{G}_\delta(u, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{G}_\delta(u, y; n).$$

Τέλος γνωρίζουμε ότι όταν η  $F$  είναι μία NWUC τότε ισχύει

$$\beta = [E (e^{R_2 X})]^{-1},$$

οπότε σε αυτή την περίπτωση η (6.7) μας δίνει

$$\bar{G}_\delta(u, y) \leq \frac{\lambda}{c} e^{-R_2(u+y)} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 z(1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta z}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dz,$$

σχέση που ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 6.1. □

**Σχόλιο:** Όταν η κατανομή του μεγέθους ατομικής ζημιάς ανήκει στην κλάση κατανομών N-WUC, θα χρησιμοποιούμε τη σχέση (6.9) για να υπολογίσουμε ένα άνω φράγμα για την  $\bar{G}_\delta(u, y)$ . Για όλες τις άλλες περιπτώσεις, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (6.7) με  $\beta = 1$  για να φράξουμε την  $\bar{G}_\delta(u, y)$ , καθώς

$$[E(e^{R_2 X})]^{-1} \leq \beta \leq 1 \quad (6.17)$$

Όπως και στο Κεφάλαιο 4, έτσι και σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (6.17) για να υπολογίσουμε ένα άνω φράγμα τύπου Lundberg για την  $\bar{G}_\delta$ . Αυτό το άνω φράγμα θα βρούμε στο πόρισμα που ακολουθεί.

**Πόρισμα 6.1.** Κάτω από τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 6.1, για κάθε  $u \geq 0$  και  $y > 0$ , ισχύει

$$\bar{G}_\delta(u, y) \leq e^{-R_2(u+y)} \quad (6.18)$$

### Απόδειξη

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.1 είχαμε δείξει ότι (σχέση (6.16) )

$$\bar{G}_\delta(u, y; n) \leq \beta e^{-R_2(u+y)}$$

Παίρνοντας το όριο της παραπάνω ανισότητας για  $n \rightarrow \infty$ , προκύπτει άμεσα ότι

$$\bar{G}_\delta(u, y) \leq \beta e^{-R_2(u+y)} \stackrel{(6.17)}{\leq} e^{-R_2(u+y)}$$

□

Φυσικά το άνω φράγμα που παραθέτουμε στο παραπάνω Πόρισμα είναι ασθενέστερο σε σχέση με τα φράγματα του Θεωρήματος 6.1, ωστόσο υπολογίζεται και ερμηνεύεται πολύ πιό εύκολα.

Τέλος, όπως και στην περίπτωση της πιθανότητας χρεοκοπίας, μπορούμε να υπολογίσουμε δύο απλοποιημένες εκδοχές των φραγμάτων του Θεωρήματος 6.1 καθώς

$$\int_0^\infty \frac{e^{-R_2 z(1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta z}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dz \leq \int_0^\infty e^{-R_2 z(1 + \frac{\delta u}{c})} dy = \frac{1}{R_2(1 + \frac{\delta u}{c})} \quad (6.19)$$

Εφαρμόζοντας την (6.19) στα φράγματα του Θεωρήματος 6.1 προκύπτει το παρακάτω Πόρισμα

**Πόρισμα 6.2.** Κάτω από τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 6.1, για κάθε  $u \geq 0$  και  $y > 0$ , ισχύει

$$\bar{G}_\delta(u, y) \leq \beta E[e^{R_2 X}] \frac{\lambda}{c R_2} \frac{e^{-R_2(u+y)}}{1 + \frac{\delta u}{c}} \quad (6.20)$$

Ειδικότερα όταν η κατανομή  $F$  είναι μία *NWUC* (new worse than used in convex ordering), ισχύει

$$\bar{G}_\delta(u, y) \leq \frac{\lambda}{cR_2} \frac{e^{-R_2(u+y)}}{1 + \frac{\delta u}{c}} \quad (6.21)$$

**Απόδειξη:**

Προκύπτει άμεσα με την εφαρμογή της σχέσης (6.19) στις ανισότητες (6.7) και (6.9) αντίστοιχα.  $\square$

## 6.2 Φράγματα για μηδενικό αρχικό κεφάλαιο

Είναι φανερό ότι η εξίσωση υπολογισμού της  $\bar{G}_\delta(0, y)$  που βρήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (βλ. Κεφάλαιο 5, Πρόταση 5.2) απαιτεί αρκετά περίπλοκους υπολογισμούς. Στα πλαίσια λοιπόν του Θεωρήματος που ακολουθεί, θα βρούμε φράγματα για την  $\bar{G}_\delta(0, y)$  που θα μας βοηθήσουν να την προσεγγίσουμε με απλούστερους τρόπους.

**Θεώρημα 6.2.** Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με σταθερό επιτόκιο ισχύει

$$\frac{\lambda\mu\alpha}{c} \left[ \left( \bar{F}_e(y) + \frac{\alpha\beta\delta\underline{\nu}_1}{c - \lambda\mu} \right) R(\beta) - \delta\underline{\nu}_1 e^{\frac{\beta^2}{2}} \right] \leq \bar{G}_\delta(0, y) \leq \frac{\lambda\mu\bar{F}_e(y)}{\alpha c R(\alpha)}, \quad (6.22)$$

όπου  $R(\alpha)$  είναι ο δείκτης *Mills* που δίνεται από τη σχέση

$$R(\alpha) = e^{\alpha^2/2} \int_\alpha^\infty e^{-x^2/2} dx,$$

$$\alpha = \frac{c - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda\mu\nu_1\delta}}, \quad \beta = \frac{c - \lambda\mu - \delta y}{\sqrt{\lambda\mu\nu_1\delta}}$$

και η ποσότητα  $\underline{\nu}_1$  ορίζεται ως

$$\underline{\nu}_1 = \int_y^\infty x f_e(x) dx = -\tilde{f}'_e(0; y)$$

**Απόδειξη:**

Στο προηγούμενο κεφάλαιο (βλ. Κεφάλαιο 5, Πρόταση 5.42) είχαμε βρεί ότι η ποσότητα  $\bar{G}_\delta(0, y)$  δίνεται από τη σχέση

$$\bar{G}_\delta(0, y) = \lambda\mu \left( c \int_0^\infty e^{-\int_0^v [c - \lambda\mu\tilde{f}_e(\delta s)] ds} dv \right)^{-1} \int_0^\infty e^{\delta\nu y} \tilde{f}_e(\delta\nu; y) e^{-\int_0^v [c - \lambda\mu\tilde{f}_e(s)] ds} dv,$$

Θέτοντας

$$A_1 = c \int_0^\infty e^{-\int_0^v [c - \lambda \mu \tilde{f}_e(\delta s)] ds} dv \quad \text{και} \quad A_2 = \int_0^\infty e^{\delta v y} \tilde{f}_e(\delta v; y) e^{-\int_0^v [c - \lambda \mu \tilde{f}_e(s)] ds} dv,$$

παίρνουμε ότι

$$\bar{G}_\delta(0, y) = \frac{\lambda \mu A_2}{A_1}$$

Βρίσκοντας λοιπόν άνω και κάτω φράγματα για τις ποσότητες  $A_1$  και  $A_2$  θα καταλήξουμε στη σχέση (6.22). Ο τρόπος εργασίας μας θα είναι αντίστοιχος με εκείνον της Παραγράφου 4.4, όπου βρήκαμε φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας εκμεταλλευόμενοι τις συναρτησιακές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace. Όπως δείξαμε και στην Παράγραφο 4.4, ο μετασχηματισμός Laplace μίας συνάρτησης είναι μία φθίνουσα και κυρτή συνάρτηση. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε την συνάρτηση

$$\tilde{f}_e(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_e(x) dx,$$

δηλαδή τον μετασχηματισμό Laplace της κατανομής ισορροπίας του μεγέθους ατομικής ζημιάς τότε για  $a > 0$  και  $b > 0$  θα ισχύει

$$\tilde{f}_e(a) \geq \tilde{f}_e(a+b) \geq \tilde{f}_e(a) + b \tilde{f}'_e(a). \quad (6.23)$$

Για  $a = 0$  και  $b = \delta z$  η (6.23) μας δίνει

$$1 \geq \tilde{f}_e(\delta z) \geq 1 - \delta z \nu_1 \quad (6.24)$$

αφού

$$\tilde{f}_e(0) = \int_0^\infty f_e(x) dx = 1$$

και

$$\tilde{f}'_e(0) = - \int_0^\infty x f_e(x) dx = -\nu_1.$$

Για να βρούμε ανισότητες για την ποσότητα  $A_1$  θα χρησιμοποιήσουμε το κάθε μέλος της (6.24) ξεχωριστά. Από το αριστερό μέλος της (6.24) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \tilde{f}_e(\delta z) \leq 1 &\Rightarrow c - \lambda \mu \tilde{f}_e(\delta z) \geq c - \lambda \mu \Rightarrow - \int_0^v c - \lambda \mu \tilde{f}_e(\delta z) dz \leq - \int_0^v (c - \lambda \mu) dz \\ &\Rightarrow e^{-\int_0^v c - \lambda \mu \tilde{f}_e(\delta z) dz} \leq e^{-(c - \lambda \mu)v} \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας ανίσωσης από 0 έως  $\infty$  και πολλαπλασιάζοντας με  $c$ , παίρνουμε

$$c \int_0^\infty e^{-\int_0^v c - \lambda \mu \tilde{f}_e(\delta z) dz} dv \leq c \int_0^\infty e^{-(c - \lambda \mu)v} dv.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$A_1 \leq \frac{c}{c - \lambda\mu} \quad (6.25)$$

Από το δεξί μέλος της (6.24) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \tilde{f}_e(\delta z) \geq 1 - \delta z\nu_1 &\Rightarrow \int_0^v \tilde{f}_e(\delta z) dz \geq \int_0^v (1 - \delta z\nu_1) dz \\ \Rightarrow -cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta z) dz &\geq -cv + \lambda\mu \int_0^v (1 - \delta z\nu_1) dz \\ \Rightarrow e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta z) dz} &\geq e^{-cv + \lambda\mu v - \frac{1}{2}\lambda\mu\delta\nu_1 v^2} \end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε από 0 έως  $\infty$  και τα δύο μέλη της τελευταίας ανίσωσης και πολλαπλασιάζουμε με  $c$ , οπότε παίρνουμε

$$c \int_0^\infty e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta z) dz} dv \geq c \int_0^\infty e^{-(c - \lambda\mu)v - \frac{1}{2}\lambda\mu\delta\nu_1 v^2} dv$$

Άρα ισχύει

$$A_1 \geq c \int_0^\infty e^{-(c - \lambda\mu)v - \frac{1}{2}\lambda\mu\delta\nu_1 v^2} dv \quad (6.26)$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία με αυτή της απόδειξης για το φράγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας (βλ. Παράγραφο 4.4), θέτουμε

$$A = -(c - \lambda\mu)u - \frac{1}{2}\lambda\mu\nu_1\delta u^2.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} [2(c - \lambda\mu)u + \lambda\mu\nu_1\delta u^2] = -\frac{1}{2} \left[ 2\frac{(c - \lambda\mu)}{\sqrt{\lambda\mu\nu_1\delta}} \sqrt{\lambda\mu\nu_1\delta}u + (\sqrt{\lambda\mu\nu_1\delta}u)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[ 2\frac{(c - \lambda\mu)}{\sqrt{\lambda\mu\nu_1\delta}} \sqrt{\lambda\mu\nu_1\delta}u + (\sqrt{\lambda\mu\nu_1\delta}u)^2 + \left( \frac{(c - \lambda\mu)}{\sqrt{\lambda\mu\nu_1\delta}} \right)^2 - \left( \frac{(c - \lambda\mu)}{\sqrt{\lambda\mu\nu_1\delta}} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$\alpha = \frac{c - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda\mu\nu_1\delta}} \quad (6.27)$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} [2\alpha\sqrt{\lambda\mu\nu_1\delta}u + (\sqrt{\lambda\mu\nu_1\delta}u)^2 + \alpha^2 - \alpha^2] \\ &= \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2} (\sqrt{\lambda\mu\nu_1\delta}u + \alpha)^2 \end{aligned}$$

και για  $\sqrt{\lambda\mu\gamma_1\delta}u + \alpha = t$  ισχύει

$$A = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{t^2}{2}$$

Επίσης ισχύει  $du = \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu\gamma_1\delta}}dt = \frac{\alpha}{c - \lambda\mu}dt$  (λόγω της (6.27)).

Αντικαθιστώντας λοιπόν όλες τις ποσότητες που βρήκαμε στην (6.26), προκύπτει η ανισότητα

$$A_1 \geq \frac{\alpha c}{c - \lambda\mu} e^{\frac{\alpha^2}{2}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Παρατηρούμε ότι με την αλλαγή μεταβλητής άλλαξαν και τα όρια ολοκλήρωσης. Προέκυψε λοιπόν ο δείκτης Mills και η παραπάνω σχέση γράφεται

$$A_1 \geq \frac{\alpha c}{c - \lambda\mu} R(\alpha) \quad (6.28)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (6.25) και (6.28) προκύπτει ότι

$$\frac{\alpha c}{c - \lambda\mu} R(\alpha) \leq A_1 \leq \frac{c}{c - \lambda\mu} \quad (6.29)$$

Πριν αρχίσουμε την αναζήτηση φραγμάτων για την ποσότητα  $A_2$  θα αναφερθούμε εν συντομία στη συνάρτηση  $\tilde{f}_e(s; y)$ . Η συνάρτηση αυτή ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\tilde{f}_e(s; y) = \int_y^{\infty} e^{-sx} f_e(x) dx$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η  $r(s) = \tilde{f}_e(s; y)$  είναι μία φθίνουσα ( $r'(s) = \tilde{f}'_e(s; y) < 0$ ) και κυρτή συνάρτηση ( $r''(s) = \tilde{f}''_e(s; y) > 0$ ). Ας εξετάσουμε όμως ως προς τη μοντονία και την εξής συνάρτηση

$$h(s) = e^{sy} \tilde{f}_e(s; y) = e^{sy} \int_y^{\infty} e^{-sx} f_e(x) dx$$

Παίρνοντας την πρώτη παράγωγο της  $h(s)$  ως προς  $s$ , έχουμε

$$\begin{aligned} h'(s) &= \frac{\partial}{\partial s} \left[ e^{sy} \int_y^{\infty} e^{-sx} f_e(x) dx \right] = ye^{sy} \int_y^{\infty} e^{-sx} f_e(x) dx - e^{sy} \int_y^{\infty} xe^{-sx} f_e(x) dx \\ &= e^{sy} \int_y^{\infty} e^{-sx} f_e(x) (y - x) dx \end{aligned}$$

Όμως από τα όρια του παραπάνω ολοκληρώματος διαπιστώνουμε ότι  $(y - x) < 0$ , οπότε  $h'(s) < 0$  (η  $h(s)$  είναι φθίνουσα). Παίρνοντας την δεύτερη παράγωγο της  $h(s)$  ως προς  $s$ , έχουμε

$$\begin{aligned} h''(s) &= \frac{\partial}{\partial s} h'(s) = \frac{\partial}{\partial s} \left[ e^{sy} \int_y^{\infty} e^{-sx} f_e(x) (y - x) dx \right] \\ &= ye^{sy} \int_y^{\infty} e^{-sx} f_e(x) (y - x) dx - e^{sy} \int_y^{\infty} xe^{-sx} f_e(x) (y - x) dx \\ &= e^{sy} \int_y^{\infty} e^{-sx} f_e(x) (y - x)^2 dx > 0. \end{aligned}$$

Άρα η  $h(s)$  είναι κυρτή. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι για  $a > 0$  και  $b > 0$  θα ισχύει

$$h(a+b) \leq h(a)$$

δηλαδή

$$e^{(a+b)y} \tilde{f}_e(a+b; y) \leq e^{ay} \tilde{f}_e(a; y) \quad (6.30)$$

Για  $a = 0$  και  $b = \delta z$  η (6.30) μας δίνει

$$e^{\delta zy} \tilde{f}_e(\delta z; y) \leq \tilde{f}_e(0; y)$$

Όμως  $\tilde{f}_e(0; y) \int_y^\infty f_e(x) dx = \bar{F}_e(y)$ , επομένως ισχύει

$$e^{\delta zy} \tilde{f}_e(\delta z; y) \leq \bar{F}_e(y) \quad (6.31)$$

Επίσης από το γεγονός ότι η  $\tilde{f}_e(s; y)$  από μόνη της είναι φθίνουσα και κυρτή συμπεραίνουμε ότι για  $a > 0$  και  $b > 0$  θα ισχύει

$$\tilde{f}_e(a; y) \geq \tilde{f}_e(a+b; y) \geq \tilde{f}_e(a; y) + b\tilde{f}'_e(a; y) \quad (6.32)$$

Για  $a = 0$  και  $b = \delta z$  η (6.32) μας δίνει

$$\tilde{f}_e(0; y) \geq \tilde{f}_e(\delta z; y) \geq \tilde{f}_e(0; y) + \delta z \tilde{f}'_e(0; y).$$

Όμως  $\tilde{f}'_e(0; y) = -\underline{\nu}_1$ , επομένως έχουμε

$$\bar{F}_e(y) \geq \tilde{f}_e(\delta z; y) \geq \bar{F}_e(y) - \delta z \underline{\nu}_1 \quad (6.33)$$

Από τις σχέσεις (6.31) και (6.33) θα πάρουμε τα φράγματα που αναζητούμε για την ποσότητα  $A_2$ . Έχουμε λοιπόν

$$A_2 = \int_0^\infty e^{\delta \nu y} \tilde{f}_e(\delta \nu; y) e^{-\int_0^\nu [c - \lambda \mu \tilde{f}_e(s)] ds} d\nu \stackrel{(6.31)}{\leq} \int_0^\infty \bar{F}_e(y) e^{-\int_0^\nu [c - \lambda \mu \tilde{f}_e(s)] ds} d\nu$$

Όμως έχουμε ήδη δείξει ότι

$$e^{-\int_0^\nu [c - \lambda \mu \tilde{f}_e(s)] ds} \leq e^{-(c - \lambda \mu) \nu}$$

Επομένως θα ισχύει

$$A_2 \leq \int_0^\infty \bar{F}_e(y) e^{-(c - \lambda \mu) \nu} d\nu$$

Δηλαδή

$$A_2 \leq \frac{\bar{F}_e(y)}{c - \lambda \mu} \quad (6.34)$$

Για να πάρουμε τη δεύτερη ανισότητα για την ποσότητα  $A_2$ , χρησιμοποιούμε το δεξί μέλος της (6.33). Έτσι έχουμε

$$A_2 = \int_0^\infty e^{\delta v y} \tilde{f}_e(\delta v; y) e^{-\int_0^v [c - \lambda \mu \tilde{f}_e(s)] ds} dv$$

$$\stackrel{(6.33)}{\geq} \int_0^\infty e^{\delta v y} (\bar{F}_e(y) - \delta v \underline{\nu}_1) e^{-\int_0^v [c - \lambda \mu \tilde{f}_e(s)] ds} dv$$

Επίσης έχουμε δείξει ότι

$$e^{-\int_0^v [c - \lambda \mu \tilde{f}_e(s)] ds} \geq e^{-(c - \lambda \mu)v - \frac{1}{2} \lambda \mu \nu_1 \delta v^2},$$

επομένως θα ισχύει

$$A_2 \geq \int_0^\infty (\bar{F}_e(y) - \delta v \underline{\nu}_1) e^{-(c - \lambda \mu - \delta y)v - \frac{1}{2} \lambda \mu \nu_1 \delta v^2} dv \quad (6.35)$$

Αναλύοντας τον εκθέτη της (6.35) ξεχωριστά παίρνουμε

$$B = -(c - \lambda \mu - \delta y)v - \frac{1}{2} \lambda \mu \nu_1 \delta v^2 = -\frac{1}{2} [2(c - \lambda \mu - \delta y)v + \lambda \mu \nu_1 \delta v^2]$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ 2 \frac{(c - \lambda \mu - \delta y)}{\sqrt{\lambda \mu \nu_1 \delta}} \sqrt{\lambda \mu \nu_1 \delta} v + \lambda \mu \nu_1 \delta v^2 \right]$$

Θέτοντας

$$\beta = \frac{(c - \lambda \mu - \delta y)}{\sqrt{\lambda \mu \nu_1 \delta}}$$

παίρνουμε

$$B = -\frac{1}{2} [2\beta \sqrt{\lambda \mu \nu_1 \delta} v + \lambda \mu \nu_1 \delta v^2] = -\frac{1}{2} [2\beta \sqrt{\lambda \mu \nu_1 \delta} v + \lambda \mu \nu_1 \delta v^2 + \beta^2 - \beta^2]$$

$$= \frac{1}{2} \beta^2 - \frac{1}{2} (\beta + \sqrt{\lambda \mu \nu_1 \delta} v)^2$$

Επιπλέον θέτουμε

$$x = \beta + \sqrt{\lambda \mu \nu_1 \delta} v$$

οπότε προκύπτει ότι

$$v = \frac{x - \beta}{\sqrt{\lambda \mu \nu_1 \delta}} \stackrel{(6.27)}{=} \frac{\alpha}{c - \lambda \mu} (x - \beta), \text{ και}$$

$$dv = \frac{dx}{\sqrt{\lambda \mu \nu_1 \delta}} \stackrel{(6.27)}{=} \frac{\alpha}{c - \lambda \mu} dx.$$



Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$B = \frac{\beta^2}{2} - \frac{x^2}{2}$$

και αντικαθιστώντας στην (6.35), έχουμε

$$\begin{aligned} A_2 &\geq \frac{\alpha}{c - \lambda\mu} \int_{\beta}^{\infty} \left[ \bar{F}_e(y) - \delta\nu_1 \frac{\alpha x - \alpha\beta}{c - \lambda\mu} \right] e^{\frac{\beta^2}{2} - \frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{\alpha}{c - \lambda\mu} e^{\frac{\beta^2}{2}} \int_{\beta}^{\infty} \left( \bar{F}_e(y) - \frac{\alpha\delta\nu_1}{c - \lambda\mu} x + \frac{\alpha\beta\delta\nu_1}{c - \lambda\mu} \right) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{\alpha}{c - \lambda\mu} \left( \bar{F}_e(y) + \frac{\alpha\beta\delta\nu_1}{c - \lambda\mu} \right) R(\beta) - \frac{\alpha^2\delta\nu_1}{(c - \lambda\mu)^2} e^{\frac{\beta^2}{2}} \int_{\beta}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &\geq \frac{\alpha}{c - \lambda\mu} \left[ \left( \bar{F}_e(y) + \frac{\alpha\beta\delta\nu_1}{c - \lambda\mu} \right) R(\beta) - \frac{\alpha\delta\nu_1}{c - \lambda\mu} e^{\frac{\beta^2}{2}} \right] \end{aligned}$$

αφού για κάθε  $\beta$ , ισχύει

$$\int_{\beta}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

Συνολικά λοιπόν για την ποσότητα  $A_2$  θα ισχύει

$$\frac{\alpha}{c - \lambda\mu} \left[ \left( \bar{F}_e(y) + \frac{\alpha\beta\delta\nu_1}{c - \lambda\mu} \right) R(\beta) - \frac{\alpha\delta\nu_1}{c - \lambda\mu} e^{\frac{\beta^2}{2}} \right] \leq A_2 \leq \frac{\bar{F}_e(y)}{c - \lambda\mu} \quad (6.36)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (6.29) και (6.36) με το γεγονός ότι  $\bar{G}_{\delta}(0, y) = \frac{\lambda\mu A_2}{A_1}$  καταλήγουμε ότι

$$\frac{\lambda\mu\alpha}{c} \left[ \left( \bar{F}_e(y) + \frac{\alpha\beta\delta\nu_1}{c - \lambda\mu} \right) R(\beta) - \frac{\alpha\delta\nu_1}{c - \lambda\mu} e^{\frac{\beta^2}{2}} \right] \leq \bar{G}_{\delta}(0, y) \leq \frac{\lambda\mu\bar{F}_e(y)}{\alpha c R(\alpha)},$$

σχέση που ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 6.2. □

## Κεφάλαιο 7

# Το κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο και σταθερό μέρισμα και η συνάρτηση των Gerber-Shiu

Αξιοσημείωτο είναι το ενδιαφέρον αρκετών ερευνητών για τις στοχαστικές διαδικασίες πλεονασμάτων που περιλαμβάνουν στρατηγικές μερισμάτων, κυρίως λόγω του γεγονότος ότι εφαρμόζονται στην πράξη. Στο κεφάλαιο αυτό λοιπόν θα ασχοληθούμε με το κλασσικό μοντέλο υπό την παρουσία σταθερού επιτοκίου, όταν αποδίδονται μερίσματα σύμφωνα με την στρατηγική του κατωφλιού. Σύμφωνα με αυτή τη στρατηγική, όταν μέγεθος του πλεονάσματος φτάσει ένα κατώφλι σταθερού ύψους  $b$ , τα ασφάλιστρα δεν ενσωματώνονται στο πλεόνασμα αλλά καταβάλλονται ως μερίσματα στους μετόχους. Τα μερίσματα αυτά καταβάλλονται συνεχώς στο χρόνο με ρυθμό  $c + \delta b$ , ενώ το πλεόνασμα παραμένει σταθερό και ίσο με  $b$  μέχρι την επέλευση του επόμενου ζημιογόνου ενδεχομένου. Στην περίπτωση που το πλεόνασμα είναι μικρότερο του  $b$ , δεν καταβάλλεται μέρισμα. Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1, το πλεόνασμα στο χρόνο  $t$  όταν δεν αποδίδονται μερίσματα είναι

$$dU_\delta(t) = cdt + U_\delta(t)\delta dt - dS(t).$$

Επομένως αν συμβολίσουμε με  $U_b(t)$  το πλεόνασμα στο χρόνο  $t$  (παραλείπουμε τον δείκτη  $\delta$  για ευκολία) όταν η εταιρεία αποδίδει στους μετόχους της σταθερό μέρισμα, τότε

$$dU_b(t) = \begin{cases} cdt - dS(t) + \delta U_b(t^-)dt, & U_b(t) < b \\ -dS(t), & U_b(t) = b \end{cases} \quad (5.1)$$

Συμβολίζουμε ως  $T_b$  τον χρόνο χρεοκοπίας, δηλαδή την πρώτη χρονική στιγμή κατά την οποία το πλεόνασμα γίνεται αρνητικό, οπότε

$$T_b = \inf \{t : U_b(t) < 0\}$$

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu για ένα μοντέλο του οποίου το πλεόνασμα περιγράφεται από την (5.1) δίνεται από τη σχέση

$$m_b(u) = E [e^{-\alpha T_b} w(U_b(T_b^-), |U_b(T_b)|) I(T_b < \infty) | U_b(0) = u] \quad (5.2)$$

## 7.1 Ολοκληροδιαφορική εξίσωση για την $m_b(u)$

Για να βρούμε μία ολοκληροδιαφορική εξίσωση για την  $m_b(u)$  θεωρούμε αρχικά ένα χρονικό διάστημα  $[0, \tau], t > 0$ . Επίσης θεωρούμε ότι  $0 \leq u < b$  και ότι το  $\tau$  είναι τέτοιο ώστε το πλεόνασμα δεν θα φτάσει στο ύψος  $b$  μέχρι το χρόνο  $\tau$ , δηλαδή  $ue^{\delta\tau} + c\bar{s}_{\tau}^{(\delta)} < b$ . Στο διάστημα λοιπόν  $[0, \tau]$ , δεσμεύουμε ως προ το χρόνο επέλευσης και το μέγεθος του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου. Θεωρώντας ότι το μέγεθος της πρώτης ζημιάς (εάν αυτή επέλθει στο  $[0, \tau]$ ) θα είναι  $x$ , μπορούμε να διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Δεν εμφανίζεται ζημιά στο  $[0, \tau]$ .

Η πιθανότητα να συμβεί αυτό το ενδεχόμενο είναι  $\Pr[N(\tau) = 0]$ . Όμως στο κλασσικό μοντέλο η τ.μ.  $N(\tau)$  ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda\tau$ , επομένως

$$\Pr[N(\tau) = 0] = e^{-\lambda\tau} \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda\tau}.$$

Επίσης αν μέχρι το  $\tau$  δεν εμφανιστεί ζημιογόνο ενδεχόμενο, τότε το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή  $\tau$  θα είναι  $ue^{\delta\tau} + c\bar{s}_{\tau}^{(\delta)}$ .

2. Εμφανίζεται ζημιά στο  $[0, \tau]$  αλλά δεν προκαλεί χρεοκοπία.

Με άλλα λόγια σε κάποια χρονική στιγμή  $t \in [0, \tau]$  προκαλείται ζημιά τέτοια ώστε  $x < ue^{\delta t} + c\bar{s}_t^{(\delta)}$  (δηλαδή το μέγεθος της ζημιάς είναι μικρότερο από το πλεόνασμα που είχε συσσωρευτεί μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή). Στην περίπτωση αυτή, η διαδικασία πλεονάσματος ανανεώνεται και το νέο αρχικό κεφάλαιο ακριβώς μετά την επέλευση του ζημιογόνου ενδεχομένου είναι  $ue^{\delta t} + c\bar{s}_t^{(\delta)} - x$ .

3. Εμφανίζεται ζημιά στο  $[0, \tau]$  και προκαλεί χρεοκοπία.

Για να συμβεί αυτό θα πρέπει να ισχύει  $x > ue^{\delta t} + c\bar{s}_t^{(\delta)}, \forall t \in [0, \tau]$ .

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω περιπτώσεις, η (5.2) μας δίνει:

$$\begin{aligned} m_b(u) = & e^{-(\lambda+\alpha)\tau} m_b(ue^{\delta\tau} + c\bar{s}_{\tau}^{(\delta)}) + \lambda \int_0^{\tau} e^{-(\lambda+\alpha)t} \int_0^{ue^{\delta t} + c\bar{s}_t^{(\delta)}} m_b(ue^{\delta t} + c\bar{s}_t^{(\delta)} - x) f(x) dx dt \\ & + \lambda \int_0^{\tau} e^{-(\lambda+\alpha)t} \int_{ue^{\delta t} + c\bar{s}_t^{(\delta)}}^{\infty} w(ue^{\delta t} + c\bar{s}_t^{(\delta)}, x - ue^{\delta t} - c\bar{s}_t^{(\delta)}) f(x) dx dt. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Θέτουμε

$$A(x) = \int_x^{\infty} w(x, y - x) f(y) dy,$$

οπότε

$$\begin{aligned} m_b(u) = & e^{-(\lambda+\alpha)\tau} m_b(ue^{\delta\tau} + c\bar{s}_{\tau}^{(\delta)}) + \lambda \int_0^{\tau} e^{-(\lambda+\alpha)t} \int_0^{ue^{\delta t} + c\bar{s}_t^{(\delta)}} m_b(ue^{\delta t} + c\bar{s}_t^{(\delta)} - x) f(x) dx dt \\ & + \lambda \int_0^{\tau} e^{-(\lambda+\alpha)t} A(ue^{\delta t} + c\bar{s}_t^{(\delta)}) dt \end{aligned}$$

Πραγωγίζοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς  $\tau$ , παίρνουμε

$$0 = -(\lambda + \alpha)e^{-(\lambda+\alpha)\tau} m_b(ue^{\delta\tau} + c\bar{s}_{\tau}^{(\delta)}) + e^{-(\lambda+\alpha)\tau} m_b'(ue^{\delta\tau} + c\bar{s}_{\tau}^{(\delta)})e^{\delta\tau}(c + \delta u) \\ + \lambda e^{-(\lambda+\alpha)\tau} \int_0^{ue^{\delta\tau} + c\bar{s}_{\tau}^{(\delta)}} m_b(ue^{\delta\tau} + c\bar{s}_{\tau}^{(\delta)} - x)f(x)dx + \lambda e^{-(\lambda+\alpha)\tau} A(ue^{\delta\tau} + c\bar{s}_{\tau}^{(\delta)}), \quad (5,4)$$

αφού

$$\frac{d}{d\tau}(ue^{\delta\tau} + c\bar{s}_{\tau}^{(\delta)}) = \delta ue^{\delta\tau} + c\frac{\delta e^{\delta\tau}}{\delta} = e^{\delta\tau}(c + \delta u).$$

Θέτοντας  $\tau = 0$  στην (5,3) καταλήγουμε στην ολοκληροδιαφορική εξίσωση για την  $m_b(u)$  όταν  $0 \leq u < b$ , δηλαδή:

$$0 = -(\lambda + \alpha)m_b(u) + (c + \delta u)m_b'(u) + \lambda \int_0^u m_b(u - x)f(x)dx + \lambda A(u)$$

ή διαφορετικά

$$(c + \delta u)m_b'(u) = (\lambda + \alpha)m_b(u) - \lambda \int_0^u m_b(u - x)f(x)dx - \lambda A(u). \quad (5,5)$$

Τώρα θα θεωρήσουμε την περίπτωση όπου  $u = b$ ,  $\tau > 0$ , με σκοπό την εύρεση μίας οριακής συνθήκης για την  $m_b$ . Η μεθοδολογία που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αντίστοιχη μάλιστα που μας οδήγησε στην εύρεση της εξίσωσης (5.3). Αρχικά λοιπόν δεσμεύουμε ως προς το χρόνο επέλευσης και το μέγεθος ( $X_1 = x$ ) του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου αν θεωρήσουμε ότι αυτό επέρχεται στο διάστημα  $[0, \tau]$ . Όπως και πριν θα διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1. Δεν εμφανίζεται ζημιά στο  $[0, \tau]$ .

Η πιθανότητα να συμβεί αυτό είναι κατά τα γνωστά  $\Pr[N(\tau) = 0] = e^{-\lambda\tau}$ . Εδώ όμως έχουμε μία διαφορά σε σχέση με πριν. Επειδή το μέγεθος του πλεονάσματος έχει φτάσει το κατώφλι  $b$ , η εταιρεία δεν εισπράττει ασφάλιστρα και κατανέμει μέρος στους μετόχους της. Έτσι το πλεόνασμα παραμένει σταθερό και ίσο με το αρχικό κεφάλαιο (δηλαδή  $b$ ).

2. Εμφανίζεται ζημιά στο  $[0, \tau]$  αλλά δεν προκαλεί χρεοκοπία.

Επειδή μέχρι την επέλευση του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου το πλεόνασμα είναι σταθερό και ίσο με  $b$ , προκειμένου να μην επέλθει χρεοκοπία, θα πρέπει το μέγεθος της πρώτης ζημιάς να είναι  $x \leq b$ . Μετά την πρώτη ζημιά η διαδικασία πλεονάσματος θα ανανεωθεί με νέο αρχικό κεφάλαιο  $b - x$ .

3. Εμφανίζεται ζημιά στο  $[0, \tau]$  και προκαλεί χρεοκοπία.

Αυτό θα συμβεί μόνο αν η ζημιά είναι μεγαλύτερη από το κατώφλι, δηλαδή  $x > b$ .

Στην περίπτωση μας λοιπόν η (5.2) μας δίνει:

$$m_b(u) = e^{-(\lambda+\alpha)\tau} m_b(b) + \lambda \int_0^\tau e^{-(\lambda+\alpha)t} \int_0^b m_b(b-x) f(x) dx dt \\ + \lambda \int_0^\tau e^{-(\lambda+\alpha)t} \int_b^\infty w(b, x-b) f(x) dx dt,$$

δηλαδή

$$m_b(u) = e^{-(\lambda+\alpha)\tau} m_b(b) + \lambda \int_0^\tau e^{-(\lambda+\alpha)t} \int_0^b m_b(b-x) f(x) dx dt + \lambda \int_0^\tau e^{-(\lambda+\alpha)t} A(b) dt. \quad (5.6)$$

Παραγωγίζοντας λοιπόν την (5.6) ως προς  $\tau$  θα πάρουμε

$$0 = -(\lambda + \alpha)e^{-(\lambda+\alpha)\tau} m_b(b) + \lambda e^{-(\lambda+\alpha)\tau} \int_0^b m_b(b-x) f(x) dx + \lambda e^{-(\lambda+\alpha)\tau} A(b)$$

ενώ αν θέσουμε και  $\tau = 0$ , παίρνουμε

$$0 = -(\lambda + \alpha)m_b(b) + \lambda \int_0^b m_b(b-x) f(x) dx + \lambda A(b)$$

ή αλλιώς

$$(\lambda + \alpha)m_b(b) = \lambda \int_0^b m_b(b-x) f(x) dx + \lambda A(b). \quad (5.7)$$

όμως λύνοντας την ολοκληροδιαφορική εξίσωση (5.5) ως προς  $(\lambda + \alpha)m_b(u)$ , έχουμε

$$(\lambda + \alpha)m_b(u) = (c + \delta u)m'_b(u) + \lambda \int_0^u m_b(u-x) f(x) dx + \lambda A(u).$$

και παίρνοντας το όριο της παραπάνω εξίσωσης για  $u = b$  καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(\lambda + \alpha)m_b(b) = (c + \delta u)m'_b(b) + \lambda \int_0^b m_b(b-x) f(x) dx + \lambda A(b) \quad (5.8)$$

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των εξισώσεων (5.7) και (5.8), έχουμε

$$(c + \delta u)m'_b(b) = 0,$$

δηλαδή

$$m'_b(b) = 0. \quad (5.9)$$

Η απόδειξη της εξίσωσης (5.9) επιβεβαιώνει κάτι που διαισθητικά θα περίμενε κανείς να ισχύει για το μοντέλο μας, ενώ η χρησιμότητα αυτής της οριακής συνθήκης για την  $m_b$  θα φανεί στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου.

## 7.2 Η λύση για $m_b(u)$

Για μία στοχαστική διαδικασία πλεονάματος που δίνεται από την (5.1), μπορούμε να εκφράσουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu ως ένα άθροισμα δύο συναρτήσεων. Η μία είναι η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής χωρίς κατώφλι και η άλλη είναι ανεξάρτητη από τη συνάρτηση ποινής  $w$ .

Για τη συνέχεια αυτής της παραγράφου θα θεωρήσουμε ότι η  $h(x)$  είναι μία μη προφανής λύση της εξίσωσης

$$(c + \delta u)h'(u) = (\lambda + \alpha)h(u) - \lambda \int_0^u h(u-x)f(x)dx, \quad u > 0. \quad (5.10)$$

Επίσης θεωρούμε την ποσότητα  $m_\infty(u)$ , δηλαδή την αναμενόμενη παρούσα αξία της συνάρτησης ποινής όταν επέρχεται χρεοκοπία χωρίς κατώφλι. Η ολοκληροδιαφορική εξίσωση για την  $m_\infty(u)$  θα είναι

$$(c + \delta u)m'_\infty(u) = (\lambda + \alpha)m_\infty(u) - \lambda \int_0^u m_\infty(u-x)f(x)dx - \lambda A(u). \quad (5.11)$$

Επίσης, από την εξίσωση (5.5) έχουμε δει ότι

$$(c + \delta u)m'_b(u) = (\lambda + \alpha)m_b(u) - \lambda \int_0^u m_b(u-x)f(x)dx - \lambda A(u).$$

Αφαιρώντας από την παραπάνω εξίσωση την (5.11), παίρνουμε

$$(c + \delta u)[m'_b(u) - m'_\infty(u)] = (\lambda + \alpha)[m_b(u) - m_\infty(u)] - \lambda \int_0^u [m_b(u-x) - m_\infty(u-x)]f(x)dx.$$

Δηλαδή η ποσότητα  $m_b(u) - m_\infty(u)$  αποτελεί μία λύση της εξίσωσης (5.10) για  $0 \leq u \leq b$ . Επομένως θα ισχύει

$$m_b(u) - m_\infty(u) = kh(u) \quad (5.12)$$

όπου  $k$  μία σταθερά. Παραγωγίζοντας την (5.12) έχουμε

$$m'_b(u) - m'_\infty(u) = kh'(u).$$

Όμως από την (5.9) γνωρίζουμε ότι ισχύει η οριακή συνθήκη  $m'_b(b) = 0$ , επομένως να θέσουμε  $u = b$  στην παραπάνω εξίσωση μπορούμε να προσδιορίσουμε τη σταθερά  $k$ :

$$k = -\frac{m'_\infty(b)}{h'(b)}$$

και αντικαθιστώντας στην (5.12) παίρνουμε μια λύση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης για την  $m_b(u)$ , ήτοι

$$m_b(u) = m_\infty(u) - \frac{m'_\infty(b)}{h'(b)}h(u), \quad 0 \leq u \leq b. \quad (5.13)$$

Παρατηρώντας την εξίσωση (5.13) διαπιστώνουμε ότι για να προσδιορίσουμε την  $m_b(u)$  πρέπει πρώτα να βρούμε τις ποσότητες  $m_\infty(u)$  και  $h(u)$  και να υπολογίσουμε τις παραγώγους τους για  $u = b$ . Για την εύρεση της  $m_\infty(u)$ , δεχόμαστε τη λύση των Yuen, Wang (2005) .

Μας απομένει λοιπόν να βρούμε τη λύση της ομογενούς ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης (5.10). Η εξίσωση αυτή γράφεται (για  $u > 0$ ):

$$(c + \delta u)h'(u) = (\lambda + \alpha)h(u) - \lambda \int_0^u f(u-x)h(x)dx$$

Ακολουθώντας λοιπόν τη μεθοδολογία των Cai-Dickson, ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη από 0 έως  $u$ . Θυμίζουμε ότι εφαρμόζοντας το Λήμμα 1 έχουμε

$$\int_0^u \int_0^y f(y-x)h(x)dx dy = \int_0^u F(u-x)h(x)dx$$

Άρα συνολικά

$$\begin{aligned} \int_0^u (c + \delta y)h'(y)dy &= (\lambda + \alpha) \int_0^u h(y)dy - \lambda \int_0^u \int_0^y f(y-x)h(x)dx dy \Rightarrow \\ (c + \delta y)h(y)|_{y=0}^u - \int_0^u \delta h(y)dy &= (\lambda + \alpha) \int_0^u h(y)dy - \lambda \int_0^u F(u-x)h(x)dx \Rightarrow \\ (c + \delta u)h(u) - ch(0) &= (\lambda + \alpha + \delta) \int_0^u h(y)dy - \lambda \int_0^u F(u-x)h(x)dx \Rightarrow \\ (c + \delta u)h(u) &= ch(0) + \int_0^u \alpha + \delta + \lambda[1 - F(u-x)]h(x)dx \Rightarrow \end{aligned}$$

δηλαδή

$$h(u) = \frac{ch(0)}{c + \delta u} + \int_0^u \frac{\alpha + \delta + \lambda \bar{F}(u-x)}{c + \delta u} h(x)dx \quad (5.14)$$

Αν λοιπόν θέσουμε

$$g(u) = \frac{ch(0)}{c + \delta u}$$

και

$$k_{\delta, \alpha}(u, x) = \frac{\alpha + \delta + \lambda \bar{F}(u-x)}{c + \delta u}$$

τότε η (5.14) παίρνει τη μορφή

$$h(u) = g(u) + \int_0^u k_{\delta, \alpha}(u, x)h(x)dx. \quad (5.15)$$

Είναι λοιπόν φανερό ότι η  $h(u)$  ακολουθεί μια ολοκληρωτική εξίσωση Volterra και όταν η  $g(u)$  είναι ολοκληρώσιμη στο  $[0, b]$  και η  $k_{\delta, \alpha}(u, x)$  είναι συνεχής (που συνεπάγεται αν υποθέσουμε ότι η  $F$  έχει συνεχή συνάρτηση πυκνότητας), τότε η μοναδική λύση της (5.15) έχει την παρακάτω μορφή:

$$h(u) = g(u) + \int_0^u K_{\delta, \alpha}(u, x)g(x)dx,$$

όπου κατά τα γνωστά

$$K_{\delta,\alpha}(u, x) = \sum_{m=1}^{\infty} k_{\delta,\alpha}^m(u, x), \quad 0 \leq x < u$$

και

$$k_{\delta,\alpha}^m(u, x) = \int_x^u k_{\delta,\alpha}(u, y) k_{\delta,\alpha}^{m-1}(y, x) dy, \quad m \geq 2, \quad 0 \leq x < u$$

ενώ

$$k_{\delta,\alpha}^1(u, x) = k_{\delta,\alpha}(u, x).$$

Τέλος, ή  $h(u)$  μπορεί να προσεγγιστεί και αναδρομικά μέσω της σειράς Picard, ως εξής:

$$h_n(u) = g(u) + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u, y) h_{n-1}(y) dy, \quad n \geq 1,$$

και με αρχική τιμή

$$h_0(u) = g(u).$$

### 7.3 Αναλυτικά αποτελέσματα για εκθετικά μεγέθη ζημιών

Έστω ότι τα μεγέθη ζημιών ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\beta > 0$ , δηλαδή

$$F(x) = 1 - e^{-\beta x}.$$

Επίσης θεωρούμε ότι  $\alpha = 0$  και ότι η  $A'(u)$  είναι συνεχής στο  $[0, \infty)$ , όπου  $A$  η γνωστή μας συνάρτηση

$$A(x) = \int_x^{\infty} w(x, y-x) f(y) dy.$$

Με τα παραπάνω δεδομένα, θα υπολογίσουμε εκφράσεις για τις  $m_{\infty}(u)$  και  $h(u)$ . Μέσω αυτών των δύο συναρτήσεων και των παραγώγων τους για  $u = b$ , μπορούμε να προσδιορίσουμε την  $m_b(u)$ , αφού

$$m_b(u) = m_{\infty}(u) - \frac{m'_{\infty}(b)}{h'(b)} h(u), \quad 0 \leq x \leq b.$$

Στην προηγούμενη παράγραφο είχαμε βρει την ολοκληροδιαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η  $h(u)$  (εξίσωση (5.10)). Αυτή μπορεί να γραφεί

$$(c + \delta u) h'(u) = (\lambda + \alpha) h(u) - \lambda \int_0^u f(u-x) h(x) dx,$$



και για  $f(u-x) = \beta e^{-\beta(u-x)}$ , η παραπάνω εξίσωση μας δίνει

$$(c + \delta u)h'(u) = \lambda h(u) - \lambda \beta e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta x} h(x) dx \quad (5.16)$$

Παραγγίζοντας ως προς  $u$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \delta h'(u) + (c + \delta u)h''(u) &= \lambda h'(u) + \lambda \beta^2 e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta x} h(x) dx - \lambda \beta e^{-\beta u} (e^{\beta u} h(u)) \\ \Rightarrow \delta h'(u) + (c + \delta u)h''(u) &= \lambda h'(u) + \beta \left[ \lambda \beta e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta x} h(x) dx - \lambda h(u) \right] \end{aligned}$$

Όμως από την (5.16) παίρνουμε ότι

$$\lambda \beta e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta x} h(x) dx - \lambda h(u) = -\beta(c + \delta u)h'(u),$$

επομένως ισχύει

$$\delta h'(u) + (c + \delta u)h''(u) = -(c + \delta u)h'(u) \Rightarrow (c + \delta u)h''(u) = [\lambda - \delta - \beta(c + \delta u)] h'(u)$$

δηλαδή η  $h(u)$  ακολουθεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{h''(u)}{h'(u)} = \frac{\lambda - \delta - \beta(c + \delta u)}{c + \delta u}.$$

Θέτουμε

$$q_1(u) = \frac{\beta(c + \delta u) + \delta - \lambda}{c + \delta u},$$

οπότε η εξίσωση για την  $h(u)$  γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{h''(u)}{h'(u)} = -q_1(u) &\Rightarrow \int_0^u \frac{h''(t)}{h'(t)} dt = - \int_0^u q_1(t) dt \Rightarrow \int_0^u d \ln h'(t) = - \int_0^u q_1(t) dt \\ &\Rightarrow \ln h'(u) = \ln h'(0) - \int_0^u q_1(t) dt \Rightarrow e^{\ln h'(u)} = e^{\ln h'(0) - \int_0^u q_1(t) dt} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$h'(u) = h'(0) e^{-\int_0^u q_1(t) dt} \quad (5.17)$$

όμως από την (5.16) για  $u = 0$ , προκύπτει η οριακή συνθήκη

$$h'(0) = \frac{\lambda}{c} h(0) = \frac{\lambda}{c}$$

οπότε η (5.17) σε συνδυασμό με την οριακή συνθήκη  $h'(0) = \frac{\lambda}{c}$  μας δίνει

$$h'(u) = \frac{\lambda}{c} e^{-\int_0^u q_1(t) dt} \quad (5.18)$$

Θέτουμε

$$b_1(u) = e^{-\int_0^u q_1(t) dt}$$

και η (5.18) γίνεται

$$h'(u) = \frac{\lambda}{c} b_1(u) \Rightarrow \int_0^u h'(t) dt = \frac{\lambda}{c} \int_0^u b_1(t) dt \Rightarrow h(u) - h(0) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u b_1(t) dt,$$

Έτσι καταλήγουμε στη λύση για την  $h(u)$ :

$$h(u) = 1 + \frac{\lambda}{c} \int_0^u b_1(t) dt. \quad (5.19)$$

Πριν προχωρήσουμε στην εύρεση της  $m_\infty(u)$  ας υπολογίσουμε αναλυτικότερα και την ποσότητα  $b_1(t)$ :

$$b_1(t) = e^{-\int_0^t q_1(x) dx} = e^{-\int_0^t \frac{\beta(c+\delta x) + \delta - \lambda}{c + \delta x} dx} = e^{-\int_0^t \beta dx} e^{-\int_0^t \frac{\delta - \lambda}{c + \delta x} dx}$$

όμως

$$\int_0^t \frac{\delta - \lambda}{c + \delta x} dx = \frac{\delta - \lambda}{\delta} \int_0^t d \ln(c + \delta x) = [\ln(c + \delta t) - \ln c] \frac{\delta - \lambda}{\delta} = \ln \left( \frac{c + \delta t}{c} \right)^{\frac{\delta - \lambda}{\delta}},$$

επομένως

$$b_1(t) = e^{-\beta t} \left( \frac{c + \delta t}{c} \right)^{-\frac{\delta - \lambda}{\delta}}. \quad (5.20)$$

Επόμενο βήμα για την ολοκλήρωση αυτού του παραδείγματος είναι η εύρεση της  $m_\infty(u)$ , δηλαδή της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής του κλασσικού μοντέλου με επιτόκιο, όταν δεν υπάρχει κατώφλι. Ακολουθώντας παρόμοια βήματα με αυτά που μας οδήγησαν στην  $h(u)$ , ξεκινάμε από την ολοκληροδιαφορική εξίσωση της  $m_\infty(u)$  η οποία είναι

$$(c + \delta u) m'_\infty(u) = (\lambda + \alpha) m_\infty(u) - \lambda \int_0^u f(u - x) m_\infty(x) dx - \lambda A(u).$$

και για το παράδειγμά μας με εκθετικές ζημιές και  $\alpha = 0$ , ισχύει

$$(c + \delta u) m'_\infty(u) = \lambda m_\infty(u) - \lambda \beta e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta x} m_\infty(x) dx - \lambda A(u). \quad (5.21)$$

Παραγωγίζουμε την (5.21) ως προς  $u$  και έχουμε

$$\begin{aligned} \delta m'_{\infty}(u) + (c + \delta u)m''_{\infty}(u) &= \lambda m'_{\infty}(u) + \lambda \beta^2 e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta x} m_{\infty}(x) dx \\ &\quad - \lambda \beta e^{-\beta u} (e^{\beta u} m_{\infty}(u)) - \lambda A'(u) \Rightarrow \\ \delta m'_{\infty}(u) + (c + \delta u)m''_{\infty}(u) &= \lambda m'_{\infty}(u) + \beta \left[ \lambda \beta e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta x} m_{\infty}(x) dx - \lambda m_{\infty}(u) \right] - \lambda A'(u), \end{aligned} \quad (5.22)$$

όμως από την (5.21) γνωρίζουμε ότι

$$\lambda \beta e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta x} m_{\infty}(x) dx - \lambda m_{\infty}(u) = -(c + \delta u)m'_{\infty}(u) - \lambda A(u).$$

Αντικαθιστούμε αυτό το αποτέλεσμα στην (5.22):

$$\begin{aligned} (c + \delta u)m''_{\infty}(u) + [\beta(c + \delta u) + \delta - \lambda] m'_{\infty}(u) &= -\beta \lambda A(u) - \lambda A'(u) \\ \Rightarrow m''_{\infty}(u) + \left[ \frac{\beta(c + \delta u) + \delta - \lambda}{c + \delta u} \right] m'_{\infty}(u) &= \frac{-\lambda [A'(u) + \beta A(u)]}{c + \delta u} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Στην (5.23) θέτουμε

$$q_1(u) = \frac{\beta(c + \delta u) + \delta - \lambda}{c + \delta u}$$

και

$$q_2(u) = \frac{-\lambda [A'(u) + \beta A(u)]}{c + \delta u},$$

οπότε καταλήγουμε ότι η  $m_{\infty}(u)$  ακολουθεί την εξής διαφορική εξίσωση

$$m''_{\infty}(u) + q_1(u)m'_{\infty}(u) = q_2(u) \quad (5.24)$$

Μπορούμε να δούμε την (5.24) ως μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης ως προς  $m'_{\infty}(u)$  και να την λύσουμε. Έχοντας λοιπόν στη διάθεσή μας την  $m'_{\infty}(u)$ , ολοκληρώνουμε και βρίσκουμε την  $m_{\infty}(u)$ . Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (5.24) με  $e^{\int_0^u q_1(x) dx}$ , έχουμε

$$e^{\int_0^u q_1(x) dx} m''_{\infty}(u) + e^{\int_0^u q_1(x) dx} q_1(u) m'_{\infty}(u) = q_2(u) e^{\int_0^u q_1(x) dx}. \quad (5.25)$$

Το πρώτο μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι η ποσότητα

$$\frac{d}{du} \left[ e^{\int_0^u q_1(x) dx} m'_{\infty}(u) \right],$$

ενώ

$$e^{\int_0^u q_1(x) dx} = \frac{1}{b_1(u)}.$$

Ολοκληρώνοντας λοιπόν και τα δύο μέλη της (5.25) από 0 έως  $u$ , έχουμε

$$\int_0^u d \left[ \frac{m'_\infty(t)}{b_1(t)} \right] = \int_0^u \frac{q_2(t)}{b_1(t)} dt$$

και θέτοντας

$$b_2(u) = \int_0^u \frac{q_2(t)}{b_1(t)} dt$$

παίρνουμε

$$\frac{m'_\infty(u)}{b_1(u)} - m'_\infty(0) = b_2(u), \quad (5.26)$$

αφού  $b_1(0) = 1$ . Επίσης από την ολοκληροδιαφορική εξίσωση (5.21), για  $u = 0$ , προκύπτει η οριακή συνθήκη

$$cm'_\infty(0) = \lambda m_\infty(0) - \lambda A(0) \Rightarrow m'_\infty(0) = \frac{\lambda m_\infty(0) - \lambda A(0)}{c}.$$

Αντικαθιστώντας την οριακή συνθήκη στην (5.26) και λύνοντας ως προς  $m'_\infty(u)$  παίρνουμε

$$\begin{aligned} m'_\infty(u) &= b_1(u) \left[ \frac{\lambda m_\infty(0) - \lambda A(0)}{c} + b_2(u) \right] \\ \Rightarrow - \int_u^\infty m'_\infty(t) dt &= \int_u^\infty b_1(t) \left[ \frac{\lambda A(0) - \lambda m_\infty(0)}{c} - b_2(t) \right] dt \end{aligned} \quad (5.27)$$

Λύνοντας την (5.21) ως προς  $m'_\infty(u)$  και παίρνοντας το όριο  $\lim_{u \rightarrow \infty} m'_\infty(u)$  προκύπτει άλλη μία οριακή συνθήκη, ήτοι  $m'_\infty(\infty) = 0$ . Κατά συνέπεια λοιπόν θα ισχύει  $-\int_u^\infty m'_\infty(t) dt = m_\infty(u)$ , οπότε η (5.27) γίνεται

$$m_\infty(u) = \int_u^\infty b_1(t) \left[ \frac{\lambda A(0) - \lambda m_\infty(0)}{c} - b_2(t) \right] dt \quad (5.28)$$

Από την παραπάνω εξίσωση για  $u = 0$  παίρνουμε

$$m_\infty(0) = \left[ \frac{\lambda A(0) - \lambda m_\infty(0)}{c} \right] \int_0^\infty b_1(t) dt - \int_0^\infty b_1(t) b_2(t) dt$$

και θέτοντας

$$B_0 = \int_0^\infty b_1(t) dt$$

έχουμε

$$\begin{aligned} cm_\infty(0) &= \lambda A(0) B_0 - \lambda m_\infty(0) B_0 - c \int_0^\infty b_1(t) b_2(t) dt \\ \Rightarrow m_\infty(0) &= \frac{\lambda A(0) B_0 - c \int_0^\infty b_1(t) b_2(t) dt}{c + \lambda B_0} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας αυτό το τελευταίο αποτέλεσμα στην (5.28) παίρνουμε

$$m_{\infty}(u) = \int_u^{\infty} b_1(t) \left[ \frac{\lambda A(0)(c + \lambda B_0) - \lambda^2 A(0)B_0 + \lambda c \int_0^{\infty} b_1(t)b_2(t)dt}{c(c + \lambda B_0)} - b_2(t) \right] dt$$

δηλαδή η εξίσωση της  $m_{\infty}(u)$  είναι

$$m_{\infty}(u) = \int_u^{\infty} b_1(t) \left[ \frac{\lambda A(0) + \lambda \int_0^{\infty} b_1(t)b_2(t)dt}{(c + \lambda B_0)} - b_2(t) \right] dt.$$

Στην παραπάνω εξίσωση θέτουμε

$$B = \frac{\lambda A(0) + \lambda \int_0^{\infty} b_1(t)b_2(t)dt}{(c + \lambda B_0)}$$

και να καταλήγουμε στη λύση:

$$m_{\infty}(u) = \int_u^{\infty} b_1(t) (B - b_2(t)) dt \quad (5.29)$$

Οι εξισώσεις (5.19) και (5.29) είναι ικανές κι αναγκαίες έτσι ώστε να καταλήξουμε στην  $m_b(u)$  μέσω της σχέσης (5.13).

# Παράρτημα Α'

## Εντολές στο Mathematica και το Maple

### Παράδειγμα 3.1

Οι υπολογισμοί σε αυτό το Παράδειγμα έγιναν με βάση τους τύπους της Πρότασης ;; της Παραγράφου 3.3. Αρχικά ορίσαμε την  $\psi_\delta(0)$  ως συνάρτηση του  $u$  χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εντολές

```
lambda:=55; beta:=2; c:=(1.1*lambda)/beta;  
p[delta_]:=1-1/NIntegrate[c*Exp[-c*x+lambda/delta*Log[(beta+delta*x)/beta]],  
  {x,0,Infinity}];
```

Στη συνέχεια ορίσαμε την πιθανότητα χρεοκοπίας ως συνάρτηση των μεταβλητών  $\delta$  και  $u$  μέσω των εντολών

```
f[delta_,u_]:=p[delta]+((lambda/c*(p[delta]-1))*NIntegrate[Exp[-beta*x]  
  (1+(delta*x)/c)^(-(delta-lambda)/delta),{x,0,u}]);
```

Για την γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας όταν  $\delta = 0.05$ ,  $\delta = 0.07$  και  $\delta = 0.1$  χρησιμοποιήσαμε την εντολή

```
Plot[{f[0.05,u],f[0.07,u],f[0.1,u]},{u,10,30},PlotStyle->  
  {Directive[Green,Thickness[0.004]], Directive[Blue,Thickness[0.004]],  
  Directive[Red,Thickness[0.004]]}]
```

Τέλος, για την τρισδιάστατη γραφική παράσταση εκτελέσαμε την εντολή

```
Plot3D[f[delta,u],{delta,0,1},{u,0,40},ColorFunction->"RustTones",  
  PlotStyle->{Opacity[0.8]}]
```

### Παράδειγμα 3.2

Για τις ανάγκες του συγκεκριμένου παραδείγματος εργαστήκαμε στο Mathematica και το Maple. Στο Mathematica κάναμε κυρίως την προεργασία, ορίζοντας τις συναρτήσεις  $f(x)$ ,  $\bar{F}(x)$ ,  $F_e(x)$ ,  $\tilde{f}_e(x)$ , ενώ βρήκαμε και την  $\psi_\delta(0)$ . Οι εντολές που χρησιμοποιήσαμε στο Mathematica είναι

```
delta=0.1; lambda=55; a:=2; beta:=2; c:=60;
f[x_]:=beta^a*x*Exp[-beta*x];
F[x_]:=Integrate[f[s],{s,x,Infinity}];
mu:=Integrate[F[x],{x,0,Infinity}];
fe[x_]:=F[x]/mu;
Fe[x_]:=Integrate[fe[s],{s,0,x}];
phi[x_]:=Integrate[Exp[-x*t]*fe[t],{t,0,Infinity}];
p:=1-1/(c*NIntegrate[Exp[-c*x+lambda*mu*Integrate[phi[delta*s],
{s,0,x}]],{x,0,Infinity}]);
```

Έχοντας στη διάθεσή μας όλα τα παραπάνω από το Mathematica, προχωρήσαμε στους ορισμούς των συναρτήσεων  $k_\delta^i(u, t)$ ,  $K_\delta(u, t)$  και  $\ell(u)$  στο Maple. Τέλος υπολογίσαμε την πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2 της Παραγράφου 3.2. Οι εντολές που χρησιμοποιήσαμε στο Maple είναι

```
> restart;
> F:= x -> exp(-2*x)(1+2*x);
   Fe:= x -> 1-exp(-2*x)*(1+x);
> k:= proc (i::posint, u, t)
   local alpha, delta, c, lambda; option remember;
   lambda:=55; alpha:=0; delta:=0.05; c:=60;
   if i < 2 then (alpha+delta+lambda*F(u-t))/(c+delta*u)
   else int(k(1, u, x)*k(i-1, x, t), x=t..u)
   end if
end proc;
> lambda:=55; alpha:=0; delta:=0.05; c:=60; mu:=1/beta;
> L:= x -> c*0.908973/(c+delta*x)-lambda*mu*Fe(x)/(c+delta*x);
> res:= 0;
   for i while i < 4
   do res:= res+k(i, u, t)
   end do;
> psi:= u -> evalf(L(u))+evalf(Int(res*L(t), t=0..u, digits=6));
```

Η τιμή 0.908973 είναι η  $\psi_{0.05}(0)$  που βρήκαμε κατά την προεργασία μέσω του Mathematica. Με την μοντελοποίηση που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω καλύπτουμε και την εύρεση αποτελεσμάτων για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας. Αρκεί στην παραπάνω σειρά εντολών να

θέσουμε την τιμή της παραμέτρου  $\alpha$ . Ωστόσο προεργασία του Mathematica διαφέρει καθώς αλλάζει ο τρόπος υπολογισμού της  $\psi_{\delta,\alpha}(0)$ . Συγκεκριμένα για την εύρεση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, η προεργασία που κάναμε στο Mathematica είναι:

```
alpha=0.1; delta=0.05; lambda=55; a:=2; beta:=2; c:=60;
f[x_]:=beta^a*x*Exp[-beta*x];
F[x_]:=Integrate[f[s],{s,x,Infinity}];
mu:=Integrate[F[x],{x,0,Infinity}];
fe[x_]:=F[x]/mu;
Fe[x_]:=Integrate[fe[s],{s,0,x}];
phi[x_]:=Integrate[Exp[-x*t]*fe[t],{t,0,Infinity}];
p:=(lambda*mu*NIntegrate[phi[delta*x]*x^(alpha/delta)*
  Exp[-c*x+lambda*mu*Integrate[phi[delta*s],{s,0,x}]],{x,0,Infinity}]]
  /(c*NIntegrate[x^(alpha/delta)*Exp[-c*x+lambda*mu*Integrate[phi[delta*s],
  {s,0,x}]],{x,0,Infinity}]);
```

### Παράδειγμα 3.3

Ο τρόπος εργασίας μας σε αυτό το παράδειγμα ήταν παρόμοιος με αυτόν του Παραδείγματος 3.2. Η μόνη διαφορά ήταν ότι κατά την προεργασία στο Mathematica αλλάξαμε τον ορισμό της συνάρτησης πυκνότητας του μεγέθους ατομικής ζημιάς από Γάμμα σε μίξη Εκθετικών. Επίσης στις πρώτες γραμμές της “ρουτίνας” στο Maple ορίσαμε σωστά την δεξιά ουρά και την κατανομή ισορροπίας μίας μίξης εκθετικών.

### Παράδειγμα 4.1

Για να υπολογίσουμε την θετική ποσότητα  $R_1$  σύμφωνα με την εξίσωση (4.2) του Λήμματος 4.1 εισάγουμε στο Mathematica την παρακάτω σειρά εντολών

```
Assuming[r1>0, {delta=0.01,c=60,lambda=55,
  f[r1_]=NIntegrate[Exp[-r1*y]*(1-delta*y/c)^((lambda/delta)-1)
  *1/(1-r1*(1-delta*y/c)),{y,0,(c/delta)}] ]]
FindRoot[f[r1]==c/lambda,{r1,0.9}]
```

Η σχέση (4.2) είναι η πιο απλοποιημένη εξίσωση που έχουμε στη διάθεσή μας για τον υπολογισμό του  $R_1$ . Παρ’ όλα αυτά οι αριθμητικοί υπολογισμοί που έχουμε να εκτελέσουμε είναι αρκετά περίπλοκοι. Στον ορισμό λοιπόν την συνάρτησης  $f(R_1)$ , (που αντιπροσωπεύει το ολοκλήρωμα της εξίσωσης (4.2)) χρησιμοποιήσαμε την εντολή `NIntegrate` (Numerical Integrate). Με την εντολή αυτή πραγματοποιούμε την ολοκλήρωση με αριθμητικές μεθόδους.

Έχοντας υπολογίσει την ποσότητα  $R_1$  ο υπολογισμός του άνω φράγματος για της  $\psi_{\delta}(u)$  είναι εύκολος αφού  $\psi_{\delta}(u) \leq e^{-R_1 u}$ . Για παράδειγμα στην περίπτωση όπου  $\delta = 0.01$ ,  $R_1 = 0.09092$ , οι εντολές που χρησιμοποιήσαμε ήταν



```
Assuming[u>0, {r1=0.08335, psi[u_]=Exp[-r1*u]}]
psi[0]
psi[5]
psi[10]
psi[15]
psi[20]
psi[25]
```

Για να υπολογίσουμε την θετική ποσότητα  $R_2$  σύμφωνα με το Λήμμα 4.2 εισάγουμε στο Mathematica την παρακάτω σειρά εντολών

```
Assuming [r2>0, {delta=0.01,c=60,lambda =55,
  f[r2_]=Integrate[Exp[-r2*y]/(1+delta*y/c)^((lambda/delta)+1),{y,0,Infinity}],
  M[r2_]=1/(1-r2) }]
FindRoot [lambda/c*f[r2]==1/M[r2],{r2,0.9}]
```

Είναι προφανές ότι με τη συγκεκριμένη ρουτίνα θα υπολογίσουμε την ποσότητα  $R_2$  για ένταση ανατοκισμού  $\delta = 0.01$ . Για τις περιπτώσεις όπου  $\delta = 0.07$  καθώς και  $\delta = 0.15$  δεν έχουμε παρά να “τρέξουμε” την ίδια ρουτίνα αλλά με τις επιθυμητές μας τιμές.

Έχοντας υπολογίσει την ποσότητα  $R_2$ , μπορούμε τώρα να βρούμε το αναδρομικό άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.2. Στο συγκεκριμένο Παράδειγμα η κατανομή ζημιών ανήκει στην κλάση  $NWUC$ , οπότε εφαρμόζουμε τη σχέση (4.14). Για παράδειγμα για να υπολογίσουμε στο Mathematica το “Αναδρομικό” άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν η ένταση ανατοκισμού είναι  $\delta = 0.07$  (που μας δίνει συντελεστή προσαρμογής  $R_2 = 0.08440$ ), χρησιμοποιήσαμε τις παρακάτω εντολές:

```
Assuming[u>0, {delta=0.07,c=60,lambda=55,r2=0.08440,
  psi[u_]=(lambda/c)*Exp[-r2*u]*
  Integrate[Exp[-r2*y*(1+delta*u/c)]/(1+delta*y/c)
  ^((lambda/delta)+1),{y,0,Infinity}]}]
psi[0]
psi[5]
psi[10]
psi[15]
psi[20]
psi[25]
```

#### Παράδειγμα 4.2

Σε αυτό το παράδειγμα έχουμε επιλέξει μία διαφορετική κατανομή ζημιών. Μάλιστα, επειδή η κατανομή ζημιών ανήκει στην κλάση κατανομών  $NWUC$ , αλλάζει μόνο ο υπολογισμός των συντελεστών προσαρμογής και συγκεκριμένα αλλάζει η ροπογεννήτρια του μεγέθους ατομικής ζημιάς.

Ο συντελεστής προσαρμογής  $R_1$  υπολογίζεται εύκολα μέσω των εντολών

```
Assuming[r1>0, {delta=0.07, c=60, lambda=55,
  f[r1_]=NIntegrate[Exp[-r1*y]*(1-delta*y/c)^(lambda/delta-1)
    *(0.5/(0.5-r1*(1-delta*y/c)))^(0.5) , {y,0,(c/delta)}] ]]
FindRoot[f[r1]==c/lambda, {r1,1}]
```

Στην τρίτη γραμμή της παραπάνω ρουτίνας, αναγνωρίζουμε τη ροπογεννήτρια της κατανομής  $G(\alpha, \gamma)$  με  $\alpha = \gamma = 0.5$  στο σημείο  $R_1 \left(1 - \frac{\delta y}{c}\right)$ . Αντίστοιχα ο συντελεστής προσαρμογής  $R_2$  υπολογίζεται με τη βοήθεια των εντολών

```
Assuming[r2>0, {delta=0.07, c=60, lambda=55,
  f[r2_]=NIntegrate[Exp[-r2*y]/(1+delta*y/c)
    ^((lambda/delta)+1), {y,0,Infinity}],
  M[r2_]=(0.5/(0.5-r2))^(0.5) ]]
FindRoot[(lambda/c)*f[r2]==1/M[r2], {r2,1}]
```

Θυμίζουμε ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα κάναμε υπολογισμούς μόνο για ένταση ανατοκισμού  $\delta = 0.07$ . Έχοντας βρει τους συντελεστές προσαρμογής, η εύρεση των άνω φραγμάτων για την πιθανότητα χρεοκοπίας απαιτεί τις ίδιες ρουτίνες με εκείνες που χρησιμοποιήσαμε και στο Παράδειγμα 4.1. Φυσικά θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τους συντελεστές προσαρμογής που μόλις βρήκαμε και τα σωστά νούμερα.

### Παράδειγμα 4.3

Και σε αυτό το παράδειγμα επιλέξαμε μία κατανομή Γάμμα για να μοντελοποιήσουμε την τυχία μεταβλητή που εκφράζει τα μεγέθη των ατομικών ζημιών. Αυτή την φορά όμως επιλέξαμε μία κατανομή Γάμμα τέτοια ώστε  $\alpha = \gamma = 1.6$ , οπότε η κατανομή ζημιών δεν ανήκει στην κλάση  $NWUC$  (δηλαδή έχει αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας). Κατά συνέπεια, το υπολογιστικό κομμάτι είναι ίδιο με εκείνο του Παραδείγματος 4.2, εκτός από τον υπολογισμό του “Αναδρομικού” φράγματος για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα αντί για τη σχέση (4.14) του Θεωρήματος 4.2, τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (4.12) του ίδιου Θεωρήματος. Οι εντολές στο Mathematica είναι

```
Assuming[u>0, {delta=0.07, c=60, lambda=55, r2=0.10456,
  psi[u_]=(1.6/(1.6-r2))^(1.6)*(lambda/c)*Exp[-r2*u]*
    Integrate[Exp[-r2*y*(1+delta*u/c)]/(1+delta*y/c)
    ^((lambda/delta)+1), {y,0,Infinity}]]]
psi[0]
psi[5]
psi[10]
```

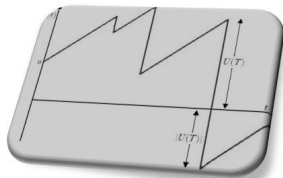
```
psi [15]  
psi [20]  
psi [25]
```

Παρατηρούμε ότι εδώ χρησιμοποιήσαμε τη ροπογεννήτρια των ζημιών και στον υπολογισμό του “Αναδρομικού” φράγματος, σε αντίθεση με το Παράδειγμα 4.2.

# Βιβλιογραφία

- [1] Γιαννακόπουλος A N (2003). *Στοχαστική ανάλυση και εφαρμογές στην χρηματοοικονομική*. Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.
- [2] Cai J, Dickson D (2002). *On the expected discounted penalty function at ruin of a surplus process with interest*. Insurance: Mathematics and Economics, 30: 389-404.
- [3] Cai J, Dickson D (2003). *Upper bounds for ultimate ruin probabilities in the Sparre Andersen model with interest*. Insurance: Mathematics and Economics, 32: 61-71.
- [4] Cao J, Wang Y (1991). *The NBUC and NWUC classes of life distributions*. Journal of Applied Probability, 28: 473-479
- [5] Gerber H, Shiu E (1998). *On the time value of ruin*. North American Actuarial Journal, 2: 48-78.
- [6] Lawler G F (1995). *Introduction to stochastic processes*. Chapman and Hall.
- [7] Liu L, Mao M (2006). *The risk model of the expected discounted penalty function with constant interest*. Acta Mathematica Scientia, 26B (3): 509-518.
- [8] Mitrinovic D (1970). *Analytic Inequalities*. Springer.
- [9] Sundt B, Teugels J (1995). *Ruin estimates under interest force*. Insurance: Mathematics and Economics, 16: 7-22.

- [10] Sundt B, Teugels J (1997). *The adjustment function in ruin estimates under interest force*. Insurance: Mathematics and Economics, 19: 85-94.
- [11] Tricomi F (1957) *Integral Equations*. Interscience Publishers Ltd., London
- [12] Yang H, Zhang L (2001). *On the distribution of surplus immediately after ruin under interest force*. Insurance: Mathematics and Economics, 29: 247-255.
- [13] Willmot G, Lin S (2001). *Lundberg approximations for compound distributions with insurance applications* Springer-Verlag New York, Inc.
- [14] Yuen K, Wang G, (2005). *Some ruin problems for a risk process with stochastic interest*. North American Actuarial Journal, 9(3):129-142.
- [15] Yuen K, Wang G, Li W (2007). *The Gerber-Shiu expected discounted penalty function for risk processes with interest and a constant dividend barrier*. Insurance: Mathematics and Economics, 40: 104-112.



## Η Χρονική Αξία της Χρεοκοπίας για Σταθερό Επιτόκιο

# Εισαγωγή

# Εισαγωγή

- Το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου



# Εισαγωγή

- Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου
- Ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra

# Εισαγωγή

- Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου
- Ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra
- Martingales

# Εισαγωγή

- Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου
- Ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra
- Martingales
- Οι οικογένειες κατανομών NBUC και NWUC

# Εισαγωγή - Το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

# Εισαγωγή - Το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

- Στοχαστική διαδικασία πλαονάσματος

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0, \quad u > 0$$

# Εισαγωγή - Το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

- Στοχαστική διαδικασία πλαονάσματος

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0, \quad u > 0$$

- Πιθανότητα χρεοκοπίας

Αν  $T = \inf \{t : U(t) < 0\}$ , τότε

$$\psi(u) = \Pr(T < \infty | U(0) = u) = \Pr(U(T) < 0 | U(0) = u)$$

## Εισαγωγή - Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

- Στοχαστική διαδικασία πλαονάσματος

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0, \quad u > 0$$

- Πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\text{Αν } T = \inf \{t : U(t) < 0\}, \quad \text{τότε}$$

$$\psi(u) = \Pr(T < \infty | U(0) = u) = \Pr(U(T) < 0 | U(0) = u)$$

- Συντελεστής Προσαρμογής

$$\text{Η θετική ρίζα της εξίσωσης } 1 + (1 + \theta)E(X)r = M_X(r)$$

# Εισαγωγή - Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

- Στοχαστική διαδικασία πλαονάσματος

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0, \quad u > 0$$

- Πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\text{Αν } T = \inf \{t : U(t) < 0\}, \quad \text{τότε}$$

$$\psi(u) = \Pr(T < \infty | U(0) = u) = \Pr(U(T) < 0 | U(0) = u)$$

- Συντελεστής Προσαρμογής

$$\text{Η θετική ρίζα της εξίσωσης } 1 + (1 + \theta)E(X)r = M_X(r)$$

- Ανισότητα Lundberg

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$



# Εισαγωγή - Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

- Στοχαστική διαδικασία πλαονάσματος

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0, \quad u > 0$$

- Πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\text{Αν } T = \inf \{t : U(t) < 0\}, \quad \text{τότε}$$

$$\psi(u) = \Pr(T < \infty | U(0) = u) = \Pr(U(T) < 0 | U(0) = u)$$

- Συντελεστής Προσαρμογής

$$\text{Η θετική ρίζα της εξίσωσης } 1 + (1 + \theta)E(X)r = M_X(r)$$

- Ανισότητα Lundberg

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$

- Συνάρτηση των Gerber-Shiu

$$\Phi_\alpha(u) = E[e^{-\alpha T} w(U(T^-), |U(T)|) I(T < \infty) | U(0) = u]$$

# Εισαγωγή - Ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra

# Εισαγωγή - Ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra

Ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δεύτερου τύπου

$$\phi(x) = \ell(x) + \int_0^x k(x, s)\phi(s)ds$$

# Εισαγωγή - Ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra

Ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δεύτερου τύπου

$$\phi(x) = \ell(x) + \int_0^x k(x, s)\phi(s)ds$$

Για να τη λύσουμε θέτουμε

$$k_1(x, s) = k(x, s)$$

# Εισαγωγή - Ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra

Ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δεύτερου τύπου

$$\phi(x) = \ell(x) + \int_0^x k(x, s)\phi(s)ds$$

Για να τη λύσουμε θέτουμε

$$k_1(x, s) = k(x, s)$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα  $k_m(x, s)$  ως εξής

$$k_m(x, s) = \int_s^x k(x, t)k_{m-1}(t, s)dt, \quad m = 2, 3, \dots, \quad x > s \geq 0,$$

# Εισαγωγή - Ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra

Ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δεύτερου τύπου

$$\phi(x) = \ell(x) + \int_0^x k(x, s)\phi(s)ds$$

Για να τη λύσουμε θέτουμε

$$k_1(x, s) = k(x, s)$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα  $k_m(x, s)$  ως εξής

$$k_m(x, s) = \int_s^x k(x, t)k_{m-1}(t, s)dt, \quad m = 2, 3, \dots, \quad x > s \geq 0,$$

και αν ορίσουμε

$$K(x, s) = \sum_{m=1}^{\infty} k_m(x, s), \quad x > s \geq 0,$$

# Εισαγωγή - Ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra

Ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δεύτερου τύπου

$$\phi(x) = \ell(x) + \int_0^x k(x, s)\phi(s)ds$$

Για να τη λύσουμε θέτουμε

$$k_1(x, s) = k(x, s)$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα  $k_m(x, s)$  ως εξής

$$k_m(x, s) = \int_s^x k(x, t)k_{m-1}(t, s)dt, \quad m = 2, 3, \dots, \quad x > s \geq 0,$$

και αν ορίσουμε

$$K(x, s) = \sum_{m=1}^{\infty} k_m(x, s), \quad x > s \geq 0,$$

τότε η λύση της εξίσωσης είναι

$$\phi(x) = \ell(x) + \int_0^x K(x, s)\ell(s)ds$$

# Εισαγωγή - Martingales



## Εισαγωγή - Martingales

Για να δείξουμε ότι η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών  $X_0, X_1, \dots$ , είναι μία διαδικασία **supermartingale** ως προς την  $\mathcal{F}_n$ , αρκεί να δείξουμε ότι

$$E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \leq X_n$$

## Εισαγωγή - Martingales

Για να δείξουμε ότι η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών  $X_0, X_1, \dots$ , είναι μία διαδικασία **supermartingale** ως προς την  $\mathcal{F}_n$ , αρκεί να δείξουμε ότι

$$E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq X_n$$

Αν  $T$  είναι ένας χρόνος στάσης τότε

## Εισαγωγή - Martingales

Για να δείξουμε ότι η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών  $X_0, X_1, \dots$ , είναι μία διαδικασία **supermartingale** ως προς την  $\mathcal{F}_n$ , αρκεί να δείξουμε ότι

$$E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq X_n$$

Αν  $T$  είναι ένας χρόνος στάσης τότε

- Μέχρι το χρόνο στάσης  $T$  η σταματημένη διαδικασία  $X_{t \wedge T}$  έχει ακριβώς τις ίδιες τροχιές με την  $X_t$ , ενώ

## Εισαγωγή - Martingales

Για να δείξουμε ότι η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών  $X_0, X_1, \dots$ , είναι μία διαδικασία **supermartingale** ως προς την  $\mathcal{F}_n$ , αρκεί να δείξουμε ότι

$$E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \leq X_n$$

Αν  $T$  είναι ένας χρόνος στάσης τότε

- Μέχρι το χρόνο στάσης  $T$  η σταματημένη διαδικασία  $X_{t \wedge T}$  έχει ακριβώς τις ίδιες τροχιές με την  $X_t$ , ενώ
- Μετά το χρόνο στάσης  $T$  ισχύει

$$E[X_{t \wedge T}] \leq E[X_0]$$

# Εισαγωγή - Οι οικογένειες κατανομών NBUC και NWUC

# Εισαγωγή - Οι οικογένειες κατανομών NBUC και NWUC

Θα μας χρειαστούν για την εύρεση φραγμάτων

# Εισαγωγή - Οι οικογένειες κατανομών NBUC και NWUC

Θα μας χρειαστούν για την εύρεση φραγμάτων

DFR

# Εισαγωγή - Οι οικογένειες κατανομών NBUC και NWUC

Θα μας χρειαστούν για την εύρεση φραγμάτων

$$\text{DFR} \subseteq$$



# Εισαγωγή - Οι οικογένειες κατανομών NBUC και NWUC

Θα μας χρειαστούν για την εύρεση φραγμάτων

$$\text{DFR} \subseteq \text{NWU}$$

# Εισαγωγή - Οι οικογένειες κατανομών NBUC και NWUC

Θα μας χρειαστούν για την εύρεση φραγμάτων

$$\text{DFR} \subseteq \text{NWU} \subseteq$$

# Εισαγωγή - Οι οικογένειες κατανομών NBUC και NWUC

Θα μας χρειαστούν για την εύρεση φραγμάτων

$$DFR \subseteq NWU \subseteq NWUC$$

# Εισαγωγή - Οι οικογένειες κατανομών NBUC και NWUC

Θα μας χρειαστούν για την εύρεση φραγμάτων

$$\begin{array}{l} \text{DFR} \subseteq \text{NWU} \subseteq \text{NWUC} \\ \text{IFR} \end{array}$$

# Εισαγωγή - Οι οικογένειες κατανομών NBUC και NWUC

Θα μας χρειαστούν για την εύρεση φραγμάτων

$$\begin{array}{l} \text{DFR} \subseteq \text{NWU} \subseteq \text{NWUC} \\ \text{IFR} \subseteq \end{array}$$

# Εισαγωγή - Οι οικογένειες κατανομών NBUC και NWUC

Θα μας χρειαστούν για την εύρεση φραγμάτων

$$\begin{aligned} \text{DFR} &\subseteq \text{NWU} \subseteq \text{NWUC} \\ \text{IFR} &\subseteq \text{NBU} \end{aligned}$$

# Εισαγωγή - Οι οικογένειες κατανομών NBUC και NWUC

Θα μας χρειαστούν για την εύρεση φραγμάτων

$$\begin{array}{l} \text{DFR} \subseteq \text{NWU} \subseteq \text{NWUC} \\ \text{IFR} \subseteq \text{NBU} \subseteq \end{array}$$

# Εισαγωγή - Οι οικογένειες κατανομών NBUC και NWUC

Θα μας χρειαστούν για την εύρεση φραγμάτων

$$\begin{array}{l} \text{DFR} \subseteq \text{NWU} \subseteq \text{NWUC} \\ \text{IFR} \subseteq \text{NBU} \subseteq \text{NBUC} \end{array}$$



# Εισαγωγή - Οι οικογένειες κατανομών NBUC και NWUC

Θα μας χρειαστούν για την εύρεση φραγμάτων

$$\begin{aligned} \text{DFR} &\subseteq \text{NWU} \subseteq \text{NWUC} \\ \text{IFR} &\subseteq \text{NBU} \subseteq \text{NBUC} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση κατανομής  $F(y)$  ανήκει στην οικογένεια κατανομών NWUC (new worse than used in convex ordering) όταν για κάθε  $x \geq 0$  και  $y \geq 0$  ισχύει

# Εισαγωγή - Οι οικογένειες κατανομών NBUC και NWUC

Θα μας χρειαστούν για την εύρεση φραγμάτων

$$\begin{aligned} \text{DFR} &\subseteq \text{NWU} \subseteq \text{NWUC} \\ \text{IFR} &\subseteq \text{NBU} \subseteq \text{NBUC} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση κατανομής  $F(y)$  ανήκει στην οικογένεια κατανομών NWUC (new worse than used in convex ordering) όταν για κάθε  $x \geq 0$  και  $y \geq 0$  ισχύει

$$\bar{F}_e(x+y) \geq \bar{F}_e(y)\bar{F}_e(x)$$

# Εισαγωγή - Οι οικογένειες κατανομών NBUC και NWUC

Θα μας χρειαστούν για την εύρεση φραγμάτων

$$\begin{aligned} \text{DFR} &\subseteq \text{NWU} \subseteq \text{NWUC} \\ \text{IFR} &\subseteq \text{NBU} \subseteq \text{NBUC} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση κατανομής  $F(y)$  ανήκει στην οικογένεια κατανομών NWUC (new worse than used in convex ordering) όταν για κάθε  $x \geq 0$  και  $y \geq 0$  ισχύει

$$\bar{F}_e(x+y) \geq \bar{F}_e(y)\bar{F}(x)$$

Η συνάρτηση κατανομής  $F(y)$  ανήκει στην οικογένεια κατανομών NBUC (new better than used in convex ordering) όταν για κάθε  $x \geq 0$  και  $y \geq 0$  ισχύει

# Εισαγωγή - Οι οικογένειες κατανομών NBUC και NWUC

Θα μας χρειαστούν για την εύρεση φραγμάτων

$$\begin{aligned} \text{DFR} &\subseteq \text{NWU} \subseteq \text{NWUC} \\ \text{IFR} &\subseteq \text{NBU} \subseteq \text{NBUC} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση κατανομής  $F(y)$  ανήκει στην οικογένεια κατανομών NWUC (new worse than used in convex ordering) όταν για κάθε  $x \geq 0$  και  $y \geq 0$  ισχύει

$$\bar{F}_e(x+y) \geq \bar{F}_e(y)\bar{F}(x)$$

Η συνάρτηση κατανομής  $F(y)$  ανήκει στην οικογένεια κατανομών NBUC (new better than used in convex ordering) όταν για κάθε  $x \geq 0$  και  $y \geq 0$  ισχύει

$$\bar{F}_e(x+y) \leq \bar{F}_e(y)\bar{F}(x)$$

# Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

## Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

- Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο

## Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

- Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο
- Ορισμός της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής και ειδικές περιπτώσεις

## Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

- Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο
- Ορισμός της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής και ειδικές περιπτώσεις
- Ολοκληρωτική εξίσωση για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής  $\Phi_{\delta, \alpha}(u)$



## Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

- Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο
- Ορισμός της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής και ειδικές περιπτώσεις
- Ολοκληρωτική εξίσωση για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$
- Η ακριβής λύση για  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$

# Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο

# Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο

Το πλεόνασμα επενδύεται με σταθερή ένταση ανατοκισμού  $\delta$

# Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο

Το πλεόνασμα επενδύεται με σταθερή ένταση ανατοκισμού  $\delta$   
 $U_\delta(t)$ : Το πλεόνασμα κατά τη χρονική στιγμή  $t$

## Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο

Το πλεόνασμα επενδύεται με σταθερή ένταση ανατοκισμού  $\delta$

$U_\delta(t)$ : Το πλεόνασμα κατά τη χρονική στιγμή  $t$

Αρχικό κεφάλαιο:  $U_\delta(0) = u$

## Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο

Το πλεόνασμα επενδύεται με σταθερή ένταση ανατοκισμού  $\delta$

$U_\delta(t)$ : Το πλεόνασμα κατά τη χρονική στιγμή  $t$

Αρχικό κεφάλαιο:  $U_\delta(0) = u$

Σταθερός ρυθμός εισπραξης των ασφαλίσεων:  $c$

## Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο

Το πλεόνασμα επενδύεται με σταθερή ένταση ανατοκισμού  $\delta$

$U_\delta(t)$ : Το πλεόνασμα κατά τη χρονική στιγμή  $t$

Αρχικό κεφάλαιο:  $U_\delta(0) = u$

Σταθερός ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων:  $c$

$S(t)$ : Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται έως το χρόνο  $t$

## Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο

Το πλεόνασμα επενδύεται με σταθερή ένταση ανατοκισμού  $\delta$

$U_\delta(t)$ : Το πλεόνασμα κατά τη χρονική στιγμή  $t$

Αρχικό κεφάλαιο:  $U_\delta(0) = u$

Σταθερός ρυθμός εισπραξης των ασφαλίστρων:  $c$

$S(t)$ : Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται έως το χρόνο  $t$

Στο χρόνο  $t$  ισχύει

$$dU_\delta(t) = cdt + U_\delta(t)\delta dt - dS(t)$$



## Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο με επιτόκιο

Το πλεόνασμα επενδύεται με σταθερή ένταση ανατοκισμού  $\delta$

$U_\delta(t)$ : Το πλεόνασμα κατά τη χρονική στιγμή  $t$

Αρχικό κεφάλαιο:  $U_\delta(0) = u$

Σταθερός ρυθμός είσπραξης των ασφαλίσεων:  $c$

$S(t)$ : Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται έως το χρόνο  $t$

Στο χρόνο  $t$  ισχύει

$$dU_\delta(t) = cdt + U_\delta(t)\delta dt - dS(t)$$

Η συσσωρευμένη αξία του πλεονάσματος κατά τη χρονική στιγμή  $t$ , δίνεται από τη σχέση

$$U_\delta(t) = ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\overline{t}|}^{(\delta)} - \int_0^t e^{\delta(t-y)} dS(y)$$

## Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο

Το πλεόνασμα επενδύεται με σταθερή ένταση ανατοκισμού  $\delta$

$U_\delta(t)$ : Το πλεόνασμα κατά τη χρονική στιγμή  $t$

Αρχικό κεφάλαιο:  $U_\delta(0) = u$

Σταθερός ρυθμός είσπραξης των ασφαλιστρών:  $c$

$S(t)$ : Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται έως το χρόνο  $t$

Στο χρόνο  $t$  ισχύει

$$dU_\delta(t) = cdt + U_\delta(t)\delta dt - dS(t)$$

Η συσσωρευμένη αξία του πλεονάσματος κατά τη χρονική στιγμή  $t$ , δίνεται από τη σχέση

$$U_\delta(t) = ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\overline{t}|}^{(\delta)} - \int_0^t e^{\delta(t-y)} dS(y)$$

κλασσικό μοντέλο:  $U(t) = u + ct - S(t)$

# Ορισμός της συνάρτησης των Gerber-Shiu και ειδικές περιπτώσεις

# Ορισμός της συνάρτησης των Gerber-Shiu και ειδικές περιπτώσεις

$T_\delta = \inf \{t : U_\delta(t) < 0\}$ : ο χρόνος χρεοκοπίας

# Ορισμός της συνάρτησης των Gerber-Shiu και ειδικές περιπτώσεις

$T_\delta = \inf \{t : U_\delta(t) < 0\}$ : ο χρόνος χρεοκοπίας

$U_\delta(T_\delta^-)$ : το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και

# Ορισμός της συνάρτησης των Gerber-Shiu και ειδικές περιπτώσεις

$T_\delta = \inf \{t : U_\delta(t) < 0\}$ : ο χρόνος χρεοκοπίας

$U_\delta(T_\delta^-)$ : το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και

$|U_\delta(T_\delta)|$ : το έλλειμμα ακριβώς μετά τη χρεοκοπία,

# Ορισμός της συνάρτησης των Gerber-Shiu και ειδικές περιπτώσεις

$T_\delta = \inf \{t : U_\delta(t) < 0\}$ : ο χρόνος χρεοκοπίας

$U_\delta(T_\delta^-)$ : το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και

$|U_\delta(T_\delta)|$ : το έλλειμμα ακριβώς μετά τη χρεοκοπία,

τότε η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = E \left[ e^{-\alpha T_\delta} w(U_\delta(T_\delta^-), |U_\delta(T_\delta)|) I(T_\delta < \infty) \mid U_\delta(0) = u \right]$$

# Ορισμός της συνάρτησης των Gerber-Shiu και ειδικές περιπτώσεις

$T_\delta = \inf \{t : U_\delta(t) < 0\}$ : ο χρόνος χρεοκοπίας

$U_\delta(T_\delta^-)$ : το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και

$|U_\delta(T_\delta)|$ : το έλλειμμα ακριβώς μετά τη χρεοκοπία,

τότε η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = E \left[ e^{-\alpha T_\delta} w(U_\delta(T_\delta^-), |U_\delta(T_\delta)|) I(T_\delta < \infty) \mid U_\delta(0) = u \right]$$

Επιλέγοντας κατάλληλα την συνάρτηση ποινής  $w$ , προκύπτουν ειδικές περιπτώσεις:



# Ορισμός της συνάρτησης των Gerber-Shiu και ειδικές περιπτώσεις

$T_\delta = \inf \{t : U_\delta(t) < 0\}$ : ο χρόνος χρεοκοπίας

$U_\delta(T_\delta^-)$ : το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και

$|U_\delta(T_\delta)|$ : το έλλειμμα ακριβώς μετά τη χρεοκοπία,

τότε η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = E \left[ e^{-\alpha T_\delta} w(U_\delta(T_\delta^-), |U_\delta(T_\delta)|) I(T_\delta < \infty) \mid U_\delta(0) = u \right]$$

Επιλέγοντας κατάλληλα την συνάρτηση ποινής  $w$ , προκύπτουν ειδικές περιπτώσεις:

- Για  $w(x_1, x_2) = 1$  και  $\alpha > 0$ :

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = E[e^{-\alpha T_\delta} I(T_\delta < \infty) \mid U_\delta(0) = u] = \psi_{\delta,\alpha}(u)$$

# Ορισμός της συνάρτησης των Gerber-Shiu και ειδικές περιπτώσεις

$T_\delta = \inf \{t : U_\delta(t) < 0\}$ : ο χρόνος χρεοκοπίας

$U_\delta(T_\delta^-)$ : το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και

$|U_\delta(T_\delta)|$ : το έλλειμμα ακριβώς μετά τη χρεοκοπία,

τότε η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = E \left[ e^{-\alpha T_\delta} w(U_\delta(T_\delta^-), |U_\delta(T_\delta)|) I(T_\delta < \infty) \mid U_\delta(0) = u \right]$$

Επιλέγοντας κατάλληλα την συνάρτηση ποινής  $w$ , προκύπτουν ειδικές περιπτώσεις:

- Για  $w(x_1, x_2) = 1$  και  $\alpha > 0$ :

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = E[e^{-\alpha T_\delta} I(T_\delta < \infty) \mid U_\delta(0) = u] = \psi_{\delta,\alpha}(u)$$

- Για  $w(x_1, x_2) = I(x_1 \leq x)I(x_2 \leq y)$ :

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = E[e^{-\alpha T_\delta} I(U(T_\delta^-) \leq x) I(|U_\delta(T_\delta)| \leq y) I(T < \infty) \mid U(0) = u] = H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$$

# Ορισμός της συνάρτησης των Gerber-Shiu και ειδικές περιπτώσεις

$T_\delta = \inf \{t : U_\delta(t) < 0\}$ : ο χρόνος χρεοκοπίας

$U_\delta(T_\delta^-)$ : το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και

$|U_\delta(T_\delta)|$ : το έλλειμμα ακριβώς μετά τη χρεοκοπία,

τότε η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = E \left[ e^{-\alpha T_\delta} w(U_\delta(T_\delta^-), |U_\delta(T_\delta)|) I(T_\delta < \infty) \mid U_\delta(0) = u \right]$$

Επιλέγοντας κατάλληλα την συνάρτηση ποινής  $w$ , προκύπτουν ειδικές περιπτώσεις:

- Για  $w(x_1, x_2) = 1$  και  $\alpha > 0$ :

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = E[e^{-\alpha T_\delta} I(T_\delta < \infty) \mid U_\delta(0) = u] = \psi_{\delta,\alpha}(u)$$

- Για  $w(x_1, x_2) = I(x_1 \leq x)I(x_2 \leq y)$ :

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = E[e^{-\alpha T_\delta} I(U(T_\delta^-) \leq x) I(|U_\delta(T_\delta)| \leq y) I(T < \infty) \mid U(0) = u] = H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$$

Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου (χωρίς επιτόκιο) αποτελεί ειδική περίπτωση του μοντέλου με σταθερό επιτόκιο για  $\delta = 0$ .

Η ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η  
συνάρτηση ποινης των Gerber-Shiu

## Η ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu

Για να βρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu ακολουθούμε τα εξής βήματα:

## Η ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu

Για να βρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Παίρνουμε μία ολοκληρωτική εξίσωση για την  $\Phi_{\delta, \alpha}(u)$ , δεσμεύοντας ως προς το χρόνο επέλευσης και το μέγεθος του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου

## Η ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu

Για να βρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Παίρνουμε μία ολοκληρωτική εξίσωση για την  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$ , δεσμεύοντας ως προς το χρόνο επέλευσης και το μέγεθος του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου
- Παραγωγίζουμε την ολοκληρωτική εξίσωση ως προς  $u$ , για να πάρουμε μία ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για την  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$

## Η ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu

Για να βρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Παίρνουμε μία ολοκληρωτική εξίσωση για την  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$ , δεσμεύοντας ως προς το χρόνο επέλευσης και το μέγεθος του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου
- Παραγωγίζουμε την ολοκληρωτική εξίσωση ως προς  $u$ , για να πάρουμε μία ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για την  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$
- Ολοκληρώνουμε την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση από 0 έως  $u$ .



## Η ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu

Για να βρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Παίρνουμε μία ολοκληρωτική εξίσωση για την  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$ , δεσμεύοντας ως προς το χρόνο επέλευσης και το μέγεθος του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου
- Παραγωγίζουμε την ολοκληρωτική εξίσωση ως προς  $u$ , για να πάρουμε μία ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για την  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$
- Ολοκληρώνουμε την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση από 0 έως  $u$ .

Η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu είναι

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u, t)\Phi_{\delta,\alpha}(t)dt$$

## Η ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu

Για να βρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Παίρνουμε μία ολοκληρωτική εξίσωση για την  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$ , δεσμεύοντας ως προς το χρόνο επέλευσης και το μέγεθος του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου
- Παραγωγίζουμε την ολοκληρωτική εξίσωση ως προς  $u$ , για να πάρουμε μία ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για την  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$
- Ολοκληρώνουμε την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση από 0 έως  $u$ .

Η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu είναι

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u, t)\Phi_{\delta,\alpha}(t)dt$$

όπου

$$A(t) = \int_t^\infty w(t, s - t)dF(s)$$

## Η ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu

Για να βρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Παίρνουμε μία ολοκληρωτική εξίσωση για την  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$ , δεσμεύοντας ως προς το χρόνο επέλευσης και το μέγεθος του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου
- Παραγωγίζουμε την ολοκληρωτική εξίσωση ως προς  $u$ , για να πάρουμε μία ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για την  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$
- Ολοκληρώνουμε την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση από 0 έως  $u$ .

Η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu είναι

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u, t)\Phi_{\delta,\alpha}(t)dt$$

όπου

$$A(t) = \int_t^\infty w(t, s - t)dF(s)$$

και

$$k_{\delta,\alpha}(u, t) = \frac{\delta + \alpha + \lambda\bar{F}(u - t)}{c + \delta u}$$

Η λύση της εξίσωσης Volterra που  
ικανοποιεί η  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$

## Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$

Θέλουμε να λύσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u, t)\Phi_{\delta,\alpha}(t)dt$$

## Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$

Θέλουμε να λύσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u,t)\Phi_{\delta,\alpha}(t)dt$$

Θέτουμε

$$k_{\delta,\alpha}^1(u,t) = k_{\delta,\alpha}(u,t) = \frac{\delta + \alpha + \lambda\bar{F}(u-t)}{c + \delta u}$$

## Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$

Θέλουμε να λύσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u, t)\Phi_{\delta,\alpha}(t)dt$$

Θέτουμε

$$k_{\delta,\alpha}^1(u, t) = k_{\delta,\alpha}(u, t) = \frac{\delta + \alpha + \lambda\bar{F}(u - t)}{c + \delta u}$$

και

$$\ell(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt$$

## Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$

Θέλουμε να λύσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u,t)\Phi_{\delta,\alpha}(t)dt$$

Θέτουμε

$$k_{\delta,\alpha}^1(u,t) = k_{\delta,\alpha}(u,t) = \frac{\delta + \alpha + \lambda\bar{F}(u-t)}{c + \delta u}$$

και

$$\ell(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt$$

Ορίζουμε

$$k_{\delta,\alpha}^i(u,t) = \int_t^u k_{\delta,\alpha}^1(u,x)k_{\delta,\alpha}^{i-1}(x,t)dx, \quad i = 2, 3, \dots$$



## Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$

Θέλουμε να λύσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u,t)\Phi_{\delta,\alpha}(t)dt$$

Θέτουμε

$$k_{\delta,\alpha}^1(u,t) = k_{\delta,\alpha}(u,t) = \frac{\delta + \alpha + \lambda\bar{F}(u-t)}{c + \delta u}$$

και

$$\ell(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt$$

Ορίζουμε

$$k_{\delta,\alpha}^i(u,t) = \int_t^u k_{\delta,\alpha}^1(u,x)k_{\delta,\alpha}^{i-1}(x,t)dx, \quad i = 2, 3, \dots$$

και

$$K_{\delta,\alpha}(u,t) = \sum_{i=0}^{\infty} k_{\delta,\alpha}^i(u,t)$$

## Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$

Θέλουμε να λύσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u,t)\Phi_{\delta,\alpha}(t)dt$$

Θέτουμε

$$k_{\delta,\alpha}^1(u,t) = k_{\delta,\alpha}(u,t) = \frac{\delta + \alpha + \lambda\bar{F}(u-t)}{c + \delta u}$$

και

$$\ell(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt$$

Ορίζουμε

$$k_{\delta,\alpha}^i(u,t) = \int_t^u k_{\delta,\alpha}^1(u,x)k_{\delta,\alpha}^{i-1}(x,t)dx, \quad i = 2, 3, \dots$$

και

$$K_{\delta,\alpha}(u,t) = \sum_{i=0}^{\infty} k_{\delta,\alpha}^i(u,t)$$

Η λύση της εξίσωσης Volterra δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \ell(u) + \int_0^u K_{\delta,\alpha}(u,t)\ell(t)dt$$

Η ακριβής λύση για  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$

## Η ακριβής λύση για $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u, t)\Phi_{\delta,\alpha}(t)dt$$

## Η ακριβής λύση για $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u,t)\Phi_{\delta,\alpha}(t)dt$$

- Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$Z_{\delta,\alpha}(u) = \frac{\Phi_{\delta,\alpha}(0) - \Phi_{\delta,\alpha}(u)}{\Phi_{\delta,\alpha}(0)},$$

## Η ακριβής λύση για $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u, t)\Phi_{\delta,\alpha}(t)dt$$

- Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$Z_{\delta,\alpha}(u) = \frac{\Phi_{\delta,\alpha}(0) - \Phi_{\delta,\alpha}(u)}{\Phi_{\delta,\alpha}(0)},$$

και παίρνουμε μία ολοκληρωτική εξίσωση για την  $Z_{\delta,\alpha}(u)$ .

## Η ακριβής λύση για $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u, t)\Phi_{\delta,\alpha}(t)dt$$

- Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$Z_{\delta,\alpha}(u) = \frac{\Phi_{\delta,\alpha}(0) - \Phi_{\delta,\alpha}(u)}{\Phi_{\delta,\alpha}(0)},$$

και παίρνουμε μία ολοκληρωτική εξίσωση για την  $Z_{\delta,\alpha}(u)$ .

- Παίρνουμε μετασχηματισμούς Laplace και καταλλήλουμε σε μία ομογενή, γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης για την

$$\tilde{z}_{\delta,\alpha}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dZ_{\delta,\alpha}(x)$$

## Η ακριβής λύση για $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$

$$\Phi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\Phi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda}{c + \delta u} \int_0^u A(t)dt + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u, t)\Phi_{\delta,\alpha}(t)dt$$

- Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$Z_{\delta,\alpha}(u) = \frac{\Phi_{\delta,\alpha}(0) - \Phi_{\delta,\alpha}(u)}{\Phi_{\delta,\alpha}(0)},$$

και παίρνουμε μία ολοκληρωτική εξίσωση για την  $Z_{\delta,\alpha}(u)$ .

- Παίρνουμε μετασχηματισμούς Laplace και καταλλήλουμε σε μία ομογενή, γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης για την

$$\tilde{z}_{\delta,\alpha}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dZ_{\delta,\alpha}(x)$$

- Λύνουμε τη διαφορική εξίσωση και θέτουμε  $s = 0$



Η ακριβής λύση για  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$

## Η ακριβής λύση για $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$

Η  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$  δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_{\delta,\alpha}(0) = \frac{\lambda\mu A}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^\infty \tilde{a}_1(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$

## Η ακριβής λύση για $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$

Η  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$  δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_{\delta,\alpha}(0) = \frac{\lambda\mu A}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^\infty \tilde{a}_1(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$

όπου

## Η ακριβής λύση για $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$

Η  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$  δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_{\delta,\alpha}(0) = \frac{\lambda\mu_A}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^\infty \tilde{a}_1(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$

όπου

$$\mu_A = \int_0^\infty A(t) dt,$$

## Η ακριβής λύση για $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$

Η  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$  δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_{\delta,\alpha}(0) = \frac{\lambda\mu_A}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^\infty \tilde{a}_1(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$

όπου

$$\mu_A = \int_0^\infty A(t) dt,$$

$$A_1(u) = \frac{1}{\mu_A} \int_0^u A(t) dt$$

## Η ακριβής λύση για $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$

Η  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$  δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_{\delta,\alpha}(0) = \frac{\lambda\mu_A}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^\infty \tilde{a}_1(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$

όπου

$$\mu_A = \int_0^\infty A(t) dt,$$

$$A_1(u) = \frac{1}{\mu_A} \int_0^u A(t) dt$$

$$\tilde{a}_1(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dA_1(x) dx = \frac{1}{\mu_A} \int_0^\infty e^{-sx} A(x) dx$$

## Η ακριβής λύση για $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$

Η  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$  δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_{\delta,\alpha}(0) = \frac{\lambda\mu_A}{\kappa\delta,\alpha} \int_0^\infty \tilde{a}_1(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$

όπου

$$\mu_A = \int_0^\infty A(t) dt,$$

$$A_1(u) = \frac{1}{\mu_A} \int_0^u A(t) dt$$

$$\tilde{a}_1(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dA_1(x) dx = \frac{1}{\mu_A} \int_0^\infty e^{-sx} A(x) dx$$

$$\tilde{f}_e(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_e(x) dx = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{-sx} \bar{F}(x) dx$$

## Η ακριβής λύση για $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$

Η  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$  δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_{\delta,\alpha}(0) = \frac{\lambda\mu_A}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^\infty \tilde{a}_1(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$

όπου

$$\mu_A = \int_0^\infty A(t) dt,$$

$$A_1(u) = \frac{1}{\mu_A} \int_0^u A(t) dt$$

$$\tilde{a}_1(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dA_1(x) dx = \frac{1}{\mu_A} \int_0^\infty e^{-sx} A(x) dx$$

$$\tilde{f}_e(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_e(x) dx = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{-sx} \bar{F}(x) dx$$

και

$$\kappa_{\delta,\alpha} = c \int_0^\infty v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv} + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds dv$$



# Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και η πιθανότητα χρεοκοπίας

# Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και η πιθανότητα χρεοκοπίας

- Η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

## Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και η πιθανότητα χρεοκοπίας

- Η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας
- Η πιθανότητα χρεοκοπίας

## Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και η πιθανότητα χρεοκοπίας

- Η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας
- Η πιθανότητα χρεοκοπίας
- Αναλυτικά αποτελέσματα για εκθετικά μεγέθη ζημιών

## Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και η πιθανότητα χρεοκοπίας

- Η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας
- Η πιθανότητα χρεοκοπίας
- Αναλυτικά αποτελέσματα για εκθετικά μεγέθη ζημιών
- Αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων Volterra

Η ολοκληρωτική εξίσωση του  
μετασχηματισμού Laplace του χρόνου  
χρεοκοπίας

# Η ολοκληρωτική εξίσωση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

Από τη λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης που ικανοποιεί η  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$ , για  $w(x_1, x_2) = 1$  και  $\alpha > 0$  προκύπτει ότι η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας είναι

## Η ολοκληρωτική εξίσωση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

Από τη λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης που ικανοποιεί η  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$ , για  $w(x_1, x_2) = 1$  και  $\alpha > 0$  προκύπτει ότι η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας είναι

$$\psi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\psi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u K_{\delta,\alpha}(u, t) \left[ \frac{c\psi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta t} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta t} F_e(t) \right] dt$$



## Η ολοκληρωτική εξίσωση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

Από τη λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης που ικανοποιεί η  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$ , για  $w(x_1, x_2) = 1$  και  $\alpha > 0$  προκύπτει ότι η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας είναι

$$\psi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\psi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u K_{\delta,\alpha}(u, t) \left[ \frac{c\psi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta t} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta t} F_e(t) \right] dt$$

όπου

## Η ολοκληρωτική εξίσωση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

Από τη λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης που ικανοποιεί η  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$ , για  $w(x_1, x_2) = 1$  και  $\alpha > 0$  προκύπτει ότι η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας είναι

$$\psi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\psi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u K_{\delta,\alpha}(u, t) \left[ \frac{c\psi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta t} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta t} F_e(t) \right] dt$$

όπου

$$K_{\delta,\alpha}(u, t) = \sum_{m=1}^{\infty} k_{\delta,\alpha}^m(u, t), \quad u > t \geq 0$$

## Η ολοκληρωτική εξίσωση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

Από τη λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης που ικανοποιεί η  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$ , για  $w(x_1, x_2) = 1$  και  $\alpha > 0$  προκύπτει ότι η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας είναι

$$\psi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\psi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u K_{\delta,\alpha}(u, t) \left[ \frac{c\psi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta t} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta t} F_e(t) \right] dt$$

όπου

$$K_{\delta,\alpha}(u, t) = \sum_{m=1}^{\infty} k_{\delta,\alpha}^m(u, t), \quad u > t \geq 0$$

$$k_{\delta,\alpha}^m(u, t) = \int_t^u k_{\delta,\alpha}(u, x) k_{\delta,\alpha}^{m-1}(x, t), \quad m = 2, 3, \dots$$

## Η ολοκληρωτική εξίσωση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

Από τη λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης που ικανοποιεί η  $\Phi_{\delta,\alpha}(u)$ , για  $w(x_1, x_2) = 1$  και  $\alpha > 0$  προκύπτει ότι η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας είναι

$$\psi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\psi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u K_{\delta,\alpha}(u, t) \left[ \frac{c\psi_{\delta,\alpha}(0)}{c + \delta t} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta t} F_e(t) \right] dt$$

όπου

$$K_{\delta,\alpha}(u, t) = \sum_{m=1}^{\infty} k_{\delta,\alpha}^m(u, t), \quad u > t \geq 0$$

$$k_{\delta,\alpha}^m(u, t) = \int_t^u k_{\delta,\alpha}(u, x) k_{\delta,\alpha}^{m-1}(x, t), \quad m = 2, 3, \dots$$

$$k_{\delta,\alpha}^1(u, t) = k_{\delta,\alpha}(u, t) = \frac{\delta + \alpha + \lambda\bar{F}(u-t)}{c + \delta u}.$$

Η ακριβής λύση για  $\psi_{\delta,\alpha}(0)$

## Η ακριβής λύση για $\psi_{\delta,\alpha}(0)$

Από την ακριβή λύση για  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$  προκύπτει ότι η ποσότητα  $\psi_{\delta,\alpha}(0)$  δίνεται από τη σχέση:

$$\psi_{\delta,\alpha}(0) = \frac{\zeta_{\delta,\alpha}}{\kappa_{\delta,\alpha}}$$

## Η ακριβής λύση για $\psi_{\delta,\alpha}(0)$

Από την ακριβή λύση για  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$  προκύπτει ότι η ποσότητα  $\psi_{\delta,\alpha}(0)$  δίνεται από τη σχέση:

$$\psi_{\delta,\alpha}(0) = \frac{\zeta_{\delta,\alpha}}{\kappa_{\delta,\alpha}}$$

όπου

## Η ακριβής λύση για $\psi_{\delta,\alpha}(0)$

Από την ακριβή λύση για  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$  προκύπτει ότι η ποσότητα  $\psi_{\delta,\alpha}(0)$  δίνεται από τη σχέση:

$$\psi_{\delta,\alpha}(0) = \frac{\zeta_{\delta,\alpha}}{\kappa_{\delta,\alpha}}$$

όπου

$$\kappa_{\delta,\alpha} = c \int_0^{\infty} v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$



## Η ακριβής λύση για $\psi_{\delta,\alpha}(0)$

Από την ακριβή λύση για  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$  προκύπτει ότι η ποσότητα  $\psi_{\delta,\alpha}(0)$  δίνεται από τη σχέση:

$$\psi_{\delta,\alpha}(0) = \frac{\zeta_{\delta,\alpha}}{\kappa_{\delta,\alpha}}$$

όπου

$$\kappa_{\delta,\alpha} = c \int_0^{\infty} v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$

και

## Η ακριβής λύση για $\psi_{\delta,\alpha}(0)$

Από την ακριβή λύση για  $\Phi_{\delta,\alpha}(0)$  προκύπτει ότι η ποσότητα  $\psi_{\delta,\alpha}(0)$  δίνεται από τη σχέση:

$$\psi_{\delta,\alpha}(0) = \frac{\zeta_{\delta,\alpha}}{\kappa_{\delta,\alpha}}$$

όπου

$$\kappa_{\delta,\alpha} = c \int_0^{\infty} v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$

και

$$\zeta_{\delta,\alpha} = \lambda \mu \int_0^{\infty} \tilde{f}_e(\delta v) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds} dv$$

Η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που  
ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας

# Η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας

Η πιθανότητα χρεοκοπίας προκύπτει

# Η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας

Η πιθανότητα χρεοκοπίας προκύπτει

- 1 Από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu, καθώς για  $w(x_1, x_2) = 1$  και  $\alpha = 0$  ισχύει

$$\Phi_{\delta,0}(u) = E [I(T_\delta < \infty) | U_\delta(0) = u] = \psi_\delta(u), \quad \text{ή}$$

## Η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας

Η πιθανότητα χρεοκοπίας προκύπτει

- 1 Από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu, καθώς για  $w(x_1, x_2) = 1$  και  $\alpha = 0$  ισχύει

$$\Phi_{\delta,0}(u) = E [I(T_{\delta} < \infty) | U_{\delta}(0) = u] = \psi_{\delta}(u), \quad \text{ή}$$

- 2 Από τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, αφού όπως έχουμε ήδη αναφέρει

$$\psi_{\delta,0}(u) = \psi_{\delta}(u)$$

## Η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας

Η πιθανότητα χρεοκοπίας προκύπτει

- 1 Από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu, καθώς για  $w(x_1, x_2) = 1$  και  $\alpha = 0$  ισχύει

$$\Phi_{\delta,0}(u) = E [I(T_\delta < \infty) | U_\delta(0) = u] = \psi_\delta(u), \quad \text{ή}$$

- 2 Από τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, αφού όπως έχουμε ήδη αναφέρει

$$\psi_{\delta,0}(u) = \psi_\delta(u)$$

Η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση

$$\psi_\delta(u) = \frac{c\psi_\delta(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u k_\delta(u, t)\psi_\delta(t)dt,$$

## Η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας

Η πιθανότητα χρεοκοπίας προκύπτει

- 1 Από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu, καθώς για  $w(x_1, x_2) = 1$  και  $\alpha = 0$  ισχύει

$$\Phi_{\delta,0}(u) = E[I(T_\delta < \infty) | U_\delta(0) = u] = \psi_\delta(u), \quad \text{ή}$$

- 2 Από τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, αφού όπως έχουμε ήδη αναφέρει

$$\psi_{\delta,0}(u) = \psi_\delta(u)$$

Η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση

$$\psi_\delta(u) = \frac{c\psi_\delta(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u k_\delta(u, t)\psi_\delta(t)dt,$$

όπου

$$k_\delta(u, t) = \frac{\delta + \lambda\bar{F}(u - t)}{c + \delta u}.$$



Η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που  
ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας

Η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που  
ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi_\delta(u) = \frac{c\psi_\delta(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u k_\delta(u, t)\psi_\delta(t)dt$$

Η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi_\delta(u) = \frac{c\psi_\delta(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u k_\delta(u, t)\psi_\delta(t)dt$$

Μπορούμε:

Η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi_{\delta}(u) = \frac{c\psi_{\delta}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u}F_e(u) + \int_0^u k_{\delta}(u, t)\psi_{\delta}(t)dt$$

Μπορούμε:

- 1 Να την λύσουμε, καθώς είναι μία ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δεύτερου τύπου.

## Η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi_{\delta}(u) = \frac{c\psi_{\delta}(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u k_{\delta}(u, t)\psi_{\delta}(t)dt$$

Μπορούμε:

- 1 Να την λύσουμε, καθώς είναι μία ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δεύτερου τύπου.
- 2 Να την παραγωγίσουμε για να πάρουμε μία ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Η λύση της εξίσωσης Volterra που  
ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας

## Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας

Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας, δίνεται από την σχέση

$$\psi_\delta(u) = \frac{c\psi_\delta(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u K_\delta(u, t) \left[ \frac{c\psi_\delta(0)}{c + \delta t} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta t} F_e(t) \right] dt,$$

## Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας

Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας, δίνεται από την σχέση

$$\psi_\delta(u) = \frac{c\psi_\delta(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u K_\delta(u, t) \left[ \frac{c\psi_\delta(0)}{c + \delta t} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta t} F_e(t) \right] dt,$$

όπου



## Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας

Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας, δίνεται από την σχέση

$$\psi_\delta(u) = \frac{c\psi_\delta(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u K_\delta(u, t) \left[ \frac{c\psi_\delta(0)}{c + \delta t} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta t} F_e(t) \right] dt,$$

όπου

$$K_\delta(u, t) = \sum_{m=1}^{\infty} k_\delta^m(u, t), \quad u > t \geq 0$$

## Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας

Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας, δίνεται από την σχέση

$$\psi_\delta(u) = \frac{c\psi_\delta(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u K_\delta(u, t) \left[ \frac{c\psi_\delta(0)}{c + \delta t} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta t} F_e(t) \right] dt,$$

όπου

$$K_\delta(u, t) = \sum_{m=1}^{\infty} k_\delta^m(u, t), \quad u > t \geq 0$$

$$k_\delta^m(u, t) = \int_t^u k_\delta(u, x) k_\delta^{m-1}(x, t), \quad m = 2, 3, \dots$$

## Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας

Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας, δίνεται από την σχέση

$$\psi_\delta(u) = \frac{c\psi_\delta(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u K_\delta(u, t) \left[ \frac{c\psi_\delta(0)}{c + \delta t} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta t} F_e(t) \right] dt,$$

όπου

$$K_\delta(u, t) = \sum_{m=1}^{\infty} k_\delta^m(u, t), \quad u > t \geq 0$$

$$k_\delta^m(u, t) = \int_t^u k_\delta(u, x) k_\delta^{m-1}(x, t), \quad m = 2, 3, \dots$$

$$k_\delta^1(u, t) = k_\delta(u, t) = \frac{\delta + \lambda\bar{F}(u-t)}{c + \delta u}.$$

## Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας

Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας, δίνεται από την σχέση

$$\psi_\delta(u) = \frac{c\psi_\delta(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u K_\delta(u, t) \left[ \frac{c\psi_\delta(0)}{c + \delta t} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta t} F_e(t) \right] dt,$$

όπου

$$K_\delta(u, t) = \sum_{m=1}^{\infty} k_\delta^m(u, t), \quad u > t \geq 0$$

$$k_\delta^m(u, t) = \int_t^u k_\delta(u, x) k_\delta^{m-1}(x, t), \quad m = 2, 3, \dots$$

$$k_\delta^1(u, t) = k_\delta(u, t) = \frac{\delta + \lambda\bar{F}(u-t)}{c + \delta u}.$$

και

$$\psi_\delta(0) = \frac{\kappa_\delta - 1}{\kappa_\delta},$$

## Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας

Η λύση της εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας, δίνεται από την σχέση

$$\psi_\delta(u) = \frac{c\psi_\delta(0)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u) + \int_0^u K_\delta(u, t) \left[ \frac{c\psi_\delta(0)}{c + \delta t} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta t} F_e(t) \right] dt,$$

όπου

$$K_\delta(u, t) = \sum_{m=1}^{\infty} k_\delta^m(u, t), \quad u > t \geq 0$$

$$k_\delta^m(u, t) = \int_t^u k_\delta(u, x) k_\delta^{m-1}(x, t), \quad m = 2, 3, \dots$$

$$k_\delta^1(u, t) = k_\delta(u, t) = \frac{\delta + \lambda \bar{F}(u-t)}{c + \delta u}.$$

και

$$\psi_\delta(0) = \frac{\kappa_\delta - 1}{\kappa_\delta},$$

όπου

$$\kappa_\delta = c \int_0^\infty e^{-cv + \lambda \mu \int_0^v \bar{f}_e(\delta s) ds} dv$$

# Ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για την πιθανότητα χρεοκοπίας

# Ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για την πιθανότητα χρεοκοπίας

Παραγωγίζοντας την εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας προκύπτει ότι

# Ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για την πιθανότητα χρεοκοπίας

Παραγωγίζοντας την εξίσωση Volterra που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας προκύπτει ότι

Στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο, η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$(c + \delta u)\psi'_\delta(u) = \lambda\psi_\delta(u) - \lambda \int_0^u \psi_\delta(u-x)f(x)dx - \lambda\bar{F}(u)$$



# Αναλυτικά αποτελέσματα για εκθετικά μεγέθη ζημιών

## Αναλυτικά αποτελέσματα για εκθετικά μεγέθη ζημιών

Στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου με σταθερό επιτόκιο, όταν  $X \sim \text{Exp}(\beta)$ , τότε για  $u > 0$  ισχύει

$$\psi_\delta(u) = \psi_\delta(0) + \psi'_\delta(0) \int_0^u b_\delta(t) dt,$$

## Αναλυτικά αποτελέσματα για εκθετικά μεγέθη ζημιών

Στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου με σταθερό επιτόκιο, όταν  $X \sim \text{Exp}(\beta)$ , τότε για  $u > 0$  ισχύει

$$\psi_\delta(u) = \psi_\delta(0) + \psi'_\delta(0) \int_0^u b_\delta(t) dt,$$

όπου

## Αναλυτικά αποτελέσματα για εκθετικά μεγέθη ζημιών

Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου με σταθερό επιτόκιο, όταν  $X \sim \text{Exp}(\beta)$ , τότε για  $u > 0$  ισχύει

$$\psi_\delta(u) = \psi_\delta(0) + \psi'_\delta(0) \int_0^u b_\delta(t) dt,$$

όπου

$$b_\delta(u) = e^{-\beta u} \left( \frac{c + \delta u}{c} \right)^{-\frac{\delta - \lambda}{\delta}},$$

## Αναλυτικά αποτελέσματα για εκθετικά μεγέθη ζημιών

Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου με σταθερό επιτόκιο, όταν  $X \sim Exp(\beta)$ , τότε για  $u > 0$  ισχύει

$$\psi_\delta(u) = \psi_\delta(0) + \psi'_\delta(0) \int_0^u b_\delta(t) dt,$$

όπου

$$b_\delta(u) = e^{-\beta u} \left( \frac{c + \delta u}{c} \right)^{-\frac{\delta - \lambda}{\delta}},$$

$$\psi_\delta(0) = 1 - \frac{1}{c \int_0^\infty e^{-cv + \frac{\lambda}{\delta} \ln \left( \frac{\beta + \delta v}{\beta} \right)} dv}$$

## Αναλυτικά αποτελέσματα για εκθετικά μεγέθη ζημιών

Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου με σταθερό επιτόκιο, όταν  $X \sim \text{Exp}(\beta)$ , τότε για  $u > 0$  ισχύει

$$\psi_\delta(u) = \psi_\delta(0) + \psi'_\delta(0) \int_0^u b_\delta(t) dt,$$

όπου

$$b_\delta(u) = e^{-\beta u} \left( \frac{c + \delta u}{c} \right)^{-\frac{\delta - \lambda}{\delta}},$$

$$\psi_\delta(0) = 1 - \frac{1}{c \int_0^\infty e^{-cv + \frac{\lambda}{\delta} \ln \left( \frac{\beta + \delta v}{\beta} \right)} dv}$$

και

$$\psi'_\delta(0) = \frac{\lambda}{c} [\psi_\delta(0) - 1].$$

# Αναλυτικά αποτελέσματα για εκθετικά μεγέθη ζημιών

## Αναλυτικά αποτελέσματα για εκθετικά μεγέθη ζημιών

Έστω ότι τα μεγέθη ατομικών ζημιών ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\beta = 2$ , δηλαδή

$$f(x) = 2e^{-2x}, \quad x \geq 0 \quad \text{και} \quad E[X] = \mu = \frac{1}{\beta} = 0.5$$



## Αναλυτικά αποτελέσματα για εκθετικά μεγέθη ζημιών

Έστω ότι τα μεγέθη ατομικών ζημιών ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\beta = 2$ , δηλαδή

$$f(x) = 2e^{-2x}, \quad x \geq 0 \quad \text{και} \quad E[X] = \mu = \frac{1}{\beta} = 0.5$$

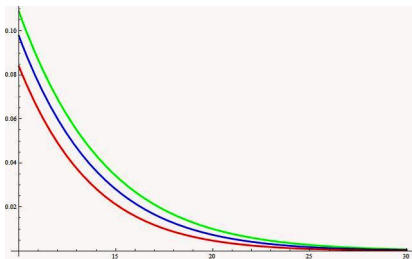
Έστω επίσης  $\lambda = 55$  και  $c = 30.25$ .

## Αναλυτικά αποτελέσματα για εκθετικά μεγέθη ζημιών

Έστω ότι τα μεγέθη ατομικών ζημιών ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\beta = 2$ , δηλαδή

$$f(x) = 2e^{-2x}, \quad x \geq 0 \quad \text{και} \quad E[X] = \mu = \frac{1}{\beta} = 0.5$$

Έστω επίσης  $\lambda = 55$  και  $c = 30.25$ .



Η πιθανότητα χρεοκοπίας με  $\delta = 0.05$ ,  $\delta = 0.07$  και  $\delta = 0.1$

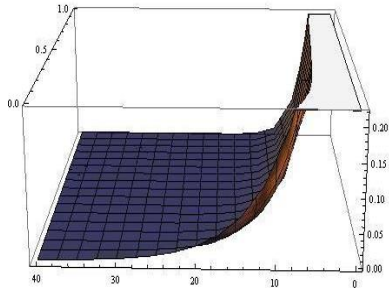
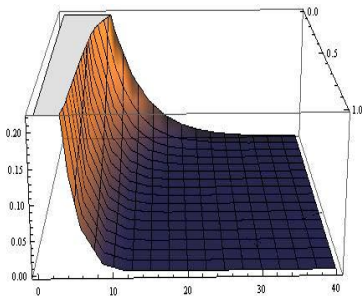
# Αναλυτικά αποτελέσματα για εκθετικά μεγέθη ζημιών

# Αναλυτικά αποτελέσματα για εκθετικά μεγέθη ζημιών

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ως συνάρτηση του αρχικού κεφαλαίου και της έντασης ανατοκισμού.

## Αναλυτικά αποτελέσματα για εκθετικά μεγέθη ζημιών

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ως συνάρτηση του αρχικού κεφαλαίου και της έντασης ανατοκισμού.



Η πιθανότητα χρεοκοπίας με  $0 < \delta < 1$  και  $0 < u < 40$ .

# Αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων Volterra

# Αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων Volterra

Λύσεις των εξισώσεων Volterra που ικανοποιούν η πιθανότητα χρεοκοπίας και ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας για τις εξής κατανομές ζημιών:

# Αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων Volterra

Λύσεις των εξισώσεων Volterra που ικανοποιούν η πιθανότητα χρεοκοπίας και ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας για τις εξής κατανομές ζημιών:

- 1 Κατανομή Γάμμα με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x \geq 0$$

για  $\alpha = 2, \beta = 2, \lambda = 55$  και  $c = 60$



# Αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων Volterra

Λύσεις των εξισώσεων Volterra που ικανοποιούν η πιθανότητα χρεοκοπίας και ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας για τις εξής κατανομές ζημιών:

- 1 Κατανομή Γάμμα με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x \geq 0$$

για  $\alpha = 2, \beta = 2, \lambda = 55$  και  $c = 60$

- 2 Μίξη Εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = A_1 \beta_1 e^{-\beta_1 x} + A_2 \beta_2 e^{-\beta_2 x}, \quad x > 0$$

για  $A_1 = 0.4, A_2 = 0.6, \beta_1 = 2, \beta_2 = 3, \lambda = 55$  και  $c = 24.2$ .

# Αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων Volterra

Λύσεις των εξισώσεων Volterra που ικανοποιούν η πιθανότητα χρεοκοπίας και ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας για τις εξής κατανομές ζημιών:

- 1 Κατανομή Γάμμα με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x \geq 0$$

για  $\alpha = 2, \beta = 2, \lambda = 55$  και  $c = 60$

- 2 Μίξη Εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = A_1 \beta_1 e^{-\beta_1 x} + A_2 \beta_2 e^{-\beta_2 x}, \quad x > 0$$

για  $A_1 = 0.4, A_2 = 0.6, \beta_1 = 2, \beta_2 = 3, \lambda = 55$  και  $c = 24.2$ .

**Υπόθεση:**  $K_{\delta, \alpha}(u, t) = k_{\delta, \alpha}^1(u, t) + k_{\delta, \alpha}^2(u, t) + k_{\delta, \alpha}^3(u, t)$ .

# Φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας

## Φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας

- Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος τις χρονικές στιγμές εμφάνισης των ζημιογόνων ενδεχομένων

## Φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας

- Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος τις χρονικές στιγμές εμφάνισης των ζημιογόνων ενδεχομένων
- Άνω φράγματα μέσω martingales

## Φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας

- Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος τις χρονικές στιγμές εμφάνισης των ζημιογόνων ενδεχομένων
- Άνω φράγματα μέσω martingales
- Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

## Φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας

- Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος τις χρονικές στιγμές εμφάνισης των ζημιογόνων ενδεχομένων
- Άνω φράγματα μέσω martingales
- Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές
- Χρεοκοπία με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο

Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος τις  
χρονικές στιγμές εμφάνισης των  
ζημιογόνων ενδεχομένων

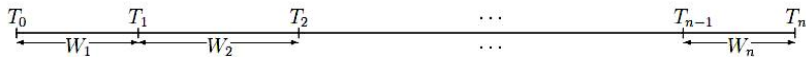


# Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος τις χρονικές στιγμές εμφάνισης των ζημιογόνων ενδεχομένων

Αν  $T_n$  είναι η χρονική στιγμή κατά την οποία επέρχεται το  $n$ -οστό ζημιογόνο ενδεχόμενο και  $\{W_n, n > 0\}$  είναι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των ζημιών,

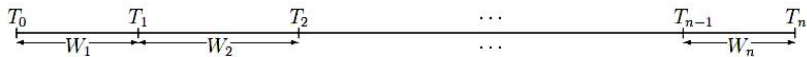
# Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος τις χρονικές στιγμές εμφάνισης των ζημιογόνων ενδεχομένων

Αν  $T_n$  είναι η χρονική στιγμή κατά την οποία επέρχεται το  $n$ -οστό ζημιογόνο ενδεχόμενο και  $\{W_n, n > 0\}$  είναι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των ζημιών,



# Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος τις χρονικές στιγμές εμφάνισης των ζημιογόνων ενδεχομένων

Αν  $T_n$  είναι η χρονική στιγμή κατά την οποία επέρχεται το  $n$ -οστό ζημιογόνο ενδεχόμενο και  $\{W_n, n > 0\}$  είναι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των ζημιών,



τότε η παρούσα αξία του πλεονάσματος κατά τη χρονική στιγμή  $T_n$  είναι

$$V_\delta(T_n) = u + c\bar{\alpha}_{T_n}^{(\delta)} - \sum_{\kappa=1}^n X_\kappa e^{-\delta T_\kappa}$$

# Άνω φράγματα μέσω martingales

## Άνω φράγματα μέσω martingales

Στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο υπάρχει μία μοναδική θετική ποσότητα  $R_1$  που ορίζεται ως η ρίζα της εξίσωσης

$$E \left[ e^{-R_1(c\bar{\alpha} \frac{(\delta)}{W} - X e^{-\delta W})} \right] = 1$$

## Άνω φράγματα μέσω martingales

Στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο υπάρχει μία μοναδική θετική ποσότητα  $R_1$  που ορίζεται ως η ρίζα της εξίσωσης

$$E \left[ e^{-R_1(c\bar{\alpha} \frac{(\delta)}{W}) - X e^{-\delta W}} \right] = 1$$

και δίνεται από τη σχέση

$$\int_0^{c/\delta} e^{-R_1 y} \left(1 - \frac{\delta y}{c}\right)^{\lambda/\delta - 1} M_X \left[ R_1 \left(1 - \frac{\delta y}{c}\right) \right] dy = \frac{c}{\lambda}$$

## Άνω φράγματα μέσω martingales

Στο κλασικό μοντέλο με επιτόκιο υπάρχει μία μοναδική θετική ποσότητα  $R_1$  που ορίζεται ως η ρίζα της εξίσωσης

$$E \left[ e^{-R_1(c\bar{\alpha} \frac{(\delta)}{W}) - X e^{-\delta W}} \right] = 1$$

και δίνεται από τη σχέση

$$\int_0^{c/\delta} e^{-R_1 y} \left( 1 - \frac{\delta y}{c} \right)^{\lambda/\delta - 1} M_X \left[ R_1 \left( 1 - \frac{\delta y}{c} \right) \right] dy = \frac{c}{\lambda}$$

Όταν η θετική ποσότητα  $R_1$  ορίζεται σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις, τότε για κάθε  $u \geq 0$  ισχύει:

$$\psi_\delta(u) \leq e^{-R_1 u}$$

# Άνω φράγματα μέσω martingales



## Άνω φράγματα μέσω martingales

Για την απόδειξη της ανισότητας  $\psi_\delta(u) \leq e^{-R_1 u}$  χρησιμοποιούμε τα εξής:

## Άνω φράγματα μέσω martingales

Για την απόδειξη της ανισότητας  $\psi_\delta(u) \leq e^{-R_1 u}$  χρησιμοποιούμε τα εξής:

- 1 Την ανισότητα Jensen για την υπό συνθήκη μέση τιμή

## Άνω φράγματα μέσω martingales

Για την απόδειξη της ανισότητας  $\psi_\delta(u) \leq e^{-R_1 u}$  χρησιμοποιούμε τα εξής:

- 1 Την ανισότητα Jensen για την υπό συνθήκη μέση τιμή
- 2 Το γεγονός ότι η στοχαστική ανέλιξη  $\{e^{-R_1 V_\delta(T_{n+1})}, n \geq 0\}$  είναι μία διαδικασία supermartingale, δηλαδή ισχύει

$$E \left[ e^{-R_1 V_\delta(T_{n+1})} \mid \mathcal{F}_n \right] \leq e^{-R_1 V_\delta(T_n)}$$

## Άνω φράγματα μέσω martingales

Για την απόδειξη της ανισότητας  $\psi_\delta(u) \leq e^{-R_1 u}$  χρησιμοποιούμε τα εξής:

- 1 Την ανισότητα Jensen για την υπό συνθήκη μέση τιμή
- 2 Το γεγονός ότι η στοχαστική ανέλιξη  $\{e^{-R_1 V_\delta(T_{n+1})}, n \geq 0\}$  είναι μία διαδικασία supermartingale, δηλαδή ισχύει

$$E \left[ e^{-R_1 V_\delta(T_{n+1})} \mid \mathcal{F}_n \right] \leq e^{-R_1 V_\delta(T_n)}$$

- 3 Το θεώρημα επιλεκτικής στάσης των supermartingales σύμφωνα με το οποίο για τον πεπερασμένο χρόνο στάσης  $T_\delta \wedge n$ , ισχύει

$$E \left[ e^{-R_1 V_\delta(T_{T_\delta \wedge n})} \right] \leq E \left[ e^{-R_1 V_\delta(T_0)} \right] = e^{-R_1 u}$$

## Άνω φράγματα μέσω martingales

Για την απόδειξη της ανισότητας  $\psi_\delta(u) \leq e^{-R_1 u}$  χρησιμοποιούμε τα εξής:

- 1 Την ανισότητα Jensen για την υπό συνθήκη μέση τιμή
- 2 Το γεγονός ότι η στοχαστική ανέλιξη  $\{e^{-R_1 V_\delta(T_{n+1})}, n \geq 0\}$  είναι μία διαδικασία supermartingale, δηλαδή ισχύει

$$E \left[ e^{-R_1 V_\delta(T_{n+1})} \mid \mathcal{F}_n \right] \leq e^{-R_1 V_\delta(T_n)}$$

- 3 Το θεώρημα επιλεκτικής στάσης των supermartingales σύμφωνα με το οποίο για τον πεπερασμένο χρόνο στάσης  $T_\delta \wedge n$ , ισχύει

$$E \left[ e^{-R_1 V_\delta(T_{T_\delta \wedge n})} \right] \leq E \left[ e^{-R_1 V_\delta(T_0)} \right] = e^{-R_1 u}$$

Η σχέση  $\psi_\delta(u) \leq e^{-R_1 u}$  αποτελεί μία γενίκευση της ανισότητας Lundberg για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με σταθερό επιτόκιο.

# Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

## Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

Στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο υπάρχει μία μοναδική θετική ποσότητα  $R_2$  που ορίζεται ως η ρίζα της εξίσωσης

$$E \left[ e^{-R_2(c\bar{s} \frac{\delta}{W} - X)} \right] = 1$$

## Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

Στο κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο υπάρχει μία μοναδική θετική ποσότητα  $R_2$  που ορίζεται ως η ρίζα της εξίσωσης

$$E \left[ e^{-R_2(c\bar{s} \frac{\delta}{W}) - X} \right] = 1$$

και δίνεται από τη σχέση

$$\left[ E \left( e^{R_2 X} \right) \right]^{-1} = \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} \frac{e^{-R_2 y}}{(1 + \delta y)^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dy$$



# Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

## Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

Όταν η θετική ποσότητα  $R_2$  ορίζεται σύμφωνα με τις προηγούμενες εξισώσεις, τότε για κάθε  $u \geq 0$  ισχύει

$$\psi_\delta(u) \leq \beta E \left[ e^{R_2 X} \right] \frac{\lambda}{c} e^{-R_2 u} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y (1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta y}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dy,$$

## Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

Όταν η θετική ποσότητα  $R_2$  ορίζεται σύμφωνα με τις προηγούμενες εξισώσεις, τότε για κάθε  $u \geq 0$  ισχύει

$$\psi_\delta(u) \leq \beta E \left[ e^{R_2 X} \right] \frac{\lambda}{c} e^{-R_2 u} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y (1 + \frac{\delta y}{c})}}{(1 + \frac{\delta y}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dy,$$

όπου

$$\beta^{-1} = \inf_{t \geq 0} \frac{\int_t^\infty e^{R_2 y} f(y) dy}{e^{R_2 t} \bar{F}(t)}.$$

## Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

Όταν η θετική ποσότητα  $R_2$  ορίζεται σύμφωνα με τις προηγούμενες εξισώσεις, τότε για κάθε  $u \geq 0$  ισχύει

$$\psi_\delta(u) \leq \beta E \left[ e^{R_2 X} \right] \frac{\lambda}{c} e^{-R_2 u} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y (1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta y}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dy,$$

όπου

$$\beta^{-1} = \inf_{t \geq 0} \frac{\int_t^\infty e^{R_2 y} f(y) dy}{e^{R_2 t} \bar{F}(t)}.$$

Ειδικότερα όταν η κατανομή  $F$  είναι μία NWUC (new worse than used in convex ordering), τότε για κάθε  $u \geq 0$  ισχύει

$$\psi_\delta(u) \leq \frac{\lambda}{c} e^{-R_2 u} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 y (1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta y}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dy$$

# Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

# Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε:

## Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε:

- 1 Την αναδρομική σχέση

$$\psi_{\delta}(u; n + 1) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \psi_{\delta}(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} - y; n) f(y) dy g(t) dt$$

## Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε:

- 1 Την αναδρομική σχέση

$$\psi_\delta(u; n+1) = \int_0^\infty \int_0^\infty \psi_\delta(ue^{\delta t} + cs_{\frac{t}{1}}^{(\delta)} - y; n) f(y) dy g(t) dt$$

- 2 Τη σχέση

$$\bar{F}(t) \leq \beta e^{-R_2 t} \int_t^\infty e^{R_2 y} f(y) dy$$

που ισχύει για μία κατανομή *NWUC*.



## Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε:

- 1 Την αναδρομική σχέση

$$\psi_\delta(u; n+1) = \int_0^\infty \int_0^\infty \psi_\delta(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} - y; n) f(y) dy g(t) dt$$

- 2 Τη σχέση

$$\bar{F}(t) \leq \beta e^{-R_2 t} \int_t^\infty e^{R_2 y} f(y) dy$$

που ισχύει για μία κατανομή *NWUC*.

- 3 Τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής

## Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε:

- 1 Την αναδρομική σχέση

$$\psi_\delta(u; n+1) = \int_0^\infty \int_0^\infty \psi_\delta(ue^{\delta t} + c\bar{s}_{\bar{t}}^{(\delta)} - y; n) f(y) dy g(t) dt$$

- 2 Τη σχέση

$$\bar{F}(t) \leq \beta e^{-R_2 t} \int_t^\infty e^{R_2 y} f(y) dy$$

που ισχύει για μία κατανομή *NWUC*.

- 3 Τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής
- 4 Τη σχέση  $\psi_\delta(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_\delta(u; n)$

# Χρεοκοπία με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο

## Χρεοκοπία με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο

Ορίζουμε την  $\bar{\psi}_\delta(0) = 1 - \psi_\delta(0)$  η οποία δίνεται από τη σχέση

## Χρεοκοπία με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο

Ορίζουμε την  $\bar{\psi}_\delta(0) = 1 - \psi_\delta(0)$  η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\bar{\psi}_\delta(0) = \frac{1}{\kappa_\delta}, \quad \kappa_\delta = c \int_0^\infty e^{-ct} + \lambda \mu \int_0^t \tilde{f}_e(\delta z) dz dt$$

## Χρεοκοπία με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο

Ορίζουμε την  $\bar{\psi}_\delta(0) = 1 - \psi_\delta(0)$  η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\bar{\psi}_\delta(0) = \frac{1}{\kappa_\delta}, \quad \kappa_\delta = c \int_0^\infty e^{-ct} + \lambda \mu \int_0^t \tilde{f}_e(\delta z) dz dt$$

Εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι  $\tilde{f}'_e(x) < 0$  και  $\tilde{f}''_e(x) > 0$  και βρίσκουμε ότι

$$1 - m \leq \bar{\psi}_\delta(0) \leq (1 - m) \frac{1}{\alpha R(\alpha)},$$

## Χρεοκοπία με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο

Ορίζουμε την  $\bar{\psi}_\delta(0) = 1 - \psi_\delta(0)$  η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\bar{\psi}_\delta(0) = \frac{1}{\kappa_\delta}, \quad \kappa_\delta = c \int_0^\infty e^{-ct} + \lambda \mu \int_0^t \tilde{f}_e(\delta z) dz dt$$

Εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι  $\tilde{f}'_e(x) < 0$  και  $\tilde{f}''_e(x) > 0$  και βρίσκουμε ότι

$$1 - m \leq \bar{\psi}_\delta(0) \leq (1 - m) \frac{1}{\alpha R(\alpha)},$$

όπου

$$R(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

## Χρεοκοπία με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο

Ορίζουμε την  $\bar{\psi}_\delta(0) = 1 - \psi_\delta(0)$  η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\bar{\psi}_\delta(0) = \frac{1}{\kappa_\delta}, \quad \kappa_\delta = c \int_0^\infty e^{-ct} + \lambda \mu \int_0^t \tilde{f}_e(\delta z) dz dt$$

Εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι  $\tilde{f}'_e(x) < 0$  και  $\tilde{f}''_e(x) > 0$  και βρίσκουμε ότι

$$1 - m \leq \bar{\psi}_\delta(0) \leq (1 - m) \frac{1}{\alpha R(\alpha)},$$

όπου

$$R(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

ο δείκτης Mills.



# Αριθμητικά αποτελέσματα

## Αριθμητικά αποτελέσματα

Υπολογισμός των φραγμάτων για την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω:

## Αριθμητικά αποτελέσματα

Υπολογισμός των φραγμάτων για την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω:

- Martingales

## Αριθμητικά αποτελέσματα

Υπολογισμός των φραγμάτων για την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω:

- Martingales
- Αναδρομικών τεχνικών

Κατανομές ζημιών που επιλέξαμε για τους υπολογισμούς:

## Αριθμητικά αποτελέσματα

Υπολογισμός των φραγμάτων για την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω:

- Martingales
- Αναδρομικών τεχνικών

Κατανομές ζημιών που επιλέξαμε για τους υπολογισμούς:

- 1 Εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad x \geq 0, \quad \mu > 0$$

για  $\mu = 1$ ,  $c = 60$ ,  $\lambda = 55$  και για εντάσεις ανατοκισμού  
 $\delta = 0.01$ ,  $\delta = 0.07$ ,  $\delta 0.1$ .

## Αριθμητικά αποτελέσματα

Υπολογισμός των φραγμάτων για την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω:

- Martingales
- Αναδρομικών τεχνικών

Κατανομές ζημιών που επιλέξαμε για τους υπολογισμούς:

- 1 Εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad x \geq 0, \quad \mu > 0$$

για  $\mu = 1$ ,  $c = 60$ ,  $\lambda = 55$  και για εντάσεις ανατοκισμού  
 $\delta = 0.01$ ,  $\delta = 0.07$ ,  $\delta 0.1$ .

- 2 Κατανομή Γάμμα με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{\gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\gamma x}, \quad x \geq 0, \quad \gamma > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

για  $\lambda = 55$ ,  $c = 60$ ,  $\delta = 0.07$  και  $\alpha = \gamma = 0.5$  ώστε η κατανομή να ανήκει στην κλάση DFR  $\subseteq$  NWUC

## Αριθμητικά αποτελέσματα

Υπολογισμός των φραγμάτων για την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω:

- Martingales
- Αναδρομικών τεχνικών

Κατανομές ζημιών που επιλέξαμε για τους υπολογισμούς:

- 1 Εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad x \geq 0, \quad \mu > 0$$

για  $\mu = 1$ ,  $c = 60$ ,  $\lambda = 55$  και για εντάσεις ανατοκισμού  $\delta = 0.01$ ,  $\delta = 0.07$ ,  $\delta 0.1$ .

- 2 Κατανομή Γάμμα με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{\gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\gamma x}, \quad x \geq 0, \quad \gamma > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

για  $\lambda = 55$ ,  $c = 60$ ,  $\delta = 0.07$  και  $\alpha = \gamma = 0.5$  ώστε η κατανομή να ανήκει στην κλάση DFR  $\subseteq$  NWUC

- 3 Κατανομή Γάμμα με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{\gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\gamma x}, \quad x \geq 0, \quad \gamma > 0, \quad \alpha > 1$$

για  $\lambda = 55$ ,  $c = 60$ ,  $\delta = 0.07$  και  $\alpha = \gamma = 1.6$  ώστε η κατανομή να ανήκει στην κλάση IFR  $\subseteq$  NBUC

Κατανομή του πλεονάσματος πριν τη  
χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή  
της χρεοκοπίας



# Κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

- Η προεξοφλημένη από κοινού κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

# Κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

- Η προεξοφλημένη από κοινού κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας
- Προεξοφλημένη περιθώρια κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία

# Κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

- Η προεξοφλημένη από κοινού κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας
- Προεξοφλημένη περιθώρια κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία
- Προεξοφλημένη περιθώρια κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

# Κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

- Η προεξοφλημένη από κοινού κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας
- Προεξοφλημένη περιθώρια κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία
- Προεξοφλημένη περιθώρια κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας
- Αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων Volterra

$$H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$$

## $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$

Η  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  προκύπτει από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu για  $w(x_1, x_2) = I(U_\delta(T_\delta) \leq x)I(|U_\delta(T_\delta)| \leq y)$ .

Συγκεκριμένα

$$H_{\delta,\alpha}(u, x, y) = E \left[ e^{-\alpha T_\delta} I(U_\delta(T_\delta^-) \leq x, |U_\delta(T_\delta)| \leq y) I(T_\delta < \infty) | U_\delta(0) = u \right]$$

## $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$

Η  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  προκύπτει από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu για  $w(x_1, x_2) = I(U_\delta(T_\delta) \leq x)I(|U_\delta(T_\delta)| \leq y)$ .

Συγκεκριμένα

$$H_{\delta,\alpha}(u, x, y) = E \left[ e^{-\alpha T_\delta} I(U_\delta(T_\delta^-) \leq x, |U_\delta(T_\delta)| \leq y) I(T_\delta < \infty) | U_\delta(0) = u \right]$$

Στα πλαίσια του κλασσικού μοντέλου με επιτόκιο, η  $H_\delta(u, x, y)$  εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία και

## $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$

Η  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  προκύπτει από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu για  $w(x_1, x_2) = I(U_\delta(T_\delta) \leq x)I(|U_\delta(T_\delta)| \leq y)$ .

Συγκεκριμένα

$$H_{\delta,\alpha}(u, x, y) = E \left[ e^{-\alpha T_\delta} I(U_\delta(T_\delta^-) \leq x, |U_\delta(T_\delta)| \leq y) I(T_\delta < \infty) | U_\delta(0) = u \right]$$

Στα πλαίσια του κλασσικού μοντέλου με επιτόκιο, η  $H_\delta(u, x, y)$  εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία και

- Το μέγεθος του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ  $x$



## $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$

Η  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  προκύπτει από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu για  $w(x_1, x_2) = I(U_\delta(T_\delta) \leq x)I(|U_\delta(T_\delta)| \leq y)$ .

Συγκεκριμένα

$$H_{\delta,\alpha}(u, x, y) = E \left[ e^{-\alpha T_\delta} I(U_\delta(T_\delta^-) \leq x, |U_\delta(T_\delta)| \leq y) I(T_\delta < \infty) | U_\delta(0) = u \right]$$

Στα πλαίσια του κλασσικού μοντέλου με επιτόκιο, η  $H_\delta(u, x, y)$  εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία και

- Το μέγεθος του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ  $x$
- Το μέγεθος του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ  $y$

## $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$

Η  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  προκύπτει από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu για  $w(x_1, x_2) = I(U_\delta(T_\delta) \leq x)I(|U_\delta(T_\delta)| \leq y)$ .  
Συγκεκριμένα

$$H_{\delta,\alpha}(u, x, y) = E \left[ e^{-\alpha T_\delta} I(U_\delta(T_\delta^-) \leq x, |U_\delta(T_\delta)| \leq y) I(T_\delta < \infty) | U_\delta(0) = u \right]$$

Στα πλαίσια του κλασσικού μοντέλου με επιτόκιο, η  $H_\delta(u, x, y)$  εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία και

- Το μέγεθος του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ  $x$
- Το μέγεθος του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ  $y$

Η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας ικανοποιεί την εξής ολοκληρωτική εξίσωση Volterra:

$$H_{\delta,\alpha}(u, x, y) = \frac{cH_{\delta,\alpha}(0, x, y)}{c + \delta u} - \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} [F_e(u \wedge x) + F_e(y) - F_e(u \wedge x + y)] \\ + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u, t)H_{\delta,\alpha}(x, y|t)dt$$

# Λύση της εξίσωσης Volterra

## Λύση της εξίσωσης Volterra

Η λύση της εξίσωσης που ικανοποιεί η  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  δίνεται από τη σχέση

$$H_{\delta,\alpha}(u, x, y) = \begin{cases} H_{\delta,\alpha}^1(x, y) \left( \frac{1}{c + \delta u} + \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \right) + \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u + y) \\ + \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t + y) dt + \psi_{\delta,\alpha}(u), & u < x \\ H_{\delta,\alpha}^2(x, y) \left( \int_x^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \\ - \lambda\mu \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} [F_e(t) + F_e(y) - F_e(t + y)] dt, & u \geq x \end{cases}$$

## Λύση της εξίσωσης Volterra

Η λύση της εξίσωσης που ικανοποιεί η  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  δίνεται από τη σχέση

$$H_{\delta,\alpha}(u, x, y) = \begin{cases} H_{\delta,\alpha}^1(x, y) \left( \frac{1}{c + \delta u} + \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \right) + \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u + y) \\ + \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t + y) dt + \psi_{\delta,\alpha}(u), & u < x \\ H_{\delta,\alpha}^2(x, y) \left( \int_x^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \\ - \lambda\mu \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} [F_e(t) + F_e(y) - F_e(t + y)] dt, & u \geq x \end{cases}$$

όπου

## Λύση της εξίσωσης Volterra

Η λύση της εξίσωσης που ικανοποιεί η  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  δίνεται από τη σχέση

$$H_{\delta,\alpha}(u, x, y) = \begin{cases} H_{\delta,\alpha}^1(x, y) \left( \frac{1}{c + \delta u} + \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \right) + \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u + y) \\ + \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t + y) dt + \psi_{\delta,\alpha}(u), & u < x \\ H_{\delta,\alpha}^2(x, y) \left( \int_x^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \\ - \lambda\mu \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} [F_e(t) + F_e(y) - F_e(t + y)] dt, & u \geq x \end{cases}$$

όπου

$$H_{\delta,\alpha}^1(x, y) = cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) - c\psi_{\delta,\alpha}(0) - \lambda\mu F_e(y),$$

## Λύση της εξίσωσης Volterra

Η λύση της εξίσωσης που ικανοποιεί η  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  δίνεται από τη σχέση

$$H_{\delta,\alpha}(u, x, y) = \begin{cases} H_{\delta,\alpha}^1(x, y) \left( \frac{1}{c + \delta u} + \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \right) + \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u + y) \\ + \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t + y) dt + \psi_{\delta,\alpha}(u), & u < x \\ H_{\delta,\alpha}^2(x, y) \left( \int_x^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \\ - \lambda\mu \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} [F_e(t) + F_e(y) - F_e(t + y)] dt, & u \geq x \end{cases}$$

όπου

$$H_{\delta,\alpha}^1(x, y) = cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) - c\psi_{\delta,\alpha}(0) - \lambda\mu F_e(y),$$

$$H_{\delta,\alpha}^2(x, y) = cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) - \lambda\mu [F_e(x) + F_e(y) - F_e(x + y)]$$

## Λύση της εξίσωσης Volterra

Η λύση της εξίσωσης που ικανοποιεί η  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  δίνεται από τη σχέση

$$H_{\delta,\alpha}(u, x, y) = \begin{cases} H_{\delta,\alpha}^1(x, y) \left( \frac{1}{c + \delta u} + \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \right) + \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u + y) \\ + \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t + y) dt + \psi_{\delta,\alpha}(u), & u < x \\ H_{\delta,\alpha}^2(x, y) \left( \int_x^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \\ - \lambda\mu \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} [F_e(t) + F_e(y) - F_e(t + y)] dt, & u \geq x \end{cases}$$

όπου

$$H_{\delta,\alpha}^1(x, y) = cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) - c\psi_{\delta,\alpha}(0) - \lambda\mu F_e(y),$$

$$H_{\delta,\alpha}^2(x, y) = cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) - \lambda\mu [F_e(x) + F_e(y) - F_e(x + y)]$$

και

$$H_{\delta,\alpha}(0, x, y) = \frac{\lambda}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^\infty \int_0^x e^{-\delta vt} [\bar{F}(t) - \bar{F}(y + t)] dt v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \bar{f}_e(\delta s) ds} dv,$$



## Λύση της εξίσωσης Volterra

Η λύση της εξίσωσης που ικανοποιεί η  $H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$  δίνεται από τη σχέση

$$H_{\delta,\alpha}(u, x, y) = \begin{cases} H_{\delta,\alpha}^1(x, y) \left( \frac{1}{c + \delta u} + \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \right) + \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u + y) \\ + \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t + y) dt + \psi_{\delta,\alpha}(u), & u < x \\ H_{\delta,\alpha}^2(x, y) \left( \int_x^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt \\ - \lambda\mu \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} [F_e(t) + F_e(y) - F_e(t + y)] dt, & u \geq x \end{cases}$$

όπου

$$H_{\delta,\alpha}^1(x, y) = cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) - c\psi_{\delta,\alpha}(0) - \lambda\mu F_e(y),$$

$$H_{\delta,\alpha}^2(x, y) = cH_{\delta,\alpha}(0, x, y) - \lambda\mu [F_e(x) + F_e(y) - F_e(x + y)]$$

και

$$H_{\delta,\alpha}(0, x, y) = \frac{\lambda}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^\infty \int_0^x e^{-\delta vt} [\bar{F}(t) - \bar{F}(y + t)] dt v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \bar{f}_e(\delta s) ds} dv,$$

$$\kappa_{\delta,\alpha} = c \int_0^\infty v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv + \lambda\mu \int_0^v \bar{f}_e(\delta s) ds} dv$$

$$F_{\delta, \alpha}(u, x)$$

$$F_{\delta,\alpha}(u, x)$$

Η  $F_{\delta,\alpha}(u, x)$  προκύπτει

$$F_{\delta,\alpha}(u, x)$$

Η  $F_{\delta,\alpha}(u, x)$  προκύπτει

- Από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu για  $w(x_1, x_2) = I(U_{\delta}(T_{\delta}) \leq x)$ . Συγκεκριμένα

$$F_{\delta,\alpha}(u, x) = E \left[ e^{-\alpha T_{\delta}} I(U(T_{\delta}^-) \leq x) I(T_{\delta} < \infty) | U_{\delta}(0) = u \right]$$

$$F_{\delta,\alpha}(u, x)$$

Η  $F_{\delta,\alpha}(u, x)$  προκύπτει

- Από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu για  $w(x_1, x_2) = I(U_\delta(T_\delta) \leq x)$ . Συγκεκριμένα

$$F_{\delta,\alpha}(u, x) = E \left[ e^{-\alpha T_\delta} I(U(T_\delta^-) \leq x) I(T_\delta < \infty) \mid U_\delta(0) = u \right]$$

- $F_{\delta,\alpha}(u, x) = \lim_{y \rightarrow \infty} H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$

$$F_{\delta,\alpha}(u, x)$$

Η  $F_{\delta,\alpha}(u, x)$  προκύπτει

- Από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu για  $w(x_1, x_2) = I(U_\delta(T_\delta) \leq x)$ . Συγκεκριμένα

$$F_{\delta,\alpha}(u, x) = E \left[ e^{-\alpha T_\delta} I(U(T_\delta^-) \leq x) I(T_\delta < \infty) \mid U_\delta(0) = u \right]$$

- $F_{\delta,\alpha}(u, x) = \lim_{y \rightarrow \infty} H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$

Στα πλαίσια του κλασσικού μοντέλου με επιτόκιο, η  $F_\delta(u, x)$  εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία και το μέγεθος του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ  $x$ .

# Λύση της εξίσωσης Volterra

## Λύση της εξίσωσης Volterra

Η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι

$$F_{\delta, \alpha}(u, x) = \begin{cases} c [F_{\delta, \alpha}(0, x) - \psi_{\delta, \alpha}(0)] \left( \int_0^u \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + \psi_{\delta, \alpha}(u), & u < x \\ = (cF_{\delta, \alpha}(0, x) - \lambda \mu F_e(x)) \left( \int_0^u \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) \\ + \lambda \mu \int_0^x \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} [F_e(x) - F_e(t)] dt, & u \geq x \end{cases}$$



## Λύση της εξίσωσης Volterra

Η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι

$$F_{\delta, \alpha}(u, x) = \begin{cases} c [F_{\delta, \alpha}(0, x) - \psi_{\delta, \alpha}(0)] \left( \int_0^u \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + \psi_{\delta, \alpha}(u), & u < x \\ = (cF_{\delta, \alpha}(0, x) - \lambda \mu F_e(x)) \left( \int_0^u \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) \\ + \lambda \mu \int_0^x \frac{K_{\delta, \alpha}(u, t)}{c + \delta t} [F_e(x) - F_e(t)] dt, & u \geq x \end{cases}$$

όπου

## Λύση της εξίσωσης Volterra

Η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι

$$F_{\delta,\alpha}(u, x) = \begin{cases} c [F_{\delta,\alpha}(0, x) - \psi_{\delta,\alpha}(0)] \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + \psi_{\delta,\alpha}(u), & u < x \\ = (cF_{\delta,\alpha}(0, x) - \lambda\mu F_e(x)) \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) \\ + \lambda\mu \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} [F_e(x) - F_e(t)] dt, & u \geq x \end{cases}$$

όπου

$$F_{\delta,\alpha}(0, x) = \frac{\lambda}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^\infty \left( \int_0^x e^{-\delta vt} \bar{F}(t) dt \right) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv} + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds dv$$

## Λύση της εξίσωσης Volterra

Η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι

$$F_{\delta,\alpha}(u, x) = \begin{cases} c [F_{\delta,\alpha}(0, x) - \psi_{\delta,\alpha}(0)] \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + \psi_{\delta,\alpha}(u), & u < x \\ = (cF_{\delta,\alpha}(0, x) - \lambda\mu F_e(x)) \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) \\ + \lambda\mu \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} [F_e(x) - F_e(t)] dt, & u \geq x \end{cases}$$

όπου

$$F_{\delta,\alpha}(0, x) = \frac{\lambda}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^\infty \left( \int_0^x e^{-\delta vt} \bar{F}(t) dt \right) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv} + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds dv$$

Αποδεικνύεται ότι

$$h_{\delta,\alpha}(u, x, y) = \frac{f(x+y)}{\bar{F}(x)} f_{\delta,\alpha}(u, x)$$

## Λύση της εξίσωσης Volterra

Η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι

$$F_{\delta,\alpha}(u, x) = \begin{cases} c [F_{\delta,\alpha}(0, x) - \psi_{\delta,\alpha}(0)] \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + \psi_{\delta,\alpha}(u), & u < x \\ = (cF_{\delta,\alpha}(0, x) - \lambda\mu F_e(x)) \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) \\ + \lambda\mu \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} [F_e(x) - F_e(t)] dt, & u \geq x \end{cases}$$

όπου

$$F_{\delta,\alpha}(0, x) = \frac{\lambda}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^\infty \left( \int_0^x e^{-\delta vt} \bar{F}(t) dt \right) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv} + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds dv$$

Αποδεικνύεται ότι

$$h_{\delta,\alpha}(u, x, y) = \frac{f(x+y)}{\bar{F}(x)} f_{\delta,\alpha}(u, x)$$

Η προεξοφλημένη απο κοινού συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας εξαρτάται από:

## Λύση της εξίσωσης Volterra

Η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι

$$F_{\delta,\alpha}(u, x) = \begin{cases} c [F_{\delta,\alpha}(0, x) - \psi_{\delta,\alpha}(0)] \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + \psi_{\delta,\alpha}(u), & u < x \\ = (cF_{\delta,\alpha}(0, x) - \lambda\mu F_e(x)) \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) \\ + \lambda\mu \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} [F_e(x) - F_e(t)] dt, & u \geq x \end{cases}$$

όπου

$$F_{\delta,\alpha}(0, x) = \frac{\lambda}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^\infty \left( \int_0^x e^{-\delta vt} \bar{F}(t) dt \right) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv} + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds dv$$

Αποδεικνύεται ότι

$$h_{\delta,\alpha}(u, x, y) = \frac{f(x+y)}{\bar{F}(x)} f_{\delta,\alpha}(u, x)$$

Η προεξοφλημένη απο κοινού συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας εξαρτάται από:

- 1 Την κατανομή του μεγέθους ατομικής ζημιάς, και

## Λύση της εξίσωσης Volterra

Η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι

$$F_{\delta,\alpha}(u, x) = \begin{cases} c [F_{\delta,\alpha}(0, x) - \psi_{\delta,\alpha}(0)] \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + \psi_{\delta,\alpha}(u), & u < x \\ = (cF_{\delta,\alpha}(0, x) - \lambda\mu F_e(x)) \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) \\ + \lambda\mu \int_0^x \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} [F_e(x) - F_e(t)] dt, & u \geq x \end{cases}$$

όπου

$$F_{\delta,\alpha}(0, x) = \frac{\lambda}{\kappa_{\delta,\alpha}} \int_0^\infty \left( \int_0^x e^{-\delta vt} \bar{F}(t) dt \right) v^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-cv} + \lambda\mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds dv$$

Αποδεικνύεται ότι

$$h_{\delta,\alpha}(u, x, y) = \frac{f(x+y)}{\bar{F}(x)} f_{\delta,\alpha}(u, x)$$

Η προεξοφλημένη απο κοινού συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας εξαρτάται από:

- 1 Την κατανομή του μεγέθους ατομικής ζημιάς, και
- 2 Την προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία.

$$G_{\delta, \alpha}(u, y)$$

$$G_{\delta,\alpha}(u, y)$$

Η  $G_{\delta,\alpha}(u, y)$  προκύπτει



$$G_{\delta,\alpha}(u, y)$$

Η  $G_{\delta,\alpha}(u, y)$  προκύπτει

- Από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu για  $w(x_1, x_2) = I(|U_\delta(T_\delta)| \leq y)$ . Συγκεκριμένα

$$G_{\delta,\alpha}(u, x) = E \left[ e^{-\alpha T_\delta} I(|U(T_\delta)| \leq y) I(T_\delta < \infty) | U_\delta(0) = u \right]$$

# $G_{\delta,\alpha}(u, y)$

Η  $G_{\delta,\alpha}(u, y)$  προκύπτει

- Από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu για  $w(x_1, x_2) = I(|U_\delta(T_\delta)| \leq y)$ . Συγκεκριμένα

$$G_{\delta,\alpha}(u, x) = E \left[ e^{-\alpha T_\delta} I(|U(T_\delta)| \leq y) I(T_\delta < \infty) | U_\delta(0) = u \right]$$

- $G_{\delta,\alpha}(u, x) = \lim_{x \rightarrow \infty} H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$

$$G_{\delta,\alpha}(u, y)$$

Η  $G_{\delta,\alpha}(u, y)$  προκύπτει

- Από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu για  $w(x_1, x_2) = I(|U_\delta(T_\delta)| \leq y)$ . Συγκεκριμένα

$$G_{\delta,\alpha}(u, x) = E \left[ e^{-\alpha T_\delta} I(|U(T_\delta)| \leq y) I(T_\delta < \infty) | U_\delta(0) = u \right]$$

- $G_{\delta,\alpha}(u, x) = \lim_{x \rightarrow \infty} H_{\delta,\alpha}(u, x, y)$

Στα πλαίσια του κλασσικού μοντέλου με επιτόκιο, η  $G_\delta(u, x)$  εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία και το μέγεθος του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ  $y$ .

# Λύση της εξίσωσης Volterra

## Λύση της εξίσωσης Volterra

Η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι

$$G_{\delta,\alpha}(u, y) = G_{\delta,\alpha}^1(y) \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u + y) \\ + \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t + y) dt + \psi_{\delta,\alpha}(u),$$

## Λύση της εξίσωσης Volterra

Η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι

$$G_{\delta,\alpha}(u, y) = G_{\delta,\alpha}^1(y) \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + \frac{\lambda\mu}{c + \delta u} F_e(u + y) \\ + \lambda\mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t + y) dt + \psi_{\delta,\alpha}(u),$$

όπου

$$G_{\delta,\alpha}^1(y) = c [G_{\delta,\alpha}(0, y) - \psi_{\delta,\alpha}(0)] - \lambda\mu F_e(y)$$

## Λύση της εξίσωσης Volterra

Η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που ικανοποιεί η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι

$$G_{\delta,\alpha}(u, y) = G_{\delta,\alpha}^1(y) \left( \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} dt + \frac{1}{c + \delta u} \right) + \frac{\lambda \mu}{c + \delta u} F_e(u + y) \\ + \lambda \mu \int_0^u \frac{K_{\delta,\alpha}(u, t)}{c + \delta t} F_e(t + y) dt + \psi_{\delta,\alpha}(u),$$

όπου

$$G_{\delta,\alpha}^1(y) = c [G_{\delta,\alpha}(0, y) - \psi_{\delta,\alpha}(0)] - \lambda \mu F_e(y)$$

και

$$G_{\delta}(0, y) = \frac{\lambda \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} e^{-\delta vt} [\bar{F}(t) - \bar{F}(y + t)] dt \right) e^{-cv} + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds dv}{c \int_0^{\infty} e^{-cv} + \lambda \mu \int_0^v \tilde{f}_e(\delta s) ds dv}$$

# Αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων Volterra



# Αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων Volterra

Λύσεις των εξισώσεων Volterra που ικανοποιούν οι  $F_\delta(u, x)$  και  $G_\delta(u, y)$  για  $x = 5$ ,  $y = 5$  και τις εξής κατανομές ζημιών:

# Αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων Volterra

Λύσεις των εξισώσεων Volterra που ικανοποιούν οι  $F_\delta(u, x)$  και  $G_\delta(u, y)$  για  $x = 5$ ,  $y = 5$  και τις εξής κατανομές ζημιών:

- 1 Κατανομή Γάμμα με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x \geq 0$$

για  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 2$ ,  $\lambda = 55$  και  $c = 60$

# Αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων Volterra

Λύσεις των εξισώσεων Volterra που ικανοποιούν οι  $F_\delta(u, x)$  και  $G_\delta(u, y)$  για  $x = 5$ ,  $y = 5$  και τις εξής κατανομές ζημιών:

- 1 Κατανομή Γάμμα με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x \geq 0$$

για  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 2$ ,  $\lambda = 55$  και  $c = 60$

- 2 Μίξη Εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = A_1 \beta_1 e^{-\beta_1 x} + A_2 \beta_2 e^{-\beta_2 x}, \quad x > 0$$

για  $A_1 = 0.4$ ,  $A_2 = 0.6$ ,  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 3$ ,  $\lambda = 55$  και  $c = 24.2$ .

# Αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων Volterra

Λύσεις των εξισώσεων Volterra που ικανοποιούν οι  $F_\delta(u, x)$  και  $G_\delta(u, y)$  για  $x = 5$ ,  $y = 5$  και τις εξής κατανομές ζημιών:

- 1 Κατανομή Γάμμα με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x \geq 0$$

για  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 2$ ,  $\lambda = 55$  και  $c = 60$

- 2 Μίξη Εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = A_1 \beta_1 e^{-\beta_1 x} + A_2 \beta_2 e^{-\beta_2 x}, \quad x > 0$$

για  $A_1 = 0.4$ ,  $A_2 = 0.6$ ,  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 3$ ,  $\lambda = 55$  και  $c = 24.2$ .

**Υπόθεση:**  $K_{\delta, \alpha}(u, t) = k_{\delta, \alpha}^1(u, t) + k_{\delta, \alpha}^2(u, t) + k_{\delta, \alpha}^3(u, t)$ .

# Φράγματα για την κατανομή του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

# Φράγματα για την κατανομή του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

Χρησιμοποιώντας τη δεξιά ουρά του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

$$\bar{G}_\delta(u, y) = \Pr [T_\delta < \infty, |U_\delta(T_\delta)| > y \mid U_\delta(0) = u]$$

# Φράγματα για την κατανομή του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

Χρησιμοποιώντας τη δεξιά ουρά του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

$$\bar{G}_\delta(u, y) = \Pr [T_\delta < \infty, |U_\delta(T_\delta)| > y \mid U_\delta(0) = u]$$

Βρήκαμε

# Φράγματα για την κατανομή του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

Χρησιμοποιώντας τη δεξιά ουρά του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

$$\bar{G}_\delta(u, y) = \Pr [T_\delta < \infty, |U_\delta(T_\delta)| > y \mid U_\delta(0) = u]$$

Βρήκαμε

- Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές



# Φράγματα για την κατανομή του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

Χρησιμοποιώντας τη δεξιά ουρά του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

$$\bar{G}_\delta(u, y) = \Pr [T_\delta < \infty, |U_\delta(T_\delta)| > y \mid U_\delta(0) = u]$$

Βρήκαμε

- Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές
- Φράγματα για μηδενικό αρχικό κεφάλαιο

# Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

## Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

Όταν η θετική ποσότητα  $R_2$  ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση

$$E \left[ e^{-R_2(c\bar{s} \frac{(\delta)}{w} - X)} \right] = 1,$$

## Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

Όταν η θετική ποσότητα  $R_2$  ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση

$$E \left[ e^{-R_2(c\bar{s}^{(\delta)} - X)} \right] = 1,$$

τότε για κάθε  $u \geq 0$  ισχύει

$$\bar{G}_\delta(u, y) \leq \beta E \left[ e^{R_2 X} \right] \frac{\lambda}{c} e^{-R_2(u+y)} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 z(1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta z}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dz,$$

## Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

Όταν η θετική ποσότητα  $R_2$  ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση

$$E \left[ e^{-R_2(c\bar{s}^{\frac{\delta}{W}} - X)} \right] = 1,$$

τότε για κάθε  $u \geq 0$  ισχύει

$$\bar{G}_\delta(u, y) \leq \beta E \left[ e^{R_2 X} \right] \frac{\lambda}{c} e^{-R_2(u+y)} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 z(1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta z}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dz,$$

όπου

$$\beta^{-1} = \inf_{t \geq 0} \frac{\int_t^\infty e^{R_2 y} f(y) dy}{e^{R_2 t} \bar{F}(t)}$$

## Φράγματα με αναδρομικές τεχνικές

Όταν η θετική ποσότητα  $R_2$  ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση

$$E \left[ e^{-R_2(c\bar{s} \frac{(\delta)}{W}) - X} \right] = 1,$$

τότε για κάθε  $u \geq 0$  ισχύει

$$\bar{G}_\delta(u, y) \leq \beta E \left[ e^{R_2 X} \right] \frac{\lambda}{c} e^{-R_2(u+y)} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 z(1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta z}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dz,$$

όπου

$$\beta^{-1} = \inf_{t \geq 0} \frac{\int_t^\infty e^{R_2 y} f(y) dy}{e^{R_2 t \bar{F}(t)}}$$

Ειδικότερα όταν η κατανομή  $F$  είναι μία NWUC (new worse than used in convex ordering), τότε για κάθε  $u \geq 0$  ισχύει

$$\bar{G}_\delta(u, y) \leq \frac{\lambda}{c} e^{-R_2(u+y)} \int_0^\infty \frac{e^{-R_2 z(1 + \frac{\delta u}{c})}}{(1 + \frac{\delta z}{c})^{\frac{\lambda}{\delta} + 1}} dz$$

# Φράγματα για μηδενικό αρχικό κεφάλαιο

## Φράγματα για μηδενικό αρχικό κεφάλαιο

Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με σταθερό επιτόκιο ισχύει

$$\frac{\lambda\mu\alpha}{c} \left[ \left( \bar{F}_e(y) + \frac{\alpha\beta\underline{\nu}_1}{c - \lambda\mu} \right) R(\beta) - \underline{\nu}_1 e^{\frac{\beta^2}{2}} \right] \leq \bar{G}_\delta(0, y) \leq \frac{\lambda\mu\bar{F}_e(y)}{\alpha c R(\alpha)}$$



## Φράγματα για μηδενικό αρχικό κεφάλαιο

Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με σταθερό επιτόκιο ισχύει

$$\frac{\lambda\mu\alpha}{c} \left[ \left( \bar{F}_e(y) + \frac{\alpha\beta\delta\nu_1}{c - \lambda\mu} \right) R(\beta) - \delta\nu_1 e^{\frac{\beta^2}{2}} \right] \leq \bar{G}_\delta(0, y) \leq \frac{\lambda\mu\bar{F}_e(y)}{\alpha c R(\alpha)}$$

όπου  $R(\alpha)$  είναι ο δείκτης Mills που δίνεται από τη σχέση

$$R(\alpha) = e^{\alpha^2/2} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-x^2/2} dx,$$

## Φράγματα για μηδενικό αρχικό κεφάλαιο

Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με σταθερό επιτόκιο ισχύει

$$\frac{\lambda\mu\alpha}{c} \left[ \left( \bar{F}_e(y) + \frac{\alpha\beta\delta\nu_1}{c-\lambda\mu} \right) R(\beta) - \delta\nu_1 e^{\frac{\beta^2}{2}} \right] \leq \bar{G}_\delta(0, y) \leq \frac{\lambda\mu\bar{F}_e(y)}{\alpha c R(\alpha)}$$

όπου  $R(\alpha)$  είναι ο δείκτης Mills που δίνεται από τη σχέση

$$R(\alpha) = e^{\alpha^2/2} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-x^2/2} dx,$$

$$\alpha = \frac{c - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda\mu\nu_1\delta}}, \quad \beta = \frac{c - \lambda\mu - \delta y}{\sqrt{\lambda\mu\nu_1\delta}}$$

## Φράγματα για μηδενικό αρχικό κεφάλαιο

Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με σταθερό επιτόκιο ισχύει

$$\frac{\lambda\mu\alpha}{c} \left[ \left( \bar{F}_e(y) + \frac{\alpha\beta\delta\nu_1}{c-\lambda\mu} \right) R(\beta) - \delta\nu_1 e^{\frac{\beta^2}{2}} \right] \leq \bar{G}_\delta(0, y) \leq \frac{\lambda\mu\bar{F}_e(y)}{\alpha c R(\alpha)}$$

όπου  $R(\alpha)$  είναι ο δείκτης Mills που δίνεται από τη σχέση

$$R(\alpha) = e^{\alpha^2/2} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-x^2/2} dx,$$

$$\alpha = \frac{c - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda\mu\nu_1\delta}}, \quad \beta = \frac{c - \lambda\mu - \delta y}{\sqrt{\lambda\mu\nu_1\delta}}$$

$$\nu_1 = -\tilde{f}'_e(x) \Big|_{x=0} = \int_0^{\infty} x f_e(x) dx$$

## Φράγματα για μηδενικό αρχικό κεφάλαιο

Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με σταθερό επιτόκιο ισχύει

$$\frac{\lambda\mu\alpha}{c} \left[ \left( \bar{F}_e(y) + \frac{\alpha\beta\delta\nu_1}{c-\lambda\mu} \right) R(\beta) - \delta\nu_1 e^{\frac{\beta^2}{2}} \right] \leq \bar{G}_\delta(0, y) \leq \frac{\lambda\mu\bar{F}_e(y)}{\alpha c R(\alpha)}$$

όπου  $R(\alpha)$  είναι ο δείκτης Mills που δίνεται από τη σχέση

$$R(\alpha) = e^{\alpha^2/2} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-x^2/2} dx,$$

$$\alpha = \frac{c - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda\mu\nu_1\delta}}, \quad \beta = \frac{c - \lambda\mu - \delta y}{\sqrt{\lambda\mu\nu_1\delta}}$$

$$\nu_1 = -\tilde{f}'_e(x) \Big|_{x=0} = \int_0^{\infty} x f_e(x) dx$$

και η ποσότητα  $\underline{\nu}_1$  ορίζεται ως

$$\underline{\nu}_1 = \int_y^{\infty} x f_e(x) dx = -\tilde{f}'_e(0; y)$$

Το κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο και  
σταθερό μέρισμα και η συνάρτηση των  
Gerber-Shiu

# Το κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο και σταθερό μέρισμα και η συνάρτηση των Gerber-Shiu

- Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος και η συνάρτηση των Gerber-Shiu

# Το κλασσικό μοντέλο με επιτόκιο και σταθερό μέρισμα και η συνάρτηση των Gerber-Shiu

- Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος και η συνάρτηση των Gerber-Shiu
- Η λύση για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής

# Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος και η συνάρτηση των Gerber-Shiu



## Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος και η συνάρτηση των Gerber-Shiu

Αν  $U_b(t)$  είναι το πλεόνασμα στο χρόνο  $t$  (παραλείπουμε τον δείκτη  $\delta$  για ευκολία) όταν η εταιρεία αποδίδει στους μετόχους της σταθερό μέρισμα, τότε

$$dU_b(t) = \begin{cases} cdt - dS(t) + \delta U_b(t^-)dt, & U_b(t) < b \\ -dS(t), & U_b(t) = b \end{cases}$$

## Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος και η συνάρτηση των Gerber-Shiu

Αν  $U_b(t)$  είναι το πλεόνασμα στο χρόνο  $t$  (παραλείπουμε τον δείκτη  $\delta$  για ευκολία) όταν η εταιρεία αποδίδει στους μετόχους της σταθερό μέρισμα, τότε

$$dU_b(t) = \begin{cases} cdt - dS(t) + \delta U_b(t^-)dt, & U_b(t) < b \\ -dS(t), & U_b(t) = b \end{cases}$$

Ο χρόνος χρεοκοπίας  $T_b$ , δηλαδή η πρώτη χρονική στιγμή κατά την οποία το πλεόνασμα γίνεται αρνητικό είναι

$$T_b = \inf \{t : U_b(t) < 0\}$$

## Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος και η συνάρτηση των Gerber-Shiu

Αν  $U_b(t)$  είναι το πλεόνασμα στο χρόνο  $t$  (παραλείπουμε τον δείκτη  $\delta$  για ευκολία) όταν η εταιρεία αποδίδει στους μετόχους της σταθερό μέρισμα, τότε

$$dU_b(t) = \begin{cases} cdt - dS(t) + \delta U_b(t^-)dt, & U_b(t) < b \\ -dS(t), & U_b(t) = b \end{cases}$$

Ο χρόνος χρεοκοπίας  $T_b$ , δηλαδή η πρώτη χρονική στιγμή κατά την οποία το πλεόνασμα γίνεται αρνητικό είναι

$$T_b = \inf \{t : U_b(t) < 0\}$$

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu για το μοντέλο μας δίνεται από τη σχέση

$$m_b(u) = E \left[ e^{-\alpha T_b} w(U_b(T_b^-), |U_b(T_b)|) I(T_b < \infty) | U_b(0) = u \right]$$

Η λύση για την αναμενόμενη  
προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής

## Η λύση για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποιής

Αποδεικνύεται ότι η λύση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί η  $m_b(u)$  δίνεται από τη σχέση

$$m_b(u) = m_\infty(u) - \frac{m'_\infty(b)}{h'(b)}h(u),$$

## Η λύση για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποιής

Αποδεικνύεται ότι η λύση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί η  $m_b(u)$  δίνεται από τη σχέση

$$m_b(u) = m_\infty(u) - \frac{m'_\infty(b)}{h'(b)}h(u),$$

όπου

## Η λύση για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής

Αποδεικνύεται ότι η λύση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί η  $m_b(u)$  δίνεται από τη σχέση

$$m_b(u) = m_\infty(u) - \frac{m'_\infty(b)}{h'(b)}h(u),$$

όπου

- $m_\infty(u)$  είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu χωρίς κατώφλι, και

## Η λύση για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής

Αποδεικνύεται ότι η λύση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί η  $m_b(u)$  δίνεται από τη σχέση

$$m_b(u) = m_\infty(u) - \frac{m'_\infty(b)}{h'(b)} h(u),$$

όπου

- $m_\infty(u)$  είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu χωρίς κατώφλι, και
- $h(u)$  είναι η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης εξίσωσης Volterra

$$h(u) = \frac{ch(0)}{c + \delta u} + \int_0^u \frac{\alpha + \delta + \lambda \bar{F}(u-x)}{c + \delta u} h(x) dx$$