Πανεπιστήμιο Πειραιώς – Τμήμα Πληροφορικής

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Πληροφορική»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Τίτλος Διατριβής	**Ειδικές Μορφές Εξισώσεων και Εφαρμογές Αυτών**
Ονοματεπώνυμο Φοιτητή	**Παράσχος Καμπαγεωργίου**
Πατρώνυμο	**Ιορδάνης**
Αριθμός Μητρώου	**ΜΠΠΛ/06038**
Επιβλέπων	**Ευάγγελος Φούντας, Καθηγητής**

Ημερομηνία Παράδοσης **Φεβρουάριος 2011**

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

(υπογραφή)	(υπογραφή)	(υπογραφή)
Ευάγγελος Φούντας Καθηγητής	Παναγιώτης-Γεώργιος Τσικούρας Καθηγητής	Δημήτριος Αποστόλου Επίκουρος Καθηγητής

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον Καθηγητή κ. Ευάγγελο Φούντα για την ανάθεση και επίβλεψη της μεταπτυχιακής μου διατριβής. Η συμπαράσταση και οι πολύτιμες συμβουλές του κατά την εκπόνηση της διατριβής μου ήταν άκρως σημαντικές.

Ευχαριστώ όλους τους καθηγητές του Τμήματος Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πειραιά για την αμέριστη βοήθειά τους στην προσπάθειά μου να ολοκληρώσω με επιτυχία τις σπουδές μου στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Πληροφορική».

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Παναγιώτη-Γεώργιο Τσικούρα και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Δημήτριο Αποστόλου για την τιμή που μου έκαναν να είναι στην τριμελή επιτροπή αξιολόγησης της μεταπτυχιακής μου διατριβής.

Περίληψη

Με την έλευση του εικοστού πρώτου αιώνα έμελλε να πέσει ένα ακόμα φράγμα στο πεδίο των Μαθηματικών. Πρόκειται για την απόδειξη του γνωστού θεωρήματος του Fermat, ενός σημαντικού και παράλληλα μυστηριώδους αντικειμένου μελέτης που ταλαιπώρησε για πολλά χρόνια πάρα πολλούς ερευνητές αλλά παράλληλα γέννησε σημαντικές μεθόδους και θεωρίες.

Ανάγκες για λύσεις σε πραγματικά προβλήματα ανέδειξαν ένα σημαντικό τομέα των Μαθηματικών: τις διοφαντικές εξισώσεις. Οι εφαρμογές αυτών σε άλλες επιστήμες είναι καθοριστικές. Οι λύσεις που πηγάζουν απ’ αυτές είναι σαφείς και ακέραιες. Η χρήση τους σε προγραμματιστικές μεθόδους δίνει πρακτικές λύσεις σε καθημερινά προβλήματα, από τα πιο απλά μέχρι τα πιο πολύπλοκα που με τη βοήθεια των ηλεκτρονικών υπολογιστών δεν είναι πλέον ανυπέρβλητα.

Απλές ή και πολύπλοκες μέθοδοι, έξυπνοι αλλά και «άπληστοι» αλγόριθμοι, προσφέρουν λύσεις σε προβλήματα που βασίζονται στη θεωρία επίλυσης διοφαντικών εξισώσεων. Το παρελθόν ήταν γεμάτο συγκινήσεις· ποιος μπορεί να πει για το τι μας επιφυλάσσει το μέλλον;

Abstract

With the advent of the twentyfirst century another barrier in the field of Mathematics was destined to be overcome. Concerning the proof of Fermat’s famous theorem, an important and mysterious object of study which troubled many researchers for many years but also gave birth to important methods and theories.

The need for solutions to real problems highlighted an important area of mathematics: the diophantine equations. Their applications to other sciences are crucial and the deriving solutions are clear and intact. Their use in programming methods provides practical solutions to everyday problems, from the simplest to the complex one, which due to computers are no longer insuperable.

Simple or complex methods, intelligent and “greedy” algorithms, offer solutions to problems based on the theory of solving diophantine equations. The past was full of emotions. Who shall tell what the future holds?

Πίνακας περιεχομένων

0. Εισαγωγή

Τα Μαθηματικά θεωρούνται ως η μόνη επιστήμη που μπορεί να τεθεί αρωγός όλων των υπόλοιπων επιστημών αφού οι μέθοδοί της μπορούν να βοηθήσουν στην επίλυση οποιωνδήποτε προβλημάτων. Και αν αυτό δεν είναι εφικτό, η μαθηματική σκέψη οδηγεί στη γένεση νέων επαναστατικών μεθόδων. Ένα απ' τα πιο άμεσα εφαρμόσιμα τμήματα των Μαθηματικών σχετίζεται με την επίλυση διοφαντικών εξισώσεων. Εφαρμογές τους πραγματοποιούνται σε κλάδους της Επιχειρησιακής Έρευνας, σε σχεδιασμό δικτύων, στη θεωρία παιγνίων, κ.α.

Στην πρώτη ενότητα της παρούσας εργασίας δίνονται συγκεκριμένα αποτελέσματα απ' τα κυριότερα της θεωρίας επίλυσης εξισώσεων στους ακέραιους, σε μία προσπάθεια εξοικείωσης μ' αυτήν, ξεκινώντας απ' τις πιο απλές μορφές εξισώσεων και καταλήγοντας σε ενδιαφέροντα σημεία και συμπεράσματα που αφορούν το θεώρημα του Fermat και σχετικές μ' αυτό μεθόδους. Αναλύονται οι περιπτώσεις επίλυσης εξισώσεων ενός αγνώστου, γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους, εξισώσεων δευτέρου βαθμού με δύο αγνώστους (με παραδείγματα εξισώσεων του τύπου $x^2 - Ay^2 = 1$), συγκεκριμένων τύπων εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τρεις αγνώστους, εξισώσεων με δύο αγνώστους και βαθμού άνω του δύο και, τέλος, αναφορές σε αλγεβρικές εξισώσεις με τρεις αγνώστους και βαθμού άνω του δύο (θεώρημα του Fermat, εκθετικές εξισώσεις).

Οι διοφαντικές εξισώσεις (εξισώσεις με ακέραιους συντελεστές) συνδέονται στενά με αρκετά προβλήματα της θεωρίας αριθμών. Εμφανίζονται μάλιστα μερικές φορές και στη Φυσική. Σκοπός είναι η ανάπτυξη μεθόδων ακέραιας επίλυσης αυτών των εξισώσεων. Συγκεκριμένα, στη δεύτερη ενότητα γίνεται αναφορά στον αμιγή ακέραιο προγραμματισμό (έναν από τους σημαντικότερους κλάδους της Επιχειρησιακής Έρευνας) ο οποίος αποσκοπεί στη μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μίας συνάρτησης όπου οι μεταβλητές της θα πρέπει να ικανοποιούν ένα πλήθος περιορισμών (ανισώσεων) ενώ οι επιτρεπτές τιμές τους είναι ακέραιες και θετικές. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται μία απλή μέθοδος επίλυσης τέτοιων προβλημάτων. Δίνεται το θεωρητικό πλαίσιο και αναπτύσσονται κατάλληλα παραδείγματα για όλες τις δυνατές περιπτώσεις της που βοηθούν στην κατανόηση της μεθόδου.

Τέλος, στην τρίτη ενότητα γίνεται αναφορά σε μία πολύ γνωστή κατηγορία προβλημάτων που έχουν ως στόχο το σχεδιασμό δικτύων. Σ' αυτού του είδους τα προβλήματα δίνονται οι κόμβοι και ζητούνται οι συνδέσεις εκείνες (από ένα σύνολο συνδέσεων) που θα πρέπει όταν εισαχθούν στο δίκτυο να ελαχιστοποιήσουν το κόστος αλλά ταυτόχρονα να το εφοδιάσουν μ' ένα μονοπάτι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κόμβων του. Με λίγα λόγια θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα ελαχίστου γεννητικού δέντρου (minimum spanning tree) και την παρουσίαση ενός «άπληστου» αλγόριθμου αλλά αρκετά απλού και αποτελεσματικού. Αναπτύσσεται κατάλληλο παράδειγμα που αναδεικνύει την απλότητα και αποτελεσματικότητά του ακόμα και στις περιπτώσεις που φαινομενικά καταλήγουμε σε αδιέξοδο.

1. Διοφαντικές Εξισώσεις και Εξισώσεις Διαφορών

Η θεωρητική σημασία των εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές (διοφαντικές εξισώσεις) είναι αρκετά μεγάλη καθώς συνδέονται στενά με αρκετά προβλήματα της θεωρίας αριθμών. Εξ άλλου, αυτές οι εξισώσεις εμφανίζονται μερικές φορές και στη Φυσική γι' αυτό είναι τόσο σημαντικές στην πράξη. Τέλος, τα στοιχεία της θεωρίας των εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές όπως παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία είναι κατάλληλα για τη διεύρυνση του μαθηματικού ορίζοντα των σπουδαστών λυκείων και παιδαγωγικών ινστιτούτων.

Εδώ δίνονται συγκεκριμένα αποτελέσματα απ' τα κυριότερα της θεωρίας επίλυσης εξισώσεων στους ακέραιους. Αποδείξεις περίπλοκων θεωρημάτων συμπεριλαμβάνονται όταν είναι αρκετά απλές.

1.1. Εξισώσεις με έναν άγνωστο

Έστω η γραμμική εξίσωση με έναν άγνωστο

$$a_1 x + a_0 = 0 \tag{1}$$

με ακέραιους συντελεστές a_1 και a_0. Η λύση αυτής της εξίσωσης

$$x = -\frac{a_0}{a_1}$$

είναι ακέραια μόνο όταν ο a_0 είναι διαιρετός με τον a_1. Για το λόγο αυτό η εξίσωση (1) δεν είναι πάντα επιλύσιμη στους ακέραιους. Για παράδειγμα, η εξίσωση $3x - 27 = 0$ έχει μία ακέραια λύση $x = 9$, ενώ η εξίσωση $5x + 21 = 0$ δεν έχει ακέραια λύση.

Το ίδιο ισχύει και για εξισώσεις βαθμού άνω του ένα. Για παράδειγμα, η τετραγωνική εξίσωση $x^2 + x - 2 = 0$ έχει ακέραιες λύσεις τις $x_1 = 1$ και $x_2 = -2$, ενώ η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 = 0$ δεν είναι επιλύσιμη στους ακέραιους· οι ρίζες της $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$ είναι άρρητοι αριθμοί.

Ο προσδιορισμός των ακέραιων ριζών της εξίσωσης n-οστού βαθμού

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (n \geq 1) \tag{2}$$

με ακέραιους συντελεστές δεν είναι δύσκολος. Πράγματι, έστω $x = \rho$ μία ακέραια ρίζα αυτής της εξίσωσης. Τότε

$$a_n \rho^n + a_{n-1}\rho^{n-1} + \cdots + a_1\rho + a_0 = 0$$
$$a_0 = -\rho(a_n\rho^{n-1} + a_{n-1}\rho^{n-2} + \cdots + a_1)$$

Η τελευταία ισότητα σημαίνει ότι ο a_0 είναι διαιρετός με τον ρ. Συνεπώς, *κάθε ακέραια ρίζα της εξίσωσης (2) είναι διαιρέτης του σταθερού όρου* a_0.

Ελέγξτε όλους τους διαιρέτες του a_0 έναν προς έναν· αυτοί που μετατρέπουν την εξίσωση (2) σε ταυτότητα είναι οι ακέραιες λύσεις της. Για παράδειγμα, οι διαιρέτες του σταθερού όρου της εξίσωσης

$$x^{10} + x^7 + 2x^3 + 2 = 0$$

είναι οι $1, -1, 2$ και -2. Μόνο ένας διαιρέτης, ο -1, είναι ρίζα της εξίσωσης· άρα αυτή η εξίσωση έχει μόνο μία ακέραια ρίζα $x_1 = -1$.

Εφαρμόζοντας την ίδια μέθοδο, είναι εύκολο να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$x^6 - x^5 + 3x^4 + x^2 - x + 3 = 0$$

δεν έχει ακέραιες λύσεις.

Η λύση στους ακέραιους των εξισώσεων με περισσότερους αγνώστους είναι πολύ περισσότερο ενδιαφέρουσα.

1.2. Γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους

Έστω η γραμμική εξίσωση με 2 αγνώστους

$$ax + by + c = 0 \tag{3}$$

όπου οι a και b είναι μη μηδενικοί ακέραιοι και c αυθαίρετος ακέραιος. Θα υποθέσουμε ότι οι συντελεστές a και b δεν έχουν κοινούς διαιρέτες (εκτός φυσικά απ' τη μονάδα), δηλαδή είναι πρώτοι μεταξύ τους, ή αλλιώς $(a, b) = 1$, όπου ο συμβολισμός (a, b) αναφέρεται στο μέγιστο κοινό διαιρέτη (Μ.Κ.Δ.) των a και b. Πράγματι· αν ο Μ.Κ.Δ. αυτών των συντελεστών, $d = (a, b)$, δεν είναι μονάδα, τότε $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, και η εξίσωση (3) μπορεί να γραφτεί ως

$$(a_1 x + b_1 y)d + c = 0$$

Αυτή λοιπόν θα έχει ακέραιες λύσεις μόνον όταν ο c είναι διαιρετός με τον d. Με άλλα λόγια, στην περίπτωση όπου $(a, b) = d \neq 1$, όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης (3) πρέπει να είναι διαιρετοί απ' τον d. Απαλείφοντας τον d απ' την εξίσωση, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad \left(c_1 = \frac{c}{d}\right)$$

όπου οι συντελεστές a_1 και b_1 είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση $c = 0$. Η εξίσωση (3) γίνεται

$$ax + by = 0 \tag{3'}$$

Λύνοντάς την ως προς x, παίρνουμε

$$x = -\frac{b}{a}y$$

Προφανώς, ο x θα είναι ακέραιος αν και μόνον αν ο y είναι διαιρετός με τον a, ή, με άλλα λόγια, αν ο y είναι πολλαπλάσιο του a,

$$y = at$$

όπου ο t είναι ένας αυθαίρετος ακέραιος ($t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Αντικαθιστώντας τη τιμή αυτή του y στην προηγούμενη εξίσωση, παίρνουμε

$$x = -\frac{b}{a}at = -bt$$

και οι τύποι

$$x = -bt, \ \ y = at \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

δίνουν όλες τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης (3').

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση $c \neq 0$. Θα δείξουμε πρώτα απ' όλα ότι προκειμένου να βρούμε όλες τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης (3), είναι αρκετό να βρούμε μία οποιαδήποτε λύση, δηλαδή είναι αρκετό να βρούμε ακέραιους x_0, y_0 για τους οποίους ισχύει

$$ax_0 + by_0 + c = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι. Έστω a και b πρώτοι μεταξύ τους και $[x_0, y_0]$ μία οποιαδήποτε λύση της εξίσωσης

$$ax + by + c = 0$$

Τότε οι τύποι

$$x = x_0 - bt, \ \ y = y_0 + at \tag{4}$$

όπου $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, δίνουν όλες τις λύσεις της εξίσωσης.

Απόδειξη.

Έστω $[x, y]$ μία τυχαία λύση της εξίσωσης (3). Τότε οι ισότητες

$$ax + by + c = 0, \ \ ax_0 + by_0 + c = 0$$

δίνουν

$$ax - ax_0 + by - by_0 = 0$$

$$y - y_0 = \frac{a(x_0 - x)}{b}$$

Καθώς ο $y - y_0$ είναι ακέραιος και οι a και b είναι πρώτοι μεταξύ τους, ο $x_0 - x$ πρέπει να είναι διαιρετός με τον b, δηλαδή ο $x_0 - x$ έχει τη μορφή

$$x_0 - x = bt$$

όπου ο t είναι ακέραιος. Αλλά τότε

$$y - y_0 = \frac{abt}{b} = at$$

και παίρνουμε

$$x = x_0 - bt, \ \ y = y_0 + at$$

Έτσι αποδείχτηκε ότι κάθε λύση $[x, y]$ έχει τη μορφή (4). Παραμένει να ελέγξουμε ότι κάθε ζεύγος αριθμών $[x_1, y_1]$ που παίρνουμε από τους τύπους (4) για έναν ακέραιο $t = t_1$ θα είναι και λύση της εξίσωσης (3). Για να το κάνουμε αυτό, αντικαθιστούμε τα x_1 και y_1 με τα $x_0 - bt$ και $y_0 + at$, αντίστοιχα, στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (3):

$$ax_1 + by_1 + c = ax_0 - abt + by_0 + bat + c = ax_0 + by_0 + c$$

Επειδή το $[x_0, y_0]$ είναι λύση της εξίσωσης, τότε $ax_0 + by_0 + c = 0$ και συνεπώς $ax_1 + by_1 + c$ =0, δηλαδή το $[x_1, y_1]$ είναι λύση της εξίσωσης. Η απόδειξη του θεωρήματος τώρα ολοκληρώθηκε. ■

Άρα, αν είναι γνωστή μία λύση της εξίσωσης $ax + by + c = 0$, τότε όλες οι άλλες λύσεις μπορούν να προσδιοριστούν απ' τις αριθμητικές προόδους των οποίων οι γενικοί όροι είναι οι

$$x = x_0 - bt, \quad y = y_0 + at \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Σημειώνεται ότι στην ειδική περίπτωση $c = 0$, οι τύποι που βρέθηκαν προηγουμένως

$$x = -bt, \quad y = at \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

μπορούν να προέλθουν από τους γενικούς τύπους θέτοντας $x_0 = y_0 = 0$. Αυτό είναι θεμιτό επειδή οι τιμές $x = 0, \quad y = 0$ είναι λύση της εξίσωσης $ax + by = 0$.

Αλλά πώς μπορεί κάποιος να βρει μία λύση $[x_0, y_0]$ της εξίσωσης (3) στη γενική περίπτωση όταν $c \neq 0$; Ας θεωρήσουμε την εξίσωση

$$127x - 52y + 1 = 0$$

Ας μετασχηματίσουμε το λόγο των συντελεστών των αγνώστων, ξεκινώντας με την απομόνωση του ακέραιου μέρους του καταχρηστικού κλάσματος

$$\frac{127}{52} = 2 + \frac{23}{52}$$

Το γνήσιο κλάσμα $23/52$ είναι βεβαίως ίσο με το αντίστροφο του αντιστρόφου του, οπότε

$$\frac{127}{52} = 2 + \frac{1}{52/23}$$

Τώρα θα εφαρμόσουμε τον ίδιο μετασχηματισμό στο καταχρηστικό κλάσμα $52/23$ που είναι μέσα στον παρονομαστή της τελευταίας ισότητας

$$\frac{52}{23} = 2 + \frac{6}{23} = 2 + \frac{1}{23/6}$$

Έτσι, το αρχικό κλάσμα είναι ίσο με

$$\frac{127}{52} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{23/6}}$$

Ας επαναλάβουμε και πάλι την ίδια διαδικασία για το κλάσμα $23/6$:

$$\frac{23}{6} = 3 + \frac{5}{6} = 3 + \frac{1}{6/5}$$

Οπότε

$$\frac{127}{52} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6/5}}}$$

Τέλος, θα απομονώσουμε το ακέραιο μέρος του καταχρηστικού κλάσματος $6/5$:

$$\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$$

Το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$\frac{127}{52} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}}$$

Αυτή η έκφραση είναι ένα *περατούμενο συνεχές κλάσμα*. Αν παραλείψουμε τον τελευταίο όρο, τον $1/5$, και μετασχηματίσουμε το νέο συνεχές κλάσμα μέχρι να καταλήξουμε σ' ένα κοινό κλάσμα και το αφαιρέσουμε από το αρχικό κλάσμα $127/52$, θα πάρουμε

$$2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}} = 2 + \frac{4}{9} = \frac{22}{9}$$

$$\frac{127}{52} - \frac{22}{9} = \frac{1143 - 1144}{52 \cdot 9} = -\frac{1}{52 \cdot 9}$$

Ανάγοντας την έκφραση αυτή με τον κοινό παρονομαστή και απαλείφοντάς τον παίρνουμε

$$127 \cdot 9 - 52 \cdot 22 + 1 = 0$$

Μία σύγκριση αυτής της ισότητας με την

$$127x - 52y + 1 = 0$$

δείχνει ότι οι $x = 9, \quad y = 22$ είναι λύση της εξίσωσης και, σύμφωνα με το θεώρημα, όλες οι λύσεις της περιέχονται στις αριθμητικές προόδους

$$x = 9 - 52t, \;\; y = 22 + 127t \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι στη γενική περίπτωση της εξίσωσης $ax + by + c = 0$ η λύση μπορεί επίσης να προέλθει επεκτείνοντας το λόγο των συντελεστών των αγνώστων σε ένα συνεχές κλάσμα, παραλείποντας τον τελευταίο όρο, και συνεχίζοντας τους υπολογισμούς όπως κάναμε προηγουμένως.

Για να αποδείξουμε αυτή την υπόθεση θα χρειαστούμε μερικές ιδιότητες των συνεχών κλασμάτων. Θεωρούμε ένα μη αναγώγιμο κλάσμα a/b. Ας διαιρέσουμε τον a με τον b και συμβολίσουμε με q_1 το πηλίκο και με r_2 το υπόλοιπο:

$$a = q_1 b + r_2, \;\; r_2 < b$$

Ας διαιρέσουμε τώρα τον b με τον r_2, συμβολίζοντας με q_2 το πηλίκο και με r_3 το υπόλοιπο. Τότε

$$b = q_2 r_2 + r_3, \;\; r_3 < r_2$$

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία θα πάρουμε

$$\begin{aligned} r_2 &= q_3 r_3 + r_4, \;\; r_4 < r_3 \\ r_3 &= q_4 r_4 + r_5, \;\; r_5 < r_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Οι ποσότητες $q_1, q_2, \dots, q_n$ καλούνται *μερικά πηλίκα* και η διαδικασία των υπολογισμών τους που μόλις περιγράφηκε είναι γνωστή ως *Ευκλείδειος αλγόριθμος*. Όπως σημειώθηκε παραπάνω, τα υπόλοιπα $r_2, r_3, \dots, r_n$ ικανοποιούν τις ανισότητες

$$b > r_2 > r_3 > r_4 > \cdots \geq 0 \tag{5}$$

και έτσι δημιουργείται μία φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών αριθμών.

Εφόσον το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων που δεν υπερβαίνουν τον b δε μπορεί να είναι άπειρος, το υπόλοιπο r θα μηδενιστεί σε κάποιο βήμα και η διαδικασία σχηματισμού των μερικών πηλίκων θα τερματιστεί. Έστω r_n το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο της ακολουθίας (5).Τότε $r_{n+1} = 0$ και ο Ευκλείδειος αλγόριθμος για τους αριθμούς a και b θα είναι

$$\left.\begin{aligned} a &= q_1 b + r_2 \\ b &= q_2 r_2 + r_3 \\ r_2 &= q_3 r_3 + r_4 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} &= q_n r_n \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Ας γράψουμε αυτές τις ισότητες στην παρακάτω μορφή

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{b} &= q_1 + \frac{1}{b/r_2} \\ \frac{b}{r_2} &= q_2 + \frac{1}{r_2/r_3} \\ \frac{r_2}{r_3} &= q_3 + \frac{1}{r_3/r_4} \\ &\vdots \\ \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= q_{n-1} + \frac{1}{r_{n-1}/r_n} \\ \frac{r_{n-1}}{r_n} &= q_n \end{aligned}\right\}$$

Αντικαθιστώντας το ισοδύναμο του b/r_2 από τη δεύτερη ισότητα στην πρώτη ισότητα, το ισοδύναμο του r_2/r_3 από την τρίτη ισότητα στη δεύτερη ισότητα, κ.ο.κ., παίρνουμε την επέκταση του a/b ως ένα συνεχές κλάσμα:

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{\ddots}{+ \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}$$

Η έκφραση που προέρχεται παραλείποντας όλους τους όρους του συνεχούς κλάσματος που ξεκινούν με συγκεκριμένο όρο ονομάζεται *συγκλίνων*. Ο πρώτος συγκλίνων δ_1 αποκτιέται παραλείποντας όλους τους όρους που ξεκινούν με $1/q_2$:

$$\delta_1 = q_1 < \frac{a}{b}$$

ο δεύτερος συγκλίνων δ_2 αποκτιέται παραλείποντας όλους τους όρους που ξεκινούν με $1/q_3$:

$$\delta_2 = q_1 + \frac{1}{q_2} > \frac{a}{b}$$

Ομοίως,

$$\delta_3 = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}} < \frac{a}{b}$$

$$\delta_4 = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4}}} > \frac{a}{b}$$

$$\vdots$$

Εξαιτίας της μεθόδου σχηματισμού, οι συγκλίνοντες ικανοποιούν τις παρακάτω ανισότητες:

$$\delta_1 < \delta_3 < \cdots < \delta_{2m-1} < \cdots < \frac{a}{b}$$

$$\delta_2 > \delta_4 > \cdots > \delta_{2m} > \cdots > \frac{a}{b}$$

Ας γράψουμε τον k-οστό συγκλίνοντα δ_k ως κλάσμα:

$$\delta_k = \frac{P_k}{Q_k} \quad (1 \le k \le n)$$

και ας βρούμε τον κανόνα σχηματισμού των αριθμητών και παρονομαστών των συγκλινόντων. Ξεκινάμε με τους πρώτους τρεις συγκλίνοντες δ_1, δ_2, και δ_3:

$$\delta_1 = q_1 = \frac{q_1}{1} = \frac{P_1}{Q_1}; \quad P_1 = q_1, \ Q_1 = 1$$

$$\delta_2 = q_1 + \frac{1}{q_2} = \frac{q_1 q_2 + 1}{q_2} = \frac{P_2}{Q_2}; \quad P_2 = q_1 q_2 + 1, \ Q_2 = q_2$$

$$\delta_3 = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}} = \frac{q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3}{q_2 q_3 + 1} = \frac{P_3}{Q_3}; \quad P_3 = q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3, \ Q_2 = q_2 q_3 + 1$$

Από αυτές παίρνουμε

$$P_3 = P_2 q_3 + P_1, \ Q_3 = Q_2 q_3 + Q_1$$

Εφαρμόζοντας μαθηματική επαγωγή μπορούμε να αποδείξουμε ότι παρόμοιες σχέσεις

$$P_k = P_{k-1} q_k + P_{k-2}, \ Q_k = Q_{k-1} q_k + Q_{k-2} \tag{7}$$

ισχύουν για όλα τα $k \ge 3$.

Πράγματι· έστω ότι οι ισότητες (7) ισχύουν για κάποιο $k > 3$. Από τον ορισμό των συγκλινόντων συνεπάγεται άμεσα ότι, αν μέσα στην έκφραση του δ_k το q_k αντικατασταθεί με το $q_k + 1/q_{k+1}$, τότε το δ_k γίνεται δ_{k+1}. Από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\delta_k = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_{k-1} q_k + P_{k-2}}{Q_{k-1} q_k + Q_{k-2}}$$

Η αντικατάσταση του q_k με το $q_k + 1/q_{k+1}$ στην έκφραση του δ_k αλλάζει την προηγούμενη σε δ_{k+1} έτσι ώστε

$$\delta_{k+1} = \frac{P_{k-1}\left(q_k + \frac{1}{q_{k+1}}\right) + P_{k-2}}{Q_{k-1}\left(q_k + \frac{1}{q_{k+1}}\right) + Q_{k-2}} = \frac{P_k + \frac{1}{q_{k+1}} P_{k-1}}{Q_k + \frac{1}{q_{k+1}} Q_{k-1}} = \frac{P_k q_{k+1} + P_{k-1}}{Q_k q_{k+1} + Q_{k-1}}$$

Έτσι, με $\delta_{k+1} = P_{k+1}/Q_{k+1}$, έχουμε

$$P_{k+1} = P_k q_{k+1} + P_{k-1}, \ Q_{k+1} = Q_k q_{k+1} + Q_{k-1}$$

Άρα, αν οι ισότητες (7) ισχύουν για κάποιο $k > 3$, τότε θα ισχύουν και για $k + 1$. Για $k = 3$ οι ισότητες (7) όντως ισχύουν, οπότε ισχύουν για κάθε $k \ge 3$.

Ας δείξουμε τώρα ότι η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών συγκλινόντων $\delta_k - \delta_{k-1}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\delta_k - \delta_{k-1} = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}} \quad (k > 1) \tag{8}$$

Πράγματι

$$\delta_k - \delta_{k-1} = \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{P_k Q_{k-1} - Q_k P_{k-1}}{Q_k Q_{k-1}}$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους (7) μπορούμε να μετασχηματίσουμε τον αριθμητή αυτού του κλάσματος

$$P_k Q_{k-1} - Q_k P_{k-1} = (P_{k-1} q_k + P_{k-2}) Q_{k-1} - (Q_{k-1} q_k + Q_{k-2}) P_{k-1} = -(P_{k-1} Q_{k-2} - Q_{k-1} P_{k-2})$$

Η έκφραση μέσα στις παρενθέσεις προήλθε από την αρχική αντικαθιστώντας το k με $k-1$.

Επαναλαμβάνοντας παρόμοιους μετασχηματισμούς παίρνουμε μία αλυσίδα από ισότητες

$$\begin{aligned} P_k Q_{k-1} - Q_k P_{k-1} &= (-1)(P_{k-1} Q_{k-2} - Q_{k-1} P_{k-2}) = \\ &= (-1)^2 (P_{k-2} Q_{k-3} - Q_{k-2} P_{k-3}) = \dots \\ \dots &= (-1)^{k-2} (P_2 Q_1 - Q_2 P_1) = \\ &= (-1)^{k-2} (q_1 q_2 + 1 - q_2 q_1) = (-1)^{k-2} \end{aligned}$$

από όπου έπεται ότι

$$\delta_k - \delta_{k-1} = \frac{P_k Q_{k-1} - Q_k P_{k-1}}{Q_k Q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-2}}{Q_k Q_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}}$$

Αν η επέκταση του a/b σε συνεχές κλάσμα περιέχει n όρους, τότε ο n-οστός συγκλίνων δ_n θα ταυτιστεί με το a/b. Εφαρμόζοντας την ισότητα (8) για $n = k$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \delta_n - \delta_{n-1} &= \frac{(-1)^n}{Q_n Q_{n-1}} \\ \frac{a}{b} - \delta_{n-1} &= \frac{(-1)^n}{b Q_{n-1}} \end{aligned} \qquad (9)$$

Επιστρέφουμε τώρα στη λύση της εξίσωσης

$$ax + by + c = 0, \ (a, b) = 1 \qquad (10)$$

Ξαναγράφουμε την σχέση (9) στη μορφή

$$\frac{a}{b} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{b Q_{n-1}}$$

Ανάγοντας τα κλάσματα σε κοινό παρονομαστή και απλοποιώντας τα, παίρνουμε

$$\begin{aligned} a Q_{n-1} - b P_{n-1} &= (-1)^n \\ a Q_{n-1} + b(-P_{n-1}) + (-1)^{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

Ας πολλαπλασιάσουμε αυτή την έκφραση με $(-1)^{n-1} c$. Τότε

$$a[(-1)^{n-1} c Q_{n-1}] + b[(-1)^n c P_{n-1}] + c = 0$$

Έτσι, *το ζεύγος των αριθμών* $[x_0, y_0]$*, τέτοια ώστε*

$$x_0 = (-1)^{n-1} c Q_{n-1}, \ y_0 = (-1)^n c P_{n-1} \qquad (11)$$

είναι λύση της εξίσωσης (10)· σύμφωνα με το Θεώρημα Ι, όλες οι λύσεις αυτής της εξίσωσης είναι της μορφής

$$x = (-1)^{n-1} c Q_{n-1} - bt, \ y = (-1)^n c P_{n-1} + at \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Αυτό λύνει πλήρως το πρόβλημα προσδιορισμού όλων των ακέραιων λύσεων των γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.

1.3. Εξισώσεις δευτέρου βαθμού με τρεις αγνώστους (παραδείγματα)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Έστω η εξίσωση

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (12)$$

Από γεωμετρική άποψη, ο προσδιορισμός των ακέραιων λύσεων αυτής της εξίσωσης επαφίεται στην εύρεση όλων των Πυθαγόρειων τριγώνων, δηλαδή όλων των ορθογωνίων τριγώνων των οποίων οι κάθετες πλευρές x, y και η υποτείνουσα z αντιπροσωπεύονται με ακέραιους.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι x και y πρέπει να είναι πρώτοι μεταξύ τους, δηλαδή $(x, y) = 1$, και τουλάχιστον ένας απ' τους δύο περιττός αριθμός.

Ας συμβολίσουμε το Μ.Κ.Δ. των αριθμών x και y ως d: $d = (x, y)$. Τότε

$$x = x_1 d, \ y = y_1 d$$

και η εξίσωση (12) γίνεται

$$x_1^2 d^2 + y_1^2 d^2 = z^2$$

Αυτό σημαίνει ότι ο z^2 είναι διαιρετός με τον d^2, και έτσι ο z είναι πολλαπλάσιο του d: $z = z_1 d$.

Η εξίσωση (12) μπορεί τώρα να γραφτεί ως

$$x_1^2 d^2 + y_1^2 d^2 = z_1^2 d^2$$

Απαλείφοντας τον d^2 παίρνουμε

$$x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$$

Αυτή είναι μία εξίσωση του ίδιου τύπου με την αρχική (12), μόνο που οι x_1 και y_1 δεν έχουν κοινούς διαιρέτες (εκτός βεβαίως από τη μονάδα). Οπότε όταν λύνουμε την εξίσωση (12) μπορούμε να περιοριστούμε στην περίπτωση όπου οι x και y είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(x, y) = 1$. Τότε τουλάχιστον μία από τις ποσότητες, x και y (έστω x), είναι περιττός. Μεταφέροντας τον y^2 στο δεξί μέλος της εξίσωσης (12) παίρνουμε

$$x^2 = z^2 - y^2, \;\; x^2 = (z+y)(z-y) \tag{13}$$

Θα συμβολίσουμε το Μ.Κ.Δ. των εκφράσεων $z + y$ και $z - y$ ως d_1. Τότε

$$z + y = ad_1, \;\; z - y = bd_1 \tag{14}$$

όπου οι a και b είναι πρώτοι μεταξύ τους. Αντικαθιστώντας τώρα τις τιμές των $z + y$ και $z - y$ μέσα στην (13) παίρνουμε

$$x^2 = abd_1^2$$

Επειδή οι a και b δεν έχουν κοινούς διαιρέτες, η τελευταία ισότητα είναι πιθανή μόνο αν αυτοί οι αριθμοί είναι τέλεια τετράγωνα:

$$a = u^2, \;\; b = v^2$$

Αλλά τότε

$$x^2 = u^2 v^2 d_1^2$$

και

$$x = uvd_1 \tag{15}$$

Προσδιορίζουμε τώρα τους y και z από τις ισότητες (14). Προσθέτοντας αυτές μεταξύ τους παίρνουμε

$$2z = ad_1 + bd_1 = u^2 d_1 + v^2 d_1; \;\; z = \frac{u^2 + v^2}{2} d_1 \tag{16}$$

ενώ αφαιρώντας τη δεύτερη των εξισώσεων (14) από την πρώτη παίρνουμε

$$2y = ad_1 - bd_1 = u^2 d_1 - v^2 d_1; \;\; y = \frac{u^2 - v^2}{2} d_1 \tag{17}$$

Από την (15) έπεται ότι, με τον x περιττό, οι u, v και d_1 είναι επίσης περιττοί. Επίσης, $d_1 = 1$, αφού διαφορετικά από τις εξισώσεις

$$x = uvd_1, \;\; y = \frac{u^2 - v^2}{2} d_1$$

θα επακολουθούσε ότι οι x και y έχουν κοινό διαιρέτη $d_1 \neq 1$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι είναι πρώτοι μεταξύ τους. Οι αριθμοί u και v συνδέονται με τους πρώτους μεταξύ τους αριθμούς a και b μέσω των εξισώσεων

$$a = u^2, \;\; b = v^2$$

οπότε είναι και οι ίδιοι πρώτοι μεταξύ τους· $v < u$ καθώς $b < a$, όπως φαίνεται από τις (14).

Αντικαθιστώντας $d_1 = 1$ στις ισότητες (15)-(17) παίρνουμε τους *τύπους*

$$x = uv, \;\; y = \frac{u^2 - v^2}{2}, \;\; z = \frac{u^2 + v^2}{2} \tag{18}$$

που, με τους ακέραιους u και v $(v < u)$ περιττούς και πρώτους μεταξύ τους, δίνουν όλες τις τριάδες θετικών ακέραιων x, y, z οι οποίοι δεν έχουν κοινούς διαιρέτες και ικανοποιούν την εξίσωση (12). Με αντικατάσταση των αντίστοιχων εκφράσεων για τους x, y και z στην εξίσωση (12), είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί ότι για τυχαίους u και v οι αριθμοί (18) ικανοποιούν αυτήν την εξίσωση.

Για τις αρχικές τιμές των πρώτων μεταξύ τους u και v, οι τύποι (18) δίνουν τις παρακάτω πολύ συχνές ισότητες

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad (u = 1, v = 3)$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2 \quad (u = 1, v = 5)$$
$$15^2 + 8^2 = 17^2 \quad (u = 3, v = 5)$$

Όπως σημειώσαμε παραπάνω, οι τύποι (18) δίνουν μόνο εκείνες τις λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 + y^2 = z^2$$

στην οποία οι αριθμοί x, y και z δεν έχουν κοινούς διαιρέτες. Όλες οι υπόλοιπες ακέραιες λύσεις αυτής της εξίσωσης μπορούν να προκύψουν πολλαπλασιάζοντας τις λύσεις (18) με έναν τυχαίο κοινό παράγοντα d. Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό όλων των λύσεων της εξίσωσης (12) μπορεί επίσης να εφαρμοστεί για την εύρεση όλων των λύσεων άλλων εξισώσεων παρόμοιου τύπου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να βρεθούν όλες οι θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 + 2y^2 = z^2 \tag{19}$$

αν οι αριθμοί x, y και z είναι πρώτοι μεταξύ τους κατά ζεύγη.

Να σημειωθεί ότι αν η τριάδα x, y, z είναι λύση της εξίσωσης (19) και οι αριθμοί x, y και z δεν έχουν κοινούς διαιρέτες (εκτός βεβαίως από τη μονάδα), τότε είναι και πρώτοι μεταξύ τους κατά ζεύγη. Πράγματι, έστω x και y πολλαπλάσια του πρώτου αριθμού p $(p > 2)$. Τότε από την ισότητα

$$\left(\frac{x}{p}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{p}\right)^2 = \left(\frac{z}{p}\right)^2$$

με ακέραιο το αριστερό μέλος έπεται ότι ο z είναι πολλαπλάσιο του p. Το ίδιο ισχύει και αν οι x και z, ή οι y και z είναι πολλαπλάσια του p.

Επισημαίνεται ότι ο x πρέπει να είναι περιττός αριθμός ώστε ο Μ.Κ.Δ. των x, y και z να είναι ίσος με τη μονάδα. Γιατί εάν ο x είναι άρτιος, τότε το αριστερό μέλος της εξίσωσης (19) είναι άρτιος αριθμός οπότε και ο z είναι επίσης άρτιος. Αλλά τότε οι x^2 και z^2 είναι πολλαπλάσια του 4. Από αυτό έπεται ότι ο $2y^2$ είναι διαιρετός με το 4, με άλλα λόγια ότι ο y πρέπει επίσης να είναι άρτιος αριθμός. Άρα, αν ο x είναι άρτιος τότε και οι τρεις αριθμοί x, y, z πρέπει να είναι άρτιοι. Άρα, σε λύση που δεν έχει κοινό διαιρέτη διαφορετικό από τη μονάδα ο x πρέπει να είναι περιττός. Από αυτό άμεσα έπεται ότι ο z πρέπει να είναι άρτιος. Μεταφέροντας τον x^2 στο δεξί μέλος της εξίσωσης (19) παίρνουμε

$$2y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$$

Αλλά οι $z + x$ και $z - x$ έχουν κοινό διαιρέτη το 2. Έστω d ο Μ.Κ.Δ. τους. Τότε

$$z + x = kd, \;\; z - x = ld$$

όπου οι k και l είναι ακέραιοι. Προσθέτοντας κατά μέλη αυτές τις ισότητες, και μετά αφαιρώντας τη δεύτερη από την πρώτη καταλήγουμε στις

$$2z = d(k + l), \;\; 2x = d(k - l)$$

Αλλά οι x και z είναι περιττοί και πρώτοι μεταξύ τους. Επομένως ο Μ.Κ.Δ. των $2x$ και $2z$ πρέπει να ισούται με το 2, ήτοι $d = 2$. Άρα, είτε ο $(z + x)/2$ είναι περιττός ή ο $(z - x)/2$ είναι περιττός. Επομένως είτε οι $z + x$ και $(z - x)/2$ είναι πρώτοι μεταξύ τους ή οι $(z + x)/2$ και $z - x$ είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Στην πρώτη περίπτωση η ισότητα

$$(z + x)\frac{z - x}{2} = y^2$$

οδηγεί στις

$$z + x = n^2, \;\; z - x = 2m^2$$

ενώ στη δεύτερη περίπτωση από την

$$\frac{z + x}{2}(z - x) = y^2$$

έπονται οι

$$z + x = 2m^2, \;\; z - x = n^2$$

όπου οι n και m είναι θετικοί ακέραιοι και ο m είναι περιττός. Λύνοντας αυτά τα δύο συστήματα εξισώσεων ως προς x και z, και βρίσκοντας το y, προκύπτουν είτε οι

$$z = \frac{1}{2}(n^2 + 2m^2), \;\; x = \frac{1}{2}(n^2 - 2m^2), \;\; y = mn$$

ή οι

$$z = \frac{1}{2}(n^2 + 2m^2), \;\; x = \frac{1}{2}(2m^2 - n^2), \;\; y = mn$$

αντίστοιχα, όπου ο m είναι περιττός. Συνδυάζοντας αυτές τις δύο εκφράσεις καταλήγουμε στους γενικούς τύπους

$$x = \pm\frac{1}{2}(2m^2 - n^2), \;\; y = mn, \;\; z = \frac{1}{2}(n^2 + 2m^2) \tag{19'}$$

όπου ο m είναι περιττός. Αλλά για να είναι οι x και z ακέραιοι, ο n πρέπει να είναι άρτιος. Θέτοντας $n = 2b$ και $m = a$, προκύπτουν τελικά *γενικοί τύποι οι οποίοι δίνουν όλες τις τριάδες θετικών ακέραιων* x, y, z *οι οποίοι δεν έχουν κοινούς διαιρέτες μεγαλύτερους της μονάδας και ικανοποιούν την εξίσωση (19)*:

$$x = \pm(a^2 - 2b^2), \;\; y = 2ab, \;\; z = a^2 + 2b^2$$

όπου οι a *και* b *είναι θετικοί ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους και ο* a *περιττός*. Άλλοι περιορισμοί δεν επιβάλλονται για τους a και b εκτός του ότι ο x θα πρέπει να είναι θετικός. Οι τύποι (19') όντως δίνουν όλες τις ακέραιες λύσεις των πρώτων μεταξύ τους x, y και z, εφόσον από τη μία πλευρά έχουμε αποδείξει ότι σ' αυτήν την περίπτωση οι x, y, z πρέπει να αναπαρίστανται από τους τύπους (19'), ενώ από την άλλη κάθε ζεύγος αριθμών a και b που συμμορφώνονται στους προαναφερθέντες περιορισμούς δίνει τέτοιους πρώτους μεταξύ τους αριθμούς x, y, z ώστε να αποτελούν λύση της εξίσωσης (19).

1.4. Εξισώσεις του τύπου $x^2 - Ay^2 = 1$. Εύρεση όλων των λύσεων αυτής της εξίσωσης

Τώρα ερχόμαστε στις ακέραιες λύσεις των εξισώσεων δευτέρου βαθμού με δύο αγνώστους του τύπου

$$x^2 - Ay^2 = 1 \tag{20}$$

όπου A θετικός ακέραιος που δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Για να βρούμε μία προσέγγιση της λύσης τέτοιων εξισώσεων, ας επεκτείνουμε τους άρρητους αριθμούς, όπως τον $\sqrt{A}$, σε συνεχή κλάσματα. Από τον Ευκλείδειο αλγόριθμο προκύπτει ότι ένας οποιοσδήποτε ρητός αριθμός μπορεί να επεκταθεί σε συνεχές κλάσμα μέσω ενός πεπερασμένου αριθμού βημάτων. Για άρρητους αριθμούς η κατάσταση είναι διαφορετική: η επέκτασή τους σε συνεχή κλάσματα είναι μη-πεπερασμένη.

Ας βρούμε, για παράδειγμα, την επέκταση σε συνεχές κλάσμα του άρρητου αριθμού $\sqrt{2}$. Θεωρήστε την προφανή ιδιότητα:

$$\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right) = 1$$

ή

$$\sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\sqrt{2}-1 = \frac{1}{2+\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

Αντικαθιστώντας τη διαφορά $\sqrt{2}-1$ στον παρονομαστή της τελευταίας ταυτότητας με την έκφραση

$$\frac{1}{2+\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

που είναι προφανώς ίση με αυτήν, παίρνουμε

$$\sqrt{2}-1 = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\left(\sqrt{2}-1\right)}}; \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\left(\sqrt{2}-1\right)}}$$

Αντικαθιστούμε ξανά τον όρο εντός της παρένθεσης, στον παρονομαστή της τελευταίας ισότητας, με το ισοδύναμο κλάσμα από την ίδια ταυτότητα. Τότε

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\left(\sqrt{2}-1\right)}}}$$

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία, καταλήγουμε στην ακόλουθη επέκταση του $\sqrt{2}$ σε μη-πεπερασμένο συνεχές κλάσμα

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ddots}}}} \tag{21}$$

Σημειώστε ότι η μέθοδος της επέκτασης που βασίζεται σε ταυτότητες του τύπου

$$\left(\sqrt{m^2+1}-m\right)\left(\sqrt{m^2+1}+m\right) = 1$$

δεν είναι εφαρμόσιμη σε όλους τους άρρητους αριθμούς $\sqrt{A}$. Μπορεί προφανώς να χρησιμοποιηθεί όταν ο ακέραιος A μπορεί να εκφραστεί ως $A = m^2 + 1$ όπου ο m είναι ένας μη-μηδενικός ακέραιος. (Συγκεκριμένα, η περίπτωση $m = 1$ οδηγεί στην επέκταση για $A = 2$, η $m = 2$ αντιστοιχεί στο $A = 5$, κ.ο.κ.). Ωστόσο, συγκριτικά απλές μέθοδοι υπάρχουν και για την γενική περίπτωση επέκτασης του $\sqrt{A}$ σε συνεχή κλάσματα.

Όπως και πριν, στην περίπτωση των πεπερασμένων συνεχών κλασμάτων, θα διαμορφώσουμε για τα μη-πεπερασμένα συνεχή κλάσματα (21) μία ακολουθία συγκλινόντων $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= 1 < \sqrt{2} \\
\delta_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > \sqrt{2} \\
\delta_3 &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5} < \sqrt{2} \\
\delta_4 &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12} > \sqrt{2} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{22}$$

κ.ο.κ.

Από τον τρόπο που οι συγκλίνοντες αυτοί διαμορφώθηκαν, έπεται ότι

$$\delta_1 < \delta_3 < \cdots < \sqrt{2}$$
$$\delta_2 > \delta_4 > \cdots > \sqrt{2}$$

Γενικά, αν μας δόθηκε η επέκταση σε συνεχές κλάσμα ενός άρρητου αριθμού α

$$\alpha = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots}}$$

τότε οι συγκλίνοντες ικανοποιούν τις ανισότητες

$$\delta_1 < \delta_3 < \cdots < \delta_{2m+1} < \cdots < \alpha < \cdots < \delta_{2m} < \cdots < \delta_4 < \delta_2 \tag{23}$$

Ας γράψουμε τον συγκλίνοντα δ_k ως

$$\delta_k = \frac{P_k}{Q_k}$$

Οι εκφράσεις (7)

$$P_k = P_{k-1}q_k + P_{k-2}, \ \ Q_k = Q_{k-1}q_k + Q_{k-2}$$

που προέκυψαν στην ενότητα 1.2 για την περίπτωση του πεπερασμένου συνεχούς κλάσματος είναι έγκυρες και για τα μη-πεπερασμένα κλάσματα, αφού στην παραγωγή των (7) δεν κάναμε χρήση του γεγονότος ότι τα συνεχή κλάσματα ήταν πεπερασμένα.
Συνεπώς η σχέση (8) μεταξύ δύο διαδοχικών συγκλινόντων

$$\delta_k - \delta_{k-1} = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}} \tag{24}$$

παραμένει επίσης έγκυρη.

Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι $k_1 = 3$ και $k_2 = 4$ και επεκτείνουμε τον $\sqrt{2}$ σε συνεχές κλάσμα. Οι ισότητες (22) θα οδηγήσουν στις

$$\delta_3 - \delta_2 = \frac{7}{5} - \frac{3}{2} = \frac{-1}{10}$$
$$\delta_4 - \delta_3 = \frac{17}{12} - \frac{7}{5} = \frac{1}{60}$$

οι οποίες συμπίπτουν με τα αποτελέσματα που δίνει ο τύπος (24).

Υπολογίζουμε τον τύπο (24) για δείκτη $2k$

$$\delta_{2k} - \delta_{2k+1} = -(\delta_{2k+1} - \delta_{2k}) = -\frac{(-1)^{2k+1}}{Q_{2k+1}Q_{2k}} = \frac{1}{Q_{2k+1}Q_{2k}}$$

Θα αποδείξουμε τώρα την εγκυρότητα της ανισότητας

$$0 < P_{2k} - \alpha Q_{2k} < \frac{1}{Q_{2k+1}} \tag{25}$$

Η αριστερή ανισότητα είναι προφανής, καθώς, σύμφωνα με τις ανισότητες (23),

$$\alpha < \delta_{2k} = \frac{P_{2k}}{Q_{2k}}; \ \ \alpha Q_{2k} < P_{2k}; \ \ 0 < P_{2k} - \alpha Q_{2k}$$

Η επαγωγή της άλλης ανισότητας (25) είναι και αυτή μια σχετικά απλή διαδικασία. Από την (23),

$$\delta_{2k+1} < \alpha < \delta_{2k}$$

οπότε

$$\delta_{2k} - \alpha < \delta_{2k} - \delta_{2k+1} = \frac{1}{Q_{2k}Q_{2k+1}}$$

Αντικαθιστώντας το δ_{2k} με P_{2k}/Q_{2k}, παίρνουμε

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} - \alpha < \frac{1}{Q_{2k}Q_{2k+1}}$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτή την ανισότητα με Q_{2k} καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα

$$P_{2k} - \alpha Q_{2k} < \frac{1}{Q_{2k+1}}$$

Εφαρμόζουμε τώρα τα αποτελέσματα αυτά στη λύση της εξίσωσης

$$x^2 - 2y^2 = 1 \tag{26}$$

Ας μετασχηματίσουμε το αριστερό μέλος αυτής της εξίσωσης:

$$x^2 - 2y^2 = \left(x - \sqrt{2}y\right)\left(x + \sqrt{2}y\right)$$

και υποθέσουμε $x = P_{2k}$ και $y = Q_{2k}$, όπου οι P_{2k} και Q_{2k} είναι ο αριθμητής και ο παρονομαστής, αντίστοιχα, του ισοδύναμου συγκλίνοντα στην επέκταση του $\sqrt{2}$. Τότε

$$P_{2k}^2 - 2Q_{2k}^2 = \left(P_{2k} - \sqrt{2}Q_{2k}\right)\left(P_{2k} + \sqrt{2}Q_{2k}\right) \tag{27}$$

Το αριστερό μέλος αυτής της εξίσωσης, και κατά συνέπεια το δεξί μέλος επίσης, είναι ένας ακέραιος. Θα δείξουμε ότι αυτός ο ακέραιος είναι μεγαλύτερος από το μηδέν αλλά μικρότερος από το δύο και επομένως είναι ίσος με τη μονάδα. Για να το κάνουμε αυτό γράφουμε την ανισότητα (25) για $\alpha = \sqrt{2}$:

$$0 < P_{2k} - \sqrt{2}Q_{2k} < \frac{1}{Q_{2k+1}} \tag{28}$$

Από αυτό είναι ξεκάθαρο ότι και οι δύο παράγοντες του δεξιού μέλους της (27) είναι θετικοί, και επομένως

$$P_{2k}^2 - 2Q_{2k}^2 > 0$$

Από την άλλη πλευρά,

$$P_{2k} - \sqrt{2}Q_{2k} < \frac{1}{Q_{2k+1}} = \frac{1}{Q_{2k}q_{2k+1} + Q_{2k-1}} = \frac{1}{2Q_{2k} + Q_{2k-1}} < \frac{1}{2Q_{2k}}$$

Αλλά, εξαιτίας των ανισοτήτων (23),

$$\delta_{2k} = \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} > \sqrt{2}$$

Συνεπώς

$$\sqrt{2}Q_{2k} < P_{2k}$$
$$P_{2k} + \sqrt{2}Q_{2k} < 2P_{2k}$$

και οι παράγοντες στο δεξί μέλος της (27) ικανοποιούν τις ανισότητες

$$P_{2k} - \sqrt{2}Q_{2k} < \frac{1}{2Q_{2k}}$$
$$P_{2k} + \sqrt{2}Q_{2k} < 2P_{2k}$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτές τις ανισότητες κατά μέλη προκύπτει

$$P_{2k}^2 - 2Q_{2k}^2 < \frac{P_{2k}}{Q_{2k}}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα (28) καταλήγουμε στην

$$P_{2k}^2 - 2Q_{2k}^2 < \frac{\sqrt{2}Q_{2k} + \frac{1}{Q_{2k+1}}}{Q_{2k}} = \sqrt{2} + \frac{1}{Q_{2k}Q_{2k+1}}$$

Για κάθε $k \geq 1$

$$\frac{1}{Q_{2k}Q_{2k+1}} \leq \frac{1}{Q_2Q_3} = \frac{1}{10}$$

επομένως

$$P_{2k}^2 - 2Q_{2k}^2 < \sqrt{2} + \frac{1}{10} < 2$$

Άρα έχουμε αποδείξει ότι για κάθε $k \geq 1$ ο ακέραιος $P_{2k}^2 - 2Q_{2k}^2$ ικανοποιεί τις ανισότητες

$$0 < P_{2k}^2 - 2Q_{2k}^2 < 2$$

Συνεπώς

$$P_{2k}^2 - 2Q_{2k}^2 = 1$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $k \geq 1$ οι αριθμοί $x = P_{2k}$, $y = Q_{2k}$ δίνουν τη λύση της εξίσωσης

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

Δε γνωρίζουμε ακόμα κατά πόσο οι λύσεις της εξίσωσης (26) που βρέθηκαν παραπάνω είναι όλες οι λύσεις αυτής της εξίσωσης.

Το ερώτημα που τώρα φυσιολογικά απορρέει είναι πώς βρίσκουμε όλες τις λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 - Ay^2 = 1 \tag{29}$$

με ακέραιους x και y για ακέραιο A και άρρητο $\sqrt{A}$; Θα δείξουμε ότι μπορούμε να το πετύχουμε αυτό αν μπορέσουμε να βρούμε τουλάχιστον μία λύση της εξίσωσης (29). Όπως αποδείχτηκε απ' την εξίσωση (26) τέτοιες εξισώσεις έχουν όντως λύσεις. Έτσι θα θεωρήσουμε τώρα το πρόβλημα του πώς θα αποκτήσουμε όλες τις λύσεις τη εξίσωσης (29) από μία συγκεκριμένη λύση την οποία θα καλούμε κατώτατη ή ελάχιστη λύση αφήνοντας ανοικτή προς το παρόν την ερώτηση κατά πόσο η εξίσωση (29) έχει πάντα τουλάχιστον μία ακέραια λύση διαφορετική από την τετριμμένη $x = 1$ και $y = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση (29) δεν έχει μια μη-τετριμμένη λύση $[x_0, y_0]$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, και

$$x_0^2 - Ay_0^2 = 1 \tag{30}$$

(Θυμηθείτε ότι μία λύση είναι ένα ζεύγος ακέραιων $[x_0, y_0]$ που ικανοποιεί την εξίσωση.) Θα καλούμε αυτή τη λύση **ελαχιστοτική** (minimal) αν για $x = x_0$ και $y = y_0$ το διώνυμο $x + y\sqrt{A}$, $\sqrt{A} > 0$, παίρνει την ελάχιστη δυνατή τιμή μεταξύ όλων των πιθανών τιμών που μπορεί να πάρει όταν όλες οι πιθανές θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης (29) αντικαταστήσουν τα x και y. Για παράδειγμα, η ελάχιστη λύση της εξίσωσης (26) είναι $x = 3$, $y = 2$ επειδή για αυτές τις τιμές των x και y το διώνυμο $x + \sqrt{2}y$ παίρνει την τιμή $3 + 2\sqrt{2}$. Πράγματι, η εξίσωση (26) δεν επιδέχεται άλλες λύσεις με μικρούς θετικούς ακέραιους x και y· οι μικρότερες τιμές των x και y που συγκροτούν την επόμενη λύση είναι οι $x = 17$, $y = 12$ και είναι φανερό ότι ο $17 + 12\sqrt{2}$ είναι μεγαλύτερος από τον $3 + 2\sqrt{2}$. Σημειώστε ότι η εξίσωση (29) δεν έχει δύο ελαχιστοτικές λύσεις. Ας πάρουμε τις λύσεις $[x_1, y_1]$ και $[x_2, y_2]$ οι οποίες δίνουν την ίδια τιμή στο διώνυμο $x + y\sqrt{A}$. Τότε

$$x_1 + \sqrt{A}y_1 = x_2 + \sqrt{A}y_2 \tag{31}$$

Όμως, ο $\sqrt{A}$ είναι ένας άρρητος αριθμός ενώ οι x_1, y_1, x_2, y_2 είναι ακέραιοι. Άρα, όπως άμεσα έπεται από την εξίσωση (31)

$$x_1 - x_2 = (y_2 - y_1)\sqrt{A}$$

το οποίο είναι απίθανο επειδή ο $x_1 - x_2$ είναι ακέραιος και ο $(y_2 - y_1)\sqrt{A}$, ως ένα γινόμενο ενός ακέραιου και ενός άρρητου αριθμού, είναι άρρητος. Και γνωρίζουμε ότι ένας ακέραιος δε μπορεί να είναι άρρητος. Η αντίφαση εξαφανίζεται αν $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$, δηλαδή αν πάρουμε όχι δύο διαφορετικές λύσεις, αλλά μία. Άρα, αν η ελάχιστη λύση όντως υπάρχει, τότε είναι μοναδική.

Παρατηρήστε τώρα άλλη μία πολύ σημαντική ιδιότητα των λύσεων της εξίσωσης (29). Έστω $[x_1, y_1]$ μία λύση της εξίσωσης. Τότε

$$x_1^2 - Ay_1^2 = 1$$

ή

$$\left(x_1 + \sqrt{A}y_1\right)\left(x_1 - \sqrt{A}y_1\right) = 1 \tag{32}$$

Τώρα υψώστε και τους δύο όρους της ισότητας (32) σε δύναμη με εκθέτη τον θετικό ακέραιο n:

$$\left(x_1 + \sqrt{A}y_1\right)^n\left(x_1 - \sqrt{A}y_1\right)^n = 1 \tag{33}$$

Υψώνοντας τον παράγοντα του αριστερού μέλους στη δύναμη του n σύμφωνα με το θεώρημα του διωνύμου, παίρνουμε

$$\left(x_1 + \sqrt{A}y_1\right)^n = x_1^n + nx_1^{n-1}\sqrt{A}y_1 + \frac{n(n-1)}{2}x_1^{n-2}Ay_1^2 + \cdots + \left(\sqrt{A}\right)^n y_1^n = x_n + \sqrt{A}y_n \tag{34}$$

όπου οι x_n και y_n θα είναι ακέραιοι αφού ο πρώτος όρος, ο τρίτος όρος και, γενικά, οι περιττοί όροι της διωνυμικής επέκτασης είναι ακέραιοι ενώ οι άρτιοι όροι είναι ακέραιοι πολλαπλασιαζόμενοι με τον $\sqrt{A}$. Συλλέγοντας χωριστά τους περιττούς και τους άρτιους όρους της επέκτασης αποκτούμε την (34). Θα αποδείξουμε τώρα ότι οι αριθμοί x_n και y_n θα είναι επίσης μία λύση της εξίσωσης (29). Η απόδειξη είναι απλή: αλλάζοντας το πρόσημο του $\sqrt{A}$ στην ισότητα (34), αποκτούμε την

$$\left(x_1 - \sqrt{A}y_1\right)^n = x_n - \sqrt{A}y_n \tag{35}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (34) και (35) κατά μέλη και χρησιμοποιώντας την έκφραση (33) έχουμε τελικά την

$$\left(x_1 + \sqrt{A}y_1\right)^n\left(x_1 - \sqrt{A}y_1\right)^n = \left(x_n + \sqrt{A}y_n\right)\left(x_n - \sqrt{A}y_n\right) = x_n^2 - Ay_n^2 = 1 \tag{36}$$

ή, με άλλα λόγια, η $[x_n, y_n]$ είναι επίσης μία λύση της (29).

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε το βασικό θεώρημα που αφορά τις λύσεις της εξίσωσης (29):

Θεώρημα ΙΙ. Κάθε λύση της εξίσωσης (29)

$$x^2 - Ay^2 = 1$$

με θετικό ακέραιο A και άρρητο $\sqrt{A}$ είναι της μορφής $[\pm x_n, \pm y_n]$, όπου

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2}\left[\left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right)^n + \left(x_0 - y_0\sqrt{A}\right)^n\right] \\ y_n = \dfrac{1}{2\sqrt{A}}\left[\left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right)^n - \left(x_0 - y_0\sqrt{A}\right)^n\right] \end{cases} \tag{37}$$

και $[x_0, y_0]$ είναι η ελάχιστη λύση της εξίσωσης.

Απόδειξη.

Υποθέστε το αντίθετο, δηλαδή, ότι υπάρχει μία θετική ακέραια λύση $[x', y']$ της εξίσωσης (29) τέτοια ώστε η ισότητα

$$x' + \sqrt{A}y' = \left(x_0 + \sqrt{A}y_0\right)^n \tag{38}$$

δεν υφίσταται για κάθε ακέραιο αριθμό n. Θεωρήστε μία ακολουθία αριθμών

$$x_0 + \sqrt{A}y_0, \left(x_0 + \sqrt{A}y_0\right)^2, \left(x_0 + \sqrt{A}y_0\right)^3, \ldots$$

Είναι ακολουθία θετικών και απείρως αυξανόμενων αριθμών, αφού $x_0 \geq 1$, $y_0 \geq 1$ και $x_0 + \sqrt{A}y_0 > 1$.

Εξ ορισμού της $[x_0, y_0]$ ως ελάχιστης λύσης,

$$x' + \sqrt{A}y' > x_0 + \sqrt{A}y_0$$

πάντα υπάρχει ένας ακέραιος $n \geq 1$ τέτοιος ώστε

$$\left(x_0 + \sqrt{A}y_0\right)^n < x' + \sqrt{A}y' < \left(x_0 + \sqrt{A}y_0\right)^{n+1} \tag{39}$$

Αλλά $x_0 - y_0\sqrt{A} > 0$ επειδή

$$\left(x_0 + \sqrt{A}y_0\right)\left(x_0 - \sqrt{A}y_0\right) = x_0^2 - Ay_0^2 = 1 > 0$$

Συνεπώς, όταν όλοι οι όροι των ανισοτήτων (39) πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο θετικό αριθμό $\left(x_0 - \sqrt{A}y_0\right)^n$ οι τελεστές ανισότητας παραμένουν, και θα έχουμε

$$\left(x_0 + \sqrt{A}y_0\right)^n\left(x_0 - \sqrt{A}y_0\right)^n < \left(x' + \sqrt{A}y'\right)\left(x_0 - \sqrt{A}y_0\right)^n < \left(x_0 + \sqrt{A}y_0\right)^{n+1}\left(x_0 - \sqrt{A}y_0\right)^n \tag{40}$$

Εφόσον

$$\left(x_0 + \sqrt{A}y_0\right)^n\left(x_0 - \sqrt{A}y_0\right)^n = (x_0^2 - Ay_0^2)^n = 1 \tag{41}$$

θα έχουμε

$$\left(x_0 + \sqrt{A}y_0\right)^{n+1}\left(x_0 - \sqrt{A}y_0\right)^n = x_0 + \sqrt{A}y_0 \tag{42}$$

Επιπροσθέτως

$$\begin{aligned} \left(x' + \sqrt{A}y'\right)\left(x_0 - \sqrt{A}y_0\right)^n &= \left(x' + \sqrt{A}y'\right)\left(x_n - \sqrt{A}y_n\right) = \\ &= x'x_n - Ay'y_n + \sqrt{A}(y'x_n - x'y_n) = \bar{x} + \sqrt{A}\bar{y} \end{aligned} \tag{43}$$

όπου οι $\bar{x}$ και $\bar{y}$ είναι ακέραιοι και

$$x_n - \sqrt{A}y_n = \left(x_0 - \sqrt{A}y_0\right)^n$$

Κάνοντας χρήση των σχέσεων (41)-(43) και των ανισοτήτων (40), αποκτούμε τις ανισότητες

$$1 < \bar{x} + \sqrt{A}\bar{y} < x_0 + \sqrt{A}y_0 \tag{44}$$

Θα δείξουμε ότι το ζεύγος των ακέραιων $\bar{x}$ και $\bar{y}$ είναι μία λύση της εξίσωσης (29). Για να το κάνουμε αυτό, πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη, την εξίσωση (43), δηλαδή την εξίσωση

$$\bar{x} + \sqrt{A}\bar{y} = \left(x' + \sqrt{A}y'\right)\left(x_0 - \sqrt{A}y_0\right)^n \tag{45}$$

και την εξίσωση

$$\bar{x} - \sqrt{A}\bar{y} = \left(x' - \sqrt{A}y'\right)\left(x_0 + \sqrt{A}y_0\right)^n \tag{46}$$

οι οποία προκύπτει άμεσα από την (43) με αλλαγή του πρόσημου του $\sqrt{A}$. Αφού οι $[x', y']$ και $[x_0, y_0]$ είναι λύσεις της εξίσωσης (29), το αποτέλεσμα θα είναι

$$\begin{aligned} \left(\bar{x} + \sqrt{A}\bar{y}\right)\left(\bar{x} - \sqrt{A}\bar{y}\right) &= \bar{x}^2 - A\bar{y}^2 = \\ &= \left(x' + \sqrt{A}y'\right)\left(x' - \sqrt{A}y'\right)\left(x_0 + \sqrt{A}y_0\right)^n\left(x_0 - \sqrt{A}y_0\right)^n = \\ &= (x'^2 - Ay'^2)(x_0^2 - Ay_0^2)^n = 1 \end{aligned} \tag{47}$$

Το τελευταίο βήμα είναι να αποδείξουμε ότι οι $\bar{x}$ και $\bar{y}$ είναι θετικοί. Πρώτα απ' όλα, σημειώστε ότι $\bar{x} \neq 0$, αλλιώς η (47) θα μας έδινε

$$-Ay_0^2 = 1$$

το οποίο είναι αδύνατο επειδή $A > 0$. Επιπλέον, αν $y = 0$ η ίδια ισότητα (47) δίνει $\bar{x}^2 = 1$, αλλά οι ανισότητες (44) δίνουν $\bar{x} > 1$· άτοπο. Τελικά, σημειώστε ότι τα πρόσημα των $\bar{x}$ και $\bar{y}$ συμπίπτουν. Γιατί αν υποθέσουμε ότι τα πρόσημα των $\bar{x}$ και $\bar{y}$ είναι αντίθετα, τότε αυτά των $\bar{x}$ και $-\bar{y}$ είναι όμοια. Ας συγκρίνουμε το μέτρο των αριθμών $\bar{x} + \sqrt{A}\bar{y}$ και $\bar{x} - \sqrt{A}\bar{y}$. Το μέτρο του πρώτου πρέπει να είναι μικρότερο του δεύτερου επειδή, στην πρώτη περίπτωση, δύο αριθμοί με το ίδιο πρόσημο αφαιρούνται μεταξύ τους ενώ στη δεύτερη περίπτωση προστίθενται μεταξύ τους. Αλλά ήδη ξέρουμε ότι

$$\bar{x} + \sqrt{A}\bar{y} > 1$$

οπότε και ο $\bar{x} - \sqrt{A}\bar{y}$ είναι μεγαλύτερος απ' τη μονάδα κατά απόλυτη τιμή. Αλλά

$$\left(\bar{x} + \sqrt{A}\bar{y}\right)\left(\bar{x} - \sqrt{A}\bar{y}\right) = \bar{x}^2 - A\bar{y}^2 = 1$$

και έχουμε καταλήξει σε αντίφαση, επειδή το γινόμενο δύο αριθμών, ο καθένας με μέτρο μεγαλύτερο της μονάδας, πρέπει επίσης να είναι μεγαλύτερο απ' τη μονάδα κατά απόλυτη τιμή. Άρα τα πρόσημα των δύο αριθμών, $\bar{x}$ και $\bar{y}$, είναι όμοια και $\bar{x} \neq 0$, $\bar{y} \neq 0$. Οι ανισότητες (44) καταλήγουν τότε κατευθείαν στο συμπέρασμα ότι $\bar{x} > 0$ και $\bar{y} > 0$. Και έτσι, υποθέτοντας ότι υπάρχει μία λύση $[x', y']$ της εξίσωσης (29)

$$x^2 - Ay^2 = 1, \;\; A > 0$$

τέτοια ώστε η (38) να μην υφίσταται για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο n, έχουμε καταφέρει να κατασκευάσουμε ακόμα μία θετική ακέραια λύση $[\bar{x}, \bar{y}]$ της ίδιας εξίσωσης ($x > 0$, $y > 0$ είναι ακέραιοι) που ικανοποιεί τις ανισότητες (44), κάτι που αντιτίθεται στον ορισμό της ελάχιστης λύσης $[x_0, y_0]$. Κατά συνέπεια έχουμε αποδείξει ότι η υπόθεσή μας ότι υπάρχουν λύσεις που δε δίνονται από τον τύπο (38) μας οδηγεί σε μία αντίφαση. Με άλλα λόγια έχουμε αποδείξει ότι όλες οι λύσεις της εξίσωσής μας μπορεί να αποκτηθούν απ' τον τύπο (38).

Επομένως κάθε λύση $[x, y]$ της εξίσωσης (29) μπορεί να προέλθει από την έκφραση

$$x + \sqrt{A}y = \left(x_0 + \sqrt{A}y_0\right)^n, \;\; n \geq 0 \tag{48}$$

όπου η $[x_0, y_0]$ είναι η ελάχιστη λύση. Αλλάζοντας το πρόσημο του $\sqrt{A}$ στην ισότητα (48), παίρνουμε επίσης την ισότητα

$$x - \sqrt{A}y = \left(x_0 - \sqrt{A}y_0\right)^n, \;\; n \geq 0 \tag{49}$$

Προσθέτοντας τις δύο παραπάνω ισότητες, κατόπιν αφαιρώντας τη δεύτερη απ' την πρώτη, και τελικώς διαιρώντας το άθροισμα με το 2 και την διαφορά με τον $2\sqrt{A}$, αποκτούμε τις

$$\begin{cases} x = x_n = \dfrac{1}{2}\left[\left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right)^n + \left(x_0 - y_0\sqrt{A}\right)^n\right] \\ y = y_n = \dfrac{1}{2\sqrt{A}}\left[\left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right)^n - \left(x_0 - y_0\sqrt{A}\right)^n\right] \end{cases} \tag{50}$$

Αυτές είναι οι αναλυτικές εκφράσεις για κάθε ακέραια λύση $[x, y]$. Κάθε λύση μπορεί να προέλθει απ' αυτές με μία τυχαία επιλογή των προσήμων των x_n και y_n. ∎

Για παράδειγμα, από τη στιγμή που είδαμε παραπάνω ότι η ελάχιστη λύση της εξίσωσης $x^2 - 2y^2 = 1$ είναι οι $x = 3$, $y = 2$, όλες οι λύσεις αυτής της εξίσωσης περιέχονται στους τύπους

$$x_n = \frac{1}{2}\left[\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n\right]$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n - \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n\right]$$

Η ελάχιστη λύση [3,2] αντιστοιχεί στο $n = 1$· για $n = 2$ και $n = 3$ οι λύσεις είναι οι [17,12] και [99,70] αντίστοιχα, κ.ο.κ.

Σημειώστε ότι οι αριθμοί x_n και y_n αυξάνονται με το n σαν τους όρους γεωμετρικής προόδου με ένα μέσο λόγο $x_0 + y_0\sqrt{A}$. Πράγματι

$$0 < x_0 - y_0\sqrt{A} < 1$$

επειδή

$$\left(x_0 + \sqrt{A}y_0\right)\left(x_0 - \sqrt{A}y_0\right) = 1$$

Συνεπώς, ο $\left(x_0 - y_0\sqrt{A}\right)^n$ τείνει στο μηδέν όσο το n αυξάνει.

Σημειώστε επίσης ότι αν η εξίσωση (29) έχει τουλάχιστον μία μη-τετριμμένη λύση, ή, με άλλα λόγια, τουλάχιστον μία λύση με $y \neq 0$, τότε θα έχει και μία ελάχιστη λύση και, επομένως, όλες οι λύσεις της μπορούν να προέλθουν από τους τύπους (50). Η ύπαρξη μίας μη-τετριμμένης λύσης για κάθε θετικό ακέραιο A με τον $\sqrt{A}$ άρρητο θα συζητηθεί στην ενότητα 1.5.

1.5. Εξισώσεις Δευτέρου Βαθμού με Δύο Αγνώστους: η Γενική Περίπτωση

Θα αποδείξουμε σ' αυτήν την ενότητα ότι για ένα τυχαίο θετικό ακέραιο A με τον $\sqrt{A}$ άρρητο, η εξίσωση

$$x^2 - Ay^2 = 1 \tag{51}$$

έχει πάντα μία μη-τετριμμένη λύση· με άλλα λόγια, υπάρχει ένα ζεύγος μη-μηδενικών ακέραιων x_0 και y_0 που ικανοποιούν την εξίσωση. Θα περιγράψουμε πρώτα μία μέθοδο για επέκταση ενός τυχαίου θετικού αριθμού σε ένα συνεχές κλάσμα. (Προηγουμένως, όταν επεκτείναμε τον $\sqrt{2}$ σε συνεχές κλάσμα (βλ. ενότητα 1.4), κάναμε χρήση των ειδικών ιδιοτήτων αυτού του αριθμού.) Έστω α ένας οποιοσδήποτε θετικός αριθμός. Τότε υπάρχει πάντα ένας ακέραιος μικρότερος του ή ίσος με τον α, και μεγαλύτερος του $\alpha - 1$. Αυτός ο ακέραιος καλείται το **ακέραιο μέρος** του α και συμβολίζεται ως $[\alpha]$. Η διαφορά μεταξύ του α και του ακέραιου μέρους του καλείται το **κλασματικό μέρος** του α και συμβολίζεται ως $\{\alpha\}$. Η σχέση μεταξύ αυτών των δύο ποσοτήτων

$$\alpha - [\alpha] = \{\alpha\}$$

ή

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\} \tag{52}$$

είναι μία άμεση συνέπεια των ορισμών τους.

Σημειώστε επίσης ότι το κλασματικό μέρος του αριθμού, όντας η διαφορά μεταξύ ενός θετικού αριθμού και του μεγαλύτερου ακέραιου που δεν τον υπερβαίνει, είναι μη-αρνητικό και πάντα μικρότερο της μονάδας. Για παράδειγμα, το ακέραιο μέρος του $27/5$ είναι 5 και το κλασματικό του μέρος είναι $2/5$· για τον $\sqrt{2}$ οι αντίστοιχοι αριθμοί είναι ο 1 και ο $\sqrt{2} - 1$, για τον $\sqrt[3]{52}$ οι 3 και ο $\sqrt[3]{52} - 3$, κ.ο.κ.

Οι έννοιες που μόλις παρουσιάστηκαν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επέκταση θετικών ακέραιων σε συνεχή κλάσματα. Υποθέτουμε ότι

$$[\alpha] = q_1, \ \{\alpha\} = \frac{1}{\alpha_1}$$

Τότε

$$\alpha = q_1 + \frac{1}{\alpha_1} \tag{53}$$

Όπως ο $\{\alpha\}$ είναι πάντα μικρότερος της μονάδας, έτσι και ο α_1 είναι πάντα μεγαλύτερος της μονάδας. Αν ο α ήταν ένας ακέραιος τότε το κλασματικό μέρος του θα ήταν ίσο με το μηδέν έτσι και ο α_1 θα ήταν άπειρος και θα είχαμε $\alpha = q_1$. Παρ' όλα αυτά, όσο θα συζητάμε την επέκταση σε συνεχές κλάσμα των άρρητων αριθμών, μπορούμε να αφήσουμε κατά μέρος αυτή τη συγκεκριμένη περίπτωση και να πούμε ότι ο α_1 είναι ένας θετικός αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας. Με αυτόν τον αριθμό α_1 μπορούμε να προχωρήσουμε όπως κάναμε και με τον α, και να γράψουμε

$$\alpha_1 = q_2 + \frac{1}{\alpha_2}, \ q_2 = [\alpha_1], \ \frac{1}{\alpha_2} = \{\alpha_1\}$$

Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία, αποκτούμε την παρακάτω αλληλουχία

$$\begin{cases} \alpha = q_1 + \dfrac{1}{\alpha_1}, & q_1 = [\alpha] \\ \alpha_1 = q_2 + \dfrac{1}{\alpha_2}, & q_2 = [\alpha_1] \\ \alpha_2 = q_3 + \dfrac{1}{\alpha_3}, & q_3 = [\alpha_2] \\ \vdots & \\ \alpha_{n-1} = q_n + \dfrac{1}{\alpha_n}, & q_n = [\alpha_{n-1}] \\ \vdots & \end{cases} \tag{54}$$

Για ρητούς αριθμούς α (ή, ομοίως, για $\alpha = b/c$, όπου οι b και c είναι θετικοί ακέραιοι) αυτός ο ακολουθιακός υπολογισμός δίνει το ίδιο αποτέλεσμα όπως ο Ευκλείδειος αλγόριθμος με τους ακέραιους $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, \ldots$ να είναι τα μερικά πηλίκα (βλ. τύποι (6) στην ενότητα 1.2). Εδώ, όπως επίσης και στην ενότητα 1.2, η διαδικασία πρέπει να διακοπεί. Αφ' ετέρου, όταν ο α είναι άρρητος αυτή η διαδικασία πρέπει να είναι άπειρη. Αφού αν ο α_n ήταν ένας ακέραιος για κάποιο n, τότε ο α_{n-1} θα ήταν ρητός, το ίδιο και οι $\alpha_{n-2}, \alpha_{n-3}, \ldots$ και, τελικά, ο α_1 θα ήταν ρητός. Αλλεπάλληλες αντικαταστάσεις που εξαλείφουν τους $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ από τους τύπους (54) οδηγούν σε ένα συνεχές κλάσμα

$$\alpha = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{\alpha_n}}}}} \tag{55}$$

ή, εφόσον ο n μπορεί να πάρθηκε αυθαίρετα μεγάλος, μπορούμε να τον γράψουμε στη μορφή ενός μη-πεπερασμένου συνεχούς κλάσματος

$$\alpha = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{q_n + \ddots}}}}$$

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 1.4, η σχέση (8) μεταξύ των συγκλινόντων δεν εξαρτάται απ' το πεπερασμένο ή το άπειρο του συνεχούς κλάσματος και το ίδιο ισχύει και σ' αυτήν την περίπτωση. Απ' την έκφραση (8), όπως έχουμε δει, έπεται η ανισότητα (25) για άρτιους συγκλίνοντες. Αυτή η ανισότητα θα χρησιμοποιηθεί και πάλι για να αποδείξουμε την ύπαρξη μίας λύσης της εξίσωσης (51), αλλά η δικαιολόγηση θα είναι πιο πολύπλοκη απ' την συγκεκριμένη περίπτωση όπου $A = 2$.

Θεώρημα III. Για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο A και άρρητο $\sqrt{A}$, η εξίσωση

$$x^2 - Ay^2 = 1$$

έχει μία μη-τετριμμένη θετική λύση $[x_0, y_0]$.

Απόδειξη.

Εξαιτίας ορισμένων περιπλοκών στην απόδειξη της ύπαρξης των λύσεων της εξίσωσης (51) θα διαχωρίσουμε την απόδειξη σε αρκετά βήματα.

Στο πρώτο βήμα θα αποδείξουμε την ύπαρξη ενός ακέραιου k τέτοιου ώστε η εξίσωση

$$x^2 - Ay^2 = k \tag{56}$$

να έχει ένα άπειρο αριθμό θετικών ακέραιων λύσεων. Ας θεωρήσουμε το διώνυμο $x^2 - Ay^2$. Θα αντικαταστήσουμε αντίστοιχα τα x και y με τους αριθμητές και παρονομαστές των διαδοχικών άρτιων συγκλινόντων του άρρητου αριθμού $\alpha = \sqrt{A}$. Τότε

$$z_{2n} = P_{2n}^2 - AQ_{2n}^2 = (P_{2n} - \alpha Q_{2n})(P_{2n} + \alpha Q_{2n}) \tag{57}$$

Αλλά αφού

$$0 < P_{2n} - \alpha Q_{2n} < \frac{1}{Q_{2n+1}}$$

άμεσα έπεται ότι

$$0 < P_{2n} + \alpha Q_{2n} = 2\alpha Q_{2n} + P_{2n} - \alpha Q_{2n} < 2\alpha Q_{2n} + \frac{1}{Q_{2n+1}}$$

Ας χρησιμοποιήσουμε τις τελευταίες δύο ανισότητες για να προσεγγίσουμε τον z_{2n}. Αντικαθιστώντας με μεγαλύτερες ποσότητες και τους δύο παράγοντες του δεξιού μέλους της (57) παίρνουμε για τον z_{2n} την ανισότητα

$$0 < z_{2n} < \frac{1}{Q_{2n+1}}\left(2\alpha Q_{2n} + \frac{1}{Q_{2n+1}}\right) < 2\alpha + 1 \tag{58}$$

αφού ο Q_{2n} είναι μικρότερος απ' τον Q_{2n+1}. Αν αντικαταστήσουμε τους x και y με τους P_{2n} και Q_{2n} αντίστοιχα στο διώνυμο

$$z = x^2 - Ay^2$$

θα υποθέσουμε ότι ο z παίρνει θετική ακέραια τιμή. Έτσι, όλοι οι αριθμοί $z_2, z_4, \dots, z_{2n}, \dots$ θα είναι θετικοί ακέραιοι, κανένας από τους οποίους δε ξεπερνά τον ίδιο αριθμό $2\alpha + 1$. Αλλά αφού ο $\alpha = \sqrt{A}$ είναι άρρητος, όπως το συνεχές κλάσμα του είναι άπειρο και έτσι και η ακολουθία των ζευγών των αριθμών P_{2n} και Q_{2n} είναι άπειρη. Αφού τώρα δεν υπάρχουν περισσότεροι από $[2\alpha + 1]$ ακέραιοι μεταξύ του 1 και του αριθμού $2\alpha + 1$ (ο οποίος είναι πεπερασμένος και δεν εξαρτάται από τον n), η άπειρη ακολουθία των θετικών ακέραιων $z_2, z_4, \dots, z_{2n}, \dots$ είναι φτιαγμένη από ένα πεπερασμένο αριθμό διαφορετικών όρων. Με άλλα λόγια, η άπειρη ακολουθία ακέραιων $z_2, z_4, \dots, z_{2n}, \dots$ είναι απλά η αριθμητική πρόοδος $1, 2, 3, \dots, [2\alpha + 1]$ επαναλαμβανόμενη κατά κάποιο τρόπο και δεν είναι καν απαραίτητο να εμφανίζονται όλοι αυτοί οι ακέραιοι στην πρόοδο. Σημειώστε επίσης ότι εφόσον η ποσότητα των διαφορετικών όρων της άπειρης προόδου $z_2, z_4, \dots, z_{2n}, \dots$ είναι πεπερασμένη, τουλάχιστον ένας όρος (ένας αριθμός), k $(1 \leq k \leq [2\alpha + 1])$, επαναλαμβάνεται άπειρες φορές. Με άλλα λόγια, μεταξύ των ζευγών αριθμών $[P_2, Q_2], [P_4, Q_4], \dots, [P_{2n}, Q_{2n}], \dots$ υπάρχει ένα άπειρο σύνολο ζευγών για το οποίο ο $z = x^2 - Ay^2$ παίρνει την ίδια τιμή k κατά την αντικατάσταση των x και y με τους αριθμούς αυτούς. Συνεπώς, έχουμε αποδείξει την ύπαρξη ενός θετικού ακέραιου αριθμού k για τον οποίο η εξίσωση (56) έχει ένα άπειρο πλήθος ακέραιων λύσεων $[x, y]$. Ας απαριθμήσουμε για άλλη μία φορά αυτά τα ζεύγη αριθμών τα οποία είναι λύσεις της εξίσωσης (56) για δοθέν k συμβολίζοντάς τα ως $[u_1, v_1], [u_2, v_2], \dots, [u_n, v_n], \dots$. Θα έχουμε τότε

$$u_n^2 - Av_n^2 = k \tag{59}$$

Η ακολουθία των ζευγών $[u_1, v_1], [u_2, v_2], \dots, [u_n, v_n], \dots$ θα είναι επίσης τμήμα της ακολουθίας των αριθμητών και παρονομαστών των άρτιων συγκλινόντων του α. Αν μπορέσουμε να διαβεβαιώσουμε ότι $k = 1$, τότε θα έχουμε αποδείξει ότι η εξίσωση (51) έχει ένα άπειρο πλήθος ακέραιων λύσεων. Από τη στιγμή που δε μπορούμε να το διαβεβαιώσουμε αυτό, ας υποθέσουμε ότι $k > 1$ (στην αντίθετη περίπτωση όταν $k = 1$ είναι όλα αποδεδειγμένα), και ας προχωρήσουμε στο επόμενο βήμα της απόδειξής μας.

Στο δεύτερο βήμα θα αποδείξουμε ότι μεταξύ των ζευγών αριθμών $[u_1, v_1], [u_2, v_2], \dots, [u_n, v_n], \dots$ θα υπάρχουν απείρως αρκετά ζεύγη που θα δίνουν τα ίδια υπόλοιπα όταν θα διαιρούνται με το k. Για να το θέσουμε αλλιώς, θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν δύο μη-αρνητικοί ακέραιοι, p και q, και οι δύο μικρότεροι του k, τέτοιοι ώστε για κάθε ένα άπειρο πλήθος ζευγών $[u_1, v_1], [u_2, v_2], \dots, [u_n, v_n], \dots$ οι ισότητες

$$u_n = a_n k + p, \quad v_n = b_n k + q \tag{60}$$

ισχύουν, όπου οι a_n και b_n είναι τα πηλίκα της διαίρεσης των u_n και v_n με τον k, και οι p και q είναι τα υπόλοιπα. Δηλαδή, αν διαιρέσουμε τους u_n και v_n με τον ακέραιο k, $k > 1$, τότε αποκτούμε σχέσεις της μορφής (60), όπου όπως πάντα τα υπόλοιπα της διαίρεσης κείτονται μεταξύ του μηδενός και του $k - 1$. Εφόσον τα μόνα υπόλοιπα της διαίρεσης των αριθμών u_n με τον k είναι οι αριθμοί $0, 1, 2, \dots, k - 1$, και ομοίως τα υπόλοιπα της διαίρεσης των αριθμών v_n με τον k μπορεί να είναι μόνο οι ίδιοι αριθμοί $0, 1, 2, \dots, k - 1$, τότε το πλήθος των πιθανών ζευγών υπολοίπων των διαιρέσεων των αριθμών u_n και v_n με τον k θα είναι $k \cdot k = k^2$. Αυτό επίσης είναι προφανές διότι ένα ζεύγος υπολοίπων $[p_n, q_n]$ αντιστοιχεί σε κάθε ζεύγος $[u_n, v_n]$ και το πλήθος των διαφορετικών τιμών που παίρνουμε από τους αριθμούς p_n και q_n χωριστά δεν είναι μεγαλύτερο από τον k. Επομένως, το πλήθος των διαφορετικών ζευγών υπολοίπων δεν είναι μεγαλύτερο από τον k^2. Έτσι σε κάθε ζεύγος ακέραιων $[u_n, v_n]$ αντιστοιχεί ένα ζεύγος υπολοίπων $[p_n, q_n]$ κατά τη διαίρεση με τον k. Αλλά το πλήθος των διαφορετικών ζευγών υπολοίπων είναι πεπερασμένο, δεν ξεπερνά τον k^2, ενώ το πλήθος των ζευγών $[u_n, v_n]$ είναι άπειρο. Αυτό σημαίνει ότι εφόσον το πλήθος των διαφορετικών ζευγών στην ακολουθία $[p_1, q_1], [p_2, q_2], \dots, [p_n, q_n], \dots$ είναι πεπερασμένο, τουλάχιστον ένα ζεύγος υπολοίπων επαναλαμβάνεται άπειρες φορές. Συμβολίζοντας αυτό το ζεύγος υπολοίπων ως $[p, q]$, βλέπουμε ότι υπάρχει ένα άπειρο σύνολο ζευγών $[u_n, v_n]$ για το οποίο οι σχέσεις (60) ισχύουν. Εφόσον δεν ικανοποιούν όλα τα ζεύγη τις σχέσεις (60) για συγκεκριμένους πεπερασμένους p και q, των οποίων την ύπαρξη μόλις τώρα αποδείξαμε, θα επαναριθμήσουμε όλα αυτά τα ζεύγη $[u_n, v_n]$ που ικανοποιούν τις σχέσεις (60) συμβολίζοντάς τα $[R_n, S_n]$. Και άρα, η άπειρη ακολουθία ζευγών $[R_1, S_1], [R_2, S_2], \dots, [R_n, S_n], \dots$ είναι υπακολουθία της ακολουθίας $[u_n, v_n]$ η οποία, με τη σειρά της, είναι υπακολουθία της ακολουθίας των αριθμητών και παρονομαστών των άρτιων συγκλινόντων του α. Τα ζεύγη των αριθμών $[R_1, S_1], [R_2, S_2], \dots, [R_n, S_n], \dots$ ικανοποιούν την εξίσωση (59) και δίνουν τα ίδια υπόλοιπα, p και q, κατά τη διαίρεση με τον k.

Τώρα που έχουμε τεκμηριώσει την ύπαρξη ενός άπειρου συνόλου τέτοιων ζευγών θετικών ακέραιων R_n και S_n, μπορούμε να προχωρήσουμε στο τρίτο και τελευταίο βήμα της απόδειξής μας. Σημειώστε πρώτα απ' όλα ότι τα ζεύγη $[R_n, S_n]$, όντας οι αριθμητές και παρονομαστές των συγκλινόντων, πρέπει να είναι πρώτοι μεταξύ τους αριθμοί, δηλαδή ζεύγη αριθμών που δεν έχουν κοινούς διαιρέτες. Πράγματι, αν αντικαταστήσουμε τον k με τον $2k$ στη σχέση (24) και θέσουμε $\delta_{2k} = P_{2k}/Q_{2k}$ και $\delta_{2k-1} = P_{2k-1}/Q_{2k-1}$, τότε από την εξίσωση

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} - \frac{P_{2k-1}}{Q_{2k-1}} = \frac{1}{Q_{2k}Q_{2k-1}}$$

πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με το $Q_{2k}Q_{2k-1}$, παίρνουμε

$$P_{2k}Q_{2k-1} - Q_{2k}P_{2k-1} = 1 \tag{61}$$

Αυτή η σχέση μεταξύ τεσσάρων ακέραιων, P_{2k}, Q_{2k}, P_{2k-1}, και Q_{2k-1}, δείχνει ότι αν οι P_{2k} και Q_{2k} έχουν ένα κοινό διαιρέτη μεγαλύτερο της μονάδας, τότε ολόκληρο το αριστερό μέλος της πρέπει να είναι διαιρετό με αυτόν τον κοινό διαιρέτη. Αλλά το δεξί μέλος της ισότητας (61) είναι η μονάδα, η οποία δε μπορεί να διαιρεθεί με κάποιο ακέραιο μεγαλύτερο από τη μονάδα. Έτσι έχει τεκμηριωθεί ότι οι αριθμοί R_n και S_n, οι οποίοι μπορεί να είναι μόνο οι αριθμητές και παρονομαστές των συγκλινόντων, είναι πρώτοι μεταξύ τους. Από τη σχέση (7) επίσης έπεται άμεσα ότι

$$Q_2 < Q_4 < \cdots < Q_{2n} < \cdots$$

Από το γεγονός ότι οι αριθμοί R_n και S_n είναι πρώτοι μεταξύ τους και από το γεγονός ότι οι αριθμοί $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, οι οποίοι πάρθηκαν απ' την ακολουθία των διαφορετικών μεταξύ τους αριθμών Q_{2n}, είναι όλοι διαφορετικοί μεταξύ τους, έπεται αμέσως ότι μέσα στην άπειρη ακολουθία κλασμάτων

$$\frac{R_1}{S_1}, \frac{R_2}{S_2}, \ldots, \frac{R_n}{S_n}, \ldots$$

δεν υπάρχουν αριθμοί που να είναι ο ένας ίσος με τον άλλον. Ας γράψουμε δύο ισότητες που έπονται από τον ορισμό των αριθμών R_n και S_n:

$$R_1^2 - AS_1^2 = (R_1 - \alpha S_1)(R_1 + \alpha S_1) = k \tag{62}$$

και

$$R_2^2 - AS_2^2 = (R_2 - \alpha S_2)(R_2 + \alpha S_2) = k \tag{63}$$

όπου, όπως παραπάνω, $\alpha = \sqrt{A}$.

Επίσης,

$$(R_1 - \alpha S_1)(R_2 + \alpha S_2) = R_1R_2 - AS_1S_2 + \alpha(R_1S_2 - S_1R_2) \tag{64}$$

αφού $\alpha^2 = A$. Ομοίως

$$(R_1 + \alpha S_1)(R_2 - \alpha S_2) = R_1R_2 - AS_1S_2 - \alpha(R_1S_2 - S_1R_2) \tag{65}$$

Όταν διαιρούνται με τον k, οι R_n και S_n αφήνουν υπόλοιπα p και q ανεξάρτητα του n. Επομένως, εξαιτίας των σχέσεων (60),

$$R_n = c_nk + p, \;\; S_n = d_nk + q \tag{66}$$

Μία σειρά από μετασχηματισμούς και αντικαταστάσεις οδηγούν στο

$$\begin{aligned} R_1R_2 - AS_1S_2 &= R_1(c_2k + p) - AS_1(d_2k + q) = \\ &= R_1[(c_2 - c_1)k + c_1k + p] - AS_1[(d_2 - d_1)k + d_1k + p] = \\ &= R_1[(c_2 - c_1)k + R_1] - AS_1[(d_2 - d_1)k + S_1] = \\ &= k[R_1(c_2 - c_1) - AS_1(d_2 - d_1)] + R_1^2 - AS_1^2 = \\ &= k[R_1(c_2 - c_1) - AS_1(d_2 - d_1) + 1] = kx_1 \end{aligned}$$

όπου ο x_1 είναι ακέραιος διότι $R_1^2 - AS_1^2 = k$. Αναλογικά

$$\begin{aligned} R_1S_2 - S_1R_2 &= R_1[(d_2 - d_1)k + d_1k + p] - S_1[(c_2 - c_1)k + c_1k + p] = \\ &= R_1[(d_2 - d_1)k + S_1] - S_1[(c_2 - c_1)k + R_1] = \\ &= k[R_1(d_2 - d_1) - S_1(c_2 - c_1)] = ky_1 \end{aligned}$$

όπου ο y_1 είναι και αυτός ακέραιος. Μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι ο y_1 δεν είναι ίσος με το μηδέν. Γιατί αν υποθέσουμε ότι $y_1 = 0$, τότε

$$ky_1 = R_1S_2 - S_1R_2 = 0$$

από όπου

$$\frac{R_1}{S_1} = \frac{R_2}{S_2}$$

το οποίο είναι αδύνατο καθώς τεκμηριώσαμε ότι όλα τα κλάσματα R_n/S_n είναι διαφορετικά.

Οι ισότητες (67) και (68) δείχνουν ότι

$$(R_1 - \alpha S_1)(R_2 + \alpha S_2) = kx_1 + \alpha ky_1 = k(x_1 + \alpha y_1) \tag{69}$$

και

$$(R_1 + \alpha S_1)(R_2 - \alpha S_2) = kx_1 - \alpha ky_1 = k(x_1 - \alpha y_1) \tag{70}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (62) και (63) κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη τις εκφράσεις (69) και (70), καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} k^2 &= (R_1^2 - AS_1^2)(R_2^2 - AS_2^2) = (R_1 - \alpha S_1)(R_2 + \alpha S_2)(R_1 + \alpha S_1)(R_2 - \alpha S_2) = \\ &= k(x_1 + \alpha y_1)k(x_1 - \alpha y_1) = k^2(x_1^2 - Ay_1^2) \end{aligned}$$

Απαλείφοντας τον k^2 απ' το αποτέλεσμα, παίρνουμε τελικά

$$x_1^2 - Ay_1^2 = 1 \tag{72}$$

Αλλά $y_1 \neq 0$ το οποίο σημαίνει ότι $x_1 \neq 0$, αλλιώς το αριστερό μέλος θα ήταν αρνητικό ενώ το δεξί μέλος θα ήταν ίσο με τη μονάδα. Έτσι, ακόμα και όταν $k \neq 1$, έχουμε προσδιορίσει δύο μη-μηδενικούς ακέραιους, x_1 και y_1, οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση (51). Η θεωρία των εξισώσεων αυτού του τύπου έχει τώρα ολοκληρωθεί εφόσον ξέρουμε ότι όντως έχουν μία λύση για κάθε θετικό ακέραιο A και άρρητο

$\sqrt{A}$· και γνωρίζουμε πως να κατασκευάσουμε όλες τις λύσεις με τη βοήθεια της ελάχιστης λύσης, η ύπαρξη της οποίας έχει ήδη αποδειχθεί. ■

Στην πράξη, η ελάχιστη λύση θα μπορούσε να εμφανιστεί με τη μέθοδο δοκιμής και σφάλματος, επιλέγοντας τιμές για τα x_0 και y_0.

Έχουμε επεξεργαστεί πλήρως την εξίσωση

$$x^2 - Ay^2 = 1$$

όταν $A > 0$ και ο $\alpha = \sqrt{A}$ είναι άρρητος.

Αν $A > 0$ και ο $\alpha = \sqrt{A}$ είναι ακέραιος, τότε αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$x^2 - \alpha^2 y^2 = (x + \alpha y)(x - \alpha y) = 1$$

και εφόσον ο α είναι ένας ακέραιος και οι x_0, y_0 είναι ακέραιοι που ικανοποιούν την εξίσωση, πρέπει να έχουμε

$$x_0 + \alpha y_0 = 1,\ \ x_0 - \alpha y_0 = 1$$

ή

$$x_0 + \alpha y_0 = -1,\ \ x_0 - \alpha y_0 = -1$$

επειδή το γινόμενο δύο ακέραιων είναι μονάδα αν και μόνο αν κάθε ένας απ' αυτούς τους ακέραιους είναι είτε $+1$ ή -1. Κάθε ένα από τα συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x_0 και y_0 επιδέχεται μία μόνο τετριμμένη ακέραια λύση, $x_0 = 1,\ y_0 = 0$ και $x_0 = -1,\ y_0 = 0$ αντίστοιχα.
Άρα, όταν ο A είναι ίσος με το τετράγωνο ενός ακέραιου, η εξίσωση (51) έχει μόνο τετριμμένες ακέραιες λύσεις $x_0 = \pm 1,\ y_0 = 0$. Όταν ο A είναι ένας αρνητικός ακέραιος, η εξίσωση (51) έχει τις ίδιες τετριμμένες ακέραιες λύσεις. (Όταν $A = -1$, έχει επιπλέον τις (συμμετρικές) τετριμμένες λύσεις $x_0 = 0,\ y_0 = \pm 1$.)

Ας εξετάσουμε τώρα μία πιο γενική εξίσωση

$$x^2 - Ay^2 = C \tag{73}$$

όπου οι A και C είναι ακέραιοι, ο A είναι θετικός και ο $\alpha = \sqrt{A}$ είναι άρρητος. Έχουμε ήδη δει ότι όταν $C = 1$ αυτή η εξίσωση δίνει πάντα ένα άπειρο πλήθος ακέραιων λύσεων (δες Θεώρημα ΙΙΙ). Αλλά για τυχαίες τιμές των C και A, αυτή η εξίσωση μπορεί να μην έχει καν λύση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Δείξτε ότι η εξίσωση*

$$x^2 - 3y^2 = -1 \tag{74}$$

δεν έχει ακέραιες λύσεις. Πρώτα σημειώστε ότι το τετράγωνο ενός περιττού αριθμού, όταν διαιρεθεί με το 8, αφήνει πάντα ένα υπόλοιπο ίσο με 1. Πράγματι, εφόσον κάθε περιττός αριθμός α μπορεί να γραφτεί ως $\alpha = 2N + 1$, όπου ο N είναι ακέραιος, θα έχουμε

$$\alpha^2 = (2N+1)^2 = 4N^2 + 4N + 1 = 4N(N+1) + 1 = 8M + 1 \tag{75}$$

όπου ο M είναι ακέραιος, αφού είτε ο N ή ο $N + 1$ πρέπει να είναι άρτιος. Υποθέστε τώρα ότι το $[x_0, y_0]$ είναι μία λύση της εξίσωσης (74). Τότε οι δύο αριθμοί, x_0 και y_0, δεν πρέπει να έχουν την ίδια ισοτιμία, δηλαδή, ο ένας πρέπει να είναι άρτιος, και ο άλλος περιττός. Αν οι x_0 και y_0 ήταν και οι δύο είτε άρτιοι ή περιττοί, τότε ο $x_0^2 - 3y_0^2$ θα ήταν ένας άρτιος αριθμός και δε θα μπορούσε να είναι ίσος με το 1. Αν ο x_0 ήταν περιττός, και ο y_0 άρτιος, τότε ο x_0^2 διαιρεμένος με το 4 θα άφηνε υπόλοιπο 1, ενώ ο $-3y_0^2$ θα ήταν διαιρετός με το 4. Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του $x_0^2 - 3y_0^2$ με το 4 θα ήταν μονάδα. Αυτό όμως είναι αδύνατο επειδή το δεξί μέλος της εξίσωσης (74), όταν διαιρεθεί με το 4, αφήνει υπόλοιπο -1 ή $3 = 4 - 1$. Τέλος, αν ο x_0 είναι άρτιος και ο y_0 περιττός, τότε ο x_0^2 είναι διαιρετός με το 4, και, σύμφωνα με την (75), ο $-3y_0^2$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$-3y_0^2 = -3(8M+1) = -24M - 3 = 4(-6M - 1) + 1$$

και έτσι δίνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθεί με το 4. Άρα για ακόμα μία φορά το υπόλοιπο της διαίρεσης του $x_0^2 - 3y_0^2$ με το 4 πρέπει να είναι 1, το οποίο είναι αδύνατο, όπως έχουμε δει. Άρα, δεν υπάρχουν ακέραιοι x_0, y_0 που να μπορούν να ικανοποιήσουν την εξίσωσης (74). ■

Δε θα μελετήσουμε το πρόβλημα καθορισμού συνθηκών, που πρέπει να επιβληθούν στους C και A, κάτω απ' τις οποίες η εξίσωση (73) θα έχει λύσεις. Είναι ένα δύσκολο πρόβλημα και επιλύεται με τη βοήθεια της γενικής θεωρίας των τετραγωνικών άρρητων ποσοτήτων (quadratic irrationalities) η οποία ανήκει στη θεωρία αλγεβρικών αριθμών. Θα συζητήσουμε μόνο την περίπτωση όταν η εξίσωση (73) έχει μη-τετριμμένες λύσεις. Όπως παραπάνω, θα καλούμε μία λύση $[x', y']$ μη-τετριμμένη αν $x', y' \neq 0$.

Επομένως, υποθέστε ότι η εξίσωση (73) επιδέχεται μη-τετριμμένης λύσης $[x', y']$, με άλλα λόγια, υποθέστε ότι

$$x'^2 - Ay'^2 = C \tag{76}$$

Θεωρήστε για τον ίδιο A την εξίσωση

$$x^2 - Ay^2 = 1 \tag{77}$$

Για $A > 0$ και $\alpha = \sqrt{A}$ άρρητο η τελευταία εξίσωση έχει ένα άπειρο πλήθος ακέραιων λύσεων $[\bar{x}, \bar{y}]$, η κάθε μία απ' τις οποίες μπορεί να προσδιοριστεί από τις

$$\bar{x} = \pm x_n, \quad \bar{y} = \pm y_n$$

όπου οι x_n και y_n προσδιορίζονται από τους τύπους (50) της ενότητας 1.4. Εφόσον η $[\bar{x}, \bar{y}]$ είναι μία λύση της εξίσωσης (77),

$$\bar{x}^2 - A\bar{y}^2 = (\bar{x} + \alpha\bar{y})(\bar{x} - \alpha\bar{y}) = 1$$

Με τη σειρά της, η εξίσωση (76) μπορεί να γραφτεί ως

$$(x' + \alpha y')(x' - \alpha y') = C$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες εξισώσεις παίρνουμε

$$(x' + \alpha y')(\bar{x} + \alpha\bar{y})(x' - \alpha y')(\bar{x} - \alpha\bar{y}) = C \tag{78}$$

Αλλά

$$(x' + \alpha y')(\bar{x} + \alpha\bar{y}) = x'\bar{x} + Ay'\bar{y} + \alpha(x'\bar{y} + y'\bar{x})$$

και, ομοίως

$$(x' - \alpha y')(\bar{x} - \alpha\bar{y}) = x'\bar{x} + Ay'\bar{y} - \alpha(x'\bar{y} + y'\bar{x})$$

Χρησιμοποιώντας αυτά τα δύο αποτελέσματα, μπορούμε να ξαναγράψουμε την (78) στη μορφή

$$[x'\bar{x} + Ay'\bar{y} + \alpha(x'\bar{y} + y'\bar{x})][x'\bar{x} + Ay'\bar{y} - \alpha(x'\bar{y} + y'\bar{x})] = C$$

ή

$$(x'\bar{x} + Ay'\bar{y})^2 - A(x'\bar{y} + y'\bar{x})^2 = C$$

Έχουμε έτσι αποδείξει ότι αν η $[x', y']$ είναι μία λύση της εξίσωσης (73) τότε αυτή η εξίσωση ικανοποιείται και με το ζεύγος των αριθμών $[x, y]$,

$$x = x'\bar{x} + Ay'\bar{y}, \quad y = x'\bar{y} + y'\bar{x} \tag{79}$$

όπου η $[\bar{x}, \bar{y}]$ είναι μία τυχαία λύση της εξίσωσης (77). Συνεπώς έχουμε αποδείξει ότι αν η εξίσωση (73) έχει τουλάχιστον μία λύση τότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Δεν πρέπει φυσικά να υποστηρίξουμε ότι οι τύποι (79) δίνουν όλες τις λύσεις της εξίσωσης (73). Στη θεωρία των αλγεβρικών αριθμών αποδείχτηκε ότι όλες οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης (73) μπορούν να αποκτηθούν παίρνοντας ένα συγκεκριμένο πεπερασμένο πλήθος λύσεων, εξαρτώμενων απ' τους A και C, και γενικεύοντάς τους με τη βοήθεια των τύπων (79). Όταν ο A είναι αρνητικός ή ίσος με το τετράγωνο ενός ακέραιου, η εξίσωση (73) δε μπορεί να έχει παραπάνω από ένα πεπερασμένο πλήθος λύσεων. Η απόδειξη αυτής της πρότασης είναι απλή και αφήνεται στον αναγνώστη. Οι ακέραιες λύσεις της πιο γενικευμένης εξίσωσης δευτέρου βαθμού με δύο αγνώστους

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{80}$$

όπου οι A, B, C, D, E και F είναι ακέραιοι, μπορεί να υποβιβαστούν, με αλλαγή των μεταβλητών, στη λύση των εξισώσεων του τύπου (73) με θετικό ή αρνητικό A. Επομένως, η συμπεριφορά των λύσεων, αν υπάρχουν, είναι ίδια μ' αυτή των εξισώσεων του τύπου (73).

Αθροίζοντας αυτά που έχουν αποδειχθεί, μπορούμε να πούμε ότι *εξισώσεις δευτέρου βαθμού με δύο αγνώστους του τύπου (80) μπορεί να μην έχουν κάποια ακέραια λύση, ή να έχουν ένα πεπερασμένο πλήθος λύσεων, ή μπορεί να έχουν ένα άπειρο πλήθος λύσεων. Στην τελευταία περίπτωση όλες οι λύσεις μπορούν να αποκτηθούν από ένα πεπερασμένο πλήθος γενικευμένων γεωμετρικών προόδων (79).* Μία σύγκριση της συμπεριφοράς των ακέραιων λύσεων των εξισώσεων δευτέρου βαθμού με δύο αγνώστους με τη συμπεριφορά των λύσεων των γραμμικών εξισώσεων αποκαλύπτει ένα άκρως σημαντικό γεγονός. Ενώ οι λύσεις των γραμμικών εξισώσεων, αν υπάρχουν, σχηματίζουν αριθμητικές προόδους, οι λύσεις των εξισώσεων δευτέρου βαθμού, όταν είναι άπειρες σε πλήθος, προέρχονται από ένα πεπερασμένο πλήθος γενικευμένων γεωμετρικών προόδων. Με άλλα λόγια, ζεύγη ακέραιων που δίνουν λύσεις μίας εξίσωσης δευτέρου βαθμού συμβαίνουν λιγότερο συχνά απ' ότι στην περίπτωση γραμμικών εξισώσεων. Αυτό δεν είναι τυχαίο. Φαίνεται ότι εξισώσεις με δύο αγνώστους και βαθμού άνω του δύο, γενικά, έχουν μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος λύσεων. Εξαιρέσεις αυτού του κανόνα είναι εντελώς σπάνιες.

1.6. Εξισώσεις με Δύο Αγνώστους και Βαθμού Άνω του Δύο

Εξισώσεις με δύο αγνώστους και βαθμού άνω του δύο σχεδόν πάντα, εκτός σπάνιων εξαιρέσεων, έχουν μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος ακέραιων λύσεων ως προς x και y. Ας μελετήσουμε πρώτα απ' όλα την εξίσωση

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = c \tag{81}$$

όπου ο n είναι ένας ακέραιος άνω του δύο και όλοι οι αριθμοί $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ και c είναι ακέραιοι.

Στις αρχές του εικοστού αιώνα, ο A. Thue απέδειξε ότι *αυτή η εξίσωση έχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος ακέραιων λύσεων ως προς* x *και* y, *με πιθανή εξαίρεση τις περιπτώσεις όταν το ομογενές του αριστερού μέλους είναι μία δύναμη*
(α) ενός ομογενούς γραμμικού διωνύμου

$$(ax + by)^n = c_0$$

ή (β) ενός ομογενούς δευτεροβάθμιου τριωνύμου

$$(ax^2 + bxy + cy^2)^n = c_0$$

Σε κάθε μία απ' αυτές τις περιπτώσεις, ακέραιες λύσεις μπορούν να υπάρξουν μόνο αν ο c_0 είναι η n-οστή δύναμη κάποιου ακέραιου και, κατ' επέκταση, αν η εξίσωση (81) υποβιβάζεται σε μία εξίσωση πρώτου ή δευτέρου βαθμού αντίστοιχα.

Η μέθοδος του Thue είναι τόσο πολύπλοκη για μας ώστε να περιγραφεί εδώ. Θα περιοριστούμε σε μερικές σημειώσεις που επεξηγούν πώς αποδείχτηκε το πεπερασμένο του πλήθους των λύσεων της εξίσωσης (81).

Διαιρέστε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (81) με το y^n, οπότε

$$a_0\left(\frac{x}{y}\right)^n + a_1\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{x}{y}\right) + a_n = \frac{c}{y^n} \quad (82)$$

Για λόγους απλοποίησης θα υποθέσουμε ότι όχι μόνο όλες οι ρίζες της εξίσωσης

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0 \quad (83)$$

είναι διαφορετικές μεταξύ τους και $a_0a_n \neq 0$, αλλά και ότι αυτές οι ρίζες δε μπορούν να είναι οι λύσεις οποιωνδήποτε εξισώσεων χαμηλότερου βαθμού με ακέραιους συντελεστές. Αυτή η περίπτωση είναι η ουσιώδης για τη συζήτησή μας.

Σε μαθήματα ανώτερης άλγεβρας αποδείχτηκε ότι οποιαδήποτε αλγεβρική εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα, απ' όπου, εφόσον κάθε πολυώνυμο του z είναι διαιρετό με το $z - \rho$ αν ο ρ είναι ρίζα του, έπεται πολύ απλά ότι κάθε πολυώνυμο μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = a_0\left(\frac{x}{y} - \rho_1\right)\left(\frac{x}{y} - \rho_2\right)\ldots\left(\frac{x}{y} - \rho_n\right) \quad (84)$$

όπου οι $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ είναι οι n (διαφορετικές) ρίζες της. Χρησιμοποιώντας αυτήν την έκφραση για ένα πολυώνυμο σε μορφή ενός γινομένου, μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (82) στη μορφή

$$a_0\left(\frac{x}{y} - \rho_1\right)\left(\frac{x}{y} - \rho_2\right)\ldots\left(\frac{x}{y} - \rho_n\right) = \frac{c}{y^n} \quad (85)$$

Υποθέστε ότι υπάρχει ένα άπειρο πλήθος ακέραιων λύσεων $[x_k, y_k]$ της εξίσωσης (85). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν λύσεις με το y_k αυθαίρετα μεγάλο κατ' απόλυτη τιμή. Αν υπήρχε ένα άπειρο πλήθος ζευγών με το y_k φραγμένο, μικρότερο κατ' απόλυτη τιμή από κάποιον πεπερασμένο αριθμό, και με το x_k αυθαίρετα μεγάλο, τότε θα υπήρχε μία αντίφαση, καθώς με τέτοιο x_k το αριστερό μέλος θα ήταν αυθαίρετα μεγάλο, ενώ το δεξί μέλος θα παρέμενε φραγμένο. Υποθέστε τώρα ότι ο y_k είναι ένας πολύ μεγάλος αριθμός. Τότε, το δεξί μέλος της εξίσωσης (85) θα είναι μικρό και αυτό σημαίνει ότι και το αριστερό μέλος πρέπει να είναι μικρό. Αλλά το αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι ένα γινόμενο n παραγόντων συμπεριλαμβανομένων και των x_k/y_k και a_0, ο οποίος, όντας ακέραιος, δεν είναι μικρότερος της μονάδας. Συνεπώς, το αριστερό μέλος μπορεί να γίνει μικρό μόνο αν τουλάχιστον ένας απ' τους παράγοντες

$$\frac{x_k}{y_k} - \rho_m$$

έχει μικρό μέτρο. Είναι ξεκάθαρο ότι αυτή η διαφορά μπορεί να είναι μικρή μόνο όταν ο ρ_m είναι πραγματικός, με άλλα λόγια, όταν η σχέση $\rho_m = a + bi, b \neq 0$, δεν ισχύει. Στην αντίθετη περίπτωση το μέτρο της διαφοράς μας δε μπορεί να είναι αυθαίρετα μικρό, καθώς

$$\left|\frac{x_k}{y_k} - a - bi\right| = \sqrt{\left(\frac{x_k}{y_k} - a\right)^2 + b^2} > |b|$$

Δύο διαφορές, δηλαδή δύο παράγοντες του αριστερού μέλους της εξίσωσης (85), δε μπορούν να έχουν ταυτόχρονα μικρό μέτρο επειδή

$$\left|\left(\frac{x_k}{y_k} - \rho_m\right) - \left(\frac{x_k}{y_k} - \rho_s\right)\right| = |\rho_m - \rho_s| \neq 0 \quad (86)$$

καθώς οι αριθμοί ρ_m είναι όλοι διαφορετικοί. Αν ένας απ' τους δύο παράγοντες έχει μέτρο μικρότερο από $|\rho_m - \rho_s|/2$, τότε, εξαιτίας της σχέσης (86), ο άλλος πρέπει να είναι μεγαλύτερος από $|\rho_m - \rho_s|/2$. Αυτό είναι μία συνέπεια του γεγονότος ότι η απόλυτη τιμή ενός αθροίσματος δε ξεπερνά το άθροισμα των απολύτων τιμών. Καθώς οι αριθμοί ρ_m είναι όλοι διαφορετικοί, η μικρότερη τιμή σε απόλυτες τιμές,

$|\rho_m - \rho_s|$, θα είναι μεγαλύτερη του μηδενός ($m \neq s$). Συμβολίζοντάς την με $2d$, θα έχουμε ότι, αν για κάποιους ικανοποιητικά μεγάλους y_k (το οποίο μπορούμε να το υποθέσουμε καθώς ο y_k αυξάνει επ' άπειρο)

$$\left|\frac{x_k}{y_k} - \rho_m\right| < d$$

τότε

$$\left|\frac{x_k}{y_k} - \rho_s\right| > d, \ \ s = 1,2, \dots, n, \ \ s \neq m \tag{87}$$

Τότε, καθώς το μέτρο ενός γινομένου είναι ίσο με το γινόμενο των μέτρων των παραγόντων του, έπεται απ' την εξίσωση (85) ότι

$$|a_0|\left|\frac{x_k}{y_k} - \rho_1\right| \dots \left|\frac{x_k}{y_k} - \rho_{m-1}\right|\left|\frac{x_k}{y_k} - \rho_m\right|\left|\frac{x_k}{y_k} - \rho_{m+1}\right| \dots \left|\frac{x_k}{y_k} - \rho_n\right| = \frac{|c|}{|y_k|^n} \tag{88}$$

Αν σ' αυτήν την εξίσωση αντικαταστήσουμε κάθε μία απ' τις διαφορές $|x_k/y_k - \rho_s|$, $s \neq m$, με τη μικρότερη ποσότητα d και αντικαταστήσουμε τον $|a_0|$ με τη μονάδα, ο οποίος πρέπει να είναι μικρότερος απ' τον ακέραιο $|a_0|$, τότε το αριστερό μέλος της εξίσωσης (88) θα γίνει μικρότερο απ' το δεξί μέλος, και παίρνουμε την ανισότητα

$$d^{n-1}\left|\frac{x_k}{y_k} - \rho_m\right| < \frac{|c|}{|y_k|^n}$$

ή

$$\left|\frac{x_k}{y_k} - \rho_m\right| < \frac{c_1}{|y_k|^n}, \ \ c_1 = \frac{|c|}{d^{n-1}} \tag{89}$$

όπου ο c_1 δεν εξαρτάται απ' τους x_n και y_n. Δεν υπάρχουν περισσότεροι από n αριθμοί ρ_m, ενώ το σύνολο των ζευγών $[x_k, y_k]$ που ικανοποιούν την ανισότητα (89) για κάποιο m είναι άπειρο. Άρα, υπάρχει ένα συγκεκριμένο m για το οποίο, με το αντίστοιχο ρ_m, αυτή η ανισότητα είναι έγκυρη άπειρες φορές. Με άλλα λόγια, αν η εξίσωση (81) έχει άπειρο πλήθος ακέραιων λύσεων, τότε η αλγεβρική εξίσωση (83) με ακέραιους συντελεστές έχει μία ρίζα ρ για την οποία η ανισότητα

$$\left|\rho - \frac{p}{q}\right| < \frac{A}{q^n} \tag{90}$$

ισχύει για αυθαίρετα μεγάλες τιμές του q. Εδώ, οι p και q είναι ακέραιοι, ο A είναι μία σταθερά, ανεξάρτητή τους, και ο n είναι ο βαθμός μιας εξίσωσης της οποίας ο ρ είναι μία ρίζα της.

Αν ο ρ ήταν ένας αυθαίρετος πραγματικός αριθμός, τότε θα ήταν πιθανό να τον επιλέξουμε κατάλληλα έτσι ώστε να υπήρχε όντως ένα άπειρο πλήθος ακέραιων λύσεων της ανισότητας ως προς p και q. Αλλά στην περίπτωσή μας ο ρ είναι ρίζα μίας αλγεβρικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές. Τέτοιοι αριθμοί καλούνται **αλγεβρικοί** και έχουν ειδικές ιδιότητες. Ο **βαθμός** ενός αλγεβρικού αριθμού είναι ο ελάχιστος βαθμός αλγεβρικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές που την ικανοποιεί ο αριθμός αυτός.

Ο A. Thue απέδειξε ότι για έναν αλγεβρικό αριθμό ρ βαθμού n η ανισότητα

$$\left|\rho - \frac{p}{q}\right| < \frac{A}{q^{\frac{n}{2}+1}}, \ \ n \geq 3 \tag{91}$$

μπορεί να έχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος ακέραιων λύσεων $[p, q]$. Αλλά, αν $n \geq 3$, το δεξί μέλος της ανισότητας (90) για ικανοποιητικά μεγάλο q θα γίνει μικρότερο απ' το δεξί μέλος της ανισότητας (91) εφόσον $n > n/2 + 1$. Επομένως, αν η ανισότητα (91) μπορεί να έχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος ακέραιων λύσεων ως προς p και q, τότε η ανισότητα (90) θα πρέπει σίγουρα να έχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος λύσεων. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση (81) μπορεί να έχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος ακέραιων λύσεων όταν όλες οι ρίζες της εξίσωσης (83) δε μπορούν να είναι ρίζες μιας εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές και βαθμού μικρότερου του n. Εύκολα φαίνεται ότι για $n = 2$ και δοθέν A η ανισότητα (90) έχει όντως ένα άπειρο πλήθος ακέραιων λύσεων ως προς p και q. Το θεώρημα του A. Thue επομένως ενισχύθηκε σημαντικά. Αξίζει να σημειωθεί ότι η μέθοδος που χρησιμοποίησε για να αποδείξει το θεώρημά του δεν του έδωσε τη δυνατότητα να βρει ένα άνω φράγμα για τις λύσεις, με άλλα λόγια, ένα φράγμα για τις πιθανές τιμές των $|x|$ και $|y|$ για δοθέντες συντελεστές $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ και c. Παρ' όλα αυτά, η μέθοδος σύμφωνα με τον Thue μάς επιτρέπει να ανακαλύψουμε ένα άνω φράγμα, αν και χονδροειδές, για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης (83). Για συγκεκριμένες τάξεις εξισώσεων του τύπου (83) αυτό το φράγμα μπορεί να γίνει πολύ πιο ακριβές. Για παράδειγμα, ο Σοβιετικός μαθηματικός B. N. Delone απέδειξε ότι, εκτός απ' την τετριμμένη λύση $[0,1]$, η εξίσωση

$$ax^3 + y^3 = 1$$

όπου a ακέραιος, δε μπορεί να έχει πάνω από μία ακέραια λύση $[x, y]$.

Επίσης απέδειξε ότι η εξίσωση

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 1$$

όπου οι παράγοντες a, b, c, d είναι ακέραιοι, δε μπορεί να έχει πάνω από πέντε λύσεις.

Ας συμβολίσουμε τώρα με $P(x, y)$ ένα αυθαίρετο πολυώνυμο ως προς x και y με ακέραιους συντελεστές A_{ks}:

$$P(x, y) = \sum A_{ks}x^k y^s$$

Το πολυώνυμο αυτό θα καλείται **μη-αναγώγιμο** αν δε μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα γινόμενο δύο άλλων πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές, κανένα απ' τα οποία δεν είναι ίσο με αριθμό.

Χρησιμοποιώντας μία εξαιρετικά πολύπλοκη μέθοδο, ο Siegel απέδειξε ότι η εξίσωση

$$P(x, y) = 0$$

όπου το $P(x, y)$ είναι μη-αναγώγιμο πολυώνυμο ως προς x και y βαθμού μεγαλύτερου από δύο (δηλαδή ένα πολυώνυμο που περιέχει όρους, ή ένα και μόνο όρο, της μορφής $A_{ks}x^k y^s$ με $k + s > 2$), μπορεί να έχει ένα άπειρο πλήθος ακέραιων λύσεων $[x, y]$ μόνο όταν υπάρχουν αριθμοί $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, a_{-1}, \dots, a_{-n+1}, a_{-n}$ και $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0, b_{-1}, \dots, b_{-n+1}, b_{-n}$, όπου ο n είναι κάποιος ακέραιος, τέτοιοι ώστε, όταν οι εκφράσεις

$$x = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 + \frac{a_{-1}}{t} + \dots + \frac{a_{-n+1}}{t^{n-1}} + \frac{a_{-n}}{t^n}$$

$$y = b_n t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0 + \frac{b_{-1}}{t} + \dots + \frac{b_{-n+1}}{t^{n-1}} + \frac{b_{-n}}{t^n}$$

αντικαταστήσουν τα x και y στην εξίσωσή μας, τότε να προκύπτει μία ταυτότητα ως προς t

$$P(x, y) \equiv 0$$

1.7. Αλγεβρικές Εξισώσεις με Τρεις Αγνώστους και Βαθμού Άνω του Δύο. Μερικές Εκθετικές Εξισώσεις

Είναι το πλήθος των ακέραιων λύσεων μίας εξίσωσης πεπερασμένο ή όχι; Αν και μπορούμε να δώσουμε απάντηση σ' αυτή την ερώτηση για εξισώσεις με δύο αγνώστους, μπορούμε να την απαντήσουμε μόνο για πολύ συγκεκριμένους τύπους εξισώσεων με τρεις αγνώστους και βαθμού άνω του δύο. Παρ' όλα αυτά, σ' αυτές τις συγκεκριμένες περιπτώσεις ένα πιο δύσκολο πρόβλημα, του προσδιορισμού στην πραγματικότητα όλων των ακέραιων λύσεων, μπορεί να επιλυθεί. Θεωρήστε για παράδειγμα το επονομαζόμενο τελευταίο θεώρημα του Fermat. Ο Pierre Fermat, ένας επιφανής Γάλλος μαθηματικός, ισχυρίστηκε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 3$ η εξίσωση

$$x^n + y^n = z^n \tag{92}$$

δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις ως προς τους x, y, z. Η περίπτωση $xyz = 0$ εξαιρείται απ' την απαίτηση ότι οι άγνωστοι είναι θετικοί. Επίσης ισχυρίστηκε ότι είχε μία απόδειξη αυτής της πρότασης (προφανώς, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο άπειρης κλίσης, βλέπε παρακάτω), αλλά ποτέ δε βρέθηκε. Όταν ο Γερμανός μαθηματικός E. Kummer προσπάθησε ακολούθως να αποδείξει το θεώρημα του Fermat, για αρκετό καιρό νόμιζε ότι τα είχε καταφέρει. Όμως ανακάλυψε ότι μία πρόταση, αληθής για συνήθεις ακέραιους, δεν ισχύει για πιο πολύπλοκους σχηματισμούς αριθμών που προκύπτουν από την έρευνα που συνδέεται με αυτό το πρόβλημα. Αυτή αφορούσε το ότι η παραγοντοποίηση των επονομαζόμενων αλγεβρικών αριθμών, δηλαδή, με άλλα λόγια, ριζών αλγεβρικών εξισώσεων με ακέραιους ρητούς συντελεστές και με τη μονάδα ως συντελεστή του αρχικού όρου, σε απλούς πρώτους ακέραιους παράγοντες της ίδιας αλγεβρικής φύσης δεν είναι μοναδική. Η παραγοντοποίηση των τακτικών ακέραιων είναι φυσικά μοναδική. Για παράδειγμα, $6 = 2 \cdot 3$, χωρίς άλλη παραγοντοποίηση να είναι εφικτή στο σύνολο των τακτικών ακέραιων.

Θεωρήστε τώρα το σύνολο όλων των αλγεβρικών αριθμών του τύπου $m + n\sqrt{-5}$ όπου οι m και n είναι τακτικοί ακέραιοι, και σημειώστε ότι τόσο το άθροισμα όσο και το γινόμενο δύο τέτοιων αριθμών είναι και πάλι αριθμοί του ίδιου συνόλου. Ένα σύνολο αριθμών που περιέχει οποιαδήποτε αθροίσματα και γινόμενα αυτών των αριθμών μέσα του, καλείται **δακτύλιος**. Εξ ορισμού, ο υπό συζήτηση δακτύλιος περιέχει τους αριθμούς $2, 3, 1 + \sqrt{-5}$ και $1 - \sqrt{-5}$. Είναι εύκολο να εξακριβώσουμε ότι κάθε ένας απ' αυτούς τους αριθμούς είναι πρώτος· κανένας απ' αυτούς δε μπορεί να αναπαρασταθεί ως γινόμενο δύο ακέραιων του δακτυλίου που ο καθένας τους δεν είναι ίσος με τη μονάδα. Ωστόσο,

$$6 = 2 \cdot 3 = \left(1 + \sqrt{-5}\right)\left(1 - \sqrt{-5}\right)$$

δηλαδή στο δακτύλιό μας ο αριθμός 6 δεν παραγοντοποιείται μοναδικά σε πρώτους παράγοντες.

Μη-μοναδικότητα της παραγοντοποίησης σε πρώτους παράγοντες παρουσιάζεται και σε άλλους, πιο πολύπλοκους, δακτυλίους αλγεβρικών αριθμών. Έχοντας ανακαλύψει αυτό, ο Kummer συνειδητοποίησε ότι η δική του απόδειξη του θεωρήματος του Fermat στην γενική περίπτωση ήταν εσφαλμένη. Στην προσπάθειά του να υπερνικήσει τις δυσκολίες που συνδέονται με τη μη-μοναδικότητα της παραγοντοποίησης σε πρώτους παράγοντες ο Kummer κατασκεύασε τη θεωρία των ιδεωδών, η οποία είναι εξαιρετικά σημαντική στη μοντέρνα άλγεβρα και στη θεωρία αριθμών. Ακόμα και με τη βοήθεια της νέας του θεωρίας, ο Kummer ήταν ανήμπορος να αποδείξει το θεώρημα του Fermat στην γενική περίπτωση, και την απέδειξε μόνο για εκείνα τα n τα οποία είναι διαιρετά με τουλάχιστον έναν από τους επονομαζόμενους κανονικούς πρώτους αριθμούς. Δε θα εμβαθύνουμε στο τι εννοείται με την έννοια των κανονικών πρώτων αριθμών ούτε στο κατά πόσο υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος κανονικών πρώτων αριθμών ή απείρως αρκετοί απ' αυτούς.

Μέχρι και τις αρχές του εικοστού πρώτου αιώνα, το τελευταίο θεώρημα του Fermat είχε αποδειχθεί για αρκετές τιμές του n και, συγκεκριμένα, για κάθε n διαιρετό με πρώτο αριθμό μικρότερο του 100. Το τελευταίο θεώρημα του Fermat φαίνεται ότι ήταν εξαιρετικά σημαντικό για την ανάπτυξη γενικά των μαθηματικών επειδή οι προσπάθειες απόδειξής του οδήγησαν στην ανακάλυψη της θεωρίας των ιδεωδών. Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή η θεωρία κατασκευάστηκε ανεξάρτητα, με εντελώς διαφορετική πορεία και για διαφορετικό λόγο απ' τον E. I. Zolotarev, έναν επιφανή Ρώσο μαθηματικό ο οποίος δυστυχώς απεβίωσε στο άνθος της δημιουργικής του ζωής. Μέχρι τις αρχές του αιώνα μας, μία αποπειραθείσα απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος του Fermat, ειδικά βασισμένη στις έννοιες της θεωρίας της διαιρεσιμότητας των αριθμών, είχε κίνητρο μόνο την περιέργεια. Αν, παρ' όλα αυτά, μία θεωρία εξελισσόταν βάσει μιας νέας και γόνιμης μεθόδου, τότε η βαρύτητά της, ή, μάλλον, η βαρύτητα της ίδιας της μεθόδου, θα μπορούσε να είναι αρκετά μεγάλη. Μέχρι τότε ερασιτέχνες συνέχιζαν να καταπιάνονται με το θεώρημα του Fermat χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις μεθόδους. Όλες αυτές οι προσπάθειες ήταν καταδικασμένες σε αποτυχία. Στοιχειώδεις ορισμοί προερχόμενοι απ' τη θεωρία της διαιρεσιμότητας των αριθμών χρησιμοποιήθηκαν απ' τον Kummer και εξελίχθηκαν περαιτέρω από μερικούς απ' τους πιο επιφανείς μαθηματικούς.

Θα αποδείξουμε τώρα το θεώρημα του Fermat για την περίπτωση $n = 4$, αφού η **μέθοδος άπειρης κλίσης**, στην οποία η απόδειξη βασίζεται, είναι πολύ ενδιαφέρουσα.

Θεώρημα IV. Η εξίσωση του Fermat

$$x^4 + y^4 = z^4 \tag{93}$$

δεν έχει ακέραιες λύσεις ως προς $x, y, z, xyz \neq 0$.

Απόδειξη.

Θα αποδείξουμε μία εξίσου ισχυρή πρόταση, δηλαδή, ότι η εξίσωση

$$x^4 + y^4 = z^2 \tag{94}$$

δεν έχει ακέραιες λύσεις ως προς $x, y, z, xyz \neq 0$. Απ' αυτό το θεώρημα έπεται άμεσα ότι η εξίσωση (93) δεν έχει λύση. Αν η εξίσωση (94) έχει μία μη-μηδενική ακέραια λύση ως προς x, y, z, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αυτοί οι αριθμοί είναι πρώτοι μεταξύ τους κατά ζεύγη. Δηλαδή αν υπάρχει μία λύση στην οποία οι x και y έχουν ένα μέγιστο κοινό διαιρέτη $d > 1$, τότε

$$x = dx_1, \ \ y = dy_1$$

όπου $(x_1, y_1) = 1$. Διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (94) με το d^4, έχουμε

$$x_1^4 + y_1^4 = \left(\frac{z}{d^2}\right)^2 = z_1^2 \tag{95}$$

Αλλά οι x_1 και y_1 είναι ακέραιοι, επομένως ο $z_1 = z/d^2$ είναι επίσης ακέραιος. Τώρα, αν οι x_1 και z_1 είχαν ένα κοινό διαιρέτη $k > 1$, τότε, εξαιτίας της εξίσωσης (95), ο x_1^2 θα έπρεπε να είναι διαιρετός με τον k, το οποίο σημαίνει ότι οι x_1 και k δε θα μπορούσαν να είναι πρώτοι μεταξύ τους. Έτσι έχουμε αποδείξει ότι αν υπάρχει μία μη-μηδενική ακέραια λύση της εξίσωσης (94), τότε υπάρχει και μία λύση ως προς μη-μηδενικούς πρώτους μεταξύ τους κατά ζεύγη ακέραιους. Οπότε είναι αρκετό για μας να αποδείξουμε ότι η εξίσωση (94) δεν έχει λύσεις ως προς μη-μηδενικούς πρώτους μεταξύ τους κατά ζεύγη ακέραιους. Στην ακόλουθη απόδειξη, όταν λέμε ότι η εξίσωση (94) έχει μία λύση, εννοούμε ότι έχει μία λύση ως προς μη-μηδενικούς πρώτους μεταξύ τους κατά ζεύγη ακέραιους.

Στην ενότητα 1.3 αποδείξαμε ότι όλες οι λύσεις ως προς θετικούς πρώτους μεταξύ τους κατά ζεύγη ακέραιους της εξίσωσης (12)

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{96}$$

προσδιορίζονται απ' τον τύπο (18) και έχουν τη μορφή

$$x = uv,\ \ y = \frac{u^2 - v^2}{2},\ \ z = \frac{u^2 + v^2}{2} \tag{97}$$

όπου οι u και v είναι οποιοδήποτε ζεύγος περιττών και πρώτων μεταξύ τους θετικών αριθμών.

Ας πάρουμε άλλη μορφή των τύπων (97) προσδιορίζοντας όλες τις λύσεις της εξίσωσης (96). Εφόσον οι u και v είναι περιττοί αριθμοί, τότε θέτοντας

$$\frac{u + v}{2} = a,\ \ \frac{u - v}{2} = b \tag{98}$$

προσδιορίζουμε τους u και v απ' τους

$$u = a + b,\ \ v = a - b \tag{99}$$

όπου οι a και b είναι ακέραιοι με διαφορετική ισοτιμία (ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος περιττός). Οι ισότητες (98) και (99) δείχνουν ότι σε κάθε ζεύγος περιττών και πρώτων μεταξύ τους αριθμών u και v αντιστοιχεί ένα ζεύγος πρώτων μεταξύ τους αριθμών a και b διαφορετικής ισοτιμίας και ότι σε κάθε ζεύγος πρώτων μεταξύ τους αριθμών a και b διαφορετικής ισοτιμίας αντιστοιχεί ένα ζεύγος περιττών και πρώτων μεταξύ τους αριθμών u και v. Επομένως, αντικαθιστώντας τους u και v με τους a και b αντίστοιχα στους τύπους (97) βρίσκουμε ότι όλες οι τριάδες θετικών και πρώτων μεταξύ τους ανά ζεύγη ακέραιων x, y, z, (x περιττός), οι οποίες είναι λύσεις της εξίσωσης (96), προσδιορίζονται απ' τους τύπους

$$x = a^2 - b^2,\ \ y = 2ab,\ \ z = a^2 + b^2 \tag{100}$$

όπου οι a και b είναι δύο οποιοιδήποτε πρώτοι μεταξύ τους αριθμοί με διαφορετική ισοτιμία, υπό τη συνθήκη ότι $x > 0$. Αυτοί οι τύποι δείχνουν ότι οι δύο αριθμοί, x και y, είναι διαφορετικής ισοτιμίας. Τώρα, αν $[x_0, y_0, z_0]$ είναι μία λύση της εξίσωσης (94), τότε

$$[x_0^2]^2 + [y_0^2]^2 = z_0^2$$

με αποτέλεσμα η τριάδα $[x_0^2, y_0^2, z_0]$ να ικανοποιεί την εξίσωση (96). Αλλά τότε πρέπει να υπάρχουν δύο πρώτοι μεταξύ τους αριθμοί a και b, $a > b$, διαφορετικής ισοτιμίας, τέτοιοι ώστε

$$x_0^2 = a^2 - b^2,\ \ y_0^2 = 2ab,\ \ z_0 = a^2 + b^2 \tag{101}$$

Έχουμε υποθέσει εδώ για χάρη της σαφήνειας ότι ο x_0 είναι περιττός και ο y_0 άρτιος. Στην αντίθετη περίπτωση τίποτα δεν αλλάζει αφού ο x_0 μπορεί να αλλάξει με τον y_0 και αντιστρόφως. Ξέρουμε ήδη απ' την ισότητα (75) της ενότητας 1.5 ότι το τετράγωνο ενός περιττού αριθμού διαιρεμένο με το 4 αφήνει ένα υπόλοιπο ίσο με 1. Επομένως απ' την ισότητα

$$x_0^2 = a^2 - b^2 \tag{102}$$

έπεται ότι ο a είναι περιττός και ο b άρτιος. Διαφορετικά, το αριστερό μέλος της ισότητας (102) διαιρεμένο με το 4 θα άφηνε ένα υπόλοιπο 1 ενώ το δεξί μέλος θα άφηνε υπόλοιπο -1, καθώς υποθέσαμε ότι ο a είναι άρτιος και ο b περιττός. Εφόσον ο a είναι περιττός και $(a, b) = 1$, έχουμε $(a, 2b) = 1$. Αλλά τότε απ' την ισότητα

$$y_0^2 = 2ba$$

έπεται ότι

$$a = t^2,\ \ 2b = s^2 \tag{103}$$

όπου οι t και s είναι κάποιοι ακέραιοι. Αλλά έπεται απ' τη σχέση (102) ότι η $[x_0, b, a]$ είναι μία λύση της εξίσωσης (96) και επομένως

$$x_0 = m^2 - n^2,\ \ b = 2mn,\ \ a = m^2 + n^2$$

όπου οι m και n είναι κάποιοι πρώτοι μεταξύ τους αριθμοί διαφορετικής ισοτιμίας. Απ' την (103) έχουμε

$$mn = \frac{b}{2} = \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

απ' όπου, αφού οι m και n είναι πρώτοι μεταξύ τους, έπεται ότι

$$m = p^2,\ \ n = q^2 \tag{104}$$

όπου οι p και q είναι μη-μηδενικοί ακέραιοι. Εφόσον $a = t^2$ και $a = m^2 + n^2$, έπεται ότι

$$q^4 + p^4 = t^2 \tag{105}$$

Αλλά

$$z_0 = a^2 + b^2 > a^2$$

Επομένως

$$0 < t = \sqrt{a} < \sqrt[4]{z_0} < z_0 \ \ (z_0 < 1) \tag{106}$$

Θέτοντας $q = x_1$, $p = y_1$ και $t = z_1$ βλέπουμε ότι αν υπάρχει μία λύση $[x_0, y_0, z_0]$, τότε πρέπει να υπάρχει και άλλη μία λύση $[x_1, y_1, z_1]$ για την οποία ισχύει $0 < z_1 < z_0$. Αυτή η διεργασία απόκτησης λύσεων της εξίσωσης (94) μπορεί να συνεχιστεί επ' αόριστον, και αποκτούμε μία ακολουθία λύσεων

$$[x_0, y_0, z_0], [x_1, y_1, z_1], \dots, [x_n, y_n, z_n], \dots$$

στην οποία οι θετικοί ακέραιοι $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ φθίνουν μονοτονικά· με άλλα λόγια, οι ανισότητες

$$z_0 > z_1 > z_2 > \cdots > z_n > \cdots$$

ισχύουν γι' αυτούς. Αλλά θετικοί ακέραιοι δε μπορούν να σχηματίσουν μία άπειρη και μονοτονικά φθίνουσα ακολουθία αφού δε μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από z_0 όροι σ' αυτήν. Έχουμε έτσι καταλήξει σε άτοπο υποθέτοντας ότι η εξίσωση (94) έχει τουλάχιστον μία ακέραια λύση ως προς τους $x, y, z, xyz \neq 0$. Αυτό χρησιμεύει ως απόδειξη ότι η εξίσωση (94) δεν έχει λύση. Ανάλογα και η εξίσωση (93) δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις $[x, y, z]$, καθώς, διαφορετικά, αν η $[x, y, z]$ ήταν λύση της εξίσωσης (93), τότε η $[x, y, z^2]$ θα ήταν λύση της (94).

Η αποδεικτική μέθοδος που έχουμε αναπτύξει, που απαρτίζεται από τη χρήση μίας λύσης για την κατασκευή μίας αναρίθμητης ακολουθίας λύσεων με απείρως φθίνοντες θετικούς z, καλείται μέθοδος άπειρης κλίσης.

Όπως επισημάναμε παραπάνω, το τελευταίο θεώρημα του Fermat στη γενική του περίπτωση δεν υπέκυψε σ' αυτήν τη μέθοδο εξαιτίας της μη-μοναδικότητας της παραγοντοποίησης ακέραιων ενός αλγεβρικού δακτυλίου σε πρώτους παράγοντες απ' τον ίδιο δακτύλιο.

Σημειώστε ότι έχουμε παρουσιάσει τη μη-ύπαρξη ακέραιων λύσεων όχι μόνο της εξίσωσης (94), αλλά επίσης και της εξίσωσης

$$x^{4n} + y^{4n} = z^{2n}$$

Είναι αξιοσημείωτο να παραθέσουμε ότι η εξίσωση

$$x^4 + y^2 = z^2$$

έχει ένα άπειρο πλήθος θετικών ακέραιων λύσεων. Για παράδειγμα, μία λύση είναι η [2,3,5]. Αφήνεται στον αναγνώστη η εύρεση γενικών εκφράσεων για όλες τις ακέραιες λύσεις αυτής της εξίσωσης ως προς x, y, z.

Θα εξετάσουμε τώρα άλλο ένα παράδειγμα το οποίο αντικατοπτρίζει τη μέθοδο άπειρης κλίσης, αλλά η επιχειρηματολογία θα είναι ελαφρώς διαφορετική.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Αποδείξτε ότι η εξίσωση*

$$x^4 + 2y^4 = z^2 \tag{107}$$

δεν έχει μη-μηδενικές ακέραιες λύσεις ως προς x, y, z. Ας υποθέσουμε ότι όντως υπάρχει μία θετική ακέραια λύση $[x_0, y_0, z_0]$. Αυτοί οι αριθμοί μπορούν αμέσως να θεωρηθούν πρώτοι μεταξύ τους, καθώς αν είχαν ένα μέγιστο κοινό διαιρέτη $d > 1$, τότε οι αριθμοί $x_0/d, y_0/d, z_0/d$ θα ήταν επίσης λύσεις της εξίσωσης (107). Επιπλέον, η ύπαρξη ενός κοινού διαιρέτη για οποιουσδήποτε αριθμούς θα σήμαινε ότι και οι τρεις είχαν κοινό διαιρέτη. Ας θεωρήσουμε επίσης ότι ο z_0 είναι ο ελάχιστος δυνατός απ' όλες τις τιμές του z στο σύνολο των θετικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης (107). Τώρα καθώς η $[x_0, y_0, z_0]$ ικανοποιεί την εξίσωση (107), η $[x_0^2, y_0^2, z_0]$ θα είναι λύση της εξίσωσης

$$x^2 + 2y^2 = z^2 \tag{108}$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους (19') απ' την ενότητα 3 οι οποίοι δίνουν όλες τις θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης (108), βλέπουμε ότι υπάρχουν θετικοί ακέραιοι a και b με $(a, b) = 1$ και a περιττό, τέτοιοι ώστε

$$x_0^2 = \pm(a^2 - 2b^2),\ \ y_0^2 = 2ab,\ \ z_0 = a^2 + 2b^2 \tag{109}$$

Από την $y_0^2 = 2ab$ έπεται ότι ο b πρέπει να είναι άρτιος, καθώς ο y_0 είναι άρτιος, ο y_0^2 είναι διαιρετός με το 4 και ο a είναι περιττός. Τώρα εφόσον οι $b/2$ και a είναι πρώτοι μεταξύ τους, η ισότητα

$$\left(\frac{y_0}{2}\right)^2 = a\frac{b}{2}$$

άμεσα δίνει τις

$$a = m^2,\ \ \frac{b}{2} = n^2$$

όπου οι m και n είναι θετικοί ακέραιοι και $(m, 2n) = 1$. Αλλά απ' τις ισότητες (109) έπεται ότι

$$x_0^2 = \pm(a^2 - 2b^2) = \pm\left[a^2 - 8\left(\frac{b}{2}\right)^2\right] \tag{110}$$

όπου οι x_0 και a είναι περιττοί. Έχουμε δει ότι το τετράγωνο ενός περιττού αριθμού διαιρούμενου με το 4 αφήνει υπόλοιπο 1. Επομένως, το αριστερό μέλος της ισότητας (110), στη διαίρεσή του με το 4, δίνει υπόλοιπο 1 ενώ ο $a^2 - 8(b/2)^2$, όταν διαιρείται με το 4, αφήνει επίσης υπόλοιπο 1. Αυτό σημαίνει ότι οι αγκύλες στο δεξί μέλος της (110) μπορεί να παρθούν μόνο με το θετικό πρόσημο. Τώρα η (110) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$x_0^2 = m^4 - 8n^4$$

ή στη μορφή

$$x_0^2 + 2(2n^2)^2 = (m^2)^2 \tag{111}$$

όπου οι x_0, n και m είναι θετικοί και πρώτοι μεταξύ τους ακέραιοι. Άρα, οι αριθμοί x_0, $2n^2$ και m^2

συνιστούν λύση της εξίσωσης (108) και είναι πρώτοι μεταξύ τους. Όμως, σύμφωνα με τον τύπο (19') της ενότητας 1.3, μπορεί να βρεθούν ακέραιοι p και q, με τον p περιττό και $(p,q)=1$, τέτοιοι ώστε

$$2n^2 = 2pq,\ \ m^2 = p^2 + 2q^2,\ \ x_0^2 = \pm(p^2 - 2q^2) \qquad (112)$$

Αλλά εφόσον $(p,q)=1$ και $n^2 = pq$, έχουμε

$$p = s^2,\ \ q = r^2$$

όπου οι s και r είναι πρώτοι μεταξύ τους ακέραιοι. Τελικώς, από δω έπεται η σχέση

$$s^4 + 2r^4 = m^2 \qquad (113)$$

η οποία δείχνει ότι η τριάδα s, r, m είναι λύση της εξίσωσης (107). Αλλά απ' τα αποτελέσματα

$$z_0 = a^2 + 2b^2,\ \ a = m^2$$

που προέκυψαν παραπάνω έπεται ότι $z_0 > m$. Άρα, αρχίζοντας απ' τη λύση $[x_0, y_0, z_0]$, έχουμε βρει άλλη μία λύση $[s, r, m]$, στην οποία $0 < m < z_0$. Αυτό αντίκειται στην υπόθεση που κάναμε ότι ο z_0 ήταν η ελάχιστη δυνατή τιμή. Άρα έχουμε καταλήξει σε άτοπο υποθέτοντας την ύπαρξη μίας λύσης της εξίσωσης (107), και έτσι έχουμε αποδείξει ότι αυτή η εξίσωση είναι άλυτη ως προς μη-μηδενικούς ακέραιους. ■

Αφήνεται στον αναγνώστη να αποδείξει ότι οι εξισώσεις

$$x^4 + 4y^4 = z^2,\ \ x^4 - y^4 = z^2$$
$$x^4 - y^4 = 2z^2,\ \ x^4 - 4y^4 = z^2$$

δεν έχουν θετικές ακέραιες λύσεις.

Θα τελειώσουμε με μερικά σχόλια σχετικά με εκθετικές εξισώσεις. *Η εξίσωση*

$$a^x + b^y = c^z \qquad (114)$$

όπου οι a, b και c είναι ακέραιοι, όχι ίσοι με κάποια δύναμη του 2 ή το μηδέν, μπορεί να έχει όχι πάνω από ένα πεπερασμένο πλήθος ακέραιων λύσεων ως προς x, y, z. Η ίδια πρόταση με μία ασθενή συνθήκη που θα προστεθεί είναι έγκυρη για αυθαίρετους αλγεβρικούς αριθμούς a, b και c. Εξ άλλου, η εξίσωση

$$A\alpha_1^{x_1} \dots \alpha_n^{x_n} + B\beta_1^{y_1} \dots \beta_m^{y_m} + C\gamma_1^{z_1} \dots \gamma_p^{z_p} = 0 \qquad (115)$$

όπου οι A, B και C, $ABC \neq 0$, είναι ακέραιοι, οι $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $\beta_1, \dots, \beta_m$ και $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ είναι ακέραιοι και οι αριθμοί

$$\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n,\ \ \beta = \beta_1 \dots \beta_m,\ \ \gamma = \gamma_1 \dots \gamma_p$$

είναι πρώτοι μεταξύ τους, μπορεί να έχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος ακέραιων λύσεων $[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots z_p]$. Μία γενίκευση αυτής της πρότασης με τους A, B και C και α_i, β_k και γ_sνα είναι αλγεβρικοί ακέραιοι είναι επίσης πιθανή. Εξισώσεις του τύπου (115) και οι γενικεύσεις τους είναι τεράστιου ενδιαφέροντος επειδή, όπως έχει δειχθεί στη θεωρία των αλγεβρικών αριθμών, σε κάθε αλγεβρική εξίσωση του τύπου (81), αντιστοιχεί μία συγκεκριμένη εκθετική εξίσωση του τύπου (115) και σε κάθε λύση της εξίσωσης (81) αντιστοιχεί μία λύση της εξίσωσης (115) στους ακέραιους. Αυτή η αντιστοιχία επεκτείνεται σε εξισώσεις πιο γενικού τύπου απ' τις (81) και (115).

2. Σύγχρονη Μέθοδος για Πρότυπα Επίλυσης στον Αμιγή Ακέραιο Προγραμματισμό

Στη σύγχρονη μέθοδο που παρουσιάζεται στο παρόν κεφάλαιο, η αντικειμενική συνάρτηση υποτίθεται ότι μεγιστοποιείται ή ελαχιστοποιείται αλλά οι περιορισμοί πάντα δίνονται ως «μικρότερο από ή ίσο με». Σ' αυτή τη μέθοδο, επιλέγεται ένας διπλός συνδυασμός ιδανικών ανισώσεων ώστε να απαλειφτεί μια απ' τις μεταβλητές. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε τελικά σε μία ανίσωση με $n - m + 1$ αγνώστους στην οποία το m είναι το πλήθος των περιορισμών και το n είναι το πλήθος των μεταβλητών απόφασης. Επισημαίνουμε ότι όλες οι μεταβλητές θεωρούνται ακέραιες και θετικές.

2.1. Εισαγωγή

Ένας από τους σημαντικότερους κλάδους της Επιχειρησιακής Έρευνας που η ευρεία χρήση του δεν καλύπτεται σε οποιαδήποτε άλλη επιστήμη, είναι ο αμιγής ακέραιος προγραμματισμός όπου όλες οι μεταβλητές απόφασης αυτού του προτύπου είναι ακέραιοι και θετικοί [1.2].

Μέχρι σήμερα πολλές μέθοδοι για πρότυπα επίλυσης στον αμιγή ακέραιο προγραμματισμό είχαν εξηγηθεί από πολλούς επιστήμονες αυτού του κλάδου, αλλά καμία από αυτές δεν έχει τα κατάλληλα αποτελέσματα, ειδικά, μερικές από εκείνες τις μεθόδους με τους μακροσκελείς υπολογισμούς μπορεί να μην έχουν το βέλτιστο αποτέλεσμα [3.4]. Αυτή η μέθοδος, εγγυάται το βέλτιστο αποτέλεσμα, επειδή βασίζεται στην επίλυση συστημάτων εξισώσεων με τη μέθοδο απαλοιφής.

2.2. Η Μέθοδος

Υποθέτουμε αμιγώς ακέραια πρότυπα με δύο περιπτώσεις:

A: $\max Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$

s.t: $A\underline{x} \le \underline{b}$, $x_j \in W$ $(j = 1, \dots, n)$, $W = \{0,1,2,3, \dots\}$

Ορίζουμε την Περίπτωση "A":

A(1): $C_k > 0,\ a_{ik} > 0 \ ; \ i = 1, \dots, m \ ; \ k \in j = 1, \dots, n$

A(2): $C_k < 0,\ a_{ik} < 0 \ ; \ i = 1, \dots, m \ ; \ k \in j = 1, \dots, n$

B: $\min Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$

s.t: $A\underline{x} \le \underline{b} \ ; \ x_j \in W$ $(j = 1, \dots, n) \ ; \ W = \{0,1,2,3, \dots\}$

Ορίζουμε την Περίπτωση "B":

B(1): $C_k > 0,\ a_{ik} > 0 \ ; \ i = 1, \dots, m \ ; \ k \in j = 1, \dots, n$

B(2): $C_k < 0,\ a_{ik} < 0 \ ; \ i = 1, \dots, m \ ; \ k \in j = 1, \dots, n$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, εξετάζουμε την περίπτωση "A(1)":

(1) $\max Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \ ; \ C_k > 0,\ a_{ik} > 0 \ ; \ i = 1, \dots, m \ ; \ k \in j = 1, \dots, n$

s.t: $A\underline{x} \le \underline{b} \ ; \ x_j \in W$ $(j = 1, \dots, n) \ ; \ W = \{0,1,2,3, \dots\}$

Σε αυτή την περίπτωση υποθέτουμε ότι η αντικειμενική συνάρτηση γράφεται ως: $-\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \le -Z$ με m ανισοτικούς περιορισμούς. Σχηματίζουμε τώρα ένα σύστημα $(m+1)$ ανισώσεων με $(n+1)$ άγνωστες ποσότητες.

$$(2) \quad \begin{cases} (1) & -C_1x_1 - \cdots - C_nx_n \le -Z \\ (2) & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ (3) & a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \vdots & \vdots \\ (m+1) & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

όπου $x_j \in W$ $(j = 1, \dots, n)$.

Απ' το σύστημα αυτό σχηματίζουμε όλα τα δυνατά ζεύγη ανισώσεων με το κάθε ζεύγος να περιέχει την ανίσωση (1) και κάποια απ' τις υπόλοιπες:

(3) $(1,2)\begin{cases}-C_1x_1-\cdots-C_nx_n\le -Z\\ a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\le b_1\end{cases}$

$(1,3)\begin{cases}-C_1x_1-\cdots-C_nx_n\le -Z\\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n\le b_1\end{cases}$

$\vdots$

$(1,(m+1))\begin{cases}-C_1x_1-\cdots-C_nx_n\le -Z\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\le b_m\end{cases}$

Στα παραπάνω συστήματα οι $C_1, a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}$ θεωρούνται θετικοί, επομένως μπορούμε να απαλείψουμε τη μεταβλητή x_1 απ' το κάθε ένα σύστημα. Έτσι, το σύστημα (1,2) γίνεται:

(4) $\begin{cases}-a_{11}C_1x_1-\cdots-a_{11}C_nx_n\le -a_{11}Z\\ a_{11}C_1x_1+\cdots+a_{1n}C_1x_n\le C_1b_1\end{cases}$

Αθροίζοντας τις δύο ανισώσεις κατά μέλη, παίρνουμε

(5) $-a_{11}C_2x_2+a_{12}C_1x_2-\cdots-a_{11}C_nx_n+a_{1n}C_1x_n\le -a_{11}Z+C_1b_1$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αυτή και στα υπόλοιπα συστήματα $(1,3), \dots, (1,(m+1))$, καταλήγουμε στις παρακάτω ανισώσεις:

(6) $-a_{21}C_2x_2+a_{22}C_1x_2-\cdots-a_{21}C_nx_n+a_{2n}C_1x_n\le -a_{21}Z+C_1b_2$

$\vdots$

$-a_{m1}C_2x_2+a_{m2}C_1x_2-\cdots-a_{m1}C_nx_n+a_{mn}C_1x_n\le -a_{m1}Z+C_1b_m$

Οι παραπάνω ανισώσεις (5) και (6) σχηματίζουν ένα σύστημα m ανισώσεων με n άγνωστες ποσότητες. Το βήμα που παρουσιάστηκε είχε ως αποτέλεσμα την ολική απαλοιφή της μεταβλητής x_1. Εφαρμόζοντας το βήμα αυτό για τη μεταβλητή x_2 θα μας οδηγήσει σ' ένα σύστημα $(m-1)$ ανισώσεων με $(n-1)$ άγνωστες ποσότητες. Συνεχίζοντας μ' αυτόν τον τρόπο, απαλείφοντας και τις μεταβλητές $x_3, x_4, \dots, x_p$ $(p\in j)$, καταλήγουμε σ' ένα σύστημα $(m-p+1)$ ανισώσεων με $(n-p+1)$ άγνωστες ποσότητες και συγκεκριμένα τις $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n, Z$.

2.3. Παραδείγματα

2.3.1. Περίπτωση "A(1)"

$\max Z=2x_1+x_2-3x_3+5x_4$

(8) s.t: $\begin{cases}3x_1-x_2+x_3+2x_4\le 8\\ x_1+7x_2+3x_3+7x_4\le 46,\\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4\le 10\end{cases}$ $x_1,x_2,x_3,x_4\in W;\quad W=\{0,1,2,3,\dots\}$

Σχηματίζουμε το 1$^{\text{ο}}$ σύστημα ανισώσεων:

(9) $\begin{cases}-2x_1-x_2+3x_3-5x_4\le -Z\\ 3x_1-x_2+x_3+2x_4\le 8\end{cases}$

Απαλείφοντας τη μεταβλητή x_1 στο σύστημα (9), θα έχουμε:

(10) $3Z\le 5x_2-11x_3+11x_4+16$

Σχηματίζουμε τώρα το 2$^{\text{ο}}$ σύστημα ανισώσεων:

(11) $\begin{cases}-2x_1-x_2+3x_3-5x_4\le -Z\\ x_1+7x_2+3x_3+7x_4\le 46\end{cases}$

Απαλείφοντας τη μεταβλητή x_1 στο σύστημα (11), θα έχουμε:

(12) $Z\le -13x_2-9x_3-9x_4+92$

Τέλος, σχηματίζουμε το 3$^{\text{ο}}$ σύστημα ανισώσεων:

(13) $\begin{cases}-2x_1-x_2+3x_3-5x_4\le -Z\\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4\le 10\end{cases}$

Ομοίως, απαλείφοντας τη μεταβλητή x_1 στο σύστημα (13), θα έχουμε:

(14) $Z\le -2x_2-2x_3+4x_4+10$

Σχηματίζουμε ένα σύστημα χρησιμοποιώντας τις ανισώσεις (10), (12) και (14):

(15) $\begin{cases}3Z\le 5x_2-11x_3+11x_4+16\\ Z\le -13x_2-9x_3-9x_4+92\\ Z\le -2x_2-2x_3+4x_4+10\end{cases}$

Επιλέγουμε ένα απ' τους δύο συνδυασμούς δύο ανισώσεων απ' το σύστημα (15):

(16) $$\begin{cases} 3Z \le 5x_2 - 11x_3 + 11x_4 + 16 \\ Z \le -13x_2 - 9x_3 - 9x_4 + 92 \end{cases}$$

Απαλείφοντας τη μεταβλητή x_2 στο σύστημα (16), θα έχουμε:

(17) $$44Z \le -188x_3 + 98x_4 + 668$$

Επιλέγουμε τον άλλο συνδυασμό δύο ανισώσεων απ' το σύστημα (15):

(18) $$\begin{cases} 3Z \le 5x_2 - 11x_3 + 11x_4 + 16 \\ Z \le -2x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 10 \end{cases}$$

Ομοίως, απαλείφοντας τη μεταβλητή x_2 στο σύστημα (18), θα έχουμε:

(19) $$11Z \le -32x_3 + 42x_4 + 82$$

Οι μεταβλητές x_3 και x_4 δε μπορούν να απαλειφθούν στις ανισώσεις (17) και (19) διότι το πρόσημο του x_3 είναι αρνητικό και στις δύο και του x_4 είναι και στις δύο θετικό.

Άρα, ολοκληρώνοντας όλες τις δυνατές απαλοιφές μεταβλητών, καταλήγουμε στο κάτωθι σύστημα δύο ανισώσεων με τρεις άγνωστες ποσότητες, τις x_3, x_4, Z:

(20) $$\begin{cases} 44Z \le -188x_3 + 98x_4 + 668 \\ 44Z \le -128x_3 + 168x_4 + 328 \end{cases}$$

Για το παραπάνω σύστημα, στο αριστερό μέλος του οποίου έχουμε την ίδια ποσότητα, υπάρχουν τρεις πιθανές περιπτώσεις:

Περίπτωση 1

(21) $$-188x_3 + 98x_4 + 668 = -128x_3 + 168x_4 + 328$$

Απλοποιώντας την (21) παίρνουμε:

(22) $$6x_3 + 7x_4 = 34$$

Έχοντας υπ' όψιν την αρχική συνθήκη ότι οι μεταβλητές απόφασης παίρνουν τιμές θετικές ακέραιες και παρατηρώντας ότι το δεξί μέλος της (22) και η ποσότητα $6x_3$ είναι άρτιοι αριθμοί, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι και η ποσότητα $7x_4$ πρέπει να είναι άρτιος αριθμός, δηλαδή $x_4 = 2q$. Οπότε η (22) γίνεται:

(23) $$3x_3 + 7q = 17$$

Απ' την (23) διαπιστώνουμε ότι $q \le 2$ (επειδή $x_3 \ge 0$). Αν $q = 0$, τότε $3x_3 = 17$· άτοπο. Αν $q = 1$, τότε $3x_3 = 10$· άτοπο. Οπότε $q = 2$. Άρα:

(26) $$x_3 = 1,\ \ x_4 = 4$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των x_3 και x_4 στην πρώτη ανίσωση του συστήματος (20) θα έχουμε:

(27) $$44Z \le -188 \cdot 1 + 98 \cdot 4 + 668 \Rightarrow Z \le 19$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των x_3, x_4 και Z στις ανισώσεις (8) θα έχουμε:

(28) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \le 19 \\ 3x_1 - x_2 + 1 + 2 \cdot 4 \le 8 \\ x_1 + 7x_2 + 3 \cdot 1 + 7 \cdot 4 \le 46 \\ 2x_1 + 3x_2 - 1 + 4 \le 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2 \\ 3x_1 - x_2 \le -1 \\ x_1 + 7x_2 \le 15 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 7 \end{cases}$$

Αθροίζοντας τις δύο πρώτες ανισώσεις του συστήματος (28), παίρνουμε $5x_1 \le 1$, το οποίο συνεπάγεται ότι $x_1 = 0$. Οπότε η 1^{η} γίνεται $x_2 \le 2$ και δεύτερη $-x_2 \le -1$, δηλαδή $1 \le x_2 \le 2$. Επειδή επιθυμούμε τη μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, τότε θα πρέπει $x_2 = 2$. Άρα:

(29) $$x_1 = 0,\ \ x_2 = 2,\ \ Z = 19$$

Περίπτωση 2

(30) $$-188x_3 + 98x_4 + 668 > -128x_3 + 168x_4 + 328$$

Απλοποιώντας την (30) παίρνουμε:

(31) $$6x_3 + 7x_4 < 34$$

Από το σύστημα (20) έχουμε:

(32) $$44Z \le -128x_3 + 168x_4 + 328$$

Επειδή ο συντελεστής του x_3 στην (32) είναι αρνητικός και επιθυμούμε τη μεγιστοποίηση του Z, τότε θα πρέπει $x_3 = 0$. Οπότε απ' την (31) θα έχουμε $x_4 = 4$, αφού επιθυμούμε τη μεγιστοποίηση του Z. Αντικαθιστώντας τις τιμές των x_3 και x_4 στην (32) θα έχουμε τελικά:

(33) $$x_3 = 0,\ \ x_4 = 4,\ \ Z \le 22$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των x_3, x_4και Z στις ανισώσεις (8) θα έχουμε:

(34) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3\cdot 1 + 5\cdot 4 \le 22 \\ 3x_1 - x_2 + 0 + 2\cdot 4 \le 8 \\ x_1 + 7x_2 + 3\cdot 0 + 7\cdot 4 \le 46 \\ 2x_1 + 3x_2 - 0 + 4 \le 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2 \\ 3x_1 - x_2 \le 0 \\ x_1 + 7x_2 \le 18 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6 \end{cases}$$

Αθροίζοντας τις δύο πρώτες ανισώσεις του συστήματος (34), παίρνουμε $5x_1 \le 2$, το οποίο συνεπάγεται ότι $x_1 = 0$. Οπότε η 1η γίνεται $x_2 \le 2$ και δεύτερη $-x_2 \le 0$, δηλαδή $0 \le x_2 \le 2$. Επειδή ο συντελεστής του x_2 στην αντικειμενική συνάρτηση είναι θετικός και επιθυμούμε τη μεγιστοποίησή της, τότε θα πρέπει $x_2 = 2$. Άρα:

(34') $x_1 = 0,\ \ x_2 = 2,\ \ Z = 22$

Περίπτωση 3

(35) $-188x_3 + 98x_4 + 668 < -128x_3 + 168x_4 + 328$

Απλοποιώντας την (35) παίρνουμε:

(36) $6x_3 + 7x_4 > 34$

Από το σύστημα (20) έχουμε:

(37) $44Z \le -188x_3 + 98x_4 + 668$

Επειδή ο συντελεστής του x_3 στην (37) είναι αρνητικός και επιθυμούμε τη μεγιστοποίηση του Z, τότε θα πρέπει $x_3 = 0$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (36) και τον περιορισμό $x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 \le 46$, θα πρέπει $34 < 7x_2 \le 46$, δηλαδή:

(38) $x_3 = 0,\ \ x_4 = 5$ ή $x_4 = 6$

Αντικαθιστώντας το ένα ζεύγος τιμών των x_3 και x_4 στην (37) θα έχουμε:

(39) $(x_3 = 0,\ \ x_4 = 5) \Rightarrow Z \le 26$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των x_3, x_4 και Z στην αντικειμενική συνάρτηση θα έχουμε:

(40) $2x_1 + x_2 \le 1 \Rightarrow x_1 = 0,\ \ x_2 \le 1$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των x_2, x_3, x_4και Z στην 1η ανίσωση του συστήματος (8) θα έχουμε:

(41) $-x_2 + 10 \le 8 \Rightarrow x_2 \ge 2$

Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο, αφού οι ανισώσεις (40) και (41) αλληλοαναιρούνται.

Αντικαθιστώντας το άλλο ζεύγος τιμών των x_3 και x_4 στην (37) θα έχουμε:

(42) $(x_3 = 0,\ \ x_4 = 6) \Rightarrow Z \le 28$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των x_3, x_4και Z στην αντικειμενική συνάρτηση θα έχουμε:

(43) $2x_1 + x_2 \le -2$

Καταλήξαμε λοιπόν και πάλι σε άτοπο, αφού η ανίσωση (43) είναι αδύνατη (οι μεταβλητές είναι θετικές ακέραιες).

Επομένως, το βέλτιστο αποτέλεσμα προκύπτει απ' την περίπτωση 2. Άρα:

(44) $x_1 = 0,\ \ x_2 = 2,\ \ x_3 = 0,\ \ x_4 = 4,\ \ Z = 22$

2.3.2. Περίπτωση "A(2)"

(45) $$\max Z = -3x_1 + x_2 - 7x_3 + 3x_4$$
$$\text{s.t:} \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \le -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 \le 1 \end{cases},\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in W;\quad W = \{0,1,2,3,\dots\}$$

Σχηματίζουμε το 1ο σύστημα ανισώσεων:

(46) $$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 7x_3 + 3x_4 \le -Z \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \le -2 \end{cases}$$

Απαλείφοντας τη μεταβλητή x_1 στο σύστημα (46), θα έχουμε:

(47) $2x_2 + 4x_3 \le -Z - 6$

Έστω τώρα το σύστημα περιορισμών:

(48) $$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \le -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 \le 1 \end{cases}$$

Απαλείφοντας τη μεταβλητή x_1 στο σύστημα (48), θα έχουμε:

(49) $-2x_3 + x_4 \le -1 (\Rightarrow x_3 \ge 1)$

Απ' τις (47) και (49) σχηματίζουμε το παρακάτω σύστημα ανισώσεων και απαλείφουμε την x_3:

(50) $$\begin{cases} 2x_2 + 4x_3 \le -Z - 6 \\ -2x_3 + x_4 \le -1 \end{cases} \Rightarrow 2x_2 + 2x_4 \le -Z - 8$$

Απ' την παραπάνω προκύπτει η:

(51) $$Z \le -2x_2 - 2x_4 - 8$$

Απ' την αντικειμενική συνάρτηση και την (49) προκύπτουν τα:

(52) $$x_3 = 1,\ \ x_4 = 1 \text{ ή } x_4 = 0$$

Αντικαθιστώντας το ένα ζεύγος τιμών των x_3 και x_4 στην αντικειμενική συνάρτηση θα έχουμε:

(53) $$(x_3 = 1,\ \ x_4 = 1) \Rightarrow Z = -3x_1 + x_2 - 4$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των x_3 και x_4 στους περιορισμούς θα έχουμε:

(54) $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le -2 \\ x_1 - x_2 \le 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 - x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = x_2 + 2$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του x_1 στην (53) θα έχουμε (και λόγω της μεγιστοποίησης του Z):

(55) $$Z = -3(x_2 + 2) + x_2 - 4 \Rightarrow Z = -2x_2 - 10 \Rightarrow x_2 = 0,\ \ x_1 = 2,\ \ Z = -10$$

Αντικαθιστώντας το άλλο ζεύγος τιμών των x_3 και x_4 στην αντικειμενική συνάρτηση θα έχουμε:

(56) $$(x_3 = 1,\ \ x_4 = 0) \Rightarrow Z = -3x_1 + x_2 - 7$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των x_3 και x_4 στους περιορισμούς θα έχουμε:

(57) $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le -1 \\ x_1 - x_2 \le 2 \end{cases} \Rightarrow 1 \le x_1 - x_2 \le 2$$

Στη μία περίπτωση, αντικαθιστώντας την τιμή του x_1 στην (56) θα έχουμε:

(58) $$(x_1 - x_2 = 1) \Rightarrow Z = -3(x_2 + 1) + x_2 - 7 \Rightarrow Z = -2x_2 - 10$$

Λόγω της μεγιστοποίησης του Z, καταλήγουμε στις:

(59) $$x_2 = 0,\ \ x_1 = 1,\ \ Z = -10$$

Στην άλλη περίπτωση, αντικαθιστώντας την τιμή του x_1 στην (56) θα έχουμε:

(60) $$(x_1 - x_2 = 2) \Rightarrow Z = -3(x_2 + 2) + x_2 - 7 \Rightarrow Z = -2x_2 - 13$$

Λόγω της μεγιστοποίησης του Z, καταλήγουμε στις:

(61) $$x_2 = 0,\ \ x_1 = 2,\ \ Z = -13$$

Επομένως, το βέλτιστο αποτέλεσμα προκύπτει απ' τις (55) και (59). Άρα:

(62) $$x_1 = 2,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 1,\ \ x_4 = 1,\ \ Z = -10$$

(63) $$x_1 = 1,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 1,\ \ x_4 = 0,\ \ Z = -10$$

2.3.3. Περίπτωση "B(1)"

(64) $$\min Z = 10x_1 + 14x_2 + 21x_3$$
$$\text{s.t:} \begin{cases} -8x_1 - 11x_2 - 9x_3 \le -12 \\ -2x_1 - 2x_2 - 7x_3 \le -14 \\ -9x_1 - 6x_2 - 3x_3 \le -10 \end{cases},\ \ x_1, x_2, x_3 \in W;\ \ \ W = \{0,1,2,3,\ldots\}$$

Σχηματίζουμε το σύστημα ανισώσεων που πρόκειται να επιλυθεί:

(65) $$\begin{cases} 10x_1 + 14x_2 + 21x_3 \le Z \\ -8x_1 - 11x_2 - 9x_3 \le -12 \\ -2x_1 - 2x_2 - 7x_3 \le -14 \\ -9x_1 - 6x_2 - 3x_3 \le -10 \end{cases}$$

Απαλείφοντας τη μεταβλητή x_1 στο σύστημα (65), θα έχουμε:

(66) $$\begin{cases} x_2 + 39x_3 \le 4Z - 60 \\ 4x_2 - 14x_3 \le Z - 70 \\ 66x_2 + 159x_3 \le 9Z - 100 \end{cases}$$

Απαλείφοντας τη μεταβλητή x_3 στο σύστημα (66), θα έχουμε:

(67) $$\begin{cases} 170x_2 \le -3570 + 95Z \\ 1560x_2 \le -12530 + 285Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 102x_2 + 2142 \le 57Z \\ 312x_2 + 2506 \le 57Z \end{cases}$$

Εξετάζουμε τη μικρότερη τιμή για την x_2 (για ελαχιστοποίηση της Z και ικανοποίηση του (67)):

(68) $$x_2 = 0 \Rightarrow \left(\begin{cases} 2142 \leq 57Z \\ 2506 \leq 57Z \end{cases}\right) \Rightarrow Z \geq 44 \Rightarrow \begin{cases} 10x_1 + 21x_3 \geq 44 \\ 8x_1 + 9x_3 \geq 12 \\ 2x_1 + 7x_3 \geq 14 \\ 9x_1 + 3x_3 \geq 10 \end{cases}$$

Για την παραπάνω τιμή της x_2, εξετάζουμε τιμές για την x_3:

(69) $x_3 = 0 \Rightarrow x_1 \geq 7 \Rightarrow x_1 = 7,\ Z = 70$

(70) $x_3 = 1 \Rightarrow x_1 \geq 4 \Rightarrow x_1 = 4,\ Z = 61$

(71) $x_3 = 2 \Rightarrow x_1 \geq 1 \Rightarrow x_1 = 1,\ Z = 52$

Εδώ σταματά η διαδικασία για την x_3, αφού, για τιμές μεγαλύτερες του 2, η τιμή της Z αρχίζει να αυξάνεται.

Εξετάζουμε τη επόμενη μεγαλύτερη τιμή για την x_2:

(72) $$x_2 = 1 \Rightarrow \left(\begin{cases} 2244 \leq 57Z \\ 2818 \leq 57Z \end{cases}\right) \Rightarrow Z \geq 50 \Rightarrow \begin{cases} 10x_1 + 21x_3 \geq 36 \\ 8x_1 + 9x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + 7x_3 \geq 12 \\ 9x_1 + 3x_3 \geq 4 \end{cases}$$

Για να ικανοποιηθεί το (72), πρέπει οι μεταβλητές x_1 και x_3 να ικανοποιούν έναν απ' τους συνδυασμούς:

(73) $$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_3 \geq 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x_1 \geq 3 \\ x_3 \geq 1 \end{cases}$$

Ο μεν πρώτος δίνει $Z = 56$, ο δε δεύτερος $Z = 65$. Άρα, αυτή η περίπτωση δεν δίνει βέλτιστη λύση.

Εδώ σταματά η διαδικασία για την x_2, αφού, για τιμές μεγαλύτερες του 1, η τιμή της Z είναι μεγαλύτερη από 52.

Άρα, η βέλτιστη λύση είναι η:

(74) $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ Z = 52$

2.3.4. Περίπτωση "B(2)"

(75) $$\min Z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$
$$\text{s.t:} \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 10 \end{cases},\quad x_1, x_2, x_3 \in W;\quad W = \{0,1,2,3,\ldots\}$$

Σχηματίζουμε το σύστημα ανισώσεων που πρόκειται να επιλυθεί:

(76) $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \leq Z \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 10 \end{cases}$$

Απαλείφοντας τη μεταβλητή x_2 στο σύστημα (76), θα έχουμε:

(77) $$\begin{cases} -x_1 + 5x_3 \leq 24 + Z \\ 13x_2 - 11x_3 \leq 30 + 2Z \end{cases}$$

Απαλείφουμε τη μεταβλητή x_1 στο σύστημα (77) και εξετάζουμε τη μικρότερη τιμή για την x_3 (για ελαχιστοποίηση της Z και ικανοποίηση του (76)):

(78) $5Z \geq 18x_3 - 114 \Rightarrow x_3 = 0,\ Z \geq -22 \Rightarrow x_3 = 0,\ Z = -22 + K,\ K = 0,1,2,\ldots$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές στο σύστημα (76) και απαλείφοντας τη μεταβλητή x_1 απ' το υποσύστημα των δύο ανισώσεων, θα έχουμε:

(79) $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -22 + K \\ -x_1 + x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_2 = 2x_1 + 22 - K \\ 5x_2 \leq 34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_2 = 2x_1 + 22 - K \\ 3x_2 \leq 15 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x_1 + 22 - K \leq 15 \Rightarrow K \geq 2x_1 + 7$$

Απ' το παραπάνω προκύπτει η επόμενη λύση (για ελαχιστοποίηση της Z θα πρέπει $x_1 = 0$):

(80) $x_1 = 0,\ x_2 = 5,\ x_3 = 0,\ Z = -15$

Εξετάζουμε τη επόμενη μεγαλύτερη τιμή για την x_3 στην ανίσωση (78):

(81) $x_3 = 1,\ Z \geq -19 \Rightarrow x_3 = 1,\ Z = -19 + K,\ K = 0,1,2,\ldots$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές στο σύστημα (76) και απαλείφοντας τη μεταβλητή x_1 απ' το υποσύστημα των δύο ανισώσεων, θα έχουμε:

(82) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4 = -19 + K \\ -x_1 + x_2 + 3 \leq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - 1 \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_2 = 2x_1 + 15 - K \\ 5x_2 \leq 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_2 = 2x_1 + 15 - K \\ 3x_2 \leq 12 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x_1 + 15 - K \leq 12 \Rightarrow K \geq 2x_1 + 3$

Απ’ το παραπάνω προκύπτει η επόμενη λύση (για ελαχιστοποίηση της Z θα πρέπει $x_1 = 0$):

(83) $x_1 = 0, \;\; x_2 = 5, \;\; x_3 = 1, \;\; Z = -19$

Συνεχίζοντας την παραπάνω διαδικασία, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η τιμή της Z αρχίζει να αυξάνεται. Άρα, η βέλτιστη λύση είναι η (83).

2.3.5. Συμπέρασμα

Η αποτελεσματικότητα της αναπτυχθείσας μεθόδου έγκειται στο γεγονός ότι, με τη βοήθεια απλού λογισμικού, μπορούμε να βελτιώσουμε τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων αμιγούς ακέραιου προγραμματισμού.

3. Προβλήματα Ελαχίστων Γεννητικών Δέντρων

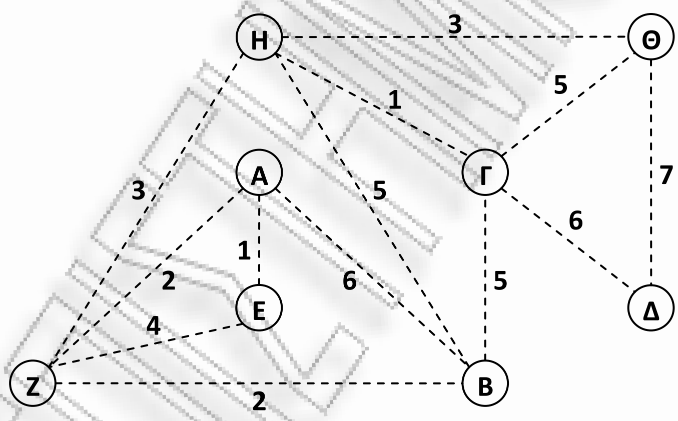
Μία πολύ γνωστή κατηγορία προβλημάτων έχουν ως στόχο το σχεδιασμό δικτύων. Σ' ένα τέτοιο πρόβλημα δίνονται οι κόμβοι, αλλά πρέπει να αποφασίσουμε ποιες συνδέσεις θα δώσουμε στο δίκτυο. Συγκεκριμένα, κάθε *πιθανή σύνδεση* έχει ένα κόστος (διαφορετικό για διαφορετικές συνδέσεις) για την εισαγωγή του στο δίκτυο. Θα πρέπει να παρέχουμε αρκετές συνδέσεις ώστε να εφοδιάσουμε το δίκτυο μ' ένα μονοπάτι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κόμβων. Ο στόχος είναι να γίνει αυτό με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος των συνδέσεων.

Ένα τέτοιο πρόβλημα αναφέρεται ως **πρόβλημα ελαχίστου γεννητικού δέντρου** (*minimum spanning tree*), όπως εμφανίζεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

3.1. Ένα παράδειγμα: Το πρόβλημα της Modern Corp.

Η διοίκηση της Modern Corp. έχει αποφασίσει να εγκαταστήσει ένα υπερσύγχρονο *δίκτυο οπτικών ινών* για να παρέχει επικοινωνίες υψηλής ταχύτητας (δεδομένων, φωνής, και βίντεο) μεταξύ των σημαντικότερων κέντρων της.

Οι κόμβοι στο Σχήμα 1 παρουσιάζουν τη γεωγραφική διάταξη των σημαντικότερων κέντρων της εταιρίας (που περιλαμβάνουν την εταιρική έδρα, ένα μηχανογραφικό κέντρο, και ένα ερευνητικό κέντρο, καθώς επίσης και τα κέντρα παραγωγής και διανομής). Οι διακεκομμένες γραμμές είναι οι πιθανές θέσεις των καλωδίων οπτικών ινών. (Άλλα καλώδια μεταξύ των κέντρων είναι επίσης πιθανά αλλά έχουν αποκλειστεί ως αντιοικονομικά.) Ο αριθμός δίπλα σε κάθε διακεκομμένη γραμμή δίνει το κόστος (σε εκατομμύρια δολάρια) αν αυτό το συγκεκριμένο καλώδιο επιλεχτεί να εγκατασταθεί.



Σχήμα 1: Μια απεικόνιση των σημαντικότερων κέντρων της Modern Corp. (οι κόμβοι), των πιθανών θέσεων για τις καλώδια οπτικών ινών (οι διακεκομμένες γραμμές), και τα κόστη σε εκατομμύρια δολάρια για εκείνα τα καλώδια (οι αριθμοί).

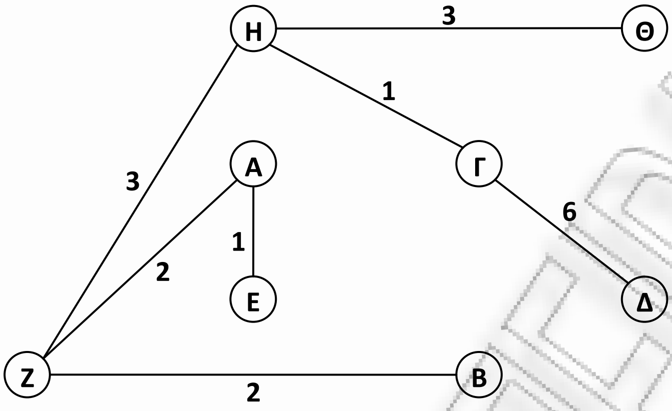
Δεν χρειάζεται δύο οποιαδήποτε κέντρα να έχουν καλώδιο που τα συνδέει άμεσα προκειμένου να εκμεταλλευθούν πλήρως την τεχνολογία οπτικών ινών για μεγάλες ταχύτητες δεδομένων μεταξύ τους. Το μόνο που απαιτείται είναι να έχουμε μια ακολουθία καλωδίων που συνδέουν αυτά τα κέντρα.

Το πρόβλημα είναι να καθοριστεί ποια καλώδια πρέπει να εγκατασταθούν για να ελαχιστοποιήσουν το συνολικό κόστος παροχής επικοινωνιών μεγάλης ταχύτητας μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κέντρων. Αυτό είναι, στην πραγματικότητα, ένα *πρόβλημα ελαχίστου γεννητικού δέντρου*.

Η βέλτιστη λύση για αυτό το πρόβλημα παρουσιάζεται στο Σχήμα 2, όπου οι συνδέσεις σε αυτό το δίκτυο αντιστοιχούν στα πιθανά καλώδια του Σχήματος 1 που πρέπει να επιλεγούν για εγκατάσταση. (Σημειώστε ότι υπάρχει πράγματι ένα μονοπάτι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κέντρων.) Το κόστος που προκύπτει γι' αυτό το δίκτυο οπτικών ινών είναι

Συνολικό κόστος = 1 + 2 + 2 + 3 + 1 + 3 + 6 = 18 (18 εκατομμύρια δολάρια).

Κάθε άλλη σχεδίαση του δικτύου που ενώνει όλα τα κέντρα θα κόστιζε τουλάχιστον 1 εκατομμύριο δολάρια περισσότερο.



Σχήμα 2: Το δίκτυο οπτικών ινών που παρέχει τη βέλτιστη λύση για το πρόβλημα ελαχίστου γεννητικού δέντρου της Modern Corp.

Ποιος είναι ο λόγος για το παράξενο όνομα, πρόβλημα ελαχίστου γεννητικού δέντρου; Παρακάτω δίνεται η εξήγηση.

Στην ορολογία της θεωρίας δικτύων, το δίκτυο στο Σχήμα 2 είναι ένα **δέντρο** (*tree*) επειδή δεν έχει κάποιο μονοπάτι που να αρχίζει και να τελειώνει στον ίδιο κόμβο χωρίς οπισθοδρόμηση (δηλαδή, κανένα μονοπάτι που να είναι κύκλος). Είναι επίσης ένα **γεννητικό δέντρο** (*spanning tree*) επειδή είναι ένα δέντρο που παρέχει ένα μονοπάτι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κόμβων (έτσι «εκτείνεται» σε όλους τους κόμβους). Τέλος, είναι ένα **ελάχιστο γεννητικό δέντρο** (*minimum spanning tree*) επειδή έχει το *μικρότερο* συνολικό κόστος μεταξύ όλων των γεννητικών δέντρων.

3.2. Υποθέσεις ενός προβλήματος ελαχίστου γεννητικού δέντρου.

Όπως ακριβώς για το πρόβλημα της Modern Corp., έτσι κάθε πρόβλημα ελαχίστου γεννητικού δέντρου ικανοποιεί τις ακόλουθες υποθέσεις:

1. Σας δίνονται οι *κόμβοι* ενός δικτύου αλλά *όχι* οι *συνδέσεις*. Αντ’ αυτού, σας δίνονται οι *δυνατές συνδέσεις* και το θετικό *κόστος* (ή παρόμοια μέτρηση) για κάθε μία που εισέρχεται στο δίκτυο.
2. Επιθυμείτε να σχεδιάσετε το δίκτυο με την εισαγωγή αρκετών συνδέσεων μέχρι την ικανοποίηση της απαίτησης να υπάρχει ένα μονοπάτι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κόμβων.
3. Ο στόχος είναι να ικανοποιηθεί αυτή η απαίτηση με τέτοιο τρόπο που να ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Μια βέλτιστη λύση για αυτό το πρόβλημα είναι πάντα ένα γεννητικό δέντρο. Παρατίθεται ένας εύκολος τρόπος για να αναγνωριστεί ένα γεννητικό δέντρο:

Το πλήθος συνδέσεων σε ένα γεννητικό δέντρο είναι πάντα κατά ένα μικρότερο από το πλήθος των κόμβων. Επιπλέον, κάθε κόμβος συνδέεται άμεσα με απλή σύνδεση μ’ έναν τουλάχιστον κόμβο.

Δείτε ότι αυτή η περιγραφή ταιριάζει στο γεννητικό δέντρο του Σχήματος 2, όπου υπάρχουν επτά συνδέσεις και οκτώ κόμβοι (όλοι άμεσα συνδεδεμένοι μ’ έναν τουλάχιστον κόμβο). Αφαιρέστε οποιαδήποτε από αυτές τις συνδέσεις και η ανωτέρω υπόθεση 2 θα παραβιαζόταν (μη-γεννητικό δέντρο). (Ελέγξτε το.) Επιβαρυνθείτε με το άχρηστο κόστος προσθέτοντας μια άλλη σύνδεση αντ’ αυτού (χωρίς αφαίρεση κάποιας) και δε θα έχετε και πάλι γεννητικό δέντρο. (Ελέγξτε ότι η προσθήκη οποιασδήποτε αχρησιμοποίητης σύνδεσης από το Σχήμα 1 στο Σχήμα 2 θα δημιουργούσε ένα μονοπάτι που αρχίζει και τελειώνει στον ίδιο κόμβο χωρίς οπισθοδρόμηση, η οποία παραβιάζει τον ορισμό ενός δέντρου.)

Τέλος, πρέπει να επισημάνουμε ότι, σε αντίθεση με τη μεταφορά, την ανάθεση, τη μέγιστη ροή, και τα προβλήματα ελάχιστου μονοπατιού, το πρόβλημα ενός ελαχίστου γεννητικού δέντρου *δεν* είναι ειδικός τύπος προβλήματος ροής ελαχίστου κόστους. (Δεν είναι ούτε ειδικός τύπος προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.) Επιπλέον, δεν μπορεί να λυθεί εύκολα από τον Solver του Excel.

Αυτά είναι τα άσχημα νέα. Τα καλά νέα είναι ότι μπορείτε να το λύσετε εύκολα χρησιμοποιώντας τον παρακάτω αλγόριθμο χωρίς καν να χρησιμοποιήσετε υπολογιστή.

3.3. Ένας εντυπωσιακά απλός αλγόριθμος

Ξεκινώντας χωρίς συνδέσεις στο δίκτυο, κάθε βήμα του αλγορίθμου επιλέγει προς εισαγωγή μια νέα σύνδεση από τον κατάλογο πιθανών συνδέσεων. Όπως περιγράφεται παρακάτω, ο αλγόριθμος συνεχίζεται κατά αυτόν τον τρόπο έως ότου κάθε κόμβος συνδεθεί, όπου σ' εκείνο το σημείο οι επιλεγμένοι κόμβοι να διαμορφώνουν ένα ελάχιστο γεννητικό δέντρο.

Ο αλγόριθμος για το πρόβλημα ελαχίστου γεννητικού δέντρου

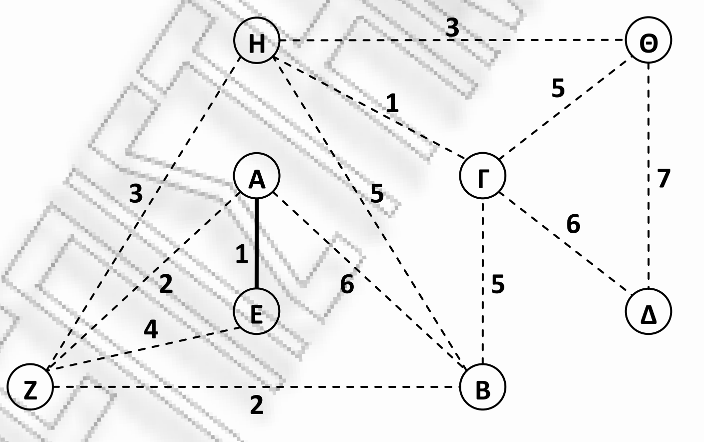
1. Επιλογή της πρώτης σύνδεσης: Επιλέξτε τη *φτηνότερη* πιθανή σύνδεση.
2. Επιλογή της επόμενης σύνδεσης: Επιλέξτε τη *φτηνότερη* πιθανή σύνδεση μεταξύ ενός κόμβου ο οποίος είναι ήδη συνδεδεμένος και ενός κόμβου που ακόμα δεν έχει μια τέτοια σύνδεση.
3. Επαναλάβετε το βήμα 2 έως ότου κάθε κόμβος συνδεθεί (ίσως περισσότερες από μία φορές). Σ' εκείνο το σημείο, έχουμε αποκτήσει τη βέλτιστη λύση (ένα ελάχιστο γεννητικό δέντρο).

[*Επίλυση ισοπαλιών*: Οι ισοπαλίες κατά τη επιλογή της *φτηνότερης* πιθανής σύνδεσης μπορούν να επιλυθούν αυθαίρετα χωρίς να επηρεαστεί το βέλτιστο της τελικής λύσης. Εντούτοις, οι ισοπαλίες στο βήμα 2 δείχνουν ότι μπορεί επίσης να υπάρξουν άλλες (όχι υποχρεωτικά) βέλτιστες λύσεις που θα λαμβάνονταν αν οι ισοπαλίες επιλύονταν μ' άλλον τρόπο.]

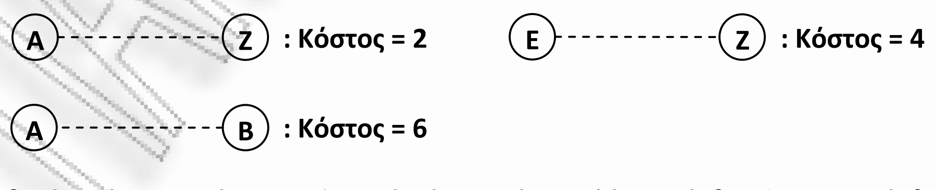
Εφαρμογή του αλγορίθμου για το πρόβλημα της Modern Corp.

Τώρα ας εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο στο πρόβλημα ελαχίστου γεννητικού δέντρου της Modern Corp. όπως παρουσιάστηκε στο Σχήμα 1.

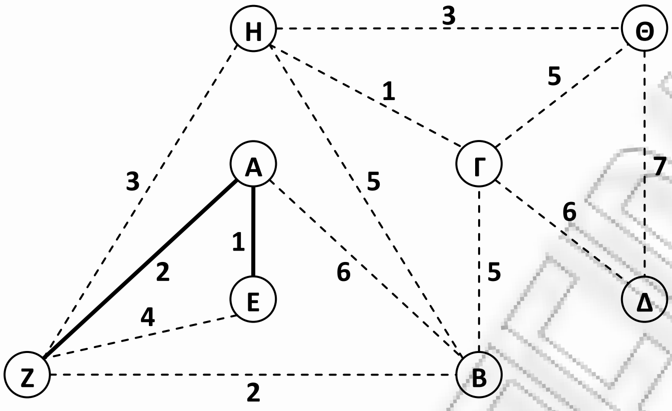
Μεταξύ όλων των πιθανών συνδέσεων (οι διακεκομμένες γραμμές), αυτή μεταξύ του κόμβου Α και του κόμβου Ε έρχεται σε ισοπαλία με αυτή μεταξύ του κόμβου Η και του κόμβου Γ όντας οι φθηνότερες (κόστος 1). Επομένως, για το βήμα 1, πρέπει να επιλέξουμε μια από αυτές τις δύο πιθανές συνδέσεις για να είναι η πρώτη σύνδεση που θα εισαχθεί στο δίκτυο. Επιλύοντας την ισοπαλία αυθαίρετα, ας επιλέξουμε αυτή μεταξύ του κόμβου Α και του κόμβου Ε (η άλλη θα επιλεγεί αργότερα), όπως φαίνεται παρακάτω.



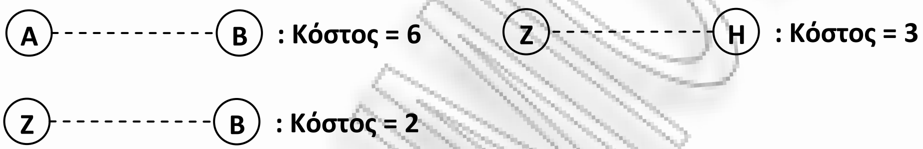
Έπειτα, εφαρμόζουμε το βήμα 2 για πρώτη φορά. Οι δύο κόμβοι που ενώνονται με μια σύνδεση είναι οι κόμβοι Α και Ε, έτσι πρέπει να συγκρίνουμε τις δαπάνες των πιθανών συνδέσεων μεταξύ καθενός από αυτούς τους κόμβους και ενός κόμβου που δεν έχει ακόμα συνδεθεί. Αυτές οι πιθανές συνδέσεις και οι δαπάνες τους είναι



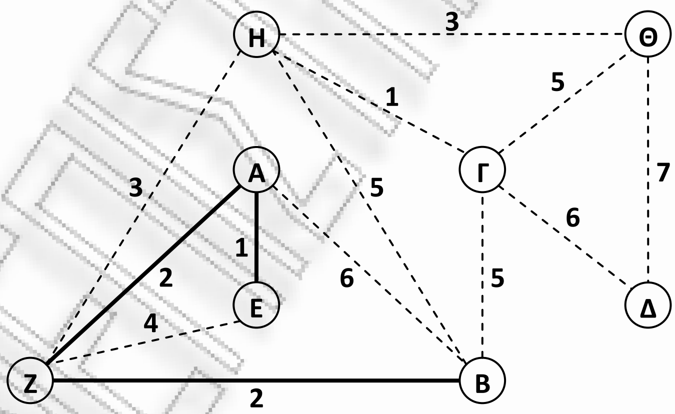
Δεδομένου ότι ο φτηνότερος απ' αυτούς είναι αυτός μεταξύ του κόμβου Α και του κόμβου Ζ, με κόστος 2, επιλέγεται να είναι η επόμενη σύνδεση που εισάγεται στο δίκτυο, όπως φαίνεται παρακάτω.



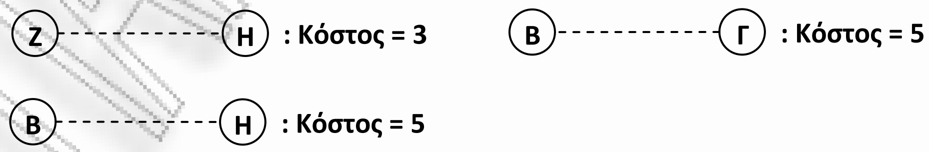
Τώρα, κάθε ένας απ’ τους κόμβους Α, Ε και Ζ είναι ενωμένος με σύνδεση (ή δύο συνδέσεις στην περίπτωση του κόμβου Α), έτσι η επόμενη εκτέλεση του βήματος 2 απαιτεί τη σύγκριση των δαπανών των πιθανών συνδέσεων μεταξύ ενός εξ αυτών και ενός απ’ τους υπολοίπους. (Πραγματικά, καμία από αυτές τις πιθανές συνδέσεις δεν περιλαμβάνει τον κόμβο Ε, δεδομένου ότι δεν έχει άλλη πιθανή σύνδεση που να καταλήγει σε κόμβο μη συνδεδεμένο.)



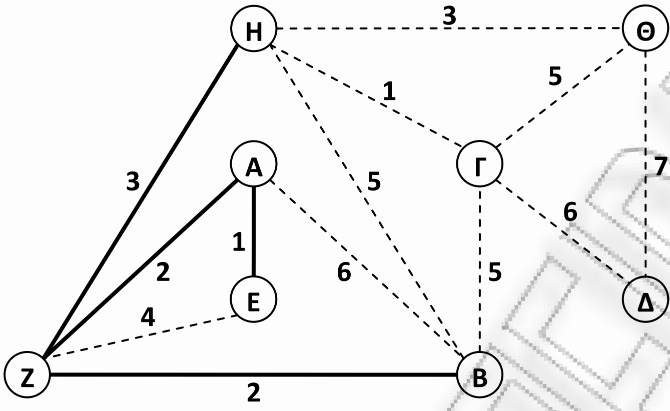
Η φτηνότερη απ’ αυτές είναι η πιθανή σύνδεση μεταξύ του κόμβου Ζ και του κόμβου Β, έτσι γίνεται η επόμενη σύνδεση που προστίθεται στο δίκτυο.



Οι κόμβοι Α, Ε, Ζ, και Β τώρα ενώνονται με συνδέσεις, έτσι κατόπιν συγκρίνουμε τις δαπάνες των πιθανών συνδέσεων μεταξύ ενός εξ αυτών και ενός απ’ τους υπολοίπους.



Η φτηνότερη είναι η πιθανή σύνδεση μεταξύ του κόμβου Ζ και του κόμβου Η, έτσι είναι η επόμενη που προστίθεται.

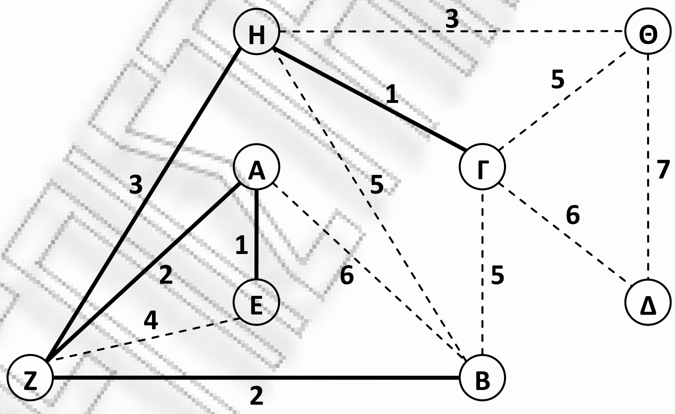


Οι κόμβοι Α, Ε, Ζ, Β και Η τώρα ενώνονται με συνδέσεις, έτσι κατόπιν συγκρίνουμε τις δαπάνες των πιθανών συνδέσεων μεταξύ ενός εξ αυτών και ενός απ' τους υπολοίπους.

Β ------- Γ : Κόστος = 5 **Η ------- Θ : Κόστος = 3**

Η ------- Γ : Κόστος = 1

Η φτηνότερη είναι η πιθανή σύνδεση μεταξύ του κόμβου Η και του κόμβου Γ, έτσι είναι η επόμενη που προστίθεται. (Θυμηθείτε ότι αυτή η πιθανή σύνδεση δεν είχε επιλεγεί ως αρχική σύνδεση στο βήμα 1 λόγω ισοπαλίας.)

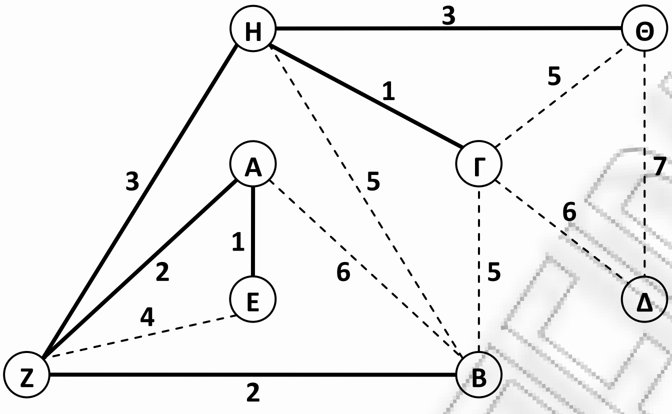


Όλοι εκτός απ' τους κόμβους Θ και Δ τώρα είναι σε σύνδεση. Επομένως, οι μόνες πιθανές συνδέσεις που πρέπει να εξετασθούν είναι αυτές μεταξύ είτε του κόμβου Θ είτε του Δ και ενός από τους άλλους κόμβους.

Η ------- Θ : Κόστος = 3 **Γ ------- Δ : Κόστος = 6**

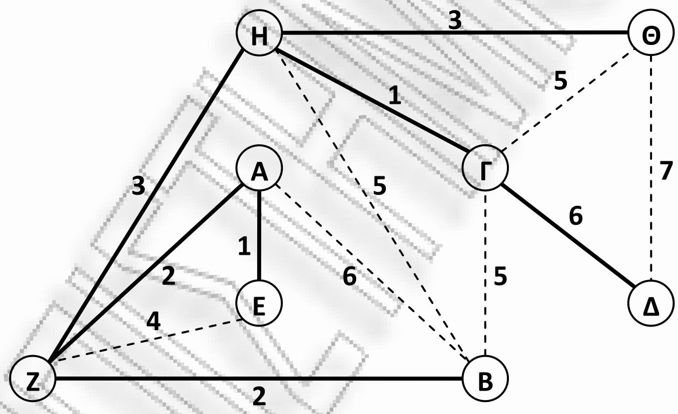
Γ ------- Θ : Κόστος = 5

Η φτηνότερη είναι η πιθανή σύνδεση μεταξύ του κόμβου Η και του κόμβου Θ, έτσι εισάγεται τελικά στο δίκτυο.



Δεδομένου ότι ο κόμβος Δ είναι τώρα ο μόνος μη συνδεδεμένος κόμβος, οι μόνες πιθανές συνδέσεις που εξετάζονται κατόπιν είναι εκείνες μεταξύ αυτού του κόμβου και των άλλων.

Η φτηνότερη είναι η πιθανή σύνδεση μεταξύ του κόμβου Γ και του κόμβου Δ, έτσι την εισάγουμε στο δίκτυο.



Κάθε κόμβος τώρα είναι σε σύνδεση, έτσι ο αλγόριθμος ολοκληρώθηκε και αυτή είναι η βέλτιστη λύση μας. Όλες οι συνδέσεις που έχουν εισαχθεί στο δίκτυο διαμορφώνουν ένα *ελάχιστο γεννητικό δέντρο* με ένα συνολικό κόστος 1 + 2 + 2 + 3 + 1 + 3 + 6 = 18 (18 εκατομμυρίων δολαρίων). Όλες οι υπόλοιπες πιθανές συνδέσεις (διακεκομμένες γραμμές) απορρίπτονται επειδή οι εισαχθείσες συνδέσεις παρέχουν ένα μονοπάτι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κόμβων.

Παρατηρήστε ότι αυτή η βέλτιστη λύση είναι η ίδια με αυτήν που δίνεται στο Σχήμα 2. (Υπάρχει μόνο μια βέλτιστη λύση για αυτό το συγκεκριμένο πρόβλημα.)

Τι θα είχε συμβεί εάν η ισοπαλία είχε επιλυθεί με άλλο τρόπο στο βήμα 1 με την επιλογή της πιθανής σύνδεσης μεταξύ του κόμβου Η και του κόμβου Γ να είναι η πρώτη σύνδεση που θα εισερχόταν στο δίκτυο αντί της πιθανής σύνδεσης μεταξύ του κόμβου Α και του κόμβου Ε; Προχωρήστε και ελέγξτε το ξεκινώντας τον αλγόριθμο από αυτό το σημείο. Θα διαπιστώσετε ότι ακριβώς οι ίδιες συνδέσεις επιλέγονται, αλλά με διαφορετική σειρά από πριν.

Αυτός ο αλγόριθμος καλείται **άπληστος αλγόριθμος** (*greedy algorithm*) επειδή αρπάζει απλά την ευνοϊκότερη επιλογή (η φτηνότερη πιθανή σύνδεση) σε κάθε βήμα χωρίς ανησυχία για την επίδραση αυτής της επιλογής στις επόμενες αποφάσεις. Είναι αξιοπρόσεκτο ότι μια τέτοια γρήγορη και απλοϊκή διαδικασία ακόμα εγγυάται την εύρεση μιας βέλτιστης λύσης. Χαρείτε αυτή τη φορά, αλλά προσέξτε. Οι άπληστοι αλγόριθμοι κανονικά δεν βρίσκουν απαραίτητα τις βέλτιστες λύσεις για άλλα προβλήματα της επιστήμης της διοίκησης επιχειρήσεων.

3.4. Μερικές εφαρμογές

Σε αυτά τα χρόνια της υπερλεωφόρου πληροφοριών, εφαρμογές παρόμοιες με το παράδειγμα της Modern Corp. έχουν γίνει όλο και περισσότερο σημαντικές. Εντούτοις, τα προβλήματα ελαχίστων γεννητικών δέντρων έχουν επίσης άλλες διαφόρων τύπων εφαρμογές.

Εδώ είναι ένας κατάλογος με μερικές βασικές εφαρμογές.

1. Σχεδιασμός δικτύων τηλεπικοινωνιών (δίκτυα υπολογιστών, τηλεφωνικά δίκτυα μισθωμένων γραμμών, καλωδιακά τηλεοπτικά δίκτυα, κ.λπ.).
2. Σχεδιασμός ενός δικτύου μεταφορών μερικής χρήσης για την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους παροχής των συνδέσεων (σιδηροδρομικές γραμμές, δρόμοι, κ.λπ.).
3. Σχεδιασμός ενός δικτύου γραμμών μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας υψηλής τάσης.
4. Σχεδιασμός ενός δικτύου καλωδίωσης μιας ηλεκτρικής συσκευής (π.χ. ενός ψηφιακού ηλεκτρονικού συστήματος) για την ελαχιστοποίηση του συνολικού μήκους του καλωδίου.
5. Σχεδιασμός ενός δικτύου αγωγών για τη σύνδεση ενός αριθμού τοποθεσιών.

3.5. Ερωτήσεις ανασκόπησης

1. Σ’ ένα πρόβλημα ελαχίστου γεννητικού δέντρου, ποιο τμήμα του δικτύου δίνεται και ποιο τμήμα απομένει να σχεδιαστεί;
2. Τι είδους δικτύου σχεδιάστηκε στο παράδειγμα της Modern Corp.;
3. Στην ορολογία της θεωρίας δικτύων, τι είναι ένα *δέντρο*; Ένα *γεννητικό δέντρο*; Ένα *ελάχιστο γεννητικό δέντρο*;
4. Ποιος είναι εύκολος τρόπος αναγνώρισης ενός γεννητικού δέντρου;
5. Ποιος είναι ο στόχος ενός προβλήματος ελαχίστου γεννητικού δέντρου;
6. Είναι ένα πρόβλημα ελαχίστου γεννητικού δέντρου ένας ειδικός τύπος ελαχίστου προβλήματος ροής δαπανών;
7. Τι είδους αλγόριθμος θα λύσει ένα πρόβλημα ελαχίστου γεννητικού δέντρου (αλλά πολύ λίγα προβλήματα της επιστήμης της διοίκησης επιχειρήσεων;)
8. Ποιοι είναι μερικοί τύποι εφαρμογών των προβλημάτων ελαχίστων γεννητικών δέντρων;

3.6. Γλωσσάριο

Δέντρο: Ένα δίκτυο που δεν έχει μονοπάτια που αρχίζουν και τελειώνουν στον ίδιο κόμβο χωρίς οπισθοδρόμηση.

Γεννητικό δέντρο: Ένα δέντρο που παρέχει ένα μονοπάτι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κόμβων.

Ελάχιστο γεννητικό δέντρο: Ένα γεννητικό δέντρο που, μεταξύ όλων των γεννητικών δέντρων, ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

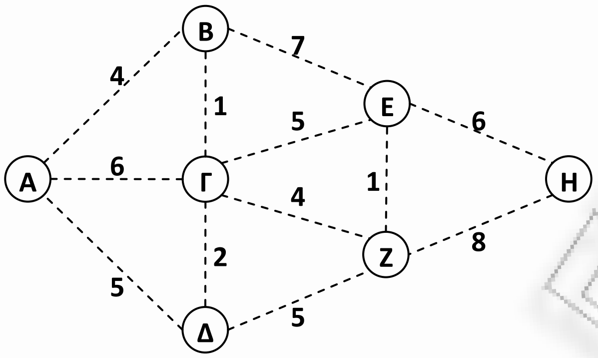
Άπληστος αλγόριθμος: Ένας αλγόριθμος που αρπάζει απλά την ευνοϊκότερη επιλογή σε κάθε βήμα χωρίς ανησυχία για την επίδραση αυτής της επιλογής στις επόμενες αποφάσεις.

3.7. Προβλήματα

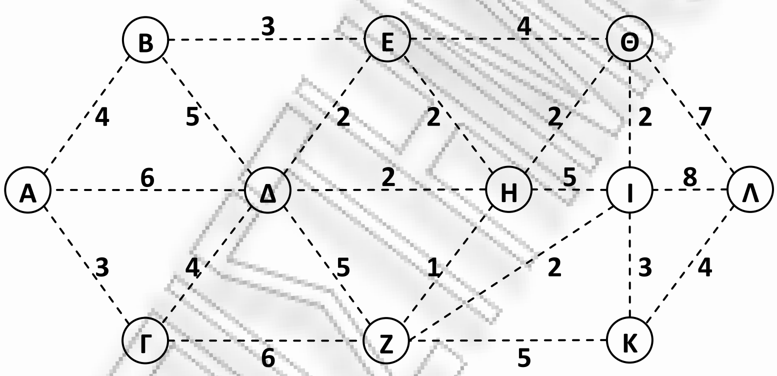
Παρακάτω παρατίθενται μερικά προβλήματα ελαχίστων γεννητικών δέντρων:

1. Επανεξετάστε το πρόβλημα της Modern Corp. Όταν ο αλγόριθμος για ένα πρόβλημα ελαχίστου γεννητικού δέντρου εφαρμόστηκε σε αυτό το πρόβλημα, υπήρξε μία ισοπαλία στο βήμα 1 για την επιλογή της πρώτης σύνδεσης. Αυτήν η ισοπαλία επιλύθηκε με την επιλογή της πιθανής σύνδεσης μεταξύ του κόμβου Α και του κόμβου Ε.
   Τώρα επιλύστε την ισοπαλία αλλιώς με την επιλογή της πιθανής σύνδεσης μεταξύ του κόμβου Η και του κόμβου Γ να είναι η πρώτη σύνδεση και έπειτα ξανά εφαρμόστε το υπόλοιπο του αλγορίθμου. Παρουσιάστε κάθε βήμα. (Πρέπει πάλι να λάβετε το ελάχιστο γεννητικό δέντρο που φαίνεται στο Σχήμα 2.)

2. Χρησιμοποιήστε τον άπληστο αλγόριθμο για να βρείτε ένα ελάχιστο γεννητικό δέντρο για ένα δίκτυο με τους ακόλουθους κόμβους και με τις συνδέσεις που είναι να επιλεγούν. Οι διακεκομμένες γραμμές μεταξύ των κόμβων αντιπροσωπεύουν τις *πιθανές* συνδέσεις και ο αριθμός δίπλα σε κάθε διακεκομμένη γραμμή αντιπροσωπεύει το κόστος (σε χιλιάδες δολάρια) εισαγωγής της αντίστοιχης σύνδεσης στο δίκτυο.



3. Χρησιμοποιήστε τον άπληστο αλγόριθμο για να βρείτε ένα ελάχιστο γεννητικό δέντρο για ένα δίκτυο με τους ακόλουθους κόμβους και με τις συνδέσεις που είναι να επιλεγούν. Οι διακεκομμένες γραμμές μεταξύ των κόμβων αντιπροσωπεύουν τις *πιθανές* συνδέσεις και ο αριθμός δίπλα σε κάθε διακεκομμένη γραμμή αντιπροσωπεύει το κόστος (σε εκατομμύρια δολάρια) εισαγωγής της αντίστοιχης σύνδεσης στο δίκτυο.



4. Η Wirehouse Lumber Company θα αρχίσει σύντομα να καταχωρεί οκτώ φυτείες δέντρων στην ίδια γενική περιοχή. Επομένως, πρέπει να αναπτύξει ένα σύστημα χωματόδρομων που κάνει κάθε φυτεία προσβάσιμη από κάθε άλλη φυτεία. Η απόσταση (σε μίλια) μεταξύ δύο οποιωνδήποτε φυτειών είναι ως κάτωθι:

	Αποστάσεις μεταξύ δύο φυτειών							
Φυτεία	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	–	1,3	2,1	0,9	0,7	1,8	2,0	1,5
2	1,3	–	0,9	1,8	1,2	2,6	2,3	1,1
3	2,1	0,9	–	2,6	1,7	2,5	1,9	1,0
4	0,9	1,8	2,6	–	0,7	1,6	1,5	0,9
5	0,7	1,2	1,7	0,7	–	0,9	1,1	0,8
6	1,8	2,6	2,5	1,6	0,9	–	0,6	1,0
7	2,0	2,3	1,9	1,5	1,1	0,6	–	0,5
8	1,5	1,1	1,0	0,9	0,8	1,0	0,5	–

Η διοίκηση θέλει τώρα να προσδιορίσει μεταξύ ποιων φυτειών οι δρόμοι πρέπει να κατασκευαστούν ώστε να συνδεθούν όλες οι φυτείες με το ελάχιστο συνολικό μήκος δρόμου.

α. Περιγράψτε πώς αυτό το πρόβλημα ταιριάζει με την περιγραφή δικτύου ενός προβλήματος ελαχίστου γεννητικού δέντρου.

β. Χρησιμοποιήστε τον άπληστο αλγόριθμο για να λύσετε το πρόβλημα.

5. Η Premiere Bank θα αρχίσει σύντομα να συνδέει τερματικά από κάθε υποκατάστημά της στον υπολογιστή του κεντρικού καταστήματός της, χρησιμοποιώντας ειδικές τηλεφωνικές γραμμές με τηλεπικοινωνιακές συσκευές. Η τηλεφωνική γραμμή δεν χρειάζεται να συνδέει άμεσα ένα υποκατάστημα με το κεντρικό κατάστημα. Μπορεί να το συνδέει έμμεσα, μέσω τη σύνδεσής του με άλλο υποκατάστημα το οποίο συνδέεται (άμεσα ή έμμεσα) με το κεντρικό κατάστημα. Η μόνη προϋπόθεση είναι ότι κάθε υποκατάστημα πρέπει να είναι συνδεδεμένο με το κεντρικό κατάστημα μέσω κάποιας διαδρομής.
Η χρέωση για τις ειδικές τηλεφωνικές γραμμές είναι 100 δολάρια ανά μίλι, και οι αποστάσεις (σε μίλια) μεταξύ δύο οποιωνδήποτε καταστημάτων είναι ως κάτωθι:

	Αποστάσεις μεταξύ δύο καταστημάτων					
	Κεντρικό	**Υποκ. 1**	**Υποκ. 2**	**Υποκ. 3**	**Υποκ. 4**	**Υποκ. 5**
Κεντρικό	–	190	70	115	270	160
Υποκ. 1	190	–	100	110	215	50
Υποκ. 2	70	100	–	140	120	220
Υποκ. 3	115	110	140	–	175	80
Υποκ. 4	270	215	120	175	–	110
Υποκ. 5	160	50	220	80	110	–

Η διοίκηση επιθυμεί να προσδιορίσει μεταξύ ποια καταστήματα πρέπει να συνδεθούν άμεσα με τις ειδικές τηλεφωνικές γραμμές προκειμένου να συνδεθεί κάθε υποκατάστημα (άμεσα ή έμμεσα) με το κεντρικό κατάστημα με το ελάχιστο συνολικό κόστος.

α. Περιγράψτε πώς αυτό το πρόβλημα ταιριάζει με την περιγραφή δικτύου ενός προβλήματος ελαχίστου γεννητικού δέντρου.

β. Χρησιμοποιήστε τον άπληστο αλγόριθμο για να λύσετε το πρόβλημα. Ποιο είναι το συνολικό κόστος για τις ειδικές τηλεφωνικές γραμμές;

6. Επανεξέταση Περίπτωσης 6-1. Υποθέστε τώρα ότι προκύπτει το ακόλουθο σενάριο σ' αυτήν την περίπτωση.
Πριν ακόμα όλα τα Αμερικανικά στρατεύματα και προμήθειες φθάσουν στην Αγία Πετρούπολη, τη Μόσχα, και το Ροστόβ, η φαγωμάρα μεταξύ στα στρατεύματα του διοικητή Βότατσεφ για το εάν θα πρέπει να κάνει την επόμενη επίθεση ενάντια στην Αγία Πετρούπολη ή ενάντια στη Μόσχα χώρισε τους επαναστάτες. Τα στρατεύματα από τη Μόσχα υπερνίκησαν εύκολα τους τρωτούς επαναστάτες. Ο διοικητής Βότατσεφ φυλακίστηκε, και το επόμενο βήμα έγινε με την επανοικοδόμηση των επτά πόλεων που κατεστράφησαν από τα στρατεύματά του.
Η ύψιστη προτεραιότητα του Προέδρου είναι να βοηθήσει τη Ρωσική κυβέρνηση ώστε να επανεγκαθιδρύσει τις επικοινωνίες μεταξύ των επτά Ρωσικών πόλεων και της Μόσχας με ελάχιστο κόστος. Η τιμή της εγκατάστασης των γραμμών επικοινωνίας μεταξύ οποιωνδήποτε δύο Ρωσικών πόλεων ποικίλλει λαμβάνοντας υπόψη το κόστος μεταφοράς του καλωδίου στην περιοχή, το επίπεδο της καταστροφής στην περιοχή, και η τραχύτητα του εδάφους. Ευτυχώς, μια πόλη είναι σε θέση να επικοινωνήσει με όλες τις άλλες εάν συνδέεται έμμεσα με κάθε άλλη πόλη. Η Αγία Πετρούπολη και το Ροστόβ είναι ήδη συνδεδεμένες με τη Μόσχα, έτσι αν οποιαδήποτε από τις επτά πόλεις συνδέεται με την Αγία Πετρούπολη ή το Ροστόβ, θα συνδεθεί επίσης με τη Μόσχα. Το κόστος της αντικατάστασης των γραμμών επικοινωνίας μεταξύ δύο δεδομένων πόλεων για τις οποίες αυτό είναι εφικτό φαίνεται παρακάτω.

Ανάμεσα σε	Κόστος Επανεγκαθίδρυσης Γραμμών Επικοινωνίας
Αγία Πετρούπολη και Καζάν	$210.000
Αγία Πετρούπολη και Περμ	$185.000
Αγία Πετρούπολη και Ούφα	$225.000
Μόσχα και Ούφα	$310.000
Μόσχα και Σάμαρα	$195.000
Μόσχα και Όρενμπεργκ	$440.000
Μόσχα και Σάρατοβ	$140.000
Ροστόβ και Σάρατοβ	$200.000
Ροστόβ και Όρενμπεργκ	$120.000
Καζάν και Περμ	$150.000
Καζάν και Ούφα	$105.000
Καζάν και Σάμαρα	$95.000
Περμ και Γιεκατέρινμπεργκ	$85.000
Περμ και Ούφα	$125.000
Γιεκατέρινμπεργκ και Ούφα	$125.000
Ούφα και Σάμαρα	$100.000
Ούφα και Όρενμπεργκ	$75.000
Σάρατοβ και Σάμαρα	$100.000
Σάρατοβ και Όρενμπεργκ	$95.000

Πού θα έπρεπε οι γραμμές επικοινωνίας να εγκατασταθούν για να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος επανεγκαθίδρυσης των επικοινωνιών μεταξύ της Μόσχας και των επτά Ρωσικών πόλεων;

4. Συμπεράσματα

Οι εξισώσεις με ακέραιους συντελεστές για τις οποίες ζητούνται ακέραιες λύσεις, δηλαδή οι επονομαζόμενες διοφαντικές εξισώσεις, έχουν τεράστια θεωρητική σημασία γιατί συνδέονται στενά με αρκετά προβλήματα της θεωρίας αριθμών. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να έχουν τεράστια σημασία και στην πράξη. καθώς εμφανίζονται και σε εφαρμογές άλλων επιστημών (όπως π.χ. στη Φυσική).

Τα στοιχεία της θεωρίας των εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές και της επίλυσής των στους ακέραιους παρουσιάστηκαν στην παρούσα εργασία με απλό αλλά και ορθολογικά δομημένο τρόπο, ώστε η αφομοίωση εννοιών και συμπερασμάτων να είναι όσο το δυνατόν πιο εύκολη. Ξεκινώντας απ' την πιο απλή μορφή εξίσωσης και καταλήγοντας σε ειδικές μορφές εξισώσεων παρουσιάζοντας ενδιαφέροντα αποτελέσματα της έρευνας στο συγκεκριμένο πεδίο. Ενδιαφέροντα είναι και τα στοιχεία που συνδέονται με το γνωστό θεώρημα του Fermat, το οποίο αποδείχτηκε στις αρχές του αιώνα που διανύουμε, αλλά και με θεωρίες (π.χ. η θεωρία ιδεωδών) που γεννήθηκαν απ' την προσπάθεια ερευνητών να το επιλύσουν.

Ένας κλάδος της Επιχειρησιακής Έρευνας, ένας απ' τους σημαντικότερους, είναι ο αμιγής ακέραιος προγραμματισμός ο οποίος αποσκοπεί στη μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μίας συνάρτησης της οποίας οι μεταβλητές θα πρέπει να ικανοποιούν ένα πλήθος περιορισμών και οι επιτρεπτές τιμές τους να είναι ακέραιες και θετικές. Η μέθοδος που παρουσιάστηκε επιλύει τέτοια προβλήματα. Σχετικά απλή στη δομή της, δίνει λύση μέσα από συγκεκριμένα βήματα, κάτι που επιτρέπει την υλοποίησή του προγραμματιστικά. Τα παραδείγματα βοηθούν στην περαιτέρω κατανόηση της μεθόδου.

Ο σχεδιασμός δικτύων είναι ένας αρκετά αναπτυγμένος στη σύγχρονη εποχή. Στόχος είναι η σχεδίαση ενός δικτύου με πλήρη εξυπηρέτηση αλλά με το ελάχιστο δυνατό κόστος κατασκευής και λειτουργίας. Τέλος, στην τρίτη ενότητα γίνεται αναφορά σε μία πολύ γνωστή κατηγορία προβλημάτων που έχουν ως στόχο το σχεδιασμό δικτύων. Παρουσιάστηκε το πρόβλημα ελαχίστου γεννητικού δέντρου (minimum spanning tree), το οποίο ταιριάζει σε ένα μεγάλο ποσοστό τέτοιων σχεδιάσεων. Η παρουσίαση ενός «άπληστου» αλγόριθμου, αρκετά απλού και αποτελεσματικού, δίνει απάντηση σε τέτοιου είδους προβλήματα. Το παράδειγμα αναδεικνύει την απλότητα και αποτελεσματικότητά του ακόμα και στις περιπτώσεις που φαινομενικά καταλήγουμε σε αδιέξοδο.

5. Βιβλιογραφία

- Dantzig, G. B., and Eaves, B.C., *Fourier-Motzkin Elimination and its dual*, Journal of Combinational Theory (A 14), 1975, pp.288-297
- Gelfond, A. O., *Solving Equations in integers*, Mir Publishers, Moscow, 1981
- Goldberg, S., *Introduction to Difference Equations*, Dover Publications, New York, 1986
- Hillier, F. S., and Lieberman, G. J., *Introduction to Operations Research*, 8th edition, Mc Graw-Hill, New York, 2005, ISBN 0-07-123828-X
- Littlewood, D. E., *A University Algebra*, William Heinemann Ltd, London, 1950
- Schrijver, A., *Theory of Linear and Integer Programming*, John Wiley & Sons, New York, 1986, ISBN 0-471-98232-6
- Shojatalab, G., *Modern Method of Solving Pure Integer Programming Models*, World Academy of Science, Engineering and Technology 51 2009
- Taha, H. A., *Operations Research: An Introduction*, 8th ed., Prentice Hall, New York, 2007, ISBN 0-13-188923-0