ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΨΗΦΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ***ΨΗΦΙΑΚΕΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ & ΔΙΚΤΥΑ***

Εφαρμογές της Θεωρίας Παιγνίων στις Ασύρματες Επικοινωνίες

Χατζηπαναγιωτίδης Δημήτριος

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:
Αναπληρωτής Καθηγητής
Δρ. Αθανάσιος Κανάτας

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2010

Περιεχόμενα

Περίληψη

Η Θεωρία Παιγνίων αποτελεί έναν τομέα των Οικονομικών Επιστημών, ο οποίος μελετάει την αλληλεπίδραση των ατόμων σε περιβάλλοντα τα οποία, το κάθε άτομο επηρεάζει το άλλο με τις αποφάσεις του. Οι συνθήκες αυτές, υπό προϋποθέσεις, ισχύουν επίσης και σε ένα περιβάλλον τηλεπικοινωνιακό, στο οποίο τα φυσικά πρόσωπα αντικαθιστούνται πλέον από ηλεκτρονικές δικτυακές συσκευές.

Η εφαρμογή της θεωρίας παιγνίων στις ασύρματες τηλεπικοινωνίες, αν και σε ερευνητικό στάδιο, αρχίζει και δίνει λύσεις σε όλο και περισσότερα προβλήματα. Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα μελετήσουμε, πως η θεωρία παιγνίων μπορεί να δώσει λύση στο πρόβλημα κατανομής της ισχύος άνω ζεύξης, σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα CDMA.

Στο $1^{ο}$ Κεφάλαιο γίνεται μία εκτενής εισαγωγή στη θεωρία παιγνίων. Δίνουμε ιδιαίτερη έμφαση στην αιτιολόγηση των μη-συνεργατικών παιγνίων κανονικής μορφής των οποίων η θεωρία χρησιμοποιείται κατά την ανάλυση της εφαρμογής που υλοποιούμε. Έπειτα γίνεται μία αναφορά και σε άλλες κατηγορίες μη συνεργατικών παιγνίων καθώς και στα συνεργατικά παίγνια.

Στο $2^{ο}$ Κεφάλαιο μελετούμε ένα ασύρματο τηλεπικοινωνιακό σύστημα CDMA στον τομέα του ελέγχου ισχύος και τις προτεινόμενες επί του θέματος αυτού εφαρμογές.

Στο $3^{ο}$ Κεφάλαιο συσχετίζουμε τη θεωρία παιγνίων με τις ασύρματες επικοινωνίες. Επίσης γίνεται αναφορά στις εφαρμογές της θεωρίας παιγνίων, στον έλεγχο ισχύος ενός CDMA συστήματος επικοινωνιών.

Στο $4^{ο}$ Κεφάλαιο αναλύουμε ένα προτεινόμενο, μη συνεργατικό μοντέλο κατανομής της ισχύος άνω ζεύξης, σε CDMA σύστημα. Η υλοποίηση και προσομοίωση του μοντέλου αυτού γίνεται σε πρόγραμμα γλώσσας Matlab. Τέλος αναλύονται και εξάγονται συμπεράσματα από τα αριθμητικά δεδομένα και τις γραφικές παραστάσεις της προσομοίωσης.

Abstract

Game Theory is a field of Economics, which studies the interaction of people in environments where each person affects the other with his decisions. These circumstances, under certain conditions, also apply to a telecommunications environment in which individuals are being replaced by on-line devices.

The application of game theory in wireless communications, while it is at the research phase, starts giving solutions to an increasing number of problems. In this thesis we will study, how the game theory can solve the problem of uplink power allocation in a CDMA telecommunications system.

The 1st Chapter is a comprehensive introduction of game theory. We place great emphasis on the justification of non-cooperative games whose normal form theory is used in the analysis of the application that we implement. Following is a reference to other categories of non-cooperative games and the cooperative games.

The 2nd Chapter studies a CDMA wireless telecommunications system in the power control problem and the proposed, on the subject, applications.

The 3rd Chapter associates game theory and wireless communications. Also we refer to applications of joint game theory and power control in a CDMA communication system.

In Chapter 4 we analyze a proposed non-cooperative model of uplink power allocation in a CDMA system. The implementation and simulation of this model is made in Matlab programming language. Finally, analysis and conclusions are drawn from figures and graphs of simulation.

Ευχαριστίες

Για την υλοποίηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας συνέβαλλαν με τον τρόπο τους, είτε επιστημονικά είτε ψυχολογικά, πολλοί άνθρωποι.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου Αναπληρωτή Καθηγητή του Πανεπιστημίου Πειραιώς, Δρ. Αθανάσιο Κανάτα για την επιστημονική του βοήθεια, την υπομονή του, την εμψύχωση και την στήριξη στο πρόσωπο μου. Τον Λέκτορα της Σχολής ΗΜΜΗ/Υ του ΕΜΠ, Δρ. Αθανάσιο Παναγόπουλο για το ενδιαφέρον και την επιστημονική του βοήθεια στο σχεδιασμό της διπλωματικής εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την υποψήφια διδάκτορα του ΕΜΠ της Σχολής ΗΜΜΗ/Υ, Βούλα Βασσάκη για την βοήθεια της στα θέματα υλοποίησης της εφαρμογής σε Matlab, καθώς και τον Δρ. Παναγιώτη Θεοφιλάκο για την παροχή σχετικού επιστημονικού υλικού στα πρώτα στάδια υλοποίησης της εργασίας.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένεια μου και τη Μαρία μου, για την στήριξη και την υπομονή που έκαναν καθόλη τη διάρκεια συγγραφής της εργασίας αυτής.

Κεφάλαιο 1:
Εισαγωγή στη Θεωρία Παιγνίων

Η Θεωρία Παιγνίων αναλύει τις στρατηγικές σχέσεις στις οποίες το κέρδος ενός ατόμου εξαρτάται από τις επιλογές των άλλων. Για να θεωρηθεί μία κατάσταση ως παίγνιο, πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον δύο λογικοί παίκτες οι οποίοι να λαμβάνουν υπόψη τους τις ενέργειες των άλλων για την διαμόρφωση των δικών τους στρατηγικών.

Μελετώντας την ιστορία και τις επιπτώσεις της θεωρίας παιγνίων, συναντάμε ως πιο παλαιό παράδειγμα μιας επίσημης παιγνίο-θεωρητικής ανάλυσης, την μελέτη ενός δυοπωλίου από τον Antoine Cournot το 1838. Ο μαθηματικός Emile Borel πρότεινε μια επίσημη Θεωρία των Παιγνίων το 1921, η οποία εξελίχθηκε από τον μαθηματικό John von Neumann το 1928, στο σύγγραμμα του «Theory of Parlor Games.» Η Θεωρία Παιγνίων καθιερώθηκε ως ένα αυτόνομο επιστημονικό πεδίο, αμέσως μετά την έκδοση το 1944 του «Theory of Games and Economic Behavior» από τον von Neumann και τον οικονομολόγο Oskar Morgenstern. Αυτό το βιβλίο αποτελεί ένα μεγάλο μέρος της βασικής ορολογίας και ανάλυσης προβλημάτων και εξακολουθεί να είναι σε ισχύ μέχρι σήμερα. Το 1950, ο John Nash έδειξε ότι τα πεπερασμένα παίγνια είχαν πάντα ένα σημείο ισορροπίας, στο οποίο όλοι οι παίκτες επιλέγουν τις ενέργειες που είναι καλύτερες για αυτούς, με δεδομένες τις επιλογές των αντιπάλων τους. Αυτή η κεντρική ιδέα της μη συνεργατικής θεωρίας των παιγνίων αποτελεί ένα κομβικό σημείο ανάλυσης από τότε. Στη δεκαετία του 1950 και του 1960, η θεωρία παιγνίων διευρύνθηκε θεωρητικά και εφαρμόσθηκε για προβλήματα πολέμου και πολιτικής και από το 1970, έχει αποτελέσει μια επανάσταση στην οικονομική θεωρία. Επιπλέον, έχει βρει εφαρμογή στην κοινωνιολογία, την ψυχολογία και ανέπτυξε κάποιους δεσμούς στην εξέλιξη και τη βιολογία. Η Θεωρία Παιγνίων έλαβε ιδιαίτερη προσοχή το 1994 με την απονομή του βραβείου Νόμπελ, για τις οικονομικές επιστήμες, στους John Nash, John Harsanyi, και Reinhard Selten. Στο τέλος της δεκαετίας του 1990, μια σημαντική εφαρμογή της θεωρίας των παιγνίων, αποτέλεσε ο σχεδιασμός πλειστηριασμών. Εξέχοντες μελετητές της Θεωρίας Παιγνίων συμμετείχαν στο σχεδιασμό των δημοπρασιών για την κατανομή των δικαιωμάτων χρήσης, των ζωνών του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος για τον κλάδο των κινητών τηλεπικοινωνιών. Οι περισσότερες από αυτές τις δημοπρασίες σχεδιάστηκαν με στόχο τη χορήγηση αυτών των πόρων με αποδοτικότερο τρόπο συγκριτικά με τις παραδοσιακές κυβερνητικές πρακτικές και επιπλέον την αύξηση των εσόδων κατά δισεκατομμύρια δολάρια, για τις Ηνωμένες Πολιτείες και την Ευρώπη.

1.1 Ορολογία και Ταξινόμηση των Παιγνίων

Κατά την ανάλυση ενός παιγνίου σύμφωνα με την Θεωρία Παιγνίων συναντάμε κάποια βασικά στοιχεία . Τα σημαντικότερα στοιχεία ενός παιγνίου είναι:

- ***παίκτες (players):*** Τα πρόσωπα τα οποία παίρνουν αποφάσεις σε ένα παίγνιο. Στην ανάλυση των παιγνίων θεωρούμε ότι οι παίκτες είναι «εγωιστές» και λογικοί. Αυτό σημαίνει ότι οι παίκτες επιθυμούν την μεγιστοποίηση της ευχαρίστησης τους αλλά είναι και λογικοί ώστε να θέλουν να καταλήξουν σε ένα σημείο ισορροπίας.
- ***ενέργειες (actions):*** Οι διαθέσιμες επιλογές κινήσεων ενός παίκτη.
- ***πληροφορία (information):*** Η γνώση που έχει ένας παίκτης σχετικά με τις κινήσεις των άλλων παικτών και τους κανόνες του παιγνίου, κατά τη διάρκεια λήψης αποφάσεων.
- ***στρατηγικές (strategies):*** Οι κανόνες οι οποίοι υποδεικνύουν σε κάθε παίκτη την ενέργεια που μπορεί να εκτελέσει σε κάθε φάση του παιγνίου.[1]
- ***απολαβή (payoff):*** Η ευχαρίστηση (utility) ή κέρδος που λαμβάνει κάποιος παίκτης.
- ***συνάρτηση ευχαρίστησης (utility function):*** Η συνάρτηση ευχαρίστησης δίνει ως αποτέλεσμα τις απολαβές ή την ευχαρίστηση που λαμβάνει κάθε παίκτης σε κάθε φάση του παιγνίου, ανάλογα με τις ενέργειες του. Μπορούμε να πούμε ότι περιγράφει τη σχέση προτίμησης μεταξύ των διαθέσιμων επιλογών ενός παίκτη, διότι μία προτιμώμενη ενέργεια πρέπει να μας δίνει μεγαλύτερη ευχαρίστηση. Την συνάρτηση ευχαρίστησης μπορούμε να τη ορίσουμε πιο επίσημα ως:

Ορισμός 1.1: ***Συνάρτηση Ευχαρίστησης.*** *Μία συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί μία αριθμητική τιμή στα στοιχεία του πεδίου ενεργειών A $u : A \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση ευχαρίστησης, εάν για όλα τα $x, y \in A$ το $x \geq y$ εάν και μόνο εάν $u\ x\ \geq u\ y$.*

- ***ισορροπία (equilibrium):*** Η ισορροπία είναι ένα σταθερό αποτέλεσμα ή λύση του παιγνίου. Η πιο γνωστή ισορροπία ενός παιγνίου είναι η ισορροπία Nash. Το σημείο ισορροπίας δεν αποφέρει απαραίτητα την μέγιστη απολαβή στους παίκτες όπως θα δούμε και παρακάτω.

Ο αριθμός και η ποικιλία των παιγνίων στρατηγικής είναι τεράστια. Μπορούμε να αναφέρουμε κάποια μοντέλα κατάταξης τους.

Ξεχωρίζουμε πρώτα ένα παίγνιο ανάλογα με τον ***αριθμό των παικτών:*** τα παίγνια δύο προσώπων, τριών προσώπων και ούτω καθεξής. Το σκάκι για παράδειγμα, είναι ένα παίγνιο δύο προσώπων. Όταν αναφερόμαστε ωστόσο σε ένα παίγνιο n προσώπων, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι σε κάθε τέτοιο παίγνιο έχουμε ακριβώς συμμετοχή n ατόμων, αλλά πιθανώς οι κανόνες του παιγνίου είναι τέτοιοι ώστε οι παίκτες να ανήκουν σε αμοιβαία n αποκλειστικές μονάδες με τέτοιο τρόπο ώστε τα άτομα σε κάθε μονάδα να έχουν τα ίδια συμφέροντα. Αυτά τα n σύνολα των ατόμων με ταυτόσημα συμφέροντα αναφέρονται ως ένα "πρόσωπο" (όπως στο δίκαιο, μια εταιρεία αναφέρεται ως ένα νομικό πρόσωπο). Για παράδειγμα, αν και

[1] Η έννοια της στρατηγικής και της ενέργειας μπορεί να παρερμηνευτεί. Στα παίγνια *καθαρής στρατηγικής* που θα μελετήσουμε κυρίως, οι δύο έννοιες θα θεωρηθούν συνώνυμες και θα χρησιμοποιούμε τον όρο στρατηγική. Στην ενότητα που θα αναφέρουμε τις *μικτές στρατηγικές* θα φανεί η διαφοροποίηση των δύο όρων.

το σκάκι παίζεται συνήθως από δύο μόνο άτομα, θα μπορούσε επίσης να παιχτεί με δύο «ομάδες», καθεμία από τις οποίες θα αποτελείται από τρεις ανθρώπους· ακόμα και αν αυτό γινόταν, το παίγνιο θα εξακολουθούσε να είναι σκάκι και θα εξακολουθούσε να είναι παίγνιο δύο προσώπων και όχι έξι προσώπων. Αυτή η διαφοροποίηση στην έννοια του «παίκτη», διαφοροποιεί τα παίγνια από ***μη-συνεργατικά (non-cooperative)*** σε ***συνεργατικά (cooperative)***.
Μπορούμε επίσης να ταξινομήσουμε τα παίγνια ανάλογα με το πόσες ***κινήσεις*** πραγματοποιούνται. Ένα ***πεπερασμένο*** παίγνιο έχει έναν πεπερασμένο αριθμό κινήσεων, κάθε μία από τις οποίες περιλαμβάνει μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό εναλλακτικών λύσεων· τα άλλα παίγνια ονομάζονται ***άπειρα.***

Τέλος, τα παίγνια κατατάσσονται ανάλογα με την ***ποσότητα των διαθέσιμων πληροφοριών*** που έχουν οι παίκτες, σχετικά με τις ενέργειες των άλλων παικτών και τον τρόπο που αποκτούν τις απολαβές τους. Τα παίγνια στα οποία ο κάθε παίκτης γνωρίζει τις συναρτήσεις ευχαρίστησης των άλλων παικτών ονομάζονται ***παίγνια πλήρους πληροφόρησης (complete information)***, στην αντίθετη περίπτωση έχουμε τα ***παίγνια ελλιπούς πληροφόρησης (incomplete information)***.

Στη ντάμα και το σκάκι, για παράδειγμα, οι παίκτες ενημερώνονται ανά πάσα στιγμή σχετικά με τις προηγούμενες επιλογές που έχουν γίνει, αλλά στα παιχνίδια της τράπουλας ένας παίκτης δεν ξέρει τι χαρτιά έχουν μοιραστεί στους υπόλοιπους και είναι συνεπώς σε μερική άγνοια. Τα παίγνια στα οποία, ο κάθε παίκτης γνωρίζει σε κάθε κίνηση το πλήρες ιστορικό των κινήσεων του παιγνίου, ονομάζονται ***παίγνια τέλειας πληροφόρησης (perfect information)***, στην αντίθετη περίπτωση έχουμε τα ***παίγνια ατελούς πληροφόρησης (imperfect information)***.

1.2 Αναπαράσταση των Παιγνίων σε Κανονική Μορφή

Η κανονική μορφή, γνωστή και ως στρατηγική μορφή ή μορφή πίνακα, είναι η πιο κοινή αναπαράσταση στρατηγικών αλληλεπιδράσεων στη θεωρία παιγνίων. Στην *κανονική μορφή (normal-form)* αναπαράστασης ενός παιγνίου, οι παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα μια στρατηγική και ο συνδυασμός των στρατηγικών που επιλέγουν καθορίζει μία ευχαρίστηση για τον καθένα. Τα παίγνια κανονικής μορφής είναι θεμελιώδη στην θεωρία παιγνίων, διότι οι περισσότερες από τις υπάρχουσες αναπαραστάσεις παιγνίων μπορούν να μελετηθούν μετατρέποντας τα, σε παίγνια κανονικής μορφής.

Ορισμός 1.2: ***Παίγνιο Κανονικής Μορφής.*** *Ένα πεπερασμένο παίγνιο G, $n-$ παικτών, είναι ένα σύνολο με στοιχεία (N, S, u) όπου:*

- *N είναι ένα πεπερασμένο σύνολο n παικτών, με δείκτη i.*
- *$S = S_1 \times \cdots \times S_n$, όπου S_i είναι ένα πεπερασμένο σύνολο των διαθέσιμων στρατηγικών του παίκτη i. Κάθε διάνυσμα $s = (s_1, \cdots, s_n) \in S$ καλείται πεδίο στρατηγικών.*
- *$u = (u_{1,} \cdots, u_n)$ όπου $u_i : S \mapsto \mathbb{R}$ η συνάρτηση απολαβής πραγματικών τιμών του παίκτη i.*

1.2.1 Το Δίλημμα των Φυλακισμένων

Παρουσιάζουμε την κανονική μορφή ενός παιγνίου μέσω ενός κλασικού παραδείγματος – *«Το Δίλημμα των Φυλακισμένων » (Prisoner's Dilemma).* Δύο ύποπτοι συνελήφθησαν και χρεώνονται με ένα έγκλημα. Η αστυνομία διαθέτει επαρκείς αποδείξεις για να καταδικαστούν οι ύποπτοι, αν προηγουμένως τουλάχιστον ένας εκ των δύο ομολογήσει. Η αστυνομία έχει υπό κράτηση τους υπόπτους σε χωριστά κελιά και τους επεξηγεί τις συνέπειες που θα ακολουθήσουν από τις ενέργειες που θα μπορούσαν να πραγματοποιήσουν. Αν δεν ομολογήσει κανένας και οι δύο θα ανακηρυχτούν ένοχοι για μια μικρή επίθεση και θα καταδικαστούν σε ένα μήνα φυλάκιση. Αν και οι δύο ομολογήσουν τότε θα καταδικαστούν σε φυλάκιση έξι μηνών. Τέλος, αν ομολογήσει μόνο ο ένας από τους δύο, τότε αυτός που ομολόγησε θα αποδεσμευθεί αμέσως, αλλά ο άλλος θα καταδικαστεί σε εννέα μήνες φυλάκιση - έξι για το έγκλημα που διέπραξε και άλλους τρεις μήνες για παρεμπόδιση της δικαιοσύνης.

Σε αυτό το παίγνιο, κάθε παίκτης έχει δύο στρατηγικές διαθέσιμες: να *ομολογήσει* (Ο) ή να *μην ομολογήσει* (ΔΟ). Ένας φυσικός τρόπος για να αναπαραστήσουμε παίγνια είναι μέσω ενός n διαστάσεων πίνακα. Στο παράδειγμα μας οι απολαβές των δύο παικτών, όταν έχει επιλεγεί ένα συγκεκριμένο ζεύγος στρατηγικών, δίνονται από το κατάλληλο κελί του πίνακα (Πίνακας 1.1). Κατά συνθήκη, η απολαβή για τον λεγόμενο παίκτη γραμμής (εδώ, Φυλακισμένος 1) είναι η πρώτη τιμή σε κάθε κελί, ακολουθούμενη από την απολαβή του παίκτη στήλη (εδώ, Φυλακισμένος 2). Έτσι, αν ο Φυλακισμένος 1 επιλέξει να μην ομολογήσει και ο Φυλακισμένος 2 επιλέξει να ομολογήσει, τότε ο Φυλακισμένος 1 λαμβάνει ως απολαβή -9 (που αντιπροσωπεύει τους εννέα μήνες στη φυλακή) και ο Φυλακισμένος 2 λαμβάνει την απολαβή 0 (που αντιπροσωπεύει την άμεση απελευθέρωσή του).

		Φυλακισμένος 2	
		ΔΟ	*Ο*
Φυλακισμένος 1	*ΔΟ*	-1, -1	-9, 0
	Ο	0, -9	-6, -6

Πίνακας 1.1: *Το Δίλλημα των Φυλακισμένων*

Αν και όπως είπαμε σε ένα παίγνιο κανονικής μορφής οι παίκτες επιλέγουν τις στρατηγικές τους ταυτόχρονα, *αυτό δεν υποδηλώνει ότι οι συμμετέχοντες απαραίτητα δρουν ταυτόχρονα, αλλά υποδηλώνει ότι κάθε παίκτης επιλέγει πως θα δράσει χωρίς να γνωρίζει την επιλογή των άλλων.* Στην περίπτωση των φυλακισμένων θα μπορούσαν να αποφασίσουν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές ενώ βρίσκονται σε διαφορετικά κελιά.

1.2.2 Η Μάχη των Φύλων

Η μάχη των φύλων (Battle of the Sexes) είναι ένα άλλο κλασσικό παίγνιο κανονικής μορφής το οποίο συναντάμε συχνά ως παράδειγμα στη βιβλιογραφία με διάφορες παραλλαγές. Στο παίγνιο αυτό ένα ζευγάρι, ένας άντρας και μία γυναίκα, αποφασίζει να παρακολουθήσει ένα κονσέρτο κλασσικής μουσικής και έχει να επιλέξει μεταξύ των Bach και Stravinsky. Και οι δύο προτιμούν να πάνε μαζί σε κάποιο κονσέρτο αλλά ο άντρας προτιμάει να παρακολουθήσει Bach (B) ενώ η γυναίκα Stravinsky (S). Για το λόγο αυτό κάθε ένας από τους δύο παίκτες λαμβάνει απολαβή 1 εάν παρακολουθήσει το έργο που προτιμάει, ενώ προστίθεται ένας επιπλέον πόντος απολαβής και στους δύο, εάν παρακολουθήσουν κάποιο έργο μαζί. Στον Πίνακα 1.2 μπορούμε να δούμε την ευχαρίστηση του κάθε παίκτη δεδομένου της στρατηγικής που ακολούθησε.

		Άντρας	
		S	*B*
Γυναίκα	*S*	2, 1	0, 0
	B	0, 0	1, 2

Πίνακας 1.2: *Η Μάχη των Φύλων*

1.2.3 Παίγνια Μηδενικού Αθροίσματος

Τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος (zero-sum games) ή καλύτερα παίγνια σταθερού αθροίσματος (constant-sum), αποτελούν μία ειδική περίπτωση των παιγνίων κανονικής μορφής.

Ορισμός 1.3: ***Παίγνια Σταθερού Αθροίσματος.*** *Ένα παίγνιο κανονικής μορφής, δύο παικτών, καλείται σταθερού αθροίσματος εάν υπάρχει μία σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε σύνολο στρατηγικών* $s \in S_1 \times S_2$ *να ισχύει* $u_1(s) + u_2(s) = c$.

Συνήθως όταν αναφερόμαστε σε παίγνια σταθερού αθροίσματος πάντα υποθέτουμε ότι είναι δύο παικτών και $c = 0$, δηλαδή το παίγνιο είναι μηδενικού αθροίσματος. Ένα κλασσικό παίγνιο μηδενικού αθροίσματος είναι το «Κορώνα – Γράμματα». Στο παίγνιο αυτό καθένας από τους δύο παίκτες έχει ένα νόμισμα και προσπαθεί, στρίβοντας το νόμισμα να εμφανίσει κορώνα (Κ) ή γράμματα (Γ). Έπειτα οι δύο παίκτες συγκρίνουν τα νομίσματα τους. Εάν και τα δύο νομίσματα είναι όμοια ο πρώτος παίκτης κερδίζει και τα δύο, σε διαφορετική περίπτωση κερδίζει ο δεύτερος παίκτης. Ο πίνακας των απολαβών φαίνεται στον Πίνακα 1.3.

Ένα άλλο παράδειγμα μηδενικού αθροίσματος είναι το κλασσικό παιδικό παίγνιο «Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί». Σε αυτό το παίγνιο καθένας από τους δύο παίκτες μπορεί να επιλέξει πέτρα (Π), χαρτί (Χ) ή ψαλίδι (Ψ). Εάν και οι δύο παίκτες επιλέξουν την ίδια στρατηγική, δεν υπάρχει νικητής και το άθροισμα των απολαβών τους ισούται με το 0. Σε άλλη περίπτωση κερδίζει ένας από τους δύο ανάλογα με την στρατηγική που επιλέγει, όπως βλέπουμε και στον Πίνακα 1.4.

			Παίκτης 2	
			Κ	*Γ*
Παίκτης 1	*Κ*		1, -1	-1, 1
	Γ		-1, 1	1, -1

Πίνακας 1.3: *Το παίγνιο "Κορώνα - Γράμματα"*

			Παίκτης 2	
		Π	*Χ*	*Ψ*
	Π	0, 0	-1, 1	1, -1
Παίκτης 1	*Χ*	1, -1	0, 0	-1, 1
	Ψ	-1, 1	1, -1	0, 0

Πίνακας 1.4: *Το Παίγνιο "Πέτρα - Ψαλίδι - Χαρτί"*

1.2.4 Στρατηγικές σε Παίγνια Κανονικής Μορφής

Μέχρι στιγμής στα παίγνια τα οποία μελετήσαμε αναφέραμε τις ενέργειες των παικτών ως στρατηγικές. Αυτό συνέβαινε διότι ένα είδος στρατηγικής είναι η επιλογή μίας από τις διαθέσιμες ενέργειες και η υλοποίηση της. Το είδος αυτών των στρατηγικών ονομάζεται *καθαρή στρατηγική (pure strategy)* και το πεδίο των στρατηγικών ταυτίζεται με το πεδίο ενεργειών.

Οι παίκτες όμως μπορούν να ακολουθήσουν ένα άλλο λιγότερο προφανές είδος στρατηγικής το οποίο καλείται *μικτή στρατηγική (mixed strategy).* Στις μικτές στρατηγικές ο παίκτης επιλέγει τυχαία από το πεδίο ενεργειών, με βάση κάποια πιθανοτική κατανομή.

Ορίζουμε πιο επίσημα μια μικτή στρατηγική για ένα παίγνιο κανονικής μορφής, εισάγοντας παράλληλα και το σύνολο των ενεργειών A ενός παίκτη.

Ορισμός 1.4: ***Μικτή Στρατηγική.*** *Έστω $G = \ N, A, u\ $ ένα παίγνιο σε κανονική μορφή και $\quad X$, για κάθε σύνολο X, το σύνολο των πιθανοτικών κατανομών του X. Τότε το σύνολο των μικτών στρατηγικών για τον παίκτη i είναι $S_i = \quad A_i$.*

Ορισμός 1.5: ***Πεδίο Μικτών Στρατηγικών.*** *Το σύνολο των πεδίων των μικτών στρατηγικών είναι το Καρτεσιανό γινόμενο των μεμονωμένων πεδίων των μικτών στρατηγικών, $S_1 \times \cdots \times S_n$.*

Με τον όρο $s_i(a_i)$ ορίζουμε την πιθανότητα ότι μία ενέργεια a_i θα «παιχτεί» ως μία μικτή στρατηγική s_i. Το υποσύνολο των ενεργειών στις οποίες ορίζεται θετική πιθανότητα από τη μικτή στρατηγική s_i, καλείται *υποστήριξη (support)* του s_i.

Ορισμός 1.6: ***Υποστήριξη.*** *Η υποστήριξη μίας μικτής στρατηγικής s_i για ένα παίκτη i, είναι το σύνολο των καθαρών στρατηγικών $\{a_i \mid s_i(a_i) > 0\}$.*

Να σημειώσουμε ότι η καθαρή στρατηγική είναι μία ειδική περίπτωση μικτής στρατηγικής, στην οποία η υποστήριξη είναι μία μοναδική ενέργεια. Επίσης μπορούμε να αναφέρουμε την ύπαρξη *πλήρως μικτών στρατηγικών*, όπου μία στρατηγική έχει *πλήρη υποστήριξη* (δηλαδή όταν αναθέτουμε σε κάθε ενέργεια μία μη μηδενική πιθανότητα).

Ο πίνακας των απολαβών όπως τον είδαμε σε προηγούμενα παραδείγματα, ορίζει τις απολαβές στην ειδική περίπτωση όπου έχουμε καθαρές στρατηγικές. Συνεπώς ένα άλλο σημείο το οποίο πρέπει να ορίσουμε είναι οι απολαβές των παικτών που δίνονται από ένα συγκεκριμένο προφίλ μικτών στρατηγικών. Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε ένα μέγεθος το οποίο μας δίνει την *αναμενόμενη ευχαρίστηση (expected utility)*. Πρώτα υπολογίζουμε την πιθανότητα να πετύχουμε κάθε απολαβή, δεδομένου του στρατηγικού πεδίου και έπειτα υπολογίζουμε τον μέσο όρο των απολαβών, με βάρη τις πιθανότητες κάθε απολαβής.

Ορισμός 1.7: ***Αναμενόμενη Ευχαρίστηση Μικτής Στρατηγικής.*** *Σε ένα παίγνιο κανονικής μορφής $G = (N, A, u)$, η αναμενόμενη ευχαρίστηση u_i για τον παίκτη i του στρατηγικού πεδίου $s = (s_1, \cdots, s_n)$ ορίζεται ως:*

$$u_i(s) = \sum_{a \in A} u_i(a) \prod_{j=1}^{n} s_j(a_j)$$

1.3 Ισορροπία και Βέλτιστη Λύση ενός Παιγνίου

Έχοντας περιγράψει τα παίγνια κανονικής μορφής και τις διαθέσιμες στρατηγικές τους, πρέπει να αναζητήσουμε τις λύσεις κάθε παιγνίου καθώς και να βρούμε, εάν υπάρχει, η βέλτιστη από αυτές. Σε ένα περιβάλλον όπου αποτελείται από ένα πρόσωπο η βέλτιστη λύση είναι εύκολη υπόθεση, διότι αρκεί η μεγιστοποίηση της απολαβής του προσώπου αυτού. Στα παίγνια τα οποία μελετάμε η μεγιστοποίηση των απολαβών του κάθε παίκτη εξαρτάται άμεσα από τις στρατηγικές που θα ακολουθήσουν και οι άλλοι παίκτες που συμμετέχουν.

1.3.1 Βέλτιστες Στρατηγικές

Ένα ζήτημα που τίθεται στα παίγνια είναι η έννοια της βελτιστοποίησης, με την έννοια ότι ένας εξωτερικός παρατηρητής θα μπορούσε να διακρίνει, ότι οι απολαβές από συγκεκριμένες στρατηγικές είναι καλύτερες από άλλες. Βέβαια το θέμα δεν είναι τόσο απλό σε περιβάλλοντα πολλών παικτών, οπότε δίνουμε κάποιες λύσεις με τους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 1.8: ***Επικράτηση Pareto.*** *Ένα στρατηγικό πεδίο s επικρατεί κατά Pareto, των άλλων στρατηγικών πεδίων s' εάν για όλα τα $i \in N$, $u_i\ \ s\ \ \geq u_i\ \ s'$ και υπάρχουν κάποια $j \in N$ για τα οποία $u_j\ \ s\ \ > u_j\ \ s'$.*

Η επικράτηση Pareto μας δίνει μερικώς μία κατάταξη των στρατηγικών πεδίων, δηλαδή δεν μπορούμε να έχουμε το μέγιστο δυνατό κέρδος από το παίγνιο μας αλλά ένα σύνολο από τοπικά μη συγκρίσιμα βέλτιστα. Το *βέλτιστο κατά Pareto* στρατηγικό πεδίο δίνεται από τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.9: ***Βέλτιστο κατά Pareto.*** *Ένα στρατηγικό πεδίο s είναι βέλτιστο κατά Pareto ή αυστηρά αποδοτικό κατά Pareto, εάν δεν υπάρχει άλλο στρατηγικό πεδίο $s' \in S$ το οποίο επικρατεί κατά Pareto του s.*

Κάθε παίγνιο έχει ένα βέλτιστο πεδίο στρατηγικών. Το πρόβλημα που παρουσιάζεται είναι ότι δεν ταυτίζεται απαραίτητα με το σημείο ισορροπίας του παιγνίου, συνεπώς δεν μας δίνουν όλα τα παίγνια βέλτιστες λύσεις.

1.3.2 Επαναληπτική Απαλοιφή των Αυστηρά Κυριαρχούμενων Στρατηγικών

Έχοντας περιγράψει ένα τρόπο για την αναπαράσταση ενός παιγνίου και θέματα που αφορούν τις στρατηγικές που ακολουθούμε, θα περιγράψουμε και ένα τρόπο επίλυσης του. Ξεκινάμε από το Δίλλημα των Φυλακισμένων επειδή είναι εύκολο να λυθεί, χρησιμοποιώντας μόνο την ιδέα ότι ένας λογικός παίκτης δεν θα έπαιζε μία *αυστηρά κυριαρχούμενη στρατηγική*.

Στο Δίλλημα των Φυλακισμένων, εάν ένας ύποπτος πρόκειται να ομολογήσει, τότε και ο άλλος θα προτιμήσει να ομολογήσει ώστε να μπει στη φυλακή για έξι μήνες και όχι για εννιά όπως στην περίπτωση που δεν θα ομολογούσε. Ομοίως εάν ένας ύποπτος πρόκειται να μην ομολογήσει ο άλλος θα προτιμήσει να ομολογήσει και να απελευθερωθεί άμεσα· από το να μην ομολογήσει και να μείνει στη φυλακή για ένα μήνα. Δηλαδή, για ένα παίκτη i η στρατηγική να μην ομολογήσει κυριαρχείται από κάθε στρατηγική που θα επιλέξει ο παίκτης j, διότι η απολαβή του i για να μην ομολογήσει, είναι μικρότερη από την επιλογή του j για να ομολογήσει. Γενικότερα:

Ορισμός 1.10: ***Αυστηρά Κυριαρχούμενες Στρατηγικές:*** *Σε παίγνιο κανονικής μορφής $G = \ \ S_1, \cdots, S_n, u_1, \cdots u_n$, έστω s_i', $s_i'' \in S_i$, οι εφικτές καθαρές στρατηγικές του παίκτη i. Μία στρατηγική s_i' είναι αυστηρά κυριαρχούμενη από την στρατηγική s_i'' εάν για κάθε εφικτό συνδυασμό των στρατηγικών των άλλων παικτών, η απολαβή του i επιλέγοντας s_i' είναι αυστηρά μικρότερη, από την απολαβή του i επιλέγοντας s_i'':*

$$u_i\ \ s_1, \cdots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \cdots, s_n\ \ < u_i\ \ s_1, \cdots, s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, \cdots, s_n$$

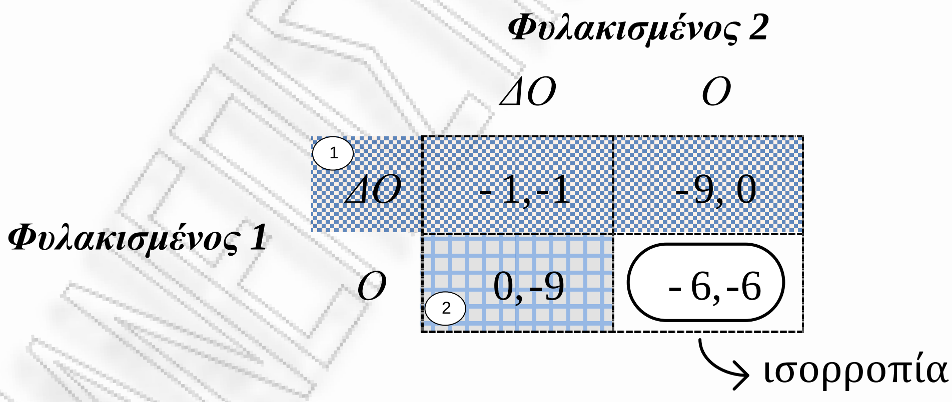
για κάθε $s_1, \cdots, s_{i-1}, s_{i+1}, \cdots, s_n$ *το οποίο μπορεί να δημιουργηθεί από τα στρατηγικά πεδία* $S_1, \cdots, S_{i-1}, S_{i+1}, \cdots, S_n$ *των άλλων παικτών.*

Οι λογικοί παίκτες δεν επιλέγουν αυστηρά κυριαρχούμενες στρατηγικές, επειδή δεν έχουν την πεποίθηση ότι μπορούν να επωφεληθούν από την επιλογή τους. Η σκέψη αυτή των λογικών παικτών, όπως και στο Δίλλημα των Φυλακισμένων, μπορεί να μας οδηγήσει σε μία λύση του παιγνίου.

Καθώς εναλλασσόμαστε ανάμεσα στους δύο παίκτες, απαλείφουμε τις κυριαρχούμενες στρατηγικές τους. Η διαδικασία είναι η ακόλουθη:

1. Ο Φυλακισμένος 1 επιλέγει γραμμές και ο Φυλακισμένος 2 στήλες (Εικόνα 1.1).
2. Ξεκινώντας με τον Φυλακισμένο 1, παρατηρούμε ότι η πρώτη σειρά (ΔΟ), όπου οι απολαβές είναι μικρότερες, κυριαρχείται αυστηρά από την δεύτερη (Ο). Συνεπώς μπορούμε να τη διαγράψουμε.
3. Σειρά έχει τώρα ο Φυλακισμένος 2 και οι διαθέσιμες πλέον επιλογές του περιορίζονται στη δεύτερη σειρά (Ο). Είναι επίσης προφανές ότι στη σειρά αυτή, η πρώτη στήλη (ΔΟ) είναι αυστηρά κυριαρχούμενη από τη δεύτερη (Ο), επομένως διαγράφεται.

Το αποτέλεσμα του παιγνίου φαίνεται στην Εικόνα 1.1 και προκύπτει όταν και οι δύο παίκτες ομολογήσουν (Ο,Ο). Εάν το παίγνιο ήταν μεγαλύτερο σε έκταση, η διαδικασία θα επαναλαμβανόταν από την αρχή μέχρι να φτάσουμε σε ένα σημείο ισορροπίας ή να μην υπήρχαν άλλες κυριαρχούμενες στρατηγικές για απαλοιφή.



Εικόνα 1.1: *Απαλοιφή των Κυριαρχούμενων Στρατηγικών στο Δίλλημα των Φυλακισμένων*

Η συγκεκριμένη διαδικασία μπορεί να μας δώσει λύση όπως στο προηγούμενο παράδειγμα αλλά η εύρεση ενός σημείου ισορροπίας δεν είναι δεδομένη. Για τον λόγο αυτό χρειάζεται να μελετήσουμε ένα πιο ισχυρό τρόπο εύρεσης λύσης, την ισορροπία Nash. Η επαναληπτική εξάλειψη των κυριαρχούμενων στρατηγικών δεν απαλείφει της στρατηγικές που βρίσκουμε στην ισορροπία Nash, αλλά είτε μας οδηγεί στην λύση είτε σε μεγαλύτερο εύρος τιμών από την ισορροπία Nash, για αυτό και η ισορροπία Nash θεωρείται ισχυρότερη. Παρόλα αυτά η χρήση της παραπάνω διαδικασίας μπορεί να μας βοηθήσει στην ελαχιστοποίηση των πινάκων πολύ μεγαλύτερων παιγνίων και να μας διευκολύνει στην περαιτέρω επίλυση τους.

1.3.3 Η Ισορροπία Nash

Βλέποντας ένα παίγνιο από την πλευρά του κάθε παίκτη και όχι ως ένας εξωτερικός παρατηρητής (όπως με τις κυριαρχούμενες στρατηγικές), μπορεί να μας οδηγήσει στην πιο επιδραστική λύση της Θεωρίας Παιγνίων, την *ισορροπία Nash*.

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι εάν ένας παίκτης γνώριζε τον τρόπο αντίδρασης των άλλων παικτών, το πρόβλημα της επιλογής στρατηγικής θα ήταν απλό. Συγκεκριμένα, θα ακολουθούσε την πάγια τακτική ενός παίκτη, δηλαδή μία στρατηγική μεγιστοποίησης της ευχαρίστησης του.

Ορίζουμε ως $s_{-i} = \ s_1, \cdots, s_{i-1}, s_{i+1}, \cdots, s_n$ *ένα στρατηγικό πεδίο* s *στο οποίο δεν περιέχεται η στρατηγική του παίκτη* i· δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι το συνολικό στρατηγικό πεδίο είναι $s = \ s_i, s_{-i}$. Εάν όλοι οι παίκτες, εξαιρουμένου του i, σκοπεύουν να επιλέξουν την στρατηγική s_{-i}, ο παίκτης i ο οποίος έχει ως στόχο την μεγιστοποίηση της ευχαρίστησης του, θα αντιμετώπιζε το πρόβλημα ορίζοντας την *βέλτιστη απόκριση (best response)* του.

Ορισμός 1.11: ***Βέλτιστη Απόκριση.*** *Η βέλτιστη απόκριση του παίκτη* i *στο στρατηγικό προφίλ* s_{-i} *είναι μία μικτή στρατηγική* $s_i^* \in S_i$ *τέτοια ώστε* $u_i \ s_i^*, s_{-i} \ \geq u_i \ s_i, s_{-i}$ *για όλες τις στρατηγικές* $s_i \in S_i$.

Η βέλτιστη απόκριση δεν είναι πάντα μοναδική. Εκτός από την περίπτωση στην οποία υπάρχει μία μοναδική βέλτιστη απόκριση (δηλαδή σε καθαρές στρατηγικές), ο αριθμός των βέλτιστων αποκρίσεων είναι άπειρος.

Ένας παίκτης δεν γνωρίζει πάντα τις κινήσεις των άλλων παικτών ώστε να απαντήσει με την βέλτιστη απόκριση του, συνεπώς δεν ενδείκνυται ως λύση του παιγνίου. Βέβαια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την βέλτιστη απόκριση για να ορίσουμε την ισορροπία Nash.

Ορισμός 1.12: ***Ισορροπία Nash.*** *Ένα στρατηγικό προφίλ* $s = \ s_1, \cdots, s_n$ *είναι μία ισορροπία Nash, εάν για όλους τους παίκτες* i*, η στρατηγική* s_i *είναι η καλύτερη απόκριση στην* s_{-i}.

Μία ισορροπία Nash συνιστά ένα σταθερό στρατηγικό προφίλ. Οι παίκτες παίζουν ταυτόχρονα την βέλτιστη απόκριση τους και καταλήγουν σε ένα σημείο ισορροπίας στο οποίο δεν θα ήθελαν να αλλάξουν την στρατηγική τους εάν γνώριζαν τις στρατηγικές των άλλων παικτών.

Το σημείο ισορροπίας Nash μπορεί να μην είναι μοναδικό. Μελετώντας ξανά τα παίγνια του Διλλήματος των Φυλακισμένων και της Μάχης των Φύλων, διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν μία και δύο ισορροπίες Nash αντίστοιχα. Στο Δίλλημα των Φυλακισμένων καταλήξαμε, μέσω της απαλοιφής των κυριαρχούμενων στρατηγικών, σε μία λύση (Ο,Ο) η οποία αποτελεί και ισορροπία Nash. Στη Μάχη των Φύλων έχουμε δύο σημεία ισορροπίας (Πίνακας 1.5), όταν οι δύο παίκτες επιλέγουν να παρακολουθήσουν το ίδιο κονσέρτο ((B,B) και (S,S)).

		Άντρας	
		S	B
Γυναίκα	S	2, 1	0, 0
	B	0, 0	1, 2

Πίνακας 1.5: *Ισορροπίες Nash καθαρών στρατηγικών στη Μάχη των Φύλων*

Σε ένα παίγνιο ο κύριος σκοπός είναι η εύρεση μίας ισορροπίας. Αυτό που πρέπει να μας προβληματίσει, είναι εάν υπάρχει σε κάθε παίγνιο μία ισορροπία Nash. Το πρόβλημα αυτό το λύνει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.1: ***Nash (1951).*** *Κάθε παίγνιο με πεπερασμένο αριθμό παικτών και διαθέσιμων ενεργειών, έχει τουλάχιστον μία ισορροπία Nash μικτών στρατηγικών.*

Το παραπάνω θεώρημα αποδεικνύεται στο [2] χρησιμοποιώντας το θεώρημα σταθερού σημείου του Kakutani.

Η ισορροπία Nash ορίζεται στη γενική μορφή των μεικτών στρατηγικών. Στα παίγνια που μελετήσαμε αναφερόμαστε σε καθαρές στρατηγικές στα οποία η ύπαρξη της ισορροπίας Nash υφίσταται υπό προϋποθέσεις. Για παράδειγμα στο παίγνιο Κορώνα Γράμματα, παρατηρούμε ότι δεν έχει κάποιο σημείο ισορροπίας Nash στις καθαρές στρατηγικές του.

Η χρήση καθαρών στρατηγικών στα παίγνια μας είναι η πιο συνηθισμένη, διότι μία ισορροπία καθαρών στρατηγικών είναι ισχυρότερη από μία ισορροπία μεικτών στρατηγικών· συνεπώς η εύρεση των προϋποθέσεων για την ύπαρξη ισορροπίας είναι σημαντική. Το παρακάτω θεώρημα, εξειδικεύοντας το θεώρημα του Nash, μας δίνει τις προϋποθέσεις ύπαρξης ισορροπίας Nash καθαρών στρατηγικών.

Θεώρημα 1.2: ***Debrew, Glicksberg, Fan (1952).*** *Θεωρούμε ένα παίγνιο κανονικής μορφής, του οποίου τα στρατηγικά πεδία S_i είναι μη κενά, συμπαγή, κυρτά υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου. Εάν η συνάρτηση ευχαρίστησης u_i είναι συνεχής στο s και οιονεί κοίλη στο s_i, υπάρχει πάντα μία ισορροπία Nash καθαρών στρατηγικών.*[2]

1.3.4 Υπεραρθρωτά Παίγνια

Τα *υπεραρθρωτά παίγνια* (*supermodular games*) παρουσιάστηκαν από τον Topkis (1979) και βρήκαν εφαρμογή σε οικονομικά προβλήματα, πρώτα από τον Vives (1990) και έπειτα από τους Milgrom και Roberts (1990). Στα παίγνια αυτά η οριακή ευχαρίστηση ενός παίκτη, ο οποίος αυξάνει την στρατηγική του, παρουσιάζει άνοδο με την αύξηση των στρατηγικών των υπόλοιπων παικτών. Σε τέτοια παίγνια οι βέλτιστες αποκρίσεις παρουσιάζουν τέτοια αύξηση, έτσι ώστε οι στρατηγικές των παικτών να θεωρούνται «στρατηγικά συμπληρώματα» [2].

Τα υπεραρθρωτά παίγνια παρουσιάζουν καλές ιδιότητες, διότι έχουν πάντα ισορροπία Nash στις καθαρές στρατηγικές τους. Η απλότητα των παιγνίων αυτών καθιστούν περιττές τις υποθέσεις κυρτότητας και διαφορισιμότητας, παρόλο το γεγονός ότι μπορούν παράλληλα να ικανοποιούνται σε κάποιες περιπτώσεις. Για να αποδείξουμε ότι ένα παίγνιο είναι υπεραρθρωτό, αρκεί μία διατεταγμένη μορφή στον χώρο στρατηγικής των παικτών και μία μικρή απαίτηση συνέχειας στις απολαβές τους. Επιπλέον θα πρέπει να ισχύει αυτό που αναφέραμε παραπάνω, δηλαδή η οριακή ευχαρίστηση ενός παίκτη να ακολουθεί την μονοτονία των στρατηγικών των υπόλοιπων παικτών, καθώς επίσης και ένα *κριτήριο υπεραρθρώτητας*.

Δίνουμε αρχικά κάποιες βασικές έννοιες. Υποθέτουμε ότι το σύνολο στρατηγικών κάθε παίκτη i, είναι υποσύνολο ενός Ευκλείδειου χώρου R^{m_i}, πεπερασμένου αριθμού διαστάσεων. Τότε $S \equiv x_{i=1}^{n} \cdot S_i$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$, όπου $m \equiv \ {}_{i=1}^{n} m_i$. Θέτουμε x και y δύο διανύσματα σε ένα Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^K$. Έστω $x \geq y$ εάν $x_k \geq y_k$ για όλα τα $k = 1, \cdots, K$ με $x > y$ εάν $x \geq y$ και υπάρχει k τέτοιο ώστε $x_k > y_k$. Η κατάταξη αυτή θεωρείται μερική διότι, εάν ένα διάνυσμα κυριαρχεί ενός άλλου σε μία συνιστώσα αλλά κυριαρχείται σε μία άλλη, τα διανύσματα αυτά δεν θεωρούνται συγκρίσιμα. Ορίζουμε τώρα την τομή $x \wedge y$ και την ένωση $x \vee y$ των x και y:

$$x \wedge y \equiv \ min \ x_1, y_1 \ , \cdots, min \ x_K, y_K$$

$$x \vee y \equiv \ max \ x_1, y_1 \ , \cdots, max \ x_K, y_K$$

Το S είναι *υποδικτυωτό* του$\mathbb{R}^{m \cdot}$ εάν $s \in S$ και $s \in S$ υποδηλώνεται ότι $s \wedge s \in S$ και $s \vee s \in S$.

Ένα σύνολο S έχει ως μεγαλύτερο στοιχείο το s (αντίστοιχα ισχύει και για μικρότερο στοιχείο το s) εάν $s \leq s$ (ή $s \geq \underline{s}$) για όλα τα $s \in S$. Σύμφωνα με τον Birkhoff (1967), εάν το S είναι ένα μη κενό, συμπαγές υποδικτυωτό του $\mathbb{R}^m$, τότε το S έχει ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο στοιχείο.

Με τον παρακάτω ορισμό προσδιορίζουμε την έννοια του στρατηγικού συμπληρώματος, το οποίο αναφέραμε προηγουμένως.

Ορισμός 1.13: Αύξουσες Διαφορές. *Το $u_i \ s_i, s_{-i}$ έχει αύξουσες διαφορές στο s_i, s_{-i}, εάν για όλα τα $s_i, s_i \ \in S_i^2$ και $s_{-i}, s_{-i} \ \in S_{-i}^2$ τέτοια ώστε $s_i \geq s_i$ και $s_{-i} \geq s_{-i}$ και*

$$u_i \ \ s_i, s_{-i} \ \ - u_i \ \ s_i, s_{-i} \ \ \geq u_i \ \ s_i, s_{-i} \ \ - u_i \ \ s_i, s_{-i}$$

Οι αύξουσες διαφορές μας δείχνουν, ότι μία αύξηση στην στρατηγική των «αντιπάλων» του παίκτη i, προκαλούν την επιθυμία του i να παίξει μία υψηλότερη στρατηγική.

Ορισμός 1.14: ***Υπεραρθρώτητα.*** *Το $u_i \ \ s_i, s_{-i}$ είναι υπεραρθρωτό στο s_i εάν για κάθε s_{-i} ισχύει,*

$$u_i \ \ s_i, s_{-i} \ \ + u_i \ \ s_i, s_{-i} \ \ \leq u_i \ \ s_i \wedge s_i, s_{-i} \ \ + u_i \ \ s_i \vee s_i, s_{-i}$$

για όλα τα $\ s_i, s_i \ \ \in S_i^2$.

Η υπεραρθρώτητα ικανοποιείται πάντα εάν το S_i είναι μονοδιάστατο. Συνεπώς η υπεραρθρώτητα χρειάζεται σε περιπτώσεις στρατηγικών πεδίων πολλών διαστάσεων, ώστε να αποδείξουμε ότι η καλύτερη απόκριση ενός παίκτη αυξάνεται με τις στρατηγικές των άλλων παικτών.

Ο Topkis επίσης απέδειξε ότι, *εάν $S_i = R^{m_i}$ και u_i είναι δύο φορές παραγωγίσιμο, τότε το u_i είναι υπεραρθρωτό εάν και μόνο εάν για δύο στοιχεία s_l και s_k $(k \neq l)$ του s, ισχύει* $\frac{\partial^2 u_i}{\partial s_l \partial s_k} \geq 0$. Τώρα μπορούμε να ορίσουμε τα υπεραρθρωτά παίγνια.

Ορισμός 1.15: ***Υπεραρθρωτά Παίγνια.*** *Ένα υπεραρθρωτό παίγνιο είναι αυτό για το οποίο σε κάθε i, με το S_i να είναι υποδικτυωτό του $\mathbb{R}^{m_i}$, το u_i έχει αύξουσες διαφορές στο $\ s_i, s_{-i}$ και το u_i είναι υπεραρθρωτό στο s_i.*

Το σημαντικό στοιχείο, της ύπαρξης ισορροπίας στις καθαρές στρατηγικές των υπεραρθρωτών παιγνίων, βασίζεται στο παρακάτω θεώρημα του Tarski.

Θεώρημα 1.3: (Tarski 1955). *Εάν S είναι ένα μη κενό, συμπαγές υποδικτυωτό του $\mathbb{R}^{m_i}$ και η $f: S \to S$ είναι αύξουσα, τότε η f έχει ένα σταθερό σημείο στο S.*

Στηριζόμενο στην ιδέα ότι μία υψηλότερη στρατηγική προκαλεί και υψηλότερη βέλτιστη απόκριση, διατυπώνεται το παρακάτω θεώρημα το οποίο βασίζεται στο Θεώρημα 1.3 και αποδεικνύει την ύπαρξη ισορροπίας Nash στις καθαρές στρατηγικές των υπεραρθρωτών παιγνίων.

Θεώρημα 1.4: (Topkis 1979). *Εάν για κάθε i, το S_i είναι συμπαγές, το u_i είναι άνω ημι-συνεχές στο s_i για κάθε s_{-i} και το παίγνιο είναι υπεραρθρωτό, τότε το σύνολο των καθαρών στρατηγικών της ισορροπίας Nash είναι μη κενό και διαθέτει μέγιστα και ελάχιστα σημεία ισορροπίας s και $\underline{s}$.*

Τέλος το θεώρημα, λόγω συμμετρίας, ισχύει και για τα κάτω όρια. Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.4 υπάρχει στο [13].

1.4 Αναπαράσταση Παιγνίων σε Εκτεταμένη Μορφή

Η κανονική μορφή αναπαράστασης των παιγνίων θεωρείται θεμελιώδης[2], αλλά δεν μπορεί να συμπεριλάβει την έννοια της ακολουθίας ή του χρόνου των ενεργειών ενός παίκτη. Η *εκτεταμένη ή δενδροειδής μορφή* ενός παιγνίου, είναι μία εναλλακτική αναπαράσταση των παιγνίων μέσω της οποίας μπορούμε να μελετήσουμε με ευκολία τις έννοιες, οι οποίες δεν συμπεριλαμβάνονται στην κανονική μορφή.

Ένα παίγνιο σε εκτεταμένη μορφή αναπαριστά το παίγνιο ως δέντρο. Το παίγνιο ξεκινά από ένα μοναδικό αρχικό κόμβο και προχωράει μέσω του δέντρου, μέσα από ένα μονοπάτι το οποίο καθορίζεται από τους παίκτες. Κάθε κόμβος (κόμβος απόφασης) του δέντρου, αναπαριστά ένα σημείο απόφασης για έναν από τους παίκτες και τα κλαδιά τα οποία εξέρχονται από τον κόμβο αυτό αναπαριστούν πιθανές διαθέσιμες ενέργειες του παίκτη αυτού. Όταν φτάσουμε σε ένα τερματικό κόμβο, το παίγνιο τελειώνει και διανέμονται οι απολαβές των παικτών που ακολούθησαν το συγκεκριμένο μονοπάτι.

Ορισμός 1.16: ***Παίγνιο εκτεταμένης μορφής.*** *Η εκτεταμένη αναπαράσταση ενός παιγνίου καθορίζει:*

1. *Τους παίκτες που συμμετέχουν στο παίγνιο.*
2. *Πότε ένας παίκτης μπορεί να ενεργήσει.*
3. *Τι μπορεί να κάνει κάθε παίκτης, σε κάθε ευκαιρία που του δίνεται να ενεργήσει.*
4. *Τι γνωρίζει κάθε παίκτης, σε κάθε ευκαιρία που του δίνεται να ενεργήσει.*
5. *Η απολαβή που λαμβάνει ο κάθε παίκτης, για κάθε συνδυασμό ενεργειών που πραγματοποιούνται στο παίγνιο, από τις επιλογές όλων των παικτών.*

Ας δούμε πως μεταφράζεται στις δύο μορφές αναπαράστασης το *παίγνιο διαμοιρασμού των πόρων*. Σε ένα δίκτυο P2P υπάρχουν χρήστες, οι οποίοι δεν συνεισφέρουν στον διαμοιρασμό των αρχείων. Εάν όλοι οι χρήστες ενεργούσαν έτσι, το δίκτυο δεν θα λειτουργούσε γιατί κανένας δεν θα μοίραζε δεδομένα. Στο μοντέλο που θα μελετήσουμε, κάθε παίκτης i μπορεί να αποφασίσει εάν θα μοιράσει (Μ) ή δεν θα μοιράσει (ΔΜ) δεδομένα στο δίκτυο. Υποθέτουμε ότι το κόστος κάθε παίκτη για να διαθέσει τους δικούς του πόρους για διαμοιρασμό είναι 1.5 και κάθε χρήστης ωφελείται κατά 1, όταν κάποιος άλλος παίκτης στο δίκτυο επιλέγει να διαθέσει τους πόρους του προς διαμοιρασμό. Στον Πίνακα 1.6 και την Εικόνα 1.2 βλέπουμε την αναπαράσταση του παιγνίου σε κανονική και εκτεταμένη μορφή αντίστοιχα.

---

[2] Κάθε παίγνιο σε εκτεταμένη μορφή μπορεί να μετατραπεί σε παίγνιο κανονικής μορφής. Το αντίθετο δεν ισχύει πάντα.

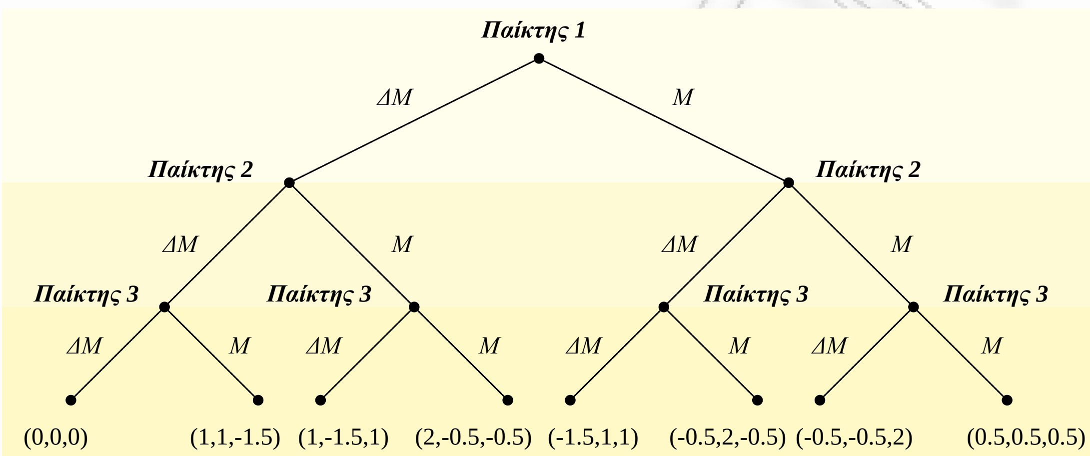
Παίκτης 3: ΔΜ

Παίκτης 1 \ *Παίκτης 2*	*ΔΜ*	*Μ*
ΔΜ	(0,0,0)	(1,-1.5,1)
Μ	(-1.5,1,1)	(-0.5,-0.5,2)

Παίκτης 3: Μ

Παίκτης 1 \ *Παίκτης 2*	*Μ*	*ΔΜ*
Μ	(1,1,-1.5)	(2,-0.5,-0.5)
ΔΜ	(-0.5,2,-0.5)	(0.5,0.5,0.5)

Πίνακας 1.6 : *Αναπαράσταση του παιγνίου διαμοιρασμού πόρων σε κανονική μορφή*



Εικόνα 1.2: *Αναπαράσταση του παιγνίου διαμοιρασμού πόρων σε εκτεταμένη μορφή*

Με την αναπαράσταση εκτεταμένης μορφής θα ορίσουμε τα παίγνια τέλειας και ατελούς πληροφόρησης.

1.4.1 Παίγνια Τέλειας Πληροφόρησης

Ένα παίγνιο τέλειας πληροφόρησης σε εκτεταμένη μορφή, είναι ένα απλό παίγνιο εκτεταμένης μορφής όπως παρουσιάζεται στο παίγνιο διαμοιρασμού πόρων. Ένα στοιχείο που μπορούμε να ορίσουμε επιπλέον, είναι το ιστορικό ενός κόμβου. Το ιστορικό ενός κόμβου καθορίζεται από την ακολουθία επιλογών η οποία οδηγεί από τον αρχικό κόμβο στον κόμβο αυτό. Μπορούμε επίσης να ορίσουμε της διάδοχες επιλογές ενός κόμβου h, δηλαδή όλες τις επιλογές και τους τερματικούς κόμβους στο «υποδέντρο» το οποίο έχει κορυφή τον κόμβο h.

Ορισμός 1.17: ***Παίγνιο Τέλειας Πληροφόρησης.*** *Ένα πεπερασμένο παίγνιο τέλειας πληροφόρησης σε εκτεταμένη μορφή, είναι ένα σύνολο* $G = \ N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u$ *όπου:*

- N *ένα σύνολο* n *παικτών.*
- A *ένα σύνολο ενεργειών.*
- H *ένα σύνολο από μη τερματικούς κόμβους.*
- Z *ένα σύνολο από τερματικούς κόμβους, ανεξαρτήτους από τους* H.

- $\chi : H \longmapsto 2^A$ η συνάρτηση ενεργειών, η οποία αναθέτει σε κάθε επιλεγμένο κόμβο ένα σύνολο πιθανών ενεργειών.
- $\rho : H \longmapsto N$ η συνάρτηση παίκτη, η οποία αναθέτει σε κάθε μη τερματικό κόμβο ένα παίκτη, ο οποίος επιλέγει μία ενέργεια στον κόμβο αυτό.
- $\sigma : H \times A \longmapsto H \cup Z$ η διάδοχη συνάρτηση, η οποία αντιστοιχεί έναν επιλεγμένο κόμβο και μία ενέργεια σε ένα νέο επιλεγμένο κόμβο ή τερματικό κόμβο τέτοιο ώστε για όλα τα $h_1, h_2 \in H$ και $a_1, a_2 \in A$ εάν $\sigma\ h_1, a_1\ = \sigma\ h_2, a_2$ τότε $h_1 = h_2$, $a_1 = a_2$ και
- $u = u_1, \cdots, u_n$, όπου $u_i : Z \longmapsto \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση ευχαρίστησης πραγματικών τιμών του παίκτη i, στους τερματικούς κόμβους Z.

Μία καθαρή στρατηγική για ένα παίκτη, σε ένα παίγνιο τέλειας πληροφόρησης, είναι η επιλογή μίας ενέργειας σε κάθε κόμβο απόφασης του παίκτη αυτού.

Ορισμός 1.18: ***Καθαρές Στρατηγικές.*** *Εάν* $G = \ N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u\ $ *ένα παίγνιο τέλειας πληροφόρησης σε εκτεταμένη μορφή, τότε οι καθαρές στρατηγικές του παίκτη* i *αποτελούνται από το Καρτεσιανό γινόμενο* $\ _{h \in H, \rho\ h\ = i} \chi\ h\ $.

Ένα πολύ σημαντικό σημείο για ένα παίγνιο τέλειας πληροφόρησης σε εκτεταμένη μορφή είναι η ύπαρξη ισορροπίας Nash σε καθαρές στρατηγικές, σε αντίθεση με τα παίγνια κανονικής μορφής τα οποία η ύπαρξη ισορροπίας σε καθαρές στρατηγικές ισχύει υπό προϋποθέσεις.

Θεώρημα 1.5: *Κάθε πεπερασμένο παίγνιο τέλειας πληροφόρησης σε εκτεταμένη μορφή, έχει μία ισορροπία Nash καθαρής στρατηγικής.*

Τέλεια Ισορροπία Υποπαιγνίου

Η ισορροπία Nash δεν είναι πάντα μία ισχυρή λύση όταν το παίγνιο αναπαρίσταται σε εκτεταμένη μορφή, δίνοντας κάποια μη ικανοποιητικά σημεία ισορροπίας ([7]). Η λύση δίνεται ορίζοντας την έννοια του *υποπαιγνίου* και της *τέλειας ισορροπίας υποπαιγνίου*.

Ορισμός 1.19: ***Υποπαίγνιο.*** *Σε ένα παίγνιο τέλειας πληροφόρησης εκτεταμένης μορφής* G*, το υποπαίγνιο του* G *στον κόμβο* h *είναι ο περιορισμός του* G *στους διαδόχους του* h*. Το σύνολο των υποπαιγνίων του* G*, αποτελείται από όλα τα υποπαίγνια σε κάποιο κόμβο του παιγνίου.*

Η τέλεια ισορροπία υποπαιγνίου είναι μία βελτιωμένη εκδοχή της ισορροπίας Nash σε παίγνια τέλειας πληροφόρησης εκτεταμένης μορφής.

Ορισμός 1.20: ***Τέλεια Ισορροπία Υποπαιγνίου.*** *Η τέλεια ισορροπία υποπαιγνίου ενός παιγνίου* G *αποτελείται από όλα τα στρατηγικά προφίλ* s*, τέτοια ώστε για κάθε υποπαίγνιο* G' *του* G*, ο περιορισμός των* s *στο* G' *είναι μία ισορροπία Nash του* G'*.*

Θεωρώντας ότι κάθε παίγνιο G είναι ένα υποπαίγνιο του εαυτού του, η τέλεια ισορροπία υποπαιγνίου είναι επίσης μία ισορροπία Nash (το αντίθετο δεν ισχύει πάντα). Επιπλέον, μολονότι η τέλεια ισορροπία υποπαιγνίου είναι ισχυρότερη από την ισορροπία Nash, ισχύει ακόμα ότι *κάθε παίγνιο τέλειας πληροφορίας εκτεταμένης μορφής έχει τουλάχιστον μία τέλεια ισορροπία υποπαιγνίου*.

1.4.2 Παίγνια Ατελούς Πληροφόρησης

Ένα παίγνιο ατελούς πληροφόρησης, είναι ένα παίγνιο σε εκτεταμένη μορφή στο οποίο οι κόμβοι απόφασης κάθε παίκτη, καταμερίζονται σε σύνολα πληροφορίας. Εάν δύο κόμβοι απόφασης βρίσκονται στο ίδιο σύνολο πληροφορίας, τότε ο παίκτης δεν μπορεί να τους διακρίνει.

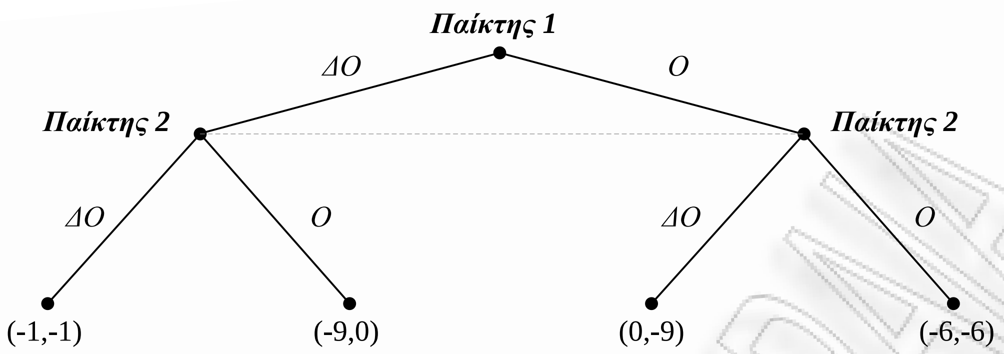
Ορισμός 1.21: ***Παίγνιο Ατελούς Πληροφόρησης.*** *Ένα παίγνιο ατελούς πληροφόρησης σε εκτεταμένη μορφή είναι ένα σύνολο* $N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u, I$ *, όπου:*

- $N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u$ *είναι ένα παίγνιο τέλειας πληροφόρησης σε εκτεταμένη μορφή και*
- $I = I_1, \cdots I_n$ *, όπου* $I_i = I_{i,1}, \cdots, I_{i,k_i}$ *μία σχέση ισοδυναμίας στο* $h \in H$ *:* $\rho\ h\ = i$ *με την ιδιότητα ότι* $\chi\ h\ = \chi\ h'$ *και* $\rho\ h\ = \rho\ h'$ *όποτε υπάρχει ένα* i *για το οποίο* $h \in I_{i,j}$ *και* $h' \in I_{i,j}$.

Μία καθαρή στρατηγική για ένα παίκτη ενός παιγνίου ατελούς πληροφόρησης, είναι η επιλογή μίας ενέργειας σε κάθε σύνολο πληροφοριών του παίκτη αυτού.

Ορισμός 1.22: ***Καθαρές Στρατηγικές.*** *Εάν* $G = N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u, I$ *ένα παίγνιο ατελούς πληροφόρησης σε εκτεταμένη μορφή, τότε οι καθαρές στρατηγικές του παίκτη* i *αποτελούνται από το Καρτεσιανό γινόμενο* $_{I_{i,j} \in I_i} \chi\ I_{i,j}$.

Ένα γνωστό παίγνιο, το οποίο μπορεί να αναπαρασταθεί ως παίγνιο ατελούς πληροφόρησης σε εκτεταμένη μορφή, είναι το Δίλλημα των Φυλακισμένων (Εικόνα 1.3). Από το παίγνιο αυτό μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα, ότι κάθε παίγνιο σε κανονική μορφή μπορεί να αναπαρασταθεί ισοδύναμα, ως ένα παίγνιο ατελούς πληροφόρησης. Το παίγνιο όμως αυτό έχει μία ισχυρή ισορροπία Nash καθαρών στρατηγικών κάτι το οποίο δεν ισχύει στην πλειονότητα των παιγνίων ατελούς πληροφόρησης. Οπότε τίθενται ειδικά θέματα μικτών στρατηγικών, τα οποία δεν μπορούν να μας δώσουν το ίδιο ισχυρές λύσεις όπως το Δίλλημα των Φυλακισμένων.



Εικόνα 1.3: *Το Δίλλημα των Φυλακισμένων σε εκτεταμένη μορφή*

Ακολουθιακή Ισορροπία

Όπως αναφέραμε παραπάνω καθώς και στα παίγνια τέλειας πληροφόρησης, η ισορροπία Nash δεν αποτελεί τη βέλτιστη λύση για τέτοιου είδους παίγνια. Για το λόγο αυτό εισάγαμε τον όρο της τέλειας ισορροπίας υποπαιγνίου. Το πρόβλημα το οποίο παρουσιάζεται στα παίγνια ατελούς πληροφόρησης σε σχέση με τα αντίστοιχα τέλειας, είναι ότι δεν έχουμε καλά ορισμένα υποπαίγνια. Αντί αυτού έχουμε σε κάθε σύνολο πληροφορίας μία συλλογή υποπαιγνίων. Μία έννοια η οποία μπορεί να δώσει λύση, σε πεδίο μεικτών στρατηγικών, είναι η *ακολουθιακή ισορροπία*.

Ορισμός 1.23: *Ακολουθιακή Ισορροπία.* *Ένα στρατηγικό προφίλ S είναι μία ακολουθιακή ισορροπία ενός παιγνίου G σε εκτεταμένη μορφή, εάν υπάρχουν πιθανοτικές κατανομές $\mu\ h$ για κάθε σύνολο πληροφοριών h στο G τέτοιες ώστε να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:*

1. $S, \mu\ = lim_{n\to\infty}\ S^n, \mu^n$ *για μία ακολουθία* $S^1, \mu^1\ ,\ S^2, \mu^2\ , \cdots$*, όπου S^n είναι πλήρως μικτή και το μ^n καθορίζεται από το S^n*
2. *Για κάθε σύνολο πληροφοριών h το οποίο ανήκει στον παίκτη i και κάθε εναλλακτική στρατηγική $S_i{}'$ του i ισχύει ότι*

$$u_i\ S\,|\,h, \mu\ h\quad \geq u_i\quad S', S_{-i}\quad |\,h, \mu\ h$$

Όπως η τέλεια ισορροπία υποπαιγνίου για τα παίγνια τέλειας πληροφόρησης, έτσι και *η ακολουθιακή ισορροπία υπάρχει πάντα σε παίγνια τέλειας ισορροπίας*.

1.5 Επαναλαμβανόμενα Παίγνια

Στα επαναλαμβανόμενα παίγνια, ένα παίγνιο παίζεται πολλαπλές φορές από τους ίδιους παίκτες. Το παίγνιο το οποίο επαναλαμβάνεται μπορεί να είναι κάποιο από τα παραδείγματα που αναφέραμε προηγουμένως, όπως το Δίλλημα των Φυλακισμένων. Το παίγνιο αυτό θα καλείται βασικό παίγνιο (stage game) και ο αριθμός των επαναλήψεων του μπορεί να είναι πεπερασμένος ή άπειρος.

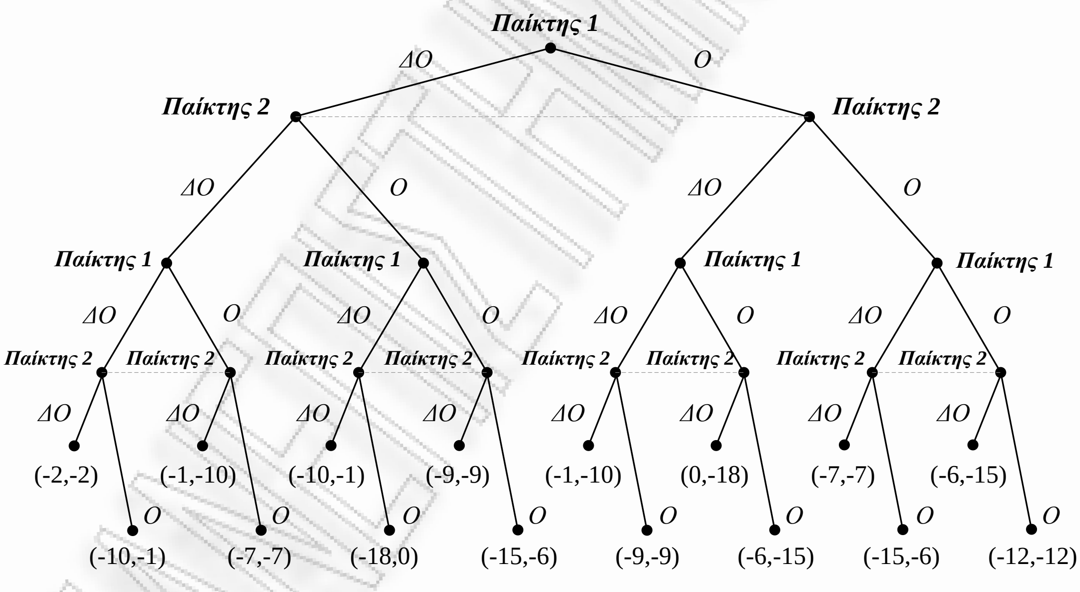
1.5.1 Πεπερασμένα Επαναλαμβανόμενα Παίγνια

Θα μελετήσουμε τα πεπερασμένα επαναλαμβανόμενα παίγνια, μέσω της επανάληψης του κλασσικού παιγνίου, του Διλλήματος των Φυλακισμένων. Το παίγνιο αυτό σε εκτεταμένη μορφή, όπως είπαμε είναι ένα παίγνιο ατελούς πληροφόρησης. Πρέπει να αναφέρουμε ότι στο παίγνιο αυτό, κάθε παίκτης δεν γνωρίζει την κίνηση του άλλου την ώρα που επιλέγει την στρατηγική του, αλλά έπειτα από το σημείο αυτό έχει γνώση. Επίσης οι απολαβές των παικτών, είναι το άθροισμα των απολαβών έπειτα από την ολοκλήρωση του βασικού παιγνίου δύο φορές.

Παίκτης 1 \ Παίκτης 2	ΔΟ	Ο
ΔΟ	(-1,-1)	(-9,0)
Ο	(0,-9)	(-6,-6)

Παίκτης 1 \ Παίκτης 2	ΔΟ	Ο
ΔΟ	(-1,-1)	(-9,0)
Ο	(0,-9)	(-6,-6)

Πίνακας 1.7: *Το Δίλλημα των Φυλακισμένων σε κανονική μορφή παιγμένο 2 φορές.*



Εικόνα 1.4: *Το Δίλλημα των Φυλακισμένων σε εκτεταμένη μορφή παιγμένο 2 φορές.*

Αυτό που παρατηρούμε στην εκτεταμένη μορφή του επαναλαμβανόμενου παιγνίου, είναι ότι ο χώρος των στρατηγικών είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο του βασικού παιγνίου. Στον τομέα αυτό θα μπορούσε ένας παίκτης να ακολουθήσει την ίδια στρατηγική σε κάθε επανάληψη του βασικού παιγνίου, παίζοντας ουσιαστικά δύο μεμονωμένα παίγνια. Βέβαια δεν είναι αυτή πάντα η καλύτερη λύση, διότι οι επιλογές των παικτών εξαρτώνται και από το ιστορικό των προηγούμενων κινήσεων. Γενικά σε τέτοια παίγνια τίθενται διάφορα θέματα, όχι μόνο μαθηματικής αλλά και φιλοσοφικής φύσεως, για το ποια είναι η καλύτερη στρατηγική και η λύση πολλές φορές μπορεί να αμφισβητηθεί. Στο δύο φορές επαναλαμβανόμενο Δίλλημα των Φυλακισμένων, μέσω της λύσης τέλειας ισορροπίας υποπαιγνίου, η καλύτερη στρατηγική για τους παίκτες είναι σε κάθε στάδιο να ομολογήσουν ([3],[7]).

1.5.2 Απείρως Επαναλαμβανόμενα Παίγνια

Όταν ένα απείρως επαναλαμβανόμενο παίγνιο μετατρέπεται σε παίγνιο εκτεταμένης μορφής, το αποτέλεσμα είναι ένα άπειρο δέντρο. Συνεπώς οι αμοιβές των παικτών δεν μπορούν να προσαρτηθούν σε κάποιο τερματικό κόμβο, ούτε μπορούμε να τις ορίσουμε ως το άθροισμα των αμοιβών των βασικών παιγνίων. Για το λόγο αυτό υπάρχουν δύο κοινές μέθοδοι, η *μέση* και η *προεξοφλημένη αμοιβή*, οι οποίες αντιμετωπίζουν το πρόβλημα της απόδοσης των αμοιβών.

Ορισμός 1.24: ***Μέση Αμοιβή.*** *Δεδομένης μίας άπειρης ακολουθίας απολαβών* $r_i^{\ 1}, r_i^{\ 2}$ *, … για τον παίκτη* i*, η μέση αμοιβή του* i *είναι:*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{k} r_i^{\ j}}{k}$$

Η μελλοντική προεξοφλημένη αμοιβή ενός παίκτη σε ένα συγκεκριμένο σημείο του παιγνίου, είναι το άθροισμα της αμοιβής του επικείμενου βασικού παιγνίου συν του αθροίσματος των μελλοντικών αμοιβών, μειωμένων κατά ένα σταθερό παράγοντα.

Ορισμός 1.25: ***Προεξοφλημένη Αμοιβή.*** *Δεδομένης μίας άπειρης ακολουθίας απολαβών* $r_i^{\ 1}, r_i^{\ 2}$ *, … για τον παίκτη* i *και ενός μειωτικού παράγοντα* β*, όπου* $0 \le \beta \le 1$*, η μελλοντική προεξοφλημένη ανταμοιβή του* i *είναι*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j r_i^{\ j}$$

Δίνουμε επιπλέον δύο ορισμούς για το εκτιμώμενο πεδίο απολαβών.

Ορισμός 1.26: ***Εκτελέσιμο Πεδίο Απολαβών.*** *Ένα πεδίο απολαβών* $r = r_1, r_2, \cdots, r_n$ *είναι εκτελέσιμο εάν* $\forall i \in N, r_i \ge u_i$.

Ορισμός 1.27: ***Εφικτό Πεδίο Απολαβών.*** *Ένα πεδίο απολαβών* $r = r_1, r_2, \cdots, r_n$ *είναι εφικτό εάν υπάρχουν λογικές, μη μηδενικές τιμές* a_a *τέτοιες ώστε για όλα τα* i*, μπορούμε να εκφράσουμε το* r_i *ως* $\sum_{a\in A} a_a u_i$ *α με* $\sum_{a\in A} a_a = 1$.

Σε πολλές περιπτώσεις η βέλτιστη μέθοδος «παιξίματος» ενός επαναλαμβανόμενου παιγνίου, δεν είναι η επαναλαμβανόμενη επιλογή των στρατηγικών της ισορροπίας Nash του βασικού παιγνίου, αλλά η επιλογή μίας βέλτιστης κοινωνικά στρατηγικής. Υπάρχουν πολλά αποτελέσματα σε θεωρήματα, τα οποία ασχολούνται με τον τρόπο επίτευξης και διατήρησης της κοινωνικώς βέλτιστης ισορροπίας στα επαναλαμβανόμενα παίγνια. Τα αποτελέσματα αυτά συγκεντρώνονται στα λεγόμενα «Δημώδη Θεωρήματα». Παρακάτω παραθέτουμε ένα μέρος των θεωρημάτων αυτών, το οποίο αφορά μόνο τα απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια.

Θεώρημα 1.6: ***Δημώδες Θεώρημα.*** *Θεωρούμε ένα παίγνιο G σε κανονική μορφή, $n -$ παικτών και κάποιο πεδίο απολαβών $r = r_1, r_2, \cdots, r_n$.*

1. *Εάν το r είναι το πεδίο απολαβών για κάποια ισορροπία Nash, του απείρως επαναλαμβανόμενου παιγνίου G με μέσες αμοιβές, τότε για κάθε παίκτη i το r_i είναι εκτελέσιμο.*
2. *Εάν το r είναι εφικτό και εκτελέσιμο, τότε το r είναι το πεδίο απολαβών για κάποιες ισορροπίες Nash του απείρως επαναλαμβανόμενου παιγνίου G με μέσες αμοιβές.*

Η απόδειξη για το παραπάνω Δημώδες Θεώρημα καθώς και για άλλα θεωρήματα της ίδιας κατηγορίας υπάρχουν στο [2].

Το παραπάνω Δημώδες Θεώρημα μας βοηθάει να κατανοήσουμε τον χώρο όλων των ισορροπιών Nash ενός απείρως επαναλαμβανόμενου παιγνίου, δείχνοντας μας τι απολαβές μπορεί να πετύχει ένας παίκτης και πως μπορεί να συγκλίνει σε μία ισορροπία με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά.

1.6 Στοχαστικά Παίγνια

Τα στοχαστικά παίγνια (ή παίγνια Markov) παρουσιάστηκαν πρώτη φορά από τον Lloyd Shapley το 1953 και έχουν μία πολύ φυσική σχέση με τα επαναλαμβανόμενα. Αποτελούν ένα ευρύ πλαίσιο το οποίο γενικεύει τα επαναλαμβανόμενα παίγνια και τις διαδικασίες αποφάσεων Markov. Μία διαδικασία απόφασης Markov είναι απλά ένα στοχαστικό παίγνιο με ένα παίκτη, ενώ ένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο είναι ένα στοχαστικό παίγνιο στο οποίο υπάρχει μόνο μία κατάσταση.

Στη θεωρία παιγνίων ένα στοχαστικό παίγνιο είναι ένα δυναμικό παίγνιο με πιθανολογικές μεταβάσεις, το οποίο παίζεται από έναν ή περισσότερους παίκτες. Το παίγνιο παίζεται σε μία ακολουθία σταδίων. Στην αρχή κάθε σταδίου το παίγνιο βρίσκεται σε μία κατάσταση όπου, οι παίκτες επιλέγουν ενέργειες και κάθε παίκτης λαμβάνει μία απολαβή η οποία εξαρτάται από την παρούσα κατάσταση και τις επιλεγμένες ενέργειες. Το παίγνιο έπειτα μεταφέρεται σε μία νέα τυχαία κατάσταση, της οποίας η πιθανοτική κατανομή εξαρτάται από την προηγούμενη κατάσταση και τις επιλεγμένες ενέργειες των παικτών. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται στη νέα κατάσταση και το παίγνιο συνεχίζεται για πεπερασμένο ή άπειρο αριθμό σταδίων.

Ορισμός 1.28: ***Στοχαστικά παίγνια.*** *Ένα στοχαστικό παίγνιο (ή παίγνιο Markov) είναι ένα σύνολο* Q, N, A, P, R *, όπου:*

- Q *είναι ένα πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων.*
- N *είναι ένα πεπερασμένο σύνολο* n *παικτών.*
- $A = A_1 \times \cdots \times A_n$*, όπου* A_i *είναι ένα πεπερασμένο σύνολο ενεργειών διαθέσιμων στον παίκτη* i.
- $P : Q \times A \times Q \mapsto \; 0,1$ *είναι η συνάρτηση πιθανότητας μετάβασης. Το* $P \; q, a, q$ *είναι η πιθανότητα της μετάβασης από την κατάσταση* s *στην κατάσταση* q*, έπειτα από το πεδίο ενεργειών* a.
- $R = r_1, \cdots, r_n$ *όπου το* $r_i : Q \times A \mapsto \mathbb{R}$ *είναι μία συνάρτηση απολαβών πραγματικών τιμών του παίκτη* i.

Στον παραπάνω ορισμό έχουμε ορίσει την απολαβή κάθε παίκτη για μία κατάσταση αλλά δεν ορίσαμε κάποια συνολική απολαβή. Η λύση δίνεται με τις μεθόδους της *μέσης* και της *προεξοφλημένης αμοιβής* που συναντήσαμε στα απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια.

1.6.1 Στρατηγικές και Ισορροπία

Τώρα θα ορίσουμε των στρατηγικό χώρο ενός παίκτη. Έστω $h_t = \; q^0, a^0, q^1, a^1, \ldots, a^{t-1}, q^t$ ένα ιστορικό t σταδίων ενός στοχαστικού παιγνίου και H_t το σύνολο όλων των πιθανών ιστορικών. Το σύνολο των αιτιοκρατικών στρατηγικών είναι το Καρτεσιανό γινόμενο $\;_{t,H_t} A_i$, το οποίο απαιτεί μία επιλογή για κάθε πιθανό ιστορικό, σε κάθε χρονικό σημείο. Η στρατηγική ενός παίκτη μπορεί να είναι κάθε συγκερασμός των αιτιοκρατικών στρατηγικών.

Η συμπεριφορική κατηγορία στρατηγικών αφορά την περίπτωση στην οποία πραγματοποιείται συγκερασμός των στρατηγικών σε κάθε ιστορικό ανεξάρτητα.

Ορισμός 1.29: ***Συμπεριφορική Στρατηγική.*** *Μία συμπεριφορική στρατηγική* $s_i \; h_t, a_{i_j}$ *μας επιστρέφει την πιθανότητα να παίξουμε την ενέργεια* a_i *για το ιστορικό* h_t.

Μία στρατηγική Markov περιορίζει μία συμπεριφορική στρατηγική στο σημείο, όπου για ένα χρονικό σημείο t η κατανομή επί των ενεργειών εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα κατάσταση.

Ορισμός 1.30: ***Στρατηγική Markov.*** *Μία στρατηγική Markov* s_i *είναι μία συμπεριφορική στρατηγική στην οποία* $s_i \; h_t, a_{i_j} \; = s_i \; h'_t, a_{i_j}$ *εάν* $q_t = q'_t$*, όπου* q_t *και* q'_t *είναι οι τελικές καταστάσεις των* h_t *και* h'_t*, αντίστοιχα.*

Ο τελικός περιορισμός αφορά την απομάκρυνση της πιθανής εξάρτησης από τον χρόνο t.

Ορισμός 1.31: ***Στάσιμη Στρατηγική.*** *Μία στάσιμη στρατηγική s_i είναι μία στρατηγική Markov στην οποία $s_i(h_{t1}, a_{i_j}) = s_i(h'_{t2}, a_{i_j})$ εάν $q_{t1} = q'_{t2}$, όπου q_{t1} και q'_{t2} είναι οι τελικές καταστάσεις των h_{t1} και h'_{t2}, αντίστοιχα.*

Τέλος θα δώσουμε μία λύση για την εύκολη περίπτωση όπου έχουμε μειωμένη αμοιβή. Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι υπάρχει πάντα μία ισορροπία Nash για ένα στοχαστικό παίγνιο.

Υπάρχει όμως μία ισχυρότερη συνθήκη από την ισορροπία Nash, ανάλογη της τέλειας ισορροπίας υποπαιγνίου, η *τέλεια ισορροπία Markov*.

Ορισμός 1.32: ***Τέλεια ισορροπία Markov.*** *Ένα στρατηγικό πεδίο καλείται τέλεια ισορροπία Markov, εάν αποτελείται μόνο από στρατηγικές Markov και είναι ισορροπία Nash ανεξάρτητα της αρχικής κατάστασης.*

Θεώρημα 1.7: *Κάθε στοχαστικό παίγνιο n − παικτών, γενικού αθροίσματος, μειωμένης αμοιβής, έχει μία τέλεια ισορροπία Markov.*

1.7 Παίγνια Ελλιπούς Πληροφορίας

Όλα τα παίγνια τα οποία μελετήσαμε έως τώρα, ακόμα και στα παίγνια ατελούς πληροφόρησης, οι παίκτες γνώριζαν τον τρόπο με τον οποίο παιζόταν το παίγνιο. Συγκεκριμένα ήταν γνωστός ο αριθμός των παικτών, οι διαθέσιμες ενέργειες τους και οι αντίστοιχες απολαβές κάθε συνόλου ενεργειών. Αντίθετα στα παίγνια ελλιπούς πληροφόρησης ή Bayesian παίγνια οι παίκτες έχουν αμφιβολίες για το παίγνιο στο οποίο συμμετέχουν. Η αμφιβολία αυτή αναπαριστάται ως μία πιθανοτική κατανομή επί του συνόλου των πιθανών παιγνίων.

1.7.1 Αναπαράσταση των Bayesian Παιγνίων

Για την αναπαράσταση των Bayesian παιγνίων υπάρχουν διάφοροι τρόποι. Παρακάτω θα αναφέρουμε δύο ισοδύναμους τρόπους αναπαράστασης τέτοιων παιγνίων, οι οποίοι χρησιμοποιούνται ανάλογα με το προς μελέτη παίγνιο.

Ο πρώτος ορισμός βασίζεται στα *σύνολα πληροφορίας*. Με τον ορισμό αυτό, ένα Bayesian παίγνιο αποτελείται από ένα σύνολο παιγνίων τα οποία διαφέρουν μόνο στις απολαβές τους. Επίσης υπάρχει μία κοινή αρχική κατανομή η οποία ορίζεται καθώς και μία διαμερισματική δομή επί των παιγνίων για κάθε παίκτη.

Ορισμός 1.33. ***Bayesian παίγνιο: Σύνολα πληροφοριών.*** *Ένα Bayesian παίγνιο είναι ένα σύνολο (N, G, P, I) όπου:*

- *N είναι ένα σύνολο παικτών.*

- G *είναι ένα σύνολο παιγνίων με* N *παίκτες το καθένα, τέτοιο ώστε εάν* $g, g' \in G$ *τότε για κάθε παίκτη* $i \in N$ *ο χώρος στρατηγικής στο* g *είναι ταυτόσημος με το χώρο στρατηγικής στο* g'.
- $P \in \Pi(G)$ *είναι μία κοινή αρχική κατανομή μεταξύ των παιγνίων, όπου* $\Pi(G)$ *είναι το σύνολο των κατανομών πιθανοτήτων στο* G.
- $I = (I_1, \cdots, I_N)$ *είναι ένα σύνολο καταμερισμών του* G, *ένας για κάθε παίκτη.*

Ο δεύτερος ορισμός χρησιμοποιεί την έννοια του *επιστημονικού τύπου*, ως ένα τρόπο ορισμού της αβεβαιότητας, μόνο για τη συνάρτηση ευχαρίστησης του παιγνίου. Η υπόθεση αυτή σημαίνει ότι τα χαρακτηριστικά του παιγνίου τα οποία ορίζονται, είναι γνωστά μεταξύ των παικτών και κάθε παίκτης γνωρίζει τον δικό του επιστημονικό τύπο.

Ορισμός 1.34. ***Bayesian παίγνιο: Επιστημονικοί Τύποι.*** *Ένα Bayesian παίγνιο είναι ένα σύνολο* (N, G, P, I) *όπου:*

- N *είναι ένα σύνολο παικτών.*
- $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ *όπου* A_i *είναι το σύνολο των διαθέσιμων ενεργειών του παίκτη* i.
- $\Theta = \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_n$ *όπου* Θ_i *είναι ο χώρος των επιστημονικών τύπων του παίκτη* i.
- $p : \Theta \mapsto [0,1]$ *είναι μία κοινή αρχική κατανομή μεταξύ των επιστημονικών τύπων.*
- $u = (u_1, \cdots, u_n)$ *όπου* $u_i : A \times \Theta \mapsto \mathbb{R}$ *είναι η συνάρτηση ευχαρίστησης του παίκτη* i.

1.7.2 Στρατηγικές και Ισορροπία

Για τον ορισμό των στρατηγικών θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό των επιστημονικών τύπων μιας και χρησιμοποιείται ευρύτερα. Στα Bayesian παίγνια υπάρχουν τρεις όροι για την αναμενόμενη ευχαρίστηση, ο ex post, ο ex interim και ο ex ante. Ο πρώτος όρος υπολογίζεται βασιζόμενος στους πραγματικούς τύπους όλων των παικτών, ο δεύτερος λαμβάνει υπόψη του την περίπτωση όπου ένας παίκτης γνωρίζει τον δικό του τύπο αλλά όχι και των άλλων παικτών, ενώ στον τρίτο όρο ο παίκτης δεν γνωρίζει κανενός τον τύπο.

Ορισμός 1.35: ***Ex post αναμενόμενη ευχαρίστηση.*** *Η ex post αναμενόμενη ευχαρίστηση του παίκτη* i *σε ένα Bayesian παίγνιο* (N, A, Θ, p, u), *στο οποίο οι στρατηγικές των παικτών δίνονται από το* s *και οι τύποι από το* θ, *ορίζεται ως:*

$$EU_i(s, \theta) = \sum_{a \in A} \left(\prod_{j \in N} s_j(a_j | \theta_j) \right) u_i(a, \theta)$$

Ορισμός 1.36: ***Ex interim αναμενόμενη ευχαρίστηση.*** *Η ex interim αναμενόμενη ευχαρίστηση του παίκτη i σε ένα Bayesian παίγνιο (N, A, Θ, p, u), στο οποίο οι στρατηγικές των παικτών δίνονται από το μεικτό στρατηγικό πεδίο s και οι τύποι από το θ_i, ορίζεται ως:*

$$EU_i(s, \theta_i) = \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} p(\theta_{-i} | \theta_i) \sum_{a \in A} \left(\prod_{j \in N} s_j(a_j | \theta_j) \right) u_i(a, \theta_{-i}, \theta_i)$$

Ορισμός 1.37: ***Ex ante αναμενόμενη ευχαρίστηση.*** *Η ex ante αναμενόμενη ευχαρίστηση του παίκτη i σε ένα Bayesian παίγνιο (N, A, Θ, p, u), στο οποίο οι στρατηγικές των παικτών δίνονται από το μεικτό στρατηγικό πεδίο s και οι τύποι από το θ_i, ορίζεται ως:*

$$EU_i(s) = \sum_{\theta \in \Theta} p(\theta) \sum_{a \in A} \left(\prod_{j \in N} s_j(a_j | \theta_j) \right) u_i(a, \theta)$$

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την καλύτερη απόκριση.

Ορισμός 1.38: ***Καλύτερη απόκριση σε Bayesian παίγνιο.*** *Το σύνολο των καλύτερων αποκρίσεων του παίκτη i σε ένα σύνολο μικτών στρατηγικών s_{-i} δίνεται από το*

$$BR_i(s_{-i}) = \arg\max_{s_\iota \in S_i} EU_i(s_\iota, s_{-i})$$

Ορίζοντας την καλύτερη απόκριση, μπορούμε έπειτα να ορίσουμε την Bayes – Nash ισορροπία. Η συγκεκριμένη ισορροπία ορίζεται με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο είχαμε ορίσει την ισορροπία Nash, μόνο που πλέον ο ορισμός βασίζεται στις αρχές των Bayesian παιγνίων.

Ορισμός 1.39: ***Bayes – Nash ισορροπία.*** *Μία ισορροπία Bayes – Nash είναι ένα σύνολο μεικτών στρατηγικών s, το οποίο ικανοποιεί $\forall i \; s_i \in BR_i(s_{-i})$.*

1.8 Συνεργατική Θεωρία Παιγνίων

Μέχρι στιγμής έχουμε επικεντρωθεί στον επικρατέστερο κλάδο της Θεωρίας Παιγνίων, τα μη-συνεργατικά παίγνια. Παρακάτω θα αναφερθούμε στα *συμμαχικά (coalitional) ή συνεργατικά (cooperative) παίγνια*. Η συνεργατική έννοια των παιγνίων μπορεί να παρερμηνευθεί εύκολα. Με τον όρο αυτό εννοούμε ότι η βασική μοντελοποίηση του παιγνίου έχει ως μονάδα ένα σύνολο παικτών και όχι κάθε παίκτη ξεχωριστά. Δεδομένου ενός συνόλου παικτών, ένα συνεργατικό παίγνιο ορίζει την ευχαρίστηση που μπορούν να πετύχουν οι παίκτες μιας συμμαχίας για αυτή. Δεν μας ενδιαφέρει ο τρόπος που επιλέγουν στρατηγικές μέσα στη συμμαχία, πως συντονίζονται ή άλλες τέτοιες λεπτομέρειες· απλά λαμβάνουμε την απολαβή κάθε συμμαχίας.

Η συνεργατική θεωρία παιγνίων προσπαθεί να λύσει δύο βασικά ερωτήματα:

1. Ποια συμμαχία μπορεί να σχηματιστεί;
2. Πώς θα μοιράσει η κάθε ομάδα την απολαβή της, μεταξύ των μελών της;

Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι συχνά *«η μέγιστη συμμαχία» ("the grand coalition")*, δηλαδή η συμμαχία η οποία σχηματίζεται από τους παίκτες ενός συνόλου N. Βέβαια για να επιτευχθεί αυτό θα πρέπει παράλληλα να δώσουμε την κατάλληλη απάντηση και στην δεύτερη ερώτηση.

1.8.1 Συνεργατικά Παίγνια με Μεταφερόμενη Ευχαρίστηση

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να κάνουμε την υπόθεση ότι η ευχαρίστηση είναι μεταφερόμενη, δηλαδή οι απολαβές μίας συμμαχίας μπορούν ελεύθερα να αναδιανεμηθούν στα μέλη της. Αυτή η υπόθεση ικανοποιείται όταν υπάρχει ένα κοινό μέσο πληρωμής των παικτών μέσα στο παίγνιο και μας επιτρέπει να αναθέτουμε σε κάθε συμμαχία παικτών μία τιμή ως απολαβή. Στη συνέχεια ορίζουμε ένα συνεργατικό παίγνιο με μεταφερόμενη ευχαρίστηση[3].

Ορισμός 1.40: ***Συνεργατικό Παίγνιο με Μεταφερόμενη Ευχαρίστηση.*** *Ένα συνεργατικό παίγνιο με μεταφερόμενη ευχαρίστηση είναι ένα ζεύγος* (N, v) *όπου*

- N *ένα ορισμένο σύνολο παικτών, με δείκτη* i.
- *Η* $v: 2^N \mapsto \mathbb{R}$ *συσχετίζει με κάθε συμμαχία* $S \subseteq N$ *μία απολαβή πραγματικών τιμών* $v(S)$, *την οποία μπορούν να διανέμουν μεταξύ τους τα μέλη της συμμαχίας. Η συνάρτηση v καλείται επίσης χαρακτηριστική συνάρτηση και η απολαβή μίας συμμαχίας, ως η αξία της. Θεωρούμε ότι* $v(\emptyset) = 0$.

Παίγνιο Ψηφοφορίας

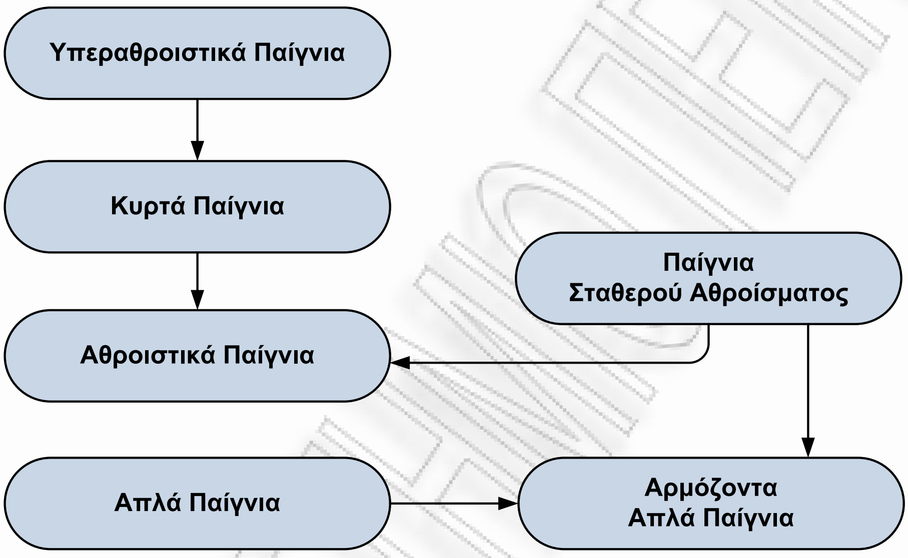
Ένα κλασσικό παίγνιο το οποίο χρησιμοποιείται για τη μελέτη της συνεργατικής θεωρίας παιγνίων είναι αυτό της ψηφοφορίας. Σε ένα Κοινοβούλιο υπάρχουν τέσσερις πολιτικές παρατάξεις, A,B,C, D και E, οι οποίες έχουν 140, 111, 21, 15 και 13 έδρες αντίστοιχα. Πρόκειται να ψηφίσουν ένα νομοσχέδιο προϋπολογισμού €100 εκατομμυρίων καθώς και το ποσοστό αυτού του ποσού το οποίο θα διαχειρίζεται κάθε πολιτική παράταξη. Για να εγκριθεί το νομοσχέδιο πρέπει να υπάρχει πλειοψηφία, δηλαδή 151 ψήφοι υπέρ, διαφορετικά καμία από τις παρατάξεις δεν θα λάβει κάποιο ποσό για να διαχειριστεί.

[3] Στην παρούσα εργασία, για την παρουσίαση των συνεργατικών παιγνίων, θα ασχοληθούμε μόνο με παίγνια μεταφερόμενης ευχαρίστησης, τα οποία τα συναντούμε και πιο συχνά.

Γενικά σε ένα παίγνιο ψηφοφορίας, υπάρχει ένα σύνολο παικτών N και ένα σύνολο συμμαχιών $W \subseteq 2^N$ οι οποίες είναι οι νικηφόρες συμμαχίες, δηλαδή οι συμμαχίες οι οποίες είναι θετικές για την ψήφιση του νομοσχεδίου εάν όλα τα μέλη της αποφασίσουν να κάνουν το ίδιο. Σε κάθε συμμαχία $S \in W$, αναθέτουμε την τιμή $v(S) = 1$ και στις υπόλοιπες $v(S) = 0$.

1.8.2 Κατηγορίες Συνεργατικών Παιγνίων

Τα συνεργατικά παίγνια μπορούν να χωριστούν σε κάποιες κατηγορίες, οι οποίες έχουν ενδιαφέρουσες εφαρμογές και ιδιότητες. Στην Εικόνα 1.5 βλέπουμε την κατηγοριοποίηση αυτή.



Εικόνα 1.5: *Κατηγορίες Συνεργατικών Παιγνίων*

Παρακάτω ορίζουμε την έννοια του *υπεραθροιστικού παιγνίου (superadditive game)*.

Ορισμός 1.41: *Υπεραθροιστικό Παίγνιο.* *Ένα παίγνιο $G = (N, v)$ είναι υπεραθροιστικό εάν, για όλα τα $S, T \subset N$ εάν $S \cap T = \emptyset$, τότε $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.*

Η υπεραθροιστικότητα ισχύει όταν οι συμμαχίες μπορούν να συνυπάρξουν χωρίς να παρεμβάλει η μία την άλλη, κατά συνέπεια οι απολαβές δύο συμμαχιών δεν θα είναι μικρότερες από το άθροισμα των μεμονωμένων απολαβών τους. Η υπεραθροιστικότητα υποδηλώνει ότι η απολαβή του συνόλου των παικτών (μέγιστη συμμαχία) δεν θα είναι μικρότερη από το άθροισμα των απολαβών ενός μη επικαλυπτόμενου συνόλου συμμαχιών. Με άλλα λόγια, η μέγιστη συμμαχία θα έχει την μεγαλύτερη απολαβή μεταξύ των συμμαχιών. Το παίγνιο της ψηφοφορίας είναι ένα υπεραθροιστικό παίγνιο.

Όταν οι συμμαχίες δεν μπορούν ποτέ να επηρεάσουν η μία την άλλη, είτε θετικά είτε αρνητικά, τότε έχουμε *αθροιστικά παίγνια (additive games)*.

Ορισμός 1.42: ***Αθροιστικά Παίγνια.*** *Ένα παίγνιο* $G = \ N, v$ *είναι αθροιστικό εάν, για όλα τα* $S, T \subset N$ *εάν* $S \cap T = \emptyset$*, τότε* $v \ S \cup T \ = v \ S \ + v \ T$ *.*

Μία άλλη σχετική κατηγορία παιγνίων είναι τα *παίγνια σταθερού αθροίσματος* τα οποία μελετήσαμε στην Ενότητα 1.2.3 σε παίγνια όμως μη-συνεργατικά.

Ορισμός 1.43: ***Παίγνια Σταθερού Αθροίσματος.*** *Ένα παίγνιο* $G = \ N, v$ *είναι σταθερού αθροίσματος, εάν για όλα τα* $S \subset N, \ v \ S \ + v \ N \backslash S \ = v \ N$ *.*

Κάθε αθροιστικό παίγνιο είναι απαραιτήτως και σταθερού αθροίσματος, αλλά δεν ισχύει το αντίθετο. Όπως και στη μη-συνεργατική θεωρία παιγνίων τα σημαντικότερα παίγνια σταθερού αθροίσματος είναι τα μηδενικού αθροίσματος.

Μία άλλη υποκατηγορία των υπεραθροιστικών παιγνίων είναι τα *κυρτά παίγνια (convex games)*.

Ορισμός 1.44: ***Κυρτά Παίγνια.*** *Ένα παίγνιο* $G = \ N, v$ *είναι κυρτό, εάν για όλα τα* $S, T \subset N, \ v \ S \cup T \ \geq v \ S \ + v \ T \ - v \ S \cap T$ *.*

Η κυρτότητα είναι πιο ισχυρή συνθήκη από την υπεραθροιστικότητα. Τα κυρτά παίγνια αν και είναι μια πιο ειδική κατηγορία παιγνίων με καλές ιδιότητες, τα οποία δεν τα συναντούμε και τόσο σπάνια στην πράξη.

Τέλος, αναφέρουμε μία κατηγορία συνεργατικών παιγνίων με περιορισμούς στις τιμές των απολαβών.

Ορισμός **1.45:** ***Απλό Παίγνιο.*** *Ένα παίγνιο* $G = \ N, v$ *είναι απλό, εάν για όλα τα* $S \subset N, \ v \ S \ \in \ 0{,}1$ *.*

Τα απλά παίγνια είναι χρήσιμα για την μοντελοποίηση καταστάσεων όπως της ψηφοφορίας. Όταν ένα παίγνιο εκτός από απλό είναι και σταθερού αθροίσματος, καλείται *αρμόζων απλό παίγνιο (proper simple game)*.

1.8.3 Ανάλυση των Συνεργατικών Παιγνίων

Όπως είπαμε το κεντρικό ζήτημα στη συνεργατική θεωρία παιγνίων, είναι ο διαμοιρασμός της απολαβής της μέγιστης συμμαχίας, μεταξύ των παικτών της. Το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στη μέγιστη συμμαχία διότι, τα περισσότερα παίγνια είναι υπεραθροιστικά και η μέγιστη συμμαχία είναι εκείνη η οποία πετυχαίνει τη μέγιστη απολαβή· επιπλέον σε κάποια παίγνια δεν υπάρχει άλλη επιλογή πέραν της δημιουργίας μέγιστης συμμαχίας. Βέβαια ο προσδιορισμός της συμμαχίας δεν μας δίνει και τη λύση στο πρόβλημα διαμοιρασμού της απολαβής.

Για να βρούμε κάποιες λύσεις στα παραπάνω θέματα, ορίζουμε πρώτα κάποια στοιχεία.

- Έστω $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{2^N} \mapsto \mathbb{R}^N$ η αντιστοίχιση ενός συνεργατικού παιγνίου N, v σε ένα διάνυσμα N πραγματικών τιμών και ψ_i N, v οι τιμές αυτές με δείκτη i.
- Συμβολίζουμε αυτό το διάνυσμα N πραγματικών τιμών ως $x \in \mathbb{R}^N$. Κάθε x_i συμβολίζει το μερίδιο, από την απολαβή της μέγιστης συμμαχίας, που λαμβάνει ο κάθε παίκτης $i \in N$.

Παραθέτουμε κάποιους χρήσιμους ορισμούς για την ανάλυση των παιγνίων.

Ορισμός 1.46: ***Εφικτή Απολαβή.*** *Σε ένα συνεργατικό παίγνιο* N, v *το πεδίο των εφικτών απολαβών ορίζεται ως* $x \in \mathbb{R}^N \mid \ _{i \in N} x_i \leq v \ N$.

Με άλλα λόγια το πεδίο των εφικτών απολαβών περιέχει όλα τα διανύσματα των απολαβών, τα οποία δεν διανέμουν μεγαλύτερη απολαβή από την αξία της μέγιστης συμμαχίας.

Ορισμός 1.47: ***Προ-απόδοση.*** *Σε ένα συνεργατικό παίγνιο* N, v , *το πεδίο προ-απόδοσης* $\mathcal{P}$, *ορίζεται ως* $x \in \mathbb{R}^N \mid \ _{i \in N} x_i = v \ N$.

Το πεδίο προ-απόδοσης είναι ένα αποδοτικό πεδίο εφικτών απολαβών, δηλαδή διανέμει την πλήρη αξία της μέγιστης σημασίας.

Ορισμός 1.48: ***Απόδοση.*** *Σε ένα συνεργατικό παίγνιο* N, v , *το πεδίο απόδοσης,* $\mathcal{J}$, *ορίζεται ως* $x \in \mathcal{P} \mid \forall i \in N, x_i \geq v \ i$.

Η απόδοση προϋποθέτει ότι σε κάθε παίκτη έχει εγγυηθεί μία απολαβή, τουλάχιστον ίση με την απολαβή που μπορεί να πετύχει ο σχηματισμός μίας συμμαχίας.

Αυτό που θα πρέπει επίσης να μας ενδιαφέρει, είναι η καταμέριση των απολαβών να είναι δίκαιη. Υπάρχουν κάποια αξιώματα, τα οποία μας οδηγούν στο δίκαιο καταμερισμό των απολαβών.

Πρώτον, οι παίκτες i και j είναι εναλλάξιμοι εάν συνεισφέρουν πάντα το ίδιο ποσό σε κάθε συμμαχία του άλλου παίκτη. Δηλαδή για όλες τις συμμαχίες S οι οποίες δεν περιέχουν τον i και τον j παίκτη, ισχύει ότι $v \ S \cup \ i \ = v \ S \cup \ j$. Το *αξίωμα της συμμετρίας* δηλώνει ότι τέτοιοι παίκτες θα πρέπει να λαμβάνουν τις ίδιες απολαβές.

Αξίωμα 1.1: ***Συμμετρία.*** *Για κάθε* v, *εάν* i *και* j *εναλλάξιμα τότε* $\psi_i \ N, v = \psi_j \ N, v$.

Επιπλέον λέμε ότι ένας παίκτης i είναι ψεύτικος, εάν το ποσό το οποίο συνεισφέρει σε κάθε συμμαχία, είναι ακριβώς το ίδιο με το ποσό που μπορεί να λάβει ο i μόνος του. Δηλαδή για όλες τις συμμαχίες S, τέτοιες ώστε $i \notin S$, ισχύει $v \ S \cup \ i \ -$

$v(S) = v(\{i\})$. Το *αξίωμα του ψεύτικου παίκτη* δηλώνει, ότι οι ψεύτικοι παίκτες θα έπρεπε να λαμβάνουν απολαβές ίσες με το ποσό που πετυχαίνουν μόνοι τους.

Αξίωμα 1.2. ***Ψεύτικος Παίκτης.*** *Για κάθε v, εάν ο i είναι ψεύτικος παίκτης τότε $\psi_i(N,v) = v(\{i\})$.*

Τέλος, θεωρούμε ότι έχουμε δύο διαφορετικά συνεργατικά παίγνια, τα οποία περιλαμβάνουν το ίδιο σύνολο παικτών και ορίζονται από τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις v_1 και v_2. Το αξίωμα της αθροιστικότητας δηλώνει ότι εάν μοντελοποιήσουμε τα παίγνια αυτά ως ένα παίγνιο στο οποίο κάθε συμμαχία S πετυχαίνει απολαβή $v_1(S) + v_2(S)$· οι απολαβές των παικτών σε κάθε συμμαχία, θα πρέπει να είναι το άθροισμα των απολαβών που θα λάμβαναν για την συγκεκριμένη συμμαχία, εάν είχαμε δύο παίγνια.

Αξίωμα 1.3. ***Αθροιστικότητα.*** *Για κάθε δύο v_1 και v_2, ισχύει για κάθε παίκτη i ότι $\psi_i(N, v_1 + v_2) = \psi_i(N, v_1) + \psi_i(N, v_2)$, όπου το παίγνιο $(N, v_1 + v_2)$ ορίζεται από το $(v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$, για κάθε συμμαχία S.*

1.8.4 Η Τιμή Shapley

Αποδεχόμενοι τα παραπάνω τρία αξιώματα, οδηγούμαστε σε ένα θετικό αποτέλεσμα το οποίο μας υποδεικνύει ότι υπάρχει ακριβώς μία προ-απόδοση η οποία τα ικανοποιεί. Επίσης η προ-απόδοση υποδηλώνει, όπως έχουμε πει, έναν εφικτό και αποδοτικό διαμοιρασμό των απολαβών.

Θεώρημα 1.8: *Σε ένα συνεργατικό παίγνιο (N,v) μ υπάρχει μία προ-απόδοση $\varphi(N,v) = \varphi(N,v)$ η οποία ικανοποιεί τα αξιώματα της Συμμετρίας, του Ψεύτικου Παίκτη και της Αθροιστικότητας.*

Για την εύρεση όμως αυτού του διαμοιρασμού της απολαβής $\varphi(N,v)$, εισάγουμε την *τιμή Shapley* η οποία ορίζεται ως:

Ορισμός 1.49: ***Τιμή Shapley.*** *Σε ένα συνεργατικό παίγνιο (N,v), η τιμή Shapley, ενός παίκτη i δίνεται από το:*

$$\varphi_i(N,v) = \frac{1}{N!} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} |S|!\,(|N| - |S| - 1)!\,\big(v(S \cup \{i\}) - v(S)\big)$$

Η τιμή αυτή μπορεί να εκφραστεί, ως η αποτύπωση της μέσης οριακής συνεισφοράς ενός παίκτη i· όπου υπολογίζουμε κατά μέσο όρο όλες τις διαφορετικές ακολουθίες, ανάλογα σε ποια από τις κενές συμμαχίες μπορεί να σχηματιστεί η μέγιστη συμμαχία ([7]).

1.8.5 Ο Πυρήνας

Η τιμή Shapley ορίζει ένα δίκαιο τρόπο, για τον διαμοιρασμό της απολαβής της μέγιστης συμμαχίας στα μέλη της. Παρόλα αυτά δεν λαμβάνει υπόψη της θέματα σταθερότητας. Επίσης υπάρχει περίπτωση κάποιοι παίκτες να μην επιθυμούν να σχηματίσουν τη μέγιστη συμμαχία και να μοιράσουν την απολαβή με τον τρόπο αυτό, αλλά να προτιμήσουν το σχηματισμό μικρότερων συμμαχιών.

Συνεπώς αναζητούμε μία λύση στον τρόπο κατανομής των απολαβών, ώστε οι παίκτες να επιθυμούν να σχηματίσουν τη μέγιστη συμμαχία. Την λύση στο παραπάνω πρόβλημα έρχεται να μας δώσει *ο πυρήνας (the core)*, εάν ο τρόπος κατανομής των απολαβών βρίσκεται στο σύνολο του πυρήνα.

Ορισμός 1.50. ***Πυρήνας.*** *Ένα διάνυσμα απολαβών x βρίσκεται στον πυρήνα ενός συνεργατικού παιγνίου (N, v) εάν και μόνο εάν:*

$$\forall S \subseteq N, \quad \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

Ο πυρήνας είναι ένας δείκτης σταθερότητας για τα συνεργατικά παίγνια, ανάλογος με την ισορροπία Nash για τα μη-συνεργατικά παίγνια. Αποτελεί μία καλή λύση των συνεργατικών παιγνίων, αλλά όπως και με την ισορροπία Nash πρέπει να αναζητηθούν οι συνθήκες που θα δίνεται λύση μέσω του πυρήνα.

Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες ο πυρήνας είναι κενός ή δεν είναι μοναδικός. Τα παρακάτω θεωρήματα μπορούν να μας βοηθήσουν στην αναγνώριση περιπτώσεων συνεργατικών παιγνίων, τα οποία έχουν κενό πυρήνα.

Θεώρημα 1.9: *Κάθε παίγνιο σταθερού αθροίσματος το οποίο δεν είναι αθροιστικό έχει κενό πυρήνα.*

Ονομάζουμε ένα παίκτη i, *παίκτη βέτο* εάν $v(N \setminus \{i\}) = 0$.

Θεώρημα 1.10: *Σε ένα απλό παίγνιο ο πυρήνας είναι κενός εάν δεν υπάρχει παίκτης βέτο. Εάν υπάρχουν παίκτες βέτο, ο πυρήνας αποτελείται από όλα τα διανύσματα απολαβών στα οποία οι υπόλοιποι παίκτες λαμβάνουν 0.*

Θεώρημα 1.11: *Κάθε κυρτό παίγνιο έχει μη μηδενικό πυρήνα.*

Τέλος, μία άλλη σχέση που πρέπει να αναφέρουμε είναι μεταξύ του πυρήνα και της τιμής Shapley. Ακόμα και αν γνωρίζουμε ότι ο πυρήνας δεν είναι κενός, δεν είναι βέβαιο ότι η τιμή Shapley θα ανήκει σε αυτόν. Γνωρίζοντας ότι τα κυρτά παίγνια δεν έχουν ποτέ κενό πυρήνα, το παρακάτω θεώρημα δηλώνει επίσης ότι η τιμή Shapley σε κυρτά παίγνια βρίσκεται στον πυρήνα, τονίζοντας τη σημαντικότητα των παιγνίων αυτών.

Θεώρημα 1.12: *Σε κάθε κυρτό παίγνιο, η τιμή Shapley ανήκει στον πυρήνα.*

Κεφάλαιο 2:
Έλεγχος Ισχύος στις Ασύρματες Επικοινωνίες

Ο έλεγχος ισχύος στα ασύρματα δίκτυα, αποτελεί αντικείμενο συστηματικής μελέτης από το 1970. Τα τελευταία δεκαπέντε χρόνια, λόγο της μεγάλης ανάπτυξης των δικτύων κινητής επικοινωνίας, η εκτεταμένη επιστημονική έρευνα για το αντικείμενο του ελέγχου ισχύος, επέφερε πολλά αποτελέσματα σε επίπεδο μοντελοποίησης, ανάλυσης και σχεδιασμού.

2.1 Εισαγωγή

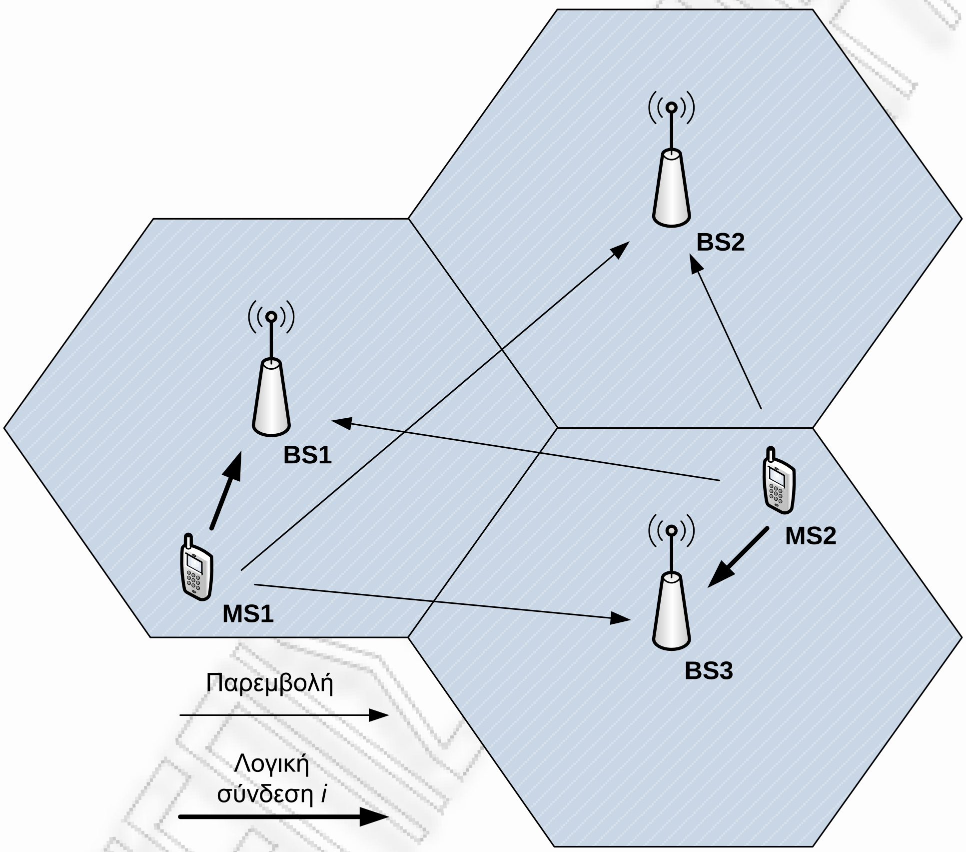
Ο έλεγχος ισχύος βελτιώνει τα ποιοτικά χαρακτηριστικά ενός δικτύου επικοινωνιών. Στα κινητά δίκτυα επικοινωνιών, ο έλεγχος ισχύος έχει διάφορες χρήσεις:

- ***Διαχείριση των παρεμβολών:*** Λόγω του τρόπου διάδοσης των ασύρματων επικοινωνιών, τα σήματα δημιουργούν μεταξύ τους παρεμβολές. Σε ένα σύστημα CDMA, στο οποίο η ορθογωνιότητα του σήματος των χρηστών δεν εξασφαλίζεται, ο έλεγχος ισχύος κρίνεται απαραίτητος εξασφαλίζοντας αποδοτικότερη χρήση του διαθέσιμου φάσματος και επιθυμητή ποιότητα υπηρεσιών στους χρήστες.
- ***Διαχείριση ενέργειας:*** Σε ένα σύστημα κινητών επικοινωνιών, λόγω της περιορισμένης διαθέσιμης ισχύος της μπαταρίας των κινητών σταθμών ή της μικρότερης κατανάλωσης των σταθμών βάσης, ο έλεγχος ισχύος βοηθάει στην συνολική μείωση της κατανάλωσης του συστήματος.
- ***Διαχείριση συνδέσεων:*** Λόγω της αβεβαιότητας και της χρονικής μεταβολής των ασύρματων καναλιών, ακόμα και σε ένα περιβάλλον με απουσία άλλων χρηστών, ο δέκτης χρειάζεται να διατηρεί ένα ελάχιστο επίπεδο λαμβανόμενου σήματος, έτσι ώστε να διατηρηθεί η σύνδεση με τον σταθμό βάσης και να εκτιμηθεί η κατάσταση του καναλιού. Ο έλεγχος ισχύος βοηθάει στην διατήρηση της σύνδεσης για μία τέτοια δεδομένη κατάσταση.

Σε πολλά μοντέλα ελέγχου ισχύος, η περίπτωση της κατανομής ισχύος της άνω ζεύξης παρουσιάζει μεγαλύτερη δυσκολία επίλυσης. Η κατανάλωση ισχύος του σταθμού βάσης, είναι μικρότερης σημασίας σε σχέση με την κατανάλωση ισχύος των κινητών σταθμών. Επίσης η ενδοκυψελική παρεμβολή της κάτω ζεύξης είναι πολύ μικρότερη συγκριτικά με την άνω ζεύξη, επειδή η διατήρηση της ορθογωνιότητας σε όλους τους διαμοιραζόμενους πόρους, του συστήματος των κινητών σταθμών μίας κυψέλης στην κάτω ζεύξη, πετυχαίνεται εύκολα από τον σταθμό βάσης. Τέλος, οι θέσεις των σταθμών βάσης είναι σταθερές και η ενδοκυψελική παρεμβολή δεν παρουσιάζει απότομες μεταβολές.

2.1.1 Περιγραφή του Συστήματος

Θεωρούμε ένα γενικό δίκτυο πολλών κυψελών, όπου N πλήθος κινητών σταθμών πραγματοποιούν συνδέσεις με K σταθμούς βάσης (Εικόνα 2.1). Υποθέτουμε ότι κάθε κινητός σταθμός, εξυπηρετείται από έναν από τους υπάρχοντες σταθμούς βάσης και συνεπώς πραγματοποιούνται N λογικές συνδέσεις. Με σ_i συμβολίζουμε τον σταθμό βάσης για τη σύνδεση i.



Εικόνα 2.1: *Παράδειγμα ενός δικτύου πολλών κυψελών στην άνω ζεύξη.*

Για ένα σύστημα CDMA συμβολίζουμε με $C_i = \ j,\ j \neq i$ το σύνολο των συνδέσεων, των οποίων η εκπεμπόμενη ισχύς παρουσιάζεται ως παρεμβολή στη σύνδεση i. Έστω h_{kj} το κέρδος διαδρομής, από τον κινητό σταθμό j στο σταθμό βάσης k. Στην (2.1) ορίζουμε τον $N \times N$ πίνακα κέρδους ισχύος $\mathbf{G}$, ο οποίος αναπαριστά το κέρδος ισχύος από τον κινητό σταθμό j στον σταθμό βάσης της σύνδεσης i.

$$G_{ij} = \ h_{\sigma_{ij}}^{\ \ 2} \tag{2.1}$$

Αντίστοιχα στην (2.2) ορίζουμε τον κανονικοποιημένο πίνακα κερδών F.

$$F_{ij} = \begin{cases} G_{ij}/G_{ii} & \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ j \in C_i \\ 0 & \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ j \notin C_i \end{cases} \tag{2.2}$$

Έστω $\mathbf{D_h} = diag\left(G_{11}, \cdots, G_{NN}\right)$ ο διαγώνιος πίνακας, ο οποίος αναπαριστά τα κέρδη των συνδέσεων του καναλιού που εξαρτώνται από το $\mathbf{h}$.

Επίσης ορίζουμε ως p_j την εκπεμπόμενη ισχύ του σήματος, για τη σύνδεση j, με το σταθμό βάσης σ_j όπου εξυπηρετείται. Ο δέκτης στη σύνδεση j λαμβάνει το σήμα ως παρεμβολή στη σύνδεση i, με ισχύ $p_j \cdot \left|h_{\sigma_{ij}}\right|^2 = G_{ij} \cdot p_j$. Ο θόρυβος ο οποίος προέρχεται από τις υπόλοιπες συνδέσεις και δεν αποτελεί παρεμβολή συμβολίζεται με $n_i \geq 0$. Η συνολική παρεμβολή και ο θόρυβος q_i σε ένα σταθμό βάσης, ο οποίος εξυπηρετεί τον κινητό σταθμό i, δίνεται από την (2.3). [12]

$$q_i = \sum_{j \in C_i} G_{ij} \cdot p_j + n_i \Leftrightarrow q_i = \sum_{j \in C_i}^{M} F_{ij} \cdot G_{jj} \cdot p_j + n_i \tag{2.3}$$

Η (2.3) μπορεί να γραφτεί σε μορφή πίνακα ως

$$\mathbf{q} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D_h} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{n} \tag{2.4}$$

Η τιμή του SIR, η οποία πετυχαίνεται από τη σύνδεση i είναι

$$\gamma_i = \frac{G_{ii} \cdot p_i}{q_i} \tag{2.5}$$

Ισοδύναμα σε μορφή πίνακα είναι

$$\mathbf{D_h} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{D}\left(\boldsymbol{\gamma}\right) \cdot \mathbf{q} \tag{2.6}$$

2.1.2 Περιορισμοί

Υπάρχουν διάφοροι περιορισμοί στην επίλυση των προβλημάτων ελέγχου ισχύος. Ένας περιορισμός είναι οι τεχνολογικές δυνατότητες του συστήματος ή οι νομικές συνθήκες οι οποίες οριοθετούν ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα. Τέτοιοι περιορισμοί μπορούν να θεωρηθούν η συνολική ισχύς εκπομπής, η μέγιστη εκπεμπόμενη ισχύς κάθε χρήστη, η παρεμβολή έναντι του θερμικού θορύβου (IOR) και το SIR έναντι του θερμικού θορύβου (ROT).

Επίσης ένας άλλος περιορισμός βασίζεται, σε κάποιες «απαιτήσεις» που διαμορφώνονται για έναν παίκτη. Εάν για παράδειγμα δύο κινητοί σταθμοί βρίσκονται στην ίδια κυψέλη θα πρέπει να λαμβάνουν το ίδιο SIR, αλλά αυτή είναι μία απαίτηση η οποία δεν είναι πάντα εφικτή.

Τέλος, υπάρχει περιορισμός στην επίτευξη ενός επιθυμητού επιπέδου QoS, ο οποίος σχετίζεται πολύ στενά με τον εφικτό χώρο επίτευξης του SIR.

2.1.3 Προσέγγιση της Λύσης

Υπάρχουν δύο προσεγγίσεις συναρτήσεων, για την επίτευξη του σκοπού του ελέγχου ισχύος. Η μία προσέγγιση αφορά την δημιουργία μίας συνάρτησης ευχαρίστησης η οποία βασίζεται στην ποιότητα των υπηρεσιών που απολαμβάνει ο χρήστης, ενώ η άλλη στην κοστολόγηση των χρησιμοποιούμενων πόρων.

Η συνάρτηση κόστους για τη χρήση των πόρων του συστήματος, είναι συνήθως μία κυρτή συνάρτηση V του αντίστοιχου πόρου του συστήματος. Μία τέτοια συνάρτηση θα μπορούσε να ήταν μία γραμμική συνάρτηση της εκπεμπόμενης ισχύος.

Η προσέγγιση της συνάρτησης ευχαρίστησης παρουσιάζει μεγαλύτερη πολυπλοκότητα. Η πιο γενικευμένη περίπτωση είναι μία συνάρτηση ευχαρίστησης $U\ \beta$, όπου $\boldsymbol{\beta}$ είναι ένα διάνυσμα μετρούμενων μεγεθών του συστήματος. Το $\boldsymbol{\beta}$ μπορεί να αναπαριστά, για έναν κινητό σταθμό, τον ρυθμό αποστολής του ή την καθυστέρηση, αλλά πάντα αυτά τα μεγέθη με τη σειρά τους είναι συνάρτηση της ισχύος ή κάποιας άλλης μεταβλητής, η οποία αποτελεί αντικείμενο βελτιστοποίησης ενός συγκεκριμένου μοντέλου ελέγχου ισχύος.

Κάποιες φορές αυτές οι δύο προσεγγίσεις συνδυάζονται σε μία συνάρτηση, όπως η διαφορά της συνάρτησης ευχαρίστησης με την εκπεμπόμενη ισχύ ([8],[10]).

2.2 Έλεγχος Ισχύος με Σταθερό SIR

Ένα μεγάλο μέρος της βιβλιογραφίας έχει ασχοληθεί με λύσεις σε ένα βασικό πρόβλημα ελέγχου ισχύος, όπου κατά την μοντελοποίηση η εκπεμπόμενη ισχύς είναι η μόνη μεταβλητή και ο περιορισμός ο οποίος τίθεται, είναι να υπάρχει σύγκλιση σε ένα κοινό SIR. Μέσω της μοντελοποίησης αυτής, γίνεται προσπάθεια ελαχιστοποίησης της συνολικής εκπεμπόμενης ισχύος. Η λύση αυτή είναι κατάλληλη για δίκτυα φωνής, χαμηλού φόρτου. Η λύση που θα δούμε θα μας απασχολήσει και σε επόμενα κεφάλαια όπου η προσέγγιση παρόμοιου προβλήματος μελετάται μέσω της θεωρίας παιγνίων.

Θεωρούμε ένα σύστημα στο οποίο οι ισχύς των χρηστών είναι μεταβαλλόμενες και πρέπει η επιλογή τους να ικανοποιεί τον περιορισμό ενός κοινού SIR, μεταξύ των χρηστών, για τα ελάχιστα δυνατά επίπεδα ισχύος. Στην (2.7) προτείνεται ένας κατανεμημένος αλγόριθμος ελέγχου ισχύος (DPC), ο οποίος αναλαμβάνει την σύγκλιση των χρηστών σε ένα κοινό SIR με τιμή γ_iκαι την ελαχιστοποίηση της συνολικής εκπεμπόμενης ισχύος.

$$p_i\ t+1\ = \frac{\gamma_i}{SIR_i\ t} \cdot p_i\ t\ ,\quad \forall i \tag{2.7}$$

Στον επαναληπτικό αλγόριθμο της (2.7), το $t = 1, 2, \ldots,$ και το $SIR_i\ t$ αντιπροσωπεύει το λαμβανόμενο SIR της t επανάληψης, για κάθε χρήστη i. Η παρακολούθηση του SIR και η ανάθεση της ισχύος είναι ανεξάρτητη και ασύγχρονη, για το λόγο αυτό ο αλγόριθμος είναι κατανεμημένος. Ο κάθε χρήστης i αυξάνει την ισχύ του, όταν η τιμή του $SIR_i\ t$ είναι μικρότερη από την επιθυμητή τιμή γ_iή αντίστοιχα σε άλλη περίπτωση την ελαττώνει. Ο αλγόριθμος συγκλίνει σε ένα βέλτιστο διάνυσμα ισχύων $\mathbf{p}^*$, όταν το $t \to \infty$ και ικανοποιεί τη σχέση $\mathbf{I} - \mathbf{D}\ \boldsymbol{\gamma}\ \mathbf{F}\ \mathbf{p}^* = \mathbf{v}$, όπου $\mathbf{I}$ ο ταυτοτικός πίνακας και

$$\mathbf{v} = \mathbf{D}\ \boldsymbol{\gamma}\ \mathbf{n} = \frac{\gamma_1 n_1}{G_{11}}, \frac{\gamma_2 n_2}{G_{22}}, \cdots, \frac{\gamma_N n_N}{G_{NN}}^{\ T} \tag{2.8}$$

Τα θέματα τα οποία τίθενται, είναι η ύπαρξη ενός διανύσματος ισχύων το οποίο θα πετυχαίνει τον στόχο του κοινού SIR και η σύγκλιση του σε αποδοτικά αποτελέσματα.

Για την ύπαρξη ενός διανύσματος ισχύος, το οποίο θα αποδίδει κοινό SIR στους χρήστες του δικτύου, ισχύει ισοδύναμα:

1. Να υπάρχει ένα διάνυσμα ισχύος $\mathbf{p} \geqslant 0$ τέτοιο ώστε $(\mathbf{I} - \mathbf{D}\ \boldsymbol{\gamma}\ \mathbf{F})\mathrm{p} \geqslant 0$.
2. $\rho\ \mathbf{D}\ \boldsymbol{\gamma}\ \mathbf{F}\ < 1$.
3. Η $(\mathbf{I} - \mathbf{D}\ \boldsymbol{\gamma}\ \mathbf{F})^{-1} = \ {}_{\mathrm{k=0}}^{\infty} \mathbf{D}\ \boldsymbol{\gamma}\ \mathbf{F}^{\boldsymbol{k}}$ υπάρχει και τα στοιχεία της είναι θετικά, με

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{D}\ \boldsymbol{\gamma}\ \mathbf{F}^{\boldsymbol{k}} \tag{2.9}$$

Εάν υποθέσουμε ότι το SIR είναι εφικτό, τότε το $\mathbf{p}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{D}\ \boldsymbol{\gamma}\ \mathbf{F})^{-\mathbf{1}}\mathbf{v}$ είναι εφικτό και ο DPC αλγόριθμος συγκλίνει σε μία λύση ελαχιστοποίησης της ισχύος. Δηλαδή για κάθε λύση $\mathbf{p}$ ισχύει ότι $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{p}^*$.[12]

2.3 Έλεγχος Ισχύος με Μεταβλητό SIR

Για τον έλεγχο ισχύος σε ένα δίκτυο στο οποίο παρατηρείται μεγάλος φόρτος, η σύγκλιση σε ένα κοινό SIR παρουσιάζει δυσκολίες ως προς την εφαρμογή της. Υψηλότερες τιμές του SIR, υποδηλώνουν υψηλότερους ρυθμούς μετάδοσης δεδομένων και πιθανώς μεγαλύτερη αξιοπιστία στο σύστημα. Ένα δίκτυο μπορεί να βελτιστοποιήσει την ανάθεση του SIR του, ανάλογα με την κίνηση και τις συνθήκες που επικρατούν στο κανάλι. Στα σύγχρονα δίκτυα όπου οι πολιτικές παροχής ποιότητας υπηρεσιών μπορούν να διαφέρουν μεταξύ των χρηστών, το μεταβλητό SIR ως δείκτης ποιότητας υπηρεσιών, μπορεί να δώσει λύσει στην απαίτηση αυτή.

Στο μεγαλύτερο κομμάτι της βιβλιογραφίας, οι λύσεις για έλεγχο ισχύος μεταβλητού SIR αφορούν ένα συνδυαστικό πρόβλημα ανάθεσης του SIR και ελέγχου ισχύος. Μία προσέγγιση για την επίτευξη διαφορετικών SIR ανάμεσα στους κινητούς σταθμούς, είναι η αυτόνομη προσπάθεια μεγιστοποίησης της συνάρτησης ευχαρίστησης χωρίς να υπολογίζονται άλλα κριτήρια του δικτύου. Η κατανεμημένη αυτή υλοποίηση αποτελεί μία προσέγγιση του ελέγχου ισχύος με τη χρήση της θεωρίας παιγνίων, την οποία μελετάμε στην Ενότητα 3.2.2. Μία άλλη προσέγγιση αφορά την κατανομή του SIR βασιζόμενοι στην μεγιστοποίηση της ευχαρίστησης των χρηστών, μέσω της διαχείρισης του ρυθμού μετάδοσης από ένα κεντρικό αλγόριθμο. Τα αποτελέσματα τα οποία παρουσιάζονται έχουν τρεις εκδοχές. Η μία εκδοχή αφορά την κατανεμημένη και βέλτιστη λύση, στην ειδική περίπτωση του σταθερού SIR. Η άλλη εκδοχή αφορά μία βέλτιστη αλλά συγκεντρωτική λύση, η οποία απαιτεί τον γενικό καθορισμό των παραγόντων βελτιστοποίησης, μεταξύ των κυψελών του συστήματος. Τέλος η τρίτη προσέγγιση δίνει μη βέλτιστες λύσεις, βασιζόμενη στην επιλογή της ισχύος από τους κινητούς σταθμούς.

Η λύση μέσω ενός κυρτού συνόλου εφικτών SIR μπορεί να δώσει αποτελέσματα βέλτιστα για το SIR και την ισχύ. Για ένα δεδομένο σύνολο εφικτών SIR διανυσμάτων $\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{\Gamma} \subseteq \mathbf{B}$ το βέλτιστο SIR του συνόλου αυτού ορίζεται ως $\boldsymbol{\gamma}_{opt} = \arg\max_{\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{\Gamma}} \ _i U_i \ \gamma_i$. Έστω $\mathbf{q}^m \succ 0$ και $\mathbf{p}^m \succ 0$ τα μέγιστα διανύσματα παρεμβολών και ισχύος αντίστοιχα. Ορίζουμε τα αντίστοιχα υποσύνολα των εφικτών διανυσμάτων SIR, ως

$$\mathbf{B} \ \mathbf{p}^{\boldsymbol{m}} \ = \ \boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{B} \mid \mathbf{p}(\boldsymbol{\gamma}) \preccurlyeq \mathbf{p}^m$$

$$\mathbf{B} \ \mathbf{q}^{\boldsymbol{m}} \ = \ \boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{B} \mid \mathbf{q}(\boldsymbol{\gamma}) \preccurlyeq \mathbf{q}^m$$

Για $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{B} \ \mathbf{p}^m$, το πρόβλημα της ανάθεσης του βέλτιστου SIR, προϋποθέτει την μεγιστοποίηση της συνολικής ευχαρίστησης $\ _i U_i \ \gamma_i$ με περιορισμό $\mathbf{p}(\boldsymbol{\gamma}) \preccurlyeq \mathbf{p}^m$ και μεταβλητές τα $\boldsymbol{\gamma} \succ 0$ και $\mathbf{p} \succ 0$.

Αντίστοιχα για $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{B} \ \mathbf{q}^m$, το πρόβλημα της ανάθεσης του βέλτιστου SIR, προϋποθέτει την μεγιστοποίηση της συνολικής ευχαρίστησης $\ _i U_i \ \gamma_i$ με περιορισμό $\mathbf{q}(\boldsymbol{\gamma}) \preccurlyeq \mathbf{q}^{\boldsymbol{m}}$ και μεταβλητές τα $\boldsymbol{\gamma} \succ 0$ και $\mathbf{q} \succ 0$.

2.4 Συνδυαστικός Έλεγχος Ισχύος με Ανάθεση Σταθμού Βάσης

Τα συστήματα τα οποία μελετήσαμε μέχρι στιγμής, δεν ανταποκρινόταν στην πραγματικότητα. Ο λόγος είναι ότι οι σταθμοί βάσης και τα διαθέσιμα κανάλια μπορούν να ανατεθούν σε έναν κινητό σταθμό, όταν κινείται μέσα στο δίκτυο, ακόμα και κατά την διάρκεια μίας κλήσης. Επίσης, η διαχείριση της σύνδεσης θα μπορούσε να θεωρηθεί ένας ακόμα πόρος, ο οποίος θα μπορούσε να μοντελοποιηθεί και να βελτιώσει τα αποτελέσματα του ελέγχου ισχύος.

Η προσέγγιση, για την μοντελοποίηση του προβλήματος του συνδυασμού ελέγχου ισχύος και ανάθεσης σταθμού βάσης, έχει δύο εκδοχές. Την ελαχιστοποίηση της εκπεμπόμενης ισχύς για σταθερό SIR ή την μεγιστοποίηση της ευχαρίστησης του χρήστη για μεταβλητό SIR.

Για την περίπτωση της άνω ζεύξης, για σταθερό SIR, ο στόχος είναι ο καθορισμός της ανάθεσης του σταθμού βάσης, ο οποίος ελαχιστοποιεί την απαιτούμενη εκπεμπόμενη ισχύ $\sum_{i=1}^{N} p_i$, για την επίτευξη ενός σταθερού SIR σε κάθε σύνδεση. Το $SIR_i(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma})$ είναι η συνάρτηση του SIR για κάθε κινητό σταθμό i, όπου εξαρτάται από την κατανομή ισχύος $\mathbf{p}$ και την ανάθεση των σταθμών βάσης $\boldsymbol{\sigma}$, $\sigma_i \in S_{\mathrm{i}}$. Ο αλγόριθμος που έχει προταθεί, είναι ανάλογος του DPC και αποδεικνύεται ότι συγκλίνει σε βέλτιστα αποτελέσματα. [12]

Επίσης υπάρχει η περίπτωση, της μεγιστοποίησης της συνολικής ευχαρίστησης των κινητών σταθμών, $\sum_{i=1}^{N} U_i(\gamma_i)$. Η μοντελοποίηση του προβλήματος, είναι αντίστοιχη του μεταβλητού SIR της ενότητας 2.3. Οι περιορισμοί οι οποίοι τίθενται είναι $\gamma_i \leq SIR_i(\mathrm{p}, \sigma)$, $\forall i$, το διάνυσμα ισχύων $\mathbf{p} \leq \mathbf{p}^m$ και $\sigma_i \in S_{\mathrm{i}}$, $\forall i$. Οι μεταβλητές του προβλήματος είναι τα διανύσματα $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}$. Το συγκεκριμένο μοντέλο ελέγχου ισχύος παρουσιάζει δυσκολίες στην εύρεση λύσης λόγω της ύπαρξης μίας ακόμα παραμέτρου, για την αντιστοίχιση των σταθμών βάσης. Στην Ενότητα 3.2.4 θα δούμε λύσεις για το συγκεκριμένο πρόβλημα μέσω της παιγνιοθεωρητικής μοντελοποίησης του προβλήματος.

2.5 Έλεγχος ισχύος και UMTS

Το UMTS έχει, σε σχέση με το GSM, μεγαλύτερη ανάγκη αντιμετώπισης του προβλήματος κοντινής μακρινής απόστασης. Ένας κινητός σταθμός κοντά στον *κόμβο Β*, ο οποίος εκπέμπει στην ίδια ισχύ με έναν άλλο και βρίσκεται στα όρια της κυψέλης, πιθανότατα θα μπλοκάρει τον τελευταίο. Για τη διατήρηση αξιόπιστης σύνδεσης σε όλους τους κινητούς σταθμούς, η λαμβανόμενη ισχύς στον κόμβο Β θα πρέπει να είναι περίπου η ίδια. Αυτό σημαίνει ότι οι απώλειες διάδοσης μεταξύ του κινητού σταθμού και του κόμβου Β, θα πρέπει να υπολογίζονται. Σε ένα ιδανικό περιβάλλον, αυτός και μόνος ο παράγοντας θα ήταν ικανοποιητικός, αλλά τα πραγματικά περιβάλλοντα είναι σπανίως ιδανικά. Οι συνθήκες του διαύλου μεταβάλλονται στιγμιαία αλλά και μακροπρόθεσμα. Βάση αυτών των χαρακτηριστικών του συστήματος, μπορεί να γίνει κατανοητή η χρήση των τριών μηχανισμών ελέγχου ισχύος στο UMTS.

Έλεγχος ισχύος ανοικτού βρόχου: Ο έλεγχος ισχύος ανοικτού κυκλώματος, συνδέεται άμεσα με τις απώλειες διάδοσης. Ο έλεγχος αυτός δεν εμπεριέχει ανατροφοδότηση, αλλά απλά ορίζει την αρχική ισχύ στην οποία ο κινητός σταθμός θα πρέπει να εκπέμψει. Αυτή η αρχική ρύθμιση πραγματοποιείται μέσω της RRC σηματοδοσίας, στους κινητούς σταθμούς και το RNC.

Έλεγχος ισχύος εξωτερικού βρόχου: Ο έλεγχος ισχύος εξωτερικού βρόχου, σχετίζεται με τις μακροπρόθεσμες μεταβολές του καναλιού. Αρχικά ορίζεται ένα SIR αναφοράς· εάν το λαμβανόμενο SIR είναι μικρότερο από το SIR αναφοράς, η εκπεμπόμενη ισχύς πρέπει να αυξηθεί, αλλιώς πρέπει να ελαττωθεί. Στην πράξη η επιθυμητή ποιότητα υπηρεσιών της κάτω ζεύξης, καθορίζεται από το BLER (block error ratio) του καναλιού μετάδοσης. Το BLER μπορεί να συσχετιστεί με το επιθυμητό SIR. Εάν το λαμβανόμενο SIR είναι μικρότερο του επιθυμητού, τότε το BLER είναι πιο πιθανό να μην συμβαδίζει. Εναλλακτικά, εάν το BLER είναι μεγαλύτερο του επιθυμητού, η εκπεμπόμενη ισχύς θα πρέπει να αυξηθεί. Ο έλεγχος αυτός πραγματοποιείται στον κινητό σταθμό και το RNC. Είναι επίσης γνωστός ως αργός έλεγχος ισχύος κλειστού βρόχου και πραγματοποιείται με ρυθμό $10-100Hz$.

Έλεγχος ισχύος εσωτερικού βρόχου: Ο έλεγχος ισχύος εσωτερικού βρόχου είναι επίσης γνωστός και ως ταχύς έλεγχος ισχύος κλειστού βρόχου, διότι πραγματοποιείται με ρυθμό $1500Hz$, ώστε να αποτρέψει τα φαινόμενα ταχέων διαλείψεων (fast fading). Ο έλεγχος ισχύος αυτός πραγματοποιείται στον κινητό σταθμό και τον κόμβο Β. Ενώ ο έλεγχος ισχύος εξωτερικού βρόχου ορίζεται σε επίπεδα RRC και εκτελείται στο Επίπεδο 1, ο ταχύς έλεγχος ισχύος πραγματοποιείται στο Επίπεδο 1 με σκοπό να πετύχει το επιθυμητό BLER, το οποίο ορίζεται από τον έλεγχο εξωτερικού βρόχου. Η επίδραση του ελέγχου αυτού, είναι ότι ακόμα και σε ένα κανάλι με διαλείψεις, η λαμβανόμενη ισχύς διατηρείται σταθερή έτσι ώστε να επιτευχθεί το επιθυμητό BLER.

Ο ταχύς έλεγχος ισχύος είναι σημαντικός για τη διατήρηση των παρεμβολών σε χαμηλά επίπεδα και την αύξηση της χωρητικότητας του καναλιού. Χωρίς αυτόν, η εκπεμπόμενη ισχύς θα έπρεπε να ήταν μεγαλύτερη για να πετύχουμε τα επιθυμητά επίπεδα υπηρεσιών. Το κέρδος από τον έλεγχο αυτό, είναι της τάξεως των $5.8\,dB$ στον δέκτη, για μικρές ταχύτητες των κινητών σταθμών, ομιλία $8Kbps$, interleaving $10\,ms$ και διαφορισμό κεραίας. Το κέρδος είναι μικρότερο στον πομπό και για μεγαλύτερες ταχύτητες.

Το πρόβλημα με τον ταχύ έλεγχο ισχύος, είναι οι εκλάμψεις στην ισχύ όταν παρουσιάζονται βαθιές διαλείψεις. Μπορεί να είναι απαραίτητος για την σύνδεση, αλλά παρουσιάζονται επίσης παρεμβολές στις γειτονικές κυψέλες όπου οι κινητοί σταθμοί μπορεί να μην παρουσιάζουν δυσμενείς συνθήκες στο κανάλι τους. Γνωρίζοντας το γεγονός αυτό, ο ρυθμός του ταχύ ελέγχου ισχύος μπορεί να ρυθμιστεί ανάλογα με τις ανάγκες του συστήματος.

Κεφάλαιο 3:
Θεωρία Παιγνίων και Ασύρματες Επικοινωνίες

Η Θεωρία Παιγνίων όπως έχουμε δει, μελετάει την αλληλεπίδραση ανεξάρτητων χρηστών. Σε ένα σύγχρονο σύστημα ασύρματων επικοινωνιών, κάθε κόμβος ακολουθεί ένα κατανεμημένο πρωτόκολλο και πρέπει να λάβει τις αποφάσεις του, σύμφωνα με τις γνωστές πληροφορίες για τα χαρακτηριστικά του δικτύου, τη δεδομένη στιγμή. Αυτές οι αποφάσεις μπορεί να περιορίζονται από τους κανόνες των αλγορίθμων ή των πρωτοκόλλων, αλλά κάθε κόμβος θα έχει πιθανώς κάποιο δικαίωμα να παρεκκλίνει στη ρύθμιση των παραμέτρων ή τον τρόπο λειτουργίας του συστήματος. Αυτοί οι κόμβοι τότε είναι αντίστοιχοι των αυτόνομων παικτών, παίρνοντας αποφάσεις για τη λειτουργία τους, όπως για παράδειγμα την ισχύ εκπομπής τους.

Στη λήψη τέτοιων αποφάσεων, ο κάθε κόμβος ενδιαφέρεται για τη βελτιστοποίηση κάποιων παραμέτρων του συστήματος. Σε κάποιες περιπτώσεις, οι κόμβοι αναζητούν τη βελτίωση του δικτύου στο σύνολο του. Σε άλλες περιπτώσεις, οι κόμβοι μπορεί να συμπεριφέρονται εγωιστικά και να ενδιαφέρονται μόνο για τη βελτίωση των ιδίων. Τέλος, οι κόμβοι μπορούν να συμπεριφέρονται καταστροφικά και να ενδιαφέρονται για την επιδείνωση των επιδόσεων του δικτύου. Στη δεύτερη και την τρίτη περίπτωση, η συνεισφορά της θεωρίας παιγνίων μπορεί να είναι αποτελεσματική, λόγω του γεγονότος ότι ασχολείται με καταστάσεις στις οποίες συγκρούονται τα συμφέροντα των παικτών. Ακόμα και στην πρώτη περίπτωση, στην οποία οι παίκτες έχουν κοινούς σκοπούς υπέρ της καλύτερης λειτουργίας του δικτύου, θα υπάρχουν καταστάσεις σύγκρουσης όταν θα πρέπει να παρθούν αποφάσεις, για την καλύτερη επιλογή σε μία δεδομένη στιγμή.

3.1 Μέθοδοι Εφαρμογής και Σφάλματα

Υπάρχουν διάφορες «παγίδες» κατά την εφαρμογή της θεωρίας παιγνίων, για τη λύση ενός προβλήματος των ασύρματων επικοινωνιών. Ένα βασικό ερώτημα είναι, πότε ένα πρόβλημα είναι ένα απλό πρόβλημα βελτιστοποίησης ή ένα παίγνιο. Ένα πρόβλημα είναι παίγνιο, μόνο όταν πολλοί χρήστες έχουν ρόλο στη λήψη αποφάσεων. Συνεπώς όταν υπάρχει ένας χρήστης ή δεν είναι εφικτό να προσδιοριστούν οι παίκτες του παιγνίου, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθεί μία τεχνική βελτιστοποίησης.

Ένα άλλο κοινό λάθος στις εφαρμογές της θεωρίας παιγνίων είναι η σύγχυση στη χρήση των δύο βασικών θεωριών, της συνεργατικής και της μη συνεργατικής θεωρίας παιγνίων. Οι περισσότερες εφαρμογές πραγματοποιούνται με τη χρήση της πιο διαδεδομένης από τις δύο θεωρίες, της μη συνεργατικής θεωρίας παιγνίων. Παρόλα αυτά υπάρχει ένα μικρό μέρος της έρευνας, το οποίο ασχολείται με εφαρμογές της θεωρίας παιγνίων στις ασύρματες επικοινωνίες, βασιζόμενη στη συνεργατική θεωρία παιγνίων ([15]). Μολονότι και οι δύο προσεγγίσεις παρέχουν λύσεις σε διάφορα θέματα των ασύρματων επικοινωνιών, θεωρείται δύσκολο και χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στο συνδυασμό των δύο θεωριών, αν και υπάρχουν μοντέλα που έχουν προταθεί και συνδυάζουν τις δύο θεωρίες ([16]).

Τέλος το πιο κοινό πρόβλημα το οποίο παρουσιάζεται στην εφαρμογή της θεωρίας παιγνίων στις ασύρματες επικοινωνίες, είναι ο σωστός προσδιορισμός του παιγνίου και των στοιχείων του. Τέτοια θέματα τα οποία θα μας απασχολήσουν και στο επόμενο κεφάλαιο, είναι ο προσδιορισμός των παικτών και των ενεργειών τους, ο σχεδιασμός της συνάρτησης ευχαρίστησης, η ύπαρξη ισορροπίας Nash και η μοναδικότητα της, καθώς και η βέλτιστη απόδοση αυτής της υλοποίησης.

Επίσης υπάρχουν δύο προσεγγίσεις για την εφαρμογή της θεωρίας παιγνίων στις ασύρματες επικοινωνίες. Στην πρώτη περίπτωση, εξετάζεται η μοντελοποίηση των πραγματικών προτιμήσεων των παικτών, μέσω της συνάρτησης ευχαρίστησης τους. Σε γενικές γραμμές, δεν είναι πάντα εύκολο να αναγνωριστούν και να αποτυπωθούν οι προτιμήσεις των παικτών. Επίσης δεν είναι εύκολο να αποτυπωθούν οι προτιμήσεις των παικτών, σε μία συνάρτηση ευχαρίστησης, διότι υπάρχει περίπτωση να διαφέρουν μεταξύ των παικτών. Η δημιουργία διαφορετικών συναρτήσεων ευχαρίστησης προσαρμοσμένες στις προτιμήσεις των παικτών, δεν επιφέρει πάντα λύση στο πρόβλημα, διότι το πιο πιθανό είναι να μην είναι εφικτή η απόδειξη ύπαρξης ισορροπίας στο παίγνιο. Για το λόγο αυτό κρίνεται απαραίτητη, η συμπερίληψη κάποιων υποθέσεων, ώστε να μπορέσουμε να λάβουμε κάποια αποτελέσματα.

Στη δεύτερη περίπτωση, υποθέτουμε ότι είναι δυνατός ο προγραμματισμός των συσκευών του συστήματος, ώστε να επιθυμούν τη μεγιστοποίηση μίας επιλεγμένης συνάρτησης ευχαρίστησης. Εφόσον η επιλογή είναι δική μας, μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε συνάρτηση ευχαρίστησης επιθυμούμε. Το σημαντικό μέρος αυτής της προσέγγισης είναι η αιτιολόγηση της επιλογής μίας συγκεκριμένης και αποδοτικής συνάρτησης ευχαρίστησης. Θεωρείται πιο εύκολη προσέγγιση από την περίπτωση δημιουργίας μίας συνάρτησης ευχαρίστησης, η οποία ανταποκρίνεται στα υπάρχοντα χαρακτηριστικά του συστήματος, αλλά εμπεριέχει δυσκολίες κατά τον σχεδιασμό.

3.2 Έλεγχος Ισχύος σε CDMA Συστήματα

Ο έλεγχος ισχύος και η θεωρία παιγνίων έχουν εφαρμογή σε διάφορα ασύρματα συστήματα επικοινωνιών, όπως σε CDMA συστήματα, OFDMA, Ad-Hoc δίκτυα, εφαρμογές σε συστήματα MIMO καθώς επίσης και σε σύγχρονα Cognitive δίκτυα. Η μελέτη και ανάλυση της βιβλιογραφίας όλων των παραπάνω συστημάτων, ξεφεύγει από τα όρια της παρούσας διπλωματικής εργασίας· συνεπώς θα μελετήσουμε την εφαρμογή του ελέγχου ισχύος με τη χρήση της θεωρίας παιγνίων σε συστήματα CDMA, για τα οποία έχουν προταθεί αρκετές λύσεις και αποτέλεσαν το πρώτο πεδίο των ασυρμάτων δικτύων, όπου προτάθηκαν παιγνιοθεωρητικές λύσεις ελέγχου ισχύος.

Ο έλεγχος ισχύος σε ασύρματα συστήματα επικοινωνιών, είναι μία από τις εφαρμογές οι οποίες ανταποκρίνονται στις προϋποθέσεις ύπαρξης παιγνίου και επομένως μπορούν να εφαρμοστούν οι αρχές της θεωρίας παιγνίων για τη λύση της. Στις μοντελοποιήσεις αυτές υπάρχουν τρία βασικά στοιχεία τα οποία προέρχονται και από το χώρο της θεωρίας παιγνίων και πρέπει να προσδιοριστούν. Ένα σύνολο παικτών i, ένα εφικτό πεδίο ενεργειών A_i (ή στρατηγικών S_i μιας και θα μιλήσουμε μόνο για καθαρές στρατηγικές) και μία συνάρτηση ευχαρίστησης U_i για κάθε παίκτη. Έπειτα τίθενται θέματα ύπαρξης της ισορροπίας Nash και της μοναδικότητας της, καθώς και το περιθώριο βελτίωσης του συστήματος.

Η εύρεση της συνάρτησης ευχαρίστησης, αποτελεί ένα από τα δυσκολότερα θέματα. Μία συνηθισμένη προσέγγιση, είναι η συνάρτηση ευχαρίστησης να αποτελεί μία συνάρτηση του SIR και της εκπεμπόμενης ισχύς. Το SIR είναι μία συνάρτηση της ισχύος του παίκτη και της εκπεμπόμενης ισχύς των υπόλοιπων παικτών στην κυψέλη. Όταν ένας παίκτης αυξήσει τα επίπεδα ισχύος εκπομπής του, θα αυξήσει το SIR του, αλλά θα μειώσει ταυτόχρονα το SIR των υπολοίπων. Επίσης η αύξηση ισχύος θα επιφέρει και μεγαλύτερη κατανάλωση ενέργειας στον χρήστη, το οποίο συνεπάγεται και μείωση της διάρκειας παροχής ενέργειας από τις μπαταρίες των κινητών σταθμών.

Αυτές οι συνθήκες ικανοποιούν τις απαιτήσεις της θεωρίας παιγνίων ώστε να χαρακτηρίσουμε τον έλεγχο ισχύος ως παίγνιο. Το σύστημα το οποίο δημιουργείται, αποτελείται από κόμβους – παίκτες οι οποίοι επιθυμούν την αύξηση της ισχύος του, με πρόθεση να επιφέρουν βελτίωση στο SIR τους. Οι πολλαπλοί όμως κόμβοι οι οποίοι υπάρχουν σε ένα σύστημα και η σύνδεση των συμφερόντων τους, δημιουργούν μία κατάσταση η οποία σαφώς και μπορεί να θεωρηθεί ως παίγνιο. Επίσης, ένας παίκτης ο οποίος φέρεται «εγωιστικά» και επιθυμεί την αύξηση της ισχύς του, θα προτιμήσει να συμβιβαστεί με τη λύση της επιλογής της ισχύος του μέσω της ισορροπίας Nash, μειώνοντας την ισχύ του αλλά πετυχαίνοντας αποδοτικότερα αποτελέσματα στο SIR και την κατανάλωση ενέργειας.

3.2.1 Παίγνια Ελέγχου Ισχύος Σταθερού SIR

Το πρόβλημα της κατανομής της ισχύος με σταθερό SIR συζητήθηκε στο 2ο Κεφάλαιο. Μέσω της θεωρίας παιγνίων μπορούμε να προσεγγίσουμε ξανά το ίδιο ζήτημα, πετυχαίνοντας για την περίπτωση του κατανεμημένου αλγορίθμου τα ίδια αποτελέσματα. Ο κάθε κινητός σταθμός του συστήματος επιλέγει δυναμικά την ισχύ εκπομπής του, μεγιστοποιώντας την ευχαρίστηση του μέχρι να συγκλίνει σε ένα σημείο ισορροπίας, το οποίο θα αποφέρει στο σύνολο των χρηστών ένα κοινό SIR.

Στα [8],[10] προτείνεται μία συνάρτηση ευχαρίστησης η οποία ορίζεται ως λόγος της ωφέλιμης δαπανούμενης ενέργειας προς το αντίστοιχο ενεργειακό κόστος (3.1).

$$u_i = \frac{E_{benefit}}{E_{energy\ cost}} = \frac{L}{p_i \cdot M \quad R \cdot f \;\; \gamma_i} \; bits/Joule \tag{3.1}$$

Όπου L τα $bits$ εκπεμπόμενης πληροφορίας σε πλαίσια των M $(bits)$ με $M > L$ $\cdot R$ $(bits/sec)$ ο ρυθμός μετάδοσης, W (Hz) το διαθέσιμο εύρος ζώνης διασποράς φάσματος, p_i $(Watts)$ η εκπεμπόμενη ισχύς του χρήστη i και $f \;\; \gamma_i$ ([10]) η τροποποιημένη συνάρτηση πιθανότητας σωστής λήψης ενός πλαισίου στον δέκτη.

Το παίγνιο αυτό ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις του Θεωρήματος 1.2, οπότε υπάρχει ισορροπία Nash του παιγνίου. Αποδεικνύεται ότι στο σημείο ισορροπίας Nash, εάν οι παίκτες χρησιμοποιήσουν τις δυνατές από το σύστημα ισχύς, πετυχαίνουν ένα κοινό SIR και μεγιστοποιούν την ευχαρίστηση τους. Η ισχύς για κάθε χρήστη i στο σημείο ισορροπίας δίνεται από τον τύπο:

$$p_i = \frac{\gamma \cdot \sigma^2}{h_i \cdot \;\; \frac{W}{R} - \gamma \cdot \;\; n - 1} \tag{3.2}$$

Όπου γ το κοινό SIR το οποίο επιτυγχάνεται στο σημείο ισορροπίας, σ^2 η ισχύς του AWGN, h_i το κέρδος διαδρομής από τον τερματικό κινητό σταθμό στη βάση και n το πλήθος των χρηστών του συστήματος.

Η εξίσωση (3.2) μας δίνει παρόμοια αποτέλεσμα με τον αλγόριθμο DPC τον οποίο είδαμε στο Κεφάλαιο 2. Ένα αρνητικό στοιχείο στην προσέγγιση αυτή είναι ότι σύμφωνα με τα [8],10], υπάρχει ένας περιορισμός στον μέγιστο αριθμό των χρηστών που μπορούν να πετύχουν κοινό SIR στην ισορροπία. Επίσης αποδεικνύεται ότι το σύστημα δεν είναι αποδοτικό, διότι οι παίκτες θα μπορούσαν να πετύχουν μεγαλύτερες απολαβές μειώνοντας την εκπεμπόμενη ισχύ τους.

3.2.2 Παίγνια Ελέγχου Ισχύος Μεταβλητού SIR με Τιμολόγηση

Για τον έλεγχο ισχύος με μεταβλητό SIR παρουσιάζονται λύσεις, οι οποίες υιοθετούν ένα σύστημα τιμολόγησης στη συνάρτηση ευχαρίστησης των παικτών. Οι παρακάτω προτάσεις πραγματοποιούνται σε περιβάλλον Gaussian θορύβου, ενώ ο έλεγχος ισχύος γίνεται για CDMA σύστημα μίας κυψέλης.

Στο [29] προτείνεται μία συνάρτηση ευχαρίστησης, η οποία ορίζεται ως η διαφορά μίας λογαριθμικής συνάρτησης του SIR του χρήστη και μίας συνάρτησης τιμολόγησης. Η συνάρτηση τιμολόγησης είναι η διαφορά της εκπεμπόμενης ισχύος του χρήστη και της συνάρτησης ευχαρίστησης του. Η συνάρτηση ευχαρίστησης έχει την παρακάτω μορφή:

$$
\begin{aligned}
U_i\ p_i, p_{-i}\ &= \mu_i \cdot ln\ \gamma_i\ \ - J_i \Rightarrow \\
U_i\ p_i, p_{-i}\ &= \overbrace{\mu_i \cdot ln\ \gamma_i}^{U_i}\ -\ \overbrace{\lambda_i \cdot p_i - \mu_i \cdot ln\ \gamma_i}^{J_i}
\end{aligned}
\qquad (3.3)
$$

Οι συντελεστές $\mu_i, \lambda_i > 0$ είναι δύο βάρη, τα οποία καθορίζουν την «επιθυμία» του χρήστη για καλύτερο SIR ([29]). Το SIR για τον κάθε χρήστη i, ορίζεται από τον τύπο:

$$
\gamma_i = \frac{W}{R} \cdot \frac{h_i p_i}{\sum_{j \neq i} h_j p_j + \sigma^2} \qquad (3.4)
$$

Ο λόγος για τον οποίο η συνάρτηση ευχαρίστησης είναι λογαριθμική συνάρτηση του SIR, είναι διότι μπορούμε να τη θεωρήσουμε ανάλογη με την χωρητικότητα του συστήματος, λόγο του νόμου Shannon, υποθέτοντας ότι στο κανάλι οι παρεμβολές και ο θόρυβος όλων των χρηστών, είναι ανεξάρτητος Gaussian θόρυβος. Αυτό σημαίνει ότι το συγκεκριμένο μέρος της συνάρτησης ευχαρίστησης, είναι γραμμικό με τη ρυθμοαπόδοση που μπορεί να επιτευχθεί από ένα συγκεκριμένο χρήστη.

Αποδεικνύεται, ότι για το παίγνιο αυτό υπάρχει ισορροπία Nash και είναι μοναδική. Για την σύγκλιση των ισχύων στο σημείο ισορροπίας, προτείνονται δύο επαναληπτικοί αλγόριθμοι, ο ένας γραμμικού υπολογισμού των ισχύων των παικτών και ο άλλος ενός αντίστοιχου παράλληλου υπολογισμού. Οι αλγόριθμοι οι οποίοι προτείνονται είναι κατανεμημένοι και η μόνη πληροφορία η οποία χρειάζεται από το δίκτυο για τη σύγκλιση στην ισορροπία, είναι η συνολική εκπεμπόμενη ισχύς και οι προτιμήσεις του κάθε χρήστη. Αποδεικνύεται επίσης, ότι οι αλγόριθμοι μπορούν να πάντα να συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας Nash, ξεκινώντας από οποιαδήποτε δυνατή τιμή ισχύος.

Υπάρχει επίσης η δυνατότητα να δοθεί δυναμικός χαρακτήρας στον καταμερισμό της ισχύος. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εάν υπάρχει ένα σύστημα διαχείρισης του δικτύου, το οποίο να καθορίζει τιμές στα βάρη της συνάρτησης ευχαρίστησης ανάλογα με τις πολιτικές που ακολουθούνται.

Τέλος κατόπιν προσομοίωσης του συστήματος, όλοι οι χρήστες πετυχαίνουν ένα ελάχιστα καθορισμένο SIR, αλλά κάποιοι χρήστες ανάλογα με την επιλογή των βαρών, μπορούν να απορριφθούν από το σύστημα λόγω της κατανομής ισχύος.

Μία άλλη προσέγγιση τιμολόγησης σε έλεγχο ισχύος με μεταβλητό SIR προτείνεται στα [8], [10]. Η πρόταση αφορά ένα γραμμικό σύστημα τιμολόγησης, το οποίο αποτελεί την διαφορά της συνάρτησης ευχαρίστησης του παίκτη και το γινόμενο της ισχύος εκπομπής του με ένα σταθερό συντελεστή c (3.2).

$$u_i^c \;\, p \;\; = u_i \;\, p \;\; - c_i \;\, p_i, p_{-i} \tag{3.5}$$

Για την επίτευξη του σημείου ισορροπίας, χρησιμοποιείται ένας επαναληπτικός αλγόριθμος ο οποίος ανανεώνει την ισχύ του κάθε χρήστη, με την ισχύ που μεγιστοποιεί σε κάθε επανάληψη την ευχαρίστηση του.

Η νέα συνάρτηση ευχαρίστησης, αποτελεί βελτιωμένη εκδοχή του παιγνίου ελέγχου ισχύος με σταθερό SIR, το οποίο αναφέραμε στην ενότητα 3.2.1. Το θετικό στοιχείο είναι ότι οι παίκτες στην ισορροπία (όπου το SIR πλέον είναι διαφορετικό μεταξύ των παικτών), πετυχαίνουν μεγαλύτερες απολαβές εκπέμποντας σε μικρότερα επίπεδα ισχύος, κάνοντας το σύστημα πιο αποδοτικό. Ένα αρνητικό στοιχείο του νέου παιγνίου, είναι ότι η (3.2) δεν ικανοποιεί τις απαιτήσεις του Θεωρήματος 1.2, οπότε για την απόδειξη της ύπαρξης ισορροπίας Nash χρησιμοποιείται η θεωρία των υπεραρθρωτών παιγνίων. Για την απόδειξη ότι το παίγνιο είναι υπεραρθρωτό, θα πρέπει να γίνει μία μείωση του εφικτού πεδίου ισχύων των παικτών. Τέλος, ενώ το σύστημα είναι πιο αποδοτικό σε σχέση με το αντίστοιχο παίγνιο σταθερού SIR, δεν είναι δυνατό με το συγκεκριμένο σύστημα τιμολόγησης, να επιτευχθεί το συνολικά βέλτιστο αποτέλεσμα.

Στο [20] γίνεται μία προσέγγιση της κατανομής ισχύος μεταβλητού SIR με τιμολόγηση, η οποία προσπαθεί να δώσει αποδοτικά αποτελέσματα αποφεύγοντας κάποιους περιορισμούς των [8] και [10]. Προτείνεται μία συνάρτηση ευχαρίστησης με τιμολόγηση, η οποία αποφεύγει την συσχέτιση της με την κωδικοποίηση των bits πληροφορίας και με την διαμόρφωση του σήματος. Η συνάρτηση ευχαρίστησης ορίζεται ως:

$$u_i = B \log_2 \;\, 1 + \gamma_i \;\; - a_i \cdot p_i \; bits/sec \tag{3.6}$$

Το πρώτο μέρος της (3.6) αποτελεί την συνάρτηση ευχαρίστησης, η οποία προσεγγίζει το σύστημα ως προς την χωρητικότητα του (όλες οι παρεμβολές θεωρούνται Gaussian θόρυβος). Το δεύτερο μέρος αποτελεί την συνάρτηση τιμολόγησης, η οποία είναι μία γραμμική συνάρτηση της εκπεμπόμενης ισχύος του χρήστη.

Αποδεικνύεται στο [20] ότι υπάρχει ισορροπία Nash του παιγνίου, η οποία είναι μοναδική. Ο κατανεμημένος αλγόριθμος ελέγχου ισχύος συγκλίνει σε ισορροπία Nash, ξεκινώντας από οποιαδήποτε ισχύ του εφικτού πεδίου. Η διαδικασία εύρεσης είναι επαναληπτική και σε κάθε επανάληψη κάθε χρήστης i μεγιστοποιεί την ευχαρίστηση του επιλέγοντας την αντίστοιχη ισχύ, μέχρι οι ισχύς όλων των χρηστών να συγκλίνουν σε ένα σημείο ισορροπίας. Τα πειραματικά αποτελέσματα βασίζονται σε τέσσερις διαφορετικές τιμές της σταθεράς τιμολόγησης a_i, χρησιμοποιώντας διαφορετικές αναλογίες των κερδών διαδρομής. Βέλτιστα αποτελέσματα στο SIR των χρηστών, επιτυγχάνονται όταν ισχύει η απλή αναλογία της σταθεράς τιμολόγησης και των κερδών διαδρομής, που λαμβάνει ένας χρήστης. Ένα πρόβλημα το οποίο διαπιστώνουμε είναι η έλλειψη απόδειξης της σταθερότητας του αλγόριθμου σύγκλισης, διότι δεν αποδεικνύεται αναλυτικά ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει πάντα σε μία ισορροπία Nash, αλλά μόνο μέσω των πειραματικών αποτελεσμάτων.

3.2.3 Παίγνια Ελέγχου Ισχύος σε Κανάλι Διαλείψεων

Η παιγνιοθεωρητική μοντελοποίηση ενός προβλήματος ελέγχου ισχύος, παρουσιάζει συνεχείς βελτιώσεις σε όλους τους τομείς σχεδίασης. Στο μεγαλύτερο μέρος της βιβλιογραφίας, οι προτεινόμενες λύσεις έχουν ως αρχή ένα σύστημα στο οποίο επικρατεί Gaussian θόρυβος στο κανάλι μετάδοσης. Ο λόγος είναι ότι ένα σύστημα είναι πιο εύκολο να μοντελοποιηθεί για Gaussian θόρυβο, ενώ ένα κανάλι διαλείψεων θα προσέθετε ένα ακόμα βαθμό πολυπλοκότητας στο πρόβλημα. Υπάρχουν όμως κάποιες προτάσεις ή επεκτάσεις υπαρχόντων λύσεων για κανάλια διαλείψεων.

Μία επέκταση της συνάρτησης ευχαρίστησης των [8],[10] για κανάλι γρήγορων διαλείψεων Rayleigh και Rician, προτείνεται στο [22]. Η συνάρτηση ευχαρίστησης (3.7), αφορά ένα σύστημα CDMA μίας κυψέλης και ορίζεται ως ο λόγος της ωφέλιμης προς την δαπανούμενη ενέργεια.

$$u = \frac{L \cdot R \cdot P_c}{M \cdot p}\ bits/Joule \tag{3.7}$$

Το παίγνιο το οποίο σχηματίζεται, είναι μη συνεργατικό χωρίς τιμολόγηση και εξαρτάται από τη διαμόρφωση και την κωδικοποίηση του σήματος πληροφορίας, λόγω της μέσης πιθανότητας σωστής λήψης P_c. Το σήμα το οποίο λαμβάνεται από το σταθμό βάσης είναι:

$$r_i\ t\ = a_i \cdot s_i\ t\ + n(t) \tag{3.8}$$

Το a_i είναι ο παράγοντας των διαλείψεων διαδρομής, μεταξύ του χρήστη i και του σταθμού βάσης και είναι σταθερός για κάθε bit σε μία γρήγορη διάλειψη. Το $s_i\ t$ είναι το εκπεμπόμενο σήμα για κάθε bit και $n(t)$ ο θόρυβος που δημιουργείται στο εσωτερικό του σταθμού βάσης. Η διαμόρφωση που χρησιμοποιείται είναι BFSK και ο ρυθμός μετάδοσης είναι σταθερός για όλους τους παίκτες.

Εάν το μοντέλο γρήγορης διάλειψης το οποίο ακολουθείται είναι Rayleigh, τότε η μέση τιμή του SIR δίνεται από τον τύπο (3.9).

$$\gamma_\iota = \frac{W}{R} \cdot \frac{p_i \cdot h_i}{\sum_{k\neq i}^{N} p_k \cdot h_k + \sigma^2} \tag{3.9}$$

Η συνάρτηση ευχαρίστησης διαμορφώνεται ως:

$$u_i = \frac{L \cdot R}{M \cdot p_i} \cdot \left(1 - \frac{1}{\gamma_i}\right)^M \tag{3.10}$$

Στην περίπτωση την οποία το μοντέλο γρήγορης διάλειψης είναι Rician, τότε η τιμή του SIR είναι:

$$\gamma_i^s = \frac{\frac{W}{R} \cdot p_i \cdot h_i \cdot e^{s^2}}{\left(1 + s^2\right)\left(\sum_{k\neq i}^{N} p_k \cdot h_k + \sigma^2\right)} \tag{3.11}$$

Όπου το s^2 αναπαριστά την ισχύ των στοιχείων του σήματος, τα οποία δεν παρουσιάζουν διαλείψεις.[22]

Η συνάρτηση ευχαρίστησης δίνεται από την (3.12).

$$u_i = \frac{L \cdot R}{M \cdot p_i} \cdot \left(1 - \frac{1}{\gamma_i^s}\right)^M \tag{3.12}$$

Το μη συνεργατικό παίγνιο έχει τον ίδιο σχεδιασμό με τα [8],[10], οπότε ο αλγόριθμος σύγκλισης στην ισορροπία, το πλήθος των παικτών, καθώς και οι αποστάσεις τους από το σταθμό βάσης, είναι κοινός. Τα αποτελέσματα μας δείχνουν, ότι κάποιοι χρήστες έχουν στο σημείο ισορροπίας, λόγω διαλείψεων, την ίδια εκπεμπόμενη ισχύ. Επίσης τα επίπεδα ισχύος για τα δύο μοντέλα γρήγορων διαλείψεων, είναι αρκετά αυξημένα σε σχέση με το μοντέλο Gaussian θορύβου και αντίστοιχα οι απολαβές των χρηστών ελαττωμένες. Το SIR το οποίο επιτυγχάνεται δεν είναι κοινό για κάθε χρήστη και παρουσιάζει αύξηση για τα μοντέλα γρήγορων διαλείψεων, σε σύγκριση με το μοντέλο Gaussian θορύβου([8],[10]). Τέλος, ένα πρόβλημα το οποίο παρατηρείται, αφορά την σύγκλιση του παιγνίου και τον συντελεστή διασποράς του συστήματος. Από τα πειραματικά αποτελέσματα διαπιστώθηκε, ότι για να συγκλίνει το παίγνιο σε ισορροπία Nash, θα πρέπει να ισχύει $\frac{W}{R} > 100$.

Στο [24] γίνεται μία παρόμοια προσέγγιση με το [22]. Η μελέτη αφορά τα δύο μη συνεργατικά παίγνια των [8],[10], με και χωρίς τιμολόγηση, ενώ το κανάλι είναι Rayleigh γρήγορων διαλείψεων. Η σημαντική διαφορά, είναι ότι εξετάζεται η προσαρμοστικότητα της συνάρτησης ευχαρίστησης σε τυχαία τέτοια κανάλια, μέσω της θεωρίας εκμάθησης χωρίς κατανομές. Τέλος, στο [23] παρουσιάζεται μία άλλη πρόταση, όπου σε ένα κανάλι διαλείψεων, οι παίκτες εκτιμώντας την κατάσταση του καναλιού και τη θέση τους, επιλέγουν ευκαιριακά σε κάθε χρονοσχισμή αν θα εκπέμψουν. Η συνάρτηση ευχαρίστησης, προσανατολίζεται στην μεγιστοποίηση της ρυθμοαπόδοσης κάθε παίκτη.

3.2.4 Συνδυαστικά Παίγνια Ελέγχου Ισχύος

Παρακάτω προτείνονται κάποια άλλα μοντέλα ελέγχου ισχύος, τα οποία συνδυάζουν και άλλους παράγοντες του συστήματος, για να επιτευχθεί το βέλτιστο αποτέλεσμα.

Συνδυαστικά Παίγνια Δικτύου και Χρήστη

Σε κάποια παιγνιοθεωρητικά μοντέλα ελέγχου ισχύος, χρησιμοποιείται το δίκτυο ως ενεργός παίκτης του παιγνίου. Στο [30] προτείνεται ένας δικτυακός μηχανισμός τιμολόγησης, ώστε να περιοριστούν τα κοινά συμφέροντα των κινητών σταθμών και του δικτύου. Κάθε κινητός σταθμός, προσπαθεί να μεγιστοποιήσει την απλή συνάρτηση ευχαρίστησης του, ενώ το δίκτυο επιθυμεί την μεγιστοποίηση του κέρδους του. Η απλή συνάρτηση ευχαρίστησης του κάθε χρήστη ορίζεται ως ο λόγος της ρυθμοαπόδοσης του, προς την εκπεμπόμενη ισχύ του (3.13).

$$U_i\left(p_i, p_{-i}\right) = \frac{T_i(p)}{p_i} \tag{3.13}$$

Ο σταθμός βάσης κοστολογεί τον κάθε χρήστη με μία συνάρτηση, η οποία είναι ανάλογη της ρυθμοαπόδοσης του. Επομένως η συνάρτηση ευχαρίστησης του χρήστη την οποία επιθυμεί να μεγιστοποιήσει είναι:

$$U_i^{net}\left(p_i, p_{-i}\right) = \frac{T_i(p)}{p_i} - \lambda_i \cdot T_i \tag{3.14}$$

Το δίκτυο πρέπει να επιλέξει το κατάλληλο λ, ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του, το οποίο δίνεται από την παρακάτω συνάρτηση ευχαρίστησης:

$$U^{rev}(\lambda) = \sum_i \lambda_i \cdot T_i \tag{3.15}$$

Το παίγνιο το οποίο μοντελοποιείται, αφορά ένα CDMA σύστημα μίας κυψέλης και ο στόχος είναι η παράλληλη μεγιστοποίηση των δύο συναρτήσεων ευχαρίστησης και η σύγκλιση σε μία ισορροπία Nash. Αποδεικνύεται στο [30] ότι υπάρχει ισορροπία Nash για το παίγνιο του χρήστη, ενώ υπάρχει παράλληλα ένα σημείο όπου μεγιστοποιούνται οι απολαβές του δικτύου. Τα πειραματικά αποτελέσματα δείχνουν ότι οι χρήστες οι οποίοι έχουν καλύτερες συνθήκες στο κανάλι τους απολαμβάνουν καλύτερη ποιότητα υπηρεσιών ενώ προσφέρουν και το μέγιστο όφελος στο δίκτυο.

Στο [27] μοντελοποιείται ένα παίγνιο κατανεμημένου διαμοιρασμού πόρων. Στους χρήστες ανατίθεται το πρόβλημα του ελέγχου ισχύος, ενώ στο δίκτυο της ρυθμοαπόδοσης. Ένας κατανεμημένος συνδυαστικός αλγόριθμος, πετυχαίνει ένα κοινό σημείο ισορροπίας για τα δύο μη συνεργατικά παίγνια. Στο σημείο ισορροπίας Nash τα αποτελέσματα πλησιάζουν το βέλτιστο.

Συνδυαστικά Παίγνια Ελέγχου Ισχύος και Παραμέτρων του Δικτύου

Στο [26] προτείνεται ένα κατανεμημένο παίγνιο ελέγχου ισχύος και κατανομής του κέρδους διασποράς, σε ένα CDMA σύστημα. Το δίκτυο αποτελείται από K σταθμούς βάσης και M κινητούς σταθμούς. Κάθε χρήστης ανατίθεται σε τουλάχιστον ένα σταθμό βάσης και εκπέμπει στους επιλεγμένους σταθμούς βάσης με διαφορετικό κέρδος διασποράς. Στόχος του παιγνίου, είναι ο προσδιορισμός της ισχύος και του κέρδους διασποράς κάθε χρήστη, ώστε να επιτευχθεί η μεγιστοποίηση της ρυθμοαπόδοσης και η μείωση της εκπεμπόμενης ισχύος. Τα πειραματικά αποτελέσματα μας δείχνουν ότι το παίγνιο τις περισσότερες φορές συγκλίνει γρήγορα σε μία ισορροπία Nash, όπου πετυχαίνεται και η βέλτιστη κατανομή ισχύος.

Στο [28] προτείνεται ένα ενεργειακά αποδοτικό παίγνιο ελέγχου ισχύος. Για να επιτευχθεί αυτό ο χρήστης μπορεί να μεταβάλλει την εκπεμπόμενη ισχύ του, το κέρδος διασποράς και τον τύπο του δέκτη του. Η συνάρτηση ευχαρίστησης είναι παρόμοια με την (3.13) και αποδεικνύεται ότι για κάθε προτεινόμενο τύπο δέκτη υπάρχει μία αποδοτική ισορροπία Nash του μη συνεργατικού παιγνίου.

Στο [25] ο συνδυασμός του ελέγχου ισχύος και του ελέγχου του ρυθμού απόδοσης, έχει στόχο την βελτίωση της χωρητικότητας του δικτύου και της ενεργειακής απόδοσης. Το μη συνεργατικό παίγνιο έχει σημείο ισορροπίας Nash, στο οποίο οι χρήστες πετυχαίνουν τις ελάχιστες απαιτήσεις ποιότητας υπηρεσιών που έχουν θέσει.

3.3 Θέματα Προς Μελέτη

Η θεωρία παιγνίων έχει δώσει κάποιες εναλλακτικές λύσεις, σε θέματα που αφορούν τις ασύρματες επικοινωνίες, αλλά βρίσκεται ακόμα σε αρχικό στάδιο μελέτης και τίθενται κάποια θέματα τα οποία δεν έχουν ακόμα ερευνηθεί διεξοδικά. Παρακάτω παραθέτουμε κάποια από τα θέματα αυτά.

3.3.1 Ο Ρόλος της Πληροφορίας σε Κατανεμημένες Αποφάσεις

Με την εξέλιξη των ασύρματων επικοινωνιών δημιουργείται η τάση για αποκεντροποιημένα δίκτυα, στα οποία κάθε κόμβος μπορεί να πάρει διάφορους ρόλους και να αλλάζει τα χαρακτηριστικά λειτουργίας του, χωρίς να εξαρτάται από ένα σταθμό βάσης. Σε αυτά τα δίκτυα συμπεριλαμβάνονται τα ad-hoc και τα δίκτυα αισθητήρων.

Τα χαρακτηριστικά αυτά των δικτύων, μας οδηγούν στην ανάγκη δόμησης ενός μηχανισμού κατανεμημένης λήψης αποφάσεων, ο οποίος θα εκτιμάει την κατάσταση του δικτύου και του καναλιού μετάδοσης. Για το λόγο αυτό, θα πρέπει ο κάθε κόμβος να έχει πρόσβαση στις πληροφορίες, οι οποίες αφορούν την κατάσταση του δικτύου μία δεδομένη στιγμή, επί του συνόλου των υπόλοιπων κόμβων.

Όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο 1, τα παίγνια δεν έχουν πάντα πλήρη ενημέρωση των προηγούμενων κινήσεων ή της κατάστασης των άλλων παικτών και τα ονομάζαμε παίγνια ατελούς πληροφόρησης. Εάν σε ένα δίκτυο, κάποιοι κόμβοι χρησιμοποιούν κάποια άλλη συνάρτηση ευχαρίστησης ή άλλο πεδίο στρατηγικών και δεν υπάρχει πλήρης γνώση των συνθηκών εκτέλεσης του παιγνίου αυτού, το σύστημα μπορεί να αποτελέσει ένα Bayesian παίγνιο. Τέτοιες συνθήκες μπορούν να διαμορφωθούν σε ένα ad-hoc δίκτυο, όπου δεν υπάρχει κεντρική μονάδα ελέγχου και ενημέρωσης του δικτύου. Η λύση του παιγνίου τότε αποκτάει μεγαλύτερη πολυπλοκότητα γιατί δεν υπάρχει λύση μέσω της κοινής ισορροπίας Nash.

3.3.2 Σχεδιασμός Μηχανής

Ο σχεδιασμός μηχανής αποτελεί μία περιοχή έρευνας της θεωρίας παιγνίων όπου μπορεί να μας δώσει ένα παιγνιοθεωρητικό μοντέλο βέλτιστο και αποδοτικό ([19]). Στις διάφορες εφαρμογές γίνεται προσπάθεια για τον σχεδιασμό της συνάρτησης ευχαρίστησης και των υπόλοιπων χαρακτηριστικών ενός παιγνίου, έτσι ώστε να μας δίνουν βέλτιστα αποτελέσματα. Το θετικό σημείο του εγχειρήματος της σχεδίασης μηχανής, σε αντίθεση με την παραδοσιακή εφαρμογή της θεωρίας παιγνίων στην οικονομία, είναι ότι οι παίκτες είναι λογικοί και επιθυμούν πάντα να βρίσκονται σε ισορροπία. Συνεπώς, μειώνεται η πολυπλοκότητα της σχεδίασης και έχουμε πιο αποδοτικά αποτελέσματα.

3.3.3 Μοντελοποίηση της Κίνησης

Στα περισσότερα παιγνιοθεωρητικά μοντέλα των ασύρματων επικοινωνιών δεν περιλαμβάνεται η κίνηση των χρηστών και το παίγνιο είναι στατικό. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μελετάμε ένα στιγμιότυπο του δικτύου. Στην πραγματικότητα όμως ένα παίγνιο ασύρματου δικτύου επαναλαμβάνεται και οι συνθήκες είναι διαφορετικές σε κάθε βασικό στάδιο επανάληψης. Συνεπώς, απαιτείται η συνεχής πληροφόρηση των κόμβων για την κατάσταση του δικτύου, έτσι ώστε να προσαρμόζονται κάθε φορά στην αντίστοιχη ισορροπία.

3.3.4 Μικτές Στρατηγικές

Μέχρι στιγμής στην βιβλιογραφία, για την παιγνιοθεωρητική μοντελοποίηση κάποιων ασύρματων συστημάτων, γίνεται στην πλειοψηφία της η χρήση καθαρών στρατηγικών. Αυτό σημαίνει ότι γίνεται απευθείας αντιστοιχία μίας στρατηγικής και μίας ενέργειας από το διαθέσιμο πεδίο τους. Η επιλογή καθαρών στρατηγικών κατά την μοντελοποίηση, μας δίνει πάντα ισχυρές ισορροπίες Nash, αλλά παράλληλα γίνονται πάντα οι αναγκαίες υποθέσεις και «παραχωρήσεις», έτσι ώστε να μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη της ισορροπίας. Η επιλογή μεικτών στρατηγικών και η λήψη αποφάσεων, μέσω μίας πιθανοτικής κατανομής των ενεργειών παραμένει αντικείμενο μελέτης.

Κεφάλαιο 4:
Μη Συνεργατική Μοντελοποίηση του Ελέγχου Ισχύος

Όπως αναφέραμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, ο έλεγχος ισχύος έχει συνδεθεί ιδιαίτερα με την εφαρμογή της θεωρίας παιγνίων στις ασύρματες επικοινωνίες. Θα παρουσιάσουμε και θα προσομοιώσουμε, ένα μη συνεργατικό μοντέλο κατανομής της ισχύος άνω ζεύξης, σε ένα κινητό σύστημα επικοινωνιών CDMA μίας κυψέλης. Η κατανομή της ισχύος, θα γίνει σύμφωνα με τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται στη μη συνεργατική θεωρία παιγνίων.

Το μοντέλο το οποίο θα μελετήσουμε, προτάθηκε από τους Goodman – Saraydar – Mandayam το 2000 και αποτέλεσε την αρχή για άλλες βελτιωμένες προτάσεις στον τομέα αυτό.

4.1 Το μοντέλο των Goodman – Saraydar – Mandayam

Στην εργασία αυτή n παίκτες (κινητοί σταθμοί) προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν την ευχαρίστηση τους, δομώντας έτσι ένα μη συνεργατικό παίγνιο. Η συνάρτηση ευχαρίστησης του παιγνίου εκφράζει ένα δείκτη QoS που λαμβάνει κάθε παίκτης από το δίκτυο.

Σκοπός μας είναι να καταλήξουμε σε μία ισορροπία Nash, όπου είναι και η καλύτερη επιλογή ισχύος για κάθε παίκτη. Το παίγνιο αυτό έχει δύο σκέλη, που αφορούν τη χρησιμοποίηση ή μη τιμολόγησης στη συνάρτηση ευχαρίστησης. Η διαφοροποίηση αυτή γίνεται για να μελετήσουμε την επίδραση της τιμολόγησης στην ισορροπία Nash, υπό την έννοια της βελτιστοποίησης των στρατηγικών κατά Pareto.

4.1.1 Συνάρτηση Ευχαρίστησης

Θεωρούμε ένα CDMA κυψελωτό σύστημα επικοινωνιών με τα εξής χαρακτηριστικά:

- Το κανάλι μετάδοσης είναι λευκού προσθετικού Gaussian θορύβου (AWGN).
- Κάθε χρήστης εκπέμπει $L\ (bits)$ πληροφορίας σε πλαίσια των $M\ (bits)$, με $M > L$.
- $R\ (bits/sec)$ ο ρυθμός μετάδοσης.
- $W\ (Hz)$ το διαθέσιμο εύρος ζώνης διασποράς φάσματος.
- $p\ (Watts)$ η εκπεμπόμενη ισχύς.
- σ^2 η ισχύς του AWGN.

- P_c είναι η πιθανότητα σωστής λήψης ενός πλαισίου στον δέκτη (*frame success rate, FSR*). Η P_c είναι μία συνάρτηση του SIR η οποία καθορίζεται στο τερματικό από τον σταθμό βάσης και εξαρτάται από τις ιδιότητες του συστήματος (διαμόρφωση, διάδοση, δομή του δέκτη).

Συμβολίζουμε με K, τον αριθμό των εκπομπών που απαιτούνται για τη σωστή λήψη ενός πακέτου στο δέκτη. Η συνάρτηση πιθανότητας μάζας της τυχαίας μεταβλητής K είναι:

$$P_K(k) = \begin{cases} P_c(1-P_c)^{k-1} & k = 1,2,\cdots,K \\ 0 & διαφορετικά \end{cases} \qquad (4.1)$$

με τις μεταδόσεις να θεωρούνται στατιστικά ανεξάρτητες.

Η αναμενόμενη τιμή του K είναι $E(K) = \frac{1}{P_c}$. Ο συνολικός χρόνος μετάδοσης ο οποίος απαιτείται για σωστή λήψη είναι $\frac{K \cdot M}{R}$ $seconds$ και η συνολική ενέργεια η οποία καταναλώνεται είναι $\frac{p \cdot K \cdot M}{R}$ $Joules$ με αναμενόμενη τιμή $\frac{p \cdot M}{R \cdot P_c}$ $Joules$. Συνεπώς, για την επιτυχή μετάδοση ενός πακέτου L $bits$, ένας τερματικός σταθμός καταναλώνει ενέργεια $\frac{p \cdot M}{R \cdot P_c}$ $Joules$.

Η συνάρτηση ευχαρίστησης του χρήστη μπορεί να εκφραστεί ως ο λόγος, των επιτυχώς ληφθέντων $bits$ προς την ενέργεια που καταναλώνεται. Σύμφωνα με τα [8],[10], η συνάρτηση ευχαρίστησης u, για κάθε χρήστη θα είναι:

$$u = \frac{E_{benefit}}{E_{energy\ cost}} = \frac{L}{p \cdot M / (R \cdot P_c)} = \frac{L \cdot R \cdot P_c}{M \cdot p}\ bits/Joule \qquad (4.2)$$

Υποθέτουμε ότι στο σύστημα μας υπάρχει τέλειος εντοπισμός και καμία διόρθωση των σφαλμάτων. Εκφράζουμε το FSR ως $P_c = (1 - P_e)^M$, όπου P_e το ποσοστό σφάλματος bit (BER). Για κανάλι AWGN το BER εκφράζεται στον Πίνακα 4.1.

$\boldsymbol{BPSK}$	$Q(\sqrt{2 \cdot \gamma})$
$\boldsymbol{DPSK}$	$\frac{1}{2} \cdot e^{-\gamma}$
$\boldsymbol{Coherent\ FSK}$	$Q(\sqrt{\gamma})$
$\boldsymbol{Non-coherent\ FSK}$	$\frac{1}{2} \cdot e^{-\gamma/2}$

Πίνακας 4.1: *Το BER ως συνάρτηση του SIR για διάφορα σχήματα διαμόρφωσης*

Σε κάθε περίπτωση το BER φθίνει μονοτονικά με το SIR, συνεπώς η P_c αυξάνει μονοτονικά με το SIR. Εκφράζοντας το P_c ως συνάρτηση του SIR (μέσω του P_e) και αντικαθιστώντας το στη συνάρτηση ευχαρίστησης u, λαμβάνουμε μία συνάρτηση ευχαρίστησης εξαρτώμενη από το SIR.

Σε αυτό το σημείο όμως προκύπτει ένα μαθηματικό πρόβλημα στον ορισμό της u. Στην περίπτωση την οποία $p = 0$, για όλα τα σχήματα διαμόρφωσης, η καλύτερη στρατηγική για τον δέκτη είναι να μαντέψει το κάθε bit πληροφορίας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα $P_c = 2^{-M}$, δηλαδή η συνάρτηση ευχαρίστησης να οδηγείται στο άπειρο ([8],[10]). Κάθε παίκτης θα πρέπει να εκπέμπει με ισχύ μηδενική, ώστε να μεγιστοποιήσει την ευχαρίστηση του και περιμένοντας τον δέκτη να μαντέψει τα σωστά δεδομένα.

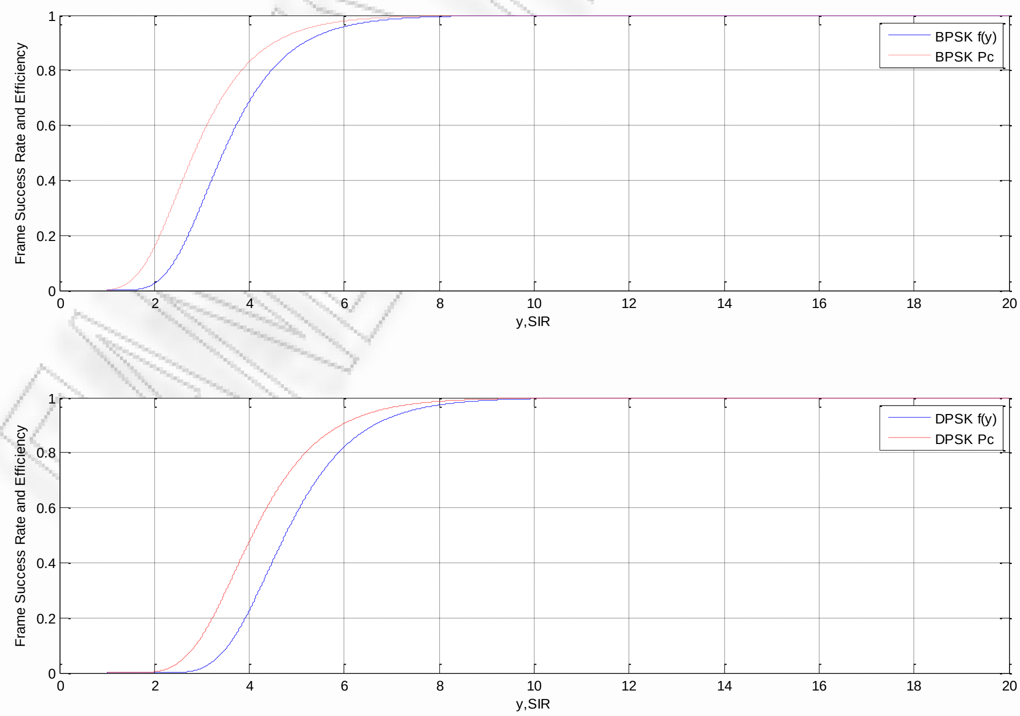
4.1.2 Συνάρτηση Αποδοτικότητας

Για την αποφυγή της περίπτωσης αυτής, γίνεται πρόταση στα [8],[10] της αντικατάστασης της P_c με μία *συνάρτηση αποδοτικότητας* $f(\gamma)$, η οποία προσεγγίζει την P_c ξεπερνώντας το μαθηματικό πρόβλημα που δημιουργείται στον ορισμό της συνάρτησης ευχαρίστησης. Η συνάρτηση αποδοτικότητας ορίζεται ως:

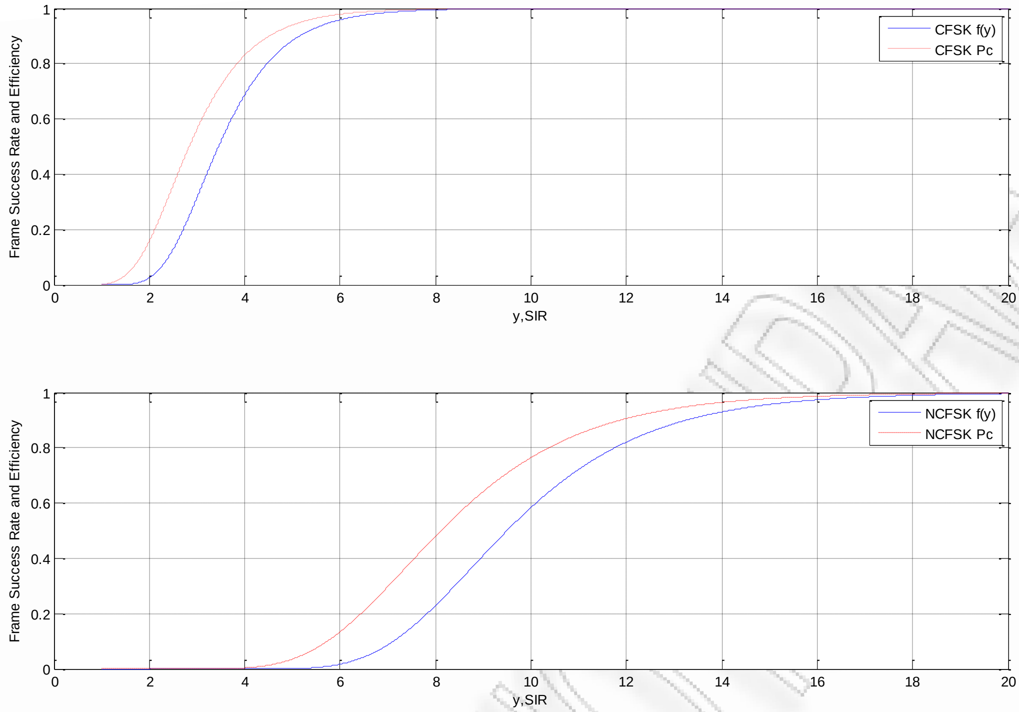
$$f(\gamma) = (1 - 2 \cdot P_e)^M \tag{4.3}$$

Η συνάρτηση αυτή προσεγγίζει την καμπύλη της P_c (Εικόνα 4.1.α, Εικόνα 4.1.β) και έχει τις ιδιότητες:

$$\begin{gathered} f(0) = 0\ , p = 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ f(\infty) = 1 \end{gathered} \tag{4.4}$$



Εικόνα 4.1.α: *Η $\boldsymbol{f(\gamma)}$ και η $\boldsymbol{P_c}$ ως συνάρτηση του SIR, για σχήματα διαμόρφωσης BPSK και DPSK.*



Εικόνα 4.1.β: *Η $\boldsymbol{f}\ \boldsymbol{\gamma}$ και η $\boldsymbol{P_c}$ ως συνάρτηση του SIR, για σχήματα διαμόρφωσης CFSK και NCFSK.*

Η συνάρτηση ευχαρίστησης η οποία προκύπτει είναι:

$$u = \frac{L \cdot R \cdot f\ \gamma}{M \cdot p} \quad \frac{bits}{Joule} \tag{4.5}$$

4.1.3 Μη Συνεργατικό Παίγνιο Ελέγχου Ισχύος

Έχοντας ορίσει τη συνάρτηση ευχαρίστησης, μπορούμε να ορίσουμε και τα υπόλοιπα στοιχεία του παιγνίου. Αυτό που θα πετύχουμε, στην περίπτωση αυτή, είναι όλοι οι παίκτες να συγκλίνουν σε ένα σημείο ισορροπίας το οποίο να παρέχει ένα σταθερό ελάχιστο SIR σε όλους τους παίκτες. Το SIR αυτό μας οδηγεί σε ένα σύστημα το οποίο είναι πιο αποδοτικό σε υπηρεσίες φωνής.

Έστω $G = \ N, P, u\ $ το μη συνεργατικό παίγνιο κανονικής μορφής (ΜΣΠ), με τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- N ένα πεπερασμένο σύνολο n παικτών, με δείκτη i.
- $P \mapsto P \subset \mathbb{R}^n$ το πεδίο στρατηγικών των παικτών. Κάθε παίκτης i επιλέγει μία ισχύ p_i τέτοια ώστε $p_i \in P$. Το πεδίο στρατηγικών είναι για κάθε χρήστη ένα συμπαγές, κυρτό σύνολο με ελάχιστες και μέγιστες επιτρεπτές ισχύς. Για το μη συνεργατικό παίγνιο ελέγχου ισχύος $P_i = \ 0, p_i\ $, όπου p_i η μέγιστη επιτρεπτή τιμή ισχύος του συστήματος μας.
- $u_i\ p$ η συνάρτηση ευχαρίστησης του παίκτη i. Η συνάρτηση ευχαρίστησης για κάθε χρήστη είναι:

$$u\ \ p_i, p_{-i}\ \ = \frac{L \cdot R}{M \cdot p_i} \cdot f\ \ \gamma_i\ \ \ bits/Joule \tag{4.6}$$

- γ_i είναι το SIR του παίκτη i, το οποίο ορίζεται ως

$$\gamma_i = \frac{W}{R} \cdot \frac{h_i p_i}{{}_{j \neq i} h_j p_j + \sigma^2} \tag{4.7}$$

- h_i είναι το κέρδος της διαδρομής, από τον τερματικό κινητό σταθμό στη βάση.

Ισορροπία Nash στο ΜΣΠ

Το ΜΣΠ μπορούμε να το μελετήσουμε για κάθε πιθανό τύπο διαμόρφωσης όπως ορίζεται στον Πίνακα 4.1. Εάν αναπτύξουμε τη συνάρτηση ευχαρίστησης πλήρως, αντικαθιστώντας τη συνάρτηση αποδοτικότητας και το SIR, διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση ευχαρίστησης, είναι μία συνάρτηση η οποία εξαρτάται από τις τιμές των ισχύων του παίκτη i, καθώς και των υπόλοιπων παικτών j.

Σε μία ισορροπία Nash, δεδομένου των ισχύων των άλλων παικτών, κανένας χρήστης δεν μπορεί να βελτιώσει την ευχαρίστηση του κάνοντας μεμονωμένες μεταβολές της ισχύος του. Η ισχύς η οποία επιλέγεται από έναν παίκτη, είναι μία βέλτιστη απόκριση στις επιλεγμένες ισχύς των άλλων παικτών. Αυτό που πρέπει να μελετήσουμε είναι εάν το παίγνιο αυτό, έχει μία ισορροπία Nash στις καθαρές στρατηγικές του. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2 για να έχουμε ισορροπία Nash στις καθαρές στρατηγικές του παιγνίου αυτού θα πρέπει:

1. Το P_i να είναι ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$.
2. Η $u_i\ \ p$ να είναι συνεχής στο P και οιονεί κοίλη στο p_i.

Στο [10] αποδεικνύεται το Θεώρημα 1.2 για το ΜΣΠ, με τη συνάρτηση αποδοτικότητας να είναι ορισμένη, μόνο για $Non-coherent\ FSK$ διαμόρφωση. Επίσης στο [11] αποδεικνύεται ότι η u_i είναι οιονεί κοίλη στο p_i, για όλα τα σχήματα διαμόρφωσης τα οποία παρατίθενται στον Πίνακα 4.1.

Ισορροπία Nash Κοινού SIR

Όπως είπαμε στόχος μας είναι το σημείο ισορροπίας του παιγνίου αυτού να δίνει στους παίκτες ένα κοινό SIR.

Για ένα δεδομένο διάνυσμα παρεμβολών p_{-i}, η ισχύς p_i η οποία μεγιστοποιεί την u_i, ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$f'\ \ \gamma_i\ \ \cdot \gamma_i - f\ \ \gamma_i\ \ = 0, \qquad i = 1, \cdots, n \tag{4.8}$$

Εάν υποθέσουμε ότι $p_i \leq p_i$, για κάθε i, μολονότι η συνθήκη είναι ίδια για όλους τους χρήστες, *υπάρχει επίσης μία μόνο τιμή του SIR η οποία την ικανοποιεί*. Η συνθήκη εξαρτάται όπως βλέπουμε από την συνάρτηση αποδοτικότητας, επομένως για την επίτευξη του κοινού *SIR* υποθέτουμε ότι όλοι οι χρήστες εφαρμόζουν τον ίδιο τύπο διαμόρφωσης άρα και κοινό $f\ \ \gamma$.

Συνεπώς υπάρχει μία μοναδική ισορροπία Nash στο ΜΣΠ, στην οποία όλοι οι χρήστες πετυχαίνουν ένα κοινό SIR με τιμή γ, εάν οι ισχύς των χρηστών στο σημείο ισορροπίας είναι μικρότερες από την μέγιστη επιτρεπτή ισχύ p_i του συστήματος.[8],[10]

Το μόνο σημείο το οποίο δεν γνωρίζουμε, είναι η πιθανότητα να μην υπάρχει ένα τέτοιο διάνυσμα p στο οποίο όλοι οι χρήστες να πετυχαίνουν ισορροπία κοινού SIR. Αποδεικνύεται στο [10] ότι για πετύχουμε τον στόχο του κοινού *SIR* θα πρέπει εκτός από τον περιορισμό $p_i \leq p_i$ να υπάρχει και ένας περιορισμός στο πλήθος των χρηστών. Ο περιορισμός αυτός δίνεται από τον παρακάτω τύπο.

$$n < 1 + \frac{W}{R \cdot \gamma} \tag{4.9}$$

Οι ισχύς στην ισορροπία μπορούν να βρεθούν μελετώντας την συνάρτηση του *SIR*. Προσθέτοντας και στα δύο μέλη της εξίσωσης $\frac{R \cdot \gamma}{W} \cdot h_i p_i$ έχουμε

$$1 + \frac{R \cdot \gamma}{W} \quad \cdot h_i p_i = \frac{R \cdot \gamma}{W} \cdot \sum_{j=1}^{n} h_j p_j + \sigma^2 \qquad , \gamma\iota\alpha\ i = 1,2,\cdots,n \tag{4.10}$$

Παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος της εξίσωσης είναι ανεξάρτητο του χρήστη με δείκτη i, επομένως η παραπάνω εξίσωση είναι όμοια για κάθε i. Στην ισορροπία, οι λαμβανόμενες ισχύς όλων των χρηστών είναι ίσες, οπότε $h_i p_i = h_j p_j$για κάθε $i, j \in N$. Επομένως η εξίσωση που μας δίνει το κοινό SIR είναι

$$\gamma = \frac{W}{R} \cdot \frac{h_i p_i}{n - 1 \quad \cdot h_i p_i + \sigma^2} \tag{4.11}$$

Λύνοντας ως προς το p_i, γνωρίζοντας το γ από την εξίσωση (4.8), έχουμε την τιμή της εκπεμπόμενης ισχύος κάθε χρήστη στο σημείο ισορροπίας.

$$p_i = \frac{\gamma \cdot \sigma^2}{h_i \cdot \quad \frac{W}{R} - \gamma \cdot \quad n - 1} \tag{4.12}$$

Παρατηρούμε ότι εφόσον $h_i p_i = h_j p_j$ για όλα τα $i \neq j$, η κατάταξη για το κέρδος διαδρομής των χρηστών θα είναι αντιστρόφως ανάλογη των ισχύων και ανάλογη της ευχαρίστησης, δηλαδή εάν $h_i > h_j$, τότε $p_i < p_j$ και $u_i > u_j$. Αυτό σημαίνει ότι στην ισορροπία οι χρήστες με καλύτερο κέρδος διαδρομής πετυχαίνουν μεγαλύτερη ευχαρίστηση και δαπανούν λιγότερη ισχύ. Τέλος μπορούμε να πούμε ότι, εάν ένα από τα κριτήρια του πλήθους των χρηστών και της μέγιστης ισχύος δεν ισχύουν, θα έχουμε ως αποτέλεσμα στην ισορροπία Nash, ένα μέρος των χρηστών να εκπέμπουν με ισχύ $p_i = p_i$ και τους υπόλοιπους χρήστες να πετυχαίνουν $\gamma_i = \gamma$.[10]

4.1.4 Βέλτιστη Ισορροπία και Τιμολόγηση

Η ισορροπία του μη συνεργατικού παιγνίου μας δίνει μέγιστη ευχαρίστηση. Είναι όμως πιθανό να βρεθούν κάποια διανύσματα ισχύος τα οποία θα μας δίνουν καλύτερες τιμές ευχαρίστησης [8]. Εάν ισχύει αυτή η υπόθεση, τότε το μη συνεργατικό παίγνιο δεν θα είναι βέλτιστο κατά Pareto.

Αναζητούμε τις περαιτέρω βελτιώσεις που μπορούν να προκύψουν στο αποτέλεσμα του μη συνεργατικού παιγνίου. Τα διανύσματα ισχύος τα οποία θα επιφέρουν βελτίωση στην ευχαρίστηση των χρηστών, θεωρούμαι ότι επικρατούν κατά Pareto. Υποθέτουμε ότι κάθε χρήστης μειώνει την ισχύ του στην ισορροπία, κατά ένα παράγοντα μ, $0 < \mu \leq 1$. Το νέο διάνυσμα ισχύος το οποίο προκύπτει είναι $\mu p = \mu p_1, \cdots, \mu p_n$ και η συνάρτηση ευχαρίστησης για κάθε παίκτη i είναι

$$u_i \; \mu \; = \frac{L \cdot R}{M \cdot \mu \cdot p_i} \cdot f \; \gamma_i^{\mu} \quad bits/Joule \tag{4.13}$$

Όπου

$$\gamma_i^{\mu} = \frac{W}{R} \cdot \frac{\mu h_i p_i}{\sum_{j=1, j \neq i}^{n} \mu h_j p_j + \sigma^2} \tag{4.14}$$

Εξετάζουμε την συμπεριφορά της τιμής της ευχαρίστησης όλων των χρηστών, μεταβάλλοντας την τιμή του μ. Μεταβάλλοντας τις τιμές του μ από το 1 στο 0, θα έχουμε μείωση στην εκπεμπόμενη ισχύ των χρηστών· εάν παράλληλα παρατηρηθεί βελτίωση στις τιμές της ευχαρίστησης τότε υπάρχει κάποιο άλλο διάνυσμα ισχύων το οποίο επικρατεί κατά Pareto του σημείου ισορροπίας του ΜΣΠ. Για να το διαπιστώσουμε, παίρνουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης ευχαρίστησης ως προς μ και την εξισώνουμε για $\mu = 1$, δηλαδή για το μη συνεργατικό παίγνιο.

$$\frac{\partial u_i \; \mu}{\partial \mu}\Big|_{\mu=1} = \frac{L \cdot R}{M \cdot p_i} \cdot f \; \gamma_i \quad \cdot \quad \frac{\sigma^2}{\sum_{j=1, j \neq i}^{n} h_j p_j + \sigma^2} - 1 \tag{4.15}$$

Η (4.15) μας δίνει αρνητική τιμή, συνεπώς εάν ελαττώσουμε την τιμή του μ θα έχουμε αύξηση στην τιμή της ευχαρίστησης των χρηστών. Αυτό σημαίνει ότι το μη συνεργατικό παίγνιο δεν είναι βέλτιστο κατά Pareto στην ισορροπία και πρέπει να αναζητήσουμε λύσεις για τη βελτίωση του.

Μέσω της τιμολόγησης μπορούμε να πετύχουμε αύξηση των επιδόσεων του συστήματος, προτρέποντας τους χρήστες να συνεργαστούν διατηρώντας παράλληλα τη μη συνεργατικότητα του παιγνίου. Γενικά η τιμολόγηση εξυπηρετεί δύο σκοπούς, προσφέροντας περισσότερους πόρους στο σύστημα και ενθαρρύνοντας τους χρήστες να χρησιμοποιούν τους πόρους του συστήματος πιο αποδοτικά. Εμείς θα μελετήσουμε την εισαγωγή της τιμολόγησης στο παίγνιο μας, με σκοπό να πετύχουμε τον δεύτερο σκοπό.

Στην ισορροπία κοινού SIR η ισχύς $h_i p_i$ η οποία λαμβάνεται στον δέκτη είναι ίδια για όλα τα i. Συνεπώς στο σημείο ισορροπίας η συνάρτηση ευχαρίστησης είναι

$$u_i = \frac{h_i \cdot L \cdot R \cdot f\ \gamma}{M \cdot h_i p_i}\ bits/Joule \tag{4.16}$$

Εφόσον τα γ και $h_i p_i$ είναι ίδια για όλους τους χρήστες, η ευχαρίστηση στην ισορροπία μπορεί να καταταχθεί σύμφωνα με το κέρδος διαδρομής. Σε ένα AWGN κανάλι, με την απουσία εξασθένισης λόγω σκίασης, οι απώλειες μειώνονται με την απόσταση από το σταθμό βάσης. Συνεπώς οι χρήστες οι οποίοι βρίσκονται πιο κοντά στον σταθμό βάσης, πετυχαίνουν μεγαλύτερη ευχαρίστηση στο σημείο ισορροπίας του μη συνεργατικού παιγνίου. Εάν ορίσουμε ως $d_i\ (m)$ την απόσταση του χρήστη i από το σταθμό βάσης, τότε στο σημείο ισορροπίας θα έχουμε την παρακάτω κατάταξη των μεγεθών για όλους τους χρήστες.

$$\begin{gathered} d_1 < d_2 < \cdots < d_n \\ h_1 > h_2 > \cdots > h_n \\ u_1 > u_2 > \cdots > u_n \\ p_1 < p_2 < \cdots < p_n \end{gathered} \tag{4.17}$$

Η στρατηγική της μεγιστοποίησης της ευχαρίστησης, οδηγεί τους χρήστες στην εκπομπή σε πολύ υψηλές στάθμες ισχύος. Ένας τρόπος για να ενθαρρύνουμε τους χρήστες να εκπέμπουν σε χαμηλότερα επίπεδα ισχύος είναι, ζημιώνοντας τον χρήστη j κατά την μεταβολή της ισχύος του παίκτη i. Ο συντελεστής ο οποίος προκαλεί τη ζημία αυτή ([8]) ορίζεται ως

$$C_{ij} = -\frac{\vartheta u_j}{\vartheta p_i} \cdot p_i \quad bits/Joule \quad ,για\ κάθε\ i \neq j \tag{4.18}$$

Η συνολική βλάβη η οποία προκαλείται σε όλους τους χρήστες από τον χρήστη i, κατά την εκπομπή με ισχύ p_i είναι,

$$C_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} C_{ij}\ bits/Joule \tag{4.19}$$

Για το σύστημα το οποίο μελετάμε, η βλάβη η οποία προκαλείται στο σημείο ισορροπίας, είναι μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση της απόστασης του χρήστη από το σταθμό βάσης ([10]). Επομένως επεκτείνοντας την κατάταξη των μεγεθών στο σημείο ισορροπίας, έχουμε για τον συντελεστή βλάβης

$$C_1 < C_2 < \cdots < C_n \tag{4.20}$$

4.1.5 Μη Συνεργατικό Παίγνιο Ελέγχου Ισχύος με Τιμολόγηση

Έχοντας υπόψη τις επισημάνσεις περί της βελτιστοποίησης του παιγνίου, αναπτύσσουμε ένα μη συνεργατικό παίγνιο ελέγχου ισχύος με τιμολόγηση (ΜΣΠΤ). Έστω $G_c = \ N, P_i, u_i^c$, ένα τέτοιο μη συνεργατικό παίγνιο n παικτών με τιμολόγηση. Η συνάρτηση του παιγνίου αυτού διαμορφώνεται ως εξής:

$$u_i^c \ p \ = u_i \ p \ - c_i \ p_i, p_{-i} \qquad (4.21)$$

όπου $c_i : P \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ η συνάρτηση τιμολόγησης για κάθε $i \in N$.

Η συνάρτηση τιμολόγησης μπορεί να εκφραστεί με διάφορους τρόπους. Γνωρίζοντας ότι στην ισορροπία ο χρήστης ο οποίος εκπέμπει περισσότερη ισχύ προκαλεί και περισσότερη ζημιά στο σύστημα, προτείνεται μία ποινή στην ευχαρίστηση του χρήστη, η οποία αυξάνεται με την ισχύ την οποία εκπέμπει. Στην παρούσα εργασία η τιμολόγηση είναι γραμμική, της μορφής

$$c_i \ p_i, p_{-i} \ = c \cdot a_i \cdot p_i \qquad (4.22)$$

όπου τα c $(b/sec/W^2)$ και a_i είναι θετικά βαθμωτά μεγέθη.

Οι τιμές οι οποίες θα δοθούν στα c και a_i πρέπει να εξεταστούν, ώστε να πετυχαίνουν για ένα δεδομένο σύστημα, τη μέγιστη δυνατή ευχαρίστηση στο σημείο ισορροπίας.

Όπως φαίνεται και από τη συνάρτηση ευχαρίστησης του ΜΣΠΤ, εάν είχαμε μηδενικούς συντελεστές c ή a_i, θα προέκυπτε το ΜΣΠ. Οπότε θα περιμέναμε να διατηρούνται τα χαρακτηριστικά του ΜΣΠ, τα οποία μας εξασφαλίζουν την ύπαρξη ισορροπίας Nash στις καθαρές στρατηγικές. Δυστυχώς όμως το μη συνεργατικό παίγνιο με τιμολόγηση δεν έχει οιονεί κοίλες συναρτήσεις ευχαρίστησης ([10]), συνεπώς η συνθήκες κυρτότητας και διαφορισιμότητας, οι οποίες υποδεικνύονται από το Θεώρημα 1.2 και μας εξασφαλίζουν την ύπαρξη ισορροπίας Nash στις καθαρές στρατηγικές των χρηστών, δεν ισχύουν. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε την θεωρία των υπεραρθρωτών παιγνίων για να αποδείξουμε την ύπαρξη ισορροπίας Nash.

Υπεραρθρωτά Παίγνια και ΜΣΠΤ

Η ύπαρξη ισορροπίας Nash στα υπεραρθρωτά παίγνια διατυπώνεται στο Θεώρημα 1.14. Για να αποδείξουμε ότι ένα παίγνιο είναι υπεραρθρωτό, πρέπει να ισχύουν οι συνθήκες του Ορισμού 1.15.

Ξεκινάμε την ανάλυση για την ύπαρξη ισορροπίας Nash στο ΜΣΠΤ, εξετάζοντας την αρχική μη τροποποιημένη μορφή των παιγνίων που διατυπώσαμε, δηλαδή το ΜΣΠ. Εξετάζουμε αν το ΜΣΠ πληροί τις προϋποθέσεις του Ορισμού 1.15. Στο παίγνιο G (ΜΣΠ), ισχύει:

- Εφόσον το P_i είναι ένα μονοδιάστατο σύνολο, ισχύει και η υπεραρθρώτητα στο p_i.
- Επίσης ισχύει στην παρούσα εφαρμογή ότι $\mathbb{R}^{m_i} = \mathbb{R}$ και P_i θεωρείται ένα κυρτό και συμπαγές σύνολο με άνω και κάτω όρια, συνεπώς το P_i είναι υποδικτυωτό του $\mathbb{R}$.

Το μόνο θέμα που προκύπτει είναι εάν η συνάρτηση ευχαρίστησης u_i p_i, p_{-i} έχει αύξουσες διαφορές στο p_i, p_{-i} . Για να το αποδείξουμε αρκεί όπως έχουμε πει να ισχύει $\frac{\partial^2 u_i(p)}{\partial p_i \partial p_j} \geq 0$ για όλα τα $j \neq i$.

Συμβολίζουμε με E, το μη κενό σύνολο των στρατηγικών της ισορροπίας Nash, ενός υπεραρθρωτού παιγνίου. Στο σημείο αυτό δημιουργούμε ένα παίγνιο $G_\epsilon =$ N, P_i, u_i^ϵ , με τον εξωγενή παράγοντα ϵ. Το G_ϵ βρίσκεται σε πλήρη σχεδόν αντιστοιχία με το ΜΣΠΤ. *Το παίγνιο με εξωγενή παράγοντα είναι υπεραρθρωτό, εάν η u_i p_i, p_{-i}, ϵ έχει αύξουσες διαφορές στο p_i, p_{-i} και στο p_i, ϵ για κάθε i.*

Αποδεικνύεται επίσης στο [13], ως συνέχεια του προηγούμενου ορισμού ότι, *σε ένα τέτοιο παραμετροποιημένο υπεραρθρωτό παίγνιο η $p_{min}(\epsilon)$ και $p_{max}(\epsilon)$ έχουν αύξουσες διαφορές στο ϵ.* Αυτό σημαίνει ότι σε ένα παραμετροποιημένο παίγνιο, το σύνολο των στρατηγικών της ισορροπίας Nash E, μετακινείται καθώς αλλάζει ο εξωγενής παράγοντας ϵ.

Στην πραγματικότητα όμως το ΜΣΠΤ, $G_c =$ N, P_i, u_i^c , δεν είναι ένα υπεραρθρωτό παίγνιο. Για να το πετύχουμε, χρειάζεται να τροποποιήσουμε το πεδίο στρατηγικών του ΜΣΠΤ. Ορίζουμε τον τροποποιημένο στρατηγικό χώρο P_i, ως ένα συμπαγές σύνολο $P_i =$ $\underline{p}_i, \overline{p}_i$. Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη $\frac{\partial^2 u_i(p)}{\partial p_i \partial p_j} \geq 0$, καταλήγουμε ότι *το μικρότερο στοιχείο $\underline{p}_i$ θα πρέπει να ακολουθεί τη συνθήκη $\underline{\gamma_i} \geq 2 \cdot \ln M$* ενώ το μεγαλύτερο στοιχείο $\overline{p}_i$ διατηρεί τη μέγιστη επιτρεπτή ισχύ του συστήματος([8]). Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα $\underline{p}_i$ τα οποία δεν υπακούουν την συνθήκη, δεν είναι διαθέσιμα στους χρήστες, ενώ στο ΜΣΠ οι παίκτες είχαν διαθέσιμες όλες τις θετικές ισχύς, οι οποίες δεν ήταν μεγαλύτερες από την μέγιστη $\overline{p}_i$. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι για το ΜΣΠΤ το πεδίο των εφικτών στρατηγικών είναι μικρότερο από το αντίστοιχο του ΜΣΠ.

Αποδεικνύεται στο [8], ότι *το τροποποιημένο ΜΣΠΤ $G_c =$ N, P_i, u_i^c με τον εξωγενή παράγοντα c, είναι ένα υπεραρθρωτό παίγνιο.* Η παραπάνω δήλωση μας εξασφαλίζει, την ύπαρξη ισορροπίας Nash στις καθαρές στρατηγικές για το ΜΣΠΤ.

Ισορροπία Nash στο ΜΣΠΤ

Ένα σημείο το οποίο δεν έχουμε διευκρινίσει, είναι ο τρόπος εύρεσης του σημείου ισορροπίας στο τροποποιημένο ΜΣΠΤ. Στο [13, σ.185] παρουσιάζεται ένας επαναληπτικός αλγόριθμος εύρεσης του σημείου ισορροπίας Nash, σε μη συνεργατικά παίγνια με εξωγενής παράγοντες και προτείνετε ως λύση στο [8] για το τροποποιημένο ΜΣΠΤ. *Ο αλγόριθμος ξεκινώντας από το* $\underline{p}$ *(ή το* $\overline{p}$*) ανανεώνει το διάνυσμα των ισχύων των χρηστών με κυκλικό τρόπο ώστε κάθε φορά κάθε χρήστης να μεγιστοποιεί την ευχαρίστηση του* $u_i^c(p)$.

Στο [13] αποδεικνύεται ότι *η ακολουθία διανυσμάτων ισχύος, τα οποία ξεκινάνε από το* $\underline{p}$ *(ή το* $\overline{p}$*), συγκλίνει στο* p_{min} *(ή* p_{max}*).* Επομένως γνωρίζουμε ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει σε κάποιο σημείο ισορροπίας, αλλά δεν γνωρίζουμε εάν αυτή η ισορροπία είναι μοναδική και αν επικρατεί κατά Pareto κάθε άλλου σημείου ισορροπίας. Σύμφωνα με το [8], *το* $p_{min}\ c \ \in E_c$ *επικρατεί κατά Pareto στο σύνολο των ισορροπιών Nash* E_c*, του ΜΣΠΤ.* [4]

Τέλος, για να έχουμε την μέγιστη δυνατή βελτίωση κατά Pareto, του ΜΣΠΤ σε σχέση με το ΜΣΠ, θα πρέπει να ρυθμίσουμε κατάλληλα την τιμή του c. Η διαδικασία προβλέπει την αύξηση της τιμής του c, κάθε φορά που θα συγκλίνει ο αλγόριθμος σε μία ισορροπία και την σύγκριση των τιμών της ευχαρίστησης για κάθε c. Εάν παρουσιαστεί μείωση έστω και σε μία τιμή της ευχαρίστησης ενός παίκτη, τότε σταματάμε την διαδικασία και διατηρούμε το τελευταίο c το οποίο δεν επέφερε ελάττωση των τιμών της ευχαρίστησης. Το c αυτό το συμβολίζουμε ως c_{best} και στο σημείο ισορροπίας Nash, μας δίνει την μεγαλύτερη βελτίωση της ευχαρίστησης των παικτών του ΜΣΠΤ, σε σχέση με το ΜΣΠ.

4.2 Υλοποίηση του Παιγνιοθεωρητικού Μοντέλου

Έπειτα από την ανάλυση και επεξήγηση του μαθηματικού μοντέλου, πραγματοποιούμε την υλοποίηση μίας προσομοίωσης του. Σκοπός μας είναι να λάβουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα της εφαρμογής και να μπορέσουμε να εξάγουμε συμπεράσματα.

4.2.1 Αλγόριθμος Υλοποίησης

Για την υλοποίηση της προσομοίωσης του μη συνεργατικού παιγνίου ελέγχου ισχύος, δημιουργήθηκε ένα υπολογιστικό πρόγραμμα σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab (Παράρτημα Π.1).

Σε πρώτη φάση εισάγουμε τα κύρια δεδομένα του συστήματος. Η τιμή του SIR στην οποία θα συγκλίνουν οι χρήστες του συστήματος, εξάγεται για διαμόρφωση $non-coherent\ FSK$, μέσω της εξίσωσης (4.8). Έπειτα υπολογίζουμε τον μέγιστο αριθμό χρηστών n, τον οποίο μπορούμε να έχουμε στο σύστημα ώστε να πετύχουμε τον στόχο του κοινού SIR.

---

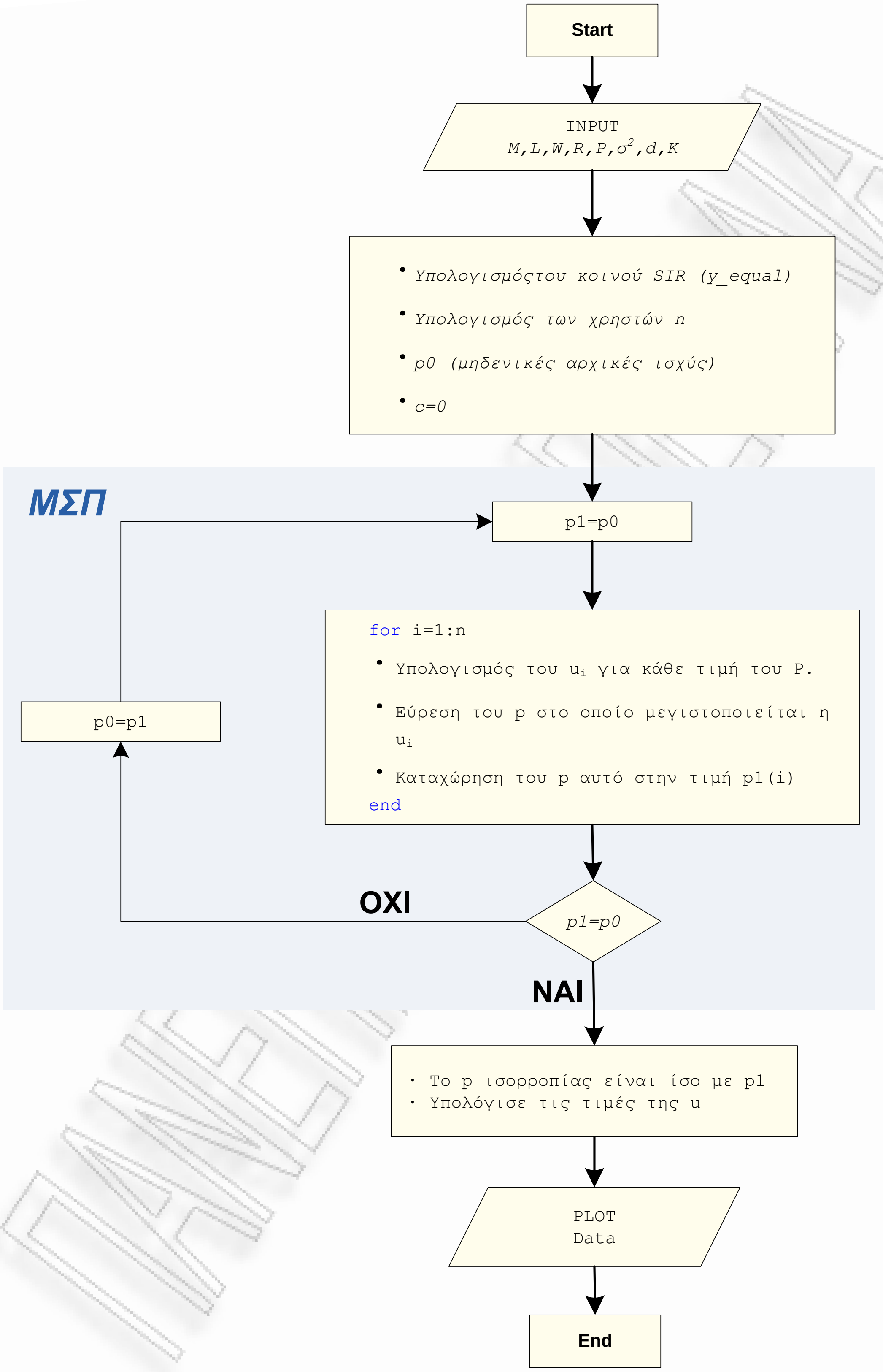
[4] Το $p_{min}\ c \ \in E_c$ θα είναι στην πράξη, η πρώτη ισορροπία στην οποία θα συγκλίνει ο αλγόριθμος. Η ύπαρξη άλλων ισορροπιών στο ΜΣΠΤ δεν μας απασχολεί εφόσον δεν θα επιφέρουν βελτίωση κατά Pareto στο αποτέλεσμα.

Στη συνέχεια τρέχουμε το μη συνεργατικό παίγνιο ελέγχου ισχύος χωρίς τιμολόγηση. Στο σημείο αυτό να σημειώσουμε ότι ενώ οι εξισώσεις (4.11),(4.12) μας δίνουν άμεσα τη λύση στο παίγνιο αυτό, κατά την προσομοίωση προσεγγίζουμε την λύση και με ένα άλλο τρόπο. Όπως μπορούμε να δούμε, το ΜΣΠ είναι ένα ΜΣΠΤ με συντελεστή $c = 0$. Συνεπώς μπορούμε να ακολουθήσουμε την ίδια τακτική εύρεσης σημείου ισορροπίας για τα δύο είδη παιγνίων, αλλάζοντας μόνο την τιμή του c και εφαρμόζοντας τα στρατηγικά πεδία τα οποία αντιστοιχούν σε κάθε τύπο παιγνίου. Τα αποτελέσματα μας δείχνουν ότι ο τρόπος προσέγγισης αυτός μας είναι σωστός και ο αλγόριθμος συγκλίνει στο σωστό σημείο ισορροπίας.

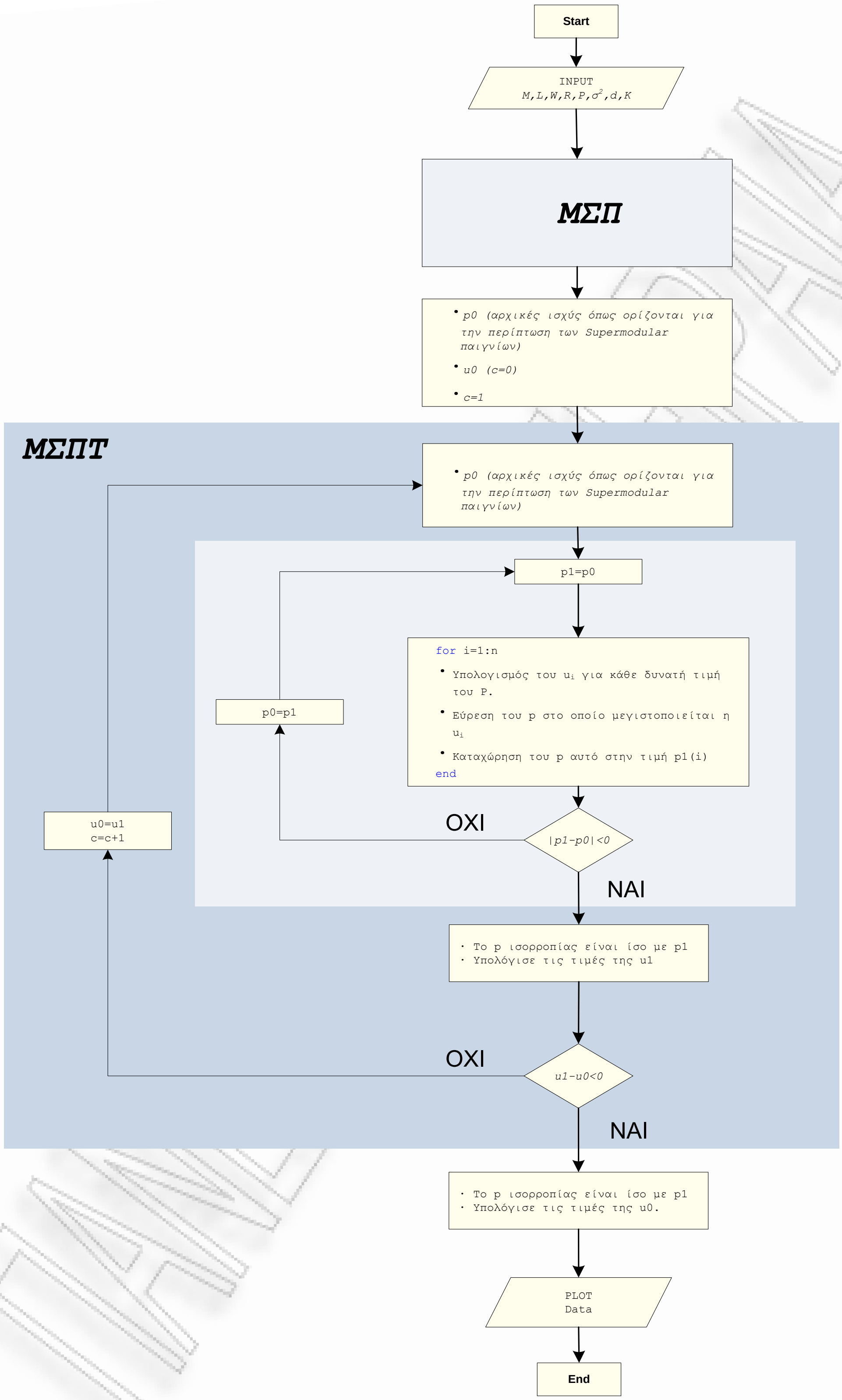
Για την εύρεση της ισορροπίας στο ΜΣΠ, χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο που αναφέραμε στην Ενότητα 4.1.5 και ορίζουμε $c = 0$. Η πορεία σύγκλισης στην ισορροπία είναι η παρακάτω:

1. Δίνουμε θετικές τιμές, πολύ κοντά στο 0, στις ισχύς p_i των χρηστών. Αυτό γίνεται για να αποφύγουμε τα προβλήματα που θα μας δημιουργήσουν οι μηδενικές τιμές, λόγω των περιορισμών της συνάρτησης αποδοτικότητας $f\ \gamma_i$ (εξίσωση 4.4).
2. Εφαρμόζουμε για τον πρώτο χρήστη $i = 1$, το σύνολο του στρατηγικού πεδίου των διαθέσιμων ισχύων P στην συνάρτηση ευχαρίστησης του u_1, διατηρώντας τις αρχικές ισχύς εκπομπής p_0 των υπόλοιπων χρηστών.
3. Ελέγχουμε για ποια τιμή ισχύος ο πρώτος παίκτης μεγιστοποιεί την συνάρτηση ευχαρίστησης του και δίνουμε αυτή την τιμή στην ισχύ εκπομπής του, ορίζοντας ένα νέο διάνυσμα ισχύος p_1.
4. Επαναλαμβάνουμε τα στάδια 2 και 3 για τους υπόλοιπους παίκτες κατά σειρά, διατηρώντας ως αρχικό διάνυσμα παρεμβολών το ίδιο για κάθε παίκτη (p_0).
5. Όταν η διαδικασία ολοκληρωθεί για όλους τους παίκτες, το νέο διάνυσμα ισχύων p_1, αποτελείται από τις τιμές που προέκυψαν από τα στάδια 2, 3, 4.
6. Συγκρίνουμε το νέο διάνυσμα ισχύος με το αρχικό. Εάν η διαφορά τους είναι πολύ κοντά στο μηδέν, τότε το νέο διάνυσμα ισχύων p_1 είναι αυτό της ισορροπίας, σε άλλη περίπτωση το p_1 γίνεται το αρχικό p_0 και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία των σταδίων 2 έως 6.

Έχοντας βρει τις τιμές των ισχύων του σημείου ισορροπίας Nash για κάθε παίκτη, βρίσκουμε αντίστοιχα και τις τιμές της ευχαρίστησης τους, μέσω της εξίσωσης (4.6).



Εικόνα 4.2: *Ο αλγόριθμος υλοποίησης του ΜΣΠΤ*



Εικόνα 4.3: *Ο αλγόριθμος υλοποίησης του ΜΣΠ*

Στη συνέχεια αναζητούμε το σημείο ισορροπίας του ΜΣΠΤ, καθώς και το βέλτιστο αυτών. Η τιμή του γραμμικού παράγοντα τιμολόγησης a_i είναι $a_i = 1$, για κάθε i και $c = 1$.

Η διαδικασία η οποία ακολουθείται είναι:

1. Η διαδικασία εύρεσης του σημείου ισορροπίας για $c = 1$, είναι ίδια με την αντίστοιχή του ΜΣΠ.
2. Όταν το παίγνιο συγκλίνει σε ένα σημείο ισορροπίας, ελέγχουμε εάν κάποια τιμή της ευχαρίστησης των παικτών, είναι μικρότερη σε σχέση με την προηγούμενη τιμή του c (στο πρώτο στάδιο γίνεται σύγκριση με $c = 0$). Εάν δεν ισχύει η συνθήκη αυτή αυξάνουμε το c κατά 1.
3. Το παίγνιο επαναλαμβάνεται όπως στα στάδια 1 και 2. Όταν υπάρξει μείωση της ευχαρίστησης έστω και ενός παίκτη, για κάποια τιμή του c, τότε ορίζουμε την προηγούμενη τιμή (όχι την τρέχουσα) του c, ως c_{best}.

Το σημείο ισορροπίας Nash για c_{best} επιφέρει και την μεγαλύτερη βελτίωση κατά Pareto του ΜΣΠΤ έναντι του ΜΣΠ.

4.2.2 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Μελετούμε τα δύο μη συνεργατικά μοντέλα ελέγχου ισχύος, για συγκεκριμένες τιμές (Πίνακας 4.2), σε ένα σύστημα CDMA μίας κυψέλης, με σταθερό πλαίσιο πληροφορίας και χωρίς τη χρήση αλγορίθμων FEC.

Το παίγνιο «παίζεται» μία μόνο φορά και οι χρήστες του συστήματος θεωρούνται στατικοί εντός της κυψέλης, σε προκαθορισμένη απόσταση από τον σταθμό βάσης. Τα κέρδη διαδρομής ορίζονται από το απλό μοντέλο απωλειών $h_i = K \quad d_i^4$, με την σταθερά $K = 0.097$. Για λόγους καλύτερης παρατήρησης των αποτελεσμάτων, ορίζουμε την ακτίνα της κυψέλης σε μήκος $1km$ και κατανέμουμε ομοιόμορφα τις αποστάσεις των χρηστών εντός αυτής.

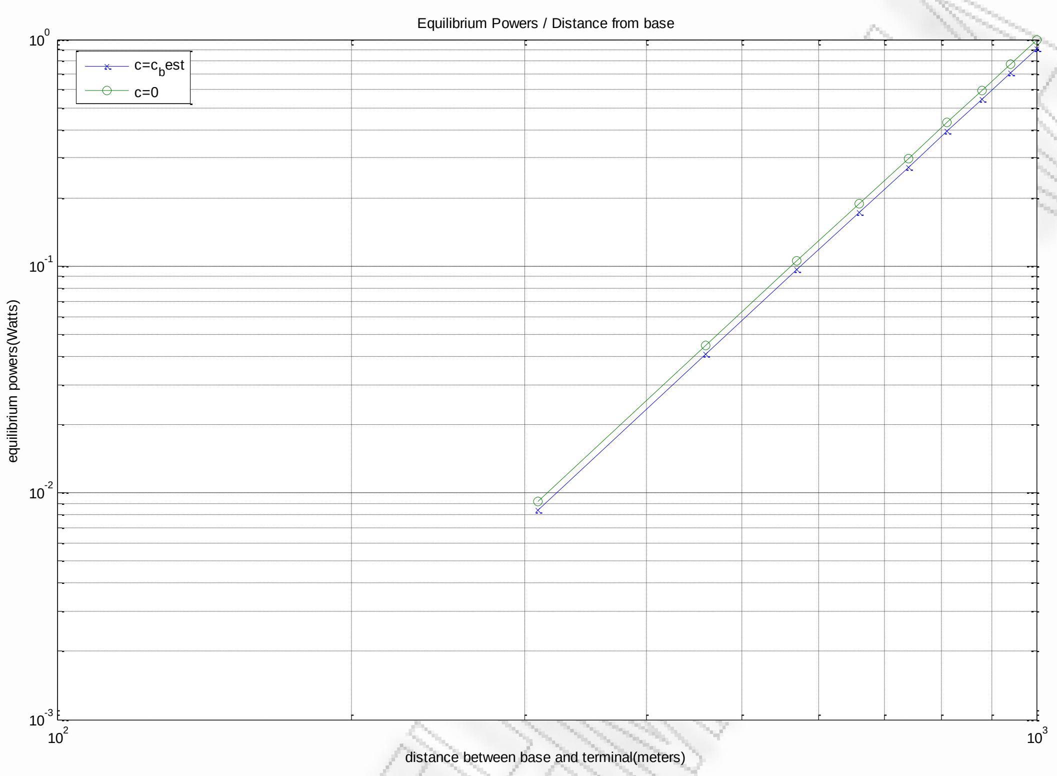
M	80
L	64
W	$10^6 Hz$
R	$10^4\ bits\ \ seconds$
σ^2	$5 \times 10^{-15} Watts$
Τεχνική Διαμόρφωσης	$non - coherent\ FSK$
p, μέγιστη ισχύς	$2\ Watts$

Πίνακας 4.2: *Οι τιμές των βασικών στοιχείων του συστήματος.*

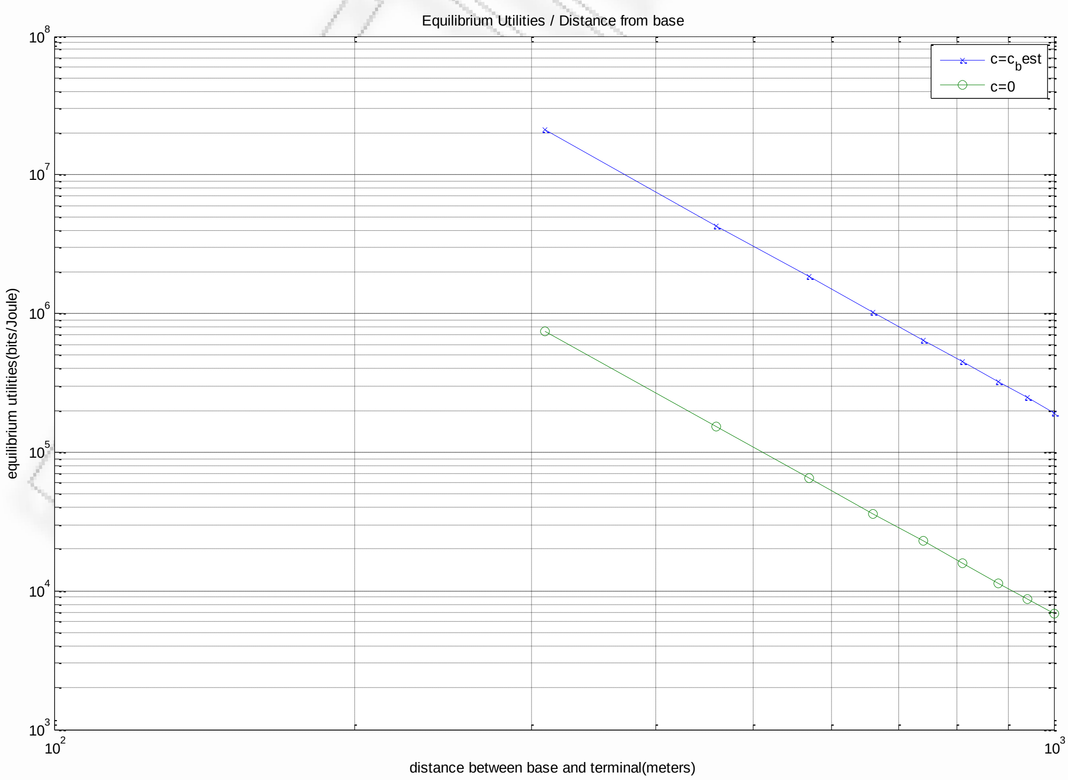
Το κοινό SIR στο οποίο συγκλίνουν οι παίκτες στην ισορροπία Nash του ΜΣΠ είναι $\gamma = 12.05$. Επομένως η συνθήκη για τον μέγιστο αριθμό χρηστών μας δίνει $n < 9.05$, οπότε θα μελετήσουμε τα παίγνια για $n = 9$. Επιλέγουμε τον ίδιο αριθμό παικτών και στα δύο παίγνια, αν και δεν υπάρχει περιορισμός στο ΜΣΠΤ, για να έχουμε συγκρίσιμα αποτελέσματα.

Οι αποστάσεις του κάθε χρήστη από το σταθμό βάσης, δίνονται από το διάνυσμα $d = \ 310, 460, 570, 660, 740, 810, 880, 940, 1000\ $.

Όταν ολοκληρωθεί ο αλγόριθμος για το ΜΣΠ και το ΜΣΠΤ, εκφράζουμε σε κοινά γραφήματα την σχέση απόστασης – ισχύος και απόστασης – ευχαρίστησης, στο σημείο ισορροπίας Nash.

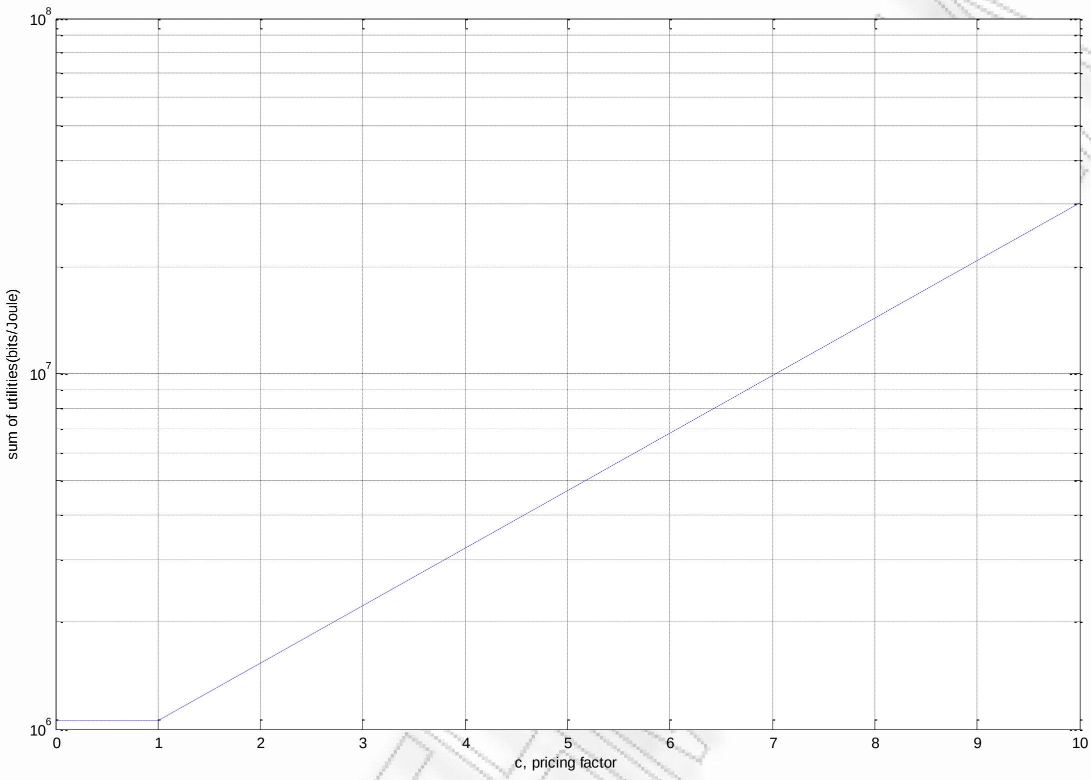


Εικόνα 4.6: *Σχέση απόστασης - ισχύος στην ισορροπία Nash, για ΜΣΠ και ΜΣΠΤ*



Εικόνα 4.7: *Σχέση απόστασης - ευχαρίστησης στην ισορροπία Nash, για ΜΣΠ και ΜΣΠΤ*

Ο αλγόριθμος του ΜΣΠΤ, ολοκληρώνεται όταν το c πάρει μέγιστη τιμή $c_{best} = 10$. Στην Εικόνα 4.6 βλέπουμε την επίδραση της αύξησης του c στη συνολική ευχαρίστηση των χρηστών, καθώς αυξάνεται η τιμή του έως το c_{best}.



Εικόνα 4.8: *Επίδραση της τιμής του c στην ευχαρίστηση των χρηστών*

4.3 Συμπεράσματα – Παρατηρήσεις

Παρουσιάσαμε ένα κατανεμημένο μη συνεργατικό αλγόριθμο ελέγχου ισχύος άνω ζεύξης, για ένα CDMA σύστημα επικοινωνιών. Η ποιότητα των υπηρεσιών του δικτύου, εκφράστηκε ως μία συνάρτηση ευχαρίστησης την οποία επιθυμούν όλοι οι χρήστες να μεγιστοποιήσουν. Το πρόβλημα της κατανομής ισχύος εκφράζεται στο μοντέλο αυτό μέσω δύο μη συνεργατικών παιγνίων. Το αρχικό παίγνιο ΜΣΠ στο σημείο ισορροπίας Nash πετυχαίνει την μεγιστοποίηση της ευχαρίστησης των χρηστών ενώ παράλληλα οι χρήστες συγκλίνουν σε ένα κοινό SIR. Το ΜΣΠΤ δεν συγκλίνει σε κάποιο κοινό SIR, αλλά μέσω της τιμολόγησης επιφέρει βελτίωση των αποτελεσμάτων του στο σημείο ισορροπίας, έναντι του ΜΣΠ.

Παρατηρώντας τα γραφήματα στις Εικόνες 4.6 και 4.7 επιβεβαιώνουμε την κατάταξη των μεγεθών του συστήματος όπως φαίνονται και στην (4.17). Η απομάκρυνση από το σταθμό βάσης αναγκάζει τον χρήστη να αυξήσει την ισχύ του, στο σημείο ισορροπίας και του επιφέρει παράλληλα μείωση της ευχαρίστησης του. Η κατάταξη αυτή ισχύει και για τα δύο συνεργατικά παίγνια.

Αναμενόμενη βέβαια ήταν η καλύτερη απόδοση του ΜΣΠΤ έναντι του ΜΣΠ στον τομέα αυτό. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των ΜΣΠ και ΜΣΠΤ παρατηρούμε τα δύο σημεία στα οποία υπάρχει βελτίωση. Στο ΜΣΠΤ, σε σύγκριση με το ΜΣΠ, πετυχαίνουμε εκπομπή σήματος σε μικρότερα επίπεδα ισχύος στο σημείο ισορροπίας, ενώ παράλληλα η ευχαρίστηση σημειώνει σημαντική αύξηση (Εικόνα 4.6, 4.7). Η χρήση τιμολόγησης στο ΜΣΠΤ, «τιμωρεί» ουσιαστικά τους χρήστες οι οποίοι επιθυμούν την αύξηση της ευχαρίστησης τους «παίζοντας» μεγαλύτερες στρατηγικές (p). Αυτό έχεις αποτέλεσμα να αναγκάζονται οι χρήστες να εκπέμψουν σε μικρότερα επίπεδα ισχύος συνεισφέροντας με τον τρόπο αυτό στη γενικότερη απόδοση του συστήματος.

Η επίδραση επίσης του γραμμικού παράγοντα τιμολόγησης (Εικόνα 4.8), είναι εμφανής στις τιμές της ευχαρίστησης των χρηστών. Αυξάνοντας το c, το άθροισμα των τιμών της u στο σημείο ισορροπίας, αυξάνει έως ένα σημείο στο οποίο παρουσιάζεται ελάττωση της τιμής ευχαρίστησης ενός χρήστη. Για τα δεδομένα του συστήματος μας το καλύτερο c είναι το $c_{best} = 10$ και οι τιμές της u_i είναι οι βέλτιστες κατά Pareto, σε σχέση πάντα με το ΜΣΠ.

Το ΜΣΠΤ όμως δεν λύνει το πρόβλημα της εύρεσης του βέλτιστου κατά Pareto διανύσματος ισχύων, στο σημείο ισορροπίας Nash. Κατά την προσομοίωση του ΜΣΠΤ, παρατηρούμε ότι το άθροισμα της ευχαρίστησης των χρηστών συνεχίζει να αυξάνεται (έστω και με μικρότερο ρυθμό), πέρα του $c = c_{best}$. Ενώ η συνολική ευχαρίστηση του συστήματος συνεχίζει να αυξάνει πέραν του c_{best}, ένας χρήστης (*ο οποίος θα είναι και ο πιο απομακρυσμένος από τον σταθμό βάσης [10]*) θα έχει μείωση στην ευχαρίστηση του. Επομένως, ενώ το συνολικό QoS του συστήματος αυξάνει, μειώνεται μεμονωμένα. Δηλαδή αυτό που πετυχαίνουμε με το ΜΣΠΤ, είναι ένα επικρατέστερο κατά Pareto διάνυσμα ισχύος σε σχέση με το ΜΣΠ, αλλά όχι ένα συνολικό βέλτιστο διάνυσμα ισχύων. Επομένως το ΜΣΠΤ πιθανώς δέχεται βελτίωση. Σύμφωνα με το [10], υπάρχει ένα συνολικά βέλτιστο κατά Pareto ΜΣΠΤ, το οποίο προϋποθέτει την δημιουργία μίας διαφορετικής μη γραμμικής συνάρτησης τιμολόγησης. Στο [17] έχουν μελετηθεί διάφορες τεχνικές βελτιστοποίησης της συνάρτησης ευχαρίστησης, ενός μεγάλου φάσματος παιγνίων, που έχουν προταθεί για τον έλεγχο ισχύος στις ασύρματες επικοινωνίες

Πέρα από το θέμα της βέλτιστης λύσης, τίθεται και θέμα εάν μπορεί η εφαρμογή να δώσει πραγματικές λύσεις, σε θέματα κατανομής της ισχύος. Αν και ο τομέας της θεωρίας παιγνίων, όπως επίσης οι εφαρμογές της στις τηλεπικοινωνίες, εξελίσσονται συνέχεια, δεν είναι εφικτό ακόμα να δοθεί λύση σε ένα πραγματικό σύστημα.

Για το ΜΣΠ και ΜΣΠΤ, υπάρχουν διάφορα σημεία τα οποία καθιστούν αδύνατη την υλοποίηση τους σε πραγματικές συνθήκες. Αρχικά ο αριθμός των χρηστών είναι περιορισμένος τουλάχιστον για το ΜΣΠ, ενώ το σύστημα προσομοιώνεται για μία κυψέλη, οπότε δεν καλύπτονται θέματα παρεμβολών από τις άλλες κυψέλες. Ένα άλλο θέμα που προκύπτει είναι, πως θα ανταποκρίνονταν το σύστημα εάν οι χρήστες κινιόντουσαν μέσα στην κυψέλη ή άλλαζε το πλήθος τους μέσα στο χρόνο.

Επίσης η προσομοίωση ενός τέτοιου συστήματος διήρκεσε κάποιες ώρες, ώστε να βρεθούν τα δύο παίγνια σε ισορροπία Nash. Βέβαια ο επαναληπτικός αλγόριθμος επιδέχεται βελτιώσεις, όπως επίσης ο παράλληλος προγραμματισμός θα μίκραινε την διάρκεια της προσομοίωσης ([14]), θέματα τα οποία δεν αφορούν την εργασία αυτή. Απλά δίνεται η εντύπωση, ότι δεν είναι δυνατό να ανταποκριθεί στις συνθήκες ενός πραγματικού δυναμικού συστήματος, στο οποίο θα απαιτούνταν υψηλή συχνότητα επανάληψης του παιγνίου και εύρεσης της ισορροπίας.

Η ουσία του μοντέλου αυτού είναι να μελετήσουμε ένα κατανεμημένο αλγόριθμο για τον έλεγχο ισχύος και την επίδραση ενός απλού μοντέλου τιμολόγησης στην απόδοση του. Επίσης ο σχεδιασμός της συνάρτησης ευχαρίστησης, γίνεται με σκοπό να πραγματοποιηθεί η μέγιστη μεταφορά πληροφορίας, με την ελάχιστη δαπανούμενη ενέργεια (αντίστοιχης λογικής προτάσεις, είδαμε στο Κεφάλαιο 3). Η προσέγγιση αυτή επιφέρει μειωμένη κατανάλωση στα τερματικά, κάτι πολύ σημαντικό αν σκεφτούμε ότι ως κινητοί σταθμοί, οι συσκευές θα φέρουν μπαταρία και δεν θα έχουν μόνιμη παροχή ενέργειας.

Για να μπορούν να εξαχθούν όμως κάποια συμπεράσματα, γίνεται συγκεκριμένη ρύθμιση και υποθέσεις για το σύστημα. Σίγουρα όμως δεν μοντελοποιεί απόλυτα, τα χαρακτηριστικά του τηλεπικοινωνιακού συστήματος. Πέραν της τιμολόγησης η οποία επιδέχεται βελτίωση, η χρήση διαφορετικής συνάρτησης ευχαρίστησης ή και διαφορετικού τύπου παιγνίου([15],[16]) πέραν του μη συνεργατικού κανονικής μορφής, θα φέρει πιθανή βελτίωση στα αποτελέσματα.

Παράρτημα

Π.1 Κώδικας Υλοποίησης Matlab

Π.1.1 Συναρτήσεις

```
function[BPSK]=BER1(y)
%Ypologizei to BER gia BPSK modulation scheme
BPSK=qfunc(sqrt(2.*y));
```

```
function[DPSK]=BER2(y)
%Ypologizei to BER gia DPSK modulation scheme
DPSK=0.5*exp(-y);
```

```
function[CFSK]=BER3(y)
%Ypologizei to BER gia CFSK modulation scheme
CFSK=qfunc(sqrt(2.*y));
```

```
function[NCFSK]=BER4(y)
%Ypologizei to BER gia NCFSK modulation scheme
NCFSK=0.5.*exp(-y./2);
```

```
function[f]=Effunc(BER,M)
%Ypologismos tou efficiency function%
f=(1-(2.*(BER))).^M;
```

```
function[y_eq]=yequalfunc(M)
%Ypologizei to equal-SIR
x=10;

dBPSK=fzero(@(x)erf(sqrt(x)) ^ (M - 1) * (M * exp(-x) * sqrt(x) -
sqrt(pi) * erf(sqrt(x))) * pi ^ (-0.1e1 / 0.2e1),x);

dDPSK=fzero(@(x)(0.1e1 - exp(-x)) ^ (M - 1) * M * exp(-x) * x -
(0.1e1 - exp(-x)) ^ M,x);

dCFSK=fzero(@(x)erf(sqrt(0.2e1) * sqrt(x) / 0.2e1) ^ (M - 1) * pi ^
(-0.1e1 / 0.2e1) * (M * exp(-x / 0.2e1) * sqrt(0.2e1) * sqrt(x) -
0.2e1 * sqrt(pi) * erf(sqrt(0.2e1) * sqrt(x) / 0.2e1)) / 0.2e1,x);

dNCFSK=fzero(@(x)(0.1e1 - exp(-x / 0.2e1)) ^ (M - 1) * M * exp(-x /
0.2e1) * x / 0.2e1 - (0.1e1 - exp(-x / 0.2e1)) ^ M,x);

y_eq=[dBPSK;dDPSK;dCFSK;dNCFSK];
```

```
function[Pc]=FSR(BER,M)
%Ypologismos tou frame success rate%
Pc=(1-BER).^M;
```

```
function [p]=pNPG(yequal,s2,h,W,R,n)
p=(yequal.*s2)./(h.*((W./R)-(yequal.*(n-1))));
```

```
function[y]=SIR(p,W,h,R,i,s2,pk)
%Ypologizei to SIR twn mobile stations
y=zeros(1,length(p));

for j=1:length(p)
y(j)=(W.*h(i).*p(j))./(R*((sum(h.*pk)-(h(i).*pk(i))+s2)));
end
```

```
function[y2]=SIR2(p,W,h,R,s2)
%Ypologizei to SIR tou equilibrium twn mobile stations

y2=(W.*h.*p)./(R*((sum(h.*p)-(h.*p)+s2)));
```

```
function[u]=util(L,R,M,c,a,f,p)
%Ypologismos tou Utility function

u=((L.*R.*f)./(M.*p))-(c.*a.*p);
```

Π.1.2 Κυρίως Πρόγραμμα

```
tic
clc

M=80; %Total number of bits per frame (bits)
L=64; %Number of information bits per frame (bits)
W=1e+6; %Spread spectrum bandwidth (Hz)
R=1e+4; %Bit rate (bits/second)
s2=5e-15; %AWGN power at the receiver (Watts)
Pmin=1e-5; %Minimum power constraint (Watts)
Pmax=2; %Minimum power constraint (Watts)
y_equal=yequalfunc(M);%To SIR pou sygklinei to NPG
n=floor(1+(W/(R*y_equal)));

%d=floor(linspace(100,1000,n))
d=[310,460,570,660,740,810,880,940,1000]';
K=0.097;
h=K./(d.^4);
a=1;

pr=Pmin:1e-5:Pmax; %power space


%******************** NCFSK **********************

%*********** Ypologismos gia c=0 (NPG)****************
pi_min=pNPG(2*log(M),s2,h,W,R,n(4))+1e-5;%initial power vector NPGP
p0=Pmin.*ones(n(4),1);%initial power vector NPG
c=0;
k=true;
while k==true
p1=p0;

for i=1:n(4)
Pe=BER4(SIR(pr,W,h,R,i,s2,p0));
u=util(L,R,M,c,a,Effunc(Pe,M),pr);
uf=isfinite(u);
pmaxu=find(u==max(u(uf)));
```

```
p1(i)=pr(pmaxu);
end

if abs(p1-p0)<1e-8
    k=false;
else
    p0=p1;
end

end

m=1;
pNCFSK0=p1;
yNCFSK0=SIR2(pNCFSK0,W,h,R,s2);
PeNCFSK0=BER4(yNCFSK0);
uNCFSK0=util(L,R,M,c,a,Effunc(PeNCFSK0,M),pNCFSK0);
U(m)=sum(uNCFSK0);
C(m)=c;

%*************** Ypologismos gia c=1 (NPGP) ***************
c=1;
k=true;
p0=pi_min;
while k==true
p1=p0;

for i=1:n(4)
pr=pi_min(i):1e-5:Pmax;
Pe=BER4(SIR(pr,W,h,R,i,s2,p0));
u=util(L,R,M,c,a,Effunc(Pe,M),pr);
uf=isfinite(u);
pmaxu=find(u==max(u(uf)));
p1(i)=pr(pmaxu);
end

if abs(p1-p0)<1e-8
    k=false;
else
    p0=p1;
end

end

m=2;
pNCFSK1=p1;
yNCFSK1=SIR2(pNCFSK1,W,h,R,s2);
PeNCFSK1=BER4(yNCFSK1);
uNCFSK1=util(L,R,M,c,a,Effunc(PeNCFSK1,M),pNCFSK1);
U(m)=sum(uNCFSK1);
C(m)=c;

%************ Ypologismos gia evresi tou c=c_best (NPGP) ************
c=10;
k=true;
l=true;
m=3;
while l==true

p0=pi_min;
```

```
while k==true

P=p1;
p1=p0;

for i=1:n(4)
pr=pi_min(i):1e-5:Pmax;
Pe=BER4(SIR(pr,W,h,R,i,s2,p0));
u=util(L,R,M,c,a,Effunc(Pe,M),pr);
uf=isfinite(u);
pmaxu=find(u==max(u(uf)));
p1(i)=pr(pmaxu);
end

if abs(p1-p0)<1e-8
    k=false;
else
    p0=p1;
end

pNCFSK2=p1;
yNCFSK2=SIR2(pNCFSK2,W,h,R,s2);
PeNCFSK2=BER4(yNCFSK2);
uNCFSK2=util(L,R,M,c,a,Effunc(PeNCFSK2,M),pNCFSK2);


if any(uNCFSK2-uNCFSK1<-(1e-8))
    c_best=C(m-1);
%     uNCFSK1; tha einai to utility kai
%     P;       to power vector tou c_best
    l=false;
else
  U(m)=sum(uNCFSK2);
  C(m)=c;
  uNCFSK1=uNCFSK2;
  c=c*10;
  m=m+1;

end

end
end

%************** END **************** NCFSK *****************

toc
```

Π.1.3 Γραφικές Παραστάσεις

```
y=1:1e-5:20;
subplot(2,1,1);plot(y,Effunc(BER1(y),M),y,FSR(BER1(y),M),'r:');grid;
xlabel('y,SIR');
ylabel('Frame Success Rate and Efficiency'); legend('BPSK f(y)','BPSK
Pc');
subplot(2,1,2);plot(y,Effunc(BER2(y),M),y,FSR(BER2(y),M),'r--');grid;
xlabel('y,SIR');
```

```
ylabel('Frame Success Rate and Efficiency'); legend('DPSK f(y)','DPSK
Pc');

figure(2);
subplot(2,1,1);plot(y,Effunc(BER3(y),M),y,FSR(BER3(y),M),'r:');grid;
xlabel('y,SIR');
ylabel('Frame Success Rate and Efficiency'); legend('CFSK f(y)','CFSK
Pc');
subplot(2,1,2);plot(y,Effunc(BER4(y),M),y,FSR(BER4(y),M),'r--');grid;
xlabel('y,SIR');
ylabel('Frame Success Rate and Efficiency'); legend('NCFSK
f(y)','NCFSK Pc');

figure(3);
loglog(d,P,'x-',d,pNCFSK0,'o-'); grid; xlabel('distance between base
and terminal(meters)');
ylabel('equilibrium powers(Watts)'); title('Equilibrium Powers /
Distance from base')
legend('c=c_best','c=0');

figure(4);
loglog(d,uNCFSK1,'x-',d,uNCFSK0,'o-'); grid; xlabel('distance between
base and terminal(meters)');
ylabel('equilibrium utilities(bits/Joule)'); title('Equilibrium
Utilities / Distance from base');
legend('c=c_best','c=0');

figure(5);
semilogy(C(1:m-1),U(1:m-1),'--'); grid; xlabel('c, pricing factor');
ylabel('sum of utilities(bits/Joule)');
```

Βιβλιογραφία

[1] J.C. McKinsey, *Introduction to the Theory of Games*, McGraw Hill, 1952.

[2] D. Fudenberg and J. Tirole, *Game theory*, MIT Press Books, 1991.

[3] R. Gibbons, *A Primer in Game Theory*, Financial Times Prentice Hall, 1992.

[4] T.L. Turocy and B. Stengel, "Game Theory," *Encyclopedia of Information*, Academic Press, 2002.

[5] A.B. MacKenzie and L.A. DaSilva, *Game Theory for Wireless Engineers (Synthesis Lectures on Communications)*, Morgan & Claypool Publishers, 2006.

[6] E. Gura and M. Maschler, *Insights into game theory*, Cambridge University Press, 2008.

[7] K. Leyton-Brown and Y. Shoham, *Essentials of game theory*, Morgan & Claypool Publishers, 2008.

[8] D.J. Goodman and N.B. Mandayam, "Power control for wireless data," *IEEE Personal Communications*, vol. 7, 2000, pp. 48-54.

[9] A. MacKenzie and S. Wicker, "Game theory in communications: motivation, explanation, and application to power control," *GLOBECOM'01. IEEE Global Telecommunications Conference (Cat. No.01CH37270)*, 2001, pp. 821-826.

[10] C. Saraydar, N. Mandayam, and D. Goodman, "Efficient power control via pricing in wireless data networks," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50, 2002, p. 291–303.

[11] N. Feng, *Utility maximization for wireless data users based in power and rate control*, Rutgers University, 1999.

[12] M. Chiang, P. Hande, T. Lan, and C.W. Tan, "Power Control in Wireless Cellular Networks," *Foundations and Trends® in Networking*, vol. 2, 2007, pp. 381-533.

[13] D.M. Topkis, *Supermodularity and Complementarity*, Princeton University Press, 1998.

[14] S. Koskie and Z.R. Gajic, "Newton iteration acceleration of the Nash game algorithm for power control in 3G wireless CDMA networks," *Proceedings of SPIE*, 2003, pp. 115-121.

[15] G. Alyfantis, S. Hadjiefthymiades, and L. Merakos, "A cooperative uplink power control scheme for elastic data services in wireless CDMA systems," *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*, vol. 36, 2006, p. 5.

[16] E. Altman, K. Avrachenkov, G. Miller, and B. Prabhu, "Discrete Power Control: Cooperative and Non-Cooperative Optimization," *IEEE INFOCOM 2007 - 26th IEEE International Conference on Computer Communications*, 2007, pp. 37-45.

[17] T. Alpcan and L. Pavel, "Nash equilibrium design and optimization," *2009 International Conference on Game Theory for Networks*, 2009, pp. 164-170.

[18] J. Laiho, A. Wacker, and T. Novosad, *Radio network planning and optimisation for UMTS*, Wiley, 2006.

[19] N. Nisan, *Algorithmic game theory*, Cambridge Univ Pr, 2007.

[20] S. Gunturi and F. Paganini, "Game theoretic approach to power control in cellular CDMA," *2003 IEEE 58th Vehicular Technology Conference. VTC 2003-Fall (IEEE Cat. No.03CH37484)*, pp. 2362-2366.

[21] M. Xiao, N. Shroff, and E. Chong, "A utility-based power-control scheme in wireless cellular systems," *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*, vol. 11, 2003, p. 210–221.

[22] M. Hayajneh and C.T. Abdallah, "Performance of Game Theoretic Power Control Algorithms In Interference Limited Wireless Fading Channels," *Sixth Baiona Workshop on Signal Processing in Communications, Baiona*, 2003, p. 7.

[23] J. Sun and E. Modiano, "Opportunistic power allocation for fading channels with non-cooperative users and random access," *2nd International Conference on Broadband Networks, 2005.*, pp. 397-405.

[24] M. Hayajneh and C. Abdallah, "Statistical learning theory to evaluate the performance of game theoretic power control algorithms for wireless data in arbitrary channels," *2003 IEEE Wireless Communications and Networking, 2003. WCNC 2003.*, pp. 723-728.

[25] F. Meshkati, H. Poor, S. Schwartz, and R. Balan, "Energy-efficient power and rate control with QoS constraints: a game-theoretic approach," *Proceedings of the 2006 international conference on Wireless communications and mobile computing*, ACM, 2006, p. 1440.

[26] S. Jun Oh, T. Olsen, and K. Wasserman, "Distributed power control and spreading gain allocation in CDMA data networks," *Proceedings IEEE INFOCOM 2000. Conference on Computer Communications. Nineteenth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies (Cat. No.00CH37064)*, pp. 379-385.

[27] Z. Han and K. Liu, "Noncooperative Power-Control Game and Throughput Game Over Wireless Networks," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 53, 2005, pp. 1625-1629.

[28] S. Buzzi and H.V. Poor, "Non-cooperative games for spreading code optimization, power control and receiver design in wireless data networks," 2007.

[29] T. Alpcan, T. Basar, R. Srikant, and E. Altman, "CDMA Uplink Power Control as a Noncooperative Game," *IEEE Transactions on Wireless Networks*, 2002, pp. 659-670.

[30] N. Feng, S. Mau, and N. Mandayam, "Pricing and Power Control for Joint Network-Centric and User-Centric Radio Resource Management," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 52, 2004, pp. 1547-1557.