

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ  
Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων

Προσομοίωση MIMO Συστημάτων  
σε Ασύρματα Κανάλια Επικοινωνίας

Διονύσιος Ι. Ψύρρας

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Φεβρουάριος 2011

---

## Περίληψη

---

Στο Κεφάλαιο 1 γίνεται μια γενική αναφορά σε φαινόμενα διάδοσης που παρατηρούνται στη ζεύξη πομπού και δέκτη σε ασύρματα κανάλια επικοινωνίας. Τα φαινόμενα στα οποία γίνεται η αναφορά είναι: ανάκλαση (reflection), περίθλαση (diffraction), διάθλαση (refraction) και διασκορπισμός-σκέδαση (scattering).

Στο Κεφάλαιο 2 αναφέρονται τρεις μέθοδοι αντιμετώπισης της εξασθένισης του σήματος λήψης λόγω των διαλείψεων στο δίαυλο και της διασυμβολικής παρεμβολής λόγω της πολυδιαδρομικής μετάδοσης, οι οποίες είναι η κωδικοποίηση καναλιού (channel coding), η διαφορική λήψη (diversity reception) και η χρήση ισοσταθμιστών (equalizers).

Το Κεφάλαιο 3 παρουσιάζει τα συστήματα πολλαπλών εισόδων πολλαπλών εξόδων (multiple input multiple output, MIMO) με βάση κριτήρια απόδοσης όπως ο ρυθμός εκπομπής bit (bit rate), η αξιοπιστία (reliability) και η πολυπλοκότητα (complexity). Επίσης παρουσιάζονται κάποια από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα τους όπως το κέρδος στοιχειοκεραίας (array gain), ο περιορισμός παρεμβολής (interference suppression) και η χωρική διαφορικότητα (spatial diversity).

Το Κεφάλαιο 4 αποδεικνύει τη μέθοδο ανάκτησης των δεδομένων στα συστήματα MIMO που βασίζεται στην ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (Minimum Mean Square Error, MMSE) και βασίζεται στη λύση Wiener (Wiener solution) και την εξίσωση Wiener-Hopf. Επίσης αγνοώντας το θόρυβο στην ανάλυσή μας προκύπτει η μέθοδος ισοστάθμισης με επιβολή μηδενισμού (zero-forcing equalizer).

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται ο κώδικας και τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για έξι διαφορετικές τεχνικές ισοστάθμισης σε ένα σύστημα MIMO 2x2 σε δίαυλο με διάλειαση Rayleigh. Οι τεχνικές που προσομοιώνονται είναι: μηδενισμός της διασυμβολικής παρεμβολής (Zero Forcing equalizer), μέθοδος Ελαχίστου Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος (MMSE equalizer), μηδενισμός της διασυμβολικής παρεμβολής με διαδοχικές ακυρώσεις (Zero Forcing Successive

Interference Cancellation equalizer), μηδενισμός της διασυμβολικής παρεμβολής με διαδοχικές ακυρώσεις και βέλτιστη ταξινόμηση (Zero Forcing Successive Interference Cancellation equalizer with Optimal Ordering), μέθοδος Ελαχίστου Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος με διαδοχικές ακυρώσεις και βέλτιστη ταξινόμηση (Minimum Mean Square Error SIC equalization with Optimal Ordering), και μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood, ML).

Στο Κεφάλαιο 6 δίνουμε τα συμπεράσματα από τη σύγκριση της επίδοσης σε πιθανότητα σφάλματος (bit error rate) για κάθε ένα από τους παραπάνω ισοσταθμιστές. Όπως αναμενόταν, ο ML παρουσιάζει την καλύτερη επίδοση αλλά και τη μεγαλύτερη πολυπλοκότητα.

## Ευχαριστίες

---

Η παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία εκπονήθηκε για το ΠΜΣ Διδακτικής της Τεχνολογίας και Ψηφιακών Συστημάτων, στην κατεύθυνση των Ψηφιακών Επικοινωνιών και Δικτύων και το θέμα της αφορά το επιστημονικό πεδίο του τομέα των ασύρματων επικοινωνιών.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Επίκουρο Καθηγητή του Πανεπιστημίου Πειραιώς και επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας κ. Ευθύμογλου Γεώργιο τόσο για το ενδιαφέρον και την υπομονή που επέδειξε, όσο και για τον πολύτιμο χρόνο που αφιέρωσε για την παρούσα εργασία.

**Πίνακας Περιεχομένων**

Περίληψη	1
Ευχαριστίες	3
Πίνακας Περιεχομένων	4
Ευρετήριο Εικόνων & Γραφημάτων	6
Εισαγωγή	7
<b>Κεφάλαιο 1</b>	<b>8</b>
1.1 Ανάκλαση	8
1.2 Περίθλαση	9
1.3 Σκέδαση	9
1.4 Διάθλαση	10
<b>Κεφάλαιο 2</b>	<b>11</b>
2.1 Ασύρματο κανάλι επικοινωνίας	11
2.2 Κωδικοποίηση καναλιού	12
2.3 Διαφορική λήψη	12
2.4 Ισοστάθμιση	14
<b>Κεφάλαιο 3</b>	<b>16</b>
3.1 Κατηγορίες Συστημάτων Πολλαπλών Κεραιών	16
3.2 Multiple Input Multiple Output συστήματα	17
3.3 Απόδοση συστημάτων με τη χρήση πολλαπλών κεραιών	18
3.4 Πλεονεκτήματα της χρήσης πολλαπλών κεραιών	19
<b>Κεφάλαιο 4</b>	<b>21</b>
4.1 Η μέθοδος MMSE σε MIMO συστήματα	21
<b>Κεφάλαιο 5</b>	<b>31</b>
5.1 MIMO με ισοσταθμιστή μηδενισμού της διασυμβολικής παρεμβολής (Zero Forcing equalizer)	31
5.2 MIMO με ισοσταθμιστή που χρησιμοποιεί την μέθοδο του ελαχίστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MMSE equalizer)	41
5.3 MIMO με ισοσταθμιστή μηδενισμού της διασυμβολικής παρεμβολής με διαδοχικούς μηδενισμούς (Zero Forcing Successive Interference Cancellation equalizer)	49

<b>5.4 MIMO με ZF SIC με βέλτιστη ταξινόμηση (Optimal Ordering)</b>	<b>56</b>
<b>5.5 MIMO με MMSE SIC και βέλτιστη ταξινόμηση (Optimal Ordering)</b>	<b>64</b>
<b>5.6 MIMO με ML equalization</b>	<b>72</b>
<b>Συμπεράσματα</b>	<b>81</b>
<b>Βιβλιογραφικές Αναφορές</b>	<b>83</b>

**Ευρετήριο Εικόνων & Γραφημάτων**

Εικόνα 1.1: Ανάκλαση	8
Εικόνα 1.2: Περίθλαση	9
Εικόνα 1.3: Σκέδαση	10
Εικόνα 1.4: Διάθλαση	10
Εικόνα 2.1: Κωδικοποίηση καναλιού	12
Εικόνα 3.1: Σύστημα SIMO	16
Εικόνα 3.2: Σύστημα MISO	17
Εικόνα 3.3: Σύστημα MIMO	17
Εικόνα 4.1: Σύστημα MIMO με $N_T$ κεραίες εκπομπής και $N_R$ κεραίες λήψης	22
Εικόνα 4.2: Φίλτρο Wiener	23
Εικόνα 4.3: Εγκάρσιο γραμμικό φίλτρο Wiener.	26
Εικόνα 5.1: BER με Zero Forcing equalization	35
Εικόνα 5.2: BER με Minimum Mean Square Error equalization	44
Εικόνα 5.3: BER με ZF Equalization with Successive Interference Cancellation	51
Εικόνα 5.4: BER με ZF SIC with Optimal Ordering	59
Εικόνα 5.5: BER με MMSE SIC with Optimal Ordering	67
Εικόνα 5.6: BER με Maximum Likelihood equalization	77
Εικόνα 6.1: Σύγκριση της επίδοσης των διαφορετικών ισοσταθμιστών	82

---

## Εισαγωγή

---

Οι απαιτήσεις για υψηλού επιπέδου υπηρεσίες μας οδηγούν στην αναζήτηση νέων τεχνικών ώστε να επιτύχουμε μεγαλύτερους ρυθμούς μετάδοσης δεδομένων (data rates) καθώς επίσης και μεγαλύτερη φασματική απόδοση (spectral efficiency). Τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα κατά τη ζεύξη μπορεί να οδηγήσουν σε υποβάθμιση της αξιοπιστίας των παρεχόμενων υπηρεσιών λόγω των λαθών που παρουσιάζονται.

Τα συστήματα Πολλαπλών Εισόδων – Πολλαπλών Εξόδων (MIMO) έχουν τη δυνατότητα να αυξήσουν τη χωρητικότητα του διαύλου πάνω από το όριο του Shannon, λόγω μίας σειράς χαρακτηριστικών τους όπως: το κέρδος πίνακα (array gain), το κέρδος της διαφορικής λήψης (diversity gain) και το κέρδος της χωρικής πολυπλεξίας (spatial multiplexing gain).

Το κόστος για αυτή την αύξηση της απόδοσης των συστημάτων MIMO είναι η αυξημένη πολυπλοκότητα στην ανάκτηση των δεδομένων που στέλνονται από πολλαπλές κεραιές εκπομπής. Η ανάκτηση των ροών πληροφορίας από κάθε κεραία γίνεται με τη χρήση ισοσταθμιστών (equalizers), που μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε γραμμικούς (linear) και μη γραμμικούς (non linear).



# Κεφάλαιο 1

Η ασύρματη επικοινωνία επιτυγχάνεται με τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο χώρο. Η διαδρομή που ακολουθείται μεταξύ πομπού και δέκτη ονομάζεται ραδιοδίαυλος. Ο ραδιοδίαυλος όμως δεν είναι μοναδικός για ασύρματα κανάλια επικοινωνίας. Στη ζεύξη πομπού και δέκτη έχουμε μια σειρά από φαινόμενα τα οποία είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος με το περιβάλλον διάδοσης:

- ανάκλαση (reflection)
- περίθλαση (diffraction)
- σκέδαση (scattering)
- διάθλαση (refraction)

## 1.1 Ανάκλαση

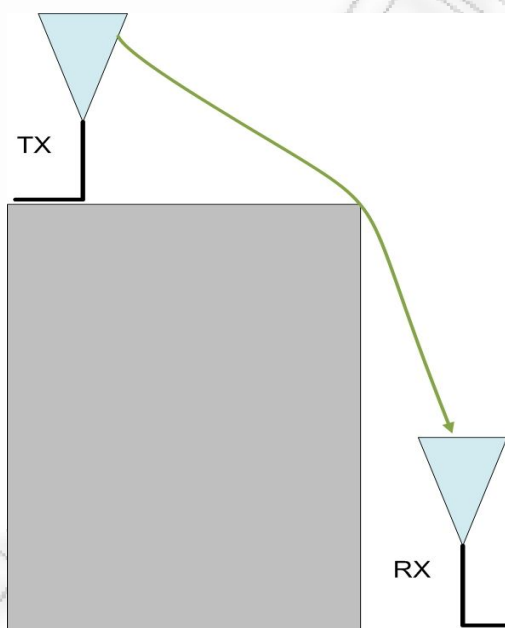
Η ανάκλαση είναι το φαινόμενο της αλλαγής διεύθυνσης διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος όταν αυτό προσπίπτει σε εμπόδια πολύ μεγαλύτερων διαστάσεων σε σχέση με το μήκος κύματος του. Ανακλάσεις από την επιφάνεια της γης ή από κτήρια παράγουν ανακλώμενα σήματα τα οποία συμβάλλουν δημιουργικά ή καταστροφικά στο αρχικό κύμα. Η γωνία πρόσπτωσης είναι ίδια με την γωνία ανάκλασης.



**Εικόνα 1.1: Ανάκλαση**

## 1.2 Περίθλαση

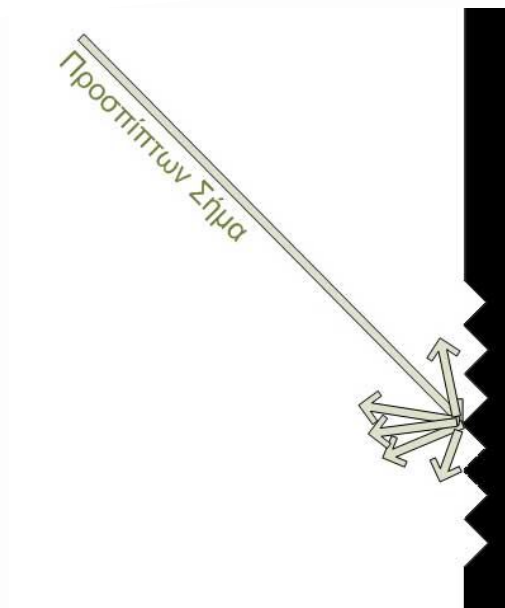
Το φαινόμενο της περίθλασης παρατηρείται όταν στην διαδρομή του ραδιοκύματος από τον πομπό στον δέκτη παρεμβάλλονται αντικείμενα με ακμές της τάξης του μήκους κύματος του σήματος. Σύμφωνα με την αρχή του Huygens όλα τα σημεία του σφαιρικού μετώπου του κύματος μπορούν να θεωρηθούν ως δευτερεύουσες σημειακές. Με αυτό τον τρόπο η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μπορεί να διαδίδεται ακόμα και αν δεν υπάρχει οπτική επαφή μεταξύ πομπού – δέκτη.



Εικόνα 1.2: Περίθλαση

## 1.3 Σκέδαση

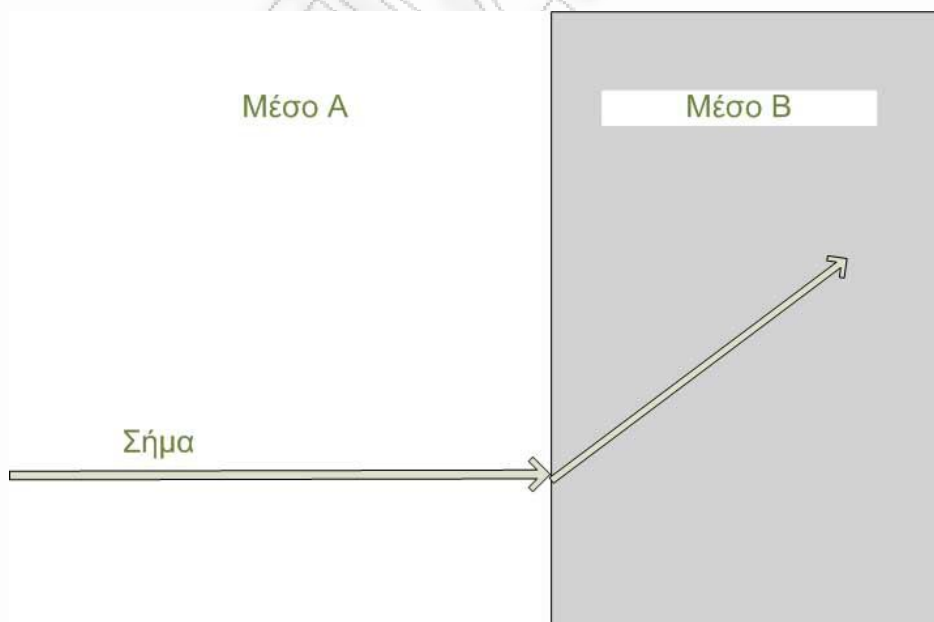
Σκέδαση ή διασκορπισμός συμβαίνει όταν στην διαδρομή του ραδιοκύματος από τον πομπό στον δέκτη παρεμβάλλονται αντικείμενα με διαστάσεις ίδιας τάξεως με το μήκος κύματος του διαδιδόμενου κύματος ή μικρότερες από αυτό. Η σκέδαση έχει ως αποτέλεσμα η ενέργεια που ακτινοβολείται από τον πομπό να αναμεταδίδεται σε πολλές διαφορετικές κατευθύνσεις. Είναι ο πιο δύσκολα προβλέψιμος μηχανισμός διάδοσης. Μπορούμε να έχουμε λόγω του φαινομένου της σκέδασης ραδιοκάλυψη και σε περιοχές που μπορεί να μην δέχονται ενέργεια μέσω της ανάκλασης ή της περίθλασης.



Εικόνα 1.3: Σκέδαση

## 1.4 Διάθλαση

Η διάθλαση (refraction) οφείλεται στις μεταβολές στις οποίες υπόκεινται τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε διάφορα ύψη στην ατμόσφαιρα, λόγω της διαφορετικής πυκνότητας και το διαφορετικό βαθμό ιονισμού. Το σήμα ακολουθεί διαφορετική κατεύθυνση ανά μεσο καθώς επίσης παρουσιάζει και αλλαγές στην ταχύτητα του.



Εικόνα 1.4: Διάθλαση

---

## Κεφάλαιο 2

---

### 2.1 Ασύρματο κανάλι επικοινωνίας

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, κατά την ζεύξη πομπού και δέκτη έχουμε μια σειρά από φαινόμενα τα οποία είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος με το περιβάλλον διάδοσης. Ως αποτέλεσμα έχουμε την παρεμβολή δύο ή περισσότερων εκδοχών του μεταδιδόμενου σήματος οι οποίες φτάνουν στο δέκτη. Αυτά τα σήματα, συνδυάζονται στην κεραία του δέκτη και δημιουργούν ένα νέο σήμα. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται διάλειαση.

Το νέο σήμα που έχει προκύψει, γενικά ποικίλει ως προς το πλάτος και τη φάση. Αν έχουμε απευθείας μονοπάτι ζεύξης ανάμεσα στον πομπό και το δέκτη (Line of Sight – LOS) τότε αυτή η συνιστώσα έχει ντετερμινιστικά χαρακτηριστικά. Όταν υπάρχει η συνιστώσα LOS τότε το λαμβανόμενο σήμα που προέρχεται από αυτήν είναι το ισχυρότερο.

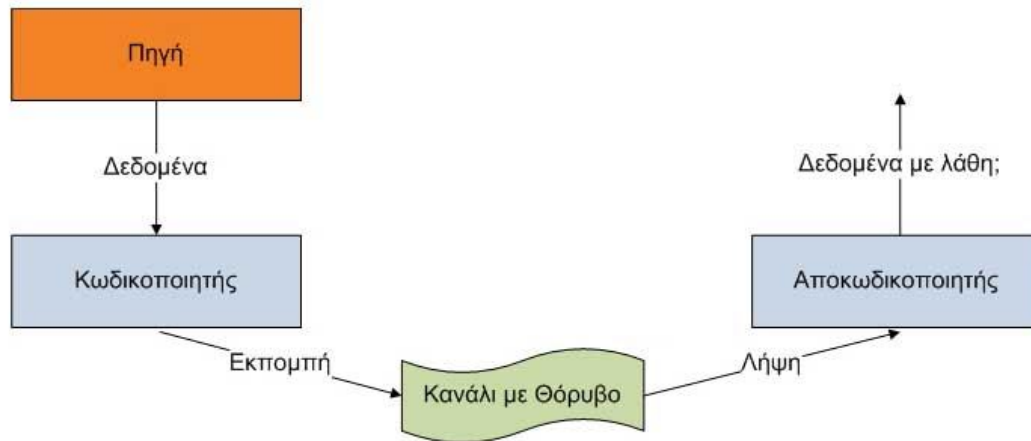
Όταν όλες οι συχνότητες του σήματος εκπομπής επηρεάζονται κατά τον ίδιο ή παρόμοιο τρόπο, τότε οι διαλείψεις χαρακτηρίζονται ως μη επιλεκτικές (flat fading). Αυτό συμβαίνει όταν το εύρος ζώνης του μεταδιδόμενου σήματος είναι μικρότερο από το εύρος συνοχής του καναλιού (coherence bandwidth).

Στην αντίθετη περίπτωση (εύρος συνοχής καναλιού μικρότερο από το εύρος ζώνης του σήματος) οι διαλείψεις χαρακτηρίζονται ως επιλεκτικές (selective fading). Σε αυτή την περίπτωση, η διάρκεια της κρουστικής απόκρισης του καναλιού είναι μεγαλύτερη από τη διάρκεια ενός συμβόλου. Η ενέργεια κάθε συμβόλου διασπείρεται στο χρόνο και με τη συνεχή μετάδοση συμβόλων έχουμε το φαινόμενο της ενδοσυμβολικής παρεμβολής (Intersymbol Interference).

Η καταπολέμηση των διαλείψεων και των παρεμβολών αποτελεί σημαντικό κομμάτι της θεωρίας των τηλεπικοινωνιών διότι έχει ως αποτέλεσμα τη βελτίωση της αξιοπιστίας μετάδοσης ενός σήματος και στην παροχή υψηλού επιπέδου υπηρεσιών. Υπάρχουν τρεις μεγάλες κατηγορίες αντιμετώπισης των λαθών τα οποία εμφανίζονται στην ασύρματη ζεύξη: η κωδικοποίηση καναλιού, η διαφορική λήψη και η ισοστάθμιση.

## 2.2 Κωδικοποίηση καναλιού

Κωδικοποίηση καναλιού (channel coding) είναι διαδικασία κατά την οποία το αρχικό σήμα πληροφορίας μετασχηματίζεται – κωδικοποιείται κατάλληλα στον πομπό και αποκωδικοποιείται στο δέκτη.



Εικόνα 2.1: Κωδικοποίηση καναλιού

Υπάρχουν δυο μέθοδοι κωδικοποίησης καναλιού: η κωδικοποίηση κυματομορφής (waveform or signal coding) και οι δομημένες ακολουθίες (structured sequences). Κατά τη κωδικοποίηση κυματομορφής, το σήμα μετασχηματίζεται σε μια καλύτερη κυματομορφή, ώστε κατά την διαδικασία της ανίχνευσης να μειωθούν τα λάθη. Η τεχνική της κωδικοποίησης μετασχηματίζει τα δεδομένα, προσθέτοντας επιπλέον bits. Με τα bits αυτά αποκτούμε όχι μόνο τη δυνατότητα της ανίχνευσης των λαθών, αλλά και τη διόρθωση τους.

## 2.3 Διαφορική λήψη

Η διαφορική λήψη (diversity reception) ή διαφορισμός είναι η μέθοδος αξιοποίησης και εκμετάλλευσης δύο ή περισσότερων μονοπατιών διάδοσης που οδηγεί στη συλλογή πολλαπλών αντιγράφων του εκπεμπόμενου σήματος από το δέκτη. Παρότι το κάθε αντίγραφο θα έχει υποστεί διαλείψεις, ο συνδυασμός τους θα δίνει ένα ενισχυμένο σήμα σε σχέση με το αρχικό, άρα και λιγότερα λάθη. Η διαφορική τεχνική μπορεί να γίνει τόσο στη λήψη ή/και κατά τη εκπομπή.

Οι πιο διαδεδομένες τεχνικές διαφορισμού είναι οι εξής:

**Διαφορισμός συχνότητας (frequency diversity)**

Το σήμα λαμβάνεται σε διαφορετικές συχνότητες. Η απόσταση των συχνοτήτων πρέπει να είναι μεγαλύτερη από το εύρος συσχέτισης, με στόχο την ελάχιστη δυνατή συσχέτιση μεταξύ των αντιγράφων του σήματος που λαμβάνονται ώστε να έχουμε ανεξάρτητα αντίγραφα του σήματος στο δέκτη.

**Διαφορισμός χρόνου (time diversity)**

Το ίδιο σήμα εκπέμπεται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές με χρονική διαφορά μεγαλύτερη από το μισό της συχνότητας ολίσθησης Doppler.

**Διαφορισμός κατεύθυνσης (direction diversity)**

Πραγματοποιείται κατά την εκπομπή του σήματος υπό διαφορετικές γωνίες, χρησιμοποιώντας κατευθυντικές κεραίες. Με αυτή τη μέθοδο μπορούμε να περιορίσουμε το φαινόμενο Doppler, ενώ χρησιμοποιείται μόνο σε σταθερά τερματικά.

**Διαφορισμός πόλωσης (Polarization diversity)**

Το ίδιο σήμα εκπέμπεται από κεραίες διαφορετικής πόλωσης, με στόχο τα σήματα στη λήψη να είναι ασυσχέτιστα λόγω των διαφορετικών διαδρομών τους.

**Διαφορισμός χώρου (space diversity)**

Οι κεραίες λήψης τοποθετούνται σε ορισμένη απόσταση μεταξύ τους. Η απόσταση αυτή πρέπει να είναι μεγαλύτερη από το μισό του μήκος κύματος του σήματος για να λάβουμε σήματα με μικρή μεταξύ τους συσχέτιση.

Ο διαφορισμός χώρου είναι η πιο δημοφιλής τεχνική. Οι πιο συνηθισμένες τεχνικές που συναντούμε είναι οι παρακάτω:

- Συνδυασμός Μεγίστου Λόγου (Maximal Ratio Combining - MRC)

Τα σήματα που λαμβάνονται στο δέκτη του MRC, αφού πολλαπλασιαστούν με τον κατάλληλο συντελεστή βάρους, ανάλογο του στιγμιαίου λόγου σήματος προς θόρυβο, αθροίζονται. Μειονέκτημά του είναι η αυξημένη πολυπλοκότητα και η άριστη γνώση των παραμέτρων του καναλιού αλλά όπως προδίδει και η ονομασία του, μας παρέχει τη βέλτιστη επίδοση.

- Συνδυασμός Ίσου Κέρδους (Equal Gain Combining - EGC)

Τα σήματα που λαμβάνονται στο δέκτη του EGC πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο συντελεστή βάρους. Ως πλεονέκτημα έναντι του MRC είναι ότι δεν απαιτείται γνώση του πλάτους του σήματος αλλά μόνο η φάση του και κατά συνέπεια, παρουσιάζει μειωμένη πολυπλοκότητα.

- Συνδυασμός Επιλογής (Selection Combining - SE)

Σε αυτή τη μέθοδο υπάρχει ένας επιλογέας, ο οποίος περνάει στ δέκτη μόνο το σήμα με το μεγαλύτερο πλάτος ή σηματοθορυβικό πηλίκο. Το μόνο που απαιτείται είναι η γνώση των πλατών ή του σηματοθορυβικού πηλίκου των λαμβανομένων σημάτων. Έχει μικρότερη πολυπλοκότητα αλλά και ταυτόχρονα χειρότερη επίδοση συγκριτικά με τους MRC και EGC.

## 2.4 Ισοστάθμιση

Ισοστάθμιση (equalization), ονομάζεται οποιαδήποτε λειτουργία επεξεργασίας του σήματος με αποτέλεσμα τη μείωση της διασυμβολικής παρεμβολής. Οι ισοσταθμιστές μπορούν να κατηγοριοποιηθούν βάση κάποιων κριτηρίων ως εξής:

Ισοσταθμιστές με βάση τη γραμμικότητα ή μη της δομής τους:

- **Γραμμικούς (Linear)**

Η έξοδος είναι γραμμική συνάρτηση της εισόδου τους.

- **Μη-γραμμικούς (Non-Linear)**

Η έξοδος δεν είναι γραμμική συνάρτηση της εισόδου τους (π.χ. οι ισοσταθμιστές που στηρίζονται στο κριτήριο ML)

Ισοσταθμιστές με βάση τη δομή:

- **Εγκάρσιοι (Transversal Equalizers)**

Φίλτρα FIR, με σταθερό αριθμό συντελεστών, μέσα από τα οποία διέρχεται το λαμβανόμενο σήμα.

- **Με δομή Lattice**

Ισοσταθμιστές με ειδική κλιμακωτή δομή που τους δίνει μεγαλύτερη ευελιξία. Αποτελούνται από βαθμίδες των οποίων το πλήθος

αντιστοιχεί στον αριθμό των συντελεστών ενός εγκάρσιου ισοσταθμιστή. Οι παράμετροι του Lattice διαφέρουν από τις παραμέτρους του εγκάρσιου αλλά υπάρχει μία-προς-μία αντιστοιχία σε αυτές.

#### Ισοσταθμιστές με βάση τη χρονική μεταβολή:

- **Σταθεροί** (Fixed or Preset equalizers)

Οι συντελεστές ορίζονται-υπολογίζονται στην αρχή και παραμένουν σταθεροί.

- **Προσαρμοστικοί** (Adaptive equalizers)

Οι συντελεστές μεταβάλλονται συνεχώς για να προσαρμόζεται ο ισοσταθμιστής στις χρονικές μεταβολές του καναλιού.

#### Ισοσταθμιστές με βάση το κριτήριο βελτιστοποίησης:

- **Μέγιστης Πιθανοφάνειας** (Maximum Likelihood - ML)

Για την αποκωδικοποίηση κάθε σήματος λαμβάνεται σε κάθε χρονική στιγμή μια απόφαση, η οποία και έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να είναι η σωστή. Η ισοστάθμιση έχει την καλύτερη επίδοση αλλά συνήθως τίθεται ζήτημα με την αυξημένη πολυπλοκότητα.

- **Μηδενισμού της Διασυμβολικής Παρεμβολής** (Zero-Forcing - ZF)

Ο ισοσταθμιστής προσπαθεί να άρει τη διασυμβολική παρεμβολή χωρίς όμως να λαμβάνεται μέριμνα για το θόρυβο του καναλιού.

- **Ελάχιστου Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος**

(Minimum Mean Square Error - MMSE)

Λαμβάνοντας υπόψη τόσο τη διασυμβολική παρεμβολή όσο και τον προσθετικό θόρυβο, ο MMSE ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εξόδου σε σχέση με τη ληφθείσα ακολουθία. Μιας και αποτελεί από τις πιο διαδεδομένες μορφές ισοστάθμισης, θα αναφερθούμε εκτενώς σε αυτή τη μέθοδο στο τέταρτο κεφάλαιο.



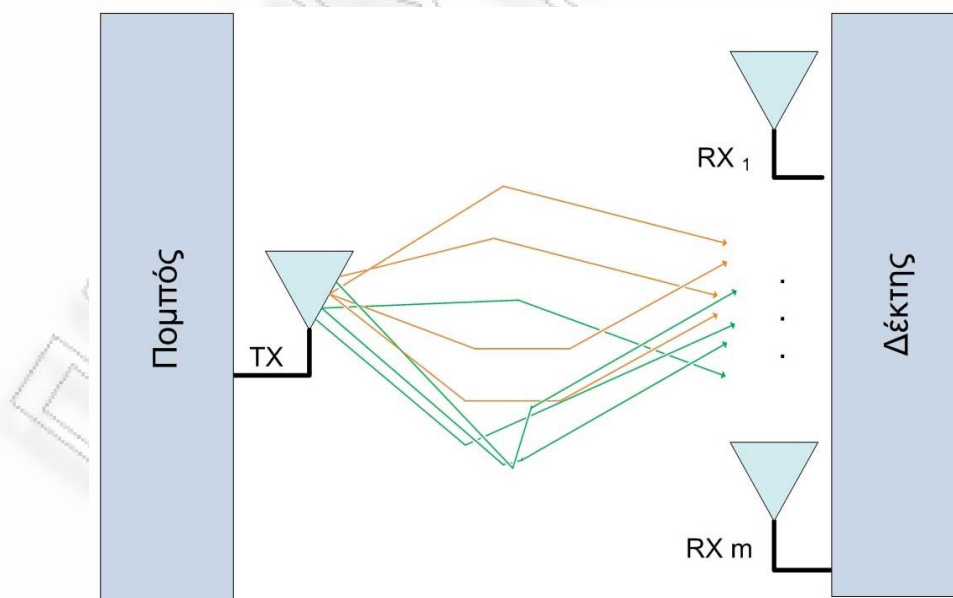
## Κεφάλαιο 3

### 3.1 Κατηγορίες Συστημάτων Πολλαπλών Κεραιών

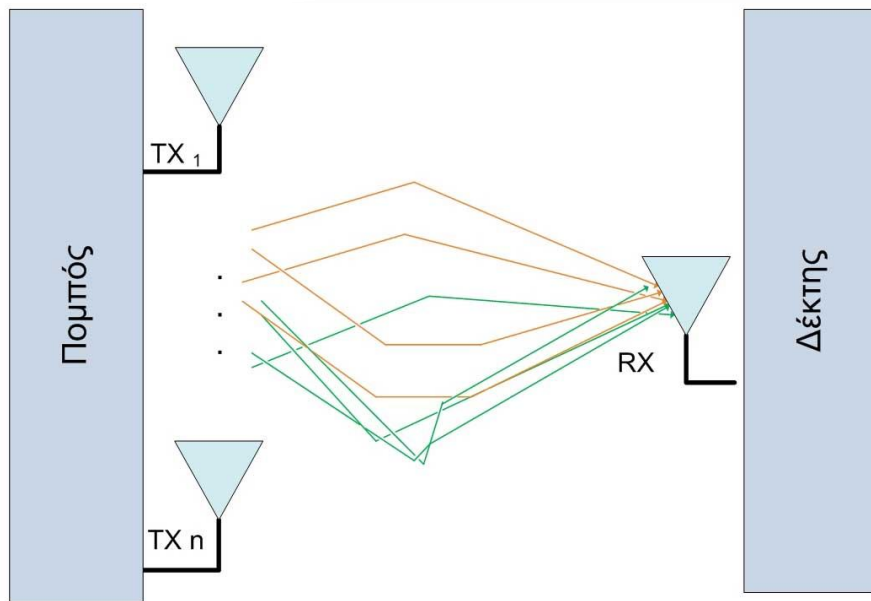
Ένα σύστημα μπορεί να κατηγοριοποιηθεί ανάλογα με το πλήθος των κεραιών που υπάρχουν στην εκπομπή και στη λήψη της μετάδοσης των δεδομένων. Έτσι έχουμε τα ακόλουθα συστήματα [1]-[3]:

- Μονής εισόδου μονής εξόδου  
(Single Input Single Output system - SISO)
- Μονής εισόδου πολλαπλών εξόδων  
(Single Input Multiple Output system - SIMO)
- Πολλαπλών εισόδων μονής εξόδου  
(Multiple Input Single Output system - MISO)
- Πολλαπλών εισόδων πολλαπλών εξόδων  
(Multiple Input Multiple Output system - MIMO)

Στα SISO συστήματα υπάρχει μία κεραία εκπομπής και μία κεραία λήψης και είναι η πιο απλή περίπτωση συστήματος. Για τα MIMO συστήματα θα αναφερθούμε στην επόμενη παράγραφο ενώ τα SIMO και MISO συστήματα, φαίνονται στις παρακάτω δύο εικόνες.



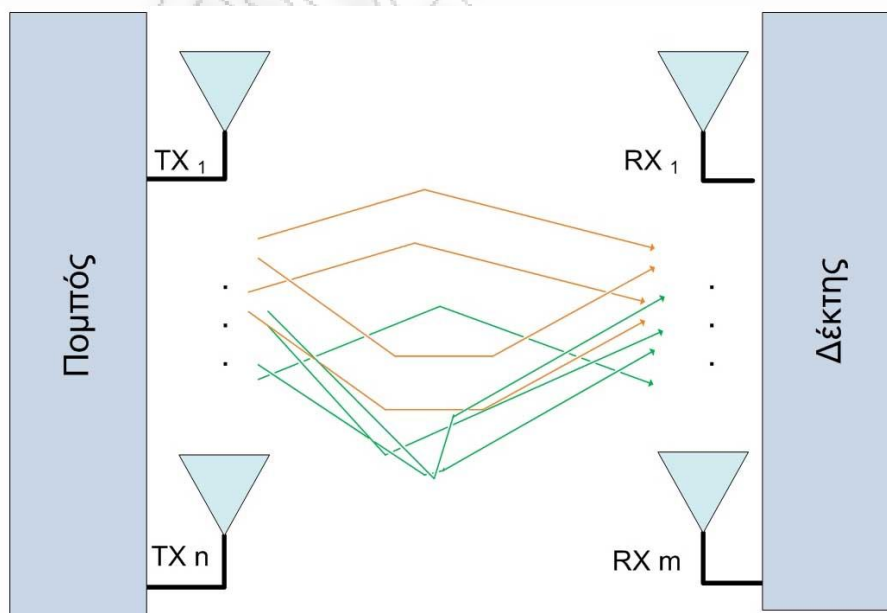
Εικόνα 3.1: Σύστημα SIMO



Εικόνα 3.2: Σύστημα MISO

### 3.2 Multiple Input Multiple Output συστήματα

Ένα ασύρματο σύστημα MIMO επικοινωνίας από σημείο-σε-σημείο (point-to-point), με  $n$  κεραιές εκπομπής και  $m$  κεραιές λήψης που λειτουργεί σε στενό εύρος ζώνης (narrowband) απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Κατά τη ζεύξη, τα σήματα στις κεραιές του πομπού και στις κεραιές του δέκτη, πρέπει να συνδυάζονται με κατάλληλο τρόπο.



Εικόνα 3.3: Σύστημα MIMO

Το διακριτό μοντέλο που περιγράφει ένα τέτοιο σύστημα δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & \dots & h_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{m,1} & \dots & h_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_m \end{bmatrix}$$

ή αλλιώς

$$y = Hx + n$$

όπου

$y$  είναι το λαμβανόμενο σήμα

$H$  είναι η μήτρα των συντελεστών του καναλιού

$x$  είναι το εκπεμόμενο σήμα

$n$  είναι ο θόρυβος.

### 3.3 Απόδοση συστημάτων με τη χρήση πολλαπλών κεραιών

Η αξιολόγηση και η απόδοση ενός συστήματος γίνεται συνήθως με τρία βασικά κριτήρια. Πολλές φορές το κάθε ένα δρα ανταγωνιστικά σε σχέση με τα άλλα δύο. Τα κύρια κριτήρια αξιολόγησης της απόδοσης συστημάτων με τη χρήση πολλαπλών κεραιών είναι τα εξής:

- Ρυθμός Bit (Bit rate)
- Αξιοπιστία (Reliability)
- Πολυπλοκότητα (Complexity)

**Ρυθμός Bit:** Ο ρυθμός μετάδοσης δυαδικών ψηφίων ανά μονάδα εύρους ζώνης (bit rate per unit bandwidth) είναι η αποδοτικότητα φάσματος (spectral efficiency). Όσο μεγαλύτερο είναι τόσο ένα σύστημα αξιολογείται ως πιο αποδοτικό.

**Αξιοπιστία:** Η αξιοπιστία μπορεί να υπολογισθεί με το ρυθμό λανθασμένων bit (bit error rate ή BER). Το μικρότερο δυνατόν BER αποτελεί συνήθως ύψιστη

προτεραιότητα κατά τη σχεδίαση των «ευαίσθητων» συστημάτων όπου το παραμικρό λάθος είναι μη αποδεκτό.

**Πολυπλοκότητα:** Η αυξημένη πολυπλοκότητα στην υλοποίηση ενός πομπού ή δέκτη απαιτεί μεγάλη κατανάλωση ισχύος. Σε περιπτώσεις ασύρματης σύνδεσης όπου το ένα μέρος τροφοδοτείται με μπαταρία (π.χ. κινητή τηλεφωνία) ο σχεδιασμός των τεχνικών εκπομπής και λήψης γίνεται με τρόπο ώστε η πολυπλοκότητα του συστήματος να είναι μη συμμετρική. Οι αλγόριθμοι χαμηλής πολυπλοκότητας είναι επιθυμητό να είναι από την πλευρά που έχει μικρότερες δυνατότητες κατανάλωσης ισχύος. Η μειωμένη πολυπλοκότητα είναι πάντα το ζητούμενο στις ασύρματες επικοινωνίες.

### 3.4 Πλεονεκτήματα της χρήσης πολλαπλών κεραιών

Η χρήση πολλαπλών κεραιών στον πομπό, στο δέκτη, ή και στα δύο είναι μια περίπλοκη τεχνική που ακολουθείται λόγω μιας σειράς πλεονεκτημάτων που μας προσφέρει όπως:

- Κέρδος στοιχειοκεραίας (Array gain)
- Περιορισμός παρεμβολής (Interference suppression)
- Χωρική διαφορικότητα (Spatial diversity)

**Κέρδος στοιχειοκεραίας:** Με τη χρήση των πολλαπλών κεραιών, το κέρδος των κεραιών αυξάνεται με αποτέλεσμα την αυξημένη εμβέλεια και κάλυψη. Αυτό οδηγεί στη μείωση των σταθμών-βάσης (base stations). Επίσης λόγω του αυξημένου κέρδους και της ευαισθησίας των κεραιών λήψης μπορούμε να μειώσουμε την ισχύ εκπομπής των κινητών μονάδων (πχ. κινητών τηλεφώνων).

**Περιορισμός παρεμβολής:** Η εκμετάλλευση της χωρικής διάστασης που μπορούμε να έχουμε με τις πολλαπλές κεραίες, μας δίνει τη δυνατότητα της μείωσης των παρεμβολών, πολύ πιο αποδοτικά από ότι στην περίπτωση της μίας κεραίας. Με την αντιμετώπιση των παρεμβολών, μπορούμε να έχουμε σταθμούς βάσης με την ίδια συχνότητα καναλιού πιο κοντά με αποτέλεσμα την αύξηση της χωρητικότητας του ασύρματου συστήματος (system capacity).

**Χωρική διαφορικότητα:** Οι πολλαπλές κεραιές, με τη διάδοση πολλαπλών διαδρομών (multipath propagation), μας δίνει τη δυνατότητα της καλύτερης αντιμετώπισης των διαλείψεων του καναλιού. Τα σήματα φτάνουν με διαφορετικές διαλείψεις στο δέκτη. Η πιθανότητα τα λαμβανόμενα σήματα να είναι ίδια είναι πολύ μικρή. Η χωρική διαφορικότητα βελτιώνει τη χωρητικότητα ζεύξης (link capacity) γιατί αυξάνει την αξιοπιστία της ασύρματης σύνδεσης και άρα δίνει τη δυνατότητα υψηλότερου ρυθμού μετάδοσης δεδομένων ή τη μείωση της ισχύος μετάδοσης.

## Κεφάλαιο 4

### 4.1 Η μέθοδος MMSE σε MIMO συστήματα

Στη χωρική πολυπλεξία σε MIMO συστήματα, τα μεταδιδόμενα δεδομένα από έναν αριθμό κεραιών, έστω  $N_T$ , μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{N_T}]^T \quad (4.1)$$

Η μήτρα του καναλιού  $H$  για  $N_T$  κεραιές εκπομπής και  $N_R$  κεραιές λήψης είναι ένας  $N_T \times N_R$  πίνακας. Το λαμβανόμενο σήμα στην  $l$ -οστή κεραία λήψης μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$r_l = h_{l_1} x_1 + h_{l_2} x_2 + \dots + h_{l_{N_T}} x_{N_T} + n_l \quad (4.2)$$

όπου  $n_l$  είναι ο Αθροιστικός Λευκός Γκαουσιανός Θόρυβος (AWGN) με διακύμανση  $\sigma^2$ . Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τον πίνακα των συμβόλων ως εξής:

$$\underline{r} = [r_1, r_2, \dots, r_{N_R}]^T \quad (4.3)$$

Ο στόχος της ανάλυσης αυτής είναι να ανακτήσουμε το αρχικό σήμα που έχει εκπεμφθεί  $\underline{x}$  μέσω της μελέτης του  $\underline{r}$ . Υποθέτουμε ότι το κέρδος του καναλιού  $H$  μας είναι γνωστό. Σε αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο MMSE για την ανίχνευση του  $\underline{x}$ . Επομένως η λύση του προβλήματος μας συνίσταται στο να βρούμε έναν πίνακα  $\underline{W}$  ( $N_T \times N_R$ ) ώστε να έχουμε

$$\min E \left\{ \left( \underline{x} - \underline{W}^H \underline{r} \right)^2 \right\} \quad (4.4)$$

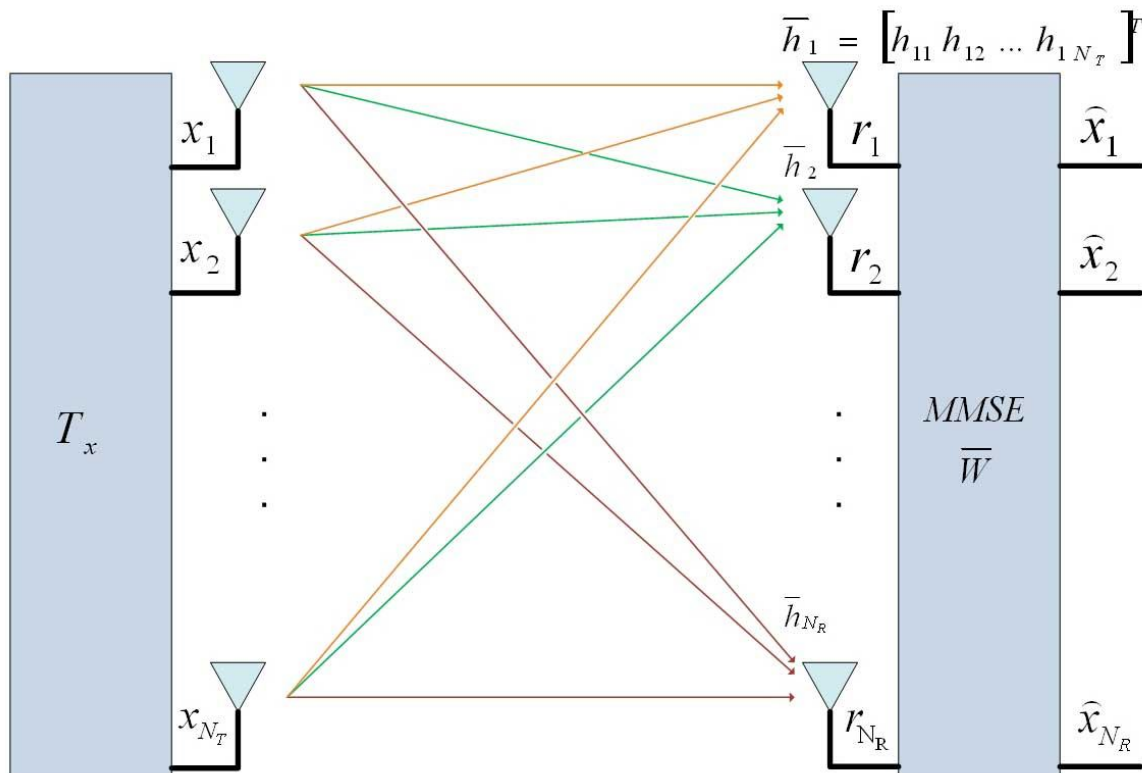
Η βέλτιστη λύση Wiener για την (4.4), την οποία και θα υπολογίσουμε παρακάτω, δίνεται από τη σχέση:

$$\underline{W}^H = \left[ H^H H + \frac{I_{N_T}}{SNR} \right]^{-1} H^H \quad (4.5)$$

όπου

$I_{N_T}$  είναι ο  $N_T \times N_T$  ταυτοτικός πίνακας

$SNR$  είναι ο σηματοθορυβικός λόγος κάθε ροής δεδομένων



**Εικόνα 4.1:** Σύστημα MIMO με  $N_T$  κεραίες εκπομπής και  $N_R$  κεραίες λήψης.

Θα μελετήσουμε την μέθοδο MMSE με τη βοήθεια ενός συναφούς προβλήματος με το οποίο θα αποδείξουμε την (4.5). Έστω ότι έχουμε το αρχικό-επιθυμητό σήμα  $d[n]$  το οποίο έχει υποστεί αλλοιώσεις οπότε το ονομάζουμε  $u[n]$ . Το συναφές πρόβλημα απεικονίζεται στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 4.2: Φίλτρο Wiener

$d[n]$  είναι το αρχικό-επιθυμητό σήμα

$u[n]$  είναι το σήμα που φτάνει στο MMSE (ή Wiener filter) και περιέχει το  $d[n]$

$y[n]$  είναι η εκτίμηση του  $d[n]$ , π.χ.  $\hat{d}[n]$

Θα είχαμε λοιπόν  $u[n]=d[n]+z[n]$  για το AGWN κανάλι και  $u[n]=h[n]d[n]+z[n]$  για ένα κανάλι με διαλείψεις και AGWN.

Θέλουμε να βρούμε το βέλτιστο συντελεστή βάρους  $\underline{W} = [w_0, w_1, \dots, w_{K-1}]^T$  ώστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα να μηδενιστεί. Σημειώνουμε ότι το σφάλμα ορίζεται ως εξής:

$$e[n] = d[n] - y[n] \quad (4.6)$$

όπου

$$y[n] = \sum_{k=0}^{K-1} w_k^* u[n-k] \quad (4.7)$$

με  $w_k = a_k + jb_k$

Στη συνέχεια, ορίζουμε τη συνάρτηση  $J$  ως εξής:

$$J = E[e[n]e^*[n]] = E[|e[n]|^2] \quad (4.8)$$

Η λύση για τον πίνακα  $\underline{W}$ , μέσω της μεθόδου MMSE, δίνεται από τη σχέση:

$$\underline{W}^* = \min_{\underline{W}} [J] \quad (4.9)$$

Λύνοντας έχουμε:



$$\begin{aligned}
 e[n] &= d[n] - y[n] \\
 &= d[n] - \sum_{k=0}^{K-1} (a_k - jb_k) u[n-k]
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Ας ορίσουμε ένα βαθμωτό διαφορικό τελεστή  $\Delta_k$ , ώστε με δεδομένα το πραγματικό μέρος  $a_k$  και το φανταστικό μέρος  $b_k$  να έχουμε:

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial a_k} + j \frac{\partial}{\partial b_k} \quad k = 0, 1, \dots, K-1 \tag{4.11}$$

Αν στη συνάρτηση  $J$  κάνουμε χρήση του τελεστή  $\Delta_k$ , θα έχουμε:

$$\Delta_k J = \frac{\partial J}{\partial a_k} + j \frac{\partial J}{\partial b_k} \quad k = 0, 1, \dots, K-1$$

Θα έχουμε επιτύχει τη βέλτιστη λύση στο πρόβλημα μας όταν:

$$\Delta_k J = 0 \quad \text{για όλα τα } k = 0, 1, \dots, K-1$$

ή ισοδύναμα:

$$\Delta_k J = E \left[ \frac{\partial e[n]}{\partial a_k} e^*[n] + \frac{\partial e^*[n]}{\partial a_k} e[n] + j \frac{\partial e[n]}{\partial b_k} e^*[n] + j \frac{\partial e^*[n]}{\partial b_k} e[n] \right] \tag{4.12}$$

Σημειώνουμε ότι:

$$\frac{\partial e[n]}{\partial a_k} = -u[n-k]$$

$$\frac{\partial e[n]}{\partial b_k} = ju[n-k]$$

$$\frac{\partial e^*[n]}{\partial a_k} = -u^*[n-k]$$

$$\frac{\partial e^*[n]}{\partial b_k} = ju^*[n-k]$$

Βάση των παραπάνω σχέσεων η (4.12) δίνει:

$$\begin{aligned} \Delta_k J &= E \left[ -u[n-k]e^*[n] - u^*[n-k]e[n] - u[n-k]e^*[n] + u^*[n-k]e[n] \right] \\ &= -2E \left[ u[n-k]e^*[n] \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} E[u[n-k]e^*[n]] &= 0, \quad k=0, 1, \dots, K-1 \\ \Rightarrow E \left[ u[n-k] \left( d^*[n] - \sum_{l=0}^{K-1} w_l u^*[n-l] \right) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Αυτό μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\Rightarrow E[u[n-k]d^*[n]] = \left( \sum_{l=0}^{K-1} w_l E[u[n-k]u^*[n-l]] \right). \quad (4.14)$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται “Wiener-Hopf εξίσωση”. Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέρος της εξίσωσης είναι η ετερο-συσχέτιση μεταξύ  $u[n-k]$  και  $d^*[n]$  για μια καθυστέρηση  $-k$  και το δεξί μέρος της εξίσωσης είναι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του φίλτρου εξόδου για καθυστέρηση  $l-k$ . Μπορούμε να τα εκφράσουμε ως εξής:

$$\phi_{uu}(l-k) = E[u[n-k]u^*[n-l]] \quad (4.15)$$

$$\phi_{ud}(-k) = E[u[n-k]d^*[n]] \quad (4.16)$$

Άρα η εξίσωση Wiener-Hopf μπορεί να γραφτεί ως:

$$\sum_{l=0}^{K-1} w_k \phi_{uu}(l-k) = \phi_{ud}(-k), \quad k=0, 1, \dots, K-1 \quad (4.17)$$

Ας ορίσουμε:

$$\underline{u}[n] = [u[n], u[n-1], \dots, u[n-K+1]]^T$$

Τότε μπορούμε να ορίσουμε τον πίνακα συσχέτισης  $R$  ως εξής:

$$R = \begin{bmatrix} \phi_{uu}(0) & \phi_{uu}(1) & \dots & \phi_{uu}(K-1) \\ \phi_{uu}^*(1) & \phi_{uu}(0) & \dots & \phi_{uu}(K-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{uu}^*(K-1) & \phi_{uu}^*(K-2) & \dots & \phi_{uu}(0) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

και

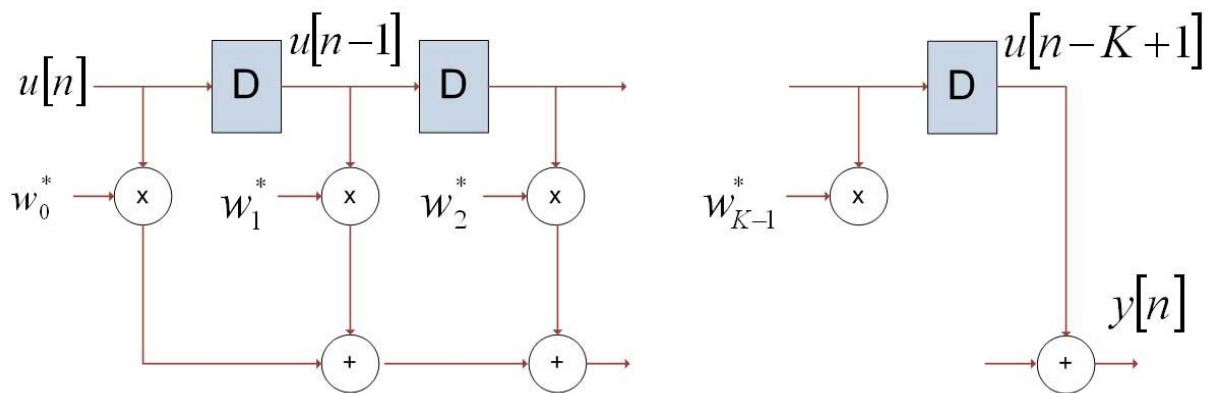
$$\begin{aligned} T &= E [ \underline{u}[n] d^*[n] ] \\ &= [ \varphi_{ud}(0), \varphi_{ud}(-1), \dots, \varphi_{ud}(1-K) ]^T \end{aligned} \quad (4.19)$$

Τότε η εξίσωση Wiener-Hopf μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\underline{RW} = T$$

Τελικά η λύση Wiener δίνεται από τον τύπο:

$$\underline{W} = R^{-1}T \quad (4.20)$$



Εικόνα 4.3: Εγκάρσιο γραμμικό φίλτρο Wiener.

Στην περίπτωση των συστημάτων MIMO, όταν εφαρμόζουμε την λύση Wiener, έχουμε:

$$\hat{x}_1 = \sum_{k=1}^{N_R} w_k^* r_k = \underline{W}^{1H} \cdot \underline{r}$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_2 &= \sum_{k=1}^{N_R} w_k^{2*} r_k = \underline{W}^{2H} \cdot \underline{r} \\ &\dots \\ \hat{x}_{N_T} &= \sum_{k=1}^{N_R} w_k^{N_R*} r_k = \underline{W}^{N_R H} \underline{r}\end{aligned}\quad (4.21)$$

όπου

$$\underline{W}^l = [w_1^l, w_2^l, \dots, w_{N_R}^l]^T$$

Σε συνέχεια της λύσης Wiener έχουμε:

$$\underline{W}^l = R^{-1} T_l$$

Τώρα πρέπει να βρούμε τα  $R$  και  $T$ . Ο  $R = [r r^H]$  είναι ένας πίνακας διαστάσεων  $N_T \times N_R$ :

$$R = \begin{bmatrix} E[r_1 r_1^*] & E[r_1 r_2^*] & \dots & E[r_1 r_{N_R}^*] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E[r_{N_R} r_1^*] & E[r_{N_R} r_2^*] & \dots & E[r_{N_R} r_{N_R}^*] \end{bmatrix}\quad (4.22)$$

όπου

$$r_k = h_{k1} x_1 + h_{k2} x_2 + \dots + h_{kN_T} x_{N_T} + n_k = \mathbf{h}_k^T \underline{x} + n_k$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}E[r_k r_l^*] &= E\left[\left(h_{k1} x_1 + \dots + h_{kN_T} x_{N_T} + n_k\right) \cdot \left(h_{l1}^* x_1^* + \dots + h_{lN_T}^* x_{N_T}^* + n_l^*\right)\right] \\ &= E\left[h_{k1} h_{l1}^* |x_1|^2 + h_{k2} h_{l2}^* |x_2|^2 + \dots + h_{kN_T} h_{lN_T}^* |x_{N_T}|^2 + h_{k1} h_{l2}^* x_1 x_2^* + \dots + h_{kN_T} h_{lN_T-1}^* x_{N_T-1} x_{N_T}^* + n_k n_l^*\right]\end{aligned}\quad (4.23)$$

Αφού όμως ισχύει ότι  $E[x_1 x_2^*] = 0$  και τα  $\mathbf{h}_k$  και  $\mathbf{h}_l$  είναι γνωστά, έχουμε:

$$E[r_k r_l^*] = h_{k1} h_{l1}^* E[|x_1|^2] + h_{k2} h_{l2}^* E[|x_2|^2] + \dots + h_{kN_T} h_{lN_T}^* E[|x_{N_T}|^2] + \sigma^2 \delta(k-l) \quad (4.24)$$

Με δεδομένο ότι  $E[|x_1|^2] = P$  είναι η ισχύς του σήματος για όλα τα  $k$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} E[r_k r_l^*] &= P(h_{k1} h_{l1}^* + \dots + h_{kN_T} h_{lN_T}^*) \\ &= P[h_{l1}^*, h_{l2}^*, \dots, h_{lN_T}^*] \cdot \begin{bmatrix} h_{k1} \\ h_{k12} \\ \dots \\ h_{kN_T} \end{bmatrix} + \sigma^2 \delta(k-l) \\ &= P(\mathbf{h}_l^H \mathbf{h}_k) + \sigma^2 \delta(k-l) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Επίσης

$$T_l = E[r \cdot x_l^*] = E \begin{bmatrix} r_1 \cdot x_l^* \\ r_2 \cdot x_l^* \\ \dots \\ r_{N_R} \cdot x_l^* \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} h_{l1} P \\ h_{l2} P \\ \dots \\ h_{lN_T} P \end{bmatrix} = P \mathbf{h}_l \quad (4.26)$$

όπου

$$r_k = h_{k1} x_1 + h_{k2} x_2 + \dots + h_{kN_T} x_{N_T}$$

Συνεχίζοντας με τη λύση MMSE έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \underline{W}_l &= R^{-1}T_l \\
 &= \left( \frac{1}{P} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^H \cdot \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2^H \cdot \mathbf{h}_1 & \dots & \mathbf{h}_{N_R}^H \cdot \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_1^H \cdot \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_2^H \cdot \mathbf{h}_2 & \dots & \mathbf{h}_{N_R}^H \cdot \mathbf{h}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{h}_1^H \cdot \mathbf{h}_{N_R} & \mathbf{h}_2^H \cdot \mathbf{h}_{N_R} & \dots & \mathbf{h}_{N_R}^H \cdot \mathbf{h}_{N_R} \end{bmatrix} + \sigma^2 \right)^{-1} P \mathbf{h}_l \\
 &= \left( \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^H \cdot \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2^H \cdot \mathbf{h}_1 & \dots & \mathbf{h}_{N_R}^H \cdot \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_1^H \cdot \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_2^H \cdot \mathbf{h}_2 & \dots & \mathbf{h}_{N_R}^H \cdot \mathbf{h}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{h}_1^H \cdot \mathbf{h}_{N_R} & \mathbf{h}_2^H \cdot \mathbf{h}_{N_R} & \dots & \mathbf{h}_{N_R}^H \cdot \mathbf{h}_{N_R} \end{bmatrix} + \frac{\sigma^2}{P} \right)^{-1} \mathbf{h}_l
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το βέλτιστο συντελεστή βάρους  $\underline{W}$  ως εξής:

$$\begin{aligned}
 \underline{W} &= \begin{bmatrix} | & | & | \\ \frac{W_1}{|} & \frac{W_2}{|} & \dots & \frac{W_{N_R}}{|} \\ | & | & | \end{bmatrix} \\
 &= H \left( H \cdot H^H + \frac{1}{SNR} I_{N_T} \right)^{-1}
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

ή

$$\underline{W}^H = \left( H^H H + \frac{1}{SNR} I_{N_T} \right)^{-1} H^H \tag{4.29}$$

Το  $SNR$  που επιτυγχάνεται στην  $k$ -οστή ροή δεδομένων δίνεται από τη σχέση [4]:

$$SNR_k = \frac{1}{MMSE_k} - 1 = \left[ \frac{1}{\left( I_{N_T} + \frac{1}{N_R} H^\dagger H \right)^{-1}} \right]_{kk}^{-1} \tag{4.30}$$

όπου

$I_{N_T}$  είναι ένας ο  $N_T \times N_T$  μοναδιαίος πίνακας

$H^\dagger$  είναι ο Hermitian ανάστροφος (Hermitian transpose) του  $H$ .

Αν στην (4.29) παραλείψουμε το 2<sup>ο</sup> όρο  $\frac{1}{SNR} I_{N_r}$ , τότε προκύπτει ο Zero Forcing ισοσταθμιστής και έχουμε [5]:

$$W^H = (H^H H)^{-1} H^H \quad (4.31)$$

## Κεφάλαιο 5

### 5.1 MIMO με ισοσταθμιστή μηδενισμού της διασυμβολικής παρεμβολής (Zero Forcing equalizer)

Μελετάμε την περίπτωση κατά την οποία έχουμε πολλές κεραιές εκπομπής και πολλές κεραιές λήψης, δηλαδή Multiple Input Multiple Output (MIMO). Ειδικότερα θα περιοριστούμε σε δυο κεραιές εκπομπής και δυο κεραιές λήψης (δηλαδή ένα MIMO σύστημα  $2 \times 2$ ). Υποθέτουμε ότι το κανάλι είναι flat fading Rayleigh multipath channel (δηλαδή διάρκεια συμβόλου μικρότερη από το σύνφωνο χρόνο του καναλιού) και η διαμόρφωση είναι BPSK.

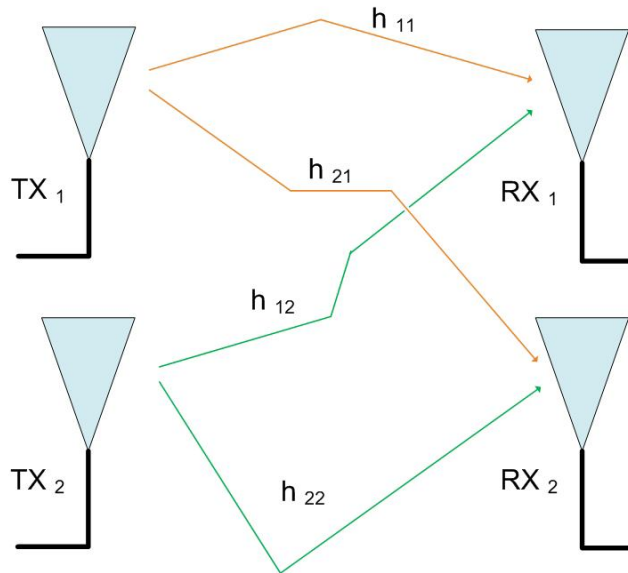
#### 2×2 MIMO

Σε ένα  $2 \times 2$  MIMO για τις 2 διαθέσιμες κεραιές θεωρούμε τα εξής:

1. Έστω ότι έχουμε μια εκπομπή συμβόλων, για παράδειγμα:  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n\}$
2. Σε μια κανονική μετάδοση, θα στέλναμε το  $x_1$  στην πρώτη χρονοσχισμή, το  $x_2$  στη δεύτερη χρονοσχισμή κλπ.
3. Με δεδομένο ότι έχουμε 2 κεραιές για εκπομπή, μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τα σύμβολα ανά δύο. Στην πρώτη χρονοσχισμή εκπέμπουμε το  $x_1$  από την πρώτη κεραία και το  $x_2$  από τη δεύτερη κεραία. Στην δεύτερη χρονοσχισμή εκπέμπουμε το  $x_3$  από την πρώτη κεραία και το  $x_4$  από τη δεύτερη κεραία κλπ.
4. Η ομαδοποίηση των συμβόλων ανά δυο και η αποστολή τους στην ίδια χρονοσχισμή απαιτεί μόνο το  $\frac{n}{2}$  των χρονοσχισμών από την απλή περίπτωση μιας κεραιάς που αποστέλλει μόνο ένα σύμβολο την κάθε χρονοσχισμή. Το αποτέλεσμα είναι ο διπλασιασμός του ρυθμού μετάδοσης.



5. Το παρακάτω σχήμα μας δίνει μια εικόνα για το πώς θα λειτουργεί το μοντέλο με 2 κεραίες εκπομπής και δυο κεραίες λήψης.



**Τίθενται δυο σημαντικά ερωτήματα:**

- Τα δυο μεταδιδόμενα σύμβολα θα μπορούν να μεταδοθούν χωρίς το ένα να δημιουργεί παρεμβολή στο άλλο;
- Μπορούμε το σήμα που φτάνει στους δέκτες να το επεξεργαστούμε και να λάβουμε τα δυο αρχικά σύμβολα;

## Παραδοχές

1. Το κανάλι έχει flat fading, δηλαδή υπάρχει μία μόνο διαδρομή λήψης. Έτσι, η συνέλιξη μπορεί να αντικατασταθεί με έναν απλό πολλαπλασιασμό.

2. Η γνώση μας για την παραμόρφωση του καναλιού που υπάρχει σε κάθε μια από τις κεραίες εκπομπής είναι ανεξάρτητη από άλλες κεραίες εκπομπής.

3. Για την  $i^{th}$  κεραία εκπομπής έως την  $j^{th}$  κεραία λήψης, κάθε μεταδιδόμενο σύμβολο πολλαπλασιάζεται με μια τυχαία μιγαδική μεταβλητή  $h_{j,i}$ . Δεδομένου ότι το κανάλι είναι ένα Rayleigh κανάλι, το πραγματικό και το

φανταστικό μέρος του  $h_{j,i}$  είναι με κατανομή Gauss με μηδενική μέση τιμή  $E[h_{j,i}] = 0$  και διακύμανση  $\sigma_{h_{j,i}}^2 = \frac{1}{2}$ .

4. Η γνώση μας για το κανάλι μεταξύ κάθε μετάδοσης στις κεραίες λήψης είναι ανεξάρτητο και τυχαία μεταβαλλόμενο στον χρόνο.

5. Στην κεραία λήψης, ο θόρυβος  $n$  ακολουθεί την Gaussian κατανομή και ισχύει:

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(n-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{με } \mu = 0 \quad \text{και } \sigma^2 = \frac{N_0}{2}.$$

6. Το κανάλι  $h_{j,i}$  είναι γνωστό στο δέκτη.

### Zero forcing (ZF) equalizer για $2 \times 2$ MIMO κανάλια

Στην πρώτη χρονοσχιsmή, το λαμβανόμενο σήμα στην πρώτη κεραία λήψης είναι [6]:

$$y_1 = h_{1,1}x_1 + h_{1,2}x_2 + n_1 = [h_{1,1} \ h_{1,2}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + n_1$$

Το λαμβανόμενο σήμα στην δεύτερη κεραία λήψης είναι:

$$y_2 = h_{2,1}x_1 + h_{2,2}x_2 + n_2 = [h_{2,1} \ h_{2,2}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + n_2$$

όπου

$y_1$  είναι το σήμα που ελήφθη από την πρώτη κεραία

$y_2$  είναι το σήμα που ελήφθη από την δεύτερη κεραία

$h_{1,1}$  είναι το κανάλι μεταξύ της πρώτης κεραίας εκπομπής και της πρώτης κεραίας λήψης,

$h_{1,2}$  είναι το κανάλι μεταξύ της δεύτερης κεραίας εκπομπής και της πρώτης κεραίας λήψης,

$h_{2,1}$  είναι το κανάλι μεταξύ της πρώτης κεραίας εκπομπής και της δεύτερης κεραίας λήψης,

$h_{2,2}$  είναι το κανάλι μεταξύ της δεύτερης κεραίας εκπομπής και της δεύτερης κεραίας λήψης,

$x_1, x_2$  είναι τα μεταδιδόμενα σύμβολα αντίστοιχα.

$n_1, n_2$  είναι ο θόρυβος στην πρώτη και δεύτερη κεραία λήψης, αντίστοιχα.

Υποθέτουμε ότι ο δέκτης γνωρίζει τα  $h_{1,1}$ ,  $h_{1,2}$ ,  $h_{2,1}$  και  $h_{2,2}$ . Επίσης είναι γνωστά τα  $y_1$  και  $y_2$ . Αυτό που δεν γνωρίζουμε είναι το  $x_1$  και το  $x_2$ . Άρα έχουμε δυο εξισώσεις και δυο αγνώστους.

Για ευκολία, η ανωτέρω εξίσωση μπορεί να παρασταθεί με πίνακες ως εξής:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

Ισοδύναμα,

$$y = Hx + n$$

$$Wy = WHx + Wn$$

Για να λύσουμε ως προς  $x$ , πρέπει να βρούμε έναν πίνακα  $W$  που να ικανοποιεί  $WH = I$ .

Ο **Zero Forcing (ZF) linear detector** δίδεται από τον τύπο:

$$W = (H^H H)^{-1} H^H$$

Αυτός ο πίνακας είναι επίσης γνωστός ως ψευδοαντίστροφος (pseudo inverse) για έναν πίνακα  $m \times n$ .

Μπορούμε να αναλύσουμε:

$$H^H H = \begin{bmatrix} h_{1,1}^* & h_{2,1}^* \\ h_{1,2}^* & h_{2,2}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |h_{1,1}|^2 + |h_{2,1}|^2 & h_{1,1}^* h_{1,2} + h_{2,1}^* h_{2,2} \\ h_{1,2}^* h_{1,1} + h_{2,2}^* h_{2,1} & |h_{1,2}|^2 + |h_{2,2}|^2 \end{bmatrix}$$

## BER με ZF equalizer για 2×2 MIMO

Η διαγώνιος στον πίνακα  $H^H H$  δεν είναι μηδέν (όπως είναι στην περίπτωση Alamouti 2x1 STBC). Ο ισοσταθμιστής μηδενισμού της διασυμβολικής παρεμβολής (zero forcing equalizer) προσπαθεί να μηδενίσει αυτή τη διαγώνιο, δηλαδή τους παράγοντες παρεμβολής. Για παράδειγμα, κατά την επίλυση ως προς  $x_1$  θέλουμε να μηδενίσουμε την παρεμβολή από το  $x_2$  και αντίστροφα. Λόγω αυτής της προσπάθειας θα έχουμε την αύξηση του θορύβου. Ως εκ τούτου ο Zero Forcing equalizer δεν αποτελεί τη βέλτιστη μεθοδολογία, αλλά έχει χαμηλή πολυπλοκότητα και είναι εύκολα υλοποιήσιμος.

Με τον ισοσταθμιστή ZF, το κανάλι για το εκπεμπόμενο σύμβολο από κάθε χωρική διάσταση είναι ένα 1x1 κανάλι Rayleigh. Ως εκ τούτου το BER για 2×2 MIMO κανάλια με Rayleigh fading με ισοσταθμιστή ZF είναι το ίδιο BER με αυτό για ένα 1×1 κανάλι με διαλείψεις Rayleigh.

Για BPSK διαμόρφωση σε κανάλια με διαλείψεις Rayleigh, το BER μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο [2]:

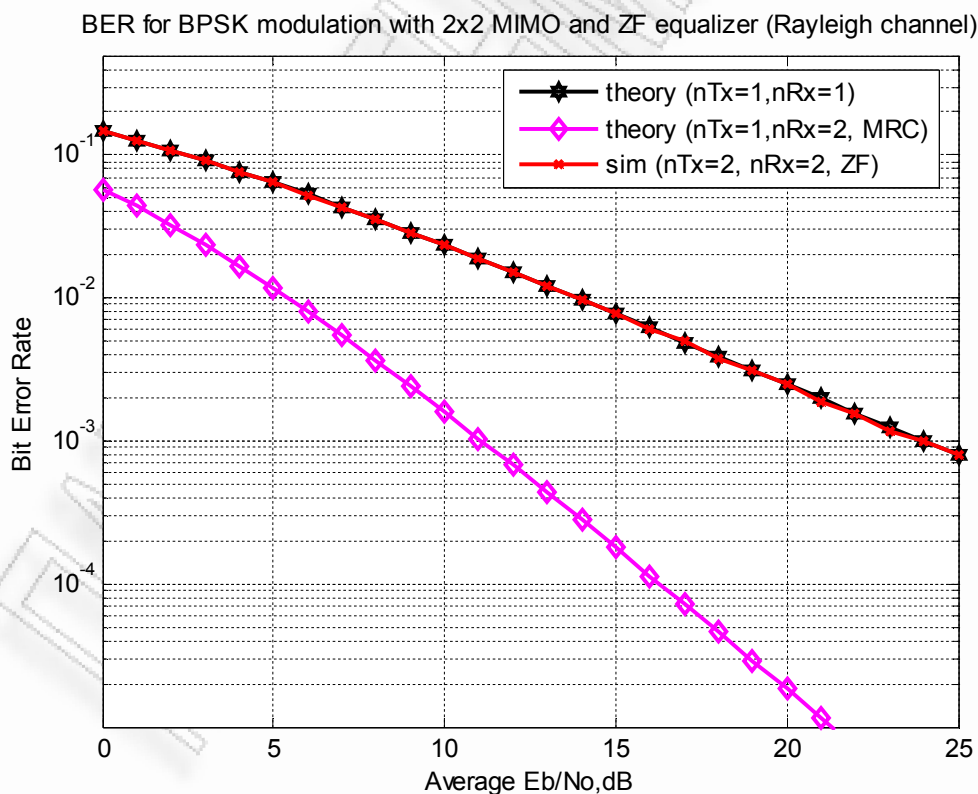
$$P_b = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{(E_b N_o)}{(E_b N_o) + 1}} \right)$$

## Μοντέλο προσομοίωσης

Το πρόγραμμα του Matlab εκτελεί τις παρακάτω ενέργειες:

- (α) Παράγει τυχαία δυαδική ακολουθία από +1 και 1.
- (β) Ομαδοποιεί τα σύμβολα ανά δυο και τα στέλνει σε μια χρονοσχισμή.
- (γ) Πολλαπλασιάζει τα σύμβολα με το κανάλι και μετά προσθέτει WGN.
- (δ) Κάνει ισοστάθμιση στα σύμβολα που έχει λάβει.
- (ε) Εκτελεί αποκωδικοποίηση και μετρά τα λάθη.
- (ζ) Επαναλαμβάνει για πολλές τιμές του  $\frac{E_b}{N_0}$  και βγάζει σε γραφική

παράσταση την προσομοίωση και τα θεωρητικά αποτελέσματα.



Εικόνα 5.1: BER με Zero Forcing equalization

## Συνοψίζοντας

1. Όπως αναμενόταν τα αποτελέσματα της προσομοίωσης με ένα 2x2 σύστημα MIMO που χρησιμοποιεί τη διαμόρφωση BPSK σε Rayleigh κανάλι παρουσιάζει αποτελέσματα ίδια με αυτά που λαμβάνονται για ένα 1x1 σύστημα για τη διαμόρφωση BPSK στο κανάλι Rayleigh

2. Η επεξεργασία του λαμβανόμενου συμβόλου θα μπορούσε να ακολουθήσει καλύτερη μεθοδολογία από αυτήν του ισοσταθμιστή ZF. Η αύξηση του ρυθμού μετάδοσης δεν συνοδεύεται και από την αξιοποίηση του κέρδους που θα μπορούσε να προέλθει από την διαφορική λήψη των δυο κεραιών.

3. Είναι πιθανό να μην έχουμε τη δυνατότητα να επιτύχουμε τη διπλή μετάδοση συμβόλων σε όλες τις συνθήκες του καναλιού. Αν τα κανάλια είναι συσχετισμένα τότε υπάρχει η περίπτωση να μην έχουμε τη δυνατότητα να ανακτήσουμε την πληροφορία των αρχικών συμβόλων από την επεξεργασία των συμβόλων που λάβαμε.

4. Υπάρχουν άλλοι μέθοδοι λήψης που μπορούν να οδηγήσουν σε αύξηση του κέρδους από τη διαφορική λήψη των κεραιών.

## Κώδικας Προσομοίωσης

```
% Υπολογισμός του BER με BPSK διαμόρφωση σε κανάλι
% Rayleigh όπου έχουμε 2x2 MIMO σύστημα
% με ισοσταθμιστή μηδενισμού της διασυμβολικής παρεμβολής
% (Zero Forcing equalization)

clear

N = 10^6; % Αριθμός bits ή συμβόλων

Eb_N0_dB = [0:25]; % Διάστημα τιμών Eb/N0

nTx = 2; % Αριθμός κεραιών εκπομπής

nRx = 2; % Αριθμός κεραιών λήψης

for ii = 1:length(Eb_N0_dB)
```

```

% Πομπός

ip = rand(1,N)>0.5; % Τυχαία δημιουργία 0,1

s = 2*ip-1; % BPSK διαμόρφωση όπου το 1 παραμένει και το 0 γίνεται -1

sMod = kron(s,ones(nRx,1)); %

sMod = reshape(sMod,[nRx,nTx,N/nTx]); % Ομαδοποίηση σε πίνακα των
[nRx,nTx,N/NTx ]

h = 1/sqrt(2)*[randn(nRx,nTx,N/nTx) + j*randn(nRx,nTx,N/nTx)]; % Κανάλι Rayleighl
n = 1/sqrt(2)*[randn(nRx,N/nTx) + j*randn(nRx,N/nTx)]; % white gaussian noise, 0dB
variance

% Κανάλι και προσθήκη Θορύβου

y = squeeze(sum(h.*sMod,2)) + 10^(-Eb_N0_dB(ii)/20)*n;

% Δέκτης

% Forming the Zero Forcing equalization matrix  $W = \text{inv}(H^H H) H^H$ 

%  $H^H H$  is of dimension  $[nTx \times nTx]$ . In this case  $[2 \times 2]$ 

% Inverse of a  $[2 \times 2]$  matrix  $[a \ b; \ c \ d] = 1/(ad-bc)[d \ -b; -c \ a]$ 

hCof = zeros(2,2,N/nTx) ;

hCof(1,1,:) = sum(h(:,2,:).*conj(h(:,2,:)),1); % d term
hCof(2,2,:) = sum(h(:,1,:).*conj(h(:,1,:)),1); % a term
hCof(2,1,:) = -sum(h(:,2,:).*conj(h(:,1,:)),1); % c term
hCof(1,2,:) = -sum(h(:,1,:).*conj(h(:,2,:)),1); % b term

hDen = ((hCof(1,1,:).*hCof(2,2,:)) - (hCof(1,2,:).*hCof(2,1,:))); % ad-bc term

hDen = reshape(kron(reshape(hDen,1,N/nTx),ones(2,2)),2,2,N/nTx); % formatting for
division

hInv = hCof./hDen; %  $\text{inv}(H^H H)$ 

```

```

hMod = reshape(conj(h),nRx,N); % H^H operation

yMod = kron(y,ones(1,2)); % formatting the received symbol for equalization
yMod = sum(hMod.*yMod,1); % H^H * y
yMod = kron(reshape(yMod,2,N/nTx),ones(1,2)); % formatting
yHat = sum(reshape(hInv,2,N).*yMod,1); % inv(H^H*H)*H^H*y

% receiver - hard decision decoding
ipHat = real(yHat)>0;

% counting the errors
nErr(ii) = size(find([ip- ipHat]),2);

end

simBer = nErr/N; % simulated ber
EbN0Lin = 10.^(Eb_N0_dB/10);
theoryBer_nRx1 = 0.5.*(1-1.*(1+1./EbN0Lin).^(-0.5));
p = 1/2 - 1/2.*(1+1./EbN0Lin).^(-1/2);
theoryBerMRC_nRx2 = p.^2.*(1+2*(1-p));

close all
figure
semilogy(Eb_N0_dB,theoryBer_nRx1,'kh-','LineWidth',2);
hold on
semilogy(Eb_N0_dB,theoryBerMRC_nRx2,'md-','LineWidth',2);
semilogy(Eb_N0_dB,simBer,'rx-','LineWidth',2);
axis([0 25 10^-5 0.5])
grid on
legend('theory (nTx=1,nRx=1)', 'theory (nTx=1,nRx=2, MRC)', 'sim (nTx=2, nRx=2, ZF)');

```



```
xlabel('Average Eb/No,dB');
```

```
ylabel('Bit Error Rate');
```

```
title('BER for BPSK modulation with 2x2 MIMO and ZF equalizer (Rayleigh channel)');
```

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

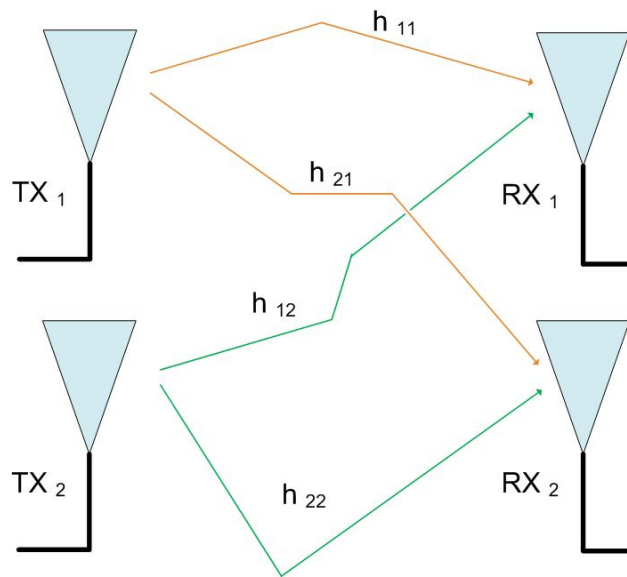
## 5.2 MIMO με ισοσταθμιστή που χρησιμοποιεί την μέθοδο του ελαχίστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MMSE equalizer)

Μία άλλη προσέγγιση είναι ο ισοσταθμιστής του Ελαχίστου Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος (Minimum Mean Square Error equalization). Υποθέτουμε ότι το κανάλι είναι flat fading Rayleigh multipath channel και η διαμόρφωση είναι BPSK.

### 2×2 MIMO

Σε ένα 2×2 MIMO για τις 2 διαθέσιμες κεραιές θεωρούμε τα εξής:

1. Έστω ότι έχουμε μια εκπομπή συμβόλων, για παράδειγμα:  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n\}$
2. Σε μια κανονική μετάδοση, θα στέλναμε το  $x_1$  στην πρώτη χρονοσχισμή, το  $x_2$  στη δεύτερη χρονοσχισμή κλπ.
3. Με δεδομένο ότι έχουμε 2 κεραιές για εκπομπή, μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τα σύμβολα ανά δύο. Στην πρώτη χρονοσχισμή εκπέμπουμε το  $x_1$  από την πρώτη κεραιά και το  $x_2$  από τη δεύτερη κεραιά. Στην δεύτερη χρονοσχισμή εκπέμπουμε το  $x_3$  από την πρώτη κεραιά και το  $x_4$  από τη δεύτερη κεραιά κλπ.
4. Η ομαδοποίηση των συμβόλων ανά δυο και η αποστολή τους στην ίδια χρονοσχισμή απαιτεί μόνο το  $\frac{n}{2}$  των χρονοσχισμών από την απλή περίπτωση μιας κεραιάς που αποστέλλει μόνο ένα σύμβολο την κάθε χρονοσχισμή. Το αποτέλεσμα είναι ο διπλασιασμός του ρυθμού μετάδοσης.
5. Το παρακάτω σχήμα μας δίνει μια εικόνα για το πώς θα λειτουργεί το μοντέλο με 2 κεραιές εκπομπής και δυο κεραιές λήψης.



## Παραδοχές

1. Το κανάλι έχει flat fading, δηλαδή υπάρχει μία μόνο διαδρομή λήψης. Έτσι, η συνέλιξη μπορεί να αντικατασταθεί με έναν απλό πολλαπλασιασμό.

2. Η γνώση μας για την παραμόρφωση του καναλιού που υπάρχει σε κάθε μια από τις κεραίες εκπομπής είναι ανεξάρτητη από άλλες κεραίες εκπομπής.

3. Για την  $i^{th}$  κεραία εκπομπής έως την  $j^{th}$  κεραία λήψης, κάθε μεταδιδόμενο σύμβολο πολλαπλασιάζεται με μια τυχαία μιγαδική μεταβλητή  $h_{j,i}$ . Δεδομένου ότι το κανάλι είναι ένα Rayleigh κανάλι, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του  $h_{j,i}$  είναι με κατανομή Gauss με μηδενική μέση τιμή  $E[h_{j,i}] = 0$  και διακύμανση  $\sigma_{h_{j,i}}^2 = \frac{1}{2}$ .

4. Το κανάλι μεταξύ κάθε μετάδοσης στις κεραίες λήψης είναι ανεξάρτητο και τυχαία μεταβαλλόμενο στον χρόνο.

5. Στην κεραία λήψης, ο θόρυβος  $n$  ακολουθεί την Gaussian κατανομή και ισχύει:

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(n-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{με } \mu = 0 \quad \text{και } \sigma^2 = \frac{N_0}{2}.$$

6. Το κανάλι  $h_{j,i}$  είναι γνωστό στο δέκτη.

### Minimum Mean Square Error (MMSE) equalizer για $2 \times 2$ MIMO κανάλια

Στην πρώτη χρονοσχιμή, το λαμβανόμενο σήμα στην πρώτη κεραία λήψης είναι:

$$y_1 = h_{1,1}x_1 + h_{1,2}x_2 + n_1 = [h_{1,1} \ h_{1,2}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + n_1$$

Το λαμβανόμενο σήμα στην δεύτερη κεραία λήψης είναι [6]:

$$y_2 = h_{2,1}x_1 + h_{2,2}x_2 + n_2 = [h_{2,1} \ h_{2,2}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + n_2$$

όπου

$y_1$  είναι το σήμα που ελήφθη από την πρώτη κεραία

$y_2$  είναι το σήμα που ελήφθη από την δεύτερη κεραία

$h_{1,1}$  είναι το κανάλι μεταξύ της πρώτης κεραίας εκπομπής και της πρώτης κεραίας λήψης,

$h_{1,2}$  είναι το κανάλι μεταξύ της δεύτερης κεραίας εκπομπής και της πρώτης κεραίας λήψης,

$h_{2,1}$  είναι το κανάλι μεταξύ της πρώτης κεραίας εκπομπής και της δεύτερης κεραίας λήψης,

$h_{2,2}$  είναι το κανάλι μεταξύ της δεύτερης κεραίας εκπομπής και της δεύτερης κεραίας λήψης,

$x_1, x_2$  είναι τα μεταδιδόμενα σύμβολα αντίστοιχα.

$n_1, n_2$  είναι ο θόρυβος στην πρώτη και δεύτερη κεραία λήψης, αντίστοιχα.

Υποθέτουμε ότι ο δέκτης γνωρίζει τα  $h_{1,1}$ ,  $h_{1,2}$ ,  $h_{2,1}$  και  $h_{2,2}$ . Επίσης είναι γνωστά τα  $y_1$  και  $y_2$ . Αυτό που δεν γνωρίζουμε είναι το  $x_1$  και το  $x_2$ . Άρα έχουμε δυο εξισώσεις και δυο αγνώστους.

Για ευκολία, η ανωτέρω εξίσωση μπορεί να παρασταθεί με πίνακες ως εξής:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

Ισοδύναμα,

$$y = Hx + n$$

$$Wy = WHx + Wn$$

Για να λύσουμε ως προς  $x$ , πρέπει να βρούμε έναν συνιστώσα  $W$  η οποία ελαχιστοποιεί το κριτήριο,

$$E \{ [Wy - x][Wy - x]^H \}$$

Όπως έχουμε δείξει στο Κεφάλαιο 4, έχουμε

$$W = (H^H H + N_0)^{-1} H^H$$

Όταν συγκρίνουμε τον MMSE ισοσταθμιστή (4.5) με τον Zero Forcing equalizer, εκτός από τον όρο  $N_0 I$  και οι δύο είναι παρόμοιοι. Αν ο θόρυβος μηδενιστεί, ο MMSE equalizer είναι ίδιος με τον Zero Forcing equalizer.

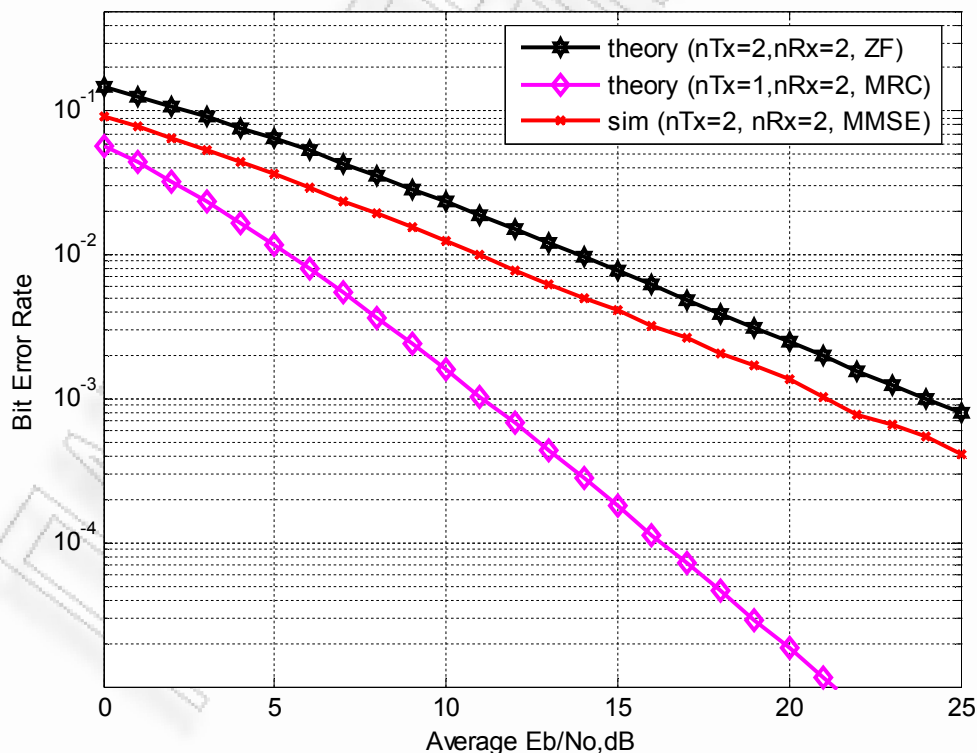
## Μοντέλο Προσομοίωσης

Το πρόγραμμα του Matlab εκτελεί τις παρακάτω ενέργειες:

- (α) Παράγει τυχαία δυαδική ακολουθία από +1 και 1.
- (β) Ομαδοποιεί τα σύμβολα ανά δυο και τα στέλνει σε μια χρονοσχισμή.
- (γ) Πολλαπλασιάζει τα σύμβολα με το κανάλι και μετά προσθέτει WGN.
- (δ) Κάνει ισοστάθμιση στα σύμβολα που έχει λάβει.
- (ε) Εκτελεί αποκωδικοποίηση και απόφαση και μετρά τα λάθη.
- (ζ) Επαναλαμβάνει για πολλές τιμές του  $\frac{E_b}{N_0}$  και βγάζει σε γραφική

παράσταση την προσομοίωση και τα θεωρητικά αποτελέσματα.

BER for BPSK modulation with 2x2 MIMO and MMSE equalizer (Rayleigh channel)



Εικόνα 5.2: BER με Minimum Mean Square Error equalization

## Συνοψίζοντας

Ο με τη χρήση του ισοσταθμιστή Minimum Mean Square Error (MMSE) και σε σχέση με τον ισοσταθμιστή Zero Forcing μπορούμε να επιτύχουμε περίπου κέρδος 3dB για  $10^{-3}$  BER.

## Κώδικας Προσομοίωσης

```
% Υπολογισμός του BER με BPSK διαμόρφωση σε κανάλι
% Rayleigh όπου έχουμε 2x2 MIMO σύστημα
% με ισοσταθμιστή που χρησιμοποιεί την μέθοδο του ελαχίστου μέσου
% τετραγωνικού σφάλματος (Minimum Mean Square Error equalization)

clear

N = 10^6; % Αριθμός bits ή συμβόλων
Eb_N0_dB = [0:25]; % Διάστημα τιμών Eb/N0
nTx = 2; % Αριθμός κεραιών εκπομπής
nRx = 2; % Αριθμός κεραιών λήψης
for ii = 1:length(Eb_N0_dB)

    % Πομπός
    ip = rand(1,N)>0.5; % Τυχαία δημιουργία 0,1
    s = 2*ip-1; % BPSK διαμόρφωση όπου το 1 παραμένει και το 0 γίνεται -1

    sMod = kron(s,ones(nRx,1)); %
    sMod = reshape(sMod,[nRx,nTx,N/nTx]); % Ομαδοποίηση σε πίνακα των
[nRx,nTx,N/NTx ]

    h = 1/sqrt(2)*[randn(nRx,nTx,N/nTx) + j*randn(nRx,nTx,N/nTx)]; % Κανάλι Rayleighl
    n = 1/sqrt(2)*[randn(nRx,N/nTx) + j*randn(nRx,N/nTx)]; % white gaussian noise, 0dB
variance
```

```

% Κανάλι και προσθήκη Θορύβου

y = squeeze(sum(h.*sMod,2)) + 10^(-Eb_N0_dB(ii)/20)*n;

% Δέκτης

% Forming the MMSE equalization matrix  $W = \text{inv}(H^H H + \sigma^2 I) H^H$ 
%  $H^H H$  is of dimension  $[n_{Tx} \times n_{Tx}]$ . In this case  $[2 \times 2]$ 
% Inverse of a  $[2 \times 2]$  matrix  $[a \ b; \ c \ d] = 1/(ad-bc)[d \ -b; \ -c \ a]$ 
hCof = zeros(2,2,N/nTx) ;
hCof(1,1,:) = sum(h(:,2,:).*conj(h(:,2,:)),1) + 10^(-Eb_N0_dB(ii)/10); % d term
hCof(2,2,:) = sum(h(:,1,:).*conj(h(:,1,:)),1) + 10^(-Eb_N0_dB(ii)/10); % a term
hCof(2,1,:) = -sum(h(:,2,:).*conj(h(:,1,:)),1); % c term
hCof(1,2,:) = -sum(h(:,1,:).*conj(h(:,2,:)),1); % b term
hDen = ((hCof(1,1,:).*hCof(2,2,:)) - (hCof(1,2,:).*hCof(2,1,:))); % ad-bc term
hDen = reshape(kron(reshape(hDen,1,N/nTx),ones(2,2)),2,2,N/nTx); % formatting for
division
hInv = hCof./hDen; %  $\text{inv}(H^H H)$ 

hMod = reshape(conj(h),nRx,N); %  $H^H$  operation

yMod = kron(y,ones(1,2)); % formatting the received symbol for equalization
yMod = sum(hMod.*yMod,1); %  $H^H * y$ 
yMod = kron(reshape(yMod,2,N/nTx),ones(1,2)); % formatting
yHat = sum(reshape(hInv,2,N).*yMod,1); %  $\text{inv}(H^H H) * H^H * y$ 

% receiver - hard decision decoding
ipHat = real(yHat)>0;

% counting the errors
nErr(ii) = size(find([ip- ipHat]),2);

```



```
end

simBer = nErr/N; % simulated ber

EbN0Lin = 10.^(Eb_N0_dB/10);

theoryBer_nRx1 = 0.5.*(1-1.*(1+1./EbN0Lin).^(-0.5));

p = 1/2 - 1/2.*(1+1./EbN0Lin).^(-1/2);

theoryBerMRC_nRx2 = p.^2.*(1+2*(1-p));

close all

figure

semilogy(Eb_N0_dB,theoryBer_nRx1,'kh-', 'LineWidth',2);

hold on

semilogy(Eb_N0_dB,theoryBerMRC_nRx2,'md-', 'LineWidth',2);

semilogy(Eb_N0_dB,simBer,'rx-', 'LineWidth',2);

axis([0 25 10^-5 0.5])

grid on

legend('theory (nTx=2,nRx=2, ZF)', 'theory (nTx=1,nRx=2, MRC)', 'sim (nTx=2, nRx=2, MMSE)');

xlabel('Average Eb/No,dB');

ylabel('Bit Error Rate');

title('BER for BPSK modulation with 2x2 MIMO and MMSE equalizer (Rayleigh channel)');
```

### 5.3 MIMO με ισοσταθμιστή μηδενισμού της διασυμβολικής παρεμβολής με διαδοχικούς μηδενισμούς (Zero Forcing Successive Interference Cancellation equalizer)

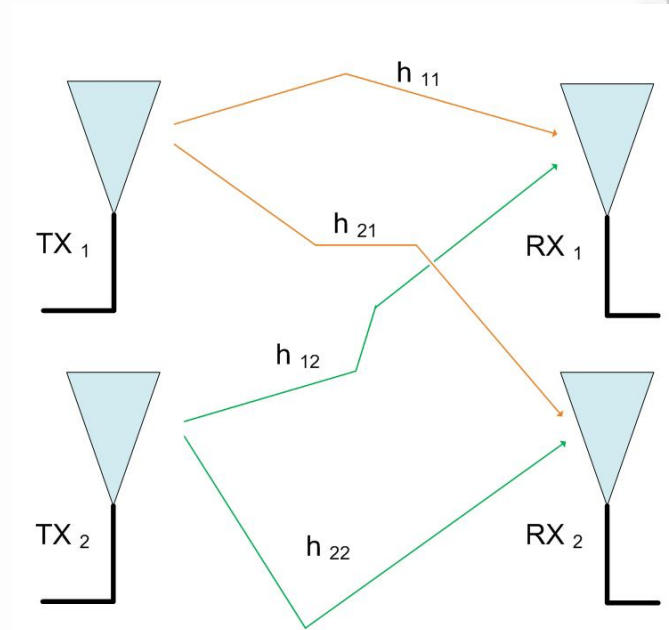
Στην περίπτωση του MIMO με ισοσταθμιστή ZF είχαμε λάβει αποτελέσματα παρόμοια με α  $1 \times 1$  σύστημα για BPSK διαμόρφωση σε κανάλι Rayleigh. Στην προκειμένη περίπτωση θα προσπαθήσουμε να βελτιώσουμε το bit error rate. Υποθέτουμε ότι το κανάλι είναι flat fading Rayleigh multipath channel και η διαμόρφωση είναι BPSK.

#### 2x2 MIMO

Σε ένα  $2 \times 2$  MIMO για τις 2 διαθέσιμες κεραίες θεωρούμε τα εξής:

1. Έστω ότι έχουμε μια εκπομπή συμβόλων, για παράδειγμα:  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n\}$
2. Σε μια κανονική μετάδοση, θα στέλναμε το  $x_1$  στην πρώτη χρονοσχισμή, το  $x_2$  στη δεύτερη χρονοσχισμή κλπ.
3. Με δεδομένο ότι έχουμε 2 κεραίες για εκπομπή, μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τα σύμβολα ανά δύο. Στην πρώτη χρονοσχισμή εκπέμπουμε το  $x_1$  από την πρώτη κεραία και το  $x_2$  από τη δεύτερη κεραία. Στην δεύτερη χρονοσχισμή εκπέμπουμε το  $x_3$  από την πρώτη κεραία και το  $x_4$  από τη δεύτερη κεραία κλπ.
4. Η ομαδοποίηση των συμβόλων ανά δυο και η αποστολή τους στην ίδια χρονοσχισμή απαιτεί μόνο το  $\frac{n}{2}$  των χρονοσχισμών από την απλή περίπτωση μιας κεραίας που αποστέλλει μόνο ένα σύμβολο την κάθε χρονοσχισμή. Το αποτέλεσμα είναι ο διπλασιασμός του ρυθμού μετάδοσης.

5. Το παρακάτω σχήμα μας δίνει μια εικόνα για το πώς θα λειτουργεί το μοντέλο με 2 κεραίες εκπομπής και δυο κεραίες λήψης.



## Παραδοχές

1. Το κανάλι έχει flat fading, δηλαδή υπάρχει μία μόνο διαδρομή λήψης. Έτσι, η συνέλιξη μπορεί να αντικατασταθεί με έναν απλό πολλαπλασιασμό.

2. Η διάλειψη του καναλιού σε κάθε μια από τις κεραίες εκπομπής είναι ανεξάρτητη από άλλες κεραίες εκπομπής.

3. Για την  $i^{th}$  κεραία εκπομπής έως την  $j^{th}$  κεραία λήψης, κάθε μεταδιδόμενο σύμβολο πολλαπλασιάζεται με μια τυχαία μιγαδική μεταβλητή  $h_{j,i}$ . Δεδομένου ότι το κανάλι είναι ένα Rayleigh κανάλι, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του  $h_{j,i}$  έχουν κατανομή Gauss με μηδενική μέση τιμή  $E[h_{j,i}] = 0$  και διακύμανση  $\sigma_{h_{j,i}}^2 = \frac{1}{2}$ .

4. Το κανάλι μεταξύ κάθε μετάδοσης στις κεραίες λήψης είναι ανεξάρτητο και τυχαία μεταβαλλόμενο στον χρόνο.

5. Στην κεραία λήψης, ο θόρυβος  $n$  ακολουθεί την Gaussian κατανομή και ισχύει:

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(n-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{με } \mu = 0 \quad \text{και } \sigma^2 = \frac{N_0}{2}.$$

6. Το κανάλι  $h_{j,i}$  είναι γνωστό στο δέκτη.

### Zero Forcing με Successive Interference Cancellation (ZF-SIC) για 2×2 MIMO κανάλια

Κάνοντας χρήση της μεθόδου Zero Forcing (ZF) equalization, ο δέκτης μπορεί να έχει μια εκτίμηση των εκπεμπόμενων συμβόλων  $x_1, x_2$  π.χ.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = (H^H H)^{-1} H^H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Αν πάρουμε ένα από τα εκτιμώμενα σύμβολα, π.χ. το  $x_2$  και αφαιρέσουμε την επίδραση του από  $y_1$  και  $y_2$ , θα έχουμε.

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - h_{1,2}\hat{x}_2 \\ y_2 - h_{2,2}\hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1}x_1 + n_1 \\ h_{2,1}x_1 + n_2 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} \\ h_{2,1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

$$r = hx_1 + n$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι ίδια με την εξίσωση που λαμβάνουμε στην περίπτωση της διαφορικής λήψης (receive diversity). Ο βέλτιστος τρόπος συνδυασμού πολλαπλών εκδοχών του μεταδιδόμενου σήματος στην διαφορική λήψη είναι το MRC.

$$\text{Το σύμβολο γίνεται: } \hat{x}_1 = \frac{h^H r}{h^H h}$$

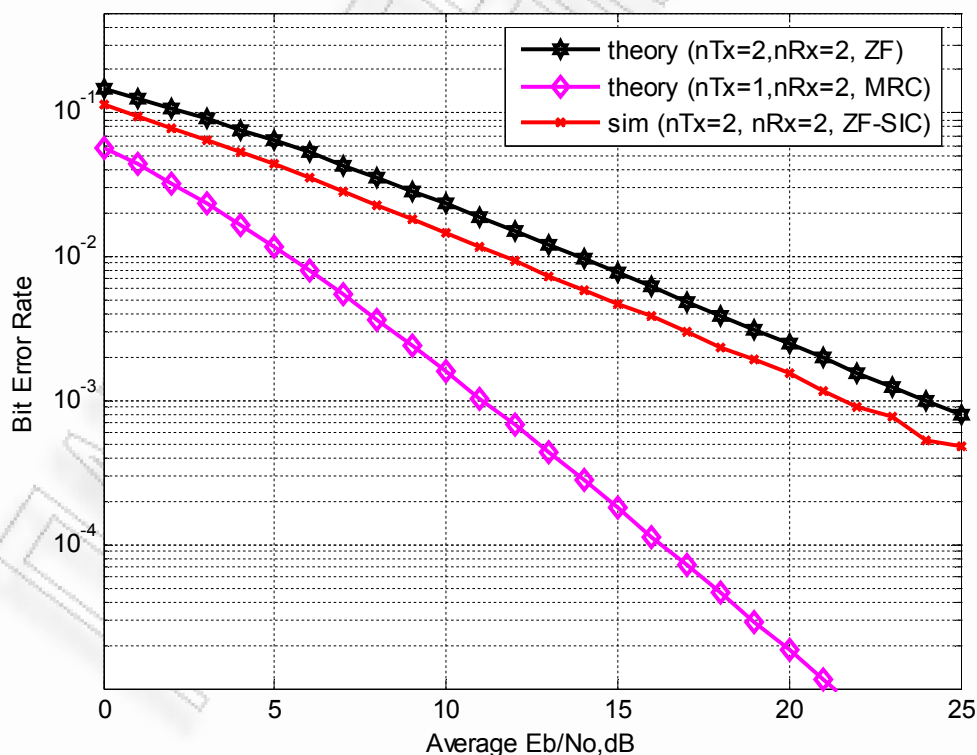
## Μοντέλο προσομοίωσης

Το πρόγραμμα του Matlab εκτελεί τις παρακάτω ενέργειες:

- (α) Παράγει τυχαία δυαδική ακολουθία από +1 και 1.
- (β) Ομαδοποιεί τα σύμβολα ανά δυο και τα στέλνει σε μια χρονοσχισμή.
- (γ) Πολλαπλασιάζει τα σύμβολα με το κανάλι και μετά προσθέτει WGN.
- (δ) Κάνει ισοστάθμιση στα σύμβολα που έχει λάβει.
- (ε) Εκτελεί αποκωδικοποίηση και μετρά τα λάθη.
- (ζ) Επαναλαμβάνει για πολλές τιμές του  $\frac{E_b}{N_0}$  και βγάζει σε γραφική

παράσταση την προσομοίωση και τα θεωρητικά αποτελέσματα.

BER for BPSK modulation with 2x2 MIMO and ZF-SIC equalizer (Rayleigh channel)



Εικόνα 5.3: BER με ZF Equalization with Successive Interference Cancellation

## Συνοψίζοντας

Σε σύγκριση με την απλή περίπτωση του ισοσταθμιστή Zero Forcing, η προσθήκη του successive interference cancellation μας παρέχει βελτίωση περίπου 2.2dB για BER  $10^{-3}$ .

Η βελτίωση έχει προέλθει από το γεγονός ότι η αποκωδικοποίηση της πληροφορίας από το  $x_1$  έχει μικρότερη πιθανότητα λάθους από τη δεύτερη. Υπάρχει πάντα και η πιθανότητα το  $x_2$  να μην έχει αποκωδικοποιηθεί σωστά.

## Κώδικας Προσομοίωσης

```
% Υπολογισμός του BER με BPSK διαμόρφωση σε κανάλι
% Rayleigh όπου έχουμε 2x2 MIMO σύστημα
% με ισοσταθμιστή μηδενισμού της διασυμβολικής
% παρεμβολής με διαδοχικούς μηδενισμούς
% (Zero Forcing Equalization with Successive Interference
% Cancellation)

clear
N = 10^3; % Αριθμός bits ή συμβόλων
Eb_N0_dB = [0:25]; % Διάστημα τιμών Eb/N0
nTx = 2; % Αριθμός κεραιών εκπομπής
nRx = 2; % Αριθμός κεραιών λήψης
for ii = 1:length(Eb_N0_dB)

    % Πομπός
    ip = rand(1,N)>0.5; % Τυχαία δημιουργία 0,1
    s = 2*ip-1; % BPSK διαμόρφωση όπου το 1 παραμένει και το 0 γίνεται -1

    sMod = kron(s,ones(nRx,1)); %
    sMod = reshape(sMod,[nRx,nTx,N/nTx]); % Ομαδοποίηση σε πίνακα των
    [nRx,nTx,N/NTx ]

    h = 1/sqrt(2)*[randn(nRx,nTx,N/nTx) + j*randn(nRx,nTx,N/nTx)]; % Κανάλι Rayleighl
```

```

n = 1/sqrt(2)*[randn(nRx,N/nTx) + j*randn(nRx,N/nTx)]; % white gaussian noise, 0dB
variance

% Κανάλι και προσθήκη Θορύβου
y = squeeze(sum(h.*sMod,2)) + 10^(-Eb_N0_dB(ii)/20)*n;

% Δέκτης

% Forming the ZF equalization matrix W = inv(H^H*H)*H^H
% H^H*H is of dimension [nTx x nTx]. In this case [2 x 2]
% Inverse of a [2x2] matrix [a b; c d] = 1/(ad-bc)[d -b;-c a]
hCof = zeros(2,2,N/nTx) ;
hCof(1,1,:) = sum(h(:,2,:).*conj(h(:,2,:)),1) ; % d term
hCof(2,2,:) = sum(h(:,1,:).*conj(h(:,1,:)),1) ; % a term
hCof(2,1,:) = -sum(h(:,2,:).*conj(h(:,1,:)),1) ; % c term
hCof(1,2,:) = -sum(h(:,1,:).*conj(h(:,2,:)),1) ; % b term
hDen = ((hCof(1,1,:).*hCof(2,2,:)) - (hCof(1,2,:).*hCof(2,1,:))); % ad-bc term
hDen = reshape(kron(reshape(hDen,1,N/nTx),ones(2,2)),2,2,N/nTx); % formatting for
division
hInv = hCof./hDen; % inv(H^H*H)

hMod = reshape(conj(h),nRx,N); % H^H operation

yMod = kron(y,ones(1,2)); % formatting the received symbol for equalization
yMod = sum(hMod.*yMod,1); % H^H * y
yMod = kron(reshape(yMod,2,N/nTx),ones(1,2)); % formatting
yHat = sum(reshape(hInv,2,N).*yMod,1); % inv(H^H*H)*H^H*y

% receiver - hard decision decoding on second spatial dimension
ipHat2SS = real(yHat(2:2:end))>0;
ipHatMod2SS = 2*ipHat2SS-1;
ipHatMod2SS = kron(ipHatMod2SS,ones(nRx,1));
ipHatMod2SS = reshape(ipHatMod2SS,[nRx,1,N/nTx]);

% new received symbol - removing the effect from second spatial dimension
h2SS = h(:,2,:); % channel in the second spatial dimension
r = y - squeeze(h2SS.*ipHatMod2SS);

% maximal ratio combining - for symbol in the first spatial dimension
h1SS = squeeze(h(:,1,:));

```

```
yHat1SS = sum(conj(h1SS).*r,1)/sum(h1SS.*conj(h1SS),1);
yHat(1:2:end) = yHat1SS;

% receiver - hard decision decoding
ipHat = real(yHat)>0;

% counting the errors
nErr(ii) = size(find([ip- ipHat]),2);

end

simBer = nErr/N; % simulated ber
EbN0Lin = 10.^(Eb_N0_dB/10);
theoryBer_nRx1 = 0.5.*(1-1*(1+1./EbN0Lin).^(-0.5));
p = 1/2 - 1/2*(1+1./EbN0Lin).^(-1/2);
theoryBerMRC_nRx2 = p.^2.*(1+2*(1-p));

close all
figure
semilogy(Eb_N0_dB,theoryBer_nRx1,'kh-','LineWidth',2);
hold on
semilogy(Eb_N0_dB,theoryBerMRC_nRx2,'md-','LineWidth',2);
semilogy(Eb_N0_dB,simBer,'rx-','LineWidth',2);
axis([0 25 10^-5 0.5])
grid on
legend('theory (nTx=2,nRx=2, ZF)', 'theory (nTx=1,nRx=2, MRC)', 'sim (nTx=2, nRx=2, ZF-
SIC)');
xlabel('Average Eb/No,dB');
ylabel('Bit Error Rate');
title('BER for BPSK modulation with 2x2 MIMO and ZF-SIC equalizer (Rayleigh channel)');
```



## 5.4 MIMO με ZF SIC με βέλτιστη ταξινόμηση (Optimal Ordering)

Θα μελετήσουμε την περίπτωση της εφαρμογής του ZF-SIC (Zero Forcing Successive Interference Cancellation) με βέλτιστη ταξινόμηση (optimal ordering). Υποθέτουμε ότι το κανάλι είναι flat fading Rayleigh multipath channel και η διαμόρφωση είναι BPSK.

### Zero forcing equalizer για 2×2 MIMO

Στην πρώτη χρονοσχιμή, το λαμβανόμενο σήμα στην πρώτη κεραία λήψης είναι:

$$y_1 = h_{1,1}x_1 + h_{1,2}x_2 + n_1 = [h_{1,1} \ h_{1,2}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + n_1$$

Το λαμβανόμενο σήμα στην δεύτερη κεραία λήψης είναι:

$$y_2 = h_{2,1}x_1 + h_{2,2}x_2 + n_2 = [h_{2,1} \ h_{2,2}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + n_2$$

όπου

$y_1$  είναι το σήμα που ελήφθη από την πρώτη κεραία

$y_2$  είναι το σήμα που ελήφθη από την δεύτερη κεραία

$h_{1,1}$  είναι το κανάλι μεταξύ της πρώτης κεραίας εκπομπής και της πρώτης κεραίας λήψης,

$h_{1,2}$  είναι το κανάλι μεταξύ της δεύτερης κεραίας εκπομπής και της πρώτης κεραίας λήψης,

$h_{2,1}$  είναι το κανάλι μεταξύ της πρώτης κεραίας εκπομπής και της δεύτερης κεραίας λήψης,

$h_{2,2}$  είναι το κανάλι μεταξύ της δεύτερης κεραίας εκπομπής και της δεύτερης κεραίας λήψης,

$x_1, x_2$  είναι τα μεταδιδόμενα σύμβολα αντίστοιχα.

$n_1, n_2$  είναι ο θόρυβος στην πρώτη και δεύτερη κεραία λήψης, αντίστοιχα.

Υποθέτουμε ότι ο δέκτης γνωρίζει τα  $h_{1,1}$ ,  $h_{1,2}$ ,  $h_{2,1}$  και  $h_{2,2}$ . Επίσης είναι γνωστά τα  $y_1$  και  $y_2$ . Αυτό που δεν γνωρίζουμε είναι το  $x_1$  και το  $x_2$ . Άρα έχουμε δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους.

Για ευκολία, η παραπάνω σχέση μπορεί να παρασταθεί με πίνακες ως εξής:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

Ισοδύναμα,

$$y = Hx + n$$

$$Wy = WHx + Wn$$

Για να λύσουμε ως προς  $x$ , πρέπει να βρούμε έναν πίνακα  $W$  που να ικανοποιεί  $WH = I$ .

Ο Zero Forcing (ZF) linear detector δίδεται από τη σχέση:

$$W^H = (H^H H)^{-1} H^H$$

Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να έχουμε μια εκτίμηση των μεταδιδόμενων συμβόλων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = (H^H H)^{-1} H^H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

## Successive Interference Cancellation με optimal ordering

Στην απλή περίπτωση του **Successive Interference Cancellation**, ο δέκτης διαλέγει τυχαία ένα από τα εκτιμώμενα σύμβολα και αφαιρεί την επίδραση του από τα ληφθέντα σύμβολα  $y_1$  και  $y_2$ . Ωστόσο μπορούμε να θέσουμε κριτήρια σε ότι αφορά το πιο θα επιλεγεί πρώτο ή δεύτερο. Για να πάρουμε αυτήν την απόφαση, θα βρούμε από τον πολλαπλασιασμό με το κανάλι, ποιο σύμβολο φτάνει με μεγαλύτερη ενέργεια στον δέκτη. Η ληφθείσα ενέργεια στις δυο κεραίες αναφορικά με το σύμβολο  $\hat{x}_1$ , είναι:

$$P_{x_1} = |h_{1,1}|^2 + |h_{2,1}|^2$$

Η ληφθείσα ενέργεια στις δυο κεραίες αναφορικά με το σύμβολο  $\hat{x}_2$ , είναι:

$$P_{x_2} = |h_{1,2}|^2 + |h_{2,2}|^2$$

Αν έχουμε  $P_{x_1} > P_{x_2}$  τότε ο δέκτης επιλέγει να αφαιρέσει την επίδραση του  $\hat{x}_1$  από τα ληφθέντα  $y_1$  και  $y_2$  και να επαναυπολογίσει το  $\hat{x}_2$ .

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - h_{1,1}\hat{x}_1 \\ y_2 - h_{1,2}\hat{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,2}x_2 + n_1 \\ h_{2,2}x_2 + n_2 \end{bmatrix}$$

ή αλλιώς:

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,2} \\ h_{2,2} \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

$$r = hx_2 + n$$

Ο βέλτιστος τρόπος συνδυασμού πληροφοριών από πολλαπλά αντίγραφα ενός σήματος στην περίπτωση της διαφορικής λήψης είναι ο Συνδυασμός Μεγίστου Λόγου (MRC). Το σύμβολο μπορεί να γραφεί ως εξής [6]:

$$\widehat{x}_2 = \frac{h^H r}{h^H h}$$

Αλλιώς αν έχουμε  $P_{x_1} < P_{x_2}$  τότε ο δέκτης επιλέγει να αφαιρέσει την επίδραση του  $\widehat{x}_2$  από τα ληφθέντα  $y_1$  και  $y_2$  και να επαναυπολογίσει το  $\widehat{x}_1$ .

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - h_{1,2}\widehat{x}_2 \\ y_2 - h_{2,2}\widehat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1}x_1 + n_1 \\ h_{2,1}x_1 + n_2 \end{bmatrix}$$

Μπορεί να εκφραστεί,

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} \\ h_{2,1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

$$r = hx_1 + n$$

Με το Συνδυασμό Μεγίστου Λόγου το σύμβολο μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\widehat{x}_1 = \frac{h^H r}{h^H h}$$

Η μέθοδος των διαδοχικών ακυρώσεων με βέλτιστη ταξινόμηση (Successive Interference Cancellation with Optimal Ordering) μας εξασφαλίζει πως το πρώτο σύμβολο που αποκωδικοποιείται έχει μικρότερη πιθανότητα λάθους από το άλλο σύμβολο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την μείωση της πιθανότητας λάθους και κατά συνέπεια δίνει μικρότερο αριθμό λαθών από την απλή περίπτωση των διαδοχικών ακυρώσεων.

## Μοντέλο προσομοίωσης

Το πρόγραμμα του Matlab εκτελεί τις παρακάτω ενέργειες:

(α) Παράγει τυχαία δυαδική ακολουθία από +1 και 1.

(β) Ομαδοποιεί τα σύμβολα ανά δυο και τα στέλνει σε μια χρονοσχισμή.

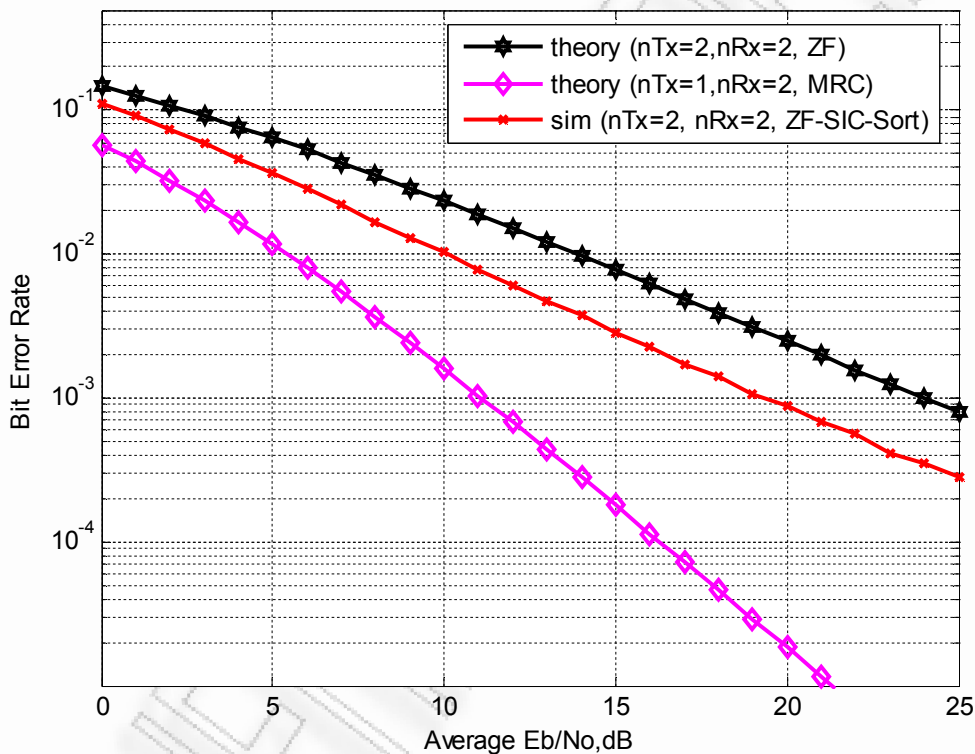
(γ) Πολλαπλασιάζει τα σύμβολα με το κανάλι και μετά προσθέτει WGN.

(δ) Κάνει ισοστάθμιση στα σύμβολα που έχει λάβει.

(ε) Εκτελεί αποκωδικοποίηση και μετρά τα λάθη.

(ζ) Επαναλαμβάνει για πολλές τιμές του  $\frac{E_b}{N_0}$  και βγάζει σε γραφική παράσταση την προσομοίωση και τα θεωρητικά αποτελέσματα.

BER for BPSK modulation with 2x2 MIMO and ZF-SIC-Sorted equalizer (Rayleigh channel)



Εικόνα 5.4: BER με ZF SIC with Optimal Ordering

### Συνοψίζοντας

Η προσθήκη της βέλτιστης ταξινόμησης (optimal ordering) στον ισοσταθμιστή Zero Forcing with Successive Interference Cancellation, μας παρέχει βελτίωση περίπου 2.0dB για BER  $10^{-3}$ .

## Κώδικας Προσομοίωσης

```

% Υπολογισμός του BER με BPSK διαμόρφωση σε κανάλι
% Rayleigh όπου έχουμε 2x2 MIMO σύστημα
% με ισοσταθμιστή με ZF SIC και βέλτιστη ταξινόμηση
% (Optimal Ordering)

clear
N = 10^6; % Αριθμός bits ή συμβόλων
Eb_N0_dB = [0:25]; % Διάστημα τιμών Eb/N0
nTx = 2; % Αριθμός κεραίων εκπομπής
nRx = 2; % Αριθμός κεραίων λήψης
for ii = 1:length(Eb_N0_dB)

    % Πομπός
    ip = rand(1,N)>0.5; % Τυχαία δημιουργία 0,1
    s = 2*ip-1; % BPSK διαμόρφωση όπου το 1 παραμένει και το 0 γίνεται -1

    sMod = kron(s,ones(nRx,1)); %
    sMod = reshape(sMod,[nRx,nTx,N/nTx]); % Ομαδοποίηση σε πίνακα των
[nRx,nTx,N/NTx ]

    h = 1/sqrt(2)*[randn(nRx,nTx,N/nTx) + j*randn(nRx,nTx,N/nTx)]; % Κανάλι Rayleighl
n = 1/sqrt(2)*[randn(nRx,N/nTx) + j*randn(nRx,N/nTx)]; % white gaussian noise, 0dB
variance

    % Κανάλι και προσθήκη Θορύβου
    y = squeeze(sum(h.*sMod,2)) + 10^(-Eb_N0_dB(ii)/20)*n;

    % Δέκτης
    % -----
    % Forming the ZF equalization matrix W = inv(H^H*H)*H^H
    % H^H*H is of dimension [nTx x nTx]. In this case [2 x 2]
    % Inverse of a [2x2] matrix [a b; c d] = 1/(ad-bc)[d -b;-c a]
    hCof = zeros(2,2,N/nTx) ;
    hCof(1,1,:) = sum(h(:,2,:).*conj(h(:,2,:)),1) ; % d term
    hCof(2,2,:) = sum(h(:,1,:).*conj(h(:,1,:)),1) ; % a term
    hCof(2,1,:) = -sum(h(:,2,:).*conj(h(:,1,:)),1) ; % c term
    hCof(1,2,:) = -sum(h(:,1,:).*conj(h(:,2,:)),1) ; % b term

```

```

% Sorting the equalization matrix based on the channel power on each dimension
% since the second spatial dimension is equalized first, the channel
% with higher power assigned to second dimension
normSS1 = squeeze(hCof(2,2,:));
normSS2 = squeeze(hCof(1,1,:));
sortIdx = find(normSS2 < normSS1);

% sorting the H^H*H matrix
hCofSort = hCof;
hCofSort(2,2,sortIdx) = hCof(1,1,sortIdx);
hCofSort(1,1,sortIdx) = hCof(2,2,sortIdx);
hCofSort(1,2,sortIdx) = hCof(2,1,sortIdx);
hCofSort(2,1,sortIdx) = hCof(1,2,sortIdx);
hDen = ((hCofSort(1,1,:).*hCofSort(2,2,:)) - (hCofSort(1,2,:).*hCofSort(2,1,:))); % ad-bc
term
division
hDen = reshape(kron(reshape(hDen,1,N/nTx),ones(2,2)),2,2,N/nTx); % formatting for
hInvSort = hCofSort./hDen; % inv(H^H*H)

% sorting the H matrix
hSort = h;
hSort(:,2,sortIdx) = h(:,1,sortIdx);
hSort(:,1,sortIdx) = h(:,2,sortIdx);

% Equalization - Zero forcing
hModSort = reshape(conj(hSort),nRx,N); % H^H operation

yModSort = kron(y,ones(1,2)); % formatting the received symbol for equalization
yModSort = sum(hModSort.*yModSort,1); % H^H * y
yModSort = kron(reshape(yModSort,2,N/nTx),ones(1,2)); % formatting
yHatSort = sum(reshape(hInvSort,2,N).*yModSort,1); % inv(H^H*H)*H^H*y

% receiver - hard decision decoding on second spatial dimension
ipHat2SS = real(yHatSort(2:2:end))>0;
ipHatMod2SS = 2*ipHat2SS-1;
ipHatMod2SS = kron(ipHatMod2SS,ones(nRx,1));
ipHatMod2SS = reshape(ipHatMod2SS,[nRx,1,N/nTx]);

% new received symbol - removing the effect from second spatial dimension

```

```

h2SS = hSort(:,2,:); % channel in the second spatial dimension
r = y - squeeze(h2SS.*ipHatMod2SS);

% maximal ratio combining - for symbol in the first spatial dimension
h1SS = squeeze(hSort(:,1,:));
yHat1SS = sum(conj(h1SS).*r,1)/sum(h1SS.*conj(h1SS),1);
yHatSort(1:2:end) = yHat1SS;

yHatSort = reshape(yHatSort,2,N/2) ;
yHatSort(:,sortIdx) = flipud(yHatSort(:,sortIdx));
yHat = reshape(yHatSort,1,N);

% receiver - hard decision decoding
ipHat = real(yHat)>0;

% counting the errors
nErr(ii) = size(find([ip- ipHat]),2);

end

simBer = nErr/N; % simulated ber
EbN0Lin = 10.^(Eb_N0_dB/10);
theoryBer_nRx1 = 0.5.*(1-1*(1+1./EbN0Lin).^(-0.5));
p = 1/2 - 1/2*(1+1./EbN0Lin).^(-1/2);
theoryBerMRC_nRx2 = p.^2.*(1+2*(1-p));

close all
figure
semilogy(Eb_N0_dB,theoryBer_nRx1,'kh-','LineWidth',2);
hold on
semilogy(Eb_N0_dB,theoryBerMRC_nRx2,'md-','LineWidth',2);
semilogy(Eb_N0_dB,simBer,'rx-','LineWidth',2);
axis([0 25 10^-5 0.5])
grid on
legend('theory (nTx=2,nRx=2, ZF)', 'theory (nTx=1,nRx=2, MRC)', 'sim (nTx=2, nRx=2, ZF-
SIC-Sort)');
xlabel('Average Eb/No,dB');
ylabel('Bit Error Rate');
title('BER for BPSK modulation with 2x2 MIMO and ZF-SIC-Sorted equalizer (Rayleigh
channel)');

```



## 5.5 MIMO με MMSE SIC και βέλτιστη ταξινόμηση (Optimal Ordering)

Βρήκαμε ότι η βέλτιστη ταξινόμηση (optimal ordering) της παρεμβολής, οδήγησε σε καλύτερη επίδοση του ισοσταθμιστή μηδενισμού της διασυμβολικής παρεμβολής με διαδοχικούς μηδενισμούς (Zero Forcing Successive Interference Cancellation equalizer). Εδώ θα μελετήσουμε το πως η βέλτιστη ταξινόμηση θα επιδράσει στον ισοσταθμιστή του ελαχίστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος με διαδοχικές ακυρώσεις (MMSE SIC equalizer) και θα προσομοιώσουμε την BER επίδοση. Υποθέτουμε ότι το κανάλι είναι flat fading Rayleigh multipath channel (Διάρκεια συμβόλου μικρότερη από σύγχρονο χρόνο καναλιού) και η διαμόρφωση είναι BPSK.

### MMSE equalizer για 2×2 MIMO

Στην πρώτη χρονοσχισμή, το λαμβανόμενο σήμα στην πρώτη κεραία λήψης είναι:

$$y_1 = h_{1,1}x_1 + h_{1,2}x_2 + n_1 = [h_{1,1} \ h_{1,2}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + n_1$$

Το λαμβανόμενο σήμα στην δεύτερη κεραία λήψης είναι:

$$y_2 = h_{2,1}x_1 + h_{2,2}x_2 + n_2 = [h_{2,1} \ h_{2,2}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + n_2$$

όπου

$y_1$  είναι το σήμα που ελήφθη από την πρώτη κεραία

$y_2$  είναι το σήμα που ελήφθη από την δεύτερη κεραία

$h_{1,1}$  είναι το κανάλι μεταξύ της πρώτης κεραίας εκπομπής και της πρώτης κεραίας λήψης,

$h_{1,2}$  είναι το κανάλι μεταξύ της δεύτερης κεραίας εκπομπής και της πρώτης κεραίας λήψης,

$h_{2,1}$  είναι το κανάλι μεταξύ της πρώτης κεραίας εκπομπής και της δεύτερης κεραίας λήψης,

$h_{2,2}$  είναι το κανάλι μεταξύ της δεύτερης κεραίας εκπομπής και της δεύτερης κεραίας λήψης,

$x_1, x_2$  είναι τα μεταδιδόμενα σύμβολα αντίστοιχα.

$n_1, n_2$  είναι ο θόρυβος στην πρώτη και δεύτερη κεραία λήψης, αντίστοιχα.

Υποθέτουμε ότι ο δέκτης γνωρίζει τα  $h_{1,1}$ ,  $h_{1,2}$ ,  $h_{2,1}$  και  $h_{2,2}$ . Επίσης είναι γνωστά τα  $y_1$  και  $y_2$ . Αυτό που δεν γνωρίζουμε είναι το  $x_1$  και το  $x_2$ . Άρα έχουμε δυο εξισώσεις και δυο αγνώστους.

Για ευκολία, η παραπάνω εξίσωση μπορεί να παρασταθεί με πίνακες ως εξής:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

Ισοδύναμα,

$$y = Hx + n$$

$$Wy = WHx + Wn$$

Για να λύσουμε ως προς  $x$ , πρέπει να βρούμε έναν συνιστώσα  $W$  η οποία ελαχιστοποιεί το κριτήριο,

$$E\{ [Wy - x][Wy - x]^H \}$$

Όπως ήδη γνωρίζουμε

$$W = (H^H H + N_0)^{-1} H^H$$

Με το MMSE equalization, ο δέκτης μπορεί να έχει μια εκτίμηση των εκπεμπόμενων σημάτων:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = (H^H H + N_0 I)^{-1} H^H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

### Διαδοχικές Ακυρώσεις

Στην απλή περίπτωση των διαδοχικών ακυρώσεων (Successive Interference Cancellation), ο δέκτης παίρνει τυχαία ένα από τα εκπεμπόμενα σύμβολα (π.χ. αυτό το σύμβολο που εκπέμφθηκε από τη δεύτερη κεραία,  $\hat{x}_2$ ) και αφαιρεί την επίδραση του από τα ληφθέντα σύμβολα  $y_1$  και  $y_2$ . Όταν αφαιρεθεί η επίδραση του  $\hat{x}_2$ , το κανάλι ανάγεται στην περίπτωση της μιας κεραίας εκπομπής και των δυο κεραιών λήψης, το οποίο μπορεί να αποδιαμορφωθεί βέλτιστα χρησιμοποιώντας Maximal Ratio Combining.

### Βέλτιστη Ταξινόμηση

Ωστόσο θα μπορούσαμε να έχουμε κάποιο κριτήριο επιλογής για το αν θα αφαιρέσουμε πρώτα την επίδραση του  $\hat{x}_1$  ή του  $\hat{x}_2$ . Για να πάρουμε αυτήν την απόφαση, ας βρούμε μετά τον πολλαπλασιασμό με το συντελεστή του καναλιού, ποιο σύμβολο φτάνει με μεγαλύτερη ενέργεια στον δέκτη. Η συνολική ληφθείσα ενέργεια στις δυο κεραιές αναφορικά με το σύμβολο  $\hat{x}_1$ , είναι:

$$P_{x_1} = |h_{1,1}|^2 + |h_{2,1}|^2$$

Η συνολική ληφθείσα ενέργεια στις δυο κεραιές αναφορικά με το σύμβολο  $\hat{x}_2$ , είναι:

$$P_{x_2} = |h_{1,2}|^2 + |h_{2,2}|^2$$

Αν έχουμε  $P_{x_1} > P_{x_2}$  τότε ο δέκτης επιλέγει να αφαιρέσει την επίδραση του  $\hat{x}_1$  από τα ληφθέντα  $y_1$  και  $y_2$  και να επαναυπολογίσει το  $\hat{x}_2$ . Αλλιώς αν

έχουμε  $P_{x_1} < P_{x_2}$  τότε ο δέκτης επιλέγει να αφαιρέσει την επίδραση  $\hat{x}_2$  από τα ληφθέντα  $y_1$  και  $y_2$  και να επαναυπολογίσει το  $\hat{x}_1$ .

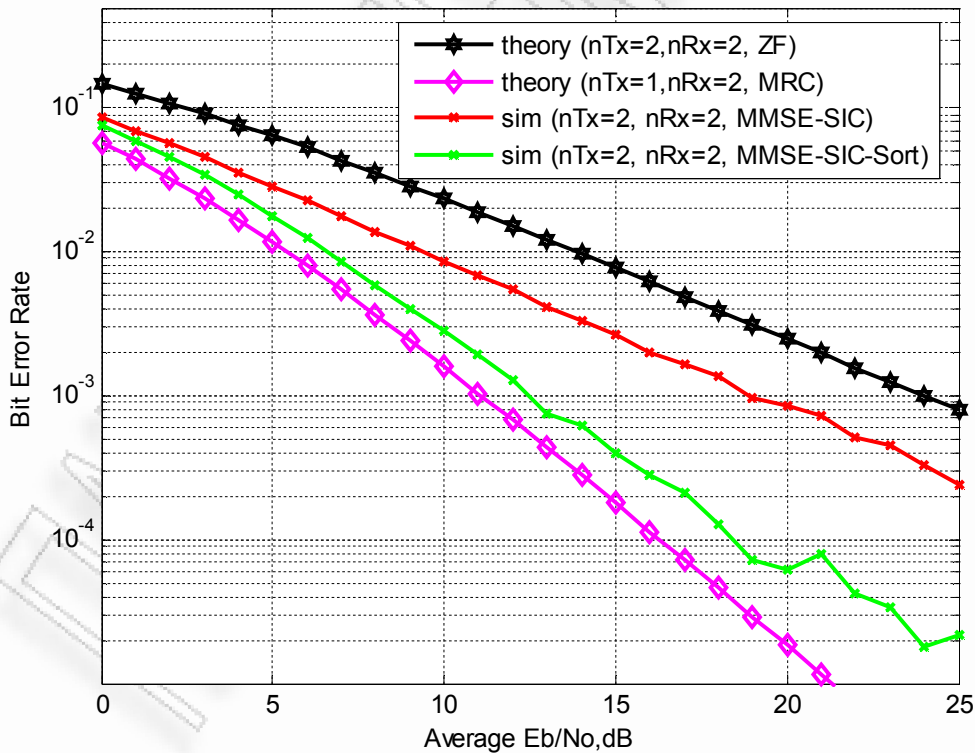
Όταν η επίδραση είτε του  $\hat{x}_1$  είτε του  $\hat{x}_2$  έχει απαλειφθεί, το νέο κανάλι ανάγεται στην περίπτωση της μιας κεραίας εκπομπής και των δυο κεραιών λήψης, το οποίο μπορεί να αντιμετωπισθεί βέλτιστα με το Maximal Ratio Combining (MRC).

## Μοντέλο προσομοίωσης

Το πρόγραμμα του Matlab εκτελεί τις παρακάτω ενέργειες:

- (α) Παράγει τυχαία δυαδική ακολουθία από +1 και 1.
- (β) Ομαδοποιεί τα σύμβολα ανά δυο και τα στέλνει σε μια χρονοσχισμή.
- (γ) Πολλαπλασιάζει τα σύμβολα με το κανάλι και μετά προσθέτει AWGN.

BER for BPSK modulation with 2x2 MIMO and MMSE-SIC equalizer (Rayleigh channel)



Εικόνα 5.5: BER με MMSE SIC with Optimal Ordering

(δ) Κάνει ισοστάθμιση στα σύμβολα που έχει λάβει.

(ε) Εκτελεί αποκωδικοποίηση και μετρά τα λάθη.

(ζ) Επαναλαμβάνει για πολλές τιμές του  $\frac{E_b}{N_0}$  και βγάζει σε γραφική παράσταση την προσομοίωση και τα θεωρητικά αποτελέσματα.

## Παρατήρηση

Η προσθήκη της βέλτιστης ταξινόμησης (optimal ordering) στην περίπτωση του MMSE SIC έχει ως αποτέλεσμα τη βελτίωση της επίδοσης κατά περίπου 5.0dB για BER της τάξης του  $10^{-3}$ .

Η BER επίδοση πλησιάζει την καμπύλη της περίπτωσης μιας κεραίας εκπομπής και δύο κεραιών λήψης (σύστημα 1x2) με MRC στο δέκτη.

## Κώδικας Προσομοίωσης

```
% Υπολογισμός του BER με BPSK διαμόρφωση σε κανάλι
% Rayleigh όπου έχουμε 2x2 MIMO σύστημα
% με ισοσταθμιστή
% Minimum Mean Square Error Equalization with Successive Interference
% Cancellation (ZF-SIC) with optimal ordering

clear
N = 10^6; % Αριθμός bits ή συμβόλων
Eb_N0_dB = [0:25]; % Διάστημα τιμών Eb/N0
nTx = 2; % Αριθμός κεραιών εκπομπής
nRx = 2; % Αριθμός κεραιών λήψης
for ii = 1:length(Eb_N0_dB)

    % Πομπός
    ip = rand(1,N)>0.5; % Τυχαία δημιουργία 0,1
    s = 2*ip-1; % BPSK διαμόρφωση όπου το 1 παραμένει και το 0 γίνεται -1

    sMod = kron(s,ones(nRx,1)); %
    sMod = reshape(sMod,[nRx,nTx,N/nTx]); % Ομαδοποίηση σε πίνακα των
[nRx,nTx,N/NTx ]
```

```

h = 1/sqrt(2)*[randn(nRx,nTx,N/nTx) + j*randn(nRx,nTx,N/nTx)]; % Κανάλι Rayleighl
n = 1/sqrt(2)*[randn(nRx,N/nTx) + j*randn(nRx,N/nTx)]; % white gaussian noise, 0dB
variance

% Κανάλι και προσθήκη Θορύβου
y = squeeze(sum(h.*sMod,2)) + 10^(-Eb_N0_dB(ii)/20)*n;

% Δέκτης
% -----
% Forming the MMSE equalization matrix W = inv(H^H*H + sigma^2*I)*H^H
% H^H*H is of dimension [nTx x nTx]. In this case [2 x 2]
% Inverse of a [2x2] matrix [a b; c d] = 1/(ad-bc)[d -b;-c a]
hCof = zeros(2,2,N/nTx) ;
hCof(1,1,:) = sum(h(:,2,:).*conj(h(:,2,:)),1) + 0*10^(-Eb_N0_dB(ii)/10); % d term
hCof(2,2,:) = sum(h(:,1,:).*conj(h(:,1,:)),1) + 0*10^(-Eb_N0_dB(ii)/10); % a term
hCof(2,1,:) = -sum(h(:,2,:).*conj(h(:,1,:)),1); % c term
hCof(1,2,:) = -sum(h(:,1,:).*conj(h(:,2,:)),1); % b term

for kk = 1:2

    if kk == 1
        sortIdx = [];
        hCof(1,1,:) = sum(h(:,2,:).*conj(h(:,2,:)),1) + 10^(-Eb_N0_dB(ii)/10); % d
        term
        hCof(2,2,:) = sum(h(:,1,:).*conj(h(:,1,:)),1) + 10^(-Eb_N0_dB(ii)/10); % a term
        hCof(2,1,:) = -sum(h(:,2,:).*conj(h(:,1,:)),1); % c term
        hCof(1,2,:) = -sum(h(:,1,:).*conj(h(:,2,:)),1); % b term
    elseif kk == 2
        % Sorting the equalization matrix based on the channel power on each dimension
        % since the second spatial dimension is equalized first, the channel
        % with higher power assigned to second dimension
        normSS1 = squeeze(hCof(2,2,:));
        normSS2 = squeeze(hCof(1,1,:));
        sortIdx = find(normSS2 < normSS1);
    end

    % sorting the H^H*H + sigma^2*I matrix
    hCofSort = hCof;

```

```

if ~isempty(sortIdx)
    hCofSort(2,2,sortIdx) = hCof(1,1,sortIdx) + 10^(-Eb_N0_dB(ii)/10);;
    hCofSort(1,1,sortIdx) = hCof(2,2,sortIdx) + 10^(-Eb_N0_dB(ii)/10);;
    hCofSort(1,2,sortIdx) = hCof(2,1,sortIdx);
    hCofSort(2,1,sortIdx) = hCof(1,2,sortIdx);
end
term
hDen = ((hCofSort(1,1,:).*hCofSort(2,2,:)) - (hCofSort(1,2,:).*hCofSort(2,1,:))); % ad-bc
division
hDen = reshape(kron(reshape(hDen,1,N/nTx),ones(2,2)),2,2,N/nTx); % formatting for
hInvSort = hCofSort./hDen; % inv(H^H*H)

% sorting the H matrix
hSort = h;
if ~isempty(sortIdx)
    hSort(:,2,sortIdx) = h(:,1,sortIdx);
    hSort(:,1,sortIdx) = h(:,2,sortIdx);
end

% Equalization - Zero forcing
hModSort = reshape(conj(hSort),nRx,N); % H^H operation

yModSort = kron(y,ones(1,2)); % formatting the received symbol for equalization
yModSort = sum(hModSort.*yModSort,1); % H^H * y
yModSort = kron(reshape(yModSort,2,N/nTx),ones(1,2)); % formatting
yHatSort = sum(reshape(hInvSort,2,N).*yModSort,1); % inv(H^H*H)*H^H*y

% receiver - hard decision decoding on second spatial dimension
ipHat2SS = real(yHatSort(2:2:end))>0;
ipHatMod2SS = 2*ipHat2SS-1;
ipHatMod2SS = kron(ipHatMod2SS,ones(nRx,1));
ipHatMod2SS = reshape(ipHatMod2SS,[nRx,1,N/nTx]);

% new received symbol - removing the effect from second spatial dimension
h2SS = hSort(:,2,:); % channel in the second spatial dimension
r = y - squeeze(h2SS.*ipHatMod2SS);

% maximal ratio combining - for symbol in the first spatial dimension
h1SS = squeeze(hSort(:,1,:));
yHat1SS = sum(conj(h1SS).*r,1)/sum(h1SS.*conj(h1SS),1);

```

```

yHatSort(1:2:end) = yHat1SS;

yHatSort = reshape(yHatSort,2,N/2) ;
if ~isempty(sortIdx)
    yHatSort(:,sortIdx) = flipud(yHatSort(:,sortIdx));
end
yHat = reshape(yHatSort,1,N);

% receiver - hard decision decoding
ipHat = real(yHat)>0;

% counting the errors
nErr(kk,ii) = size(find([ip- ipHat]),2);

end

end

simBer = nErr/N; % simulated ber
EbN0Lin = 10.^(Eb_N0_dB/10);
theoryBer_nRx1 = 0.5.*(1-1.*(1+1./EbN0Lin).^(-0.5));
p = 1/2 - 1/2*(1+1./EbN0Lin).^(-1/2);
theoryBerMRC_nRx2 = p.^2.*(1+2*(1-p));

close all
semilogy(Eb_N0_dB,theoryBer_nRx1,'kh-', 'LineWidth',2);
hold on
semilogy(Eb_N0_dB,theoryBerMRC_nRx2,'md-', 'LineWidth',2);
semilogy(Eb_N0_dB,simBer(1,:), 'rx-', 'LineWidth',2);
semilogy(Eb_N0_dB,simBer(2,:), 'gx-', 'LineWidth',2);
axis([0 25 10^-5 0.5])
grid on
legend('theory (nTx=2,nRx=2, ZF)', 'theory (nTx=1,nRx=2, MRC)', 'sim (nTx=2, nRx=2, MMSE-SIC)', 'sim (nTx=2, nRx=2, MMSE-SIC-Sort)');
xlabel('Average Eb/No,dB');
ylabel('Bit Error Rate');
title('BER for BPSK modulation with 2x2 MIMO and MMSE-SIC equalizer (Rayleigh channel)');

```



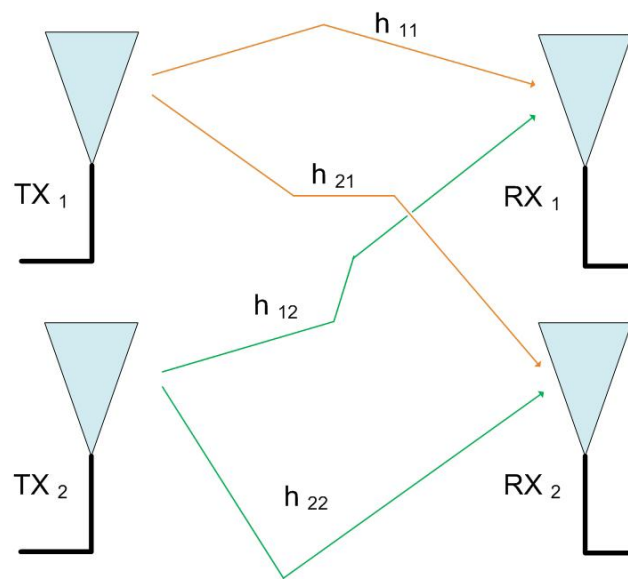
## 5.6 MIMO με ML equalization

Μία άλλη περίπτωση είναι η αποκωδικοποίηση μέγιστης πιθανοφάνειας (*Maximum Likelihood- ML decoding*) η οποία μας παρέχει τα πλέον ικανοποιητικά αποτελέσματα. Υποθέτουμε ότι το κανάλι είναι flat fading Rayleigh channel και η διαμόρφωση είναι BPSK.

### 2×2 MIMO

Σε ένα 2×2 MIMO για τις 2 διαθέσιμες κεραίες θεωρούμε τα εξής:

1. Έστω ότι έχουμε μια εκπομπή συμβόλων, για παράδειγμα:  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n\}$
2. Σε μια κανονική μετάδοση, θα στέλναμε το  $x_1$  στην πρώτη χρονοσχισμή, το  $x_2$  στη δεύτερη χρονοσχισμή, κλπ.
3. Με δεδομένο ότι έχουμε 2 κεραίες για εκπομπή, μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τα σύμβολα ανά δύο. Στην πρώτη χρονοσχισμή εκπέμπουμε το  $x_1$  από την πρώτη κεραία και το  $x_2$  από τη δεύτερη κεραία. Στην δεύτερη χρονοσχισμή εκπέμπουμε το  $x_3$  από την πρώτη κεραία και το  $x_4$  από τη δεύτερη κεραία, κλπ.
4. Η ομαδοποίηση των συμβόλων ανά δυο και η αποστολή τους στην ίδια χρονοσχισμή απαιτεί μόνο το  $\frac{n}{2}$  των χρονοσχισμών από την απλή περίπτωση μιας κεραίας που αποστέλλει μόνο ένα σύμβολο την κάθε χρονοσχισμή. Το αποτέλεσμα είναι ο διπλασιασμός του ρυθμού μετάδοσης.
5. Το παρακάτω σχήμα μας δίνει μια εικόνα για το πώς θα λειτουργεί το μοντέλο με 2 κεραίες εκπομπής και δυο κεραίες λήψης.



Στην πρώτη χρονοσχισμή, το λαμβανόμενο σήμα στην πρώτη κεραία λήψης είναι:

$$y_1 = h_{1,1}x_1 + h_{1,2}x_2 + n_1 = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + n_1$$

Το λαμβανόμενο σήμα στην δεύτερη κεραία λήψης είναι:

$$y_2 = h_{2,1}x_1 + h_{2,2}x_2 + n_2 = \begin{bmatrix} h_{2,1} & h_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + n_2$$

όπου

$y_1$  είναι το σήμα που ελήφθη από την πρώτη κεραία

$y_2$  είναι το σήμα που ελήφθη από την δεύτερη κεραία

$h_{1,1}$  είναι το κανάλι μεταξύ της πρώτης κεραίας εκπομπής και της πρώτης κεραίας λήψης,

$h_{1,2}$  είναι το κανάλι μεταξύ της δεύτερης κεραίας εκπομπής και της πρώτης κεραίας λήψης,

$h_{2,1}$  είναι το κανάλι μεταξύ της πρώτης κεραίας εκπομπής και της δεύτερης κεραίας λήψης,

$h_{2,2}$  είναι το κανάλι μεταξύ της δεύτερης κεραίας εκπομπής και της δεύτερης κεραίας λήψης,

$x_1, x_2$  είναι τα μεταδιδόμενα σύμβολα αντίστοιχα.

$n_1, n_2$  είναι ο θόρυβος στην πρώτη και δεύτερη κεραία λήψης, αντίστοιχα.

Υποθέτουμε ότι ο δέκτης γνωρίζει τα  $h_{1,1}, h_{1,2}, h_{2,1}$  και  $h_{2,2}$ . Επίσης είναι γνωστά τα  $y_1$  και  $y_2$ . Αυτό που δεν γνωρίζουμε είναι το  $x_1$  και το  $x_2$ . Άρα έχουμε δυο εξισώσεις και δυο αγνώστους.

Για ευκολία, η παραπάνω εξίσωση μπορεί να παρασταθεί με πίνακες ως εξής:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

Ισοδύναμα,

$$y = Hx + n$$

## Παραδοχές

1. Το κανάλι έχει flat fading, δηλαδή υπάρχει μία μόνο διαδρομή λήψης. Έτσι, η συνέλιξη μπορεί να αντικατασταθεί με έναν απλό πολλαπλασιασμό.

2. Η διάλειψη του καναλιού που υπάρχει σε κάθε μια από τις κεραίες εκπομπής είναι ανεξάρτητη από άλλες κεραίες εκπομπής.

3. Για την  $i^{th}$  κεραία εκπομπής έως την  $j^{th}$  κεραία λήψης, κάθε μεταδιδόμενο σύμβολο πολλαπλασιάζεται με μια τυχαία μιγαδική μεταβλητή  $h_{j,i}$ . Δεδομένου ότι το κανάλι είναι ένα Rayleigh κανάλι, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του  $h_{j,i}$  είναι με κατανομή Gauss με μηδενική μέση τιμή  $E[h_{j,i}] = 0$  και διακύμανση  $\sigma_{h_{j,i}}^2 = \frac{1}{2}$ .

4. Το κανάλι μεταξύ κάθε μετάδοσης στις κεραίες λήψης είναι ανεξάρτητο και τυχαία μεταβαλλόμενο στον χρόνο.

5. Στην κεραία λήψης, ο θόρυβος  $n$  ακολουθεί την Gaussian κατανομή και ισχύει:

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(n-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{με } \mu = 0 \quad \text{και } \sigma^2 = \frac{N_0}{2}.$$

6. Το κανάλι  $h_{j,i}$  είναι γνωστό στο δέκτη.

### Maximum Likelihood (ML) Receiver

Η μέθοδος Maximum Likelihood (ML) έχει ως στόχο της να βρεθεί το  $\hat{x}$  το οποίο ελαχιστοποιεί το  $J = |y - H\hat{x}|^2$

$$J = \left[ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \right]^2$$

Από τη στιγμή που έχουμε BPSK, το  $x_1$  και το  $x_2$  μπορούν να πάρουν τιμές +1 και -1. Για να βρούμε προχωρήσουμε στην αποκωδικοποίηση μέγιστης πιθανοφάνειας, θα πρέπει να βρούμε το ελάχιστο όλων των πιθανών συνδυασμών των  $x_1$  και  $x_2$ .

$$J_{-1,-1} = \left[ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right]^2$$

$$J_{+1,+1} = \left[ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix} \right]^2$$

$$J_{+1,-1} = \left[ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix} \right]^2$$

$$J_{-1,+1} = \left[ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} \right]^2$$

Η εκτίμηση του μεταδιδόμενου συμβόλου επιλέγεται με βάση τη μικρότερη από τις τέσσερις τιμές. Αν π.χ.

αν το ελάχιστο είναι:  $J_{-1,-1} \Rightarrow [00]$

αν το ελάχιστο είναι:  $J_{+1,+1} \Rightarrow [11]$

αν το ελάχιστο είναι:  $J_{-1,+1} \Rightarrow [01]$  και

αν το ελάχιστο είναι:  $J_{+1,-1} \Rightarrow [10]$

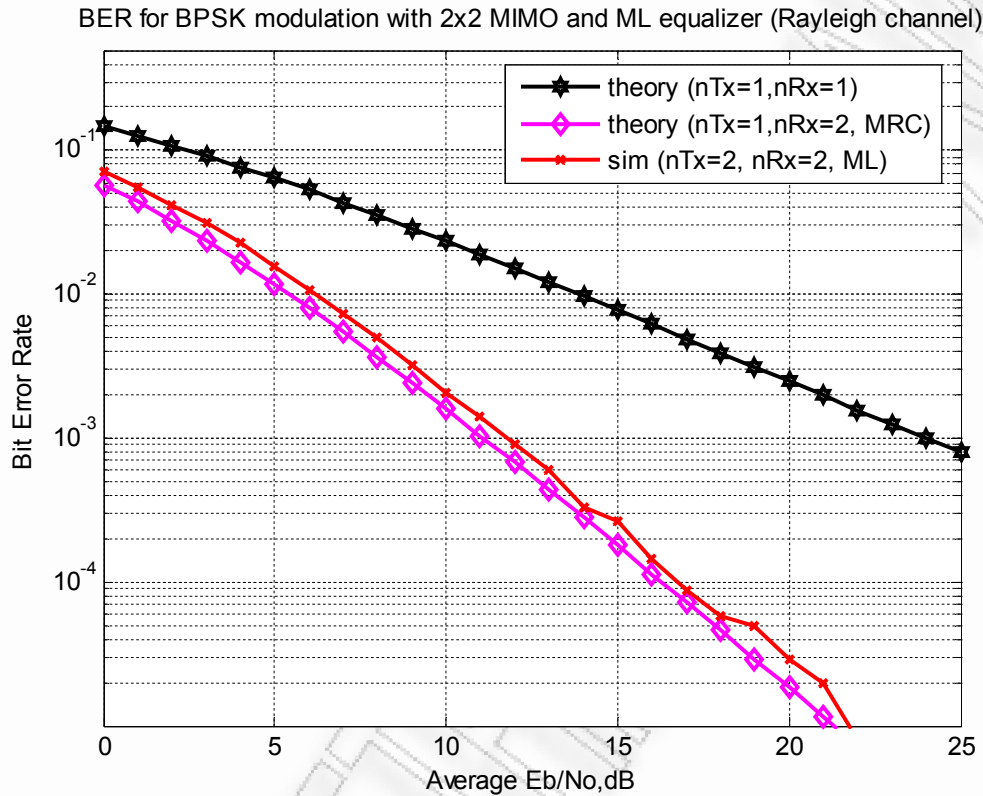
## Μοντέλο προσομοίωσης

Το πρόγραμμα του Matlab εκτελεί τις παρακάτω ενέργειες:

- (α) Παράγει τυχαία δυαδική ακολουθία από +1 και 1.
- (β) Ομαδοποιεί τα σύμβολα ανά δυο και τα στέλνει σε μια χρονοσχιμμή.
- (γ) Πολλαπλασιάζει τα σύμβολα με το κανάλι και μετά προσθέτει WGN.
- (δ) Κάνει ισοστάθμιση στα σύμβολα που έχει λάβει.
- (ε) Εκτελεί αποκωδικοποίηση και μετρά τα λάθη.

(ζ) Επαναλαμβάνει για πολλές τιμές του  $\frac{E_b}{N_0}$  και βγάζει σε γραφική

παράσταση την προσομοίωση και τα θεωρητικά αποτελέσματα.



Εικόνα 5.6: BER με Maximum Likelihood equalization

## Συνοψίζοντας

1. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης σε ένα 2x2 σύστημα MIMO με την αποκωδικοποίηση μέγιστης πιθανοφάνειας (*Maximum Likelihood- ML decoding*) μας βοήθησε να επιτύχουμε BER επίδοση αντίστοιχη της περίπτωσης μία κεραίας εκπομπής και δύο κεραιών λήψης με MRC.

2. Αν χρησιμοποιήσουμε 64QAM, τότε θα έχουμε μεγάλη πολυπλοκότητα. Με 64QAM και για 2 εκπεμπόμενα σύμβολα θα χρειαστούμε  $64^2=4096$  συνδυασμούς!

## Κώδικας Προσομοίωσης

```

% Υπολογισμός του BER με BPSK διαμόρφωση σε κανάλι
% Rayleigh όπου έχουμε 2x2 MIMO σύστημα
% με ισοσταθμιστή μέγιστης πιθανοφάνειας
% (Maximum Likelihood equalization)

clear
N = 10^6; % Αριθμός bits ή συμβόλων
Eb_N0_dB = [0:25]; % Διάστημα τιμών Eb/N0
nTx = 2; % Αριθμός κεραιών εκπομπής
nRx = 2; % Αριθμός κεραιών λήψης
for ii = 1:length(Eb_N0_dB)

    % Πομπός
    ip = rand(1,N)>0.5; % Τυχαία δημιουργία 0,1
    s = 2*ip-1; % BPSK διαμόρφωση όπου το 1 παραμένει και το 0 γίνεται -1
    sMod = kron(s,ones(nRx,1)); %
    sMod = reshape(sMod,[nRx,nTx,N/nTx]); % Ομαδοποίηση σε πίνακα των
[nRx,nTx,N/NTx ]

    h = 1/sqrt(2)*[randn(nRx,nTx,N/nTx) + j*randn(nRx,nTx,N/nTx)]; % Κανάλι Rayleigh
    n = 1/sqrt(2)*[randn(nRx,N/nTx) + j*randn(nRx,N/nTx)]; % white gaussian noise, 0dB
variance

    % Κανάλι και προσθήκη Θορύβου
    y = squeeze(sum(h.*sMod,2)) + 10^(-Eb_N0_dB(ii)/20)*n;

    % Δέκτης
    % -----
    % if [s1 s2 ] = [+1,+1 ]
    sHat1 = [1 1];
    sHat1 = repmat(sHat1,[1 ,N/2]);
    sHat1Mod = kron(sHat1,ones(nRx,1));
    sHat1Mod = reshape(sHat1Mod,[nRx,nTx,N/nTx]);
    zHat1 = squeeze(sum(h.*sHat1Mod,2)) ;
    J11 = sum(abs(y - zHat1),1);

    % if [s1 s2 ] = [+1,-1 ]
    sHat2 = [1 -1];

```

```

sHat2 = repmat(sHat2,[1 ,N/2]);
sHat2Mod = kron(sHat2,ones(nRx,1));
sHat2Mod = reshape(sHat2Mod,[nRx,nTx,N/nTx]);
zHat2 = squeeze(sum(h.*sHat2Mod,2)) ;
J10 = sum(abs(y - zHat2),1);

% if [s1 s2 ] = [-1,+1 ]
sHat3 = [-1 1];
sHat3 = repmat(sHat3,[1 ,N/2]);
sHat3Mod = kron(sHat3,ones(nRx,1));
sHat3Mod = reshape(sHat3Mod,[nRx,nTx,N/nTx]);
zHat3 = squeeze(sum(h.*sHat3Mod,2)) ;
J01 = sum(abs(y - zHat3),1);

% if [s1 s2 ] = [-1,-1 ]
sHat4 = [-1 -1];
sHat4 = repmat(sHat4,[1 ,N/2]);
sHat4Mod = kron(sHat4,ones(nRx,1));
sHat4Mod = reshape(sHat4Mod,[nRx,nTx,N/nTx]);
zHat4 = squeeze(sum(h.*sHat4Mod,2)) ;
J00 = sum(abs(y - zHat4),1);

% finding the minimum from the four alphabet combinations
rVec = [J11;J10;J01;J00];
[jj dd] = min(rVec,[],1);

% mapping the minima to bits
ref = [1 1; 1 0; 0 1; 0 0];
ipHat = zeros(1,N);
ipHat(1:2:end) = ref(dd,1);
ipHat(2:2:end) = ref(dd,2);

% counting the errors
nErr(ii) = size(find([ip- ipHat]),2);

end

simBer = nErr/N; % simulated ber
EbN0Lin = 10.^(Eb_N0_dB/10);
theoryBer_nRx1 = 0.5.*(1-1*(1+1./EbN0Lin).^(-0.5));

```



```
p = 1/2 - 1/2*(1+1./EbN0Lin).^(-1/2);
theoryBerMRC_nRx2 = p.^2.*(1+2*(1-p));

close all
figure
semilogy(Eb_N0_dB,theoryBer_nRx1,'k-', 'LineWidth',2);
hold on
semilogy(Eb_N0_dB,theoryBerMRC_nRx2,'md-', 'LineWidth',2);
semilogy(Eb_N0_dB,simBer,'rx-', 'LineWidth',2);
axis([0 25 10^-5 0.5])
grid on
legend('theory (nTx=1,nRx=1)', 'theory (nTx=1,nRx=2, MRC)', 'sim (nTx=2, nRx=2, ML)');
xlabel('Average Eb/No,dB');
ylabel('Bit Error Rate');
title('BER for BPSK modulation with 2x2 MIMO and ML equalizer (Rayleigh channel)');
```

---

## Συμπεράσματα

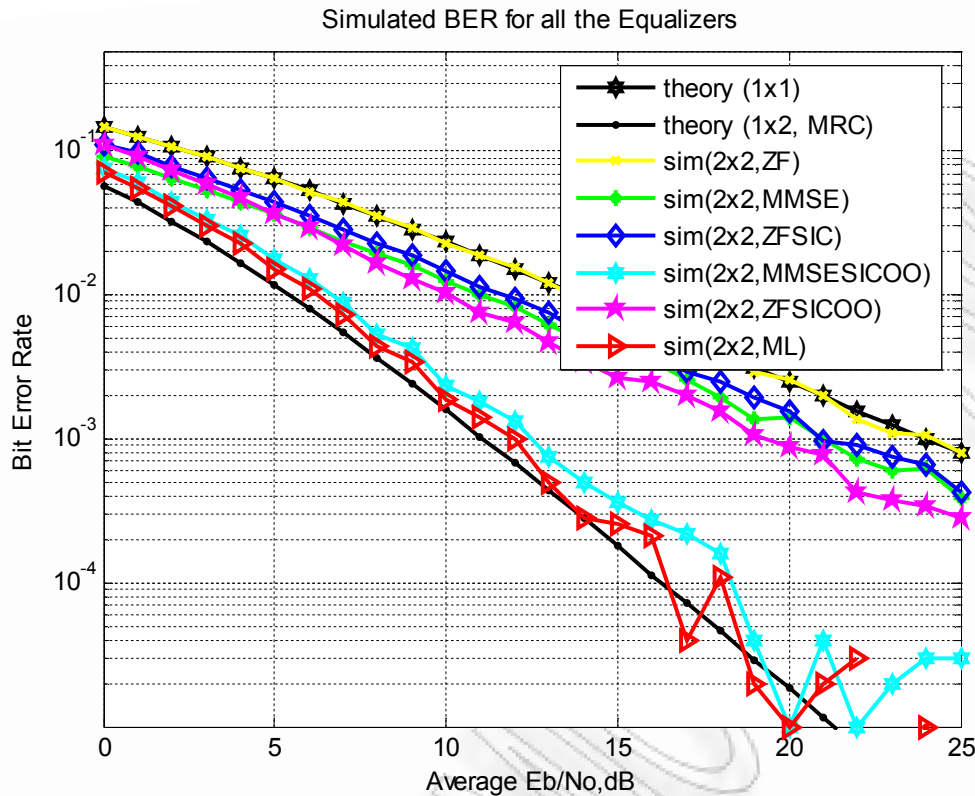
---

Ισοστάθμιση (equalization), όπως έχουμε ήδη αναφέρει, είναι η επεξεργασία του λαμβανόμενου σήματος, με σκοπό τη μείωση της διασυμβολικής παρεμβολής και αν είναι εφικτό και του θορύβου του καναλιού. Το αντικείμενο της παρούσας μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας ήταν η μελέτη μιας σειράς γραμμικών και μη γραμμικών ισοσταθμιστών για την αποδιαμόρφωση συστημάτων πολλαπλών κεραιών εισόδου-εξόδου.

Συγκεκριμένα μελετήσαμε του εξής ισοσταθμιστές:

- Μηδενισμός της διασυμβολικής παρεμβολής  
(Zero Forcing, ZF)
- Μέθοδος του Ελαχίστου Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος  
(Minimum Mean Square Error, MMSE)
- Μηδενισμός της διασυμβολικής παρεμβολής με διαδοχικές ακυρώσεις  
(Zero Forcing Successive Interference Cancellation, ZFSIC)
- Μηδενισμός της διασυμβολικής παρεμβολής με διαδοχικές ακυρώσεις και βέλτιστη ταξινόμηση της παρεμβολής  
(Zero Forcing Successive Interference Cancellation equalizer with Optimal Ordering, ZFSICOO)
- Μέθοδος του Ελαχίστου Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος με διαδοχικές ακυρώσεις και βέλτιστη ταξινόμηση της παρεμβολής  
(Minimum Mean Square Error SIC equalization with Optimal Ordering, MMSEOO)
- Μέγιστης Πιθανοφάνειας  
(Maximum Likelihood, ML)

Από τα αποτελέσματα της προσομοίωσης σε MATLAB που έγινε για κάθε ισοσταθμιστή, έχουμε την παρακάτω εικόνα:



**Εικόνα 6.1:** Σύγκριση της επίδοσης των διαφορετικών ισοσταθμιστών

Παρατηρούμε τα εξής:

- Η καμπύλη του BER για τον ZF ισοσταθμιστή εφάπτεται-ταυτίζεται με την καμπύλη που περιγράφει ένα 1x1 σύστημα.
- Η βέλτιστη ταξινόμηση (Optimal Ordering, OO) βελτιώνει την επίδοση των ZF και MMSE μεθόδων με διαδοχικές ακυρώσεις (ZFSIC και MMSESIC).
- Η μέθοδος του Ελαχίστου Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος με διαδοχικές ακυρώσεις και βέλτιστη ταξινόμηση (MMSESICOO), μας δίνει αποτελέσματα πολύ κοντά σε αυτά της Μέγιστης Πιθανοφάνειας (ML).
- Με τη μέθοδο της Μέγιστης Πιθανοφάνειας (ML) έχουμε αποτελέσματα κοντά σε αυτά του Συνδυασμού Μεγίστου Λόγου (MRC) για διαφορικό σύστημα 1x2 (2 κεραίες λήψης). Έχουμε επομένως κέρδος διαφορετικής λήψης αλλά επίσης διπλασιασμό του ρυθμού μετάδοσης, με κόστος την αυξημένη πολυπλοκότητα.

## Βιβλιογραφικές Αναφορές

---

1. David Tse, Pramod Viswanath *Fundamentals of Wireless Communication*, Cambridge University Press 2005.
2. John R. Barry, Edward A. Lee, David G. Messerschmitt, *Digital Communications*, 3<sup>rd</sup> edition, Springer.
3. <http://en.wikipedia.org/wiki/MIMO>
4. P. Li, D. Paul, R. Narasimhan, and J. Cioffi, “On the distribution of SINR for the MMSE MIMO receiver and performance analysis,” *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 52, no. 1, pp. 271-286, Jan. 2006.
5. Y. Jang, M. Varanasi, and J. Li, “Performance analysis of ZF and MMSE equalizers for MIMO systems: an in-depth study of the high SNR regime”, submitted to *IEEE Trans. on Information Theory*, Feb. 2007, [www.sal.ufl.edu/yjiang/papers/VbitwcR6.pdf](http://www.sal.ufl.edu/yjiang/papers/VbitwcR6.pdf)
6. <http://www.dsplog.com>