Στους γονείς μου

Ηλία και Ελένη

## Ευχαριστίες

Θεωρώ υποχρέωση μου πριν τη παρουσίαση της παρούσης διπλωματικής εργασίας να αναφέρω τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή κύριο Θεόδωρο Αρτίκη για τη συνεργασία και τη βοήθεια του στην περάτωση της εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους υπόλοιπους επιβλέποντες καθηγητές μου κ. Μαχαιρά Νικόλαο και κ.Βρόντο Σπυρίδωνα για τη συμβολή τους.Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω το συμφοιτητή και φίλο Ιωάννη Μπαντούνα για τις χρήσιμες παρατηρήσεις του καθόλη τη διάρκεια της συγγραφής αυτής της εργασίας.Τέλος ,ένα ιδιαίτερο ευχαριστώ προς τους γονείς μου για την αμέριστη συμπαράσταση τους και την ηθική υποστήριξη που μου παρείχαν.

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αντικείμενο της Διοικητικής Κινδύνου είναι ο εντοπισμός, η αξιολόγηση και η ιεράρχηση των κινδύνων με σκοπό την ελαχιστοποίηση, τη παρακολούθηση και τον έλεγχο της πιθανότητας των ατυχών συμβάντων ή εναλλακτικά των αντικτύπων αυτών. Η έννοια του τυχαίου αθροίσματος ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών αναγνωρίζεται ως ισχυρότατο αναλυτικό εργαλείο, για τη περιγραφή,ανάλυση και υλοποίηση βασικών λειτουργιών της Διοικητικής Κινδύνου. Στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας διπλωματικής παρουσιάζονται κάποιες έννοιες καθώς και βασικές εφαρμογές τυχαίων αθροισμάτων στα πλαίσια της Διοικητικής Κινδύνου.

Επίσης, η έννοια του ελαχίστου τυχαίου αριθμού θετικών,ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών θεωρείται ιδιαίτερα χρήσιμη για τη μελέτη των χρόνων αναμονής των πραγματοποίησεων καταστροφικών κινδύνων. Στο δεύτερο κεφάλαιο του συγγράματος αυτού, γίνεται ιδιαίτερη μνεία σε αυτού του είδους τα στοχαστικά μοντέλα.

Η παρουσία της ανταγωνιστικότητας στα σύνολα καταστροφικών κινδύνων είναι καθοριστική στη λήψη αποφάσεων στο χώρο της Διοικητικής Κινδύνου.Βασικός σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι η εμφύτευση των ανωτέρω δύο εννοιών,δηλαδή του τυχαίου αθροίσματος και του ελαχίστου τυχαίου αριθμού μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών, σε στοχαστικά μοντέλα περιγραφής και ανάλυσης ανταγωνιστικών κινδύνων.Τέτοιου είδους μοντέλα αναλύονται εκτενώς στο τρίτο κεφάλαιο με τη βοήθεια αναλυτικών μεθόδων της θεωρίας πιθανοτήτων.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται και αναλύονται ενδιαφέροντα αποτελέσματα από την προσομοίωση τέτοιου είδους μοντέλων. Συγκεκριμένα προσεγγίζονται μέσω μεθόδων προσομοίωσης πιο ρεαλιστικά-σύνθετα μοντέλα με εφαρμογές σε πολλούς τομείς της Διοικητικής Κινδύνου.

## Περιεχόμενα

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ** ............ 5
1.1 Εισαγωγή ............ 5
1.2 Ορισμός Τυχαίου Αθροίσματος ............ 6
1.3 Χαρακτηριστική Συνάρτηση Τυχαίου Αθροίσματος ............ 7
1.4 Ειδικές Περιπτώσεις Τυχαίων Αθροισμάτων ............ 10
1.5 Εφαρμογές Τυχαίων Αθροισμάτων στη Διοικητική Κινδύνου ............ 23
1.6 Συμπεράσματα ............ 32
**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΥΧΑΙΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ** ............ 33
2.1 Εισαγωγή ............ 33
2.2 Ορισμός Ελάχιστου Τυχαίου Αριθμού Τυχαίων Μεταβλητών ............ 34
2.3 Συνάρτηση Κατανομής του Ελάχιστου Τυχαίου Αριθμού Τυχαίων Μεταβλητών ............ 35
2.4 Ειδικές Περιπτώσεις Ελάχιστου Τυχαίου Αριθμού Τυχαίων Μεταβλητών ............ 37
2.5 Εφαρμογές Ελάχιστου Τυχαίου Αριθμού Τυχαίων Μεταβλητών ............ 45
2.6 Συμπεράσματα ............ 48
**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΤΥΧΑΙΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΣΤΗ ΔΟΜΗ ΤΥΧΑΙΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ** ............ 49
3.1 Εισαγωγή ............ 49
3.2 Διατύπωση Ελάχιστου Τυχαίου Αριθμού μη Αρνητικών Τυχαίων Μεταβλητών ............ 49
3.3 Συνάρτηση Κατανομής Διατυπωμένου Ελάχιστου ............ 51
3.4 Ειδικές Περιπτώσεις Διατυπωμένου Ελάχιστου ............ 55
3.5 Εφαρμογές σε Συστήματα και Διαδικασίες ............ 59
3.6 Συμπεράσματα ............ 63
**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ** ............ 64
4.1 Εισαγωγή ............ 64
4.2 Προσέγγιση Διατυπωμένου Μοντέλου Μέσω Προσομοίωσης ............ 66
4.3 Προσέγγιση Διατυπωμένου Μοντέλου Μέσω Προσομοίωσης στη Περίπτωση Εξαρτημένων Τυχαίων Μεταβλητών ............ 81
4.4.Συμπεράσματα ............ 85
**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ** ............ 86

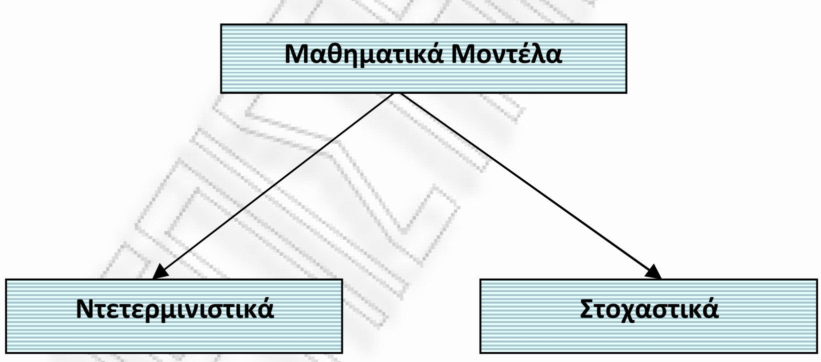
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

# ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ

## 1.1 Εισαγωγή

Αντικείμενο της διοικητικής κινδύνων είναι ο εντοπισμός, η αξιολόγηση και η ιεράρχηση των κινδύνων με σκοπό την ελαχιστοποίηση, τη παρακολούθηση και τον έλεγχο της πιθανότητας των ατυχών συμβάντων ή εναλλακτικά των αντίκτυπων αυτών[1].

Οι κίνδυνοι που διαχειρίζεται η διοικητική κινδύνου αφορούν κάποιο σύστημα ή μια οντότητα γενικότερα και συνεπώς υπάρχει η ανάγκη «περιγραφής» της κατάστασης αυτής. Η «περιγραφή» αυτή μέσω μιας μαθηματικής φόρμουλας καλείται μαθηματικό μοντέλο και η όλη διαδικασία ,μαθηματική μοντελοποίηση. Τα μαθηματικά μοντέλα εκτός από τη διαχείριση κινδύνων βρίσκουν εφαρμογές στις φυσικές επιστήμες όπως η φυσική, η βιολογία, η γεωλογία, η μετεωρολογία, αλλά και στις κοινωνικές επιστήμες(λ.χ. ψυχολογία, κοινωνιολογία, πολιτική οικονομία). Τα μαθηματικά μοντέλα μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες: τα ντετερμινιστικά και τα στοχαστικά.




Ως ντετερμινιστικό, ορίζουμε το μοντέλο εκείνο στο οποίο οι αρχικές συνθήκες(τιμές από ένα συγκεκριμένο σύνολο) καθορίζουν, σύμφωνα με τις παραμέτρους του, με τον ίδιο πάντα τρόπο τη τελική «μορφή» του. Για παράδειγμα η πραγματική συνάρτηση

$$f(x) = 3x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$$

είναι ένα ντετερμινιστικό μαθηματικό μοντέλο, καθώς για κάθε συγκεκριμένο $x_0 \in \mathbb{R}$ το αποτέλεσμα είναι πάντα $f(x_0)$. Αντιθέτως, σε ένα στοχαστικό μοντέλο η $τυχαιότητα$ είναι «παρούσα», καθώς στο μοντέλο υπεισέρχονται ως δομικές κάποιες τυχαίες μεταβλητές, και η τελική «μορφή» του δε περιγράφεται με μοναδικές τιμές αλλά από κατανομές πιθανοτήτων[2].

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε εκτενώς με την ανάλυση και τη μελέτη ενός αρκετά απλού στη δομή αλλά ιδιαιτέρως εφαρμόσιμου στοχαστικού μοντέλου, του τυχαίου αθροίσματος μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών

$$S = X_1 + \cdots + X_N \,.$$

Το μοντέλο αυτό εμφανίζεται σε διάφορες εφαρμογές της θεωρίας πιθανοτήτων, ιδιαίτερα, στα αναλογιστικά μαθηματικά και στη θεωρία αξιοπιστίας. Για παράδειγμα, η διάρκεια ζωής ενός μοντέλου shock μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα τυχαίο άθροισμα $S$, όπου $N$ είναι ο αριθμός των shock που μπορεί να «υποφέρει» το σύστημα και $X_i$ ο ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ των shock. Μάλιστα αποδεικνύεται ότι το $S$ ανήκει στην κλάση $NWU$ (**N**ew **W**orst than **U**sed), αν η τυχαία μεταβλητή $N$ ακολουθεί τη Γεωμετρική κατανομή [3].

Μια άλλη εφαρμογή του τυχαίου αθροίσματος $S$ εμφανίζεται στο μοντέλο της σύνθετης κατανομής Poisson. Πιο συγκεκριμένα, ο $Revfeim$ χρησιμοποίησε το μοντέλο της σύνθετης κατανομής Poisson, όπου οι τυχαίες μεταβλητές $X_i$ που αθροίζονταν ακολουθούσαν την Εκθετική κατανομή, για να μοντελοποιήσει τη κατανομή της ημερήσιας ποσότητας βροχής $S$, όπου κάθε ημερήσια βροχόπτωση «παρήγαγε» ποσότητα βροχής που ακολουθεί Εκθετική κατανομή [4].

Τέλος ένα ακόμα κλασσικό στοχαστικό μοντέλο που χρησιμοποιείται σε διάφορους τομείς των εφαρμοσμένων πιθανοτήτων, όπως η θεωρία ασφαλιστικού κινδύνου και η θεωρία ουρών, είναι το μοντέλο τυχαίου ποσού. Ως τυχαίο ποσό προσδιορίζεται το άθροισμα $n$ τυχαίων μεταβλητών, όπου το πλήθος $n$ είναι επίσης τυχαία μεταβλητή. Τα τυχαία ποσά διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην εφαρμογή της ασφάλισης. Για παράδειγμα, αν $X_i, i = 1,2, \dots, N$, καθορίζουν τις απώλειες μιας παραγωγικής μονάδας από την $i$ έκρηξη-καταστροφή, τότε το τυχαίο άθροισμα των $X_i, i = 1,2, \dots, N$, είναι οι συνολικές απώλειες αυτής της μονάδας, οπότε μπορεί να χρησιμοποιήσει κανείς την «ουρά» πιθανότητας $\Pr\,[S > t]$ [5].

Στις επόμενες ενότητες του κεφαλαίου αυτού παρατίθενται ο ορισμός, η χαρακτηριστική συνάρτηση, ειδικές περιπτώσεις και κάποιες από τις σπουδαιότερες εφαρμογές του τυχαίου αθροίσματος μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών.

## 1.2 Ορισμός Τυχαίου Αθροίσματος

Έστω

$N$

μία διακριτή μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με τιμές στο σύνολο των φυσικών αριθμών

$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2, \dots\}$

ενώ επιπλέον θεωρούμε

$\{X_n , n = 1,2 \dots\}$

μία ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες είναι και ισόνομες με τη τυχαία μεταβλητή

$X$.

Υποθέτουμε ακόμη, ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

είναι ανεξάρτητη από την ακολουθία

$\{X_n , n = 1,2 \dots\}$

και συνεπώς θα είναι στοχαστικά ανεξάρτητη με τη τυχαία μεταβλητή $X_n$ για κάθε

$n \in \{1,2, \dots\}$.

Η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N \ (1.2.1)$$

καλείται τυχαίο άθροισμα και έχει πάρα πολλές πρακτικές και θεωρητικές εφαρμογές στη διοικητική κινδύνου και όχι μόνο.[6]

## 1.3 Χαρακτηριστική Συνάρτηση Τυχαίου Αθροίσματος

Θεωρούμε ότι η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$N$

έχει *πιθανογεννήτρια* συνάρτηση

$$P_N(z) := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} z^n \Pr[N = n]$$

και επιπλέον η τυχαία μεταβλητή $X$(συνεχής ή διακριτή) έχει χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\varphi_X(u) := E\left(e^{iuX}\right), u \in \mathbb{R}.$$

Σκοπός της συγκεκριμένης ενότητας είναι ο υπολογισμός της χαρακτηριστικής συνάρτησης, έστω $\varphi_S\,(u)$ , του τυχαίου αθροίσματος

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

μέσω της *πιθανογεννήτριας* $P_N\,(z)$ της τυχαίας μεταβλητής $N$ και της χαρακτηριστικής συνάρτησης $\varphi_X\,(u)$ της $X$ [7].

Θα έχουμε λοιπόν ότι

$$\varphi_S\,(u) \coloneqq E\left(e^{iuS}\right), u \in \mathbb{R}$$

ή ισοδύναμα

$$\varphi_S\,(u) = E_N\left[E_S\left(e^{iuS}|N\right)\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{iu(X_1+X_2+\cdots+X_N)}\,|N = n]\Pr\,[N = n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E[e^{iu(X_1+X_2+\cdots+X_n)}\,|N = n]\Pr\,[N = n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E[(e^{iuX_1}\,e^{iuX_2}\cdots e^{iuX_2})|N = n]\Pr\,[N = n]\ (1.3.1)$$

επειδή όμως έχουμε υποθέσει στην ενότητα 1.2 ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

και η ακολουθία

$\{X_n\,, n = 1{,}2\ldots\}$

είναι ανεξάρτητες, έπεται ότι το ίδιο θα ισχύει για την $\tau.\mu$ $N$ και την ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών

$\{e^{iuX_n}, n = 1{,}2,\ldots\}$

οπότε η σχέση (1.3.1) θα γίνει

$$\varphi_S\,(u) = \sum_{n=1}^{\infty} E(e^{iuX_1}\,e^{iuX_2}\cdots e^{iuX_2})\Pr[N = n]\ (1.3.2)$$

ενώ επιπλέον, εφόσον οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2$, ...είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και επιπλέον ισόνομες με τη τυχαία μεταβλητή $X$, από τη σχέση (1.3.2) θα προκύψει ότι

$$\varphi_S(u) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(e^{iuX_1}\right)E\left(e^{iuX_2}\right)\cdots E\left(e^{iuX_n}\right)\Pr[N=n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{X_1}(u)\varphi_{X_2}(u)\cdots\varphi_{X_n}(u)\Pr[N=n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_X(u)\varphi_X(u)\cdots\varphi_X(u)\Pr[N=n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_X(u)]^n \Pr[N=n]$$

$$\Leftrightarrow \varphi_S(u) = P_N\,[\varphi_X(u)]\,, u \in \mathbb{R}\ (1.3.3)$$

Στη περίπτωση που οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots$ οι οποίες απαρτίζουν την ακολουθία
$\{X_n\,, n = 1,2\ldots\}$

είναι διακριτές με *πιθανογεννήτρια* συνάρτηση

$$P_X(z) = \sum_{x \in R_X} z^x f_X(x)$$

όπου $f_X(x) = \Pr(X = x)$ και $R_X$ είναι η συνάρτηση πιθανότητας και το σύνολο τιμών αντίστοιχα, της τυχαίας μεταβλητής $X$, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε και τη *πιθανογεννήτρια* συνάρτηση $P_S(u)$ του τυχαίου αθροίσματος

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$$

Συγκεκριμένα λοιπόν θα έχουμε ότι

$$P_S(z) \coloneqq E(z^S)$$

ή ισοδύναμα

$$P_S(z) = E_N[E_S(z^S|N)]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E_S(z^S|N=n)\Pr[N=n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E_S\left(z^{(X_1+X_2+\cdots+X_N)}|N=n\right)\Pr[N=n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E_S\left(z^{(X_1+X_2+\cdots X_n)}|N=n\right)\Pr[N=n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E[(z^{X_1} z^{X_2} \cdots z^{X_n})|N = n) \Pr[N = n] \quad (1.3.4)$$

ενώ προφανώς λόγω της ανεξαρτησίας της τυχαίας μεταβλητής $N$ από την ακολουθία $\{X_n\}_{n\geq 1}$,θα έχουμε επιπλέον ότι η $N$ είναι ανεξάρτητη και με την ακολουθία

$\{z^{X_n}, n = 1,2, \dots\}$

οπότε η (1.3.4) γίνεται

$$P_S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} E(z^{X_1} z^{X_2} \cdots z^{X_n}) \Pr[N = n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E(z^{X_1})E(z^{X_2}) \cdots E(z^{X_n}) \Pr[N = n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_{X_1}(z)P_{X_2}(z) \cdots P_{X_n}(z) \Pr[N = n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [P_X(z)]^n \Pr[N = n]$$

$$\Leftrightarrow P_S(z) = P_N[P_X(z)] \quad (1.3.5)$$

Τις σχέσεις (1.3.3) και (1.3.5) που προσδιορίσαμε σε αυτήν την ενότητα, θα τις χρησιμοποιήσουμε εκτενώς στην επόμενη ενότητα, όπου θα προσδιορίσουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση ή τη *πιθανογεννήτρια* του τυχαίου αθροίσματος $S$, σε διάφορες ενδιαφέρουσες ειδικές περιπτώσεις.

## 1.4 Ειδικές Περιπτώσεις Τυχαίων Αθροισμάτων

***Περίπτωση 1***

Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

ακολουθεί τη κατανομή Poisson με μέση τιμή $\lambda > 0$, της οποίας η *πιθανογεννήτρια* συνάρτηση δίνεται από το τύπο

$$P_N(z) = e^{\lambda(z-1)}, \lambda > 0, |z| \leq 1$$

ενώ επιπλέον η τυχαία μεταβλητή

$X$

ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\mu > 0$ με χαρακτηριστική συνάρτηση που δίνεται από το τύπο

$$\varphi_X(u) = \frac{\mu}{\mu - iu}, \mu > 0, u \in \mathbb{R}$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τη σχέση (1.3.3),θα έχουμε για τη χαρακτηριστική συνάρτηση του τυχαίου αθροίσματος $S$

$$\varphi_S(u) = P_N[\varphi_X(u)]$$

$$= e^{\lambda[\varphi_X(u)-1]}$$

$$\Leftrightarrow \varphi_S(u) = e^{\lambda\left[\left(\frac{\mu}{\mu-iu}\right)-1\right]}, \lambda > 0, \mu > 0 \quad (1.4.1)$$

όπου η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

καλείται συνήθως Poisson εκθετικό άθροισμα.

***Περίπτωση 2***

Θεωρούμε και πάλι ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή $\lambda > 0$ και συνεπώς η $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση της θα είναι η

$$P_N(z) = e^{\lambda(z-1)}, |z| \le 1$$

ενώ η τυχαία μεταβλητή

$X$

είναι διακριτή και ακολουθεί επίσης κατανομή Poisson αλλά με $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση

$$P_X(z) = e^{\theta(z-1)}, \theta > 0, |z| \le 1$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τη σχέση (1.3.5), η $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση του τυχαίου αθροίσματος $S$ θα είναι η

$$P_S(z) = P_N[P_X(z)]$$

$$= e^{\lambda[P_X(z)-1]}$$

ή ισοδύναμα

$$P_S\,(z) = e^{\lambda[e^{\theta(z-1)}-1]}, |z| \leq 1 \; (1.4.2)$$

όπου σε αυτή τη περίπτωση η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

ονομάζεται σύνθετη κατανομή Poisson.

***Περίπτωση 3***

Υποθέτουμε ξανά ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

έχει $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση

$$P_N\,(z) = e^{\lambda(z-1)}, |z| \leq 1$$

και η τυχαία μεταβλητή

$X$

ακολουθεί τη λεγόμενη *Displayed Poisson* με παράμετρο $\kappa$, η οποία λαμβάνει τιμές στο σύνολο

$R_X = \{1,2,3,\dots\}$

και έχει $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση

$$P_X\,(z) = ze^{\kappa(z-1)}, \kappa > 0$$

δηλαδή πρόκειται για μία «μετατοπισμένη» κατανομή Poisson,όπου η συνολική μάζα πιθανότητας έχει κατανεμηθεί (από τον $\Omega$ στο $R_X$) μέσω της τυχαίας μεταβλητής $X$ στα στοιχεία του συνόλου

$R_X = \{1,2,\dots\}$

Η $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση του τυχαίου αθροίσματος $S$ θα βρεθεί, σύμφωνα με τη σχέση (1.3.5), ως εξής

$$\begin{aligned} P_S\,(z) &= P_N\,[P_X(z)] \\ &= e^{\lambda[ze^{\kappa(z-1)}-1]} \end{aligned}$$

οπότε

$$P_S\,(z) = e^{\lambda[ze^{\kappa(z-1)}-1]}, \kappa, \lambda > 0 \; (1.4.3)$$

***Περίπτωση 4***

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

έχει $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση

$$P_N\,(z) = e^{\lambda(z-1)}, |z| \leq 1$$

ενώ η

$X$

ακολουθεί τη Γεωμετρική τύπου $II$ κατανομή με πιθανότητα «επιτυχίας» $p$,της οποίας η $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση ως γνωστόν δίνεται από το τύπο

$$P_X\,(z) = \frac{pz}{1-qz}\,, p \in (0{,}1), q = 1-p, |z| \leq \frac{1}{q}$$

Ομοίως λοιπόν με τις προηγούμενες περιπτώσεις, η $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ του τυχαίου αθροίσματος $S$ θα είναι η

$$P_S\,(z) = e^{\lambda[P_X\,(z)-1]}$$
$$= e^{\lambda\left[\left(\frac{pz}{1-qz}\right)-1\right]}$$

δηλαδή

$$P_S\,(z) = e^{\lambda\left[\left(\frac{pz}{1-qz}\right)-1\right]}, p \in (0{,}1), \lambda > 0 \; (1.4.4)$$

οπότε από τη μορφή της πιθανογεννήτριας συνάρτησης του τυχαίου αθροίσματος $S$ στην (1.4.4),συμπεραίνουμε ότι αυτό ακολουθεί τη κατανομή $Polya - Aeppli$ με παραμέτρους $\lambda$ και $p$, η οποία βρίσκει πολλές εφαρμογές σε προβλήματα που αφορούν τη μελέτη της ζήτησης σε συστήματα αποθεμάτων.

***Περίπτωση 5***

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

ακολουθεί κατανομή Poisson με $E(N) = \lambda$, με $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση

$$P_N\,(z) = e^{\lambda(z-1)}, |z| \leq 1$$

και επιπλέον η

$X$

ακολουθεί κατανομή $Sibuya$ με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(x) = (-1)^{x+1}\binom{\gamma}{x}, x \in \{1,2,\dots\}$$

και $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$

$$P_X\,(z) = 1-(1-z)^{\gamma}, 0<\gamma\le 1, |z|\le 1$$

Σε αυτή τη περίπτωση με εφαρμογή του τύπου (1.3.5) θα προκύψει για τη $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση του τυχαίου αθροίσματος $S$ της (1.2.1) ότι

$$\begin{aligned} P_S\,(z) &= P_N\,[P_X(z)] \\ &= e^{\lambda[1-(1-z)^{\gamma}-1]} \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$P_S\,(z) = e^{-\lambda[(1-z)^{\gamma}]}, \lambda>0, \gamma\in(0,1], (1.4.5)$$

όπου από τη μορφή της (1.4.5) συμπεραίνουμε ότι η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

ακολουθεί μια *Stable Distribution* με παραμέτρους $\lambda$ και $\gamma$.

***Περίπτωση 6***

Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

ακολουθεί κατανομή Poisson με $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση

$$P_N\,(z) = e^{\lambda(z-1)}, |z|\le 1$$

ενώ επιπλέον θεωρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή

$X$

ακολουθεί τη Λογαριθμική κατανομή με παράμετρο $p$ ,της οποίας η συνάρτηση πιθανότητας είναι η

$$f_X(x) = \frac{1}{\ell\mathrm{n}(1/p)}\frac{q^x}{x}, p\in(0,1), q=1-p, x=1,2,\dots$$

και κατά συνέπεια η $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση αυτής, θα βρεθεί ως εξής

$$P_X(z) = \sum_{x=1}^{\infty} z^x f_X(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} z^x \frac{1}{\ell\text{n}(1/p)} \frac{q^x}{x}$$

$$= \frac{1}{\ell\text{n}(1/p)} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(zq)^x}{x}$$

$$= \frac{1}{\ell\text{n}\left(\frac{1}{p}\right)} [-\ell\text{n}(1-zq)]$$

ή ισοδύναμα

$$P_X(z) = \frac{\ell\text{n}(1-zq)}{\ell\text{n}(p)}, p \in (0,1), q = 1-p, |z| \leq \frac{1}{q}$$

Επανερχόμενοι λοιπόν, στον αρχικό σκοπό της συγκεκριμένης ενότητας, για τον προσδιορισμό της πιθανογεννήτριας συνάρτησης του τυχαίου αθροίσματος $S$,θα έχουμε ότι:

$$P_S(z) = P_N[P_X(z)]$$

$$= e^{\lambda(P_X(z)-1)} = e^{\lambda[\frac{ln(1-zq)}{lnp}-1]}$$

$$= e^{\frac{\lambda}{lnp}[ln(1-zq)-lnp]} = e^{\frac{\lambda}{lnp}\left[ln\left(\frac{1-zq}{p}\right)\right]}$$

$$= e^{-\frac{\lambda}{lnp}\left[ln\left(\frac{p}{1-zq}\right)\right]}$$

και συνεπώς η $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση του τυχαίου αθροίσματος

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

θα είναι η

$$P_S(z) = \left(\frac{p}{1-zq}\right)^{-\lambda/lnp}, \lambda > 0, q = 1-p \ (1.4.6).$$

Αξίζει να τονίσουμε ότι το ο εκθέτης στην (1.4.6) είναι μια θετική ποσότητα καθώς $p \in (0,1)$,οπότε εάν ισχύει ότι $-\frac{\lambda}{lnp} \in \mathbb{N}^* = \{1,2, \dots\}$ τότε η τυχαία μεταβλητή $S$ θα ακολουθεί την αρνητική $\delta\iota\omega\nu\upsilon\mu\iota\kappa\acute{\eta}$ κατανομή με παραμέτρους $-\frac{\lambda}{lnp}$ και $p$ (συμβολικά S$\sim Nb(-\frac{\lambda}{lnp}, p)$).

***Περίπτωση*** *7*

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

έχει *πιθανογεννήτρια* συνάρτηση με τύπο

$$P_N(z) = \frac{pz}{1 - qz}, p \in (0,1), q = 1 - p, |z| \leq \frac{1}{q}$$

ενώ η τυχαία μεταβλητή

$X$

είναι συνεχής με χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\varphi_X(u) = \frac{\mu}{\mu - iu}, \mu \in (0, \infty), u \in \mathbb{R}$$

Σύμφωνα λοιπόν με τη σχέση (1.3.3) της ενότητας 1.3, η χαρακτηριστική συνάρτηση του γεωμετρικού τυχαίου αθροίσματος

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

θα είναι η

$$\varphi_S\,(u) = P_N\,[\varphi_X(u)]$$

$$= \frac{p\varphi_X(u)}{1 - q\varphi_X(u)}$$

από όπου κάνοντας αντικατάσταση προκύπτει ότι

$$\varphi_S\,(u) = \frac{p\left(\frac{\mu}{\mu - iu}\right)}{1 - q\left(\frac{\mu}{\mu - iu}\right)}$$

και εκτελώντας κάποιες πράξεις ακόμα καταλήγουμε στο γεγονός ότι

$$\varphi_S\,(u) = \frac{p\mu}{(1 - q)\mu - iu}$$

ή ισοδύναμα

$$\varphi_S\,(u) = \frac{p\mu}{p\mu - iu}\,, p\mu > 0, u \in \mathbb{R}\,, (1.4.7)$$

και συνεπώς η τυχαία μεταβλητή $S$ ακολουθεί Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta = p\mu < \mu$ καθώς $p \in (0,1)$.

***Περίπτωση 8***

Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

ακολουθεί τη κατανομή Poisson με μέση τιμή $\lambda$ και επομένως η $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση της θα είναι η

$$P_N\,(z) = e^{\lambda(z-1)}, |z| \leq 1$$

ενώ επιπλέον η τυχαία μεταβλητή

$X$

έχει $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση

$$P_X(z) = q + pz, 0 < p < 1, q = 1 - p$$

δηλαδή $X \sim B(1, p)$.

Η $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση του τυχαίου αθροίσματος

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

θα είναι η

$$P_S(z) = P_N[P_X(z)]$$
$$= e^{\lambda[(q+pz)-1]}$$

ή ισοδύναμα

$$P_S(z) = e^{\lambda[-p+pz]} \Leftrightarrow$$

$$P_S(z) = e^{\lambda p[(z-1)]}, \lambda > 0, p \in (0,1), |z| \leq 1 \; (1.4.8)$$

δηλαδή το τυχαίο άθροισμα $S$ ακολουθεί επίσης Poisson κατανομή αλλά με μέση τιμή $E(S) = \lambda p < \lambda = E(N)$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η συγκεκριμένη περίπτωση εμφανίζεται αρκετά συχνά όταν η τυχαία μεταβλητή $N$ εκφράζει τη συχνότητα ενός κινδύνου πριν τη λήψη κάποιων προληπτικών μέτρων, τα οποία είτε διατηρούν είτε διαγράφουν ένα κίνδυνο(επιτυχία- αποτυχία) και η $\delta\acute{\iota}\tau\iota\mu\eta$ τυχαία μεταβλητή $X_n, n = 1,2, \ldots$εκφράζει το αποτέλεσμα των μέτρων αυτών στην $n - o\sigma\tau\acute{\eta}$ εμφάνιση του κινδύνου.

***Περίπτωση 9***

Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

ακολουθεί τη $διωνυμική$ κατανομή με παραμέτρους $\nu$ και $p$, της οποίας η $πιθανογεννήτρια$ συνάρτηση είναι η

$$P_N\,(z) = (q + pz)^{\nu}, p \in (0,1), q = 1 - p$$

,ενώ έστω ακόμη ότι η τυχαία μεταβλητή

$X$

ακολουθεί κατανομή $Γάμμα$ με παραμέτρους $\alpha$ και $\lambda$.

Σε αυτή τη περίπτωση η χαρακτηριστική συνάρτηση του τυχαίου αθροίσματος της (1.2.1) θα είναι η

$$\varphi_S\,(u) = P_N\,(\varphi_X(u)) \Leftrightarrow$$

$$\varphi_S\,(u) = (q + p\varphi_X(u))^{\nu}$$

ή ισοδύναμα

$$\varphi_S\,(u) = \left(q + p\left(\frac{\lambda}{\lambda - iu}\right)^{a}\right)^{\nu}, \alpha, \lambda > 0, p \in (0,1) \; (1.4.9)$$

***Περίπτωση 10***

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

ακολουθεί $διωνυμική$ κατανομή με παραμέτρους $\nu$ και $p$, ενώ επιπλέον θεωρούμε πως η τυχαία μεταβλητή

$X$

ακολουθεί Poisson κατανομή με παράμετρο $\theta$.

Κάνοντας και πάλι χρήση της σχέσης (1.3.5) θα προσδιορίσουμε την πιθανογεννήτρια συνάρτηση του τυχαίου αθροίσματος $S$ της (1.2.1) ως εξής

$$P_S\,(z) = P_N\,[P_X(z)] \Leftrightarrow$$

$$P_S\,(z) = \left(q + pe^{\lambda(z-1)}\right)^{\nu}, \lambda > 0, 0 < p < 1, q = 1 - p \; (1.4.10)$$

***Περίπτωση 11***

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

ακολουθεί τη διακριτή ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο $A = \{1,2, \dots, \kappa\}$ συμβολικά $N \sim DU(A)$, και συνεπώς θα έχει $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση

$$P_N(z) = \frac{1 - z^{\kappa}}{\kappa(1 - z)}.$$

Ακόμη υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή

$X$

ακολουθεί τη κατανομή $Benoulli$ με παράμετρο $p$, της οποίας η $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση είναι η

$$P_X(z) = q + pz, q = 1 - p$$

Θα προσδιορίσουμε τη $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση του τυχαίου αθροίσματος $S$ της (1.2.1).Αντικαθιστώντας λοιπόν στη σχέση (1.3.5) θα έχουμε ότι

$$P_S(z) = P_N\left(P_X(z)\right)$$

$$= \frac{1 - [P_X(z)]^{\kappa}}{\kappa[1 - P_X(z)]}$$

$$= \frac{1 - [q + pz]^{\kappa}}{\kappa[1 - (q + pz)]}$$

ή ισοδύναμα

$$P_S(z) = \frac{1 - (q + pz)^{\kappa}}{\kappa p(1 - z)}, \kappa \in \{2,3, \dots\}, p \in (0,1), q = 1 - p \; (1.4.11.\alpha)$$

η οποία μπορεί να γραφτεί και στη μορφή

$$P_S(z) = \frac{1 - P_Y(z)}{E(Y)(1 - z)}, Y \sim B(\kappa, p)$$

δηλαδή η τυχαία μεταβλητή

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

ακολουθεί την ανανεωτική της $\delta\iota\omega\nu\upsilon\mu\iota\kappa\acute{\eta}\varsigma$ με παραμέτρους $\kappa$ και $p$.

Η $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση της σχέσης (1.4.11.α) μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι γράφεται στη μορφή

$$P_S(z) = \frac{1}{\kappa}\sum_{j=0}^{\kappa-1}(1-p+pz)^j \quad (1.4.11.b)$$

$$= \frac{1}{\kappa}[(1-p+pz)^0 + (1-p+pz)^1 + \cdots + (1-p+pz)^{\kappa-1}]$$

διότι προφανώς ισχύει ότι

$$\sum_{j=0}^{\kappa} x^j = (1 + x + x^2 + \cdots + x^\kappa) = \frac{1-x^{\kappa+1}}{1-x}, x \neq 1$$

και συνεπώς από τη παραπάνω ανάλυση και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (1.4.11.α) και (1.4.11.b) ,θα έχουμε ότι

$$P_S(z) = \frac{1}{n} + \sum_{j=1}^{\kappa-1}\frac{1}{\kappa}P_{X_j}(z)$$

$$= \frac{1}{\kappa}\sum_{j=0}^{\kappa-1}P_{X_j}(z)$$

ή ισοδύναμα

$$P_S(z) = \frac{1}{\kappa}P_{X_0}(z) + \frac{1}{\kappa}P_{X_1}(z) + \cdots + \frac{1}{\kappa}P_{X_{\kappa-1}}(z) \; (1.4.11.c)$$

όπου $X_j \sim B(j, p)$ ,$j = 0,1, \ldots, \kappa - 1$.

Από τη σχέση (1.4.11.c) συμπεραίνουμε ,ότι στη συγκεκριμένη ειδική περίπτωση το τυχαίο άθροισμα

$$\mathrm{S} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_\mathrm{N}$$

είναι μια ομοιόμορφη σύνθεση $\delta\iota\omega\nu\upsilon\mu\iota\kappa\acute{\omega}\nu$ κατανομών, διότι η $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση του είναι ένας σταθμισμένος μέσος των $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\eta\tau\rho\iota\acute{\omega}\nu$ συναρτήσεων των τυχαίων μεταβλητών $X_j \sim B(j, p)$,με σταθμίσεις-βάρη $\frac{1}{\kappa}, j = 0,1,2, \ldots, \kappa - 1$.

***Περίπτωση 12***

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

ακολουθεί την αρνητική $\delta\iota\omega\nu\upsilon\mu\iota\kappa\acute{\eta}$ κατανομή με παραμέτρους $r$ και $p$,της οποίας η $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση είναι η

$$P_N(z) = \left(\frac{pz}{1-qz}\right)^r, q = 1-p, r \in \{1,2,\dots\}, |z| \leq \frac{1}{q}.$$

Επιπλέον θεωρούμε πως η τυχαία μεταβλητή

$X$

ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Επομένως η χαρακτηριστική συνάρτηση της $\tau.\mu. X$ θα είναι η

$$\varphi_X(u) = \frac{\lambda}{\lambda - iu}$$

οπότε η χαρακτηριστική συνάρτηση του τυχαίου αθροίσματος $S$ θα βρεθεί βάσει της σχέσης (1.3.3) ως εξής

$$\varphi_S(u) = P_N\big(\varphi_X(u)\big)$$

$$= \left(\frac{p\varphi_X(u)}{1-q\varphi_X(u)}\right)^r$$

οπότε αντικαθιστώντας θα έχουμε ότι

$$\varphi_S(u) = \left[\frac{p\left(\frac{\lambda}{\lambda-iu}\right)}{1-q\left(\frac{\lambda}{\lambda-iu}\right)}\right]^r$$

$$= \left(\frac{\frac{p\lambda}{\lambda-iu}}{\frac{\lambda-iu-q\lambda}{\lambda-iu}}\right)^r$$

και στη συνέχεια κάνοντας κάποιες απλοποιήσεις στο σύνθετο κλάσμα που εμφανίζεται θα έχουμε ότι

$$\varphi_S(u) = \left[\frac{p\lambda}{(1-q)\lambda - iu}\right]^r$$

ή ισοδύναμα

$$\varphi_S(u) = \left(\frac{p\lambda}{p\lambda - iu}\right)^r, \lambda > 0, p \in (0,1), r \in \{1,2,\dots\} (1.4.12)$$

Επομένως από τη μορφή της *πιθανογεννήτριας* συνάρτησης στη σχέση (1.4.12),συμπεραίνουμε ότι σε αυτή την ειδική περίπτωση το τυχαίο άθροισμα

$$\mathrm{S} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_\mathrm{N}$$

ακολουθεί τη κατανομή $Erlang$ με παραμέτρους $r$ και $\theta = p\lambda$.

***Περίπτωση 13***

Θεωρούμε τη διακριτή τυχαία μεταβλητή

$N$

η οποία ακολουθεί τη Γεωμετρική τύπου $II$ κατανομή με $\textit{πιθανογεννήτρια}$ συνάρτηση

$$P_N(z) = \frac{pz}{1 - qz}, |z| \leq \frac{1}{q}$$

ενώ υποθέτουμε ακόμη, ότι η τυχαία μεταβλητή

$X$

ακολουθεί επίσης Γεωμετρική τύπου $II$ κατανομή με παράμετρο $0 < \theta < 1$, της οποίας η $\textit{πιθανογεννήτρια}$ συνάρτηση θα είναι η

$$P_X(z) = \frac{\theta z}{1 - \kappa z}, \kappa = 1 - \theta, |z| \leq \frac{1}{\kappa}$$

Σε αυτή την ειδική περίπτωση η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του τυχαίου αθροίσματος $S$, θα βρεθεί αντικαθιστώντας στη σχέση (1.3.5), οπότε και θα λάβουμε

$$P_S(z) = P_N[P_X(z)]$$

$$= \frac{p\left(\frac{\theta z}{1 - \kappa z}\right)}{1 - q\left(\frac{\theta z}{1 - \kappa z}\right)}$$

ή ακόμα

$$P_S(z) = \frac{p\theta z}{1 - \kappa z - q\theta z}$$

$$= \frac{p\theta z}{1 - z[q\theta + (1 - \theta)]} \Leftrightarrow$$

$$P_S(z) = \frac{(p\theta)z}{1 - z(1 - p\theta)}, 0 < p, \theta < 1, |z| \leq \frac{1}{1 - p\theta} \quad (1.4.13)$$

δηλαδή το τυχαίο άθροισμα

$$\mathrm{S} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_\mathrm{N}$$

ακολουθεί επίσης τη γεωμετρική τύπου $II$ κατανομή με πιθανότητα «επιτυχίας» $\pi = p\theta$ και συνεπώς η συνάρτηση πιθανότητας του θα δίνεται από το τύπο

$$f_S(s) \coloneqq P(S = s) = (1 - \pi)^{s-1}\pi, \pi \in (0,1), s = 1,2, \ldots$$

***Περίπτωση 14***

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

ακολουθεί τη κατανομή $Sibuya$ με παράμετρο $\gamma$, της οποίας η $πιθανογεννήτρια$ συνάρτηση είναι η

$$P_N(z) = 1 - (1 - z)^{\gamma}, \gamma \in (0,1]$$

ενώ για τη τυχαία μεταβλητή

$X$

υποθέτουμε ότι ακολουθεί κατανομή $Sibuya$ με παράμετρο $\alpha$ και συνεπώς η πιθανογεννήτρια της θα είναι η

$$P_X(z) = 1 - (1 - z)^{\alpha}, \alpha \in (0,1]$$

Μέσω της σχέσης (1.3.5) θα έχουμε ,για τη $πιθανογεννήτρια$ του τυχαίου αθροίσματος $S$ της (1.2.1),ότι

$$P_S(z) = 1 - [1 - P_X(z)]^{\gamma}$$
$$= 1 - [1 - (1 - (1 - z)^{\alpha})]^{\gamma}$$

ή ισοδύναμα

$$P_S(z) = 1 - [(1 - z)^{\alpha}]^{\gamma} \Leftrightarrow$$
$$P_S(z) = 1 - (1 - z)^{\rho}, \rho = \alpha\gamma, 0 < \alpha, \gamma \leq 1 \quad (1.4.14)$$

δηλαδή το τυχαίο άθροισμα

$$\mathrm{S} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_\mathrm{N}$$

ακολουθεί επίσης τη κατανομή $Sibuya$ με παράμετρο $\rho = \alpha\gamma$ ή εναλλακτικά γράφουμε $\mathrm{S} \sim Sibuya(\rho)$.

## 1.5 Εφαρμογές Τυχαίων Αθροισμάτων στη Διοικητική Κινδύνου

Τα τυχαία αθροίσματα βρίσκουν σημαντικές εφαρμογές σε διάφορες περιοχές της διοικητικής κινδύνου. Σκοπός της ενότητας αυτής είναι η παρουσίαση των βασικότερων και πιο ευρέως διαδεδομένων εφαρμογών των τυχαίων αθροισμάτων στη διοικητική κινδύνων. Στη συνέχεια λοιπόν, παρατίθενται κάποιες από τις σπουδαιότερες εφαρμογές που μπορεί να συναντήσει κάποιος, ο οποίος ασχολείται είτε πρακτικά είτε θεωρητικά με προβλήματα του κλάδου αυτού.

***Εφαρμογή 1***

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

εκφράζει το πλήθος των ασφαλισμένων που εγείρουν κάποια απαίτηση για αποζημίωση από μία ασφαλιστική εταιρεία. Θεωρούμε επιπλέον τη συνεχή τυχαία μεταβλητή

$X_n, n = 1,2, \dots$

η οποία παριστάνει το μέγεθος της αποζημίωσης που εγείρεται από τον $n$-οστό ασφαλισμένο, τότε προφανώς η συνολική αποζημίωση που καλείται να δώσει η ασφαλιστική εταιρεία θα εκφράζεται μέσω του τυχαίου αθροίσματος

$$\mathrm{S} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_\mathrm{N}.$$

Ας υποθέσουμε ότι η ασφαλιστική εταιρεία έχει ν το πλήθος ασφαλισμένους και καθένας από αυτούς εγείρει ή όχι μία απαίτηση με πιθανότητα $p$ και $q = 1 - p$ αντίστοιχα. Σε αυτή τη περίπτωση αν ορίσουμε τη τυχαία μεταβλητή

$$Y_i = \begin{cases} 1 & ,\alpha\nu\ o\ i\ \alpha\sigma\varphi\alpha\lambda\iota\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu o\varsigma\ \varepsilon\gamma\varepsilon\acute{\iota}\rho\varepsilon\iota\ \kappa\acute{\alpha}\pi o\iota\alpha\ \alpha\pi\alpha\acute{\iota}\tau\eta\sigma\eta \\ 0 & ,\alpha\nu\ o\ i\ \alpha\sigma\varphi\alpha\lambda\iota\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu o\varsigma\ \delta\varepsilon\nu\ \varepsilon\gamma\varepsilon\acute{\iota}\rho\varepsilon\iota\ \kappa\acute{\alpha}\pi o\iota\alpha\ \alpha\pi\alpha\acute{\iota}\tau\eta\sigma\eta \end{cases}, i = 1,2, \dots, \nu$$

τότε προφανώς το συνολικό πλήθος των ασφαλισμένων που εγείρουν κάποια απαίτηση, π.χ. στη διάρκεια ενός έτους, θα είναι ίσο με

$$N = Y_1 + \mathrm{Y}_2 + \cdots + \mathrm{Y}_\nu$$

όπου $N \sim B(\nu, p)$.

Επειδή όμως πολύ συχνά στη πράξη συμβαίνει να ισχύει το πλήθος των ασφαλισμένων να είναι αρκετά «μεγάλο»($\nu \to \infty$) και η πιθανότητα ένας από αυτούς να εγείρει κάποια απαίτηση για αποζημίωση στη διάρκεια ενός έτους να είναι συνήθως πολύ «μικρή»($p \to 0$), θεωρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή $N$ ακολουθεί τη κατανομή Poisson με μέση τιμή $\lambda = \nu p$ καθώς ως γνωστόν

$$\lim_{\nu \to \infty, p \to 0} \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu - x} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \lambda = \nu p.$$

Συνεπώς βάσει της παραπάνω αιτιολόγησης, συμπεραίνουμε πως για τη συγκεκριμένη εφαρμογή είναι άκρως ρεαλιστικό να θεωρήσουμε ότι $N \sim Poisson(\lambda)$ και επομένως το τυχαίο άθροισμα $S$ ακολουθεί μια σύνθετη κατανομή Poisson, δηλαδή

$$\mathrm{S} \sim CP(\lambda, f_X)$$

όπου $f_X$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $X$. Η χαρακτηριστική συνάρτηση του τυχαίου αθροίσματος S, θα δίνεται από τη σχέση

$$\varphi_S(u) = e^{\lambda[\varphi_X(u)-1]}, \lambda = \nu p \ (1.5.1)$$

Αξίζει να αναφέρουμε ότι το προαναφερθέν μοντέλο είναι ένα από τα πλέον συνηθισμένα και συναντάται στη βιβλιογραφία με την ονομασία *μοντέλο συλλογικού κινδύνου* και έχει πολλές εφαρμογές στα αναλογιστικά μαθηματικά.

***Εφαρμογή 2***

Έστω η *απαριθμήτρια* στοχαστική ανέλιξη

$\{N(t), t \geq 0\}$

όπου η τυχαία μεταβλητή

$N(t)$

εκφράζει το πλήθος των πραγματοποιήσεων ενός κινδύνου σε ένα χρονικό διάστημα μήκους $t$ ή σε κάποιες περιπτώσεις το αντίστοιχο πλήθος σε ένα χώρο εμβαδού $t$. Αν περιοριστούμε σε ένα χρονικό διάστημα μοναδιαίου μήκους, δηλαδή αν θεωρήσουμε $t = 1$, τότε θα έχουμε τη τυχαία μεταβλητή

$N$

η οποία θα παριστάνει τη συχνότητα εμφάνισης του κινδύνου στο χρονικό διάστημα $[0,1]$ όπως $\pi.\chi$ ένα έτος.

Στα πλαίσια της προληπτικής διοικητικής κινδύνου συνηθίζεται να εφαρμόζεται μια τεχνική μείωσης της συχνότητας των κινδύνων. Συγκεκριμένα σύμφωνα με τη τεχνική αυτή μια πραγματοποίηση του κινδύνου είτε διατηρείται με πιθανότητα $p(0 < p < 1)$,είτε διαγράφεται-εξαφανίζεται με πιθανότητα $1 - p$. Επιπλέον θεωρούμε ότι κάθε διαγραφή ή μη μιας πραγματοποίησης του κινδύνου είναι ανεξάρτητη από τη διαγραφή ή μη οποιασδήποτε άλλης. Συνεπώς εάν θεωρήσουμε την οικογένεια

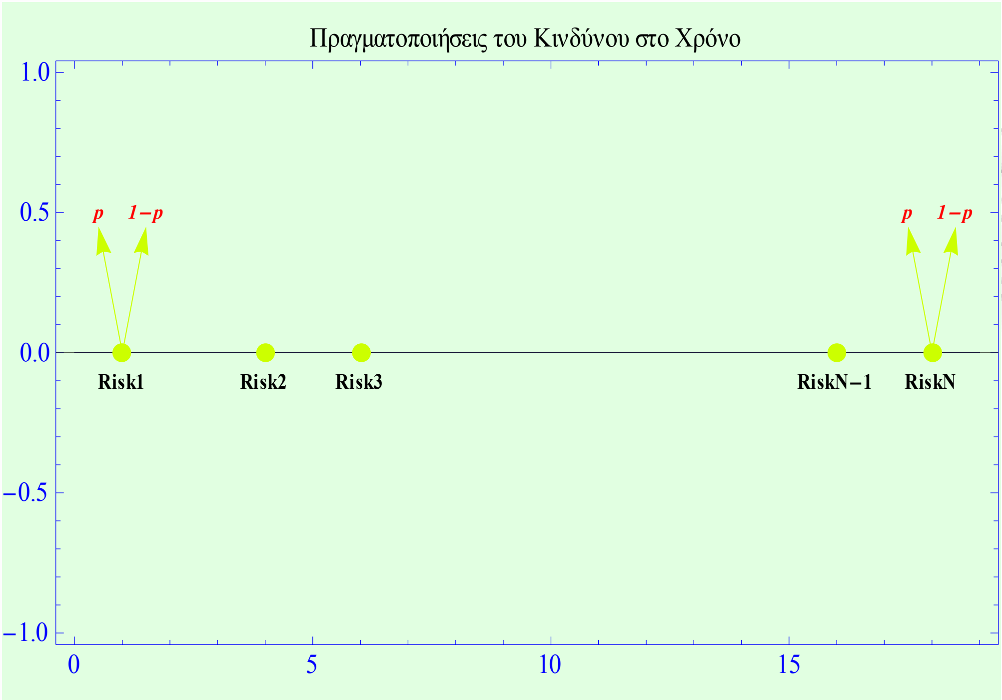
$\{X_\nu, \nu = 1,2, \dots\}$

όπου η τυχαία μεταβλητή

$X_\nu$

παριστάνει το αποτέλεσμα(«επιτυχία» ή «αποτυχία») των μέτρων που ελήφθησαν όσον αφορά τη ν-*οστή* πραγματοποίηση του κινδύνου, τότε έπεται φυσιολογικά ότι η ακολουθία $\{X_\nu\}_{\nu \geq 1}$ απαρτίζεται από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κατανομή Bernoulli με παράμετρο $p$. Στη συνέχεια παρατίθεται και ένα σχήμα το οποίο εμφανίζει τη κατάσταση που επιχειρούμε να μοντελοποιήσουμε στη συγκεκριμένη εφαρμογή.

Σχήμα 1.5.2




Από τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό ότι το πλέον κατάλληλο στοχαστικό μοντέλο για να αναπαραστήσει το πλήθος των πραγματοποιήσεων του κινδύνου που διατηρήθηκαν είναι το τυχαίο άθροισμα

$$\mathrm{S} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_\mathrm{N}$$

του οποίου η *πιθανογεννήτρια* συνάρτηση θα είναι η

$$P_S(z) = P_N(1 - p + pz), p \in (0,1) \; (1.5.2)$$

καθώς $X_\nu \sim B(1, p) \; \forall \; \nu \in \{1,2, \dots\}$. Ουσιαστικά δηλαδή το τυχαίο άθροισμα $S$, παριστάνει τη συχνότητα εμφάνισης του κινδύνου μετά την εφαρμογή των προληπτικών μέτρων.

***Εφαρμογή 3***

Έστω ότι σε μια παραγωγική διαδικασία το πλήθος των παραγόμενων κιβωτίων στη μονάδα του χρόνου(ημέρα, εβδομάδα, έτος $\kappa.\lambda.\pi$), εκφράζεται μέσω της τυχαίας μεταβλητής

$N$

Υποθέτουμε ότι κάθε ένα από αυτά τα κιβώτια περιέχει $\kappa$ το πλήθος προϊόντα καθένα από τα οποία είτε είναι ελαττωματικό με πιθανότητα $p$ είτε μη ελαττωματικό με πιθανότητα $q = 1 - p$. Θεωρούμε την ακολουθία

$\{X_n, n = 1,2, \dots\}$

όπου η τυχαία μεταβλητή $X_n$ παριστάνει το πλήθος των ελαττωματικών προϊόντων που περιέχονται στο $n$-οστό κιβώτιο. Από τη παραπάνω περιγραφή είναι φανερό ότι το συνολικό πλήθος των ελαττωματικών προϊόντων που παρήχθησαν στη μονάδα του χρόνου είναι ίσο με

$$\mathrm{S} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_\mathrm{N}$$

Η *πιθανογεννήτρια* συνάρτηση σε αυτή την εφαρμογή θα ισούται με

$$P_S(z) = P_N\big(P_X(z)\big) \Leftrightarrow$$

$$P_S(z) = P_N[(q + pz)^\kappa] \ (1.5.3)$$

Εάν θεωρήσουμε ότι για ένα οποιοδήποτε παραγόμενο προϊόν μας ενδιαφέρει η τιμή ενός χαρακτηριστικού του, έστω $Y$, να είναι εντός κάποιων προδιαγραφών, τότε προφανώς αυτό θα χαρακτηρίζεται ως ελαττωματικό αν ισχύει ότι

$$Y > ub \text{ ή } Y < \ell b$$

Υποθέτοντας ακόμη ότι η τυχαία μεταβλητή $Y$ κατανέμεται σύμφωνα με τη κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu$ και διασπορά $\sigma^2$, τότε η πιθανότητα ένα προϊόν να είναι ελαττωματικό θα είναι ίση με

$$p = Pr(Y \notin [\ell b, ub])$$

$$= 1 - \Pr[\ell b \leq Y \leq ub]$$

$$= 1 - Pr\left[\frac{\ell b - \mu}{\sigma} \leq \frac{Y - \mu}{\sigma} \leq \frac{ub - \mu}{\sigma}\right]$$

$$= 1 - \Pr\left[\frac{\ell b - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{ub - \mu}{\sigma}\right]$$

και επομένως

$$p = 1 - \left[\Phi\left(\frac{ub - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ell b - \mu}{\sigma}\right)\right]$$

όπου $Z \sim N(0,1)$ και $\Phi$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής. Αντικαθιστώντας λοιπόν στη σχέση (1.5.3) θα προκύψει ότι

$$P_S(z) = P_N\left\{\left[\left(\Phi\left(\frac{ub - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ell b - \mu}{\sigma}\right)\right)(1 - z) + z\right]^\kappa\right\}$$

***Εφαρμογή 4***

Έστω ότι ένα σύστημα(μία οντότητα γενικότερα) πλήττεται στη διάρκεια του χρόνου από κάποιους ανεξάρτητους, ανταγωνιστικούς και καταστροφικούς κινδύνους. Επειδή η πραγματοποίηση ενός οποιουδήποτε καταστροφικού κινδύνου έχει ως αποτέλεσμα να παύει να υφίσταται το σύστημα, εφαρμόζεται μια τεχνική διαγραφής των πραγματοποιήσεων αυτού με πιθανότητα $q = 1 - p$.

Έστω λοιπόν η τυχαία μεταβλητή

$N$

η οποία εκφράζει το πλήθος των πραγματοποιήσεων ενός οποιουδήποτε καταστροφικού κινδύνου μέχρι τη πρώτη διατηρηθείσα πραγματοποίηση αυτού. Προφανώς από τη παραπάνω περιγραφή γίνεται αντιληπτό ότι η τυχαία μεταβλητή $N$ ακολουθεί μια Γεωμετρική τύπου $II$ κατανομή με πιθανότητα «επιτυχίας» $p$. Θεωρούμε επιπλέον

$\{X_n, n = 1,2, \ldots\}$

μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών όπου η

$X_n$

παριστάνει το χρόνο που μεσολαβεί ανάμεσα στην $(n-1) - o\sigma\tau\acute{\eta}$ και τη $n - o\sigma\tau\acute{\eta}$ πραγματοποίηση του καταστροφικού κινδύνου.

Η κατάσταση που περιγράψαμε παραπάνω, μπορεί να αποτυπωθεί παραστατικά στο επόμενο σχήμα

Σχήμα 1.5.4

<u>Χρόνος αναμονής μέχρι τη πρώτη διατηρηθείσα πραγματοποίηση ενός καταστροφικού κινδύνου</u>


όπου στο χρόνο $X_1$ είχαμε τη πρώτη πραγματοποίηση του καταστροφικού κινδύνου η οποία και διεγράφη, στο χρόνο $X_1 + X_2$ τη δεύτερη η οποία επίσης διεγράφη, ενώ στο χρόνο $\mathrm{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}$ είχαμε την $N - o\sigma\tau\acute{\eta}$ πραγματοποίηση η οποία όμως διατηρήθηκε.

Είναι φανερό σε αυτή τη περίπτωση ότι ο χρόνος αναμονής μέχρι τη πρώτη διατηρηθείσα πραγματοποίηση του κινδύνου θα εκφράζεται μέσω του τυχαίου αθροίσματος:

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

ο οποίος και συμπίπτει με το χρόνο ζωής του εξεταζόμενου συστήματος καθώς πρόκειται για χρόνο αναμονής μέχρι τη πρώτη διατήρηση ενός <u>καταστροφικού</u> κινδύνου.

Από τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό ότι είναι ζωτικής σημασίας η $\pi\iota\theta\alpha\nu o\theta\varepsilon\omega\rho\eta\tau\iota\kappa\acute{\eta}$ μελέτη του τυχαίου αθροίσματος S. Για παράδειγμα θα επιθυμούσαμε να μελετήσουμε εάν η κατανομή της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής $S$ έχει βαριά δεξιά ουρά, δηλαδή αν έχει κατανεμηθεί «μεγάλη» πυκνότητα πιθανότητας σε τιμές «απομακρυσμένες» από τη μέση τιμή $E(S) = E(N)E(X)$. Ως εκ τούτου λοιπόν χρησιμοποιείται η χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\varphi_S(u) = \frac{p\varphi_X(u)}{1 - q\varphi_X(u)} \quad (1.5.4)$$

***Εφαρμογή 5***

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

παριστάνει το πλήθος των εμφανίσεων ενός κινδύνου, σε κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα(όπως π.χ. ένα έτος). Επιπλέον θεωρούμε την οικογένεια τυχαίων μεταβλητών

$\{X_n, n = 1,2, \dots\}$

όπου η

$X_n$

εκφράζει το χρόνο που διήρκεσε η $n - o\sigma\tau\acute{\eta}$ πραγματοποίηση του εν λόγω κινδύνου.

Στη περίπτωση αυτή, είναι προφανές ότι το τυχαίο άθροισμα

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

εκφράζει το συνολικό χρόνο που πλήττεται η οντότητα που μας ενδιαφέρει από το συγκεκριμένο κίνδυνο.

***Εφαρμογή 6***

Θεωρούμε ένα σύστημα αποτελούμενο από ένα μεγάλο αριθμό λειτουργιών κάποιες από τις οποίες δύναται να πληγούν μετά τη πραγματοποίηση ενός συγκεκριμένου κινδύνου. Υποθέτουμε ότι το πλήθος των $\pi\lambda\eta\gamma\eta\theta\acute{\varepsilon}\nu\tau\omega\nu$ λειτουργιών του συστήματος εκφράζεται μέσω της τυχαίας μεταβλητής

$N$

ενώ επιπλέον η οικογένεια

$\{X_n, n = 1,2, \dots\}$

«απαρτίζεται» από κάποιες ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, όπου συγκεκριμένα η

$X_n$

παριστάνει το κόστος που απαιτείται για την «επαναφορά» της $n - οστής$ πληγείσας λειτουργίας του συστήματος.

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι το συνολικό κόστος που απαιτείται για τη πλήρη «επαναφορά» του συστήματος στην αρχική του κατάσταση, εκφράζεται μέσω του τυχαίου αθροίσματος

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$$

Αξίζει να αναφέρουμε πως συνήθως είναι πιο ρεαλιστικό να θεωρήσουμε ότι το σύστημα αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος λειτουργιών($\lambda.\chi$ $\kappa$ το πλήθος) και κάθε μία από αυτές έχει την ίδια πιθανότητα να πληγεί, οπότε εύλογα έπεται ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

ακολουθεί τη διακριτή ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο $\{1,2,\dots,\kappa\}$ και η χαρακτηριστική συνάρτηση της $S$, από τη σχέση (1.3.3), θα είναι η

$$\varphi_S(u) = \frac{1 - [\varphi_X(u)]^\kappa}{\kappa[1 - \varphi_X(u)]}, u \in \mathbb{R} \ (1.5.6).$$

***Εφαρμογή 7***

Έστω ένα σύστημα το οποίο δέχεται «πλήγματα»-shocks κατά τη διάρκεια του χρόνου. Σε περίπτωση εμφάνισης κάποιου shock το σύστημα παραμένει ανενεργό από $\alpha$ έως $b$ ώρες, όσο ακριβώς διαρκεί η επισκευή του. Τα «πλήγματα» εμφανίζονται με ένα ρυθμό $\lambda > 0$ στη μονάδα του χρόνου( π.χ. εβδομάδα, μήνας $\kappa.o.\kappa$).

Θεωρούμε τη τυχαία μεταβλητή

$N$

η οποία εκφράζει το πλήθος των shocks που εμφανίζονται στη μονάδα του χρόνου, και επιπλέον

$X_n$

μια συνεχής τυχαία μεταβλητή που παριστάνει το χρόνο επισκευής του συστήματος μετά την εμφάνιση του $n$-οστού shock. Επομένως με βάση τη παραπάνω περιγραφή έπεται ότι

$N \sim Poisson(\lambda)$

με $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση

$$P_N(z) = e^{\lambda(z-1)}, |z| \leq 1$$

και

$X_n \sim U(a,b), n = 1,2,\ldots$

Το τυχαίο άθροισμα

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

παριστάνει το συνολικό χρόνο(σε ώρες) κατά τον οποίο το σύστημα παραμένει ανενεργό και η χαρακτηριστική συνάρτηση αυτού είναι

$$\varphi_S(u) = e^{\lambda\left[\frac{e^{iub}-e^{iua}}{iu(b-a)}-1\right]}, \lambda, a, b > 0, u \in \mathbb{R} \ (1.5.7).$$

***Εφαρμογή 8***

Έστω ένα σύστημα το οποίο αντιμετωπίζει έναν συγκεκριμένο κίνδυνο, ο οποίος εμφανίζεται με ένα ρυθμό $\lambda > 0$ στη μονάδα του χρόνου(ή του χώρου μερικές φορές). Επιπλέον στο σύστημα εφαρμόζεται μια τεχνική ανίχνευσης των διαφόρων πραγματοποιήσεων του κινδύνου. Ειδικότερα κάθε πραγματοποίηση του κινδύνου ανιχνεύεται με κάποια σταθερή πιθανότητα $p$, ανεξάρτητα από οποιαδήποτε άλλη πραγματοποίηση του.

Θεωρούμε τη τυχαία μεταβλητή

$N$

που εκφράζει το πλήθος των εμφανίσεων του κινδύνου και

$X_n$

τυχαία μεταβλητή που παριστάνει το πλήθος των προσπαθειών-δοκιμών μέχρι την ανίχνευση της $n - \text{οστής}$ πραγματοποίησης του κινδύνου. Τότε είναι προφανές ότι το τυχαίο άθροισμα

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

παριστάνει το συνολικό πλήθος των προσπαθειών που απαιτούνται για την ανίχνευση όλων των πραγματοποιήσεων του κινδύνου στο χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει. Επιπλέον από τη περιγραφή του μοντέλου είναι εύλογο να θεωρήσουμε ότι

$$N \sim Poisson(\lambda), X \sim Geo(p)$$

οπότε η $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ της $\tau.\mu. S$ είναι αυτή που δίνεται στη σχέση (1.4.4) της ενότητας 1.4.

Στην εφαρμογή αυτή η τυχαία μεταβλητή $S$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μέτρο της αποτελεσματικότητας του συστήματος ανίχνευσης που εφαρμόζεται και αποτελεί σημαντικό «εργαλείο» στα πλαίσια του **P**roactive **R**isk **M**anagement(P.R.M).

## 1.6 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο που ολοκληρώθηκε ορίσαμε την έννοια του τυχαίου αθροίσματος μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών και προσδιορίσαμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση αυτού, η οποία αποτελεί ένα χρήσιμο «εργαλείο» όσον αφορά τη μελέτη του [8]. Εν συνεχεία, παρουσιάσαμε και αναλύσαμε τις σπουδαιότερες ειδικές περιπτώσεις και εφαρμογές τυχαίων αθροισμάτων που μπορεί να συναντήσει κανείς σε προβλήματα χρηματοοικονομικής φύσεως.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΥΧΑΙΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ

## 2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε εκτενή αναφορά σε ένα ακόμα στοχαστικό μοντέλο, το οποίο έχει μεγάλο πλήθος πρακτικών και θεωρητικών εφαρμογών στη διοικητική κινδύνου και όχι μόνο. Για το σκοπό αυτό όμως, κρίνεται σκόπιμο να αποσαφηνιστούν αρχικά κάποιες σχετικές με αυτό έννοιες.

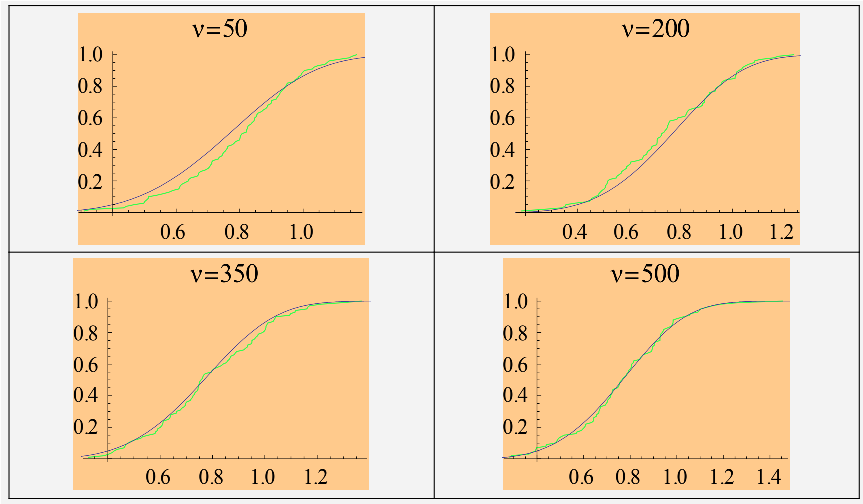
Ο Γερμανός μαθηματικός Georg Ferdinand Cantor (1845-1918), γνωστός και ως ο ιδρυτής της σύγχρονης θεωρίας συνόλων, έδωσε τον ακόλουθο ορισμό για το σύνολο: «Σύνολο ονομάζουμε κάθε συλλογή $M$, (σαφώς) διακριτών αντικειμένων $m$(που ονομάζουμε «στοιχεία» του συνόλου $M$), της διαίσθησης ή της σκέψης μας, που θεωρούμε ως ολότητα». Τα αντικείμενα αυτά καλούνται στοιχεία του συνόλου και δύναται να είναι οτιδήποτε, από αριθμούς μέχρι έμβια όντα ή γράμματα του αλφαβήτου [9].

Ως ελάχιστο ενός οποιουδήποτε συνόλου καλούμε το μικρότερο διατεταγμένο στοιχείο αυτού, όταν φυσικά έχει νόημα η διάταξη αυτών των στοιχείων. Αν $\{X_\nu\}_{\nu\geq 1}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και όμοια κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο $\{X_1, X_2, \dots, X_\nu\}$ και κατόπιν να λάβουμε το ελάχιστο αυτού. Το παραπάνω μοντέλο είναι προφανώς στοχαστικό, καθώς πρόκειται για ένα σύνολο με στοιχεία κάποιες τυχαίες μεταβλητές, και παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε πολλούς κλάδους της στατιστικής, αλλά κυρίως στη θεωρία ακραίων τιμών όπου μελετάται εκτενώς η *ασυμπτωτική* κατανομή του. Πιο συγκεκριμένα, στα πλαίσια αυτής της μοντελοποίησης έχει αποδειχτεί πως η κατανομή του ελαχίστου(κατάλληλα μετασχηματισμένου), όταν το πλήθος $\nu$ των τυχαίων μεταβλητών $X_i$ αυξάνει απεριόριστα, του συνόλου $\{X_1, X_2, \dots, X_\nu\}$ συγκλίνει στη κατανομή $Weibull$ [10,11].

Ειδικότερα, αποδεικνύεται ότι αν $X_1, X_2, \dots$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων ομοιόμορφα κατανεμημένων στο (0,1) τυχαίων μεταβλητών, τότε το μετασχηματισμένο στοχαστικό μοντέλο $Y_\nu = \left(\frac{\nu \min\{X_1, X_2, \dots, X_\nu\}}{\lambda}\right)^{1/c}$ συγκλίνει κατά κατανομή στη τυχαία μεταβλητή $Y \sim W(\lambda, c)$, δηλαδή

$$\lim_{\nu\to\infty} F_{Y_\nu}(x) = 1 - e^{-\lambda x^c}, \lambda > 0, c > 0.$$

Σχήμα 1.1.1. Σύγκλιση στη συνάρτηση κατανομής της $Weibull$ της συνάρτησης κατανομής του μετασχηματισμένου ελαχίστου




Στις επόμενες ενότητες του κεφαλαίου αυτού, θα παραθέσουμε τον ορισμό, τη συνάρτηση κατανομής, ειδικές περιπτώσεις καθώς και κάποιες εφαρμογές του ελάχιστου τυχαίου αριθμού μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών. Ουσιαστικά δηλαδή θα πρόκειται για ανάλυση του ίδιου στοχαστικού μοντέλου, αλλά με τη διαφορά ότι το πλήθος $\nu$ των τυχαίων μεταβλητών του συνόλου $\{X_1, X_2, \ldots, X_\nu\}$ θα είναι επίσης τυχαία μεταβλητή.

## 2.2 Ορισμός Ελάχιστου Τυχαίου Αριθμού Τυχαίων Μεταβλητών

Έστω

$N$

μια διακριτή τυχαία μεταβλητή που λαμβάνει τιμές στο σύνολο

$\mathbf{N} = \{1,2,\ldots\}$

ενώ επιπλέον θεωρούμε

$\{X_n\,, n = 1,2\ldots\}$

μία οικογένεια ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών και ισόνομων με τη τυχαία μεταβλητή

$X$

με από κοινού συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) \coloneqq \Pr[X \leq x]\,, x \in \mathbb{R}.$$

Υποθέτουμε ακόμη, ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

είναι ανεξάρτητη από την ακολουθία

$\{X_n\, , n = 1,2 \dots\}$

και συνεπώς η $\tau.\mu.\, N$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητη με την $\tau.\mu.\, X_n, \forall\, n \in \{1,2,\dots\}$.

Ως ελάχιστο τυχαίου αριθμού τυχαίων μεταβλητών ορίζεται η τυχαία μεταβλητή[12]

$$T \coloneqq \min\{X_1, X_2, \dots, X_N\} \quad (2.2.1)$$

η οποία παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε πολλούς κλάδους της διοικητικής κινδύνου.

## 2.3 Συνάρτηση Κατανομής του Ελάχιστου Τυχαίου Αριθμού Τυχαίων Μεταβλητών

Θεωρούμε ότι η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$N$

έχει *πιθανογεννήτρια* συνάρτηση

$$P_N(z) \coloneqq \sum_{n \in \boldsymbol{N}} z^n \Pr[N = n]$$

και επιπλέον η τυχαία μεταβλητή $X$ (είτε διακριτή είτε συνεχής) λαμβάνει τιμές σε κάποιο σύνολο

$R_X$

με συνάρτηση κατανομής

$$F_X(t) \coloneqq \Pr[X \le t]\, , t \in R_X.$$

Σκοπός της ενότητας αυτής, είναι ο προσδιορισμός της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής του στοχαστικού μοντέλου

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$$

μέσω της *πιθανογεννήτριας* συνάρτησης $P_N(z)$ της τυχαίας μεταβλητής $N$ και της συνάρτησης κατανομής $F_X(\cdot)$ της $X$.

Έχουμε λοιπόν

$$F_T(t) \coloneqq \Pr[T \le t]\, , t \in \mathbb{R}$$

ή ισοδύναμα

$$F_T(t) \coloneqq \Pr[\min\{X_1, X_2, \dots, X_N\} \le t], t \in \mathbb{R}$$

$$= 1 - \Pr[\min\{X_1, X_2, \dots, X_N\} > t], t \in \mathbb{R} \ (2.3.1).$$

Η «συλλογή» ενδεχομένων $\{\{N = 1\}, \{N = 2\}, \dots\}$ αποτελεί *διαμέριση* του δειγματικού χώρου $\Omega$, καθώς $\{N = i\} \cap \{N = j\} = \emptyset, \forall\ (i,j): i \neq j$ και $\bigcup_{i=1}^{\infty}\{N = i\} = \Omega$,οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας στη σχέση (2.3.1) θα έχουμε ότι

$$F_T(t) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \Pr[\min\{X_1, X_2, \dots, X_N\} > t | N = n] \Pr[N = n]$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \Pr[\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} > t | N = n] \Pr[N = n] \ (2.3.2).$$

Στην ενότητα 2.2 έχουμε υποθέσει την ανεξαρτησία της τυχαίας μεταβλητής

$N$

με την ακολουθία

$\{X_n, n = 1,2 \dots\}$

οπότε έπεται ότι η $N$ θα είναι στοχαστικά ανεξάρτητη και από τη τυχαία μεταβλητή

$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

και συνεπώς η σχέση (2.3.2) θα γίνει

$$F_T(t) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \Pr[\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} > t] \Pr[N = n]$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \Pr[X_1 > t, X_2 > t, \dots, X_n > t] \Pr[N = n] \ (2.3.3).$$

Εφόσον οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ισόνομες με τη τυχαία μεταβλητή

$X$

από τη σχέση (2.3.3) θα προκύψει ότι

$$F_T(t) = 1 - \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \Pr[X_1 > t] \Pr[X_2 > t] \dots \Pr[X_n > t] \Pr[N = n]$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} [1 - \Pr(X_1 \leq t)][1 - \Pr(X_2 \leq t)] \dots [1 - \Pr(X_n \leq t)] \Pr[N = n]$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} [1 - F_{\mathrm{X}_1}(\mathrm{t})]\big[1 - F_{\mathrm{X}_2}(\mathrm{t})\big] \dots \big[1 - F_{\mathrm{X}_\mathrm{n}}(\mathrm{t})\big] \Pr[N = n]$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} [1 - F_{\mathrm{X}}(\mathrm{t})][1 - F_{\mathrm{X}}(\mathrm{t})] \dots [1 - F_{\mathrm{X}}(\mathrm{t})] \Pr[N = n]$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} [1 - F_{\mathrm{X}}(\mathrm{t})]^n \Pr[N = n]$$

ή ισοδύναμα

$$F_T(t) = 1 - P_N[1 - F_X(t)]\,, t \in \mathbb{R} \ (2.3.4).$$

Στην επόμενη ενότητα θα προσδιορίσουμε τη συνάρτηση κατανομής $F_T(t)$ της τυχαίας μεταβλητής $T$ ,σε διάφορες ενδιαφέρουσες ειδικές περιπτώσεις, μέσω της σχέσης (2.3.4) που δείξαμε στην ενότητα αυτή.

## 2.4 Ειδικές Περιπτώσεις Ελάχιστου Τυχαίου Αριθμού Τυχαίων Μεταβλητών

***Περίπτωση 1***

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

ακολουθεί τη γεωμετρική τύπου $II$ κατανομή με $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση

$$P_N(z) = \frac{pz}{1 - qz}\,, p > 0, q > 0, p + q = 1, |z| \leq \frac{1}{q}$$

και επιπλέον ότι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής

$X$

έχει τη μορφή

$$F_X(t) = 1 - (1 - t)^2, 0 \leq t \leq 1.$$

Στη περίπτωση αυτή, η συνάρτηση κατανομής του στοχαστικού μοντέλου

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$$

θα βρεθεί ως εξής

$$F_T(t) = 1 - P_N[1 - F_X(t)]$$

$$= 1 - \frac{p[1-(1-(1-t)^2)]}{1-q[1-(1-(1-t)^2)]}$$

$$= 1 - \frac{p(1-t)^2}{1-q(1-t)^2}$$

ή ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε

$$F_T(t) = \frac{1-q(1-t)^2 - p(1-t)^2}{1-q(1-t)^2}$$

$$= \frac{1-(p+q)(1-t)^2}{1-q(1-t)^2}.$$

Συνεπώς η τελική μορφή της συνάρτησης κατανομής της τυχαίας μεταβλητής της (2.2.1), στη συγκεκριμένη ειδική περίπτωση, είναι η εξής

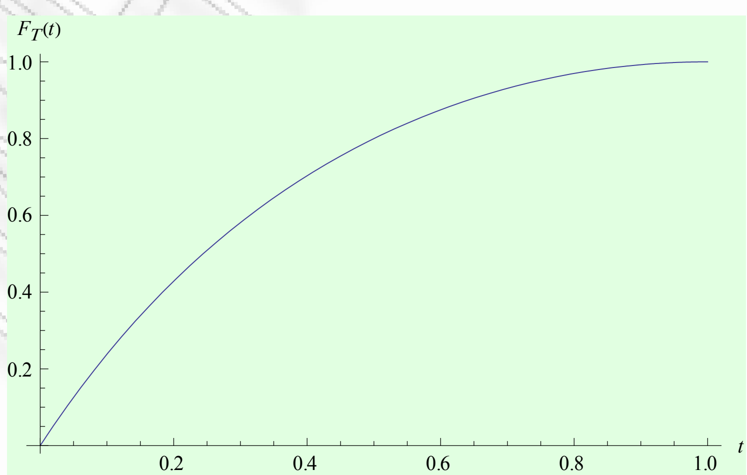
$$F_T(t) = \frac{1-(1-t)^2}{1-q(1-t)^2}, q \in (0,1), 0 \le t \le 1 \; (2.4.1)$$

ενώ η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας εύκολα μπορεί να βρεθεί ότι δίνεται από τη σχέση

$$f_T(t) = \frac{d}{dt}[F_T(t)]$$

$$= \frac{2p(1-t)}{[1-q(1-t)^2]^2}, p \in (0,1), q = 1-p, 0 \le t \le 1.$$

Σχήμα 2.4.1.Γραφική παράσταση της συνάρτησης κατανομής της (2.4.1) για *p*=0.75




ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

***Περίπτωση 2***

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

ακολουθεί και πάλι τη γεωμετρική τύπου $II$ κατανομή με $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση

$$P_N(z) = \frac{pz}{1-qz}, p > 0, q > 0, p + q = 1, |z| \leq \frac{1}{q}$$

και επιπλέον ότι οι τυχαίες μεταβλητές της οικογένειας

$\{X_n, n = 1,2 \ldots\}$

ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\mu$, οπότε

$$F_X(t) = 1 - e^{-\mu t}, \mu > 0, t \in [0, \infty).$$

Στη περίπτωση αυτή, η συνάρτηση κατανομής του στοχαστικού μοντέλου

$$T = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$$

θα είναι

$$F_T(t) = 1 - P_N[1 - F_X(t)]$$

$$= 1 - \frac{p[1-(1-e^{-\mu t})]}{1-q[1-(1-e^{-\mu t})]} = 1 - \frac{pe^{-\mu t}}{1-qe^{-\mu t}}$$

ή ισοδύναμα

$$F_T(t) = \frac{1 - qe^{-\mu t} - pe^{-\mu t}}{1-qe^{-\mu t}} = \frac{1-(p+q)e^{-\mu t}}{1-qe^{-\mu t}}.$$

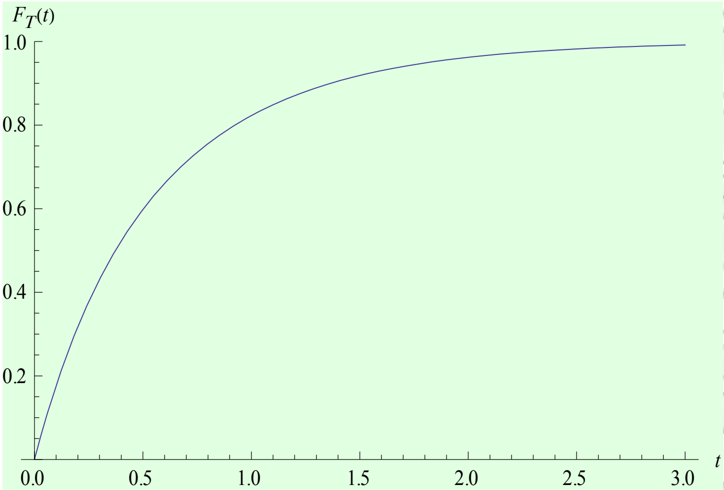
Καταλήξαμε λοιπόν, ότι η τελική μορφή της συνάρτησης κατανομής $F_T(\cdot)$ της τυχαίας μεταβλητής $T$ της (2.2.1) είναι η

$$F_T(t) = \frac{1-e^{-\mu t}}{1-qe^{-\mu t}}, 0 < p < 1, q = 1 - p, t \geq 0 \quad (2.4.2)$$

ενώ η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι εύκολο να δειχτεί πως δίνεται από το τύπο

$$f_T(t) = -\frac{e^{t\lambda}(-1+q)\mu}{(1-qe^{-\mu t})^2}.$$

Σχήμα 2.4.2.Γραφική παράσταση της συνάρτηση κατανομής της (2.4.2) για $p$=0.75 και $\mu$=1.5




***Περίπτωση 3***

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

ακολουθεί τη κατανομή $Sibuya$ με παράμετρο $a$, οπότε θα έχουμε ότι

$$P_N(z) = 1 - (1 - z)^a, a \in (0,1] \ (*)$$

και επιπλέον θεωρούμε οι τυχαίες μεταβλητές της ακολουθίας

$\{X_n\ , n = 1,2 \dots\}$

είναι όλες ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα (0,1) με κοινή συνάρτηση κατανομής

$$F_X(t) = t, t \in [0,1] \ (**).$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις $(*)$ και $(**)$ στην (2.3.4) θα έχουμε

$$F_T(t) = 1 - P_N[1 - F_X(t)]$$

$$= 1 - \left[1 - \left(1 - (1 - t)\right)^a\right]$$

οπότε καταλήγουμε στο γεγονός ότι

$$F_T(t) = t^a, 0 < a \leq 1, t \in (0,1) \ (2.4.3).$$

Από τη μορφή της συνάρτησης κατανομής στο τύπο (2.4.3) συμπεραίνουμε πως η τυχαία μεταβλητή

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$$

ακολουθεί τη κατανομή Βήτα με παραμέτρους $\alpha$ και 1 και συνεπώς η συνάρτηση πυκνότητας αυτής θα είναι

$$f_T(t) = at^{a-1}, t \in (0,1).$$

***Περίπτωση 4***

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

ακολουθεί τη κατανομή $Sibuya$ με παράμετρο $\gamma$, οπότε η $πιθανογεννήτρια$ συνάρτηση της θα είναι η

$$P_N(z) = 1 - (1-z)^\gamma, 0 < \gamma \leq 1.$$

Ακόμη υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές της ακολουθίας

$\{X_n\ , n = 1,2 \dots\}$

ακολουθούν τη κατανομή Βήτα με παραμέτρους α και 1 ή πιο απλά

$X_n \sim Beta(a,1), \forall\ n \in \{1,2,\dots\}$

οπότε

$$F_X(t) = t^a, \alpha > 0, t \in (0,1).$$

Με βάση λοιπόν όλα τα προαναφερθέντα, για τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $T$ της (2.2.1), θα έχουμε ότι

$$F_T(t) = 1 - \left[1 - \left(1 - (1 - t^a)\right)^\gamma\right]$$

και εν συνεχεία κάνοντας τις απλοποιήσεις καταλήγουμε στη παρακάτω τελική μορφή

$$F_T(t) := \Pr[T \leq t] = t^{a\gamma}, \alpha > 0, 0 < \gamma \leq 1, t \in (0,1) \quad (2.4.4)$$

Από την (2.4.4) συμπεραίνουμε πως η τυχαία μεταβλητή $T$ ακολουθεί επίσης τη κατανομή Βήτα αλλά με παραμέτρους $a\gamma$ και 1, δηλαδή πρόκειται για μια περίπτωση στην οποία «διατηρηθήκαμε» στην ίδια οικογένεια κατανομών.

***Περίπτωση 5***

Στη συγκεκριμένη ειδική περίπτωση θα υποθέσουμε ότι

$$F_X(t) = t, 0 \leq t \leq 1$$

οπότε η συνάρτηση επιβίωσης της τυχαίας μεταβλητής

$X$

θα είναι

$$S_X(t) := 1 - F_X(t) = 1 - t\ , 0 \leq t \leq 1$$

και ακόμη

$$P_N(z) = \frac{pz}{1 - qz}\ , 0 < p < 1, q = 1 - p, |z| \leq \frac{1}{q}.$$

Για τον προσδιορισμό της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυχαίας μεταβλητής

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$$

αρκεί να αντικαταστήσουμε όλα τα παραπάνω στο τύπο

$$F_T(t) = 1 - P_N[S_X(t)]$$

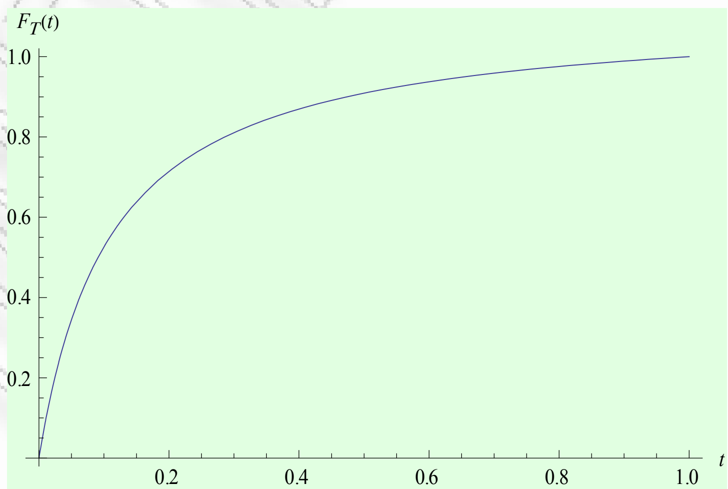
οπότε και θα λάβουμε την ακόλουθη τελική μορφή της:

$$F_T(t) = \frac{t}{p + qt}, p, q > 0, p + q = 1, t \in (0,1)\ (2.4.5).$$

$Παραγωγίζοντας$ τη συνάρτηση της σχέσης (2.4.5) ως προς το όρισμα της $t$, είναι εύκολο να επαληθεύσει κανείς πως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $T$, στην εν λόγω ειδική περίπτωση, είναι η

$$f_T(t) = \frac{p}{(p + qt)^2}, 0 < t < 1.$$

Σχήμα 2.4.5.Γραφική παράσταση της συνάρτησης κατανομής της (2.4.5) για $p$=0.1



***Περίπτωση 6***

Η κατανομή Poisson δεν είναι κατάλληλη για να «περιγράψει» τη κατανομή πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $N$, καθώς λαμβάνει τιμές στο σύνολο {0,1,2,…} κάτι το οποίο δεν είναι αποδεκτό από τις υποθέσεις της ενότητας 2.2. Σε αυτές τις περιπτώσεις όμως, γίνεται «αποκοπή» της τιμής μηδέν από το πεδίο τιμών της κατανομής Poisson. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι η τυχαία μεταβλητή $N$ έχει συνάρτηση πιθανότητας της μορφής

$$f_{\mathrm{N}}(n) = c\frac{\lambda^n}{n!}, n = 1,2,3, \dots$$

οπότε για την εύρεση της σταθεράς *κανονικοποίησης* θα έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} c\frac{\lambda^n}{n!} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{1}{c}$$

ή ισοδύναμα

$$e^{\lambda} - 1 = \frac{1}{c} \Leftrightarrow$$

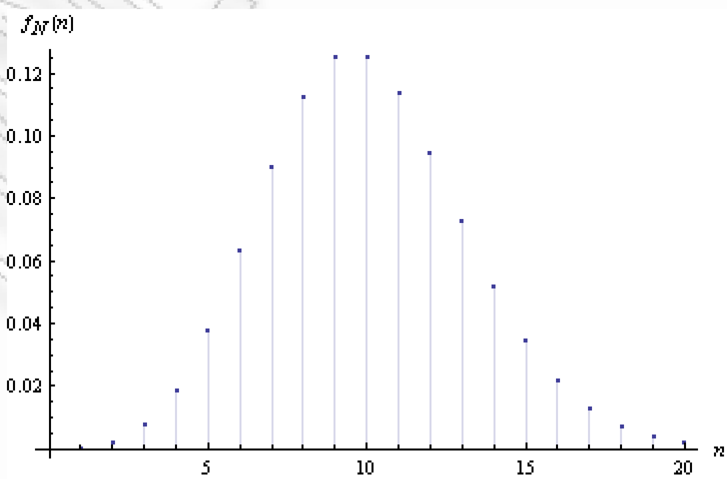
$$c = \left(e^{\lambda} - 1\right)^{-1}.$$

Επομένως ως συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. $N$ μπορούμε να θεωρήσουμε την

$$f_{\mathrm{N}}(n) \coloneqq \Pr\left[N = n\right] = \frac{\lambda^n}{n!\,(e^{\lambda} - 1)}, n = 1,2, \dots$$

δηλαδή πως η τ.μ. $N$ ακολουθεί μια zero truncated κατανομή Poisson με κάποια παράμετρο $\lambda > 0$.

Σχήμα 2.4.6.α.Συνάρτηση πιθανότητας μιας zero truncated *Poisson* κατανομής με παράμετρο $\lambda$=10



Η $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής

$N$

θα είναι

$$P_N(z) := \sum_{n=1}^{\infty} z^n f_{\mathrm{N}}(n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{\lambda^n}{n!\,(e^{\lambda}-1)}$$

οπότε

$$P_N(z) = \frac{1}{(e^{\lambda}-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{(e^{\lambda}-1)} \left[ \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!} \right) - 1 \right] = \frac{1}{(e^{\lambda}-1)} \left[ \mathrm{e}^{\lambda z} - 1 \right]$$

και άρα

$$P_N(z) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda z}-1}{e^{\lambda}-1}, \lambda > 0.$$

Αν επιπλέον θεωρήσουμε ότι

$$F_X(t) = t, 0 \leq t \leq 1$$

τότε η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$$

θα έχει τη μορφή

$$F_T(t) = 1 - \frac{\mathrm{e}^{\lambda(1-F_X(t))}-1}{e^{\lambda}-1}$$

$$= 1 - \frac{\mathrm{e}^{\lambda(1-t)}-1}{e^{\lambda}-1} = \frac{e^{\lambda}-1-\left[e^{\lambda}e^{-\lambda t}-1\right]}{e^{\lambda}-1} = \frac{e^{\lambda}-e^{\lambda}e^{-\lambda t}}{e^{\lambda}-1}$$

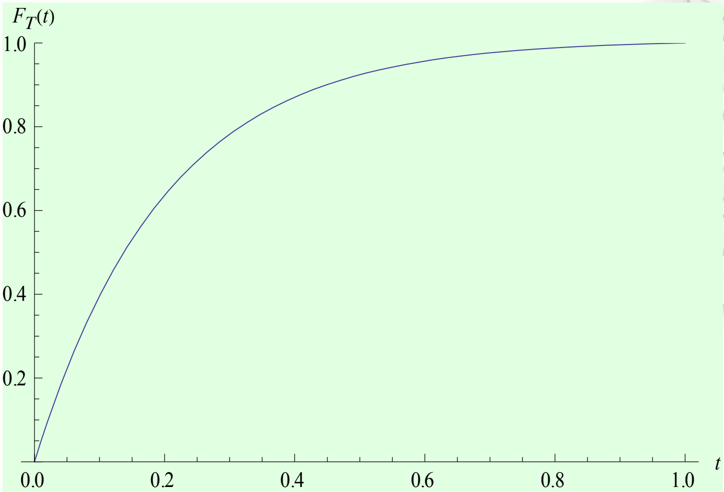
ή ισοδύναμα

$$F_T(t) = \frac{e^{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t}\right)}{e^{\lambda}-1}, \lambda > 0, t \in [0,1] \ (2.4.6).$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $T$ είναι εύκολο να δειχτεί πως είναι ίση με

$$f_T(t) = \frac{\lambda e^{\lambda(1-t)}}{e^{\lambda} - 1}, 0 \leq t \leq 1.$$

Σχήμα 2.4.6.β.Γραφική παράσταση της συνάρτησης κατανομής της (2.4.6) για $\lambda$=5




## 2.5 Εφαρμογές Ελάχιστου Τυχαίου Αριθμού Τυχαίων Μεταβλητών

Σκοπός της ενότητας αυτής είναι η παρουσίαση διαφόρων εφαρμογών, στις οποίες το πλέον κατάλληλο μοντέλο που χρησιμοποιείται είναι αυτό της σχέσης (2.2.1). Πιο συγκεκριμένα, παρατίθενται στη συνέχεια κάποιες περιπτώσεις όπου ο προσδιορισμός της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $T$ είναι ιδιαίτερα σημαντικός.

***Εφαρμογή 1***

Έστω ένα σύστημα εξυπηρέτησης πελατών εξεταζόμενο σε ένα χρονικό διάστημα μοναδιαίου μήκους(π.χ. ημέρα). Θεωρούμε πως το πλήθος των πελατών που υπεισέρχονται στο σύστημα εξυπηρέτησης στο εξεταζόμενο διάστημα, είναι μια μη αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή

$N$

με κάποια $πιθανογεννήτρια$ συνάρτηση

$P_N(z)$

ενώ ο χρόνος εξυπηρέτησης του $n$-οστού πελάτη εκφράζεται μέσω της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής

$X_n, n = 1,2, \ldots$

Είναι προφανές πως ο προσδιορισμός της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$$

είναι ιδιαίτερα σημαντικός, καθώς πρόκειται για τον ελάχιστο χρόνο εξυπηρέτησης ενός πελάτη του συστήματος αυτού.

***Εφαρμογή 2***

Πρόκειται για μια πολύ ενδιαφέρουσα χρηματοοικονομική εφαρμογή που αφορά τον κλάδο της αξιολόγησης επενδύσεων. Έστω λοιπόν, ότι μια επιχείρηση έχει στη διάθεση της ένα σύνολο

$N$

επενδυτικών σχεδίων. Επιπλέον υποθέτουμε ότι το κόστος στο μέλλον του $n$-οστού επενδυτικού σχεδίου, εκφράζεται μέσω της τυχαίας μεταβλητής

$X_n, n = 1,2, \dots$

Με βάση λοιπόν όλα τα παραπάνω, είναι φανερό πως το στοχαστικό μοντέλο

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$$

παριστάνει το ελάχιστο επενδυτικό κόστος της επιχείρησης, και συνεπώς ο προσδιορισμός της κατανομής του αποτελεί σημαντικό πλεονέκτημα της διαδικασίας λήψης επενδυτικών αποφάσεων.

***Εφαρμογή 3***

Πρόκειται για μια εφαρμογή που συναντάται ως επί τω πλείστον σε προβλήματα επιχειρησιακού σχεδιασμού. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε πως βρισκόμαστε στη χρονική στιγμή 0(χρονικό παρόν) και κάνουμε κάποιες υποθέσεις σχετικά με τη μελλοντική λειτουργία της επιχείρησης. Ειδικότερα, έστω ότι το πλήθος των παραγόμενων συσκευών, σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή στο μέλλον, εκφράζεται μέσω της τυχαίας μεταβλητής

$N$

και επιπλέον

$X_n, n = 1,2, \dots$

είναι ο χρόνος λειτουργίας (σε ώρες) της $\mathrm{n}-$οστής παραγόμενης συσκευής. Τότε η τυχαία μεταβλητή

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$$

είναι ο ελάχιστος χρόνος λειτουργίας μιας παραγόμενης συσκευής ή ισοδύναμα η διάρκεια ζωής της «χειρότερης» παραγόμενης μονάδας.

Η ανάγκη προσδιορισμού της μορφής της συνάρτησης κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $T$ γίνεται πιο φανερή στη περίπτωση που δίνεται κάποια εγγύηση λειτουργίας για το παραγόμενο προϊόν. Συγκεκριμένα, έστω ότι η επιχείρηση επιθυμεί να δώσει μια εγγύηση ε>0 ωρών στους αγοραστές της, έτσι ώστε το πολύ α% των προϊόντων της να επιστρέφονται πίσω. Μία επιλογή για την εύρεση του κατάλληλου χρόνου εγγύησης ε, είναι η λύση ως προς ε της ανισότητας

$$\Pr[T < \varepsilon] \leq \alpha \Leftrightarrow$$

$$1 - P_N[1 - F_X(\varepsilon)] \leq \alpha, \varepsilon > 0, \alpha \in (0,1).$$

***Εφαρμογή 4***

Έστω ότι ευρισκόμενοι στη χρονική στιγμή 0, δηλαδή στο χρονικό παρόν, υποθέτουμε πως σε κάποια χρονική στιγμή στο μέλλον θα έχουμε στη διάθεση μας ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από

$N$

διαφορετικούς χρηματιστηριακούς τίτλους(π.χ. μετοχές, ομόλογα, παράγωγα).
Επιπλέον θεωρούμε τη τυχαία μεταβλητή

$X_n, n = 1,2, \ldots$

η οποία εκφράζει την απόδοση που θα λάβουμε από τη κατοχή του $n$-οστού χρηματιστηριακού τίτλου.

Στη περίπτωση αυτή, το στοχαστικό μοντέλο

$$T = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$$

μας δίνει τη μικρότερη απόδοση(που ενδεχομένως θα λάβουμε) του χαρτοφυλακίου και αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο «εργαλείο» στα πλαίσια του portfolio management.

***Εφαρμογή 5***

Έστω μια οντότητα με την ευρεία έννοια η οποία, κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, αντιμετωπίζει

$N$

το πλήθος ανεξάρτητους και ανταγωνιστικούς κινδύνους. Οι κίνδυνοι που «απειλούν» την ίδια οντότητα και επιπλέον είναι καταστροφικοί ονομάζονται ανταγωνιστικοί. Ως καταστροφικός ορίζεται ένας κίνδυνος που όταν πραγματοποιηθεί παύει να υφίσταται η οντότητα. Ακόμη θεωρούμε τη τυχαία μεταβλητή

$$X_n, n = 1,2, \ldots$$

που παριστάνει το χρόνο πραγματοποίησης του $n$-οστού καταστροφικού κινδύνου από τους συνολικά $N$.

Σε αυτή τη περίπτωση παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η *πιθανοθεωρητική* μελέτη(εύρεση συνάρτησης πυκνότητας, αναμενόμενης τιμής $\kappa.\lambda.\pi$)του στοχαστικού μοντέλου

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$$

καθώς αυτό εκφράζει ουσιαστικά το χρόνο επιβίωσης της εξεταζόμενης οντότητας που «απειλείται» από έναν τυχαίο αριθμό ανεξάρτητων και καταστροφικών κινδύνων.

## 2.6 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό, ορίσαμε την έννοια του ελάχιστου τυχαίου αριθμού μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών και προσδιορίσαμε τη συνάρτηση κατανομής του, έτσι ώστε να καθίσταται δυνατή η *πιθανοθεωρητική* μελέτη του συγκεκριμένου στοχαστικού μοντέλου. Εν συνεχεία παρουσιάσαμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις και εφαρμογές αυτού.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΤΥΧΑΙΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΣΤΗ ΔΟΜΗ ΤΥΧΑΙΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ

## 3.1 Εισαγωγή

Η διαχείριση κινδύνων πληροφοριών αναγνωρίζεται ως διαδικασία χειρισμού κινδύνων που απειλούν ένα σύστημα πληροφοριών, ή ισοδύναμα κίνδυνοι πληροφορίες, σύμφωνα με το δημόσιο συμφέρον, την ανθρώπινη ασφάλεια, τα περιβαλλοντικά θέματα, καθώς και το νόμο. Περιλαμβάνει το σχεδιασμό, την οργάνωση, τη διεύθυνση και τον έλεγχο των ενεργειών που υλοποιούνται με σκοπό την ανάπτυξη ενός αποτελεσματικού σχεδίου, το οποίο θα μειώνει τις αρνητικές επιπτώσεις των κινδύνων των πληροφοριών [13,14,15,16,17]. Η διαχείριση των κινδύνων πληροφοριών αποδέχεται τις γενικές αρχές της διοικητικής κινδύνων και τις χρησιμοποιεί για την ακεραιότητα, τη διαθεσιμότητα, και την εμπιστευτικότητα διαφόρων πληροφοριών. Είναι εύκολα αντιληπτό ότι η διαχείριση κινδύνων πληροφοριών πρέπει να περιλαμβάνεται στη λήψη αποφάσεων σχετικών με τις συνήθεις δραστηριότητες, η οποία εάν εφαρμοστεί σωστά μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ισχυρό «εργαλείο» της διαχείρισης κινδύνων πληροφοριών σε προληπτικό και όχι αντιδραστικό επίπεδο. Επιπλέον, είναι προφανές πως οι αποτελεσματικές διαδικασίες διαχείρισης κινδύνων πληροφοριών, πρέπει να βοηθούν και να υποστηρίζουν το σύνολο της ασφάλειας, το πολιτισμό, καθώς και τις επιχειρηματικές δραστηριότητες.

Ο στοχαστικός χαρακτήρας της σφοδρότητας, της συχνότητας, της διάρκειας, καθώς και το χρονοδιάγραμμα των κινδύνων πληροφοριών καθιστά αναγκαία τη χρήση στοχαστικών μοντέλων στον τομέα της πρακτικής διαχείρισης των κινδύνων πληροφοριών. Για το σκοπό αυτό, στο εν λόγω κεφάλαιο θα διατυπώσουμε ένα στοχαστικό μοντέλο που θα αποτελεί συνδυασμό των στοχαστικών μοντέλων που εισήχθησαν στα προηγούμενα κεφάλαια.

## 3.2 Διατύπωση Ελάχιστου Τυχαίου Αριθμού μη Αρνητικών Τυχαίων Μεταβλητών

Η έννοια του μέγιστου τυχαίου αριθμού μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών, η έννοια του ελάχιστου τυχαίου αριθμού μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών, καθώς και η έννοια του τυχαίου αθροίσματος μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών συνιστούν πολύ ισχυρά «εργαλεία» της θεωρίας πιθανοτήτων. Επιπλέον, οι παραπάνω έννοιες είναι εξαιρετικά χρήσιμες για τη διαμόρφωση στοχαστικών μοντέλων που βρίσκουν σημαντικές εφαρμογές στην οικονομία, στη πληροφορική, στα logistics, στη μηχανική, στην επιχειρησιακή έρευνα, στη βιολογία, στη μετεωρολογία, στην ασφάλιση και σε πολλούς ακόμα θεμελιώδεις κλάδους. Πιο συγκεκριμένα λοιπόν, στην ενότητα αυτή επικεντρωνόμαστε στην επεξεργασία και την ανάλυση ενός στοχαστικού μοντέλου, το οποίο αποτελεί επέκταση της έννοιας του ελάχιστου τυχαίου αριθμού τυχαίων μεταβλητών που εισαγάγαμε στο δεύτερο κεφάλαιο. Τα «συστατικά» στοιχεία του προαναφερθέντος μοντέλου είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή, μια ακολουθία διακριτών τυχαίων μεταβλητών και μια ακολουθία μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών.

Υποθέτουμε ότι

$N$

είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή που λαμβάνει τιμές στο σύνολο

$\boldsymbol{N} = \{1,2,\dots\}$

και επιπλέον

$\{S_n, n = 1,2,\dots\}$

μια ακολουθία διακριτών τυχαίων μεταβλητών ανεξάρτητων μεταξύ τους και ισόνομων με τη τυχαία μεταβλητή

$S$

η οποία επίσης παίρνει τιμές στο σύνολο

$\{1,2,\dots\}$.

Θεωρούμε το τυχαίο άθροισμα

$$R = S_1 + S_2 + \cdots + S_N$$

και επιπλέον την ακολουθία

$\{X_r, r = 1,2,\dots\}$

που αποτελείται από μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές. Ως επέκταση του μοντέλου της (2.2.1), θεωρούμε το στοχαστικό μοντέλο[18]

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_R\} \ (3.2.1).$$

Στο κεφάλαιο αυτό επικεντρωνόμαστε κυρίως στην ανάδειξη των θεωρητικών ιδιοτήτων καθώς και των πρακτικών εφαρμογών, σε κάποιους σημαντικούς κλάδους, του παραπάνω στοχαστικού μοντέλου.

Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να αναφερθεί, ότι η «ενσωμάτωση» τρόπον τινά του θεμελιώδους διακριτού τυχαίου αθροίσματος

$$R = S_1 + S_2 + \cdots + S_N$$

στη δομή του στοχαστικού μοντέλου

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_R\}$$

υποστηρίζει ακόμα περισσότερο τη δυνατότητα εφαρμογής αυτού στη θεωρία και τη πράξη. Ουσιαστικά δηλαδή, το καθιστά ακόμα πιο ρεαλιστικό στις διάφορες θεωρητικές και πρακτικές καταστάσεις που καλούμαστε να μοντελοποιήσουμε.

### 3.3 Συνάρτηση Κατανομής Διατυπωμένου Ελάχιστου

Στη παρούσα ενότητα γίνεται αναφορά στις επαρκείς συνθήκες, έτσι ώστε να καταστεί εφικτός ο προσδιορισμός της συνάρτησης κατανομής του ελαχίστου τυχαίου αριθμού μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών που ορίσαμε στη προηγούμενη ενότητα. Είναι εύκολα αντιληπτό άλλωστε, ότι ο προσδιορισμός αυτός παρέχει πολύτιμες πληροφορίες στους αναλυτές των συστημάτων, όσον αφορά τη διερεύνηση της *εφαρμοσιμότητας* του αντίστοιχου στοχαστικού μοντέλου στις διάφορες εφαρμογές που εμφανίζεται. Στη συνέχεια, παρατίθενται κάποιες αναγκαίες και επαρκείς συνθήκες για τον υπολογισμό της συνάρτησης κατανομής του στοχαστικού μοντέλου

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_R\}.$$

Υποθέτουμε ότι η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$N$

έχει *πιθανογεννήτρια* συνάρτηση

$$P_N(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \Pr[N = n]$$

ενώ οι διακριτές τυχαίες μεταβλητές της ακολουθίας

$\{S_n, n = 1,2, \dots\}$

είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και κατανεμημένες όπως η τυχαία μεταβλητή

$S$

της οποίας η *πιθανογεννήτρια* συνάρτηση είναι η

$$P_S(z) = \sum_{s=1}^{\infty} z^s \Pr[S = s].$$

Επιπλέον, οι μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές της ακολουθίας

$\{X_r, r = 1,2, \dots\}$

είναι επίσης ανεξάρτητες μεταξύ τους και ισόνομες με τη τυχαία μεταβλητή

$X$

η οποία έχει συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) \coloneqq \Pr[X \le x], x \in \mathbb{R}.$$

Θεωρούμε το τυχαίο άθροισμα

$$R = S_1 + S_2 + \cdots + S_N$$

και επιπλέον υποθέτουμε ότι

$$N, \{S_n, n = 1,2, \ldots\}, \{X_r, r = 1,2, \ldots\}$$

είναι πλήρως ανεξάρτητες.

Με βάση λοιπόν τις παραπάνω υποθέσεις, εύκολα μπορεί κανείς να προχωρήσει στον υπολογισμό της συνάρτησης κατανομής του στοχαστικού μοντέλου της (3.2.1). Συγκεκριμένα, λόγω των παραπάνω υποθέσεων, η τυχαία μεταβλητή

$N$

είναι ανεξάρτητη από την ακολουθία

$\{S_n, n = 1,2, \ldots\}$

οπότε χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.3.5) του κεφαλαίου 1, διαπιστώνουμε ότι η $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\epsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση του τυχαίου αθροίσματος

$$R = S_1 + S_2 + \cdots + S_N$$

έχει τη μορφή

$$P_R(z) = P_N[P_S(z)] \text{ (3.3.1).}$$

Ακόμη, είναι εύκολο να αποδειχτεί πως η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$$R = S_1 + S_2 + \cdots + S_N$$

είναι ανεξάρτητη από την ακολουθία

$\{X_r, r = 1,2, \ldots\}$.

Πράγματι, αν

$\varphi_{R,X}(u, v)$

είναι η από κοινού χαρακτηριστική συνάρτηση των τυχαίων μεταβλητών $R$ και $X$, τότε θα έχουμε ότι

$$\varphi_{R,X}(u, v) \coloneqq E(e^{iuR+ivX})$$

ή ισοδύναμα

$$\varphi_{R,X}(u,v) = E_N[E(e^{iuR+ivX}|N)]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E\left[e^{iu(S_1+S_2+\cdots+S_N)+ivX}|N=n\right]\Pr[N=n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E\left[e^{iu(S_1+S_2+\cdots+S_n)+ivX}|N=n\right]\Pr[N=n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E\left[e^{iuS_1}e^{iuS_2}\cdots e^{iuS_n}e^{ivX}|N=n\right]\Pr[N=n] \quad (3.3.2)$$

όμως η τυχαία μεταβλητή

$N$

είναι στοχαστικά ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές

$$e^{iuS_1}, e^{iuS_2}, \cdots, e^{iuS_n}, e^{ivX}$$

λόγω της υπόθεσης που κάναμε ότι

$$N, \{S_n, n = 1,2, \dots\}, \{X_r, r = 1,2, \dots\}$$

είναι πλήρως ανεξάρτητες. Επομένως από τη σχέση (3.3.2) θα προκύψει η ακόλουθη σχέση

$$\varphi_{R,X}(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(e^{iuS_1}e^{iuS_2}\cdots e^{iuS_n}e^{ivX}\right)\Pr[N=n] \quad (3.3.3)$$

αλλά οι τυχαίες μεταβλητές

$$e^{iuS_1}, e^{iuS_2}, \cdots, e^{iuS_n}, e^{ivX}$$

είναι και μεταξύ τους ανεξάρτητες λόγω του γεγονότος ότι οι ακολουθίες

$$\{S_n, n = 1,2, \dots\}, \{X_r, r = 1,2, \dots\}$$

είναι επίσης ανεξάρτητες. Συνεπώς, από τη σχέση (3.3.3) θα έχουμε

$$\varphi_{R,X}(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(e^{iuS_1}\right)E\left(e^{iuS_2}\right)\cdots E\left(e^{iuS_n}\right)E\left(e^{ivX}\right)\Pr[N=n]$$

$$= E\left(e^{ivX}\right)\sum_{n=1}^{\infty} E\left(e^{iuS_1}\right)E\left(e^{iuS_2}\right)\cdots E\left(e^{iuS_n}\right)\Pr[N=n]$$

$$= \varphi_X(v) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{S_1}(u)\, \varphi_{S_2}(u) \cdots \varphi_{S_n}(u) \Pr[N = n]$$

και επειδή οι τυχαίες μεταβλητές $S_1, S_2, \ldots$έχουν την ίδια κατανομή με τη τυχαία μεταβλητή $S$,έπεται ότι

$$\varphi_{S_i}(u) = \varphi_S(u), \forall i \in \{1,2,\ldots\}$$

οπότε

$$\varphi_{R,X}(u,v) = \varphi_X(v) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_S(u)\, \varphi_S(u) \cdots \varphi_S(u) \Pr[N = n]$$

$$= \varphi_X(v) \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_S(u)]^n \Pr[N = n]$$

ή ισοδύναμα

$$\varphi_{R,X}(u,v) = \varphi_X(v) P_N[\varphi_S(u)] \text{ (3.3.4).}$$

Τέλος λοιπόν, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (1.3.3) και (3.3.4) αποδεικνύεται πως ισχύει το ακόλουθο

$$\varphi_{R,X}(u,v) = \varphi_R(u)\varphi_X(v), \forall\, u, v \in \mathbb{R}$$

δηλαδή οι τυχαίες μεταβλητές $R$ και $X$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Λαμβάνοντας υπόψη λοιπόν την ανεξαρτησία του τυχαίου αθροίσματος

$$R = S_1 + S_2 + \cdots + S_N$$

με την ακολουθία

$\{X_r, r = 1,2,\ldots\}$

από τη σχέση (2.3.4) της ενότητας 2.3 έχουμε ότι η συνάρτηση κατανομής του στοχαστικού μοντέλου

$$T = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_R\}$$

δίνεται από το τύπο

$$F_T(t) = 1 - P_R[1 - F_X(t)]$$

η οποία λόγω της (3.3.1) παίρνει τη τελική μορφή

$$F_T(t) \coloneqq \Pr[T \le t] = 1 - P_N\left[P_S\left(1 - F_X(t)\right)\right] \text{ (3.3.5).}$$

### 3.4 Ειδικές Περιπτώσεις Διατυπωμένου Ελάχιστου

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζονται κάποιες ειδικές περιπτώσεις του μοντέλου της (3.2.1) που έχουν ιδιαίτερη πρακτική και θεωρητική σημασία.

***Περίπτωση 1***

Υποθέτουμε ότι η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$N$

ακολουθεί τη κατανομή $Sibuya$ με $πιθανογεννήτρια$ συνάρτηση

$$P_N(z) = 1 - (1 - z)^{\alpha}, 0 < \alpha \leq 1$$

και η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$S$

ακολουθεί επίσης τη κατανομή $Sibuya$ αλλά με $πιθανογεννήτρια$ συνάρτηση

$$P_S(z) = 1 - (1 - z)^{\gamma}, 0 < \gamma \leq 1.$$

Τότε, λαμβάνοντας υπόψη μας την ειδική περίπτωση 1.4.14 της ενότητας 1.4,το τυχαίο άθροισμα

$$R = S_1 + S_2 + \cdots + S_N$$

ακολουθεί επίσης τη κατανομή $Sibuya$ με $πιθανογεννήτρια$ συνάρτηση

$$P_S(z) = 1 - (1 - z)^{\rho}, 0 < \rho \leq 1$$

όπου $\rho = \alpha\gamma$.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η μη αρνητική τυχαία μεταβλητή

$X$

ακολουθεί τη κατανομή Βήτα με συνάρτηση κατανομής

$$F_X(t) = t^{\kappa}, 0 \leq t \leq 1, \kappa > 0.$$

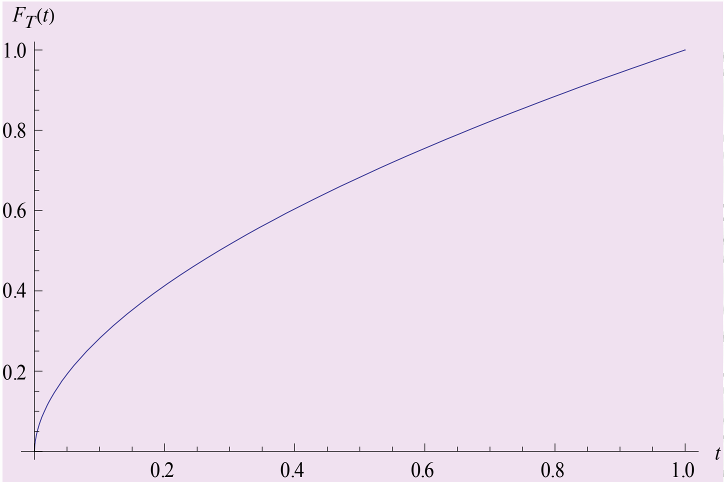
Αντικαθιστώντας λοιπόν όλα τα παραπάνω στη σχέση (3.3.5), έπεται ότι το στοχαστικό μοντέλο

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_R\}$$

ακολουθεί επίσης τη κατανομή Βήτα αλλά με παραμέτρους $\lambda = \kappa\rho$ και 1, οπότε η συνάρτηση κατανομής του έχει τη μορφή

$$F_T(t) = t^{\lambda}, 0 \leq t \leq 1 \text{ (3.4.1).}$$

Σχήμα 3.4.1.Γραφική παράσταση της συνάρτησης κατανομής της (3.4.1) για $\lambda$=0.55




***Περίπτωση 2***

Υποθέτουμε ότι η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$N$

ακολουθεί τη Γεωμετρική κατανομή με $πιθανογεννήτρια$ συνάρτηση

$$P_N(z) = \frac{pz}{1 - qz}, 0 < p < 1, q = 1 - p, |z| \leq \frac{1}{q}$$

και η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$S$

ακολουθεί τη Γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα «επιτυχίας» θ, οπότε η $πιθανογεννήτρια$ συνάρτηση της θα δίνεται από τη σχέση

$$P_S(z) = \frac{\theta z}{1 - \pi z}, \theta \in (0,1), \pi = 1 - \theta, |z| \leq \frac{1}{\pi}.$$

Τότε, λαμβάνοντας υπόψη μας την ειδική περίπτωση 1.4.13 της ενότητας 1.4, το τυχαίο άθροισμα

$$R = S_1 + S_2 + \cdots + S_N$$

ακολουθεί και αυτό με τη σειρά του Γεωμετρική κατανομή με $πιθανογεννήτρια$ συνάρτηση

$$P_R(z) = \frac{cz}{1 - \ell z}, |z| \leq \frac{1}{\ell} \ (1)$$

όπου $c = \pi\theta$ και $\ell = 1 - c$.

Επιπλέον, θεωρούμε πως η μη αρνητική τυχαία μεταβλητή

$X$

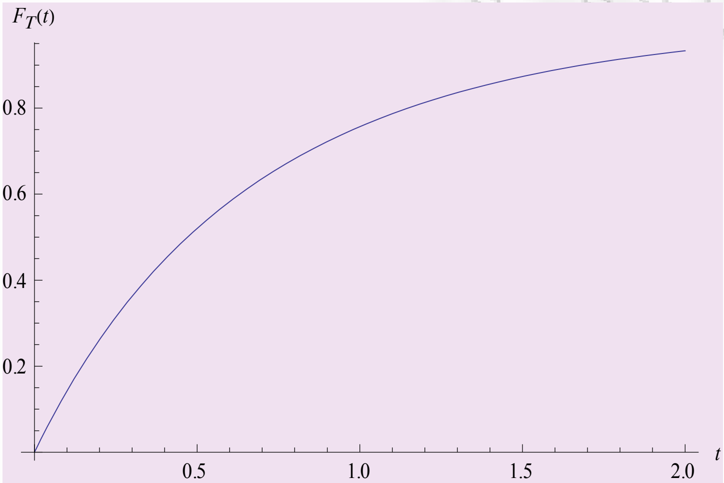
ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με συνάρτηση κατανομής

$$F_X(t) = 1 - e^{-\mu t}, \mu > 0, t \in [0, \infty) \text{ (2)}.$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1) και (2) στην (3.3.5), είναι εύκολο να καταλήξει κανείς στο γεγονός ότι

$$F_T(t) = \frac{1 - e^{-\mu t}}{1 - \ell e^{-\mu t}}, \mu > 0, \ell \in (0,1), t \geq 0 \text{ (3.4.2)}.$$

Σχήμα 3.4.2.Γραφική παράσταση της σ.κ. της (3.4.2) για $\mu = 1.25$ και $\ell = 0.2$




***Περίπτωση 3***

Υποθέτουμε ότι η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$N$

έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$f_N(n) \coloneqq \Pr[N = n] = p(1-p)^{n-1}, n = 1,2, \ldots$$

οπότε θα έχουμε

$$P_N(z) = \frac{pz}{1 - qz}, p \in (0,1), q = 1 - p, |z| \leq \frac{1}{q}.$$

Επιπλέον, θεωρούμε πως η τυχαία μεταβλητή

$S$

ακολουθεί τη Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο θ και συνεπώς η $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση της, θα έχει τη μορφή

$$P_S(z) = \frac{\theta z}{1 - \pi z}, \theta \in (0,1), \pi = 1 - \theta, |z| \leq \frac{1}{\pi}.$$

Στη προηγούμενη ενότητα, όπου είχαμε υποθέσει τα ίδια ακριβώς με τα παραπάνω, είχε διαπιστωθεί πως η $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση του διακριτού τυχαίου αθροίσματος

$$R = S_1 + S_2 + \cdots + S_N$$

δίνεται από τη σχέση

$$P_R(z) = \frac{cz}{1 - \ell z}, c \in (0,1), \ell = 1 - c, |z| \leq \frac{1}{\ell}$$

δηλαδή ότι $R \sim Ge(c)$ όπου $c = p\theta$.

Αν επιπλέον θεωρήσουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές της ακολουθίας

$\{X_r, r = 1,2, \ldots\}$

είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα (0,1) τυχαίες μεταβλητές, τότε για το προσδιορισμό της συνάρτησης κατανομής του στοχαστικού μοντέλου

$$T = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_R\}$$

θα έχουμε τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - P_N\left[P_S\left(1 - F_X(t)\right)\right] \\ &= 1 - \frac{c(1-t)}{1 - \ell(1-t)} \end{aligned}$$

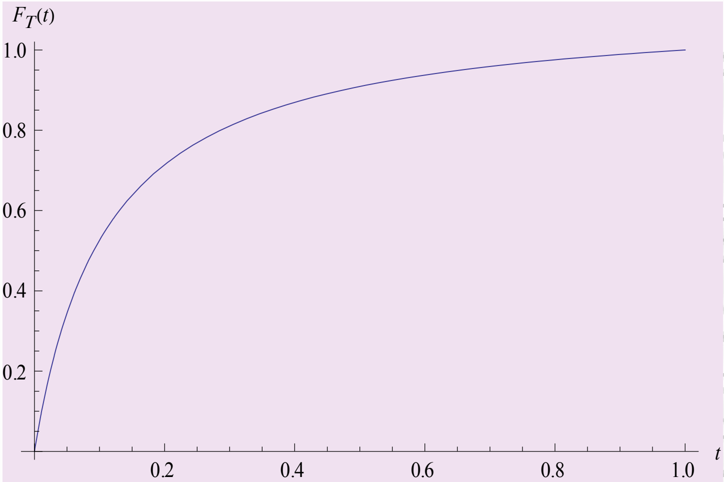
ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \frac{1 - \ell(1-t) - c(1-t)}{1 - \ell(1-t)} \\ &= \frac{1 - (1-t)(c+\ell)}{1 - \ell(1-t)} \end{aligned}$$

οπότε καταλήγουμε στη τελική μορφή

$$F_T(t) = \frac{t}{c + \ell t}, 0 < c < 1, \ell = 1 - c, t \in [0,1] \text{ (3.4.3).}$$

Σχήμα 3.4.3.Γραφική παράσταση της συνάρτησης κατανομής της (3.4.3) για $c = 0.1$




## 3.5 Εφαρμογές σε Συστήματα και Διαδικασίες

Η παρούσα ενότητα επικεντρώνεται στην ανάδειξη διαφόρων εφαρμογών του διατυπωμένου μοντέλου της (3.2.1). Έχει διαπιστωθεί πως το προαναφερθέν μοντέλο μπορεί να φανεί χρήσιμο ως προς τη διαχείριση κινδύνων που απειλούν κάποια προηγμένα συστήματα πολυμέσων και επιπλέον τη διερεύνηση της αποδοτικότητας διαφόρων διαδικασιών.

Κατά τη διάρκεια των δύο τελευταίων δεκαετιών, η συντονισμένη και ασφαλής αποθήκευση, η παραγωγική διαδικασία, οι μεταδόσεις, καθώς και οι διάφορες βελτιωμένες μορφές πληροφόρησης όπως ο ήχος, η εικόνα, το video,τα γραφικά, και τα κείμενα έχουν αναδειχθεί σε δυναμικά πεδία έρευνας της σύγχρονης πληροφορικής. Είναι γενικά αποδεκτό, ότι τα σύγχρονα συστήματα πολυμέσων είναι κατάλληλα για το συγκεκριμένο πεδίο έρευνας[19,20,21]. Σήμερα τα συστήματα πολυμέσων έχουν μεταβληθεί σε ένα πολύ χρήσιμο «εργαλείο» για ένα πολύ μεγάλο εύρος δραστηριοτήτων. Είναι γενικά αποδεκτό, ότι η αλληλεπίδραση, η προσωποποίηση και η προσαρμοστικότητα πρέπει να αποτελούν θεμελιώδη στοιχεία προηγμένων συστημάτων[20,22]. Τέτοιου είδους συστήματα πρέπει να είναι αλληλεπιδρώντα όχι μόνο μέσω συνηθισμένων τρόπων αλληλεπίδρασης. Απ εναντίας, αυτά οφείλουν να υποστηρίζουν εναλλακτικούς τρόπους αλληλεπίδρασης, όπως παραδείγματος χάριν οπτικής ή γλωσσικής «επαφής» μεταξύ Η/Υ και χρήστη, κάτι το οποίο τα καθιστά πιο δελεαστικά, φιλικά προς το χρήστη, πιο προσιτά και διδακτικά. Είναι εύκολα αντιληπτό, πως ο ουσιώδης σκοπός των προηγμένων συστημάτων πολυμέσων, είναι η ικανότητα αυτών για δυναμική προσαρμογή στους χρήστες τους[20,23]. Στη σημερινή εποχή, τα προηγμένα συστήματα πρέπει να επεκτείνονται σε όλα τα επίπεδα διαδικασιών για την εκτέλεση των ουσιωδών σκοπών τους. Μια τέτοια εκτέλεση συνενώνει επιπλέον έρευνα και ανάπτυξη της χαμηλού επιπέδου χρησιμοποίησης δεδομένων από Η/Υ για την ασφάλεια, τη συμπίεση, τη μετάδοση, την ομαδοποίηση, τη ταξινόμηση και την ανάκτηση πληροφορίας[20,21]. Έρευνα αυτού του είδους καταλήγει στην ανάπτυξη πρωτοφανών και ιδιαίτερα ικανού επιπέδου προηγμένων πολυμέσων κατάλληλων για την υποστήριξη συστημάτων ως προς το ορθό management σε διάφορους τομείς αυτών. Τέτοια μεσαίου-επιπέδου προηγμένα συστήματα αποτελούν τα δομικά στοιχεία των υψηλού-επιπέδου προηγμένων υπηρεσιών που προσφέρουν τα πολυμέσα, οι οποίες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για ψηφιακές βιβλιοθήκες, e-learning, e-government,e-health, και άλλες πολλές δραστηριότητες παρόμοιας πρακτικής σημασίας[20,24,25,26,27]. Οι υπηρεσίες που παρέχονται από τα προηγμένα συστήματα πολυμέσων πρόσφατα έχουν παρουσιάσει ιδιαίτερα εντυπωσιακή ανάπτυξη, καθώς ενσωματώνονται σε τομείς όπως η διαφήμιση, η βιομηχανία, η διασκέδαση, η τέχνη, η εκπαίδευση, η μηχανική, η ιατρική, τα μαθηματικά, και άλλες πολλές θεωρητικές και πρακτικές δραστηριότητες. Η επέκταση των προσφερόμενων υπηρεσιών των προηγμένων πολυμέσων είναι ταχύτατη, καθώς η τεχνολογική ανάπτυξη είναι κατευθυνόμενη από την ισχυρή υποστήριξη των σύγχρονων πολύπλοκων οργανισμών. Παρακάτω, γίνεται φανερό πως η εκτέλεση κάποιων ουσιωδών σκοπών των προηγμένων συστημάτων μπορεί να υποστηριχθεί από το διαμορφωμένο στην (3.2.1) στοχαστικό μοντέλο.

Υποθέτουμε ότι η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$N$

δηλώνει το πλήθος των διαφορετικών κατηγοριών κινδύνων που απειλούν ένα προηγμένο σύστημα πολυμέσων σε κάποιο δεδομένο χρονικό σημείο στο μέλλον. Το χρόνο αυτό τον καλούμε σημείο 0. Υποθέτουμε επίσης, ότι η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$S_n, n = 1,2, \ldots$

δηλώνει το πλήθος των κινδύνων της $n - οστής$ κατηγορίας κινδύνου. Είναι εύκολα αντιληπτό πως το τυχαίο άθροισμα

$$R = S_1 + S_2 + \cdots + S_N$$

δηλώνει το συνολικό πλήθος των κινδύνων που περιέχονται στις

$N$

συνολικά κατηγορίες αυτών. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η μη αρνητική τυχαία μεταβλητή

$X_r, r = 1,2, \ldots$

δηλώνει το χρόνο πραγματοποίησης του $r$-οστού κινδύνου που περιέχεται σε κάποια από τις $N$ συνολικά κατηγορίες. Τότε, είναι προφανές πως το στοχαστικό μοντέλο

$$T = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_R\}$$

εκφράζει τον μικρότερο χρόνο πραγματοποίησης ενός οποιουδήποτε κινδύνου από τους συνολικά $R$. Αν επιπλέον θεωρήσουμε ότι η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$N$

εκφράζει το πλήθος των διαφορετικών κατηγοριών κάποιων *καταστροφικών* κινδύνων που απειλούν ένα προηγμένο σύστημα στο χρονικό σημείο 0, τότε είναι αρκετά προφανές πως το (τυχαίο) χρονικό διάστημα

$[0, T)$

έχει ιδιαίτερη θεωρητική και πρακτική σημασία ως προς τη λήψη αποφάσεων αναφορικά με την απόδοση και την εξέλιξη του εν λόγω συστήματος υπό τη «παρουσία» αυτών των κατηγοριών κινδύνου. Πιο συγκεκριμένα, οι αποφάσεις αυτές μπορεί να φανούν χρήσιμες ως προς την επιλογή, την ανάλυση, τη διατίμηση και την εκτέλεση συνδυασμών που αφορούν διαδικασίες ελέγχου κινδύνων για την άριστη προληπτική διαχείριση των κατηγοριών καταστροφικών κινδύνων, οι οποίοι απειλούν την αποδοτικότητα και την εξέλιξη προηγμένων συστημάτων πολυμέσων.

Είναι αρκετά προφανές, ότι η προτεινόμενη εφαρμογή του διατυπωμένου στοχαστικού μοντέλου μπορεί να έχει ιδιαίτερη θεωρητική και πρακτική σημασία για μια πολύ μεγάλη ποικιλία συστημάτων. Ειδικότερα, η γενική δομή της πληροφορίας των συστημάτων αυτών κάνει φανερό ότι το διατυπωμένο στοχαστικό μοντέλο να υποστηρίξει, στη θεωρία και τη πράξη, το σημαντικό ρόλο τους. Η γενική αναγνώριση των προηγμένων συστημάτων πολυμέσων, σαν κύριας μορφής συστήματα παροχής πληροφοριών, καθιστά απαραίτητο το σχολιασμό του ρόλου του διατυπωμένου στοχαστικού μοντέλου σχετικά με την έρευνα και το «χειρισμό» των κινδύνων που απειλούν αυτού του είδους τα συστήματα πληροφοριών.

Από το γεγονός ότι οι κίνδυνου που απειλούν προηγμένα συστήματα μπορούν να κατηγοριοποιηθούν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, γίνεται αντιληπτό πως το διατυπωμένο στοχαστικό μοντέλο μπορεί να είναι κατάλληλο για τη διαχείριση τέτοιων κινδύνων. Δύο θεμελιώδεις τρόποι κατηγοριοποίησης των προαναφερθέντων κινδύνων είναι οι ακόλουθοι.

Πρώτον, υποθέτουμε ότι οι ερευνητικές δραστηριότητες ενός προηγμένου συστήματος είναι κατηγοριοποιημένες σύμφωνα με το σκοπό αυτό. Έτσι, στο χρονικό σημείο 0, ένας τυχαίος αριθμός κατηγοριών ερευνητικών δραστηριοτήτων συνενώνουν το σύστημα και κάθε κατηγορία περιέχει έναν τυχαίο αριθμό ερευνητικών δραστηριοτήτων. Βάσει του γεγονότος ότι οι ερευνητικές δραστηριότητες πολύ συχνά αναγνωρίζονται ως αίτια εμφάνισης κινδύνων που απειλούν το εν λόγω προηγμένο σύστημα, τότε είναι εύκολα αντιληπτό πως το διατυπωμένο στοχαστικό μοντέλο είναι κατάλληλο για τη διερεύνηση της «συμπεριφοράς» τέτοιων συστημάτων υπό τη παρουσία τυχαίου αριθμού ανταγωνιστικών ερευνητικών δραστηριοτήτων προερχόμενων από τυχαίο αριθμό διαφορετικών κατηγοριών.

Δεύτερον, υποθέτουμε ότι τα άτομα που κάνουν χρήση ενός προηγμένου συστήματος πολυμέσων είναι κατηγοριοποιημένα σύμφωνα με το επάγγελμα τους. Έτσι, στο χρονικό σημείο 0, ένας τυχαίος αριθμός κατηγοριών ατόμων αντιστοιχεί στο σύστημα αυτό και κάθε κατηγορία περιέχει τυχαίο αριθμό ατόμων. Επειδή τα ανθρώπινα σφάλματα αποτελούν συχνή αιτία εμφάνισης κινδύνων που απειλούν προηγμένα συστήματα, έπεται πως το διατυπωμένο στοχαστικό μοντέλο είναι κατάλληλο για τη διερεύνηση της «συμπεριφοράς» αυτών υπό τη παρουσία τυχαίου αριθμού ανταγωνιστικών ανθρώπινων σφαλμάτων προερχόμενων από τυχαίο αριθμό κατηγοριών.

Η σημαντική προσφορά των προηγμένων συστημάτων σε διάφορες εκπαιδευτικές περιοχές αποτελεί ένα πολύ καλό λόγο αναζήτησης της καταλληλότητας του διατυπωμένου στοχαστικού μοντέλου ως προς τη διαμόρφωση εκπαιδευτικών διαδικασιών[28,29,30]. Υποθέτουμε λοιπόν, ότι η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$N$

εκφράζει το πλήθος των διαφορετικών κατηγοριών των ατόμων που έχουν λάβει την ίδια εκπαιδευτική κατάρτιση. Επιπλέον, θεωρούμε ότι η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$S_n, n = 1,2, \dots$

δηλώνει το πλήθος των ατόμων που περιέχονται στην $n - \sigma\tau\eta$ κατηγορία. Έτσι το τυχαίο άθροισμα

$$R = S_1 + S_2 + \cdots + S_N$$

προφανώς εκφράζει το συνολικό πλήθος των ατόμων που περιέχονται στα

$N$

αυτά γκρουπ. Τέλος, υποθέτουμε ότι κάθε άτομο αρχίζει τη τελειοποίηση του δεδομένου έργου του στο χρονικό σημείο 0 και η μη αρνητική τυχαία μεταβλητή

$X_r, r = 1,2, \dots$

παριστάνει το χρόνο που απαιτείται από το $r$ −άτομο για την εκπόνηση του δοθέντος έργου που έχει αναλάβει. Οπότε το στοχαστικό μοντέλο

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_R\}$$

αντιστοιχεί στον ελάχιστο χρόνο εκτέλεσης του δοθέντος έργου. Είναι προφανές λοιπόν, πως οι θεμελιώδεις παράγοντες καθώς και η μαθηματική δομή του διαμορφωμένου στοχαστικού μοντέλου μπορεί να φανούν χρήσιμα «εργαλεία» για την αποτίμηση της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Πιο συγκεκριμένα, το μοντέλο αυτό παρέχει στους αναλυτές πολύτιμη $\pi\iota\theta\alpha\nu o\theta\varepsilon\omega\rho\eta\tau\iota\kappa\acute{\eta}$ πληροφορία για την έρευνα και την απόδοση των εκπαιδευτικών διαδικασιών.

### 3.6 Συμπεράσματα

Η χρήση ενός τυχαίου αθροίσματος διακριτών τυχαίων μεταβλητών για τη διαμόρφωση ενός στοχαστικού μοντέλου, το οποίο είναι το ελάχιστο ενός τυχαίου αριθμού μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών, αποτελεί τη θεωρητική συνεισφορά του παρόντος κεφαλαίου. Επιπλέον, η πρακτική συνεισφορά του κεφαλαίου αυτού έγκειται στη «παροχή» εφαρμογών του διαμορφωμένου στοχαστικού μοντέλου στη διαχείριση κινδύνων που αφορούν προηγμένα συστήματα πληροφοριών και εκπαιδευτικών διαδικασιών.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ

## 4.1 Εισαγωγή

Η μελέτη διαφόρων στοχαστικών φαινομένων μπορεί να επιτευχθεί κυρίως με τρεις μεθόδους:

1.**Αναλυτικές Μέθοδοι:** πραγματοποιείται κατάλληλη μαθηματική μοντελοποίηση του στοχαστικού φαινομένου και κατόπιν μελέτη αυτού αναλυτικά. Η συμπεριφορά του μοντέλου γίνεται γνωστή για οποιεσδήποτε τιμές των παραμέτρων του. Όμως οι μέθοδοι αυτές είναι εφαρμόσιμες σε σχετικά απλά(ή απλουστευμένα) μοντέλα.

2.**Αριθμητικές Μέθοδοι:** αναλύεται το μοντέλο μέσω προσεγγιστικών μεθόδων της αριθμητικής ανάλυσης. Η συμπεριφορά του μοντέλου γίνεται γνωστή μόνο για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων του. Επιπλέον, οι αριθμητικές μέθοδοι δύναται να εφαρμοστούν και σε συνθετότερα μοντέλα.

3.**Μέθοδοι Προσομοίωσης:** το στοχαστικό φαινόμενο αναπαρίσταται εικονικά (μέσω ενός Η/Υ) και κατόπιν παρακολουθείται η εξέλιξη του, είτε στατικά είτε δυναμικά στο χρόνο, καταγράφοντας τα διάφορα χαρακτηριστικά που μας ενδιαφέρουν. Μέσω της μεθόδου αυτής, η συμπεριφορά του μοντέλου γίνεται γνωστή μόνο για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων του. Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί πως οι μέθοδοι προσομοίωσης μπορούν να εφαρμοστούν και σε πολύ σύνθετα-ρεαλιστικά μοντέλα [31].

Η τεχνική της προσομοίωσης έχει αναπτυχθεί κυρίως τα τελευταία χρόνια εξαιτίας της ραγδαίως εξελισσόμενης και σχετικά φθηνής υπολογιστικής ισχύς που προσφέρουν οι Η/Υ. Το σκεπτικό στο οποίο βασίζεται η προαναφερθείσα τεχνική αποσαφηνίζεται στο ακόλουθο πολύ απλό παράδειγμα.

Θεωρούμε το στοχαστικό πείραμα της ρίψης ενός αμερόληπτου νομίσματος και έστω ότι επιθυμούμε την αναπαράσταση αυτού μέσω ενός Η/Υ, έτσι ώστε να καταστεί δυνατή η μελέτη κάποιων χαρακτηριστικών του. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε μια «γεννήτρια» παραγωγής τυχαίων αριθμών στο διάστημα (0,1), οπότε και θα λάβουμε τους $U_1, U_2, \dots, U_m$ (m ένας οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος αριθμός). Εν συνεχεία αν στην $i-$εικονική ρίψη προκύψει ότι $U_i < 0.5$, $i = 1,2, \dots, m$, τότε «βαφτίζουμε» το αποτέλεσμα της $i$ ρίψης ως «Κ» και διαφορετικά ως «Γ». Συνεπώς, από τη παραπάνω περιγραφή, θα έχουμε κατορθώσει να παράγουμε μια πεπερασμένη ακολουθία $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ από «Κ» και «Γ», η οποία θα αναπαριστά τις $m$ το πλήθος ρίψεις ενός αμερόληπτου νομίσματος που τυχόν θα προέκυπταν αν τις πραγματοποιούσαμε οι ίδιοι στη πραγματικότητα. Πράγματι, αν ορίσουμε τις «βοηθητικές» τυχαίες μεταβλητές

$$Y_i := \begin{cases} \mathrm{K}, αν\ U_i < 0.5 \\ Γ, αν\ U_i \geq 0.5 \end{cases}, i = 1,2, \dots, m$$

τότε έπεται ότι $Y_i \sim B(1,0.5), \forall\ i \in \{1,2, \dots, m\}$ καθώς ισχύει

$$\Pr[Y_i = \mathrm{K}] := \Pr[U_i < 0.5] = \int_0^{0.5} f_{U_i}(u) du = \int_0^{0.5} du = 0.5 , i = 1,2, \dots, m$$

όπου $f_{U_i}(u) = 1$ η συνάρτηση πυκνότητας της Ομοιόμορφης κατανομής στο διάστημα (0,1).

Για παράδειγμα, μέσω του υπολογιστικού πακέτου Wolfram $Mathematica$, εκτελώντας δέκα φορές την εντολή

$$Y = If[Random[\,] < 0.5, "K", "Γ"]$$

λαμβάνουμε τις παρακάτω δέκα εικονικές ρίψεις ενός αμερόληπτου νομίσματος

{Γ,Κ,Γ,Κ,Γ,Γ,Κ,Γ,Γ,Κ}.

Το παράδειγμα της ρίψης ενός αμερόληπτου νομίσματος αποτελεί ένα κλασσικό απλοϊκό δείγμα αναπαράστασης στοχαστικού φαινομένου με τη «βοήθεια» της εναλλακτικής πειραματικής μεθόδου ή απλώς προσομοίωσης. Οι δυνατότητες όμως της προσομοίωσης είναι πολύ πιο μεγάλες και δεν περιορίζονται σε τόσο απλές εφαρμογές. Πιο συγκεκριμένα, μέσω της προσομοίωσης μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει κάποια θεωρητικά αποτελέσματα, κάτι το οποίο γίνεται πιο εμφανές στο ακόλουθο παράδειγμα.

Έστω ότι ένας παίκτης ποντάρει συνεχώς 1 euro στην εμφάνιση κόκκινου φύλλου μιας τράπουλας. Προφανώς η πιθανότητα να κερδίσει ή να χάσει 1 euro είναι 50% σε κάθε ποντάρισμα, καθώς η τράπουλα περιέχει 26 κόκκινα και 26 μαύρα φύλλα. Θεωρούμε τις ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές $Z_1, Z_2, \dots$ που εκφράζουν το κέρδος ή τη ζημία του παίκτη στο πρώτο, στο δεύτερο,... ποντάρισμα. Αν συμβολίσουμε με

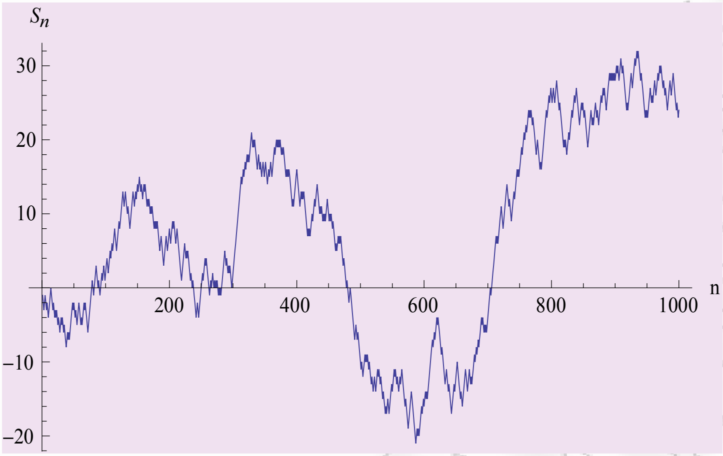
$$S_n := \sum_{j=1}^{n} Z_j$$

το συνολικό κέρδος(ή τη ζημία) του παίκτη σε $n$ το πλήθος πονταρίσματα, τότε η ακολουθία

$\{S_n, n = 1,2, \dots\}$

καλείται τυχαίος περίπατος στο χώρο $\mathbf{Z}$ και αυτό διότι η $S_n$(άθροισμα ακολουθιών από 1 και -1) δίνει την απόσταση που «διανύθηκε», αν κάθε βήμα του περιπάτου είναι μήκους ένα. Μια αναπαράσταση, μέσω Η/Υ, του παραπάνω τυχαίου περιπάτου για $n$=1000 δίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Σχήμα 4.1.1.Αναπαράσταση μέσω προσομοίωσης τυχαίου περιπάτου με βήμα 1




Επιπλέον, αποδεικνύεται πως η αναμενόμενη απόσταση $E(|S_n|)$ μετά από $n$ βήματα θα πρέπει να είναι της τάξης του $\sqrt{n}$, και μάλιστα ισχύει ότι[32]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(|S_n|)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.7978$$

κάτι το οποίο μπορεί να επαληθευτεί, «κατασκευάζοντας» $n$ το πλήθος τυχαίους αριθμούς $|S_1|, \dots, |S_n|$, από τον ακόλουθο πίνακα

| $\boldsymbol{n}$ | $\boldsymbol{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lvert S_j\rvert}{\sqrt{j}}}$ |
|---|---|
| 250 | 0.768131 |
| 500 | 0.786092 |
| 750 | 0.789395 |
| 1000 | 0.793572 |

Στις επόμενες ενότητες λοιπόν, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της προσομοίωσης για την μελέτη και την ανάλυση του διατυπωμένου στοχαστικού μοντέλου του κεφαλαίου 3.

## 4.2 Προσέγγιση Διατυπωμένου Μοντέλου Μέσω Προσομοίωσης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο προσδιορίσαμε ακριβώς το τύπο της συνάρτησης κατανομής του στοχαστικού μοντέλου

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_R\}$$

έτσι ώστε να καταστεί δυνατή η $\pi\iota\theta\alpha\nu o\theta\varepsilon\omega\rho\eta\tau\iota\kappa$ή μελέτη του(εύρεση συνάρτησης πυκνότητας, μέσης τιμής, διασποράς $\kappa.\lambda.\pi$). Πολύ συχνά όμως συναντάμε στη πράξη κάποιες ειδικές περιπτώσεις του μοντέλου αυτού όπου η ανάλυση αυτή καθίσταται από πολύ δύσκολη έως και ανέφικτη. Το γεγονός αυτό μπορεί να οφείλεται στη πεπλεγμένη-πολύπλοκη μορφή που μπορεί να έχει η συνάρτηση κατανομής του συγκεκριμένου στοχαστικού μοντέλου. Επομένως, σε αυτές τις περιπτώσεις καταφεύγουμε στη προσεγγιστική μελέτη του μοντέλου μέσω της προσομοίωσης. Για να το επιτύχουμε αυτό θα πρέπει να «παράγουμε» ένα τυχαίο δείγμα $T_1, T_2, \dots, T_m$ από τη θεωρητική κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $T$ χωρίς να απαιτείται η γνώση της συνάρτησης κατανομής $F_T(\cdot)$ αυτής. Ο γενικός αλγόριθμος για την επίτευξη του σκοπού αυτού δίνεται στη συνέχεια.

**Βήμα 1**. Παραγωγή ενός τυχαίου αριθμού $N$ από την υποτιθέμενη κατανομή που ακολουθεί η αντίστοιχη τυχαία μεταβλητή.

**Βήμα 2**. Παραγωγή $N$ το πλήθος τυχαίων αριθμών $S_1, S_2, \dots, S_N$ από τη θεωρητική κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $S$ και κατόπιν προσδιορισμός του αθροίσματος $R = S_1 + S_2 + \cdots + S_N$.

**Βήμα 3**. Παραγωγή $R$ το πλήθος τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots, X_R$ από τη θεωρητική κατανομή της μη αρνητικής τυχαίας μεταβλητής $X$ και εν συνεχεία προσδιορισμός του ελαχίστου αυτών $T = min\{X_1, X_2, \dots, X_R\}$.

**Βήμα 4**. Επανάληψη των βημάτων 1,2 και 3 ,$m$ το πλήθος φορές.

Αφότου υλοποιηθεί ο παραπάνω αλγόριθμος, θα έχουμε παραγάγει ένα (ψευδό)-τυχαίο δείγμα $T_1, T_2, \dots, T_m$ από τη θεωρητική κατανομή της τυχαίας μεταβλητής

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_R\}.$$

Σε πρώτο στάδιο λοιπόν, θα δώσουμε το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο θα βασιστούμε για τη προσέγγιση της θεωρητικής συνάρτησης κατανομής $F_T(\cdot)$ της τυχαίας μεταβλητής $T$.

Έστω $T_1, T_2, \dots, T_m$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνάρτηση κατανομής $F_T(t)$. Η εμπειρική συνάρτηση κατανομής, για κάποιο δεδομένο $t \in \mathbb{R}$, του τυχαίου δείγματος $T_1, T_2, \dots, T_m$ ορίζεται ως εξής

$$\widehat{F}_m(t) \coloneqq \frac{\#\{T_i \le t\}}{m} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} I_{(-\infty,t]}\,(T_i)$$

όπου $I_A(\cdot)$ είναι η $\delta\varepsilon\acute{\iota}\kappa\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση του συνόλου $A$.

Προφανώς η τυχαία μεταβλητή $I_{(-\infty,t]}(T_i)$ ακολουθεί τη κατανομή Bernoulli με μέση τιμή $F_T(t) \coloneqq \Pr\,[T_i \le t]$, οπότε έπεται ότι

$$m\hat{F}_m(t) := \sum_{i=1}^{m} I_{(-\infty,t]}\,(T_i) \sim B(m, F_T(t))$$

λόγω της ανεξαρτησίας των τυχαίων μεταβλητών $I_{(-\infty,t]}(T_1), \dots, I_{(-\infty,t]}(T_m)$. Συνεπώς η στατιστική συνάρτηση $\hat{F}_m(t)$ είναι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της θεωρητικής συνάρτησης κατανομής $F_T(t)$ και αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση αυτής. Άλλωστε μια επιβεβαίωση αυτού δίνεται και από το περίφημο θεώρημα των $Glivenko$ and $Cantelli$ [33] σύμφωνα με το οποίο αν

$\{\hat{F}_m(t), m = 1,2, \dots\}$

είναι μια ακολουθία εμπειρικών συναρτήσεων κατανομής, τότε αυτή συγκλίνει σχεδόν βεβαίως και ομοιόμορφα (δηλαδή για οποιοδήποτε $t \in \mathbb{R}$ κι αν θεωρήσουμε) στην $F_T(t)$ ή εναλλακτικά

$$d_K\big(\hat{F}_m, F_T\big) := \sup_{t \in \mathbb{R}} \big|\hat{F}_m(t) - F_T(t)\big| \xrightarrow{a.s.} 0, καθώς\ m \to \infty$$

όπου $d_K(\cdot,\cdot)$ είναι η λεγόμενη απόσταση $Kolmogorov$ μεταξύ δύο συναρτήσεων.

Αξίζει να σημειωθεί πως με αντίστοιχο περίπου τρόπο μπορεί κανείς να πάρει μια «ιδέα» για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $T$. Ειδικότερα, κατασκευάζοντας απλά το ιστόγραμμα και κατόπιν το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων των $T_1, T_2, \dots, T_m$.

Η συνάρτηση κατανομής $F_T$, ή εναλλακτικά η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_T$, περιγράφει επακριβώς τη κατανομή στο $[0, \infty)$ (εφόσον οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots$ είναι μη αρνητικές) της τυχαίας μεταβλητής

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_R\}.$$

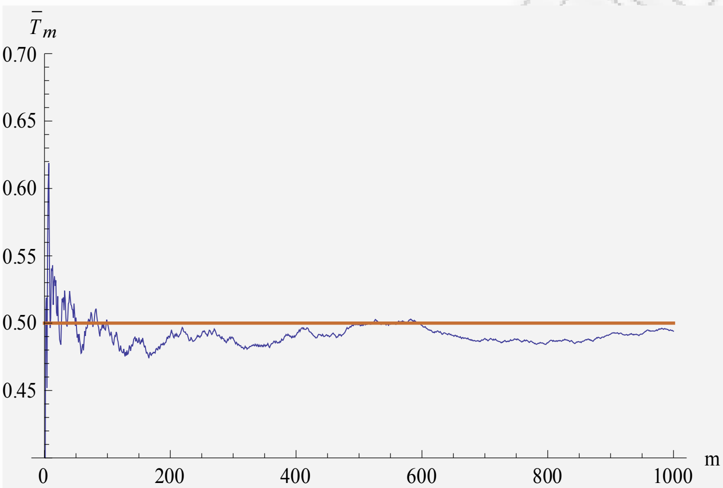
Από την άλλη όμως, δε παρέχει κάποια άμεση πληροφορία σχετικά με τις τιμές που λαμβάνει η τυχαία μεταβλητή $T$. Για παράδειγμα, θα ήταν χρήσιμο να γνωρίζουμε «γύρω» από ποια τιμή είναι «συγκεντρωμένες» οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής $T$, καθώς επίσης και το «άπλωμα» (μεταβλητότητα) αυτών σε σχέση με την εν λόγω τιμή. Για το σκοπό αυτό αποδεικνύονται χρήσιμες η μέση τιμή (κέντρο «βάρους» της κατανομής) και η διακύμανση της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $T$. Στη περίπτωση όμως που η συνάρτηση $F_T$ έχει πολύπλοκη μορφή ή δεν δίνεται από κάποιο «κλειστό» τύπο, τότε κρίνεται αναγκαία η προσέγγιση μέσω προσομοίωσης των προαναφερθέντων περιγραφικών μέτρων. Για το σκοπό αυτό αρκεί κανείς να χρησιμοποιήσει την ιδιότητα της συνέπειας του δειγματικού μέσου και της δειγματικής διασποράς.

Έστω $T_1, T_2, \dots, T_m$ ένα τυχαίο δείγμα από κατανομή με μέση τιμή $\mu = E(T)$ και διασπορά $\sigma^2 = V(T) < \infty$. Είναι γνωστό, από τον Ισχυρό Νόμο των Μεγάλων Αριθμών, ότι ο δειγματικός μέσος $\bar{T}$ συγκλίνει «σχεδόν βεβαίως» στη θεωρητική μέση τιμή $\mu$, όταν το μέγεθος του δείγματος $m$ αυξάνει απεριόριστα. Γενικά λοιπόν, ισχύει ότι

$$\bar{T} \coloneqq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} T_i \xrightarrow{a.s.} \mu = E(T), καθώς\ m \to \infty$$

κάτι που καταδεικνύεται και από το ακόλουθο σχήμα.

Σχήμα 4.2.1. Απεικόνιση του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών χρησιμοποιώντας τυχαίους αριθμούς από την Ομοιόμορφη κατανομή στο (0,1)




Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και για τη δειγματική διασπορά $S^2$ του τυχαίου δείγματος $T_1, T_2, \dots, T_m$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι

$$S^2 \coloneqq \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} (T_i - \bar{T})^2 \xrightarrow{a.s.} V(T), καθώς\ m \to \infty.$$

Στα προηγούμενα κεφάλαια διαπιστώσαμε πως σε πολλές πρακτικές και θεωρητικές εφαρμογές είναι ζωτικής σημασίας ο υπολογισμός της πιθανότητας πραγματοποίησης του ενδεχομένου

$\{\omega \in \Omega: T(\omega) \geq t_0\} \equiv \{T \geq t_0\}$.

Έστω λοιπόν $p_0$ η πιθανότητα πραγματοποίησης αυτού. Για το προσεγγιστικό υπολογισμό αυτής, όταν φυσικά δεν είναι δυνατός ο ακριβής υπολογισμός, αρκεί κανείς να ακολουθήσει το παρακάτω σκεπτικό.

Έστω $T_1, T_2, \dots, T_m$ ένα τυχαίο δείγμα από τη κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $T = \min\{X_1, \dots, X_R\}$. Ορίζουμε, $t_0$ μία συγκεκριμένη τιμή του πεδίου τιμών της τυχαίας μεταβλητής $T$, τις «βοηθητικές» τυχαίες μεταβλητές

$$W_j \coloneqq \begin{cases} 1, αν\ T_j \geq t_0 \\ 0, αν\ T_j < t_0 \end{cases}, j = 1,2, \dots, m$$

οι οποίες είναι στοχαστικά ανεξάρτητες μεταξύ τους και επιπλέον ακολουθούν όλες τη κατανομή $B(1, p_0)$ με

$$p_0 := \Pr[W_j = 1] = \Pr[\,T_j \geq t_0].$$

Από τα προηγούμενα όμως, γνωρίζουμε ότι

$$\bar{W} := \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} W_j \xrightarrow{\sigma\chi\varepsilon\delta\acute{o}\nu\ \beta\varepsilon\beta\alpha\acute{\iota}\omega\varsigma} E(W_j), \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ m \to \infty$$

όπου φυσικά

$$E(W_j) = 1\Pr[\,T_j \geq t_0] + 0\Pr[\,T_j < t_0] = \Pr[\,T_j \geq t_0] = p_0.$$

Επομένως, αφότου λάβουμε μέσω προσομοίωσης ένα αρκετά «μεγάλο» τυχαίο δείγμα $T_1, T_2, \dots, T_m$, ως εκτίμηση της ζητούμενης πιθανότητας θα χρησιμοποιήσουμε τη ποσότητα $\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} I_{[t_0,\infty)}\left(\,T_j\right)$.

Αν επιπλέον για μεγαλύτερη βεβαιότητα επιθυμούμε να βρούμε και ένα *ασυμπτωτικό* 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για την άγνωστη παράμετρο $p_0$, τότε θα πρέπει να βασιστούμε στο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Σύμφωνα με αυτό, ο δειγματικός μέσος $\bar{W}$ ενός πολύ «μεγάλου» τυχαίου δείγματος $W_1, W_2, \dots, W_m$ συγκλίνει κατά κατανομή στη κανονική κατανομή με παραμέτρους $E(W_j) = p_0$ και $\frac{V(W_j)}{m}$, δηλαδή

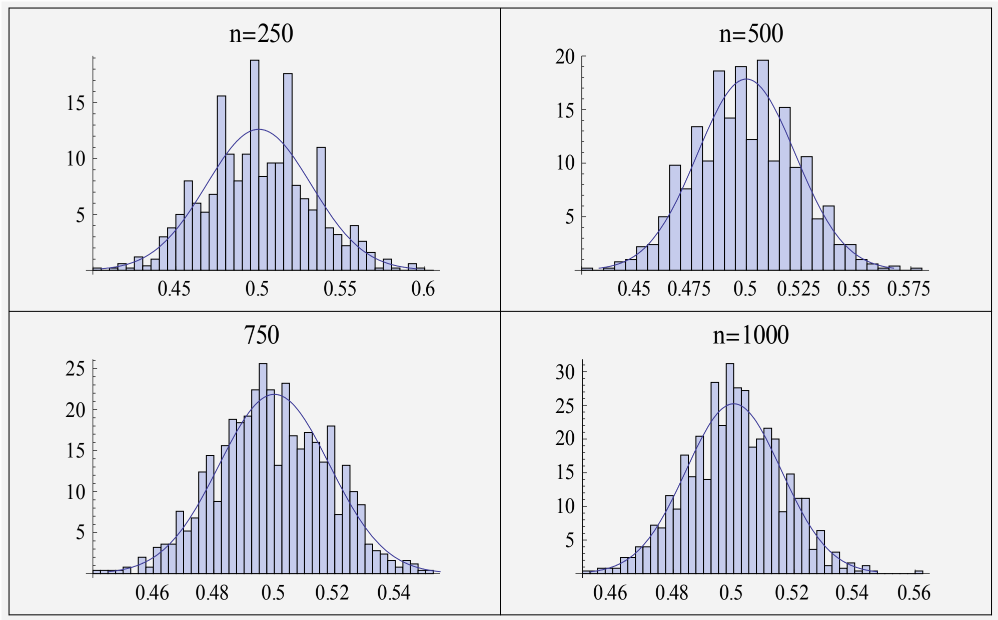
$$\bar{W}_m := \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} I_{[t_0,\infty)}\left(\,T_j\right) \overset{d}{\to} N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{m}\right), m \to \infty$$

ή εναλλακτικά

$$\lim_{m\to\infty} \Pr[\bar{W}_m \leq z] = \Phi\left(\frac{\sqrt{m}(z-p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right)$$

όπου $\Phi(\cdot)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής.

Σχήμα 4.2.2. Σύγκλιση στη κανονική κατανομή της κατανομής του δειγματικού ποσοστού «κεφαλών» μιας μεγάλης ακολουθίας ρίψεων αμερόληπτων νομισμάτων




Έστω λοιπόν $[\bar{W}_m - \varepsilon, \bar{W}_m + \varepsilon]$ το ζητούμενο τυχαίο διάστημα. Για την εύρεση του πλάτους $\varepsilon$ έχουμε τα εξής

$$\Pr([\bar{W}_m - \varepsilon, \bar{W}_m + \varepsilon] \ni p_0) = 1 - a\,, \varepsilon > 0, m \to \infty \Leftrightarrow$$

$$\Pr(\bar{W}_m - \varepsilon \le p_0 \le \bar{W}_m + \varepsilon) = 1 - a\,, \varepsilon > 0, m \to \infty \Leftrightarrow$$

$$\Pr(p_0 - \varepsilon \le \bar{W}_m \le p_0 + \varepsilon) = 1 - a\,, \varepsilon > 0, m \to \infty \Leftrightarrow$$

$$\Pr\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{m}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \le \frac{\sqrt{m}(\bar{W}_m - p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \le \frac{\varepsilon\sqrt{m}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right) = 1 - a, \varepsilon > 0, m \to \infty \Leftrightarrow$$

$$\Pr\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{m}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \le Z \le \frac{\varepsilon\sqrt{m}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right) = 1 - \alpha, \varepsilon > 0, m \to \infty \Leftrightarrow$$

όπου $Z \sim N(0,1)$, οπότε

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{m}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{m}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right) = 1 - \alpha, \varepsilon > 0, m \to \infty \Leftrightarrow$$

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{m}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right) - 1 = 1 - \alpha, \varepsilon > 0, m \to \infty \Leftrightarrow$$

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{m}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}\,, \varepsilon > 0, m \to \infty \text{ (4.2.1).}$$

Η συνάρτηση κατανομής $\Phi(\cdot)$ της $N(0,1)$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση (άρα μονότονη) και κατά συνέπεια 1-1 και επί, οπότε αντιστρέφεται και η αντίστροφη αυτής συμβολίζεται με $\Phi^{-1}$. Επομένως από τη σχέση (4.2.1) θα προκύψει ότι

$$(\Phi^{-1} o \Phi)\left(\frac{\varepsilon\sqrt{m}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right) = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \varepsilon > 0, m \to \infty \Leftrightarrow$$

$$\frac{\varepsilon\sqrt{m}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \varepsilon > 0, m \to \infty \ (4.2.2)$$

όμως

$$\Pr\left[Z > z_{\frac{a}{2}}\right] = \frac{a}{2} \Leftrightarrow 1 - \Phi\left(z_{\frac{a}{2}}\right) = \frac{a}{2} \Leftrightarrow z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση (4.2.2) καταλήγουμε στην ισότητα

$$\frac{\varepsilon\sqrt{m}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} = z_{\alpha/2} \Leftrightarrow \varepsilon = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{m}}\, z_{\alpha/2}.$$

Άρα το ζητούμενο *ασυμπτωτικό* 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για την άγνωστη πιθανότητα $p_0$ έχει τη μορφή

$$\left[\bar{W}_m - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{W}_m(1-\bar{W}_m)}{m}}, \bar{W}_m + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{W}_m(1-\bar{W}_m)}{m}}\right]$$

όπου

$$s_{\bar{W}_m} = g(\widehat{p_0}) = \sqrt{\frac{\bar{W}_m(1-\bar{W}_m)}{m}}$$

είναι η εκτίμηση του τυπικού σφάλματος $\sigma_{\bar{W}_m}$ της στατιστικής συνάρτησης $\bar{W}_m := \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} I_{[t_0,\infty)}\left(T_j\right)$ με τη μέθοδο της μέγιστης *πιθανοφάνειας*(κάνοντας χρήση της ιδιότητας του αναλλοίωτου του εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας και του γεγονότος ότι η συνάρτηση $g(y) = \sqrt{y(1-y)/m}$ είναι 1-1).

Όλα τα παραπάνω θεωρητικά αποτελέσματα θα χρησιμοποιηθούν για τη μελέτη του στοχαστικού μοντέλου

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_R\}$$

σε κάποιες ιδιάζουσες και παράλληλα ενδιαφέρουσες ειδικές περιπτώσεις όπως αυτές που ακολουθούν.

Έστω ότι η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$N$

έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$f_N(n) \coloneqq \Pr[N = n] = p(1-p)^{n-1}\, , p \in (0,1), n = 1,2, \dots$$

και επιπλέον η επίσης διακριτή τυχαία μεταβλητή

$S$

έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$f_S(s) \coloneqq \Pr[S = s] = \theta(1-\theta)^{s-1}\, , \theta \in (0,1), s = 1,2, \dots$$

Στη περίπτωση αυτή, είχαμε διαπιστώσει πως το διακριτό τυχαίο άθροισμα

$$R = S_1 + S_2 + \cdots + S_N$$

ακολουθεί τη Γεωμετρική τύπου $II$ κατανομή με $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση

$$P_R(z) \coloneqq E(z^R) = \frac{cz}{1-\ell z}\, , c = p\theta, \ell = 1-c, |z| \leq \frac{1}{\ell}.$$

Έστω ακόμη, από τη φύση του προβλήματος ή από κάποια στατιστικά στοιχεία, ότι οι τυχαίες μεταβλητές της ακολουθίας

$\{X_r, r = 1,2, \dots\}$

ακολουθούν τη κατανομή $\Gamma\acute{\alpha}\mu\mu\alpha$ με θετικές παραμέτρους α και β, δηλαδή

$X_r \sim Gamma(\alpha, \beta), \forall\, r \in \{1,2, \dots\}$.

Τότε, η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής

$X$

είναι ίση με

$$F_X(t) \coloneqq \Pr[X \leq t] = \int_0^t \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta t}, a > 0, \beta > 0$$

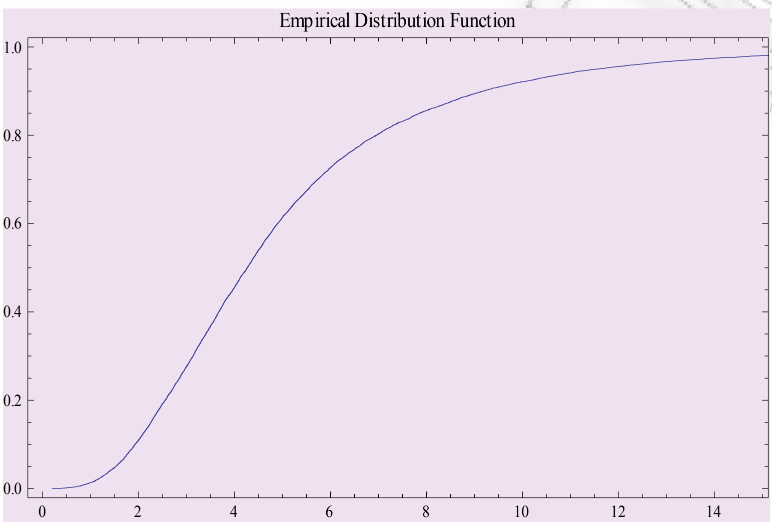
οπότε προφανώς καθίσταται αδύνατη η αναλυτική μελέτη του διατυπωμένου στοχαστικού μοντέλου μέσω της σχέσης

$$F_T(t) = P_R[1 - F_X(t)]\, .$$

Σε αυτή τη περίπτωση αν οι παράμετροι $p, \theta, \alpha$ και $\beta$ θεωρούνται γνωστοί ή έχουν εκτιμηθεί είτε εμπειρικά είτε βάσει παλαιότερων στατιστικών στοιχείων, τότε ο μοναδικός τρόπος μελέτης του διαμορφωμένου στοχαστικού μοντέλου είναι μέσω προσομοίωσης. Παρακάτω λοιπόν, αξιοποιούνται όλα τα προαναφερθέντα θεωρητικά αποτελέσματα στη περίπτωση που $p = 0.3, \theta = 0.6, \alpha = 3.5$ και $\beta = 2.5$. Ειδικότερα, παρατίθεται το γράφημα της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής, το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, ο δειγματικός μέσος, η δειγματική διασπορά, καθώς και μια εκτίμηση της πιθανότητας $p_0$ για $t_0 = 10$ ,ενός τυχαίου δείγματος $T_1, T_2, \dots, T_m$ ,$m = 10000$ παρατηρήσεων ,από τη θεωρητική-άγνωστη κατανομή της τυχαίας μεταβλητής

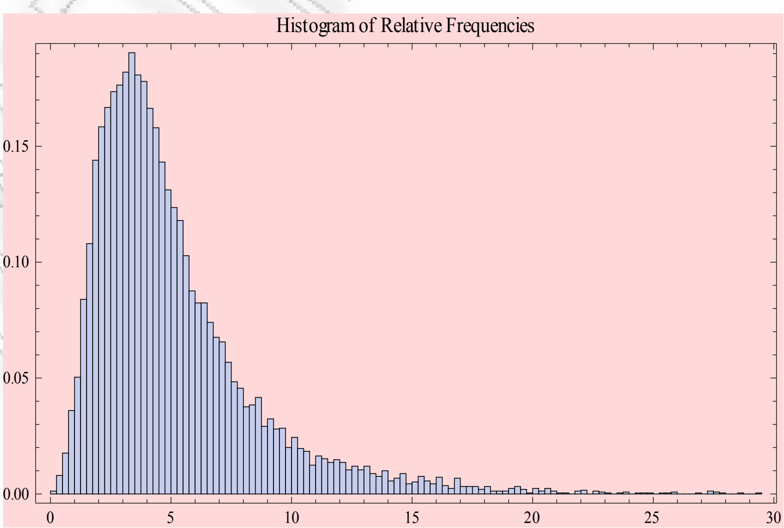
$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_R\}.$$

Σχήμα 4.2.3. Γράφημα εμπειρικής συνάρτησης κατανομής




Είναι φανερό λοιπόν, κάνοντας πολλές επαναλήψεις του αλγορίθμου που εισαγάγαμε στην ενότητα αυτή, πως μπορούμε να λάβουμε μία αρκετά ικανοποιητική προσέγγιση της πραγματικής συνάρτησης κατανομής $F_T(t)$ μέσω της εμπειρικής $\hat{F}_m(t)$.

Σχήμα 4.2.4. Ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων



Από το παραπάνω σχήμα λαμβάνουμε μια «εικόνα» για το τρόπο με τον οποίο κατανέμεται η πυκνότητα της πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $T$ σε όλο το πεδίο τιμών της, καθώς η μορφή του ιστογράμματος σχετικών συχνοτήτων προσεγγίζει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας $f_T$.

Επιπλέον, «τρέχοντας» τον ίδιο αλγόριθμο $m = 10000$ φορές, λαμβάνουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις των περιγραφικών μέτρων της μέσης τιμής και της διακύμανσης της τυχαίας μεταβλητής $T$.

*The simulated mean value of random variable T is: 5.07248*

*The simulated variance of random variable T is: 11.1326*

Οπότε αν το στοχαστικό μοντέλο

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_R\}$$

εκφράζει το χρόνο ζωής σε έτη ενός προηγμένου συστήματος, το οποίο απειλείται από έναν τυχαίο αριθμό ανεξάρτητων καταστροφικών κινδύνων, τότε ο αναμενόμενος χρόνος ζωής του θα είναι ίσος με $\hat{\mu}_T = 5.072$ έτη με τυπική απόκλιση $\hat{\sigma}_T = \sqrt{11.1326} = 3.336$ έτη.

Τέλος, σχετικά με την πιθανότητα $p_0$ πραγματοποίησης του ενδεχομένου $\{T \geq 10\}$, λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

*The estimated probability of the event {T>=10} is : 0.084*

*The 95% asymptotic confidence interval is : {0.0785632,0.0894368}.*

Επομένως, αν το στοχαστικό μοντέλο

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_R\}$$

εκφράζει το χρόνο ζωής σε έτη ενός προηγμένου συστήματος, το οποίο απειλείται από έναν τυχαίο αριθμό ανεξάρτητων καταστροφικών κινδύνων, τότε η πιθανότητα «επιβίωσης» αυτού για τουλάχιστον δέκα έτη είναι προσεγγιστικά ίση με 8.4%.

Στη συνέχεια της ενότητας αυτής θα εξετάσουμε μία ακόμα ιδιαίτερα σημαντική ειδική περίπτωση, η οποία επίσης παρουσιάζει δυσκολίες αναφορικά με την αναλυτική μελέτη του διατυπωμένου στοχαστικού μοντέλου και συνεπώς προσεγγίζεται μέσω προσομοίωσης.

Συγκεκριμένα, έστω ότι η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$N$

ακολουθεί μια «αποκομμένη» από τη τιμή μηδέν κατανομή Poisson με κάποια θετική παράμετρο $\lambda$ οπότε και θα έχουμε

$$P_N(z) = \frac{e^{\lambda z} - 1}{e^{\lambda} - 1}, \lambda > 0 .$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$S$

ακολουθεί τη Γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_S(s) \coloneqq \Pr[S = s] = w(1-w)^{s-1}, w \in (0,1), s = 1,2, \dots$$

Η κανονική κατανομή ως γνωστόν εμφανίζεται σε μοντέλα που περιλαμβάνουν αθροίσματα μεγάλου πλήθους ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το μοντέλο εμφάνισης shocks, στο οποίο ένα σύστημα «αντέχει» $\kappa$ το πλήθος shocks έως ότου πάψει να λειτουργεί εντελώς. Ειδικότερα, αν οι τυχαίες μεταβλητές

$Y_1, Y_2, \dots$

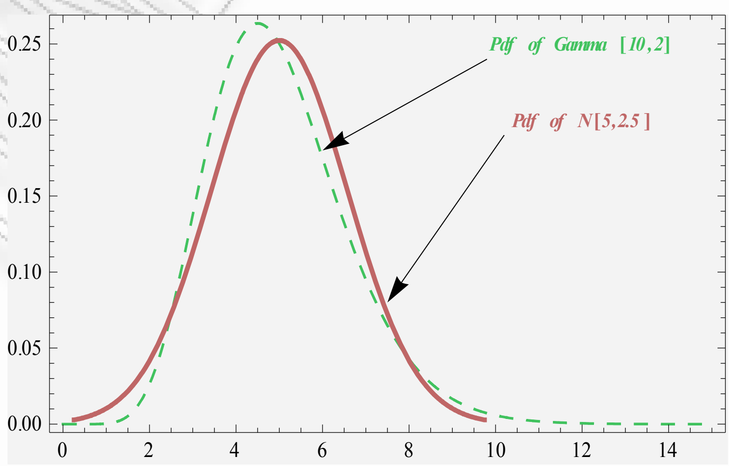
είναι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών εμφανίσεων shocks, τότε προφανώς ο χρόνος ζωής του συστήματος θα εκφράζεται μέσω της τυχαίας μεταβλητής

$$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_\kappa$$

η οποία ουσιαστικά ταυτίζεται με το χρόνο πραγματοποίησης ενός καταστροφικού κινδύνου. Αν το πλήθος $\kappa$ είναι αρκετά «μεγάλο», τότε σύμφωνα με το **Κ**εντρικό **Ο**ριακό **Θ**εώρημα μπορούμε προσεγγιστικά να πούμε ότι η τυχαία μεταβλητή $X$ ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\kappa\mu, \kappa\sigma^2)$ όπου $\mu = E(Y_i)$ και $\sigma^2 = V(Y_i)$.

Αν παραδείγματος χάριν οι τυχαίες μεταβλητές $Y_i, i = 1,2, \dots, \kappa$, ακολουθούν Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda$, τότε $X \sim Gamma(\kappa, \lambda)$ και άρα σύμφωνα με τα παραπάνω θα πρέπει η κατανομή $Gamma(\kappa, \lambda)$ να προσεγγίζεται από την $N(\frac{\kappa}{\lambda}, \frac{\kappa}{\lambda^2})$.

Σχήμα 4.2.5.Προσέγγιση της κατανομής $Gamma(\kappa, \lambda)$ από την $N(\frac{\kappa}{\lambda}, \frac{\kappa}{\lambda^2})$ στη περίπτωση όπου $\lambda = 2$ και $\kappa = 10$



Σε αυτό το σημείο όμως θα πρέπει να επισημανθεί ότι η κανονική κατανομή έχει ένα σοβαρό μειονέκτημα ως κατανομή χρόνου ζωής. Συγκεκριμένα, αν υποθέσουμε ότι

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

τότε η τυχαία μεταβλητή $X$ θεωρητικά μπορεί να λάβει και αρνητικές τιμές, καθώς το στήριγμα της κατανομής της είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, κάτι που προφανώς δεν είναι αποδεκτό για χρόνους ζωής. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε τη κανονική ως κατάλληλη κατανομή μόνο στη περίπτωση που οι παράμετροι $\mu$ και $\sigma^2$ είναι τέτοιες ,ώστε η συνολική πυκνότητα της πιθανότητας να κατανέμεται στον θετικό $ημιάξονα$. Αυτό συμβαίνει όταν

$$\Pr[\mathrm{X} > 0] \approx 1 \Leftrightarrow 1 - \Pr[X \leq 0] \approx 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - \Pr\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq -\frac{\mu}{\sigma}\right] \approx 1 \Leftrightarrow 1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \approx 1 \Leftrightarrow \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \approx 0$$

Συμπερασματικά λοιπόν, επειδή $\Phi(z) \approx 0$ για $z \in (-3, -\infty)$ θα πρέπει να θεωρήσουμε μια κανονική κατανομή με $-\mu/\sigma < -3$ ή ισοδύναμα $\mu > 3\sigma$. Μάλιστα, στη περίπτωση αυτή, αποδεικνύεται πως η τυχαία μεταβλητή

$X$

έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \mu, \sigma^2 > 0, x \in [0, \infty)$$

και λέμε πως ακολουθεί τη μετατοπισμένη κανονική κατανομή(truncated normal distribution) με παραμέτρους $\mu$ και $\sigma^2$[34].Είναι φανερό άλλωστε πως αν ισχύει $\mu > 3\sigma$ ,τότε $\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \approx 1$ και η παραπάνω συνάρτηση πυκνότητας ταυτίζεται με αυτήν της κανονικής κατανομής με τις ίδιες παραμέτρους.

Με βάση λοιπόν τη προηγηθείσα συζήτηση, υποθέτουμε ότι η μη αρνητική τυχαία μεταβλητή

$X$

ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu$ και διασπορά $\sigma^2$ τέτοιες ώστε να ισχύει $\mu > 3\sigma$. Οπότε, επειδή

$$F_X(t) \coloneqq \Pr[X \leq t] = \int_0^t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

είναι φανερό πως η εύρεση της συνάρτηση κατανομής $F_T(t)$ του στοχαστικού μοντέλου

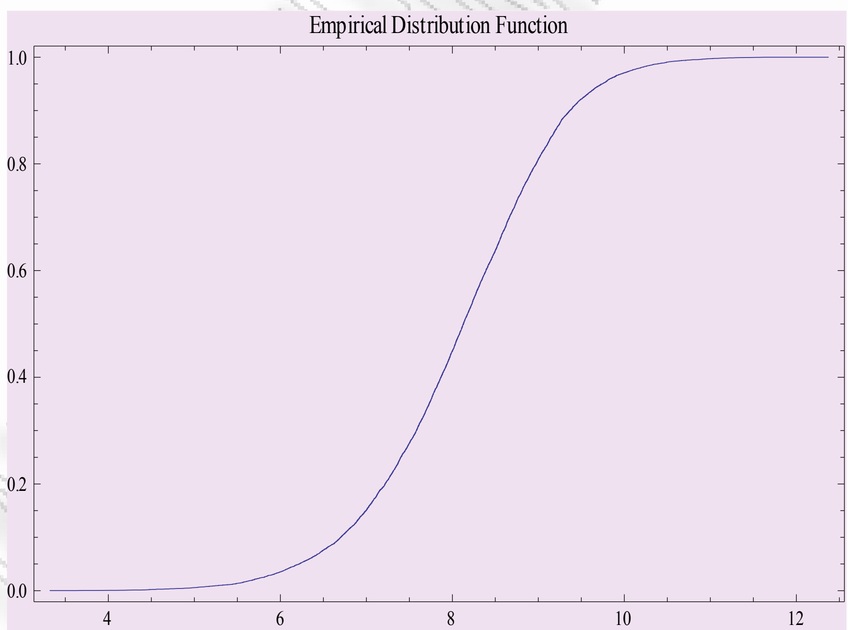
$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_R\}$$

μέσω της σχέσης (3.3.5) καθίσταται ανέφικτη.

Και σε αυτή τη περίπτωση αν οι παράμετροι $\lambda, w, \mu$ και $\sigma^2$ θεωρούνται γνωστοί ή έχουν εκτιμηθεί είτε εμπειρικά είτε βάσει παλαιότερων στατιστικών στοιχείων, τότε ο μοναδικός τρόπος μελέτης του διαμορφωμένου στοχαστικού μοντέλου είναι μέσω προσομοίωσης. Ουσιαστικά, εκτελώντας τον αλγόριθμο που δώσαμε στην ενότητα αυτή, κάνουμε ένα είδος «απομίμησης» της λειτουργίας ενός προηγμένου συστήματος υπό τον κίνδυνο εμφάνισης ενός τυχαίου αριθμού καταστροφικών κινδύνων, οι οποίοι πραγματοποιούνται σε τυχαίες χρονικά στιγμές σύμφωνα με το μοντέλο της κανονικής κατανομής. Ειδικότερα, θα πραγματοποιήσουμε αυτού του είδους την «απομίμηση» στη περίπτωση που $\lambda = 10, w = 0.4, \mu = 12$ και $\sigma = 3$. Στη συνέχεια λοιπόν, παρατίθεται το γράφημα της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής, το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, ο δειγματικός μέσος, η δειγματική διασπορά, καθώς και μια εκτίμηση της πιθανότητας $p_0$ για $t_0 = 10$ ,ενός τυχαίου δείγματος $T_1, T_2, \dots, T_m$ ,$m = 10000$ παρατηρήσεων, από τη θεωρητική-άγνωστη κατανομή της τυχαίας μεταβλητής

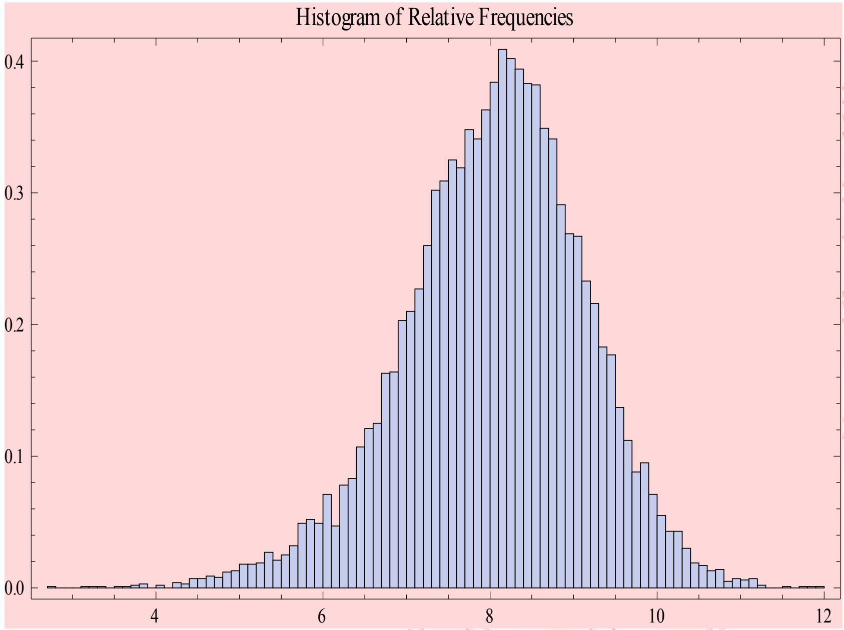
$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_R\}\,.$$

Σχήμα 4.2.6. Γράφημα εμπειρικής συνάρτησης κατανομής




Από το παραπάνω σχήμα λαμβάνουμε μια άκρως ικανοποιητική προσέγγιση της συνάρτησης κατανομής $F_T(\cdot)$ του διατυπωμένου στοχαστικού μέσω της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής ενός τυχαίου δείγματος $T_1, T_2, \dots, T_m$ ,$m = 10000$ παρατηρήσεων, που «παραγάγαμε» μέσω προσομοίωσης.

Σχήμα 4.2.7. Ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων




Το παραπάνω ιστόγραμμα μας δίνει μια πρώτη εποπτική εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο «απλώνεται» η συνολική «πυκνότητα» της πιθανότητας στα στοιχεία του συνόλου τιμών $\{t \in \mathbb{R}: t \geq 0\}$ της τυχαίας μεταβλητής $T$.

Παρακάτω δίνονται, κάτω από τις προαναφερθείσες υποθέσεις, κάποιες προσεγγίσεις της μέσης τιμής και της διακύμανσης της τυχαίας μεταβλητής $T$.

*The simulated mean value of random variable T is : 8.07219*

*The simulated variance of random variable T is : 1.19721*

Επομένως, σε αυτή την ειδική περίπτωση, εάν το στοχαστικό μοντέλο

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_R\}$$

παριστάνει το χρόνο ζωής σε έτη ενός προηγμένου συστήματος, το οποίο απειλείται από έναν τυχαίο αριθμό ανεξάρτητων καταστροφικών κινδύνων, τότε ο αναμενόμενος χρόνος ζωής του θα είναι ίσος με $\hat{\mu}_T = 8.072$ έτη με τυπική απόκλιση $\hat{\sigma}_T = \sqrt{1.1971} = 1.0941$ έτη.

Τέλος σχετικά με τη πιθανότητα $p_0$ πραγματοποίησης του ενδεχομένου

$\{\omega \in \Omega: T(\omega) \geq 10\} = \{T \geq 10\}$

παρατίθενται στη συνέχεια μια σημειακή εκτίμηση καθώς και ένα 95% *ασυμπτωτικό* διάστημα εμπιστοσύνης.

*The estimated probability of the event {T>=10} is: 0.0285*

*The asymptotic 95% confidence interval is: {0.0252386,0.0317614}*

Δηλαδή, σύμφωνα με τα παραπάνω, η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή $T$ να λάβει τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του δέκα είναι προσεγγιστικά ίση με 2.8%, ενώ το διάστημα εμπιστοσύνης μας «βοηθά» για παράδειγμα στο να αποφανθούμε κατά της μηδενικής υπόθεσης, σε επίπεδο σημαντικότητας α=5%, αναφορικά με τον έλεγχο

$$H_0: p_0 = 0.02 \; vs \; H_1: p_0 \neq 0.02$$

διότι η τιμή 0.02 δεν ανήκει στο εν λόγω διάστημα.

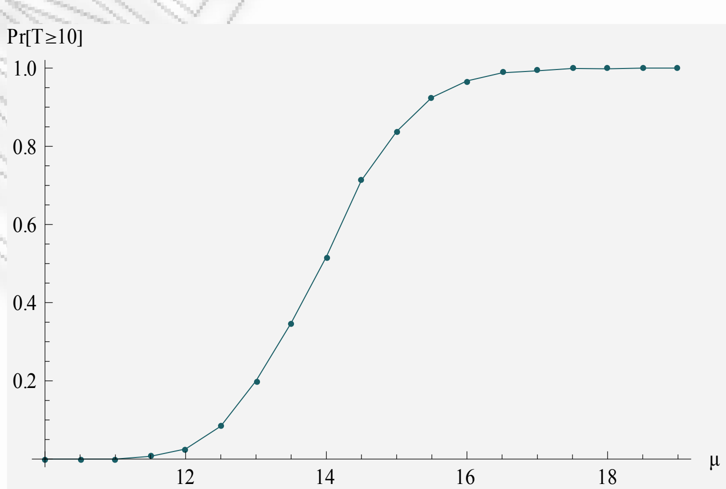
Οι δυνατότητες της προσομοίωσης δεν περιορίζονται μόνο στα προηγούμενα αποτελέσματα. Η τεράστια υπολογιστική ισχύς των Η/Υ επιτρέπει την επανάληψη των αλγορίθμων δεκάδες έως και εκατοντάδες χιλιάδες φορές, έτσι ώστε να καθίσταται δυνατή η εξαγωγή ακόμα πιο σύνθετων συμπερασμάτων σχετικά με το διατυπωμένο στοχαστικό μοντέλο

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_R\}.$$

Πιο συγκεκριμένα, πολλές φορές οι αναλυτές επιθυμούν τη μελέτη του βαθμού της εξάρτησης ενός μοντέλου από τις παραμέτρους του. Για παράδειγμα, εάν πρόκειται για ένα στοχαστικό μοντέλο, τότε είναι πολύ πιθανό να μας ενδιαφέρει πως μεταβάλλεται η κατανομή πιθανοτήτων του σε περίπτωση που έχουμε κάποια μεταβολή σε μία ή και σε περισσότερες παραμέτρους του. Προφανώς εάν η παραπάνω διαδικασία δε μπορεί να επιτευχθεί με αναλυτικές μεθόδους, τότε χρησιμοποιείται η τεχνική της προσομοίωσης κατάλληλα τροποποιημένη.

Ας υποθέσουμε λοιπόν, ευρισκόμενοι στην ίδια ειδική περίπτωση με πριν, ότι επιθυμούμε να εξετάσουμε την εξάρτηση ,από κάποια παράμετρο, της «ουράς» $\Pr[T \geq t]$ του εν λόγω μοντέλου. Θεωρούμε ότι οι παράμετροι $\lambda, w, \sigma^2$ είναι γνωστές-μη μεταβαλλόμενες και επιθυμούμε την εξαγωγή συμπερασμάτων για την $p_0 = \Pr[T \geq t_0]$,για $t_0 = 10$, στη περίπτωση που μεταβάλλεται η παράμετρος $\mu$. Για το σκοπό αυτό παρατίθεται το ακόλουθο σχήμα που προέκυψε.

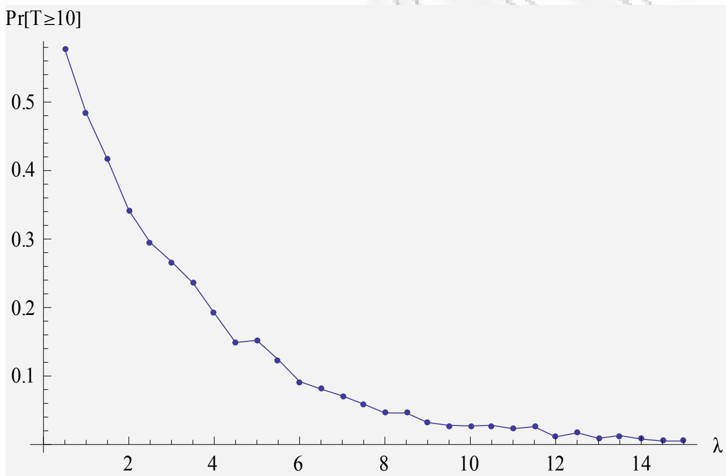
Σχήμα 4.2.8.Γραφική απεικόνιση της μεταβολή της «ουράς» της κατανομής της $T$ καθώς αυξάνεται η παράμετρος $\mu$



Από το παραπάνω σχήμα γίνεται εύκολα αντιληπτό πως όσο περισσότερο αυξάνει η παράμετρος $\mu$ του μοντέλου, τόσο πιο «βαριά» γίνεται η «ουρά» της κατανομής αυτού ή ισοδύναμα μεγαλώνει η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή $T$ να λάβει τιμές περισσότερο «απομακρυσμένες» από τη μέση τιμή της $E(T)$. Απλούστερα αν η τυχαία μεταβλητή $T$ παριστάνει το χρόνο ζωής ενός προηγμένου συστήματος που απειλείται από $R$ καταστροφικούς κινδύνους, τότε όσο περισσότερο αυξάνει ο αναμενόμενος χρόνος εμφάνισης ενός καταστροφικού κινδύνου, τόσο πιο πιθανό είναι να «επιβιώσει» το σύστημα για τουλάχιστον χρόνο $t_0$. Το οποίο άλλωστε ήταν και αναμενόμενο να ισχύει.

Στη συνέχεια δίνεται ένα ακόμα παρόμοιο σχήμα, αλλά αυτή τη φορά στη περίπτωση που μεταβάλλεται η παράμετρος $\lambda$ και όλες οι υπόλοιπες παραμένουν σταθερές.

Σχήμα 4.2.9.Γραφική απεικόνιση της μεταβολή της «ουράς» της κατανομής της $T$ καθώς αυξάνεται η παράμετρος $\lambda$




Είναι φανερό ότι όσο περισσότερο αυξάνεται η παράμετρος $\lambda$ του μοντέλου, τόσο πιο «απίθανο» να πραγματοποιηθεί γίνεται το ενδεχόμενο $\{T \geq 10\}$.

## 4.3 Προσέγγιση Διατυπωμένου Μοντέλου Μέσω Προσομοίωσης στη Περίπτωση Εξαρτημένων Τυχαίων Μεταβλητών

Στο τρίτο κεφάλαιο δώσαμε τον ορισμό και προσδιορίσαμε τη συνάρτηση κατανομής του στοχαστικού μοντέλου

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_R\}$$

υπό την προϋπόθεση ότι

$$N, \{S_n, n = 1,2, \dots\}, \{X_r, r = 1,2, \dots\}$$

είναι πλήρως ανεξάρτητες.

Κάτι τέτοιο όμως πολύ συχνά δεν αντικατοπτρίζει τη πραγματικότητα και καθιστά το προαναφερθέν μοντέλο μη ρεαλιστικό. Στη πραγματικότητα η προηγούμενη υπόθεση περί ανεξαρτησίας γίνεται για απλουστευτικούς λόγους με σκοπό την ευκολότερη αναλυτική μελέτη του εν λόγω μοντέλου.

Στη πράξη εμφανίζονται περιπτώσεις αρκετά πιο σύνθετες-πολύπλοκες, όπου τέτοιου είδους υποθέσεις είναι αυθαίρετες και οδηγούν σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Μια τέτοια περίπτωση που μπορεί να συναντήσει κανείς, ο οποίος ασχολείται πρακτικά ή θεωρητικά με τη μοντελοποίηση στοχαστικών καταστάσεων, είναι και η επόμενη.

Έστω ότι η διακριτή τυχαία μεταβλητή

$N$

έχει $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση

$$P_N(z) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} z^n \Pr[N = n]$$

και επιπλέον οι τυχαίες μεταβλητές της ακολουθίας

$\{S_n, n = 1,2, \dots\}$

είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες με την τυχαία μεταβλητή

$S$

της οποίας η κατανομή όμως εξαρτάται από τη τιμή που έλαβε η $N$. Οπότε είναι εύκολα αντιληπτό πως για τη $\pi\iota\theta\alpha\nu o\gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha$ συνάρτηση του τυχαίου αθροίσματος

$$R = S_1 + S_2 + \cdots + S_N$$

**δεν** ισχύει ο τύπος στην (3.3.1).

Ακόμα, θεωρούμε πως οι μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές της ακολουθίας

$\{X_r, r = 1,2, \dots\}$

είναι μεταξύ τους στοχαστικά ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες με τη τυχαία μεταβλητή

$X$

της οποίας η κατανομή εξαρτάται από τη τιμή που έλαβε το τυχαίο άθροισμα $R$(δηλαδή οι τυχαίες μεταβλητές $X$ και $R$ θεωρούνται εξαρτημένες). Στη περίπτωση αυτή είναι εύκολα αντιληπτό, ότι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $T$ **δε** μπορεί να βρεθεί μέσω του τύπου

$$F_T(t) = 1 - P_N[P_S(1 - F_X(t))]$$

καθώς αυτός πλέον δεν ισχύει, και προφανώς μοναδική λύση στο πρόβλημα δίνει η διαδικασία της προσομοίωσης. Στη συνέχεια λοιπόν, δίνεται ο γενικός αλγόριθμος για τη προσομοίωση του διατυπωμένου στοχαστικού μοντέλου στη περίπτωση εξαρτημένων δομικών (τυχαίων) μεταβλητών.

**Βήμα 1**. Παραγωγή ενός τυχαίου αριθμού $N$ από την υποτιθέμενη κατανομή που ακολουθεί η αντίστοιχη τυχαία μεταβλητή.

**Βήμα 2**. Παραγωγή $N$ το πλήθος τυχαίων μεταβλητών $S_1, S_2, \dots, S_N$ από τη θεωρητική κατανομή της δεσμευμένης τυχαίας μεταβλητής $S/N = n$ και κατόπιν προσδιορισμός του αθροίσματος $R = S_1 + S_2 + \cdots + S_N$

**Βήμα 3**. Παραγωγή $R$ το πλήθος τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots, X_R$ από τη θεωρητική κατανομή της δεσμευμένης τυχαίας μεταβλητής $X/R = r$ και εν συνεχεία καθορισμός του $T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_R\}$

**Βήμα 4**. Επανάληψη των βημάτων 1,2 και 3 ,$m$ το πλήθος φορές.

Ειδικότερα, έστω ότι η τυχαία μεταβλητή

$N$

ακολουθεί τη Γεωμετρική κατανομή με $πιθανογεννήτρια$ συνάρτηση

$$P_N(z) = \frac{pz}{1 - qz}, p \in (0,1), q = 1 - p, |z| \leq \frac{1}{q}$$

και επιπλέον θεωρούμε πως η δεσμευμένη τυχαία μεταβλητή

$S|N = n$

ακολουθεί επίσης τη Γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$\mathrm{f_{S|N}(s|n)} = \Pr[S = s|N = n] = \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)^{s-1}, s = 1,2, \dots$$

Τέλος, υποθέτουμε ότι η δεσμευμένη τυχαία μεταβλητή

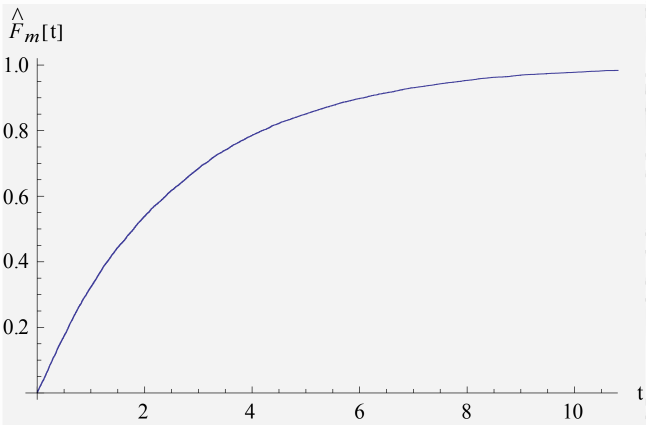
$X|R = r$

ακολουθεί Εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

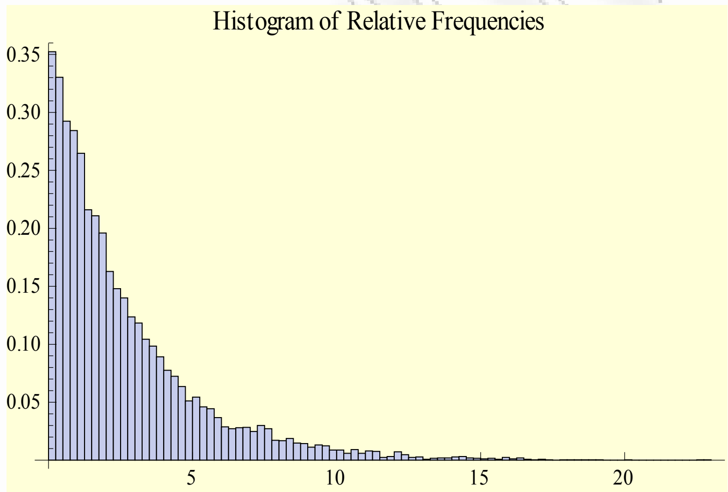
$$f_{X|R}(x|r) = \left(\frac{1}{2r+1}\right) e^{-\frac{x}{2r+1}}, x \in [0, \infty).$$

Με βάση λοιπόν όλα τα παραπάνω, εκτελώντας τον αλγόριθμο $m = 10000$ φορές για $p = 0.85$,λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Σχήμα 4.3.1.Γράφημα εμπειρικής συνάρτησης κατανομής




Σχήμα 4.3.2.Ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων




*The simulated mean value of the stochastic model T is: 2.63278*

*The simulated variance of the stochastic model T is: 7.01337*

Άρα μια προσέγγιση της αναμενόμενης τιμής του στοχαστικού μοντέλου $T$, σε αυτή την περίπτωση των εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών, είναι η ποσότητα $\hat{\mu}_T = 2.63278$ ,ενώ η αντίστοιχη (εκτιμημένη) τυπική απόκλιση είναι ίση με $\sqrt{7.01337} = 2.64$.

*The estimated probability of the event* $\{T \geq \hat{\mu}_T\}$ *is: 0.3717*

*The asymptotic 95% confidence interval is: {0.362228, 0.381172}*

Επομένως η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή $T$ να πάρει τιμές μεγαλύτερες της μέσης τιμής της $E(T)$ είναι προσεγγιστικά ίση με 37%. Επιπλέον, από το δοθέν διάστημα εμπιστοσύνης απορρίπτουμε, σε επίπεδο σημαντικότητας α=5%,τη μηδενική υπόθεση στον έλεγχο

$$H_0: M_T = E(T) \; vs \; H_1: M_T \neq E(T)$$

όπου $M_T$ είναι η θεωρητική διάμεσος της τυχαίας μεταβλητής $T$, για την οποία ισχύει ότι

$$P(T \leq M_T) = P(T \geq M_T) = \int_{M_T}^{\infty} f_T\,(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Ουσιαστικά δηλαδή απορρίπτουμε, με πιθανότητα της τάξης του 5% να έχουμε σφάλει, την υπόθεση ότι η διάμεσος της κατανομής της $T$ ταυτίζεται με τη μέση τιμή αυτής.

## 4.4.Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο που μόλις ολοκληρώθηκε διαπιστώσαμε την ισχύ και τη σπουδαιότητα της μεθόδου της προσομοίωσης αναφορικά με τη μελέτη σύνθετων στοχαστικών μοντέλων, καθώς μέσω αυτής δίνεται η δυνατότητα εξαγωγής χρήσιμων συμπερασμάτων με σχετική ευκολία. Επιπλέον γίνεται εμφανές πως η προσομοίωση συμβάλλει θετικά στην «άνθηση» της έρευνας που σχετίζεται με πρακτικά και θεωρητικά ζητήματα της διαχείρισης κινδύνων, καθώς μέσω αυτής παρακάμπτονται οι δυσκολίες που ανακύπτουν λόγω πολυπλοκότητας των εξεταζόμενων μοντέλων.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1].Hubbard Douglas (2009). The Failure of Risk Management:Why It's Broken and How to Fix it. John Wiley & Sons.p.46.

[2].Bender, E.A. (2000). An Introdutction to Mathematical Modelling. New York:Dover.

[3].Jun Cai and Vlad.Kalashnikov (2000). NWU Property of a Class of Random Sums. Journal of Applied Probability. p.283-289.

[4].Revfeim, K.J.A. (1984). An initial model of the relationship between rainfall events and daily rainfalls.

[5].Teamah A.M., Abd-El-Moneom. Random Sum of Mixtures of Sum of Bivariate Exponential Distributions. Journal of Mathematics and Statistics.

[6].Patrick Billingsley(1979).Probability and Measure.New York,Toronto,London:John Wiley & Sons.

[7].Lucacs, E. (1970). Characteristic functions. London:Griffin

[8].Bohmann, H. (1970). A method to calculate the distribution function when the characteristic function is known. Nordisk Tidskr. Informationsbehandling (BIT) 10. p.237-242.

[9].Cantor, G. (1874)."Uber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraishen Zahlen". Crelles Journal f.Mathematik 77. p.258-262.

[10].Kotz,S.,Nadarajah,S.(2000)."ExtremeValueDistribution:Theoryand Applications". London:Imperial College Press.

[11].Gumbel, E.J. (1958). "Statistics of Extremes". Columbia University Press,New York.

[12].Artikis, P.T.,Artikis, C.T. (2009). Recovery Time of a Complex System in Risk and Crisis Management Operations. International Journal of Decision Sciences, Risk and Management 1. p.104-111.

[13].Levesson, N.,Harvey, P. (1983). Analyzing Software Safety. IEEE Transformations on Software Engineering 915. p.569-579.

[14].Littlewood, B.,Stringini, L. (1992). The Risk of Software. Scientific American 26715. p.38-43.

[15].Parker, D. (1998). Fighting Computer Crime. Wiley

[16].Schweitzer, J. (1996). Protecting Business Information. Butterworth-Heinemann.

[17].Wright, M. (1999). Third Generation Risk Management Practices. Computer Fraud and Security. p.9-12.

[18].Artikis, P.T.,Artikis, C.T. Applications of a Stochastic Model in Supporting Intelligent Multimedia Systems and Educational Processes.

[19].Jordan, K. (2001). Multimedia: From Wagner to Virtual Reality. Norton, New York.

[20].Tsihrintzis, G.,Jain, L. (2008). Multimedia Services in Intelligent Environments: An Introduction. In: Tsihrintzis, G.,Jain, L. (eds) Studies in Computational Intelligence. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg. Vol 120. p.1-8.

[21].Vaughan, T. (2004). Multimedia: Making it Work. McGraw Hill,Burr Bridge. Illinois,USA (6th edition).

[22].Rao, K.,Bojkovic, Z.,Milovanovic, D. (2002). Multimedia Communication Systems: Techniques,Standards,and Networks. Prentice-Hall,Englewood Cliffs,NJ.

[23].Mandal, M. (2002). Multimedia Signals and Systems. Kluwer,Dordecht.

[24].Bhatnagar, S. (2004). e-Government: From Vision to Implementation-A Practical Guide with Case Studies. Sage Publications,Thousand Oaks,California USA.

[25].Clark, R.,Mayer, R. (2008). e-Learning and the Science of Instruction: Proven guidelines for Consumers and Designers of Multimedia Learning. Wiley,New York.

[26].Prabhakaran, B. (1997). Multimedia Database Management Systems. Kluwer,Dordecht.

[27].Witten, I.,Bainbridge, D. (2003). How to Build a Digital Library. Morgan Kaufmann. Los Altos,CA.

[28]. Artikis, P.T.,Artikis, C.T. (2009). Learning Processes and Information Management Operations Utilizing a Class of Random Sums. Collnet Journal of Scientometrics and Information Management 3. p.31-38.

[29].Constandanche, G. (2000). Models of Reality and Reality of Models. Kybernetes 29. p.1069-1077.

[30].Eriksson, D. (2003). A Framework for the Constitution of Modelling Processes: A Proposition. European Journal of Operational Research 145. p.202-215.

[31].Boutsikas, M.V. (2004). Σημειώσεις μαθήματος: «Μέθοδοι Προσομοίωσης και Στατιστικές Υπολογιστικές Τεχνικές».

[32].William Feller (1968). An Introduction to Probability Theory and it’s Applications (Volume 1). ISBN 0-471-25708-7.

[33]. Van der Vaart, A.W. (1998). Asymptotic Statistics. Cambridge Series in Probabilistic Mathematics.

[34]. Johnson, N.L., Kotz, S.,Balakrishnan, N. (1994). Continuous Univariate Distributions, Volume 1. Wiley. ISBN 0-471-58495-9. (Section 10.1).