Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από την ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, σύμφωνα με τον εσωτερικό κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:
-Αναπληρωτής Καθηγητής Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Νεκτάριος Μιλτιάδης
- Λέκτορας Βρόντος Σπυρίδων

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον κ. Χατζηκωνσταντινίδη Ευστάθιο, επιβλέποντα καθηγητή μου σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, για την πολύτιμη συνεισφορά του και τη σημαντική καθοδήγηση που μου παρείχε, ώστε να υλοποιήσω με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη αρτιότητα την εργασία.

Περίληψη

Στη διπλωματική εργασία αυτή παρουσιάζεται η μελέτη του ανανεωτικού μοντέλου Erlang(2), το οποίο αποτελεί τη γενίκευση του κλασσικού μοντέλου της Θεωρίας Κινδύνου. Τόσο στο κλασσικό, όσο και στο ανανεωτικό μοντέλο της Θεωρίας Χρεοκοπίας μία τυχαία μεταβλητή εξαιρετικής σημασίας είναι ο χρόνος χρεοκοπίας. Δύο άλλες τυχαίες μεταβλητές που σχετίζονται με το χρόνο χρεοκοπίας είναι η τυχαία μεταβλητή του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας. Επειδή η μελέτη των τυχαίων μεταβλητών αυτών δίνουν περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη διαδικασία του πλεονάσματος, από ότι μόνο η μελέτη του χρόνου χρεοκοπίας, θα ασχοληθούμε με τη μελέτη των από κοινού και περιθωρίων προεξοφλημένων συναρτήσεων κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας αυτών των τυχαίων μεταβλητών.

Πιο συγκεκριμένα, το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί ένα εισαγωγικό μέρος όπου παρουσιάζονται βασικές έννοιες από την Θεωρία Χρεοκοπίας, και δίνεται η αναφορά της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα μελετηθεί η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής και θα δειχθεί ότι ικανοποιεί μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση, η λύση της οποίας βρίσκεται μέσω μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Στη συνέχεια, στο τρίτο κεφάλαιο, χρησιμοποιώντας τη λύση της ολοκληροδιαφορικής αυτής εξίσωσης θα εκφράσουμε τις από κοινού και περιθώριες προεξοφλημένες και μη συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο υποθέτοντας ότι η κατανομή των ζημιών ανήκει στην οικογένεια κατανομών K_m, θα αναφέρουμε τις αναλυτικές λύσεις του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και της πιθανότητας χρεοκοπίας και θα τις χρησιμοποιήσουμε για να εκφράσουμε τις από κοινού και περιθώριες προεξοφλημένες και μη συναρτήσεις κατανομών και πυκνότητας πιθανότητας, τις οποίες υπολογίσαμε στο τρίτο κεφάλαιο.

Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο θα δοθούν δύο αριθμητικά παραδείγματα, στα οποία, οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης κινδύνων ακολουθούν την κατανομή Erlang(2) και το μέγεθος της ατομικής ζημιάς ακολουθεί την εκθετική κατανομή στο ένα και τη γάμμα κατανομή στο άλλο.

ABSTRACT

In this thesis, the study of the renewal Erlang(2) model is presented, which constitutes the generalization of the classical model of the Risk Theory. In both classical and renewal model of the Ruin Theory, a random variable of particular importance is the *time of default*. Another two variables related to the time of default, are the random variable of the *surplus at the exact time before the ultimate ruin* and *at the exact time of the ultimate ruin*. Due to the fact that the study of these random variables provides more information on the surplus process, comparing to studying the time of ruin alone, we will research on the joint and marginal discounted distribution function and the probability density function of these random variables.

More specifically, chapter one is an introductory part in which fundamental concepts of the Ruin Theory are presented. In addition, the reference of the expected discounted penalty function of Gerber-Shiu is also provided.

In chapter two, the expected discounted penalty function will be studied and it will be displayed that it satisfies an integro-differential equation, the solution of which can be found by a compound geometrical distribution. As a next step, in chapter three, we will express the joint and marginal discounted and not distribution functions and probability density function of the surplus at the exact time before the ruin and at the exact time of the ruin, by using the solution of the integro-differential equation.

In the fourth chapter, assuming that the loss distribution belongs to the K_m distribution family, we will mention the analytical solutions of the time of ultimate ruin and of the probability of default and we will use them in order to express the joint and marginal discounted and not distribution functions and the probability density function , computed in chapter three.

Finally, in the fifth chapter, two numerical examples will be provided in which claim inter-arrival times have an Erlang (2) distribution and the size of the individual loss follows the exponential distribution in the first example and the Gamma distribution in the other one.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Κάθε ασφαλιστική επιχείρηση έχει ως στόχο τη δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου με επαρκή αποθεματικά, προκειμένου να είναι σε θέση να καλύψει τις υποχρεώσεις της απέναντι στους ασφαλισμένους της. Τα εν λόγω αποθεματικά χαρακτηρίζονται με τον όρο *πλεόνασμα*. Το βασικό πρόβλημα της θεωρίας κινδύνου είναι ο προσδιορισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας, δηλαδή της πιθανότητας τα αποθεματικά να μην επαρκούν για την κάλυψη των συνολικών αποζημιώσεων.

Το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ονομάζεται και μοντέλο Cramer-Lundberg, καθώς ο Harald Cramer κατόρθωσε, ύστερα από μελέτες, να ενσωματώσει τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών στη θεωρία κινδύνου. Το βασικό χαρακτηριστικό αυτού του μοντέλου είναι ότι ο αριθμός των ζημιών σε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων περιγράφεται από την κατανομή Poisson. Η γενίκευση του κλασσικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου έγινε από τον Νορβηγό Sparre Andersen. Το μοντέλο αυτό, ονομάστηκε μοντέλο Sparre Andersen ή ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, καθώς ο αριθμός των ζημιών σε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων περιγράφεται από μια ανανεωτική διαδικασία.

1.1 Η στοχαστική ανέλιξη του αριθμού των απαιτήσεων – Η στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος

Για να μοντελοποιήσουμε το πλεόνασμα μιας ασφαλιστικής εταιρίας, αρχικά πρέπει να προσδιορίσουμε τον αριθμό των κινδύνων, στον οποίο εκτίθεται. Έστω, $\{N_i\}_{i=0}^{\infty}$ μια στοχαστική ανέλιξη, η οποία μετρά τον αριθμό των απαιτήσεων, στις οποίες είναι υποχρεωμένη η εταιρεία να ανταπεξέλθει στο χρονικό διάστημα [0,t].

Στη θεωρία κινδύνου χρησιμοποιείται η οικογένεια των ανανεωτικών στοχαστικών διαδικασιών, η οποία ανήκει στην οικογένεια των στοχαστικών ανελίξεων. Η ανανεωτική διαδικασία βασίζεται στους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των κινδύνων που απαριθμεί η $\{N_i\}_{i=0}^{\infty}$.

Αν T_i , $i = 0,1,......,n$, παριστάνει τη χρονική στιγμή εμφάνισης της i απαίτησης, τότε οι τυχαίες μεταβλητές (τ.μ) $V_i = T_i - T_{i-1}$, $i \geq 1$ εκφράζουν τους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των κινδύνων. Θεωρούμε ότι οι τ.μ.$\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταξύ τους. Η καθεμία τ.μ.V_i έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η οποία συμβολίζεται με $k(t)$, και συνάρτηση κατανομής, η οποία συμβολίζεται με $K(t)$. Τότε, η ανανεωτική διαδικασία ορίζεται ως $N(t) = \max(n : V_1 + V_2 + ... + V_n \leq t)$.

Στη συνέχεια, πρέπει να μοντελοποιήσουμε τα αποθεματικά της ασφαλιστικής εταιρίας και για να το πετύχουμε αυτό, θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων όπου το πλεόνασμα του χαρτοφυλακίου περιγράφεται από τη διαδικασία πλεονάσματος. Παρακάτω δίνεται ο ορισμός της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1

Η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος $\{U(t) : \mathrm{t} \geq 0\}$ ορίζεται για κάθε $\mathrm{t} \geq 0$ από τη σχέση $U(t) = u + ct - S(t)$, όπου,

u : το αρχικό αποθεματικό,

c : το ασφάλιστρο που πληρώνεται στη μονάδα του χρόνου,

S(t) : οι συνολικές αποζημιώσεις στο χρονικό διάστημα [0,t],

U(t) : το αποθεματικό ή το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t και

U(0): το αρχικό αποθεματικό.

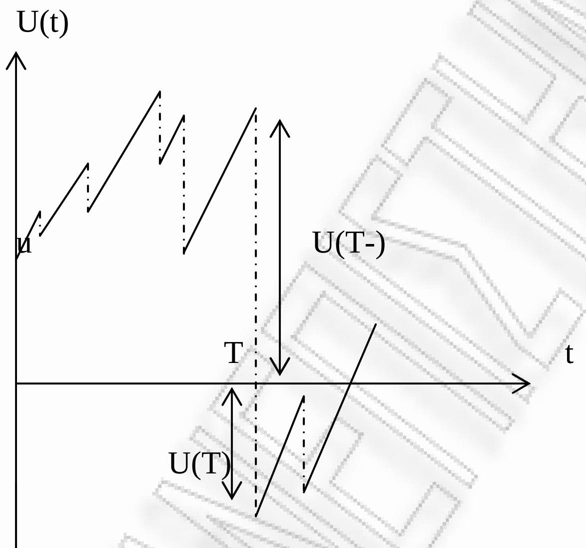
Έτσι, σε αντιστοιχία με μια σύνθετη κατανομή, η $\{S(t) : \mathrm{t} \geq 0\}$ είναι μια σύνθετη ανέλιξη που ορίζεται για κάθε t από τη σχέση

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i & , N(t) \geq 1 \\ 0 & , N(t) = 0 \end{cases}$$

όπου, $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ., με X_i να περιγράφει το μέγεθος της i-οστής ζημιάς, με συνάρτηση κατανομής $F(x)=P(X \leq x)$, με συνεχής συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ και με μέση τιμή $E(X)$.

Επιπλέον, μια βασική υπόθεση είναι ότι ισχύει η ανισότητα $cE(V_i)>E(X_i)$, δηλαδή η σχέση $cn>\beta E(X)$. Αυτό πρέπει να ισχύει διότι το γινόμενο cn εκφράζει τα έσοδα που εισπράττει ο ασφαλιστής στη μονάδα του χρόνου ενώ το $\beta E(X)$ εκφράζει το μέσο ρυθμό των αποζημιώσεων που πρέπει να πληρώσει ο ασφαλιστής στη μονάδα του χρόνου, δηλαδή τα έξοδα του. Συνεπώς, τα έσοδα πρέπει να υπερβαίνουν τα έξοδα.

Η διαδικασία πλεονάσματος μπορεί να παρασταθεί και με το σχήμα που ακολουθεί.



ΣΧΗΜΑ 1.1

Η τ.μ. $U(\mathrm{T}^{-})$, η οποία παίρνει θετικές τιμές, δηλώνει το μέγεθος του πλεονάσματος αμέσως πριν πληρωθεί από τον ασφαλιστή η αποζημίωση η οποία προκαλεί χρεοκοπία. Με άλλα λόγια, δηλώνει την τιμή του πλεονάσματος τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία. Ενώ, η $U(\mathrm{T})$ παριστάνει την τιμή του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας. Συνήθως εξετάζεται το έλλειμμα αυτό κατά απόλυτη τιμή, οπότε ορίζεται η τ.μ. $-U(\mathrm{T})$ που δηλώνει την οξύτητα της χρεοκοπίας, δηλαδή το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν.

Από τον ορισμό 1.1 παρατηρείται ότι η διαδικασία πλεονάσματος μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. Όταν η διαδικασία του πλεονάσματος γίνει για πρώτη φορά αρνητική, δημιουργείται χρεοκοπία και η πιθανότητα να συμβεί αυτό, ονομάζεται πιθανότητα χρεοκοπίας.

Αρχικά ορίζεται ο χρόνος χρεοκοπίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2

Η χρονική στιγμή κατά την οποία το πλεόνασμα γίνεται πρώτη φορά αρνητικό καλείται χρόνος χρεοκοπίας και δίνεται από τη σχέση

$$T = \begin{cases} \inf\left\{t : U(t) < 0\right\} \\ \infty \ , \ \alpha\nu \ U(t) > 0 \end{cases} \ , \text{ για όλα τα } t > 0 .$$

Με βάση τον παραπάνω ορισμό, η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως εξής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3

Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u ορίζεται από τη σχέση

$$\psi(u) = \Pr\left[T < \infty / U(0) = u\right].$$

Όταν συμβεί χρεοκοπία, δηλαδή το πλεόνασμα γίνει αρνητικό, $U(t) < 0$, η μέγιστη σωρευτική απώλεια δίνεται από τον ορισμό που ακολουθεί.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4

Η τ.μ. L καλείται μέγιστη σωρευτική απώλεια και ορίζεται ως

$$L = \max_{t \geq 0}\left\{S(t) - ct\right\}.$$

Από το σημείο αυτό και στο εξής, θα θεωρείται ότι $L = L_1 + L_2 + ... + L_N$,όπου L_1 είναι το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό κεφάλαιο u όταν συμβεί για πρώτη φορά χρεοκοπία και η τ.μ. N εκφράζει τον αριθμό των καταγεγραμμένων πτώσεων.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, δεν εμφανίζεται χρεοκοπία όταν το πλεόνασμα είναι θετικό, δηλαδή $U(t) \geq 0$, $\forall \ t \geq 0$.

Οπότε, $u \geq \max_{t \geq 0}\left\{S(t) - ct\right\}$ και $L \leq u$.

Η πιθανότητα να μην εμφανίζεται χρεοκοπία ονομάζεται πιθανότητα μη χρεοκοπίας και μπορεί να οριστεί ως συμπληρωματική της πιθανότητας χρεοκοπίας. Συνεπώς,

$$1-\psi(u)=P(L\le u),$$

από την οποία προκύπτει η σχέση $\psi(u)=P(L>u)$.

Ανάλογα με την κατανομή, λοιπόν, που ακολουθούν κάθε φορά οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων, διαφοροποιούνται και τα μοντέλα που μελετάμε. Έτσι, μπορούμε να αναφέρουμε δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα.

- Αν $k(t)=\beta e^{-\beta t}$, τότε γίνεται αναφορά στο κλασσικό μοντέλο, όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων ακολουθούν την *εκθετική* κατανομή με παράμετρο β και με τον αριθμό των απαιτήσεων, N(t), να ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο β. $N(t)\sim P(\beta t)$.
- Αν $k(t)=\beta^2 te^{-\beta t}$, τότε η τ.μ. V_i ακολουθεί την κατανομή *Erlang* με παραμέτρους 2 και β, δηλαδή $V_i \sim Erlang(2,\beta)$. Αυτό προκύπτει, αφού ο ενδιάμεσος χρόνος εμφάνισης κινδύνου αποτελεί τη μείξη δυο εκθετικών κατανομών, δηλαδή $V_i=T_{i1}+T_{i2}$, όπου $T_{ij}\sim Exp(\beta)$, $\forall j=1,2$, $\forall i=1,2,....n$.

1.2 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

Οι Gerber και Shiu το 1998 μοντελοποίησαν τις τ.μ. T, $U(\mathrm{T}^-)$ και $|U(\mathrm{T})|$ σε μια συνάρτηση, την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, ο ορισμός της οποίας δίνεται παρακάτω.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5

Για $u\ge 0$ και $\delta\ge 0$, ορίζουμε $\phi_\delta(u)$ την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, η οποία δίνεται από την παρακάτω εξίσωση

$$\phi_\delta(u)=E\left[e^{-\delta \mathrm{T}}w\left(U(\mathrm{T}^-),|U(\mathrm{T})|\right)I\left(\mathrm{T}<\infty / U(0)=u\right)\right],$$

όπου το δ μπορεί να είναι η παράμετρος s στον μετασχηματισμό Laplace ή κάποια ένταση ανατοκισμού, $0\le w(x,y)<\infty$ μια δισδιάστατη συνάρτηση στο $\Re^2$, η οποία ονομάζεται συνάρτηση ποινής, η τ.μ. $U(\mathrm{T}^-)$ παριστάνει το πλεόνασμα τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία, η τ.μ. $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ παριστάνει το έλλειμμα τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας και I είναι μια δείκτρια συνάρτηση.

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής μπορεί να ερμηνευτεί ως η προεξοφλημένη ποινή που επιβάλλεται όταν συμβεί χρεοκοπία. Από τον ορισμό της $\phi_\delta\left(u\right)$ και για διάφορες μορφές της συνάρτησης ποινής προκύπτουν διάφορα μέτρα κινδύνου, τα οποία θα αναφέρουμε παρακάτω.

- Όταν $\delta=0$ και $w\left(x,y\right)=1$, τότε η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας. Δηλαδή,
$$\psi\left(u\right)=E\left[I\left(\mathrm{T}<\infty/U\left(0\right)=u\right)\right].$$
- Αν $\delta>0$ και $w\left(x,y\right)=1$, τότε προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας όταν εμφανίζεται χρεοκοπία,
$$\phi_{\mathrm{T}}\left(u\right)=E\left[e^{-\delta T}\left|\left(\mathrm{T}<\infty/U\left(0\right)=u\right)\right.\right].$$
- Όταν $\delta>0$ και $w\left(x_1,x_2\right)=I\left(x_1\le x\right)I\left(x_2\le y\right)$, έχουμε την από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας,
$$F_\delta\left(x,y/u\right)=E\left[e^{-\delta T}I\left(x_1\le x\right)I\left(x_2\le y\right)\left|\left(U\left(0\right)=u\right)\right.\right].$$
- Για $\delta=0$ και $w\left(x_1,x_2\right)=I\left(x_1\le x\right)I\left(x_2\le y\right)$, παίρνουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ.$U\left(\mathrm{T}^-\right)$ και $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$. Δηλαδή,
$$F_0\left(x,y/u\right)=E\left[I\left(x_1\le x\right)I\left(x_2\le y\right)\left|\left(U\left(0\right)=u\right)\right.\right].$$
- Αν $\delta>0$ και $w\left(x_1,x_2\right)=I\left(x_1=x\right)I\left(x_2=y\right)$, προκύπτει η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^-\right)$ και $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$,
$$f_\delta\left(x,y/u\right)=E\left[e^{-\delta T}I\left(x_1=x\right)I\left(x_2=y\right)\left|\left(U\left(0\right)=u\right)\right.\right].$$
- Όταν $\delta=0$ και $w\left(x_1,x_2\right)=I\left(x_1=x\right)I\left(x_2=y\right)$, έχουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^-\right)$ και $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$,

$$f_0(x, y/u) = E\left[I(x_1 = x)I(x_2 = y)\middle|\left(U(0) = u\right)\right].$$

- Αν $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = I(x_1 \le x)$, έχουμε την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία,

$$H_\delta(x/u) = E\left[e^{-\delta T} I(x_1 \le x)\middle|\left(U(0) = u\right)\right].$$

- Όταν $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = I(x_1 \le x)$, προκύπτει η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^-\right)$,

$$H_0(x/u) = E\left[I(x_1 \le x)\middle|\left(U(0) = u\right)\right].$$

- Όταν $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = I(x_1 = x)$, παίρνουμε την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν την χρεοκοπία,

$$h_\delta(x/u) = E\left[e^{-\delta T} I(x_1 = x)\middle|\left(U(0) = u\right)\right].$$

- Για $\delta = 0$, και $w(x_1, x_2) = I(x_1 = x)$, έχουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^-\right)$,

$$h_0(x/u) = E\left[I(x_1 = x)\middle|\left(U(0) = u\right)\right].$$

- Αν $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = I(x_2 \le y)$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας,

$$G_\delta(y/u) = E\left[e^{-\delta T} I(x_2 \le y)\middle|\left(U(0) = u\right)\right].$$

- Όταν $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = I(x_2 \le y)$, παίρνουμε τη συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $\left|U(\mathrm{T})\right|$,

$$G_0(y/u) = E\left[I(x_2 \le y)\middle|\left(U(0) = u\right)\right].$$

- Όταν $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = I(x_2 = y)$, έχουμε την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας,

$$g_\delta(y/u) = E\left[e^{-\delta T} I(x_2 = y)\middle|\left(U(0) = u\right)\right].$$

- Για $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = I(x_2 = y)$, προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $|U(\mathrm{T})|$,

$$g_0(y/u) = E\Big[I(x_2 = y)\big|\big(U(0) = u\big)\Big].$$

Η μελέτη της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου έγινε από τους Gerber και Shiu το 1998. Στο επόμενο κεφάλαιο λοιπόν, θα ασχοληθούμε με το ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, όπως μελετήθηκε από τους Dickson και Hipp το 1998. Πρόκειται για ανανεωτικό μοντέλο του Sparre Andersen, σύμφωνα με το οποίο οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων ακολουθούν την κατανομή Erlang με παραμέτρους 2 και β. Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή, θα δείξουμε ότι η $\phi_\delta(u)$ ικανοποιεί μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση, η λύση της οποίας γίνεται με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace, αποδεικνύοντας ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση. Η λύση της παραπάνω ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης δόθηκε από τους Willmot και Lin το 1999 σε όρους μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Οι Cheng και Tang το 2003 χρησιμοποίησαν τη λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης, η οποία μπορεί να εκφραστεί από τη σχέση $(2.5.14)$, για να υπολογίσουν την από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. $U(\mathrm{T}^-)$ και $|U(\mathrm{T})|$, όταν η τυχαία μεταβλητή V_i, $i \geq 1$ με $V_1 = T_1$, ακολουθεί την κατανομή Erlang(2). Ωστόσο, η προερχόμενη από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δεν μπορεί να συγκριθεί με αυτήν των Lin και Willmot (1999) και Tsai (2001), καθώς και οι δύο βασίζονται στην υπόθεση ότι η τυχαία μεταβλητή V_i ακολουθεί την κατανομή Erlang(1,β), η οποία αναφέρεται στη διαδικασία Poisson. Στο κεφάλαιο 3, λοιπόν, θα χρησιμοποιήσουμε τη λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης της μορφής $(2.5.15)$ για να εκφράσουμε τις από κοινού και περιθώριες προεξοφλημένες και μη προεξοφλημένες συναρτήσεις κατανομών και πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος τη στιγμή αμέσως πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας, καθώς επίσης και την προεξοφλημένη και μη προεξοφλημένη περιθώρια πυκνότητας πιθανότητας του ποσού της απαίτησης που προκαλεί τη χρεοκοπία, υπό την υπόθεση ότι η τ.μ. V_i ακολουθεί την κατανομή Erlang(2).

Είναι φανερό ότι ο προσδιορισμός διάφορων μέτρων κινδύνου, όπως για παράδειγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας, της συνάρτησης κατανομής του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας καθώς επίσης και άλλων μέτρων κινδύνου, εξαρτάται άμεσα από τον υπολογισμό της συνάρτησης $\phi_\delta(u)$ η οποία βρίσκεται μέσω των μετασχηματισμών Laplace. Στο κεφάλαιο 4, υποθέτοντας ότι η κατανομή των ζημιών, $f(x)$, ανήκει στην οικογένεια κατανομών K_m, θα εκφράσουμε την αναλυτική λύση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, ο οποίος όπως έχουμε ορίσει στο κεφάλαιο 2 ισούται με τη δεξιά ουρά της σύνθετης βοηθητικής γεωμετρικής κατανομής, καθώς επίσης και τη λύση της πιθανότητας χρεοκοπίας, $\psi(u)$. Στη συνέχεια, για τις λύσεις αυτές θα δοθούν οι προεξοφλημένες και μη προεξοφλημένες από κοινού και περιθώριες συναρτήσεις κατανομών και πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος τη στιγμή αμέσως πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας. Επιπλέον, θα αναφέρουμε και την προεξοφλημένη και μη προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ποσού της απαίτησης που προκαλεί τη χρεοκοπία, όταν η τ.μ. V_i ακολουθεί την κατανομή Erlang(2).

Τέλος, στο κεφάλαιο 5 θα δοθούν δύο αριθμητικά παραδείγματα για τα αποτελέσματα που υπολογίσαμε στο τέταρτο κεφάλαιο, μέσω του προγράμματος Mathematica. Στο πρώτο παράδειγμα υποθέτουμε ότι το μέγεθος της ατομικής ζημιάς ακολουθεί την εκθετική κατανομή, ενώ στο δεύτερο το μέγεθος της ατομικής ζημιάς ακολουθεί την κατανομή γάμμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μελέτη της συνάρτησης $\phi_\delta(u)$

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε τη μεθοδολογία για το ανανεωτικό μοντέλο Erlang(2), στο οποίο οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων ακολουθούν την κατανομή Erlang με παραμέτρους 2 και β και η διαδικασία πλεονάσματος ικανοποιεί τη σχέση σύμφωνα με τον ορισμό 1.1. Πιο συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, $\phi_\delta(u)$, ικανοποιεί μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση, οι λύσεις της οποίας βασίζονται στις ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg. Αφού ορίσουμε τη γενικευμένη εξίσωση Lundberg, θα τη χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της $\phi_\delta(u)$, από τον οποίο αν τον αντιστρέψουμε, θα προκύψει η λύση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η $\phi_\delta(u)$ ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση και θα δώσουμε τη λύση της μέσω μιας κατάλληλης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

2.1 Ολοκληροδιαφορική εξίσωση της $\phi_\delta(u)$

Βασική προϋπόθεση για τη μελέτη της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης της $\phi_\delta(u)$ είναι η ισχύς του παρακάτω λήμματος, του οποίου η απόδειξη θα δοθεί στο παράρτημα του κεφαλαίου αυτού.

ΛΗΜΜΑ 2.1.1

Αν $\int_0^\infty\int_0^\infty w(x_1,x_2)\, f(x_1+x_2)\,dx_1dx_2<\infty$, *τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις*

$(a)\ \phi_\delta(u)<\infty$, $\textit{για όλα τα}\ u\geq 0,$

$(b)\ \hat{\phi}_\delta(s)<\infty$, $\textit{για όλα τα}\ s>0,$

$(c)\ \lim_{u\to\infty}\phi_\delta(u)=0,$

$(d)\ \lim_{u\to\infty}e^{-su}\phi'_\delta(u)=0$, $\textit{για όλα τα}\ s>0.$

Δεδομένου ότι ισχύει το παραπάνω λήμμα, οι Dickson και Hipp το 2001 έδειξαν ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, $\phi_\delta(u)$, ικανοποιεί μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση, όπως δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.1

Η $\phi_\delta(u)$ για $u \geq 0$, ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$c^2 \frac{d^2}{du^2}\phi_\delta(u) - 2c(\beta+\delta)\frac{d}{du}\phi_\delta(u) + (\beta+\delta)^2 \phi_\delta(u) = \beta^2 \int_0^u \phi(u-x) f_x(x)\,dxds + \beta^2 w(u), \tag{2.1.1}$$

όπου $w(x) = \int_x^\infty w(x, y-x) f(y)\,dy$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν δεσμεύσουμε ως προς το χρόνο και το μέγεθος της πρώτης απαίτησης και θέσουμε όπου $T_1 = t$ και $X_1 = x$, τότε προκύπτει η παρακάτω εξίσωση

$$\phi_\delta(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \phi_\delta(u/t, x) f(x) k(t)\,dxdt = \int_0^\infty k(t)\left(\int_0^\infty \phi_\delta(u/t, x) f(x)\,dx\right)dt. \tag{2.1.2}$$

Τη στιγμή εμφάνισης της πρώτης απαίτησης η διαδικασία πλεονάσματος δίνεται από τη σχέση $U(t) = u + ct - x$.

Ορίζουμε τη δείκτρια συνάρτηση I, ως

$$I = \begin{cases} 0 \leq x \leq u+ct, & \delta\varepsilon\nu\ \varepsilon\mu\varphi\alpha\nu\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ \chi\rho\varepsilon o\kappa o\pi\acute{\iota}\alpha \\ x > u+ct, & \varepsilon\mu\varphi\alpha\nu\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ \chi\rho\varepsilon o\kappa o\pi\acute{\iota}\alpha. \end{cases}$$

Όπως έχουμε ορίσει στο κεφάλαιο 1, η $U(\mathrm{T}^-) = u + ct$ είναι η τιμή του πλεονάσματος τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και η $|U(\mathrm{T})| = x - u - ct$ είναι η τιμή του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας. Οπότε, μέσω της δείκτριας συνάρτησης I, η σχέση $(2.1.2)$ παίρνει τη μορφή

$$\phi_\delta(u) = \int_0^\infty k(t)\left(\int_0^{u+ct} e^{-\delta t}\phi_\delta(u+t-x) f(x)\,dx + \int_{u+ct}^\infty e^{-\delta t} w\left(U(\mathrm{T}^-), |U(\mathrm{T})|\right) f(x)\,dx\right)dt.$$

Αν θέσουμε $s = u + ct$, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\begin{aligned}\phi_\delta(u) &= \int_u^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right) e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)} \int_0^s \phi_\delta(s-x) f(x)\,dx \frac{1}{c}ds \\ &+ \int_u^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right) e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)} \int_s^\infty w\left(U(\mathrm{T}^-), |U(\mathrm{T})|\right) f(x)\,dx \frac{1}{c}ds\end{aligned}$$

και ύστερα από πράξεις, καταλήγουμε στη σχέση

$$c\phi_\delta(u)=\int_u^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\left(\int_0^s \phi_\delta(s-x)\,f(x)\,dxds+\int_s^\infty w\Big(U\left(\mathrm{T}^-\right),\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|\Big)\,f(x)\,dxds\right)$$

$$=\int_u^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\int_0^s \phi_\delta(s-x)\,f_x(x)\,dxds+\int_u^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}w(s)ds. \quad (2.1.3)$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της $(2.1.3)$ βρίσκουμε άμεσα την εξίσωση

$$c\frac{d}{du}\phi_\delta(u)=-\frac{1}{c}\int_u^\infty k^{/}\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\int_0^s \phi_\delta(s-x)\,f(x)\,dxds$$

$$-\frac{1}{c}\int_u^\infty k^{/}\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}w(s)\,ds+\frac{\delta}{c}c\phi_\delta(u).$$

Αφού η τ.μ. V_i ακολουθεί την κατανομή $Erlang(2,\beta)$, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. V_i είναι $k(t)=\beta^2te^{-\beta t}$, με πρώτη παράγωγο να είναι ίση με $k^{/}(t)=\beta^2e^{-\beta t}-\beta k(t)$. Συνεπώς αν αντικαταστήσουμε την τελευταία ισότητα στην παραπάνω σχέση, προκύπτει

$$c\frac{d}{du}\phi_\delta(u)=-\frac{1}{c}\int_u^\infty\left(\beta^2e^{-\beta\left(\frac{s-u}{c}\right)}-\beta k\left(\frac{s-u}{c}\right)\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\int_0^s \phi_\delta(s-x)\,f(x)\,dxds$$

$$-\frac{1}{c}\int_u^\infty\left(\beta^2e^{-\beta\left(\frac{s-u}{c}\right)}-\beta k\left(\frac{s-u}{c}\right)\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}w(s)\,ds+\delta\phi_\delta(u),$$

από την οποία καταλήγουμε στη σχέση

$$c\frac{d}{du}\phi_\delta(u)=-\frac{1}{c}\int_u^\infty \beta^2e^{\frac{-(\beta+\delta)(s-u)}{c}}\int_0^s \phi_\delta(s-x)\,f(x)\,dxds-\frac{1}{c}\int_u^\infty \beta^2e^{\frac{-(\beta+\delta)(s-u)}{c}}w(s)\,ds$$

$$+\frac{\beta}{c}\int_u^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\int_0^s \phi_\delta(s-x)\,f(x)\,dxds$$

$$+\frac{\beta}{c}\int_u^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}w(s)ds+\delta\phi_\delta(u).$$

Στη συνέχεια, θέτοντας τις συναρτήσεις $g_1(u,s)=k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\int_0^s \phi_\delta(s-x)\,f(x)\,dx$

και $g_2(s)=k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}w(s)$, η σχέση $(2.1.3)$ απλοποιείται και έχουμε την παρακάτω εξίσωση

$$c\phi_\delta(u)=\int_u^\infty g_1(u,s)\,ds+\int_u^\infty g_2(u,s)\,ds. \qquad (2.1.4)$$

Επομένως, αν παραγωγίσουμε τη σχέση $(2.1.4)$, προκύπτει η εξίσωση

$$c\frac{d}{du}\phi_\delta(u)=-g_1(u,u)+\int_u^\infty \frac{d}{du}g_1(u,s)\,ds-g_2(u,u)+\int_u^\infty \frac{d}{du}g_2(u,s)\,ds,$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω συναρτήσεις, συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned}
c\frac{d}{du}\phi_\delta(u)=&-\int_u^\infty \frac{1}{c}k'\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\int_0^s \phi_\delta(s-x)\,f(x)\,dx\,ds\\
&+\int_u^\infty \frac{\delta}{c}k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\int_0^s \phi_\delta(s-x)\,f(x)\,dx\,ds\\
&+\int_u^\infty\left[-\frac{1}{c}k'\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}w(s)+\frac{\delta}{c}k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}w(s)\right]ds\\
=&-\int_u^\infty \frac{1}{c}k'\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\int_0^s \phi_\delta(s-x)\,f(x)\,dx\,ds-\frac{1}{c}\int_u^\infty k'\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}w(s)\,ds\\
&+\frac{\delta}{c}\int_u^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\left[\int_0^s \phi_\delta(s-x)\,f(x)\,dx+w(s)\right]ds.
\end{aligned}$$

Οπότε, λόγω της σχέσης $(2.1.3)$ προκύπτει η σχέση

$$c\frac{d}{du}\phi_\delta(u)=-\int_u^\infty \frac{1}{c}k'\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\left[\int_0^s \phi_\delta(s-x)\,f(x)\,dx+w(s)\right]ds+\delta\phi_\delta(u)$$

και επειδή ισχύει $k'(t)=\beta^2e^{-\beta t}-\beta k(t)$, η προηγούμενη σχέση γράφεται στην παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned}
c\frac{d}{du}\phi_\delta(u)=&-\frac{\beta^2}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\beta+\delta)(s-u)}{c}}\left[\int_0^s \phi_\delta(s-x)\,f(x)\,dx+w(s)\right]ds\\
&+\frac{\beta}{c}\int_u^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\left[\int_0^s \phi_\delta(s-x)\,f(x)\,dx+w(s)\right]ds+\delta\phi_\delta(u).
\end{aligned}$$

Συνεπώς, λόγω πάλι της $(2.1.3)$, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$c\frac{d}{du}\phi_\delta(u)=(\beta+\delta)\phi_\delta(u)-\frac{\beta^2}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\beta+\delta)(s-u)}{c}}\left[\int_0^s \phi_\delta(s-x)\,f(x)\,dx+w(s)\right]ds.$$

Κατόπιν, παραγωγίζοντας ξανά την τελευταία σχέση και θέτοντας για ευκολία τη συνάρτηση $g(u,s)=e^{-\frac{(\beta+\delta)(s-u)}{c}}\left[\int_0^s \phi_\delta(s-x)\,f(x)\,dx+w(s)\right]ds$, καταλήγουμε

$$c\frac{d^2}{du^2}\phi_\delta(u)=(\beta+\delta)\phi_\delta(u)-\frac{\beta^2}{c}\left[-g(u,u)+\int_u^\infty \frac{d}{du}g(u,s)\right]$$

$$=(\beta+\delta)\phi_\delta(u)+\frac{\beta^2}{c}\left[\int_0^s \phi_\delta(s-x)\,f(x)\,dx+w(s)\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c}\int_u^\infty \frac{\beta+\delta}{c}e^{-\frac{(\beta+\delta)(s-u)}{c}}\left[\int_0^s \phi_\delta(s-x)\,f(x)\,dx+w(s)\right]ds.$$

Οπότε, προκύπτει άμεσα η ζητούμενη σχέση, καθώς η τελευταία σχέση γράφεται

$$c\frac{d^2}{du^2}\phi_\delta(u)=(\beta+\delta)\frac{d}{du}\phi_\delta(u)+\frac{\beta^2}{c}\left[\int_0^u \phi_\delta(u-x)\,f(x)\,dx+w(u)\right]$$

$$+\frac{\beta+\delta}{c}\left[c\frac{d}{du}\phi_\delta(u)-(\beta+\delta)\phi_\delta(u)\right].\ \blacksquare$$

Οι λύσεις της παραπάνω ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης βασίζονται στις ρίζες της *γενικευμένης εξίσωσης Lundberg*, την οποία θα ορίσουμε στην επόμενη παράγραφο.

2.2 Γενικευμένη εξίσωση Lundberg

Έστω ότι η τ.μ. $T_\kappa=\sum_{j=1}^{\kappa}V_j$ για $\kappa=1,2,...$ είναι ο χρόνος εμφάνισης της κ-ιοστής απαίτησης, με $T_0=0$ και έστω ότι η τ.μ. U_κ παριστάνει το πλεόνασμα αμέσως μετά την εμφάνιση της κ απαίτησης, με $U_0=u$ και δίνεται από τη σχέση

$$U_\kappa=U(T_\kappa)=u+cT_\kappa-\sum_{j=1}^{\kappa}\mathrm{X}_j=u+\sum_{j=1}^{\kappa}\left(cV_j-\mathrm{X}_j\right).$$

Ψάχνουμε μια συνάρτηση υ έτσι ώστε η στοχαστική διαδικασία $\left\{e^{-\delta T_\kappa}\upsilon(U_\kappa),\kappa\in\mathbb{N}\right\}$ σε διακριτό χρόνο να είναι ένα martingale.

Αρχικά, θα παραθέσουμε μέρος από τη βασική θεωρία των martingales για να καταλήξουμε στον ορισμό πότε μια στοχαστική ανέλιξη είναι martingale.

Έστω (Ω,F,P) ένας χώρος πιθανότητας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.1

Έστω μια στοχαστική διαδικασία $\left\{Y\left(n\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$. Τότε η ακολουθία $\left\{F_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ ονομάζεται διύλιση της διαδικασίας $\left\{Y\left(n\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$ και ορίζεται ως μια αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών της $\left\{Y\left(n\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$ μέχρι το χρόνο t,

$$F_0 \subseteq F_1 \subseteq ... \subseteq F : F_n = \sigma\left\{Y\left(s\right); s \leq n\right\}.$$

Η F_n είναι το σύνολο που περιέχει όλη την πληροφορία της στοχαστικής διαδικασίας $\left\{Y\left(n\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$ μέχρι το χρόνο n .

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.2

Μια στοχαστική διαδικασία $\left\{Y\left(n\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$ ονομάζεται προσαρμοσμένη αν και μόνον αν για κάθε $n \geq 0$ η $\left\{Y\left(n\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$ είναι μετρήσιμη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.3

Μια στοχαστική ανέλιξη $\left\{Y\left(n\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$ ονομάζεται martingale αν ισχύουν τα παρακάτω:

- $E\left(\left|Y\left(n\right)\right|\right) < \infty$, $\forall\ n \geq 0$,
- Η $Y\left(n\right)$ είναι F_s προσαρμοσμένη, $\forall\ n \geq 0$,
- $E\left(Y\left(n+1\right)\middle|Y\left(0\right), Y\left(1\right), ..., Y\left(n\right)\right) = Y\left(n\right)$, $\forall\ n \geq 0$.

Όπου συνεπάγεται ότι $E\left(Y\left(1\right)\right) = Y\left(0\right)$.

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, η στοχαστική διαδικασία $\left\{e^{-\delta T_\kappa}\upsilon\left(U_\kappa\right), \kappa \in \mathbb{N}\right\}$ είναι martingale αν ισχύει

$$E\left[e^{-\delta T_{\kappa+1}}\upsilon\left(U_{\kappa+1}\right)\middle|F_\kappa\right] = e^{-\delta \mathrm{T}_\kappa}\upsilon\left(U_\kappa\right), \quad \kappa \in \mathbb{N}. \qquad (2.2.1)$$

Η εξίσωση $(2.2.1)$ ισοδυναμεί με τη σχέση

$$E\left[e^{-\delta V_{\kappa+1}}\upsilon\left(U_\kappa + cV_{\kappa+1} - \mathrm{X}_{\kappa+1}\right)\middle|F_\kappa\right] = \upsilon\left(U_\kappa\right).$$

Όμως, για $\kappa = 0$, η τελευταία εξίσωση γίνεται $E\left[e^{-\delta V_1}\upsilon\left(U_0 + cV_1 - \mathrm{X}_1\right)\right] = \upsilon\left(U_0\right)$ και αφού ισχύει ότι $U_0 = u$, τότε είναι ίση με τη σχέση

$$E\left[e^{-\delta V_1}\upsilon\left(u + cV_1 - \mathrm{X}_1\right)\right] = \upsilon\left(u\right). \qquad (2.2.2)$$

Επομένως, η σχέση $(2.2.2)$ είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη έτσι ώστε η στοχαστική διαδικασία $\left\{e^{-\delta T_\kappa}\upsilon(U_\kappa), \kappa \in \mathbb{N}\right\}$ να είναι martingale.

Επιλέγουμε τώρα τη συνάρτηση υ, με $\upsilon(u)=e^{su}$, $s \in \mathbb{C}$, έτσι ώστε η στοχαστική διαδικασία $\left\{e^{-\delta T_\kappa + sU_\kappa},\ \kappa \in \mathbb{N}\right\}$ να είναι martingale. Ουσιαστικά, αρκεί να βρούμε τον αριθμό $s \in \mathbb{C}$, για να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση $\upsilon(u)$. Συνεπώς, ψάχνουμε να βρούμε έναν αριθμό $s \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε η στοχαστική διαδικασία $\left\{e^{-\delta T_\kappa + sU_\kappa},\ \kappa \in \mathbb{N}\right\}$ να είναι martingale. Τότε η σχέση $(2.2.2)$ απλοποιείται στην παρακάτω εξίσωση $E\left[e^{-\delta V_1} e^{s(u+cV_1-X_1)}\right]=e^{su}$ και επειδή οι τυχαίες μεταβλητές V_1, X_1 είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους καταλήγουμε στην ισότητα $E\left[e^{-(\delta-cs)V_1}\right]E\left[e^{-sX_1}\right]=1$. Από την ισότητα αυτή, προκύπτει ότι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι η στοχαστική διαδικασία $\left\{e^{-\delta T_\kappa + sU_\kappa},\ \kappa \in \mathbb{N}\right\}$ martingale, πρέπει το $s \in \mathbb{C}$ να είναι λύση της εξίσωσης

$$\hat{\kappa}(\delta - cs)\hat{f}(s)=1. \tag{2.2.3}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ. V_i είναι $\hat{\kappa}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\kappa(x)dx$ και ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ. X_i είναι αντίστοιχα $\hat{f}(s)=\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$.

Επειδή $\hat{\kappa}(s)=\left(\dfrac{\beta}{\beta+s}\right)^2$, τότε η σχέση $(2.2.3)$ είναι ισοδύναμη με την παρακάτω εξίσωση, η οποία θα καλείται *γενικευμένη εξίσωση του Lundberg.*

$$\left(cs-(\beta+\delta)\right)^2=\beta^2\hat{f}(s). \tag{2.2.4}$$

Οι Dickson και Hipp το 2001 έδειξαν ότι η γενικευμένη εξίσωση Lundberg, δηλαδή η σχέση $(2.2.4)$, έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες, όπως θα αναφέρουμε στο παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.1

(i) Για $\delta > 0$, η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg της σχέσης $(2.2.4)$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες, τις $r_i(\delta)$ για $i = 1,2$ τέτοιες ώστε

$$r_1(\delta) < \frac{(\beta+\delta)}{c} < r_2(\delta).$$

(ii) Όταν $\delta \to 0^+$, τότε $r_i(\delta) \to r_i(0)$ με $r_1(0) = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι ισχύει η σχέση

$$l(s) = \left[cs - (\beta+\delta)\right]^2. \qquad (2.2.5)$$

(i) Αν $\delta > 0$, τότε για $s = 0$ η σχέση $(2.2.5)$ γίνεται $l(0) = (\beta+\delta)^2 > \beta^2$

και επειδή $\hat{f}(0) = 1$, έπεται ότι $l(0) > \beta^2 \hat{f}(0)$.

Στη συνέχεια αν παραγωγίσουμε τη σχέση $(2.2.5)$ προκύπτει η εξίσωση

$$l'(s) = 2c^2 s - 2(\beta+\delta)c. \qquad (2.2.6)$$

Αν θέσουμε την παραπάνω σχέση ίση με το 0 και λύσουμε ως προς s, έχουμε $2c^2 s - 2(\beta+\delta)c = 0$, από την οποία καταλήγουμε στην ισότητα $s = \dfrac{\beta+\delta}{c}$.

Αν παραγωγίσουμε για δεύτερη φορά τη σχέση $(2.2.6)$, προκύπτει η σχέση $l''(s) = 2c^2 > 0$ και επειδή η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $l(s)$ είναι θετική, τότε η εξίσωση $l(s) = \beta^2 \hat{f}(s)$ ελαχιστοποιείται για $s = \dfrac{\beta+\delta}{c}$ και αν αντικαταστήσουμε την τιμή αυτή στη σχέση $(2.2.5)$, τότε προκύπτει η εξίσωση

$$l\left(\frac{\beta+\delta}{c}\right) = \left(c\frac{\beta+\delta}{c} - (\beta+\delta)\right)^2 = \left((\beta+\delta) - (\beta+\delta)\right)^2 = 0.$$

Το όριο της συνάρτησης $l(s)$ όταν το s τείνει στο άπειρο, $s \to \infty$, είναι $\lim_{s\to\infty} l(s) = \lim_{s\to\infty}\left(c^2 s^2 - 2(\beta+\delta) + (\beta+\delta)^2\right) = \infty$,

και η παράγωγος της συνάρτησης $l(s) = \beta^2 \hat{f}(s)$ δίνεται από την παρακάτω εξίσωση

$$\frac{d}{ds} l(s) = \frac{d}{ds}\beta^2 \hat{f}(s) = \frac{d}{ds}\beta^2 \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = -\beta^2 \int_0^\infty x e^{-sx} f(x)dx < 0.$$

Επειδή η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $l(s)$ είναι αρνητική, τότε η $\beta^2 \hat{f}(s)$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση ως προς τη μεταβλητή s και παίρνει πάντα θετικές τιμές. Για $s>0$, η συνάρτηση $l(s)$ τέμνει τη συνάρτηση $\beta^2 \hat{f}(s)$ σε δύο διακριτά σημεία, το ένα δεξιά και το άλλο αριστερά της ρίζας $\frac{\beta+\delta}{c}$.

(ii) Αν $\delta \to 0^+$ και $s=0$, η σχέση $(2.2.5)$ γίνεται $l(0)=\beta^2$ και επειδή $\hat{f}(0)=1$, ισχύει ότι $l(0)=\beta^2 \hat{f}(0)$.

Αν παραγωγίσουμε τη σχέση $(2.2.5)$ προκύπτει η εξίσωση $l'(s)=2c^2 s-2\beta c$ και αν θέσουμε την παραπάνω σχέση ίση με το 0 και τη λύσουμε ως προς s, έχουμε την ισότητα $2c^2 s-2\beta c=0$, από την οποία προκύπτει το αποτέλεσμα $s=\frac{\beta}{c}$.

Στη συνέχεια, παραγωγίζοντας για δεύτερη φορά τη σχέση $(2.2.5)$, προκύπτει $l''(s)=2c^2>0$ και επειδή η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $l(s)$ είναι θετική, τότε η εξίσωση $l(s)=\beta^2 \hat{f}(s)$ ελαχιστοποιείται για $s=\frac{\beta}{c}$. Αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(2.2.5)$ την τιμή αυτή, καταλήγουμε στη σχέση $l\left(\frac{\beta}{c}\right)=\left(c\frac{\beta}{c}-\beta\right)^2=(\beta-\beta)^2=0$.

Το όριο της συνάρτησης $l(s)$ για $s\to\infty$, είναι $\lim_{s\to\infty} l(s)=\lim_{s\to\infty}\left(c^2 s^2-2\beta+\beta^2\right)=\infty$.

Όπως και στο ερώτημα (i), επειδή η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $l(s)$ είναι αρνητική, τότε η $\beta^2 \hat{f}(s)$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση ως προς τη μεταβλητή s και παίρνει πάντα θετικές τιμές.

Για $s>0$, η συνάρτηση $l(s)$ τέμνει τη συνάρτηση $\beta^2 \hat{f}(s)$ σε δύο διακριτά σημεία, το ένα είναι το 0 και το άλλο $s=\frac{\beta}{c}$. ■

Στην επόμενη παράγραφο θα υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace της $\phi_\delta(u)$ χρησιμοποιώντας τη γενικευμένη εξίσωση Lundberg.

2.3 Μετασχηματισμός Laplace της $\phi_\delta(u)$

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο εργαλείο στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων και στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται για τη λύση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης $(2.1.1)$.

Έστω, ο μετασχηματισμός Laplace για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, $\phi_\delta(u)$, είναι $\hat{\phi}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-su}\phi_\delta(u)du$.

Παραγωγίζοντας τον παραπάνω μετασχηματισμό Laplace, προκύπτει η εξίσωση

$$\hat{\phi}_\delta^{/}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\phi_\delta^{/}(u)du = s\hat{\phi}_\delta(s) - \phi_\delta(0)$$

και αν την παραγωγίσουμε για δεύτερη φορά, έχουμε

$$\hat{\phi}_\delta^{//}(s) = s^2\hat{\phi}_\delta^{/}(s) - s\hat{\phi}_\delta(s) - \phi_\delta^{/}(0).$$

Επιπλέον ισχύει $\hat{w}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}w(x)f(x)dx$.

Συνεπώς, παίρνοντας τους μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης του θεωρήματος 2.1.1, συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned} c^2\beta^2\hat{\phi}_\delta(s)\hat{f}(x) + \beta^2\hat{w}(s) = &\left(s^2\hat{\phi}_\delta(s) - s\phi_\delta(0) - \phi'_\delta(0)\right) \\ &-2c(\beta+\delta)\left(s\hat{\phi}_\delta(s) - \phi_\delta(0)\right) + (\beta+\delta)^2\hat{\phi}_\delta(s) \end{aligned}$$

και αν λύσουμε την εξίσωση αυτή, ως προς $\hat{\phi}_\delta(s)$ καταλήγουμε στη σχέση

$$\hat{\phi}_\delta(s) = \frac{c^2 s\phi_\delta(0) - 2c(\beta+\delta)\phi_\delta(0) + c^2\phi'_\delta(0) + \beta^2\hat{w}(s)}{l(s) - \beta^2\hat{f}(x)}, \qquad (2.3.1)$$

από την οποία παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής της είναι η γενικευμένη εξίσωση Lundberg.

Παρακάτω, θα ορίσουμε τον τελεστή μιας συνάρτησης $f(x)$ και θα αναφέρουμε ένα λήμμα στο οποίο θα δίνονται οι ιδιότητες του τελεστή της συνάρτησης $f(x)$, $T_r f(x)$, όπως όρισαν οι Li και Garrido το 2004.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.1

Για μια συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται τελεστής $T_r f(x)$ και δίνεται από τη σχέση

$$T_r f(x) = \int_x^{\infty} e^{-r(u-x)} f(u)\,du, \quad r \in C,\ x \geq 0. \tag{2.3.2}$$

ΛΗΜΜΑ 2.3.1

Ισχύουν τα εξής

1.
$$T_r f(0) = \hat{f}(r) \tag{2.3.3}$$

2. ***Αν*** $T_r \hat{f}(s)$ ***είναι ο μετασχηματισμός Laplace του τελεστή*** $T_r f(x)$***, τότε***

$$T_r \hat{f}(s) = \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r-s}, \quad \forall r \neq s \tag{2.3.4}$$

3.
$$T_{r_1} T_{r_2} f(x) = \frac{T_{r_1} f(x) - T_{r_2} f(x)}{r_2 - r_1}, \quad \forall\ r_1 \neq r_2 \tag{2.3.5}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. **1**. Για $x = 0$, η σχέση $(2.3.2)$ γίνεται

$$T_r f(0) = \int_0^{\infty} e^{-ru} f(u)\,du = \hat{f}(r), \quad r \in C.$$

2. Ο μετασχηματισμός Laplace του τελεστή $T_r f(x)$ δίνεται από τη σχέση

$$T_r \hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} T_r f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{y} e^{-sx} e^{-r(y-x)} f(y)\,dx \right) dy = \int_0^{\infty} e^{-ry} f(y) \left(\int_0^{y} e^{-x(r-s)} dx \right) dy.$$

Άρα προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα $T_r \hat{f}(s) = \dfrac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r-s}$.

3. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = T_{r_2} f(x)$, τότε ισχύει η σχέση

$$T_{r_1} T_{r_2} f(x) = T_{r_1} g(x) = \int_x^{\infty} e^{-r_1(u-x)} g(u)\,du = \int_x^{\infty} e^{-r_1(u-x)} T_{r_2} f(u)\,du$$

$$= \int_x^{\infty} e^{-r_1(u-x)} \int_u^{\infty} e^{-r_2(s-u)} f(s)\,ds\,du,$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι προκύπτει η εξίσωση

$$T_{r_1}T_{r_2} f(x) = \int_x^{\infty}\int_u^{\infty} e^{-r_1(u-x)} e^{-r_2(s-u)} f(s)\, ds du. \qquad (2.3.6)$$

Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι περιορισμοί $x \le u < \infty$ και $u \le s < \infty$. Με αλλαγή των ορίων $x \le u < s$ και $x \le s < \infty$, και ύστερα από πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση

$$T_{r_1}T_{r_2} f(x) = \int_x^{\infty}\int_x^{s} e^{-r_1(u-x)} e^{-r_2(s-u)} f(s)\, du ds = \int_x^{\infty} f(s) e^{r_1 x} e^{-r_2 s} \left(\int_x^{s} e^{-r_1 u} e^{r_2 u} du \right) ds$$

$$= \int_x^{\infty} f(s) e^{r_1 x} e^{-r_2 s} \left(\int_x^{s} e^{(r_2 - r_1)u} du \right) ds = \int_x^{\infty} f(s) e^{r_1 x} e^{-r_2 s} \left[\frac{1}{r_2 - r_1} \left(e^{(r_2-r_1)s} - e^{(r_2-r_1)x} \right) \right] ds$$

$$= \frac{1}{r_2 - r_1} \left\{ \int_x^{\infty} e^{r_1 x} e^{-r_2 s} \left[e^{(r_2-r_1)s} - e^{(r_2-r_1)x} \right] f(s)\, ds \right\}$$

$$= \frac{1}{r_2 - r_1} \left\{ \int_x^{\infty} e^{-r_1(s-x)} f(s)\, ds - \int_x^{\infty} e^{-r_2(s-x)} f(s)\, ds \right\}.$$

Άρα, από τον ορισμό 2.3.1, προκύπτει άμεσα $T_{r_1}T_{r_2} f(x) = \dfrac{T_{r_1} f(x) - T_{r_2} f(x)}{r_2 - r_1}$. ■

Επιπλέον, οι Dickson και Hipp το 2001 απέδειξαν ότι ο μετασχηματισμός Laplace της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής, $\hat{\phi}_\delta(s)$, δίνεται από τη σχέση $(2.3.7)$, όπως φαίνεται στο θεώρημα που ακολουθεί.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.1

Ο μετασχηματισμός Laplace για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\hat{\phi}_\delta(s) = \frac{\beta^2 T_{r_2} T_{r_1} \hat{w}(s)}{c^2 - \beta^2 T_{r_2} T_{r_1} \hat{f}(s)}. \qquad (2.3.7)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{\phi}_\delta(s)$ γράφεται στη μορφή

$$\hat{\phi}_\delta(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

όπου, $A(s) = c^2 s \phi_\delta(0) - 2c(\beta + \delta)\phi_\delta(0) + c^2 \phi'_\delta(0) + \beta^2 \hat{w}(s)$ και

$B(s) = l(s) - \beta^2 \hat{f}(x)$.

Αφού η r_1 είναι ρίζα του παρονομαστή και η $\hat{\phi}_\delta(s)$ είναι πεπερασμένη, δηλαδή $\hat{\phi}_\delta(s) < \infty$, $\forall s$, (από λήμμα 2.1.1), τότε η r_1 θα είναι ρίζα και του αριθμητή, το οποίο σημαίνει ότι $A(r_1) = 0$. Άρα αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $A(s)$, όπου s το r_1 καταλήγουμε στην εξίσωση $c^2 r_1 \phi_\delta(0) - 2c(\beta+\delta)\phi_\delta(0) + c^2 \phi'_\delta(0) + \beta^2 \hat{w}(r_1) = 0$, από την οποία προκύπτει η σχέση

$$c^2 r_1 \phi_\delta(0) + \beta^2 \hat{w}(r_1) = 2c(\beta+\delta)\phi_\delta(0) - c^2 \phi'_\delta(0). \qquad (2.3.8)$$

Ομοίως, αφού η r_2 είναι ρίζα του παρονομαστή και η $\hat{\phi}_\delta(s)$ είναι πεπερασμένη, δηλαδή $\hat{\phi}_\delta(s) < \infty$, $\forall s$, (από λήμμα 2.1.1), τότε η r_2 θα είναι ρίζα και του αριθμητή, το οποίο σημαίνει $A(r_2) = 0$. Αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $A(s)$, όπου s το r_2 έχουμε $c^2 r_2 \phi_\delta(0) - 2c(\beta+\delta)\phi_\delta(0) + c^2 \phi'_\delta(0) + \beta^2 \hat{w}(r_2) = 0$, από την οποία καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση

$$c^2 r_2 \phi_\delta(0) + \beta^2 \hat{w}(r_2) = 2c(\beta+\delta)\phi_\delta(0) - c^2 \phi'_\delta(0). \qquad (2.3.9)$$

Από τις σχέσεις $(2.3.8)$ και $(2.3.9)$ παρατηρούμε ότι τα δεύτερα μέλη είναι ίσα, άρα μπορούμε να εξισώσουμε και τα πρώτα μέλη ως εξής $c^2 r_1 \phi_\delta(0) + \beta^2 \hat{w}(r_1) = c^2 r_2 \phi_\delta(0) + \beta^2 \hat{w}(r_2)$ και βγάζοντας κοινούς παράγοντες προκύπτει $\phi_\delta(0)\left(c^2 r_2 - c^2 r_1\right) = \beta^2\left(\hat{w}(r_1) - \hat{w}(r_2)\right)$, από την οποία καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση. Δηλαδή,

$$\phi_\delta(0) = \frac{\beta^2\left(\hat{w}(r_1) - \hat{w}(r_2)\right)}{c^2(r_2 - r_1)}. \qquad (2.3.10)$$

Αφού ισχύει η συνάρτηση $A(r_1) = 0$, τότε αν την αφαιρέσουμε από τον αριθμητή προκύπτει η σχέση

$$A(s) = A(s) - A(r_1) = c^2 s \phi_\delta(0) + \beta^2 \hat{w}(s) - c^2 r_1 \phi_\delta(0) - \beta^2 \hat{w}(r_1)$$

και βγάζοντας κοινούς παράγοντες, έχουμε τη σχέση

$$A(s) = c^2 \phi_\delta(0)(s - r_1) - \beta^2\left(\hat{w}(r_1) - \hat{w}(s)\right).$$

Αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω ισότητα τη σχέση $(2.3.10)$, προκύπτει

$$A(s)=(s-r_1)\left(c^2\phi_\delta(0)-\beta^2\frac{\left(\hat{w}(r_1)-\hat{w}(s)\right)}{(s-r_1)}\right),$$

από την οποία καταλήγουμε στη σχέση

$$A(s)=(s-r_1)\left(c^2\phi_\delta(0)-\beta^2 T_{r_1}\hat{w}(s)\right). \qquad (2.3.11)$$

Όμως αφού ισχύει $A(s)=0$, τότε από τη σχέση $(2.3.11)$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει η παρακάτω εξίσωση

$$c^2\phi_\delta(0)=\beta^2 T_{r_1}\hat{w}(r_2). \qquad (2.3.12)$$

Αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(2.3.11)$ τη $(2.3.12)$ καταλήγουμε στη σχέση

$$A(s)=(s-r_1)(s-r_2)\left(\frac{\beta^2 T_{r_1}\hat{w}(r_2)-\beta^2 T_{r_1}\hat{w}(s)}{(s-r_2)}\right),$$

από την οποία έχουμε την παρακάτω ισότητα

Στη συνέχεια, αφού ισχύει η συνάρτηση $B(r_1)=0$, τότε αν την αφαιρέσουμε από τον παρονομαστή και ύστερα από πράξεις, προκύπτει η σχέση

$$\begin{aligned}
B(s)&=B(s)-B(r_1)=l(s)-\beta^2\hat{f}(s)-l(r_1)+\beta^2\hat{f}(r_1)\\
&=c^2s^2-2cs(\beta+\delta)+(\beta+\delta)^2-\beta^2\hat{f}(s)-c^2r_1^2+2cr_1(\beta+\delta)-(\beta+\delta)^2+\beta^2\hat{f}(r_1)\\
&=c^2\left(s^2-r_1^2\right)-2c(\beta+\delta)(s-r_1)+\beta^2\left(\hat{f}(r_1)-\hat{f}(s)\right)\\
&=(s-r_1)\left(c^2(s+r_1)-2c(\beta+\delta)+\frac{\beta^2\left(\hat{f}(r_1)-\hat{f}(s)\right)}{(s-r_1)}\right),
\end{aligned}$$

από την οποία καταλήγουμε στην εξίσωση

$$B(s)=(s-r_1)\left(c^2(s+r_1)-2c(\beta+\delta)+T_{r_1}\hat{f}(s)\right). \qquad (2.3.14)$$

Επιπλέον, αφού ισχύει ότι $B(s)=0$ και η r_2 είναι ρίζα του παρονομαστή, δηλαδή

$B(r_2)=0,$ τότε $l(s)-\beta^2\hat{f}(s)=0$ και $(r_2-r_1)\left(c^2(r_2+r_1)-2c(\beta+\delta)+T_{r_1}\hat{f}(r_2)\right)=0$,

$$c^2\left(r_2+r_1\right)-2c\left(\beta+\delta\right)+T_{r_1}\hat{f}\left(r_2\right)=0\,,$$

από την οποία προκύπτει η σχέση

$$-2c\left(\beta+\delta\right)=-c^2\left(r_2+r_1\right)-T_{r_1}\hat{f}\left(r_2\right). \qquad (2.3.15)$$

Αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(2.3.14)$ την τελευταία ισότητα, έχουμε τη σχέση

$$B(s)=\left(s-r_1\right)\left(c^2\left(s+r_1\right)-c^2\left(r_2+r_1\right)-\beta^2T_{r_1}\hat{f}\left(r_2\right)+\beta^2T_{r_1}\hat{f}\left(s\right)\right),$$

από την οποία, ύστερα από πράξεις έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} B(s)&=\left(s-r_1\right)\left(c^2\left(s-r_2\right)-\beta^2T_{r_1}\hat{f}\left(r_2\right)+\beta^2T_{r_1}\hat{f}\left(s\right)\right) \\ &=\left(s-r_1\right)\left(s-r_2\right)\left(c^2-\beta^2\frac{T_{r_1}\hat{f}\left(r_2\right)-T_{r_1}\hat{f}\left(s\right)}{\left(s-r_2\right)}\right). \end{aligned}$$

Άρα ο παρονομαστής μπορεί να γραφεί ως εξής

$$B(s)=\left(s-r_1\right)\left(s-r_2\right)\left(c^2-\beta^2T_{r_2}T_{r_1}\hat{f}\left(s\right)\right). \qquad (2.3.16)$$

Οπότε, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $(2.3.13)$ και $(2.3.16)$, προκύπτει άμεσα ότι ο μετασχηματισμός Laplace της εξίσωσης $\phi_\delta\left(u\right)$ είναι

$$\hat{\phi}_\delta\left(s\right)=\frac{\left(s-r_1\right)\left(s-r_2\right)\beta^2T_{r_2}T_{r_1}\hat{w}(s)}{\left(s-r_1\right)\left(s-r_2\right)\left(c^2-\beta^2T_{r_2}T_{r_1}\hat{f}\left(s\right)\right)}$$

και ύστερα από την απαλοιφή των κοινών όρων στον αριθμητή και παρανομαστή του παραπάνω κλάσματος καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

Αν θέσουμε $\hat{\eta}(s)=T_{r_2}T_{r_1}\hat{w}(s)$ και $\hat{\gamma}(s)=T_{r_2}T_{r_1}\hat{f}\left(s\right)$ έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα

$$\hat{\phi}_\delta\left(s\right)=\frac{\beta^2\hat{\eta}(s)}{c^2-\beta^2\hat{\gamma}(s)}. \qquad (2.3.17)$$

Στο παρακάτω θεώρημα θα δείξουμε ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μια ανανεωτική εξίσωση, η οποία δίνεται από τη σχέση $(2.3.18)$, όπως έδειξαν οι Dickson και Hipp το 2001.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.2

Η $\phi_\delta(u)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση

$$\phi_\delta(u) = \frac{\beta^2}{c^2}\int_0^u \phi_\delta(u-x)\gamma(x)\,dx + \frac{\beta^2}{c^2}\eta(u), \qquad (2.3.18)$$

όπου, $\gamma(x) = T_{r_2}T_{r_1}f(x)$ ***και*** $\eta(u) = T_{r_2}T_{r_1}w(u)$**.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η σχέση $(2.3.17)$ μπορεί να γραφεί ως $\hat{\phi}_\delta(s)\left(c^2 - \beta^2\hat{\gamma}(s)\right) = \beta^2\hat{\eta}(s)$

και ύστερα από απλοποίηση γίνεται

$$c^2\hat{\phi}_\delta(s) = \beta^2\hat{\phi}_\delta(s)\hat{\gamma}(s) + \beta^2\hat{\eta}(s). \qquad (2.3.19)$$

Παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace στην σχέση $(2.3.19)$, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$c^2\phi_\delta(u) = \beta^2(\phi_\delta * \gamma)(u) + \beta^2\eta(s),$$

όπου η $\phi_\delta * \gamma$ αποτελεί τη συνέλιξη του γινομένου $\hat{\phi}_\delta(s)\hat{\gamma}(s)$. ■

2.4 Ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τις ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις και τη λύση τους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4.1

Μια εξίσωση της μορφή $\mu(u) = g(u) + \int_0^u \mu(u-x)dG(x)$ λέγεται ανανεωτική εξίσωση, όπου

g: μια φραγμένη συνάρτηση και $g(u)$ είναι συνεχή για $u \geq 0$,

G: μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής με $G(0) = 0$ και

μ: η άγνωστη συνάρτηση

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4.2

Μια εξίσωση της μορφής $\mu(u) = g(u) + \phi\int_0^u \mu(u-y)g(y)dy$, $u \geq 0$, όπου ϕ μια σταθερά τέτοια ώστε $0 < \phi < 1$ και $g(y) = G^{/}(y)$, λέγεται ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση.

Για τη συνέχεια θέτουμε $\phi = \frac{1}{1+\beta}$ και $g(u) = \frac{1}{1+\beta}\mathrm{H}(u)$, $\beta > 0$, όποτε η ανανεωτική εξίσωση του ορισμού 2.4.2 παίρνει τη μορφή

$$\mu(u) = \frac{1}{1+\beta}\mathrm{H}(u) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^u \mu(u-y)g(y)dy\,,\; u \geq 0\,.$$

Η λύση αυτής της ανανεωτικής εξίσωσης δίνεται στο παρακάτω θεώρημα, που απέδειξαν οι Lin και Willmot το 1999. Προς τούτο ορίζουμε την αντίστοιχη γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση κατανομής $K(u) = 1 - \overline{K}(u)$ και με δεξιά ουρά

$$\overline{K}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n \overline{G}^{*n}(u)\,,\; u \geq 0,$$

όπου $\overline{G}^{*n}(u)$ είναι η ουρά της n-οστής συνέλιξης της δεξιάς ουράς της $\overline{G}(y) = 1 - G(y)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.1

Για $u \geq 0$, η λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης μπορεί να εκφραστεί ως

$$\mu(u) = \frac{1}{\beta}\int_0^u H(u-x)dK(x) + \frac{1}{1+\beta}H(u)\quad,\quad u \geq 0 \qquad (2.4.1)$$

ή ισοδύναμα

$$\mu(u) = \frac{1}{\beta}\int_0^u \overline{K}(u-x)dH(x) - \frac{H(0)}{\beta}\overline{K}(u) + \frac{1}{\beta}H(u)\,,\; u \geq 0 \qquad (2.4.2)$$

Αν η συνάρτηση $H(u)$ είναι διαφορίσιμη , τότε η $\mu(u)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mu(u) = -\frac{1}{\beta}\int_0^u \overline{K}(u-x)H'(x)dx - \frac{H(0)}{\beta}\overline{K}(u) + \frac{1}{\beta}H(u), \qquad (2.4.3)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\hat{g}(s) = \int_0^\infty e^{-su}g(u)du = \int_0^\infty e^{-su}dG(u)$ και $\hat{\mu}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\mu(u)du$ είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων $g(s)$ και $\mu(s)$ αντίστοιχα. Έτσι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της γεωμετρικής κατανομής είναι $\hat{k}(s) = K(0) + \int_0^\infty e^{-su}K(u)du$.

Για $u=0$, ισχύει η παρακάτω ισότητα

$$\overline{K}(0)=1-K(0)=\frac{1}{1+\beta}. \tag{2.4.4}$$

Οπότε, ο μετασχηματισμός Laplace για τη δεξιά ουρά της γεωμετρικής κατανομής είναι

$$\hat{k}(s)=K(0)+\int_{0^+}^{\infty} e^{-su}dK(u)=\frac{\beta}{1+\beta-\hat{g}(s)}. \tag{2.4.5}$$

Παίρνοντας τους μετασχηματισμούς Laplace στην ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση και ύστερα από πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

$$\hat{\mu}(s)=\frac{1}{1+\beta}\hat{\mu}(s)\hat{g}(s)+\frac{1}{1+\beta}\hat{H}(s),$$

από την οποία προκύπτει

$$\hat{\mu}(s)\left(1-\frac{1}{1+\beta}\hat{g}(s)\right)=\frac{1}{1+\beta}\hat{H}(s)$$

και αν τη λύσουμε ως προς $\hat{\mu}(s)$, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\hat{\mu}(s)=\frac{\hat{H}(s)}{1+\beta-\hat{g}(s)}, \tag{2.4.6}$$

όπου, $\hat{H}(s)=\int_{0}^{\infty} e^{-su}H(u)du$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $H(u)$.

Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί και μέσω της σχέσης $(2.4.5)$ στη μορφή

$$\hat{\mu}(s)=\frac{\hat{H}(s)}{1+\beta-\hat{g}(s)}=\frac{\hat{H}(s)}{\dfrac{\beta}{\hat{k}(s)}},$$

από την οποία προκύπτει η παρακάτω εξίσωση

$$\hat{\mu}(s)=\frac{1}{\beta}\hat{H}(s)\hat{k}(s). \tag{2.4.7}$$

Παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace στην παραπάνω σχέση, καταλήγουμε στη σχέση $(2.4.1)$. Η λύση $(2.4.2)$ προκύπτει άμεσα από τη σχέση

$(2.4.1)$, ολοκληρώνοντας την κατά μέρη. Οπότε, ξεκινώντας από τον πρώτο όρο της σχέσης $(2.4.1)$, έχουμε

$$\int_0^u H(u-x)\,dK_\delta(x) = \int_0^u H(u-x)\,d\left(1-\overline{K_\delta}(x)\right) = -\int_0^u H(u-x)\,d\overline{K}_\delta(x)$$
$$= -\left[H(u-x)\overline{K}(x)\right]_0^u + \int_0^u \overline{K}_\delta(x)\,dH(u-x),$$

από την οποία προκύπτει η σχέση

$$\int_0^u H(u-x)\,dK(x) = -H(0)\overline{K}(u) + H(u)\overline{K}(0) - \int_0^u \overline{K}(u-x)\,dH(x). \qquad (2.4.8)$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία εξίσωση τη σχέση $(2.4.4)$, καταλήγουμε στις σχέσεις $(2.4.2)$ και $(2.4.3)$. ■

Στη συνέχεια, προσπαθούμε να εκφράσουμε την λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης σε σχέση με την $\overline{K}(u)$, παρά σε σχέση με το διαφορικό της $K(u)$. Όμως από τη σχέση $(2.4.5)$ παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\int_0^\infty e^{-su}\,dK(u) = \frac{\beta}{1+\beta-\widehat{g}(s)} = \frac{\beta}{1+\beta-\widehat{g}(s)},$$

αφού τα όρια του ολοκληρώματος είναι από 0 έως ∞ και όχι από 0^+ έως ∞. Άρα,

$$\int_0^\infty e^{-su}\,d\overline{K}(u) = \frac{1}{s}\left\{1-\int_0^\infty e^{-su}\,dK(u)\right\} = \frac{1}{s}\left\{1-\frac{\beta}{1+\beta-\widehat{g}(s)}\right\} = \frac{1}{s}\left\{\frac{1+\beta-\widehat{g}(s)-\beta}{1+\beta-\widehat{g}(s)}\right\},$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι ισχύει η σχέση

$$\int_0^\infty e^{-su}\,d\overline{K}(u) = \frac{1}{s}\left\{\frac{1-\widehat{g}(s)}{1+\beta-\widehat{g}(s)}\right\}.$$

Όμως, η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$\int_0^\infty e^{-su}\,\overline{K}(u)\,du = \frac{1}{1+\beta}\widehat{g}(s)\int_0^\infty e^{-su}\,\overline{K}(u)\,du + \frac{1}{1+\beta}\frac{1-\widehat{g}(s)}{s}.$$

Οπότε, προκύπτει η σχέση

$$\overline{K}(u) = \frac{1}{1+\beta}\int_0^u \overline{K}(u-x)\,dG(x) + \frac{1}{1+\beta}\overline{G}(u) \quad , \quad u \geq 0. \quad (2.4.9)$$

2.5 Ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση για την $\phi_\delta(u)$ και η λύση της

Σύμφωνα με τους ορισμούς, τους οποίους αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, η $\phi_\delta(u)$, η οποία δίνεται από τη σχέση $(2.3.18)$, μπορεί να θεωρηθεί ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση. Προς τούτο, στο θεώρημα που ακολουθεί, θα δείξουμε αρχικά ότι η ολοκληροδιαφορική εξίσωση είναι ελαττωματική και κατόπιν ότι μπορεί να γραφεί στη μορφή $(2.5.1)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5.1

Η $\phi_\delta(u)$ ικανοποιεί την ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση

$$\phi_\delta(u)=\frac{1}{1+b_\delta}\int_0^u \phi_\delta(u-x)g_\delta(x)\,dx+\frac{1}{1+b_\delta}B_\delta(u). \qquad (2.5.1)$$

όπου, $B_\delta(u)=\dfrac{(1+b_\delta)\beta^2}{c^2}\eta(u)$ ***και*** $\dfrac{1}{1+b_\delta}=1-\dfrac{2\beta\delta+\delta^2}{c^2 r_1 r_2}$ με $b_\delta>0$.

Όταν $\delta\to 0^+$***, τότε ισχύει*** $\dfrac{1}{1+b_0}=\lim\limits_{\delta\to 0^+} b_\delta=1-\dfrac{\beta\left(2c-\beta E(\mathrm{X})\right)}{c^2 r_2(0)}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν θέσουμε τη συνάρτηση $z(y)=\dfrac{\beta^2}{c^2}\gamma(y)$, για να δείξουμε ότι η $\phi_\delta(u)$ είναι ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση αρκεί να δείξουμε ότι $\int_0^\infty z(y)\,dy<1$.

Τότε ισχύει η σχέση

$$z(y)=\frac{\beta^2}{c^2}T_{r_2}T_{r_1}f(y)=\frac{\beta^2}{c^2}\frac{T_{r_1}f(y)-T_{r_2}f(y)}{r_2-r_1}. \qquad (2.5.2)$$

Αν ολοκληρώσουμε τη σχέση $(2.5.2)$ από το 0 έως το ∞, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα

$$\begin{aligned}\int_0^\infty z(y)\,dy&=\int_0^\infty \frac{\beta^2}{c^2}\frac{T_{r_1}f(y)-T_{r_2}f(y)}{r_2-r_1}dy=\frac{\beta^2}{c^2}\int_0^\infty e^{-sy}\frac{T_{r_1}f(y)-T_{r_2}f(y)}{r_2-r_1}dy\\&=\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\left(\int_0^\infty e^{-sy}T_{r_1}f(y)\,dy-\int_0^\infty e^{-sy}T_{r_2}f(y)\,dy\right)\\&=\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\left(T_{r_1}\hat{f}(0)-T_{r_2}\hat{f}(0)\right).\end{aligned}$$

Αν στην τελευταία σχέση αντικαταστήσουμε τη σχέση $(2.3.4)$, προκύπτει η εξίσωση

$$\int_0^\infty z(y)\,dy = \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\left(\frac{\hat{f}(0)-\hat{f}(r_1)}{r_1-0}-\frac{\hat{f}(0)-\hat{f}(r_2)}{r_2-0}\right)$$

και επειδή ισχύει η ισότητα $\hat{f}(0)=1$, η παραπάνω σχέση τροποποιείται και γίνεται

$$\int_0^\infty z(y)\,dy = \frac{1}{c^2(r_2-r_1)}\left[\frac{\beta^2\left(1-\hat{f}(r_1)\right)}{r_1}-\frac{\beta^2\left(1-\hat{f}(r_2)\right)}{r_2}\right]. \quad (2.5.3)$$

Όμως από την εξίσωση Lundberg έχουμε $c^2s^2-2(\beta+\delta)cs+(\beta+\delta)^2=\beta^2\,\hat{f}(s)$ και ύστερα από πράξεις προκύπτει $c^2s^2-2\beta cs-2\delta cs+\beta^2+2\beta\delta+\delta^2=\beta^2\,\hat{f}(s)$, από την οποία καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση

$$\beta^2\left(1-\hat{f}(s)\right)=2\beta cs+2\delta cs-2\beta\delta-\delta^2-c^2s^2. \quad (2.5.4)$$

Τέλος, αν αντικαταστήσουμε την παραπάνω ισότητα στη σχέση $(2.5.2)$, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα

$$\begin{aligned}\int_0^\infty z(y)\,dy &= \frac{1}{c^2(r_2-r_1)}\left[\frac{2\beta cr_1+2\delta cr_1-2\beta\delta-\delta^2-c^2r_1^2}{r_1}-\frac{2\beta cr_2+2\delta cr_2-2\beta\delta-\delta^2-c^2r_2^2}{r_2}\right]\\ &=\frac{1}{c^2(r_2-r_1)}\left[\frac{-2\beta\delta(r_2-r_1)-\delta^2(r_2-r_1)+c^2r_1r_2(r_2-r_1)}{r_1r_2}\right]\\ &=\frac{1}{c^2(r_2-r_1)}\frac{(r_2-r_1)\left(-2\beta\delta-\delta^2+c^2r_1r_2\right)}{r_1r_2}=\frac{-2\beta\delta-\delta^2+c^2r_1r_2}{c^2r_1r_2}.\end{aligned}$$

Οπότε, προκύπτει η σχέση $\int_0^\infty z(y)\,dy=1-\frac{2\beta\delta+\delta^2}{c^2r_1r_2}$, από την οποία συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\int_0^\infty z(y)\,dy<1$.

Στη συνέχεια, αν θέσουμε $\int_0^\infty z(y)dy=1-\frac{2\beta\delta+\delta^2}{c^2r_1r_2}=D$ και $b_\delta=\frac{2\beta\delta+\delta^2}{c^2r_1r_2-\left(2\beta\delta+\delta^2\right)}$,

τότε παρατηρούμε ότι οι σχέσεις συνδέονται μεταξύ τους με την εξίσωση $1+b_\delta=\frac{1}{D}$ και συνεπώς ισχύει η ισότητα που ακολουθεί.

$$\int_0^{\infty} z(y)dy = \frac{1}{1+b_\delta} = 1 - \frac{2\beta\delta+\delta^2}{c^2 r_1 r_2} = D,\ \acute{o}\pi o\upsilon\, b_\delta > 0. \qquad (2.5.5)$$

Έστω η τ.μ. Υ με συνάρτηση κατανομής $G_\delta(u)$, τότε δίνεται από τη σχέση

$$G_\delta(u) = \frac{\int_0^u z(y)dy}{\int_0^{\infty} z(y)dy}. \qquad (2.5.6)$$

Αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(2.5.6)$ τη σχέση $(2.5.5)$, προκύπτει

$$G_\delta(u) = \frac{\int_0^u z(y)dy}{D}.$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ.Υ συμβολίζεται με $g_\delta(u)$ και είναι

$$\frac{d}{du} G_\delta(u) = \frac{z(u)}{D}.$$

Άρα, ισχύει η σχέση

$$g_\delta(u) = (1+b_\delta) z(u). \qquad (2.5.7)$$

Οπότε, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(2.3.18)$ τις παραπάνω ισότητες, καταλήγουμε

$$\phi_\delta(u) = \frac{\beta^2}{c^2}\int_0^u \phi_\delta(u-s)\gamma(s)ds + \frac{\beta^2}{c^2}\eta(u) = \int_0^u \phi_\delta(u-y)z(y)dy + \frac{\beta^2}{c^2}\eta(u)$$

$$\phi_\delta(u) = \int_0^u \phi_\delta(u-y)\frac{1}{1+b_\delta} g_\delta(y)dy + \frac{\beta^2}{c^2}\eta(u),$$

από την οποία προκύπτει η σχέση

$$\phi_\delta(u) = \frac{1}{1+b_\delta}\int_0^u \phi_\delta(u-y)g_\delta(y)dy + \frac{1}{1+b_\delta}\frac{(1+b_\delta)\beta^2}{c^2}\eta(u). \qquad (2.5.8)$$

Θέτοντας τη συνάρτηση

$$B_\delta(u) = \frac{(1+b_\delta)\beta^2}{c^2}\eta(u), \qquad (2.5.9)$$

τότε η σχέση $(2.5.8)$ γράφεται στη ζητούμενη μορφή.

Συνεχίζοντας, για να υπολογίσουμε την τιμή του κλάσματος $\frac{1}{1+b_0}$ αρκεί να πάρουμε όριο στη σχέση $(2.5.5)$ όταν το δ τείνει στο 0^+. Έχουμε, λοιπόν την εξίσωση

$$\frac{1}{1+b_0} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{1+b_\delta} = 1 - \lim_{\delta \to 0} \frac{2\beta\delta + \delta^2}{c^2 r_1(\delta) r_2(\delta)}. \qquad (2.5.10)$$

Όμως, για $\delta = 0$ θα μηδενιστεί και ο αριθμητής και ο παρονομαστής της σχέσης $(2.5.10)$. Η μορφή του ορίου δηλαδή, θα είναι απροσδιόριστη και για να λυθεί θα παραγωγίσουμε το κλάσμα ως προς το δ χρησιμοποιώντας την ιδιότητα de l'hopital,όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\frac{1}{1+b_0} = 1 - \lim_{\delta \to 0} \frac{2\beta + 2\delta}{c^2\left[r_1(\delta) r_2^{/}(\delta) + r_1^{/}(\delta) r_2(\delta)\right]} = 1 - \frac{2\beta}{c^2\left[r_1(0) r_2^{/}(0) + r_1^{/}(0) r_2(0)\right]}$$

$$= 1 - \frac{2\beta}{c^2 r_1^{/}(0) r_2(0)}, \qquad (2.5.11)$$

αφού $r_1(0) = 0$.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Lundberg, καταλήγουμε τη σχέση

$$\left[c r_1(\delta) - (\beta + \delta)\right]^2 = \beta^2 \hat{f}\left(r_1(\delta)\right),$$

από την οποία, παραγωγίζοντας την ως προς δ, παίρνουμε

$$2\left[c r_1(\delta) - (\beta + \delta)\right] = \beta^2 r_1^{/}(\delta)\, \hat{f}^{/}\left(r_1(\delta)\right)$$

και για $\delta \to 0^+$, η παραπάνω σχέση δίνει $2\beta\left[c r_1^{/}(0) - 1\right] = \beta^2 r_1^{/}(0)\, \hat{f}^{/}(0)$.

Επειδή η παράγωγος του μετασχηματισμού Laplace για $\delta = 0$ είναι

$$\hat{f}^{/}(0) = \int_0^\infty -x e^{-0x} f(x) dx = \int_0^\infty -x f(x) dx = -E(X),$$

όπου $E(X)$ είναι η μέση τιμή των απαιτήσεων για αποζημιώσεις, τότε αν αντικαταστήσουμε την παράγωγο του μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f(x)$ στην τελευταία σχέση, προκύπτει η εξίσωση

$$r_1^{/}(0) = \frac{2}{2c - \beta E(X)}.$$

Τέλος, αν αντικαταστήσουμε την τελευταία ισότητα στη σχέση $(2.5.11)$, καταλήγουμε

$$\frac{1}{1+b_0}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{1+b_\delta}=1-\frac{2\beta}{c^2\dfrac{2}{2c-\beta E(X)}r_2(0)}=1-\frac{\beta\left(2c-\beta E(X)\right)}{c^2 r_2(0)}, \qquad (2.5.12)$$

το οποίο είναι το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

Η λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης υπολογίζεται σε σχέση της δεξιάς ουράς μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα. Οπότε, για $u \geq 0$, ορίζουμε ως $K_\delta(u)=1-\overline{K}_\delta(u)$ τη συνάρτηση κατανομής της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, όπου η δεξιά ουρά $\overline{K}_\delta(u)$ δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\overline{K}_\delta(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_\delta}{1+b_\delta}\left(\frac{1}{1+b_\delta}\right)^n \overline{G}_\delta^{\,*n}(u),\ u\geq 0. \qquad (2.5.13)$$

$\overline{G}_\delta^{\,*n}(u)$ είναι η ουρά της n-οστής συνέλιξης της $G_\delta(u)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.1

Για $u \geq 0$, η λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης μπορεί να εκφραστεί ως

$$\phi_\delta(u)=\frac{1}{b_\delta}\int_0^u B_\delta(u-x)\,dK_\delta(x)+\frac{1}{1+b_\delta}B_\delta(u)\quad,\quad u\geq 0 \qquad (2.5.14)$$

ή ισοδύναμα

$$\phi_\delta(u)=\frac{1}{b_\delta}\int_0^u \overline{K}_\delta(u-x)\,dB_\delta(x)-\frac{B_\delta(0)}{b_\delta}\overline{K}_\delta(u)+\frac{1}{b_\delta}B_\delta(u),\ u\geq 0 \qquad (2.5.15)$$

Αν η συνάρτηση $B_\delta(u)$ είναι διαφορίσιμη, τότε η $\phi_\delta(u)$ γράφεται

$$\phi_\delta(u)=-\frac{1}{b_\delta}\int_0^u \overline{K}_\delta(u-x)B'_\delta(x)-\frac{B_\delta(0)}{b_\delta}\overline{K}_\delta(u)+\frac{1}{b_\delta}B_\delta(u),\ u\geq 0 \qquad (2.5.16)$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας είναι η δεξιά ουρά της $\overline{K}_\delta(u)$ που ορίσαμε προηγουμένως, της μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Επιπλέον, όταν $\delta=0$, η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με τη δεξιά ουρά $\overline{K}_0(u)$ της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.5.1

$I.$ $$\phi_{\mathrm{T}}(u) = E\left[e^{-\delta T} I\left(\mathrm{T} < \infty / U(0) = u\right)\right] = \overline{K}_{\delta}(u). \qquad (2.5.17)$$

$II.$ $$\psi(u) = E\left[I\left(\mathrm{T} < \infty / U(0) = u\right)\right] = \overline{K}_{0}(u). \qquad (2.5.18)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ι. Σύμφωνα με το θεώρημα 2.5.1, η $\phi_{\delta}(u)$ ικανοποιεί την ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση της μορφής $(2.5.1)$, όπου

$g_{\delta}(x) = (1+b_{\delta}) z(x) = (1+b_{\delta}) \dfrac{\beta^2}{c^2} \gamma(x)$ και $\gamma(x) = T_{r_2} T_{r_1} f(x)$.

Οπότε, αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. Y, δίνεται από την εξίσωση $g_{\delta}(x) = (1+b_{\delta}) \dfrac{\beta^2}{c^2} T_{r_2} T_{r_1} f(x)$.

Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. Y μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή

$$G_{\delta}(u) = \int_0^u g_{\delta}(x)\,dx = \int_0^u (1+b_{\delta}) \frac{\beta^2}{c^2} \gamma(x)\,dx = (1+b_{\delta}) \frac{\beta^2}{c^2} \int_0^u T_{r_2} T_{r_1} f(x)\,dx.$$

Επομένως, η δεξιά ουρά της συνάρτησης κατανομής της τ.μ. Y δίνεται από την εξίσωση

$$\overline{G}_{\delta}(u) = (1+b_{\delta}) \frac{\beta^2}{c^2} T_{r_2} T_{r_1} \overline{F}(u). \qquad (2.5.19)$$

Σύμφωνα με την παρακάτω σχέση

$$w(s) = \int_s^{\infty} w(s, x-s)\, f(x) dx = \int_s^{\infty} f(x) dx = \int_s^{\infty} dF(x) = 1 - F(s) = \overline{F}(s)$$

και αφού $w(x, y) = 1$, τότε ισχύει $\eta(s) = T_{r_2} T_{r_1} w(s) = T_{r_2} T_{r_1} \overline{F}(s)$. Οπότε, προκύπτει η σχέση

$$B_{\delta}(u) = \frac{(1+b_{\delta})\beta^2}{c^2} \eta(u) = \frac{(1+b_{\delta})\beta^2}{c^2} T_{r_2} T_{r_1} \overline{F}(u). \qquad (2.5.20)$$

Παρατηρούμε ότι τα δεύτερα μέλη των σχέσεων $(2.5.19)$ και $(2.5.20)$ είναι ίσα, άρα θα είναι ίσα και τα πρώτα μέλη. Επομένως ισχύει $\overline{G}_{\delta}(u) = B_{\delta}(u)$.

Αν αντικαταστήσουμε στην ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση την παραπάνω ισότητα, προκύπτει η σχέση

$$\phi_{\mathrm{T}}(u) = \frac{1}{1+b_{\delta}} \int_0^u \phi_{\mathrm{T}}(u-x) g_{\delta}(x)\,dx + \frac{1}{1+b_{\delta}} \overline{G}_{\delta}(u),$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι ισχύει η παρακάτω σχέση

$$\phi_{\mathrm{T}}(u)=\frac{1}{1+b_\delta}\int_0^u \phi_{\mathrm{T}}(u-x)dG_\delta(x)+\frac{1}{1+b_\delta}\overline{G}_\delta(u).$$

Επίσης, έχουμε δείξει ότι η λύση της παραπάνω ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης, η οποία βρίσκεται με τη βοήθεια μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, δίνεται από τη σχέση $(2.4.9)$. Οπότε, καταλήγουμε άμεσα στο συμπέρασμα ότι

$$\phi_{\mathrm{T}}(u)=\overline{K}_\delta(u) \text{ και } \phi_{\mathrm{T}}(u)=\overline{K_\delta}(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_\delta}{1+b_\delta}\left(\frac{1}{1+b_\delta}\right)^n \overline{G_\delta}^{*n}(u),\ u\geq 0.$$

II. Όταν $\delta=0$, παίρνοντας το όριο της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης για δ να τείνει στο μηδέν, προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας. Δηλαδή,

$$\psi(u)=\lim_{\delta\to 0}\phi_{\mathrm{T}}(u)=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{1+b_\delta}\int_0^u \phi_{\mathrm{T}}(u-x)g_\delta(x)\,dx+\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{1+b_\delta}\overline{G}_\delta(u),$$

από την οποία προκύπτει

$$\psi(u)=\frac{1}{1+b_0}\int_0^u \psi(u-x)g_0(x)\,dx+\frac{1}{1+b_0}\overline{G}_0(u).$$

Άρα, συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\psi(u)=\overline{K}_0(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_0}{1+b_0}\left(\frac{1}{1+b_0}\right)^n \overline{G_0}^{*n}(u),\ u\geq 0.$$

2.6 Παράρτημα

Στην παράγραφο αυτή, θα αναφέρουμε το θεώρημα που χρησιμοποιήσαμε για τη μελέτη της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής, $\phi_\delta(u)$. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $w\left(U\left(\mathrm{T}^-\right),\left|U(\mathrm{T})\right|\right)$ δίνεται από τη σχέση $(2.6.1)$, όπως μελετήθηκε από τους Cheng και Tang.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.6.1

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $w\left(U\left(\mathrm{T}^{-}\right),\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|\right)$ ***δίνεται από τη σχέση***

$$f\left(x_1,x_2\right)=\frac{\beta^2 f\left(x_1+x_2\right)}{c^2 r_2}\cdot\left\{\frac{1}{b}\int_{\left(u-x_1\right)^{-}}^{u}\left(1-e^{-r_2\left(x_1-u+x\right)}\right)K\left(dx\right)+\left(1-e^{-r_2\left(x_1-u\right)^{+}}\right)\right\}, \qquad (2.6.1)$$

όπου $u^{+}=uI_{\left(u>0\right)}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για δυο τυχαίους σταθερούς αριθμούς x_1,x_2 επιλέγουμε σαν συνάρτηση ποινής την $w\left(x_1,x_2\right)=I_{\left(x<x_1,y<x_2\right)}$. Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση κατανομής της $w\left(U\left(\mathrm{T}^{-}\right),\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|\right)=w\left(x_1,x_2\right)$ δίνεται από τη σχέση $\phi\left(u\right)=\phi\left(x_1,x_2;u\right)$. Επιπλέον, αφού η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται από τη σχέση $\psi\left(u\right)=P\left\{T<\infty/U\left(0\right)=u\right\}$,ισχύει

$$\lim_{u\to\infty}\sup\phi_{\delta}\left(u\right)\le\lim_{u\to\infty}\sup\psi_{\delta}\left(u\right)=0. \qquad (2.6.2)$$

Αφού επιλέγουμε $w\left(x_1,x_2\right)=I_{\left(x<x_1,y<x_2\right)}$, τότε συνεπάγεται ότι $w\left(t\right)=\left[\overline{F}\left(t\right)-\overline{F}\left(t+x_2\right)\right]I_{\left(t<x_1\right)}$. Αν ολοκληρώσουμε τη συνάρτηση, λοιπόν, $w\left(t\right)$ στο διάστημα $\left[x,\infty\right]$, προκύπτει

$$\int_{x}^{\infty}w\left(t\right)dt=\int_{x}^{x_1}\left[\overline{F}\left(t\right)-\overline{F}\left(t+x_2\right)\right]dt\cdot I_{\left(x<x_1\right)}. \qquad (2.6.3)$$

Η δεξιά ουρά της συνάρτησης κατανομής της τ.μ. Y είναι

$$\overline{G}_{\delta}\left(u\right)=1-\frac{\int_0^u z\left(y\right)dy}{\int_0^{\infty}z\left(y\right)dy}=\frac{\int_u^{\infty}z\left(y\right)dy}{\int_0^{\infty}z\left(y\right)dy},$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε τη σχέση $\left(2.3.6\right)$, καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση

$$\overline{G}_{\delta}\left(u\right)=\frac{1}{D}\int_u^{\infty}\int_x^{\infty}e^{-r_2\left(t-x\right)}\overline{F}\left(t\right)dtdx. \qquad (2.6.4)$$

Επιπλέον, η δεξιά ουρά της συνάρτησης $B_\delta(u)$ δίνεται από τη σχέση

$$\overline{B}_\delta(u)=\frac{\eta(u)}{\int_0^\infty e^{-r_2(x-u)}\int_x^\infty w(t)\,dtdx}=\frac{1}{D_1}\int_u^\infty e^{-r_2(x-u)}\int_x^\infty w(t)\,dtdx. \quad (2.6.5)$$

Αν αντικαταστήσουμε τη σχέση $(2.6.3)$ στη σχέση $(2.6.5)$, καταλήγουμε

$$\overline{B}_\delta(u)=\frac{1}{D_1}\int_u^\infty e^{-r_2(x-u)}\int_x^\infty w(t)\,dtdx=\frac{1}{D_1}\int_u^\infty e^{-r_2(x-u)}\int_x^{x_1}\left[\overline{F}(t)-\overline{F}(t+x_2)\right]dt\cdot I_{(x<x_1)},$$

από την οποία προκύπτει η παρακάτω εξίσωση

$$\overline{B}_\delta(u)=\frac{1}{D_1r_2}\int_x^{x_1}\left(1-e^{-r_2(t-u)}\right)\left[\overline{F}(t)-\overline{F}(t+x_2)\right]dt\cdot I_{(u<x_1)}. \quad (2.6.6)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση $(2.6.6)$ ως προς τις μερικές παραγώγους x_1 και x_2, έχουμε το αποτέλεσμα $\dfrac{\partial^2\overline{B}_\delta(u)}{\partial x_1\partial x_2}=\dfrac{1}{D_1r_2}\left(1-e^{-r_2(x_1-u)}\right)f(x_1+x_2)I_{(u<x_1)}$.

Από τη σχέση $(2.5.14)$, αν θέσουμε τη συνάρτηση

$$c=c(x_1,x_2;u)=\int_0^u B_\delta(u-x)\,dK_\delta(x), \quad (2.6.7)$$

τότε, διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Όταν $u\le x_1$, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(2.6.7)$ τη σχέση $(2.6.6)$,

καταλήγουμε

$$c=\frac{1}{D_1r_2}\int_0^u\int_{u-x}^{x_1}\left(1-e^{-r_2(t-x+u)}\right)\left[\overline{F}(t)-\overline{F}(t+x_2)\right]dtK_\delta(x)\,dx. \quad (2.6.8)$$

Αν παραγωγίσουμε τη σχέση $(2.6.8)$ ως προς τις μερικές παραγώγους x_1 και x_2, συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\dfrac{\partial^2 c}{\partial x_1\partial x_2}=\dfrac{1}{D_1r_2}f(x_1+x_2)\displaystyle\int_0^u\left(1-e^{-r_2(t-x+u)}\right)K_\delta(x)\,dx.$

- Όταν $x_1<u$, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(2.6.7)$ τη σχέση $(2.6.6)$,

καταλήγουμε

$$c=\frac{1}{D_1r_2}\int_{u-x_1}^{u}\int_{u-x}^{x_1}\left(1-e^{-r_2(t-u+x)}\right)\left[\overline{F}(t)-\overline{F}(t+x_2)\right]dtK_\delta(x)\,dx,$$

από την οποία προκύπτει η σχέση που ακολουθεί. Δηλαδή,

$$c=\frac{1}{D_1r_2}\int_0^{x_1}\int_{u-t}^{u}\left(1-e^{-r_2(t-u+x)}\right)\left[\overline{F}(t)-\overline{F}(t+x_2)\right]dtK_\delta(x)\,dx \quad (2.6.9)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση $(2.6.9)$ ως προς τις μερικές παραγώγους x_1 και x_2,

έχουμε $\frac{\partial^2 c}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{D_1 r_2} f(x_1 + x_2) \int_{u-x_1}^{u} \left(1 - e^{-r_2(x_1 - u + x)}\right) K_\delta(x) dx.$

Οπότε, σε κάθε περίπτωση ισχύει η παρακάτω εξίσωση

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{D_1 r_2} f(x_1 + x_2) \int_{(u-x_1)^+}^{u} \left(1 - e^{-r_2(x_1 - u + x)}\right) K_\delta(x) dx. \blacksquare$$

Στη συνέχεια, με βάση το θεώρημα 2.6.1 θα αναφέρουμε την παρακάτω πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.6.1

Αν ισχύει η ανισότητα $\int_0^\infty \int_0^\infty w(x_1, x_2) f(x_1 + x_2) dx_1 dx_2 < \infty$ ***και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,*** $f(x_1, x_2)$, ***είναι της μορφής του θεωρήματος 2.6.1, τότε***

$(a)\ \phi_\delta(u) < \infty$ *για όλα τα* $u \geq 0,$

$(b)\ \hat{\phi}_\delta(s) < \infty$ *για όλα τα* $s > 0,$

$(c)\ \lim_{u \to \infty} \phi_\delta(u) = 0$ *και*

$(d)\ \lim_{u \to \infty} e^{-su} \phi'_\delta(u) = 0$ *για όλα τα* $s > 0.$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (α). Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής δίνεται από τη σχέση $\phi_\delta(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty w(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$, στην οποία αν αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της συνάρτησης ποινής των τ.μ. $U(\mathrm{T}^-)$ και $|U(\mathrm{T})|$, δηλαδή τη σχέση $(2.6.1)$, προκύπτει η σχέση

$$\phi_\delta(u) \leq \int_0^\infty \int_0^\infty w(x_1, x_2) \frac{\beta^2 f(x_1 + x_2)}{c^2 r_2} \cdot \left\{ \frac{1}{b_\delta} \int_{(u-x_1)^-}^{u} \left(1 - e^{-r_2(x_1 - u + x)}\right) K_\delta(dx) + \left(1 - e^{-r_2(x_1 - u)^+}\right) \right\} dx_1 dx_2,$$

η οποία μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή

$$\phi_\delta(u) \leq \frac{\beta^2}{c^2 r_2} \left(\frac{1}{b_\delta} + 1 \right) \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty w(x_1, x_2) f(x_1 + x_2) dx_1 dx_2. \quad (2.6.11)$$

Άρα ισχύει $\phi_\delta(u) < \infty$.

(β). Αφού ισχύει ότι $\phi_\delta(u) < \infty$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης είναι $\hat{\phi}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-su}\phi_\delta(u)\,du$ και ισχύει $\hat{\phi}_\delta(s) < \infty$, για όλα τα $s > 0$.

(γ). Αν χωρίσουμε τη σχέση $(2.6.11)$ σε τρία μέρη προκύπτει η παρακάτω εξίσωση

$$\begin{aligned}
\frac{c^2}{\beta^2}\phi(u) &= \int_0^u\int_0^\infty w(x_1,x_2)\cdot\frac{f(x_1+x_2)}{b_\delta\cdot r_2}dx_2\cdot\int_{(u-x_1)}^{u}\left(1-e^{-r_2(x_1-u+x)}\right)K_\delta(dx)dx_1\\
&+\int_u^\infty\int_0^\infty w(x_1,x_2)\cdot\frac{f(x_1+x_2)}{b_\delta\cdot r_2}dx_2\cdot\int_0^u\left(1-e^{-r_2(x_1-u+x)}\right)K_\delta(dx)dx_1\\
&+\int_u^\infty\int_0^\infty w(x_1,x_2)\cdot\frac{f(x_1+x_2)}{r_2}dx_2\cdot\left(1-e^{-r_2(x_1-u)}\right)dx_1. \qquad (2.6.12)
\end{aligned}$$

Αν θέσουμε τον πρώτο όρο της σχέσης $(2.6.12)$ ως I_1, δηλαδή

$$I_1 = \int_0^u\int_0^\infty w(x_1,x_2)\cdot\frac{f(x_1+x_2)}{b_\delta\cdot r_2}dx_2\cdot\int_{(u-x_1)}^{u}\left(1-e^{-r_2(x_1-u+x)}\right)K_\delta(dx)dx_1,$$

τότε ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned}
I_1 &\le \int_0^u\int_0^\infty w(x_1,x_2)\cdot\frac{f(x_1+x_2)}{b_\delta\cdot r_2}dx_2\cdot\left[K_\delta(u)-K_\delta(u-x_1)\right]dx_1\\
&= \int_0^u\int_0^\infty w(x_1,x_2)\cdot\frac{f(x_1+x_2)}{b_\delta\cdot r_2}dx_2\cdot\left[1-\overline{K}_\delta(u)-\left(1-\overline{K}_\delta(u-x_1)\right)\right]dx_1\\
&= \int_0^u\int_0^\infty w(x_1,x_2)\cdot\frac{f(x_1+x_2)}{b_\delta\cdot r_2}dx_2\cdot\left[\overline{K}_\delta(u-x_1)-\overline{K}_\delta(u)\right]dx_1.
\end{aligned}$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις έχουμε την εξίσωση

$$I_1 = \frac{1}{b_\delta\cdot r_2}\left(\int_0^{\frac{u}{2}} w(x_1)\overline{K}_\delta(u-x_1)dx_1 + \int_{\frac{u}{2}}^{\infty} w(x_1)\overline{K}_\delta(u-x_1)dx_1 - \overline{K}_\delta(u)\int_0^u w(x_1)dx_1\right),$$

από την οποία προκύπτει η παρακάτω ανισότητα

$$I_1 \le \frac{1}{b_\delta\cdot r_2}\left(\overline{K}_\delta\left(\frac{u}{2}\right)\int_0^\infty w(x_1)dx_1 + \int_{\frac{u}{2}}^{\infty} w(x_1)dx_1 - \overline{K}_\delta(u)\int_0^u w(x_1)dx_1\right).$$

Αν το u τείνει στο άπειρο, $u\to\infty$, τότε όλοι οι όροι της παραπάνω σχέσης μηδενίζονται. Οπότε, το I_1 θα τείνει στο 0, δηλαδή $\mathrm{I}_1 \to 0$.

Στη συνέχεια, αν θέσουμε τον δεύτερο όρο της σχέσης $(2.6.12)$ να είναι ίσος με I_2, δηλαδή

$$I_2 = \int_u^\infty \int_0^\infty w(x_1, x_2) \cdot \frac{f(x_1 + x_2)}{b_\delta \cdot r_2} dx_2 \cdot \int_0^u \left(1 - e^{-r_2(x_1 - u + x)}\right) K_\delta(dx) dx_1,$$

τότε προκύπτει

$$\begin{aligned}
I_2 &\le \int_u^\infty \int_0^\infty w(x_1, x_2) \cdot \frac{f(x_1 + x_2)}{b_\delta \cdot r_2} dx_2 \cdot \left[\left(1 - e^{-r_2(x_1 - u + u)}\right) K_\delta(u) - \left(1 - e^{-r_2(x_1 - u + 0)}\right) K_\delta(0)\right] dx_1 \\
&= \int_u^\infty \int_0^\infty w(x_1, x_2) \cdot \frac{f(x_1 + x_2)}{b_\delta \cdot r_2} dx_2 \cdot \left[\left(1 - e^{-r_2(x_1)}\right) K_\delta(u) - \left(1 - e^{-r_2(x_1 - u)}\right) K_\delta(0)\right] dx_1 \\
&= \int_u^\infty \int_0^\infty w(x_1, x_2) \cdot \frac{f(x_1 + x_2)}{b_\delta \cdot r_2} dx_2 \cdot \left[K_\delta(u) - e^{-r_2(x_1)} K_\delta(u) - K_\delta(0) + e^{-r_2(x_1 - u)} K_\delta(0)\right] dx_1.
\end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας τα ολοκληρώματα της παραπάνω σχέσης, συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{b_\delta \cdot r_2} \int_0^{\frac{u}{2}} w(x_1) \left(e^{-r_2(x_1 - u)} K_\delta(0) - e^{-r_2(x_1)} K_\delta(u)\right) dx_1 \\
&+ \frac{1}{b_\delta \cdot r_2} \int_{\frac{u}{2}}^\infty w(x_1) \left(e^{-r_2(x_1 - u)} K_\delta(0) - e^{-r_2(x_1)} K_\delta(u)\right) dx_1 \\
&- \frac{1}{b_\delta \cdot r_2} \left(K_\delta(u) - K_\delta(0)\right) \int_0^u w(x_1) dx_1.
\end{aligned}$$

Αν το $u \to \infty$, τότε όλοι οι όροι της τελευταίας σχέσης μηδενίζονται. Οπότε, το I_2 θα τείνει στο 0, δηλαδή $\mathrm{I}_2 \to 0$.

Τέλος, έστω ο τρίτος όρος της σχέσης $(2.6.12)$ να ισούται με I_3, δηλαδή

$$I_3 = \int_u^\infty \int_0^\infty w(x_1, x_2) \cdot \frac{f(x_1 + x_2)}{r_2} dx_2 \cdot \left(1 - e^{-r_2(x_1 - u)}\right) dx_1,$$

τότε καταλήγουμε στην ανισότητα

$$I_3 \le \frac{1}{b_\delta \cdot r_2} \left(\int_0^{\frac{u}{2}} w(x_1) \left(1 - e^{-r_2(x_1 - u)}\right) dx_1 + \int_{\frac{u}{2}}^\infty w(x_1) \left(1 - e^{-r_2(x_1 - u)}\right) dx_1 \right).$$

Αν το $u \to \infty$, τότε όλοι οι όροι της παραπάνω σχέσης μηδενίζονται. Οπότε, το I_3 θα τείνει στο 0, δηλαδή $\mathrm{I}_3 \to 0$.

Συνεπώς, καταλήγουμε ότι $\lim_{u \to \infty} \phi_\delta(u) = 0$. ■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Προεξοφλημένες και μη προεξοφλημένες συναρτήσεις κατανομών και πυκνότητας πιθανότητας

Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, τη λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης, η οποία δίνεται από τη σχέση $(2.5.15)$, στο κεφαλαίο αυτό θα εκφράσουμε τα διάφορα μέτρα κινδύνου που προκύπτουν για διάφορες μορφές της συνάρτησης ποινής, όπως μελετήθηκαν από τους Tsai και Sun το 2004 για το ανανεωτικό μοντέλο Erlang(2).

3.1 Εισαγωγή

Αρχικά, θα συμβολίσουμε ότι $r_i = r_i(\delta)$, $\iota = 1,2$ με $\delta > 0$ είναι οι δυο θετικές ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg. Όταν $\delta = 0$, θα ισχύει ότι $r_1(\delta) = r_1(0) = 0$ και $r_2(\delta) = r_2(0) = r_2$, καθώς και $\overline{K}_0(u) = \psi(u)$, δηλαδή η δεξιά ουρά της σύνθετης κατανομής ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας.
Στη συνέχεια, θα ορίσουμε κάποιες συναρτήσεις.
Έστω ότι η συνάρτηση κατανομής $\Gamma_i(u)$ δίνεται από τη σχέση

$$\Gamma_i(u) = \frac{\int_0^u \int_t^\infty e^{-r_i(x-t)} dF(x)\, dt}{\int_0^\infty \int_t^\infty e^{-r_i(x-t)} dF(x)\, dt}, \quad \gamma\iota\alpha \ i = 1,2. \qquad (3.1.1)$$

Αν θέσουμε τον παρονομαστή της παραπάνω σχέσης ίσο με $E_i = \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-r_i(x-t)} dF(x)\, dt$,

ύστερα από πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση

$$E_i = \int_0^\infty \left[e^{-r_i x} - e^{-r_i x} F(x) \right] dx = \int_0^\infty e^{-r_i x} \left[1 - F(x) \right] dx = \int_0^\infty e^{-r_i x} \overline{F}(x) dx. \qquad (3.1.2)$$

Η δεξιά ουρά της συνάρτησης $\Gamma_i(u)$ ισούται με $\overline{\Gamma}_i(u) = 1 - \Gamma_i(u)$, στην οποία αν αντικαταστήσουμε τις σχέσεις $(3.1.1)$ και $(3.1.2)$ έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα

$$\overline{\Gamma}_i(u) = \frac{\int_0^\infty \int_t^\infty e^{-r_i(x-t)} dF(x)\, dt - \int_0^u \int_t^\infty e^{-r_i(x-t)} dF(x)\, dt}{\int_0^\infty \int_t^\infty e^{-r_i(x-t)} dF(x)\, dt} = \frac{\int_u^\infty \int_t^\infty e^{-r_i(x-t)} dF(x)\, dt}{E_i}$$

$$= \frac{\int_u^\infty e^{-r_i(x-u)} \left[1 - F(x)\right] dx}{E_i} = \frac{\int_u^\infty e^{-r_i(x-u)} \overline{F}(x)\, dx}{E_i}. \qquad (3.1.3)$$

Στο κεφάλαιο 2 δείξαμε ότι $\int_0^\infty z(y) dy = \frac{1}{1+b_\delta} = \frac{\beta^2}{c^2(r_2 - r_1)} \int_0^\infty \left[e^{-r_1 u} - e^{-r_2 u}\right] \overline{F}(u)\, du$.

Αν θέσουμε, λοιπόν το δεύτερο μέλος της σχέσης με Ε,

$$E = \frac{\beta^2}{c^2(r_2 - r_1)} \left[\int_0^\infty e^{-r_1 u} \overline{F}(u)\, du - \int_0^\infty e^{-r_2 u} \overline{F}(u)\, du\right], \qquad (3.1.4)$$

τότε, με τη βοήθεια της σχέσης $(3.1.2)$ καταλήγουμε στην εξίσωση

$$E = \frac{\beta^2}{c^2(r_2 - r_1)} (E_1 - E_2). \qquad (3.1.5)$$

Υποθέτοντας στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι η τ.μ. Υ με συνάρτηση κατανομής $G_\delta(u)$ δίνεται από τη σχέση$(2.4.6)$, τότε η δεξιά ουρά της συνάρτησης κατανομής θα συμβολίζεται με $\overline{G}_\delta(u)$. Στο λήμμα που ακολουθεί, λοιπόν, θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $\overline{G}_\delta(u)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή της σχέσης $(3.1.6)$.

ΛΗΜΜΑ 3.1.1
Η συνάρτηση $\overline{G}_\delta(u)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$\overline{G}_\delta(u) = \frac{E_1}{E_1 - E_2} \overline{\Gamma}_1(u) + \frac{E_2}{E_1 - E_2} \overline{\Gamma}_2(u). \qquad (3.1.6)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με τη σχέση $(2.4.6)$ η δεξιά ουρά της συνάρτησης κατανομής της τ.μ.Υ θα ισούται με

$$\overline{G}_{\delta}(u)=1-\frac{\int_{0}^{u} z(y)dy}{\int_{0}^{\infty} z(y)dy}=\frac{\int_{0}^{\infty} z(y)dy-\int_{0}^{u} z(y)dy}{\int_{0}^{\infty} z(y)dy}=\frac{\int_{u}^{\infty} z(y)dy}{\int_{0}^{\infty} z(y)dy} \qquad (3.1.7)$$

Όμως, αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση, τη σχέση $(2.4.2)$ και αλλάξουμε τις μεταβλητές στα όρια του ολοκληρώματος καταλήγουμε

$$\overline{G}_{\delta}(u)=\frac{\int_{u}^{\infty} z(y)dy}{\int_{0}^{\infty} z(y)dy}=\frac{\int_{u}^{\infty}\frac{\beta^2}{c^2}\int_{t}^{\infty}\int_{y}^{\infty} e^{-r_1(x-y)}e^{-r_2(y-t)} f(x)\,dydt}{E}$$

$$=\frac{\beta^2}{c^2 E}\int_{u}^{\infty}\int_{t}^{\infty} e^{-r_2(y-t)}\int_{y}^{\infty} e^{-r_1(x-y)} f(x)\,dydt$$

$$=\frac{\beta^2}{c^2 E}\int_{u}^{\infty}\int_{t}^{\infty} e^{-r_2 y}e^{r_2 t}\int_{y}^{\infty} e^{-r_1 x}e^{r_1 y} f(x)\,dydt=\frac{\beta^2}{c^2 E}\int_{u}^{\infty}\int_{t}^{\infty} e^{r_2 t}e^{-r_1 x}\int_{t}^{x} e^{-(r_2-r_1)y} f(x)\,dydt$$

$$=\frac{\beta^2}{c^2 E}\frac{1}{(r_2-r_1)}\int_{u}^{\infty}\int_{t}^{\infty}\left[e^{-(r_2-r_1)x}-e^{-(r_2-r_1)t}\right]e^{r_2 t}e^{-r_1 x} f(x)dt.$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις η τελευταία σχέση γράφεται στη μορφή

$$\overline{G}_{\delta}(u)=\frac{\beta^2}{c^2\,\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}(E_1-E_2)}\frac{1}{(r_2-r_1)}\int_{u}^{\infty}\int_{t}^{\infty} e^{-r_1(x-t)}e^{-r_2(x-t)}dF(x)dt,$$

από την οποία προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\overline{G}_{\delta}(u)=\frac{1}{(E_1-E_2)}\int_{u}^{\infty}\int_{t}^{\infty} e^{-r_1(x-t)}e^{-r_2(x-t)}dF(x)dt. \qquad (3.1.8)$$

Αν λύσουμε ως προς τον αριθμητή τη σχέση $(3.1.3)$, προκύπτει η εξίσωση $\int_{u}^{\infty} e^{-r_i(x-t)}\overline{F}(x)\,dt=\overline{\Gamma}_i(u)\cdot E_i$ και αν την αντικαταστήσουμε στη σχέση $(3.1.8)$, καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα. Δηλαδή,

$$\overline{G}_{\delta}(u)=\frac{1}{(E_1-E_2)}\int_{u}^{\infty}\int_{t}^{\infty} e^{-r_1(x-t)}e^{-r_2(x-t)}dF(x)dt=\frac{1}{(E_1-E_2)}\left[E_1\overline{\Gamma}_1(u)-E_2\overline{\Gamma}_2(u)\right]$$

$$\overline{G}_{\delta}(u)=\frac{E_1}{E_1-E_2}\overline{\Gamma}_1(u)-\frac{E_2}{E_1-E_2}\overline{\Gamma}_2(u).\ \blacksquare$$

ΛΗΜΜΑ 3.1.2

Για $x \geq u$ ***ισχύει***

$$\frac{\beta^2}{c^2}\int_x^{\infty} e^{-r_2(s-u)} \int_{s+y}^{\infty} e^{-r_1(x_1-s-y)}\overline{F}(x_1)\,dx_1 = \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)} e^{-r_2(x-u)}\overline{G}_{\delta}(x+y). \qquad (3.1.9)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα θεωρήσουμε ότι το πρώτο μέλος της ζητούμενης εξίσωσης ισούται με Α. Δηλαδή,

$$A = \frac{\beta^2}{c^2}\int_x^{\infty} e^{-r_2(s-u)} \int_{s+y}^{\infty} e^{-r_1(x_1-s-y)}\overline{F}(x_1)\,dx_1. \qquad (3.1.10)$$

Αν θέσουμε $z = s + y$ και αλλάξουμε τα όρια του ολοκληρώματος της σχέσης $(3.1.10)$, ύστερα από πράξεις που ακολουθούν, καταλήγουμε

$$A = \frac{\beta^2}{c^2}\int_x^{\infty} e^{-r_2(s-u)} \int_{s+y}^{\infty} e^{-r_1(x_1-s-y)}\overline{F}(x_1)\,dx_1 ds = \frac{\beta^2}{c^2}\int_{x+y}^{\infty} e^{-r_2(s+y-u)} \int_{s+y}^{\infty} e^{-r_1(x_1-s-y)}\overline{F}(x_1)\,dx_1 ds$$

$$= \frac{\beta^2}{c^2}\int_{x+y}^{\infty} e^{-r_2(z-u-y)} \int_{z}^{\infty} e^{-r_1(x_1-z)}\overline{F}(x_1)\,dx_1 ds = \frac{\beta^2}{c^2}\int_{x+y}^{\infty} e^{r_2(u+y)}e^{-r_2 z} \int_{z}^{\infty} e^{-r_1 x_1}e^{-r_1 z}\overline{F}(x_1)\,dx_1 ds$$

$$= \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)} e^{-r_2(x-u)} \int_{x+y}^{\infty}\left[e^{-r_1(x_1-x-y)} - e^{-r_2(x_1-x-y)}\right]\overline{F}(x_1)dx_1$$

$$= \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)} e^{-r_2(x-u)} \left[\int_{x+y}^{\infty} e^{-r_1(x_1-x-y)}\overline{F}(x_1)dx_1 - \int_{x+y}^{\infty} e^{-r_2(x_1-x-y)}\overline{F}(x_1)dx_1\right].$$

Οπότε, αν αντικαταστήσουμε τη σχέση $(3.1.3)$ στο παραπάνω αποτέλεσμα, προκύπτει η σχέση

$$A = \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)} e^{-r_2(x-u)}\left[E_1\overline{\Gamma}_1(x+y) - E_2\overline{\Gamma}_2(x+y)\right]. \qquad (3.1.11)$$

Τέλος, μέσω του λήμματος 3.1.1 και της σχέσης $(3.1.5)$ έχουμε

$$A = \frac{E}{E_1-E_2} e^{-r_2(x-u)}\left[E_1\overline{\Gamma}_1(x+y) - E_2\overline{\Gamma}_2(x+y)\right]$$

$$= Ee^{-r_2(x-u)}\left[\frac{E_1}{E_1-E_2}\overline{\Gamma}_1(x+y) - \frac{E_2}{E_1-E_2}\overline{\Gamma}_2(x+y)\right],$$

από την οποία προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα, $A = Ee^{-r_2(x-u)}\overline{G}_{\delta}(x+y)$. ■

3.2 Προεξοφλημένες από κοινού συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ και $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$.

Η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής των τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ και $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ συμβολίζεται με $F_\delta\left(x,y/u\right)$ και η συνάρτηση ποινής είναι $w\left(x_1,x_2\right)=\begin{cases}1\ ,\ \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ x_1\le x\ \kappa\alpha\iota\ x_2\le y\\ 0\ ,\ \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha}\end{cases}$, δηλαδή $w\left(x_1,x_2\right)=I\left(x_1\le x\right)I\left(x_2\le y\right)$.

Όπως έχουμε ορίσει στο προηγούμενο κεφάλαιο, η $B_\delta\left(u\right)$ δίνεται από τη σχέση $\left(2.4.9\right)$, στην οποία αν αντικαταστήσουμε τη $\left(2.3.6\right)$, συμπεραίνουμε

$$B_\delta\left(u\right)=\frac{\left(1+b_\delta\right)\beta^2}{c^2}\int_x^\infty\int_u^\infty e^{-r_1\left(u-x\right)}e^{-r_2\left(s-u\right)}f\left(s\right)dsdu\,.$$

Αν στην εξίσωση αυτή χρησιμοποιήσουμε τους περιορισμούς $0<u\le x,x_1\le x$ και $x_2\le y$, τότε καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση

$$\begin{aligned}B_\delta\left(u\right)&=\frac{\left(1+b_\delta\right)\beta^2}{c^2}\int_u^x e^{-r_2\left(s-u\right)}\int_s^x e^{-r_1\left(x_1-s\right)}\int_{x_1}^{x_1+y}dF\left(x_2\right)dx_1ds\\&=\frac{\left(1+b_\delta\right)\beta^2}{c^2}\int_u^x e^{-r_2\left(s-u\right)}\int_s^x e^{-r_1\left(x_1-s\right)}\left[F\left(x_1+y\right)-F\left(x_1\right)\right]dx_1ds\\&=\frac{\left(1+b_\delta\right)\beta^2}{c^2}\int_u^x e^{-r_2\left(s-u\right)}\int_s^x e^{-r_1\left(x_1-s\right)}\left[\overline{F}\left(x_1\right)-\overline{F}\left(x_1+y\right)\right]dx_1ds.\end{aligned}$$

Συνεχίζοντας, τις πράξεις στο παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει η σχέση $\left(3.2.1\right)$, η οποία είναι η εξής

$$\begin{aligned}B_\delta\left(u\right)=&\frac{\left(1+b_\delta\right)\beta^2}{c^2}\int_u^x e^{-r_2\left(s-u\right)}\left[\int_s^\infty e^{-r_1\left(x_1-s\right)}\overline{F}\left(x_1\right)dx_1-e^{-r_1\left(x-s\right)}\int_x^\infty e^{-r_1\left(x_1-x\right)}\overline{F}\left(x_1\right)dx_1\right]\\&-\frac{\left(1+b_\delta\right)\beta^2}{c^2}\int_u^x e^{-r_2\left(s-u\right)}\left[\int_s^\infty e^{-r_1\left(x_1-s\right)}\overline{F}\left(x_1+y\right)dx_1-e^{-r_1\left(x-s\right)}\int_x^\infty e^{-r_1\left(x_1-x\right)}\overline{F}\left(x_1+y\right)dx_1\right].\end{aligned}\qquad\left(3.2.1\right)$$

Χρησιμοποιώντας το λήμμα 3.1.2, παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος της σχέσης $\left(3.2.1\right)$ ισούται με $\frac{\left(1+b_\delta\right)\beta^2}{c^2}\int_u^x e^{-r_2\left(s-u\right)}\int_s^\infty e^{-r_1\left(x_1-s\right)}\overline{F}\left(x_1\right)dx_1=\overline{G}_\delta\left(u\right)-e^{-r_2\left(x-u\right)}\overline{G}_\delta\left(x\right)$ και ο τρίτος όρος της σχέσης $\left(3.2.1\right)$ είναι ίσος με την παρακάτω εξίσωση. Δηλαδή,

$$\frac{(1+b_\delta)\beta^2}{c^2}\int_u^x e^{-r_2(s-u)}\int_{s+y}^{\infty} e^{-r_1(x_1-s-y)}\overline{F}(x_1)\,dx_1 = \overline{G}_\delta(u+y) - e^{-r_2(x-u)}\overline{G}_\delta(x+y).$$

Επιπλέον, αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $(3.1.5)$ ο δεύτερος όρος της $(3.2.1)$ είναι

$$\frac{(1+b_\delta)\beta^2}{c^2}\int_u^x e^{-r_2(s-u)}e^{-r_1(x-s)}\int_x^{\infty} e^{-r_1(x_1-x)}\overline{F}(x_1)\,dx_1 = \frac{E_1}{E_1-E_2}\left[e^{-r_1(x-u)}-e^{-r_2(x-u)}\right]\overline{\Gamma}_1(x),$$

και ο τέταρτος όρος της σχέσης $(3.2.1)$ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{(1+b_\delta)\beta^2}{c^2}\int_u^x e^{-r_2(s-u)}e^{-r_1(x-s)}\int_{x+y}^{\infty} e^{-r_1(x_1-x-y)}\overline{F}(x_1)\,dx_1 = \frac{E_1}{E_1-E_2}\left[e^{-r_1(x-u)}-e^{-r_2(x-u)}\right]\overline{\Gamma}_1(x+y).$$

Οπότε, αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω ισότητες στη σχέση $(3.2.1)$ καταλήγουμε

$$\begin{aligned} B_\delta(u) &= \overline{G}_\delta(u) - e^{-r_2(x-u)}\overline{G}_\delta(x) - \left[\frac{E_1}{E_1-E_2}\left[e^{-r_1(x-u)}-e^{-r_2(x-u)}\right]\overline{\Gamma}_1(x)\right] \\ &\quad -\left[\overline{G}(u+y) - e^{-r_2(x-u)}\overline{G}_\delta(x+y)\right] + \frac{E_1}{E_1-E_2}\left[e^{-r_1(x-u)}-e^{-r_2(x-u)}\right]\overline{\Gamma}_1(x+y) \end{aligned}$$

και αν βγάλουμε κοινούς παράγοντες, προκύπτει η σχέση

$$\begin{aligned} B_\delta(u) &= \overline{G}_\delta(u) - \overline{G}_\delta(u+y) - e^{-r_2(x-u)}\left[\overline{G}_\delta(u) - \overline{G}_\delta(u+y)\right] \\ &\quad - \frac{E_1}{E_1-E_2}\left[e^{-r_1(x-u)}-e^{-r_2(x-u)}\right]\left[\overline{\Gamma}_1(x) - \overline{\Gamma}_1(x+y)\right]. \end{aligned}$$

Τέλος, σύμφωνα με το λήμμα 3.1.1, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί στη μορφή που ακολουθεί.

$$\begin{aligned} B_\delta(u) &= \overline{G}_\delta(u) - \overline{G}_\delta(x) - \frac{E_1}{E_1-E_2}E_1 r_1 e^{-r_1(x-u)}\left[\overline{\Gamma}_1(x) - \overline{\Gamma}_1(x+y)\right] \\ &\quad + \frac{E_1}{E_1-E_2}E_2 r_2 e^{-r_2(x-u)}\left[e^{-r_1(x-u)}-e^{-r_2(x-u)}\right]\left[\overline{\Gamma}_2(x) - \overline{\Gamma}_2(x+y)\right]. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Για $u > 0$, η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $B_\delta(u)$ ισούται με

$$\begin{aligned} dB_\delta(u) &= d\overline{G}_\delta(u) - d\overline{G}_\delta(x) - \frac{1}{E_1-E_2}E_1 r_1 e^{-r_1(x-u)}\left[\overline{\Gamma}_1(x) - \overline{\Gamma}_1(x+y)\right]du \\ &\quad + \frac{1}{E_1-E_2}E_2 r_2 e^{-r_2(x-u)}\left[\overline{\Gamma}_2(x) - \overline{\Gamma}_2(x+y)\right]du. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Στο θεώρημα που ακολουθεί θα δείξουμε ότι η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας είναι της μορφής $(3.2.4)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2.1

Για $\delta > 0$ η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ και $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ είναι δίκλαδη και ισούται με

$$F_\delta\left(x,y/u\right)=\begin{cases}\dfrac{1+b_\delta}{b_\delta}\left[\overline{K}_\delta\left(u\right)-\overline{K}_\delta\left(u+y\right)\right]-\dfrac{1}{b_\delta}G_\delta\left(y\right)\overline{K}_\delta\left(u\right)+\dfrac{1}{b_\delta}\displaystyle\int_0^y\overline{K}_\delta\left(u+y-t\right)dG_\delta\left(t\right)\\ +\dfrac{1}{b_\delta}\dfrac{E_1}{E_1-E_2}e^{-r_1x}\left[\overline{\Gamma}_1\left(x\right)-\overline{\Gamma}_1\left(x+y\right)\right]\left[r_1\displaystyle\int_0^u e^{r_1t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt+\overline{K}_\delta\left(u\right)-e^{r_1u}\right]\\ -\dfrac{1}{b_\delta}\dfrac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2x}\left[\overline{\Gamma}_2\left(x\right)-\overline{\Gamma}_2\left(x+y\right)\right]\left[r_2\displaystyle\int_0^u e^{r_2t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt+\overline{K}_\delta\left(u\right)-e^{r_2u}\right]\\ \hfill \text{για}\, 0\le u<x,\\ \dfrac{1}{b_\delta}\displaystyle\int_0^x\overline{K}_\delta\left(u-t\right)\left[dG_\delta\left(t\right)-dG_\delta\left(y+t\right)\right]-\dfrac{1}{b_\delta}G_\delta\left(y\right)\overline{K}_\delta\left(u\right)\\ +\dfrac{1}{b_\delta}\dfrac{E_1}{E_1-E_2}e^{-r_1x}\left[\overline{\Gamma}_1\left(x\right)-\overline{\Gamma}_1\left(x+y\right)\right]\left[r_1\displaystyle\int_0^x e^{r_1t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt+\overline{K}_\delta\left(u\right)\right]\\ -\dfrac{1}{b_\delta}\dfrac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2x}\left[\overline{\Gamma}_2\left(x\right)-\overline{\Gamma}_2\left(x+y\right)\right]\left[r_2\displaystyle\int_0^x e^{r_2t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt+\overline{K}_\delta\left(u\right)\right]\\ \hfill \text{για}\; 0<x\le u,\end{cases}\quad\left(3.2.4\right)$$

και για $u=0$, η $F_\delta\left(x,y/u\right)$ δίνεται από τη σχέση που ακολουθεί

$$F_\delta\left(x,y/0\right)=\frac{1}{1+b_\delta}\left\{G_\delta\left(y\right)+\frac{E_1}{E_1-E_2}e^{-r_1x}\left[\Gamma_1\left(x\right)-\Gamma_1\left(x+y\right)\right]-\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2x}\left[\Gamma_2\left(x\right)-\Gamma_2\left(x+y\right)\right]\right\}.\quad\left(3.2.5\right)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή πριν τη χρεοκοπία, $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$, και του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας, $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$, ισούται με

$$F_\delta\left(x,y/u\right)\begin{cases}-\left(\dfrac{1}{b_\delta}\right)\displaystyle\int_0^u\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dB_\delta\left(t\right)+\left(\dfrac{1}{b_\delta}\right)B_\delta\left(u\right)-\left(\dfrac{1}{b_\delta}\right)B_\delta\left(0\right)\overline{K}_\delta\left(u\right)\quad \text{για}\, 0\le u<x,\\ -\left(\dfrac{1}{b_\delta}\right)\displaystyle\int_0^x\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dB_\delta\left(t\right)+\left(\dfrac{1}{b_\delta}\right)B_\delta\left(u\right)-\left(\dfrac{1}{b_\delta}\right)B_\delta\left(0\right)\overline{K}_\delta\left(u\right)\quad \text{για}\; 0<x\le u.\end{cases}\quad\left(3.2.6\right)$$

Αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση, τη σχέση $(3.2.2)$, ύστερα από πράξεις καταλήγουμε στην προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ $U(\mathrm{T}^-)$ και $|U(\mathrm{T})|$.

Για $u=0$, η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ $U(\mathrm{T}^-)$ και $|U(\mathrm{T})|$ γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned}F_\delta(x,y/0)=&\frac{1+b_\delta}{b_\delta}\left[\overline{K}_\delta(0)-\overline{K}_\delta(y)\right]-\frac{1}{b_\delta}G_\delta(y)\overline{K}_\delta(0)+\frac{1}{b_\delta}\int_0^y\overline{K}_\delta(y-t)dG_\delta(t)\\&+\frac{1}{b_\delta}\frac{E_1}{E_1-E_2}e^{-r_1x}\left[\overline{\Gamma}_1(x)-\overline{\Gamma}_1(x+y)\right]\left[r_1\int_0^0 e^{r_1t}\overline{K}_\delta(u-t)dt+\overline{K}_\delta(0)-e^{r_10}\right]\\&-\frac{1}{b_\delta}\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2x}\left[\overline{\Gamma}_2(x)-\overline{\Gamma}_2(x+y)\right]\left[r_2\int_0^0 e^{r_2t}\overline{K}_\delta(u-t)dt+\overline{K}_\delta(0)-e^{r_20}\right].\end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε στην τελευταία σχέση, την ισότητα $\overline{K}_\delta(0)=\frac{1}{1+b_\delta}$ και $\overline{K}_\delta(y)=\frac{1}{1+b_\delta}\overline{G}_\delta(y)$, η οποία προκύπτει από τη σχέση $(2.4.24)$ του κεφαλαίου 2, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

$$\begin{aligned}F_\delta(x,y/0)=&\frac{1+b_\delta}{b_\delta}\left[\frac{1}{1+b_\delta}-\frac{1}{1+b_\delta}\overline{G}_\delta(y)\right]-\frac{1}{b_\delta}G_\delta(y)\frac{1}{1+b_\delta}\\&+\frac{1}{b_\delta}\frac{E_1}{E_1-E_2}e^{-r_1x}\left[\overline{\Gamma}_1(x)-\overline{\Gamma}_1(x+y)\right]\left[\frac{1}{1+b_\delta}-1\right]\\&-\frac{1}{b_\delta}\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2x}\left[\overline{\Gamma}_2(x)-\overline{\Gamma}_2(x+y)\right]\left[\frac{1}{1+b_\delta}-1\right].\end{aligned}$$

Ύστερα από πράξεις συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned}F_\delta(x,y/0)=&\frac{1}{b_\delta}-\frac{1}{b_\delta}\overline{G}_\delta(y)-\frac{1}{1+b_\delta}\frac{1}{b_\delta}G_\delta(y)\\&+\frac{1}{b_\delta}\frac{E_1}{E_1-E_2}e^{-r_1x}\left[\overline{\Gamma}_1(x)-\overline{\Gamma}_1(x+y)\right]\left[\frac{1-1-b_\delta}{1+b_\delta}\right]\\&-\frac{1}{b_\delta}\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2x}\left[\overline{\Gamma}_2(x)-\overline{\Gamma}_2(x+y)\right]\left[\frac{1-1-b_\delta}{1+b_\delta}\right],\end{aligned}$$

από την οποία ύστερα από πράξεις και βγάζοντας κοινό παράγοντα τον όρο $\frac{1}{1+b_\delta}$, καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$F_\delta(x,y/0)=\frac{1}{1+b_\delta}\left\{\begin{array}{l} G_\delta(y)-\frac{E_1}{E_1-E_2}e^{-r_1x}\left[\overline{\Gamma}_1(x)-\overline{\Gamma}_1(x+y)\right] \\ +\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2x}\left[\overline{\Gamma}_2(x)-\overline{\Gamma}_2(x+y)\right]\end{array}\right\}.$$

Αν εκφράσουμε την τελευταία εξίσωση σε όρους της συνάρτησης $\Gamma_i(u)$ και όχι της δεξιάς ουράς της, καταλήγουμε στην προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ. $U(\mathrm{T}^-)$ και $|U(\mathrm{T})|$. ■

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2.2

Για $\delta>0$ η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ $U(\mathrm{T}^-)$ και $|U(\mathrm{T})|$ είναι δίκλαδη και ισούται με

$$f_\delta(x,y/u)=\begin{cases} \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(x+y)}{1-\overline{K}_\delta(0)}e^{-r_1x}\left[e^{r_1u}-\overline{K}_\delta(u)-r_1\int_0^u e^{r_1t}\overline{K}_\delta(u-t)\,dt\right] \\ -\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(x+y)}{1-\overline{K}_\delta(0)}e^{-r_2x}\left[e^{r_2u}-\overline{K}_\delta(u)-r_2\int_0^u e^{r_2t}\overline{K}_\delta(u-t)\,dt\right] \\ \qquad\qquad \text{για } 0\le u<x, \\ \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(x+y)}{1-\overline{K}_\delta(0)}e^{-r_1x}\left[e^{r_1u}-\overline{K}_\delta(u-x)-\overline{K}_\delta(u)-r_1\int_0^x e^{r_1t}\overline{K}_\delta(u-t)\,dt\right] \\ -\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(x+y)}{1-\overline{K}_\delta(0)}e^{-r_2x}\left[e^{r_2u}-\overline{K}_\delta(u-x)-\overline{K}_\delta(u)-r_2\int_0^x e^{r_1t}\overline{K}_\delta(u-t)\,dt\right] \\ \qquad\qquad \text{για } 0\le x<u, \end{cases} \quad (3.2.7)$$

και για $u=0$, η $f_\delta(x,y/u)$ δίνεται από την παρακάτω σχέση. Δηλαδή,

$$f_\delta(x,y/0)=\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}f(x+y)\left[e^{-r_1x}-e^{-r_2x}\right]. \quad (3.2.8)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ $U(\mathrm{T}^-)$ και $|U(\mathrm{T})|$ υπολογίζεται αν παραγωγίσουμε δύο φορές ως προς τις μερικές παραγώγους την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ

$U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$.και $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$. Δηλαδή, $f_{\delta}\left(x,y/u\right)=\dfrac{\partial^{2}}{\partial x\partial y}F_{\delta}\left(x,y/u\right)$. Αν παραγωγίσουμε, λοιπόν τη σχέση $(3.2.4)$ ως προς την τ.μ. y, έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial y}F_{\delta}\left(x,y/u\right)=\begin{cases}\dfrac{1+b_{\delta}}{b_{\delta}}\overline{K}'_{\delta}\left(u+y\right)-\dfrac{1}{b_{\delta}}G'\left(y\right)\overline{K}_{\delta}\left(u\right)+\dfrac{1}{b_{\delta}}\displaystyle\int_{0}^{y}\overline{K}'_{\delta}\left(u+y-t\right)dG\left(t\right)\\ -\dfrac{1}{b_{\delta}}\dfrac{E_{1}}{E_{1}-E_{2}}e^{-r_{1}x}\overline{\Gamma}'_{1}\left(x+y\right)\left[r_{1}\displaystyle\int_{0}^{u}e^{r_{1}t}\overline{K}_{\delta}\left(u-t\right)dt+\overline{K}_{\delta}\left(u\right)-e^{r_{1}u}\right]\\ +\dfrac{1}{b_{\delta}}\dfrac{E_{2}}{E_{1}-E_{2}}e^{-r_{2}x}\overline{\Gamma}'_{2}\left(x+y\right)\left[r_{2}\displaystyle\int_{0}^{u}e^{r_{2}t}\overline{K}_{\delta}\left(u-t\right)dt+\overline{K}_{\delta}\left(u\right)-e^{r_{2}u}\right]\\ \hfill \gamma\iota\alpha\, 0\leq u<x,\\ \dfrac{1}{b_{\delta}}\displaystyle\int_{0}^{x}\overline{K}_{\delta}\left(u-t\right)G''\left(y-t\right)-\dfrac{1}{b_{\delta}}G'\left(y\right)\overline{K}_{\delta}\left(u\right)\\ -\dfrac{1}{b_{\delta}}\dfrac{E_{1}}{E_{1}-E_{2}}e^{-r_{1}x}\overline{\Gamma}'_{1}\left(x+y\right)\left[r_{1}\displaystyle\int_{0}^{x}e^{r_{1}t}\overline{K}_{\delta}\left(u-t\right)dt+\overline{K}_{\delta}\left(u\right)\right]\\ +\dfrac{1}{b_{\delta}}\dfrac{E_{2}}{E_{1}-E_{2}}e^{-r_{2}x}\overline{\Gamma}'_{2}\left(x+y\right)\left[r_{2}\displaystyle\int_{0}^{x}e^{r_{2}t}\overline{K}_{\delta}\left(u-t\right)dt+\overline{K}_{\delta}\left(u\right)\right]\\ \hfill \gamma\iota\alpha\; 0<x\leq u.\end{cases}\quad(3.2.9)$$

Στη συνέχεια, αν παραγωγίσουμε τη σχέση $(3.2.9)$ και ως προς τη τ.μ. x, για $0\leq u<x$, προκύπτει

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2}}{\partial x\partial y}F_{\delta}\left(x,y/u\right)=&\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{1}{b_{\delta}}\frac{E_{1}}{E_{1}-E_{2}}e^{-r_{1}x}\overline{\Gamma}'_{1}\left(x+y\right)\left[r_{1}\int_{0}^{u}e^{r_{1}t}\overline{K}_{\delta}\left(u-t\right)dt+\overline{K}_{\delta}\left(u\right)-e^{r_{1}u}\right]\right]\\ &+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{b_{\delta}}\frac{E_{2}}{E_{1}-E_{2}}e^{-r_{2}x}\overline{\Gamma}'_{2}\left(x+y\right)\left[r_{2}\int_{0}^{u}e^{r_{2}t}\overline{K}_{\delta}\left(u-t\right)dt+\overline{K}_{\delta}\left(u\right)-e^{r_{2}u}\right]\right].\end{aligned}\quad(3.2.10)$$

Αν λύσουμε τη σχέση $(3.1.1)$ ως προς $r_{i}\overline{\Gamma}_{i}\left(x\right)+\Gamma'_{i}\left(x\right)$ καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα.

$$r_{i}\overline{\Gamma}_{i}\left(x\right)+\Gamma'_{i}\left(x\right)=e^{r_{i}x}\left[e^{-r_{i}x}\overline{\Gamma}_{i}\left(x\right)\right]'=\frac{\overline{F}\left(x\right)}{E_{i}},\ \gamma\iota\alpha\ i=1,2.\quad(3.2.11)$$

Από την παραπάνω σχέση για i=1, συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-r_{1}x}\overline{\Gamma}'_{1}\left(x+y\right)\right]&=-e^{-r_{1}x}r_{1}\overline{\Gamma}'_{1}\left(x+y\right)+e^{-r_{1}x}\overline{\Gamma}''_{1}\left(x+y\right)=-e^{-r_{1}x}\left[r_{1}\overline{\Gamma}'_{1}\left(x+y\right)-\overline{\Gamma}''_{1}\left(x+y\right)\right]\\ &=-e^{-r_{1}x}\frac{\partial}{\partial x}\left[r_{1}\overline{\Gamma}_{1}\left(x+y\right)-\overline{\Gamma}'_{1}\left(x+y\right)\right]=-e^{-r_{1}x}e^{r_{1}x}\left[e^{-r_{1}x}\overline{\Gamma}_{1}\left(x+y\right)\right]',\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-r_1 x}\overline{\Gamma}'_1(x+y)\right]=e^{-r_1 x}\frac{f(x+y)}{E_1}. \qquad (3.2.12)$$

Ομοίως, για i=2 έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-r_2 x}\overline{\Gamma}'_2(x+y)\right]=-e^{-r_2 x}r_2\overline{\Gamma}'_2(x+y)+e^{-r_2 x}\overline{\Gamma}''_2(x+y)=-e^{-r_2 x}\left[r_2\overline{\Gamma}'_2(x+y)-\overline{\Gamma}''_2(x+y)\right]$$

$$=-e^{-r_2 x}\frac{\partial}{\partial x}\left[r_2\overline{\Gamma}_2(x+y)-\overline{\Gamma}'_2(x+y)\right]=-e^{-r_2 x}e^{r_2 x}\left[e^{-r_2 x}\overline{\Gamma}_2(x+y)\right]',$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-r_2 x}\overline{\Gamma}'_2(x+y)\right]=e^{-r_2 x}\frac{f(x+y)}{E_2}. \qquad (3.2.13)$$

Αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(3.2.10)$ τις σχέσεις $(3.1.3)$, $(3.2.12)$ και $(3.2.13)$ καθώς επίσης και τις ισότητες $E=\frac{1}{1+b_\delta}$ και $\overline{K}_\delta(0)=\frac{1}{1+b_\delta}$, η οποία παριστάνει τη δεξιά ουρά μιας γεωμετρικής κατανομής με $u=0$, καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_\delta(x,y/u)=-\frac{1}{b_\delta}\frac{E_1}{E_1-E_2}e^{-r_1 x}\frac{f(x+y)}{E_1}\left[r_1\int_0^u e^{r_1 t}\overline{K}_\delta(u-t)dt+\overline{K}_\delta(u)-e^{r_1 u}\right]$$

$$+\frac{1}{b_\delta}\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2 x}\frac{f(x+y)}{E_2}\left[r_2\int_0^u e^{r_2 t}\overline{K}_\delta(u-t)dt+\overline{K}_\delta(u)-e^{r_2 u}\right]$$

$$=\frac{1}{b_\delta}\frac{f(x+y)}{\frac{c^2(r_2-r_1)}{\beta^2(1+b_\delta)}}e^{-r_1 x}\left[e^{r_1 u}-\overline{K}_\delta(u)-r_1\int_0^u e^{r_1 t}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right]$$

$$-\frac{1}{b_\delta}\frac{f(x+y)}{\frac{c^2(r_2-r_1)}{\beta^2(1+b_\delta)}}e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 u}-\overline{K}_\delta(u)-r_2\int_0^u e^{r_2 t}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right].$$

Ύστερα από απλοποιήσεις, η παραπάνω σχέση γράφεται στη μορφή

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_\delta(x,y/u)=\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(x+y)}{1-\overline{K}_\delta(0)}e^{-r_1 x}\left[e^{r_1 u}-\overline{K}_\delta(u)-r_1\int_0^u e^{r_1 t}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(x+y)}{1-\overline{K}_\delta(0)}e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 u}-\overline{K}_\delta(u)-r_2\int_0^u e^{r_2 t}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right].$$

$$(3.2.14)$$

Ομοίως, αν παραγωγίσουμε τη σχέση $(3.2.9)$ και ως προς τη τ.μ. x, για $0<x\le u$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_\delta\left(x, y / u\right) = -\frac{1}{b_s} \overline{K}_\delta\left(u-x\right) G_\delta^{\prime\prime}\left(y+x\right)$$

$$-\frac{1}{b_\delta} \frac{E_1}{E_1-E_2} \overline{\Gamma}_1^{\prime}\left(x+y\right)\left\{e^{-r_1 x}\left[r_1 \int_0^x e^{r_1 t} \overline{K}_\delta\left(u-t\right) dt + \overline{K}_\delta\left(u\right)\right] + r_1 \overline{K}_\delta\left(u-x\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{b_\delta} \frac{E_2}{E_1-E_2} \overline{\Gamma}_2^{\prime}\left(x+y\right)\left\{e^{-r_2 x}\left[r_2 \int_0^x e^{r_2 t} \overline{K}_\delta\left(u-t\right) dt + \overline{K}_\delta\left(u\right)\right] - r_2 \overline{K}_\delta\left(u-x\right)\right\},$$

στο οποίο αν αντικαταστήσουμε τις σχέσεις $(3.1.3),(3.2.12)$ και $(3.2.13)$, προκύπτει

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_\delta\left(x, y / u\right) = -\frac{1}{b_\delta} \overline{K}_\delta\left(u-x\right)\left[G_\delta^{\prime\prime}\left(y+x\right) + \frac{E_1}{E_1-E_2} r_1 \overline{\Gamma}_1^{\prime}\left(x+y\right) - \frac{E_2}{E_1-E_2} r_2 \overline{\Gamma}_2^{\prime}\left(x+y\right)\right]$$

$$-\frac{1}{b_\delta} \frac{E_1}{E_1-E_2} e^{-r_1 x} \frac{f\left(x+y\right)}{E_1}\left[e^{r_1 x} \overline{K}_\delta\left(u-x\right) - \overline{K}_\delta\left(u\right) - r_1 \int_0^x e^{r_1 t} \overline{K}_\delta\left(u-t\right) dt\right]$$

$$+\frac{1}{b_\delta} \frac{E_2}{E_1-E_2} e^{-r_2 x} \frac{f\left(x+y\right)}{E_2}\left[e^{r_2 x} \overline{K}_\delta\left(u-x\right) - \overline{K}_\delta\left(u\right) - r_2 \int_0^x e^{r_2 t} \overline{K}_\delta\left(u-t\right) dt\right]. \tag{3.2.15}$$

Κατόπιν, αν παραγωγίσουμε τη συνάρτηση $G_\delta\left(u\right) = 1 - \overline{G}_\delta\left(u\right)$, όπου η συνάρτηση $\overline{G}_\delta\left(u\right)$ ισούται με το αποτέλεσμα του λήμματος 3.1.1, συμπεραίνουμε ότι ο πρώτος όρος της σχέσης $(3.2.15)$ μηδενίζεται. Δηλαδή,

$$G_\delta^{\prime}\left(x+y\right) = \left[\frac{E_1}{E_1-E_2} \overline{\Gamma}_1\left(x+y\right) - \frac{E_2}{E_1-E_2} \overline{\Gamma}_2\left(x+y\right)\right]^{\prime},$$

από την οποία προκύπτει η σχέση

$$\begin{aligned}
\left(E_1-E_2\right) G_\delta^{\prime}\left(x+y\right) &= E_1 \overline{\Gamma}_1^{\prime}\left(x+y\right) - E_2 \overline{\Gamma}_2^{\prime}\left(x+y\right) \\
&= E_1\left(-r_1 \overline{\Gamma}_1\left(x+y\right) - \frac{\overline{F}\left(x+y\right)}{E_1}\right) - E_2\left(-r_2 \overline{\Gamma}_2\left(x+y\right) - \frac{\overline{F}\left(x+y\right)}{E_2}\right) \\
&= -E_1 r_1 \overline{\Gamma}_1\left(x+y\right) - \overline{F}\left(x+y\right) + E_2 r_2 \overline{\Gamma}_2\left(x+y\right) + \overline{F}\left(x+y\right) \\
&= -E_1 r_1 \overline{\Gamma}_1\left(x+y\right) + E_2 r_2 \overline{\Gamma}_2\left(x+y\right).
\end{aligned}$$

Αν παραγωγίσουμε για δεύτερη φορά την τελευταία σχέση, καταλήγουμε

$$\begin{aligned}
G^{\prime\prime}\left(x+y\right) &= \left[-\frac{E_1}{E_1-E_2} r_1 \overline{\Gamma}_1\left(x+y\right) + \frac{E_2}{E_1-E_2} r_2 \overline{\Gamma}_2\left(x+y\right)\right]^{\prime} \\
&= -\frac{E_1}{E_1-E_2} r_1 \overline{\Gamma}_1^{\prime}\left(x+y\right) + \frac{E_2}{E_1-E_2} r_2 \overline{\Gamma}_2^{\prime}\left(x+y\right).
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Τέλος, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(3.2.15)$ τις σχέσεις $(3.1.3)$, $(3.2.12)$, $(3.2.13)$ και τις ισότητες $E=\dfrac{1}{1+b_\delta}$ και $\overline{K}_\delta(0)=\dfrac{1}{1+b_\delta}$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_\delta(x,y/u)=\frac{1}{b_\delta}\frac{f(x+y)}{\frac{c^2(r_2-r_1)}{\beta^2(1+b_\delta)}}e^{-r_1x}\left[e^{r_1x}\overline{K}_\delta(u-x)-\overline{K}_\delta(u)-r_1\int_0^x e^{r_1t}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right]$$
$$-\frac{1}{b_\delta}\frac{f(x+y)}{\frac{c^2(r_2-r_1)}{\beta^2(1+b_\delta)}}e^{-r_2x}\left[e^{r_2x}\overline{K}_\delta(u-x)-\overline{K}_\delta(u)-r_2\int_0^x e^{r_2t}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right],$$

από την οποία καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_\delta(x,y/u)=\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(x+y)}{1-\overline{K}_\delta(0)}e^{-r_1x}\left[e^{r_1x}\overline{K}_\delta(u-x)-\overline{K}_\delta(u)-r_1\int_0^x e^{r_1t}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right]$$
$$-\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(x+y)}{1-\overline{K}_\delta(0)}e^{-r_2x}\left[e^{r_2x}\overline{K}_\delta(u-x)-\overline{K}_\delta(u)-r_2\int_0^x e^{r_2t}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right]$$

Οπότε, συνοψίζοντας τα αποτελέσματα σε έναν τύπο δίνεται η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ $U(\mathrm{T}^-)$ και $|U(\mathrm{T})|$.

Για $u=0$, η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ $U(\mathrm{T}^-)$ και $|U(\mathrm{T})|$, δίνεται από τη σχέση

$$f_\delta(x,y/0)=\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(x+y)}{1-\overline{K}_\delta(0)}e^{-r_1x}\left[e^{r_10}-\overline{K}_\delta(0)-r_1\int_0^0 e^{r_1t}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right]$$
$$-\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(x+y)}{1-\overline{K}_\delta(0)}e^{-r_2x}\left[e^{r_20}-\overline{K}_\delta(0)-r_2\int_0^0 e^{r_2t}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right].$$

Αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση, την ισότητα $\overline{K}_\delta(0)=\dfrac{1}{1+b_\delta}$, έχουμε

$$f_\delta(x,y/0)=\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(x+y)}{1-\frac{1}{1+b_\delta}}e^{-r_1x}\left[1-\frac{1}{1+b_\delta}\right]-\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(x+y)}{1-\frac{1}{1+b_\delta}}e^{-r_2x}\left[1-\frac{1}{1+b_\delta}\right]$$

και ύστερα από απλοποιήσεις, η τελευταία σχέση γράφεται στη μορφή

$$f_\delta(x,y/0)=\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}f(x+y)e^{-r_1x}-\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}f(x+y)e^{-r_2x},$$

από την οποία προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της σχέσης $(3.2.8)$. ■

3.3 Από κοινού συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ και $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$.

Όπως έχουμε ορίσει στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, όταν $\delta = 0$, ισχύει ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με τη δεξιά ουρά της σύνθετης κατανομής και η ρίζα r_1 μηδενίζεται. Στην παράγραφο αυτή, λοιπόν, θα εκφράσουμε τις από κοινού συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ και $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$, όταν $\delta = 0$, μέσω δύο πορισμάτων.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.3.1

Για $\delta = 0$ η από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας, ισούται με

$$F_0\left(x, y/u\right) = \begin{cases} \dfrac{1+b_0}{b_0}\left[\psi(u)-\psi(u+y)\right]-\dfrac{1}{b_0}G_0(y)\psi(u)+\dfrac{1}{b_0}\displaystyle\int_0^y \psi(u+y-t)\,dG_0(t) \\ +\dfrac{1}{b_0}\dfrac{E_1}{E_1-E_2}\left[\overline{\Gamma}_1(x)-\overline{\Gamma}_1(x+y)\right]\left[\psi(u)-1\right] \\ -\dfrac{1}{b_0}\dfrac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2 x}\left[\overline{\Gamma}_2(x)-\overline{\Gamma}_2(x+y)\right]\left[r_2\displaystyle\int_0^u e^{r_2 t}\psi(u-t)\,dt+\psi(u)-e^{r_2 u}\right] \\ \qquad \qquad \text{για } 0 \le u < x, \\ \dfrac{1}{b_0}\displaystyle\int_0^x \psi(u-t)\left[dG_0(t)-dG_0(y-t)\right]-\dfrac{1}{b_0}G_0(y)\psi(u) \\ +\dfrac{1}{b_0}\dfrac{E_1}{E_1-E_2}\left[\overline{\Gamma}_1(x)-\overline{\Gamma}_1(x+y)\right]\psi(u) \\ -\dfrac{1}{b_0}\dfrac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2 x}\left[\overline{\Gamma}_2(x)-\overline{\Gamma}_2(x+y)\right]\left[r_2\displaystyle\int_0^x e^{r_2 t}\psi(u-t)\,dt+\psi(u)\right] \\ \qquad \qquad \text{για } 0 < x \le u, \end{cases} \quad (3.3.1)$$

και για $u = 0$, η $F_0\left(x, y/u\right)$ γράφεται στην παρακάτω μορφή

$$F_0\left(x, y/0\right) = \frac{1}{b_0}-\frac{1+b_0}{b_0}\psi(y)-\frac{1}{b_0\left(1+b_0\right)}G_0(y)+\frac{1}{b_0}\int_0^y \psi(y-t)\,dG_0(t)$$
$$-\frac{1}{1+b_0}\frac{E_1}{E_1-E_2}\left[\overline{\Gamma}_1(x)-\overline{\Gamma}_1(x+y)\right]+\frac{1}{1+b_0}\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2 x}\left[\overline{\Gamma}_2(x)-\overline{\Gamma}_2(x+y)\right]. \quad (3.3.2)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όταν $0 \le u < x$, η σχέση $(3.2.4)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$F_0(x,y/u) = \frac{1+b_0}{b_0}\left[\overline{K}_0(u) - \overline{K}_0(u+y)\right] - \frac{1}{b_0}G_0(y)\overline{K}_0(u) + \frac{1}{b_0}\int_0^y \overline{K}_0(u+y-t)\,dG_0(t)$$
$$+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1-E_2}e^{-0\cdot x}\left[\overline{\Gamma}_1(x) - \overline{\Gamma}_1(x+y)\right]\left[0\cdot\int_0^u e^{0\cdot t}\overline{K}_0(u-t)\,dt + \overline{K}_0(u) - e^{0\cdot u}\right]$$
$$-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2 x}\left[\overline{\Gamma}_2(x) - \overline{\Gamma}_2(x+y)\right]\left[r_2\int_0^u e^{r_2 t}\overline{K}_0(u-t)\,dt + \overline{K}_0(u) - e^{r_2 u}\right].$$

Αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση την ισότητα $\overline{K}_0(u) = \psi(u)$, καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα.

$$F_0(x,y/u) = \frac{1+b_0}{b_0}\left[\psi(u) - \psi(u+y)\right] - \frac{1}{b_0}G_0(y)\psi(u) + \frac{1}{b_0}\int_0^y \psi(u+y-t)\,dG_0(t)$$
$$+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1-E_2}\left[\overline{\Gamma}_1(x) - \overline{\Gamma}_1(x+y)\right]\left[\psi(u) - 1\right]$$
$$-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2 x}\left[\overline{\Gamma}_2(x) - \overline{\Gamma}_2(x+y)\right]\left[r_2\int_0^u e^{r_2 t}\psi(u-t)\,dt + \psi(u) - e^{r_2 u}\right].$$
$$(3.3.3)$$

Ομοίως, για $0 < x \le u$, η σχέση $(3.2.4)$ παίρνει την παρακάτω μορφή. Δηλαδή,

$$F_0(x,y/u) = \frac{1}{b_0}\int_0^x \overline{K}_0(u-t)\left[dG_0(t) - dG_0(y-t)\right] - \frac{1}{b_0}G_0(y)\overline{K}_0(u)$$
$$+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1-E_2}e^{-0\cdot x}\left[\overline{\Gamma}_1(x) - \overline{\Gamma}_1(x+y)\right]\left[0\cdot\int_0^x e^{0\cdot t}\overline{K}_0(u-t)\,dt + \overline{K}_0(u)\right]$$
$$-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2 x}\left[\overline{\Gamma}_2(x) - \overline{\Gamma}_2(x+y)\right]\left[r_2\int_0^x e^{r_2 t}\overline{K}_0(u-t)\,dt + \overline{K}_0(u)\right].$$

Αν αντικαταστήσουμε στο παραπάνω αποτέλεσμα, τη σχέση $\overline{K}_0(u) = \psi(u)$ έχουμε

$$F_0(x,y/u) = \frac{1}{b_0}\int_0^x \psi(u-t)\left[dG_0(t) - dG_0(y-t)\right] - \frac{1}{b_0}G_0(y)\psi(u)$$
$$+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1-E_2}\left[\overline{\Gamma}_1(x) - \overline{\Gamma}_1(x+y)\right]\psi(u)$$
$$-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2 x}\left[\overline{\Gamma}_2(x) - \overline{\Gamma}_2(x+y)\right]\left[r_2\int_0^x e^{r_2 t}\psi(u-t)\,dt + \psi(u)\right]. \quad (3.3.4)$$

Οπότε, από τις σχέσεις $(3.3.3)$ και $(3.3.4)$ προκύπτει η από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ $U(\mathrm{T}^-)$ και $|U(\mathrm{T})|$.

Για $u=0$, η από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ και $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ γράφεται στη μορφή

$$F_0\left(x,y/0\right)=\frac{1+b_0}{b_0}\left[\psi\left(0\right)-\psi\left(y\right)\right]-\frac{1}{b_0}G_0\left(y\right)\psi\left(0\right)+\frac{1}{b_0}\int_0^y\psi\left(y-t\right)dG_0\left(t\right)$$
$$+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1-E_2}\left[\overline{\Gamma}_1\left(x\right)-\overline{\Gamma}_1\left(x+y\right)\right]\left[\psi\left(0\right)-1\right]$$
$$-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2x}\left[\overline{\Gamma}_2\left(x\right)-\overline{\Gamma}_2\left(x+y\right)\right]\left[r_2\int_0^0 e^{r_2t}\psi\left(u-t\right)dt+\psi\left(0\right)-e^{r_2 0}\right].$$

Από τις σχέσεις $\left(2.5.18\right)$ και $\left(2.5.25\right)$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\psi\left(0\right)=\dfrac{1}{1+b_0}$, οπότε αν αντικαταστήσουμε την ισότητα αυτή στην τελευταία σχέση προκύπτει η εξίσωση

$$F_0\left(x,y/0\right)=\frac{1+b_0}{b_0}\left[\frac{1}{1+b_0}-\psi\left(y\right)\right]-\frac{1}{b_0}G_0\left(y\right)\frac{1}{1+b_0}+\frac{1}{b_0}\int_0^y\psi\left(y-t\right)dG_0\left(t\right)$$
$$+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1-E_2}\left[\overline{\Gamma}_1\left(x\right)-\overline{\Gamma}_1\left(x+y\right)\right]\left[\frac{1}{1+b_0}-1\right]$$
$$-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2x}\left[\overline{\Gamma}_2\left(x\right)-\overline{\Gamma}_2\left(x+y\right)\right]\left[\frac{1}{1+b_0}-1\right]$$

και ύστερα από πράξεις καταλήγουμε στο αποτέλεσμα της σχέσης $\left(3.3.2\right)$. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.3.2

Για $\delta=0$ η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ και $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ δίνεται από τη σχέση

$$f_0\left(x,y/u\right)=\begin{cases}\dfrac{\beta^2}{c^2r_2b_0}f\left(x+y\right)\left(1+b_0\right)\left[1-\psi\left(u\right)-e^{-r_2x}\left(e^{r_2u}-\psi\left(u\right)-r_2\displaystyle\int_0^u e^{r_2t}\psi\left(u-t\right)dt\right)\right] & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \gamma\iota\alpha\, 0\le u<x, & \\ \dfrac{\beta^2}{c^2r_2b_0}f\left(x+y\right)\left(1+b_0\right)\left[\begin{array}{l}1-\psi\left(u-x\right)-\psi\left(u\right)\\ -e^{-r_2x}\left(e^{r_2u}-\psi\left(u-x\right)-\psi\left(u\right)-r_2\displaystyle\int_0^x e^{r_2t}\psi\left(u-t\right)dt\right)\end{array}\right] & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \gamma\iota\alpha\, 0\le x<u, & \end{cases}\quad\left(3.3.5\right)$$

και για $u=0$, η $f_0\left(x,y/0\right)$ γράφεται στην μορφή που ακολουθεί.

$$f_0\left(x,y/0\right)=\frac{\beta^2}{c^2r_2}f\left(x+y\right)\left(1-e^{-r_2x}\right).\qquad\left(3.3.6\right)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με την υπόθεση ότι $\delta = 0$, για $0 \le u < x$ η σχέση $(3.2.7)$ γίνεται

$$f_0(x, y/u) = \frac{\beta^2}{c^2(r_2 - 0)} \frac{f(x+y)}{1-\psi(0)} e^{-0\cdot x}\left[e^{0\cdot u} - \psi(u) - 0\cdot\int_0^u e^{0\cdot t}\psi(u-t)\,dt\right]$$
$$-\frac{\beta^2}{c^2(r_2 - 0)} \frac{f(x+y)}{1-\psi(0)} e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 u} - \psi(u) - r_2\int_0^u e^{r_2 t}\psi(u-t)\,dt\right],$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε τη σχέση $(2.5.25)$, προκύπτει η εξίσωση

$$f_0(x, y/u) = \frac{\beta^2}{c^2 r_2} \frac{f(x+y)}{1-\dfrac{1}{1+b_0}}\left[1-\psi(u)\right] - \frac{\beta^2}{c^2 r_2} \frac{f(x+y)}{1-\dfrac{1}{1+b_0}} e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 u} - \psi(u) - r_2\int_0^u e^{r_2 t}\psi(u-t)\,dt\right].$$

Ύστερα από πράξεις, η τελευταία σχέση γράφεται

$$f_0(x, y/u) = \frac{\beta^2}{c^2 r_2} \frac{f(x+y)}{\dfrac{b_0}{1+b_0}}\left[1-\psi(u)\right] - \frac{\beta^2}{c^2 r_2} \frac{f(x+y)}{\dfrac{b_0}{1+b_0}} e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 u} - \psi(u) - r_2\int_0^u e^{r_2 t}\psi(u-t)\,dt\right]$$

και βγάζοντας κοινό παράγοντα τους ίδιους όρους, προκύπτει η εξίσωση

$$f_0(x, y/u) = \frac{\beta^2}{c^2 r_2 b_0} f(x+y)(1+b_0)\left[1-\psi(u) - e^{-r_2 x}\left(e^{r_2 u} - \psi(u) - r_2\int_0^u e^{r_2 t}\psi(u-t)\,dt\right)\right]. \quad (3.3.7)$$

Ομοίως, όταν $0 \le x < u$, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(3.2.7)$, την $(2.5.25)$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει η παρακάτω σχέση

$$f_0(x, y/u) = \frac{\beta^2}{c^2(r_2 - 0)} \frac{f(x+y)}{1-\psi(0)} e^{-0\cdot x}\left[e^{0\cdot u} - \psi(u-x) - \psi(u) - 0\cdot\int_0^x e^{0\cdot t}\psi(u-t)\,dt\right]$$
$$-\frac{\beta^2}{c^2(r_2 - 0)} \frac{f(x+y)}{1-\psi(0)} e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 u} - \psi(u-x) - \psi(u) - r_2\int_0^x e^{r_2 t}\psi(u-t)\,dt\right],$$

από την οποία, έχουμε

$$f_0(x, y/u) = \frac{\beta^2}{c^2 r_2 b_0} f(x+y)(1+b_0)\left[\begin{array}{l} 1-\psi(u-x)-\psi(u) \\ -e^{-r_2 x}\left(e^{r_2 u} - \psi(u-x) - \psi(u) - r_2\int_0^x e^{r_2 t}\psi(u-t)\,dt\right)\end{array}\right].$$
$$(3.3.8)$$

Επομένως, από τις σχέσεις $(3.3.7)$ και $(3.3.8)$ προκύπτει η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας.

Για $u=0$, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ και $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$, είναι

$$f_0\left(x,y/0\right)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f\left(x+y\right)}{1-\psi\left(0\right)}\left[1-\psi\left(0\right)\right]-\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f\left(x+y\right)}{1-\psi\left(0\right)}e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 0}-\psi\left(0\right)-r_2\int_0^0 e^{r_2 t}\psi\left(u-t\right)dt\right],$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε την ισότητα $\psi\left(0\right)=\dfrac{1}{1+b_0}$ προκύπτει

$$f_0\left(x,y/0\right)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}f\left(x+y\right)-\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f\left(x+y\right)}{1-\dfrac{1}{1+b_0}}e^{-r_2 x}\left[1-\frac{1}{1+b_0}\right]$$

και ύστερα από πράξεις έχουμε τη σχέση

$$f_0\left(x,y/0\right)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}f\left(x+y\right)-\frac{\beta^2}{c^2 r_2}f\left(x+y\right)e^{-r_2 x}. \blacksquare$$

3.4 Προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$.

Στο θεώρημα που ακολουθεί θα εκφράσουμε την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία, η οποία συμβολίζεται με $H_\delta\left(x/u\right)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3.1

Η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ ***ισούται με***

$$H_\delta\left(x/u\right)=\begin{cases}\overline{K}_\delta\left(u\right)+\dfrac{1}{b_\delta}\dfrac{E_1}{E_1+E_2}e^{-r_1 x}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\left[r_1\displaystyle\int_0^u e^{r_1 t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt+\overline{K}_\delta\left(u\right)-e^{r_1 u}\right]\\ -\dfrac{1}{b_\delta}\dfrac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2 x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left[r_2\displaystyle\int_0^u e^{r_2 t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt+\overline{K}_\delta\left(u\right)-e^{r_2 u}\right] & \gamma\iota\alpha\ 0\le u<x,\\ \dfrac{1}{b_\delta}\displaystyle\int_0^x\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dG_\delta\left(t\right)+\dfrac{1}{b_\delta}\dfrac{E_1}{E_1+E_2}e^{-r_1 x}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\left[r_1\displaystyle\int_0^x e^{r_1 t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt+\overline{K}_\delta\left(u\right)\right]\\ -\dfrac{1}{b_\delta}\dfrac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2 x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left[r_2\displaystyle\int_0^x e^{r_2 t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt+\overline{K}_\delta\left(u\right)\right] & \gamma\iota\alpha\ 0<x\le u,\end{cases}$$

$$(3.4.1)$$

και για $u=0$***, η*** $H_\delta\left(x/u\right)$ ***δίνεται από την παρακάτω σχέση***

$$H_\delta\left(x/0\right)=\frac{1}{1+b_\delta}\left\{1-\frac{E_1}{E_1+E_2}e^{-r_1 x}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)+\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2 x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\right\}. \quad (3.4.2)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν στην προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ και $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$, θεωρήσουμε ότι η τ.μ. y τείνει στο άπειρο, $y \to \infty$, τότε από τη σχέση $(3.2.4)$ συμπεραίνουμε ότι $\overline{\Gamma}_i\left(x+y\right) \to 0$, $\overline{K}_\delta\left(u+y\right) \to 0$, $dG\left(u+y\right) \to 0$

και $G_\delta\left(y\right) = \dfrac{\int_0^\infty z\left(x\right)dx}{\int_0^\infty z\left(x\right)dx} = 1$, σύμφωνα με τις σχέσεις $(2.4.24)$ και $(2.4.9)$.

Οπότε, αντικαθιστώντας τα παραπάνω αποτελέσματα στην σχέση $(3.2.4)$ καταλήγουμε στην προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ.$U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$.

Σε περίπτωση που $x \to \infty$ παρατηρούμε ότι $F_\delta 1\left(\infty / u\right) = \overline{K}_\delta\left(u\right)$.

Για $u = 0$, η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ.$U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$, δίνεται από τη σχέση

$$H_\delta\left(x/0\right) = \overline{K}_\delta\left(0\right) + \frac{1}{b_\delta}\frac{E_1}{E_1+E_2}e^{-r_1 x}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\left[r_1\int_0^0 e^{r_1 t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt + \overline{K}_\delta\left(0\right) - 1\right]$$
$$-\frac{1}{b_\delta}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2 x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left[r_2\int_0^0 e^{r_2 t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt + \overline{K}_\delta\left(0\right) - 1\right],$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε την ισότητα $\overline{K}_\delta\left(0\right) = \dfrac{1}{1+b_\delta}$, καταλήγουμε άμεσα

$$H_\delta\left(x/0\right) = \frac{1}{1+b_\delta} + \frac{1}{b_\delta}\frac{E_1}{E_1+E_2}e^{-r_1 x}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\left[\frac{1}{1+b_\delta} - 1\right] - \frac{1}{b_\delta}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2 x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left[\frac{1}{1+b_\delta} - 1\right]$$
$$= \frac{1}{1+b_\delta} + \frac{1}{b_\delta}\frac{E_1}{E_1+E_2}e^{-r_1 x}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\left[-\frac{b_\delta}{1+b_\delta}\right] - \frac{1}{b_\delta}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2 x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left[-\frac{b_\delta}{1+b_\delta}\right].$$

Από την παραπάνω σχέση, ύστερα από απλοποίηση κάποιων όρων, προκύπτει το αποτέλεσμα της σχέσης$(3.4.2)$. ■

Στη συνέχεια, θα δοθεί η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν της χρεοκοπίας, η οποία συμβολίζεται με $h_\delta\left(x/u\right)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.4.1

Η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ ***δίνεται από τη σχέση***

$$h_{\delta}\left(x/u\right)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{2}}{c^{2}\left(r_{2}-r_{1}\right)}\dfrac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\overline{K}_{\delta}\left(0\right)}\left\{e^{-r_{1}x}\left[e^{r_{1}u}-\overline{K}_{\delta}\left(u\right)-r_{1}\displaystyle\int_{0}^{u}e^{r_{1}t}\overline{K}_{\delta}\left(u-t\right)dt\right]\right. \\ \left.-e^{-r_{2}x}\left[e^{r_{2}u}-\overline{K}_{\delta}\left(u\right)-r_{2}\displaystyle\int_{0}^{u}e^{r_{1}t}\overline{K}_{\delta}\left(u-t\right)dt\right]\right\} \qquad \gamma\iota\alpha\, 0\leq u<x, \\ \dfrac{\beta^{2}}{c^{2}\left(r_{2}-r_{1}\right)}\dfrac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\overline{K}_{\delta}\left(0\right)}\left\{e^{-r_{1}x}\left[e^{r_{1}x}\overline{K}_{\delta}\left(u-x\right)-\overline{K}_{\delta}\left(u\right)-r_{1}\displaystyle\int_{0}^{x}e^{r_{1}t}\overline{K}_{\delta}\left(u-t\right)dt\right]\right. \\ \left.-e^{-r_{2}x}\left[e^{r_{2}x}\overline{K}_{\delta}\left(u-x\right)-\overline{K}_{\delta}\left(u\right)-r_{2}\displaystyle\int_{0}^{x}e^{r_{1}t}\overline{K}_{\delta}\left(u-t\right)dt\right]\right\} \qquad \gamma\iota\alpha\, 0\leq x<u,\end{cases}$$

$$(3.4.3)$$

και για $u=0$***, η*** $h_{\delta}\left(x/u\right)$ ***γράφεται στην μορφή***

$$h_{\delta}\left(x/0\right)=\frac{\beta^{2}}{c^{2}\left(r_{2}-r_{1}\right)}\overline{F}\left(x\right)\left[e^{-r_{1}x}-e^{-r_{2}x}\right]. \qquad (3.4.4)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν παραγωγίσουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$, δηλαδή τη σχέση $(3.4.1)$, έχουμε $h_{\delta}\left(x/u\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}H_{\delta}\left(x/u\right)$. Όταν $0\leq u<x$, η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή

$$h_{\delta}\left(x/u\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{b_{\delta}}\frac{E_{1}}{E_{1}+E_{2}}e^{-r_{1}x}\overline{\Gamma}_{1}\left(x\right)\left[r_{1}\int_{0}^{u}e^{r_{1}t}\overline{K}_{\delta}\left(u-t\right)dt+\overline{K}_{\delta}\left(u\right)-e^{r_{1}u}\right]\right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{b_{\delta}}\frac{E_{2}}{E_{1}+E_{2}}e^{-r_{2}x}\overline{\Gamma}_{2}\left(x\right)\left[r_{2}\int_{0}^{u}e^{r_{2}t}\overline{K}_{\delta}\left(u-t\right)dt+\overline{K}_{\delta}\left(u\right)-e^{r_{2}u}\right]\right].$$

Αν αντικαταστήσουμε στην τελευταία σχέση τις σχέσεις $(3.2.13)$, $(3.2.14)$ και την ισότητα $\overline{K}\left(0\right)=\dfrac{1}{1+b_{\delta}}$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$h_{\delta}\left(x/u\right)=\frac{1}{b_{\delta}}\frac{E_{1}}{E_{1}+E_{2}}\left(-e^{-r_{1}x}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{E_{1}}\right)\left[r_{1}\int_{0}^{u}e^{r_{1}t}\overline{K}_{\delta}\left(u-t\right)dt+\overline{K}_{\delta}\left(u\right)-e^{r_{1}u}\right]$$

$$-\frac{1}{b_{\delta}}\frac{E_{1}}{E_{1}+E_{2}}\left(-e^{-r_{2}x}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{E_{1}}\right)\left[r_{2}\int_{0}^{u}e^{r_{1}t}\overline{K}_{\delta}\left(u-t\right)dt+\overline{K}_{\delta}\left(u\right)-e^{r_{2}u}\right],$$

από την οποία προκύπτει η σχέση

$$
\begin{aligned}
h_\delta\left(x/u\right) = {} & \frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\overline{K}_\delta\left(0\right)}e^{-r_1x}\left[e^{r_1u}-\overline{K}_\delta\left(u\right)-r_1\int_0^u e^{r_1t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt\right] \\
& -\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\overline{K}_\delta\left(0\right)}e^{-r_2x}\left[e^{r_2u}-\overline{K}_\delta\left(u\right)-r_2\int_0^u e^{r_1t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt\right]. \qquad (3.4.5)
\end{aligned}
$$

Ομοίως, για $0 < x \le u$, η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^-\right)$ είναι

$$
\begin{aligned}
h_\delta\left(x/u\right) = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{b_\delta}\int_0^x \overline{K}_\delta\left(u-t\right)dG_\delta\left(t\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{b_s}\frac{E_1}{E_1+E_2}e^{-r_1x}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\left[r_1\int_0^x e^{r_1t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt+\overline{K}_\delta\left(u\right)\right]\right] \\
& -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{b_\delta}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left[r_2\int_0^x e^{r_2t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt+\overline{K}_\delta\left(u\right)\right]\right].
\end{aligned}
$$

Αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω εξίσωση τις σχέσεις $(3.2.13)$ και $(3.2.14)$ και δεδομένου ότι ισχύει το λήμμα 3.1.1 και η ισότητα $\overline{K}\left(0\right)=\dfrac{1}{1+b_\delta}$, καταλήγουμε

$$
\begin{aligned}
h_\delta\left(x/u\right) = {} & \frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\overline{K}_\delta\left(0\right)}e^{-r_1x}\left[e^{r_1x}\overline{K}_\delta\left(u-x\right)-\overline{K}_\delta\left(u\right)-r_1\int_0^x e^{r_1t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt\right] \\
& -\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\overline{K}_\delta\left(0\right)}e^{-r_2x}\left[e^{r_2x}\overline{K}_\delta\left(u-x\right)-\overline{K}_\delta\left(u\right)-r_2\int_0^x e^{r_1t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt\right].
\end{aligned}
$$

$$(3.4.6)$$

Συνεπώς, από τις σχέσεις $(3.4.5)$ και $(3.4.6)$ προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^-\right)$.

Για $u=0$, η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^-\right)$, δίνεται από την παρακάτω εξίσωση

$$
\begin{aligned}
h_\delta\left(x/0\right) = {} & \frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\overline{K}_\delta\left(0\right)}e^{-r_1x}\left[e^{r_10}-\overline{K}_\delta\left(0\right)-r_1\int_0^0 e^{r_1t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt\right] \\
& -\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\overline{K}_\delta\left(0\right)}e^{-r_2x}\left[e^{r_20}-\overline{K}_\delta\left(0\right)-r_2\int_0^0 e^{r_1t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt\right],
\end{aligned}
$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε την ισότητα $\overline{K}\left(0\right)=\dfrac{1}{1+b_\delta}$, καταλήγουμε

$$h_\delta\left(x/0\right)=\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{\frac{b_\delta}{1+b_\delta}}e^{-r_1x}\frac{b_\delta}{1+b_\delta}-\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{\frac{b_\delta}{1+b_\delta}}e^{-r_2x}\frac{b_\delta}{1+b_\delta}.$$

Επομένως, ύστερα από απλοποιήσεις στην τελευταία σχέση, προκύπτει η σχέση $(3.4.4)$. ■

3.5 Περιθώρια συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^-\right)$.

Στην παράγραφο αυτή θα εκφράσουμε την περιθώρια συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία όταν $\delta=0$. Αν συμβολίσουμε, λοιπόν, $H_0\left(x/u\right)$ την περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^-\right)$, στο παρακάτω πόρισμα θα δείξουμε ότι είναι της μορφής $(3.5.1)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.5.1

Για $\delta=0$ η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ.$U\left(\mathrm{T}^-\right)$ είναι ίση με

$$H_0\left(x/u\right)=\begin{cases}\psi\left(u\right)+\dfrac{1}{b_0}\dfrac{E_1}{E_1+E_2}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\left[\psi\left(u\right)-1\right] & \\ -\dfrac{1}{b_0}\dfrac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left[r_2\displaystyle\int_0^u e^{r_2t}\psi\left(u-t\right)dt+\psi\left(u\right)-e^{r_2u}\right] & \gamma\iota\alpha\; 0\le u<x,\\ \dfrac{1}{b_0}\displaystyle\int_0^x\psi\left(u-t\right)dG_\delta\left(t\right)+\dfrac{1}{b_0}\dfrac{E_1}{E_1+E_2}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\psi\left(u\right) & \\ -\dfrac{1}{b_0}\dfrac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left[r_2\displaystyle\int_0^x e^{r_2t}\psi\left(u-t\right)dt+\psi\left(u\right)\right] & \gamma\iota\alpha\; 0<x\le u.\end{cases}\tag{3.5.1}$$

και για $u=0$, η $H_0\left(x/u\right)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$H_0\left(x/0\right)=\frac{1}{1+b_0}\left(1-\frac{E_1}{E_1+E_2}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)+\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\right).\tag{3.5.2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με την υπόθεση ότι $\delta=0$, για $0\le u<x$, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(3.3.1)$ τη σχέση $(2.5.25)$, προκύπτει η εξίσωση

$$H_0(x/u)=\psi(u)+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1+E_2}e^{0\cdot x}\overline{\Gamma}_1(x)\left[0\cdot\int_0^u e^{0\cdot t}\psi(u-t)\,dt+\psi(u)-e^{0\cdot u}\right]$$

$$-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2(x)\left[r_2\int_0^u e^{r_2t}\psi(u-t)\,dt+\psi(u)-e^{r_2u}\right],$$

από την οποία ύστερα από απλοποιήσεις συμπεραίνουμε ότι ισχύει η εξίσωση

$$H_0(x/u)=\psi(u)+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1+E_2}\overline{\Gamma}_1(x)\left[\psi(u)-1\right]$$

$$-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2(x)\left[r_2\int_0^u e^{r_2t}\psi(u-t)\,dt+\psi(u)-e^{r_2u}\right]. \qquad (3.5.3)$$

Ομοίως, για $0<x\le u$, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(3.3.1)$ τη σχέση $(2.5.25)$, καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση

$$H_0(x/u)=\frac{1}{b_0}\int_0^x\psi(u-t)\,dG_\delta(t)+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1+E_2}e^{-0\cdot x}\overline{\Gamma}_1(x)\left[0\cdot\int_0^x e^{0\cdot t}\psi(u-t)\,dt+\psi(u)\right]$$

$$-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2(x)\left[r_2\int_0^x e^{r_2t}\psi(u-t)\,dt+\psi(u)\right].$$

Η τελευταία ισότητα, ύστερα από πράξεις παίρνει τη μορφή

$$H_0(x/u)=\frac{1}{b_0}\int_0^x\psi(u-t)\,dG_\delta(t)+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1+E_2}\overline{\Gamma}_1(x)\psi(u)$$

$$-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2(x)\left[r_2\int_0^x e^{r_2t}\psi(u-t)\,dt+\psi(u)\right]. \qquad (3.5.4)$$

Οπότε, αν συνοψίσουμε τις σχέσεις $(3.5.3)$ και $(3.5.4)$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $U\left(T^-\right)$.

Για $u=0$, η περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία είναι

$$H_0(x/0)=\psi(0)+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1+E_2}\overline{\Gamma}_1(x)\left[\psi(0)-1\right]$$

$$-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2(x)\left[r_2\int_0^0 e^{r_2t}\psi(u-t)\,dt+\psi(0)-e^{r_20}\right],$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε την ισότητα $\psi(0)=\dfrac{1}{1+b_0}$, έχουμε

$$H_0\left(x/0\right)=\frac{1}{1+b_0}+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1+E_2}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\left[\frac{1}{1+b_0}-1\right]-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left[\frac{1}{1+b_0}-1\right]$$

και μετά από πράξεις καταλήγουμε στη σχέση $(3.5.2)$. ■

Στο πόρισμα που ακολουθεί, θα εκφράσουμε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^-\right)$, η οποία συμβολίζεται με $h_0\left(x/u\right)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.5.2

Για $\delta=0$ η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^-\right)$ δίνεται από τη σχέση

$$h_0\left(x/u\right)=\begin{cases}\dfrac{\beta^2}{c^2r_2}\dfrac{\overline{F}(x)}{1-\psi(0)}\left\{1-\psi(u)-e^{-r_2x}\left[e^{r_2u}-\psi(u)-r_2\displaystyle\int_0^u e^{r_2t}\psi(u-t)\,dt\right]\right\} & \gamma\iota\alpha\, 0\le u<x,\\ \dfrac{\beta^2}{c^2r_2}\dfrac{\overline{F}(x)}{1-\psi(0)}\left\{\begin{array}{l}\psi(u-x)-\psi(u)\backslash\\ -e^{-r_2x}\left[e^{r_2x}\psi(u-x)-\psi(u)-r_2\displaystyle\int_0^x e^{r_2t}\psi(u-t)\,dt\right]\end{array}\right\} & \gamma\iota\alpha\, 0\le x<u,\end{cases}\quad(3.5.5)$$

και για $u=0$, η $H_0\left(x/u\right)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$h_0\left(x/u\right)=\frac{\beta^2}{c^2r_2}\overline{F}\left(x\right)\left(1-e^{-r_2x}\right).\qquad(3.5.6)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Υποθέτοντας ότι $\delta=0$, τότε για $0\le u<x$ αν αντικαταστήσουμε την ισότητα $\overline{K}_0\left(u\right)=\psi\left(u\right)$ στη σχέση $(3.4.5)$, προκύπτει η εξίσωση

$$h_0\left(x/u\right)=\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-0\right)}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\psi\left(0\right)}e^{-0\cdot x}\left[e^{0\cdot u}-\psi\left(u\right)-0\cdot\int_0^u e^{0\cdot t}\psi\left(u-t\right)dt\right]$$
$$-\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-0\right)}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\psi\left(0\right)}e^{-r_2x}\left[e^{r_2u}-\psi\left(u\right)-r_2\int_0^u e^{r_2t}\psi\left(u-t\right)dt\right],$$

η οποία μετά από απλοποίηση των όρων που μηδενίζονται μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$h_0\left(x/u\right)=\frac{\beta^2}{c^2r_2}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\psi\left(0\right)}\left[1-\psi\left(u\right)\right]-\frac{\beta^2}{c^2r_2}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\psi\left(0\right)}e^{-r_2x}\left[e^{r_2u}-\psi\left(u\right)-r_2\int_0^u e^{r_2t}\psi\left(u-t\right)dt\right].$$
$$(3.5.7)$$

Ομοίως, για $0 \le x < u$, αν αντικαταστήσουμε την σχέση $\overline{K}_0(u) = \psi(u)$ στη σχέση $(3.4.5)$, τότε καταλήγουμε στο αποτέλεσμα που φαίνεται παρακάτω

$$h_0(x/u) = \frac{\beta^2}{c^2(r_2-0)} \frac{\overline{F}(x)}{1-\psi(0)} e^{-0\cdot x}\left[e^{0\cdot x}\psi(u-x) - \psi(u) - 0\cdot\int_0^x e^{0\cdot t}\psi(u-t)\,dt\right]$$
$$-\frac{\beta^2}{c^2(r_2-0)} \frac{\overline{F}(x)}{1-\psi(0)} e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 x}\psi(u-x) - \psi(u) - r_2\int_0^x e^{r_2 t}\psi(u-t)\,dt\right],$$

από το οποίο έχουμε τη σχέση

$$h_0(x/u) = \frac{\beta^2}{c^2 r_2} \frac{\overline{F}(x)}{1-\psi(0)}\left[\psi(u-x) - \psi(u)\right]$$
$$-\frac{\beta^2}{c^2 r_2} \frac{\overline{F}(x)}{1-\psi(0)} e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 x}\psi(u-x) - \psi(u) - r_2\int_0^x e^{r_2 t}\psi(u-t)\,dt\right]. \qquad (3.5.8)$$

Οπότε, από τις σχέσεις $(3.5.7)$ και $(3.5.8)$ προκύπτει άμεσα η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U(\mathrm{T}^-)$.

Για $u = 0$, η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία είναι ίση με

$$h_0(x/u) = \frac{\beta^2}{c^2 r_2} \frac{\overline{F}(x)}{1-\psi(0)}\left\{1-\psi(0) - e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 0} - \psi(0) - r_2\int_0^0 e^{r_2 t}\psi(u-t)\,dt\right]\right\}$$

και μετά από την αντικατάσταση της σχέσης $\psi(0) = \frac{1}{1+b_0}$ προκύπτει η εξίσωση

$$h_0(x/u) = \frac{\beta^2}{c^2 r_2 b_0}\overline{F}(x)(1+b_0)\left[\frac{b_0}{1+b_0} - e^{-r_2 x}\frac{b_0}{1+b_0}\right]. \ \blacksquare$$

3.6 Προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας.

Η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας συμβολίζεται με $G_\delta(y/u)$ και δίνεται από τη σχέση $(3.6.1)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.6.1

Η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ . $U(\mathrm{T})$ ***για*** $0 \le u < x$ ***είναι ίση με***

$$G_\delta(y/u) = \frac{1+b_\delta}{b_\delta}\left[\overline{K}_\delta(u) - \overline{K}_\delta(u+y)\right] - \frac{1}{b_\delta}G_\delta(y)\overline{K}_\delta(u) + \frac{1}{b_\delta}\int_0^y \overline{K}_\delta(u+y-t)\,dG_\delta(t), \tag{3.6.1}$$

και για $u=0$***, η*** $G_\delta(y/u)$ ***δίνεται από τη σχέση που ακολουθεί. Δηλαδή,***

$$G_\delta(y/0) = \frac{G_\delta(y)}{(1+b_\delta)}. \tag{3.6.2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν θεωρήσουμε ότι στην προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ $U(\mathrm{T}^-)$ και $|U(\mathrm{T})|$, η τ.μ. x τείνει στο άπειρο, δηλαδή $x \to \infty$, τότε από τη σχέση $(3.2.4)$ συμπεραίνουμε ότι $\overline{\Gamma}_i(x+y) \to 0$, $\overline{K}_\delta(u+y) \to 0$, $dG(u+y) \to 0$ και $G_\delta(y) = \dfrac{\int_0^\infty z(x)\,dx}{\int_0^\infty z(x)\,dx} = 1$, σύμφωνα με τις σχέσεις $(2.4.24)$ και $(2.4.9)$. Οπότε, αν αντικαταστήσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα στην σχέση $(3.2.4)$ καταλήγουμε στην προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας.

Για $u=0$, η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $|U(\mathrm{T})|$, γράφεται ως

$$G_\delta(y/0) = \frac{1+b_\delta}{b_\delta}\left[\overline{K}_\delta(0) - \overline{K}_\delta(y)\right] - \frac{1}{b_\delta}G_\delta(y)\overline{K}_\delta(0) + \frac{1}{b_\delta}\int_0^y \overline{K}_\delta(y-t)\,dG_\delta(t)$$

$$= \frac{1+b_\delta}{b_\delta}\left[\frac{1}{1+b_\delta} - \frac{1}{1+b_\delta}\overline{G}_\delta(y)\right] - \frac{1}{b_\delta}G_\delta(y)\frac{1}{1+b_\delta}.$$

Αν αντικαταστήσουμε στην τελευταία σχέση την ισότητα $\overline{K}(0) = \dfrac{1}{1+b_\delta}$, έχουμε

$$G_\delta(y/0) = \frac{1}{b_\delta} - \frac{1}{b_\delta}\left(1 - G_\delta(y)\right) - \frac{1}{1+b_\delta}\frac{1}{b_\delta}G_\delta(y) = \frac{(1+b_\delta)G_\delta(y) - G_\delta(y)}{(1+b_\delta)b_\delta},$$

από την οποία προκύπτει η σχέση $(3.6.2)$. ■

Στην πρόταση που ακολουθεί θα εκφράσουμε την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας, η οποία συμβολίζεται με $g_\delta\left(y/u\right)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.5.1

Η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ ***δίνεται από τη σχέση***

$$g_\delta\left(y/u\right)=-\frac{1+b_\delta}{b_\delta}\overline{K}'_\delta\left(u+y\right)+\frac{1}{b_\delta}\int_0^y\overline{K}'_\delta\left(u+y-t\right)dG_\delta\left(t\right), \tag{3.6.3}$$

και για $u=0$***, η*** $g_\delta\left(y/u\right)$ ***είναι ίση με***

$$g_\delta\left(y/0\right)=g\left(y\right)\frac{1}{1+b_\delta}. \tag{3.6.4}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν παραγωγίσουμε την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτησης τ.μ. $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$, δηλαδή τη σχέση $\left(3.6.1\right)$, έχουμε $g_\delta\left(y/u\right)=\frac{\partial}{\partial y}G_\delta\left(y/u\right)$. Οπότε προκύπτει η σχέση που ακολουθεί.

$$\begin{aligned}g_\delta\left(y/u\right)&=\frac{\partial}{\partial y}\frac{1+b_\delta}{b_\delta}\left[\overline{K}_\delta\left(u\right)-\overline{K}_\delta\left(u+y\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{b_\delta}G_\delta\left(y\right)\overline{K}_\delta\left(u\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{b_\delta}\int_0^y\overline{K}_\delta\left(u+y-t\right)dG_\delta\left(t\right)\right]\\&=-\frac{1+b_\delta}{b_\delta}\overline{K}'_\delta\left(u+y\right)+\frac{1}{b_\delta}\int_0^y\overline{K}'_\delta\left(u+y-t\right)dG_\delta\left(t\right).\end{aligned}$$

Για $u=0$, η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ είναι $g_\delta\left(y/0\right)=-\frac{1+b_\delta}{b_\delta}\overline{K}'_\delta\left(y\right)+\frac{1}{b_\delta}\int_0^y\overline{K}'_\delta\left(y-t\right)dG_\delta\left(t\right)$.

Αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση την ισότητα σχέση $\overline{K}_\delta\left(0\right)=\frac{1}{1+b_\delta}$, καταλήγουμε $g_\delta\left(y/0\right)=\frac{1+b_\delta}{b_\delta}G'_\delta\left(y\right)$, από την οποία προκύπτει η σχέση $\left(3.6.4\right)$. ■

3.7 Περιθώρια συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας.

Στο πόρισμα που ακολουθεί θα εκφράσουμε την περιθώρια συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας, $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$, η οποία συμβολίζεται με $G_0\left(y/u\right)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.7.1

Για $\delta = 0$ και για $0 \le u < x$, η τ.μ. $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ δίνεται από τη σχέση

$$G_0\left(y/u\right)=\frac{1+b_0}{b_0}\left[\psi\left(u\right)-\psi\left(u+y\right)\right]-\frac{1}{b_0}G_0\left(y\right)\psi\left(u\right)+\frac{1}{b_0}\int_0^y\psi\left(u+y-t\right)dG_0\left(t\right),\left(3.7.1\right)$$

και για $u=0$, η $G_0\left(y/u\right)$ είναι ίση με

$$G_0\left(y/0\right)=\frac{1}{b_0}\left[1-\left(1+b_0\right)\psi\left(y\right)-\frac{1}{\left(1+b_0\right)}G_0\left(y\right)+\int_0^y\psi\left(y-t\right)dG_0\left(t\right)\right]. \qquad \left(3.7.2\right)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όταν ισχύει $\delta = 0$, η σχέση $\left(3.4.1\right)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$G_0\left(y/u\right)=\frac{1+b_0}{b_0}\left[\overline{K}_0\left(u\right)-\overline{K}_0\left(u+y\right)\right]-\frac{1}{b_0}G_0\left(y\right)\overline{K}_0\left(u\right)+\frac{1}{b_0}\int_0^y\overline{K}_0\left(u+y-t\right)dG_0\left(t\right),$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε τη σχέση $\left(2.5.25\right)$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$.

Για $u=0$, η περιθώρια συνάρτησης κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση

$$G_0\left(y/0\right)=\frac{1+b_0}{b_0}\left[\psi\left(0\right)-\psi\left(y\right)\right]-\frac{1}{b_0}G_0\left(y\right)\psi\left(0\right)+\frac{1}{b_0}\int_0^y\psi\left(y-t\right)dG_0\left(t\right)$$

και αν αντικαταστήσουμε την ισότητα $\psi\left(0\right)=\frac{1}{1+b_0}$, προκύπτει

$$G_0\left(y/0\right)=\frac{1}{b_0}-\frac{1+b_0}{b_0}\psi\left(y\right)-\frac{1}{b_0\left(1+b_0\right)}G_0\left(y\right)+\frac{1}{b_0}\int_0^y\psi\left(y-t\right)dG_0\left(t\right). \blacksquare$$

Στη συνέχεια, θα εκφράσουμε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$, η οποία συμβολίζεται με $g_0\left(y/u\right)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.7.2

Όταν $\delta = 0$, η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ ισούται με

$$g_0\left(y/u\right) = -\frac{1+b_0}{b_0}\psi'\left(u+y\right) + \frac{1}{b_0}\int_0^y \psi'\left(u+y-t\right)dG_0\left(t\right). \qquad (3.7.3)$$

και για $u = 0$, η $g_0\left(y/u\right)$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$g_0\left(y/0\right) = -\frac{1+b_0}{b_0}\psi'\left(y\right) + \frac{1}{b_0}\int_0^y \psi'\left(y-t\right)dG_0\left(t\right). \qquad (3.7.4)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν παραγωγίσουμε την περιθώρια συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας και αντικαταστήσουμε τη σχέση $\overline{K}_0\left(u\right) = \psi\left(u\right)$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$g_0\left(y/u\right) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{1+b_0}{b_0}\left[\psi\left(u\right)-\psi\left(u+y\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{b_0}G_0\left(y\right)\psi\left(u\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{b_0}\int_0^y \psi\left(u+y-t\right)dG_0\left(t\right)\right],$$

από την οποία προκύπτει η ζητούμενη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$.

Για $u = 0$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g_0\left(y/u\right)$ γράφεται

$$g_0\left(y/0\right) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{1+b_0}{b_0}\left[\psi\left(0\right)-\psi\left(y\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{b_0}G_0\left(y\right)\psi\left(0\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{b_0}\int_0^y \psi\left(y-t\right)dG_0\left(t\right)\right]$$

και μετά από πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

$$g_0\left(y/0\right) = -\frac{1+b_0}{b_0}\psi'\left(y\right) + \frac{1}{b_0}\int_0^y \psi'\left(y-t\right)dG_0\left(t\right). \blacksquare$$

3.8 Προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left[U\left(\mathrm{T}-\right)+\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|\right]$.

Όταν συμβεί χρεοκοπία εξαιτίας μιας απαίτησης, το $\left[U\left(\mathrm{T}-\right)+\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|\right]$ είναι το ποσό της απαίτησης που προκαλεί τη χρεοκοπία. Έστω ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. $U\left(\mathrm{T}-\right)$, $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ και T είναι ίση με $d\left(x, y, t/u\right)$.

Η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left[U\left(\mathrm{T}-\right)+\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|\right]$ με $\delta \geq 0$ είναι

$$d\left(x,y/u\right)=\int_0^{\infty}e^{-\delta t}d\left(x,y,t/u\right)dt.$$

Θεωρούμε ότι η συνάρτηση ποινής της τ.μ. $\left[U\left(\mathrm{T}-\right)+\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|\right]$ είναι $w\left(x,y\right)=x+y$, τότε η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής δίνεται από τον τύπο

$$\phi_w\left(u\right)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\delta t}\left(x+y\right)d\left(x,y,t/u\right)dtdxdy=\int_0^{\infty}zd_\delta\left(z/u\right)dz.$$

Άρα, η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left[U\left(\mathrm{T}-\right)+\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|\right]$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$d_\delta\left(z/u\right)=\int_0^{z}f_\delta\left(x,z-x/u\right)dx=f\left(z\right)\int_0^{z}\frac{h_\delta\left(x/u\right)}{\overline{F}\left(x\right)}dx. \qquad (3.8.1)$$

Ανάλογα με τη μορφή που παίρνει κάθε φορά η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$, η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left[U\left(\mathrm{T}-\right)+\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|\right]$ δίνεται από τη σχέση $(3.8.2)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.8.1

Για $\delta>0$, η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left[U\left(\mathrm{T}-\right)+\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|\right]$ είναι

$$d_\delta\left(z/u\right)=\begin{cases}\dfrac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\dfrac{f\left(z\right)}{1-\overline{K}_\delta\left(0\right)}\dfrac{e^{-r_1z}}{r_1}\left[\left(e^{r_1z}-e^{r_1u}\right)-\left(e^{r_1z}-1\right)\overline{K}_\delta\left(u\right)+r_1\displaystyle\int_0^{u}e^{r_1t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt\right]\\ -\dfrac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\dfrac{f\left(z\right)}{1-\overline{K}_\delta\left(0\right)}\dfrac{e^{-r_2z}}{r_2}\left[\left(e^{r_2z}-e^{r_1u}\right)-\left(e^{r_2z}-1\right)\overline{K}_\delta\left(u\right)+r_2\displaystyle\int_0^{u}e^{r_2t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt\right]\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{για } 0\le u<z,\\ \dfrac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\dfrac{f\left(z\right)}{1-\overline{K}_\delta\left(0\right)}\dfrac{e^{-r_1z}}{r_1}\left[-\left(e^{r_1z}-1\right)\overline{K}_\delta\left(u\right)+r_1\displaystyle\int_0^{z}e^{r_1t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt\right]\\ -\dfrac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\dfrac{f\left(z\right)}{1-\overline{K}_\delta\left(0\right)}\dfrac{e^{-r_2z}}{r_2}\left[-\left(e^{r_2z}-1\right)\overline{K}_\delta\left(u\right)+r_2\displaystyle\int_0^{z}e^{r_2t}\overline{K}_\delta\left(u-t\right)dt\right]\text{για } 0\le z<u,\end{cases}$$

$$(3.8.2)$$

και για $u=0$, η $d_0\left(y/u\right)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$d_\delta\left(z/0\right)=\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}f\left(z\right)\left(\frac{1-e^{-r_1z}}{r_1}-\frac{1-e^{-r_2z}}{r_2}\right). \qquad (3.8.3)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για $0 \le z < u$, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(3.8.1)$ τη σχέση $(3.4.6)$, καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση.

$$
\begin{aligned}
d_\delta(z/u) &= f(z)\int_0^z \frac{h_\delta(x/u)}{\overline{F}(x)}dx \\
&= f(z)\int_0^z \frac{1}{\overline{F}(x)}\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{\overline{F}(x)}{1-\overline{K}_\delta(0)}e^{-r_1 x}\left[e^{r_1 x}\overline{K}_\delta(u-x)-\overline{K}_\delta(u)-r_1\int_0^x e^{r_1 t}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right]dx \\
&\quad - f(z)\int_0^z \frac{1}{\overline{F}(x)}\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{\overline{F}(x)}{1-\overline{K}_\delta(0)}e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 x}\overline{K}_\delta(u-x)-\overline{K}_\delta(u)-r_2\int_0^x e^{r_2 t}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right]dx.
\end{aligned}
$$

Ύστερα από πράξεις στην τελευταία σχέση, συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$
\begin{aligned}
d_\delta(z/u) &= \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_\delta(0)}\left[-\overline{K}_\delta(u)\int_0^z e^{-r_1 x}dx - r_1\int_0^z e^{-r_1 x}\int_0^x e^{r_1 t}\overline{K}_\delta(u-t)dtdx\right] \\
&\quad - \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_\delta(0)}\left[-\overline{K}_\delta(u)\int_0^z e^{-r_2 x}dx - r_2\int_0^z e^{-r_2 x}\int_0^x e^{r_2 t}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right] \quad (3.8.4)
\end{aligned}
$$

Στη συνέχεια, αν αλλάξουμε τα όρια του παραπάνω ολοκληρώματος για τη ρίζα r_1, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα. Δηλαδή,

$$
\begin{aligned}
\int_0^z e^{-r_1 x}\int_0^x e^{r_1 t}\overline{K}_\delta(u-t)dtdx &= \int_0^z\int_t^z e^{-r_1 x}e^{r_1 t}\overline{K}_\delta(u-t)dtdx = \int_0^z\int_t^z e^{-r_1(x-t)}\overline{K}_\delta(u-t)dtdx \\
&= \frac{1-e^{-r_1 z}}{r_1}\overline{K}_\delta(u) + \int_0^z e^{-r_1(z-t)}\overline{K}_\delta(u-t)dt. \quad (3.8.5)
\end{aligned}
$$

Ομοίως, αν αλλάξουμε τα όρια του ολοκληρώματος για τη ρίζα r_2, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int_0^z e^{-r_2 x}\int_0^x e^{r_2 t}\overline{K}_\delta(u-t)dtdx &= \int_0^z\int_t^z e^{-r_2 x}e^{r_2 t}\overline{K}_\delta(u-t)dtdx = \int_0^z\int_t^z e^{-r_2(x-t)}\overline{K}_\delta(u-t)dtdx \\
&= \frac{1-e^{-r_2 z}}{r_1}\overline{K}_\delta(u) + \int_0^z e^{-r_2(z-t)}\overline{K}_\delta(u-t)dt. \quad (3.8.6)
\end{aligned}
$$

Αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(3.8.4)$ τις σχέσεις $(3.8.5)$ και $(3.8.6)$, καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση

$$
\begin{aligned}
d_\delta(z/u) &= \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_\delta(0)}\left[-\overline{K}_\delta(u)\int_0^z e^{-r_1 x}dx - r_1\frac{1-e^{-r_1 z}}{r_1}\overline{K}_\delta(u) + \int_0^z e^{-r_1(z-t)}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right] \\
&\quad - \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_\delta(0)}\left[-\overline{K}_\delta(u)\int_0^z e^{-r_2 x}dx - r_2\int_0^z e^{-r_2 x}\int_0^x e^{r_2 t}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right],
\end{aligned}
$$

και ύστερα από πράξεις προκύπτει η σχέση

$$
\begin{aligned}
d_\delta(z/u) =& \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_\delta(0)}\left[-\overline{K}_\delta(u)\frac{e^{-r_1 z}}{r_1}-\left(1-e^{-r_1 z}\right)\overline{K}_\delta(u)+\int_0^z e^{-r_1(z-t)}\overline{K}_\delta(u-t)\,dt\right] \\
&-\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_\delta(0)}\left[-\overline{K}_\delta(u)\int_0^z e^{-r_2 x}dx-r_2\int_0^z e^{-r_2 x}\int_0^x e^{r_2 t}\overline{K}_\delta(u-t)\,dt\right] \\
=& \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_\delta(0)}\left[-\overline{K}_\delta(u)\frac{e^{-r_1 z}}{r_1}-\left(1-e^{-r_1 z}\right)\overline{K}_\delta(u)+\int_0^z e^{-r_1(z-t)}\overline{K}_\delta(u-t)\,dt\right] \\
&-\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_\delta(0)}\left[-\overline{K}_\delta(u)\int_0^z e^{-r_2 x}dx-r_2\int_0^z e^{-r_2 x}\int_0^x e^{r_2 t}\overline{K}_\delta(u-t)\,dt\right] \\
=& \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_\delta(0)}\frac{e^{-r_1 z}}{r_1}\left[\left(e^{r_1 z}-e^{r_1 u}\right)-\left(e^{r_1 z}-1\right)\overline{K}_\delta(u)+r_1\int_0^u e^{r_1 t}\overline{K}_\delta(u-t)\,dt\right] \\
&-\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_\delta(0)}\frac{e^{-r_2 z}}{r_2}\left[\left(e^{r_2 z}-e^{r_1 u}\right)-\left(e^{r_2 z}-1\right)\overline{K}_\delta(u)+r_2\int_0^u e^{r_2 t}\overline{K}_\delta(u-t)\,dt\right].
\end{aligned}
$$

Από την τελευταία σχέση, συμπεραίνουμε ότι ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα

$$
\begin{aligned}
d_\delta(z/u) =& \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_\delta(0)}\frac{e^{-r_1 z}}{r_1}\left[-\left(e^{r_1 z}-1\right)\overline{K}_\delta(u)+r_1\int_0^z e^{r_1 t}\overline{K}_\delta(u-t)\,dt\right] \\
&-\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_\delta(0)}\frac{e^{-r_2 z}}{r_2}\left[-\left(e^{r_2 z}-1\right)\overline{K}_\delta(u)+r_2\int_0^z e^{r_2 t}\overline{K}_\delta(u-t)\,dt\right].
\end{aligned}
\tag{3.8.7}
$$

Ομοίως, όταν $0 \le u < z$, η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left[U(\mathrm{T}-)+\left|U(\mathrm{T})\right|\right]$ δίνεται από τη σχέση

$$
\begin{aligned}
d_\delta(z/u) =& f(z)\int_0^z \frac{h_\delta(x/u)}{\overline{F}(x)}dx \\
=& f(z)\int_0^z \frac{1}{\overline{F}(x)}\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{\overline{F}(x)}{1-\overline{K}_\delta(0)}e^{-r_1 x}\left[e^{r_1 u}-\overline{K}_\delta(u)-r_1\int_0^u e^{r_1 t}\overline{K}_\delta(u-t)\,dt\right]dx \\
&- f(z)\int_0^z \frac{1}{\overline{F}(x)}\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{\overline{F}(x)}{1-\overline{K}_\delta(0)}e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 u}-\overline{K}_\delta(u)-r_2\int_0^u e^{r_1 t}\overline{K}_\delta(u-t)\,dt\right]dx.
\end{aligned}
$$

Ύστερα από πράξεις, η τελευταία σχέση γράφεται

$$
\begin{aligned}
d_\delta(z/u) =& \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_\delta(0)}\left[-\overline{K}_\delta(u)\int_0^z e^{-r_1 x}dx-r_1\int_0^z e^{-r_1 x}\int_0^u e^{r_1 t}\overline{K}_\delta(u-t)\,dtdx\right] \\
&-\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_\delta(0)}\left[-\overline{K}_\delta(u)\int_0^z e^{-r_2 x}dx-r_2\int_0^z e^{-r_2 x}\int_0^u e^{r_2 t}\overline{K}_\delta(u-t)\,dtdx\right],
\end{aligned}
$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε τις σχέσεις $(3.8.5)$ και $(3.8.6)$, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$
\begin{aligned}
d_\delta(z/u) &= \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_\delta(0)}\left[-\overline{K}_\delta(u)\int_0^z e^{-r_1 x}dx-\frac{1-e^{-r_1 z}}{r_1}\overline{K}_\delta(u)+\int_0^u e^{-r_1(z-t)}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right] \\
&\quad -\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_\delta(0)}\left[-\overline{K}_\delta(u)\int_0^z e^{-r_2 x}dx-\frac{1-e^{-r_2 z}}{r_2}\overline{K}_\delta(u)+\int_0^u e^{-r_2(z-t)}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right] \\
&= \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_\delta(0)}\left[-\frac{1-e^{-r_1 z}}{r_1}\overline{K}_\delta(u)+\int_0^u e^{-r_1(z-t)}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right] \\
&\quad -\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_\delta(0)}\left[-\overline{K}_\delta(u)\int_0^z e^{-r_2 x}dx-\frac{1-e^{-r_2 z}}{r_2}\overline{K}_\delta(u)+\int_0^u e^{-r_2(z-t)}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right],
\end{aligned}
$$

από την οποία έχουμε την παρακάτω σχέση

$$
\begin{aligned}
d_\delta(z/u) &= \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_\delta(0)}\frac{e^{-r_1 z}}{r_1}\left[-\left(e^{r_1 z}-1\right)\overline{K}_\delta(u)+r_1\int_0^u e^{r_1 t}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right] \\
&\quad -\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_\delta(0)}\frac{e^{-r_2 z}}{r_2}\left[-\left(e^{r_2 z}-1\right)\overline{K}_\delta(u)+r_2\int_0^u e^{r_2 t}\overline{K}_\delta(u-t)dt\right].
\end{aligned}
\tag{3.8.8}
$$

Επομένως, από τις σχέσεις $(3.8.6)$ και $(3.8.8)$ προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left[U(\mathrm{T}-)+\left|U(\mathrm{T})\right|\right]$.

Για $u=0$, η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ.$\left[U(\mathrm{T}-)+\left|U(\mathrm{T})\right|\right]$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$
\begin{aligned}
d_\delta(z/0) &= \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}(0)}\frac{e^{-r_1 z}}{r_1}\left[\left(e^{r_1 z}-e^{r_1 0}\right)-\left(e^{r_1 z}-1\right)\overline{K}(0)+r_1\int_0^0 e^{r_1 t}\overline{K}(u-t)dt\right] \\
&\quad -\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\overline{K}(0)}\frac{e^{-r_2 z}}{r_2}\left[\left(e^{r_2 z}-e^{r_1 0}\right)-\left(e^{r_2 z}-1\right)\overline{K}(0)+r_2\int_0^0 e^{r_2 t}\overline{K}(u-t)dt\right],
\end{aligned}
$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε την ισότητα σχέση $\overline{K}(0)=\dfrac{1}{1+b_\delta}$, έχουμε τη

$$
\begin{aligned}
d_\delta(z/0) &= \frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\dfrac{1}{1+b_\delta}}\frac{e^{-r_1 z}}{r_1}\left[\left(e^{r_1 z}-1\right)-\left(e^{r_1 z}-1\right)\frac{1}{1+b_\delta}\right] \\
&\quad -\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\dfrac{1}{1+b_\delta}}\frac{e^{-r_2 x}}{r_2}\left[\left(e^{r_2 z}-1\right)-\left(e^{r_2 z}-1\right)\frac{1}{1+b_\delta}\right]
\end{aligned}
$$

και ύστερα από πράξεις προκύπτει το παρακάτω αποτέλεσμα

$$
\begin{aligned}
d_\delta\left(z/0\right) &= \frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{f\left(z\right)}{\frac{b_\delta}{1+b_\delta}}\frac{e^{-r_1 z}}{r_1}\left[\left(e^{r_1 z}-1\right)\left(1-\frac{1}{1+b_\delta}\right)\right] \\
&\quad -\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{f\left(x+y\right)}{\frac{b_\delta}{1+b_\delta}}\frac{e^{-r_2 x}}{r_2}\left[\left(e^{r_2 z}-1\right)\left(1-\frac{1}{1+b_\delta}\right)\right] \\
&= \frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}f\left(z\right)\frac{e^{-r_1 z}}{r_1}\left(e^{r_1 z}-1\right)-\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}f\left(z\right)\frac{e^{-r_2 z}}{r_2}\left(e^{r_2 z}-1\right).
\end{aligned}
$$

Οπότε βγάζοντας κοινό παράγοντα τον όρο $\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}f\left(z\right)$,καταλήγουμε στη σχέση $\left(3.8.3\right)$. ■

3.9 Περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left[U\left(\mathrm{T}-\right)+\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|\right]$.

Η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left[U\left(\mathrm{T}-\right)+\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|\right]$ συμβολίζεται με $d_0\left(z/u\right)$ και δίνεται από τη σχέση $\left(3.9.1\right)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.9.1

Για $\delta=0$, η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left[U\left(\mathrm{T}-\right)+\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|\right]$ ισούται με

$$
d_0\left(z/u\right)=\begin{cases}
\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f\left(z\right)}{1-\psi\left(0\right)}\left[-\psi\left(u\right)\left[z+\frac{1-e^{-r_2 z}}{r_2}\right]-\int_0^u\psi\left(u-t\right)e^{r_2 t}\left(e^{-r_2 u}-e^{-r_2 z}\right)dt\right] \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{για } 0\le u<z, \\
\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f\left(z\right)}{1-\psi\left(0\right)}\left[\psi\left(u\right)\left(\frac{1-e^{-r_2 z}}{r_2}-z\right)+\int_0^z\psi\left(u-t\right)\left(1-e^{-r_2\left(z-t\right)}\right)dt\right] \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{για } 0\le z<u,
\end{cases}
\tag{3.9.1}
$$

και για $u=0$, η $d_0\left(y/u\right)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$
d_0\left(z/0\right)=-\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f\left(z\right)}{b_0}\left[z+\frac{1-e^{-r_2 z}}{r_2}\right]. \tag{3.9.2}
$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όταν ισχύει ο περιορισμός $0 \le z < u$, η σχέση $(3.8.4)$ γίνεται

$$d_0(z/u)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_0(0)}\left[-\overline{K}_0(u)\int_0^z e^{-0x}dx+\overline{K}_0(u)\int_0^z e^{-r_2x}dx+r_2\int_0^z e^{-r_2x}\int_0^x e^{r_2t}\overline{K}_\delta(u-t)\,dt\right],$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε την ισότητα $\overline{K}_0(u)=\psi(u)$, καταλήγουμε

$$d_0(z/u)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f(z)}{1-\psi(0)}\left[-\psi(u)z+\psi(u)\int_0^z e^{-r_2x}dx+r_2\int_0^z e^{-r_2x}\int_0^x e^{r_2t}\psi(u-t)\,dtdx\right]. \quad (3.9.3)$$

Όμως, υπολογίζοντας ξεχωριστά τα όρια $\int_0^z e^{-r_2x}dx=\left[-\frac{e^{-r_2x}}{r_2}\right]_0^z=\frac{1-e^{-r_2z}}{r_2}$ και

$$r_2\int_0^z e^{-r_2x}\int_0^x e^{r_2t}\psi(u-t)\,dtdx=r_2\int_0^z\left(\int_t^z e^{-r_2x}e^{r_2t}\psi(u-t)\,dx\right)dt=\int_0^z e^{r_2t}\psi(u-t)\left(\int_t^z r_2e^{-r_2x}dx\right)dt$$

$$=\int_0^z e^{r_2t}\psi(u-t)\left(e^{-r_2t}-e^{-r_2z}\right)dt=\int_0^z\psi(u-t)\left(1-e^{-r_2(z-t)}\right)dt\,,$$

και τα αποτελέσματα αυτά τα αντικαταστήσουμε στη σχέση $(3.9.3)$, προκύπτει

$$d_0(z/u)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f(z)}{1-\psi(0)}\left[-\psi(u)z+\psi(u)\frac{1-e^{-r_2z}}{r_2}+\int_0^z\psi(u-t)\left(1-e^{-r_2(z-t)}\right)dt\right]$$

$$=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f(z)}{1-\psi(0)}\left[\psi(u)\left(\frac{1-e^{-r_2z}}{r_2}-z\right)+\int_0^z\psi(u-t)\left(1-e^{-r_2(z-t)}\right)dt\right]. \quad (3.9.4)$$

Ομοίως, όταν ισχύει $0 \le u < z$, και $\delta = 0$ η σχέση $(3.8.8)$ παίρνει τη μορφή

$$d_0(z/u)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f(z)}{1-\overline{K}_0(0)}\left[-\overline{K}_0(u)\int_0^z 1dx-\overline{K}_0(u)\int_0^z e^{-r_2x}dx-r_2\int_0^z e^{-r_2x}\int_0^u e^{r_2t}\overline{K}_0(u-t)\,dtdx\right],$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε τη σχέση $\overline{K}_0(u)=\psi(u)$, καταλήγουμε

$$d_0(z/u)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f(z)}{1-\psi(0)}\left[-\psi(u)z-\psi(u)\frac{1-e^{-r_2z}}{r_2}-r_2\int_0^z e^{-r_2x}\int_0^u e^{r_2t}\psi(u-t)\,dtdx\right]. \quad (3.9.5)$$

Υπολογίζοντας ξεχωριστά το όριο, καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα

$$r_2\int_0^z e^{-r_2x}\int_0^u e^{r_2t}\psi(u-t)\,dtdx=r_2\int_0^z\left(\int_u^z e^{-r_2x}e^{r_2t}\psi(u-t)\,dx\right)dt=\int_0^z e^{r_2t}\psi(u-t)\left(\int_u^z r_2e^{-r_2x}dx\right)dt$$

$$=\int_0^z\psi(u-t)e^{r_2t}\left(e^{-r_2u}-e^{-r_2z}\right)dt\,,$$

το οποίο αν το αντικαταστήσουμε στη σχέση $(3.9.5)$, προκύπτει η εξίσωση

$$d_0\left(z/u\right)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f\left(z\right)}{1-\psi\left(0\right)}\left[-\psi\left(u\right)z-\psi\left(u\right)\frac{1-e^{-r_2 z}}{r_2}-\int_0^z \psi\left(u-t\right)e^{r_2 t}\left(e^{-r_2 u}-e^{-r_2 z}\right)dt\right]$$

$$=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f\left(z\right)}{1-\psi\left(0\right)}\left[-\psi\left(u\right)\left[z+\frac{1-e^{-r_2 z}}{r_2}\right]-\int_0^z \psi\left(u-t\right)e^{r_2 t}\left(e^{-r_2 u}-e^{-r_2 z}\right)dt\right].\left(3.9.6\right)$$

Προφανώς, από τις σχέσεις $\left(3.9.4\right)$ και $\left(3.9.6\right)$ προκύπτει η ζητούμενη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left[U\left(\mathrm{T}-\right)+\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|\right]$.

Για $u=0$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $d_0\left(y/u\right)$, είναι

$$d_0\left(z/0\right)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f\left(z\right)}{1-\psi\left(0\right)}\left[-\psi\left(0\right)\left[z+\frac{1-e^{-r_2 z}}{r_2}\right]-\int_0^0 \psi\left(u-t\right)e^{r_2 t}\left(e^{-r_2 u}-e^{-r_2 z}\right)dt\right]$$

και αν αντικαταστήσουμε την ισότητα $\psi\left(0\right)=\dfrac{1}{1+b_0}$ καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$d_0\left(z/0\right)=-\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f\left(z\right)}{1-\dfrac{1}{1+b_0}}\frac{1}{1+b_0}\left[z+\frac{1-e^{-r_2 z}}{r_2}\right]=-\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f\left(z\right)}{b_0}\left[z+\frac{1-e^{-r_2 z}}{r_2}\right].\ \blacksquare$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Αναλυτικές εκφράσεις της συνάρτησης Gerber-Shiu

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, υποθέτουμε ότι η κατανομή των ζημιών, $f(x)$, ανήκει στην οικογένεια κατανομών K_m και ότι ο μετασχηματισμός Laplace δίνεται από την εξίσωση

$$\hat{f}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m} \lambda_i + sg(s)}{\prod_{i=1}^{m} (s+\lambda_i)}, \; s > \max\{-\lambda_1, -\lambda_2, ..., -\lambda_m\}, \qquad (4.1.1)$$

όπου, $m \geq 2$, $\lambda_i = 1, 2, ..., m$ και $g(s)$ είναι ένα πολυώνυμο με βαθμό μικρότερο του $m-2$.

Η οικογένεια κατανομών K_m, δηλαδή η κλασματική οικογένεια, είναι μια ευρεία κλάση κατανομών, η οποία περιλαμβάνει (μεταξύ άλλων) την εκθετική, την κατανομή Erlang, την κατανομή Coxian, την κατανομή phase-type καθώς και τις μίξεις αυτών.

Επιπλέον, αφού η τ.μ. Χ ανήκει στην κλασματική οικογένεια κατανομών, ο μετασχηματισμός Laplace, $\hat{f}(s)$, μπορεί να γραφεί και ως πηλίκο δύο πολυωνύμων. Δηλαδή,

$$\hat{f}(s) = \frac{Q_{m-1}(s)}{Q_m(s)}, \; \mu\varepsilon \; Q_m(0) = Q_{m-1}(0), \; \mathbb{R}(s) \in (h_x, \infty), \qquad (4.1.2)$$

όπου $m \in \mathbb{N}^+$, $h_x = \inf\left\{ s \in \mathbb{R} : E\left(e^{-sX}\right) < \infty \right\}$, $Q_m(s)$ και $Q_{m-1}(s)$ είναι πολυώνυμα βαθμού m και βαθμού μικρότερου του m-1 αντίστοιχα.

4.2.1 Υπολογισμός της $\phi_T(u)$

Στην παράγραφο αυτή, θα μελετήσουμε τη λύση της συνάρτησης $\phi_T(u)$, όταν η κατανομή των ζημιών, $f(x)$, ανήκει στην οικογένεια κατανομών K_m και οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων ακολουθούν την κατανομή Erlang με παραμέτρους 2 και β.

Θεωρούμε λοιπόν, ως $Q_{m-1}(s)$ ένα πολυώνυμο βαθμού $m-1$, το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$Q_{m-1}(s) = \frac{\left[\prod_{i=1}^{m}(s+R_i) - \left(\frac{b_\delta}{1+b_\delta}\right)\prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)\right]}{s}, \qquad (4.2.1.1)$$

όπου $-R_i$ είναι όλες οι αρνητικές ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg.

Αφού ο μετασχηματισμός Laplace της $f(x)$ ικανοποιεί τη σχέση $(4.1.1)$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας δίνεται από το παρακάτω θεώρημα, όπως έδειξαν οι Shuanming Li και Jose Garrido το 2004.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2.1.1

Αν ο μετασχηματισμός Laplace, $\hat{f}(s)$, δίνεται από τη σχέση $(4.1.1)$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας είναι

$$\hat{\phi}_T(u) = \frac{Q_{m-1}(s)}{(s+R_1)(s+R_2)....(s+R_m)}. \qquad (4.2.1.2)$$

Επιπλέον, αν οι ρίζες $R_1, R_2, ..., R_m$ είναι διακριτές, τότε $\hat{\phi}_T(u) = \frac{a_i}{s+R_i}$ και

$$\phi_T(u) = \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i u}, \qquad (4.2.1.3)$$

όπου τα a_i δίνονται από τη σχέση

$$a_i = \frac{Q_{m-1}(s)(-R_i)}{\prod_{j=1,\, j\neq i}^{m}(R_j - R_i)} = \frac{\left(\frac{R_1 R_2 ....R_m}{\lambda_1 \lambda_2 ....\lambda_m}\right)\left[(\lambda_1 - R_i)(\lambda_2 - R_i)....(\lambda_m - R_i)\right]}{R_i \prod_{j=1,\, j\neq i}^{m}(R_j - R_i)}. \qquad (4.2.1.4)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στην ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση του χρόνου χρεοκοπίας, δηλαδή στη σχέση $(2.6.7)$ του κεφαλαίου 2, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\hat{\phi}_{\mathrm{T}}(u)=\frac{\left[\left(\frac{\beta+\delta}{c}\right)-s\right]^2-\frac{\beta^2}{c^2}\hat{f}(s)-\left(\frac{b_\delta}{1+b_\delta}\right)(r_1-s)(r_2-s)}{s\left[\left[\left(\frac{\beta+\delta}{c}\right)-s\right]^2-\frac{\beta^2}{c^2}\hat{f}(s)\right]}.$$

Αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση, τη σχέση $(4.1.1)$, προκύπτει

$$\hat{\phi}_{\mathrm{T}}(u)=\frac{\left[\left(\frac{\beta+\delta}{c}\right)-s\right]^2-\frac{\beta^2}{c^2}\frac{\prod_{i=1}^{m}\lambda_i+sg(s)}{\prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)}-\left(\frac{b_\delta}{1+b_\delta}\right)(r_1-s)(r_2-s)}{s\left[\left[\left(\frac{\beta+\delta}{c}\right)-s\right]^2-\frac{\beta^2}{c^2}\frac{\prod_{i=1}^{m}\lambda_i+sg(s)}{\prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)}\right]},$$

η οποία ύστερα από πράξεις και στον παρονομαστή και στον αριθμητή του κλάσματος, μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή. Δηλαδή,

$$\hat{\phi}_{\mathrm{T}}(u)=\frac{\frac{\left[\left(\frac{\beta+\delta}{c}\right)-s\right]^2\prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)-\frac{\beta^2}{c^2}\left[\prod_{i=1}^{m}\lambda_i+sg(s)\right]}{\prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)}-\left(\frac{b_\delta}{1+b_\delta}\right)(r_1-s)(r_2-s)}{s\left[\frac{\left[\left(\frac{\beta+\delta}{c}\right)-s\right]^2\prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)-\frac{\beta^2}{c^2}\left[\prod_{i=1}^{m}\lambda_i+sg(s)\right]}{\prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)}\right]},$$

$$\hat{\phi}_{\mathrm{T}}(u)=\frac{\left[\left(\frac{\beta+\delta}{c}\right)-s\right]^2\prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)-\frac{\beta^2}{c^2}\left[\prod_{i=1}^{m}\lambda_i+sg(s)\right]-\prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)\left(\frac{b_\delta}{1+b_\delta}\right)(r_1-s)(r_2-s)}{s\left[\left[\left(\frac{\beta+\delta}{c}\right)-s\right]^2\prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)-\frac{\beta^2}{c^2}\left[\prod_{i=1}^{m}\lambda_i+sg(s)\right]\right]}.$$

Παρατηρώντας την τελευταία εξίσωση, συμπεραίνουμε ότι ο όρος $\left(\frac{\beta+\delta}{c}-s\right)^2\prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)-\frac{\beta^2}{c^2}\left[\prod_{i=1}^{m}\lambda_i+sg(s)\right]$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $m+2$, το οποίο το συμβολίζουμε με $Q_{m,2}(s)$. Αν διαιρέσουμε το πολυώνυμο αυτό με το γινόμενο $\prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)$, παρατηρούμε ότι το πηλίκο ικανοποιεί την εξίσωση Lundberg. Δηλαδή,

$$\frac{Q_{m,2}(s)}{\prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)} = \frac{\left(\frac{\beta+\delta}{c}-s\right)^2 \prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)}{\prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)} - \frac{\frac{\beta^2}{c^2}\left[\prod_{i=1}^{m}\lambda_i + sg(s)\right]}{\prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)},$$

από την οποία προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{Q_{m,2}(s)}{\prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)} = \left(\frac{\beta+\delta}{c}-s\right)^2 - \frac{\beta^2}{c^2}\hat{f}(s) = l(s). \qquad (4.2.1.5)$$

Επομένως, ισχύει $Q_{m,2}(s)=0,$ για $s>\max\{-\lambda_1,-\lambda_2,....,\lambda_m\}$. Επίσης, η εξίσωση $(4.2.1.7)$ έχει δύο θετικές ρίζες, r_1, r_2 και μια αρνητική $-R$ για την οποία ισχύει $\max\{-\lambda_1,-\lambda_2,....,\lambda_m\}<-R<0$. Οπότε, το πολυώνυμο $Q_{m,2}(s)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$Q_{m,2}(s) = \prod_{i=1}^{m}(s+R_i)\prod_{j=1}^{n}(s+r_i) = \prod_{i=1}^{m}(s+R_i)(s+r_1)(s+r_2). \qquad (4.2.1.6)$$

Στη συνέχεια, αν αντικαταστήσουμε τη σχέση $(4.2.1.6)$ στον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\hat{\phi}_{\mathrm{T}}(u) = \frac{Q_{m,2}(s) - \left(\frac{b_\delta}{1+b_\delta}\right)(r_1-s)(r_2-s)\prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)}{sQ_{m,2}(s)}$$
$$= \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+R_i)(s+r_1)(s+r_2) - \left(\frac{b_\delta}{1+b_\delta}\right)(r_1-s)(r_2-s)\prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)}{s\prod_{i=1}^{m}(s+R_i)(s+r_1)(s+r_2)},$$

από την οποία προκύπτει η σχέση

$$\hat{\phi}_{\mathrm{T}}(u) = \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+R_i) - \left(\frac{b_\delta}{1+b_\delta}\right)\prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)}{s\prod_{i=1}^{m}(s+R_i)}.$$

Όμως, διαιρώντας τον αριθμητή της παραπάνω σχέσης με το s, το αποτέλεσμα που προκύπτει θα ισούται με ένα πολυώνυμο $Q_{m-1}(s)$ βαθμού $m-1$. Άρα μέσω του πολυωνύμου αυτού, έχουμε

$$\hat{\phi}_{\mathrm{T}}(u)=\frac{\frac{Q_{m-1}(s)}{s}}{s\prod_{i=1}^{m}(s+R_i)}=\frac{Q_{m-1}(s)}{\prod_{i=1}^{m}(s+R_i)}. \qquad (4.2.1.7)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της σχέσης $(4.2.1.7)$ μπορεί να αντιστραφεί σε ορισμένες μόνο περιπτώσεις. Μια από αυτές τις περιπτώσεις είναι όταν η συνάρτηση $\hat{\phi}_{\mathrm{T}}(u)$ έχει πολυωνυμική μορφή και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν η $\hat{f}(s)$ έχει πολυωνυμική μορφή. Για το σκοπό αυτό επιλέξαμε την $f(x)$ να ανήκει στην οικογένεια κατανομών K_m. Στην περίπτωση που οι ρίζες $R_1, R_2, ..., R_m$ είναι διακριτές τότε ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας είναι $\hat{\phi}_{\mathrm{T}}(u)=\frac{a_i}{s+R_i}$. Οπότε, παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace καταλήγουμε στη σχέση $\phi_{\mathrm{T}}(u)=\sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i u}$. ■

4.2.2 Υπολογισμός της $\psi(u)$

Στην παράγραφο αυτή, θα εκφράσουμε τη λύση της πιθανότητας χρεοκοπίας, όταν η κατανομή των ζημιών ανήκει στην οικογένεια κατανομών K_m και οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων ακολουθούν την κατανομή Erlang(2), αφού πρώτα υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας.
Σύμφωνα με την υπόθεση, όταν $\delta=0$, ο μετασχηματισμός Laplace για την συνάρτηση $f(s)$ δίνεται από τη σχέση

$$\hat{f}(s)=\frac{\prod_{i=1}^{m-1}\lambda_i+sg(s)}{\prod_{i=1}^{m-1}(s+\lambda_i)}, \; s>\max\{-\lambda_1,-\lambda_2,....,-\lambda_{m-1}\}, \qquad (4.2.2.1)$$

όπου, $m\geq 3$, $\lambda_i=1,2,....,m-1$ και $g(s)$ είναι ένα πολυώνυμο με βαθμό μικρότερο του $m-3$.

Θέτουμε λοιπόν, ως $Q_{m-2}(s)$ ένα πολυώνυμο βαθμού $m-2$, το οποίο είναι

$$Q_{m-2}(s)=\frac{\left[\prod_{i=1}^{m-1}(s+R_i)-\left(\frac{b_0}{1+b_0}\right)\prod_{i=1}^{m-1}(s+\lambda_i)\right]}{s}, \qquad (4.2.2.2)$$

όπου $-R_i$ είναι όλες οι αρνητικές ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg.

Στο παρακάτω θεώρημα θα δοθεί ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας, ο οποίος μπορεί να εκφραστεί από τη σχέση $(4.2.2.3)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1.2
Αν ο μετασχηματισμός Laplace της $f(s)$ δίνεται από τη σχέση $(4.2.2.1)$, τότε ο μετασχηματισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι

$$\hat{\psi}(u)=\frac{Q_{m-2}(s)}{(s+R_1)(s+R_2)....(s+R_{m-1})}. \qquad (4.2.2.3)$$

Όταν οι ρίζες $R_1,R_2,....,R_{m-1}$ είναι διακριτές τότε $\hat{\psi}(u)=\frac{a_i}{s+R_i}$ και

$$\psi(u)=\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}, \qquad (4.2.2.4)$$

όπου τα a_i δίνονται από την παρακάτω σχέση

$$a_i=\frac{Q_{m-2}(s)(-R_i)}{\prod_{j=1,\,j\neq i}^{m-1}(R_j-R_i)}=\frac{\left(\frac{R_1R_2....R_{m-1}}{\lambda_1\lambda_2....\lambda_{m-1}}\right)\left[(\lambda_1-R_i)(\lambda_2-R_i)....(\lambda_{m-1}-R_i)\right]}{R_i\prod_{j=1,\,j\neq i}^{m-1}(R_j-R_i)}. \qquad (4.2.2.5)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού $\delta=0$, τότε θα ισχύει ότι $r_1(\delta)=r_1(0)=0$ και $r_2(\delta)=r_2(0)=r_2$. Επομένως, παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στη σχέση $(2.5.2)$, καταλήγουμε στη σχέση

$$\hat{\psi}(u)=\frac{\left(\frac{\beta}{c}-s\right)^2-\frac{\beta^2}{c^2}\hat{f}(s)-\left(\frac{b_0}{1+b_0}\right)(-s)(r_2-s)}{s\left[\left(\frac{\beta}{c}-s\right)^2-\frac{\beta^2}{c^2}\hat{f}(s)\right]}.$$

Στη συνέχεια, αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση, τη σχέση $(4.2.2.1)$, προκύπτει η παρακάτω εξίσωση

$$\hat{\psi}(u)=\frac{\left(\frac{\beta}{c}-s\right)^2-\frac{\beta^2}{c^2}\frac{\prod_{i=1}^{m-1}\lambda_i+sg(s)}{\prod_{i=1}^{m-1}(s+\lambda_i)}-\left(\frac{b_0}{1+b_0}\right)(-s)(r_2-s)}{s\left[\left(\frac{\beta}{c}-s\right)^2-\frac{\beta^2}{c^2}\frac{\prod_{i=1}^{m-1}\lambda_i+sg(s)}{\prod_{i=1}^{m-1}(s+\lambda_i)}\right]}$$

και ύστερα από πράξεις μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\hat{\psi}(u)=\frac{\frac{\left(\frac{\beta}{c}-s\right)^2\prod_{i=1}^{m-1}(s+\lambda_i)-\frac{\beta^2}{c^2}\left[\prod_{i=1}^{m-1}\lambda_i+sg(s)\right]}{\prod_{i=1}^{m-1}(s+\lambda_i)}-\left(\frac{b_0}{1+b_0}\right)(-s)(r_2-s)}{s\left[\frac{\left(\frac{\beta}{c}-s\right)^2\prod_{i=1}^{m-1}(s+\lambda_i)-\frac{\beta^2}{c^2}\left[\prod_{i=1}^{m-1}\lambda_i+sg(s)\right]}{\prod_{i=1}^{m-1}(s+\lambda_i)}\right]}.$$

Παρατηρώντας την τελευταία εξίσωση, συμπεραίνουμε ότι ο όρος $\left(\frac{\beta}{c}-s\right)^2\prod_{i=1}^{m-1}(s+\lambda_i)-\frac{\beta^2}{c^2}\left[\prod_{i=1}^{m-1}\lambda_i+sg(s)\right]$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $m+3$, το οποίο το συμβολίζουμε με $Q_{m,3}(s)$. Αν διαιρέσουμε το πολυώνυμο με το γινόμενο $\prod_{i=1}^{m-1}(s+\lambda_i)$, συμπεραίνουμε ότι το πηλίκο ικανοποιεί την εξίσωση Lundberg. Δηλαδή,

$$\frac{Q_{m,3}(s)}{\prod_{i=1}^{m-1}(s+\lambda_i)}=\frac{\left(\frac{\beta}{c}-s\right)^2\prod_{i=1}^{m-1}(s+\lambda_i)}{\prod_{i=1}^{m-1}(s+\lambda_i)}-\frac{\frac{\beta^2}{c^2}\left[\prod_{i=1}^{m-1}\lambda_i+sg(s)\right]}{\prod_{i=1}^{m-1}(s+\lambda_i)},$$

από την οποία προκύπτει

$$\frac{Q_{m,3}(s)}{\prod_{i=1}^{m-1}(s+\lambda_i)}=\left(\frac{\beta}{c}-s\right)^2-\frac{\beta^2}{c^2}\hat{f}(s)=l_0(s). \tag{4.2.2.6}$$

Οπότε, ισχύει $Q_{m,3}(s)=0$, για $s>\max\{-\lambda_1,-\lambda_2,....,\lambda_{m-1}\}$. Επίσης, η εξίσωση $(4.2.2.6)$ έχει μια θετική ρίζα, την r_2 αφού $r_1=0$ και μια αρνητική $-R$ για την οποία ισχύει $\max\{-\lambda_1,-\lambda_2,....,\lambda_{m-1}\}<-R<0$. Οπότε, το πολυώνυμο $Q_{m,3}(s)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$Q_{m,2}(s)=\prod_{i=1}^{m-1}(s+R_i)\prod_{j=1}^{n}(s+r_i)=\prod_{i=1}^{m-1}s(s+R_i)(s+r_2). \qquad (4.2.2.7)$$

Αν αντικαταστήσουμε τη σχέση $(4.2.2.7)$ στον μετασχηματισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας καταλήγουμε

$$\hat{\psi}(u)=\frac{\prod_{i=1}^{m-1}s(s+R_i)(s+r_2)-\left(\frac{b_0}{1+b_0}\right)(-s)(r_2-s)\prod_{i=1}^{m-1}(s+\lambda_i)}{s^2\prod_{i=1}^{m-1}(s+R_i)(s+r_2)}$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{m-1}(s+R_i)-\left(\frac{b_0}{1+b_0}\right)\prod_{i=1}^{m-1}(s+\lambda_i)}{s\prod_{i=1}^{m-1}(s+R_i)}.$$

Αφού ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας έχει πολυωνυμική μορφή, τότε μπορεί να αντιστραφεί. Στην περίπτωση που οι ρίζες $R_1, R_2, ..., R_{m-1}$ είναι διακριτές, ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας γράφεται $\hat{\psi}(u)=\frac{a_i}{s+R_i}$. Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace καταλήγουμε στη σχέση $\psi(u)=\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}$. ■

4.3 Προεξοφλημένες συναρτήσεις κατανομών και πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. $U(\mathrm{T}^-)$ και $|U(\mathrm{T})|$.

Αφού στο δεύτερο κεφάλαιο δείξαμε ότι η $\phi_T(u)$ ισούται με τη δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής και στην παράγραφο 4.2.1 του κεφαλαίου αυτού εκφράσαμε τη λύση της όταν οι ρίζες $R_1, R_2, ..., R_m$ είναι διακριτές, τότε συμπεραίνουμε ότι ισχύει η παρακάτω ισότητα

$$\overline{K}_\delta(u)=\sum_{i=1}^{m}a_i e^{-R_i u}. \qquad (4.3.1)$$

Στην περίπτωση, λοιπόν, που η δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής δίνεται από την παραπάνω σχέση, θα εκφράσουμε την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή αμέσως πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας, όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3.1

Για $\delta > 0$ η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ και $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ είναι δίκλαδη και ισούται με

$$F_\delta\left(x,y/u\right)=\begin{cases}\dfrac{1+b_\delta}{b_\delta}\left[\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u+y)}\right]-\dfrac{1}{b_\delta}G_\delta\left(y\right)\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}+\dfrac{1}{b_\delta}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u+y)}\int_0^y e^{R_it}dG_\delta\left(t\right)\\ +\dfrac{1}{b_\delta}\dfrac{E_1}{E_1-E_2}e^{-r_1x}\left[\overline{\Gamma}_1\left(x\right)-\overline{\Gamma}_1\left(x+y\right)\right]\left[r_1\sum_{i=1}^{m}\dfrac{a_i}{r_1+R_i}\left(e^{r_1u}-e^{-R_iu}\right)+\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-e^{r_1u}\right]\\ -\dfrac{1}{b_\delta}\dfrac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2x}\left[\overline{\Gamma}_2\left(x\right)-\overline{\Gamma}_2\left(x+y\right)\right]\left[r_2\sum_{i=1}^{m}\dfrac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2u}-e^{-R_iu}\right)+\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-e^{r_2u}\right]\\ \hfill \gamma\iota\alpha\, 0\le u<x,\\ \dfrac{1}{b_\delta}\int_0^x\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u-t)}\left[dG_\delta\left(t\right)-dG_\delta\left(y+t\right)\right]-\dfrac{1}{b_s}G_\delta\left(y\right)\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}\\ +\dfrac{1}{b_\delta}\dfrac{E_1}{E_1-E_2}e^{-r_1x}\left[\overline{\Gamma}_1\left(x\right)-\overline{\Gamma}_1\left(x+y\right)\right]\left[r_1\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}\dfrac{e^{(r_1+R_i)x}-1}{r_1+R_i}+\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}\right]\\ -\dfrac{1}{b_\delta}\dfrac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2x}\left[\overline{\Gamma}_2\left(x\right)-\overline{\Gamma}_2\left(x+y\right)\right]\left[r_2\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}\dfrac{e^{(r_2+R_i)x}-1}{r_2+R_i}+\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}\right]\\ \hfill \gamma\iota\alpha\ 0<x\le u,\end{cases} \tag{4.3.2}$$

και για $u=0$, ***η*** $F_\delta\left(x,y/u\right)$ ***δίνεται από την ακόλουθη σχέση***

$$\begin{aligned}F_\delta\left(x,y/0\right)=&\frac{1+b_\delta}{b_\delta}\left[\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iy}\right]-\frac{1}{b_\delta}G_\delta\left(y\right)\sum_{i=1}^{m}a_i+\frac{1}{b_\delta}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iy}\int_0^y e^{R_it}dG_\delta\left(t\right)\\&+\frac{1}{b_\delta}\frac{E_1}{E_1-E_2}e^{-r_1x}\left[\overline{\Gamma}_1\left(x\right)-\overline{\Gamma}_1\left(x+y\right)\right]\left[\sum_{i=1}^{m}a_i-1\right]\\&-\frac{1}{b_\delta}\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2x}\left[\overline{\Gamma}_2\left(x\right)-\overline{\Gamma}_2\left(x+y\right)\right]\left[\sum_{i=1}^{m}a_i-1\right].\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της προεξοφλημένης από κοινού συνάρτησης κατανομής των τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ και $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$, το οποίο υπολογίσαμε στο κεφαλαίου 3, θα εκφράσουμε τη ζητούμενη προεξοφλημένη από κοινού συνάρτησης κατανομής.

Όταν ισχύει ο περιορισμός $0\le u<x$, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $\left(3.2.4\right)$ τη σχέση $\left(4.3.1\right)$, καταλήγουμε ότι ισχύει η εξίσωση

$$F_\delta\left(x,y/u\right)=\frac{1+b_\delta}{b_\delta}\left[\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u+y)}\right]-\frac{1}{b_\delta}G_\delta\left(y\right)\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}+\frac{1}{b_\delta}\int_0^y\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u+y-t)}dG_\delta\left(t\right)$$
$$+\frac{1}{b_\delta}\frac{E_1}{E_1-E_2}e^{-r_1x}\left[\overline{\Gamma}_1\left(x\right)-\overline{\Gamma}_1\left(x+y\right)\right]\left[r_1\int_0^u e^{r_1t}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u-t)}dt+\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-e^{r_1u}\right]$$
$$-\frac{1}{b_\delta}\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2x}\left[\overline{\Gamma}_2\left(x\right)-\overline{\Gamma}_2\left(x+y\right)\right]\left[r_2\int_0^u e^{r_2t}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u-t)}dt+\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-e^{r_2u}\right].$$

Υπολογίζοντας ξεχωριστά τα ολοκληρώματα της παραπάνω σχέσης, προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα

$$\int_0^u e^{r_1t}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u-t)}dt=\sum_{i=1}^{m}a_i\int_0^u e^{r_1t}e^{-R_i(u-t)}dt=\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}\int_0^u e^{(r_1+R_i)t}dt=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{r_1+R_i}\left(e^{r_1u}-e^{-R_iu}\right),\left(4.3.4\right)$$

$$\int_0^y\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u+y-t)}dG_\delta\left(t\right)=\sum_{i=1}^{m}a_i\int_0^y e^{-R_i(u+y-t)}dG_\delta\left(t\right)=\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u+y)}\int_0^y e^{R_it}dG_\delta\left(t\right). \qquad \left(4.3.5\right)$$
.

Αν αντικαταστήσουμε στην τελευταία σχέση τις λύσεις των παραπάνω ολοκληρωμάτων, έχουμε τη σχέση $(4.3.6)$, όπως φαίνεται παρακάτω.

$$F_\delta\left(x,y/u\right)=\frac{1+b_\delta}{b_\delta}\left[\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u+y)}\right]-\frac{1}{b_\delta}G_\delta\left(y\right)\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}+\frac{1}{b_\delta}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u+y)}\int_0^y e^{R_it}dG_\delta\left(t\right)$$
$$+\frac{1}{b_\delta}\frac{E_1}{E_1-E_2}e^{-r_1x}\left[\overline{\Gamma}_1\left(x\right)-\overline{\Gamma}_1\left(x+y\right)\right]\left[r_1\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{r_1+R_i}\left(e^{r_1u}-e^{-R_iu}\right)+\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-e^{r_1u}\right]$$
$$-\frac{1}{b_\delta}\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2x}\left[\overline{\Gamma}_2\left(x\right)-\overline{\Gamma}_2\left(x+y\right)\right]\left[r_2\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2u}-e^{-R_iu}\right)+\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-e^{r_2u}\right].$$
$$\left(4.3.6\right)$$

Ομοίως, για τον περιορισμό $0<x\le u$, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(3.2.4)$ την ισότητα $(4.3.1)$ προκύπτει η εξίσωση

$$F_\delta\left(x,y/u\right)=\frac{1}{b_\delta}\int_0^x\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u-t)}\left[dG_\delta\left(t\right)-dG_\delta\left(y-t\right)\right]-\frac{1}{b_\delta}G_\delta\left(y\right)\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}$$
$$+\frac{1}{b_\delta}\frac{E_1}{E_1-E_2}e^{-r_1x}\left[\overline{\Gamma}_1\left(x\right)-\overline{\Gamma}_1\left(x+y\right)\right]\left[r_1\int_0^x e^{r_1t}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u-t)}dt+\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}\right]$$
$$-\frac{1}{b_\delta}\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2x}\left[\overline{\Gamma}_2\left(x\right)-\overline{\Gamma}_2\left(x+y\right)\right]\left[r_2\int_0^x e^{r_2t}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u-t)}dt+\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}\right].$$

Υπολογίζοντας ξεχωριστά το παρακάτω ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int_0^x e^{r_1 t}\sum_{i=1}^m a_i e^{-R_i(u-t)}dt=\sum_{i=1}^m a_i\int_0^x e^{r_1 t}e^{-R_i(u-t)}dt=\sum_{i=1}^m a_i e^{-R_i u}\int_0^x e^{(r_1+R_i)t}dt=\sum_{i=1}^m a_i e^{-R_i u}\frac{e^{(r_1+R_i)x}-1}{r_1+R_i},\quad (4.3.7)$$

το οποίο αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\begin{aligned}F_\delta(x,y/u)=&\frac{1}{b_\delta}\int_0^x\sum_{i=1}^m a_i e^{-R_i(u-t)}\left[dG_\delta(t)-dG_\delta(y-t)\right]-\frac{1}{b_\delta}G_\delta(y)\sum_{i=1}^m a_i e^{-R_i u}\\&+\frac{1}{b_\delta}\frac{E_1}{E_1-E_2}e^{-r_1 x}\left[\bar{\Gamma}_1(x)-\bar{\Gamma}_1(x+y)\right]\left[r_1\sum_{i=1}^m a_i e^{-R_i u}\frac{e^{(r_1+R_i)x}-1}{r_1+R_i}+\sum_{i=1}^m a_i e^{-R_i u}\right]\\&-\frac{1}{b_\delta}\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2 x}\left[\bar{\Gamma}_2(x)-\bar{\Gamma}_2(x+y)\right]\left[r_2\sum_{i=1}^m a_i e^{-R_i u}\frac{e^{(r_2+R_i)x}-1}{r_2+R_i}+\sum_{i=1}^m a_i e^{-R_i u}\right].\end{aligned}\quad (4.3.8)$$

Επομένως, από τις σχέσεις $(4.3.6)$ και $(4.3.8)$, προκύπτει η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ $U(\mathrm{T}^-)$ και $|U(\mathrm{T})|$.

Για $u=0$, η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι

$$\begin{aligned}F_\delta(x,y/0)=&\frac{1+b_\delta}{b_\delta}\left[\sum_{i=1}^m a_i e^{-R_i 0}-\sum_{i=1}^m a_i e^{-R_i(0+y)}\right]-\frac{1}{b_\delta}G_\delta(y)\sum_{i=1}^m a_i e^{-R_i 0}+\frac{1}{b_\delta}\sum_{i=1}^m a_i e^{-R_i(0+y)}\int_0^y e^{R_i t}dG_\delta(t)\\&+\frac{1}{b_\delta}\frac{E_1}{E_1-E_2}e^{-r_1 x}\left[\bar{\Gamma}_1(x)-\bar{\Gamma}_1(x+y)\right]\left[r_1\sum_{i=1}^m\frac{a_i}{r_1+R_i}\left(e^{r_1 0}-e^{-R_i 0}\right)+\sum_{i=1}^m a_i e^{-R_i 0}-e^{r_1 0}\right]\\&-\frac{1}{b_\delta}\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2 x}\left[\bar{\Gamma}_2(x)-\bar{\Gamma}_2(x+y)\right]\left[r_2\sum_{i=1}^m\frac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2 0}-e^{-R_i 0}\right)+\sum_{i=1}^m a_i e^{-R_i 0}-e^{r_2 0}\right],\end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει η σχέση $(4.3.3)$. ■

Στην πρόταση που ακολουθεί θα δοθεί η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος τη στιγμή πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπία.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.3.2

Για $\delta > 0$ η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ και $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ είναι δίκλαδη και ισούται

$$f_{\delta}\left(x,y/u\right)=\begin{cases} \dfrac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\dfrac{f\left(x+y\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m}a_i}e^{-r_1x}\left[e^{r_1u}-\sum\limits_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-r_1\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{a_i}{r_1+R_i}\left(e^{r_1u}-e^{-R_iu}\right)\right] \\ -\dfrac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\dfrac{f\left(x+y\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m}a_i}e^{-r_2x}\left[e^{r_2u}-\sum\limits_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-r_2\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2u}-e^{-R_iu}\right)\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\gamma\iota\alpha\, 0\le u<x, \\ \dfrac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\dfrac{f\left(x+y\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m}a_i}e^{-r_1x}\left[e^{r_1u}-\sum\limits_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i\left(u-x\right)}-\sum\limits_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-r_1\sum\limits_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}\dfrac{e^{\left(r_1+R_i\right)x}-1}{r_1+R_i}\right] \\ -\dfrac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\dfrac{f\left(x+y\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m}a_i}e^{-r_2x}\left[e^{r_2u}-\sum\limits_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i\left(u-x\right)}-\sum\limits_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-r_2\sum\limits_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}\dfrac{e^{\left(r_2+R_i\right)x}-1}{r_2+R_i}\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\gamma\iota\alpha\, 0\le x<u, \end{cases} \qquad (4.3.9)$$

και για $u=0$, η $f_{\delta}\left(x,y/u\right)$ ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$f_{\delta}\left(x,y/0\right)=\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{f\left(x+y\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m}a_i}e^{-r_1x}\left(1-\sum_{i=1}^{m}a_i\right)-\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{f\left(x+y\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m}a_i}e^{-r_2x}\left(1-\sum_{i=1}^{m}a_i\right). \qquad (4.3.10)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όταν ισχύει $0\le u<x$, αντικαθιστώντας στη σχέση $(3.2.7)$ την ισότητα $(4.3.1)$, προκύπτει άμεσα η παρακάτω σχέση

$$f_{\delta}\left(x,y/u\right)=\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{f\left(x+y\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i0}}e^{-r_1x}\left[e^{r_1u}-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-r_1\int_0^u e^{r_1t}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i\left(u-t\right)}dt\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{f\left(x+y\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i0}}e^{-r_2x}\left[e^{r_2u}-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-r_2\int_0^u e^{r_2t}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i\left(u-t\right)}dt\right].$$

Αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση τη λύση των ολοκληρωμάτων που υπολογίσαμε προηγουμένως, δηλαδή τις σχέσεις $(4.3.4)$ και $(4.3.5)$, καταλήγουμε

$$f_\delta\left(x,y/u\right)=\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{f\left(x+y\right)}{1-\sum_{i=1}^m a_i}e^{-r_1x}\left[e^{r_1u}-\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}-r_1\sum_{i=1}^m\frac{a_i}{r_1+R_i}\left(e^{r_1u}-e^{-R_iu}\right)\right]$$
$$-\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{f\left(x+y\right)}{1-\sum_{i=1}^m a_i}e^{-r_2x}\left[e^{r_2u}-\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}-r_2\sum_{i=1}^m\frac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2u}-e^{-R_iu}\right)\right].\qquad(4.3.11)$$

Ομοίως, για $0\le x<u$, αν αντικαταστήσουμε στην $(3.2.7)$ τη σχέση $(4.2.1)$, έχουμε

$$f_\delta\left(x,y/u\right)=\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{f\left(x+y\right)}{1-\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_i0}}e^{-r_1x}\left[e^{r_1u}-\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_i(u-x)}-\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}-r_1\int_0^x e^{r_1t}\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_i(u-t)}dt\right]$$
$$-\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{f\left(x+y\right)}{1-\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_i0}}e^{-r_2x}\left[e^{r_2u}-\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_i(u-x)}-\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}-r_2\int_0^x e^{r_1t}\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_i(u-t)}dt\right].$$

Τέλος, αν αντικαταστήσουμε στην τελευταία σχέση τη λύση του ολοκληρώματος, δηλαδή τη σχέση $(4.3.7)$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$f_\delta\left(x,y/u\right)=\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{f\left(x+y\right)}{1-\sum_{i=1}^m a_i}e^{-r_1x}\left[e^{r_1u}-\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_i(u-x)}-\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}-r_1\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}\frac{e^{(r_1+R_i)x}-1}{r_1+R_i}\right]$$
$$-\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{f\left(x+y\right)}{1-\sum_{i=1}^m a_i}e^{-r_2x}\left[e^{r_2u}-\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_i(u-x)}-\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}-r_2\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}\frac{e^{(r_2+R_i)x}-1}{r_2+R_i}\right].$$
$$(4.3.12)$$

Οπότε, από τις σχέσεις $(4.3.11)$ και $(4.3.12)$, προκύπτει η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ $U\left(\mathrm{T}^-\right)$ και $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$.

Για $u=0$, η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ $U\left(\mathrm{T}^-\right)$ και $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$, δίνεται από την παρακάτω εξίσωση

$$f_\delta\left(x,y/0\right)=\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{f\left(x+y\right)}{1-\sum_{i=1}^m a_i}e^{-r_1x}\left[e^{r_10}-\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_i0}-r_1\sum_{i=1}^m\frac{a_i}{r_1+R_i}\left(e^{r_10}-e^{-R_i0}\right)\right]$$
$$-\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{f\left(x+y\right)}{1-\sum_{i=1}^m a_i}e^{-r_2x}\left[e^{r_20}-\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_i0}-r_2\sum_{i=1}^m\frac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_20}-e^{-R_i0}\right)\right],$$

από την οποία αν αφαιρέσουμε τους όρους που μηδενίζονται προκύπτει η σχέση $(4.3.10)$. ■

4.4 Συναρτήσεις κατανομών και πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ και $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, όταν $\delta = 0$ η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με τη δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Αφού στην παράγραφο 4.2.2 του κεφαλαίου αυτού εκφράσαμε τη λύση της πιθανότητας χρεοκοπίας όταν οι ρίζες $R_1, R_2, ..., R_{m-1}$ είναι διακριτές, τότε συμπεραίνουμε ότι ισχύει η παρακάτω ισότητα

$$\psi\left(u\right) = \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}. \tag{4.4.1}$$

Στο πόρισμα, λοιπόν, που ακολουθεί θα εκφράσουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας, όταν η πιθανότητα χρεοκοπία δίνεται από τη σχέση $\left(4.4.1\right)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.4.1

Για $\delta = 0$ η από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ και $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ ισούται με

$$F_0\left(x, y/u\right) = \begin{cases} \dfrac{1+b_0}{b_0}\left[\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u} - \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i\left(u+y\right)}\right] - \dfrac{1}{b_0} G_0\left(y\right)\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u} + \dfrac{1}{b_0}\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i\left(u+y\right)}\int_0^y e^{R_i t} dG_0\left(t\right) \\ + \dfrac{1}{b_0}\dfrac{E_1}{E_1-E_2}\left[\bar{\Gamma}_1\left(x\right) - \bar{\Gamma}_1\left(x+y\right)\right]\left[\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u} - 1\right] \\ - \dfrac{1}{b_0}\dfrac{E_2}{E_1-E_2} e^{-r_2 x}\left[\bar{\Gamma}_2\left(x\right) - \bar{\Gamma}_2\left(x+y\right)\right]\left[r_2 \sum_{i=1}^{m-1}\dfrac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2 u} - e^{-R_i u}\right) + \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u} - e^{r_2 u}\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{για}\, 0 \le u < x, \\ \dfrac{1}{b_0}\int_0^x \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i\left(u-t\right)}\left[dG_0\left(t\right) - dG_0\left(y-t\right)\right] - \dfrac{1}{b_0} G_0\left(y\right)\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u} \\ + \dfrac{1}{b_0}\dfrac{E_1}{E_1-E_2}\left[\bar{\Gamma}_1\left(x\right) - \bar{\Gamma}_1\left(x+y\right)\right]\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u} \\ - \dfrac{1}{b_0}\dfrac{E_2}{E_1-E_2} e^{-r_2 x}\left[\bar{\Gamma}_2\left(x\right) - \bar{\Gamma}_2\left(x+y\right)\right]\left[r_2 \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}\dfrac{e^{\left(r_2+R_i\right)x} - 1}{r_2+R_i} + \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{για}\; 0 < x \le u, \end{cases} \tag{4.4.2}$$

και για $u = 0$, η $F_0\left(x, y/u\right)$ γράφεται στην παρακάτω μορφή

$$F_0\left(x,y/0\right)=\frac{1+b_0}{b_0}\left(\sum_{i=1}^{m-1}a_i-\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iy}\right)-\frac{1}{b_0}G_0\left(y\right)\sum_{i=1}^{m-1}a_i+\frac{1}{b_0}\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iy}\int_0^y e^{R_it}dG_0\left(t\right)$$
$$+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1-E_2}\left[\overline{\Gamma}_1\left(x\right)-\overline{\Gamma}_1\left(x+y\right)\right]\left(\sum_{i=1}^{m-1}a_i-1\right)$$
$$-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2x}\left[\overline{\Gamma}_2\left(x\right)-\overline{\Gamma}_2\left(x+y\right)\right]\left(\sum_{i=1}^{m-1}a_i-1\right). \tag{4.4.3}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για $0\le u<x$, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $\left(3.2.4\right)$ του κεφαλαίου 3 τη σχέση $\left(4.4.1\right)$ καταλήγουμε

$$F_0\left(x,y/u\right)=\frac{1+b_0}{b_0}\left[\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}-\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_i\left(u+y\right)}\right]-\frac{1}{b_0}G_0\left(y\right)\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}+\frac{1}{b_0}\int_0^y\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_i\left(u+y-t\right)}dG_0\left(t\right)$$
$$+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1-E_2}\left[\overline{\Gamma}_1\left(x\right)-\overline{\Gamma}_1\left(x+y\right)\right]\left[\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}-1\right]$$
$$-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2x}\left[\overline{\Gamma}_2\left(x\right)-\overline{\Gamma}_2\left(x+y\right)\right]\left[r_2\int_0^u e^{r_2t}\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_i\left(u-t\right)}dt+\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}-e^{r_2u}\right].$$

Υπολογίζοντας ξεχωριστά τα παρακάτω ολοκληρώματα, έχουμε τα αποτελέσματα που ακολουθούν. Δηλαδή,

$$\int_0^y\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_i\left(u+y-t\right)}dG_0\left(t\right)=\sum_{i=1}^{m-1}a_i\int_0^y e^{-R_i\left(u+y-t\right)}dG_0\left(t\right)=\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_i\left(u+y\right)}\int_0^y e^{R_it}dG_0\left(t\right), \tag{4.4.4}$$

$$\int_0^u e^{r_2t}\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_i\left(u-t\right)}dt=\sum_{i=1}^{m-1}a_i\int_0^u e^{r_2t}e^{-R_i\left(u-t\right)}dt=\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}\int_0^u e^{\left(r_2+R_i\right)t}dt=\sum_{i=1}^{m-1}\frac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2u}-e^{-R_iu}\right). \tag{4.4.5}$$

Οπότε, αν αντικαταστήσουμε στην τελευταία σχέση τα παραπάνω αποτελέσματα, προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$F_0\left(x,y/u\right)=\frac{1+b_0}{b_0}\left[\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}-\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_i\left(u+y\right)}\right]-\frac{1}{b_0}G_0\left(y\right)\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}+\frac{1}{b_0}\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_i\left(u+y\right)}\int_0^y e^{R_it}dG_0\left(t\right)$$
$$+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1-E_2}\left[\overline{\Gamma}_1\left(x\right)-\overline{\Gamma}_1\left(x+y\right)\right]\left[\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}-1\right]$$
$$-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1-E_2}e^{-r_2x}\left[\overline{\Gamma}_2\left(x\right)-\overline{\Gamma}_2\left(x+y\right)\right]\left[r_2\sum_{i=1}^{m-1}\frac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2u}-e^{-R_iu}\right)+\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}-e^{r_2u}\right]. \tag{4.4.6}$$

Ομοίως, για $0 < x \le u$, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(3.2.4)$ τη σχέση $(4.1.1)$ καταλήγουμε

$$
\begin{aligned}
F_0(x, y/u) = {} & \frac{1}{b_0}\int_0^x \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i(u-t)}\left[dG_0(t) - dG_0(y-t)\right] - \frac{1}{b_0} G_0(y)\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u} \\
& + \frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1 - E_2}\left[\bar{\Gamma}_1(x) - \bar{\Gamma}_1(x+y)\right]\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u} \\
& - \frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1 - E_2} e^{-r_2 x}\left[\bar{\Gamma}_2(x) - \bar{\Gamma}_2(x+y)\right]\left[r_2 \int_0^x e^{r_2 t}\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i(u-t)} dt + \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}\right].
\end{aligned}
$$

Υπολογίζοντας, ξεχωριστά το παρακάτω ολοκλήρωμα, έχουμε

$$
\int_0^x e^{r_2 t}\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i(u-t)} dt = \sum_{i=1}^{m-1} a_i \int_0^x e^{r_2 t} e^{-R_i(u-t)} dt = \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}\int_0^x e^{(r_2+R_i)t} dt = \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}\frac{e^{(r_2+R_i)x} - 1}{r_2 + R_i}, \quad (4.4.7)
$$

το οποίο αν το αντικαταστήσουμε στην τελευταία σχέση, προκύπτει η παρακάτω εξίσωση

$$
\begin{aligned}
F_0(x, y/u) = {} & \frac{1}{b_0}\int_0^x \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i(u-t)}\left[dG_0(t) - dG_0(y-t)\right] - \frac{1}{b_0} G_0(y)\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u} \\
& + \frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1 - E_2}\left[\bar{\Gamma}_1(x) - \bar{\Gamma}_1(x+y)\right]\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u} \\
& - \frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1 - E_2} e^{-r_2 x}\left[\bar{\Gamma}_2(x) - \bar{\Gamma}_2(x+y)\right]\left[r_2 \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}\frac{e^{(r_2+R_i)x} - 1}{r_2 + R_i} + \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}\right].
\end{aligned}
\tag{4.4.8}
$$

Επομένως, από τις σχέσεις $(4.4.6)$ και $(4.4.8)$, προκύπτει η από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ $U(\mathrm{T}^-)$ και $|U(\mathrm{T})|$.

Για $u = 0$, η από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας ισούται με

$$
\begin{aligned}
F_0(x, y/0) = {} & \frac{1+b_0}{b_0}\left[\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i 0} - \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i y}\right] - \frac{1}{b_0} G_0(y)\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i 0} + \frac{1}{b_0}\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i y}\int_0^y e^{R_i t} dG_0(t) \\
& + \frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1 - E_2}\left[\bar{\Gamma}_1(x) - \bar{\Gamma}_1(x+y)\right]\left[\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i 0} - 1\right] \\
& - \frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1 - E_2} e^{-r_2 x}\left[\bar{\Gamma}_2(x) - \bar{\Gamma}_2(x+y)\right]\left[r_2 \sum_{i=1}^{m-1}\frac{a_i}{r_2 + R_i}\left(e^{r_2 0} - e^{-R_i 0}\right) + \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i 0} - e^{r_2 0}\right].
\end{aligned}
$$

Αν αφαιρέσουμε από την τελευταία σχέση τους όρους που μηδενίζονται, καταλήγουμε άμεσα στη σχέση $(4.4.3)$. ■

Στη συνέχεια, θα εκφράσουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας, όταν η πιθανότητα χρεοκοπία δίνεται από τη σχέση $(4.4.1)$, όπως φαίνεται στο πόρισμα που ακολουθεί.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.4.2

Για $\delta = 0$ ***η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ.*** $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ ***και*** $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ ***είναι δίκλαδη και είναι ίση με***

$$f_0\left(x,y/u\right)=\begin{cases} \dfrac{\beta^2}{c^2 r_2}\dfrac{f\left(x+y\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i}\left[1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}\right] \\ -\dfrac{\beta^2}{c^2 r_2}\dfrac{f\left(x+y\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i}e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 u}-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}-r_2\sum\limits_{i=1}^{m-1}\dfrac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2 u}-e^{-R_i u}\right)\right] \\ \hfill \gamma\iota\alpha\, 0\le u<x, \\ \dfrac{\beta^2}{c^2 r_2}\dfrac{f\left(x+y\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i}\left[1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i\left(u-x\right)}-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}\right] \\ -\dfrac{\beta^2}{c^2 r_2}\dfrac{f\left(x+y\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i}e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 u}-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i\left(u-x\right)}-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}-r_2\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}\dfrac{e^{\left(r_2+R_i\right)x}-1}{r_2+R_i}\right] \\ \hfill \gamma\iota\alpha\, 0\le x<u, \end{cases} \tag{4.4.9}$$

και για $u=0$***, η*** $f_0\left(x,y/0\right)$ ***δίνεται από τη σχέση***

$$f_0\left(x,y/0\right)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f\left(x+y\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i}\left(1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i\right)\left(1-e^{-r_2 x}\right). \tag{4.4.10}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για τον περιορισμό $0\le u<x$, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(3.2.7)$ τη σχέση $(4.4.1)$, προκύπτει η εξίσωση

$$f_0\left(x,y/u\right)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f\left(x+y\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i 0}}e^{-0x}\left[e^{0u}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f\left(x+y\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i 0}}e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 u}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}-r_2\int_0^u e^{r_2 t}\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i\left(u-t\right)}dt\right],$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε τη σχέση $(4.4.4)$, καταλήγουμε

$$f_0(x,y/u)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f(x+y)}{1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i}\left[1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f(x+y)}{1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i}e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 u}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}-r_2\sum_{i=1}^{m-1}\frac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2 u}-e^{-R_i u}\right)\right].\quad(4.4.11)$$

Ομοίως, για $0\le x<u$, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(3.2.7)$ τη σχέση $(4.4.1)$, καταλήγουμε

$$f_0(x,y/u)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f(x+y)}{1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i 0}}e^{0x}\left[e^{0u}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i(u-x)}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f(x+y)}{1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i 0}}e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 u}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i(u-x)}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}-r_2\int_0^x e^{r_1 t}\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i(u-t)}dt\right].$$

Αν αντικαταστήσουμε στην τελευταία εξίσωση τη σχέση $(4.4.6)$, συμπεραίνουμε

$$f_0(x,y/u)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f(x+y)}{1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i}\left[1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i(u-x)}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f(x+y)}{1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i}e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 u}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i(u-x)}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}-r_2\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}\frac{e^{(r_2+R_i)x}-1}{r_2+R_i}\right]$$

$$(4.4.12)$$

Οπότε, από τις σχέσεις $(4.4.11)$ και $(4.4.12)$, προκύπτει η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ $U(\mathrm{T}^-)$ και $|U(\mathrm{T})|$.

Για $u=0$, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας είναι

$$f_0(x,y/0)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f(x+y)}{1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i}\left[1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i 0}\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f(x+y)}{1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i}e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 0}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i 0}-r_2\sum_{i=1}^{m-1}\frac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2 0}-e^{-R_i 0}\right)\right]$$

και ύστερα από απλοποίηση των όρων που μηδενίζονται καταλήγουμε στη σχέση $(4.4.10)$. ■

4.5 Προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$.

Η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία συμβολίζεται με $H_{\delta}\left(x/u\right)$ και δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.5.1

Για $\delta>0$, η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ ***δίνεται από την παρακάτω σχέση***

$$H_{\delta}\left(x/u\right)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}a_i e^{-R_i u}+\frac{1}{b_\delta}\frac{E_1}{E_1+E_2}e^{-r_1x}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\left[r_1\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{r_1+R_i}\left(e^{r_1u}-e^{-R_iu}\right)+\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-e^{r_1u}\right]\\ \displaystyle-\frac{1}{b_\delta}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left[r_2\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2u}-e^{-R_iu}\right)+\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-e^{r_2u}\right]\\ \hfill \text{για } 0\le u<x,\\ \displaystyle\frac{1}{b_\delta}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}\int_0^x e^{R_it}dG_\delta\left(t\right)+\frac{1}{b_\delta}\frac{E_1}{E_1+E_2}e^{-r_1x}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\left[r_1\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}\frac{e^{\left(r_1+R_i\right)x}-1}{r_1+R_i}+\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}\right]\\ \displaystyle-\frac{1}{b_\delta}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left[r_2\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}\frac{e^{\left(r_2+R_i\right)x}-1}{r_2+R_i}+\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}\right]\\ \hfill \text{για } 0<x\le u,\end{cases}\tag{4.5.1}$$

και για $u=0$***, η*** $H_{\delta}\left(x/u\right)$ ***είναι ίση με***

$$H_{\delta}\left(x/0\right)=\sum_{i=1}^{m}a_i+\frac{1}{b_\delta}\frac{E_1}{E_1+E_2}e^{-r_1x}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\left[\sum_{i=1}^{m}a_i-1\right]-\frac{1}{b_\delta}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left[\sum_{i=1}^{m}a_i-1\right].\tag{4.5.2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όταν ισχύει $0\le u<x$, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $\left(3.4.1\right)$ τη σχέση $\left(4.2.1.4\right)$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$H_{\delta}\left(x/u\right)=\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}+\frac{1}{b_\delta}\frac{E_1}{E_1+E_2}e^{-r_1x}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\left[r_1\int_0^u e^{r_1t}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i\left(u-t\right)}dt+\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-e^{r_1u}\right]$$

$$-\frac{1}{b_\delta}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left[r_2\int_0^u e^{r_2t}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i\left(u-t\right)}dt+\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-e^{r_2u}\right],$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε τη σχέση $(4.3.4)$, καταλήγουμε

$$
\begin{aligned}
H_{\delta}(x/u) = {} & \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i u} + \frac{1}{b_{\delta}} \frac{E_1}{E_1+E_2} e^{-r_1 x} \overline{\Gamma}_1(x) \left[r_1 \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{r_1+R_i} \left(e^{r_1 u} - e^{-R_i u} \right) + \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i u} - e^{r_1 u} \right] \\
& - \frac{1}{b_{\delta}} \frac{E_2}{E_1+E_2} e^{-r_2 x} \overline{\Gamma}_2(x) \left[r_2 \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{r_2+R_i} \left(e^{r_2 u} - e^{-R_i u} \right) + \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i u} - e^{r_2 u} \right]. \qquad (4.5.3)
\end{aligned}
$$

Ομοίως, όταν $0 < x \le u$, ύστερα από αντικατάσταση της σχέσης $(4.2.1.4)$ στη σχέση $(3.4.1)$, προκύπτει

$$
\begin{aligned}
H_{\delta}(x/u) = {} & \frac{1}{b_{\delta}} \int_0^x \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i(u-t)} dG_{\delta}(t) + \frac{1}{b_{\delta}} \frac{E_1}{E_1+E_2} e^{-r_1 x} \overline{\Gamma}_1(x) \left[r_1 \int_0^x e^{r_1 t} \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i(u-t)} dt + \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i u} \right] \\
& - \frac{1}{b_{\delta}} \frac{E_2}{E_1+E_2} e^{-r_2 x} \overline{\Gamma}_2(x) \left[r_2 \int_0^x e^{r_2 t} \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i(u-t)} dt + \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i u} \right],
\end{aligned}
$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε τη σχέση $(4.3.6)$, καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση

$$
\begin{aligned}
H_{\delta}(x/u) = {} & \frac{1}{b_{\delta}} \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i u} \int_0^x e^{R_i t} dG_{\delta}(t) \\
& + \frac{1}{b_{\delta}} \frac{E_1}{E_1+E_2} e^{-r_1 x} \overline{\Gamma}_1(x) \left[r_1 \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i u} \frac{e^{(r_1+R_i)x} - 1}{r_1+R_i} + \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i u} \right] \\
& - \frac{1}{b_{\delta}} \frac{E_2}{E_1+E_2} e^{-r_2 x} \overline{\Gamma}_2(x) \left[r_2 \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i u} \frac{e^{(r_2+R_i)x} - 1}{r_2+R_i} + \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i u} \right]. \qquad (4.5.4)
\end{aligned}
$$

Επομένως, από τις σχέσεις $(4.5.3)$ και $(4.5.4)$, έχουμε την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $U(\mathrm{T}^-)$.

Για $u = 0$, η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία, δίνεται από την σχέση

$$
\begin{aligned}
H_{\delta}(x/0) = {} & \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i 0} + \frac{1}{b_{\delta}} \frac{E_1}{E_1+E_2} e^{-r_1 x} \overline{\Gamma}_1(x) \left[r_1 \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{r_1+R_i} \left(e^{r_1 0} - e^{-R_i 0} \right) + \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i 0} - e^{r_1 0} \right] \\
& - \frac{1}{b_{\delta}} \frac{E_2}{E_1+E_2} e^{-r_2 x} \overline{\Gamma}_2(x) \left[r_2 \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{r_2+R_i} \left(e^{r_2 0} - e^{-R_i 0} \right) + \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i 0} - e^{r_2 0} \right],
\end{aligned}
$$

και ύστερα από απλοποίηση η παραπάνω σχέση γράφεται στη μορφή της $(4.5.2)$. ■

Στη συνέχεια, θα εκφράσουμε την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^-\right)$, η οποία συμβολίζεται με $h_\delta\left(x/u\right)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.5.2

Για $\delta > 0$, η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^-\right)$ ισούται με τη σχέση

$$h_\delta\left(x/u\right)=\begin{cases} \dfrac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\dfrac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^m a_i}e^{-r_1x}\left[e^{r_1u}-\sum\limits_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}-r_1\sum\limits_{i=1}^m\dfrac{a_i}{r_1+R_i}\left(e^{r_1u}-e^{-R_iu}\right)\right] \\ -\dfrac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\dfrac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^m a_i}e^{-r_2x}\left[e^{r_2u}-\sum\limits_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}-r_2\sum\limits_{i=1}^m\dfrac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2u}-e^{-R_iu}\right)\right] \\ \hfill \gamma\iota\alpha\, 0\le u<x, \\ \dfrac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\dfrac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^m a_i}e^{-r_1x}\left[e^{r_1x}\sum\limits_{i=1}^m a_ie^{-R_i\left(u-x\right)}-\sum\limits_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}-r_1\sum\limits_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}\dfrac{e^{\left(r_1+R_i\right)x}-1}{r_1+R_i}\right] \\ -\dfrac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\dfrac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^m a_i}e^{-r_2x}\left[e^{r_2x}\sum\limits_{i=1}^m a_ie^{-R_i\left(u-x\right)}-\sum\limits_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}-r_2\sum\limits_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}\dfrac{e^{\left(r_2+R_i\right)x}-1}{r_2+R_i}\right] \\ \hfill \gamma\iota\alpha\, 0\le x<u, \end{cases} \tag{4.5.5}$$

και για $u=0$***, η*** $h_\delta\left(x/u\right)$ ***γράφεται στην μορφή***

$$h_\delta\left(x/u\right)=\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^m a_i}e^{-r_1x}\left(1-\sum_{i=1}^m a_i\right)-\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^m a_i}e^{-r_2x}\left(1-\sum_{i=1}^m a_i\right). \tag{4.5.6}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όταν ισχύει ο περιορισμός $0\le u<x$ και αντικαταστήσουμε στη σχέση $\left(3.4.6\right)$ τη σχέση $\left(4.2.1.4\right)$,:προκύπτει

$$h_\delta\left(x/u\right)=\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^m a_ie^{-R_i0}}e^{-r_1x}\left[e^{r_1u}-\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}-r_1\int_0^u e^{r_1t}\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_i\left(u-t\right)}dt\right]$$
$$-\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^m a_ie^{-R_i0}}e^{-r_2x}\left[e^{r_2u}-\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}-r_2\int_0^u e^{r_1t}\sum_{i=1}^m a_ie^{-R_i\left(u-t\right)}dt\right],$$

από την οποία αν αντικαταστήσουμε τη σχέση $\left(4.3.4\right)$ καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα. Δηλαδή,

$$h_{\delta}(x/u)=\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{\overline{F}(x)}{1-\sum_{i=1}^{m}a_i}e^{-r_1x}\left[e^{r_1u}-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-r_1\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{r_1+R_i}\left(e^{r_1u}-e^{-R_iu}\right)\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{\overline{F}(x)}{1-\sum_{i=1}^{m}a_i}e^{-r_2x}\left[e^{r_2u}-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-r_2\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2u}-e^{-R_iu}\right)\right].\quad(4.5.7)$$

Ομοίως, όταν ισχύει ο περιορισμός $0\le x<u$ και αντικαταστήσουμε στη σχέση $(3.4.6)$ του κεφαλαίου 3 τη σχέση $(4.2.1.4)$, έχουμε την παρακάτω εξίσωση

$$h_{\delta}(x/u)=\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{\overline{F}(x)}{1-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i0}}e^{-r_1x}\left[e^{r_1x}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u-x)}-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-r_1\int_0^x e^{r_1t}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u-t)}dt\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{\overline{F}(x)}{1-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i0}}e^{-r_2x}\left[e^{r_2x}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u-x)}-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-r_2\int_0^x e^{r_1t}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u-t)}dt\right].$$

Αν στην τελευταία σχέση αντικαταστήσουμε την σχέση $(4.3.6)$, μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$h_{\delta}(x/u)=\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{\overline{F}(x)}{1-\sum_{i=1}^{m}a_i}e^{-r_1x}\left[e^{r_1x}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u-x)}-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-r_1\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}\frac{e^{(r_1+R_i)x}-1}{r_1+R_i}\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{\overline{F}(x)}{1-\sum_{i=1}^{m}a_i}e^{-r_2x}\left[e^{r_2x}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u-x)}-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-r_2\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}\frac{e^{(r_2+R_i)x}-1}{r_2+R_i}\right]\int_0^x e^{(r_1+R_i)t}dt$$

$$(4.5.8)$$

Άρα, από τις σχέσεις $(4.5.7)$και $(4.5.8)$, προκύπτει προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^-\right)$.

Για $u=0$, η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^-\right)$, είναι

$$h_{\delta}(x/u)=\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{\overline{F}(x)}{1-\sum_{i=1}^{m}a_i}e^{-r_1x}\left[e^{r_10}-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i0}-r_1\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{r_1+R_i}\left(e^{r_10}-e^{-R_i0}\right)\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{\overline{F}(x)}{1-\sum_{i=1}^{m}a_i}e^{-r_2x}\left[e^{r_20}-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i0}-r_2\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_20}-e^{-R_i0}\right)\right],$$

από την οποία αν αφαιρέσουμε τους μηδενικούς όρους, προκύπτει η σχέση $(4.5.6)$.■

4.6 Περιθώρια συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$.

Αν συμβολίσουμε $H_0\left(x/u\right)$ την περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία, στο πόρισμα που ακολουθεί θα δείξουμε ότι είναι της μορφής $(4.6.1)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.6.1

Για $\delta=0$ η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ δίνεται από τη σχέση

$$H_0\left(x/u\right)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1+E_2}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\left[\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}-1\right] & \\ -\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left[r_2\sum_{i=1}^{m-1}\frac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2u}-e^{-R_iu}\right)+\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}-e^{r_2u}\right] & \gamma\iota\alpha\; 0\le u<x, \\ \frac{1}{b_0}\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}\int_0^x e^{R_it}dG_0\left(t\right)+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1+E_2}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu} & \\ -\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left[r_2\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}\frac{e^{\left(r_2+R_i\right)x}-1}{r_2+R_i}+\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}\right] & \gamma\iota\alpha\; 0<x\le u,\end{cases}$$

$$(4.6.1)$$

και για $u=0$, η $H_0\left(x/u\right)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$H_0\left(x/0\right)=\sum_{i=1}^{m-1}a_i+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1+E_2}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\left(\sum_{i=1}^{m-1}a_i-1\right)-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left(\sum_{i=1}^{m-1}a_i-1\right). \quad (4.6.2)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όταν ισχύει $0\le u<x$, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(3.4.1)$ τη σχέση $(4.2.2.5)$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα. Δηλαδή,

$$H_0\left(x/u\right)=\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1+E_2}e^{0x}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\left[\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}-e^{0u}\right]$$

$$-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left[r_2\int_0^u e^{r_2t}\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_i\left(u-t\right)}dt+\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}-e^{r_2u}\right],$$

στο οποίο αν αντικαταστήσουμε τη σχέση $(4.3.4)$, καταλήγουμε

$$H_0\left(x/u\right)=\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1+E_2}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\left[\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}-1\right]$$

$$-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left[r_2\sum_{i=1}^{m-1}\frac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2u}-e^{-R_iu}\right)+\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}-e^{r_2u}\right]. \qquad (4.6.3)$$

Ομοίως, για $0<x\leq u$, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $\left(3.4.1\right)$ τη σχέση $\left(4.2.2.5\right)$, έχουμε

$$H_0\left(x/u\right)=\frac{1}{b_0}\int_0^x\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_i\left(u-t\right)}dG_0\left(t\right)+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1+E_2}e^{0x}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}$$

$$-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left[r_2\int_0^x e^{r_2t}\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_i\left(u-t\right)}dt+\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}\right].$$

Αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω εξίσωση τη σχέση $\left(4.3.6\right)$, προκύπτει

$$H_0\left(x/u\right)=\frac{1}{b_0}\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}\int_0^x e^{R_it}dG_0\left(t\right)+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1+E_2}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}$$

$$-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left[r_2\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}\frac{e^{\left(r_2+R_i\right)x}-1}{r_2+R_i}+\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_iu}\right]. \qquad (4.6.4)$$

Επομένως, από τις σχέσεις $\left(4.6.3\right)$ και $\left(4.6.4\right)$, έχουμε την περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^-\right)$.

Για $u=0$, η περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία ισούται με τη σχέση

$$H_0\left(x/0\right)=\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_i0}+\frac{1}{b_0}\frac{E_1}{E_1+E_2}\overline{\Gamma}_1\left(x\right)\left[\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_i0}-1\right]$$

$$-\frac{1}{b_0}\frac{E_2}{E_1+E_2}e^{-r_2x}\overline{\Gamma}_2\left(x\right)\left[r_2\sum_{i=1}^{m-1}\frac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_20}-e^{-R_i0}\right)+\sum_{i=1}^{m-1}a_ie^{-R_i0}-e^{r_20}\right],$$

από την οποία ύστερα από απλοποίηση, καταλήγουμε στη σχέση $\left(4.6.2\right)$. ■

Στην πρόταση που ακολουθεί θα εκφράσουμε την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία, η οποία συμβολίζεται με $h_0\left(x/u\right)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.6.2

Για $\delta = 0$, η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ ισούται με

$$h_0\left(x/u\right)=\begin{cases} \dfrac{\beta^2}{c^2 r_2}\dfrac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i}\left[1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}\right] \\ -\dfrac{\beta^2}{c^2 r_2}\dfrac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i}e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 u}-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}-r_2\sum\limits_{i=1}^{m-1}\dfrac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2 u}-e^{-R_i u}\right)\right] \\ \hfill \gamma\iota\alpha\; 0\le u<x, \\ \dfrac{\beta^2}{c^2 r_2}\dfrac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i}\left[\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i\left(u-x\right)}-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}\right] \\ -\dfrac{\beta^2}{c^2 r_2}\dfrac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i}e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 x}\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i\left(u-x\right)}-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}-r_2\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}\dfrac{e^{\left(r_2+R_i\right)x}-1}{r_2+R_i}\right] \\ \hfill \gamma\iota\alpha\; 0\le x<u, \end{cases} \qquad \left(4.6.5\right)$$

και για $u = 0$, η $h_0\left(x/u\right)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$h_0\left(x/0\right)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\overline{F}\left(x\right)\left(1-e^{-r_2 x}\right). \qquad \left(4.6.6\right)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όταν ισχύει ο περιορισμός $0\le u<x$ και αντικαταστήσουμε στη σχέση $\left(3.4.6\right)$ του κεφαλαίου 3 τη σχέση $\left(4.2.2.5\right)$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$h_0\left(x/u\right)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i 0}}e^{0x}\left[e^{0u}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i 0}}e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 u}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}-r_2\int_0^u e^{r_2 t}\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i\left(u-t\right)}dt\right],$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε τη σχέση $\left(4.3.4\right)$ προκύπτει η παρακάτω εξίσωση

$$h_{\delta}\left(x/u\right)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i}\left[1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i}e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 u}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}-r_2\sum_{i=1}^{m-1}\frac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2 u}-e^{-R_i u}\right)\right].\ (4.6.7)$$

Ομοίως, για $0\le x<u$, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(3.4.6)$ τη σχέση $(4.2.2.5)$, καταλήγουμε

$$h_0\left(x/u\right)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i 0}}e^{0x}\left[e^{0x}\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i(u-x)}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i 0}}e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 x}\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i(u-x)}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}-r_2\int_0^x e^{r_2 t}\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i(u-t)}dt\right],$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε την σχέση $(4.3.6)$, έχουμε τη σχέση

$$h_0\left(x/u\right)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i}\left[\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i(u-x)}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i}e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 x}\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i(u-x)}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}-r_2\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}\frac{e^{(r_2+R_i)x}-1}{r_2+R_i}\right].$$

$$(4.6.8)$$

Άρα, από τις σχέσεις $(4.6.7)$ και $(4.6.8)$, προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Για $u=0$, η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία είναι ίση με

$$h_0\left(x/0\right)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i}\left[1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i 0}\right]-\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{\overline{F}\left(x\right)}{1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i}e^{-r_2 x}\left[e^{r_2 0}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i 0}-r_2\sum_{i=1}^{m-1}\frac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2 0}-e^{-R_i 0}\right)\right],$$

και ύστερα από πράξεις, συμπεραίνουμε ότι η $h_0\left(x/u\right)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή της σχέσης $(4.6.6)$. ■

4.7 Προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας, της τ.μ. $\left|U(\mathrm{T})\right|$.

Στην παράγραφο αυτή, θα μελετήσουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας. Στο θεώρημα που ακολουθεί θα εκφράσουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $\left|U(\mathrm{T})\right|$, την οποία θα συμβολίσουμε με $G_\delta(y/u)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.7.1

Για $\delta>0$, η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $\left|U(\mathrm{T})\right|$ για $0\le u<x$, δίνεται από τη σχέση

$$G_\delta(y/u)=\frac{1+b_\delta}{b_\delta}\left[\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u+y)}\right]-\frac{1}{b_\delta}G_\delta(y)\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}+\frac{1}{b_\delta}\int_0^y\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u+y-t)}dG_\delta(t), \tag{4.7.1}$$

και για $u=0$, η $G_0(y/u)$ είναι ίση με

$$G_\delta(y/0)=\frac{1+b_\delta}{b_\delta}\left[\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iy}\right]-\frac{1}{b_\delta}G_\delta(y)\sum_{i=1}^{m}a_i+\frac{1}{b_\delta}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iy}\int_0^y e^{R_it}dG_\delta(t). \tag{4.7.2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.4.1, η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $\left|U(\mathrm{T})\right|$ για $0\le u<x$ δίνεται από τη σχέση $(3.6.1)$. Οπότε, αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση τη σχέση $(4.2.1)$, έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Για $u=0$, η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $\left|U(\mathrm{T})\right|$, ισούται με την παρακάτω σχέση

$$G_\delta(y/0)=\frac{1+b_\delta}{b_\delta}\left[\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i0}-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(0+y)}\right]-\frac{1}{b_\delta}G_\delta(y)\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i0}+\frac{1}{b_\delta}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(0+y)}\int_0^y e^{R_it}dG_\delta(t),$$

η οποία, ύστερα από απλοποίηση των όρων, γράφεται στη μορφή της σχέσης $(4.7.2)$. ■.

Στη συνέχεια θα δώσουμε την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left|U(\mathrm{T})\right|$, η οποία συμβολίζεται με $g_\delta(y/u)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.7.1
Για $\delta > 0$, η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $|U(\mathrm{T})|$ μπορεί να γραφεί ως

$$g_\delta(y/u) = \frac{1+b_\delta}{b_\delta}\sum_{i=1}^{m} a_i R_i e^{-R_i(u+y)} - \frac{1}{b_\delta}\sum_{i=1}^{m} a_i R_i e^{-R_i(u+y)} \int_0^y e^{R_i t} dG_\delta(t), \quad (4.7.3)$$

και για $u = 0$, η $g_\delta(y/u)$ είναι ίση με

$$g_\delta(y/0) = \sum_{i=1}^{m} a_i R_i e^{-R_i y}\left(\frac{1+b_\delta}{b_\delta} - \int_0^y e^{R_i t} dG_\delta(t)\right). \quad (4.7.4)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $|U(\mathrm{T})|$ υπολογίζεται άμεσα αν παραγωγίσουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας. Δηλαδή,

$$g_\delta(y/u) = -\frac{1+b_\delta}{b_\delta}\frac{\partial}{\partial u}\sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i(u+y)} + \frac{1}{b_\delta}\int_0^y \frac{\partial}{\partial u}\sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i(u+y-t)} dG_\delta(t),$$

από την οποία προκύπτει η σχέση $(4.7.3)$.

Για $u = 0$, η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $|U(\mathrm{T})|$ είναι ίση με την εξίσωση

$$g_\delta(y/0) = \frac{1+b_\delta}{b_\delta}\sum_{i=1}^{m} a_i R_i e^{-R_i(0+y)} - \frac{1}{b_\delta}\sum_{i=1}^{m} a_i R_i e^{-R_i(0+y)} \int_0^y e^{R_i t} dG_\delta(t),$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι η ισχύει το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

4.8 Συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας, της τ.μ. $|U(\mathrm{T})|$.

Η συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας, συμβολίζεται με $G_0(y/u)$ και δίνεται στο πόρισμα που ακολουθεί.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.8.1
Όταν $\delta = 0$ και $0 \le u < x$, τότε η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $|U(\mathrm{T})|$ ισούται με

$$G_0(y/u) = \frac{1+b_0}{b_0}\left[\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u} - \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i(u+y)}\right] - \frac{1}{b_0}G_0(y)\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u} + \frac{1}{b_0}\int_0^y \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i(u+y-t)} dG_0(t), \quad (4.8.1)$$

και για $u = 0$, η $G_0(y/u)$ δίνεται από τη σχέση

$$G_0\left(y/0\right)=\frac{1+b_0}{b_0}\left(\sum_{i=1}^{m-1}a_i-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i y}\right)-\frac{1}{b_0}G_0\left(y\right)\sum_{i=1}^{m-1}a_i+\frac{1}{b_0}\int_0^y\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i\left(y-t\right)}dG_0\left(t\right).\quad(4.8.2)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.7.1, η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ για $0\le u<x$ μπορεί να γραφεί στη μορφή της σχέσης $(3.7.1)$, στην οποία αν αντικαταστήσουμε τη σχέση $(4.2.2.5)$, έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Για $u=0$, η περιθώρια συνάρτησης κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας ισούται με την εξίσωση

$$G_0\left(y/0\right)=\frac{1+b_0}{b_0}\left[\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i 0}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i\left(0+y\right)}\right]-\frac{1}{b_0}G_0\left(y\right)\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i 0}+\frac{1}{b_0}\int_0^y\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i\left(0+y-t\right)}dG_0\left(t\right),$$

και μετά από πράξεις καταλήγουμε στη σχέση $(4.8.2)$. ■

Στην πρόταση που ακολουθεί θα εκφράσουμε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$, η οποία συμβολίζεται με $g_0\left(y/u\right)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.8.2

Όταν $\delta=0$ και $0\le u<x$, η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ δίνεται από τη σχέση

$$g_0\left(y/u\right)=\frac{1+b_0}{b_0}\sum_{i=1}^{m}a_i R_i e^{-R_i\left(u+y\right)}-\frac{1}{b_0}\sum_{i=1}^{m}a_i R_i e^{-R_i\left(u+y\right)}\int_0^y e^{R_i t}dG_0\left(t\right),\quad(4.8.3)$$

και για $u=0$, η $g_0\left(y/u\right)$ ισούται με

$$g_0\left(y/0\right)=\sum_{i=1}^{m-1}a_i R_i e^{-R_i y}\left(\frac{1+b_0}{b_0}-\int_0^y e^{R_i t}dG_0\left(t\right)\right).\quad(4.8.4)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ υπολογίζεται άμεσα αν παραγωγίσουμε την περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$, δηλαδή τη σχέση $(4.8.1)$.

Για $u=0$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g_0\left(y/u\right)$ γράφεται $g_0\left(y/0\right)=\frac{1+b_0}{b_0}\sum_{i=1}^{m}a_i R_i e^{-R_i\left(0+y\right)}-\frac{1}{b_0}\sum_{i=1}^{m}a_i R_i e^{-R_i\left(0+y\right)}\int_0^y e^{R_i t}dG_0\left(t\right)$, και μετά από πράξεις προκύπτει η σχέση $(4.8.4)$. ■

4.9 Προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left[U\left(\mathrm{T}-\right)+\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|\right]$.

Στην παράγραφο αυτή θα εκφράσουμε την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ποσού της απαίτησης που προκαλεί χρεοκοπία, όταν συμβεί χρεοκοπία εξαιτίας μιας απαίτησης, η οποία συμβολίζεται με $d_\delta\left(z/u\right)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.9.1

Για $\delta>0$, η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left[U\left(\mathrm{T}-\right)+\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|\right]$ δίνεται από τη σχέση

$$d_\delta\left(z/u\right)=\begin{cases} \dfrac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\dfrac{f\left(z\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^m a_i}\dfrac{e^{-r_1z}}{r_1}\left[\left(e^{r_1z}-e^{r_1u}\right)-\left(e^{r_1z}-1\right)\sum\limits_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}+r_1\sum\limits_{i=1}^m\dfrac{a_i}{r_1+R_i}\left(e^{r_1u}-e^{-R_iu}\right)\right] \\ -\dfrac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\dfrac{f\left(z\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^m a_i}\dfrac{e^{-r_2z}}{r_2}\left[\left(e^{r_2z}-e^{r_1u}\right)-\left(e^{r_2z}-1\right)\sum\limits_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}+r_2\sum\limits_{i=1}^m\dfrac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2u}-e^{-R_iu}\right)\right] \\ \hfill \gamma\iota\alpha\, 0\le u<z, \\ \dfrac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\dfrac{f\left(z\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^m a_i}\dfrac{e^{-r_1z}}{r_1}\left[-\left(e^{r_1z}-1\right)\sum\limits_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}+r_1\sum\limits_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}\dfrac{e^{\left(r_1+R_i\right)z}-1}{r_1+R_i}\right] \\ -\dfrac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\dfrac{f\left(z\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^m a_i}\dfrac{e^{-r_2z}}{r_2}\left[-\left(e^{r_2z}-1\right)\sum\limits_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}+r_2\sum\limits_{i=1}^m a_ie^{-R_iu}\dfrac{e^{\left(r_2+R_i\right)z}-1}{r_2+R_i}\right] \\ \hfill \gamma\iota\alpha\, 0\le z<u, \end{cases} \tag{4.9.1}$$

και για $u=0$, η $d_0\left(y/u\right)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$d_\delta\left(z/0\right)=\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{f\left(z\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^m a_i}\left\{\frac{e^{-r_1z}}{r_1}\left[\left(e^{r_1z}-1\right)-\left(e^{r_1z}-1\right)\sum_{i=1}^m a_i\right]-\frac{e^{-r_2z}}{r_2}\left[\left(e^{r_2z}-1\right)-\left(e^{r_2z}-1\right)\sum_{i=1}^m a_i\right]\right\}. \tag{4.9.2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όταν $0\le z<u$, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $\left(3.8.2\right)$ τη σχέση $\left(4.2.1.4\right)$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει η σχέση

$$d_\delta(z/u)=\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i0}}\frac{e^{-r_1z}}{r_1}\left[\left(e^{r_1z}-e^{r_1u}\right)-\left(e^{r_1z}-1\right)\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}+r_1\int_0^u e^{r_1t}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u-t)}dt\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i0}}\frac{e^{-r_2z}}{r_2}\left[\left(e^{r_2z}-e^{r_1u}\right)-\left(e^{r_2z}-1\right)\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}+r_2\int_0^u e^{r_2t}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u-t)}dt\right],$$

στην οποία, αν αντικαταστήσουμε τη λύση των ολοκληρωμάτων που έχουμε υπολογίσει σε προηγουμένη παράγραφο, δηλαδή τη σχέση $(4.3.4)$, έχουμε

$$d_\delta(z/u)=\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\sum_{i=1}^{m}a_i}\frac{e^{-r_1z}}{r_1}\left[\left(e^{r_1z}-e^{r_1u}\right)-\left(e^{r_1z}-1\right)\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}+r_1\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{r_1+R_i}\left(e^{r_1u}-e^{-R_iu}\right)\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\sum_{i=1}^{m}a_i}\frac{e^{-r_2z}}{r_2}\left[\left(e^{r_2z}-e^{r_1u}\right)-\left(e^{r_2z}-1\right)\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}+r_2\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2u}-e^{-R_iu}\right)\right].$$

$$(4.9.3)$$

Ομοίως, για $0\le z<u$, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(3.8.2)$ την$(4.2.1.4)$, έχουμε

$$d_\delta(z/u)=\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i0}}\frac{e^{-r_1z}}{r_1}\left[-\left(e^{r_1z}-1\right)\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}+r_1\int_0^z e^{r_1t}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u-t)}dt\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i0}}\frac{e^{-r_2z}}{r_2}\left[-\left(e^{r_2z}-1\right)\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}+r_2\int_0^z e^{r_2t}\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i(u-t)}dt\right],$$

η οποία μέσω της σχέσης $(4.3.6)$ γίνεται

$$d_\delta(z/u)=\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i0}}\frac{e^{-r_1z}}{r_1}\left[-\left(e^{r_1z}-1\right)\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}+r_1\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}\frac{e^{(r_1+R_i)z}-1}{r_1+R_i}\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2(r_2-r_1)}\frac{f(z)}{1-\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_i0}}\frac{e^{-r_2z}}{r_2}\left[-\left(e^{r_2z}-1\right)\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}+r_2\sum_{i=1}^{m}a_ie^{-R_iu}\frac{e^{(r_2+R_i)z}-1}{r_2+R_i}\right].$$

$$(4.9.4)$$

Επομένως, από τις σχέσεις $(4.9.3)$ και $(4.9.4)$ προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left[U(\mathrm{T}-)+\left|U(\mathrm{T})\right|\right]$.

Για $u=0$, η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ.$\left[U(\mathrm{T}-)+\left|U(\mathrm{T})\right|\right]$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$d_{\delta}\left(z/0\right)=\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{f\left(z\right)}{1-\sum_{i=1}^{m}a_i}\frac{e^{-r_1 z}}{r_1}\left[\left(e^{r_1 z}-e^{r_1 0}\right)-\left(e^{r_1 z}-1\right)\sum_{i=1}^{m}a_i e^{-R_i 0}+r_1\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{r_1+R_i}\left(e^{r_1 0}-e^{-R_i 0}\right)\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{c^2\left(r_2-r_1\right)}\frac{f\left(z\right)}{1-\sum_{i=1}^{m}a_i}\frac{e^{-r_2 z}}{r_2}\left[\left(e^{r_2 z}-e^{r_1 0}\right)-\left(e^{r_2 z}-1\right)\sum_{i=1}^{m}a_i e^{-R_i 0}+r_2\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{r_2+R_i}\left(e^{r_2 0}-e^{-R_i 0}\right)\right].$$

Ύστερα από απλοποιήσεις στην τελευταία σχέση, συμπεραίνουμε ότι ισχύει η σχέση $(4.9.2)$. ■

4.10 Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left[U\left(\mathrm{T}-\right)+\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|\right]$.

Στο πόρισμα που ακολουθεί, θα εκφράσουμε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ποσού της απαίτησης που προκαλεί χρεοκοπία, όταν συμβεί χρεοκοπία εξαιτίας μιας απαίτησης, η οποία συμβολίζεται με $d_0\left(z/u\right)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.10.1

Για $\delta=0$, η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left[U\left(\mathrm{T}-\right)+\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|\right]$ δίνεται από τη σχέση

$$d_0\left(z/u\right)=\begin{cases}\dfrac{\beta^2}{c^2 r_2}\dfrac{f\left(z\right)}{1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}}\left[-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}z+\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}\int_0^z e^{-r_2 x}dx+r_2\dfrac{\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}}{r_2+R_i}\left(\dfrac{e^{R_i z}-1}{R_i}-\dfrac{e^{r_2 z}-1}{r_2}\right)\right] \\ \qquad\qquad \gamma\iota\alpha\, 0\le u<z, \\ \dfrac{\beta^2}{c^2 r_2}\dfrac{f\left(z\right)}{1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i}\left[-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}z-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}\dfrac{1-e^{-r_2 z}}{r_2}-\sum_{i=1}^{m-1}a_i e^{-R_i u}\dfrac{e^{\left(R_i+r_2\right)u}-1}{R_i+r_2}\left(1-e^{-r_2 z}\right)\right] \\ \qquad\qquad \gamma\iota\alpha\, 0\le z<u,\end{cases} \qquad (4.10.1)$$

και για $u=0$, η $d_0\left(y/u\right)$ είναι ίση με

$$d_0\left(z/0\right)=\frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f\left(z\right)}{1-\sum_{i=1}^{m-1}a_i}\left[-\sum_{i=1}^{m-1}a_i z+\sum_{i=1}^{m-1}a_i\int_0^z e^{-r_2 x}dx+r_2\frac{\sum_{i=1}^{m-1}a_i}{r_2+R_i}\left(\frac{e^{R_i z}-1}{R_i}-\frac{e^{r_2 z}-1}{r_2}\right)\right]. \qquad (4.10.2)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για τον περιορισμό $0 \le z < u$, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(3.9.1)$, την ισότητα $\overline{K}_0(u) = \psi(u)$, προκύπτει

$$d_0(z/u) = \frac{\beta^2}{c^2 r_2} \frac{f(z)}{1 - \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}} \left[-\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u} z + \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u} \int_0^z e^{-r_2 x} dx + r_2 \int_0^z e^{-r_2 x} \int_0^x e^{r_2 t} \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i(u-t)} dt dx \right]. \tag{4.10.3}$$

Υπολογίζοντας ξεχωριστά το παραπάνω ολοκλήρωμα καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα. Δηλαδή,

$$\begin{aligned}
\int_0^z e^{-r_2 x} \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u} \frac{e^{(r_2+R_i)x} - 1}{r_2 + R_i} dx &= \frac{\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}}{r_2 + R_i} \int_0^z e^{-r_2 x} \left(e^{(r_2+R_i)x} - 1 \right) dx = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}}{r_2 + R_i} \int_0^z e^{-r_2 x} \left(e^{r_2 x} e^{R_i x} - 1 \right) dx \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}}{r_2 + R_i} \int_0^z \left(e^{R_i x} - e^{-r_2 x} \right) dx = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}}{r_2 + R_i} \left(\int_0^z e^{R_i x} dx - \int_0^z e^{-r_2 x} dx \right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}}{r_2 + R_i} \left(\frac{e^{R_i z} - 1}{R_i} - \frac{e^{r_2 z} - 1}{r_2} \right).
\end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα στη σχέση $(4.10.3)$, προκύπτει

$$d_0(z/u) = \frac{\beta^2}{c^2 r_2} \frac{f(z)}{1 - \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}} \left[-\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u} z + \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u} \int_0^z e^{-r_2 x} dx + r_2 \frac{\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}}{r_2 + R_i} \left(\frac{e^{R_i z} - 1}{R_i} - \frac{e^{r_2 z} - 1}{r_2} \right) \right]. \tag{4.10.4}$$

Ομοίως, για τον περιορισμό $0 \le u < z$, αν αντικαταστήσουμε την ισότητα $\overline{K}_0(u) = \psi(u)$ στη σχέση $(3.9.1)$, έχουμε την εξίσωση

$$d_0(z/u) = \frac{\beta^2}{c^2 r_2} \frac{f(z)}{1 - \sum_{i=1}^{m-1} a_i} \left[-\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u} z - \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u} \frac{1 - e^{-r_2 z}}{r_2} - r_2 \int_0^z e^{-r_2 x} \int_0^u e^{r_2 t} \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i(u-t)} dt dx \right]. \tag{4.10.5}$$

Υπολογίζοντας ξεχωριστά τα ολοκληρώματα της παραπάνω σχέσης, προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα

$$\int_0^u e^{r_2 t}\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i(u-t)}dt = \int_0^u e^{r_2 t}\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}e^{R_i t}dt = \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{R_i t}e^{r_2 t}\int_0^u e^{-R_i u}dt = \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}\int_0^u e^{(R_i+r_2)t}dt$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}\,\frac{e^{(R_i+r_2)u}-1}{R_i+r_2},$$

$$\int_0^z e^{-r_2 x}\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}\,\frac{e^{(R_i+r_2)u}-1}{R_i+r_2}dx = \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}\,\frac{e^{(R_i+r_2)u}-1}{R_i+r_2}\,\frac{1-e^{-r_2 z}}{r_2}.$$

Οπότε, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $(4.10.5)$, τα αποτελέσματα των ολοκληρωμάτων αυτών, καταλήγουμε στη σχέση που ακολουθεί.

$$d_0(z/u) = \frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f(z)}{1-\sum_{i=1}^{m-1} a_i}\left[-\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}z - \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}\,\frac{1-e^{-r_2 z}}{r_2} - \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i u}\,\frac{e^{(R_i+r_2)u}-1}{R_i+r_2}\left(1-e^{-r_2 z}\right)\right]. \tag{4.10.6}$$

Προφανώς, από τις σχέσεις $(4.10.4)$ και $(4.10.6)$ προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left[U(\mathrm{T}-)+\left|U(\mathrm{T})\right|\right]$.

Για $u=0$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $d_0(y/u)$, είναι ίση με

$$d_0(z/0) = \frac{\beta^2}{c^2 r_2}\frac{f(z)}{1-\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i 0}}\left[-\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i 0}z + \sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i 0}\int_0^z e^{-r_2 x}dx + r_2\frac{\sum_{i=1}^{m-1} a_i e^{-R_i 0}}{r_2+R_i}\left(\frac{e^{R_i z}-1}{R_i} - \frac{e^{r_2 z}-1}{r_2}\right)\right]$$

και ύστερα από πράξεις καταλήγουμε στη σχέση $(4.10.2)$. ■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Αριθμητικές Εφαρμογές

Οι προεξοφλημένες και μη προεξοφλημένες από κοινού και περιθώριες συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας, τις οποίες υπολογίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο διαφοροποιούνται ανάλογα με την κατανομή που ακολουθούν κάθε φορά τα μεγέθη ζημιών. Στο κεφάλαιο αυτό λοιπόν, θα δώσουμε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica, όταν τα μεγέθη ζημιών ακολουθούν την εκθετική κατανομή και την κατανομή Γάμμα.

5.1 Εκθετικά μεγέθη ζημιών

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα υποθέτουμε ότι τα μεγέθη ζημιών ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 2$ και με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας να δίνεται από τη σχέση $f(x) = 2e^{-2x}$, ενώ οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων ακολουθούν την κατανομή Erlang(2) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας να είναι ίση με $k(t) = \beta^2 t e^{-\beta t}$.

Θέτουμε $c = 1$, $\beta = 3$, $n = 2$ και $\delta = 0.07$.

Από τη σχέση $(4.1.1)$ υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace της τ.μ. X, ο οποίος είναι ίσος με $\hat{f}(s) = \frac{2}{2+s}$ και ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ. V_i δίνεται από τη σχέση $\hat{k}(s) = \left(\frac{3}{3+s}\right)^2$.

Για **δ>0**, με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica για να υπολογίσουμε τις ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $(2.2.3)$, χρησιμοποιούμε την εντολή $\text{Solve}[\text{LTk}[\delta - \text{cs}]\cdot \text{LTf}[\text{s}] = 1, \text{s}]//\text{N}.$

Οι ρίζες που προκύπτουν είναι

$$-R_1 = -0.7951\,,\; r_1 = 0.227013 \text{ και } r_2 = 4.70809\,.$$

Σύμφωνα με τη σχέση $(2.5.5)$ ισχύει $\dfrac{1}{1+b_\delta} = 1 - \dfrac{2\beta\delta + \delta^2}{c^2 r_1 r_2} = 0.60245\,.$

Από το θεώρημα 4.2.1.1 ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας είναι

$$\hat{\phi}_{\mathrm{T}}(u) = \frac{1}{1+b_\delta}\frac{1}{s+R_1},$$

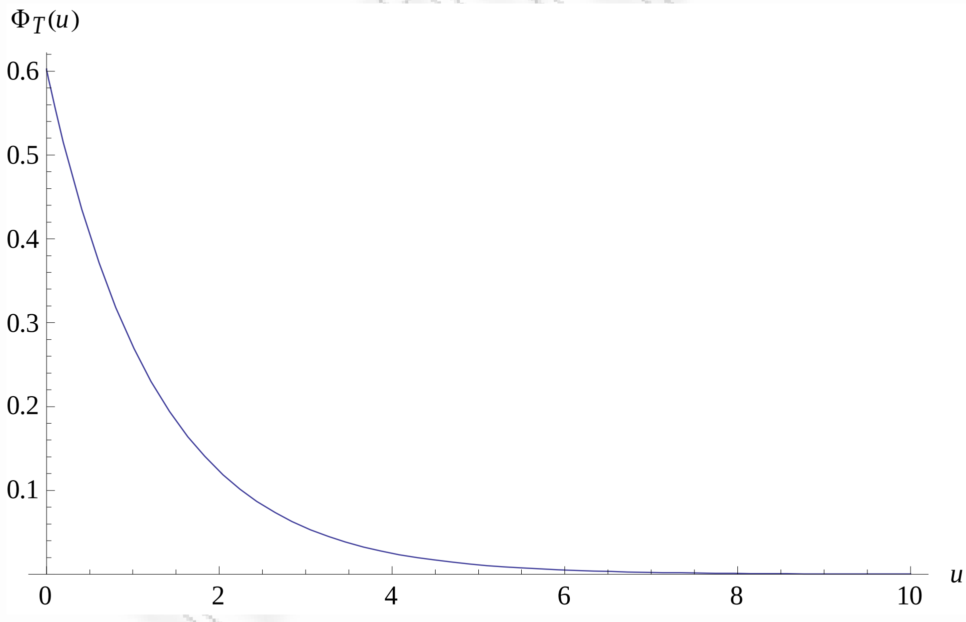
οπότε παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace προκύπτει η σχέση

$$\phi_{\mathrm{T}}(u) = \frac{1}{1+b_\delta} e^{-R_1 u}\,.$$

Στο παράδειγμα αυτό λοιπόν, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας είναι

$$\phi_{\mathrm{T}}(u) = 0.60245 e^{-0.7951u}$$

και απεικονίζεται στη γραφική παράσταση που ακολουθεί.



ΣΧΗΜΑ 5.1.1

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τις συναρτήσεις, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε για να εκφράσουμε τις προεξοφλημένες από κοινού και περιθώριες συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας. Από τη σχέση $(3.1.2)$, λοιπόν προκύπτει

$$E_i = \int_0^\infty e^{-r_i x}\overline{F}(x)dx = \int_0^\infty e^{-r_i x}e^{-2x}dx = \int_0^\infty e^{-x(r_i+2)}dx = \left[-\frac{e^{-x(r_i+2)}}{r_i+2}\right]_0^\infty = \frac{1}{r_i+2},$$

οπότε για τις συγκεκριμένες ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg έχουμε

$E_1 = \frac{1}{r_1+2} = 0.449032$ και $E_2 = \frac{1}{r_2+2} = 0.149074$.

Επιπλέον, από τη σχέση $(3.1.3)$, η δεξιά ουρά της συνάρτησης $\Gamma_i(u)$ ισούται με

$$\overline{\Gamma}_i(u) = \frac{\int_u^\infty e^{-r_i(x-u)}e^{-2x}dx}{\frac{1}{r_i+2}} = (r_i+2)e^{r_i u}\int_u^\infty e^{-(r_i+2)}dx = (r_i+2)e^{r_i u}\left[-\frac{e^{-x(r_i+2)}}{r_i+2}\right]_0^\infty$$

$$= (r_i+2)e^{r_i u}\frac{e^{-u(r_i+2)}}{(r_i+2)} = e^{-2u},$$

οπότε για τις ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg, έχει την ίδια τιμή, δηλαδή $\overline{\Gamma}_1(u) = \overline{\Gamma}_2(u) = e^{-2u}$.

Για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση κατανομής της τ.μ. Y, $G_\delta(u)$, η οποία δίνεται από τη σχέση$(2.4.6)$, θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 3.1.1, στο οποίο δείξαμε ότι η δεξιά ουρά της συνάρτησης κατανομής μπορεί να γραφεί στη μορφή της σχέσης $(3.1.6)$. Οπότε σύμφωνα με τα αποτελέσματα των παραπάνω συναρτήσεων, καταλήγουμε

$$\overline{G}_\delta(u) = \frac{E_1}{E_1-E_2}\overline{\Gamma}_1(u) + \frac{E_2}{E_1-E_2}\overline{\Gamma}_2(u) = \frac{\frac{1}{r_1+2}}{\frac{1}{r_1+2}-\frac{1}{r_2+2}}e^{-2u} + \frac{\frac{1}{r_2+2}}{\frac{1}{r_1+2}-\frac{1}{r_2+2}}e^{-2u} = e^{-2u}.$$

Άρα, η συνάρτησης κατανομής της τ.μ. Y, είναι $G_\delta(u) = 1 - e^{-2u}$.

Από τη σχέση $(4.3.2)$ παρατηρούμε ότι η *προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ* $U(\mathrm{T}^-)$ *και* $|U(\mathrm{T})|$ είναι δίκλαδη. Οπότε, για τον περιορισμό $0 \le u < x$, έχουμε

$$\begin{aligned}F_\delta(x,y/u)=&\,0.60245e^{-0.7951u}-0.2187e^{(-0.7951u-6.70809x)}+1.22409e^{(4.70809u-6.70809x)}\\&+1.18381e^{(-0.7951u-2.22701x)}-2.18803e^{(0.227013u-2.22701x)}-0.60245e^{(-0.7951u-2y)}\\&-1.18381e^{(-0.7951u-2.22701x-1.77299y)}+2.18803e^{(0.227013u-2.22701x-1.77299y)}\\&-1.94048\cdot10^{-7}e^{(-0.7951u-0.7951y)}+0.21987e^{(-0.7951u-6.70809x+2.70809y)}\\&-1.22409e^{(4.70809u-6.70809x+2.70809y)},\end{aligned}$$

ενώ όταν ισχύει $0<x\le u$, τότε προκύπτει το παρακάτω αποτέλεσμα

$$F_\delta(x,y/u)=e^{-0.7951u}\begin{pmatrix}0.60245-0.21987e^{-6.70809x}+1.18381e^{-2.22701x}-2.47935e^{-1.2049x}\\-1.18381e^{(-2.22701x-1.77299y)}-0.337996e^{(-1.2049x-1.77299y)}+0.912957e^{-2y}\\+0.21987e^{(-6.70809x-2.70809y)}+1.30194e^{(-1.2049x-2.70809y)}\end{pmatrix}.$$

Για $u=0$, σύμφωνα με τη σχέση $(4.3.3)$, η $F_\delta(x,y/u)$ γράφεται στην παρακάτω μορφή

$$F_\delta(x,y/0)=0.60245\begin{pmatrix}1-e^{-2y}+1.49698e^{-0.227013x}\left(-1.11351e^{-2x}+1.11351e^{-2x-1.77299y}\right)\\-0.496982e^{-4.7951x}\left(-3.35405e^{-2x}+3.35405e^{-2x+2.70809y}\right)\end{pmatrix}.$$

Σύμφωνα με τη σχέση $(4.3.9)$, όταν ισχύει $0\le u<x$, *η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ* $U(\mathrm{T}^-)$ *και* $|U(\mathrm{T})|$, ισούται με

$$f_\delta(x,y/u)=e^{-07951u-8.9351x-2y}\begin{pmatrix}0.879481e^{0.22701x}-4.73524e^{2.22701x}\\-4.89637e^{5.50319u+2.22701x}+8.75213e^{1.02211u+6.70809x}\end{pmatrix},$$

και για $0<x\le u$, η $f_\delta(x,y/u)$ δίνεται από τη σχέση που ακολουθεί, δηλαδή

$$f_\delta(x,y/u)=e^{-07951u-10.14x-2y}\left(0.879481e^{3.34191x}-4.73524e^{7.91299x}+3.85576e^{8.9351x}\right).$$

Για $u=0$, από τη σχέση $(4.3.10)$, η $f_\delta(x,y/u)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$f_\delta(x,y/0)=e^{-2y}\left(-4.01689e^{-6.70809x}+4.01689e^{-2.227013x}\right).$$

Από τη σχέση $(4.5.1)$, *η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ.* $U(\mathrm{T}^-)$, για $0\le u<x$ ισούται με

$$\begin{aligned}H_\delta(x/u)=&\,0.60245e^{-0.7951u}+1.26684e^{-2.22701x}\begin{pmatrix}0.60245e^{-0.7951u}-e^{0.227013u}\\+0.227013e^{-0.7951u}\left(-0.589416+0.589416e^{1.02211u}\right)\end{pmatrix}\\&-1.26684e^{-6.70809x}\begin{pmatrix}0.60245e^{-0.7951u}-e^{4.70809u}\\+4.70809e^{-0.7951u}\left(-0.1097473+0.109473e^{5.50319u}\right)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

ενώ για $0 < x \le u$, η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία είναι

$$\begin{aligned}H_{\delta}(x/u) = & 1.82591e^{-0.7951u}\left(0.829944-0.829944e^{-1.20490x}\right)\\ & +1.26684e^{-2.22701x}\left(0.60245e^{-0.7951u}+0.227013e^{-0.7951u}\left(-0.589416+0.589416e^{1.02211x}\right)\right)\\ & -1.26684e^{-6.70809x}\left(0.60245e^{-0.7951u}+4.70809e^{-0.7951u}\left(-0.109473+0.109473e^{5.50319x}\right)\right).\end{aligned}$$

Για $u=0$, από τη σχέση $(4.5.2)$, η $H_{\delta}(x/u)$ δίνεται από την εξίσωση $H_{\delta}(x/0) = 0.60245 + 0.503632e^{-6.70809x} - 0.503632e^{-2.22701x}$.

Η *προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ.* $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$, η οποία δίνεται από τη σχέση $(4.5.5)$, για $0 \le u < x$ ισούται με

$$h_{\delta}(x/u) = e^{-07951u}\begin{pmatrix} e^{-2.22701x}\left(-2.36762+e^{13.826x}4.37607e^{1.02211u}\right) \\ +e^{-6.70809x}\left(0.439741-2.44819e^{5.50319u}\right) \end{pmatrix},$$

ενώ για $0 < x \le u$, η $h_{\delta}(x/u)$ γράφεται στην παρακάτω μορφή

$$h_{\delta}(x/u) = e^{-07951u-16.053x}\begin{pmatrix} 0.439741e^{9.3449x} - 2.36762e^{13.826x} + 4.97149e^{14.8481x} \\ -3.04361e^{4.70809u+10.14x} \end{pmatrix}.$$

Τέλος, για $u=0$, από τη σχέση $(4.5.6)$, η $h_{\delta}(x/u)$ είναι ίση με $h_{\delta}(x/0) = 2.00845e^{-2x}\left(-e^{4.70809x}+e^{-0.227013x}\right)$.

Στη συνέχεια, για να υπολογίσουμε την *προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας*, χρησιμοποιούμε τη σχέση $(4.7.1)$ και για $0 \le u < x$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει $G_{\delta}(y/u) = -0.912957e^{-0.7951u}\left(1-e^{-2y}\right)+1.51541e^{-0.7951u-2y}\left(-1+e^{1.2049y}\right)$.

Ενώ, για $u=0$, από τη σχέση $(4.7.2)$, η $G_{\delta}(y/u)$ είναι $G_{\delta}(y/0) = 0.60245\left(1-e^{-2y}\right)$.

Σύμφωνα με τη σχέση $(4.7.3)$, η *προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ.* $\left|U(\mathrm{T})\right|$ ισούται με $g_{\delta}(y/u) = 1.2049e^{-0.7951(u+y)}+1.51541e^{-0.7951u-2y}\left(0.7951-0.7951e^{1.2049y}\right)$,

και για $u=0$, από τη σχέση $(4.7.4)$, προκύπτει η σχέση $g_{\delta}(y/0) = 1.2049e^{-2y}$.

Τέλος, η *προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ.* $\left[U(\mathrm{T}-)+\left|U(\mathrm{T})\right|\right]$, η οποία δίνεται από τη σχέση $(4.9.1)$, για $0 \le u < x$ ισούται με

$$d_\delta(z/u) = -0.186802e^{-0.7951u-6.70809z} + 1.03999e^{4.70809u-4.70809z} + 20.8589e^{-0.7951u-2.22701z}$$
$$-38.5534e^{0.227013u-2.22701z} - 25.5215e^{-0.7951u-2z} + 42.3629e^{-2z},$$

και για $0 < x \le u$, η $d_\delta(z/u)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$d_\delta(z/u) = e^{-0.7951u-12.14z}\left(-0.186802e^{5.43191z} + 20.8589\, e^{9.91299z} - 25.5215e^{10.14z} + 4.8494e^{10.9351z}\right).$$

Ενώ, για $u=0$, η $d_\delta(z/u)$ ισούται με τη σχέση

$$d_\delta(z/0) = 0.853189e^{-6.70809z} - 17.6945e^{-2.22701z} + 16.8414e^{-2z}.$$

Για **δ=0**, οι ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg διαφοροποιούνται καθώς η μια ρίζα μηδενίζεται. Οπότε, με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica και πάλι, για να υπολογίσουμε τις ρίζες αυτές, θα χρησιμοποιούμε την εντολή $\mathrm{Solve[LTk[-cs]\cdot LTf[s]=1,s]//N}$.

Οι ρίζες που προκύπτουν λοιπόν, είναι

$$-R_1 = -0.645751,\ r_1 = 0 \text{ και } r_2 = 4.645751.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 2.5.1, ισχύει $\dfrac{1}{1+b_0} = 1 - \dfrac{\beta\left(2c - \beta E(x)\right)}{c^2 r_2} = 0.677124$.

Από το θεώρημα 4.2.1.2 ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας ισούται με

$$\hat{\psi}(u) = \frac{1}{1+b_0}\frac{1}{s+R_1},$$

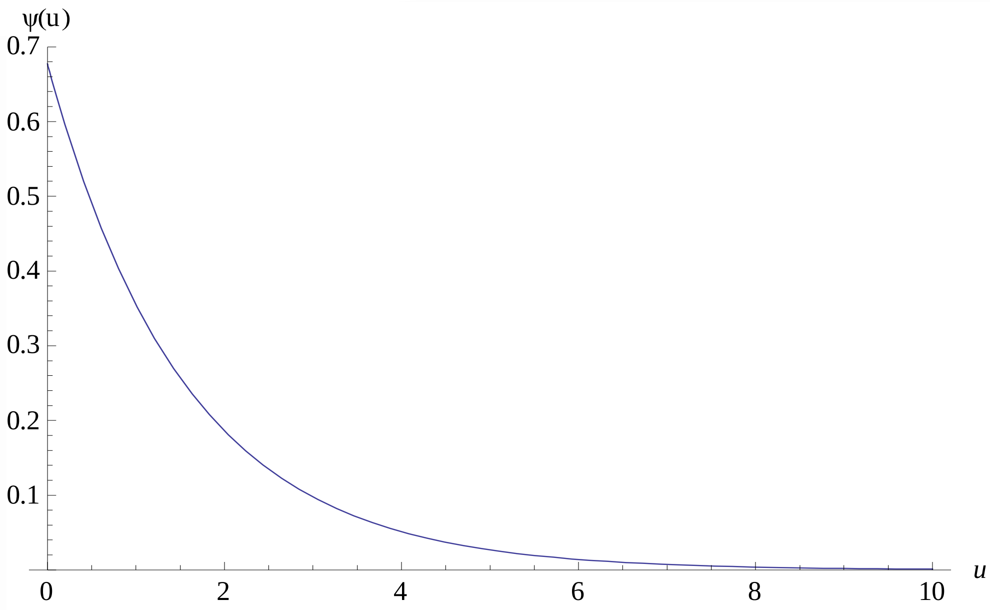
οπότε παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace προκύπτει

$$\psi(u) = \frac{1}{1+b_0}e^{-R_1 u},$$

όπου στο παράδειγμα αυτό ισχύει

$$\psi(u) = 0.677124e^{-0.645751u}.$$

Στην γραφική παράσταση που ακολουθεί παριστάνεται η πιθανότητα χρεοκοπίας.



ΣΧΗΜΑ 5.1.2

Στη συνέχεια, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση θα υπολογίσουμε τις συναρτήσεις που θα τις χρησιμοποιήσουμε για τις από κοινού και περιθώριες συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας. Ισχύει, λοιπόν και σε αυτήν την περίπτωση η σχέση $E_i = \frac{1}{r_i + 2}$. Οπότε για τις ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg έχουμε $E_1 = \frac{1}{r_1 + 2} = 0.5$ και $E_2 = \frac{1}{r_2 + 2} = 0.150472$.

Επιπλέον, η δεξιά ουρά της συνάρτησης κατανομής $\Gamma_i(u)$ ισούται με $\overline{\Gamma}_i(u) = e^{-2u}$, οπότε για τις ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg, θα έχουμε $\overline{\Gamma}_1(u) = \overline{\Gamma}_2(u) = e^{-2u}$.

Από το λήμμα 3.1.1 και τα παραπάνω αποτελέσματα, συμπεραίνουμε ότι η δεξιά ουρά της συνάρτησης κατανομής της τ.μ. Υ ισούται με $\overline{G}_\delta(u) = e^{-2u}$. και η συνάρτησης κατανομής της τ.μ. Υ, είναι $G_\delta(u) = 1 - e^{-2u}$.

Από τη σχέση $(4.4.2)$ η *από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ* $U(\mathrm{T}^-)$ *και* $|U(\mathrm{T})|$ για τον περιορισμό $0 \le u < x$, ισούται με την ακόλουθη σχέση

$$F_0\left(x,y/u\right)=0.677125e^{-0.645751u}-0.2479e^{-0.645751u-6.64575x}+1.21653e^{-4.64575u-6.64575x}$$
$$+2.03137e^{-0.645751u-2x}-3e^{-2x}-0.677123e^{-0.645751u-2y}+3e^{-2x-2y}$$
$$-2.03137e^{-0.645751u-2x-2y}-1.01468\cdot10^{-6}e^{-0.645751u-0.645751y}$$
$$+0.2479e^{-0.645751u-6.64575x+2.64575y}-1.21653e^{4.64575u-6.64575x+2.64575y},$$

και για $0<x\le u$ η $F_0\left(x,y/u\right)$ γράφεται στη μορφή

$$F_0\left(x,y/u\right)=e^{-0.645751u}\begin{pmatrix}0.677123-0.2479e^{-6.64575x}+2.03137e^{-2x}-3.88064e^{-1.35425x}\\+2.03137e^{-2y}-0.61133e^{-2y}-2.03137e^{-2(x+y)}\\+0.2479e^{-6.64575x+2.64575y}+1.78347e^{-1.35425x+2.64575y}\end{pmatrix}.$$

Για $u=0$, η συνάρτηση κατανομής $F_0\left(x,y/u\right)$ είναι ίση με την παρακάτω εξίσωση

$$F_0\left(x,y/0\right)=0.677125+0.968627e^{-6.64575x}-0.968627e^{-2x}-0.968627e^{-2y}$$
$$+0.291503e^{-2y}+0.968627e^{-2(x+y)}-0.968627e^{-6.64575x+2.64575y}.$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τη σχέση $(4.4.9)$, η *από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ.* $U\left(\mathrm{T}^-\right)$ *και* $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ όταν $0\le u<x$ ισούται με

$$f_0\left(x,y/u\right)=e^{-0.645751u-6.64575x-2y}\left(0.9916-4.86611e^{5.2915u}+e^{-4.64575x}\left(-8.1255+12e^{0.645751u}\right)\right),$$

ενώ όταν ισχύει ο περιορισμός $0<x\le u$, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. αυτών, παίρνει τη μορφή

$$f_0\left(x,y/u\right)=e^{-0.645751u-6.64575x-2y}\left(0.9916-8.1255e^{4.64575x}+7.1339e^{5.2915x}\right).$$

Για $u=0$, η $f_0\left(x,y/u\right)$ είναι ίση με τη σχέση

$$f_0\left(x,y/0\right)=e^{-2y}\left(-4.01689e^{-6.70809x}+4.01689e^{-2.22701x}\right).$$

Αν αντικαταστήσουμε τις συναρτήσεις που υπολογίσαμε παραπάνω στη σχέση $(4.6.1)$, τότε η *περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ.* $U\left(\mathrm{T}^-\right)$ για $0\le u<x$ ισούται με

$$H_0\left(x/u\right)=0.677125\,\mathrm{e}^{-0.645751u}+1.09155\,\mathrm{e}^{-3u-6.64575x}-0.133208\,\mathrm{e}^{-0.645751u-6.64575x}$$
$$-0.95834\,\mathrm{e}^{4.64575u-6.64575x}+1.09155\,\mathrm{e}^{-0.645751u-2x}-1.61203\,\mathrm{e}^{-2x},$$

ενώ για $0<x\le u$, η $H_0\left(x/u\right)$ είναι

$$H_0\left(x/u\right)=\mathrm{e}^{-0.645751u-10x}\left(-0.133208\,\mathrm{e}^{3.35425x}+1.09155\,\mathrm{e}^{8x}-3.05551\mathrm{e}^{8.64575x}+2.09717\mathrm{e}^{10x}\right)$$

.Για $u=0$, η συνάρτηση κατανομής $H_0\left(x/u\right)$ είναι ίση με την παρακάτω σχέση

$$H_0\left(x/0\right)=0.677124\left(1+0.768672\mathrm{e}^{-6.64575x}+0.768672\mathrm{e}^{-2x}\right).$$

Η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$, η οποία δίνεται από τη σχέση $(4.6.5)$, όταν $0 \le u < x$ είναι η ακόλουθη

$$h_0\left(x/u\right) = e^{-0.645751u-6.64575x}\left(0.4958 - 2.43305e^{5.2915u} + e^{4.64575x}\left(-4.06275 + 6e^{0.645751u}\right)\right),$$

ενώ για $0 < x \le u$, η $h_0\left(x/u\right)$ δίνεται από τη σχέση

$$h_0\left(x/u\right) = e^{-0.645751u-6.64575x}\begin{pmatrix} 3.29962 - 3.29962e^{4.64575u+0.64751x} - 3.29962e^{0.625751x} \\ -3.29962\,e^{4.64575x} + 6.59923e^{5.2915x} \end{pmatrix}.$$

Για $u = 0$, ισχύει $h_0\left(x/0\right) = 1.93725e^{-2x}\left(1 - e^{-4.64575x}\right)$.

Επίσης, *η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ.* $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $(4.8.1)$, ισούται με

$$G_0\left(y/u\right) = e^{-0.645751u}\left(0.677125 - 0.677123e^{-2y} - 1.01468\cdot 10^{-6}e^{-0.645751y}\right)$$

και για $u = 0$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει η σχέση

$$G_0\left(y/0\right) = 0.677124\left(1 - 1.4305e^{-2y} + 0.430501e^{-2y}\right).$$

Η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$, η οποία δίνεται από τη σχέση $(4.8.3)$, στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι ίση με

$$g_0\left(y/u\right) = e^{-0.645751u}\left(1.35425e^{-2y} + 6.55229\cdot 10^{-7}e^{-0.645751y}\right)$$

και για $u = 0$, προκύπτει

$$g_0\left(y/0\right) = 1.35425e^{-2y} + 6.55229\cdot 10^{-7}e^{-0.645751y}.$$

Τέλος, αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $(4.10.1)$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για τον περιορισμό $0 \le u < x$, *η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ.* $\left[U\left(\mathrm{T}-\right) + \left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|\right]$ δίνεται από τη σχέση

$d_0\left(z/u\right) = e^{-0.645751u-6.64575z}\left(1.74902 + e^{4.64575z}\left(-1.74902 - 8.1255z\right)\right)$, και για τον περιορισμό $0 < x \le u$, ισούται με το παρακάτω αποτέλεσμα

$$d_0\left(z/u\right) = e^{-0.645751u-6.64575z}\left(-0.213442 + 11.0474e^{5.2915z} + e^{4.64575z}\left(-10.834 - 8.1255z\right)\right).$$

Για $u = 0$ ισχύει η σχέση

$$d_0\left(z/0\right) = -8.1255e^{-2z}\left(0.21525\left(1 - e^{-4.64575z}\right) + z\right).$$

5.2 Τα μεγέθη ζημιών ακολουθούν Γάμμα κατανομή

Στην εφαρμογή αυτή, υποθέτουμε ότι τα μεγέθη ζημιών ακολουθούν την κατανομή γάμμα με παραμέτρους $n=2$ και $\lambda=4$ και με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας να δίνεται από τη σχέση $f(x)=16xe^{-4x}$, ενώ και πάλι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων ακολουθούν την κατανομή Erlang(2) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $k(t)=\beta^2 te^{-\beta t}$.

Θέτουμε $c=1$, $\beta=3$, $n=2$ και $\delta=0.07$.

Από τη σχέση $(4.1.1)$ βρίσκουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ. X είναι ίσος με $\hat{f}(s)=\left(\frac{4}{4+s}\right)^2$ και ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ. V_i δίνεται από τη σχέση $\hat{k}(s)=\left(\frac{3}{3+s}\right)^2$.

Για **δ>0**, με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica υπολογίζουμε τις ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $(2.2.3)$, χρησιμοποιώντας την εντολή $\text{Solve}[\text{LTk}[\delta-\text{cs}]\cdot\text{LTf}[\text{s}]=1,\text{s}]//\text{N}$. Οι ρίζες που προκύπτουν είναι

$$-R_1=-5.41436,\quad -R_2=-1.169432 \text{ και } r_1=0.239432,\ r_2=4.48437.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $(2.5.5)$, ισχύει $\frac{1}{1+b_\delta}=1-\frac{2\beta\delta+\delta^2}{c^2 r_1 r_2}=0.604266$.

Από το θεώρημα 4.2.1.1 ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\phi}_{T}(u)=\frac{Q_{m-1}(s)}{(s+R_1)(s+R_2)}.$$

Όμως το πολυώνυμο $Q_{m-1}(s)$ ισούται με τη σχέση

$$Q_{m-1}(s)=\frac{\left[(s+R_1)(s+R_2)-\left(\frac{b_\delta}{1+b_\delta}\right)(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\right]}{s}$$

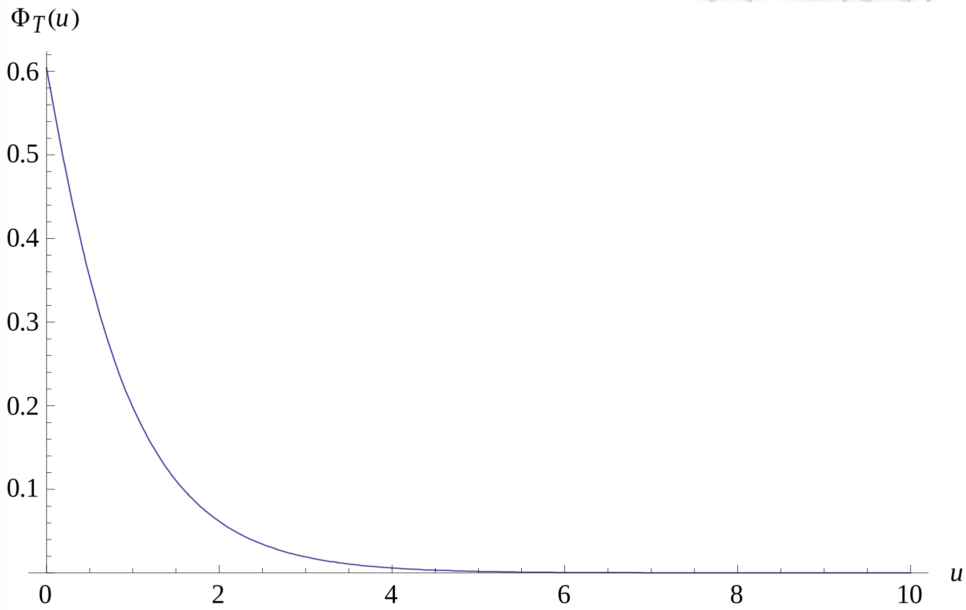
και αφού $\lambda_1=\lambda_2=4$, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας είναι ίσος με

$$\hat{\phi}_{\mathrm{T}}(u)=\frac{\left[(s+R_1)(s+R_2)-\left(\frac{b_\delta}{1+b_\delta}\right)(s+\lambda)^2\right]}{s(s+R_1)(s+R_2)}=\frac{-0.395734\,(4+\mathrm{s})^2+(1.16943+\mathrm{s})(5.41436+\mathrm{s})}{s(1.16943+\mathrm{s})(5.41436+\mathrm{s})}.$$

Παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace προκύπτει η σχέση

$$\phi_{\mathrm{T}}(u)=-0.034443e^{-5.41436u}+0.638712e^{-1.169432u}$$

και απεικονίζεται στη γραφική παράσταση που φαίνεται παρακάτω.



ΣΧΗΜΑ 5.2.1

Στη συνέχεια, προκειμένου να εκφράσουμε τις προεξοφλημένες από κοινού και περιθώριες συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας, θα υπολογίσουμε κάποιες συναρτήσεις. Από τη σχέση $(3.1.2)$, λοιπόν προκύπτει

$$E_i=\int_0^\infty e^{-r_i x}\overline{F}(x)dx=\int_0^\infty e^{-r_i x}e^{-4x}(1+4x)dx=\int_0^\infty e^{-x(r_i+4)}(1+4x)dx,$$

οπότε για τις συγκεκριμένες ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg έχουμε $E_1=\dfrac{1}{r_1+2}=0.458439$ και $E_2=\dfrac{1}{r_2+2}=0.173431$.

Επίσης, από τη σχέση $(3.1.3)$, η δεξιά ουρά της συνάρτησης $\Gamma_i(u)$ ισούται με

$$\overline{\Gamma}_i\left(u\right)=\frac{\int_u^{\infty} e^{-r_i(x-u)}e^{-4x}\left(1+4x\right)dx}{E_i},$$

οπότε για τις ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg, ισχύουν τα αποτελέσματα

$\overline{\Gamma}_1\left(u\right)=2.18132\ \mathrm{e}^{-4u}\left(0.458439+0.943523u\right)$ και

$\overline{\Gamma}_2\left(u\right)=2.18132e^{-4u}\left(0.173431+1.38778\cdot 10^{-17}e^{8.48437u}+0.471455u\right).$

.

Ο υπολογισμός της συνάρτησης κατανομής της τ.μ. Y, $G_\delta\left(u\right)$, η οποία δίνεται από τη σχέση $\left(2.4.6\right)$, γίνεται μέσω του λήμματος 3.1.1, στο οποίο δείξαμε ότι η δεξιά ουρά της συνάρτησης κατανομής μπορεί να γραφεί στη μορφή της σχέσης $\left(3.1.6\right)$. Οπότε σύμφωνα με τα αποτελέσματα των παραπάνω συναρτήσεων, καταλήγουμε

$$\overline{G}_\delta\left(u\right)=\frac{E_1}{E_1-E_2}\overline{\Gamma}_1\left(u\right)+\frac{E_2}{E_1-E_2}\overline{\Gamma}_2\left(u\right)=e^{-4u}\left(-6.47928+3.64186\cdot 10^{-16}e^{8.48437u}-10.33u\right).$$

Άρα, η συνάρτησης κατανομής της τ.μ. Y, είναι

$$G_\delta\left(u\right)=e^{-4u}\left(6.47928+3.64186\cdot 10^{-16}e^{8.48437u}+10.33u\right)..$$

Από τη σχέση $\left(4.3.2\right)$ συμπεραίνουμε ότι η *προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ* $U\left(\mathrm{T}^-\right)$ *και* $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ για τον περιορισμό $0\le u<x$, είναι

$$\begin{aligned}
F_\delta\left(x,y/u\right)=&\,2.52695\begin{pmatrix}-0.0344434e^{-5.41436u}+0.638712e^{-1.1694u}+0.0344434e^{-5.41436(u+y)}\\ -0.638712e^{-1.1694(u+y)}\end{pmatrix}\\
&+18.37e^{-7.75322u-8.48437x}\begin{pmatrix}-0.0188397e^{2.33886u}+0.132111e^{6.58379u}\\ -0.509003e^{12.2376u}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.09066+2.18132xe^{0.48437y}\\ \left(-1.09066-2.18132x-2.18132y\right)\end{pmatrix}\\
&-16.843e^{-7.75322u-8.48437x-3.76057y}\begin{pmatrix}-0.0329847e^{2.33886u}+0.530165e^{6.58379u}\\ -0.892912e^{7.99266u}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1.09066+2.18132xe^{3.76057y}\\ \left(1.09066+2.18132x\right)\text{-}2.18132\mathrm{y}\end{pmatrix}\\
&-1.52695e^{-6.58379u-4y}\left(-0.0344434e^{1.16943u}+0.638712e^{5.41436u}\right)\begin{pmatrix}6.47928+e^{4y}\\ -3.64186\cdot 10^{-16}e^{8.48437y}+10.33y\end{pmatrix}\\
&+e^{-6.58379u-10.5838y}\begin{pmatrix}0.506747e^{1.16943u+5.16943y}-10.4003e^{5.41436u+9.41436y}+8.67712\cdot 10^{-18}e^{1.16943u+15.0682y}\\ -2.81717\cdot 10^{-16}e^{5.41436u+15.0682y}+e^{1.16943u+6.58379y}\left(-0.506747+1.5365y\right)\\ +e^{5.41436u+6.58379y}\left(10.4003+14.237y\right)\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ενώ, όταν ισχύει $0 < x \le u$, τότε η $F_\delta\left(x, y/u\right)$, δίνεται από την παρακάτω σχέση.

$$F_\delta\left(x,y/u\right)=e^{-6.58379u}\begin{pmatrix}-6.58379-0.17716\,e^{1.16943u+2.83057x}+2.28177e^{5.41436u+2.83057x}\\ +1.42495\cdot 10^{-17}e^{5.41436u+8.48437x}-4.388952\cdot 10^{-17}e^{1.16943u+12.7293x}\\ +e^{5.41436u}\left(-2.28177-3.70012x\right)\end{pmatrix}$$

$$-0.929169e^{-6.58379\,u-8.48437x}\begin{pmatrix}-0.0188397e^{1.16943u}+0.132111e^{5.41436u}\\ +0.506601e^{5.41436u+5.6538x}-0.0156037e^{1.16943u+9.89873x}\end{pmatrix}$$

$$\left(1.09066+2.18132x+e^{0.48437y}\left(-1.09066-2.18132x-2.18132y\right)\right)$$

$$-1.52695e^{-6.58379u-4y}\left(-0.0344434e^{1.16943u}+0.638712e^{5.41436u}\right)\begin{pmatrix}-1.37831+e^{4y}\\ +1.84208\cdot 10^{-17}e^{8.48437y}\\ -2.68472y\end{pmatrix}$$

$$+2.45612e^{-6.58379u-4.23943x-3.76057y}\begin{pmatrix}-0.0329847e^{1.16943u}+0.530165e^{5.41436u}+0.108547e^{5.41436u+1.40886x}\\ -0.00145864e^{1.16943u+5.65379x}\end{pmatrix}$$

$$\left(-1.09066-2.18132x+e^{3.76057y}\left(1.09066+2.18132x\right)-2.18132y\right).$$

Για $u=0$, σύμφωνα με τη σχέση $(4.3.3)$, η $F_\delta\left(x, y/u\right)$ γράφεται στην παρακάτω μορφή

$$F_\delta\left(x,y/0\right)=0.604266\begin{pmatrix}1-e^{-2y}+3.64186\cdot 10^{-16}e^{4.48437y}+e^{-8.48437x}\left(-13.1212-26.2423x\right)\\ +e^{-4.23943x}\left(12.0305+24.061x\right)+e^{-4.23943x-3.76057y}\left(-12.0305-24.061x-24.061y\right)\\ +e^{-4y}\left(6.47928+10.33y\right)+e^{-8.48437x+0.48437y}\left(13.1212+26.2423x+26.2423y\right)\end{pmatrix}.$$

Σύμφωνα με τη σχέση $(4.3.9)$, όταν ισχύει $0 \le u < x$, *η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ* $U\left(\mathrm{T}^-\right)$ *και* $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$, ισούται με

$$f_\delta\left(x,y/u\right)=85.7217e^{-7.75322u-8.7238x-4y}\left(x+y\right)\begin{pmatrix}e^{4.48437x}\begin{pmatrix}0.0329847e^{2.33886u}-0.530165e^{6.58379u}\\ +0.892912e^{7.99266u}\end{pmatrix}\\ e^{0.239432x}\begin{pmatrix}-0.0188397e^{2.33886u}+0.132111e^{6.58379u}\\ -0.509003e^{12.2376u}\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

και για $0 < x \le u$, η $f_\delta\left(x, y/u\right)$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση, δηλαδή

$$f_\delta\left(x,y/u\right)=85.7217e^{-6.58379u-8.7238x-4y}(x+y)\begin{pmatrix}-0.0188397e^{3.34191u+0.239432x}+0.132111e^{5.41436u+0.239432x}\\ +0.0329847e^{1.16943u+4.48437x}-0.530165e^{5.41436u+4.48437x}\\ +0.398054e^{5.41436u+5.89323x}-0.0141451e^{1.16943u+10.1382\,x}\end{pmatrix}.$$

Για $u=0$, από τη σχέση $(4.3.10)$, η $f_\delta\left(x, y/u\right)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$f_\delta\left(x,y/0\right)=33.9228e^{-4(x+y)}(x+y)\left(-e^{-4.48437x}+e^{-0.239432x}\right).$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $(4.5.1)$, συμπεραίνουμε ότι *η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ.* $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$, για $0 \le u < x$ ισούται με

$$H_{\delta}\left(x/u\right)=e^{-6.58379u-12.7238x}\left(\begin{array}{l} -0.0344434e^{1.16943u+12.7238x}+0.638712e^{5.41436u+12.7238x} \\ +e^{6.82322u+8.48437x}\left(-0.711277-1.42255x\right) \\ +e^{5.41436u+4.23943x}\left(-0.114778-0.229556\,x\right) \\ +e^{1.16943u+8.48437x}\left(-0.026275-0.0525501x\right) \\ +e^{1.16943u+8.48437x}\left(0.0163679+0.0327358x\right) \\ +e^{5.41436u+8.48437x}\left(0.42232+0.84464x\right) \\ +e^{11.0682u+4.23943x}\left(0.442221+0.884442x\right) \end{array}\right),$$

ενώ για $0 < x \le u$, η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία είναι

$$H_{\delta}\left(x/u\right)=e^{-6.58379u-12.7238x}\left(\begin{array}{l} 0.506747e^{1.16943u+15.5544x}\text{-}10.4003e^{5.41436u+15.5544x} \\ -2.81717\cdot 10^{-16}e^{5.41436u+21.2082x}+8.67712\cdot 10^{-18}e^{1.16943u+25.4531x} \\ +e^{5.41436u+7.07\,x}\left(-0.114778-0.229556\,x\right) \\ +e^{1.16943u+11.3149x}\left(-0.026275-0.0525501x\right) \\ +e^{1.16943u+7.07x}\left(0.0163679+0.0327358x\right) \\ +e^{5.41436u+11.3149x}\left(0.42232+0.84464x\right) \\ +e^{1.16943u+16.9687x}\left(-0.494353+1.56129x\right) \\ +e^{5.41436u+12.7238x}\left(10.0466+13.5297x\right) \end{array}\right).$$

Για $u=0$, από τη σχέση $(4.5.2)$, η $H_{\delta}\left(x/u\right)$ δίνεται από την εξίσωση

$$H_{\delta}\left(x/0\right)=0.604266+e^{-4.23943x}\left(-0.315235-0.630469x\right)+e^{-8.48437x}\left(0.343813+0.687626x\right).$$

Η *προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ.* $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$, η οποία δίνεται από τη σχέση $(4.5.5)$, για $0 \le u < x$ ισούται με

$$h_{\delta}\left(x/u\right)=5.35761e^{-7.75322\,u-8.7238x}\left(1+4x\right)\left(\begin{array}{l} e^{4.48437x}\left(\begin{array}{l} 0.0329847e^{2.33886u}\text{-}0.530165e^{6.58379u} \\ +0.892912e^{7.99266u} \end{array}\right) \\ +e^{0.239432x}\left(\begin{array}{l} -0.0188397e^{2.33886u}+0.132111e^{6.58379u} \\ -0.509003e^{12.2376u} \end{array}\right) \end{array}\right),$$

ενώ όταν $0 < x \le u$, η $h_{\delta}\left(x/u\right)$ γράφεται στην παρακάτω μορφή

$$h_\delta\left(x/u\right)=5.35761e^{-6.58379u-8.7238x}\left(1+4x\right)\begin{pmatrix}-0.0188397e^{1.16943u+0.239432x}+0.132111e^{5.41436u+0.239432x}\\-0.638712e^{9.89873u+1.40886x}+0.0329847e^{1.16943u+4.48437x}\\-0.530165e^{5.41436u+4.48437x}+0.0344434e^{5.6538u+5.65379x}\\+1.03677e^{5.41436u+5.89323x}-0.0485884e^{1.16943u+10.1382x}\end{pmatrix}.$$

Τέλος, για $u=0$, από τη σχέση $\left(4.5.6\right)$, η $h_\delta\left(x/u\right)$ είναι ίση με

$$h_\delta\left(x/0\right)=2.12017e^{-4x}\left(1+4x\right)\left(-e^{4.48437x}+e^{-0.239432x}\right).$$

Στη συνέχεια, για να υπολογίσουμε την *προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας,* χρησιμοποιούμε τη σχέση $\left(4.7.1\right)$ και για $0\le u<x$, έχουμε

$$\begin{aligned}G_\delta\left(y/u\right)=&-0.0344434\,e^{-5.41436u}+0.638712e^{-1.16943u}+0.593784e^{-5.41436u-5.41436y}\\&+12.0143e^{-1.16943u-1.16943y}-1.04766\cdot10^{-17}e^{-5.41436u+4.48437y}\\&+7.34661\cdot10^{-17}e^{-1.16943u+4.48437y}+e^{-5.41436u+4y}\left(-0.16598+2.07979y\right)\\&+e^{-1.16943u-4y}\left(4.08119+4.1623y\right).\end{aligned}$$

Ενώ, για $u=0$, από τη σχέση $\left(4.7.2\right)$, η $G_\delta\left(y/u\right)$ είναι ίση με

$$G_\delta\left(y/0\right)=0.604266-2.20065\cdot10^{-16}e^{4.48437y}+e^{-4y}\left(3.91521+6.24209y\right).$$

Σύμφωνα με τη σχέση $\left(4.7.3\right)$, η *προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ.* $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ ισούται με

$$\begin{aligned}g_\delta\left(y/u\right)=&1.2049e^{-6.58379u-10.5838y}\left(-3.21496e^{1.16943u+5.16943y}\right)+14.0499e^{5.41436u+9.41436y}\\&+4.6981\cdot10^{-17}e^{1.16943u+15.0682y}+3.29449\cdot10^{-16}e^{5.41436u+15.0682y}\\&+e^{5.41436u+6.58379y}\left(-12.1625-16.6492y\right)+e^{1.16943u+6.58379y}\left(2.74371-8.31916\,y\right)\end{aligned}$$

και για $u=0$, από τη σχέση $\left(4.7.4\right)$, προκύπτει

$$g_\delta\left(y/0\right)=e^{-4y}\left(-9.41874-9.86853\cdot10^{-16}e^{8.48437y}-24.9684y\right).$$

Τέλος, η *προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ.* $\left[U\left(\mathrm{T}-\right)+\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|\right]$, η οποία δίνεται από τη σχέση $\left(4.9.1\right)$, για *για* $0\le u<x$ ισούται με

$$d_\delta(z/u) = e^{-6.58379u-16.7238z} z \begin{pmatrix} 11.673e^{1.16943u} - 216.463e^{5.41436u} + 338.905e^{5.41436u} \\ +338.905e^{6.58379u} \end{pmatrix}$$

$$+e^{12.4844z}\left(-11.8092e^{1.16943u} + 189.81e^{5.41436u} + 319.681e^{6.82322u}\right)$$

$$+e^{8.23943z}\left(0.360133e^{1.16943u} + 2.52539e^{5.41436u} + 9.72992e^{11.0682u}\right)$$

και για $0 < x \leq u$, η $d_\delta(z/u)$ δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$d_\delta(z/u) = 0.360133e^{-5.41436u-8.48437z} - 2.52539e^{-1.16943u-8.48437z} - 11.8092e^{-5.41436u-4.23943z}$$

$$+189.81e^{-1.16943u-4.23943z} + 11.673e^{-5.41436u-4z} - 216.463e^{-1.16943u-4z}$$

$$+29.1781e^{-1.16943u-2.83057z} - 0.223949e^{-5.41436u-1.41436z}.$$

.Ενώ, για $u = 0$, η $d_\delta(z/u)$ ισούται με την παρακάτω εξίσωση

$$d_\delta(z/0) = \left(7.56467e^{-8.48437z} - 141.68e^{-4.23943z} + 134.115e^{-4z}\right)z.$$

Όταν **δ=0**, με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica και πάλι, θα υπολογίσουμε τις ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg. Χρησιμοποιώντας, λοιπόν την εντολή $\mathrm{Solve[LTk[-cs]\cdot LTf[s]=1,s]//N}$, οι ρίζες που προκύπτουν είναι $-R_1 = -1$, $-R_2 = -5.424428$ και $r_1 = 0$, $r_2 = 4.424428$.

Από το θεώρημα 2.5.1, ισχύει η σχέση $\dfrac{1}{1+b_0} = 1 - \dfrac{\beta\left(2c - \beta E(x)\right)}{c^2 r_2} = 0.660973$ και

από το θεώρημα 4.2.1.1 ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας ισούται με τη σχέση

$$\hat{\psi}(u) = \frac{Q_{m-2}(s)}{(s+R_1)(s+R_2)}.$$

Όμως το πολυώνυμο $Q_{m-2}(s)$ δίνεται από τη σχέση

$$Q_{m-2}(s) = \frac{\left[(s+R_1)(s+R_2) - \left(\dfrac{b_0}{1+b_0}\right)(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\right]}{s}$$

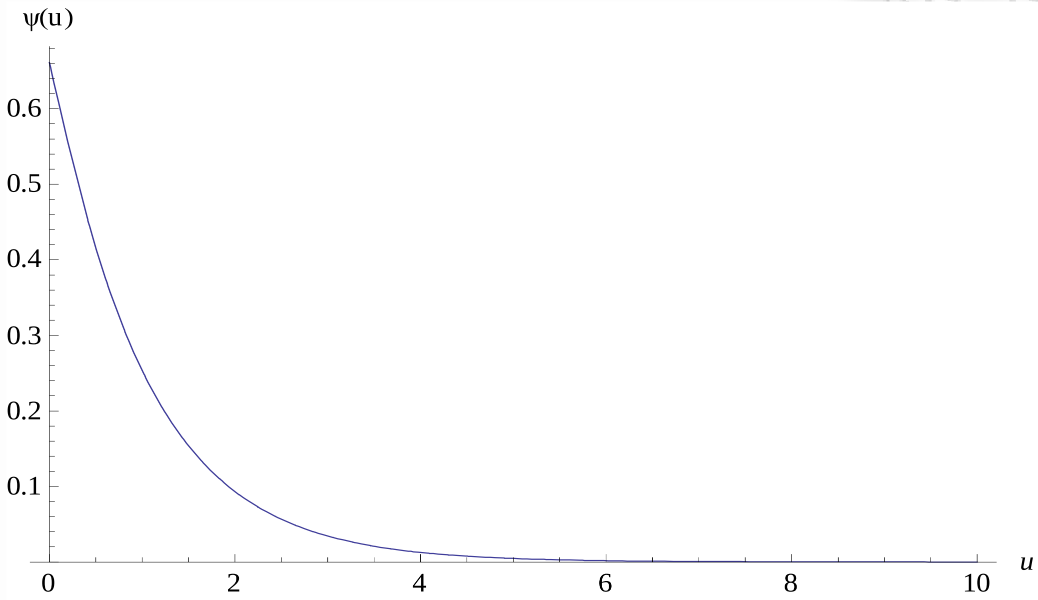
και αφού $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας είναι

$$\hat{\psi}(u) = \frac{\left[(s+R_1)(s+R_2) - \left(\dfrac{b_0}{1+b_0}\right)(s+\lambda)^2\right]}{s(s+R_1)(s+R_2)} = \frac{-0.339027\ (4+\mathrm{s})^2 + (1+\mathrm{s})(5.42443+\mathrm{s})}{s(1+\mathrm{s})(5.42443+\mathrm{s})}.$$

Παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπία

$$\psi(u) = -0.0286618e^{-5.42443u} + 0.689635e^{-1u},$$

η οποία μπορεί να παρασταθεί και στο ακόλουθο σχήμα.



ΣΧΗΜΑ 5.2.2

Στη συνέχεια,. από τη σχέση $(3.1.2)$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$E_i = \int_0^\infty e^{-r_i x}\overline{F}(x)dx = \int_0^\infty e^{-r_i x}e^{-4x}(1+4x)dx = \int_0^\infty e^{-x(r_i+4)}(1+4x)dx,$$

οπότε για τις συγκεκριμένες ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg έχουμε $E_1 = \dfrac{1}{r_1+2} = 0.5$ και $E_2 = \dfrac{1}{r_2+2} = 0.175063$.

Επιπλέον, από τη σχέση $(3.1.3)$, η δεξιά ουρά της συνάρτησης $\Gamma_i(u)$ ισούται με

$$\overline{\Gamma}_i(u) = \frac{\int_u^\infty e^{-r_i(x-u)}e^{-4x}(1+4x)\,dx}{E_i},$$

οπότε για τις ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg, έχουμε τα αποτελέσματα $\overline{\Gamma}_1(u) = 1.09066\ \mathrm{e}^{-4u}(1+2u)$ και

$$\overline{\Gamma}_2(u) = 2.18132e^{-4u}\left(0.173431+1.38778e^{8.48437u}\left(-2.77556\cdot 10^{-17}+5.55112\cdot 10^{-17u}\right)+0.47481u\right).$$

Για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση κατανομής της τ.μ. Y, $G_\delta(u)$, η οποία δίνεται από τη σχέση $(2.4.6)$, θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 3.1.1, οπότε σύμφωνα με τα αποτελέσματα των παραπάνω συναρτήσεων, έχουμε

$$\overline{G}_0(u) = e^{-4u}(-0.205735 - 0.557999u) + e^{4.42443u}\left(3.26185\cdot 10^{-17} - 6.5237\cdot 10^{-17}u\right) + e^{-4u}(1.67826 + 3.35652\,u).$$

Επομένως, η συνάρτησης κατανομής της τ.μ. Y, είναι ίση με

$$\overline{G}_0(u) = 1 + e^{-4u}(-1.67826 - 3.35652u) + e^{4.42443u}\left(-3.26185\cdot 10^{-17} + 6.5237\cdot 10^{-17}u\right) + e^{-4u}(0.205735 + 0.557999\,u).$$

Από τη σχέση $(4.4.2)$ συμπεραίνουμε ότι η *από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ* $U(\mathrm{T}^-)$ *και* $|U(\mathrm{T})|$ για τον περιορισμό $0 \le u < x$, ισούται με

$$\begin{aligned}
F_0(x, y/u) &= 2.94962\begin{pmatrix} -0.0286618e^{-5.42443u} + 0.689635e^{-u} + 0.0286618e^{-5.42443(u+y)} \\ -0.689635e^{-(u+y)} \end{pmatrix} \\
&-1.05038e^{-6.42443u-8.42443x}\left(-0.015786e^{u} + 0.127135e^{5.42443u}\right) \\
&-1.05038e^{-6.42443u-8.42443x}\left(-0.450375e^{10.8489u}\begin{pmatrix} 1.09066 + 2.18132x \\ +e^{0.424428y}(-1.09066 - 2.18132x - 2.18132y) \end{pmatrix}\right) \\
&-1.05038e^{-6.42443u-8.42443x}e^{-6.42443u-10.4244y}\begin{pmatrix} -0.18701e^{u+5y} + 3.05787e^{5.42443u+9.42443y} \\ (-3.05787 - 5.01691y) \\ +e^{u+6.42443y}(0.18701 - 0.439139y) \\ +e^{u+14.8489y}\left(6.14962\cdot 10^{-19} - 1.63764\cdot 10^{-18}y\right) \\ +e^{5.42443u+14.8489y}\left(-3.27905\cdot 10^{-17} + 7.15428\cdot 10^{-17}y\right) \end{pmatrix} \\
&-1.94962\left(-0.0286618e^{-5.42443u} + 0.689635e^{-u}\right)\begin{pmatrix} 1 + e^{-4y}(-1.67826 - 3.35652y) \\ +e^{4.42443y}\left(-3.2618510^{-17} + 6.5237\cdot 10^{-17}\right) \\ +e^{-4y}(0.205735 + 0.557999\,y) \end{pmatrix} \\
&+ 2.99999e^{-4(x+y)}\left(-1 - 0.0286618e^{-5.42443u} + 0.689635e^{-u}\right)\begin{pmatrix} -1.09066 - 2.18132x \\ +e^{4y}(1.09066 + 2.18132x) \\ -2.18132y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

και για $0 < x \le u$, η $F_0(x, y/u)$ δίνεται από τη σχέση που ακολουθεί.

$$F_0\left(x,y/u\right)=e^{-6.42443u-3x}\left(\begin{array}{l}-0.18701e^{u+3x}+3.05787e^{5.42443u+3x}+e^{5.42443u}\left(-3.05787-5.01691x\right)\\+e^{u+4.42443x}\left(0.18701-0.439139x\right)\\+e^{u+12.8489x}\left(6.14962\cdot10^{-19}-1.6376410^{-18}\right)\\+e^{5.42443u+8.42443x}\left(-3.27905\cdot10^{-17}+7.15428\cdot10^{-17}x\right)\end{array}\right)$$

$$-1.05038e^{-6.42443u-8.42443x}\left(\begin{array}{l}-0.015786e^{u}+0.127135e^{5.42443u}\\+0.5625e^{5.42443u+5.42443x}-0.0128758e^{u+9.84886x}\end{array}\right)\left(\begin{array}{l}1.09066+2.18132e^{0.424428y}\\\left(-1.09066-2.18132x-2.18132y\right)\end{array}\right)$$

$$-1.94962\left(-0.0286618e^{-5.42443u}+0.689635e^{-u}\right)\left(\begin{array}{l}1+e^{-4y}\left(-1.67826-3.35652y\right)\\+e^{4.42443y}\left(-3.26185\cdot10^{-17}+6.5237\cdot10^{-17}y\right)\\+e^{-4y}\left(0.205735+0.557999y\right)\end{array}\right)$$

$$+2.99999e^{-4(x+y)}\left(\begin{array}{l}-0.0286618e^{-5.42443u}+0.689635e^{-u}\left(-1.09066-2.18132x\right)\\+e^{-4y}\left(1.09066+2.18132x\right)-2.18132y\end{array}\right)$$

Για $u=0$, η συνάρτηση κατανομής $F_0\left(x,y/u\right)$ είναι ίση με την παρακάτω εξίσωση

$$F_0\left(x,y/0\right)=0.660973\left(\begin{array}{l}1+e^{-8.42443x}\left(0.587603+1.17521\mathrm{x}\right)\\+e^{0.424428\mathrm{y}}\left(-0.587603-1.17521x-1.17521y\right)\end{array}\right)$$

$$+e^{-4y}\left(-1.67826-3.35652y\right)+e^{-4y}\left(\begin{array}{l}0.205735+e^{8.42443y}\left(-3.26185\cdot10^{-17}+6.5237\cdot10^{-17}y\right)\\+0.557999y\end{array}\right)$$

$$+\left(1.67826+e^{4y}\left(-1.67826-3.35652x\right)+3.35652x+3.35652y\right).$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τη σχέση $(4.4.9)$, η *από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ.* $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ *και* $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$ όταν $0\le u<x$ δίνεται από τη σχέση

$$f_0\left(x,y/u\right)=96.0001e^{-6.42443u-8.42443x-4y}\left(x+y\right)\left(\begin{array}{l}-0.015786e^{u}+0.127135e^{5.42443u}-0.450375e^{10.8489u}\\+0.0286618e^{u+4.42443\mathrm{x}}-0.689635e^{5.42443u+4.42443x}\\+e^{5.42443u+4.42443x}\end{array}\right),$$

ενώ όταν ισχύει ο περιορισμός $0<x\le u$, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. αυτών, παίρνει τη μορφή

$$f_0\left(x,y/u\right)=96.0001e^{-6.42443u-8.42443x-4y}\left(x+y\right)\left(\begin{array}{l}-0.015786e^{u}+0.127135e^{5.42443u}\\+0.0286618e^{u+4.42443\mathrm{x}}-0.689635e^{5.42443u+4.42443x}\\+e^{5.42443u+4.42443x}-0.0128758e^{u+9.84886\mathrm{x}}\end{array}\right).$$

Για $u=0$, η $f_0\left(x,y/u\right)$ είναι ίση με

$$f_0\left(x,y/0\right)=85.7217e^{-4(x+y)}\left(x+y\right)\left(-0.395731e^{-4.48437x}+0.395731e^{-0.239432x}\right).$$

Επιπλέον, αν αντικαταστήσουμε τις συναρτήσεις που υπολογίσαμε παραπάνω στη σχέση $(4.6.1)$, τότε η *περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ.* $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$ για $0\le u<x$ ισούται με

$$H_0\left(x/u\right)=-0.0286618\,\mathrm{e}^{-5.42443u}+0.689635\,\mathrm{e}^{-u}+1.57494\mathrm{e}^{-4x}\left(-1-0.0286618\mathrm{e}^{-u}\right)\left(1+2x\right)$$

$$-0.551427\,\mathrm{e}^{-34.8488u-8.42443x}\begin{pmatrix}0.0286618\mathrm{e}^{10.8489u}-0.015786\mathrm{e}^{29.4244u}\\ -0.689635\,\mathrm{e}^{30.4244u}\\ +0.127135\mathrm{e}^{33.8488u}+0.549625\mathrm{e}^{39.2733u}\end{pmatrix}\left(1+2x\right)$$

ενώ για $0<x\le u$, η $H_0\left(x/u\right)$ είναι

$$H_0\left(x/u\right)=\mathrm{e}^{-6.42443u-15.4244x}\begin{pmatrix}-0.18701\mathrm{e}^{u+15.4244x}+3.05787\mathrm{e}^{5.42443u+15.4244x}\\ +\mathrm{e}^{5.42443u+15.4244x}\left(-3.36805-5.63727x\right)+\mathrm{e}^{u+16.8489x}\left(0.19411-0.424939\mathrm{x}\right)\\ +\mathrm{e}^{5.42443u+7x}\left(-0.0701058-0.140212x\right)+\mathrm{e}^{u+11.4244x}\left(-0.0451407-0.0902813x\right)\\ +\mathrm{e}^{u+25.2733x}\left(6.14962\cdot10^{-19}-1.63764\cdot10^{-18}x\right)\\ +\mathrm{e}^{5.42443u+20.8489x}\left(-3.27905\cdot10^{-17}+7.15428\cdot10^{-17}x\right)\\ +\mathrm{e}^{u+7x}\left(0.00870483+0.0174097x\right)+\mathrm{e}^{5.42443u+11.4244x}\left(1.08613+2.17227x\right)\end{pmatrix}$$

.Για $u=0$, η συνάρτηση κατανομής $H_0\left(x/u\right)$ δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$H_0\left(x/0\right)=0.660973\left(\mathrm{e}^{-x}\left(-0.533947-1.06789x\right)+\mathrm{e}^{-8.42443x}\left(0.186949+0.373897x\right)\right)$$

Η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U\left(\mathrm{T}^{-}\right)$, η οποία δίνεται από τη σχέση$\left(4.6.5\right)$, όταν $0\le u<x$, είναι η ακόλουθη

$$h_0\left(x/u\right)=\left(6.00001e^{-6.42443u-8.42443y}\begin{pmatrix}-0.015786e^{u}+0.127135e^{5.42443u}-0.450375e^{10.8489u}\\ -0.689635e^{9.84886u+x}+0.0286618e^{u+4.42443x}\\ +0.0286618\,e^{u+4.42443x}-0.689635\,e^{5.42443u+4.42443x}\\ +e^{6.42443u+4.42443x}\end{pmatrix}\right)\left(1+4x\right),$$

ενώ για $0<x\le u$, η συνάρτηση $h_0\left(x/u\right)$ δίνεται από τη σχέση που ακολουθεί

$$h_0\left(x/u\right)=\left(5.14026e^{-6.42443u-8.42443y}\begin{pmatrix}-0.0286618e^{u}+0.689635e^{5.42443u}-0.689635e^{5.42443u+x}\\-0.689635e^{9.84886u+x}+0.0286618e^{u+4.42443x}\\-0.689635e^{5.42443u+4.42443x}+0.0286618e^{u+5.42443x}\\+1.40793e^{5.42443u+5.42443x}-0.0573237e^{u+9.84886x}\end{pmatrix}\right)(1+4x).$$

Για $u=0$, η συνάρτηση $h_0\left(x/u\right)$ είναι ίση με

$$h_0\left(x/0\right)=0.660973e^{-4x}\left(-0.533947-1.06789x\right)+e^{-8.42443x}\left(0.186949+0.373897x\right).$$

Επίσης, *η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ.* $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\left(4.8.1\right)$, ισούται με

$$G_0\left(y/u\right)=e^{-6.42443u-10.4244y}\begin{pmatrix}-0.102469e^{u+5y}+1.02371e^{5.42443u+9.42443y}-0.0286618e^{u+10.4244y}\\+0.689635e^{5.42443u+10.4244y}+e^{5.42443u+6.42443y}\left(-1.07803-1.25423y\right)\\e^{u+6.42443y}\left(0.104726+0.595519y\right)\\+e^{5.42443u+14.8489y}\left(1.10659\cdot10^{-17}-1.617\cdot10^{-17}y\right)\\+e^{u+14.8489y}\left(-1.20775\cdot10^{-18}+2.00778\cdot10^{-18}y\right)\end{pmatrix}$$

και για $u=0$, είναι ίση με

$$G_0\left(y/0\right)=0.660973\begin{pmatrix}1+e^{-4y}\left(-1.67826-3.35652y\right)+e^{4.42443y}\left(-3.26185\cdot10^{-17}+6.5237\cdot10^{-17}y\right)\\+e^{-4y}\left(0.205735+0.557999y\right)\end{pmatrix}$$

.

Η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $\left|U\left(\mathrm{T}\right)\right|$, η οποία δίνεται από τη σχέση $\left(4.8.3\right)$, στο συγκεκριμένο παράδειγμα ισούται με

$$g_0\left(y/u\right)=e^{-6.42443u-10.4244y}\begin{pmatrix}0.555834e^{u+5y}-1.02371e^{5.42443\,u+9.42443y}\\+e^{5.42443\,u+14.8489y}\left(3.27905\cdot10^{-17}-7.15428\cdot10^{-17}y\right)\\+e^{u+14.8489y}\left(-3.33582\cdot10^{-18}+8.88327\cdot10^{-18}y\right)\\+e^{u+6.42443y}\left(-1.01442+2.38208\mathrm{y}\right)\\+e^{5.42443\,u+6.42443\,y}\left(3.05787+5.01691y\right)\end{pmatrix}$$

και για $u=0$, προκύπτει η σχέση

$$g_0\left(y/0\right)=e^{-8y}\begin{pmatrix}e^{4y}\left(-0.17512-1.47529y\right)+e^{12.4244y}\left(-5.22705\cdot10^{-17}+1.90781\cdot10^{-16}y\right)\\+e^{4y}\left(2.21857+8.87428y\right)\end{pmatrix}.$$

Τέλος, αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $(4.10.1)$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για τον περιορισμό $0 \le u < x$, *η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ.* $\left[U(\mathrm{T}-)+\left|U(\mathrm{T})\right|\right]$ δίνεται από τη σχέση

$$d_0(z/u)=96.0001e^{-4z}\left(0.0286618e^{-5.42443u}-0.689635e^{-u}\right)z\left(0.226018-0.226018e^{-4.42443z}+z\right),$$

και για τον περιορισμό $0 < x \le u$, ισούται με

$$d_0(z/u)=e^{-6.42443u-8.42443z}z\begin{pmatrix}0.342521e^{u}-2.75855e^{5.42443u}+54.0001e^{5.42443u+5.42443\,z}\\ -0.227873e^{u+9.84886\,z}+e^{5.42443u+4.42443\,z}\left(-51.2416-66.2051z\right)\\ +e^{u+4.42443\,z}\left(-0.114648+2.75154z\right)\end{pmatrix}.$$

Για $u=0$, η $d_0(z/u)$ είναι ίση με

$$d_0(z/0)=-63.4536\,e^{-8.42443z}z\left(-0.226018+e^{4.42443z}\left(0.226018+z\right)\right).$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Hans U.Gerber and Elias S.W. Shiu, On the time value of ruin. North American Actuarial Journal, Volume 2, Number 1.

2. X.Sheldon Lin, Gordon E. Willmot (1999), Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory. Insurance: Mathematics and Economics 25, 63-84.

3. David D. Dickson, Christian Hipp (1998), Ruin Probabilities for Erlang(2) risk processes. Insurance: Mathematics and Economics 22, 251-262.

4. David D. Dickson, Christian Hipp (2001), On the time to ruin for Erlang(2) risk processes. Insurance: Mathematics and Economics 29, 333-334.

5. Yebin Cheng , Qihe Tang, Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin in the erlang(2) risk process. North American Actuarial Journal, Volume 7, Number 1.

6. Shuanming Li, Jose Garrido (2004), On ruin for Erlang(n) risk process. Insurance: Mathematics and Economics 34, 391-408.

7. Li-Juan Sun (2005), The expected penalty at ruin in the Erlang (2) risk process. Statistics & Probability Letters 72, 205-217.

8. Cary Chi-Liang Tsai, Li-juan Sun (2004), On the discounted distribution function for the Erlang(2) risk process. Insurance: Mathematics and Economics 35, 5-19.