ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

Παναγιώτης Τ. Μπάφας

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Οκτώβριος 2009

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

Παναγιώτης Τ. Μπάφας

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Οκτώβριος 2009

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτής Καθηγητής Αγιακλόγλου Χρήστος (Επιβλέπων)
- Καθηγητής Κούτρας Μάρκος
- Επίκουρος Καθηγητής Πιτσέλης Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS

PRICING OF FINANCIAL DERIVATIVES

By
Panagiotis T. Mpafas

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece

October 2009

Στην οικογένειά μου…

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Χρήστο Αγιακλόγλου για την ανάθεση του θέματος, την εμπιστοσύνη την οποία μου έδειξε καθώς και για την πολύτιμη συνεισφορά του κατά την συγγραφή της παρούσης διπλωματικής εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την συμπαράστασή της σε ολόκληρη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Τα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα είναι εργαλεία σταθεροποίησης, εξομάλυνσης και περιορισμού των κινδύνων των οικονομικών συναλλαγών (αντιστάθμιση κινδύνου – hedging). Σκοπός της εργασίας είναι η αναφορά των πιο γνωστών Παραγώγων Χρηματοοικονομικών Προϊόντων και η παρουσίαση των δύο κυριοτέρων μοντέλων τιμολόγησης που είναι: (α) το *Διωνυμικό μοντέλο* (τιμολόγηση σε διακριτό χρόνο) και (β) το μοντέλο *Black and Scholes* (τιμολόγηση σε συνεχή χρόνο). Ειδικότερα, η εργασία αυτή θα επικεντρωθεί στην μελέτη της συμπεριφοράς του μοντέλου Black and Scholes, που αποτελεί το κλασικό μοντέλο αναπαράστασης μιας χρηματοοικονομικής αγοράς. Επίσης, θα γίνει εφαρμογή του Διωνυμικού μοντέλου για την τιμολόγηση ενός παραγώγου χρηματοοικονομικού προϊόντος πάνω σε εικονικά δεδομένα καθώς και τιμολόγηση παραγώγου με το μοντέλο των Black and Scholes πάνω σε πραγματικά δεδομένα που αφορούν την μετοχή της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος. Ταυτόχρονα θα παρουσιαστούν και οι αντίστοιχες στρατηγικές εξασφάλισης (εξασφάλιση Δέλτα).

Abstract

Financial derivatives are tools used for stabilizing, smoothing and reducing the risks of the financial deals (credit squeeze-hedging). The purpose of this essay is to provide an account of the most prominent financial derivative products and to present the two main pricing models: a) the Binomial model used for pricing in discrete time and b) the Black and Scholes model, used for pricing in continuous time. Specifically, this essay will focus on the study of the behavior of the Black and Scholes model, which constitutes the most usual model for the modeling of an option. Moreover, the Binomial model will be applied for the pricing of a financial derivative product based on virtual data as well as for the pricing of a derivative using the Black and Scholes model based on actual data concerning the stock of the National Bank of Greece. At the same time the corresponding delta hedging strategies will be presented.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΣΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κάθε εμπορεύσιμο αντικείμενο οποιασδήποτε μορφής εμπεριέχει κινδύνους όταν πρόκειται να ασκηθεί η εμπορευσιμότητά του. Ένας από τους πιο σημαντικούς κινδύνους προέρχεται από την αβεβαιότητα της αξίας του αντικειμένου στο μέλλον. Στην προσπάθεια να προβλεφθεί η αξία του αντικειμένου, κατά τις τελευταίες δεκαετίες έχουν εφευρεθεί και προταθεί διάφορα υποδείγματα προβλεψιμότητας (*forecasting models*). Σχεδόν πάντοτε, όμως, υπάρχει απόκλιση από την πραγματική τιμή που θα έχει το αντικείμενο στο μέλλον. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την ύπαρξη του κινδύνου εμπορευσιμότητας λόγω της μεταβλητότητας των τιμών (*price volatility*). Τα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα (*derivatives*) παρέχουν τη δυνατότητα προστασίας από τέτοιου είδους κινδύνους.

Ειδικότερα, τα παράγωγα αποτελούν ένα σύνολο διαφορετικών χρηματοοικονομικών προϊόντων, τα οποία έχουν ένα τουλάχιστον κοινό χαρακτηριστικό, η αξία τους βασίζεται, αντλείται, παράγεται ή παρακολουθεί την αξία άλλων χρηματοοικονομικών αξιών, όπως συναλλάγματος, επιτοκίων, μετοχών, ομολόγων, χρηματιστηριακών δεικτών ή ακόμη και πιστώσεων, που καλούνται αξίες. Επομένως, τα παράγωγα μέσα (όπως αντιλαμβάνεται κανείς και από την ίδια τη λέξη “παράγωγα”) είναι χρηματοοικονομικά εργαλεία που δημιουργούνται ή διαφορετικά παράγονται από τους συμμετέχοντες στην αγορά, έτσι ώστε να μπορούν να διαπραγματευτούν και να διαχειριστούν πιο αποτελεσματικά το περιουσιακό στοιχείο επάνω στο οποίο είναι βασισμένα. Οι αξίες τους παράγονται εξ’ ολοκλήρου από το υποκείμενο μέσο-αγαθό επάνω στο οποίο είναι βασισμένα. Το υποκείμενο μέσο, όπως έχει ήδη αναφερθεί, μπορεί να είναι ένα εμπόρευμα ή αγαθό όπως το σιτάρι, το βαμβάκι ή ένα χρηματοοικονομικό προϊόν όπως ένα ομόλογο, μία μετοχή, ξένο συνάλλαγμα ή ένας οικονομικός / μετοχικός δείκτης (π.χ. S&P 500).

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μία ιστορική αναδρομή των παραγώγων για το πότε και πως χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά, καθώς και για την πορεία τους μέχρι σήμερα. Ακόμη θα γίνει αναφορά για τους τρόπους κατηγοριοποίησης των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων όπως επίσης και για τα είδη αυτών. Στο τέλος του κεφαλαίου θα δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στα δικαιώματα προαίρεσης όπου θα αναπτυχθούν τα είδη αυτών και θα μελετηθεί αναλυτικά η συμπεριφορά τους.

1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα (*derivatives*) δεν αποτελούν καινοτομία των σύγχρονων αγορών κεφαλαίου και χρήματος. Η χρήση τους μετατίθεται πριν από πολλούς αιώνες. Ιστορικές πηγές αναφέρουν ότι οι Αρχαίοι Φοίνικες αλλά και οι Αρχαίοι Έλληνες πωλούσαν ολόκληρα φορτία πλοίων προθεσμιακά, δηλαδή με προκαθορισμένη τιμή, αλλά και παράδοση στο μέλλον.

Μία περιγραφή του πρώτου χρηματοοικονομικού δικαιώματος παρατίθεται στα γραπτά του Αριστοτέλη, ο οποίος διηγείται την ιστορία του Θαλή, του φτωχού φιλόσοφου από τη Μίλητο, που κατασκεύασε μια χρηματοοικονομική διαδικασία, η οποία εμπεριέχει μία αρχή παγκόσμιας εφαρμογής. Αιτία αυτής της “κατασκευής” ήταν το γεγονός ότι ο κόσμος χλεύαζε τον Θαλή, λέγοντας ότι η έλλειψη πλούτου που τον διακατέχει είναι απόδειξη ότι η φιλοσοφία είναι άχρηστη και χωρίς καμία πρακτική αξία! Προφανώς ο Θαλής ήξερε και γνώριζε τη δύναμη και τη σημαντικότητα της φιλοσοφίας και έκανε σχέδια για να αποδείξει και στους υπόλοιπους την σοφία και την ευφυΐα του.

Ο Θαλής έχοντας προγνώσει, λόγω των ευνοϊκών καιρικών συνθηκών ότι η ελαιοπαραγωγή θα ήταν καλή το επόμενο φθινόπωρο, “επένδυσε” τα λίγα χρήματά του από το χειμώνα ως προκαταβολή για τη μίσθωση όλων των ελαιοτριβείων της Χίου και της Μιλήτου. Έτσι, πέτυχε την αποκλειστική χρήση των ελαιοτριβείων όταν η σοδειά θα ήταν έτοιμη. Επειδή ήταν χειμώνας και δεν υπήρχαν άλλοι ενδιαφερόμενοι και η σοδειά ήταν μελλοντική (άρα κανείς δεν γνώριζε εάν το επόμενο φθινόπωρο η σοδειά θα ήταν πλούσια ή φτωχή), αλλά και επειδή τα ελαιοτριβεία επιθυμούσαν να αντισταθμίσουν την πιθανότητα ενός μικρού εισοδήματος, ο Θαλής διαπραγματεύτηκε πολύ ευνοϊκούς όρους μισθώσεως (καταφέρνοντας δηλαδή να πετύχει πολύ χαμηλές τιμές). Το φθινόπωρο και ενώ υπήρχε μεγάλη ζήτηση για ελαιοτριβεία ο Θαλής τα υπεκμίσθωσε στην τιμή που επιθυμούσε.

Με τον προαναφερθέντα τρόπο ο γνωστός φιλόσοφος αγόρασε ένα είδος παραγώγου (πιο συγκεκριμένα ένα δικαίωμα προαίρεσης) από τους ιδιοκτήτες των ελαιοτριβείων δίνοντάς τους ως προκαταβολή μέρος του μισθώματος για να “κλειδώσει” το μελλοντικό μίσθωμα των ελαιοτριβείων σε συγκεκριμένη τιμή. Το ερχόμενο φθινόπωρο άσκησε το δικαίωμά του μισθώνοντας τα ελαιοτριβεία στη συμφωνηθείσα τιμή και το κέρδος του ήταν η διαφορά μεταξύ του μισθώματος που κατέβαλε στους ιδιοκτήτες των ελαιοτριβείων και του μισθώματος που του κατέβαλαν οι ελαιοπαραγωγοί. Σε αυτό το σημείο πρέπει να προσθέσουμε ότι ο Θαλής δεν ήταν υποχρεωμένος να εξασκήσει το δικαίωμά του. Εάν η σοδειά του λαδιού δεν ήταν καλή, τότε ο Θαλής θα άφηνε το συμβόλαιο να εκπνεύσει αχρησιμοποίητο και θα περιόριζε τη ζημία του στα χρήματα που είχε καταβάλλει ως εγγύηση.

Με αυτόν τον τρόπο ο αρχαίος φιλόσοφος δημιούργησε περιουσία. Ταυτόχρονα απέδειξε στον κόσμο ότι οι φιλόσοφοι μπορούν εύκολα να πλουτίσουν αλλά δεν είναι αυτή η φιλοδοξία τους! Έτσι, άφησε στην ιστορία την εξάσκηση του πρώτου γνωστού χρηματοοικονομικού δικαιώματος 2.500 χρόνια πριν.

Αρχέγονες μορφές παραγώγων ήταν γνωστές και στο μεσαίωνα και την αναγέννηση στην Ιταλία. Η χρησιμοποίησή τους ήταν απαραίτητη για την εξασφάλιση από τους υψηλούς κινδύνους του ναυτικού εμπορίου. Οι ιδιοκτήτες των πλοίων λάμβαναν δάνεια από τους χρηματοδότες τους και συμφωνούσαν να τα αποπληρώσουν μόνο εφόσον επέστρεφαν τα πλοία τους από τα ταξίδια τους (αυτά τα δάνεια αποτέλεσαν τους προγόνους των ναυτικών ασφαλειών).

Στη συνέχεια κατά τον 17^{ο} αιώνα η αναγέννηση των γραμμάτων και των τεχνών στην Ευρώπη, έφερε μεταξύ των άλλων και νεωτερισμούς στις αγορές κυρίως των Κάτω Χωρών (του Βελγίου και της Ολλανδίας) που αποτελούσαν το κέντρο του Ευρωπαϊκού εμπορίου. Στην Ολλανδία και πιο συγκεκριμένα στο Χρηματιστήριο του Άμστερνταμ άρχισε η διαπραγμάτευση παραγώγων επί κάθε λογής εμπορευμάτων. Εκεί, αρχικά οι παραγωγοί τουλίπας προσπαθούσαν να διασφαλίσουν τον κίνδυνο μειωμένης παραγωγής. Οι συναλλαγές σε προθεσμιακά συμβόλαια (*futures*) χρονολογούνται από την εποχή της “τουλιπομανίας” τη δεκαετία του 1630.

Τα παράγωγα εμφανίζονται και κατά τον 18^{ο} αιώνα στην Αγγλία με τις μετοχές της Νότιας Θάλασσας. Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα κάνουν την εμφάνισή τους και στις Η.Π.Α.. Ωστόσο, οι προσπάθειες διασφάλισης του κινδύνου απέτυχαν, διότι πολλοί συμβαλλόμενοι δεν εκπλήρωσαν τις υποχρεώσεις τους. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα τη χρεοκοπία πολλών επενδυτών.

Η θεσμοποίηση των παραγώγων και η ραγδαία εξέλιξη τους άρχισε πριν από περίπου 35 χρόνια στο πλαίσιο της αμερικανοποίησης της παγκόσμιας οικονομίας. Η αγορά ομαλοποιήθηκε όταν διασφαλίστηκε και η εκκαθάριση των συμβολαίων στις Η.Π.Α. το 1973, με τη δημιουργία του χρηματιστηρίου Chicago Board Options Exchange, γνωστό και ως CBOE, στο Σικάγο και του Options Clearing Corporation. Με την καθιέρωση κανόνων συγκεκριμένης ορολογίας και την εξάλειψη του κινδύνου ασυνέπειας των συμβαλλόμενων μερών, η αγορά αναπτύχθηκε ταχύτατα. Στη συνέχεια ιδρύονται το New York Stock Exchange, το American Stock Exchange, καθώς και τα χρηματιστήρια του Montreal, του Sydney και του Toronto. Τα περισσότερα από τα υπόλοιπα χρηματιστήρια παραγώγων ιδρύθηκαν τις δεκαετίες του '80 και του '90.

Τα τελευταία 20 χρόνια οι αγορές παραγώγων απογειώθηκαν. Ξεκινώντας από την Αμερική, γρήγορα εδραιώθηκαν και στην Ευρώπη. Ακολουθώντας αυτές τις εξελίξεις η ελληνική αγορά, κατά το έτος 1999, καθιέρωσε τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (*Σ.Μ.Ε. ή Futures*) και τα Δικαιώματα Προαίρεσης (*Δ.Π. ή Options*) ως απαραίτητα εργαλεία για την υγιή ανάπτυξή της.

Η λειτουργία της Αγοράς Παραγώγων του Χρηματιστηρίου Αθηνών Α.Ε. προσφέρει στην ελληνική οικονομία διεύρυνση των επιλογών των επενδυτών με νέα χρηματοοικονομικά προϊόντα, παροχή μέσων για επιμερισμό, συγκέντρωση και αντιστάθμιση κινδύνου, μείωση του κόστους συναλλαγών, αύξηση της ρευστότητας στην αγορά, παροχή νέων εργαλείων για την επίλυση συμβατικών προβλημάτων και πληροφόρησης, ενώ κάνει αποτελεσματικότερη την κατανομή των οικονομικών πόρων. Κρίσιμος παράγοντας για την ομαλή λειτουργία και ανάπτυξη της αγοράς των παραγώγων στην χώρα μας ήταν η δημιουργία και η οργάνωση της Εταιρείας Εκκαθάρισης Συναλλαγών επί Παραγώγων (ΕΤΕΣΕΠ), η οποία ανταποκρίνεται σε όλες τις διεθνείς προδιαγραφές παρόμοιων φορέων και διαθέτει επαρκείς εξασφαλίσεις έναντι των κινδύνων του συστήματος. Ο συγκεκριμένος φορέας είναι ζωτικής σημασίας για την ανάληψη και διαχείριση πιστωτικών κινδύνων και κινδύνων από αθέτηση υποχρεώσεων αντισυμβαλλομένου.

Γενικά, τα χαρακτηριστικά της χρηματιστηριακής αγοράς είναι η μεταβλητότητα των τιμών της προσφοράς και της ζήτησης. Τα παράγωγα προϊόντα δημιουργήθηκαν για την αντιστάθμιση του κινδύνου που προέρχεται από τους παραπάνω παράγοντες. Οι επενδυτές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα παράγωγα για να μειώσουν τον κίνδυνο των επενδύσεων τους. Ο κάτοχος μετοχών προστατεύεται από την πτώση των τιμών, ο δανειολήπτης από την αύξηση του επιτοκίου, ο μεταφορέας από την αύξηση των τιμών του πετρελαίου και ο εισαγωγέας από την μεταβολή των συναλλαγματικών ισοτιμιών, ανάμεσα σε άλλους. Οι τράπεζες χρησιμοποιούν τα παράγωγα προϊόντα για να αντισταθμίσουν τους χρηματοοικονομικούς κινδύνους που έχουν αναλάβει. Ακόμα, τα παράγωγα προϊόντα παρέχουν πληροφόρηση στην αγορά για τη μελλοντική κατεύθυνση του υποκείμενου προϊόντος στο οποίο αναφέρονται.

1.3 ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Παραπάνω έγινε μία προσπάθεια να δοθεί ένας ενιαίος ορισμός που να καλύπτει το σύνολο των χρηματοοικονομικών παραγώγων. Ωστόσο κάτι τέτοιο είναι ιδιαίτερα δύσκολο λόγω των πολλών και διαφορετικών ειδών που υπάρχουν. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να υπάρχουν πολλοί και διαφορετικοί τρόποι ταξινόμησης αυτών.

Κάποιοι από αυτούς είναι:

- ανάλογα με το είδος των δικαιωμάτων και των υποχρεώσεων που αποκτούν οι συμβαλλόμενοι,
- ανάλογα με το είδος της υποκείμενης αξίας,
- ανάλογα με το εάν διαπραγματεύονται σε οργανωμένη αγορά (χρηματιστήριο) και
- ανάλογα με το εάν ο διακανονισμός τους είναι εις είδος ή εις χρήμα.

Από τους πιο σημαντικούς και ορθούς διαχωρισμούς είναι αυτός που γίνετε ανάλογα με το είδος των δικαιωμάτων και των υποχρεώσεων που αποκτούν οι συμβαλλόμενοι. Σύμφωνα με αυτόν προκύπτουν οι εξής κατηγορίες χρηματοοικονομικών παραγώγων:

1. Συμβάσεις ανταλλαγής

Στις συμβάσεις ανταλλαγής (*swaps*) οι συμβαλλόμενοι συμφωνούν να ανταλλάξουν προκαθορισμένες σειρές πληρωμών εντός τακτών χρονικών διαστημάτων. Στην αγορά υπάρχουν τόσα είδη συμβάσεων ανταλλαγής όσα και υποκείμενα, δηλαδή συμβάσεις ανταλλαγής επιτοκίων, μετοχών, ομολόγων, χρηματιστηριακών δεικτών, συναλλάγματος και πιστωτικών κινδύνων.

2. Χρηματοοικονομικά δικαιώματα προαιρέσεως

Διακρίνονται στις εξής δύο κατηγορίες:

➢ Χρηματοοικονομικά δικαιώματα προαιρέσεως αγοράς

Στα χρηματοοικονομικά δικαιώματα προαιρέσεως αγοράς (*call options*) οι συμβαλλόμενοι συμφωνούν, ότι ο αγοραστής αποκτά έναντι τιμήματος (*ασφάλιστρο, premium ή margin*) το δικαίωμα με μονομερή του δήλωση προς τον αντισυμβαλλόμενό του να αγοράσει τη συμφωνηθείσα υποκείμενη αξία σε ορισμένη τιμή και στη συνέχεια να την παραλάβει ή να τη λάβει την αξία της και ο πωλητής αναλαμβάνει την υποχρέωση να πωλήσει τη συμφωνηθείσα υποκείμενη αξία στον αγοραστή σε ορισμένη τιμή και να του την παραδώσει ή να καταβάλλει την αξία της, υπό την αίρεση, ότι ο αγοραστής θα έχει προβεί στην προαναφερθείσα μονομερή του δήλωση προς τον πωλητή.

➢ Χρηματοοικονομικά δικαιώματα προαιρέσεως πώλησης

Στα χρηματοοικονομικά δικαιώματα προαιρέσεως πώλησης (*put options*) οι συμβαλλόμενοι συμφωνούν, ότι ο πωλητής αποκτά έναντι τιμήματος το δικαίωμα με μονομερή του δήλωση προς τον αγοραστή να του πωλήσει τη συμφωνηθείσα υποκείμενη αξία σε ορισμένη τιμή και στη συνέχεια να του την παραδώσει ή να του καταβάλει την αξία της και ο αγοραστής αναλαμβάνει την υποχρέωση να αγοράσει τη συμφωνηθείσα υποκείμενη αξία από τον πωλητή σε ορισμένη τιμή και να την παραλάβει ή να τη λάβει την αξία της, υπό την αίρεση, ότι ο πωλητής θα έχει προβεί στην προαναφερθείσα μονομερή του δήλωση προς τον αγοραστή.

Ο συμβαλλόμενος που έχει το χρηματοοικονομικό δικαίωμα προαιρέσεως μπορεί να το ασκήσει με μονομερή του δήλωση προς τον αντισυμβαλλόμενό του είτε σε ορισμένη μόνο ημερομηνία και μάλιστα εντός προκαθορισμένης ώρας, οπότε γίνετε λόγος για *χρηματοοικονομικά δικαιώματα προαιρέσεως αμερικάνικου τύπου (American style options)* είτε εντός ορισμένης προθεσμίας οπότε γίνεται λόγος για *χρηματοοικονομικά δικαιώματα προαιρέσεως ευρωπαϊκού τύπου (European style options),* είτε σε ορισμένες μόνο ημερομηνίες, οπότε γίνετε λόγος για *χρηματοοικονομικά δικαιώματα προαιρέσεως τύπου βερμούδων (Bermuda style options)*.

3. Προθεσμιακές συμβάσεις

Προθεσμιακές συμβάσεις (*Σ.Μ.Ε. – Futures* , *Π.Σ. – Forwards*) είναι διμερείς συμβάσεις, στις οποίες οι συμβαλλόμενοι συμφωνούν, ότι ο πωλητής θα πωλήσει στον αγοραστή και θα του παραδώσει τη συμφωνηθείσα υποκείμενη αξία ή την αξία αυτού και ο αγοραστής θα αγοράσει από τον πωλητή και θα παραλάβει από αυτόν τη συμφωνηθείσα υποκείμενη αξία ή την αξία αυτού σε ορισμένη ημερομηνία (*ημερομηνία διακανονισμού, settlement date*) έναντι ορισμένου τιμήματος.

Επίσης, ξεχωριστό ενδιαφέρον παρουσιάζει και ο διαχωρισμός των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων ανάλογα με το εάν διαπραγματεύονται σε οργανωμένη αγορά (χρηματιστήριο) ή όχι. Οι κύριες διαφορές μεταξύ χρηματιστηριακών και εξωχρηματιστηριακών συμβάσεων παραγώγων είναι δύο:

1 Οι χρηματιστηριακές συμβάσεις παραγώγων αφορούν έναν περιορισμένο αριθμό και είδος παραγώγων, δηλαδή αυτά που έχουν εισαχθεί προς διαπραγμάτευση στο αντίστοιχο χρηματιστήριο.

2 Στις χρηματιστηριακές συμβάσεις παραγώγων ο κίνδυνος μη εκπληρώσεως αντιμετωπίζεται αφενός με το σύστημα εκκαθάρισης των συναλλαγών της Εταιρείας Εκκαθαρίσεως Συναλλαγών επί Παραγώγων (γνωστή ως ΕΤ.Ε.Σ.Ε.Π.) και αφετέρου με την υποχρέωση παροχής περιθωρίου ασφάλισης, ασφαλειών (*margin requirements*). Ενώ στις εξωχρηματιστηριακές παραγώγων ο κίνδυνος αυτός αντιμετωπίζεται με τον (κυρίως εκκαθαριστικό) συμψηφισμό και με την παροχή εμπράγματων ασφαλειών.

Στην πρώτη κατηγορία των χρηματιστηριακών συμβάσεων παραγώγων ανήκουν τα Χρηματοοικονομικά δικαιώματα προαιρέσεως (*options*) και τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (*Σ.Μ.Ε. – futures*), ενώ στην δεύτερη κατηγορία εξωχρηματιστηριακών συμβάσεων παραγώγων ανήκουν οι Συμβάσεις ανταλλαγής (*swaps*) και τα Προθεσμιακά Συμβόλαια (*Π.Σ. - forwards*).

1.4 ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΠΡΟΑΙΡΕΣΕΩΣ

Ένα συμβόλαιο δικαιώματος προαίρεσης (*option*), όπως ήδη έχει αναφερθεί, είναι μία συμφωνία η οποία παρέχει στον αγοραστή το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει ή να πωλήσει το υποκείμενο αγαθό σε μία καθορισμένη τιμή, κατά τη διάρκεια μίας χρονικής περιόδου ή σε μία συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία. Τα δικαιώματα προαίρεσης αποτελούν παράγωγα προϊόντα που βασίζονται σε μετοχές, δείκτες, επιτόκια, συνάλλαγμα ή άλλους τίτλους και χρησιμοποιούνται για την αντιστάθμιση του κινδύνου που αντιμετωπίζει ένας επενδυτής, καθώς και για την διεύρυνση των επενδυτικών του επιλογών. Δημιουργούνται από εξωτερικούς παράγοντες (συνήθως χρηματιστήρια που εξειδικεύονται στα δικαιώματα) αντί από εταιρείες.

1.4.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ

Υπάρχουν δύο είδη δικαιωμάτων προαίρεσης:

- Δικαιώματα αγοράς (call option)
- Δικαιώματα πώλησης (put option)

Σε κάθε ένα από τα δύο παραπάνω είδη διακρίνονται οι αγοραστές και οι πωλητές, οπότε προκύπτουν οι συμμετέχοντες στην αγορά δικαιωμάτων που είναι οι εξής:

1 Αγοραστής του δικαιώματος αγοράς (*long call holder*).
2 Πωλητής του δικαιώματος αγοράς (*short call holder*).
3 Αγοραστής του δικαιώματος πώλησης (*long put holder*).
4 Πωλητής του δικαιώματος πώλησης (*short put holder*).

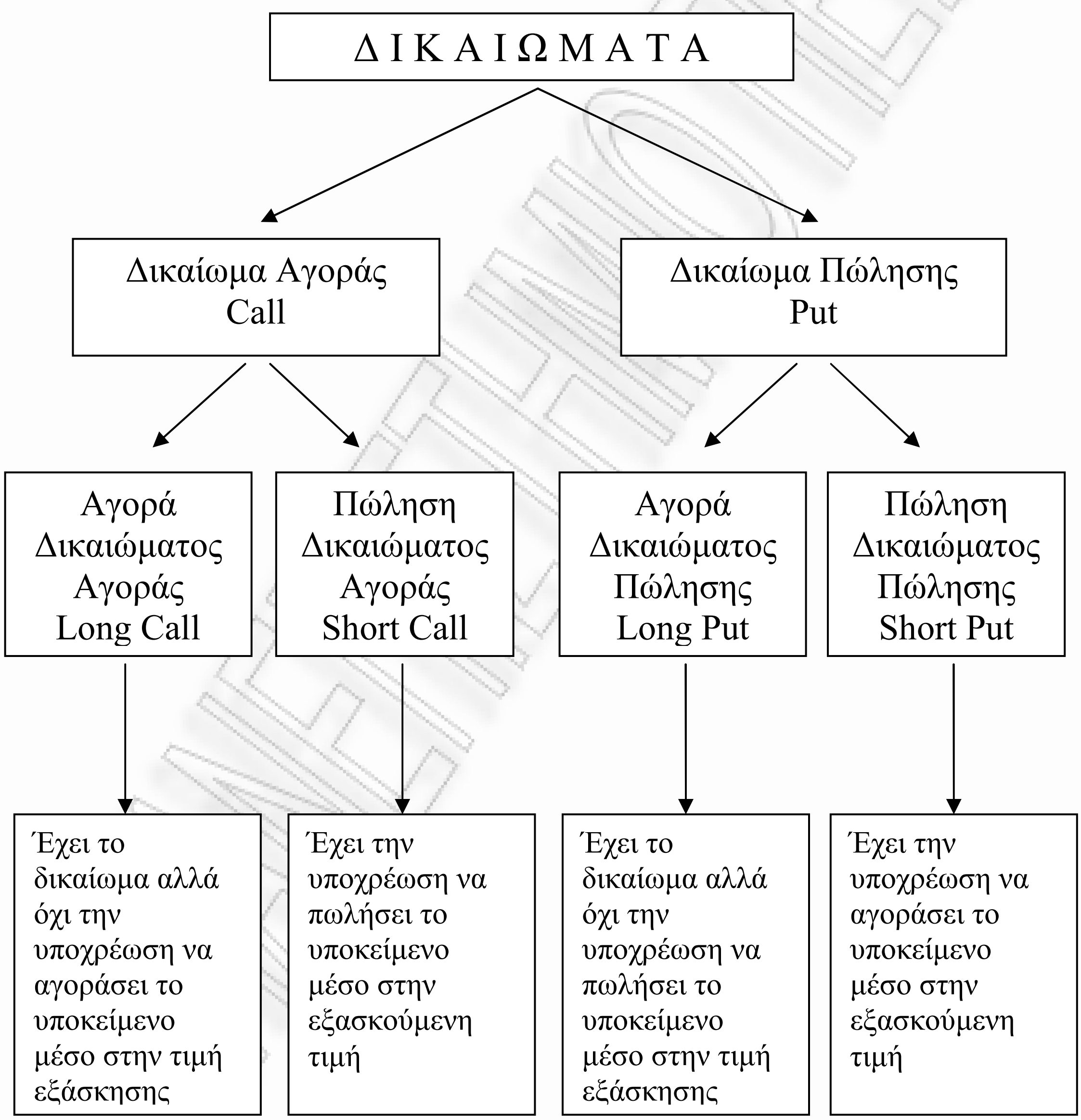
Ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς ή πώλησης μπορεί να επιλέξει (ανάλογα με το συμφέρον του, έτσι όπως αυτό καθορίζεται από την κατάσταση της αγοράς):

- Να ασκήσει το δικαίωμα του, αγοράζοντας ή πωλώντας τον υποκείμενο τίτλο στην τιμή άσκησης,
- Να κλείσει τη θέση του, λαμβάνοντας την αντίστροφη θέση στην αγορά,
- Να αφήσει το δικαίωμά του να εκπνεύσει.

Αντίστοιχα ο πωλητής του δικαιώματος αγοράς ή πώλησης υποχρεούται:

- Να πραγματοποιήσει την υποχρέωση που έχει αναλάβει (εισπράττοντας το ασφάλιστρο) απέναντι στον αγοραστή, αγοράζοντας ή πωλώντας τον υποκείμενο τίτλο στην τιμή άσκησης, όταν αυτό του ζητηθεί ή
- Να κλείσει τη θέση του, λαμβάνοντας την αντίστροφη θέση στην αγορά.

Στο Διάγραμμα 1.1 παρουσιάζεται συνοπτικά η λειτουργική διάρθρωση των δικαιωμάτων. Σε αυτό διακρίνονται οι δύο προαναφερθείσες κατηγορίες αγοράς και πώλησης και οι αντίστοιχοι “holders” αυτών. Επίσης, δίνεται μία σύντομη ερμηνεία της θέσεως για τον κάθε “holder”:



Πηγή: Δημητρόπουλος (1999)

Διάγραμμα 1.1 :
Λειτουργική διάρθρωση των δικαιωμάτων

Για κάθε δικαίωμα, ο αγοραστής πληρώνει στον πωλητή την αντίστοιχη τιμή (αξία ή ασφάλιστρο) του δικαιώματος (*option premium ή margin*). Εάν ο αγοραστής έχει τη δυνατότητα να ασκήσει το δικαίωμά του, ανά πάσα στιγμή, από την ημερομηνία σύναψης του συμβολαίου έως τη λήξη, τότε τα δικαιώματα ονομάζονται *Αμερικανικού τύπου*. Εάν η άσκηση του δικαιώματος μπορεί να γίνει μόνο στη λήξη, τότε τα δικαιώματα αυτά ονομάζονται *Ευρωπαϊκού τύπου*.

1.4.2 ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ

Τα δικαιώματα διαπραγματεύονται εντός των χρηματιστηριακών αγορών με συγκεκριμένα και τυποποιημένα χαρακτηριστικά. Με αυτόν τον τρόπο δίνεται η δυνατότητα στη συγκεκριμένη αγορά να έχει υψηλό αγοραστικό ενδιαφέρον και μεγάλη ρευστότητα. Η τυποποίηση αναφέρεται στα παρακάτω στοιχεία :

- Υποκείμενο αγαθό ή τίτλος

Αποτελεί τον τίτλο (*underlying asset*) επί του οποίου συνάπτεται το δικαίωμα, το οποίο ο κάτοχος του δικαιώματος δικαιούται να αγοράσει ή να πωλήσει.

- Τιμή άσκησης

Τιμή άσκησης (*strike price*) είναι η προσυμφωνημένη τιμή στην οποία ασκείται ένα δικαίωμα, η οποία δεν αλλάζει κατά τη διάρκεια του συμβολαίου.

- Μέγεθος συμβολαίου

Συνήθως, τα δικαιώματα αφορούν ένα συγκεκριμένο μέγεθος συμβολαίου (*contract size*). Για παράδειγμα, ένα συμβόλαιο επί μετοχών μπορεί να αποτελείται από 100 μετοχές το καθένα.

- Διάρκεια

Η διάρκεια (*duration – time to maturity*) αποτελεί το χρονικό διάστημα εντός του οποίου μπορεί να ασκηθεί το δικαίωμα. Μπορεί να είναι ένας μήνας ή ένας χρόνος, ή όπως προκαθορίζεται από κάθε χρηματιστήριο. Μετά τη λήξη αυτού του χρονικού πλαισίου, και τα δύο μέρη αποδεσμεύονται από τις υποχρεώσεις τους.

- Κλάση

Τα δικαιώματα του ίδιου είδους, δηλαδή ή αγοράς ή πώλησης που προέρχονται από τον ίδιο υποκείμενο τίτλο, είναι δικαιώματα της ίδιας κλάσης (*class*).

- Σειρά δικαιωμάτων

Τα δικαιώματα είναι της ίδιας σειράς (*series*), όταν είναι ίδιας κλάσης και έχουν την ίδια τιμή άσκησης και την ίδια ημερομηνία λήξης.

1.5 ΑΝΑΛΥΣΗ ΘΕΣΕΩΝ ΤΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

Μέχρι στιγμής έγινε αναφορά για τα δύο είδη των δικαιωμάτων προαίρεσης, το δικαίωμα αγοράς και το δικαίωμα πώλησης, καθώς και για τους αγοραστές και πωλητές αυτών. Σύμφωνα με τις τάσεις της αγοράς ο κάθε επενδυτής μπορεί να λάβει την αντίστοιχη θέση είτε αγοράζοντας ένα δικαίωμα αγοράς ή πώλησης είτε πωλώντας ένα δικαίωμα αγοράς ή πώλησης. Στη συνέχεια, θα γίνει μία πιο λεπτομερής αναφορά στις θέσεις τις οποίες μπορεί να λάβει ένας επενδυτής.

1.5.1 ΑΓΟΡΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ

Ο αγοραστής του συγκεκριμένου δικαιώματος έχει το δικαίωμα (και όχι την υποχρέωση) να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο από τον πωλητή στην προσυμφωνημένη τιμή άσκησης κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος, εάν και μόνο εάν το συμφέρει. Λόγω της πλεονεκτικής θέσης στην οποία βρίσκεται ο αγοραστής, έναντι του πωλητή, πληρώνει στον πωλητή την τιμή του δικαιώματος ως αποζημίωση – ασφάλιστρο (*margin*) για την υποχρέωση που εκείνος αναλαμβάνει.

Ο επενδυτής λαμβάνει μία τέτοια θέση όταν πιστεύει πως η τιμή του υποκείμενου τίτλου, π.χ. μίας μετοχής, θα σημειώσει άνοδο, αγοράζοντας ένα δικαίωμα πάνω σε αυτή αντί να αγοράσει την ίδια τη μετοχή. Οπότε εάν η τιμή άσκησης του δικαιώματος είναι χαμηλότερη από την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου, ο επενδυτής θα ασκήσει το δικαίωμά του και θα αποκομίσει κέρδος αγοράζοντας τη μετοχή σε χαμηλότερη τιμή από αυτή που πωλείται στο χρηματιστήριο. Στην αντίθετη περίπτωση, που οι προσδοκίες του δεν επαληθευτούν και η τιμή μειωθεί, δεν θα ασκήσει το δικαίωμά του και θα "χάσει" το ποσό που κατέβαλλε ως ασφάλιστρο για να αγοράσει από τον πωλητή το δικαίωμα.

Η συνάρτηση του κέρδους, κατά την χρονική στιγμή της λήξης του δικαιώματος, για τον αγοραστή του δικαιώματος αγοράς θα είναι:

$$f(T)=\begin{cases}(S_T-K)-C, & S_T>K\\ -C, & S_T\leq K\end{cases} \tag{1.1}$$

όπου :

C: το ασφάλιστρο

S_T: η τιμή της μετοχής στον χρόνο T, χρόνος λήξης του δικαιώματος

K: η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος

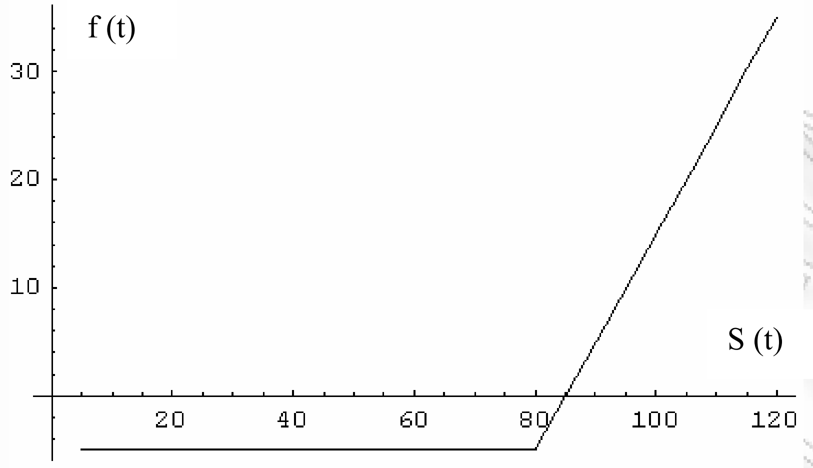
Παράδειγμα 1.1

Έστω ότι ένας επενδυτής πιστεύει ότι η τιμή της μετοχής της εταιρείας Α θα σημειώσει άνοδο. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι S_0=8 ευρώ. Επειδή ο επενδυτής δεν επιθυμεί να επενδύσει (ή δεν έχει το αρχικό κεφάλαιο για να το κάνει) 80 ευρώ για να αγοράσει 10 μετοχές Α, επιλέγει να αγοράσει ένα δικαίωμα αγοράς των 10 συγκεκριμένων μετοχών με τιμή εξάσκησης K=8 ευρώ ανά μετοχή και ημερομηνία λήξης σε ένα μήνα. Γι αυτό το δικαίωμα θα πληρώσει (τη στιγμή της σύναψης του συμβολαίου) ασφάλιστρο, στον πωλητή, C=1 ευρώ ανά μετοχή, δηλαδή συνολικά 10 ευρώ.

Περίπτωση Ι: Οι προσδοκίες του επενδυτή επαληθεύτηκαν και η τιμή της μετοχής σημείωσε άνοδο, έχοντας (ένα μήνα μετά) τρέχουσα τιμή S_T=12 ευρώ ανά μετοχή. Ο επενδυτής θα εξασκήσει το δικαίωμά του και το κέρδος του θα είναι:

[(12 – 8) – 1] = 1 ευρώ ανά μετοχή και συνολικά 30 ευρώ.

Περίπτωση ΙΙ: Οι προσδοκίες του επενδυτή δεν επαληθεύτηκαν και η τιμή της μετοχής σημείωσε κάθοδο, έχοντας (ένα μήνα μετά) τρέχουσα τιμή S_T=4 ευρώ ανά μετοχή. Ο επενδυτής δεν θα εξασκήσει το δικαίωμά του και η ζημία του θα ισούται με το ασφάλιστρο που πλήρωσε (10 ευρώ). Σε περίπτωση που είχε αγοράσει την μετοχή και αυτή σημείωνε κάθοδο έχοντας (ένα μήνα μετά) τρέχουσα τιμή 4 ευρώ ανά μετοχή τότε η ζημία του θα ήταν : 8 – 4 = 4 ευρώ ανά μετοχή και συνολικά 40 ευρώ.



Διάγραμμα 1.2
Αγορά δικαιώματος αγοράς

Στο Διάγραμμα 1.2 δίνεται η συνάρτηση του κέρδους ως συνάρτηση της τιμής της μετοχής. Στον κάθετο άξονα βρίσκονται οι τιμές της συνάρτησης κέρδους, δηλαδή το κέρδος του αγοραστή, και στον οριζόντιο άξονα βρίσκονται οι πιθανές τιμές της μετοχής στον χρόνο λήξης του δικαιώματος. Σύμφωνα με το παράδειγμα, εάν επαληθευτούν οι προσδοκίες του επενδυτή και η τιμή της μετοχής κινηθεί ανοδικά πάνω από την τιμή εξάσκησης, που είναι 8 ευρώ ανά μετοχή, τότε ο αγοραστής θα εξασκήσει το δικαίωμά του. Όσο μεγαλύτερες τιμές παίρνει η τιμή της μετοχής τόσο μεγαλύτερο είναι το κέρδος για τον επενδυτή. Στην αντίθετη περίπτωση, που δεν επαληθευτούν οι προσδοκίες του επενδυτή και η τιμή της μετοχής κινηθεί καθοδικά κάτω από την τιμή εξάσκησης, των 8 ευρώ ανά μετοχή, τότε ο αγοραστής δεν θα εξασκήσει το δικαίωμά του. Έτσι θα έχει σταθερό αρνητικό κέρδος (ζημία) και ίσο με -1 ευρώ ανά μετοχή όσο μικρές τιμές και εάν πάρει η τιμή της μετοχής.

Σύμφωνα με το παράδειγμα, η τιμή εξάσκησης Κ είναι 8 ευρώ ανά μετοχή και το μέγεθος του συμβολαίου είναι 10 μετοχές. Όπως φαίνεται και στο γράφημα διακρίνονται οι 2 περιπτώσεις:

- *άσκησης του δικαιώματος* από τον αγοραστή εάν ισχύει $S_T > K$ ή $S_T > 80$ (για το σύνολο του συμβολαίου) οπότε η συνάρτηση του κέρδους είναι γνησίως αύξουσα. Όσο μεγαλύτερη η τιμή της μετοχής τόσο μεγαλύτερο το κέρδος του επενδυτή και
- *μη άσκησης του δικαιώματος* από τον αγοραστή εάν ισχύει $S_T < K$ ή $S_T < 80$ (για το σύνολο του συμβολαίου) οπότε η συνάρτηση του κέρδους είναι σταθερή και αρνητική, δηλαδή ο επενδυτής έχει ζημία, ίση με το ασφάλιστρο (C=10 ευρώ). Η

ζημία είναι σταθερή ανεξάρτητα από το πόσο μικρή μπορεί να είναι η τιμή της μετοχής.

1.5.2 ΠΩΛΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ

Ο πωλητής του δικαιώματος αγοράς αναλαμβάνει την υποχρέωση να πωλήσει στον αγοραστή τον υποκείμενο τίτλο στην καθορισμένη τιμή εξάσκησης, όταν εκείνος το απαιτήσει, ασκώντας το δικαίωμά του. Οι προσδοκίες του είναι αντίθετες από αυτές του αγοραστή. Ο πωλητής αναμένει ότι δεν θα υπάρξει άνοδος, οπότε και δέχεται να αναλάβει την υποχρέωση να πωλήσει τον υποκείμενο τίτλο εισπράττοντας το ασφάλιστρο κινδύνου.

Ο πωλητής κρίνει ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου, για παράδειγμα μίας μετοχής, θα μειωθεί, και μάλιστα κάτω από την τιμή άσκησης. Εάν επιβεβαιωθούν οι προσδοκίες του, ο αγοραστής του δικαιώματος δε θα ασκήσει το δικαίωμά του, οπότε ο πωλητής θα έχει αποκομίσει κέρδος ίσο με το ασφάλιστρο. Εναλλακτικά, εάν η τιμή της μετοχής ανεβεί, τότε ο πωλητής ενδέχεται να ζημιωθεί απεριόριστα, όσο δυνητικά μπορεί να ανεβεί η τιμή της μετοχής σε σχέση με την τιμή άσκησης, εφόσον θα πρέπει να πωλήσει τις μετοχές στην τιμή άσκησης, ενώ η τρέχουσα τιμή τους είναι πολύ υψηλότερη. Ο πωλητής δεν θα κερδίσει ή ζημιωθεί, εάν η τρέχουσα τιμή ισούται με την τιμή άσκησης συν τη τιμή του δικαιώματος.

Η συνάρτηση του κέρδους, κατά την χρονική στιγμή της λήξης του δικαιώματος, για τον πωλητή του δικαιώματος αγοράς θα είναι:

$$f(T)=\begin{cases} C-(S_T-K), & S_T>K \\ C, & S_T\le K \end{cases} \tag{1.2}$$

όπου :

C: το ασφάλιστρο

S_T: η τιμή της μετοχής στον χρόνο T, χρόνος λήξης του δικαιώματος

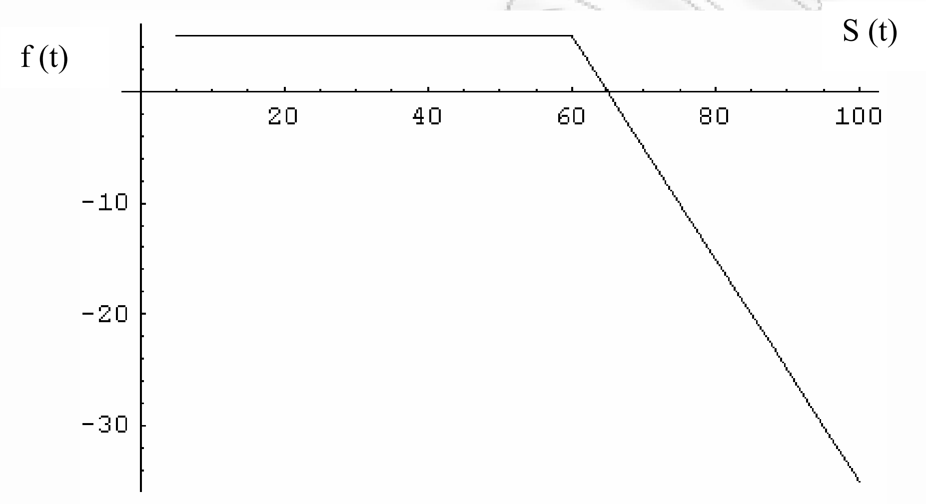
K: η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος

Παράδειγμα 1.2

Έστω ότι ένας επενδυτής πιστεύει ότι η τιμή της μετοχής της εταιρείας Α θα σημειώσει κάθοδο ή θα παραμείνει σταθερή. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι S_0=5 ευρώ. Αποφασίζει να πωλήσει ένα δικαίωμα αγοράς 10 μετοχών με τιμή άσκησης K=6 ευρώ ανά μετοχή και λαμβάνει, για την υποχρέωση που αναλαμβάνει, ασφάλιστρο C=0.5 ευρώ ανά μετοχή, δηλαδή συνολικά 5 ευρώ.

Περίπτωση Ι: Στην ημερομηνία λήξης η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι S_T=4 ευρώ οπότε ο αγοραστής δεν ασκεί το δικαίωμά του και ο πωλητής αποκομίζει κέρδος ίσο με το ασφάλιστρο.

Περίπτωση ΙΙ: Στην ημερομηνία λήξης η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι S_T=7 ευρώ οπότε ο αγοραστής ασκεί το δικαίωμά του και ο πωλητής είναι υποχρεωμένος να πωλήσει στην τιμή των 6 ευρώ ανά μετοχή, ενώ στο χρηματιστήριο η τιμή της μετοχής είναι υψηλότερη.



Διάγραμμα 1.3
Πώληση δικαιώματος αγοράς

Στο Διάγραμμα 1.3 δίνεται η συνάρτηση του κέρδους ως συνάρτηση της τιμής της μετοχής. Στον κάθετο άξονα βρίσκονται οι τιμές της συνάρτησης κέρδους, δηλαδή το κέρδος του πωλητή, και στον οριζόντιο άξονα βρίσκονται οι πιθανές τιμές της μετοχής στον χρόνο λήξης του δικαιώματος. Σύμφωνα με το παράδειγμα, εάν επαληθευτούν οι προσδοκίες του επενδυτή και η τιμή της μετοχής κινηθεί ανοδικά πάνω από την τιμή εξάσκησης, που είναι 8 ευρώ ανά μετοχή, τότε ο αγοραστής θα εξασκήσει το δικαίωμά του. Όσο μεγαλύτερες τιμές παίρνει η τιμή της μετοχής τόσο μεγαλύτερο είναι το κέρδος για τον επενδυτή. Στην αντίθετη περίπτωση, που δεν επαληθευτούν οι προσδοκίες του επενδυτή και η τιμή της μετοχής κινηθεί καθοδικά κάτω από την τιμή εξάσκησης, των 8 ευρώ ανά μετοχή, τότε ο αγοραστής δεν θα εξασκήσει το δικαίωμά του. Έτσι θα έχει σταθερό αρνητικό κέρδος (ζημία) και ίσο με -1 ευρώ ανά μετοχή όσο μικρές τιμές και εάν πάρει η τιμή της μετοχής.

Σύμφωνα με το παράδειγμα, η τιμή εξάσκησης Κ είναι 6 ευρώ ανά μετοχή και το μέγεθος του συμβολαίου είναι 10 μετοχές. Όπως φαίνεται και στο γράφημα διακρίνονται οι 2 περιπτώσεις:

- *άσκησης του δικαιώματος* από τον αγοραστή εάν ισχύει $S_T > K$ ή $S_T > 60$ (για το σύνολο του συμβολαίου) οπότε η συνάρτηση του κέρδους για τον πωλητή θα είναι γνησίως φθίνουσα. Όσο μεγαλύτερη η τιμή της μετοχής τόσο μεγαλύτερη η ζημία του επενδυτή και
- *μη άσκησης του δικαιώματος* από τον αγοραστή εάν ισχύει $S_T < K$ ή $S_T < 80$ (για το σύνολο του συμβολαίου) οπότε η συνάρτηση του κέρδους είναι σταθερή και θετική, δηλαδή ο επενδυτής έχει σταθερό κέρδος ίσο με το ασφάλιστρο που εισέπραξε (C=5 ευρώ). Το κέρδος είναι σταθερό ανεξάρτητα από το πόσο μικρή μπορεί να είναι η τιμή της μετοχής.

1.5.3 ΑΓΟΡΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΠΩΛΗΣΗΣ

Ο κάτοχος του δικαιώματος πώλησης δικαιούται να πωλήσει τον υποκείμενο τίτλο στην τιμή άσκησης στη διάρκεια ή κατά τη λήξη του δικαιώματος. Για να αγοράσει αυτό το δικαίωμα, δίνει στον πωλητή την τιμή του δικαιώματος, το ασφάλιστρο. Ο επενδυτής που αγοράζει ένα δικαίωμα πώλησης προσδοκεί ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου θα μειωθεί σημαντικά και θα μπορέσει να ασκήσει το δικαίωμα του και να αποκομίσει κέρδος, πουλώντας τον υποκείμενο τίτλο, για παράδειγμα μία μετοχή, σε υψηλότερη τιμή στον πωλητή του δικαιώματος. Εναλλακτικά, εάν η τιμή της μετοχής είναι υψηλότερη από την τιμή άσκησης, ο αγοραστής θα επιλέξει να αφήσει το δικαίωμα να εκπνεύσει.

Το κέρδος του αγοραστή είναι περιορισμένο, δεδομένου ότι η τιμή της μετοχής δεν μπορεί να είναι μικρότερη του μηδενός. Αντίστοιχα, η ζημία του είναι και αυτή περιορισμένη στο ποσό που κατέβαλλε ως ασφάλιστρο στον πωλητή του δικαιώματος.

Η συνάρτηση του κέρδους, κατά την χρονική στιγμή της λήξης του δικαιώματος, για τον πωλητή του δικαιώματος αγοράς θα είναι :

$$f(T)=\begin{cases}(K-S_T)-C\,, & K>S_T\\ -C\,, & K\le S_T\end{cases} \qquad (1.3)$$

όπου:

C: το ασφάλιστρο

S_T: η τιμή της μετοχής στον χρόνο T, χρόνος λήξης του δικαιώματος

K: η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος

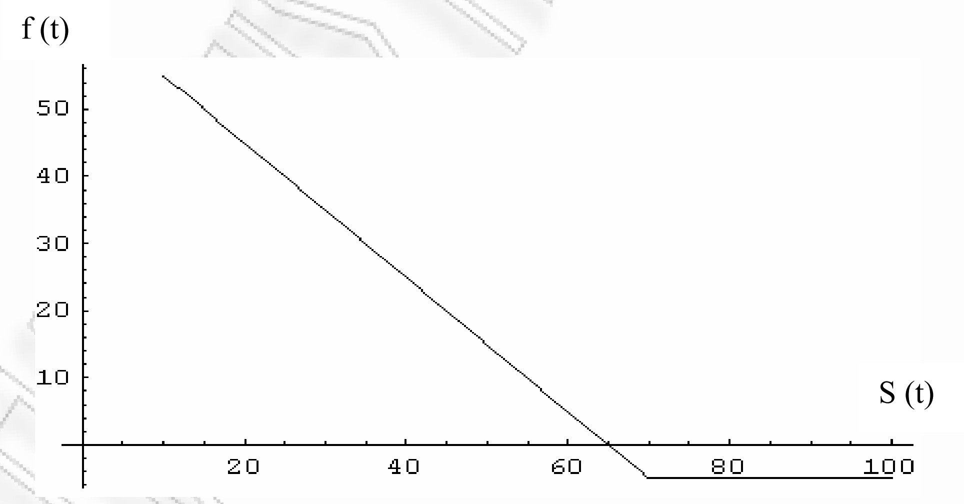
Παράδειγμα 1.3

Έστω ότι ένας επενδυτής πιστεύει ότι η τιμή της μετοχής της εταιρείας A θα σημειώσει σημαντική κάθοδο. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι S_0=8 ευρώ. Αποφασίζει να αγοράσει ένα δικαίωμα πώλησης 10 μετοχών με τιμή άσκησης K=7 ευρώ ανά μετοχή καταβάλλοντας ασφάλιστρο C=0.5 ευρώ ανά μετοχή, δηλαδή συνολικά 5 ευρώ.

Περίπτωση I: Στην ημερομηνία λήξης η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι S_T=4 ευρώ οπότε ο αγοραστής ασκεί το δικαίωμά του και αποκομίζει κέρδος ίσο με :

(7 – 4) – 0.5 = 2.5 ευρώ ανά μετοχή και συνολικά 25 ευρώ.

Περίπτωση II: Στην ημερομηνία λήξης η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι S_T=10 ευρώ οπότε ο αγοραστής δεν ασκεί το δικαίωμά του και σημειώνει ζημία ίση με το ασφάλιστρο που κατέβαλλε (5 ευρώ).



Διάγραμμα 1.4
Αγορά δικαιώματος πώλησης

Στο Διάγραμμα 1.4 δίνεται η συνάρτηση του κέρδους ως συνάρτηση της τιμής της μετοχής. Στον κάθετο άξονα βρίσκονται οι τιμές της συνάρτησης κέρδους, δηλαδή το κέρδος του αγοραστή, και στον οριζόντιο άξονα βρίσκονται οι πιθανές τιμές της μετοχής στον χρόνο λήξης του δικαιώματος. Σύμφωνα με το παράδειγμα, εάν επαληθευτούν οι προσδοκίες του επενδυτή και η τιμή της μετοχής κινηθεί ανοδικά πάνω από την τιμή εξάσκησης, που είναι 8 ευρώ ανά μετοχή, τότε ο αγοραστής θα εξασκήσει το δικαίωμά του. Όσο μεγαλύτερες τιμές παίρνει η τιμή της μετοχής τόσο μεγαλύτερο είναι το κέρδος για τον επενδυτή. Στην αντίθετη περίπτωση, που δεν επαληθευτούν οι προσδοκίες του επενδυτή και η τιμή της μετοχής κινηθεί καθοδικά κάτω από την τιμή εξάσκησης, των 8 ευρώ ανά μετοχή, τότε ο αγοραστής δεν θα εξασκήσει το δικαίωμά του. Έτσι θα έχει σταθερό αρνητικό κέρδος (ζημία) και ίσο με -1 ευρώ ανά μετοχή όσο μικρές τιμές και εάν πάρει η τιμή της μετοχής.

Σύμφωνα με το παράδειγμα, η τιμή εξάσκησης Κ είναι 7 ευρώ ανά μετοχή και το μέγεθος του συμβολαίου είναι 10 μετοχές. Όπως φαίνεται και στο γράφημα διακρίνονται οι 2 περιπτώσεις:

- *άσκησης του δικαιώματος* από τον αγοραστή εάν ισχύει $S_T < K$ ή $S_T < 70$ (για το σύνολο του συμβολαίου) οπότε η συνάρτηση του κέρδους είναι γνησίως αύξουσα. Όσο μικρότερη η τιμή της μετοχής τόσο μεγαλύτερο το κέρδος του επενδυτή και
- *μη άσκησης του δικαιώματος* από τον αγοραστή εάν ισχύει $S_T > K$ ή $S_T > 70$ (για το σύνολο του συμβολαίου) οπότε η συνάρτηση του κέρδους είναι σταθερή και αρνητική, δηλαδή ο επενδυτής έχει ζημία, ίση με το ασφάλιστρο (C=5 ευρώ). Η ζημία είναι σταθερή ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλη μπορεί να είναι η τιμή της μετοχής.

1.5.4 ΠΩΛΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΠΩΛΗΣΗΣ

Ο πωλητής του δικαιώματος πώλησης προσδοκεί ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου θα παραμείνει σταθερή ή θα αυξηθεί και αναλαμβάνει την υποχρέωση να αγοράσει από τον αγοραστή τις μετοχές στην συγκεκριμένη τιμή άσκησης, λαμβάνοντας ως αντίτιμο γι' αυτή την υποχρέωση την τιμή του δικαιώματος. Εάν οι προσδοκίες του επαληθευτούν και η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι υψηλότερη από την τιμή άσκησης, ο αγοραστής δεν θα έχει λόγο να ασκήσει το δικαίωμά του, οπότε ο πωλητής θα αποκομίσει κέρδος ίσο με την τιμή του δικαιώματος. Αντίθετα, εάν οι προσδοκίες του δεν επαληθευτούν και η τιμή του υποκείμενου τίτλου, για παράδειγμα μίας μετοχής, μειωθεί σε επίπεδο χαμηλότερο από την τιμή άσκησης, ο αγοραστής θα ασκήσει το δικαίωμά του και ο πωλητής θα πρέπει να αγοράσει τις μετοχές σε υψηλότερη τιμή απ’ αυτή που ισχύει στο χρηματιστήριο. Αυτή η συναλλαγή θα οδηγήσει σε ζημία η οποία είναι περιορισμένη, δεδομένου ότι η τιμή μιας μετοχής δεν μπορεί να είναι μικρότερη του μηδενός. Στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής είναι ίση με την τιμή άσκησης μείον την τιμή του δικαιώματος ο πωλητής ούτε κερδίζει, ούτε χάνει.

Η συνάρτηση του κέρδους, κατά την χρονική στιγμή της λήξης του δικαιώματος, για τον πωλητή του δικαιώματος αγοράς θα είναι :

$$f(T)=\begin{cases} C-\left(K-S_T\right), & K>S_T \\ C, & K\leq S_T \end{cases} \tag{1.4}$$

όπου :

C: το ασφάλιστρο

S_T: η τιμή της μετοχής στον χρόνο Τ, χρόνος λήξης του δικαιώματος

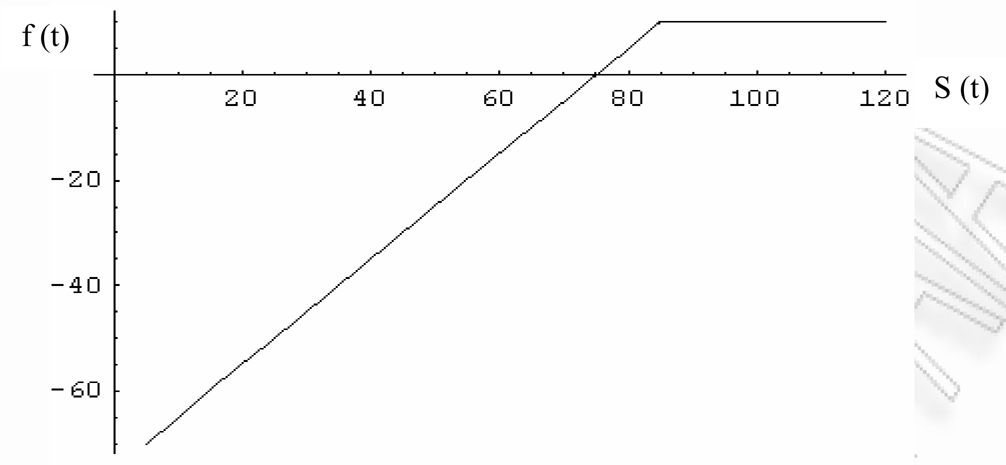
Κ: η τιμή εξάσκησης

Παράδειγμα 1.4

Έστω ότι ένας επενδυτής πιστεύει ότι η τιμή της μετοχής της εταιρείας Α θα σημειώσει άνοδο ή θα παραμείνει σταθερή. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι S_0=5 ευρώ. Αποφασίζει να πωλήσει ένα δικαίωμα αγοράς 10 μετοχών με τιμή άσκησης Κ=8.5 ευρώ ανά μετοχή και λαμβάνει, για την υποχρέωση που αναλαμβάνει, ασφάλιστρο C=1 ευρώ ανά μετοχή, δηλαδή 10 ευρώ.

Περίπτωση I: Στην ημερομηνία λήξης η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι S_T=6 ευρώ οπότε ο αγοραστής ασκεί το δικαίωμά του και ο πωλητής είναι υποχρεωμένος να αγοράσει στην τιμή των 8.5 ευρώ ανά μετοχή, ενώ στο χρηματιστήριο η τιμή της μετοχής είναι χαμηλότερη.

Περίπτωση II: Στην ημερομηνία λήξης η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι S_T=10.5 ευρώ οπότε ο αγοραστής δεν ασκεί το δικαίωμά του και ο πωλητής αποκομίζει κέρδος ίσο με το ασφάλιστρο.



Διάγραμμα 1.5
Πώληση δικαιώματος πώλησης

Στο Διάγραμμα 1.5 δίνεται η συνάρτηση του κέρδους ως συνάρτηση της τιμής της μετοχής. Στον κάθετο άξονα βρίσκονται οι τιμές της συνάρτησης κέρδους, δηλαδή το κέρδος του αγοραστή, και στον οριζόντιο άξονα βρίσκονται οι πιθανές τιμές της μετοχής στον χρόνο λήξης του δικαιώματος. Σύμφωνα με το παράδειγμα, εάν επαληθευτούν οι προσδοκίες του επενδυτή και η τιμή της μετοχής κινηθεί ανοδικά πάνω από την τιμή εξάσκησης, που είναι 8 ευρώ ανά μετοχή, τότε ο αγοραστής θα εξασκήσει το δικαίωμά του. Όσο μεγαλύτερες τιμές παίρνει η τιμή της μετοχής τόσο μεγαλύτερο είναι το κέρδος για τον επενδυτή. Στην αντίθετη περίπτωση, που δεν επαληθευτούν οι προσδοκίες του επενδυτή και η τιμή της μετοχής κινηθεί καθοδικά κάτω από την τιμή εξάσκησης, των 8 ευρώ ανά μετοχή, τότε ο αγοραστής δεν θα εξασκήσει το δικαίωμά του. Έτσι θα έχει σταθερό αρνητικό κέρδος (ζημία) και ίσο με -1 ευρώ ανά μετοχή όσο μικρές τιμές και εάν πάρει η τιμή της μετοχής.

Σύμφωνα με το παράδειγμα, η τιμή εξάσκησης K είναι 8.5 ευρώ ανά μετοχή και το μέγεθος του συμβολαίου είναι 10 μετοχές. Όπως φαίνεται και στο γράφημα διακρίνονται οι 2 περιπτώσεις:

- *άσκησης του δικαιώματος* από τον αγοραστή εάν ισχύει $S_T < K$ ή $S_T < 85$ (για το σύνολο του συμβολαίου) οπότε η συνάρτηση του κέρδους είναι γνησίως φθίνουσα για τον πωλητή. Όσο μικρότερη η τιμή της μετοχής τόσο μεγαλύτερη η ζημία του επενδυτή και
- *μη άσκησης του δικαιώματος* από τον αγοραστή εάν ισχύει $S_T > K$ ή $S_T > 85$ (για το σύνολο του συμβολαίου) οπότε η συνάρτηση του κέρδους είναι σταθερή και θετική, δηλαδή ο επενδυτής έχει σταθερό κέρδος ίσο με το ασφάλιστρο που

εισέπραξε (C=10 ευρώ). Το κέρδος είναι σταθερό ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλη μπορεί να είναι η τιμή της μετοχής.

Πίνακας 1.1
Περίληψη Θέσεων

ΘΕΣΗ	**Προσδοκία ως προς την αγορά**	**Αύξηση μεταβλητότητας**	**Πέρασμα του χρόνου**	**Κέρδος**	**Ζημία**
Αγορά δικαιώματος αγοράς	Μεγάλη αύξηση τιμών	Ευνοϊκή	Δυσμενές	Απεριόριστο	Περιορισμένο
Πώληση δικαιώματος αγοράς	Μικρή μείωση τιμών	Δυσμενής	Ευνοϊκό	Περιορισμένο	Απεριόριστο
Αγορά δικαιώματος πώλησης	Μεγάλη πτώση τιμών	Ευνοϊκή	Δυσμενές	Απεριόριστο: Τιμή άσκησης - margin	Περιορισμένο
Πώληση δικαιώματος πώλησης	Μικρή αύξηση τιμών	Δυσμενής	Ευνοϊκό	Περιορισμένο	Απεριόριστο: Τιμή άσκησης (ασφάλιστρο) – premium (margin)

Στον Πίνακα 1.1 δίνονται συνοπτικά οι θέσεις των επενδυτών και οι προσδοκίες τους ως προς την αγορά ανάλογα με την θέση που έχουν πάρει. Επίσης, φαίνεται για κάθε δικαίωμα εάν είναι ευνοϊκό ή όχι το πέρασμα του χρόνου και η αύξηση της μεταβλητότητας καθώς και το πόσο περιορισμένο ή όχι είναι το κέρδος και η ζημία σε κάθε περίπτωση.

1.6 ΤΙΜΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ - ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΟ

Τιμή δικαιώματος (*option premium*) ή ασφάλιστρο (*margin*) είναι το χρηματικό ποσό που καταβάλει ο επενδυτής για να αγοράσει ένα δικαίωμα. Οι παράγοντες που διαμορφώνουν αυτή την τιμή είναι η εσωτερική αξία (*intrinsic value*) και η αξία του χρόνου (*time value*).

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{ΤΙΜΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ} & \\
\swarrow & & \searrow \\
\text{ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΑΞΙΑ} & & \text{ΑΞΙΑ ΧΡΟΝΟΥ}
\end{array}
$$

Η εσωτερική αξία του δικαιώματος ισούται με την διαφορά ανάμεσα στην τιμή του υποκείμενου τίτλου και την τιμή άσκησης. Πιο συγκεκριμένα:

- **η εσωτερική αξία ενός δικαιώματος αγοράς** δίνεται από τον τύπο:

$$\left(S_t - K\right)_+ = \max\left\{S_t - K, 0\right\}$$

- **η εσωτερική αξία ενός δικαιώματος πώλησης** δίνεται από τον τύπο:

$$\left(K - S_t\right)_+ = \max\left\{K - S_t, 0\right\}$$

όπου:

S_t: η τιμή του υποκείμενου τίτλου την χρονική στιγμή t

K: η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος

Ένα δικαίωμα, στον χρόνο εξάσκησης t, μπορεί να επιφέρει στον holder θετικό, μηδενικό ή αρνητικό κέρδος (ζημία) και θεωρείται αντίστοιχα in the money, at the money και out of the money. Η εσωτερική αξία ταυτίζεται με το κέρδος του επενδυτή. Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 1.2 όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης το δικαίωμα αγοράς θεωρείται in the money ενώ το δικαίωμα πώλησης θεωρείται out of the money. Τα αντίθετα αποτελέσματα προκύπτουν στην περίπτωση όπου η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης. Στην περίπτωση που η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι ίση με την τιμή εξάσκησης το δικαίωμα αγοράς και το δικαίωμα πώλησης θεωρούνται at the money.

Πίνακας 1.2
Εσωτερική αξία δικαιωμάτων

	ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΑΓΟΡΑΣ	ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ
In the money (εσωτερική αξία > 0)	$S_t > K$	$S_t < K$
At the money (εσωτερική αξία = 0)	$S_t = K$	$S_t = K$
Out of the money (εσωτερική αξία < 0)	$S_t < K$	$S_t > K$

Ειδικότερα, ένα δικαίωμα αγοράς θεωρείται:

A. in the money και έχει εσωτερική αξία > 0 (ή διαφορετικά επιφέρει θετικό κέρδος στον επενδυτή) εάν μπορεί να ασκηθεί, δηλαδή όταν ισχύει $S_t > K$

B. at the money και έχει εσωτερική αξία = 0 (ή διαφορετικά επιφέρει μηδενικό κέρδος στον επενδυτή) όταν ισχύει $S_t = K$

C. out of the money και έχει εσωτερική αξία < 0 (ή διαφορετικά επιφέρει αρνητικό κέρδος - ζημία στον επενδυτή) εάν δεν μπορεί να ασκηθεί, δηλαδή όταν ισχύει $S_t < K$.

Είναι σαφές ότι με σταθερές την αξία του χρόνου και την τιμή άσκησης, για ένα δικαίωμα αγοράς, όσο μεγαλώνει η τιμή του υποκείμενου τίτλου μεγαλώνει και η τιμή του δικαιώματος. Ενώ, δεδομένης της τιμής του υποκείμενου τίτλου και την αξία του χρόνου σταθερή, για ένα δικαίωμα αγοράς, όσο υψηλότερη είναι η τιμή άσκησης, τόσο χαμηλότερη είναι η τιμή του δικαιώματος.

Αντίστοιχα ένα δικαίωμα πώλησης θεωρείται:

A. in the money και έχει εσωτερική αξία > 0 (ή διαφορετικά επιφέρει θετικό κέρδος στον επενδυτή) όταν ισχύει $S_t < K$

B. at the money και έχει εσωτερική αξία = 0 (ή διαφορετικά επιφέρει μηδενικό κέρδος στον επενδυτή) όταν ισχύει $S_t = K$

C. out of the money και έχει εσωτερική αξία < 0 (ή διαφορετικά επιφέρει αρνητικό κέρδος - ζημία στον επενδυτή) όταν ισχύει $S_t > K$.

Είναι σαφές ότι με σταθερές την αξία του χρόνου και την τιμή άσκησης, για ένα δικαίωμα πώλησης, όσο χαμηλότερη είναι η τιμή του υποκείμενου τίτλου, τόσο υψηλότερη είναι η τιμή του δικαιώματος. Ενώ, δεδομένης της τιμής του υποκείμενου τίτλου και την αξία του χρόνου σταθερή, για ένα δικαίωμα πώλησης, όσο υψηλότερη είναι η τιμή άσκησης, τόσο υψηλότερη είναι η τιμή του δικαιώματος.

Η αξία του χρόνου, υπεισέρχεται στην διαμόρφωση της τιμής του δικαιώματος, μέσω της χρονικής περιόδου μεταξύ της σύναψης του συμβολαίου και της εκπνοής αυτού. Όσο μεγαλύτερο είναι το διάστημα που απομένει για την λήξη του δικαιώματος τόσο μεγαλύτερη είναι και η αξία του χρόνου. Αυτό συμβαίνει διότι υπάρχει μεγαλύτερη αβεβαιότητα για την κατάσταση της αγοράς όσο "απομακρύνεται" η ημερομηνία λήξης του συμβολαίου. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ο επενδυτής να αναλαμβάνει μεγαλύτερο ρίσκο, οπότε χρειάζεται και μεγαλύτερη ανταμοιβή για να το αναλάβει. Αντίθετα, όσο πλησιάζουμε προς την ημερομηνία λήξης, η αξία του χρόνου μειώνεται, δεδομένου ότι γνωρίζουμε με μεγαλύτερη πιθανότητα τι θα συμβεί στο αμέσως επόμενο διάστημα. Στη λήξη η αξία του χρόνου είναι πάντα ίση με το μηδέν, δεδομένου ότι γνωρίζουμε ακριβώς την κατάσταση της αγοράς.

Επομένως, όσο αυξάνεται ο χρόνος μέχρι την ημερομηνία λήξης, τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του δικαιώματος. Δύο ίδια δικαιώματα με διαφορετική χρονική διάρκεια θα έχουν και διαφορετική τιμή δικαιώματος. Αν και θεωρείται ότι ο " βέλτιστος " χρόνος λήξης για την αγορά ενός δικαιώματος πρέπει να είναι μεγάλος και ο αντίστοιχος χρόνος λήξης για την πώληση μικρός, κάτι τέτοιο δεν ισχύει πάντα στην πράξη. Για παράδειγμα αρκετοί επενδυτές αγοράζουν δικαιώματα κοντά στην ημερομηνία λήξης τους. Αυτό συμβαίνει διότι συνυπολογίζουν και την αντίστοιχη μόχλευση η οποία είναι αντιστρόφως ανάλογη με τον εναπομείναντα χρόνο λήξης. Δηλαδή, λαμβάνουν υπόψιν τους το γεγονός ότι με την επένδυσή τους σε δικαίωμα αγοράς, έχουν δεσμεύσει μικρότερο όγκο κεφαλαίων από ότι θα είχαν δεσμεύσει εάν είχαν αγοράσει τον ίδιο τον υποκείμενο τίτλο. Το παραπάνω αντικατοπτρίζεται και στα κέρδη ή τις ζημίες του επενδυτή.

Επιπρόσθετα, παράγοντες που επηρεάζουν είτε έμμεσα είτε άμεσα την τιμή ενός δικαιώματος είναι και:

- η μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου

Όσο χρονικά η τιμή μίας μετοχής αποκλίνει σε υψηλά επίπεδα άνω ή κάτω του μέσου όρου, τόσο αυξάνεται η πιθανότητα να βρίσκεται το δικαίωμα επί της μετοχής εντός της ισοδύναμης χρηματικής του αξίας και κατά συνέπεια, να αποδώσει όφελος στον επενδυτή. Επομένως, όσο πιο αυξημένη μεταβλητότητα έχει μία μετοχή, τόσο αναμένεται η τιμή του δικαιώματός της να είναι αυξημένη. Αυτό ισχύει για κάθε είδους δικαίωμα. Αν και η μεταβλητότητα είναι πολύ δύσκολο να υπολογιστεί, διότι αναφέρεται σε μελλοντικές διακυμάνσεις, ωστόσο έχουν διαμορφωθεί διάφορα μοντέλα αποτίμησης δικαιωμάτων που διευκολύνουν τον επενδυτή στον υπολογισμό των απαιτούμενων δεδομένων.

- οι προσδοκίες για τη μερισματική απόδοση του υποκείμενου τίτλου κατά τη διάρκεια ισχύος του δικαιώματος

Ο κάτοχος του δικαιώματος σε μία μετοχή δεν μπορεί να εισπράξει μέρισμα από αυτήν. Οι πληρωμές μερισμάτων συνοδεύονται από μειώσεις στην τιμή του υποκείμενου τίτλου στην τρέχουσα αγορά, οπότε για το δικαίωμα αγοράς θα μειωθεί η τιμή του, αφού η μετοχή θα γίνει φθηνότερη και άρα θα είναι πιο συμφέρουσα η αγορά της στην τρέχουσα τιμή. Αντιστρόφως, για ένα δικαίωμα πώλησης η διανομή μερισμάτων αυξάνει την αξία του.

- το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο

Για την αγορά του δικαιώματος, ο επενδυτής δε χρειάζεται να καταβάλει όλο το χρηματικό κεφάλαιο που απαιτείται για την αγορά της υποκείμενης αξίας. Συνεπώς, το μέρος του κεφαλαίου που δε δεσμεύεται, μπορεί να επενδυθεί υποθετικά σε χρηματοοικονομικά εργαλεία χωρίς κίνδυνο. Επομένως όσο υψηλότερο είναι αυτό το επιτόκιο, τόσο υψηλότερη θα είναι η απόδοση του μη επενδεδυμένου σε δικαιώματα κεφαλαίου. Επομένως, όταν αυξάνεται το επιτόκιο, αυξάνεται η τιμή του δικαιώματος αγοράς και μειώνεται η τιμή του δικαιώματος πώλησης.

- άλλοι παράγοντες

Άλλοι παράγοντες επηρεασμού της τιμής του δικαιώματος είναι τα κόστη συναλλαγών, οι τάσεις της αγοράς, οι προσδοκίες για την κίνηση αυτής, η φορολογική νομοθεσία και κυρίως η προσφορά και η ζήτηση των δικαιωμάτων.

Πίνακας 1.3
Επίδραση παραγόντων στην τιμή δικαιώματος

	ΤΙΜΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ	**ΤΙΜΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΠΩΛΗΣΗΣ**
Αύξηση τιμής υποκείμενου τίτλου	*Αυξάνεται*	*Μειώνεται*
Μείωση τιμής υποκείμενου τίτλο	*Μειώνεται*	*Αυξάνεται*
Υψηλότερη τιμή άσκησης	*Μειώνεται*	*Αυξάνεται*
Χαμηλότερη τιμή άσκησης	*Αυξάνεται*	*Μειώνεται*
Υψηλότερη μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου	*Αυξάνεται*	*Αυξάνεται*
Χαμηλότερη μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου	*Μειώνεται*	*Μειώνεται*
Μεγαλύτερη διάρκεια	*Αυξάνεται*	*Αυξάνεται*
Μικρότερη διάρκεια	*Μειώνεται*	*Μειώνεται*
Υψηλότερο επιτόκιο	*Αυξάνεται*	*Μειώνεται*
Χαμηλότερο επιτόκιο	*Μειώνεται*	*Αυξάνεται*

Στον Πίνακα 1.3 αποτυπώνονται οι αλλαγές στην τιμή των δικαιωμάτων ανάλογα με τις αλλαγές του εκάστοτε παράγοντα. Ανάλογα με το εάν αυξάνεται ή μειώνεται ο κάθε ένας από τους παράγοντες που αναλύθηκε προηγουμένως, παρατηρείται η επίδραση που έχει και το εάν επηρεάζει θετικά ή αρνητικά την τιμή του κάθε δικαιώματος. Για παράδειγμα, όταν αυξάνεται η τιμή του υποκείμενου τίτλου αυξάνεται και η τιμή του δικαιώματος αγοράς, ενώ μειώνεται η τιμή του δικαιώματος πώλησης.

1.7 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

Σε προηγούμενη παράγραφο έγινε αναφορά στις τέσσερις κατηγορίες των δικαιωμάτων προαίρεσης καθώς και στις αντίστοιχες συναρτήσεις κέρδους που θα έχει ένας επενδυτής λαμβάνοντας την αντίστοιχη θέση του αγοραστή ή του πωλητή σε ένα δικαίωμα αγοράς ή πώλησης ενός υποκείμενου τίτλου. Η αγορά ενός δικαιώματος αγοράς και η πώληση ενός δικαιώματος πώλησης θεωρούνται αισιόδοξες επενδύσεις. Ένας επενδυτής λαμβάνει τις συγκεκριμένες θέσεις όταν προσδοκά άνοδο της τιμής του υποκείμενου αγαθού. Αντίθετα, η πώληση ενός δικαιώματος αγοράς και η αγορά ενός δικαιώματος πώλησης θεωρούνται απαισιόδοξες επενδύσεις. Ένας επενδυτής λαμβάνει τις συγκεκριμένες θέσεις όταν προσδοκά κάθοδο της τιμής του υποκείμενου αγαθού.

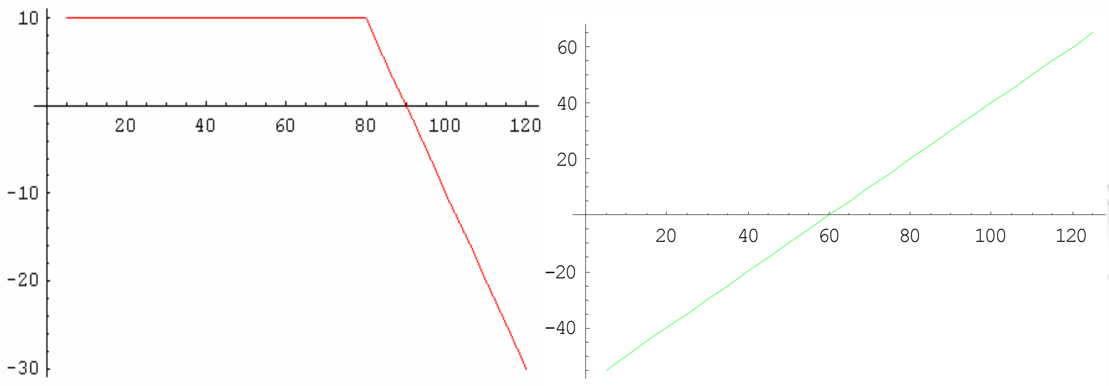
Ωστόσο, ένας επενδυτής μπορεί να "εξασφαλιστεί" ακόμη περισσότερο λαμβάνοντας πιο σύνθετες θέσεις χρησιμοποιώντας είτε περισσότερα από ένα δικαιώματα προαίρεσης ταυτόχρονα είτε συνδυάζοντας την αγορά ή την πώληση του υποκείμενου αγαθού (π.χ. μετοχή) με ένα δικαίωμα επί αυτού. Αυτό συμβαίνει διότι ο επενδυτής μπορεί να μην είναι σίγουρος ή να θέλει να περιορίσει τον κίνδυνο που μπορεί να υπάρχει από λάθος πληροφόρηση για το πώς θα κινηθεί η τιμή του υποκείμενου αγαθού ή διότι γνωρίζει ότι θα υπάρξει σημαντική αλλαγή στην τιμή του αλλά δεν γνωρίζει εάν θα είναι καθοδική ή ανοδική και για διάφορους άλλους λόγους που εμφανίζονται στην πράξη. Στη συνέχεια θα αναφερθούν κάποιες από αυτές τις στρατηγικές.

1. ***Συνδυασμός μετοχής και δικαιώματος προαίρεσης επί αυτής.***

Υπάρχουν τέσσερις διαφορετικές στρατηγικές σε αυτήν την κατηγορία.

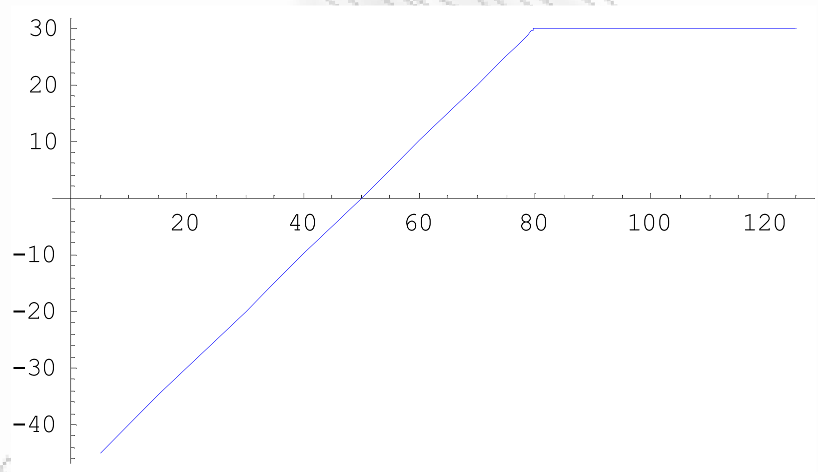
- *Πώληση ενός δικαιώματος αγοράς και παράλληλη αγορά της μετοχής.*

Η θέση θεωρείται καλυμμένη επειδή η υποχρέωση της παράδοσης της μετοχής στην εκπνοή του δικαιώματος είναι καλυμμένη από την μετοχή που υπάρχει στο χαρτοφυλάκιο. Σε αυτή τη περίπτωση η αγορά της μετοχής "καλύπτει" την περίπτωση απότομης αύξησης της τιμής της μετοχής. Στην αντίθετη περίπτωση που ο επενδυτής λάμβανε μόνο τη θέση πώλησης του δικαιώματος αγοράς χωρίς την παράλληλη αγορά της μετοχής, θα είχε μεγάλη ζημία. Η πώληση ενός δικαιώματος χωρίς μια αντίστοιχη μετοχική θέση καλείται "γυμνή πώληση δικαιώματος".



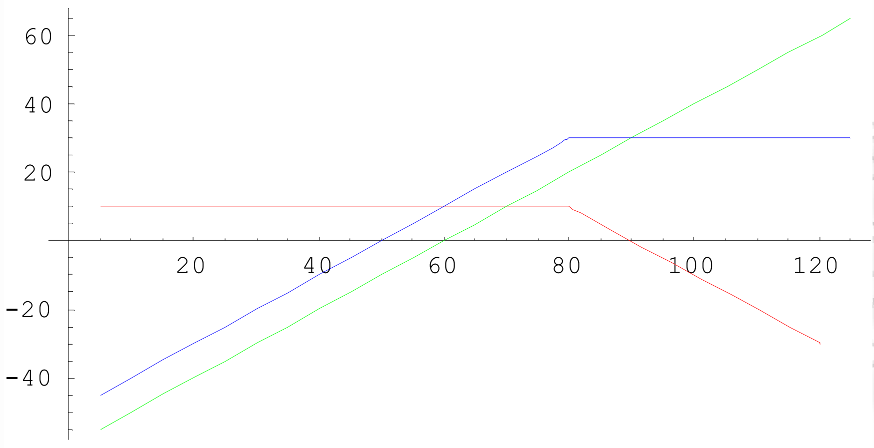
Διάγραμμα 1.6
Πώληση δικαιώματος αγοράς και αγορά μετοχής

Στο Διάγραμμα 1.6 με κόκκινο συμβολίζεται το κέρδος του επενδυτή από την πώληση ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K=80 ευρώ και τιμή δικαιώματος C=10 ευρώ και με πράσινο συμβολίζεται το κέρδος του επενδυτή από την αγορά μιας μετοχής που τη στιγμή της αγοράς είχε τιμή So=60 ευρώ.



Διάγραμμα 1.7
Συνδυασμός αγοράς μετοχής και πώλησης δικαιώματος αγοράς

Παρατηρείται ότι το Διάγραμμα 1.7 που δείχνει το κέρδος από το συνδυασμό των δύο παραπάνω τοποθετήσεων είναι όμοιο με αυτό του κέρδους από την πώληση ενός δικαιώματος πώλησης.

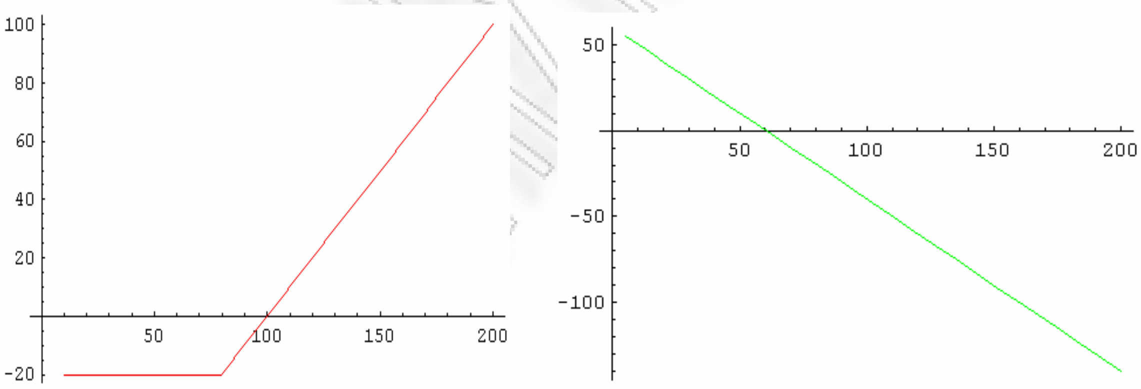


Διάγραμμα 1.8
Απεικόνιση και των τριών διαγραμμάτων

Παραπάνω φαίνονται και τα τρία διαγράμματα μαζί. Με κόκκινο συμβολίζεται το κέρδος από την πώληση του δικαιώματος αγοράς, με πράσινο συμβολίζεται το κέρδος από την αγορά της μετοχής και με μπλε συμβολίζεται το συνολικό κέρδος της επένδυσης.

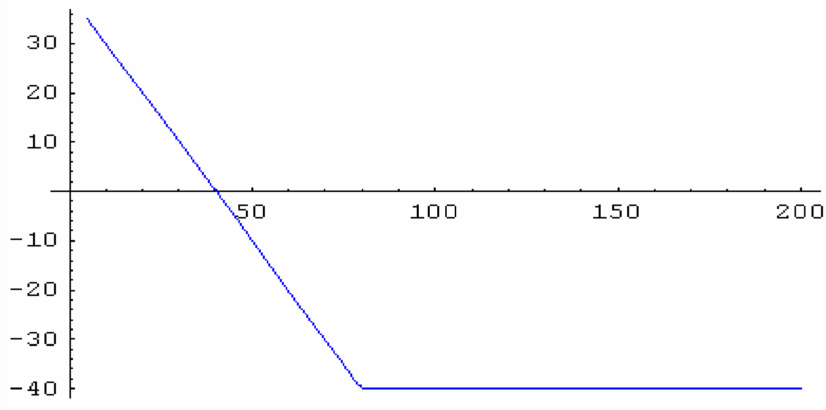
- *Αγορά ενός δικαιώματος αγοράς και παράλληλη πώληση της μετοχής.*

Αντίστοιχα συμπεράσματα με αυτά της πρώτης στρατηγικής αντλούνται και σε αυτήν την περίπτωση. Τα γραφήματα που προκύπτουν δίνονται στη συνέχεια.



Διάγραμμα 1.9
Αγορά δικαιώματος αγοράς και πώληση μετοχής

Στο Διάγραμμα 1.9 με κόκκινο συμβολίζεται το κέρδος του επενδυτή από την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K=80 ευρώ και τιμή δικαιώματος C=20 ευρώ και με πράσινο συμβολίζεται το κέρδος του επενδυτή από την πώληση μιας μετοχής που τη στιγμή της αγοράς είχε τιμή So=60 ευρώ.

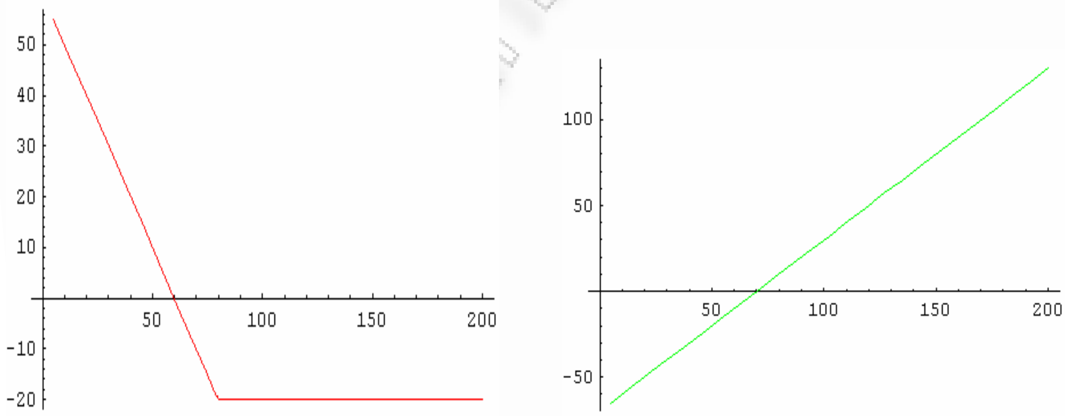


Διάγραμμα 1.10
Συνδυασμός πώλησης μετοχής και αγοράς δικαιώματος αγοράς

Παρατηρείται ότι το Διάγραμμα 1.10 του κέρδους από το συνδυασμό των δύο παραπάνω τοποθετήσεων είναι όμοιο με το διάγραμμα του κέρδους από την αγορά ενός δικαιώματος πώλησης.

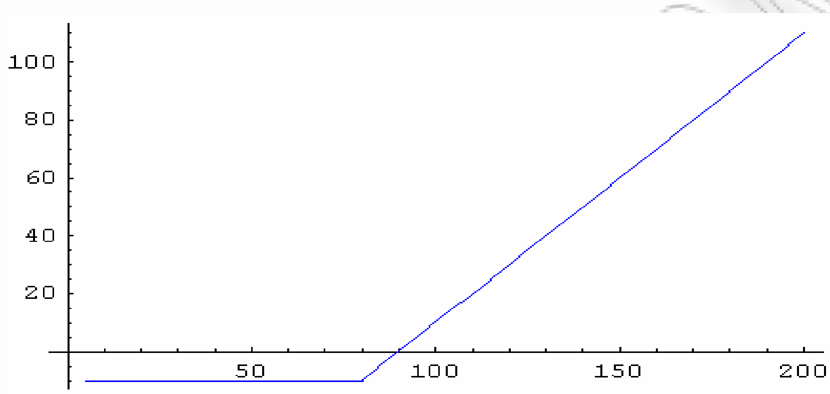
- *Αγορά ενός δικαιώματος πώλησης και παράλληλη αγοράς της μετοχής.*

Αντίστοιχα συμπεράσματα με αυτά της πρώτης και δεύτερης στρατηγικής αντλούνται και σε αυτήν την περίπτωση. Τα γραφήματα που προκύπτουν από την αγορά ενός δικαιώματος πώλησης και την αγορά της μετοχής δίνονται στη συνέχεια.



Διάγραμμα 1.11
Αγορά δικαιώματος πώλησης και αγορά μετοχής

Στο Διάγραμμα 1.11 με κόκκινο συμβολίζεται το κέρδος του επενδυτή από την αγορά ενός δικαιώματος πώλησης με τιμή εξάσκησης K=80 ευρώ και τιμή δικαιώματος C=20 ευρώ και με πράσινο συμβολίζεται το κέρδος του επενδυτή από την αγορά μιας μετοχής που τη στιγμή της αγοράς είχε τιμή So=70 ευρώ.

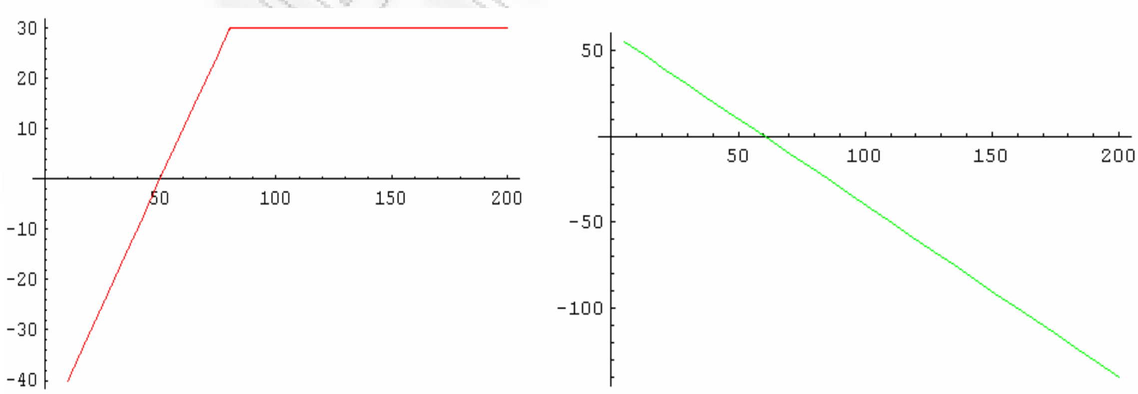


Διάγραμμα 1.12
Συνδυασμός αγοράς δικαιώματος πώλησης και αγορά μετοχής

Παρατηρείται ότι το Διάγραμμα 1.12 του κέρδους από το συνδυασμό των δύο παραπάνω τοποθετήσεων είναι όμοιο με το διάγραμμα του κέρδους από την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς.

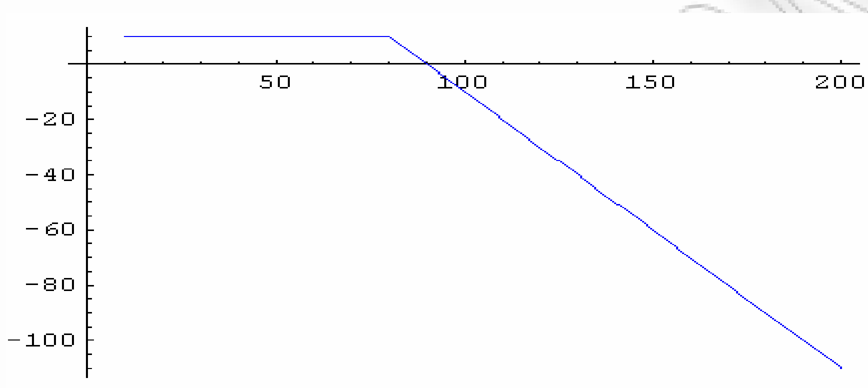
- *Πώληση ενός δικαιώματος πώλησης και παράλληλη πώληση της μετοχής.*

Αντίστοιχα συμπεράσματα με αυτά των προηγούμενων στρατηγικών αντλούνται και σε αυτήν την περίπτωση. Τα γραφήματα που προκύπτουν δίνονται στη συνέχεια.



Διάγραμμα 1.13
Πώληση δικαιώματος πώλησης και πώληση μετοχής

Στο Διάγραμμα 1.13 με κόκκινο συμβολίζεται το κέρδος του επενδυτή από την πώληση ενός δικαιώματος πώλησης με τιμή εξάσκησης K=80 ευρώ και τιμή δικαιώματος C=30 ευρώ και με πράσινο συμβολίζεται το κέρδος του επενδυτή από την αγορά μιας μετοχής που τη στιγμή της αγοράς είχε τιμή So=60 ευρώ.



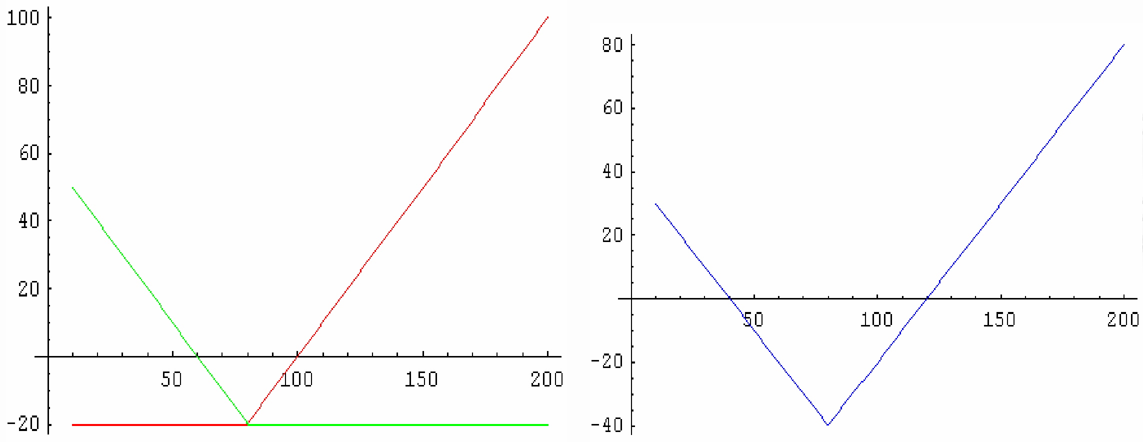
Διάγραμμα 1.14
Συνδυασμός πώλησης δικαιώματος πώλησης και πώληση μετοχής

Διαπιστώνεται ότι το Διάγραμμα 1.14 του κέρδους από το συνδυασμό των δύο παραπάνω τοποθετήσεων είναι όμοιο με το διάγραμμα του κέρδους από την πώληση ενός δικαιώματος αγοράς.

2. *Συνδυασμός δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης ταυτόχρονα επί της ίδιας μετοχής*

- *Straddle – Χώρισμα.*

Το straddle (*χώρισμα*) δημιουργείται με την ταυτόχρονη αγορά ενός δικαιώματος αγοράς και ενός δικαιώματος πώλησης με την ίδια τιμή εξάσκησης και τον ίδιο εναπομένοντα χρόνο μέχρι την εκπνοή. Τα straddle είναι χρήσιμες στρατηγικές για επενδυτές που πιστεύουν ότι μία μετοχή θα κινηθεί κατά πολύ είτε ανοδικά είτε καθοδικά. Για παράδειγμα, μία σημαντική υπόθεση για μία εταιρεία πρόκειται να εκδικασθεί και η αγορά δεν έχει ακόμη προεξοφλήσει την έκβαση. Η μετοχή είτε θα διπλασιαστεί είτε θα χάσει το ήμισυ της αξίας της ανάλογα με το εάν η υπόθεση εκδικασθεί ευνοϊκά ή αποβεί ζημιογόνα για την εταιρεία. Η θέση του straddle θα είναι κερδοφόρα ανεξάρτητα από την κατεύθυνση της μετοχής, επειδή η αξία του είναι υψηλότερη όταν η τιμή της μετοχής πραγματοποιεί ακραίες καθοδικές ή ανοδικές αποκλίσεις από την τιμή εξάσκησης. Η χειρότερη έκβαση για ένα straddle είναι η μετοχή να μην κινηθεί.

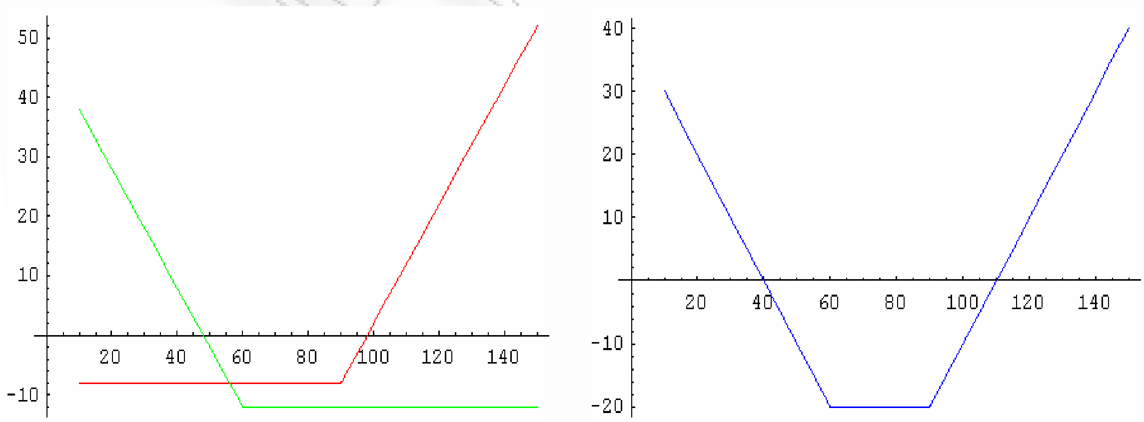


Διάγραμμα 1.15
Στρατηγική Straddle

Στο Διάγραμμα 1.15 με πράσινο χρώμα απεικονίζεται το κέρδος από την αγορά του δικαιώματος πώλησης, με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται το κέρδος από την αγορά του δικαιώματος αγοράς με κοινή τιμή εξάσκησης K=80 ευρώ και τιμή δικαιώματος C=20 ευρώ. Με μπλε απεικονίζεται το κέρδος που αποφέρει στον επενδυτή ο συνδυασμός των παραπάνω, το κέρδος δηλαδή της στρατηγικής straddle.

- *Strangle.*

Σε αυτήν την περίπτωση ο επενδυτής αγοράζει ένα δικαίωμα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης επί της ίδιας μετοχής και με την ίδια ημερομηνία εξάσκησης όπως και στην περίπτωση του straddle αλλά με διαφορετικές τιμές εξάσκησης (έστω $K_1 < K_2$) και όχι τις ίδιες.

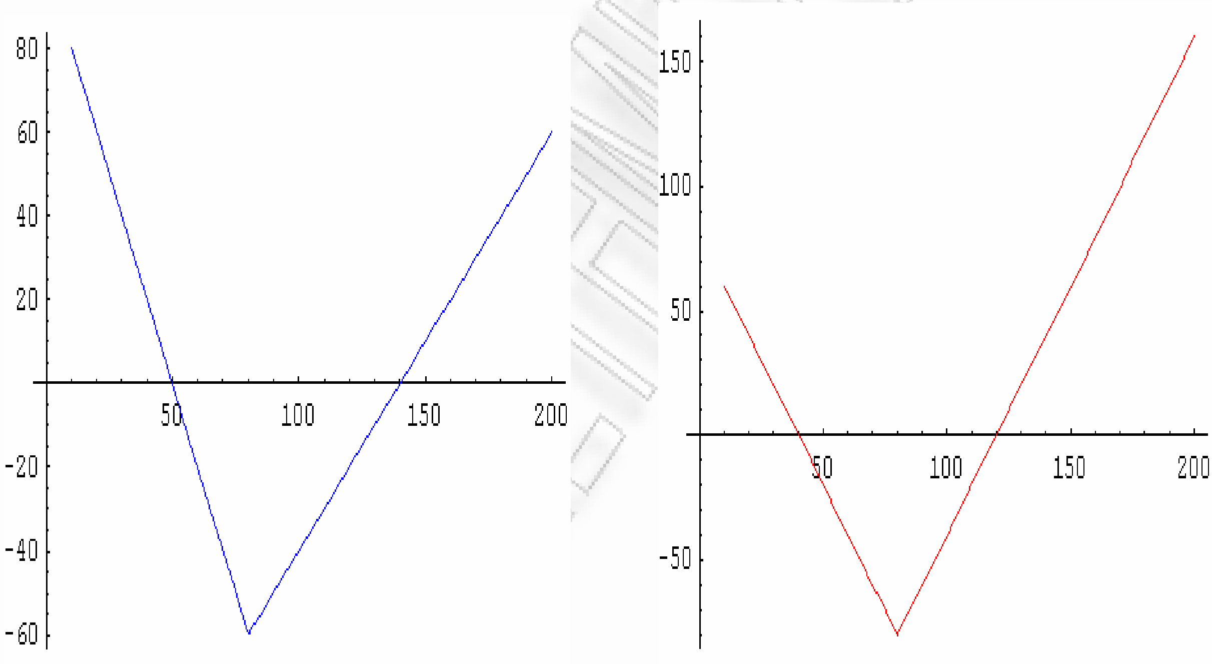


Διάγραμμα 1.16
Στρατηγική Strangle

Στο Διάγραμμα 1.16 με πράσινο απεικονίζεται το κέρδος από την αγορά του δικαιώματος πώλησης, με κόκκινο απεικονίζεται το κέρδος από την αγορά του δικαιώματος αγοράς με αντίστοιχες τιμές εξάσκησης K_1=60 ευρώ και τιμή δικαιώματος C_1=12 ευρώ και K_2=90 ευρώ και τιμή δικαιώματος C_2=8 ευρώ. Με μπλε απεικονίζεται το κέρδος που αποφέρει στον επενδυτή ο συνδυασμός των παραπάνω, εφαρμόζοντας δηλαδή την στρατηγική strangle.

- *Strip – Strap.*

Οι στρατηγικές strip και strap είναι όμοιες με την straddle. Η μόνη τους διαφορά είναι στον αριθμό των δικαιωμάτων. Πιο συγκεκριμένα η στρατηγική strip βασίζεται στην αγορά ενός δικαιώματος αγοράς και δύο δικαιωμάτων πώλησης ενώ η στρατηγική strap βασίζεται στην αγορά δύο δικαιωμάτων αγοράς και ενός δικαιώματος πώλησης.



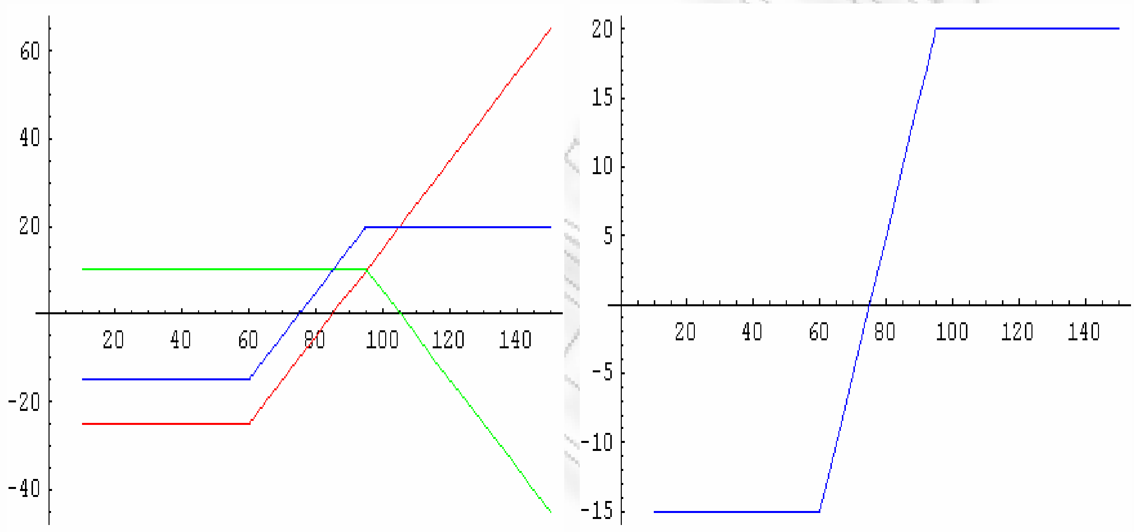
Διάγραμμα 1.17
Στρατηγικές Strip – Strap

Στο Διάγραμμα 1.17 με μπλε απεικονίζεται το κέρδος από την εφαρμογή της στρατηγικής strip, με κόκκινο απεικονίζεται το κέρδος από την εφαρμογή της στρατηγικής strap με κοινή τιμή εξάσκησης K=80 ευρώ και τιμή δικαιώματος C=20 ευρώ.

3. ***Συνδυασμός δικαιωμάτων προαίρεσης ίδιου τύπου επί της ίδιας μετοχής***

- *Bull Spread – Ανοδικό Άνοιγμα.*

Την συγκεκριμένη στρατηγική την εφαρμόζει ο επενδυτής που πιστεύει πως η αγορά δεν θα πέσει, αλλά επιθυμεί να περιορίσει τον κίνδυνο. Θεωρείται μία συντηρητική στρατηγική για κάποιον που πιστεύει πως η αγορά είναι περισσότερο πιθανό να πέσει παρά να ανέβει. Εφαρμόζεται με την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K_1 και την παράλληλη πώληση ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K_2, με $K_2 > K_1$ επί της ίδιας μετοχής και με την ίδια ημερομηνία λήξης. Η εφαρμογή της συγκεκριμένης στρατηγικής μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας δικαιώματα πώλησης αντί για δικαιώματα αγοράς.



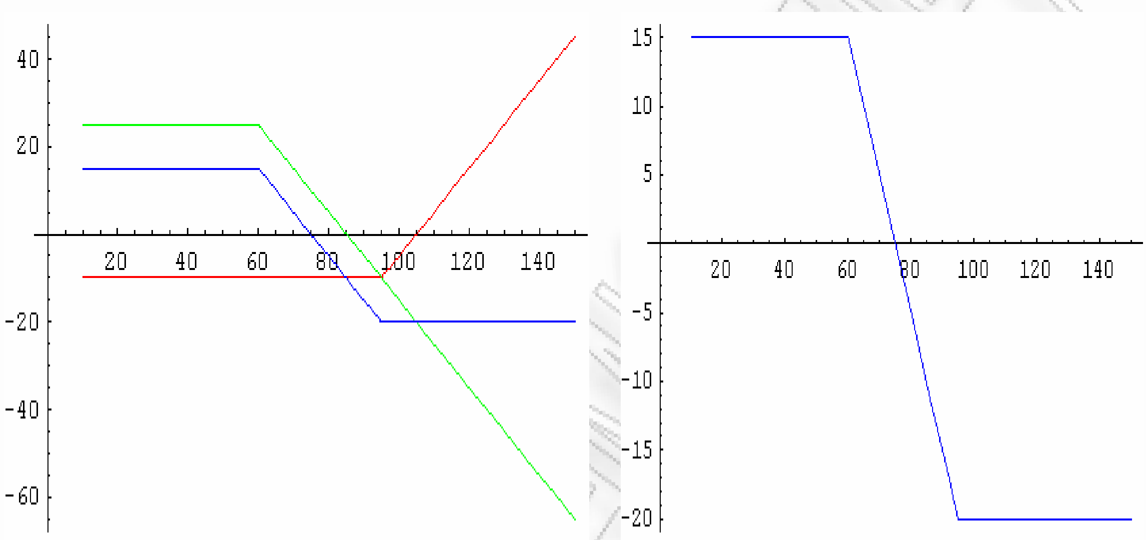
Διάγραμμα 1.18
Στρατηγική Bull Spread

Στο Διάγραμμα 1.18 με κόκκινο απεικονίζεται το κέρδος από την αγορά του δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K_1=60 ευρώ και τιμή δικαιώματος C_1=25 ευρώ, με πράσινο απεικονίζεται το κέρδος από την πώληση του δικαιώματος αγοράς με K_2=95 ευρώ και τιμή δικαιώματος C_2=10 ευρώ. Με μπλε απεικονίζεται το κέρδος που αποφέρει στον επενδυτή ο συνδυασμός των παραπάνω, το κέρδος δηλαδή της στρατηγικής bull spread.

- *Bear Spread – Καθοδικό Άνοιγμα.*

Την συγκεκριμένη στρατηγική την εφαρμόζει ο επενδυτής που πιστεύει πως η αγορά δεν θα ανέβει, αλλά θέλει και να περιορίσει τον κίνδυνο. Θεωρείται μία συντηρητική στρατηγική για κάποιον που πιστεύει πως η αγορά είναι πιο πιθανό να πέσει παρά να ανέβει.

Εφαρμόζεται με την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K_1 και την παράλληλη πώληση ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K_2, με $K_2 < K_1$ επί της ίδιας μετοχής και με την ίδια ημερομηνία λήξης. Επίσης η εφαρμογή της συγκεκριμένης στρατηγικής μπορεί να γίνει εάν αντί για δικαιώματα αγοράς χρησιμοποιήσουμε δικαιώματα πώλησης. Η συγκεκριμένη στρατηγική διαφέρει από την bull spread στο σημείο της διαφοράς των τιμών εξάσκησης των δικαιωμάτων. Στην bull spread ισχύει ότι $K_2 > K_1$.

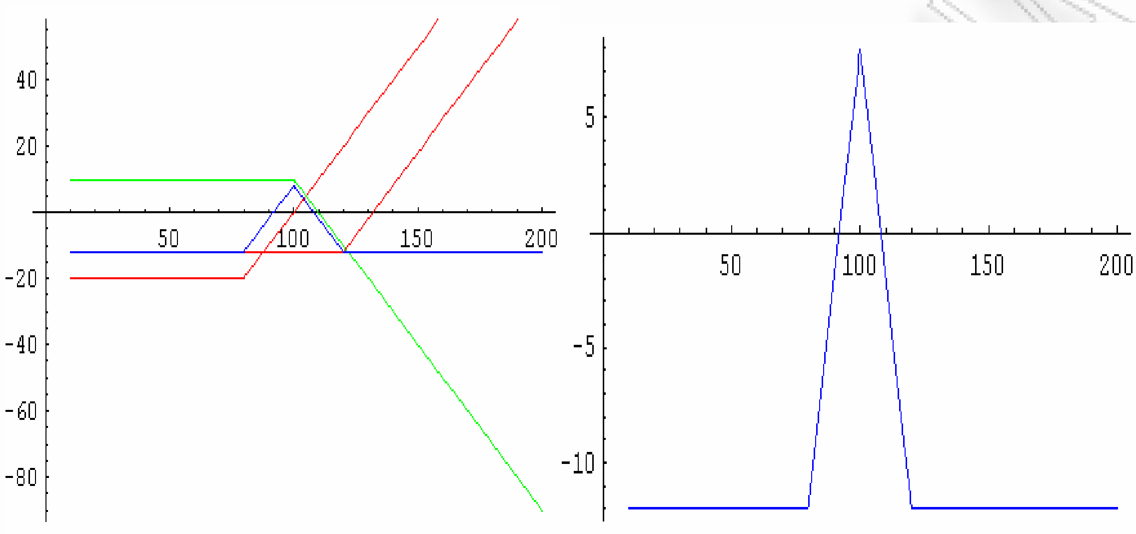


Διάγραμμα 1.19
Στρατηγική Bear Spread

Στο Διάγραμμα 1.19 με κόκκινο απεικονίζεται το κέρδος από την αγορά του δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K_1=95 ευρώ και τιμή δικαιώματος C_1=10 ευρώ, με πράσινο απεικονίζεται το κέρδος από την πώληση του δικαιώματος αγοράς με K_2=60 ευρώ και τιμή δικαιώματος C_2=25 ευρώ. Με μπλε απεικονίζεται το κέρδος που αποφέρει στον επενδυτή ο συνδυασμός των παραπάνω, το κέρδος δηλαδή της στρατηγικής bear spread.

- *Long Butterfly – Πεταλούδα Αγοράς*

Ο επενδυτής εφαρμόζει την συγκεκριμένη μεταβλητή όταν πιστεύει πως η αγορά δεν θα είναι πολύ μεταβλητή αλλά επιθυμεί να περιορίσει τον καθολικό κίνδυνο. Ο επενδυτής που θέλει να εφαρμόσει την συγκεκριμένη στρατηγική πρέπει να αγοράσει δύο δικαιώματα αγοράς με τιμές εξάσκησης K_1 και K_3, έστω $K_1 < K_3$, και την παράλληλη πώληση δύο δικαιωμάτων αγοράς με τιμή εξάσκησης K_2, τέτοιο ώστε $K_1 < K_2 < K_3$ (συνήθως λαμβάνεται $K_2 = \frac{K_1 + K_3}{2}$) επί της ίδιας μετοχής και με την ίδια ημερομηνία εξάσκησης.



Διάγραμμα 1.20
Στρατηγική Long Butterfly

Στο παραπάνω γράφημα με κόκκινο απεικονίζονται τα κέρδη από την αγορά των δύο δικαιωμάτων αγοράς με τιμή εξάσκησης K_1=80 ευρώ και τιμή δικαιώματος C_1=20 ευρώ και K_3=120 ευρώ και τιμή δικαιώματος C_3=12 ευρώ, με πράσινο απεικονίζεται το κέρδος από την πώληση των δύο δικαιωμάτων αγοράς με K_2=100 ευρώ και τιμή δικαιώματος C_2=10 ευρώ. Με μπλε απεικονίζεται το κέρδος που αποφέρει στον επενδυτή ο συνδυασμός των παραπάνω, το κέρδος δηλαδή της στρατηγικής long butterfly.

Αυτές είναι μερικές από τις πιο σημαντικές στρατηγικές που έχουν αναπτυχθεί και εφαρμόζονται καθημερινά. Εκτός βέβαια από αυτές υπάρχουν και αρκετές άλλες. Ο κάθε επενδυτής μπορεί να συνδυάσει όπως επιθυμεί τα διαφορετικά είδη παραγώγων, και όχι μόνο τα δικαιώματα προαίρεσης, σύμφωνα με τις δικές του ανάγκες και να τα προσαρμόσει στο χαρτοφυλάκιό του όπως αυτός νομίζει καλύτερα.

1.8 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο έγινε μία πρώτη επαφή με τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα. Ειδικότερα, έγινε μία προσπάθεια να δειχθεί ποιος είναι ο ρόλος τους και για ποιο λόγο δημιουργήθηκαν, αναπτύχθηκαν και γιατί είναι τόσο σημαντικά για τις σημερινές αγορές. Ακόμη γίνεται μία ιστορική αναδρομή των παραγώγων για το πότε και πώς ξεκίνησαν μέχρι την μορφή που έχουν στις μέρες μας. Επίσης, παρατίθεται μία κατηγοριοποίηση και παρουσιάζονται τα είδη των παραγώγων (*swaps, options, futures, forwards*). Στο τέλος του κεφαλαίου δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στα δικαιώματα προαίρεσης (*options*) και γίνεται λεπτομερέστατη ανάλυση αυτών. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονται οι κατηγορίες των δικαιωμάτων προαίρεσης, τα χαρακτηριστικά τους, καθώς γίνεται και ανάλυση των θέσεων και διάφορων στρατηγικών που μπορεί να πάρει ένας επενδυτής χρησιμοποιώντας τα παραπάνω χρηματοοικονομικά εργαλεία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα από τα πιο βασικά προβλήματα στα χρηματοοικονομικά, και κατ' επέκταση στις αγορές των παραγώγων, είναι η τιμολόγηση των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, όπως για παράδειγμα η τιμολόγηση ενός δικαιώματος αγοράς μίας μετοχής. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί το διωνυμικό μοντέλο μίας και πολλών περιόδων. Η όλη διαδικασία γίνεται σε χρόνο διακριτό και αποτελεί μία προσέγγιση του αντίστοιχου προβλήματος σε χρόνο συνεχή. Για την καλύτερη κατανόηση της λειτουργίας του μοντέλου θα παρουσιαστούν έννοιες, όπως ανατοκισμός σε k περιόδους και συνεχής ανατοκισμός, καθώς και παρούσα και μελλοντική αξία ενός χρηματικού ποσού. Επίσης, θα γίνει αναφορά στον *κόσμο ουδέτερου ρίσκου (risk neutral valuation)* και στην *μη ύπαρξη σίγουρου κέρδους (no arbitrage)*. Στο τέλος του κεφαλαίου εισάγονται κάποια βασικά "κομμάτια" της θεωρίας μέτρου και της θεωρίας των Martingales, που χρησιμοποιούνται για την εφαρμογή του διωνυμικού μοντέλου πολλών περιόδων.

2.2 ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΞΙΑ ΧΡΗΜΑΤΟΣ

Εάν κάποιος δανειστεί ή επενδύσει X ευρώ για ένα χρονικό διάστημα t (έστω ένα χρόνο) με απλό επιτόκιο (*rate*) *r*, τότε θα πρέπει στη λήξη του χρονικού διαστήματος να πληρώσει ή να εισπράξει αντίστοιχα το ποσό:

$$X + X\,r = X\left(1+r\right)$$

Στην περίπτωση όμως του σύνθετου επιτοκίου, όπου σαν βάση χρησιμοποιείται ένα μικρότερο χρονικό διάστημα ανατοκισμού, έστω k (για παράδειγμα τρεις μήνες), από αυτό του δανεισμού ή της επένδυσης με το ίδιο ονομαστικό επιτόκιο *r*, τότε στο τέλος της πρώτης περιόδου (στο πρώτο τρίμηνο δηλαδή) θα πρέπει να προστεθεί το ποσό:

$$X\left(1+\frac{r}{k}\right)$$

ενώ στο τέλος της δεύτερης περιόδου το ποσό:

$$X\left(1+\frac{r}{k}\right)\left(1+\frac{r}{k}\right)=X\left(1+\frac{r}{k}\right)^{2}$$

ομοίως στο τέλος της k περιόδου το ποσό:

$$X\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k}$$

και με το ίδιο σκεπτικό μετά από n χρόνια το ποσό:

$$X\left(1+\frac{r}{k}\right)^{nk}$$

Μέχρι τώρα έχει θεωρηθεί διακριτός ο χρόνος ανατοκισμού, δηλαδή οι τόκοι αποδίδονται στο κεφάλαιο σε διακριτά σημεία στο χρόνο. Εάν όμως, με ένα ονομαστικό (ετήσιο) επιτόκιο *r* οι τόκοι αποδίδονται σε k χρονικά σημεία μέσα στο χρόνο, όπου το k είναι πολύ μεγάλο ($k \to \infty$) τότε στο τέλος του έτους θα πρέπει να αποδοθεί το ποσό:

$$\lim_{k\to\infty} X\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k} = X\,e^{r}$$

και μετά από t έτη το ποσό:

$$X\,e^{rt}.$$

Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει συνεχής ανατοκισμός (*continuous compounding*) και το *r* καλείται συνεχές σύνθετο επιτόκιο (*compound interest rate*). Στη συνέχεια θεωρείται ότι πάντοτε θα μπορεί κάποιος να δανεισθεί ή να δανείζεται με ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο *r*, συνεχούς ανατοκισμού, χωρίς να υπάρχει κίνδυνος. Τότε το *r* καλείται *επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (risk-free interest rate)* και θα είναι το επιτόκιο των ομολόγων της αγοράς που έχουν και το μικρότερο κίνδυνο.

Σύμφωνα με τα παραπάνω όταν κάποιος έχει στην κατοχή του ένα χρηματικό ποσό που έχει παρούσα αξία X ευρώ, μετά από χρόνο t θα έχει *μελλοντική αξία* $X\,e^{rt}$ ευρώ. Δηλαδή θα μπορούσε να επενδύσει αυτό το ποσό σήμερα, στο χρόνο 0, σε ομόλογα με επιτόκιο *r* και μετά από χρόνο t θα εισπράξει $X\,e^{rt}$ ευρώ. Αντίθετα εάν κάποιος θέλει να έχει στην κατοχή του, μετά από χρόνο t ένα ποσό που θα έχει μελλοντική αξία Y, θα πρέπει να επενδύσει σήμερα, στο χρόνο 0, σε ομόλογα με επιτόκιο *r* το ποσό $Y\,e^{-rt}$ ευρώ η οποία αποτελεί και την *παρούσα αξία*.

Γενικά η *χρονική αξία του χρήματος* δίνεται από την σχέση:

$$X(t)=X(0)e^{rt}$$

που συνδέει τη σημερινή αξία του χρήματος X(0) με την μελλοντική αξία X(t). Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να διαχωριστεί η χρονική αξία του χρήματος από την αγοραστική αξία του χρήματος. Η χρονική αξία συνδέεται με τα επιτόκια, ενώ η αγοραστική αξία συνδέεται με τον πληθωρισμό.

2.3 ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΙΑΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ

Για την εφαρμογή του διωνυμικού μοντέλου τιμολόγησης των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής προϋποθέσεις:

- ✓ Το επιτόκιο *r* (χωρίς κίνδυνο) είναι ακριβώς το ίδιο και για αυτόν που δανείζει ή επενδύει και για αυτόν που δανείζεται.
- ✓ Η τιμή αγοράς είναι ίδια με την τιμή πώλησης.
- ✓ Στην αγορά δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών και τα κέρδη φορολογούνται με τον ίδιο τρόπο.
- ✓ Η αγορά βρίσκεται πάντα σε κατάσταση ισορροπίας.

Η τελευταία προϋπόθεση είναι αρκετά σημαντική. Σύμφωνα με αυτήν ικανοποιείται η φιλοσοφία της *ανυπαρξίας σίγουρου κέρδους (no arbitrage)* έτσι ώστε να παραμένουν οι αγορές αποτελεσματικές. Δηλαδή, θεωρείται ότι δεν υπάρχει στρατηγική που να μπορεί να ασκηθεί και να αποφέρει στον επενδυτή σίγουρο κέρδος. Πιο αυστηρά, ως *arbitrage* ορίζεται η επενδυτική στρατηγική η οποία έχει μηδενική πιθανότητα ζημίας και θετική πιθανότητα κέρδους. Ωστόσο, σε πραγματικές αγορές εμφανίζονται ευκαιρίες για *arbitrage*. Γρήγορα όμως εξαλείφονται μέχρι τη στιγμή που θα γίνουν αντιληπτές από πολλούς επενδυτές οπότε θα λειτουργήσει ο κανόνας της αγοράς και θα επέλθει ξανά η ισορροπία σε αυτήν.

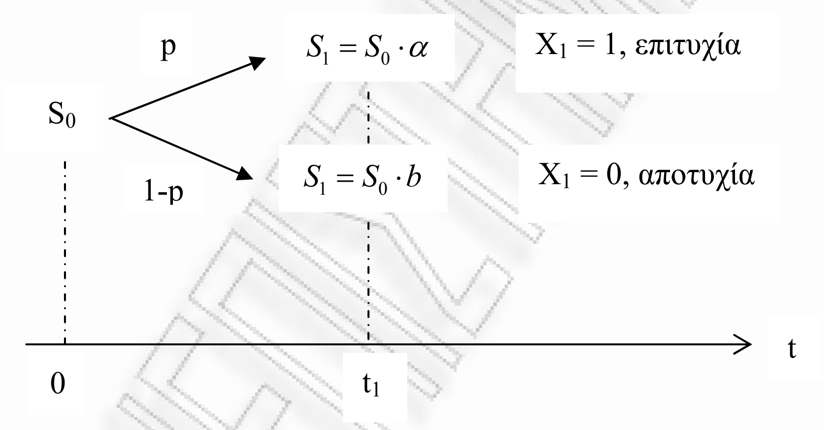
Έστω S_0 η τιμή της μετοχής στον χρόνο μηδέν. Η απλή υπόθεση στην οποία στηρίζεται το συγκεκριμένο μοντέλο τιμολόγησης είναι ότι στο χρόνο ένα η τιμή της μετοχής μπορεί είτε να ανέβει στην τιμή $S_1 = S_0 \cdot a,\ \textit{όπου}\ a > 1$ με πιθανότητα *p* είτε να πέσει στην τιμή $S_1 = S_0 \cdot b,\ \textit{όπου}\ 0 < b < 1$ με πιθανότητα 1-*p*. Δεν θεωρείται απαραίτητο να είναι ίσες οι πιθανότητες να ανεβεί ή όχι η τιμή της μετοχής. Οπότε θα ισχύει:

$$X_1 = \begin{cases} 1, \textit{εάν σημειωθεί άνοδος} - \textit{επιτυχία} \\ 0, \textit{εάν σημειωθεί κάθοδος} - \textit{αποτυχία} \end{cases}$$

επίσης:

$$\begin{gathered} P(X_1 = 1) = p\ , \textit{εάν σημειωθεί άνοδος} - \textit{επιτυχία} \\ \textit{και} \\ P(X_1 = 0) = 1 - p\ , \textit{εάν σημειωθεί κάθοδος} - \textit{αποτυχία} \end{gathered}.$$

Όπως είναι εύκολο να διαπιστωθεί η τυχαία μεταβλητή X_1 ακολουθεί την διωνυμική κατανομή μίας περιόδου με πιθανότητα “επιτυχίας” *p* και πιθανότητα “αποτυχίας” 1-*p*.



Διάγραμμα 2.1
Διωνυμικό μοντέλο μίας περιόδου

Όπως φαίνεται και στο Διάγραμμα 2.1 η τιμή της μετοχής στο χρόνο μηδέν ισούται με S_0. Στο χρόνο ένα η τιμή της είτε θα έχει σημειώσει άνοδο και θα είναι ίση με $S_1 = S_0 \cdot \alpha$ με πιθανότητα *p* είτε θα έχει σημειώσει κάθοδο και θα είναι ίση με $S_1 = S_0 \cdot b$ με πιθανότητα 1-*p*.

Στις προϋποθέσεις για την εφαρμογή του μοντέλου αναφέρθηκε ότι το επιτόκιο με το οποίο δανείζει ή δανείζεται κάποιος επενδυτής θα πρέπει να είναι το ίδιο. Σε συνδυασμό με την προϋπόθεση να ικανοποιείται η αρχή του no arbitrage θα πρέπει να ισχύει η ανισότητα:

$$0 < b < 1 + r < a \qquad (2.1)$$

Σε διαφορετική περίπτωση παρουσιάζεται ευκαιρία για arbitrage.

Περίπτωση I: $1 + r < b < a$

Ένας επενδυτής θα μπορούσε στο χρόνο μηδέν να δανειστεί από την αγορά (π.χ. να αγοράσει ένα ομόλογο) με επιτόκιο r και να αγοράσει την μετοχή στην τιμή της αγοράς S_0. Η τιμή της μετοχής στο χρόνο ένα θα είναι ίση είτε με $S_1 = S_0 \cdot \alpha$ είτε με $S_1 = S_0 \cdot b$. Και στις δύο περιπτώσεις είτε ανέβει είτε κατέβει η τιμή της μετοχής θα είναι μεγαλύτερη από $S_0 \cdot (1+r)$ οπότε θα μπορεί να πωλήσει την μετοχή, να αποπληρώσει το δάνειο και να έχει κέρδος ίσο με την διαφορά:

$$S_1 - S_0(1+r)$$

Σύμφωνα με αυτήν την στρατηγική θα υπάρχει σίγουρα κέρδος (arbitrage).

Περίπτωση II: $b < a < 1 + r$

Ένας επενδυτής θα μπορούσε στο χρόνο μηδέν να πωλήσει ανοιχτά μία μετοχή στην τιμή της αγοράς S_0 και να δανείσει τα χρήματα αυτά στην αγορά (π.χ. να εκδώσει ένα ομόλογο, να δανείσει σε κάποιον άλλον επενδυτή) με επιτόκιο r. Στο χρόνο ένα η τιμή της μετοχής θα είναι ίση είτε με $S_1 = S_0 \cdot \alpha$ είτε με $S_1 = S_0 \cdot b$. Και στις δύο περιπτώσεις θα είναι μικρότερη από το ποσό που θα πρέπει να του επιστραφεί από το δάνειο το οποίο είχε χορηγήσει. Με αυτόν τον τρόπο θα μπορεί να κλείσει την θέση του αγοράζοντας την μετοχή στην τιμή S_1 και να του μείνει κέρδος ίσο με:

$$S_0(1+r) - S_1$$

Σύμφωνα με αυτήν τη στρατηγική πάλι θα υπάρχει σίγουρα κέρδος (arbitrage).
Η πρώτη ανισότητα $0 < b$ είναι προφανής, διότι η τιμή ενός αγαθού δεν μπορεί να είναι αρνητική.

Έστω ότι υπάρχει ένας επενδυτής ο οποίος θέλει να πωλήσει ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου. Ο επενδυτής έχει την υποχρέωση να πωλήσει την μετοχή στην τιμή εξάσκησης K εάν αυτό απαιτήσει ο αγοραστής του δικαιώματος, δεδομένου ότι αυτό τον συμφέρει. Η υπόθεση που γίνεται εδώ είναι ότι η τιμή εξάσκησης K θα είναι τέτοια ώστε να ισχύει: $S_0 \cdot b < K < S_0 \cdot a$.

Η -χωρίς ύπαρξη σίγουρου κέρδους (*no arbitrage*)- τιμολόγηση ενός παραγώγου χρηματοοικονομικού προϊόντος (π.χ. ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου) με το διωνυμικό μοντέλο στηρίζεται στη δημιουργία ενός *χαρτοφυλακίου εξασφάλισης (replicating/hedging portfolio)*. Στη συνέχεια θα δειχθεί τι είναι το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης και πως χρησιμοποιείται.

Έστω ότι ένας επενδυτής πωλεί ένα δικαίωμα αγοράς επί μίας μετοχής με τιμή εξάσκησης K και τιμή δικαιώματος C (άγνωστη προς το παρόν). Έστω επίσης ότι έχει στην κατοχή του στο χρόνο μηδέν κεφάλαιο ίσο με X_0 και αγοράζει Δ_0 μετοχές στην τιμή της αγοράς S_0 δημιουργώντας έτσι ένα *χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης* το οποίο θα πρέπει σε κάθε χρονική στιγμή να έχει την ίδια ακριβώς αξία με το δικαίωμα αγοράς (διαφορετικά υπάρχει ευκαιρία για arbitrage). Επομένως στο χρόνο μηδέν έχει κεφάλαιο ίσο με $X_0 - \Delta_0 \cdot S_0$ και θα πρέπει να ισχύει:

$$C = V_0 = X_0 - \Delta_0 \cdot S_0 \tag{2.2}$$

όπου V_t θα συμβολίζεται η αξία του δικαιώματος τη χρονική στιγμή t.
Στο χρόνο ένα η τιμή της μετοχής θα είναι ίση είτε με $S_1 = S_0 \cdot \alpha$ (σε περίπτωση ανόδου) είτε με $S_1 = S_0 \cdot b$ (σε περίπτωση πτώσης) και το κεφάλαιό του θα ισούται με:

$$X_1 = \Delta_0 \cdot S_1 + (1+r)\cdot(X_0 - \Delta_0 \cdot S_0) = (1+r)\cdot X_0 + \Delta_0 \cdot \left(S_1 - (1+r)\cdot S_0\right) \tag{2.3}$$

όπου $S_1 = \begin{cases} S_0 \cdot a, \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ p \\ S_0 \cdot b, \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1-p \end{cases}$

Ακόμη ισχύει ότι η αξία του χαρτοφυλακίου κατά τη χρονική στιγμή ένα θα ισούται με $V_1 = (S_1 - K)_+$ και θα πρέπει να ισχύει $V_1 = X_1$ επομένως προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{cases} V_1 = (1+r)\cdot X_0 + \Delta_0 \cdot \left(S_0 \cdot a - (1+r)\cdot S_0\right), \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ p \\ V_1 = (1+r)\cdot X_0 + \Delta_0 \cdot \left(S_0 \cdot b - (1+r)\cdot S_0\right), \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1-p \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (S_0 \cdot a - K)_+ = (1+r)\cdot X_0 + \Delta_0 \cdot \left(S_0 \cdot a - (1+r)\cdot S_0\right), \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ p \\ (S_0 \cdot b - K)_+ = (1+r)\cdot X_0 + \Delta_0 \cdot \left(S_0 \cdot b - (1+r)\cdot S_0\right), \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1-p \end{cases} \tag{2.4}$$

Λύνοντας ως προς X_0 και Δ_0 το παραπάνω σύστημα προκύπτουν τα εξής:

$$\begin{cases} \Delta_0 = \dfrac{\left(S_0 \cdot a - K\right)_+ - \left(S_0 \cdot b - K\right)_+}{S_0 \cdot \left(a-b\right)} \\ X_0 = \dfrac{1}{1+r} \cdot \dfrac{a \cdot \left(S_0 \cdot b - K\right)_+ - b \cdot \left(S_0 \cdot a - K\right)_+}{a-b} \end{cases} \tag{2.5}$$

όπου $\Delta_0 > 0$ και εκφράζει τον αριθμό των μετοχών και $X_0 < 0$ και εκφράζει το επενδυμένο ποσό (π.χ. σε ομόλογα).

Αντικαθιστώντας τα Δ_0, X_0 στη σχέση (2.2) προκύπτει η ζητούμενη no arbitrage τιμή του δικαιώματος η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$C = \frac{\left(\dfrac{1}{1+r} a - 1\right) \cdot \left(S_0 \cdot b - K\right)_+ + \left(1 - \dfrac{1}{1+r} b\right) \cdot \left(S_0 \cdot a - K\right)_+}{a-b} \tag{2.6}$$

Εναλλακτικά, ένας δεύτερος τρόπος έκφρασης της no arbitrage τιμής του δικαιώματος είναι η εξής:

$$C = \frac{1}{1+r} \cdot \left[q \cdot \left(S_0 \cdot a - K\right)_+ + \left(1-q\right) \cdot \left(S_0 \cdot b - K\right)_+ \right] \tag{2.7}$$

που προκύπτει εάν πολλαπλασιαστεί η πρώτη εξίσωση του συστήματος (2.4) με q και η δεύτερη με 1-q και μετά προστεθούν, οπότε θα προκύψει η ισότητα:

$$X_0 + \Delta_0 \cdot \left(\frac{1}{1+r} \cdot \left[q \cdot \left(S_0 \cdot a\right) + \left(1-q\right) \cdot \left(S_0 \cdot b\right) \right] - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} \cdot \left[q \cdot \left(S_0 \cdot a - K\right)_+ + \left(1-q\right) \cdot \left(S_0 \cdot b - K\right)_+ \right] \tag{2.8}$$

με q τέτοιο ώστε:

$$S_0 = \frac{1}{1+r} \cdot \left[q \cdot \left(S_0 \cdot a\right) + \left(1-q\right) \cdot \left(S_0 \cdot b\right) \right] \tag{2.9}$$

από όπου τελικά προκύπτει ότι:

$$q = \frac{1+r-b}{a-b} \quad \text{και} \quad 1-q = \frac{a-\left(1+r\right)}{a-b} \tag{2.10}$$

Σύμφωνα με τις δύο τελευταίες ισότητες θα ισχύει ότι $0 < q < 1$, επομένως η ποσότητα q μπορεί να θεωρηθεί ως μία πιθανότητα. Άρα εάν θεωρηθεί ότι η τιμή της μετοχής στο χρόνο ένα παίρνει τις τιμές $S_1 = S_0 \cdot \alpha$ είτε $S_1 = S_0 \cdot b$ με πιθανότητες q και 1-q αντίστοιχα (αντί των πραγματικών p και 1-p) τότε η σχέση (2.7) που δίνει την no arbitrage τιμής του δικαιώματος μπορεί να γραφεί στην τελική μορφή:

$$C = \frac{1}{1+r} \cdot E_Q\left(S_1 - K\right)_+ \tag{2.11}$$

Η σχέση (2.11) εκφράζει την αναμενόμενη μέση τιμή του τυχαίου κέρδους $(S_1 - K)_+$ από την χρήση του δικαιώματος επί τον συντελεστή προεξόφλησης ή διαφορετικά *την παρούσα αξία του αναμενόμενου κέρδους από την χρήση του δικαιώματος σε έναν κόσμο ουδέτερου ρίσκου (risk neutral pricing formula).*

Είναι σημαντικό, σε αυτό το σημείο να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στο γεγονός ότι η μέση τιμή λαμβάνεται επί των ***"εικονικών"*** πιθανοτήτων q και 1-q και όχι επί των πραγματικών p και 1-p. Δηλαδή οι πραγματικές πιθανότητες p και 1-p είναι ανεξάρτητες από την τιμολόγηση του δικαιώματος. Επίσης αφού η S_1 είναι τυχαία μεταβλητή η οποία λαμβάνει τις τιμές $S_0 \cdot \alpha$ είτε $S_0 \cdot b$ με πιθανότητες p και 1-p αντίστοιχα θα ισχύει ότι:

$$E_p\left(S_1\right) = p \cdot S_0 \cdot a + \left(1-p\right) \cdot S_0 \cdot b$$

και με αλλαγή του μέτρου πιθανότητας από το πραγματικό p στο "εικονικό" q και με αντικατάσταση της τιμής του από τις σχέσεις (2.10) θα ισχύει:

$$E_Q\left(S_1\right) = \left(1+r\right) \cdot S_0$$

Δηλαδή σε έναν "εικονικό" κόσμο η επένδυση σε μετοχή θα είχε την ίδια αναμενόμενη απόδοση με αυτή των ομολόγων. Στον πραγματικό κόσμο κάτι τέτοιο δεν ισχύει, διότι η επένδυση σε μετοχές έχει μεγαλύτερο κίνδυνο από την επένδυση σε ομόλογα οπότε και ο επενδυτής αναμένει μεγαλύτερη απόδοση για να αναλάβει αυτό το ρίσκο. Αυτό που ισχύει στην πραγματικότητα είναι $E_p\left(S_1\right) > \left(1+r\right) \cdot S_0$. Επομένως, η ισότητα θα ίσχυε μόνο εάν οι επενδυτές θα ήταν ουδέτεροι απέναντι στον κίνδυνο. Γι αυτό το λόγο οι πιθανότητες p και 1-p αναφέρονται στον "πραγματικό κόσμο" ενώ οι πιθανότητες q και 1-q σε έναν *"κόσμο ουδέτερου ρίσκου" (risk neutral probabilities).*

Ας σημειωθεί, ότι στους παραπάνω υπολογισμούς θεωρήθηκε ως επιτόκιο το ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο r σε διακριτό χρόνο. Στην περίπτωση συνεχούς ανατοκισμού η ποσότητα (1+r) αντικαθίσταται από την ποσότητα e^{rt}.

2.4 ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ n ΠΕΡΙΟΔΩΝ

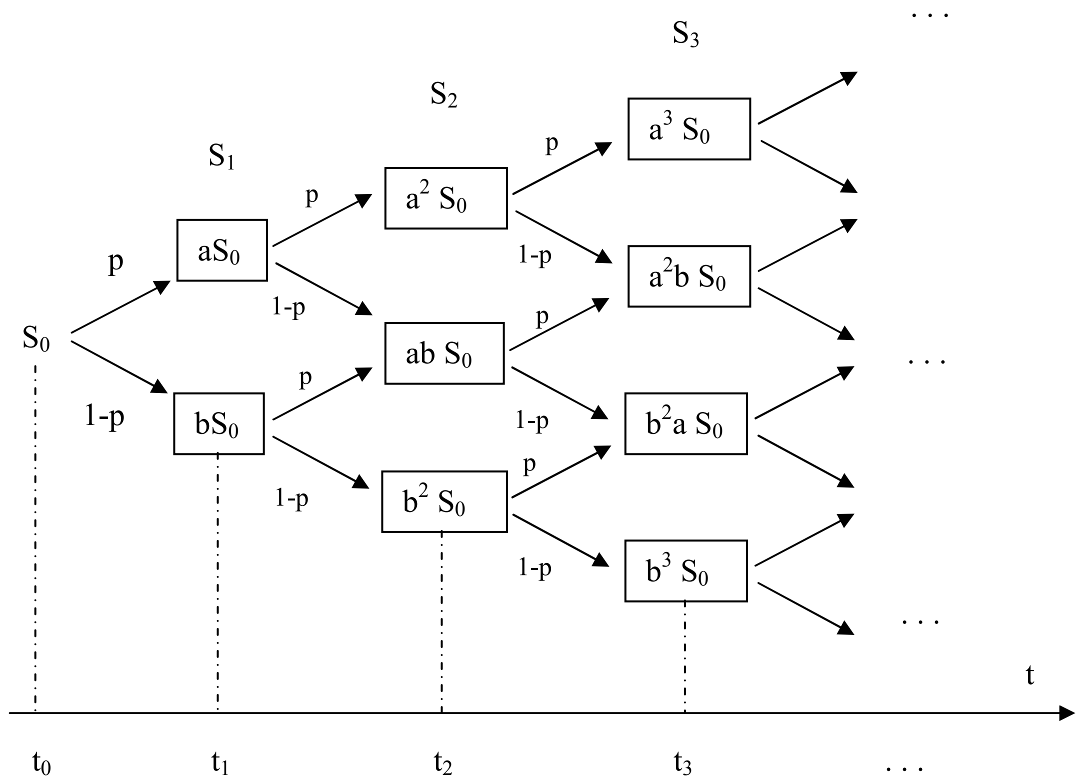
Για την εφαρμογή του διωνυμικού μοντέλου τιμολόγησης n περιόδων των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων θα πρέπει να ικανοποιούνται οι ίδιες προϋποθέσεις με αυτές του διωνυμικού μοντέλου μίας περιόδου που παρατέθηκαν στην αρχή της προηγούμενης παραγράφου. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται και σε αυτήν την περίπτωση η "ικανοποίηση" της ανυπαρξίας σίγουρου κέρδους. Η κεντρική ιδέα στην οποία στηρίζεται το διωνυμικό μοντέλο n περιόδων είναι η δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου εξασφάλισης όπως και στην περίπτωση της μίας περιόδου. Η μόνη διαφορά εντοπίζεται στο γεγονός ότι τώρα η διαδικασία δεν σταματάει στο χρόνο ένα αλλά μετά από n "βήματα", μέχρι το χρόνο T που είναι και ο χρόνος λήξης (ή διαφορετικά εξάσκησης) του δικαιώματος.

Πιο συγκεκριμένα, ορίζεται το χρονικό διάστημα [0,T] το οποίο και χωρίζεται σε n διακριτά στο χρόνο σημεία τέτοια ώστε $t_0 = 0$, $t_1 = h$, $t_2 = 2h$, …, $t_n = nh = T$. Ομοίως ορίζονται και οι αντίστοιχες τιμές της μετοχής S_0 (στο χρόνο 0), S_1 (στο χρόνο 1),…, $S_n=S_T$ (στο χρόνο λήξης), όπου η τιμή S_0 της μετοχής στο χρόνο 0 θεωρείται γνωστή. Με την ίδια λογική, όπως αυτή αναπτύχθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο, η τιμή της μετοχής μεταξύ δύο διακριτών χρονικών σημείων, t_{i-1} και t_i, μπορεί είτε να σημειώσει άνοδο και να πάρει την τιμή aS_{i-1} με πιθανότητα p είτε να σημειώσει κάθοδο και να πάρει την τιμή bS_{i-1} με πιθανότητα $1-p$. Όπου $0<b<1<a$.

Όπως φαίνεται και στο Διάγραμμα 2.2 η τιμή της μετοχής στο χρόνο 1, συμβολικά S_1, είτε θα ανέβει στην τιμή $S_1(1) = aS_0$ είτε θα πέσει στην τιμή $S_1(0) = bS_0$. Στο χρόνο δύο η τιμή της μετοχής, συμβολικά S_2, θα μπορεί να πάρει μία από τις τέσσερις (2^2) τιμές:

$$S_2(1,1) = aS_1(1) = a^2S_0 \quad , \quad S_2(1,0) = bS_1(1) = baS_0$$

$$S_2(0,1) = aS_1(1) = abS_0 \quad , \quad S_2(0,0) = bS_1(1) = b^2S_0$$



Διάγραμμα 2.2
Διωνυμικό μοντέλο n περιόδων

Στο χρόνο τρία υπάρχουν οχτώ (2^3) διαφορετικά "μονοπάτια" ($S_3(1,1,1)$, $S_3(1,1,0)$, $S_3(1,0,1)$, $S_3(1,0,0)$, $S_3(0,1,1)$, $S_3(0,1,0)$, $S_3(0,0,1)$, $S_3(0,0,0)$) και τέσσερις διαφορετικές πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει η τιμή της μετοχής οι οποίες είναι:

$$S_3\left(1,1,1\right)=aS_2\left(1,1\right)=a^3S_0 \quad , \quad S_3\left(1,1,0\right)=S_3\left(1,0,1\right)=S_3\left(0,1,1\right)=a^2bS_0$$

$$S_3\left(1,0,0\right)=S_3\left(0,1,0\right)=S_3\left(0,0,1\right)=ab^2S_0 \quad , \quad S_3\left(0,0,0\right)=bS_2\left(0,0\right)=b^3S_0$$

Ομοίως, στο χρόνο λήξης T μετά από n χρονικά σημεία, θα υπάρχουν 2^n "μονοπάτια" με n+1 διαφορετικές τιμές για την μετοχή.

Για την εφαρμογή του διωνυμικού μοντέλου τιμολόγησης n περιόδων για την εύρεση της αξίας ενός παραγώγου, θεωρείται ότι ένας επενδυτής πωλεί ένα δικαίωμα αγοράς επί μίας μετοχής και ταυτόχρονα δημιουργεί ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης. Το δικαίωμα αγοράς και το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης θα πρέπει να έχουν την ίδια αξία κάθε χρονική στιγμή. Το δικαίωμα αγοράς έχει τιμή εξάσκησης K, τιμή δικαιώματος $C=V_0$ (άγνωστη προς το παρόν, αποτελεί την ποσότητα που θα εκτιμηθεί) και χρόνο λήξης μετά από n χρονικά σημεία, δηλαδή στο χρόνο $t_n=T$. Στο χρόνο λήξης η αξία του δικαιώματος είναι ίση με $V_T=(S_T - K)_+$, όπου τα V_T και S_T εξαρτώνται από τις προηγούμενες τιμές τους. Το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης κατά τη χρονική στιγμή t_o αποτελείται από Δ_0 μετοχές με τιμή αγοράς S_0 και το ποσό V_0 - $\Delta_0 S_0$ που έχει επενδυθεί σε ομόλογα με ονομαστικό επιτόκιο αγοράς r (στην πραγματικότητα η ποσότητα V_0 - $\Delta_0 S_0$ είναι αρνητική, οπότε ο επενδυτής δανείζεται ή διαφορετικά εκδίδει ομόλογο με ονομαστικό επιτόκιο r).

Με αυτόν τον τρόπο ο επενδυτής δημιουργεί ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης το οποίο κατά την χρονική στιγμή t_1 θα έχει αξία ίση με:

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0) \tag{2.12}$$

Δεδομένου ότι η τιμή S_1 θα είναι ίση είτε με $S_1(1) = aS_0$ εάν η τιμή της μετοχής σημειώσει άνοδο είτε με $S_1(0) = bS_0$ εάν η τιμή σημειώσει κάθοδο, από την (2.12) προκύπτουν οι εξής δύο εξισώσεις:

$$X_1(1) = \Delta_0 S_1(1) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0) \tag{2.13}$$

$$X_1(0) = \Delta_0 S_1(0) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0) \tag{2.14}$$

Αμέσως μετά τη χρονική στιγμή t_1 η αξία του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης, το οποίο αποτελείται από τις μετοχές και το ομόλογο, είναι ίση με X_1 και θα πρέπει να είναι ίση με την αξία V_1 του δικαιώματος. Επίσης, αμέσως μετά τη χρονική στιγμή t_1 και πριν τη χρονική στιγμή t_2 οι τιμές S_1 και X_1 είναι γνωστές στον επενδυτή. Δεδομένου ότι οι τιμές έχουν αλλάξει και είναι διαφορετικές από αυτές της χρονικής στιγμής t_0 ο επενδυτής θα πρέπει να αναπροσαρμόσει το χαρτοφυλάκιό του για να συνεχίσει να είναι ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει τώρα το χαρτοφυλάκιο να αποτελείται από Δ_1 μετοχές και $X_1 - \Delta_1 S_1$ ποσό επενδεδυμένο σε ομόλογα (όπως και προηγουμένως η ποσότητα $X_1 - \Delta_1 S_1$ είναι αρνητική, οπότε ο επενδυτής δανείζεται ή διαφορετικά εκδίδει ομόλογο με ονομαστικό επιτόκιο r).

Κατά την χρονική στιγμή t_2 θα ισχύει:

$$V_2 = \Delta_1 S_2 + (1+r)(X_1 - \Delta_1 S_1) \tag{2.15}$$

Δεδομένου του διωνυμικού μοντέλου η τιμή της μετοχής μπορεί να ακολουθήσει τέσσερα διαφορετικά μονοπάτια μέχρι αυτή τη χρονική στιγμή. Οπότε προκύπτουν οι εξής εξισώσεις:

$$V_2(1,1) = \Delta_1(1)S_2(1,1) + (1+r)\big(X_1(1) - \Delta_1(1)S_1(1)\big) \tag{2.16}$$

$$V_2(1,0) = \Delta_1(1)S_2(1,0) + (1+r)\big(X_1(1) - \Delta_1(1)S_1(1)\big) \tag{2.17}$$

$$V_2(0,1) = \Delta_1(0)S_2(0,1) + (1+r)\big(X_1(0) - \Delta_1(0)S_1(0)\big) \tag{2.18}$$

$$V_2(0,0) = \Delta_1(0)S_2(0,0) + (1+r)\big(X_1(0) - \Delta_1(0)S_1(0)\big) \tag{2.19}$$

Σε αυτό το σημείο έχουν προκύψει έξι εξισώσεις (δύο από την εξίσωση (2.12) και τέσσερις από την εξίσωση (2.15)) με έξι αγνώστους (V_0, Δ_0, $\Delta_1(1)$, $\Delta_1(0)$, $X_1(1)$ και $X_1(0)$). Λύνοντας αυτό το 6x6 σύστημα θα βρεθούν η ζητούμενη no arbitrage τιμή του δικαιώματος $C=V_0$, καθώς και τα Δ_0, $\Delta_1(1)$ και $\Delta_1(0)$ που καθορίζουν τη σύσταση του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης μέχρι αυτή τη χρονική στιγμή. Προσθέτοντας τις εξισώσεις (2.18) και (2.19) και λύνοντας ως προς $\Delta_1(0)$ προκύπτει:

$$\Delta_1(0) = \frac{V_2(0,1) - V_2(0,0)}{S_2(0,1) - S_2(0,0)} \tag{2.20}$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας την (2.20) στις (2.18) και (2.19) προκύπτει:

$$X_1(0) = \frac{1}{1+r}\big[q V_2(0,1) + (1-q)V_2(0,0)\big] \tag{2.21}$$

όπου q και $1\text{-}q$ είναι οι εικονικές πιθανότητες που ισχύουν σε έναν κόσμο ουδέτερου ρίσκου και δίνονται από τις σχέσεις (2.10). Επίσης, η (2.21) μπορεί να προκύψει από τον πολλαπλασιασμό της (2.18) με q και της (2.19) με $1\text{-}q$ και την πρόσθεση αυτών. Η παραπάνω εξίσωση δίνει την αξία του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης την χρονική στιγμή t_1 εάν η τιμή της μετοχής από τον χρόνο t_0 στον χρόνο t_1 έχει σημειώσει πτώση και έχει αξία bS_0. Λόγω της ισότητας της παραπάνω αξίας με αυτή του δικαιώματος θα ισχύει:

$$V_1(0) = \frac{1}{1+r}\big[q V_2(0,1) + (1-q)V_2(0,0)\big] \tag{2.22}$$

που είναι η αναμενόμενη μέση τιμή του δικαιώματος, σε έναν κόσμο ουδέτερου ρίσκου, στο χρόνο t_1 εάν η τιμή της μετοχής από τον χρόνο t_0 στον χρόνο t_1 έχει σημειώσει πτώση.

Με όμοιο τρόπο από τις εξισώσεις (2.16) και (2.17) προκύπτει:

$$\Delta_1(1) = \frac{V_2(1,1) - V_2(1,0)}{S_2(1,1) - S_2(1,0)} \tag{2.23}$$

και:

$$V_1(1) = \frac{1}{1+r}\left[qV_2(1,1)+(1-q)V_2(1,0)\right] \tag{2.24}$$

$\left(\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ X_1(1) = V_1(1)\right)$

όπου $V_1(1)$ είναι η αναμενόμενη μέση τιμή του δικαιώματος, σε έναν κόσμο ουδέτερου ρίσκου, στο χρόνο t_1 εάν η τιμή της μετοχής από τον χρόνο t_0 στον χρόνο t_1 έχει σημειώσει άνοδο.

Επομένως στο χρόνο t_n=T (χρόνος λήξης) θα ισχύει:

$$X_n = \Delta_{n-1}S_n + (1+r)\left(X_{n-1} - \Delta_{n-1}S_{n-1}\right) = V_n \tag{2.25}$$

$$V_{n-1}(\omega_1,\omega_2,...,\omega_{n-1}) = \frac{1}{1+r}\left[qV_n(\omega_1,\omega_2,...,\omega_{n-1},1)+(1-q)V_n(\omega_1,\omega_2,...,\omega_{n-1},0)\right] \tag{2.26}$$

$$\Delta_{n-1}(\omega_1,\omega_2,...,\omega_{n-1}) = \frac{V_n(\omega_1,\omega_2,...,\omega_{n-1},1) - V_n(\omega_1,\omega_2,...,\omega_{n-1},0)}{S_n(\omega_1,\omega_2,...,\omega_{n-1},1) - S_n(\omega_1,\omega_2,...,\omega_{n-1},0)} \tag{2.27}$$

όπου ω_i δείχνει την κίνηση της μετοχής από την χρονική στιγμή t_{i-1} στη χρονική στιγμή t_i

$$\omega_i = \begin{cases} 1, \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ \acute{\alpha}\nu o\delta o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \mu\varepsilon\tau o\chi\acute{\eta}\varsigma \\ 0, \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ \kappa\acute{\alpha}\theta o\delta o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \mu\varepsilon\tau o\chi\acute{\eta}\varsigma \end{cases}$$

Λύνοντας “προς τα πίσω” τις παραπάνω ακολουθίες και προσδιορίζοντας κάθε φορά τις τιμές αυτών (για κάθε χρονική στιγμή) προκύπτει η αξία του δικαιώματος η οποία είναι:

$$C = \frac{1}{1+r}E_Q\left(S_n - K\right)_+ \tag{2.28}$$

Η σχέση (2.28) εκφράζει την αναμενόμενη μέση τιμή του τυχαίου κέρδους $(S_n – K)_+$ από την χρήση του δικαιώματος επί τον συντελεστή προεξόφλησης ή διαφορετικά *την παρούσα (no arbitrage) αξία του αναμενόμενου κέρδους από την χρήση του δικαιώματος σε έναν κόσμο ουδέτερου ρίσκου (risk neutral pricing formula).*

2.5 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ MARTINGALES

Σε αυτή την παράγραφο θα αναπτυχθούν τα πιο βασικά κομμάτια της θεωρίας των martingales. Αυτό θα έχει σαν σκοπό, να δοθεί μία πιο “μαθηματική” απόδειξη της εύρεσης της αξίας ενός δικαιώματος σε διακριτό χρόνο με την εφαρμογή του διωνυμικού μοντέλου n περιόδων.

Οι ποσότητες που αναφέρθηκαν προηγουμένως ($\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$), ($X_0, X_1, \ldots, X_n$) και ($V_0, V_1, \ldots, V_n$) είναι ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών εξαρτώμενες από τον χρόνο. Αυτού του είδους ακολουθίες ονομάζονται στοχαστικές διαδικασίες. Πιο συγκεκριμένα οι τιμές Δ_i, X_i και V_i την κάθε χρονική στιγμή t_i εξαρτώνται από την τιμή της μετοχής, εάν έχει ανεβεί ή εάν έχει κατεβεί από την χρονική στιγμή t_{i-1} στην χρονική στιγμή t_i. Ο ακριβής ορισμός των στοχαστικών διαδικασιών είναι:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια στοχαστική διαδικασία είναι μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών ορισμένων σε ένα χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. *Εάν υπάρχει αριθμήσιμο πλήθος των μελών της οικογένειας τότε η διαδικασία συμβολίζεται με* $X_1, X_2, X_3, \ldots$. *Εάν το πλήθος των μελών της οικογένειας δεν είναι αριθμήσιμο, τότε η διαδικασία συμβολίζεται με* $\{X(t): t \geq 0\}$ *ή* $\{X_t\}_{t\geq 0}$. *Στην πρώτη περίπτωση η διαδικασία ονομάζεται μία διαδικασία σε χρόνο διακριτό, ενώ στη δεύτερη περίπτωση μία στοχαστική διαδικασία σε χρόνο συνεχή.*

Ο χώρος των καταστάσεων S, είναι ο χώρος που δημιουργείται από όλες τις πιθανές τιμές X_t. Εάν $S=\{0, 1, 2, \ldots\}$ τότε ορίζεται μία στοχαστική διαδικασία με ακέραιες τιμές ή μία διακριτών καταστάσεων διαδικασία. Εάν $S=(-\infty, \infty)$ τότε η στοχαστική διαδικασία καλείται μία στοχαστική διαδικασία με πραγματικές τιμές.

Τα martingales είναι μία από τις κατηγορίες στοχαστικών διαδικασιών. Οι ρίζες της μελέτης αυτών προέρχεται από μία παλιά στρατηγική στις αρχές του 19^{ου} αιώνα όπου όταν κάποιος χάνει σε μία παρτίδα ενός τυχερού παιχνιδιού, τότε διπλασιάζει το στοίχημα στην επόμενη παρτίδα για να επανακτήσει τα χρήματά του. Παρακάτω θα δοθούν κάποιοι ορισμοί και προτάσεις για την αυστηρή θεμελίωση και καλύτερη κατανόηση των martingales.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μία στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ *σε χρόνο διακριτό είναι ένα martingale εάν ισχύουν τα παρακάτω:*

I. $E\left[|X_n|\right] < \infty$

και

II. $E\left[X_{n+1} \mid X_0, X_1, \ldots, X_n\right] = X_n$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ *και* $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *δύο στοχαστικές διαδικασίες σε χρόνο διακριτό. Θα λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία* $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ *είναι ένα martingale σε σχέση με τη στοχαστική διαδικασία* $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *εάν ισχύουν:*

I. $E\left[|X_n|\right] < \infty$

II. $E\left[X_{n+1} \mid Y_0, Y_1, \ldots, Y_n\right] = X_n$

III. η X_n *είναι μία συνάρτηση των* $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω ότι $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale σε σχέση με τη στοχαστική διαδικασία $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Τότε εάν m<n ισχύει ότι:

$$E\left[X_n \mid Y_0, Y_1, \ldots, Y_m\right] = X_m$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω ότι $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale σε σχέση με τη στοχαστική διαδικασία $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Τότε:

$$E\left[X_n\right] = E\left[X_0\right] \quad \text{για κάθε } n = 1, 2, \ldots$$

Από τον πρώτο ορισμό διαπιστώνεται ότι εάν η τυχαία μεταβλητή X_n εκφράζει το κεφάλαιο μίας επένδυσης, τότε η μέση τιμή του κεφαλαίου την χρονική στιγμή i+1 θα είναι ίση με το κεφάλαιο της χρονικής στιγμής i. Δηλαδή η μέση τιμή του κεφαλαίου μετά την πάροδο μίας χρονικής περιόδου (από την i στην i+1) είναι ίση με το κεφάλαιο. Επομένως ικανοποιείται η φιλοσοφία του arbitrage.

Στον δεύτερο ορισμό η τυχαία μεταβλητή Y_n της στοχαστικής διαδικασίας $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ δεν είναι κατά ανάγκη μία πραγματική τυχαία μεταβλητή. Μερικές φορές είναι χρήσιμο η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών Y_0, Y_1, …, Y_n να θεωρείται σαν η πληροφορία ή η ιστορία της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_n\}_{n=0}$ μέχρι τη στιγμή n. Διαφορετικά, συμβολίζοντας με $\{I_t,\ t \in [0, \infty]\}$ μία οικογένεια συνόλων πληροφορίας τα οποία γίνονται γνωστά ακολουθιακά συνεχώς στους ανθρώπους που αξιοποιούν την πληροφορία, θα αποτελεί ένα φιλτράρισμα αν για κάθε k, m, n ισχύει ότι $I_k \subseteq I_m \subseteq I_n$. Επίσης θα λέγεται ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ θα είναι προσαρμοσμένη (*adapted*) σε μία οικογένεια πληροφορίας $\{I_t\}_{t=0}^{\infty}$ εάν η τυχαία μεταβλητή X_t θα είναι γνωστή όταν δίνεται το σύνολο της πληροφορίας I_t.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μία στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ θα είναι martingale σε σχέση με μία οικογένεια πληροφορίας $\{I_t\}_{t=0}^{\infty}$ και σε σχέση με το μέτρο πιθανότητας p εάν για κάθε t=1, 2 … ισχύει:

I. *Η $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ είναι προσαρμοσμένη (adapted) στην οικογένεια πληροφορίας $\{I_t\}_{t=0}^{\infty}$*

II. *Η μέση τιμή της απόλυτης τιμής της X_t σε σχέση με το μέτρο πιθανότητας p είναι πεπερασμένη για κάθε t, δηλαδή*

$$E\left[\left|X_t\right|\right]<\infty \text{ για κάθε } t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

III. *Ισχύει η σχέση*

$$E\left[X_{n+1} \mid I_0, I_1, \ldots, I_n\right] = X_n \text{ για κάθε } n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Επίσης, σαν μία οικογένεια πληροφορίας μπορεί να θεωρηθεί και μία σ-άλγεβρα $\mathfrak{F}$ επί ενός δειγματοχώρου Ω, ο οποίος θα αποτελεί όλες τις δυνατές καταστάσεις στις οποίες θα μπορεί να βρεθεί η τυχαία μεταβλητή.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω ένας χώρος πιθανοτήτων (Ω, $\mathfrak{F}$, P) και μία τυχαία μεταβλητή X ορισμένη στο χώρο αυτό, για την οποία ισχύει ότι $E[|X|]<\infty$. Έστω επίσης μία σ-άλγεβρα $\mathfrak{F}(Y)$ η οποία περιέχεται στην σ-άλγεβρα $\mathfrak{F}$ όλου του δειγματοχώρου Ω δηλαδή $\mathfrak{F}_Y \subseteq \mathfrak{F}$. Τότε η υπό συνθήκη μέση τιμή της X *δεδομένη της σ-άλγεβρας $\mathfrak{F}_Y$ συμβολίζεται με $E[X| \mathfrak{F}_Y]$ και είναι οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες:*

I. *Η τυχαία μεταβλητή $E[X \mid \mathfrak{F}_Y]$ είναι $\mathfrak{F}_Y$ μετρήσιμη*

II. *Για οποιοδήποτε σύνολο $F \subseteq \mathfrak{F}_Y$ ορίζουμε με I_F τη δείκτρια συνάρτηση του ενδεχομένου F τότε $E[X I_F] = E[\, E[\, X \mid F_Y\,]\, I_F\,]$ για όλα τα $F \in \mathfrak{F}_Y$.*

Η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, δηλαδή η στοχαστική διαδικασία X_n, είναι προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ αν για κάθε n ισχύει ότι η X_n είναι $\mathfrak{F}_n$ - μετρήσιμη στο Ω.

Έστω $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στο χώρο πιθανοτήτων (Ω, $\mathfrak{F}$, P) και $\mathfrak{F}_n$ η παραγόμενη σ-άλγεβρα από τις τυχαίες μεταβλητές $\{Y_0, Y_1, \ldots, Y_n\}$ στον Ω. Δηλαδή θα ισχύει ότι:

$$\mathfrak{F}_0 = \sigma(Y_0)$$

$$\mathfrak{F}_1 = \sigma(Y_0, Y_1)$$

$$\ldots$$

$$\mathfrak{F}_n = \sigma(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$$

$$\ldots$$

και $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{F}_n \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{F}$ αποτελεί ένα φιλτράρισμα.

Έστω επίσης και η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ που ορίζεται ως:

$$X_0 = \sigma(Y_0)$$

$$X_1 = \sigma(Y_0, Y_1)$$

$$\ldots$$

$$X_n = \sigma(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$$

Προφανώς η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι προσαρμοσμένη στην ακολουθία των σ-αλγεβρών $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Διαισθητικά μπορεί να θεωρηθεί ότι η $\mathfrak{F}_n$ περιέχει το σύνολο της πληροφορίας που καθορίζει πλήρως την τυχαία μεταβλητή X_n με την έννοια ότι αυτή καθορίζεται πλήρως σαν συνάρτηση των Y_0, Y_1, …,Y_n. Καθώς το n μεγαλώνει, προστίθεται νέα πληροφορία και έτσι θα ισχύει ότι $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{F}_{n+1}$ και με αυτό τον τρόπο καθορίζεται και η X_{n+1}.

Έστω, για παράδειγμα ότι παρακολουθείται η πορεία μίας μετοχής επί τρεις ημέρες. Σημειώνεται με 1 εάν η μετοχή είχε άνοδο σε μία συγκεκριμένη ημέρα και 0 εάν η μετοχή είχε κάθοδο την ίδια ημέρα. Ο δειγματικός χώρος Ω που προκύπτει θα είναι:

$$\Omega = \{ (1,1,1), (1,1,0), (1,0,1), (1,0,0), (0,1,1), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0) \}$$

Θεωρείται το σύνολο των υποσυνόλων του Ω,

$$\mathfrak{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}.$$

Το $\mathfrak{F}_0$ αποτελεί μία σ-άλγεβρα για τον Ω. Είναι η πληροφορία που δίνεται στον χρόνο 0, πριν αρχίσει η επί τρεις ημέρες παρατήρηση της μετοχής. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην περιέχεται σε αυτήν καμία πληροφορία για την τιμή της μετοχής.

Στη συνέχεια θεωρείται το σύνολο των υποσυνόλων του Ω,

$$\mathfrak{F}_1 = \left\{ \varnothing, \Omega, \underbrace{\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1),(1,0,0)\}}_{A_1}, \underbrace{\{(0,1,1),(0,1,0),(0,0,1),(0,0,0)\}}_{A_0} \right\}$$

Το $\mathfrak{F}_1$ αποτελεί μια σ-άλγεβρα για τον Ω. Είναι η πληροφορία που δίνεται στον χρόνο 1. Το σύνολο A_1 περιέχει όλα τα δυνατά αποτελέσματα των τριών ημερών δεδομένου ότι την πρώτη ημέρα η τιμή της μετοχής σημείωσε άνοδο. Δηλαδή εάν με κάποιο τρόπο είναι γνωστό ότι την πρώτη ημέρα η μετοχή σημείωσε άνοδο τότε το τελικό αποτέλεσμα των τριών ημερών θα είναι στοιχείο του $A_1 \in \mathfrak{F}_1$. Ομοίως, εάν η τιμή της μετοχής σημείωσε κάθοδο την πρώτη ημέρα τότε το τελικό αποτέλεσμα των τριών ημερών θα είναι στοιχείο του $A_0 \in \mathfrak{F}_1$.

Τέλος θεωρείται το σύνολο των υποσυνόλων του Ω,

$\mathfrak{F}_2 = \{ \varnothing, \Omega,$

{(1, 1, 1), (1, 1, 0)}, {(1, 0, 1), (1, 0, 0)}, {(0, 1, 1), (0, 1, 0)},{(0, 0, 1), (0, 0, 0)},

{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0)}, {(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0)},

{(1, 1, 1), (1, 1, 0), ((0, 0, 1), (0, 0, 0)}, {(1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0)},

{(1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)}, {0, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)},

{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0)},

$\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\}$,

$\{(1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\}$,

$\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\}$

Το $\mathfrak{F}_2$ αποτελεί μια σ-άλγεβρα για τον Ω. Είναι η πληροφορία που δίνεται στον χρόνο 2. Δηλαδή εάν με κάποιο τρόπο είναι γνωστή η κίνηση της μετοχής για τις πρώτες δύο ημέρες, τότε το τελικό αποτέλεσμα θα είναι κάποιο από τα στοιχεία που ανήκουν στην $\mathfrak{F}_2$.

Όπως διαπιστώνεται $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_\Omega$ αποτελεί ένα φιλτράρισμα.

Παρακάτω θα δοθεί ο ορισμός ενός martingale σε σχέση με ένα φιλτράρισμα σ-αλγεβρών.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω ένας χώρος πιθανοτήτων (Ω, $\mathfrak{F}$, P) και $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ή μία στοχαστική διαδικασία. Έστω $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ μία ακολουθία σ-αλγεβρών στον Ω οι οποίες αποτελούν ένα φιλτράρισμα, δηλαδή

$$\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{F}_n \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{F}$$

Τότε η $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ονομάζεται ένα martingale σε σχέση με την $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ εάν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

I. *Η $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$*

II. *$E[|X_n|]<\infty$ για κάθε n*

III. *$E[X_n \mid \mathfrak{F}_{n-1}] = X_{n-1}$ σχεδόν βέβαια.*

2.6 ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΙ MARTINGALES

Μετά την εισαγωγή στην θεωρία των Martingales μπορεί να γίνει η παρουσίαση της τιμολόγησης ενός απλού ευρωπαϊκού δικαιώματος με τη βοήθεια αυτών. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να αναφερθεί ξανά ότι η στοχαστική διαδικασία τιμών αποτελείται από τη στοχαστική διαδικασία τιμών της μετοχής, η οποία τη χρονική στιγμή n είναι συνάρτηση των τυχαίων μεταβλητών ($\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$) και συμβολίζεται με $S_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$. Οι τυχαίες μεταβλητές ω_i για i = 1, 2, …, n είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και η ω_i εκφράζει το αποτέλεσμα του διωνυμικού πειράματος:

$$\omega_i = \begin{cases} 1, \text{με πιθανότητα } p \text{ εάν άνοδος} - \text{επιτυχία} \\ 0, \text{με πιθανότητα } 1-p \text{ εάν κάθοδος} - \text{αποτυχία} \end{cases}$$

Επίσης, η μετοχή στο χρόνο 1 μπορεί να πάρει μόνο 2 τιμές την aS_0 και την bS_0 δεδομένου ότι ισχύει η συνθήκη (2.1):

$$0 < b < 1 + r < a$$

Τέλος με βάση την παραπάνω συνθήκη ορίστηκαν οι πιθανότητες που ισχύουν σε έναν κόσμο ουδέτερου ρίσκου και δίνονται από τις σχέσεις (2.10):

$$q = \frac{1+r-b}{a-b} \quad \text{και} \quad 1-q = \frac{a-(1+r)}{a-b}.$$

Με τις συγκεκριμένες “εικονικές” πιθανότητες, η μέση απόδοση με βάση το ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο μέτρο πιθανότητας είναι ίση με την απόδοση που θα λάμβανε ο επενδυτής εάν επένδυε σε ομόλογα.

Στη συνέχεια θα δειχθεί ότι η στοχαστική διαδικασία $\left\{(1+r)^{-n} S_n\right\}_{n=0}$, η οποία είναι η στοχαστική διαδικασία τιμών της μετοχής, με αναγωγή των τιμών στο χρόνο 0 είναι ένα martingale με τη μέση τιμή E_q με βάση το μέτρο πιθανότητας q.

Σε ένα διωνυμικό μοντέλο N περιόδων ο επενδυτής κάθε χρονική στιγμή n έχει στην κατοχή του Δ_n μετοχές και τις κρατάει μέχρι την χρονική στιγμή n+1 όπου τις αναπροσαρμόζει, έχοντας στην κατοχή του Δ_{n+1} μετοχές. Το χαρτοφυλάκιο του επίσης αναπροσαρμόζεται και για κάθε χρονική στιγμή n αποτελείται από Δ_n μετοχές και X_n ποσό επενδεδυμένο σε ομόλογα. Τα Δ_n και X_n δίνονται από τις σχέσεις (2.25) και (2.27). Με αυτήν την διαδικασία ο επενδυτής, υπολογίζοντας τα Δ_0, Δ_1, …,Δ_N δημιουργεί μία βέλτιστη εμπορική στρατηγική. Είναι προφανές ότι οι ακολουθίες Δ_0, Δ_1, …,Δ_N και X_0, X_1, …,X_N είναι στοχαστικές διαδικασίες.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Στο απλό διωνυμικό μοντέλο η στοχαστική διαδικασία $\left\{(1+r)^{-n} S_n\right\}_{n=0}$ *της μετοχής είναι ένα martingale, όταν σαν μέση τιμή θεωρηθεί η* E_q*, σε σχέση με τη στοχαστική διαδικασία* $\{\omega_i\}_{t=1}$ *ή διαφορετικά της σ-άλγεβρας* $\mathfrak{F}_n$.

Συμπεράσματα:

- Η $\left\{(1+r)^{-n} S_n\right\}_{n=0}$ είναι προσαρμοσμένη στην οικογένεια πληροφορίας $\{\omega_i\}_{t=1}$
- $E_q\left[\left|(1+r)^{-n} S_n\right|\right]<\infty$ *για κάθε* $n=0,1,2,...$
- $E_q\left[\left|(1+r)^{-n} S_n\right|\right]=S_0<\infty$ και
- $E_q\left[(1+r)^{-(n+1)} S_{n+1} \mid \omega_1,...,\omega_n\right]=E_q\left[(1+r)^{-(n+1)} S_{n+1} \mid F_n\right]=(1+r)^{-n} S_n$

Ομοίως θα ισχύει ότι:

$$E_q\left[(1+r)^{-(n+1)} X_{n+1} \mid F_n\right]=(1+r)^{-n} X_n$$

δεδομένου ότι η στοχαστική διαδικασία X_n είναι προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα $\mathfrak{F}_n$.

Ακόμη:

$$E_q\left[(1+r)^{-n} X_n\right]=E\left[X_0\right]$$

Επίσης θα ισχύει ότι:

$$(1+r)^{-n} X_n=E_q\left[(1+r)^{-N} X_N \mid F_n\right]=E_q\left[(1+r)^{-N} V_N \mid F_n\right]=(1+r)^{-n} V_n$$

ικανοποιώντας έτσι την αρχή του no-arbitrage.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η no arbitrage τιμή ενός απλού παράγωγου χρηματοοικονομικού προϊόντος, ευρωπαϊκού τύπου, στο διωνυμικό μοντέλο n περιόδων είναι ίση με:

$$C=\frac{1}{1+r} E_Q\left(V_n\right)$$

όπου Q είναι το μέτρο πιθανότητας σε έναν κόσμο ουδέτερου ρίσκου. Δηλαδή, είναι ίση με την παρούσα αξία του αναμενόμενου κέρδους από την χρήση του δικαιώματος αγοράς σε έναν κόσμο ουδέτερου ρίσκου.

Τέλος η no arbitrage αξία του παράγωγου στο χρόνο t_k , k=0, 1,…, n θα είναι:

$$V_n = \frac{1}{\left(1+r\right)^{-r(T-t_k)}} E_q\left[\left(1+r\right)^{-n} V_n \mid F_k\right]$$

Όπως είναι αναμενόμενο, η no arbitrage τιμή που προκύπτει με την χρησιμοποίηση της θεωρίας των martingales είναι ακριβώς η ίδια με αυτή της σχέσης (2.28).

2.7 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάστηκε το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων μίας και πολλών περιόδων. Για την εφαρμογή του μοντέλου η κύρια προϋπόθεση είναι η ανυπαρξία σίγουρου κέρδους (*no arbitrage*). Η εικασία στην οποία στηρίζεται το μοντέλο είναι ότι η τιμή της μετοχής από μία χρονική στιγμή στην αμέσως επόμενη μπορεί να πάρει μόνο δύο δυνατές τιμές. Οι πιθανότητες σύμφωνα με τις οποίες η τιμή της μετοχής παίρνει αυτές τις δύο τιμές δεν παίζουν κανένα ρόλο στην τιμολόγηση του παραγώγου. Αντίθετα σημαντικές για την τιμολόγηση είναι οι "εικονικές" πιθανότητες (*risk neutral probabilities*) που ισχύουν σε έναν κόσμο ουδέτερου ρίσκου. Σε έναν τέτοιο κόσμο οι επενδυτές είναι "ουδέτεροι" απέναντι στον κίνδυνο. Τέλος, για την εύρεση της τιμής του παραγώγου απαιτείται η δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου εξασφάλισης (*hedging portfolio*) που θα αποτελείται από μετοχές και ένα ποσό επενδεδυμένο σε ομόλογα και θα αναπροσαρμόζεται συνεχώς έτσι ώστε η αξία του να είναι ίση με την αξία του παραγώγου κάθε χρονική στιγμή. Σε διαφορετική περίπτωση προκύπτει ευκαιρία για σίγουρο κέρδος. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει η τιμή του παραγώγου χρηματοοικονομικού προϊόντος με την εφαρμογή του διωνυμικού μοντέλου.

Επίσης στο παρόν κεφάλαιο έγινε μία πρώτη επαφή με τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών και αυτή των martingales. Παρουσιάστηκαν έννοιες όπως στοχαστικές διαδικασίες σε χρόνο διακριτό και συνεχή, φιλτράρισμα, σ-άλγεβρα και προσαρμοσμένες στοχαστικές διαδικασίες. Αυτό είχε σαν σκοπό να δοθεί μία πιο “μαθηματική” απόδειξη των παραπάνω.

Το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων είναι ένα από τα κυριότερα μοντέλα τιμολόγησης. Ωστόσο, η ανάπτυξη και εφαρμογή του γίνεται σε χρόνο διακριτό. Αυτό αποτελεί ένα βασικό μειονέκτημα για το βαθμό καταλληλότητάς του, διότι το “απομακρύνει” από τον πραγματικό κόσμο όπου ο χρόνος είναι συνεχής. Παρόλα αυτά είναι αρκετά σημαντικό γιατί αποτελεί μία πρώτη εισαγωγή για το τι θα συμβαίνει στον πραγματικό κόσμο σε χρόνο συνεχή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ ΤΩΝ BLACK AND SCHOLES

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκε το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Πιο συγκεκριμένα έγινε η τιμολόγηση ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου σε χρόνο διακριτό. Η χρησιμοποίηση του εν λόγω μοντέλου για την τιμολόγηση πραγματικών δικαιωμάτων δεν ενδείκνυται στην πράξη. Ο διακριτός χρόνος στον οποίο εξελίσσεται το μοντέλο το απομακρύνει αρκετά από την πραγματικότητα. Ωστόσο, η σημαντικότητά του είναι δεδομένη. Το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης αποτελεί μία εισαγωγή στο κόσμο της τιμολόγησης των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Δείχνει το δρόμο για το τι θα πρέπει να συμβαίνει στον πραγματικό κόσμο, όπου οι καταστάσεις εξελίσσονται σε συνεχή και όχι διακριτό χρόνο και χώρο.

Για την τιμολόγηση παραγώγων θα χρειαστεί πρώτα να γίνει αναφορά στην κίνηση Brown (*Brownian motion*), στη γεωμετρική κίνηση Brown (*Geometric Brownian motion*), στις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις (*Stochastic Differential Equations-S.D.E.*) και στο λήμμα του Îto. Με τη βοήθεια των παραπάνω οι *Black-Scholes-Merton* κατέληξαν στο ομώνυμο μοντέλο τιμολόγησης στις αρχές της δεκαετίας του 1970. Η προσπάθειά τους αναγνωρίστηκε αρκετά χρόνια αργότερα όταν βραβεύτηκαν με το Nobel οικονομίας το 1997 απόντος του Fischer Black ο οποίος είχε πεθάνει το 1995.

Στο τέλος του κεφαλαίου και αφού έχει παρουσιαστεί το μοντέλο τιμολόγησης των Black and Scholes θα γίνει αναφορά στις ποσότητες Δέλτα *(Delta),* Γάμμα *(Gamma),* Βήτα *(Vega),* Θήτα *(Theta)* και Ρο *(Rho)*. Οι προαναφερθείσες ποσότητες εκφράζουν την επίδραση και την ευαισθησία της τιμής ενός δικαιώματος ως προς τις αλλαγές στις τιμές των παραμέτρων από τις οποίες εξαρτάται. Αξίζει να αναφερθεί ότι η ορολογία που έχει επικρατήσει για τις εν λόγω ποσότητες είναι τα Ελληνικά *(the Greeks)* χάριν της ονομασίας και του συμβολισμού αυτών.

3.2 ΚΙΝΗΣΗ BROWN

Από προηγούμενα κεφάλαια είναι γνωστό ότι η μεταβλητή S_0 εκφράζει την τιμή της μετοχής στον χρόνο μηδέν. Στη συνέχεια έγινε η υπόθεση ότι στο χρόνο ένα η τιμή της μετοχής είτε θα ανέβει στην τιμή $S_1 = S_0 \cdot a,\ \textit{όπου}\ \ a > 1$ με πιθανότητα p είτε θα πέσει στην τιμή $S_1 = S_0 \cdot b,\ \textit{όπου}\ 0 < b < 1$ με πιθανότητα 1-p. Δεν θεωρείται απαραίτητο να είναι ίσες οι πιθανότητες να ανεβεί ή όχι η τιμή της μετοχής. Ωστόσο, θεωρείται ότι το p είναι "κοντά" στο 0.5. Αυτό συμβαίνει διότι σε διαφορετική περίπτωση η τιμή της μετοχής θα εμφάνιζε σημαντική αύξηση ή μείωση αναλόγως εάν το p ήταν αρκετά μεγαλύτερο ή μικρότερο αντίστοιχα από το 0.5. Οπότε θα ισχύει:

$$X_1 = \begin{cases} 1, \textit{εάν σημειωθεί άνοδος} - \textit{επιτυχία} \\ 0, \textit{εάν σημειωθεί κάθοδος} - \textit{αποτυχία} \end{cases}$$

επίσης:

$$\begin{gathered} P\left(X_1 = 1\right) = p\ , \textit{εάν σημειωθεί άνοδος} - \textit{επιτυχία} \\ \textit{και} \\ P\left(X_1 = 0\right) = 1 - p\ , \textit{εάν σημειωθεί κάθοδος} - \textit{αποτυχία} \end{gathered} .$$

Στη γενική περίπτωση, συμβολίζοντας με S_t την τιμή της μετοχής στο χρόνο t θα ισχύει:

$$S_{t_k} = \begin{cases} \mathrm{S}_{t_{k-1}} \cdot a,\ \ \textit{με πιθανότητα}\ p \\ \mathrm{S}_{t_{k-1}} \cdot b,\ \ \textit{με πιθανότητα}\ 1 - p \end{cases}$$

Το συγκεκριμένο μοντέλο είναι πολλαπλασιαστικό. Για την αρχική προσέγγιση του θέματος θα θεωρηθεί το προσθετικό μοντέλο, το οποίο είναι πιο απλό, και στη συνέχεια θα γίνει και η παρουσίαση του πολλαπλασιαστικού. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εύκολα θεωρώντας $X_t = \ln S_t$. Οπότε τώρα θα ισχύει:

$$X_{t_k} = \begin{cases} X_{t_{k-1}} + \ln a, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ p \\ X_{t_{k-1}} + \ln b, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1-p \end{cases}$$

$$\acute{\eta}$$

$$X_{t_k} = \begin{cases} X_{t_{k-1}} + c, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ p \\ X_{t_{k-1}} + d, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1-p \end{cases}$$

Δηλαδή η τιμή της μετοχής (για κάθε χρονική στιγμή) θα είναι ίση με την προηγούμενη τιμή της μεγαλύτερη ή μικρότερη κατά c ή d μονάδες αντίστοιχα. Η διαδικασία μέχρι στιγμής εξελίσσεται σε διακριτό χρόνο μέσα σε ένα χρονικό διάστημα [0,T]. Για την εφαρμογή του διωνυμικού μοντέλου πολλών περιόδων έγινε η εξής διαμέριση αυτού του χρονικού διαστήματος η οποία έχει βήμα $\Delta t=h$:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots < t_n = T$$

και θα ισχύει $t_k - t_{k-1} = h$ και $T = t_n = nh$.

Για το πέρασμα στο συνεχές ανάλογο, θεωρείται μία πολύ "λεπτή" διαμέριση του χρονικού διαστήματος [0,T] η οποία επιτυγχάνεται επιλέγοντας το h "πολύ" μικρό τέτοιο ώστε $h \to 0$. Η μεταβολή σε αυτό το διάστημα θεωρείται ότι είναι ίση με $\pm\sigma\sqrt{h}$. Δηλαδή θα ισχύει:

$$X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = \begin{cases} \sigma\sqrt{h}, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ p \\ \sigma\sqrt{h}, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1-p \end{cases} ,\acute{o}\pi o\upsilon\ p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{h}\right)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η X_t ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $t\mu$ και διακύμανση $t\sigma^2$.

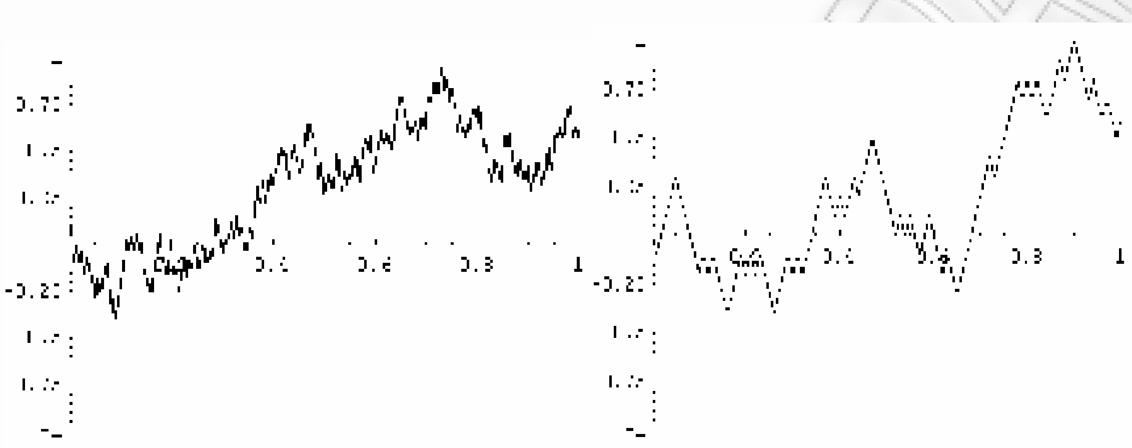
$$X_t \sim N\left(t\mu, t\sigma^2\right)$$

Είναι προφανές ότι οι προσαυξήσεις $X_{t+y} - X_y$ είναι ανεξάρτητες και κανονικές. Δηλαδή, σε κάθε απειροστό χρονικό διάστημα, η αύξηση ή η μείωση της X_t είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν της. Από τα παραπάνω προκύπτει ο ορισμός της κίνησης Brown ο οποίος δίνεται στη συνέχεια.

ΟΡΙΣΜΟΣ

*Μία στοχαστική ανέλιξη X_t, $t \geq 0$ (με τιμές στο R) καλείται **κίνηση Brown** (Brownian motion) με παραμέτρους μ€R (τάση – drift) και σ>0 (μεταβλητότητα – volatility) (συμβολικά $BM(\mu, \sigma^2)$) αν ισχύει ότι για κάθε $y \geq 0, t \geq 0$*

1. *$X_0=0$*
2. *Η τ.μ.* $X_{t+y} - X_y \sim N\left(t\mu, t\sigma^2\right)$
3. *Η τ.μ.* $X_{t+y} - X_y$, *είναι ανεξάρτητη από τις X_u,* $0 \le u \le y$ *(δηλαδή ανεξάρτητες της σ(X_u, $u \le y$))*



Διάγραμμα 3.1
Αναπαράσταση Κίνησης Brown

Στο Διάγραμμα 3.1 δίνονται δύο τυχαίες πραγματοποιήσεις της X_t για n=1000 και n=100 αντίστοιχα. Όπως διαπιστώνεται και σχηματικά όσο πιο "λεπτή" είναι η διαμέριση του χρονικού διαστήματος [0,T] τόσο πιο πολύ πραγματοποιείται η απομάκρυνση από τη διακριτή κατάσταση και γίνεται η προσέγγιση του συνεχές αναλόγου.

Ένας εναλλακτικός, πιο γενικός, ορισμός της κίνησης Brown είναι ο εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ

*Έστω ένας χώρος πιθανοτήτων (Ω, $\mathfrak{F}$, P) και {W(t): $t \in R^+$} μία στοχαστική διαδικασία με πραγματικές τιμές. Η W(t) είναι μία **κίνηση Brown** αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:*

1. *W(t)=0*
2. *W(t) είναι μία συνεχής συνάρτηση του t*
3. *Η W(t) έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις που ακολουθούν την κανονική κατανομή.*
   Για την διαμέριση

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots < t_n = T$$

του διαστήματος [0,T] όπου:

$$X_1 = W(t_1) - W(t_0),\ X_2 = W(t_2) - W(t_1), ..., X_n = W(t_n) - W(t_{n-1})$$

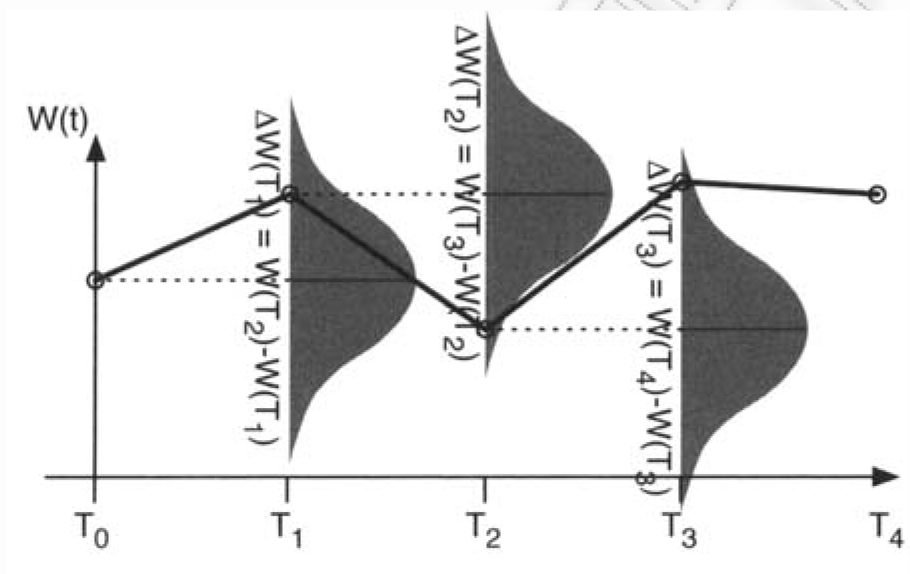
θα ισχύει:

a. $X_1, X_2, ..., X_n$ *είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.*

b. $E[X_k] = 0$ *για κάθε k=1, 2, ..., n*

c. $\mathrm{var}[X_k] = t_k - t_{k-1}$.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να γίνουν δύο σημαντικές παρατηρήσεις.



Πηγή: Christian Fries (2007)

Διάγραμμα 3.2
Κίνηση Brown

Στο Διάγραμμα 3.2 δίνεται μία πραγματοποίηση της κίνησης Brown όπου έχει γίνει η διαμέριση $0 = T_0 < T_1 < T_2 < T_3 < T_4 = T$. Διαπιστώνεται ότι η επόμενη πιθανή τιμή της στοχαστικής διαδικασίας θα κατανέμεται κανονικά. Δηλαδή, δεδομένου ότι $t=T_0$ η επόμενη τιμή W_{t1} θα είναι μία από τις τιμές της βάσης της κανονικής κατανομής που σκιαγραφείται κατά μήκος της καθέτου στην χρονική στιγμή T_1 έχοντας μεγαλύτερη πιθανότητα αυτή να είναι κοντά στην τιμή W_{t0}.

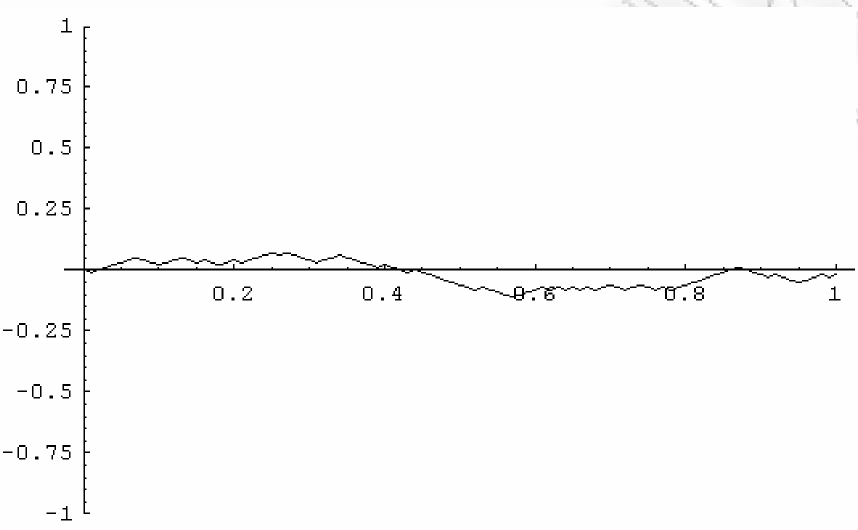
Παρατήρηση 1

Οι προσαυξήσεις της ανέλιξης σε ένα διάστημα μήκους h είναι ανάλογες της ρίζας του h και όχι του h. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = \begin{cases} \sigma\sqrt{h}, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ p \\ \sigma\sqrt{h}, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1-p \end{cases}$$

$$\kappa\alpha\iota\ \acute{o}\chi\iota$$

$$X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = \begin{cases} \sigma h, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ p \\ \sigma h, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1-p \end{cases}$$



Διάγραμμα 3.3
Λανθασμένη Κίνηση Brown

Όπως φαίνεται και στο Διάγραμμα 3.3 όταν οι προσαυξήσεις της ανέλιξης είναι ανάλογες του h προκύπτει μία τετριμμένη περίπτωση (μία ευθεία γραμμή παράλληλη στον άξονα του χρόνου). Αυτό συμβαίνει διότι στην προσπάθεια προσέγγισης του συνεχές αναλόγου γίνεται δεκτή η υπόθεση h→0. Σε μία τέτοια περίπτωση οι προσαυξήσεις θα είναι "σχεδόν" μηδενικές και η τιμή της μετοχής θα παραμένει "σχεδόν" σταθερή σε όλο το χρονικό διάστημα. Αντίθετα, εάν οι προσαυξήσεις της ανέλιξης σε ένα διάστημα μήκους h είναι ανάλογες της ρίζας του h, τότε είναι μεγαλύτερες από το μηδέν καθώς h→0 με αποτέλεσμα η τιμή της μετοχής να μην παραμένει σταθερή.

<u>Παρατήρηση 2</u>

Αν X_t, $t \geq 0$ είναι μία κίνηση Brown τότε αλλάζει απειροστά τιμή κάθε απειροστό χρονικό διάστημα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να είναι μία συνεχής συνάρτηση του t η οποία δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη.

Η στοχαστική διαδικασία πήρε το όνομά της από τον Σκωτσέζο βοτανολόγο Robert Brown ο οποίος παρατήρησε την κίνηση γύρης μέσα σε ένα υγρό με το μικροσκόπιο το 1828-1829. Ωστόσο, η συγκεκριμένη διαδικασία είναι γνωστή και ως διαδικασία Wiener (*Wiener process*) προς τιμήν του Norbert Wiener. Ο αμερικανός μαθηματικός το 1923 όρισε και κατασκεύασε με αυστηρό μαθηματικό τρόπο την κίνηση Brown για πρώτη φορά. Μία από τις μεγαλύτερες ανακαλύψεις του ήταν η απόδειξη ότι μία τέτοια διαδικασία υπάρχει και ικανοποιεί όλες τις συνθήκες που τίθενται και δεν αποτελεί ένα φυσικό μοντέλο που ονομάζεται κίνηση Brown όπως μέχρι τότε πίστευαν το οποίο κάποιος μπορεί να προσεγγίσει με διάφορα μοντέλα.

3.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ BROWN

Το 1900 ο Γάλλος μαθηματικός Bachelier, στα πλαίσια της διδακτορικής του διατριβής, χρησιμοποίησε πρώτος την κίνηση Brown για να περιγράψει την εξέλιξη της τιμής των μετοχών στο χρηματιστήριο. Η συγκεκριμένη ανέλιξη δεν είναι κατάλληλη για μία τέτοιου είδους περιγραφή διότι αφενός μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές, γεγονός που δεν συνάδει με την πραγματικότητα καθώς οι τιμές των αγαθών είναι θετικές ποσότητες και αφετέρου η αύξηση ή η μείωση μίας τιμής, σύμφωνα με το μοντέλο, είναι ανεξάρτητη από την ίδια την τιμή γεγονός που το απομακρύνει από την πραγματικότητα. Σύμφωνα με αυτό, το ενδεχόμενο η τιμή από 100 να γίνει 110 είναι το ίδιο πιθανό με το ενδεχόμενο η τιμή από 10 να γίνει 20 στο ίδιο χρονικό διάστημα (“προσθετικές” προσαυξήσεις). Αυτό που θα προσαρμοζόταν πιο καλά σε πραγματικά δεδομένα θα ήταν μία στοχαστική ανέλιξη η οποία θα έπαιρνε μόνο θετικές τιμές και η ποσοστιαία αύξηση ή μείωση της τιμής θα ήταν ανεξάρτητη από την ίδια την τιμή. Δηλαδή, το ενδεχόμενο η τιμή από 100 να γίνει 110 θα είναι το ίδιο πιθανό με το ενδεχόμενο η τιμή από 10 να γίνει 11 στο ίδιο χρονικό διάστημα (“πολλαπλασιαστικές” προσαυξήσεις). Μία τέτοια ανέλιξη είναι η γεωμετρική κίνηση Brown. Η εργασία του Bachelier μπορεί να μην ήταν εφαρμόσιμη σε πραγματικά δεδομένα όμως έδειξε το δρόμο για την χρησιμοποίηση της κίνησης Brown στον κλάδο των οικονομικών επιστημών. Δικαιολογημένα, σήμερα θεωρείται ο πατέρας του κλάδου της επιστήμης των ποσοτικών μεθόδων στα χρηματοοικονομικά.

Στην περίπτωση του διωνυμικού μοντέλου ικανοποιείται η υπόθεση ότι η ποσοστιαία αύξηση ή μείωση της τιμής είναι ανεξάρτητη από την τιμή. Πιο συγκεκριμένα:

$$S_{t_k} = \begin{cases} S_{t_{k-1}} \cdot a, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ p \\ S_{t_{k-1}} \cdot b, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1-p \end{cases}$$

Στην περίπτωση συνεχούς μοντέλου θεωρείται ότι σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα μήκους h η τιμή της μετοχής μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί με κάποια πιθανότητα και ανεξάρτητα από το παρελθόν της ως εξής:

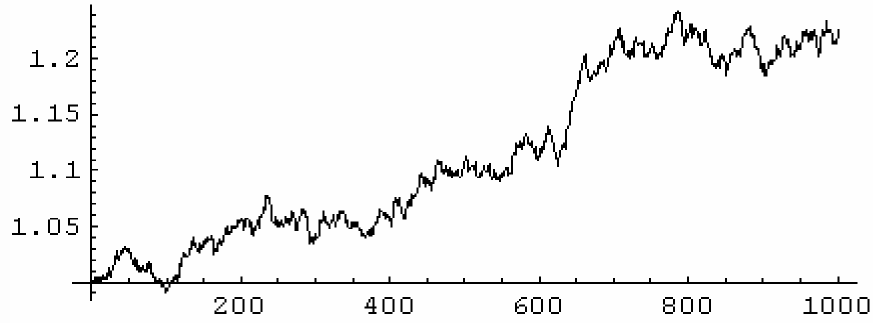
$$S_{kh} = \begin{cases} S_{(k-1)h}\, e^{\sigma\sqrt{h}}, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ p \\ S_{(k-1)h}\, e^{-\sigma\sqrt{h}}, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1-p \end{cases} ,\acute{o}\pi o\upsilon\ p = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{h}\right)$$

Όπως αποδείχτηκε και στην προηγούμενη παράγραφο θέτοντας $X_t = \ln S_t$ τότε προκύπτει ότι η ανέλιξη $X_t = \ln S_t,\ t \geq 0$ είναι μία κίνηση Brown. Δηλαδή, η τυχαία μεταβλητή $X_{t+y} - X_y = \ln S_{t+y} - \ln S_y = \ln\left(\frac{S_{t+y}}{S_y}\right)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N\left(t\mu, t\sigma^2\right)$ και είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν $S_u,\ 0 \leq u < y$. Η συγκεκριμένη στοχαστική διαδικασία με αυτές τις ιδιότητες καλείται *γεωμετρική κίνηση Brown (Geometric Brownian Motion).*

ΟΡΙΣΜΟΣ

*Μία στοχαστική ανέλιξη S_t, $t \geq 0$ καλείται **γεωμετρική κίνηση Brown** με παραμέτρους μЄR (τάση – drift) και σ>0 (μεταβλητότητα – volatility) (συμβολικά GBM(μ, σ^2)) αν ισχύει ότι για κάθε $y \geq 0, t \geq 0$*

1. *S_0=1*
2. *Η τ.μ.* $\ln\left(\frac{S_{t+y}}{S_y}\right) \sim N\left(t\mu, t\sigma^2\right)$
3. *Η τ.μ.* $\frac{S_{t+y}}{S_y}$*, είναι ανεξάρτητη από τις S_u,* $0 \leq u \leq y$.



Διάγραμμα 3.4
Γεωμετρική Κίνηση Brown

Στο Διάγραμμα 3.4 φαίνεται η πραγματοποίηση μίας τυχαίας γεωμετρικής κίνησης Brown. Όπως διαπιστώνεται, οι τιμές της ξεκινούν από την τιμή ένα και όχι από το μηδέν όπως στην κίνηση Brown και δεν γίνονται αρνητικές.

Παρατήρηση 1

Όπως και η κίνηση Brown, η γεωμετρική κίνηση Brown αλλάζει απειροστά τιμή κάθε απειροστό χρονικό διάστημα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να είναι μία συνεχής συνάρτηση του t η οποία δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη.

Παρατήρηση 2

Εάν $X_t, t \geq 0 \sim BM\left(\mu, \sigma^2\right) \overset{\text{τότε}}{\Longrightarrow} e^{X_t}, t \geq 0 \sim GBM\left(\mu, \sigma^2\right)$. Όπως φυσιολογικά προκύπτει εάν $S_t, t \geq 0 \sim GBM\left(\mu, \sigma^2\right)$ τότε η S_t ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή, δηλαδή ο λογάριθμός της ακολουθεί την κανονική κατανομή $\ln S_t \sim N\left(t\mu, t\sigma^2\right)$.

3.4 ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΟΥ Itô

Όπως είναι γνωστό, από την θεωρία της κλασικής ανάλυσης, το ολοκλήρωμα των Riemann-Stieljes επί μίας συνάρτησης f(x) μπορεί να γραφεί (όταν υπάρχει) ως:

$$\int_0^t f(x)\,dx = \sup \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i - t_{i-1})$$

όπου το supremum λαμβάνεται ως προς όλες τις διαμερίσεις $\{0 < t_1 < \ldots < t_n\}$ του [0,t].

Πιο απλά, το ολοκλήρωμα επί μίας συνάρτησης f(x) είναι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της f(x). Στην περίπτωση όπου στη θέση της πραγματικής συνάρτησης f(x) βρίσκεται μία στοχαστική διαδικασία $W_x, x \geq 0$, που είναι μία τυπική κίνηση Brown, τότε το ολοκλήρωμα των Riemann-Stieljes επί της W(x) θα είναι μία τυχαία μεταβλητή. Θα πρόκειται για το εμβαδόν κάτω από μία τυχαία διαδρομή της τυπικής κίνησης Brown.

Επομένως και πάλι θα ισχύει ότι:

$$\int_0^t W_x \, dx = \sup \sum_{i=1}^{n} W_{t_i} \left(t_i - t_{i-1} \right)$$

όπου το supremum λαμβάνεται ως προς όλες τις διαμερίσεις $\{0 < t_1 < \ldots < t_n\}$ του [0,t]. Για μία διαμέριση της μορφής $t_0 = 0$, $t_1 = h$, …, $t_k = kh$, …, $t_n = nh$ το ολοκλήρωμα των Riemann-Stieljes επί της $W_x, x \geq 0$ θα είναι:

$$\int_0^t W_x \, dx = \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} W_{t_i} \left(t_i - t_{i-1} \right) = \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} W_{ih} \, h$$

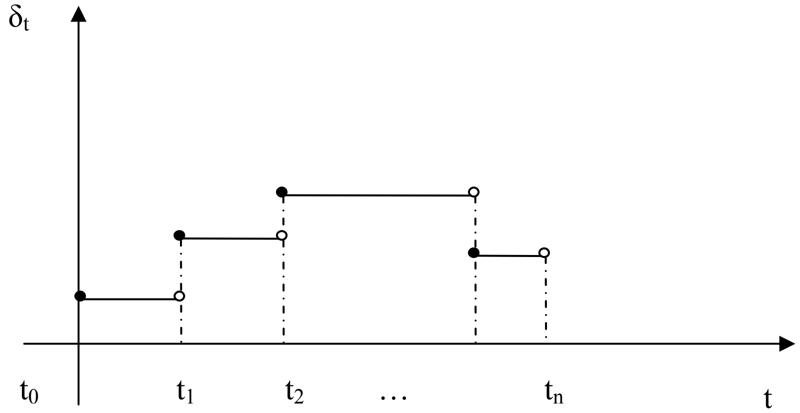
Όπως έχει αναφερθεί, όταν η στοχαστική ανέλιξη $W_x, x \geq 0$ είναι μία κίνηση Brown ή μία γεωμετρική κίνηση Brown τότε είναι μία συνεχής συνάρτηση του t η οποία δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη. Επομένως ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int_0^t dW_x$ δεν μπορεί να υπολογιστεί με τις μεθόδους της κλασικής ανάλυσης. Το συγκεκριμένο πρόβλημα ξεπεράστηκε στις αρχές της δεκαετίας του 1940 από τον γιαπωνέζο μαθηματικό Itô όπου όρισε το στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô $\int_0^t \delta_x \, dW_x$ μίας στοχαστικής ανέλιξης $\delta_t, \, t \in [0,T]$ ως προς την τυπική κίνηση Brown $W_t, t \geq 0$.

Η αρχική υπόθεση που έκανε ήταν ότι η στοχαστική διαδικασία $W_t, t \geq 0$ είναι μία $\mathfrak{F}_t$~BM(0,1). Διαφορετικά, η $W_t, t \geq 0$ είναι μία τυπική κίνηση Brown προσαρμοσμένη στην $\mathfrak{F}_t$, $t \geq 0$. Επίσης, η $\delta_t, \, t \in [0,T]$ είναι μία στοχαστική διαδικασία η οποία είναι προσαρμοσμένη στην $\mathfrak{F}_t$, $t \geq 0$ και είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη:

$$E\left(\int_0^t \delta_x^2 \, dx \right) < \infty \text{ για κάθε } t \in [0,T]$$

Λέγοντας ότι η στοχαστική διαδικασία $\delta_t, \, t \in [0,T]$ είναι προσαρμοσμένη στην $\mathfrak{F}_t$ σημαίνει ότι η πληροφορία που υπάρχει τη χρονική στιγμή t είναι αρκετή για να είναι γνωστή η τιμή της δ_t. Στο χρόνο μηδέν η τιμή της δ_t θεωρείται άγνωστη, είναι μία τυχαία μεταβλητή.

Μόνο κατά τη χρονική στιγμή t γίνεται γνωστή. Ακόμη, στο χρόνο t οι προσαυξήσεις της δ_u, u€[0,T] είναι ανεξάρτητες της $\mathfrak{F}_t$. Τέλος, θεωρείται μία διαμέριση του [0,T] (π.χ. $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots < t_n = T$) και η δ_t παραμένει σταθερή σε κάθε διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$. Μία στοχαστική διαδικασία $\delta_t,\ t \in [0,T]$ για την οποία ισχύουν όλα τα παραπάνω καλείται *απλή* (ως προς τη συγκεκριμένη διαμέριση).



Διάγραμμα 3.5
Διαδρομή μίας απλής στοχαστικής ανέλιξης

Στο Διάγραμμα 3.5 παρουσιάζεται μία γραφική απεικόνιση μίας απλής στοχαστικής διαδικασίας. Σε κάθε διάστημα της μορφής $[t_i, t_{i+1}]$ η τιμή της παραμένει σταθερή και είναι ίση με την τιμή δ_{t_i} δεδομένης της πληροφορίας που υπάρχει τη χρονική στιγμή t_i.

Εάν και τα παραπάνω φαίνονται αρκετά θεωρητικά, έχουν εφαρμογή στα χρηματοοικονομικά (και όχι μόνο). Αρκεί να σκεφτεί κάποιος ότι η στοχαστική διαδικασία $W_t, t \geq 0$ μπορεί να εκφράζει την τιμή της μετοχής στο χρόνο (η $W_t, t \geq 0$ είναι μία κίνηση Brown και δεν μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά τιμές αγαθών, ωστόσο χάριν του παραδείγματος αυτή η λεπτομέρεια παραβλέπεται καθώς στην πράξη χρησιμοποιούνται άλλες στοχαστικές διαδικασίες οι οποίες προσαρμόζονται καλύτερα). Τότε και η απλή στοχαστική διαδικασία $\delta_t,\ t \in [0,T]$ θα εκφράζει τον αριθμό των μετοχών που θα πρέπει να βρίσκονται στο χαρτοφυλάκιο την κάθε χρονική στιγμή $t_0, t_1, \ldots, t_k, \ldots, T$ όπου και θα γίνετε η αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου για να παραμένει ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ορίζεται ως ***στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô*** *μίας απλής* $\delta_t,\ t\in[0,T]$ *ως προς την* $W_t, t\geq 0$*, στο διάστημα [0,T], η τυχαία μεταβλητή:*

$$I_t=\int_0^t \delta_x\, dW_x=\sum_{i=0}^{k-1}\delta_{t_i}\left(W_{t_{i+1}}-W_{t_i}\right)+\delta_{t_k}\left(W_t-W_{t_k}\right)$$

όπου k τέτοιο ώστε $t_k\leq t\leq t_{k+1}$.

Παρατήρηση 1

Η οικογένεια των τυχαίων μεταβλητών $I_t, t\in[0,T]$ είναι μία στοχαστική διαδικασία η οποία παρουσιάζει συνεχείς διαδρομές ως φυσικό επόμενο των συνεχών διαδρομών της κίνησης Brown.

Παρατήρηση 2

Το ολοκλήρωμα Itô εκφράζει το εμβαδόν "κάτω" από την στοχαστική διαδικασία $\delta_t,\ t\in[0,T]$. Η διαφορά με το εμβαδόν που εκφράζει ένα ολοκλήρωμα της "κλασσικής" ανάλυσης με το ολοκλήρωμα του Itô έγκειται στο γεγονός ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου για παράδειγμα με διαστάσεις (t_1, t_2)x(0,x) υπολογίζεται ως μήκος βάσης $(t_2 - t_1)$ επί το ύψος x, ενώ το ολοκλήρωμα του Itô της $\delta_t,\ t\in[0,T]$ ως προς την $W_t, t\geq 0$ υπολογίζεται ως προσαύξηση $W_{t_2}-W_{t_1}$ στο (t_1, t_2) της W_t επί το ύψος x.

Παρατήρηση 3

I. Η τυχαία μεταβλητή I_t είναι $\mathfrak{F}_t$ – μετρήσιμη.
II. Η στοχαστική διαδικασία $I_t=\int_0^t \delta_x\, dW_x,\ t\in[0,T]$ είναι martingale ως προς το φιλτράρισμα $\mathfrak{F}_t$, $t\in[0,T]$.

Παρακάτω δίνεται ένας πιο γενικός ορισμός που καλύπτει το φάσμα το στοχαστικών ολοκληρωμάτων του Itô.

ΟΡΙΣΜΟΣ

*Ορίζεται ως **στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô** της απλής $\delta_t, t \geq 0$ ως προς την $W_t, t \geq 0$, στο διάστημα $[0,t], t \leq T$, η τυχαία μεταβλητή:*

$$\int_0^t \delta_x \, dW_x = \lim_{j \to \infty} \int_0^t \delta_x^{(j)} \, dW_x$$

όπου $\delta_x^{(j)}$, t∈[0,T], j=1, 2, ... είναι μία ακολουθία απλών ανελίξεων που συγκλίνουν στην δ_t, $t \in [0,T]$.

Αποδεικνύεται (αλλά δεν είναι στους στόχους της παρούσας εργασίας) ότι το παραπάνω όριο υπάρχει και το ολοκλήρωμα της δ_t είναι καλά ορισμένο και ανεξάρτητο της ακολουθίας των απλών ανελίξεων. Επίσης αποδεικνύεται ότι όλες οι ιδιότητες του ολοκληρώματος Itô για απλές ανελίξεις που αναφέρθηκαν παραπάνω ισχύουν και τώρα.

<u>Παρατήρηση 1</u>

Από τον ορισμό των στοχαστικών ολοκληρωμάτων προκύπτουν οι εξής “κανόνες” των γινομένων διαφορικών:

I. $(dW_t)^2 = dt$.

II. $dW\,dt = 0$.

III. $(dt)^2 = 0$.

Έχοντας σαν δεδομένα τα παραπάνω δίνετε στη συνέχεια ο *τύπος του Itô*.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f : R \to R$ μία συνάρτηση η οποία έχει συνεχή πρώτη f' και δεύτερη παράγωγο f'' και $W_t \sim BM(0,1)$. Για κάθε $t \geq 0$ ισχύει ότι:

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_x)\, dW_x + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_x)\, dx.$$

Η απόδειξη του παραπάνω στηρίζεται στο ανάπτυγμα του Taylor της f.

Η αντίστοιχη διαφορική μορφή είναι:

$$df\left(W_t\right) = f'\left(W_t\right) dW_t + \frac{1}{2} f''\left(W_t\right) dt \qquad (3.1)$$

Προηγουμένως αναφέρθηκε ότι η W_t χρησιμοποιείται για να εκφράσει τις τιμές της μετοχής στο χρόνο. Δεδομένου ότι η συγκεκριμένη στοχαστική διαδικασία θεωρήθηκε ότι είναι μία τυπική κίνηση Brown, δεν συμπεριλαμβάνει στις ιδιότητες της τα κατάλληλα χαρακτηριστικά για το σκοπό αυτό. Με αφορμή αυτό το γεγονός κρίνεται απαραίτητη η επέκταση του ορισμού του στοχαστικού ολοκληρώματος έτσι ώστε να λαμβάνεται και ως προς άλλες στοχαστικές διαδικασίες, εκτός της τυπικής κίνησης Brown. Όπως, για παράδειγμα, επί μίας γεωμετρικής κίνησης Brown η οποία όπως έχει αποδειχτεί είναι κατάλληλη για την αναπαράσταση τιμών.

ΟΡΙΣΜΟΣ

*Μία στοχαστική ανέλιξη $Y_t,\ t \geq 0$ θα καλείται **ανέλιξη Itô** εάν μπορεί να αναπαρασταθεί με τη μορφή:*

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t H_x \, dW_x + \int_0^t G_x \, dx$$

όπου $W_t \sim \mathfrak{F}_t - BM(0,1)$ και $H_t, G_t, t \geq 0$ κάποιες στοχαστικές ανελίξεις προσαρμοσμένες στην $\mathfrak{F}_t$, $t \geq 0$.

Η αντίστοιχη διαφορική μορφή θα είναι:

$$dY_x = H_x \, dW_x + G_x \, dx \qquad (3.2)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

*Έστω $Y_t,\ t \geq 0$ μία ανέλιξη Itô με $dY_t = H_t \, dW_t + G_t \, dt$ και $\delta_t,\ t \geq 0$ μία στοχαστική ανέλιξη προσαρμοσμένη στην $\mathfrak{F}_t$, $t \geq 0$. Ως **ολοκλήρωμα Itô** της δ_t ως προς την Y_t ορίζεται η ποσότητα:*

$$\int_0^t \delta_x \, dY_x = \int_0^t \delta_x \, H_x \, dW_x + \int_0^t \delta_x \, G_x \, dx .$$

Η σχέση (3.2) εκφράζει το γενικό τύπο του διαφορικού μίας συνάρτησης της στοχαστικής διαδικασίας Brown και ονομάζεται τύπος του Itô σε διαφορική μορφή. Η αξία του τύπου του είναι περισσότερο συμβολική γιατί με αυστηρό μαθηματικό τρόπο μπορεί να θεμελιωθεί η ολοκληρωτική μορφή του τύπου του Itô, όπως παρουσιάστηκε παραπάνω στον ορισμό.

Το φυσικό νόημα των σχέσεων (3.1) και (3.2) σε χρηματοοικονομικά προβλήματα είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον. Εφόσον η στοχαστική διαδικασία W_t αναπαριστά την τιμή μίας μετοχής στο χρόνο t και $f\left(W_t\right)$ την τιμή ενός παραγώγου επί της μετοχής αυτής στο χρόνο t τότε το $df\left(W_t\right)$ αναπαριστά την αλλαγή στην τιμή του παραγώγου δεδομένης μίας μικρής αλλαγής dW_t στην τιμή της μετοχής και δεδομένου ότι παρήλθε ένα απειροελάχιστο χρονικό διάστημα.

3.5 ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ BROWN

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, για την αναπαράσταση των τιμών ενός αγαθού, πιο συγκεκριμένα μίας μετοχής, χρησιμοποιήθηκε αρχικά η κίνηση Brown. Οι αδυναμίες όμως που παρουσιάζει η συγκεκριμένη κίνηση για το σκοπό αυτό οδήγησαν στην χρησιμοποίηση της γεωμετρικής κίνησης Brown. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να καταλήξει κάποιος σε αυτή την κίνηση. Προηγουμένως παρουσιάστηκε ένας από αυτούς. Στη συνέχεια θα δειχθούν δύο ακόμα τρόποι.

1ος τρόπος

Αρχικά γίνεται η υπόθεση ότι η διαδικασία εξελίσσεται σε διακριτό χρόνο για ένα χρονικό διάστημα [0,T] το οποίο χωρίζεται σε n (ισαπέχοντα) χρονικά σημεία. Επίσης ισχύουν οι πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου q και 1-q. Σύμφωνα με το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή t (δεδομένου ότι η αρχική τιμή S_0 θεωρείται γνωστή) θα βρίσκεται σε εκείνο το σημείο (στο διάγραμμα) το οποίο θα είναι:

$$M_{nt} = H_{nt} - T_{nt}$$

όπου H_{nt} είναι το σύνολο των φορών που η τιμή της μετοχής κινήθηκε προς τα πάνω και T_{nt} είναι το σύνολο των φορών που η τιμή της μετοχής κινήθηκε προς τα κάτω. Επίσης θα ισχύει:

$$nt = H_{nt} - T_{nt}$$

Από τις δύο παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι:

$$H_{nt} = \frac{1}{2}\left(nt + M_{nt}\right) \qquad \text{και} \qquad T_{nt} = \frac{1}{2}\left(nt - M_{nt}\right)$$

Τέλος, δεδομένου ότι η μετοχή κινείται ανοδικά με τιμή $a_n = 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ και καθοδικά με τιμή $b_n = 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ η τιμή της τη χρονική στιγμή t θα ισούται με:

$$S_n(t) = S(0)\; a_n^{H_{nt}}\; b_n^{T_{nt}} = S(0)\left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}\left(nt + M_{nt}\right)} \left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}\left(nt - M_{nt}\right)}.$$

Το πέρασμα από το διακριτό στο συνεχές ανάλογο της τιμολόγησης θα επιτευχθεί αυξάνοντας τα σημεία που επιλέγονται στο χρονικό διάστημα [0,T] έτσι ώστε n→∞. Τότε η κατανομή της $S_n(t)$ θα συγκλίνει στην κατανομή:

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\} \tag{3.3}$$

όπου W(t) ~ N(0, t^2). (Η συγκεκριμένη κατανομή ονομάζεται λογοριθμοκανονική κατανομή και ισχύουν όσα αναφέρθηκαν και στην παρατήρηση 2). Όπως διαπιστώνεται η στοχαστική ανέλιξη S(t) είναι μία γεωμετρική κίνηση Brown.

Το τελευταίο προκύπτει χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor και θέτοντας $W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt}$ όπου σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.) θα ισχύει W(t)~N(0, t^2).

Από τη σχέση (3.3) προκύπτει επίσης:

$$\frac{S(t)}{S(0)} = \exp\left\{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\} \Leftrightarrow \ln S(t) - \ln S(0) = \sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t$$

και δεδομένου ότι X(t) = lnS(t):

$$X_t - X_0 = \sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t \Leftrightarrow dX_t = \sigma\, dW(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \qquad (3.4)$$

Η τελευταία σχέση θα φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στη συνέχεια.

2^{ος} τρόπος

Έστω τώρα ότι S(t) είναι και πάλι η τιμή μίας μετοχής. Ως dS(t) θα θεωρείται η διαφορά S(t + dt) – S(t) στην τιμή της μετοχής μεταξύ δύο χρονικών σημείων, t και t+dt όπου dt είναι ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα τέτοιο ώστε dt→0. Η απόδοση της μετοχής σε αυτό το χρονικό διάστημα θα δίνεται από τον τύπο dS(t)/ dt.Από την οικονομική θεωρία η παραπάνω απόδοση αναλύεται(εξαρτάται) από δύο μέρη, το συστηματικό και το τυχαίο (μιλώντας κάποιος μαθηματικά θα έλεγε ντετερμινιστικό και στοχαστικό μέρος αντίστοιχα). Το συστηματικό μέρος μπορεί να γραφεί στην μορφή μdt όπου μ είναι η παράμετρος που δείχνει την μέση απόδοση της αγοράς. Το τυχαίο μέρος μπορεί να πάρει τη μορφή σ dW(t), όπου dW(t) θα αναπαριστά το "θόρυβο" και σ θα είναι μία δεύτερη παράμετρος που θα περιγράφει την επίδραση του θορύβου ή διαφορετικά το μέγεθος της μεταβολής της τιμής. Ο όρος "θόρυβος" χρησιμοποιείται για να περιγράψει όλους εκείνους τους τυχαίους (και όχι μόνο) παράγοντες που επιδρούν στην μετοχή και έχουν σαν αποτέλεσμα να αλλάζει η τιμή της και οι οποίοι δεν μπορούν να εξετασθούν και να αναλυθούν λεπτομερώς. Τέλος το σ ονομάζεται και μεταβλητότητα της αγοράς (γνωστό και ως *volatility*). Τα παραπάνω μπορούν να αναπαρασταθούν στη σχέση:

$$dS(t) = S(t)\big(\mu\, dt + \sigma\, dW(t)\big), \quad \textit{όπου } S(0) > 0$$

που αποτελεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση του Itô.

Η λύση της οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$S(t) = S(0)\, \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\, dW(t)\right\} \qquad (3.5)$$

και σύμφωνα με το λήμμα του Itô προκύπτει ότι:

$$df\left(t,W\left(t\right)\right)=f\left(\mu\,dt+\sigma\,dW\left(t\right)\right).$$

Όπου τελικά θα ισχύει ότι:

$$\log S\left(t\right)=\log S\left(0\right)+\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma\,dW\left(t\right) \tag{3.6}$$

Δηλαδή η S(t) ακολουθεί την λογοριθμοκανονική κατανομή. Αυτή είναι η γεωμετρική κίνηση Brown η οποία αποτελεί την βάση για το μοντέλο των Black and Scholes.

3.6 ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΣΕ ΣΥΝΕΧΗ ΧΡΟΝΟ – ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ BLACK AND SCHOLES

Με την θεμελίωση εννοιών και όρων όπως κίνηση Brown, γεωμετρική κίνηση Brown, στοχαστικό ολοκλήρωμα και λήμμα του Itô καθώς και στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις έχει γίνει η παρουσίαση των εργαλείων εκείνων που είναι απαραίτητα για την ανάπτυξη του μοντέλου τιμολόγησης των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων σε συνεχή χρόνο των Black and Scholes. Για την εφαρμογή του μοντέλου γίνεται η αρχική υπόθεση (όπως και στο διωνυμικό μοντέλο για την τιμολόγηση σε διακριτό χρόνο) ότι σε κάθε χρονική στιγμή ο επενδυτής θα πρέπει να έχει στην κατοχή του ένα δυναμικό και αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης, το οποίο τον εξασφαλίζει απέναντι στον κίνδυνο τον οποίο έχει "αναλάβει" λόγω της αντίστοιχης θέσης που έχει λάβει με την επένδυσή του. Το χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να παραμένει ως ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης, για αυτό τον λόγο ο επενδυτής θα πρέπει να το αναπροσαρμόζει συνεχώς.

Η μεταβλητή του χρόνου t είναι πλέον μία συνεχής μεταβλητή. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα αρκετά πράγματα να είναι διαφορετικά από την αντίστοιχη περίπτωση τιμολόγησης όπου ο χρόνος ήταν διακριτή μεταβλητή, ωστόσο η φιλοσοφία και η κεντρική ιδέα ανάπτυξης των μοντέλων παραμένει σχεδόν η ίδια (κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου εξασφάλισης όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως). Η S(t) τώρα θα είναι μία στοχαστική διαδικασία (σε χρόνο συνεχή) και θα αναπαριστά την τιμή της μετοχής στο χρόνο t. Μία κατάλληλη στοχαστική διαδικασία για την αναπαράσταση τιμών είναι, όπως έχει ήδη αναφερθεί σε προηγούμενη παράγραφο, η γεωμετρική κίνηση Brown. Η συγκεκριμένη στοχαστική διαδικασία έχει το φυσικό χαρακτηριστικό να μην παίρνει αρνητικές τιμές και οι προσαυξήσεις της να είναι πολλαπλασιαστικές και όχι προσθετικές (όπως για παράδειγμα η κίνηση Brown). Επομένως, η S(t), όπως έχει αποδειχτεί, θα είναι της μορφής:

$$S(t)=S(0)\exp\left\{\sigma W_t+\left(\mu-\frac{1}{2}s^2\right)t\right\}$$

και είναι λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης:

$$dS(t)=\mu S(t)dt+\sigma S(t)dW_t \tag{3.7}$$

όπου W_t είναι μία τυπική στοχαστική διαδικασία Brown.

Ακόμη θεωρείται ο χώρος πιθανοτήτων (Ω, $\mathfrak{F}$, P) και ορίζεται η παραγόμενη οικογένεια των σ-αλγεβρών:

$$\mathfrak{B}_t = \sigma\ \{W_s \text{ για } s \leq t\}.$$

Η S(t) θα είναι $\mathfrak{B}_t$ – μετρήσιμη. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή της S(t) θα είναι γνωστή μόνο όταν δίνετε όλη η πληροφορία μέχρι το χρόνο t για τη διαδικασία του Brown W_t, δηλαδή όταν είναι γνωστή η τιμή της W_t. Μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή t, η S(t) παραμένει άγνωστη.

Έστω ότι ένας επενδυτής (ή ένα χρηματιστηριακό γραφείο) θέλει να πωλήσει ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης K και ημερομηνία λήξης T. Η αξία του παραγώγου είναι:

$$V\big(S(t),t\big)=\max\big(S(t)-K,0\big) \text{ όπου } t \in [0,T].$$

Το ερώτημα που τίθεται είναι σε ποια τιμή (premium-margin) θα πρέπει να το πωλήσει; Δηλαδή ποιο θα είναι το ασφάλιστρο (C) που θα πρέπει να εισπράξει;

Η απάντηση στο ερώτημα που τέθηκε δίνετε μέσω της κατασκευής ενός δυναμικού αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου εξασφάλισης (*self-confidence portfolio*). Το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να έχει τελική αξία Y(T) ίση με την αξία του παραγώγου V(T) στο χρόνο λήξης T η οποία είναι γνωστή. Δεδομένου ότι ικανοποιείται η αρχή του μη σίγουρου κέρδους (no arbitrage) η αξία του χαρτοφυλακίου θα πρέπει να είναι ίση με την αξία του παραγώγου για κάθε t Є [0,T]. Επομένως, η τιμή του παραγώγου (τιμή πώλησης) θα είναι:

$$C=V\big(S(0),0\big)$$

Το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης για κάθε χρονική στιγμή t θα αποτελείται από Δ(t) μετοχές και ένα ποσό Y(t) το οποίο είναι επενδεδυμένο σε ομόλογα. Δεδομένου ότι η τιμή της μετοχής αλλάζει συνεχώς, το χαρτοφυλάκιο για να παραμένει ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης θα πρέπει να αναπροσαρμόζεται συνεχώς έτσι ώστε να έχει πάντα την ίδια αξία με το παράγωγο. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα το Δ(t) και Y(t) να αλλάζουν συνεχώς έτσι ώστε η αξία του παραγώγου και αυτή του χαρτοφυλακίου να είναι ίσες. Αυτή η "δημιουργία" των όρων της ακολουθίας Δ(t) ονομάζεται Δ(t) πολιτική εξασφάλισης (*delta hedging*). Προφανώς η Δ(t) όπως και η Y(t) είναι $\mathfrak{B}_t$ – μετρήσιμες.

Η αξία του χαρτοφυλακίου κατά την χρονική στιγμή t δίνετε από τον τύπο:

$$Y(t)-\Delta(t)S(t).$$

Με την πάροδο ενός πολύ μικρού χρονικού διαστήματος dt η αλλαγή στην αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι ίση με:

$$r\left[Y(t)-\Delta(t)S(t)\right]dt$$

όπου r είναι το επιτόκιο της αγοράς που μπορεί κάποιος να δανείζει και να δανείζεται.

- Εάν $Y(t)-\Delta(t)S(t)>0$ τότε ο επενδυτής επενδύει (ή δανείζει) το ποσό αυτό σε ομόλογα με επιτόκιο r και σε χρονικό διάστημα dt θα μπορεί να εισπράξει ποσό ίσο με $r\left[Y(t)-\Delta(t)S(t)\right]dt$.
- Εάν $Y(t)-\Delta(t)S(t)<0$ τότε ο επενδυτής εκδίδει ομόλογο (ή δανείζεται) με επιτόκιο r. Σε χρονικό διάστημα dt θα χρωστά ποσό ίσο με $r\left[Y(t)-\Delta(t)S(t)\right]dt$.

Τη χρονική στιγμή t υπάρχουν στο χαρτοφυλάκιο Δ(t) μετοχές των οποίων η τιμή είναι S(t). Στο πολύ μικρό χρονικό διάστημα dt η τιμή της μετοχής θα αλλάξει κατά dS(t) μονάδες. Γενικά, με την πάροδο ενός πολύ μικρού διαστήματος dt η διαφοροποίηση στην αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι ίση με:

$$dY(t)=\Delta(t)dS(t)+r\left[Y(t)-\Delta(t)S(t)\right]dt \tag{3.8}$$

Δεδομένου ότι η S(t) είναι μία γεωμετρική κίνηση Brown και από την σχέση (3.7) θα ισχύει:

$$dY(t)=\Delta(t)\left(\mu S(t)dt+\sigma S(t)dW_t\right)+r\left[Y(t)-\Delta(t)S(t)\right]dt \Leftrightarrow$$

$$dY(t)=rY(t)dt+(\mu-r)\Delta(t)S(t)dt+\sigma\Delta(t)S(t)dW_t \tag{3.9}$$

όπου (μ-r) είναι η επιβράβευση του ρίσκου (*risk premium*) το οποίο πρέπει να έχει θετική τιμή.

Από το λήμμα του Itô είναι γνωστό ότι εάν μία στοχαστική διαδικασία B(t) αποτελεί λύση της γενικής στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dB(t) = \mu\big(B(t),t\big)dt + \sigma\big(B(t),t\big)dt$$

και δεδομένου μίας συνάρτησης αυτής $F\big(B(t),t\big)$ τότε το ολικό διαφορικό αυτής $dF\big(B(t),t\big)$ θα είναι:

$$dF\big(B(t),t\big) = \left\{\frac{\partial F\big(B(t),t\big)}{\partial B(t)}\mu\big(B(t),t\big) + \frac{\partial F\big(B(t),t\big)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\big(B(t),t\big)\frac{\partial^2 F\big(B(t),t\big)}{\partial^2 B(t)}\right\}dt + \frac{\partial F\big(B(t),t\big)}{\partial B(t)}\sigma\big(B(t),t\big)dW_t$$

Από τον παραπάνω τύπο θέτοντας:

1. $F\big(B(t),t\big) = V\big(S(t),t\big)$
2. $\mu\big(S(t),t\big) = \mu S(t)$ και
3. $\sigma\big(S(t),t\big) = \sigma S(t)$

προκύπτει:

$$dV\big(S(t),t\big) = \left\{\frac{\partial V\big(S(t),t\big)}{\partial S(t)}\mu S(t) + \frac{\partial V\big(S(t),t\big)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V\big(S(t),t\big)}{\partial^2 S(t)}\right\}dt + \frac{\partial V\big(S(t),t\big)}{\partial S(t)}\sigma S(t)dW_t \tag{3.10}$$

Για να παραμένει το χαρτοφυλάκιο, ως ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης θα πρέπει για κάθε χρονική στιγμή t το κεφάλαιό του (που έχει σχηματιστεί με βάση την μετοχή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος) να είναι ίσο με την αξία του παραγώγου. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει η ισότητα:

$$Y(t) = V\big(S(t),t\big),\ \text{για κάθε } t \in [0,T] \tag{3.11}$$

Επίσης, είναι προφανές ότι για την ζητούμενη τιμή του παραγώγου ισχύει ότι:

$$C = Y(0) = V\big(S(0),0\big).$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των dW_t και dt των σχέσεων (3.9) και (3.10) προκύπτουν τα εξής:

$$\sigma\,\Delta(t)\,S(t)=\frac{\partial V\big(S(t),t\big)}{\partial S(t)}\sigma\,S(t)\Leftrightarrow$$

$$\Delta(t)=\frac{\partial V\big(S(t),t\big)}{\partial S(t)} \tag{3.12}$$

και:

$$r\,Y(t)+(\mu-r)\,\Delta(t)\,S(t)=\frac{\partial V\big(S(t),t\big)}{\partial S(t)}\mu\,S(t)+\frac{\partial V\big(S(t),t\big)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V\big(S(t),t\big)}{\partial^2 S(t)}\overset{(45)}{\Leftrightarrow}$$

$$r\,Y(t)+(\mu-r)\frac{\partial V\big(S(t),t\big)}{\partial S(t)}S(t)=\frac{\partial V\big(S(t),t\big)}{\partial S(t)}\mu S(t)+\frac{\partial V\big(S(t),t\big)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V\big(S(t),t\big)}{\partial^2 S(t)}\overset{(111)}{\Leftrightarrow}$$

$$r\,V\big(S(t),t\big)=\frac{\partial V\big(S(t),t\big)}{\partial t}+r\,S(t)\frac{\partial V\big(S(t),t\big)}{\partial S(t)}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V\big(S(t),t\big)}{\partial^2 S(t)} \tag{3.13}$$

Η σχέση (3.13) ονομάζεται *διαφορική εξίσωση των Black-Scholes* ή *βασική εξίσωση με μερικές παραγώγους των Black and Scholes.* Η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης οδηγεί στην εύρεση της συνάρτησης $V\big(S(t),t\big)$ που εκφράζει την αξία του παραγώγου. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το παράγωγο είναι ένα Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα πώλησης μίας μετοχής και η αξία του πρέπει να είναι ίση με την αξία του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης Y(t) για κάθε t Є [0,T], το οποίο δημιουργήθηκε έχοντας ως βάση τη μετοχή. Τέλος η λύση που προκύπτει είναι:

$$V\big(S(t),t\big)=S(t)\Phi(d_1)-K\,e^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \tag{3.14}$$

όπου:

$$d_1=\frac{\log\left(\frac{S(t)}{K}\right)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \text{ και } d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}=\frac{\log\left(\frac{S(t)}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Το ασφάλιστρο που θα πρέπει να εισπράξει ο επενδυτής για να πωλήσει το δικαίωμα αγοράς θα δίνετε από τη σχέση:

$$C=S(0)\Phi(d_1)-K\,e^{-rT}\Phi(d_2) \tag{3.15}$$

όπου:

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{και}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = \frac{\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Η σχέση (3.14) είναι γνωστή ως ο ***τύπος των Black and Scholes (B-S)*** και δόθηκε από τους Fisher Black και Myron Scholes το 1973. Το συγκεκριμένο μοντέλο τιμολόγησης αποτελεί την κλασική μέθοδο αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης. Στα πλεονεκτήματα του μοντέλου συγκαταλέγεται το γεγονός ότι στον τελικό τύπο δεν εμφανίζεται η παράμετρος μ (μέση τιμή της S_t) οπότε δεν χρειάζεται να υπολογιστεί.

Για την εφαρμογή του τύπου των Black and Scholes στην πράξη, με σκοπό την εύρεση της τιμής ενός δικαιώματος στο χρόνο t χρησιμοποιούνται οι παράμετροι:

1. S_t: εκφράζει την τιμή της μετοχής στο χρόνο t, όπου η τιμή της θα είναι γνωστή κατά την χρονική στιγμή t
2. K: εκφράζει την τιμή εξάσκησης *(strike price)* του δικαιώματος και θα είναι γνωστή εκ των προτέρων
3. T: εκφράζει τον χρόνο λήξης του δικαιώματος (*duration – time to maturity*) και θα είναι γνωστός εκ των προτέρων. Ως μονάδα μέτρησης λαμβάνεται το έτος
4. r: εκφράζει το επιτόκιο των ομολόγων της αγοράς σύμφωνα με το οποίο κάποιος μπορεί να δανείζει και να δανείζεται
5. σ: εκφράζει την μεταβλητότητα *(volatility)* της τιμής της μετοχής. Η τιμή της δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή (όπως συμβαίνει με την τιμή εξάσκησης και τον χρόνο λήξης του δικαιώματος) ούτε γίνεται γνωστή σε κάποιο χρονικό σημείο t (όπως η τιμή της μετοχής, καθώς το σ δεν είναι "προσαρμοσμένο σε κάποια πληροφορία"). Επομένως, για την εφαρμογή του τύπου χρησιμοποιείται η εκτίμησης αυτής. Η εκτίμηση γίνεται είτε από ιστορικά δεδομένα με ή χωρίς στάθμιση είτε από τις τιμές των παραγώγων που διατίθενται ήδη στην αγορά (δηλαδή, δεδομένης της τιμής ενός δικαιώματος στην αγορά και μέσω του τύπου των Black and Scholes υπολογίζεται η τιμή του σ) . Στην τελευταία περίπτωση η εκτίμηση καλείται *τεκμαρτή μεταβλητότητα*

(implied volatility) και για την εύρεσή της λαμβάνεται (εμμέσως) υπόψιν και η σημαντική πληροφορία των προσδοκιών που έχουν οι επενδυτές. Βεβαίως, στην πράξη μπορεί να προκύπτουν διαφορετικά implied volatility δεδομένου των διαφορετικών προσδοκιών που θα υπάρχουν μεταξύ των επενδυτών.

Παρατήρηση

Στην πράξη η τιμή ενός παραγώγου υπάρχει η πιθανότητα να είναι διαφορετική από την no-arbitrage τιμή που δίνεται από τον τύπο των Black and Scholes. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε διάφορους λόγους. Ένας από αυτούς μπορεί να είναι οι διαφορετικές τιμές του σ που προκύπτουν από τους διαφορετικούς τρόπους εκτίμησης της μεταβλητότητας και τις διαφορετικές προσδοκίες και προβλέψεις των επενδυτών. Επίσης, για τιμές που στην πράξη εμφανίζουν μικρές διαφορές από την no-arbitrage τιμή, "δικαιολογούνται" από το γεγονός ότι κατά την εφαρμογή του μοντέλου υποτίθεται ότι δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών, σε αντίθεση με τις πραγματικές συνθήκες. Οπότε τέτοιες μικρές αποκλίσεις συναντώνται συχνά στην πράξη. Τέλος, άλλη μία υπόθεση που έγινε κατά την εφαρμογή του μοντέλο είναι ότι η τιμή της μετοχής είναι μία γεωμετρική κίνηση Brown, γεγονός που δεν αποτελεί ακριβή περιγραφή της πραγματικότητας έχοντας ως αποτέλεσμα να οδηγεί και σε διαφορετικές τιμές τιμολόγησης.

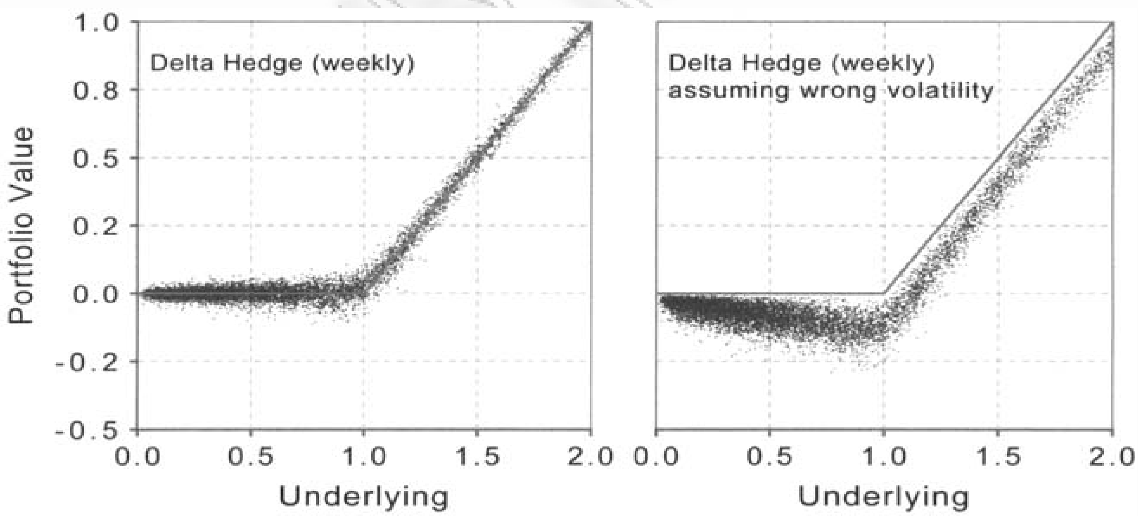
3.7 ΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ

Όπως φαίνεται και από τον τύπο των Black and Scholes η τιμή ενός δικαιώματος είναι συνάρτηση κάποιων παραμέτρων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι αλλαγές στις τιμές αυτών των παραμέτρων να επηρεάζουν και την τιμή του δικαιώματος. Οι ποσότητες Δέλτα (*Delta),* Γάμμα *(Gamma),* Βήτα *(Vega),* Θήτα *(Theta) και* Ρο *(Rho)* εκφράζουν την επίδραση και την ευαισθησία της τιμής ενός δικαιώματος ως προς τις αλλαγές στις τιμές των παραμέτρων από τις οποίες εξαρτάται. Η ονομασία που έχει επικρατήσει για την αναφορά σε αυτές τις ποσότητες είναι τα Ελληνικά *(the Greeks).*

1. $Delta : \Delta = \dfrac{\partial C}{\partial S_0} = \Phi\left(d_1\right) > 0$.

Είναι η πρώτη παράγωγος της τιμής του δικαιώματος ως προς την τιμή της μετοχής. Εκφράζει την επίδραση που έχει στην τιμή του δικαιώματος η αλλαγή της τιμής της μετοχής. Για ένα δικαίωμα αγοράς (πώλησης) η αύξηση της τιμής της μετοχής σημαίνει και την ταυτόχρονη αύξηση (μείωση) της τιμής του δικαιώματος. Όπως έχει δειχτεί και σε προηγούμενη παράγραφο η συγκεκριμένη παράμετρος χρησιμοποιείται κατά την δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου εξασφάλισης, όπου δείχνει τον αριθμό των μετοχών που πρέπει να υπάρχουν κάθε χρονική στιγμή στο χαρτοφυλάκιο (***delta hedging***). Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί το γεγονός ότι η αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης στην πράξη δεν μπορεί να γίνεται σε "κάθε" χρονική στιγμή δεδομένου ότι στην πραγματικότητα υπάρχουν κόστη συναλλαγών. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα στην πράξη η αναπροσαρμογή να γίνεται ανά τακτά χρονικά διαστήματα (για παράδειγμα ανά εβδομάδες ή ακόμη και μέρες) αλλά όχι συνεχώς όπως είχε υποτεθεί κατά την εφαρμογή του μοντέλου.

Στο Διάγραμμα 3.6 απεικονίζεται ένα δικαίωμα αγοράς και οι τιμές της Εξασφάλισης Δέλτα (*Delta hedging*) με εβδομαδιαίες αναπροσαρμογές. Στο πρώτο σχήμα η εφαρμογή έγινε δεδομένου της σωστής μεταβλητότητας ενώ στο δεύτερο έγινε με μεταβλητότητα μικρότερη από την πραγματική. Όπως διαπιστώνεται στην δεύτερη περίπτωση η μέση τιμή του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης είναι συστηματικά κάτω από την γραμμή που δίνει το όφελος του δικαιώματος.

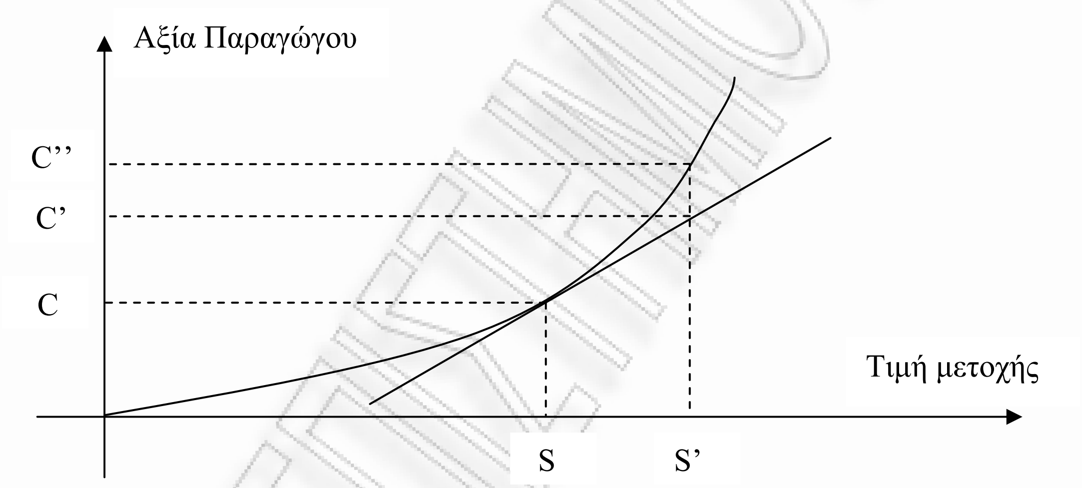


Πηγή: Christian Fries (2007)

Διάγραμμα 3.6
Εξασφάλιση Δέλτα

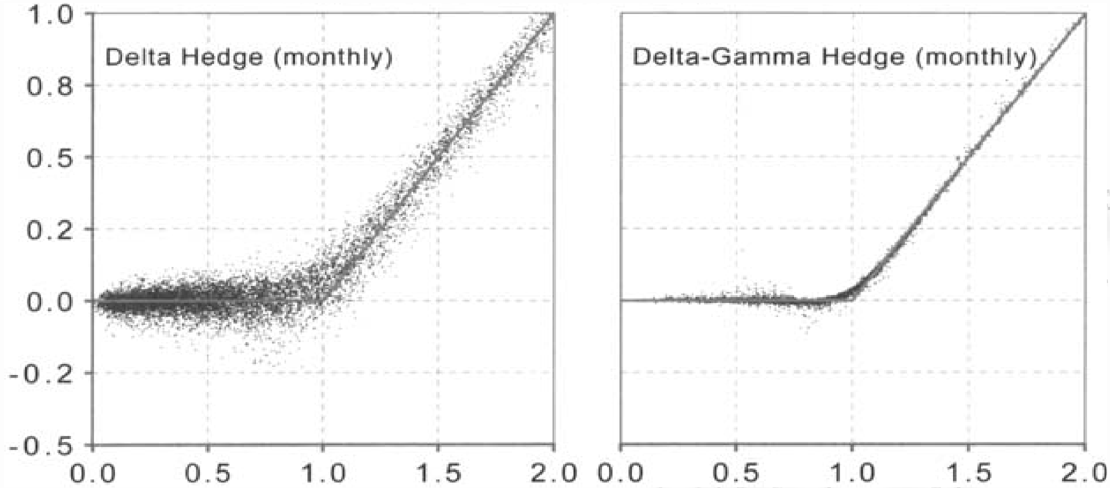
2. $Gamma = \Gamma = \dfrac{\partial^2 C}{\partial S_0^2} = \dfrac{\Phi^{'}\left(d_1\right)}{S_0\,\sigma\,\sqrt{T}} > 0$.

Είναι η δεύτερη παράγωγος της τιμής του δικαιώματος ως προς την τιμή της μετοχής. Εκφράζει την "ευαισθησία" του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης στις αλλαγές της τιμής της μετοχής ή διαφορετικά μετρά την επίδραση που έχει στο delta η αλλαγή της τιμής της μετοχής. Εάν η τιμή του gamma είναι μικρή τότε το delta θα αλλάζει αργά. Αυτό σημαίνει ότι η αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης μπορεί να γίνεται σε αραιά χρονικά διαστήματα χωρίς να προκαλούνται ζημίες. Αντίθετα, εάν η τιμή του gamma είναι μεγάλη τότε υποδηλώνεται η μεγάλη "ευαισθησία" του delta ως προς την τιμή της μετοχής. Σε αυτή την περίπτωση η αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου θα πρέπει να γίνετε συνεχώς. Σε διαφορετική περίπτωση η ζημία μπορεί να είναι αρκετά μεγάλη. Η τιμή του gamma αναφέρεται και ως κυρτότητα (*curvature*).



Διάγραμμα 3.7
Σφάλμα Εξασφάλισης

Στο Διάγραμμα 3.7 δίνεται και γραφικά αυτό που ειπώθηκε προηγουμένως. Εάν η τιμή της μετοχής κινηθεί από την τιμή S στην S' τότε, σύμφωνα με τη στρατηγική εξασφάλισης του delta η τιμή του παραγώγου θα αλλάξει από C σε C'. Στην πραγματικότητα όμως η σωστή τιμή του παραγώγου είναι η C''! Το σφάλμα της διαφοράς C'' - C' είναι γνωστό ως *hedging error*. Αυτό το σφάλμα εξαρτάται από την κυρτότητα της σχέσης μεταξύ της τιμής του παραγώγου και της τιμής της μετοχής. Αυτή ακριβώς την κυρτότητα μετρά η παράμετρος gamma.

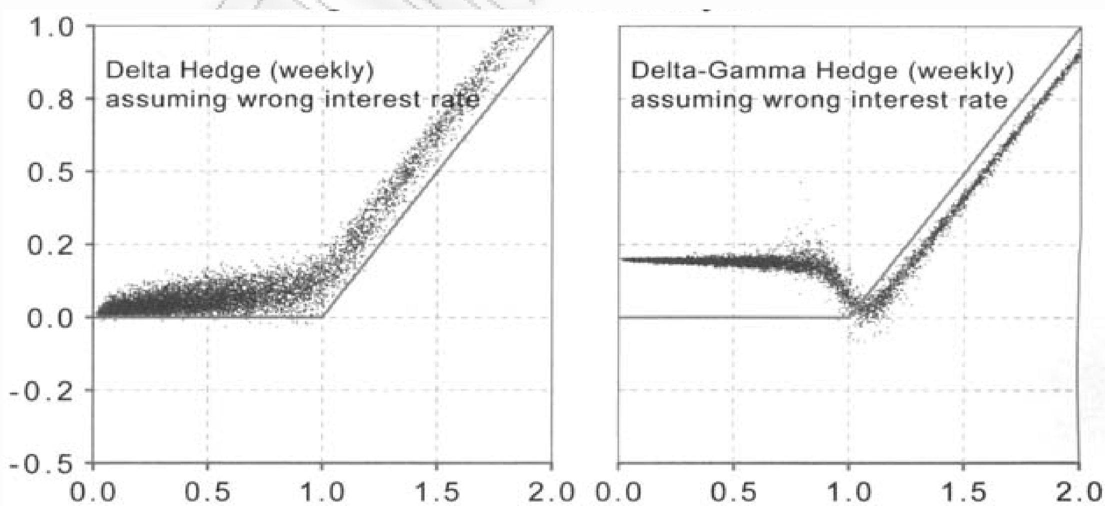


Πηγή: Christian Fries (2007)

Διάγραμμα 3.8
Δέλτα και Δέλτα-Γάμμα Εξασφάλιση

Στο Διάγραμμα 3.8 απεικονίζεται ένα δικαίωμα αγοράς και οι τιμές του Delta και Delta-Gamma hedging αντίστοιχα με εβδομαδιαίες αναπροσαρμογές. Παρατηρείται ότι η εξασφάλιση είναι αρκετά πιο αποτελεσματική και ικανοποιητική όταν λαμβάνονται υπόψιν και η παράμετρος delta και η παράμετρος gamma.

Στο Διάγραμμα 3.9 απεικονίζεται ένα δικαίωμα αγοράς και οι τιμές του Delta και Delta-Gamma hedging αντίστοιχα με εβδομαδιαίες αναπροσαρμογές δεδομένου ότι έχει χρησιμοποιηθεί κατά την εφαρμογή της delta και delta-gamma εξασφάλισης επιτόκιο το οποίο δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Όπως φαίνεται και από τα δύο σχήματα τα αποτελέσματα είναι τουλάχιστον απογοητευτικά.



Πηγή: Christian Fries (2007)

Διάγραμμα 3.9
Δέλτα και Δέλτα-Γάμμα Εξασφάλιση με σφάλμα r

3. $Vega = V = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S_0 \sqrt{T}\, \Phi^{'}\left(d_1\right) > 0$.

Είναι η πρώτη παράγωγος της τιμής του δικαιώματος ως προς την μεταβλητότητα (σ). Εκφράζει ένα μέτρο ευαισθησίας της τιμής του παραγώγου ως προς τις αλλαγές στην τιμή της μεταβλητότητας. Στις υποθέσεις που έχουν γίνει μέχρι τώρα η μεταβλητότητα θεωρείται σταθερή. Στην πράξη όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Όταν αυξάνεται (μειώνεται) η μεταβλητότητα, αυξάνεται (μειώνεται) και η τιμή του παραγώγου. Μεγάλες τιμές του vega δηλώνουν και μεγάλη ευαισθησία της τιμής του παραγώγου σε μικρές αλλαγές του σ. Αντίθετα, μικρές τιμές του vega δηλώνουν τη μικρή επιρροή της σ στην τιμή του παραγώγου. Δεδομένου ότι μία από τις υποθέσεις για την εφαρμογή του μοντέλου των Black and Scholes είναι η σταθερή μεταβλητότητα, θα περίμενε κανείς ότι ο υπολογισμός του vega απευθείας από το μοντέλο να δίνει λάθος αποτελέσματα. Εν συνεχεία αυτού, θα περίμενε ότι ο σωστός υπολογισμός της παραμέτρου να δίνεται από ένα μοντέλο όπου θεωρεί τη μεταβλητότητα ως στοχαστική. Ωστόσο, στην πράξη τα αποτελέσματα και στις δύο περιπτώσεις είναι αρκετά κοντά! Αυτό σημαίνει ότι και το μοντέλο των Black and Scholes δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για τον υπολογισμό της παραμέτρου vega χωρίς να χρειάζεται να καταφύγει κάποιος στον δύσκολο υπολογισμό αυτής μέσω μοντέλων με στοχαστική μεταβλητότητα.

4. $Theta = \Theta = \frac{\partial C}{\partial T} = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{T}} \Phi^{'}\left(d_1\right) - K\, r\, e^{-rT}\, \Phi\left(d_2\right) < 0$.

Είναι η πρώτη παράγωγος της τιμής του παραγώγου ως προς το πέρασμα του χρόνου. Εκφράζει την αλλαγή που παρατηρείται στην τιμή του παραγώγου καθώς περνάει ο χρόνος. Όταν μειώνεται (αυξάνεται) ο χρόνος εξάσκησης για ένα δικαίωμα αγοράς τότε η τιμή του αυξάνεται (μειώνεται). Η τιμή της συγκεκριμένης παραμέτρου είναι πάντα αρνητική. Το theta χρησιμοποιείται από τους επενδυτές κυρίως ως ένα χρήσιμο περιγραφικό στατιστικό εργαλείο και όχι ως κάτι παραπάνω. Δεν έχει την ίδια σημασία σε σχέση με τα υπόλοιπα "Greeks" αφού δεν παρουσιάζει κανένα ενδιαφέρον και δεν έχει κανένα νόημα να κατασκευασθεί για παράδειγμα μία στρατηγική theta hedging για την εξασφάλιση έναντι των αλλαγών στη μονάδα του χρόνου. Αντίθετα έχει μεγάλη σημασία να κατασκευασθεί για παράδειγμα μία στρατηγική delta hedging για την εξασφάλιση έναντι των αλλαγών που παρουσιάζονται στις τιμές της μετοχής.

5. $Rho = \rho = \dfrac{\partial C}{\partial r} = T\,K\,e^{-rT}\,\Phi\left(d_2\right)$.

Είναι η πρώτη παράγωγος της τιμής του παραγώγου ως προς την τιμή του επιτοκίου (r). Εκφράζει ένα μέτρο ευαισθησίας της τιμής του παραγώγου ως προς τις αλλαγές στην τιμή του επιτοκίου της αγοράς. Σε περίπτωση αύξησης (μείωσης) του επιτοκίου η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς αυξάνεται (μειώνεται).

Από την σχέση των Black and Scholes προκύπτει και η σχέση μεταξύ των Greeks η οποία είναι:

$$r\,C = \frac{1}{2}\sigma^2\,S^2\,\Gamma + r\,S\,\Delta + \Theta \tag{3.16}$$

Στην σχέση (3.16) διαπιστώνεται η αλληλεξάρτηση της τιμής S του προϊόντος, πάνω στο οποίο δημιουργήθηκε το παράγωγο (π.χ. μετοχής), του ασφαλίστρου C του παραγώγου, του επιτοκίου της αγοράς r καθώς και της μεταβλητότητας σ με τις παραμέτρους gamma, delta και theta.

3.8 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάστηκε το μοντέλο τιμολόγησης των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων σε χρόνο συνεχή των Black and Scholes. Για την ανάπτυξη του μοντέλου με προορισμό τους τελικές σχέσεις (3.14) και (3.15) είναι απαραίτητη η γνώση και σωστή χρήση σημαντικών στοχαστικών (και όχι μόνο) “εργαλείων”. Τέτοια είναι η κίνηση Brown όπου αποτελεί την εισαγωγή στην στοχαστική ανάλυση και πήρε το όνομά της από τον βοτανολόγο Robert Brown ο οποίος ήταν ο πρώτος που την παρατήρησε (θεμελιώθηκε από τον μαθηματικό Norbert Wiener για αυτό είναι γνωστή και ως κίνηση Wiener), η γεωμετρική κίνηση Brown όπου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αναπαράσταση των τιμών ενός αγαθού όπως μίας μετοχής και το στοχαστικό ολοκλήρωμα και λήμμα του Itô που εάν και διαφαινόμενα αρκετά θεωρητικά είναι ιδιαίτερα σημαντικά και με ιδιαίτερη πρακτική εφαρμογή. Για την εφαρμογή του μοντέλου των Black and Scholes σαν βάση χρησιμοποιείται το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης και γίνετε η προσπάθεια του “περάσματος” από το διακριτό χώρο και χρόνο στο συνεχές ανάλογο. Αυτό πραγματοποιείται αρχικά με τον “κατακερματισμό” του διαστήματος του χρόνου ζωής του παραγώγου [0,T]. Δηλαδή, ενώ στο διακριτό μοντέλο υπήρχαν n διακριτά σημεία στο διάστημα [0,T] τώρα επιλέγεται n τέτοιο ώστε $n \to \infty$. Οπότε θεωρείται η εξής “λεπτή” διαμέριση του διαστήματος [0,T]:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots < t_n = T$$

με βήμα $\Delta t = h$ όπου θα ισχύει $T = t_n = nh$ με h τέτοιο ώστε $h \to 0$.

Στη συνέχεια, θεμελιώδης αρχή είναι η δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου εξασφάλισης που θα αποτελείται από $\Delta(t)$ μετοχές και $Y(t)$ ποσό και θα έχει αξία ίση με την αξία του παραγώγου σε κάθε χρονική στιγμή t. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει να γίνετε συνεχής αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου. Η “δημιουργία” αυτή των ποσοτήτων $\Delta(t)$ αποτελεί και την πολιτική της δέλτα εξασφάλισης γνωστή και ως delta hedging. Για το πόσο συχνά θα πρέπει να γίνετε αυτή η αναπροσαρμογή δηλώνεται από την τιμή της παραμέτρου gamma. Τα delta, gamma καθώς και τα vega, theta και rho, γνωστά και ως “the Greeks”, αποτελούν παραμέτρους που δείχνουν την ευαισθησία της τιμής ενός παραγώγου από τους παράγοντες τους οποίους εξαρτάται.

Το συγκεκριμένο μοντέλο τιμολόγησης των Black and Scholes αποτελεί τον πλέον διαδεδομένο τρόπο τιμολόγησης των παραγώγων στον σύγχρονο οικονομικό κόσμο για το λόγο αυτό οι Black, Scholes και Merton τιμήθηκαν με το Νόμπελ οικονομίας το 1997.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

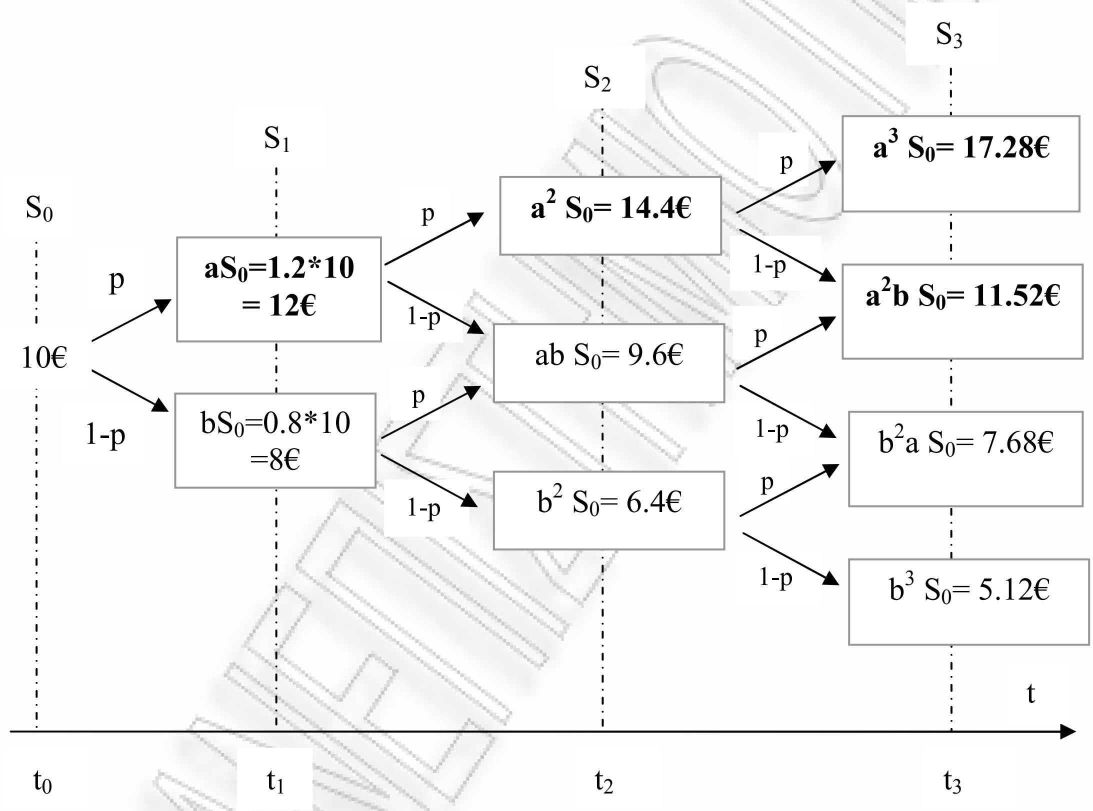
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΔΙΩΝΥΜΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΩΝ BLACK AND SCHOLES

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στα προηγούμενα κεφάλαια πραγματοποιήθηκε μία πρώτη επαφή με τα δικαιώματα προαίρεσης καθώς επίσης έγινε και η θεωρητική παρουσίαση του διωνυμικού μοντέλου τιμολόγησης των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων και του μοντέλου των Black and Scholes. Το πρώτο από αυτά τα δύο μοντέλα τιμολόγησης εξελίσσεται σε χρόνο και χώρο διακριτό όπου τα πράγματα είναι πιο απλά και πιο κατανοητά. Αν και αυτή η ιδιαιτερότητά του το απομακρύνει από την πραγματικότητα και το κάνει μη εφαρμόσιμο σε πραγματικές καταστάσεις ωστόσο, αποτελεί την εισαγωγή στον κόσμο της τιμολόγησης των παραγώγων (και όχι μόνο αυτών). Επίσης, δείχνει το δρόμο για το τι θα πρέπει να συμβαίνει για την τιμολόγηση σε πραγματικές (πιο σύνθετες) καταστάσεις όπου ο χρόνος και ο χώρος είναι συνεχής. Σε τέτοιες καταστάσεις εφαρμόζεται το μοντέλο των Black and Scholes. Σε αυτό το κεφάλαιο, στα πλαίσια της καλύτερης κατανόησης της θεωρίας που αναπτύχθηκε μέχρι τώρα, θα παρουσιαστεί ένα αριθμητικό παράδειγμα τιμολόγησης με τη βοήθεια του διωνυμικού μοντέλου με εικονικές τιμές. Στη συνέχεια, θα πραγματοποιηθεί αριθμητική εφαρμογή του μοντέλου των Black and Scholes σε πραγματικά δεδομένα, καθώς επίσης θα παρουσιαστεί και η στρατηγική της δέλτα εξασφάλισης (*delta hedging*), όπως αυτά αναπτύχθηκαν στο 3^{ο} κεφάλαιο.

4.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΔΙΩΝΥΜΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ

Έστω ότι η τιμή της μετοχής ΑΑΑ τη χρονική στιγμή t_0=0 είναι €10. Συμβολικά S_0=10€. Έστω επίσης ότι ένας επενδυτής θέλει να πωλήσει ένα δικαίωμα αγοράς επί της μετοχής αυτής με τιμή εξάσκησης K=11€. Ο υπολογισμός της αξίας του παραγώγου θα γίνει με την χρήση του διωνυμικού μοντέλου 3 περιόδων. Δεδομένου ότι ικανοποιούνται οι απαραίτητες προϋποθέσεις για την εφαρμογή του μοντέλου (όπως αυτές έχουν αναφερθεί στο κεφάλαιο 2) και για a=1.2, b=0.8 και r=10% (ικανοποιώντας έτσι και την σχέση (2.1)) προκύπτει το εξής Διάγραμμα 4.1 (που είναι ανάλογο με το Διάγραμμα 2.2):



Διάγραμμα 4.1
Αριθμητικά αποτελέσματα διωνυμικού μοντέλου 3 περιόδων

Στο Διάγραμμα 4.1 δίνονται όλες οι πιθανές τιμές της μετοχής μετά από τρεις περιόδους. Με έντονο χρώμα φαίνονται οι περιπτώσεις όπου το δικαίωμα είναι in-the-money για τον αγοραστή του (*holder*). Πιο αναλυτικά, η τιμή της μετοχής στο χρόνο 1, συμβολικά S_1, είτε θα ανέβει στην τιμή $S_1(1) = aS_0 = 12€$ είτε θα πέσει στην τιμή $S_1(0) = bS_0 = 8€$. Στο χρόνο δύο η τιμή της μετοχής, συμβολικά S_2, θα μπορεί να πάρει μία από τις τέσσερις (2^2) τιμές:

$$S_2(1,1) = aS_1(1) = a^2 S_0 = 14.4€ \quad , \quad S_2(1,0) = bS_1(1) = baS_0 = 9.6€$$

$$S_2(0,1) = aS_1(1) = abS_0 = 9.6€ \quad , \quad S_2(0,0) = bS_1(1) = b^2 S_0 = 6.4€$$

Στο χρόνο τρία υπάρχουν οχτώ (2^3) διαφορετικά "μονοπάτια" ($S_3(1,1,1)$, $S_3(1,1,0)$, $S_3(1,0,1)$, $S_3(1,0,0)$, $S_3(0,1,1)$, $S_3(0,1,0)$, $S_3(0,0,1)$, $S_3(0,0,0)$) και τέσσερις διαφορετικές πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει η τιμή της μετοχής οι οποίες είναι:

$$S_3(1,1,1) = aS_2(1,1) = a^3 S_0 = 17.28€ \quad , \quad S_3(1,1,0) = S_3(1,0,1) = S_3(0,1,1) = a^2 bS_0 = 11.52€$$

$$S_3(1,0,0) = S_3(0,1,0) = S_3(0,0,1) = ab^2 S_0 = 7.68€ \quad , \quad S_3(0,0,0) = bS_2(0,0) = b^3 S_0 = 5.12€$$

Για την εφαρμογή του διωνυμικού μοντέλου, για την εύρεση της αξίας του παραγώγου, θεωρείται ότι ο επενδυτής παράλληλα με την πώληση του δικαιώματος αγοράς επί της μετοχής ΑΑΑ δημιουργεί και ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης, το οποίο θα αποτελείται από μετοχές και ένα ποσό. Το δικαίωμα αγοράς και το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης (το οποίο θα αναπροσαρμόζεται σε κάθε χρονική περίοδο) θα πρέπει να έχουν την ίδια αξία κάθε χρονική στιγμή, ικανοποιώντας έτσι και την αρχή του μη σίγουρου κέρδους.

Στο χρόνο t_3=T, που αποτελεί και τον χρόνο λήξης, η πιθανή αξία του δικαιώματος αγοράς θα είναι μία από τις τιμές:

$$V_3(1,1,1) = \left(S_3(1,1,1) - K\right)_+ = (17.28 - 11)_+ = 6.28€$$

$$V_3(1,1,0) = \left(S_3(1,1,0) - K\right)_+ = (11.52 - 11)_+ = 0.52€ = V_3(1,0,1) = V_3(0,1,1)$$

$$V_3(1,0,0) = \left(S_3(1,0,0) - K\right)_+ = (7.68 - 11)_+ = 0€ = V_3(0,1,0) = V_3(0,0,1)$$

$$V_3(0,0,0) = \left(S_3(0,0,0) - K\right)_+ = (5.12 - 11)_+ = 0€$$

Δεδομένης της short θέσης του επενδυτή στο δικαίωμα, το κέρδος του θα δίνεται από την σχέση (1.2).

Στο χρόνο t_2 οι πιθανές τιμές του παραγώγου θα δίνονται από την σχέση (2.26) και θα είναι:

$$V_2(1,1)=\frac{1}{1+r}\left[qV_3(1,1,1)+(1-q)V_3(1,1,0)\right]=\frac{1}{1+0.1}\left[0.75\cdot 6.28+0.25\cdot 0.52\right]=4.4€$$

$$V_2(1,0)=\frac{1}{1+r}\left[qV_3(1,0,1)+(1-q)V_3(1,0,0)\right]=\frac{1}{1+0.1}\left[0.75\cdot 0.52+0.25\cdot 0\right]=0.35€$$

$$V_2(0,1)=\frac{1}{1+r}\left[qV_3(0,1,1)+(1-q)V_3(0,1,0)\right]=\frac{1}{1+0.1}\left[0.75\cdot 0.52+0.25\cdot 0\right]=0.35€$$

$$V_2(0,0)=\frac{1}{1+r}\left[qV_3(0,0,1)+(1-q)V_3(0,0,0)\right]=\frac{1}{1+0.1}\left[0.75\cdot 0+0.25\cdot 0\right]=0€$$

Όπου q και 1-q υπενθυμίζεται ότι είναι οι “εικονικές” πιθανότητες που ισχύουν στον κόσμο του ουδέτερου ρίσκου. Από την σχέση (2.10) προκύπτουν οι τιμές αυτών:

$$q=\frac{1+r-b}{a-b}=\frac{1+0.1-0.8}{1.2-0.8}=0.75 \quad \kappa\alpha\iota \quad 1-q=\frac{a-(1+r)}{a-b}=0.25$$

Ομοίως στο χρόνο t_1 οι πιθανές τιμές του παραγώγου θα είναι:

$$V_1(1)=\frac{1}{1+r}\left[qV_2(1,1)+(1-q)V_2(1,0)\right]=\frac{1}{1+0.1}\left[0.75\cdot 4.4+0.25\cdot 0.35\right]=3.08€$$

$$V_1(0)=\frac{1}{1+r}\left[qV_2(0,1)+(1-q)V_2(0,0)\right]=\frac{1}{1+0.1}\left[0.75\cdot 0.35+0.25\cdot 0\right]=0.32€$$

Τέλος, στο χρόνο t_0 η τιμή του παραγώγου, δηλαδή η αξία του, θα είναι ίση με:

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\left[qV_1(1)+(1-q)V_1(0)\right] = \frac{1}{1+0.1}\left[0.75\cdot 3.08+0.25\cdot 0.32\right] = 2.17€$$

$$V_0 = 2.17€ = C$$

Αυτή θα είναι και η τιμή του ασφαλίστρου C που θα πρέπει να καταβάλει ο αγοραστής κατά την χρονική στιγμή της σύναψης του συμβολαίου, για να αγοράσει το δικαίωμα αγοράς επί της μετοχής.

Το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης αναπροσαρμόζεται σε κάθε χρονική περίοδο. Η σύνθεσή του αλλάζει συνεχώς ανάλογα με τις μεταβολές στην τιμή της μετοχής. Η ακολουθία των όρων Δ_0, Δ_1 και Δ_2 που συμβολίζουν τον αριθμό των μετοχών που υπάρχουν στο χαρτοφυλάκιο σε κάθε χρονική περίοδο αποτελούν την εφαρμογή της δέλτα-εξασφάλισης στρατηγικής, γνωστή και ως *delta hedging*. Παράλληλα με την δημιουργία της ακολουθίας των όρων Δ_0, Δ_1 και Δ_2 πραγματοποιείται και η δημιουργία της ακολουθίας των όρων X_0, X_1 και X_2 που συμβολίζουν το ποσό που απαιτείται να δανειστεί ή να δανείσει ο επενδυτής, σε κάθε χρονική περίοδο που γίνεται η αναπροσαρμογή, έτσι ώστε το χαρτοφυλάκιο και το παράγωγο να έχουν πάντα την ίδια αξία.

Την χρονική στιγμή t_0, το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης θα αποτελείται από Δ_0 μετοχές και από το ποσό X_0. Από τη σχέση (2.27) υπολογίζεται ότι:

$$\Delta_0 = \frac{V_1(1)-V_1(0)}{S_1(1)-S_1(0)} = \frac{3.08-0.32}{12-8} = 0.69 \ \mu\varepsilon\tau o\chi\acute{\varepsilon}\varsigma$$

και

$$X_0 = V_0 - \Delta_0 S_0 = 2.18 - 0.69\cdot 10 = -4.72€$$

Δηλαδή, ο επενδυτής για την δημιουργία του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης στο χρόνο t_0 θα πρέπει να έχει στην κατοχή του Δ_0=0.69 μετοχές ΑΑΑ και θα δανειστεί (ή για παράδειγμα θα εκδώσει ομόλογο) με ονομαστικό επιτόκιο r, το ποσό X_0=4.72€.

Μετά από μία χρονική περίοδο, στο χρόνο t_1, ο επενδυτής γνωρίζοντας την κίνηση και την τιμή της μετοχής ΑΑΑ αναπροσαρμόζει το χαρτοφυλάκιό του, το οποίο τώρα θα αποτελείται από Δ_1 μετοχές και ποσό X_1, έτσι ώστε να παραμένει ένα χαρτοφυλάκιο που θα τον εξασφαλίζει απέναντι στον κίνδυνο στον οποίο είναι εκτεθειμένος.

Περίπτωση 1:

Έστω ότι η τιμή της μετοχής, στο χρόνο t_1, σημειώνει άνοδο και η τιμή της είναι $S_1(1)$=12€. Σε αυτή την περίπτωση και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.13) και (2.23) προκύπτουν τα εξής:

$$X_1(1) = \Delta_0 S_1(1) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0) = 0.69 \cdot 12 + (1+0.1) \cdot (2.17 - 0.69 \cdot 10) = 3.077€$$

$$\Delta_1(1) = \frac{V_2(1,1) - V_2(1,0)}{S_2(1,1) - S_2(1,0)} = \frac{4.4 - 0.35}{14.4 - 9.6} = 0.84\, \mu\varepsilon\tau o\chi\acute{\varepsilon}\varsigma$$

Δηλαδή το χαρτοφυλάκιο θα αποτελείται τώρα από 0.84 μετοχές και το ποσό των €3.077 το οποίο ο επενδυτής θα πρέπει να δανείσει ή να επενδύσει (με ονομαστικό επιτόκιο r).

Περίπτωση 2:

Έστω ότι η τιμή της μετοχής, στο χρόνο t_1, σημειώνει κάθοδο και η τιμή της είναι $S_1(0)$=8€. Σε αυτή την περίπτωση και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.14) και (2.20) προκύπτουν τα εξής:

$$X_1(0) = \Delta_0 S_1(0) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0) = 0.69 \cdot 8 + (1+0.1) \cdot (2.17 - 0.69 \cdot 10) = 0.317€$$

$$\Delta_1(0) = \frac{V_2(0,1) - V_2(0,0)}{S_2(0,1) - S_2(0,0)} = \frac{0.35 - 0}{9.6 - 6.4} = 0.11\, \mu\varepsilon\tau o\chi\acute{\varepsilon}\varsigma$$

Δηλαδή το χαρτοφυλάκιο θα αποτελείται τώρα από 0.11 μετοχές και το ποσό των €0.317 το οποίο ο επενδυτής θα πρέπει να δανείσει ή να επενδύσει (με ονομαστικό επιτόκιο r).

Μετά από δύο χρονικές περιόδους, στο χρόνο t_2, ο επενδυτής γνωρίζοντας την κίνηση και την τιμή της μετοχής ΑΑΑ αναπροσαρμόζει ξανά το χαρτοφυλάκιό του, το οποίο τώρα θα αποτελείται από Δ_2 μετοχές και ποσό X_2.

Περίπτωση 1:

Έστω ότι η τιμή της μετοχής, στο χρόνο t_2, είναι $S_2(1,1)$=14.4€. Σε αυτή την περίπτωση και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.25) και (2.27) προκύπτουν τα εξής:

$$X_2(1,1) = \Delta_1(1)S_2(1,1) + (1+r)\big(X_1(1) - \Delta_1(1)S_1(1)\big) = 0.84\cdot 14.4 + (1+0.1)\cdot(3.077 - 0.84\cdot 12) = 4.39€$$

$$\Delta_2(1,1) = \frac{V_3(1,1,1) - V_3(1,1,0)}{S_3(1,1,1) - S_3(1,1,0)} = \frac{6.28 - 0.52}{17.28 - 11.52} = 1\,\mu\varepsilon\tau o\chi\acute{\eta}$$

Δηλαδή το χαρτοφυλάκιο θα αποτελείται τώρα από 1 μετοχή (πλήρης αντιστάθμιση) και ο επενδυτής θα πρέπει να δανείσει ή να επενδύσει (με ονομαστικό επιτόκιο r) το ποσό των €4.39. Σε αυτήν την περίπτωση και μετά από 3 περιόδους, στο χρόνο t_3, ο αγοραστής του δικαιώματος θα εξασκήσει το δικαίωμα του (καθώς η τιμή της μετοχής θα είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης) και ο επενδυτής είναι υποχρεωμένος να πωλήσει την μετοχή (που βρίσκεται στο χαρτοφυλάκιό εξασφάλισης) στην τιμή εξάσκησης. Η ζημία του επενδυτή αντισταθμίζεται από την είσπραξη του ποσού που έχει δανείσει ή επενδύσει.

Περίπτωση 2:

Έστω ότι η τιμή της μετοχής, στο χρόνο t_2, είναι $S_2(1,0)$=9.6€. Σε αυτή την περίπτωση και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.25) και (2.27) προκύπτουν τα εξής:

$$X_2(1,0) = \Delta_1(1)S_2(1,0) + (1+r)\big(X_1(1) - \Delta_1(1)S_1(1)\big) = 0.84\cdot 9.6 + (1+0.1)\cdot(3.077 - 0.84\cdot 12) = 0.36€$$

$$\Delta_2(1,0) = \frac{V_3(1,0,1) - V_3(1,0,0)}{S_3(1,0,1) - S_3(1,0,0)} = \frac{0.52 - 0}{11.52 - 7.68} = 0.14\,\mu\varepsilon\tau o\chi\acute{\varepsilon}\varsigma$$

Δηλαδή το χαρτοφυλάκιο θα αποτελείται τώρα από 0.14 μετοχές και ο επενδυτής θα πρέπει να δανείσει ή να επενδύσει το ποσό των €0.36.

Περίπτωση 3:

Έστω ότι η τιμή της μετοχής, στο χρόνο t_2, είναι $S_2(0,1)$=9.6€. Σε αυτή την περίπτωση και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.25) και (2.27) προκύπτουν τα εξής:

$$X_2(0,1) = \Delta_1(0)S_2(0,1) + (1+r)\big(X_1(0) - \Delta_1(0)S_1(0)\big) = 0.11\cdot 9.6 + (1+0.1)\cdot(0.317 - 0.11\cdot 8) = 0.44€$$

$$\Delta_2(0,1) = \frac{V_3(0,1,1) - V_3(0,1,0)}{S_3(0,1,1) - S_3(0,1,0)} = \frac{0.52-0}{11.52-7.68} = 0.14\,\mu\varepsilon\tau o\chi\acute{\varepsilon}\varsigma$$

Δηλαδή το χαρτοφυλάκιο θα αποτελείται τώρα από 0.14 μετοχές και ο επενδυτής θα πρέπει να δανείσει ή να επενδύσει το ποσό των €0.44.

Περίπτωση 4:

Έστω ότι η τιμή της μετοχής, στο χρόνο t_2, είναι $S_2(0,0)$=6.4€. Σε αυτή την περίπτωση και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.25) και (2.27) προκύπτουν τα εξής:

$$X_2(0,0) = \Delta_1(0)S_2(0,0) + (1+r)\big(X_1(0) - \Delta_1(0)S_1(0)\big) = 0.11\cdot 6.4 + (1+0.1)\cdot(0.317 - 0.11\cdot 8) = 0.08€$$

$$\Delta_2(0,0) = \frac{V_3(0,0,1) - V_3(0,0,0)}{S_3(0,0,1) - S_3(0,0,0)} = \frac{0-0}{7.68-5.12} = 0\,\mu\varepsilon\tau o\chi\acute{\varepsilon}\varsigma$$

Δηλαδή το χαρτοφυλάκιο θα αποτελείται τώρα από 0 μετοχές και ο επενδυτής θα πρέπει να δανείσει το ποσό των €0.08. Σε αυτήν την περίπτωση όπως διαπιστώνεται ($\Delta_2(0,0)$=0 μετοχές) το δικαίωμα δεν εξασκείται.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί ότι μία καλύτερη διακριτοποίηση και ένας μεγαλύτερος αριθμός χρονικών περιόδων θα είχε ακόμη καλύτερα αποτελέσματα, ειδικά για περιπτώσεις ανάλογες των 2, 3 και 4. Ωστόσο, η παραπάνω εφαρμογή έγινε στο πλαίσιο της καλύτερης κατανόησης της διαδικασίας που χρησιμοποιείται για την εύρεση της αξίας ενός παραγώγου δικαιώματος μέσω του διωνυμικού μοντέλου και μεγαλύτερος αριθμός χρονικών περιόδων δεν προσφέρει τίποτα παραπάνω σε αυτό.

4.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΩΝ BLACK AND SCHOLES

Η εφαρμογή του μοντέλου των Black and Scholes θα γίνει για την τιμολόγηση ενός παραγώγου χρηματοοικονομικού προϊόντος πάνω στην μετοχή της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος (ΕΤΕ). Πιο συγκεκριμένα, με την βοήθεια των Black and Scholes θα υπολογιστεί το ασφάλιστρο που θα πρέπει να καταβληθεί στον επενδυτή Α, ο οποίος θα πωλήσει ένα δικαίωμα αγοράς επί της μετοχής της ΕΤΕ στον επενδυτή Β. Στη συνέχεια, θα παρουσιαστεί η στρατηγική της αντιστάθμισης Δέλτα (*Delta hedging*). Σύμφωνα με αυτή, ο επενδυτής Α, αντισταθμίζει πλήρως τον κίνδυνο στον οποίο είναι εκτεθειμένος από τη στιγμή της σύναψης του συμβολαίου με τον επενδυτή Β, με την δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου εξασφάλισης (*hedging portfolio*). Παρακάτω παρουσιάζονται κάποια στοιχεία για την Εθνική Τράπεζα της Ελλάδος.

Η Εθνική Τράπεζα της Ελλάδος Α.Ε. ιδρύθηκε το 1841 και εισήχθη στο Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών (Χ.Α.Α.) το 1880. Ο Όμιλος της ΕΤΕ έχει παρουσία σε 12 χώρες, με 1.081 τραπεζικές μονάδες (δίκτυο ΕΤΕ εξωτερικού, δίκτυα καταστημάτων θυγατρικών και γραφεία αντιπροσωπείας). Συγκαταλέγεται, μάλιστα, ανάμεσα στους ισχυρότερους τραπεζικούς ομίλους σε ευρωπαϊκό επίπεδο (27η θέση). Αξίζει να σημειωθεί ότι η Εθνική Τράπεζα είναι η μόνη ελληνική παρουσία στην λίστα των 500 κορυφαίων εταιρειών του κόσμου και συγκαταλέγεται ανάμεσα στους πιο ισχυρούς τραπεζικούς ομίλους, σύμφωνα με την κατάταξη FT Global 500 της εφημερίδας Financial Times. Το 2007 είναι η πρώτη χρονιά που η Εθνική Τράπεζα της Ελλάδος περιλαμβάνεται σε αυτήν την κατάταξη καταλαμβάνοντας την 363^{η} θέση.

Ο επενδυτής Α, προβλέπει στασιμότητα ή κάθοδο της τιμής της ΕΤΕ οπότε και αποφασίζει να πωλήσει ένα δικαίωμα αγοράς επί της μετοχής. Αντίθετα, ο επενδυτής Β, πιστεύει ότι η τιμή της μετοχής θα σημειώσει άνοδο και αποφασίζει να αγοράσει το δικαίωμα αγοράς που πουλά ο επενδυτής Α.

Ο επενδυτής Α, αναγνωρίζοντας το ρίσκο που αναλαμβάνει και μη θέλοντας να υποστεί ζημία από τυχόν άνοδο της τιμής της μετοχής, καθώς θα είναι υποχρεωμένος να πωλήσει στον Β στην τιμή εξάσκησης η οποία θα είναι χαμηλότερη από την τιμή της αγοράς, αποφασίζει να δημιουργήσει ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης. Με αυτόν τον τρόπο, εξασφαλίζεται έναντι του κινδύνου στον οποίο είναι εκτεθειμένος. Υπενθυμίζεται ότι ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης έχει συνεχώς την ίδια αξία με το δικαίωμα "πάνω" στο οποίο δημιουργήθηκε.

Για την εφαρμογή του μοντέλου χρησιμοποιήθηκαν 159 εβδομαδιαίες τιμές κλεισίματος της εν λόγω μετοχής. Πιο συγκεκριμένα, το δείγμα που χρησιμοποιήθηκε έχει ως αρχή την τιμή κλεισίματος της Παρασκευής 23/06/2006 (25η εβδομάδα του έτους) η οποία διαμορφώθηκε στα €25.4199 (1η παρατήρηση) και τέλος την τιμή κλεισίματος της Παρασκευής 03/07/2009 (26η εβδομάδα του έτους) η οποία διαμορφώθηκε στα €17.86 (159η παρατήρηση). Ως μονάδα του χρόνου λαμβάνεται το έτος, το οποίο χωρίζεται σε εβδομάδες (1 έτος ισοδυναμεί με 53 εβδομάδες). Η επιλογή του δείγματος έγινε έτσι ώστε, αφενός να συμπεριλαμβάνονται τιμές πριν, κατά τη διάρκεια και μετά την παγκόσμια οικονομική κρίση και αφετέρου να μην είναι αρκετά μεγάλος ο όγκος των δεδομένων, κάτι το οποίο είναι καλό να αποφεύγεται σε περιπτώσεις όπως αυτή του υπολογισμού της μεταβλητότητας σ της τιμής της μετοχής. Οι τιμές της μετοχής για την συγκεκριμένη χρονική περίοδο, καθώς και η εκτίμηση της μεταβλητότητας σ, παρουσιάζονται αναλυτικά στο Παράρτημα Α στο τέλος του κεφαλαίου.

Η εφαρμογή για την αντιστάθμιση Δέλτα θα γίνεται κάθε 1 εβδομάδα για 10 εβδομάδες (οπότε και εκπνέει το δικαίωμα) και δεδομένου ότι οι τιμές της μετοχής θα είναι γνωστές την κάθε χρονική στιγμή της αναπροσαρμογής.

Πίνακας 4.1
Χαρακτηριστικά Δικαιώματος επί της μετοχής της ΕΤΕ

Ημέρα Σύναψης	Παρασκευή 03/07/2009 (26η εβδομάδα)
Τιμή ΕΤΕ (*Stock Price*): S_0	€17.86
Τιμή Εξάσκησης (*Strike Price*): K	€20
Χρόνος (*Maturity*): T	10 εβδομάδες (10/53)
Μεταβλητότητα (*Volatility*): σ	0.279 ($\approx$27.9%)
Επιτόκιο (*Interest Rate*): r	3.08%

Η μεταβλητότητα σ της τιμής της μετοχής υπολογίστηκε με την μέθοδο εκτίμησης από ιστορικά δεδομένα. Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν αποτελούνται από 159 τιμές κλεισίματος της ΕΤΕ εβδομαδιαίων παρατηρήσεων. Σύμφωνα με το μοντέλο των Black and Scholes οι τυχαίες μεταβλητές:

$$X_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την N(τμ, τσ^2). Οι X_t αποτελούν, επίσης, τις αποδόσεις της μετοχής. Τέλος, όπως διαπιστώνεται, η εκτίμηση της μεταβλητότητας αποτελεί την δειγματική διασπορά των X_t. Σε αυτό το σημείο, αξίζει να αναφερθεί ότι η προαναφερθείσα εκτίμηση της μεταβλητότητας ίσως να μην αποτελεί την πλέον κατάλληλη μέθοδο, δεδομένου ότι υπάρχουν και άλλες μέθοδοι εκτίμησης αυτής. Κάποιες από αυτές είναι η εκτίμηση από σταθμισμένα ιστορικά δεδομένα ή η εκτίμηση από τις υπάρχουσες τιμές των παραγώγων που διατίθενται στην αγορά, γνωστή και ως τεκμαρτή μεταβλητότητα (*implied volatility*), ή ακόμη και η χρησιμοποίηση στοχαστικής μεταβλητότητας (*stochastic volatility*). Ωστόσο, η εκτίμηση της μεταβλητότητας γίνετε απλώς και μόνο για την εφαρμογή του μοντέλου και δεν αποτελεί αντικείμενο εξέτασης της παρούσας διπλωματικής εργασίας, οπότε και περαιτέρω ανάλυση και εκτίμηση αυτής δεν θα προσέφερε κάτι ποιοτικότερο στα αποτελέσματα.

Το επιτόκιο (*interest rate*) που χρησιμοποιείται είναι το 3ετές επιτόκιο που ισχύει για τα ομόλογα του ελληνικού δημοσίου (επένδυση χωρίς κίνδυνο – *risk free*). Επίσης, ισχύει ότι οποιοσδήποτε επενδυτής μπορεί να δανείζει και να δανείζεται με το ίδιο επιτόκιο σύμφωνα και με τις προϋποθέσεις για την εφαρμογή του μοντέλου.

Όπως αποτυπώνεται και στον Πίνακα 4.1, ο επενδυτής Α αποφασίζει την Παρασκευή 03/07/2009 (26η εβδομάδα του έτους) να πωλήσει ένα δικαίωμα αγοράς επί της μετοχής της ΕΤΕ στον επενδυτή Β. Η τιμή κλεισίματος κατά την ημέρα της σύναψης του συμβολαίου διαμορφώνεται στα S_0=17.86€. Η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος είναι K=20€. Το συμβόλαιο εκπνέει την Παρασκευή στις 11/09/2009, που αποτελεί και τον χρόνο λήξης μετά από διάρκεια 10 εβδομάδων T=10/53. Η μεταβλητότητα της τιμής της ΕΤΕ εκτιμήθηκε ότι είναι $\hat{\sigma}^2 = 0.077 \Leftrightarrow \hat{\sigma} = 0.279 \Rightarrow \hat{\sigma} = 27.9\%$ και το επιτόκιο της αγοράς σύμφωνα με το οποίο μπορεί κάποιος να δανείζει και να δανείζεται είναι r=3.08%.

Χρονική Στιγμή t_0: Παρασκευή 03/07/2009 (σύναψη του συμβολαίου)

Από την σχέση (3.15) και με την εφαρμογή του τύπου των Black and Scholes προκύπτει ότι η τιμή του δικαιώματος είναι:

$$C = 0.24\,€$$

Επομένως, την χρονική στιγμή της σύναψης του συμβολαίου, Παρασκευή 03/07/2009 (t_0=0), θα πρέπει ο επενδυτής Β (*holder*) να πληρώσει στον επενδυτή Α (*writer*) το ποσό-ασφάλιστρο (*margin*) των €0.24 για να αγοράσει το δικαίωμα. Την Παρασκευή 11/09/2009, ο επενδυτής Β, θα αποφασίσει εάν θα το εξασκήσει ή όχι ανάλογα με την τιμή της μετοχής εκείνη τη μέρα. Αξίζει να σημειωθεί ότι με μόλις €24 θα μπορούσε κάποιος να αγοράσει 100 δικαιώματα αγοράς επί της μετοχής ΕΤΕ.

Πίνακας 4.2
Τιμές Ελληνικών Γραμμάτων

Delta	0.207
Gamma	0.130964
Vega	0.022352
Theta	-0.00475
Rho	0.007

Στον Πίνακα 4.2 δίνονται τα αποτελέσματα των ελληνικών. Από τις παραπάνω παραμέτρους που υπολογίστηκαν θα δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στις παραμέτρους delta και gamma οι οποίες χρησιμοποιούνται για την δημιουργία του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης.

Η τιμή gamma δείχνει πόσο συχνά θα πρέπει να γίνεται η αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου, έτσι ώστε να αποφεύγονται τυχόν ζημίες από αλλαγές στην τιμή της μετοχής. Δεδομένου ότι $gamma \approx 0.13$, αποφασίζεται από τον επενδυτή Α ότι δεν χρειάζεται να γίνεται ανά τακτά χρονικά διαστήματα η αναπροσαρμογή και λαμβάνεται ως χρόνος αυτής το χρονικό διάστημα της μίας εβδομάδας.

Η τιμή delta δείχνει τον αριθμό των μετοχών της ΕΤΕ που θα πρέπει να συμπεριλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης. Οπότε, κατά την χρονική στιγμή της σύναψης του συμβολαίου 03/07/2009 (χρόνος t_0=0), ο επενδυτής Α θα πρέπει να έχει στο χαρτοφυλάκιό του Δ_0=0.207 μετοχές. Οι μετοχές αυτές κοστίζουν:

$$\Delta_0 \cdot S_0 = 0.207 \cdot 17.86 \approx 3.697\,€$$

Ο επενδυτής Α όμως, έχει εισπράξει το ασφάλιστρο $C = 0.24$ € οπότε χρειάζεται ακόμη $X_0 = C - \Delta_0 \cdot S_0 = -3.457$ € τα οποία θα τα δανειστεί από την αγορά με το ισχύον επιτόκιο r=3.08%. Επομένως, στο χρόνο 0, το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης θα αποτελείται από Δ_0=0.207 μετοχές και το ποσό X_0=-3.457€ το οποίο έχει δανειστεί.

<u>Χρονική Στιγμή t_1: Παρασκευή 10/07/2009</u>

Η τιμή της μετοχής της ΕΤΕ “κλείνει” στα S_1=16.38€ και απομένουν ακόμη 9 εβδομάδες (63 μέρες) έως την λήξη του δικαιώματος. Με την εφαρμογή της σχέσης (3.15) των Black and Scholes υπολογίζεται ότι η αξία του δικαιώματος είναι:

$$V_1 = 0.04€$$

και οι τιμές των ελληνικών delta και gamma είναι:

delta	0.053
gamma	0.057

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι την Παρασκευή 10/07/2009, ημέρα πρώτης αναπροσαρμογής του χαρτοφυλακίου, ο επενδυτής Α θα πρέπει να έχει στο χαρτοφυλάκιό του Δ_1=0.053 μετοχές της ΕΤΕ. Δεδομένου ότι στο χαρτοφυλάκιο υπάρχουν ήδη Δ_0=0.207 μετοχές από την προηγούμενη χρονική στιγμή, η οποία αποτελούσε και την στιγμή της δημιουργίας του χαρτοφυλακίου, θα πρέπει να πωλήσει:

$$|\Delta_1 - \Delta_0| = |0.053 - 0.205| = 0.154 \text{ μετοχές}$$

Από αυτήν την πράξη θα έχει κέρδος:

$$S_1 \cdot |\Delta_1 - \Delta_0| = 16.38 \cdot 0.154 = 2.523€$$

Τέλος, από την προηγούμενη χρονική στιγμή t_0, ο επενδυτής Α είχε δανειστεί ποσό X_0 το οποίο τώρα λόγω του ανατοκισμού θα ισούται με:

$$X_0 \cdot e^{r \cdot t} = -3.457 \cdot \underbrace{e^{0.0308 \cdot \frac{1}{53}}}_{1.001} = -3.46€$$

Το μείον υποδηλώνει τη ζημία. Ο επενδυτής χρωστά το συγκεκριμένο ποσό από τη στιγμή που έχει δανειστεί με επιτόκιο r.

Επομένως τώρα, στο χρόνο t_1, το συνολικό κόστος θα είναι:

$$X_1 = X_0 \cdot e^{r \cdot t} - (\Delta_1 - \Delta_0) \cdot S_1 = -0.937€$$

Δηλαδή την χρονική στιγμή t_1 και μετά την πρώτη αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου, ο επενδυτής προχώρησε στην πώληση 0.154 μετοχών της ΕΤΕ, έτσι ώστε να παραμείνουν στη σύνθεσή του Δ_1=0.053 μετοχές και οφείλει ποσό X_1=0.937€ για να παραμείνει το χαρτοφυλάκιό του ως ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης.

Χρονική Στιγμή t_2: Παρασκευή 17/07/2009

Η τιμή της μετοχής της ΕΤΕ "κλείνει" στα S_2=19.03€ και απομένουν ακόμη 8 εβδομάδες (56 μέρες) έως την λήξη του δικαιώματος. Με την εφαρμογή της σχέσης (3.15) των Black and Scholes υπολογίζεται ότι η αξία του δικαιώματος είναι:

$$V_2 = 0.48€$$

και οι τιμές των ελληνικών delta και gamma είναι:

delta	0.36
gamma	0.18

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι την Παρασκευή 17/07/2009, ημέρα δεύτερης αναπροσαρμογής του χαρτοφυλακίου, ο επενδυτής Α θα πρέπει να έχει στο χαρτοφυλάκιό του Δ_2=0.36 μετοχές της ΕΤΕ. Δεδομένου ότι στο χαρτοφυλάκιο υπάρχουν ήδη Δ_1=0.053 μετοχές από την προηγούμενη χρονική στιγμή, θα πρέπει να αγοράσει:

$$\Delta_2 - \Delta_1 = 0.36 - 0.053 = 0.307 \text{ μετοχές.}$$

Για να τις αγοράσει θα χρειαστεί:

$$S_2 \cdot \left(\Delta_2 - \Delta_1\right) = 19.03 \cdot 0.307 = 5.842€$$

Τέλος, από την προηγούμενη χρονική στιγμή t_1, ο επενδυτής Α οφείλει ποσό X_1 το οποίο τώρα λόγω του ανατοκισμού θα ισούται με:

$$X_1 \cdot e^{r \cdot t} = -0.937 \cdot \underbrace{e^{0.0308 \cdot \frac{1}{53}}}_{1.001} = -0.938€$$

Το μείον υποδηλώνει τη ζημία. Επομένως τώρα, στο χρόνο 2, το συνολικό κόστος θα είναι:

$$X_2 = X_1 \cdot e^{r \cdot t} - \left(\Delta_2 - \Delta_1\right) \cdot S_2 = -6.779€$$

Δηλαδή την χρονική στιγμή t_2 και μετά την δεύτερη αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου, ο επενδυτής προχωρά στην αγορά 0.307 μετοχών της ΕΤΕ, έτσι ώστε να παραμείνουν στη σύνθεσή του Δ_2=0.36 μετοχές και οφείλει ποσό X_2=6.779€ για να παραμείνει το χαρτοφυλάκιό του ως ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης.

Με τον ίδιο τρόπο συνεχίζεται αυτή η διαδικασία μέχρι την Παρασκευή 11/09/2009 που αποτελεί και την ημερομηνία λήξης του συμβολαίου. Δηλαδή, ο επενδυτής Α, αρχικά υπολογίζει με την βοήθεια της σχέσης των Black and Scholes την αξία V_t και τα αντίστοιχα ελληνικά του δικαιώματος την κάθε, εκ των προτέρων καθορισμένη, χρονική στιγμή της αναπροσαρμογής του χαρτοφυλακίου. Στη συνέχεια αγοράζει ή πουλάει Δ_t-Δ_{t-1} μετοχές, έτσι ώστε να υπάρχουν στη σύνθεση του χαρτοφυλακίου Δ_t μετοχές και δανείζεται ποσό έτσι ώστε να οφείλει X_t €. Οι αντίστοιχοι υπολογισμοί, από την ημερομηνία της σύναψης του συμβολαίου μέχρι την ημερομηνία λήξης αυτού, δίνονται αναλυτικά στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 4.3
Αποτελέσματα αντιστάθμισης Δέλτα

t	**S_t**	**Δ_t**	**Δ_t - Δ_{t-1}**	**-S_t (Δ_t - Δ_{t-1})**	**X_t**
t_0: 03/07/2009	17.86	0.207	0.207	-3.697	-3.457
t_1: 10/07/2009	16.38	0.053	-0.154	2.523	-0.937
t_2: 17/07/2009	19.03	0.36	0.307	-5.842	-6.779
t_3: 24/07/2009	20	0.536	0.176	-3.520	-10.303
t_4: 31/07/2009	20.48	0.631	0.095	-1.946	-12.255
t_5: 07/08/2009	20.8	0.702	0.071	-1.471	-13.739
t_6: 14/08/2009	21.25	0.803	0.101	-2.146	-15.893
t_7: 21/08/2009	22.9	0.981	0.178	-4.076	-19.979
t_8: 28/08/2009	23.32	0.997	0.016	-0.373	-20.364
t_9: 04/09/2009	21.81	0.989	-0.008	0.174	-20.201
t_{10}: 11/09/2009	**23**	**1**	**0.011**	**-0.253**	**-20.466**

Ο Πίνακας 4.3 δίνει αναλυτικά τα αποτελέσματα της αντιστάθμισης Δέλτα από την ημερομηνία της σύναψης μέχρι την ημερομηνία της λήξης του δικαιώματος. Πιο συγκεκριμένα, στη πρώτη στήλη δίνονται οι χρονικές στιγμές και οι ημερομηνίες της σύναψης του συμβολαίου και δημιουργίας του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης, των αναπροσαρμογών και της λήξης αυτού. Στη δεύτερη στήλη δίνονται οι τιμές κλεισίματος της μετοχής της ΕΤΕ την κάθε χρονική στιγμή της αναπροσαρμογής. Όπως διαπιστώνεται, η τιμή της μετοχής στην λήξη του συμβολαίου διαμορφώνεται στα €23. Ο επενδυτής Β προχωρά στην εξάσκηση του δικαιώματος αγοράζοντας μία μετοχή της ΕΤΕ από τον επενδυτή Α, ο οποίος είναι υποχρεωμένος να πωλήσει στην τιμή Κ=20€. Στην τρίτη στήλη δίνονται τα αποτελέσματα της παραμέτρου delta που δείχνει και τον αριθμό των μετοχών που θα πρέπει να υπάρχουν στο χαρτοφυλάκιο την κάθε στιγμή της αναπροσαρμογής. Στην τέταρτη στήλη δίνεται ο αριθμός των μετοχών που θα πρέπει να αγοράσει ή να πωλήσει ο επενδυτής Α σε κάθε αναπροσαρμογή, έτσι ώστε να καταλήξει με τον απαιτούμενο αριθμό των μετοχών της τρίτης στήλης. Το μείον σημαίνει ότι ο επενδυτής θα πρέπει να πωλήσει μετοχές, ενώ το συν ότι θα πρέπει να αγοράσει. Στην πέμπτη στήλη υπολογίζεται το κόστος για τον επενδυτή Α από τις απαιτούμενες αγοραπωλησίες των μετοχών σε κάθε αναπροσαρμογή. Αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι ο επενδυτής θα πρέπει να αγοράσει τον απαραίτητο αριθμό των μετοχών και να δώσει το αντίστοιχο ποσό (κόστος). Θετικό πρόσημο σημαίνει ότι ο επενδυτής θα πρέπει να πωλήσει τον απαραίτητο αριθμό των μετοχών και να εισπράξει το αντίστοιχο ποσό (όφελος). Στην έκτη στήλη έχει υπολογιστεί και δίνεται το συνολικό κόστος που έχει ο επενδυτής σε κάθε χρονική στιγμή αναπροσαρμογής του χαρτοφυλακίου του, από τις απαιτούμενες αγοραπωλησίες μετοχών και ανατοκισμένων ποσών που οφείλονται σε δανεισμούς προηγούμενων περιόδων. Το X_t δίνεται από την σχέση:

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} \cdot e^{rt} - S_t \cdot \left(\Delta_t - \Delta_{t_{i-1}} \right) \tag{4.1}$$

Στη συνέχεια θα αναλυθούν οι απαιτούμενες κινήσεις του επενδυτή, στους χρόνους t_8, t_9 και t_{10}, οι οποίες γίνονται για να παραμείνει το χαρτοφυλάκιο ως ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης.

Χρονική Στιγμή t_8: Παρασκευή 28/08/2009

Η τιμή της μετοχής της ΕΤΕ "κλείνει" στα S_8=23.32€ και απομένουν ακόμη 2 εβδομάδες (14 μέρες) έως την λήξη του δικαιώματος. Με την εφαρμογή της σχέσης (3.15) των Black and Scholes υπολογίζεται ότι η αξία του δικαιώματος είναι:

$$V_8 = 3.34€$$

και οι τιμές των ελληνικών delta και gamma είναι:

delta	0.997
gamma	0.005

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι την Παρασκευή 28/08/2009, ημέρα όγδοης αναπροσαρμογής του χαρτοφυλακίου, ο επενδυτής Α θα πρέπει να έχει στο χαρτοφυλάκιό του Δ_8=0.997 μετοχές της ΕΤΕ. Δεδομένου ότι στο χαρτοφυλάκιο υπάρχουν ήδη Δ_7=0.981 μετοχές από την προηγούμενη χρονική στιγμή, θα πρέπει να αγοράσει:

$$\Delta_8 - \Delta_7 = 0.997 - 0.981 = 0.016 \text{ μετοχές}$$

Για να τις αγοράσει θα χρειαστεί:

$$S_8 \cdot (\Delta_8 - \Delta_7) = 23.32 \cdot 0.016 = -0.373€$$

Τέλος, από την προηγούμενη χρονική στιγμή t_7, ο επενδυτής Α οφείλει ποσό X_7 το οποίο τώρα λόγω του ανατοκισμού θα ισούται με:

$$X_7 \cdot e^{r \cdot t} = -19.979 \cdot \underbrace{e^{0.0308 \cdot \frac{1}{53}}}_{1.001} \approx -19.991€$$

Το μείον υποδηλώνει τη ζημία. Επομένως τώρα, στο χρόνο 8, το συνολικό κόστος θα είναι:

$$X_8 = X_7 \cdot e^{r \cdot t} - (\Delta_8 - \Delta_7) \cdot S_8 = -20.364€$$

Δηλαδή την χρονική στιγμή t_8 και μετά την όγδοη αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου, ο επενδυτής προχωρά στην αγορά 0.016 μετοχών της ΕΤΕ, έτσι ώστε να παραμείνουν στη σύνθεσή του Δ_8=0.997 μετοχές και οφείλει ποσό X_8=-20.364€ για να παραμείνει το χαρτοφυλάκιό του ως ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης.

<u>Χρονική Στιγμή t_9: Παρασκευή 04/09/2009</u>

Η τιμή της μετοχής της ΕΤΕ “κλείνει” στα S_9=21.81€ και απομένει ακόμη 1 εβδομάδα (7 μέρες) έως την λήξη του δικαιώματος. Με την εφαρμογή της σχέσης (3.15) των Black and Scholes υπολογίζεται ότι η αξία του δικαιώματος είναι:

$$V_9 = 1.825€$$

και οι τιμές των ελληνικών delta και gamma είναι:

gamma	0.035
delta	0.989

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι την Παρασκευή 04/09/2009, ημέρα ένατης αναπροσαρμογής του χαρτοφυλακίου, ο επενδυτής Α θα πρέπει να έχει στο χαρτοφυλάκιό του Δ_9=0.989 μετοχές της ΕΤΕ. Δεδομένου ότι στο χαρτοφυλάκιο υπάρχουν ήδη Δ_8=0.997 μετοχές από την προηγούμενη χρονική στιγμή, θα πρέπει να πωλήσει:

$$\Delta_9 - \Delta_8 = 0.989 - 0.997 = -0.008 \text{ μετοχές}$$

Από αυτήν την πώληση θα έχει κέρδος:

$$S_9 \cdot \left|\Delta_9 - \Delta_8\right| = 21.81 \cdot 0.008 = 0.174€$$

Τέλος, από την προηγούμενη χρονική στιγμή t_8, ο επενδυτής Α οφείλει ποσό X_8 το οποίο τώρα λόγω του ανατοκισμού θα ισούται με:

$$X_8 \cdot e^{r \cdot t} = -20.364 \cdot \underbrace{e^{0.0308 \cdot \frac{1}{53}}}_{1.001} \approx -20.375€$$

Το μείον υποδηλώνει τη ζημία. Κατά συνέπεια, στο χρόνο 9, το συνολικό κόστος θα είναι:

$$X_9 = X_8 \cdot e^{r \cdot t} - \left(\Delta_9 - \Delta_8\right) \cdot S_9 = -20.201€$$

Δηλαδή την χρονική στιγμή t_9 και μετά την ένατη αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου, ο επενδυτής προχωρά στην πώληση 0.008 μετοχών της ΕΤΕ, έτσι ώστε να παραμείνουν στη σύνθεσή του Δ_9=0.989 μετοχές και οφείλει ποσό X_9=-20.201€ για να παραμείνει το χαρτοφυλάκιό του ως ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης.

Χρονική Στιγμή t_{10}: Παρασκευή 11/09/2009 (λήξη του συμβολαίου)

Η τιμή της μετοχής της ΕΤΕ, στην λήξη του συμβολαίου, διαμορφώθηκε στα S_{10}=S_T=23€ και το δικαίωμα θεωρείται in-the-money. Η τιμή της μετοχής στην αγορά είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης K=20€. Επιβεβαιώθηκαν οι προβλέψεις του επενδυτή Β για "σημαντική" άνοδο της μετοχής της ΕΤΕ. Ο επενδυτής Β προχωρά στην εξάσκηση του δικαιώματος και αγοράζει από τον επενδυτή Α μία μετοχή της ΕΤΕ στην τιμή εξάσκησης K. Ο επενδυτής Α, μετά την σύναψη του συμβολαίου και δεδομένου του ασφαλίστρου που του έχει καταβάλει ο επενδυτής Β, είναι υποχρεωμένος να πωλήσει σε αυτή την τιμή.

Η τελική αξία του δικαιώματος είναι €3 και η τιμή του delta είναι 1. Αυτό σημαίνει ότι στην εκπνοή του συμβολαίου στο χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης θα πρέπει να υπάρχει 1 μετοχή της ΕΤΕ (αποτελεί την μετοχή που θα πωληθεί στον επενδυτή Β). Δεδομένου ότι στο χαρτοφυλάκιο υπάρχουν ήδη Δ_9=0.989 μετοχές από την προηγούμενη χρονική στιγμή, ο επενδυτής Α θα πρέπει να αγοράσει:

$$\Delta_{10} - \Delta_9 = 1 - 0.989 = 0.011 \text{ μετοχές}$$

Για να τις αγοράσει απαιτούνται:

$$S_{10} \cdot (\Delta_{10} - \Delta_9) = 23 \cdot 0.011 = 0.253€$$

Από την προηγούμενη χρονική στιγμή t_9, ο επενδυτής Α οφείλει ποσό X_9 το οποίο τώρα λόγω του ανατοκισμού θα ισούται με:

$$X_9 \cdot e^{r \cdot t} = -20.201 \cdot \underbrace{e^{0.0308 \cdot \frac{1}{53}}}_{1.001} \approx -20.213€$$

Το μείον υποδηλώνει τη ζημία. Επομένως, στο χρόνο λήξης, το συνολικό κόστος θα είναι:

$$X_{10} = X_9 \cdot e^{r \cdot t} - (\Delta_{10} - \Delta_9) \cdot S_{10} = -20.466€$$

Οπότε, στην λήξη του συμβολαίου και μετά την δέκατη και τελευταία αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου, ο επενδυτής Α προχωρά στην αγορά 0.011 μετοχών της ΕΤΕ, έτσι ώστε να παραμείνει στη σύνθεσή του Δ_{10}=1 μετοχή και να οφείλει ποσό X_{10}=-20.466€ για να παραμείνει το χαρτοφυλάκιό του ως ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης το οποίο αντισταθμίζει τον κίνδυνο που αναλαμβάνει με την πώληση του δικαιώματος αγοράς επί της μετοχής της ΕΤΕ.

Τελικά αυτό που συμβαίνει είναι το εξής:

Την Παρασκευή 11/09/2009, στο χρόνο λήξης, ο επενδυτής Α έχει στο χαρτοφυλάκιό του 1 μετοχή της ΕΤΕ και οφείλει €20.466. Λόγω του συμβολαίου είναι υποχρεωμένος να πωλήσει στον επενδυτή Β μία μετοχή της ΕΤΕ στην τιμή K=20€ που αποτελεί και την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος. Επομένως, ο επενδυτής Α θα εισπράξει από τον επενδυτή Β €20 και θα δώσει ακόμα $X_{10} - K = 20.466 - 20 = 0.466€$ για να αποπληρώσει το ποσό που οφείλει λόγω της δημιουργίας του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης. Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί ότι η αντιστάθμιση δεν είναι πλήρης και η ζημία δεν είναι μηδενική λόγω του μικρού αριθμού των αναπροσαρμογών και της “μεγάλης” διακριτοποίησης. Εάν η αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου γινόταν ανά πιο τακτά χρονικά διαστήματα, για παράδειγμα κάθε μέρα και όχι κάθε εβδομάδα τότε η αντιστάθμιση θα είχε καλύτερα αποτελέσματα. Γενικά όσο πιο συχνά γίνετε η αναπροσαρμογή τόσο καλύτερη είναι η αντιστάθμιση δίνοντας σαν αποτέλεσμα μηδενική ζημία. Στην πράξη όμως, κάτι τέτοιο είναι αρκετά δύσκολο να επιτευχθεί δεδομένου και του κόστους των συναλλαγών που υπάρχουν στην αγορά. Εν κατακλείδι, αυτό που επιτυγχάνεται στην πραγματικότητα και είναι το πιο εφικτό με την αντιστάθμιση Δέλτα είναι η ελαχιστοποίηση και όχι ο μηδενισμός της ζημίας.

Τέλος, εάν ο επενδυτής είχε επιλέξει να μην ακολουθήσει την αντιστάθμιση Δέλτα και να μην προχωρήσει στην δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου εξασφάλισης θα είχε υποστεί ζημία ίση με $S_T - K = 23 - 20 = 3€$. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, η τιμή της μετοχής "τερμάτισε" πάνω από την τιμή εξάσκησης και το δικαίωμα τελικά εξασκήθηκε. Για αυτό τον λόγο στο χαρτοφυλάκιο υπήρχε 1 μετοχή η οποία είναι και αυτή που θα δοθεί στον holder του δικαιώματος. Στην περίπτωση όμως που η τιμή της μετοχής "τερματίσει" κάτω από την τιμή εξάσκησης και το δικαίωμα τελικά δεν εξασκηθεί τότε στη σύνθεση του χαρτοφυλακίου δεν θα υπάρχει μετοχή και ο επενδυτής Α θα οφείλει μόνο ένα μικρό ποσό, το οποίο εάν η αναπροσαρμογή είναι η ενδεδειγμένη θα είναι μηδενικό.

4.4 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο έγιναν οι εφαρμογές τιμολόγησης παραγώγων χρηματοοικονομικών εργαλείων σε διακριτό και συνεχή χρόνο με το διωνυμικό μοντέλο και με αυτό των Black and Scholes αντίστοιχα. Επίσης, παρουσιάστηκαν οι στρατηγικές της αντιστάθμισης Δέλτα με την δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου εξασφάλισης σε κάθε μία από τις περιπτώσεις του διακριτού και συνεχή χρόνου.

Κατά την πρώτη εφαρμογή, παρουσιάστηκε η τιμολόγηση ενός δικαιώματος αγοράς (*call option*) σε χρόνο διακριτό με την βοήθεια του διωνυμικού μοντέλου και η στρατηγική της αντιστάθμισης Δέλτα πάνω σε εικονικά δεδομένα. Δεδομένου ότι το διωνυμικό μοντέλο δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, λόγω του ότι αναφέρεται και εξελίσσεται σε χρόνο και χώρο διακριτό, η συγκεκριμένη εφαρμογή έγινε στα πλαίσια της καλύτερης κατανόησης της θεωρίας που κρύβεται πίσω από την δημιουργία του συγκεκριμένου μοντέλου όπως αυτή αναπτύχθηκε στο δεύτερο κεφάλαιο. Όπως έχει αναφερθεί ξανά, το διωνυμικό μοντέλο αποτελεί για μερικούς ίσως και την βάση ή τον οδηγό για το πώς θα έπρεπε να γινόταν η τιμολόγηση σε χώρο και χρόνο συνεχή.

Στη δεύτερη εφαρμογή, πραγματοποιήθηκε η τιμολόγηση ενός δικαιώματος αγοράς (*call option*) σε χρόνο διακριτό με την βοήθεια του διωνυμικού μοντέλου και η στρατηγική της αντιστάθμισης Δέλτα πάνω σε πραγματικά δεδομένα. Τα δεδομένα αφορούν εβδομαδιαίες τιμές κλεισίματος της τιμής της μετοχής της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος. Ένας επενδυτής μέσω της σχέσης των Black and Scholes υπολόγισε την τιμή ενός δικαιώματος αγοράς επί της συγκεκριμένης μετοχής το οποίο ήθελε να πωλήσει (*short call*) σε κάποιον άλλον επενδυτή. Στη συνέχεια, θέλοντας να εξασφαλιστεί έναντι του κινδύνου στον οποίο ήταν εκτεθειμένος και να "μηδενίσει" τυχόν ζημίες, ακολούθησε τη στρατηγική της αντιστάθμισης Δέλτα δημιουργώντας ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης. Η βάση του χαρτοφυλακίου ήταν η μετοχή της ΕΤΕ και η αξία του ήταν συνεχώς ίση με αυτή του δικαιώματος. Όπως έγινε αντιληπτό από τα αποτελέσματα, όσο πιο συχνά πραγματοποιείται η αναπροσαρμογή τόσο περισσότερο επιτυγχάνεται η πλήρης εξασφάλιση. Στην πράξη όμως και δεδομένου του κόστους των συναλλαγών οι επενδυτές "συμβιβάζονται" με την ελαχιστοποίηση της ζημίας και όχι με την εξάλειψη αυτής.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Παρακάτω δίνονται τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την εφαρμογή του μοντέλου των Black and Scholes και της αντίστοιχης αντιστάθμισης Δέλτα. Αποτελούν τις εβδομαδιαίες τιμές κλεισίματος της μετοχής της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος από την Παρασκευή 23/06/2006 έως την Παρασκευή 03/07/2009. Ο συνολικός αριθμός των δεδομένων είναι 159 τιμές. Στη συνέχεια δίνονται οι 10 εβδομαδιαίες τιμές κλεισίματος από την Παρασκευή 10/07/2009 έως την Παρασκευή 11/09/2009 που χρησιμοποιήθηκαν για την εφαρμογή της αντιστάθμισης Δέλτα και της δημιουργίας του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης. Τα δεδομένα αντλήθηκαν από τον διαδικτυακό χώρο (*internet*) www.naftemporiki.gr.

Ημερομηνία	**Τιμή κλεισίματος**	**Ημερομηνία**	**Τιμή κλεισίματος**	**Ημερομηνία**	**Τιμή κλεισίματος**
23/06/2006	25.4199	29/06/2007	37.6854	04/07/2008	25.0502
30/06/2006	27.4464	06/07/2007	39.0009	11/07/2008	24.3107
07/07/2006	25.2421	13/07/2007	40.1208	18/07/2008	27.9157
14/07/2006	25.7754	20/07/2007	40.0852	25/07/2008	27.8787
21/07/2006	25.4199	27/07/2007	39.0186	01/08/2008	28.193
28/07/2006	26.5042	03/08/2007	38.3076	08/08/2008	27.9157
04/08/2006	27.8908	10/08/2007	36.6011	15/08/2008	27.7308
11/08/2006	27.4464	17/08/2007	36.2633	22/08/2008	26.677
18/08/2006	28.9929	24/08/2007	37.6499	29/08/2008	28.0081
25/08/2006	27.6064	31/08/2007	38.8053	05/09/2008	27.6938
01/09/2006	29.6862	07/09/2007	37.9521	12/09/2008	28.0081
08/09/2006	28.7974	14/09/2007	38.5742	19/09/2008	29.2098
15/09/2006	29.3129	21/09/2007	39.1075	26/09/2008	28.6921
22/06/2009	30.4683	28/09/2007	39.7297	03/10/2008	26.8064
29/09/2009	30.1661	05/10/2007	40.263	10/10/2008	21.4452
06/10/2006	30.2194	12/10/2007	40.7074	17/10/2008	16.4536
13/10/2006	31.126	19/10/2007	38.8409	24/10/2008	10.9814
20/10/2006	31.8193	26/10/2007	41.7739	31/10/2008	15.8066
27/10/2006	31.6593	02/11/2007	42.0228	07/11/2008	16.9158

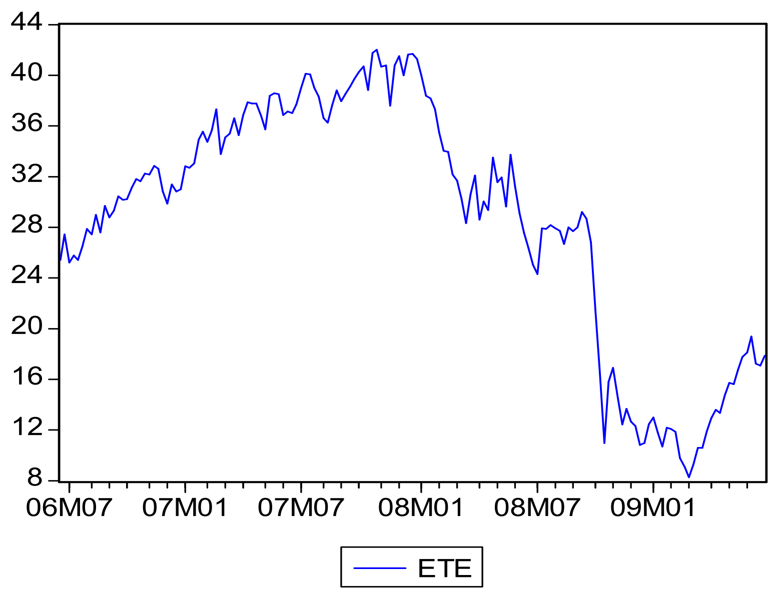
03/11/2006	32.2282	09/11/2007	40.6718	14/11/2008	14.5309
10/11/2006	32.1748	16/11/2007	40.7963	21/11/2008	12.4419
17/11/2006	32.8503	23/11/2009	37.5965	28/11/2008	13.6805
24/11/2006	32.6192	30/11/2007	40.7963	05/12/2008	12.6637
01/12/2006	30.8416	07/12/2007	41.5073	12/12/2008	12.3125
08/12/2006	29.8817	14/12/2007	39.9963	19/12/2008	10.8335
15/12/2006	31.3927	21/12/2007	41.6495	26/12/2008	10.9814
22/12/2006	30.8238	28/12/2007	41.6851	02/01/2009	12.4789
29/12/2006	31.0194	04/01/2008	41.2762	09/01/2009	12.9965
05/01/2007	32.8325	11/01/2008	40.0141	16/01/2009	11.7763
12/01/2007	32.7081	18/01/2008	38.3965	23/01/2009	10.7041
19/01/2007	33.0636	25/01/2008	38.1832	30/01/2009	12.1831
26/01/2007	34.9301	01/02/2008	37.3299	06/02/2009	12.0906
02/02/2007	35.5523	08/02/2008	35.4634	13/02/2009	11.8688
09/02/2007	34.7524	15/02/2008	34.0413	20/02/2009	9.79822
16/02/2007	35.6412	22/02/2008	33.9702	27/02/2009	9.07721
23/02/2007	37.3121	29/02/2008	32.1748	06/03/2009	8.28227
02/03/2007	33.7747	07/03/2008	31.6771	13/03/2009	9.29906
09/03/2007	35.1079	14/03/2008	30.2372	20/03/2009	10.5932
16/03/2007	35.4101	21/03/2008	28.3352	27/03/2009	10.6117
23/03/2007	36.6011	28/03/2008	30.5927	03/04/2009	11.915
30/03/2007	35.2856	04/04/2008	32.0859	10/04/2009	12.9595
06/04/2007	36.8855	11/04/2008	28.6196	17/04/2009	13.5881
13/04/2007	37.8632	18/04/2008	30.0595	24/04/2009	13.357
20/04/2007	37.7743	25/04/2008	29.3662	01/05/2009	14.7343
27/04/2007	37.7743	02/05/2008	33.508	08/05/2009	15.7141
04/05/2007	36.7966	09/05/2008	31.5704	15/05/2009	15.6217
11/05/2007	35.7301	16/05/2008	31.9459	22/05/2009	16.7309
18/05/2007	38.3787	23/05/2008	29.6535	29/05/2009	17.7847
25/05/2007	38.592	30/05/2008	33.7391	05/06/2009	18.1267
01/06/2007	38.5031	06/06/2008	31.2434	12/06/2009	19.3931

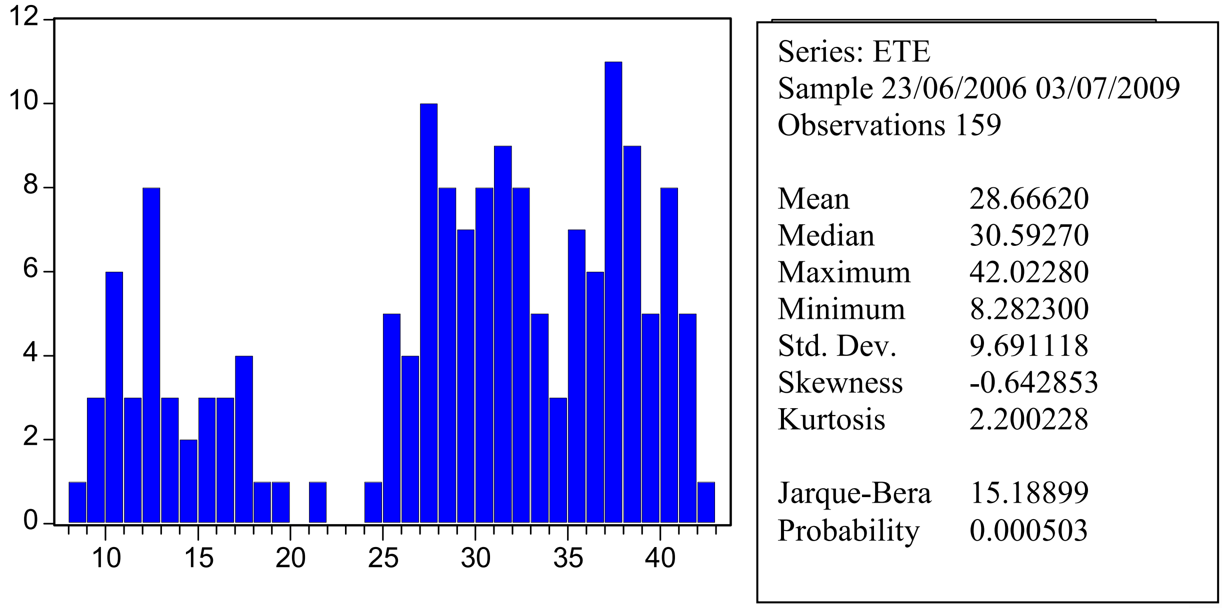
08/06/2007	36.8855	13/06/2008	29.1173	19/06/2009	17.2393
15/06/2007	37.1521	20/06/2008	27.5829	26/06/2009	17.1007
22/06/2007	37.0099	27/06/2008	26.3627	03/07/2009	17.86

Οι 10 εβδομαδιαίες τιμές κλεισίματος από την Παρασκευή 10/07/2009 έως την Παρασκευή 11/09/2009 είναι:

Ημερομηνία	**Τιμή κλεισίματος**
10/07/2009	16.38
17/07/2009	19.03
24/07/2009	20
31/07/2009	20.48
07/08/2009	20.8
14/08/2009	21.25
21/08/2009	22.9
28/08/2008	23.32
04/09/2009	21.81
11/09/2009	23

Στη συνέχεια δίνεται το γράφημα της τιμής της μετοχής της ΕΤΕ καθώς και τα περιγραφικά στατιστικά επί του δείγματος της μετοχής.





Στη συνέχεια δίνονται οι τιμές των αποδόσεων της μετοχής της ΕΤΕ. Σύμφωνα με την σχέση:

$$X_t = \log \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

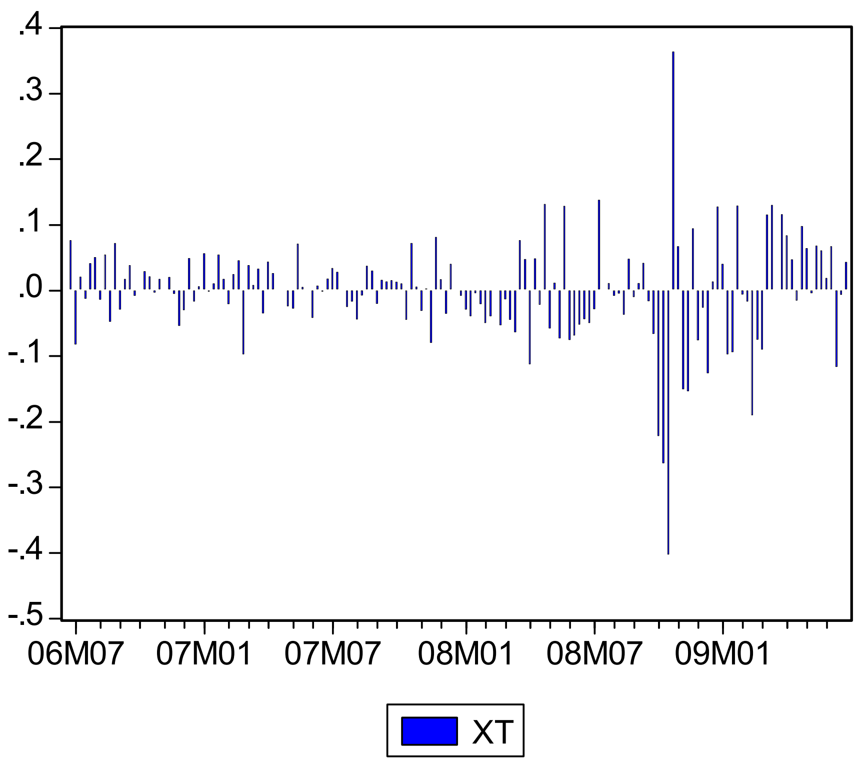
προκύπτουν οι παρακάτω τιμές. Επίσης, πρέπει να αναφερθεί ότι σύμφωνα και με το μοντέλο των Black and Scholes οι τυχαίες μεταβλητές X_t είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την κανονική κατανομή.

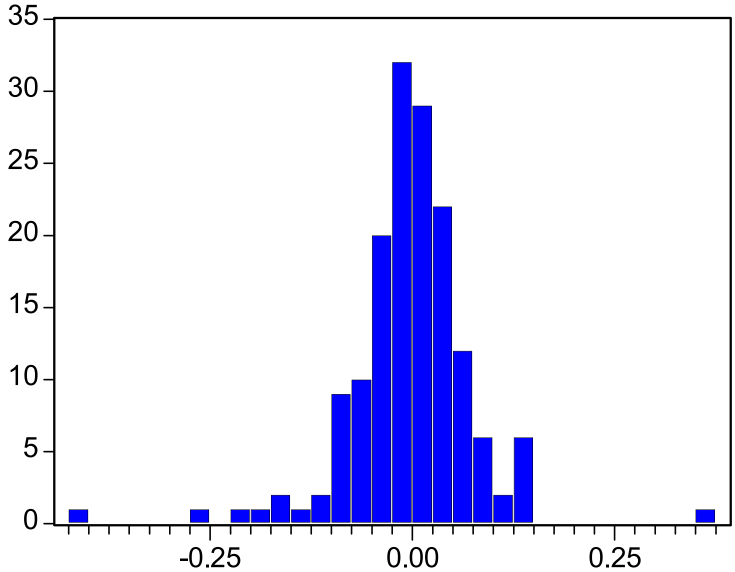
Ημερομηνία	**Απόδοση X_t**	**Ημερομηνία**	**Απόδοση X_t**	**Ημερομηνία**	**Απόδοση X_t**
23/06/2006	-------------	29/06/2007	0.018087307	04/07/2008	-0.0510683
30/06/2006	0.07670268	06/07/2007	0.034311971	11/07/2008	-0.0299652
07/07/2006	-0.0837218	13/07/2007	0.02831018	18/07/2008	0.1382727
14/07/2006	0.02090731	20/07/2007	-0.00088771	25/07/2008	-0.0013263
21/07/2006	-0.0138882	27/07/2007	-0.02696873	01/08/2008	0.0112108
28/07/2006	0.04177088	3/08/2007	-0.01839015	08/08/2008	-0.0098845
04/08/2006	0.05099367	10/08/2007	-0.04557002	15/08/2008	-0.0066455
11/08/2006	-0.0160619	17/08/2007	-0.00927208	22/08/2008	-0.0387419
18/08/2006	0.05481596	24/08/2007	0.037524088	29/08/2008	0.048692

25/08/2006	-0.0490033	31/08/2007	0.030226537	05/09/2008	-0.0112852
01/09/2006	0.07263466	07/09/2007	-0.022232	12/09/2008	0.0112852
08/09/2006	-0.0303972	14/09/2007	0.016258821	19/09/2008	0.0420105
15/09/2006	0.01774259	21/09/2007	0.013730605	26/09/2008	-0.0178824
22/09/2006	0.03865911	28/09/2007	0.015784754	03/10/2008	-0.0679812
29/09/2006	-0.009968	05/10/2007	0.013333914	10/10/2008	-0.2231398
06/10/2006	0.00176532	12/10/2007	0.010976961	17/10/2008	-0.2649565
13/10/2006	0.02955938	19/10/2007	-0.04693608	24/10/2008	-0.4043414
20/10/2006	0.02202954	26/10/2007	0.072797927	31/10/2008	0.3642246
27/10/2006	-0.0050411	02/11/2007	0.005940586	07/11/2008	0.0678205
03/11/2006	0.0178099	09/11/2007	-0.03267735	14/11/2008	-0.1519707
10/11/2006	-0.0016583	16/11/2007	0.003056413	21/11/2008	-0.1552076
17/11/2006	0.02077734	23/11/2007	-0.08168043	28/11/2008	0.0949017
24/11/2006	-0.0070598	30/11/2007	0.08168043	05/12/2008	-0.0772318
01/12/2006	-0.0560366	07/12/2007	0.017277924	12/12/2008	-0.0281246
08/12/2006	-0.0316182	14/12/2007	-0.03708237	19/12/2008	-0.1279718
15/12/2006	0.04932913	21/12/2007	0.040502414	26/12/2008	0.0135597
22/12/2006	-0.0182883	28/12/2007	0.000854387	02/01/2009	0.1278363
29/12/2006	0.0063257	04/01/2008	-0.00985769	09/01/2009	0.0406409
050/1/2007	0.05680606	11/1/2008	-0.03105417	16/01/2009	-0.0985911
12/01/2007	-0.0037961	18/1/2008	-0.04126558	23/01/2009	-0.0954622
19/01/2007	0.01081023	25/1/2008	-0.00557068	30/01/2009	0.1294229
26/01/2007	0.05491594	01/02/2008	-0.02260101	06/02/2009	-0.0076215
02/02/2007	0.01765593	08/02/2008	-0.05129344	13/02/2009	-0.0185152
09/02/2007	-0.0227562	15/02/2008	-0.04092669	20/02/2009	-0.1917124
16/02/2007	0.02525364	22/02/2008	-0.00209082	27/02/2009	-0.0764339
23/02/2007	0.0458154	29/02/2008	-0.05430013	06/03/2009	-0.0916498
02/03/2007	-0.0996057	07/03/2008	-0.01558952	13/03/2009	0.1157962
09/03/2007	0.03871417	14/03/2008	-0.04652107	20/03/2009	0.130299
16/03/2007	0.00857091	21/03/2008	-0.06496811	27/03/2009	0.0017449
23/03/2007	0.0330812	28/03/2008	0.07665657	03/04/2009	0.1158409

30/03/2007	-0.0366033	04/04/2008	0.047655263	10/04/2009	0.084031
06/04/2007	0.04434357	11/04/2008	-0.11432488	17/04/2009	0.0473653
13/04/2007	0.02616114	18/04/2008	0.049086953	24/04/2009	-0.0171538
20/04/2007	-0.0023507	25/04/2008	-0.0233344	01/05/2009	0.0981375
27/04/2007	0	02/05/2008	0.131939863	08/05/2009	0.0643803
04/05/2007	-0.0262235	09/05/2008	-0.05956424	15/05/2009	-0.0058974
11/05/2007	-0.029412	16/05/2008	0.011823874	22/05/2009	0.0685963
18/05/2007	0.07150915	23/05/2008	-0.07446368	29/05/2009	0.0610812
25/05/2007	0.00554238	30/05/2008	0.12907724	05/06/2009	0.0190475
01/06/2007	-0.0023062	06/06/2008	-0.07684925	12/06/2009	0.0675313
08/06/2007	-0.0429202	13/06/2008	-0.07047565	19/06/2009	-0.1177257
15/06/2007	0.00720178	20/06/2008	-0.05413648	26/06/2009	-0.0080723
22/06/2007	-0.0038349	27/06/2008	-0.04524588	03/07/2009	0.0434442

Στη συνέχεια δίνεται το γράφημα των λογαριθμικών αποδόσεων της μετοχής της ΕΤΕ καθώς και τα περιγραφικά στατιστικά αυτής.





Series: X_t
Sample 30/06/2006 03/07/2009
Observations 158

Mean	-0.002234
Median	-0.001107
Maximum	0.364225
Minimum	-0.404341
Std. Dev.	0.077608
Skewness	-0.615346
Kurtosis	10.23055
Jarque-Bera	354.1534
Probability	0.0000

Όπως διαπιστώνεται και από τις τιμές του πίνακα, η μεταβλητότητα με την μέθοδο εκτίμησης από ιστορικά δεδομένα υπολογίζεται στις 0.077608 μονάδες. Δηλαδή:

$$\hat{\sigma}^2 = 0.077608 \Leftrightarrow \hat{\sigma} = 27.9\% .$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Αγγελόπουλος Π.Χ. (2005). *Εισαγωγή στα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα (financial derivatives)*. Εκδόσεις Σταμούλης, Αθήνα.

Αλεξάκης Π. (2005). *Τα παράγωγα προϊόντα και η ελληνική χρηματιστηριακή αγορά παραγώγων*. Εκδόσεις Ελλην, Αθήνα.

Βασιλείου Π.-Χ.Γ. (2001). *Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά*. Εκδόσεις ΖΗΤΗ, Θεσσαλονίκη.

Δημητρόπουλος Π.Α. (1999). *Τα παράγωγα στο Ελληνικό χρηματιστήριο*. Εκδόσεις Φυκίρης, Αθήνα.

Ζερέϊ Ι.Λ. (1999). *Εξωχρηματιστηριακές συμβάσεις παραγώγων ("OTC-Derivatives Contracts")*. Εκδόσεις Νομική Βιβλιοθήκη, Φραγκφούρτη.

Μπούτσικας Μ. (2005-07). *Παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα (Εισαγωγή στη στοχαστική χρηματοοικονομική ανάλυση)*. Σημειώσεις παραδόσεων, ΠΜΣ "Εφαρμοσμένης Στατιστικής", Πειραιάς.

Παπούλιας Γ. (1998). *Παράγωγα=Derivatives*. Εκδόσεις Γεώργιος Παπούλιας, Αθήνα.

Ξένη

Bingham, N.H. and Rüdiger K. (1998). *Risk-Neutral Valuation:Pricing and Hedging of Financial Derivatives*. Springer-Verlag, Great Britain.

Carol, A. (2008). *Pricing, Hedging and Trading Financial Instruments*. John Wiley & Sons, London.

Fries, C. (2007). *Mathematical Finance: Theory, Modeling, Implementation*. John Wiley & Sons, New Jersey.

Hull, J.C. (2003). *Options, futures and other derivatives*. Fifth edition. Prentice Hall, New Jersey.

Karatzas, I. and Shreve, S.E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, New York.

Karatzas, I. and Shreve, S.E. (1998). *Methods of Mathematical Finance*. Springer-Verlag, New York.

Klebaner, F.C. (1999). *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. Imperial College Press.

Mikosch, T. (1999). *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*. World Scientific Publishing Co, Singapore.

Neftci, S. (2000). *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. Academic Press, Second Edition.

Shreve, S.E. (2005). *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*. Springer-Verlag, New York.

Shreve, S.E. (2005). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous Time Models*. Springer-Verlag, New York.

Tapiero, C.(2004). *Risk and Financial Management. Mathematical and Computational Methods*. John Wiley & Sons, London.

Wiersema, U.S. (2008). *Brownian Motion Calculus*. John Wiley & Sons, London.