Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Τ Μ Η Μ Α Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ
Κ Α Ι Α Σ Φ Α Λ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Η Σ

Μ Ε Τ Α Π Τ Υ Χ Ι Α Κ Ο Π Ρ Ο Γ Ρ Α Μ Μ Α Σ Π Ο Υ Δ Ω Ν
Σ Τ Η Ν Ε Φ Α Ρ Μ Ο Σ Μ Ε Ν Η Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η

ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ LÉVY:
ΘΕΩΡΙΑ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

Ιωάννης Δ. Μίχας

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Νοέμβριος 2008

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ΄αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική .

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Επικ. Καθηγητής Μπούτσικας Μιχαήλ ...………………………………………………
- Επικ. Καθηγητής Πιτσέλης Γεώργιος ………………………………………………….
- Επικ. Καθηγητής Πολίτης Κωνσταντίνος (Επιβλέπων) ………………………………..

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής επιστήμης του πανεπιστημίου Πειραιά δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN APPLIED STATISTICS

LÉVY PROCESSES: THEORY & APPLICATIONS IN FINANCE

By

Ioannis D. Michas

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
November 2008

Στην οικογένειά μου

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Πολίτη Κωνσταντίνο για την πολύτιμη συνεισφορά και αμέριστη συμπαράστασή του κατά την συγγραφή της παρούσης διπλωματικής εργασίας.

Περίληψη

Η ασυμμετρία και η κύρτωση οι οποίες παρατηρούνται συχνά στις εμπειρικές κατανομές των χρηματοοικονομικών δεδομένων, καθιστούν το Υπόδειγμα Black & Scholes ακατάλληλο να περιγράψει με ακρίβεια την συμπεριφορά των τιμών της αγοράς. Η χρήση στοχαστικών διαδικασιών που περιέχουν άλματα, όπως η οικογένεια των ανελίξεων Lévy, μπορεί να δώσει απαντήσεις σε αυτά τα προβλήματα. Η σύνδεση μεταξύ των απείρως διαιρετών κατανομών και των ανελίξεων Lévy μέσω του Τύπου των Lévy-Khintchine προσδίδει σε αυτές τις διαδικασίες ιδιότητες, κατάλληλες για την επίτευξη του στόχου αυτού. Επιπλέον, η διάσπαση των ανελίξεων Lévy μέσω της Lévy-Itô Διαχώρισης στα κύρια δομικά συστατικά τους, διαφωτίζει τον τρόπο με τον οποίο αυτές οι στοχαστικές διαδικασίες κατορθώνουν να αποδώσουν τα άλματα και τον γενικό μηχανισμό διαμόρφωσης των τιμών της αγοράς. Τέλος, στα πλαίσια της εφαρμογής των στοχαστικών ανελίξεων Lévy στην Χρηματοοικονομία, διενεργείται κάτω από ένα ισοδύναμο martingale μέτρο πιθανότητας, σύμφωνα με την Αρχή της μη Επιτηδειότητας, η τιμολόγηση ενός συγκεκριμένου τύπου εξωτικών δικαιωμάτων, αυτή των lookback δικαιωμάτων αγοράς επί του χρηματοοικονομικού δείκτη S&P 500. Η τιμολόγηση, επιχειρείται με την χρήση τριών διαφορετικών υποδειγμάτων, του κλασσικού Black & Scholes, ενός Variance Gamma και ενός BNS Gamma-OU Υποδείγματος. Η έλλειψη κλειστών τύπων υπολογισμού της αρχικής τιμής των συμβολαίων στις Lévy αγορές, αντιμετωπίζεται με την μέθοδο της Monte Carlo προσομοίωσης ενώ πραγματοποιείται και η σύγκριση της προσαρμογής των τριών υποδειγμάτων στις πραγματικές τιμές της αγοράς.

Abstract

Skewness and kurtosis of the empirical distributions by which financial data are described, makes often the Black & Scholes Model not suitable for the accurate modeling of the market's stock-price behaviour. The use of stochastic processes that obey an infinitely divisible distribution law, such as Lévy processes, gives answers to these problems. The connection between infinitely divisible distributions and Lévy processes by the Lévy-Khintchine Formula, is lending these processes adaptable properties to achieve their goals. Furthermore, the description of Lévy processes through the Lévy-Itô Decomposition to their basic structural ingredients is enlightening the way in which these processes are capable to attribute the jumps and the mechanism of the market's stock-price configuration in general. At the end, in order to examine an application of Lévy processes in Finance, an arbitrage-free pricing, under an equivalent martingale measure, of a special type of derivatives, the lookback call-options on the S&P 500 index, is represented. The pricing is accomplished with the use of three different stock-price models, the classical Black & Scholes, the Variance Gamma and the BNS Gamma-OU Model. Under the Lévy markets, the lack of explicit formulas for the calculation of the contract's initial price is countered by Monte Carlo simulation. At the same time, the performance of the three models is compared against the real market prices.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Διαγραμμάτων

Κατάλογος Πινάκων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τις τελευταίες τρεις δεκαετίες περίπου, από τις αρχές της δεκαετίας του 1980 έως σήμερα, τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα διαδραματίζουν ολοένα και σημαντικότερο ρόλο στον κόσμο της οικονομίας. Η μεγάλη αποδοχή και η συνεχής άνθιση τέτοιων προϊόντων, σε συνδυασμό με την καθημερινή διαπραγμάτευσή τους ανά τον κόσμο, καθιστούν τις αγορές αυτές καίριας σημασίας παράγοντες για την ομαλή λειτουργία της οικονομίας. Η αξία και η απόδοση των παράγωγων χρηματοοικονομικών συμβολαίων είναι άμεσα εξαρτώμενες από τις τιμές άλλων βασικών, υποκείμενων σε αυτά προϊόντων. Για την τιμολόγησή τους λοιπόν, μέγιστη σημασία αποκτά ο τρόπος με τον οποίο τα υποκείμενα πρωτογενή προϊόντα διαμορφώνουν τα επίπεδα τιμών τους, η εύρεση δηλαδή, του μηχανισμού εκείνου μέσω του οποίου εξελίσσονται οι χρηματοοικονομικές αγορές.

Παράλληλα, ο κλάδος των Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών, λόγω της τεράστιας συνεισφοράς και επιρροής του στην βιομηχανία των χρηματιστηριακών αγορών, τυγχάνει εξαιρετικής ανάπτυξης. Επίσης, την τελευταία εικοσαετία, ένας άλλος κλάδος που αφορά στην μελέτη στοχαστικών διαδικασιών και πιο συγκεκριμένα στην Οικογένεια των Στοχαστικών Ανελίξεων Lévy, γνωρίζει εντυπωσιακή ανάπτυξη και εξέλιξη. Ο συγκερασμός των δύο αυτών ξεχωριστών πεδίων της Μαθηματικής Επιστήμης, παρέχει την δυνατότητα εξεύρεσης νέων μεθόδων μοντελοποίησης των χρηματοοικονομικών αγορών, βελτιώνοντας έτσι την συμπεριφορά των ήδη υπαρχόντων σύμφωνα με τις επιταγές της Οικονομικής Θεωρίας, ανοίγοντας ταυτόχρονα καινούριες ατραπούς στην τιμολόγηση παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων.

Σκοπός της παρούσης διπλωματικής εργασίας, είναι η συγκέντρωση και παρουσίαση όλων εκείνων των θεμάτων που διαμορφώνουν την Θεωρία των Στοχαστικών Ανελίξεων Lévy. Στις σελίδες του παρόντος έργου, επιχειρείται η κατανόηση της φύσης και της συμπεριφοράς αυτών των στοχαστικών διαδικασιών, μέσω της οποίας διαφωτίζεται ο τρόπος με τον οποίο η οικογένεια των Lévy ανελίξεων επιτυγχάνει την κάλυψη των αναγκών της Οικονομικής

Θεωρίας. Παράλληλα, στα πλαίσια της αριθμητικής εφαρμογής της εργασίας και της αξιοποίησης της Θεωρίας των Ανελίξεων Lévy στην Χρηματοοικονομία, γίνεται προσπάθεια τιμολόγησης ενός συγκεκριμένου τύπου εξωτικού παράγωγου χρηματοοικονομικού προϊόντος, εκείνου των lookback δικαιωμάτων αγοράς επί του χρηματοοικονομικού δείκτη S&P 500, μέσω Monte Carlo προσομοίωσης.

Αναλυτικότερα, η δομή της παρούσης διπλωματικής εργασίας έχει ως εξής. Μετά το πρώτο κεφάλαιο το οποίο αποτελεί την εισαγωγή και ουσιαστικά επισημαίνει την σύνδεση των στοχαστικών ανελίξεων Lévy με την Οικονομική Θεωρία, στο Κεφάλαιο 2 γίνεται η πρώτη γνωριμία με βασικές για την πορεία στοχαστικές διαδικασίες. Μεταβαίνοντας ομαλά από την έννοια της τυχαίας μεταβλητής στο περιεχόμενο μιας στοχαστικής διαδικασίας, πραγματοποιείται η παρουσίαση της ανέλιξης Poisson, της σύνθετης ανέλιξης Poisson και της Κίνησης Brown. Παρέχεται ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός τους και βασικά κοινά τους γνωρίσματα υπό την μορφή ιδιοτήτων, τα οποία στην συνέχεια θα στοιχειοθετήσουν τον ορισμό μιας ανέλιξης Lévy.

Στο Κεφάλαιο 3, πραγματοποιείται αναφορά σε μία πολύ σημαντική κλάση κατανομών, αυτή των Απείρως Διαιρετών (*Infinitely Divisible Distributions*). Προσδιορίζονται οι προϋποθέσεις τις οποίες πρέπει να πληρεί ένας νόμος πιθανότητας έτσι ώστε να χαρακτηριστεί ως απείρως διαιρετός και μέσω της χαρακτηριστικής συνάρτησης, αποδεικνύεται ο απείρως διαιρετός χαρακτήρας των κατανομών που διέπουν τις στοχαστικές διαδικασίες που εισήχθησαν στο δεύτερο κεφάλαιο. Επιπλέον, ορίζεται μια εξίσου σημαντική κλάση στοχαστικών ανελίξεων, οι διαδικασίες martingale. Οι ιδιότητες των ανελίξεων martingale, αποδεικνύονται εξαιρετικής σημασίας σε ότι αφορά τις συνθήκες κάτω από τις οποίες λαμβάνει χώρα η τιμολόγηση παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων.

Στο Κεφάλαιο 4, δίνεται ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός της οικογένειας των ανελίξεων Lévy. Επιπλέον, γίνεται αντιληπτή η άρρηκτη σχέση μεταξύ αυτών των διαδικασιών και των απείρως διαιρετών κατανομών, ενώ μέσω του τύπου των Lévy-Khintchine (*Lévy-Khintchine Formula*) παρέχεται η επέκταση του ορισμού των τελευταίων σε όρους των ανελίξεων Lévy. Ταυτόχρονα, πραγματοποιείται η Lévy-Itô διαχώριση (*Lévy-Itô Decomposition*) σύμφωνα με την οποία, κάθε ανέλιξη Lévy διαχωρίζεται σε απλούστερες επιμέρους διαδικασίες. Η διαχώριση των ανελίξεων αυτών στα δομικά συστατικά τους, προσφέρει την καλύτερη κατανόηση της συμπεριφοράς τους. Επιπλέον, βάσει της συμπεριφοράς τους αυτής, της φύσης των τροχιών τους δηλαδή, ταξινομούνται σε υποκλάσεις, κάποιες από τις οποίες χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν σε επόμενο κεφάλαιο την διαμόρφωση των τιμών της αγοράς.

Μεγάλο μέρος του Κεφαλαίου 5, αφιερώνεται σε θέματα που αφορούν στην Χρηματοοικονομία. Σε πρώτο στάδιο, γνωστοποιείται η φύση των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων ενώ παράλληλα εξετάζονται ζητήματα σχετικά με την τιμολόγηση τέτοιων συμβολαίων, όπως η Αρχή της μη Επιτηδειότητας (*Arbitrage*) και το ισοδύναμο martingale μέτρο πιθανότητας κάτω από το οποίο διενεργείται η τιμολόγησή τους. Επιπλέον, εισάγεται το περίφημο Black & Scholes Υπόδειγμα περιγραφής της αγοράς και παρουσιάζονται οι σχέσεις με τις οποίες βάσει αυτού, τιμολογούνται τα Ευρωπαϊκά Δικαιώματα Αγοράς και Πώλησης. Τονίζονται οι αδυναμίες του υποδείγματος οι οποίες προκύπτουν από την μελέτη ιστορικών δεδομένων καταδεικνύοντας έτσι τους λόγους εκείνους που οδηγούν στην χρήση των ανελίξεων Lévy για τον προσδιορισμό των τιμών της αγοράς. Στην συνέχεια, περιγράφονται μοντέλα περιγραφής των αγορών μέσω της οικογένειας των στοχαστικών ανελίξεων Lévy, είτε ως ανεξάρτητα υποδείγματα αγορών Lévy, είτε ως γενικεύσεις του Black & Scholes υποδείγματος με στοχαστική πτητικότητα (*Volatility*). Δύο τέτοια υποδείγματα βάσει των οποίων διενεργείται η εφαρμογή της εργασίας στο επόμενο κεφάλαιο, ένα από κάθε κατηγορία, το Variance Gamma Υπόδειγμα και το Black & Scholes Υπόδειγμα με Gamma-OU πτητικότητα τιμών, μελετώνται και αναλύονται σχολαστικά.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 πραγματοποιείται η εφαρμογή όλων των προηγούμενων θεωρητικών ζητημάτων που συζητήθηκαν στην πορεία της παρούσης εργασίας, η τιμολόγηση lookback δικαιωμάτων αγοράς επί του χρηματοοικονομικού δείκτη S&P 500, μέσω της Monte Carlo προσομοίωσης. Σε πρώτη φάση, γίνεται η παρουσίαση του χρηματοοικονομικού δείκτη S&P 500, του υποκείμενου δηλαδή προϊόντος στο οποίο αναφέρονται τα προς τιμολόγηση συμβόλαια, παραθέτοντας βασικά χαρακτηριστικά της εμπειρικής του κατανομής. Ταυτόχρονα, αναλύεται η φύση των συγκεκριμένων εξωτικών συμβολαίων, προσδιορίζοντας την αξία και απόδοσή τους για κάθε χρονική στιγμή. Εν συνεχεία, μέσω των ιστορικών δεδομένων του δείκτη, περιγράφεται ο τρόπος με τον οποίο προσδιορίζονται οι παράμετροι των κατανομών των υποδειγμάτων που καλούνται να περιγράψουν την αγορά, με την μέθοδο της βαθμονόμησης (*Calibration*). Πραγματοποιείται η περιγραφή της γενικής αρχής η οποία διέπει την Monte Carlo προσομοίωση στοχαστικών διαδικασιών και του τρόπου με τον οποίο αυτή εφαρμόζεται στην τιμολόγηση των συμβολαίων κάτω από το κάθε υπόδειγμα προσδιορισμού των τιμών της αγοράς ξεχωριστά. Μετά και την εφαρμογή της Monte Carlo προσομοίωσης, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της τιμολόγησης των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων και συνάμα συγκρίνεται η ακρίβεια και η ποιότητα των αποτελεσμάτων της σε σχέση με τις πραγματικές τιμές της αγοράς. Η τελευταία παράγραφος του κεφαλαίου και της εργασίας αυτής στο σύνολό της, αφιερώνεται στην συγκέντρωση και καταγραφή των συμπερασμάτων τα οποία εξήχθησαν από την χρήση των ανελίξεων Lévy, συγκριτικά με την Black & Scholes θεώρηση της αγοράς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}

ΑΝΕΛΙΞΗ POISSON, ΣΥΝΘΕΤΗ ΑΝΕΛΙΞΗ POISSON & ΚΙΝΗΣΗ BROWN

Στο αυτό το πρώτο κεφάλαιο, γίνεται η παρουσίαση κάποιων βασικών, απλών αλλά θεμελιώδους σημασίας στοχαστικών ανελίξεων, οι οποίες ανήκουν στην κλάση των ανελίξεων Lévy. Αρχικά, πραγματοποιείται μια σύντομη αναφορά στην φύση των τυχαίων μεταβλητών καθώς και αναλύονται βασικές έννοιες της Θεωρίας Πιθανοτήτων, με σκοπό την ομαλή μετάβαση και ροή στο κύριο μέρος του κεφαλαίου που είναι ο ορισμός των ανελίξεων αυτών και η παρουσίαση σημαντικών ιδιοτήτων τους. Μετά την προσπάθεια κατανόησης της φύσης γενικά μιας στοχαστικής διαδικασίας, το ενδιαφέρον εστιάζεται σε τρεις συγκεκριμένες στοχαστικές διαδικασίες, την ανέλιξη Poisson, την σύνθετη ανέλιξη Poisson και τέλος την ανέλιξη Wiener, η συμπεριφορά των οποίων σχολιάζεται εκτενώς. Εκτός από τον ορισμό και κάποιες βασικές ιδιότητες των παραπάνω στοχαστικών διαδικασιών, γίνεται λόγος για την μέση τιμή, την διακύμανση και την ροπογεννήτρια καθεμιάς από τις παραπάνω ανελίξεις, ως συναρτήσεις του χρόνου. Επίσης, μέσω της γλώσσας προγραμματισμού S και του στατιστικού πακέτου S-Plus 2000, παρατίθενται τα μονοπάτια των ανελίξεων αυτών στην πορεία του χρόνου. Και οι τρεις αυτές στοχαστικές διαδικασίες αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της θεωρίας των ανελίξεων Lévy και η σημασία τους γίνεται άμεσα αντιληπτή στα επόμενα κεφάλαια.

2.1 Η τυχαία Μεταβλητή

Αρχικά και προτού γίνει αναφορά στη φύση μιας στοχαστικής ανέλιξης, είναι απαραίτητη η εισαγωγή της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής. Μία μεταβλητή λοιπόν, της οποίας η τιμή εξαρτάται από την έκβαση ενός πειράματος τύχης, δύναται να θεωρηθεί ως μία τυχαία μεταβλητή. Σύμφωνα με αυτό, σε κάθε δυνατή κατάσταση του πειράματος τύχης, αντιστοιχεί ένα πραγματικό διάνυσμα $X \in \Re^n$ και συνεπώς ως διακριτή τυχαία μεταβλητή ορίζεται μια συνάρτηση $X:\Omega \to \Re^n$ η οποία δίνει πεπερασμένες ή αριθμήσιμα άπειρες το πλήθος πραγματικές τιμές σε κάθε ενδεχόμενο ω που ορίζει ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{P})$ του εκάστοτε πειράματος τύχης. Αντίθετα, όταν το σύνολο το οποίο παράγεται δεν είναι αριθμήσιμο, γίνεται λόγος για συνεχή τυχαία μεταβλητή.

Στην περίπτωση των διακριτών τυχαίων μεταβλητών, η πραγματική συνάρτηση $f:\mathrm{A} \to [0,1]$ που ορίζεται από την σχέση

$$f(x) = \mathrm{P}\left(X = x\right)$$

και οι τιμές της αθροίζουν στη μονάδα, δηλαδή

$$\sum_{i\varepsilon \mathrm{A}} f(x_i) = \sum_{i\varepsilon \mathrm{A}} \mathrm{P}\left(X = x_i\right) = 1,$$

αποδίδει την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου $\{X = x\}$. Η συνάρτηση $F:\Re \to [0,1]$ με τύπο

$$F(t) = \mathrm{P}\left(X \leq t\right) = \sum_{x \leq t} f(x) \ , \quad \forall t \in \Re$$

καλείται αθροιστική συνάρτηση κατανομής της διακριτής τυχαίας μεταβλητής και είναι αυτή που χαρακτηρίζει την κατανομή.

Για τις συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, η πιθανότητα η οποία αποδίδεται σε μία μεμονωμένη της τιμή είναι μηδενική, $\mathrm{P}\left(X = x\right) = 0$ και συνεπώς η συνάρτηση f δεν λαμβάνει την ίδια έννοια όπως στην περίπτωση των διακριτών τυχαίων μεταβλητών. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F:\Re \to \Re$ ορίζεται εναλλακτικά ως

$$F(t) = \mathrm{P}\left(X \leq t\right) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \ , \quad \forall t \in \Re$$

και καλείται απλά συνάρτηση κατανομής της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής, ενώ η συνάρτηση $f:\mathrm{A} \to \Re$ ονομάζεται πυκνότητα της X. Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειωθεί πως σύμφωνα με την κλασσική Θεωρία Μέτρου του Lebesgue, ένα άθροισμα πιθανοτήτων δύναται να αντιμετωπιστεί ως ένα ολοκλήρωμα και συνεπώς δεν είναι αναγκαίος ο παραπάνω διαχωρισμός. Η χρήση των όρων, συνάρτηση πυκνότητας και συνάρτηση κατανομής είναι ορθή ανεξαρτήτως της φύσης της τυχαίας μεταβλητής. Παρόλα αυτά, λόγω της πολυπλοκότητας του ζητήματος αυτού, διατηρείται η αρχική τους διάκριση.

Μία από τις σημαντικότερες διακριτές κατανομές πιθανότητας, η οποία αποτελεί αντικείμενο μελέτης του πρώτου αυτού κεφαλαίου, είναι η κατανομή Poisson. Η κατανομή Poisson χρησιμοποιείται στην πραγματική ζωή για την μελέτη της πιθανότητας πραγματοποίησης πολλών φαινομένων τα οποία έχουν σχέση με απαρίθμηση «σπάνιων» γεγονότων. Η πιθανότητα αυτή, δίνεται από την σχέση

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!}, & x = 0,1,2,.... \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}, \end{cases}$$

όπου η σταθερά $\lambda \in \Re_+^*$ είναι η παράμετρος της κατανομής. Είναι γνωστό ότι (βλ. για παράδειγμα Hoel, Port και Stone (2005) είτε οποιοδήποτε άλλο σύγγραμμα σχετικό με την Θεωρία Πιθανοτήτων), η μέση τιμή και η διακύμανση μιας τέτοιας τυχαίας μεταβλητής προκύπτουν ίσες με:

$$E(X) = \lambda = Var(X),$$

ενώ η ροπογεννήτρια συνάρτηση μιας κατανομής Poisson είναι η:

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}, \quad \forall\ t \in \Re_+^* \quad \kappa\alpha\iota \quad \lambda \in \Re_+^*.$$

Παραδείγματα τέτοιων φαινομένων, φαινόμενα δηλαδή που εμφανίζονται να ακολουθούν την κατανομή Poisson, είναι το πλήθος των ατόμων μιας ραδιενεργού ουσίας που διασπώνται στη μονάδα του χρόνου, το πλήθος των κλήσεων που δέχεται ένα τηλεφωνικό κέντρο στη μονάδα του χρόνου, το πλήθος των τυπογραφικών λαθών σε μία σελίδα ενός βιβλίου, το πλήθος των αιτήσεων για αποζημίωση που δέχεται μια ασφαλιστική εταιρεία στη μονάδα του χρόνου, κ.ά.

2.2 Η Στοχαστική Ανέλιξη

Αυτό που συμβαίνει συνήθως στην πράξη και έχει ίσως το μεγαλύτερο ενδιαφέρον, είναι η μελέτη των παραπάνω φαινομένων και η εξέλιξη τους στον χρόνο (ή στον χώρο). Αντιμετωπίζοντας ένα τέτοιο φαινόμενο καθαυτό τον τρόπο, εισάγεται η έννοια της στοχαστικής διαδικασίας. Γενικά, μια στοχαστική διαδικασία ή ανέλιξη, ορίζεται ως μια απειροπληθής οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(\omega,t)\ ,\ t \in T\}$ (ο συμβολισμός χρησιμοποιείται καταχρηστικά στο σημείο αυτό για να επισημανθεί η παρακάτω διαφοροποίηση) οι οποίες ορίζονται σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{P})$ και παίρνουν πραγματικές τιμές στον $\Re^n$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, εύκολα διαπιστώνεται ότι μια στοχαστική ανέλιξη είναι μία συνάρτηση δύο μεταβλητών, της ω και της t, όπου η t τις περισσότερες των περιπτώσεων εκφράζει τον χρόνο ενώ η ω ένα στοιχείο του δειγματικού χώρου Ω του πειράματος τύχης το οποίο μελετάται. Κατά συνέπεια,

- Για συγκεκριμένο $t \in T$, η στοχαστική διαδικασία $\{X(\omega,t)\ ,\ t \in T\}$ είναι μία τυχαία μεταβλητή

$$\omega \to X_t(\omega)\ ,\ \omega \in \Omega.$$

- Για σταθερό $\omega\ \varepsilon\ \Omega$, η στοχαστική ανέλιξη $\{X(\omega,t)\ ,\ t\ \varepsilon\ T\}$ συμπεριφέρεται ως συνάρτηση μιας μεταβλητής

$$t \to X_t(\omega)\ ,\ t \in T$$

  το γράφημα της οποίας αποδίδει όπως λέγεται μια πραγματοποίηση (*realization*) της στοχαστικής διαδικασίας ή την τροχιά (*trajectory*) ή το μονοπάτι (*path*) της.

Διαισθητικά, οι δύο παραπάνω περιγραφές γίνονται ευκολότερα αντιληπτές, θεωρώντας όπως ήδη έχει αναφερθεί, ένα πείραμα τύχης το οποίο εκτυλίσσεται στον χρόνο. Ο χρόνος στον οποίο μελετάται το φαινόμενο, μπορεί να είναι είτε διακριτός, οπότε ουσιαστικά υπάρχει μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\ ,\ n = 0,1,2,...\}$ η οποία ονομάζεται ανέλιξη διακριτού χρόνου, είτε συνεχής οπότε η $\{X_t\ ,\ t \in T\}$ ονομάζεται ανέλιξη συνεχούς χρόνου. Απομονώνοντας κάποια χρονική στιγμή του φαινομένου, καταργείται η δυναμική του στον χώρο και αυτό που στην πραγματικότητα αντιμετωπίζεται δεν είναι τίποτε άλλο από μια τυχαία μεταβλητή όπως αυτή ορίστηκε στην προηγούμενη ενότητα. Επιπρόσθετα, ως ω θεωρείται το υπό παρακολούθηση πείραμα, ενώ ως $X_t(\omega)$ το αποτέλεσμά του. Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του φαινομένου το οποίο μελετάται, ονομάζεται χώρος καταστάσεων της ανέλιξης και συμβολίζεται με S. Αν το S είναι αριθμήσιμο σύνολο, τότε γίνεται λόγος για στοχαστική διαδικασία με διακριτό χώρο καταστάσεων ενώ αν το σύνολο S είναι υπεραριθμήσιμο, για στοχαστική διαδικασία με συνεχή χώρο καταστάσεων. Για ένα συγκεκριμένο ω λοιπόν, η έκβαση του πειράματος τύχης «ξεδιπλώνεται» στον χρόνο και αποτυπώνεται ως η τροχιά της ανέλιξης. Προφανώς, η έκβαση του ίδιου πειράματος (τροχιά), για το ίδιο ω, είναι διαφορετική κατά την επανάληψή του, ως απόρροια της τυχαιότητάς του.

ΧΡΟΝΙΚΟ ΠΕΔΙΟ Τ	ΧΩΡΟΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ S	
	(Διακριτό, Διακριτός)	**(Διακριτό, Συνεχής)**
	(Συνεχές, Διακριτός)	**(Συνεχές, Συνεχής)**

Πίνακας 2.1: Διάκριση Στοχαστικών Διαδικασιών.

Το πιθανοθεωρητικό μοντέλο μελέτης των παραδειγμάτων που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, στηρίζεται στον ορισμό μιας στοχαστικής διαδικασίας $\{X_t \ , \ t \geq 0\}$ η οποία εκφράζει τον αριθμό των γεγονότων τα οποία συμβαίνουν στο χρονικό διάστημα $(0,t]$, όπου ως χρόνος $t = 0$ θεωρείται η στιγμή που ξεκινά η παρακολούθηση του φαινομένου. Στην περίπτωση όπου, για την οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_t \ , \ t \geq 0\}$ η οποία παίρνει διακριτές τιμές $X_t = 0,1,2,.... \ \forall \ t \in \mathrm{T}$, ισχύει ότι

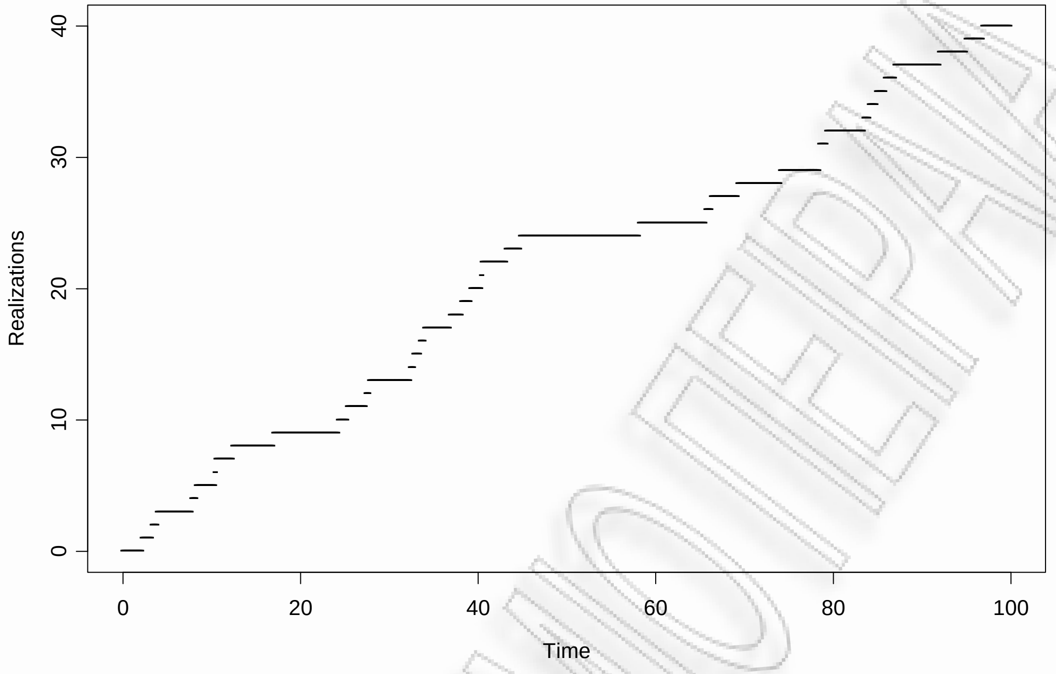
$$P(X_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \ , \ k = 0,1,2,..... ,$$

αυτή ορίζει μια στοχαστική ανέλιξη Poisson. Προφανώς, η ανέλιξη Poisson αποτελεί μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου με διακριτό χώρο καταστάσεων, όπου για κάθε χρονική στιγμή t, η τυχαία μεταβλητή X_t ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt,

$$X_t \overset{d}{\sim} Poisson(\lambda t) \ , \ \ \forall \ t \in \mathrm{T}.$$

Η παράμετρος $\lambda \in \Re_+^*$ καλείται ένταση (*rate* ή *intensity*) της ανέλιξης και αποδίδει τον μέσο αριθμό πραγματοποιήσεων – αφίξεων – γεγονότων στη μονάδα του χρόνου. Αναφέρεται ότι η μέση τιμή και η διακύμανση της ανέλιξης Poisson ισούται με:

$$E(X_t) = \lambda t = Var(X_t)$$



Διάγραμμα 2.1: Τροχιά της Ανέλιξης Poisson με παράμετρο λ=0,5.

και η ροπογεννήτρια αυτής συνάρτηση με:

$$M_{X_t}\left(\theta\right)=E\left(e^{\theta X_t}\right)=e^{\lambda t\left(e^{\theta}-1\right)}\ ,\quad \forall\ \theta,t\in R_{+}^{*}\quad \kappa\alpha\iota\quad \lambda\in R_{+}^{*}\,.$$

Η ανέλιξη Poisson είναι ένα παράδειγμα μιας ευρύτερης οικογένειας ανελίξεων, γνωστές ως απαριθμήτριες ανελίξεις. Μια πραγματοποίηση της ανέλιξης Poisson, δύναται να παρασταθεί με μία αύξουσα κλιμακωτή συνάρτηση όπου σε διάφορες χρονικές στιγμές, οι οποίες όπως φαίνεται παρακάτω προκύπτουν βάσει συγκεκριμένης νομοτελειακής αρχής, πραγματοποιούνται άλματα ύψους μιας μονάδας. Το διάγραμμα 2.1, απεικονίζει μια πραγματοποίηση της ανέλιξης Poisson με ένταση $\lambda = 0,5$. Οι γραμμές εντολών σε γλώσσα S, βάσει των οποίων δημιουργήθηκε το διάγραμμα αυτό, δύναται να βρεθούν στις τελευταίες σελίδες της εργασίας, στους πίνακες του Παραρτήματος Γ.

Εν συνεχεία, παρουσιάζονται κάποιες βασικές ιδιότητες των ανελίξεων Poisson, οι οποίες ισχύουσες ταυτοχρόνως αποτελούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για μία στοχαστική διαδικασία ώστε αυτή να χαρακτηριστεί ανέλιξη Poisson. Οι τέσσερις αυτές ιδιότητες που παρατίθενται αμέσως πιο κάτω, αποτελούν έναν εναλλακτικό τρόπο ορισμού μιας τέτοιας ανέλιξης.

- Ιδιότητα $1^η$:

$$X_0 = 0.$$

Έχει ήδη αναφερθεί ότι ως χρόνος «μηδέν», θεωρείται εκείνη ακριβώς η χρονική στιγμή από την οποία αρχίζει η παρακολούθηση του πειράματος που μελετάται. Κατά συνέπεια, είναι απόλυτα φυσική η παραδοχή ότι την στιγμή εκείνη δεν έχει πραγματοποιηθεί κανένα γεγονός. Η πρώτη ιδιότητα λοιπόν, αναφέρεται στο γεγονός ότι την χρονική στιγμή $t = 0$ που ξεκινά η ανέλιξη Poisson, παρατηρούνται «μηδέν» αφίξεις.

- Ιδιότητα $2^η$:

$$P\left(X_{t+h} = n + m / X_t = n\right) = \begin{cases} \lambda h + o(h) & αν\ m = 1 \\ o(h) & αν\ m > 1 \\ 1 - \lambda h + o(h) & αν\ m = 0. \end{cases}$$

Η δεύτερη αυτή ιδιότητα μαρτυρεί ότι ανάμεσα σε «πολύ σύντομα» - απειροστά χρονικά διαστήματα $(t, t+h)$, συμβαίνει το πολύ ένα γεγονός. Με τον όρο $h \approx 0$, περιγράφονται απειροστοί χρόνοι, χρόνοι δηλαδή οι οποίοι βρίσκονται πάρα πολύ κοντά στο «μηδέν» ενώ το $o(h)$, περιγράφει μία ποσότητα η οποία είναι συνάρτηση αυτού του σύντομου χρονικού διαστήματος μήκους h και η οποία φθίνει γρηγορότερα από αυτό στο «μηδέν», για πολύ μικρά h. Δηλαδή,

$$\frac{o(h)}{h} = 0 \quad όταν\ \ h \to 0.$$

Από αυτή τη δεσμευμένη πιθανότητα και μετά από πράξεις, προκύπτει το παραπάνω συμπέρασμα.

Από την φύση του πειράματος που εξετάζεται, είναι προφανές ότι μεταξύ δύο διαφορετικών χρονικών στιγμών, είτε θα πραγματοποιηθούν κάποια γεγονότα με μία πιθανότητα p, είτε δεν θα πραγματοποιηθεί κανένα με πιθανότητα $1-p$. Η πιο πάνω ιδιότητα καταδεικνύει πως, το ενδεχόμενο να συμβούν περισσότερα από ένα γεγονότα, όταν το χρονικό αυτό διάστημα τείνει στο «μηδέν», είναι μάλλον απίθανο ή αυστηρότερα, έχει πιθανότητα «μηδέν». Κατά συμπέρασμα, σε απειροστά χρονικά διαστήματα, συμβαίνει είτε ένα είτε κανένα γεγονός. Μάλιστα, η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός αυτό, είναι ανάλογη του μήκους h του διαστήματος, με λόγο την ένταση λ της ανέλιξης. Έχοντας λοιπόν κάποιος κατά νου τα παραπάνω και προχωρώντας ένα ακόμα βήμα τους υπολογισμούς του, είναι εύκολο να αντιληφθεί πως η ένταση της ανέλιξης Poisson, δίνει κατά κάποιον τρόπο την ταχύτητα πραγματοποίησης των γεγονότων στο πείραμα το οποίο μελετάται.

- <u>Ιδιότητα 3η</u>:

$$\text{Η τυχαία μεταβλητή } X_s - X_t \text{ είναι ανεξάρτητη της τυχαίας}$$

$$\text{μεταβλητής } X_t \quad \forall\ s,t \in \Re_+^*,\ \mu\varepsilon\ s > t\ .$$

Η συγκεκριμένη ιδιότητα αναφέρει ότι ο αριθμός των γεγονότων που συνέβησαν μεταξύ δύο χρονικών στιγμών, δεν επηρεάζεται από το πλήθος των γεγονότων που είχαν συμβεί μέχρι εκείνη την χρονική στιγμή. Με άλλα λόγια, οι αφίξεις που παρατηρούνται σε ένα χρονικό διάστημα δεν εξαρτώνται από τις αφίξεις προηγούμενων χρόνων, η ιστορία δηλαδή της ανέλιξης $\{X_t\ ,\ t \geq 0\}$ δεν διαδραματίζει κανέναν απολύτως ρόλο στην μελλοντική της εξέλιξη.

Μια διαφορετική, πιο γενική ίσως διατύπωση της παραπάνω ιδιότητας είναι ότι για δύο ξένα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα που εξελίσσεται το φαινόμενο, οι τυχαίες μεταβλητές οι οποίες εκφράζουν το πλήθος των πραγματοποιήσεων των γεγονότων σε καθένα από αυτά, είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Λέγεται λοιπόν ότι, η στοχαστική ανέλιξη $\{X_t\ ,\ t \geq 0\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις (*independent increaments*).

- <u>Ιδιότητα 4η</u>:

$$P\{X_{t+s} = n / X_t = m\} = P\{X_s = n - m / X_0 = 0\}$$
$$\forall\ s,t \in \Re_+^*,\ \mu\varepsilon\ s > t\ \ \kappa\alpha\iota\ \ m,n \in Z_+^*,\ \mu\varepsilon\ n \geq m.$$

Σύμφωνα με αυτό, η πιθανότητα να συμβεί οποιοσδήποτε αριθμός γεγονότων σε κάποιο χρονικό διάστημα εξέλιξης του φαινομένου, είναι η ίδια για όλα τα διαστήματα ίσου πλάτους. Η ιδιότητα αυτή, διασαφηνίζει το γεγονός ότι το πλήθος των αφίξεων σε ένα χρονικό διάστημα, δεν επηρεάζεται από την χρονική στιγμή που αυτό ξεκινά παρά μόνο από την διάρκεια κατά την οποία εξετάζεται. Δεν εξαρτάται δηλαδή από το «πότε» αλλά απ' το «πόσο» διαρκεί η παρατήρηση. Η εξαιρετική σημασία της ιδιότητας αυτής έγκειται στο ότι η ανέλιξη διατηρεί την ισονομία της οποιαδήποτε χρονική στιγμή και αν θεωρηθεί ως αφετηρία της. Οποιαδήποτε χρονική στιγμή και αν ξεκινήσει κανείς την παρατήρηση του φαινομένου, η ανέλιξη δεν αλλοιώνεται, δεν χάνεται δηλαδή πληροφορία. Σε μια τέτοια περίπτωση, λέγεται ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{X_t \ , \ t \geq 0\}$ έχει ομογενείς ή στάσιμες προσαυξήσεις (*stationary increaments*).

Μια στοχαστική διαδικασία λοιπόν, δύναται να χαρακτηριστεί ως ανέλιξη Poisson αν και μόνο αν ικανοποιεί ταυτοχρόνως τις παραπάνω τέσσερις ιδιότητες. Κατά την παρακολούθηση όμως ενός τέτοιου πειράματος το οποίο προσεγγίζεται από μια ανέλιξη Poisson ή οποιαδήποτε άλλη απαριθμήτρια ανέλιξη, εκτός από το πλήθος των γεγονότων τα οποία συμβαίνουν, συχνά ύψιστης σημασίας είναι και ορισμένα άλλα «μεγέθη», όπως για παράδειγμα οι χρόνοι κατά τους οποίους παρατηρούνται οι αφίξεις αυτές. Οι χρόνοι αυτοί ονομάζονται χρόνοι άφιξης ή πραγματοποίησης, είναι προφανώς τυχαίες μεταβλητές και ορίζουν μια αύξουσα ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ως εξής:

$$Y_n = \min\{t : X_t = n\} \ , \ n = 0,1,2,..... \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \ t \in \mathrm{T} .$$

Όπως έγινε ήδη αντιληπτό, η τυχαία μεταβλητή Y_n παριστάνει το χρόνο που απαιτείται για να πραγματοποιηθεί το n-οστό γεγονός. Προφανώς $\mathrm{Y}_0 = 0$.

Βάσει της ακολουθίας των χρόνων άφιξης και θεωρώντας τις διαδοχικές διαφορές της, ορίζεται μία νέα ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{T_n \ , \ n = 1,2,....\}$ όπου

$$T_n = Y_n - Y_{n\text{-}1} \ \ , \ \ n = 1,2,....$$

Οι νέες αυτές τυχαίες μεταβλητές ονομάζονται ***ενδιάμεσοι χρόνοι*** και εκφράζουν το χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ δύο συνεχόμενων αφίξεων. Η τυχαία μεταβλητή δηλαδή T_k, παριστάνει τον χρόνο μεταξύ της $\kappa - 1$και κ-αστής άφιξης. Με την βοήθεια των ενδιάμεσων χρόνων και ακολουθώντας αντίστροφη πορεία ορίζονται εναλλακτικά, τόσο οι χρόνοι άφιξης όσο και το πλήθος των πραγματοποιήσεων που μετρά η αρχική ανέλιξη Poisson, ως εξής:

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} T_i \quad \acute{o}\pi o\upsilon \ \ i = 1,2,...,n \quad \kappa\alpha\iota \ \ n = 1,2,...$$

και

$$X_t = \max\{n : Y_n \leq t\} \quad \acute{o}\pi o\upsilon \ \ n = 1,2,... \quad \kappa\alpha\iota \quad t \in \mathrm{T} .$$

Διασαφηνίζεται λοιπόν ότι, ο χρόνος πραγματοποίησης του n-οστού γεγονότος, ο χρόνος δηλαδή ο οποίος απαιτείται για την καταγραφή της n-οστής άφιξης, είναι το άθροισμα των n πρώτων ενδιάμεσων χρόνων. Με άλλα λόγια, αθροίζοντας τους χρόνους μεταξύ όλων των προηγούμενων διαδοχικών αφίξεων, προκύπτει ο χρόνος πραγματοποίησης του γεγονότος για τον οποίο επιδεικνύεται ενδιαφέρον. Επιπλέον, το πλήθος των γεγονότων που συνέβησαν έως μια δεδομένη χρονική στιγμή, προκύπτει από εκείνον τον χρόνο άφιξης ο οποίος είναι ο μεγαλύτερος των υπολοίπων και μικρότερος από την χρονική στιγμή που εξετάζεται.

Αξιοποιώντας όλα τα παραπάνω τα οποία ειπώθηκαν για μια στοχαστική ανέλιξη Poisson, αντλείται μια πολύ σημαντική ιδιότητα η οποία δηλώνει πως οι ενδιάμεσοι χρόνοι $\{T_n \ , \ n=1,2,....\}$ μιας απαριθμήτριας ανέλιξης Poisson είναι ανεξάρτητες και ισόνομες (*i.i.d*) τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με την ίδια παράμετρο λ. Επιπλέον, αποδεικνύεται (π.χ. Grimmett & Stirzaker (2001)) και το αντίστροφο της άνωθι ιδιότητας, δηλαδή, η στοχαστική ανέλιξη Poisson είναι η μοναδική απαριθμήτρια ανέλιξη για την οποία οι διαδοχικοί χρόνοι πραγματοποίησης των γεγονότων της, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με την ίδια παράμετρο λ. Η βαρύνουσα σημασία της πρότασης αυτής, οφείλεται όπως εύκολα μπορεί να φανταστεί κανείς, στην αμνήμονα ιδιότητα της εκθετικής κατανομής, χάριν των απλουστεύσεων των οποίων προσφέρει στους υπολογισμούς που προκύπτουν. Αυτός είναι άλλωστε και ο λόγος που η ανέλιξη Poisson αν και απλοϊκή στις υποθέσεις της, αποτελεί την θεμελιώδη απαριθμήτρια ανέλιξη.

Είναι γνωστό, πως η τυχαία μεταβλητή η οποία ορίζεται ως το άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την εκθετική κατανομή, ακολουθεί με τη σειρά της την κατανομή Erlang (κατανομή γάμμα) με παραμέτρους το πλήθος των προστιθέμενων όρων και την παράμετρο της εκθετικής κατανομής. Από τον τρόπο με τον οποίο ορίστηκαν οι χρόνοι άφιξης μιας ανέλιξης Poisson λοιπόν, έπεται πως ο χρόνος άφιξης του n-οστού γεγονότος $Y_n \ , \ n=1,2,....$ ακολουθεί την κατανομή γάμμα με παραμέτρους n και λ,

$$Y_n \overset{d}{\sim} Gamma(n,\lambda) \ , \ \forall n=0,1,2,..... \quad \kappa\alpha\iota \quad \lambda \in \Re_+^* .$$

Μια τελευταία ιδιότητα της ανέλιξης Poisson που κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί και δύναται να βρεθεί μεταξύ άλλων στο βιβλίο του Κάκουλλου (1995), αφορά στην «τυχαιότητα» των χρόνων άφιξης. Συγκεκριμένα, η ιδιότητα αυτή αναφέρει ότι η δεσμευμένη κατανομή των χρόνων άφιξης n γεγονότων σε χρόνο t, δεδομένου ότι έχουν πραγματοποιηθεί n το πλήθος γεγονότα στο αυτό χρονικό διάστημα, ταυτίζεται με την κατανομή διατεταγμένου δείγματος που αντιστοιχεί σε τυχαίο δείγμα n παρατηρήσεων από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,t]$. Με άλλα λόγια, δεδομένου ότι σε ένα χρονικό διάστημα μήκους t έχουν συμβεί n το πλήθος γεγονότα, το «πότε» αυτά συνέβησαν προκύπτει αν επιλεγούν n το πλήθος σημεία από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,t]$ και εν συνεχεία διαταχθούν κατά αύξουσα σειρά.

Κλείνοντας την σύντομη αυτή αναφορά στην ανέλιξη Poisson, γίνεται λόγος για κάποιες γενικεύσεις της. Η στοχαστική ανέλιξη Poisson, είναι όπως ήδη έχει αναφερθεί, θεμελιώδους σημασίας απαριθμήτρια διαδικασία λόγω της απλότητας των υποθέσεων της. Ωστόσο, οι υποθέσεις αυτές κρίνονται και εξαιρετικά περιοριστικές. Στην προσπάθεια επέκτασής της λοιπόν, μία πρώτη γενίκευση είναι η παραδοχή ότι η ένταση της ανέλιξης λ, δεν είναι πλέον μία σταθερά αλλά μία πραγματική συνάρτηση του χρόνου $\lambda(t)$. Η νέα αυτή διαδικασία η οποία ονομάζεται μη-ομογενής ανέλιξη Poisson, διατηρεί αναλλοίωτες τις ιδιότητες της ομογενούς Poisson, με την διαφορά βέβαια ότι ο αναμενόμενος αριθμός αφίξεων δεν είναι πλέον σταθερός αλλά εξαρτάται από την χρονική στιγμή στην οποία βρίσκεται το φαινόμενο. Η παραδοχή αυτή, καθιστά ένα τέτοιο μοντέλο περισσότερο ρεαλιστικό, εγγύτερα στην πραγματικότητα.

Μία δεύτερη γενίκευση της απαριθμήτριας ανέλιξης Poisson είναι οι λεγόμενες ανανεωτικές ανελίξεις (*Renewals*). Μια ανανεωτική ανέλιξη δεν διατηρεί την ιδιότητα των ενδιάμεσων χρόνων της ανέλιξης Poisson. Σε αυτές τις απαριθμήτριες διαδικασίες, οι ενδιάμεσοι χρόνοι θεωρούνται ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που όμως δεν ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Το γεγονός αυτό, έχει ως συνέπεια την μη-στασιμότητα των προσαυξήσεων των διαδικασιών αυτών, με αποτέλεσμα την μη θεώρησή τους ως μέλη της ευρύτερης οικογένειας των ανελίξεων Lévy. Για το λόγο αυτό, η αναφορά στις ανανεωτικές ανελίξεις σταματάει εδώ ενώ περισσότερες πληροφορίες σχετικά, μπορούν να αναζητηθούν π.χ. στους Grimmett & Stirzaker (2001).

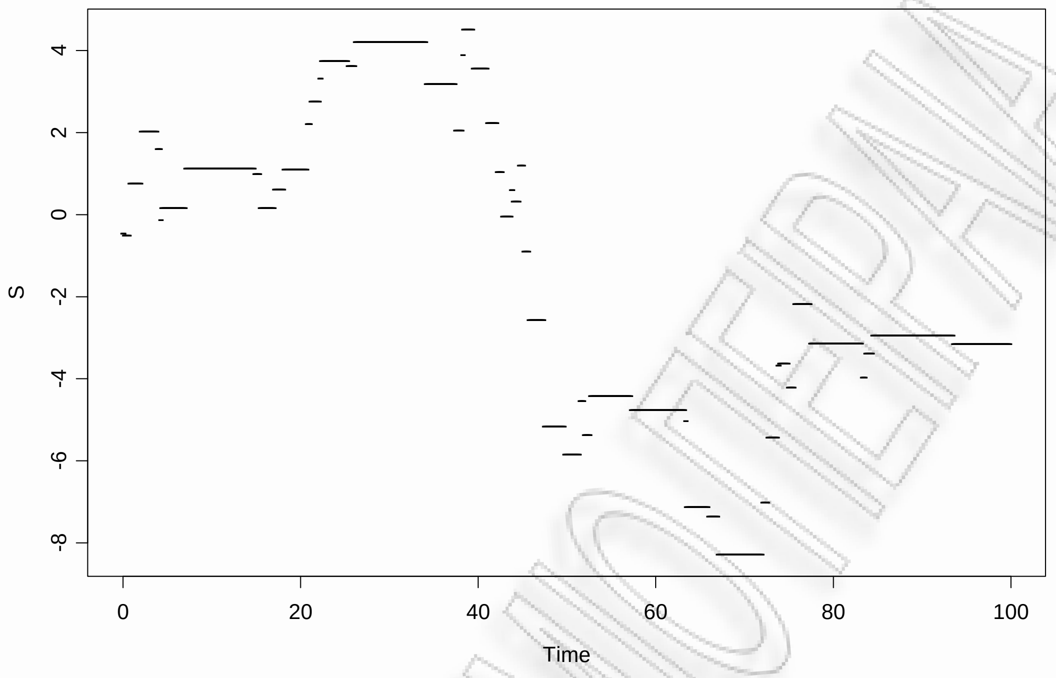
2.3 Η Σύνθετη Στοχαστική Ανέλιξη

Στα παραδείγματα που αναφέρθηκαν παραπάνω, η όλη προσοχή επικεντρώθηκε στην απαρίθμηση γεγονότων που συμβαίνουν, στην χρονική στιγμή κατά την οποία συμβαίνουν κτλ. Για όλα αυτά, η ανέλιξη Poisson αποτελεί μια ικανοποιητική προσέγγιση των φαινομένων αυτών. Τις περισσότερες των περιπτώσεων όμως και όπως είναι φυσικό, παράλληλα με την απαρίθμηση αφίξεων, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν και άλλοι παράγοντες που συνδέονται με τα γεγονότα αυτά. Για παράδειγμα, εκτός από το πλήθος των αιτήσεων για αποζημίωση που δέχεται μια ασφαλιστική εταιρεία σε μια χρονική περίοδο, εύλογο είναι το ενδιαφέρον για το ύψος της κάθε αποζημίωσης και κυρίως, του συνολικού ύψους των αποζημιώσεων που συσσωρεύονται για την εταιρεία στην χρονική περίοδο που εξετάζεται. Το συνολικό αυτό ύψος των απαιτήσεων προς τους πελάτες είναι προφανώς άμεσα συνδεδεμένο με το πλήθος των αιτήσεων για αποζημίωση που δέχεται η εταιρεία. Ομοίως, εκτός ίσως από το πλήθος των τροχαίων ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μια συγκεκριμένη διασταύρωση για μια χρονική περίοδο, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζεται και για το συνολικό κόστος σε ανθρώπινες ζωές ή σε ότι αφορά τον αριθμό κλήσεων που δέχεται καθημερινά ένα τηλεφωνικό κέντρο, ενδιαφέρον επιδεικνύεται για τον συνολικό χρόνο απασχόλησης της τηλεφωνικής γραμμής του κέντρου, καθώς και πολλές άλλες τέτοιες συναφείς ποσότητες.

Όλα αυτά τα προς εξέταση νέα μεγέθη, αποτελούν ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές για κάθε μια πραγματοποίηση ενός γεγονότος που προσμετρά η απαριθμήτρια ανέλιξη. Καθαυτό τον τρόπο, δημιουργείται μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $\{X_n \ , \ n=1,2,...\}$ που εκφράζει το ύψος κάποιου μεγέθους, για κάθε ένα γεγονός που πραγματοποιείται. Αν με $\{N_t \ , \ t \in T\}$ οριστεί η ανεξάρτητη των $\{X_n \ , \ n=1,2,...\}$ στοχαστική διαδικασία, η οποία λαμβάνει ακέραιες και μη-αρνητικές τιμές, τότε, κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου T, η συνολική ποσότητα του μεγέθους που μελετάται δίνεται από την σχέση που ακολουθεί.

$$S_t = \begin{cases} \sum_{n=1}^{N_t} X_n & \alpha\nu \quad N_t \geq 1 \\ 0 & \alpha\nu \quad N_t = 0 \end{cases} \qquad \forall \quad t \in T .$$

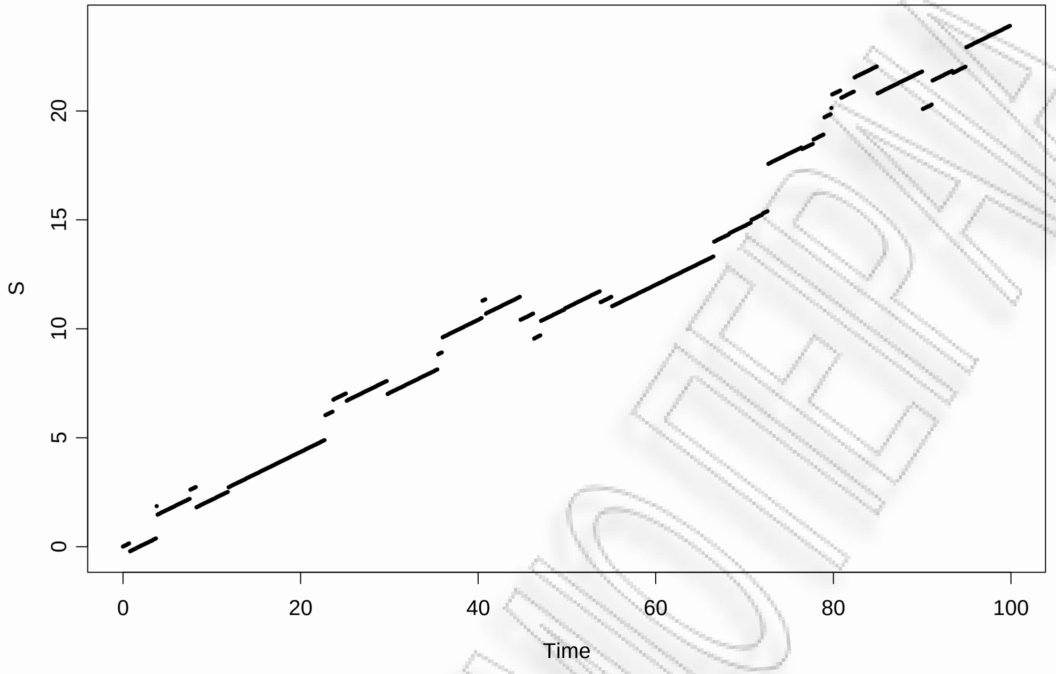
Είναι ξεκάθαρο, πως η συνολική αυτή ποσότητα $\{S_t \ , \ t \in T\}$ είναι με τη σειρά της μία συνεχής στοχαστική διαδικασία (ως συνάρτηση του χρόνου t) με συνεχή χώρο καταστάσεων, όπου για κάθε συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t \in T$, η τυχαία μεταβλητή S_t ακολουθεί, όπως έχει επικρατήσει να λέγεται, μία σύνθετη κατανομή. Η απαριθμήτρια ανέλιξη $\{N_t \ , \ t \in T\}$ είναι εκείνη η οποία δίνει το όνομά της σε αυτή τη κατανομή. Συνεπώς, κατά την περίπτωση όπου $\{N_t \ , \ t \in T\}$ είναι η απαριθμήτρια ανέλιξη Poisson , λέγεται ότι η στοχαστική διαδικασία $\{S_t \ , \ t \in T\}$ είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson.



Διάγραμμα 2.2: Πραγματοποίηση της Σύνθετης Ανέλιξης Poisson με παράμετρο λ=0,5 και $\{X_n$, n=1,2,…$\}$ → N(0,1).

Μια πραγματοποίηση της σύνθετης ανέλιξης Poisson, όπως και στην περίπτωση της ανέλιξης Poisson, δύναται να παρασταθεί ως μία κλιμακωτή συνάρτηση με την διαφορά ότι δεν είναι κατ’ ανάγκη αύξουσα ως προς τον χρόνο και επίσης, το μήκος των αλμάτων τα οποία συμβαίνουν, δεν είναι εν γένει ίσα με τη μονάδα. Η μονοτονία της συνάρτησης αυτής, εξαρτάται από τις τιμές τις οποίες λαμβάνουν οι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $\{X_n\ ,\ n=1,2,...\}$. Στην περίπτωση όπου, η ακολουθία $\{X_n\ ,\ n=1,2,...\}$ λαμβάνει μη αρνητικές τιμές, όπως για παράδειγμα όταν αυτές εκφράζουν το ύψος των απαιτήσεων που καταφθάνουν σε μια ασφαλιστική εταιρεία, η δειγματοσυνάρτηση της σύνθετης ανέλιξης Poisson είναι αύξουσα και μοιάζει με αυτή της απαριθμήτριας Poisson.

Στο διάγραμμα 2.2, παρουσιάζεται το μονοπάτι μιας σύνθετης ανέλιξης Poisson με παράμετρο $\lambda = 0,5$ με την ακολουθία των ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών να ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή, $\{X_n\ ,\ n=1,2,...\}\ iid \overset{d}{\sim} N(0,1)$. Στο διάγραμμα 2.3 της επόμενης σελίδας, απεικονίζεται μια πραγματοποίηση της ίδιας ακριβώς



Διάγραμμα 2.3: Πραγματοποίηση της Σύνθετης Ανέλιξης Poisson με Γραμμική Τάση και παραμέτρους λ=0,5 , c=0,2 και $\{X_n , n=1,2,\ldots\} \rightarrow N(0,1)$.

στοχαστικής διαδικασίας στην οποία όμως εφαρμόζεται μια γραμμική ως προς το χρόνο τάση. Πρόκειται κατά προφανή τρόπο για την ανέλιξη

$$Y_t = \sum_{n=1}^{N_t} X_n + ct \ , \quad t \geq 0, \ c \in \Re$$

με την διαδικασία $\{N_t \ , \ t \in T\}$ να είναι η απαριθμήτρια ανέλιξη Poisson, για την οποία γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στα επόμενα κεφάλαια του παρόντος πονήματος. Οι αλγόριθμοι που δημιουργήθηκαν για την κατασκευή των παραπάνω στοχαστικών ανελίξεων και την αποτύπωση ενός πιθανού μονοπατιού τους, παρατίθενται στο τελευταίο μέρος της εργασίας, στους πίνακες του Παραρτήματος Γ.

Στη συνέχεια, ακολουθεί μια συνοπτική παρουσίαση των δύο πρώτων ροπών μιας σύνθετης ανέλιξης, συναρτήσει της μέσης τιμής και της διακύμανσης της απαριθμήτριας ανέλιξης $\{N_t \ , \ t \in T\}$ και των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $\{X_n \ , \ n = 1,2,\ldots\}$ Επίσης, πραγματοποιείται ο προσδιορισμός της ροπογεννήτριας συνάρτησης της σύνθετης κατανομής σε σχέση με τις ροπογεννήτριες συναρτήσεις των $\{N_t \ , \ t \in T\}$ και

$\{X_n \ , \ n=1,2,...\}$ Ταυτόχρονα, δίνεται η μορφή που παίρνουν τα παραπάνω για την περίπτωση της σύνθετης ανέλιξης Poisson στην οποία επικεντρώνεται η παρούσα ενότητα. Η πορεία των παρακάτω υπολογισμών, δύναται να βρεθούν στις σημειώσεις του Κ. Πολίτη για το μάθημα «Θεωρία Χρεοκοπίας» του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιά

Γενικά λοιπόν, υποθέτοντας ότι η μέση τιμή και η διακύμανση της ακολουθίας των τυχαίων μεταβλητών $\{X_n \ , \ n=1,2,...\}$ είναι

$$\mathrm{E}(X_n)=\mu \quad \text{και} \quad Var(X_n)=\sigma^2 \quad \forall\ n\in \mathrm{N},$$

η ροπή $1^{ης}$ τάξης της σύνθετης κατανομής δίνεται ως εξής:

$$E(S_t)=E\big(E(S_t/N_t)\big)\underset{\text{Ανεξαρτησία των } X_n \ \forall\, n\in Z}{\overset{\text{Ανεξαρτησία των } S_t,N_t \ \forall\, t\in T}{=}}\mathrm{E}(N_t)E(N_t)=\mu\mathrm{E}(N_t),$$

ενώ η ροπή $2^{ης}$ τάξης, προκύπτει από την σχέση:

$$Var(S_t)=Var\big(E(S_t/N_t=n)\big)+E\big(Var(S_t/N_t=n)\big)=$$

$$\overset{\text{Ανεξαρτησία των } S_t,N_t \ \forall\, t\in T}{=} Var\left(E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right)+E\left(Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right)=$$

$$\overset{\text{Ανεξαρτησία των } X_n \ \forall\, n\in Z}{=} Var(n\mu)+E\left(n\sigma^2\right)=$$

$$=Var(\mathrm{N}_t)\mu^2+E(\mathrm{N}_t)\sigma^2.$$

Στην περίπτωση της σύνθετης ανέλιξης Poisson, στην περίπτωση δηλαδή όπου

$$E(\mathrm{N}_t)=Var(\mathrm{N}_t)=\lambda t,$$

η μέση τιμή και η διακύμανση της στοχαστικής διαδικασίας S_t δίνεται από τις σχέσεις:

$$E(S_t)=\mu\lambda t$$

και

$$Var(S_t)=\lambda\mu^2 t+\lambda\sigma^2 t.$$

Αναφορικά με την ροπογεννήτρια συνάρτηση της στοχαστικής διαδικασίας S_t, ισχύουν τα εξής:

$$M_{S_t}(\theta)=E\left(e^{\theta S_t}\right)=E_{N_t}\left(E\left(e^{\theta S_t}/N_t=n\right)\right)\overset{\text{Ανεξαρτησία των } S_t, N_t \ \forall\ t\in T}{=}E_{N_t}\left(E\left(e^{\theta\sum_{i=1}^{n}X_i}\right)\right)=$$

$$\overset{\text{Ανεξαρτησία των } X_n \ \forall\ n\in Z}{=}E_{N_t}\left(\prod_{i=1}^{n}e^{\theta X_i}\right)=E_N\left(\prod_{i=1}^{n}M_{X_n}(\theta)\right)\overset{\{X_n\ ,\ n=0,1,2,...\}\ iid}{=}E_{N_t}\left(\left(M_X(\theta)\right)^n\right)=$$

$$=E_{N_t}\left(\left(e^{\ln\left(M_X(\theta)\right)^n}\right)\right)=E_{N_t}\left(\left(e^{N_t\ln\left(M_X(\theta)\right)}\right)\right)=M_{N_t}\left(\ln\left(M_X(\theta)\right)\right).$$

Όταν η στοχαστική διαδικασία $\{N_t\ ,\ t\in T\}$ είναι μια ανέλιξη Poisson με παράμετρο λ και συνεπώς $N_t \overset{d}{\sim} Poisson(\lambda t)$, $\forall\ t\in \mathrm{T}$, η ροπογεννήτρια της σύνθετης ανέλιξης Poisson παίρνει την μορφή:

$$M_{S_t}(\theta)=e^{\lambda t\left(M_X(\theta)-1\right)} \quad \forall\ t\in T\ ,$$

όπου $M_X(t)$ η ροπογεννήτρια συνάρτηση των ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\ ,\ n=1,2,...\}$.

2.4 Η Κίνηση Brown

Η κίνηση Brown ή ανέλιξη του Wiener αποτελεί μία από τις σημαντικότερες συνεχείς στοχαστικές διαδικασίες με συνεχή χώρο καταστάσεων οι οποίες είναι ευρύτερα γνωστές ως ανελίξεις διαχύσεως. Ονομάστηκε έτσι προς τιμήν του Άγγλου βοτανολόγου Robert Brown o οποίος πρώτος απ’ όλους παρατήρησε το φαινόμενο στα 1827. Ο Brown διαπίστωσε ότι όταν μικρά σωμάτια εμβαπτιστούν σε υγρό, εκτελούν άτακτες κινήσεις που οφείλονται στις συγκρούσεις τους με τα μόρια του υγρού. Οι κινήσεις αυτές γίνονται και προς τις τρεις διαστάσεις του χώρου, ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Η μετατόπιση λοιπόν των σωμάτιων ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, περιγράφεται από την κίνηση Brown. Η φυσική ερμηνεία του φαινομένου δόθηκε από τον Albert Einstein το 1905, ενώ η ολοκληρωμένη μαθηματική διατύπωση της σχετικής θεωρίας έγινε το 1918 από τον Norbert Wiener. Στις σελίδες που ακολουθούν, δίνεται ο ορισμός της κίνησης Brown και πραγματοποιείται μια ανάλυση των ιδιοτήτων και των χαρακτηριστικών της, μέσα από την οποία γίνονται αντιληπτά τα σημεία του κάτωθι ορισμού της.

➢ <u>Ορισμός</u>:

Μια στοχαστική διαδικασία με συνεχή χώρο καταστάσεων $\{B_t\ ,\ t \geq 0\}$ αποτελεί κίνηση Brown, αν:

(i) Για διατεταγμένους χρόνους $t_0 < t_1 < ... < t_n$ οι τυχαίες μεταβλητές $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$, που ορίζουν τις προσαυξήσεις της ανέλιξης, είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

(ii) Η στοχαστική διαδικασία που ορίζεται από τις προσαυξήσεις της ανέλιξης ακολουθεί την Κανονική κατανομή με μέσο 0 και διακύμανση $\sigma^2 t$, όπου σ θετική σταθερά.

$$B_{t+s} - B_s \overset{d}{\sim} \mathrm{N}(0,\sigma^2 t)\ ,\quad \forall s,t \in \Re_+^* \quad \kappa\alpha\iota \quad \sigma^2 \in \Re_+^*.$$

Όπως προαναφέρθηκε, η στοχαστική διαδικασία $\{B_t\ ,\ t \geq 0\}$ στο φαινόμενο που παρατήρησε ο Brown, εκφράζει την μετατόπιση του σωμάτιου από την αρχική του θέση B_0 κατά το πέρασμα του χρόνου. Περιορίζοντας την παρατήρηση σε μία μόνο διάσταση, η συνολική κίνηση που εκτελεί το σωμάτιο λόγω των συγκρούσεων του με τα μόρια του υγρού για ένα χρονικό διάστημα, δύναται να θεωρηθεί ως το άθροισμα των επιμέρους μικρότερων μετατοπίσεων που προκαλούνται σε αυτό λόγω των συγκρούσεων, οι οποίες συμβαίνουν με απειροστές χρονικές διαφορές μεταξύ τους. Εξαιτίας του μεγάλου πλήθους των συγκρούσεων αυτών λοιπόν, από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα έπεται πως η συνολική μετατόπιση του σωμάτιου σε αυτό το χρονικό διάστημα ακολουθεί την Κανονική Κατανομή. Εύκολα αποδεικνύεται ότι, η μέση τιμή της ανέλιξης για οποιαδήποτε χρονική στιγμή εξέλιξης του πειράματος, είναι ίση με την μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής που εκφράζει την αρχική θέση του σωμάτιου (η σχέση αυτή διασαφηνίζεται στην επόμενη ενότητα όπου γίνεται λόγος για Martingale διαδικασίες),

$$E(B_t) = E(B_0)\ ,\quad \forall \quad t \in \Re_+^*.$$

Είθισται, χωρίς να είναι απαραίτητο βέβαια, ως αρχική θέση την χρονική στιγμή $t = 0$ να θεωρείται η θέση «μηδέν». Σύμφωνα με αυτή την παραδοχή,

$$E(B_t) = 0\ ,\quad \forall \quad t \in \Re_+^*$$

οπότε η κίνηση Brown κατανέμεται κανονικά ως εξής:

$$B_t \overset{d}{\sim} \mathrm{N}(0,\sigma^2 t)\ ,\quad \forall t \in \Re_+^* \quad \mu\varepsilon \quad \sigma^2 \in \Re_+^*.$$

Η συλλογιστική πορεία που μόλις σκιαγραφήθηκε είναι θεμελιώδους σημασίας στην θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών. Αποτελεί ουσιαστικά την γενίκευση και επέκταση των διακριτών στοχαστικών ανελίξεων σε διαδικασίες συνεχούς χρόνου και είναι ένας τρόπος ορισμού των τελευταίων. Λόγω αυτού, η κίνηση Brown θεωρείται το συνεχές ανάλογο του τυχαίου περιπάτου γεγονός το οποίο προσδίδει στην ανέλιξη Weiner ακόμα μεγαλύτερη σημασία και βαρύτητα και επιπλέον, ερμηνεύει κατά κάποιον τρόπο, τον σημαντικό ρόλο που διαδραματίζει στην θεωρία των συνεχών στοχαστικών ανελίξεων.

Επιπρόσθετα, για την κίνηση που εκτελεί ένα σωμάτιο και υπό την προϋπόθεση ότι δεν επιδρά κανένας εξωτερικός παράγοντας ώστε να διαταράξει την ομαλή διεξαγωγή- ισορροπία του φαινομένου, είναι απόλυτα βάσιμη η υπόθεση ότι μετατοπίσεις που αντιστοιχούν σε ίσα χρονικά διαστήματα υπακούουν στον ίδιο νόμο πιθανότητας. Η θεώρηση αυτή, είναι ακριβώς και το δεύτερο σημείο του ορισμού της κίνησης Brown. Η μετατόπιση του σωμάτιου σε ένα χρονικό διάστημα που περιγράφεται από την ανέλιξη Wiener, εξαρτάται νομοτελειακά μόνο από το χρονικό διάστημα που γίνεται η παρατήρηση και συνεπώς μετατοπίσεις ίσου χρονικού μήκους ακολουθούν την ίδια κανονική κατανομή,

$$B_t - B_s \overset{d}{\sim} \mathrm{N}\left\{0, \sigma^2 (t-s)\right\}, \quad \forall s,t \in \Re_+^* \;\; \mu\varepsilon \;\; t > s \quad \kappa\alpha\iota \quad \sigma^2 \in \Re_+^* .$$

Σημειώνεται ότι η έκφραση που μόλις παρατέθηκε αποτελεί διαφορετική διατύπωση της σχέσης στο δεύτερο σημείο του ορισμού της ανέλιξης Wiener. Επιπλέον, το γεγονός αυτό, της ισονομίας δηλαδή των προσαυξήσεων της κίνησης Brown, ενέχει όπως ίσως ήδη έχει γίνει αντιληπτό το στοιχείο της ομογένειάς τους. Πρόκειται για την ίδια ακριβώς ιδιότητα (Ιδιότητα $4^η$) που διατυπώθηκε σε προηγούμενη ενότητα σχετικά με τις προσαυξήσεις της απαριθμήτριας ανέλιξης Poisson. Και η κίνηση Brown λοιπόν, χαρακτηρίζεται από ομογενείς προσαυξήσεις.

Μια άλλη πολύ σημαντική ιδιότητα της ανέλιξης Wiener, είναι ο Μαρκοβιανός της χαρακτήρας. Αυτό σημαίνει ότι η κίνηση Brown σε ένα χρονικό διάστημα δεν εξαρτάται καθόλου από το τι συνέβη πριν από αυτό, παρά μόνο από την τιμή της την χρονική στιγμή την οποία αρχίζει το διάστημα παρακολούθησής της. Με άλλα λόγια, η κίνηση Brown είναι ανεξάρτητη της ιστορίας της, δεν έχει δηλαδή σημασία η χρονική στιγμή που ξεκινά η παρατήρηση του φαινομένου. Η ιδιότητα αυτή, πηγάζει από το πρώτο σημείο του ορισμού της και το οποίο αναφέρεται στις ανεξάρτητες προσαυξήσεις της. Μάλιστα, εύκολα αποδεικνύεται ότι (βλ. για παράδειγμα Γιαννακόπουλο (2003)), κάθε προσαύξηση – μεταβολή της κίνησης Brown αποτελεί μία νέα κίνηση Brown με

$$E\{B_{t+s} - B_s\} = 0$$

και $\qquad , \ \forall \quad t, s \in \Re_+^*.$

$$Var\{B_{t+s} - B_s\} = \sigma^2 t$$

Η ιδιότητα αυτή κρίνεται πολύ χρήσιμη αφού διευκολύνει υπολογισμούς που αφορούν στην κίνηση Brown στα πεδία των εφαρμογών όπου και χρησιμοποιείται.

Έχει αναφερθεί, χωρίς να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση, ότι η ανέλιξη Wiener είναι μία συνεχής στοχαστική διαδικασία. Η θέση αυτή σε συνδυασμό με την συμπεριφορά των οριακών της μεταβολών, διαμορφώνουν την παρακάτω ιδιότητα.

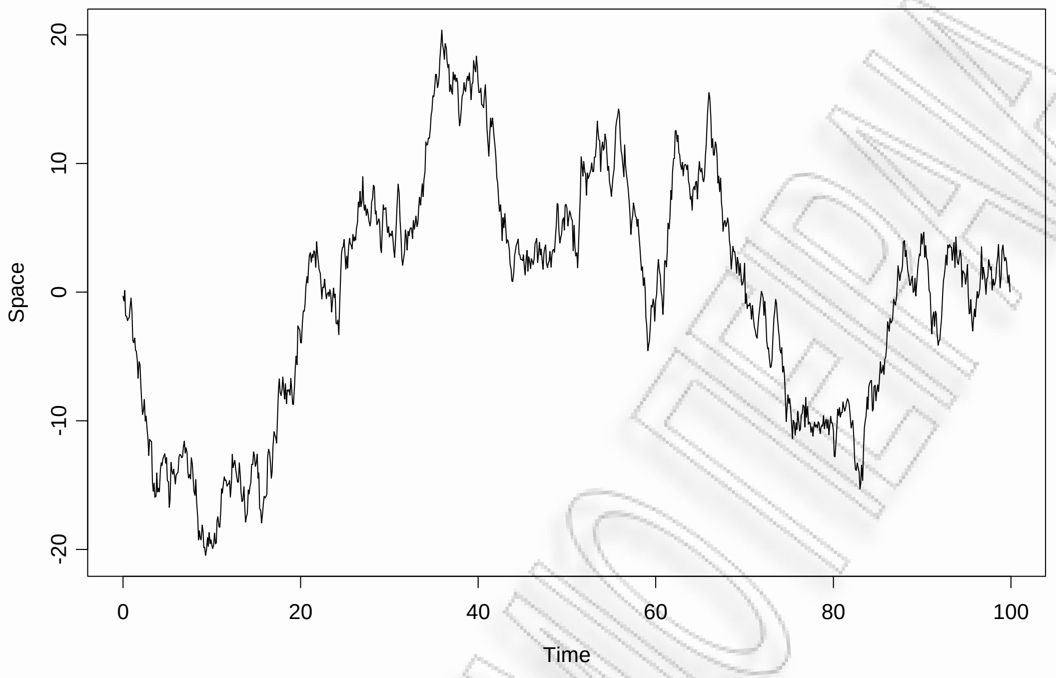
➢ <u>Ιδιότητα</u>:

Οι τροχιές της κίνησης Brown είναι συνεχείς ως προς τον χρόνο συναρτήσεις και πουθενά διαφορίσιμες με πιθανότητα 1.

Η ιδιότητα αυτή σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι μεταβολές της κίνησης Brown είναι άπειρες ή ορθότερα, τα μονοπάτια της δεν έχουν φραγμένη κύμανση (*bounded* variation), είναι ιδιαίτερα σημαντική και σχετίζεται με το γεγονός ότι αποτελεί τον δομικό λίθο μιας σειράς στοχαστικών διαδικασιών. Λόγω αυτής, δεν δύναται να οριστεί το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης ως προς την κίνηση Brown σύμφωνα με ένα κατά Riemann-Stieljes ολοκλήρωμα όπως είναι γνωστό από την Πραγματική Ανάλυση. Διατυπώνεται λοιπόν ένας εναλλακτικός τρόπος ορισμού του, γεγονός για το οποίο, στα πλαίσια του παρόντος εγχειρήματος, δεν κρίνεται σκόπιμη περαιτέρω αναφορά. Ο κάθε ενδιαφερόμενος, είναι σε θέση να συλλέξει πληροφορίες σε οποιοδήποτε βιβλίο Στοχαστικής Ανάλυσης. Μία τέτοια τροχιά της ανέλιξης Wiener φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα, ενώ στο διάγραμμα 2.5 της σελίδας 25 αποτυπώνεται ένα μονοπάτι της στοχαστικής διαδικασίας

$$Y_t = aB_t + ct \quad , \quad t \geq 0 .$$

Η ανέλιξη αυτή, δεν είναι τίποτε άλλο από μια γραμμική ανέλιξη Wiener με επίσης γραμμική ως προς το χρόνο τάση και διαδραματίζει σπουδαίο ρόλο στην θεωρία των ανελίξεων Lévy. Και αυτοί, όπως άλλωστε και οι κώδικες όλων των στοχαστικών διαδικασιών οι τροχιές των

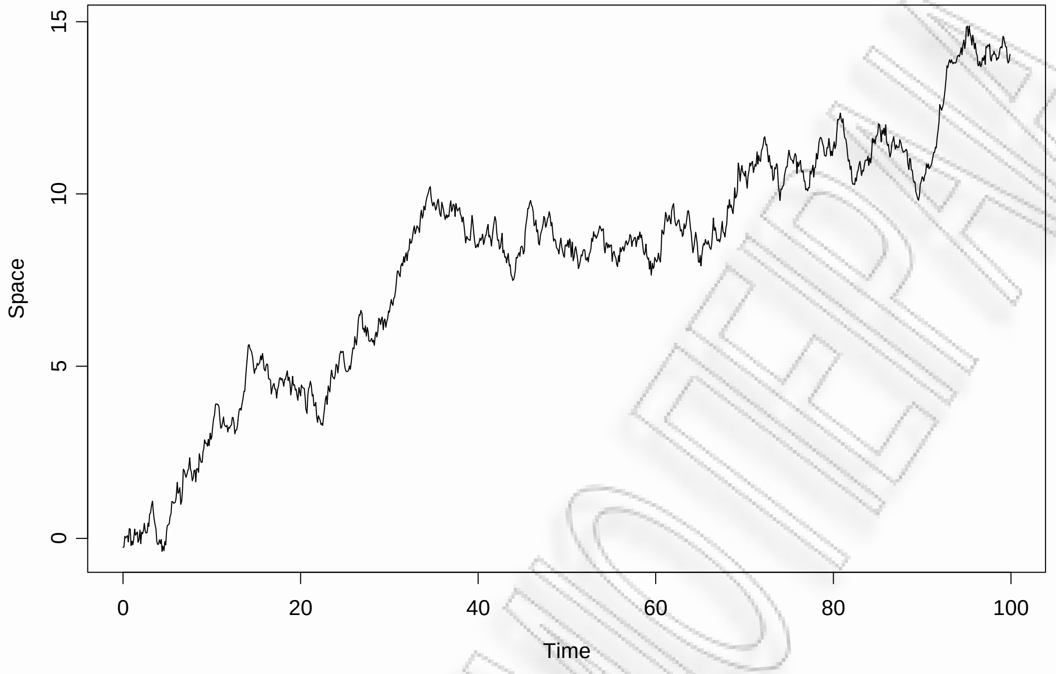


Διάγραμμα 2.4: Ένα Μονοπάτι της Κίνησης Brown.

οποίων παρουσιάζονται σε αυτή την διπλωματική εργασία, παρατίθενται στους πίνακες του Παραρτήματος Γ.

Για το τέλος, απλά αναφέρεται χωρίς σχολιασμό μια ιδιότητα της κίνησης Brown, της οποίας η σημασία και ερμηνεία γίνεται αντιληπτή στις σελίδες της επόμενης ενότητας και η οποία λέγει ότι, η κίνηση Brown είναι μία συνεχής Martingale διαδικασία.

Συνοψίζοντας τα όσα ειπώθηκαν παραπάνω, αναφέρεται ότι ως κίνηση Brown, χαρακτηρίζεται μια συνεχής στοχαστική διαδικασία με ομογενείς και ανεξάρτητες προσαυξήσεις που ακολουθεί, για καθορισμένο χρόνο $t \geq 0$, την κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή. Η κίνηση Brown, η οποία μελετήθηκε από πολλούς διαπρεπείς επιστήμονες και ερευνητές, αποτελεί την πιο σημαντική των ανελίξεων διάχυσης (*diffusion processes*). Η απλότητά της και οι σημαντικές ιδιότητες που την διακρίνουν, καθιστούν την κίνηση Brown πολύ σημαντική στα πλαίσια της Στοχαστικής Ανάλυσης αφού αποτελεί την βάση για την δημιουργία και μελέτη περιπλοκότερων διαδικασιών.



Διάγραμμα 2.5: Μία Τροχιά της Γραμμικής Κίνησης Brown με Γραμμική Τάση, α=2 και c=0,08.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}

MARTINGALE ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΑΠΕΙΡΩΣ ΔΙΑΙΡΕΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Εκτός από τις πολύ σημαντικές στοχαστικές ανελίξεις που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, σπουδαίο ρόλο στην κατανόηση και ανάλυση της κλάσης των ανελίξεων Levy, διαδραματίζει μια οικογένεια στοχαστικών διαδικασιών, η οποία ορίζεται με βάση κοινές τους ιδιότητες και είναι γνωστή ως martingales. Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου αυτού, δίνεται ο ορισμός της κλάσης των διαδικασιών martingale και ταυτόχρονα πραγματοποιείται αναφορά σε μια πλειάδα ιδιοτήτων τους με σκοπό την κατανόηση έως ένα βαθμό, της συνεισφοράς τους στην θεωρία των ανελίξεων Lévy. Η ακριβής και πλήρης τεκμηρίωσή τους, στηρίζεται σε λεπτές μαθηματικές έννοιες και χειρισμούς που ξεφεύγουν από τα πλαίσια της παρούσης προσπάθειας και για τον λόγο αυτό, η αναφορά σε αυτές εξαντλείται χωρίς σχολαστικές λεπτομέρειες. Στο δεύτερο μέρος, γίνεται λόγος για μια νέα, ευρεία κλάση κατανομών με την ονομασία απείρως διαιρετές κατανομές (***infinitely divisible distributions***). Ο ρόλος αυτής της οικογένειας κατανομών, τυγχάνει εξαιρετικής βαρύτητας στην θεωρία των ανελίξεων Lévy αφού αποτελούν αναπόσπαστη ιδιότητά τους. Η σύνδεση των ανελίξεων Lévy με τις απείρως διαιρετές κατανομές είναι καταλυτικής σημασίας παράγοντας στην προσπάθεια αποκωδικοποίησης των ανελίξεων Lévy, για τον λόγο ότι μέσω αυτών γίνεται αντιληπτό το μέγεθος του φάσματος το οποίο καλύπτουν οι ανελίξεις αυτές ενώ ταυτόχρονα, αποτελούν ένα πολύ σημαντικό εργαλείο στην ανάλυση των στοιχείων που συνθέτουν τέτοιες στοχαστικές διαδικασίες. Στις σελίδες που ακολουθούν, δίνεται ο ορισμός των απείρως διαιρετών κατανομών, γίνεται αναφορά σε κατανομές που ανήκουν στην κλάση αυτή και πραγματοποιείται η σύνδεσή τους με τις κατανομές οι οποίες παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο.

3.1 Διαδικασίες Martingale

Στο σημείο αυτό, πραγματοποιείται μία απλή αναφορά και επιχειρείται μια σύντομη διερεύνηση μιας ειδικής κλάσης στοχαστικών διαδικασιών με σημαντικές εφαρμογές σε πληθώρα μαθηματικών υποδειγμάτων, αυτής των Martingale διαδικασιών. Σκοπός της ενότητας αυτής, δεν είναι ο αυστηρός ορισμός και η μαθηματική θεμελίωσή τους, αλλά μια παρουσίαση βασικών ιδιοτήτων που θα βοηθήσουν στην διαισθητική κυρίως αντίληψη και κατανόηση του ρόλου των διαδικασιών Martingale.

Οι Martingale διαδικασίες πήραν την ονομασία τους από το όνομα της Γαλλικής επαρχίας Martigue, όπου και εφαρμοζόταν μια συγκεκριμένη στρατηγική πονταρίσματος κατά την διεξαγωγή τυχερών παιχνιδιών, αρκετά δημοφιλής ακόμα και σήμερα. Σύμφωνα με αυτή την στρατηγική, κατά την διεξαγωγή ενός τυχερού παιχνιδιού κάποιος πoντάρει στοιχηματίζει 1 μονάδα. Σε περίπτωση που χάσει, το δεύτερο στοίχημα ανέρχεται στις 2 μονάδες, το τρίτο στοίχημα στις 4 μονάδες κ.ο.κ. Κατά συνέπεια, αν χάσει και στο n-οστό στοίχημα, το επόμενο ποντάρισμά του είναι 2^n μονάδες. Ακολουθώντας την στρατηγική αυτή, την πρώτη φορά που ο παίκτης κερδίσει στο στοίχημά του, απολαμβάνει κέρδη 1 μονάδας. Η στρατηγική αυτή ονομάστηκε Martingale. Το όνομά τους οφείλεται στον Γάλλο μαθηματικό Paul Lévy, όπου το 1935 για πρώτη φορά επέδειξε ενδιαφέρον για την μελέτη τους, ωστόσο ο Αμερικανός πιθανοθεωρητικός Doob ήταν εκείνος όπου, στα 1953, ανέδειξε τη θεωρία των Martingales σε ανεξάρτητο κλάδο στοχαστικών διαδικασιών.

Εν συνεχεία, παρατίθεται ο ορισμός μιας Martingale στοχαστικής διαδικασίας όπου μεταξύ άλλων δύναται να βρεθεί στον Γιαννακόπουλο (2003).

➢ <u>Ορισμός</u>:

Μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_t \ , \ t \in T\}$, ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{P})$ και προσαρμοσμένη στη διήθηση (*filtration*) A_t, είναι μία Martingale αν:

$$\text{α) } E\left(\left|X_t\right|\right) < \infty \quad \forall \ t \in T$$

και

$$\text{β) } E\left(X_t / A_s\right) = X_s \quad \gamma\iota\alpha\ s < t .$$

Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, για να είναι μια στοχαστική διαδικασία Martingale, πρέπει πρωταρχικά να έχει πεπερασμένη μέση τιμή. Πρέπει η μέση τιμή της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_t\ ,\ t \in T\}$ να είναι φραγμένη, να εξασφαλίζεται δηλαδή όπως λέγεται, η σύγκλιση της ακολουθίας αυτής στον χώρο L^1. Στην πραγματικότητα, η L^1-σύγκλιση της ακολουθίας $\{X_t\ ,\ t \in T\}$ δεν είναι αρκετή, πρέπει να είναι και ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη αλλά όπως έχει ήδη διασαφηνιστεί, δεν επιχειρείται περαιτέρω επέκταση. Συνεπώς, ως πρώτη προϋπόθεση για μια Martingale στοχαστική διαδικασία είναι να «υπάρχει» η μέση της τιμή.

Για την ερμηνεία της δεύτερης συνθήκης απαιτείται η έννοια της διήθησης (*filtration*). Με λίγα λόγια, μία διήθηση $\{A_t, t \geq 0\}$ είναι μία αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών που ορίζει ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{P})$ της εκάστοτε στοχαστικής διαδικασίας και το A_t αυτό δύναται να θεωρηθεί ως η συνολική πληροφορία η οποία είναι διαθέσιμη μέχρι την χρονική στιγμή t. Όταν λοιπόν αναφέρεται ότι μία στοχαστική διαδικασία είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση A_t, έπεται πως η συνολική πληροφορία που αφορά στην στοχαστική διαδικασία μέχρι την χρονική στιγμή t, περιέχεται στο σύνολο A_t. Τα πάντα δηλαδή για την στοχαστική διαδικασία έως εκείνη την στιγμή είναι γνωστά.

Από τα παραπάνω, γίνεται αντιληπτό ότι η δεύτερη προϋπόθεση την οποία πρέπει να ικανοποιεί μια στοχαστική διαδικασία ώστε να χαρακτηριστεί Martingale, υποδηλώνει πως η αναμενόμενη τιμή της διαδικασίας για μια χρονική στιγμή t, δεδομένου ότι είναι γνωστή η ιστορία της έως μια προηγούμενη στιγμή s, είναι η τιμή της εκείνη την χρονική στιγμή. Η καλύτερη πρόβλεψη δηλαδή η οποία μπορεί να γίνει για την τιμή της στοχαστικής διαδικασίας, είναι η τιμή της για την χρονική στιγμή εκείνη που υπάρχει διαθέσιμη πληροφορία. Σε αυτό το σημείο, αξίζει να σημειωθεί η κάποια εμφανής ομοιότητα με τον Μαρκοβιανό χαρακτήρα κάποιων στοχαστικών διαδικασιών και ο οποίος αναφέρει ότι η τιμή της διαδικασίας για μια χρονική στιγμή, εξαρτάται αποκλειστικά από την τιμή της την ακριβώς προηγούμενη στιγμή. Στην περίπτωση των Martingales διαδικασιών συμβαίνει κάτι ανάλογο, όχι όμως ως προς την κατανομή αλλά ως προς την αναμενόμενη τιμή της διαδικασίας. Το γεγονός ότι υπάρχει πλήρης γνώση για την ιστορία της διαδικασίας δεν συνεισφέρει καθόλου στην μελλοντική της πρόβλεψη. Η καλύτερη πρόβλεψη είναι η τιμή της διαδικασίας την στιγμή όπου τελειώνει η παρατήρησή της.

Ο χρόνος στον οποίο παρατηρείται μία διαδικασία μπορεί να είναι όπως έχει αναφερθεί είτε διακριτός είτε συνεχής, συνεπώς γίνεται η διάκρισή τους σε Martingales διαδικασίες διακριτού και Martingales διαδικασίες συνεχούς χρόνου (βλ. μεταξύ άλλων Grimmett & Stirzaker (2001). Επίσης, υπάρχουν διαδικασίες για τις οποίες η δεύτερη συνθήκη του ορισμού ο οποίος προηγήθηκε παίρνει την μορφή:

$$E\left(X_t / A_s\right) \leq X_s \quad \text{για } s < t .$$

Σε αυτή την περίπτωση, η οικογένεια των τυχαίων μεταβλητών $\{X_t \ , \ t \in T\}$ ονομάζεται ***supermartingale*** και αυτό το οποίο συμβαίνει ουσιαστικά είναι ότι η καλύτερη πρόβλεψη η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί για την τιμή της διαδικασίας, είναι μικρότερη από την τιμή της την χρονική στιγμή όπου σταματά η παρατήρηση – πληροφορία της. Αν για την στοχαστική διαδικασία ισχύει ότι

$$E\left(X_t / A_s\right) \geq X_s \quad \text{για } s < t ,$$

η διαδικασία είναι μία ***submartingale*** διαδικασία και η καλύτερη πρόβλεψη η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί για την τιμή της διαδικασίας, είναι μεγαλύτερη της τελευταίας της παρατηρούμενης τιμής.

Ακολουθούν δύο από τις σημαντικότερες ιδιότητες των Martingale στοχαστικών διαδικασιών.

- Ιδιότητα $1^{η}$:

$$E\left(X_t\right) = E\left(X_0\right) , \quad \forall \ t \in T .$$

Η πρώτη αυτή ιδιότητα, επισημαίνει το γεγονός ότι για μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή, η αναμενόμενη τιμή μιας διαδικασίας Martingale ισούται με την μέση αρχική της τιμή. Είναι διαισθητικά φανερό πως από την στιγμή που δεν υπάρχει διαθέσιμη πληροφορία για την στοχαστική διαδικασία $\{X_t \ , \ t \ \varepsilon \ T\}$, η καλύτερη πρόβλεψη είναι η τιμή της την χρονική στιγμή $t = 0$. Πρόκειται βεβαίως για εκείνη την ιδιότητα στην οποία είχε γίνει αναφορά στο προηγούμενο κεφάλαιο και αφορούσε στην μέση τιμή της κατανομής που διέπει τις προσαυξήσεις μιας κίνησης Brown.

➢ <u>Ιδιότητα 2η</u>:

$$E\left(X_t - X_s\right) = 0 \quad , \quad \forall\, t,s \in T\ .$$

Η δεύτερη ιδιότητα, λόγω της γραμμικότητας του τελεστή της μέσης τιμής $E(\bullet)$, είναι απόρροια της πρώτης και υποδηλώνει ότι οι προσαυξήσεις μιας Martingale στοχαστικής διαδικασίας περιστρέφονται γύρω από το «μηδέν».

Κλείνοντας την ενότητα, κρίνεται σκόπιμη για ακόμη μία φορά η αναφορά στην σπουδαιότητα των διαδικασιών αυτών. Όπως έχει τονιστεί, η πληροφόρηση που ενδεχομένως να υπάρχει για μια διαδικασία Martingale δεν βοηθάει σημαντικά στην πρόβλεψη της μελλοντικής της συμπεριφοράς, παρέχει ωστόσο μια πρόβλεψη. Η συστηματική τους μελέτη, γενίκευση και αυστηρή μαθηματική θεμελίωση τους τις τρεις τελευταίες δεκαετίες περίπου κυρίως, επέφερε σημαντικά αποτελέσματα. Έχει αποδειχτεί ότι ακόμα και για διαδικασίες οι οποίες δεν είναι Martingales, κάτω από κατάλληλη αλλαγή μέτρου πιθανότητας, μετατρέπονται σε τέτοιες, αποκτώντας έτσι πολύτιμες ιδιότητες. Παρέχεται δηλαδή η δυνατότητα σε μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{P})$ που δεν έχει τις ιδιότητες των Martingale διαδικασιών, διατηρώντας την σ-άλγεβρα τους αμετάβλητη, χωρίς να επηρεαστεί δηλαδή η ιστορία - τροχιά τους, να εξαχθεί ένα νέο μέτρο πιθανότητας P' όπου τώρα, στο νέο αυτό χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{P}')$, η οικογένεια των τυχαίων μεταβλητών αποτελεί μια Martingale διαδικασία. Δεν πραγματοποιείται περαιτέρω αναφορά στον τρόπο και τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες υλοποιείται μια τέτοια διαδικασία (Θεώρημα Girsanov της Στοχαστικής Ανάλυσης), απλά επισημαίνεται το γεγονός ότι με αυτόν τον τρόπο, ανοίγει ο δρόμος για την μοντελοποίηση, δημιουργία και ανάπτυξη μαθηματικών υποδειγμάτων σε πολλά πεδία των επιστημών.

3.2 Απείρως Διαιρετές Κατανομές

Εισηγητής της έννοιας των απείρως διαιρετών κατανομών ήταν ο De Finetti όπου το 1929 διαπίστωσε την σχέση ανάμεσα σε αυτές και τις ανελίξεις Lévy, ενώ πέντε χρόνια αργότερα το 1934, ο Lévy ήταν εκείνος ο οποίος έδωσε τον πλήρη προσδιορισμό και χαρακτηρισμό τους. Κατά τους ισχυρισμούς αυτούς λοιπόν,

➢ <u>Ορισμός</u>:

Μία πραγματική τυχαία μεταβλητή X έχει απείρως διαιρετή κατανομή αν για κάθε $n=1,2,...$ υπάρχει μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $X_{1,n}, X_{2,n}, ..., X_{n,n}$ τέτοια ώστε:

$$X \overset{d}{=} X_{1,n} + X_{2,n} + ... + X_{n,n},$$

όπου με τον συμβολισμό $\overset{d}{=}$ εννοείται η ισότητα κατά κατανομή.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό, μια κατανομή είναι απείρως διαιρετή όταν η τυχαία μεταβλητή η οποία υπόκειται στον νόμο της, δύναται να γραφεί ως άθροισμα, οποιουδήποτε πλήθους, ανεξάρτητων και ισόνομων μεταξύ τους τυχαίων μεταβλητών. Με τον τρόπο αυτό, όταν το πλήθος των ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών είναι αρκετά μεγάλο, $n \to \infty$, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X μοιάζει να «διαιρείται» σε άπειρα, ανεξάρτητα και ισόνομα μεταξύ τους τμήματα. Το γεγονός αυτό, γίνεται ευκολότερα κατανοητό αν η τυχαία μεταβλητή X αντιμετωπιστεί ως η τιμή μιας στοχαστικής διαδικασίας $\{X_t\ ,\ t \in T\}$ για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t. Η συμπεριφορά της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_t\ ,\ t \in T\}$ έως εκείνη την χρονική στιγμή μπορεί να προσδιοριστεί ισοδύναμα μέσω των προσαυξήσεων της, οποιοδήποτε και να είναι το πλήθος αυτών, αφού:

$$X_t = X_{t/n} + \left(X_{2t/n} - X_{t/n}\right) + ... + \left(X_t - X_{(n-1)t/n}\right) \quad , \quad \forall \ t \in T,\ n = 0,1,2...$$

Από αυτό το σημείο λοιπόν, εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς, πως στην περίπτωση όπου μία στοχαστική διαδικασία έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις, η κατανομή της για κάθε συγκεκριμένη χρονική στιγμή t, είναι απείρως διαιρετή.

Η παραπάνω συλλογιστική πορεία, τεκμηριώνει μια πολύ σημαντική ιδιότητα των στοχαστικών διαδικασιών με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις , η οποία ουσιαστικά τις συνδέει με την θεωρία των απείρως διαιρετών κατανομών. Η ιδιότητα αυτή, η οποία θα αποτελέσει αντικείμενο ενασχόλησης και στο κεφάλαιο που ακολουθεί, διατυπώνεται προς το παρόν ως εξής:

➢ <u>Ιδιότητα</u>:

Κάθε στοχαστική διαδικασία $\{X_t\ ,\ t \in T\}$ με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, έχει απείρως διαιρετή κατανομή για κάθε συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t \in T$.

Το όχημα, μέσω του οποίου επαληθεύεται η ισχύς του παραπάνω ορισμού, είναι η ***χαρακτηριστική συνάρτηση*** της τυχαίας μεταβλητής. Η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής X, ορίζεται από την σχέση

$$\phi_X\{t\} = E\{e^{itX}\} \ , \quad \forall \ t \in \Re$$

η οποία δεν αποτελεί τίποτα άλλο παρά τον μετασχηματισμό Fourier της τυχαίας μεταβλητής X. Με τον συμβολισμό i δηλώνεται η φανταστική μονάδα των μιγαδικών αριθμών με την ιδιότητα $i^2 = -1$. Οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις αποτελούν πολύτιμα υπολογιστικά εργαλεία στην Θεωρία Πιθανοτήτων, αφού μέσω των τύπων αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier είναι εφικτός ο υπολογισμός τόσο της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής, όσο και της συνάρτησης πυκνότητάς της, εφόσον αυτή υπάρχει (βλ. για παράδειγμα Hoel, Port και Stone (2005)). Επιπλέον, το σημείο εκείνο στο οποίο οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις πλεονεκτούν έναντι των ροπογεννητριών συναρτήσεων, είναι ότι ορίζονται για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή. Είναι γνωστό ότι ο μετασχηματισμός Laplace, η ροπογεννήτρια συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής δηλαδή στην γλώσσα των Πιθανοτήτων, ορίζεται γενικά για τμηματικά συνεχείς, εκθετικής τάξης συναρτήσεις. Η ποσότητα e^t δεν αποτελεί φραγμένη συνάρτηση για κάθε $t \in \Re$, με αποτέλεσμα η ροπογεννήτρια να μην ορίζεται πάντοτε, ειδικά για κατανομές οι οποίες έχουν βαριές ουρές (βλ. κατανομή Cauchy). Αντίθετα, για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό t, η ποσότητα e^{it} φράσσεται και συνεπώς η συνάρτηση e^{itX} συγκλίνει με την σειρά της για κάθε $t \in \Re$. Καθ' αυτόν τον τρόπο, η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι καλώς ορισμένη για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή X και παίρνει πεπερασμένες τιμές για κάθε $t \in \Re$.

Με βάση τον ορισμό που παρατέθηκε προηγουμένως και κάνοντας χρήση του αρνητικού λογάριθμου της χαρακτηριστικής εξίσωσης της εν λόγω τυχαίας μεταβλητής X

$$\Psi_X\{t\} = -\log \phi_X\{t\} \ , \quad \forall \ t \in \Re,$$

δύναται να προσδιοριστεί αν αυτή η τυχαία μεταβλητή έχει απείρως διαιρετή κατανομή ή όχι. Προφανώς λοιπόν, όταν ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής συνάρτησης της τυχαίας μεταβλητής X, ισούται με το άθροισμα των αρνητικών λογαρίθμων των χαρακτηριστικών συναρτήσεων μιας ακολουθίας ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $X_{1,n}, X_{2,n}, ..., X_{n,n}$, οι οποίοι είναι βέβαια οι ίδιοι για κάθε όρο της ακολουθίας, όταν δηλαδή,

$$\Psi_X\{t\} = \Psi_{X_1}\{t\} + \ldots + \Psi_{X_n}\{t\} \overset{\sigma\mu\beta}{=} n\Psi_{X_n}\{t\} \quad , \quad \forall \ t \in \Re \quad \kappa\alpha\iota \ \forall \ n \geq 1, \tag{3.1}$$

όπου με $\Psi_{X_n}\{t\}$ συμβολίζεται ο κοινός για κάθε όρο της ακολουθίας των τυχαίων μεταβλητών αρνητικός λογάριθμος των χαρακτηριστικών τους εξισώσεων, έπεται πως η τυχαία μεταβλητή X έχει απείρως διαιρετή κατανομή. Με άλλα λόγια, για να ανήκει μία κατανομή στην κλάση των απείρως διαιρετών κατανομών, θα πρέπει για την τυχαία μεταβλητή η οποία υπόκειται στο νόμο της, να υπάρχει μια χαρακτηριστική συνάρτηση κάποιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί κάποια κατανομή, η οποία να ικανοποιεί την σχέση (3.1). Όταν συμβαίνει αυτό, δύναται να προσδιοριστεί μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών όπου το άθροισμά τους να ισούται κατά κατανομή με την αρχική τυχαία μεταβλητή.

Ένας εναλλακτικός τρόπος ορισμού μιας τυχαίας μεταβλητής με απείρως διαιρετή κατανομή εκτός της χαρακτηριστικής της εξίσωσης, είναι μέσω του νόμου πιθανότητας που την διέπει, δηλαδή της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της. Διατηρώντας τον ίδιο συμβολισμό που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω και αν με F_X θεωρηθεί η αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X, τότε αυτή έχει απείρως διαιρετή κατανομή αν η F_X δύναται να γραφεί ως η n-οστού βαθμού συνέλιξη των αθροιστικών συναρτήσεων κατανομής μιας ακολουθίας ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{n,n}$, για οποιαδήποτε θετική, μη μηδενική τιμή του φυσικού αριθμού n. Η μαθηματική έκφραση της παραπάνω πρότασης έχει ως εξής:

$$F_X = F_{X_n}^{*n} \quad , \quad \forall \ n = 1, 2, \ldots,$$

όπου με $*n$ συμβολίζεται ακριβώς αυτή η n-οστού βαθμού συνέλιξη των αθροιστικών συναρτήσεων κατανομής της ακολουθίας των ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{n,n}$. Ο χειρισμός τέτοιων εκφράσεων με την «πράξη» της συνέλιξης είναι αρκετά πολύπλοκος και για τον λόγο αυτό δεν δίνεται περαιτέρω έκταση. Οι υπολογισμοί με χαρακτηριστικές εξισώσεις είναι εξαιρετικά απλούστεροι και εφεξής, θα πραγματοποιούνται με την βοήθεια αυτών. Απλά, για λόγους συνέπειας, αναφέρεται ότι η «πράξη» της συνέλιξης αποτελεί ένα «γενικευμένο γινόμενο» συναρτήσεων ενώ η συνέλιξη δύο συναρτήσεων f και g δίνεται από την σχέση:

$$\left(f*g\right)\left(t\right)=\int_{0}^{t}f\left(t-\tau\right)g\left(\tau\right)d\tau=\int_{0}^{t}f\left(t\right)g\left(t-\tau\right)d\tau\ , \quad \text{για} \ \ t,\tau\in\Re_{+}\,.$$

Ο αναγνώστης που επιθυμεί περισσότερα στοιχεία για την αναλυτική πράξη της συνέλιξης, δύναται να ανατρέξει μεταξύ άλλων στους Boyce-Diprima (1999).

3.3 Παραδείγματα Απείρως Διαιρετών Κατανομών.

Η οικογένεια των απείρως διαιρετών κατανομών αποτελεί μία ευρεία κλάση κατανομών της Θεωρίας Πιθανοτήτων και είναι όπως ήδη έχει αναφερθεί, άμεσα συνδεδεμένη με στοχαστικές διαδικασίες ανεξάρτητων και στάσιμων προσαυξήσεων. Πολλές σημαντικές και ευρέως διαδεδομένες κατανομές ανήκουν στην κλάση αυτή, ορισμένες από τις οποίες η κανονική κατανομή, Poisson, γάμμα, γεωμετρική τύπου Α και Β κ.ά. Στις σελίδες που ακολουθούν, αποδεικνύεται με την βοήθεια των χαρακτηριστικών συναρτήσεων, η απείρως διαιρετή κατανομή τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την κατανομή Poisson και σύνθετη Poisson, κατανομές για τις οποίες πραγματοποιήθηκε εκτενής αναφορά στο δεύτερο κεφάλαιο, καθώς και την κανονική κατανομή η οποία σχετίζεται άμεσα με την επίσης αναλυθείσα κίνηση Brown. Οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των κατανομών για τις οποίες γίνεται λόγος παρακάτω, αντλήθηκαν στην συγκεκριμένη περίπτωση από τον Κυπριανού (2006).

3.3.1 Κατανομή Poisson

Έστω η τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ, $X \overset{d}{\sim} Poisson(\lambda)$, $\lambda\in\Re^{*}$. Προφανώς, η χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από την σχέση:

$$\phi_X\left(t\right)=E\left(e^{itX}\right)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{itx}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{\lambda\left(e^{ix}-1\right)} \ , \quad \forall \ t\in\Re \quad \kappa\alpha\iota \ \ \forall \ n\geq 1$$

Κατά συνέπεια, ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής συνάρτησης της τυχαίας μεταβλητής X προκύπτει ως εξής:

$$\Psi_X\left\{t\right\}=-\log\phi_X\left\{t\right\}=-\log\left\{e^{\frac{\lambda}{n}\left(e^{ix}-1\right)}\right\}^n=n\left[-\log\left\{e^{\frac{\lambda}{n}\left(e^{ix}-1\right)}\right\}\right]=n\Psi_{X_n}\left\{t\right\},$$
$$\forall \ t\in\Re \quad \kappa\alpha\iota \ \ \forall \ n\geq 1.$$

Παρατηρείται λοιπόν ότι, ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής της συνάρτησης της τυχαίας μεταβλητής X, πολλαπλασιασμένος με οποιονδήποτε θετικό, μη μηδενικό φυσικό αριθμό, ισούται με μία ποσότητα η οποία με την σειρά της αποτελεί τον αρνητικό λογάριθμο της χαρακτηριστικής συνάρτησης μιας άλλης τυχαίας μεταβλητής, όπου για την ακρίβεια υπόκειται στον νόμο της κατανομής Poisson με διαφορετική όμως παράμετρο.

Κατά συμπέρασμα, η κατανομή Poisson είναι απείρως διαιρετή κάτι το οποίο, βάσει της ιδιότητας που παρατέθηκε στην αρχή του κεφαλαίου, ήταν απολύτως αναμενόμενο αφού η στοχαστική ανέλιξη Poisson είναι μια διαδικασία με ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις. Μάλιστα, από την χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X, διαπιστώνεται ότι προκύπτει ίση με το γινόμενο n το πλήθος χαρακτηριστικών συναρτήσεων τυχαίων μεταβλητών, καθεμιά από τις οποίες ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ / n. Έπεται δηλαδή πως, μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ, ισούται κατά κατανομή με το άθροισμα n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την κατανομή Poisson με παράμετρο λ / n ή διαφορετικά, το άθροισμα n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την κατανομή Poisson με παράμετρο λ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λn και όλα αυτά, για κάθε $n \in \mathrm{N}^*$.

3.3.2 Σύνθετη Κατανομή Poisson

Έστω η τυχαία μεταβλητή S η οποία τώρα ακολουθεί την σύνθετη κατανομή Poisson. Σύμφωνα με τα όσα έχουν αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, η τυχαία μεταβλητή S ορίζεται ως εξής:

$$S = \begin{cases} \sum_{n=1}^{N} X_n & \alpha\nu \quad N \geq 1 \\ 0 & \alpha\nu \quad N = 0 \end{cases}$$

όπου N μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ και $\{X_n \ , \ n = 0,1,2,...\}$ μία ακολουθία ισόνομων και ανεξάρτητων, τόσο μεταξύ τους όσο και με την τυχαία μεταβλητή N, τυχαίων μεταβλητών.

Κατά πλήρη αντιστοιχία με την διαδικασία που ακολουθήθηκε για την εξαγωγή της ροπογεννήτριας συνάρτησης μιας σύνθετης ανέλιξης Poisson (ενότητα 2.3), η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τέτοιας τυχαίας μεταβλητής, δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\phi_S\{t\} = E\{e^{itS}\} = e^{\lambda(\phi_X(t)-1)} = \left\{ e^{\frac{\lambda}{n}(\phi_X(t)-1)} \right\}^n, \qquad \forall \ t \in \Re \quad \kappa\alpha\iota \ \forall \ n \geq 1,$$

όπου με $\phi_X(t)$ συμβολίζεται η κοινή για κάθε όρο της ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών $\{X_n \ , \ n = 0,1,2,...\}$ χαρακτηριστική συνάρτηση. Από την τελευταία αυτή σχέση, ο αρνητικός της λογάριθμος παίρνει την εξής μορφή:

$$\Psi_X\{t\} = -\log\phi_X\{t\} = -\log\left\{ e^{\frac{\lambda}{n}(\phi_X(t)-1)} \right\}^n = n\left[-\log\left\{ e^{\frac{\lambda}{n}(\phi_X(t)-1)} \right\} \right] = n\Psi_{X_n}\{t\},$$
$$\forall \ t \in \Re \quad \kappa\alpha\iota \ \forall \ n \geq 1.$$

Έτσι, όπως και στην περίπτωση της κατανομής Poisson, αποδεικνύεται ότι και η σύνθετη κατανομή Poisson είναι απείρως διαιρετή αφού ικανοποιεί πλήρως την σχέση (3.1). Επιπρόσθετα, εντελώς όμοια με παραπάνω, εξάγεται το συμπέρασμα ότι το άθροισμα n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την σύνθετη κατανομή Poisson με παράμετρο λ / n, ακολουθεί την σύνθετη κατανομή Poisson με παράμετρο λ, για κάθε $n \in \mathrm{N}^*$ και για οποιαδήποτε ακολουθία ισόνομων και ανεξάρτητων, τόσο μεταξύ τους όσο και με την τυχαία μεταβλητή N, τυχαίων μεταβλητών $\{X_n \ , \ n = 0,1,2,...\}$.

3.3.3 Κανονική Κατανομή

Στο τελευταίο αυτό παράδειγμα απείρως διαιρετών κατανομών, γίνεται λόγος για μία από τις σημαντικότερες κατανομές της Θεωρίας Πιθανοτήτων, την κανονική κατανομή. Θεωρείται λοιπόν μία τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2, $X \overset{d}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$. Ως γνωστόν, η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , \quad \forall \ x \in \Re \quad \mu\varepsilon \ \ \sigma \ \varepsilon \ \Re \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \mu > 0$$

και συνεπώς η χαρακτηριστική της συνάρτηση προσδιορίζεται ως εξής:

$$\phi_X\{t\} = E\{e^{itX}\} = \int_{\Re} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\Re} e^{itx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad ,$$
$$\forall \ t \in \Re \quad \kappa\alpha\iota \ \forall \ n \geq 1,$$

όπου μετά από συμπλήρωση τετραγώνου στον εκθέτη της ολοκληρωτέας ποσότητας προκύπτει ότι:

$$\phi_X\{t\} = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + i\mu t} = \left\{ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2 t^2 + i\left(\frac{\mu}{n}\right)t} \right\}^n, \quad \forall\ t \in \Re \quad \kappa\alpha\iota\ \ \forall\ n \geq 1.$$

Λαμβάνοντας τον αρνητικό λογάριθμο της προκύπτουσας χαρακτηριστικής συνάρτησης, έπεται πως:

$$\Psi_X\{t\} = -\log\phi_X\{t\} = -\log\left\{ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2 t^2 + i\left(\frac{\mu}{n}\right)t} \right\}^n = n\left[-\log\left\{ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2 t^2 + i\left(\frac{\mu}{n}\right)t} \right\} \right] = n\Psi_{X_n}\{t\},$$

$$\forall\ t \in \Re \quad \kappa\alpha\iota\ \ \forall\ n \geq 1.$$

Και η κανονική κατανομή λοιπόν, ανήκει στην κλάση των απείρως διαιρετών κατανομών αφού υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή της οποίας ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής της συνάρτησης, πολλαπλασιασμένος με οποιονδήποτε θετικό, μη μηδενικό φυσικό αριθμό, ισούται με τον αρνητικό λογάριθμο της χαρακτηριστικής συνάρτησης μιας τυχαίας μεταβλητής $X \overset{d}{\sim} N\left(\mu,\sigma^2\right)$ με $\sigma \in \Re$ και $\mu > 0$. Από την μορφή της τελικής σχέσης για την χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X, επιβεβαιώνεται ο γνωστός σε όλους τόπος ότι, το άθροισμα n ανεξάρτητων κανονικά κατανεμημένων με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 τυχαίων μεταβλητών είναι μία κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή και διακύμανση το άθροισμα των μέσων τιμών και διακυμάνσεων των όρων του αθροίσματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ LÉVY

Όπως εύστοχα μπορεί να παρατηρήσει κανείς έως τώρα, αν και το θέμα της παρούσης μελέτης είναι οι ανελίξεις Lévy, δεν έχει δοθεί ο ακριβής ορισμός τους. Από όλα όσα έχουν αναφερθεί μέχρι αυτό το σημείο, απουσιάζει εκουσίως ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός αυτών των διαδικασιών ενώ υπογραμμίζεται η σχέση τους με την κλάση των απείρως διαιρετών κατανομών. Στο παρόν κεφάλαιο λοιπόν, παρουσιάζεται για πρώτη φορά ο αυστηρός ορισμός αυτής της οικογένειας ανελίξεων και διατυπώνεται μία σειρά σημαντικών ιδιοτήτων τους. Εν συνεχεία, παρουσιάζεται ο τύπος των Lévy-Khintchine με την βοήθεια του οποίου αποσαφηνίζεται πλήρως η άρρηκτη σχέση ανελίξεων Levy και απείρως διαιρετών κατανομών και ταυτόχρονα ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις για την εις βάθος μελέτη των ανελίξεων Lévy. Παρουσιάζεται αναλυτικά το πώς ικανοποιείται η παραπάνω φόρμουλα για ορισμένες βασικές στοχαστικές διαδικασίες, ενώ δίνεται μία περιεκτική αλλά ουσιαστική σκιαγράφηση της Lévy-Itô διαχώρισης, η οποία αποκαλύπτει τους δομικούς λίθους μιας στοχαστικής ανέλιξης Lévy. Τέλος, με γνώμονα την παραπάνω ανάλυση, γίνεται λόγος και αναγνωρίζονται χαρακτηριστικά μονοπάτια τέτοιων στοχαστικών διαδικασιών και βάσει αυτών γίνεται αναφορά σε σημαντικές υποκλάσεις της οικογένειας των ανελίξεων Lévy, κάποιες από τις οποίες θα απασχολήσουν τους αναγνώστες και στα επόμενα κεφάλαια της παρούσης εργασίας. Τονίζεται δε, ότι τόσο η πορεία που ακολουθείται όσο και τα έτοιμα συμπεράσματα που χρησιμοποιούνται, αντλήθηκαν από το βιβλίο του Αντρέα Κυπριανού (2006) "Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications".

4.1 Ανελίξεις Lévy

Στο ξεκίνημα ουσιαστικά της μελέτης των ανελίξεων Lévy συνολικά, ως ξεχωριστή δηλαδή οικογένεια στοχαστικών διαδικασιών, παρουσιάζεται ο αυστηρός ορισμός τους. Ο προσδιορισμός τους, στηρίζεται στις κοινές ιδιότητες αυτών των ανελίξεων οι οποίες διαμορφώνουν μια ευρεία και σημαντική κλάση στοχαστικών διαδικασιών, τις ανελίξεις

Lévy. Κατά το αρχικό στάδιο της μελέτης τους και για πολλά ακόμα χρόνια, οι ανελίξεις Lévy δεν αντιμετωπίζονταν ως ξεχωριστή κλάση στοχαστικών διαδικασιών και προσδιορίζονταν κάτω από πολλά και διαφορετικά ονόματα. Στην δεκαετία του 1940, παρουσιάζονταν ως υποκλάση των προσθετικών στοχαστικών διαδικασιών (*additive processes*), διαδικασιών δηλαδή με ανεξάρτητες προσαυξήσεις, ενώ κατά τις δεκαετίας του 1960 και 1970 η αναφορά σε αυτές γινόταν απλά ως ανελίξεις με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Ωστόσο, μετά το 1980 και την ολοένα αυξανόμενη μελέτη τους, καθιερώθηκαν τελικά ως μια ξεχωριστή κλάση στοχαστικών ανελίξεων με την ονομασία ανελίξεις Lévy, προς τιμήν του Γάλλου μαθηματικού Paul Lévy ο οποίος ήταν ο συντονιστής και ενορχηστρωτής της προσπάθειας κατανόησης και χαρακτηρισμού αυτών των διαδικασιών.

➢ <u>Ορισμός</u>:

Μία στοχαστική διαδικασία $\{X_t \ , \ t \geq 0\}$, ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας (Ω, A, P), λέγεται ότι ανήκει στην κλάση των ανελίξεων Lévy ή απλούστερα ότι είναι μια ανέλιξη Lévy, αν ικανοποιεί τις εξής τέσσερις ιδιότητες:

(i) Οι τροχιές της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_t \ , \ t \geq 0\}$, κάτω από το μέτρο πιθανότητας P, είναι δεξιά συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου ενώ υπάρχουν τα αριστερά όρια, με πιθανότητα 1.

(ii) $P\left(X_0 = 0\right) = 1$

(iii) Οι προσαυξήσεις της ανέλιξης, $X_t - X_s$ είναι ίσες κατά κατανομή με την τυχαία μεταβλητή X_{t-s}, για κάθε $0 \leq s \leq t$.

(iv) Οι προσαυξήσεις της ανέλιξης, $X_t - X_s$ είναι ανεξάρτητες της $\{X_u \ , \ u \leq s\}$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, δίνεται πλέον μια ταυτότητα στις στοχαστικές διαδικασίες με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις και επιπλέον γίνεται σαφές πως οι διαδικασίες οι οποίες παρουσιάστηκαν στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσης εργασίας, αποτελούν μέλη της οικογένειας των ανελίξεων Lévy. Επιπροσθέτως, με την διατύπωση του ορισμού των ανελίξεων Lévy γίνεται ξεκάθαρη η σχέση τους με την θεωρία των απείρως διαιρετών κατανομών. Κατά την αναφορά στις απείρως διαιρετές κατανομές, διατυπώθηκε η ιδιότητα σύμφωνα με την οποία κάθε στοχαστική διαδικασία $\{X_t \ , \ t \in T\}$ με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, έχει απείρως διαιρετή κατανομή για κάθε συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t \in T$. Στο σημείο αυτό λοιπόν, η πολύ σημαντική αυτή ιδιότητα αποκτά την παρακάτω μορφή:

➢ Ιδιότητα:

Κάθε στοχαστική ανέλιξη Lévy $\{X_t \ , \ t \in T\}$, έχει απείρως διαιρετή κατανομή για κάθε συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t \in T$.

Η παραπάνω ιδιότητα των ανελίξεων Lévy, αποτελεί ένα σημαντικό στην διαχείρισή τους εργαλείο, το οποίο τις καθιστά εύχρηστες σε πολλά πεδία εφαρμογών. Ωστόσο, η ξεχωριστή σημασία της παραπάνω πρότασης, έγκειται στο γεγονός της αμφίδρομης σχέσης μεταξύ της κλάσης των Lévy διαδικασιών και των τυχαίων μεταβλητών με απείρως διαιρετή κατανομή. Αποδεικνύεται ότι πράγματι, οικογένειες ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με απείρως διαιρετή κατανομή, «συνθέτουν» μία ανέλιξη Lévy. Η διαπίστωση αυτή αποτελεί καίριας σημασίας σημείο και σχολιάζεται εκτενώς στις επόμενες σελίδες του κεφαλαίου αφού, μέσω αυτής, γίνεται αντιληπτή η φύση και η συμπεριφορά των τροχιών μιας ανέλιξης Lévy και κατ' επέκταση της ίδιας της στοχαστικής διαδικασίας. Απαραίτητη για μία τέτοια ανάλυση, είναι η θεωρία των απείρως διαιρετών κατανομών με μία διαφορετική όμως μορφή από αυτή που έχει παρουσιαστεί έως τώρα, όπως περιγράφεται στην επόμενη ενότητα.

Προτού όμως γίνει λόγος για την εναλλακτική αλλά και πληρέστερη συνθήκη κάτω από την οποία μια τυχαία μεταβλητή υπόκειται σε έναν απείρως διαιρετό πιθανοθεωρητικό νόμο, κρίνεται απολύτως απαραίτητη η παράθεση μιας εξαιρετικά, όπως θα αποδειχτεί στην συνέχεια, σημαντικής ιδιότητας που διατηρούν οι ανελίξεις Lévy, η οποία αναφέρει το εξής:

➢ Ιδιότητα:

Η στοχαστική διαδικασία η οποία προκύπτει ως το άθροισμα ανεξάρτητων ανελίξεων Lévy είναι στοχαστική ανέλιξη Lévy.

Η πολύ απλή αυτή ιδιότητα επικαλείται εις διπλούν στην πορεία αυτής της ανάλυσης και χρησιμοποιείται για να αποδειχτεί ότι ένας γραμμικός συνδυασμός ανελίξεων Levy δεν είναι τίποτε άλλο από μια νέα στοχαστική ανέλιξη Lévy.

4.2 Τύπος των Lévy-Khintchine

Η πλήρης επέκταση για τον χαρακτηρισμό μιας κατανομής πιθανότητας ως απείρως διαιρετή, περιγράφεται από την μορφή την οποία δύναται να λάβει ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής συνάρτησης της τυχαίας μεταβλητής όπως ορίστηκε από την σχέση (3.1), η οποία υπόκειται στον νόμο αυτής. Η συγκεκριμένη αυτή έκφραση είναι γνωστή ως τύπος των Lévy-Khintchine (*Lévy-Khintchine formula*) και είναι αυτός που φαίνεται παρακάτω.

➢ <u>Θεώρημα (Τύπος των Lévy-Khintchine)</u>:

Έστω X μία πραγματική τυχαία μεταβλητή ορισμένη στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{P})$ της οποίας ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής της συνάρτησης $\phi_X(t)$ συμβολίζεται με $\Psi(t)$,

$$\phi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{\Re} e^{itx}\mu(dx) = e^{-\Psi(t)} \ , \quad \forall \ t \in \Re .$$

Ο νόμος πιθανότητας μ της πραγματικής τυχαίας μεταβλητής X είναι απείρως διαιρετός αν και μόνο αν υπάρχει μία τριπλέτα (α, σ, Π), όπου $\alpha \in \Re$, $\sigma \in \Re_+$ και Π ένα μέτρο πιθανότητας με μάζα στο $\Re^*$ το οποίο ικανοποιεί την σχέση $\int_{\Re}\left(1 \wedge x^2\right)\Pi(dx) < \infty$, τέτοιο ώστε ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής της συνάρτησης έχει την μορφή:

$$\Psi(t) = i\alpha t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int_{\Re}\left(1 - e^{itx} + itx\mathbf{1}_{(|x|<1)}\right)\Pi(dx) \ , \quad \forall \ t \in \Re . \tag{4.1}$$

Αναφορικά με τον συμβολισμό που χρησιμοποιείται στην διατύπωση του παραπάνω θεωρήματος, σημειώνεται ότι ο συμβολισμός $\mathbf{1}_A$ δηλώνει την δείκτρια συνάρτηση του συνόλου A, τη συνάρτηση δηλαδή η οποία λαμβάνει μηδενική τιμή για τιμές της μεταβλητής εκτός του συνόλου A και την τιμή 1 για τιμές του συνόλου. Επίσης, το σύμβολο $\wedge$ υποδηλώνει την ελάχιστη, μεταξύ δύο, τιμή και συνεπώς στην ολοκληρωτέα ποσότητα της σχέσης την οποία ικανοποιεί το μέτρο πιθανότητας Π, την ελάχιστη κάθε φορά τιμή μεταξύ της μονάδας και των τιμών που λαμβάνει η συνάρτηση x^2.

Μία σχετική με την παραπάνω πρόταση αλλά για μια ειδική κατηγορία τυχαίων μεταβλητών, αυτή των τυχαίων μεταβλητών με απείρως διαιρετή κατανομή σε δεύτερες διαφορές, εισήχθη αρχικά από τον Ρώσο μαθηματικό Andrei Kolmogorov το 1932. Παρόλα αυτά, όπως ήδη έχει αναφερθεί σε προηγούμενη ενότητα, ο Paul Lévy ήταν εκείνος όπου στα

1934 έδωσε τον πλήρη χαρακτηρισμό των απείρως διαιρετών κατανομών. Μετέπειτα, οι Khintchine το 1937 και Itô το 1942 προσέθεσαν βαθύτερο νόημα στο έργο του Lévy, με αποτέλεσμα η προηγούμενη πρόταση να λάβει την παραπάνω γενική μορφή και να ονομαστεί έτσι προς τιμήν τους.

Ξεκινώντας έναν πρώτο σχολιασμό σχετικά με τον τύπο των Lévy-Khintchine, καθοριστικής σημασίας παράγοντα αποτελεί η τριάδα (α,σ,Π). Κάθε όρος αυτής της τριπλέτας διαδραματίζει έναν διακεκριμένο ρόλο και καθορίζει συγκεκριμένες συμπεριφορές της τροχιάς της κάθε ανέλιξης. Η επίδραση του κάθε όρου στον τρόπο με τον οποίο εξελίσσεται η στοχαστική διαδικασία στην πορεία του χρόνου, έχει σημαντικό αντίκτυπο στα μονοπάτια της διεργασίας ενώ ο συνδυασμός αυτών αποτελεί ουσιαστικά το θεωρητικό υπόβαθρο κάτω από το οποίο οικογένειες ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με απείρως διαιρετή κατανομή, «διαμορφώνουν» μία ανέλιξη Lévy. Το σημαινόμενο της τριπλέτας (α,σ,Π) αναλύεται διεξοδικά σε επόμενες ενότητες, ενώ στην παρούσα φάση η αναφορά σε αυτή εξαντλείται στη συνολοσυνάρτηση Π.

Όπως εξ' αρχής δηλώθηκε στο Θεώρημα των Lévy-Khintchine, η συνάρτηση Π αποτελεί μέτρο στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{P})$ με μάζα στο $\Re^*$ και ουσιαστικά δεν είναι τίποτα άλλο από τον κοινό νόμο πιθανότητας στον οποίο υπόκειται η οικογένεια των ισόνομων και ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, όπως αυτές εισήχθησαν στον ορισμό μιας απείρως διαιρετής κατανομής του προηγούμενου κεφαλαίου. Η συνολοσυνάρτηση Π, έχει τις ιδιότητες μιας «κοινής» συνάρτησης κατανομής με γνωστή συμπεριφορά σε όλο το πεδίο ορισμού της. Υπενθυμίζεται ότι, το μέτρο Π ορίζεται σε ολόκληρο τον άξονα των πραγματικών αριθμών εκτός του κέντρου του, του σημείου «μηδέν» δηλαδή, με αποτέλεσμα, σε μια περιοχή γύρω από αυτό η συμπεριφορά της να μην παραμένει η ίδια.

Η φύση της συνολοσυνάρτησης Π, αντικατοπτρίζεται μέσα από την συνθήκη που αναφέρθηκε στο Θεώρημα των Lévy-Khintchine πως ικανοποιεί και η οποία δηλώνει πως $\int_{\Re}\left(1\wedge x^2\right)\Pi(dx)<\infty$. Προχωρώντας μερικά βήματα την σχέση αυτή, παρέχεται μια καλύτερη εικόνα σχετικά με την συμπεριφορά του μέτρου Π και εξάγονται πολύ χρήσιμα συμπεράσματα. Βάσει του σχολίου περί της σημασίας του συμβόλου $\wedge$, η παραπάνω σχέση αναλύεται ως εξής:

$$\int_{\Re}\left(1\wedge x^2\right)\Pi(dx)=\int_{|x|<1}x^2\Pi(dx)+\int_{|x|\geq 1}\Pi(dx)=\int_{|x|<1}x^2\Pi(dx)+\Pi\left(|x|\geq 1\right)<\infty .$$

Από την στιγμή όπου η παραπάνω ποσότητα είναι φραγμένη, έπεται πως και κάθε όρος του αθροίσματος είναι επίσης φραγμένος, δηλαδή

$$\int_{|x|<1} x^2 \Pi(dx) < \infty \quad \text{και} \quad \Pi(|x| \geq 1) < \infty,$$

ενώ το ενδιαφέρον εστιάζεται στην σχέση $\Pi(|x| \geq 1) < \infty$ η οποία δηλώνει πως το πεδίο τιμών της Π, εκτός του ανοικτού διαστήματος $(-1,1)$, είναι φραγμένο σύνολο. Σύμφωνα με αυτά, διαπιστώνεται ότι η ιδιότητα την οποία διατηρεί το μέτρο Π, εξασφαλίζει το πεπερασμένο των τιμών που λαμβάνει και πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι $\Pi(\Re \setminus (-1,1)) \in [0,\infty)$. Με απλά λόγια, η παραπάνω ιδιότητα εγγυάται πως η συνολοσυνάρτηση Π σε όλο το φάσμα των πραγματικών αριθμών εκτός του διαστήματος $(-1,1)$, έχει πεπερασμένη τιμή με πιθανότητα 1 και κατά συνέπεια η στοχαστική διαδικασία η οποία σε κάθε χρονική στιγμή υπόκειται στον νόμο της, σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα δεν αποκλίνει.

Η επιλογή του διαστήματος $(-1,1)$ γίνεται για λόγους απλότητας. Στην πραγματικότητα, η συμπεριφορά του μέτρου πιθανότητας Π, παραμένει η ίδια σε όλη την ευθεία των πραγματικών αριθμών εκτός του μηδενός όπου και δεν ορίζεται, με αποτέλεσμα, η διαφοροποίηση αυτή να υφίσταται σε μια $\varepsilon-$περιοχή του μηδενός και όχι αναγκαστικά στο $(-1,1)$. Ακριβέστερα λοιπόν, η ιδιότητα την οποία ικανοποιεί το μέτρο πιθανότητας Π του τύπου των Lévy-Khintchine, παίρνει την μορφή:

$$\int_{\Re} (\varepsilon \wedge x^2) \Pi(dx) < \infty$$

και συνεπώς

$$\int_{|x|<\varepsilon} x^2 \Pi(dx) < \infty \quad \text{και} \quad \Pi(|x| \geq \varepsilon) < \infty,$$

για οποιονδήποτε πολύ μικρό, θετικό πραγματικό αριθμό ε. Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η παραπάνω θέση, ας θεωρηθεί η περίπτωση μιας απαριθμήτριας ανέλιξης, η οποία σε κάθε συγκεκριμένη χρονική στιγμή έχει απείρως διαιρετή κατανομή. Βάσει της σχέσης που ικανοποιεί η Π, γίνεται σαφές ότι εστιάζοντας σε μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο, μόνο πεπερασμένος αριθμός αφίξεων δύναται να πραγματοποιηθούν και συνεπώς για αυτή την χρονική περίοδο, εξασφαλίζεται η μη απόκλιση της στοχαστικής διαδικασίας. Ολοκληρώνοντας τον σύντομο αυτό σχολιασμό, σημειώνεται ότι το μέτρο Π ονομάζεται Lévy (χαρακτηριστικό) μέτρο (*Lévy characteristic measure*).

Στις υποενότητες που ακολουθούν, εφαρμόζεται ο τύπος των Lévy-Khintchine για μία σειρά στοχαστικών ανελίξεων Lévy και παρουσιάζονται αναλυτικά οι τιμές τις οποίες λαμβάνει η τριπλέτα (α,σ,Π) του αρνητικού λογάριθμου της χαρακτηριστικής συνάρτησης κάθε μία εξ' αυτών.

4.2.1 Κατανομή Poisson

Ήδη από την υποενότητα 3.3.1 έχει αποδειχτεί πως η κατανομή Poisson είναι απείρως διαιρετή. Προφανώς, στο ίδιο ακριβώς συμπέρασμα οδηγεί και η εφαρμογή του τύπου των Lévy-Khintchine για αυτή την κατανομή, με την τριπλέτα (α,σ,Π) να λαμβάνει τις τιμές:

$$(\alpha,\sigma,\Pi)=(0\ ,\ 0\ ,\ \lambda\delta_1)$$

όπου δ_1 είναι η συνάρτηση «δέλτα» του Dirac, με μοναδιαία μάζα στο σημείο 1.

Γενικά, η γενικευμένη συνάρτηση δ_α του Dirac, είναι γνωστό ότι παίρνει την τιμή 1 στο σημείο α και μηδενίζεται σε οποιοδήποτε άλλο σημείο. Ισχύει δηλαδή ότι

$$\delta_\alpha(x)=\begin{cases}1 & , \quad x=\alpha \\ 0 & , \quad x\neq\alpha\end{cases}$$

και αντιπροσωπεύει ουσιαστικά, την κατανομή πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής η οποία λαμβάνει την τιμή α με πιθανότητα 1. Η γενικευμένη αυτή συνάρτηση, βάσει του τρόπου με τον οποίο ορίζεται και από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού, διατηρεί μια χρήσιμη ιδιότητα σύμφωνα με την οποία

$$\int_{\Re} f(x)\delta_\alpha(dx)=f(\alpha)\cdot 1=f(\alpha) \quad , \quad \forall x\in\Re \ \textit{και} \ \forall f\in C(\Re).$$

Δίνοντας στην τριπλέτα (α,σ,Π) λοιπόν, τις τιμές που αναφέρθηκαν προηγουμένως, η ποσότητα Ψ του τύπου των Lévy-Khintchine παίρνει την μορφή:

$$\begin{aligned}\Psi(t)&=0+0+\int_{\Re}\left(1-e^{itx}+itx\mathbf{1}_{(|x|<1)}\right)\lambda\delta_\alpha(dx)=\\ &=\int_{\Re}\left(1-e^{itx}+itx\mathbf{1}_{(|x|<1)}\right)\lambda\delta_\alpha(dx)=\\ &=\lambda\int_{\Re}\left(1-e^{itx}+itx\mathbf{1}_{(|x|<1)}\right)\delta_\alpha(dx) \quad , \qquad \forall \ t\in\Re.\end{aligned}$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της γενικευμένης συνάρτησης του Dirac που αναφέρθηκε παραπάνω, το ολοκλήρωμα της τελευταίας σχέσης προκύπτει ίσο με:

$$\int_{\Re}\left(1-e^{itx}+itx\mathbf{1}_{(|x|<1)}\right)\delta_{\alpha}(dx)=\left(1-e^{it}\right)\cdot 1=\left(1-e^{it}\right) \quad , \quad \forall\ t\in\Re$$

και συνεπώς

$$\Psi(t)=\lambda\left(1-e^{it}\right) \quad , \quad \forall\ t\in\Re .$$

Όπως εύκολα μπορεί να αναγνωρίσει κανείς, η ποσότητα Ψ έχει πάρει την μορφή του αρνητικού λογάριθμου της χαρακτηριστικής συνάρτησης μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή Poisson. Πράγματι λοιπόν, η τριπλέτα (α,σ,Π) της Lévy-Khintchine φόρμουλας κατά την περίπτωση της κατανομής Poisson, λαμβάνει τις τιμές:

$$(\alpha,\sigma,\Pi)=(0,0,\lambda\delta_1).$$

4.2.2 Σύνθετη Κατανομή Poisson

Από τον τύπο (4.1) των Lévy-Khintchine, για τιμές των παραμέτρων ίσες με $\alpha=-\lambda\int_{|x|<1}xF(dx)$, $\sigma=0$ και $\Pi(dx)=\lambda F(dx)$, όπου F ένα μέτρο πιθανότητας με μάζα στο $\Re$, έπεται πως:

$$\Psi(t)=-it\lambda\int_{|x|<1}xF(dx)+\lambda\int_{\Re}\left(1-e^{itx}+itx\mathbf{1}_{(|x|<1)}\right)F(dx)=$$

$$=-\lambda\int_{|x|<1}itxF(dx)+\lambda\int_{\Re\setminus(-1,1)}\left(1-e^{itx}\right)F(dx)+\lambda\int_{|x|<1}\left(1-e^{itx}+itx\right)F(dx)=$$

$$=\cancel{-\lambda\int_{|x|<1}itxF(dx)}+\lambda\int_{\Re\setminus(-1,1)}\left(1-e^{itx}\right)F(dx)+$$

$$+\lambda\int_{|x|<1}\left(1-e^{itx}\right)F(dx)+\cancel{\lambda\int_{|x|<1}itxF(dx)}=$$

$$=\lambda\int_{\Re\setminus(-1,1)}\left(1-e^{itx}\right)F(dx)+\lambda\int_{|x|<1}\left(1-e^{itx}\right)F(dx)=$$

$$=\lambda\int_{\Re}\left(1-e^{itx}\right)F(dx) \quad , \qquad \forall t\in\Re \tag{4.2}$$

Όπως εύκολα μπορεί να αναγνωρίσει κανείς κοιτώντας ξανά την υποενότητα $3.3.2$, η παραπάνω ποσότητα αποτελεί τον αρνητικό λογάριθμο της χαρακτηριστικής συνάρτησης μιας τυχαίας μεταβλητής X η οποία ακολουθεί την σύνθετη κατανομή Poisson με παράμετρο λ, και F την κοινή συνάρτηση κατανομής των ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών που ορίζουν μια τέτοια κατανομή. Συμπεραίνεται λοιπόν ότι και η σύνθετη κατανομή Poisson είναι μια απείρως διαιρετή κατανομή με τη τριπλέτα του τύπου των Lévy-Khintchine να λαμβάνει τις τιμές:

$$(\alpha,\sigma,\Pi)=\left(-\lambda\int_{|x|<1} xF(dx)\ ,\ 0\ ,\ \lambda F(dx)\right).$$

4.2.3 Κανονική Κατανομή

Στην υποενότητα 3.3.3 διαπιστώθηκε πως η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κανονική κατανομή $N\left(\mu,\sigma^2\right)$, δίνεται από την σχέση

$$\phi_X\{t\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{\Re} e^{itx-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \quad , \quad \forall\ t\in\Re$$

και συνεπώς ο αρνητικός της λογάριθμος προσδιορίζεται ως εξής:

$$\Psi\{t\}=-\frac{1}{2}\sigma^2t^2+i\mu t \quad , \quad \forall\ t\in\Re \tag{4.3}$$

Συγκρίνοντας απλά την παραπάνω ποσότητα, με την σχέση (4.1), διαπιστώνεται ότι στην περίπτωση της κανονικής κατανομής , η Lévy-Khintchine τριπλέτα είναι η

$$(\alpha,\sigma,\Pi)=(\text{-}\mu\ ,\ \sigma\ ,\ 0).$$

Μια πολύ χρήσιμη πληροφορία για την συνέχεια της ανάλυσης των ανελίξεων Lévy, αποτελεί η παρατήρηση πως ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής συνάρτησης μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2, συμπίπτει με τον αρνητικό λογάριθμο της χαρακτηριστικής συνάρτησης της γραμμικής κίνησης Brown με γραμμική τάση

$$X_t=\sigma B_t+\mu t\ ,\ \ t\geq 0,$$

για κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t\geq 0$. Σημειώνεται ότι οι παράμετροι της γραμμικής αυτής κίνησης Brown στην οποία εφαρμόζεται γραμμική τάση είναι μ και σ, οι παράμετροι δηλαδή της εν λόγω κανονικής κατανομής, ενώ με $\{B_t : t\geq 0\}$ συμβολίζεται όπως πάντα η τυπική κίνηση Brown. Με λίγα λόγια, αξίζει να θυμάται κανείς το γεγονός ότι, ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής συνάρτησης της γραμμικής κίνησης Brown με γραμμική τάση, $X_t=\sigma B_t+\mu t$ για κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t\geq 0$, είναι ο ίδιος με εκείνον μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κανονική κατανομή $N\left(\mu,\sigma^2\right)$.

4.2.4 Κατανομή Γάμμα

Μια επίσης σημαντική κατανομή στα πλαίσια των εφαρμογών των ανελίξεων Lévy, για την οποία δεν έχει γίνει μέχρι στιγμής λόγος, είναι η κατανομή γάμμα. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής X η οποία ακολουθεί αυτή την κατανομή, δίνεται από την σχέση:

$$f(x) = \frac{a^{\beta}}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-ax} \quad , \quad \forall\, x \in \Re_{+}^{*} \ \ \kappa\alpha\iota\ a, \beta \in \Re_{+}^{*}$$

όπου οι γνήσια θετικές μεταβλητές α και β αποτελούν τις παραμέτρους της κατανομής. Επίσης, αποδεικνύεται ότι (βλ. για παράδειγμα Grimmet & Stirzaker (2001)) για την τυχαία μεταβλητή $X \overset{d}{\sim} gamma(a, \beta)$, η χαρακτηριστική της συνάρτηση είναι η εξής:

$$\phi(t) = \frac{1}{(1 - it/a)^{\beta}} \quad , \quad \forall\, t \in \Re_{+}^{*} \ \ \kappa\alpha\iota\ a, \beta \in \Re_{+}^{*}.$$

Για την απόδειξη της άπειρης διαιρετότητας της κατανομής γάμμα με την βοήθεια του τύπου των Lévy-Khintchine, είναι απαραίτητη η αναδιατύπωση της μορφής της παραπάνω χαρακτηριστικής συνάρτησης σε μια άλλη ισοδύναμη, με εκθετικό όμως χαρακτήρα. Για να γίνει κάτι τέτοιο, απαιτείται η χρήση μιας πρότασης γνωστή και ως ολοκλήρωμα Frullani (*Frullani integral*), βλ. μεταξύ άλλων Κυπριανού (2006), η οποία με την μορφή λήμματος έχει ως εξής:

- <u>Λήμμα 4.2.1 (Ολοκλήρωμα Frullani)</u>:

Για κάθε $\alpha, \beta > 0$ και για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \in C$ με μη θετικό πραγματικό μέρος, $\Re z \le 0$, έπεται πως

$$\frac{1}{(1 - z/a)^{\beta}} = e^{-\int_0^{\infty} (1 - e^{zx}) \beta x^{-1} e^{-ax} dx}.$$

Σύμφωνα με το ολοκλήρωμα Frullani λοιπόν, για τις τιμές των παραμέτρων α και β της κατανομής γάμμα και για τον μιγαδικό αριθμό $z = it$ με $\Re z = 0$, η χαρακτηριστική συνάρτηση ϕ παίρνει την παρακάτω εκθετική μορφή

$$\phi(t) = e^{-\int_0^{\infty} (1 - e^{itx}) \beta x^{-1} e^{-ax} dx} \quad , \quad \forall\, t \in \Re_{+}^{*} \ \ \kappa\alpha\iota\ a, \beta \in \Re_{+}^{*}$$

και συνεπώς ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής της εξίσωσης είναι η ποσότητα

$$\Psi(t)=\int_0^{\infty}\left(1-e^{itx}\right)\beta x^{-1}e^{-ax}dx \quad , \quad \forall\ t\in\Re_+^*.$$

Βάσει της τελευταίας αυτής σχέσης, είναι πλέον εφικτή η αναγνώριση της κατανομής γάμμα ως ένας απείρως διαιρετός νόμος πιθανότητας, καθώς και ο προσδιορισμός της αντίστοιχης Lévy-Khintchine τριάδας (α,σ,Π). Πράγματι, για τιμές των παραμέτρων ίσες με $\Pi(dx)=\dfrac{\beta e^{-\alpha x}}{x}dx$ για $x\in\Re_+^*$, $\sigma=0$ και $\alpha=-\int_0^1 x\Pi(dx)=-\int_0^1 \beta e^{-ax}dx=\dfrac{\beta}{\alpha}\left(e^{-a}-1\right)$, η σχέση (4.1) δίνει:

$$\Psi(t)=it\frac{\beta}{\alpha}\left(e^{-a}-1\right)+\int_0^{\infty}\left(1-e^{itx}+itx\mathbf{1}_{(|x|<1)}\right)\beta x^{-1}e^{-ax}dx=$$

$$=it\frac{\beta}{\alpha}\left(e^{-a}-1\right)+\int_0^{1}\left(1-e^{itx}+itx\right)\beta x^{-1}e^{-ax}dx+\int_1^{\infty}\left(1-e^{itx}\right)\beta x^{-1}e^{-ax}dx=$$

$$=it\frac{\beta}{\alpha}\left(e^{-a}-1\right)+\int_0^{1}\left(1-e^{itx}\right)\beta x^{-1}e^{-ax}dx+\int_0^{1}it\cancel{x}\beta\cancel{x^{-1}}e^{-ax}dx+\int_1^{\infty}\left(1-e^{itx}\right)\beta x^{-1}e^{-ax}dx=$$

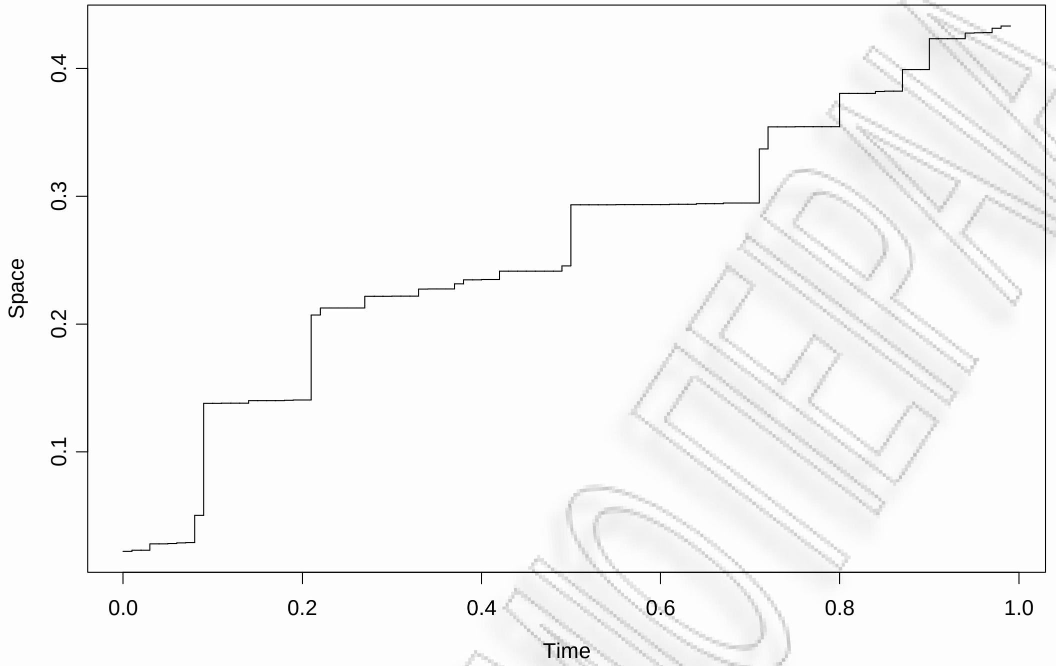
$$=\cancel{it\frac{\beta}{\alpha}\left(e^{-a}-1\right)}+\int_0^{\infty}\left(1-e^{itx}\right)\beta x^{-1}e^{-ax}dx+\cancel{\int_0^{1}it\beta e^{-ax}dx}=$$

$$=\int_0^{\infty}\left(1-e^{itx}\right)\beta x^{-1}e^{-ax}dx \quad , \quad \forall\ t\in\Re_+^*.$$

Κατά συμπέρασμα, η κατανομή γάμμα είναι απείρως διαιρετή με την Lévy-Khintchine τριπλέτα να λαμβάνει τις τιμές

$$(\alpha,\sigma,\Pi)=\left(\frac{\beta}{a}\left(e^{-a}-1\right)\ ,\ \sigma\ ,\ \frac{\beta e^{-\alpha x}}{x}dx\right).$$

Στο διάγραμμα 4.1 της επόμενης σελίδας, μπορεί κανείς να παρατηρήσει ένα μονοπάτι μιας στοχαστικής ανέλιξης γάμμα με παραμέτρους $a=10$ και $b=20$.



Διάγραμμα 4.1: Μονοπάτι της Ανέλιξης Γάμμα με Παραμέτρους α=10 και β=20

4.3 Lévy-Itô Διαχώριση

Σύμφωνα με τα όσα έχουν αναφερθεί έως τώρα, είναι απολύτως σαφές πως κάθε ανέλιξη Lévy σχετίζεται με έναν απείρως διαιρετό νόμο πιθανότητας. Η πολύ σημαντική ιδιότητα που πρωτοπαρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο και έλαβε στην προηγούμενη ενότητα την τελική της μορφή, αναφέρει πως μια ανέλιξη Lévy σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή, έχει απείρως διαιρετή κατανομή. Μετά και την διατύπωση της πλήρους επέκτασης του ορισμού της συγκεκριμένης κλάσης κατανομών (τύπος των Lévy-Khintchine), ανοίγει ο δρόμος για την αντιστροφή της παραπάνω θέσης και την διατύπωση μιας ισχυρότερης εκδοχής της. Βάσει της θεώρησης μιας απείρως διαιρετής κατανομής από την αυτή την σκοπιά, δημιουργούνται από θεωρητικής απόψεως, οι κατάλληλες προοπτικές για την απόδειξη της αντίστροφης πορείας, του γεγονότος δηλαδή σύμφωνα με το οποίο, από μία απείρως διαιρετή κατανομή δύναται η «κατασκευή» μιας ανέλιξης Lévy, η οποία υπόκειται στον ίδιο νόμο πιθανότητας.

Προτού γίνει η αυστηρή παρουσίαση της προηγούμενης θέσης με την μορφή θεωρήματος, γνωστή και ως τύπος των Lévy-Khintchine για ανελίξεις Lévy (*Lévy-Khintchine formula for Lévy processes*), τονίζεται για ακόμα μία φορά πως η οδός μέσω της οποίας επιτυγχάνεται κάτι τέτοιο, είναι ο τύπος των Lévy-Khintchine και η μορφή του αρνητικού λογάριθμου της χαρακτηριστικής συνάρτησης με την παρουσία της τριπλέτας (α,σ,Π). Χωρίς το εργαλείο αυτό, είναι αδύνατη η μαθηματική τεκμηρίωση και απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, ένα ακόμα γεγονός που καθιστά ανεκτίμητη την προσφορά του Paul Lévy στην προσπάθεια χαρακτηρισμού αυτών των στοχαστικών διαδικασιών.

➢ <u>Θεώρημα (Τύπος Lévy-Khintchine για Ανελίξεις Lévy)</u>:

Έστω $\alpha \in \Re$, $\sigma \in \Re_+$ και Π ένα μέτρο πιθανότητας με μάζα στο $\Re^*$ το οποίο ικανοποιεί την σχέση $\int_{\Re}\left(1 \wedge x^2\right)\Pi(dx) < \infty$. Η τριπλέτα (α,σ,Π) αυτή, ορίζει την ποσότητα

$$\Psi(t) = i\alpha t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int_{\Re}\left(1 - e^{itx} + itx\mathbf{1}_{(|x|<1)}\right)\Pi(dx) \ , \qquad \forall \ t \in \Re \, .$$

Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{P})$ στον οποίο ορίζεται μία στοχαστική ανέλιξη Lévy $\{X_t \ , \ t \in T\}$, της οποίας για κάθε συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t \in T$, ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής της συνάρτησης είναι η ποσότητα Ψ.

Η αυστηρή απόδειξη αυτού του θεωρήματος, αν και είναι πολύ διαφωτιστική σε ότι αφορά την γενικότερη δομή μιας ανέλιξης Lévy, δεν συμπεριλαμβάνεται αυτούσια στο περιεχόμενο της παρούσης εργασίας. Η πορεία που ακολουθείται για την τεκμηρίωσή του είναι πολύπλοκη και απαιτεί ιδιαίτερους μαθηματικούς χειρισμούς. Ωστόσο, μέσα από την ανάλυση η οποία παρουσιάζεται, επιτυγχάνεται η σκιαγράφηση των κυριότερων σημείων αυτής, παραλείποντας κάποια τεχνικά σημεία. Ο αναγνώστης που επιθυμεί μια γεύση της ολοκληρωμένης απόδειξης της παραπάνω πρότασης μπορεί να ανατρέξει μεταξύ άλλων, στο βιβλίο του Κυπριανού (2006).

Γίνεται πλέον σαφές ότι, από την στιγμή που είτε υπάρχει, είτε συμβαίνει, είτε παρατηρείται ένα τυχαίο γεγονός το οποίο υπόκειται σε έναν απείρως διαιρετό πιθανοθεωρητικό νόμο, είναι δυνατόν να προσδιοριστεί στοχαστικά (και όχι ντετερμινιστικά με ότι αυτό συνεπάγεται), η διαδικασία μέσω της οποίας αυτό δημιουργήθηκε. Βάσει του θεωρήματος το οποίο προηγήθηκε, είναι γνωστό πως αυτή η διαδικασία είναι μια στοχαστική ανέλιξη Lévy, έχει δηλαδή μια συγκεκριμένη συμπεριφορά και έναν ιδιόμορφο γενεσιουργό μηχανισμό ο οποίος ποικίλει ανάλογα με τον νομοτελειακό νόμο στον οποίο υπόκειται το εκάστοτε εξεταζόμενο φαινόμενο. Το σημαντικότερο σημείο αυτής της θέσης όπως διατυπώθηκε παραπάνω, είναι ότι παρέχει την δυνατότητα προσδιορισμού του μηχανισμού, του γενικού τρόπου δηλαδή με τον οποίο εξελίχθηκε το φαινόμενο έως την πραγματοποίηση του γεγονότος αυτού και συνεπώς την αποτύπωση ενός μονοπατιού του. Όπως θα φανεί στην συνέχεια, λόγω και μέσω της συγκεκριμένης μορφής με την οποία διατυπώθηκε η παραπάνω πρόταση, επιτυγχάνεται η αποκωδικοποίηση των ανελίξεων Lévy και κατ' επέκταση ο πλήρης χαρακτηρισμός και κατηγοριοποίηση ολόκληρης της κλάσης αυτών, με βάση τις τροχιές τους.

Για να γίνει όμως κάτι τέτοιο, πρέπει πρώτα η ποσότητα Ψ του τύπου των Lévy-Khintchine, ο αρνητικός λογάριθμος δηλαδή της χαρακτηριστικής συνάρτησης της τυχαίας μεταβλητής για την οποία γίνεται λόγος, να λάβει μια ελαφρώς διαφοροποιημένη έκφραση. Σύμφωνα με τον τύπο των Lévy-Khintchine, ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής συνάρτησης μιας τυχαίας μεταβλητής X με απείρως διαιρετή κατανομή έχει την μορφή:

$$\Psi(t) = i\alpha t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int_{\Re}\left(1 - e^{itx} + itx\mathbf{1}_{(|x|<1)}\right)\Pi(dx) , \quad \forall \ t \in \Re .$$

Είναι γνωστό ότι η δείκτρια συνάρτηση $\mathbf{1}_{(|x|<1)}$ μηδενίζεται για τιμές της μεταβλητής x εκτός της περιοχής $(-1,1)$ και παίρνει την τιμή 1 εντός αυτού του διαστήματος. Ισχύει δηλαδή πως,

$$\mathbf{1}_{(|x|<1)} = \begin{cases} 1 \quad , & \alpha\nu \ \text{-}1 < x < 1 \\ 0 \quad , & \alpha\nu \ x \le -1 \ \kappa\alpha\iota \ x \ge 1 \end{cases} .$$

Κατά συνέπεια, το ολοκλήρωμα της πιο πάνω έκφρασης γράφεται ως εξής:

$$\int_{\Re}\left(1 - e^{itx} + itx\mathbf{1}_{(|x|<1)}\right)\Pi(dx) = \int_{|x|\ge 1}\left(1 - e^{itx}\right)\Pi(dx) + \int_{0<|x|<1}\left(1 - e^{itx} + itx\right)\Pi(dx) ,$$

$\forall \ t \in \Re$.

Επιπλέον, με έναν ακόμα απλούστατο αλγεβρικό χειρισμό, το πρώτο εκ των δύο τελευταίων ολοκληρωμάτων, δύναται να γραφεί στην μορφή:

$$\int_{|x|\ge 1}\left(1 - e^{itx}\right)\Pi(dx) = \Pi\left(\Re \setminus (-1,1)\right)\int_{|x|\ge 1}\left(1 - e^{itx}\right)\frac{\Pi(dx)}{\Pi\left(\Re \setminus (-1,1)\right)} , \quad \forall \ t \in \Re$$

οπότε,

$$\int_{\Re}\left(1-e^{itx}+itx\mathbf{1}_{(|x|<1)}\right)\Pi(dx)=\Pi\left(\Re\setminus(-1,1)\right)\int_{|x|\geq 1}\left(1-e^{itx}\right)\frac{\Pi(dx)}{\Pi\left(\Re\setminus(-1,1)\right)}$$
$$+\int_{0<|x|<1}\left(1-e^{itx}+itx\right)\Pi(dx)\ , \qquad \forall\ t\in\Re$$

και συνεπώς ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής συνάρτησης μιας τυχαίας μεταβλητής X με απείρως διαιρετή κατανομή, αποκτά $\forall\ t\in\Re$ την τελική μορφή:

$$\Psi(t)=\left\{i\alpha t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2\right\}+$$
$$+\left\{\Pi\left(\Re\setminus(-1,1)\right)\int_{|x|\geq 1}\left(1-e^{itx}\right)\frac{\Pi(dx)}{\Pi\left(\Re\setminus(-1,1)\right)}\right\}+ \qquad (4.2)$$
$$+\left\{\int_{0<|x|<1}\left(1-e^{itx}+itx\right)\Pi(dx)\right\}\ ,$$

όπου $\alpha\in\Re$, $\sigma\in\Re_+$ και Π ένα μέτρο πιθανότητας με μάζα στο $\Re^*$ το οποίο ικανοποιεί την σχέση $\int_{\Re}\left(1\wedge x^2\right)\Pi(dx)<\infty$.

Για την μετέπειτα ευκολία στον χειρισμό και σχολιασμό της τελευταίας αυτής διατύπωσης, εισάγονται οι συμβολισμοί

$$\Psi^{(1)}\overset{\sigma\mu\beta}{=}\left\{i\alpha t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2\right\}\ ,\quad \Psi^{(2)}\overset{\sigma\mu\beta}{=}\left\{\Pi\left(\Re\setminus(-1,1)\right)\int_{|x|\geq 1}\left(1-e^{itx}\right)\frac{\Pi(dx)}{\Pi\left(\Re\setminus(-1,1)\right)}\right\}$$

$$\text{και}\quad \Psi^{(3)}\overset{\sigma\mu\beta}{=}\left\{\int_{0<|x|<1}\left(1-e^{itx}+itx\right)\Pi(dx)\right\}$$

και συνεπώς η σχέση (4.2) αποκτά την μορφή:

$$\Psi(t)=\Psi^{(1)}+\Psi^{(2)}+\Psi^{(3)}\ ,\qquad \forall\ t\in\Re \qquad (4.3)$$

Στο σημείο αυτό, είναι όλα έτοιμα για την έναρξη της ανάλυσης της πιο πάνω έκφρασης και την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την συμπεριφορά μιας ανέλιξης Lévy. Βάσει της τελευταίας έκφρασης, παρατηρείται ότι ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής συνάρτησης της τυχαίας μεταβλητής X με απείρως διαιρετή κατανομή, προκύπτει ως το άθροισμα τριών διαφορετικών ποσοτήτων $\Psi^{(1)}$, $\Psi^{(2)}$ *και* $\Psi^{(3)}$. Ο προσεχτικός αναγνώστης, θυμάται από την υποενότητα 4.2.3 (σχέση (4.3)) και μπορεί εύκολα να αναγνωρίσει πως, η ποσότητα $\Psi^{(1)}$ δεν είναι τίποτε άλλο από τον αρνητικό λογάριθμο της χαρακτηριστικής συνάρτησης μιας τυχαίας μεταβλητής $X^{(1)}$ η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή α και διακύμανση σ^2, $X^{(1)} \overset{d}{\sim} N\left(a,\sigma^2\right)$. Σύμφωνα με τα όσα είχαν ειπωθεί εκεί, η τυχαία μεταβλητή $X^{(1)}$ σχετίζεται άμεσα με μια κίνηση Brown με γραμμική τάση, δηλαδή $X^{(1)} = \left\{X_t^{(1)} : t \geq 0\right\}$ για συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t \geq 0$, όπου

$$X_t^{(1)} = \sigma B_t - at \ , \ \ t \geq 0$$

με $\alpha \in \Re$, $\sigma \in \Re_+$ και $\left\{B_t : t \geq 0\right\}$ η τυπική κίνηση Brown. Συνοψίζοντας τα προηγούμενα, σε μια γραμμική κίνηση Brown με γραμμική τάση, σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής της συνάρτησης προκύπτει ίσος με $\Psi^{(1)}$ ή διαφορετικά, η ποσότητα $\Psi^{(1)}$ είναι ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής συνάρτησης μιας γραμμικής κίνησης Brown με γραμμική τάση σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t \geq 0$.

Κοιτώντας ξανά την υποενότητα 4.2.2 αυτή τη φορά και πιο συγκεκριμένα την σχέση (4.3), διαπιστώνεται ότι η ποσότητα $\Psi^{(2)}$ αποτελεί τον αρνητικό λογάριθμο της χαρακτηριστικής συνάρτησης μιας τυχαίας μεταβλητής $X^{(2)}$ η οποία ακολουθεί την σύνθετη κατανομή Poisson με ρυθμό $\lambda = \Pi\left(\Re \backslash (-1,1)\right)$. Σύμφωνα με αυτή τη διαπίστωση, η τυχαία μεταβλητή $X^{(2)}$ συνδέεται με μία σύνθετη ανέλιξη Poisson, έπεται δηλαδή πως για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t \geq 0$, $X^{(2)} = \left\{X_t^{(2)} : t \geq 0\right\}$ όπου

$$X_t^{(2)} \ = \ \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i \ \ , \ \ t \geq 0$$

με $\left\{N_t \ , \ t \geq 0\right\}$ να συμβολίζεται προφανώς μια στοχαστική ανέλιξη Poisson με ρυθμό $\lambda = \Pi\left(\Re \backslash (-1,1)\right)$ και $\left\{\xi_i : i = 1,2,...\right\}$ μια ακολουθία ισόνομων και ανεξάρτητων, τόσο μεταξύ τους όσο και της N για οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t \geq 0$, τυχαίων μεταβλητών με κοινή συνάρτηση κατανομής

$$F(dx) = \frac{\Pi(dx)}{\Pi\left(\Re \backslash (-1,1)\right)} \text{ με μάζα στο σύνολο } \left\{x \ : \ |x| \geq 1\right\}.$$

Κατά τα προηγούμενα λοιπόν, φαίνεται ότι η ποσότητα $\Psi^{(2)}$ είναι ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής συνάρτησης μιας σύνθετης ανέλιξης Poisson για κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t \geq 0$.

Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να γίνει μια μικρή παρατήρηση ως προς την κατανομή F των iid τυχαίων μεταβλητών $\{\xi_i : i = 1,2,...\}$. Έχει επισημανθεί το γεγονός ότι, το μέτρο Lévy Π λαμβάνει πάντοτε μη αρνητικές τιμές και συνεπώς $\Pi\left(\Re \setminus (-1,1)\right) \in [0,\infty)$. Συμβαίνει όμως ο όρος αυτός, να αποτελεί τον παρανομαστή της συνάρτησης κατανομής F και να δημιουργείται πρόβλημα όταν αυτός λαμβάνει μηδενική τιμή. Στην περίπτωση λοιπόν όπου $\Pi\left(\Re \setminus (-1,1)\right) = 0$, υπάρχει πρόβλημα στον ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας $\left\{X_t^{(2)} : t \ge 0\right\}$ και αυτή πρέπει να θεωρείται ως μια στοχαστική διαδικασία ταυτοτικά ίση με την μηδενική. Ένας διαφορετικός τρόπος, έτσι ώστε να αντιληφθεί κάποιος για ποιο λόγο σε μια τέτοια περίπτωση η διαδικασία $\left\{X_t^{(2)} : t \ge 0\right\}$ ισούται ταυτοτικά με το μηδέν, είναι να διαπιστώσει πως όταν η ποσότητα $\Pi\left(\Re \setminus (-1,1)\right) \to 0$, η συνάρτηση

$$\frac{\Pi(dx)}{\Pi\left(\Re \setminus (-1,1)\right)} \to \infty$$

αλλά με πιο αργό ρυθμό, με συνέπεια ο δεύτερος όρος $\Psi^{(2)}$ του αθροίσματος Ψ στον τύπο των Lévy-Khintchine για ανελίξεις Lévy, να είναι μηδέν και να απουσιάζει.

Συνεχίζοντας την ανάλυση του τύπου των Lévy-Khintchine για ανελίξεις Lévy, η προσοχή εστιάζεται στον τρίτο όρο του αθροίσματος Ψ και στην ποσότητα $\Psi^{(3)}$. Η κατάσταση αναφορικά με αυτή, είναι λίγο πολυπλοκότερη σε σχέση με τις προηγούμενες δύο. Με την βοήθεια προτάσεων και λημμάτων από τα πεδία της Θεωρίας Μέτρου και της Συναρτησιακής Ανάλυσης, αποδεικνύεται ότι:

$$\Psi^{(3)} = \int_{0<|x|<1} \left(1 - e^{itx} + itx\right) \Pi(dx) =$$

$$= \sum_{n \ge 0} \left\{ \Pi\left(\left\{x \ : \ 2^{-(n-1)} \le |x| \le 2^{-n}\right\}\right) \int_{2^{-(n-1)} \le |x| \le 2^{-n}} \left(1 - e^{itx}\right) \frac{\Pi(dx)}{\Pi\left(\left\{x \ : \ 2^{-(n-1)} \le |x| \le 2^{-n}\right\}\right)} + \right.$$

$$\left. + it\Pi\left(\left\{x \ : \ 2^{-(n-1)} \le |x| \le 2^{-n}\right\}\right) \int_{2^{-(n-1)} \le |x| \le 2^{-n}} x \frac{\Pi(dx)}{\Pi\left(\left\{x \ : \ 2^{-(n-1)} \le |x| \le 2^{-n}\right\}\right)} \right\}$$

Η τελευταία αυτή σχέση, για συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t \ge 0$, αντιπροσωπεύει τον αρνητικό λογάριθμο της χαρακτηριστικής συνάρτησης ενός απείρου γινομένου ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες αποτελούν μια σύνθετη ανέλιξη Poisson με γραμμική τάση, με διαφορετικό η κάθε μία ρυθμό $\lambda_n = \Pi\left(\left\{x \ : \ 2^{-(n-1)} \leq |x| \leq 2^{-n}\right\}\right)$, $n = 0,1,2,...$ και επίσης διαφορετική η κάθε μία συνάρτηση κατανομής

$$F_n(dx) = \frac{\Pi(dx)}{\Pi\left(\left\{x \ : \ 2^{-(n-1)} \leq |x| \leq 2^{-n}\right\}\right)} \quad , \quad n = 0,1,2,...$$

Και σε αυτή την περίπτωση, όταν ο ρυθμός της n-οστής σύνθετης ανέλιξης Poisson είναι μηδέν, δηλαδή $\Pi\left(\left\{x \ : \ 2^{-(n-1)} \leq |x| \leq 2^{-n}\right\}\right) = 0$, οι δυο όροι του n-οστού όρου του παραπάνω αθροίσματος παραλείπονται. Για την πλήρη κατανόηση της συμπεριφοράς αυτού του απείρου αθροίσματος, απαιτούνται γνώσεις που αφορούν τόσο σε Poisson μέτρα πιθανότητας (*Poisson random measures*) όσο και σε συγκεκριμένες κλάσεις martingale διαδικασιών, αυτές των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων (*square integrable martingales*) και για τον λόγο αυτό η όποια τεχνική αναφορά σταματάει εδώ. Παρόλα αυτά, το κύριο συμπέρασμα της όλης αυτής διαδικασίας είναι το γεγονός ότι, για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t \geq 0$, η ποσότητα $\Psi^{(3)}$ αποτελεί τον αρνητικό λογάριθμο της χαρακτηριστικής συνάρτησης μιας στοχαστικής διαδικασίας η οποία είναι το άπειρο άθροισμα ανεξάρτητων σύνθετων ανελίξεων Poisson με γραμμική τάση.

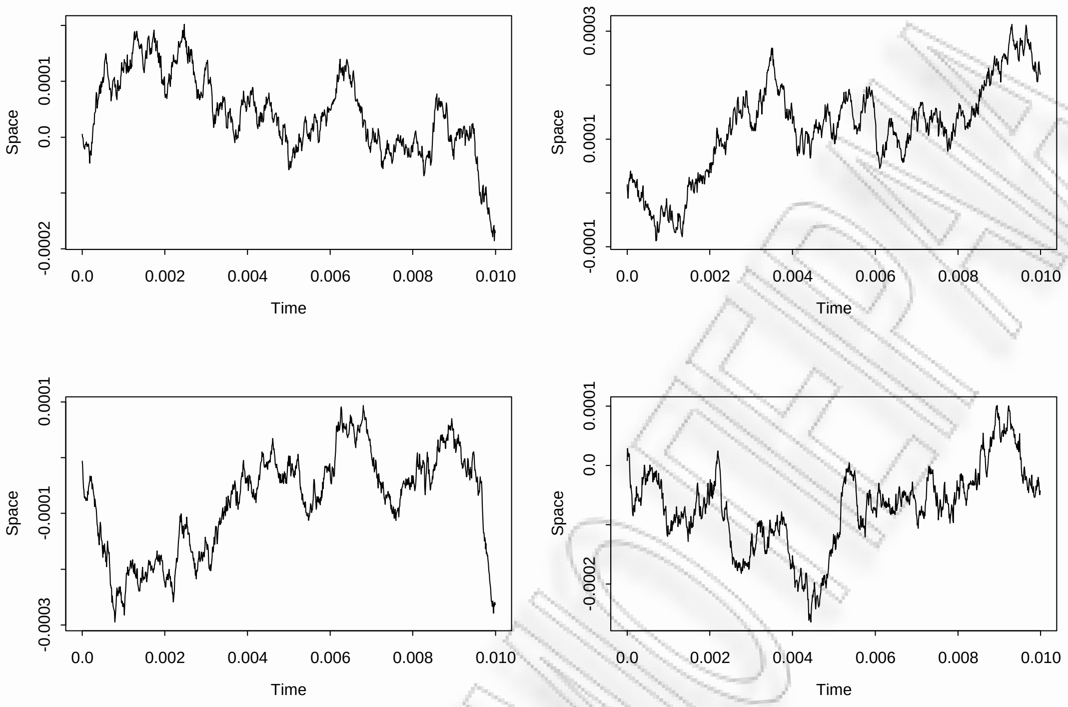
Με γνώμονα τα παραπάνω, είναι εμφανές πως οι παράμετροι α και σ της τριπλέτας (α, σ, Π) του τύπου των Lévy-Khintchine, αφορούν στην κίνηση Brown με γραμμική τάση. Πιο ειδικά, η παράμετρος σ είναι εκείνη η οποία συνδέεται με την τυπική κίνηση Brown $\{B_t : t \geq 0\}$ και η παράμετρος α καθορίζει την γραμμική τάση που εφαρμόζεται σε αυτή. Αντίστοιχα, η μετρική συνολοσυνάρτηση Π αφορά στις υπόλοιπες δύο ανελίξεις, ενώ όλο το ενδιαφέρον αυτή τη στιγμή, επικεντρώνεται σε αυτές τις στοχαστικές διαδικασίες με τις οποίες σχετίζονται οι ποσότητες $\Psi^{(1)}$, $\Psi^{(2)}$, $\Psi^{(3)}$ και στα κοινά τους χαρακτηριστικά.

Διαπιστώθηκε ότι η ποσότητα $\Psi^{(1)}$ είναι ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής συνάρτησης μιας γραμμικής κίνησης Brown με γραμμική τάση ενώ η $\Psi^{(2)}$ αποτελεί με την σειρά της τον αρνητικό λογάριθμο της χαρακτηριστικής συνάρτησης μιας σύνθετης ανέλιξης Poisson. Και οι δύο αυτές στοχαστικές διαδικασίες όπως έχει επισημανθεί και εκτενώς αναλυθεί έως τώρα, ανήκουν στην οικογένεια των ανελίξεων Lévy. Εύλογα και πολύ ορθά μπορεί κανείς να εικάσει πως, και η στοχαστική διαδικασία η οποία συνδέεται με τον τρίτο όρο $\Psi^{(3)}$ της Lévy-Khintchine φόρμουλας, είναι και αυτή μια ανέλιξη Lévy. Πράγματι, το συμπέρασμα αυτό, εύκολα εξάγεται αν κάποιος αναλογιστεί την ιδιότητα που διατηρούν οι ανελίξεις αυτές και η οποία παρουσιάστηκε στην αρχή του κεφαλαίου. Σύμφωνα με αυτή, το άθροισμα ανελίξεων Lévy διαμορφώνει μια νέα στοχαστική ανέλιξη που ανήκει στην ίδια κλάση. Επειδή λοιπόν ο ντετερμινιστικός όρος, η τάση δηλαδή που εφαρμόζεται στην σύνθετη ανέλιξη Poisson, δεν αλλοιώνει τα χαρακτηριστικά της τελευταίας και παραμένει ανέλιξη Lévy, έπεται πως και το άπειρο άθροισμα ανεξάρτητων σύνθετων ανελίξεων Poisson με γραμμική τάση αποτελεί ανέλιξη Lévy. Κατά συμπέρασμα, ο όρος $\Psi^{(3)}$, σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t \geq 0$, είναι ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής συνάρτησης μιας πολύ ειδικής στοχαστικής ανέλιξης Lévy. Αν λοιπόν $\left\{X_t^{(1)}\ ,\ t \geq 0\right\}$ είναι η ανέλιξη Lévy που σχετίζεται με την ποσότητα $\Psi^{(1)}$, $\left\{X_t^{(2)}\ ,\ t \geq 0\right\}$ η ανέλιξη Lévy που σχετίζεται με την ποσότητα $\Psi^{(2)}$ και $\left\{X_t^{(3)}\ ,\ t \geq 0\right\}$ η ανέλιξη Lévy που σχετίζεται με την ποσότητα $\Psi^{(3)}$, τότε σύμφωνα με την ίδια ιδιότητα που χρησιμοποιήθηκε και αμέσως προηγούμενα, η στοχαστική διαδικασία $\left\{X_t\ ,\ t \geq 0\right\}$ η οποία προκύπτει ως το άθροισμα των τριών αυτών διαδικασιών

$$X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)}\ , \quad \forall\ t \geq 0$$

είναι και αυτή μια ανέλιξη Lévy. Απόρροια της παραπάνω θέσης, είναι το γεγονός ότι για συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t \geq 0$, η ολική ποσότητα Ψ αντιστοιχεί στον αρνητικό λογάριθμο της χαρακτηριστικής εξίσωσης μιας νέας ανέλιξης Lévy $\left\{X_t\ ,\ t \geq 0\right\}$, ένα γεγονός το οποίο επαληθεύει την διατυπωθείσα των Lévy και Khintchine θέση.

Ο τελευταίος ισχυρισμός ολοκληρώνει την απόδειξη του τύπου των Lévy-Khintchine για ανελίξεις Lévy. Ωστόσο, η συλλογιστική πορεία που ακολουθήθηκε παραπάνω, εκτός του ότι αποδεικνύει όπως μόλις ειπώθηκε, πως δοθείσης μιας απείρως διαιρετής κατανομής δύναται να «κατασκευασθεί» μια στοχαστική ανέλιξη Lévy, καταφέρνει να στοιχειοθετήσει ολόκληρη την κλάση των ανελίξεων αυτών. Μέσω αυτής, επιτυγχάνεται ο διαχωρισμός και ο χαρακτηρισμός μιας τέτοιας ανέλιξης ως το άθροισμα τριών διαφορετικών, διακεκριμένων και απλούστερων στοχαστικών διαδικασιών, ανοίγοντας έτσι τον δρόμο για την καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση της συμπεριφοράς τους. Στο πολλαπλό διάγραμμα 4.2 της επόμενης σελίδας, παρουσιάζονται τέσσερα διαφορετικά μονοπάτια στοχαστικών ανελίξεων Lévy, οι



Διάγραμμα 4.2: Μονοπάτια Ανελίξεων Lévy ως το Άθροισμα Δύο Δομικών Λίθων με Διαφορετικές Τιμές Παραμέτρων

οποίες χάριν απλότητας, προκύπτουν ως το άθροισμα μόνο δύο εκ των τριών δομικών λίθων μιας τέτοιας διαδικασίας, μιας γραμμικής κίνησης Brown στην οποία εφαρμόζεται γραμμική τάση και μιας σύνθετης ανέλιξης Poisson, με διαφορετικές κάθε φορά τιμές των παραμέτρων τους. Επιπρόσθετα, σχετικά με την σύνθετη ανέλιξη Poisson σημειώνεται πως μεταβάλλεται και η κατανομή της ακολουθίας των ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $\{X_n \ , \ n=1,2,...\}$ στα πρώτα δύο διαγράμματα είναι η εκθετική ενώ στα επόμενα δύο η τυπική κανονική. Υπενθυμίζεται ότι οι κώδικες με τους οποίους δημιουργήθηκαν τα παραπάνω μονοπάτια, όπως άλλωστε και οι κώδικες όλων των στοχαστικών διαδικασιών οι τροχιές των οποίων παρουσιάζονται σε αυτή την διπλωματική εργασία, παρατίθενται στους πίνακες του Παραρτήματος Γ.

Η διάκριση των ανελίξεων Lévy στα δομικά συστατικά τους, οφείλεται στο έργο των Lévy το 1954 και Itô το 1942 και για τον λόγο αυτό είναι γνωστή ως Lévy-Itô διαχώριση (*Lévy-Itô decomposition*). Συνοψίζοντας τα παραπάνω, η Lévy-Itô διαχώριση με την μορφή θεωρήματος έχει ως εξής:

➢ Θεώρημα (Lévy-Itô Διαχώριση):

Δοσμένου οποιουδήποτε $\alpha \in \Re$, $\sigma \in \Re_+$ και μέτρου πιθανότητας Π με μάζα στο $\Re^*$ που να ικανοποιεί την σχέση $\int_{\Re}\left(1 \wedge x^2\right)\Pi\left(dx\right) < \infty$, υπάρχει ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{P})$ στον οποίο υπάρχουν τρεις ανεξάρτητες στοχαστικές ανελίξεις Lévy $\left\{X_t^{(1)}, X_t^{(2)} \; \kappa\alpha\iota \; X_t^{(3)} \; , \; t \geq 0\right\}$, όπου $\left\{X_t^{(1)} \; , \; t \geq 0\right\}$ είναι μια κίνηση Brown με γραμμική τάση, $\left\{X_t^{(2)} \; , \; t \geq 0\right\}$ είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson και $\left\{X_t^{(3)} \; , \; t \geq 0\right\}$ μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale διαδικασία στην οποία, σε πεπερασμένο χρόνο, πραγματοποιούνται με πιθανότητα 1 πεπερασμένα, μικρότερα της μονάδας άλματα. Σε αυτόν τον χώρο πιθανότητας, το άθροισμα τους $X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)} \overset{\sigma\mu\beta}{=} X_t$, $\forall \; t \geq 0$, ορίζει μια νέα στοχαστική ανέλιξη Lévy $\left\{X_t \; , \; t \geq 0\right\}$, της οποίας για συγκεκριμένη χρονική στιγμή, ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής της εξίσωσης δίνεται από την σχέση:

$$\Psi\left(t\right) = i\alpha t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int_{\Re}\left(1 - e^{itx} + itx\mathbf{1}_{\left(|x|<1\right)}\right)\Pi\left(dx\right) \; , \qquad \forall \;\; t \in \Re \, .$$

Αναφέρθηκε και παραπάνω πως μεταξύ άλλων, η κύρια συνεισφορά της Lévy-Itô διαχώρισης στην μελέτη της κλάσης των ανελίξεων Lévy, έγκειται στο γεγονός ότι αναλύει κάθε τέτοια ανέλιξη σε επιμέρους κομμάτια. Μέσω αυτής παρέχεται η δυνατότητα θεώρησης κάθε ανέλιξης Lévy ως το ανεξάρτητο άθροισμα μιας κίνησης Brown με γραμμική τάση και ενός αριθμήσιμου αριθμού ανεξάρτητων σύνθετων ανελίξεων Poisson με διαφορετικούς ρυθμούς άλματος και γραμμικές τάσεις. Πιο συγκεκριμένα, κάθε τέτοια διαδικασία διαχωρίζεται σε τρεις στοχαστικές ανελίξεις Lévy που αποτελούν και τα δομικά συστατικά της. Οι δομικοί αυτοί λίθοι, ή τουλάχιστον οι δύο από τους τρεις αφού η τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale διαδικασία είναι κάπως πολύπλοκη στην ανάλυσή της, είναι απλούστερες στοχαστικές διαδικασίες, με γνωστές τροχιές βάσει των οποίων δύναται να εξαχθούν γενικότερα αποτελέσματα σχετικά με τα μονοπάτια και την συμπεριφορά μιας ανέλιξης Lévy.

4.4 Οι Τροχιές των Ανελίξεων Lévy

Προτού ξεκινήσει μια λεπτομερής προσπάθεια διερεύνησης της φύσης των μονοπατιών μιας ανέλιξης Lévy, με βάση τα μέχρι τώρα συμπεράσματα θα μπορούσε να διατυπωθεί η γενική άποψη πως, σε πεπερασμένα χρονικά διαστήματα αναμένονται αποκλίνουσες τροχιές, στις οποίες για μικρές χρονικές μεταβολές παρατηρείται ένας άπειρος αλλά αριθμήσιμος αριθμός αλμάτων μικρότερης από αυτές τις μεταβολές έντασης και ένα σχεδόν σίγουρα πεπερασμένο πλήθος αλμάτων μεγαλύτερης εντάσεως. Είναι φανερό πως κάθε ένα από τα χαρακτηριστικά των τροχιών τα οποία μόλις αναφέρθηκαν, οφείλεται σε κάθε ένα από τα τρία συστατικά μιας ανέλιξης Lévy ή ορθότερα, οι τρεις δομικοί λίθοι αυτών των διαδικασιών είναι αυτοί οι οποίοι καθορίζουν, με την παρουσία τους ή μη, την συμπεριφορά της ανέλιξης. Σε γενικές γραμμές, το άπειρο άθροισμα ανεξάρτητων σύνθετων ανελίξεων Poisson με γραμμική τάση καθορίζει το πλήθος των μικρής έντασης εξισορροπημένων αλμάτων, η σύνθετη ανέλιξη Poisson καθορίζει το πλήθος των μεγαλύτερης εντάσεως αλμάτων ενώ η κίνηση Brown με γραμμική τάση αποτελεί, μαζί με το άπειρο άθροισμα ανεξάρτητων σύνθετων ανελίξεων Poisson με γραμμική τάση, τον ρυθμιστικό παράγοντα της συγκλίνουσας ή αποκλίνουσας συμπεριφοράς της στοχαστικής διαδικασίας.

Πράγματι, παρατηρώντας ξανά το διάγραμμα 2.4 του δευτέρου κεφαλαίου στο οποίο απεικονίζεται ένα μονοπάτι της κίνησης Brown, είναι προφανής η απουσία οποιουδήποτε άλματος (είναι γνωστό άλλωστε πως τα μονοπάτια της κίνησης Brown είναι συνεχείς ως προς τον χρόνο συναρτήσεις με πιθανότητα 1). Το αντίκτυπο του γεγονότος αυτού στον τύπο των Lévy-Khintchine, είναι ο μηδενισμός της παραμέτρου Π (ουσιαστικά πρόκειται για ταύτιση με την μηδενική συνάρτηση αφού η Π είναι μέτρο πιθανότητας) στην τριπλέτα (α,σ,Π), όπως διαπιστώθηκε και αναλυτικά στην υποενότητα 4.2.3. Όμοια, στην περίπτωση της σύνθετης ανέλιξης Poisson, είναι αυτονόητη η απουσία των δύο άλλων δομικών συστατικών μιας ανέλιξης Lévy, με αποτέλεσμα τον μηδενισμό της παραμέτρου σ. Σημειώνεται για ακόμα μία φορά δε, ότι η παράμετρος α σχετίζεται με την γραμμική ως προς τον χρόνο τάση που εφαρμόζεται στην κίνηση Brown και για αυτό τον λόγο λαμβάνει την μη μηδενική τιμή που παρουσιάστηκε στην υποενότητα 4.2.2. Στις σελίδες που ακολουθούν, ερευνάται και σχολιάζεται διεξοδικότερα η επίδραση του κάθε παράγοντα ξεχωριστά και βάσει της επίδρασής τους αυτής, προσδιορίζονται οι διάφορες υποκλάσεις στοχαστικών ανελίξεων Lévy που δημιουργούνται.

Σύμφωνα πάντα με την Lévy-Itô διαχώριση, ο πρώτος δομικός λίθος μιας ανέλιξης Lévy είναι μια γραμμική κίνηση Brown στην οποία εφαρμόζεται γραμμική τάση, πρόκειται δηλαδή για την διαδικασία $X_t^{(1)} = \sigma B_t - at$, $t \geq 0$ με $\alpha \in \Re$, $\sigma \in \Re_+$ και $\{B_t : t \geq 0\}$ την τυπική κίνηση Brown. Προφανώς, η παρουσία αυτής της ανέλιξης στα δομικά συστατικά μιας ανέλιξης Lévy, δηλώνει σαφέστατα μία εν γένει αποκλίνουσα συμπεριφορά. Για τον δεύτερο όρο, την σύνθετη δηλαδή ανέλιξη Poisson $X_t^{(2)} = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i$, $t \geq 0$, είναι ήδη γνωστό από το δεύτερο κιόλας κεφάλαιο πως έχει φραγμένες μεταβολές. Αναφορικά με την τρίτη στοχαστική ανέλιξη $\{X_t^{(3)} , t \geq 0\}$, τον όρο δηλαδή που ευθύνεται για τα παρατηρούμενα μικρά εξισορροπημένα άλματα, αποδεικνύεται ότι η τροχιά τους δεν αποκλίνει κατά την περίπτωση που ικανοποιείται η σχέση $\int_{0<|x|<1} (1 \wedge |x|) \Pi(dx) < \infty$. Η σχέση αυτή, λαμβάνοντας υπόψη την γενικότερη συνθήκη του χαρακτηριστικού μέτρου Lévy στην Lévy-Khintchine φόρμουλα, $\int_{\Re} (1 \wedge x^2) \Pi(dx) < \infty$, παίρνει την μορφή $\int_{\Re} (1 \wedge |x|) \Pi(dx) < \infty$.

Σε αυτό το σημείο, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην μεταβλητότητα των μονοπατιών των ανελίξεων Lévy. Αποτελεί γεγονός, ότι η μελέτη και ερμηνεία στοχαστικών διαδικασιών ευνοούνται από την σύγκλισή τους ενώ τυχούσες αποκλίνουσες συμπεριφορές δυσχεραίνουν κατά πολύ τον χειρισμό τους και συνεπώς είναι επιτακτική η ανάγκη εξεύρεσης κάποιον συνθηκών που να διασφαλίζουν κάτι τέτοιο. Σύμφωνα λοιπόν με τα όσα παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, διατυπώνεται με την μορφή λήμματος η εξής πολύ σημαντική παρατήρηση.

➢ <u>Λήμμα 4.4.1</u>:

Μια στοχαστική ανέλιξη Lévy της οποίας, για κάθε συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t \geq 0$, ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής της εξίσωσης που ανταποκρίνεται στην τριπλέτα (α, σ, Π) της Lévy-Khintchine φόρμουλας, έχει μονοπάτια φραγμένης κύμανσης αν και μόνο αν

$$\sigma = 0 \text{ και } \int_{\Re} (1 \wedge |x|) \Pi(dx) < \infty .$$

Συνεχίζοντας την ανάλυση αυτή, σημειώνεται ότι λόγω της σύγκλισης του πιο πάνω ολοκληρώματος, η ποσότητα Ψ της Lévy-Khintchine φόρμουλας για οποιαδήποτε στοχαστική ανέλιξη Lévy δύναται να πάρει την μορφή:

$$\Psi(t) = -idt + \int_{\Re}\left(1-e^{itx}\right)\Pi(dx) \ , \qquad \forall \ t \in \Re$$

με την σταθερά $d \in \Re$ να δηλώνει την σχέση μεταξύ των α και Π της τριπλέτας (α, σ, Π) μέσω της σχέσης:

$$d = -\left(\alpha + \int_{|x|<1} x\Pi(dx)\right).$$

Από αυτή την μορφή της ποσότητας Ψ και τα όσα έχουν ειπωθεί στην υποενότητα 5.1.2, πρέπει να αναγνωριστεί πως κατά την περίπτωση όπου μια στοχαστική διαδικασία είναι η σύνθετη ανέλιξη Poisson στην οποία εφαρμόζεται γραμμική τάση, πρόκειται για τον αρνητικό λογάριθμο της χαρακτηριστικής της συνάρτησης. Επιπλέον, η θεωρία μέτρων Poisson επιβεβαιώνει και τον αντίστροφο ισχυρισμό, το γεγονός δηλαδή ότι, δεδομένου πως στην τριπλέτα (α, σ, Π) της Lévy-Khintchine φόρμουλας, η παράμετρος $a = 0$ και το χαρακτηριστικό μέτρο Lévy Π έχει πεπερασμένη μάζα, η σχετική με αυτή την ποσότητα στοχαστική διαδικασία είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson με γραμμική τάση d. Ως αποτέλεσμα αυτού, παράγεται η επόμενη πρόταση.

➢ Λήμμα 4.4.2:

Μια στοχαστική ανέλιξη Lévy είναι σύνθετη ανέλιξη Poisson με γραμμική τάση αν και μόνο αν

$$\sigma = 0 \text{ και } \Pi(\Re) < \infty .$$

Κλείνοντας τον σχολιασμό περί των σύνθετων ανελίξεων Poisson με γραμμική τάση, σημειώνεται ότι, η σταθερά $d \in \Re$, αναφέρεται ως τάση μόνο κατά την περίπτωση φραγμένων στοχαστικών διαδικασιών. Επίσης, οι στοχαστικές διαδικασίες των οποίων τα μονοπάτια φράσσονται αλλά δεν είναι σύνθετες Poisson με γραμμική τάση, είναι γνωστές ως γενικευμένες σύνθετες ανελίξεις Poisson με γραμμική τάση (*generalized compound Poisson processes with drift*).

Εκτός όμως από την συγκλίνουσα ή μη συμπεριφορά των τροχιών που σχηματίζουν οι ανελίξεις Lévy, εξαιρετικό ενδιαφέρον παρουσιάζει και η μονοτονία τους. Βάσει του έργου των Lévy και Khintchine που παρουσιάστηκε στις αρχές του κεφαλαίου αυτού και το οποίο έχει συνεισφέρει τα μέγιστα στην μέχρι τώρα ανάλυση, παρέχεται η δυνατότητα μελέτης και της αύξουσας ή φθίνουσας ως προς το χρόνο συμπεριφοράς των στοχαστικών ανελίξεων Lévy. Για τα ποικίλα πεδία επιστημών τα οποία χρησιμοποιούν στα μοντέλα τους τέτοιες στοχαστικές διαδικασίες, είναι πολύ χρήσιμη η εξαγωγή κάποιων συνθηκών που να διασφαλίζουν την μη μεταβαλλόμενη μονοτονία των ανελίξεων αυτών, τις σταθερά δηλαδή αύξουσες ή φθίνουσες τροχιές τους καθ' όλη την περίοδο εξέλιξής τους στον χρόνο.

Από τον αναλυτικό σχολιασμό της τριπλέτας (α,σ,Π) του τύπου των Lévy-Khintchine καθώς και της Lévy-Itô διαχώρισης, είναι πλέον σαφές πως η μετρική, του χώρου στον οποίο λαμβάνει χώρα μια ανέλιξη Lévy, συνάρτηση Π, καθορίζει με την παρουσία της τα άλματα τα οποία παρατηρούνται στις τροχιές της. Αποδεικνύεται ότι αν το χαρακτηριστικό μέτρο Π έχει την ιδιότητα $\Pi(-\infty,0)=0$, τότε οι τροχιές της αντίστοιχης στοχαστικής διαδικασίας παρουσιάζουν μη-αρνητικά άλματα. Με την επιπλέον ιδιότητα $\int_{(0,\infty)}(1\wedge x)\Pi(dx)<\infty$, εξασφαλίζεται η σύγκλιση του άπειρου αθροίσματος των ανεξάρτητων σύνθετων ανελίξεων Lévy, του τρίτου δηλαδή όρου της Lévy-Itô διαχώρισης, και η γενικότερη πλέον συμπεριφορά της ανέλιξης, καθορίζεται αποκλειστικά από την παρουσία της γραμμικής κίνησης Brown. Με την προϋπόθεση λοιπόν ότι, $\sigma=0$, εξασφαλίζεται η φραγμένη μεταβλητότητα της ανέλιξης συνολικά, ενώ η ποσότητα Ψ της Lévy-Khintchine φόρμουλας για την συγκεκριμένη ανέλιξη Lévy, παίρνει την μορφή

$$\Psi(t)=-idt+\int_{(0,\infty)}\left(1-e^{itx}\right)\Pi(dx)\ , \qquad \forall\ t\in\Re .$$

Και σε αυτή την περίπτωση η σταθερά $d\in\Re$ που δηλώνει την σχέση μεταξύ των α και Π της τριπλέτας (α,σ,Π), προκύπτει κατ' αντίστοιχο τρόπο ίση με $d=-\left(\alpha+\int_{0<x<1}x\Pi(dx)\right)$. Αν επιπλέον $d\geq 0$, γίνεται άμεσα αντιληπτό πως οι τροχιές της ανέλιξης είναι αύξουσες συναρτήσεις του χρόνου. Όλες αυτές οι συνθήκες λοιπόν, «συνθέτουν» μια νέα υποκλάση στοχαστικών ανελίξεων Lévy με φραγμένη μεταβλητότητα και αύξουσες τροχιές, υπό την ονομασία ***subordinators***. Τα subordinators αποτελούν ένα πολύ σημαντικό σύνολο στοχαστικών διαδικασιών με πολλές εφαρμογές σε πολλά πεδία επιστημών. Αναφορικά με την εφαρμογή τους στην χρηματοοικονομία, χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση της αξίας χρεογράφων και κάποιες από αυτές θα αποτελέσουν αντικείμενο συζήτησης του επομένου κεφαλαίου, δίνοντας για αυτές περισσότερες πληροφορίες. Όλα τα παραπάνω, διαμορφώνουν τον ορισμό για την υποκλάση αυτή, σύμφωνα με τον οποίο:

➢ <u>Ορισμός 4.4.1</u>:

Μια στοχαστική ανέλιξη Lévy καλείται subordinator αν και μόνο αν $\Pi(-\infty,0)=0$, $\int_{(0,\infty)}(1\wedge x)\Pi(dx)<\infty$, $\sigma=0$ και $d=-\left(\alpha+\int_{0<x<1}x\Pi(dx)\right)\geq 0$.

Πλησιάζοντας στο τέλος το σχολιασμού των δυνατών μονοπατιών μιας ανέλιξης Lévy και την δημιουργία βάσει αυτών ξεχωριστών υποκλάσεων, αναφέρεται ως τελευταία υποοικογένεια εκείνη των μονόπλευρα φασματικών ανελίξεων Lévy (*spectrally one-sided Lévy processes*). Πρόκειται για στοχαστικές διαδικασίες στα μονοπάτια των οποίων παρατηρούνται μόνο θετικά ή μόνο αρνητικά άλματα χωρίς αυτό βέβαια να σημαίνει κάτι για την μονοτονία τους. Αναφέρθηκε παραπάνω πως κατά την περίπτωση όπου $\Pi(-\infty,0)=0$, οι τροχιές της αντίστοιχης στοχαστικής διαδικασίας παρουσιάζουν αποκλειστικά μη-αρνητικά άλματα. Όταν λοιπόν $\Pi(-\infty,0)=0$ και η εν λόγω στοχαστικές διαδικασίες όμως δεν είναι subordinators όπως παραπάνω, γίνεται αναφορά σε αυτές ως φασματικά θετικές ανελίξεις Lévy (*spectrally positive Lévy processes*). Φασματικά αρνητικές (*spectrally negative*), θεωρούνται εκείνες οι ανελίξεις των οποίων οι αντίθετες στοχαστικές διαδικασίες είναι φασματικά θετικές ενώ τα δύο αυτά σύνολα ανελίξεων Lévy, απαρτίζουν τις μονόπλευρα φασματικές στοχαστικές ανελίξεις Lévy για τις οποίες έγινε λόγος στην αρχή της παραγράφου. Ως τελευταίο σχόλιο, αφήνεται για ακόμα μία φορά το γεγονός πως η πραγματοποίηση μη αρνητικών αλμάτων δεν επάγει κατ' ανάγκη αύξουσα τροχιά της ανέλιξης Lévy, αφού καίριας σημασίας παράγοντα αποτελεί η παρουσία ή μη της κίνησης Brown καθώς και το πρόσημο του συντελεστή της γραμμικής τάσης η οποία εφαρμόζεται στην ανέλιξη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Μετά τον αυστηρό ορισμό και την όσο δυνατόν λεπτομερέστερη παρουσίαση της γενικότερης συμπεριφοράς της οικογένειας των στοχαστικών ανελίξεων Lévy, έρχεται η στιγμή της σύνδεση αυτών των ανελίξεων με το πεδίο της χρηματοοικονομίας. Στο παρόν κεφάλαιο, προσδιορίζεται ο χώρος μέσα στον οποίο αξιοποιούνται οι ιδιότητες της οικογένειας και διασαφηνίζεται ο τρόπος με τον οποίο οι ανελίξεις Lévy υπηρετούν τις ανάγκες της Χρηματοοικονομικής Θεωρίας, στα πλαίσια της τιμολόγησης παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Σκοπός των ανελίξεων Lévy είναι η αποτύπωση του μηχανισμού μέσω του οποίου διαμορφώνονται τα επίπεδα τιμών των χρεογράφων στις χρηματοοικονομικές αγορές και εν συνεχεία, βάσει αυτής, η τιμολόγηση παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων.

Αρχικά λοιπόν, αντλώντας πληροφορίες από το βιβλίο "Options, Futures and Other Derivatives" του John C. Hull, πραγματοποιείται μία πρώτη γνωριμία με αυτά τα χρηματοοικονομικά προϊόντα στα οποία οι ανελίξεις Lévy καλούνται να αποδώσουν αρχική τιμή και συνάμα, σκιαγραφείται το γενικότερο θεωρητικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο λαμβάνει χώρα μια τέτοια διαδικασία. Από την ίδια πηγή, παρουσιάζεται το ισχυρότερο υπόδειγμα περιγραφής της αγοράς, το περίφημο Υπόδειγμα των Black & Scholes και αποτυπώνονται οι βασικές του αδυναμίες στις οποίες δίνει απάντηση η δυναμική των ανελίξεων Lévy. Στην συνέχεια, παρουσιάζονται οι Lévy αγορές, όπου πλέον οι τιμές των χρεογράφων καθορίζονται βάσει στοχαστικών διαδικασιών Lévy και όχι της γεωμετρικής κίνησης Brown που υπαγορεύει το Black & Scholes υπόδειγμα. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζονται δύο γενικές μέθοδοι αξιοποίησης της οικογένειας των ανελίξεων Lévy, οι οποίες κατορθώνουν την βελτίωση της προσαρμογής του Black & Scholes υποδείγματος στις πραγματικές τιμές της αγοράς. Τέλος, στις δύο ενότητες που ολοκληρώνουν το κεφάλαιο αυτό, πραγματοποιείται η αναλυτική παρουσίαση δύο συγκεκριμένων υποδειγμάτων γνωστά ως VG και BNS Gamma-OU Υποδείγματα, με την χρήση των οποίων υλοποιείται η εφαρμογή της παρούσης εργασίας, η τιμολόγηση δηλαδή εξωτικών δικαιωμάτων με την μέθοδο της Monte Carlo προσομοίωσης.

5.1 Παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα

Η άνθιση των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων τα τελευταία είκοσι πέντε χρόνια και η μεγάλη απήχησή τους στο επενδυτικό κοινό, αποτελούν παράγοντες οι οποίοι καθιστούν αυτά τα προϊόντα σημαντικές μονάδες στην σύγχρονη χρηματοοικονομία. Πρόκειται ουσιαστικά για συμβόλαια μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων μερών που αφορούν στην αγορά ή πώληση πρωτογενών προϊόντων. Οι αντισυμβαλλόμενοι, συμφωνούν έναντι καθορισμένης τιμής K και εντός ορισμένου χρονικού ορίζοντα που αποτελεί τον χρόνο ωρίμανσης T του συμβολαίου, την αγορά ή την πώληση αυτών των προϊόντων. Τα αντισυμβαλλόμενα μέρη μεταξύ των οποίων συνάπτεται η συμφωνία, μπορεί να είναι χρηματοοικονομικοί οργανισμοί, πιστωτικά ιδρύματα, ακόμα και απλοί επενδυτές ενώ τα πρωτογενή προϊόντα πάνω στα οποία δημιουργούνται αυτού του είδους τα συμβόλαια, μπορεί να είναι χρεόγραφα, μετοχές, εμπορεύματα κ.ά. Τα τελευταία χρόνια βέβαια, η ανάγκη διαχείρισης πάσης φύσεως κινδύνου, οδήγησε στην επέκταση των συμβολαίων αυτών και στην δημιουργία νέων παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, όπως για παράδειγμα επί της ισοτιμίας νομισματικών μονάδων, παράγωγα καιρού, ηλεκτρικού ρεύματος κ.ο.κ.

Αμέσως παρακάτω, γίνεται η παρουσίαση των σημαντικότερων ίσως τέτοιων προϊόντων, διασαφηνίζοντας για κάθε ένα από αυτά το περιεχόμενό τους.

Προθεσμιακό Συμβόλαιο (*Forward Contract*)

Τα δύο αντισυμβαλλόμενα μέρη, συμφωνούν στον χρόνο ωρίμανσης του συμβολαίου T την υποχρεωτική αγοροπωλησία του πρωτογενούς προϊόντος, σε προκαθορισμένη τιμή K.

Στο προθεσμιακό συμβόλαιο, οι αντισυμβαλλόμενοι διατηρούν την υποχρέωση για αγορά ή πώληση του πρωτογενούς προϊόντος στον χρόνο ωρίμανσης. Ο ένας από τους δύο, έχει θετική θέση στο συμβόλαιο (*long position*) και υποχρεούται να αγοράσει το υποκείμενο προϊόν στο χρόνο ωρίμανσης, στην προκαθορισμένη τιμή ενώ ο άλλος έχει αρνητική θέση (*short position*) και υποχρεούται την πώλησή του.

Προφανώς, αν S_T είναι η αξία του υποκείμενου πρωτογενούς προϊόντος στον χρόνο ωρίμανσης και K η προκαθορισμένη από το συμβόλαιο τιμή αγοράς, η απόδοση ενός προθεσμιακού συμβολαίου στον χρόνο ωρίμανσης T, είναι

$$\pm\left(S_T - K\right)$$

ανάλογα με το ποια θέση (αρνητική ή θετική) διατηρούν οι αντισυμβαλλόμενοι.

Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης (*Futures Contract*)

Πρόκειται για το ίδιο ακριβώς προϊόν με ένα προθεσμιακό συμβόλαιο με την διαφορά ότι τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης διαπραγματεύονται καθημερινά στις αγορές. Η τυποποιημένη μορφή αυτών των συμβολαίων, κάνει εφικτή την διαπραγμάτευσή τους, μέσω της οποίας εξασφαλίζεται η τήρηση των όρων τους από τους αντισυμβαλλόμενους.

Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς/Πώλησης (*European Call/Put Option*)

Ο κάτοχος της θετικής θέσης αυτού του συμβολαίου, διατηρεί το δικαίωμα στην ωρίμανση T του συμβολαίου, εάν επιθυμεί να αγοράσει/πουλήσει το πρωτογενές προϊόν στην προκαθορισμένη τιμή K. Αντίθετα, ο κάτοχος της αρνητικής θέσης, είναι υποχρεωμένος να πουλήσει/αγοράσει, στην περίπτωση που το άλλο μέρος επιθυμεί, στον χρόνο ωρίμανσης T στην προκαθορισμένη τιμή K.

Είναι σαφές ότι, ο κάτοχος της θετικής θέσης ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς/πώλησης, βρίσκεται σε πλεονεκτική πάντα θέση αφού δύναται να αποφασίσει στον χρόνο ωρίμανσης, την άσκηση ή μη του συμβολαίου, ανάλογα με την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου προϊόντος. Αν λοιπόν, S_T είναι η αξία του υποκείμενου πρωτογενούς προϊόντος στον χρόνο ωρίμανσης και K η προκαθορισμένη από το συμβόλαιο τιμή αγοράς, η απόδοση για ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς και πώλησης στον χρόνο ωρίμανσης T, είναι

$$\pm\left(S_T - K\right)^+ \quad \text{και} \quad \pm\left(K - S_T\right)^+$$

αντίστοιχα, ανάλογα με το ποια θέση (αρνητική ή θετική) διατηρούν οι αντισυμβαλλόμενοι. Το σύμβολο $(\bullet)^+$ υποδεικνύει το θετικό μέρος της παράστασης που βρίσκεται μέσα στην παρένθεση.

Αμερικανικό Δικαίωμα Αγοράς/Πώλησης (*American Call/Put Option*)

Η διαφορά τους από τα αντίστοιχα ευρωπαϊκά δικαιώματα, έγκειται στον χρόνο άσκησής τους. Ένα αμερικανικό δικαίωμα αγοράς/πώλησης, σε αντίθεση από το αντίστοιχο ευρωπαϊκό του οποίου η άσκηση λαμβάνει χώρα μόνο στον χρόνο ωρίμανσης T, δύναται να τεθεί σε ισχύ οποιαδήποτε χρονική στιγμή έως εκείνη την χρονική στιγμή T που σηματοδοτεί και την λήξη του.

Ευνόητο είναι το γεγονός ότι, τα δικαιώματα αγοράς/πώλησης αμερικανικού τύπου, είναι πιο σύνθετα σε σχέση με τα αντίστοιχα ευρωπαϊκά, προσφέρουν περισσότερες επιλογές-ευκαιρίες στον κάτοχό τους και κατ' επέκταση έχουν μεγαλύτερο κόστος. Η τιμολόγηση αυτών των συμβολαίων, στηρίζεται κατά πολύ στην τιμολόγηση των αντίστοιχων ευρωπαϊκών.

Όλα τα προαναφερόμενα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα είναι γνωστά και ως ***plain vanilla products***. Εκτός από αυτά, υπάρχουν και άλλα είδη τέτοιων συμβολαίων, των οποίων η φύση αποτελείται από έναν συνδυασμό πραγμάτων σχετικά με τον χρόνο άσκησή τους, με τις προϋποθέσεις που τίθενται σε ισχύ ανάλογα με την ιστορία της τιμής του υποκείμενου πρωτογενούς προϊόντος, τον καθορισμό της απόδοσής τους κ.ο.κ. Η κύρια διαφορά τους σε σχέση με τα απλά vanilla προϊόντα, έγκειται στο γεγονός ότι η απόδοση τους στον χρόνο ωρίμανσης δεν εξαρτάται από την τιμή του υποκείμενου προϊόντος την τελική εκείνη στιγμή, αλλά αποτελεί συνάρτηση της πορείας που διαγράφει η τιμή του χρεογράφου καθ' όλη την διάρκεια του συμβολαίου. Τέτοια προϊόντα είναι γνωστά με την ονομασία **εξωτικά δικαιώματα** (*exotic options*) για ορισμένα από τα οποία γίνεται προσπάθεια τιμολόγησής τους στο κεφάλαιο που ακολουθεί.

Τα παραπάνω προϊόντα, είτε αυτά είναι απλά είτε εξωτικά δικαιώματα, προσδίδουν στον κάτοχό τους μία σειρά από ευεργετήματα αφού είναι σε θέση να επωφεληθεί από την άσκησή τους. Ταυτόχρονα, μια αρνητική θέση σε τέτοια συμβόλαια, είναι πολύ πιθανό να πλήξει τα συμφέροντά του. Το πρόβλημα λοιπόν που αυτομάτως ανακύπτει, είναι η εύρεση μιας «δίκαιης» αρχικής τιμής, της τιμής αγοράς δηλαδή αυτών των προϊόντων. Με τον όρο «δίκαιη» τιμή, εννοείται μία ορθολογική τιμή η οποία συνάδει με την Αρχή της μη Επιτηδειότητας (**Arbitrage**), έναν νόμο δηλαδή που διέπει τις χρηματοοικονομικές αγορές και σύμφωνα με τον οποίο αποτρέπονται τυχοδιωκτικές συμπεριφορές. Στην ουσία της, η Αρχή της μη Επιτηδειότητας υπαγορεύει πως είναι αδύνατη η ύπαρξη κέρδους χωρίς την έκθεση σε αντίστοιχο κίνδυνο, ενώ η ποσοτική της έκφραση σε όρους παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, αποτυπώνεται στην Ισοδυναμία μεταξύ των τιμών Δικαιωμάτων Αγοράς και Πώλησης (**put-call parity**). Για την αποφυγή στρατηγικής βέβαιου κέρδους, η διαφορά στην αξία, ανάμεσα στην θετική θέση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και στην αρνητική θέση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης, ίδιας χρονικής ωρίμανσης T και ίδιας παραδοτέας τιμής K, θα πρέπει να ισούται με την τωρινή αξία του υποκείμενου πρωτογενούς προϊόντος μειωμένη κατά την προθεσμιακή τιμή K. Έτσι, αν $c(t,K,T)$ και $p(t,K,T)$ η αξία την χρονική στιγμή t, ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης αντίστοιχα, με παραδοτέα τιμή K και ωρίμανση T, τότε σύμφωνα με την Αρχή της μη Επιτηδειότητας,

$$c(t,K,T)-p(t,K,T)=e^{-q(T-t)}S_t-Ke^{-r(T-t)}, \tag{5.1}$$

όπου S_t η αξία του υποκείμενου χρεογράφου την χρονική στιγμή t, r και q το άνευ κινδύνου επιτόκιο και το μέρισμα που αποδίδει το εν λόγω χρεόγραφο αντίστοιχα. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η Αρχή της μη Επιτηδειότητας αφορά στην δυναμική της αγοράς και απαντάται σε διάφορες μορφές. Πλούσια είναι η βιβλιογραφία στην οποία δύναται κανείς να ανατρέξει για περισσότερα στοιχεία σχετικώς, μεταξύ των οποίων αυτά των Hull (2006) και Neftci (2000).

Επιπλέον, αναφορικά με την τιμολόγηση παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, είναι προφανές πως η απόδοσή τους συνδέεται άμεσα με τις τιμές που λαμβάνουν τα πρωτογενή υποκείμενα προϊόντα πάνω στα οποία επισυνάπτονται τα συμβόλαια αυτά. Πρωταρχικό μέλημα λοιπόν, αποτελεί η εικασία του τρόπου βάσει του οποίου διαμορφώνονται καθημερινά αυτές οι τιμές, η εύρεση δηλαδή ενός μοντέλου το οποίο υπαγορεύει την διαμόρφωση των τιμών της αγοράς και ακολούθως, συναρτήσει αυτών, η επιβολή «δίκαιης» τιμής σε αυτά τα συμβόλαια. Στην αμέσως παρακάτω ενότητα, γίνεται η παρουσίαση ενός εκ των σπουδαιότερων τέτοιων υποδειγμάτων διαμόρφωσης των τιμών της αγοράς, αυτό του υποδείγματος των Black & Scholes και επιπλέον, βάσει αυτού, δίνεται ο κλειστός τύπος μέσω του οποίου υπολογίζεται η δίκαιη τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης.

5.2 Το Υπόδειγμα των Black & Scholes

Από την στιγμή όπου αρχίζει η άνθιση αυτών των συμβολαίων με την συνεχή διαπραγμάτευσή τους στα χρηματιστήρια, η ανάγκη για την εύρεση ενός ικανοποιητικού τρόπου τιμολόγησής τους γίνεται ολοένα και επιτακτικότερη. Στις αρχές της δεκαετίας του 1970, οι Fischer Black, Myron Scholes και Robert Merton αναπτύσσουν ένα πολύ σημαντικό μοντέλο τιμολόγησης παραγώγων, γνωστό ως το υπόδειγμα Black & Scholes. Η μέθοδος αυτή, έτυχε της καθολικής αποδοχής από την οικονομική κοινότητα και επηρέασε τα μέγιστα στον τρόπο με τον οποίο λάμβανε χώρα η τιμολόγηση και η αντιστάθμιση αυτών των συμβολαίων, τις προσεχείς δεκαετίες. Το επιστέγασμα της τεράστιας συνεισφοράς του υποδείγματος στην τιμολόγηση παραγώγων και της οικονομικής θεωρίας γενικότερα, ήταν η απόδοση στα 1997 του Βραβείου Νόμπελ της Οικονομίας στους δύο από τους τρεις εισηγητές του (ο Myron Scholes απεβίωσε το 1995).

Σύμφωνα με το υπόδειγμα των Black & Scholes, η τιμή ενός πρωτογενούς προϊόντος, περιγράφεται στην πορεία του χρόνου ως μία στοχαστική διαδικασία $\{S_t\ ,\ t \geq 0\}$. Προφανώς, $S_0 > 0$ αφού είναι πολύ λογικό την χρονική στιγμή όπου ξεκινά η παρατήρηση, το χρεόγραφο να έχει κάποια αξία. Για μικρές μεταβολές του χρόνου Δt, η μεταβολή της αξίας του χρεογράφου είναι $\Delta S_t = S_t - S_{t+\Delta t}$ και συνεπώς η απόδοση του σε αυτό το διάστημα είναι $\frac{\Delta S_t}{S_t}$. Οι Black και Scholes υποστήριξαν πως η απόδοση αυτή του χρεογράφου μπορεί να περιγραφεί από δυο όρους, έναν ντετερμινιστικό ο οποίος είναι ανάλογος του χρονικού διαστήματος που μελετάται και αποτελεί το λεγόμενο συστηματικό (*systematic*) μέρος και έναν στοχαστικό όρο ο οποίος αποτελεί το τυχαίο (*random*) μέρος και αποδίδει την στοχαστική μεταβλητότητα στις τιμές του χρεογράφου. Η στοχαστική μεταβλητότητα της τιμής του χρεογράφου, είναι και αυτή ανάλογη του χρονικού διαστήματος και συνεπώς δύναται να περιγραφεί από τις μεταβολές ΔW_t μιας τυπικής κίνησης Brown, που κατανέμονται κανονικά με μηδενική μέση τιμή και διακύμανση Δt. Ο όρος ΔW_t είναι γνωστός και ως θόρυβος (*noise*). Βάσει αυτών των υποθέσεων, η αναμενόμενη απόδοση του χρεογράφου σε ένα χρονικό διάστημα Δt, προκύπτει ως εξής:

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \underbrace{\mu \cdot \Delta t}_{\substack{\text{συστηματικό} \\ \text{μέρος}}} + \underbrace{\sigma \cdot \Delta W_t}_{\substack{\text{τυχαίο} \\ \text{μέρος}}} \quad , \quad \mu, \sigma \in \Re \ \textit{και} \ S_0 > 0 \ , \qquad (5.2)$$

όπου η παράμετρος $\mu \in \Re$ του ντετερμινιστικού όρου εκφράζει τον μέσο βαθμό απόδοσης του χρεογράφου ενώ η παράμετρος $\sigma \in \Re$ του στοχαστικού όρου, περιγράφει την επίδραση του θορύβου στην τιμή του χρεογράφου. Ουσιαστικά, η παράμετρος σ είναι αυτή η οποία καθορίζει την μεταβλητότητα της τιμής του υποκείμενου προϊόντος και άρα της απόδοσής του συνολικά και για τον λόγο αυτό ονομάζεται **πτητικότητα** (***volatility***) του χρεογράφου.

Από την σχέση (5.2), λύνοντας ως προς την μεταβολή της αξίας του προϊόντος, προκύπτει ότι

$$\Delta S_t = S_t\left(\mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \Delta W_t\right) \quad , \qquad \mu,\sigma \in \Re \;\; \kappa\alpha\iota \;\; S_0 > 0 ,$$

οπότε λαμβάνοντας πάρα πολύ μικρές μεταβολές του χρόνου, $\Delta t \to 0$, έπεται πως η αξία του χρεογράφου οποιαδήποτε χρονική στιγμή, ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dS_t = S_t\left(\mu \cdot dt + \sigma \cdot dW_t\right) \quad , \qquad \mu,\sigma \in \Re \;\; \kappa\alpha\iota \;\; S_0 > 0 . \tag{5.3}$$

Με την βοήθεια της Στοχαστικής Ανάλυσης και πιο συγκεκριμένα με εφαρμογή του Αναπτύγματος Itô, αποδεικνύεται ότι η παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση έχει ως μοναδική λύση την ανέλιξη

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t} \quad , \qquad \mu,\sigma \in \Re \;\; \kappa\alpha\iota \;\; S_0 > 0 . \tag{5.4}$$

Η αναλυτική παρουσίαση της παραπάνω λύσης, δύναται να βρεθεί μεταξύ άλλων, στο βιβλίο "Options, Futures and Other Derivatives" του John C. Hull (2003).

Από την λύση (5.4) της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί η συνάρτηση της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος, διαπιστώνεται ότι η αξία του χρεογράφου αυτού, εκτελεί όπως συνηθίζεται να λέγεται μία γεωμετρική κίνηση Brown. Πρόκειται δηλαδή για μία στοχαστική διαδικασία η οποία ακολουθεί την λογαριθμική κατανομή. Η γεωμετρική κίνηση Brown και η λογαριθμική κατανομή την οποία εσωκλείει, συνδέει ουσιαστικά την απόδοση ενός χρεογράφου με την κανονική κατανομή. Πράγματι, λογαριθμίζοντας την σχέση (5.4),

$$\log S_t = \log\left(S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log S_t = \log S_0 + \log\left(e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log S_t - \log S_0 = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t \quad , \qquad \mu,\sigma \in \Re \;\; \kappa\alpha\iota \;\; S_0 > 0,$$

εύκολα προκύπτει το γεγονός ότι, η διαφορά των λογαρίθμων της τιμής ενός χρεογράφου σε ένα χρονικό διάστημα μήκους t, περιγράφεται από μια κίνηση Brown της οποίας οι προσαυξήσεις, ακολουθούν την κανονική κατανομή $N\left(\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t,\sigma^2 t\right)$. Η τυχαία μεταβλητή $\log S_t - \log S_0$ δηλαδή, κατανέμεται στην ουσία κανονικά ως εξής:

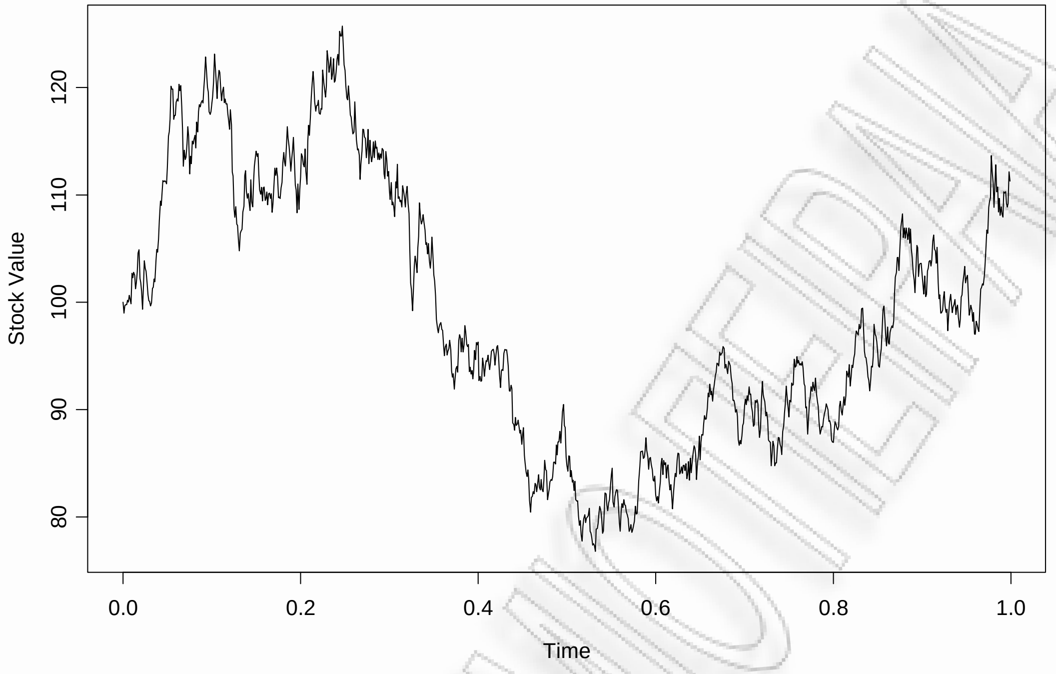
$$\log S_t - \log S_0 \overset{d}{\sim} N\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2,\sigma^2\right) \quad , \quad \forall t \geq 0,\ \mu,\sigma \in \Re . \qquad (5.5)$$

Το συμπέρασμα αυτό αποτελεί και την βάση του υποδείγματος των Black & Scholes για την περιγραφή της τιμής μιας μετοχής σε συνεχή χρόνο και κατ' επέκταση για την τιμολόγηση διαφόρων παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Στο διάγραμμα 5.1, φαίνεται η αξία ενός χρεογράφου στην εξέλιξη του χρόνου, η οποία ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown, με αρχική αξία $S_0 = 100$, μέσο ρυθμό απόδοσης $\mu = 0,05$ και πτητικότητα $\sigma = 0,4$.

Ας υποτεθεί τώρα ότι, διατίθεται ένα παράγωγο προϊόν, επί ενός πρωτογενούς προϊόντος, παραδείγματος χάριν μιας μετοχής. Προφανώς, η αξία του συμβολαίου αυτού, είναι μια συνάρτηση $V_t(t,S_t)$ η οποία εξαρτάται από τον χρόνο t αλλά και την αξία S_t της μετοχής. Αν λοιπόν η αξία της μετοχής S_t κατά τα προαναφερόμενα, είναι μια στοχαστική διαδικασία η οποία ορίζεται στον χώρο πιθανότητας (Ω, A, P), η αξία του παραγώγου V_t είναι επίσης μια στοχαστική διαδικασία ορισμένη στον ίδιο χώρο πιθανότητας, της οποίας το όρισμα ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση (5.3). Σύμφωνα με τις υποθέσεις του Black & Scholes υποδείγματος και τις ιδιότητες που αποκτά βάσει αυτού η αγορά (αφορά στην πληρότητα (*completeness*) της αγοράς η οποία εξασφαλίζει την ύπαρξη μοναδικού ισοδύναμου martingale μέτρου πιθανότητας Q, κάτω από το οποίο πραγματοποιείται και ταυτόχρονα διασφαλίζεται η τιμολόγηση τέτοιων συμβολαίων σε συνεχή χρόνο ως προς την Αρχή της μη Επιτηδειότητας), ο μέσος ρυθμός απόδοσης της αξίας της μετοχής υπό το μέτρο Q προκύπτει ίσος με $\mu = r - q$, όπου με r συμβολίζεται το άνευ κινδύνου επιτόκιο και με q το μέρισμα που αποδίδει η εν λόγω μετοχή. Έτσι, η αξία της μετοχής στην οποία επισυνάπτεται το παράγωγο προϊόν, παίρνει την μορφή:

$$S_t = S_0 e^{\left(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t} \quad , \qquad \sigma \in \Re,\ r,q \in \Re_+ \ \textit{και}\ S_0 > 0 .$$

Από το Ανάπτυγμα του Itô, για την αξία του παράγωγου προϊόντος $V_t(t,S_t)$ αυτή τη φορά, αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $V_t(t,S_t)$, κάτω από το νέο μέτρο πιθανότητας Q, ικανοποιεί



Διάγραμμα 5.1: Τροχιά μιας Γεωμετρικής Κίνησης Brown
με παραμέτρους S_0=100 , μ=0,05 και σ=0,4.

την διαφορική εξίσωση:

$$\frac{V(t,S)}{\partial t}+(r-q)S\frac{V(t,S)}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V(t,S)}{\partial S^2}-(r-q)V(t,S)=0\,, \qquad (5.6)$$

όπου $V_t(t,S_t)$ η συνάρτηση που δίνει την αξία του παράγωγου προϊόντος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t, S_t η αξία της μετοχής σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t, r και q το άνευ κινδύνου επιτόκιο και το μέρισμα που αποδίδει η εν λόγω μετοχή αντίστοιχα, υπολογισμένα σε ετήσια βάση.

Η τελευταία μερική διαφορική εξίσωση είναι γνωστή ως η διαφορική **εξίσωση των Black & Scholes** η λύση της οποίας αποδίδει την αξία στον χρόνο των διάφορων παράγωγων οικονομικών προϊόντων, πάντα υπό το ισοδύναμο martingale μέτρο πιθανότητας Q. Υπό διαφορετική σκοπιά, Για την εύρεση της αρχικής αξίας των παραγώγων δεν απαιτείται τίποτε άλλο παρά η εισαγωγή της παραμέτρου της διαχρονικής αξίας του χρήματος, έπεται δηλαδή ότι

$$V\left(0,S_0\right)=e^{-(r-q)T}E_Q\left(V\left(T,S_T\right)\right),$$

όπου με τον τελεστή $E_Q\left(\bullet\right)$ δηλώνεται η αναμενόμενη τιμή ή διαφορετικά η μαθηματική ελπίδα της εντός της παρένθεσης στοχαστικής διαδικασίας (της απόδοσης εν προκειμένω του συμβολαίου), κάτω από το ισοδύναμο Q, martingale μέτρο πιθανότητας.

Συνεχίζοντας για την διαφορική εξίσωση $\left(5.6\right)$, σημειώνεται ότι οι λύσεις της ποικίλουν ανάλογα με τις συνοριακές συνθήκες οι οποίες υφίστανται και υποδεικνύονται από την φύση των συμβολαίων. Στην περίπτωση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς, τιμής K και ωρίμανσης T, αποδεικνύεται ότι η αρχική του τιμή, προκύπτει από την εξής σχέση:

$$V_0\left(0,S_0\right)\overset{\sigma\mu\beta}{=}C\left(T,K\right)=e^{-qT}S_0N\left(d_1\right)-Ke^{-rT}N\left(d_2\right),$$

όπου

$$d_1=\frac{\log\left(S_0/K\right)+\left(r-q+1/2\,\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

και

$$d_2=\frac{\log\left(S_0/K\right)+\left(r-q-1/2\,\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T}}=d_1-\sigma\sqrt{\mathrm{T}},$$

ενώ με

$$N\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du,$$

συμβολίζεται η αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής η οποία ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή. Βάσει του παραπάνω τύπου και μέσω της σχέσης ισοδυναμίας μεταξύ ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και πώλησης (*put-call parity*), εύκολα προσδιορίζεται με τον ίδιο τρόπο η αρχική αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης της ίδιας τιμής K και της ίδιας ωρίμανσης T το οποίο έχει επισυναφθεί επί της ίδιας μετοχής. Πράγματι,

$$V_0\left(0,S_0\right)\overset{\sigma\mu\beta}{=}P\left(T,K\right)=-e^{-qT}S_0N\left(-d_1\right)+Ke^{-rT}N\left(-d_2\right).$$

Με τις τελευταίες σχέσεις να αποδίδουν την αρχική αξία ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης για εναλλακτικές τιμές K και χρόνους ωρίμανσης T, επισυναπτόμενα σε μετοχές που αποδίδουν μερίσματα σε συνεχή χρόνο, ολοκληρώνεται η σύντομη αυτή αναφορά στην τιμολόγηση παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων βάσει του υποδείγματος των Black & Scholes. Για μία πληρέστερη παρουσίαση του υποδείγματος αυτού καθώς και για τον αναλυτικό τρόπο εξαγωγής των συμπερασμάτων τα οποία χρησιμοποιήθηκαν στην ενότητα αυτή, γίνεται παραπομπή, μεταξύ άλλων, στους Hull (2003) και Neftci (2000). Στην ενότητα, που ακολουθεί, πραγματοποιείται αναφορά στις ατέλειες του υποδείγματος των Black & Scholes, στους λόγους δηλαδή που οδήγησαν στην θεώρηση της αγοράς με την σκοπιά των ανελίξεων Lévy.

5.3 Αδυναμίες της Black & Scholes Αγοράς

Αν και το υπόδειγμα των Black & Scholes γνωρίζει μεγάλη απήχηση και αποδοχή ακόμα και στις μέρες μας, δεν παύει να έχει σημαντικές αδυναμίες. Για να είναι εφικτή η εφαρμογή του μοντέλου αυτού, υιοθετούνται ορισμένες απλουστεύσεις αναφορικά με την λειτουργία της αγοράς, όπως για παράδειγμα η απουσία φόρων, η παράβλεψη στα κόστη αγοροπωλησίας, η απουσία περιορισμών σχετικά με την κατοχή χρεογράφων κ.ά. Όλες αυτές οι υποθέσεις που αφορούν στο ποιοτικό κομμάτι της οικονομικής θεωρίας, έχουν όπως είναι φυσικό, αρνητικό αντίκτυπο και στις τιμές των χρεογράφων. Το υπόδειγμα των Black & Scholes δηλαδή, δεν μπορεί να περιγράψει επακριβώς την ποσοτική διαμόρφωση των χρηματοοικονομικών μεγεθών της αγοράς.

Η κανονική κατανομή η οποία περιγράφει όπως ειπώθηκε προηγουμένως, τον λογάριθμο της απόδοσης ενός χρεογράφου σε ένα χρονικό διάστημα, δεν αποδίδει πιστά την πραγματική συμπεριφορά του. Είναι γνωστό πως η κανονική κατανομή είναι συμμετρική ως προς την μέση της τιμή και συνεπώς το υπόδειγμα των Black & Scholes υποδηλώνει πως οι λογάριθμοι των αποδόσεις των χρεογράφων δεν παρουσιάζουν ασυμμετρία. Κάτι τέτοιο όμως, δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Γενικά, η μελέτη της συμπεριφοράς χρηματοοικονομικών μεγεθών αξιοποιώντας ιστορικά δεδομένα, μαρτυρά ασυμμετρίες στον τρόπο με τον οποίο κατανέμονται. Στο βιβλίο του Wim Schoutens "Levy Processes in Finance, Pricing Financial Derivatives", η επεξεργασία χρηματοοικονομικών δεικτών της αμερικανικής αγοράς, όπως αυτοί των S&P 500, Nasdaq-Composite, CAC-40 κ.ά., έδειξαν αρνητική ασυμμετρία στον λογάριθμο της απόδοσης τους. Η εμπειρική κατανομή δηλαδή αυτών των μεγεθών, έχει μεγαλύτερη ουρά στα αριστερά απ' ότι στα δεξιά.

Ένα δεύτερο μειονέκτημα στον προσδιορισμό του μηχανισμού με τον οποίο διαμορφώνονται οι τιμές των χρεογράφων, αποτελεί το μέγεθος των προσαυξήσεων του λογάριθμου των αποδόσεών τους. Οι πραγματικές προσαυξήσεις των τιμών σε αυτά τα μεγέθη, είναι ενίοτε σχετικά μεγάλες, ενσωματώνουν όπως λέγεται, άλματα στην συμπεριφορά τους. Το γεγονός αυτό, αντικατοπτρίζεται με παχιές ουρές στην εμπειρική κατανομή του λογαρίθμου των αποδόσεων τους. Αντίθετα, η κανονική κατανομή παρουσιάζει λεπτότερες ουρές, φθίνει δηλαδή γρηγορότερα στο «μηδέν» σε σχέση με τις εμπειρικές κατανομές των ποσοτήτων που περιγράφει. Η μελέτη του Schoutens (2003) στους παραπάνω δείκτες, απέδωσε στις εμπειρικές τους κατανομές κύρτωση αρκετά μεγαλύτερη των τριών μονάδων που είναι η τιμή για την κύρτωση της κανονικής κατανομής.

Τέλος, η μεγαλύτερη ίσως αστοχία του μοντέλου των Black & Scholes, είναι η αδυναμία παράστασης του τρόπου με τον οποίο μεταβάλλεται το ίδιο το οικονομικό περιβάλλον. Στο υπόδειγμά τους, οι Black, Merton και Scholes υπέθεσαν πως τόσο ο μέσος βαθμός απόδοσης, όσο και πτητικότητα των χρεογράφων, είναι σταθερές. Υπενθυμίζεται ότι, στην στοχαστική διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η αξία ενός χρεογράφου, $\mu, \sigma \in \Re$. Η πτητικότητα σ, είναι εκείνη η οποία καθορίζει όπως έχει αναφερθεί, την τυχαιότητα η οποία παρατηρείται στην αξία του χρεογράφου και κατ' επέκταση της συνολικής του απόδοσης. Με την θεώρησή του ως μία πραγματική σταθερά, χάνεται θα μπορούσε να πει κανείς, μεγάλο κομμάτι της μεταβλητότητας του τυχαίου μέρους της τιμής του προϊόντος αφού περιορίζεται με αυτόν τον τρόπο αισθητά, η τυχαία επίδραση εξωγενών παραγόντων. Ο ποιοτικός ρόλος του παράγοντα σ στο υπόδειγμα, είναι η αντιπροσώπευση όλων εκείνων των παραμέτρων του οικονομικού περιβάλλοντος που επιδρούν στην διαμόρφωση των τιμών, οι οποίοι μεταβάλλονται διαρκώς και με ακανόνιστο τρόπο. Από την μελέτη ιστορικών δεδομένων, έχει παρατηρηθεί ότι το οικονομικό περιβάλλον, όλες εκείνες οι διεργασίες δηλαδή οι οποίες διαμορφώνουν εντέλει τις τιμές των χρεογράφων, μεταβάλλονται στοχαστικά και είναι αδύνατο να προσδιοριστούν επακριβώς, πόσο μάλλον να περιγραφούν έστω και ικανοποιητικά από μία σταθερά.

Όλα τα προηγούμενα, διαμορφώνουν την πεποίθηση πως το υπόδειγμα των Black & Scholes και η κανονική κατανομή δεν μπορούν να προσεγγίσουν τον μηχανισμό διαμόρφωσης της αγοράς. Ορισμένα από αυτά τα προβλήματα, φαίνεται να εξαλείφονται ή τουλάχιστον να περιορίζονται, με την χρήση των στοχαστικών ανελίξεων Levy. Στις σελίδες που ακολουθούν, πραγματοποιείται η παρουσίαση ορισμένων προτάσεων βελτίωσης της αγοράς Black & Scholes και προσδιορίζεται ο τρόπος με τον οποίο η κλάση αυτών των στοχαστικών διαδικασιών, συμβάλλει προς αυτή την κατεύθυνση.

5.4 Αγορές Lévy

Έχει ήδη γίνει κατανοητό πως για την τιμολόγηση παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, απαιτείται πρωτίστως ένα ικανοποιητικό μοντέλο το οποίο να αποδίδει τις τιμές των υποκείμενων πρωτογενών προϊόντων της αγοράς. Επίσης, είναι σαφές πως η κανονική κατανομή δεν μπορεί να προσεγγίσει τον πιθανοθεωρητικό νόμο στον οποίο υπόκειται η χρηματοοικονομική αγορά, για όλους εκείνους τους λόγους που αναλύθηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζεται αυτή η κατάσταση είναι η χρήση των ανελίξεων Lévy. Ποικίλα είναι τα υποδείγματα και οι στοχαστικές διαδικασίες της κλάσης αυτής, που έχουν προταθεί την τελευταία κυρίως εικοσαετία και έχουν ως σκοπό την ακριβέστερη περιγραφή της χρηματοοικονομικής αγοράς. Στην συνέχεια του κεφαλαίου, παρουσιάζονται κάποιες από τις προτάσεις αυτές, φωτίζοντας περισσότερο τον τρόπο με τον οποίο η οικογένεια των ανελίξεων Lévy ενσωματώνεται στην Οικονομική Θεωρία.

5.4.1. Υποδείγματα Ανελίξεων Lévy

Η πρώτη εναλλακτική πρόταση σύμφωνα με την οποία δύναται να περιγραφεί η αγορά, στηρίζεται στο ίδιο το υπόδειγμα των Black & Scholes. Επειδή η κανονική κατανομή δεν αποδίδει την ασυμμετρία και τις παχιές ουρές της εμπειρικής κατανομής των χρεογράφων της αγοράς, απαιτείται ένας διαφορετικός πιθανοθεωρητικός νόμος, ο οποίος, αφενός να διατηρεί και αφετέρου να γενικεύει τις ιδιότητες των μεταβολών μιας κίνησης Brown.

Σύμφωνα με αυτή τη σκέψη, η κίνηση Brown πρέπει να αντικατασταθεί από μια νέα στοχαστική διαδικασία η οποία να έχει και αυτή ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις, μία ανέλιξη δηλαδή την οποία διέπει μια απείρως διαιρετή κατανομή σε κάθε χρονική στιγμή t και η οποία είναι σε θέση να αποτυπώσει τα άλματα και τις ασυμμετρίες στην τιμή του πρωτογενούς προϊόντος. Όπως εύκολα μπορεί κάποιος να φανταστεί μετά και την ανάλυση του προηγούμενου κεφαλαίου, την απάντηση σε αυτή την πρόκληση έρχεται να δώσει η οικογένεια των στοχαστικών ανελίξεων Lévy. Μιλώντας πλέον σε όρους της Lévy-Itô διαχώρισης, απαιτείται μια νέα ανέλιξη Lévy $\{X_t \ , \ t \geq 0\}$, η γραμμική κίνηση Brown είναι και η ίδια μία από αυτές, στης οποίας όμως την τριπλέτα (α, σ, Π), το χαρακτηριστικό μέτρο Lévy Π, μπορεί να αποδώσει την συμπεριφορά των τιμών της αγοράς, χωρίς να είναι απαραίτητη η παρουσία του συντελεστή διαχύσεως σ. Σε μια τέτοια περίπτωση λοιπόν, η στοχαστική διαδικασία η οποία αποδίδει την τιμή του πρωτογενούς προϊόντος σε κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$, παίρνει την μορφή

$$S_t = S_0 e^{X_t} \quad , \qquad S_0 > 0$$

όπου πλέον η στοχαστική διαδικασία $\{X_t \ , \ t \geq 0\}$, είναι μια ανέλιξη Lévy. Σύμφωνα με αυτή την μοντελοποίηση, ο λογάριθμος της απόδοσης αυτού του χρεογράφου, ισούται κατά κατανομή με τον πιθανοθεωρητικό νόμο στον οποίο υπόκειται η ανέλιξη $\{X_t \ , \ t \geq 0\}$, έπεται δηλαδή πως:

$$\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \stackrel{d}{=} X_t \quad , \qquad \forall t \geq 0 .$$

Στην σύγχρονη βιβλιογραφία, πολλές είναι οι προτάσεις σχετικά με την επιλογή της κατάλληλης στοχαστικής διαδικασίας $\{X_t \ , \ t \geq 0\}$, οι κατανομές των οποίων σε κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$, είναι σε γενικές γραμμές συνθετότερες από αυτές για τις οποίες έχει γίνει λόγος έως τώρα (σύνθετη κατανομή Poisson, κατανομή γάμμα κτλ.). Ανάλογα με την επιλογή του εκάστοτε νόμου που καθορίζει την συμπεριφορά της ανέλιξης $\{X_t \ , \ t \geq 0\}$, προσδιορίζεται και το όνομα του υποδείγματος που περιγράφει την αγορά.

Τα πιο διαδεδομένα εξ' αυτών υποδείγματα Lévy περιγραφής των τιμών των πρωτογενών προϊόντων, είναι το VG υπόδειγμα, σύμφωνα με το οποίο η στοχαστική διαδικασία σε κάθε χρονική στιγμή ακολουθεί την variance gamma κατανομή, το υπερβολικό υπόδειγμα στο οποίο χρησιμοποιείται η υπερβολική κατανομή πιθανότητας και το NIG υπόδειγμα το οποίο αξιοποιεί την κανονική αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή. Και τα τρία αυτά υποδείγματα, εισήχθησαν στα τέλη της περασμένης δεκαετίας ως ειδικές περιπτώσεις του γενικευμένου υπερβολικού υποδείγματος (*Generalized Hyperbolic Model*) από τους Madan και Seneta, Eberlein και Keller και Barndorff και Nielsen αντίστοιχα. Στις αρχές της τρέχουσας δεκαετίας, δύο νέα υποδείγματα υπό τα ονόματα των εισηγητών τους προτάθηκαν έτσι ώστε να περιγράψουν τις χρηματοοικονομικές αγορές. Το πρώτο από αυτά, είναι το CGMY υπόδειγμα εκ των Carr, Geman, Madan και Yor, αποτελεί γενίκευση του VG υποδείγματος ενώ η οικογένεια κατανομών η οποία χρησιμοποιείται είναι γνωστή υπό την ονομασία οικογένεια KoBoL και παραπέμπει στο έργο των Koponen, Boyarchenco και Levendorskiî. Το δεύτερο τέτοιο υπόδειγμα είναι το υπόδειγμα Miexner, την χρήση του οποίου στο πεδίο της χρηματοοικονομίας εισηγήθηκε ο Schoutens το 2001.

Σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις μοντελοποίησης της αγοράς, η τιμολόγηση παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, λαμβάνει χώρα κατά την γνωστή διαδικασία. Προσδιορίζεται δηλαδή, η αναμενόμενη αξία της απόδοσης $V_T\left(T,S_T\right)$ του συμβολαίου κάτω από το ισοδύναμο martingale μέτρο πιθανότητας Q στον χρόνο ωρίμανσης T και εν συνεχεία, λαμβάνοντας υπόψη την διαχρονική αξία του χρήματος, επιστρέφεται η αξία του στον χρόνο $t=0$,

$$V\left(0,S_0\right)=e^{-(r-q)T}E_Q\left(V\left(T,S_T\right)\right).$$

Στο σημείο αυτό όμως, ανακύπτει ένα σοβαρό πρόβλημα. Οι αγορές των υποδειγμάτων Lévy, εκτός από την περίπτωση της γραμμικής κίνησης Brown όπου προκύπτει το υπόδειγμα των Black & Scholes και της ανέλιξης Poisson η οποία όμως δεν προσαρμόζεται στην οικονομική θεωρία (μοναδιαία θετικά άλματα δεν γίνεται να περιγράψουν την συμπεριφορά των χρηματοοικονομικών μεγεθών), δεν είναι πλήρεις. Αναφέρεται για ακόμα μία φορά πως σε επίπεδο οικονομικής θεωρίας, η πληρότητα της αγοράς αφορά στην δυνατότητα αντιστάθμισης ενός παράγωγου προϊόντος με ένα αυτοχρηματοδοτούμενο δυναμικό χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από μέρη του υποκείμενου προϊόντος και ομόλογα, το οποίο σε κάθε χρονική στιγμή δύναται να αναπαράγει την απόδοση του συμβολαίου. Με την μέθοδο αυτή, διασφαλίζεται η μη ύπαρξη στρατηγικής επιτηδειότητας. Επιπλέον, σημειώνεται χωρίς να δοθεί περαιτέρω έκταση, ότι η ιδιότητα της πληρότητας της αγοράς έχει να κάνει με το χαρακτηριστικό μέτρο Lévy Π και πιο συγκεκριμένα, κατά την Lévy-Itô διαχώριση με τον τρίτο δομικό λίθο των ανελίξεων Lévy, που είναι μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale διαδικασία.

Η μη πληρότητα της αγοράς, έχει ως αποτέλεσμα την μη μοναδικότητα ύπαρξης ισοδύναμου martingale μέτρου πιθανότητας Q και συνεπώς, διαφορετικές πιθανές τιμές των συμβολαίων, ανάλογα με το μέτρο που χρησιμοποιείται. Πολλές είναι οι δυνατές εναλλακτικές επιλογές για το νέο ισοδύναμο martingale μέτρο πιθανότητας Q, εκ' των οποίων ενδεικτικά αναφέρονται ο μετασχηματισμός Esscher (*Esscher Transform*) και η μέθοδος διόρθωσης του μέσου του αρνητικού λογάριθμου της χαρακτηριστικής συνάρτησης της ανέλιξης Lévy για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t, που χρησιμοποιεί το εκάστοτε υπόδειγμα (***Mean-Correcting Martingale Measure Method***). Στην παρούσα εργασία, κάθε προσπάθεια τιμολόγησης παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, επιχειρείται κάνοντας χρήση της δεύτερης μεθόδου προσδιορισμού ισοδύναμου martingale μέτρου πιθανότητας και για τον λόγο αυτό, στις γραμμές που ακολουθούν, επιχειρείται η σκιαγράφηση των κυριότερων σημείων της.

Συχνά, σε όλες τις στοχαστικές ανελίξεις Lévy που αναφέρθηκαν παραπάνω και με τις οποίες επιχειρείται η μοντελοποίηση της αγοράς, προσαρμόζεται μία γραμμική ως προς το χρόνο τάση m. Αν λοιπόν $\{X_t \ , \ t \geq 0\}$ η εν λόγω στοχαστική διαδικασία, μετά την προσθήκη της γραμμικής ως προς τον χρόνο τάσης μετατρέπεται στην

$$Y_t = X_t + mt \quad , \quad \forall t \geq 0 ,$$

της οποίας σε κάθε χρονική στιγμή t η κατανομή πιθανότητας έχει μια επιπλέον παράμετρο, την m. Η νέα αυτή παράμετρος, δεν επηρεάζει σε καμία περίπτωση τις ιδιότητες του πιθανοθεωρητικού νόμου στον οποίο υπόκειται η στοχαστική διαδικασία $\{X_t \ , \ t \geq 0\}$, ενώ η επιρροή της εξαντλείται στην μετατόπιση του μέσου της πυκνότητάς της κατά m μονάδες. Υπό αυτή την έννοια δικαιολογείται και η ονομασία της μεθόδου.

Ο ρόλος που διαδραματίζει ο επιπρόσθετος αυτός όρος της στοχαστικής διαδικασίας, αφορά ακριβώς σε αυτή την προσπάθεια εξασφάλισης ενός άνευ κινδύνου martingale μέτρου, βάσει του οποίου δύναται να υπάρξει τιμολόγηση σύμφωνα με την Αρχή της μη Επιτηδειότητας. Η επίτευξη του στόχου αυτού πραγματοποιείται απλά, αλλάζοντας την τιμή της παραμέτρου από m_{old} σε m_{new}, με έναν τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η προεξοφλητική αξία του χρεογράφου να είναι martingale. Ο κατάλληλος μετασχηματισμός της παραμέτρου m σύμφωνα με τον Schoutens (2003), είναι αυτός που φαίνεται παρακάτω

$$m_{new} = m_{old} + r - q - \Psi(-i), \tag{5.7}$$

με r και q το άνευ κινδύνου επιτόκιο και το μέρισμα που αποδίδει η εν λόγω μετοχή αντίστοιχα και Ψ κατά τα γνωστά, ο αρνητικός λογάριθμος της χαρακτηριστικής συνάρτησης της εν λόγω στοχαστικής ανέλιξης Lévy σε κάποια χρονική στιγμή t.

Η πλέον συνήθης διαδικασία με την οποία εφαρμόζεται η μέθοδος διόρθωσης του μέσου του αρνητικού λογάριθμου της χαρακτηριστικής συνάρτησης της ανέλιξης Lévy που περιγράφει την αγορά, είναι η θεώρησή της με μηδενική τιμή της παραμέτρου m_{old}. Με αυτόν τον τρόπο, το υπόδειγμα που περιγράφει τον τρόπο δημιουργίας των τιμών των χρεογράφων προσδιορίζεται πλήρως από τις «πρωτεύουσες» παραμέτρους της εκάστοτε κατανομής. Εν συνεχεία και για την τιμολόγηση των παράγωγων προϊόντων, υπεισέρχεται η νέα παράμετρος m_{new}, η οποία από την σχέση (5.7) λαμβάνει την τιμή

$$m_{new} = r - q - \Psi(-i), \qquad (5.8)$$

εξασφαλίζει ισοδύναμο martingale μέτρο πιθανότητας Q και κυρίως, προσδιορίζεται αποκλειστικά από τις τιμές των «πρωτευουσών» παραμέτρων της κατανομής πιθανότητας του υποδείγματος.

Καθ' αυτό τον τρόπο λοιπόν, με την επιλογή δηλαδή του επιθυμητού προς την περιγραφή της αγοράς υποδείγματος Lévy και στην συνέχεια την εφαρμογή μιας κατάλληλης μεθόδου εύρεσης ισοδύναμου martingale μέτρου πιθανότητας Q, είναι δυνατή η καλύτερη σε σχέση με το υπόδειγμα των Black & Scholes αποτύπωση της χρηματοοικονομικής αγοράς και εν προεκτάσει, η τιμολόγηση παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Στην συνέχεια, παρουσιάζεται μία ακόμα τεχνική προσέγγισης των αγορών στηριγμένη στην οικογένεια των ανελίξεων Lévy, με ακόμα καλύτερη απόδοση.

5.4.2 Στοχαστική Πτητικότητα

Όλα τα προαναφερόμενα υποδείγματα προσαρμόζονται καλύτερα στην πραγματική συμπεριφορά των πρωτογενών προϊόντων σε σχέση με το κανονικό λογαριθμικό υπόδειγμα (υπόδειγμα Black & Scholes) αφού ενσωματώνουν την ασυμμετρία και τα άλματα των τιμών τους. Ωστόσο, αποτυγχάνουν στο γεγονός της ενσωμάτωσης εξωγενών παραγόντων που επηρεάζουν την αγορά ή διαφορετικά την εν γένει στοχαστική μεταβολή του οικονομικού περιβάλλοντος στην πορεία του χρόνου. Μια δεύτερη λοιπόν, τεχνική μοντελοποίησης της αγοράς με την βοήθεια των ανελίξεων Lévy, είναι η στοχαστική πτητικότητα των χρηματοοικονομικών μεγεθών.

BNS-SV Υποδείγματα

Μία μέθοδος που ακολουθείται για την επίτευξη ενός τέτοιου σκοπού, έχει ως βάση της για ακόμα μία φορά, το κλασσικό υπόδειγμα των Black & Scholes., με την διαφορά ότι στα νέα αυτά υποδείγματα, η πτητικότητα σ των προϊόντων δεν περιγράφεται πλέον από μία πραγματική σταθερά αλλά αποτελεί από μόνη τας μια ξεχωριστή στοχαστική διαδικασία. Στην ενότητα 5.2, σημειώθηκε ότι στο υπόδειγμα αυτό, το τυχαίο μέρος της τιμής ενός χρεογράφου περιγράφεται από μια γραμμική κίνηση Brown και συνεπώς ο συντελεστής τυχαιότητας θα πρέπει να μοντελοποιηθεί από μια άλλη, διαφορετική στοχαστική διαδικασία.

Για τον σκοπό αυτό, γίνεται η χρήση συγκεκριμένων ανελίξεων υπό την ονομασία OU διαδικασίες, ο ορισμός των οποίων στηρίζεται σε ανελίξεις Levy και παρουσιάζεται στην παράγραφο που ακολουθεί.

Ως OU διαδικασία, θεωρείται εκείνη η στοχαστική διαδικασία $\{y_t\ ,\ t \geq 0\}$, η οποία ικανοποιεί μια διαφορική στοχαστική εξίσωση της μορφής,

$$dy_t = -\lambda y_t + dz_t \ , \qquad \lambda \in \Re \quad \kappa\alpha\iota \quad y_0 > 0\,.$$

Η παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση, είναι γνωστή ως **εξίσωση Ornstein-Uhlenbeck** , προς τιμή των οποίων η ονομασία των στοχαστικών διαδικασιών και είναι ανάλογη της εξίσωσης των Black & Scholes. Σημειώνεται ότι η παράμετρος λ είναι μια πραγματική σταθερά, ενώ η στοχαστική ανέλιξη $\{z_t\ ,\ t \geq 0\}$ είναι μια ανέλιξη Lévy. Η διαδικασία $\{z_t\ ,\ t \geq 0\}$ μέσω της οποίας ορίζεται μια OU διαδικασία, ονομάζεται υποτελής ανέλιξη Lévy (*Background Driving Levy Process ή BDLP*) και είναι συνήθως ένα subordinator. Μια ανέλιξη Lévy δηλαδή, με φραγμένη κύμανση και αύξουσες τροχιές. Ανάλογα με τον νόμο πιθανότητας που διέπει το subordinator, λαμβάνει και η OU διαδικασία την αντίστοιχη ονομασία. Αν για παράδειγμα η ανέλιξη $\{z_t\ ,\ t \geq 0\}$ κατανέμεται σε κάθε χρονική στιγμή t σύμφωνα με την κατανομή γάμμα, τότε η $\{y_t\ ,\ t \geq 0\}$ καλείται γάμμα-OU διαδικασία.

Επιστρέφοντας στο υπόδειγμα των Black & Scholes, υπενθυμίζεται ότι η αξία S_t ενός χρεογράφου ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση (5.3). Με χρήση του αναπτύγματος Itô, δύναται να παραχθεί η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση για τον λογάριθμο της τιμής S_t,

$$d\log\left(S_t\right) \overset{\sigma\mu\beta}{=} dZ_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t \qquad , \qquad \log\left(S_0\right) = Z_0 = x_0\,.$$

Επιπλέον, η πτητικότητα σ της συνολικής απόδοσης του χρεογράφου, περιγράφεται τώρα από μια OU διαδικασία και σύμφωνα με όλα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$d\sigma_t^2 = -\lambda\sigma_t^2 + dz_t \ , \qquad \lambda \in \Re \quad \kappa\alpha\iota \quad \sigma_0^2 > 0\,.$$

Συνδυάζοντας όλες τις στοχαστικές διαδικασίες οι οποίες μετέχουν στο υπόδειγμα και συγκεκριμένα τις δύο προαναφερθείσες στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, έπεται πως σε κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$, ο λογάριθμος της αξίας του χρεογράφου Z_t ικανοποιεί την εξίσωση

$$dZ_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_t^2 \right) dt + \sigma_t dW_t + \rho dz_{\lambda t} \qquad , \quad \mu \in \Re, \rho \in \Re_- \quad \kappa\alpha\iota \quad Z_0 = x_0 .$$

στην οποία η κίνηση Brown $\{W_t \ , \ t \geq 0\}$ και το subordinator $\{z_t \ , \ t \geq 0\}$ αποτελούν ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες.

Αναφορικά με την τιμολόγηση παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, επισημαίνεται ότι η θεώρηση της αγοράς βάσει τέτοιων μοντέλων, επίσης δεν επάγει την πληρότητά της. Και σε αυτή την περίπτωση λοιπόν, παρόλο που εξασφαλίζεται η Αρχή της μη Επιτηδειότητας, δεν υπάρχει μοναδικό ισοδύναμο martingale μέτρο πιθανότητας Q, κάτω από το οποίο να πραγματοποιείται η τιμολόγηση τέτοιων συμβολαίων. Με το μέτρο Q την οποία χρησιμοποίησαν οι Barndorff and Nielsen et al το 2002, η τελευταία εξίσωση για τον λογάριθμο της αξίας του χρεογράφου Z_t παίρνει την μορφή:

$$dZ_t = \left(r - q - \lambda k(-\rho) - \frac{1}{2}\sigma_t^2 \right) dt + \sigma_t dW_t + \rho dz_{\lambda t},$$
$$r, q \in \Re_+, \rho \in \Re_- \quad \kappa\alpha\iota \quad Z_0 = x_0.$$

Προφανώς, με r συμβολίζεται το άνευ κινδύνου επιτόκιο, με q το μέρισμα που αποδίδει η εν λόγω μετοχή ενώ με $k(u) = \log\left(E_Q\left(e^{-uz}\right)\right)$ συμβολίζεται η αθροιστική κατανομή του subordinator $\{z_t \ , \ t \geq 0\}$ κάτω από το μέτρο πιθανότητας Q. Η ανέλιξη $\{W_t \ , \ t \geq 0\}$, είναι η κίνηση Brown κάτω από αυτό το μέτρο Q, ανεξάρτητη της $\{z_t \ , \ t \geq 0\}$. Σε επόμενη ενότητα του κεφαλαίου αυτού, παρέχεται στον αναγνώστη η δυνατότητα να διαπιστώσει πως μεταφράζονται τα παραπάνω αποτελέσματα στην ειδική περίπτωση όπου η πτητικότητα του χρεογράφου περιγράφεται από μια γάμμα-OU στοχαστική διαδικασία.

Κλείνοντας την σύντομη αναφορά σε αυτά τα υποδείγματα περιγραφής της χρηματοοικονομικής αγοράς, σημειώνεται ότι αναφέρονται στην βιβλιογραφία, υπό την ονομασία BNS υποδείγματα. Η ονομασία τους αυτή, οφείλεται στα αρχικά γράμματα των εισηγητών τους, Barndorff, Nielsen και Shephard οι οποίοι παρουσίασαν το έργο τους στις αρχές της δεκαετίας, ενώ λόγω της μεθοδολογίας που ακολουθείται, συναντιούνται συχνά ως Black-Scholes SV (Stochastic Volatility) Υποδείγματα.

Στοχαστική Αλλαγή Χρόνου

Μία δεύτερη μέθοδος με την οποία επιτυγχάνεται η αποτύπωση της στοχαστικής πτητικότητας της τιμής του χρεογράφου στο υπόδειγμα που περιγράφει την αγορά, είναι η λεγόμενη στοχαστική αλλαγή χρόνου (*Stochastic Time Change Method*). Είναι προφανές ότι, σε χρονικές περιόδους στις οποίες η πτητικότητα σ της τιμής ενός χρεογράφου είναι υψηλή και άρα οι μεταβολές των τιμών του είναι μεγάλες, αντιστοιχεί υψηλή απόδοση. Όμοια, χαμηλές αποδόσεις της μετοχής συνδέονται με χαμηλά επίπεδα της πτητικότητάς του. Το γεγονός αυτό, έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία της εντύπωσης ότι, σε περιόδους με καθεστώς υψηλής πτητικότητας ο χρόνος κυλά γρηγορότερα σε σχέση με αντίστοιχες περιόδους χαμηλότερης πτητικότητας και κατ' επέκταση, την στοχαστική συμπεριφορά του χρόνου.

Η εφαρμογή της μεθόδου της στοχαστικής αλλαγής του χρόνου μέσω της οποίας επιχειρείται η μοντελοποίηση της στοχαστικότητας των αγορών, έχει τις ρίζες της στις αρχές της δεκαετίας του 1970 όπου ο Clark επιχείρησε να περιγράψει τον τρόπο δημιουργίας των τιμών μιας μετοχής καθ' αυτό τον τρόπο. Στην παρούσα φάση, δεν δίνεται μεγαλύτερη έκταση σε αυτή τη μέθοδο, απλά αναφέρεται ότι οι στοχαστικές διαδικασίες μέσω των οποίων δύναται να επιτευχθεί η στοχαστική αλλαγή του χρόνου, είναι η CIR διαδικασία (βλ. το έργο των Cox, Ingersoll και Ross εισηγητών της στοχαστικής διαδικασίας και των Carr et al που έκαναν χρήση αυτής της ανέλιξης) καθώς και OU διαδικασίες καθοδηγούμενες από subordinators. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την εφαρμογή της μεθόδου, γίνεται παραπομπή στον Schoutens (2003).

5.5 Το Variance Gamma Υπόδειγμα

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, στο κεφάλαιο που ακολουθεί επιχειρείται μία προσπάθεια τιμολόγησης κάποιων εξωτικών παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων με την μέθοδο της Monte Carlo προσομοίωσης. Προς αυτή την κατεύθυνση, γίνεται μεταξύ άλλων η χρήση του VG υποδείγματος της αγοράς και συνεπώς, στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμη μία συνοπτική αναφορά σε αυτό. Η κλάση των VG κατανομών πιθανότητας, προτάθηκε για να περιγράψουν την απόδοση χρεογράφων στα τέλη της δεκαετίας του 1980 από τους Madan και Seneta. Η VG κατανομή αποτελεί έναν απείρως διαιρετό νόμο πιθανότητας με τρεις παραμέτρους $VG(\sigma,v,\theta)$, με την χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής $X^{(VG)}$ η οποία υπόκειται στον νόμο αυτής, να παίρνει την μορφή:

$$\phi_{X_{VG}}(t)=\left(1-it\theta v+\frac{1}{2}\sigma^2 vt^2\right)^{-1/v} \quad , \quad \forall t\geq 0.$$

Σύμφωνα με αυτούς, δύναται να οριστεί μία στοχαστική ανέλιξη $\left\{X_t^{(VG)}\ ,\ t\geq 0\right\}$ με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, οι οποίες σε κάθε χρονικό διάστημα της μορφής $[t,t+s]$ ακολουθούν την κατανομή $VG\left(\sigma\sqrt{s},v/s,s\theta\right)$.

Οι Madan και οι συνεργάτες του, απέδειξαν ότι μία VG στοχαστική διαδικασία δύναται να οριστεί εναλλακτικά ως η διαφορά δύο ανεξάρτητων γάμμα στοχαστικών διαδικασιών. Αν $\left\{G_t^1\ ,\ t\geq 0\right\}$ και $\left\{G_t^2\ ,\ t\geq 0\right\}$ δύο ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες οι οποίες σε κάθε χρονική στιγμή t ακολουθούν την κατανομή γάμμα με παραμέτρους $\alpha=C$, $b=M$ και $\alpha=C$, $b=G$ αντίστοιχα, τότε

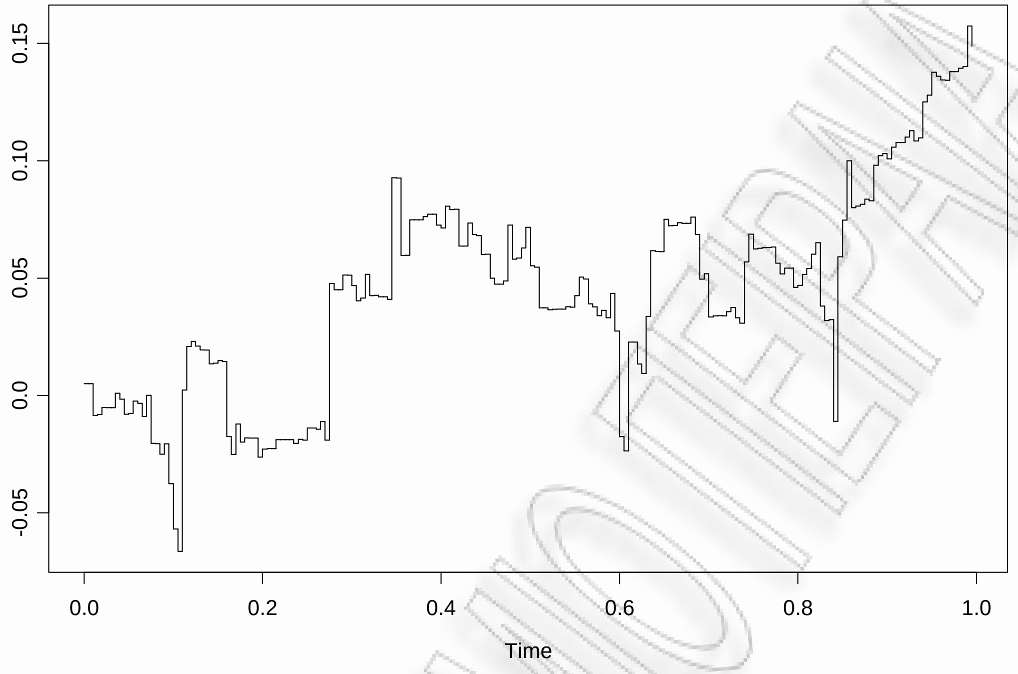
$$X_t^{(VG)}=G_t^1+G_t^2 \quad , \quad \forall t\geq 0.$$

Σε αυτή την περίπτωση, οι παράμετροι της VG κατανομής είναι οι C, G και M ενώ οι σχέσεις οι οποίες συνδέουν τις δύο παραμετροποιήσεις της κατανομής είναι οι εξής:

$$\left.\begin{aligned}
C&=\frac{1}{v} \quad > 0\\
G&=\left(\sqrt{\frac{1}{4}\theta^2v^2+\frac{1}{2}\sigma^2v}-\frac{1}{2}\theta v\right)^{-1} \quad > 0\\
M&=\left(\sqrt{\frac{1}{4}\theta^2v^2+\frac{1}{2}\sigma^2v}+\frac{1}{2}\theta v\right)^{-1} \quad > 0
\end{aligned}\right\}$$

Σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί στο κεφάλαιο 3, εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς ότι η στοχαστική διαδικασία Variance Gamma ανήκει στην κλάση των ανελίξεων Lévy, είτε ως μια ανέλιξη η οποία σε κάθε χρονική στιγμή t έχει μια απείρως διαιρετή κατανομή, είτε ως ένας γραμμικός συνδυασμός ανελίξεων Lévy. Πρόκειται για μια ανέλιξη Lévy της οποίας η Lévy-Khintchine τριπλέτα έχει την μορφή

$$(\alpha,\sigma,\Pi)=\left(\frac{-C\left(Ge^{-M}-1\right)-M\left(e^{-G}-1\right)}{MG}\ ,\ 0\ ,\ v_{VG}(dx)\right)$$



Διάγραμμα 5.2: Μονοπάτι μιας VG(20,40,50) στοχαστικής διαδικασίας.

με το χαρακτηριστικό της μέτρο Lévy να έχει άπειρη μάζα και να είναι το εξής:

$$v_{VG}(dx) = \begin{cases} Ce^{Gx}|x|^{-1}\,dx \ , & x<0 \\ Ce^{Mx}|x|^{-1}\,dx \ , & x>0. \end{cases}$$

Γενικά λοιπόν, μια VG στοχαστική διαδικασία είναι μια ανέλιξη Lévy στην οποία απουσιάζει το πρώτο δομικό συστατικό, ο όρος της κίνησης Brown δηλαδή και της οποίας τα μονοπάτια παρουσιάζουν άπειρο πλήθος αλμάτων σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα, ενώ ταυτόχρονα έχουν φραγμένη κύμανση. Στο διάγραμμα 5.2, απεικονίζεται ένα μονοπάτι της VG στοχαστικής διαδικασίας με παραμέτρους $C=20$, $G=40$ και $M=50$.

Αναφορικά με την τιμολόγηση παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, η τιμή που λαμβάνει η παράμετρος m της εφαρμοζόμενης γραμμικής ως προς το χρόνο τάσης κάτω από το νέο ισοδύναμο martingale μέτρο πιθανότητας Q, κατά πλήρη αντιστοιχία με την σχέση (5.8) είναι η εξής:

$$m_{new} = r - q + C\log\left(\frac{(M-1)(G+1)}{MG}\right)$$

όπου r και q το άνευ κινδύνου επιτόκιο και το μέρισμα που αποδίδει η εν λόγω μετοχή αντίστοιχα, υπολογισμένα σε ετήσια βάση. Τέλος, ο πίνακας 5.1 παρουσιάζει

	$VG(\sigma,v,\theta)$	$VG(C,G,M)$
mean	θ	$C(G-M)/(MG)$
variance	$\sigma^2 + v\theta^2$	$C\left(G^2+M^2\right)/(MG)^2$
skewness	$\theta v\left(3\sigma^2+2v\theta^2\right)/\left(\sigma^2+v\theta^2\right)^{3/2}$	$2C^{-1/2}\left(G^3-M^3\right)/\left(G^2+M^2\right)^{3/2}$
kurtosis	$3\left(1+2v-v\sigma^4\left(\sigma^2+v\theta^2\right)^{-2}\right)$	$3\left(1+2C^{-1}\left(G^4+M^4\right)/\left(G^2+M^2\right)^2\right)$

Πίνακας 5.1: Οι ροπές έως και 4ης τάξης της Variance Gamma κατανομής.

τις τέσσερις πρώτες ροπές της VG κατανομής βάσει και των δύο εναλλακτικών παραμετροποιήσεων της. Αναφέρεται ότι όλα τα παραπάνω αποτελέσματα και συμπεράσματα που αφορούν στην Variance Gamma κατανομή και VG στοχαστική διαδικασία, αντλήθηκαν από τον Schoutens (2003) ενώ πληροφορίες που αφορούν στην προσομοίωση της ανέλιξης VG δύναται να βρεθούν στους Avramidis et al (2003).

5.6 Το BNS Gamma-OU Υπόδειγμα

Ένα δεύτερο υπόδειγμα με το οποίο επιχειρείται στο επόμενο κεφάλαιο ο προσδιορισμός του τρόπου δημιουργίας των τιμών της αγοράς και η τιμολόγηση εξωτικών δικαιωμάτων, είναι μία γενίκευση του Black & Scholes υποδείγματος στο οποίο η πτητικότητα της τιμής των χρεογράφων αποτελεί μια γάμμα-OU στοχαστική διαδικασία.

Στην περίπτωση μιας γάμμα-OU στοχαστικής διαδικασίας (βλ. Schoutens (2003)), αποδεικνύεται ότι η υποτελής ανέλιξη Lévy είναι μία σύνθετη ανέλιξη Poisson $\{z_t\ ,\ t \ge 0\}$, με

$$z_t = \sum_{n=1}^{N_t} X_n\ , \qquad t \ge 0$$

όπου η ακολουθία των ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $\{X_n \ , \ n=1,2,...\}$, κατανέμεται σύμφωνα με την εκθετική κατανομή με παράμετρο b,

$$\{X_n \ , \ n=1,2,...\} \ iid \quad \overset{d}{\sim} \ \mathrm{E}(b),$$

ενώ η αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας που αντιστοιχεί σε μια τέτοια ανέλιξη, προσδιορίζεται από την σχέση:

$$k(u) = -au(b+u)^{-1} \quad , \quad u \in \Re. \tag{5.9}$$

Σύμφωνα λοιπόν με τα όσα έχουν ειπωθεί στην ενότητα $(5.4.2)$ σχετικά με τα $BNS-SV$ υποδείγματα, αφ' ης στιγμής η πτητικότητα σ της τιμής της μετοχής προσδιορίζεται από μια γάμμα-OU στοχαστική διαδικασία, ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$d\sigma_t^2 = -\lambda\sigma_t^2 + dz_t \quad , \quad \lambda \in \Re \quad \kappa\alpha\iota \quad \sigma_0^2 > 0$$

και μέσω αυτής, ο λογάριθμος της τιμής της μετοχής Z_t την:

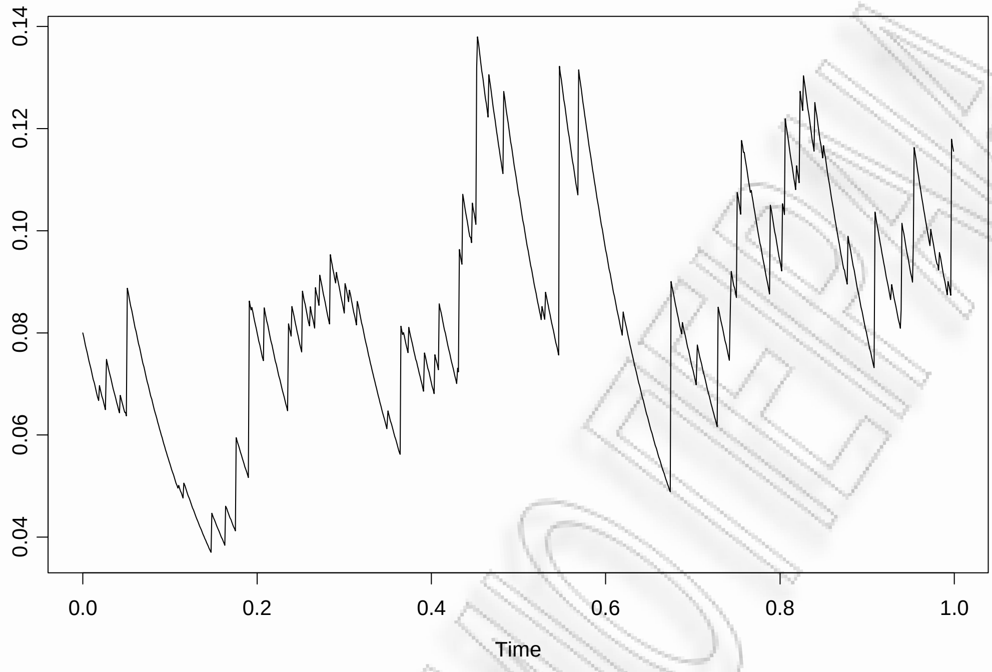
$$dZ_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right)dt + \sigma_t dW_t + \rho dz_{\lambda t} \quad , \quad \mu \in \Re, \rho \in \Re_- \quad \kappa\alpha\iota \quad Z_0 = x_0. \tag{5.10}$$

Στα διαγράμματα 5.3 και 5.4 της τελευταίας σελίδας του κεφαλαίου, παρουσιάζεται η πτητικότητα σ της τιμής μιας μετοχής ως μια γάμμα-OU στοχαστική διαδικασία με παραμέτρους $\lambda = 0,5783$, $\alpha = 1,4338$, $\beta = 11,6641$ και αρχική τιμή $\sigma_0^2 = 0,0145$ και αντίστοιχα, ένα μονοπάτι της διαμορφωθείσας ανέλιξης του λογαρίθμου της τιμής της μετοχής με αρχική τιμή $S_0 = 1.244,47$.

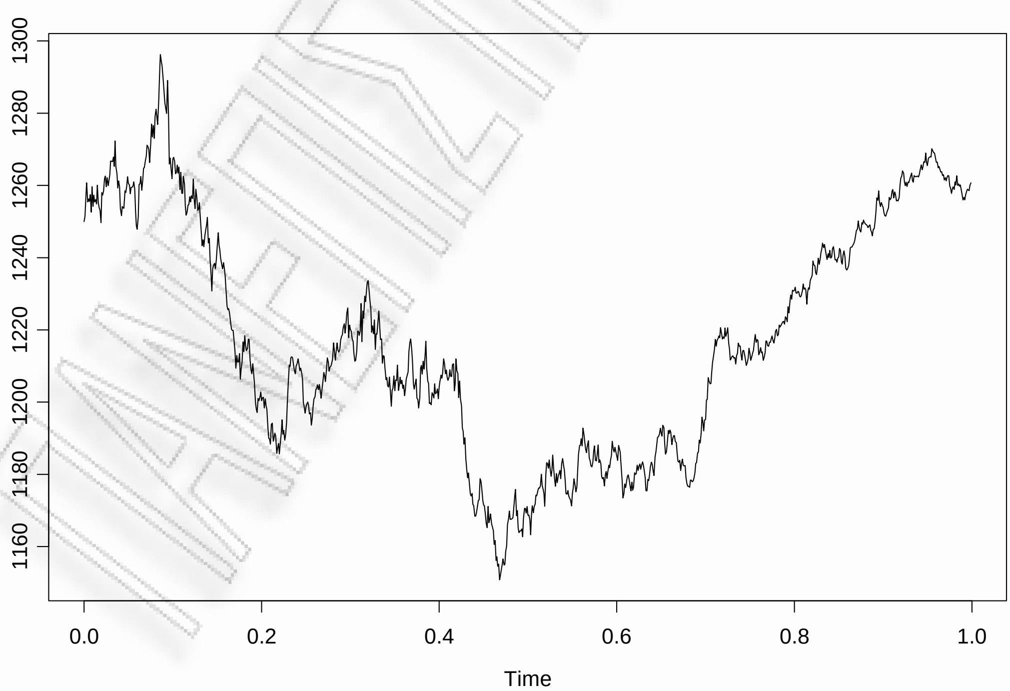
Αναφορικά με την τιμολόγηση των διάφορων παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων με την χρήση ενός BNS γάμμα-OU υποδείγματος, ο λογάριθμος της αξίας του υποκείμενου χρεογράφου κάτω από το ισοδύναμο martingale μέτρο πιθανότητας Q, λαμβάνει την μορφή (βλ. Schoutens (2003)):

$$\begin{gathered} dZ_t = \left(r - q - \lambda k(-\rho) - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right)dt + \sigma_t dW_t + \rho dz_{\lambda t}, \\ r, q \in \Re_+, \rho \in \Re_- \quad \kappa\alpha\iota \quad Z_0 = x_0. \end{gathered} \tag{5.11}$$

όπου r συμβολίζεται το άνευ κινδύνου επιτόκιο, q το μέρισμα που αποδίδει η εν λόγω μετοχή ενώ η τιμή της αθροιστικής κατανομής $k(u)$ του subordinator $\{z_t \ , \ t \geq 0\}$, της σύνθετης ανέλιξης Poisson εν προκειμένω, προκύπτει άμεσα από την σχέσης (5.9).



Διάγραμμα 5.3: Η Πτητικότητα μιας Μετοχής ως Γάμμα-OU Διαδικασία με Παραμέτρους α=1,4338, β=11,6641, λ=0,5783 και σ_0^2=0,08



Διάγραμμα 5.4: Ο Λογάριθμος της Τιμής της Μετοχής υπό του BNS Γάμμα-OU Υποδείγματος με S_0=1.244,47.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{ο}

ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΕΞΩΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Σε αυτό το τελευταίο κεφάλαιο, λαμβάνει χώρα η αριθμητική εφαρμογή αυτής της εργασίας. Μέχρι αυτό το σημείο, έχουν αναπτυχθεί σε ικανοποιητικό βαθμό όλα εκείνα τα θεωρητικά ζητήματα γύρω από την οικογένεια των ανελίξεων Lévy τα οποία δηλώνουν τον τρόπο με τον οποίο αυτές οι στοχαστικές διαδικασίες εμπλουτίζουν τα πεδία εφαρμογών στα οποία χρησιμοποιούνται. Στις σελίδες που ακολουθούν, εμπεριέχεται ολόκληρη η θεωρία των ανελίξεων Lévy που αναλύθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια και αξιοποιείται στο πεδίο της Χρηματοοικονομίας ως προς την ***Monte Carlo*** τιμολόγηση ενός τύπου εξωτικών δικαιωμάτων, των ***lookback options***, τα συνάπτονται επί του χρηματοοικονομικού δείκτη $S\&P\ \ 500$. Η απόδοση «δίκαιης» αρχικής τιμής σε αυτά τα συμβόλαια λαμβάνει χώρα με την χρήση τριών διαφορετικών υποδειγμάτων, του κλασσικού Black & Scholes υποδείγματος, ενός Variance Gamma υποδείγματος και ενός «γενικευμένου» Black & Scholes υποδείγματος όπου η πτητικότητα του δείκτη προσδιορίζεται από μια γάμμα-OU στοχαστική διαδικασία. Σκοπός της εφαρμογής αυτής, είναι αφενός η «δίκαιη» τιμολόγηση τέτοιων συμβολαίων με την μέθοδο της Monte Carlo προσομοίωσης και αφετέρου, η σύγκριση των τριών ανωτέρω υποδειγμάτων ως προς την προσαρμογή τους στις πραγματικές τιμές της αγοράς.

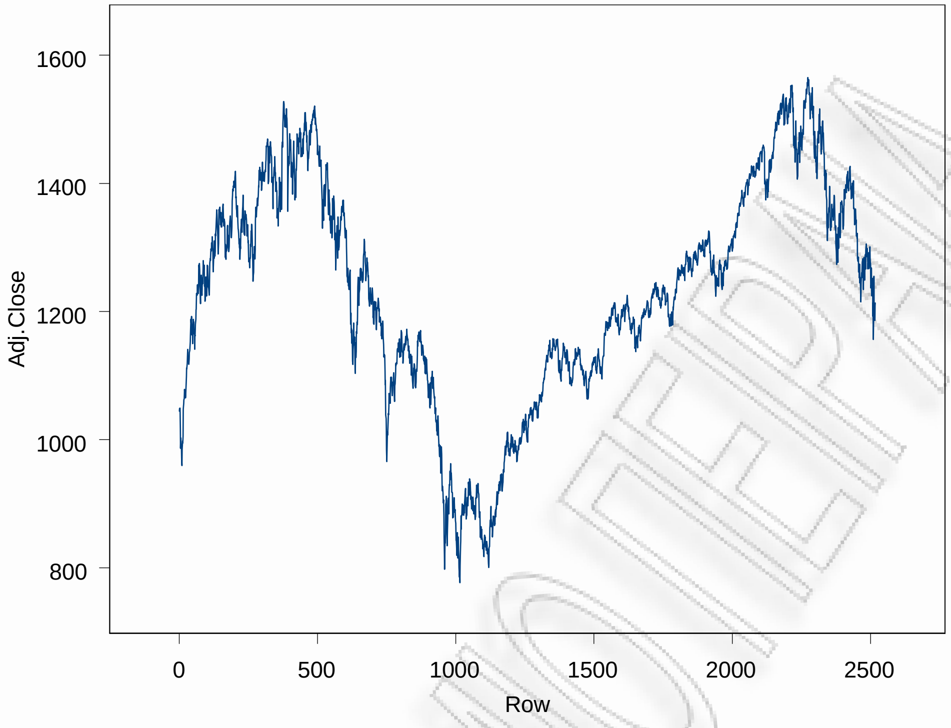
Προς αυτή την κατεύθυνση λοιπόν, σε πρώτο στάδιο πραγματοποιείται η παρουσίαση και ανάλυση του χρηματοοικονομικού δείκτη $S\&P\ \ 500$, του υποκείμενου δηλαδή προϊόντος των προς τιμολόγηση δικαιωμάτων. Ακόμη, περιγράφεται η υφή των lookback παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων ενώ δίνονται οι κλειστοί τύποι βάσει των οποίων το Υπόδειγμα των Black & Scholes τιμολογεί τα εν λόγω συμβόλαια. Εν συνεχεία, σκιαγραφείται τόσο η μέθοδος τιμολόγησης Monte Carlo μέσω της οποίας λαμβάνει χώρα η εφαρμογή, όσο και ο τρόπος προσδιορισμού των τιμών των παραμέτρων του εκάστοτε υποδείγματος με την μέθοδο της βαθμονόμησης (***calibration***). Με την διευθέτηση όλων των παραπάνω ζητημάτων και την υλοποίηση της εφαρμογής, παρουσιάζονται οι εξαχθείσες αρχικές τιμές των lookback δικαιωμάτων αγοράς. Τέλος, βάσει των παραπάνω αποτελεσμάτων, εξάγονται και συνοψίζονται βασικά συμπεράσματα ως προς την υπεροχή των αγορών Lévy, συγκρινόμενες με αυτή των Black & Scholes.

6.1 Μοντελοποίηση του Δείκτη S&P 500

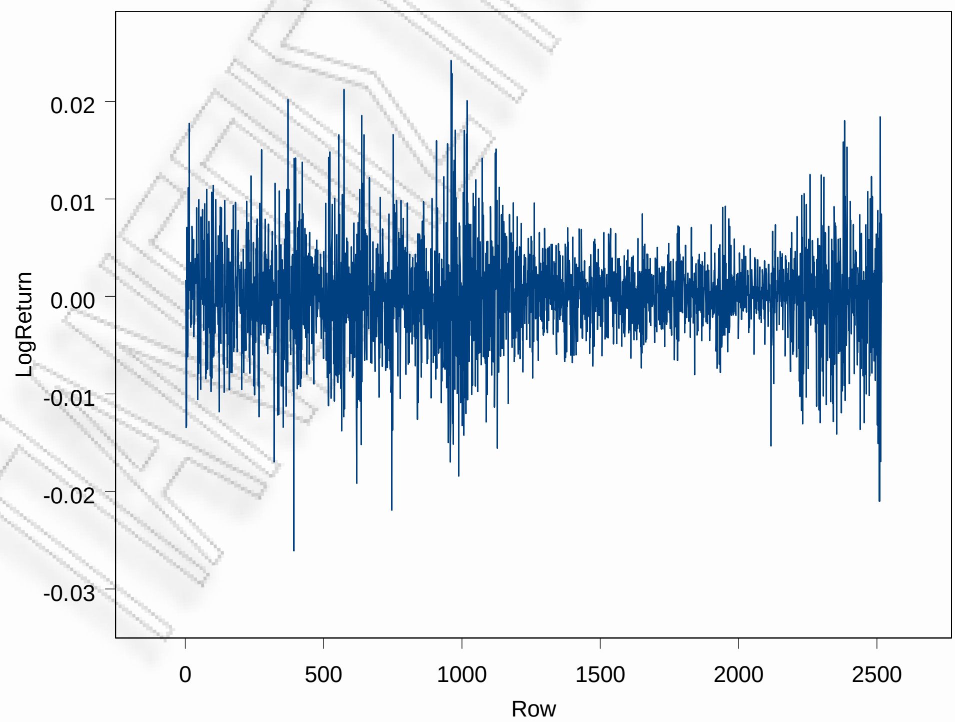
Από την έως τώρα ανάλυση, είναι ξεκάθαρο πως για την τιμολόγηση παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, απαιτείται πρωτίστως ο προσδιορισμός του μηχανισμού βάσει του οποίου διαμορφώνονται οι τιμές των πρωτογενών προϊόντων στα οποία επισυνάπτονται τα συμβόλαια αυτά. Στην παρούσα εφαρμογή, επιχειρείται η τιμολόγηση των λεγόμενων *lookback options* στον αμερικάνικο χρηματοοικονομικό δείκτη Standard and Purity 500 (S&P 500) που αφορά σε 500 μετοχές αμερικάνικων ανώνυμων εταιρειών οι οποίες διαπραγματεύονται καθημερινώς στις αγορές. Με γνώμονα τις ιστορικές τιμές του δείκτη, επιτυγχάνεται ο προσδιορισμός των τιμών των παραμέτρων της κατανομής που χρησιμοποιεί το εκάστοτε υπόδειγμα.

6.1.1 Παρουσίαση του Δείκτη S&P 500

Για την επίτευξη του παραπάνω στόχου, γίνεται η χρήση των προσαρμοσμένων τιμών κλεισίματος (*adjusted close prices*) του $S\&P\ 500$ από τις 25 Σεπτεμβρίου του 1998 έως τις 26 Σεπτεμβρίου του 2008. Πρόκειται για τις καθημερινές προσαρμοσμένες τιμές κλεισίματος του δείκτη κατά την τελευταία δεκαετία, δηλαδή 2.157 διαπραγματεύσιμες ημέρες οι οποίες αντλήθηκαν από τον διαδικτυακό τόπο Yahoo Finance (www.yahoofinance.com). Ένα τμήμα των δεδομένων, δύναται να βρεθεί στον πίνακα του παραρτήματος A ενώ στα διαγράμματα της επόμενης σελίδας, παρουσιάζονται γραφικά τόσο οι τιμές του δείκτη όσο και ο λογάριθμος της απόδοσής του, μεταξύ δύο διαδοχικών ημερών διαπραγμάτευσης. Στον πίνακα (6.1), εμφανίζονται οι τέσσερις πρώτες ροπές για την λογαριθμική απόδοση των ιστορικών προσαρμοσμένων τιμών κλεισίματος του δείκτη S&P 500 μέσω των οποίων, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, δύναται να προσδιοριστούν οι τιμές των παραμέτρων για τα υποδείγματα τα οποία χρησιμοποιούνται.



Διάγραμμα 6.1: Προσαρμοσμένες Τιμές Κλεισίματος του S&P 500.



Διάγραμμα 6.2: Λογαριθμική Απόδοση του S&P 500.

	Log-Return of S&P 500
mean	0,00002581284
variance	0,00002528840
skewness	0,003280629
kurtosis	2,119186

Πίνακας 6.1: Οι Πρώτες Ροπές της Εμπειρικής Κατανομής της Λογαριθμικής Απόδοσης του Δείκτη S&P 500.

6.1.2 Εκτίμηση των Παραμέτρων

Όπως επανειλημμένως έχει αναφερθεί, η τιμολόγηση των lookback options και άρα η μοντελοποίηση του δείκτη $S\&P\ 500$, λαμβάνει χώρα με την χρήση τριών διαφορετικών υποδειγμάτων, του κλασσικού Black & Scholes Υποδείγματος, του VG Υποδείγματος και ενός $BNS-SV$ Υποδείγματος με την πτητικότητα του δείκτη να προσδιορίζεται από μια γάμμα-OU στοχαστική διαδικασία. Στην παρούσα φάση, σκοπό αποτελεί η εύρεση των παραμέτρων των κατανομών του κάθε υποδείγματος.

Για τα δύο πρώτα υποδείγματα, η εύρεση των παραμέτρων των κατανομών τους πραγματοποιείται με την μέθοδο των ροπών (*Moments Method*). Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, οι παράμετροι του υποδείγματος προσδιορίζονται εξισώνοντας τις θεωρητικές τιμές των ροπών της κατανομής οι οποίες είναι μια συνάρτηση των παραμέτρων της, με τις πραγματικές τιμές των ροπών οι οποίες προκύπτουν από τις ιστορικές τιμές του δείκτη. Οι μεν πρώτες, για το Black & Scholes και το VG Υπόδειγμα, είναι εκείνες που φαίνονται στην σχέση (5.5) της σελίδας 71 και στον πίνακα 5.1 της σελίδας 86 αντίστοιχα. Οι ροπές της λογαριθμικής απόδοσης των ιστορικών δεδομένων του δείκτη υπολογίστηκαν παραπάνω και είναι αυτές που παρουσιάζει ο πίνακας 6.1.

Σχετικά με το $BNS-SV$ Υπόδειγμα, η διαδικασία η οποία ακολουθείται είναι πολυπλοκότερη αφού η στοχαστική διαδικασία του λογαρίθμου της τιμής του δείκτη ορίζεται μέσω της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (5.5) και για τον λόγο αυτό, ο προσδιορισμός της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής στις διάφορες χρονικές στιγμές εάν αυτή υπάρχει, προκύπτει βάσει απαιτητικών αναλυτικών χειρισμών και πολύπλοκων υπολογισμών. Κατά

Υπόδειγμα (Κατανομή)	Παράμετροι		
Black & Scholes	μ	σ	
(Κανονική)	0,000038457	0,00502876	
VG	σ	ν	θ
(Variance Gamma)	-0,00502876	22.292,9	0,0000258128

Πίνακας 6.2: Εκτιμήσεις των Παραμέτρων Με την Μέθοδο των Ροπών

συνέπεια, δεν επιχειρείται η εύρεση των τιμών των παραμέτρων για το συγκεκριμένο υπόδειγμα αφού ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσης εφαρμογής. Έτσι, στον πίνακα 6.2 παρουσιάζονται οι τιμές των παραμέτρων με την μέθοδο των ροπών, μόνο για το Black & Scholes και Variance Gamma Υπόδειγμα.

6.2 Lookback Δικαιώματα

Τα εξωτικά παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα για τα οποία επιχειρείται μια δίκαιη ως προς την Αρχή της μη Επιτηδειότητας τιμολόγηση, είναι τα λεγόμενα lookback options. Ένα τέτοιο προϊόν είναι ένα ευρωπαϊκού τύπου συμβόλαιο με την άσκηση ή μη άσκηση του να λαμβάνει χώρα αποκλειστικά στην ωρίμανση T του συμβολαίου. Όπως κάθε δικαίωμα, απαντάται σε δύο δυνατές μορφές, αυτή του δικαιώματος αγοράς (θετική θέση) και εκείνη του δικαιώματος πώλησης (αρνητική θέση).

Η απόδοση του συγκεκριμένου παράγωγου χρηματοοικονομικού προϊόντος εξαρτάται από την μέγιστη ή ελάχιστη τιμή τη οποία λαμβάνει το υποκείμενο πρωτογενές προϊόν καθ' όλη την διάρκεια ζωής του συμβολαίου. Συγκεκριμένα, η απόδοση ενός lookback δικαιώματος αγοράς, ορίζεται ως η διαφορά της τελικής αξίας του υποκείμενου προϊόντος στον χρόνο ωρίμανσης με την χαμηλότερη τιμή την οποία απέκτησε κατά τη συνολική διάρκεια ζωής του συμβολαίου,

$$V_T^{lb-call} = \left(S_T - S_{\min}\right)^+ . \tag{6.1}$$

Όμοια, η απόδοση ενός lookback δικαιώματος πώλησης, ορίζεται ως η διαφορά της υψηλότερης τώρα τιμής που έλαβε το υποκείμενο προϊόν κατά τη συνολική διάρκεια του συμβολαίου με την τελική αξία του υποκείμενου προϊόντος στον χρόνο ωρίμανσης,

$$V_T^{lb-put} = \left(S_{\max} - S_T\right)^+ .$$

Κατά την θεώρηση της Black & Scholes αγοράς, η τιμολόγηση των lookback δικαιωμάτων πραγματοποιείται μέσω κλειστών τύπων οι οποίοι αποδίδουν άμεσα την δίκαιη αρχική τους τιμή. Έτσι, η αρχική τιμή ενός lookback δικαιώματος αγοράς (βλ. Hull (2003)), προκύπτει από την σχέση:

$$V_0^{lb-call} = S_0 e^{-qT}\left(N\left(a_1\right) - \frac{\sigma^2}{2\left(r-q\right)}N\left(-a_1\right)\right) - S_{\min}e^{-rT}\left(N\left(a_2\right) - \frac{\sigma^2}{2\left(r-q\right)}e^{Y_1}N\left(a_3\right)\right)$$

όπου

$$a_1 = \frac{\ln\left(S_0/S_{\min}\right) + \left(r-q+\sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad , \quad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T} \quad ,$$

$$a_3 = \frac{\ln\left(S_0/S_{\min}\right) + \left(-r+q+\sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

και $$Y_1 = -\frac{2\left(r-q-\sigma^2/2\right)\ln\left(S_0/S_{\min}\right)}{\sigma^2},$$

με S_0 να είναι η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος την στιγμή που τίθεται σε ισχύ το συμβόλαιο, $S_{\min}$ η ελάχιστη τιμή που λαμβάνει στο σύνολο της ζωής του, T ο χρόνος ωρίμανσης και r και q το άνευ κινδύνου επιτόκιο και το μέρισμα που αποδίδει το υποκείμενο χρεόγραφο αντίστοιχα, υπολογισμένα σε ετήσια βάση.

Κατά πλήρη αντιστοιχία, η αρχική τιμή ενός lookback δικαιώματος πώλησης (βλ. Hull (2003)), προκύπτει ως εξής:

$$V_0^{lb-put} = S_0 e^{-qT}\left(\frac{\sigma^2}{2\left(r-q\right)}N\left(-b_2\right) - N\left(b_2\right)\right) + S_{\max}e^{-rT}\left(N\left(b_1\right) - \frac{\sigma^2}{2\left(r-q\right)}e^{Y_2}N\left(-b_3\right)\right)$$

όπου

$$b_1 = \frac{\ln\left(S_{\max}/S_0\right) + \left(-r+q+\sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad , \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T} \quad ,$$

$$b_3 = \frac{\ln\left(S_{\max}/S_0\right) + \left(r-q-\sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

και $$Y_2 = \frac{2\left(r-q-\sigma^2/2\right)\ln\left(S_{\max}/S_0\right)}{\sigma^2},$$

με S_0 να συμβολίζεται η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος την στιγμή που τίθεται σε ισχύ το συμβόλαιο, $S_{\max}$ η μέγιστη πλέον τιμή που λαμβάνει στο σύνολο της ζωής του, T ο χρόνος ωρίμανσης και με r και q να συμβολίζεται το άνευ κινδύνου επιτόκιο και το μέρισμα που αποδίδει το υποκείμενο χρεόγραφο αντίστοιχα, υπολογισμένα και τα δύο σε ετήσια βάση.

Στις περιπτώσεις των Lévy αγορών και λόγω των πολυπλοκότερων στοχαστικών διαδικασιών με τις οποίες διαμορφώνονται τα επίπεδα τιμών των πρωτογενών προϊόντων στην πορεία του χρόνου, δεν υπάρχουν διαθέσιμοι κλειστοί τύποι που να αποδίδουν την αρχική «δίκαιη» αξία τέτοιων συμβολαίων. Συχνά, για την τιμολόγησή τους γίνεται χρήση αριθμητικών μεθόδων ενώ ένας εναλλακτικός τρόπος τιμολόγησης παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων ο οποίος περιγράφεται σε επόμενη υποενότητα, είναι η μέθοδος της Monte Carlo προσομοίωσης.

6.3 Τιμολόγηση Lookback Δικαιωμάτων μέσω Monte Carlo Προσομοίωσης

Στο σημείο αυτό, πραγματοποιείται η εφαρμογή του παρόντος που αφορά όπως ήδη έχει αναφερθεί, στην τιμολόγηση lookback δικαιωμάτων αγοράς τα οποία έχουν συναφθεί επί του αμερικάνικου χρηματοοικονομικού δείκτη $S\&P$ 500. Η γνωριμία με την φύση αυτών των εξωτικών δικαιωμάτων καθώς και με τον δείκτη $S\&P$ 500, πραγματοποιήθηκε στις προηγούμενες ενότητες. Τα υποδείγματα με τα οποία πραγματοποιείται η εφαρμογή έχουν προσδιοριστεί και εκτενώς αναλυθεί στο κεφάλαιο 5 και συνεπώς οι τελευταίες λεπτομέρειες που απομένουν έτσι ώστε να είναι εφικτή η τιμολόγηση των συμβολαίων, είναι η διευκρίνιση της μεθόδου τιμολόγησης καθώς και ο προσδιορισμός των τιμών των παραμέτρων της κατανομής του κάθε υποδείγματος. Η τεχνική η οποία ακολουθείται είναι η μέθοδος της Monte Carlo προσομοίωσης της οποίας η γενική αρχή σχολιάζεται παρακάτω, ενώ ο προσδιορισμός των τιμών των παραμέτρων οι οποίοι μετέχουν στα υποδείγματα περιγραφής της αγοράς, πραγματοποιείται με την μέθοδο της βαθμονόμησης που επίσης σχολιάζεται σε επόμενη υποενότητα.

6.3.1 Monte Carlo Προσομοίωση

Η ιδέα της τεχνικής Monte Carlo είναι απλή. Από την στιγμή όπου δεν υπάρχουν διαθέσιμοι κλειστοί τύποι οι οποίοι να αποδίδουν ακριβώς την αρχική τιμή των δικαιωμάτων, μία καλή προσέγγιση της αρχικής τους τιμής δύναται να βρεθεί προσομοιώνοντας έναν ικανοποιητικά μεγάλο αριθμό τέτοιων συμβολαίων.

Αυτό που στην ουσία περιγράφει η μέθοδος αυτή είναι η προσομοίωση, η δημιουργία δηλαδή πολλών, έστω n, προφανώς διαφορετικών τροχιών της στοχαστικής διαδικασίας που περιγράφει τις τιμές του υποκείμενου προϊόντος και η καταγραφή της τελικής απόδοσης V_T^i , $i = 1, 2, ..., n$ του συμβολαίου σε κάθε περίπτωση. Αφού κάθε μονοπάτι της στοχαστικής διαδικασίας των τιμών είναι διαφορετικό, διαφορετική εμφανίζεται κάθε φορά και η απόδοση του ίδιου του συμβολαίου. Έτσι, η τελική απόδοση του δικαιώματος βάσει της Monte Carlo προσομοίωσης, προκύπτει απλά ως η μέση τιμή των n διαφορετικών, επί μέρους θα μπορούσε κάποιος να πει, τελικών αποδόσεων,

$$V_{MC}^T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} V_i^T . \tag{6.2}$$

Προφανώς, η αρχική αξία ενός τέτοιου δικαιώματος, το ποσό δηλαδή το οποίο πρέπει να καταβληθεί για την απόκτησή του, προκύπτει από την τελευταία σχέση συνυπολογίζοντας την διαχρονική αξία του χρήματος, οπότε:

$$V_{MC}^0 = e^{-rT} V_{MC}^T . \tag{6.3}$$

Κλείνοντας την γενική αναφορά στην μέθοδο της Monte Carlo προσομοίωσης, επισημαίνεται το γεγονός ότι η τιμή την οποία λαμβάνουμε εφαρμόζοντας την τεχνική αυτή, δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια εκτίμηση της πραγματικής τιμής. Όπως συμβαίνει σε κάθε πεδίο της Στατιστικής Επιστήμης, έτσι και εδώ, η ποιότητα της εκτίμησης αυτής εξαρτάται από το μέγεθος του τυπικού της σφάλματος, το οποίο βέβαια δίνεται από την σχέση:

$$s.e.\left(V_{MC}^T\right) = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(V_{MC}^T - V_i^T\right)^2} .$$

Σημειώνεται δε, όπως εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κανείς, ότι το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης είναι αντιστρόφως ανάλογο του πλήθους των προσομοιώσεων που πραγματοποιούνται. Μάλιστα, με σκοπό τον υποδιπλασιασμό του τυπικού σφάλματος της εκτίμησης της τελικής απόδοσης ενός τέτοιου συμβολαίου, απαιτείται ο τετραπλασιασμός του πλήθους των προσομοιώσεων της στοχαστικής διαδικασίας που περιγράφει τις τιμές της αγοράς Lévy.

Αναφορικά με την Monte Carlo τιμολόγηση των lookback δικαιωμάτων αγοράς, αμέσως παρακάτω προσδιορίζονται τα βασικά σημεία με τα οποία αξιοποιεί η προσομοίωση των στοχαστικών διαδικασιών του καθενός από τα τρία υποδείγματα που συμμετέχουν στο συγκεκριμένο εγχείρημα.

Monte Carlo Τιμολόγηση υπό το Black & Scholes Υπόδειγμα.

1. Με βάσει τις εκτιμώμενες τιμές για τις παραμέτρους του υποδείγματος, προσομοιώνεται ένας μεγάλος, έστω n, αριθμός μονοπατιών του λογαρίθμου της αξίας του υποκείμενου προϊόντος ως μια απλή γραμμική κίνηση Brown και υπολογίζεται κάθε φορά μέσω της σχέσης (6.1), σελ. 93, η απόδοση V_T^i , $i=1,2,...,n$ του συμβολαίου.
2. Υπολογίζεται μέσω της σχέσης (6.2), σελ. 96, η μέση τιμή των δειγματικών αποδόσεων, τιμή η οποία αποτελεί και την απόδοση του lookback δικαιώματος στον χρόνο ωρίμανσης T.
3. Η εκτίμηση της αρχικής «δίκαιης» τιμής του lookback δικαιώματος αγοράς, προκύπτει επιστρέφοντας την τιμή αυτή στον χρόνο μηδέν μέσω της διαχρονικής αξίας του χρήματος και του άνευ κινδύνου επιτοκίου r, σχέση (6.3) σελ. 96.

Monte Carlo Τιμολόγηση υπό το Variance Gamma Υπόδειγμα.

1. Με βάσει τις εκτιμώμενες τιμές για τις παραμέτρους του υποδείγματος, προσομοιώνεται ένας μεγάλος, έστω n, αριθμός μονοπατιών του λογαρίθμου της αξίας του υποκείμενου προϊόντος. Αυτή τη φορά, η ζητούμενη στοχαστική διαδικασία προκύπτει ως η διαφορά δύο ανελίξεων γάμμα (λεπτομέρειες για τις τιμές των παραμέτρων των δύο αυτών διαδικασιών βλ. ενότητα 5.5). Παράλληλα, υπολογίζεται κάθε φορά μέσω της σχέσης (6.1), η απόδοση V_T^i , $i=1,2,...,n$ του συμβολαίου.
2. Υπολογίζεται μέσω της σχέσης (6.2) η μέση τιμή των δειγματικών αποδόσεων, τιμή η οποία αποτελεί και την απόδοση του lookback δικαιώματος στον χρόνο ωρίμανσης T.
3. Η εκτίμηση της αρχικής «δίκαιης» τιμής του lookback δικαιώματος αγοράς, προκύπτει και πάλι από την σχέση (6.3).

Monte Carlo Τιμολόγηση υπό το BNS Gamma-OU Υπόδειγμα.

1. Με βάσει τις εκτιμώμενες τιμές για τις παραμέτρους του υποδείγματος, προσομοιώνεται ένας μεγάλος, έστω n, αριθμός του λογαρίθμου της αξίας του υποκείμενου προϊόντος ως εξής:
   (α) Προσομοιώνεται το subordinator της OU διαδικασίας, δηλαδή μια σύνθετη ανέλιξη Poisson.
   (β) Προσομοιώνεται μια κίνηση Brown.
   (γ) Μέσω της σχέσης (5.11) προσδιορίζεται ο λογάριθμος της αξίας του χρεογράφου.

   Ταυτόχρονα, μέσω της σχέσης (6.1) υπολογίζονται οι δειγματικές αποδόσεις V_T^i , $i = 1,2,...,n$. Οι τιμές των παραμέτρων των δύο παραπάνω στοχαστικών διαδικασιών προσδιορίζονται στην ενότητα 5.6.
2. Μέσω της σχέσης (6.2) υπολογίζεται η απόδοση του lookback δικαιώματος στον χρόνο ωρίμανσης T.
3. Η εκτίμηση της αρχικής «δίκαιης» τιμής του lookback δικαιώματος αγοράς, προκύπτει επιστρέφοντας την τιμή αυτή στον χρόνο μηδέν μέσω της διαχρονικής αξίας του χρήματος και του άνευ κινδύνου επιτοκίου r, σχέση (6.3).

6.3.2 Βαθμονόμηση

Γνωρίζοντας πλέον την γενική αρχή της Monte Carlo προσομοίωσης, το μόνο που απομένει έτσι ώστε να υλοποιηθεί η τιμολόγηση των lookback δικαιωμάτων επί του χρηματοοικονομικού δείκτη $S\&P\ 500$, είναι ο προσδιορισμός των τιμών των παραμέτρων των κατανομών που διέπουν τις τιμές της εκάστοτε αγοράς Lévy. Όπως έχει αναφερθεί στην αρχή του κεφαλαίου, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων της κατανομής κάθε υποδείγματος δεν προσδιορίζονται με βάση τις ιστορικές τιμές του δείκτη όπως στην ενότητα 6.1 αλλά μέσω μιας διαδικασίας υπό την ονομασία βαθμονόμηση η οποία αξιοποιεί τις ίδιες τις τιμές των δικαιωμάτων της αγοράς.

Γενικά, με την μέθοδο της βαθμονόμησης αποφεύγεται ο «στατικός αυτοπροσδιορισμός» μιας κατανομής, όπως γίνεται σε περιπτώσεις που δεν αφορούν στην μακροχρόνια εξέλιξη ενός φαινομένου, ενώ παράλληλα οι εκτιμήσεις της ενέχουν το στοιχείο της διαχρονικότητας.. Επειδή οι χρονοσειρές των χρηματοοικονομικών μεγεθών είναι κατά κανόνα πολύ μεγάλες και αφορούν σε ιστορικά δεδομένα πολλών ετών και δεκαετιών, είναι λογικό οι διάφορες χρονικές περίοδοι που συνθέτουν την χρονοσειρά να μην δύναται να προσδιοριστούν το ίδιο καλά από τις ίδιες τιμές των παραμέτρων του εκάστοτε υποδείγματος. Κατά το πέρασμα του χρόνου, οι εξωγενείς παράγοντες που επιδρούν στην διαμόρφωση των διαφόρων μεγεθών και στην ουσία περιγράφονται από αυτές τις παραμέτρους, μεταβάλλονται αισθητά. Έπεται λοιπόν ότι, για την καλύτερη προσαρμογή των υποδειγμάτων αυτών στην πραγματικότητα, πρέπει οι τιμές των παραμέτρων τους να λαμβάνουν υπ' όψην τις μεταβολές των συνθηκών κάτω από τις οποίες εξελίσσεται το υπό παρακολούθηση φαινόμενο. Κάτι τέτοιο, επιτυγχάνεται μέσω της μεθόδου της βαθμονόμησης, η οποία εκμεταλλεύεται ένα τμήμα των ιστορικών τιμών για τον αρχικό προσδιορισμό κάποιων τιμών για τις παραμέτρους και αξιοποιεί το υπολειπόμενο κομμάτι των δεδομένων για την βελτίωσή τους. Η τελική επιλογή των τιμών των παραμέτρων του εκάστοτε υποδείγματος, πραγματοποιείται βάσει κάποιου κατάλληλου για κάθε περίπτωση κριτηρίου.

Στην προκειμένη περίπτωση, όλες οι απαραίτητες πληροφορίες για την εκτίμηση των παραμέτρων που αξιοποιεί η βαθμονόμηση, περιέχονται στις τωρινές, πραγματικές τιμές των ίδιων των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων που διαπραγματεύονται στην αγορά και μόνον σε αυτές. Η επιλογή των βέλτιστων παραμέτρων του κάθε υποδείγματος, στηρίζεται στην ελαχιστοποίηση ενός μέτρου το οποίο συγκρίνει τις πραγματικές τιμές των δικαιωμάτων της αγοράς με τις αντίστοιχες τιμές που παράγει το υπόδειγμα για τα διαφορετικά επίπεδα τιμών των παραμέτρων του. Τα κριτήρια που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία βάσει των οποίων επιλέγονται οι τελικές τιμές των παραμέτρων είναι, η ελαχιστοποίηση των ποσοτήτων APE, AAE, $RMSE$ και $ARPE$.

Για την προσπάθεια λοιπόν τιμολόγησης lookback δικαιωμάτων επί του χρηματοοικονομικού δείκτη $S\&P$ 500 με βάση τα υποδείγματα Black & Scholes, VG και BNS Gamma-OU, ο προσδιορισμός των τιμών των παραμέτρων των κατανομών που χρησιμοποιούν τα υποδείγματα, λαμβάνει χώρα με την μέθοδο της βαθμονόμησης, σύμφωνα με την διαδικασία που σχολιάστηκε παραπάνω. Για την βαθμονόμηση, χρησιμοποιούνται οι πραγματικές τιμές της αγοράς, για ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς του δείκτη και είναι αυτές που φαίνονται στον Πίνακα του Παραρτήματος B. Στον πίνακα αυτόν, παρουσιάζονται 75 αρχικές τιμές ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς κατά το πέρας των διαπραγματεύσεων της 18ης Απριλίου του 2002, διαφορετικών παραδοτέων τιμών K και διαφορετικής ωρίμανσης

T. Επίσης, αναφέρεται ότι η προσαρμοσμένη τιμή κλεισίματος του δείκτη $S\&P$ 500 για εκείνη την ημέρα κυμάνθηκε στις 1.124,47 μονάδες, ενώ οι ετήσιες τιμές του άνευ κινδύνου επιτοκίου και του αποδιδόμενου μερίσματος οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν είναι $r = 1,9\%$ και $q = 1,2\%$ αντίστοιχα. Τα δεδομένα αυτά, όλα τα παρακάτω αποτελέσματα καθώς και περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την μέθοδο της βαθμονόμησης, αντλήθηκαν και δύναται να βρεθούν στο έργο του W. Schoutens (2003).

Με βάση αυτές τις τιμές και γνώμονα τα τέσσερα προαναφερόμενα κριτήρια επιλογής παραμέτρων, οι εκτιμήσεις των τιμών των παραμέτρων του κάθε υποδείγματος κάτω από το ισοδύναμο martingale μέτρο πιθανότητας Q (για το Υπόδειγμα VG χρησιμοποιείται η μέθοδος διόρθωσης του μέσου), παρουσιάζονται στον πίνακα 6.3. Επιπλέον, στον πίνακα 6.4 της επόμενης σελίδας, παρουσιάζονται οι αντίστοιχες τιμές των τεσσάρων κριτηρίων σύμφωνα με τα οποία έγινε η επιλογή των παραμέτρων για το κάθε υπόδειγμα ξεχωριστά.

Υπόδειγμα	Παράμετροι				
Black & Scholes	μ	σ			
	0,007	0,1812			
VG	C	G	M	m	
	1,3574	5,8704	14,2699	0,121898	
BNS OU-Gamma	ρ	λ	α	β	σ_0^2
	-1,2606	0,5783	1,4338	11,6641	0,0145
					Πηγή: Schoutens (2003)

Πίνακας 6.3: Βαθμονόμηση για τις Παραμέτρους των Υποδειγμάτων

Όπως παρατηρείται, οι τιμές των Lévy Υποδειγμάτων και για τα τέσσερα διαφορετικά κριτήρια, είναι εμφανώς μικρότερες συγκριτικά με εκείνες του Black & Scholes Υποδείγματος. Ένα τέτοιο γεγονός πιστοποιεί την καλύτερη προσαρμογή των υποδειγμάτων Lévy στις πραγματικές τιμές της αγοράς συγκριτικά με αυτή του Black & Scholes. Για λόγους συνέπειας βέβαια, πρέπει να τονιστεί το αυτονόητο. Το γεγονός δηλαδή ότι, υποδείγματα με μεγαλύτερο πλήθος παραμέτρων, έχουν κατά κανόνα και

Υπόδειγμα	APE (%)	AAE	RMSE	ARPE (%)
Black & Scholes	8,87	5,4868	6,7335	16,92
VG	4,67	2,8862	3,5600	7,56
BNS Gamma-OU	1,80	1,1111	1,4440	3,26

Πηγή: Schoutens (2003)

Πίνακας 6.4: Τα Κριτήρια APE, AAE, RMSE και ARPE για την Βαθμονόμηση των Υποδειγμάτων.

καλύτερη προσαρμογή. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, το πλήθος των παραμέτρων του κάθε υποδείγματος είναι δύο, τέσσερις και πέντε, κατά την αντίστοιχη σειρά παρουσίασης τους στον πίνακα 6.4 . Επιπρόσθετα, σημειώνεται πως μικρές διαφορές στις τιμές των κριτηρίων, ακόμα και για υποδείγματα με το ίδιο πλήθος παραμέτρων, δεν επάγουν εν γένει ανάλογα συμπεράσματα για την προσαρμογή τους. Επειδή η διαδικασία της βαθμονόμησης διεξάγεται χρησιμοποιώντας τις αγοραίες τιμές ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς μιας μόνο ημέρας, ενδέχεται το εμφανιζόμενο ως καλύτερο υπόδειγμα, με δεδομένα διαφορετικής διαπραγματεύσιμης ημέρας, να προσαρμόζεται ελαφρώς χειρότερα.

6.3.3 Αποτελέσματα

Για να επαληθευθεί η ακρίβεια της τιμολόγησης παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων με την μέθοδο της προσομοίωσης μονοπατιών της στοχαστικής διαδικασίας που περιγράφει τον λογάριθμο των τιμών της αγοράς, καθώς και για να ελεγχθεί η ποιότητα των αλγορίθμων οι οποίοι αναπτύχθηκαν για τις ανάγκες της παρούσης εργασίας, προτού προσδιοριστεί η «δίκαιη» τιμή για τα lookback δικαιώματα αγοράς, υπολογίζονται οι τιμές των αντίστοιχων ευρωπαϊκών δικαιωμάτων. Στον πίνακα της επόμενης σελίδας, πραγματοποιείται η αντιπαραβολή των τιμών που εξάγουν τα τρία αναλυθέντα υποδείγματα με την διαδικασία της Monte Carlo προσομοίωσης και των αντίστοιχων πραγματικών αρχικών τιμών της αγοράς, για την περίπτωση δίμηνων ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς, με ημερομηνία ωρίμανσης δηλαδή τον Ιούνιο του 2002, και διαφορετικών παραδοτέων τιμών K . Σχετικά με τα χαρακτηριστικά της Monte Carlo τιμολόγησης, αναφέρεται ότι

Παραδοτέα Τιμή (K)	Αγορά	Black & Scholes	VG	BNS Gamma-OU
1.050	84,50	74,50	57,40	80,10
1.075	64,30	49,60	49,70	54,30
1.110	39,50	16,40	26,40	25,80
1.120	33,50	8,70	20,00	17,90
1.125	30,70	6,00	26,00	14,90
1.130	28,00	3,90	21,70	12,40
1.135	25,60	2,20	16,50	9,90
1.140	23,20	1,30	20,60	8,20
1.150	19,10	<1,00	23,80	5,00
1.160	15,30	<1,00	14,90	2,80
1.170	12,10	<1,00	13,00	1,60
1.175	10,90	<1,00	11,20	1,00

Πίνακας 6.5: Monte Carlo Τιμολόγηση Ευρωπαϊκών Δικαιωμάτων Αγοράς και οι Τιμές της Αγοράς

χρησιμοποιήθηκαν $k = 1.000$ διαφορετικά μονοπάτια των υπό προσομοίωση στοχαστικών διαδικασιών.

Όπως διαπιστώνεται από τον πίνακα 6.5, το BNS Gamma-OU φαίνεται να αποδίδει τις εγγύτερες στις πραγματικές τιμές εκτιμήσεις, για την αρχική τιμή των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς από κάθε άλλο υπόδειγμα. Την στιγμή όπου για παράδειγμα, η αγοραία αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με παραδοτέα τιμή $K = 1.050$ αγγίζει τις 84,50 μονάδες, η Monte Carlo τιμολόγηση με το BNS Gamma-OU υπόδειγμα αποδίδει σε αυτό τιμή ίση με 80,10 μονάδες. Αντίθετα, το κλασικό Black & Scholes υπόδειγμα επάγει για το ίδιο δικαίωμα, τιμή ίση με 74,50 μονάδες. Φαίνεται λοιπόν ότι, το Black & Scholes υπόδειγμα υστερεί συγκριτικά με το BNS Gamma-OU υπόδειγμα στοχαστικής πτητικότητας τιμών και συνεπώς, στο σημείο αυτό, επαληθεύονται οι θεωρητικοί ισχυρισμοί που αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Αναφορικά με το τρίτο υπό εξέταση υπόδειγμα, εκείνο το υπόδειγμα δηλαδή όπου χρησιμοποιεί μια Variance Gamma κατανομή, οι εκτιμήσεις που εξάγει για την αρχική τιμή των δικαιωμάτων δεν φαίνονται να είναι αξιόπιστες. Διαπιστώνεται ότι οι εκτιμήσεις της μεθόδου της Monte Carlo προσομοίωσης δεν είναι ορθολογικές, προκύπτουν με ακανόνιστο τρόπο και αποκλίνουν σημαντικά μεταξύ τους ακόμα και για το ίδιο προϊόν. Ο λόγος για τον οποίο δημιουργείται αυτή η επιπλοκή, είναι προφανώς η πολύ μεγάλη διακύμανση που φαίνεται να έχουν οι τιμές του λογάριθμου της τιμής του υποκείμενου προϊόντος τις οποίες αναπαράγει το υπόδειγμα. Αν πρέπει να αναζητηθούν κάπου οι αιτίες αυτής της συμπεριφοράς, είναι βεβαίως ο αλγόριθμος μέσω του οποίου προκύπτουν οι τροχιές του λογαρίθμου των τιμών του δείκτη, ωστόσο η απλότητά του (η Variance Gamma ανέλιξη προσομοιώνεται ως η διαφορά δύο ανελίξεων γάμμα), ίσως υποδεικνύει αστοχία στις εκτιμήσεις των παραμέτρων του υποδείγματος με την διαδικασία της βαθμονόμησης. Βάσει αυτής της εξέλιξης, γίνεται αντιληπτό ότι υπό αυτές τις συνθήκες, η τιμολόγηση οποιουδήποτε χρηματοοικονομικού προϊόντος βάσει του VG υποδείγματος δεν είναι αξιόπιστη και συνεπώς, το συγκεκριμένο υπόδειγμα δεν συμμετέχει στην τιμολόγηση των lookback δικαιωμάτων αγοράς.

Προτού παρατεθούν τα αποτελέσματα της τιμολόγησης των εξωτικών δικαιωμάτων αγοράς, υφίσταται ένα ακόμα άξιο σχολιασμού σημείο σχετικά με τα αποτελέσματα του πίνακα 6.5 και την μέθοδο της Monte Carlo προσομοίωσης. Όπως ίσως κάποιος παρατηρεί, υπάρχει μια σχετική απόκλιση μεταξύ των εκτιμήσεων των δύο υποδειγμάτων, οι οποίες όπως ειπώθηκε και παραπάνω συνάδουν με την Θεωρία των ανελίξεων Lévy και των τιμών της αγοράς, η οποία μάλιστα μεγαλώνει καθώς η παραδοτέα τιμή K των συμβολαίων αυξάνει. Το γεγονός αυτό, έχει την βάση του στον χρονικό ορίζοντα στον οποίο προσομοιώνονται οι στοχαστικές διαδικασίες. Καθώς αυξάνει το μήκος του διαστήματος στο οποίο λαμβάνει χώρα η προσομοίωσή τους, οι εξαγόμενες τιμές πλησιάζουν στην πραγματικότητα. Ωστόσο, λόγω περιορισμένων υπολογιστικών δυνατοτήτων, κατά την προσομοίωση των απαιτούμενων στοχαστικών διαδικασιών και την τιμολόγηση των lookback δικαιωμάτων, δεν χρησιμοποιείται μεγάλος χρονικός ορίζοντας και απλά μεριμνάται η τήρηση της αναλογίας μεταξύ αυτού και της ωρίμανσης των συμβολαίων. Έτσι, για την τιμολόγηση των δίμηνων ευρωπαϊκών και lookback δικαιωμάτων, η διάσταση του διανύσματος της προσομοιωμένης στοχαστικής διαδικασίας επιλέγεται να είναι $n = 60$ (οπότε κάθε θέση αντιστοιχεί σε μία ημερολογιακή ημέρα). Συνέπεια τούτου και της τήρησης της αναλογίας σχετικά με τον χρόνο ωρίμανσης του κάθε δικαιώματος, οι διαστάσεις των διανυσμάτων των στοχαστικών ανελίξεων που χρησιμοποιήθηκαν κατά την τιμολόγηση των εξωτικών προϊόντων κατά πλήρη αντιστοιχία με την σειρά με την οποία παρουσιάζονται στον πίνακα 6.6, είναι $n = 30,\ 60,\ 150,\ 240,\ 330,\ 420$ και 600.

Μετά λοιπόν τον αναγκαίο έλεγχο της πιστότητας της μεθόδου που εξετάζεται και τις απαραίτητες επισημάνσεις σχετικά με τα χαρακτηριστικά της μεθόδου προσομοίωσης, είναι όλα έτοιμα για την παράθεση των αποτελεσμάτων της εν λόγω εφαρμογής. Σύμφωνα με την φύση και την απόδοση των lookback δικαιωμάτων αγοράς, δεν υφίσταται λόγος ορισμού παραδοτέας τιμής. Για τα συμβόλαια αυτά, ενδιαφέρον παρουσιάζει η μεταβολή της αρχικής τους τιμής βάσει του χρόνου ωρίμανσής τους T. Προφανώς, όσο μεγαλύτερος ο χρόνος ζωής των συμβολαίων, τόσο μεγαλύτερη αναμένεται και η αρχική τους αξία. Ο πίνακας 6.6 λοιπόν, περιέχει τις εκτιμήσεις για τις αρχικές τιμές lookback δικαιωμάτων αγοράς διαφορετικού χρόνου ωρίμανσης T που εξάγει η μέθοδος της Monte Carlo προσομοίωσης, για τα Black & Scholes και BNS Gamma-OU υποδείγματα της αγοράς. Και σε αυτή την περίπτωση, το πλήθος των δειγματικών αποδόσεων, των διαφορετικών δηλαδή πραγματοποιήσεων των στοχαστικών ανελίξεων Lévy του κάθε υποδείγματος, που χρησιμοποιεί για την εκτίμησή της η μέθοδος Monte Carlo ανέρχεται στις $k = 1.000$. Σημειώνεται δε ότι, τόσο οι κώδικες βάσει των οποίων πραγματοποιείται η συγκεκριμένη τιμολόγηση όσο και αυτοί στους οποίους στηρίχθηκαν οι τιμές των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς, δύναται να βρεθούν ανάμεσα στους πίνακες του Παραρτήματος Γ στις τελευταίες σελίδες της εργασίας.

Με βάση τα αποτελέσματα του πίνακα 6.6 της επόμενης σελίδας, παρατηρείται ότι το υπόδειγμα στοχαστικής πτητικότητας τιμών BNS Gamma-OU, συνεχίζει να αποδίδει, όπως ήταν αναμενόμενο άλλωστε, υψηλότερη αρχική αξία και στα lookback δικαιώματα αγοράς, έναντι του κλασσικού Black & Scholes υποδείγματος.

Υπόδειγμα	Μάιος 2002	Ιούν. 2002	Σεπτ. 2002	Δεκ. 2002	Μάρτ. 2003	Ιούν. 2003	Δεκ. 2003
Black & Scholes	7,60	11,00	18,80	23,50	27,40	31,60	38,10
BNS Gamma-OU	8,90	12,80	20,70	29,20	37,10	45,00	56,10

Πίνακας 6.6: Monte Carlo Τιμολόγηση Lookback Δικαιωμάτων Αγοράς

6.4 Συμπεράσματα

Σε αυτό το τελικό για την διπλωματική εργασία σημείο, συνοψίζονται τα αποτελέσματα της παραπάνω εφαρμογής των στοχαστικών ανελίξεων Lévy στο πεδίο της χρηματοοικονομίας και στην τιμολόγηση εξωτικών παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων.

Ως πρώτη παρατήρηση, επισημαίνεται η πολύ καλή απόδοση της μεθόδου τιμολόγησης Monte Carlo ως απόρροια των αποτελεσμάτων του πίνακα 6.5. Τόσο οι εκτιμήσεις του Black & Scholes όσο και του *BNS* Gamma-*OU* υποδείγματος περιγραφής τιμών, ανταποκρίνονται σε μεγάλο βαθμό στις πραγματικές τιμές της αγοράς.

Εν συνεχεία, τόσο από τις τιμές των κριτηρίων του πίνακα 6.4 που χρησιμοποιήθηκαν για την βαθμονόμηση των ιστορικών δεδομένων και την εξαγωγή εκτιμήσεων για τις παραμέτρους των υποδειγμάτων, όσο και από τις ίδιες τις εκτιμήσεις της αρχικής αξίας των υπό τιμολόγηση δικαιωμάτων, πίνακας 6.5, επάγεται η ανωτερότητα του γενικευμένου Black & Scholes υποδείγματος με στοχαστική πτητικότητα. Οι χαμηλότερες τιμές και των τεσσάρων κριτηρίων *APE*, *AAE*, *RMSE* και *ARPE* για το *BNS* Gamma-*OU* υπόδειγμα, παρέχουν μια ισχυρή ένδειξη της υπεροχής του σε σχέση με Black & Scholes υπόδειγμα τιμών. Η απόδειξη του αποτελέσματος αυτού, δίνεται από τις εγγύτερα στις πραγματικές αγοραίες τιμές, των αρχικών εκτιμώμενων αξιών για τα ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς που προκύπτουν βάσει αυτού του υποδείγματος.

Όλα τα ανωτέρω, αποτελούν την επιβεβαίωση της καταλληλότητας των Lévy αγορών ως προς την περιγραφή των αλμάτων που συχνά παρατηρούνται στις τιμές των χρηματοοικονομικών μεγεθών και γενικά της ασυμμετρίας και της κυρτότητας των εμπειρικών τους κατανομών.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΣ ΔΕΙΚΤΗΣ S&P 500

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζεται τμήμα των ιστορικών δεδομένων του χρηματοοικονομικού δείκτη S&P 500 για τα 10 τελευταία χρόνια. Αφορά στις παρατηρούμενες τιμές ανοίγματος και κλεισίματος του δείκτη κατά το χρονικό διάστημα παρακολούθησής του, στις υψηλότερες και χαμηλότερες τιμές του ανά ημέρα διαπραγμάτευσης, στον όγκο των συναλλαγών του και στις προσαρμοσμένες τιμές κλεισίματος του δείκτη, επίσης ανά ημέρα διαπραγμάτευσης. Στην τελευταία στήλη του πίνακα, υπολογίζεται η λογαριθμική απόδοση του S&P 500 μεταξύ δύο διαδοχικών ημερών διαπραγμάτευσης. Τα δεδομένα του πίνακα στο σύνολό τους, καλύπτουν ένα φάσμα 2.157 διαπραγματεύσιμων ημερών, ξεκινώντας από την 25η Σεπτεμβρίου του 1998 και καταλήγοντας στην 26η Σεπτεμβρίου του 2008, τα οποία διατίθενται στον διαδικτυακό τόπο www.yahoofinance.com.

Ημέρα	Τιμές Ανοίγμ.	Υψηλή Τιμή	Χαμηλή Τιμή	Τιμές Κλεισίμ.	Όγκος Συναλ.	Προσαρμ. Τιμή Κλεισίμ.	Λογαριθμ. Απόδοση
25-Σεπ-98	1,042.72	1,051.89	1,028.49	1,044.75	736,800,000	1044,75	-
28-Σεπ-98	1,044.75	1,061.46	1,042.23	1,048.69	690,500,000	1048,69	0,001634747
29-Σεπ-98	1,048.69	1,056.31	1,039.88	1,049.02	760,100,000	1049,02	0,000136642
30-Σεπ-98	1,049.02	1,049.02	1,015.73	1,017.01	800,100,000	1017,01	0,013458545
1-Οκτ-98	1,017.01	1,017.01	981.29	986.39	899,700,000	986,39	0,013276563
2-Οκτ-98	986.39	1,005.45	971.69	1,002.60	902,900,000	1002,60	0,00707904
5-Οκτ-98	1,002.60	1,002.60	964.72	988.56	817,500,000	988,56	0,006124667
6-Οκτ-98	988.56	1,008.77	974.81	984.59	845,700,000	984,59	0,001747613
7-Οκτ-98	984.59	995.66	957.15	970.68	977,000,000	970,68	0,006179339
8-Οκτ-98	970.68	970.68	923.32	959.44	1,114,600,000	959,44	0,005058261
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
11-Δεκ-03	1,059.05	1,073.63	1,059.05	1,071.21	1,441,100,000	1071,21	0,004958154

12-Δεκ-03	1,071.21	1,074.76	1,067.64	1,074.14	1,223,100,000	1074,14	0,001186271
15-Δεκ-03	1,074.14	1,082.79	1,068.00	1,068.04	1,520,800,000	1068,04	0,002473372

Ημέρα	Τιμές Ανοίγμ.	Υψηλή Τιμή	Χαμηλή Τιμή	Τιμές Κλεισίμ.	Όγκος Συναλ.	Προσαρμ. Τιμή Κλεισίμ.	Λογαριθμ. Απόδοση
16-Δεκ-03	1,068.04	1,075.94	1,068.04	1,075.13	1,547,900,000	1075,13	0,002873462
17-Δεκ-03	1,075.13	1,076.54	1,071.14	1,076.48	1,441,700,000	1076,48	0,000544985
18-Δεκ-03	1,076.48	1,089.50	1,076.48	1,089.18	1,579,900,000	1089,18	0,005093693
19-Δεκ-03	1,089.18	1,091.06	1,084.19	1,088.66	1,657,300,000	1088,66	0,000207392
22-Δεκ-03	1,088.66	1,092.94	1,086.14	1,092.94	1,251,700,000	1092,94	0,001704055
23-Δεκ-03	1,092.94	1,096.95	1,091.73	1,096.02	1,145,300,000	1096,02	0,001222158
24-Δεκ-03	1,096.02	1,096.40	1,092.73	1,094.04	518,060,000	1094,04	0,000785278
26-Δεκ-03	1,094.04	1,098.47	1,094.04	1,095.89	356,070,000	1095,89	0,000733763
29-Δεκ-03	1,095.89	1,109.48	1,095.89	1,109.48	1,058,800,000	1109,48	0,005352514
30-Δεκ-03	1,109.48	1,109.75	1,106.41	1,109.64	1,012,600,000	1109,64	6,26258E-05
31-Δεκ-03	1,109.64	1,112.56	1,106.21	1,111.92	1,027,500,000	1111,92	0,000891438
2-Ιαν-04	1,111.92	1,118.85	1,105.08	1,108.48	1,153,200,000	1108,48	-0,00134568
5-Ιαν-04	1,108.48	1,122.22	1,108.48	1,122.22	1,578,200,000	1122,22	0,005350143
6-Ιαν-04	1,122.22	1,124.46	1,118.44	1,123.67	1,494,500,000	1123,67	0,000560782
7-Ιαν-04	1,123.67	1,126.33	1,116.45	1,126.33	1,704,900,000	1126,33	0,001026866
8-Ιαν-04	1,126.33	1,131.92	1,124.91	1,131.92	1,868,400,000	1131,92	0,002150082
9-Ιαν-04	1,131.92	1,131.92	1,120.90	1,121.86	1,720,700,000	1121,86	-0,00387707
12-Ιαν-04	1,121.86	1,127.85	1,120.90	1,127.23	1,510,200,000	1127,23	0,002073875
13-Ιαν-04	1,127.23	1,129.07	1,115.19	1,121.22	1,595,900,000	1121,22	0,002321703
14-Ιαν-04	1,121.22	1,130.75	1,121.22	1,130.52	1,514,600,000	1130,52	0,003587414
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
11-Σεπ-08	1,229.04	1,249.98	1,211.54	1,249.05	6,869,249,600	1249,05	0,005955016
12-Σεπ-08	1,245.88	1,255.09	1,233.81	1,251.70	6,273,260,000	1251,70	0,000920429
15-Σεπ-08	1,250.92	1,250.92	1,192.70	1,192.70	8,279,510,400	1192,70	0,020969033
16-Σεπ-08	1,188.31	1,214.84	1,169.28	1,213.60	9,459,830,400	1213,60	0,007544349
17-Σεπ-08	1,210.34	1,210.34	1,155.88	1,156.39	9,431,870,400	1156,39	-0,02097124
18-Σεπ-08	1,157.08	1,211.14	1,133.50	1,206.51	10,082,689,600	1206,51	0,018426598
19-Σεπ-08	1,213.11	1,265.12	1,213.11	1,255.08	9,387,169,600	1255,08	0,017140483
22-Σεπ-08	1,255.37	1,255.37	1,205.61	1,207.09	5,332,130,000	1207,09	0,016931757
23-Σεπ-08	1,207.61	1,221.15	1,187.06	1,188.22	5,185,730,000	1188,22	0,006842794
24-Σεπ-08	1,188.79	1,197.41	1,179.79	1,185.87	4,820,360,000	1185,87	0,000859776
25-Σεπ-08	1,187.87	1,220.03	1,187.87	1,209.18	5,877,640,000	1209,18	0,008453873
26-Σεπ-08	1,204.47	1,215.77	1,187.54	1,213.27	5,383,610,000	1213,27	0,001466504

Πηγή: Yahoo Finance

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΤΙΜΕΣ ΕΥΡΩΠΑΪΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΑΓΟΡΑΣ ΕΠΙ ΤΟΥ S&P 500

Στον επόμενο πίνακα, παρουσιάζονται 75 αρχικές τιμές ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς κατά το πέρας των διαπραγματεύσεων της 18^{ης} Απριλίου του 2002, διαφορετικών παραδοτέων τιμών K και διαφορετικής ωρίμανσης T. Επίσης, αναφέρεται ότι η προσαρμοσμένη τιμή κλεισίματος του δείκτη $S\&P$ 500 για εκείνη την ημέρα κυμάνθηκε στις 1.124,47 μονάδες, ενώ οι ετήσιες τιμές του άνευ κινδύνου επιτοκίου και του αποδιδόμενου μερίσματος οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν είναι $r = 1,9\%$ και $q = 1,2\%$ αντίστοιχα.

Παραδοτέα Τιμή (K)	Μάιος 2002	Ιούνιος 2002	Σεπτ. 2002	Δεκ. 2002	Μάρτ. 2003	Ιούνιος 2003	Δεκ. 2003
975			161,60	173,30			
995			144,80	157,00		182,10	
1.025			120,10	133,10	146,50		
1.050		84,50	100,70	114,80		143,00	171,40
1.075		64,30	82,50	97,60			
1.090							
1.100	35,60		65,50	81,20	96,20	111,30	140,40
1.110		39,50					
1.120	22,90	33,50					
1.125	20,20	30,70	51,00	66,90	81,70	97,00	
1.130		28,00					
1.135		25,60	45,50				
1.140	13,30	23,20		58,90			
1.150		19,10	38,10	53,90	68,30	83,30	112,80
1.160		15,30					
1.170		12,10					

Παραδοτέα Τιμή (K)	Μάιος 2002	Ιούνιος 2002	Σεπτ. 2002	Δεκ. 2002	Μάρτ. 2003	Ιούνιος 2003	Δεκ. 2003
1.175		10,90	27,70	42,50	56,60		99,80
1.200			19,60	33,00	46,10	60,90	
1.225			13,20	24,90	36,90	49,80	
1.250				18,30	29,30	41,20	66,90
1.275				13,20	22,50		
1.300					17,20	27,10	49,50
1.325					12,80		
1.350						17,10	35,70
1.400						10,10	25,20
1.450							17,00
1.500							12,20

Πηγή: Schoutens (2003)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ & ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Στους πίνακες που ακολουθούν, παρουσιάζονται οι αλγόριθμοι μέσω των οποίων κατασκευάστηκαν όλα τα μονοπάτια των στοχαστικών διαδικασιών τα οποία παρατίθενται στις σελίδες του κύριου σώματος της διπλωματικής εργασίας, καθώς και εκείνοι που αντιστοιχούν στα υποδείγματα μέσω των οποίων πραγματοποιήθηκε η Monte Carlo τιμολόγηση τόσο των ευρωπαϊκών, όσο και των lookback δικαιωμάτων αγοράς. Όλοι οι αλγόριθμοι αφορούν στην γλώσσα προγραμματισμού S την οποία και χρησιμοποιεί το στατιστικό πακέτο S-Plus 2000.

Γ.1

Ανέλιξη Poisson

```
n <- 1000
dt <- .1
a <- .5

time <- seq(0, by=dt, length=n)
arrivaltimes <- rexp(n,a)
N <- rep(0,n)
artim <- cumsum(arrivaltimes)

i <-1
for(i in 1:n)
   {
     N[i]<-length(artim[artim<time[i]])
                        i <- i+1
          }

N

plot(time,N,xlab="Time",ylab="Realizations",type="p",pch="-")
```

Γ.2

Σύνθετη Ανέλιξη Poisson – Σύνθετη Ανέλιξη Poisson με Γραμμική Τάση

Η σύνθετη ανέλιξη Poisson στην οποία εφαρμόζεται γραμμική ως προς τον χρόνο τάση, προκύπτει πανομοιότυπα με την σύνθετη ανέλιξη Poisson. Με πράσινο χρώμα, εμφανίζονται οι απαιτούμενες προεκτάσεις που πρέπει να γίνουν στον αλγόριθμο της δεύτερης, έτσι ώστε να προκύψει επιτυχώς η σύνθετη ανέλιξη με γραμμική τάση.

```
n <- 1000
dt <- .1
a <- .5
c <- .2

time <- seq(0, by=dt, length=n)
arrivaltimes <- rexp(n,a)
N <- rep(0,n)
artim <- cumsum(arrivaltimes)
d<-rep(0, n)

i <-1
for(i in 1:n)
       {
 N[i]<-length(artim[artim<time[i]])
                        i <- i+1
                 }

i <- 1
for(i in 1:(n-1))
       {
   if(N[i] < N[i+1])(d[i] <-rnorm(1,0,1))
             i <- i+1
              }

ComPoissonDrift <- cumsum(d) + c*time

plot(time,ComPoisson,xlab="Time",ylab="S",type="p",pch="-")
```

Γ.3

Κίνηση Brown - Κίνηση Brown με Γραμμική Τάση

Οι δύο αυτές στοχαστικές διαδικασίες, προκύπτουν με παραπλήσιο τρόπο. Με μαύρο λοιπόν χρώμα εμφανίζεται ο κύριος αλγόριθμος μέσω του οποίου προκύπτει η απλή κίνηση Brown, ενώ με πράσινο χρώμα εμφανίζονται οι απαιτούμενες εκείνες προεκτάσεις έτσι ώστε να προκύψει η γραμμική κίνηση Brown.

```
n <- 1000
dt <- .001
a <- 2
c <- .08

time <- seq(0, by=dt, length=n)
dtime <- rep(0,n)
```

```
i <- 1
for(i in 1:n)
      {
   dtime[i] <- rnorm(1,0,m)
                     i < i+1
      }

brown <- cumsum(dtime)
browndrift <- a*brown + c*time

plot(time,browndrift,xlab="Time",ylab="Space",type="l",pch=".")
```

Γ.4

Γεωμετρική Κίνηση Brown

Αν και αυτή η στοχαστική διαδικασία δύναται να προκύψει με τις απαραίτητες τροποποιήσεις από τον αλγόριθμο της απλής κίνησης Brown του πίνακα Γ.3, παρουσιάζεται ξεχωριστά με διαφορετικό με έναν ελαφρώς διαφοροποιημένο αλγόριθμο προσομοίωσης της κίνησης Brown.

```
n <- 1000
dt <- .001
gbm0 <- 100
m <- .05
s <- .4

time <- seq(0, by=dt, length=n)
w <- rep(0,n)
brownianmotion <- rep(0,n)
gbm <- c(gbm0,rep(0,n-1))

i<-2
for(i in 2:n)
 {
   w[i] <- sqrt(dt)*rnorm(1,0,1)
   brownianmotion[i] <- brownianmotion[i-1]+w[i]

   gbm[i] <- gbm0*exp((m-s^2/2)*time[i] + s*brownianmotion[i])
                 i <- i+1
           }

plot(time,gbm,xlab="Time",ylab="Stock Value",type="l",pch=".")
```

Γ.5

Ανελίξεις Lévy
Με αυτό το όνομα, εννοούνται στοχαστικές διαδικασίες οι οποίες προκύπτουν ως το άθροισμα δύο εκ των τριών δομικών λίθων μιας ανέλιξης Lévy σύμφωνα με την Lévy-Itô Διαχώριση. Πρόκειται ουσιαστικά για τον συνδυασμό των αλγορίθμων που φαίνονται στους πίνακες Γ.2 και Γ.4 Το τετραπλό διάγραμμα προκύπτει εισάγοντας την εντολή **par(mfrow=c(2,2))**, είτε μέσω του κώδικα, είτε μέσω του πεδίου εντολών "Commands" του πακέτου S-Plus 2000, είτε παραθυρικά.

```
n <- 1000
dt <- .00001
a <- 10
r <- .01
c <- .08

time <- seq(0, by=dt, length=n)
dtime <- rep(0,n)
N <- rep(0,n)
arrivaltimes <- rexp(n,a)
d<-rep(0, n)

i <- 1
for(i in 1:n)
      {
   dtime[i] <- rnorm(1,0,dt)
    N[i]<-length(artim[artim<time[i]])
                     i < i+1
            }

i <- 1
for(i in 1:(n-1))
       {
    if(N[i] < N[i+1])(d[i] <-rnorm(1,0,1))
             i <- i+1
            }

S <- cumsum(d)
brown <- cumsum(dtime)
browndrift <- r*brown + c*time
Levy <- brown + S

plot(time,Levy,xlab="Time",ylab="Space",type="l",pch=".")
```

Γ.6

Berman's Γεννήτρια Αριθμών Γάμμα

Ο πιο κάτω αλγόριθμος παράγει αριθμούς από την κατανομή γάμμα(α,1) για οποιαδήποτε τιμή του α μικρότερη της μονάδας. Τέτοιες γεννήτριες είναι απαραίτητες για την εξαγωγή αριθμούν από την ίδια κατανομή με μεγαλύτερη τιμή της παραμέτρου α. Χρήση της γεννήτριας Berman γίνεται όπως διαπιστώνεται στους παρακάτω πίνακες, όπου απαιτείται η κατανομή γάμμα.

```
c <- .5
z <- 0

 i<-1
for (i in 1:10)
      {
   x <- exp((1/c)*log(runif(1,0,1)))
   y <- exp((1/(1-c))*log(runif(1,0,1)))

if (x+y <= 1) (z <- -x*log((runif(1,0,1))*(runif(1,0,1))))
            i<-i+1
         }

z
```

Γ.7

Ανέλιξη Γάμμα

```
n <- 100
dt <- .01
c <- .1
b <- 20
#a = c/dt

time <- seq(0, by=dt, length=n)
z <- 0

j <- 1
for (j in 1:n)
{
 i <- 1
for (i in 1:10)
   {
   x <- exp((1/c)*log(runif(1,0,1)))
   y <- exp((1/(1-c))*log(runif(1,0,1)))

if (x+y <= 1) (z[j] <- (-x*log((runif(1,0,1))*(runif(1,0,1))))/b)
i<-i+1
         }
             j <- j+1
                          }

 gamma <- cumsum(z)

plot(time,gamma,xlab="Time",ylab="Space",type="s",pch=".")
```

Γ.8

Ανέλιξη Variance Gamma

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, μια τέτοια ανέλιξη προσομοιώνεται ως η διαφορά δύο απλών ανελίξεων γάμμα.

```
n <- 100
dt <- .01
c <- .2
b1 <- 50
b2 <- 40
#a = c/dt

time <- seq(0, by=dt, length=n)
z1 <- 0
z2 <- 0


j <- 1
for (j in 1:n)
{
 i <- 1
for (i in 1:10)
   {
   x <- exp((1/c)*log(runif(1,0,1)))
   y <- exp((1/(1-c))*log(runif(1,0,1)))

if (x+y <= 1) (z1[j] <- (-x*log((runif(1,0,1))*(runif(1,0,1))))/b1)
i<-i+1
         }
             j <- j+1
                          }
 gamma1 <- cumsum(z1)


j <- 1
for (j in 1:n)
{
 i <- 1
for (i in 1:10)
   {
   x <- exp((1/c)*log(runif(1,0,1)))
   y <- exp((1/(1-c))*log(runif(1,0,1)))

if (x+y <= 1) (z2[j] <- (-x*log((runif(1,0,1))*(runif(1,0,1))))/b2)
i<-i+1
         }
             j <- j+1
                          }
 gamma2 <- cumsum(z2)


vgprocess <- gamma1-gamma2

plot(time,vgprocess,xlab="Time",ylab="",type="s",pch=".")
```

Γ.9

Ανέλιξη Gamma-OU
Σύμφωνα με την θεωρία της Στοχαστικής Ανάλυσης, μια τέτοια Lévy στοχαστική διαδικασία έχει ως BDLP μια σύνθετη ανέλιξη Poisson (subordinator). για την προσομοίωσή της λοιπόν, γίνεται χρήση των αλγορίθμων του πίνακα Γ. 2 και του πίνακα Γ.7

```
n <- 1000
m <- .001
a <- 10
b <- 100
l <- 10
g0 <- .08

time <- seq(0, by=m, length=n)
arrivaltimes <- rexp(n, a*l)
N <- rep(0,n)
artim <- cumsum(arrivaltimes)
gammaOU <- c(g0,rep(0,n-1))
d <- rep(0,n)

i <-2
for(i in 2:n)
       {
 N[i]<-length(artim[artim<time[i]])
                        i <- i+1
}

i <- 1
for(i in 1:(n-1))
       {
   if(N[i] < N[i+1])(d[i] <-rexp(1,b))
             i <- i+1
}
S <- cumsum(d)

i <- 2
for(i in 2:n)
       {
   gammaOU[i] <- (1-l*m)*gammaOU[i-1]+(S[i]-S[i-1])
   i <- i+1
}

plot(time,gammaOU,xlab="Time",ylab="",type="l",pch=".")
```

Γ.10

Υπόδειγμα Black & Scholes
Με μαύρο χρώμα φαίνεται ο αλγόριθμος μέσω του οποίου προσομοιώνεται ο λογάριθμος της τιμής του εκάστοτε χρηματοοικονομικού μεγέθους βάσει της θεώρησης των Black & Scholes. Με πράσινο χρώμα φαίνονται οι επεκτάσεις οι οποίες πρέπει να γίνουν σε αυτόν έτσι ώστε παράλληλα, να είναι εφικτή η τιμολόγηση ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς. Ο όρος **m** (= r q) που φαίνεται με πράσινο χρώμα, αφορά στη νέα τιμή που λαμβάνει η παράμετρος του υποδείγματος για την τιμολόγηση παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων κάτω από το ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας Q. Με κόκκινο χρώμα κάτω από αυτές τις προσθήκες, παρουσιάζονται οι γραμμές του αλγορίθμου με τις οποίες πρέπει να γίνει η αντικατάστασή τους, έτσι ώστε να λάβει χώρα η τιμολόγηση lookback δικαιωμάτων αγοράς.

```
maturity <- 300
dt <- .0001
gbm0 <- 1124.47
m <- .007
s <- .1812
k <- 1000
K <- 1175

time <- seq(0, by=dt, length=maturity)
w <- rep(0,maturity)
brownianmotion <- rep(0,maturity)
gbm <- c(gbm0,rep(0,maturity-1))
value <- rep(0,k)

j <- 1
for(j in 1:k)
 {

i<-2
for(i in 2:maturity)
   {
   w[i] <- sqrt(dt)*rnorm(1,0,1)
   brownianmotion[i] <- brownianmotion[i-1]+w[i]

   gbm[i] <- gbm0*exp((m-s^2/2)*time[i] + s*brownianmotion[i])
i <- i+1
}

if(gbm[maturity] > K)(value[j] <- gbm[maturity]-K) else (value[j] <- 0)
if(gbm[maturity] > min(gbm))(value[j] <- gbm[maturity]-min(gbm))else(value[j] <-
   0)

j <- j+1
}

price <- mean(value)*exp(-0.019*(maturity/360))

price

plot(time,gbm,xlab="Time",ylab="Stock Value",type="l",pch=".")
```

Γ.11

Υπόδειγμα Variance Gamma
Με μαύρο χρώμα φαίνεται ο αλγόριθμος μέσω του οποίου προσομοιώνεται ο λογάριθμος της τιμής του εκάστοτε χρηματοοικονομικού μεγέθους βάσει αυτού του υποδείγματος. Με πράσινο χρώμα φαίνονται οι επεκτάσεις οι οποίες πρέπει να γίνουν σε αυτόν έτσι ώστε, παράλληλα, να είναι εφικτή η τιμολόγηση ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς. Και εδώ όπως και στον πίνακα Γ.11, φαίνεται ο νεοεισερχόμενος όρος του υποδείγματος για την τιμολόγηση παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων κάτω από το ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας Q. Με κόκκινο χρώμα κάτω από αυτές τις προσθήκες, παρουσιάζονται οι γραμμές του αλγορίθμου με τις οποίες πρέπει να γίνει η αντικατάστασή τους, έτσι ώστε πλέον να λαμβάνει χώρα η τιμολόγηση lookback δικαιωμάτων αγοράς.

```
maturity <- 60
dt <- .01
c <- .013574
b1 <- 14.2699
b2 <- 5.8704
#a = c/dt
vg0 <- log(1124.47)
m <- .007
k <- 200
K <- 1170

time <- seq(0, by=dt, length=maturity)
z1 <- 0
z2 <- 0
value <- rep(0,k)

h  <- 1
for(h in 1:k)
 {

j <- 1
for (j in 1:maturity)
{
 i <- 1
for (i in 1:10)
    {
    x <- exp((1/c)*log(runif(1,0,1)))
    y <- exp((1/(1-c))*log(runif(1,0,1)))

if (x+y <= 1) (z1[j] <- (-x*log((runif(1,0,1))*(runif(1,0,1))))/b1)
i<-i+1
         }
             j <- j+1
                              }
 gamma1 <- cumsum(z1)

j <- 1
for (j in 1:maturity)
{
 i <- 1
for (i in 1:10)
    {
    x <- exp((1/c)*log(runif(1,0,1)))
    y <- exp((1/(1-c))*log(runif(1,0,1)))
```

```
if (x+y <= 1) (z2[j] <- (-x*log((runif(1,0,1))*(runif(1,0,1))))/b2)
i<-i+1
         }
             j <- j+1
                          }
 gamma2 <- cumsum(z2)

vg <- gamma1-gamma2+vg0+(m+c*log((b1-1)*(b2+1)/b1*b2))*dt

if(exp(vg[maturity])> K)(value[h] <- exp(vg[maturity])-K) else (value[h] <- 0)
if(exp(vg[maturity])> min(exp(vg)))(value[h] <- exp(vg[maturity])-min(exp(vg)))
   else (value[h] <- 0)

h <- h+1
}

price <- mean(value)*exp(-0.019*(maturity/360))

price

plot(time,exp(vg),xlab="Time",ylab="",type="s",pch=".")
```

Γ.12

Υπόδειγμα BNS Gamma-OU

Και εδώ, με μαύρο χρώμα, φαίνεται ο αλγόριθμος μέσω του οποίου προσομοιώνεται ο λογάριθμος της τιμής του εκάστοτε χρηματοοικονομικού μεγέθους βάσει αυτού του υποδείγματος, κάτω από το ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας Q. Με πράσινο χρώμα φαίνονται οι επεκτάσεις οι οποίες πρέπει να γίνουν σε αυτόν έτσι ώστε, παράλληλα, να είναι εφικτή η τιμολόγηση ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς. Με κόκκινο χρώμα κάτω από αυτές τις προσθήκες, παρουσιάζονται οι γραμμές του αλγορίθμου με τις οποίες πρέπει να γίνει η αντικατάστασή τους, έτσι ώστε πλέον να λαμβάνει χώρα η τιμολόγηση lookback δικαιωμάτων αγοράς.

```
maturity <- 30
dt <- .001
a <- 1.4338
b <- 11.6641
l <- .5783
m <- .007
r <- -1.2606
g0 <- .0145
bns0 <- log(1124.47)
k <- 1000
K <- 1130

time <- seq(0, by=dt, length=maturity)
arrivaltimes <- rexp(n, a*l)
N <- rep(0,maturity)
artim <- cumsum(arrivaltimes)
gammaOU <- c(g0,rep(0,maturity-1))
d <- rep(0,maturity)
bns <- c(bns0,rep(0,maturity-1))
```

```
value <- rep(0,k)

j  <- 1
for(j in 1:k)
 {

i <- 1
for(i in 1:maturity)
       {
 N[i]<-length(artim[artim<time[i]])
                        i <- i+1
}

i <- 1
for(i in 1:(maturity-1))
       {
   if(N[i] < N[i+1])(d[i] <-rexp(1,b))
                    i <- i+1
             }
S <- cumsum(d)

i <- 2
for(i in 2:maturity)
       {
   gammaOU[i] <- (1-l*m)*gammaOU[i-1]+(S[i]-S[i-1])
   i <- i+1
}

i <- 2
for(i in 2:maturity)
    {
bns[i] <- bns[i-1]+(m-((l*r*a)/(b-r))-
   (gammaOU[i])/2)*dt+sqrt(gammaOU[i]*dt)*rnorm(1,0,1)+r*(S[i]-S[i-1])
   i <- i+1
}

if(exp(bns[maturity])> K)(value[j] <- exp(bns[maturity])-K) else (value[j] <- 0)
if(exp(bns[maturity]) > exp(min(bns))) (value[j] <- exp(bns[maturity])-
   exp(min(bns))) else (value[j] <- 0)

j <- j+1
}

price <- mean(value)*exp(-0.019*(maturity/360))

price

plot(time,exp(bns),xlab="Time",ylab="",type="l",pch=".")
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Γιαννακόπουλος, Α. Ν. (2003). Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική, Τόμος Ι: Εισαγωγή στην Στοχαστική Ανάλυση. Σημειώσεις, Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Κάκουλλος, Θ. Ν. (1995). Στοχαστικές Ανελίξεις. Εκδόσεις Συμμετρία.

Πολίτης, Κ. Θεωρία Χρεοκοπίας. Σημειώσεις μαθήματος Θεωρία Χρεοκοπίας, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

Hoel, P., Port, S. and Stone, C. (2005). Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων (Απόδοση στα ελληνικά Γιαννόπουλος Α.) Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Boyce, W. E. and Diprima, R. C. (1999). Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών (Απόδοση στα ελληνικά ομάδα μεταπτυχιακών φοιτητών τομέα Μαθηματικών Τ.Ε.Μ.Φ.Ε. Ε.Μ.Π. με την ευθύνη Γραμμένου Θ.). Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π.

Παπαδήτος, Ν. Α. (2006). Θεωρία Πιθανοτήτων. Εκδόσεις Εθνικού & Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών Τμήματος Μαθηματικών.

Ξένη

Avramidis, A. N., L’ Ecuyer, P. and Tremblay, P-A. (2003). Proceedings of the 2003 Winter Simulation Conference S. Chick, P. J. Sánchez, D. Ferrin, and D. J. Morrice, eds.

Grimmett, G. and Stirzaker, D. (2001). Probability and Random Processes: Problems and Solutions. Clarendon Press.

Hull, J. C. (2003). Options, Futures, & Other Derivatives. Pearson Education Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 07458.

Kyprianou, A.E. (2006). Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Kyprianou, A.E. (2006). An Introduction to the Theory of Lévy Processes. Lectures notes, Satellite summer school, Sønderborg Denmark.

Neftci, S. N. (2000). An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives. Academic Press.

Ripley, B. D. (1987). Stochastic Simulation. John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex PO19 8SQ, England.

Schoutens, W. (2003). Lévy Processes in Finance, Pricing Financial Derivatives. John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex PO19 8SQ, England.

Yongqiang Bu, (2006). *Option* Pricing using Levy Processes. Master's Thesis, Department of Mathematical Statistics, Chalmers University of Technology and Göteborg University, SE - 412 96 Goteborg, Sweden.