

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ
ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ**

**Μοντελοποίηση αναλογιστικών δεδομένων απώλειας
με σύνθετα μοντέλα**

Πέτρος Γ. Δημόπουλος

Διπλωματική Εργασία που υποβλήθηκε στο Τμήμα
Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του
Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την
απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος στην
Αναλογιστική Επιστήμη και την Διαχείριση Κινδύνων

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2026

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη Συνέλευση του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή της, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αντζουλάκος Δημήτριος, Αναπληρωτής Καθηγητής (επιβλέπων)
- Χατζόπουλος Πέτρος, Αναπληρωτής Καθηγητής
- Ψαρράκος Γεώργιος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS
School of Finance and Statistics



**DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE
SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT**

Modelling actuarial data using composite models

Petros G. Dimopoulos

MSc Dissertation submitted to the Department of Statistics
and Insurance Science of the University of Piraeus in partial
fulfilment of the requirements for the degree of Master of
Actuarial Science and Risk Management

Piraeus
September 2026

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον κ. Δημήτριο Αντζουλάκο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την επίβλεψη της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Η διαρκής διαθεσιμότητα, η πολύτιμη καθοδήγηση και η ουσιαστική υποστήριξή του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας συνέβαλαν καθοριστικά στην ολοκλήρωσή της. Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Χατζόπουλο και τον κ. Ψαρράκο για τη συμμετοχή τους στην Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή, καθώς και για τον χρόνο που αφιέρωσαν στην αξιολόγηση της παρούσας εργασίας.

Περίληψη

Η ανάλυση και μοντελοποίηση ζημιών στον ασφαλιστικό τομέα αποτελεί θεμελιώδες αντικείμενο της Αναλογιστικής Επιστήμης και της Εφαρμοσμένης Στατιστικής. Σε πολλές περιπτώσεις, οι ζημιές παρουσιάζουν έντονη ανομοιογένεια, με διαφορετική στατιστική συμπεριφορά στις μικρές και τις μεγάλες ζημιές. Συγκεκριμένα, τα δεδομένα ζημιών χαρακτηρίζονται συχνά από μια μεγάλη συγκέντρωση μικρών ή μεσαίων τιμών, ενώ ταυτόχρονα εμφανίζουν ακραίες παρατηρήσεις που μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά την κατανομή τους.

Για την καλύτερη περιγραφή αυτής της διττής φύσης των δεδομένων, έχει προταθεί η χρήση σύνθετων (composite) μοντέλων, τα οποία συνδυάζουν διαφορετικές κατανομές πιθανότητας ανάλογα με την περιοχή (διάστημα) του ύψους των ζημιών. Τυπικά, εφαρμόζεται μια κατανομή όπως η Lognormal, ή η Weibull για την προσέγγιση των "κανονικών" ζημιών, ενώ για τις ακραίες τιμές χρησιμοποιούνται άλλες κατανομές όπως για παράδειγμα η κατανομή Pareto, σύμφωνα και με τη θεωρία των ακραίων τιμών.

Κρίσιμο στοιχείο στην κατασκευή ενός σύνθετου μοντέλου είναι η επιλογή του κατωφλίου διαχωρισμού των δύο κατανομών, καθώς και η σωστή κανονικοποίησή τους μέσω περικομμένων κατανομών, ώστε το τελικό μοντέλο να αντιστοιχεί σε πυκνότητα πιθανότητας.

Στην παρούσα εργασία, μελετάται η εφαρμογή τέτοιων μοντέλων σε δεδομένα ζημιών από τον αναλογιστικό τομέα, με στόχο την ακριβή περιγραφή της συνολικής κατανομής των ζημιών. Στο 1^ο Κεφάλαιο παρουσιάζεται η θεωρητική βάση των σύνθετων κατανομών και οι μέθοδοι εκτίμησης των παραμέτρων τους. Στο 2^ο Κεφάλαιο καταγράφονται βασικά σύνθετα μοντέλα που έχουν μελετηθεί στη διεθνή βιβλιογραφία, ενώ στο 3^ο Κεφάλαιο εξετάζεται η εφαρμογή των μοντέλων αυτών σε πραγματικά δεδομένα (π.χ. στα Danish fire losses δεδομένα). Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην κατάλληλη επιλογή κατωφλίου, καθώς και στη στατιστική εκτίμηση των σχετικών βαρών των επιμέρους συνιστωσών του μοντέλου.

Abstract

The analysis and modeling of losses in the insurance sector is a fundamental subject of Actuarial Science and Applied Statistics. In many cases, losses show strong heterogeneity, with different statistical behavior in small and large losses. Specifically, loss data are often characterized by a large concentration of small or medium values, while at the same time they include extreme observations that can significantly affect their distribution.

For the better description of this dual nature of the data, the use of composite models has been proposed, which combine different probability distributions depending on the region (interval) of the size of the losses. Typically, a distribution such as the Lognormal or Weibull is applied to approximate the “normal” losses, while for extreme values other distributions are used, such as the Pareto distribution, also in accordance with extreme value theory.

A critical element in the construction of a composite model is the selection of the threshold separating the two distributions, as well as their proper normalization through truncated distributions, so that the final model corresponds to a probability density.

In the present paper, the application of such models to loss data from the actuarial field is studied, with the aim of accurately describing the overall distribution of losses. In Chapter 1, the theoretical basis of composite distributions and the methods for estimating their parameters are presented. In Chapter 2, the main composite models that have been studied in the literature are presented, while in Chapter 3, the application of these models to real data is examined (e.g. the Danish fire losses data). Particular emphasis is placed on the appropriate selection of the threshold, as well as on the statistical estimation of the relative weights of the individual components of the model.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	1
Εισαγωγή στα σύνθετα μοντέλα	1
1.1 Εισαγωγή	1
1.2 Το σύνθετο μοντέλο δύο συνιστωσών	1
1.3 Εναλλακτικές μορφές του σύνθετου μοντέλου δύο συνιστωσών	15
1.4 Το σύνθετο μοντέλο τριών συνιστωσών	19
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	29
Τα κυριότερα σύνθετα μοντέλα	29
2.1 Εισαγωγή	29
2.2 Το 1 ^ο σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο	29
2.3 Το 2 ^ο σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο	34
2.4 Το 3 ^ο σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο	37
2.5 Το 1 ^ο σύνθετο Weibull-Pareto μοντέλο	40
2.6 Το 2 ^ο σύνθετο Weibull-Pareto μοντέλο	42
2.7 Το 3 ^ο σύνθετο Weibull-Pareto μοντέλο	45
2.8 Το σύνθετο Weibull-Burr μοντέλο	47
2.9 Το σύνθετο Weibull-Paralogistic μοντέλο	49
2.10 Το σύνθετο Weibull-Loglogistic μοντέλο	50
2.11 Το σύνθετο Weibull-Inverse Paralogistic μοντέλο	51
2.12 Το σύνθετο Weibull-Inverse Weibull μοντέλο	53
2.13 Το σύνθετο Gamma-Generalized Pareto μοντέλο	54
2.14 Μοντέλα τριών συνιστωσών	56
2.14.1 Το μοντέλο Weibull – Lognormal – Pareto	56
2.14.2 Το μοντέλο Weibull – Paralogistic – Inv. Weibull	58
2.14.3 Το μοντέλο Paralogistic – Weibull – Inv. Weibull	59
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	61
Εφαρμογές σύνθετων μοντέλων στον αναλογισμό	61
3.1 Εισαγωγή	61
3.2 Τα δεδομένα και πακέτα της R	62
3.3 Ανάλυση δεδομένων «Danish»	63
3.4 Συμπεράσματα	74
Παράρτημα Α	77
Παράρτημα Β	79
Βιβλιογραφία	133

Κατάλογος πινάκων

Πίνακας 3.1 Πίνακας παραμέτρων των κατανομών των σύνθετων μοντέλων.....	62
Πίνακας 3.2 Περιγραφικά στατιστικά μέτρα των δεδομένων «Danish».....	63
Πίνακας 3.3 ΕΜΠ των παραμέτρων σύνθετων μοντέλων πιθανότητας για τα δεδομένα Danish.....	68
Πίνακας 3.4 Τιμές κριτηρίου AIC για τα σύνθετα μοντέλα του Πίνακα 3.3.....	69
Πίνακας 3.5 Έλεγχοι καλής προσαρμογής για τις κατανομές του Πίνακα 3.3 στα δεδομένα Danish.....	70
Πίνακας 3.6 Τιμές VaR_p σύνθετων κατανομών στα δεδομένα «Danish».....	72
Πίνακας 3.7: Τιμές κριτηρίου AIC για διάφορες κατανομές.....	75

Κατάλογος σχημάτων

Σχήμα 2.1 1ο σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο ($\theta = 25$).....	33
Σχήμα 2.2 1ο σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο ($\theta = 40$).....	34
Σχήμα 2.3 2ο σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο ($\theta = 50$).....	37
Σχήμα 2.4 3ο σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο ($\theta = 50$).....	40
Σχήμα 2.5 1ο σύνθετο Weibull-Pareto μοντέλο ($\theta = 50$).....	42
Σχήμα 2.6 2ο σύνθετο Weibull-Pareto μοντέλο ($\theta = 50$).....	45
Σχήμα 2.7 3ο σύνθετο Weibull-Pareto μοντέλο ($\theta = 50$).....	47
Σχήμα 3.1 Ιστόγραμμα των δεδομένων Danish.....	65
Σχήμα 3.2 Μέρος ιστογράμματος στο διάστημα [0-35] των δεδομένων Danish.....	65
Σχήμα 3.3 Θηκόγραμμα των δεδομένων Danish.....	66
Σχήμα 3.4 Θηκόγραμμα των δεδομένων Danish στο διάστημα [0,35].....	66
Σχήμα 3.5 Κανονικό Q-Q διάγραμμα των δεδομένων Danish.....	67
Σχήμα 3.6 Προσαρμογή της κατανομής Weibull – Burr στο ιστόγραμμα πυκνότητας των δεδομένων Danish	73
Σχήμα 3.7 Θεωρητικές και εμπειρικές τιμές Var_p της κατανομής Weibull – Burr για τα δεδομένα Danish.....	74

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στα σύνθετα μοντέλα

1.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο εισάγεται το σύνθετο μοντέλο δύο συνιστωσών, καταγράφονται οι συνθήκες συνέχειας και διαφορισιμότητας που το διέπουν καθώς επίσης και διάφορα άλλα χαρακτηριστικά του. Στη συνέχεια, ορίζονται οι βασικές έννοιες που σχετίζονται με το μοντέλο, όπως η συνάρτηση πυκνότητας, η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση κινδύνου. Επιπλέον παρουσιάζονται οι ροπές k – τάξης, τα ποσοστιαία σημεία, καθώς και οι ποσότητες VaR_p και $TVaR_p$ του σύνθετου μοντέλου.

Παράλληλα, γίνεται αναφορά στις κυριότερες τεχνικές που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό του κατωφλιού, δηλαδή του σημείου στο οποίο πραγματοποιείται η αλλαγή από την πρώτη κατανομή του σύνθετου μοντέλου στη δεύτερη.

Επίσης, καταγράφονται και ορισμένες εναλλακτικές μορφές του σύνθετου μοντέλου δύο συνιστωσών.

Τέλος, γίνεται εκτενής παρουσίαση του σύνθετου μοντέλου τριών συνιστωσών με αναφορά στις αντίστοιχες έννοιες, ιδιότητες και χαρακτηριστικά που εξετάζονται και στην περίπτωση του μοντέλου δύο συνιστωσών.

1.2 Το σύνθετο μοντέλο δύο συνιστωσών

Στην παρούσα παράγραφο θα εισαχθεί το σύνθετο μοντέλο δύο συνιστωσών και θα παρουσιαστούν τα βασικά χαρακτηριστικά του. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις ακόλουθες εργασίες που μελετούν αυτό το μοντέλο: Scollnik (2007), Teodorescu & Vernic (2009,

2013), Abu Bakar et al. (2015), Ciochina (2019), Dominicy & Sinner (2017), Liu & Ananda (2022), Marambakuyana & Shongwe (2024) και Marambakuyana & Shongwe (2024).

Για την εισαγωγή του σύνθετου μοντέλου δύο συνιστωσών είναι πρώτα απαραίτητο να αναφερθούμε στην έννοια της περικομμένης (truncated) κατανομής. Έστω μια συνεχής τυχαία μεταβλητή Y με σύνολο τιμών R_Y , συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$ και συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$. Για τη συνάρτηση κατανομής $F_Y^*(y)$ της περικομμένης τυχαίας μεταβλητής Y στο διάστημα $(a, b]$, δηλαδή της τυχαίας μεταβλητής

$$Y^* = Y \mid a < Y \leq b,$$

έχουμε ότι για $a < y \leq b$

$$F_Y^*(y) = P(Y^* \leq y) = P(Y \leq y \mid a < Y \leq b) = \frac{P(a < Y \leq y)}{P(a < Y \leq b)} = \frac{F_Y(y) - F_Y(a)}{F_Y(b) - F_Y(a)}.$$

Συνεπώς

$$F_Y^*(y) = \begin{cases} 0, & y \leq a, \\ \frac{F_Y(y) - F_Y(a)}{F_Y(b) - F_Y(a)}, & a < y \leq b, \\ 1, & y > b. \end{cases}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η συνάρτηση πυκνότητας $f_Y^*(y)$ της περικομμένης τυχαίας μεταβλητής Y στο διάστημα $(a, b]$, η οποία δίνεται από τον τύπο

$$f_Y^*(y) = \frac{f_Y(y)}{P(a < Y \leq b)} = \frac{f_Y(y)}{F_Y(b) - F_Y(a)}, \quad a < y \leq b.$$

Έστω τώρα X_1 και X_2 δύο μη αρνητικές συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πυκνότητας $f_1(x)$ και $f_2(x)$, και συναρτήσεις κατανομής $F_1(x)$ και $F_2(x)$, αντίστοιχα. Έστω οι περικομμένες τυχαίες μεταβλητές $X_1^* = X_1 \mid 0 < X_1 \leq \theta$ και $X_2^* = X_2 \mid X_2 > \theta$, όπου $0 < \theta < \infty$. Οι συναρτήσεις πυκνότητας των περικομμένων τυχαίων μεταβλητών X_1^* και X_2^* δίνονται από τους τύπους

$$f_1^*(x) = \frac{f_1(x)}{P(X_1 \leq \theta)} = \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)}, \quad 0 < x \leq \theta,$$

και

$$f_2^*(x) = \frac{f_2(x)}{1 - P(X_2 \leq \theta)} = \frac{f_2(x)}{1 - F_2(\theta)}, \quad x > \theta,$$

αντίστοιχα. Για τις συναρτήσεις κατανομής των περικομμένων τυχαίων μεταβλητών X_1^* και X_2^* έχουμε

$$F_1^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{F_1(x)}{F_1(\theta)}, & 0 < x \leq \theta, \\ 1, & x > \theta, \end{cases}$$

και

$$F_2^*(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \theta, \\ \frac{F_2(x) - F_2(\theta)}{1 - F_2(\theta)} & x > \theta, \end{cases}$$

αντίστοιχα.

Λαμβάνοντας υπόψη τις προαναφερθέντες τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, X_1^*, X_2^* και τους προαναφερθέντες συμβολισμούς, ακολούθως δίνουμε τον ορισμό του σύνθετου μοντέλου (composite model) δύο συνιστωσών (δείτε Scollnik (2007)).

Ορισμός 1.1. Ο όρος σύνθετο μοντέλο δύο συνιστωσών (τυχαίων μεταβλητών) X_1 και X_2 αναφέρεται στην τυχαία μεταβλητή X που η συνάρτηση πυκνότητάς της ορίζεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} cf_1^*(x), & 0 < x \leq \theta, \\ (1 - c)f_2^*(x), & \theta < x < \infty, \end{cases}$$

όπου $0 \leq c \leq 1$ και $\theta > 0$.

Η παράμετρος c είναι μια σταθερά κανονικοποίησης και η παράμετρος θ αναφέρεται ως κατώφλι.

Η συνάρτηση $f(x)$ αποτελεί συνάρτηση πυκνότητας αφού $f(x) \geq 0$ και $\int_0^\infty f(x) dx = 1$. Πράγματι

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\theta cf_1^*(x) dx + \int_\theta^\infty (1 - c)f_2^*(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\theta} c \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)} dx + \int_{\theta}^{\infty} (1-c) \frac{f_2(x)}{1-F_2(\theta)} dx \\
&= \frac{c}{F_1(\theta)} \int_0^{\theta} f_1(x) dx + \frac{1-c}{1-F_2(\theta)} \int_{\theta}^{\infty} f_2(x) dx \\
&= \frac{c}{F_1(\theta)} F_1(\theta) + \frac{1-c}{1-F_2(\theta)} (1-F_2(\theta)) \\
&= c + (1-c) = 1.
\end{aligned}$$

Η $f(x)$ είναι συνεχής και διαφορίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της με εξαίρεση ίσως το σημείο θ , δηλαδή στο κατώφλι, στο οποίο και θα πρέπει να γίνει ξεχωριστή εξέταση. Παρόλα αυτά, λόγω του γεγονότος πως θέλουμε η συνένωση που προκύπτει από τις τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 να είναι όσο το δυνατόν πιο ομαλή (smooth), απαιτείται συνήθως η ικανοποίηση των συνθηκών συνέχειας (continuity) και διαφορισιμότητας (differentiability) στο κατώφλι θ . Για κάθε μια από αυτές τις δύο συνθήκες έχουμε τα ακόλουθα.

- **Συνθήκη συνέχειας (continuity)**

Για τη συνθήκη της συνέχειας στο κατώφλι θ θα πρέπει

$$f(\theta-) = f(\theta+)$$

δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow \theta-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \theta+} f(x).$$

Συνεπώς έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \theta-} c f_1^*(x) = \lim_{x \rightarrow \theta+} (1-c) f_2^*(x)$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{x \rightarrow \theta-} c \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)} = \lim_{x \rightarrow \theta+} (1-c) \frac{f_2(x)}{1-F_2(\theta)}$$

ή ισοδύναμα

$$c \frac{f_1(\theta)}{F_1(\theta)} = (1-c) \frac{f_2(\theta)}{1-F_2(\theta)}$$

ή ισοδύναμα

$$c = \frac{f_2(\theta) F_1(\theta)}{f_2(\theta) F_1(\theta) + f_1(\theta) (1 - F_2(\theta))} . \quad (1.1)$$

• **Συνθήκη διαφορισιμότητας (differentiability)**

Για τη συνθήκη της διαφορισιμότητας στο κατώφλι θ θα πρέπει

$$f'(\theta -) = f'(\theta +)$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{x \rightarrow \theta -} \frac{d}{dx} c f_1^*(x) = \lim_{x \rightarrow \theta +} \frac{d}{dx} (1 - c) f_2^*(x)$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{x \rightarrow \theta -} \frac{d}{dx} c \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)} = \lim_{x \rightarrow \theta +} \frac{d}{dx} (1 - c) \frac{f_2(x)}{1 - F_2(\theta)}$$

ή ισοδύναμα

$$c \frac{f_1'(\theta)}{F_1(\theta)} = (1 - c) \frac{f_2'(\theta)}{1 - F_2(\theta)}$$

ή ισοδύναμα

$$c = \frac{f_2'(\theta) F_1(\theta)}{f_2'(\theta) F_1(\theta) + f_1'(\theta) (1 - F_2(\theta))} . \quad (1.2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1.1) και (1.2) προκύπτει ότι το κατώφλι θ θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{f_1(\theta)}{f_2(\theta)} = \frac{f_1'(\theta)}{f_2'(\theta)} .$$

Σημειώνεται ότι σε προβλήματα εκτίμησης των παραμέτρων ενός σύνθετου μοντέλου δύο συνιστωσών (δηλαδή των c , θ και των παραμέτρων των δύο συναρτήσεων πυκνότητας $f_1(x)$ και $f_2(x)$) οι δύο παραπάνω συνθήκες μειώνουν τον αριθμό των υπό εκτίμηση παραμέτρων κατά δύο.

Για την τυχαία μεταβλητή X που αντιστοιχεί στο σύνθετο μοντέλο των δύο συνιστωσών X_1 και X_2 δίνουμε παρακάτω ορισμένα βασικά αποτελέσματα (Προτάσεις 1.1-1.5).

Πρόταση 1.1. Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο

$$F(x) = \begin{cases} c \frac{F_1(x)}{F_1(\theta)}, & 0 < x \leq \theta, \\ c + (1-c) \frac{F_2(x) - F_2(\theta)}{1 - F_2(\theta)}, & \theta < x < \infty, \end{cases}$$

Απόδειξη: Για $0 < x \leq \theta$, έχουμε

$$F(x) = \int_0^x f(y) dy = \int_0^x c f_1^*(y) dy = \int_0^x c \frac{f_1(y)}{F_1(\theta)} dy = c \frac{F_1(x)}{F_1(\theta)}.$$

Για $\theta < x < \infty$, έχουμε

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(y) dy = \int_0^\theta f(y) dx + \int_\theta^x f(y) dx = \int_0^\theta c f_1^*(y) dy + \int_\theta^x (1-c) f_2^*(y) dy \\ &= \int_0^\theta c \frac{f_1(y)}{F_1(\theta)} dy + \int_\theta^x (1-c) \frac{f_2(y)}{1 - F_2(\theta)} dy \\ &= \frac{c}{F_1(\theta)} F_1(\theta) + \frac{1-c}{1 - F_2(\theta)} (F_2(x) - F_2(\theta)) \\ &= c + (1-c) \frac{F_2(x) - F_2(\theta)}{1 - F_2(\theta)}. \end{aligned}$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Πρόταση 1.2. Η ροπή k -τάξης, $\mu_k = E(X^k)$, της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} \mu_k &= cE[(X_1^*)^k] + (1-c)E[(X_2^*)^k] \\ &= \frac{c}{F_1(\theta)} \int_0^\theta x^k f_1(x) dx + \frac{1-c}{1 - F_2(\theta)} \int_\theta^\infty x^k f_2(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Απόδειξη: Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \int_0^\infty x^k f(x) dx = \int_0^\theta x^k f(x) dx + \int_\theta^\infty x^k f(x) dx \\ &= \int_0^\theta x^k c f_1^*(x) dx + \int_\theta^\infty x^k (1-c) f_2^*(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\theta} x^k c \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)} dx + \int_{\theta}^{\infty} x^k (1-c) \frac{f_2(x)}{1-F_2(\theta)} dx \\
&= \frac{c}{F_1(\theta)} \int_0^{\theta} x^k f_1(x) dx + \frac{1-c}{1-F_2(\theta)} \int_{\theta}^{\infty} x^k f_2(x) dx.
\end{aligned}$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Πρόταση 1.3. Η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= cM_{X_1^*}(t) + (1-c)M_{X_2^*}(t) \\
&= \frac{c}{F_1(\theta)} \int_0^{\theta} e^{tx} f_1(x) dx + \frac{1-c}{1-F_2(\theta)} \int_{\theta}^{\infty} e^{tx} f_2(x) dx.
\end{aligned}$$

Απόδειξη: Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_0^{\infty} e^{tx} f(x) dx = \int_0^{\theta} e^{tx} f(x) dx + \int_{\theta}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \\
&= \int_0^{\theta} e^{tx} c f_1^*(x) dx + \int_{\theta}^{\infty} e^{tx} (1-c) f_2^*(x) dx \\
&= \int_0^{\theta} e^{tx} c \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)} dx + \int_{\theta}^{\infty} e^{tx} (1-c) \frac{f_2(x)}{1-F_2(\theta)} dx \\
&= \frac{c}{F_1(\theta)} \int_0^{\theta} e^{tx} f_1(x) dx + \frac{1-c}{1-F_2(\theta)} \int_{\theta}^{\infty} e^{tx} f_2(x) dx.
\end{aligned}$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Πρόταση 1.4. Η συνάρτηση κινδύνου (hazard function) της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο

$$h(x) = \begin{cases} \frac{c f_1(x)}{F_1(\theta) - c F_1(x)}, & 0 < x \leq \theta, \\ \frac{f_2(x)}{1 - F_2(x)}, & \theta < x < \infty. \end{cases}$$

Απόδειξη: Για $0 < x \leq \theta$, έχουμε

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{c \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)}}{1 - c \frac{F_1(x)}{F_1(\theta)}} = \frac{c f_1(x)}{F_1(\theta) - c F_1(x)}.$$

Για $\theta < x < \infty$, έχουμε

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{(1 - c) \frac{f_2(x)}{1 - F_2(\theta)}}{1 - c - (1 - c) \frac{F_2(x) - F_2(\theta)}{1 - F_2(\theta)}} = \frac{\frac{f_2(x)}{1 - F_2(\theta)}}{1 - \frac{F_2(x) - F_2(\theta)}{1 - F_2(\theta)}} = \frac{f_2(x)}{1 - F_2(x)}.$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Πρόταση 1.5. Έστω x_p το p –ποσοστιαίο σημείο της τυχαίας μεταβλητής X ($0 < p \leq 1$). Τότε

$$x_p = \begin{cases} F_1^{-1}\left(\frac{p}{c} F_1(\theta)\right), & 0 < p \leq c, \\ F_2^{-1}\left(F_2(\theta) + \frac{(p - c)(1 - F_2(\theta))}{1 - c}\right), & c < p \leq 1 \end{cases}$$

Απόδειξη: Το p –ποσοστιαίο σημείο της (συνεχούς) τυχαίας μεταβλητής X ικανοποιεί τη σχέση

$$F(x_p) = p$$

οπότε

$$x_p = F^{-1}(p).$$

Για την εύρεση του p –ποσοστιαίο σημείο της X διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Έστω $0 < p \leq c$. Τότε $0 < x_p \leq \theta$. Συνεπώς η εξίσωση

$$F(x_p) = p$$

είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$c \frac{F_1(x_p)}{F_1(\theta)} = p,$$

δηλαδή

$$x_p = F_1^{-1}\left(\frac{p}{c}F_1(\theta)\right).$$

(ii) Έστω $c < p \leq 1$. Τότε $\theta < x_p < \infty$. Συνεπώς η εξίσωση

$$F(x_p) = p$$

είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$c + (1 - c) \frac{F_2(x_p) - F_2(\theta)}{1 - F_2(\theta)} = p$$

ή ισοδύναμα

$$F_2(x_p) = F_2(\theta) + \frac{(p - c)(1 - F_2(\theta))}{1 - c}$$

ή ισοδύναμα

$$x_p = F_2^{-1}\left(F_2(\theta) + \frac{(p - c)(1 - F_2(\theta))}{1 - c}\right).$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Παρατηρούμε πως για τιμές του x_p πολύ μεγαλύτερες του θ , δηλαδή για p πολύ κοντά στη μονάδα (οπότε $p - c \approx 1 - c$), το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο του βάρους c , γεγονός που δείχνει πως η συμπεριφορά του μοντέλου μας στις μεγάλες ζημιές εξαρτάται αποκλειστικά από τη συμπεριφορά της f_2 .

Στη συνέχεια, για την τυχαία μεταβλητή X που αντιστοιχεί στο σύνθετο μοντέλο δύο συνιστωσών X_1 και X_2 , θα αναφερθούμε στα μέτρα κινδύνου (α) αξία σε κίνδυνο (Value at Risk), και (β) ουρά της αξίας σε κίνδυνο (Tail Value at Risk).

Αν X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή που δηλώνει το μέγεθος της ζημιάς σε ένα χαρτοφυλάκιο σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, τότε η αξία σε κίνδυνο σε επίπεδο σημαντικότητας $p \in (0,1)$, ορίζεται ως το p -ποσοστιαίο σημείο της X , δηλαδή

$$VaR_p(X) = F_X^{-1}(p) = x_p.$$

Με απλά λόγια, η πιθανότητα να υπερβεί το μέγεθος της ζημιάς X σε ένα χαρτοφυλάκιο το $VaR_p(X)$ δεν είναι περισσότερο από $1 - p$.

Για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο του σύνθετου μοντέλου με συνιστώσες τις X_1 και X_2 μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Πρόταση 1.5.

Η ουρά της αξίας σε κίνδυνο σε επίπεδο σημαντικότητας $p \in (0,1)$, ορίζεται ως

$$TVaR_p(X) = \frac{1}{1-p} \int_{VaR_p(X)}^{\infty} x f_X(x) dx = \frac{1}{1-p} \int_p^{\infty} VaR_s(X) ds.$$

Για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές έχουμε ότι

$$TVaR_p(X) = E[X | X > VaR_p(X)].$$

Συνεπώς, σε επίπεδο εμπιστοσύνης p , το $TVaR_p(X)$ είναι η (δεσμευμένη) μέση τιμή των ζημιών που υπερβαίνουν το $VaR_p(X)$.

Για την ουρά της αξίας σε κίνδυνο του σύνθετου μοντέλου με συνιστώσες τις X_1 και X_2 έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.6. Για την τυχαία μεταβλητή X έχουμε ότι

$$TVaR_p(X) = \begin{cases} \frac{c}{1-p} \cdot \frac{1}{F_1(\theta)} \int_{VaR_p(X)}^{\theta} x f_1(x) dx + \frac{1-c}{1-p} \cdot \frac{1}{1-F_2(\theta)} \int_{\theta}^{\infty} x f_2(x) dx, & 0 < p \leq c, \\ \frac{1-c}{1-p} \cdot \frac{1}{1-F_2(\theta)} \int_{VaR_p(X)}^{\infty} x f_2(x) dx, & c < p \leq 1 \end{cases}$$

Απόδειξη: Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Η ανισότητα $0 < p \leq c$ είναι ισοδύναμη με την ανισότητα $0 < VaR_p(X) \leq \theta$. Συνεπώς σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\begin{aligned} TVaR_p(X) &= \frac{1}{1-p} \int_{VaR_p(X)}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{1-p} \left[\int_{VaR_p(X)}^{\theta} x f(x) dx + \int_{\theta}^{\infty} x f(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{1-p} \left[\int_{VaR_p(X)}^{\theta} x \left(c \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)} \right) dx + \int_{\theta}^{\infty} x \left((1-c) \frac{f_2(x)}{1-F_2(\theta)} \right) dx \right] \\ &= \frac{c}{1-p} \cdot \frac{1}{F_1(\theta)} \int_{VaR_p(X)}^{\theta} x f_1(x) dx + \frac{1-c}{1-p} \cdot \frac{1}{1-F_2(\theta)} \int_{\theta}^{\infty} x f_2(x) dx. \end{aligned}$$

(ii) Η ανισότητα $c < p \leq 1$ είναι ισοδύναμη με την ανισότητα $\theta < VaR_p(X) < \infty$.
Συνεπώς σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\begin{aligned} TVaR_p(X) &= \frac{1}{1-p} \int_{VaR_p(X)}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{1-p} \int_{VaR_p(X)}^{\infty} x(1-c) \frac{f_2(x)}{1-F_2(\theta)} dx \\ &= \frac{1-c}{1-p} \cdot \frac{1}{1-F_2(\theta)} \int_{VaR_p(X)}^{\infty} xf_2(x)dx. \end{aligned}$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Έστω Y τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$ και συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$. Η περιορισμένη (limited) στο σημείο b τυχαία μεταβλητή Y (ή αλλιώς λογοκριμένη από δεξιά στο σημείο b) ορίζεται από την παρακάτω σχέση

$$Y \wedge b = \min\{Y, b\} = \begin{cases} Y, & Y \leq b, \\ b, & Y > b. \end{cases}$$

Οι ροπές της περιορισμένης στο σημείο b τυχαίας μεταβλητής Y δίνονται από τη σχέση

$$E[(Y \wedge b)^k] = \int_0^b y^k f_Y(y) dy + \int_b^{\infty} b^k f_Y(y) dy, \quad k = 1, 2, \dots$$

Θέτοντας

$$M_Y(d; k) = \int_0^d y^k f_Y(y) dy$$

έχουμε ότι

$$E[(Y \wedge b)^k] = M_Y(b; k) + b^k[1 - F_Y(b)].$$

Οι περιορισμένες ροπές $E[(Y \wedge b)^k]$ είναι μια ευρέως χρησιμοποιούμενη έννοια στην ασφάλιση. Πράγματι ας υποθέσουμε ότι το Y αντιπροσωπεύει την απώλεια που αναφέρεται σε μια αξίωση. Έστω b η μέγιστη αξία που μπορεί να πληρώσει μια ασφαλιστική εταιρεία, υπό μια συγκεκριμένη ασφαλιστική πολιτική. Δηλαδή, όταν η αναφερόμενη απώλεια είναι μεγαλύτερη από το b , η εταιρεία θα πληρώσει το ποσό b , αντί της πραγματικής αναφερόμενης απώλειας. Γενικά η αποζημίωση που πληρώνει η ασφαλιστική εταιρεία είναι ίση με $Y \wedge b$ και φυσικά μας ενδιαφέρουν οι (περιορισμένες) ροπές της.

Για τις περιορισμένες ροπές της τυχαίας μεταβλητής X του σύνθετου μοντέλου δύο συνιστωσών X_1 και X_2 , έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα (δείτε Liu et al. (2022)).

Πρόταση 1.7. Για την τυχαία μεταβλητή X έχουμε ότι

$$E[(X \wedge b)^k] = \begin{cases} \frac{c}{F_1(\theta)} M_1(b; k) + \frac{cb^k}{F_1(\theta)} [F_1(\theta) - F_1(b)] + \frac{b^k(1-c)}{1-F_2(\theta)} [1 - F_2(\theta)], & 0 < b < \theta \\ \frac{c}{F_1(b)} M_1(b; k) + \frac{b^k(1-c)}{1-F_2(b)} [1 - F_2(b)], & b = \theta \\ \frac{c}{F_1(\theta)} M_1(\theta; k) + \frac{1-c}{1-F_2(\theta)} [M_2(b; k) - M_2(\theta; k)] + \frac{b^k(1-c)}{1-F_2(\theta)} [1 - F_2(b)], & b > \theta \end{cases}$$

όπου

$$M_i(b; k) = \int_0^b x^k f_i(x) dx, \quad i = 1, 2.$$

Απόδειξη: Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(i) Για $0 < b < \theta$, έχουμε

$$\begin{aligned} E[(X \wedge b)^k] &= \int_0^b x^k f(x) dx + \int_b^\infty b^k f(x) dx \\ &= \int_0^b x^k c \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)} dx + \int_b^\theta b^k c \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)} dx + \int_\theta^\infty b^k (1-c) \frac{f_2(x)}{1-F_2(\theta)} dx \\ &= \frac{c}{F_1(\theta)} \int_0^b x^k f_1(x) dx + \frac{cb^k}{F_1(\theta)} \int_b^\theta f_1(x) dx + \frac{b^k(1-c)}{1-F_2(\theta)} \int_\theta^\infty f_2(x) dx \\ &= \frac{c}{F_1(\theta)} M_1(b; k) + \frac{cb^k}{F_1(\theta)} [F_1(\theta) - F_1(b)] + \frac{b^k(1-c)}{1-F_2(\theta)} [1 - F_2(\theta)]. \end{aligned}$$

(ii) Για $b = \theta$, έχουμε

$$\begin{aligned} E[(X \wedge b)^k] &= \int_0^b x^k f(x) dx + \int_b^\infty b^k f(x) dx \\ &= \int_0^b x^k c \frac{f_1(x)}{F_1(b)} dx + \int_b^\infty b^k (1-c) \frac{f_2(x)}{1-F_2(b)} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c}{F_1(b)} \int_0^b x^k f_1(x) dx + \frac{b^k(1-c)}{1-F_2(b)} \int_b^\infty f_2(x) dx \\
&= \frac{c}{F_1(b)} M_1(b; k) + \frac{b^k(1-c)}{1-F_2(b)} [1 - F_2(b)].
\end{aligned}$$

(iii) Για $\theta < b$, έχουμε

$$\begin{aligned}
E[(X \wedge b)^k] &= \int_0^b x^k f(x) dx + \int_b^\infty b^k f(x) dx \\
&= \int_0^\theta x^k c \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)} dx + \int_\theta^b x^k (1-c) \frac{f_2(x)}{1-F_2(\theta)} dx + \int_b^\infty b^k (1-c) \frac{f_2(x)}{1-F_2(\theta)} dx \\
&= \frac{c}{F_1(\theta)} \int_0^\theta x^k f_1(x) dx + \frac{1-c}{1-F_2(\theta)} \int_\theta^b x^k f_2(x) dx + \frac{b^k(1-c)}{1-F_2(\theta)} \int_b^\infty f_2(x) dx \\
&= \frac{c}{F_1(\theta)} M_1(\theta; k) + \frac{1-c}{1-F_2(\theta)} [M_2(b; k) - M_2(\theta; k)] + \frac{b^k(1-c)}{1-F_2(\theta)} [1 - F_2(b)].
\end{aligned}$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Στην αρχή της παραγράφου αναφερθήκαμε στον προσδιορισμό του βάρους c στο σύνθετο μοντέλο δύο συνιστωσών μέσω των συνθηκών συνέχειας και διαφορισιμότητας (δείτε σχέσεις (1.1) και (1.2)). Στη συνέχεια αναφέρουμε δύο προσεγγίσεις για τον προσδιορισμό του κατωφλίου θ .

Η πρώτη προσέγγιση έχει προταθεί από τους Teodorescu & Vernic (2009) και βασίζεται στη θεωρία πιθανοφάνειας. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από την τυχαία μεταβλητή X του σύνθετου μοντέλου των δύο συνιστωσών X_1 και X_2 . Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας της X εξαρτάται από τις παραμέτρους $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$ και θ . Για να βρεθεί η μορφή της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε αν $\theta < x_1$, $\theta > x_n$ ή $x_m \leq \theta \leq x_{m+1}$ ($m = 1, 2, \dots, n-1$).

Στην τελευταία περίπτωση έχουμε ότι η συνάρτηση πιθανοφάνειας παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
L(x_1, x_2, \dots, x_n | \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s, \theta) &= \left(\prod_{i=1}^m c f_1^*(x_i) \right) \left(\prod_{i=m+1}^n (1-c) f_2^*(x_i) \right) \\
&= \left(\frac{c}{F_1(\theta)} \right)^m \left(\frac{1-c}{1-F_2(\theta)} \right)^{n-m} \left(\prod_{i=1}^m f_1(x_i) \right) \left(\prod_{i=m+1}^n f_2(x_i) \right).
\end{aligned}$$

Για να εκτιμηθεί η παράμετρος θ θα πρέπει να γνωρίζουμε την τιμή του m . Επειδή όμως η τιμή του m είναι άγνωστη ακολουθείται η εξής διαδικασία. Για κάθε φυσικό αριθμό $m = 1, 2, \dots, n - 1$, λύνουμε το παρακάτω σύστημα για να εκτιμήσουμε τις $s + 1$ παραμέτρους του σύνθετου μοντέλου

$$\begin{cases} \frac{\partial \log L}{\partial \rho_i} = 0, & i = 1, 2, \dots, s, \\ \frac{\partial \log L}{\partial \theta} = 0. \end{cases}$$

Αν για ένα συγκεκριμένο m , η λύση του συστήματος δώσει εκτίμηση του θ τέτοια ώστε $x_m \leq \hat{\theta} \leq x_{m+1}$, τότε έχουν προκύψει οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_s, \hat{\theta}$ και η διαδικασία έχει ολοκληρωθεί. Αν ωστόσο δεν βρεθεί κάποιο $\hat{\theta}$ που να ικανοποιεί την ανισότητα $x_m \leq \hat{\theta} \leq x_{m+1}$ για ένα συγκεκριμένο $m = 1, 2, \dots, n - 1$, τότε εξετάζουμε με αντίστοιχο τρόπο τις περιπτώσεις $m = 0$ και $m = n$. Σημειώνεται ότι για $m = 0$ έχουμε ότι

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n | \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s, \theta) = \left(\prod_{i=1}^n (1 - c) f_2^*(x_i) \right) = \left(\frac{1 - c}{1 - F_2(\theta)} \right)^n \left(\prod_{i=1}^n f_2(x_i) \right)$$

ενώ για $m = n$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n | \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s, \theta) = \left(\prod_{i=1}^n c f_1^*(x_i) \right) = \left(\frac{c}{F_1(\theta)} \right)^n \left(\prod_{i=1}^n f_1(x_i) \right).$$

Η παραπάνω προσέγγιση για την εκτίμηση του θ είναι αρκετά χρονοβόρα για μεγάλες τιμές του n αφού θα χρειαστεί να τσεκάρουμε $n - 1$ το πλήθος διαστήματα για τον εντοπισμό εκείνου για το οποίο $x_m \leq \hat{\theta} \leq x_{m+1}$.

Η δεύτερη προσέγγιση έχει προταθεί από τους Teodorescu & Vernic (2013) και βασίζεται σε ποσοστιαία σημεία της X αλλά και στην εκτίμηση παραμέτρων με τη μέθοδο των ροπών. Αρχικά εξισώνουμε τις πρώτες $s - 1$ θεωρητικές ροπές της X με τις αντίστοιχες εμπειρικές ροπές. Στη συνέχεια χρησιμοποιούνται 2 επιπρόσθετες εξισώσεις, οι $F(x_{0.25}) = F(q_1) = 0.25$ και $F(x_{0.75}) = F(q_3) = 0.75$, για να εκτιμηθούν οι $s + 1$ το πλήθος παράμετροι $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$ και θ . Διακρίνονται τρεις περιπτώσεις ανάλογα με τη σχετική θέση του κατωφλίου θ και των ποσοστιαίων σημείων $q_1 = x_{0.25}$ και $q_3 = x_{0.75}$.

- Αν $q_1 < \theta < q_3$, οι 2 επιπλέον εξισώσεις είναι οι

$$c \frac{F_1(q_1)}{F_1(\theta)} = 0.25$$

και

$$c + (1 - c) \frac{F_2(q_3) - F_2(\theta)}{1 - F_2(\theta)} = 0.75.$$

- Αν $\theta < q_1 < q_3$, οι 2 επιπλέον εξισώσεις είναι οι

$$c \frac{F_1(q_1)}{F_1(\theta)} = 0.25$$

και

$$c \frac{F_1(q_3)}{F_1(\theta)} = 0.75$$

- Αν $q_1 < q_3 < \theta$, οι 2 επιπλέον εξισώσεις είναι οι

$$c + (1 - c) \frac{F_2(q_1) - F_{X_2}(\theta)}{1 - F_{X_2}(\theta)} = 0.25$$

και

$$c + (1 - c) \frac{F_2(q_3) - F_{X_2}(\theta)}{1 - F_{X_2}(\theta)} = 0.75$$

Εφόσον προκύψει λύση με την παραπάνω προσέγγιση, επανερχόμαστε στην πρώτη προσέγγιση με τη θεωρία πιθανοφάνειας, αφού πλέον έχουμε εκ των προτέρων γνώση για το $\hat{\theta}$, άρα και για το m , και έτσι η διαδικασία απλουστεύεται.

1.3 Εναλλακτικές μορφές του σύνθετου μοντέλου δύο συνιστωσών

Σε αυτή την παράγραφο δίνονται ορισμένες εναλλακτικές μορφές με τις οποίες μπορεί να αποδοθεί ένα σύνθετο μοντέλο δύο συνιστωσών. Σημειώνεται ακόμη μια φορά ότι μορφή του σύνθετου μοντέλου δύο συνιστωσών που μελετήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο οφείλεται στον Scollnik (2007). Τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου μπορούν να βρεθούν στις εργασίες των Cooray & Ananda (2005), Scollnik (2007), Scollnik & Sun (2012), Nadarajah & Abu Bakar (2012), Abu Bakar et al. (2015), Ciochina (2019) και Liu & Ananda (2022).

- **Μείξη κατανομών**

Ακολουθώντας δίνουμε τον ορισμό της διακριτής μείξης k κατανομών.

Ορισμός 1.2. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_k$ τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x), \dots, F_{X_k}(x)$, αντίστοιχα, και $a_1, a_2, \dots, a_k$ θετικές σταθερές τέτοιες ώστε $\sum_{i=1}^k a_i = 1$. Θα λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή μείξη (discrete mixture) των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots, X_k$ με αντίστοιχα βάρη μείξης $a_1, a_2, \dots, a_k$, αν η συνάρτηση κατανομής της $F(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$F(x) = \sum_{i=1}^k a_i F_{X_i}(x).$$

Στην ειδική περίπτωση που οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_k$ είναι συνεχείς τότε με παραγωγή προκύπτει άμεσα ότι η συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ της X δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \sum_{i=1}^k a_i f_{X_i}(x),$$

όπου $f_{X_i}(x)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X_i ($1 \leq i \leq k$).

Από τον Ορισμό 1.1 έχουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X του σύνθετου μοντέλου με συνιστώσες τις τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} c f_1^*(x) & 0 < x \leq \theta, \\ (1 - c) f_2^*(x) & \theta < x < \infty, \end{cases}$$

όπου $0 \leq c \leq 1$ και $\theta > 0$.

Συνεπώς η τυχαία μεταβλητή X αποτελεί διακριτή μείξη των περικομμένων τυχαίων μεταβλητών X_1^* και X_2^* με βάρη c και $1 - c$ αντίστοιχα.

- **Συνένωση κατανομών**

Ακολουθώντας δίνουμε τον ορισμό της συνένωσης k κατανομών (δείτε Klugman et al. (2012)).

Ορισμός 1.3. Έστω X_i ($1 \leq i \leq k$) συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f_{X_i}(x)$ και στήριγμα $R_{X_i} = (u_{i-1}, u_i)$. Θα λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη συνενωμένη κατανομή (spliced distribution) των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots, X_k$ με (θετικές) σταθερές κανονικοποίησης $a_1, a_2, \dots, a_k$ τέτοιες ώστε $\sum_{i=1}^k a_i = 1$, αν η συνάρτηση πυκνότητάς της $f(x)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$f(x) = \begin{cases} a_1 f_1(x), & u_0 < x < u_1, \\ a_2 f_2(x), & u_1 < x < u_2, \\ \vdots & \vdots \\ a_k f_k(x), & u_{k-1} < x < u_k. \end{cases}$$

Από τον παραπάνω ορισμό και τον Ορισμό 1.2.1 προκύπτει ότι η τυχαία μεταβλητή X του σύνθετου μοντέλου με συνιστώσες τις τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 , αποτελεί συνένωση των περικομμένων τυχαίων μεταβλητών X_1^* και X_2^* με σταθερές κανονικοποίησης $a_1 = c$ και $a_2 = 1 - c$.

Διάφοροι συγγραφείς έχουν χρησιμοποιήσει παραλλαγές των παραπάνω βασικών εναλλακτικών μορφών του σύνθετου μοντέλου δυο συνιστωσών για να αναπτύξουν τη θεωρία τους. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε εν συντομία τις βασικότερες παραλλαγές.

- **Cooray & Ananda (2005)**

Οι Cooray & Ananda (2005) πρότειναν και μελέτησαν την παρακάτω συνάρτηση πυκνότητας για το σύνθετο μοντέλο με συνιστώσες τις τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2

$$f(x) = \begin{cases} c f_1(x), & 0 \leq x \leq \theta, \\ c f_2(x), & \theta < x < \infty, \end{cases}$$

όπου c είναι μια σταθερά κανονικοποίησης.

Για τη σταθερά κανονικοποίησης ισχύει ότι

$$c = \frac{1}{F_1(\theta) + 1 - F_2(\theta)}$$

αφού

$$1 = \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\theta} c f_1(x) dx + \int_{\theta}^{\infty} c f_2(x) dx = c [F_1(\theta) + (1 - F_2(\theta))].$$

Επιπροσθέτως, για τη συνάρτηση κατανομής έχουμε

$$F(x) = \begin{cases} c F_1(x), & 0 \leq x \leq \theta, \\ c(F_1(\theta) + F_2(x) - F_2(\theta)), & \theta < x < \infty. \end{cases}$$

Η παραπάνω αναπαράσταση του σύνθετου μοντέλου παρουσιάζει κάποια πρακτικά προβλήματα όπως ανέφερε ο Scollnik (2007).

- **Nadarajah & Abu Bakar (2012)**

Οι Nadarajah & Abu Bakar (2012) πρότειναν μια παραλλαγή του μοντέλου του Scollnik (2007) γνωστή με το όνομα λογιστικό σύνθετο μοντέλο (logistic composite model). Σύμφωνα με αυτό η συνάρτηση πυκνότητας του σύνθετου μοντέλου με συνιστώσες τις τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 δίνεται από τη σχέση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\varphi} f_1^*(x), & 0 \leq x \leq \theta, \\ \frac{\varphi}{1+\varphi} f_2^*(x), & \theta < x < \infty \end{cases}$$

όπου $\varphi > 0$.

Η μόνη διαφορά σε σχέση με το σύνθετο μοντέλο που μελετήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο είναι ουσιαστικά πως αντί να έχουμε τα βάρη c και $1 - c$, έχουμε τώρα τα $\frac{1}{1+\varphi}$ και $\frac{\varphi}{1+\varphi}$, αντίστοιχα. Έτσι όλα τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου μπορούν να αναχθούν σε αποτελέσματα που αφορούν το λογιστικό σύνθετο μοντέλο (δείτε, π.χ. Marambakuyana & Shongwe (2024), Grün & Miljkovic (2019)). Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι η συνθήκη συνέχειας στο σημείο θ συνεπάγεται ότι το φ ικανοποιεί τη σχέση

$$\varphi = \frac{f_1(\theta) (1 - F_2(\theta))}{f_2(\theta) F_1(\theta)}.$$

- **Liu & Ananda (2022)**

Οι Liu & Amanda (2022) χρησιμοποίησαν τον μετασχηματισμό $Y = X^{1/\eta}$ ($\eta > 0$), όπου X είναι η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το σύνθετο μοντέλο δύο συνιστωσών των Cooray & Amanda (2005). Έτσι κατέληξαν σε ένα νέο σύνθετο μοντέλο στο οποίο η τυχαία μεταβλητή Y έχει συνάρτηση πυκνότητας $g(y)$ που δίνεται από τον τύπο

$$g(y) = \begin{cases} c f_1(y^\eta), & 0 \leq y \leq \theta^{1/\eta}, \\ c f_2^*(y^\eta), & \theta^{1/\eta} < x < \infty. \end{cases}$$

Το παραπάνω σχήμα είναι γνωστό με το όνομα εκθετικοποιημένο σύνθετο μοντέλο (exponentiated composite model).

Για τη συνάρτηση κατανομής $G(y)$ της Y έχουμε ότι

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(X^{1/\eta} \leq y) = P(X \leq y^\eta) \\ = \begin{cases} cF_1(y^\eta), & 0 \leq y \leq \theta^{1/\eta}, \\ c(F_1(\theta) + F_2(y^\eta) - F_2(\theta)), & \theta^{1/\eta} < x < \infty. \end{cases}$$

Για άλλα χαρακτηριστικά του μοντέλου δείτε Liu & Amanda (2022).

1.4 Το σύνθετο μοντέλο τριών συνιστωσών

Αφού παρουσιάστηκε το σύνθετο μοντέλο δύο συνιστωσών και αναλύθηκαν τα βασικά χαρακτηριστικά του, είναι χρήσιμο να εξεταστεί η επέκταση του πλαισίου αυτού σε ένα πιο ευέλικτο σχήμα. Η εισαγωγή μιας τρίτης συνιστώσας επιτρέπει την καλύτερη προσαρμογή του μοντέλου σε δεδομένα με μεγαλύτερη πολυπλοκότητα ως προς τη διασπορά τους, καθώς προσφέρει επιπλέον βαθμούς ελευθερίας στη διαδικασία εκτίμησης και στην περιγραφή της κατανομής. Με αυτόν τον τρόπο, το σύνθετο μοντέλο τριών συνιστωσών αποτελεί μια γενίκευση του αντίστοιχου μοντέλου δύο συνιστωσών, διατηρώντας τη βασική φιλοσοφία αλλά ενισχύοντας την ικανότητά του να περιγράφει πιο σύνθετες δομές. Οι κύριες εργασίες που εφαρμόζουν το σύνθετο μοντέλο τριών συνιστωσών είναι αυτές των Băcă & Vernic (2022, 2024, 2025).

Έστω X_1 , X_2 και X_3 τρεις μη αρνητικές συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πυκνότητας $f_1(x)$, $f_2(x)$ και $f_3(x)$, και συναρτήσεις κατανομής $F_1(x)$, $F_2(x)$ και $F_3(x)$, αντίστοιχα. Έστω οι περικομμένες τυχαίες μεταβλητές $X_1^* = X_1 \mid 0 < X \leq \theta_1$, $X_2^* = X_2 \mid \theta_1 < X \leq \theta_2$ και $X_3^* = X_3 \mid \theta_2 < X < \infty$, όπου $0 < \theta_1 < \theta_2 < \infty$. Οι συναρτήσεις πυκνότητας των περικομμένων τυχαίων μεταβλητών X_1^* , X_2^* και X_3^* δίνονται από τους τύπους

$$f_1^*(x) = \frac{f_1(x)}{P(X_1 \leq \theta_1)} = \frac{f_1(x)}{F_1(\theta_1)}, \quad 0 < x \leq \theta_1, \\ f_2^*(x) = \frac{f_2(x)}{P(\theta_1 < X_2 \leq \theta_2)} = \frac{f_2(x)}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)}, \quad \theta_1 < x \leq \theta_2,$$

και

$$f_3^*(x) = \frac{f_3(x)}{P(X_3 > \theta_2)} = \frac{f_3(x)}{1 - F_3(\theta_2)}, \quad x > \theta_2.$$

Για τις συναρτήσεις κατανομής των περικομμένων τυχαίων μεταβλητών X_1^* , X_2^* και X_3^* , έχουμε αντιστοίχως:

$$F_1^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{F_1(x)}{F_1(\theta_1)}, & 0 < x \leq \theta_1, \\ 1, & x > \theta_1, \end{cases} \quad F_2^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \theta_1, \\ \frac{F_2(x) - F_2(\theta_1)}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)}, & \theta_1 < x \leq \theta_2, \\ 1, & x > \theta_2, \end{cases}$$

και

$$F_3^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \theta_2, \\ \frac{F_3(x) - F_3(\theta_2)}{1 - F_3(\theta_2)}, & x > \theta_2. \end{cases}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις προαναφερθέντες τυχαίες μεταβλητές X_1 , X_2 , X_3 , X_1^* , X_2^* , X_3^* και τους προαναφερθέντες συμβολισμούς, το σύνθετο μοντέλο τριών συνιστωσών ορίζεται ως ακολούθως.

Ορισμός 1.4. Ο όρος σύνθετο μοντέλο τριών συνιστωσών (τυχαίων μεταβλητών) X_1 , X_2 και X_3 αναφέρεται στην τυχαία μεταβλητή X που η συνάρτηση πυκνότητάς της ορίζεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} r_1 f_1^*(x), & 0 < x \leq \theta_1 \\ r_2 f_2^*(x), & \theta_1 < x \leq \theta_2 \\ r_3 f_3^*(x), & x > \theta_2 \end{cases}$$

όπου $r_1, r_2, r_3 \in [0,1]$ με $r_1 + r_2 + r_3 = 1$.

Ουσιαστικά τα r_1 , r_2 και r_3 αποτελούν βάρη των συναρτήσεων πυκνότητας $f_1^*(x)$, $f_2^*(x)$ και $f_3^*(x)$ και αντικατοπτρίζουν τη σχετική σημασία της καθεμιάς κατανομής, ενώ τα θ_1 και θ_2 είναι τα κατώφλια τα οποία διαχωρίζουν τις τρεις κατανομές.

Η συνάρτηση $f(x)$ αποτελεί συνάρτηση πυκνότητας αφού $f(x) \geq 0$ και $\int_0^\infty f(x) dx = 1$. Πράγματι

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(x) dx &= \int_0^{\theta_1} r_1 f_1^*(x) dx + \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_2 f_2^*(x) dx + \int_{\theta_2}^\infty r_3 f_3^*(x) dx \\
&= \int_0^{\theta_1} r_1 \frac{f_1(x)}{F_{X_1}(\theta)} dx + \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_2 \frac{f_2(x)}{F_{X_2}(\theta_2) - F_{X_2}(\theta_1)} dx + \int_{\theta_2}^\infty r_3 \frac{f_3(x)}{1 - F_{X_3}(\theta_2)} \\
&= \int_0^{\theta_1} r_1 \frac{f_1(x)}{F_{X_1}(\theta)} dx + \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_2 \frac{f_2(x)}{F_{X_2}(\theta_2) - F_{X_2}(\theta_1)} dx + \int_{\theta_2}^\infty r_3 \frac{f_3(x)}{1 - F_{X_3}(\theta_2)} \\
&= \frac{r_1}{F_{X_1}(\theta)} F_{X_1}(\theta) + \frac{r_2}{F_{X_2}(\theta_2) - F_{X_2}(\theta_1)} (F_{X_2}(\theta_2) - F_{X_2}(\theta_1)) \\
&\quad + \frac{r_3}{1 - F_{X_3}(\theta_2)} (1 - F_{X_3}(\theta_2)) \\
&= r_1 + r_2 + r_3 = 1.
\end{aligned}$$

Η $f(x)$ είναι συνεχής και διαφορίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της με εξαίρεση ίσως τα σημεία θ_1 και θ_2 , δηλαδή στα κατώφλια, στα οποία και θα πρέπει να γίνει ξεχωριστή εξέταση. Παρόλα αυτά, λόγω του γεγονότος πως θέλουμε η συνένωση των τυχαίων μεταβλητών X_1 , X_2 και X_3 να είναι όσο το δυνατόν πιο ομαλή, θα απαιτήσουμε τόσο τη συνέχεια όσο και τη διαφορισιμότητα στα κατώφλια.

Η συνθήκη της συνέχειας στο σημείο θ_1 ,

$$\lim_{x \rightarrow \theta_1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \theta_1^+} f(x),$$

οδηγεί στη σχέση

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{f_2(\theta_1)}{f_1(\theta_1)} \cdot \frac{F_1(\theta_1)}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)}. \quad (1.3)$$

Η συνθήκη της συνέχειας στο σημείο θ_2 ,

$$\lim_{x \rightarrow \theta_2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \theta_2^+} f(x)$$

οδηγεί στη σχέση

$$\frac{r_2}{r_3} = \frac{f_3(\theta_2)}{f_2(\theta_2)} \cdot \frac{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)}{1 - F_3(\theta_2)}. \quad (1.4)$$

Η συνθήκη της διαφορισιμότητας στο σημείο θ_1 ,

$$\lim_{x \rightarrow \theta_1 -} \frac{df(x)}{dx} = \lim_{x \rightarrow \theta_1 +} \frac{df(x)}{dx}$$

οδηγεί στη σχέση

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{f'_2(\theta_1)}{f'_1(\theta_1)} \cdot \frac{F_1(\theta_1)}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)}. \quad (1.5)$$

Τέλος, η συνθήκη της διαφορισιμότητας στο σημείο θ_2 ,

$$\lim_{x \rightarrow \theta_2 -} \frac{df(x)}{dx} = \lim_{x \rightarrow \theta_2 +} \frac{df(x)}{dx}$$

οδηγεί στη σχέση

$$\frac{r_2}{r_3} = \frac{f'_3(\theta_2)}{f'_2(\theta_2)} \cdot \frac{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)}{1 - F_3(\theta_2)}. \quad (1.6)$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των (1.3) και (1.5) και τα δεύτερα μέλη των (1.4) και (1.6), παίρνουμε

$$\frac{f_2(\theta_1)}{f_1(\theta_1)} = \frac{f'_2(\theta_1)}{f'_1(\theta_1)},$$

και

$$\frac{f_3(\theta_2)}{f_2(\theta_2)} = \frac{f'_3(\theta_2)}{f'_2(\theta_2)},$$

αντίστοιχα.

Σημειώνεται ότι σε προβλήματα εκτίμησης των παραμέτρων ενός σύνθετου μοντέλου τριών συνιστωσών ($r_1, r_2, r_3, \theta_1, \theta_2$) και των παραμέτρων των τριών συναρτήσεων πυκνότητας $f_1(x)$, $f_2(x)$ και $f_3(x)$ οι δύο παραπάνω συνθήκες, καθώς και η συνθήκη κανονικοποίησης μειώνουν τον αριθμό των υπό εκτίμηση παραμέτρων κατά 5.

Πρόταση 1.8. Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X του σύνθετου μοντέλου τριών συνιστωσών δίνεται από τον τύπο

$$F(x) = \begin{cases} r_1 \frac{F_1(x)}{F_1(\theta_1)}, & 0 < x \leq \theta_1, \\ r_1 + r_2 \frac{F_2(x) - F_2(\theta_1)}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)}, & \theta_1 < x \leq \theta_2, \\ r_1 + r_2 + r_3 \frac{F_3(x) - F_3(\theta_2)}{1 - F_3(\theta_2)}, & x > \theta_2. \end{cases}$$

Απόδειξη: Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(i) Για $0 < x \leq \theta_1$, έχουμε:

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x r_1 f_1^*(x)dx = \int_0^x r_1 \frac{f_1(x)}{F_1(\theta_1)} dx = r_1 \frac{F_1(x)}{F_1(\theta_1)}.$$

(ii) Για $\theta_1 < x \leq \theta_2$, έχουμε:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(x)dx = \int_0^{\theta_1} r_1 f_1^*(x)dx + \int_{\theta_1}^x r_2 f_2^*(x)dx \\ &= \int_0^{\theta_1} r_1 \frac{f_1(x)}{F_1(\theta_1)} dx + \int_{\theta_1}^x r_2 \frac{f_2(x)}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)} dx \\ &= r_1 \frac{F_1(\theta_1)}{F_1(\theta_1)} + \frac{r_2}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)} (F_2(x) - F_2(\theta_1)) \\ &= r_1 + r_2 \frac{F_2(x) - F_2(\theta_1)}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)}. \end{aligned}$$

(iii) Για $x > \theta_2$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^x f(x)dx &= \int_0^{\theta_1} f(x)dx + \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(x)dx + \int_{\theta_2}^x f(x)dx \\ &= \int_0^{\theta_1} r_1 f_1^*(x)dx + \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_2 f_2^*(x)dx + \int_{\theta_2}^x r_3 f_3^*(x)dx \\ &= \int_0^{\theta_1} r_1 \frac{f_1(x)}{F_1(\theta_1)} dx + \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_2 \frac{f_2(x)}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)} dx + \int_{\theta_2}^x r_3 \frac{f_3(x)}{1 - F_3(\theta_2)} dx \\ &= r_1 \frac{F_1(\theta_1)}{F_1(\theta_1)} + \frac{r_2}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)} (F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)) \\ &\quad + \frac{r_3}{1 - F_3(\theta_2)} (F_3(x) - F_3(\theta_2)) \end{aligned}$$

$$= r_1 + r_2 + r_3 \frac{F_3(x) - F_3(\theta_2)}{1 - F_3(\theta_2)}.$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Πρόταση 1.9. Η ροπή k -τάξης της τυχαίας μεταβλητής X του σύνθετου μοντέλου τριών συνιστωσών, δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} \mu_k &= E(X^k) = r_1 E[(X_1^*)^k] + r_2 E[(X_2^*)^k] + r_3 E[(X_3^*)^k] \\ &= \frac{r_1}{F_1(\theta_1)} \int_0^{\theta_1} x^k f_1(x) dx + \frac{r_2}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} x^k f_2(x) dx \\ &\quad + \frac{r_3}{1 - F_3(\theta_2)} \int_{\theta_2}^{\infty} x^k f_3(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Απόδειξη: Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu_k &= E(X^k) = \int_0^{\infty} x^k f(x) dx = \int_0^{\theta_1} x^k f(x) dx + \int_{\theta_1}^{\theta_2} x^k f(x) dx + \int_{\theta_2}^{\infty} x^k f(x) dx \\ &= \int_0^{\theta_1} x^k r_1 f_1^*(x) dx + \int_{\theta_1}^{\theta_2} x^k r_2 f_2^*(x) dx + \int_{\theta_2}^{\infty} x^k r_3 f_3^*(x) dx \\ &= \int_0^{\theta_1} x^k r_1 \frac{f_1(x)}{F_1(\theta_1)} dx + \int_{\theta_1}^{\theta_2} x^k r_2 \frac{f_2(x)}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)} dx + \int_{\theta_2}^{\infty} x^k r_3 \frac{f_3(x)}{1 - F_3(\theta_2)} dx \\ &= \frac{r_1}{F_1(\theta_1)} \int_0^{\theta_1} x^k f_1(x) dx + \frac{r_2}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} x^k f_2(x) dx + \frac{r_3}{1 - F_3(\theta_2)} \int_{\theta_2}^{\infty} x^k f_3(x) dx. \end{aligned}$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Πρόταση 1.10. Η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της τυχαίας μεταβλητής X του σύνθετου μοντέλου τριών συνιστωσών, δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} M_X(t) &= r_1 M_{X_1^*}(t) + r_2 M_{X_2^*}(t) + r_3 M_{X_3^*}(t) \\ &= \frac{r_1}{F_1(\theta_1)} \int_0^{\theta_1} e^{tx} f_1(x) dx + \frac{r_2}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{tx} f_2(x) dx \\ &\quad + \frac{r_3}{1 - F_3(\theta_2)} \int_{\theta_2}^{\infty} e^{tx} f_3(x) dx. \end{aligned}$$

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_0^{\infty} e^{tx} f(x) dx = \int_0^{\theta_1} e^{tx} f(x) dx + \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{tx} f(x) dx + \int_{\theta_2}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \\
&= \int_0^{\theta_1} e^{tx} r_1 f_1^*(x) dx + \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{tx} r_2 f_2^*(x) dx + \int_{\theta_2}^{\infty} e^{tx} r_3 f_3^*(x) dx \\
&= \int_0^{\theta_1} e^{tx} r_1 \frac{f_1(x)}{F_1(\theta_1)} dx + \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{tx} r_2 \frac{f_2(x)}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)} dx + \int_{\theta_2}^{\infty} e^{tx} r_3 \frac{f_3(x)}{1 - F_3(\theta_2)} dx \\
&= \frac{r_1}{F_1(\theta_1)} \int_0^{\theta_1} e^{tx} f_1(x) dx + \frac{r_2}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{tx} f_2(x) dx \\
&\quad + \frac{r_3}{1 - F_3(\theta_2)} \int_{\theta_2}^{\infty} e^{tx} f_3(x) dx.
\end{aligned}$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Πρόταση 1.11. Η συνάρτηση κινδύνου (hazard function) της τυχαίας μεταβλητής X του σύνθετου μοντέλου τριών συνιστωσών, δίνεται από τη σχέση:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{r_1 \frac{f_1(x)}{F_1(\theta_1)}}{1 - r_1 \frac{F_1(x)}{F_1(\theta_1)}}, & 0 < x \leq \theta_1 \\ \frac{r_2 \frac{f_2(x)}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)}}{1 - r_1 - r_2 \frac{F_2(x) - F_2(\theta_1)}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)}}, & \theta_1 < x \leq \theta_2 \\ \frac{r_3 \frac{f_3(x)}{1 - F_3(\theta_2)}}{1 - r_1 - r_2 - r_3 \frac{F_3(x) - F_3(\theta_2)}{1 - F_3(\theta_2)}}, & x > \theta_2 \end{cases}$$

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από τη σχέση

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

από τον Ορισμό 1.4 και την Πρόταση 1.8. ■

Πρόταση 1.12. Έστω x_p το p -ποσοστιαίο σημείο ($0 < p \leq 1$) της τυχαίας μεταβλητής X του σύνθετου μοντέλου τριών συνιστωσών. Τότε

$$x_p = \begin{cases} F_1^{-1}\left(\frac{p}{r_1}F_1(\theta_1)\right), & 0 \leq p \leq r_1, \\ F_2^{-1}\left(F_2(\theta_1) + \frac{p-r_1}{r_2}[F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)]\right), & r_1 < p \leq r_1 + r_2, \\ F_3^{-1}\left(F_3(\theta_2) + \frac{p-r_1-r_2}{r_3}[1 - F_3(\theta_2)]\right), & r_1 + r_2 < p \leq 1. \end{cases}$$

Απόδειξη: Το p -ποσοστιαίο σημείο της (συνεχούς) τυχαίας μεταβλητής X ικανοποιεί τη σχέση $F(x_p) = p$, δηλαδή $x_p = F^{-1}(p)$. Για την εύρεσή του θα χρησιμοποιηθεί η Πρόταση 1.4.1 και επομένως διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

(i) Έστω $0 < p \leq r_1$. Τότε $0 < x_p \leq \theta_1$. Επομένως

$$x_p = F^{-1}(p) = F_1^{-1}\left(\frac{p}{r_1}F_1(\theta_1)\right).$$

(ii) Έστω $r_1 < p \leq r_1 + r_2$. Τότε $\theta_1 < x_p \leq \theta_2$. Αφού $F(x_p) = p$, έχουμε ότι

$$r_1 + r_2 \frac{F_2(x_p) - F_2(\theta_1)}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)} = p$$

ή ισοδύναμα

$$x_p = F_2^{-1}\left(F_2(\theta_1) + \frac{p-r_1}{r_2}[F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)]\right).$$

(iii) Έστω $r_1 + r_2 < p \leq 1$. Τότε $\theta_2 < x_p < \infty$. Αφού $F(x_p) = p$, έχουμε ότι

$$r_1 + r_2 + r_3 \frac{F_3(x_p) - F_3(\theta_2)}{1 - F_3(\theta_2)} = p$$

ή ισοδύναμα

$$x_p = F_3^{-1}\left(F_3(\theta_2) + \frac{p-r_1-r_2}{r_3}[1 - F_3(\theta_2)]\right).$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Πρόταση 1.13. Η ουρά της αξίας σε κίνδυνο του σύνθετου μοντέλου τριών συνιστωσών δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned}
& TVaR_p(X) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{1-p} \left(r_1 \int_{VaR_p(X)}^{\theta_1} x f_1^*(x) dx + r_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} x f_2^*(x) dx + r_3 \int_{\theta_2}^{\infty} x f_3^*(x) dx \right), & 0 \leq p \leq r_1, \\ \frac{1}{1-p} \left(r_2 \int_{VaR_p(X)}^{\theta_2} x f_2^*(x) dx + r_3 \int_{\theta_2}^{\infty} x f_3^*(x) dx \right), & r_1 < p \leq r_1 + r_2, \\ \frac{1}{1-p} r_3 \int_{VaR_p(X)}^{\infty} x f_3^*(x) dx, & p \geq r_2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Απόδειξη: Στην περίπτωση που $r_1 < p \leq r_1 + r_2$ έχουμε ότι $\theta_1 < VaR_p(X) \leq \theta_2$.

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
TVaR_p(X) &= \int_{VaR_p(X)}^{\infty} x f(x) dx = \int_{VaR_p(X)}^{\theta_2} x f(x) dx + \int_{\theta_2}^{\infty} x f(x) dx \\
&= \int_{VaR_p(X)}^{\theta_2} x r_2 f_2^*(x) dx + r_3 \int_{\theta_2}^{\infty} x r_3 f_3^* dx.
\end{aligned}$$

Ανάλογα αποδεικνύονται οι περιπτώσεις $0 \leq p \leq r_1$ και $p \geq r_2$. ■

Στην αρχή της παραγράφου αναφερθήκαμε στον προσδιορισμό των βαρών r_1, r_2 και r_3 του σύνθετο μοντέλου τριών συνιστωσών μέσω των συνθηκών συνέχειας και διαφορισιμότητας (σχέσεις (1.3), (1.4), (1.5) και (1.6)). Στη συνέχεια αναφέρουμε δύο προσεγγίσεις για τον προσδιορισμό του κατωφλιών θ_1 και θ_2 . Η διαδικασία είναι ανάλογη με αυτή του σύνθετου μοντέλου δύο συνιστωσών (δείτε Băcă & Vernic (2022, 2024)).

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από την τυχαία μεταβλητή X του σύνθετου μοντέλου των τριών συνιστωσών X_1, X_2 και X_3 . Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας της X εξαρτάται από τις παραμέτρους $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$ και θ_1, θ_2 . Αν $x_{m_1} \leq \theta_1 \leq x_{m_1+1}$ και $x_{m_2} \leq \theta_2 \leq x_{m_2+1}$, τότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
L(x_1, \dots, x_n | \rho_1, \dots, \rho_s, \theta_1, \theta_2) &= \left(\prod_{i=1}^{m_1} r_1 f_1^*(x_i) \right) \left(\prod_{i=m_1+1}^{m_2} r_2 f_2^*(x_i) \right) \left(\prod_{i=m_2+1}^n r_3 f_3^*(x_i) \right) \\
&= \left(\frac{r_1}{F_1(\theta_1)} \right)^{m_1} \left(\frac{r_2}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)} \right)^{m_2 - m_1} \left(\frac{r_3}{1 - F_3(\theta_2)} \right)^{n - m_2} \\
&\quad \times \left(\prod_{i=1}^{m_1} f_1(x_i) \right) \left(\prod_{i=m_1+1}^{m_2} f_2(x_i) \right) \left(\prod_{i=m_2+1}^n f_3(x_i) \right).
\end{aligned}$$

Προκειμένου να εκτιμηθούν τα θ_1 και θ_2 θα πρέπει να γνωρίζουμε τις τιμές των m_1 και m_2 . Για να βρεθούν, θα ακολουθήσουμε τον εξής αλγόριθμο (Băcă & Vernic (2022)): Για $i = 1$ έως $n - 2$ και για $j = i + 1$ έως $n - 1$ λύνουμε το παρακάτω σύστημα για να εκτιμήσουμε τις $s + 2$ παραμέτρους του μοντέλου.

$$\begin{cases} \frac{\partial \log L}{\partial \rho_i} = 0, & i = 1, 2, \dots, s, \\ \frac{\partial \log L}{\partial \theta_i} = 0, & i = 1, 2 \end{cases}$$

θεωρώντας ότι $\theta_1 \in [x_i, x_{i+1}]$ και $\theta_2 \in [x_j, x_{j+1}]$. Από τις λύσεις που προκύπτουν επιλέγουμε εκείνη που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση $\log L$.

Στις εργασίες των Băcă & Vernic (2024, 2025) έχουν προταθεί και άλλες διαδικασίες εκτίμησης των θ_1 και θ_2 , ωστόσο όλες αυτές οι μέθοδοι είναι αρκετά χρονοβόρες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Τα κυριότερα σύνθετα μοντέλα

2.1 Εισαγωγή

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστούν βασικά σύνθετα μοντέλα δύο συνιστωσών. Πιο συγκεκριμένα, για τα περισσότερα μοντέλα θα παραθέσουμε τις συναρτήσεις πιθανότητας και κατανομής, ροπές και εξισώσεις για τον προσδιορισμό του βάρους c με χρήση των μέσω συνθηκών συνέχειας και διαφορισιμότητας.

Ειδικότερα θα παρουσιαστούν τα σύνθετα μοντέλα: Lognormal-Pareto των Cooray & Ananda (2005), Lognormal-Pareto και Weibull-Pareto των Scollnik & Sun (2012), Weibull-Pareto, Weibull-Burr, Weibull-Paralogistic, Weibull-Loglogistic και Weibull-Inverse Paralogistic των Bakar et al. (2015), Weibull-Inverse Weibull των Marambakuyana & Shongwe (2024) και Gamma-Generalized Pareto.

Πέρα από τις προαναφερθείσες εργασίες επιπρόσθετα αποτελέσματα βρίσκονται στις εργασίες των Dominicy & Sinner (2017) και Grun & Miljkovic (2019).

2.2 Το 1^ο σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X_1 έχει την κατανομή Lognormal με παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 0$ (συμβ. $LN(\mu, \sigma)$). Τότε η συνάρτηση πυκνότητάς της $f_1(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$f_1(x) = \frac{(2\pi)^{-1/2}}{x\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad x > 0.$$

Έστω επίσης η τυχαία μεταβλητή X_2 που ακολουθεί την κατανομή Pareto με παράμετρο μορφής $a > 0$ και παράμετρο κλίμακας $\theta > 0$ (συμβ. $Pa(a, \theta)$). Τότε η συνάρτηση πυκνότητάς της $f_2(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$f_2(x) = \frac{a\theta^a}{x^{a+1}}, \quad x > \theta.$$

Το σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο που εισήγαγαν οι Cooray & Ananda (2005) (γνωστό και ως 1^ο Lognormal-Pareto μοντέλο) είναι αυτό που έχει συνάρτηση πυκνότητας της μορφής

$$f(x) = \begin{cases} cf_1(x), & 0 \leq x \leq \theta, \\ cf_2(x), & \theta < x < \infty. \end{cases}$$

δηλαδή

$$f(x) = \begin{cases} c \frac{(2\pi)^{-1/2}}{x\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right], & 0 \leq x \leq \theta, \\ c \frac{a\theta^a}{x^{a+1}}, & \theta < x < \infty. \end{cases}$$

Οι συνθήκες ομαλότητας (συνέχειας και διαφορισιμότητας)

$$f(\theta -) = f(\theta +), \quad f'(\theta -) = f'(\theta +),$$

ανάγονται στις

$$f_1(\theta) = f_2(\theta), \quad f'_1(\theta) = f'_2(\theta).$$

Από την πρώτη σχέση προκύπτει ότι

$$\ln(a\sigma\sqrt{2\pi}) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\ln \theta - \mu}{\sigma}\right)^2$$

και από τη δεύτερη

$$\frac{\ln \theta - \mu}{\sigma^2} = a.$$

Αφού $(\ln \theta - \mu)/\sigma = a\sigma$, παίρνουμε άμεσα ότι

$$\ln(a\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{a^2\sigma^2}{2} = 0.$$

Θέτοντας $k = a\sigma$, η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$e^{-k^2} = 2\pi k^2,$$

δηλαδή

$$k \cong 0.372238898.$$

Πρόταση 2.1. Η σταθερά κανονικοποίησης c του 1^{ου} Lognormal-Pareto μοντέλου δίνεται από τον τύπο

$$c = \frac{1}{1 + \Phi(k)}$$

όπου Φ η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής.

Απόδειξη: Έχουμε

$$1 = \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\theta} c f_1(x) dx + \int_{\theta}^{\infty} c f_2(x) dx = c \int_0^{\theta} \frac{(2\pi)^{-1/2}}{x\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] dx + c.$$

Όμως

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta} \frac{(2\pi)^{-1/2}}{x\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] dx &= \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{\ln \theta - \mu}{\sigma}} (2\pi)^{-1/2} e^{-t^2/2} dt = \Phi \left(\frac{\ln \theta - \mu}{\sigma} \right) = \Phi(a\sigma) = \Phi(k). \end{aligned}$$

Έτσι

$$1 = c\Phi(k) + c$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Συνεπώς το 1^ο σύνθετο Lognormal-Pareto που εισήγαγαν οι Cooray & Ananda (2005) έχει συνάρτηση πυκνότητας της μορφής

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1 + \Phi(k)} \right) \frac{(2\pi)^{-1/2}}{x\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right], & 0 \leq x \leq \theta, \\ \left(\frac{1}{1 + \Phi(k)} \right) \frac{a\theta^a}{x^{a+1}}, & \theta < x < \infty. \end{cases}$$

Πρόταση 2.2. Η συνάρτηση κατανομής του 1^{ου} σύνθετου Lognormal-Pareto μοντέλου είναι η

$$F(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1 + \Phi(k)} \right) \Phi \left(\frac{a}{k} \ln(x/\theta) + k \right), & 0 \leq x \leq \theta, \\ 1 - \left(\frac{1}{1 + \Phi(k)} \right) \left(\frac{\theta}{x} \right)^a, & \theta < x < \infty \end{cases}$$

Απόδειξη: Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή του x σε σχέση με το κατώφλι θ .

- Για $0 \leq x \leq \theta$, έχουμε

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x c f_1(t) dt = c \Phi \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right).$$

Αφού $a\sigma = k$ και $\mu = \ln \theta - \sigma k$ παίρνουμε

$$\frac{\ln x - \mu}{\sigma} = \frac{\ln x - (\ln \theta - \sigma k)}{\sigma} = \frac{\ln x - \ln \theta}{\sigma} + k = \frac{a}{k} \ln(x/\theta) + k.$$

Συνεπώς

$$F(x) = \left(\frac{1}{1 + \Phi(k)} \right) \Phi \left(\frac{a}{k} \ln(x/\theta) + k \right).$$

- Για $\theta < x < \infty$, έχουμε

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt = \int_0^{\theta} f(t) dt + \int_{\theta}^x f(t) dt \\ &= c \int_0^{\theta} f_1(t) dt + c \int_{\theta}^x f_2(t) dt = c \Phi \left(\frac{\ln \theta - \mu}{\sigma} \right) + c \left(1 - \left(\frac{\theta}{x} \right)^a \right) \\ &= c \Phi(k) + c \left(1 - \left(\frac{\theta}{x} \right)^a \right) = c(1 + \Phi(k)) - c \left(\frac{\theta}{x} \right)^a = 1 - \frac{1}{1 + \Phi(k)} \left(\frac{\theta}{x} \right)^a. \end{aligned}$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Πρόταση 2.3. Η συνάρτηση πυκνότητας του 1^{ου} σύνθετου Lognormal-Pareto μοντέλου ικανοποιεί τη σχέση

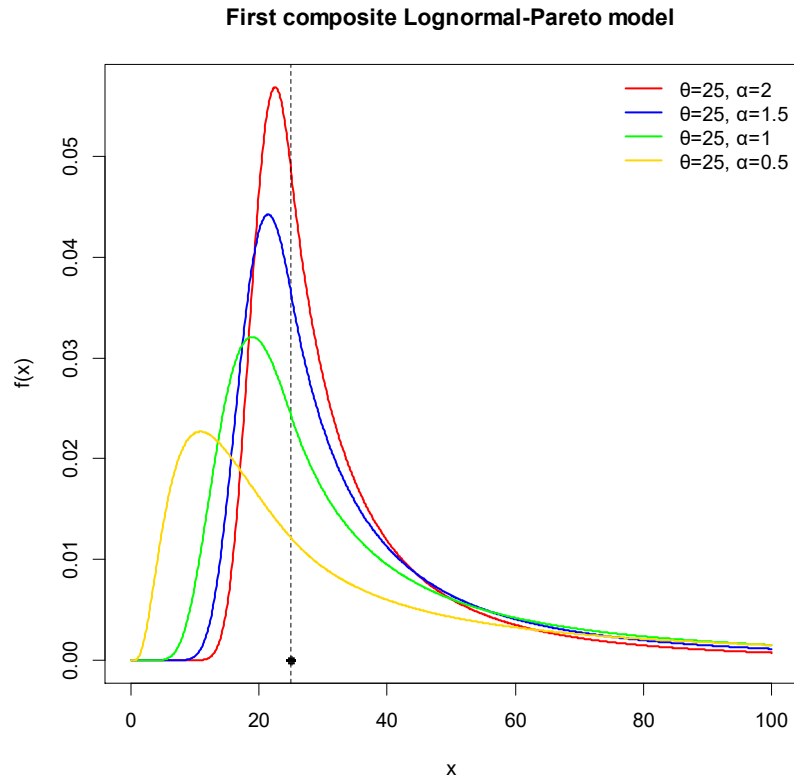
$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1 + \Phi(k)} \right) \frac{a\theta^a}{x^{a+1}} \exp \left[-\frac{a^2}{k^2} \ln^2(x/\theta) \right], & 0 \leq x \leq \theta, \\ \left(\frac{1}{1 + \Phi(k)} \right) \frac{a\theta^a}{x^{a+1}}, & \theta < x < \infty. \end{cases}$$

Απόδειξη: Προκύπτει παραγωγίζοντας τη συνάρτηση κατανομής της Πρότασης 2.2. ■

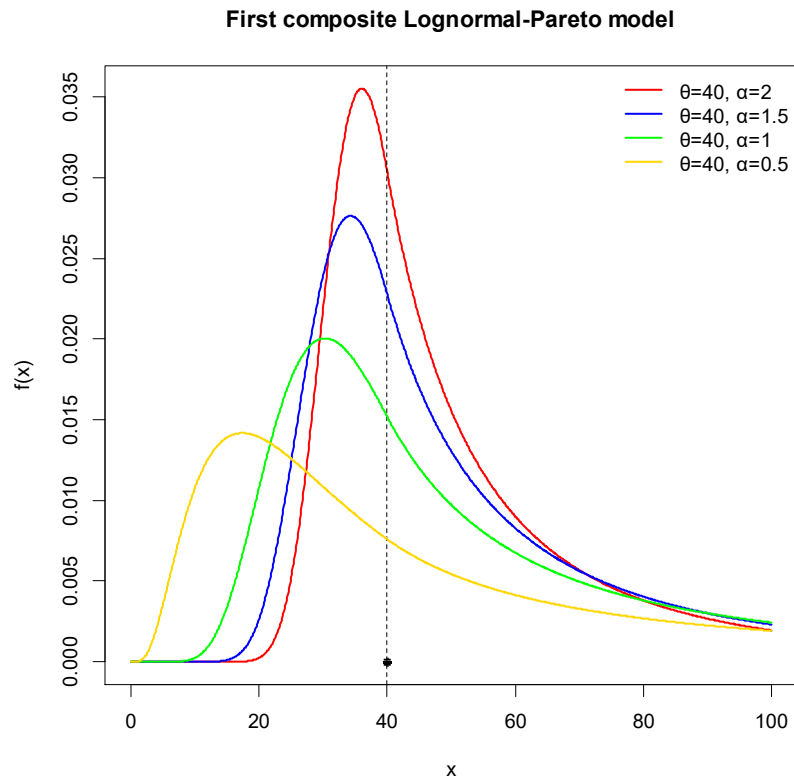
Επίσης μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι η ροπή t -τάξης υπάρχει για $t < a$ και είναι ίση με

$$E(X^t) = \frac{\theta^t}{1 + \Phi(k)} \left\{ \Phi \left(k - \frac{kt}{a} \right) \exp \left(\frac{1}{2} \left(\frac{k}{a} \right)^2 (t^2 - 2at) \right) + \frac{a}{a - t} \right\}.$$

Στα παρακάτω σχήματα δίνονται γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων πυκνότητας του 1^{ου} σύνθετου Lognormal-Pareto μοντέλου.



Σχήμα 2.1. 1^ο σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο ($\theta = 25$).



Σχήμα 2.2. 1^ο σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο ($\theta = 40$).

Για περισσότερες ιδιότητες του 1^{ου} σύνθετου Lognormal-Pareto μοντέλου και ειδικότερα για την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου δείτε Cooray & Ananda (2005).

2.3 Το 2^ο σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο

Ο Scollnik (2007) έδειξε ότι το 1^ο σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο των Cooray & Ananda (2005) είναι αρκετά περιοριστικό γιατί για να εφαρμοστεί απαιτεί το 39.215% των δεδομένων να προέρχεται από μια περικομμένη Lognormal κατανομή στο διάστημα $(0, \theta]$, και το υπόλοιπο 60.785% να είναι μεγαλύτερες του θ σύμφωνα με ένα μοντέλο Pareto.

Πράγματι, για τις τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 της Παραγράφου 2.2, έστω

$$f_1^*(x) = \frac{f_1(x)}{P(X_1 \leq \theta)} = \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)}, \quad 0 < x \leq \theta,$$

και

$$f_2^*(x) = \frac{f_2(x)}{1 - P(X_2 \leq \theta)} = f_2(x), \quad x > \theta.$$

Τότε το 1^ο σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} cf_1(x), & 0 \leq x \leq \theta, \\ cf_2(x), & \theta < x < \infty. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(\frac{1}{1 + \Phi(k)} \right) F_1(\theta) f_1^*(x), & 0 \leq x \leq \theta, \\ \left(\frac{1}{1 + \Phi(k)} \right) f_2^*(x), & \theta < x < \infty. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0.39215 f_1^*(x), & 0 < x \leq \theta, \\ 0.60785 f_2^*(x), & \theta < x < \infty, \end{cases} \end{aligned}$$

αφού $F_1(\theta) = \Phi\left(\frac{\ln \theta - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(k)$.

Ο Scollnik (2007) όρισε το 2^ο σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο με τη σχέση

$$f(x) = \begin{cases} r f_1^*(x), & 0 < x \leq \theta, \\ (1 - r) f_2^*(x), & \theta < x < \infty, \end{cases}$$

όπου φυσικά το r μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα $[0,1]$. Μια ισοδύναμη μορφή είναι η

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} r \frac{1}{\Phi\left(\frac{\ln \theta - \mu}{\sigma}\right)} f_1(x), & 0 < x \leq \theta, \\ (1 - r) f_2(x), & \theta < x < \infty, \end{cases} \\ &= \begin{cases} r \frac{1}{\Phi\left(\frac{\ln \theta - \mu}{\sigma}\right)} \frac{(2\pi)^{-1/2}}{x\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right], & 0 < x \leq \theta, \\ (1 - r) \frac{a\theta^a}{x^{a+1}}, & \theta < x < \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι παράμετροι του μοντέλου είναι 5 ($r, \mu, \sigma, a, \theta$). Ωστόσο, ικανοποιώντας τις συνθήκες συνέχειας και διαφορισιμότητας, δηλαδή

$$f(\theta -) = f(\theta +), \quad f'(\theta -) = f'(\theta +),$$

προκύπτει ότι

$$\mu = \ln \theta - \alpha \sigma^2$$

και

$$r = \frac{\sqrt{2\pi} \alpha \sigma \Phi(\alpha \sigma) e^{(\alpha \sigma)^2/2}}{\sqrt{2\pi} \alpha \sigma \Phi(\alpha \sigma) e^{(\alpha \sigma)^2/2} + 1}.$$

Έτσι οι παράμετροι του μοντέλου είναι πλέον 3 (σ, a, θ).

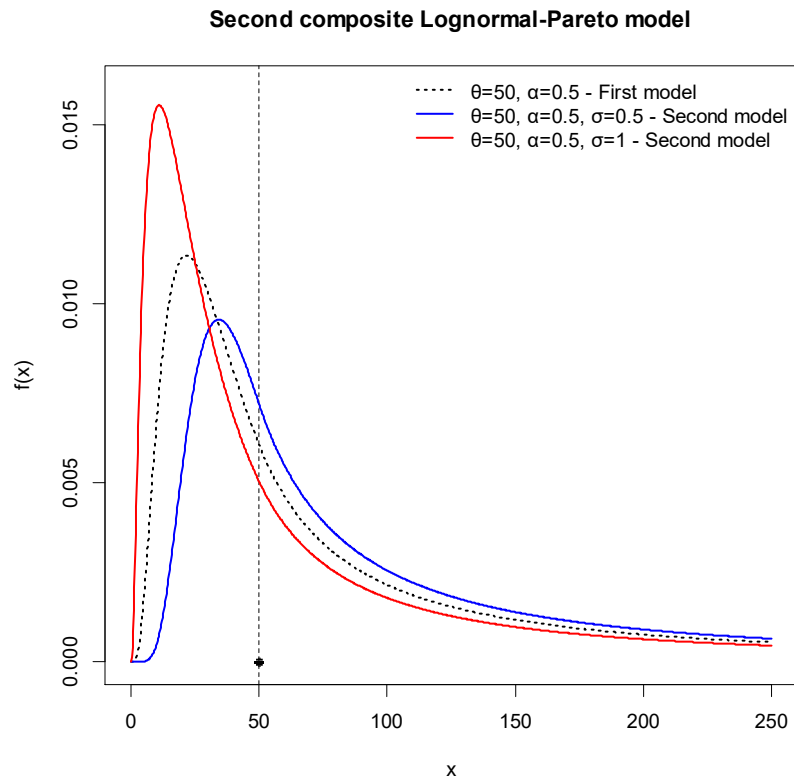
Η συνάρτηση κατανομής του 2^{ου} σύνθετου Lognormal-Pareto μοντέλου είναι η

$$F(x) = \begin{cases} r \frac{\Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\ln \theta - \mu}{\sigma}\right)}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ r + (1 - r) \left[1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^a\right], & \theta < x < \infty. \end{cases}$$

Επίσης μπορεί να δειχθεί ότι η ροπή t -τάξης υπάρχει για $t < a$ και είναι ίση με

$$E(X^t) = r \frac{e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \Phi\left(\frac{\ln \theta - (\mu + t\sigma^2)}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\ln \theta - \mu}{\sigma}\right)} + (1 - r) \frac{a\theta^t}{a - t}.$$

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων πυκνότητας του 2^{ου} σύνθετου Lognormal-Pareto μοντέλου.



Σχήμα 2.3. 2^ο σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο ($\theta = 50$).

Για περισσότερες ιδιότητες του 2^{ου} σύνθετου Lognormal-Pareto μοντέλου δείτε Scollnik (2007).

2.4 Το 3^ο σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο

Η Generalized Pareto κατανομή εμφανίζεται συχνά στη θεωρία ακραίων τιμών και έχει παρατηρηθεί πως προσεγγίζει σε πολύ καλό βαθμό τις υπερβάσεις πάνω από ένα υψηλό κατώφλι θ . Η Generalized Pareto κατανομή έχει δύο παραμέτρους, ξ (παράμετρος σχήματος) και $\tau > 0$ (παράμετρος κλίμακας). Η συνάρτηση κατανομής της $F(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{x}{\tau}\right)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-x/\tau}, & \xi = 0, \end{cases}$$

και η συνάρτηση πυκνότητάς της είναι

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} \left(1 + \xi \frac{x}{\tau}\right)^{-(1/\xi)-1}, & \xi \neq 0, \\ \frac{1}{\tau} e^{-x/\tau}, & \xi = 0. \end{cases}$$

Από τον περιορισμό

$$1 + \xi \frac{x}{\tau} > 0$$

έχουμε ότι το στήριγμα της Generalized Pareto κατανομής είναι $x \geq 0$ αν $\xi \geq 0$, και $0 \leq x \leq -\frac{\tau}{\xi}$ αν $\xi < 0$.

Επειδή μας ενδιαφέρουν ύψη ζημιών που είναι μη αρνητικά θα εστιάσουμε στην περίπτωση $\xi \geq 0$ και $x \geq 0$. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η μετατοπισμένη κατά $\theta > 0$ κατανομή έχει συνάρτηση κατανομής που δίνεται από τη σχέση

$$G(x) = 1 - \left(1 + \xi \frac{x - \theta}{\tau}\right)^{-1/\xi}, \quad x \geq \theta.$$

Θέτοντας $\xi = 1/a$ και $\tau = \beta$, παίρνουμε ότι

$$G(x) = 1 - \left(1 + \frac{x - \theta}{a\beta}\right)^{-a}, \quad x \geq \theta,$$

όπου $\theta, a, \beta > 0$.

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση παίρνουμε τη συνάρτηση πυκνότητας

$$g(x) = \frac{a(a\beta)^a}{(a\beta - \theta + x)^{a+1}}, \quad x \geq \theta.$$

Θέτοντας $\lambda = a\beta - \theta$, παίρνουμε ότι

$$g(x) = \frac{a(\lambda + \theta)^a}{(\lambda + x)^{a+1}}, \quad x \geq \theta,$$

όπου $\theta, a > 0$ και $\lambda > -\theta$.

Την παραπάνω συνάρτηση πυκνότητας, η οποία θα συμβολίζεται ως $GPa(a, \lambda, \theta)$, χρησιμοποίησε ο Scollnik (2007) για να ορίσει το 3^ο σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο μέσω του τύπου

$$f(x) = \begin{cases} r \frac{1}{\Phi\left(\frac{\ln \theta - \mu}{\sigma}\right)} f_1(x), & 0 < x \leq \theta, \\ (1-r)g(x), & \theta < x < \infty, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} r \frac{1}{\Phi\left(\frac{\ln \theta - \mu}{\sigma}\right)} \frac{(2\pi)^{-1/2}}{x\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right], & 0 < x \leq \theta, \\ (1-r) \frac{a(\lambda + \theta)^a}{(\lambda + x)^{a+1}}, & \theta < x < \infty, \end{cases}$$

όπου $0 \leq r \leq 1$. Παρατηρούμε ότι οι παράμετροι του μοντέλου είναι 6 ($r, \mu, \sigma, a, \lambda, \theta$). Ωστόσο, ικανοποιώντας τις συνθήκες συνέχειας και διαφορισιμότητας, δηλαδή

$$f(\theta -) = f(\theta +), \quad f'(\theta -) = f'(\theta +),$$

προκύπτει ότι

$$\frac{\ln \theta - \mu}{\sigma} = \left(\frac{a\theta - \lambda}{\lambda + \theta}\right) \sigma$$

και

$$r = \frac{\sqrt{2\pi} a \theta \sigma \Phi\left(\frac{\ln \theta - \mu}{\sigma}\right) e^{\left(\frac{\ln \theta - \mu}{\sigma}\right)^2 / 2}}{\sqrt{2\pi} a \theta \sigma \Phi\left(\frac{\ln \theta - \mu}{\sigma}\right) e^{\left(\frac{\ln \theta - \mu}{\sigma}\right)^2 / 2} + \lambda + \theta}.$$

Έτσι οι παράμετροι του μοντέλου είναι πλέον 4 ($\sigma, a, \theta, \lambda$).

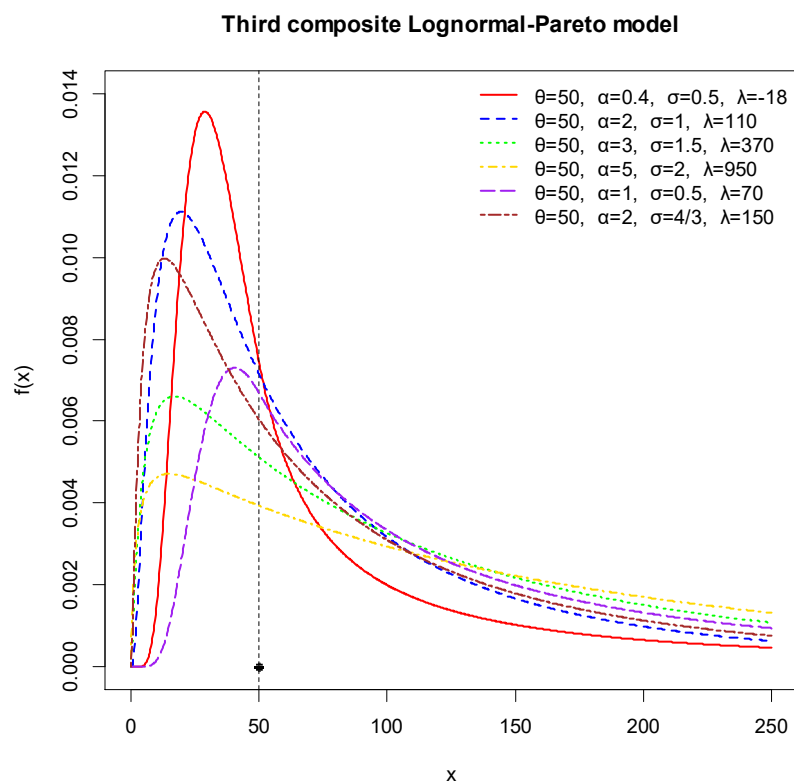
Προκειμένου να μειωθεί περαιτέρω το πλήθος των προς εκτίμηση παραμέτρων, μπορούμε να θεωρήσουμε και ισότητα των δευτέρων παραγώγων της σ.π. στο θ , δηλαδή

$$f''(\theta -) = f''(\theta +)$$

χωρίς να δημιουργηθεί πρόβλημα στις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι του μοντέλου. Αυτό οδηγεί στη σχέση

$$\frac{\ln \theta + \sigma^2 - \mu - 1}{\theta^2 \sigma^2} = \frac{a + 1}{(\lambda + \theta)^2}.$$

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων πυκνότητας του 3ου σύνθετου Lognormal-Pareto μοντέλου.



Σχήμα 2.4. 3^ο σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο ($\theta = 50$).

Για περισσότερες ιδιότητες του 3^{ου} σύνθετου Lognormal-Pareto μοντέλου δείτε Scollnik (2007).

2.5 Το 1^ο σύνθετο Weibull-Pareto μοντέλο

Έστω η τυχαία μεταβλητή X_1 που έχει την κατανομή Weibull με παράμετρο μορφής τ και παράμετρο κλίμακας σ ($\tau, \sigma > 0$, συμβ. $W(\tau, \sigma)$). Η συνάρτηση πυκνότητάς της είναι

$$f_1(x) = \frac{\tau}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\tau-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\tau}\right\}, \quad x > 0,$$

και η συνάρτηση κατανομής της είναι

$$F_1(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\tau}\right\}, \quad x > 0.$$

Έστω επίσης η τυχαία μεταβλητή X_2 που έχει την κατανομή Pareto με παράμετρο μορφής $a > 0$ και παράμετρο κλίμακας $\theta > 0$. Τότε η συνάρτηση πυκνότητάς της $f_2(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$f_2(x) = \frac{a\theta^a}{x^{a+1}}, \quad x > \theta.$$

Το σύνθετο Weibull-Pareto μοντέλο που εισήγαγαν οι Preda & Ciunara (2006) (γνωστό και ως 1^ο Weibull-Pareto -Pareto μοντέλο) είναι αυτό που έχει συνάρτηση πυκνότητας της μορφής

$$f(x) = \begin{cases} cf_1(x), & 0 \leq x \leq \theta, \\ cf_2(x), & \theta < x < \infty. \end{cases}$$

δηλαδή

$$f(x) = \begin{cases} c \frac{\tau}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\tau-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\tau\right\}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ c \frac{a\theta^a}{x^{a+1}}, & \theta < x < \infty. \end{cases}$$

Ο Ciunara (2006) και ο Cooray (2009), χρησιμοποιώντας τις συνθήκες ομαλότητας (συνέχειας και διαφορισιμότητας) έδειξαν ότι

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(k+1)^2}{(2k+1)} \left(\frac{a}{x}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{ak} \exp\left\{-\left(\frac{k+1}{k}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{ak}\right\}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ \left(\frac{k+1}{2k+1}\right) \left(\frac{a}{x}\right) \left(\frac{\theta}{x}\right)^a, & \theta < x < \infty. \end{cases}$$

Η τιμή του k είναι σταθερή και προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης

$$\exp\left(1 + \frac{1}{k}\right) = k + 1,$$

δηλαδή $k = 2.8573348$. Συνεπώς

$$c = \frac{k+1}{2k+1} = 0.5744638.$$

Επίσης

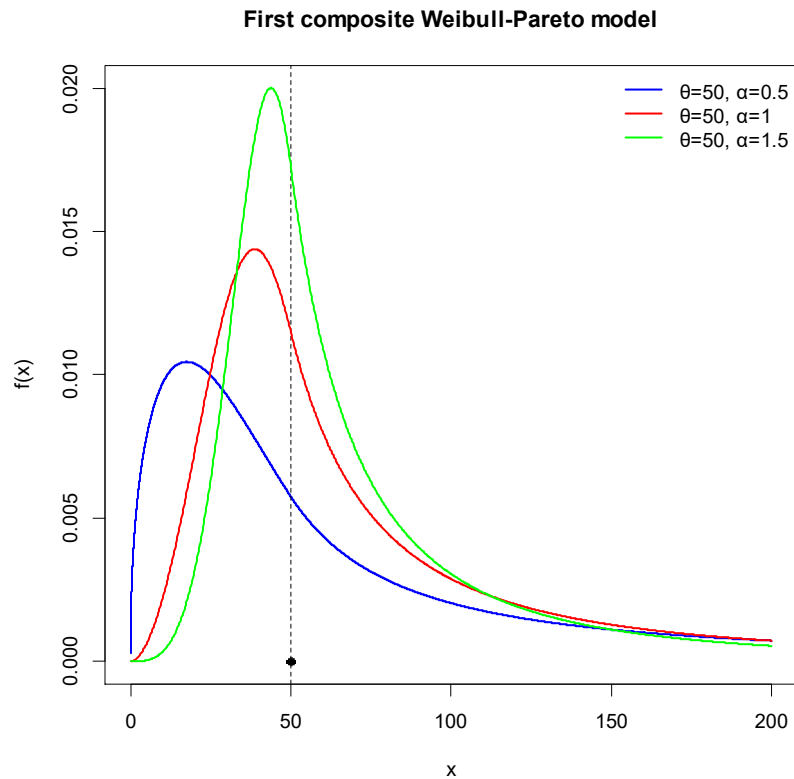
$$1 + \frac{\tau}{a} = \exp\left(1 + \frac{a}{\tau}\right) = \exp\left\{\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau\right\}$$

δηλαδή $k = \tau/a$.

Για τη συνάρτηση κατανομής του 1^{ου} Weibull-Pareto μοντέλου μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι

$$F(x) = \begin{cases} \left(\frac{k+1}{2k+1} \right) \left[1 - \exp \left\{ - \left(\frac{k+1}{k} \right) \left(\frac{x}{\theta} \right)^{ak} \right\} \right], & 0 \leq x \leq \theta, \\ 1 - \left(\frac{k+1}{2k+1} \right) \left(\frac{\theta}{x} \right)^a, & \theta < x < \infty. \end{cases}$$

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων πυκνότητας του 1^{ου} σύνθετου Weibull-Pareto μοντέλου.



Σχήμα 2.5. 1^ο σύνθετο Weibull-Pareto μοντέλο ($\theta = 50$).

2.6 Το 2^ο σύνθετο Weibull-Pareto μοντέλο

Οι Scollnik & Sun (2012) έδειξαν ότι το 1^ο σύνθετο Weibull-Pareto μοντέλο είναι αρκετά περιοριστικό γιατί για να εφαρμοστεί απαιτεί το 39.215% των δεδομένων να προέρχεται από μια περικομμένη στο διάστημα $(0, \theta]$ Weibull κατανομή, και το υπόλοιπο 60.785% να είναι μεγαλύτερες του θ σύμφωνα με ένα μοντέλο Pareto.

Πράγματι, για τις τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 της Παραγράφου 2.5, έστω

$$f_1^*(x) = \frac{f_1(x)}{P(X_1 \leq \theta)} = \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)}, \quad 0 < x \leq \theta,$$

και

$$f_2^*(x) = \frac{f_2(x)}{1 - P(X_2 \leq \theta)} = f_2(x), \quad x > \theta.$$

Τότε το 1^ο σύνθετο Weibull-Pareto μοντέλο μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} cf_1(x), & 0 \leq x \leq \theta \\ cf_2(x), & \theta < x < \infty \end{cases} = \begin{cases} \frac{k+1}{2k+1} F_1(\theta) f_1^*(x), & 0 \leq x \leq \theta \\ \frac{k+1}{2k+1} f_2^*(x), & \theta < x < \infty \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{k}{2k+1} f_1^*(x), & 0 \leq x \leq \theta \\ \frac{k+1}{2k+1} f_2^*(x), & \theta < x < \infty \end{cases} = \begin{cases} 0.39215 f_1^*(x), & 0 < x \leq \theta, \\ 0.60785 f_2^*(x), & \theta < x < \infty, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\alpha\text{φού } F_1(\theta) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau\right\} = 1 - \frac{1}{1+\left(\frac{\tau}{a}\right)} = 1 - \frac{1}{1+k} = \frac{k}{k+1}.$$

Για να αρθεί ο παραπάνω περιορισμός Scollnik (2007) όρισε το 2^ο σύνθετο Weibull-Pareto μοντέλο με τη σχέση

$$f(x) = \begin{cases} rf_1^*(x), & 0 < x \leq \theta \\ (1-r)f_2^*(x), & \theta < x < \infty \end{cases} = f(x) = \begin{cases} r \frac{1}{F_1(\theta)} f_1(x), & 0 < x \leq \theta, \\ (1-r)f_2(x), & \theta < x < \infty, \end{cases}$$

όπου φυσικά το r μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα $[0,1]$ και $F_1(\theta) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau\right\}$. Παρατηρούμε ότι οι παράμετροι του μοντέλου είναι 5 ($r, \tau, \sigma, a, \theta$). Ωστόσο, ικανοποιώντας τις συνθήκη συνέχειας στο σημείο θ προκύπτει ότι

$$r = \frac{\frac{a}{\tau}}{\frac{\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau}{\exp\left\{\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau\right\} - 1} + \frac{a}{\tau}}.$$

Ικανοποιώντας και τη συνθήκη διαφορισιμότητας παίρνουμε

$$\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^{\tau} = 1 + \frac{a}{\tau}$$

οπότε

$$F_1(\theta) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^{\tau}\right\} = 1 - \frac{1}{\exp\left(1 + \frac{a}{\tau}\right)}$$

και

$$r = \frac{a \exp\left(1 + \frac{a}{\tau}\right) - a}{a \exp\left(1 + \frac{a}{\tau}\right) + \tau}.$$

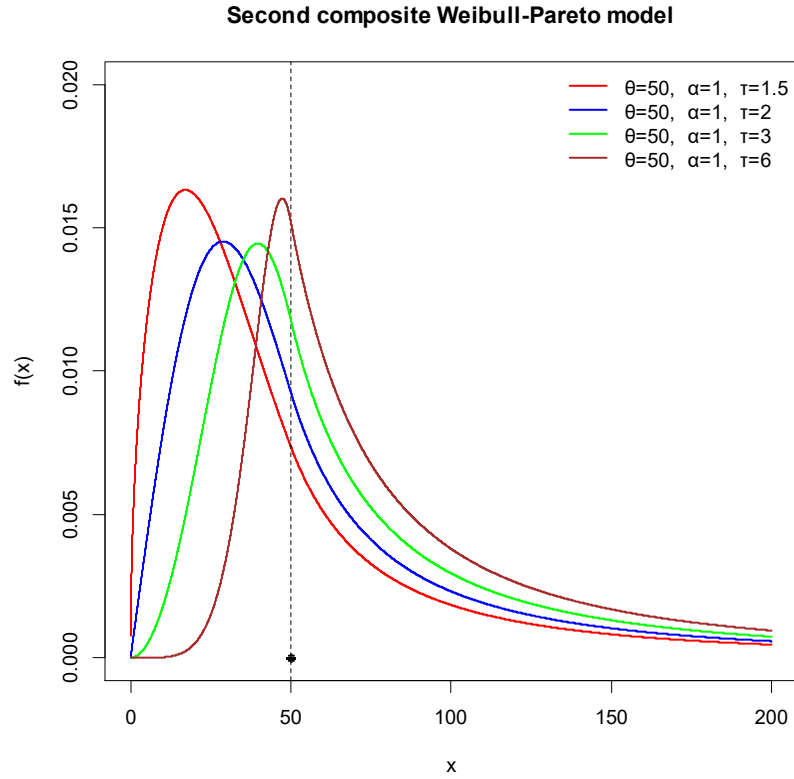
Έτσι οι παράμετροι του μοντέλου είναι πλέον 3 (a, θ, τ). Προκειμένου να μειωθεί περαιτέρω το πλήθος των προς εκτίμηση παραμέτρων, μπορούμε να θεωρήσουμε και ισότητα των δεύτερων παραγώγων της $f(x)$ στο θ , δηλαδή

$$f''(\theta-) = f''(\theta+)$$

χωρίς να δημιουργηθεί πρόβλημα στις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι του μοντέλου. Αυτό οδηγεί στη σχέση

$$\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^{\tau} = \left(1 + \frac{a}{\tau}\right) \left(\frac{1}{1 - \tau}\right).$$

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων πυκνότητας του 2^{ου} σύνθετου Weibull-Pareto μοντέλου.



Σχήμα 2.6. 2^ο σύνθετο Weibull-Pareto μοντέλο ($\theta = 50$).

2.7 Το 3^ο σύνθετο Weibull-Pareto μοντέλο

Το 3^ο σύνθετο Weibull-Pareto μοντέλο εισήχθη από τους Scollnik & Sun (2012). Η συνάρτηση πυκνότητας του μοντέλου προκύπτει από την κλασική σχέση

$$f(x) = \begin{cases} r f_1^*(x), & 0 < x \leq \theta \\ (1-r) f_2^*(x), & \theta < x < \infty \end{cases} = \begin{cases} r \frac{1}{F_1(\theta)} f_1(x), & 0 < x \leq \theta, \\ (1-r) f_2(x), & \theta < x < \infty, \end{cases}$$

όπου (α) η συνάρτηση πυκνότητας $f_1(\cdot)$ και η συνάρτηση κατανομής $F_1(\cdot)$ αναφέρονται στην κατανομή Weibull με παραμέτρους και $\tau > 0$ και $\sigma > 0$, δηλαδή

$$f_1(x) = \frac{\tau}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\tau-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\tau\right\}, \quad x > 0,$$

$$F_1(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\tau\right\}, \quad x > 0,$$

και (β) η συνάρτηση πυκνότητας $f_2(\cdot)$ δίνεται από τον τύπο

$$f_2(x) = \frac{a(\lambda + \theta)^a}{(\lambda + x)^{a+1}}, \quad x \geq \theta.$$

όπου $\theta, a > 0$ και $\lambda > -\theta$ που αντιστοιχεί στη γενικευμένη Pareto κατανομή $GPa(a, \lambda, \theta)$ (δείτε επίσης Παράγραφο 2.4).

Συνεπώς το 3^ο σύνθετο Weibull-Pareto έχει 6 παραμέτρους, $0 \leq r \leq 1, \theta > 0, \tau > 0, \sigma > 0, a > 0, \lambda > -\theta$.

Ικανοποιώντας τη συνθήκη συνέχειας στο θ , δηλαδή $f(\theta -) = f(\theta +)$, προκύπτει ότι

$$r = \frac{\frac{a}{\tau}}{\frac{\lambda + \theta}{\theta} \cdot \frac{\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau}{\exp\left\{\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau\right\} - 1} + \frac{a}{\tau}}.$$

Ικανοποιώντας τη συνθήκη διαφορισιμότητας στο θ , δηλαδή $f'(\theta -) = f'(\theta +)$, προκύπτει ότι

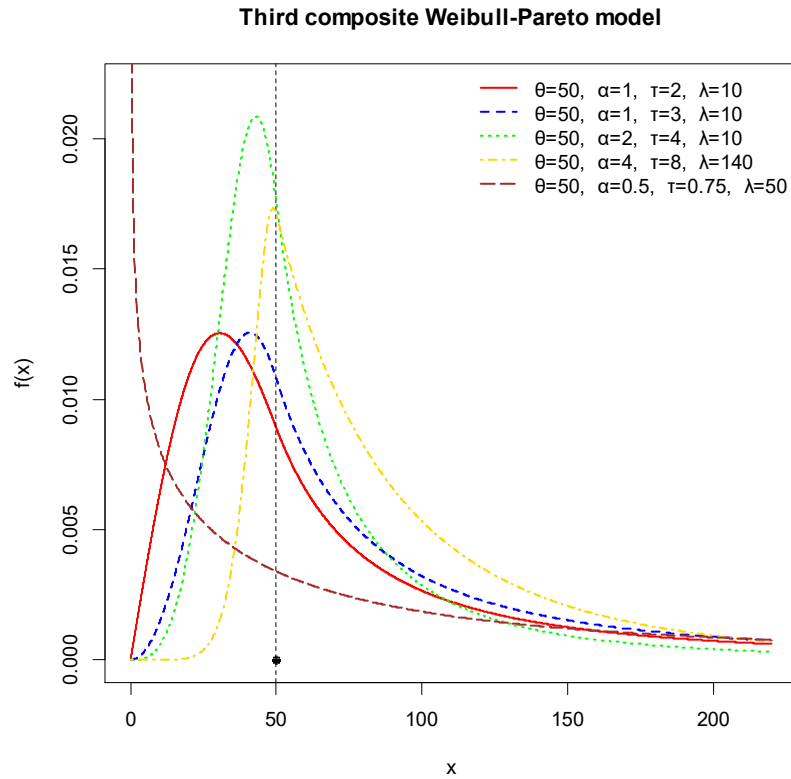
$$\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau = \frac{a\theta - \lambda}{(\lambda + \theta)\tau} + 1.$$

Έτσι οι παράμετροι του μοντέλου είναι πλέον 4 (a, θ, τ, λ), αφού οι παράμετροι r, σ είναι συναρτήσεις των a, θ, τ, λ . Προκειμένου να μειωθεί περαιτέρω το πλήθος των προς εκτίμηση παραμέτρων, μπορούμε να θεωρήσουμε και ισότητα των δεύτερων παραγώγων της $f(x)$ στο θ , δηλαδή $f''(\theta -) = f''(\theta +)$, χωρίς να δημιουργηθεί πρόβλημα στις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι του μοντέλου. Αυτό οδηγεί στη σχέση

$$\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau = \frac{\theta^2(a + 1)}{(\lambda + \theta)^2(1 - \tau)\tau} - \frac{1}{\tau}.$$

Ωστόσο δεν συνιστάται η χρήση της παραπάνω σχέσης αφού η προσαρμοστικότητα του μοντέλου περιορίζεται αισθητά.

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων πυκνότητας του 3^{ου} σύνθετου Weibull-Pareto μοντέλου.



Σχήμα 2.7. 3^ο σύνθετο Weibull-Pareto μοντέλο ($\theta = 50$).

2.8 Το σύνθετο Weibull-Burr μοντέλο

Έστω η τυχαία μεταβλητή X_1 που έχει την κατανομή Weibull με παράμετρο μορφής τ και παράμετρο κλίμακας σ ($\tau, \sigma > 0$), με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_1(x) = \frac{\tau}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\tau-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\tau}\right\}, \quad x > 0,$$

και συνάρτηση κατανομής

$$F_1(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\tau}\right\}, \quad x > 0.$$

Έστω επίσης η τυχαία μεταβλητή X_2 που ακολουθεί την κατανομή Burr με παραμέτρους a, β, s ($a, \beta, s > 0$, συμβ. $Burr(a, \beta, s)$). Τότε η συνάρτηση πυκνότητάς της $f_2(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$f_2(x) = \frac{a\beta \left(\frac{x}{s}\right)^\beta}{x \left(1 + \left(\frac{x}{s}\right)^\beta\right)^{a+1}}, \quad x > 0,$$

και η συνάρτηση κατανομής της είναι

$$F_2(x) = 1 - \left(1 + \left(\frac{x}{s}\right)^\beta\right)^{-a}, \quad x > 0.$$

Σημειώνεται ότι για $s = 1$ η παραπάνω κατανομή ανάγεται στη συνήθη κατανομή Burr τύπου XII.

Η συνάρτηση πυκνότητάς του σύνθετου μοντέλου ικανοποιεί τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} cf_1^*(x), & 0 < x \leq \theta \\ (1-c)f_2^*(x), & \theta < x < \infty \end{cases} = \begin{cases} c \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)}, & 0 < x \leq \theta \\ (1-c) \frac{f_2(x)}{1-F_2(\theta)}, & \theta < x < \infty \end{cases}$$

ο οποίος στην περίπτωση μας δίνει

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \frac{\frac{\tau}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\tau-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\tau\right\}}{1 - \exp\left\{-\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau\right\}}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ (1-c) \cdot \frac{a\beta \left(\frac{x}{s}\right)^\beta \left(1 + \left(\frac{\theta}{s}\right)^\beta\right)^a}{x \left(1 + \left(\frac{x}{s}\right)^\beta\right)^{a+1}}, & \theta < x < \infty. \end{cases}$$

Κάτω από τη συνθήκη συνέχειας στο θ , για το βάρος c ισχύει ότι

$$\begin{aligned} c &= \frac{f_2(\theta) F_1(\theta)}{f_2(\theta) F_1(\theta) + f_1(\theta) (1 - F_2(\theta))} = \frac{1}{1 + \frac{f_1(\theta) (1 - F_2(\theta))}{f_2(\theta) F_1(\theta)}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\frac{\tau}{\sigma} \left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^{\tau-1} \exp\left\{-\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau\right\}}{1 - \exp\left\{-\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau\right\}} \cdot \frac{\theta \left(1 + \left(\frac{\theta}{s}\right)^\beta\right)}{a\beta \left(\frac{\theta}{s}\right)^\beta}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\tau \left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau \exp\left\{-\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau\right\} \left(1 + \left(\frac{\theta}{s}\right)^\beta\right) \left(\frac{s}{\theta}\right)^\beta}{a\beta \left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau\right\}\right]}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\tau \left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau \left(1 + \left(\frac{\theta}{s}\right)^\beta\right) \left(\frac{s}{\theta}\right)^\beta}{a\beta \left[\exp\left\{\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau\right\} - 1\right]}.$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε Abu Bakar et al. (2015).

2.9 Το σύνθετο Weibull-Paralogistic μοντέλο

Έστω η τυχαία μεταβλητή X_1 που ακολουθεί την κατανομή Weibull με παράμετρο μορφής τ και παράμετρο κλίμακας σ ($\tau, \sigma > 0$), με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_1(x) = \frac{\tau}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\tau-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\tau\right\}, \quad x > 0,$$

και συνάρτηση κατανομής

$$F_1(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\tau\right\}, \quad x > 0.$$

Έστω επίσης η τυχαία μεταβλητή X_2 που έχει την κατανομή Paralogistic με παράμετρο μορφής $a > 0$ και παράμετρο κλίμακας $\lambda > 0$ (συμβ. $PL(a, \lambda)$). Τότε η συνάρτηση πυκνότητάς της $f_2(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$f_2(x) = \frac{a^2 \left(\frac{x}{\lambda}\right)^a}{x \left(1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^a\right)^{a+1}}, \quad x > 0,$$

και η συνάρτηση κατανομής της είναι

$$F_2(x) = 1 - \left(1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^a\right)^{-a}, \quad x > 0.$$

Η κατανομή Paralogistic αποτελεί ειδική περίπτωση της κατανομής Burr της προηγούμενης παραγράφου θέτοντας $a = \beta$ και $s = \lambda$.

Η συνάρτηση πυκνότητάς του σύνθετου μοντέλου ικανοποιεί τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} cf_1^*(x), & 0 < x \leq \theta \\ (1-c)f_2^*(x), & \theta < x < \infty \end{cases} = \begin{cases} c \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)}, & 0 < x \leq \theta \\ (1-c) \frac{f_2(x)}{1-F_2(\theta)}, & \theta < x < \infty \end{cases}$$

ο οποίος στην περίπτωση μας δίνει

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \frac{\frac{\tau}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\tau-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\tau\right\}}{1 - \exp\left\{-\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau\right\}}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ (1-c) \cdot \frac{a^2 \left(\frac{x}{\lambda}\right)^a \left(1 + \left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^a\right)^a}{x \left(1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^a\right)^{a+1}}, & \theta < x < \infty. \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη συνέχειας στο θ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} c &= \frac{f_2(\theta) F_1(\theta)}{f_2(\theta) F_1(\theta) + f_1(\theta) (1 - F_2(\theta))} = \frac{1}{1 + \frac{f_1(\theta) (1 - F_2(\theta))}{f_2(\theta) F_1(\theta)}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\tau \left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau \left(1 + \left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^a\right) \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^a}{a^2 \left[\exp\left\{\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau\right\} - 1\right]}}. \end{aligned}$$

2.10 Το σύνθετο Weibull-Loglogistic μοντέλο

Έστω η τυχαία μεταβλητή X_1 που έχει την κατανομή Weibull με παράμετρο μορφής τ και παράμετρο κλίμακας σ ($\tau, \sigma > 0$), με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_1(x) = \frac{\tau}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\tau-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\tau\right\}, \quad x > 0,$$

και συνάρτηση κατανομής

$$F_1(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\tau\right\}, \quad x > 0.$$

Έστω επίσης η τυχαία μεταβλητή X_2 που έχει την κατανομή LogLogistic με παράμετρο μορφής $\beta > 0$ και παράμετρο κλίμακας $\lambda > 0$ (συμβ. $LL(\beta, \lambda)$). Τότε η συνάρτηση πυκνότητάς της $f_2(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$f_2(x) = \frac{\beta \left(\frac{x}{\lambda}\right)^\beta}{x \left(1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^\beta\right)^2}, \quad x > 0,$$

και η συνάρτηση κατανομής της είναι

$$F_2(x) = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^\beta}, \quad x > 0.$$

Η κατανομή LogLogistic αποτελεί ειδική περίπτωση της κατανομής Burr της Παραγράφου 2.8 θέτοντας $a = 1$ και $s = \lambda$.

Η συνάρτηση πυκνότητάς του σύνθετου μοντέλου ικανοποιεί τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} cf_1^*(x), & 0 < x \leq \theta \\ (1-c)f_2^*(x), & \theta < x < \infty \end{cases} = \begin{cases} c \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)}, & 0 < x \leq \theta \\ (1-c) \frac{f_2(x)}{1-F_2(\theta)}, & \theta < x < \infty \end{cases}$$

ο οποίος στην περίπτωση μας δίνει

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \frac{\frac{\tau}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\tau-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\tau\right\}}{1 - \exp\left\{-\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau\right\}}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ (1-c) \cdot \frac{\beta \left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta \left(1 + \left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^\beta\right)}{x \left(1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^\beta\right)^2}, & \theta < x < \infty. \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη συνέχειας στο θ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} c &= \frac{f_2(\theta) F_1(\theta)}{f_2(\theta) F_1(\theta) + f_1(\theta) (1 - F_2(\theta))} = \frac{1}{1 + \frac{f_1(\theta) (1 - F_2(\theta))}{f_2(\theta) F_1(\theta)}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\tau \left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau \left(1 + \left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^\beta\right) \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^\beta}{\beta \left[\exp\left\{\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau\right\} - 1\right]}}. \end{aligned}$$

2.11 Το σύνθετο Weibull-Inverse Paralogistic μοντέλο

Έστω η τυχαία μεταβλητή X_1 που έχει την κατανομή Weibull με παράμετρο μορφής τ και παράμετρο κλίμακας σ ($\tau, \sigma > 0$), με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_1(x) = \frac{\tau}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\tau-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\tau\right\}, \quad x > 0,$$

και συνάρτηση κατανομής

$$F_1(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\tau\right\}, \quad x > 0.$$

Έστω επίσης η τυχαία μεταβλητή X_2 που έχει την κατανομή Inverse Paralogistic με παράμετρο μορφής $a > 0$ και παράμετρο κλίμακας $\lambda > 0$ (συμβ. IPL(a, λ)). Τότε η συνάρτηση πυκνότητάς της $f_2(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$f_2(x) = \frac{a^2 \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{a^2}}{x \left(1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^a\right)^{a+1}}, \quad x > 0,$$

και η συνάρτηση κατανομής της είναι

$$F_2(x) = \left(\frac{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^a}{1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^a}\right)^a = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda}{x}\right)^a}\right)^a, \quad x > 0.$$

Η κατανομή Inverse Paralogistic αποτελεί ειδική περίπτωση της κατανομής Inverse Burr (δείτε Klugman et al. (2012)).

Η συνάρτηση πυκνότητας του σύνθετου μοντέλου ικανοποιεί τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} cf_1^*(x), & 0 < x \leq \theta \\ (1-c)f_2^*(x), & \theta < x < \infty \end{cases} = \begin{cases} c \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)}, & 0 < x \leq \theta \\ (1-c) \frac{f_2(x)}{1-F_2(\theta)}, & \theta < x < \infty \end{cases}$$

ο οποίος στην περίπτωση μας δίνει

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \frac{\frac{\tau}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\tau-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\tau\right\}}{1 - \exp\left\{-\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau\right\}}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ (1-c) \cdot \frac{a^2 \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{a^2}}{x \left(1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^a\right)^{a+1} \left[1 - \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^a}\right)^a\right]}, & \theta < x < \infty. \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη συνέχειας στο θ προκύπτει ότι

$$c = \frac{f_2(\theta) F_1(\theta)}{f_2(\theta) F_1(\theta) + f_1(\theta) (1 - F_2(\theta))} = \frac{1}{1 + \frac{f_1(\theta) (1 - F_2(\theta))}{f_2(\theta) F_1(\theta)}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\tau \left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau \left(1 + \left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^a\right) \left[\left(1 + \left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^a\right)^a - \left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^{a^2}\right]}{a^2 \left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^2 \left[\exp\left\{\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau\right\} - 1\right]}.$$

2.12 Το σύνθετο Weibull-Inverse Weibull μοντέλο

Έστω η τυχαία μεταβλητή X_1 που έχει την κατανομή Weibull με παράμετρο μορφής τ και παράμετρο κλίμακας σ ($\tau, \sigma > 0$), με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_1(x) = \frac{\tau}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\tau-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\tau\right\}, \quad x > 0,$$

και συνάρτηση κατανομής

$$F_1(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\tau\right\}, \quad x > 0.$$

Έστω επίσης η τυχαία μεταβλητή X_2 που έχει την κατανομή Inverse Weibull με παράμετρο μορφής $a > 0$ και παράμετρο κλίμακας $\lambda > 0$ (συμβ. $IW(a, \lambda)$). Τότε η συνάρτηση πυκνότητάς της $f_2(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$f_2(x) = \frac{a\lambda^a \exp\left\{-\left(\frac{\lambda}{x}\right)^a\right\}}{x^{a+1}}, \quad x > 0,$$

και η συνάρτηση κατανομής της είναι

$$F_2(x) = \exp\left\{-\left(\frac{\lambda}{x}\right)^a\right\}, \quad x > 0.$$

Σημειώνεται ότι η τυχαία μεταβλητή $Y = 1/X_1$ έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f_Y(y) = \frac{\tau \left(\frac{1}{\sigma}\right)^\tau \exp\left\{-\left(\frac{1}{\sigma y}\right)^\tau\right\}}{y^{\tau+1}}, \quad y > 0.$$

Η παραπάνω συνάρτηση πυκνότητας είναι η συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής Inverse Weibull αρκεί να θέσουμε $\tau = a$ και $\frac{1}{\sigma} = \lambda$.

Η συνάρτηση πυκνότητας του σύνθετου μοντέλου ικανοποιεί τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} cf_1^*(x), & 0 < x \leq \theta \\ (1-c)f_2^*(x), & \theta < x < \infty \end{cases} = \begin{cases} c \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)}, & 0 < x \leq \theta \\ (1-c) \frac{f_2(x)}{1-F_2(\theta)}, & \theta < x < \infty \end{cases}$$

ο οποίος στην περίπτωση μας δίνει

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \frac{\frac{\tau}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\tau-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\tau\right\}}{1 - \exp\left\{-\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau\right\}}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ (1-c) \cdot \frac{a\lambda^a \exp\left\{-\left(\frac{\lambda}{x}\right)^a\right\}}{x^{a+1} \left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^a\right\}\right)}, & \theta < x < \infty. \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη συνέχειας στο θ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} c &= \frac{f_2(\theta) F_1(\theta)}{f_2(\theta) F_1(\theta) + f_1(\theta) (1 - F_2(\theta))} = \frac{1}{1 + \frac{f_1(\theta) (1 - F_2(\theta))}{f_2(\theta) F_1(\theta)}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\tau\theta^a \left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau \left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^a\right\}\right)}{a\lambda^a \exp\left\{-\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^a\right\} \left[\exp\left\{\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\tau\right\} - 1\right]}}. \end{aligned}$$

2.13 Το σύνθετο Gamma-Generalized Pareto μοντέλο

Έστω η τυχαία μεταβλητή X_1 που έχει την κατανομή Γάμμα με παράμετρο μορφής $k > 0$ και παράμετρο κλίμακας $\lambda > 0$ (συμβ. $G(k, \lambda)$), με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_1(x) = \frac{1}{\lambda^k \Gamma(k)} x^{k-1} e^{-x/\lambda}, \quad x > 0,$$

και συνάρτηση κατανομής

$$F_1(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \gamma(k, x/\lambda), \quad x > 0$$

όπου

$$\gamma(k, z) = \int_0^z t^{k-1} e^{-t} dt$$

Έστω επίσης η τυχαία μεταβλητή X_2 που έχει την κατανομή Generalized Pareto με παράμετρους $\nu, \theta > 0$ και $\lambda > -\theta$ (δείτε Παράγραφο 2.4). Τότε η συνάρτηση πυκνότητάς της $f_2(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$f_2(x) = \frac{a(\nu + \theta)^a}{(\nu + x)^{a+1}}, \quad x \geq \theta,$$

και η συνάρτηση κατανομής της είναι

$$F_2(x) = 1 - \left(1 + \frac{x - \theta}{\lambda + \theta}\right)^{-a}, \quad x > 0.$$

Η συνάρτηση πυκνότητας του σύνθετου μοντέλου ικανοποιεί τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} c f_1^*(x), & 0 < x \leq \theta \\ (1 - c) f_2^*(x), & \theta < x < \infty \end{cases} = \begin{cases} c \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)}, & 0 < x \leq \theta \\ (1 - c) f_2(x), & \theta < x < \infty \end{cases}$$

ο οποίος στην περίπτωση μας δίνει

$$f(x) = \begin{cases} c \frac{x^{k-1} e^{-x/\lambda}}{\lambda^k \gamma(k, \theta/\lambda)}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ (1 - c) \frac{a(\nu + \theta)^a}{(\nu + x)^{a+1}}, & \theta < x < \infty. \end{cases}$$

Μπορεί να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση κατανομής του σύνθετου μοντέλου δίνεται από τον τύπο

$$F(x) = \begin{cases} c \cdot \frac{\gamma(k, x/\lambda)}{\gamma(k, \theta/\lambda)}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ 1 - (1 - c) \cdot \left[1 - \left(\frac{\nu + \theta}{\nu + x}\right)^a\right], & \theta < x < \infty \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη συνέχειας στο θ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} c &= \frac{f_2(\theta) F_1(\theta)}{f_2(\theta) F_1(\theta) + f_1(\theta) (1 - F_2(\theta))} = \frac{1}{1 + \frac{f_1(\theta)}{f_2(\theta) F_1(\theta)}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{(\nu + \theta) \theta^{k-1} e^{-\theta/\lambda}}{a \lambda^k \gamma(k, \theta/\lambda)}}}. \end{aligned}$$

2.14 Μοντέλα τριών συνιστωσών

Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα αναφερθούν κάποια βασικά σύνθετα μοντέλα τριών συνιστωσών που εμφανίζονται πιο συχνά στη βιβλιογραφία. Η θεωρία αυτών των μοντέλων παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 1. Θα δοθούν αποτελέσματα που αφορούν κυρίως τη μορφή της συνάρτησης πυκνότητας του μοντέλου και την εφαρμογή των συνθηκών συνέχειας και διαφορισιμότητας. Η συγγραφή της παρούσας παραγράφου βασίστηκε στις εργασίες των Băcă & Vernic (2022, 2024, 2025) και Li & Liu (2023).

2.14.1 Το μοντέλο Weibull – Lognormal – Pareto

Σύμφωνα με το γενικό τύπο του σύνθετου μοντέλου τριών συνιστωσών που δόθηκε στην Παράγραφο 1.4

$$f(x) = \begin{cases} r_1 \frac{f_1(x)}{F_1(\theta_1)}, & 0 < x \leq \theta_1 \\ r_2 \frac{f_2(x)}{F_2(\theta_2) - F_2(\theta_1)}, & \theta_1 < x \leq \theta_2 \\ r_3 \frac{f_3(x)}{1 - F_3(\theta_2)}, & x > \theta_2 \end{cases}$$

η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X του σύνθετου Weibull–Lognormal–Pareto μοντέλου δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} r_1 \frac{\frac{\tau}{\varphi} \left(\frac{x}{\varphi}\right)^{\tau-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\varphi}\right)^\tau\right\}}{1 - \exp\left\{-\left(\frac{\theta_1}{\varphi}\right)^\tau\right\}}, & 0 \leq x \leq \theta_1, \\ r_2 \frac{\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)^2\right]}{\Phi\left(\frac{\log \theta_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\log \theta_1 - \mu}{\sigma}\right)}, & \theta_1 < x \leq \theta_2, \\ r_3 \frac{a}{\theta_2} \left(\frac{\theta_2}{x}\right)^{a+1}, & \theta_2 < x < \infty, \end{cases}$$

όπου εμφανίζονται αντίστοιχα στους τρεις παραπάνω κλάδους οι κατανομές Weibull(τ, φ), LN(μ, σ) και Pa(a, θ_2).

Από τις συνθήκες συνέχειας και διαφορισιμότητας προκύπτουν οι σχέσεις

$$r_1 = r_2 \frac{\varphi^\tau}{\theta_1^\tau \tau \sigma \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{\theta_1}{\varphi}\right)^\tau\right\}\right) \exp\left(\left(\frac{\theta_1}{\varphi}\right)^\tau - \frac{(\log \theta_1 - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{\Phi\left(\frac{\log \theta_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\log \theta_1 - \mu}{\sigma}\right)},$$

$$r_1 = 1 - r_2 \left(1 + \frac{1}{\sigma a \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{(\log \theta_2 - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{\Phi\left(\frac{\log \theta_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\log \theta_1 - \mu}{\sigma}\right)}\right),$$

και οι περιορισμοί

$$\left(\frac{\theta_1}{\varphi}\right)^\tau = 1 + \frac{\log \theta_1 - \mu}{\tau \sigma^2},$$

$$\frac{\log \theta_2 - \mu}{\sigma^2} = a.$$

Στις παραπάνω σχέσεις, υπάρχουν 5 άγνωστες παράμετροι, οι τ , σ , a , θ_1 , θ_2 , ενώ οι υπόλοιπες φ , μ , r_1 , r_2 εκφράζονται συναρτήσει των άλλων παραμέτρων.

Επίσης μπορεί εύκολα να δειχθεί η k -οστή ροπή της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο

$$E(X^k) = r_1 \frac{\varphi^k \gamma\left(\frac{k}{\tau} + 1, \left(\frac{\theta_1}{\varphi}\right)^\tau\right)}{1 - \exp\left\{-\left(\frac{\theta_1}{\varphi}\right)^\tau\right\}}$$

$$+ r_2 \frac{\exp\left(\mu k + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2\right) \left(\Phi\left(\frac{\log \theta_2 - \mu - \sigma^2 k}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\log \theta_1 - \mu - \sigma^2 k}{\sigma}\right)\right)}{\Phi\left(\frac{\log \theta_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\log \theta_1 - \mu}{\sigma}\right)} + r_3 \frac{a \theta_2^k}{a - k}$$

όπου

$$\gamma(s, z) = \int_0^z t^{s-1} e^{-t} dt$$

είναι η κάτω μη πλήρης γάμμα συνάρτηση.

2.14.2 Το μοντέλο Weibull – Paralogistic – Inv. Weibull

Η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X του σύνθετου Weibull – Paralogistic – Inv. Weibull μοντέλου είναι:

$$f(x) = \begin{cases} r_1 \frac{1}{x \left(1 - e^{-\left(\frac{\theta_1}{\varphi}\right)^\tau} \right)} \tau \left(\frac{x}{\varphi} \right)^\tau e^{-\left(\frac{x}{\varphi}\right)^\tau}, & 0 \leq x \leq \theta_1, \\ r_2 \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\theta_1}{\bar{\varphi}} \right)^{\bar{\tau}} \right)^{-\bar{\tau}} - \left(1 + \left(\frac{\theta_2}{\bar{\varphi}} \right)^{\bar{\tau}} \right)^{-\bar{\tau}}} \cdot \frac{\bar{\tau}^2 \left(\frac{x}{\bar{\varphi}} \right)^{\bar{\tau}}}{x \left(1 + \left(\frac{x}{\bar{\varphi}} \right)^{\bar{\tau}} \right)^{\bar{\tau}+1}} & \theta_1 < x \leq \theta_2 \\ r_3 \frac{\tilde{\tau} \left(\frac{\tilde{\varphi}}{x} \right)^{\tilde{\tau}} e^{-\left(\frac{\tilde{\varphi}}{x}\right)^{\tilde{\tau}}}}{1 - e^{-\left(\frac{\tilde{\varphi}}{\theta_2}\right)^{\tilde{\tau}}}}, & \theta_2 < x < \infty \end{cases}$$

, όπου εμφανίζονται αντίστοιχα στους τρεις κλάδους οι συναρτήσεις πυκνότητας των Weibull(τ, φ), Paralogistic ($\bar{\tau}, \bar{\varphi}$) και Inverse Weibull($\tilde{\tau}, \tilde{\varphi}$), με $\tau, \varphi, \bar{\tau}, \bar{\varphi}, \tilde{\tau}, \tilde{\varphi} > 0$.

Από συνθήκες συνέχειας και παραγωγισιμότητας προκύπτουν οι περιορισμοί:

$$\tau - \tau \left(\frac{\theta_1}{\varphi} \right)^\tau = \bar{\tau} - \frac{\bar{\tau}(\bar{\tau} + 1)}{1 + \left(\frac{\bar{\varphi}}{\theta_1} \right)^{\bar{\tau}}}$$

ή ισοδύναμα

$$\varphi = \theta_1 \left(1 - \frac{\bar{\tau}}{\tau} + \frac{\bar{\tau}(\bar{\tau} + 1)}{\tau \left(1 + \left(\frac{\bar{\varphi}}{\theta_1} \right)^{\bar{\tau}} \right)} \right)^{-1/\tau}$$

και

$$\bar{\tau} - \frac{\bar{\tau}(\bar{\tau} + 1)}{1 + \left(\frac{\bar{\varphi}}{\theta_2} \right)^{\bar{\tau}}} = \tilde{\tau} \left(\frac{\tilde{\varphi}}{\theta_2} \right)^{\tilde{\tau}} - \tilde{\tau}$$

ή ισοδύναμα

$$\tilde{\varphi} = \theta_2 \left(1 + \frac{\bar{\tau}}{\tau} - \frac{\bar{\tau}(\bar{\tau} + 1)}{\tilde{\tau} \left(1 + \left(\frac{\bar{\varphi}}{\theta_2} \right)^{\bar{\tau}} \right)} \right)^{1/\bar{\tau}}$$

Παραπάνω, λύνοντας ως προς φ και $\tilde{\varphi}$ καταφέρνουμε να μειώσουμε το πλήθος των προς εκτίμηση παραμέτρων κατά 2.

2.14.3 Το μοντέλο Paralogistic – Weibull – Inv. Weibull

Η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X του σύνθετου Paralogistic – Weibull – Inv. Weibull μοντέλου δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} r_1 \frac{1}{1 - \left(1 + \left(\frac{\theta_1}{\bar{\varphi}} \right)^{\bar{\tau}} \right)^{-\bar{\tau}}} \cdot \frac{\bar{\tau}^2 \left(\frac{x}{\bar{\varphi}} \right)^{\bar{\tau}}}{x \left(1 + \left(\frac{x}{\bar{\varphi}} \right)^{\bar{\tau}} \right)^{\bar{\tau}+1}}, & 0 \leq x \leq \theta_1, \\ r_2 \frac{\tau \left(\frac{x}{\varphi} \right)^{\tau} e^{-\left(\frac{x}{\varphi} \right)^{\tau}}}{x \left(e^{-\left(\frac{\theta_1}{\varphi} \right)^{\tau}} - e^{-\left(\frac{\theta_2}{\varphi} \right)^{\tau}} \right)} & \theta_1 < x \leq \theta_2 \\ r_3 \frac{\tilde{\tau} \left(\frac{\tilde{\varphi}}{x} \right)^{\tilde{\tau}} e^{-\left(\frac{\tilde{\varphi}}{x} \right)^{\tilde{\tau}}}}{1 - e^{-\left(\frac{\tilde{\varphi}}{\theta_2} \right)^{\tilde{\tau}}}}, & \theta_2 < x < \infty \end{cases}$$

, όπου εμφανίζονται αντίστοιχα στους τρεις κλάδους (όπως και προηγουμένως) οι συναρτήσεις πιθανότητας των Weibull(τ, φ), Paralogistic ($\bar{\tau}, \bar{\varphi}$) και Inverse Weibull($\tilde{\tau}, \tilde{\varphi}$), με $\tau, \varphi, \bar{\tau}, \bar{\varphi}, \tilde{\tau}, \tilde{\varphi} > 0$.

Από συνθήκες συνέχειας και παραγωγισιμότητας προκύπτουν οι περιορισμοί:

$$\tau - \tau \left(\frac{\theta_1}{\varphi} \right)^{\tau} = \bar{\tau} - \frac{\bar{\tau}(\bar{\tau} + 1)}{1 + \left(\frac{\bar{\varphi}}{\theta_1} \right)^{\bar{\tau}}}$$

ή ισοδύναμα

$$\varphi = \theta_1 \left(1 - \frac{\bar{\tau}}{\tau} + \frac{\bar{\tau}(\bar{\tau} + 1)}{\tau \left(1 + \left(\frac{\bar{\varphi}}{\theta_1} \right)^{\bar{\tau}} \right)} \right)^{-1/\tau}$$

και

$$\tau - \tau \left(\frac{\theta_2}{\bar{\varphi}} \right)^{\tau} = \tilde{\tau} \left(\frac{\tilde{\tau}}{\theta_2} \right)^{\tilde{\tau}} - \tilde{\tau}$$

ή ισοδύναμα

$$\tilde{\varphi} = \theta_2 \left(1 + \frac{\tau}{\tilde{\tau}} - \frac{\tau}{\tilde{\tau}} \left(\frac{\theta_2}{\bar{\varphi}} \right)^{\tau} \right)^{1/\tilde{\tau}}$$

Παραπάνω, λύνοντας ως προς φ και $\tilde{\varphi}$ καταφέρνουμε να μειώσουμε το πλήθος των προς εκτίμηση παραμέτρων κατά 2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Εφαρμογές σύνθετων μοντέλων στον αναλογισμό

3.1 Εισαγωγή

Στην παρούσα παράγραφο θα εξεταστεί η προσαρμογή σύνθετων μοντέλων σε ένα σύνολο δεδομένων από τον κλάδο του αναλογισμού. Η ανάλυση των δεδομένων καθώς και οι έλεγχοι υποθέσεων πραγματοποιούνται με τη γλώσσα προγραμματισμού R. Τα κυριότερα πακέτα της R που χρησιμοποιήθηκαν είναι τα *SMPracticals*, *e1071*, *truncdist*, *actuar*, *GoFKernel*, *berryFunctions*, *MASS*, *goftest*. Αρχικά δίνονται ορισμένα βασικά περιγραφικά στατιστικά μέτρα των δεδομένων μας (ελάχιστη και μέγιστη τιμή, μέση τιμή, διάμεσος, λοξότητα, κύρτωση, 99% ποσοστιαίο σημείο, κλπ.), ιστογράμματα και θηκογράμματα, με σκοπό να αποκτήσουμε για αυτά μια γενική εικόνα. Εν συνεχεία, θα γίνει προσαρμογή στα δεδομένα σύνθετων μοντέλων που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο για να διαπιστώσουμε ποιο μοντέλο προσαρμόζεται καλύτερα σε αυτά (δείτε Παράρτημα Β για τους κώδικες στην R). Η εκτίμηση των παραμέτρων των κατανομών που θα προσαρμοστούν γίνεται με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας (δείτε Παράρτημα Α). Για την αξιολόγηση της προσαρμογής των κατανομών θα χρησιμοποιηθεί το κριτήριο AIC, καθώς επίσης και έλεγχοι υποθέσεων (Kolmogorov-Smirnov και Anderson-Darling). Θα υπολογιστούν επίσης αναλογιστικά μέτρα όπως το *VaR* και το *TVaR*.

3.2 Τα δεδομένα και πακέτα της R

Το σετ δεδομένων που θα μελετηθεί είναι το «Danish». Αποτελεί ένα κλασικό και ευρέως χρησιμοποιούμενο σύνολο δεδομένων στην αναλογιστική επιστήμη και στη θεωρία ακραίων τιμών και περιλαμβάνει ζημιές από πυρκαγιές που συνέβησαν στη Δανία. Πιο συγκεκριμένα αποτελείται από 2492 περιστατικά ζημιών που καταγράφηκαν από τις αρχές του 1980 μέχρι και το τέλος του 1990. Αξίζει να σημειωθεί πως τα δεδομένα αυτά έχουν συλλεχθεί από την αντασφαλιστική εταιρεία Copenhagen Reinsurance και αναφέρονται σε ζημιές που ξεπερνούν το ένα εκατομμύριο δανέζικες κορόνες (DKK). Οι τιμές έχουν προσαρμοστεί ώστε να αντιπροσωπεύουν την αγοραστική δύναμη του 1985, λαμβάνοντας υπόψη τον πληθωρισμό. Το σύνολο δεδομένων Danish περιλαμβάνεται στο πακέτο *SMPracticals* της R.

Στον Πίνακα 3.1 δίνονται οι κατανομές των σύνθετων μοντέλων που θα χρησιμοποιηθούν και οι παράμετροί τους. Βοηθητικά δίνονται και τα πακέτα που χρησιμοποιήθηκαν για τη μελέτη του εκάστοτε σύνθετου μοντέλου.

Πίνακας 3.1: Πίνακας παραμέτρων των κατανομών των σύνθετων μοντέλων.

Σύνθετο Μοντέλο	Παράμετροι	Πακέτα στην R
2ο σύνθετο Lognormal-Pareto	σ, α, θ	truncdist, actuar, GoFKernel, berryFunctions, MASS, gofest
3ο σύνθετο Lognormal-Pareto	$\sigma, \lambda, \theta, \alpha$	truncdist, actuar, GoFKernel, berryFunctions, MASS, gofest
2ο σύνθετο Weibull-Pareto	τ, α, θ	truncdist, actuar, GoFKernel, berryFunctions, MASS, gofest
3ο σύνθετο Weibull-Pareto	$\tau, \alpha, \theta, \lambda$	truncdist, GoFKernel, berryFunctions, MASS, gofest
Weibull-Burr	$\tau, \sigma, \beta, \alpha, s$	truncdist, GoFKernel, berryFunctions, MASS, gofest

Weibull-Paralogistic	$\tau, \sigma, \alpha, \lambda$	truncdist, GoFKernel, berryFunctions, MASS, gofest
Weibull-Loglogistic	$\tau, \sigma, \beta, \lambda$	truncdist, GoFKernel, berryFunctions, MASS, gofest
Weibull-Inverse Paralogistic	$\tau, \sigma, \alpha, \lambda$	truncdist, GoFKernel, berryFunctions, MASS, gofest
Weibull-Inverse Weibull	$\tau, \sigma, \alpha, \lambda$	truncdist, GoFKernel, berryFunctions, MASS, gofest
Gamma-Generalized Pareto	$\kappa, \lambda, \nu, \theta$	evd, truncdist, GoFKernel, berryFunctions, MASS, gofest

3.3 Ανάλυση δεδομένων «Danish»

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται κάποια βασικά περιγραφικά στατιστικά μέτρα για τα δεδομένα «Danish».

Πίνακας 3.2: Περιγραφικά στατιστικά μέτρα των δεδομένων «Danish».

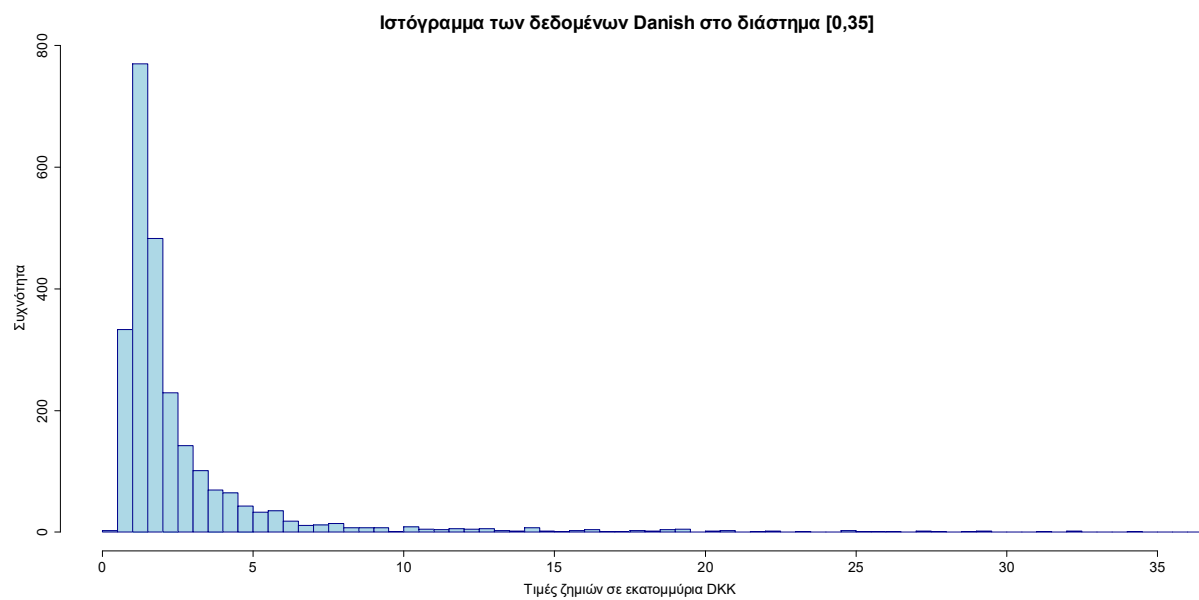
Μέση τιμή	3.0627
Τυπική απόκλιση	7.9767
Διακύμανση	63.6278
Διάμεσος	1.6339
Εύρος	262.937
Μέγιστη τιμή	263.2504
Ελάχιστη τιμή	0.3134
Λοξότητα	19.8841
Κύρτωση	546.1326

Παρατηρείται ότι η μέση τιμή των ζημιών ανέρχεται σε 3.0627 εκατομμύρια DKK, ενώ η διάμεσος είναι σημαντικά μικρότερη (1.6339 εκατομμύρια DKK). Η μεγάλη διαφορά μεταξύ μέσης τιμής και διαμέσου υποδηλώνει την ύπαρξη έντονης θετικής ασυμμετρίας, καθώς λίγες εξαιρετικά μεγάλες ζημιές αυξάνουν σημαντικά τη μέση τιμή. Η τυπική απόκλιση είναι 7.9767, αρκετά μεγαλύτερη από τη μέση τιμή, γεγονός που υποδηλώνει μεγάλη διασπορά των δεδομένων γύρω από τον μέση τιμή. Το εύρος των δεδομένων είναι ιδιαίτερα μεγάλο (262.937 εκατομμύρια DKK), καθώς η ελάχιστη ζημία είναι μόλις 0.3134 εκατομμύρια DKK, ενώ η μέγιστη φτάνει τα 263.2504 εκατομμύρια DKK. Το εύρος των τιμών σε συνδυασμό με τα προηγούμενα μέτρα και τα σχήματα που θα ακολουθήσουν καταδεικνύουν την ύπαρξη ακραίων παρατηρήσεων (outliers) οι οποίες αποτελούν χαρακτηριστικό γνώρισμα των ασφαλιστικών δεδομένων. Η λοξότητα έχει τιμή 19.8961, δηλαδή είναι ιδιαίτερα υψηλή και θετική. Η τιμή αυτή υποδηλώνει ότι τα δεδομένα παρουσιάζουν έντονη ασυμμετρία (λοξότητα) προς τα δεξιά, με τις περισσότερες παρατηρήσεις να συγκεντρώνονται σε χαμηλές τιμές και λίγες εξαιρετικά μεγάλες ζημιές να σχηματίζουν μια μακριά δεξιά ουρά. Τέλος, η κυρτότητα είναι 549.5736, τιμή εξαιρετικά μεγαλύτερη από εκείνη της κανονικής κατανομής (ίση με 3). Η πολύ υψηλή κυρτότητα υποδηλώνει ότι τα δεδομένα παρουσιάζουν βαριά ουρά και αυξημένη πιθανότητα εμφάνισης ακραίων τιμών. Συνολικά, τα περιγραφικά στατιστικά δείχνουν ότι οι ζημιές από πυρκαγιές δεν ακολουθούν κανονική κατανομή, αλλά χαρακτηρίζονται από έντονη θετική ασυμμετρία, μεγάλη διασπορά και σημαντικό αριθμό ακραίων τιμών.

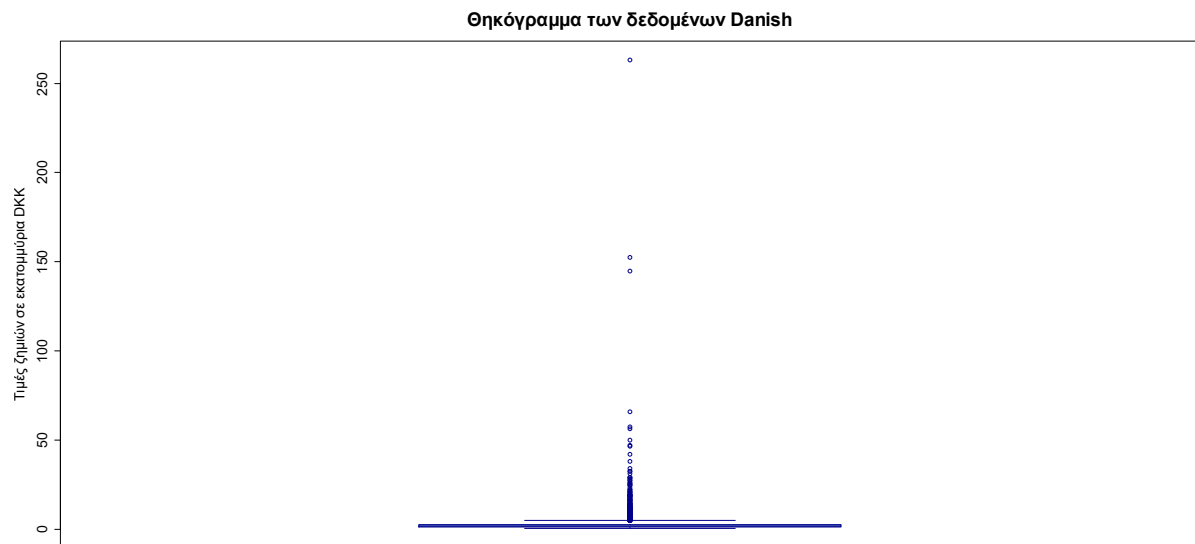
Για να έχουμε μια καλύτερη εικόνα για τα δεδομένα μας, παρακάτω παρουσιάζονται δύο ιστογράμματα των δεδομένων μας (το ένα έχει όλες τις παρατηρήσεις και το άλλο έχει ένα μέρος αυτών), δύο αντίστοιχα θηκογράμματα, καθώς και το κανονικό Q-Q plot διάγραμμα.



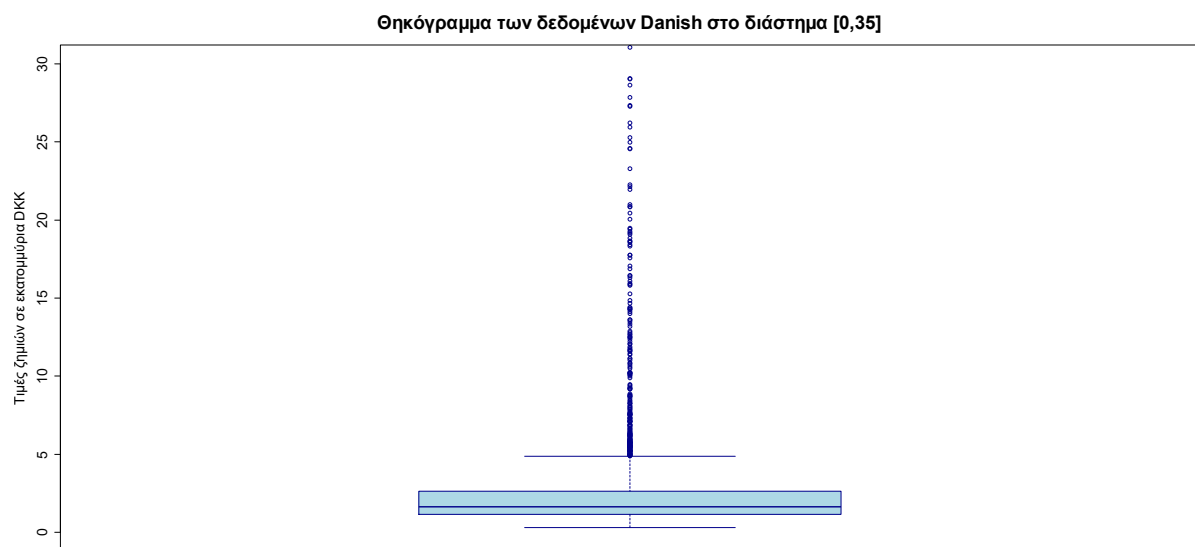
Σχήμα 3.1: Ιστόγραμμα των δεδομένων Danish.



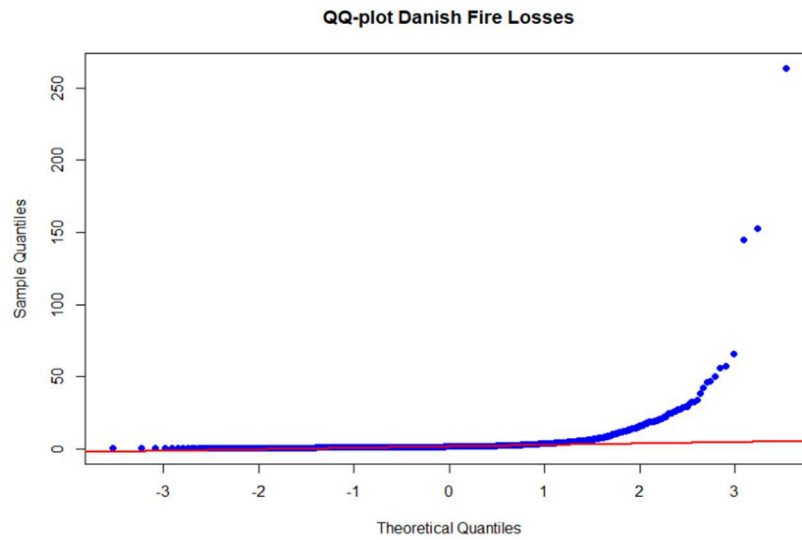
Σχήμα 3.2: Μέρος ιστογράμματος στο διάστημα [0,35] των δεδομένων Danish.



Σχήμα 3.3: Θηκόγραμμα των δεδομένων Danish.



Σχήμα 3.4: Θηκόγραμμα των δεδομένων Danish στο διάστημα [0,35].



Σχήμα 3.5: Κανονικό Q-Q διάγραμμα των δεδομένων Danish.

Στη συνέχεια, ακολουθεί πίνακας με τις εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας που προέκυψαν με προγραμματισμό στην R για σχεδόν όλα τα σύνθετα μοντέλα που αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Πίνακας 3.3: ΕΜΠ των παραμέτρων σύνθετων μοντέλων πιθανότητας για τα δεδομένα Danish.

Σύνθετο Μοντέλο	ΕΜΠ
2ο σύνθετο Lognormal-Pareto	$\theta = 1.207935$ $\alpha = 1.328159$ $\sigma = 0.196666$
3ο σύνθετο Lognormal-Pareto	$\lambda = 0.1036339$ $\sigma = 0.1822937$ $\alpha = 0.6397439$ $\theta = 1.1445991$
2ο σύνθετο Weibull-Pareto	$\theta = 1.002944$ $\alpha = 1.261743$ $\tau = 14.033033$
3ο σύνθετο Weibull-Pareto	$\theta = 0.971752$ $\alpha = 1.651751$ $\tau = 15.335012$ $\lambda = 0.559721$
Weibull-Burr	$\sigma = 0.948669$ $\tau = 16.202423$ $\beta = 3.646395$ $s = 0.845701$ $\alpha = 0.394518$
Weibull-Paralogistic	$\sigma = 0.965474$ $\tau = 15.511447$ $\alpha = 1.266633$ $\lambda = 0.622381$
Weibull-Loglogistic	$\sigma = 0.960805$ $\tau = 15.808522$ $\beta = 1.571796$ $\lambda = 0.687774$
Weibull-Inverse Paralogistic	$\sigma = 0.959990$ $\tau = 15.80550$ $a = 1.567465$ $\lambda = 0.562742$
Weibull-Inverse Weibull	$\sigma = 0.955076$ $\tau = 16.085814$ $\alpha = 1.555085$ $\lambda = 0.907192$
Gamma-Generalized Pareto	$\lambda = 0.05156064$ $\kappa = 22.55209744$ $\nu = 0.66653252$ $\theta = 1.21725818$

Το κριτήριο Akaike Information Criterion (AIC) αποτελεί ένα αποδεκτό κριτήριο επιλογής για το ποιο σύνθετο μοντέλο προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα μας. Συγκεκριμένα όσο μικρότερη είναι η τιμή του AIC, τόσο καλύτερη η προσαρμογή της κατανομής στα δεδομένα μας. Σημειώνεται ότι

$$AIC = 2p - 2 \log L$$

όπου p είναι το πλήθος των παραμέτρων της εκάστοτε κατανομής και L είναι η πιθανοφάνεια του εκάστοτε μοντέλου υπολογισμένος στις τιμές των παραμέτρων που είναι ίσες με τις εκτιμήσεις των (ΕΜΠ).

Ακολουθεί πίνακας με τις τιμές του κριτηρίου αυτού για κάθε σύνθετο μοντέλο που αναπτύχθηκε προηγουμένως (με έντονη γραφή είναι η μικρότερη τιμή AIC που αντιστοιχεί στο σύνθετο μοντέλο Weibull-Burr).

Πίνακας 3.4: Τιμές κριτηρίου AIC για τα σύνθετα μοντέλα του Πίνακα 3.3.

Σύνθετο Μοντέλο	AIC
2ο σύνθετο Lognormal-Pareto	7737.73
3ο σύνθετο Lognormal-Pareto	7728.94
2ο σύνθετο Weibull-Pareto	7686.75
3ο σύνθετο Weibull-Pareto	7655.40
Weibull-Burr	7645.14
Weibull-Paralogistic	7652.88
Weibull-Loglogistic	7650.47
Weibull-Inverse Paralogistic	7649.87
Weibull-Inverse Weibull	7648.02
Gamma-Generalized Pareto	7740.73

Στη συνέχεια καταγράφουμε αποτελέσματα για δύο ελέγχους καλής προσαρμογής στα δεδομένα μας, Kolmogorov-Smirnov και Anderson-Darling. Σημειώνεται ότι οι στατιστικές συναρτήσεις των συγκεκριμένων ελέγχων είναι οι ακόλουθες:

- Kolmogorov-Smirnov: $KS = \sup_x [|F_n(x) - F(x)|]$
- Anderson-Darling: $AD = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i - 1) [\log F(x_{(i)}) + \log \{1 - F(x_{(n-i+1)})\}]$

όπου $F_n(\cdot)$ είναι η εμπειρική συνάρτηση κατανομής των δεδομένων (empirical cumulative distribution function), $F(\cdot)$ είναι η υποτιθέμενη συνάρτηση κατανομής των

δεδομένων όπως ορίζεται από την μηδενική υπόθεση του ελέγχου, $\sup_x$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των αποστάσεων, και $x_{(i)}$ είναι η i – οστή κατ’ αύξουσα σειρά μεγέθους παρατήρηση του δείγματος.

Γενικά, οι έλεγχοι καλής προσαρμογής αξιολογούν κατά πόσο μια θεωρητική κατανομή περιγράφει επαρκώς τα δεδομένα. Χαμηλές p -value δείχνουν ότι η απόκλιση μεταξύ θεωρητικής και εμπειρικής κατανομής είναι στατιστικά σημαντική, άρα η καλή προσαρμογή της κατανομής απορρίπτεται. Αντίθετα, υψηλές p -value (>0.05) υποδηλώνουν ότι δεν υπάρχουν επαρκείς ενδείξεις απόρριψης. Παράλληλα, οι τιμές των στατιστικών των ελέγχων (KS και AD) λειτουργούν ως μέτρα απόστασης (μεγαλύτερες τιμές σημαίνουν χειρότερη προσαρμογή, ενώ μικρότερες τιμές υποδηλώνουν ότι η κατανομή ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα). Έτσι η αξιολόγηση βασίζεται στον συνδυασμό χαμηλών στατιστικών και υψηλών p -value που υποδεικνύουν την πιο κατάλληλη κατανομή. Στον Πίνακα 3.5 με έντονη γραφή σημειώνονται τα p -value < 0.05 .

Πίνακας 3.5: Έλεγχοι καλής προσαρμογής για τις κατανομές του Πίνακα 3.3 στα δεδομένα Danish.

Σύνθετο Μοντέλο	KS statistic (p -value)	AD statistic (p -value)
2ο σύνθετο Lognormal-Pareto	0.0321 (0.0117)	3.1419 (0.0232)
3ο σύνθετο Lognormal-Pareto	0.0196 (0.2954)	1.95 (0.0979)
2ο σύνθετο Weibull-Pareto	0.0517 (0)	7.3309 (2×10^{-4})
3ο σύνθετο Weibull-Pareto	0.0255 (0.0783)	1.9182 (0.01019)
Weibull-Burr	0.0147 (0.6548)	0.7148 (0.5466)
Weibull-Paralogistic	0.0228 (0.1513)	1.6266 (0.1489)
Weibull-Loglogistic	0.0215 (0.1993)	1.3643 (0.2125)
Weibull-Inverse Paralogistic	0.0213 (0.2102)	1.3181 (0.2266)
Weibull-Inverse Weibull	0.021 (0.2222)	1.1594 (0.2835)
Gamma-Generalized Pareto	0.3909 (0.0171)	3.2161 (0.0213)

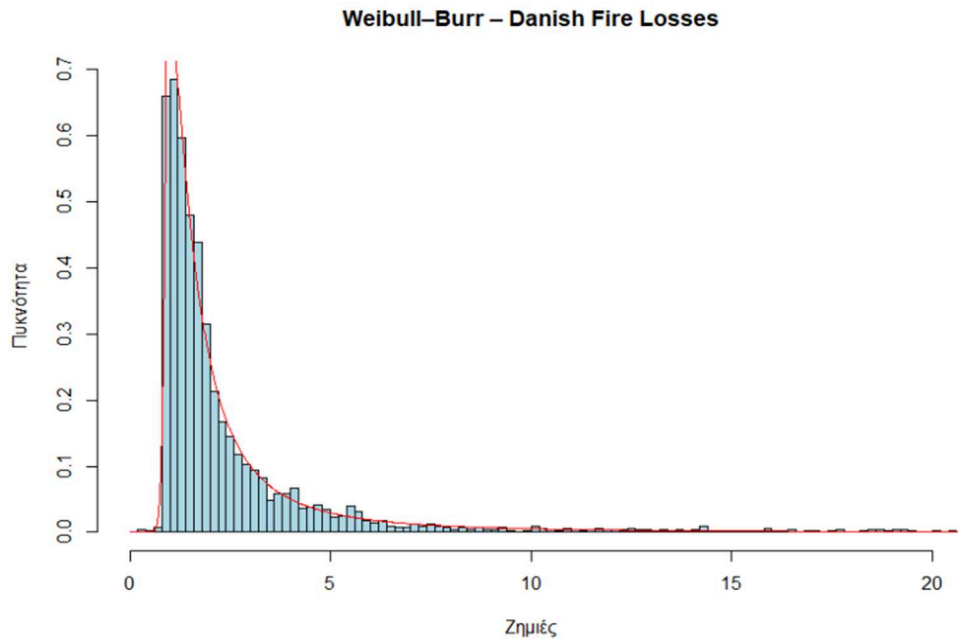
Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει τις τιμές VaR_p για όλες τις προαναφερθείσες κατανομές σε διαφορετικά επίπεδα πιθανότητας, επιτρέποντας σύγκριση του κινδύνου

που εκτιμά κάθε σύνθετο μοντέλο. Το VaR προφανώς αυξάνεται καθώς το p μεγαλώνει, δείχνοντας πώς μεταβάλλεται η εκτίμηση των ακραίων τιμών. Κατανομές με πολύ υψηλές τιμές VaR στα μεγάλα p υποδηλώνουν βαριές ουρές, ενώ κατανομές με πιο ομαλή αύξηση εμφανίζουν ηπιότερη συμπεριφορά. Συνολικά, ο πίνακας επιτρέπει την αξιολόγηση του πώς κάθε κατανομή αποτυπώνει τον κίνδυνο σε διαφορετικά επίπεδα εμπιστοσύνης, αναδεικνύοντας ποιες είναι οι πιο κατάλληλες για μοντελοποίηση ακραίων τιμών.

Πίνακας 3.6 : Τιμές Var_p σύνθετων κατανομών στα δεδομένα «Danish».

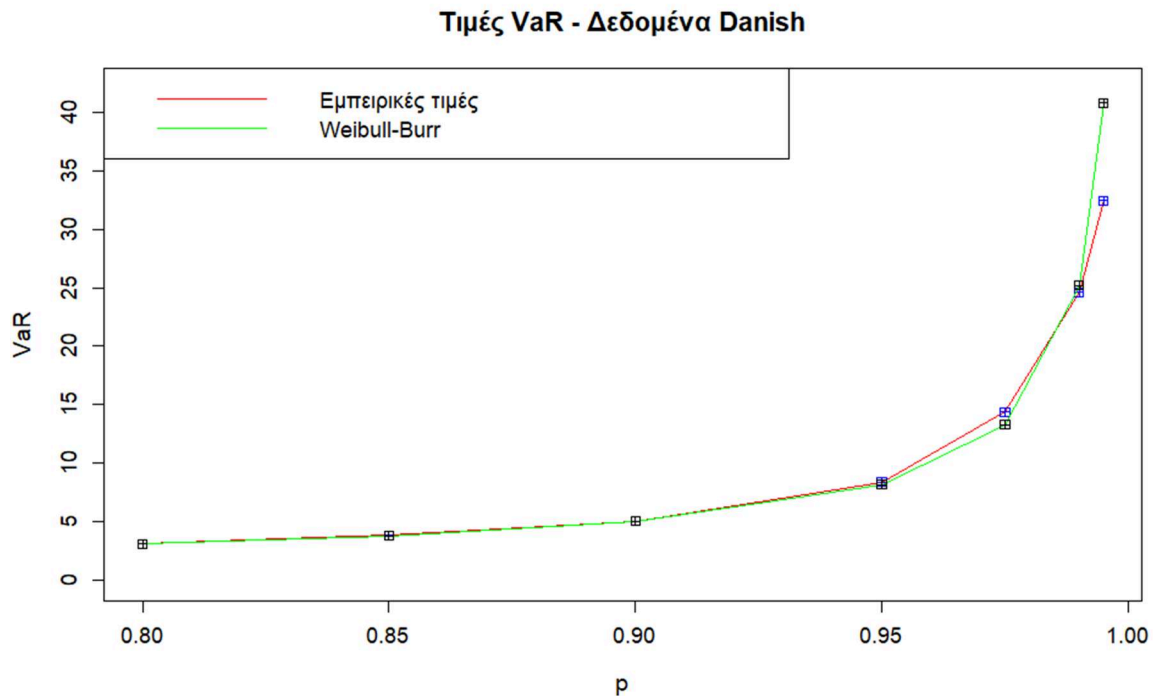
Σύνθετο Μοντέλο	p						
	80%	85%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%
2ο σύνθετο Lognormal-Pareto	3.135	3.894	5.284	8.904	15.006	29.914	50.411
3ο σύνθετο Lognormal-Pareto	3.184	3.901	5.164	8.249	13.054	23.75	37.207
2ο σύνθετο Weibull-Pareto	3.187	4.003	5.52	9.56	46.56	34.234	59.298
3ο σύνθετο Weibull-Pareto	3.228	3.948	5.203	8.207	12.779	22.669	34.78
Weibull-Burr	3.131	3.828	5.078	8.225	13.317	25.178	40.746
Weibull-Paralogistic	3.209	3.917	5.148	8.112	12.656	22.605	34.942
Weibull-Loglogistic	3.19	3.855	5.098	8.032	12.5667	22.6	35.172
Weibull-Inverse Paralogistic	3.186	3.88	5.092	8.027	12.57	22.64	35.274
Weibull-Inverse Weibull	3.177	3.868	5.078	8.019	12.591	22.77	35.598
Gamma-Generalized Pareto	3.177	3.904	5.197	8.404	13.493	25.073	39.951
Εμπειρικό Var_p	3.142	3.884	5.08	8.406	14.395	24.614	32.431

Ύστερα από την παρουσίαση των βασικότερων στοιχείων και κριτηρίων επιλογής του καταλληλότερου σύνθετου μοντέλου για τα δεδομένα μας, παρουσιάζεται παρακάτω το ιστόγραμμα πυκνότητας και το προσαρμοσμένο σε αυτό σύνθετο μοντέλο Weibull – Burr, το οποίο είχε το μικρότερο κριτήριο AIC από όλα τα σύνθετα μοντέλα που μελετήθηκαν.



Σχήμα 3.6: Προσαρμογή της κατανομής Weibull – Burr στο ιστόγραμμα πυκνότητας των δεδομένων Danish.

Τέλος το παρακάτω γράφημα απεικονίζει τις τιμές του VaR_p για διαφορετικά επίπεδα πιθανότητας p , επιτρέποντας την άμεση σύγκριση άρα και την ανάδειξη των διαφορών ανάμεσα στα δεδομένα μας και την «καταλληλότερη» σύνθετη κατανομή. Οι τετμημένες αντιστοιχούν στα επίπεδα εμπιστοσύνης, ενώ οι τεταγμένες δείχνουν το αντίστοιχο επίπεδο ζημίας που αναμένεται να ξεπεραστεί με πιθανότητα $1 - p$. Με τον τρόπο αυτό, το γράφημα αποτυπώνει τη μεταβολή του VaR καθώς αυξάνεται το p .



Σχήμα 3.7: Θεωρητικές και εμπειρικές τιμές VaR_p της κατανομής Weibull – Burr για τα δεδομένα Danish.

Το αποτέλεσμα είναι αρκετά ικανοποιητικό καθώς το σύνθετο μοντέλο προσεγγίζει με ακρίβεια την εμπειρική συμπεριφορά του VaR . Οι δύο καμπύλες συγκλίνουν στα χαμηλότερα επίπεδα και η διαφορά τους στα υψηλά p είναι αναμενόμενη λόγω της ουράς της κατανομής.

3.4 Συμπεράσματα

Το σύνολο δεδομένων Danish Fire Losses παρουσιάζει έντονη θετική ασυμμετρία, η πλειονότητα των παρατηρήσεων αφορά σχετικά μικρές ζημιές, ενώ ένας περιορισμένος αριθμός παρατηρήσεων αντιστοιχεί σε ιδιαίτερα μεγάλες ζημιές.

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των δεδομένων είναι η βαριά δεξιά ουρά της κατανομής. Η συμπεριφορά αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική από στατιστικής άποψης, καθώς υποδηλώνει ότι η πιθανότητα εμφάνισης πολύ μεγάλων ζημιών δεν είναι αμελητέα και καθιστά αναγκαία τη χρήση κατανομών που μπορούν να περιγράψουν αποτελεσματικά τις ακραίες παρατηρήσεις.

Για να επιτευχθεί αυτό στα δεδομένα προσαρμόστηκε ένας σημαντικός αριθμός σύνθετων μοντέλων δύο συνιστωσών προκειμένου να βρεθεί η κατανομή που προσαρμόζεται ικανοποιητικά στα δεδομένα.

Από την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε προκύπτει ότι το σύνθετο μοντέλο Weibull-Burr παρουσιάζει την καλύτερη προσαρμογή. Ειδικότερα, το συγκεκριμένο μοντέλο καταφέρνει να αποτυπώσει αποτελεσματικά τη διαφορετική συμπεριφορά των δεδομένων στις επιμέρους περιοχές της κατανομής και να προσεγγίσει με ικανοποιητικό τρόπο την εμπειρική συμπεριφορά του *VaR*. Το αποτέλεσμα αυτό αναδεικνύει τη χρησιμότητα των σύνθετων μοντέλων στην ανάλυση δεδομένων ασφαλιστικών ζημιών, ιδιαίτερα όταν αυτά χαρακτηρίζονται από έντονη ασυμμετρία, ακραίες παρατηρήσεις και βαριά δεξιά ουρά.

Αυτό επιβεβαιώνεται και από τον παρακάτω πίνακα όπου παρουσιάζονται τιμές AIC διαφόρων απλών κατανομών.

Πίνακας 3.7: Τιμές κριτηρίου AIC για διάφορες κατανομές

Κατανομή	AIC
Weibull	10544
Pareto	10107
Burr	7676
Paralogistic	9033
Loglogistic	8565
Inverse Paralogistic	8190
Generalized Pareto	8206

Η σύγκριση αυτών των τιμών με τις αντίστοιχες των τιμών του Πίνακα 3.4 καταδεικνύει την υπεροχή των σύνθετων μοντέλων για την περιγραφή των δεδομένων.

Παράρτημα Α

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Έστω $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από ένα πληθυσμό με σ.π. $f(x|\boldsymbol{\theta})$ όπου $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$, $k \geq 1$, είναι ένα διάνυσμα παραμέτρων με $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ (το σύνολο Θ συμβολίζει τον παραμετρικό χώρο, $\Theta \subseteq R^k$). Η από κοινού σ.π. του δείγματος, $L(\boldsymbol{\theta}) = L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$, η οποία θεωρείται συνάρτηση του διανύσματος $\boldsymbol{\theta}$ ονομάζεται συνάρτηση πιθανοφάνειας, δηλαδή

$$L(\boldsymbol{\theta}) = L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) = L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k | x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\boldsymbol{\theta})$$

Αν για κάθε δειγματοσημείο $\mathbf{x}$, το διάνυσμα

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) = (\hat{\theta}_1(\mathbf{x}), \hat{\theta}_2(\mathbf{x}), \dots, \hat{\theta}_k(\mathbf{x}))$$

όπου $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \Theta$, ικανοποιεί τη σχέση

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} L(\boldsymbol{\theta}),$$

ή ισοδύναμα τη σχέση

$$\log L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \log L(\boldsymbol{\theta}),$$

τότε το διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) = (\hat{\theta}_1(\mathbf{x}), \hat{\theta}_2(\mathbf{x}), \dots, \hat{\theta}_k(\mathbf{x}))$ ονομάζεται εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Estimator) της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$.

Ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας (ΕΜΠ) προκύπτει συνήθως από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων

$$U_r(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta_r} \log L(\boldsymbol{\theta}) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, k$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = (U_1(\boldsymbol{\theta}), U_2(\boldsymbol{\theta}), \dots, U_k(\boldsymbol{\theta})) = \mathbf{0},$$

αρκεί ο πίνακας των δεύτερων μερικών παραγώγων

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log L(\boldsymbol{\theta}) \right)_{k \times k}$$

υπολογισμένος στη θέση $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ να είναι αρνητικά ορισμένος. Η λύση του συστήματος $U(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ επιτυγχάνεται συνήθως με μεθόδους της αριθμητικής ανάλυσης.

Από τη θεωρία πιθανοφάνειας (υπό την ισχύ ορισμένων συνθηκών ομαλότητας) προκύπτει ότι

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}) \stackrel{a}{\sim} N_k(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}))$$

(ή πιο αυστηρά $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \stackrel{d}{\rightarrow} N_k(\mathbf{0}, n\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}))$), όπου $N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ συμβολίζει την k -διάστατη κανονική κατανομή με διάνυσμα μέσων τιμών $\boldsymbol{\mu}$ και πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων $\boldsymbol{\Sigma}$. Ο πίνακας $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$, διάστασης $k \times k$, ονομάζεται πίνακας πληροφορίας του Fisher. Το στοιχείο $I_{ij}(\boldsymbol{\theta})$ του πίνακα $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ που βρίσκεται στην τομή της i γραμμής και της j στήλης δίνεται από τον τύπο

$$I_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = -E \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log L(\boldsymbol{\theta}) \right).$$

Σημειώνεται ότι το ίδιο ασυμπτωτικά αποτέλεσμα με τα παραπάνω ισχύουν και στην περίπτωση που ο πίνακας $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ αντικατασταθεί από τον παρατηρούμενο πίνακα πληροφορίας του Fisher $\mathbf{I}_0(\boldsymbol{\theta})$, του οποίου το στοιχείο $I_{0,ij}(\boldsymbol{\theta})$ που βρίσκεται στην τομή της i γραμμής και της j στήλης δίνεται από τον τύπο

$$I_{0,ij}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log L(\boldsymbol{\theta}).$$

Οι παραπάνω ασυμπτωτικές κατανομές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή ελέγχων και διαστημάτων εμπιστοσύνης που αφορούν το διάνυσμα παραμέτρων $\boldsymbol{\theta}$.

Παράρτημα Β

Κώδικες R

2ο σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο

```
> # Lognormal - Pareto Second model
>
> ##### Data
> library(SMPracticals)
> data(danish)
> x <- danish
> length(x)           # 2492
[1] 2492
>
> library(e1071)       # For function skewness, kurtosis
> MAT1 <- matrix(c(mean(x),sd(x),var(x),median(x),max(x)-min(x),max(x),min
(x),skewness(x),kurtosis(x)),nrow=9)
> dimnames(MAT1)=list(c("Mean","Std Dev","Variance","Median","Range","M
aximum","Minimum","Skewness","Kurtosis"),"value")
> MAT1
              value
Mean          3.062699
Std Dev       7.976703
Variance      63.627787
Median        1.633858
Range         262.936962
Maximum       263.250366
Minimum       0.313404
Skewness      19.884145
Kurtosis      546.132584
>
> ##### Parameter R relation (3.4)
> R <- function(alpha,sigma) {
+   V <- sqrt(2*pi)*alpha*sigma*pnorm(alpha*sigma,0,1)*exp((alpha*sigma)
^2/2)
+   return(V/(V+1))
+ }
>
> ##### Parameter μ relation (3.3)
> mu <- function(alpha,theta,sigma) {
+   return(log(theta)-alpha*sigma^2)
+ }
>
> ##### Density f(x): dLP, relation (3.1)
> library(truncdist)   # For dtrunc, ptrunc

Loading required package: stats4
Loading required package: evd

Attaching package: 'evd'
```

The following object is masked from 'package:SMPracticals':

venice

```
> library(actuar)          # For dpareto1
```

Attaching package: 'actuar'

The following objects are masked from 'package:evd':

dgumbel, pgumbel, qgumbel, rgumbel

The following objects are masked from 'package:stats':

sd, var

The following object is masked from 'package:grDevices':

cm

```
>
> dLP <- function(x,alpha,theta,sigma) {
+   f <- R(alpha,sigma) * dtrunc(x, meanlog=mu(alpha,theta,sigma), sdlog=sigma, spec="lnorm", a=0, b=theta)+
+   (1-R(alpha,sigma)) * dpareto1(x,shape=alpha, min=theta)
+   return(f)
+ }
> ##### Graph of f(x)
> t <- seq(0, 250, length.out = 1000)
> dLP1<- dLP(t,alpha=0.5,theta=50,sigma=0.5)
> dLP2<- dLP(t,alpha=0.5,theta=50,sigma=1)
> plot(t, dLP1, type = "l", col = "blue", lwd = 3,
+   ylab = "f(t)", xlab = "t", ylim = c(0, 0.016), xlim = c(0, 250),
+   main = "Συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής L-P Model 2")
> lines(t, dLP2, col = "red", lwd = 3, lty=2)
> legend("topright", legend = c("α=0.5, θ=50, σ=0.5", "α=0.5, θ=50, σ=1"),col = c("blue", "red"), lwd = 3, lty=c(1,2))
> abline(v=50, lty=2, col="grey")
>
>
> ##### CDF F(x): pLP
> pLP <- function(x,alpha,theta,sigma) {
+   d <- R(alpha,sigma)*ptrunc(x,meanlog=mu(alpha,theta,sigma),sdlog=sigma,spec="lnorm",a=0,b=theta)+
+   (1-R(alpha,sigma))*ppareto1(x,shape=alpha,min=theta)
+   return(d)
+ }
>
> ##### Inverse CDF: qLP
```

```

> library(GoFKernel)          # For inverse
Loading required package: KernSmooth
KernSmooth 2.23 loaded
Copyright M. P. Wand 1997-2009
> qLP <- function(q, alpha, theta, sigma) {
+   d = inverse( function(x) { pLP(x, alpha, theta, sigma) },lower=0.7
+ )
+   return(d(q))
+ }
>
> ##### Maximum Likelihood Estimators
> library(berryFunctions)      # For function  is.error
> library(MASS)                # For function  fitdistr

```

Attaching package: 'MASS'

The following objects are masked from 'package:SMPracticals':

cement, forbes, leuk, shuttle

```

> library(goftest)            # For ad.test
> FIT <- function(x) {
+   fd <- function(i,j,k) fitdistr(x,dLP,list(alpha=i,theta=j,sigma=k),me
+ thod="Nelder-Mead")          # density=dLP
+   veci <- seq(0.1,2,0.1)
+   vecj <- seq(0.1,2,0.1)
+   veck <- seq(0.1,2,0.1)
+   for (i in veci) {
+     for (j in vecj) {
+       for (k in veck) {
+         if(is.error(try(fd(i,j,k),silent=T))==FALSE) {
+           fitLP=fd(i,j,k)
+           mystart=c(i,j,k)
+           break }
+       }
+     }
+   }
+   return(fitLP)
+ }
> M <- FIT(x); M
alpha      theta      sigma
 1.32815993  1.20793514  0.19666649
(0.03160973) (0.03003575) (0.01168931)
> names(M)
[1] "estimate" "sd"      "vcov"      "loglik"    "n"
> MAT2 <- matrix(c(M$estimate[[1]],M$estimate[[2]], M$estimate[[3]]),nrow=3
+ )
> dimnames(MAT2) <- list(c("α","θ","σ"),"MLE")
> MAT2
      MLE
α 1.3281599
θ 1.2079351

```

```

σ 0.1966665
>
> #### AIC, BIC, Tests
> AIC(M)
[1] 7737.729
> BIC(M)
[1] 7755.191
> ks <- ks.test(x,"pLP",M$estimate[1],M$estimate[2],M$estimate[3]); ks

data:  x
D = 0.032113, p-value = 0.01172
alternative hypothesis: two-sided

> ad <- ad.test(x,"pLP",M$estimate[1],M$estimate[2],M$estimate[3]); ad

Anderson-Darling test of goodness-of-fit
Null hypothesis: distribution 'pLP'
Parameters assumed to be fixed

data:  x
An = 3.1419, p-value = 0.0232

>
> MAT3 <- matrix(c(AIC(M),BIC(M),round(ks$statistic,digits=4),round(ks$p.va
lue,digits=4),round(ad$statistic,digits=4),round(ad$p.value,digits=4)),ncol
=6,nrow=1)
> rownames(MAT3)=c("")
> colnames(MAT3)=c("AIC"," BIC"," K-S Statistic"," K-S P-value"," A
-D Statistic"," A-D P-value")
> MAT3
      AIC      BIC      K-S Statistic      K-S P-value      A-D Statistic      A-D
P-value
7737.729 7755.191      0.0321      0.0117      3.1419
0.0232
>
> #### VaR
>
> p <- c(0.8,0.85,0.9,0.95,0.975,0.99,0.995)
> VaRLP=c()      # THEORITICAL VAR
> SVaR=c()      # EMPIRICAL VAR
> for (i in 1:length(p)) {
+   VaRLP[i] <- qLP(p[i], alpha=M$estimate[1], theta=M$estimate[2], sigma
=M$estimate[3])
+   SVaR[i]=quantile(x,p[i])
+ }
>
> MAT4 <- matrix(c(VaRLP,SVaR),ncol=7,byrow=T)
> rownames(MAT4)=c("THEORITICAL VAR", "EMPIRICAL VAR")
> colnames(MAT4)=c("80%", "85%", "90%", "95%", "97.5%", "99%", "99.5%")
> MAT4
      80%      85%      90%      95%      97.5%      99%      99.5%
THEORITICAL VAR 3.135475 3.893788 5.283907 8.904450 15.00579 29.91414 50.41
136
EMPIRICAL VAR   3.141857 3.884263 5.080440 8.406298 14.39458 24.61378 32.43
126

```

3ο σύνθετο Lognormal-Pareto μοντέλο

```
> # Lognormal - Generalised Pareto Composite Model
> # Body: truncated Lognormal on (0, theta]
> # Tail: Generalised Pareto Distribution on (theta, inf) [location fixed
at theta]
> # Smoothness conditions at theta:
> #   (1) Continuity:      f(theta-) = f(theta+) -> defines r
> #   (2) 1st derivative: f'(theta-) = f'(theta+) -> derives sigma_gpd (c
losed form)
> #                               sigma_gpd = (1+a)*sigma^2*theta / (sigma^2 + log
(theta) - lambda)
> #   (3) 2nd derivative: f''(theta-) = f''(theta+) -> verified after fitt
ing
> # Free parameters estimated: lambda (LN log-mean), sigma (LN log-sd),
> #                               a (GPD shape), theta (threshold)
>
> ##### Data
> library(SMPracticals)
```

Loading required package: ellipse

Attaching package: 'ellipse'

The following object is masked from 'package:graphics':

pairs

```
> data(danish)
> x <- danish
> length(x)           # 2492
[1] 2492
>
> library(e1071)       # For function skewness, kurtosis
> MAT1 <- matrix(c(mean(x),sd(x),var(x),median(x),max(x)-min(x),max(x),min
(x),skewness(x),kurtosis(x)),nrow=9)
> dimnames(MAT1)=list(c("Mean","Std Dev","Variance","Median","Range","M
aximum","Minimum","Skewness","Kurtosis"),"value")
> MAT1
              value
Mean          3.062699
Std Dev       7.976703
Variance      63.627787
Median        1.633858
Range        262.936962
Maximum      263.250366
Minimum       0.313404
Skewness     19.884145
Kurtosis     546.132584
>
> ##### GPD scale derived from 1st differentiability condition (closed form)
> # Matching log-derivatives of LN and GPD at theta gives:
> #   sigma_gpd = (1+a)*sigma^2*theta / (sigma^2 + log(theta) - lambda)
> sigma_gpd_diff <- function(lambda, sigma, a, theta) {
```

```

+   denom <- sigma^2 + log(theta) - lambda
+   if (is.na(denom) || denom <= 0 || a <= -1) return(NA)
+   return((1 + a) * sigma^2 * theta / denom)
+ }
>
> ##### Parameter r (continuity condition at theta): hazard rate ratio
> # h_GPD(theta) = 1/sigma_gpd (since (1+a*(theta-theta)/sigma_gpd)^(-1/a-1) = 1)
> library(evd) # For dgpd, pgpd

```

Attaching package: 'evd'

The following object is masked from 'package:SMPracticals':

venice

```

> library(truncdist) # For dtrunc, ptrunc
Loading required package: stats4
>
> R <- function(lambda, sigma, a, theta) {
+   sgpd <- sigma_gpd_diff(lambda, sigma, a, theta)
+   if (is.na(sgpd) || sgpd <= 0) return(NA)
+   # Body normalises by F_LN(theta) = plnorm(theta), so ratio is f_LN(theta)/F_LN(theta)
+   hLN <- dlnorm(theta, meanlog=lambda, sdlog=sigma) / plnorm(theta, meanlog=lambda, sdlog=sigma)
+   hGPD <- 1 / sgpd
+   return(hGPD / (hLN + hGPD))
+ }
>
> ##### Density f(x): dLNGPD
> dLNGPD <- function(x, lambda, sigma, a, theta) {
+   sgpd <- sigma_gpd_diff(lambda, sigma, a, theta)
+   if (is.na(sgpd) || sgpd <= 0) return(rep(1e-300, length(x)))
+   r <- R(lambda, sigma, a, theta)
+   if (is.na(r) || r <= 0 || r >= 1) return(rep(1e-300, length(x)))
+   body <- r * dtrunc(x, spec="lnorm", a=0, b=theta, meanlog=lambda, sdlog=sigma)
+   tail <- ifelse(x > theta,
+                 (1 - r) * dgpd(x, loc=theta, scale=sgpd, shape=a),
+                 0)
+   return(pmax(body + tail, 1e-300))
+ }
>
> ##### Graph of f(x)
> t <- seq(0.01, 30, length.out = 1000)
> dLG1 <- dLNGPD(t, lambda=1, sigma=1, a=0.3, theta=3)
> dLG2 <- dLNGPD(t, lambda=1, sigma=1, a=0.5, theta=3)
> plot(t, dLG1, type = "l", col = "blue", lwd = 3,
+      ylab = "f(t)", xlab = "t",
+      ylim = c(0, max(c(dLG1, dLG2), na.rm=TRUE) * 1.1),
+      xlim = c(0, 30),
+      main = "Density Function of LN-GPD Composite Model")

```

```

> lines(t, dLG2, col = "red", lwd = 3, lty = 2)
> legend("topright", legend = c("lambda=1, sigma=1, a=0.3, theta=3",
+                               "lambda=1, sigma=1, a=0.5, theta=3"),
+       col = c("blue", "red"), lwd = 3, lty = c(1, 2))
> abline(v = 3, lty = 2, col = "grey")
>
> ##### CDF F(x): pLNGPD
> pLNGPD <- function(x, lambda, sigma, a, theta) {
+   sgpd <- sigma_gpd_diff(lambda, sigma, a, theta)
+   if (is.na(sgpd) || sgpd <= 0) return(rep(NA, length(x)))
+   r <- R(lambda, sigma, a, theta)
+   if (is.na(r) || r <= 0 || r >= 1) return(rep(NA, length(x)))
+   body <- r * ptrunc(x, spec="lnorm", a=0, b=theta, meanlog=lambda, sdlog
+sigma)
+   tail <- ifelse(x > theta,
+                 (1 - r) * pgpd(x, loc=theta, scale=sgpd, shape=a),
+                 0)
+   return(body + tail)
+ }
>
> ##### Inverse CDF: qLNGPD
> library(GoFKernel) # For inverse

```

Loading required package: KernSmooth

KernSmooth 2.23 loaded

Copyright M. P. Wand 1997-2009

```

> qLNGPD <- function(q, lambda, sigma, a, theta) {
+   d <- inverse(function(x) { pLNGPD(x, lambda, sigma, a, theta) }, lower=
0.7)
+   return(d(q))
+ }
>
> ##### Maximum Likelihood Estimators
> library(berryFunctions) # For function is.error
> library(MASS) # For function fitdistr

```

Attaching package: 'MASS'

The following objects are masked from 'package:SMPracticals':

cement, forbes, leuk, shuttle

```

> library(goftest) # For ad.test
> FIT <- function(x) {
+   fd <- function(i,j,k,l) fitdistr(x, dLNGPD, list(lambda=i, sigma=j,
a=k, theta=l), method="Nelder-Mead")
+   ll_at <- function(i,j,k,l) {
+     vals <- tryCatch(dLNGPD(x, i, j, k, l), error=function(e) rep(1e-300,
length(x)))
+     vals <- pmax(vals, 1e-300)
+     sum(log(vals))
+   }
+   vec_lambda <- seq(-0.5, 3.0, 0.5)

```

```

+   vec_sig <- seq(0.5, 2.5, 0.5)
+   vec_a  <- seq(0.1, 1.5, 0.2)
+   vec_th <- seq(1.0, 8.0, 0.5)
+   # Phase 1: scan full grid, keep top 5 starting points by log-likelihood
+   results <- list()
+   for (i in vec_lambda) {
+     for (j in vec_sig) {
+       for (k in vec_a) {
+         for (l in vec_th) {
+           ll <- ll_at(i, j, k, l)
+           if (is.finite(ll)) results <- c(results, list(list(ll=ll, s=c(i
+ ,j,k,l))))
+         }
+       }
+     }
+   }
+   results <- results[order(sapply(results, `[`, "ll"), decreasing=TRUE)
+ ]
+   top5 <- results[seq_len(min(5, length(results)))]
+   fd_tight <- function(i,j,k,l) fitdistr(x, dLNGPD, list(lambda=i, sigma=
+ j, a=k, theta=l),
+                                     method="Nelder-Mead",
+                                     control=list(maxit=50000, reltol
+ =1e-12))
+   # Phase 2: run Nelder-Mead from each of the top 5 starting points, keep
+ best
+   best_ll <- -Inf
+   fitLNGPD <- NULL
+   for (s in top5) {
+     fit_try <- try(fd(s$s[1], s$s[2], s$s[3], s$s[4]), silent=TRUE)
+     if (!inherits(fit_try, "try-error")) {
+       ll_conv <- logLik(fit_try)
+       if (ll_conv > best_ll) { best_ll <- ll_conv; fitLNGPD <- fit_try }
+     }
+   }
+   # Fallback: if all top5 failed, try fixed starting points
+   if (is.null(fitLNGPD)) {
+     fallback <- list(c(1,1,0.3,2), c(0.5,1.5,0.5,3), c(1.5,1,0.5,2),
+                     c(1,2,0.3,3), c(0,1,0.5,1.5), c(0.5,1,0.5,2),
+                     c(1,1.5,0.5,3), c(1.5,2,0.3,4), c(0,1.5,0.3,2),
+                     c(2,1,0.5,4))
+     for (s in fallback) {
+       fit_try <- try(fd(s[1],s[2],s[3],s[4]), silent=TRUE)
+       if (!inherits(fit_try, "try-error")) {
+         ll_conv <- logLik(fit_try)
+         if (ll_conv > best_ll) { best_ll <- ll_conv; fitLNGPD <- fit_try
+ }
+       }
+     }
+   }
+   # Phase 3: polish - re-run from converged estimates with tighter tolera
+ nce
+   if (!is.null(fitLNGPD)) {
+     e <- fitLNGPD$estimate
+     for (rep in 1:3) {
+       polish <- try(fd_tight(e[1], e[2], e[3], e[4]), silent=TRUE)

```

```

+       if (!inherits(polish, "try-error") && logLik(polish) >= logLik(fitL
NGPD)) {
+         fitLNGPD <- polish
+         e         <- fitLNGPD$estimate
+       }
+     }
+   }
+   return(fitLNGPD)
+ }
> M <- FIT(x); M
      lambda      sigma      a      theta
0.10363390 0.18229373 0.63974395 1.14459913
(0.02005636) (0.01146374) (0.03603991) (0.02963559)
> names(M)
[1] "estimate" "sd"      "vcov"      "loglik"    "n"
> MAT2 <- matrix(c(M$estimate[[1]],M$estimate[[2]],M$estimate[[3]],M$estima
te[[4]]),nrow=4)
> dimnames(MAT2) <- list(c("lambda","sigma","a","theta"),"MLE")
> MAT2
      MLE
lambda 0.1036339
sigma  0.1822937
a       0.6397439
theta  1.1445991
>
> ##### Derived sigma_gpd from 1st differentiability condition
> sgpd_hat <- sigma_gpd_diff(M$estimate[1], M$estimate[2], M$estimate[3], M
$estimate[4])
> cat("Derived sigma_gpd =", sgpd_hat, "\n")
Derived sigma_gpd = 0.9647034
>
> ##### Verify 2nd derivative condition f''(theta-) = f''(theta+) at MLE est
imates
> lambda_h <- M$estimate[1]; sigma_h <- M$estimate[2]
> a_h      <- M$estimate[3]; theta_h <- M$estimate[4]
> r_h      <- R(lambda_h, sigma_h, a_h, theta_h)
>
> f_left <- function(z) r_h * dtrunc(z, spec="lnorm", a=0, b=theta_h, mean
log=lambda_h, sdlog=sigma_h)
> f_right <- function(z) (1 - r_h) * dgpd(z, loc=theta_h, scale=sgpd_hat, s
hape=a_h)
>
> h <- 1e-5
> d2_left <- (f_left(theta_h - 2*h) - 2*f_left(theta_h - h) + f_left(the
ta_h)) / h^2
> d2_right <- (f_right(theta_h + 2*h) - 2*f_right(theta_h + h) + f_right(th
eta_h)) / h^2
>
> MAT_2nd <- matrix(c(d2_left, d2_right), nrow=2)
> dimnames(MAT_2nd) <- list(c("f''(theta-)", "f''(theta+)"), "value")
> MAT_2nd
      value
f''(theta-) -1.468431e+01
f''(theta+) -7.896105e+09
>
> ##### AIC, BIC, Tests

```

```

> AIC(M)
[1] 7728.943
> BIC(M)
[1] 7752.226
> ks <- ks.test(x,"pLNGPD",M$estimate[1],M$estimate[2],M$estimate[3],M$estimate[4]); ks
Asymptotic one-sample kolmogorov-Smirnov test

data: x
D = 0.019574, p-value = 0.2954
alternative hypothesis: two-sided

> ad <- ad.test(x,"pLNGPD",M$estimate[1],M$estimate[2],M$estimate[3],M$estimate[4]); ad
Anderson-Darling test of goodness-of-fit
Null hypothesis: distribution 'pLNGPD'
Parameters assumed to be fixed

data: x
An = 1.9495, p-value = 0.09793

>
> MAT3 <- matrix(c(AIC(M),BIC(M),round(ks$statistic,digits=4),round(ks$p.value,digits=4),round(ad$statistic,digits=4),round(ad$p.value,digits=4)),ncol=6,nrow=1)
> rownames(MAT3)=c("")
> colnames(MAT3)=c("AIC"," BIC"," K-S Statistic"," K-S P-value"," A-D Statistic"," A-D P-value")
> MAT3
      AIC      BIC      K-S Statistic      K-S P-value      A-D Statistic      A-D P-value
1 7728.943 7752.226      0.0196      0.2954      1.9495      0.0979
>
> #### VaR
>
> p <- c(0.8,0.85,0.9,0.95,0.975,0.99,0.995)
> VaRLNGPD=c()      # THEORITICAL VAR
> SVaR=c()      # EMPIRICAL VAR
> for (i in 1:length(p)) {
+   VaRLNGPD[i] <- qLNGPD(p[i], lambda=M$estimate[1], sigma=M$estimate[2],
+   a=M$estimate[3], theta=M$estimate[4])
+   SVaR[i]=quantile(x,p[i])
+ }
>
> MAT4 <- matrix(c(VaRLNGPD,SVaR),ncol=7,byrow=T)
> rownames(MAT4)=c("THEORITICAL VAR", "EMPIRICAL VAR")
> colnames(MAT4)=c("80%", "85%", "90%", "95%", "97.5%", "99%", "99.5%")
> MAT4
      80%      85%      90%      95%      97.5%      99%      99.5%
THEORITICAL VAR 3.184258 3.901115 5.164012 8.248572 13.05448 23.75025 37.20691
EMPIRICAL VAR 3.141857 3.884263 5.080440 8.406298 14.39458 24.61378 32.43126

```

2ο σύνθετο Weibull-Pareto μοντέλο

```
> # Theory: Scollnik, D. P. M., & Sun, C. (2012). Modeling with Weibull-Pa
reto Models.
> # North American Actuarial Journal, 16(2), 260-272.
> # Weibull - Pareto Composite Model
>
> ##### Data
> library(SMPracticals)
> data(danish)
> x <- danish
> length(x)                # 2492
[1] 2492
>
> library(e1071)
> MAT1 <- matrix(c(mean(x),sd(x),var(x),median(x),max(x)-min(x),max(x),min(
x),skewness(x),kurtosis(x)),nrow=9)
> dimnames(MAT1)=list(c("Mean","Std Dev","Variance","Median","Range","M
aximum","Minimum","Skewness","Kurtosis"),"Value")
> MAT1
```

	Value
Mean	3.062699
Std Dev	7.976703
Variance	63.627787
Median	1.633858
Range	262.936962
Maximum	263.250366
Minimum	0.313404
Skewness	19.884145
Kurtosis	546.132584

```
>
> ##### Derived parameter phi (differentiability condition)
> # Matching log-derivatives at theta:  $f_W'(\theta)/f_W(\theta) = f_P'(\theta)/f_P(\theta)$ 
> # gives:  $\phi = \theta * (\tau / (\tau + \alpha))^{(1/\tau)}$ 
> phi <- function(alpha, tau, theta) {
+   return(theta * (tau / (tau + alpha))^(1/tau))
+ }
>
> ##### Parameter R (continuity condition)
> #  $r * f_W(\theta)/F_W(\theta) = (1-r) * f_P(\theta) \Rightarrow r = V/(V+1)$ 
> # With phi derived above,  $(\theta/\phi)^\tau = (\tau+\alpha)/\tau$ , so:
> #  $V = (\alpha/(\tau+\alpha)) * (\exp((\tau+\alpha)/\tau) - 1)$ 
> R <- function(alpha, tau, theta) {
+   c_val <- (tau + alpha) / tau
+   V <- (alpha / (tau + alpha)) * (exp(c_val) - 1)
+   return(V / (V + 1))
+ }
>
> ##### Density f(x): dWP
> library(truncdist)
> library(actuar)
```

Attaching package: ‘actuar’

The following objects are masked from 'package:evd':

dgumbel, pgumbel, qgumbel, rgumbel

The following objects are masked from 'package:stats':

sd, var

The following object is masked from 'package:grDevices':

cm

```
>
> dWP <- function(x, alpha, tau, theta) {
+   p <- phi(alpha, tau, theta)
+   f <- R(alpha, tau, theta) * dtrunc(x, shape=tau, scale=p, spec="weibull", a=0, b=theta) +
+     (1 - R(alpha, tau, theta)) * dpareto1(x, shape=alpha, min=theta)
+   return(f)
+ }
>
> ##### Graph of f(x)
> t <- seq(0, 250, length.out = 1000)
> dWP1 <- dWP(t, alpha=0.5, tau=1, theta=50)
> dWP2 <- dWP(t, alpha=0.5, tau=2, theta=50)
> plot(t, dWP1, type="l", col="blue", lwd=3,
+       ylab="f(t)", xlab="t", ylim=c(0,0.016), xlim=c(0,250),
+       main="Density Function of W-P Composite Model")
> lines(t, dWP2, col="red", lwd=3, lty=2)
> legend("topright", legend=c("α=0.5, τ=1, θ=50", "α=0.5, τ=2, θ=50"),
+       col=c("blue", "red"), lwd=3, lty=c(1,2))
> abline(v=50, lty=2, col="grey")
>
> ##### CDF F(x): pWP
> pWP <- function(x, alpha, tau, theta) {
+   p <- phi(alpha, tau, theta)
+   d <- R(alpha, tau, theta) * ptrunc(x, shape=tau, scale=p, spec="weibull", a=0, b=theta) +
+     (1 - R(alpha, tau, theta)) * ppareto1(x, shape=alpha, min=theta)
+   return(d)
+ }
>
> ##### Inverse CDF: qWP
> library(GoFKernel)
> qWP <- function(q, alpha, tau, theta) {
+   d = inverse(function(x) { pWP(x, alpha, tau, theta) }, lower=0.7)
+   return(d(q))
+ }
>
> ##### Maximum Likelihood Estimators
> library(berryFunctions)
> library(MASS)
```

```

> library(goftest)
> FIT <- function(x) {
+   fd <- function(i,j,k) fitdistr(x, dWP, list(alpha=i, tau=j, theta=k), method="Nelder-Mead")
+   veci <- seq(0.1,2,0.1)
+   vecj <- seq(0.1,2,0.1)
+   veck <- seq(0.1,2,0.1)
+   for (i in veci) {
+     for (j in vecj) {
+       for (k in veck) {
+         if(is.error(try(fd(i,j,k),silent=T))==FALSE) {
+           fitWP=fd(i,j,k)
+           mystart=c(i,j,k)
+           break }
+       }
+     }
+   }
+   return(fitWP)
+ }
> M <- FIT(x); M
There were 50 or more warnings (use warnings() to see the first 50)
pha      tau      theta
1.26174331 14.03303290 1.00294414
( 0.02734466) ( 1.09041370) ( 0.01370278)
> names(M)
[1] "estimate" "sd"      "vcov"      "loglik"    "n"
> MAT2 <- matrix(c(M$estimate[[1]],M$estimate[[2]],M$estimate[[3]]),nrow=3)
> dimnames(MAT2) <- list(c("α","τ","θ"),"MLE")
> MAT2
      MLE
α 1.261743
τ 14.033033
θ 1.002944
>
> #### AIC, BIC, Tests
> AIC(M)
[1] 7686.752
> BIC(M)
[1] 7704.214
> ks <- ks.test(x,"pWP",M$estimate[1],M$estimate[2],M$estimate[3]); ks

```

Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test

```

data: x
D = 0.05173, p-value = 3.227e-06
alternative hypothesis: two-sided

```

```
> ad <- ad.test(x,"pWP",M$estimate[1],M$estimate[2],M$estimate[3]); ad
```

Anderson-Darling test of goodness-of-fit
Null hypothesis: distribution 'pWP'
Parameters assumed to be fixed

```

data: x
An = 7.3309, p-value = 0.0002325

```

```

>
> MAT3 <- matrix(c(AIC(M),BIC(M),round(ks$statistic,digits=4),round(ks$p.va
lue,digits=4),round(ad$statistic,digits=4),round(ad$p.value,digits=4)),ncol
=6,nrow=1)
> rownames(MAT3)=c("")
> colnames(MAT3)=c("AIC","    BIC","    K-S Statistic","    K-S P-value","    A
-D Statistic","    A-D P-value")
> MAT3
      AIC      BIC    K-S Statistic    K-S P-value    A-D Statistic    A-D
P-value
7686.752 7704.214          0.0517          0          7.3309
2e-04
>
> #### VaR
> p <- c(0.8,0.85,0.9,0.95,0.975,0.99,0.995)
> VaRWP=c()
> SVaR=c()
> for (i in 1:length(p)) {
+   VaRWP[i] <- qWP(p[i], alpha=M$estimate[1], tau=M$estimate[2], theta=M$e
stimate[3])
+   SVaR[i]=quantile(x,p[i])
+ }
>
> MAT4 <- matrix(c(VaRWP,SVaR),ncol=7,byrow=T)
> rownames(MAT4)=c("THEORITICAL VAR", "EMPIRICAL VAR")
> colnames(MAT4)=c("80%", "85%", "90%", "95%", "97.5%", "99%", "99.5%")
> MAT4
      80%      85%      90%      95%      97.5%      99%      99
.5%
THEORITICAL VAR 3.186533 4.002572 5.519516 9.560565 16.56022 34.23381 59.29
769
EMPIRICAL VAR   3.141857 3.884263 5.080440 8.406298 14.39458 24.61378 32.43
126

```

3ο σύνθετο Weibull-Pareto μοντέλο

```

> # weibull - GPD Composite Model
> # Body: truncated weibull on (0, θ]
> # Tail: GPD  $g(x) = \alpha(\lambda+\theta)^\alpha / (\lambda+x)^{(\alpha+1)}$ ,  $x > \theta$ , where  $\lambda = \alpha\beta - \theta$ 
> # Smoothness conditions at  $\theta$ :
> # (1) Continuity:  $f(\theta-) = f(\theta+)$  → defines  $r$ 
> # (2) 1st derivative:  $f'(\theta-) = f'(\theta+)$  → derives  $\phi$  from  $(\tau, \alpha, \theta, \lambda)$ 
> # (3) 2nd derivative:  $f''(\theta-) = f''(\theta+)$  → verified after fitting
> # Free parameters estimated:  $\tau$  (weibull shape),  $\alpha$  (GPD shape),  $\theta$  (threshold),  $\lambda$  (GPD parameter)
>
> #### Data
> library(SMPracticals)
> data(danish)
> x <- danish
> length(x)          # 2492
[1] 2492

```

```

>
> library(e1071) # For function skewness, kurtosis
> MAT1 <- matrix(c(mean(x),sd(x),var(x),median(x),max(x)-min(x),max(x),min
(x),skewness(x),kurtosis(x)),nrow=9)
> dimnames(MAT1)=list(c("Mean","Std Dev","Variance","Median","Range","M
aximum","Minimum","Skewness","Kurtosis"),"Value")
> MAT1
      Value
Mean      3.062699
Std Dev   7.976703
Variance  63.627787
Median    1.633858
Range     262.936962
Maximum   263.250366
Minimum    0.313404
Skewness  19.884145
Kurtosis  546.132584
>
> ##### Weibull scale  $\phi$  derived from differentiability condition  $f'(\theta-) = f'(\theta+)$ 
> # Condition:  $(\tau-1)/\theta - \tau\theta^{\tau-1}/\phi^{\tau} = -(\alpha+1)/(\lambda+\theta)$ 
> #  $\Rightarrow \phi = [ \tau\theta^{\tau-1} / ((\tau-1)/\theta + (\alpha+1)/(\lambda+\theta)) ]^{1/\tau}$ 
> phi_diff <- function(tau, alpha, theta, lambda) {
+   num <- tau * theta^(tau - 1)
+   den <- (tau - 1) / theta + (alpha + 1) / (lambda + theta)
+   return((num / den)^(1 / tau))
+ }
>
> ##### GPD density g(x)
> dGPD <- function(x, alpha, theta, lambda) {
+   ifelse(x > theta, alpha * (lambda + theta)^alpha / (lambda + x)^(alpha
+ 1), 0)
+ }
>
> ##### GPD CDF G(x)
> pGPD <- function(x, alpha, theta, lambda) {
+   ifelse(x > theta, 1 - ((lambda + theta) / (lambda + x))^alpha, 0)
+ }
>
> ##### Parameter r (continuity condition at  $\theta$ ):  $hG(\theta) = \alpha/(\lambda+\theta)$ 
> library(truncdist) # For dtrunc, ptrunc
>
> R <- function(tau, alpha, theta, lambda) {
+   phi <- phi_diff(tau, alpha, theta, lambda)
+   hw <- dweibull(theta, shape=tau, scale=phi) / pweibull(theta, shape=ta
u, scale=phi)
+   hG <- alpha / (lambda + theta)
+   return(hG / (hw + hG))
+ }
>
> ##### Density f(x): dWGPD
> dWGPD <- function(x, tau, alpha, theta, lambda) {
+   phi <- phi_diff(tau, alpha, theta, lambda)
+   r <- R(tau, alpha, theta, lambda)
+   f <- r * dtrunc(x, spec="weibull", a=0, b=theta, shape=tau, scale=phi
) +

```

```

+   (1 - r) * dGPD(x, alpha, theta, lambda)
+   return(f)
+ }
>
> ##### Graph of f(x)
> t <- seq(0.01, 250, length.out = 1000)
> dwGPD1 <- dwGPD(t, tau=2, alpha=2, theta=50, lambda=10)
> dwGPD2 <- dwGPD(t, tau=2, alpha=2, theta=50, lambda=50)
> plot(t, dwGPD1, type = "l", col = "blue", lwd = 3,
+       ylab = "f(t)", xlab = "t", ylim = c(0, 0.016), xlim = c(0, 250),
+       main = "Density Function of W-GPD Composite Model")
> lines(t, dwGPD2, col = "red", lwd = 3, lty=2)
> legend("topright", legend = c("τ=2, α=2, θ=50, λ=10",
+                               "τ=2, α=2, θ=50, λ=50"),
+       col = c("blue", "red"), lwd = 3, lty=c(1,2))
> abline(v=50, lty=2, col="grey")
>
>
> ##### CDF F(x): pWGPD
> pWGPD <- function(x, tau, alpha, theta, lambda) {
+   phi <- phi_diff(tau, alpha, theta, lambda)
+   r <- R(tau, alpha, theta, lambda)
+   d <- r * ptrunc(x, spec="weibull", a=0, b=theta, shape=tau, scale=phi)
+ } +
+   (1 - r) * pGPD(x, alpha, theta, lambda)
+   return(d)
+ }
>
> ##### Inverse CDF: qWGPD
> library(GoFKernel) # For inverse
> qWGPD <- function(q, tau, alpha, theta, lambda) {
+   d = inverse( function(x) { pWGPD(x, tau, alpha, theta, lambda) }, lower
=0.7)
+   return(d(q))
+ }
>
> ##### Maximum Likelihood Estimators
> library(berryFunctions) # For function is.error
> library(MASS) # For function fitdistr
> library(goftest) # For ad.test
> FIT <- function(x) {
+   fd <- function(i,j,k,l) fitdistr(x, dwGPD, list(tau=i, alpha=j, theta=k
, lambda=l), method="Nelder-Mead")
+   vec <- seq(0.1,2,0.1)
+   found <- FALSE
+   for (i in vec) {
+     for (j in vec) {
+       for (k in vec) {
+         for (l in vec) {
+           if(is.error(try(fd(i,j,k,l),silent=T))==FALSE) {
+             fitWGPD=fd(i,j,k,l)
+             mystart=c(i,j,k,l)
+             found <- TRUE
+             break }
+         }
+       }
+     }
+   }
+   if(found) break

```

```

+     }
+     if(found) break
+   }
+   if(found) break
+ }
+ return(fitWGPD)
+ }
> M <- FIT(x); M
There were 24 warnings (use warnings() to see them)      tau      alph
a      theta      lambda
  15.33501241    1.65175106    0.97175185    0.55972111
( 1.37918825) ( 0.08923286) ( 0.01468539) ( 0.12208279)
> names(M)
[1] "estimate" "sd"      "vcov"      "loglik"    "n"
> MAT2 <- matrix(c(M$estimate[[1]],M$estimate[[2]],M$estimate[[3]],M$estima
te[[4]]),nrow=4)
> dimnames(MAT2) <- list(c("τ","α","θ","λ"),"MLE")
> MAT2
      MLE
τ 15.3350124
α  1.6517511
θ  0.9717518
λ  0.5597211
>
> ##### Derived φ from differentiability condition
> phi_hat <- phi_diff(M$estimate[1], M$estimate[2], M$estimate[3], M$estima
te[4])
> cat("Derived φ =", phi_hat, "\n")
Derived φ = 0.9689961
>
> ##### AIC, BIC, Tests
> AIC(M)
[1] 7655.396
> BIC(M)
[1] 7678.679
> ks <- ks.test(x,"pwGPD",M$estimate[1],M$estimate[2],M$estimate[3],M$estim
ate[4]); ks
      Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  x
D = 0.025497, p-value = 0.07832
alternative hypothesis: two-sided

> ad <- ad.test(x,"pwGPD",M$estimate[1],M$estimate[2],M$estimate[3],M$estim
ate[4]); ad
      Anderson-Darling test of goodness-of-fit
Null hypothesis: distribution 'pwGPD'
Parameters assumed to be fixed

data:  x
An = 1.9182, p-value = 0.1019
>

```

```

> MAT3 <- matrix(c(AIC(M),BIC(M),round(ks$statistic,digits=4),round(ks$p.value,digits=4),round(ad$statistic,digits=4),round(ad$p.value,digits=4)),ncol=6,nrow=1)
> rownames(MAT3)=c("")
> colnames(MAT3)=c("AIC","BIC","K-S Statistic","K-S P-value","A-D Statistic","A-D P-value")
> MAT3
      AIC      BIC      K-S Statistic      K-S P-value      A-D Statistic      A-D
P-value
7655.396 7678.679      0.0255      0.0783      1.9182
0.1019
>
> ##### VaR
>
> p <- c(0.8,0.85,0.9,0.95,0.975,0.99,0.995)
> VaRWGPD=c()      # THEORITICAL VAR
> SVaR=c()      # EMPIRICAL VAR
> for (i in 1:length(p)) {
+   VaRWGPD[i] <- qWGPDP(p[i], tau=M$estimate[1], alpha=M$estimate[2],
+   theta=M$estimate[3], lambda=M$estimate[4])
+   SVaR[i]=quantile(x,p[i])
+ }
>
> MAT4 <- matrix(c(VaRWGPD,SVaR),ncol=7,byrow=T)
> rownames(MAT4)=c("THEORITICAL VAR", "EMPIRICAL VAR")
> colnames(MAT4)=c("80%", "85%", "90%", "95%", "97.5%", "99%", "99.5%")
> MAT4
      80%      85%      90%      95%      97.5%      99%      99
.5%
THEORITICAL VAR 3.227819 3.948419 5.202716 8.207364 12.77869 22.66895 34.78
083
EMPIRICAL VAR   3.141857 3.884263 5.080440 8.406298 14.39458 24.61378 32.43
126

```

Weibull-Burr

```

> # Theory & Results: S.A. Abu Bakar, N.A. Hamzah, M. Maghsoudi, S. Nadarajah (2015). Modelling loss data using composite models. Insurance: Mathematics and Economics 61, 146-154
> # weibull - Burr (Type XII) Composite Model
> # Body: truncated weibull on (0, theta]
> # Tail: truncated Burr XII on (theta, inf)
> # Smoothness conditions at theta:
> # (1) Continuity: f(theta-) = f(theta+) -> defines r
> # (2) 1st derivative: f'(theta-) = f'(theta+) -> derives theta from (taf, sigma, beta, a, s)
> # (3) 2nd derivative: f''(theta-) = f''(theta+) -> verified after fitting
> # Free parameters estimated: taf (weibull shape), sigma (weibull scale),
> # beta (Burr shape 1), a (Burr shape 2), s (Burr scale)
>
> ##### Data
> library(SMPracticals)

```

```

> data(danish)
> x <- danish
> length(x) # 2492
[1] 2492
>
> library(e1071) # For function skewness, kurtosis
> MAT1 <- matrix(c(mean(x),sd(x),var(x),median(x),max(x)-min(x),max(x),min
(x),skewness(x),kurtosis(x)),nrow=9)
> dimnames(MAT1)=list(c("Mean","Std Dev","Variance","Median","Range","M
aximum","Minimum","Skewness","Kurtosis"),"Value")
> MAT1
      Value
Mean      3.062699
Std Dev   7.976703
Variance  63.627787
Median    1.633858
Range     262.936962
Maximum   263.250366
Minimum    0.313404
Skewness  19.884145
Kurtosis  546.132584
>
> ##### Burr XII density, CDF and survival
> dBurr <- function(x, beta, a, s) {
+   (a * beta / s) * (x / s)^(beta - 1) / (1 + (x / s)^beta)^(a + 1)
+ }
>
> pBurr <- function(x, beta, a, s) {
+   1 - (1 + (x / s)^beta)^(-a)
+ }
>
> sBurr <- function(x, beta, a, s) {
+   (1 + (x / s)^beta)^(-a)
+ }
>
> ##### Threshold theta derived from differentiability condition f'(theta-)
= f'(theta+)
> # Logarithmic derivatives must match at theta:
> # (taf-1)/theta - taf*(theta/sigma)^taf/theta = (beta-1)/theta - (a+1)
)*beta*(theta/s)^beta / [theta*(1+(theta/s)^beta)]
> # Multiply both sides by theta:
> # (taf - beta) - taf*(theta/sigma)^taf + (a+1)*beta*(theta/s)^beta / (1
+(theta/s)^beta) = 0
> theta_diff <- function(taf, sigma, beta, a, s) {
+   eq <- function(theta) {
+     (taf - beta) - taf * (theta / sigma)^taf +
+     (a + 1) * beta * (theta / s)^beta / (1 + (theta / s)^beta)
+   }
+   tryCatch(uniroot(eq, lower = 0.001, upper = 1000)$root, error = functio
n(e) NA)
+ }
>
> ##### Parameter r (continuity condition at theta): hazard rate ratio
> library(truncdist) # For dtrunc, ptrunc
>
> R <- function(taf, sigma, beta, a, s) {

```

```

+   theta <- theta_diff(taf, sigma, beta, a, s)
+   if (is.na(theta) || theta <= 0) return(NA)
+   hw     <- dweibull(theta, shape = taf, scale = sigma) / pweibull(theta,
shape = taf, scale = sigma)
+   hBurr <- dBurr(theta, beta, a, s) / sBurr(theta, beta, a, s)
+   return(hBurr / (hw + hBurr))
+ }
>
> ##### Density f(x): dwBurr
> dwBurr <- function(x, taf, sigma, beta, a, s) {
+   theta <- theta_diff(taf, sigma, beta, a, s)
+   if (is.na(theta) || theta <= 0) return(rep(1e-300, length(x)))
+   r     <- R(taf, sigma, beta, a, s)
+   if (is.na(r) || r <= 0 || r >= 1) return(rep(1e-300, length(x)))
+   body  <- r * dtrunc(x, spec = "weibull", a = 0, b = theta, shape = taf,
scale = sigma)
+   tail  <- ifelse(x > theta,
+                   (1 - r) * dBurr(x, beta, a, s) / sBurr(theta, beta, a,
s),
+                   0)
+   return(body + tail)
+ }
>
> ##### Graph of f(x)
> # Note: differentiability equation has a root only when taf > beta
> t <- seq(0.01, 15, length.out = 1000)
> dwB1 <- dwBurr(t, taf=5, sigma=0.8, beta=2, a=2, s=2)
> dwB2 <- dwBurr(t, taf=5, sigma=0.8, beta=2, a=4, s=2)
> plot(t, dwB1, type = "l", col = "blue", lwd = 3,
+      ylab = "f(t)", xlab = "t",
+      ylim = c(0, max(c(dwB1, dwB2), na.rm=TRUE) * 1.1),
+      xlim = c(0, 15),
+      main = "Density Function of W-Burr Composite Model")
> lines(t, dwB2, col = "red", lwd = 3, lty = 2)
> legend("topright", legend = c("taf=5, sigma=0.8, beta=2, a=2, s=2",
+                               "taf=5, sigma=0.8, beta=2, a=4, s=2"),
+       col = c("blue", "red"), lwd = 3, lty = c(1, 2))
> theta_ex <- theta_diff(5, 0.8, 2, 2, 2)
> abline(v = theta_ex, lty = 2, col = "grey")
>
> ##### CDF F(x): pWBurr
> pWBurr <- function(x, taf, sigma, beta, a, s) {
+   theta <- theta_diff(taf, sigma, beta, a, s)
+   if (is.na(theta) || theta <= 0) return(rep(NA, length(x)))
+   r     <- R(taf, sigma, beta, a, s)
+   if (is.na(r) || r <= 0 || r >= 1) return(rep(NA, length(x)))
+   body  <- r * ptrunc(x, spec = "weibull", a = 0, b = theta, shape = taf,
scale = sigma)
+   tail  <- ifelse(x > theta,
+                   (1 - r) * (pBurr(x, beta, a, s) - pBurr(theta, beta, a,
s)) /
+                   sBurr(theta, beta, a, s),
+                   0)
+   return(body + tail)
+ }
>

```

```

> ##### Inverse CDF: qWBurr
> library(GoFKernel) # For inverse
> qWBurr <- function(q, taf, sigma, beta, a, s) {
+   d <- inverse(function(x) { pWBurr(x, taf, sigma, beta, a, s) }, lower =
0.7)
+   return(d(q))
+ }
>
> ##### Maximum Likelihood Estimators
> library(berryFunctions) # For function is.error
> library(MASS) # For function fitdistr
> library(goftest) # For ad.test
> FIT <- function(x) {
+   fd <- function(i,j,k,m,l) fitdistr(x, dWBurr, list(taf=i, sigma=j, b
eta=k, a=m, s=l), method="Nelder-Mead")
+   ll_at <- function(i,j,k,m,l) {
+     vals <- dWBurr(x, i, j, k, m, l)
+     if (any(!is.finite(vals)) || any(vals <= 0)) return(-Inf)
+     sum(log(vals))
+   }
+   # taf must be > beta for the differentiability equation to have a root
+   vec_a <- seq(2, 20, 4)
+   vec_sig <- seq(0.5, 2.0, 0.5)
+   vec_gam <- seq(0.5, 2.0, 0.5)
+   vec_bet <- c(seq(0.5, 2.0, 0.5), 3, 5, 8) # a can be large
+   vec_lam <- seq(0.5, 2.0, 0.5)
+   # Phase 1: scan full grid, keep top 5 starting points by log-likelihood
+   results <- list()
+   for (i in vec_a) {
+     for (j in vec_sig) {
+       for (k in vec_gam) {
+         for (m in vec_bet) {
+           for (l in vec_lam) {
+             if (i > k) {
+               ll <- ll_at(i, j, k, m, l)
+               if (is.finite(ll)) results <- c(results, list(list(ll=ll, s
=c(i,j,k,m,l))))
+             }
+           }
+         }
+       }
+     }
+   }
+   results <- results[order(sapply(results, `[[`, "ll"), decreasing=TRUE)
]
+   top5 <- results[seq_len(min(5, length(results)))]
+   fd_tight <- function(i,j,k,m,l) fitdistr(x, dWBurr, list(taf=i, sigma=j
, beta=k, a=m, s=l),
+
+                                     method="Nelder-Mead",
+                                     control=list(maxit=50000, relt
ol=1e-12))
+   # Phase 2: run Nelder-Mead from each of the top 5 starting points, keep
best
+   best_ll <- -Inf
+   fitWBurr <- NULL
+   for (s in top5) {

```

```

+   fit_try <- try(fd(s$s[1], s$s[2], s$s[3], s$s[4], s$s[5]), silent=TRUE)
+   if (!inherits(fit_try, "try-error")) {
+     ll_conv <- logLik(fit_try)
+     if (ll_conv > best_ll) { best_ll <- ll_conv; fitWBurr <- fit_try }
+   }
+ }
+ # Fallback: if all top5 failed, try a broader set of fixed starting points
+ if (is.null(fitWBurr)) {
+   fallback <- list(c(10,1,1,2,1), c(6,0.5,0.5,3,0.5), c(14,1,1,5,1),
+                   c(4,1,0.5,1,1), c(18,0.5,1,2,0.5))
+   for (s in fallback) {
+     fit_try <- try(fd(s[1],s[2],s[3],s[4],s[5]), silent=TRUE)
+     if (!inherits(fit_try, "try-error")) {
+       ll_conv <- logLik(fit_try)
+       if (ll_conv > best_ll) { best_ll <- ll_conv; fitWBurr <- fit_try }
+     }
+   }
+ }
+ # Phase 3: polish - re-run from converged estimates with tighter tolerance
+ if (!is.null(fitWBurr)) {
+   e <- fitWBurr$estimate
+   for (rep in 1:3) {
+     polish <- try(fd_tight(e[1], e[2], e[3], e[4], e[5]), silent=TRUE)
+     if (!inherits(polish, "try-error") && logLik(polish) >= logLik(fitWBurr)) {
+       fitWBurr <- polish
+       e <- fitWBurr$estimate
+     }
+   }
+ }
+ return(fitWBurr)
+ }
> M <- FIT(x); M
      taf      sigma      beta      a      s
16.20242318  0.94866895  3.64639447  0.39451799  0.84570090
( 1.27304841) ( 0.01081683) ( 0.87946702) ( 0.10381460) ( 0.04960463)
> names(M)
[1] "estimate" "sd"      "vcov"     "loglik"   "n"
> MAT2 <- matrix(c(M$estimate[[1]],M$estimate[[2]],M$estimate[[3]],M$estimate[[4]],M$estimate[[5]]),nrow=5)
> dimnames(MAT2) <- list(c("taf","sigma","beta","a","s"), "MLE")
> MAT2
      MLE
taf 16.2024232
sigma 0.9486690
beta 3.6463945
a 0.3945180
s 0.8457009
>
> ##### Derived theta from 1st differentiability condition
> theta_hat <- theta_diff(M$estimate[1], M$estimate[2], M$estimate[3], M$estimate[4], M$estimate[5])

```

```

> cat("Derived theta =", theta_hat, "\n")
Derived theta = 0.9464934
>
> ##### Verify 2nd derivative condition f''(theta-) = f''(theta+) at MLE estimates
> # Uses numerical second derivatives from each side of theta
> taf_h <- M$estimate[1]; sigma_h <- M$estimate[2]
> beta_h <- M$estimate[3]; a_h <- M$estimate[4]; s_h <- M$estimate[5]
> r_h <- R(taf_h, sigma_h, beta_h, a_h, s_h)
>
> f_left <- function(z) r_h * dtrunc(z, spec="weibull", a=0, b=theta_hat,
  shape=taf_h, scale=sigma_h)
> f_right <- function(z) (1 - r_h) * dBurr(z, beta_h, a_h, s_h) / sBurr(theta_hat,
  beta_h, a_h, s_h)
>
> h <- 1e-5
> d2_left <- (f_left(theta_hat - 2*h) - 2*f_left(theta_hat - h) + f_left(theta_hat)) / h^2
> d2_right <- (f_right(theta_hat + 2*h) - 2*f_right(theta_hat + h) + f_right(theta_hat)) / h^2
>
> MAT_2nd <- matrix(c(d2_left, d2_right), nrow=2)
> dimnames(MAT_2nd) <- list(c("f''(theta-)", "f''(theta+)"), "value")
> MAT_2nd
              value
f''(theta-) -236.17271
f''(theta+)  -3.61818
>
> ##### AIC, BIC, Tests
> AIC(M)
[1] 7645.14
> BIC(M)
[1] 7674.244
> ks <- ks.test(x,"pWBurr",M$estimate[1],M$estimate[2],M$estimate[3],M$estimate[4],M$estimate[5]); ks
      Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  x
D = 0.014696, p-value = 0.6548
alternative hypothesis: two-sided

> ad <- ad.test(x,"pWBurr",M$estimate[1],M$estimate[2],M$estimate[3],M$estimate[4],M$estimate[5]); ad
      Anderson-Darling test of goodness-of-fit
      Null hypothesis: distribution 'pWBurr'
      Parameters assumed to be fixed

data:  x
An = 0.71479, p-value = 0.5466
>
> MAT3 <- matrix(c(AIC(M),BIC(M),round(ks$statistic,digits=4),round(ks$p.value,digits=4),round(ad$statistic,digits=4),round(ad$p.value,digits=4)),ncol=6,nrow=1)

```

```

> rownames(MAT3)=c("")
> colnames(MAT3)=c("AIC","    BIC","    K-S Statistic","    K-S P-value","    A
-D Statistic","    A-D P-value")
> MAT3
      AIC      BIC      K-S Statistic      K-S P-value      A-D Statistic      A-D P
-value
7645.14 7674.244      0.0147      0.6548      0.7148
0.5466
>
> ##### VaR
>
> p <- c(0.8,0.85,0.9,0.95,0.975,0.99,0.995)
> VaRWBurr=c()      # THEORITICAL VAR
> SVaR=c()      # EMPIRICAL VAR
> for (i in 1:length(p)) {
+   VaRWBurr[i] <- qWBurr(p[i], taf=M$estimate[1], sigma=M$estimate[2],
+   beta=M$estimate[3], a=M$estimate[4], s=M$estimate
[5])
+   SVaR[i]=quantile(x,p[i])
+ }
>
> MAT4 <- matrix(c(VaRWBurr,SVaR),ncol=7,byrow=T)
> rownames(MAT4)=c("THEORITICAL VAR", "EMPIRICAL VAR")
> colnames(MAT4)=c("80%","85%","90%","95%","97.5%","99%","99.5%")
> MAT4
      80%      85%      90%      95%      97.5%      99%      99
.5%
THEORITICAL VAR 3.130614 3.828242 5.078284 8.224630 13.31673 25.17819 40.76
446
EMPIRICAL VAR   3.141857 3.884263 5.080440 8.406298 14.39458 24.61378 32.43
126

```

Weibull-Paralogistic

```

> # Theory & Results: S.A. Abu Bakar, N.A. Hamzah, M. Maghsoudi, S. Nadaraj
ah (2015). Modelling loss data using composite models. Insurance: Mathemati
cs and Economics 61, 146-154
> # weibull - Paralogistic Composite Model
> # Body: truncated weibull on (0, theta]
> # Tail: truncated Paralogistic on (theta, inf)
> # The Paralogistic is Burr XII with shape1 = shape2 = a
> # Smoothness conditions at theta:
> # (1) Continuity:      f(theta-) = f(theta+) -> defines r
> # (2) 1st derivative: f'(theta-) = f'(theta+) -> derives theta from (
taf, sigma, a, lambda)
> # (3) 2nd derivative: f''(theta-) = f''(theta+) -> verified after fitt
ing
> # Free parameters estimated: taf (weibull shape), sigma (weibull scale),
> # a (Paralogistic shape), lambda (Paralogistic
scale)
>
> ##### Data
> library(SMPracticals)
> data(danish)

```

```

> x <- danish
> length(x) # 2492
[1] 2492
>
> library(e1071) # For function skewness, kurtosis
> MAT1 <- matrix(c(mean(x),sd(x),var(x),median(x),max(x)-min(x),max(x),min
(x),skewness(x),kurtosis(x)),nrow=9)
> dimnames(MAT1)=list(c("Mean","Std Dev","Variance","Median","Range","M
aximum","Minimum","Skewness","Kurtosis"),"Value")
> MAT1
      Value
Mean      3.062699
Std Dev   7.976703
Variance  63.627787
Median    1.633858
Range     262.936962
Maximum   263.250366
Minimum    0.313404
Skewness  19.884145
Kurtosis  546.132584
>
> ##### Paralogistic density, CDF and survival (Burr XII with gamma = a)
> dPL <- function(x, a, lambda) {
+   (a^2 / lambda) * (x / lambda)^(a - 1) / (1 + (x / lambda)^a)^(a + 1)
+ }
>
> pPL <- function(x, a, lambda) {
+   1 - (1 + (x / lambda)^a)^(-a)
+ }
>
> SPL <- function(x, a, lambda) {
+   (1 + (x / lambda)^a)^(-a)
+ }
>
> ##### Threshold theta derived from differentiability condition f'(theta-)
= f'(theta+)
> # Logarithmic derivatives must match at theta:
> # (taf-1)/theta - taf*(theta/sigma)^taf/theta = (a-1)/theta - a*(a+1)
*(theta/lambda)^a / [theta*(1+(theta/lambda)^a)]
> # Multiply both sides by theta:
> # (taf - a) - taf*(theta/sigma)^taf + a*(a+1)*(theta/lambda)^a / (1+(th
eta/lambda)^a) = 0
> theta_diff <- function(taf, sigma, a, lambda) {
+   eq <- function(theta) {
+     (taf - a) - taf * (theta / sigma)^taf +
+     a * (a + 1) * (theta / lambda)^a / (1 + (theta / lambda)^a)
+   }
+   tryCatch(uniroot(eq, lower = 0.001, upper = 1000)$root, error = functio
n(e) NA)
+ }
>
> ##### Parameter r (continuity condition at theta): hazard rate ratio
> library(truncdist) # For dtrunc, ptrunc
>
> R <- function(taf, sigma, a, lambda) {
+   theta <- theta_diff(taf, sigma, a, lambda)

```

```

+   if (is.na(theta) || theta <= 0) return(NA)
+   hw <- dweibull(theta, shape = taf, scale = sigma) / pweibull(theta, sh
ape = taf, scale = sigma)
+   hPL <- dPL(theta, a, lambda) / SPL(theta, a, lambda)
+   return(hPL / (hw + hPL))
+ }
>
> ##### Density f(x): dwPL
> dwPL <- function(x, taf, sigma, a, lambda) {
+   theta <- theta_diff(taf, sigma, a, lambda)
+   if (is.na(theta) || theta <= 0) return(rep(1e-300, length(x)))
+   r <- R(taf, sigma, a, lambda)
+   if (is.na(r) || r <= 0 || r >= 1) return(rep(1e-300, length(x)))
+   body <- r * dtrunc(x, spec = "weibull", a = 0, b = theta, shape = taf,
scale = sigma)
+   tail <- ifelse(x > theta,
+                 (1 - r) * dPL(x, a, lambda) / SPL(theta, a, lambda),
+                 0)
+   return(body + tail)
+ }
>
> ##### Graph of f(x)
> # Note: differentiability equation has a root only when taf > a
> t <- seq(0.01, 15, length.out = 1000)
> dwPL1 <- dwPL(t, taf=5, sigma=0.8, a=2, lambda=2)
> dwPL2 <- dwPL(t, taf=5, sigma=0.8, a=2, lambda=4)
> plot(t, dwPL1, type = "l", col = "blue", lwd = 3,
+      ylab = "f(t)", xlab = "t",
+      ylim = c(0, max(c(dwPL1, dwPL2), na.rm=TRUE) * 1.1),
+      xlim = c(0, 15),
+      main = "Density Function of w-Paralogistic Composite Model")
> lines(t, dwPL2, col = "red", lwd = 3, lty = 2)
> legend("topright", legend = c("taf=5, sigma=0.8, a=2, lambda=2",
+                               "taf=5, sigma=0.8, a=2, lambda=4"),
+       col = c("blue", "red"), lwd = 3, lty = c(1, 2))
> theta_ex <- theta_diff(5, 0.8, 2, 2)
> abline(v = theta_ex, lty = 2, col = "grey")
>
> ##### CDF F(x): pwPL
> pwPL <- function(x, taf, sigma, a, lambda) {
+   theta <- theta_diff(taf, sigma, a, lambda)
+   if (is.na(theta) || theta <= 0) return(rep(NA, length(x)))
+   r <- R(taf, sigma, a, lambda)
+   if (is.na(r) || r <= 0 || r >= 1) return(rep(NA, length(x)))
+   body <- r * ptrunc(x, spec = "weibull", a = 0, b = theta, shape = taf,
scale = sigma)
+   tail <- ifelse(x > theta,
+                 (1 - r) * (pPL(x, a, lambda) - pPL(theta, a, lambda)) /
+                 SPL(theta, a, lambda),
+                 0)
+   return(body + tail)
+ }
>
> ##### Inverse CDF: qwPL
> library(GoFKernel) # For inverse
> qwPL <- function(q, taf, sigma, a, lambda) {

```

```

+   d <- inverse(function(x) { pwPL(x, taf, sigma, a, lambda) }, lower = 0.
7)
+   return(d(q))
+ }
>
> ##### Maximum Likelihood Estimators
> library(berryFunctions)           # For function   is.error
> library(MASS)                     # For function   fitdistr
> library(goftest)                   # For ad.test
> FIT <- function(x) {
+   fd   <- function(i,j,k,l) fitdistr(x, dwPL, list(taf=i, sigma=j, a=k,
lambda=1), method="Nelder-Mead")
+   ll_at <- function(i,j,k,l) {
+     vals <- dwPL(x, i, j, k, l)
+     if (any(!is.finite(vals)) || any(vals <= 0)) return(-Inf)
+     sum(log(vals))
+   }
+   # taf must be > a for the differentiability equation to have a root
+   vec_a   <- seq(2, 20, 2)
+   vec_sig <- seq(0.5, 2.0, 0.25)
+   vec_bet <- seq(0.5, 2.0, 0.25)
+   vec_lam <- seq(0.5, 2.0, 0.25)
+   # Phase 1: scan full grid, keep top 5 starting points by log-likelihood
+   results <- list()
+   for (i in vec_a) {
+     for (j in vec_sig) {
+       for (k in vec_bet) {
+         for (l in vec_lam) {
+           if (i > k) {
+             ll <- ll_at(i, j, k, l)
+             if (is.finite(ll)) results <- c(results, list(list(ll=ll, s=c
(i,j,k,l))))
+           }
+         }
+       }
+     }
+   }
+   results <- results[order(sapply(results, `[[`, "ll"), decreasing=TRUE)
]
+   top5 <- results[seq_len(min(5, length(results)))]
+   fd_tight <- function(i,j,k,l) fitdistr(x, dwPL, list(taf=i, sigma=j, a=
k, lambda=1),
+                                           method="Nelder-Mead",
+                                           control=list(maxit=50000, reltol
=1e-12))
+   # Phase 2: run Nelder-Mead from each of the top 5 starting points, keep
best
+   best_ll <- -Inf
+   fitWPL <- NULL
+   for (s in top5) {
+     fit_try <- try(fd(s$s[1], s$s[2], s$s[3], s$s[4]), silent=TRUE)
+     if (!inherits(fit_try, "try-error")) {
+       ll_conv <- logLik(fit_try)
+       if (ll_conv > best_ll) { best_ll <- ll_conv; fitWPL <- fit_try }
+     }
+   }
+ }

```

```

+ # Fallback: if all top5 failed, try a broader set of fixed starting poi
nts
+ if (is.null(fitWPL)) {
+   fallback <- list(c(10,1,1,1), c(6,0.5,0.5,0.5), c(14,1,1,2),
+                   c(4,1,0.5,1), c(18,0.5,1,0.5))
+   for (s in fallback) {
+     fit_try <- try(fd(s[1],s[2],s[3],s[4]), silent=TRUE)
+     if (!inherits(fit_try, "try-error")) {
+       ll_conv <- logLik(fit_try)
+       if (ll_conv > best_ll) { best_ll <- ll_conv; fitWPL <- fit_try }
+     }
+   }
+ }
+ # Phase 3: polish - re-run from converged estimates with tighter tolera
nce
+ if (!is.null(fitWPL)) {
+   e <- fitWPL$estimate
+   for (rep in 1:3) {
+     polish <- try(fd_tight(e[1], e[2], e[3], e[4]), silent=TRUE)
+     if (!inherits(polish, "try-error") && logLik(polish) >= logLik(fitw
PL)) {
+       fitWPL <- polish
+       e <- fitWPL$estimate
+     }
+   }
+ }
+ return(fitWPL)
+ }
> M <- FIT(x); M
      taf      sigma      a      lambda
15.51144681  0.96547444  1.26663291  0.62238109
( 1.31714655) ( 0.01289834) ( 0.02728865) ( 0.10260496)
> names(M)
[1] "estimate" "sd"      "vcov"      "loglik"    "n"
> MAT2 <- matrix(c(M$estimate[[1]],M$estimate[[2]],M$estimate[[3]],M$estima
te[[4]]),nrow=4)
> dimnames(MAT2) <- list(c("taf","sigma","a","lambda"),"MLE")
> MAT2
      MLE
taf    15.5114468
sigma  0.9654744
a       1.2666329
lambda 0.6223811
>
> ##### Derived theta from 1st differentiability condition
> theta_hat <- theta_diff(M$estimate[1], M$estimate[2], M$estimate[3], M$es
timate[4])
> cat("Derived theta =", theta_hat, "\n")
Derived theta = 0.9676845
>
> ##### Verify 2nd derivative condition f''(theta-) = f''(theta+) at MLE est
imates
> # Uses numerical second derivatives from each side of theta
> taf_h    <- M$estimate[1]; sigma_h <- M$estimate[2]
> a_h      <- M$estimate[3]; lambda_h <- M$estimate[4]
> r_h      <- R(taf_h, sigma_h, a_h, lambda_h)

```

```

>
> f_left <- function(z) r_h * dtrunc(z, spec="weibull", a=0, b=theta_hat,
shape=taf_h, scale=sigma_h)
> f_right <- function(z) (1 - r_h) * dPL(z, a_h, lambda_h) / SPL(theta_hat,
a_h, lambda_h)
>
> h <- 1e-5
> d2_left <- (f_left(theta_hat - 2*h) - 2*f_left(theta_hat - h) + f_left
(theta_hat)) / h^2
> d2_right <- (f_right(theta_hat + 2*h) - 2*f_right(theta_hat + h) + f_righ
t(theta_hat)) / h^2
>
> MAT_2nd <- matrix(c(d2_left, d2_right), nrow=2)
> dimnames(MAT_2nd) <- list(c("f' '(theta-)", "f' '(theta+)", "value")
> MAT_2nd
              value
f' '(theta-) -247.690671
f' '(theta+)   3.182796
>
> ##### AIC, BIC, Tests
> AIC(M)
[1] 7652.882
> BIC(M)
[1] 7676.165
> ks <- ks.test(x,"pwPL",M$estimate[1],M$estimate[2],M$estimate[3],M$estima
te[4]); ks
      Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  x
D = 0.022757, p-value = 0.1513
alternative hypothesis: two-sided

> ad <- ad.test(x,"pwPL",M$estimate[1],M$estimate[2],M$estimate[3],M$estima
te[4]); ad
      Anderson-Darling test of goodness-of-fit
      Null hypothesis: distribution 'pwPL'
      Parameters assumed to be fixed

data:  x
An = 1.6266, p-value = 0.1489

>
> MAT3 <- matrix(c(AIC(M),BIC(M),round(ks$statistic,digits=4),round(ks$p.va
lue,digits=4),round(ad$statistic,digits=4),round(ad$p.value,digits=4)),ncol
=6,nrow=1)
> rownames(MAT3)=c("")
> colnames(MAT3)=c("AIC","    BIC","    K-S Statistic","    K-S P-value","    A
-D Statistic","    A-D P-value")
> MAT3
      AIC      BIC    K-S Statistic    K-S P-value    A-D Statistic    A-D
P-value
7652.882 7676.165          0.0228          0.1513          1.6266
0.1489
>
> ##### VaR

```

```

>
> p <- c(0.8,0.85,0.9,0.95,0.975,0.99,0.995)
> VaRWPL=c()      # THEORITICAL VAR
> SVaR=c()        # EMPIRICAL VAR
> for (i in 1:length(p)) {
+   VaRWPL[i] <- qWPL(p[i], taf=M$estimate[1], sigma=M$estimate[2],
+   a=M$estimate[3], lambda=M$estimate[4])
+   SVaR[i]=quantile(x,p[i])
+ }
>
> MAT4 <- matrix(c(VaRWPL,SVaR),ncol=7,byrow=T)
> rownames(MAT4)=c("THEORITICAL VAR", "EMPIRICAL VAR")
> colnames(MAT4)=c("80%", "85%", "90%", "95%", "97.5%", "99%", "99.5%")
> MAT4

```

	80%	85%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%
THEORITICAL VAR	3.209312	3.916529	5.148485	8.111762	12.65593	22.60464	34.94246
EMPIRICAL VAR	3.141857	3.884263	5.080440	8.406298	14.39458	24.61378	32.43126

Weibull-Loglogistic

```

> # Theory & Results: S.A. Abu Bakar, N.A. Hamzah, M. Maghsoudi, S. Nadarajah (2015). Modelling loss data using composite models. Insurance: Mathematics and Economics 61, 146-154
> # weibull - Log-Logistic Composite Model
> # Body: truncated weibull on (0, theta]
> # Tail: truncated Log-Logistic on (theta, inf)
> # Smoothness conditions at theta:
> # (1) Continuity: f(theta-) = f(theta+) -> defines r
> # (2) 1st derivative: f'(theta-) = f'(theta+) -> derives theta from (taf, sigma, beta, lambda)
> # (3) 2nd derivative: f''(theta-) = f''(theta+) -> verified after fitting
> # Free parameters estimated: taf (weibull shape), sigma (weibull scale), beta (Log-Logistic shape), lambda (Log-Logistic scale)
>
> #### Data
> library(SMPracticals)
> data(danish)
> x <- danish
> length(x)      # 2492
[1] 2492
>
> library(e1071)      # For function skewness, kurtosis
> MAT1 <- matrix(c(mean(x),sd(x),var(x),median(x),max(x)-min(x),max(x),min(x),skewness(x),kurtosis(x)),nrow=9)
> dimnames(MAT1)=list(c("Mean","Std Dev","Variance","Median","Range","Maximum","Minimum","Skewness","Kurtosis"),"Value")
> MAT1

```

	Value
Mean	3.062699

```

Std Dev      7.976703
Variance     63.627787
Median       1.633858
Range        262.936962
Maximum      263.250366
Minimum      0.313404
Skewness     19.884145
Kurtosis     546.132584
>
> ##### Log-Logistic density and CDF
> dLL <- function(x, beta, lambda) {
+   (beta / lambda) * (x / lambda)^(beta - 1) / (1 + (x / lambda)^beta)^2
+ }
>
> pLL <- function(x, beta, lambda) {
+   (x / lambda)^beta / (1 + (x / lambda)^beta)
+ }
>
> ##### Threshold theta derived from differentiability condition f'(theta-)
= f'(theta+)
> # Logarithmic derivatives must match at theta:
> #   (taf-1)/theta - taf*(theta/sigma)^taf/theta = (beta-1)/theta - 2*be
ta*(theta/lambda)^beta / [theta*(1+(theta/lambda)^beta)]
> # Multiply both sides by theta:
> #   (taf - beta) - taf*(theta/sigma)^taf + 2*beta*(theta/lambda)^beta / (
1+(theta/lambda)^beta) = 0
> theta_diff <- function(taf, sigma, beta, lambda) {
+   eq <- function(theta) {
+     (taf - beta) - taf * (theta / sigma)^taf +
+     2 * beta * (theta / lambda)^beta / (1 + (theta / lambda)^beta)
+   }
+   tryCatch(uniroot(eq, lower = 0.001, upper = 1000)$root, error = functio
n(e) NA)
+ }
>
> ##### Parameter r (continuity condition at theta): hazard rate ratio
> library(truncdist)      # For dtrunc, ptrunc
>
> R <- function(taf, sigma, beta, lambda) {
+   theta <- theta_diff(taf, sigma, beta, lambda)
+   if (is.na(theta) || theta <= 0) return(NA)
+   hw <- dweibull(theta, shape = taf, scale = sigma) / pweibull(theta, sh
ape = taf, scale = sigma)
+   hLL <- dLL(theta, beta, lambda) / (1 - pLL(theta, beta, lambda))
+   return(hLL / (hw + hLL))
+ }
>
> ##### Density f(x): dwLL
> dwLL <- function(x, taf, sigma, beta, lambda) {
+   theta <- theta_diff(taf, sigma, beta, lambda)
+   if (is.na(theta) || theta <= 0) return(rep(1e-300, length(x)))
+   r <- R(taf, sigma, beta, lambda)
+   if (is.na(r) || r <= 0 || r >= 1) return(rep(1e-300, length(x)))
+   body <- r * dtrunc(x, spec = "weibull", a = 0, b = theta, shape = taf,
scale = sigma)
+   tail <- ifelse(x > theta,

```

```

+           (1 - r) * dLL(x, beta, lambda) / (1 - pLL(theta, beta,
lambda)),
+           0)
+   return(body + tail)
+ }
>
> ##### Graph of f(x)
> # Note: differentiability equation has a root only when taf > beta
> t <- seq(0.01, 15, length.out = 1000)
> dWLL1 <- dWLL(t, taf=5, sigma=0.8, beta=2, lambda=2)
> dWLL2 <- dWLL(t, taf=5, sigma=0.8, beta=2, lambda=4)
> plot(t, dWLL1, type = "l", col = "blue", lwd = 3,
+       ylab = "f(t)", xlab = "t",
+       ylim = c(0, max(c(dWLL1, dWLL2), na.rm=TRUE) * 1.1),
+       xlim = c(0, 15),
+       main = "Density Function of W-LL Composite Model")
> lines(t, dWLL2, col = "red", lwd = 3, lty = 2)
> legend("topright", legend = c("taf=5, sigma=0.8, beta=2, lambda=2",
+                               "taf=5, sigma=0.8, beta=2, lambda=4"),
+       col = c("blue", "red"), lwd = 3, lty = c(1, 2))
> theta_ex <- theta_diff(5, 0.8, 2, 2)
> abline(v = theta_ex, lty = 2, col = "grey")
>
> ##### CDF F(x): pWLL
> pWLL <- function(x, taf, sigma, beta, lambda) {
+   theta <- theta_diff(taf, sigma, beta, lambda)
+   if (is.na(theta) || theta <= 0) return(rep(NA, length(x)))
+   r <- R(taf, sigma, beta, lambda)
+   if (is.na(r) || r <= 0 || r >= 1) return(rep(NA, length(x)))
+   body <- r * ptrunc(x, spec = "weibull", a = 0, b = theta, shape = taf,
scale = sigma)
+   tail <- ifelse(x > theta,
+                 (1 - r) * (pLL(x, beta, lambda) - pLL(theta, beta, lambda)) /
+                 (1 - pLL(theta, beta, lambda)),
+                 0)
+   return(body + tail)
+ }
>
> ##### Inverse CDF: qWLL
> library(GoFKernel) # For inverse
> qWLL <- function(q, taf, sigma, beta, lambda) {
+   d <- inverse(function(x) { pWLL(x, taf, sigma, beta, lambda) }, lower =
0.7)
+   return(d(q))
+ }
>
> ##### Maximum Likelihood Estimators
> library(berryFunctions) # For function is.error
> library(MASS) # For function fitdistr
> library(goftest) # For ad.test
> FIT <- function(x) {
+   fd <- function(i,j,k,l) fitdistr(x, dWLL, list(taf=i, sigma=j, beta=k,
lambda=l), method="Nelder-Mead")
+   # taf must be > beta for the differentiability equation to have a root
+   vec_a <- seq(2, 20, 2)

```

```

+   vec_rest <- seq(0.5, 2, 0.5)
+   found <- FALSE
+   for (i in vec_a) {
+     for (j in vec_rest) {
+       for (k in vec_rest) {
+         for (l in vec_rest) {
+           if(i > k && is.error(try(fd(i,j,k,l), silent=T))==FALSE) {
+             fitWLL <- fd(i,j,k,l)
+             mystart <- c(i,j,k,l)
+             found <- TRUE
+             break }
+           }
+         if(found) break
+       }
+     if(found) break
+   }
+   if(found) break
+ }
+ return(fitWLL)
+ }
> M <- FIT(x); M
      taf      sigma      beta      lambda
15.80852177  0.96080481  1.57179569  0.68777406
( 1.78812685) ( 0.01823677) ( 0.05831373) ( 0.09394245)
> names(M)
[1] "estimate" "sd"      "vcov"      "loglik"    "n"
> MAT2 <- matrix(c(M$estimate[[1]],M$estimate[[2]],M$estimate[[3]],M$estimate[[4]]),nrow=4)
> dimnames(MAT2) <- list(c("taf","sigma","beta","lambda"),"MLE")
> MAT2
      MLE
taf    15.8085218
sigma  0.9608048
beta   1.5717957
lambda 0.6877741
>
> ##### Derived theta from 1st differentiability condition
> theta_hat <- theta_diff(M$estimate[1], M$estimate[2], M$estimate[3], M$estimate[4])
> cat("Derived theta =", theta_hat, "\n")
Derived theta = 0.9623497
>
> ##### Verify 2nd derivative condition f''(theta-) = f''(theta+) at MLE estimates
> # Uses numerical second derivatives from each side of theta
> taf_h <- M$estimate[1]; sigma_h <- M$estimate[2]
> beta_h <- M$estimate[3]; lambda_h <- M$estimate[4]
> r_h <- R(taf_h, sigma_h, beta_h, lambda_h)
>
> f_left <- function(z) r_h * dtrunc(z, spec="weibull", a=0, b=theta_hat,
shape=taf_h, scale=sigma_h)
> f_right <- function(z) (1 - r_h) * dLL(z, beta_h, lambda_h) / (1 - pLL(theta_hat, beta_h, lambda_h))
>
> h <- 1e-5

```

```

> d2_left <- (f_left(theta_hat - 2*h) - 2*f_left(theta_hat - h) + f_left
(theta_hat)) / h^2
> d2_right <- (f_right(theta_hat + 2*h) - 2*f_right(theta_hat + h) + f_righ
t(theta_hat)) / h^2
>
> MAT_2nd <- matrix(c(d2_left, d2_right), nrow=2)
> dimnames(MAT_2nd) <- list(c("f' '(theta-)", "f' '(theta+)"), "value")
> MAT_2nd
              value
f' '(theta-) -252.983586
f' '(theta+)   2.228621
>
> #### AIC, BIC, Tests
> AIC(M)
[1] 7650.469
> BIC(M)
[1] 7673.753
> ks <- ks.test(x,"pWLL",M$estimate[1],M$estimate[2],M$estimate[3],M$estima
te[4]); ks

```

Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test

```

data: x
D = 0.021507, p-value = 0.1993
alternative hypothesis: two-sided

```

```

> ad <- ad.test(x,"pWLL",M$estimate[1],M$estimate[2],M$estimate[3],M$estima
te[4]); ad

```

Anderson-Darling test of goodness-of-fit
Null hypothesis: distribution 'pWLL'
Parameters assumed to be fixed

```

data: x
An = 1.3643, p-value = 0.2125

```

```

>
> MAT3 <- matrix(c(AIC(M),BIC(M),round(ks$statistic,digits=4),round(ks$p.va
lue,digits=4),round(ad$statistic,digits=4),round(ad$p.value,digits=4)),ncol
=6,nrow=1)
> rownames(MAT3)=c("")
> colnames(MAT3)=c("AIC","    BIC","    K-S Statistic","    K-S P-value","  A
-D Statistic","    A-D P-value")
> MAT3
      AIC      BIC    K-S Statistic    K-S P-value    A-D Statistic    A-D
P-value
7650.469 7673.753          0.0215          0.1993          1.3643
0.2125
>
> #### VaR
>
> p <- c(0.8,0.85,0.9,0.95,0.975,0.99,0.995)
> VaRWLL=c()      # THEORITICAL VAR
> SVaR=c()        # EMPIRICAL VAR
> for (i in 1:length(p)) {
+   VaRWLL[i] <- qWLL(p[i], taf=M$estimate[1], sigma=M$estimate[2],

```

```

+           beta=M$estimate[3], lambda=M$estimate[4])
+   SVAR[i]=quantile(x,p[i])
+ }
>
> MAT4 <- matrix(c(VarWLL,SVAR),ncol=7,byrow=T)
> rownames(MAT4)=c("THEORITICAL VAR", "EMPIRICAL VAR")
> colnames(MAT4)=c("80%", "85%", "90%", "95%", "97.5%", "99%", "99.5%")
> MAT4
              80%      85%      90%      95%      97.5%      99%      99
.5%
THEORITICAL VAR 3.189977 3.885090 5.098305 8.031768 12.56660 22.60012 35.17
230
EMPIRICAL VAR   3.141857 3.884263 5.080440 8.406298 14.39458 24.61378 32.43
126

```

Weibull-Inverse Paralogistic

```

> # weibull - Inverse Paralogistic Composite Model
> # Body: truncated weibull on (0, theta]
> # Tail: truncated Inverse Paralogistic on (theta, inf)
> # The Inverse Paralogistic is Inverse Burr (Burr III) with shape1 = shape
2 = a
> # Smoothness conditions at theta:
> #   (1) Continuity:      f(theta-) = f(theta+) -> defines r
> #   (2) 1st derivative: f'(theta-) = f'(theta+) -> derives theta from (
taf, sigma, a, lambda)
> #   (3) 2nd derivative: f''(theta-) = f''(theta+) -> verified after fitt
ing
> # Free parameters estimated: taf (weibull shape), sigma (weibull scale),
> #                           a (Inverse Paralogistic shape), lambda (Inve
rse Paralogistic scale)
>
> ##### Data
> library(SMPracticals)

```

Loading required package: ellipse

Attaching package: 'ellipse'

The following object is masked from 'package:graphics':

pairs

```

> data(danish)
> x <- danish
> length(x)           # 2492
[1] 2492
>
> library(e1071)       # For function skewness, kurtosis
> MAT1 <- matrix(c(mean(x),sd(x),var(x),median(x),max(x)-min(x),max(x),min
(x),skewness(x),kurtosis(x)),nrow=9)

```

```

> dimnames(MAT1)=list(c("Mean","Std Dev","Variance","Median","Range","Maximum",
"Minimum","Skewness","Kurtosis"),"Value")
> MAT1
      Value
Mean      3.062699
Std Dev   7.976703
Variance  63.627787
Median    1.633858
Range     262.936962
Maximum   263.250366
Minimum    0.313404
Skewness  19.884145
Kurtosis  546.132584
>
> ##### Inverse Paralogistic density, CDF and survival (Inverse Burr III with
h delta = a)
> # CDF:  $F(x) = (1 + (\lambda/x)^a)^{-a}$ 
> # PDF:  $f(x) = a^2 * (\lambda/x)^a / [x * (1 + (\lambda/x)^a)^{(a+1)}]$ 
> # Surv:  $S(x) = 1 - (1 + (\lambda/x)^a)^{-a}$ 
> dIPL <- function(x, a, lambda) {
+   u <- (lambda / x)^a
+   a^2 * u / (x * (1 + u)^(a + 1))
+ }
>
> pIPL <- function(x, a, lambda) {
+   (1 + (lambda / x)^a)^(-a)
+ }
>
> sIPL <- function(x, a, lambda) {
+   1 - (1 + (lambda / x)^a)^(-a)
+ }
>
> ##### Threshold theta derived from differentiability condition  $f'(\theta^-) = f'(\theta^+)$ 
> # Logarithmic derivatives must match at theta:
> #  $(\text{taf}-1)/\theta - \text{taf} * (\theta/\sigma)^{\text{taf}}/\theta = - (a+1)/\theta + a * (a+1) * (\lambda/\theta)^a / [\theta * (1 + (\lambda/\theta)^a)]$ 
> # Multiply both sides by theta:
> #  $(\text{taf}-1) - \text{taf} * (\theta/\sigma)^{\text{taf}} = - (a+1) + a * (a+1) * (\lambda/\theta)^a / (1 + (\lambda/\theta)^a)$ 
> # Rearranging:
> #  $(\text{taf} + a) - \text{taf} * (\theta/\sigma)^{\text{taf}} - a * (a+1) * (\lambda/\theta)^a / (1 + (\lambda/\theta)^a) = 0$ 
> # A root exists when  $\text{taf} > a^2$  (condition analogous to  $\text{taf} > \beta$  in the Paralogistic case)
> theta_diff <- function(taf, sigma, a, lambda) {
+   eq <- function(theta) {
+     u <- (lambda / theta)^a
+     (taf + a) - taf * (theta / sigma)^taf -
+     a * (a + 1) * u / (1 + u)
+   }
+   tryCatch(uniroot(eq, lower = 0.001, upper = 1000)$root, error = function(e) NA)
+ }
>

```

```
> ##### Parameter r (continuity condition at theta): hazard rate ratio
> library(truncdist)      # For dtrunc, ptrunc
```

Loading required package: stats4

Loading required package: evd

Attaching package: 'evd'

The following object is masked from 'package:SMPracticals':

venice

```
>
> R <- function(taf, sigma, a, lambda) {
+   theta <- theta_diff(taf, sigma, a, lambda)
+   if (is.na(theta) || theta <= 0) return(NA)
+   hw <- dweibull(theta, shape = taf, scale = sigma) / pweibull(theta, s
hape = taf, scale = sigma)
+   hIPL <- dIPL(theta, a, lambda) / sIPL(theta, a, lambda)
+   return(hIPL / (hw + hIPL))
+ }
>
> ##### Density f(x): dWIPL
> dWIPL <- function(x, taf, sigma, a, lambda) {
+   theta <- theta_diff(taf, sigma, a, lambda)
+   if (is.na(theta) || theta <= 0) return(rep(1e-300, length(x)))
+   r <- R(taf, sigma, a, lambda)
+   if (is.na(r) || r <= 0 || r >= 1) return(rep(1e-300, length(x)))
+   body <- r * dtrunc(x, spec = "weibull", a = 0, b = theta, shape = taf,
scale = sigma)
+   tail <- ifelse(x > theta,
+                 (1 - r) * dIPL(x, a, lambda) / sIPL(theta, a, lambda),
+                 0)
+   return(body + tail)
+ }
>
> ##### Graph of f(x)
> # Note: differentiability equation has a root only when taf > a^2
> t <- seq(0.01, 15, length.out = 1000)
> dWIPL1 <- dWIPL(t, taf=5, sigma=0.8, a=2, lambda=2)
> dWIPL2 <- dWIPL(t, taf=5, sigma=0.8, a=2, lambda=4)
> plot(t, dWIPL1, type = "l", col = "blue", lwd = 3,
+      ylab = "f(t)", xlab = "t",
+      ylim = c(0, max(c(dWIPL1, dWIPL2), na.rm=TRUE) * 1.1),
+      xlim = c(0, 15),
+      main = "Density Function of W-Inverse Paralogistic Composite Model")
> lines(t, dWIPL2, col = "red", lwd = 3, lty = 2)
> legend("topright", legend = c("taf=5, sigma=0.8, a=2, lambda=2",
+                               "taf=5, sigma=0.8, a=2, lambda=4"),
+       col = c("blue", "red"), lwd = 3, lty = c(1, 2))
> theta_ex <- theta_diff(5, 0.8, 2, 2)
> abline(v = theta_ex, lty = 2, col = "grey")
>
> ##### CDF F(x): pWIPL
```

```

> pWIPL <- function(x, taf, sigma, a, lambda) {
+   theta <- theta_diff(taf, sigma, a, lambda)
+   if (is.na(theta) || theta <= 0) return(rep(NA, length(x)))
+   r <- R(taf, sigma, a, lambda)
+   if (is.na(r) || r <= 0 || r >= 1) return(rep(NA, length(x)))
+   body <- r * ptrunc(x, spec = "weibull", a = 0, b = theta, shape = taf,
scale = sigma)
+   tail <- ifelse(x > theta,
+                 (1 - r) * (pIPL(x, a, lambda) - pIPL(theta, a, lambda))
+                 /
+                 SIPL(theta, a, lambda),
+                 0)
+   return(body + tail)
+ }
>
> ##### Inverse CDF: qWIPL
> library(GoFKernel) # For inverse
Loading required package: KernSmooth
KernSmooth 2.23 loaded
Copyright M. P. Wand 1997-2009
> qWIPL <- function(q, taf, sigma, a, lambda) {
+   d <- inverse(function(x) { pWIPL(x, taf, sigma, a, lambda) }, lower = 0
.7)
+   return(d(q))
+ }
>
> ##### Maximum Likelihood Estimators
> library(berryFunctions) # For function is.error
> library(MASS) # For function fitdistr

```

Attaching package: 'MASS'

The following objects are masked from 'package:SMPracticals':

cement, forbes, leuk, shuttle

```

> library(goftest) # For ad.test
> FIT <- function(x) {
+   fd <- function(i,j,k,l) fitdistr(x, dWIPL, list(taf=i, sigma=j, a=k,
lambda=l), method="Nelder-Mead")
+   ll_at <- function(i,j,k,l) {
+     vals <- dWIPL(x, i, j, k, l)
+     if (any(!is.finite(vals)) || any(vals <= 0)) return(-Inf)
+     sum(log(vals))
+   }
+   # taf must be > a^2 for the differentiability equation to have a root
+   vec_a <- seq(2, 20, 2)
+   vec_sig <- seq(0.5, 2.0, 0.25)
+   vec_gam <- seq(0.5, 2.0, 0.25)
+   vec_lam <- seq(0.5, 2.0, 0.25)
+   # Phase 1: scan full grid, keep top 5 starting points by log-likelihood
+   results <- list()

```

```

+   for (i in vec_a) {
+     for (j in vec_sig) {
+       for (k in vec_gam) {
+         for (l in vec_lam) {
+           if (i > k^2) {
+             ll <- ll_at(i, j, k, l)
+             if (is.finite(ll)) results <- c(results, list(list(ll=ll, s=c
(i,j,k,l))))
+           }
+         }
+       }
+     }
+   }
+   results <- results[order(sapply(results, `[`, "ll"), decreasing=TRUE)
]
+   top5 <- results[seq_len(min(5, length(results)))]
+   fd_tight <- function(i,j,k,l) fitdistr(x, dWIPL, list(taf=i, sigma=j, a
=k, lambda=l),
+                                           method="Nelder-Mead",
+                                           control=list(maxit=50000, reltol
=1e-12))
+   # Phase 2: run Nelder-Mead from each of the top 5 starting points, keep
best
+   best_ll <- -Inf
+   fitWIPL <- NULL
+   for (s in top5) {
+     fit_try <- try(fd(s$s[1], s$s[2], s$s[3], s$s[4]), silent=TRUE)
+     if (!inherits(fit_try, "try-error")) {
+       ll_conv <- logLik(fit_try)
+       if (ll_conv > best_ll) { best_ll <- ll_conv; fitWIPL <- fit_try }
+     }
+   }
+   # Fallback: if all top5 failed, try a broader set of fixed starting poi
nts
+   if (is.null(fitWIPL)) {
+     fallback <- list(c(10,1,1,1), c(6,0.5,0.5,0.5), c(14,1,1,2),
+                     c(4,1,0.5,1), c(18,0.5,1,0.5))
+     for (s in fallback) {
+       fit_try <- try(fd(s[1],s[2],s[3],s[4]), silent=TRUE)
+       if (!inherits(fit_try, "try-error")) {
+         ll_conv <- logLik(fit_try)
+         if (ll_conv > best_ll) { best_ll <- ll_conv; fitWIPL <- fit_try }
+       }
+     }
+   }
+   # Phase 3: polish - re-run from converged estimates with tighter tolera
nce
+   if (!is.null(fitWIPL)) {
+     e <- fitWIPL$estimate
+     for (rep in 1:3) {
+       polish <- try(fd_tight(e[1], e[2], e[3], e[4]), silent=TRUE)
+       if (!inherits(polish, "try-error") && logLik(polish) >= logLik(fitw
IPL)) {
+         fitWIPL <- polish
+         e <- fitWIPL$estimate
+       }
+     }
  
```

```

+   }
+ }
+ return(fitWIPL)
+ }
> M <- FIT(x); M
      taf      sigma      a      lambda
15.80552098  0.95999075  1.56746508  0.56274215
( 1.72110668) ( 0.01756255) ( 0.05645502) ( 0.06732505)
> names(M)
[1] "estimate" "sd"      "vcov"      "loglik"    "n"
> MAT2 <- matrix(c(M$estimate[[1]],M$estimate[[2]],M$estimate[[3]],M$estimate[[4]]),nrow=4)
> dimnames(MAT2) <- list(c("taf","sigma","a","lambda"),"MLE")
> MAT2
      MLE
taf    15.8055210
sigma  0.9599907
a       1.5674651
lambda 0.5627422
>
> ##### Derived theta from 1st differentiability condition
> theta_hat <- theta_diff(M$estimate[1], M$estimate[2], M$estimate[3], M$estimate[4])
> cat("Derived theta =", theta_hat, "\n")
Derived theta = 0.9613428
>
> ##### Verify 2nd derivative condition f''(theta-) = f''(theta+) at MLE estimates
> # Uses numerical second derivatives from each side of theta
> taf_h <- M$estimate[1]; sigma_h <- M$estimate[2]
> a_h <- M$estimate[3]; lambda_h <- M$estimate[4]
> r_h <- R(taf_h, sigma_h, a_h, lambda_h)
>
> f_left <- function(z) r_h * dtrunc(z, spec="weibull", a=0, b=theta_hat,
shape=taf_h, scale=sigma_h)
> f_right <- function(z) (1 - r_h) * dIPL(z, a_h, lambda_h) / sIPL(theta_hat, a_h, lambda_h)
>
> h <- 1e-5
> d2_left <- (f_left(theta_hat - 2*h) - 2*f_left(theta_hat - h) + f_left(theta_hat)) / h^2
> d2_right <- (f_right(theta_hat + 2*h) - 2*f_right(theta_hat + h) + f_right(theta_hat)) / h^2
>
> MAT_2nd <- matrix(c(d2_left, d2_right), nrow=2)
> dimnames(MAT_2nd) <- list(c("f''(theta-)", "f''(theta+)"), "value")
> MAT_2nd
      value
f''(theta-) -251.313175
f''(theta+)  1.849726
>
> ##### AIC, BIC, Tests
> AIC(M)
[1] 7649.869
> BIC(M)
[1] 7673.153

```

```
> ks <- ks.test(x,"pWIPL",M$estimate[1],M$estimate[2],M$estimate[3],M$estimate[4]); ks
```

```
data: x
D = 0.021255, p-value = 0.2102
alternative hypothesis: two-sided
```

```
> ad <- ad.test(x,"pWIPL",M$estimate[1],M$estimate[2],M$estimate[3],M$estimate[4]); ad
```

```
Anderson-Darling test of goodness-of-fit
Null hypothesis: distribution 'pWIPL'
Parameters assumed to be fixed
```

```
data: x
An = 1.3181, p-value = 0.2266
```

```
>
> MAT3 <- matrix(c(AIC(M),BIC(M),round(ks$statistic,digits=4),round(ks$p.value,digits=4),round(ad$statistic,digits=4),round(ad$p.value,digits=4)),ncol=6,nrow=1)
> rownames(MAT3)=c("")
> colnames(MAT3)=c("AIC","BIC","K-S Statistic","K-S P-value","A-D Statistic","A-D P-value")
> MAT3
```

	AIC	BIC	K-S Statistic	K-S P-value	A-D Statistic	A-D P-value
	7649.869	7673.153	0.0213	0.2102	1.3181	0.2266

```
>
> #### VaR
```

```
>
> p <- c(0.8,0.85,0.9,0.95,0.975,0.99,0.995)
> VaRWIPL=c() # THEORITICAL VAR
> SVaR=c() # EMPIRICAL VAR
> for (i in 1:length(p)) {
+ VaRWIPL[i] <- qWIPL(p[i], taf=M$estimate[1], sigma=M$estimate[2],
+ a=M$estimate[3], lambda=M$estimate[4])
+ SVaR[i]=quantile(x,p[i])
+ }
```

```
>
> MAT4 <- matrix(c(VaRWIPL,SVaR),ncol=7,byrow=T)
> rownames(MAT4)=c("THEORITICAL VAR", "EMPIRICAL VAR")
> colnames(MAT4)=c("80%", "85%", "90%", "95%", "97.5%", "99%", "99.5%")
> MAT4
```

	80%	85%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%
THEORITICAL VAR	3.186005	3.879954	5.092144	8.026919	12.57041	22.63916	35.27380
EMPIRICAL VAR	3.141857	3.884263	5.080440	8.406298	14.39458	24.61378	32.43126

Weibull-Inverse Weibull

```
> # Theory: S.A. Abu Bakar, N.A. Hamzah, M. Maghsoudi, S. Nadarajah (2015)
. Modelling loss data using composite models. Insurance: Mathematics and Economics 61, 146-154
> # Results: S.C. Shongwe & W.A. Marambakuyana (2024). Danish fire insurance data: a review and additional analysis. ITM Web of Conferences 67,01011 (2024)
> # weibull - Inverse weibull Composite Model
> # Body: truncated weibull on (0, theta]
> # Tail: truncated Inverse weibull (Frechet) on (theta, inf)
> # Smoothness conditions at theta:
> # (1) Continuity: f(theta-) = f(theta+) -> defines r
> # (2) 1st derivative: f'(theta-) = f'(theta+) -> derives theta from (taf, sigma, a, lambda)
> # (3) 2nd derivative: f''(theta-) = f''(theta+) -> verified after fitting
> # Free parameters estimated: taf (weibull shape), sigma (weibull scale),
> # a (Inverse weibull shape), lambda (Inverse weibull scale)
>
> ##### Data
> library(SMPracticals)
> data(danish)
> x <- danish
> length(x) # 2492
[1] 2492
>
> library(e1071) # For function skewness, kurtosis
> MAT1 <- matrix(c(mean(x),sd(x),var(x),median(x),max(x)-min(x),max(x),min(x),skewness(x),kurtosis(x)),nrow=9)
> dimnames(MAT1)=list(c("Mean","Std Dev","Variance","Median","Range","Maximum","Minimum","Skewness","Kurtosis"),"Value")
> MAT1
      Value
Mean      3.062699
Std Dev   7.976703
Variance  63.627787
Median    1.633858
Range     262.936962
Maximum   263.250366
Minimum    0.313404
Skewness  19.884145
Kurtosis  546.132584
>
> ##### Inverse weibull (Frechet) density, CDF and survival
> # CDF:  $F(x) = \exp(-(\lambda/x)^a)$ 
> # PDF:  $f(x) = (a/x) * (\lambda/x)^a * \exp(-(\lambda/x)^a)$ 
> # Surv:  $S(x) = 1 - \exp(-(\lambda/x)^a)$ 
> dIW <- function(x, a, lambda) {
+   u <- (lambda / x)^a
+   (a / x) * u * exp(-u)
+ }
>
> pIW <- function(x, a, lambda) {
+   exp(-(\lambda / x)^a)
+ }
```

```

+ }
>
> siw <- function(x, a, lambda) {
+   1 - exp(-(lambda / x)^a)
+ }
>
> ##### Threshold theta derived from differentiability condition f'(theta-)
= f'(theta+)
> # Logarithmic derivatives must match at theta:
> #   (taf-1)/theta - taf*(theta/sigma)^taf/theta = -(a+1)/theta + a*(lam
bda/theta)^a/theta
> # Multiply both sides by theta:
> #   (taf-1) - taf*(theta/sigma)^taf = -(a+1) + a*(lambda/theta)^a
> # Rearranging:
> #   (taf + a) - taf*(theta/sigma)^taf - a*(lambda/theta)^a = 0
> #
> # The equation is hump-shaped: tends to -Inf at theta->0+ and theta->Inf.
> # When its maximum is positive there are TWO roots.
> # We try BOTH and return the one that yields higher log-likelihood.
> # If only one root exists, that root is returned.
> theta_diff_both <- function(taf, sigma, a, lambda) {
+   eq <- function(theta) {
+     (taf + a) - taf * (theta / sigma)^taf - a * (lambda / theta)^a
+   }
+   opt <- tryCatch(optimize(eq, lower = 1e-6, upper = 1e5, maximum = TRUE)
+ ,
+                     error = function(e) NULL)
+   if (is.null(opt) || eq(opt$maximum) <= 0) return(c(NA, NA))
+   theta_star <- opt$maximum
+   left <- tryCatch(uniroot(eq, lower = 1e-6, upper = theta_star)$roo
t,
+                     error = function(e) NA)
+   right <- tryCatch(uniroot(eq, lower = theta_star, upper = 1e5)$root,
+                     error = function(e) NA)
+   c(left, right)
+ }
>
> # Default: pick the root that gives the higher log-likelihood on data x_r
ef
> # (used during MLE; for plotting/display use the MLE estimates directly)
> theta_diff <- function(taf, sigma, a, lambda, x_ref = NULL) {
+   roots <- theta_diff_both(taf, sigma, a, lambda)
+   valid <- roots[!is.na(roots) & roots > 0]
+   if (length(valid) == 0) return(NA)
+   if (length(valid) == 1 || is.null(x_ref)) return(valid[1])
+   # Pick the root giving higher log-likelihood
+   ll_for_root <- function(theta) {
+     hw <- dweibull(theta, shape = taf, scale = sigma) / pweibull(theta,
shape = taf, scale = sigma)
+     hIW <- dIW(theta, a, lambda) / siw(theta, a, lambda)
+     r <- hIW / (hw + hIW)
+     if (is.na(r) || r <= 0 || r >= 1) return(-Inf)
+     body <- r * dtrunc(x_ref, spec = "weibull", a = 0, b = theta, shape =
taf, scale = sigma)
+     tail <- ifelse(x_ref > theta,

```

```

+           (1 - r) * dIW(x_ref, a, lambda) / sIW(theta, a, lambda
),
+           0)
+   vals <- body + tail
+   if (any(!is.finite(vals)) || any(vals <= 0)) return(-Inf)
+   sum(log(vals))
+ }
+ lls <- sapply(valid, ll_for_root)
+ valid[which.max(lls)]
+ }
>
> ##### Parameter r (continuity condition at theta): hazard rate ratio
> library(truncdist)      # For dtrunc, ptrunc
>
> R <- function(taf, sigma, a, lambda, x_ref = NULL) {
+   theta <- theta_diff(taf, sigma, a, lambda, x_ref)
+   if (is.na(theta) || theta <= 0) return(NA)
+   hw <- dweibull(theta, shape = taf, scale = sigma) / pweibull(theta, sh
ape = taf, scale = sigma)
+   hIW <- dIW(theta, a, lambda) / sIW(theta, a, lambda)
+   return(hIW / (hw + hIW))
+ }
>
> ##### Density f(x): dWIW
> dWIW <- function(x, taf, sigma, a, lambda) {
+   theta <- theta_diff(taf, sigma, a, lambda, x)
+   if (is.na(theta) || theta <= 0) return(rep(1e-300, length(x)))
+   r <- R(taf, sigma, a, lambda, x)
+   if (is.na(r) || r <= 0 || r >= 1) return(rep(1e-300, length(x)))
+   body <- r * dtrunc(x, spec = "weibull", a = 0, b = theta, shape = taf,
scale = sigma)
+   tail <- ifelse(x > theta,
+                 (1 - r) * dIW(x, a, lambda) / sIW(theta, a, lambda),
+                 0)
+   return(body + tail)
+ }
>
> ##### Graph of f(x)
> # Example parameters chosen so the differentiability equation has a root
> t <- seq(0.01, 15, length.out = 1000)
> dWIW1 <- dWIW(t, taf=5, sigma=2, a=1, lambda=2)
> dWIW2 <- dWIW(t, taf=5, sigma=2, a=1, lambda=4)
> plot(t, dWIW1, type = "l", col = "blue", lwd = 3,
+      ylab = "f(t)", xlab = "t",
+      ylim = c(0, max(c(dWIW1, dWIW2), na.rm=TRUE) * 1.1),
+      xlim = c(0, 15),
+      main = "Density Function of W-Inverse Weibull Composite Model")
> lines(t, dWIW2, col = "red", lwd = 3, lty = 2)
> legend("topright", legend = c("taf=5, sigma=2, a=1, lambda=2",
+                               "taf=5, sigma=2, a=1, lambda=4"),
+       col = c("blue", "red"), lwd = 3, lty = c(1, 2))
> theta_ex <- theta_diff(5, 2, 1, 2)
> abline(v = theta_ex, lty = 2, col = "grey")
>
> ##### CDF F(x): pWIW (uses fixed theta, not x_ref-adaptive, for proper CD
F evaluation)

```

```

> pWIW <- function(x, taf, sigma, a, lambda) {
+   # Use the best root given the full data vector
+   theta <- theta_diff(taf, sigma, a, lambda, x)
+   if (is.na(theta) || theta <= 0) return(rep(NA, length(x)))
+   r <- R(taf, sigma, a, lambda, x)
+   if (is.na(r) || r <= 0 || r >= 1) return(rep(NA, length(x)))
+   body <- r * ptrunc(x, spec = "weibull", a = 0, b = theta, shape = taf,
scale = sigma)
+   tail <- ifelse(x > theta,
+                 (1 - r) * (pIW(x, a, lambda) - pIW(theta, a, lambda)) /
+                 sIW(theta, a, lambda),
+                 0)
+   return(body + tail)
+ }
>
> ##### Inverse CDF: qWIW
> library(GoFKernel) # For inverse
> qWIW <- function(q, taf, sigma, a, lambda) {
+   d <- inverse(function(x) { pWIW(x, taf, sigma, a, lambda) }, lower = 0.
7)
+   return(d(q))
+ }
>
> ##### Maximum Likelihood Estimators
> library(berryFunctions) # For function is.error
> library(MASS) # For function fitdistr
> library(goftest) # For ad.test
> FIT <- function(x) {
+   fd <- function(i,j,k,l) fitdistr(x, dWIW, list(taf=i, sigma=j, a=k,
lambda=l), method="Nelder-Mead")
+   ll_at <- function(i,j,k,l) {
+     vals <- dWIW(x, i, j, k, l)
+     if (any(!is.finite(vals)) || any(vals <= 0)) return(-Inf)
+     sum(log(vals))
+   }
+   # wider grid: lambda can be large for heavy-tailed Inverse weibull
+   vec_a <- seq(2, 30, 2)
+   vec_sig <- c(seq(0.25, 2.0, 0.25), 3, 5)
+   vec_gam <- c(seq(0.25, 3.0, 0.25))
+   vec_lam <- c(seq(0.5, 3.0, 0.5), 4, 5, 7, 10)
+   # Phase 1: scan full grid, keep top 20 starting points by log-likelihoo
d
+   results <- list()
+   for (i in vec_a) {
+     for (j in vec_sig) {
+       for (k in vec_gam) {
+         for (l in vec_lam) {
+           ll <- ll_at(i, j, k, l)
+           if (is.finite(ll)) results <- c(results, list(list(ll=ll, s=c(i
,j,k,l))))
+         }
+       }
+     }
+   }
+   results <- results[order(sapply(results, `[`, "ll"), decreasing=TRUE)
]

```

```

+ top20 <- results[seq_len(min(20, length(results)))]
+ fd_tight <- function(i,j,k,l) fitdistr(x, dWIW, list(taf=i, sigma=j, a=
k, lambda=l),
+                                     method="Nelder-Mead",
+                                     control=list(maxit=50000, reltol
=1e-12))
+ # Phase 2: run Nelder-Mead from each of the top 20 starting points, keep
best
+ best_ll <- -Inf
+ fitWIW <- NULL
+ for (s in top20) {
+   fit_try <- try(fd(s$s[1], s$s[2], s$s[3], s$s[4]), silent=TRUE)
+   if (!inherits(fit_try, "try-error")) {
+     ll_conv <- logLik(fit_try)
+     if (ll_conv > best_ll) { best_ll <- ll_conv; fitWIW <- fit_try }
+   }
+ }
+ # Fallback: if all top20 failed, try a broader set of fixed starting po
ints
+ if (is.null(fitWIW)) {
+   fallback <- list(c(10,1,1,1), c(6,0.5,0.5,0.5), c(14,1,1,2),
+                   c(4,1,0.5,1), c(18,0.5,1,0.5), c(20,1,2,5),
+                   c(8,0.5,1,3), c(12,1,1.5,4))
+   for (s in fallback) {
+     fit_try <- try(fd(s[1],s[2],s[3],s[4]), silent=TRUE)
+     if (!inherits(fit_try, "try-error")) {
+       ll_conv <- logLik(fit_try)
+       if (ll_conv > best_ll) { best_ll <- ll_conv; fitWIW <- fit_try }
+     }
+   }
+ }
+ # Phase 3: polish - re-run from converged estimates with tighter tolera
nce
+ if (!is.null(fitWIW)) {
+   e <- fitWIW$estimate
+   for (rep in 1:3) {
+     polish <- try(fd_tight(e[1], e[2], e[3], e[4]), silent=TRUE)
+     if (!inherits(polish, "try-error") && logLik(polish) >= logLik(fitw
IW)) {
+       fitWIW <- polish
+       e <- fitWIW$estimate
+     }
+   }
+ }
+ return(fitWIW)
+ }
> M <- FIT(x); M
There were 50 or more warnings (use warnings() to see the first 50)      t
af      sigma      a      lambda
16.08581366 0.95507584 1.55508468 0.90719181
( 1.54826357) ( 0.01486136) ( 0.05047625) ( 0.08192039)
> names(M)
[1] "estimate" "sd"      "vcov"     "loglik"   "n"
> MAT2 <- matrix(c(M$estimate[[1]],M$estimate[[2]],M$estimate[[3]],M$estima
te[[4]]),nrow=4)
> dimnames(MAT2) <- list(c("taf","sigma","a","lambda"),"MLE")

```

```

> MAT2
      MLE
taf    16.0858137
sigma  0.9550758
a       1.5550847
lambda 0.9071918
>
> ##### Derived theta from 1st differentiability condition
> theta_hat <- theta_diff(M$estimate[1], M$estimate[2], M$estimate[3], M$estimate[4], x)
> cat("Derived theta =", theta_hat, "\n")
Derived theta = 0.9555277
>
> ##### Verify 2nd derivative condition f''(theta-) = f''(theta+) at MLE estimates
> # Uses numerical second derivatives from each side of theta
> taf_h <- M$estimate[1]; sigma_h <- M$estimate[2]
> a_h <- M$estimate[3]; lambda_h <- M$estimate[4]
> r_h <- R(taf_h, sigma_h, a_h, lambda_h, x)
>
> f_left <- function(z) r_h * dtrunc(z, spec="weibull", a=0, b=theta_hat,
shape=taf_h, scale=sigma_h)
> f_right <- function(z) (1 - r_h) * dIW(z, a_h, lambda_h) / sIW(theta_hat,
a_h, lambda_h)
>
> h <- 1e-5
> d2_left <- (f_left(theta_hat - 2*h) - 2*f_left(theta_hat - h) + f_left(theta_hat)) / h^2
> d2_right <- (f_right(theta_hat + 2*h) - 2*f_right(theta_hat + h) + f_right(theta_hat)) / h^2
>
> MAT_2nd <- matrix(c(d2_left, d2_right), nrow=2)
> dimnames(MAT_2nd) <- list(c("f''(theta-)", "f''(theta+)"), "value")
> MAT_2nd
      value
f''(theta-) -254.4334610
f''(theta+)  0.1435074
>
> ##### AIC, BIC, Tests
> AIC(M)
[1] 7648.02
> BIC(M)
[1] 7671.303
> ks <- ks.test(x, "pWIW", M$estimate[1], M$estimate[2], M$estimate[3], M$estimate[4]); ks
Warning message:
In ks.test.default(x, "pWIW", M$estimate[1], M$estimate[2], M$estimate[3],
:
ties should not be present for the one-sample Kolmogorov-Smirnov test
Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  x
D = 0.020991, p-value = 0.2222
alternative hypothesis: two-sided

```

```
> ad <- ad.test(x,"pWIW",M$estimate[1],M$estimate[2],M$estimate[3],M$estimate[4]); ad
```

Anderson-Darling test of goodness-of-fit
Null hypothesis: distribution 'pWIW'
Parameters assumed to be fixed

```
data: x
```

```
An = 1.1594, p-value = 0.2835
```

```
>
> MAT3 <- matrix(c(AIC(M),BIC(M),round(ks$statistic,digits=4),round(ks$p.value,digits=4),round(ad$statistic,digits=4),round(ad$p.value,digits=4)),ncol=6,nrow=1)
> rownames(MAT3)=c("")
> colnames(MAT3)=c("AIC","BIC","K-S Statistic","K-S P-value","A-D Statistic","A-D P-value")
> MAT3
      AIC      BIC      K-S Statistic      K-S P-value      A-D Statistic      A-D P-value
1 7648.02 7671.303      0.021      0.2222      1.1594      0.2835
>
> #### VaR
>
> p <- c(0.8,0.85,0.9,0.95,0.975,0.99,0.995)
> VarWIW=c()      # THEORITICAL VAR
> SVaR=c()      # EMPIRICAL VAR
> for (i in 1:length(p)) {
+   VarWIW[i] <- qWIW(p[i], taf=M$estimate[1], sigma=M$estimate[2],
+   a=M$estimate[3], lambda=M$estimate[4])
+   SVaR[i]=quantile(x,p[i])
+ }
>
> MAT4 <- matrix(c(VarWIW,SVaR),ncol=7,byrow=T)
> rownames(MAT4)=c("THEORITICAL VAR", "EMPIRICAL VAR")
> colnames(MAT4)=c("80%","85%","90%","95%","97.5%","99%","99.5%")
> MAT4
      80%      85%      90%      95%      97.5%      99%      99.5%
THEORITICAL VAR 3.177090 3.868178 5.078347 8.019278 12.59155 22.77082 35.59770
EMPIRICAL VAR   3.141857 3.884263 5.080440 8.406298 14.39458 24.61378 32.43126
```

Gamma-Generalized Pareto

```
_> # Gamma - Generalised Pareto Composite Model
> # Body: truncated Gamma on (0, theta]
> # Tail: Generalised Pareto Distribution on (theta, inf) [location fixed at theta]
> # Smoothness conditions at theta:
> # (1) Continuity: f(theta-) = f(theta+) -> defines r
```

```

> # (2) 1st derivative:  $f'(\theta^-) = f'(\theta^+) \rightarrow$  derives sigma_gpd (closed form)
> # Log-deriv Gamma:  $(\kappa-1)/\theta - 1/\lambda$ 
> # Log-deriv GPD:  $-(1+\eta)/\sigma_{\text{gpd}}$ 
> #  $\Rightarrow \sigma_{\text{gpd}} = (1+\eta)*\lambda*\theta / (\theta - \lambda*\kappa)$ 
> # (3) 2nd derivative:  $f''(\theta^-) = f''(\theta^+) \rightarrow$  verified after fitting
> # Free parameters estimated: kappa (Gamma shape), lambda (Gamma scale),
> # ni (GPD shape), theta (threshold)
> # Derived:  $\sigma_{\text{gpd}} = (1+\eta)*\lambda*\theta / (\theta - \lambda*\kappa)$ 
> # Validity condition:  $\theta > \lambda*\kappa$  [threshold right of Gamma mode]
>
> ##### Data
> library(SMPracticals)
> data(danish)
> x <- danish
> length(x) # 2492
[1] 2492
>
> library(e1071) # For function skewness, kurtosis
> MAT1 <- matrix(c(mean(x),sd(x),var(x),median(x),max(x)-min(x),max(x),min(x),skewness(x),kurtosis(x)),nrow=9)
> dimnames(MAT1)=list(c("Mean","Std Dev","Variance","Median","Range","Maximum","Minimum","Skewness","Kurtosis"),"Value")
> MAT1

```

	Value
Mean	3.062699
Std Dev	7.976703
Variance	63.627787
Median	1.633858
Range	262.936962
Maximum	263.250366
Minimum	0.313404
Skewness	19.884145
Kurtosis	546.132584

```

>
> ##### GPD scale derived from 1st differentiability condition (closed form)
> # Setting  $(\kappa-1)/\theta - 1/\lambda = -(1+\eta)/\sigma_{\text{gpd}}$  and solving:
> sigma_gpd_diff <- function(kappa, lambda, ni, theta) {
+   denom <- theta - lambda * (kappa - 1)
+   if (is.na(denom) || denom <= 0 || ni <= -1) return(NA)
+   return((1 + ni) * lambda * theta / denom)
+ }
>
> ##### Parameter r (continuity condition at theta): hazard rate ratio
> #  $h_{\text{GPD}}(\theta) = 1/\sigma_{\text{gpd}}$  (GPD evaluated at its own location gives 1)
> library(evd) # For dgp, pgpd
> library(truncdist) # For dtrunc, ptrunc
>
> R <- function(kappa, lambda, ni, theta) {
+   sgpd <- sigma_gpd_diff(kappa, lambda, ni, theta)
+   if (is.na(sgpd) || sgpd <= 0) return(NA)
+   # Body normalises by  $F_G(\theta) = \text{pgamma}(\theta)$ , so ratio is  $f_G(\theta)/F_G(\theta)$ 

```

```

+   hG   <- dgamma(theta, shape=kappa, scale=lambda) /
+   pgamma(theta, shape=kappa, scale=lambda)
+   hGPD <- 1 / sgpd
+   return(hGPD / (hG + hGPD))
+ }
>
> ##### Density f(x): dGammaGPD
> dGammaGPD <- function(x, kappa, lambda, ni, theta) {
+   if (any(!is.finite(c(kappa, lambda, ni, theta)))) return(rep(1e-300, length(x)))
+   if (kappa <= 0 || lambda <= 0 || theta <= 0 || ni <= -1) return(rep(1e-300, length(x)))
+   sgpd <- sigma_gpd_diff(kappa, lambda, ni, theta)
+   if (is.na(sgpd) || sgpd <= 0) return(rep(1e-300, length(x)))
+   r     <- R(kappa, lambda, ni, theta)
+   if (is.na(r) || r <= 0 || r >= 1) return(rep(1e-300, length(x)))
+   body <- r * dtrunc(x, spec="gamma", a=0, b=theta, shape=kappa, scale=lambda)
+   tail <- ifelse(x > theta,
+                 (1 - r) * dgpd(x, loc=theta, scale=sgpd, shape=ni),
+                 0)
+   return(pmax(body + tail, 1e-300))
+ }
>
> ##### Graph of f(x)
> # validity requires theta > lambda*(kappa-1); e.g. kappa=3, lambda=1 -> mode=2, use theta=4
> t <- seq(0.01, 30, length.out = 1000)
> dGG1 <- dGammaGPD(t, kappa=3, lambda=1, ni=0.3, theta=4)
> dGG2 <- dGammaGPD(t, kappa=3, lambda=1, ni=0.5, theta=4)
> plot(t, dGG1, type = "l", col = "blue", lwd = 3,
+      ylab = "f(t)", xlab = "t",
+      ylim = c(0, max(c(dGG1, dGG2), na.rm=TRUE) * 1.1),
+      xlim = c(0, 30),
+      main = "Density Function of Gamma-GPD Composite Model")
> lines(t, dGG2, col = "red", lwd = 3, lty = 2)
> legend("topright", legend = c("kappa=3, lambda=1, ni=0.3, theta=4",
+                               "kappa=3, lambda=1, ni=0.5, theta=4"),
+       col = c("blue", "red"), lwd = 3, lty = c(1, 2))
> abline(v = 4, lty = 2, col = "grey")
>
> ##### CDF F(x): pGammaGPD
> pGammaGPD <- function(x, kappa, lambda, ni, theta) {
+   sgpd <- sigma_gpd_diff(kappa, lambda, ni, theta)
+   if (is.na(sgpd) || sgpd <= 0) return(rep(NA, length(x)))
+   r     <- R(kappa, lambda, ni, theta)
+   if (is.na(r) || r <= 0 || r >= 1) return(rep(NA, length(x)))
+   body <- r * ptrunc(x, spec="gamma", a=0, b=theta, shape=kappa, scale=lambda)
+   tail <- ifelse(x > theta,
+                 (1 - r) * pgpd(x, loc=theta, scale=sgpd, shape=ni),
+                 0)
+   return(body + tail)
+ }
>
> ##### Inverse CDF: qGammaGPD

```

```

> library(GoFKernel)          # For inverse
> qGammaGPD <- function(q, kappa, lambda, ni, theta) {
+   d <- inverse(function(x) { pGammaGPD(x, kappa, lambda, ni, theta) }, lo
wer=0.7)
+   return(d(q))
+ }
>
> ##### Maximum Likelihood Estimators
> library(berryFunctions)      # For function  is.error
> library(MASS)                # For function  fitdistr
> library(goftest)             # For ad.test
> FIT <- function(x) {
+   LB <- c(kappa=0.01, lambda=0.01, ni=-0.49, theta=1.0) # lower bounds
for L-BFGS-B
+   fd <- function(i,j,k,l)
+     fitdistr(x, dGammaGPD, list(kappa=i, lambda=j, ni=k, theta=l),
+       lower=LB, control=list(maxit=10000))
+   fd_tight <- function(i,j,k,l)
+     fitdistr(x, dGammaGPD, list(kappa=i, lambda=j, ni=k, theta=l),
+       lower=LB, control=list(maxit=50000, factr=1e7))
+   ll_at <- function(i,j,k,l) {
+     vals <- tryCatch(dGammaGPD(x, i, j, k, l), error=function(e) rep(1e-3
00, length(x)))
+     sum(log(pmax(vals, 1e-300)))
+   }
+   # validity: theta > lambda*(kappa-1)
+   vec_kappa <- c(seq(0.5, 5.0, 0.5), 7, 10)
+   vec_lambda <- seq(0.2, 3.0, 0.4)
+   vec_ni <- seq(0.1, 1.5, 0.2)
+   vec_th <- seq(1.0, 8.0, 0.5)
+   # Phase 1: scan full grid, keep top 5 starting points by log-likelihood
+   results <- list()
+   for (i in vec_kappa) {
+     for (j in vec_lambda) {
+       for (k in vec_ni) {
+         for (l in vec_th) {
+           if (l > j * (i - 1)) {
+             ll <- ll_at(i, j, k, l)
+             if (is.finite(ll)) results <- c(results, list(list(ll=ll, s=c
(i,j,k,l))))
+           }
+         }
+       }
+     }
+   }
+   results <- results[order(sapply(results, `[`, "ll"), decreasing=TR
UE)]
+   top5 <- results[seq_len(min(5, length(results)))]
+   # Phase 2: L-BFGS-B from each of top 5, keep best
+   best_ll <- -Inf
+   fitGammaGPD <- NULL
+   for (s in top5) {
+     fit_try <- try(fd(s$s[1], s$s[2], s$s[3], s$s[4]), silent=TRUE)
+     if (!inherits(fit_try, "try-error")) {
+       ll_conv <- logLik(fit_try)

```

```

+       if (ll_conv > best_ll) { best_ll <- ll_conv; fitGammaGPD <- fit_try
+     }
+   }
+   # Fallback: diverse fixed starting points
+   if (is.null(fitGammaGPD)) {
+     fallback <- list(c(2,1,0.3,3), c(3,1,0.5,4), c(1.5,1.5,0.3,3),
+                      c(4,0.5,0.5,3), c(2,1.5,0.5,4), c(1,0.5,0.5,2),
+                      c(5,1,0.5,5), c(1.5,1,0.3,2), c(3,2,0.5,6),
+                      c(0.5,1,0.5,2))
+     for (s in fallback) {
+       fit_try <- try(fd(s[1],s[2],s[3],s[4]), silent=TRUE)
+       if (!inherits(fit_try, "try-error")) {
+         ll_conv <- logLik(fit_try)
+         if (ll_conv > best_ll) { best_ll <- fit_try; fitGammaGPD <- fit_t
+       }
+     }
+   }
+   # Phase 3: polish from converged estimates
+   if (!is.null(fitGammaGPD)) {
+     e <- fitGammaGPD$estimate
+     for (rep in 1:3) {
+       polish <- try(fd_tight(e[1], e[2], e[3], e[4]), silent=TRUE)
+       if (!inherits(polish, "try-error") && logLik(polish) >= logLik(fitG
+         ammaGPD)) {
+         fitGammaGPD <- polish
+         e <- fitGammaGPD$estimate
+       }
+     }
+   }
+   return(fitGammaGPD)
+ }
> M <- FIT(x); M
      kappa      lambda      ni      theta
22.552097444 0.051560643 0.666532517 1.217258185
(      NaN) (      NaN) ( 0.028778113) ( 0.007280939)
> names(M)
[1] "estimate" "sd"      "vcov"     "loglik"   "n"
> MAT2 <- matrix(c(M$estimate[[1]],M$estimate[[2]],M$estimate[[3]],M$estima
te[[4]]),nrow=4)
> dimnames(MAT2) <- list(c("kappa","lambda","ni","theta"),"MLE")
> MAT2
      MLE
kappa 22.55209744
lambda 0.05156064
ni      0.66653252
theta  1.21725818
>
> ##### Derived sigma_gpd from 1st differentiability condition
> sgpd_hat <- sigma_gpd_diff(M$estimate[1], M$estimate[2], M$estimate[3], M
$estimate[4])
> cat("Derived sigma_gpd =", sgpd_hat, "\n")
Derived sigma_gpd = 0.9865849
>

```

```

> ##### Verify 2nd derivative condition f''(theta-) = f''(theta+) at MLE estimates
> kappa_h <- M$estimate[1]; lambda_h <- M$estimate[2]
> ni_h <- M$estimate[3]; theta_h <- M$estimate[4]
> r_h <- R(kappa_h, lambda_h, ni_h, theta_h)
>
> f_left <- function(z) r_h * dtrunc(z, spec="gamma", a=0, b=theta_h, shape=kappa_h, scale=lambda_h)
> f_right <- function(z) (1 - r_h) * dgpdc(z, loc=theta_h, scale=sgpd_hat, shape=ni_h)
>
> h <- 1e-5
> d2_left <- (f_left(theta_h - 2*h) - 2*f_left(theta_h - h) + f_left(theta_h)) / h^2
> d2_right <- (f_right(theta_h + 2*h) - 2*f_right(theta_h + h) + f_right(theta_h)) / h^2
>
> MAT_2nd <- matrix(c(d2_left, d2_right), nrow=2)
> dimnames(MAT_2nd) <- list(c("f''(theta-)", "f''(theta+)"), "value")
> MAT_2nd
              value
f''(theta-) -8.400223e+00
f''(theta+) -7.184054e+09
>
> ##### AIC, BIC, Tests
> AIC(M)
[1] 7740.727
> BIC(M)
[1] 7764.011
> ks <- ks.test(x, "pGammaGPD", M$estimate[1], M$estimate[2], M$estimate[3], M$estimate[4]); ks
      Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  x
D = 0.030918, p-value = 0.01706
alternative hypothesis: two-sided

> ad <- ad.test(x, "pGammaGPD", M$estimate[1], M$estimate[2], M$estimate[3], M$estimate[4]); ad
      Anderson-Darling test of goodness-of-fit
      Null hypothesis: distribution 'pGammaGPD'
      Parameters assumed to be fixed

data:  x
An = 3.2161, p-value = 0.02129

>
> MAT3 <- matrix(c(AIC(M), BIC(M), round(ks$statistic, digits=4), round(ks$p.value, digits=4), round(ad$statistic, digits=4), round(ad$p.value, digits=4)), ncol=6, nrow=1)
> rownames(MAT3)=c("")
> colnames(MAT3)=c("AIC", "BIC", "K-S Statistic", "K-S P-value", "A-D Statistic", "A-D P-value")
> MAT3

```

	AIC	BIC	K-S Statistic	K-S P-value	A-D Statistic	A-D
P-value	7740.727	7764.011	0.0309	0.0171	3.2161	
	0.0213					

```

>
> ##### VaR
>
> p <- c(0.8,0.85,0.9,0.95,0.975,0.99,0.995)
> VaGammaGPD=c() # THEORITICAL VAR
> SVaR=c() # EMPIRICAL VAR
> for (i in 1:length(p)) {
+   VaGammaGPD[i] <- qGammaGPD(p[i], kappa=M$estimate[1], lambda=M$estimate[2],
+                               ni=M$estimate[3], theta=M$estimate[4])
+   SVaR[i]=quantile(x,p[i])
+ }
>
> MAT4 <- matrix(c(VaGammaGPD,SVaR),ncol=7,byrow=T)
> rownames(MAT4)=c("THEORITICAL VAR", "EMPIRICAL VAR")
> colnames(MAT4)=c("80%", "85%", "90%", "95%", "97.5%", "99%", "99.5%")
> MAT4

```

	80%	85%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%
THEORITICAL VAR	3.177060	3.904157	5.197198	8.403669	13.49315	25.07286	39.95139
EMPIRICAL VAR	3.141857	3.884263	5.080440	8.406298	14.39458	24.61378	32.43126

Βιβλιογραφία

Ελληνική

Αντζουλάκος, Δ. (2018). *Γλώσσα προγραμματισμού R με εφαρμογές στον Αναλογισμό, Σημειώσεις Μαθήματος, ΠΜΣ Αναλογιστική Επιστήμη & Διαχείριση Κινδύνων*.

Ξένη

Băcă, A. & Vernic, R. (2022). On the three-spliced Exponential-Lognormal-Pareto distribution. *An. S.t. Univ. Ovidius Constanta*, **30**, 21–35.

Băcă, A. & Vernic, R. (2024). Modeling data with extreme values using three-spliced distributions, *Axioms*, **13**, 473 (<https://doi.org/10.3390/axioms13070473>).

Băcă, A. & Vernic, R. (2025). Extreme values modeling using the Gamma-Lognormal-Pareto three-spliced distribution. *In Changes and Innovations in Social Systems: 505 (Studies in Systems, Decision and Control)*, Hoskova-Mayerova, S., Flaut, C., Flaut, D., Rackova, P., Eds.; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany.

Cooray, K. & Ananda, M. M. A. (2005). Modeling actuarial data with a composite lognormal-Pareto model, *Scandinavian Actuarial Journal*, **5**, 321-334.

Grün, B. & Miljkovic, T. (2019). Extending composite loss models using a general framework of advanced computational tools. *Scandinavian Actuarial Journal*, **8**, 642–660.

Guojun, G. & Valdez, E. A. (2018), Fat-Tailed Regression Modeling with Spliced Distributions. *North American Actuarial Journal*, **22** (4), 554–573.

Li, J. & Liu, J. (2023), Claims Modelling with Three-Component Composite Models, *Risks*, **11**: 196 (<https://doi.org/10.3390/risks11110196>).

Johnson, N. L., Kotz, S. & Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions, Volume 2*, 2nd edition, John Wiley and Sons.

Klugman, S., Panjer, H. & Willmot, G. (2012). *Loss Models, From Data to Decisions*, John Wiley and Sons, New York.

Liu, B. & Ananda, M.M. (2022). A generalized family of exponentiated composite distributions, *Mathematics*, **10**, 1895 (<https://doi.org/10.3390/math10111895>).

Marambakuyana, W. A. & Shongwe, S.C. (2024). Composite and Mixture Distributions for Heavy-Tailed Data—An Application to Insurance Claims, *Mathematics*, **12**, 335 (<https://doi.org/10.3390/math12020335>).

Nadarajah, S. & Bakar, S. A. A. (2014). New composite models for the Danish fire insurance data, *Scandinavian Actuarial Journal*, **2**, 180–187.

Scollnik, D. P. M. (2007). On composite lognormal-Pareto models. *Scandinavian Actuarial Journal*, **1**, 20–33.

Teodorescu, S. & Vernic, R. (2009). Some composite exponential-Pareto models for actuarial prediction. *Romanian Journal of Economic Forecasting*, **12**(4), 82–100.

Teodorescu, S. & Vernic, R. (2013). On composite Pareto models. *Mathematical Reports*, **15** (65), 11–29.