



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Ηλεκτρονική Μάθηση»
Ακαδημαϊκό έτος 2025-2026

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
της Μαρίας Ευσταθίου (Α.Μ. mhm 25022)

Μοντελοποιώντας τον Κόσμο: Από τα Μαθηματικά στην Πραγματική Ζωή
– Ένα ψηφιακό μάθημα αυτο-μελέτης για μαθητές/τριες της Α΄ Λυκείου

Learning Mathematics through Modeling and Solving Real-World
Problems – A Digital Self-Study Course for Grade 10 Students

Επιβλέπων Καθηγητής:
Δημήτριος Σάμψων

Πειραιάς, Σεπτέμβριος 2026

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ ΑΥΘΕΝΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

ΒΕΒΑΙΩΣΗ ΕΚΠΟΝΗΣΗΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Αυτή η Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία υποβάλλεται ως μερική εκπλήρωση των απαιτήσεων του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην «Ηλεκτρονική Μάθηση» του Τμήματος Ψηφιακών Συστημάτων του Πανεπιστημίου Πειραιώς.

Δηλώνω υπεύθυνα ότι η συγκεκριμένη Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία έχει συγγραφεί από εμένα προσωπικά και δεν έχει υποβληθεί ούτε έχει αξιολογηθεί στο πλαίσιο κάποιου άλλου μεταπτυχιακού ή προπτυχιακού τίτλου σπουδών, στην Ελλάδα ή στο εξωτερικό.

Η εργασία αυτή έχοντας εκπονηθεί από εμένα, αντιπροσωπεύει τις προσωπικές μου απόψεις επί του θέματος. Οι πηγές στις οποίες ανέτρεξα για την εκπόνηση της συγκεκριμένης διπλωματικής αναφέρονται στο σύνολό τους, δίνοντας πλήρεις αναφορές στους συγγραφείς, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το Διαδίκτυο.

Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του πτυχίου μου. Σε κάθε περίπτωση, αναληθούς ή ανακριβούς δηλώσεως, υπόκειμαι στις συνέπειες που προβλέπονται τις διατάξεις που προβλέπει η Ελληνική και Κοινοτική Νομοθεσία περί πνευματικής ιδιοκτησίας.

Η Δηλούσα

Δρ. Μαρία Ευσταθίου



Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή	14
1.1 Σκοπός της Μεταπτυχιακής Διπλωματικής Εργασίας	14
1.2 Τεκμηρίωση της Ανάγκης για Ανάπτυξη των Επιλεγμένων Ικανοτήτων	14
1.3 Ψηφιακά Μαθήματα ως Πρόσφορη Εκπαιδευτική Μέθοδος	16
1.4 Η Επιλογή της Μικρο-μάθησης (Micro-learning)	18
1.5 Συνεισφορά της Μεταπτυχιακής Διπλωματικής Εργασίας στο Πεδίο της Ψηφιακής Μάθησης	19
Κεφάλαιο 2. Επισκόπηση Πεδίου	21
2.1 Μεθοδολογία Αναζήτησης και Κριτήρια Επιλογής Ψηφιακών Μαθημάτων	21
2.2 Ανάλυση Μαθήματος 1: A-level Mathematics for Year 12-- Course 1: Algebraic Methods, Graphs and Applied Mathematics Methods	22
2.2.1 Περιγραφή του Μαθήματος 1	22
2.2.2 Κριτική Προσέγγιση και Σύνδεση με το παρόν Ψηφιακό Μάθημα	23
2.2.3 Αναλυτική Παρουσίαση Ενοτήτων Μαθήματος 1	24
2.3 Ανάλυση Μαθήματος 2: Precalculus: Μαθηματική Μοντελοποίηση	26
2.3.1 Περιγραφή του Μαθήματος 2	26
2.3.2. Κριτική Προσέγγιση και Σύνδεση με το παρόν Ψηφιακό Μάθημα	26
2.3.3. Αναλυτική Παρουσίαση Ενοτήτων Μαθήματος 2	27
2.4 Ανάλυση Μαθήματος 3: Making Math Click: Understand Math Without Fear	29
2.4.1. Περιγραφή του Μαθήματος 3	29
2.4.2. Κριτική Προσέγγιση και Σύνδεση με το παρόν ψηφιακό μάθημα	29
2.4.3. Αναλυτική Παρουσίαση Ενοτήτων Μαθήματος 3	30
2.5 Ανάλυση Μαθήματος 4: Precalculus: Σχέσεις και Συναρτήσεις	32
2.5.1. Περιγραφή του Μαθήματος 4	32
2.5.2. Κριτική Προσέγγιση και Σύνδεση με το παρόν ψηφιακό μάθημα	32
2.5.3. Αναλυτική Παρουσίαση Ενοτήτων Μαθήματος 4	33
2.6 Ανάλυση Μαθήματος 5: Maths Essentials (LSE)	35
2.6.1. Περιγραφή του Μαθήματος 5	35
2.6.2. Κριτική Προσέγγιση και Σύνδεση με το παρόν ψηφιακό μάθημα	35
2.6.3. Αναλυτική Παρουσίαση Ενοτήτων Μαθήματος 5	36
2.7 Αναγκαιότητα του παρόντος ψηφιακού μαθήματος: Συμπερασματική σύνθεση	37
Κεφάλαιο 3. Σχεδίαση του Ψηφιακού Μαθήματος	40
3.1 Εισαγωγή – Η Αξία του Ψηφιακού Μαθήματος στην Εκπαίδευση	40
3.1.1. Η Ψυχολογία της Επιτυχίας και το Κίνητρο	40
3.1.1. Προκλήσεις και Προοπτικές της Ψηφιακής Διδακτικής	41
3.2 Η Μικρο-μάθησης ως Στρατηγικό Μοντέλο Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού	43
3.2.1. Γνωστική Αρχιτεκτονική και Διαχείριση Φορτίου	43
3.2.2. Προσαρμοστικότητα: Η Σύζευξη Μικρο-μάθησης και Analytics	43
3.2.3. Αναστοχασμός ως Διαρκής Διαδικασία	44
3.2.4. Η Ψυχολογία της Επιτυχίας και το Κίνητρο	44
3.3 Παιδαγωγική Στοχοθεσία και Τεκμηρίωση Μαθησιακών Αποτελεσμάτων	44

3.3.1. Ανάλυση Υλοποίησης Μαθησιακού Αποτελέσματος 1.1 (MA1.1)	46
3.3.2. Ανάλυση Υλοποίησης Μαθησιακού Αποτελέσματος 1.2 (MA1.2)	47
3.3.3. Ανάλυση Υλοποίησης Μαθησιακού Αποτελέσματος 2.1 (MA2.1)	47
3.3.4. Ανάλυση Υλοποίησης Μαθησιακού Αποτελέσματος 2.2 (MA2.2)	48
3.4 Σχεδίαση του Ψηφιακού Μαθήματος	50
3.4.1 Φιλοσοφία Σχεδιασμού	50
3.4.2 Φάση Α: Εγγραφή και Εισαγωγή στο Ψηφιακό Μάθημα (60')	50
3.4.3 Φάση Β: Εκπαιδευτικά Μικρο-Μαθήματα (2 ενότητες) (180')	51
3.4.4 Φάση Γ: Πιστοποίηση και Αξιολόγηση (60')	51
Κεφάλαιο 4. Υλοποίηση του Ψηφιακού Μαθήματος	55
4.1 Εγγραφή και Εισαγωγή στο Ψηφιακό Μάθημα	56
4.1.1 Σχετικά με αυτό το Ψηφιακό Μάθημα	56
4.1.2 Προαπαιτούμενα του Ψηφιακού Μαθήματος	58
4.1.3 Ολοκλήρωση του Ψηφιακού Μαθήματος	59
4.1.4 Εισαγωγή στη θεματική του Ψηφιακού Μαθήματος	60
4.2 Ψηφιακό Μικρο-Μάθημα 1	62
4.2.1 Εισαγωγή στο Μικρο-Μάθημα 1	62
4.2.2 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 1: Παρουσίαση Εννοιών (Concepts)	63
4.2.3 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 2: Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών	64
4.2.4 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 3: Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας (Skill)	64
4.2.5 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 4: Εξάσκηση Εφαρμογής Δεξιότητας (Skill)	66
4.2.6 Ανακεφαλαίωση, Αναστοχασμός, Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση	66
4.3 Ψηφιακό Μικρο-Μάθημα 2	67
4.3.1 Εισαγωγή στο Μικρο-Μάθημα 2	67
4.3.2 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 1: Παρουσίαση Εννοιών (Concepts)	68
4.3.3 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 2: Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών	68
4.3.4 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 3: Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας (Skill)	69
4.3.5 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 4: Εξάσκηση Εφαρμογής Δεξιότητας (Skill)	69
4.3.6 Ανακεφαλαίωση, Αναστοχασμός, Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση	70
4.4 Πιστοποίηση και Αξιολόγηση	70
4.4.1 Οδηγίες για τη διεξαγωγή της Τελικής Αξιολόγησης	70
4.4.2 Τελική Αξιολόγηση	71
Κεφάλαιο 5. Αξιολόγηση του Ψηφιακού Μαθήματος	72
5.1 Μέρος Α: Σχεδίαση του Ψηφιακού Μικρομαθήματος	72
5.1.1 Μαθησιακά Αποτελέσματα και Ψηφιακή Ικανότητα	72
5.1.2 Εφαρμογή της Αρχής του Constructive Alignment	72
5.1.3 Καταλληλότητα Ψηφιακών Μέσων και Εργαλείων	73
5.1.4 Διάρκεια και φόρτος εργασίας	74
5.1.5 Προαπαιτούμενες ικανότητες (γνώσεις – δεξιότητες)	75
5.1.6 Σαφήνεια γραφικής αναπαράστασης του διαγράμματος ροής εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων	75
5.2 Μέρος Β: Ανάπτυξη Ψηφιακού Εκπαιδευτικού Περιεχομένου του Μαθήματος	76
5.2.1 Αποτίμηση γενικής επισκόπησης του μαθήματος	76
5.2.2 Το εκπαιδευτικό περιεχόμενο του μαθήματος	76
5.2.3 Κανόνες Ακαδημαϊκής Ηθικής και Δεοντολογίας	77
5.2.4 Ευθυγράμμιση εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων και μαθησιακών αποτελεσμάτων	77
5.2.5 Διαδραστικές Εκπαιδευτικές Δραστηριότητες	78
5.2.6 Αξιοποίηση πρωτότυπου εκπαιδευτικού υλικού	78

5.2.7 Συνοχή του ψηφιακού μαθήματος	78
5.3 Μέρος Γ: Υλοποίηση του Ψηφιακού Μαθήματος	79
5.3.1 Πληρότητα ολοκλήρωσης	79
5.3.2 Συνολικό αισθητικό αποτέλεσμα και εμπειρία μάθησης	79
5.3.3 Αξιοποίηση ποικιλίας ψηφιακών μέσων/ εργαλείων εκπαιδευτικής τεχνολογίας	80
5.3.4 Ανατροφοδότηση και καθοδήγηση στις δραστηριότητες εξάσκησης	81
5.3.5 Οδηγίες εγγραφής/σύνδεσης στο ψηφιακό μάθημα	81
5.3.6 Οδηγίες για δραστηριότητες εξάσκησης και αξιολόγησης	81
5.4 Συγκεντρωτική Αυτό-Αξιολόγηση	82
Κεφάλαιο 6. Συμπεράσματα και Προτάσεις για Μελλοντική Βελτίωση	86
6.1 Συμπεράσματα από τον Σχεδιασμό και την Ανάπτυξη του Ψηφιακού Μαθήματος	86
6.1.1 Σχεδιαστική Συνέπεια και Μαθησιακή Στόχευση	87
6.1.2 Παιδαγωγική Αριότητα και Πρωτοτυπία Εκπαιδευτικού Υλικού	87
6.1.3 Αξιοποίηση Ψηφιακών Εργαλείων και Διαδραστικότητα	87
6.1.4 Μηχανισμοί Ανατροφοδότησης και Καθοδήγησης	88
6.1.5 Προσβασιμότητα και Ευκολία Πλοήγησης	89
6.1.6 Ηθική Δεοντολογία και Διαχείριση Πνευματικών Δικαιωμάτων	89
6.1.7 Πληρότητα Υλοποίησης και Αυτο-αξιολόγησης	90
6.2 Προτάσεις για Μελλοντική Βελτίωση και Ενίσχυση του Σχεδιασμού	90
6.2.1 Ενίσχυση της Διαφοροποιημένης Διδασκαλίας και του Εξατομικευμένου Scaffolding	90
6.2.2 Ενίσχυση της Συνεργατικής Μάθησης και της Παιγνιοποίησης (Gamification)	91
6.2.3 Αξιοποίηση Μαθησιακών Αναλυτικών Στοιχείων για Αυτοματοποιημένη Υποστήριξη	91
6.2.4 Διεύρυνση της Προσβασιμότητας και της Συμπερίληψης	92
6.2.5 Μετάβαση από τον Μαθητή-Παρατηρητή στον Μαθητή-Δημιουργό	92
Βιβλιογραφικές Αναφορές	94
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Αναλυτική Καταγραφή του Ψηφιακού Εκπαιδευτικού Υλικού του Ψηφιακού Μαθήματος	98
1. Εγγραφή και Εισαγωγή στο Ψηφιακό Μάθημα	98
1.1 Σχετικά με αυτό το μάθημα	98
1.1.1 Καλωσόρισμα στο Ψηφιακό Μάθημα	98
1.1.2 Εισαγωγή – Σκοπός του Ψηφιακού Μαθήματος	101
1.1.3 Μαθησιακά Αποτελέσματα του Ψηφιακού Μαθήματος	102
1.1.4 Δομή του Ψηφιακού Μαθήματος	104
1.1.5 Άδεια χρήσης του Ψηφιακού Μαθήματος	105
1.1.6 Δημιουργός του Ψηφιακού Μαθήματος	106
1.2 Προαπαιτούμενα του Ψηφιακού Μαθήματος	107
1.2.1 Προαπαιτούμενες Γνώσεις & Δεξιότητες	107
1.2.2 Ελάχιστες Απαραίτητες Υποδομές για τη συμμετοχή στο Ψηφιακό Μάθημα	109
1.3 Ολοκλήρωση του Ψηφιακού Μαθήματος	110
1.3.1 Απαραίτητες ενέργειες για το Ψηφιακό Μάθημα	110
1.3.2 Τελική Εξέταση του Ψηφιακού Μαθήματος	112
1.4 Εισαγωγή στη θεματική του Ψηφιακού Μαθήματος	115
1.4.1 Δραστηριότητες Αφόρμησης (Connection Activities)	115
1.4.2 Δραστηριότητες Γνωριμίας (Discussion Forum)	118
2. Ψηφιακό Μικρο-Μάθημα 1	120

2.1 Εισαγωγή στο Μικρο-Μάθημα 1	120
2.2 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 1: Παρουσίαση εννοιών (Concepts)	124
2.3 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 2: Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών	127
2.4 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 3: Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας (Skill)	130
2.5 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 4: Εξάσκηση εφαρμογής δεξιότητας (Skill)	134
2.6 Ανακεφαλαίωση – Αναστοχασμός – Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση	139
2.6.1 Ανακεφαλαίωση	139
Η ηχητική αφήγηση του βίντεο-επισκόπησης παρατίθεται ακολούθως:	140
2.6.2 Αναστοχασμός	141
2.6.3 Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση	143
3. Ψηφιακό Μικρο-Μάθημα 2	147
3.1 Εισαγωγή στο Μικρο-Μάθημα 2	147
3.2 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 1: Παρουσίαση εννοιών (Concepts)	152
3.3 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 2: Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών	156
3.4 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 3: Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας (Skill)	159
3.5 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 4: Εξάσκηση εφαρμογής δεξιότητας (Skill)	164
3.6 Ανακεφαλαίωση – Αναστοχασμός – Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση	168
3.6.1 Ανακεφαλαίωση	168
3.6.2 Αναστοχασμός	169
3.6.3 Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση	170
4. Τελική Αξιολόγηση και Πιστοποίηση	173
4.1 Οδηγίες για τη διεξαγωγή της εξέτασης	174
4.2 Τελική αξιολόγηση	174
Αναφορές	182
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Αξιοποίηση της Τεχνητής Νοημοσύνης κατά την Εκπόνηση της Μεταπτυχιακής Διπλωματικής Εργασίας	185
1. Επίπεδο χρήσης της Τεχνητής Νοημοσύνης (AI Assessment Scale – AIAS)	185
2. Συνοπτικός Πίνακας Χρήσης της Τεχνητής Νοημοσύνης	185
3. Αναλυτική Περιγραφή της Χρήσης της Τεχνητής Νοημοσύνης	186
4. Ενδεικτικές Προτροπές (Prompts)	186
5. Ανάλυση / Τεκμηρίωση των Αποφάσεων / Παρεμβάσεων (Human in the Loop)	187
6. Κριτική Αποτίμηση της Χρήσης της Τεχνητής Νοημοσύνης	187

Κατάλογος Εικόνων

Εικόνα 1 Ψηφιακή μάθηση (e-learning).....	17
Εικόνα 2 Microlearning ως μοντέλο ψηφιακής μάθησης.	18

Εικόνα 3 Μεθοδολογικός σχεδιασμός του ψηφιακού μαθήματος: Από τους στόχους στα εργαλεία υλοποίησης.....	42
Εικόνα 4 Διάγραμμα ροής του Ψηφιακού Μαθήματος.....	52
Εικόνα 5 Διάγραμμα ροής του Ψηφιακού Μικρο-Μαθήματος 1.	53
Εικόνα 6 Διάγραμμα ροής του Ψηφιακού Μικρο-Μαθήματος 2.	54
Εικόνα 7 Αρχική σελίδα του ψηφιακού μαθήματος στην πλατφόρμα Wix: Εγγραφή και Εισαγωγή στο Ψηφιακό Μάθημα.	56
Εικόνα 8 Κεντρική διεπαφή της υποενότητας «Σχετικά με αυτό το Ψηφιακό Μάθημα» στο Wix.	57
Εικόνα 9 «Καλωσόρισμα στο Ψηφιακό Μάθημα» όπως ενσωματώνεται στο περιβάλλον του Wix, μέσω της εφαρμογής Interactive Book (Lumi).....	57
Εικόνα 10 Η υποενότητα «Προαπαιτούμενα του Ψηφιακού Μαθήματος» στο περιβάλλον του Wix.....	58
Εικόνα 11 «Προαπαιτούμενες Γνώσεις και Δεξιότητες», όπως ενσωματώνονται στο περιβάλλον του Wix, μέσω της εφαρμογής Interactive Book (Lumi).	58
Εικόνα 12 Η υποενότητα «Ολοκλήρωση του Ψηφιακού Μαθήματος» στο περιβάλλον του Wix.....	59
Εικόνα 13 «Απαραίτητες ενέργειες», όπως ενσωματώνονται στο περιβάλλον του Wix, μέσω της εφαρμογής Interactive Book (Lumi).	60
Εικόνα 14 «Δραστηριότητες Αφόρμησης» της υποενότητας «Εισαγωγή στη θεματική του Ψηφιακού Μαθήματος», ενσωματωμένες στο περιβάλλον του Wix, μέσω της εφαρμογής Course Presentation (H5P).	60
Εικόνα 15 «Discussion Forum» της υποενότητας «Εισαγωγή στη θεματική του Ψηφιακού Μαθήματος», ενσωματωμένο στο περιβάλλον του Wix.	61
Εικόνα 16 «Εισαγωγή στο Μικρο-Μάθημα 1» στο περιβάλλον του Wix, μέσω διαδραστικού βίντεο (H5P).....	62
Εικόνα 17 «Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 1: Παρουσίαση Εννοιών» στο περιβάλλον του Wix...	63
Εικόνα 18 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 2: Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών)» στο περιβάλλον του Wix, μέσω Question Set (H5P).	64
Εικόνα 19 «Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 3: Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας» στο περιβάλλον του Wix, μέσω Course Presentation (H5P).	65
Εικόνα 20 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 4: Εξάσκηση Εφαρμογής Δεξιότητας (Skill) στο περιβάλλον του Wix.	66
Εικόνα 21 «Ανακεφαλαίωση, Αναστοχασμός, Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση» στο περιβάλλον του Wix, μέσω Interactive Book (H5P).	67
Εικόνα 22 «Εισαγωγή στο Μικρο-Μάθημα 2» στο περιβάλλον του Wix.	67
Εικόνα 23 «Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 1: Παρουσίαση Εννοιών» στο περιβάλλον του Wix...	68
Εικόνα 24 «Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 2: Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών» στο περιβάλλον του Wix.	68
Εικόνα 25 «Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 3: Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας» στο περιβάλλον του Wix.....	69
Εικόνα 26 «Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 4: Εξάσκηση Εφαρμογής Δεξιότητας» στο περιβάλλον του Wix.	69
Εικόνα 27 «Ανακεφαλαίωση, Αναστοχασμός, Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση» στο περιβάλλον του Wix.	70
Εικόνα 28 «Οδηγίες για τη διεξαγωγή της Τελικής Αξιολόγησης» στο περιβάλλον του Wix.....	70
Εικόνα 29 «Τελική Αξιολόγηση» στο περιβάλλον του Wix.	71
Εικόνα 30 Καλωσόρισμα στο Ψηφιακό Μάθημα: Παρουσίαση (talking head video) & Υπερκείμενο Καθοδήγησης [Interactive book-H5P Lumi, 1η ενότητα].	98

Εικόνα 31 Εισαγωγή - Σκοπός Ψηφιακού Μαθήματος: Infographic & Υπερκείμενο [Interactive book-H5P Lumi, 2η ενότητα].	101
Εικόνα 32 Μαθησιακά Αποτελέσματα Ψηφιακού Μαθήματος: Υπερκείμενο τύπου "accordion" [Interactive book-H5P Lumi, 3η ενότητα].	102
Εικόνα 33 Δομή του Ψηφιακού Μαθήματος: Υπερκείμενο τύπου "accordion" [Interactive book-H5P Lumi, 4η ενότητα].	104
Εικόνα 34 Άδεια χρήσης του Ψηφιακού Μαθήματος: Εικόνα Άδειας χρήσης CC BY-NC-SA 4.0 & Υπερκείμενο [Interactive book-H5P Lumi, 5η ενότητα].	106
Εικόνα 35 Σύντομο Βιογραφικό της Δημιουργού του Ψηφιακού Μαθήματος: Φωτογραφία & Υπερκείμενο [Interactive book-H5P Lumi, 6η ενότητα].	107
Εικόνα 36 Προαπαιτούμενες Γνώσεις & Δεξιότητες για το Ψηφιακό Μάθημα: Υπερκείμενο τύπου "accordion" [Interactive book-H5P Lumi, 1η ενότητα].	108
Εικόνα 37 Ελάχιστες Απαραίτητες Υποδομές για το Ψηφιακό Μάθημα: Υπερκείμενο [Interactive book-H5P Lumi, 2η ενότητα].	109
Εικόνα 38 Απαραίτητες ενέργειες για το Ψηφιακό Μάθημα: Υπερκείμενο "accordion" [Interactive book-H5P Lumi, 1η ενότητα].	111
Εικόνα 39 Γράφημα της Μέσης Παγκόσμιας Θερμοκρασιακής Μεταβολής $f(x)$ (σε °C) από το 1850 έως το 2025.	114
Εικόνα 40 Τελική Αξιολόγηση του Ψηφιακού Μαθήματος: Υπερκείμενο [Interactive book-H5P Lumi, 2η ενότητα].	114
Εικόνα 41 Εισαγωγή σε Δραστηριότητες Αφόρμησης για το Ψηφιακό Μάθημα [Course Presentation-H5P Lumi].	115
Εικόνα 42 Αφόρμηση μέσω εμπειρίας [Course Presentation – H5P Lumi] με ενσωματωμένο σύνδεσμο προς την πλατφόρμα Padlet.	116
Εικόνα 43 Αφόρμηση μέσω Αποριών [Course Presentation – H5P Lumi] με ενσωματωμένο quiz [H5P Lumi].	117
Εικόνα 44 Σύνδεση με το "Γιατί" [Course Presentation – H5P Lumi] με ενσωματωμένο quiz. ...	118
Εικόνα 45 Δραστηριότητα γνωριμίας [Interactive Video – H5P Lumi] με ενσωματωμένο σύνδεσμο προς την πλατφόρμα Padlet.	119
Εικόνα 46 Εισαγωγή στο ψηφιακό μικρο-μάθημα 1 [Interactive Video-H5P Lumi, με ενσωματωμένο AI Avatar].	120
Εικόνα 47 Ρεαλιστικό πρόβλημα του μικρο-μαθήματος 1 [Google Slides].	121
Εικόνα 48 Συνέχεια του εισαγωγικού βίντεο του μικρο-μαθήματος 1 με ενσωματωμένο Quiz [H5P Lumi].	122
Εικόνα 49 Μαθησιακά Αποτελέσματα και Ψηφιακές Ικανότητες του μικρο-μαθήματος 1.	123
Εικόνα 50 Παρουσίαση εννοιών του μικρο-μαθήματος 1 [Course Presentation-H5P Lumi] με ενσωματωμένο AI Avatar.	124
Εικόνα 51 Αλγεβρική επίλυση ανίσωσης 2ου βαθμού.	125
Εικόνα 52 Πίνακας προσήμου του τριωνύμου	126
Εικόνα 53 Γραφική επίλυση ανίσωσης 2ου βαθμού με ενσωματωμένους συνδέσμους.	126
Εικόνα 54 Αλγεβρική και Γραφική επίλυση ανισώσεων 2ου βαθμού.	127
Εικόνα 55 Εικόνα σχολικής τάξης.	128
Εικόνα 56 Εικόνα ερώτησης "Drag and Drop"	130
Εικόνα 57 Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας του μικρο-μαθήματος 1 [Course Presentation-H5P Lumi].	131
Εικόνα 58 Προσδιορισμός της ανίσωσης που περιγράφει τη μετατόπιση του αεροσκάφους ανατολικά της Αθήνας.	131

Εικόνα 59 Γραφική επίλυση της ανίσωσης που περιγράφει τη μετατόπιση του αεροσκάφους ανατολικά της Αθήνας.....	132
Εικόνα 60 Αλγεβρική επίλυση της ανίσωσης που περιγράφει τη μετατόπιση του αεροσκάφους ανατολικά της Αθήνας.....	133
Εικόνα 61 Σύνοψη των ευρημάτων-επίλυση του ρεαλιστικού προβλήματος.	133
Εικόνα 62 Εισαγωγή στην Εξάσκηση Εφαρμογής Δεξιότητας του μικρο-μαθήματος 1 (Interactive Video-H5P Lumi]......	134
Εικόνα 63 Η Παραβολή που απεικονίζει την κίνησή του θεματικού τρένου.	135
Εικόνα 64 Το γράφημα τριωνύμου που απεικονίζει την καθαρή ενέργεια που αποθηκεύεται στο βιοκλιματικό στέγαστρο.....	136
Εικόνα 65 Η Παραβολή που απεικονίζει την κίνησή του θεματικού τρένου.	137
Εικόνα 66 Ανακεφαλαίωση του μικρο-μαθήματος 1 μέσω Βίντεο επισκόπησης και infographic [Interactive book-H5P Lumi, 1η ενότητα]	140
Εικόνα 67 Αναστοχασμός του μικρο-μαθήματος 1 μέσω διαδραστικής δραστηριότητας [Interactive book-H5P Lumi, 2η ενότητα].	142
Εικόνα 68 Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση του μικρο-μαθήματος 1 [Interactive book-H5P Lumi, 3η ενότητα]	143
Εικόνα 69 Η Παραβολή που απεικονίζει την κίνησή του θεματικού τρένου.	146
Εικόνα 70 Εισαγωγή στο ψηφιακό μικρο-μάθημα 2 [Interactive Video-H5P lumi], με ενσωματωμένο AI Avatar.	147
Εικόνα 71 Ρεαλιστικό πρόβλημα του μικρο-μαθήματος 2 [Google Slides].	148
Εικόνα 72 Συνέχεια του εισαγωγικού βίντεο του μικρο-μαθήματος 2 με ενσωματωμένο Quiz [H5P lumi]......	149
Εικόνα 73 Μαθησιακά Αποτελέσματα και Ψηφιακές Ικανότητες του μικρο-μαθήματος 2.	150
Εικόνα 74 Παρουσίαση εννοιών του μικρο-μαθήματος 2 [Course Presentation-H5P Lumi] με ενσωματωμένο AI Avatar.	152
Εικόνα 75 Ταξινόμηση δεδομένων.	153
Εικόνα 76 Υπολογισμός της Διαμέσου.	154
Εικόνα 77 Υπολογισμός της Πρώτου Τεταρτημορίου.	154
Εικόνα 78 Υπολογισμός της Τρίτου Τεταρτημορίου.	154
Εικόνα 79 Υπολογισμός των λοιπών στοιχείων του θηκογράμματος.....	154
Εικόνα 80 Κατασκευή θηκογράμματος.	155
Εικόνα 81 Η Ανατομία του θηκογράμματος.	155
Εικόνα 82 Εικόνα σχολικής τάξης.....	156
Εικόνα 83 Εικόνα "Drag and Drop"	158
Εικόνα 84 Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας του Μικρο-Μαθήματος 2 [Course Presentation-H5P Lumi]......	159
Εικόνα 85 Υπολογισμός της διαμέσου στην Αθήνα, για την περίοδο 1-14 Μαρτίου 2026.....	161
Εικόνα 86 Υπολογισμός του πρώτου τεταρτημορίου Q1 στην Αθήνα, για την περίοδο 1-14 Μαρτίου 2026.	161
Εικόνα 87 Υπολογισμός του τρίτου τεταρτημορίου Q3 στην Αθήνα, για την περίοδο 1-14 Μαρτίου 2026.	161
Εικόνα 88 Υπολογισμός του Ενδοτεταρτημοριακού Εύρους στην Αθήνα, για την περίοδο 1-14 Μαρτίου 2026.	161
Εικόνα 89 Υπολογισμός των λοιπών στοιχείων του θηκογράμματος στην Αθήνα, για την περίοδο 1-14 Μαρτίου 2026.	162
Εικόνα 90 Υπολογισμός των στοιχείων του θηκογράμματος στη Θεσσαλονίκη, για την περίοδο 1-14 Μαρτίου 2026.	162

Εικόνα 91 Κατασκευή θηκογράμματος για το σύνολο δεδομένων της Αθήνας και της Θεσσαλονίκης, κατά την περίοδο 1-14 Μαρτίου 2026.	163
Εικόνα 92 Σύνοψη των ευρημάτων-επίλυση του ρεαλιστικού προβλήματος.	164
Εικόνα 93 Εισαγωγή στην Εξάσκηση Εφαρμογής Δεξιότητας του μικρο-μαθήματος 2	165
Εικόνα 94 Ανακεφαλαίωση του μικρο-μαθήματος 2 [Interactive book-H5P Lumi, 1η ενότητα].	168
Εικόνα 95 Αναστοχασμός του μικρο-μαθήματος 2 μέσω διαδραστικής δραστηριότητας [Interactive book-H5P Lumi, 2η ενότητα]	170
Εικόνα 96 Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση του μικρο-μαθήματος 2 [Interactive book-H5P Lumi, 3η ενότητα].	171
Εικόνα 97 Οδηγίες για τη διεξαγωγή της εξέτασης.	174
Εικόνα 98 Σενάριο Ρεαλιστικού Προβλήματος για το Ψηφιακό Μάθημα.	175
Εικόνα 99 Γράφημα μέσης παγκόσμιας θερμοκρασιακής μεταβολής (σε °C) για την περίοδο 1850–2025.	178
Εικόνα 100 Θηκογράμματα θερμοκρασίας για τον Πλανήτη και την Αρκτική.	181

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1 Μαθησιακά Αποτελέσματα & Ψηφιακές Ικανότητες του Μαθήματος.....	15
Πίνακας 2 Περιγραφή Μαθήματος 1	24
Πίνακας 3 Περιγραφή Μαθήματος 2	28
Πίνακας 4 Περιγραφή Μαθήματος 3	31
Πίνακας 5 Περιγραφή Μαθήματος 4	34
Πίνακας 6 Περιγραφή Μαθήματος 5	36
Πίνακας 7 Σχεδιαστικό Πλαίσιο Μαθησιακών Αποτελεσμάτων και Τεκμηρίωση Σύζευξης με το Πρόγραμμα Σπουδών και το DigComp 3.0.....	45
Πίνακας 8 Κριτήρια Αξιολόγησης Ψηφιακού Μαθήματος.	82
Πίνακας 9 Μαθησιακά Αποτελέσματα του Ψηφιακού Μαθήματος (3η διαφάνεια του talking head video).....	99
Πίνακας 10 Τρόποι - Εργαλεία Μάθησης - Συνεχής Υποστήριξη (3η διαφάνεια του talking head video).....	99
Πίνακας 11 Καλωσόρισμα στο Ψηφιακό Μάθημα – Υπερκείμενο Καθοδήγησης [Interactive book-H5P Lumi, 2η ενότητα].	100
Πίνακας 12 Εισαγωγή - Σκοπός Ψηφιακού Μαθήματος: Υπερκείμενο [Interactive book-H5P Lumi, 2η ενότητα].	102
Πίνακας 13 Μαθησιακά Αποτελέσματα Ψηφιακού Μαθήματος: Υπερκείμενο τύπου "accordion" [Interactive book-H5P Lumi, 3η ενότητα].	103
Πίνακας 14 Δομή του Ψηφιακού Μαθήματος: Υπερκείμενο τύπου "accordion" [Interactive book-H5P Lumi, 4η ενότητα].	104
Πίνακας 15 Άδεια χρήσης του Ψηφιακού Μαθήματος: Υπερκείμενο [Interactive book-H5P Lumi, 5η ενότητα].	105
Πίνακας 16 Σύντομο Βιογραφικό της Δημιουργού του Ψηφιακού Μαθήματος: Υπερκείμενο [Interactive book-H5P Lumi, 6η ενότητα].	106
Πίνακας 17 Προαπαιτούμενες Γνώσεις & Δεξιότητες για το Ψηφιακό Μάθημα: Υπερκείμενο τύπου "accordion" [Interactive book-H5P Lumi, 1η ενότητα].	108
Πίνακας 18 Ελάχιστες Απαραίτητες Υποδομές για το Ψηφιακό Μάθημα: Υπερκείμενο [Interactive book-H5P Lumi, 2η ενότητα].	109

Πίνακας 19 Απαραίτητες ενέργειες για το Ψηφιακό Μάθημα: Υπερκείμενο τύπου "accordion" [Interactive book-H5P Lumi, 1η ενότητα].	110
Πίνακας 20 Ενδεικτικό Πιστοποιητικό που λαμβάνει ο εκπαιδευόμενος μετά την επιτυχή ολοκλήρωση του Ψηφιακού Μαθήματος.	111
Πίνακας 21 Τελική Αξιολόγηση του Ψηφιακού Μαθήματος: Υπερκείμενο [Interactive book-H5P Lumi, 2η ενότητα].	112
Πίνακας 22 Σενάριο (Case Study) για την Τελική Εξέταση του Ψηφιακού Μαθήματος	113
Πίνακας 23 Αφόρμηση μέσω Αποριών [Course Presentation – H5P Lumi] με ενσωματωμένο quiz.	116
Πίνακας 24 Σύνδεση με το "Γιατί" [Course Presentation – H5P Lumi] με ενσωματωμένο quiz.	117
Πίνακας 25 Quiz Επιλογής Στατιστικού Εργαλείου	122
Πίνακας 26 Μαθησιακά Αποτελέσματα και Ψηφιακές Ικανότητες	123
Πίνακας 27 Ερωτήσεις του Question Set	128
Πίνακας 28 Quiz Αυτοαξιολόγησης [Limu H5P]	136
Πίνακας 29 Αναστοχασμός του μικρο-μαθήματος 1 μέσω διαδραστικής δραστηριότητας	142
Πίνακας 30 Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση του μικρο-μαθήματος 2	143
Πίνακας 31 Quiz Αυτοαξιολόγησης [Google Forms].	143
Πίνακας 32 Ημερήσιες μετρήσεις της συγκέντρωσης του CO, κατά την περίοδο 1- 14 Μαρτίου 2026 σε Αθήνα και Θεσσαλονίκη	148
Πίνακας 33 Quiz Επιλογής Στατιστικού Εργαλείου	149
Πίνακας 34 Μαθησιακά Αποτελέσματα και Ψηφιακές Ικανότητες	151
Πίνακας 35 Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών μέσω Question Set	156
Πίνακας 36 Μέγιστες θερμοκρασίες (σε °C) για 14 ημέρες σε δύο τοποθεσίες: στο Αστικό Πάρκο και στο Πυκνοκατοικημένο Κέντρο	165
Πίνακας 37 Quiz Αυτοαξιολόγησης [Limu H5P].	166
Πίνακας 38 Αναστοχασμός του μικρο-μαθήματος 2 μέσω διαδραστικής δραστηριότητας	169
Πίνακας 39 Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση του μικρο-μαθήματος 2	170
Πίνακας 40 Quiz Αυτοαξιολόγησης [Google Forms].	171
Πίνακας 41 Οι Ερωτήσεις του Διαδραστικού Κουίζ για την Τελική Εξέταση του Ψηφιακού Μαθήματος.	175

Περίληψη

Η παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία παρουσιάζει τον σχεδιασμό και την ανάπτυξη ενός ψηφιακού μαθήματος με τίτλο «Μοντελοποιώντας τον Κόσμο: Από τα Μαθηματικά στην Πραγματική Ζωή – Ένα ψηφιακό μάθημα αυτο-μελέτης για μαθητές/τριες της Α΄ Λυκείου».

Το περιεχόμενο του μαθήματος έχει σχεδιαστεί ως υλικό αυτό-μελέτης (self-study), ευθυγραμμισμένο πλήρως με τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα που ορίζονται από το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Λυκείου. Η μεθοδολογική προσέγγιση βασίζεται στη διδασκαλία των μαθηματικών μέσω της μαθηματικής μοντελοποίησης και της επίλυσης ρεαλιστικών προβλημάτων, ενσωματώνοντας σύγχρονα ψηφιακά εργαλεία για την ενίσχυση της ψηφιακής ικανότητας των εκπαιδευομένων.

Το μάθημα δομείται σε δύο μικρο-μαθήματα που εστιάζουν στη μαθηματική μοντελοποίηση ρεαλιστικών προβλημάτων, αξιοποιώντας ανισώσεις 2ου βαθμού και στατιστική ανάλυση, με χρήση λογισμικού όπως το GeoGebra και το Excel. Υλοποιείται μέσω της πλατφόρμας Wix, αξιοποιώντας μία πολυεπίπεδη διδακτική στρατηγική, που περιλαμβάνει διαδραστικό υλικό H5P, οπτικοακουστικά μέσα με χρήση τεχνητής νοημοσύνης και διαμορφωτική αξιολόγηση. Το ψηφιακό μάθημα επιδιώκει να καταστήσει τα μαθηματικά εργαλείο ανάλυσης και λήψης αποφάσεων για τον πραγματικό κόσμο.

Το μάθημα ολοκληρώνεται με τελική αξιολόγηση βασισμένη σε αυθεντικά σενάρια και απονομή ψηφιακού σήματος (Digital Badge) "Math Modeling Level 1".

Λέξεις-κλειδιά: Ψηφιακό Μάθημα, Μαθηματική Μοντελοποίηση, Μικρο-Μάθηση, Αυτό-μελέτη, Ρεαλιστικά Προβλήματα, Α΄ Λυκείου.

Abstract

This master's thesis presents the design and development of a digital course entitled " Learning Mathematics through Modeling and Solving Real-World Problems – A Digital Self-Study Course for Grade 10 Students".

The course content has been designed as self-study material, fully aligned with the expected learning outcomes defined by the New Mathematics Curriculum for High Schools. The methodological approach is based on teaching mathematics through mathematical modeling and real-world problem solving, incorporating modern digital tools to enhance learners' digital competence.

The course is structured into two micro-lessons focusing on the mathematical modeling of realistic problems, utilizing second-degree inequalities and statistical analysis, using software such as GeoGebra and Excel. It is implemented via the Wix platform, employing a multi-layered instructional strategy that includes interactive H5P material, artificial intelligence-generated audiovisual media, and formative assessment. The digital course aims to make mathematics a tool for analysis and decision-making in the real world.

The course concludes with a final performance-based assessment built on authentic scenarios and the awarding of a "Math Modeling Level 1" digital badge.

Keywords: Digital Course, Mathematical Modeling, Micro-learning, Self-study, Real-World Problems, Grade 10.

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή

1.1 Σκοπός της Μεταπτυχιακής Διπλωματικής Εργασίας

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία (ΜΔΕ) επικεντρώνεται στον σχεδιασμό και την ανάπτυξη ενός ψηφιακού μαθήματος αυτο-μελέτης με τίτλο «Μοντελοποιώντας τον Κόσμο: Από τα Μαθηματικά στην Πραγματική Ζωή», που απευθύνεται σε μαθητές/τριες της Α΄ Λυκείου.

Κεντρικός σκοπός της εργασίας είναι ο επαναπροσδιορισμός της διδακτικής της Μαθηματικής Μοντελοποίησης, μέσω της ενσωμάτωσης τεχνολογιών αιχμής και σύγχρονων παιδαγωγικών στρατηγικών, με στόχο την υπέρβαση της παραδοσιακής εστίασης στην αποστήθιση θεωρημάτων. Αντ' αυτού, προωθείται μια ολιστική προσέγγιση όπου τα μαθηματικά μετασχηματίζονται από αφηρημένα σύμβολα σε ένα λειτουργικό εργαλείο ερμηνείας της πραγματικότητας και λήψης τεκμηριωμένων αποφάσεων.

Το ψηφιακό μάθημα είναι πλήρως ευθυγραμμισμένο με τα νέα Προγράμματα Σπουδών (ΠΣ) Μαθηματικών Λυκείου (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2023, ΦΕΚ 1326/Β΄/8-3-2023), υιοθετώντας τον προσανατολισμό τους προς την ανάπτυξη μαθηματικής παιδείας που ξεπερνά την απλή γνωστική κατάκτηση. Αντί της αποσπασματικής προσέγγισης, το ψηφιακό μάθημα δομείται πάνω σε εννοιολογικούς πυλώνες που συνδέουν τις ανισώσεις 2ου βαθμού και τη στατιστική ανάλυση με την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου.

Επιδιώκοντας την ενεργό συμμετοχή, η εργασία αξιοποιεί το μοντέλο της Μάθησης μέσω Επίλυσης Προβλημάτων (PBL), ενσωματώνοντας ψηφιακά εργαλεία, όπως GeoGebra (GeoGebra, 2026), Excel (Microsoft, 2026a), H5P (Lumi Education, 2026), για την καλλιέργεια των ψηφιακών ικανοτήτων των μαθητών/τριών, σε πλήρη εναρμόνιση με το ευρωπαϊκό πλαίσιο DigComp 3.0 (Cosgrove & Cachia, 2025).

Μέσω μιας πολυεπίπεδης στρατηγικής που κορυφώνεται στην απονομή ψηφιακού σήματος (Digital Badge) "Math Modeling Level 1", το μάθημα στοχεύει να μετατρέψει τα μαθηματικά σε ένα λειτουργικό εργαλείο ανάλυσης, κριτικής σκέψης και τεκμηριωμένης λήψης αποφάσεων.

1.2 Τεκμηρίωση της Ανάγκης για Ανάπτυξη των Επιλεγμένων Ικανοτήτων

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στην Α΄ Λυκείου συχνά προσκρούει στο «χάσμα εφαρμογής»: τη δυσκολία των μαθητών/τριών να γεφυρώσουν την αλγεβρική κατάκτηση των εννοιών –όπως είναι οι ανισώσεις 2ου βαθμού– με την πρακτική τους εφαρμογή σε πραγματικά προβλήματα μοντελοποίησης (Verschaffel et al., 2020). Αν και οι μαθητές/τριες δύνανται να αναπαράγουν αλγοριθμικές διαδικασίες, συχνά αδυνατούν να μεταφράσουν την αφηρημένη μαθηματική σχέση σε μια ρεαλιστική ερμηνεία, περιορίζοντας τη μαθηματική τους σκέψη σε ένα πλαίσιο θεωρητικής αποστήθισης.

Η ανάγκη για την ανάπτυξη της ικανότητας Μαθηματικής Μοντελοποίησης καθίσταται, συνεπώς, επιτακτική. Σε ευθυγράμμιση με το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2023), τα προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΜΑ) στοχεύουν στην καλλιέργεια της κριτικής σκέψης, εξοπλίζοντας τους/τις μαθητές/τριες

με τα απαραίτητα εφόδια για τη λήψη τεκμηριωμένων αποφάσεων μέσα σε περιβάλλοντα που χαρακτηρίζονται από τον καταγισμό δεδομένων.

Κεντρικό στοιχείο του παρόντος Ψηφιακού Μαθήματος είναι η Ριζοσπαστική Διαθεματικότητα και Συνοχή: το πρόβλημα-αφετηρία σχεδιάζεται ώστε να λειτουργεί ως γέφυρα ανάμεσα στα διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα. Μέσω αυτού, οι μαθητές/τριες βλέπουν στην πράξη πώς τα Μαθηματικά «συνομιλούν» με ποικίλα επιστημονικά πεδία και συνδέονται άρρηκτα με τον πραγματικό κόσμο, ξεπερνώντας τον κατακερματισμό της γνώσης. Η διαθεματική αυτή προσέγγιση αποτελεί το όχημα για την επίτευξη των προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων του παρόντος Ψηφιακού Μαθήματος. Οι μαθητές/τριες, μέσω της αλγεβρικής και γραφικής διερεύνησης (MA1.1, MA1.2) και της στατιστικής ανάλυσης δεδομένων (MA2.1, MA2.2), μετατρέπουν τη μαθηματική θεωρία σε εργαλείο μοντελοποίησης και κριτικής ερμηνείας του κόσμου τους (Πίνακας 1).

Επιδιώκοντας την κάλυψη του κενού μεταξύ θεωρίας και πράξης, η εργασία στοχεύει στην ενίσχυση της ικανότητας των μαθητών/τριών να λειτουργούν ως «αναλυτές δεδομένων». Η επιλογή αυτή τεκμηριώνεται από την ανάγκη μετάβασης από την παθητική γνώση στην ενεργό χρήση, όπου η ψηφιακή ικανότητα «DigComp 3.0, 1.3 Managing information: search, evaluation and management» (Cosgrove & Cachia, 2025) ενσωματώνεται οργανικά στη μαθηματική διαδικασία. Με την ανάπτυξη αυτών των δεξιοτήτων και την υιοθέτηση διαθεματικών προσεγγίσεων, το διδασκόμενο υποκείμενο παύει να είναι απλός χρήστης κανόνων και μετατρέπεται σε κριτικό δρώντα, ικανό να διαχειρίζεται πληροφορίες και να εξάγει συμπεράσματα σε σύνθετες πραγματικές καταστάσεις (Πίνακας 1).

Πίνακας 1 Μαθησιακά Αποτελέσματα & Ψηφιακές Ικανότητες του Μαθήματος

Με την ολοκλήρωση του Ψηφιακού Μαθήματος, οι μαθητές/τριες θα είναι σε θέση:
MA1.1: Να κατανοείτε την έννοια "αλγεβρική και γραφική επίλυση ανίσωσης 2ου βαθμού" και να την εφαρμόζετε.
MA-1.2: Να αναπτύξετε τη δεξιότητα μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων με ανισώσεις 2ου βαθμού.
MA2.1: Να κατανοείτε την έννοια "Οριακή τιμή ενός συνόλου ποσοτικών δεδομένων" μέσα από την κατασκευή "Θηκογράμματος".
MA-2.2: Να αναπτύξετε τη δεξιότητα σύγκρισης των Θηκογραμμάτων δύο ή περισσότερων συνόλων ποσοτικών δεδομένων, για την επίλυση σχετικών προβλημάτων.
Τα παραπάνω Μαθησιακά Αποτελέσματα έχουν οριστεί σύμφωνα με το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά του Λυκείου (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2023, ΦΕΚ 1326/Β' /8-3-2023) και συγκεκριμένα, συνδέονται με τα ακόλουθα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ):
Αλ.Σχ.10.8: Να επιλύουν ανισώσεις 2ου βαθμού αλγεβρικά και γραφικά- Αλ.Σχ.10.8.
Αλ.Σχ.10.9: Να χρησιμοποιούν ανισώσεις 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση και στην επίλυση προβλημάτων.
Σ.Δ.10.2: Να κατασκευάζουν πολλαπλά θηκογράμματα, υπολογίζοντας και οριακές τιμές, για να περιγράψουν τις τιμές ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη

ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.

Σ.Ε.10.1: Με τη βοήθεια των θηκογραμμάτων να κάνουν συγκρίσεις και να εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που έχουν οι τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού (επίλυση προβλημάτων).

Επιπλέον, τα προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα του Ψηφιακού Μαθήματος συνδέονται με την **Ψηφιακή Ικανότητα 1.3** Managing information, **Area:** Information search, evaluation and management, όπως ορίζεται στο Ευρωπαϊκό Πλαίσιο Ψηφιακών Ικανοτήτων για τους Πολίτες **DigComp 3.0** (Cosgrove & Cachia, 2025).

1.3 Ψηφιακά Μαθήματα ως Πρόσφορη Εκπαιδευτική Μέθοδος

Η αξιοποίηση του ψηφιακού περιβάλλοντος ως κύριου διαύλου διδασκαλίας δεν αποτελεί απλώς μια τεχνική επιλογή, αλλά μια στρατηγική απάντηση στις σύγχρονες εκπαιδευτικές προκλήσεις (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2023; Reinhold et al., 2024; Σάμψων, 2026a). Η τεκμηρίωση της προσφορότητας της μεθόδου εστιάζει στους ακόλουθους άξονες:

- **Ενίσχυση της Μαθητικής Αυτονομίας και Εξατομίκευσης:** Η ψηφιακή πλατφόρμα απελευθερώνει τον/τη μαθητή/τρια από τον «ρυθμό της τάξης», επιτρέποντας τη μη γραμμική πλοήγηση. Μέσω της πρόσβασης σε επεξηγηματικούς πόρους (π.χ. εξωτερικούς συνδέσμους λογισμικών) ανάλογα με τις ατομικές ανάγκες, ενισχύεται η αυτονομία στη μάθηση και η υπευθυνότητα του/της εκπαιδευόμενου/ης. Στο πλαίσιο αυτό, η επιλογή των μαθητών/τριών της Α' Λυκείου ως ομάδας-στόχου ευθυγραμμίζεται με τις παιδαγωγικές παραμέτρους του εγχειρήματος, καθώς το προτεινόμενο ψηφιακό μάθημα υιοθετεί μια αρχιτεκτονική αυτόνομης, ασύγχρονης μάθησης χωρίς την καθοδήγηση εκπαιδευτικού (tutorless). Σε αντίθεση με τις μικρότερες βαθμίδες, όπου η απουσία διαμεσολάβησης ενέχει ρίσκο ασφάλειας και μειωμένης αποτελεσματικότητας, οι έφηβοι μαθητές/τριες της Α' λυκείου διαθέτουν τον απαιτούμενο βαθμό αυτορρύθμισης, ψηφιακής ετοιμότητας και γνωστικής ωριμότητας για να πλοηγηθούν με ασφάλεια και να ανταποκριθούν αυτόνομα στις απαιτήσεις του μαθήματος.
- **Οπτικοποίηση Αφηρημένων Εννοιών:** Η διδασκαλία των Μαθηματικών συχνά εγκλωβίζεται στον συμβολισμό. Η χρήση ψηφιακών εργαλείων, όπως το GeoGebra (GeoGebra, 2026), επιτρέπει τη δυναμική οπτικοποίηση ανισώσεων 2ου βαθμού, μετατρέποντας μια αφηρημένη μαθηματική σχέση σε μια καθαρή εικόνα (Εικόνα 1). Αυτή η μετατροπή διευκολύνει την εννοιολογική κατανόηση, καθιστώντας το ψηφιακό εργαλείο ένα «νοητικό παράθυρο» στη δομή του προβλήματος (Verschaffel et al., 2020).
- **Πολυτροπική Οικοδόμηση της Γνώσης:** Η χρήση διαδραστικών μέσων, όπως τα «Interactive Books» (Lumi Education, 2026) και τα οπτικοακουστικά μέσα που δημιουργήθηκαν με τεχνητή νοημοσύνη, προσφέρουν μια πολυεπίπεδη εμπειρία μάθησης. Το οπτικό υλικό λειτουργεί ως «νοητικός χάρτης», διευκολύνοντας την κατανόηση των εννοιολογικών διασυνδέσεων και μειώνοντας το γνωστικό φορτίο κατά την επεξεργασία σύνθετων πληροφοριών.

- Καλλιέργεια Ψηφιακών Ικανοτήτων (DigComp 3.0): Το ψηφιακό μάθημα δεν περιορίζεται στη μαθηματική γνώση, αλλά ενσωματώνει οργανικά την Ψηφιακή Ικανότητα 1.3 «Managing Information: search, evaluation and management» (Cosgrove & Cachia, 2025). Οι μαθητές/τριες μαθαίνουν να αξιοποιούν προηγμένα υπολογιστικά φύλλα (Excel) για να μετατρέπουν όγκους ακατέργαστων δεδομένων σε δομημένη πληροφορία, μια ικανότητα απαραίτητη για τον σύγχρονο πολίτη.
- Αναστοχασμός και Διαμορφωτική Αξιολόγηση: Μέσω της δομής των υπερκειμένων τύπου "accordion" και της δυνατότητας ανατροφοδότησης, το ψηφιακό περιβάλλον ενθαρρύνει τον ενεργό αναστοχασμό. Οι μαθητές/τριες καλούνται να συνδέσουν τις νέες γνώσεις με τις προϋπάρχουσες, μεταβαίνοντας από την παθητική αποδοχή στην ενεργό κριτική αξιολόγηση των μαθησιακών αποτελεσμάτων τους. Η διαδικασία αυτή ενισχύεται από τη χρήση εργαλείων αναλυτικής διδασκαλίας (teaching analytics), τα οποία καθίστανται καθοριστικά για την υποστήριξη του αναστοχαστικού επανασχεδιασμού της εκπαιδευτικής διαδικασίας, ειδικά σε γνωστικά αντικείμενα STEM (Sergis & Sampson, 2016a). Στο πλαίσιο του παρόντος ψηφιακού μαθήματος, ο αναστοχασμός δεν αποτελεί μια τυπική διαδικασία, αλλά μια συστηματική πρακτική που επιτρέπει στον/στη μαθητή/τρια να αξιολογεί και να αναδιαμορφώνει τη μαθησιακή πορεία του με βάση τα δεδομένα της επίδοσης και της αλληλεπίδρασης.

Η πρόκληση της ψηφιακής μετάβασης, αν και απαιτητική ως προς τον σχεδιασμό, προσφέρει το απαραίτητο πλαίσιο για να αποκτήσουν τα Μαθηματικά τον ρόλο που τους αξίζει: να μην είναι ένας κατάλογος τύπων, αλλά η γλώσσα με την οποία ερμηνεύουμε και μοντελοποιούμε την πραγματικότητα (Kaiser & Schwarz, 2010).



Εικόνα 1 Ψηφιακή μάθηση (e-learning).

Σημείωση. Αναπαραγωγή από At home in the new era of digital learning, από H. Scherlund, 2020, Helge Scherlund's eLearning News (<https://scherlund.blogspot.com/2020/09/at-home-in-new-era-of-digital-learning.html>).

1.4 Η Επιλογή της Μικρο-μάθησης (Micro-learning)

Η στρατηγική επιλογή του μοντέλου της μικρο-μάθησης για τον σχεδιασμό του παρόντος ψηφιακού μαθήματος δεν αποτελεί απλώς μια διευκόλυνση στη διάρθρωση του υλικού, αλλά μια στοχευμένη παιδαγωγική απόφαση που εδράζεται στην ανάγκη για ευελιξία και γνωστική αποτελεσματικότητα στο σύγχρονο ψηφιακό οικοσύστημα (Boumalek et al., 2026; Σάμψων, 2026a). Η τεκμηρίωση της επιλογής αυτής αναλύεται στους εξής άξονες:

- **Βελτιστοποίηση του Γνωστικού Φορτίου:** Η διάσπαση της μαθησιακής ύλης σε μικρά, αυτοτελή αντικείμενα επιτρέπει στους μαθητές και τις μαθήτριες να εστιάζουν σε συγκεκριμένους, διαχειρίσιμους στόχους, αποτρέποντας την υπερφόρτωση της βραχυπρόθεσμης μνήμης. Με αυτόν τον τρόπο, διευκολύνεται η βαθιά επεξεργασία της πληροφορίας και η σταδιακή εσωτερίκευση των εννοιών, αποφεύγοντας τον κατακερματισμό της προσοχής που συχνά συνοδεύει τα εκτενή διδακτικά κείμενα (Dolasinski & Reynolds, 2020). Επιπλέον, η δυνατότητα του/της εκπαιδευόμενου/ης να πλοηγείται εξατομικευμένα στο μαθησιακό υλικό υποστηρίζεται από σύγχρονες προσεγγίσεις στην προσαρμοστική μάθηση (adaptive learning). Η λογική αυτή, όπως τεκμηριώνεται από τους Sergis και Sampson (2015), επιτρέπει τη βελτιστοποίηση των συστάσεων μαθησιακών αντικειμένων, διασφαλίζοντας ότι η μαθησιακή διαδρομή ανταποκρίνεται στις ιδιαίτερες γνωστικές ανάγκες του/της μαθητή/τριας. Κατ' αυτόν τον τρόπο, το ψηφιακό μάθημα δεν λειτουργεί ως μια ενιαία γραμμική ακολουθία, αλλά ως ένα δυναμικό σύστημα που προσαρμόζεται στη μαθησιακή πρόοδο.
- **Παιδαγωγική Ευελιξία και Προσωπική Αυτονομία:** Το μοντέλο υποστηρίζει τη μη γραμμική πλοήγηση, επιτρέποντας στους/στις εκπαιδευόμενους/ες να προσαρμόζουν τη μαθησιακή τους διαδρομή στον προσωπικό τους χρόνο και ρυθμό. Η δυνατότητα επιλογής της σειράς μελέτης ή η επανατροφοδότηση μέσω επανάληψης συγκεκριμένων μικρο-ενοτήτων ενισχύει το αίσθημα της αυτονομίας, καθιστώντας τον/τη μαθητή/τρια κύριο της μαθησιακής του/της διαδικασίας (Εικόνα 2).



Εικόνα 2 Microlearning ως μοντέλο ψηφιακής μάθησης.

Σημείωση. Αναπαραγωγή από *Microlearning: Reshaping Education on How We Learn Information and Skills*, από S. Nandi, 2019, Techno FAQ (<https://technofaq.org/posts/2019/09/microlearning-reshaping-education-on-how-we-learn-information-and-skills/>).

- **Ευκολία Διαμορφωτικής Αξιολόγησης:** Η μικρο-μάθηση επιτρέπει τη συνεχή παρακολούθηση της προόδου μέσα από συχνά, σύντομα τεστ αυτοαξιολόγησης. Αυτή η διαδικασία επιτρέπει στον/στη μαθητή/τρια να εντοπίζει έγκαιρα τις γνωστικές του/της ελλείψεις και να επανέρχεται στο κατάλληλο διδακτικό υλικό, καθιστώντας την αξιολόγηση μέρος της μάθησης και όχι απλώς το τελικό της στάδιο. Η υιοθέτηση της μικρο-μάθησης επιτρέπει τη μετατροπή της μαθησιακής διαδικασίας σε μια διαδοχική, διαχειρίσιμη και υψηλής ποιότητας ακολουθία, η οποία ευθυγραμμίζεται με τις ανάγκες των ψηφιακά ιθαγενών μαθητών/τριών, καθιστώντας τη μαθηματική μοντελοποίηση ένα προσιτό και ουσιαστικό εργαλείο γνώσης.

Η υιοθέτηση αυτής της προσέγγισης μετατρέπει τη μαθησιακή διαδικασία σε μια διαδοχική και διαχειρίσιμη ακολουθία, καθιστώντας την κατάλληλη για την ανάπτυξη σύνθετων ικανοτήτων στο σύγχρονο ψηφιακό οικοσύστημα.

1.5 Συνεισφορά της Μεταπτυχιακής Διπλωματικής Εργασίας στο Πεδίο της Ψηφιακής Μάθησης

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία αποσκοπεί στο να παρουσιάσει μια δομημένη πρόταση σχεδιασμού για τη σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών, συνδυάζοντας την παιδαγωγική θεωρία με την ψηφιακή πράξη (Attard et al., 2020; Lohr et al., 2024). Η συμβολή της στο πεδίο της Ψηφιακής Μάθησης επικεντρώνεται στους εξής άξονες:

- **Σχεδιαστική Γεφύρωση Θεωρίας και Πράξης:** Μέσω της ανάπτυξης ψηφιακών σεναρίων μοντελοποίησης, η εργασία προτείνει έναν τρόπο αξιοποίησης ψηφιακών εργαλείων, όπως το GeoGebra (GeoGebra, 2026) και το Excel (Microsoft, 2026), για τη μετάβαση από την αλγεβρική θεωρία στην εφαρμόσιμη γνώση.
- **Αξιοποίηση των Νέων Προγραμμάτων Σπουδών:** Η εργασία μετασχηματίζει τις κατευθυντήριες γραμμές του νέου ΠΣ (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2023) σε ένα συγκεκριμένο, διαδραστικό ψηφιακό μάθημα αυτό-μελέτης για μαθητές, προσφέροντας ένα λειτουργικό παράδειγμα εφαρμογής αυτών των αρχών στο υλικό.
- **Εφαρμογή Αρχών Μικρο-μάθησης και Πολυτροπικότητας:** Ο σχεδιασμός του μαθήματος αξιοποιεί το μοντέλο της μικρο-μάθησης (micro-learning) και σύγχρονα μέσα για την παραγωγή πολυτροπικού υλικού, με στόχο την ενίσχυση της αυτο-κατεύθυνσης των μαθητών (Boumalek et al., 2026; Dolasinski & Reynolds, 2020).
- **Ενίσχυση της Διαθεματικότητας:** Μέσω του σχεδιασμού προβλημάτων-αφετηριών, αναδεικνύεται η δυνατότητα σύνδεσης των Μαθηματικών με πραγματικά συμφραζόμενα, προωθώντας μια ολιστική προσέγγιση της μάθησης.
- **Πρόταση Εναλλακτικών Τρόπων Αναγνώρισης Μάθησης:** Η ενσωμάτωση του συστήματος ψηφιακών σημάτων (Digital Badges) "Math Modeling Level 1" προτείνεται ως ένα εργαλείο ανατροφοδότησης και επιβράβευσης της ατομικής προσπάθειας των μαθητών σε περιβάλλοντα ψηφιακής μάθησης (Pichette et al., 2021).

Συνολικά, η εργασία φιλοδοξεί να αποτελέσει ένα παράδειγμα μελέτης περίπτωσης (case study) για τον σχεδιασμό ψηφιακού εκπαιδευτικού υλικού στα Μαθηματικά του Λυκείου, αναδεικνύοντας τις δυνατότητες και τους περιορισμούς μιας τέτοιας προσέγγισης (Watson et al., 2014).

Κεφάλαιο 2. Επισκόπηση Πεδίου

2.1 Μεθοδολογία Αναζήτησης και Κριτήρια Επιλογής Ψηφιακών Μαθημάτων

Η παρούσα ενότητα περιγράφει τη συστηματική διαδικασία αναζήτησης, αξιολόγησης και επιλογής ψηφιακών μαθημάτων, τα οποία αποτελούν το θεμέλιο για την κατανόηση των σύγχρονων τάσεων στη διδασκαλία της Μαθηματικής Μοντελοποίησης και της Ανάλυσης Δεδομένων. Η διαδικασία αυτή δεν υπήρξε τυχαία, αλλά διέπεται από αυστηρά παιδαγωγικά και τεχνολογικά κριτήρια που διασφαλίζουν την ποιότητα, την επιστημονική εγκυρότητα και τη συνάφεια με τους στόχους της παρούσας Μεταπτυχιακής Διπλωματικής Εργασίας (ΜΔΕ).

Ο Ρόλος της Ψηφιακής Μάθησης στο Σύγχρονο Εκπαιδευτικό Τοπίο

Στο τρέχον εκπαιδευτικό περιβάλλον, η ψηφιακή μάθηση έχει μετατοπιστεί από μια συμπληρωματική λύση σε έναν κεντρικό πυλώνα εκπαιδευτικής στρατηγικής. Η ανάγκη για ευελιξία, εξατομίκευση και πρόσβαση σε παγκόσμιας κλάσης εκπαιδευτικούς πόρους καθιστά την ψηφιακή εκπαίδευση αναγκαία για την προετοιμασία των μαθητών/τριών του 21ου αιώνα. Η μελέτη υπαρχόντων ψηφιακών μαθημάτων πριν από τον σχεδιασμό μιας νέας πρότασης είναι καθοριστικής σημασίας, καθώς επιτρέπει στον/στην εκπαιδευτικό-σχεδιαστή να αναγνωρίσει «καλές πρακτικές», να αποφύγει συνηθισμένα διδακτικά σφάλματα και να αξιολογήσει την αποτελεσματικότητα διαφόρων στρατηγικών (όπως η μάθηση μέσω επίλυσης προβλημάτων ή η χρήση δυναμικών λογισμικών) σε πραγματικές συνθήκες. Με τη συστηματική επισκόπηση αυτών των μαθημάτων, εξασφαλίζουμε ότι η δική μας πρόταση θα εδράζεται σε δοκιμασμένες αρχές, προσφέροντας παράλληλα καινοτομίες που ανταποκρίνονται στις συγκεκριμένες ανάγκες των μαθητών/τριών της Α' Λυκείου.

Η Διαδικασία Αναζήτησης

Η αναζήτηση πραγματοποιήθηκε σε διεθνείς πλατφόρμες εκπαιδευτικού περιεχομένου, όπως το edX (edX., n.d.) και το Coursera (Coursera, n.d.), λόγω του κύρους των συνεργαζόμενων πανεπιστημιακών ιδρυμάτων και της υψηλής ποιότητας του διδακτικού υλικού τους. Παράλληλα, εξετάστηκαν διαθέσιμοι πόροι που προάγουν τη μαθηματική εγγραμματοσύνη, επιδιώκοντας τη σύνδεση με τις απαιτήσεις του Νέου Προγράμματος Σπουδών (Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού, χ.χ.).

Οι λέξεις-κλειδιά που χρησιμοποιήθηκαν για τον εντοπισμό του υλικού περιλάμβαναν όρους όπως: "Algebraic Methods and Applied Mathematics", "Precalculus and Mathematical Modeling", "Mathematics Anxiety and Conceptual Understanding", "Foundation Mathematics for STEM" και "Digital Tools for Secondary Mathematics".

Κριτήρια Επιλογής και Φιλτράρισμα

Για την τελική επιλογή των αντιπροσωπευτικών μαθημάτων που αναλύονται στη συνέχεια, εφαρμόστηκαν τα ακόλουθα κριτήρια:

- Παιδαγωγική Συνάφεια: Επιλέχθηκαν μαθήματα που ενσωματώνουν τη μάθηση μέσω επίλυσης προβλημάτων (PBL), προάγοντας την ενεργό εμπλοκή του εκπαιδευόμενου και την κατανόηση της λογικής πίσω από τους μαθηματικούς τύπους.

- Τεχνολογική Ενσωμάτωση: Προτεραιότητα δόθηκε σε μαθήματα που αξιοποιούν ψηφιακά εργαλεία και τεχνικές που διευκολύνουν την οπτικοποίηση των μαθηματικών εννοιών.
- Διαθεματικότητα: Αναζητήθηκαν μαθήματα που αποδεικνύουν τη χρησιμότητα των Μαθηματικών ως εργαλείο ερμηνείας του πραγματικού κόσμου (π.χ. κοινωνικές επιστήμες, STEM).
- Απομυθοποίηση της Δυσκολίας: Εντάχθηκαν στο επιλεγμένο δείγμα μαθήματα που στοχεύουν στην αντιμετώπιση του "μαθηματικού άγχους", προσφέροντας μια περισσότερο υποστηρικτική και εννοιολογική προσέγγιση (Luttenberger, 2018).

Στόχος της Επισκόπησης

Η επιλογή και ανάλυση των ψηφιακών μαθημάτων που ακολουθεί, βασίζεται στην παραδοχή ότι η αποτελεσματική ένταξη της τεχνολογίας απαιτεί ένα ολοκληρωμένο πλαίσιο ανάλυσης δεδομένων, το οποίο μπορεί να υποστηρίξει τη σχολική ηγεσία στην κατανόηση της πολυπλοκότητας της σύγχρονης εκπαιδευτικής διαδικασίας (Sergis & Sampson, 2016b).»

Μέσα από την κριτική ανάλυση αυτών των μαθημάτων, επιδιώκεται ο εντοπισμός στρατηγικών που μπορούν να προσαρμοστούν στο δικό μου ψηφιακό μάθημα. Η ανάλυση εστιάζει στη δομή, στον φόρτο εργασίας, στις μεθόδους αξιολόγησης και στην υποστήριξη της μαθητικής αυτονομίας, λειτουργώντας ως οδικός χάρτης για τη δημιουργία μιας μαθησιακής εμπειρίας που μετατρέπει τον/τη μαθητή/τρια σε κριτικό αναλυτή δεδομένων.

Στους Πίνακες 2 έως 6 παρατίθενται τα στοιχεία περιγραφής και ανάλυσης πέντε επιλεγμένων ενδεικτικών ψηφιακών μαθημάτων, τα οποία αναδείχθηκαν μέσω της συστηματικής επισκόπησης του πεδίου και αποτελούν τη βάση για την κριτική αξιολόγηση των σύγχρονων τάσεων στη διδακτική των Μαθηματικών.

2.2 Ανάλυση Μαθήματος 1: A-level Mathematics for Year 12-- Course 1: Algebraic Methods, Graphs and Applied Mathematics Methods

2.2.1 Περιγραφή του Μαθήματος 1

Το μάθημα «A-level Mathematics for Year 12 - Course 1: Algebraic Methods, Graphs and Applied Mathematics Methods» αποτελεί μια συστηματική εισαγωγή στις βασικές αλγεβρικές μεθόδους που απαιτούνται για το προχωρημένο επίπεδο σπουδών A-level (Imperial College London, n.d.). Η δομή του είναι σχεδιασμένη ώστε να ενδυναμώνει τις μαθηματικές δεξιότητες των μαθητών/τριών, δίνοντας έμφαση στην αλγεβρική ευχέρεια (fluency) και την οικοδόμηση αυτοπεποίθησης σε θέματα STEM (Πίνακας 2).

Το πρόγραμμα δομείται γύρω από τρεις βασικούς πυλώνες:

- Αλγεβρικές Μέθοδοι: Εστίαση στον χειρισμό παραστάσεων, την επίλυση εξισώσεων και την εμβάθυνση στις αλγεβρικές δομές.
- Γραφικές Παραστάσεις: Χρήση των γραφημάτων ως οπτικό εργαλείο για την ερμηνεία συναρτήσεων και τη μελέτη των ιδιοτήτων τους.

- Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Μέθοδοι: Σύνδεση της θεωρητικής γνώσης με προβλήματα εφαρμοσμένης φύσης, προετοιμάζοντας τους εκπαιδευόμενους για τη μοντελοποίηση καταστάσεων.

Το μάθημα απευθύνεται σε μαθητές/τριες Λυκείου με υψηλές ακαδημαϊκές προσδοκίες, παρέχοντας ένα πλαίσιο που συνδυάζει την αυστηρότητα της μαθηματικής απόδειξης με την αναγκαιότητα της εφαρμογής.

2.2.2 Κριτική Προσέγγιση και Σύνδεση με το παρόν Ψηφιακό Μάθημα

Η κριτική ανάλυση του συγκεκριμένου μαθήματος αναδεικνύει σημαντικές διαφορές και σημεία προβληματισμού σε σχέση με τη διδακτική προσέγγιση του παρόντος ψηφιακού μαθήματος.

Παιδαγωγικά και Τεχνολογικά Σημεία:

Το μάθημα 1 του Imperial College επιτυγχάνει μια ισορροπημένη προσέγγιση μεταξύ της αλγεβρικής άσκησης και της εφαρμοσμένης σκέψης. Ωστόσο, μια κύρια διαφοροποίηση εντοπίζεται στη μεθοδολογία: ενώ το μάθημα 1 ακολουθεί μια πιο εκτενή και γραμμική διδακτική δομή, η πρόταση του παρόντος ψηφιακού μαθήματος βασίζεται στη Μικρομάθηση (Micro-learning).

Η Μικρομάθηση επιτρέπει τη διάσπαση της πληροφορίας σε διαχειρίσιμες ενότητες, γεγονός που ευθυγραμμίζεται καλύτερα με τις σύγχρονες ανάγκες των μαθητών/τριών, σε αντίθεση με τη μακροσκελή δομή του μαθήματος 1.

Αυθεντικότητα Προβλημάτων και Πραγματική Ζωή:

Παρά την αξιολογημένη ποιότητά του, το μάθημα 1 παραμένει σε ορισμένα σημεία «παραδοσιακό». Από την άλλη πλευρά, το παρόν ψηφιακό μάθημα, που σχεδιάστηκε και αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της ΜΔΕ, υπερτερεί στον αριθμό των Αυθεντικών Προβλημάτων (Authentic Problems) που συνδέονται άρρηκτα με την καθημερινότητα και την πραγματική ζωή.

Εκεί όπου το μάθημα 1 διδάσκει την άλγεβρα κυρίως ως «εργαλείο» για την επίλυση κλασικών ασκήσεων, η πρόταση του παρόντος ψηφιακού μαθήματος επιδιώκει να τη διδάξει ως «γλώσσα ερμηνείας» του κόσμου, ενισχύοντας τη διαθεματικότητα.

Επίπεδο Δυσκολίας και Προσβασιμότητα:

Επιπλέον, το επίπεδο δυσκολίας του μαθήματος 1 του Imperial College είναι ιδιαίτερα απαιτητικό και αυστηρό, γεγονός που ενδέχεται να προκαλέσει «μαθηματικό άγχος» σε μέσους μαθητές/τριες. Η διδακτική παρέμβαση του παρόντος ψηφιακού μαθήματος εστιάζει στην απομυθοποίηση της δυσκολίας, χρησιμοποιώντας διαφοροποιημένες προσεγγίσεις που καθιστούν τα μαθηματικά πιο προσιτά.

Με άλλα λόγια, επιβεβαιώνεται η ανάγκη για τη χρήση δυναμικών εργαλείων (όπως το GeoGebra) τα οποία, αν και απουσιάζουν από τη δομή του μαθήματος 1, αποτελούν τον πυρήνα της προσπάθειας του παρόντος ψηφιακού μαθήματος, για ενεργό συμμετοχή και πειραματισμό.

2.2.3 Αναλυτική Παρουσίαση Ενοτήτων Μαθήματος 1

Το μάθημα «A-level Mathematics for Year 12- Course 1: Algebraic Methods, Graphs and Applied Mathematics Methods» είναι οργανωμένο σε επτά θεματικές ενότητες, οι οποίες καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα της Άλγεβρας, της Γεωμετρίας, της Μηχανικής και της Στατιστικής (Πίνακας 2).

Ενότητες 1-3 (Άλγεβρα & Πολυώνυμα):

Περιγραφή: Περιλαμβάνουν τις δυνάμεις, τις ρίζες, τις ανισώσεις και το Θεώρημα του Υπολοίπου.

Κριτική παρατήρηση: Οι εν λόγω ενότητες συγκροτούν τον θεμελιώδη πυρήνα της ακαδημαϊκής προετοιμασίας. Ωστόσο, ενώ η προσέγγιση του μαθήματος 1 εστιάζει στην άρτια τεχνική και αλγοριθμική διεκπεραίωση, το παρόν ψηφιακό μάθημα προκρίνει μια λειτουργική αξιοποίηση της μαθηματικής γνώσης. Για παράδειγμα, ενώ το μάθημα 1 δίνει προτεραιότητα στην αμιγώς αλγοριθμική εύρεση ριζών, το παρόν ψηφιακό μάθημα εντάσσει την έννοια σε ένα διεπιστημονικό πλαίσιο, εφαρμόζοντάς την στην επίλυση αυθεντικών προβλημάτων από το πεδίο των οικονομικών, των φυσικών και των κοινωνικών επιστημών. Με αυτόν τον τρόπο, η μαθηματική έννοια μετατρέπεται από αυτοσκοπό σε ένα εργαλείο ερμηνείας πραγματικών καταστάσεων.

Ενότητες 4-5 (Γεωμετρία & Γραφήματα):

Περιγραφή: Εστίαση στη γεωμετρία του κύκλου και στις τεχνικές μετασχηματισμού/σχεδίασης καμπυλών.

Κριτική παρατήρηση: Εδώ αναδεικνύεται η διαφορά στη χρήση της τεχνολογίας. Ενώ το μάθημα 1 εστιάζει στην «τεχνική» σχεδίασης με το χέρι, το παρόν ψηφιακό μάθημα αξιοποιεί το GeoGebra. Η ενεργητική εμπλοκή του/της μαθητή/τριας στο να μετασχηματίζει μια συνάρτηση και να βλέπει άμεσα τη μεταβολή της στο επίπεδο, προσφέρει μια βαθύτερη κατανόηση της συμπεριφοράς των συναρτήσεων που η στατική σχεδίαση δεν μπορεί να επιτύχει.

Ενότητες 6-7 (Εισαγωγή στη Μηχανική & Στατιστική):

Περιγραφή: Μελέτη της κίνησης, ταχύτητας/επιτάχυνσης και βασικές έννοιες δειγματοληψίας και ερμηνείας στατιστικών δεδομένων.

Κριτική παρατήρηση: Αυτές οι ενότητες είναι οι πιο «εφαρμοσμένες» του μαθήματος 1. Ωστόσο, η διαφορά έγκειται στο πλαίσιο (context). Το μάθημα 1 χρησιμοποιεί τυπικά προβλήματα (π.χ. κίνηση σε ευθεία), ενώ στο παρόν ψηφιακό μάθημα, τα δεδομένα προέρχονται από την πραγματική ζωή (π.χ. ανάλυση κίνησης οχημάτων σε πραγματικό χρόνο από ανοιχτά δεδομένα - Open Data). Αυτό μετατρέπει τη στατιστική από «θεωρία ανάλυσης» σε «εργαλείο λήψης αποφάσεων».

Πίνακας 2 Περιγραφή Μαθήματος 1

Περιγραφή Μαθήματος 1	
Τίτλος Μαθήματος	A-level Mathematics for Year 12 - Course 1: Algebraic Methods, Graphs and Applied Mathematics Methods

Σύντομη Περιγραφή	Εισαγωγή στις βασικές αλγεβρικές μεθόδους, γραφικές παραστάσεις και εφαρμογές, προσαρμοσμένο στο επίπεδο A-level, με έμφαση στην ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων, ευχέρειας και εμπιστοσύνης για σπουδές STEM.
Σε ποιους Απευθύνεται	Μαθητές 16-17 ετών που προετοιμάζονται για προχωρημένες εξετάσεις μαθηματικών.
Μαθησιακά Αποτελέσματα	• Εξάσκηση στους νόμους των δεικτών και τις ριζικές παραστάσεις. • Επίλυση και αναπαράσταση ανισοτήτων επιπέδου A-Level. • Διαίρεση πολυωνύμων με γραμμικά και τετραγωνικά πολυώνυμα. • Μελέτη της εξίσωσης κύκλου και εφαρμογές στην αναλυτική γεωμετρία. • Κατανόηση μετασχηματισμών γραφημάτων (μετατόπιση, μεγέθυνση, συμμετρία). • Εφαρμογή των τύπων σταθερής επιτάχυνσης και ερμηνεία γραφημάτων κίνησης. • Ερμηνεία δεδομένων από διαγράμματα κουτιού, καμπύλες αθροιστικής συχνότητας, ιστογράμματα και ραβδογράμματα.
Κατηγορία Μαθήματος	Διαδικτυακό (Online Course)
Πλατφόρμα Διάθεσης (για τα Διαδικτυακά Μαθήματα)	edX
URL Μαθήματος	https://www.edx.org/learn/math/imperial-college-london-a-level-mathematics-for-year-12-course-1-algebraic-methods-graphs-and-applied-mathematics-methods?index=rv_product_summary&queryId=590bf7084d57222147715cbaaa1bd4b3&position=1
Προϋποθέσεις Επιτυχούς Ολοκλήρωσης	Επιτυχής ολοκλήρωση εβδομαδιαίων quiz και τελικής αξιολόγησης.
Είδος Πιστοποιητικού που Προσφέρει	Verified Certificate of Completion
Διάρκεια Μαθήματος	7 εβδομάδες
Εκτιμώμενος Φόρτος Εργασίας για την Ολοκλήρωση του Μαθήματος	14-28 ώρες συνολικά
Γλώσσα	Αγγλικά
Προαπαιτούμενα	Γνώσεις άλγεβρας επιπέδου GCSE (αντίστοιχο Γυμνασίου/A' Λυκείου).

Εκπαιδευτικός Οργανισμός	Imperial College London
Εκπαιδευτής	Ακαδημαϊκοί του τμήματος Μαθηματικών του Imperial College.
Οτιδήποτε άλλο χρήσιμο	Υψηλή εστίαση στην αλγεβρική αυστηρότητα και την οπτικοποίηση συναρτήσεων.

2.3 Ανάλυση Μαθήματος 2: Precalculus: Μαθηματική Μοντελοποίηση

2.3.1 Περιγραφή του Μαθήματος 2

Το μάθημα 2: «Precalculus: Μαθηματική Μοντελοποίηση» αποτελεί μια εισαγωγή στη χρήση των μαθηματικών ως εργαλείο ερμηνείας του πραγματικού κόσμου. Στόχος του είναι να εφοδιάσει τον/τη μαθητή/τρια με τις απαραίτητες δεξιότητες ανάλυσης δεδομένων, προετοιμάζοντάς τον/την για σπουδές σε πεδία όπως οι φυσικές επιστήμες, η κοινωνιολογία και η επιστήμη των υπολογιστών (University of Colorado Boulder, n.d.a). Επίσης, δίνει έμφαση στην κατανόηση της λογικής πίσω από τα μοντέλα, χρησιμοποιώντας πραγματικά δεδομένα και τακτικές αξιολογήσεις για την εμπέδωση της γνώσης (Πίνακας 3).

2.3.2. Κριτική Προσέγγιση και Σύνδεση με το παρόν Ψηφιακό Μάθημα

Η κριτική ανάλυση του μαθήματος 2 αναδεικνύει μια ισχυρή σύνδεση με τον στόχο της παρούσας ΜΔΕ για σύνδεση των μαθηματικών με την πραγματική ζωή, αν και υπάρχουν περιθώρια αναβάθμισης στον τρόπο προσέγγισης της τεχνολογίας.

Διαχείριση Δεδομένων & Μοντελοποίηση:

Το μάθημα 2 επιτυγχάνει να εισάγει τον/τη μαθητή/τρια στην κουλτούρα των "Big Data" και στη διαδικασία επικαιροποίησης μοντέλων. Σε σύγκριση με το παρόν ψηφιακό μάθημα, η προσέγγιση είναι αρκετά δομημένη και «παραδοσιακή» ως προς τις εργασίες (αναθέσεις, ομότιμη κριτική).

Η πρόταση του παρόντος ψηφιακού μαθήματος υπερτερεί στον βαθμό αυθεντικότητας, καθώς οι μαθητές/τριες δεν αναλύουν απλώς δεδομένα που τους δίνονται, αλλά καλούνται να πάρουν αποφάσεις βασισμένες σε ανοιχτά δεδομένα, γεγονός που ενισχύει την κριτική σκέψη.

Προσβασιμότητα vs Ενεργός Πειραματισμός:

Το μάθημα 2 χρησιμοποιεί εργαλεία όπως το Excel και το Desmos, κάτι που είναι αξιέπαινο. Ωστόσο, η πρόταση του παρόντος ψηφιακού μαθήματος, ενσωματώνοντας το GeoGebra, προσφέρει μια πιο «ζωντανή» αίσθηση της δυναμικής των συναρτήσεων. Εκεί όπου το μάθημα 2 παρουσιάζει ένα μοντέλο, το παρόν ψηφιακό μάθημα επιτρέπει στον/στην μαθητή/τρια να «οικοδομήσει» και να παραμετροποιήσει το μοντέλο του, μετατρέποντας το παιδί από παθητικό αναλυτή σε ενεργό σχεδιαστή.

2.3.3. Αναλυτική Παρουσίαση Ενότητων Μαθήματος 2

Το μάθημα «Precalculus: Μαθηματική Μοντελοποίηση» είναι οργανωμένο σε τέσσερις θεματικές ενότητες, οι οποίες καλύπτουν την Γραμμική Μοντελοποίηση, την Εκθετική Μοντελοποίηση, τη Μοντελοποίηση με άλλες λειτουργίες (Πολυωνυμικές, Περιοδικές), τη Διαστατική Ανάλυση (University of Colorado Boulder, n.d.a).

Ενότητα 1: Γραμμική Μοντελοποίηση

Περιγραφή: Εισαγωγή στη δημιουργία μοντέλων για δεδομένα πραγματικής ζωής. Περιλαμβάνει τη χρήση του Excel και του Desmos για οπτικοποίηση.

Κριτική: Είναι μια εξαιρετική βάση. Ωστόσο, η διάρκεια των 120 λεπτών για την ομότιμη κριτική (peer review) θεωρείται υπερβολικά μεγάλη για έναν/μία μαθητή/τρια Λυκείου. Στο παρόν ψηφιακό μάθημα, αυτή η ενότητα θα είχε «σπάσει» σε micro-learning βίντεο 5-7 λεπτών, καθιστώντας τη γνώση πιο εύληπτη και άμεσα εφαρμόσιμη.

Ενότητα 2: Εκθετική Μοντελοποίηση

Περιγραφή: Μελέτη φυσικών φαινομένων (πληθυσμός, εξάπλωση ασθενειών) με χρήση του φυσικού εκθετικού αριθμού e .

Κριτική: Η έμφαση στη μοντελοποίηση πραγματικών φαινομένων αποτελεί αναμφίβολα το ισχυρότερο σημείο του μαθήματος 2. Το παρόν ψηφιακό μάθημα υιοθετεί την ίδια διδακτική φιλοσοφία, επιδιώκοντας παράλληλα να διευρύνει περαιτέρω τη διαθεματική διάσταση των μαθηματικών. Συγκεκριμέν, εντάσσει έννοιες από τις φυσικές επιστήμες, τα οικονομικά και τις κοινωνικές επιστήμες (όπως η δυναμική εξάπλωση πληροφοριών στα μέσα κοινωνικής δικτύωσης) καθιστώντας το γνωστικό αντικείμενο πιο ελκυστικό και άμεσα συνδεδεμένο με τα βιώματα των μαθητών/τριών).

Ενότητα 3: Μοντελοποίηση με άλλες λειτουργίες (Πολυωνυμικές, Περιοδικές)

Περιγραφή: Χρήση σύνθετων συναρτήσεων για τη μοντελοποίηση συγκεκριμένων συμπεριφορών.

Κριτική: Η ανάλυση εδώ γίνεται σε «πακέτα» ενότητας. Η διδακτική στρατηγική του παρόντος ψηφιακού μαθήματος θα προσέθετε εδώ τη χρήση της δυναμικής οπτικοποίησης, ώστε ο/η μαθητής/τρια να κατανοήσει τη «συμπεριφορά» του πολυωνύμου (π.χ. πώς αλλάζει η καμπυλότητα) πριν καταφύγει στις πράξεις.

Ενότητα 4: Διαστατική Ανάλυση

Περιγραφή: Ανάλυση σχέσεων μεταξύ φυσικών μεγεθών και μονάδων μέτρησης (π.χ. μέτρηση ισχύος έκρηξης).

Κριτική: Είναι ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον εφαρμοσμένο κομμάτι που συνδέει τα μαθηματικά με τη Φυσική. Ενώ το μάθημα 2 παραμένει στη θεωρητική εξέταση των παραγόντων-σημαδιών, το παρόν ψηφιακό μάθημα προτείνει μια hands-on δραστηριότητα όπου ο/η μαθητής/τρια χρησιμοποιεί τη διαστατική ανάλυση για να ελέγξει αν ένα επιχείρημα σε μια είδηση είναι επιστημονικά έγκυρο, ενισχύοντας ταυτόχρονα και τον ψηφιακό γραμματισμό του/της.

Πίνακας 3 Περιγραφή Μαθήματος 2

Περιγραφή Μαθήματος 2	
Τίτλος Μαθήματος	Precalculus: Μαθηματική Μοντελοποίηση
Σύντομη Περιγραφή	Το μάθημα αποτελείται από 4 ενότητες και εστιάζει στη χρήση μαθηματικών εργαλείων (συναρτήσεις, γραφήματα) για τη μοντελοποίηση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου.
Σε ποιους Απευθύνεται	Μαθητές/φοιτητές που προετοιμάζονται για σπουδές στις θετικές, κοινωνικές ή υπολογιστικές επιστήμες.
Μαθησιακά Αποτελέσματα	• Μοντελοποίηση δεδομένων με συναρτήσεις μίας και πολλαπλών μεταβλητών. • Οπτικοποίηση και ανάλυση δεδομένων με τη χρήση διαφορετικών τεχνολογιών. • Κατανόηση των ιδιοτήτων των διαφόρων τύπων συναρτήσεων για να τις εφαρμόζουν ανάλογα για τη μοντελοποίηση διαφόρων καταστάσεων. • Εκτελείτε διανυσματικές πράξεις, όπως πρόσθεση, πολλαπλασιασμό κλιμάκων, τετραγωνικό γινόμενο και διασταυρούμενο γινόμενο, για να αναλύσετε τη γεωμετρία στο χώρο.
Κατηγορία Μαθήματος	Διαδικτυακό (Online Course)
Πλατφόρμα Διάθεσης (για τα Διαδικτυακά Μαθήματα)	Coursera
URL Μαθήματος	https://www.coursera.org/learn/prec calculus-mathematical-modelling
Προϋποθέσεις Επιτυχούς Ολοκλήρωσης	Εβδομαδιαία quizzes, peer-graded εργασίες, συμμετοχή σε προγραμματισμένες ασκήσεις.
Είδος Πιστοποιητικού που Προσφέρει	Certificate of Completion (shareable certificate)
Διάρκεια Μαθήματος	Self-paced (Αυτόρυθμιζόμενο)
Εκτιμώμενος Φόρτος Εργασίας για την Ολοκλήρωση του Μαθήματος	Βάσει διάρκειας των ενότητων: $4+2+2+3=11$ ώρες συνολικά

Γλώσσα	Αγγλικά
Προαπαιτούμενα	Βασικές γνώσεις Άλγεβρας και Γεωμετρίας.
Εκπαιδευτικός Οργανισμός	University of Colorado Boulder
Εκπαιδευτής	Τμήμα Μαθηματικών του University of Colorado Boulder
Οτιδήποτε άλλο χρήσιμο	Έμφαση στο "Mathematical Modeling Process", δηλαδή το βήμα-βήμα πέρασμα από το πρόβλημα στον μαθηματικό τύπο.

2.4 Ανάλυση Μαθήματος 3: Making Math Click: Understand Math Without Fear

2.4.1. Περιγραφή του Μαθήματος 3

Το μάθημα 3: «Making Math Click: Understand Math Without Fear» (JUMP Math, n.d.) αποτελεί μια ψυχολογική και παιδαγωγική προσέγγιση της μαθηματικής μάθησης. Εστιάζει στην απομυθοποίηση των μαθηματικών, προτείνοντας στρατηγικές που βασίζονται στη νευροεπιστήμη για την υπερνίκηση του «μαθηματικού άγχους» (Luttenberger et al., 2018).

Το μάθημα απευθύνεται σε μαθητές/τριες, φοιτητές/τριες και σε εκπαιδευτικούς, προσφέροντας γνώσεις για το πώς ο εγκέφαλος επεξεργάζεται τις μαθηματικές έννοιες και πώς η σωστή καθοδήγηση μπορεί να μετατρέψει τις δυσκολίες σε επιτυχία (JUMP Math, n.d.) (Πίνακας 4).

2.4.2. Κριτική Προσέγγιση και Σύνδεση με το παρόν ψηφιακό μάθημα

Η κριτική ανάλυση του συγκεκριμένου μαθήματος 3 προσφέρει μια μοναδική σκοπιά για το παρόν ψηφιακό μάθημα, καθώς μετατοπίζει το ενδιαφέρον από την καθαρή ύλη στην ψυχολογία του/της μαθητή/τριας.

Απομυθοποίηση και Ψυχολογία της Μάθησης:

Το μάθημα 3 εισάγει μια κρίσιμη παράμετρο που συχνά παραβλέπεται: τον ρόλο του άγχους. Στο παρόν ψηφιακό μάθημα, η στρατηγική «απομυθοποίησης» υιοθετείται πλήρως, καθώς ενσωματώνουμε ενθαρρυντικά μηνύματα και μικρές «νίκες» (small wins) μέσω της μικρομάθησης, μειώνοντας έτσι τα επίπεδα άγχους των μαθητών/τριών της Α' Λυκείου (JUMP Math, n.d.).

Τεχνικές Μάθησης:

Η έμφαση του μαθήματος 3 στο retrieval practice (ανάκληση πληροφοριών) έναντι της παθητικής αναθεώρησης αποτελεί μια πολύτιμη διδακτική τεχνική. Στο παρόν ψηφιακό

μάθημα, έχει ενσωματωθεί αυτή η αρχή μέσω διαδραστικών κουίζ που απαιτούν από τον/τη μαθητή/τρια να ανακαλέσει τη γνώση, αντί να διαβάξει απλώς θεωρία.

Απλοποίηση vs Πραγματικότητα: Μια ενδιαφέρουσα πρόκληση που θέτει το μάθημα 3 είναι η ιδέα ότι οι «απλές αναπαραστάσεις» συχνά λειτουργούν καλύτερα από περίπλοκα προβλήματα της πραγματικής ζωής που μπορεί να αποσπούν την προσοχή (JUMP Math, n.d.). Αυτό έρχεται σε δημιουργική σύγκρουση με την επιδίωξη του παρόντος ψηφιακού μαθήματος για «Αυθεντικά Προβλήματα». Συγκεκριμένα, η λύση στο παρόν μάθημα είναι η σταδιακή κλιμάκωση (scaffolding): ξεκινάμε με απλές αναπαραστάσεις για την κατανόηση της δομής και σταδιακά μεταβαίνουμε σε αυθεντικά σενάρια πραγματικής ζωής, συνδυάζοντας έτσι τη σαφήνεια με το πρακτικό ενδιαφέρον.

2.4.3. Αναλυτική Παρουσίαση Ενοτήτων Μαθήματος 3

Το μάθημα «Making Math Click: Understand Math Without Fear» είναι οργανωμένο σε τέσσερεις θεματικές ενότητες, που αφορούν στα εξής: Challenging the "Myth of Ability", Building Math Foundations with Scaffolding, Motivating Students Through Engagement, Unlocking Student Potential Through Motivation.

Ενότητα 1: Challenging the "Myth of Ability"

Περιγραφή: Εστίαση στο πώς ο εγκέφαλος επεξεργάζεται τα μαθηματικά, αποδομώντας τον μύθο του «ταλέντου».

Κριτική: Πολύ σημαντική εισαγωγή για το παρόν ψηφιακό μάθημα, καθώς βοηθά στη δημιουργία μιας «νοοτροπίας ανάπτυξης» (growth mindset) από την πρώτη κιόλας ενότητα (JUMP Math, n.d.).

Ενότητα 2: Building Math Foundations with Scaffolding

Περιγραφή: Χρήση της τεχνικής scaffolding (σκαλωσιά) και έμφαση στο retrieval practice.

Κριτική: Η τεχνική του σκαλωσιάζματος (scaffolding) αποτελεί τη ραχοκοκαλιά του παρόντος ψηφιακού μαθήματος. Η διαφορά είναι ότι στην παρούσα πρόταση εφαρμόζεται το σκαλωσιάζσιμο ψηφιακά, μέσω των διαδραστικών ασκήσεων στο GeoGebra.

Ενότητα 3: Motivating Students Through Engagement

Περιγραφή: Διαχείριση διαφορετικών ρυθμών μάθησης και χρήση του spaced practice (κατανεμημένη πρακτική).

Κριτική: Το spaced practice είναι ακριβώς αυτό που επιτυγχάνεται μέσω της Μικρομάθησης: σύντομες και συχνές δόσεις γνώσης που βοηθούν στη διατήρηση της πληροφορίας μακροπρόθεσμα.

Ενότητα 4: Unlocking Student Potential Through Motivation

Περιγραφή: Στρατηγικές παρακίνησης και συνδυασμός διαφορετικών προσεγγίσεων διδασκαλίας.

Κριτική: Η ενότητα αυτή επιβεβαιώνει την ανάγκη για πολλαπλές εξηγήσεις της ίδιας έννοιας. Στο παρόν ψηφιακό μάθημα, αυτό υλοποιείται προσφέροντας στον/στη μαθητή/τρια διαφορετικούς τύπους πόρων (βίντεο, κείμενο, διαδραστική προσομοίωση) για κάθε ενότητα, εξυπηρετώντας έτσι διαφορετικά μαθησιακά στυλ.

Πίνακας 4 Περιγραφή Μαθήματος 3

Περιγραφή Μαθήματος 3	
Τίτλος Μαθήματος	Making Math Click: Understand Math Without Fear
Σύντομη Περιγραφή	Ένα μάθημα σχεδιασμένο να απομυθοποιήσει τα μαθηματικά, εστιάζοντας στη λογική πίσω από τις έννοιες αντί για την αποστήθιση τύπων, βοηθώντας τους εκπαιδευόμενους να υπερνικήσουν το "μαθηματικό άγχος".
Σε ποιους Απευθύνεται	Σε μαθητές, φοιτητές και ενήλικες που αισθάνονται ανασφάλεια ή φόβο απέναντι στα μαθηματικά και θέλουν να κατανοήσουν τη βασική τους λογική.
Μαθησιακά Αποτελέσματα	• Αναγνώριση και υπέρβαση του μαθηματικού άγχους. • Κατανόηση θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών μέσω της λογικής. • Εφαρμογή μαθηματικής σκέψης σε απλά καθημερινά προβλήματα.
Κατηγορία Μαθήματος	Διαδικτυακό (Online Course)
Πλατφόρμα Διάθεσης (για τα Διαδικτυακά Μαθήματα)	Coursera
URL Μαθήματος	https://www.coursera.org/learn/math-click
Προϋποθέσεις Επιτυχούς Ολοκλήρωσης	Παρακολούθηση των βίντεο-διαλέξεων, συμμετοχή στα forum συζητήσεων και επιτυχής ολοκλήρωση των κουίζ των 4 ενοτήτων.
Είδος Πιστοποιητικού που Προσφέρει	Certificate of Completion (shareable certificate)
Διάρκεια Μαθήματος	Self-paced (Αυτόρρυθμιζόμενο)
Εκτιμώμενος Φόρτος Εργασίας για την	Βάσει διάρκειας των ενοτήτων: 3+4+3+2=12 ώρες συνολικά

Ολοκλήρωση του Μαθήματος	
Γλώσσα	Αγγλικά
Προαπαιτούμενα	Δεν υπάρχουν εξειδικευμένα προαπαιτούμενα· απαιτείται μόνο μια στοιχειώδης εξοικείωση με βασικές μαθηματικές έννοιες.
Εκπαιδευτικός Οργανισμός	University of Copenhagen
Εκπαιδευτής	Τμήμα Μαθηματικών Επιστημών (Department of Mathematical Sciences)
Οτιδήποτε άλλο χρήσιμο	Το μάθημα δίνει ιδιαίτερη έμφαση στην επικοινωνιακή πλευρά των μαθηματικών και στη σύνδεσή τους με την κριτική σκέψη στα μέσα ενημέρωσης.

2.5 Ανάλυση Μαθήματος 4: Precalculus: Σχέσεις και Συναρτήσεις

2.5.1. Περιγραφή του Μαθήματος 4

Το μάθημα «Precalculus: Σχέσεις και Συναρτήσεις» (University of Colorado Boulder, n.d.b) αποτελεί μια εμβριθή εισαγωγή στον κόσμο των μαθηματικών συναρτήσεων. Το πρόγραμμα επικεντρώνεται στην κατανόηση των σχέσεων μεταξύ μεταβλητών και αναπτύσσει δεξιότητες απαραίτητες για τη μαθηματική μοντελοποίηση, εξετάζοντας από τα βασικά χαρακτηριστικά των συναρτήσεων (πεδίο, εύρος) έως τη χρήση εκθετικών και λογαριθμικών μοντέλων (Πίνακας 5).

2.5.2. Κριτική Προσέγγιση και Σύνδεση με το παρόν ψηφιακό μάθημα

Η κριτική ανάλυση του μαθήματος 4 αναδεικνύει μια κλασική ακαδημαϊκή προσέγγιση που διαφέρει από το παρόν ψηφιακό μάθημα ως προς τη διαδραστικότητα.

Μοντελοποίηση vs. Αλγεβρική Εξάσκηση: Το μάθημα 4 δίνει μεγάλη έμφαση στην αλγεβρική επεξεργασία των συναρτήσεων. Ενώ αυτό είναι απαραίτητο, το παρόν ψηφιακό μάθημα εστιάζει περισσότερο στην ερμηνευτική ικανότητα του/της μαθητή/τριας, χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις όχι ως αυτοσκοπό, αλλά ως «γλώσσα» για να περιγραφούν φαινόμενα.

Ψηφιακά Εργαλεία: Παρότι το μάθημα 4 εξετάζει τις γραφικές παραστάσεις με τις παραδοσιακές διδακτικές μεθόδους, το παρόν ψηφιακό μάθημα αναβαθμίζει αυτή την εμπειρία μέσω του GeoGebra (GeoGebra, 2026), επιτρέποντας στον/στην μαθητή/τρια να «χειραγωγήσει» άμεσα τις συναρτήσεις. Η διαφορά έγκειται στο ότι ο/η μαθητής/τρια του παρόντος ψηφιακού μαθήματος ανακαλύπτει τις ιδιότητες μέσω του πειραματισμού, ενώ στο μάθημα 4 αυτές παρουσιάζονται ως μαθηματικά δεδομένα (University of Colorado Boulder, n.d.).

2.5.3. Αναλυτική Παρουσίαση Ενοτήτων Μαθήματος 4

Το μάθημα «Precalculus: Σχέσεις και Συναρτήσεις» απευθύνεται σε μαθητές/τριες Λυκείου και είναι οργανωμένο σε τέσσερις θεματικές ενότητες, που καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα της Άλγεβρας και Ανάλυσης.

Ενότητα 1: Βασικά στοιχεία και κοινές λειτουργίες

Περιγραφή: Εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης, πεδίο ορισμού και τελική συμπεριφορά γραφημάτων.

Κριτική: Η ενότητα είναι θεμελιώδης. Στο παρόν ψηφιακό μάθημα, έχουν συνδυαστεί με τη χρήση ψηφιακών φύλλων εργασίας, ώστε η «τελική συμπεριφορά των συναρτήσεων» να μην είναι μια αφηρημένη έννοια, αλλά μια οπτική εμπειρία (University of Colorado Boulder, n.d.).

Ενότητα 2: Εξισώσεις ευθειών, τετραγωνικές και περαιτέρω αναλύσεις

Περιγραφή: Μελέτη γραμμικών και τετραγωνικών συναρτήσεων με εφαρμογές σε έσοδα και κόστη.

Κριτική: Η εφαρμογή σε έσοδα και κόστη είναι η ιδανική γέφυρα με την πραγματική ζωή. Το παρόν ψηφιακό μάθημα ενισχύει αυτό το κομμάτι με πραγματικά οικονομικά δεδομένα, επιτρέποντας στους/στις μαθητές/τριες να υπολογίσουν το «σημείο νεκρού» (break-even point) μιας δικής τους επιχείρησης (University of Colorado Boulder, n.d.).

Ενότητα 3: Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις

Περιγραφή: Επέκταση στις αντίστροφες συναρτήσεις και εισαγωγή στις εκθετικές της μορφής $f(x) = a^x$.

Κριτική: Στο μάθημα 4, η ανάλυση των αντίστροφων συναρτήσεων και ειδικότερα των εκθετικών αποτελεί μια πρόκληση υψηλών γνωστικών απαιτήσεων. Αν και το παρόν ψηφιακό μάθημα δεν πραγματεύεται τις συγκεκριμένες γνωστικές έννοιες, η διδακτική στρατηγική που υιοθετεί για αντίστοιχα σύνθετες μαθηματικές έννοιες βασίζεται στη Μικρομάθηση (Micro-learning). Σε ένα υποθετικό πλαίσιο διδασκαλίας τέτοιων απαιτητικών εννοιών, η στρατηγική αυτή θα απέβλεπε στη διάσπαση της πληροφορίας σε διακριτά και εύληπτα βήματα, με σκοπό τον δραστικό περιορισμό της γνωστικής επιβάρυνσης και την αποφυγή της αποθάρρυνσης των μαθητών/τριών.

Ενότητα 4: Ιδιότητες των λογαρίθμων

Περιγραφή: Εμβάθυνση στις αλγεβρικές ιδιότητες των λογαρίθμων και εφαρμογή τους σε παραδείγματα.

Κριτική: Οι λογάριθμοι αποτελούν συχνά σημείο δυσκολίας για τους/τις μαθητές/τριες. Το παρόν ψηφιακό μάθημα

Το παρόν ψηφιακό μάθημα δεν πραγματεύεται τις συγκεκριμένες έννοιες, καθώς δεν περιλαμβάνονται στο πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών της Α' Λυκείου. Ωστόσο, η διδακτική στρατηγική που υιοθετείται για την προσέγγιση αντίστοιχων σύνθετων μαθηματικών εννοιών, βασίζεται στην αξιοποίηση ψηφιακών εργαλείων για τη δυναμική οπτικοποίηση των εννοιών, επιδιώκοντας την εννοιολογική αποσαφήνιση και την ενεργό εμπλοκή του/της μαθητή/τριας (University of Colorado Boulder, n.d.)

Πίνακας 5 Περιγραφή Μαθήματος 4

Περιγραφή Μαθήματος 4	
Τίτλος Μαθήματος	Precalculus: Σχέσεις και Συναρτήσεις
Σύντομη Περιγραφή	Το μάθημα αποτελείται από 4 ενότητες και εστιάζει στη χρήση των μαθηματικών ως εργαλείο μοντελοποίησης και ερμηνείας του πραγματικού κόσμου μέσω της μελέτης των συναρτήσεων.
Σε ποιους Απευθύνεται	Μαθητές Λυκείου που προετοιμάζονται για σπουδές στις θετικές, κοινωνικές ή υπολογιστικές επιστήμες.
Μαθησιακά Αποτελέσματα	• Αναγνώριση και διαχείριση διαφορετικών τύπων συναρτήσεων. • Ικανότητα οπτικοποίησης και ερμηνείας μαθηματικών μοντέλων μέσω των γραφικών τους παραστάσεων. • Χρήση των ιδιοτήτων των λογαρίθμων για την απλοποίηση και επίλυση σύνθετων μαθηματικών εκφράσεων. • Χρήση των παραπάνω εργαλείων για την επίλυση προβλημάτων που προκύπτουν από δεδομένα της πραγματικής ζωής.
Κατηγορία Μαθήματος	Διαδικτυακό (Online Course)
Πλατφόρμα Διάθεσης (για τα Διαδικτυακά Μαθήματα)	Coursera
URL Μαθήματος	https://www.coursera.org/learn/prec calculus-relations-functions
Προϋποθέσεις Επιτυχούς Ολοκλήρωσης	Ολοκλήρωση όλων των ενοτήτων, συμμετοχή στα κουίζ και επίτευξη της βαθμολογίας βάσης.
Είδος Πιστοποιητικού που Προσφέρει	Verified Certificate of Completion
Διάρκεια Μαθήματος	Self-paced (Αυτόρρυθμιζόμενο)
Εκτιμώμενος Φόρτος Εργασίας για την Ολοκλήρωση του Μαθήματος	Βάσει διάρκειας των ενοτήτων: $3+4+3+2=12$ ώρες συνολικά
Γλώσσα	Αγγλικά

Προαπαιτούμενα	Βασική άλγεβρα γυμνασίου/λυκείου.
Εκπαιδευτικός Οργανισμός	University of Colorado Boulder
Εκπαιδευτής	Καθηγητές του Τμήματος Μαθηματικών του University of Colorado Boulder
Οτιδήποτε άλλο χρήσιμο	Το μάθημα παρέχει ισχυρά θεμέλια για την κατανόηση της οπτικοποίησης των συναρτήσεων, καθιστώντας το ιδανικό για την ψηφιακή μοντελοποίηση ανισώσεων.

2.6 Ανάλυση Μαθήματος 5: Maths Essentials (LSE)

2.6.1. Περιγραφή του Μαθήματος 5

Το μάθημα 5: «*Maths Essentials*» του London School of Economics and Political Science (LSE) είναι ένα διαδικτυακό πρόγραμμα που στοχεύει στη γεφύρωση του χάσματος μεταξύ Λυκείου και Πανεπιστημίου. Αποτελεί μια εντατική εισαγωγή στις βασικές μαθηματικές μεθόδους, με κύρια έμφαση στην εφαρμογή τους στις οικονομικές επιστήμες (London School of Economics and Political Science, n.d.).

Στόχος του είναι η ανάπτυξη προχωρημένων μαθηματικών δεξιοτήτων για υποψήφιους/ες φοιτητές/τριες οικονομικών προγραμμάτων. Η θεματολογία καλύπτει από την Άλγεβρα και τον Λογισμό έως τα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά, αποτελώντας ένα ολοκληρωμένο «διαβατήριο» για προπτυχιακές σπουδές (Πίνακας 6).

2.6.2. Κριτική Προσέγγιση και Σύνδεση με το παρόν ψηφιακό μάθημα

Η κριτική ανάλυση του μαθήματος 5 αναδεικνύει την απόκλιση μεταξύ της ακαδημαϊκής προετοιμασίας ενηλίκων/φοιτητών και της στοχευμένης διδασκαλίας για μαθητές/τριες της Α' Λυκείου.

Ακαδημαϊκός Προσανατολισμός vs. Εννοιολογική Κατανόηση:

Το μάθημα του LSE απευθύνεται σε ενήλικες υποψήφιους φοιτητές/τριες και είναι προσανατολισμένο στην απόκτηση τεχνικών δεξιοτήτων για προπτυχιακή επιτυχία. Αντίθετα, το παρόν ψηφιακό μάθημα εστιάζει στην εννοιολογική κατανόηση και τον μαθηματικό εγγραμματισμό των μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Προετοιμασία για τον Λογισμό:

Το μάθημα του LSE εισάγει στοιχεία διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, τα οποία υπερβαίνουν κατά πολύ την ύλη και το γνωστικό επίπεδο της Α' Λυκείου. Το παρόν ψηφιακό μάθημα, αν και δεν διδάσκει Λογισμό, προετοιμάζει το έδαφος μέσω της δυναμικής μοντελοποίησης. Αντί για την αυστηρή αλγεβρική τυποποίηση του LSE, στο παρόν μάθημα καλλιεργείται η ικανότητα του/της μαθητή/τριας να αντιλαμβάνεται τη μεταβολή μέσα από οπτικές αναπαραστάσεις (London School of Economics and Political Science, n.d.).

2.6.3. Αναλυτική Παρουσίαση Ενοτήτων Μαθήματος 5

Ενότητα 1: Αριθμητική και Άλγεβρα

Περιγραφή: Επανεξέταση αλγεβρικών παραστάσεων, δυνάμεων και επίλυση εξισώσεων.

Κριτική: Παρότι καλύπτει τη βασική αλγεβρική ύλη, απευθύνεται σε μελλοντικούς φοιτητές. Αντίθετα, το παρόν ψηφιακό μάθημα προσαρμόζει αντίστοιχες αλγεβρικές έννοιες για μαθητές Λυκείου, αξιοποιώντας δυναμικά ψηφιακά εργαλεία για διερεύνηση και όχι απλή επαναληπτική εξάσκηση.

Ενότητα 2: Συναρτήσεις (Πολυωνυμικές, Εκθετικές, Λογαριθμικές)

Περιγραφή: Εισαγωγή στις βασικές συναρτήσεις και τις ιδιότητες των αντιστρόφων.

Κριτική: Η προσέγγιση του μαθήματος του LSE είναι αισθητά πιο τεχνική και ακαδημαϊκή. Το παρόν ψηφιακό μάθημα διαφοροποιείται, εστιάζοντας στην οπτικοποίηση και σύνδεση των συναρτήσεων με πραγματικά δεδομένα ώστε να είναι προσιτές σε μαθητές/τριες Α' Λυκείου.

Ενότητα 3: Λογισμός (Παράγωγοι και Ολοκληρώματα)

Περιγραφή: Έννοια της παραγώγου, κανόνες και ολοκληρώματα για εύρεση εμβαδών.

Κριτική: Πρόκειται για μια αμιγώς πανεπιστημιακή ενότητα, ακατάλληλη για το ηλικιακό επίπεδο της Α' Λυκείου. Ωστόσο, η φιλοσοφία του παρόντος μαθήματος γύρω από τη μελέτη της μεταβολής μέσω μοντελοποίησης λειτουργεί ως εισαγωγικός «προθάλαμος» τέτοιων εννοιών χωρίς τον αυστηρό αλγεβρικό φορμαλισμό.

Ενότητα 4: Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά

Περιγραφή: Ακολουθίες, επενδυτικά σχήματα, ανατοκισμός και παρούσα αξία.

Κριτική: Αποτελεί τη θεματική σύγκλιση με το παρόν ψηφιακό μάθημα, καθώς αξιοποιεί οικονομικές έννοιες. Ενώ στο LSE απευθύνεται σε ενήλικες με προσανατολισμό τις κοινωνικές επιστήμες, στο παρόν ψηφιακό μάθημα τα αντίστοιχα προβλήματα απλουστεύονται και δομούνται ως Αυθεντικά Προβλήματα για μαθητές/τριες Α' Λυκείου.

Πίνακας 6 Περιγραφή Μαθήματος 5

Περιγραφή Μαθήματος 5	
Τίτλος Μαθήματος	Maths Essentials
Σύντομη Περιγραφή	Ένα μάθημα που παρέχει τα θεμελιώδη μαθηματικά εργαλεία και τεχνικές που είναι απαραίτητα για την επιτυχία σε προπτυχιακά προγράμματα κοινωνικών επιστημών.
Σε ποιους Απευθύνεται	Υποψήφιους φοιτητές προπτυχιακών προγραμμάτων που επιθυμούν να αναπτύξουν τις μαθηματικές τους δεξιότητες.

Μαθησιακά Αποτελέσματα	• Θεμελίωση στην αριθμητική και την άλγεβρα. • Επισκόπηση των συναρτήσεων και των βασικών αρχών του λογισμού. • Εισαγωγή στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά.
Κατηγορία Μαθήματος	Διαδικτυακό (Online Course)
Πλατφόρμα Διάθεσης (για τα Διαδικτυακά Μαθήματα)	edX
URL Μαθήματος	https://www.edx.org/learn/math/the-london-school-of-economics-and-political-science-maths-essentials
Προϋποθέσεις Επιτυχούς Ολοκλήρωσης	Ολοκλήρωση όλων των ενοτήτων, επιτυχής συμμετοχή στα quiz και τις ασκήσεις εμπέδωσης. Για εισαγωγή στα προγράμματα EMFSS του University of London, απαιτείται επιτυχής εξέταση στο "LSE Maths Essentials: Proctored Exam".
Είδος Πιστοποιητικού που Προσφέρει	Verified Certificate of Completion
Διάρκεια Μαθήματος	6 εβδομάδες
Εκτιμώμενος Φόρτος Εργασίας για την Ολοκλήρωση του Μαθήματος	6-10 ώρες ανά εβδομάδα
Γλώσσα	Αγγλικά
Προαπαιτούμενα	Δεν αναφέρονται.
Εκπαιδευτικός Οργανισμός	London School of Economics and Political Science (LSE)
Εκπαιδευτής	LSE Faculty
Οτιδήποτε άλλο χρήσιμο	Χρησιμεύει ως εργαλείο για υποψήφιους φοιτητές των προγραμμάτων EMFSS του University of London, οι οποίοι δεν διαθέτουν τα απαραίτητα μαθηματικά προσόντα εισαγωγής.

2.7 Αναγκαιότητα του παρόντος ψηφιακού μαθήματος: Συμπερασματική σύνθεση

Η επισκόπηση πέντε διεθνώς αναγνωρισμένων ψηφιακών μαθημάτων μαθηματικής εκπαίδευσης ανέδειξε μια σημαντική διχοτομία: από τη μία πλευρά, υπάρχουν μαθήματα υψηλών ακαδημαϊκών απαιτήσεων που επικεντρώνονται στην τεχνική κατάρτιση (όπως το Maths Essentials του LSE) και, από την άλλη, προγράμματα που εστιάζουν στην ψυχολογική απομυθοποίηση των μαθηματικών (όπως το Making Math Click).

Ωστόσο, παρατηρείται ένα κενό στη σύζευξη της εννοιολογικής κατανόησης, της σύγχρονης ψηφιακής διαδραστικότητας και της αυθεντικής εφαρμογής σε προβλήματα της καθημερινότητας. Η αναγκαιότητα του παρόντος ψηφιακού μαθήματος τεκμηριώνεται από τους παρακάτω άξονες:

A. Υπέρβαση της «Τεχνικής Μάθησης» μέσω της Μοντελοποίησης

Όπως αναδείχθηκε από την ανάλυση των μαθημάτων 1 και 5, τα διαθέσιμα μαθήματα τείνουν να δίνουν προτεραιότητα στον αλγεβρικό φορμαλισμό. Αντίθετα, το παρόν ψηφιακό μάθημα προτείνει μια εναλλακτική προσέγγιση: τη μετατροπή της μαθηματικής έννοιας από «αλγοριθμική διαδικασία» σε «εργαλείο ερμηνείας». Η ανάγκη για το παρόν ψηφιακό μάθημα έγκειται στην ενσωμάτωση της μοντελοποίησης ως μέσο οικοδόμησης της γνώσης, επιτρέποντας στον/στην μαθητή/τρια της Α' Λυκείου να κατανοήσει ότι τα μαθηματικά δεν αποτελούν μια κλειστή, θεωρητική ενότητα, αλλά ένα ανοιχτό σύστημα ανάλυσης δεδομένων.

B. Η Δυναμική Οπτικοποίηση ως Γνωστικό Εργαλείο

Η σύγκριση με τα μαθήματα 2 και 4 κατέδειξε ότι η χρήση εργαλείων όπως το Excel ή το Desmos είναι συχνά στατική. Το παρόν ψηφιακό μάθημα εισάγει τη δυναμική οπτικοποίηση μέσω του λογισμικού GeoGebra. Η ανάγκη για αυτό το μάθημα υποστηρίζεται από το επιχείρημα ότι οι μαθητές/τριες χρειάζονται να «χειραγωγήσουν» τις μεταβλητές ενός προβλήματος σε πραγματικό χρόνο, ώστε να αποκτήσουν βαθιά εννοιολογική κατανόηση της συμπεριφοράς των συναρτήσεων, κάτι που τα παραδοσιακά διαδικτυακά μαθήματα δεν προσφέρουν επαρκώς.

Γ. Διαχείριση της Γνωστικής Επιβάρυνσης μέσω της Μικρομάθησης

Αντλώντας διδάγματα από το μάθημα 3 (Making Math Click), η εργασία αναγνώρισε τη σημασία της διαχείρισης του μαθηματικού άγχους. Το παρόν ψηφιακό μάθημα είναι αναγκαίο γιατί εφαρμόζει τη στρατηγική της Μικρομάθησης (Micro-learning). Αντί για μακροσκελείς ενότητες που προκαλούν γνωστική υπερφόρτωση, το περιεχόμενο δομείται σε μικρά, εύληπτα βήματα. Η προσέγγιση αυτή είναι κρίσιμη για τη σχολική βαθμίδα της Α' Λυκείου, όπου ο/η μαθητής/τρια καλείται να διαχειριστεί υψηλές γνωστικές απαιτήσεις. Η εν λόγω δομή εξασφαλίζει ότι ο/η μαθητής/τρια δεν «χάνεται» στη θεωρία, αλλά προχωρά με μικρές, συνεχείς επιτυχίες.

Δ. Πλαίσιο Εφαρμογής: Από την Αφαίρεση στην Αυθεντικότητα

Ενώ τα επισκοπηθέντα μαθήματα συχνά χρησιμοποιούν κλειστά προβλήματα ή αφηρημένα σενάρια, η ανάγκη για το παρόν ψηφιακό μάθημα εδράζεται στην απαίτηση για αυθεντικότητα. Η σύνδεση της ύλης με κοινωνικά φαινόμενα —όπως η ανάλυση δεδομένων από τα μέσα κοινωνικής δικτύωσης ή η μελέτη οικονομικών τάσεων— καθιστά τη μάθηση συναφή και προσωπική. Το παρόν ψηφιακό μάθημα δεν διδάσκει απλώς "πώς" λύνεται μια ανίσωση, αλλά "γιατί" η επίλυση αυτή έχει νόημα στην προσπάθεια του/της μαθητή/τριας να κατανοήσει τον κόσμο γύρω του.

Συμπέρασμα

Συνοψίζοντας, η αναγκαιότητα του παρόντος ψηφιακού μαθήματος πηγάζει από την ανάγκη για μια πιο ανθρωποκεντρική, ψηφιακά εμπλουτισμένη και εφαρμοσμένη

μαθηματική εκπαίδευση. Ενώ τα μαθήματα που εξετάστηκαν προσφέρουν στέρεα επιστημονική βάση, το παρόν ψηφιακό μάθημα έρχεται να καλύψει το κενό στη διδακτική μεθοδολογία, συνδυάζοντας τη δύναμη της δυναμικής οπτικοποίησης και την αξία της αυθεντικής διερεύνησης. Η πρόταση αυτή εστιάζει στην ουσιαστική εμπλοκή του/της μαθητή/τριας και στην καλλιέργεια του μαθηματικού εγγραμματισμού ως εφόδιο ζωής, καθιστώντας το ψηφιακό μάθημα έναν ουσιαστικό μοχλό αναβάθμισης της μαθησιακής εμπειρίας στη σχολική τάξη.

Κεφάλαιο 3. Σχεδίαση του Ψηφιακού Μαθήματος

3.1 Εισαγωγή – Η Αξία του Ψηφιακού Μαθήματος στην Εκπαίδευση

Η επιλογή του ψηφιακού μαθήματος ως κύριου μέσου διδασκαλίας δεν αποτελεί μια απλή τεχνική διευθέτηση, αλλά μια στοχευμένη παιδαγωγική παρέμβαση. Σύμφωνα με τις κατευθυντήριες γραμμές του νέου Προγράμματος Σπουδών (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2023), ο κεντρικός στόχος είναι η καλλιέργεια μαθητών και μαθητριών ικανών να συνδιαλέγονται δημιουργικά με το περιβάλλον τους, χρησιμοποιώντας μια ευρεία γκάμα ψηφιακών μέσων. Η ευχέρεια στη χρήση συμβολικών συστημάτων, γλωσσικών δομών, καθώς και ψηφιακών ή χειραπτικών εργαλείων, καθίσταται πλέον απαραίτητο εφόδιο για την ανταπόκριση στις σύγχρονες ακαδημαϊκές και κοινωνικές απαιτήσεις.

Εφαρμόζοντας αυτή την αρχή στο παρόν ψηφιακό μάθημα, το ψηφιακό περιβάλλον προσφέρει μια πλατφόρμα διερεύνησης όπου οι μαθητές/τριες δεν είναι απλοί δέκτες πληροφοριών. Αντιθέτως, καλούνται να χρησιμοποιήσουν ψηφιακά εργαλεία για να επεξεργαστούν μαθηματικά αντικείμενα (όπως οι ανισώσεις 2ου βαθμού και τα θηκογράμματα), αποκτώντας μια ενεργό στάση απέναντι σε προβλήματα που προσομοιάζουν πραγματικές κρίσεις ή προκλήσεις.

Η αλληλεπίδραση με αυτά τα "εργαλεία" επιτρέπει στους μαθητές και τις μαθήτριες να αποκωδικοποιούν την πραγματικότητα, μετατρέποντας τη μάθηση σε μια συνεχή διαδικασία διαλόγου με το περιβάλλον τους (Attard et al., 2020; Σάμψων, 2026a).

3.1.1. Η Ψυχολογία της Επιτυχίας και το Κίνητρο

Η σύγχρονη ψηφιακή εκπαίδευση βασίζεται στην αρχή ότι η τεχνολογία δεν αποτελεί απλό υποκατάστατο της παραδοσιακής διδασκαλίας, αλλά ένα εργαλείο μετασχηματισμού της μαθησιακής διαδικασίας. Η αξιοποίηση ψηφιακών μαθημάτων επιτρέπει τη δημιουργία περιβαλλόντων που προάγουν την ενεργό εμπλοκή του/της εκπαιδευόμενου/ης, την εξατομίκευση του ρυθμού μάθησης και τη δυνατότητα άμεσης αλληλεπίδρασης με σύνθετες έννοιες.

Μέσω της εφαρμογής δομημένων μοντέλων εκπαιδευτικού σχεδιασμού, ο ψηφιακός μετασχηματισμός της διδασκαλίας διασφαλίζει ότι η τεχνολογική υποστήριξη ευθυγραμμίζεται με τις γνωστικές ανάγκες των μαθητών/τριών, μετατρέποντας τον ψηφιακό χώρο σε ένα δυναμικό πεδίο διερεύνησης και οικοδόμησης της γνώσης.

Η μέθοδος του παρόντος ψηφιακού μαθήματος υλοποιείται μέσω της αυτόνομης μάθησης (self-study online) και στηρίζεται στο πλαίσιο του Instructional Design (μοντέλο Jumpstart), το οποίο υποστηρίζει την ανάγκη για δομημένη ροή και «τεμαχισμό» της γνώσης (chunking) (Roberts & Moloι, 2021).

Η απόφαση για τη χρήση του μοντέλου Self-Study Online εδράζεται στην ανάγκη για αυτορρύθμιση και υπευθυνότητα. Σε ένα ψηφιακό οικοσύστημα, η μάθηση μετατρέπεται σε μια αυτόνομη διαδρομή όπου ο/η μαθητής/τρια οφείλει να διαχειριστεί τον χρόνο του/της και την πρόσβασή του/της στις πηγές.

Σε αντίθεση με την παραδοσιακή διδασκαλία, το self-study προσφέρει:

Εξατομίκευση: Ο ρυθμός μελέτης προσαρμόζεται στις ατομικές ανάγκες, επιτρέποντας την εμβάθυνση εκεί που χρειάζεται (π.χ. σε πιο σύνθετα στατιστικά συμπεράσματα).

Άμεση Ανατροφοδότηση: Η δυνατότητα αυτοαξιολόγησης (self-assessment) εξαλείφει την απόσταση μεταξύ θεωρίας και πράξης, μειώνοντας το γνωστικό φορτίο και αυξάνοντας το αίσθημα της επίτευξης (mastery learning) (Sergis & Sampson, 2016b).

Σύνδεση με το μέλλον: Η ικανότητα του/της μαθητή/τριας να πλοηγείται αυτόνομα σε ψηφιακά περιβάλλοντα μάθησης αποτελεί μια "μετα-ικανότητα" (Reinhold et al., 2024). Καθώς το νέο Πρόγραμμα Σπουδών (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2023) τονίζει την ανάγκη για ευέλικτη ανταπόκριση σε μεταβαλλόμενες συνθήκες, η εξοικείωση με την ψηφιακή αυτόνομη μάθηση καθιστά τους μαθητές και τις μαθήτριες πιο ανθεκτικούς/ες και έτοιμους/ες για το επαγγελματικό περιβάλλον του μέλλοντος.

Για την επίτευξη των μαθησιακών αποτελεσμάτων του παρόντος ψηφιακού μαθήματος: MA1.1, MA1.2, όπως παρουσιάστηκαν στον Πίνακα 1, η ψηφιακή προσέγγιση επιτρέπει την οπτικοποίηση των αλγεβρικών εννοιών, ενισχύοντας τη διερευνητική μάθηση (Εικόνα 3).

Μέσω της επίλυσης ανισώσεων σε ψηφιακό περιβάλλον, ο/η μαθητής/τρια αναπτύσσει κριτική αντίληψη για τη δομή του προβλήματος. Όπως επισημαίνεται στο Πρόγραμμα Σπουδών, η διαχείριση προκλήσεων απαιτεί μια ολιστική προσέγγιση, όπου η τεχνολογία δεν λειτουργεί αποσπασματικά, αλλά ως μέσο μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων (Kaiser & Schwarz, 2010).

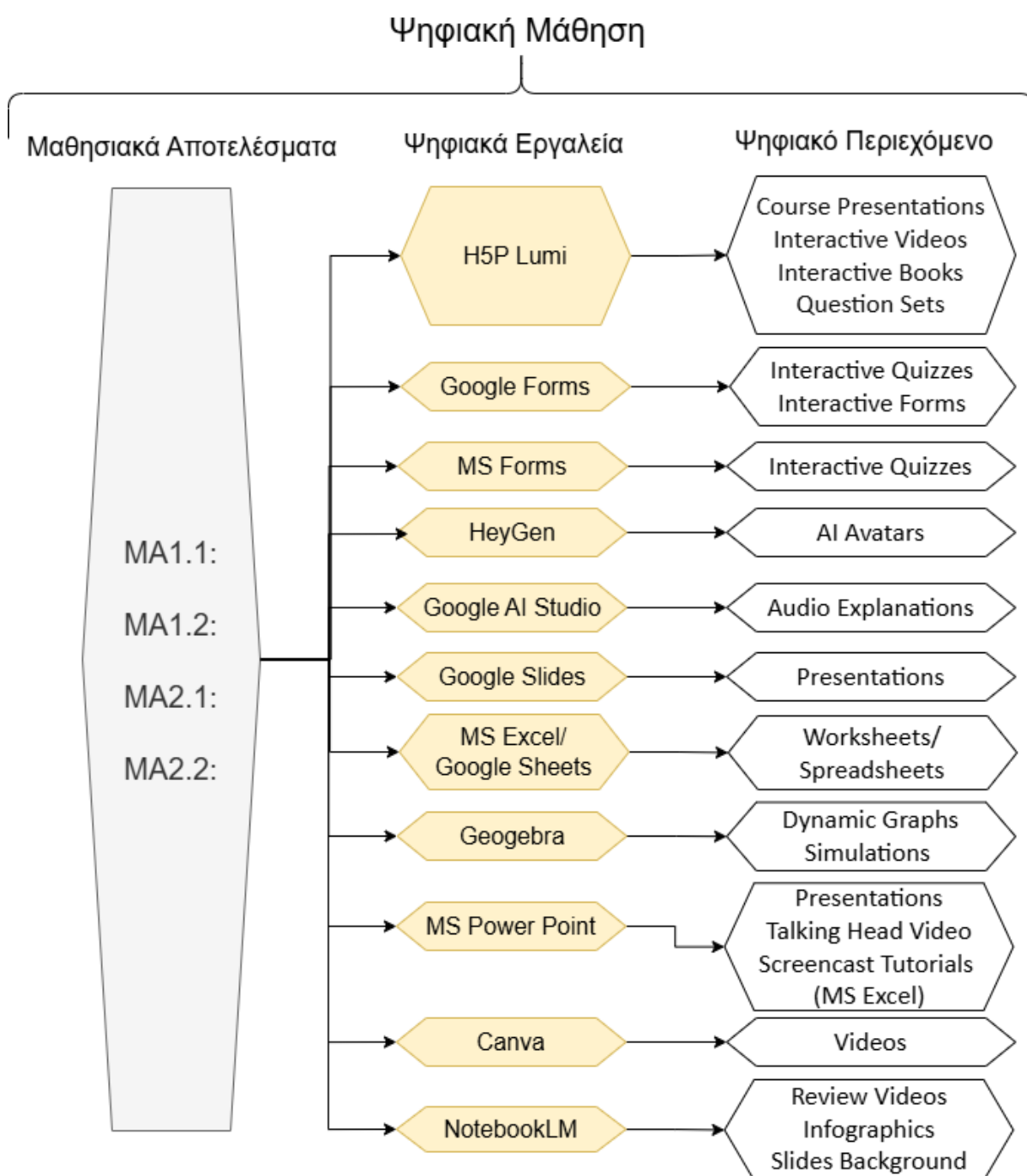
Για την επίτευξη των μαθησιακών αποτελεσμάτων: MA2.1, MA2.2, η στατιστική ανάλυση με θηκογράμματα στο ψηφιακό περιβάλλον του Excel επιτρέπει στους/στις μαθητές/τριες να μεταβαίνουν από τη θεωρητική αναπαράσταση στην άμεση πρακτική διερεύνηση, καθιστώντας τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας ορατά και συγκρίσιμα σε πραγματικό χρόνο, γεγονός που ενισχύει τη στατιστική τους σκέψη και προάγει μια βαθύτερη κατανόηση της αξίας των δεδομένων για την επαγγελματική και προσωπική τους συγκρότηση (Ben-Zvi, 2000).

Για την καλλιέργεια Ψηφιακών Ικανοτήτων (DigComp 3.0), το παρόν ψηφιακό μάθημα υπερβαίνει τη διδασκαλία του αμιγώς μαθηματικού αντικειμένου, ενσωματώνοντας οργανικά τη δεξιότητα 1.3 "Managing Information: search, evaluation and management" (Cosgrove & Cachia, 2025). Μέσω της συστηματικής χρήσης υπολογιστικών εργαλείων, οι μαθητές/τριες εξασκούνται στη μετάβαση από τον όγκο των ακατέργαστων δεδομένων στην παραγωγή δομημένης και αξιοποιήσιμης πληροφορίας. Η διαδικασία αυτή δεν αποτελεί απλώς μια τεχνική άσκηση, αλλά καλλιεργεί μια θεμελιώδη ικανότητα διαχείρισης της γνώσης, η οποία κρίνεται απαραίτητη για τον ψηφιακό εγγραμματισμό του σύγχρονου πολίτη σε ένα περιβάλλον συνεχούς ροής δεδομένων.

3.1.1. Προκλήσεις και Προοπτικές της Ψηφιακής Διδακτικής

Παρά τα σημαντικά πλεονεκτήματα που αναφέρθηκαν παραπάνω, η ψηφιακή μέθοδος αντιμετωπίζει προκλήσεις, όπως η διασφάλιση της παρακίνησης και η αποφυγή του ψηφιακού χάσματος. Ωστόσο, η χρήση ποικίλων ψηφιακών εργαλείων, όπως προτείνεται το νέο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Λυκείου, και η προσεκτική επιλογή διερευνητικών δραστηριοτήτων, διασφαλίζουν ότι το ψηφιακό μάθημα δεν παραμένει μια στατική παρουσίαση, αλλά μια ζωντανή εμπειρία (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2023).

Ως εκ τούτου, η τεκμηρίωση της μεθόδου του ψηφιακού μαθήματος εδράζεται στην πεποίθηση ότι η τεχνολογία, όταν υπηρετεί συγκεκριμένα μαθησιακά αποτελέσματα και συνδυάζεται με τη διδακτική διερεύνηση, αποτελεί τον ισχυρότερο σύμμαχο για τον/τη σύγχρονο/η μαθητή/τρια (Σάμψων, 2026a).



Εικόνα 3 Μεθοδολογικός σχεδιασμός του ψηφιακού μαθήματος: Από τους στόχους στα εργαλεία υλοποίησης.

Σημείωση. Η εικόνα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα με χρήση του δικτυακού εργαλείου diagrams.net (draw.io) (diagrams.net, n.d.).

3.2 Η Μικρο-μάθησης ως Στρατηγικό Μοντέλο Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού

3.2.1. Γνωστική Αρχιτεκτονική και Διαχείριση Φορτίου

Η επιλογή της μικρο-μάθησης (micro-learning) υπερβαίνει την απλή διάρθρωση της ύλης σε μικρά τμήματα. Αποτελεί μια γνωστική στρατηγική που εδράζεται στη βελτιστοποίηση της «Γνωστικής Αρχιτεκτονικής» του μαθητή και της μαθήτριας. Σε αντίθεση με την παραδοσιακή διδασκαλία, όπου ο όγκος των πληροφοριών μπορεί να οδηγήσει σε γνωστικό κορεσμό, η μικρο-μάθηση λειτουργεί ως φίλτρο. Στο προτεινόμενο μάθημα, κάθε μικρο-ενότητα απομονώνει μια θεμελιώδη μαθηματική έννοια (π.χ. το πρόσημο του τριωνύμου), επιτρέποντας στον/στη μαθητή/τρια να οικοδομήσει μια «στερεή βάση» πριν προχωρήσει στον επόμενο κρίκο της μαθησιακής αλυσίδας. Η διαδικασία αυτή, γνωστή ως micro-scaffolding (μικρο-σκαλωσιά), διασφαλίζει ότι το γνωστικό φορτίο παραμένει εντός των ορίων της βραχυπρόθεσμης μνήμης, προάγοντας την κωδικοποίηση στη μακροπρόθεσμη μνήμη (Σάμψων, 2026α).

3.2.2. Προσαρμοστικότητα: Η Σύζευξη Μικρο-μάθησης και Analytics

Η ικανότητα της μικρο-μάθησης να ενσωματώνει προσαρμοστικούς μηχανισμούς αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο της αποτελεσματικότητάς της στο σύγχρονο ψηφιακό οικοσύστημα. Η βιβλιογραφία (Sergis & Sampson, 2015) καταδεικνύει ότι η «επιλογή γειτονικών μαθησιακών αντικειμένων» (adaptive neighbor selection) εντός ενός ψηφιακού περιβάλλοντος μπορεί να προβλέψει και να εξυπηρετήσει με ακρίβεια τις εξατομικευμένες ανάγκες του/της εκπαιδευόμενου/ης. Στο παρόν ψηφιακό μάθημα, ο τεμαχισμός της ύλης επιτρέπει στο ψηφιακό σύστημα να λειτουργεί ως ένας έξυπνος μηχανισμός εντοπισμού και υποστήριξης σε κάθε στάδιο της μαθησιακής διαδρομής.

Στο παρόν μάθημα, για τα μαθησιακά αποτελέσματα MA1.1 και MA1.2 (ανισώσεις 2ου βαθμού), ο τεμαχισμός της ύλης επιτρέπει τη διακριτή προσέγγιση της αλγεβρικής επίλυσης από τη γραφική ερμηνεία (Πίνακας 1). Εάν το σύστημα ανιχνεύσει μέσω της διαμορφωτικής αξιολόγησης ότι ο/η μαθητής/τρια αδυνατεί να συσχετίσει το πρόσημο του τριωνύμου με τη γραφική του απεικόνιση (Παραβολή), ενεργοποιείται αυτόματα ένα «μικρο-αντικείμενο» οπτικοποίησης (δυναμικό γράφημα και προσομοίωση στο GeoGebra), παρέχοντας τη δυνατότητα άμεσης επανατροφοδότησης πριν το κενό στη γνώση καταστεί ανυπέρβλητο. Η εφαρμογή αυτή αποτρέπει τη συσσώρευση γνωστικών ελλειμμάτων, επιτρέποντας την ομαλή μετάβαση από το συμβολικό επίπεδο στο επίπεδο της μοντελοποίησης.

Αντίστοιχα, για τα Μαθησιακά Αποτελέσματα MA2.1 και MA2.2 (στατιστική ανάλυση και θηκογράμματα), η μικρο-μάθηση μετατρέπει την επεξεργασία μεγάλων συνόλων δεδομένων σε μια διαχειρίσιμη ακολουθία βημάτων. Όταν ένας/μία μαθητής/τρια αντιμετωπίζει δυσκολία στην ερμηνεία της διασποράς των τιμών (μέτρα μεταβλητότητας), το σύστημα δεν ανατροφοδοτεί με γενικόλογες οδηγίες, αλλά με ένα στοχευμένο μικρο-αντικείμενο, όπως ένα επεξηγηματικό βίντεο ή μια διαδραστική άσκηση στο Excel, που απομονώνει τη συγκεκριμένη δυσκολία. Αυτή η προσέγγιση καθιστά το ψηφιακό περιβάλλον έναν ενεργό «συνοδοιπόρο» της μάθησης, ο οποίος δεν περιορίζεται στην παρουσίαση πληροφορίας, αλλά προσαρμόζει δυναμικά τη διαδρομή ανάλογα με το γνωστικό προφίλ και τη γνωστική ανταπόκριση του/της μαθητή/τριας.

Τελικά, η εφαρμογή της μικρο-μάθησης σε όλα τα στάδια των ΜΑ δημιουργεί ένα περιβάλλον όπου η αποτυχία στην επίλυση ενός προβλήματος δεν αποτελεί «αδιέξοδο», αλλά ευκαιρία για στοχευμένη μάθηση. Η τεχνολογία, μέσω των προσαρμοστικών αυτών μηχανισμών, διασφαλίζει ότι κάθε μαθητής/τρια λαμβάνει την ακριβή υποστήριξη που χρειάζεται, τη στιγμή που τη χρειάζεται, μετατρέποντας τη μαθηματική διερεύνηση από μια αγωνιώδη προσπάθεια σε μια διαδοχική και επιτυχή πορεία κατάκτησης της γνώσης (Boumalek et al., 2026).

3.2.3. Αναστοχασμός ως Διαρκής Διαδικασία

Στην παρούσα πρόταση, η μικρο-μάθηση συνδέεται οργανικά με τον αναστοχαστικό επανασχεδιασμό της μάθησης. Κάθε αυτόνομη ενότητα λειτουργεί ως σημείο ελέγχου (checkpoint). Όπως υπογραμμίζουν οι Sergis και Sampson (2016b), η παροχή δεδομένων αναλυτικής διδασκαλίας (teaching analytics) επιτρέπει στον/στη μαθητή και τη μαθήτριά να βλέπουν την πορεία τους σε πραγματικό χρόνο. Αυτό δημιουργεί μια κουλτούρα αυτο-αναστοχασμού: ο/η μαθητής/τρια δεν μαθαίνει απλώς για να εξεταστεί, αλλά μαθαίνει πώς να μαθαίνει (μεταγνώση), αξιολογώντας τη δική του/της επίδοση μέσω της ανατροφοδότησης που παρέχει το σύστημα σε κάθε μικρο-στάδιο.

3.2.4. Η Ψυχολογία της Επιτυχίας και το Κίνητρο

Η επιλογή της μικρο-μάθησης ενισχύει το μαθησιακό κίνητρο μέσω της αίσθησης του «κλιμακούμενου επιτεύγματος». Η ολοκλήρωση μιας σειράς μικρο-ενοτήτων για τις ανισώσεις δίνει στον/στη μαθητή/τρια την αίσθηση του ελέγχου και της προόδου.

Αυτό το «ψηφιακό κεφάλαιο» αυτοπεποίθησης είναι καθοριστικό για την Α' Λυκείου, όπου οι μαθητές/τριες συχνά αναπτύσσουν «μαθηματικό άγχος» (Luttenberger et al., 2018). Η μικρο-μάθηση απομυθοποιεί τα μαθηματικά, καθιστώντας τα μια σειρά από διαχειρίσιμες προκλήσεις, αντί για ένα «αδιαπέραστο τείχος» ύλης.

3.3 Παιδαγωγική Στοχοθεσία και Τεκμηρίωση Μαθησιακών Αποτελεσμάτων

Στο πλαίσιο της παρούσας ΜΔΕ, με τίτλο «Μοντελοποιώντας τον Κόσμο: Από τα Μαθηματικά στην Πραγματική Ζωή – Ένα ψηφιακό μάθημα αυτο-μελέτης για μαθητές/τριες της Α' Λυκείου», ο κεντρικός στόχος είναι η αποκατάσταση της σύνδεσης των μαθηματικών εννοιών με την εμπειρική πραγματικότητα. Το ψηφιακό αυτό μάθημα δεν αποτελεί μια ψηφιοποιημένη αναπαραγωγή του σχολικού εγχειριδίου, αλλά ένα πεδίο όπου οι μαθητές/τριες καλούνται να «διαβάσουν» το κοινωνικό περιβάλλον μέσα από τη γλώσσα των μαθηματικών.

Τα μαθησιακά αποτελέσματα έχουν οριστεί με σκοπό να γεφυρώσουν το χάσμα μεταξύ της αφηρημένης μαθηματικής γνώσης και της πρακτικής επίλυσης προβλημάτων, καθιστώντας τους/τις μαθητές/τριες ικανούς να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά ως «εργαλεία διακυβέρνησης» της πολυπλοκότητας της πραγματικής ζωής.

Ο Πίνακας 7 αποτελεί επέκταση του Πίνακα 1 και παρέχει μια ολοκληρωμένη τεκμηρίωση των μαθησιακών αποτελεσμάτων του παρόντος μαθήματος. Η προσέγγιση αυτή ευθυγραμμίζεται με το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά του Λυκείου (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2023), ενσωματώνει τα επίπεδα της αναθεωρημένης Ταξινόμιας του Bloom (Adams, 2015) και συνδέεται οργανικά με το

Ευρωπαϊκό Πλαίσιο Ψηφιακών Ικανοτήτων για τους Πολίτες (DigComp 3.0) (Cosgrove & Cachia, 2025). Μέσω της συνθετικής αυτής προσέγγισης, διαμορφώνεται το συνολικό πλαίσιο του εκπαιδευτικού σχεδιασμού του μαθήματος.

Πίνακας 7 Σχεδιαστικό Πλαίσιο Μαθησιακών Αποτελεσμάτων και Τεκμηρίωση Σύζευξης με το Πρόγραμμα Σπουδών και το DigComp 3.0.

Μαθησιακό Αποτέλεσμα (ΜΑ) Οι μαθητές/τριες να είναι σε θέση:	Σύνδεση με Πρόγραμμα Σπουδών (ΦΕΚ 1326/Β'/2023)	Ταξινόμια Bloom	Πλαίσιο Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού	Σύνδεση με Ψηφιακή Ικανότητα (DigComp 3.0)
ΜΑ1.1. Να κατανοούν την έννοια "αλγεβρική και γραφική επίλυση ανίσωσης 2ου βαθμού" και να την εφαρμόζετε.	Αλ.Σχ.10.8	Κατανόηση – Εφαρμογή	Κατάκτηση του μαθηματικού εργαλείου ως προαπαιτούμενο για τη μοντελοποίηση.	1.3 Managing information, Area: Information search, evaluation and management, όπως ορίζεται στο Ευρωπαϊκό Πλαίσιο Ψηφιακών Ικανοτήτων για τους Πολίτες DigComp 3.0
ΜΑ1.2. Να αναπτύξουν τη δεξιότητα μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων με ανισώσεις 2ου βαθμού.	Αλ.Σχ.10.9	Εφαρμογή – Ανάλυση – Αξιολόγηση	Εφαρμογή μαθηματικών εννοιών στη μοντελοποίηση και ερμηνεία ρεαλιστικών καταστάσεων	
ΜΑ2.1. Να κατανοούν την έννοια "οριακή τιμή ενός συνόλου ποσοτικών δεδομένων" μέσα από την κατασκευή "θηκογράμματος".	Σ.Δ.10.2	Κατανόηση – Εφαρμογή	Διαχείριση δεδομένων για την κατανόηση και μετατροπή τους σε δομημένη πληροφορία	
ΜΑ2.2. Να αναπτύξουν τη δεξιότητα σύγκρισης των θηκογραμμάτων δύο ή περισσότερων συνόλων ποσοτικών δεδομένων, για την επίλυση σχετικών προβλημάτων.	Σ.Ε.10.1	Εφαρμογή – Ανάλυση – Αξιολόγηση	Ανάπτυξη στατιστικής συλλογιστικής για την εξαγωγή κριτικών συμπερασμάτων από πραγματικά δεδομένα σε αυθεντικά προβλήματα.	

Ακολουθώς παρατίθεται η ανάλυση υλοποίησης των τεσσάρων (4) μαθησιακών αποτελεσμάτων στο παρόν ψηφιακό μάθημα:

3.3.1. Ανάλυση Υλοποίησης Μαθησιακού Αποτελέσματος 1.1 (MA1.1)

Το πρώτο μικρο-μάθημα του παρόντος ψηφιακού μαθήματος σχεδιάστηκε και αναπτύχθηκε με βάση το προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα «**MA1.1: οι μαθητές/τριες να είναι σε θέση να κατανοούν τις έννοιες "αλγεβρική και γραφική επίλυση ανίσωσης 2ου βαθμού" και να τις εφαρμόζουν**» (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2023). Το MA1.1 αποσκοπεί στην οικοδόμηση μιας ολοκληρωμένης μαθηματικής ικανότητας, καλύπτοντας τα επίπεδα **Κατανόησης** και **Εφαρμογής** της **ταξινόμιας Bloom**. Παράλληλα, ενσωματώνει την ψηφιακή **ικανότητα 1.3** (Managing information) του πλαισίου *DigComp 3.0*, καθιστώντας τον μαθητή ικανό να διαχειρίζεται πληροφορίες σε ψηφιακά περιβάλλοντα (Cosgrove & Cachia, 2025).

Ειδικότερα, η αυστηρότητα της αλγεβρικής μεθοδολογίας και η οπτική διαίσθηση της γραφικής επίλυσης λειτουργούν αλληλοσυμπληρωματικά. Μέσω της διαδικασίας αυτής, ο/η εκπαιδευόμενος/η μεταβαίνει από την απλή εκτέλεση αλγορίθμων στην εννοιολογική κατανόηση, αποκτώντας τη δυνατότητα να επαληθεύει και να ερμηνεύει τη λύση των ανισώσεων σε διαφορετικά αναπαραστατικά περιβάλλοντα.

Η στρατηγική που ακολουθήθηκε για την υλοποίηση του MA1.1 βασίζεται στην πολυτροπική προσέγγιση και την ενεργό εμπλοκή του χρήστη μέσω μιας σειράς διασυνδεδεμένων ψηφιακών εργαλείων. Συγκεκριμένα, η εισαγωγή στο MA1.1 πραγματοποιείται μέσα από ένα δομημένο περιβάλλον μάθησης, όπου το **Course Presentation (H5P)** λειτουργεί ως ο κεντρικός κόμβος της θεωρητικής γνώσης (Lumi Education, 2026). Η ενσωμάτωση **AI Avatar** (HeyGen, 2026) εντός της παρουσίασης δεν αποτελεί απλώς ένα αισθητικό στοιχείο, αλλά έναν καθοδηγητικό μηχανισμό (scaffolding) που επεξηγεί τις αλγεβρικές διαδικασίες, διασφαλίζοντας ότι ο/η εκπαιδευόμενος/η δεν χάνεται στην πολυπλοκότητα των μαθηματικών εννοιών (Anghileri, 2006). Η χρήση της τεχνητής νοημοσύνης σε αυτό το επίπεδο προσωποποιεί τη μάθηση, προσφέροντας καθοδήγηση που προσαρμόζεται στον ρυθμό κατανόησης του/της μαθητή/τριας.

Ο κεντρικός πυλώνας του MA1.1 είναι η σύνδεση του συμβολικού (αλγεβρικού) αποτελέσματος με το οπτικό αποτύπωμα μιας παραβολής στο επίπεδο. Το λογισμικό **GeoGebra** (Geogebra, 2026) αξιοποιείται εδώ ως ένα δυναμικό εργαστήριο. Μέσω των Screen Records, οι εκπαιδευόμενοι/ες παρακολουθούν βήμα προς βήμα τη διαδικασία κατασκευής και ανάλυσης των γραφημάτων, γεγονός που απομυθοποιεί τη διαδικασία της επίλυσης. Η ικανότητα του χρήστη να τροποποιεί δυναμικά τις παραμέτρους της ανίσωσης στο GeoGebra επιτρέπει την άμεση οπτική επαλήθευση της λύσης, γεφυρώνοντας έτσι το χάσμα μεταξύ της αφηρημένης μαθηματικής έκφρασης και της γεωμετρικής πραγματικότητας.

Για την εδραίωση του MA1.1, το ψηφιακό υλικό ενσωματώνει το **Question Set (H5P)**, το οποίο λειτουργεί ως εργαλείο διαμορφωτικής αξιολόγησης (Lumi Education, 2026). Οι ερωτήσεις που περιλαμβάνονται δεν έχουν απλώς ως στόχο τον έλεγχο των ορθών απαντήσεων, αλλά την παροχή άμεσης ανατροφοδότησης μέσω του AI Tutor. Όταν ο/η εκπαιδευόμενος/η συναντά δυσκολία, οι ηχητικές επεξηγήσεις που δημιουργήθηκαν με το **Google AI Studio** προσφέρουν το απαραίτητο υποστηρικτικό πλαίσιο, καθοδηγώντας τον στη διόρθωση των σφαλμάτων του σε πραγματικό χρόνο (Google, 2026a).

Συνολικά, η υλοποίηση του MA1.1 δεν περιορίζεται στην απλή μεταφορά θεωρητικών γνώσεων, αλλά επιτυγχάνει την ολιστική προσέγγιση της μαθηματικής έννοιας. Η συνέργεια μεταξύ των διαδραστικών παρουσιάσεων, των δυναμικών γραφημάτων του GeoGebra και της έξυπνης ανατροφοδότησης, διαμορφώνει ένα μαθησιακό

οικοσύστημα όπου η αλγεβρική ακρίβεια και η γραφική διαισθητικότητα συνυπάρχουν, διασφαλίζοντας την επίτευξη των μαθησιακών στόχων με τρόπο που προάγει την κριτική σκέψη και την αυτονομία του/της εκπαιδευόμενου/ης (Εικόνα 3).

3.3.2. Ανάλυση Υλοποίησης Μαθησιακού Αποτελέσματος 1.2 (MA1.2)

Το δεύτερο προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα στο οποίο βασίστηκε ο σχεδιασμός και η ανάπτυξη του πρώτου μικρο-μαθήματος, για το παρόν ψηφιακό μάθημα, ήταν το εξής: «**MA1.2: οι μαθητές/τριες να αναπτύξουν τη δεξιότητα μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων με ανισώσεις 2ου βαθμού**» (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2023). Η παιδαγωγική στόχευση καλύπτει τα επίπεδα **Εφαρμογής, Ανάλυσης** και **Αξιολόγησης** της **ταξινόμιας Bloom**, προωθώντας την κριτική επεξεργασία δεδομένων σύμφωνα με την **ικανότητα 1.3** (Managing information) του **DigComp 3.0** (Cosgrove & Cachia, 2025).

Ειδικότερα, το MA1.2 συνδέεται με την καλλιέργεια της δεξιότητας μοντελοποίησης, επιτρέποντας στους/στις εκπαιδευόμενους/ες να προσεγγίζουν σύνθετα προβλήματα, μέσα από τη συστηματική ανάλυση και την ορθολογική χρήση μαθηματικών εργαλείων.

Η διαδικασία ξεκινά με την παρουσίαση ενός ρεαλιστικού σεναρίου ("Project Sky-Fuel: Μοντελοποιώντας την Ακρίβεια της Περιπολίας") μέσω των **Google Slides**, προσδίδοντας νόημα στην εφαρμογή της θεωρίας (Google, 2026b). Η χρήση του **Interactive Document** (Υπερκείμενο) επιτρέπει στους/στις μαθητές/τριες να μελετήσουν 5 ρεαλιστικά προβλήματα, ενθαρρύνοντας την αυτόνομη σκέψη και την προσπάθεια επίλυσης σε ένα περιβάλλον που προσομοιάζει πραγματικές συνθήκες εργασίας.

Στη συνέχεια, μία **Δυναμική Προσομοίωση** στο λογισμικό του **GeoGebra** (Geogebra, 2026) αξιοποιείται για τον εντοπισμό της τροχιάς του αεροσκάφους σε πραγματικό χρόνο, συνδέοντας άμεσα τα μαθηματικά μεγέθη με το τεχνικό πρόβλημα.

Ακολούθως, ένα **κουίζ αυτοαξιολόγησης (H5P)** (Lumi Education, 2026) λειτουργεί ως "προσωπικός βοηθός", επιτρέποντας στον/στην εκπαιδευόμενο/η να ελέγχει την πρόοδό του και να λαμβάνει άμεση καθοδήγηση για τη βελτίωση της στρατηγικής του. Παράλληλα, το συμπληρωματικό υλικό που παρέχεται από τη συγγραφέα ενισχύει την κατανόηση των βημάτων επίλυσης, λειτουργώντας ως σταθερός οδηγός για την εφαρμογή των ανισώσεων.

Τέλος, η ανακεφαλαίωση ολοκληρώνεται μέσω **βίντεο (Canva)** και διαδραστικού **infographic (NotebookLM)**, τα οποία συνθέτουν τα βασικά συμπεράσματα και ενισχύουν την εμπέδωση της γνώσης (Canva, 2026; Google, 2026c). Με τον τρόπο αυτό, διευκολύνεται η αυτόνομη αυτοαξιολόγηση και η οπτική ταξινόμηση της μεθοδολογίας για κάθε εκπαιδευόμενο/η.

3.3.3. Ανάλυση Υλοποίησης Μαθησιακού Αποτελέσματος 2.1 (MA2.1)

Το δεύτερο μικρο-μάθημα του παρόντος ψηφιακού μαθήματος σχεδιάστηκε και αναπτύχθηκε με βάση το προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα «**MA2.1: οι μαθητές/τριες να είναι σε θέση να κατανοούν την έννοια "οριακή τιμή ενός συνόλου ποσοτικών δεδομένων"** μέσα από την κατασκευή "θηκογράμματος"» (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2023). Στην **ταξινόμια Bloom**, το αποτέλεσμα τοποθετείται στα επίπεδα **Κατανόησης** και **Εφαρμογής**, ενώ η ευθυγράμμιση με το **DigComp 3.0** επιτυγχάνεται μέσω της **ικανότητας 1.3** (Managing information), εστιάζοντας στη

διαχείριση και μετατροπή δεδομένων σε δομημένη πληροφορία (Cosgrove & Cachia, 2025).

Ειδικότερα, το MA2.1 αποσκοπεί στην οικοδόμηση μιας ικανότητας ανάλυσης δεδομένων, όπου η στατιστική επεξεργασία και η οπτική αναπαράσταση λειτουργούν ως εργαλεία λήψης αποφάσεων. Μέσω της διαδικασίας αυτής, ο/η εκπαιδευόμενος/η μεταβαίνει από την απλή καταγραφή δεδομένων στην εννοιολογική τους ερμηνεία, αποκτώντας τη δυνατότητα να εντοπίζει συστηματικές τάσεις και ακραίες τιμές (outliers) σε σύνθετα σύνολα δεδομένων.

Η στρατηγική που ακολουθήθηκε για την υλοποίηση του MA2.1 βασίζεται στην ενεργό εμπλοκή του χρήστη σε ψηφιακά περιβάλλοντα που προσομοιάζουν πραγματικές συνθήκες ανάλυσης. Συγκεκριμένα, η εισαγωγή στο MA2.1 πραγματοποιείται μέσα από το **Course Presentation (H5P)**, το οποίο λειτουργεί ως ο κεντρικός κόμβος για την κατανόηση της στατιστικής θεωρίας πίσω από τα θηκογράμματα (Lumi Education, 2026). Η χρήση του **AI Avatar** (HeyGen, 2026) ενισχύει τον καθοδηγητικό μηχανισμό (scaffolding), παρέχοντας αναλυτικές επεξηγήσεις για τον υπολογισμό του διαμέσου και των τεταρτημορίων, διασφαλίζοντας ότι οι μαθητές/τριες εμπεδώνουν τις έννοιες χωρίς να αναλώνονται σε μηχανιστικές πράξεις.

Ο κεντρικός πυλώνας του MA2.1 είναι η αξιοποίηση των **Υπολογιστικών Φύλλων (Excel)** ως ένα δυναμικό εργαστήριο στατιστικής ανάλυσης (Microsoft, 2026). Μέσω των διαδοχικών Screenshots και της συνοδευτικής **ηχητικής επεξήγησης (Google AI Studio)** (Google, 2026a), για την ενίσχυση της κατανόησης, οι εκπαιδευόμενοι/ες παρακολουθούν βήμα προς βήμα τον τρόπο εφαρμογής των στατιστικών τύπων για τον προσδιορισμό των «φραχτών» του θηκογράμματος. Επίσης, τους παρέχεται ένας χώρος εργασίας (worksheets σε Excel) που τους δίνει τη δυνατότητα τροποποίησης των δεδομένων στο υπολογιστικό φύλλο ώστε να παρατηρούν άμεσα πώς οι μεταβολές στο δείγμα επηρεάζουν τη μορφή του διαγράμματος, γεφυρώνοντας το χάσμα μεταξύ αφηρημένων στατιστικών μέτρων και της πρακτικής ανάλυσης πληθυσμών.

Για την εδραίωση του MA2.1, το υλικό ενσωματώνει το **Question Set (H5P)** για τη διαμορφωτική αξιολόγηση των γνώσεων (Lumi Education, 2026). Οι ερωτήσεις στοχεύουν στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων και στην αναγνώριση του «θορύβου» στα δεδομένα. Όταν ο/η εκπαιδευόμενος/η συναντά δυσκολία στον εντοπισμό οριακών τιμών, οι ηχητικές επεξηγήσεις του AI Tutor, που δημιουργήθηκαν με το Google AI Studio, προσφέρουν άμεση και εξατομικευμένη ανατροφοδότηση, καθοδηγώντας τον στη διόρθωση της ανάλυσής του σε πραγματικό χρόνο (Google, 2026a).

Συνολικά, η υλοποίηση του MA2.1 επιτυγχάνει μια ολιστική προσέγγιση της στατιστικής έννοιας. Η συνέργεια μεταξύ των διαδραστικών παρουσιάσεων, της ευέλικτης επεξεργασίας δεδομένων στο Excel και της έξυπνης ανατροφοδότησης, διαμορφώνει ένα μαθησιακό οικοσύστημα όπου ο ψηφιακός εγγραμματοςμός (DigComp 3.0,) και η αναλυτική σκέψη συνυπάρχουν, προάγοντας την αυτονομία του/της εκπαιδευόμενου/ης στη λήψη τεκμηριωμένων αποφάσεων (Cosgrove & Cachia, 2025).

3.3.4. Ανάλυση Υλοποίησης Μαθησιακού Αποτελέσματος 2.2 (MA2.2)

Το δεύτερο προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα στο οποίο βασίστηκε ο σχεδιασμός και η ανάπτυξη του δεύτερου μικρο-μαθήματος, για το παρόν ψηφιακό μάθημα, ήταν το εξής: «**MA2.2: οι μαθητές/τριες να αναπτύξουν τη δεξιότητα σύγκρισης των**

θηκογραμμάτων δύο ή περισσότερων συνόλων ποσοτικών δεδομένων, για την επίλυση σχετικών προβλημάτων» (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2023). Στην ταξινόμια Bloom, το αποτέλεσμα καλύπτει τα επίπεδα Εφαρμογής, Ανάλυσης και Αξιολόγησης. Η ψηφιακή του πλαisiώση, μέσω της ικανότητας 1.3 (Managing information) του DigComp 3.0, αναπτύσσει τη στατιστική συλλογιστική για την εξαγωγή κριτικών συμπερασμάτων (Cosgrove & Cachia, 2025).

Ειδικότερα, το MA2.2 πλαisiώνεται ως μια διαδικασία όπου η οπτική αναπαράσταση των θηκογραμμάτων μετατρέπεται σε αναλυτικό εργαλείο για την κατανόηση της δομής των δεδομένων. Μέσω της διαδικασίας αυτής, ο/η εκπαιδευόμενος/η μεταβαίνει από την απλή ανάγνωση των δεδομένων στη συγκριτική τους ανάλυση, αναπτύσσοντας την ικανότητα να ερμηνεύει τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας ως ενδείξεις για τη συμπεριφορά διαφορετικών υπο-πληθυσμών.

Η στρατηγική που ακολουθήθηκε για την υλοποίηση του MA2.2 βασίζεται στη σύνδεση της θεωρητικής γνώσης με την πρακτική επίλυση προβλημάτων μέσα από πολυτροπικά ψηφιακά περιβάλλοντα. Η διαδικασία ξεκινά με την παρουσίαση ενός ρεαλιστικού σεναρίου ("Η Στατιστική Ψευδαίσθηση του Αστικού Νέφους") μέσω των Google Slides, προσδίδοντας νόημα στην εφαρμογή της θεωρίας (Google, 2026b).

Ακολουθεί ένα δομημένο πλαίσιο, όπου το Course Presentation (H5P) λειτουργεί ως ο κεντρικός κόμβος για την κατάκτηση της δεξιότητας «σύγκριση θηκογραμμάτων διαφορετικών δειγμάτων του υπό μελέτη πληθυσμού και εξαγωγή συμπερασμάτων» (Lumi Education, 2026). Η υποστήριξη από το AI Avatar (HeyGen, 2026) παρέχει καθοδήγηση (scaffolding) κατά τη διάρκεια της μελέτης, επεξηγώντας πώς η μορφή του θηκογράμματος αντικατοπτρίζει τις διαφορές μεταξύ των κατηγορικών στάθμεων.

Ο κεντρικός πυλώνας του MA2.2 είναι η χρήση των Υπολογιστικών Φύλλων (Excel) ως εργαστήριο ανάλυσης δεδομένων (Microsoft, 2026). Μέσω των Screen Records, οι εκπαιδευόμενοι/ες παρακολουθούν τη διαδικασία κατασκευής των θηκογραμμάτων για κάθε στάθμη, γεγονός που τους επιτρέπει να «διαβάζουν» οπτικά τη μεταβλητότητα των δεδομένων. Η δυνατότητα δυναμικής σύγκρισης των θηκογραμμάτων επιτρέπει στον χρήστη να εξάγει τεκμηριωμένα συμπεράσματα για τα μέτρα θέσης, γεφυρώνοντας το χάσμα μεταξύ της στατιστικής επεξεργασίας και της λήψης αποφάσεων για το υπό μελέτη πρόβλημα.

Για την εδραίωση του MA2.2, το ψηφιακό υλικό ενσωματώνει το Question Set (H5P) ως εργαλείο διαμορφωτικής αξιολόγησης (Lumi Education, 2026). Οι ερωτήσεις δεν εστιάζουν μόνο στην ορθή κατασκευή, αλλά στην ερμηνεία των συμπερασμάτων που προκύπτουν από τις συγκρίσεις των στάθμεων. Σε περίπτωση δυσκολίας, οι ηχητικές επεξηγήσεις που δημιουργήθηκαν με το Google AI Studio παρέχουν το απαραίτητο υποστηρικτικό πλαίσιο, καθοδηγώντας τον/την εκπαιδευόμενο/η να διορθώσει τις ερμηνείες του/της σε πραγματικό χρόνο, διασφαλίζοντας την επίτευξη του μαθησιακού στόχου.

Συνολικά, η υλοποίηση του MA2.2 επιτυγχάνει μια ολιστική προσέγγιση όπου το θηκόγραμμα λειτουργεί ως «κλειδί» για την αποκωδικοποίηση των δεδομένων. Η συνέργεια μεταξύ των διαδραστικών παρουσιάσεων, της ευέλικτης επεξεργασίας στο Excel και της έξυπνης ανατροφοδότησης, διαμορφώνει ένα οικοσύστημα μάθησης που προάγει την κριτική ανάλυση και την αυτονομία του/της εκπαιδευόμενου/ης στην επίλυση σύνθετων προβλημάτων.

Συνοψίζοντας, η υλοποίηση του συνόλου των μαθησιακών αποτελεσμάτων (ΜΑ1.1 έως ΜΑ2.2) αναδεικνύει μια ολιστική προσέγγιση όπου η ψηφιακή τεχνολογία δεν αποτελεί απλώς ένα μέσο υποστήριξης, αλλά έναν καταλύτη για την οικοδόμηση της μαθηματικής και στατιστικής σκέψης. Μέσω της συνέργειας διαδραστικών εργαλείων, έξυπνης ανατροφοδότησης και δυναμικών περιβαλλόντων μάθησης, διαμορφώνεται ένα οικοσύστημα που ενισχύει την ενεργό συμμετοχή, την κριτική ανάλυση και την αυτονομία του/της εκπαιδευόμενου/ης. Η ευθυγράμμιση με τα επίπεδα της ταξινομίας Bloom και το πλαίσιο DigComp 3.0 διασφαλίζει ότι οι μαθητές/τριες δεν περιορίζονται στην απομνημόνευση, αλλά κατακτούν δεξιότητες που είναι απαραίτητες για τη λήψη τεκμηριωμένων αποφάσεων σε πραγματικές συνθήκες, προάγοντας έτσι έναν ουσιαστικό ψηφιακό και μαθηματικό εγγραμματισμό.

3.4 Σχεδίαση του Ψηφιακού Μαθήματος

3.4.1 Φιλοσοφία Σχεδιασμού

Η σύγχρονη εκπαιδευτική πραγματικότητα αναδεικνύει το εκπαιδευτικό έργο ως μια σύνθετη, δυναμική και πολυδιάστατη πρακτική, η οποία απαιτεί από τον εκπαιδευτικό τη λήψη τεκμηριωμένων αποφάσεων σε πολλά επίπεδα. Σε αυτό το πλαίσιο, η ψηφιακή μεταμόρφωση της διδασκαλίας και της μάθησης αποτελεί πρωτίστως ένα πρόβλημα σχεδιασμού, όπου ο ρόλος των ψηφιακών τεχνολογιών είναι να λειτουργούν ως καταλύτες για τη βελτίωση της μαθησιακής εμπειρίας, τοποθετώντας τα συμφέροντα των εκπαιδευομένων στο επίκεντρο και ενισχύοντας την ανθρώπινη αλληλεπίδραση αντί να την υποκαθιστούν.

Ο σχεδιασμός του παρόντος ψηφιακού μαθήματος ακολουθεί μια δομημένη παιδαγωγική προσέγγιση, βασισμένη στις αρχές της μικρο-μάθησης και του μοντέλου που παρουσιάστηκε στο μάθημα (ΨΣ-ΗΜ-721) - Εκπαιδευτική Τεχνολογία του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Ηλεκτρονική Μάθηση», Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, και υλοποιήθηκε στο πλαίσιο της Εργασίας 3, με στόχο τη μεγιστοποίηση της μαθησιακής απόδοσης (Σάμψων, 2026a,b) (Εικόνες 4, 5, 6).

Η προσέγγιση αυτή ευθυγραμμίζεται με τη φιλοσοφία ότι οι ψηφιακές τεχνολογίες, όταν επιλέγονται με βάση τις ιδιαίτερες δυνατότητές τους (affordance analysis) και συνδυάζονται με κατάλληλες παιδαγωγικές πρακτικές, μπορούν να οδηγήσουν σε βαθύτερη και ενεργητική μάθηση.

3.4.2 Φάση Α: Εγγραφή και Εισαγωγή στο Ψηφιακό Μάθημα (60')

Η αρχική φάση εστιάζει στην οριοθέτηση του «συμβολαίου μάθησης» και την ενεργοποίηση προϋπαρχουσών γνώσεων μέσω Connection Activities (Σάμψων, 2026a,b) (Εικόνα 4). Η δομή της Φάσης Α διαρθρώνεται ως ακολούθως:

[1] Σχετικά με το Ψηφιακό Μάθημα (23') - Εισαγωγικό βίντεο και παρουσίαση στόχων - Οριοθέτηση του «συμβολαίου μάθησης» (Μαθησιακά Αποτελέσματα) - Ενεργοποίηση προϋπαρχουσών γνώσεων μέσω Connection Activities (Σάμψων, 2026a,b).

Αναλυτικότερα:

- Καλωσόρισμα στο Ψηφιακό Μάθημα

- Εισαγωγή –Σκοπός του Ψηφιακού Μαθήματος
- Μαθησιακά Αποτελέσματα Ψηφιακού Μαθήματος
- Δομή του Ψηφιακού Μαθήματος
- Άδεια χρήσης Ψηφιακού Μαθήματος
- Δημιουργός του Ψηφιακού Μαθήματος

[2] Προαπαιτούμενα του Ψηφιακού Μαθήματος (7') - Ενεργοποίηση προϋπαρχουσών γνώσεων μέσω Connection Activities.

- Προαπαιτούμενες Γνώσεις και Δεξιότητες
- Ελάχιστες Απαραίτητες Υποδομές για τη συμμετοχή στο Ψηφιακό Μάθημα

[3] Ολοκλήρωση του Ψηφιακού Μαθήματος (10')

- Απαραίτητες ενέργειες
- Τελική εξέταση του Ψηφιακού Μαθήματος

[4] Εισαγωγή στη θεματική του Ψηφιακού Μαθήματος (20')

- Δραστηριότητες Αφόρμησης: Connection Activity.
- Discussion Forum: Δραστηριότητα γνωριμίας.

3.4.3 Φάση Β: Εκπαιδευτικά Μικρο-Μαθήματα (2 ενότητες) (180')

Η φάση αυτή αποτελείται από 2 ενότητες Μικρο-Μάθησης. Κάθε Μικρο-Μάθημα υποστηρίζει και να αξιολογεί την επίτευξη δύο (2) καλώς ορισμένων μαθησιακών αποτελεσμάτων. Η διάρκεια του Μικρο-Μαθήματος είναι 90' και ακολουθείται το μοντέλο των 6 βημάτων του Σάμψων (2026a,b) για τη διασφάλιση της ενεργού μάθησης.

Η δομή του κάθε Μικρο-Μαθήματος διαρθρώνεται ως ακολούθως:

[1] Εισαγωγή στο Μικρο-Μάθημα - Πλαισίωση του θέματος (5').

[2] Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 1: Παρουσίαση Εννοιών (Concepts) - Θεωρητικό υπόβαθρο (15').

[3] Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 2: Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών με παροχή άμεσης ανατροφοδότησης και καθοδήγησης (15').

[4] Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 3: Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας (Skill) - Μοντελοποίηση της πρακτικής εφαρμογής (15').

[5] Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 4: Εξάσκηση Εφαρμογής Δεξιότητας - Ενεργός πειραματισμός με παροχή άμεσης ανατροφοδότησης και καθοδήγησης (15').

[6] Ανακεφαλαίωση, Αναστοχασμός, Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση - παροχή άμεσης ανατροφοδότησης και καθοδήγησης (25').

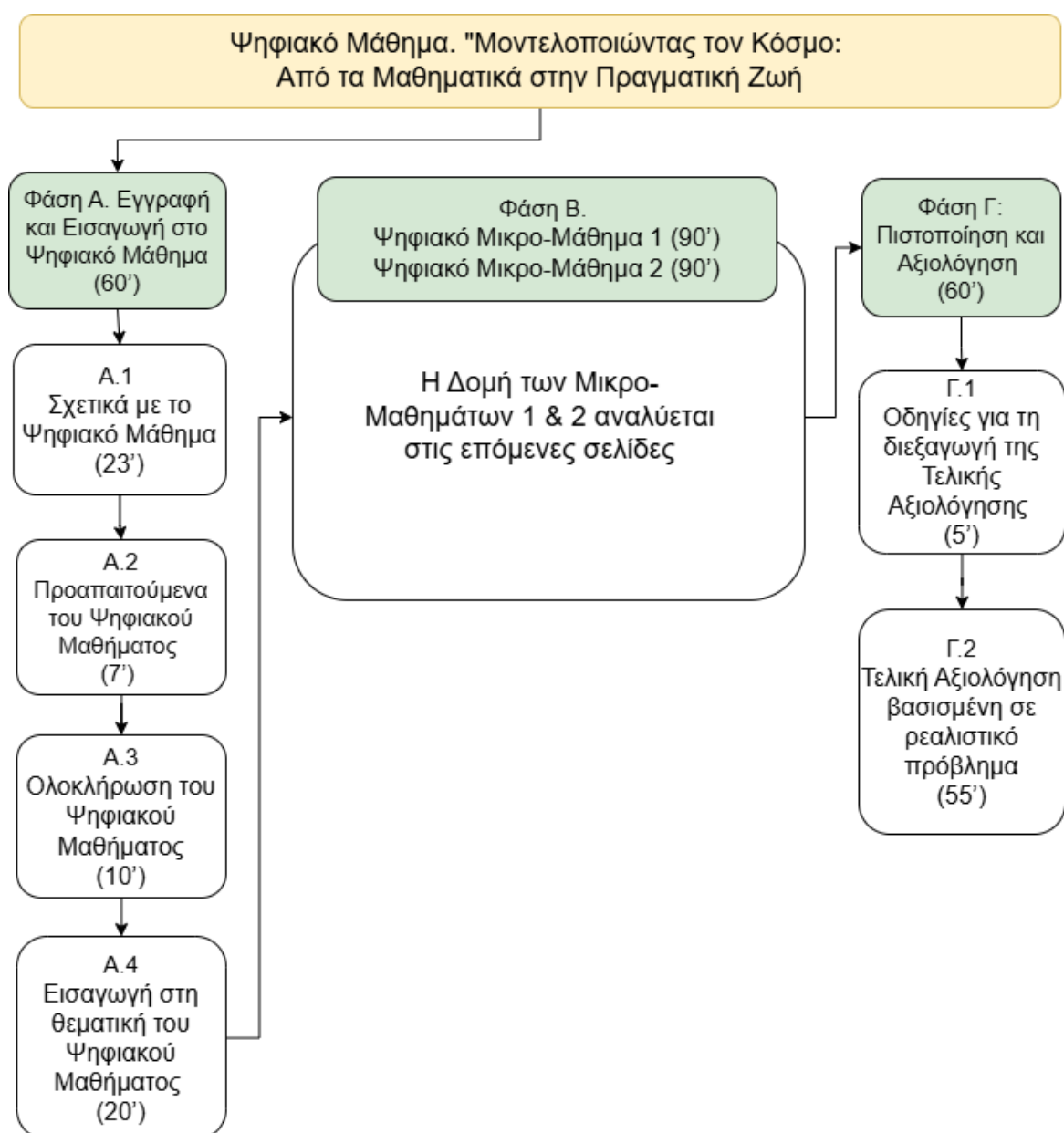
3.4.4 Φάση Γ: Πιστοποίηση και Αξιολόγηση (60')

Η τελική φάση επικεντρώνεται στην επαλήθευση της μάθησης και την πιστοποίηση των αποτελεσμάτων (Σάμψων, 2026a,b). Η δομή της διαρθρώνεται ως ακολούθως:

[1] Οδηγίες για τη διεξαγωγή της Τελικής Αξιολόγησης (5').

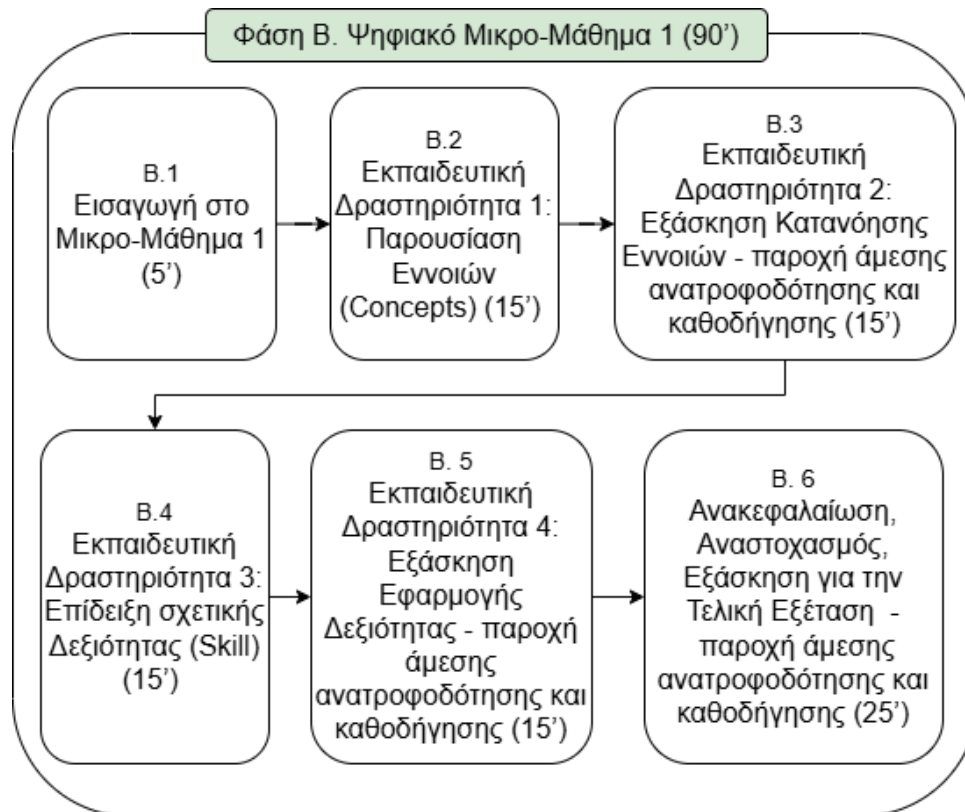
[2] Τελική Αξιολόγηση: Ερωτήσεις κλειστού τύπου βασισμένες σε ρεαλιστικό πρόβλημα. Απαιτείται ποσοστό επιτυχίας 75% για την ολοκλήρωση (55').

Η ολοκληρωμένη σχεδίαση του ψηφιακού μαθήματος, μέσα από τις τρεις διακριτές φάσεις του, αποσκοπεί στη μετατόπιση από την παραδοσιακή διδασκαλία στην ενισχυμένη τεχνολογικά μάθηση, υποστηρίζοντας την εξατομίκευση και την ενεργό εμπλοκή των εκπαιδευομένων. Αξιοποιώντας τις αρχές της μικρο-μάθησης και του μοντέλου των 6 βημάτων του Σάμπσον (2026a,b), το μάθημα διασφαλίζει ότι η τεχνολογία δεν χρησιμοποιείται απλώς επειδή είναι διαθέσιμη, αλλά επειδή προσφέρει σαφή εκπαιδευτικά οφέλη, προάγοντας την αυτορρυθμιζόμενη μάθηση και την ανάπτυξη ουσιαστικών ικανοτήτων, σύμφωνα με τις σύγχρονες εκπαιδευτικές προκλήσεις.



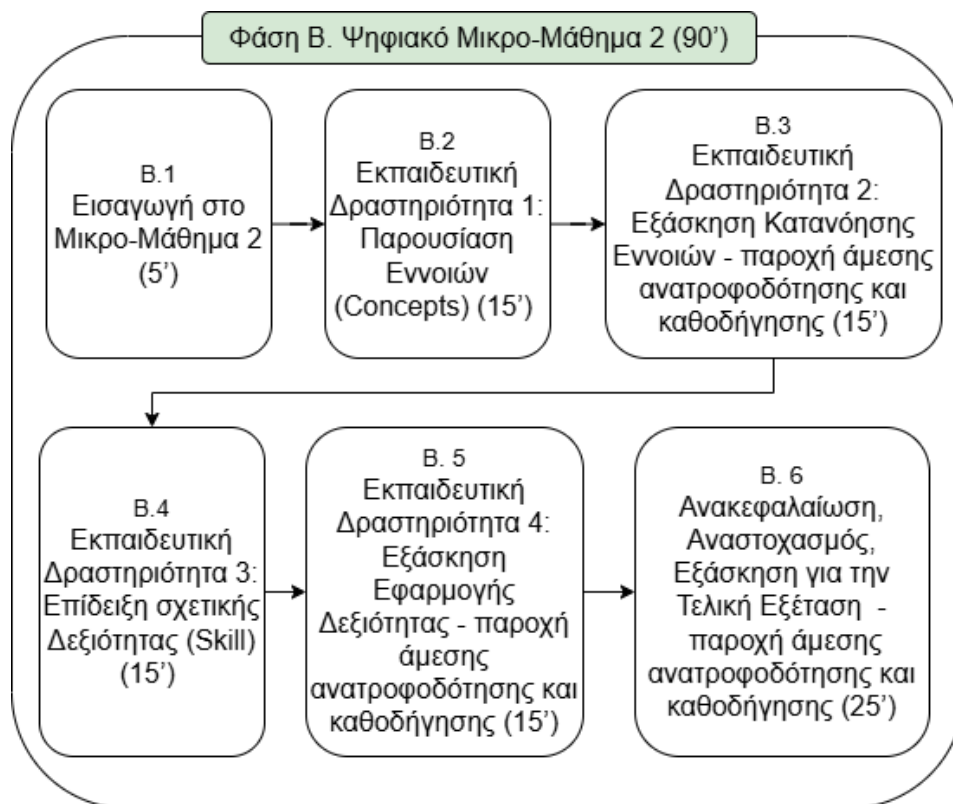
Εικόνα 4 Διάγραμμα ροής του Ψηφιακού Μαθήματος.

Σημείωση. Η εικόνα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα με χρήση του δικτυακού εργαλείου *diagrams.net* (*draw.io*) (*diagrams.net, n.d.*).



Εικόνα 5 Διάγραμμα ροής του Ψηφιακού Μικρο-Μαθήματος 1.

Σημείωση. Η εικόνα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα με χρήση του δικτυακού εργαλείου *diagrams.net* (*draw.io*) (*diagrams.net, n.d.*).



Εικόνα 6 Διάγραμμα ροής του Ψηφιακού Μικρο-Μαθήματος 2.

Σημείωση. Η εικόνα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα με χρήση του δικτυακού εργαλείου *diagrams.net* (*draw.io*) (*diagrams.net, n.d.*).

Κεφάλαιο 4. Υλοποίηση του Ψηφιακού Μαθήματος

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται η τεχνική υλοποίηση του ψηφιακού μαθήματος, η οποία μετασχηματίζει τον παιδαγωγικό σχεδιασμό που αναλύθηκε προηγουμένως σε ένα λειτουργικό ψηφιακό περιβάλλον μάθησης. Για την υλοποίηση επιλέχθηκε η πλατφόρμα Wix, η οποία αξιολογήθηκε ως η πλέον κατάλληλη για την υποστήριξη των προδιαγραφών του ψηφιακού μαθήματος, καθώς προσφέρει ευελιξία στη διάταξη του περιεχομένου και δυνατότητες ενσωμάτωσης πολυμεσικού υλικού που ενισχύουν την εμπλοκή του/της εκπαιδευόμενου/ης (Wix.com Ltd., n.d.).

Μέσω της αναλυτικής παρουσίασης που ακολουθεί, τεκμηριώνεται η δομή του ψηφιακού περιβάλλοντος, με τη χρήση ενδεικτικών στιγμιότυπων οθόνης (screenshots) από την υλοποίηση στην ιστοσελίδα mefstathiou2014.wixsite.com, τα οποία αναδεικνύουν την αρχιτεκτονική του μαθήματος και την εμπειρία πλοήγησης σε κάθε επιμέρους δραστηριότητα των μικρομαθημάτων.

Η υλοποίηση του ψηφιακού μαθήματος είναι προσβάσιμη στην ηλεκτρονική διεύθυνση <https://mefstathiou2014.wixsite.com/website-2>

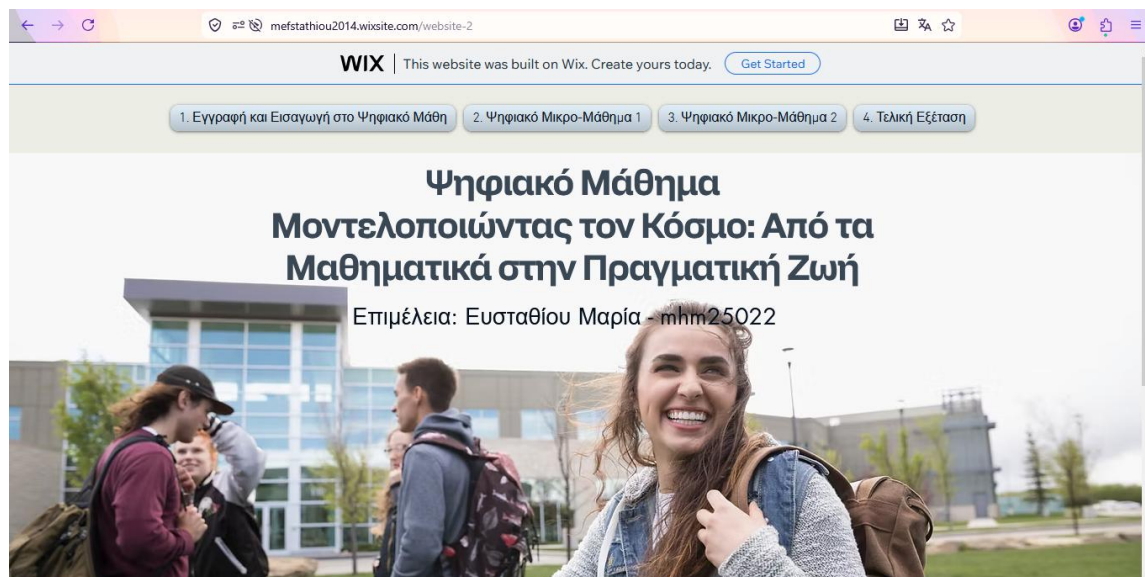
Το πλήρες εκπαιδευτικό υλικό, συμπεριλαμβανομένου του συνόλου των πόρων και των συνοδευτικών αρχείων, παρατίθεται αναλυτικά στο Παράρτημα της παρούσας μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας.

Η υλοποίηση του ψηφιακού μαθήματος στην πλατφόρμα Wix βασίστηκε στην ανάγκη για ένα περιβάλλον μάθησης που χαρακτηρίζεται από **λειτουργικότητα, φιλικότητα προς τον χρήστη και αισθητική αρτιότητα**. Η αρχιτεκτονική του ιστοτόπου έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε να καθοδηγεί τον/την εκπαιδευόμενο/η με σαφήνεια, ακολουθώντας τη λογική των μικρο-μαθημάτων (micro-learning), όπου κάθε ενότητα αποτελεί μια αυτόνομη μαθησιακή εμπειρία.

Όπως αποτυπώνεται στην Εικόνα 7, η κεντρική σελίδα του ψηφιακού μαθήματος περιλαμβάνει:

- **Μενού πλοήγησης:** Παρέχει άμεση πρόσβαση σε όλες τις θεματικές ενότητες, επιτρέποντας στον εκπαιδευόμενο να διαχειρίζεται τον χρόνο του και την πορεία της μάθησής του.
- **Δομή Περιεχομένου:** Η ροή των σελίδων ακολουθεί μια δομημένη παιδαγωγική προσέγγιση, βασισμένη στις αρχές της μικρο-μάθησης, που εξασφαλίζει την απαραίτητη συνοχή και σύνδεση μεταξύ των ενοτήτων (Σάμψων, 2026a,b).
- **Οπτική Ιεραρχία:** Η χρήση συνεπών γραμματοσειρών και χρωματικής παλέτας ενισχύει την αναγνωρισιμότητα και μειώνει το γνωστικό φορτίο κατά την περιήγηση.

Η επιλογή της συγκεκριμένης δομής διασφαλίζει ότι ο/η εκπαιδευόμενος/η, εισερχόμενος/η στο περιβάλλον, αντιλαμβάνεται άμεσα τον σκοπό του μαθήματος και τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να αλληλεπιδράσει με το εκπαιδευτικό υλικό, προάγοντας την αυτονομία και την αυτορρύθμιση στη μάθηση.



Εικόνα 7 Αρχική σελίδα του ψηφιακού μαθήματος στην πλατφόρμα Wix: Εγγραφή και Εισαγωγή στο Ψηφιακό Μάθημα.

4.1 Εγγραφή και Εισαγωγή στο Ψηφιακό Μάθημα

Η ενότητα «Εγγραφή και Εισαγωγή στο Ψηφιακό Μάθημα» [[σύνδεσμος](#)] αποτελεί την Α' φάση του ψηφιακού μαθήματος και διαρθρώνεται στις ακόλουθες υποενότητες, οι οποίες υλοποιήθηκαν στο περιβάλλον της πλατφόρμας Wix, αξιοποιώντας τις δυνατότητες διαδραστικής παρουσίασης περιεχομένου:

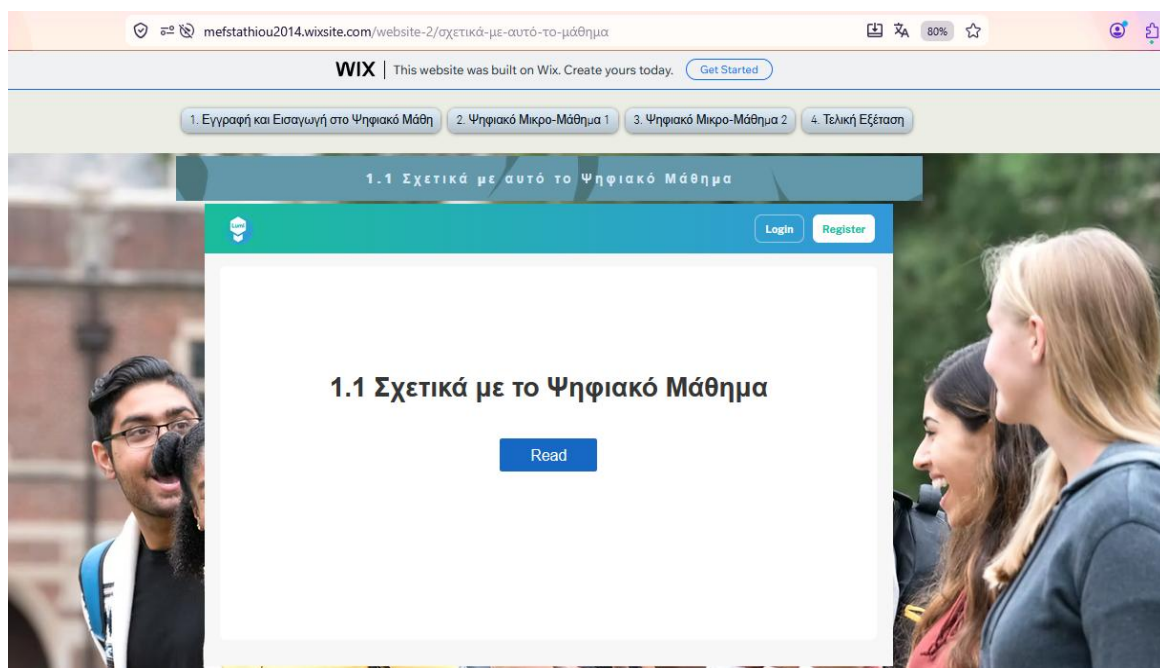
- Σχετικά με αυτό το Ψηφιακό Μάθημα
- Προαπαιτούμενα του Ψηφιακού Μαθήματος
- Ολοκλήρωση του Ψηφιακού Μαθήματος
- Εισαγωγή στη θεματική του Ψηφιακού Μαθήματος

4.1.1 Σχετικά με αυτό το Ψηφιακό Μάθημα

Η υποενότητα «Σχετικά με αυτό το Ψηφιακό Μάθημα» αποτελεί το εισαγωγικό μέρος της μαθησιακής διαδρομής, έχοντας ως κύριο στόχο τον προσανατολισμό του/της εκπαιδευόμενου/ης και την αποσαφήνιση του εκπαιδευτικού πλαισίου. Στο Wix, η σελίδα αυτή έχει σχεδιαστεί για να λειτουργεί ως το «συμβόλαιο μάθησης», όπου παρατίθενται με διαφάνεια η φιλοσοφία, τα μαθησιακά αποτελέσματα και οι προσδοκώμενες δεξιότητες που θα αναπτυχθούν.

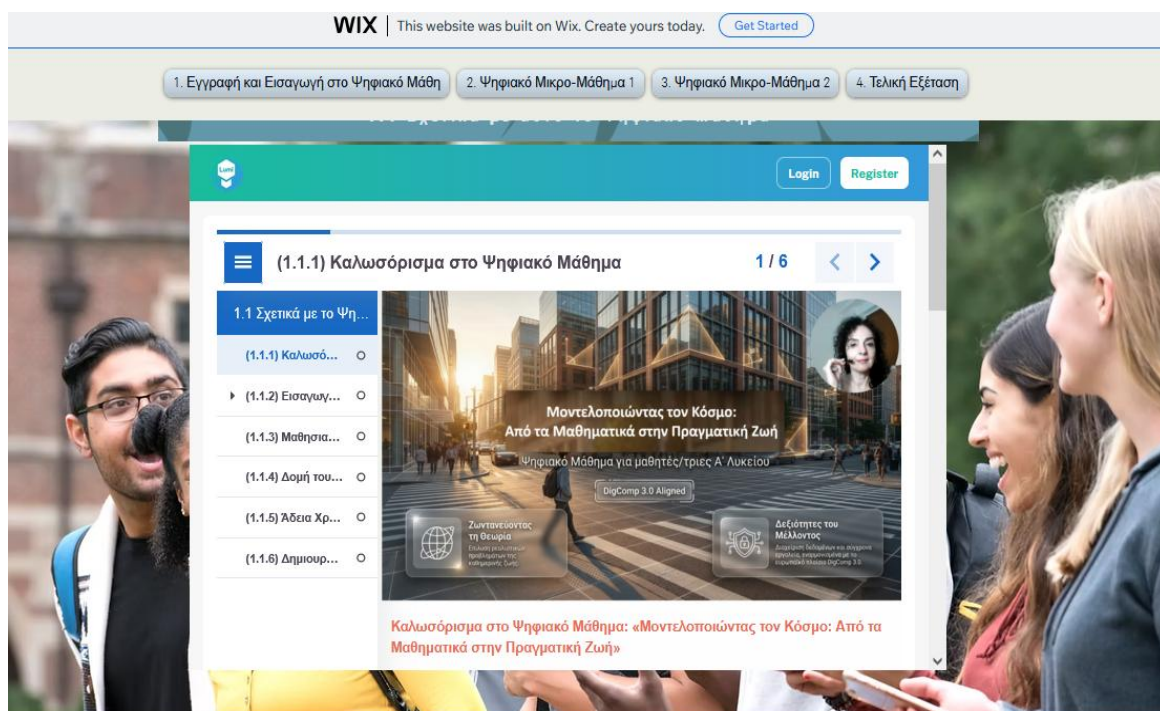
Στην Εικόνα 8 παρουσιάζεται η δομή της υποενότητας, η οποία έχει σχεδιαστεί για να παρέχει στον/στην εκπαιδευόμενο/η μια ολοκληρωμένη εικόνα του μαθήματος. Περιλαμβάνει:

- Καλωσόρισμα στο Ψηφιακό Μάθημα
- Εισαγωγή – Σκοπός του Ψηφιακού Μαθήματος
- Μαθησιακά Αποτελέσματα Ψηφιακού Μαθήματος
- Δομή του Ψηφιακού Μαθήματος
- Άδεια χρήσης Ψηφιακού Μαθήματος
- Δημιουργός του Ψηφιακού Μαθήματος



Εικόνα 8 Κεντρική διεπαφή της υποενοότητας «Σχετικά με αυτό το Ψηφιακό Μάθημα» στο Wix.

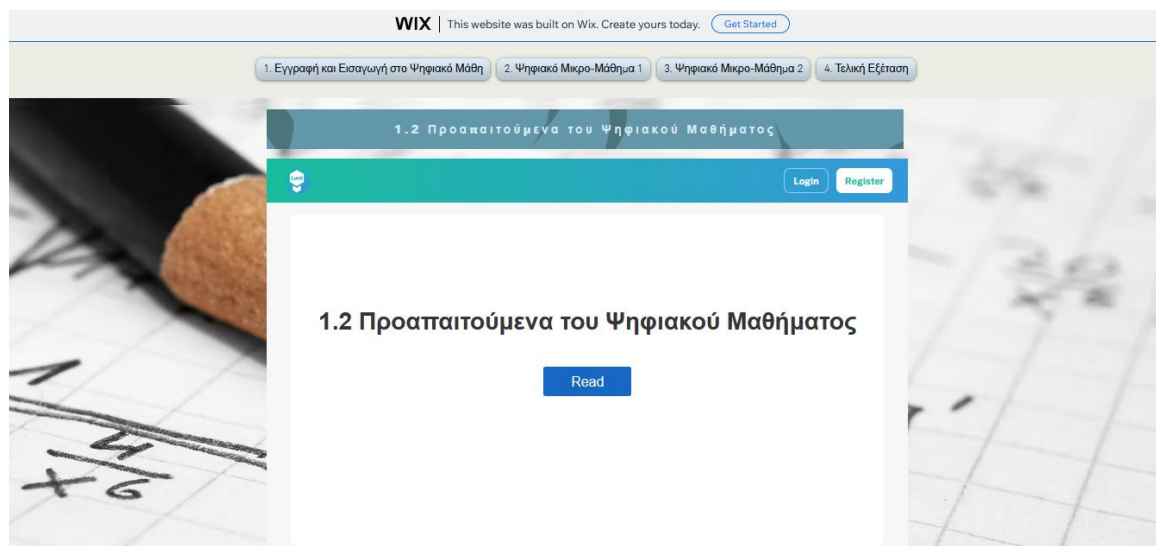
Για την αποτελεσματική παρουσίαση των παραπάνω στοιχείων και τη διασφάλιση της διαδραστικότητας, επιλέχθηκε η υλοποίηση μέσω Interactive Book (H5P/Lumi) (Lumi Education, 2026). Η επιλογή αυτή επιτρέπει την οργάνωση του περιεχομένου σε διακριτές σελίδες, ενισχύοντας την πλοήγηση και την εμπλοκή του/της εκπαιδευόμενου/ης με το υλικό. Ενδεικτικό παράδειγμα του περιεχομένου του Interactive Book φαίνεται στην Εικόνα 9.



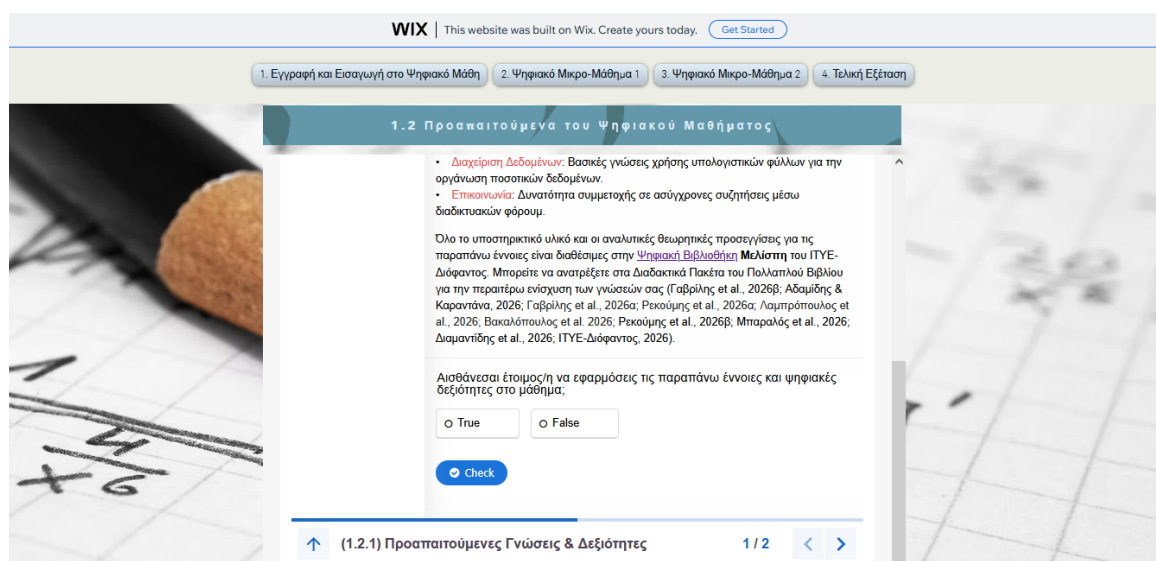
Εικόνα 9 «Καλωσόρισμα στο Ψηφιακό Μάθημα» όπως ενσωματώνεται στο περιβάλλον του Wix, μέσω της εφαρμογής Interactive Book (Lumi).

4.1.2 Προαπαιτούμενα του Ψηφιακού Μαθήματος

Η υποενότητα «Προαπαιτούμενα του Ψηφιακού Μαθήματος» στοχεύει στην οριοθέτηση του απαραίτητου υποβάθρου για την επιτυχή συμμετοχή στο ψηφιακό μάθημα, χρησιμοποιώντας δραστηριότητες ενεργοποίησης προϋπαρχουσών γνώσεων (Connection Activities), σύμφωνα με το προτεινόμενο μοντέλο (Σάμψων, 2026a,b) (Εικόνα 10, Εικόνα 11).



Εικόνα 10 Η υποενότητα «Προαπαιτούμενα του Ψηφιακού Μαθήματος» στο περιβάλλον του Wix.



Εικόνα 11 «Προαπαιτούμενες Γνώσεις και Δεξιότητες», όπως ενσωματώνονται στο περιβάλλον του Wix, μέσω της εφαρμογής Interactive Book (Lumi).

Η υποστήριξη της μάθησης ξεκινά με την αποσαφήνιση δύο κρίσιμων πυλώνων:

- **Προαπαιτούμενες Γνώσεις και Δεξιότητες:** Παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες και ικανότητες που οφείλει να κατέχει ο/η εκπαιδευόμενος/η, προκειμένου να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις του μαθήματος και να οικοδομήσει με ασφάλεια τη νέα γνώση.
- **Ελάχιστες Απαραίτητες Υποδομές:** Παρέχεται αναλυτική πληροφόρηση για το απαιτούμενο τεχνολογικό περιβάλλον (π.χ. πρόσβαση στο διαδίκτυο, περιηγητής

ιστού, λογισμικό), διασφαλίζοντας ότι ο/η εκπαιδευόμενος δεν θα αντιμετωπίσει τεχνικά εμπόδια κατά τη διάρκεια της μαθησιακής διαδρομής

Η δομή αυτή ενισχύει την αίσθηση αυτοπεποίθησης του/της εκπαιδευόμενου/ης, καθώς του επιτρέπει να αξιολογήσει την ετοιμότητά του/της πριν από την έναρξη της κύριας μαθησιακής διαδικασίας. Η παρουσίαση των προαπαιτούμενων γίνεται με τρόπο άμεσο και προσβάσιμο, εξασφαλίζοντας την ισότιμη συμμετοχή όλων των χρηστών.

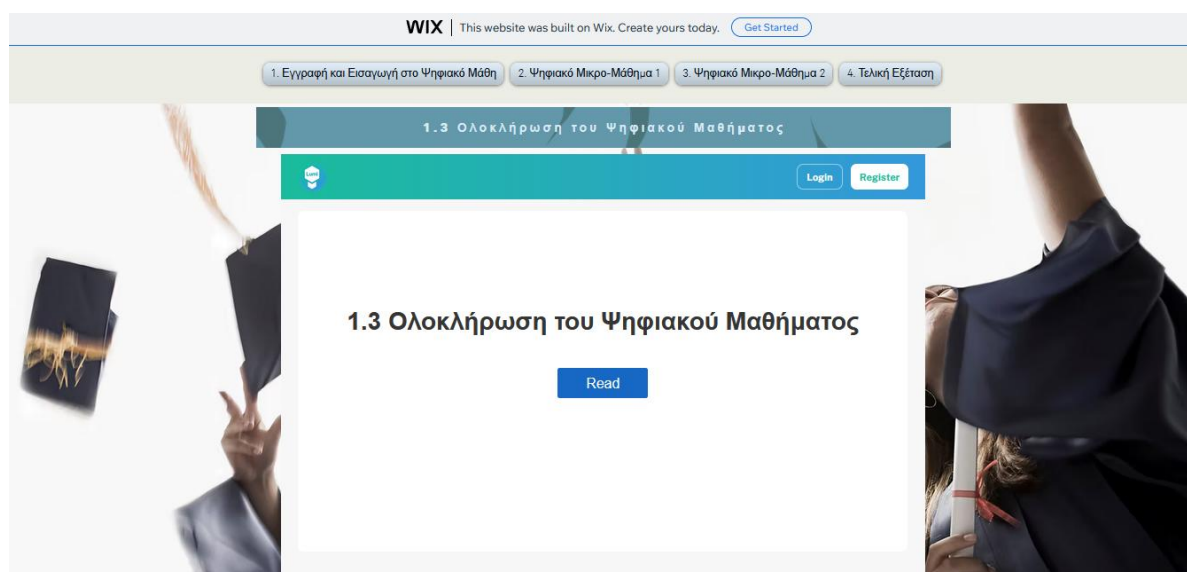
4.1.3 Ολοκλήρωση του Ψηφιακού Μαθήματος

Η υποενότητα «Ολοκλήρωση του Ψηφιακού Μαθήματος» παρέχει σαφείς οδηγίες προς τον/την εκπαιδευόμενο/η σχετικά με τη διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσει για την επιτυχή περάτωση του μαθήματος. Η ενότητα αυτή λειτουργεί ως «οδικός χάρτης» της μαθησιακής διαδικασίας, ενισχύοντας την αυτορρύθμιση και τον προγραμματισμό του εκπαιδευόμενου.

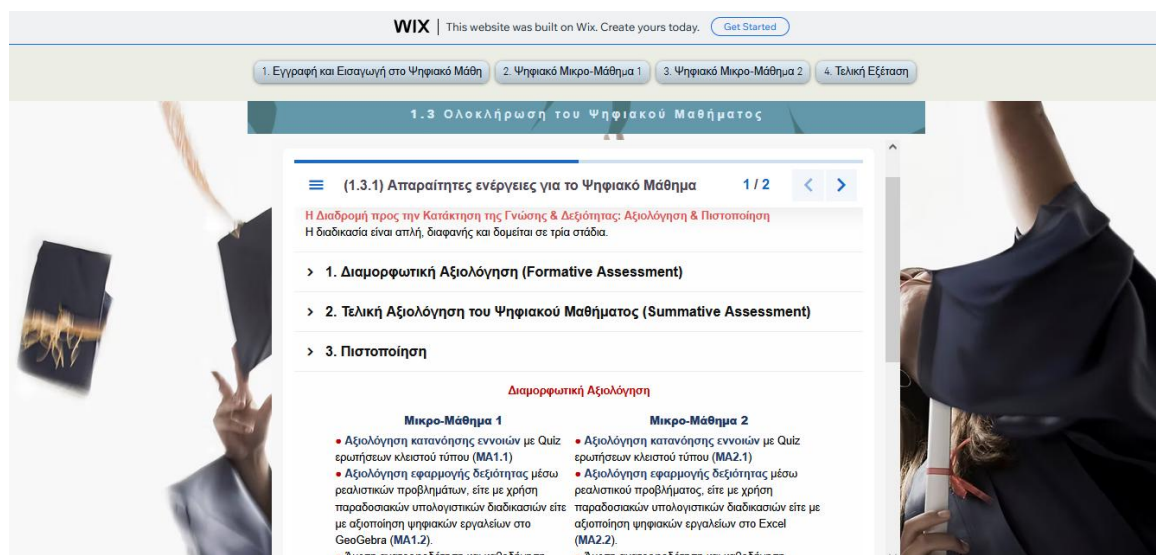
Τα κύρια σημεία της υποενότητας περιλαμβάνουν:

- **Απαραίτητες ενέργειες:** Αναλυτική παρουσίαση των βημάτων που απαιτούνται για την ολοκλήρωση των ενοτήτων μικρο-μάθησης, διασφαλίζοντας ότι ο/η εκπαιδευόμενος/η δεν παραλείπει κρίσιμα στάδια (π.χ. ενεργή συμμετοχή σε δραστηριότητες, μελέτη υλικού).
- **Τελική εξέταση του Ψηφιακού Μαθήματος:** Παρουσίαση του πλαισίου αξιολόγησης, με έμφαση στα κριτήρια επιτυχίας, το είδος των ερωτήσεων και τη διαδικασία πιστοποίησης των μαθησιακών αποτελεσμάτων.

Η σαφής επικοινωνία αυτών των στοιχείων αποσκοπεί στη μείωση του γνωστικού φορτίου και του άγχους, επιτρέποντας στον/στην εκπαιδευόμενο να επικεντρωθεί αποκλειστικά στην κατάκτηση της γνώσης. Η υλοποίηση και σε αυτή την ενότητα ακολουθεί τη διαδραστική προσέγγιση μέσω του Interactive Book, προσφέροντας μια συνεκτική εμπειρία πλοήγησης (Εικόνα 12, Εικόνα 13).



Εικόνα 12 Η υποενότητα «Ολοκλήρωση του Ψηφιακού Μαθήματος» στο περιβάλλον του Wix.

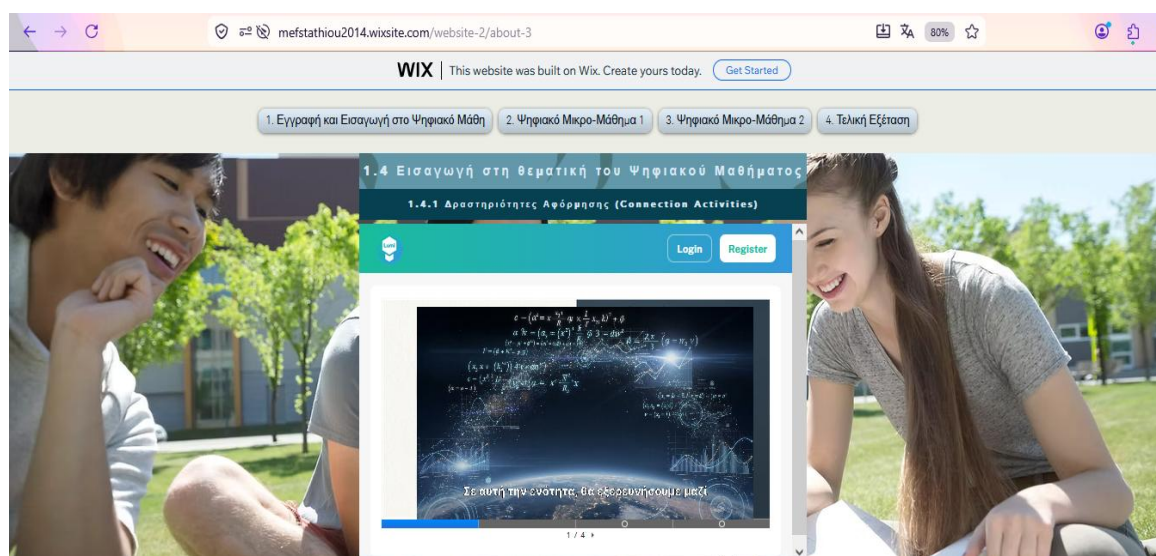


Εικόνα 13 «Απαραίτητες ενέργειες», όπως ενσωματώνονται στο περιβάλλον του Wix, μέσω της εφαρμογής Interactive Book (Lumi).

4.1.4 Εισαγωγή στη θεματική του Ψηφιακού Μαθήματος

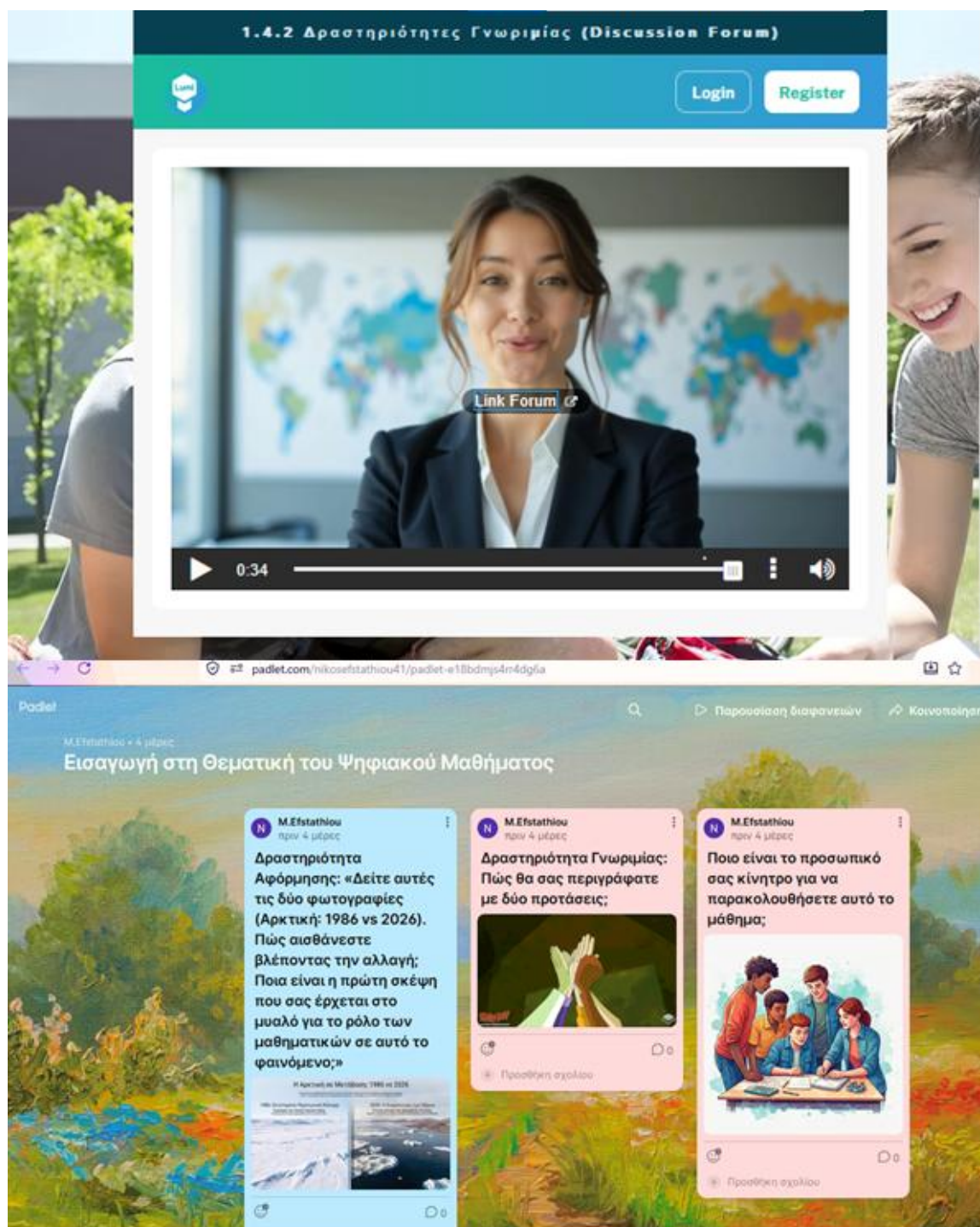
Η τελευταία ενότητα της Α' φάσης του ψηφιακού μαθήματος έχει ως κύριο στόχο την άμεση εμπλοκή του/της εκπαιδευόμενου/ης και τη δημιουργία μιας μαθησιακής κοινότητας. Η εισαγωγή στη θεματική πραγματοποιείται μέσα από δύο άξονες:

Δραστηριότητες Αφόρμησης (Connection Activities): Αξιοποιώντας το προτεινόμενο μοντέλο (Σάμψων, 2026a,b), σχεδιάστηκαν δραστηριότητες αφόρμησης, που στοχεύουν στην ενεργοποίηση των προϋπαρχουσών γνώσεων. Μέσω αυτών, ο/η εκπαιδευόμενος/η ανακαλεί σχετικά γνωστικά σχήματα, τα οποία λειτουργούν ως βάση για την οικοδόμηση της νέας γνώσης που θα ακολουθήσει στις επόμενες φάσεις (Εικόνα 14).



Εικόνα 14 «Δραστηριότητες Αφόρμησης» της υποενότητας «Εισαγωγή στη θεματική του Ψηφιακού Μαθήματος», ενσωματωμένες στο περιβάλλον του Wix, μέσω της εφαρμογής Course Presentation (H5P).

Discussion Forum (Δραστηριότητα γνωριμίας): Στο περιβάλλον του Wix ενσωματώθηκε ειδικό φόρουμ συζήτησης (Padlet), το οποίο προάγει την κοινωνική αλληλεπίδραση και τη γνωριμία μεταξύ των συμμετεχόντων (Wallwisher, n.d.). Η δραστηριότητα αυτή ενισχύει το αίσθημα του "ανήκειν" και καλλιεργεί ένα κλίμα συνεργατικής μάθησης, απαραίτητο για την επιτυχή διεξαγωγή ενός ψηφιακού μαθήματος (Εικόνα 15).



Εικόνα 15 «Discussion Forum» της υποεπότητας «Εισαγωγή στη θεματική του Ψηφιακού Μαθήματος», ενσωματωμένο στο περιβάλλον του Wix.

Σημείωση: Το φόρουμ συζήτησης υλοποιείται μέσω της εφαρμογής Padlet, η οποία παρέχεται στον εκπαιδευόμενο ως υπερσύνδεσμος εντός του Course Presentation(H5P).

Η υλοποίηση αυτών των δραστηριοτήτων μέσω των εργαλείων του Wix διασφαλίζει την αμεσότητα της επικοινωνίας και διευκολύνει τον/την εκπαιδευτικό στην παρακολούθηση της ενεργού συμμετοχής των εκπαιδευομένων.

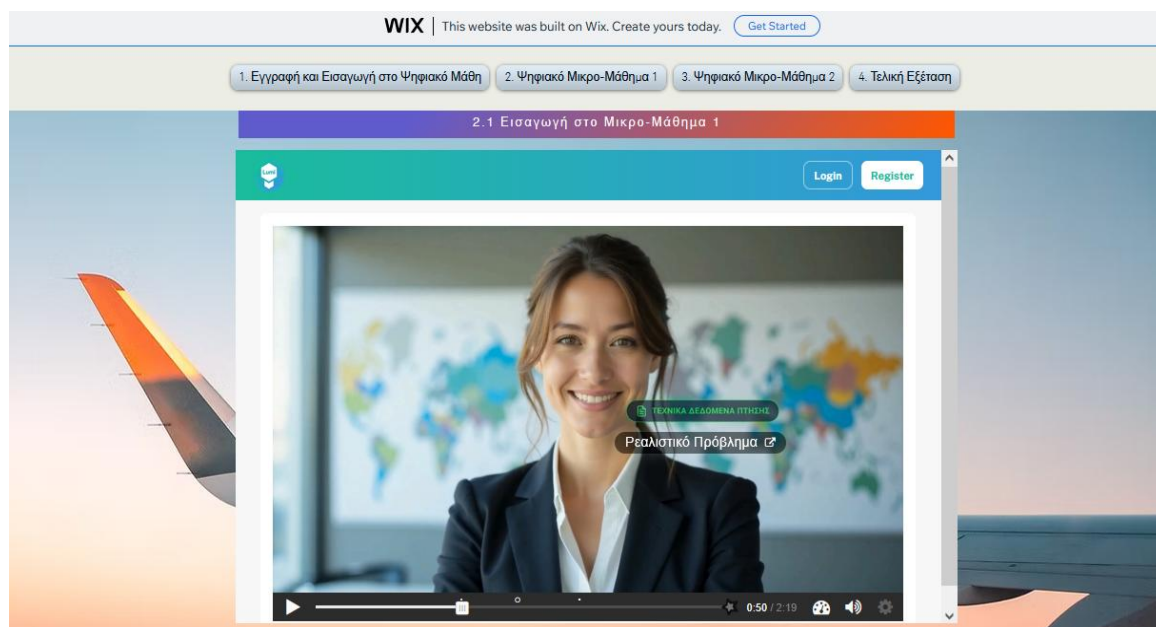
4.2 Ψηφιακό Μικρο-Μάθημα 1

Το «Ψηφιακό Μικρο-Μάθημα 1» [\[σύνδεσμος\]](#) αποτελεί την πρώτη από τις δύο ενότητες μικρο-μάθησης που συγκροτούν τη Φάση Β του ψηφιακού μαθήματος. Κάθε ενότητα είναι συστηματικά σχεδιασμένη ώστε να υποστηρίζει και να αξιολογεί την επίτευξη δύο συγκεκριμένων μαθησιακών αποτελεσμάτων. Προκειμένου να διασφαλιστεί η ενεργός εμπλοκή του/της εκπαιδευόμενου/ης, υιοθετήθηκε ο εκπαιδευτικός σχεδιασμός του Σάμψων (2026a,b), ο οποίος οργανώνει τη μαθησιακή εμπειρία στα εξής στάδια:

- Εισαγωγή στο Μικρο-Μάθημα 1
- Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 1: Παρουσίαση Εννοιών (Concepts)
- Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 2: Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών
- Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 3: Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας (Skill)
- Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 4: Εξάσκηση Εφαρμογής Δεξιότητας (Skill)
- Ανακεφαλαίωση, Αναστοχασμός, Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση

4.2.1 Εισαγωγή στο Μικρο-Μάθημα 1

Η εισαγωγή στο «Μικρο-Μάθημα 1» υλοποιείται μέσω ενός διαδραστικού βίντεο (Interactive Video) της πλατφόρμας H5P, το οποίο είναι ενσωματωμένο στο περιβάλλον του Wix. Το βίντεο αυτό λειτουργεί ως το αρχικό σημείο πλαισίωσης (framing) της ενότητας, προσφέροντας στον/στην εκπαιδευόμενο/η μια οπτικοποιημένη εισαγωγή στη θεματική (Εικόνα 16).



Εικόνα 16 «Εισαγωγή στο Μικρο-Μάθημα 1» στο περιβάλλον του Wix, μέσω διαδραστικού βίντεο (H5P).

Η διαδραστικότητα ενισχύεται με την ενσωμάτωση ενεργών υπερσυνδέσμων πάνω στο βίντεο, οι οποίοι κατευθύνουν τον/την εκπαιδευόμενο/η σε συμπληρωματικό υλικό,

όπως η παρουσίαση του «Ρεαλιστικού Προβλήματος» ή ένα quiz τύπου “pre-test”. Η επιλογή αυτή στοχεύει στην ενεργοποίηση του ενδιαφέροντος και την παροχή πλαισίου (contextualization) πριν από την έναρξη της κύριας εκπαιδευτικής δραστηριότητας.

4.2.2 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 1: Παρουσίαση Εννοιών (Concepts)

Η παρουσίαση των θεωρητικών εννοιών υλοποιείται μέσω του εργαλείου Course Presentation (H5P), το οποίο είναι πλήρως ενσωματωμένο στο περιβάλλον της πλατφόρμας Wix. Η δραστηριότητα εστιάζει στην κατανόηση της αλγεβρικής και γραφικής επίλυσης ανισώσεων 2ου βαθμού, αξιοποιώντας ένα πολυμεσικό οικοσύστημα που περιλαμβάνει, μεταξύ άλλων, τη χρήση ψηφιακού άβαταρ τεχνητής νοημοσύνης για την καθοδήγηση του εκπαιδευόμενου, καθώς και ένα διαδραστικό εργαστήριο βασισμένο στο λογισμικό GeoGebra (Εικόνα 17).

The screenshot displays a Wix website interface for a digital micro-lesson. The main heading is "Ψηφιακό Μικρο-Μάθημα 1: Μαθηματική Μοντελοποίηση με Ανισώσεις 2ου Βαθμού σε Ψηφιακά Περιβάλλοντα". Below the heading, there is a video player showing a GeoGebra interface. The video content includes a graph of the parabola $f(x) = x^2 - 3x + 2$ on a coordinate plane. The video explains the graphical solution process for the inequality $x^2 - 3x + 2 < 0$. It identifies the roots of the equation as $x=1$ and $x=2$, and states that the parabola is below the x-axis (where $f(x) < 0$) for $x < 1$ or $x > 2$. The video player shows a progress bar at 0:12 / 0:50. The Wix website header includes the Wix logo and a "Get Started" button. The page navigation bar shows four steps: 1. Εγγραφή και Εισαγωγή στο Ψηφιακό Μάθημα, 2. Ψηφιακό Μικρο-Μάθημα 1, 3. Ψηφιακό Μικρο-Μάθημα 2, and 4. Τελική Εξέταση.

Εικόνα 17 «Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 1: Παρουσίαση Εννοιών» στο περιβάλλον του Wix.

Σημείωση. Διακρίνεται το διαδραστικό βίντεο (screen recording) του GeoGebra, το οποίο επιτρέπει στον/στην εκπαιδευόμενο/η να παρακολουθήσει τη διαδικασία επίλυσης της ανίσωσης 2ου βαθμού σε πραγματικό χρόνο.

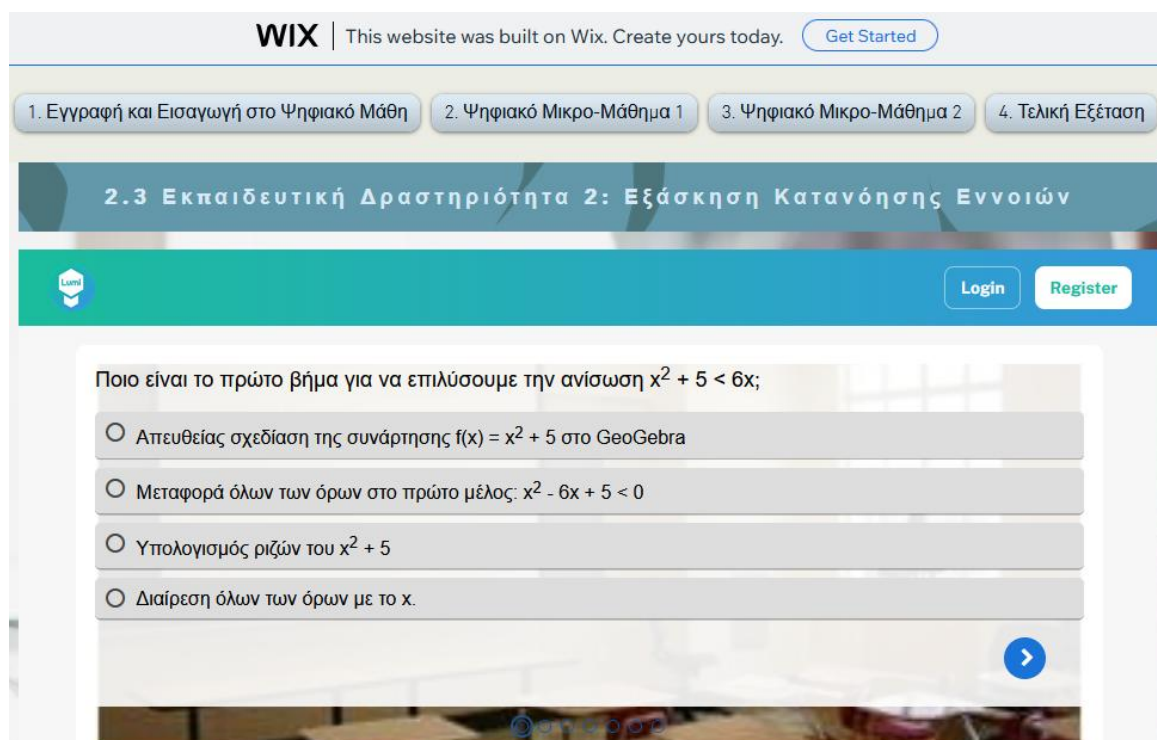
4.2.3 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 2: Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών)

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα αποσκοπεί στην εμπέδωση των θεωρητικών εννοιών που παρουσιάστηκαν προηγουμένως, μέσω μιας στοχευμένης διαδικασίας εξάσκησης. Η υλοποίησή της πραγματοποιείται με τη χρήση του εργαλείου Question Set (H5P), το οποίο είναι πλήρως ενσωματωμένο στο περιβάλλον της πλατφόρμας Wix.

Μέσω του Question Set, ο/η εκπαιδευόμενος/η καλείται να ανταποκριθεί σε μια σειρά διαδραστικών ερωτήσεων, οι οποίες έχουν σχεδιαστεί για να αξιολογούν άμεσα το επίπεδο κατανόησης των ανισώσεων 2ου βαθμού. Η επιλογή του συγκεκριμένου εργαλείου εντός του Wix παρέχει:

- Άμεση Ανατροφοδότηση (Immediate Feedback)
- Υποστηρικτική Καθοδήγηση (Scaffolding)
- Ενεργό Μάθηση

Η ενσωμάτωση του Question Set στο Wix διασφαλίζει τη συνοχή της εκπαιδευτικής διαδρομής, προσφέροντας έναν ελεγχόμενο και φιλικό προς τον χρήστη χώρο για την αυτοαξιολόγηση των γνώσεων που αποκτήθηκαν κατά την πρώτη δραστηριότητα (Εικόνα 18).

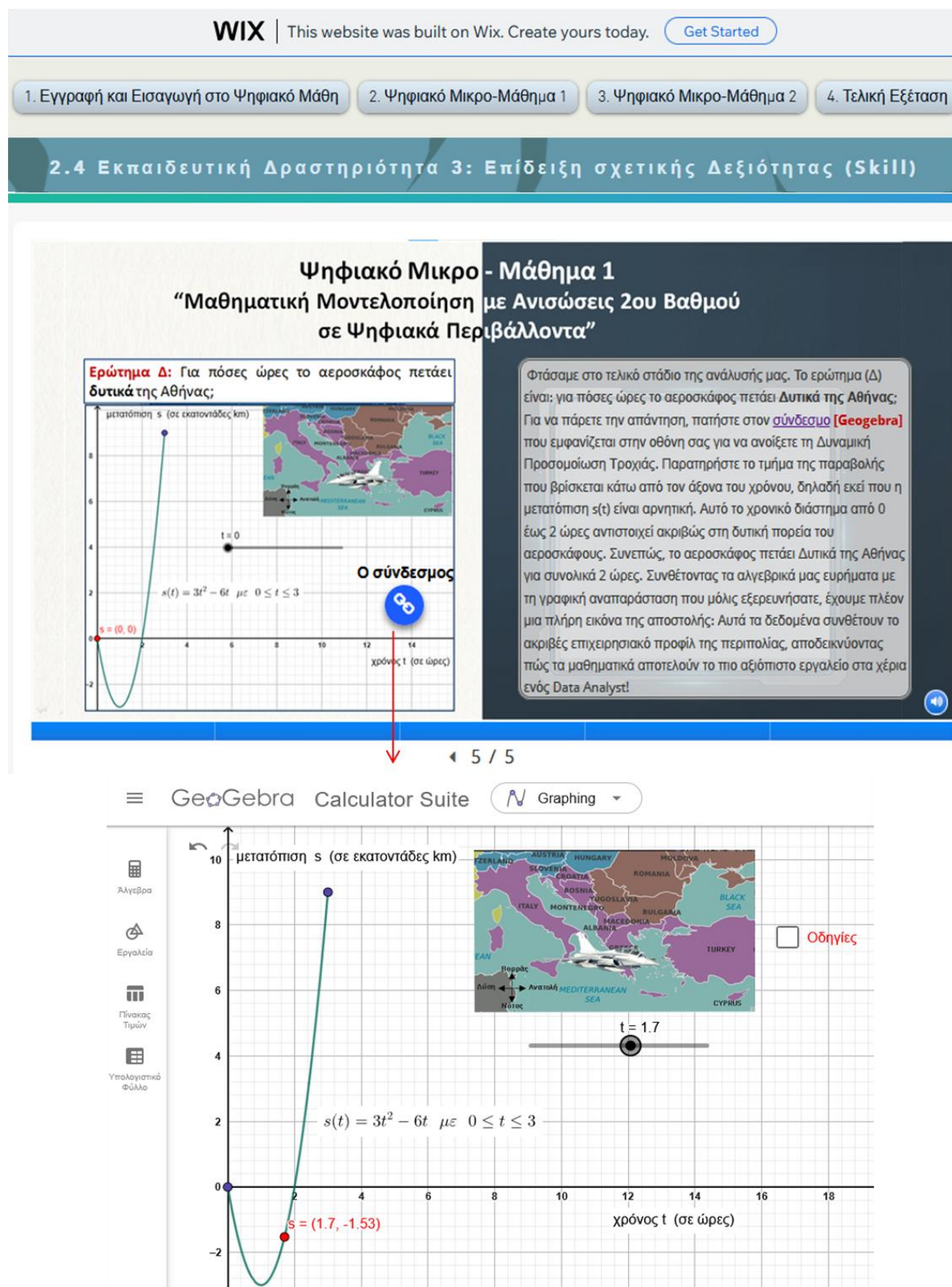


Εικόνα 18 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 2: Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών)» στο περιβάλλον του Wix, μέσω Question Set (H5P).

4.2.4 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 3: Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας (Skill)

Στο στάδιο αυτό, η εστίαση μετατοπίζεται από τη θεωρητική κατανόηση στην πρακτική εφαρμογή των δεξιοτήτων (skill modeling). Η δραστηριότητα υλοποιείται μέσω του

εργαλείου Course Presentation (H5P), το οποίο είναι ενσωματωμένο στο περιβάλλον του Wix, λειτουργώντας ως ένα διαδραστικό μέσο επίδειξης της πρακτικής εφαρμογής (Εικόνα 19).



Εικόνα 19 «Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 3: Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας» στο περιβάλλον του Wix, μέσω Course Presentation (H5P).

Η επίδειξη της δεξιότητας υποστηρίζεται από ένα πολυμεσικό οικοσύστημα, το οποίο περιλαμβάνει, μεταξύ άλλων, Δυναμικές Προσομοιώσεις (GeoGebra) και Καθοδηγούμενη Επίδειξη Διαδικασίας.

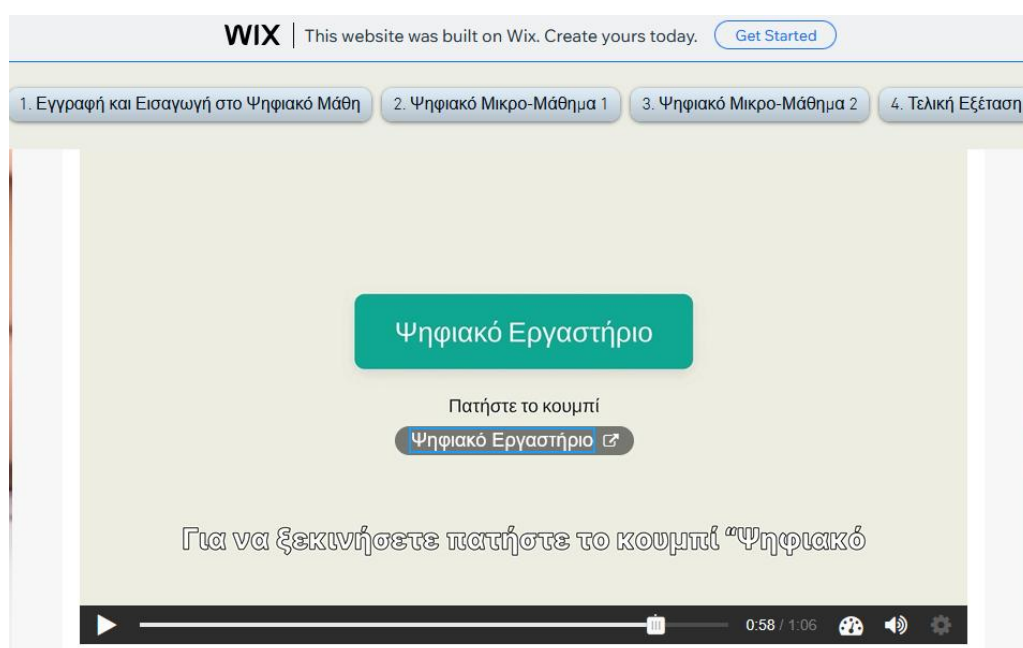
Η χρήση του Wix ως υποδοχής για το Course Presentation διασφαλίζει ότι η επίδειξη της δεξιότητας παραμένει προσβάσιμη και οπτικά ενοποιημένη με το υπόλοιπο εκπαιδευτικό υλικό, προετοιμάζοντας το έδαφος για την επόμενη φάση του ενεργού πειραματισμού.

4.2.5 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 4: Εξάσκηση Εφαρμογής Δεξιότητας (Skill)

Σε αυτή την εκπαιδευτική δραστηριότητα του Μικρο-Μαθήματος 1, η έμφαση δίνεται στην εμπέδωση και την πρακτική εφαρμογή της δεξιότητας σε ρεαλιστικές συνθήκες. Η δραστηριότητα υλοποιείται μέσω του Wix και ακολουθεί μια δομημένη μαθησιακή διαδρομή:

- Εισαγωγή μέσω Interactive Video (H5P)
- Πρόσβαση στο Ρεαλιστικό Πρόβλημα
- Αυτοαξιολόγηση (Question Set - H5P Lumi)

Η ενσωμάτωση των παραπάνω εργαλείων στο περιβάλλον του Wix δημιουργεί ένα «κλειστό» και πλήρως ελεγχόμενο ψηφιακό εργαστήριο, όπου ο/η εκπαιδευόμενος/η περνά από την καθοδηγούμενη επίδειξη στην αυτόνομη επίλυση προβλημάτων (Εικόνα 20).

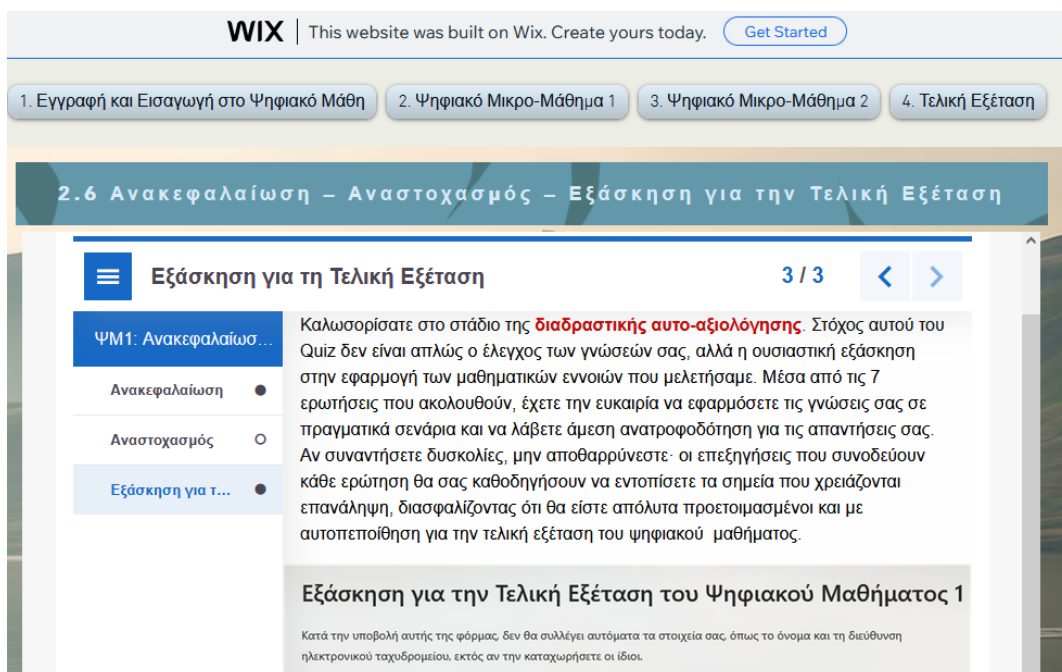


Εικόνα 20 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 4: Εξάσκηση Εφαρμογής Δεξιότητας (Skill) στο περιβάλλον του Wix.

4.2.6. Ανακεφαλαίωση, Αναστοχασμός, Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση

Η τελευταία ενότητα του μικρο-μαθήματος 1 λειτουργεί ως καταλύτης για την οριστικοποίηση της γνώσης και την προετοιμασία του/της εκπαιδευόμενου/ης για την τελική αξιολόγηση. Η διαδικασία υλοποιείται μέσω του εργαλείου **Interactive Book (H5P)**, το οποίο φιλοξενείται στην πλατφόρμα **Wix** και λειτουργεί ως ένα ψηφιακό «συνοδευτικό» που ενσωματώνει τα τρία κεντρικά στάδια της μαθησιακής πορείας:

- Ανακεφαλαίωση (Recapitulation)
- Αναστοχασμός (Reflection)
- Προετοιμασία για την Τελική Εξέταση (quiz σε MS Forms)

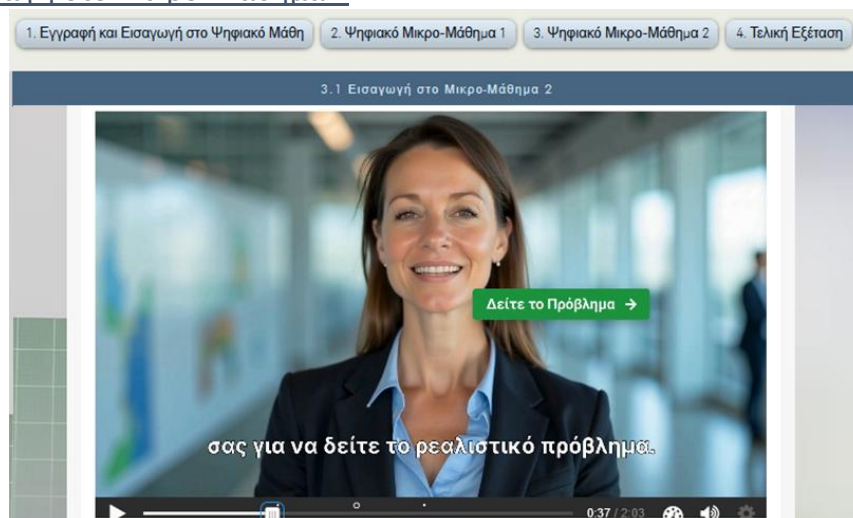


Εικόνα 21 «Ανακεφαλαίωση, Αναστοχασμός, Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση» στο περιβάλλον του Wix, μέσω Interactive Book (H5P).

4.3 Ψηφιακό Μικρο-Μάθημα 2

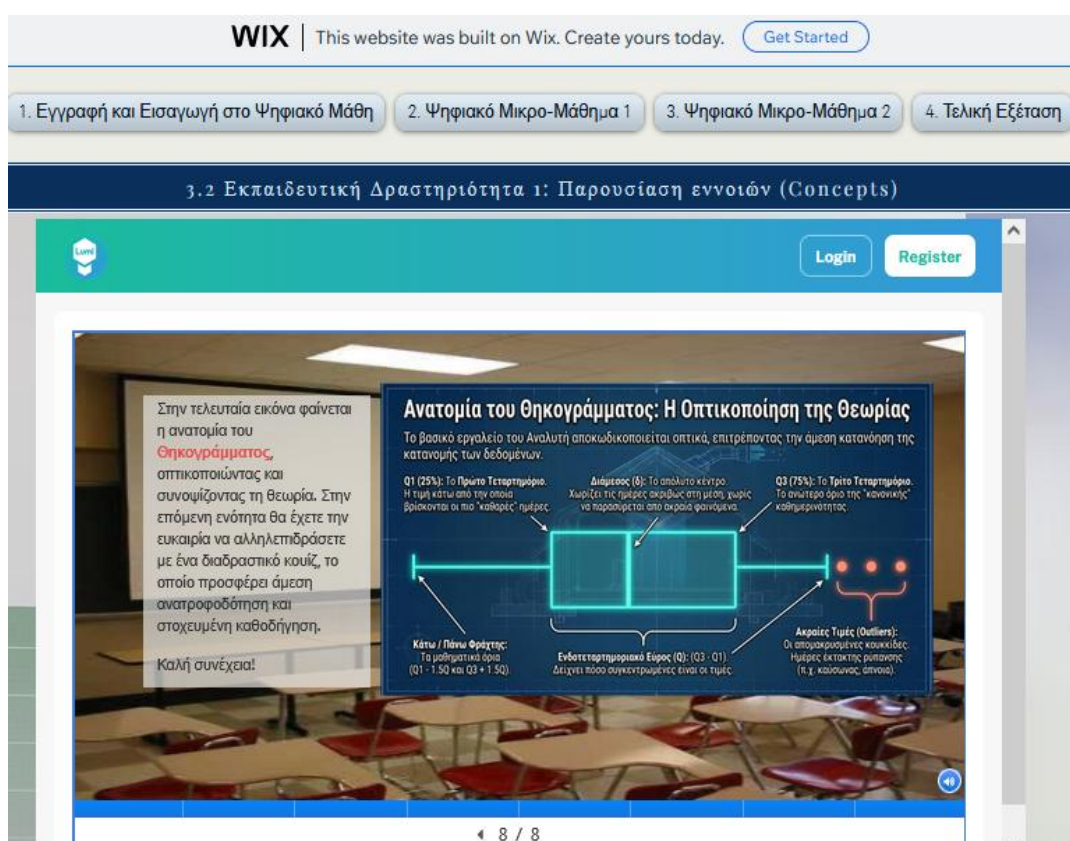
Το Ψηφιακό Μικρο-Μάθημα 2 [\[σύνδεσμος\]](#) υιοθετεί την ίδια παιδαγωγική αρχιτεκτονική και δομή εκπαιδευτικού σχεδιασμού με το Μικρο-Μάθημα 1, εξασφαλίζοντας τη μαθησιακή συνέχεια (Εικόνα 22). Η προσέγγιση αυτή διατηρεί τη συνέπεια στη χρήση του ψηφιακού περιβάλλοντος του Wix και των διαδραστικών εργαλείων H5P, προσφέροντας μια ομοιόμορφη εμπειρία στον/στην εκπαιδευόμενο/η κατά την εμβάθυνση στα νέα γνωστικά αντικείμενα. Ακολουθώντας, παρατίθενται ενδεικτικές εικόνες που αποτυπώνουν την εφαρμογή καθενός από τα 6 στάδια του εκπαιδευτικού σχεδιασμού για το Μικρο-Μάθημα 2 (Σάμψων, 2026α, β).

4.3.1 Εισαγωγή στο Μικρο-Μάθημα 2



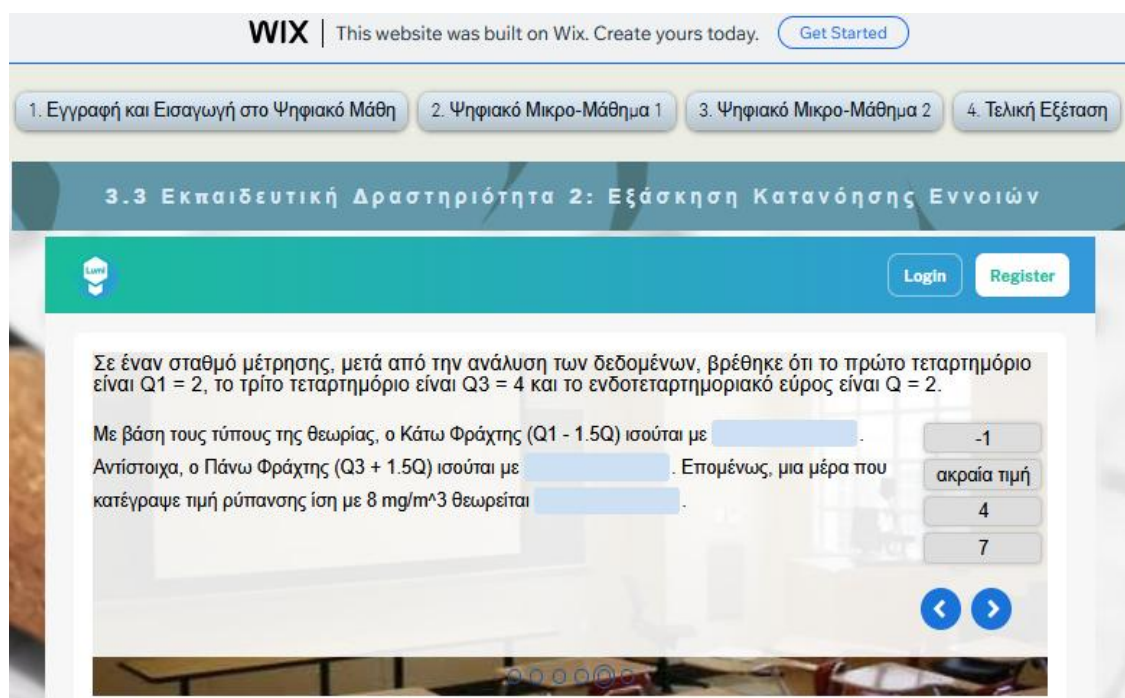
Εικόνα 22 «Εισαγωγή στο Μικρο-Μάθημα 2» στο περιβάλλον του Wix.

4.3.2 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 1: Παρουσίαση Εννοιών (Concepts)



Εικόνα 23 «Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 1: Παρουσίαση Εννοιών» στο περιβάλλον του Wix.

4.3.3 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 2: Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών



Εικόνα 24 «Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 2: Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών» στο περιβάλλον του Wix.

4.3.4 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 3: Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας (Skill)

WIX | This website was built on Wix. Create yours today. [Get Started](#)

1. Εγγραφή και Εισαγωγή στο Ψηφιακό Μάθη 2. Ψηφιακό Μικρο-Μάθημα 1 3. Ψηφιακό Μικρο-Μάθημα 2 4. Τελική Εξέταση

3.4 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 3: Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας (Skill)

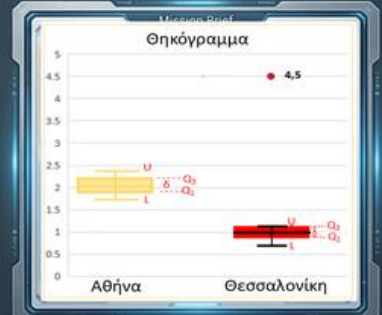
Login Register

Ψηφιακό Μικρο-Μάθημα 2

“Δυναμικά Θηκογράμματα & Λήψη Αποφάσεων με Δεδομένα”

Έχοντας προσδιορίσει με ακρίβεια τη **διάμεσο**, το **1ο** και το **3ο** τεταρτημόριο, τους **φράχτες**, την **άνω** και **κάτω οριακή τιμή** και τις **ακραίες τιμές**, είμαστε πλέον σε θέση να συνθέσουμε την πλήρη εικόνα των δεδομένων μας. Το επόμενο και τελικό βήμα είναι η κατασκευή του **θηκογράμματος** (Box Plot). Αξιοποιώντας το σύνολο αυτών των στατιστικών μεγεθών, το θηκογράμμα μετατρέπει τις αφηρημένες τιμές σε μια εύληπτη οπτική αναπαράσταση, επιτρέποντάς μας να συγκρίνουμε άμεσα τη συμπεριφορά των ρύπων μεταξύ Αθήνας και Θεσσαλονίκης «με μια ματιά», εντοπίζοντας ταυτόχρονα τη θέση και την επίδραση των ακραίων τιμών στην ποιότητα του αέρα. **Χρειάζεστε μια υπενθύμιση; Ένα κλικ στο “ΘΥΜΗΣΟΥ!”** αρκεί για να παρακολουθήσετε όλη τη διαδικασία βήμα προς βήμα!

[ΘΥΜΗΣΟΥ!](#)



Εικόνα 25 «Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 3: Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας» στο περιβάλλον του Wix.

4.3.5 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 4: Εξάσκηση Εφαρμογής Δεξιότητας (Skill)

WIX | This website was built on Wix. Create yours today. [Get Started](#)

1. Εγγραφή και Εισαγωγή στο Ψηφιακό Μάθη 2. Ψηφιακό Μικρο-Μάθημα 1 3. Ψηφιακό Μικρο-Μάθημα 2 4. Τελική Εξέταση

3.5 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 4: Εξάσκηση εφαρμογής δεξιότητας (Skill)

Login Register

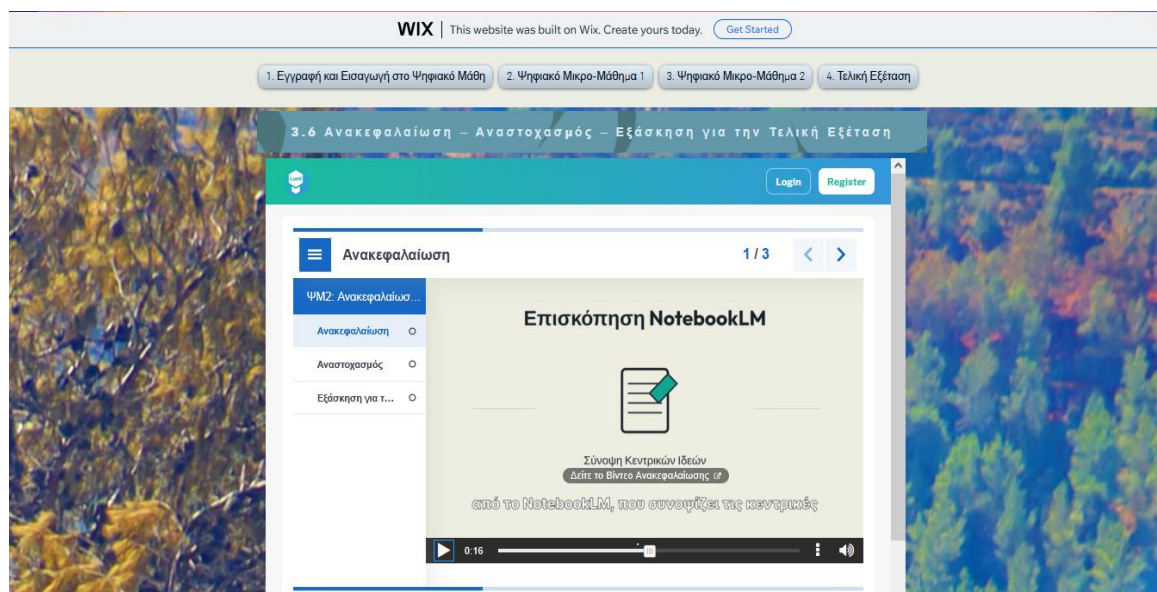
Λήψη Δεδομένων & Εκφώνηση Ψηφιακό εργαστήριο

δραστηριότητας και τον σύνδεσμο για να κατεβάσετε

0:45 / 0:49

Εικόνα 26 «Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 4: Εξάσκηση Εφαρμογής Δεξιότητας» στο περιβάλλον του Wix.

4.3.6 Ανακεφαλαίωση, Αναστοχασμός, Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση



Εικόνα 27 «Ανακεφαλαίωση, Αναστοχασμός, Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση» στο περιβάλλον του Wix.

4.4 Πιστοποίηση και Αξιολόγηση

Η τελική φάση του Ψηφιακού Μαθήματος [[σύνδεσμος](#)] επικεντρώνεται στην επαλήθευση της μάθησης και την πιστοποίηση των μαθησιακών αποτελεσμάτων, σύμφωνα με το μοντέλο του Σάμψων (2026a, b). Η δομή της υλοποιείται εντός του περιβάλλοντος του Wix και διαρθρώνεται σε δύο στάδια:

- **Οδηγίες για τη διεξαγωγή της Τελικής Αξιολόγησης** (Εικόνα 28)
- **Τελική Αξιολόγηση** (Εικόνα 29)

4.4.1 Οδηγίες για τη διεξαγωγή της Τελικής Αξιολόγησης

Τελική Εξέταση με τίτλο: «Κλιματική Αστάθεια: Μαθηματική Μοντελοποίηση και Στατιστική Σύγκριση Πλανητικών Τάσεων»

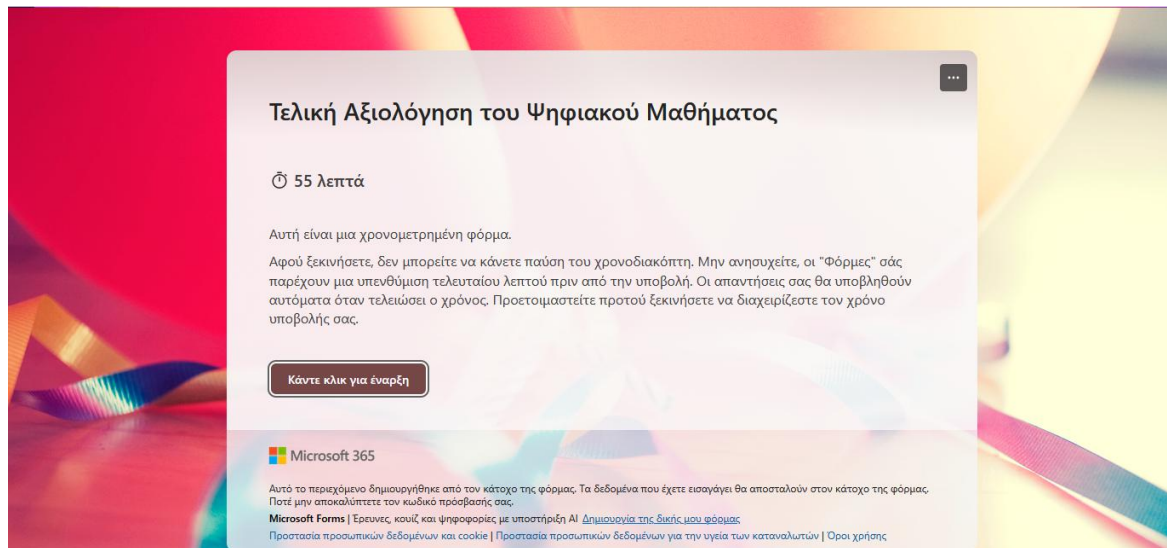
Το Σενάριο του Ρεαλιστικού Προβλήματος
Στο πλαίσιο της διερεύνησης της κλιματικής κρίσης, καλείστε να αναλύσετε τη θερμοκρασιακή μεταβολή του πλανήτη και τα επίπεδα θερμοκρασίας ειδικά στην Αρκτική, η οποία αποτελεί έναν από τους πιο ευαίσθητους δείκτες της κλιματικής αλλαγής.

Δεδομένα Μοντελοποίησης
Παγκόσμια Θερμοκρασιακή Μεταβολή: Το δοσμένο γράφημα αποτυπώνει τη μέση παγκόσμια θερμοκρασιακή μεταβολή $f(x)$ (σε $^{\circ}\text{C}$) για την περίοδο 1850–2025. Η μεταβλητή x αντιπροσωπεύει τα έτη που έχουν μεσολαβήσει από το 1850 (όπου $x=0$ το 1850 και $x=175$ το 2025).

Θερμοκρασιακό Μοντέλο Αρκτικής: Η μέση ετήσια θερμοκρασία στην περιοχή της Αρκτικής για την τελευταία 40ετία (1986–2025) προσεγγίζεται από το τριώνυμο: $g(x) = 0.02x^2 + 0.1x - 15$, με $0 \leq x \leq 40$ (όπου $x=0$ αντιστοιχεί στο έτος 1986).

Εικόνα 28 «Οδηγίες για τη διεξαγωγή της Τελικής Αξιολόγησης» στο περιβάλλον του Wix.

4.4.2 Τελική Αξιολόγηση



Εικόνα 29 «Τελική Αξιολόγηση» στο περιβάλλον του Wix.

Κεφάλαιο 5. Αξιολόγηση του Ψηφιακού Μαθήματος

Το πλαίσιο αξιολόγησης του παρόντος ψηφιακού μαθήματος βασίζεται στα πρότυπα ποιότητας που ορίζει ο οργανισμός Quality Matters (2015). Οι δείκτες αυτοί εστιάζουν στον ποιοτικό σχεδιασμό εκπαιδευτικών προγραμμάτων που απευθύνονται είτε σε πλαίσια επαγγελματικής εξειδίκευσης είτε στην ατομική γνωστική ανάπτυξη.

Ακολουθώντας παρατίθεται η αναλυτική αυτο-αξιολόγηση του ψηφιακού μαθήματος «Μοντελοποιώντας τον Κόσμο: Από τα Μαθηματικά στην Πραγματική Ζωή», εξετάζοντας τον σχεδιασμό, την ανάπτυξη και την υλοποίηση (Σάμψων, 2025c).

5.1 Μέρος Α: Σχεδίαση του Ψηφιακού Μικρομαθήματος

5.1.1 Μαθησιακά Αποτελέσματα και Ψηφιακή Ικανότητα

Τα **Μαθησιακά Αποτελέσματα** (MA1.1, MA1.2, MA2.1, MA2.2) του «υπό αξιολόγηση» ψηφιακού μαθήματος, έχουν αντληθεί από το νέο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Λυκείου (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2023, ΦΕΚ 1326/Β'/8-3-2023) και έχουν υιοθετηθεί αυτούσια ώστε να διασφαλιστεί η απόλυτη εναρμόνιση του ψηφιακού μαθήματος με τις θεσμοθετημένες εκπαιδευτικές απαιτήσεις.

Επιπροσθέτως, η επίτευξη των συγκεκριμένων μαθησιακών αποτελεσμάτων ενισχύει άμεσα την ψηφιακή ικανότητα «1.3 Managing Information» (DigComp 3.0), όπως αυτή ορίζεται από τους Cosgrove και Cachia (2025), διασφαλίζοντας την ανάπτυξη κρίσιμων δεξιοτήτων διαχείρισης πληροφοριών από τους/τις μαθητές/τριες.

Η επιλογή των προαναφερθέντων MA κρίνεται επιτυχημένη, καθώς προσδίδει στο μάθημα επιστημονική εγκυρότητα και σαφή προσανατολισμό, καθιστώντας την ψηφιακή ικανότητα αναπόσπαστο μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης. Παράλληλα προσφέρει στους μαθητές και τις μαθήτριες το απαραίτητο πλαίσιο ώστε να μεταβούν από την παθητική αναπαραγωγή αλγορίθμων και θεωρητικών γνώσεων στην ενεργητική εφαρμογή ψηφιακών δεξιοτήτων για τη διαχείριση και ανάλυση δεδομένων σε πραγματικές, ρεαλιστικές συνθήκες.

5.1.2 Εφαρμογή της Αρχής του Constructive Alignment

Το «**Constructive Alignment**» (εποικοδομητική ευθυγράμμιση) είναι μια θεμελιώδης αρχή στον εκπαιδευτικό σχεδιασμό, η οποία προτάθηκε από τον John Biggs (Biggs, 1996). Στηρίζεται σε δύο βασικούς πυλώνες:

- Εποικοδομητισμός (Constructivism): Η παραδοχή ότι οι μαθητές/τριες οικοδομούν τη γνώση τους μέσα από τις δικές τους μαθησιακές δραστηριότητες.
- Ευθυγράμμιση (Alignment): Η απαίτηση τα μαθησιακά αποτελέσματα, οι διδακτικές δραστηριότητες και τα μέσα αξιολόγησης να είναι πλήρως εναρμονισμένα μεταξύ τους.

Στο παρόν ψηφιακό μάθημα εφαρμόστηκε η σχεδιαστική αρχή του «Constructive Alignment» διασφαλίζοντας ότι:

- Τα μαθησιακά αποτελέσματα είναι σαφώς καθορισμένα και περιγράφουν με ακρίβεια τι πρέπει να είναι σε θέση να κάνει ο/η μαθητής/τρια μετά την

ολοκλήρωση της ενότητας (π.χ. «να επιλύει ανισώσεις 2ου βαθμού αλγεβρικά και γραφικά»).

- Οι μαθησιακές δραστηριότητες (π.χ. χρήση GeoGebra για οπτικοποίηση) είναι κατάλληλα σχεδιασμένες ώστε να αναγκάζουν τον/τη μαθητή/τρια να εμπλακεί με τον τρόπο που απαιτείται για να επιτύχει τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Για παράδειγμα, το MA1.2 (μοντελοποίηση ρεαλιστικών προβλημάτων με ανισώσεις) αξιολογείται μέσω διαδραστικών σεναρίων όπου ο/η μαθητής/τρια πρέπει να εισάγει παραμέτρους στο GeoGebra για να λάβει μια επιχειρηματική απόφαση.
- Τα εργαλεία αξιολόγησης (π.χ. Question Sets στο H5P) είναι κατάλληλα επιλεγμένα ώστε να μετρούν άμεσα το κατά πόσο ο/η μαθητής/τρια έφτασε στα επιθυμητά μαθησιακά αποτελέσματα, αντί να εξετάζουν γενικές γνώσεις που δεν σχετίζονται με τους στόχους.

Η εφαρμογή της αρχής του «Constructive Alignment» στο παρόν ψηφιακό μάθημα κρίνεται επιτυχημένη, καθώς διασφαλίζει τη συνεκτικότητα της μαθησιακής εμπειρίας και εξαλείφει τυχόν γνωστικά κενά μεταξύ διδασκαλίας και αξιολόγησης. Η άμεση σύνδεση των επιλεγμένων δραστηριοτήτων με τα συγκεκριμένα μαθησιακά αποτελέσματα επιτρέπει στους μαθητές και τις μαθήτριες να κατανοήσουν το "γιατί" της κάθε διαδικασίας, ενισχύοντας ταυτόχρονα το κίνητρό τους για ενεργό συμμετοχή.

Ωστόσο, σε μια μελλοντική έκδοση του μαθήματος, θα μπορούσε να εξεταστεί η ενσωμάτωση πρόσθετων επιπέδων ανατροφοδότησης (scaffolding) κατά τη διάρκεια των διαδραστικών σεναρίων, ώστε να υποστηρίζονται ακόμα πιο εξατομικευμένα οι μαθητές/τριες που παρουσιάζουν δυσκολίες στη μοντελοποίηση σύνθετων προβλημάτων (Quality Matters, 2015).

5.1.3 Καταλληλότητα Ψηφιακών Μέσων και Εργαλείων

Η επιλογή των **Ψηφιακών Εργαλείων** έγινε με γνώμονα την πολυμορφία και τη λειτουργικότητα, σε απόλυτη ευθυγράμμιση με τα κριτήρια 3α – 3ε (Quality Matters, 2015). Συγκεκριμένα:

- Χρησιμοποιήθηκαν AI Avatars για την εισαγωγή των εννοιών, ενισχύοντας την αίσθηση παρουσίας του/της εκπαιδευτικού (social presence), ενώ το ψηφιακό περιεχόμενο στο Lumi H5P (όπως Interactive Books, Course Presentations, Question Sets και Interactive Videos) έδωσε την ευκαιρία στον/στη μαθητή/τρια να πλοηγείται αυτόνομα.

Η επιλογή αυτή κρίνεται επιτυχημένη καθώς μειώνει το αίσθημα απομόνωσης του/της μαθητή/τριας σε ένα πλήρως ψηφιακό περιβάλλον.

Σε επόμενη εφαρμογή θα μπορούσε να εξεταστεί η ενσωμάτωση διαδραστικών avatar που απαντούν σε συχνές ερωτήσεις των μαθητών/τριών σε πραγματικό χρόνο.

- Σε καθένα από τα έξι (6) στάδια του εκπαιδευτικού σχεδιασμού ενσωματώθηκε ηχητική επεξήγηση, συνοδευόμενη από υπότιτλους (closed captions).

Η επιλογή αυτή κρίνεται επιτυχημένη, καθώς διευκολύνει την κατανόηση σύνθετων εννοιών μέσω της ταυτόχρονης ακουστικής και οπτικής

πληροφόρησης, ενώ παράλληλα εξασφαλίζει τη συμπεριληπτικότητα του μαθήματος μέσω της πρόβλεψης για την προσβασιμότητα όλων των μαθητών/τριών (Σάμψων, 2026a, b).

Σε επόμενη εφαρμογή, θα μπορούσε να εξεταστεί η ενσωμάτωση μεταφρασμένων υποτίτλων σε διαφορετικές γλώσσες, για την υποστήριξη μαθητών με διαφορετικό γλωσσικό υπόβαθρο.

- Στο πλαίσιο του Μικρο-μαθήματος 1, αξιοποιήθηκε, μεταξύ άλλων, το GeoGebra για τη δημιουργία δυναμικών γραφημάτων και προσομοιώσεων, επιτρέποντας στους μαθητές και τις μαθήτριες να οπτικοποιήσουν τις μεταβολές των ανισώσεων σε πραγματικό χρόνο.

Η επιλογή αυτή κρίνεται επιτυχημένη καθώς επιτρέπει στους/στις μαθητές/τριες να οπτικοποιήσουν σε πραγματικό χρόνο τις μεταβολές των ανισώσεων.

Σε επόμενη εφαρμογή θα μπορούσε να εξεταστεί η δημιουργία ενός κοινόχρηστου ψηφιακού χώρου (shared workspace) όπου οι μαθητές/τριες θα μοιράζονται τα δικά τους μοντέλα.

- Στο πλαίσιο του Μικρο-μαθήματος 2, δημιουργήθηκαν, μεταξύ άλλων, Screencast Tutorials στο Excel με ηχητική υπόκρουση, προσφέροντας στον μαθητή και τη μαθήτρια ένα μοντέλο (modeling) επίλυσης προβλημάτων μεθηκογράμματα, το οποίο μπορεί να αναπαράγεται επανειλημμένα.

Η επιλογή αυτή κρίνεται επιτυχημένη καθώς προσφέρει ένα πρότυπο επίλυσης προβλημάτων που οι μαθητές/τριες μπορούν να αναπαράγουν με τον δικό τους ρυθμό.

Σε επόμενη εφαρμογή θα μπορούσε να εξεταστεί ο εμπλουτισμός τους με διαδραστικά hotspots, τα οποία θα σταματούν το βίντεο και θα ζητούν από τον/τη μαθητή/τρια να προβλέψει το επόμενο βήμα.

- Στο πλαίσιο της Τελικής Αξιολόγησης, η χρήση MS Forms και Google Forms διασφάλισε την αυτοματοποιημένη ανατροφοδότηση και καθοδήγηση, ενισχύοντας την αυτόνομη μάθηση.

Η επιλογή αυτή κρίνεται επιτυχημένη καθώς ενισχύει την αυτόνομη μάθηση και τον αυτοέλεγχο.

Σε επόμενη εφαρμογή θα μπορούσε να εξεταστεί η ενσωμάτωση πιο εξατομικευμένων σχολίων βάσει των συγκεκριμένων λαθών που εντοπίζονται στις απαντήσεις των μαθητών/τριών.

5.1.4 Διάρκεια και φόρτος εργασίας

Κατά τον εκπαιδευτικό σχεδιασμό, δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στον υπολογισμό της **διάρκειας και του φόρτου εργασίας**, ώστε να διασφαλιστεί η ισορροπία μεταξύ των μαθησιακών απαιτήσεων και του διαθέσιμου χρόνου των μαθητών/τριών (Quality Matters, 2015).

Για κάθε ένα από τα έξι (6) στάδια του μαθήματος, υπολογίστηκε εκτιμώμενος χρόνος μελέτης και δραστηριοτήτων, ο οποίος βασίστηκε στη λογική του "micro-learning" (μικρο-μάθηση), ώστε να αποφευχθεί η γνωστική υπερφόρτωση (cognitive overload) (Σάμψων, 2026a,b).

Η προσέγγιση αυτή κρίνεται επιτυχημένη, καθώς ο επιμερισμός του υλικού σε μικρές, διαχειρίσιμες ενότητες επιτρέπει στους μαθητές και τις μαθήτριες να διατηρούν υψηλά επίπεδα συγκέντρωσης και εμπλοκής. Ο σχεδιασμός προβλέπει μια μέση διάρκεια ολοκλήρωσης ανά στάδιο, η οποία ενθαρρύνει την αυτόνομη διαχείριση του χρόνου από τον/τη μαθητή/τρια.

Ωστόσο, σε μελλοντική υλοποίηση του μαθήματος, θα μπορούσε να εξεταστεί η προσθήκη ενός ψηφιακού "tracker προόδου", το οποίο θα ενημερώνει τους/τις μαθητές/τριες για τον υπολειπόμενο χρόνο ολοκλήρωσης, ενισχύοντας περαιτέρω την ικανότητα αυτορρύθμισης της μάθησής τους.

5.1.5 Προαπαιτούμενες ικανότητες (γνώσεις – δεξιότητες)

Ο εκπαιδευτικός σχεδιασμός του «υπό αξιολόγηση» ψηφιακού μαθήματος βασίστηκε στον καθορισμό συγκεκριμένων προαπαιτούμενων γνώσεων και δεξιοτήτων, οι οποίες θεωρήθηκαν απαραίτητες για την ομαλή αλληλεπίδραση των μαθητών/τριών με το περιβάλλον του ψηφιακού μαθήματος (Quality Matters, 2015).

Όσον αφορά στο γνωστικό πεδίο, απαιτήθηκε η κατάκτηση των ακόλουθων εννοιών:

- Επίλυση εξισώσεων 1ου και 2ου βαθμού.
- Επίλυση ανισώσεων 1ου βαθμού.
- Μελέτη του προσήμου τριωνύμου.
- Βασικές ιδιότητες της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c$ (με $a \neq 0$).
- Διάκριση μεταξύ τύπων δεδομένων: κατηγορικά, διακριτά ποσοτικά και συνεχή ποσοτικά δεδομένα.

Στο πεδίο των ψηφιακών δεξιοτήτων, καθορίστηκαν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

- Πλοήγηση: Ικανότητα περιήγησης σε ψηφιακές πλατφόρμες και αλληλεπίδρασης με διαδραστικό υλικό (H5P).
- Διαχείριση Δεδομένων: Βασικές γνώσεις χρήσης υπολογιστικών φύλλων για την οργάνωση ποσοτικών δεδομένων.
- Επικοινωνία: Δυνατότητα συμμετοχής σε ασύγχρονες συζητήσεις μέσω διαδικτυακών φόρουμ.

Η επιλογή αυτή κρίνεται επιτυχημένη, καθώς προσδιορίζει με σαφήνεια το «σημείο εισόδου» των μαθητών/τριών, διασφαλίζοντας ότι το εκπαιδευτικό υλικό απευθύνεται στο κατάλληλο κοινό-στόχο.

Σε μελλοντική υλοποίηση, θα μπορούσε να εξεταστεί η δημιουργία ενός σύντομου διαγνωστικού τεστ (pre-test) στην αρχή του μαθήματος, το οποίο θα κατευθύνει αυτόματα τους/τις μαθητές/τριες σε πρόσθετο υποστηρικτικό υλικό (scaffolding), εφόσον εντοπίζονται ελλείψεις στις προαπαιτούμενες δεξιότητες (Quality Matters, 2015).

5.1.6 Σαφήνεια γραφικής αναπαράστασης του διαγράμματος ροής εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων

Ο σχεδιασμός του μαθήματος υποστηρίχθηκε από μια σαφή και αναλυτική γραφική αναπαράσταση της ροής των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων (Σάμψων 2026a,b). Το **διάγραμμα ροής** αποτύπωσε με ακρίβεια τις διαδρομές μάθησης, τις δραστηριότητες

και τα σημεία ελέγχου, παρέχοντας μια συνολική εικόνα της αρχιτεκτονικής του ψηφιακού μαθήματος.

Η επιλογή αυτή κρίνεται επιτυχημένη, καθώς η οπτική οργάνωση του σχεδιασμού διευκολύνει την κατανόηση της αλληλουχίας των σταδίων και των αναμενόμενων αποτελεσμάτων, εξαλείφοντας ενδεχόμενες ασάφειες σχετικά με την πορεία του/της μαθητή/τριας. Ο ιεραρχικός και λογικός διαχωρισμός των ενοτήτων διασφαλίζει τη συνοχή του εκπαιδευτικού υλικού.

Σε επόμενη εφαρμογή, θα μπορούσε να εξεταστεί η ενσωμάτωση του διαγράμματος ροής ως διαδραστικού "χάρτη πλοήγησης" μέσα στο ίδιο το ψηφιακό μάθημα, επιτρέποντας στον/στη μαθητή/τρια να βλέπει ανά πάσα στιγμή το σημείο στο οποίο βρίσκεται και τα βήματα που ακολουθούν, ενισχύοντας περαιτέρω τον έλεγχο της μαθησιακής του/της πορείας.

5.2 Μέρος Β: Ανάπτυξη Ψηφιακού Εκπαιδευτικού Περιεχομένου του Μαθήματος

5.2.1 Αποτίμηση γενικής επισκόπησης του μαθήματος

Η **γενική επισκόπηση** του μαθήματος σχεδιάστηκε με στόχο την παροχή ενός ολοκληρωμένου προσανατολισμού, ο οποίος αποτέλεσε το θεμέλιο της μαθησιακής εμπειρίας. Μέσω της λεπτομερούς εισαγωγής, των σαφών οδηγιών πλοήγησης και της ενσωμάτωσης ενός talking head video καλωσορίσματος, επιδιώχθηκε η άμεση εξάλειψη της αβεβαιότητας και η ενίσχυση της κοινωνικής παρουσίας από το πρώτο κιόλας λεπτό της αλληλεπίδρασης (Quality Matters, 2015).

Η επιλογή αυτή κρίνεται ιδιαίτερα επιτυχημένη, καθώς το βίντεο παρουσιάζει συνοπτικά τη φιλοσοφία και τα οφέλη του μαθήματος, προσφέροντας στους μαθητές και τις μαθήτριες την απαιτούμενη ασφάλεια και εποπτεία. Η δομή της επισκόπησης διασφαλίζει ότι κάθε στάδιο της μάθησης είναι νοηματικά συνδεδεμένο με τα προηγούμενα και τα επόμενα, επιτρέποντας στο μαθητικό κοινό να εστιάσει το ενδιαφέρον του στο περιεχόμενο αντί για την τεχνική διερεύνηση του περιβάλλοντος. Σε μια μελλοντική υλοποίηση, θα μπορούσε να εξεταστεί η προσθήκη μιας διαδραστικής ενότητας "σύντομων ερωτήσεων" (ice-breaker questions) αμέσως μετά την εισαγωγή, ώστε να ενθαρρυνθεί η ενεργός συμμετοχή από την αρχή της μαθησιακής διαδικασίας.

5.2.2 Το εκπαιδευτικό περιεχόμενο του μαθήματος

Το **εκπαιδευτικό περιεχόμενο** του μαθήματος σχεδιάστηκε με κεντρικό άξονα την πολυτροπικότητα και τη διαδραστικότητα, με στόχο την υποστήριξη διαφορετικών μαθησιακών αναγκών (Quality Matters, 2015). Η επιλογή των διδακτικών μέσων έγινε βάσει της παιδαγωγικής τους αξίας στη δόμηση της μαθηματικής γνώσης: **με διαδραστικό περιεχόμενο H5P στο Lumi, προσομοιώσεις και δυναμικά γραφήματα στο GeoGebra, screencast tutorials στο Microsoft Excel** κ.α. Κάθε στοιχείο του περιεχομένου ευθυγραμμίστηκε με τα συγκεκριμένα μαθησιακά αποτελέσματα, διασφαλίζοντας ότι η παρεχόμενη πληροφορία είναι **επαρκής, έγκυρη, επίκαιρη, διατυπώνεται με σαφήνεια και άμεσα εφαρμόσιμη** από τους/τις μαθητές/τριες.

Η προσέγγιση αυτή κρίνεται επιτυχημένη, καθώς προσφέρει μια συνεκτική μαθησιακή εμπειρία όπου η θεωρία συνδέεται οργανικά με την πρακτική εφαρμογή,

αποφεύγοντας τον πλεονασμό πληροφοριών. Το περιεχόμενο λειτουργεί ως υποστηρικτικό πλαίσιο (scaffolding), οδηγώντας τον/τη μαθητή/τρια από τη θεωρητική κατανόηση στην ενεργητική εφαρμογή.

Σε μελλοντική υλοποίηση του μαθήματος, θα μπορούσε να εξεταστεί η ενσωμάτωση πρόσθετου επιπέδου διαφοροποιημένης διδασκαλίας (differentiated instruction) στο περιεχόμενο, με την παροχή εναλλακτικών πηγών μάθησης ανάλογα με το γνωστικό επίπεδο ή το μαθησιακό προφίλ κάθε μαθητή/τριας.

5.2.3 Κανόνες Ακαδημαϊκής Ηθικής και Δεοντολογίας

Ο εκπαιδευτικός σχεδιασμός πραγματοποιήθηκε με απόλυτο σεβασμό στις **αρχές της ακαδημαϊκής ηθικής και δεοντολογίας**. Ιδιαίτερη μέριμνα δόθηκε στη διαχείριση των πνευματικών δικαιωμάτων, διασφαλίζοντας ότι όλο το χρησιμοποιηθέν ψηφιακό υλικό είτε αποτελεί πρωτότυπη δημιουργία είτε εμπίπτει στις κατηγορίες ανοικτού περιεχομένου, με την απαραίτητη αναφορά στην πηγή και τον δημιουργό, σύμφωνα με τις προβλεπόμενες άδειες χρήσης (Quality Matters, 2015).

Η λίστα των βιβλιογραφικών αναφορών συντάχθηκε και ενημερώθηκε πλήρως, ακολουθώντας με συνέπεια το πρότυπο *APA Style* (7th edition), διασφαλίζοντας έτσι την πληρότητα και την τεκμηρίωση του σχεδιασμού. Παράλληλα, διενεργήθηκε έλεγχος λειτουργικότητας για το σύνολο των υπερσυνδέσμων που ενσωματώθηκαν στο μάθημα, ώστε να διασφαλιστεί η απρόσκοπτη πρόσβαση των μαθητών/τριών σε όλες τις εξωτερικές πηγές.

Η προσέγγιση αυτή κρίνεται επιτυχημένη, καθώς προσδίδει στο εκπαιδευτικό έργο την απαιτούμενη επιστημονική εγκυρότητα και διαφάνεια, στοιχεία που αποτελούν θεμελιώδη χαρακτηριστικά ενός ποιοτικού ψηφιακού περιβάλλοντος μάθησης.

5.2.4 Ευθυγράμμιση εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων και μαθησιακών αποτελεσμάτων

Ο εκπαιδευτικός σχεδιασμός βασίστηκε στην αρχή της ευθυγράμμισης (constructive alignment), διασφαλίζοντας ότι κάθε **δραστηριότητα του ψηφιακού μαθήματος υπηρετεί άμεσα την επίτευξη των προκαθορισμένων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων** (MA1.1, MA1.2, MA2.1, MA2.2). Η επιλογή των εργαλείων και η ιεράρχηση των ασκήσεων σχεδιάστηκαν έτσι ώστε να μετατρέπουν τη θεωρητική γνώση σε πρακτική ικανότητα, επιτρέποντας στους/στις μαθητές/τριες να αποδείξουν την επίτευξη των στόχων μέσω της ενεργητικής εφαρμογής (Quality Matters, 2015).

Η ευθυγράμμιση αυτή κρίνεται επιτυχημένη, καθώς οι δραστηριότητες δεν αποτέλεσαν μεμονωμένες ενέργειες, αλλά οργανικά τμήματα μιας συνολικής μαθησιακής διαδρομής. Για παράδειγμα, η χρήση του Excel για την ανάλυση δεδομένων αντιστοιχίστηκε απόλυτα με τις απαιτήσεις των MA για διαχείριση πληροφοριών, επιτρέποντας την άμεση αξιολόγηση της προόδου των μαθητών/τριών.

Σε μελλοντική υλοποίηση του μαθήματος, θα μπορούσε να εξεταστεί η χρήση ενός πίνακα αντιστοίχισης (alignment matrix), ο οποίος θα διατίθεται στους μαθητές/τριες στην αρχή του μαθήματος, ώστε να γνωρίζουν με απόλυτη σαφήνεια πώς η κάθε δραστηριότητα συμβάλλει στην κατάκτηση του αντίστοιχου μαθησιακού στόχου, ενισχύοντας έτσι τη μεταγνωστική τους επίγνωση.

5.2.5 Διαδραστικές Εκπαιδευτικές Δραστηριότητες

Ο σχεδιασμός του μαθήματος ενσωμάτωσε μια σειρά **διαδραστικών εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων**, οι οποίες στοχεύουν στην ενίσχυση της ενεργού συμμετοχής των μαθητών και των μαθητριών (Quality Matters, 2015). Η επιλογή ψηφιακών εργαλείων, όπως **διαδραστικό περιεχόμενο H5P στο Lumi, προσομοιώσεις και δυναμικά γραφήματα στο GeoGebra, screencast tutorials στο Microsoft Excel** κ.α, μετατόπισε τον ρόλο του/της μαθητή/τριας από την παθητική παρακολούθηση στην ενεργητική διερεύνηση και επίλυση αυθεντικών προβλημάτων.

Η επιλογή αυτή κρίνεται επιτυχημένη, καθώς η διαδραστικότητα λειτουργεί ως καταλύτης για τη διατήρηση του ενδιαφέροντος και την εμβάθυνση στη γνώση, προσφέροντας άμεση ανατροφοδότηση σε κάθε βήμα. Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε ο/η μαθητής/τρια να αποτελεί τον κεντρικό πυλώνα της μαθησιακής διαδικασίας, αλληλεπιδρώντας συνεχώς με το περιεχόμενο.

Σε μελλοντική υλοποίηση, θα μπορούσε να εξεταστεί η ενσωμάτωση δραστηριοτήτων "συνεργατικής επίλυσης" (collaborative problem solving) μέσω cloud-based περιβαλλόντων, ώστε να ενισχυθεί περαιτέρω η κοινωνική μάθηση και η αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών/τριών.

5.2.6 Αξιοποίηση πρωτότυπου εκπαιδευτικού υλικού

Στον πυρήνα του εκπαιδευτικού σχεδιασμού βρέθηκε η ανάπτυξη **πρωτότυπου εκπαιδευτικού υλικού**, το οποίο δημιουργήθηκε εξ ολοκλήρου για να καλύψει τις ιδιαίτερες απαιτήσεις των Μαθησιακών Αποτελεσμάτων του μαθήματος (Quality Matters, 2015). Η δημιουργία εξατομικευμένων screencast tutorials στο Excel, η ανάπτυξη διαδραστικού περιεχόμενου μέσω H5P (interactive videos, course presentations, question sets κ.α.), η δημιουργία κουίζ αυτοαξιολόγησης σε Lumi, Google Forms, MS Forms (με ανατροφοδότηση και καθοδήγηση), η σχεδίαση δυναμικών γραφημάτων και προσομοιώσεων στο GeoGebra κ.α. αποτέλεσαν προϊόντα συστηματικής εργασίας, διασφαλίζοντας την απόλυτη ευθυγράμμιση με το νέο Πρόγραμμα Σπουδών (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων), τις ψηφιακές ικανότητες DigComp 3.0 και την πρωτοτυπία του περιεχομένου Cosgrove & Cachia, 2025).

Η επιλογή αυτή κρίνεται επιτυχημένη, καθώς το πρωτότυπο υλικό προσφέρει μια μοναδική μαθησιακή εμπειρία που δεν περιορίζεται σε τυποποιημένες ασκήσεις, αλλά ενσωματώνει ψηφιακά σενάρια προσαρμοσμένα στο επίπεδο και τα ενδιαφέροντα των μαθητών/τριών. Η πρωτοτυπία του υλικού ενισχύει τη δέσμευση των μαθητών/τριών, καθιστώντας τη μάθηση πιο προσωπική και λιγότερο "μηχανική".

Σε μελλοντική υλοποίηση, θα μπορούσε να εξεταστεί η εμπλουτισμένη έκδοση αυτού του υλικού με τη συνεισφορά των ίδιων των μαθητών/τριών, οι οποίοι θα μπορούν να προτείνουν ή να αναπτύσσουν μικρά "ψηφιακά βοηθήματα" (digital artifacts) ως μέρος των δραστηριοτήτων τους, μετατρέποντας τους μαθητές/τριες από καταναλωτές σε δημιουργούς εκπαιδευτικού υλικού.

5.2.7 Συνοχή του ψηφιακού μαθήματος

Η αρχιτεκτονική του ψηφιακού μαθήματος διέπεται από απόλυτη **εσωτερική συνοχή**, διασφαλίζοντας ότι όλες οι ενότητες συνδέονται οργανικά μεταξύ τους μέσω μιας

ενιαίας διδακτικής λογικής (Quality Matters, 2015). Κατά τον σχεδιασμό, δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή ώστε η δομή, οι διδακτικές μέθοδοι και τα εργαλεία αξιολόγησης να παραμένουν σταθερά ως προς την προσέγγιση, εξασφαλίζοντας μια ομαλή μαθησιακή μετάβαση για τον/τη μαθητή/τρια. Κάθε ενότητα χτίζει πάνω στην προηγούμενη, αποφεύγοντας τις περιττές επαναλήψεις και την αποσπασματικότητα του περιεχομένου.

Η επιλογή αυτή κρίνεται επιτυχημένη, καθώς δημιουργεί ένα σαφές και προβλέψιμο πλαίσιο εργασίας, το οποίο μειώνει τον γνωστικό φόρτο πλοήγησης και επιτρέπει την εστίαση στην ουσία του αντικειμένου. Η συνέπεια στη δομή των δραστηριοτήτων λειτουργεί ως υποστηρικτικός ιστός που κρατά αμείωτο το ενδιαφέρον καθ' όλη τη διάρκεια της μαθησιακής διαδρομής.

Σε μελλοντική υλοποίηση, θα μπορούσε να εξεταστεί η ενίσχυση της διασύνδεσης των ενοτήτων μέσω ενός "θεματικού νήματος" (thematic thread) ή ενός ψηφιακού portfolio, όπου οι μαθητές/τριες θα συγκεντρώνουν τα αποτελέσματα των εργασιών τους, βλέποντας στην πράξη πώς οι επιμέρους ενότητες συνθέτουν μια ενιαία μαθηματική γνώση.

5.3 Μέρος Γ: Υλοποίηση του Ψηφιακού Μαθήματος

5.3.1 Πληρότητα ολοκλήρωσης

Η υλοποίηση του «υπό αξιολόγηση» ψηφιακού μαθήματος στο περιβάλλον του Wix πραγματοποιήθηκε με πλήρη συνέπεια ως προς τον εκπαιδευτικό σχεδιασμό που είχε καταγραφεί στο αντίστοιχο έγγραφο προδιαγραφών (Σάμψων, 2026a,b). Όλα τα δομικά στοιχεία, οι εκπαιδευτικές δραστηριότητες, το πρωτότυπο υλικό και τα μέσα αξιολόγησης μεταφέρθηκαν με ακρίβεια στο ψηφιακό περιβάλλον, διατηρώντας την ιεραρχία, τη ροή και τη λογική αλληλουχία που είχε προβλεφθεί (Quality Matters, 2015).

Η διαδικασία υλοποίησης κρίνεται επιτυχημένη, καθώς το τελικό ψηφιακό μάθημα παρουσιάζει πλήρη ευθυγράμμιση με τις αρχικές προδιαγραφές, εξασφαλίζοντας ότι η μαθησιακή εμπειρία που σχεδιάστηκε είναι ακριβώς αυτή που βιώνει ο/η μαθητής/τρια κατά την πλοήγηση στην πλατφόρμα. Η συνέπεια αυτή διασφαλίζει την ακεραιότητα του περιεχομένου και την απρόσκοπτη λειτουργία των διαδραστικών εργαλείων.

Σε μελλοντική υλοποίηση, θα μπορούσε να εξεταστεί η περαιτέρω ενίσχυση της παιγνιώδους μάθησης (gamification), επεκτείνοντας το ήδη υφιστάμενο σύστημα επιβράβευσης. Πέρα από το Ψηφιακό Σήμα (Digital Badge) "Math Modeling Level 1" που απονέμεται στους/στις επιτυχόντες/ούσες μαθητές/τριες, θα μπορούσαν να ενσωματωθούν πρόσθετα στοιχεία όπως "κονκάρδες προόδου" ή ενδιάμεσα επίπεδα ξεκλειδώματος ενοτήτων. Οι προσθήκες αυτές θα ενισχύσουν την ολοκλήρωση του μαθήματος, προσφέροντας στους μαθητές και τις μαθήτριες διαρκή ανατροφοδότηση και κίνητρα για την κατάκτηση του τελικού τίτλου πιστοποίησης.

5.3.2 Συνολικό αισθητικό αποτέλεσμα και εμπειρία μάθησης

Το συνολικό αισθητικό αποτέλεσμα και η εμπειρία μάθησης του ψηφιακού μαθήματος στο Wix σχεδιάστηκε με γνώμονα την απλότητα, τη λειτουργικότητα και την αισθητική ομοιομορφία (Quality Matters, 2015). Επιλέχθηκε μια καθαρή χρωματική παλέτα και

μια συνεκτική τυπογραφία, οι οποίες ακολουθούν τις αρχές του Universal Design for Learning (UDL), ώστε να ελαχιστοποιούνται οι περιττοί οπτικοί περισπασμοί και να διασφαλίζεται η εστίαση στην εκπαιδευτική πληροφορία (CAST, 2018).

Η εμπειρία χρήσης (User Experience - UX) κρίνεται ιδιαίτερα επιτυχημένη, καθώς η πλοήγηση είναι διαισθητική (intuitive navigation), με σαφή ιεράρχηση των ενοτήτων και εύκολη πρόσβαση στο εκπαιδευτικό υλικό, ανεξάρτητα από τη συσκευή πρόσβασης (responsive design). Η αισθητική συνοχή σε όλες τις επιμέρους σελίδες ενισχύει την αίσθηση ασφάλειας και οικειότητας του/της μαθητή/τριας με το ψηφιακό περιβάλλον.

Σε μελλοντική υλοποίηση, θα μπορούσε να εξεταστεί η ενσωμάτωση επιλογών "προσβασιμότητας" (accessibility features), όπως η δυνατότητα αλλαγής της αντίθεσης χρωμάτων (high contrast mode) ή η χρήση εναλλακτικού κειμένου (alt-text) σε όλα τα γραφικά στοιχεία, προκειμένου να διασφαλιστεί ότι το περιβάλλον μάθησης είναι πλήρως προσβάσιμο σε μαθητές και μαθήτριες με διαφορετικές ανάγκες.

5.3.3 Αξιοποίηση ποικιλίας ψηφιακών μέσων/ εργαλείων εκπαιδευτικής τεχνολογίας

Ο σχεδιασμός του μαθήματος αξιοποίησε μια προσεκτικά επιλεγμένη **παλέτα ψηφιακών εργαλείων**, διασφαλίζοντας την παιδαγωγική καταλληλότητα και την ευχρηστία σε κάθε στάδιο της μαθησιακής διαδικασίας:

α) Χρήση ενσωματωμένων **πολυμεσικών παρουσιάσεων** και σύντομων βίντεο εισαγωγής (**AI Avatar, talking head video**), που επέτρεψαν την οπτικοποίηση σύνθετων θεωρητικών εννοιών, καθώς και την προσωποποίηση της μάθησης.

β) Ενσωμάτωση **διαδραστικού περιεχομένου H5P**, με το οποίο οι μαθητές/τριες αλληλεπιδρούν, κατανοώντας τις έννοιες και κατακτώντας τις δεξιότητες.

γ) Χρήση **screencast tutorials** (βίντεο-οδηγίων) για το Microsoft Excel και το Geogebra, προσφέροντας βήμα-προς-βήμα καθοδήγηση στην εφαρμογή των μαθηματικών μοντέλων.

δ) **Δυναμικά γραφήματα και προσομοιώσεις στο GeoGebra**, που προσφέρουν ένα περιβάλλον πειραματισμού και ενεργητικής εφαρμογής των μαθηματικών αλγορίθμων.

ε) Ενσωμάτωση **διαδραστικών κουίζ** με αυτόματη **ανατροφοδότηση και καθοδήγηση**, επιτρέποντας στους/στις μαθητές/τριες να ελέγχουν την πρόοδό τους (αυτο-αξιολόγηση) σε πραγματικό χρόνο.

στ) Χρήση δομημένων φορμών **τελικής αξιολόγησης** και υποβολής εργασιών, που διασφάλισαν την έγκυρη αποτύπωση των μαθησιακών αποτελεσμάτων για την απόδοση του σήματος Math Modeling Level 1.

Η επιλογή των εργαλείων κρίνεται επιτυχημένη, καθώς προσφέρει μια ισορροπημένη εμπειρία, αποφεύγοντας τον τεχνολογικό πλεονασμό.

Σε μελλοντική υλοποίηση, θα μπορούσε να εξεταστεί η χρήση εργαλείων ανάλυσης μαθησιακών δεδομένων (learning analytics) μέσα από την πλατφόρμα Wix, ώστε να παρέχονται πιο εξατομικευμένες προτάσεις υποστήριξης (scaffolding) ανάλογα με τις επιδόσεις των μαθητών/τριών σε κάθε επιμέρους δραστηριότητα (Quality Matters, 2015).

5.3.4 Ανατροφοδότηση και καθοδήγηση στις δραστηριότητες εξάσκησης

Ο σχεδιασμός των **δραστηριοτήτων εξάσκησης**, τόσο για την κατανόηση εννοιών όσο και για την απόκτηση δεξιοτήτων, ενσωματώνει μηχανισμούς άμεσης **ανατροφοδότησης** (feedback) και προσαρμοστικής **καθοδήγησης** (scaffolding). Μέσω των διαδραστικών εργαλείων H5P και των κουίζ στο Wix, οι μαθητές/τριες λαμβάνουν άμεση επιβεβαίωση των απαντήσεών τους, συνοδευόμενη από επεξηγηματικά σχόλια σε περίπτωση λάθους. Η διαδικασία αυτή επιτρέπει στους/στις μαθητές/τριες να εντοπίζουν τα γνωστικά τους κενά και να αναστοχάζονται πάνω στις στρατηγικές επίλυσης που ακολουθούν (Quality Matters, 2015).

Η προσέγγιση αυτή κρίνεται επιτυχημένη, καθώς η ανατροφοδότηση & η Καθοδήγηση λειτουργούν ως «συνοδοιπόροι» στη μάθηση, μειώνοντας το αίσθημα απογοήτευσης και ενισχύοντας την αυτορρυθμιζόμενη μάθηση. Επιπλέον, τα screencast tutorials παρέχουν καθοδήγηση «βήμα-προς-βήμα» για την ανάπτυξη δεξιοτήτων στο Excel και το GeoGebra, διασφαλίζοντας ότι ο/η μαθητής/τρια υποστηρίζεται κατά τη μεταβατική φάση από τη θεωρητική κατανόηση στην πρακτική εφαρμογή.

Σε μελλοντική υλοποίηση, θα μπορούσε να εξεταστεί η ενσωμάτωση προηγμένων επιπέδων «διακλαδωμένης ανατροφοδότησης» (branching feedback), όπου ανάλογα με την επιλογή του/της μαθητή/τριας, θα εμφανίζονται εξατομικευμένες συμβουλές ή επιπλέον υποστηρικτικό υλικό, καθιστώντας την καθοδήγηση ακόμη πιο προσαρμοσμένη στις προσωπικές ανάγκες του κάθε ατόμου.

5.3.5 Οδηγίες εγγραφής/σύνδεσης στο ψηφιακό μάθημα

Η διαδικασία πρόσβασης στο ψηφιακό μάθημα σχεδιάστηκε με γνώμονα τη μέγιστη ευκολία χρήσης και την εξάλειψη οποιουδήποτε τεχνικού εμποδίου. Στην αρχική σελίδα του μαθήματος στο Wix έχουν ενσωματωθεί σαφείς, αναλυτικές και οπτικοποιημένες **οδηγίες εγγραφής και σύνδεσης**, οι οποίες καθοδηγούν τον/τη μαθητή/τρια βήμα-προς-βήμα. Οι οδηγίες καλύπτουν κάθε στάδιο της διαδικασίας, διασφαλίζοντας ότι ο/η εκπαιδευόμενος/η μπορεί να προσηλωθεί άμεσα στο εκπαιδευτικό αντικείμενο (Quality Matters, 2015).

Η επιλογή αυτή κρίνεται επιτυχημένη, καθώς οι οδηγίες λειτουργούν ως "τεχνική γέφυρα", εξασφαλίζοντας την ισότιμη πρόσβαση όλων των συμμετεχόντων/ουσών, ανεξάρτητα από το επίπεδο των ψηφιακών τους δεξιοτήτων.

Σε μελλοντική υλοποίηση, θα μπορούσε να εξεταστεί η **δυνατότητα δυναμικής εμφάνισης οδηγιών (contextual help)**, όπου το σύστημα αναγνωρίζει το στάδιο στο οποίο βρίσκεται ο χρήστης και εμφανίζει προσωποποιημένα μηνύματα καθοδήγησης (tooltips), ενισχύοντας ακόμη περισσότερο την αυτονομία και τη φιλικότητα του περιβάλλοντος.

5.3.6 Οδηγίες για δραστηριότητες εξάσκησης και αξιολόγησης

Το ψηφιακό μάθημα συνοδεύεται από αναλυτικές και δομημένες οδηγίες για το σύνολο των **δραστηριοτήτων εξάσκησης και αξιολόγησης**. Κάθε δραστηριότητα, είτε αφορά στην κατανόηση εννοιών είτε την εφαρμογή δεξιοτήτων στο H5P, το Excel, το GeoGebra, το Google Forms κ.α. πλαισιώνεται από σαφείς επεξηγήσεις ως προς τον σκοπό της, τον τρόπο πλοήγησης, τα απαιτούμενα βήματα και τα κριτήρια επιτυχίας.

Η προσέγγιση αυτή κρίνεται επιτυχημένη, καθώς η ύπαρξη πρότυπων οδηγιών σε κάθε στάδιο αποσαφηνίζει τις προσδοκίες του/της εκπαιδευτικού, μειώνοντας το γνωστικό άγχος των μαθητών/τριών και ενισχύοντας την αυτονομία τους (Quality Matters, 2015). Η συνέπεια στη διατύπωση των οδηγιών διασφαλίζει ότι ο/η εκπαιδευόμενος/η είναι ανά πάσα στιγμή σε θέση να κατανοήσει τα ζητούμενα των εργασιών και τον τρόπο με τον οποίο αυτές συμβάλλουν στην απόκτηση του σήματος Math Modeling Level 1.

Σε μελλοντική υλοποίηση, θα μπορούσε να εξεταστεί η χρήση «λιστών ελέγχου» (checklists) για κάθε δραστηριότητα, οι οποίες θα επιτρέπουν στους/στις μαθητές/τριες να επιβεβαιώνουν ότι έχουν ολοκληρώσει όλα τα απαιτούμενα βήματα πριν από την υποβολή της εργασίας τους, ενισχύοντας περαιτέρω την υπευθυνότητα και την οργάνωση της εργασίας τους.

5.4 Συγκεντρωτική Αυτό-Αξιολόγηση

Προκειμένου να αποτυπωθεί συνοπτικά ο βαθμός συμμόρφωσης του υλοποιηθέντος ψηφιακού μαθήματος προς τα παιδαγωγικά και τεχνικά κριτήρια που τέθηκαν, ακολουθεί πίνακας αυτοαξιολόγησης (Σάμψων, 2025c). Η βαθμολόγηση πραγματοποιήθηκε σε κλίμακα τύπου Likert (1-5), όπου το 1 αντιστοιχεί σε "Μη ικανοποιητική συμμόρφωση" και το 5 σε "Άριστη συμμόρφωση".

Τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα αποτελούν προϊόν αναστοχαστικής προσέγγισης, η οποία βασίστηκε στα ποιοτικά δεδομένα που αναλύθηκαν στις προηγούμενες ενότητες και στις αρχές του πλαισίου Quality Matters (2015). Η διαδικασία αυτή δεν αποτελεί απλή βαθμολόγηση, αλλά μια ειλικρινή καταγραφή των σημείων ισχύος του σχεδιασμού, καθώς και των τομέων που παρουσιάζουν περιθώρια περαιτέρω βελτίωσης και ανάπτυξης σε μια μελλοντική επανέκδοση του μαθήματος (Πίνακας 8).

Πίνακας 8 Κριτήρια Αξιολόγησης Ψηφιακού Μαθήματος.

α.α	Κριτήριο	1	2	3	4	5
Μέρος Α: Σχεδίαση του Ψηφιακού Μαθήματος						
1	Μαθησιακά Αποτελέσματα (καλύπτουν την Ψηφιακή Ικανότητα που έχει επιλεγεί; είναι συμβατά με το αντίστοιχο επίπεδο επάρκειας, όπως αυτό αναφέρεται στο DigiComp 3.0;)					X
2	Εφαρμογή της Σχεδιαστικής Αρχής του Constructive Alignment (Μαθησιακά Αποτελέσματα - Εργαλεία Αξιολόγησης Επίτευξης Μαθησιακών Αποτελεσμάτων))					X

3	Καταλληλότητα της Επιλογής των Ψηφιακών Μέσων / Εργαλείων για τις Εκπαιδευτικές Δραστηριότητες					X
	3α. Παρουσίασης Εννοιών					X
	3β. Εξάσκησης Κατανόησης Εννοιών					X
	3γ. Επίδειξης Δεξιοτήτων					X
	3δ. Εξάσκησης Δεξιοτήτων					X
	3ε. Τελικής Αξιολόγησης					X
4	Διάρκεια και φόρτος εργασίας (κατά πόσο οι σχεδιαζόμενες εκπαιδευτικές δραστηριότητες ανταποκρίνονται στον προβλεπόμενο χρόνο – επαρκείς, ελλειπείς ή υπερβολικές;)					X
5	Προαπαιτούμενες ικανότητες (γνώσεις – δεξιότητες) δηλώνονται με σαφήνεια					X
6	Σαφήνεια γραφικής αναπαράστασης του διαγράμματος ροής εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων (Το διάγραμμα αποτυπώνει πλήρως και με σαφήνεια τη ροή των μαθησιακών/εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων)					X
Μέρος Β: Ανάπτυξη Ψηφιακού Εκπαιδευτικού Περιεχομένου του Μαθήματος						
7	Αποτίμηση γενικής επισκόπησης του ψηφιακού μαθήματος (ως προς την πληρότητα και την παρουσίαση των απαιτούμενων πληροφοριών)					X
8	Εκπαιδευτικό περιεχόμενο του μαθήματος (είναι έγκυρο και επίκαιρο και διατυπώνεται με σαφήνεια;)					X
9	Κανόνες Ακαδημαϊκής Ηθικής και Δεοντολογίας (έχουν τηρηθεί οι κανόνες ακαδημαϊκής ηθικής και δεοντολογίας με έμφαση στη διαχείριση των πνευματικών δικαιωμάτων; Η λίστα αναφορών					X

	είναι ενημερωμένη και παρατίθεται σύμφωνα με το APA Style; Έχει γίνει χρήση ανοικτού περιεχομένου με κατάλληλη αναφορά στον δημιουργό και όλοι οι υπερασύνδεσμοι είναι ενεργοί;)					
10	Ευθυγράμμιση εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων και μαθησιακών αποτελεσμάτων (οι εκπαιδευτικές δραστηριότητες υποστηρίζουν την επίτευξη των μαθησιακών αποτελεσμάτων;)					X
11	Διαδραστικές Εκπαιδευτικές Δραστηριότητες (περιλαμβάνονται διαδραστικές εκπαιδευτικές δραστηριότητες που ευνοούν την ενεργό συμμετοχή;)					X
12	Αξιοποίηση πρωτότυπου εκπαιδευτικού υλικού (οι εκπαιδευτικές δραστηριότητες αξιοποιούν πρωτότυπο εκπαιδευτικό υλικό;)					X
13	Συνοχή του ψηφιακού μαθήματος (οι ενότητες, που έχουν σχεδιαστεί, είναι συνεκτικές ως προς τη δομή και τις μεθόδους διδασκαλίας και αξιολόγησης, και διατηρούν τη συνοχή και την ενότητα του εκπαιδευτικού περιεχομένου, αποφεύγοντας τις περιττές επικαλύψεις;)				X	
Μέρος Γ: Υλοποίηση του Ψηφιακού Μικρομαθήματος						
14	Πληρότητα ολοκλήρωσης (η υλοποίηση του μικρομαθήματος στο περιβάλλον του Wix είναι συνεπής ως προς το περιεχόμενο του μικρομαθήματος, όπως έχει καταγραφεί στο αντίστοιχο έγγραφο;)					X
15	Συνολικό αισθητικό αποτέλεσμα και εμπειρία μάθησης (ευκολία πλοήγησης, αισθητική ομοιομορφία κλπ)				X	

16	Αξιοποίηση ποικιλίας ψηφιακών μέσων/ εργαλείων εκπαιδευτικής τεχνολογίας (με έμφαση στην καταλληλότητα και ευχρηστία για τις δραστηριότητες α) παρουσίασης (εννοιών), β) εξάσκησης (κατανόησης εννοιών), γ) επίδειξης (δεξιοτήτων), δ) εξάσκησης (δεξιοτήτων), ε) αυτό-αξιολόγησης και στ) τελικής αξιολόγησης)					X
17	Ανατροφοδότηση και καθοδήγηση στις δραστηριότητες εξάσκησης (Οι δραστηριότητες εξάσκησης (κατανόησης εννοιών) και εξάσκησης (δεξιοτήτων) παρέχουν ανατροφοδότηση και ιδανικά καθοδήγηση στον εκπαιδευόμενο;)				X	
18	Οδηγίες εγγραφής/σύνδεσης στο ψηφιακό μάθημα (υπάρχουν επαρκείς οδηγίες για την εγγραφή/σύνδεση στο ψηφιακό μάθημα;)					X
19	Οδηγίες για δραστηριότητες εξάσκησης και αξιολόγησης (υπάρχουν οδηγίες για τις δραστηριότητες εξάσκησης και αξιολόγησης;)				X	

Κεφάλαιο 6. Συμπεράσματα και Προτάσεις για Μελλοντική Βελτίωση

6.1 Συμπεράσματα από τον Σχεδιασμό και την Ανάπτυξη του Ψηφιακού Μαθήματος

Στην παρούσα ενότητα επιχειρείται η συνθετική αποτίμηση του ψηφιακού μαθήματος, όπως αυτό υλοποιήθηκε στην πλατφόρμα Wix. Τα συμπεράσματα που εξάγονται βασίζονται στη συστηματική ανάλυση της διδακτικής παρέμβασης και την κριτική αξιολόγηση των 19 κριτηρίων που τέθηκαν ως πλαίσιο αναφοράς.

Η ανάλυση που ακολουθεί δεν εστιάζει αποκλειστικά στη διεκπεραίωση των τεχνικών προδιαγραφών, αλλά αναδεικνύει τις παιδαγωγικές προεκτάσεις των επιλογών που έγιναν, αναγνωρίζοντας τόσο τα ισχυρά σημεία που ενισχύουν τη μαθησιακή εμπειρία, όσο και τις περιοχές όπου η θεωρητική υποστήριξη επιβάλλει περαιτέρω εξελίξεις.

Η αποτίμηση του εκπαιδευτικού σχεδιασμού οδηγεί στα ακόλουθα καίρια συμπεράσματα αναφορικά με τη στρατηγική ανάπτυξη του ψηφιακού μαθήματος "Μοντελοποιώντας τον Κόσμο: Από τα Μαθηματικά στην Πραγματική Ζωή":

- **Μετάβαση από τη θεωρία στην πράξη:** Το μάθημα επιτυγχάνει το κρίσιμο ζητούμενο του επαναπροσδιορισμού της Μαθηματικής Μοντελοποίησης, μετασχηματίζοντας τα μαθηματικά από αφηρημένα σύμβολα σε λειτουργικά εργαλεία ερμηνείας της πραγματικότητας, υπερβαίνοντας το μοντέλο της αποστήθισης.
- **Ευθυγράμμιση με τα Νέα Προγράμματα Σπουδών:** Η δομή του μαθήματος εξασφαλίζει πλήρη συμμόρφωση με τις κατευθύνσεις του Υπουργείου Παιδείας (ΦΕΚ 1326/Β'/2023), εστιάζοντας στην ανάπτυξη μαθηματικής παιδείας και στην επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου.
- **Παιδαγωγική της Ενεργού Συμμετοχής:** Η αξιοποίηση του μοντέλου PBL (Problem-Based Learning) σε συνδυασμό με ψηφιακά εργαλεία (GeoGebra, Excel, H5P κ.ά.), αποδείχθηκε καθοριστική για την καλλιέργεια των ψηφιακών ικανοτήτων των μαθητών/τριών, σύμφωνα με το πλαίσιο DigComp 3.0 (Cosgrove & Cachia, 2025).
- **Ριζοσπαστική Διαθεματικότητα:** Η ενσωμάτωση θεμάτων που συνδέουν τις ανισώσεις 2ου βαθμού και τη στατιστική ανάλυση με ευρύτερα επιστημονικά πεδία, λειτουργεί ως "γέφυρα" που εξαλείφει τον κατακερματισμό της γνώσης.
- **Αξιοποίηση της Πιστοποίησης:** Η απονομή του ψηφιακού σήματος "Math Modeling Level 1" αναδεικνύεται σε ισχυρό κίνητρο για τους/τις μαθητές/τριες, επιβραβεύοντας όχι μόνο τη γνωστική κατάκτηση, αλλά και την ικανότητα διαχείρισης πληροφοριών και λήψης τεκμηριωμένων αποφάσεων.

Στη συνέχεια, αναλύεται η αρτιότητα του σχεδιασμού μέσω ομαδοποιημένων αξόνων, βασισμένων στα 19 κριτήρια αξιολόγησης.

6.1.1 Σχεδιαστική Συνέπεια και Μαθησιακή Στόχευση

Η συστηματική **ευθυγράμμιση** μεταξύ των **Μαθησιακών Αποτελεσμάτων**, του **Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών Λυκείου**, των **Ψηφιακών Ικανοτήτων DigComp 3.0** και των επιλεγμένων διδακτικών δραστηριοτήτων αποτελεί τον θεμέλιο λίθο του παρόντος εκπαιδευτικού σχεδιασμού (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2023; Cosgrove & Cachia, 2025).

Από την αναλυτική αποτίμηση προκύπτει ότι η διατήρηση μιας αδιάρρηκτης συνοχής μεταξύ των επιμέρους ενοτήτων συμβάλλει στη δημιουργία ενός ορθολογικού διδακτικού σεναρίου, όπου η ιεράρχηση της γνώσης ακολουθεί μια σαφή και λογική αλληλουχία.

Η διαδικασία αυτή δεν αποτελεί απλώς μια τυπική συμμόρφωση προς τα προκαθορισμένα κριτήρια, αλλά μια σκόπιμη προσπάθεια **εξάλειψης του γνωστικού κατακερματισμού**, διασφαλίζοντας ότι κάθε εκπαιδευτικό αντικείμενο υπηρετεί άμεσα τον απώτερο σκοπό της απόκτησης του σήματος Math Modeling Level 1.

Η συνέπεια που επιτυγχάνεται στον σχεδιασμό επιτρέπει στον/στην εκπαιδευόμενο/η να αντιλαμβάνεται τη χρησιμότητα κάθε διδακτικής ενότητας, ενισχύοντας έτσι τον προσανατολισμό του μέσα στο ψηφιακό περιβάλλον και καθιστώντας τη μαθησιακή πορεία πιο στοχευμένη και αποτελεσματική.

6.1.2 Παιδαγωγική Αρτιότητα και Πρωτοτυπία Εκπαιδευτικού Υλικού

Η παιδαγωγική αξία του μαθήματος ενισχύεται από τον συνδυασμό πρωτότυπων πολυμεσικών πόρων και ενεργητικών διδακτικών μεθόδων που υπερβαίνουν το παραδοσιακό πρότυπο της μεταδοτικής διδασκαλίας. Η ενσωμάτωση εργαλείων όπως το H5P για τη δημιουργία διαδραστικού περιεχομένου και η χρήση screencast tutorials για την εκμάθηση τεχνικών δεξιοτήτων στο Excel και το GeoGebra, επιτρέπουν στον/στην εκπαιδευόμενο/η να **αλληλεπιδρά** με το αντικείμενο σε **πολλαπλά γνωστικά επίπεδα** (Quality Matters, 2015).

Η πρωτοτυπία του υλικού έγκειται στην οπτικοποίηση σύνθετων εννοιών μέσω των AI Avatar και των βίντεο εισαγωγής, τα οποία λειτουργούν ως «γνωστικά στηρίγματα» (scaffolding), διευκολύνοντας την κατανόηση της **Μαθηματικής Μοντελοποίησης**.

Η επιλογή των παραπάνω μέσων κρίνεται επιτυχημένη, καθώς αποφεύγεται ο τεχνολογικός πλεονασμός, εστιάζοντας αποκλειστικά σε εργαλεία που υπηρετούν τη βαθύτερη επεξεργασία της πληροφορίας.

Η συνδυαστική χρήση θεωρητικής αναπλαισίωσης και πρακτικής εξάσκησης διασφαλίζει ότι το εκπαιδευτικό υλικό δεν λειτουργεί ως στατικό αποθετήριο γνώσης, αλλά ως ένα **δυναμικό οικοσύστημα μάθησης** που προάγει την κριτική ανάλυση και τη δημιουργική εφαρμογή των μαθηματικών αλγορίθμων σε **πραγματικά δεδομένα**.

6.1.3 Αξιοποίηση Ψηφιακών Εργαλείων και Διαδραστικότητα

Η ψηφιακή αρχιτεκτονική του μαθήματος δομείται πάνω στην αρχή της "**ενεργού διαδραστικότητας**", στοχεύοντας στη μετάβαση από τη χρήση της τεχνολογίας ως

μέσου αναπαραγωγής, στη χρήση της ως εργαλείου πνευματικής διερεύνησης (Quality Matters, 2015). Η πολυμορφία των ψηφιακών μέσων, που ενσωματώνονται στο μάθημα, δεν αποτελεί μια απλή διακοσμητική επιλογή, αλλά μια στοχευμένη παιδαγωγική παρέμβαση που ενθαρρύνει τη διερευνητική μάθηση.

Συγκεκριμένα:

- Το GeoGebra προσφέρει ένα δυναμικό περιβάλλον πειραματισμού με τις ανισώσεις, επιτρέποντας στους/στις μαθητές/τριες να παρατηρούν σε πραγματικό χρόνο τις μεταβολές στις παραμέτρους ενός μαθηματικού μοντέλου.
- Τα υπολογιστικά φύλλα (Excel) λειτουργούν ως εργαλεία ανάλυσης δεδομένων, όπου οι μαθητές/τριες κατασκευάζουν και ερμηνεύουν θηκογράμματα, αναπτύσσοντας την ικανότητα λήψης αποφάσεων βάσει στατιστικών στοιχείων.
- Τα διαδραστικά αντικείμενα του H5P (όπως Interactive Videos και Question Sets) μετατρέπουν τη ροή του μαθήματος σε μια διαλογική διαδικασία, όπου το περιεχόμενο αποκρίνεται άμεσα στις ενέργειες του/της εκπαιδευόμενου/ης.

Η συνδυαστική χρήση αυτών των εργαλείων εξασφαλίζει τη συνεχή εμπλοκή και ενισχύει την αυτοπεποίθηση μέσω της άμεσης επιβεβαίωσης. Το συμπέρασμα είναι ότι η διαδραστικότητα, όταν είναι παιδαγωγικά προσανατολισμένη, λειτουργεί ως καταλύτης για την οικοδόμηση της γνώσης, καθώς μετατρέπει το ψηφιακό περιβάλλον σε έναν χώρο όπου ο/η εκπαιδευόμενος/η δεν λαμβάνει απλώς πληροφορίες, αλλά ανακαλύπτει σχέσεις και εξάγει συμπεράσματα.

Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι η διαδραστικότητα, όταν είναι παιδαγωγικά προσανατολισμένη και όχι απλώς τεχνικά εντυπωσιακή, αποτελεί τον καταλύτη για την οικοδόμηση της γνώσης, καθώς μετατρέπει το ψηφιακό περιβάλλον σε έναν χώρο όπου ο/η εκπαιδευόμενος/η δεν λαμβάνει απλώς πληροφορίες, αλλά ανακαλύπτει σχέσεις και εξάγει συμπεράσματα.

6.1.4 Μηχανισμοί Ανατροφοδότησης και Καθοδήγησης

Η στρατηγική **ανατροφοδότησης και καθοδήγησης** αποτελεί τον συνδετικό ιστό που διασφαλίζει τη μαθησιακή συνέχεια. Μέσω της εφαρμογής της αρχής του Constructive Alignment, οι μηχανισμοί ανατροφοδότησης δεν λειτουργούν απλώς ως μέσο επιβεβαίωσης της ορθότητας των απαντήσεων, αλλά ως ενεργά εργαλεία αναστοχασμού.

Τα διαδραστικά εργαλεία, όπως το H5P και οι φόρμες αξιολόγησης, παρέχουν άμεση υποστήριξη, επιτρέποντας στους/στις μαθητές/τριες να εντοπίζουν τα γνωστικά τους κενά σε πραγματικό χρόνο και να προσαρμόζουν τη μελέτη τους.

Παράλληλα, τα screencast tutorials προσφέρουν ένα πρότυπο επίλυσης ρεαλιστικών προβλημάτων, λειτουργώντας ως "γνωστικά στηρίγματα" (scaffolding) που καθοδηγούν τον/τη μαθητή/τρια κατά τη μετάβαση από τη θεωρητική κατανόηση στην πρακτική εφαρμογή στο Excel και το GeoGebra.

Η συνέπεια των οδηγιών σε κάθε δραστηριότητα αποσαφηνίζει τις απαιτήσεις του/της εκπαιδευτικού, μειώνοντας το γνωστικό άγχος και ενισχύοντας την αυτορρυθμιζόμενη μάθηση. Η καθοδήγηση αυτή μετατρέπει τη διαδικασία αξιολόγησης από μια αγχωτική εμπειρία σε ένα αναπόσπαστο κομμάτι της μαθησιακής πορείας, όπου ο/η εκπαιδευόμενος/η αναλαμβάνει την ευθύνη της εξέλιξής του, υποστηριζόμενος/η διαρκώς από το δομημένο πλαίσιο του ψηφιακού μαθήματος.

6.1.5 Προσβασιμότητα και Ευκολία Πλοήγησης

Η αρχιτεκτονική του ψηφιακού μαθήματος στο περιβάλλον του Wix διέπεται από τις αρχές του Καθολικού Σχεδιασμού για τη Μάθηση (Universal Design for Learning), με σκοπό τη διασφάλιση μιας **διαισθητικής και συμπεριληπτικής εμπειρίας χρήσης** (CAST, 2018). Η αισθητική ομοιομορφία, η καθαρή χρωματική παλέτα και η συνεκτική τυπογραφία ελαχιστοποιούν τους οπτικούς περισπασμούς, επιτρέποντας στον/στην εκπαιδευόμενο/η να εστιάζει αποκλειστικά στο εκπαιδευτικό περιεχόμενο.

Η πλοήγηση είναι σχεδιασμένη ώστε να χαρακτηρίζεται από ευχρηστία, με σαφή ιεράρχηση των ενοτήτων που διευκολύνει τον προσανατολισμό του χρήστη σε κάθε στάδιο της μάθησης.

Παράλληλα, η ενσωμάτωση ηχητικών επεξηγήσεων σε συνδυασμό με υπότιτλους (closed captions) σε όλο το υλικό, ενισχύει τη συμπεριληπτικότητα του μαθήματος, καλύπτοντας διαφορετικά μαθησιακά προφίλ.

Η απόκριση της πλατφόρμας σε διαφορετικές συσκευές (responsive design) διασφαλίζει την απρόσκοπτη πρόσβαση, ενώ η λογική αλληλουχία των σελίδων μετατρέπει το περιβάλλον Wix σε έναν φιλόξενο και λειτουργικό χώρο μάθησης. Η προσέγγιση αυτή αποδεικνύει ότι η **τεχνική αρτιότητα και η προσβασιμότητα** αποτελούν αναπόσπαστα συστατικά στοιχεία της ποιότητας μιας ψηφιακής εκπαιδευτικής παρέμβασης.

6.1.6 Ηθική Δεοντολογία και Διαχείριση Πνευματικών Δικαιωμάτων

Η διασφάλιση της **ακαδημαϊκής δεοντολογίας** αποτελεί κεντρικό πυλώνα του παρόντος εκπαιδευτικού σχεδιασμού (Σάμψων, 2025). Κατά την ανάπτυξη του μαθήματος, η διαχείριση των πνευματικών δικαιωμάτων διέπεται από αυστηρά κριτήρια, καθώς κάθε ψηφιακό τεκμήριο που ενσωματώνεται είτε αποτελεί πρωτότυπη δημιουργία είτε ανήκει σε κατηγορίες ανοικτού περιεχομένου.

Η συστηματική τήρηση των προτύπων βιβλιογραφικής αναφοράς (APA Style, 7th edition) ενισχύει τη διαφάνεια και την επιστημονική εγκυρότητα του έργου, αναγνωρίζοντας έμπρακτα τη συμβολή κάθε εξωτερικής πηγής.

Επιπλέον, η διενέργεια τακτικού ελέγχου λειτουργικότητας για το σύνολο των υπερσυνδέσμων διασφαλίζει την απρόσκοπτη πρόσβαση των μαθητών/τριών σε έγκυρες πληροφορίες, εξαλείφοντας τον κίνδυνο παραπομπής σε μη διαθέσιμους πόρους.

Η προσήλωση σε αυτές τις αρχές μεταδίδει στους/στις μαθητές/τριες το πρότυπο της υπεύθυνης χρήσης της πληροφορίας, προάγοντας την κουλτούρα της ακαδημαϊκής ηθικής εντός του ψηφιακού περιβάλλοντος. Η τήρηση της δεοντολογίας δεν περιορίζεται στην τυπική συμμόρφωση, αλλά αναδεικνύεται σε καθοριστικό στοιχείο της ποιότητας και της αξιοπιστίας που χαρακτηρίζει τον συνολικό σχεδιασμό του μαθήματος.

6.1.7 Πληρότητα Υλοποίησης και Αυτο-αξιολόγηση

Η υλοποίηση του ψηφιακού μαθήματος στο περιβάλλον του Wix αντανakλά την πλήρη συνέπεια μεταξύ του αρχικού θεωρητικού σχεδιασμού και του τελικού παραδοτέου. Κάθε δομικό στοιχείο, από τις εκπαιδευτικές δραστηριότητες έως τα μέσα αξιολόγησης, μεταφέρεται με ακρίβεια στο ψηφιακό περιβάλλον, διατηρώντας ακεραία τη λογική αλληλουχία και την ιεραρχία που προβλέπονται στις προδιαγραφές. Η πληρότητα αυτή διασφαλίζει ότι η μαθησιακή εμπειρία που βιώνει ο/η μαθητής/τρια ευθυγραμμίζεται απόλυτα με τους στόχους της εργασίας.

Η **αυτο-αξιολόγηση**, βασισμένη σε κλίμακα τύπου Likert, λειτουργεί ως διαδικασία αναστοχασμού, επιτρέποντας την κριτική αποτύπωση των σημείων ισχύος και τον εντοπισμό πεδίων για μελλοντική ανάπτυξη. Η καταγραφή αυτή δεν αποτελεί μια τυπική βαθμολόγηση, αλλά μια ειλικρινή αναγνώριση της δυναμικής του εκπαιδευτικού σεναρίου. Η συστηματική ανάλυση που προηγείται αναδεικνύει την ικανότητα του μαθήματος να προσαρμόζεται στις ανάγκες των μαθητών/τριών, ενώ παράλληλα θέτει τις βάσεις για διαρκή βελτίωση.

Τελικά, η διαδικασία της αυτο-αξιολόγησης επισφραγίζει τον επαγγελματικό χαρακτήρα του εγχειρήματος, αναδεικνύοντας τον σχεδιασμό ως ένα ανοιχτό, εξελισσόμενο οικοσύστημα μάθησης που στοχεύει στην παροχή ουσιαστικών εφοδίων για την κριτική ερμηνεία της πραγματικότητας.

6.2 Προτάσεις για Μελλοντική Βελτίωση και Ενίσχυση του Σχεδιασμού

Η συστηματική αποτίμηση του ψηφιακού μαθήματος αναδεικνύει επιμέρους πεδία όπου η μελλοντική ανάπτυξη μπορεί να ενισχύσει περαιτέρω τη μαθησιακή αποτελεσματικότητα. Οι προτεινόμενες παρεμβάσεις βασίζονται τόσο στον αναστοχασμό του παρόντος σχεδιασμού όσο και στις σύγχρονες διεθνείς προσεγγίσεις για τη βελτιστοποίηση της ψηφιακής εκπαίδευσης.

6.2.1 Ενίσχυση της Διαφοροποιημένης Διδασκαλίας και του Εξατομικευμένου Scaffolding

Πρόταση βελτίωσης: Ενσωμάτωση επιπέδων “διαφοροποιημένης διδασκαλίας” και “διακλαδωμένης ανατροφοδότησης” (branching feedback), ώστε το μάθημα να ανταποκρίνεται προσαρμοστικά στα διαφορετικά μαθησιακά προφίλ των μαθητών/τριών.

Η διαφοροποιημένη διδασκαλία στο ψηφιακό περιβάλλον είναι καθοριστικής σημασίας, καθώς επιτρέπει την προσαρμογή του περιεχομένου στις διαφορετικές γνωστικές ανάγκες των εκπαιδευομένων (Tomlinson & Moon, 2013).

Το scaffolding (γνωστική υποστήριξη) δεν πρέπει να είναι ενιαίο, αλλά να κλιμακώνεται δυναμικά ανάλογα με την απόδοση του μαθητή, σύμφωνα με τις αρχές της προσαρμοστικής μάθησης (adaptive learning), οι οποίες ενισχύουν την αυτορρύθμιση (Luckin, 2008).

Το πλαίσιο Quality Matters (2015) υπογραμμίζει ότι η παροχή πολλαπλών επιπέδων ανατροφοδότησης κατά τη διάρκεια των διαδραστικών σεναρίων μειώνει το γνωστικό φορτίο και αποτρέπει την εγκατάλειψη της μαθησιακής προσπάθειας.

6.2.2 Ενίσχυση της Συνεργατικής Μάθησης και της Παιγνιοποίησης (Gamification)

Πρόταση βελτίωσης: Ενσωμάτωση δραστηριοτήτων συνεργατικής επίλυσης προβλημάτων μέσω “cloud-based” περιβαλλόντων και επέκταση του συστήματος επιβράβευσης με πρόσθετα στοιχεία “παιγνιοποίησης” (π.χ. «κονκάρδες προόδου», διαβαθμισμένα επίπεδα ξεκλειδώματος ενοτήτων).

Η κοινωνική μάθηση και η συνεργατική επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων ενισχύουν σημαντικά τη δέσμευση των μαθητών/τριών, καθώς η αλληλεπίδραση με συνομηλίκους σε κοινούς ψηφιακούς χώρους διευκολύνει την οικοδόμηση της γνώσης μέσα από την κοινωνική διαπραγμάτευση (Vygotsky, 1978).

Οι τεχνικές παιγνιοποίησης (gamification) αποδεδειγμένα αυξάνουν το εσωτερικό κίνητρο και την αίσθηση αυτονομίας των μαθητών/τριών, εφόσον τα στοιχεία ανταμοιβής συνδέονται άμεσα με τη μαθησιακή πρόοδο και όχι μόνο με την ολοκλήρωση εργασιών (Deterding et al., 2011).

Η ενσωμάτωση στοιχείων παιγνιοποίησης που προσφέρουν διαρκή ανατροφοδότηση, όπως προτείνουν οι Cosgrove και Cachia (2025), συμβάλλει στην ανάπτυξη ψηφιακών ικανοτήτων και στην ενίσχυση της επιμονής των μαθητών/τριών κατά την αντιμετώπιση σύνθετων μαθηματικών προβλημάτων.

6.2.3 Αξιοποίηση Μαθησιακών Αναλυτικών Στοιχείων για Αυτοματοποιημένη Υποστήριξη

Πρόταση βελτίωσης: Ενσωμάτωση εργαλείων ανάλυσης μαθησιακών δεδομένων (“learning analytics”) για την παρακολούθηση της πορείας των μαθητών/τριών και την παροχή αυτοματοποιημένων, εξατομικευμένων προτάσεων υποστήριξης (scaffolding) σε πραγματικό χρόνο, ανάλογα με τις επιδόσεις τους σε κάθε δραστηριότητα.

Τα μαθησιακά αναλυτικά στοιχεία επιτρέπουν στους/στις εκπαιδευτικούς να εντοπίζουν έγκαιρα τις μαθησιακές δυσκολίες, προσφέροντας παρεμβάσεις που βασίζονται σε δεδομένα (data-driven interventions) αντί για γενικευμένες προσεγγίσεις (Siemens & Baker, 2012).

Η χρήση “trackers” προόδου και αναλυτικών στοιχείων ενισχύει την ικανότητα αυτορρύθμισης των μαθητών/τριών, καθώς τους παρέχει σαφή εικόνα της μαθησιακής τους πορείας και των βημάτων που υπολείπονται για την ολοκλήρωση των στόχων (Zimmerman, 2002).

Σύμφωνα με τα πρότυπα Quality Matters (2015), η ενσωμάτωση μηχανισμών παρακολούθησης προόδου αποτελεί βασική προϋπόθεση για την ενίσχυση της αυτονομίας των εκπαιδευομένων σε πλήρως ψηφιακά περιβάλλοντα μάθησης, διασφαλίζοντας παράλληλα τη συνεχή ευθυγράμμιση με τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα.

6.2.4 Διεύρυνση της Προσβασιμότητας και της Συμπερίληψης

Πρόταση βελτίωσης: Ενσωμάτωση μεταφρασμένων υποτίτλων σε πολλαπλές γλώσσες για το σύνολο του οπτικοακουστικού υλικού, καθώς και εφαρμογή επιπρόσθετων λειτουργιών προσβασιμότητας, όπως η επιλογή υψηλής αντίθεσης χρωμάτων (“high contrast mode”) και η χρήση αναλυτικών εναλλακτικών κειμένων (“alt-text”) σε όλα τα γραφικά στοιχεία.

Η εφαρμογή των αρχών του Καθολικού Σχεδιασμού για τη Μάθηση (Universal Design for Learning - UDL) επιβάλλει τη χρήση πολλαπλών μέσων αναπαράστασης της πληροφορίας, ώστε να αίρονται τα εμπόδια πρόσβασης για μαθητές/τριες με διαφορετικά γλωσσικά υπόβαθρα ή ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες (CAST, 2018).

Η προσβασιμότητα στο ψηφιακό περιβάλλον αποτελεί θεμελιώδες δικαίωμα και η πρόβλεψη για μεταφρασμένο υλικό ενισχύει τη συμπεριληπτική κουλτούρα του μαθήματος, καθιστώντας το προσβάσιμο σε ένα ευρύτερο και πιο ποικιλόμορφο μαθητικό κοινό (Burgstahler, 2015).

Η διασφάλιση της οπτικής προσβασιμότητας μέσω alt-text και χρωματικών ρυθμίσεων είναι απαραίτητη για τη συμμόρφωση με τα διεθνή πρότυπα προσβασιμότητας στο διαδίκτυο (Web Content Accessibility Guidelines - WCAG), τα οποία αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι του ποιοτικού ψηφιακού εκπαιδευτικού σχεδιασμού (W3C, 2018).

6.2.5 Μετάβαση από τον Μαθητή-Παρατηρητή στον Μαθητή-Δημιουργό

Πρόταση βελτίωσης: Ενθάρρυνση των μαθητών/τριών να αναπτύσσουν δικά τους ψηφιακά βοηθήματα (“digital artifacts”) ως μέρος των εργασιών τους, μετατρέποντάς τους από τελικούς χρήστες του υλικού σε συν-δημιουργούς εκπαιδευτικού περιεχομένου.

Η προσέγγιση του “Constructionism” (εποικοδομητισμός μέσω της δημιουργίας), όπως αναπτύχθηκε από τον Papert (1993), υποστηρίζει ότι η μάθηση είναι πιο αποτελεσματική όταν οι μαθητές/τριες εμπλέκονται ενεργά στη δημιουργία δημόσια αναγνωρίσιμων προϊόντων, αναπτύσσοντας έτσι βαθύτερη κατανόηση των εννοιών.

Η εμπλοκή των μαθητών/τριών στην παραγωγή εκπαιδευτικού υλικού προάγει την ανώτερη τάξη σκέψης και την κριτική ανάλυση, καθώς ο/η μαθητής/τρια καλείται να μετασχηματίσει τη γνώση σε μορφή που είναι κατανοητή για τους συνομηλίκους του/της (Kafai & Resnick, 1996).

Σύμφωνα με το πλαίσιο DigComp 3.0, η ψηφιακή ικανότητα δεν περιορίζεται μόνο στη χρήση, αλλά επεκτείνεται στη δημιουργία ψηφιακού περιεχομένου, ενισχύοντας την αυτοπεποίθηση και την υπευθυνότητα του/της εκπαιδευόμενου/ης (Cosgrove & Cachia, 2025).

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Adams, N. E. (2015). Bloom's taxonomy of cognitive learning objectives. *Journal of the Medical Library Association*, 103(3), 152–153. <https://doi.org/10.3163/1536-5050.103.3.010>
- Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(1), 33–52. <https://doi.org/10.1007/s10857-006-9005-9>
- Attard, C., Calder, N., Holmes, K., Larkin, K., & Trenholm, S. (2020). Teaching and learning mathematics with digital technologies. In J. Way, C. Attard, J. Anderson, J. Bobis, H. McMaster, & K. Cartwright (Eds.), *Research in mathematics education in Australasia 2016–2019* (pp. 319–347). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-15-4269-5_13
- Ben-Zvi, D. (2000). Toward understanding the role of technological tools in statistical learning. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(1–2), 127–155. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0202_6
- Biggs, J. (1996). Enhancing teaching through constructive alignment. *Higher Education*, 32, 347–364. <https://doi.org/10.1007/BF00138871>
- Boumalek, K., Bakki, A., El Mezouary, A., Hmedna, B., & Eddahibi, M. (2026). Micro-learning design and micro-course structuring: A systematic literature review. *Interactive Learning Environments*, 34(4), 2411–2437. <https://doi.org/10.1080/10494820.2025.2545955>
- Burgstahler, S. E. (Ed.). (2015). *Universal design in higher education: From principles to practice* (2nd ed.). Harvard Education Press.
- Canva. (2026). Canva [Graphic design software]. Retrieved July 15, 2026, from <https://www.canva.com/>
- CAST. (2018). *Universal Design for Learning Guidelines version 2.2*. Retrieved July 11, 2026, from <https://udlguidelines.cast.org/>
- Cosgrove, J., & Cachia, R. (2025). *DigComp 3.0: European digital competence framework* (5th ed., JRC144121). Publications Office of the European Union. <https://doi.org/10.2760/0001149>
- Coursera. (n.d.). *Coursera: Build skills with online courses from top universities and companies*. Retrieved July 16, 2026, from <https://www.coursera.org/>
- Deterding, S., Dixon, D., Khaled, R., & Nacke, L. (2011). *From game design elements to gamefulness: Defining gamification*. In A. Lugmayr, H. Franssila, C. Safran, & I. Hammouda (Eds.), *Proceedings of the 15th International Academic MindTrek Conference: Envisioning Future Media Environments* (pp. 9–15). Association for Computing Machinery. <https://doi.org/10.1145/2181037.2181040>
- diagrams.net. (n.d.). *diagrams.net: Online diagram software* [Computer software]. Retrieved July 20, 2026, from <https://www.diagrams.net/>
- Dolasinski, M. J., & Reynolds, J. (2020). Microlearning: A new learning model. *Journal of Hospitality & Tourism Research*, 44(3), 551–561. <https://doi.org/10.1177/1096348020901579>
- edX. (n.d.). *edX: Online courses from the world's best universities and companies*. Retrieved July 3, 2026, from <https://www.edx.org/>
- GeoGebra. (2026). *GeoGebra (Version 6.0)* [Computer software]. Retrieved July 2, 2026, from <https://www.geogebra.org/>

- Google. (2026a). *Google AI Studio (Gemini 1.5 Pro version)* [Large language model]. Retrieved July 5, 2026, from <https://aistudio.google.com/>
- Google. (2026b). *NotebookLM* [Large language model]. Retrieved July 5, 2026, from <https://notebooklm.google.com/>
- Google. (2026c). *Google Slides* [Computer software]. Retrieved July 2, 2026, from <https://www.google.com/slides/about/>
- Google.(2026d). *Gemini* (Gemini 1.5 Pro version) [Large language model]. Retrieved July 2, 2026, from <https://gemini.google.com/>
- HeyGen. (2026). *HeyGen* [AI Video Generation Software]. Retrieved July 2, 2026, from <https://www.heygen.com/>
- Imperial College London. (n.d.). *A-level Mathematics for Year 12 - Course 1: Algebraic Methods, Graphs and Applied Mathematics Methods* [Online course]. edX. Retrieved July 2, 2026, from <https://www.edx.org/learn/math/imperial-college-london-a-level-mathematics-for-year-12-course-1-algebraic-methods-graphs-and-applied-mathematics-methods>
- JUMP Math. (n.d.). *Making Math Click: Understand Math Without Fear* [Διαδίκτυακό μάθημα]. Coursera. Retrieved July 2, 2026, from <https://www.coursera.org/learn/math-click>
- Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education—Examples and experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 51–76. <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0001-3>
- Kafai, Y. B., & Resnick, M. (Eds.). (1996). *Constructionism in practice: Designing, thinking, and learning in a digital world*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Lohr, A., Sailer, M., Stadler, M., & Fischer, F. (2024). Digital learning in schools: Which skills do teachers need, and who should bring their own devices? *Teaching and Teacher Education*, 152, Article 104788. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2024.104788>
- London School of Economics and Political Science. (n.d.). *Maths Essentials* [Διαδίκτυακό μάθημα]. edX. Retrieved June 24, 2026, from <https://www.edx.org/learn/math/the-london-school-of-economics-and-political-science-maths-essentials>
- Luckin, R. (2008). The learner centric ecology of resources: A framework for using technology to scaffold learning. *Computers & Education*, 50(2), 449–462. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2007.09.018>
- Lumi Education. (2026). *Lumi* (Version 1.0) [Computer software]. <https://lumi.education/>
- Luttenberger, S., Wimmer, S., & Paechter, M. (2018). Spotlight on math anxiety. *Psychology Research and Behavior Management*, 11, 311–322. <https://doi.org/10.2147/PRBM.S141421>
- Lumi Education. (2026). *Lumi* (Version 1.0) [Computer software]. Retrieved June 20, 2026, from <https://lumi.education/>
- Microsoft. (2026). *Microsoft Excel* (Version 2026) [Computer software]. Retrieved June 20, 2026, from <https://www.microsoft.com>
- Nandi, S. (2019). *Microlearning: Reshaping education on how we learn information and skills* [Image]. Techno FAQ. <https://technofaq.org/posts/2019/09/microlearning-reshaping-education-on-how-we-learn-information-and-skills/>
- Papert, S. (1993). *The children's machine: Rethinking school in the age of the computer*. Basic Books.
- Pichette, J., Brumwell, S., Rizk, J., & Han, S. (2021). *Making sense of microcredentials*. Higher Education Quality Council of Ontario. Retrieved July 2, 2026, from <https://heqco.ca/pub/making-sense-of-microcredentials/>

- Quality Matters. (2015). *Standards from the QM Continuing and Professional Education Rubric* (2nd ed.). Retrieved July 2, 2026, from <https://www.qualitymatters.org/sites/default/files/PDFs/StandardsfromtheQMContinuingandProfessionalEducationRubric.pdf>
- Reinhold, F., Leuders, T., Loibl, K., Nückles, M., Beege, M., & Boelmann, J. M. (2024). Learning mechanisms explaining learning with digital tools in educational settings: A cognitive process framework. *Educational Psychology Review*, 36(1), Article 14. <https://doi.org/10.1007/s10648-024-09845-6>
- Roberts, N., & Moloi, Q. (2021). Jumpstart programme impact on mathematics learning outcomes: A cross-sectional quasi experiment using the Early Grade Mathematics Assessment. In M. Qhobela, M. M. E. Ntsohi, & L. G. Mohafa (Eds.), *Book of proceedings of the 29th Annual Conference of the Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education* (pp. 122–138). SAARMSTE. <https://hdl.handle.net/10210/479917>
- Σάμψων, Δ. (2026a). Σημειώσεις μαθήματος «Εκπαιδευτική Τεχνολογία» (ΨΣ-ΗΜ-721) [Μη δημοσιευμένο εκπαιδευτικό υλικό μεταπτυχιακού μαθήματος]. Π.Μ.Σ. «Ηλεκτρονική Μάθηση», Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Σάμψων, Δ. (2026b). Εκφώνηση Εργασίας 3: Σχεδίαση και υλοποίηση ψηφιακού μαθήματος για την ανάπτυξη ψηφιακών ικανοτήτων πολιτών [Εκφώνηση εργασίας μαθήματος]. Μάθημα «Εκπαιδευτική Τεχνολογία» (ΨΣ-ΗΜ-721), ΠΜΣ «Ηλεκτρονική Μάθηση», Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Σάμψων, Δ. (2025c). Οδηγίες εκπόνησης μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας [Μη δημοσιευμένο εκπαιδευτικό υλικό]. Π.Μ.Σ. «Ηλεκτρονική Μάθηση», Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Scherlund, H. (2020). *At home in the new era of digital learning* [Photograph]. Helge Scherlund's eLearning News. <https://scherlund.blogspot.com/2020/09/at-home-in-new-era-of-digital-learning.html>
- Sergis, S., & Sampson, D. G. (2015). Enhancing learning object recommendations for teachers using adaptive neighbor selection. In *2015 IEEE 15th International Conference on Advanced Learning Technologies (ICALT)* (pp. 391–393). IEEE. <https://doi.org/10.1109/ICALT.2015.50>
- Sergis, S., & Sampson, D. G. (2016a). Towards a teaching analytics tool for supporting reflective educational (re)design in inquiry-based STEM education. In *2016 IEEE 16th International Conference on Advanced Learning Technologies (ICALT)* (pp. 314–318). IEEE. <https://doi.org/10.1109/ICALT.2016.134>
- Sergis, S., & Sampson, D. G. (2016b). School analytics: A framework for supporting school complexity leadership. In J. M. Spector, D. Ifenthaler, D. G. Sampson, & P. Isaias (Eds.), *Competencies in teaching, learning and educational leadership in the digital age* (pp. 79–122). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-30295-9_6
- Siemens, G., & Baker, R. S. J. d. (2012). Learning analytics and educational data mining: Towards communication and collaboration. In S. Buckingham Shum, D. Gašević, & R. Ferguson (Eds.), *Proceedings of the 2nd International Conference on Learning Analytics and Knowledge (LAK '12)* (pp. 252–254). Association for Computing Machinery. <https://doi.org/10.1145/2330601.2330661>
- Tomlinson, C. A., & Moon, T. R. (2013). *Assessment and student success in a differentiated classroom*. ASCD.
- Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού. (χ.χ.). *Ψηφιακό Σχολείο: Ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο*. Retrieved July 2, 2026, from <https://digitalschool.gov.gr/>

- Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων. (2023). *Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α', Β' και Γ' τάξεων Γενικού Λυκείου* (Υ.Α. 23523/Δ2/02-03-2023, ΦΕΚ Β' 1326/08.03.2023). Retrieved June 25, 2026, from <https://www.especial.gr/wp-content/uploads/2023/03/fek-b-1326-8-3-2023.pdf>
- University of Colorado Boulder. (n.d.a). *Precalculus: Mathematical Modeling* [Online course]. Coursera. Retrieved June 16, 2026, from <https://www.coursera.org/learn/prec calculus-mathematical-modelling>
- University of Colorado Boulder. (n.d.b). *Precalculus: Relations and Functions* [Διαδίκτυακό μάθημα]. Coursera. Retrieved June 16, 2026, from <https://www.coursera.org/learn/prec calculus-relations-functions>
- Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: A survey. *ZDM – Mathematics Education*, 52(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4>
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.
- Wallwisher, Inc. (n.d.). *Padlet* [Web application]. Retrieved June 16, 2026, from <https://padlet.com/>
- Watson, J., Pape, L., Murin, A., Gemin, B., & Vashaw, L. (2014). *Keeping pace with K–12 digital learning: An annual review of policy and practice* (11th ed.). Evergreen Education Group. ERIC. <https://eric.ed.gov/?id=ED558147>
- Wix.com Ltd. (n.d.). *Wix* [Website-building platform]. Retrieved June 16, 2026, from <https://www.wix.com/>
- World Wide Web Consortium. (2018). *Web Content Accessibility Guidelines (WCAG) 2.1*. W3C Recommendation. <https://www.w3.org/TR/WCAG21/>
- Zimmerman, B. J. (2002). Becoming a self-regulated learner: An overview. *Theory Into Practice*, 41(2), 64–70. https://doi.org/10.1207/S15430421TIP4102_2

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Αναλυτική Καταγραφή του Ψηφιακού Εκπαιδευτικού Υλικού του Ψηφιακού Μαθήματος

1. Εγγραφή και Εισαγωγή στο Ψηφιακό Μάθημα

1.1 Σχετικά με αυτό το μάθημα

Ο τίτλος του Ψηφιακού Μαθήματος είναι “Μοντελοποιώντας τον Κόσμο: Από τα Μαθηματικά στην Πραγματική Ζωή”.

Η μεθοδολογική προσέγγιση βασίζεται στο μοντέλο της μάθησης μέσω επίλυσης προβλημάτων (PBL), ενσωματώνοντας σύγχρονα ψηφιακά εργαλεία για την ενίσχυση της ψηφιακής ικανότητας των μαθητών/τριών (DigComp 3.0).

1.1.1 Καλωσόρισμα στο Ψηφιακό Μάθημα

Το παρόν ψηφιακό μάθημα, το οποίο απευθύνεται σε μαθητές και μαθήτριες της Α΄ Λυκείου, αποσκοπεί στην προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών μέσα από το πρίσμα της μοντελοποίησης ρεαλιστικών προβλημάτων. Αντί για την απομονωμένη διδασκαλία της θεωρίας, το μάθημα προωθεί τη χρήση των μαθηματικών ως εργαλείο ανάλυσης και λήψης αποφάσεων, συνδέοντας άρρηκτα τη γνωστική περιοχή με την καθημερινή πραγματικότητα.

Το Καλωσόρισμα των μαθητών/τριών στο Μικρο-μάθημα 1 υλοποιείται μέσω ενός [interactive book \[H5P Lumi\]](#), σε 2 διακριτά στάδια:

Το πρώτο στάδιο περιλαμβάνει την οπτικοακουστική παρουσίαση (**talking head video**), για την οικοδόμηση ενός φιλικού και άμεσου κλίματος επικοινωνίας. Μέσω αυτού, παρουσιάζονται ο σκοπός και τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα και οι συντελεστές του Ψηφιακού Μαθήματος (Εικόνα 30, Πίνακας 9).

1.1 Σχετικά με το Ψηφ...

(1.1.1) Καλωσόρισμα στο Ψηφιακό Μάθημα 1 / 6

1.1 Σχετικά με το Ψηφ...

(1.1.1) Καλωσόρισμα στο Ψηφιακό Μάθημα

(1.1.2) Εισαγωγή στο Ψηφιακό Μάθημα

(1.1.3) Μαθησιακά Αποτελέσματα

(1.1.4) Δομή του Μαθήματος

(1.1.5) Άδεια Χρήσης

(1.1.6) Δημιουργία Περιεχομένου

Μοντελοποιώντας τον Κόσμο:
Από τα Μαθηματικά στην Πραγματική Ζωή

Ψηφιακό Μάθημα για μαθητές/τριες Α΄ Λυκείου

DigComp 3.0 Aligned

Ζωιντανεύοντας τη Θεωρία
Επικαιροποίηση των μαθηματικών γνώσεων

Δεξιότητες του Μέλλοντος
Διαχείριση δεδομένων και σύγχρονα εργαλεία, επικοινωνία με το ευρύτερο πλαίσιο DigComp 3.0

0:00 / 4:09

Καλωσόρισμα στο Ψηφιακό Μάθημα: «Μοντελοποιώντας τον Κόσμο: Από τα Μαθηματικά στην Πραγματική Ζωή»

Καλώς ήρθατε στο ταξίδι των δεδομένων! Ανακαλύψτε πώς οι ανισώσεις και τα θρηγογράμματα μπορούν να απαντήσουν σε ερωτήματα της καθημερινότητας, συνδυάζοντας τη μαθηματική σκέψη με την ψηφιακή ανάλυση.

Εικόνα 30 Καλωσόρισμα στο Ψηφιακό Μάθημα: Παρουσίαση (talking head video) & Υπερκείμενο Καθοδήγησης [Interactive book-H5P Lumi, 1η ενότητα].

Σημείωση. Το βίντεο δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα με χρήση του MS Power Point (Microsoft, 2026b). Το background σχεδίασης δημιουργήθηκε με τη χρήση τεχνητής νοημοσύνης μέσω NotebookLM (Google, 2026a) βάσει οδηγιών της συγγραφέως (προτροπή: το κείμενο ομιλίας σελ 99-100).

Πίνακας 9 Μαθησιακά Αποτελέσματα του Ψηφιακού Μαθήματος (3η διαφάνεια του talking head video).

Γιατί να παρακολουθήσετε το Μικρο-Μάθημα;	
MA1.1: Να κατανοείτε την έννοια "αλγεβρική και Γραφική επίλυση ανίσωσης 2ου βαθμού" και να την εφαρμόζετε - Αλ.Σχ.10.8. MA-1.2. Να αναπτύξετε τη δεξιότητα μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων με ανισώσεις 2ου βαθμού Αλ.Σχ.10.9.	MA2.1: Να κατανοείτε την έννοια "οριακή τιμή ενός συνόλου ποσοτικών δεδομένων" μέσα από την κατασκευή "θηκογράμματος" - Σ.Δ.10.2. MA-2.2. Να αναπτύξετε τη δεξιότητα σύγκρισης των θηκογραμμάτων δύο ή περισσότερων συνόλων ποσοτικών δεδομένων, για την επίλυση σχετικών προβλημάτων - Σ.Ε.10.1.
Ψηφιακή Ικανότητα DigComp 3.0, Competence:1.3 Managing information	

Το κείμενο για την οπτικοακουστική παρουσίαση (**talking head video**) έχει ως εξής:

«Γεια σας! Καλώς ήρθατε σε αυτό το ψηφιακό μάθημα, σχεδιασμένο ειδικά για εσάς, τους μαθητές και τις μαθήτριες της Α' Λυκείου.

Ο στόχος μας εδώ είναι να προσεγγίσουμε τα Μαθηματικά μέσα από την επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων. Θέλουμε να δούμε πώς οι μαθηματικές έννοιες "ζωντανεύουν" όταν εφαρμόζονται σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Φυσικά, σε αυτή τη διαδρομή, θα αξιοποιήσουμε σύγχρονα ψηφιακά εργαλεία, ενισχύοντας παράλληλα την ικανότητά σας να διαχειρίζεστε δεδομένα, σύμφωνα με το ευρωπαϊκό πλαίσιο ψηφιακών δεξιοτήτων DigComp 3.0. Μέσα από δύο μικρο-μαθήματα, θα χρησιμοποιήσουμε τα Μαθηματικά όχι απλώς ως θεωρία, αλλά ως το απαραίτητο εργαλείο για να αναλύουμε, να κατανοούμε και να ερμηνεύουμε τον κόσμο γύρω μας.

Τι θα έχετε καταφέρει να κάνετε μέχρι το τέλος του μαθήματος;

Πρώτον, θα "δαμάσετε" τις ανισώσεις 2ου βαθμού. Θα μάθετε να τις επιλύετε αλγεβρικά και γραφικά σε ψηφιακό περιβάλλον, αλλά κυρίως, θα μάθετε να τις χρησιμοποιείτε για να μοντελοποιείτε ρεαλιστικά προβλήματα της καθημερινότητας. Στόχος μας είναι να απενοχοποιήσουμε τα Μαθηματικά από το άγχος της αποστήθισης και να ανακαλύψουμε μαζί τη χρησιμότητά τους στην πράξη. Το ρεαλιστικό πρόβλημα θα αποτελεί τη γέφυρα ανάμεσα σε διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα, επιτρέποντάς σας να δείτε πώς τα Μαθηματικά συνδέονται άμεσα με τον πραγματικό κόσμο.

Δεύτερον, θα εισέλθετε στον κόσμο της στατιστικής ανάλυσης. Θα μάθετε να κατασκευάζετε δυναμικά θηκογράμματα, ώστε να εντοπίζετε τάσεις, να συγκρίνετε πληθυσμούς και να εξαγάγετε ασφαλή συμπεράσματα που συχνά "κρύβονται" πίσω από τους απλούς μέσους όρους. Με λίγα λόγια, θα μάθετε να μετατρέπετε τα ακατέργαστα δεδομένα σε ουσιαστική γνώση.

Όμως, πώς θα κατακτήσετε τη νέα γνώση; Η προσέγγισή μας είναι δυναμική και πολυεπίπεδη. Μέσα από αυτό το Ψηφιακό Μάθημα, θα παρακολουθήσετε τη θεωρία να γίνεται πράξη, ενώ θα έχετε την ευκαιρία για hands-on εξάσκηση απευθείας στο Excel και στο Geogebra. Σε κάθε σας βήμα, δεν θα είστε μόνοι. Οι δραστηριότητες παρέχουν άμεση ανατροφοδότηση και καθοδήγηση για να διορθώνετε τυχόν αστοχίες σας και να επιλύετε απορίες σας» (Πίνακας 10).

Πίνακας 10 Τρόποι - Εργαλεία Μάθησης - Συνεχής Υποστήριξη (3η διαφάνεια του talking head video)

Τρόποι & Εργαλεία Μάθησης	Συνεχής Υποστήριξη
• Ψηφιακό Μάθημα: Μάθηση μέσω βίντεο	• Άμεση Ανατροφοδότηση: Στις ασκήσεις

με ενσωματωμένες δραστηριότητες. • Hands-on Practice: Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών & Εφαρμογή Δεξιοτήτων σε περιβάλλον Excel & Geogebra.	του βίντεο για την κατανόηση των λαθών. • Προσωπικός AI Tutor: Ο ψηφιακός σας βοηθός για επίλυση αποριών σε πραγματικό χρόνο.
---	---

«Το μάθημα αυτό δημιουργήθηκε με στόχο να γίνει η μάθηση πιο πρακτική και διαδραστική. Επιτρέψτε μου να συστηθώ:

Ονομάζομαι Μαρία Ευσταθίου και είμαι μαθηματικός. Είμαι διδάκτωρ και κάτοχος μεταπτυχιακού τίτλου στη Φυσική Περιβάλλοντος και τη Μετεωρολογία από το Πανεπιστήμιο Αθηνών. Κατά τη διάρκεια της πορείας μου, έχω τιμηθεί με υποτροφίες του ΙΚΥ, ενώ η έρευνά μου επικεντρώνεται στη Στατιστική.

Διαθέτω 21 χρόνια εμπειρίας σε μεγάλο ιδιωτικό εκπαιδευτήριο, όπου εργάστηκα ως εκπαιδευτικός και ενδοσχολική συντονίστρια Μαθηματικών, ενώ από το 2021 υπηρετώ στη δημόσια εκπαίδευση. Παράλληλα, δραστηριοποιούμαι ως ερευνήτρια στο Πανεπιστήμιο Αθηνών με πολυάριθμες επιστημονικές δημοσιεύσεις και είμαι συγγραφέας βιβλίων Μαθηματικών. Από τον Μάρτιο του 2024 έως τον Μάιο του 2026, υπηρέτησα στο Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής ως Σύμβουλος Α΄ Μαθηματικών και Προϊσταμένη του Επιστημονικού Τμήματος "Προγραμμάτων Σπουδών και Εκπαιδευτικού Υλικού".

Είστε έτοιμοι; Μην μείνετε μόνο στο βίντεο. Κάτω από αυτό, θα βρείτε το αναλυτικό υπερκείμενο. Μελετήστε τους συνδέσμους και κατεβάστε τα αντίστοιχα αρχεία. Σας εύχομαι καλή αρχή!».

Το δεύτερο στάδιο εστιάζει στο υπερκείμενο, το οποίο λειτουργεί ως συμπληρωματικό εργαλείο καθοδήγησης και πλοήγησης. Μέσω αυτού, ο/η μαθητής/τρια αποκτά πρόσβαση στη δομημένη πληροφορία, σε συνδέσμους προς το απαραίτητο λογισμικό και σε υποστηρικτικά αρχεία εργασία (Πίνακας 11).

Πίνακας 11 Καλωσόρισμα στο Ψηφιακό Μάθημα – Υπερκείμενο Καθοδήγησης [Interactive book-H5P Lumi, 2η ενότητα].

Καλωσόρισμα στο Ψηφιακό Μάθημα: «Μοντελοποιώντας τον Κόσμο: Από τα Μαθηματικά στην Πραγματική Ζωή»

Καλώς ήρθατε στο ταξίδι των δεδομένων! Ανακαλύψτε πώς οι ανισώσεις και τα θηκογράμματα μπορούν να απαντήσουν σε ερωτήματα της καθημερινότητας, συνδυάζοντας τη μαθηματική σκέψη με την ψηφιακή ανάλυση.

1. Σκοπός του Ψηφιακού Μαθήματος

Ο σκοπός του μαθήματος είναι η διδασκαλία των Μαθηματικών μέσα από την επίλυση **ρεαλιστικών προβλημάτων**. Σε αυτό το ταξίδι, τα Μαθηματικά μετατρέπονται από αφηρημένη θεωρία σε ένα ζωντανό εργαλείο ανάλυσης, ενώ παράλληλα αναπτύσσουμε κρίσιμες ψηφιακές δεξιότητες διαχείρισης δεδομένων (σύμφωνα με το πλαίσιο [DigComp 3.0, Competence 1.3][[σύνδεσμος](#)]).

2. Μαθησιακά Αποτελέσματα – Ψηφιακές Ικανότητες

Γιατί να παρακολουθήσετε αυτό το μάθημα; Για να μπορείτε:

MA1.1. Να κατανοείτε την έννοια "αλγεβρική και γραφική επίλυση ανίσωσης 2ου βαθμού" και να την εφαρμόζετε. *Ταξινομία Bloom: Κατανόηση – Εφαρμογή*

MA1.2. Να αναπτύξετε τη δεξιότητα μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων με ανισώσεις 2ου βαθμού. *Ταξινομία Bloom: Εφαρμογή - Ανάλυση - Αξιολόγηση*

MA2.1. Να κατανοείτε την έννοια "οριακή τιμή ενός συνόλου ποσοτικών δεδομένων" μέσα από την κατασκευή "θηκογράμματος". *Ταξινομία Bloom: Κατανόηση – Εφαρμογή*

MA2.2. Να αναπτύξετε τη δεξιότητα σύγκρισης των θηκογραμμάτων δύο ή περισσότερων συνόλων ποσοτικών δεδομένων, για την επίλυση σχετικών προβλημάτων. *Ταξινομία Bloom: Εφαρμογή - Ανάλυση - Αξιολόγηση*

Τα παραπάνω Μαθησιακά Αποτελέσματα έχουν οριστεί σύμφωνα με το **Νέο Πρόγραμμα Σπουδών** για τα Μαθηματικά του Λυκείου (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2023, ΦΕΚ 1326/Β' /8-3-2023)[[σύνδεσμος](#)] και συγκεκριμένα, συνδέονται με τα ακόλουθα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ):

Αλ.Σχ.10.8, Αλ.Σχ.10.9, Σ.Δ.10.2, Σ.Ε.10.1.

Επιπλέον, τα προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα του Ψηφιακού Μαθήματος συνδέονται με την **Ψηφιακή Ικανότητα** 1.3 Managing information, **Area:** Information search, evaluation and management, όπως ορίζεται στο Ευρωπαϊκό Πλαίσιο Ψηφιακών Ικανοτήτων για τους Πολίτες **DigComp 3.0** [[σύνδεσμος](#) σελ. 87-111].

3. Συντελεστές του Ψηφιακού Μαθήματος

Σας ευχαριστώ που συμμετέχετε σε αυτό το μάθημα, το οποίο σχεδιάστηκε και δημιουργήθηκε από εμένα, τη Δρ. Μαρία Ευσταθίου, στο πλαίσιο της Μεταπτυχιακής Διπλωματικής Εργασίας μου στο Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων του Πανεπιστημίου Πειραιώς, με την πολύτιμη επιστημονική καθοδήγηση του Καθηγητή κ. Δημητρίου Σάμψων.

1.1.2 Εισαγωγή – Σκοπός του Ψηφιακού Μαθήματος

Στην ενότητα 1.1.2, η παρουσίαση του σκοπού του Ψηφιακού Μαθήματος υλοποιείται μέσω ενός οπτικοποιημένου **infographic** (Key Takeaways) σε περιβάλλον **interactive book** [**H5P Lumi**], το οποίο δημιουργήθηκε με τη βοήθεια της τεχνητής νοημοσύνης (Google, 2026b). Το infographic συνοδεύεται από ένα διαδραστικό **υπερκείμενο** (Εικόνα 31, Πίνακας 12).



Εικόνα 31 Εισαγωγή - Σκοπός Ψηφιακού Μαθήματος: Infographic & Υπερκείμενο [Interactive book-H5P Lumi, 2η ενότητα].

Η επιλογή αυτή αποσκοπεί στην εμβάθυνση των μαθητών/τριών στις κεντρικές έννοιες της μαθηματικής μοντελοποίησης και της λήψης αποφάσεων. Το οπτικό υλικό λειτουργεί ως "νοητικός χάρτης", διευκολύνοντας την κατανόηση των εννοιολογικών διασυνδέσεων του μαθήματος, ενώ το υπερκείμενο παρέχει το απαραίτητο θεωρητικό πλαίσιο. Με αυτόν τον τρόπο, δίνεται η δυνατότητα στον/στη μαθητή/τρια να αφιερώσει τον απαιτούμενο χρόνο για την εσωτερίκευση των μαθησιακών στόχων, προτού μεταβεί στην πρακτική ενασχόληση.

Η Φιλοσοφία μας: Από το πρόβλημα στη λύση

Τα Μαθηματικά δεν είναι απλώς ένας κατάλογος από θεωρήματα και τύπους. Είναι η παγκόσμια «γλώσσα» που μας επιτρέπει να ερμηνεύουμε τον κόσμο γύρω μας και να λαμβάνουμε τεκμηριωμένες αποφάσεις.

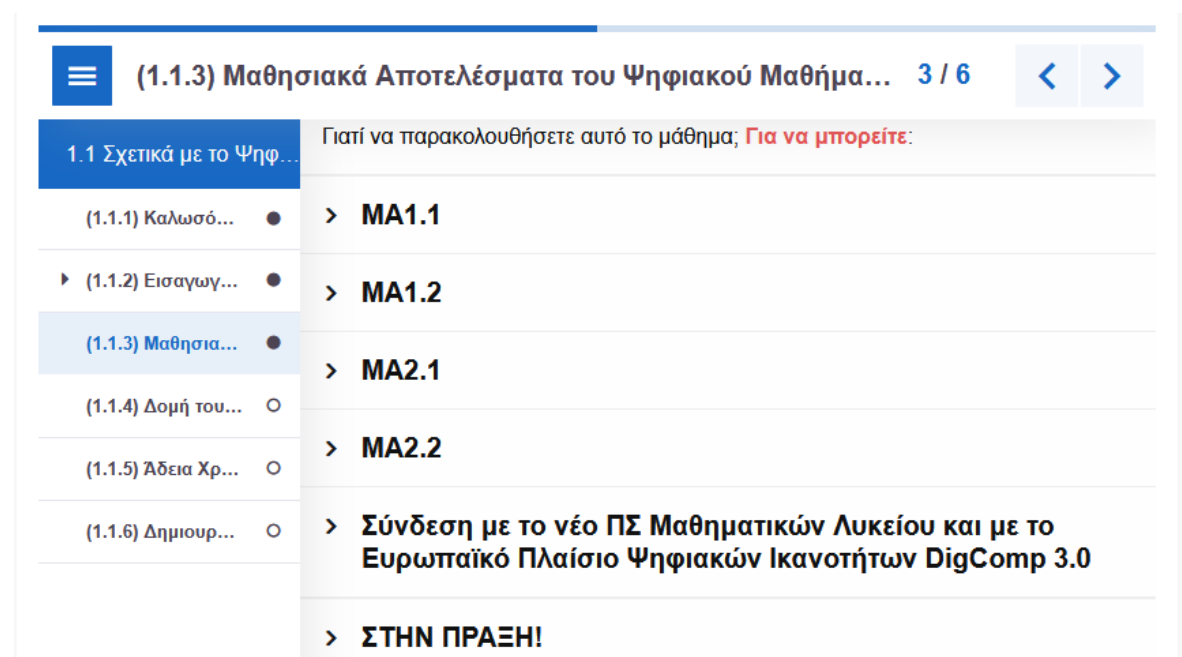
Σε αυτό το ψηφιακό μάθημα, η προσέγγισή μας είναι διαφορετική: δεν εστιάζουμε στην αποστήθιση, αλλά στην ανάπτυξη της ικανότητας Μοντελοποίησης [\[σύνδεσμος\]](#). Στόχος μας είναι να μάθετε να μεταφράζετε προβλήματα της καθημερινότητας σε μαθηματικές εκφράσεις, επιλύοντάς τα με κριτική σκέψη.

Η ικανότητα αυτή ενισχύεται από την Ψηφιακή Διαχείριση Δεδομένων [\[σύνδεσμος\]](#), μια θεμελιώδη δεξιότητα για τον πολίτη του 21ου αιώνα. Κατά τη διάρκεια του μαθήματος, θα χρησιμοποιήσουμε εργαλεία όπως το Geogebra [\[σύνδεσμος\]](#) (GeoGebra, 2026) και το Excel, [\[σύνδεσμος 1\]](#) [\[σύνδεσμος 2\]](#) (Microsoft, 2026a).

Σημείωση: Η δομή του υπερκειμένου σχεδιάστηκε με βάση την αρχή της μη γραμμικής πλοήγησης, επιτρέποντας στον/στη μαθητή/τρια να αποκτά πρόσβαση σε επεξηγηματικούς πόρους (π.χ. εξωτερικούς συνδέσμους λογισμικών) ανάλογα με τις ατομικές του ανάγκες, ενισχύοντας έτσι την αυτονομία στη μάθηση.

1.1.3 Μαθησιακά Αποτελέσματα του Ψηφιακού Μαθήματος

Η ενότητα 1.1.3 αποτελεί το σημείο αναφοράς για τον ορισμό του μαθησιακού πλαισίου. Μέσω μιας σελίδας **υπερκειμένου** (τύπου "accordion"), σε περιβάλλον [interactive book \[H5P Lumi\]](#), παρέχεται η δυνατότητα στους μαθητές και τις μαθήτριες να προσεγγίσουν αναλυτικά τους στόχους του Ψηφιακού Μαθήματος, τόσο ως προς τα Μαθησιακά Αποτελέσματα όσο και ως προς τις Ψηφιακές Ικανότητες. Σχεδιάστηκε ώστε να επιτρέπει τον ενεργό αναστοχασμό των μαθητών/τριών πάνω στα αναμενόμενα αποτελέσματα, ενθαρρύνοντας τη σύνδεση των νέων στόχων με τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους (Πίνακας 13, Εικόνα 32).



Εικόνα 32 Μαθησιακά Αποτελέσματα Ψηφιακού Μαθήματος: Υπερκείμενο τύπου "accordion" [Interactive book-H5P Lumi, 3η ενότητα].

Γιατί να παρακολουθήσετε αυτό το μάθημα; **Για να μπορείτε:**

- **MA1.1.** Να κατανοείτε την έννοια "αλγεβρική και γραφική επίλυση ανίσωσης 2ου βαθμού" και να την εφαρμόζετε.

Ταξινομία Bloom: Κατανόηση – Εφαρμογή

- **MA1.2.** Να αναπτύξετε τη δεξιότητα μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων με ανισώσεις 2ου βαθμού.

Ταξινομία Bloom: Εφαρμογή - Ανάλυση - Αξιολόγηση

- **MA2.1.** Να κατανοείτε την έννοια "οριακή τιμή ενός συνόλου ποσοτικών δεδομένων" μέσα από την κατασκευή "θηκογράμματος".

Ταξινομία Bloom: Κατανόηση – Εφαρμογή

- **MA2.2.** Να αναπτύξετε τη δεξιότητα σύγκρισης των θηκογραμμάτων δύο ή περισσότερων συνόλων ποσοτικών δεδομένων, για την επίλυση σχετικών προβλημάτων.

Ταξινομία Bloom: Εφαρμογή - Ανάλυση - Αξιολόγηση

- **Σύνδεση με το νέο ΠΣ Μαθηματικών Λυκείου και με το Ευρωπαϊκό Πλαίσιο Ψηφιακών Ικανοτήτων DigComp 3.0**

Τα παραπάνω Μαθησιακά Αποτελέσματα έχουν οριστεί σύμφωνα με το **Νέο Πρόγραμμα Σπουδών** για τα Μαθηματικά του Λυκείου (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2023, ΦΕΚ 1326/Β'/8-3-2023)[[σύνδεσμος](#)] και συγκεκριμένα, συνδέονται με τα ακόλουθα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα:

Αλ.Σχ.10.8: Να επιλύουν ανισώσεις 2ου βαθμού αλγεβρικά και γραφικά- Αλ.Σχ.10.8.

Αλ.Σχ.10.9: Να χρησιμοποιούν ανισώσεις 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση και στην επίλυση προβλημάτων.

Σ.Δ.10.2: Να κατασκευάζουν πολλαπλά θηκογράμματα, υπολογίζοντας και οριακές τιμές, για να περιγράψουν τις τιμές ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.

Σ.Ε.10.1: Με τη βοήθεια των θηκογραμμάτων να κάνουν συγκρίσεις και να εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που έχουν οι τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού (επίλυση προβλημάτων).

Επιπλέον, τα προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα του Ψηφιακού Μαθήματος συνδέονται με την **Ψηφιακή Ικανότητα** 1.3 Managing information, **Area:** Information search, evaluation and management, όπως ορίζεται στο Ευρωπαϊκό Πλαίσιο Ψηφιακών Ικανοτήτων για τους Πολίτες **DigComp 3.0** [[σύνδεσμος](#) σελ. 87-111].

- **ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ!**

Θα μάθετε να **λύνετε ανισώσεις 2ου βαθμού**, είτε κάνοντας αλγεβρικές πράξεις, είτε σχεδιάζοντας τη γραφική τους απεικόνιση. Επίσης, θα μπορείτε να χρησιμοποιείτε τις ανισώσεις αυτές για να περιγράφετε πραγματικές καταστάσεις και να βρίσκετε λύσεις σε **ρεαλιστικά προβλήματα**.

Θα μάθετε να χρησιμοποιείτε το **GeoGebra** για να **μοντελοποιείτε** ρεαλιστικά προβλήματα και να **οπτικοποιείτε** 2^{ου} βαθμού ανισώσεις, μετατρέποντας μια αφηρημένη μαθηματική σχέση σε μια καθαρή εικόνα.

Θα μάθετε να **χτίζετε** και να **συγκρίνετε** "έξυπνα" **θηκογράμματα**, εντοπίζοντας τότε μια μέτρηση είναι απλώς μια ακραία τιμή και τότε αποτελεί ένδειξη κρίσιμου προβλήματος στο σύστημα.

Θα μάθετε να αξιοποιείτε προηγμένα εργαλεία στα **υπολογιστικά φύλλα**, μετατρέποντας τον όγκο των ακατέργαστων δεδομένων σε μια καθαρή, οπτική πληροφορία.

1.1.4 Δομή του Ψηφιακού Μαθήματος

Για την αποτελεσματική ολοκλήρωση της μαθησιακής διαδρομής, το Ψηφιακό Μάθημα ακολουθεί μια δομημένη ροή που συνδυάζει τη θεωρητική κατανόηση με την πρακτική εφαρμογή (Σάμψων, 2026). Μέσω μιας σελίδας **υπερκειμένου** (τύπου "accordion"), σε περιβάλλον **interactive book [H5P Lumi]**, παρέχεται η δυνατότητα στους μαθητές και τις μαθήτριες να προετοιμαστούν και εξοικειωθούν με το μαθησιακό περιβάλλον (Εικόνα 33, Πίνακας 14).

The screenshot displays the H5P Lumi interface for the digital lesson structure. At the top, a navigation bar shows the title '(1.1.4) Δομή του Ψηφιακού Μαθήματος' and the page number '4 / 6'. Below this, a sidebar on the left lists the lesson components: '1.1 Σχετικά με το Ψηφ...', '(1.1.1) Καλωσό...', '(1.1.2) Εισαγωγ...', '(1.1.3) Μαθησια...', '(1.1.4) Δομή του...' (highlighted), '(1.1.5) Άδεια Χρ...', and '(1.1.6) Δημιουργ...'. The main content area is titled '> Φάση Α: Εγγραφή και Εισαγωγή στο Ψηφιακό Μάθημα (60\')'. It contains a section for 'Φάση Β: Εκπαιδευτικά Μικρο-Μαθήματα (2 ενότητες) (220\')' with links '[σύνδεσμος 1], [σύνδεσμος 2]'. Below this, it lists six activities: '[1] Εισαγωγή στο Μικρο-Μάθημα - Πλαισίωση του θέματος (5\')', '[2] Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 1: Παρουσίαση Εννοιών (Concepts) - Θεωρητικό υπόβαθρο (15\')', '[3] Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 2: Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών με παροχή άμεσης ανατροφοδότησης και καθοδήγησης (15\')', '[4] Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 3: Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας (Skill) - Μοντελοποίηση της πρακτικής εφαρμογής (15\')', '[5] Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 4: Εξάσκηση Εφαρμογής Δεξιότητας - Ενεργός πειραματισμός με παροχή άμεσης ανατροφοδότησης και καθοδήγησης (15\')', and '[6] Ανακεφαλαίωση, Αναστοχασμός, Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση - παροχή άμεσης ανατροφοδότησης και καθοδήγησης (25\')'. At the bottom, it shows '> Φάση Γ: Πιστοποίηση και Αξιολόγηση (60\')'.

Εικόνα 33 Δομή του Ψηφιακού Μαθήματος: Υπερκείμενο τύπου "accordion" [Interactive book-H5P Lumi, 4η ενότητα].

Πίνακας 14 Δομή του Ψηφιακού Μαθήματος: Υπερκείμενο τύπου "accordion" [Interactive book-H5P Lumi, 4η ενότητα].

Φάση Α: Εγγραφή και Εισαγωγή στο Ψηφιακό Μάθημα (60') [σύνδεσμος] [1] Σχετικά με το Ψηφιακό Μάθημα (23') - Εισαγωγικό βίντεο και παρουσίαση στόχων - Οριοθέτηση του «συμβολαίου μάθησης» (Μαθησιακά Αποτελέσματα) - Ενεργοποίηση προϋπαρχουσών γνώσεων μέσω Connection Activities (Σάμψων, 2026). Αναλυτικότερα: • Καλωσόρισμα στο Ψηφιακό Μάθημα • Εισαγωγή –Σκοπός του Ψηφιακού Μαθήματος • Μαθησιακά Αποτελέσματα Ψηφιακού Μαθήματος • Δομή του Ψηφιακού Μαθήματος • Άδεια χρήσης Ψηφιακού Μαθήματος

• Δημιουργός του Ψηφιακού Μαθήματος [2] Προαπαιτούμενα του Ψηφιακού Μαθήματος (7') - Ενεργοποίηση προϋπαρχουσών γνώσεων μέσω Connection Activities. • Προαπαιτούμενες Γνώσεις και Δεξιότητες • Ελάχιστες Απαραίτητες Υποδομές για τη συμμετοχή στο Ψηφιακό Μάθημα [3] Ολοκλήρωση του Ψηφιακού Μαθήματος (10') • Απαραίτητες ενέργειες • Τελική εξέταση του Ψηφιακού Μαθήματος [4] Εισαγωγή στη θεματική του Ψηφιακού Μαθήματος (20') • Δραστηριότητες Αφόρμησης: Connection Activity • Discussion Forum: Δραστηριότητα γνωριμίας Φάση Β: Εκπαιδευτικά Μικρο-Μαθήματα (2 ενότητες) (180') [σύνδεσμος 1], [σύνδεσμος 2] Κάθε Μικρο-Μάθημα ακολουθεί το μοντέλο των 6 βημάτων για τη μεγιστοποίηση της μάθησης (Σάμψων, 2026). Συνολική διάρκεια 90' ανά ενότητα: [1] Εισαγωγή στο Μικρο-Μάθημα - Πλαισίωση του θέματος (5') [2] Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 1: Παρουσίαση Εννοιών (Concepts) - Θεωρητικό υπόβαθρο (15') [3] Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 2: Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών με παροχή άμεσης ανατροφοδότησης και καθοδήγησης (15') [4] Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 3: Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας (Skill) (15') - Μοντελοποίηση της πρακτικής εφαρμογής [5] Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 4: Εξάσκηση Εφαρμογής Δεξιότητας - Ενεργός πειραματισμός με παροχή άμεσης ανατροφοδότησης και καθοδήγησης (15') [6] Ανακεφαλαίωση, Αναστοχασμός, Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση (25') Φάση Γ: Πιστοποίηση και Αξιολόγηση (60') [σύνδεσμος], [σύνδεσμος] [1] Οδηγίες για τη διεξαγωγή της Τελικής Αξιολόγησης (5') [2] Τελική Αξιολόγηση: Ερωτήσεις κλειστού τύπου βασισμένες σε ρεαλιστικό πρόβλημα. Απαιτείται ποσοστό επιτυχίας 75% για την ολοκλήρωση (55') [3] Πιστοποίηση Digital Badge "Math Modeling Level 1"
--

1.1.5 Άδεια χρήσης του Ψηφιακού Μαθήματος

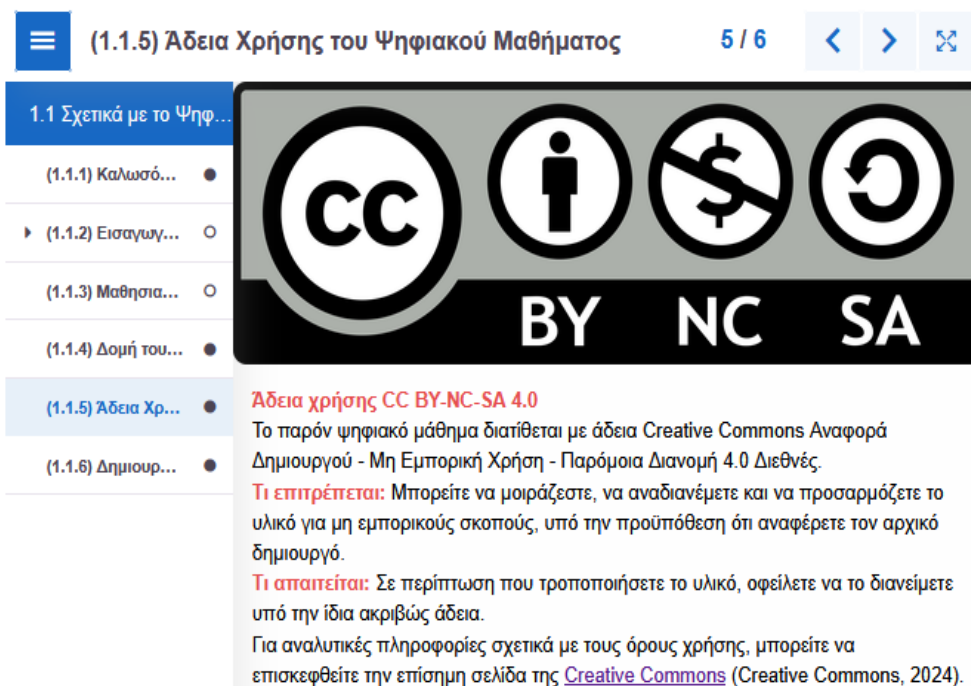
Στην ενότητα 1.1.5, επιλέχθηκε η υλοποίηση σελίδας **υπερκειμένου** με ενσωματωμένη οπτική πληροφορία (εικόνα άδειας Creative Commons), σε περιβάλλον **interactive book [H5P Lumi]**. Στόχος είναι να διασφαλιστεί η διαφάνεια σχετικά με τα πνευματικά δικαιώματα του εκπαιδευτικού υλικού (Εικόνα 34, Πίνακας 15).

Η χρήση της άδειας CC BY-NC-SA 4.0 ευθυγραμμίζεται με την ανοικτή εκπαιδευτική πολιτική, ενθαρρύνοντας την ελεύθερη διάδοση της γνώσης στην εκπαιδευτική κοινότητα, ενώ παράλληλα προστατεύει τον χαρακτήρα της μη εμπορικής χρήσης του έργου.

Πίνακας 15 Άδεια χρήσης του Ψηφιακού Μαθήματος: Υπερκείμενο [Interactive book-H5P Lumi, 5η ενότητα].

Το παρόν ψηφιακό μάθημα διατίθεται με άδεια Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές. Τι επιτρέπεται: Μπορείτε να μοιράζεστε, να αναδιανέμετε και να προσαρμόζετε το υλικό για μη εμπορικούς σκοπούς, υπό την προϋπόθεση ότι αναφέρετε τον αρχικό δημιουργό. Τι απαιτείται: Σε περίπτωση που τροποποιήσετε το υλικό, οφείλετε να το διανείμετε υπό την ίδια ακριβώς άδεια.

Για αναλυτικές πληροφορίες σχετικά με τους όρους χρήσης, μπορείτε να επισκεφθείτε την επίσημη σελίδα της [Creative Commons](#) (Creative Commons, 2024).



Εικόνα 34 Άδεια χρήσης του Ψηφιακού Μαθήματος: Εικόνα Άδειας χρήσης CC BY-NC-SA 4.0 & Υπερκείμενο [Interactive book-H5P Lumi, 5η ενότητα].

1.1.6 Δημιουργός του Ψηφιακού Μαθήματος

Η ενότητα 1.1.6 επιδιώκει την ενίσχυση του αισθήματος της κοινωνικής παρουσίας (social presence) της εκπαιδευτικού, παρέχοντας πληροφορίες για το ακαδημαϊκό και ερευνητικό προφίλ της δημιουργού. Επιλέχθηκε η υλοποίηση σελίδας **υπερκειμένου** με ενσωματωμένη οπτική πληροφορία (φωτογραφία δημιουργού), σε περιβάλλον [interactive book \[H5P Lumi\]](#) (Εικόνα 35, Πίνακας 16).

Στόχος είναι η διαμόρφωση ενός περιβάλλοντος εμπιστοσύνης, όπου ο/η μαθητής/τρια αναγνωρίζει τη δημιουργό ως αυθεντία στο αντικείμενο, στοιχείο που ενισχύει το μαθησιακό κλίμα (Garrison et al., 2000).

Πίνακας 16 Σύντομο Βιογραφικό της Δημιουργού του Ψηφιακού Μαθήματος: Υπερκείμενο [Interactive book-H5P Lumi, 6η ενότητα].

Σύντομο Βιογραφικό

Η κ. Μαρία Ευσταθίου είναι μαθηματικός, διδάκτωρ και κάτοχος μεταπτυχιακού τίτλου στη Φυσική Περιβάλλοντος και τη Μετεωρολογία από το Πανεπιστήμιο Αθηνών. Κατά τη διάρκεια της πορείας της, έχει τιμηθεί με υποτροφίες του ΙΚΥ, ενώ η έρευνά της επικεντρώνεται στη Στατιστική.

Διαθέτει 21 χρόνια εμπειρίας σε μεγάλο ιδιωτικό εκπαιδευτήριο, όπου εργάστηκε ως εκπαιδευτικός και ενδοσχολική συντονίστρια Μαθηματικών, ενώ από το 2021 υπηρετεί στη δημόσια εκπαίδευση. Παράλληλα, δραστηριοποιείται ως ερευνήτρια στο Πανεπιστήμιο Αθηνών με πολυάριθμες επιστημονικές δημοσιεύσεις και είναι συγγραφέας βιβλίων Μαθηματικών. Από τον Μάρτιο του 2024 έως τον Μάιο του 2026, υπηρέτησε στο [Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής](#) ως Σύμβουλος Α' Μαθηματικών και Προϊσταμένη του Επιστημονικού Τμήματος "Προγραμμαμάτων Σπουδών και Εκπαιδευτικού Υλικού" (www.linkedin.com/in/maria-rika-efstathiou-19884541).

Στοιχεία επικοινωνίας: mefstathiou2014@gmail.com

1.1 Σχετικά με το Ψηφ...

(1.1.1) Καλωσό...

▶ (1.1.2) Εισαγωγ...

(1.1.3) Μαθησια...

(1.1.4) Δομή του...

(1.1.5) Άδεια Χρ...

(1.1.6) Δημιουρ...



Σύντομο Βιογραφικό

Η κ. Μαρία Ευσταθίου είναι μαθηματικός, διδάκτωρ και κάτοχος μεταπτυχιακού τίτλου στη Φυσική Περιβάλλοντος και τη Μετεωρολογία από το Πανεπιστήμιο Αθηνών. Κατά τη διάρκεια της πορείας της, έχει τιμηθεί με υποτροφίες του ΙΚΥ, ενώ η έρευνά της επικεντρώνεται στη Στατιστική.

Διαθέτει 21 χρόνια εμπειρίας σε μεγάλο ιδιωτικό εκπαιδευτήριο, όπου εργάστηκε ως εκπαιδευτικός και ενδοσχολική συντονίστρια Μαθηματικών, ενώ από το 2021 υπηρετεί στη δημόσια εκπαίδευση. Παράλληλα, δραστηριοποιείται ως ερευνήτρια στο Πανεπιστήμιο Αθηνών με πολυάριθμες επιστημονικές δημοσιεύσεις και είναι συγγραφέας βιβλίων Μαθηματικών. Από τον Μάρτιο του 2024 έως τον Μάιο του 2026, υπηρέτησε στο [Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής](#) ως Σύμβουλος Α΄ Μαθηματικών και Προϊσταμένη του Επιστημονικού Τμήματος "Προγραμμάτων Σπουδών και Εκπαιδευτικού Υλικού" (www.linkedin.com/in/maria-rika-efstathiou-19884541).

Στοιχεία επικοινωνίας: mefstathiou2014@gmail.com

Εικόνα 35 Σύντομο Βιογραφικό της Δημιουργού του Ψηφιακού Μαθήματος: Φωτογραφία & Υπερκείμενο [Interactive book-H5P Lumi, 6η ενότητα].

1.2 Προαπαιτούμενα του Ψηφιακού Μαθήματος

1.2.1 Προαπαιτούμενες Γνώσεις & Δεξιότητες

Στην ενότητα 1.2.1 υλοποιήθηκε σελίδα **υπερκειμένου** που περιλαμβάνει τις προαπαιτούμενες γνώσεις, και δεξιότητες σε περιβάλλον **interactive book [H5P Lumi]**. Η ενότητα αυτή εντάσσεται στη στρατηγική της πλαισίωσης (scaffolding), επιτρέποντας στον/στην μαθητή/τρια να ελέγξει το γνωστικό του/της υπόβαθρο πριν την έναρξη της κύριας μαθησιακής διαδικασίας. Η σαφής οριοθέτηση των απαιτούμενων δεξιοτήτων αποσκοπεί στη μείωση του γνωστικού φορτίου και στην ενίσχυση της αυτοπεποίθησης του/της εκπαιδευόμενου/ης (Εικόνα 36, Πίνακας 17).

Για την κάλυψη των προαπαιτούμενων γνώσεων, επιλέχθηκε η παραπομπή στην επίσημη **Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Μελίσπη** (ΙΤΥΕ-Διόφαντος, 2026). Η επιλογή αυτή διασφαλίζει ότι το εκπαιδευτικό υλικό βασίζεται στο εγκεκριμένο πρόγραμμα σπουδών, επιτρέποντας παράλληλα στον/στην εκπαιδευόμενο/η να ανατρέξει σε έγκυρες πηγές για την αυτοδύναμη αναπλήρωση τυχόν γνωστικών κενών.

Στο τέλος της ενότητας, ενσωματώθηκε μια **στρατηγική αυτοαξιολόγησης (self-assessment check)** στο περιβάλλον **interactive book [H5P Lumi]**. Ο μηχανισμός αυτός λειτουργεί ως "πύλη" (gatekeeping), ενθαρρύνοντας τον/τη μαθητή/τρια να προβεί σε αναστοχασμό (metacognition) σχετικά με το γνωστικό του επίπεδο. Η ενσωμάτωση τέτοιων μηχανισμών είναι καθοριστική στην ηλεκτρονική μάθηση για την ενίσχυση του αισθήματος ελέγχου του/της μαθητή/τριας επί της μαθησιακής διαδικασίας.

Για να παρακολουθήσετε με επιτυχία το Ψηφιακό Μάθημα, θα ήταν χρήσιμο να είστε εξοικειωμένοι/ες με τις παρακάτω γνώσεις και ψηφιακές δεξιότητες:

> **A. Προαπαιτούμενες γνώσεις της Άλγεβρας και των Στοχαστικών Μαθηματικών:**

Όλο το υποστηρικτικό υλικό και οι αναλυτικές θεωρητικές προσεγγίσεις για τις παραπάνω έννοιες είναι διαθέσιμες στην [Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Μελίσπη](#) του ΙΤΥΕ-Διόφαντος. Μπορείτε να ανατρέξετε στα Διαδασκικά Πακέτα του Πολλαπλού Βιβλίου για την περαιτέρω ενίσχυση των γνώσεών σας (Γαβρίλης et al., 2026β; Αδαμίδης & Καραντάνα, 2026; Γαβρίλης et al., 2026α; Ρεκούμης et al., 2026α; Λαμπρόπουλος et al., 2026; Βακαλόπουλος et al. 2026; Ρεκούμης et al., 2026β; Μπαράλος et al., 2026; Διαμαντίδης et al., 2026; ΙΤΥΕ-Διόφαντος, 2026).

> **B. Προαπαιτούμενες ψηφιακές δεξιότητες:**

Αισθάνεσαι έτοιμος/η να εφαρμόσεις τις παραπάνω έννοιες και ψηφιακές δεξιότητες στο μάθημα;

☐ True

☐ False

Εικόνα 36 Προαπαιτούμενες Γνώσεις & Δεξιότητες για το Ψηφιακό Μάθημα: Υπερκείμενο τύπου "accordion" [Interactive book-H5P Lumi, 1η ενότητα].

Πίνακας 17 Προαπαιτούμενες Γνώσεις & Δεξιότητες για το Ψηφιακό Μάθημα: Υπερκείμενο τύπου "accordion" [Interactive book-H5P Lumi, 1η ενότητα].

Για να παρακολουθήσετε με επιτυχία το Ψηφιακό Μάθημα, θα ήταν χρήσιμο να είστε εξοικειωμένοι/ες με τις παρακάτω γνώσεις και ψηφιακές δεξιότητες:

A. Προαπαιτούμενες γνώσεις της Άλγεβρας και των Στοχαστικών Μαθηματικών:

- Επίλυση εξισώσεων 1ου και 2ου βαθμού.
- Επίλυση ανισώσεων 1ου βαθμού.
- Μελέτη του προσήμου τριωνύμου.
- Βασικές ιδιότητες της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ (με $a \neq 0$).
- Διάκριση μεταξύ τύπων δεδομένων: κατηγορικά, διακριτά ποσοτικά και συνεχή ποσοτικά δεδομένα.

Όλο το υποστηρικτικό υλικό και οι αναλυτικές θεωρητικές προσεγγίσεις για τις παραπάνω έννοιες είναι διαθέσιμες στην [Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Μελίσπη](#) του ΙΤΥΕ-Διόφαντος. Μπορείτε να ανατρέξετε στα Διαδασκικά Πακέτα του Πολλαπλού Βιβλίου για την περαιτέρω ενίσχυση των γνώσεών σας (Γαβρίλης et al., 2026b; Αδαμίδης & Καραντάνα, 2026; Γαβρίλης et al., 2026α; Ρεκούμης et al., 2026α; Λαμπρόπουλος et al., 2026; Βακαλόπουλος et al. 2026; Ρεκούμης et al., 2026b; Μπαράλος et al., 2026; Διαμαντίδης et al., 2026; ΙΤΥΕ-Διόφαντος, 2026).

B. Προαπαιτούμενες ψηφιακές δεξιότητες:

- **Πλοήγηση:** Ικανότητα περιήγησης σε ψηφιακές πλατφόρμες και αλληλεπίδρασης με διαδραστικό υλικό (H5P).
- **Διαχείριση Δεδομένων:** Βασικές γνώσεις χρήσης υπολογιστικών φύλλων για την οργάνωση ποσοτικών δεδομένων.
- **Επικοινωνία:** Δυνατότητα συμμετοχής σε ασύγχρονες συζητήσεις μέσω διαδικτυακών φόρουμ.

Αυτοαξιολόγηση:

Όταν νιώσετε έτοιμοι, απαντήστε στην παρακάτω ερώτηση για να συνεχίσουμε!

Ερώτηση	Ανατροφοδότηση	Καθοδήγηση
Αισθάνεσαι έτοιμος/η να εφαρμόσεις αυτές τις παραπάνω έννοιες και ψηφιακές δεξιότητες στο μάθημα; Επιλογές: Ναι Όχι	Feedback (on positive answer): Πολύ ωραία! Είσαι έτοιμος/η να προχωρήσεις στις επόμενες ενότητες, όπου θα εφαρμόσουμε αυτές τις γνώσεις και δεξιότητες. Feedback (on negative answer): Κανένα πρόβλημα!	Ρίξε μια ματιά στο υλικό της Ψηφιακής Βιβλιοθήκης Μελίσπη (https://ebooksdl.cti.gr/) ή επικοινώνησε μαζί μου για οποιαδήποτε διευκρίνιση

1.2.2 Ελάχιστες Απαραίτητες Υποδομές για τη συμμετοχή στο Ψηφιακό Μάθημα

Στην ενότητα 1.2.2, υλοποιήθηκε σελίδα **υπερκειμένου** (σε περιβάλλον **interactive book [H5P Lumi]**) που περιλαμβάνει τις ελάχιστες τεχνικές απαιτήσεις για τη συμμετοχή στο Ψηφιακό Μάθημα (Εικόνα 37, Πίνακας 18). Η παροχή αυτών των πληροφοριών κρίνεται απαραίτητη για την αποφυγή τεχνικών εμποδίων που θα μπορούσαν να διακόψουν τη μαθησιακή ροή, ευθυγραμμιζόμενη με την αρχή της **προσβασιμότητας και της συμπεριληπτικής εκπαίδευσης**, εξασφαλίζοντας ότι όλοι/ες οι μαθητές/τριες διαθέτουν τις ίδιες δυνατότητες πρόσβασης στο ψηφιακό περιβάλλον (OECD, 2023).

Πίνακας 18 Ελάχιστες Απαραίτητες Υποδομές για το Ψηφιακό Μάθημα: Υπερκείμενο [Interactive book-H5P Lumi, 2η ενότητα].

Για την απρόσκοπτη παρακολούθηση του μαθήματος, βεβαιωθείτε ότι διαθέτετε τα εξής:

Συσκευή: Υπολογιστή (Desktop/Laptop) ή Tablet με σταθερή σύνδεση στο διαδίκτυο.

Πρόγραμμα Περιήγησης (Browser): Προτείνεται η χρήση των τελευταίων εκδόσεων των **Google Chrome** [[σύνδεσμος](#)], **Mozilla Firefox** [[σύνδεσμος](#)] ή **Microsoft Edge** [[σύνδεσμος](#)] για τη βέλτιστη προβολή των διαδραστικών εφαρμογών (H5P).

Εξοπλισμός: Ακουστικά (προαιρετικά, αν το μάθημα περιλαμβάνει βίντεο με ήχο) και ενημερωμένο λογισμικό περιήγησης.

Λογισμικό: Δεν απαιτείται εγκατάσταση πρόσθετων προγραμμάτων. Το περιβάλλον του μαθήματος είναι πλήρως συμβατό με όλα τα σύγχρονα λειτουργικά συστήματα. Ωστόσο, για την εκτέλεση των πρακτικών ασκήσεων και δραστηριοτήτων του μαθήματος απαιτείται η χρήση του **Microsoft Office Excel** (έκδοση 2016 ή νεότερη, ή ισοδύναμη συμβατή έκδοση).

≡ (1.2.2) Ελάχιστες Απαραίτητες Υποδομές για τη συμ... 2 / 2 < > ✕

Για την απρόσκοπτη παρακολούθηση του μαθήματος, βεβαιωθείτε ότι διαθέτετε τα εξής:

Συσκευή: Υπολογιστή (Desktop/Laptop) ή Tablet με σταθερή σύνδεση στο διαδίκτυο.

Πρόγραμμα Περιήγησης (Browser): Προτείνεται η χρήση των τελευταίων εκδόσεων των **Google Chrome**, **Mozilla Firefox** ή **Microsoft Edge** για τη βέλτιστη προβολή των διαδραστικών εφαρμογών (H5P).

Εξοπλισμός: Ακουστικά (προαιρετικά, αν το μάθημα περιλαμβάνει βίντεο με ήχο) και ενημερωμένο λογισμικό περιήγησης.

Λογισμικό: Δεν απαιτείται εγκατάσταση πρόσθετων προγραμμάτων. Το περιβάλλον του μαθήματος είναι πλήρως συμβατό με όλα τα σύγχρονα λειτουργικά συστήματα.

Εικόνα 37 Ελάχιστες Απαραίτητες Υποδομές για το Ψηφιακό Μάθημα: Υπερκείμενο [Interactive book-H5P Lumi, 2η ενότητα].

1.3 Ολοκλήρωση του Ψηφιακού Μαθήματος

1.3.1 Απαραίτητες ενέργειες για το Ψηφιακό Μάθημα

Στην ενότητα 1.3.1 υλοποιήθηκε σελίδα **υπερκειμένου** σε περιβάλλον **interactive book [H5P Lumi]**, που παρουσιάζει τη στρατηγική αξιολόγησης και τη διαδικασία πιστοποίησης του Ψηφιακού Μαθήματος. Η ενότητα αυτή δομείται σε τρία στάδια, τη **διαμορφωτική αξιολόγηση** μέσω διαδραστικών ασκήσεων (Quiz και hands-on δραστηριότητες), την **τελική αξιολόγηση** μέσω στοχευμένης δοκιμασίας, ενώ η διαδικασία ολοκληρώνεται με την απονομή του **Ψηφιακού Σήματος "Math Modeling Level 1"**.

Η σαφής οριοθέτηση των αξιολογικών σταδίων και η επιβράβευση μέσω της ψηφιακής πιστοποίησης αποσκοπούν στην ενίσχυση του μαθησιακού κινήτρου, στην υποστήριξη της αυτορρύθμισης του/της μαθητή/τριας και στην αναγνώριση των αποκτηθεισών δεξιοτήτων μοντελοποίησης (Εικόνα 38, Πίνακας 19, Πίνακας 20).

Πίνακας 19 Απαραίτητες ενέργειες για το Ψηφιακό Μάθημα: Υπερκείμενο τύπου "accordion" [Interactive book-H5P Lumi, 1η ενότητα].

Η Διαδρομή προς την Κατάκτηση της Γνώσης & Δεξιότητας: Αξιολόγηση & Πιστοποίηση

Η διαδικασία είναι απλή, διαφανής και δομείται σε τρία στάδια.

1. Διαμορφωτική Αξιολόγηση (Formative Assessment)

Σε κάθε ένα από τα δύο Μικρο-Μαθήματα, καθώς περιηγείστε στις ενότητες, θα συναντήσετε Quiz και hands-on δραστηριότητες βασισμένες σε ρεαλιστικά προβλήματα. Στόχος είναι ο πειραματισμός και η εξάσκηση, καθώς έχετε απεριόριστες προσπάθειες, άμεση ανατροφοδότηση & καθοδήγηση, χωρίς οι επιδόσεις αυτές να προσμετρώνται στον τελικό βαθμό. Στο τέλος κάθε Μικρο-Μαθήματος, ολοκληρώνετε την ανακεφαλαίωση, τον αναστοχασμό και την αυτοαξιολόγηση, προετοιμάζοντας το έδαφος για την τελική αξιολόγηση.

2. Τελική Αξιολόγηση του Ψηφιακού Μαθήματος (Summative Assessment)

Μετά την ολοκλήρωση και των δύο Μικρο-Μαθημάτων, θα κληθείτε να συμμετάσχετε στην Τελική Αξιολόγηση του Ψηφιακού Μαθήματος. Πρόκειται για ένα στοχευμένο Quiz 16 ερωτήσεων, βασισμένο σε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα. Με μία προσπάθεια και ποσοστό επιτυχίας τουλάχιστον 75%, επιβεβαιώνετε ότι κατέχετε πλέον τα απαραίτητα εργαλεία και τις δεξιότητες.

3. Πιστοποίηση

Μόλις ολοκληρώσετε επιτυχώς τη διαδικασία, θα λάβετε το Ψηφιακό Σήμα (Digital Badge) **"Math Modeling Level 1"** [\[σύνδεσμος\]](#). Πρόκειται για την επίσημη αναγνώριση της ικανότητάς σας να μοντελοποιείτε πραγματικά προβλήματα μέσω των Μαθηματικών.

Διαμορφωτική Αξιολόγηση

Μικρο-Μάθημα 1

- ✓ **Αξιολόγηση κατανόησης εννοιών** με Quiz ερωτήσεων κλειστού τύπου (**MA1.1**)
- ✓ **Αξιολόγηση εφαρμογής δεξιότητας** μέσω ρεαλιστικών προβλημάτων, είτε με χρήση παραδοσιακών υπολογιστικών διαδικασιών είτε με αξιοποίηση ψηφιακών εργαλείων στο GeoGebra (**MA1.2**).
- ✓ Άμεση ανατροφοδότηση και καθοδήγηση

Μικρο-Μάθημα 2

- ✓ **Αξιολόγηση κατανόησης εννοιών** με Quiz ερωτήσεων κλειστού τύπου (**MA2.1**)
- ✓ **Αξιολόγηση εφαρμογής δεξιότητας** μέσω ρεαλιστικού προβλήματος, είτε με χρήση παραδοσιακών υπολογιστικών διαδικασιών είτε με αξιοποίηση ψηφιακών εργαλείων στο Excel (**MA2.2**).
- ✓ Άμεση ανατροφοδότηση και καθοδήγηση
- ✓ Απεριόριστες προσπάθειες που δεν

✓ Απεριόριστες προσπάθειες που δεν προσμετρώνται στον τελικό βαθμό (αυτοαξιολόγηση) ✓ Ανακεφαλαίωση - Αναστοχασμός Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση	προσμετρώνται στον τελικό βαθμό (αυτοαξιολόγηση) ✓ Ανακεφαλαίωση - Αναστοχασμός Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση
Τελική Αξιολόγηση του ΨΜ MA1.1 – MA1.2- MA2.1 - MA2.2 ✓ Μία προσπάθεια ✓ Απαιτούμενο ποσοστό επιτυχίας: 75%.	
Πιστοποίηση ✓ Σήμα (Digital Badge) "Math Modeling Level 1"	

☰ (1.3.1) Απαραίτητες ενέργειες για το Ψηφιακό Μάθημα

1 / 2



Η Διαδρομή προς την Κατάκτηση της Γνώσης & Δεξιότητας: Αξιολόγηση & Πιστοποίηση

Η διαδικασία είναι απλή, διαφανής και δομείται σε τρία στάδια.

> 1. Διαμορφωτική Αξιολόγηση (Formative Assessment)

> 2. Τελική Αξιολόγηση του Ψηφιακού Μαθήματος (Summative Assessment)

✓ 3. Πιστοποίηση

Μόλις ολοκληρώσετε επιτυχώς τη διαδικασία, θα λάβετε το Ψηφιακό Σήμα (Digital Badge) "**Math Modeling Specialist**" [\[σύνδεσμος\]](#). Πρόκειται για την επίσημη αναγνώριση της ικανότητάς σας να μοντελοποιείτε πραγματικά προβλήματα μέσω των Μαθηματικών.

Εικόνα 38 Απαραίτητες ενέργειες για το Ψηφιακό Μάθημα: Υπερκείμενο "accordion" [Interactive book-H5P Lumi, 1η ενότητα].

Πίνακας 20 Ενδεικτικό Πιστοποιητικό που λαμβάνει ο εκπαιδευόμενος μετά την επιτυχή ολοκλήρωση του Ψηφιακού Μαθήματος.

Σημείωση. Το Ψηφιακό Σήμα (Digital Badge) δημιουργήθηκε με τη χρήση τεχνητής νοημοσύνης μέσω Gemini AI (Google, 2026b).



Πανεπιστήμιο Πειραιά - Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων
Εργαστήριο Προηγμένων Ψηφιακών Τεχνολογιών Μάθησης & Πολιτισμού



ΨΗΦΙΑΚΟ ΠΙΣΤΟΠΟΙΗΤΙΚΟ

επιτυχούς ολοκλήρωσης του Ψηφιακού Μαθήματος

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΟΝ ΚΟΣΜΟ:

Από τα Μαθηματικά στην Πραγματική Ζωή»

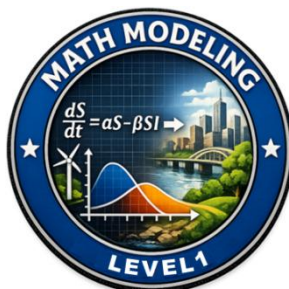
Με το παρόν πιστοποιείται ότι ο/η

[ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ]

έχει ολοκληρώσει με επιτυχία όλες τις εκπαιδευτικές ενότητες και έχει επιδείξει εξαιρετική κατανόηση και εφαρμογή των εννοιών της μαθηματικής μοντελοποίησης σε ρεαλιστικά προβλήματα, μέσω διαδραστικών δραστηριοτήτων και αξιολογήσεων (Formative & Summative Assessments) εντός του ψηφιακού περιβάλλοντος.

Ως επισφράγιση αυτής της επιτυχίας, του/της απονέμεται το

Ψηφιακό Σήμα (Digital Badge): Math Modeling Level 1



(Σφραγίδα & Υπογραφή Καθηγητή)

Πειραιάς, [Ημερομηνία Ολοκλήρωσης]

[Ονοματεπώνυμο Υπεύθυνου Καθηγητή]

1.3.2 Τελική Εξέταση του Ψηφιακού Μαθήματος

Στην ενότητα 1.3.2 υλοποιήθηκε σελίδα **υπερκείμενου** σε περιβάλλον **interactive book [H5P Lumi]**, που παρουσιάζει τη στρατηγική της τελικής εξέτασης του Ψηφιακού Μαθήματος. Η εξέταση περιλαμβάνει συνολικά 16 ερωτήσεις κλειστού τύπου, καλύπτοντας τα δύο μικρο-μαθήματα: οι 6 εξ αυτών αφορούν την **εννοιολογική κατανόηση**, ενώ οι υπόλοιπες 10 επικεντρώνονται στην **εφαρμογή των δεξιοτήτων** που αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας (Πίνακας 21).

Πίνακας 21 Τελική Αξιολόγηση του Ψηφιακού Μαθήματος: Υπερκείμενο [Interactive book-H5P Lumi, 2η ενότητα].

Το πιο σημαντικό στάδιο του Ψηφιακού μας Μαθήματος είναι η τελική αξιολόγηση! Αφού ολοκληρώσετε τη διαδρομή στα δύο Μικρο-Μαθήματα, θα είστε πλέον έτοιμοι να αποδείξετε τις γνώσεις και δεξιότητες που αποκτήσατε.

Τι να περιμένετε: Η Τελική Αξιολόγηση (με τη μορφή διαδραστικού κουίζ) αποτελείται από **16 ερωτήματα**, σχεδιασμένα για να συνθέσουν τη γνώση σας σε πραγματικές συνθήκες:

- **6 ερωτήσεις κατανόησης** για να επιβεβαιώσουμε τις βασικές έννοιες που διδαχθήκαμε.
- **10 ερωτήσεις εφαρμογής δεξιοτήτων**, βασισμένες σε ένα ενιαίο, ρεαλιστικό σενάριο (Case Study), όπου θα κληθείτε να δράσετε ως "μοντελοποιητές".

Σημαντικές Οδηγίες:

- **Προσπάθειες:** Έχετε στη διάθεσή σας **μία (1) μόνο προσπάθεια** για την ολοκλήρωση της δοκιμασίας.
- **Όριο Επιτυχίας:** Για να λάβετε την επίσημη πιστοποίηση και το ψηφιακό σας σήμα (Math Modeling Level 1), απαιτείται ποσοστό επιτυχίας τουλάχιστον **75%**.

Σε αυτόν τον **[σύνδεσμο]**, θα βρείτε το Case Study της αξιολόγησης, όπου θα δράσετε ως "μοντελοποιητές". Μελετήστε το σενάριο, και αφού ολοκληρώσετε τις ενότητες των δύο Μικρο-Μαθημάτων, θα κληθείτε να απαντήσετε στα 16 ερωτήματα που θα σας ανατεθούν.

Μετά τη μελέτη του σεναρίου (Case Study), παρακαλείστε να δηλώσετε σε αυτό τον **[σύνδεσμο]** τον βαθμό ετοιμότητάς σας για την τελική αξιολόγηση.

Ερώτηση: Σε ποιο βαθμό αισθάνεστε έτοιμοι να ανταποκριθείτε στις απαιτήσεις της τελικής αξιολόγησης ως "μοντελοποιητές";

Επιλογές:

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

Ετικέτα: 1 - Καθόλου έτοιμος/η, Ετικέτα: 5 - Απόλυτα έτοιμος/η

Το σύνολο των ερωτημάτων πλαισιώνεται από ένα **ενιαίο σενάριο ρεαλιστικού προβλήματος** (case study), απαιτώντας από τον/την εκπαιδευόμενο/η να συνθέσει τις γνώσεις του/της σε ένα συνεκτικό πλαίσιο.

Η δοκιμασία ορίζεται με δυνατότητα μίας μόνο προσπάθειας, θέτοντας ως ελάχιστο όριο επιτυχίας το 75%, προκειμένου να διασφαλιστεί η εμβάθυνση και η επάρκεια στις διδασκόμενες δεξιότητες (Εικόνα 39, Πίνακας 22).

Η παραπάνω μεθοδολογία αξιολόγησης επιλέχθηκε με βάση τα ακόλουθα παιδαγωγικά κριτήρια:

Αυθεντική Αξιολόγηση (Authentic Assessment): Η χρήση ενός ενιαίου σεναρίου ρεαλιστικού προβλήματος απομακρύνεται από την αποσπασματική εξέταση γνώσεων και προσομοιάζει σε πραγματικές συνθήκες επίλυσης προβλημάτων, ενισχύοντας τη μεταφορά της μάθησης (transfer of learning).

Συνδυαστική Αξιολόγηση: Η κατανομή των ερωτήσεων (κατανόηση & εφαρμογή) επιτρέπει τη μέτρηση τόσο των χαμηλότερων όσο και των υψηλότερων επιπέδων της ταξινομίας του Bloom, εξασφαλίζοντας ότι ο/η εκπαιδευόμενος/η δεν αναπαράγει απλώς πληροφορία, αλλά εφαρμόζει τη γνώση.

Διαχείριση Γνωστικού Φορτίου: Η διάρθρωση της τελικής εξέτασης σε διακριτά μέρη που αντιστοιχούν στα δύο Μικρο-Μαθήματα βοηθά στη διατήρηση της δομικής συνοχής και μειώνει το γνωστικό φορτίο κατά τη διάρκεια της εξεταστικής διαδικασίας.

Κριτήριο Επάρκειας: Η απαίτηση για 75% επιτυχία αποτελεί έναν δείκτη «κυριότητας» (mastery learning), διασφαλίζοντας ότι ο/η εκπαιδευόμενος/η έχει κατακτήσει σε ικανοποιητικό βαθμό τα εργαλεία μοντελοποίησης πριν λάβει την πιστοποίηση (Wiggins, 1998; Bloom et al., 1971).

Στο τέλος της ενότητας, ενσωματώθηκε στο Interactive Book ένας σύνδεσμος που οδηγεί σε ερωτηματολόγιο αυτοαξιολόγησης (Likert, μέσω Google Forms), το οποίο μετρά τον βαθμό ετοιμότητας του/της εκπαιδευόμενου/ης για την τελική εξέταση (Google, 2026c) (Εικόνα 40).

Πίνακας 22 Σενάριο (Case Study) για την Τελική Εξέταση του Ψηφιακού Μαθήματος

Τελική Εξέταση με τίτλο: «Κλιματική Αστάθεια: Μαθηματική Μοντελοποίηση και Στατιστική Σύγκριση Πλανητικών Τάσεων»

Το Σενάριο του Ρεαλιστικού Προβλήματος

Στο πλαίσιο της διερεύνησης της κλιματικής κρίσης, καλείστε να αναλύσετε τη θερμοκρασιακή μεταβολή του πλανήτη και τα επίπεδα θερμοκρασίας ειδικά στην Αρκτική, η οποία αποτελεί έναν από τους πιο ευαίσθητους δείκτες της κλιματικής αλλαγής.

Δεδομένα Μοντελοποίησης

Παγκόσμια Θερμοκρασιακή Μεταβολή: Το δοσμένο γράφημα αποτυπώνει τη μέση παγκόσμια θερμοκρασιακή μεταβολή $f(x)$ (σε °C) για την περίοδο 1850–2025. Η μεταβλητή x αντιπροσωπεύει τα έτη που έχουν μεσολαβήσει από το 1850 (όπου $x=0$ το 1850 και $x=175$ το 2025).

Θερμοκρασιακό Μοντέλο Αρκτικής: Η μέση ετήσια θερμοκρασία στην περιοχή της Αρκτικής για την τελευταία 40ετία (1986–2026) προσεγγίζεται από το τριώνυμο:

$g(x) = 0.02x^2 + 0.1x - 15$, με $0 \leq x \leq 40$ (όπου $x=0$ αντιστοιχεί στο έτος 1986).

Στατιστική Ανάλυση & Σύγκριση

Για τη διεξαγωγή της συγκριτικής σας ανάλυσης, αξιοποιήστε το παρακάτω σύνολο δεδομένων, το οποίο περιλαμβάνει 20 αντιπροσωπευτικές τιμές της τελευταίας 40ετίας:

Μέση Θερμοκρασία Πλανήτη (°C): 1.2, 1.2, 0.2, 0.3, 0.3, 0.4, 0.4, 0.5, 0.5, 0.6, 0.6, 0.7, 0.7, 0.8, 0.8, 0.9, 0.9, 1.0, 1.0, 1.1

Θερμοκρασία Αρκτικής (°C): 7.3, 7.5, 0.5, 0.7, 1.1, 1.4, 3.2, 1.8, 2.0, 2.2, 2.5, 2.8, 4.1, 3.0, 3.3, 3.5, 3.8, 4.0, 4.2, 4.5

Πατώντας σε αυτόν τον [\[σύνδεσμο\]](#), μπορείτε να κατεβάσετε το αρχείο εργασίας με τα παραπάνω δεδομένα (σε Excel).

Οδηγίες Αξιολόγησης:

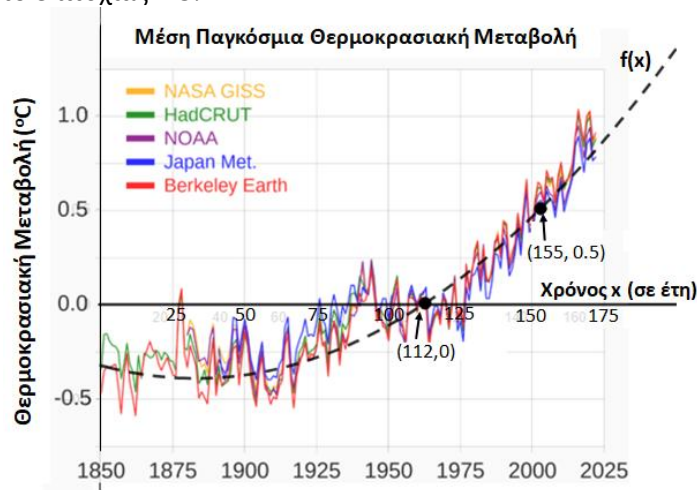
Η δοκιμασία αποτελείται από 16 ερωτήματα.

Τα ερωτήματα αφορούν:

- στη μοντελοποίηση και στην αλγεβρική- γραφική επίλυση ανισώσεων 2^{ου} βαθμού,
- στην ανάλυση θηκογραμμάτων, στον εντοπισμό των ακραίων τιμών (outliers) και στη σύγκριση του εύρους μεταβλητότητας μεταξύ πλανήτη και Αρκτικής.

Κριτήρια Επιτυχίας:

- Μία (1) προσπάθεια.
- Ελάχιστο ποσοστό επιτυχίας: 75%.



Εικόνα 39 Γράφημα της Μέσης Παγκόσμιας Θερμοκρασιακής Μεταβολής $f(x)$ (σε °C) από το 1850 έως το 2025.

Σημείωση. Εφαρμόστηκε η μέθοδος "παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων" στο γράφημα που αναπαράχθηκε από το «Ποιά ήπειρος εμφανίζει τον μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης θερμοκρασίας;», από Physicsgg, 2023, Physicsgg (<https://physicsgg.me/2023/06/19/%CF%80%CE%BF%CE%B9%CE%AC-%CE%AE%CF%80%CE%B5%CE%B9%CF%81%CE%BF%CF%82-%CE%B5%CE%BC%CF%86%CE%B1%CE%BD%CE%AF%CE%B6%CE%B5%CE%B9-%CF%84%CE%BF%CE%BD-%CE%BC%CE%B5%CE%B3%CE%B1%CE%BB%CF%8D%CF%84%CE%B5%CF%81/>). Copyright 2023 από Physicsgg.

≡ (1.3.2) Τελική Εξέταση του Ψηφιακού Μαθήματος

2 / 2



Το πιο σημαντικό στάδιο του Ψηφιακού μας Μαθήματος είναι η τελική αξιολόγηση! Αφού ολοκληρώσετε τη διαδρομή στα δύο Μικρο-Μαθήματα, θα είστε πλέον έτοιμοι να αποδείξετε τις γνώσεις και δεξιότητες που αποκτήσατε.

Τι να περιμένετε: Η Τελική Αξιολόγηση αποτελείται από 16 ερωτήματα, σχεδιασμένα για να συνθέσουν τη γνώση σας σε πραγματικές συνθήκες:

- 6 ερωτήσεις κατανόησης, για να επιβεβαιώσουμε τις βασικές έννοιες που διδαχθήκαμε.
- 10 ερωτήσεις εφαρμογής δεξιοτήτων, βασισμένες σε ένα ενιαίο, ρεαλιστικό σενάριο (Case Study), όπου θα κληθείτε να δράσετε ως "μοντελοποιητές".

Σημαντικές Οδηγίες:

- **Προσπάθειες:** Έχετε στη διάθεσή σας **μία (1) μόνο προσπάθεια** για την ολοκλήρωση της δοκιμασίας.
- **Όριο Επιτυχίας:** Για να λάβετε την επίσημη πιστοποίηση και το ψηφιακό σας σήμα (Math Modeling Specialist), απαιτείται ποσοστό επιτυχίας τουλάχιστον **80%**.

Σε αυτόν τον [\[σύνδεσμο\]](#), θα βρείτε το Case Study της αξιολόγησης, όπου θα δράσετε ως "μοντελοποιητές". Μελετήστε το σενάριο, και αφού ολοκληρώσετε τις ενότητες των δύο Μικρο-Μαθημάτων, θα κληθείτε να απαντήσετε στα 16 ερωτήματα που θα σας ανατεθούν.

Μετά τη μελέτη του σεναρίου (Case Study), παρακαλείστε να δηλώσετε σε αυτό τον [\[σύνδεσμο\]](#) τον βαθμό ετοιμότητάς σας για την τελική αξιολόγηση.

Εικόνα 40 Τελική Αξιολόγηση του Ψηφιακού Μαθήματος: Υπερκείμενο [Interactive book-HSP Lumi, 2η ενότητα].

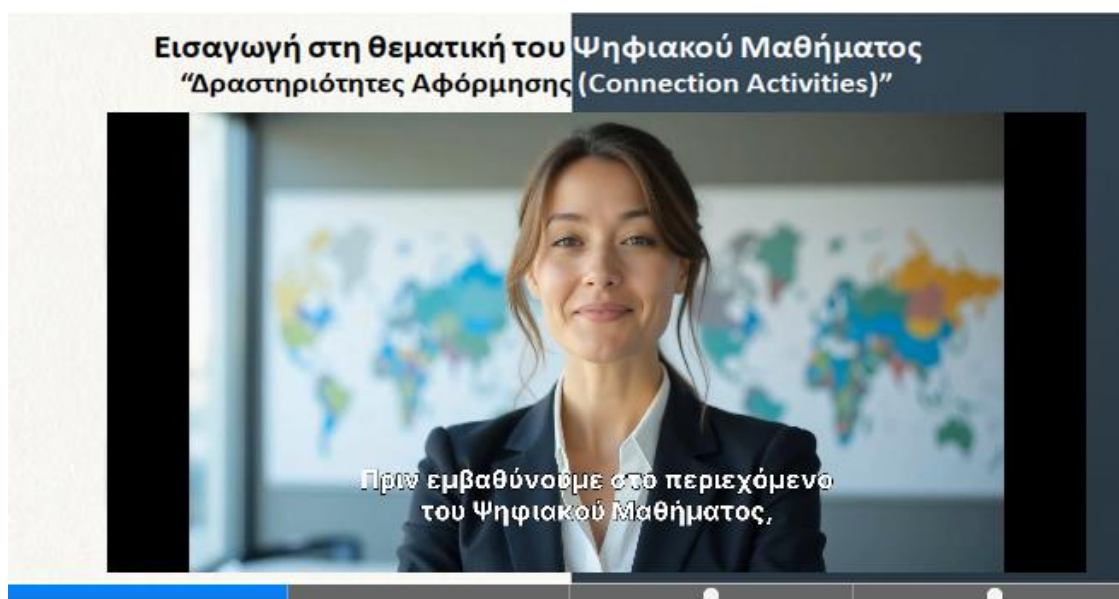
1.4 Εισαγωγή στη θεματική του Ψηφιακού Μαθήματος

1.4.1 Δραστηριότητες Αφόρμησης (Connection Activities)

Στην ενότητα 1.4.1, εφαρμόζεται η στρατηγική των Connection Activities με στόχο την ψυχολογική και γνωστική προετοιμασία των εκπαιδευομένων. Μέσω της χρήσης ενός **διαδραστικού εργαλείου** ([Course Presentation](#) - [H5P Lumi]), η ενότητα πλαισιώνει το θέμα της κλιματικής αλλαγής, συνδέοντας τα προσωπικά βιώματα και τις απορίες των μαθητών/τριών με τη χρησιμότητα της μαθηματικής μοντελοποίησης, θέτοντας έτσι τις βάσεις για τη μετάβαση στα επερχόμενα Μικρο-Μαθήματα και Τελική Εξέταση.

Το **Course Presentation** ξεκινά με την εμφάνιση ενός **AI Avatar [HeyGen]** (HeyGen, 2026), του οποίου η ομιλία συνοδεύεται από υποτίτλους για μεγαλύτερη προσβασιμότητα. Το κείμενο του Avatar έχει ως εξής:

«Γεια σας και καλώς ήρθατε σε αυτό το νέο ψηφιακό μάθημα! Πριν εμβαθύνουμε στο περιεχόμενο του Ψηφιακού Μαθήματος, θα ήθελα να κάνουμε μια στάση. Σε αυτή την ενότητα, θα εξερευνήσουμε μαζί πώς οι αριθμοί μπορούν να "μιλήσουν" για τον πλανήτη μας. Μέσα από τις διαδραστικές δραστηριότητες που ακολουθούν, θα μοιραστούμε τις σκέψεις σας, θα θέσουμε ερωτήματα που ίσως σας απασχολούν και θα δούμε γιατί η μαθηματική μοντελοποίηση είναι ένα από τα πιο ισχυρά εργαλεία που έχουμε στα χέρια μας σήμερα. Πάρτε τον χρόνο σας, αλληλεπιδράστε με το υλικό και μην φοβηθείτε να εκφράσετε την περιέργειά σας!» (Εικόνα 41).

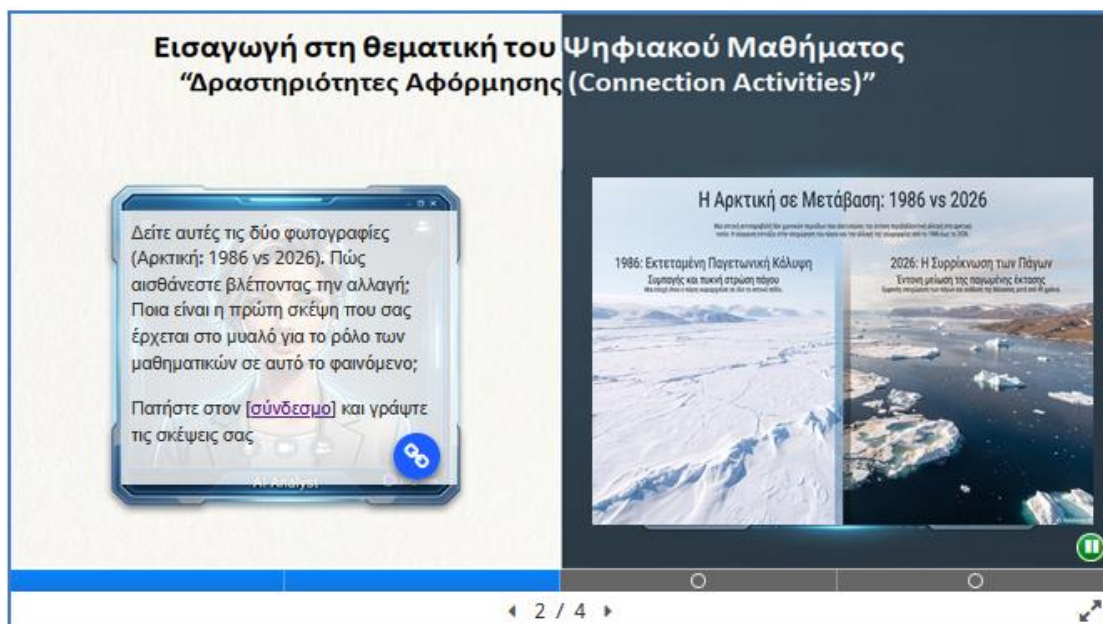


Εικόνα 41 Εισαγωγή σε Δραστηριότητες Αφόρμησης για το Ψηφιακό Μάθημα [Course Presentation-H5P Lumi].

Στη συνέχεια, ενσωματώνεται στο **Course Presentation** ένας σύνδεσμος που οδηγεί στην πλατφόρμα [Padlet](#) (Wallwisher, 2026). Οι μαθητές/τριες καλούνται να συμμετάσχουν σε μια διαδραστική δραστηριότητα διατύπωσης απόψεων. Το Padlet είναι ιδανικό γιατί ο οπτικός χαρακτήρας (φωτογραφίες/σχόλια) βοηθά στην **“Αφόρμηση μέσω Εμπειρίας”**.

Για την ενίσχυση της κατανόησης των εκπαιδευομένων, παρέχεται η παρακάτω **ηχητική επεξήγηση [Google AI Studio]** (Google, 2026d), η οποία αποτυπώνεται γραπτώς στην οθόνη ως συνοδευτικό κείμενο:

«Δείτε αυτές τις δύο φωτογραφίες (Αρκτική: 1986 vs 2026). Πώς αισθάνεστε βλέποντας την αλλαγή; Ποια είναι η πρώτη σκέψη που σας έρχεται στο μυαλό για το ρόλο των μαθηματικών σε αυτό το φαινόμενο; Πατήστε στον σύνδεσμο και γράψτε τις σκέψεις σας» (Εικόνα 42).



Εικόνα 42 Αφόρμηση μέσω εμπειρίας [Course Presentation – H5P Lumi] με ενσωματωμένο σύνδεσμο προς την πλατφόρμα Padlet.

Σημείωση. Οι εικόνες της Αρκτικής και το background σχεδίασης των διαφανειών της παρουσίασης δημιουργήθηκε με τη χρήση τεχνητής νοημοσύνης μέσω NotebookLM (Google, 2026a) (προτροπή συγγραφέως: το κείμενο της ηχητικής επεξήγησης σελ 116-118).

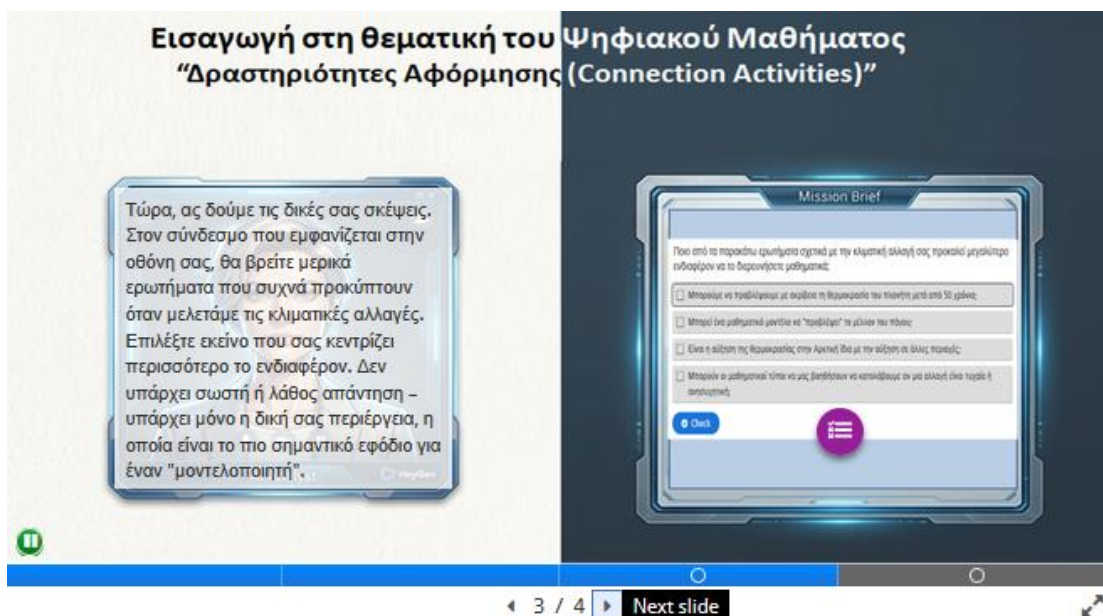
Στη συνέχεια, ενσωματώνεται στο **Course Presentation** μια δραστηριότητα αυτοαξιολόγησης (self-assessment check), η οποία λειτουργεί ως μηχανισμός **“Αφόρμησης μέσω Αποριών”**. Μέσω της επιλογής ερευνητικών ερωτημάτων σχετικά με την κλιματική αλλαγή, ο/η εκπαιδευόμενος/η ενεργοποιεί το ενδιαφέρον του/της για τη μαθηματική μοντελοποίηση, λαμβάνοντας εξατομικευμένη ανατροφοδότηση που συνδέει τις απορίες του/της με τους στόχους του Ψηφιακού Μαθήματος.

Η **ηχητική επεξήγηση** συνεχίζει ως εξής:

«Τώρα, ας δούμε τις δικές σας σκέψεις. Στον σύνδεσμο που εμφανίζεται στην οθόνη σας, θα βρείτε μερικά ερωτήματα που συχνά προκύπτουν όταν μελετάμε τις κλιματικές αλλαγές. Επιλέξτε εκείνο που σας κεντρίζει περισσότερο το ενδιαφέρον. Δεν υπάρχει σωστή ή λάθος απάντηση – υπάρχει μόνο η δική σας περιέργεια, η οποία είναι το πιο σημαντικό εφόδιο για έναν "μοντελοποιητή"» (Πίνακας 23, Εικόνα 43).

Πίνακας 23 Αφόρμηση μέσω Αποριών [Course Presentation – H5P Lumi] με ενσωματωμένο quiz.

Ερώτηση	Ανατροφοδότηση
Ποιο από τα παρακάτω ερωτήματα σχετικά με την κλιματική αλλαγή σας προκαλεί μεγαλύτερο ενδιαφέρον να το διερευνήσετε μαθηματικά; Επιλογές: A. Μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια τη θερμοκρασία του πλανήτη μετά από 50 χρόνια; B. Είναι η αύξηση της θερμοκρασίας στην Αρκτική ίδια με την αύξηση σε άλλες περιοχές; C. Μπορούν οι μαθηματικοί τύποι να μας βοηθήσουν να καταλάβουμε αν μια αλλαγή είναι τυχαία ή ανησυχητική; D. Μπορεί ένα μαθηματικό μοντέλο να "προβλέψει" το μέλλον του πάγου;	Feedback (on all answers): Εξαιρετική ερώτηση! Η περιέργειά σας είναι το πρώτο βήμα του μοντελοποιητή. Στα Μικρο-Μαθήματα που ακολουθούν, θα δούμε ακριβώς πώς τα μαθηματικά μετατρέπουν αυτές τις απορίες σε έγκυρες προβλέψεις.



Εικόνα 43 Αφόρμηση μέσω Αποριών [Course Presentation – H5P Lumi] με ενσωματωμένο quiz [H5P Lumi]. Σημείωση. Το background σχεδίασης των διαφανειών της παρουσίασης δημιουργήθηκε με τη χρήση τεχνητής νοημοσύνης μέσω NotebookLM (Google, 2026a) (προτροπή συγγραφέως: το κείμενο της ηχητικής επεξήγησης σελ 116-118).

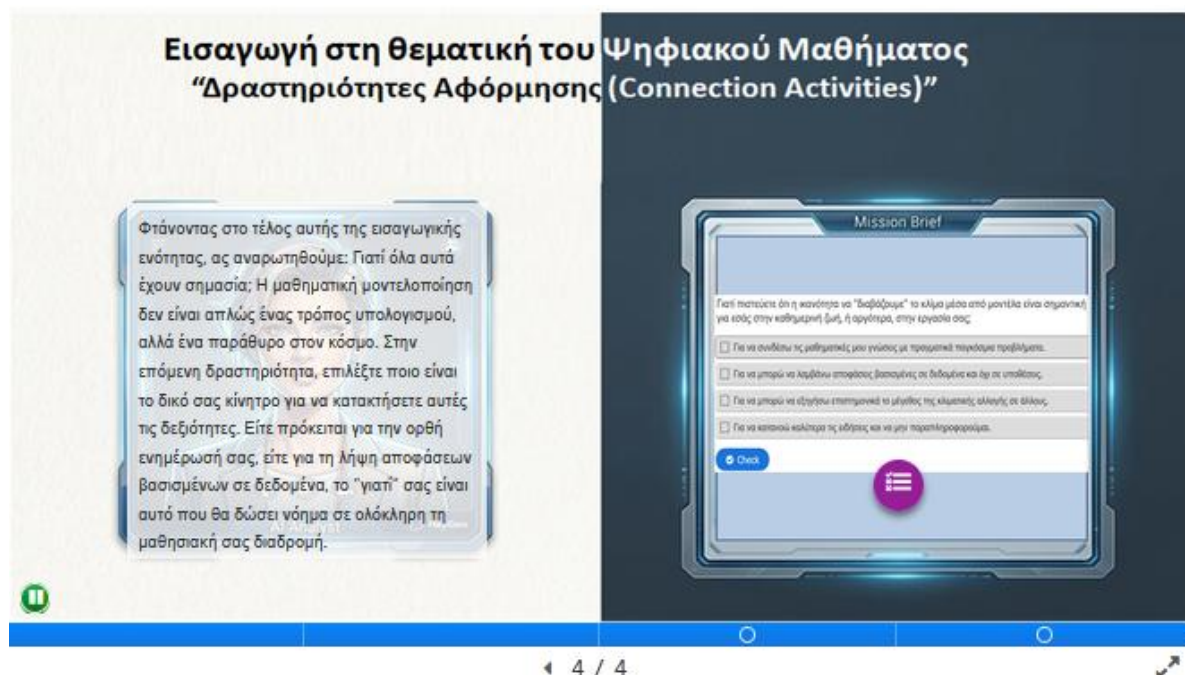
Στην ολοκλήρωση της ενότητας 1.4.1, ενσωματώνεται δραστηριότητα στο **Course Presentation** που στοχεύει στη σύνδεση του μαθησιακού αντικειμένου με τις προσωπικές και επαγγελματικές ανάγκες του/της εκπαιδευόμενου/ης (relevance). Μέσω της επιλογής κινήτρων για τη χρήση της μαθηματικής μοντελοποίησης, επιτυγχάνεται ο εσωτερικός αναστοχασμός του/της εκπαιδευόμενου/ης, ενισχύοντας τη δέσμευση (engagement) και την επίγνωση της πρακτικής αξίας των δεξιοτήτων που θα αποκτηθούν στο Ψηφιακό Μάθημα.

Η **ηχητική επεξήγηση** συνεχίζει ως εξής:

«Φτάνοντας στο τέλος αυτής της εισαγωγικής ενότητας, ας αναρωτηθούμε: Γιατί όλα αυτά έχουν σημασία; Η μαθηματική μοντελοποίηση δεν είναι απλώς ένας τρόπος υπολογισμού, αλλά ένα παράθυρο στον κόσμο. Στην επόμενη δραστηριότητα, επιλέξτε ποιο είναι το δικό σας κίνητρο για να κατακτήσετε αυτές τις δεξιότητες. Είτε πρόκειται για την ορθή ενημέρωσή σας, είτε για τη λήψη αποφάσεων βασισμένων σε δεδομένα, το "γιατί" σας είναι αυτό που θα δώσει νόημα σε ολόκληρη τη μαθησιακή σας διαδρομή» (Πίνακας 24, Εικόνα 44).

Πίνακας 24 Σύνδεση με το "Γιατί" [Course Presentation – H5P Lumi] με ενσωματωμένο quiz.

Ερώτηση	Ανατροφοδότηση
Γιατί πιστεύετε ότι η ικανότητα να "διαβάζουμε" το κλίμα μέσα από μοντέλα είναι σημαντική για εσάς στην καθημερινή ζωή, ή αργότερα, στην εργασία σας; Επιλογές: A. Για να κατανοώ καλύτερα τις ειδήσεις και να μην παραπληροφορούμαι. B. Για να μπορώ να λαμβάνω αποφάσεις βασισμένες σε δεδομένα και όχι σε υποθέσεις. C. Για να μπορώ να εξηγήσω επιστημονικά το μέγεθος της κλιματικής αλλαγής σε άλλους. D. Για να συνδέσω τις μαθηματικές μου γνώσεις με πραγματικά παγκόσμια προβλήματα.	Feedback (on all answers): Όλες οι απαντήσεις είναι εύστοχες! Η κατανόηση του "γιατί" είναι αυτή που μετατρέπει την απλή γνώση σε χρήσιμη δεξιότητα. Η μοντελοποίηση δεν είναι μόνο εξισώσεις, είναι ο τρόπος μας να κατανοούμε την πολυπλοκότητα του κόσμου γύρω μας.



Εικόνα 44 Σύνδεση με το "Γιατί" [Course Presentation – H5P Lumi] με ενσωματωμένο quiz.

Σημείωση. Το background σχεδίασης των διαφανειών της παρουσίασης δημιουργήθηκε με τη χρήση τεχνητής νοημοσύνης μέσω NotebookLM (Google, 2026a) (προτροπή συγγραφέως: το κείμενο της ηχητικής επεξήγησης σελ 116-118).

1.4.2 Δραστηριότητες Γνωριμίας (Discussion Forum)

Στην ενότητα 1.4.2, υλοποιείται δραστηριότητα γνωριμίας μέσω του Discussion Forum του Ψηφιακού Μαθήματος. Η επιλογή αυτή αποσκοπεί στην οικοδόμηση της κοινωνικής παρουσίας (social presence) των μαθητών/τριών, ενθαρρύνοντας την αλληλεπίδραση και την παρουσίαση προσωπικών κινήτρων. Η δημιουργία ενός υποστηρικτικού πλαισίου επικοινωνίας από το αρχικό στάδιο του μαθήματος αποτελεί καθοριστικό παράγοντα για την ενίσχυση του αισθήματος του "ανήκειν" και της διατήρησης του ενδιαφέροντος των εκπαιδευομένων καθ' όλη τη διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας.»

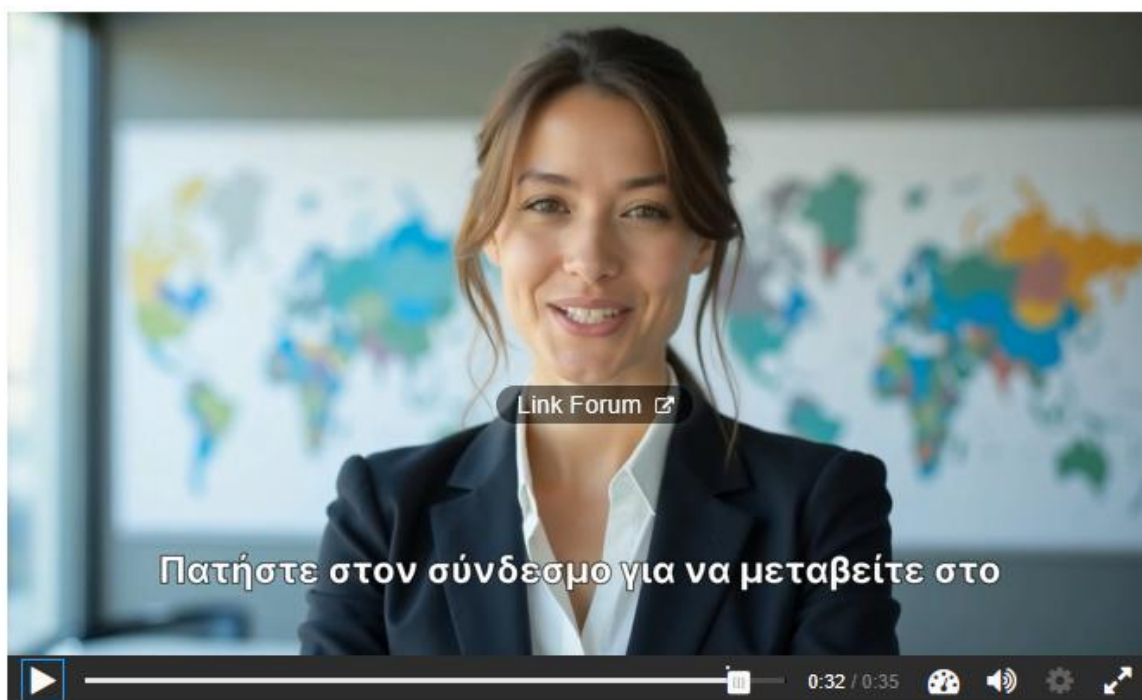
Η εισαγωγή στη δραστηριότητα γίνεται μέσω ενός **διαδραστικού εργαλείου (Interactive Video - [H5P Lumi])** (Lumi Education, 2026), το οποίο ενσωματώνει σύνδεσμο προς στην πλατφόρμα **Padlet**. Το βίντεο ξεκινά με την εμφάνιση ενός **AI Avatar [HeyGen]** (HeyGen, 2026), του οποίου η ομιλία συνοδεύεται από υποτίτλους για τη διασφάλιση της προσβασιμότητας.

Το κείμενο που εκφωνεί το Avatar έχει ως εξής:

«Καλώς ήρθατε στην ομάδα μας! Πριν βουτήξουμε στις έννοιες της μαθηματικής μοντελοποίησης, είναι σημαντικό να γνωριστούμε λίγο καλύτερα. Σε αυτό το Forum, σας προσκαλώ να γράψετε λίγα λόγια για εσάς:

- Πώς θα σας περιγράφατε με δύο προτάσεις;
- Ποιο είναι το προσωπικό σας κίνητρο για να παρακολουθήσετε αυτό το μάθημα;

Η ανταλλαγή των εμπειριών και των προσδοκιών σας θα βοηθήσει όλους μας να νιώσουμε πιο συνδεδεμένοι σε αυτό το κοινό ταξίδι μάθησης. Περιμένω με ενδιαφέρον να διαβάσω τις ιστορίες σας!» (Εικόνα 45).



Εικόνα 45 Δραστηριότητα γνωριμίας [Interactive Video – H5P Lumi] με ενσωματωμένο σύνδεσμο προς την πλατφόρμα Padlet.

2. Ψηφιακό Μικρο-Μάθημα 1

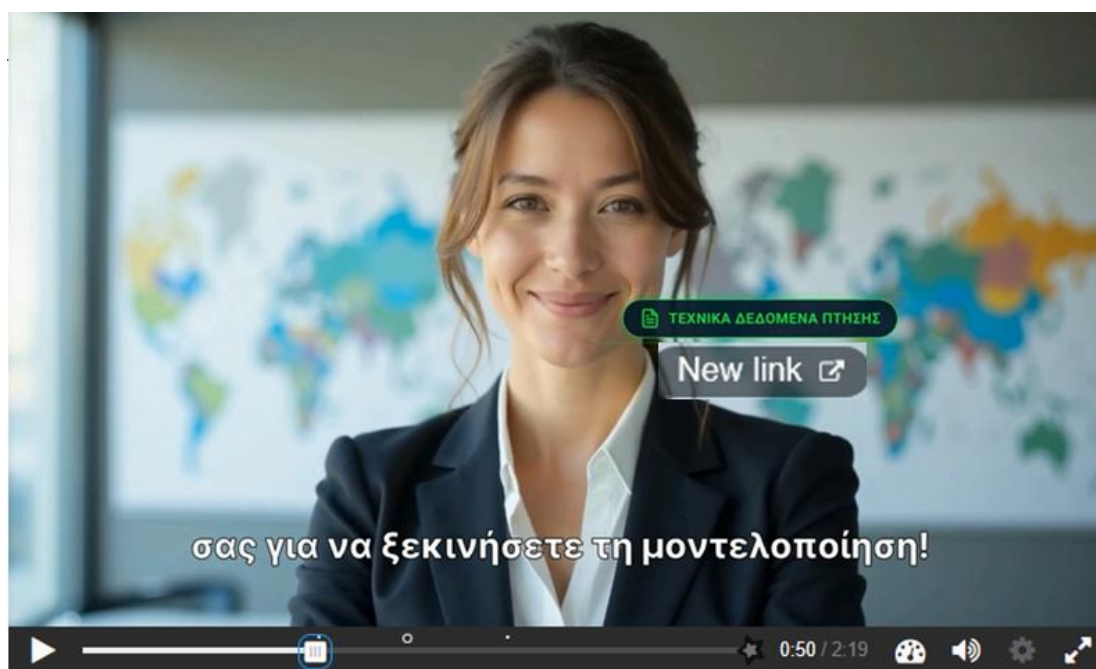
2.1 Εισαγωγή στο Μικρο-Μάθημα 1

Ο τίτλος του Μικρο-Μαθήματος 1 είναι “Μαθηματική Μοντελοποίηση με Ανισώσεις 2ου Βαθμού σε Ψηφιακά Περιβάλλοντα”.

Για την ενίσχυση της μαθησιακής εστίασης, το Μικρο-Μάθημα 1 αξιοποιεί το διδακτικό μοντέλο “Problem-Based Learning”, παρουσιάζοντας τη γνωστική έννοια της “ανίσωσης 2^{ου} βαθμού” ως το βέλτιστο μέσο για την επίλυση ενός ρεαλιστικού προβλήματος. Με τον τρόπο αυτό, η θεωρία αποκτά άμεση λειτουργική αξία, ενθαρρύνοντας τη βαθύτερη κατανόηση των εννοιών.

Η παρουσίαση του σεναρίου πραγματοποιείται μέσω ενός **διαδραστικού εργαλείου** ([Interactive Video](#) - **[H5P Lumi]**) (Lumi Education, 2026), που ξεκινά με την εμφάνιση ενός **AI Avatar** **[HeyGen]** (HeyGen, 2026), του οποίου η ομιλία συνοδεύεται από υποτίτλους για μεγαλύτερη προσβασιμότητα. Το κείμενο του Avatar έχει ως εξής:

«Καλώς ορίσατε στο Μικρο-Μάθημα "Μαθηματική Μοντελοποίηση με Ανισώσεις 2ου Βαθμού σε Ψηφιακά Περιβάλλοντα". Σήμερα, αναλαμβάνετε έναν κρίσιμο ρόλο στο Κέντρο Επιχειρήσεων της Πολεμικής Αεροπορίας ως Data Analyst. Η αποστολή σας αφορά την ανάλυση της περιτολίας ενός αεροσκάφους πάνω από τον Ελλαδικό χώρο. Η οριζόντια μετατόπισή του σε σχέση με την Αθήνα καθορίζεται από ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού, το οποίο αποτυπώνει τις διαδρομές του τόσο προς τα Ανατολικά όσο και προς τα Δυτικά. Το καθήκον σας είναι να αναλύσετε τα δεδομένα της τροχιάς του, προκειμένου να ολοκληρώσετε το πλήρες επιχειρησιακό προφίλ της πτήσης. Είστε έτοιμοι; Πατήστε στον σύνδεσμο που εμφανίζεται στην οθόνη σας για να δείτε την αποστολή σας!» (Εικόνα 46).



Εικόνα 46 Εισαγωγή στο ψηφιακό μικρο-μάθημα 1 [Interactive Video-H5P Lumi, με ενσωματωμένο AI Avatar]

Σημείωση. Το αρχικό βίντεο δημιουργήθηκε με τη χρήση του εργαλείου Canva (Canva, 2026). Το ενσωματωμένο AI Avatar δημιουργήθηκε με τη χρήση του εργαλείου HeyGen (HeyGen, 2026). Η ομιλία παράχθηκε με προτροπή της συγγραφέως: το κείμενο avatar σελ 120.

Μέσω του συγκεκριμένου συνδέσμου, παρέχεται πρόσβαση σε [Google Slides](#) (Google, 2026e), το οποίο παρουσιάζει την εκφώνηση του ρεαλιστικού προβλήματος ως εξής:

Ρεαλιστικό Πρόβλημα: Εργάζεστε στο Κέντρο Επιχειρήσεων της Πολεμικής Αεροπορίας. Ένα αεροσκάφος εκτελεί περιπολία πάνω από τον Ελλαδικό χώρο (Εικόνα 47). Η οριζόντια μετατόπισή του s (σε εκατοντάδες χιλιόμετρα) σε σχέση με την Αθήνα, δίνεται από τον τύπο:

$$s(t) = 3t^2 - 6t, \text{ με } 0 \leq t \leq 3, \text{ όπου } t \text{ είναι ο χρόνος σε ώρες μετά την απογείωσή του.}$$

Όταν $s(t) > 0$, το αεροσκάφος βρίσκεται Ανατολικά της Αθήνας (προς Τουρκία).

Όταν $s(t) < 0$, το αεροσκάφος βρίσκεται Δυτικά της Αθήνας (προς Ιταλία).

Η Αποστολή σας: Ως Data Analyst, αναλαμβάνετε την παρακολούθηση της πτήσης του αεροσκάφους για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 3$. Οφείτε να αναλύσετε τα δεδομένα της τροχιάς του, προκειμένου να ολοκληρώσετε το πλήρες επιχειρησιακό προφίλ της περιπολίας.

Α) Βρείτε την **ανίσωση** που περιγράφει τη **μετατόπιση** του αεροσκάφους **ανατολικά** της Αθήνας.

Β) Χρησιμοποιήστε το εργαλείο GeoGebra (GeoGebra, 2026) για την **γραφική επίλυση** της ανίσωσης.

Γ) Λύστε την ανίσωση **αλγεβρικά** για να επιβεβαιώσετε τις τιμές του t για τις οποίες το αεροσκάφος βρίσκεται Ανατολικά της Αθήνας.

Δ) Για πόσες ώρες το αεροσκάφος πετάει **δυτικά** της Αθήνας;

Project Sky-Fuel: Μοντελοποιώντας την Ακρίβεια της Περιπολίας

Ρεαλιστικό Πρόβλημα: Εργάζεστε στο Κέντρο Επιχειρήσεων της Πολεμικής Αεροπορίας. Ένα αεροσκάφος εκτελεί περιπολία πάνω από τον Ελλαδικό χώρο. Η οριζόντια μετατόπισή του s (σε εκατοντάδες χιλιόμετρα) σε σχέση με την Αθήνα, δίνεται από τον τύπο:

$$s(t) = 3t^2 - 6t, \text{ με } 0 \leq t \leq 3,$$

όπου t είναι ο χρόνος σε ώρες μετά την απογείωσή του.

Όταν $s(t) > 0$, το αεροσκάφος βρίσκεται Ανατολικά της Αθήνας (προς Τουρκία).

Όταν $s(t) < 0$, το αεροσκάφος βρίσκεται Δυτικά της Αθήνας (προς Ιταλία).

Η Αποστολή σας: Ως Data Analyst, αναλαμβάνετε την παρακολούθηση της πτήσης του αεροσκάφους για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 3$.

Οφείτε να αναλύσετε τα δεδομένα της τροχιάς του, προκειμένου να ολοκληρώσετε το πλήρες επιχειρησιακό προφίλ της περιπολίας.

Α) Βρείτε την **ανίσωση** που περιγράφει τη **μετατόπιση** του αεροσκάφους **ανατολικά** της Αθήνας.

Β) Χρησιμοποιήστε το εργαλείο GeoGebra (GeoGebra, 2026) για την **γραφική επίλυση** αυτής της ανίσωσης.

Γ) Λύστε την ανίσωση **αλγεβρικά** για να επιβεβαιώσετε τις τιμές του t για τις οποίες το αεροσκάφος βρίσκεται Ανατολικά της Αθήνας.

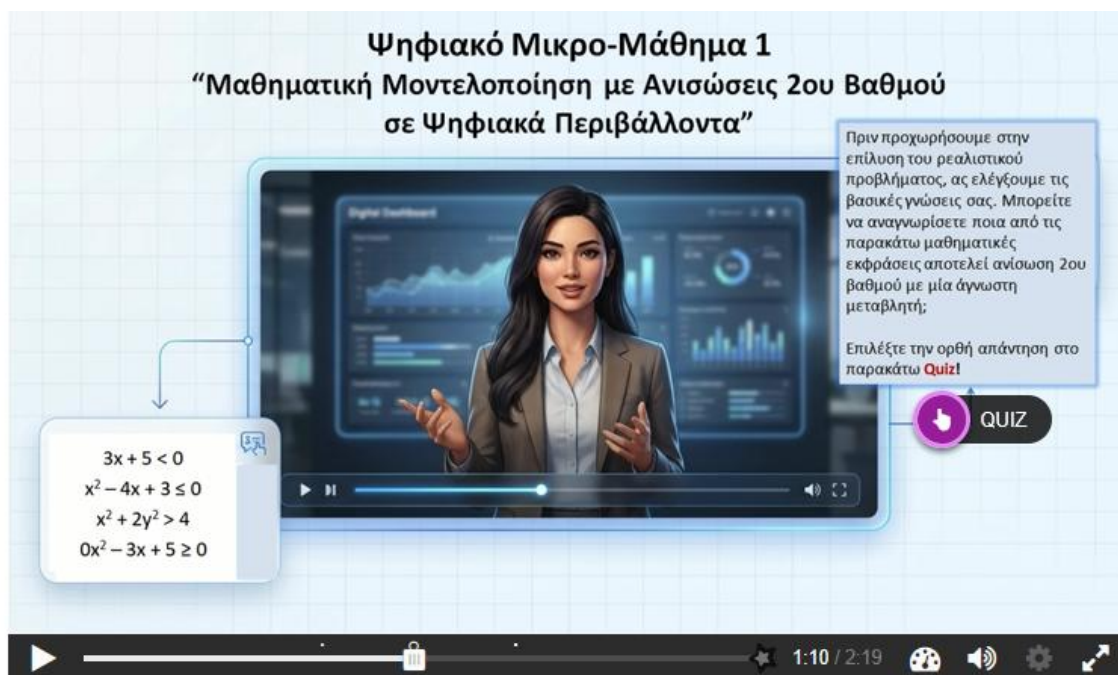
Δ) Για πόσες ώρες το αεροσκάφος πετάει **δυτικά** της Αθήνας;

Εικόνα 47 Ρεαλιστικό πρόβλημα του μικρο-μαθήματος 1 [Google Slides].

Σημείωση. Η εικόνα δημιουργήθηκε με τη χρήση τεχνητής νοημοσύνης μέσω NotebookLM (Google, 2026a) (προτροπή συγγραφέως: η εκφώνηση του ρεαλιστικού προβλήματος σελ.121).

Το **διαδραστικό βίντεο** συνεχίζει, ενισχύοντας την κατανόηση των εκπαιδευόμενων με ένα ενσωματωμένο **quiz** και με την παρακάτω **ηχητική επεξήγηση** [Google AI Studio] (Google 2026d):

«Πριν προχωρήσουμε στην επίλυση του ρεαλιστικού προβλήματος, ας ελέγξουμε τις βασικές γνώσεις σας. Μπορείτε να αναγνωρίσετε ποια από τις παρακάτω μαθηματικές εκφράσεις αποτελεί ανίσωση 2ου βαθμού με μία άγνωστη μεταβλητή; Επιλέξτε την ορθή απάντηση στο παρακάτω **quiz**» (Εικόνα 48, Πίνακας 25).



Εικόνα 48 Συνέχεια του εισαγωγικού βίντεο του μικρο-μαθήματος 1 με ενσωματωμένο Quiz [H5P Iumij]. Σημείωση. Το αρχικό βίντεο δημιουργήθηκε με τη χρήση του εργαλείου Canva (Canva, 2026). Το background σχεδίασης δημιουργήθηκε με τη χρήση τεχνητής νοημοσύνης μέσω NotebookLM (Google, 2026a) (προτροπή συγγραφέως: το κείμενο ηχητικής επεξήγησης σελ 121).

Πίνακας 25 Quiz Επιλογής Στατιστικού Εργαλείου

	Ερώτηση	Ανατροφοδότηση
1	Ποια από τις παρακάτω μαθηματικές εκφράσεις αποτελεί μια ανίσωση 2ου βαθμού με μία άγνωστη μεταβλητή; Επιλογές: A) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ B) $3x + 5 < 0$ Γ) $x^2 + 2y^2 > 4$ Δ) $0x^2 - 3x + 5 \geq 0$ Σωστή απάντηση A) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$	Feedback (on correct answer): Σωστά! Η ανίσωση (A) έχει έναν άγνωστο και ο μεγαλύτερος εκθέτης του είναι ο αριθμός 2. Feedback (on wrong answer): Προσοχή! Η ανίσωση (B) είναι 1^{ου} βαθμού, η ανίσωση (Γ) περιέχει 2 αγνώστους και στην ανίσωση (Δ) ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι μηδέν, γεγονός που την καθιστά ανίσωση 1^{ου} βαθμού.

Το διαδραστικό βίντεο ολοκληρώνεται με τη διατύπωση των προσδοκώμενων **Μαθησιακών Αποτελεσμάτων (ΜΑ)** και των **Ψηφιακών Δεξιοτήτων**, ώστε οι εκπαιδευόμενοι/ες να γνωρίζουν τι θα έχουν επιτύχει με την ολοκλήρωση του μικρο-μαθήματος.

Η συνοδευτική **ηχητική επεξήγηση [Google AI Studio]** έχει ως εξής:

«Σε αυτό το σημείο, είναι σημαντικό να ορίσουμε τους άξονες πάνω στους οποίους θα κινηθούμε. Στην οθόνη εμφανίζονται τα μαθησιακά αποτελέσματα του μικρομαθήματος καθώς και η σύνδεσή τους με το νέο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Λυκείου και την αντίστοιχη ψηφιακή ικανότητα, όπως ορίζεται στο Ευρωπαϊκό Πλαίσιο DigComp 3.0» (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2023; Cosgrove & Cachia, 2025).

«Πατώντας το κουμπί "ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ", μπορείτε να δείτε με απλό και κατανοητό τρόπο τι θα είστε σε θέση να κάνετε μετά την ολοκλήρωση του μικρο-μαθήματος:

Πρώτον: Θα μάθετε να λύνετε ανισώσεις 2ου βαθμού, είτε κάνοντας αλγεβρικές πράξεις, είτε σχεδιάζοντας τη γραφική τους απεικόνιση. Επίσης, θα μπορείτε να χρησιμοποιείτε τις ανισώσεις

αυτές για να περιγράφετε πραγματικές καταστάσεις και να βρίσκετε λύσεις σε ρεαλιστικά προβλήματα.

Δεύτερον, ψηφιακά: Θα μάθετε να χρησιμοποιείτε το GeoGebra για να μοντελοποιείτε ρεαλιστικά προβλήματα και να οπτικοποιείτε 2^{ου} βαθμού ανισώσεις, μετατρέποντας μια αφηρημένη μαθηματική σχέση σε μια καθαρή εικόνα. Καλή συνέχεια στην αποστολή σας!» (Πίνακας 26, Εικόνα 49).

Εικόνα 49 Μαθησιακά Αποτελέσματα και Ψηφιακές Ικανότητες του μικρο-μαθήματος 1.

Σημείωση. Το background σχεδίασης δημιουργήθηκε με τη χρήση τεχνητής νοημοσύνης μέσω NotebookLM (Google, 2026a) (προτροπή συγγραφώς: το κείμενο που περιέχεται στον Πίνακα 26).

Πίνακας 26 Μαθησιακά Αποτελέσματα και Ψηφιακές Ικανότητες

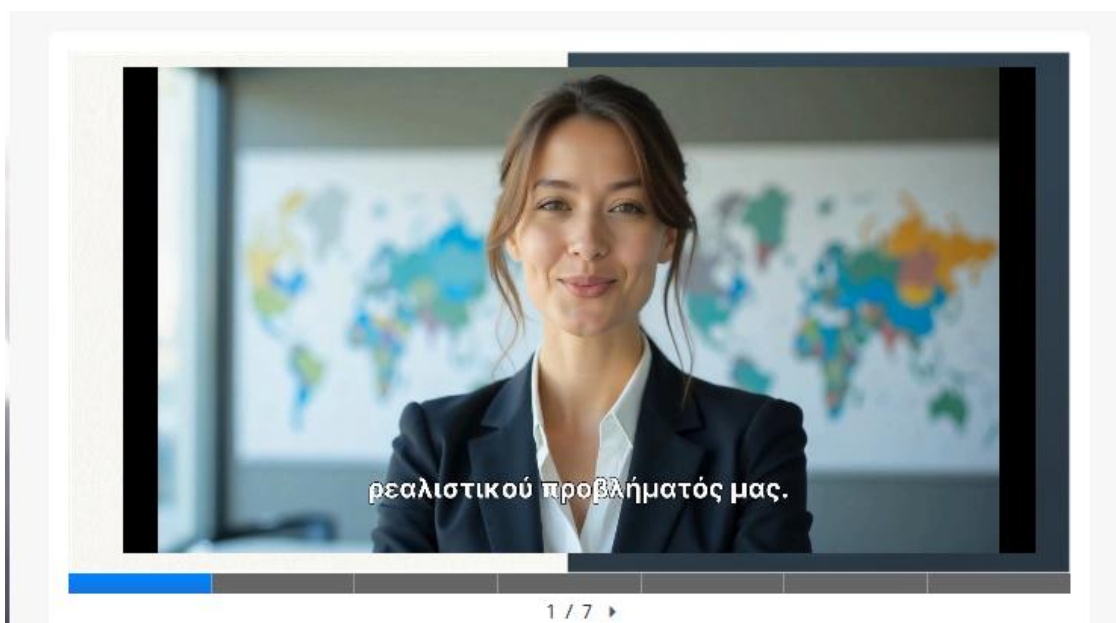
Γιατί να παρακολουθήσετε το Μικρο-Μάθημα;		
Μαθησιακά Αποτελέσματα του Μικρο-Μαθήματος Για να μπορείτε:	Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα - ΠΜΑ (ΠΣ Μαθηματικών Λυκείου, ΦΕΚ 1326/Β'/8-3-2023)	Ψηφιακή Ικανότητα (DigComp 3.0 Ευρωπαϊκό Πλαίσιο Ψηφιακών Ικανοτήτων για τους Πολίτες)
MA1.1: Να κατανοείτε την έννοια "αλγεβρική και γραφική επίλυση ανίσωσης 2ου βαθμού" και να την εφαρμόζετε. Ταξινομία Bloom: Κατανόηση – Εφαρμογή	Αλ.Σχ.10.8: Να επιλύετε ανισώσεις 2ου βαθμού αλγεβρικά και γραφικά.	Area: Information search, evaluation and management Competence: 1.3 Managing information
MA-1.2. Να αναπτύξετε τη δεξιότητα μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων με ανισώσεις 2ου βαθμού. Ταξινομία Bloom: Εφαρμογή – Ανάλυση – Αξιολόγηση	Αλ.Σχ.10.9: Να χρησιμοποιείτε ανισώσεις 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση και στην επίλυση προβλημάτων.	

Εμφάνιση/Απόκρυψη	Εμφάνιση /Απόκρυψη
ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ!	ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ!
Θα μάθετε να λύνετε ανισώσεις 2ου βαθμού, είτε κάνοντας αλγεβρικές πράξεις, είτε σχεδιάζοντας τη γραφική τους απεικόνιση. Επίσης, θα μπορείτε να χρησιμοποιείτε τις ανισώσεις αυτές για να περιγράφετε πραγματικές καταστάσεις και να βρίσκετε λύσεις σε ρεαλιστικά προβλήματα.	Θα μάθετε να χρησιμοποιείτε το GeoGebra για να μοντελοποιείτε ρεαλιστικά προβλήματα και να οπτικοποιείτε 2 ^{ου} βαθμού ανισώσεις, μετατρέποντας μια αφηρημένη μαθηματική σχέση σε μια καθαρή εικόνα.

2.2 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 1: Παρουσίαση εννοιών (Concepts)

Στην παρούσα ενότητα, μελετάται η δυναμική συμπεριφορά των ανισώσεων 2ου βαθμού, δίνοντας έμφαση στον συνδυασμό αλγεβρικής ακρίβειας και γραφικής εποπτείας. Παράλληλα, οι εκπαιδευόμενοι/ες αξιοποιούν το περιβάλλον του **GeoGebra** για να «ζωντανέψουν» τις μαθηματικές εκφράσεις, οπτικοποιώντας τις περιοχές λύσεων και μετατρέποντας τις αφηρημένες ανισώσεις σε άμεσα εργαλεία για τη λήψη κρίσιμων αποφάσεων.

Η ενότητα εισάγεται μέσω ενός **διαδραστικού εργαλείου** ([Course Presentation](#) - **[H5P Lumi]**), που ξεκινά με την εμφάνιση ενός **AI Avatar [HeyGen]**, του οποίου η ομιλία συνοδεύεται από υποτίτλους για μεγαλύτερη προσβασιμότητα (Εικόνα 50).



Εικόνα 50 Παρουσίαση εννοιών του μικρο-μαθήματος 1 [Course Presentation-H5P Lumi] με ενσωματωμένο AI Avatar.

Σημείωση. Το AI Avatar [HeyGen] δημιουργήθηκε με χρήση του εργαλείου HeyGen (HeyGen, 2026). Η ομιλία παράχθηκε βάσει προτροπής της συγγραφέως: κείμενο avatar σελ. 124.

Το κείμενο του Avatar έχει ως εξής:

«Καλώς ορίσατε στο θεωρητικό και μεθοδολογικό υπόβαθρο του Μικρο-Μαθήματος! Θα εξετάσουμε πώς η θεωρία της Άλγεβρας εφαρμόζεται στην πράξη για την επίλυση του ρεαλιστικού προβλήματός μας. Πριν προχωρήσουμε στη μοντελοποίηση, είναι απαραίτητο να κατακτήσουμε τις βασικές δεξιότητες αναγνώρισης και επίλυσης ανισώσεων 2ου βαθμού, τόσο αλγεβρικά όσο και γραφικά.

Για την κατανόηση της μεθοδολογίας, θα χρησιμοποιήσουμε ενδεικτικά παραδείγματα ανισώσεων. Σε κάθε περίπτωση, για να προσδιορίσουμε τις λύσεις μιας δευτεροβάθμιας ανίσωσης, ακολουθούμε τα παρακάτω συστηματικά βήματα:

- 1) Εκτελούμε τις απαραίτητες αλγεβρικές πράξεις (αν χρειάζεται), ώστε η ανίσωση να πάρει τη γενική μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ (ή ≥ 0 ή < 0 ή ≤ 0), με $\alpha \neq 0$.
- 2) Προσδιορίζουμε τις ρίζες του αντίστοιχου τριωνύμου, επιλύοντας την εξίσωση: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$.
- 3) Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου, λαμβάνοντας υπόψη τη **διακρίνουσα (Δ)** και τον **συντελεστή α** .
- 4) Επιλέγουμε τα διαστήματα τιμών του x στα οποία το πρόσημο του τριωνύμου είναι εκείνο που ορίζει η αντίστοιχη ανίσωση.

Η διαδικασία αυτή προσφέρει μια ολοκληρωμένη εικόνα της συμπεριφοράς της δευτεροβάθμιας ανίσωσης, αποτελώντας τη βάση για κάθε περαιτέρω μαθηματική διερεύνηση» (Γαβρίλης et al., 2026a; Ρεκούμης et al., 2026a; Λαμπρόπουλος et al., 2026; Βακαλόπουλος et al. 2026).

Στη συνέχεια, το **Course Presentation** περιλαμβάνει μια σειρά διαφανειών που αναλύουν συστηματικά την αλγεβρική και τη γραφική επίλυση των ανισώσεων 2ου βαθμού. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στη γραφική προσέγγιση μέσω του λογισμικού GeoGebra, όπου η δυναμική ψηφιακή απεικόνιση συνδέεται άρρηκτα με τη θεωρητική τεκμηρίωση. Με αυτόν τον τρόπο, η οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων δεν αποτελεί μια απλή προβολή, αλλά ένα ισχυρό εργαλείο μαθηματικής κατανόησης που προσδίδει βάθος και ακρίβεια στη διαδικασία της επίλυσης.

Για την ενίσχυση της κατανόησης των εκπαιδευομένων, παρέχεται η παρακάτω **ηχητική επεξήγηση [Google AI Studio]**, η οποία αποτυπώνεται γραπτώς στην οθόνη ως συνοδευτικό κείμενο:

«Για αμεσότερη κατανόηση θα εφαρμόσουμε τη θεωρητική μεθοδολογία που ήδη γνωρίζουμε, σε ενδεικτικά παραδείγματα ανισώσεων.

Ας ξεκινήσουμε με την ανίσωση $x^2 - 3x + 2 < 0$:

- 1) Αναγνώριση: Παρατηρούμε ότι πρόκειται για ανίσωση 2ου βαθμού με έναν άγνωστο x , καθώς ο μεγαλύτερος εκθέτης του x είναι το 2. Η ανίσωση έχει τη γενική μορφή:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0, \text{ με } \alpha \neq 0 \text{ (Εικόνα 51).}$$

Ψηφιακό Μικρο - Μάθημα 1
“Μαθηματική Μοντελοποίηση με Ανισώσεις 2ου Βαθμού σε Ψηφιακά Περιβάλλοντα”

AI Analyst

Για αμεσότερη κατανόηση θα εφαρμόσουμε τη θεωρητική μεθοδολογία που ήδη γνωρίζουμε, σε ενδεικτικά παραδείγματα ανισώσεων. Ας ξεκινήσουμε με την ανίσωση $x^2 - 3x + 2 < 0$.

1) Αναγνώριση: Παρατηρούμε ότι πρόκειται για ανίσωση 2ου βαθμού με έναν άγνωστο x , καθώς ο μεγαλύτερος εκθέτης του x είναι το 2. Η ανίσωση έχει τη γενική μορφή:
 $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0, \text{ με } \alpha \neq 0$.

Εικόνα 51 Αλγεβρική επίλυση ανίσωσης 2ου βαθμού.

Σημείωση. Το background των διαφανειών της παρουσίασης δημιουργήθηκε με τη χρήση τεχνητής νοημοσύνης μέσω NotebookLM (Google, 2026a) (προτροπή συγγραφέως: κείμενο ηχητικής επεξήγησης σελ. 125-127).

- 2) «Εύρεση Ριζών: Επιλύουμε την αντίστοιχη εξίσωση $x^2 - 3x + 2 = 0$. Χρησιμοποιώντας τη Διακρίνουσα (Δ) και τον τύπο των ριζών (εξίσωση 1), βρίσκουμε τις ρίζες $x = 1$ ή $x = 2$ » (Γαβρίλης et al., 2026a; Ρεκούμης et al., 2026a; Λαμπρόπουλος et al., 2026; Βακαλόπουλος et al. 2026)

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases} \quad (1)$$

- 3) «Μελέτη Προσήμου: Επειδή η διακρίνουσα $\Delta = 1 > 0$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες. Σύμφωνα με τη θεωρία, το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α εντός των ριζών και ομόσημο του α εκτός αυτών. Εφόσον ο συντελεστής $\alpha = 1$ είναι θετικός, το τριώνυμο παίρνει αρνητικές τιμές όταν $1 < x < 2$ και θετικές τιμές όταν $x < 1$ ή $x > 2$ (βλ. πίνακα προσήμου)» (Γαβρίλης et al., 2026a; Ρεκούμης et al., 2026a; Λαμπρόπουλος et al., 2026; Βακαλόπουλος et al. 2026) (Εικόνα 52).

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	Ομόσημο του α +	Ετερόσημο του α -	Ομόσημο του α +	

Εικόνα 52 Πίνακας προσήμου του τριωνύμου

- 4) «Προσδιορισμός λύσεων: Αναζητούμε τα διαστήματα τιμών του x όπου το πρόσημο του τριωνύμου είναι αρνητικό (όπως ορίζει η ανίσωση $x^2 - 3x + 2 < 0$). Επομένως, οι λύσεις της ανίσωσης είναι όλες οι τιμές του x στο ανοικτό διάστημα $(1, 2)$ » (Γαβρίλης et al., 2026a; Ρεκούμης et al., 2026a; Λαμπρόπουλος et al., 2026; Βακαλόπουλος et al. 2026).

«**Γραφική Επίλυση:** Για τη γραφική επίλυση της ανίσωσης, αξιοποιούμε το λογισμικό GeoGebra, κατασκευάζοντας τη γραφική παράσταση του τριωνύμου $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Διαδικασία: Εισάγουμε τον τύπο της συνάρτησης στο πεδίο εισαγωγής του GeoGebra, χρησιμοποιώντας το εικονικό πληκτρολόγιο. Πατήστε το **εικονίδιο του βίντεο** για να δείτε τη διαδικασία βήμα προς βήμα» (Εικόνα 53).

Ψηφιακό Μικρο-Μάθημα 1

“Μαθηματική Μοντελοποίηση με Ανισώσεις 2ου Βαθμού σε Ψηφιακά Περιβάλλοντα”

Γραφική Επίλυση: Για τη γραφική επίλυση της ανίσωσης, αξιοποιούμε το λογισμικό GeoGebra, κατασκευάζοντας τη γραφική παράσταση του τριωνύμου $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Διαδικασία: Εισάγουμε τον τύπο της συνάρτησης στο πεδίο εισαγωγής του GeoGebra, χρησιμοποιώντας το εικονικό πληκτρολόγιο. Πατήστε το εικονίδιο του βίντεο για να δείτε τη διαδικασία βήμα προς βήμα.

Ερμηνεία: Παρατηρούμε ότι το γράφημα του τριωνύμου, που καλείται Παραβολή, «στρέφει τα κοίλα άνω» και έχει ελάχιστο (καθώς ο συντελεστής $\alpha=1$ είναι θετικός). Το τριώνυμο παίρνει αρνητικές τιμές στα σημεία όπου η Παραβολή βρίσκεται κάτω από τον άξονα x' . Εντοπίζοντας τα σημεία τομής με τον άξονα ($x=1$ και $x=2$), επιβεβαιώνουμε οπτικά ότι η ανίσωση ικανοποιείται για κάθε x στο ανοικτό διάστημα $(1, 2)$. Επιλέξτε το διαδραστικό γράφημα και εξερευνήστε γραφικά τη λύση της ανίσωσης.

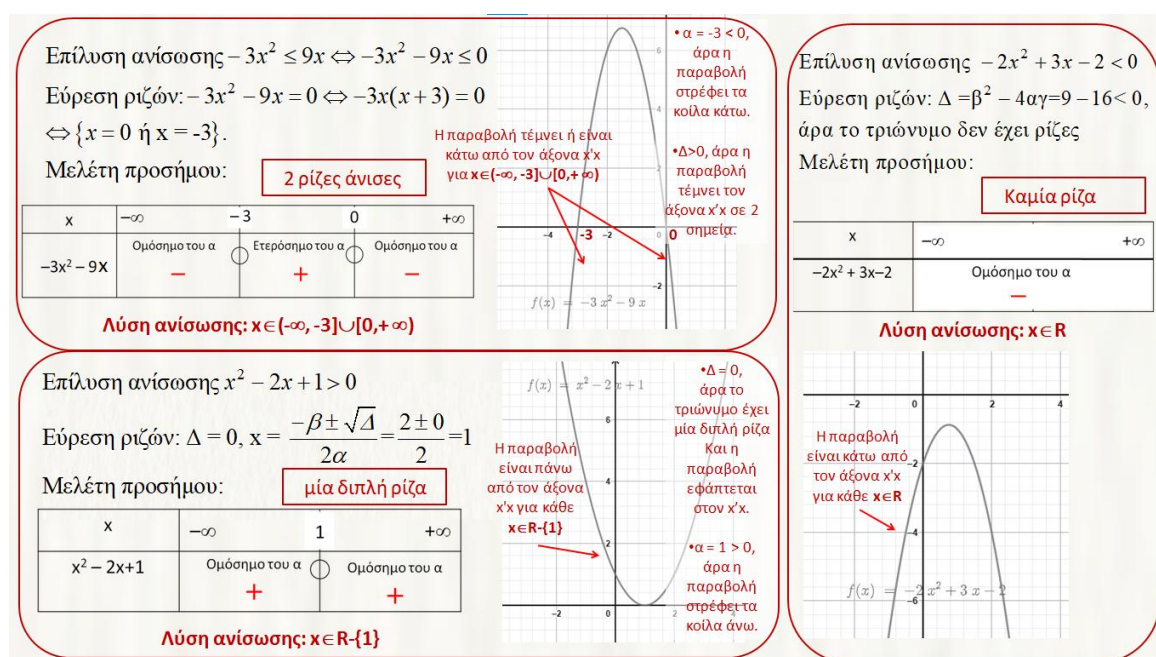
Εικόνα 53 Γραφική επίλυση ανίσωσης 2ου βαθμού με ενσωματωμένους συνδέσμους.

Σημείωση. Το βίντεο και το δυναμικό γράφημα δημιουργήθηκαν από τη συγγραφέα με τη χρήση του λογισμικού Geogebra (Geogebra, 2026). Η εγγραφή της οθόνης έγινε με χρήση του Xbox Game Bar (Microsoft Corporation, n.d.-b) και η επεξεργασία του βίντεο έγινε με το Canva (Canva, 2026).

«**Ερμηνεία:** Παρατηρούμε ότι το γράφημα του τριωνύμου, που καλείται **Παραβολή**, «στρέφει τα κοίλα άνω» και έχει ελάχιστο (καθώς ο συντελεστής $a=1$ είναι θετικός). Το τριώνυμο παίρνει αρνητικές τιμές στα σημεία όπου η Παραβολή βρίσκεται κάτω από τον άξονα x' . Εντοπίζοντας τα σημεία τομής με τον άξονα ($x=1$ και $x=2$), επιβεβαιώνουμε οπτικά ότι η ανίσωση ικανοποιείται για κάθε x στο ανοικτό διάστημα $(1, 2)$ » (Αργυράκης et al., 2025).

«Επιλέξτε το **διαδραστικό γράφημα** και εξερευνήστε γραφικά τη λύση της ανίσωσης».

«Στην τελευταία διαφάνεια, παρουσιάζονται επιπλέον παραδείγματα αλγεβρικής και γραφικής επίλυσης ανισώσεων 2ου βαθμού, εφαρμόζοντας τη συστηματική μεθοδολογία που αναλύσαμε, ώστε να εμπεδωθεί η διαδικασία μέσα από διαφορετικές περιπτώσεις. Θυμηθείτε ότι, σύμφωνα με τη θεωρία, αν το τριώνυμο έχει **1 διπλή ρίζα ρ** , τότε είναι **ομόσημο του a για $x \in \mathbb{R} - \{\rho\}$** και αν το τριώνυμο **δεν έχει ρίζες**, τότε είναι **ομόσημο του a για $x \in \mathbb{R}$** » (Εικόνα 54).



Εικόνα 54 Αλγεβρική και Γραφική επίλυση ανισώσεων 2ου βαθμού.

Σημείωση. Τα γραφήματα δημιουργήθηκαν από τη συγγραφέα με τη χρήση του λογισμικού Geogebra (Geogebra, 2026).

2.3 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 2: Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών

Η δραστηριότητα «Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών» περιλαμβάνει ένα διαδραστικό κουίζ σχεδιασμένο να παρέχει άμεση ανατροφοδότηση και εξατομικευμένη καθοδήγηση. Μέσω αυτής της διαδικασίας, οι εκπαιδευόμενοι ενισχύουν την ενεργό συμμετοχή τους, εμπεδώνοντας τη μεθοδολογία επίλυσης δευτεροβάθμιων ανισώσεων με αυξημένη ακρίβεια και συνέπεια (Πίνακας 27).

Το **Question Set [lumi (H5P)]** αποτελείται από 7 ερωτήσεις: **3 multiple choice, 2 true/false, 1 Drag and Drop, 1 Drag the Words**.

Το τεστ ενσωματώνει έναν **AI Tutor**, για κάθε απάντηση.

- Σε περίπτωση **λάθους**, ο AI Tutor δεν απογοητεύει τον χρήστη, αλλά εξηγεί τη χρησιμότητα του σωστού εργαλείου, δημιουργώντας την ανάγκη στον/στην εκπαιδευόμενη να μάθει "πώς γίνεται αυτό στην πράξη".

- Σε περίπτωση **σωστής** απάντησης, ο AI Tutor επιβραβεύει τη στρατηγική σκέψη, προκαλώντας τον χρήστη να δει την εφαρμογή της θεωρίας του στο κυρίως μέρος του μαθήματος (Demonstration).

Πίνακας 27 Ερωτήσεις του Question Set

	Ερώτηση	Ανατροφοδότηση	Καθοδήγηση
1	Ποιο είναι το πρώτο βήμα για να επιλύσουμε την ανίσωση: $x^2 + 5 < 6x$ (Εικόνα 55); Επιλογές: Α) Υπολογισμός των ριζών του τριωνύμου $x^2 + 5x$. Β) Μεταφορά όλων των όρων στο πρώτο μέλος: $x^2 - 6x + 5 < 0$. Γ) Απευθείας σχεδίαση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 5$ στο GeoGebra. Δ) Διαίρεση των όρων με το x. Σωστή απάντηση Β) Μεταφορά όλων των όρων στο πρώτο μέλος: $x^2 - 6x + 5 < 0$.  Εικόνα 55 Εικόνα σχολικής τάξης. Σημείωση. Classroom setting [Image]. COERLL, n.d., https://coerll.utexas.edu/methods/images/modules/cm/classrooms/medium-1.jpg. [CC BY-NC-SA 3.0].	Feedback (on correct answer): Εξαιρετική σκέψη! Το πρώτο βήμα για να επιλύσουμε μία ανίσωση 2^{ου} βαθμού, είναι η μεταφορά όλων των όρων στο πρώτο μέλος. Feedback (on wrong answer): Μην απογοητεύεσαι! Θυμήσου ότι για να «διαβάσουμε» το πρόσημο ενός τριωνύμου, χρειαζόμαστε το μηδέν στο δεύτερο μέλος.	Guidance (on wrong answer): Καλό είναι να ανατρέξεις στο Demonstration εδώ
2	Αν για το τριώνυμο $ax^2 + bx + c$ ισχύει $\Delta < 0$ και $a < 0$, τότε η ανίσωση $ax^2 + bx + c < 0$: Επιλογές: Α) Ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x. Β) Είναι αδύνατη Γ) Έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες. Δ) Ισχύει όταν το x παίρνει τιμές εντός των ριζών του τριωνύμου. Σωστή απάντηση Α) Ισχύει για κάθε για κάθε πραγματικό αριθμό x.	Feedback (on correct answer): Εξαιρετικά! Πράγματι, όταν $\Delta < 0$, το τριώνυμο είναι ομόσημο του a για κάθε πραγματικό αριθμό x. Feedback (on wrong answer): Λάθος! Θυμήσου ότι το πρόσημο της διακρίνουσας (ή αλλιώς το πλήθος των ριζών του τριωνύμου) και το πρόσημο του συντελεστή a είναι το "κλειδί" για την επίλυση ανισώσεων 2^{ου} βαθμού.	Guidance (on wrong answer): Καλό είναι να ανατρέξεις στο Demonstration εδώ

3	Αν το τριώνυμο $ax^2 + bx + c$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 4 και $a > 0$, για ποιες τιμές του x το τριώνυμο είναι αρνητικό; Επιλογές: A) $x < 1$ ή $x > 4$ B) $x < 1$ Γ) $1 < x < 4$ Δ) Δεν παίρνει ποτέ αρνητικές τιμές. Σωστή απάντηση Γ) $1 < x < 4$	Feedback (on correct answer): Μπράβο! Χρησιμοποίησες σωστά τον κανόνα για το «πρόσημο τριωνύμου». Feedback (on wrong answer): Λάθος! Σκέψου το σχήμα της παραβολής που "στρέφει τα κοίλα άνω" και τέμνει τον x' σε δύο σημεία. Το τριώνυμο παίρνει αρνητικές τιμές όταν $1 < x < 4$.	Guidance (on wrong answer): Καλό είναι να ανατρέξεις στο Demonstration εδώ
4	Για να επιλύσουμε γραφικά την ανίσωση $ax^2 + bx + c \geq 0$ (με $a \neq 0$), αναζητούμε τα σημεία που η παραβολή βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. Επιλογές: A) Σωστό B) Λάθος Σωστή απάντηση B. Λάθος	Feedback (on correct answer): Πολύ σωστά! Η προσοχή σου στη λεπτομέρεια είναι αξιοσημείωτη. Αυτό ακριβώς χρειαζόμαστε για να μοντελοποιήσουμε πραγματικές καταστάσεις. Feedback (on wrong answer): Λάθος! Θυμήσου ότι το μικρότερο ή ίσο του μηδενός σημαίνει τιμές "κάτω" από τον άξονα $x'x$ ή επάνω σε αυτόν.	Guidance (on wrong answer): Καλό είναι να ανατρέξεις στο Demonstration (https://app.lumi.education/run/YI3gMf)
5	Αν $\Delta > 0$, το τριώνυμο $ax^2 + bx + c$ είναι _____ του a εντός των ριζών του και _____ του a εκτός των ριζών του. Ως εκ τούτου, οι λύσεις της ανίσωσης $ax^2 + bx + c > 0$ (με $a < 0$) είναι όλες οι τιμές του x _____ των ριζών του. Επιλογές: *ομόσημο* *ετερόσημο* *εντός* *εκτός* Σωστή απάντηση Το *ετερόσημο* στο 1^ο κενό, το *ομόσημο* στο 2^ο κενό και το *εντός* στο 3^ο κενό	0% - 50% Feedback (on wrong answer): Λάθος! Δεν πειράζει, ο κανόνας αυτός θέλει λίγη εξάσκηση! Είναι το θεμέλιο της άλγεβρας. 51% - 100% Feedback (on correct answer): Ακριβώς! Η γνώση αυτού του κανόνα σε καθιστά ικανό/ή να λύνεις ανισώσεις 2^{ου} βαθμού "με μια ματιά".	Guidance (on wrong answer): Καλό είναι να ανατρέξεις στο Demonstration (https://app.lumi.education/run/YI3gMf)
6	Τοποθέτησε τα βήματα επίλυσης μιας ανίσωσης 2^{ου} βαθμού στη σωστή σειρά (Εικόνα 56): Τοποθέτησε τα βήματα επίλυσης μιας ανίσωσης 2^{ου} βαθμού στη σωστή σειρά: Βήμα 1 Βήμα 2 Βήμα 3 Βήμα 4	0% - 50% Feedback (on wrong answer): Μικρό μπέρδεμα στη σειρά! Ας ξαναδούμε τη μεθοδολογία: Μεταφορά όρων στο πρώτο μέλος - Εύρεση ριζών τριωνύμου - Κατασκευή πίνακα προσήμου - Επιλογή διαστήματος λύσης.	Guidance (on wrong answer): Καλό είναι να ανατρέξεις στο Demonstration εδώ

	Εικόνα 56 Εικόνα ερώτησης "Drag and Drop" <u>Σημείωση:</u> Η εικόνα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα με τη χρήση του MS PowerPoint (Microsoft., 2026b). Επιλογές: A) Μεταφορά όρων στο πρώτο μέλος. B) Εύρεση ριζών τριωνύμου. Γ) Κατασκευή πίνακα προσήμου. Δ) Επιλογή διαστήματος λύσης. Σωστή απάντηση Βήμα 1→ A Βήμα 2→B Βήμα 3→Γ Βήμα 4→Δ	51% - 100% Feedback (on correct answer): Τέλεια! Έχεις εμπεδώσει πλήρως τη μεθοδολογία. Είσαι πλέον έτοιμος/η να εφαρμόσεις αυτή τη σειρά ενεργειών σε οποιοδήποτε ρεαλιστικό πρόβλημα.	
7	Η ανίσωση $x^2 - 2x + 6 > 0$ έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό x. Επιλογές: A) Σωστό B) Λάθος Σωστή απάντηση B. Σωστό	Feedback (on correct answer): Πολύ σωστά! Το τριώνυμο έχει αρνητική Διακρίνουσα κι επομένως είναι ομόσημο του $a = 1 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. Feedback (on wrong answer): Λάθος! Θυμήσου ότι το τριώνυμο έχει αρνητική Διακρίνουσα κι επομένως είναι ομόσημο του $a = 1 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.	Guidance (on wrong answer): Καλό είναι να ανατρέξεις στο Demonstration (https://app.lumi.education/run/YI3gMf)

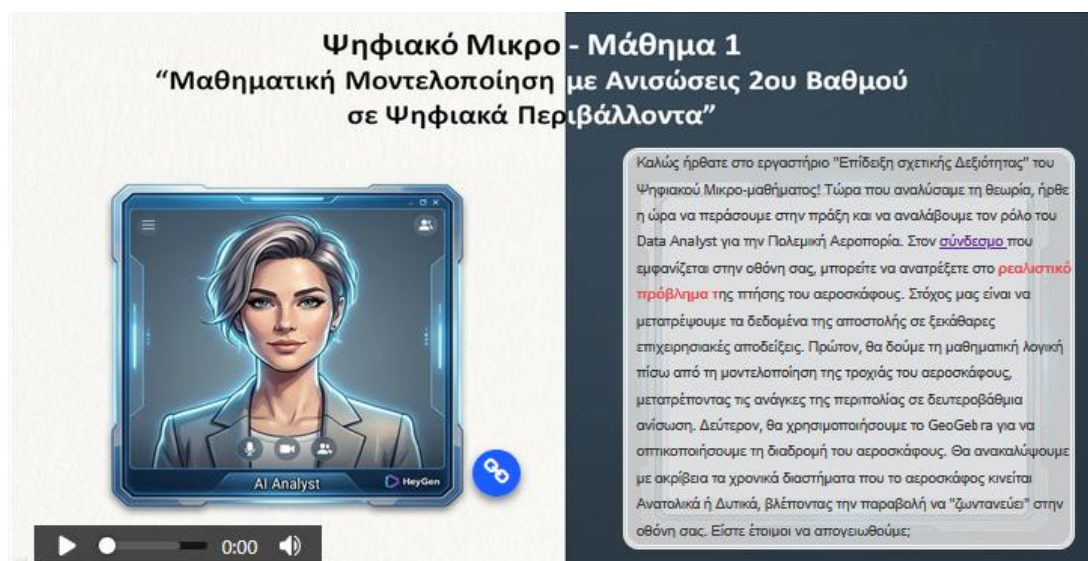
2.4 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 3: Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας (Skill)

Η ενότητα 1.4 δομείται ως μια βιωματική επίδειξη ψηφιακών και μαθηματικών δεξιοτήτων, με επίκεντρο το ρεαλιστικό πρόβλημα της πτήσης του αεροσκάφους. Μέσω του **διαδραστικού εργαλείου** ([Course Presentation](#) - [H5P]), οι εκπαιδευόμενοι/ες παρακολουθούν την παράλληλη διαδικασία της **μαθηματικής μοντελοποίησης, της αλγεβρικής επίλυσης και γραφικής-ψηφιακής επίλυσης**. Αρχικά, αναπτύσσεται η μαθηματική τεκμηρίωση της ανίσωσης που περιγράφει τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το αεροσκάφος κινείται Ανατολικά της Αθήνας. Ακολούθως, παρουσιάζεται η δυναμική ψηφιακή υλοποίηση στο GeoGebra, όπου οι εκπαιδευόμενοι/ες εξοικειώνονται με τον εντοπισμό της τροχιάς του αεροσκάφους σε πραγματικό χρόνο, οπτικοποιώντας τις αλλαγές κατεύθυνσης. Η ενότητα ολοκληρώνεται με τη γραφική ανάλυση της μετατόπισης, καθιστώντας σαφές το επιχειρησιακό προφίλ της αποστολής.

Το **Course Presentation** ενισχύει την κατανόηση του/της εκπαιδευόμενου/ης με την παρακάτω **ηχητική επεξήγηση [Google AI Studio]**, η οποία αποτυπώνεται γραπτώς στην οθόνη ως συνοδευτικό κείμενο (για μεγαλύτερη προσβασιμότητα):

«Καλώς ήρθατε στο εργαστήριο "Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας" του Ψηφιακού Μικρο-μαθήματος! Τώρα που αναλύσαμε τη θεωρία, ήρθε η ώρα να περάσουμε στην πράξη και να αναλάβουμε τον ρόλο του Data Analyst για την Πολεμική Αεροπορία.

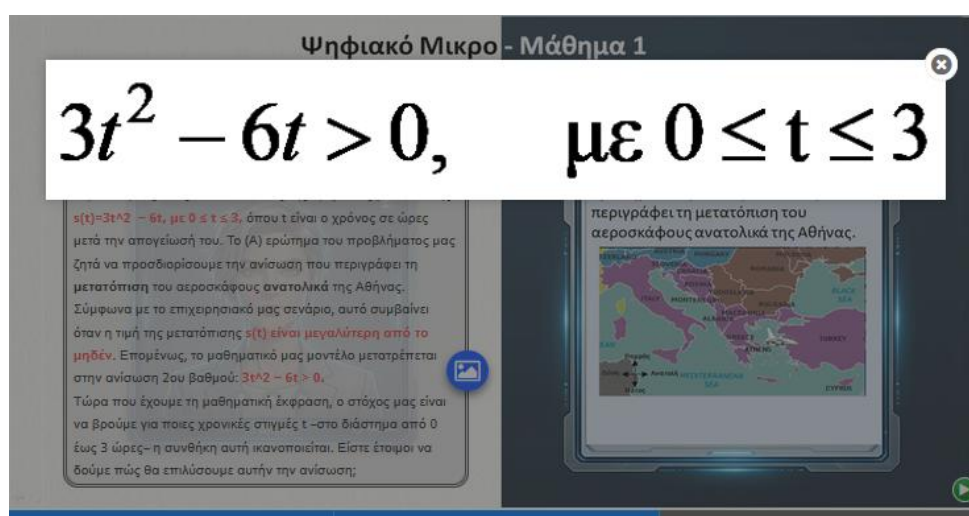
Στον [σύνδεσμο](#) που εμφανίζεται στην οθόνη σας, μπορείτε να ανατρέξετε στο ρεαλιστικό πρόβλημα της πτήσης του αεροσκάφους. Στόχος μας είναι να μετατρέψουμε τα δεδομένα της αποστολής σε ξεκάθαρες επιχειρησιακές αποδείξεις» (Εικόνα 57).



Εικόνα 57 Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας του μικρο-μαθήματος 1 [Course Presentation-H5P Lumi].
Σημείωση. Το Course Presentation του μικρο-μαθήματος 1 έχει ενσωματωμένη ηχητική αφήγηση και ψηφιακό αντικείμενα σε Geogebra. Το background των διαφανειών της παρουσίασης δημιουργήθηκε με του NotebookLM (προτροπή συγγραφέως: κείμενο ηχητικής επεξήγησης σελ. 125-127).

«Πρώτον, θα δούμε τη μαθηματική λογική πίσω από τη μοντελοποίηση της τροχιάς του αεροσκάφους, μετατρέποντας τις ανάγκες της περιπολίας σε δευτεροβάθμια ανίσωση. Δεύτερον, θα χρησιμοποιήσουμε το GeoGebra για να οπτικοποιήσουμε τη διαδρομή του αεροσκάφους. Θα ανακαλύψουμε με ακρίβεια τα χρονικά διαστήματα που το αεροσκάφος κινείται Ανατολικά ή Δυτικά, βλέποντας την παραβολή να "ζωντανεύει" στην οθόνη σας. Είστε έτοιμοι να απογειωθούμε;».

«Ας ξεκινήσουμε την αποστολή μας αναλύοντας την τροχιά του αεροσκάφους. Μας δίνεται ο τύπος της οριζόντιας μετατόπισης: $s(t)=3t^2 - 6t$, με $0 \leq t \leq 3$, όπου t είναι ο χρόνος σε ώρες μετά την απογείωσή του. Το πρόβλημά μας, ζητά να εντοπίσουμε πότε το αεροσκάφος βρίσκεται ανατολικά της Αθήνας την ανίσωση που περιγράφει τη μετατόπιση του αεροσκάφους ανατολικά της Αθήνας. Σύμφωνα με το επιχειρησιακό μας σενάριο, αυτό συμβαίνει όταν η τιμή της μετατόπισης $s(t)$ είναι μεγαλύτερη από το μηδέν. Επομένως, το μαθηματικό μας μοντέλο μετατρέπεται στην ανίσωση 2ου βαθμού: $3t^2 - 6t > 0$. Τώρα που έχουμε τη μαθηματική έκφραση, ο στόχος μας είναι να βρούμε για ποιες χρονικές στιγμές t -στο διάστημα από 0 έως 3 ώρες- η συνθήκη αυτή ικανοποιείται. Είστε έτοιμοι να δούμε πώς θα επιλύσουμε αυτήν την ανίσωση;



Εικόνα 58 Προσδιορισμός της ανίσωσης που περιγράφει τη μετατόπιση του αεροσκάφους ανατολικά της Αθήνας.

Σημείωση. Το background των διαφανειών της παρουσίασης δημιουργήθηκε με τη χρήση του NotebookLM (Google, 2026a) (προτροπή συγγραφώς: κείμενο ηχητικής επεξήγησης σελ. 125-127).

«Επομένως, το μαθηματικό μας μοντέλο μετατρέπεται στην ανίσωση 2ου βαθμού:

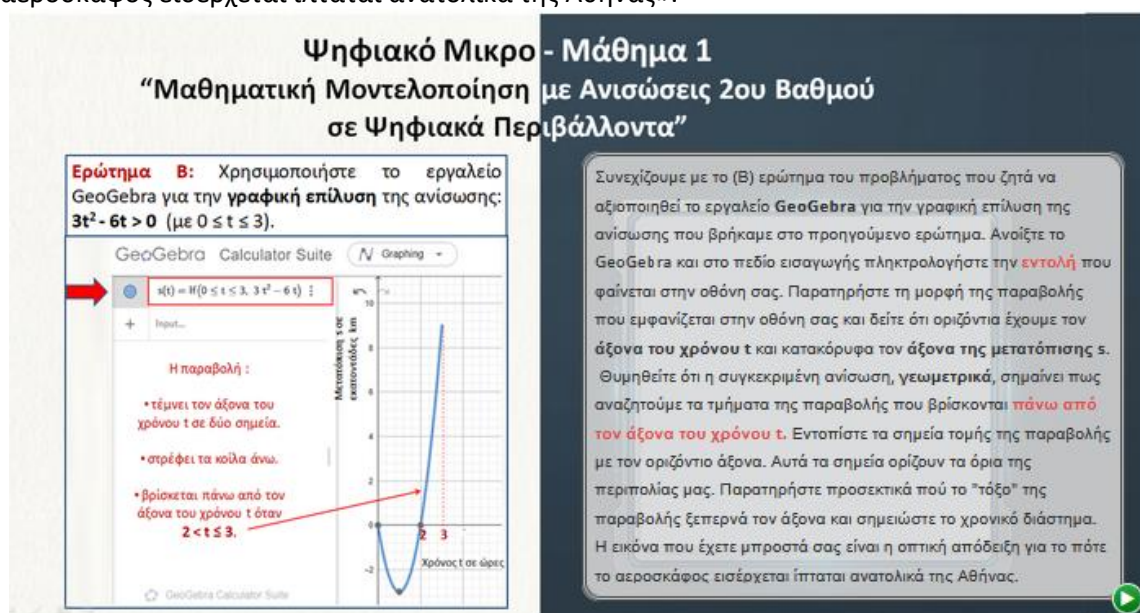
$$3t^2 - 6t > 0 \quad (2)$$

με $0 \leq t \leq 3$. Αυτή η ανίσωση αποτελεί τη βάση για την ανάλυσή μας. Τώρα που έχουμε τη μαθηματική έκφραση, ο στόχος μας είναι να βρούμε για ποιες χρονικές στιγμές t –στο διάστημα από 0 έως 3 ώρες– η συνθήκη αυτή ικανοποιείται. Είστε έτοιμοι να δούμε πως θα επιλύσουμε αυτή την ανίσωση».

«Συνεχίζουμε με το (B) ερώτημα του προβλήματος που ζητά να αξιοποιηθεί το εργαλείο GeoGebra για την γραφική επίλυση της ανίσωσης: $3t^2 - 6t > 0$ (με $0 \leq t \leq 3$)» (Geogebra, 2026).

«Ανοίξτε το GeoGebra και στο πεδίο εισαγωγής πληκτρολογήστε την εντολή που φαίνεται στην οθόνη σας» ("**If**($0 \leq t \leq 3$, $3t^2 - 6t$)", Εικόνα 59).

«Παρατηρήστε τη μορφή της παραβολής που εμφανίζεται στην οθόνη σας και δείτε ότι οριζόντια έχουμε τον άξονα του χρόνου t και κατακόρυφα τον άξονα της μετατόπισης s . Θυμηθείτε ότι η συγκεκριμένη ανίσωση, **γεωμετρικά**, σημαίνει πως αναζητούμε τα τμήματα της παραβολής που βρίσκονται πάνω από τον άξονα του χρόνου t . Εντοπίστε τα σημεία τομής της παραβολής με τον οριζόντιο άξονα. Αυτά τα σημεία ορίζουν τα όρια της περιτολίας μας. Παρατηρήστε προσεκτικά πού το "τόξο" της παραβολής ξεπερνά τον άξονα και σημειώστε το χρονικό διάστημα. Η εικόνα που έχετε μπροστά σας είναι η οπτική απόδειξη για το πότε το αεροσκάφος εισέρχεται ίπταται ανατολικά της Αθήνας».



Εικόνα 59 Γραφική επίλυση της ανίσωσης που περιγράφει τη μετατόπιση του αεροσκάφους ανατολικά της Αθήνας.

Σημείωση. Το background των διαφανειών της παρουσίασης δημιουργήθηκε με τη χρήση του NotebookLM (Google, 2026a) (προτροπή συγγραφώς: κείμενο ηχητικής επεξήγησης σελ. 125-127).

«Ηρθε η ώρα να επικυρώσουμε τα αποτελέσματά μας με την αλγεβρική μέθοδο, όπως ζητείται στο ερώτημα (Γ) του ρεαλιστικού προβλήματος.

Θέλουμε να λύσουμε την ανίσωση $3t^2 - 6t > 0$ (με $0 \leq t \leq 3$).

Πρώτα, βρίσκουμε τις ρίζες του τριωνύμου, επιλύοντας την εξίσωση $3t^2 - 6t = 0$. Συγκεκριμένα, βγάζουμε κοινό παράγοντα το $3t$:

$$3t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow 3t(t - 2) = 0 \Leftrightarrow \{t = 0 \text{ ή } t = 2\} \quad (3)$$

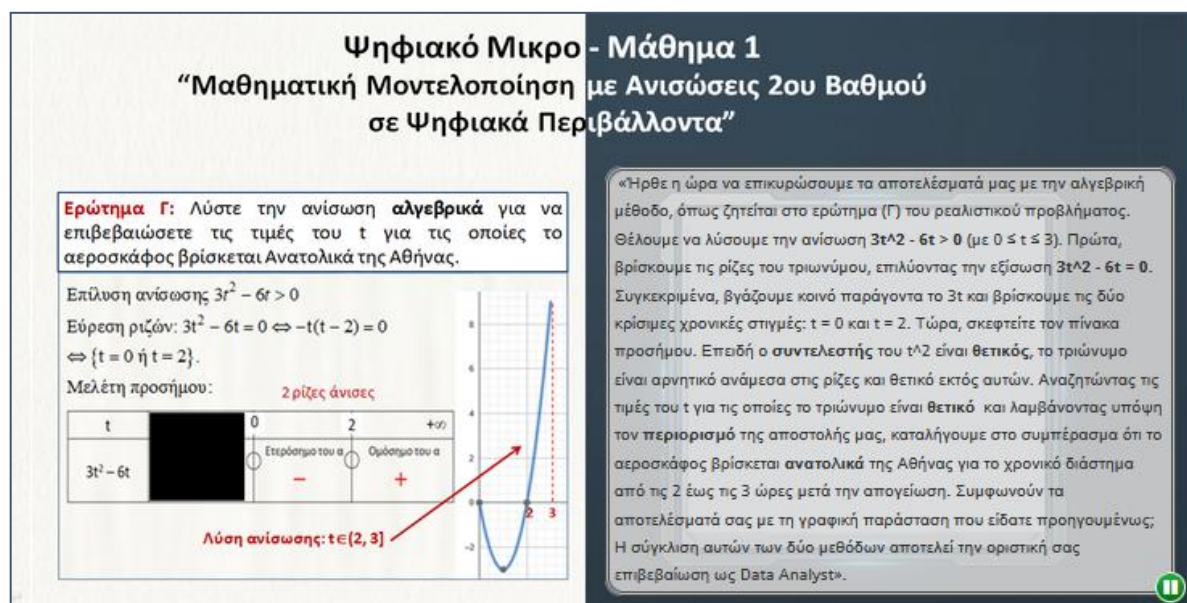
και βρίσκουμε τις δύο κρίσιμες χρονικές στιγμές: $t = 0$ και $t = 2$.

Τώρα, σκεφτείτε τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου. Επειδή ο **συντελεστής** του t^2 είναι **θετικός**, το τριώνυμο είναι αρνητικό ανάμεσα στις ρίζες και θετικό εκτός αυτών.

Αναζητώντας τις τιμές του t για τις οποίες το τριώνυμο είναι θετικό και λαμβάνοντας υπόψη τον περιορισμό της αποστολής μας, καταλήγουμε στο συμπέρασμα: ότι το αεροσκάφος βρίσκεται **Ανατολικά** της Αθήνας για το διάστημα από 2 έως και 3 ώρες μετά την απογείωση.

Συμφωνούν τα αποτελέσματά σας με τη γραφική παράσταση;

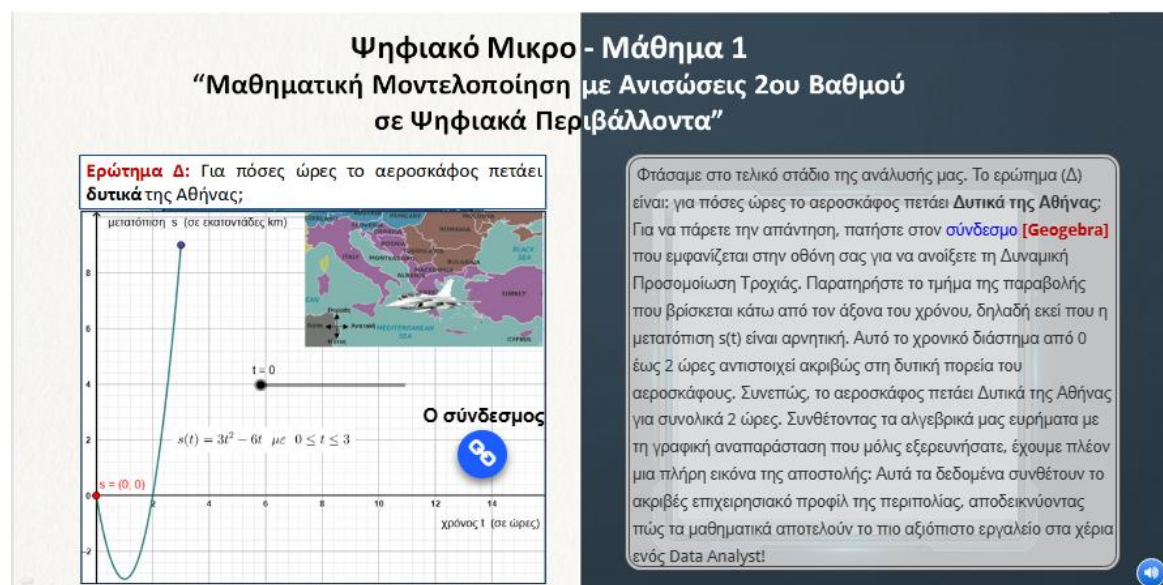
Η σύγκλιση αυτών των δύο μεθόδων αποτελεί την οριστική σας επιβεβαίωση ως Data Analyst» (Εικόνα 60).



Εικόνα 60 Αλγεβρική επίλυση της ανίσωσης που περιγράφει τη μετατόπιση του αεροσκάφους ανατολικά της Αθήνας.

Σημείωση. Περιέχεται γράφημα στο Geogebra (Geogebra, 2026), που δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα. Το background των διαφανειών της παρουσίασης δημιουργήθηκε με τη χρήση του NotebookLM (Google, 2026a) (προτροπή συγγραφώς: κείμενο ηχητικής επεξήγησης σελ. 125-127).

«Φτάσαμε στο τελικό στάδιο της ανάλυσής μας. Το ερώτημα (Δ) είναι: για πόσες ώρες το αεροσκάφος πετάει **Δυτικά της Αθήνας**;» (Εικόνα 61).



Εικόνα 61 Σύνοψη των ευρημάτων-επίλυση του ρεαλιστικού προβλήματος.

Σημείωση. Περιέχεται Δυναμική Προσομοίωση Τροχιάς στο GeoGebra (Geogebra, 2026), που δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα. Η φωτογραφία του αεροσκάφους British Aerospace BAE 146-200, N206PA [Image] προέρχεται από τη NASA, 1987, Wikimedia Commons (<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:DN-SC-87-05770.JPEG>). Public Domain. Το background της διαφάνειας δημιουργήθηκε με τη χρήση τεχνητής νοημοσύνης μέσω NotebookLM (Google, 2026a).

Για να πάρετε την απάντηση, πατήστε στον [σύνδεσμο \[Geogebra\]](#) που εμφανίζεται στην οθόνη σας για να ανοίξετε τη Δυναμική Προσομοίωση Τροχιάς» (Geogebra, 2026).

«Παρατηρήστε το τμήμα της παραβολής που βρίσκεται κάτω από τον άξονα του χρόνου, δηλαδή εκεί που η μετατόπιση $s(t)$ είναι αρνητική. Αυτό το χρονικό διάστημα από 0 έως 2 ώρες αντιστοιχεί ακριβώς στη δυτική πορεία του αεροσκάφους.

Συνεπώς, το αεροσκάφος πετάει Δυτικά της Αθήνας για συνολικά 2 ώρες.

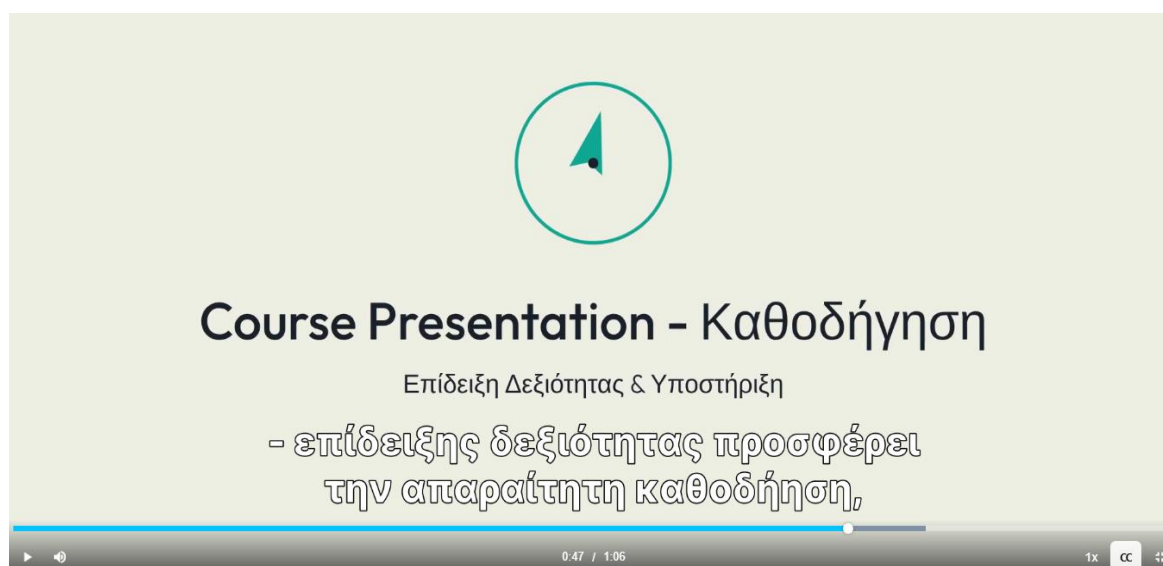
Συνθέτοντας τα αλγεβρικά μας ευρήματα με τη γραφική αναπαράσταση που μόλις εξερευνήσατε, έχουμε πλέον μια πλήρη εικόνα της αποστολής. Αυτά τα δεδομένα συνθέτουν το ακριβές επιχειρησιακό προφίλ της περιπολίας, αποδεικνύοντας πώς τα μαθηματικά αποτελούν το πιο αξιόπιστο εργαλείο στα χέρια ενός Data Analyst!»..

2.5 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 4: Εξάσκηση εφαρμογής δεξιότητας (Skill)

Οι εκπαιδευόμενοι/ες μεταβαίνουν στο “Ψηφιακό Εργαστήριο” για μια δραστηριότητα διαμορφωτικής αξιολόγησης. Ένα **AI Avatar [HeyGen]** τους/τις κατευθύνει σε ένα [Υπερκείμενο](#) (Interactive Document), το οποίο περιλαμβάνει τα εξής:

1. Πέντε (5) ρεαλιστικά προβλήματα ανισώσεων 2^{ου} βαθμού.
2. Ένα [Quiz αυτοαξιολόγησης \[Lumi H5P\]](#) ως προσωπικό βοηθό για άμεση, μη κριτική ανατροφοδότηση (Interactive Feedback) (Πίνακας 28).
3. Τον σύνδεσμο προς το [Course Presentation](#)-επίδειξη δεξιότητας για στοχευμένη καθοδήγηση (Guidance).

Το “Ψηφιακό Εργαστήριο” ξεκινά με ένα [Interactive Video \[Lumi \(H5P\)\]](#) (Εικόνα 62), όπου το AI Avatar καλωσορίζει τους/τις εκπαιδευόμενους/ες ως εξής:



Εικόνα 62 Εισαγωγή στην Εξάσκηση Εφαρμογής Δεξιότητας του μικρο-μαθήματος 1 (Interactive Video-H5P Lumi).

Σημείωση. Το AI avatar δημιουργήθηκε με τη χρήση του εργαλείου HeyGen (HeyGen, 2026). Η ομιλία παράχθηκε βάσει προτροπής της συγγραφέως: κείμενο του avatar σελ 135.

«Καλώς ήρθατε στο ψηφιακό μας εργαστήριο. Είναι σειρά σας να δοκιμάσετε τις δυνάμεις σας στην πράξη. Ως Data Analysts, η ικανότητά σας να μετατρέπετε τα δεδομένα σε αποφάσεις είναι καθοριστική – από τη βελτιστοποίηση ενεργειακών συστημάτων σε λούνα παρκ και βιοκλιματικά στέγαστρα, μέχρι τον επιχειρησιακό έλεγχο αυτόνομων οχημάτων και drones. Θα σας ανατεθούν πέντε ρεαλιστικά προβλήματα ανισώσεων 2ου βαθμού, όπου θα κληθείτε να συνθέσετε αλγεβρικές και γραφικές μεθόδους για τη μοντελοποίηση και την επίλυσή τους.

Μην ανησυχείτε για το αν θα φτάσετε αμέσως στο τέλειο αποτέλεσμα· αυτό το στάδιο είναι ο δικός σας **δημιουργικός χώρος πειραματισμού**. Για κάθε σας βήμα, το Course Presentation - επίδειξης δεξιοτήτας προσφέρει την απαραίτητη **καθοδήγηση**, ενώ ένα **Quiz αυτοαξιολόγησης** θα γίνει ο προσωπικός σας σύμβουλος για να αναγνωρίσετε την πρόοδό σας. Για να ξεκινήσετε πατήστε το κουμπί “Ψηφιακό Εργαστήριο” που εμφανίζεται στην οθόνη σας. Εκεί θα βρείτε την αναλυτική εκφώνηση της δραστηριότητας. Καλή επιτυχία στην αποστολή σας!».

Το “Ψηφιακό Εργαστήριο” συνεχίζει με την ανάθεση του παρακάτω 5 ρεαλιστικών προβλημάτων στους/στις εκπαιδευόμενους/ες (υπό μορφή υπερκειμένου):

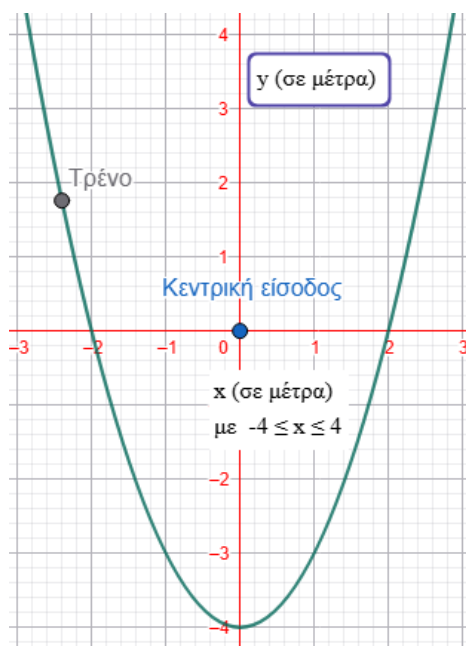
Πρόβλημα 1: Το τρένο ενός μεγάλου λούνα παρκ διασχίζει τόσο υπέργειες περιοχές όσο και υπόγεια τούνελ. Η κίνησή του κατά μήκος της ράγας (άξονας x) περιγράφεται από τη μαθηματική σχέση:

$y = x^2 + 2x - 8$, με $-5 \leq x \leq 5$, όπου x (σε μέτρα) η οριζόντια θέση του τρένου σε σχέση με την κεντρική είσοδο και y (σε μέτρα) η κατακόρυφη θέση του τρένου σε σχέση με το έδαφος.

Για να εξοικονομήσει ενέργεια η εταιρεία, ο φωτισμός πρέπει να ανάβει **μόνο** όταν το τρένο βρίσκεται **κάτω από το επίπεδο του εδάφους**. Για ποιες τιμές του x πρέπει να παραμένει αναμμένος ο φωτισμός;

Πρόβλημα 2: Σε ένα πάρκο περιπέτειας, το θεματικό τρένο διασχίζει τόσο υπέργειες περιοχές όσο και υπόγεια τούνελ (Εικόνα 63).

Παρατηρήστε την **Παραβολή** που απεικονίζει την κίνηση του τρένου, όπου x η οριζόντια θέση του σε σχέση με την κεντρική είσοδο (με $-4 \leq x \leq 4$) και y η κατακόρυφη θέση του σε σχέση με το έδαφος. Αν ο φωτισμός ανάβει **μόνο** όταν το τρενάκι βρίσκεται **κάτω από το επίπεδο του εδάφους**, για ποιες τιμές του x πρέπει να παραμένει αναμμένος ο φωτισμός;



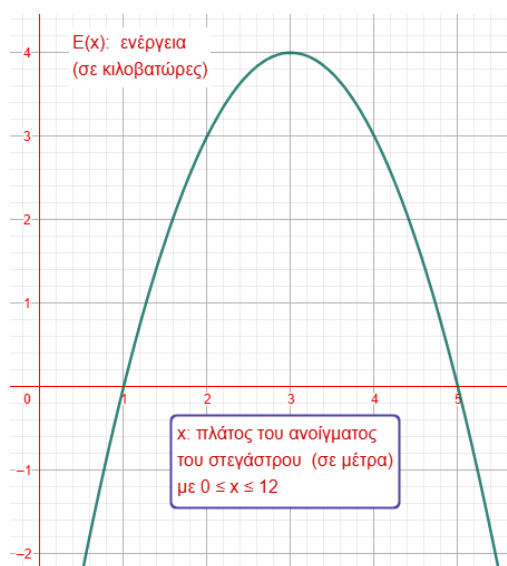
Εικόνα 63 Η Παραβολή που απεικονίζει την κίνησή του θεματικού τρένου.

Σημείωση. Το γράφημα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα στο GeoGebra (Geogebra, 2026).

Πρόβλημα 3: Ένα αυτόνομο drone του Λιμενικού Σώματος απογειώνεται τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα πλοίο ανοιχτά της Κρήτης και κινείται ανατολικά προς το Καστελλόριζο (σε επιτρεπόμενη περιοχή). Κατά τη διάρκεια της πτήσης του, περνάει πάνω από τη Ρόδο. Η οριζόντια μετατόπιση του drone από τη Ρόδο (σε εκατοντάδες χιλιόμετρα), t ώρες μετά την απογείωσή του, δίνεται από τον τύπο: $s(t) = -t^2 + 4t - 3$, με $0 \leq t \leq 4$. Το κέντρο ελέγχου θέλει να

ενεργοποιήσει μια ειδική λειτουργία χαρτογράφησης, η οποία επιτρέπεται μόνο όταν το drone πετάει **δυτικά** της Ρόδου. Για ποιες τιμές του t θα είναι ενεργή αυτή η λειτουργία;

Πρόβλημα 4: Ένας δήμος αποφασίζει να τοποθετήσει σε μια πλατεία ένα σύγχρονο βιοκλιματικό στέγαστρο με κινητά φωτοβολταϊκά πάνελ. Οι μηχανικοί διαπίστωσαν ότι η καθαρή ενέργεια $E(x)$ που αποθηκεύεται στις μπαταρίες του συστήματος εξαρτάται από το πλάτος x του ανοίγματος του στεγάστρου, με $0 \leq x \leq 12$. Με βάση το γράφημα του τριωνύμου (Εικόνα 64), για ποιες τιμές του πλάτους x το σύστημα αποθηκεύει καθαρή ενέργεια, $E(x) > 0$;



Εικόνα 64 Το γράφημα τριωνύμου που απεικονίζει την καθαρή ενέργεια που αποθηκεύεται στο βιοκλιματικό στέγαστρο. Σημείωση. Το γράφημα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα στο GeoGebra (Geogebra, 2026).

Πρόβλημα 5: Σε ένα κέντρο προσομοίωσης, ένα αυτόνομο όχημα εξερεύνησης κινείται σε ειδική πίστα. Η απόδοσή του περιγράφεται από τον τύπο: $P(x) = -x^2 + 10x - 16$, όπου x είναι η οριζόντια απόσταση σε χιλιόμετρα από το σημείο εκκίνησης. Για ποιες τιμές της απόστασης το όχημα λειτουργεί αποδοτικά, δηλαδή $P(x) > 0$;

📍 Τι θα κάνετε;

1. **Ανακαλύψτε τις απαντήσεις:** Προσπαθήστε να συνθέσετε αλγεβρικές και γραφικές μεθόδους για τη μοντελοποίηση και την επίλυση των παραπάνω ρεαλιστικών προβλημάτων.
2. **Αξιολογήστε μόνοι σας την προσπάθειά σας:** Χρησιμοποιήστε το [Quiz αυτοαξιολόγησης \[Lumi H5P\]](#) ώστε να φύγετε από εδώ νιώθοντας σιγουριά με τη νέα δεξιότητά!

👤 Γρήγορο Guidance

Θέλετε μια γρήγορη υπενθύμιση; Το [Course Presentation](#)-επίδειξη δεξιοτήτας είναι πάντα ανοιχτό για να σας δείξει ξανά τον τρόπο.

Πίνακας 28 Quiz Αυτοαξιολόγησης [Lumi H5P]

Ερωτήματα	Ανατροφοδότηση / Καθοδήγηση
Ερώτημα 1: Το τρένο ενός μεγάλου λούνα παρκ διασχίζει τόσο υπέργειες περιοχές όσο και υπόγεια τούνελ. Η κίνησή του κατά μήκος της ράγας (άξονας x) περιγράφεται από τη μαθηματική σχέση: $y = x^2 + 2x - 8$, με $-5 \leq x \leq 5$, όπου x (σε μέτρα) η οριζόντια θέση του τρένου σε σχέση με την κεντρική είσοδο και y (σε μέτρα) η κατακόρυφη θέση του τρένου σε σχέση με το έδαφος. Για να εξοικονομήσει ενέργεια η εταιρεία, ο φωτισμός πρέπει	Ανατροφοδότηση / Καθοδήγηση Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Πολύ σωστά! Ο φωτισμός παραμένει αναμμένος όταν το τρένο κινείται υπόγεια (δηλ. $y < 0$). Οι ρίζες του τριωνύμου είναι το -4 και το 2 και το τριώνυμο είναι αρνητικό (δηλ. ετερόσημο του a) εντός των ριζών του. Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Προσπάθησε ξανά! Σκέψου ότι ο φωτισμός παραμένει αναμμένος όταν το τρένο κινείται υπόγεια (δηλ. $y < 0$). Οι ρίζες του τριωνύμου είναι το -4 και το 2 και το τριώνυμο είναι αρνητικό

να ανάβει **μόνο** όταν το τρένο βρίσκεται **κάτω από το επίπεδο του εδάφους**. Για ποιες τιμές του x πρέπει να παραμένει αναμμένος ο φωτισμός;

Επιλογές

- A) $x > 2$ ή $x < -4$
- B) $-4 < x < 2$
- Γ) $-2 < x < 4$
- Δ) $x < -2$

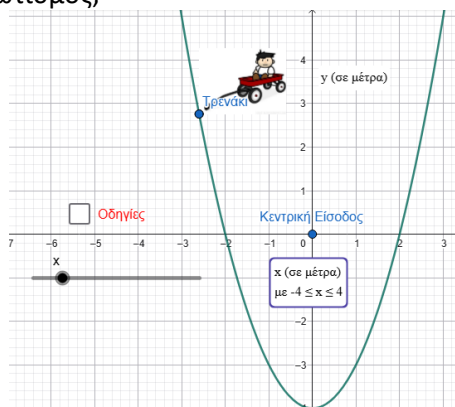
Σωστή απάντηση:

- B) $-4 < x < 2$

(δηλ. ετερόσημο του a) εντός των ριζών του.

Καθοδήγηση. Η συμβουλή μας: ξανακοίταξε το Course Presentation-επίδειξη δεξιότητας ([εδώ](#)) 4^η διαφάνεια.

Ερώτημα 2: Σε ένα πάρκο περιπέτειας, το θεματικό τρένο διασχίζει τόσο υπέργειες περιοχές όσο και υπόγεια τούνελ. Παρατηρήστε την **Παραβολή** που απεικονίζει την κίνηση του τρένου (Εικόνα 65), όπου x η οριζόντια θέση του σε σχέση με την κεντρική είσοδο (με $-4 \leq x \leq 4$) και y η κατακόρυφη θέση του σε σχέση με το έδαφος. Αν ο φωτισμός ανάβει **μόνο** όταν το τρενάκι βρίσκεται **κάτω από το επίπεδο του εδάφους**, για ποιες τιμές του x πρέπει να παραμένει αναμμένος ο φωτισμός;



Εικόνα 65 Η Παραβολή που απεικονίζει την κίνησή του θεματικού τρένου.

Σημείωση. Το γράφημα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα στο GeoGebra (Geogebra, 2026). Περιέχεται [Δυναμική Προσομοίωση Τροχιάς](#) στο GeoGebra (Geogebra, 2026), που δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα. Wagon [Cartoon illustration], από David Simmer II, 2007, Blogography (https://blogography.com/archives/category/davetoons/davetoons_2007). Copyright 2007 από Blogography.com.

Επιλογές

- A) $-2 < x < 2$
- B) $x < -2$ ή $x > 2$
- Γ) $-4 < x < 0$

Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης.

Πολύ σωστά! Ο φωτισμός παραμένει αναμμένος όταν το τρένο κινείται υπόγεια (δηλ. $y < 0$). Παρατηρώντας το γράφημα, η Παραβολή φαίνεται να είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ για $-2 < x < 2$.

Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης.

Προσπάθησε ξανά! Σκέψου ότι ο φωτισμός παραμένει αναμμένος όταν το τρένο κινείται υπόγεια (δηλ. $y < 0$). Παρατηρώντας το γράφημα, η Παραβολή φαίνεται να είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ για $-2 < x < 2$.

Καθοδήγηση. Η συμβουλή μας: ξανακοίταξε το Course Presentation-επίδειξη δεξιότητας ([εδώ](#)), 4^η διαφάνεια.

Δ) $0 < x < 4$ Σωστή απάντηση: Α) $-2 < x < 2$	
Ερώτημα 3: Ένα αυτόνομο drone του Λιμενικού Σώματος απογειώνεται τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα πλοίο ανοιχτά της Κρήτης και κινείται ανατολικά προς το Καστελλόριζο (σε επιτρεπόμενη περιοχή). Κατά τη διάρκεια της πτήσης του, περνάει πάνω από τη Ρόδο. Η οριζόντια μετατόπιση του drone από τη Ρόδο (σε εκατοντάδες χιλιόμετρα), t ώρες μετά την απογείωσή του, δίνεται από τον τύπο: $s(t) = -t^2 + 4t - 3$, με $0 \leq t \leq 4$. Το κέντρο ελέγχου θέλει να ενεργοποιήσει μια ειδική λειτουργία χαρτογράφησης, η οποία επιτρέπεται μόνο όταν το drone πετάει δυτικά της Ρόδου. Για ποιες τιμές του t θα είναι ενεργή αυτή η λειτουργία; Επιλογές Α) $1 < t < 3$ Β) $t < 1$ Γ) $0 < t < 1$ ή $3 < t < 4$ Δ) $t > 3$ Σωστή απάντηση: Γ) $0 < t < 1$ ή $3 < t < 4$	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Πολύ σωστά! Το drone πετάει δυτικά της Ρόδου όταν $s(t) < 0$. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι το 1 και το 3 και το τριώνυμο είναι αρνητικό (δηλ. ομόσημο του a) εκτός των ριζών του. Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Προσπάθησε ξανά! Σκέψου ότι το drone πετάει δυτικά της Ρόδου όταν $s(t) < 0$. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι το 1 και το 3 και το τριώνυμο είναι αρνητικό (δηλ. ομόσημο του a) εκτός των ριζών του (τηρώντας και τον περιορισμό με $0 \leq t \leq 4$). Καθοδήγηση. Η συμβουλή μας: ξανακοίταξε το Course Presentation-επίδειξη δεξιότητας (εδώ), 4^η διαφάνεια.
Ερώτημα 4: Ένας δήμος αποφασίζει να τοποθετήσει σε μια πλατεία ένα σύγχρονο βιοκλιματικό στέγαστρο με κινητά φωτοβολταϊκά πάνελ. Οι μηχανικοί διαπίστωσαν ότι η καθαρή ενέργεια $E(x)$ που αποθηκεύεται στις μπαταρίες του συστήματος εξαρτάται από το πλάτος x του ανοίγματος του στεγάστρου, με $0 \leq x \leq 12$. Με βάση το γράφημα του τριωνύμου, για ποιες τιμές του πλάτους x το σύστημα αποθηκεύει καθαρή ενέργεια, $E(x) > 0$; (Βλ. Εικόνα 64) Επιλογές Α) $x < 1$ ή $x > 5$ Β) $1 < x < 5$ Γ) $x > 5$ Δ) $1 < x < 12$ Σωστή απάντηση: Β) $1 < x < 5$	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Πολύ σωστά! Η καθαρή ενέργεια $E(x)$ αποθηκεύεται στις μπαταρίες του συστήματος όταν $E(x) > 0$. Παρατηρώντας το γράφημα, η Παραβολή φαίνεται να είναι πάνω από τον άξονα x' για $1 < x < 5$. Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Προσπάθησε ξανά! Σκέψου ότι η καθαρή ενέργεια $E(x)$ αποθηκεύεται στις μπαταρίες του συστήματος όταν $E(x) > 0$. Παρατηρώντας το γράφημα, η Παραβολή φαίνεται να είναι πάνω από τον άξονα x' για $1 < x < 5$. Καθοδήγηση. Η συμβουλή μας: ξανακοίταξε το Course Presentation-επίδειξη δεξιότητας (εδώ), 3^η διαφάνεια.
Ερώτημα 5: Σε ένα κέντρο προσομοίωσης, ένα αυτόνομο όχημα εξερεύνησης κινείται σε ειδική πίστα. Η απόδοσή του περιγράφεται από τον τύπο: $P(x) = -x^2 + 10x$	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Πολύ σωστά! Το όχημα λειτουργεί αποδοτικά, όταν $P(x) > 0$. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι το 2 και το 8 και το τριώνυμο είναι θετικό (δηλ.

– 16, όπου x είναι η οριζόντια απόσταση σε χιλιόμετρα από το σημείο εκκίνησης. Για ποιες τιμές της απόστασης το όχημα λειτουργεί αποδοτικά, δηλαδή $P(x) > 0$; Επιλογές A) $x < 2$ ή $x > 8$ B) $2 < x < 8$ Γ) $x < 8$ Δ) $x > 2$ Σωστή απάντηση: B) $2 < x < 8$	ετερόσημο του α) εντός των ριζών του. Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Προσπάθησε ξανά! Σκέψου ότι το όχημα λειτουργεί αποδοτικά, όταν $P(x) > 0$. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι το 2 και το 8 και το τριώνυμο είναι θετικό (δηλ. ετερόσημο του α) εντός των ριζών του. Καθοδήγηση. Η συμβουλή μας: ξανακοίταξε το Course Presentation-επίδειξη δεξιότητας (εδώ), 4^η διαφάνεια.
---	--

2.6 Ανακεφαλαίωση – Αναστοχασμός – Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση

Η ενότητα της **Ανακεφαλαίωσης και Αυτο-Αξιολόγησης** του Μικρο-μαθήματος 1 έχει σχεδιαστεί για να ενισχύσει τη μεταγνωστική ικανότητα των εκπαιδευόμενων, ολοκληρώνοντας το μαθησιακό ταξίδι, μέσω ενός [interactive book \[H5P Lumi\]](#), σε τρία διακριτά στάδια. Αρχικά, πραγματοποιείται η **ανακεφαλαίωση** των κεντρικών εννοιών μέσω οπτικοποιημένου υλικού και ψηφιακής επισκόπησης, ώστε να παγιωθεί το θεωρητικό υπόβαθρο. Ακολουθεί η φάση του **αναστοχασμού**, όπου οι εκπαιδευόμενοι/ες συμμετέχουν σε στοχευμένη δραστηριότητα κριτικής σκέψης, αξιολογώντας την προσωπική τους μαθησιακή πορεία και την εφαρμογή των ανισώσεων 2^{ου} βαθμού σε ρεαλιστικά προβλήματα (Sergis & Sampson, 2016). Τέλος, η ενότητα ολοκληρώνεται με τη **διαδραστική αυτο-αξιολόγηση**, η οποία περιλαμβάνει πρακτική εξάσκηση μέσω προσομοιωμένου quiz, παρέχοντας άμεση ανατροφοδότηση για την ετοιμότητα των εκπαιδευόμενων πριν από την τελική εξέταση.

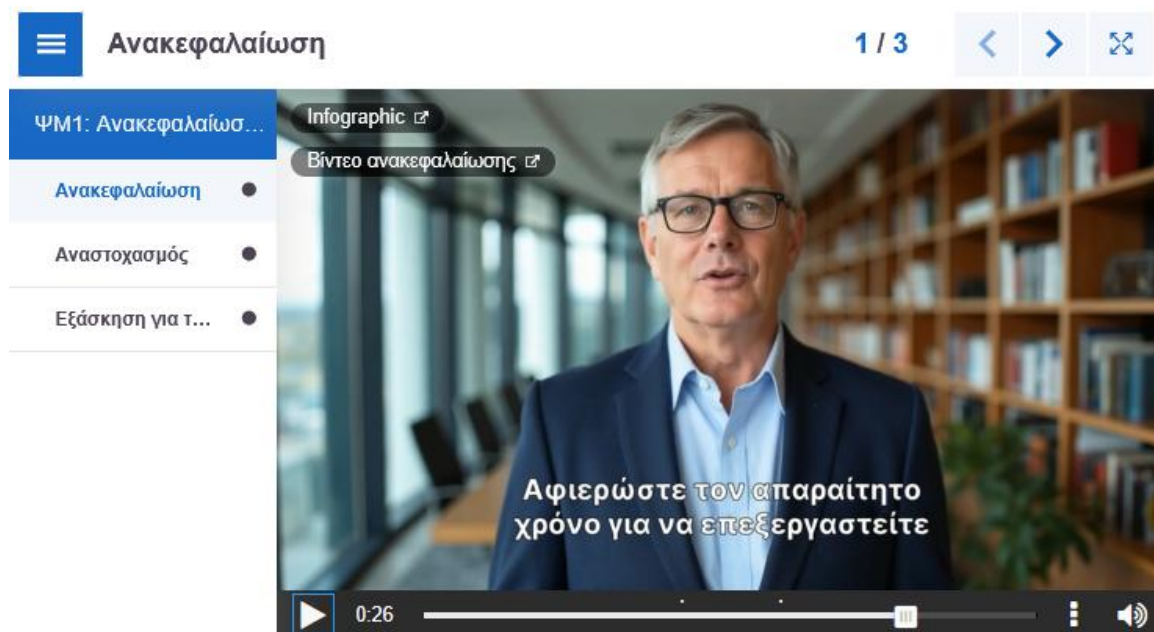
2.6.1 Ανακεφαλαίωση

Στην πρώτη ενότητα του interactive book παρουσιάζεται η **ανακεφαλαίωση** του μικρο-μαθήματος 1, που λειτουργεί ως μηχανισμός γνωστικής παγίωσης, στοχεύοντας στη σύνοψη των κρίσιμων μαθηματικών εννοιών. Οι εκπαιδευόμενοι/ες μελετούν ένα **οπτικοποιημένο infographic** (Key Takeaways) [\[Notebooklm\]](#) (Google, 2026a) που αποτυπώνει τη λογική αλληλουχία της ανάλυσης δεδομένων, ενώ παράλληλα παρακολουθούν μια στοχευμένη **επισκόπηση μέσω βίντεο [Canva]** με background διαφανειών **Notebooklm** και ηχογράφημα **Google AI Studio**. Η συνδυαστική χρήση οπτικών και ακουστικών μέσων διευκολύνει την κωδικοποίηση της πληροφορίας, επιτρέποντας στους/στις εκπαιδευόμενους/ες να δομήσουν μια σαφή εικόνα των εννοιών πριν μεταβούν στη διαδικασία του αναστοχασμού και της πρακτικής εφαρμογής.

Η υποενότητα της “ανακεφαλαίωσης” υλοποιείται μέσω ενός Interactive Video [\[H5P Lumi\]](#) το οποίο λειτουργεί ως μηχανισμός γνωστικής παγίωσης. Στην αρχή του βίντεο, ένα **AI Avatar [HeyGen]** (HeyGen, 2026) απευθύνεται στους/στις εκπαιδευόμενους/ες, ενισχύοντας το αίσθημα της κοινωνικής παρουσίας, ενώ η ομιλία του συνοδεύεται από υποτίτλους για τη διασφάλιση της προσβασιμότητας. Το κείμενο του Avatar έχει ως εξής:

«Φτάσατε στο κλείσιμο του Μικρο-μαθήματος 1. Πριν μεταβείτε στην αυτο-αξιολόγηση, είναι σημαντικό να εμπεδώσετε τα συμπεράσματα της αποστολής σας. Στην οθόνη σας, το διαδραστικό [infographic](#) προσφέρει μια οπτική ανασκόπηση του "ταξιδιού" της μαθηματικής μοντελοποίησης, ενώ το [βίντεο](#) ανακεφαλαίωσης που ακολουθεί παρέχει μια αναλυτική

επισκόπηση των βασικών σημείων της ανάλυσής μας. Αφιερώστε τον απαραίτητο χρόνο για να επεξεργαστείτε αυτό το υλικό, καθώς η γνώση που θα αποκομίσετε αποτελεί τη βάση για τις ερωτήσεις που ακολουθούν» (Εικόνα 66).



Εικόνα 66 Ανακεφαλαίωση του μικρο-μαθήματος 1 μέσω Βίντεο επισκόπησης και infographic [Interactive book-H5P Lumi, 1η ενότητα]

Σημείωση. Περιέχεται Interactive Video [H5P Lumi] με AI Avatar [HeyGen] και ενσωματωμένο infographic που δημιουργήθηκε με τη βοήθεια τεχνητής νοημοσύνης (NotebookLM). Επίσης, ενσωματώνεται βίντεο επισκόπησης [Canva με background διαφανειών NotebookLM και ηχογράφημα Google AI Studio]. Όλα τα παραπάνω βασίστηκαν αποκλειστικά στο υλικό και τις στοχευμένες οδηγίες της συγγραφέως (προτροπή συγγραφέως: το κείμενο του avatar σελ. 139 και η ηχητική αφήγηση του βίντεο σελ. 140-141).

Η **ηχητική αφήγηση** του βίντεο-επισκόπησης παρατίθεται ακολούθως:

«Σε αυτό το στάδιο της ανάλυσης, η μετάβαση από τα δεδομένα στην απόφαση έχει ήδη ολοκληρωθεί. Η εμπειρία σας ως Data Analyst ξεκίνησε με την κατανόηση μιας θεμελιώδους αλήθειας: ότι οι ανισώσεις δεύτερου βαθμού δεν είναι απλώς μαθηματικά σύμβολα, αλλά η γλώσσα με την οποία μετατρέπονται οι πληροφορίες σε στρατηγική ισχύ.

Κατά τη διάρκεια της μελέτης, εστιάσατε στο πώς ένα αφηρημένο μαθηματικό μοντέλο μπορεί να γίνει το κλειδί για την επιτυχία μιας εναέριας περιπλάνησης. Αναλύσατε δεδομένα τροχιάς, επεξεργαστήκατε παραμέτρους και είδατε στην πράξη πώς η μαθηματική μοντελοποίηση προσφέρει την απαιτούμενη ακρίβεια σε περιβάλλοντα υψηλής κρισιμότητας.

Ο στόχος που τέθηκε —η διασφάλιση της επιτυχίας μέσω ψηφιακών εργαλείων— επιτεύχθηκε μέσα από την εφαρμογή της γνώσης που κατακτήσατε. Ήταν μια πορεία από το “τι σημαίνουν αυτοί οι αριθμοί” στο “πώς αυτοί οι αριθμοί καθορίζουν την αποστολή”.

Η αποστολή επικεντρώθηκε στην αποκωδικοποίηση της τροχιάς πάνω από τον ελλαδικό χώρο. Θυμηθείτε το μοντέλο που εξετάσατε. Η συνάρτηση: $s(t) = 3t^2 - 6t$ αποτέλεσε τη βάση της τηλεμετρίας σας. Σε αυτό το σημείο, ορίσατε το πεδίο δράσης από τη στιγμή της απογείωσης έως και τρεις ώρες μετά, χρησιμοποιώντας την Αθήνα ως το απόλυτο σημείο αναφοράς.

Εφαρμόσατε τους επιχειρησιακούς κανόνες με απόλυτη συνέπεια:

Αναγνωρίσατε ότι η **θετική τιμή** της μετατόπισης σημαίνει κίνηση προς τα ανατολικά, ενώ η **αρνητική τιμή** σηματοδοτούσε την πορεία προς τα δυτικά.

Το κρίσιμο ερώτημα που κληθήκατε να απαντήσετε —“*πότε ακριβώς αλλάζει η θέση του αεροσκάφους;*”— λύθηκε μέσα από τη σωστή ερμηνεία αυτού του μοντέλου. Η κατανόηση αυτών των κανόνων ήταν το απαραίτητο θεμέλιο πριν προχωρήσετε στην επίλυση, επιτρέποντάς σας να μεταφράσετε τις αλγεβρικές μεταβλητές σε γεωγραφικές συντεταγμένες. Η προσέγγιση που ακολουθήθηκε ήταν διπλή, συνδυάζοντας τη λογική της άλγεβρας με τη δύναμη της οπτικοποίησης:

Αλγεβρικά, η διαδικασία ξεκίνησε με την εύρεση των ριζών. Η επίλυση της εξίσωσης $3t^2 - 6t = 0$ αποκάλυψε τις κρίσιμες στιγμές, $t = 0$ και $t = 2$. Στη συνέχεια, ο πίνακας προσήμου επιβεβαίωσε πού το τριώνυμο γινόταν αρνητικό και πού θετικό, βάσει του συντελεστή $\alpha = 3$.

Ταυτόχρονα, χρησιμοποιήθηκε η ψηφιακή δύναμη του GeoGebra. Η εισαγωγή της συνάρτησης στο ψηφιακό περιβάλλον μετέτρεψε την ανίσωση σε εικόνα. Παρατηρήσατε την παραβολή να στρέφει τα κοίλα άνω και να τέμνει τον άξονα των χρόνων ακριβώς στα σημεία που προβλέψατε αλγεβρικά.

Αυτή η σύγκληση των δύο μεθόδων —της λογικής και της εικόνας— ήταν που προσέφερε την απόλυτη επιβεβαίωση. Είδατε πώς η θεωρία και η ψηφιακή πράξη συνεργάστηκαν για να δώσουν μια αδιαμφισβήτητη απάντηση στο πρόβλημα.

Η σύνθεση όλων των δεδομένων οδήγησε στη διαμόρφωση του τελικού υπηρεσιακού προφίλ της πτήσης. Το χρονολόγιο που προέκυψε ήταν σαφές: για τις πρώτες δύο ώρες η καμπύλη βρισκόταν κάτω από τον άξονα x' , καταγράφοντας μία συνεχή πτήση δυτικά, προς την Ιταλία. Στη συνέχεια, από τη 2^η έως την 3^η ώρα, το αεροσκάφος πέρασε στον ανατολικό τομέα, προς την Τουρκία, καθώς η συνάρτηση πήρε θετικές τιμές. Το κρίσιμο σημείο αυτής της ανακεφαλαίωσης είναι η επιβεβαίωση του data analyst. Η ψηφιακή οπτικοποίηση ταυτίστηκε απόλυτα με τα αλγεβρικά ευρήματα, αποδεικνύοντας ότι η ανάλυση που πραγματοποιήθηκε ήταν ακριβής και αξιόπιστη. Η αποστολή θεωρήθηκε επιτυχής, ακριβώς επειδή κάθε βήμα της διαδικασίας, από τις ρίζες μέχρι το γράφημα, οδήγησε στο ίδιο στέρεο συμπέρασμα. Η εικόνα της τροχιάς που βλέπετε τώρα είναι το προϊόν μίας ολοκληρωμένης μαθηματικής μελέτης.

Ολοκληρώνοντας αυτή την ανασκόπηση, είναι σημαντικό να αναλογιστείτε την ευρύτερη αξία της δεξιότητας που αναπτύχθηκε. Η μεθοδολογία των ανισώσεων δεύτερου βαθμού την οποία εφαρμόσατε στην πτήση, αποτελεί το κλειδί για πλήθος τεχνολογικών εφαρμογών του αύριο. Είδατε πώς η ίδια λογική χρησιμοποιείται από το λιμενικό σώμα για τον καθορισμό ορίων πτήσης drones, ή από μηχανικούς για τον υπολογισμό του ιδανικού πλάτους σε βιοκλιματικά στέγαστρα με στόχο τη μέγιστη ενεργειακή απόδοση. Ακόμα και στον τομέα των αυτόνομων οχημάτων, η μοντελοποίηση τροχιάς σε κέντρα προσομοίωσης βασίζεται στις ίδιες ακριβώς αρχές. Η ικανότητά σας ως Data Analysts να διαβάσετε και να ερμηνεύετε τον κόσμο μέσα από τα μαθηματικά μοντέλα είναι μια δύναμη χωρίς όρια. Τα εργαλεία που χρησιμοποιήσατε και οι μέθοδοι που ακολουθήσατε είναι πλέον μέρος της εργαλειοθήκης σας, έτοιμα να εφαρμοστούν σε οποιοδήποτε πραγματικό πρόβλημα απαιτεί ανάλυση, ακρίβεια και στρατηγική απόφαση».

2.6.2 Αναστοχασμός

Η δεύτερη ενότητα του interactive book παρουσιάζει το κρίσιμο μεταγνωστικό στάδιο του Μικρο-μαθήματος, τον **αναστοχασμό**. Είναι σχεδιασμένο να προωθήσει την κριτική επεξεργασία των μαθηματικών εννοιών που διδάχθηκαν. Μέσω της πλατφόρμας [Padlet](#) (Wallwisher, 2026), οι εκπαιδευόμενοι/ες καλούνται να συμμετάσχουν σε μια διαδραστική δραστηριότητα αναστοχασμού (Εικόνα 67, Πίνακας 29).

Η δραστηριότητα δομείται σε δύο άξονες: την ατομική καταγραφή των δυσκολιών που συνάντησαν κατά τη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με ανισώσεις 2^{ου} βαθμού και την [αυτο-αξιολόγηση](#) **[Google Forms]** (Google, 2026c) της μαθησιακής τους ετοιμότητας με τη

χρήση κλίμακας Likert. Η διαδικασία αυτή επιτρέπει στους/στις εκπαιδευόμενους/ες να "κλειδώσουν" τα συμπεράσματά τους και να συνειδητοποιήσουν το επίπεδο ετοιμότητάς τους πριν μεταβούν στην τελική φάση της αυτο-αξιολόγησης Quiz.

Πίνακας 29 Αναστοχασμός του μικρο-μαθήματος 1 μέσω διαδραστικής δραστηριότητας

Μέσω της πλατφόρμας Padlet, καλείστε σε μια διαδραστική δραστηριότητα **αναστοχασμού**. Η δραστηριότητα δομείται σε δύο άξονες: την ατομική καταγραφή των δυσκολιών που συναντήσατε κατά τη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με ανισώσεις 2^{ου} βαθμού και την αυτο-αξιολόγηση της μαθησιακής τους ετοιμότητας με τη χρήση κλίμακας Likert.

Στήλη 1: Η "Στιγμή της Αποκάλυψης" (Ατομική Καταγραφή)

Οδηγία: Σκεφτείτε τη διαδικασία μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων με ανισώσεις 2^{ου} βαθμού. Ποιο βήμα σας φάνηκε πιο απρόσμενο ή δύσκολο και γιατί; Γράψτε μια σύντομη ανάρτηση (3 προτάσεις).

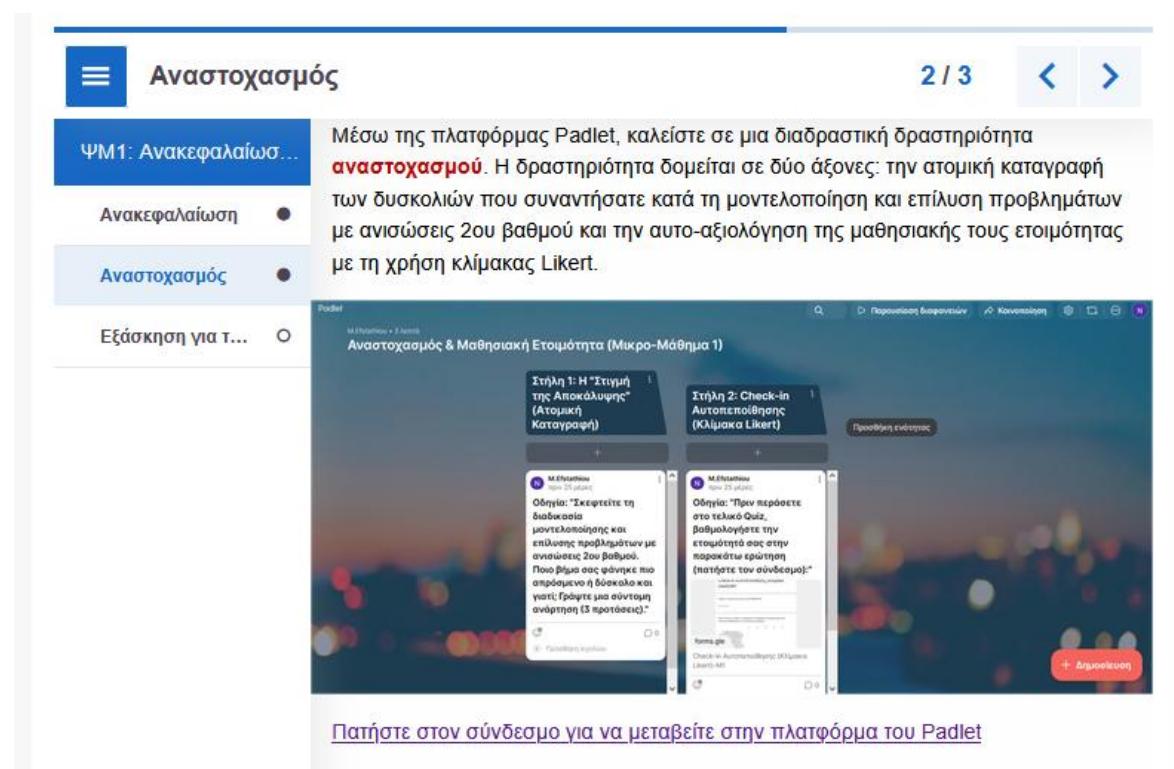
Στήλη 2: Check-in Αυτοπεποίθησης (Κλίμακα Likert)

Οδηγία: Πριν περάσετε στο τελικό Quiz, βαθμολογήστε την ετοιμότητά σας στην παρακάτω ερώτηση (πατήστε τον [σύνδεσμο](#)) [Google Forms].

Google Forms

Πόσο έτοιμος/η νιώθεις να εφαρμόσεις τη διαδικασία μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων με ανισώσεις 2ου βαθμού;

- 1: Καθόλου έτοιμος/η (χρειάζομαι επανάληψη του υλικού)
- 2: Λίγο έτοιμος/η (έχω ακόμη απορίες)
- 3: Αρκετά έτοιμος/η (με βοηθούν οι σημειώσεις)
- 4: Πολύ έτοιμος/η (μπορώ να το εφαρμόσω με σιγουριά)
- 5: Απόλυτα έτοιμος/η (μπορώ να το εξηγήσω και σε άλλον)



Εικόνα 67 Αναστοχασμός του μικρο-μαθήματος 1 μέσω διαδραστικής δραστηριότητας [Interactive book-H5P Lumi, 2η ενότητα].

2.6.3 Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση

Η τρίτη ενότητα του interactive book έχει στόχο την **Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση** του Ψηφιακού Μαθήματος. Αποτελείται από μία **διαδραστική αυτο-αξιολόγηση (Quiz)** [MS Forms] (Microsoft Corporation, n.d.-a) που έχει περιλαμβάνει 7 στοχευμένα ερωτήματα, τα οποία κατανέμονται σε δύο κατηγορίες: 3 ερωτήσεις **κατανόησης εννοιών** για τον έλεγχο της θεωρητικής γνώσης και 4 ερωτήσεις **εφαρμογής δεξιότητας**, όπου οι εκπαιδευόμενοι/ες καλούνται να επιλύσουν ρεαλιστικά προβλήματα ανισώσεων 2^{ου} βαθμού. Το κλειδί της επιτυχίας αυτής της φάσης είναι η **άμεση ανατροφοδότηση** και **Καθοδήγηση**: για κάθε απάντηση, παρέχεται επεξηγηματικό σχόλιο που συνδέει το σφάλμα με τη συγκεκριμένη ενότητα του θεωρητικού υλικού. Με τον τρόπο αυτό, ο/η εκπαιδευόμενος/η αντιλαμβάνεται τα κενά του/της σε πραγματικό χρόνο και κατευθύνεται στην επανάληψη των απαραίτητων σημείων, διασφαλίζοντας την πλήρη ετοιμότητά του/της πριν από τη συμμετοχή στην τελική αξιολόγηση του ψηφιακού μαθήματος (Εικόνα 68, Πίνακας 30, Πίνακας 31).

Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση

3 / 3

ΨΜ1: Ανακεφαλαίωση...

Ανακεφαλαίωση

Αναστοχασμός

Εξάσκηση για τ...

Καλωσορίσατε στο στάδιο της **διαδραστικής αυτο-αξιολόγησης**. Στόχος αυτού του Quiz δεν είναι απλώς ο έλεγχος των γνώσεών σας, αλλά η ουσιαστική εξάσκηση στην εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών που μελετήσαμε. Μέσα από τις 7 ερωτήσεις που ακολουθούν, έχετε την ευκαιρία να εφαρμόσετε τις γνώσεις σας σε πραγματικά σενάρια και να λάβετε άμεση ανατροφοδότηση για τις απαντήσεις σας. Αν συναντήσετε δυσκολίες, μην αποθαρρύνεστε· οι επεξηγήσεις που συνοδεύουν κάθε ερώτηση θα σας καθοδηγήσουν να εντοπίσετε τα σημεία που χρειάζονται επανάληψη, διασφαλίζοντας ότι θα είστε απόλυτα προετοιμασμένοι και με αυτοπεποίθηση για την τελική εξέταση του ψηφιακού μαθήματος.

Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση του Ψηφιακού Μαθήματος 1

Κατά την υποβολή αυτής της φόρμας, δεν θα συλλέγει αυτόματα τα στοιχεία σας, όπως το όνομα και τη διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου, εκτός αν την καταχωρήσετε οι ίδιοι.

1

Γεωμετρικά, η επίλυση της ανίσωσης $f(x) < 0$ σημαίνει ότι αναζητούμε τα διαστήματα τιμών του x στα οποία η παραβολή: (3 βαθμοί)

☒ Βρίσκεται πάνω από τον άξονα x' .

☐ Τέμνει τον άξονα $y'y'$.

☐ Βρίσκεται κάτω από τον άξονα x' .

☐ Εφάπτεται στον άξονα x' .

[Πατήστε στον σύνδεσμο για να μεταβείτε στο Quiz Αυτοαξιολόγησης](#)

Εικόνα 68 Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση του μικρο-μαθήματος 1 [Interactive book-H5P Lumi, 3η ενότητα]

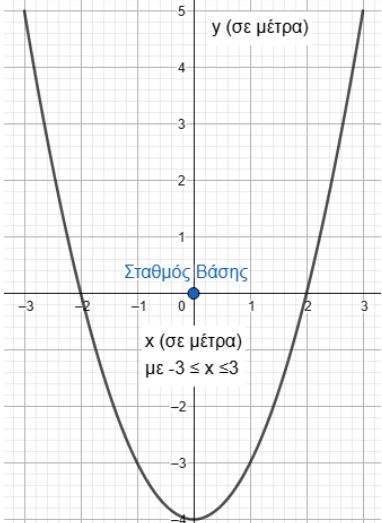
Πίνακας 30 Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση του μικρο-μαθήματος 2

Καλωσορίσατε στο στάδιο της **διαδραστικής αυτο-αξιολόγησης**. Στόχος αυτού του Quiz δεν είναι απλώς ο έλεγχος των γνώσεών σας, αλλά η ουσιαστική εξάσκηση στην εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών που μελετήσαμε. Μέσα από τις 7 ερωτήσεις που ακολουθούν, έχετε την ευκαιρία να εφαρμόσετε τις γνώσεις σας σε πραγματικά σενάρια και να λάβετε άμεση ανατροφοδότηση για τις απαντήσεις σας. Αν συναντήσετε δυσκολίες, μην αποθαρρύνεστε· οι επεξηγήσεις που συνοδεύουν κάθε ερώτηση θα σας καθοδηγήσουν να εντοπίσετε τα σημεία που χρειάζονται επανάληψη, διασφαλίζοντας ότι θα είστε απόλυτα προετοιμασμένοι και με αυτοπεποίθηση για την τελική εξέταση του ψηφιακού μαθήματος.

Πίνακας 31 Quiz Αυτοαξιολόγησης [Google Forms].

Ερωτήματα	Ανατροφοδότηση / Καθοδήγηση
ΜΕΡΟΣ Α'	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης.
Ερώτημα 1: Ποια από τις παρακάτω μαθηματικές	Σωστά! Μια ανίσωση είναι 2ου βαθμού

εκφράσεις αποτελεί ανίσωση 2ου βαθμού ως προς x; Επιλογές A) $3x + 5 > 0$ B) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ Γ) $y^2 + 2x - 1 > 0$ Δ) $0x^2 + 5x - 2 < 0$ Σωστή απάντηση: B) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$	ως προς x, όταν ο μεγαλύτερος εκθέτης του x είναι το 2 και ο συντελεστής του x^2 είναι διάφορος του μηδενός. Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Προσπάθησε ξανά! Θυμήσου ότι μια ανίσωση είναι 2ου βαθμού ως προς x, όταν ο μεγαλύτερος εκθέτης του x είναι το 2 και ο συντελεστής του x^2 είναι διάφορος του μηδενός. Καθοδήγηση. Καλό θα ήταν να ξανακοιτάξεις την ανακεφαλαίωση του μικρο-μαθήματος (https://app.lumi.education/run/3sao7B).
Ερώτημα 2: Αν το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ έχει αρνητική Διακρίνουσα ($\Delta < 0$) και θετικό συντελεστής a, τότε: Επιλογές A) Το τριώνυμο παίρνει μόνο θετικές τιμές για κάθε πραγματικό αριθμό x. B) Το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες. Γ) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma < 0$ ισχύει για κάθε x. Δ) Η παραβολή τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία. Σωστή απάντηση: A) Το τριώνυμο παίρνει μόνο θετικές τιμές για κάθε πραγματικό αριθμό x.	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Μπράβο! Όταν το τριώνυμο έχει $\Delta < 0$, είναι ομόσημο του a για κάθε πραγματικό αριθμό x. Αφού $a > 0$, το τριώνυμο παίρνει μόνο θετικές τιμές. Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Προσπάθησε ξανά! Θυμήσου ότι όταν το τριώνυμο έχει $\Delta < 0$, είναι ομόσημο του a για κάθε πραγματικό αριθμό x. Αφού $a > 0$, το τριώνυμο παίρνει μόνο θετικές τιμές. Καθοδήγηση. Σου προτείνουμε να ξανακοιτάξεις την ανακεφαλαίωση του μικρο-μαθήματος (https://app.lumi.education/run/3sao7B).
Ερώτημα 3: Γεωμετρικά, η επίλυση της ανίσωσης $f(x) < 0$ σημαίνει ότι αναζητούμε τα διαστήματα τιμών του x στα οποία η Παραβολή: Επιλογές A) Βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. B) Τέμνει τον άξονα $y'y$. Γ) Βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. Δ) Εφάπτεται στον άξονα $x'x$. Σωστή απάντηση: Γ) Βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Ακριβώς! Οι αρνητικές τιμές του τριωνύμου αντιστοιχούν στα σημεία του γραφήματος που είναι «κάτω» από τον άξονα $x'x$. Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Προσπάθησε ξανά! Θυμήσου ότι οι αρνητικές τιμές του τριωνύμου αντιστοιχούν στα σημεία του γραφήματος που είναι «κάτω» από τον άξονα $x'x$. Καθοδήγηση. Σου προτείνουμε να ξανακοιτάξεις την ανακεφαλαίωση του μικρο-μαθήματος (https://app.lumi.education/run/3sao7B).
ΜΕΡΟΣ Β' Ερώτημα 4: Ένα τηλεχειριζόμενο ρομπότ (ROV) εξερευνά ένα ναυάγιο. Η κατακόρυφη θέση του y (βάθος) σε σχέση με ένα υποθαλάσσιο ρεύμα	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Εξαιρετικά! Το τριώνυμο έχει ρίζες το 3 και το 7 και είναι αρνητικό, δηλ. ετερόσημο του $a = 1 > 0$, εντός των

περιγράφεται από τη σχέση $y = x^2 - 10x + 21$ (όπου x η οριζόντια θέση). Το ρομπότ κινείται με ασφάλεια μόνο όταν βρίσκεται κάτω από το επίπεδο του ρεύματος ($y < 0$). Για ποιες τιμές του x, το ρομπότ βρίσκεται σε διάστημα ασφαλείας; Επιλογές A) $x < 3$ ή $x > 7$ B) $3 < x < 7$ Γ) $x = 3$ ή $x = 7$ Δ) $0 < x < 10$ Σωστή απάντηση: B) $3 < x < 7$	ριζών του. Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Προσπάθησε ξανά! Το τριώνυμο έχει ρίζες το 3 και το 7. Θυμήσου ότι είναι αρνητικό, δηλ. ετερόσημο του $a = 1 > 0$, εντός των ριζών του. Καθοδήγηση. Καλό θα ήταν να ξανακοιτάξεις την ανακεφαλαίωση του μικρο-μαθήματος (https://app.lumi.education/run/3sao7B).
Ερώτημα 5: Σε μια αυτοματοποιημένη αποθήκη, το καθαρό οικονομικό όφελος (σε €/ώρα) ενός συστήματος μεταφοράς δίνεται από τον τύπο $C(x) = -x^2 + 12x - 20$, με $0 < x < 12$, όπου x είναι ο αριθμός των εκατοντάδων αντικειμένων που διακινούνται ανά ώρα. Το σύστημα είναι αποδοτικό (κερδοφόρο) όταν το καθαρό όφελος είναι θετικό. Για ποιο εύρος διακίνησης αντικειμένων (σε εκατοντάδες) το σύστημα παρουσιάζει ζημία; Επιλογές A) $0 < x < 2$ ή $10 < x < 12$ B) $x < 2$ ή $x > 10$ Γ) $2 < x < 10$ Δ) $0 < x < 12$ Σωστή απάντηση: Γ) $0 < x < 2$ ή $10 < x < 12$	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Μπράβο! Πράγματι, το σύστημα παρουσιάζει ζημία όταν $C(x) < 0$. Το τριώνυμο έχει ρίζες το 2 και το 10 και είναι αρνητικό (δηλ. ομόσημο του $a = -1$) εκτός των ριζών. Επίσης λαμβάνεται υπόψιν ο περιορισμός $0 < x < 12$. Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Προσπάθησε ξανά! Σκέψου ότι: το σύστημα παρουσιάζει ζημία όταν $C(x) < 0$. Το τριώνυμο έχει ρίζες το 2 και το 10 και είναι αρνητικό (δηλ. ομόσημο του $a = -1 < 0$) εκτός των ριζών. Επίσης λάβε υπόψιν σου τον περιορισμό $0 < x < 12$. Καθοδήγηση. Καλό θα ήταν να ξανακοιτάξεις την ανακεφαλαίωση του μικρο-μαθήματος (https://app.lumi.education/run/3sao7B).
Ερώτημα 6: Ένα υβριδικό αυτόνομο drone έχει σχεδιαστεί για να εκτελεί περιβαλλοντικές μετρήσεις τόσο σε θαλάσσιο όσο και σε εναέριο περιβάλλον. 	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Πολύ σωστά! Το drone εκτελεί υποβρύχια έρευνα όταν $y < 0$. Παρατηρώντας το γράφημα, η Παραβολή φαίνεται να είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ για $-2 < x < 2$. Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Προσπάθησε ξανά! Σκέψου ότι το drone εκτελεί υποβρύχια έρευνα όταν $y < 0$. Παρατηρώντας το γράφημα, η Παραβολή φαίνεται να είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ για $-2 < x < 2$. Καθοδήγηση. Καλό θα ήταν να ξανακοιτάξεις την ανακεφαλαίωση του μικρο-μαθήματος (https://app.lumi.education/run/3sao7B).

Εικόνα 69 Η Παραβολή που απεικονίζει την κίνησή του θεματικού τρένου. Σημείωση. Το γράφημα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα στο GeoGebra (Geogebra, 2026). Η τροχιά του περιγράφεται από το γράφημα που φαίνεται στην οθόνη σας, όπου x: η οριζόντια θέση του drone σε σχέση με τον σταθμό βάσης (με $-3 \leq x \leq 3$) και y: το υψόμετρο του drone σε σχέση με την επιφάνεια της θάλασσας. Για ποιες τιμές του x το drone εκτελεί υποβρύχια έρευνα; Επιλογές A) $-2 < x < 2$ B) $x < -2$ ή $x > 2$ Γ) $-4 < x < 0$ Δ) $0 < x < 4$ Σωστή απάντηση: A) $-2 < x < 2$	
Ερώτημα 7: Ένα αεροσκάφος εκτελεί περιπολία πάνω από τον Ελλαδικό χώρο. Η οριζόντια μετατόπισή του s (σε εκατοντάδες χιλιόμετρα) σε σχέση με την Αθήνα, δίνεται από τον τύπο: $s(t) = t^2 - 4t + 5$, με $0 \leq t \leq 4$, όπου t είναι ο χρόνος σε ώρες μετά την απογείωσή του. Για ποιες τιμές του t, το αεροσκάφος βρίσκεται ανατολικά της Αθήνας, κατά τη διάρκεια της πτήσης του; Επιλογές A) Για $0 \leq t \leq 4$ B) Για $0 \leq t \leq 2$ Γ) Για κάθε πραγματικό αριθμό t Δ) Το αεροσκάφος, κατά τη διάρκεια της πτήσης του, βρίσκεται συνέχεια δυτικά της Αθήνας Σωστή απάντηση: A) Για $0 \leq t \leq 4$	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Εξαιρετικά! Το τριώνυμο $s(t)$ έχει αρνητική Διακρίνουσα, οπότε είναι ομόσημο του $a = 1 > 0$ για κάθε τιμή του t (λαμβάνοντας υπόψιν τον περιορισμό: $0 \leq t \leq 4$). Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Προσπάθησε ξανά! Σκέψου ότι Το τριώνυμο $s(t)$ έχει αρνητική Διακρίνουσα, οπότε είναι ομόσημο του $a = 1 > 0$ για κάθε τιμή του t (λαμβάνοντας υπόψιν τον περιορισμό: $0 \leq t \leq 4$). Καθοδήγηση. Καλό θα ήταν να ξανακοιτάξεις την ανακεφαλαίωση του μικρο-μαθήματος (https://app.lumi.education/run/3sao7B).

3. Ψηφιακό Μικρο-Μάθημα 2

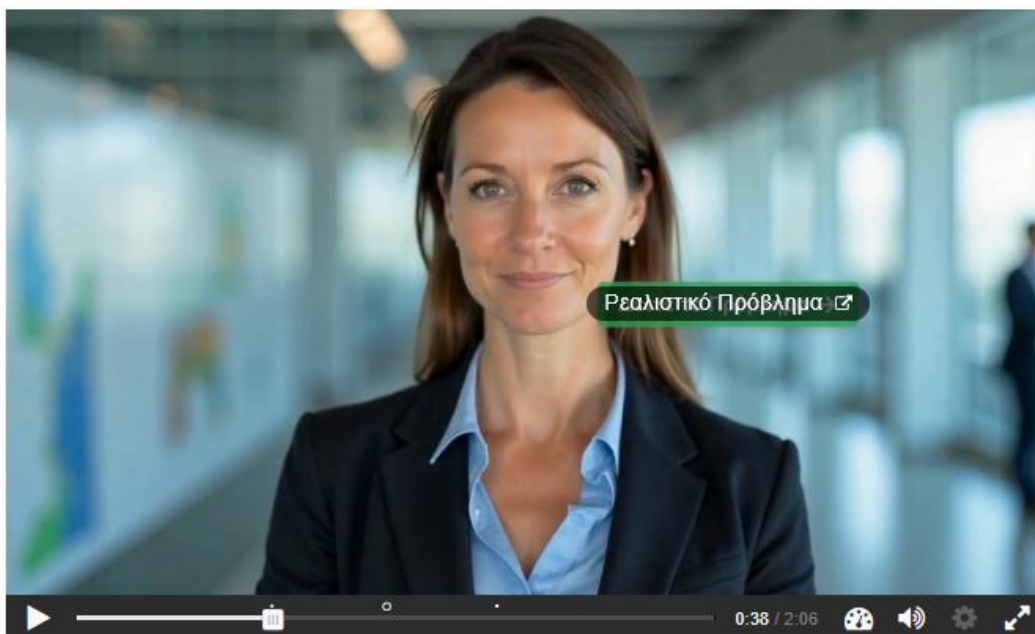
3.1 Εισαγωγή στο Μικρο-Μάθημα 2

Ο τίτλος του Μικρο-Μαθήματος 2 είναι “Δυναμικά Θηκογράμματα & Λήψη Αποφάσεων με Δεδομένα”.

Με στόχο να εξασφαλιστεί η ενεργός συμμετοχή (engagement) των εκπαιδευόμενων, το Μικρο-Μάθημα 2 εισάγεται μέσα από ένα ρεαλιστικό πρόβλημα, προβάλλοντας το εκπαιδευτικό περιεχόμενο ως τη βέλτιστη λύση για την αντιμετώπισή του.

Η παρουσίαση του σεναρίου πραγματοποιείται μέσω ενός **διαδραστικού εργαλείου** ([Interactive Video](#) - **[H5P Lumi]**) (Lumi Education, 2026), που ξεκινά με την εμφάνιση ενός **AI Avatar** **[HeyGen]** (HeyGen, 2026), του οποίου η ομιλία συνοδεύεται από υποτίτλους για μεγαλύτερη προσβασιμότητα (Εικόνα 70). Το κείμενο του Avatar έχει ως εξής:

«Καλώς ορίσατε στο μικρο-μάθημα "Δυναμικά Θηκογράμματα & Λήψη Αποφάσεων με Δεδομένα". Σήμερα αναλαμβάνετε δράση ως αναλυτές δεδομένων στον Ευρωπαϊκό Οργανισμό Περιβάλλοντος, με αποστολή να ερευνήσετε μια σοβαρή περιβαλλοντική καταγγελία. Η καταγγελία υποστηρίζει ότι η Θεσσαλονίκη είναι πλέον η πιο μολυσμένη πόλη της Ελλάδας στο μονοξείδιο του άνθρακα, επειδή απλώς κατέγραψε τη μέγιστη τιμή της χώρας. Είναι, όμως, αυτή η πραγματική εικόνα της καθημερινότητας, ή μήπως κάποια έκτακτα και ακραία φαινόμενα αλλοιώνουν την αλήθεια; Πατήστε στον σύνδεσμο που εμφανίζεται στην οθόνη σας για να δείτε το ρεαλιστικό πρόβλημα».



Εικόνα 70 Εισαγωγή στο ψηφιακό μικρο-μάθημα 2 [Interactive Video-H5P Lumi], με ενσωματωμένο AI Avatar.

Σημείωση. Το αρχικό βίντεο δημιουργήθηκε με τη χρήση του εργαλείου Canva (Canva, 2026). Το ενσωματωμένο AI Avatar δημιουργήθηκε με τη χρήση του εργαλείου HeyGen (HeyGen, 2026). Η ομιλία παράχθηκε βάσει προτροπής της συγγραφέως: κείμενο του avatar σελ. 147.

Μέσω του συγκεκριμένου συνδέσμου, παρέχεται πρόσβαση σε [Google Slides](#) (Google, 2026e), το οποίο παρουσιάζει την εκφώνηση του ρεαλιστικού προβλήματος ως εξής:

Στο πλαίσιο της αξιολόγησης της ποιότητας του αέρα στην Ελλάδα, ο Ευρωπαϊκός Οργανισμός Περιβάλλοντος (EEA) καλείται να εξετάσει μια πρόσφατη δημόσια καταγγελία περιβαλλοντικής

οργάνωσης. Η καταγγελία ισχυρίζεται ότι: «Η Θεσσαλονίκη είναι πλέον μια πολύ πιο επιβαρυνμένη πόλη σε σχέση με την Αθήνα όσον αφορά το μονοξείδιο του άνθρακα (CO), καθώς κατέγραψε την υψηλότερη τιμή ρύπανσης σε ολόκληρη την χώρα». Ως στελέχη της ομάδας ανάλυσης δεδομένων του Οργανισμού, έχετε στα χέρια σας το επίσημο αρχείο με τις καθημερινές μετρήσεις της συγκέντρωσης του CO (σε mg/m^3), κατά την περίοδο 1- 14 Μαρτίου 2026 στις δύο πόλεις (Εικόνα 71, Πίνακας 32).



Εικόνα 71 Ρεαλιστικό πρόβλημα του μικρο-μαθήματος 2 [Google Slides].

Το background σχεδίασης των διαφανειών δημιουργήθηκε με τη χρήση τεχνητής νοημοσύνης μέσω NotebookLM (Google, 2026a) (προτροπή συγγραφώς: η εκφώνηση του ρεαλιστικού προβλήματος σελ. 147-148).

Πίνακας 32 Ημερήσιες μετρήσεις της συγκέντρωσης του CO, κατά την περίοδο 1- 14 Μαρτίου 2026 σε Αθήνα και Θεσσαλονίκη

Ημέρα	Αθήνα (mg/m^3)	Θεσσαλονίκη (mg/m^3)	Σχόλια / Φαινόμενα
1	2.1	0.9	
2	1.9	1.1	
3	2.3	0.8	
4	2	4.5	1η ημέρα θερμοκρασιακής αναστροφής & άπνοιας

5	1.8	4.5	2η ημέρα έντονης αιθαλομίχλης
6	2.4	1.2	
7	2.2	1	
8	2	0.9	
9	1.9	0.8	
10	2.1	4.5	3η ημέρα έκτακτων κλιματικών συνθηκών
11	2.3	1.1	
12	1.8	0.7	
13	2.2	1	
14	2	0.9	

Αν η αναφορά σας προς το Υπουργείο Περιβάλλοντος βασιστεί **μόνο** στον Μέσο Όρο ή μόνο στη Μέγιστη Τιμή, το συμπέρασμα θα είναι παραπλανητικό. Το ερώτημα είναι: Πώς μπορείτε να παρουσιάσετε την πραγματική εικόνα στους πολίτες και στους φορείς λήψης αποφάσεων με απόλυτη επιστημονική ακρίβεια και με μια μόνο ματιά;

Το **διαδραστικό βίντεο** συνεχίζει, ενισχύοντας την κατανόηση των εκπαιδευόμενων με ένα ενσωματωμένο **quiz** και με την παρακάτω **ηχητική επεξήγηση [Google AI Studio]** (Google 2026d):

«Αφού μελετήσατε το δοσμένο ρεαλιστικό πρόβλημα, με βάση τον πίνακα δεδομένων που παραθέτει, ποιο στατιστικό μέτρο θεωρείτε πιο αξιόπιστο για να συγκρίνετε την καθημερινή έκθεση των πολιτών στη ρύπανση των δύο πόλεων: τον Μέσο Όρο ή κάποιο άλλο εργαλείο που μπορεί να απομονώσει τις ακραίες τιμές; Πατήστε στο **quiz** και δώστε την απάντησή σας» (Εικόνα 72, Πίνακας 33).

Ψηφιακό Μικρο-Μάθημα 2
“Δυναμικά Θηκογράμματα & Λήψη Αποφάσεων με Δεδομένα”

Ημέρα	Αθήνα (mg/m ³)	Θεσσαλονίκη (mg/m ³)
1	2.1	0.9
2	1.9	1.1
3	2.3	0.8
4	2	4.5
5	1.8	4.5
6	2.4	1.2
7	2.2	1
8	2	0.9
9	1.9	0.8
10	2.1	4.5
11	2.3	1.1
12	1.8	0.7
13	2.2	1
14	2	0.9

Αφού μελετήσατε το δοσμένο ρεαλιστικό πρόβλημα, με βάση τον πίνακα δεδομένων που παραθέτει, ποιο στατιστικό μέτρο θεωρείτε πιο αξιόπιστο για να συγκρίνετε την καθημερινή έκθεση των πολιτών στη ρύπανση των δύο πόλεων: τον Μέσο Όρο ή κάποιο άλλο εργαλείο που μπορεί να απομονώσει τις ακραίες τιμές;

Πατήστε στο **Quiz** και δώστε την απάντησή σας

QUIZ

Εικόνα 72 Συνέχεια του εισαγωγικού βίντεο του μικρο-μαθήματος 2 με ενσωματωμένο Quiz [H5P Iumi].
 Σημείωση. Το βίντεο δημιουργήθηκε με τη χρήση του εργαλείου Canva (Canva, 2026). Το background σχεδιάσης δημιουργήθηκε με τη χρήση τεχνητής νοημοσύνης μέσω NotebookLM (Google, 2026a) (προτροπή συγγραφέως: το κείμενο της ηχητικής επεξήγησης σελ. 149-151).

Πίνακας 33 Quiz Επιλογής Στατιστικού Εργαλείου

	Ερώτηση	Ανατροφοδότηση
1	Με βάση την ανάλυση των δεδομένων ρύπανσης για την Αθήνα και τη Θεσσαλονίκη, ποιο στατιστικό	Feedback (on correct answer): Σωστά! Η χρήση της Διαμέσου και

μέτρο θεωρείτε πιο αξιόπιστο για την εκτίμηση της καθημερινής έκθεσης των πολιτών, λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη ακραίων τιμών (outliers); Επιλογές: Α) Η Διάμεσος και το Θηκόγραμμα (Box Plot): Είναι πιο αξιόπιστα εργαλεία, καθώς επιτρέπουν την απομόνωση των ακραίων τιμών και την εστίαση στην κεντρική τάση των δεδομένων. Β) Ο Μέσος Όρος: Είναι το πιο αντιπροσωπευτικό μέτρο, καθώς περιλαμβάνει όλες τις τιμές της περιόδου στον υπολογισμό του. Γ) Η Μέγιστη Τιμή: Είναι το καταλληλότερο μέτρο, διότι αντικατοπτρίζει την πιο επικίνδυνη κατάσταση που μπορεί να αντιμετωπίσει ένας πολίτης. Σωστή απάντηση Α) Η Διάμεσος και το Θηκόγραμμα (Box Plot): Είναι πιο αξιόπιστα εργαλεία, καθώς επιτρέπουν την απομόνωση των ακραίων τιμών και την εστίαση στην κεντρική τάση των δεδομένων.	του Θηκογράμματος σας επιτρέπει να «καθαρίσετε» τα δεδομένα από τον θόρυβο των ακραίων τιμών, οδηγώντας σε μια τεκμηριωμένη και αξιόπιστη περιβαλλοντική ανάλυση. Feedback (on wrong answer): Προσοχή! Ο Μέσος Όρος και η Μέγιστη Τιμή επηρεάζονται άμεσα από τις ακραίες τιμές (όπως οι μέρες με αιθαλομίχλη στη Θεσσαλονίκη), δίνοντας μια διαστρεβλωμένη εικόνα της καθημερινότητας. Η Διάμεσος και το Θηκόγραμμα αποτελούν την επιστημονικά ενδεδειγμένη επιλογή για την αποτύπωση της πραγματικής κατάστασης.
---	--

Το διαδραστικό βίντεο ολοκληρώνεται με τη διατύπωση των προσδοκώμενων **Μαθησιακών Αποτελεσμάτων (ΜΑ)** και των **Ψηφιακών Δεξιοτήτων**, ώστε οι εκπαιδευόμενοι/ες να γνωρίζουν τι θα έχουν επιτύχει με την ολοκλήρωση του μικρο-μαθήματος (Εικόνα 73).

Η συνοδευτική **ηχητική επεξήγηση [Google AI Studio]** έχει ως εξής:

«Σε αυτό το σημείο, είναι σημαντικό να ορίσουμε τους άξονες πάνω στους οποίους θα κινηθούμε. Στην οθόνη εμφανίζονται τα μαθησιακά αποτελέσματα του μικρομαθήματος καθώς και η σύνδεσή τους με το νέο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Λυκείου και την αντίστοιχη ψηφιακή ικανότητα, όπως ορίζεται στο Ευρωπαϊκό Πλαίσιο DigComp 3.0» (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2023; Cosgrove & Cachia, 2025).

Μαθησιακά Αποτελέσματα και Ψηφιακές Ικανότητες

Γιατί να παρακολουθήσετε το Μικρο-Μάθημα;

Μαθησιακά Αποτελέσματα του Μικρο-Μαθήματος	Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΣ Μαθηματικών Λυκείου, ΦΕΚ 1326/Β'/8-3-2023)	Ψηφιακή Ικανότητα (DigComp 3.0)
Για να μπορείτε: MA2.1: Να κατανοείτε την έννοια "οριακή τιμή ενός συνόλου ποσοτικών δεδομένων" μέσα από την κατασκευή "θηκογράμματος". Ταξινόμια Bloom: Κατανόηση – Εφαρμογή	Σ.Δ.10.2: Να κατασκευάζετε πολλαπλά θηκογράμματα, υπολογίζοντας και οριακές τιμές, για να περιγράψετε τις τιμές ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.	Area: Information search, evaluation and management Competence: 1.3 Managing information
MA-2.2: Να αναπτύξετε τη δεξιότητα σύγκρισης των θηκογραμμάτων δύο ή περισσότερων συνόλων ποσοτικών δεδομένων, για την επίλυση σχετικών προβλημάτων. Ταξινόμια Bloom: Εφαρμογή –Ανάλυση –Αξιολόγηση	Σ.Ε.10.1: Με τη βοήθεια των θηκογραμμάτων να κάνετε συγκρίσεις και να εξαγάγετε συμπεράσματα σχετικά με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που έχουν οι τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.	

ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ

1:23 / 2:06

Εικόνα 73 Μαθησιακά Αποτελέσματα και Ψηφιακές Ικανότητες του μικρο-μαθήματος 2.

Σημείωση. Το background σχεδίασης δημιουργήθηκε με τη χρήση τεχνητής νοημοσύνης μέσω NotebookLM (Google, 2026a) (προτροπή συγγραφώς: το κείμενο της ηχητικής επεξήγησης σελ. 149-151).

«Πατώντας το κουμπί "ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ", μπορείτε να δείτε με απλό και κατανοητό τρόπο τι θα είστε σε θέση να κάνετε μετά την ολοκλήρωση του μικρο-μαθήματος:

Πρώτον, στατιστικά: Θα μάθετε να χτίζετε "έξυπνα" θηκογράμματα, εντοπίζοντας πότε μια μέτρηση είναι απλώς μια ακραία τιμή και πότε αποτελεί ένδειξη κρίσιμου προβλήματος στο σύστημα.

Δεύτερον, ψηφιακά: Θα μάθετε να αξιοποιείτε προηγμένα εργαλεία στα υπολογιστικά φύλλα, μετατρέποντας τον όγκο των ακατέργαστων δεδομένων σε μια καθαρή, οπτική πληροφορία. Στόχος είναι, στο τέλος του μικρο-μαθήματος να είστε σε θέση να λαμβάνετε αποφάσεις βασισμένες σε δεδομένα, όπως κάθε σύγχρονος αναλυτής. Καλή συνέχεια!!» (Πίνακας 34).

Πίνακας 34 Μαθησιακά Αποτελέσματα και Ψηφιακές Ικανότητες

Γιατί να παρακολουθήσετε το Μικρο-Μάθημα;		
Μαθησιακά Αποτελέσματα του Μικρο-Μαθήματος Για να μπορείτε:	Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα - ΠΜΑ (ΠΣ Μαθηματικών Λυκείου, ΦΕΚ 1326/Β'/8-3-2023)	Ψηφιακή Ικανότητα (DigComp 3.0 Ευρωπαϊκό Πλαίσιο Ψηφιακών Ικανοτήτων για τους Πολίτες)
ΜΑ2.1: Να κατανοείτε την έννοια "οριακή τιμή ενός συνόλου ποσοτικών δεδομένων" μέσα από την κατασκευή "θηκογράμματος". Ταξινόμια Bloom: Κατανόηση – Εφαρμογή	Σ.Δ.10.2: Να κατασκευάζετε πολλαπλά θηκογράμματα, υπολογίζοντας και οριακές τιμές, για να περιγράψετε τις τιμές ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.	Area: Information search, evaluation and management Competence: 1.3 Managing information
ΜΑ-2.2. Να αναπτύξετε τη δεξιότητα σύγκρισης των θηκογραμμάτων δύο ή περισσότερων συνόλων ποσοτικών δεδομένων, για την επίλυση σχετικών προβλημάτων. Ταξινόμια Bloom: Εφαρμογή –Ανάλυση-Αξιολόγηση	Σ.Ε.10.1: Με τη βοήθεια των θηκογραμμάτων να κάνετε συγκρίσεις και να εξάγετε συμπεράσματα σχετικά με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που έχουν οι τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.	
Εμφάνιση/Απόκρυψη		Εμφάνιση /Απόκρυψη
ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ!		ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ!
Στατιστικά: Θα μάθετε να χτίζετε και να συγκρίνετε "έξυπνα" θηκογράμματα, εντοπίζοντας πότε μια μέτρηση είναι απλώς μια ακραία τιμή και πότε αποτελεί ένδειξη κρίσιμου προβλήματος στο σύστημα.		Ψηφιακά: Θα μάθετε να αξιοποιείτε προηγμένα εργαλεία στα υπολογιστικά φύλλα, μετατρέποντας τον όγκο των ακατέργαστων δεδομένων σε μια καθαρή, οπτική πληροφορία.

3.2 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 1: Παρουσίαση εννοιών (Concepts)

Στην παράγραφο αυτή, αναλύεται η μεθοδολογία κατασκευής του Θηκογράμματος, δίνοντας έμφαση στον εντοπισμό των οριακών τιμών που συχνά αλλοιώνουν την πραγματική εικόνα. Παράλληλα, οι εκπαιδευόμενοι/ες ανακαλύπτουν πώς οι παραδοσιακοί στατιστικοί υπολογισμοί αυτοματοποιούνται στο σύγχρονο περιβάλλον των υπολογιστικών φύλλων-excel, θέτοντας τις βάσεις για τη δημιουργία δυναμικών πολλαπλών θηκογραμμάτων που μιλούν “με μια ματιά”.

Η ενότητα εισάγεται μέσω ενός **διαδραστικού εργαλείου** ([Course Presentation](#) - [H5P Lumi]), που ξεκινά με την εμφάνιση ενός **AI Avatar [HeyGen]**, του οποίου η ομιλία συνοδεύεται από υποτίτλους για μεγαλύτερη προσβασιμότητα. Το κείμενο του Avatar έχει ως εξής:

«Καλώς ορίσατε στο θεωρητικό και εργαστηριακό υπόβαθρο του Μικρο-Μαθήματος! Θα εξετάσουμε πώς η θεωρία της Στατιστικής εφαρμόζεται στην πράξη για την επίλυση του ρεαλιστικού προβλήματός μας. Προκειμένου να αποτυπωθεί η πραγματική εικόνα της ατμοσφαιρικής ρύπανσης στους πολίτες και στους φορείς λήψης αποφάσεων με απόλυτη επιστημονική ακρίβεια και άμεση εποπτεία, είναι απαραίτητο να κατασκευαστούν πολλαπλά θηκογράμματα και να υπολογιστούν τα βασικά μέτρα θέσης και μεταβλητότητας για τις συγκεντρώσεις του μονοξειδίου του άνθρακα στην Αθήνα και στη Θεσσαλονίκη, για τον Μάρτιο του 2026. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει, επίσης, τον εντοπισμό και την απομόνωση των οριακών τιμών (outliers).

Για την κατανόηση της μεθοδολογίας, θα χρησιμοποιήσουμε αρχικά ένα ενδεικτικό σύνολο δεδομένων, εξετάζοντας τα βήματα κατασκευής ενός θηκογράμματος.

Όπως είναι γνωστό από τη Στατιστική προηγούμενων τάξεων, η κατασκευή του **θηκογράμματος** ενός συνόλου παρατηρήσεων βασίζεται στον υπολογισμό των εξής δειγματικών μεγεθών:

Της **Διαμέσου**, του **Πρώτου Τεταρτημορίου**, του **Τρίτου Τεταρτημορίου** και του **Ενδοτεταρτημοριακού εύρους**

Στη συνέχεια, με βάση τα παραπάνω μεγέθη, προσδιορίζονται ο **Κάτω και ο Πάνω Φράχτης** του θηκογράμματος. Οι φράχτες αυτοί μας επιτρέπουν να καθορίσουμε την **Κατώτατη και την Ανώτατη τυπική τιμή** του δείγματος, καθώς και να εντοπίσουμε με μαθηματική ακρίβεια τυχόν **Οριακές (outliers) ή Ακραίες τιμές** που διαφοροποιούνται σημαντικά από το υπόλοιπο σύνολο των δεδομένων» (Εικόνα 74).



Εικόνα 74 Παρουσίαση εννοιών του μικρο-μαθήματος 2 [Course Presentation-H5P Lumi] με ενσωματωμένο AI Avatar.

Σημείωση. Το AI Avatar [HeyGen] δημιουργήθηκε με χρήση του εργαλείου HeyGen (HeyGen, 2026). Η ομιλία παράχθηκε βάσει προτροπής της συγγραφέως: κείμενο του avatar σελ. 152. Το background της

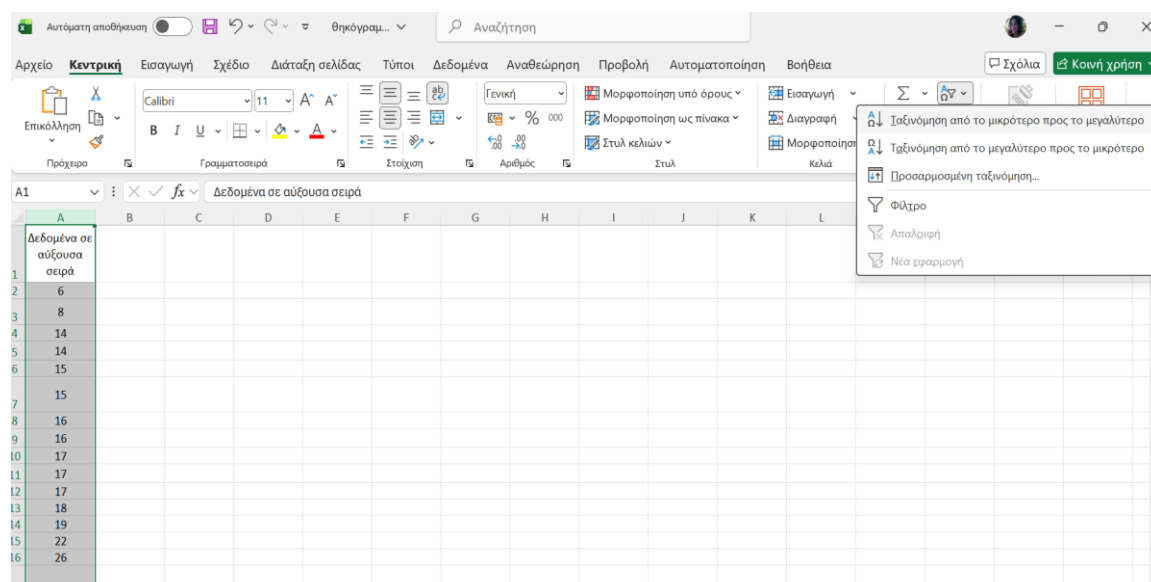
διαφάνειας (Classroom setting [Εικόνα]) προέρχεται από την COERLL (n.d.), <https://coerll.utexas.edu/methods/images/modules/cm/classrooms/medium-1.jpg>. [CC BY-NC-SA 3.0].

Στη συνέχεια, το **Course Presentation** παρουσιάζει μία σειρά υπολογιστικών φύλλων του Excel (μέσω κατάλληλων στιγμιότυπων οθόνης), συνδυάζοντας τον αυτόματο **ψηφιακό υπολογισμό** των στατιστικών μέτρων του θηκογράμματος με το αναγκαίο θεωρητικό έρεισμα και τη **μαθηματική τεκμηρίωση**.

Για την ενίσχυση της κατανόησης των εκπαιδευομένων, παρέχεται η παρακάτω **ηχητική επεξήγηση [Google AI Studio]**, η οποία αποτυπώνεται γραπτώς στην οθόνη ως συνοδευτικό κείμενο:

«Για τη διευκόλυνση των υπολογισμών, τα ποσοτικά δεδομένα καταχωρίζονται σε φύλλο εργασίας του Excel. Γνωρίζουμε ότι η **διάμεσος** ενός συνόλου παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ **50%** των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ **50%** των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν» (Διαμαντίδης et al., 2026; Γαβρίλης et al., 2026b; Αδαμίδης & Καραντάνα, 2026).

«Για τον προσδιορισμό της **διαμέσου**, οι παρατηρήσεις ταξινομούνται σε αύξουσα σειρά, από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τιμή, με χρήση της εντολής “Ταξινόμηση από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο” όπως φαίνεται στην εικόνα» (Εικόνα 75).



Εικόνα 75 Ταξινόμηση δεδομένων.

Σημείωση: Η εικόνα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα με χρήση του Microsoft Excel (Microsoft, 2026a).

«Στην περίπτωση που το πλήθος των παρατηρήσεων είναι **περιττό**, η **διάμεσος** αντιστοιχεί **στη μεσαία παρατήρηση** της ταξινομημένης σειράς. Αντίθετα, όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι **άρτιο**, η **διάμεσος** υπολογίζεται ως **ο μέσος όρος των δύο μεσαίων παρατηρήσεων** (Διαμαντίδης et al., 2026; Γαβρίλης et al., 2026b).

Στο excel μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εντολή «**MEDIAN**» για τον αυτόματο υπολογισμό της διαμέσου όπως φαίνεται στο σχήμα» (Εικόνα 76).

«Επίσης, σύμφωνα με τη θεωρία, **πρώτο τεταρτημόριο Q_1** λέγεται η τιμή πριν από την οποία βρίσκεται το πολύ **25%** του συνόλου των παρατηρήσεων. Για να βρούμε το **Q_1** των δεδομένων μας, εντοπίζουμε τις παρατηρήσεις που είναι μικρότερες από τη **διάμεσο** του συνόλου των δεδομένων και υπολογίζουμε τη διάμεσο αυτού του υποσυνόλου τιμών.

Στο Excel, το **πρώτο τεταρτημόριο Q_1** μπορεί να υπολογιστεί αυτόματα με τη χρήση της συνάρτησης PERCENTILE με παράμετρο 0,25, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα» (Εικόνα 77).

Αρχείο	Κεντρική	Εισαγωγή	Σχέδιο	Διάταξη σελίδας	Τύποι
Επικόλληση	Calibri	11	A ⁺	A ⁺	
Πρόχειρο	Γραμματοσειρά	Στοίχιση			
RANDBET...	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
A	B	C	D	E	
	Δεδομένα σε αύξουσα σειρά	Διάμεσος δ			
1					
2	1 6	=MEDIAN(B2:B16)			
3	2 8				
4	3 14				
5	4 14				
6	5 15				
7	6 15				
8	7 16				
9	8 16				
10	9 17				
11	10 17				
12	11 17				
13	12 18				
14	13 19				
15	14 22				
16	15 26				

Εικόνα 76 Υπολογισμός της Διαμέσου.

Σημείωση: Η εικόνα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα με τη χρήση του Excel (Microsoft, 2026a).

Αρχείο	Κεντρική	Εισαγωγή	Σχέδιο	Διάταξη σελίδας	Τύποι
Επικόλληση	Calibri	11	A ⁺	A ⁺	
Πρόχειρο	Γραμματοσειρά	Στοίχιση			
RANDBET...	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
A	B	C	D	E	
	Δεδομένα σε αύξουσα σειρά	Διάμεσος δ			
1					
2	1 6	16			
3	2 8	πρώτο τεταρτημόριο Q_1			
4	3 14	=PERCENTILE.EXC(B2:B16;0.25)			
5	4 14				
6	5 15				
7	6 15				
8	7 16				
9	8 16				
10	9 17				
11	10 17				
12	11 17				
13	12 18				
14	13 19				
15	14 22				
16	15 26				

Εικόνα 77 Υπολογισμός της Πρώτου Τεταρτημορίου.

Σημείωση: Η εικόνα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα με τη χρήση του Excel (Microsoft, 2026a).

«Συνεχίζουμε με το **τρίτο τεταρτημόριο Q_3** που είναι η τιμή πριν από την οποία βρίσκεται το πολύ **75%** του συνόλου των παρατηρήσεων. Για να βρούμε το **Q_3** των δεδομένων μας, εντοπίζουμε τις παρατηρήσεις που είναι μεγαλύτερες από τη **διάμεσο** του συνόλου των δεδομένων και υπολογίζουμε τη διάμεσο αυτού του υποσυνόλου τιμών.

Στο Excel, το **τρίτο τεταρτημόριο Q_3** των δεδομένων μπορεί να υπολογιστεί αυτόματα με τη χρήση της συνάρτησης PERCENTILE (με παράμετρο 0,75), όπως παρουσιάζεται στο σχήμα» (Εικόνα 78).

Αρχείο	Κεντρική	Εισαγωγή	Σχέδιο	Διάταξη σελίδας	Τύποι	Δεδομένα	A
Επικόλληση	Calibri	11	A ⁺	A ⁺		Γενική	
Πρόχειρο	Γραμματοσειρά	Στοίχιση				Αριθ	
RANDBET...	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$		
A	B	C	D	E			
	Δεδομένα σε αύξουσα σειρά	Διάμεσος δ					
1							
2	1 6	16					
3	2 8	πρώτο τεταρτημόριο Q_1					
4	3 14	14					
5	4 14	δεύτερο τεταρτημόριο Q_3					
6	5 15	=PERCENTILE.EXC(B2:B16;0.75)					
7	6 15						
8	7 16						
9	8 16						
10	9 17						
11	10 17						
12	11 17						
13	12 18						
14	13 19						
15	14 22						
16	15 26						

Εικόνα 78 Υπολογισμός της Τρίτου Τεταρτημορίου.

Σημείωση: Η εικόνα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα με τη χρήση του Microsoft Excel (Microsoft, 2026a).

Αρχείο	Κεντρική	Εισαγωγή	Σχέδιο	Διάταξη σελίδας	Τύποι	Δεδομένα	A
Επικόλληση	Calibri	11	A ⁺	A ⁺		Γενική	
Πρόχειρο	Γραμματοσειρά	Στοίχιση				Αριθ	
RANDBET...	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$		
A	B	C	D	E			
	Δεδομένα σε αύξουσα σειρά	Διάμεσος δ					
1							
2	1 6	16					
3	2 8	πρώτο τεταρτημόριο Q_1					
4	3 14	14					
5	4 14	τρίτο τεταρτημόριο Q_3					
6	5 15	18					
7	6 15	Ενδοτεταρτημοριακό εύρος $Q = Q_3 - Q_1$					
8	7 16	=C6-C4					
9	8 16						
10	9 17						
11	10 17						
12	11 17						
13	12 18						
14	13 19						
15	14 22						
16	15 26						

Εικόνα 79 Υπολογισμός των λοιπών στοιχείων του θηκογράμματος.

Σημείωση: Η εικόνα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα με τη χρήση του Microsoft Excel (Microsoft, 2026a).

«Για να υπολογίσουμε το **ενδοτεταρτημοριακό εύρος** των δεδομένων **Q**, αφαιρούμε το **πρώτο τεταρτημόριο** από το **τρίτο τεταρτημόριο**, δηλαδή $Q_3 - Q_1$ » (Εικόνα 79).

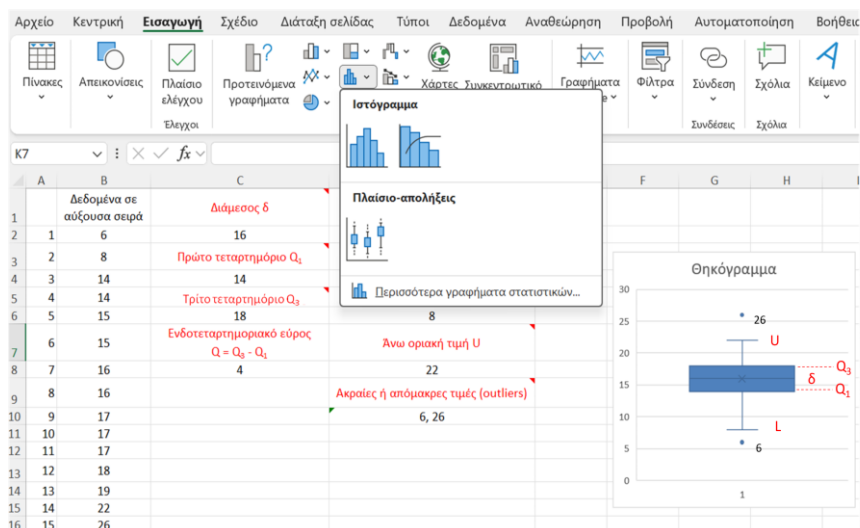
«Ο **Κάτω φράχτης** του θηκογράμματος είναι η τιμή $Q_1 - 1,5Q$, όπου Q_1 το πρώτο τεταρτημόριο και Q το ενδοτεταρτημοριακό εύρος. Αντίστοιχα, ο **Πάνω φράχτης** του θηκογράμματος είναι η τιμή $Q_3 + 1,5Q$, όπου Q_3 το τρίτο τεταρτημόριο και Q το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

Κάτω οριακή τιμή L είναι η μικρότερη τιμή των δεδομένων που είναι μεγαλύτερη ή ίση από τον κάτω φράχτη. Αντίστοιχα, **Άνω οριακή τιμή U** είναι η μεγαλύτερη τιμή των δεδομένων που είναι μικρότερη ή ίση με τον πάνω φράχτη.

Ακραία ή απόμακρη τιμή (outlier), ονομάζουμε κάθε παρατήρηση που βρίσκεται εκτός του διαστήματος $[Q_1 - 1,5Q, Q_3 + 1,5Q]$ » (Ρεκούμης et al., 2026b; Μπαρालός et al., 2026).

«Τέλος, για την κατασκευή του **Θηκογράμματος** αξιοποιούνται όλα τα στατιστικά μέτρα που υπολογίστηκαν προηγουμένως. Για τη διευκόλυνση της διαδικασίας χρησιμοποιείται το Excel και, συγκεκριμένα, η εισαγωγή γραφήματος επιλέγοντας το “Πλαίσιο και Απολήξεις” (Box and Whisker), όπως φαίνεται στο σχήμα» (Εικόνα 80).

«Στην τελευταία εικόνα φαίνεται η ανατομία του **Θηκογράμματος**, οπτικοποιώντας και συνοψίζοντας τη θεωρία. Στην επόμενη ενότητα θα έχετε την ευκαιρία να αλληλεπιδράσετε με ένα διαδραστικό κουίζ, το οποίο προσφέρει άμεση ανατροφοδότηση και στοχευμένη καθοδήγηση. Καλή συνέχεια!» (Εικόνα 81).



Εικόνα 80 Κατασκευή θηκογράμματος.

Σημείωση: Η εικόνα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα με τη χρήση του Excel (Microsoft, 2026a).



Εικόνα 81 Η Ανατομία του θηκογράμματος.

Σημείωση: Το background σχεδίασης δημιουργήθηκε με τη χρήση τεχνητής νοημοσύνης μέσω NotebookLM (Google, 2026a) (προτροπή συγγραφέως: το κείμενο της ηχητικής επεξήγησης σελ. 153-155).

3.3 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 2: Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών

Μέσω της δραστηριότητας «Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών», οι εκπαιδευόμενοι/ες αλληλεπιδρούν με ένα διαδραστικό κουίζ, το οποίο προσφέρει άμεση ανατροφοδότηση και στοχευμένη καθοδήγηση. Η διαδικασία αυτή ενισχύει την ενεργό μάθηση, επιτρέποντάς τους να εμπεδώσουν με ακρίβεια την ανατομία του θηκογράμματος.

Το **Question Set [H5P Lumi]** αποτελείται από 6 ερωτήσεις: **3 multiple choice, 1 true/false, 1 Drag and Drop, 1 Drag the Words.**

Το τεστ ενσωματώνει έναν **AI Tutor**, για κάθε απάντηση.

- Σε περίπτωση **λάθους**, ο AI Tutor δεν απογοητεύει τον χρήστη, αλλά εξηγεί τη χρησιμότητα του σωστού εργαλείου, δημιουργώντας την ανάγκη στον/στην εκπαιδευόμενη να μάθει "πώς γίνεται αυτό στην πράξη".
- Σε περίπτωση **σωστής** απάντησης, ο AI Tutor επιβραβεύει τη στρατηγική σκέψη, προκαλώντας τον χρήστη να δει την εφαρμογή της θεωρίας του στο κυρίως μέρος του μαθήματος (Demonstration).

Πίνακας 35 Εξάσκηση Κατανόησης Εννοιών μέσω Question Set

	Ερώτηση	Ανατροφοδότηση	Καθοδήγηση
1	Ποιος είναι ο πιο αποδοτικός τρόπος για να υπολογίσετε το Πρώτο Τεταρτημόριο (Q_1) των μετρήσεων του μονοξειδίου του άνθρακα στο Excel, χωρίς να χρειαστεί να χωρίσετε χειροκίνητα τα δεδομένα σε υποσύνολα (Εικόνα 82);  Εικόνα 82 Εικόνα σχολικής τάξης. Σημείωση. Classroom setting [Image]. COERLL, n.d., https://coerll.utexas.edu/methods/images/modules/cm/classrooms/medium-1.jpg. [CC BY-NC-SA 3.0]. Επιλογές: Α) Ταξινόμηση των δεδομένων σε αύξουσα σειρά και εύρεση της μεσαίας τιμής του πρώτου μισού των παρατηρήσεων. Β) Χρήση της συνάρτησης =MEDIAN() με επιλογή μόνο των πρώτων 15 ημερών.	Feedback (on correct answer): Εξαιρετική στρατηγική σκέψη! Αντί να χάνεις χρόνο με χειροκίνητες ταξινομήσεις και χωρισμούς δεδομένων, επιλέγεις την κατάλληλη συνάρτηση του Excel για άμεσο αποτέλεσμα. Αυτή ακριβώς η ψηφιακή δεξιότητα θα σου επιτρέψει στο κυρίως μέρος του μαθήματος να αναλύσεις τις 31 ημέρες του Μαρτίου για Αθήνα και Θεσσαλονίκη στο φτερό. Feedback (on wrong answer): Λάθος! Θυμήσου ότι η συνάρτηση PERCENTILE.EXC με παράμετρο 0,25 κάνει όλη τη "βαριά" δουλειά για εσένα σε ένα δευτερόλεπτο, χωρίς να πειράξει τη σειρά των δεδομένων σου.	Guidance (on wrong answer): Καλό είναι να ανατρέξεις στην παρουσίαση εδώ (4^η διαφάνεια).

	Γ) Χρήση της συνάρτησης =PERCENTILE.EXC(δεδομένα; 0,25). Δ) Χρήση της συνάρτησης =STDEV.P() με παράμετρο το 25%. Σωστή απάντηση Γ) Χρήση της συνάρτησης =PERCENTILE.EXC(δεδομένα; 0,25).		
2	Σε ένα δείγμα παρατηρήσεων με άρτιο πλήθος τιμών (π.χ. $N = 30$), πώς ορίζεται θεωρητικά η διάμεσος (δ); Επιλογές: A) Είναι ο μέσος όρος των δύο μεσαίων παρατηρήσεων της ταξινομημένης σειράς. B) Είναι η συχνότερη τιμή που εμφανίζεται στο δείγμα. Γ) Είναι η μεσαία παρατήρηση αφού ταξινομήσουμε τα δεδομένα σε αύξουσα σειρά. Δ) Είναι το ημίαθροισμα της ελάχιστης και της μέγιστης τιμής. Σωστή απάντηση A) Είναι ο μέσος όρος των δύο μεσαίων παρατηρήσεων της ταξινομημένης σειράς.	Feedback (on correct answer): Εξαιρετικά! Κατέχεις τη θεωρητική λεπτομέρεια που διαχωρίζει το άρτιο από το περιττό πλήθος δεδομένων. Αυτή η μαθηματική ακρίβεια είναι απαραίτητη για να μην υπάρχουν αποκλίσεις στις αναφορές σου. Feedback (on wrong answer): Λάθος! Αξίζει να σημειωθεί ότι η επιλογή (Γ) ισχύει όταν το πλήθος των ημερών είναι περιττό (π.χ. 31 μέρες). Όταν όμως έχουμε ζυγό αριθμό τιμών, δεν υπάρχει μία ακριβώς μεσαία θέση, οπότε παίρνουμε τον μέσο όρο των δύο που βρίσκονται στο κέντρο. Οι απαντήσεις (B) και (Δ) δε σχετίζονται με τη διάμεσο.	Guidance (on wrong answer): Ξαναδές την παρουσίαση εδώ (3^η διαφάνεια).
3	Από θεωρητική άποψη, τι αντιπροσωπεύει μια "ακραία ή απόμακρη τιμή (outlier)" σε μια περιβαλλοντική μελέτη ρύπανσης; Επιλογές: A) Τη συνήθη και αναμενόμενη κατάσταση του αέρα στην πόλη. B) Μια ασυνήθιστη παρατήρηση που βρίσκεται εκτός των ορίων των φρακτών και μπορεί να οφείλεται σε έκτακτα φαινόμενα. Γ) Το μέσο επίπεδο ρύπανσης ολόκληρου του έτους. Δ) Την τιμή που ισούται με το πρώτο τεταρτημόριο (Q_1). Σωστή απάντηση B) Μια ασυνήθιστη παρατήρηση που βρίσκεται εκτός των ορίων των φρακτών και μπορεί να οφείλεται σε έκτακτα φαινόμενα.	Feedback (on correct answer): Ορθότατα! Στοχεύεις στην ουσία της ανάλυσης δεδομένων. Η αναγνώριση των outliers ως έκτακτων γεγονότων προστατεύει τον αναλυτή από λανθασμένα συμπεράσματα. Στο κυρίως μέρος του μαθήματος θα δεις πώς αυτή η θεωρητική προσέγγιση θα δικαιώσει την αναφορά σου προς το Υπουργείο! Feedback (on wrong answer): Λάθος! Δεν πειράζει, η στατιστική ερμηνεία των άκρων θέλει προσοχή. Ένα outlier δεν είναι ο κανόνας, αλλά η εξαίρεση.	Guidance (on wrong answer): Δες ξανά την παρουσίαση εδώ (6^η διαφάνεια).

4	Η Κάτω οριακή τιμή L ενός συνόλου παρατηρήσεων είναι η μικρότερη τιμή των παρατηρήσεων. Επιλογές: A) Σωστό B) Λάθος Σωστή απάντηση B. Λάθος	Feedback (on correct answer): Πολύ σωστά! Εντόπισες την παγίδα. Η Κάτω οριακή τιμή L είναι η μικρότερη τιμή των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερη ή ίση από τον κάτω φράχτη. Feedback (on wrong answer): Λάθος! Η L είναι η μικρότερη τιμή των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερη ή ίση από τον κάτω φράχτη.	Guidance (on wrong answer): Δες την 6η διαφάνεια εδώ!
5	Σε έναν σταθμό μέτρησης, μετά από την ανάλυση των δεδομένων, βρέθηκε ότι το πρώτο τεταρτημόριο είναι $Q_1 = 2$, το τρίτο τεταρτημόριο είναι $Q_3 = 4$ και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $Q = 2$. Συμπληρώστε τα κενά: Με βάση τους τύπους της θεωρίας, ο Κάτω Φράχτης ($Q_1 - 1.5Q$) ισούται με *-1*. Αντίστοιχα, ο Πάνω Φράχτης ($Q_3 + 1.5Q$) ισούται με *7*. Επομένως, μια μέρα που κατέγραψε τιμή ρύπανσης ίση με 8 mg/m^3 θεωρείται *ακραία τιμή*. Επιλογές: *-1* *7* *ακραία τιμή* *4* Σωστή απάντηση Το *-1* στο 1^ο κενό, το *7* στο 2^ο κενό και το *ακραία τιμή* στο 3^ο κενό	0% - 50% Feedback (on wrong answer): Λάθος! Μην απογοητεύεσαι για τις πράξεις! Ας το δούμε βήμα-βήμα: $1.5Q = 3$. Άρα, Κάτω Φράχτης: $2 - 3 = -1$. Πάνω Φράχτης: $4 + 3 = 7$. Το 8 είναι μεγαλύτερο από το 7, άρα βγήκε εκτός φράχτη! 51% - 100% Feedback (on correct answer): Πολύ καλή δουλειά! Εντόπισες σωστά το εργαλείο ατομικής παρακολούθησης από το εργαλείο συνολικής ανάλυσης.	Guidance (on wrong answer): Καλό είναι να ανατρέξεις στην παρουσίαση (6^η διαφάνεια) εδώ!
6	Μια πόλη παρουσιάζει για 9 ημέρες τις εξής τιμές μονοξειδίου του άνθρακα (σε $\mu\text{gr/m}^3$): 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 5, 6 (Εικόνα 83). Συμπληρώστε την τιμή των παρακάτω στατιστικών μέτρων. Μια πόλη παρουσιάζει για 9 ημέρες τις εξής τιμές μονοξειδίου του άνθρακα (σε $\mu\text{gr/m}^3$): 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 5, 6. Συμπληρώστε την τιμή των παρακάτω στατιστικών μέτρων. Διάμεσος Πρώτο τεταρτημόριο Τρίτο τεταρτημόριο Εικόνα 83 Εικόνα "Drag and Drop" <u>Σημείωση:</u> Η εικόνα δημιουργήθηκε	0% - 50% Feedback (on wrong answer): Προσοχή στους ορισμούς των δ, Q_1, Q_3! Ο συντελεστής CV είναι ο λόγος της τυπικής απόκλισης προς τη μέση τιμή ($1,41/3 \approx 0,47$) και το $Q_3 = (4+5)/2 = 4,5$. 51% - 100% Feedback (on correct answer): Εξαιρετική δουλειά! Οι υπολογισμοί σου είναι ακριβείς! Αποδεικνύεις ότι μπορείς να μεταφράσεις τους	Guidance (on wrong answer): Καλό είναι να ανατρέξεις στην παρουσίαση: https://app.lumi.education/run/YJmCBj

από τη συγγραφέα με τη χρήση του MS PowerPoint (Microsoft., 2026b). Επιλογές: A) 4 B) 2 Γ) 1,5 Σωστή απάντηση 4→ Εύρος 0,47→CV 4,5→Q3	τύπους της θεωρίας σε πραγματικά νούμερα.	
--	--	--

3.4 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 3: Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας (Skill)

Η ενότητα 2.4 δομείται ως μια βιωματική επίδειξη ψηφιακών και μαθηματικών δεξιοτήτων. Μέσω του **διαδραστικού εργαλείου** ([Course Presentation](#) - [H5P Lumi]) οι εκπαιδευόμενοι/ες παρακολουθούν την παράλληλη διαδικασία υπολογισμού των στατιστικών μέτρων. Αρχικά, η κατασκευή του θηκογράμματος πραγματοποιείται με τη χρήση των αντίστοιχων **στατιστικών τύπων**, παρέχοντας το αναγκαίο θεωρητικό έρεισμα. Ακολούθως, παρουσιάζεται η **ψηφιακή υλοποίηση** στο υπολογιστικό φύλλο του Excel, όπου οι εκπαιδευόμενοι/ες εξοικειώνονται με τη χρήση συναρτήσεων για την επεξεργασία μεγάλου όγκου δεδομένων. Η ενότητα ολοκληρώνεται με τη συγκριτική ανάλυση των θηκογραμμάτων των δύο πόλεων, η οποία καθιστά ορατές τις διαφορές στην ποιότητα του αέρα, απομονώνοντας ταυτόχρονα τις ακραίες τιμές που αλλοιώνουν την πραγματική εικόνα της ρύπανσης.

Το **Course Presentation** παρουσιάζει μία σειρά υπολογιστικών φύλλων (μέσω κατάλληλων στιγμιότυπων οθόνης), ενισχύοντας την κατανόηση με κατάλληλα **hotspots** που προβάλλουν τη μαθηματική τεκμηρίωση, καθώς και την παρακάτω **ηχητική επεξήγηση** [Google AI Studio], η οποία αποτυπώνεται γραπτώς στην οθόνη ως συνοδευτικό κείμενο (Εικόνα 84):

Ψηφιακό Μικρο - Μάθημα 2
“Δυναμικά Θηκογράμματα & Λήψη Αποφάσεων με Δεδομένα”

Καλώς ήρθατε στο εργαστήριο "Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας" του Ψηφιακού Μικρο-μαθήματος! Τώρα που θέσαμε το πρόβλημα και κατανοήσαμε τις έννοιες, ήρθε η ώρα να περάσουμε στην πράξη. Στον **σύνδεσμο** που εμφανίζεται στην οθόνη σας μπορείτε να ξαναδείτε το ρεαλιστικό πρόβλημα. Στόχος μας είναι να μετατρέψουμε αυτά τα δεδομένα σε αποδείξεις. Πρώτον, θα δούμε τη μαθηματική λογική πίσω από την κατασκευή του θηκογράμματος και των μέτρων μεταβλητότητας των δύο πόλεων. Δεύτερον, θα εκτελέσουμε τους υπολογισμούς στο Excel, χρησιμοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις που αυτοματοποιούν την ανάλυση και απομονώνουν τις ακραίες τιμές που μας προβληματίζουν. Στο τέλος, θα ενώσουμε τα στατιστικά ευρήματα, τα οποία θα "μιλήσουν" για εμάς, δείχνοντας ποια πόλη είναι πραγματικά πιο επιβαρυνμένη στην καθημερινή της ζωή. Είστε έτοιμοι;

Εικόνα 84 Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας του Μικρο-Μαθήματος 2 [Course Presentation-H5P Lumi].

Σημείωση. Το background των διαφανειών της παρουσίασης δημιουργήθηκε με τη χρήση τεχνητής νοημοσύνης μέσω NotebookLM (Google, 2026a) (προτροπή συγγραφώς: το κείμενο της ηχητικής επεξήγησης σελ.160).

«Καλώς ήρθατε στο εργαστήριο "Επίδειξη σχετικής Δεξιότητας" του Ψηφιακού Μικρο-μαθήματος! Τώρα που θέσαμε το πρόβλημα και κατανοήσαμε τις έννοιες, ήρθε η ώρα να περάσουμε στην πράξη. Στον [σύνδεσμο](#) που εμφανίζεται στην οθόνη σας μπορείτε να ξαναδείτε το ρεαλιστικό πρόβλημα. Στόχος μας είναι να μετατρέψουμε αυτά τα δεδομένα σε αποδείξεις.

Πρώτον, θα δούμε τη μαθηματική λογική πίσω από την κατασκευή του θηκογράμματος και των μέτρων μεταβλητότητας των δύο πόλεων.

Δεύτερον, θα εκτελέσουμε τους υπολογισμούς στο Excel, χρησιμοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις που αυτοματοποιούν την ανάλυση και απομονώνουν τις ακραίες τιμές που μας προβληματίζουν.

Στο τέλος, θα ενώσουμε τα στατιστικά ευρήματα, τα οποία θα “μιλήσουν” για εμάς, δείχνοντας ποια πόλη είναι πραγματικά πιο επιβαρυνμένη στην καθημερινή της ζωή. Είστε έτοιμοι;».

«Αρχικά, ας ξεκινήσουμε με τις ημερήσιες μετρήσεις μονοξειδίου του άνθρακα στην Αθήνα και ας επικεντρωθούμε στη **Διάμεσο**. Γιατί μας ενδιαφέρει; Γιατί, σε αντίθεση με τον Μέσο Όρο, η Διάμεσος δεν “παρασύρεται” από τις ακραίες τιμές.

Μαθηματικά: Θυμηθείτε, η διάμεσος χωρίζει τα δεδομένα μας ακριβώς στη μέση, αφού πρώτα τα ταξινομήσουμε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο. Αν το πλήθος των ημερών είναι άρτιο, όπως οι 14 ημέρες της μέτρησής μας, παίρνουμε τον μέσο όρο των δύο μεσαίων παρατηρήσεων (δηλαδή της 7^{ης} και 8^{ης} παρατήρησης). Οπότε η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα $\frac{2+2,1}{2} = \frac{4,1}{2} = 2,05$.

Στο **Excel**: Εδώ η διαδικασία απλουστεύεται. Επιλέγουμε το εύρος των δεδομένων για την Αθήνα και χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση =MEDIAN(). Το Excel ταξινομεί αυτόματα τις τιμές και υπολογίζει το αποτέλεσμα σε κλάσματα του δευτερολέπτου!» (Εικόνα 85).

«Τώρα που εντοπίσαμε το κέντρο των δεδομένων μας, ας προχωρήσουμε στο **Πρώτο Τεταρτημόριο Q₁**. Αυτή η τιμή μάς δείχνει το όριο κάτω από το οποίο βρίσκεται το 25% των πιο “καθαρών” ημερών.

Μαθηματικά: Για να βρούμε το Q₁, χωρίζουμε το σύνολο των δεδομένων μας στη μέση (με βάση τη Διάμεσο) και υπολογίζουμε τη Διάμεσο του κάτω υποσυνόλου, που είναι ο αριθμός 1,9.

Στο **Excel**: Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση =PERCENTILE(), ορίζοντας ως παράμετρο το 0,25 και υπολογίζουμε αυτόματα το Q₁, επιβεβαιώνοντας την τιμή 1,9. Η συνάρτηση αυτή είναι η ιδανική για να εντοπίσουμε αυτό το κρίσιμο σημείο στην κατανομή του ρύπου μας, CO» (Εικόνα 86).

«Αφού προσδιορίσαμε το πρώτο τεταρτημόριο, ας προχωρήσουμε στο **Τρίτο Τεταρτημόριο Q₃**. Αυτή η τιμή αντιστοιχεί στο σημείο κάτω από το οποίο βρίσκεται το 75% των δεδομένων μας. Είναι, ουσιαστικά, το ανώτερο όριο της “καθημερινότητας” πριν περάσουμε στις πιο επιβαρυνμένες ημέρες.

Μαθηματικά: Το Q₃ είναι η διάμεσος του άνω υποσυνόλου των τιμών μα, δηλαδή ο αριθμός 2,2.

Στο **Excel**: Όπως και πριν, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση =PERCENTILE(), αλλά αυτή τη φορά με παράμετρο 0,75 και υπολογίζουμε αυτόματα το Q₃, επιβεβαιώνοντας την τιμή 2,2» (Εικόνα 87).

«Τώρα που έχουμε το Q₁ και το Q₃, ήρθε η ώρα να υπολογίσουμε το **Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος Q**.

Μαθηματικά: Το Q είναι η διαφορά Q₃ – Q₁, δηλαδή ο αριθμός 2,2 – 1,9 = 0,3. Όσο πιο μικρό είναι το Q, τόσο πιο συγκεντρωμένες είναι οι τιμές μας γύρω από τη διάμεσο.

Στο **Excel**: Δεν υπάρχει έτοιμη συνάρτηση, αλλά είναι πανεύκολο! Απλά αφαιρούμε το κελί που περιέχει το Q_1 από το κελί που περιέχει το Q_3 , επιβεβαιώνοντας την τιμή 0,3» (Εικόνα 88).

AVERAGE			
A	B	C	D
1	Ημέρα	Αθήνα (mg/m ³)	M ταξινόμηση
2	1	2.1	1.8
3	2	1.9	1.8
4	3	2.3	1.9
5	4	2	1.9
6	5	1.8	2
7	6	2.4	2
8	7	2.2	2
9	8	2	2.1
10	9	1.9	2.1
11	10	2.1	2.2
12	11	2.3	2.2
13	12	1.8	2.3
14	13	2.2	2.3
15	14	2	2.4

Εικόνα 85 Υπολογισμός της διαμέσου στην Αθήνα, για την περίοδο 1-14 Μαρτίου 2026

Σημείωση: Η εικόνα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα με τη χρήση του Microsoft Excel (Microsoft, 2026a).

AVERAGE			
A	B	C	D
1	Ημέρα	Αθήνα (mg/m ³)	M ταξινόμηση
2	1	2.1	1.8
3	2	1.9	1.8
4	3	2.3	1.9
5	4	2	1.9
6	5	1.8	2
7	6	2.4	2
8	7	2.2	2
9	8	2	2.1
10	9	1.9	2.1
11	10	2.1	2.2
12	11	2.3	2.2
13	12	1.8	2.3
14	13	2.2	2.3
15	14	2	2.4

Εικόνα 86 Υπολογισμός του πρώτου τεταρτημορίου Q_1 στην Αθήνα, για την περίοδο 1-14 Μαρτίου 2026.

Σημείωση: Η εικόνα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα με τη χρήση του Excel (Microsoft, 2026a).

AVERAGE			
A	B	C	D
1	Ημέρα	Αθήνα (mg/m ³)	M ταξινόμηση
2	1	2.1	1.8
3	2	1.9	1.8
4	3	2.3	1.9
5	4	2	1.9
6	5	1.8	2
7	6	2.4	2
8	7	2.2	2
9	8	2	2.1
10	9	1.9	2.1
11	10	2.1	2.2
12	11	2.3	2.2
13	12	1.8	2.3
14	13	2.2	2.3
15	14	2	2.4

Εικόνα 87 Υπολογισμός του τρίτου τεταρτημορίου Q_3 στην Αθήνα, για την περίοδο 1-14 Μαρτίου 2026.

Σημείωση: Η εικόνα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα με τη χρήση του Microsoft Excel (Microsoft, 2026a).

AVERAGE			
A	B	C	D
1	Ημέρα	Αθήνα (mg/m ³)	M ταξινόμηση
2	1	2.1	1.8
3	2	1.9	1.8
4	3	2.3	1.9
5	4	2	1.9
6	5	1.8	2
7	6	2.4	2
8	7	2.2	2
9	8	2	2.1
10	9	1.9	2.1
11	10	2.1	2.2
12	11	2.3	2.2
13	12	1.8	2.3
14	13	2.2	2.3
15	14	2	2.4

Εικόνα 88 Υπολογισμός του Ενδοτεταρτημοριακού Εύρους στην Αθήνα, για την περίοδο 1-14 Μαρτίου 2026.

Σημείωση: Η εικόνα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα με τη χρήση του Microsoft Excel (Microsoft, 2026a).

«Ο **Κάτω φράχτης** του θηκογράμματος είναι η τιμή $Q_1 - 1,5Q$, όπου Q_1 το πρώτο τεταρτημόριο και Q το ενδοτεταρτημοριακό εύρος. Επομένως, ισούται με τον αριθμό $1,9 - 1,5 \cdot 0,3 = 1,45$. Αντίστοιχα, ο **Πάνω φράχτης** του θηκογράμματος είναι η τιμή $Q_3 + 1,5Q$, όπου Q_3 το τρίτο τεταρτημόριο και Q το ενδοτεταρτημοριακό εύρος. Επομένως, ισούται με τον αριθμό $2,2 + 1,5 \cdot 0,3 = 2,65$.

Κάτω οριακή τιμή L είναι η μικρότερη τιμή των δεδομένων που είναι μεγαλύτερη ή ίση από τον κάτω φράχτη, δηλαδή ο αριθμός 1,8. Αντίστοιχα, **Άνω οριακή τιμή U** είναι η μεγαλύτερη τιμή των δεδομένων που είναι μικρότερη ή ίση με τον πάνω φράχτη, δηλαδή ο αριθμός 2,4.

Ακραία ή απόμακρη τιμή (outlier), ονομάζουμε κάθε παρατήρηση που βρίσκεται εκτός του διαστήματος $[Q_1 - 1,5Q, Q_3 + 1,5Q]$. Τέτοιες ακραίες τιμές δεν παρατηρούνται στα δεδομένα της Αθήνας» (Ρεκούμης et al., 2026b; Μπαράλος et al., 2026) (Εικόνα 89).

«Τώρα που αναλύσαμε σε βάθος τα δεδομένα της Αθήνας και κατανοήσαμε τον τρόπο εντοπισμού των ακραίων τιμών, είναι ώρα να εφαρμόσουμε την ίδια μεθοδολογία για τη Θεσσαλονίκη.

Για λόγους σύγκρισης, συνεχίζουμε υπολογίζοντας κατ' αντιστοιχία τα ίδια στατιστικά μέτρα για τα δεδομένα της συμπρωτεύουσας. Ο στόχος μας είναι να δούμε αν η «συμπεριφορά» των ρύπων στη Θεσσαλονίκη ακολουθεί το ίδιο πρότυπο ή αν παρουσιάζει αποκλίσεις που θα πρέπει να μας ανησυχήσουν. Δείτε στην εικόνα τις τιμές των: δ , Q_1 , Q_2 , Q , Κάτω Φράχτη, Άνω Φράχτη, U , L για τα δεδομένα της Θεσσαλονίκης» (Εικόνα 90).

Ημέρα	Αθήνα (mg/m ³)	Με ταξινόμηση	Διάμεσος δ	Θεσσαλονίκη (mg/m ³)	Με ταξινόμηση	Διάμεσος δ
1	2.1	1.8	2.05 $\delta = \frac{2+2.1}{2} = \frac{4.1}{2} = 2.05$	1	0.9	1.00 $\delta = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$
2	1.9	1.8	πρώτο τεταρτημόριο Q_1	2	1.1	πρώτο τεταρτημόριο Q_1
3	2.3	1.9		3	0.8	0.9
4	2	1.9	τρίτο τεταρτημόριο Q_3	4	4.5	τρίτο τεταρτημόριο Q_3
5	1.8	2	2.2	5	4.5	0.9
6	2.4	2	ενδοτεταρτημοριακό εύρος $Q = Q_3 - Q_1$	6	1.2	0.9
7	2.2	2	0.30	7	1	0.30
8	2	2.1	Κάτω Φράγμα $Q_1 - 1,5Q$	8	0.9	1
9	1.9	2.1	1.45 $Q_1 - 1,5Q = 1,9 - 1,5 \cdot 0,3 = 1,45$	9	0.8	1.1
10	2.1	2.2	Άνω φράγμα $Q_3 + 1,5Q$	10	4.5	1.1
11	2.3	2.2	2.65 $Q_3 + 1,5Q = 2,2 + 1,5 \cdot 0,3 = 2,65$	11	1.1	1.2
12	1.8	2.3	Κάτω οριακή τιμή L	12	0.7	4.5
13	2.2	2.3	1.8	13	1	4.5
14	2	2.4	Άνω οριακή τιμή U	14	0.9	4.5
			2.4			1.2
			Ακραίες ή απόμακρες τιμές (outliers)			Ακραίες ή απόμακρες τιμές (outliers)
						3 φορές ο αριθμός 4,5

Εικόνα 89 Υπολογισμός των λοιπών στοιχείων του θηκογράμματος στην Αθήνα, για την περίοδο 1-14 Μαρτίου 2026.

Σημείωση: Η εικόνα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα με τη χρήση του Excel (Microsoft, 2026a).

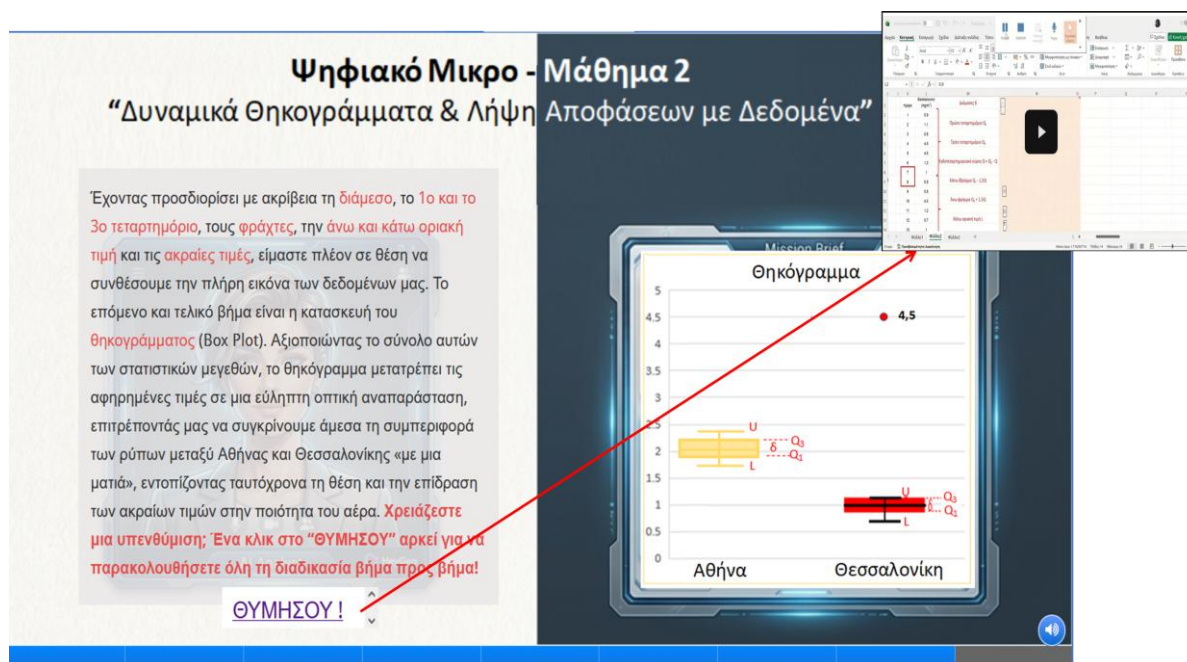
Εικόνα 90 Υπολογισμός των στοιχείων του θηκογράμματος στη Θεσσαλονίκη, για την περίοδο 1-14 Μαρτίου 2026.

Σημείωση: Η εικόνα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα με τη χρήση του Excel (Microsoft, 2026a).

«Έχοντας προσδιορίσει με ακρίβεια τη διάμεσο, το 1ο και το 3ο τεταρτημόριο, τους φράχτες, την άνω και κάτω οριακή τιμή και τις ακραίες τιμές, είμαστε πλέον σε θέση να συνθέσουμε την πλήρη εικόνα των δεδομένων μας. Το επόμενο και τελικό βήμα είναι η κατασκευή του

Θηκογράμματος (Box Plot). Αξιοποιώντας το σύνολο αυτών των στατιστικών μεγεθών, το θηκόγραμμα μετατρέπει τις αφηρημένες τιμές σε μια εύληπτη οπτική αναπαράσταση, επιτρέποντάς μας να συγκρίνουμε άμεσα τη συμπεριφορά των ρύπων μεταξύ Αθήνας και Θεσσαλονίκης «με μια ματιά», εντοπίζοντας ταυτόχρονα τη θέση και την επίδραση των ακραίων τιμών στην ποιότητα του αέρα.

Χρειάζεστε μια υπενθύμιση; Ένα κλικ στο “ΘΥΜΗΣΟΥ” αρκεί για να παρακολουθήσετε όλη τη διαδικασία βήμα προς βήμα» (Εικόνα 91).



Εικόνα 91 Κατασκευή θηκογράμματος για το σύνολο δεδομένων της Αθήνας και της Θεσσαλονίκης, κατά την περίοδο 1-14 Μαρτίου 2026.

Σημείωση: Περιέχεται Screencast Tutorial (MS Excel) (ως ενσωματωμένος σύνδεσμος) με μουσική υπόκρουση: Beethoven – Moonlight Sonata (First Theme) (Saturn-3-Music, 2025), αναρτημένα στο canva. Επίσης η εικόνα δημιουργήθηκε από τη συγγραφέα με τη χρήση του ΜΣ Excel.

Το εργαστήριο ολοκληρώνεται με την εμφάνιση ενός **AI Avatar [HeyGen]**, που ανακεφαλαιώνει τα ευρήματα και απαντά στο αρχικό ρεαλιστικό πρόβλημα.

Η ομιλία του συνοδεύεται από υποτίτλους για μεγαλύτερη προσβασιμότητα, ως εξής:

«Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, τα θηκογράμματα καταδεικνύουν ότι η χρήση του Μέσου Όρου ή της Μέγιστης Τιμής μπορεί να οδηγήσει σε παραπλανητικά συμπεράσματα, καθώς οι ακραίες τιμές στη Θεσσαλονίκη «τείνουν» το στατιστικό αποτέλεσμα προς τα πάνω, αποκρύπτοντας την πραγματική, καθημερινή επιβάρυνση.

Αντίθετα, η επιστημονική ακρίβεια επιτυγχάνεται μέσω της ταυτόχρονης απεικόνισης της Διάμεσου και του ενδοτεταρτημοριακού εύρους, τα οποία αναδεικνύουν την Αθήνα ως την πόλη με την πιο σταθερά υψηλή συγκέντρωση ρύπων.

Μέσω των θηκογραμμάτων, οι φορείς λήψης αποφάσεων και οι πολίτες μπορούν "με μια ματιά" να διακρίνουν την τυπική καθημερινή ρύπανση από τις έκτακτες αιχμές, επιτρέποντας τον στοχευμένο σχεδιασμό πολιτικών προσαπείας του περιβάλλοντος που βασίζονται στην ουσιαστική διαχρονική κατάσταση κάθε πόλης και όχι σε αριθμητικά παράδοξα» (Εικόνα 92).



Εικόνα 92 Σύνοψη των ευρημάτων-επίλυση του ρεαλιστικού προβλήματος.

Σημείωση. Το AI Avatar [HeyGen] δημιουργήθηκε με χρήση του εργαλείου HeyGen (HeyGen, 2026). Η ομιλία παράχθηκε βάσει κειμένου και οδηγιών της συγγραφέως (προτροπή: κείμενο του avatar σελ. 163). Επίσης, το background των διαφανειών της παρουσίασης δημιουργήθηκε με τη χρήση τεχνητής νοημοσύνης μέσω NotebookLM (Google, 2026a).

3.5 Εκπαιδευτική Δραστηριότητα 4: Εξάσκηση εφαρμογής δεξιότητας (Skill)

Οι εκπαιδευόμενοι/ες μεταβαίνουν στο “Ψηφιακό Εργαστήριο” για μια δραστηριότητα διαμορφωτικής αξιολόγησης. Ένα **AI Avatar [HeyGen]** τους/τις κατευθύνει σε ένα [Υπερκείμενο](#) (Interactive Document), το οποίο περιλαμβάνει τα εξής:

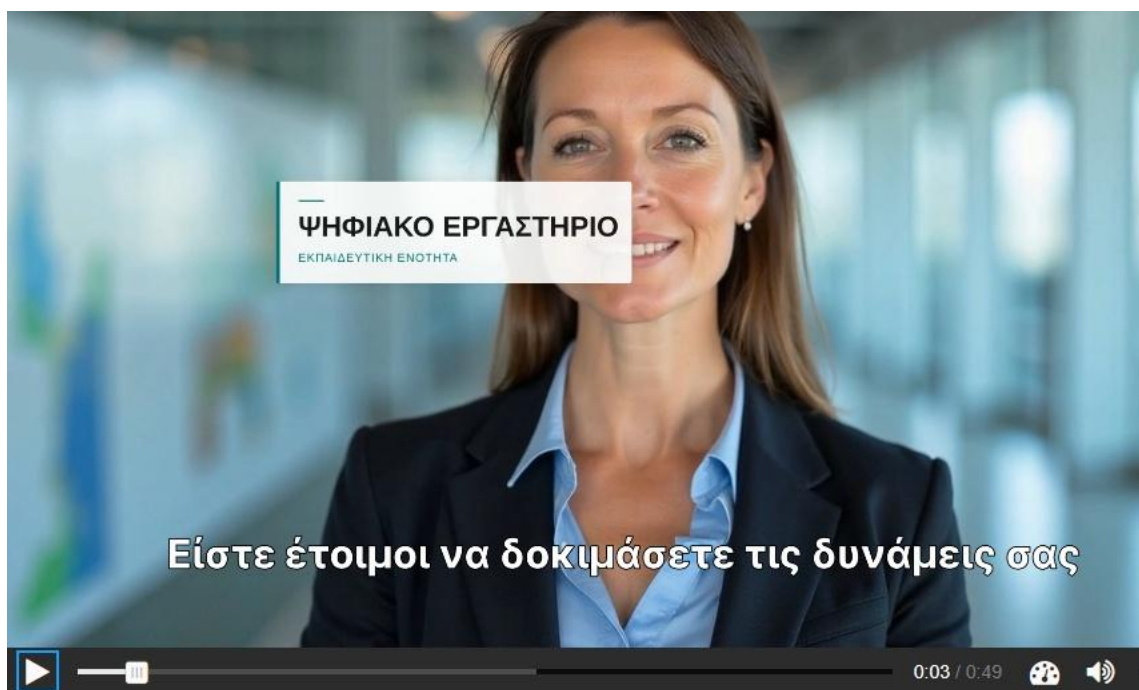
2. Το σενάριο ενός ρεαλιστικού προβλήματος.
3. Το αρχείο εργασίας που περιέχει τα δεδομένα του σεναρίου καθώς και το πρότυπο (template) των υπολογισμών ([εδώ](#)).
3. Ένα [Quiz αυτοαξιολόγησης \[Lumi H5P\]](#) ως προσωπικό βοηθό για άμεση, μη κριτική ανατροφοδότηση (Interactive Feedback).
4. Τον σύνδεσμο προς το [Course Presentation](#)-επίδειξη δεξιότητας για στοχευμένη καθοδήγηση (Guidance).

Το “Ψηφιακό Εργαστήριο” ξεκινά με ένα [Interactive Video \[Lumi \(H5P\)\]](#) όπου το AI Avatar καλωσορίζει τους/τις εκπαιδευόμενους/ες ως εξής:

«Καλώς ήρθατε στο ψηφιακό μας εργαστήριο. Είστε έτοιμοι να δοκιμάσετε τις δυνάμεις σας στην πράξη; Σειρά σας!

Τώρα που είδαμε πώς αναλύουμε τη ρύπανση, ήρθε η ώρα να εφαρμόσετε τη μεθοδολογία σε ένα νέο, ρεαλιστικό σενάριο: τη μελέτη της “θερμικής νησίδας”.

Μην ανησυχείτε για το αν θα φτάσετε αμέσως στο τέλειο αποτέλεσμα· αυτό το στάδιο είναι ο δικός σας **δημιουργικός χώρος πειραματισμού**. Για κάθε σας βήμα, το Course Presentation - επίδειξης δεξιότητας προσφέρει την απαραίτητη **καθοδήγηση**, ενώ ένα **Quiz αυτοαξιολόγησης** θα γίνει ο προσωπικός σας σύμβουλος για να αναγνωρίσετε την πρόοδό σας. Για να ξεκινήσετε πατήστε το κουμπί “Ψηφιακό Εργαστήριο” που εμφανίζεται στην οθόνη σας. Εκεί θα βρείτε την αναλυτική εκφώνηση της δραστηριότητας και τον σύνδεσμο για να κατεβάσετε το αρχείο δεδομένων. Καλή επιτυχία στην εξερεύνησή σας!» (Εικόνα 93).



Εικόνα 93 Εισαγωγή στην Εξάσκηση Εφαρμογής Δεξιότητας του μικρο-μαθήματος 2
 Σημείωση. Βίντεο δημιουργήθηκε με τη χρήση του εργαλείου HeyGen (HeyGen, 2026). Το avatar και η ομιλία παρήχθησαν βάσει προτροπής της συγγραφέως: κείμενο του avatar σελ. 164.

Το “Ψηφιακό Εργαστήριο” συνεχίζει με την ανάθεση του παρακάτω σεναρίου στους/στις εκπαιδευόμενους/ες (υπό μορφή υπερκειμένου):

Σενάριο: «Μελέτη της θερμικής νησίδας»

Ο Οργανισμός Περιβάλλοντος μελετά τη θερμική νησίδα. Έχουν καταγραφεί οι μέγιστες θερμοκρασίες (σε °C) για 14 ημέρες σε δύο τοποθεσίες: στο **Αστικό Πάρκο** και στο **Πυκνοκατοικημένο Κέντρο** (Πίνακας 36).

Πίνακας 36 Μέγιστες θερμοκρασίες (σε °C) για 14 ημέρες σε δύο τοποθεσίες: στο Αστικό Πάρκο και στο Πυκνοκατοικημένο Κέντρο

Αστικό Πάρκο (°C)	Κέντρο Πόλης (°C)
28, 29, 30, 30, 31, 31, 32, 32, 32, 33, 33, 34, 35, 36	32, 33, 33, 34, 34, 34, 35, 35, 35, 36, 36, 37, 37, 42

Στόχος σας είναι να προσδιορίσετε ποια τοποθεσία παρουσιάζει μεγαλύτερη αστάθεια και αν υπάρχουν ακραίες μέρες καύσωνα που πρέπει να ληφθούν υπόψη.

Ερώτημα 1. Ποια είναι η Διάμεσος θερμοκρασία για το Αστικό Πάρκο και ποια για το Πυκνοκατοικημένο Κέντρο;

Ερώτημα 2. Ποιες είναι οι τιμές του πρώτου (Q_1) και του τρίτου (Q_3) τεταρτημορίου για την κάθε τοποθεσία;

Ερώτημα 3. Υπολογίστε το Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος (Q) για τις δύο τοποθεσίες. Βάσει αυτού του δείκτη, ποια περιοχή παρουσιάζει μεγαλύτερη θερμική αστάθεια;

Ερώτημα 4. Ποιες είναι οι τιμές που προκύπτουν για τον Κάτω Φράχτη και τον Πάνω Φράχτη στα δεδομένα του πυκνοκατοικημένου Κέντρου της Πόλης;

Ερώτημα 5. Εξετάζοντας τα δεδομένα σε συνάρτηση με τους φράχτες που μόλις υπολογίσατε, υπάρχει κάποια θερμοκρασία που να καταγράφεται στατιστικά ως ακραία ημέρα καύσωνα (outlier) σε κάποια από τις δύο περιοχές; Αν ναι, ποια είναι αυτή;

Ερώτημα 6. Λαμβάνοντας υπόψη τη Διάμεσο και τις τυχόν ακραίες τιμές, πώς θα συνοψίζατε τα ευρήματά σας προς τον Οργανισμό Περιβάλλοντος σχετικά με το ποια περιοχή είναι πιο επιβαρυνμένη θερμικά και πού σημειώθηκε το πιο ακραίο φαινόμενο;

Τι θα κάνετε;

1. Κατεβάστε το αρχείο σας: Ξεκινήστε από [εδώ](#).
2. Ανακαλύψτε τις απαντήσεις: Προσπαθήστε να υλοποιήσετε τις 6 στοχευμένες δραστηριότητες.
3. Αξιολογήστε μόνοι σας την προσπάθειά σας: Χρησιμοποιήστε το [Quiz Αυτοαξιολόγησης \[Lumi H5P\]](#) ώστε να φύγετε από εδώ νιώθοντας σιγουριά με τη νέα δεξιότητα!

Γρήγορη Guidance

Θέλετε μια γρήγορη υπενθύμιση; Το [Course Presentation](#)-επίδειξη δεξιότητας είναι πάντα ανοιχτό για να σας δείξει ξανά τον τρόπο.

Πίνακας 37 Quiz Αυτοαξιολόγησης [Lumi H5P].

Ερωτήματα	Ανατροφοδότηση / Καθοδήγηση
Ερώτημα 1: Ποια είναι η Διάμεσος θερμοκρασία για το Αστικό Πάρκο και ποια για το Πυκνοκατοικημένο Κέντρο; Επιλογές A) Πάρκο: 32°C, Κέντρο: 35°C B) Πάρκο: 31,8°C, Κέντρο: 35,2°C Γ) Πάρκο: 31°C, Κέντρο: 34°C Δ) Πάρκο: 32°C, Κέντρο: 34,5°C Σωστή απάντηση: A) Πάρκο: 32°C, Κέντρο: 35°C	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Πολύ σωστά! Εφόσον έχουμε 14 μετρήσεις (άρτιο πλήθος), η διάμεσος είναι ο μέσος όρος των δύο μεσαίων τιμών (7ης και 8ης) της ταξινομημένης σειράς. Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Προσπάθησε ξανά! Θυμήσου ότι η διάμεσος απαιτεί ταξινόμηση από το μικρότερο στο μεγαλύτερο και εντοπισμό του κέντρου. Δεν είναι ούτε ο μέσος όρος (που επηρεάζεται από ακραίες τιμές), ούτε η επικρατούσα τιμή. Καθοδήγηση. Η συμβουλή μας: ξανακοίταξε το Course Presentation-επίδειξη δεξιότητας (εδώ).
Ερώτημα 2: Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη συνάρτηση στο Excel, ποιες είναι οι τιμές του πρώτου (Q1) και του τρίτου (Q3) τεταρτημορίου για την κάθε τοποθεσία; Επιλογές A) Πάρκο (Q1=30 Q3=32) και Κέντρο (Q1=33 Q3=36) B) Πάρκο (Q1=30 Q3=33) και Κέντρο (Q1=34 Q3=36) Γ) Πάρκο (Q1=29 Q3=34) και Κέντρο (Q1=33 Q3=37) Δ) Πάρκο (Q1=30 Q3=33) και Κέντρο (Q1=34 Q3=36) Σωστή απάντηση: B) Πάρκο (Q1=30 Q3=33) και Κέντρο (Q1=34 Q3=36)	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Σωστά! Υπολογίζοντας τον διάμεσο του κάτω και άνω υποσυνόλου, βρίσκουμε ακριβώς τα κεντρικά σημεία των τεταρτημορίων. Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Προσοχή! Στη θεωρητική μέθοδο, για 14 τιμές, το Q1 είναι η διάμεσος των 7 πρώτων τιμών και το Q3 η διάμεσος των 7 τελευταίων. Καθοδήγηση. Η συμβουλή μας: ξανακοίταξε το Course Presentation-επίδειξη δεξιότητας (εδώ).

Ερώτημα 3: Υπολογίστε το Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος (Q) για τις δύο τοποθεσίες. Βάσει αυτού του δείκτη, ποια περιοχή παρουσιάζει μεγαλύτερη θερμική αστάθεια; Επιλογές A) Το Αστικό Πάρκο (Q = 3) B) Το Πυκνοκατοικημένο Κέντρο (Q = 2) Γ) Το Πυκνοκατοικημένο Κέντρο (Q = 3) Δ) Το Αστικό Πάρκο (Q = 4) Σωστή απάντηση: A) Το Αστικό Πάρκο (Q = 3)	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Πολύ σωστά! Το μεγαλύτερο Q στο Πάρκο σημαίνει ότι οι θερμοκρασίες του κεντρικού 50% έχουν μεγαλύτερη διασπορά, άρα και αστάθεια. Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Προσπάθησε ξανά! Μάλλον μπερδεύεις τις απόλυτες θερμοκρασίες με την αστάθεια. Κάνε την αφαίρεση Q3-Q1 για να δεις ποια περιοχή έχει το μεγαλύτερο εύρος. Καθοδήγηση. Η συμβουλή μας: ξανακοίταξε το Course Presentation-επίδειξη δεξιότητας (εδώ).
Ερώτημα 4: Ποιες είναι οι τιμές που προκύπτουν για τον Κάτω Φράχτη και τον Πάνω Φράχτη στα δεδομένα του Πυκνοκατοικημένου Κέντρου; Επιλογές A) Κάτω Φράχτης: 32 Πάνω Φράχτης: 40 B) Κάτω Φράχτης: 34 Πάνω Φράχτης: 36 Γ) Κάτω Φράχτης: 31 Πάνω Φράχτης: 39 Δ) Κάτω Φράχτης: 32 Πάνω Φράχτης: 35 Σωστή απάντηση: Γ) Κάτω: 31 Πάνω: 39	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Μπράβο! Εφάρμοσες σωστά τον τύπο. Οι τιμές αυτές καθορίζουν τα όρια της "κανονικότητας". Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Προσπάθησε ξανά! Θυμήσου: ο φράχτης είναι 1,5 φορές το Q πέρα από τα Q1 και Q3. Έλεγξε τους πολλαπλασιασμούς σου. Καθοδήγηση. Η συμβουλή μας: ξανακοίταξε το Course Presentation-επίδειξη δεξιότητας (εδώ).
Ερώτημα 5: Εξετάζοντας τα δεδομένα σε συνάρτηση με τους φράχτες που μόλις υπολογίσατε, υπάρχει κάποια θερμοκρασία που να καταγράφεται στατιστικά ως ακραία ημέρα καύσωνα (outlier) σε κάποια από τις δύο περιοχές; Αν ναι, ποια είναι αυτή; Επιλογές A) Ναι, η τιμή 42°C στο Κέντρο B) Ναι, η τιμή 36°C στο Πάρκο Γ) Όχι, δεν υπάρχουν ακραίες τιμές Σωστή απάντηση: A) Ναι, η τιμή 42°C στο Κέντρο	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Πολύ σωστά! Το 42 υπερβαίνει τον πάνω φράχτη (39), οπότε είναι στατιστικά απομακρυσμένη τιμή. Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Κοίταξε ξανά τη μέγιστη τιμή στο Κέντρο. Υπερβαίνει τον φράχτη που μόλις υπολόγισες; Ένα outlier είναι η τιμή που "σπάει" τα όρια. Καθοδήγηση. Η συμβουλή μας: ξανακοίταξε το Course Presentation-επίδειξη δεξιότητας (εδώ).
Ερώτημα 6: Λαμβάνοντας υπόψη τη Διάμεσο και τις τυχόν ακραίες τιμές, πώς θα συνοψίζατε τα ευρήματά σας προς τον Οργανισμό Περιβάλλοντος σχετικά με το ποια περιοχή είναι πιο επιβαρυνμένη θερμικά και πού σημειώθηκε το πιο ακραίο φαινόμενο; Επιλογές A) Δεν υπάρχει διαφορά στις δύο περιοχές B) Κέντρο Πόλης: Πιο θερμό & με ακραίο φαινόμενο Γ) Αστικό Πάρκο: Πιο επικίνδυνο λόγω αστάθειας Σωστή απάντηση: B) Κέντρο Πόλης: Πιο θερμό & με ακραίο φαινόμενο	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Άριστη ανάλυση! Συνδύασες τη σταθερή θερμική πίεση του κέντρου με την ύπαρξη του ακραίου γεγονότος. Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Προσπάθησε ξανά! Σκέψου: Η αστάθεια ενός πάρκου είναι εξίσου επικίνδυνη με έναν καύσωνα 42°C στο κέντρο; Η στατιστική ακρίβεια απαιτεί να εστιάσουμε στον κίνδυνο που προκαλεί ο καύσωνας. Καθοδήγηση. Η συμβουλή μας: ξανακοίταξε το Course Presentation-επίδειξη δεξιότητας (εδώ).

3.6 Ανακεφαλαίωση – Αναστοχασμός – Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση

Η ενότητα της **Ανακεφαλαίωσης και Αυτο-Αξιολόγησης** του Μικρο-μαθήματος 2 έχει σχεδιαστεί για να ενισχύσει τη μεταγνωστική ικανότητα των εκπαιδευόμενων, ολοκληρώνοντας το μαθησιακό ταξίδι, μέσω ενός [interactive book \[H5P Lumi\]](#), σε τρία διακριτά στάδια. Αρχικά, πραγματοποιείται η **ανακεφαλαίωση** των κεντρικών εννοιών μέσω οπτικοποιημένου υλικού και ψηφιακής επισκόπησης, ώστε να παγιωθεί το θεωρητικό υπόβαθρο.

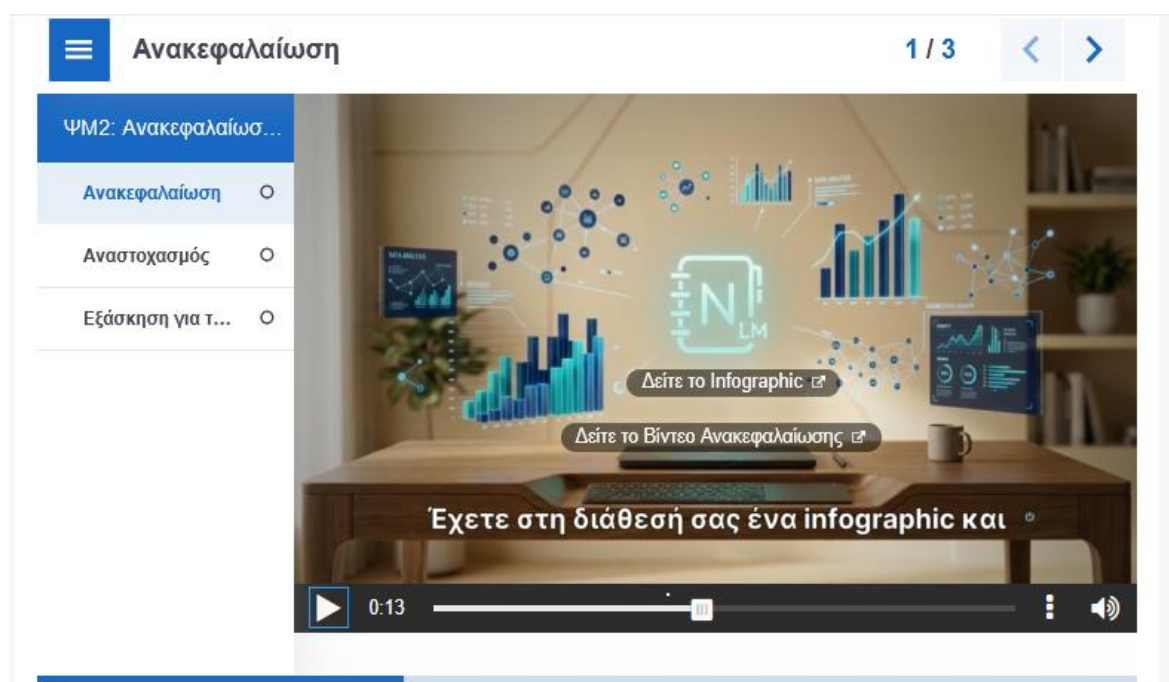
Ακολουθεί η φάση του **αναστοχασμού**, όπου οι εκπαιδευόμενοι συμμετέχουν σε στοχευμένη δραστηριότητα κριτικής σκέψης, αξιολογώντας την προσωπική τους μαθησιακή πορεία και την εφαρμογή των στατιστικών δεικτών σε ρεαλιστικά προβλήματα.

Τέλος, η ενότητα ολοκληρώνεται με τη **διαδραστική αυτο-αξιολόγηση**, η οποία περιλαμβάνει πρακτική εξάσκηση μέσω προσομοιωμένου quiz, παρέχοντας άμεση ανατροφοδότηση για την ετοιμότητα των εκπαιδευόμενων πριν από την τελική εξέταση.

3.6.1 Ανακεφαλαίωση

Στην πρώτη ενότητα του interactive book παρουσιάζεται η **ανακεφαλαίωση** του μικρο-μαθήματος 2, που λειτουργεί ως μηχανισμός γνωστικής παγίωσης, στοχεύοντας στη σύνοψη των κρίσιμων στατιστικών εννοιών. Οι εκπαιδευόμενοι/ες έχουν στη διάθεσή τους ένα **infographic** και ένα στοχευμένο **βίντεο ανακεφαλαίωσης**, παραγόμενα από τεχνητή νοημοσύνη [\[Notebooklm\]](#) (Google, 2026a). Η συνδυαστική χρήση οπτικών και ακουστικών μέσων διευκολύνει την κωδικοποίηση της πληροφορίας, επιτρέποντας στους/στις εκπαιδευόμενους/ες να δομήσουν μια σαφή εικόνα των εννοιών πριν μεταβούν στη διαδικασία του αναστοχασμού και της πρακτικής εφαρμογής.

Η υποενότητα της “ανακεφαλαίωσης” υλοποιείται μέσω ενός Interactive Video [\[H5P Lumi\]](#) το οποίο λειτουργεί ως μηχανισμός γνωστικής παγίωσης. Στην αρχή του βίντεο, ένα **AI Avatar [HeyGen]** (HeyGen, 2026) απευθύνεται στους/στις εκπαιδευόμενους/ες, ενισχύοντας το αίσθημα της κοινωνικής παρουσίας, ενώ η ομιλία του συνοδεύεται από υποτίτλους για τη διασφάλιση της προσβασιμότητας (Εικόνα 94).



Εικόνα 94 Ανακεφαλαίωση του μικρο-μαθήματος 2 [Interactive book-H5P Lumi, 1η ενότητα].

Σημείωση. Περιέχεται Interactive Video [H5P Lumi] με AI Avatar [HeyGen] και ενσωματωμένα infographic & βίντεο επισκόπησης που δημιουργήθηκαν με τη βοήθεια τεχνητής νοημοσύνης (NotebookLM). Όλα τα παραπάνω βασίστηκαν αποκλειστικά στο υλικό και τις στοχευμένες οδηγίες της συγγραφέως. Προτροπή συγγραφέως για το AI avatar: το κείμενο σελ. 169. Προτροπή συγγραφέως για το βίντεο επισκόπησης: το περιεχόμενο των παραγράφων 3.1 – 3.5 του παρόντος Παραρτήματος.

Το κείμενο του Avatar έχει ως εξής:

«Φτάσατε στην τελική φάση του Μικρο-μαθήματος 2! Πριν προχωρήσετε στην αυτο-αξιολόγηση, ας κάνουμε μια γρήγορη ανακεφαλαίωση. Έχετε στη διάθεσή σας ένα [infographic](#) και ένα σύντομο [βίντεο](#) από το NotebookLM, που συνοψίζουν τις κεντρικές ιδέες της ανάλυσής μας. Αφιερώστε λίγα λεπτά για να τα επεξεργαστείτε, καθώς θα αποτελέσουν τη βάση για τις ερωτήσεις που ακολουθούν».

3.6.2 Αναστοχασμός

Η δεύτερη ενότητα του interactive book παρουσιάζει το κρίσιμο μεταγνωστικό στάδιο του Μικρο-μαθήματος, τον **αναστοχασμό**, σχεδιασμένο να προωθήσει την κριτική επεξεργασία των στατιστικών εννοιών που διδάχθηκαν (Sergis & Sampson, 2016). Μέσω της πλατφόρμας [Padlet](#) (Wallwisher, 2026), οι εκπαιδευόμενοι/ες καλούνται να συμμετάσχουν σε μια διαδραστική δραστηριότητα αναστοχασμού (Εικόνα).

Η δραστηριότητα δομείται σε δύο άξονες: την ατομική καταγραφή των εννοιολογικών δυσκολιών που συνάντησαν κατά τον υπολογισμό των στατιστικών μέτρων και την [αυτο-αξιολόγηση](#) **[Google Forms]** (Google, 2026c) της μαθησιακής τους ετοιμότητας με τη χρήση κλίμακας Likert.

Η διαδικασία αυτή επιτρέπει στους/στις εκπαιδευόμενους/ες να "κλειδώσουν" τα συμπεράσματά τους και να συνειδητοποιήσουν το επίπεδο ετοιμότητάς τους πριν μεταβούν στην τελική φάση της αυτο-αξιολόγησης Quiz (Εικόνα 95, Πίνακας 38).

Πίνακας 38 Αναστοχασμός του μικρο-μαθήματος 2 μέσω διαδραστικής δραστηριότητας

Εισαγωγή: Μέσω της πλατφόρμας Padlet, καλείστε σε μια διαδραστική δραστηριότητα **αναστοχασμού** όπου θα προσεγγίσετε το πρόβλημα της περιβαλλοντικής ρύπανσης όχι μόνο ως στατιστικό υπολογισμό, αλλά ως διαδικασία λήψης αποφάσεων.

Η δραστηριότητα δομείται σε δύο άξονες: την ατομική καταγραφή των εννοιολογικών δυσκολιών που συναντήσατε κατά τον υπολογισμό των στατιστικών δεικτών και την αυτο-αξιολόγηση της μαθησιακής τους ετοιμότητας με τη χρήση κλίμακας Likert.

Στήλη 1: Η "Στιγμή της Αποκάλυψης" (Ατομική Καταγραφή)

Οδηγία: Σκεφτείτε τη διαδικασία υπολογισμού των Outliers. Ποιο βήμα (εύρεση Q1/Q3, υπολογισμός Q ή εφαρμογή των Φρακτών) σας φάνηκε πιο απρόσμενο ή δύσκολο και γιατί; Γράψτε μια σύντομη ανάρτηση (3 προτάσεις).

Στήλη 2: Check-in Αυτοπεποίθησης (Κλίμακα Likert)

Οδηγία: Πριν περάσετε στο τελικό Quiz, βαθμολογήστε την ετοιμότητά σας στην παρακάτω ερώτηση (πατήστε τον [σύνδεσμο](#)) **[Google Forms]**.

Google Forms

Πόσο έτοιμος/η νιώθεις να εφαρμόσεις τη διαδικασία εντοπισμού outliers σε ένα νέο σύνολο δεδομένων;

1: Καθόλου έτοιμος/η (χρειάζομαι επανάληψη του υλικού)

2: Λίγο έτοιμος/η (έχω ακόμη απορίες)

3: Αρκετά έτοιμος/η (με βοηθούν οι σημειώσεις)

4: Πολύ έτοιμος/η (μπορώ να το εφαρμόσω με σιγουριά)

5: Απόλυτα έτοιμος/η (μπορώ να το εξηγήσω και σε άλλον)

☰

Αναστοχασμός

2 / 3

<

>

ΨΜ2: Ανακεφαλαίωσ...

Ανακεφαλαίωση

Αναστοχασμός

Εξάσκηση για τ...

Μέσω της πλατφόρμας Padlet, καλείστε σε μια διαδραστική δραστηριότητα **αναστοχασμού** όπου θα προσεγγίσετε το πρόβλημα της περιβαλλοντικής ρύπανσης όχι μόνο ως στατιστικό υπολογισμό, αλλά ως διαδικασία λήψης αποφάσεων. Η δραστηριότητα δομείται σε δύο άξονες: την ατομική καταγραφή των εννοιολογικών δυσκολιών που συναντήσατε κατά τον υπολογισμό των δεικτών και την αυτο-αξιολόγηση της μαθησιακής τους ετοιμότητας με τη χρήση κλίμακας Likert.

[Πατήστε στον σύνδεσμο για να μεταβείτε στην πλατφόρμα του Padlet](#)

Εικόνα 95 Αναστοχασμός του μικρο-μαθήματος 2 μέσω διαδραστικής δραστηριότητας [Interactive book-H5P Lumi, 2η ενότητα]

3.6.3 Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση

Η τρίτη ενότητα του interactive book έχει στόχο την **Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση** του Ψηφιακού Μαθήματος. Αποτελείται από μία **διαδραστική αυτο-αξιολόγηση (Quiz)** [MS Forms] (Microsoft Corporation, n.d.-a) που περιλαμβάνει 7 στοχευμένα ερωτήματα, τα οποία κατανέμονται σε δύο κατηγορίες:

- 3 ερωτήσεις **κατανόησης εννοιών** για τον έλεγχο της θεωρητικής γνώσης και
- 4 ερωτήσεις **εφαρμογής δεξιοτήτων**, όπου οι εκπαιδευόμενοι/ες καλούνται να επιλύσουν προβλήματα ανάλυσης δεδομένων σε προσομοιωμένα σενάρια.

Το κλειδί της επιτυχίας αυτής της φάσης είναι η **άμεση ανατροφοδότηση** και **Καθοδήγηση**: για κάθε απάντηση, παρέχεται επεξηγηματικό σχόλιο που συνδέει το σφάλμα με τη συγκεκριμένη ενότητα του θεωρητικού υλικού. Με τον τρόπο αυτό, ο/η εκπαιδευόμενος/η αντιλαμβάνεται τα κενά του/της σε πραγματικό χρόνο και κατευθύνεται στην επανάληψη των απαραίτητων σημείων, διασφαλίζοντας την πλήρη ετοιμότητά του/της πριν από τη συμμετοχή στην τελική αξιολόγηση του ψηφιακού μαθήματος (Εικόνα 96, Πίνακας 39, Πίνακας 40).

Πίνακας 39 Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση του μικρο-μαθήματος 2

Καλωσορίσατε στο στάδιο της **διαδραστικής αυτο-αξιολόγησης**. Στόχος αυτού του Quiz δεν είναι απλώς ο έλεγχος των γνώσεών σας, αλλά η ουσιαστική εξάσκηση στην εφαρμογή των στατιστικών εννοιών που μελετήσαμε. Μέσα από τις 7 ερωτήσεις που ακολουθούν, έχετε την ευκαιρία να εφαρμόσετε τις γνώσεις σας σε πραγματικά σενάρια και να λάβετε άμεση ανατροφοδότηση για τις απαντήσεις σας. Αν συναντήσετε δυσκολίες, μην αποθαρρύνεστε· οι επεξηγήσεις που συνοδεύουν κάθε ερώτηση θα σας καθοδηγήσουν να εντοπίσετε τα σημεία που χρειάζονται επανάληψη, διασφαλίζοντας ότι θα είστε απόλυτα προετοιμασμένοι και με αυτοπεποίθηση για την τελική εξέταση του ψηφιακού μαθήματος.

☰

Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση

3 / 3

<

>

✕

ΨΜ2: Ανακεφαλαίωσ...

Ανακεφαλαίωση

Αναστοχασμός

Εξάσκηση για τ...

Καλωσορίσατε στο στάδιο της **διαδραστικής αυτο-αξιολόγησης**. Στόχος αυτού του Quiz δεν είναι απλώς ο έλεγχος των γνώσεών σας, αλλά η ουσιαστική εξάσκηση στην εφαρμογή των στατιστικών εννοιών που μελετήσαμε. Μέσα από τις 7 ερωτήσεις που ακολουθούν, έχετε την ευκαιρία να εφαρμόσετε τις γνώσεις σας σε πραγματικά σενάρια και να λάβετε άμεση ανατροφοδότηση για τις απαντήσεις σας. Αν συναντήσετε δυσκολίες, μην αποθαρρύνεστε· οι επεξηγήσεις που συνοδεύουν κάθε ερώτηση θα σας καθοδηγήσουν να εντοπίσετε τα σημεία που χρειάζονται επανάληψη, διασφαλίζοντας ότι θα είστε απόλυτα προετοιμασμένοι και με αυτοπεποίθηση για την τελική εξέταση του ψηφιακού μαθήματος.

Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση του Ψηφιακού Μαθήματος

Κατά την υποβολή αυτής της φόρμας, δεν θα συλλέγει αυτόματα τα στοιχεία σας, όπως το όνομα και τη διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου, εκτός αν την καταχωρήσετε οι ίδιοι.

1. Σιγκρίνουμε τις θερμοκρασίες (σε °C) δύο πόλεων (Πόλη Α και Πόλη Β) μέσω θερμογραμμάτων. Βλέποντας τα θερμογράμματα, η θήκη της Πόλης Α είναι μικρότερη από της Πόλης Β. Τι συμπεραίνετε; (3 βαθμοί)

☐ Οι θερμοκρασίες στην Πόλη Α είναι πιο σταθερές γύρω από τη διάμεσο.
 ☐ Οι θερμοκρασίες στην Πόλη Α παρουσιάζουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα.
 ☐ Η Πόλη Α έχει υψηλότερη μέση θερμοκρασία.

2. Πότε μια τιμή χαρακτηρίζεται ως Outlier σύμφωνα με τον κανόνα του $\pm 1.5Q$ (3 βαθμοί)

☐ Όταν βρίσκεται εκτός του διαστήματος $[Q1 - 1.5Q, Q3 + 1.5Q]$.
 ☐ Όταν βρίσκεται εντός του διαστήματος $[Q1 - 1.5Q, Q3 + 1.5Q]$.

[Πατήστε στον σύνδεσμο για να μεταβείτε στο quiz αυτοαξιολόγησης](#)

Εικόνα 96 Εξάσκηση για την Τελική Εξέταση του μικρο-μαθήματος 2 [Interactive book-H5P Lumi, 3η ενότητα].

Πίνακας 40 Quiz Αυτοαξιολόγησης [Google Forms].

Ερωτήματα	Ανατροφοδότηση / Καθοδήγηση
ΜΕΡΟΣ Α΄ Ερώτημα 1: Γιατί προτιμάμε τη Διάμεσο αντί για τη μέση τιμή σε δεδομένα με ακραίες τιμές; Επιλογές A) Γιατί υπολογίζεται πιο εύκολα. B) Γιατί δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές (outliers). Γ) Γιατί είναι πάντα μεγαλύτερη. Σωστή απάντηση: B) Γιατί δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές (outliers).	Ανατροφοδότηση / Καθοδήγηση Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Πολύ σωστά! Η μέση τιμή “αλλοιώνεται” από τις ακραίες τιμές, ενώ η διάμεσος παραμένει σταθερή στο κέντρο της κατανομής. Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Προσπάθησε ξανά! Θυμήσου ότι η μέση τιμή επηρεάζεται από ακραίες τιμές. Καθοδήγηση. Καλό θα ήταν να ξανακοιτάξεις την ανακεφαλαίωση του μικρο-μαθήματος (https://app.lumi.education/run/xw441x).
Ερώτημα 2: Πότε μια τιμή χαρακτηρίζεται ως Outlier σύμφωνα με τον κανόνα του $\pm 1.5Q$; Επιλογές A) Όταν βρίσκεται εκτός του διαστήματος $[Q1 - 1.5Q, Q3 + 1.5Q]$. B) Όταν είναι μεγαλύτερη από το $Q3$ ή μικρότερη από το $Q1$. Γ) Όταν είναι απλώς η μεγαλύτερη τιμή του δείγματος.	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Σωστά! Οι “φράχτες” ορίζουν τα όρια της κανονικότητας. Οτιδήποτε έξω από αυτούς είναι στατιστικό ακραίο. Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Προσπάθησε ξανά! Θυμήσου ότι οι “φράχτες” ορίζουν τα όρια της κανονικότητας. Οτιδήποτε έξω από αυτούς είναι στατιστικό ακραίο.

Σωστή απάντηση: Α) Όταν βρίσκεται εκτός του διαστήματος $[Q1 - 1.5 * Q, Q3 + 1.5 * Q]$.	Καθοδήγηση. Καλό θα ήταν να ξανακοιτάξεις την ανακεφαλαίωση του μικρο-μαθήματος (https://app.lumi.education/run/xw441x).
Ερώτημα 3: Αν $Q1=10$ και $Q3=20$, ποιος είναι ο φράχτης για τα Outliers προς τα πάνω; Επιλογές Α) 30 Β) 25 Γ) 35 Σωστή απάντηση: Γ) 35	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Σωστά! Ο άνω φράχτης ισούται με $Q3 + 1,5Q = 20+1,5*10=35$. Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Προσπάθησε ξανά! Θυμήσου ότι Ο άνω φράχτης ισούται με $Q3 + 1,5Q = 20+1,5*10=35$. Καθοδήγηση. Καλό θα ήταν να ξανακοιτάξεις την ανακεφαλαίωση του μικρο-μαθήματος (https://app.lumi.education/run/xw441x).
ΜΕΡΟΣ Β' Ερώτημα 4: Συγκρίνουμε τις θερμοκρασίες (σε °C) δύο πόλεων (Πόλη Α και Πόλη Β) μέσω θηκογραμμάτων. Βλέποντας τα θηκογράμματα, η θήκη της Πόλης Α είναι μικρότερη από της Πόλης Β. Τι συμπεραίνετε; Επιλογές Α) Οι θερμοκρασίες στην Πόλη Α είναι πιο σταθερές γύρω από τη διάμεσο. Β) Οι θερμοκρασίες στην Πόλη Α παρουσιάζουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα. Γ) Η Πόλη Α έχει υψηλότερη μέση θερμοκρασία. Σωστή απάντηση: Α) Οι θερμοκρασίες στην Πόλη Α είναι πιο σταθερές γύρω από τη διάμεσο.	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Σωστά! Μικρότερη θήκη σημαίνει μικρότερο ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q, άρα μεγαλύτερη σταθερότητα. Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Προσπάθησε ξανά! Θυμήσου ότι μικρότερη θήκη σημαίνει μικρότερο ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q, άρα μεγαλύτερη σταθερότητα. Καθοδήγηση. Καλό θα ήταν να ξανακοιτάξεις την ανακεφαλαίωση του μικρο-μαθήματος (https://app.lumi.education/run/xw441x).
Ερώτημα 5: Συγκρίνουμε τις θερμοκρασίες (σε °C) δύο πόλεων (Πόλη Α και Πόλη Β) μέσω θηκογραμμάτων. Η γραμμή της διαμέσου στο θηκόγραμμα της Πόλης Β είναι σημαντικά υψηλότερη από εκείνη της Πόλης Α. Τι σημαίνει αυτό; Επιλογές Α) Το 50% των ημερών η Πόλη Β είναι θερμότερη από το αντίστοιχο 50% της Πόλης Α. Β) Η Πόλη Β έχει περισσότερα outliers. Γ) Η Πόλη Α είναι πάντα πιο κρύα. Σωστή απάντηση: Α) Το 50% των ημερών η Πόλη Β είναι θερμότερη από το αντίστοιχο 50% της Πόλης Α.	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Πολύ σωστά! Η γραμμή της διαμέσου χωρίζει το δείγμα των δεδομένων σας ακριβώς στη μέση. Εφόσον η διάμεσος της Πόλης Β βρίσκεται σε υψηλότερη τιμή στον κατακόρυφο άξονα από αυτή της Πόλης Α, σημαίνει ότι τουλάχιστον το 50% των μετρήσεων της Πόλης Β είναι υψηλότερες από το 50% των μετρήσεων της Πόλης Α. Έχετε κατανοήσει πλήρως τη λειτουργία της διαμέσου ως δείκτη θέσης! Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Ας το ξανασκεφτούμε! Η γραμμή στη μέση της θήκης αναφέρεται αποκλειστικά στη διάμεσο και όχι στον αριθμό των ακραίων τιμών (outliers). Τα outliers στο θηκόγραμμα εμφανίζονται

	πάντα ως μεμονωμένα σημεία (τελείες) πάνω ή κάτω από τα U και L. Η θέση της διαμέσου μας δείχνει μόνο το 'κέντρο' των δεδομένων. Καθοδήγηση. Καλό θα ήταν να ξανακοιτάξεις την ανακεφαλαίωση του μικρο-μαθήματος (https://app.lumi.education/run/xw441x).
Ερώτημα 6: Συγκρίνουμε τις θερμοκρασίες (σε °C) δύο πόλεων (Πόλη A και Πόλη B) μέσω θηκογραμμάτων. Στο θηκόγραμμα της Πόλης A βλέπουμε δύο τελείες πάνω από την άνω οριακή τιμή U. Τι υποδηλώνουν αυτές; Επιλογές A) Τις μέσες θερμοκρασίες της πόλης. B) Ασυνήθιστα θερμές ημέρες (ακραίες τιμές) για την Πόλη A. Γ) Σφάλμα στη μέτρηση. Σωστή απάντηση: B) Ασυνήθιστα θερμές ημέρες (ακραίες τιμές) για την Πόλη A	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Σωστά! Οι τελείες πάνω από την άνω οριακή τιμή U είναι τα outliers, δηλαδή τιμές που αποκλίνουν από το κανονικό εύρος της πόλης. Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Ας το ξανασκεφτούμε! Οι τελείες πάνω από την άνω οριακή τιμή U είναι τα outliers, δηλαδή τιμές που αποκλίνουν από το κανονικό εύρος της πόλης. Καθοδήγηση. Καλό θα ήταν να ξανακοιτάξεις την ανακεφαλαίωση του μικρο-μαθήματος (https://app.lumi.education/run/xw441x).
Ερώτημα 7: Συγκρίνουμε τις θερμοκρασίες (σε °C) δύο πόλεων (Πόλη A και Πόλη B) μέσω θηκογραμμάτων. Αν το θηκόγραμμα της Πόλης B είναι "μετατοπισμένο" προς τα πάνω (σε υψηλότερες τιμές) και δεν έχει outliers, ενώ της Πόλης A έχει, ποιο είναι το ασφαλέστερο συμπέρασμα; Επιλογές A) Η Πόλη B είναι γενικά θερμότερη και πιο προβλέψιμη. B) Η Πόλη A είναι πιο θερμή. Γ) Δεν μπορούμε να συγκρίνουμε χωρίς τους μέσους όρους. Σωστή απάντηση: A) Η Πόλη B είναι γενικά θερμότερη και πιο προβλέψιμη.	Ανατροφοδότηση σωστής απάντησης. Πολύ σωστά! Η θέση της θήκης δείχνει το επίπεδο θερμοκρασίας και η απουσία outliers δείχνει απουσία ακραίων διακυμάνσεων (προβλεψιμότητα). Ανατροφοδότηση λάθος απάντησης. Ας το ξανασκεφτούμε! Η θέση της θήκης δείχνει το επίπεδο θερμοκρασίας και η απουσία outliers δείχνει απουσία ακραίων διακυμάνσεων (προβλεψιμότητα). Καθοδήγηση. Καλό θα ήταν να ξανακοιτάξεις την ανακεφαλαίωση του μικρο-μαθήματος (https://app.lumi.education/run/xw441x).

4. Τελική Αξιολόγηση και Πιστοποίηση

Η Τελική Αξιολόγηση και Πιστοποίηση αξιοποιεί ένα ολοκληρωμένο ψηφιακό περιβάλλον με τη μορφή [Υπερκειμένου \[Course Presentation-Lumi H5P\]](#). Ο σχεδιασμός διαρθρώνεται σε δύο αλληλένδετα επίπεδα:

- 1. Επίπεδο Πλαισίωσης:** Περιλαμβάνει την αναλυτική παρουσίαση των οδηγιών διεξαγωγής της εξέτασης και την εισαγωγή στο [σενάριο του Ρεαλιστικού Προβλήματος](#) με τίτλο «Κλιματική Αστάθεια: Μαθηματική Μοντελοποίηση και Στατιστική Σύγκριση Πλανητικών Τάσεων». Το Υπερκείμενο ενσωματώνει ψηφιακή ηχητική καθοδήγηση [\[Google AI Studio\]](#) για την ενίσχυση της προσβασιμότητας και της βιωματικής μάθησης.

2. Επίπεδο Αξιολόγησης: Ενεργός υπερσύνδεσμος οδηγεί στο **διαδραστικό εργαλείο ελέγχου-Interactive Quiz [MS Forms]**, το οποίο στοχεύει στην έγκυρη αποτίμηση των μαθησιακών αποτελεσμάτων μέσω της επίλυσης προβλημάτων βασισμένων στο σενάριο.

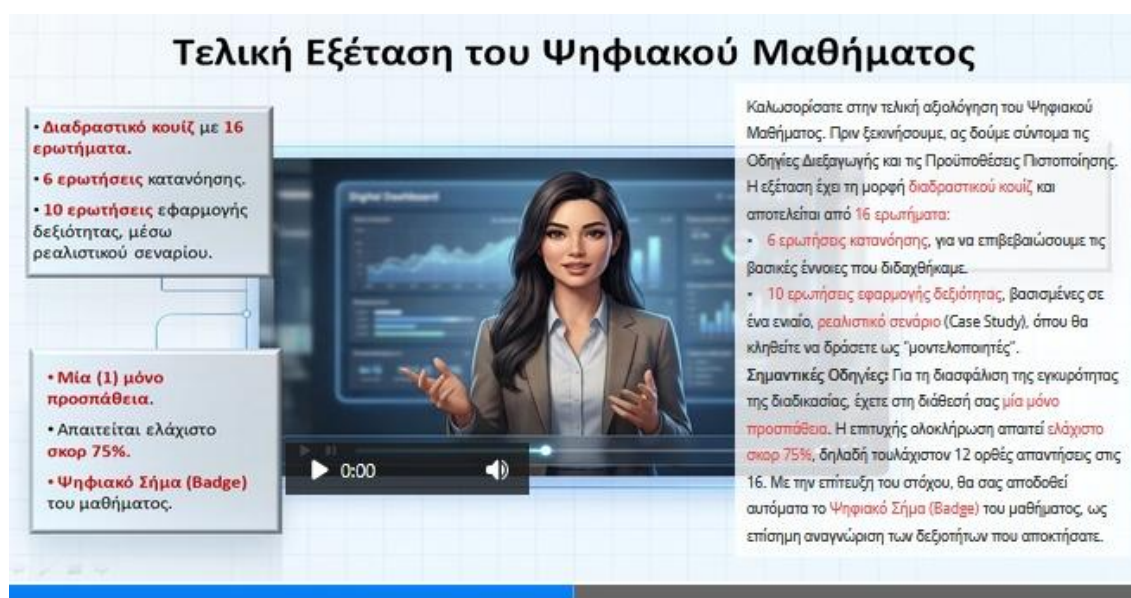
4.1 Οδηγίες για τη διεξαγωγή της εξέτασης

Για την ενίσχυση της κατανόησης των εκπαιδευομένων, στο 1^ο επίπεδο, το **Υπερκείμενο [Course Presentation-Lumi H5P]** ενσωματώνει ψηφιακή **ηχητική καθοδήγηση [Google AI Studio]**, η οποία αποτυπώνεται γραπτώς στην οθόνη ως συνοδευτικό κείμενο:

«Καλωσορίσατε στην τελική αξιολόγηση του Ψηφιακού Μαθήματος. Πριν ξεκινήσουμε, ας δούμε σύντομα τις Οδηγίες Διεξαγωγής και τις Προϋποθέσεις Πιστοποίησης.

Η εξέταση έχει τη μορφή διαδραστικού κουίζ και αποτελείται από **16 ερωτήματα**, σχεδιασμένα για να συνθέσουν τη γνώση σας σε πραγματικές συνθήκες:

- **6 ερωτήσεις κατανόησης**, για να επιβεβαιώσουμε τις βασικές έννοιες που διδαχθήκαμε.
- **10 ερωτήσεις εφαρμογής δεξιοτήτων**, βασισμένες σε ένα ενιαίο, ρεαλιστικό σενάριο (Case Study), όπου θα κληθείτε να δράσετε ως "μοντελοποιητές"» (Εικόνα 97).



Εικόνα 97 Οδηγίες για τη διεξαγωγή της εξέτασης.

Σημείωση. Το background δημιουργήθηκε με τη χρήση του NotebookLM (Google, 2026α).

«**Σημαντικές Οδηγίες:** Για τη διασφάλιση της εγκυρότητας της διαδικασίας, έχετε στη διάθεσή σας **μία μόνο προσπάθεια**. Η επιτυχής ολοκλήρωση απαιτεί ελάχιστο **σκορ 75%**, δηλαδή τουλάχιστον 12 ορθές απαντήσεις στις 16.

Με την επίτευξη του στόχου, θα σας αποδοθεί αυτόματα το **Ψηφιακό Σήμα (Badge)** του μαθήματος, ως επίσημη αναγνώριση των δεξιοτήτων που αποκτήσατε» (Pichette et al., 2021).

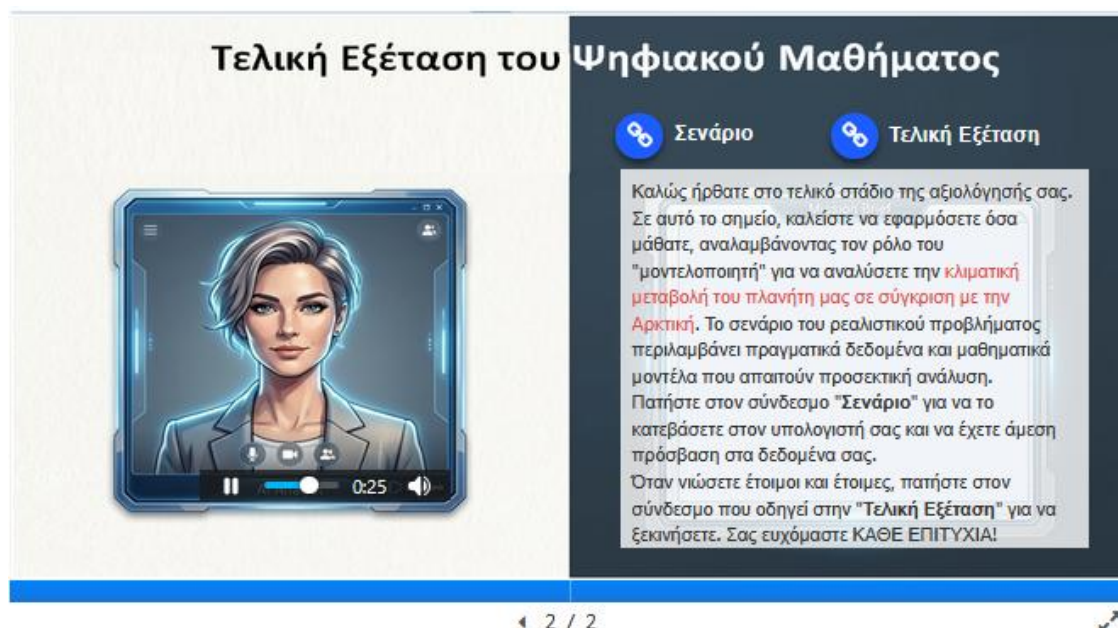
4.2 Τελική αξιολόγηση

Η **ηχητική καθοδήγηση** συνεχίζει ως εξής:

«Καλώς ήρθατε στο τελικό στάδιο της αξιολόγησής σας. Σε αυτό το σημείο, καλείστε να εφαρμόσετε όσα μάθατε, αναλαμβάνοντας τον ρόλο του "μοντελοποιητή" για να αναλύσετε την **κλιματική μεταβολή του πλανήτη μας και τα θερμοκρασιακά επίπεδα ειδικά στην Αρκτική**. Το σενάριο του ρεαλιστικού προβλήματος περιλαμβάνει πραγματικά δεδομένα και μαθηματικά μοντέλα που απαιτούν προσεκτική ανάλυση» (Efsthathiou et al. 2011; Varotsos & Efsthathiou, 2019).

«Πατήστε στον σύνδεσμο "**Σενάριο**" για να το κατεβάσετε στον υπολογιστή σας και να έχετε άμεση πρόσβαση στα δεδομένα σας» (παρ. 1.3.2. Πίνακας 22, Εικόνα 98).

«Όταν νιώσετε έτοιμοι και έτοιμες, πατήστε στον σύνδεσμο που οδηγεί στην "**Τελική Εξέταση**" για να ξεκινήσετε. Σας ευχόμαστε ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!».



Εικόνα 98 Σενάριο Ρεαλιστικού Προβλήματος για το Ψηφιακό Μάθημα.
Σημείωση. Το background δημιουργήθηκε με τη χρήση του NotebookLM (Google, 2026α).

Στο 2^ο επίπεδο, το **Υπερκείμενο** ενσωματώνει ενεργό υπερσύνδεσμο που οδηγεί στο [Interactive Quiz](#) της Τελικής Εξέτασης. Στόχος είναι η έγκυρη αποτίμηση των τεσσάρων (4) μαθησιακών αποτελεσμάτων μέσω ερωτημάτων που βασίζονται στο σενάριο του ρεαλιστικού προβλήματος (Εικόνα 98).

Το Διαδραστικό Κουίζ

Κατά την έναρξη του [Interactive Quiz](#) εμφανίζεται στην οθόνη του/της εξαιταζόμενου/ης το παρακάτω μήνυμα:

«Τελική Αξιολόγηση του Μικρο-Μαθήματος (55 λεπτά)

Αυτή είναι μια χρονομετρημένη φόρμα. Αφού ξεκινήσετε, δεν μπορείτε να κάνετε παύση του χρονοδιακόπτη. Μην ανησυχείτε, οι "Φόρμες" σας παρέχουν μια υπενθύμιση τελευταίου λεπτού πριν από την υποβολή. Οι απαντήσεις σας θα υποβληθούν αυτόματα όταν τελειώσει ο χρόνος. Προετοιμαστείτε προτού ξεκινήσετε να διαχειρίζεστε τον χρόνο υποβολής σας».

Ακολουθούν οι ερωτήσεις του διαδραστικού κουίζ (Πίνακας 41).

Πίνακας 41 Οι Ερωτήσεις του Διαδραστικού Κουίζ για την Τελική Εξέταση του Ψηφιακού Μαθήματος.

A.A.	Ερώτηση	Ανατροφοδότηση
1	Σε μια ανίσωση 2ου βαθμού της μορφής $P(x) > 0$, τι αναζητούμε γραφικά; Επιλογές: A) Τα σημεία όπου η καμπύλη του τριωνύμου $P(x)$ τέμνει τον άξονα x'. B) Τα σημεία όπου η καμπύλη του τριωνύμου $P(x)$ τέμνει τον άξονα y'.	Στο διαδραστικό κουίζ της τελικής αξιολόγησης δίνεται μία συνολική άμεση ανατροφοδότηση, εμφανίζοντας το σύνολο των βαθμών που συγκέντρωσε ο/η εκπαιδευόμενος/η, καθώς και το ακόλουθο

	Γ) Τις τιμές του x για τις οποίες η καμπύλη του τριωνύμου $P(x)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. Δ) Τις τιμές του x για τις οποίες η καμπύλη του τριωνύμου $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. Σωστή απάντηση: Γ) Τις τιμές του x για τις οποίες η καμπύλη του τριωνύμου $P(x)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.	ευχαριστήριο μήνυμα: «Ευχαριστούμε για τη συμμετοχή! Πατήστε 'Προβολή αποτελεσμάτων' για να δείτε αναλυτικά το σκορ σας σε κάθε ερώτηση. Αν έχετε συγκεντρώσει τουλάχιστον 12 από τους 16 βαθμούς (75%), έχετε επιτύχει στο τεστ!»
2	Από θεωρητική άποψη, τι αντιπροσωπεύει μια "ακραία ή απόμακρη τιμή (outlier)" σε ένα σύνολο δεδομένων Θερμοκρασίας στην Αρκτική; Επιλογές: Α) Τη συνήθη και αναμενόμενη θερμοκρασιακή κατάσταση στην Αρκτική. Β) Μια ασυνήθιστη παρατήρηση που βρίσκεται εκτός των ορίων των φρακτών και μπορεί να οφείλεται σε έκτακτα φαινόμενα. Γ) Το μέσο επίπεδο θερμοκρασίας ολόκληρου του έτους. Δ) Την τιμή που ισούται με το πρώτο τεταρτημόριο (Q_1). Σωστή απάντηση: Β) Μια ασυνήθιστη παρατήρηση που βρίσκεται εκτός των ορίων των φρακτών και μπορεί να οφείλεται σε έκτακτα φαινόμενα.	
3	Σε ένα σύνολο δεδομένων θερμοκρασίας με περιττό πλήθος τιμών (π.χ. $N = 45$), πώς ορίζεται θεωρητικά η διάμεσος (δ); Επιλογές: Α) Είναι ο μέσος όρος των δύο μεσαίων παρατηρήσεων της ταξινομημένης σειράς. Β) Είναι η συχνότερη τιμή που εμφανίζεται στο δείγμα. Γ) Είναι η μεσαία παρατήρηση αφού ταξινομήσουμε τα δεδομένα σε αύξουσα σειρά. Δ) Είναι το ημιάθροισμα της ελάχιστης και της μέγιστης τιμής. Σωστή απάντηση: Γ) Είναι η μεσαία παρατήρηση αφού ταξινομήσουμε τα δεδομένα σε αύξουσα σειρά.	
4	Αν το τριώνυμο $f(x)$, που περιγράφει τη μέση παγκόσμια θερμοκρασιακή μεταβολή, έχει θετική διακρίνουσα ($\Delta > 0$) και θετικό συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου ($\alpha > 0$), τότε: Επιλογές:	

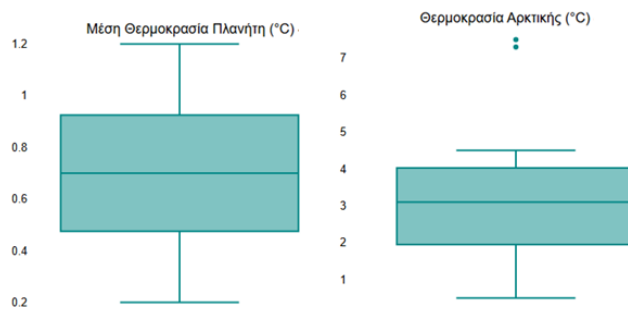
	A) $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$. B) $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Γ) $f(x) < 0$ για κάθε τιμή του x που βρίσκεται εκτός των ριζών του τριωνύμου. Δ) $f(x) < 0$ για κάθε τιμή του x που βρίσκεται εντός των ριζών του τριωνύμου. Σωστή απάντηση: Δ) $f(x) < 0$ για κάθε τιμή του x που βρίσκεται εντός των ριζών του τριωνύμου.	
5	Αν το τριώνυμο ax^2+bx+c έχει διακρίνουσα $\Delta = 0$ και $a < 0$, τότε η ανίσωση $f(x) \leq 0$: Επιλογές: A) Ισχύει για κάθε τιμή του x. B) Ισχύει για τις τιμές του x που βρίσκονται εντός των ριζών του τριωνύμου. Γ) Ισχύει για τις τιμές του x που βρίσκονται εκτός των ριζών του τριωνύμου. Δ) Ισχύει μόνο για $x = x_0$, όπου x_0 η διπλή ρίζα του τριωνύμου. Σωστή απάντηση: A) Ισχύει για κάθε τιμή του x.	
6	Σε έναν μετεωρολογικό σταθμό, μετά την ανάλυση ενός συνόλου δεδομένων, βρέθηκε ότι το πρώτο τεταρτημόριο είναι $Q_1 = 2$, το τρίτο τεταρτημόριο είναι $Q_3 = 4$ και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $Q = 2$. Τότε: Επιλογές: A) ο Κάτω Φράχτης ($Q_1 - 1.5Q$) ισούται με +1. B) ο Κάτω Φράχτης ($Q_1 - 1.5Q$) ισούται με -1. Γ) ο Πάνω Φράχτης ($Q_3 + 1.5Q$) ισούται με +3. Δ) ο Πάνω Φράχτης ($Q_3 + 1.5Q$) ισούται με +5. Σωστή απάντηση: B) ο Κάτω Φράχτης ($Q_1 - 1.5Q$) ισούται με -1.	
7	Το γράφημα αποτυπώνει τη μέση παγκόσμια θερμοκρασιακή μεταβολή $f(x)$ (σε $^{\circ}\text{C}$) για την περίοδο 1850–2025 (Εικόνα 99). Η μεταβλητή x αντιπροσωπεύει τα έτη που έχουν μεσολαβήσει από το 1850. Με βάση το γράφημα, η θερμοκρασιακή μεταβολή ήταν αρνητική ή μηδέν ($f(x) \leq 0$) για την περίοδο: Επιλογές: A) 1962 – 2025 B) 1850 – 1922 Γ) 1850 – 1962 Δ) 1850 – 2025 Σωστή απάντηση: Γ) 1850 – 1962	

	Εικόνα 99 Γράφημα μέσης παγκόσμιας θερμοκρασιακής μεταβολής (σε °C) για την περίοδο 1850–2025.	
8	Το γράφημα αποτυπώνει τη μέση παγκόσμια θερμοκρασιακή μεταβολή $f(x)$ (σε °C) για την περίοδο 1850–2025. Η μεταβλητή x αντιπροσωπεύει τα έτη που έχουν μεσολαβήσει από το 1850. Με βάση το γράφημα, η θερμοκρασιακή μεταβολή $f(x)$ ξεπέρασε τους 0,5 °C για την περίοδο: (Βλ. Εικόνα 99) Επιλογές: A) 2005 – 2025 B) 1850 – 2005 Γ) 1962 – 2005 Δ) 1850 – 2025 Σωστή απάντηση: A) 2005 – 2025	
9	Η μέση ετήσια θερμοκρασία στην περιοχή της Αρκτικής για την τελευταία 40ετία (1986–2026) προσεγγίζεται από το τριώνυμο: $g(x) = 0.02x^2 + 0.1x - 15, \text{ με } 0 \leq x \leq 40 \text{ (όπου } x=0 \text{ αντιστοιχεί στο έτος 1986).}$ Με δεδομένο ότι το τριώνυμο $g(x)$ έχει ρίζα το $x = 25$, για ποιες τιμές του x, η μέση ετήσια θερμοκρασία $g(x)$ στην Αρκτική ήταν αρνητική: Επιλογές: A) Για $x > 25$ B) Για $0 \leq x < 25$ Γ) Για $25 < x \leq 40$ Δ) Για $x < 25$ ή $x > 40$ Σωστή απάντηση: B) Για $0 \leq x < 25$	
10	Η μέση ετήσια θερμοκρασία στην περιοχή της Αρκτικής για την τελευταία 40ετία (1986–2026) προσεγγίζεται από το τριώνυμο: $g(x) = 0.02x^2 + 0.1x - 15, \text{ με } 0 \leq x \leq 40 \text{ (όπου } x=0 \text{ αντιστοιχεί στο έτος 1986).}$ Με δεδομένο ότι το τριώνυμο $g(x)$ έχει ρίζα το $x = 25$, για ποια χρονική	

	περίοδο, η μέση ετήσια θερμοκρασία $g(x)$ στην Αρκτική είναι θετική; Επιλογές: A) Μετά το 2026 το πρόσημο της μέσης ετήσιας θερμοκρασίας θα γίνει θετικό. B) Για την περίοδο 1986 - 2026 Γ) Για την περίοδο 2011 - 2026 Δ) Για την περίοδο 1986 - 2011 Σωστή απάντηση: Γ) Για την περίοδο 2011 - 2026	
11	Η μέση ετήσια θερμοκρασία στην περιοχή της Αρκτικής για την τελευταία 40ετία (1986–2026) προσεγγίζεται από το τριώνυμο: $g(x) = 0.02x^2 + 0.1x - 15$, με $0 \leq x \leq 40$ (όπου $x=0$ αντιστοιχεί στο έτος 1986). Για ποιες τιμές του x, η μέση ετήσια θερμοκρασία $g(x)$ στην Αρκτική είναι μεγαλύτερη ή ίση των -15°C; Επιλογές: A) Για $0 \leq x \leq 40$, δηλαδή για όλη τη χρονική περίοδο 1986 - 2026 B) Για $0 \leq x \leq 10$, δηλαδή για τη χρονική περίοδο 1986 - 1996 Γ) Για $10 \leq x \leq 40$, δηλαδή για τη χρονική περίοδο 1996 - 2026 Δ) Μόνο για $x = 0$, δηλαδή κατά το έτος 1986 Σωστή απάντηση: A) Για $0 \leq x \leq 40$, δηλαδή για όλη τη χρονική περίοδο 1986 - 2026	
12	Η μέση ετήσια θερμοκρασία στην περιοχή της Αρκτικής για την τελευταία 40ετία (1986–2026) προσεγγίζεται από το τριώνυμο: $g(x) = 0.02x^2 + 0.1x - 15$, με $0 \leq x \leq 40$ (όπου $x=0$ αντιστοιχεί στο έτος 1986). Με δεδομένο ότι το τριώνυμο $0.02x^2 + 0.1x - 6$ έχει ρίζες τους αριθμούς -20 και 15, για ποιες τιμές του x, η μέση ετήσια θερμοκρασία $g(x)$ στην Αρκτική είναι υψηλότερη των -9°C; Επιλογές: A) Για $x > 25$ B) Για $0 \leq x < 15$ Γ) Για $15 < x \leq 40$ Δ) Για $0 \leq x < 15$ ή $25 < x \leq 40$ Σωστή απάντηση: Γ) Για $15 < x \leq 40$	
13	Το παρακάτω σύνολο παρατηρήσεων περιλαμβάνει 20 αντιπροσωπευτικές τιμές της τελευταίας 40ετίας για τη Μέση Θερμοκρασία Πλανήτη και τη Θερμοκρασία στην Αρκτική: Μέση Θερμοκρασία Πλανήτη ($^\circ\text{C}$): 1.2, 1.2, 0.2, 0.3,	

	0.3, 0.4, 0.4, 0.5, 0.5, 0.6, 0.6, 0.7, 0.7, 0.8, 0.8, 0.9, 0.9, 1.0, 1.0, 1.1 Θερμοκρασία Αρκτικής (°C): 7.3, 7.5, 0.5, 0.7, 1.1, 1.4, 3.2, 1.8, 2.0, 2.2, 2.5, 2.8, 4.1, 3.0, 3.3, 3.5, 3.8, 4.0, 4.2, 4.5 Ποιες είναι οι τιμές του πρώτου (Q1) και του τρίτου (Q3) τεταρτημορίου για τα δύο σύνολα δεδομένων; Επιλογές A) Πλανήτη (Q1=0.45 Q3=0.95) και Αρκτική (Q1=1.9 Q3=4.05) B) Πλανήτη (Q1=0.5 Q3=1.0) και Αρκτική (Q1=2.1 Q3=4.2) Γ) Πλανήτη (Q1=0.6 Q3=0.9) και Αρκτική (Q1=2.0 Q3=4.1) Δ) Πλανήτη (Q1=0.45 Q3=1.0) και Αρκτική (Q1=1.9 Q3=4.1) Σωστή απάντηση: A) Πλανήτη (Q1=0.45 Q3=0.95) και Αρκτική (Q1=1.9 Q3=4.05)	
14	Με βάση το ίδιο σύνολο παρατηρήσεων, που περιλαμβάνει 20 αντιπροσωπευτικές τιμές της τελευταίας 40ετίας για τη Μέση Θερμοκρασία Πλανήτη και τη Θερμοκρασία στην Αρκτική, ποιες είναι οι τιμές που προκύπτουν για τον Κάτω Φράχτη και τον Πάνω Φράχτη στα δεδομένα θερμοκρασίας της Αρκτικής; Επιλογές A) Κάτω Φράχτης: -1.33 Πάνω Φράχτης: 7.28 B) Κάτω Φράχτης: -1.3 Πάνω Φράχτης: 7.5 Γ) Κάτω Φράχτης: 0.5 Πάνω Φράχτης: 6.5 Δ) Κάτω Φράχτης: 0.5 Πάνω Φράχτης: 7.28 Σωστή απάντηση: A) Κάτω Φράχτης: -1.33 Πάνω Φράχτης: 7.28	
15	Με βάση το ίδιο σύνολο παρατηρήσεων και εξετάζοντας τα δεδομένα θερμοκρασίας στην Αρκτική, σε σχέση με τους φράχτες που μόλις υπολογίσατε, υπάρχουν τιμές θερμοκρασίας που να καταγράφονται στατιστικά ως ακραίες (outliers); Αν ναι, ποιες είναι αυτές; Επιλογές A) Ναι, η τιμή 7.5°C B) Ναι, η τιμή 7.28°C Γ) Όχι, δεν υπάρχουν ακραίες τιμές Δ) Ναι, οι τιμές 7.3°C και 7.5°C Σωστή απάντηση: Δ) Ναι, οι τιμές 7.3°C και 7.5°C	
16	Παρατηρώντας τα θηκογράμματα θερμοκρασίας για τον Πλανήτη και την Αρκτική (με βάση το δείγμα των 20 ετών), ποιο από τα παρακάτω συμπεράσματα	

είναι το πλέον τεκμηριωμένο στατιστικά; (Εικόνα 100).



Εικόνα 100 Θηκογράμματα θερμοκρασίας για τον Πλανήτη και την Αρκτική.

Επιλογές

- A) Ο Πλανήτης παρουσιάζει μεγαλύτερη θερμοκρασιακή αστάθεια, καθώς η διάμεσός του (0.7) είναι χαμηλότερη από αυτή της Αρκτικής (3.1).
 B) Η Αρκτική παρουσιάζει μεγαλύτερη θερμοκρασιακή αστάθεια και ακραίες τιμές (outliers) θερμοκρασίας, στο άνω άκρο της κατανομής.
 Γ) Και τα δύο σύνολα παρατηρήσεων εμφανίζουν την ίδια θερμοκρασιακή μεταβλητότητα.
 Δ) Οι τιμές θερμοκρασίας στην Αρκτική είναι πιο σταθερές, καθώς το ενδοτεταρτημοριακό εύρος τους ($Q = 2.15$) είναι μικρότερο από το αντίστοιχο των Πλανητικών τιμών ($Q = 0.50$).

Σωστή απάντηση:

B) Η Αρκτική παρουσιάζει μεγαλύτερη θερμοκρασιακή αστάθεια και ακραίες τιμές (outliers) θερμοκρασίας, στο άνω άκρο της κατανομής.

Αναφορές

- Αδαμίδης, Δ., & Καραντάνα, Α. (2026). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος». <https://ebooksdl.cti.gr/view?item=20.500.14040/35854>
- Αργυράκης, Α., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ. & Χρυσοβέργης, Μ. (2025). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων (ITYE) «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ». https://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2212/Mathimatika_G-Gymnasiou_html-empl/index.html
- Βακαλόπουλος, Κ., Βροντάκης, Ε., Κεϊσόγλου, Σ., & Φερεντίνος, Σ. (2026). *Άλγεβρα Α΄ Λυκείου*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων (ITYE) «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ». <https://ebooksdl.cti.gr/view?item=20.500.14040/29808>
- Bloom, B. S., Hastings, J. T., & Madaus, G. F. (1971). *Handbook on formative and summative evaluation of student learning*. McGraw-Hill.
- Γαβρίλης, Κ., Μπαράλος, Γ., Τάσος, Ν., Νεστορίδης, Β., Πούλου, Μ., Φιλιππάκης, Μ., Μάλλιαρης, Χ., & Μοτσάκος, Β. (2026a). *Άλγεβρα Α΄ Λυκείου*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος». <https://ebooksdl.cti.gr/view?item=20.500.14040/21382>
- Γαβρίλης, Κ., Μπαράλος, Γ., Τζούμας, Μ., Οικονόμου, Φ., Πούλου, Μ. Ε., & Φιλιππάκης, Μ. (2026b). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος». <https://ebooksdl.cti.gr/view?item=20.500.14040/37041>
- COERLL. (n.d.). *Classroom setting* [Image]. The University of Texas at Austin. <https://coerll.utexas.edu/methods/images/modules/cm/classrooms/medium-1.jpg>
- Creative Commons. (2024). *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*. <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>
- Canva. (2026). *Canva* [Graphicdesignsoftware]. Retrieved June 16, 2026, from <https://www.canva.com/>
- Cosgrove, J., & Cachia, R. (2025). *DigComp 3.0: European digital competence framework* (5th ed., JRC144121). Publications Office of the European Union. <https://doi.org/10.2760/0001149>
- Διαμαντίδης, Δ., Καλογερία, Ε., Περυσινάκη, Ε., Σταμπόλας, Γ., Στουραϊτης, Κ., Φακούδης, Β., & Ψυχάρης, Γ. (2026). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος». <https://ebooksdl.cti.gr/view?item=20.500.14040/35293>
- David Simmer II. (2007). *Wagon* [Cartoon illustration]. Blogography. https://blogography.com/archives/category/davetoons/davetoons_2007
- Efstathiou, M. N., Tzanis, C., Cracknell, A., & Varotsos, C. A. (2011). New features of the land and sea surface temperature anomalies. *International Journal of Remote Sensing*, 32(11), 3231–3238. <https://doi.org/10.1080/01431161.2010.541504>
- Garrison, D. R., Anderson, T., & Archer, W. (2000). Critical inquiry in a text-based environment: Computer conferencing in higher education. *The Internet and Higher Education*, 2(2-3), 87–105. [https://doi.org/10.1016/S1096-7516\(00\)00016-6](https://doi.org/10.1016/S1096-7516(00)00016-6)
- GeoGebra. (2026). *GeoGebra* (Version 6.0) [Computer software]. Retrieved June 16, 2026, from <https://www.geogebra.org/>
- Google. (2026a). *NotebookLM* [Large language model]. Retrieved June 16, 2026, from <https://notebooklm.google.com/>
- Google.(2026b). *Gemini* (Gemini 1.5 Pro version) [Large language model]. Retrieved June 16, 2026, from <https://gemini.google.com/>
- Google. (2026c). *Google Forms* [Computer software]. Retrieved June 16, 2026, from <https://www.google.com/forms/about/>
- Google. (2026d). *Google AI Studio* (Gemini 1.5 Pro version) [Large language model]. Retrieved June 16, 2026, from <https://aistudio.google.com/>
- Google. (2026e). *Google Slides* [Computer software]. Retrieved June 16, 2026, from <https://www.google.com/slides/about/>

- HeyGen. (2026). *HeyGen* [AI Video Generation Software]. Retrieved June 16, 2026, from <https://www.heygen.com/>
- ITYE-Διόφαντος. (2026). *Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Μερίσπη*. https://ebooksdl.cti.gr/didaktika_paketa
- Λαμπρόπουλος, Θ., Μανιάς, Δ., Λαμπροπούλου, Δ., & Λαμπρόπουλος, Ν. (2026). *Άλγεβρα Α' Λυκείου*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων (ITYE) «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ». <https://ebooksdl.cti.gr/view?item=20.500.14040/37195>
- Lumi Education. (2026). *Lumi* (Version 1.0) [Computer software]. Retrieved June 20, 2026, from <https://lumi.education/>
- Μπαράλος, Γ., Τζούμας, Μ., Χασάπης, Σ., Πούλου, Μ. Ε., & Φιλιππάκης, Μ. (2026). *Στοχαστικά Μαθηματικά Α' Λυκείου*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων (ITYE) «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ». <https://ebooksdl.cti.gr/view?item=20.500.14040/35289>
- Microsoft. (2026a). *Microsoft Excel* (Version 2026) [Computer software]. Retrieved June 16, 2026, from <https://www.microsoft.com>
- Microsoft. (2026b). *Microsoft Power Point* (Version 2026) [Computer software]. Retrieved June 18, 2026, from <https://www.microsoft.com>
- Microsoft Corporation. (n.d.-a). *Microsoft Forms* [Computer software]. Microsoft. Retrieved June 16, 2026, from <https://forms.microsoft.com/>
- Microsoft Corporation. (n.d.-b). *Xbox Game Bar* [Computer software]. Microsoft. <https://www.xbox.com/apps/xbox-game-bar>
- NASA. (1987). *British Aerospace BAE 146-200, N206PA* [Image]. Wikimedia Commons. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:DN-SC-87-05770.JPEG>
- OECD. (2023). *OECD Digital Education Outlook 2023: Progress towards digital transformation in education*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/d435016c-en>
- Πανεπιστήμιο Αιγαίου. (χ.χ.). *Οδηγίες για το Geogebra* [PDF]. <https://eclass.aegean.gr/modules/document/file.php/SAS248/%CE%9F%CE%B4%CE%B7%CE%B3%CE%AF%CE%B5%CF%82%20%CE%B3%CE%B9%CE%B1%20%CF%84%CE%BF%20Geogebra.pdf>
- Pichette, J., Brumwell, S., Rizk, J., & Han, S. (2021). *Making sense of microcredentials*. Higher Education Quality Council of Ontario. <https://heqco.ca/pub/making-sense-of-microcredentials/>
- Physicsgg. (2023). *Ποια ήπειρος εμφανίζει τον μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης θερμοκρασίας; [graph]*. Physicsgg. <https://physicsgg.me/2023/06/19/%CF%80%CE%BF%CE%B9%CE%AC-%CE%AE%CF%80%CE%B5%CE%B9%CF%81%CE%BF%CF%82-%CE%B5%CE%BC%CF%86%CE%B1%CE%BD%CE%AF%CE%B6%CE%B5%CE%B9-%CF%84%CE%BF%CE%BD-%CE%BC%CE%B5%CE%B3%CE%B1%CE%BB%CF%8D%CF%84%CE%B5%CF%81/>
- Ρεκούμης, Κ., Κατσάπας, Λ., Κουμάντος, Ν., & Ρεκούμη, Ε. (2026a). *Άλγεβρα Α' Λυκείου*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων (ITYE) «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ». <https://ebooksdl.cti.gr/view?item=20.500.14040/22779>
- Ρεκούμης, Κ., Κατσάπας, Λ., Κουμάντος, Ν., & Ρεκούμη, Ε. (2026b). *Στοχαστικά Μαθηματικά Α' Λυκείου*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων (ITYE) «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ». <https://ebooksdl.cti.gr/view?item=20.500.14040/22793>
- Σάμψων, Δ. (2026). *Εκφώνηση Εργασίας 3: Σχεδίαση και υλοποίηση ψηφιακού μαθήματος για την ανάπτυξη ψηφιακών ικανοτήτων πολιτών [Εκφώνηση εργασίας μαθήματος]*. Μάθημα «Εκπαιδευτική Τεχνολογία» (ΨΣ-ΗΜ-721), ΠΜΣ «Ηλεκτρονική Μάθηση», Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Sergis, S., & Sampson, D. G. (2016). Towards a teaching analytics tool for supporting reflective educational (re)design in inquiry-based STEM education. In *2016 IEEE 16th International Conference on Advanced Learning Technologies (ICALT)* (pp. 314–318). IEEE. <https://doi.org/10.1109/ICALT.2016.134>
- Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων. (2023). *Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α', Β' και Γ' τάξεων Γενικού Λυκείου* (Υ.Α. 23523/Δ2/02-03-2023, ΦΕΚ Β'

- 1326/08.03.2023). Retrieved June 16, 2026, from <https://www.especial.gr/wp-content/uploads/2023/03/fek-b-1326-8-3-2023.pdf>
- Varotsos, C. A., & Efstathiou, M. N. (2019). Has global warming already arrived? *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 182, 31–38. <https://doi.org/10.1016/j.jastp.2018.10.020>
- Wallwisher, Inc. (n.d.). *Padlet* [Web application]. Retrieved June 16, 2026, from <https://padlet.com/>
- Wiggins, G. (1998). *Educative assessment: Designing assessments to inform and improve student performance*. Jossey-Bass.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Αξιοποίηση της Τεχνητής Νοημοσύνης κατά την Εκπόνηση της Μεταπτυχιακής Διπλωματικής Εργασίας

Σκοπός του Παραρτήματος. Στο πλαίσιο της διαφάνειας, της ακαδημαϊκής ακεραιότητας και της υπεύθυνης αξιοποίησης της Τεχνητής Νοημοσύνης (TN), η παρούσα Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία (ΜΔΕ) αξιοποίησε εργαλεία TN τόσο για τη δημιουργία του ψηφιακού εκπαιδευτικού υλικού όσο και για την υποστήριξη της συγγραφικής διαδικασίας. Η εκπόνηση ακολούθησε πιστά την αρχή Human in the Loop (HITL): η TN χρησιμοποιήθηκε ως μέσο υποστήριξης της δημιουργικής και επιστημονικής διαδικασίας, ενώ η ευθύνη για τον σχεδιασμό, την παιδαγωγική τεκμηρίωση, την επιστημονική εγκυρότητα και την τελική μορφή ανήκει αποκλειστικά στη συγγραφέα.

1. Επίπεδο χρήσης της Τεχνητής Νοημοσύνης (AI Assessment Scale – AIAS)

Η παρούσα εργασία εντάσσεται στο AIAS Level 4 (AI Integration), καθώς η Τεχνητή Νοημοσύνη αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της παραγωγής του τελικού πολυμεσικού εκπαιδευτικού έργου (δημιουργία AI avatars, παραγωγή ηχητικών επεξηγήσεων, σύνθεση πολυμεσικού υλικού), ενώ παράλληλα αξιοποιήθηκε και στο Level 3 (AI Collaboration) για τη γλωσσική επιμέλεια και αναδιατύπωση του κειμένου της ΜΔΕ. Ωστόσο, όλες οι παιδαγωγικές αποφάσεις, η επιλογή του περιεχομένου και η τελική μορφή του έργου αποτελούν αποκλειστική ευθύνη της συγγραφέως.

2. Συνοπτικός Πίνακας Χρήσης της Τεχνητής Νοημοσύνης

Στάδιο της εργασίας	Εργαλείο TN	Σκοπός χρήσης	AIAS επίπεδο	Ανθρώπινη παρέμβαση
Δημιουργία Εκπαιδευτικού Υλικού (Avatars)	HeyGen	Δημιουργία AI Avatars για ενίσχυση της κοινωνικής παρουσίας και διαδραστικότητας	Level 4	Χειροκίνητες ρυθμίσεις και επαναληπτικές δοκιμές για διόρθωση του συγχρονισμού με τον ελληνικό λόγο
Δημιουργία Εκπαιδευτικού Υλικού (Ήχος)	Google AI Studio	Παραγωγή ηχητικών επεξηγήσεων για το μάθημα	Level 4	Έλεγχος, αξιολόγηση και επιλογή των παραγόμενων ηχητικών αρχείων
Σύνθεση Υλικού & Σχεδιασμός	NotebookLM	Σύνθεση πληροφοριακού υλικού (review videos, infographics) και σχεδιασμός background διαφανειών	Level 4	Επιλογή, δομική προσαρμογή και ενσωμάτωση στο εκπαιδευτικό σενάριο
Γλωσσική Επιμέλεια ΜΔΕ	Google Gemini	Βελτίωση διατύπωσης και απόδοση ακαδημαϊκού ύφους	Level 3	Εκτενής έλεγχος, επεξεργασία και αναδιατύπωση για διατήρηση της επιστημονικής ακρίβειας και του προσωπικού ύφους

3. Αναλυτική Περιγραφή της Χρήσης της Τεχνητής Νοημοσύνης

- Δημιουργία βίντεο και avatars (HeyGen): Χρησιμοποιήθηκε για την οπτικοποίηση τμημάτων του μαθήματος, ενισχύοντας την αλληλεπίδραση των μαθητών/τριών με το ψηφιακό υλικό.
- Παραγωγή ήχου (Google AI Studio): Αξιοποιήθηκε για τη δημιουργία ψηφιακών ηχητικών επεξηγήσεων που πλαισιώνουν τις διαφάνειες και τις ενότητες μελέτης.
- Σύνθεση περιεχομένου και σχεδιασμός (NotebookLM): Χρησιμοποιήθηκε για την υποστήριξη της παραγωγής υποστηρικτικού υλικού (infographics, βίντεο ανασκόπησης) καθώς και για προτάσεις φόντου (background) στις διαφάνειες.
- Γλωσσική επιμέλεια (Google Gemini): Χρησιμοποιήθηκε επικουρικά για τη διόρθωση συντακτικού, τη βελτίωση της ροής του κειμένου και την υιοθέτηση ακαδημαϊκού ύφους στην τελική συγγραφή της ΜΔΕ.

4. Ενδεικτικές Προτροπές (Prompts)

Εργαλείο: Google Gemini

- **Σκοπός:** Γλωσσική επιμέλεια και ακαδημαϊκή αναδιατύπωση παραγράφου.
- **Prompt:** «Αναδιατύπωσε την παρακάτω παράγραφο με στόχο την απόδοση πιο ακαδημαϊκού ύφους, διατηρώντας ακριβώς το ίδιο νόημα σχετικά με τη σύνδεση των μαθηματικών με την πραγματική ζωή».

Εργαλείο: NotebookLM

- **Σκοπός:** Σύνθεση πληροφοριών για τη δημιουργία ενημερωτικού υλικού.
- **Prompt:** «Βάσει των εγγράφων που ανέβηκαν, δημιούργησε μια δομή για infographic που συνοψίζει τα βασικά βήματα της μαθηματικής μοντελοποίησης για μαθητές/τριες Α' Λυκείου».

Εργαλείο: Google AI Studio

- **Σκοπός:** Παραγωγή ηχητικής επεξήγησης / εκφώνησης για το ψηφιακό υλικό.
- **Prompt:** «Για τη διευκόλυνση των υπολογισμών, τα ποσοτικά δεδομένα καταχωρίζονται σε φύλλο εργασίας του Excel. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ενός συνόλου παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν».

Εργαλείο: HeyGen

- **Σκοπός:** Δημιουργία σεναρίου / κειμένου εκφώνησης για το AI Avatar (εισαγωγή μικρο-μαθήματος).
- **Prompt:** «Καλώς ορίσατε στο Μικρο-Μάθημα "Μαθηματική Μοντελοποίηση με Ανισώσεις 2ου Βαθμού σε Ψηφιακά Περιβάλλοντα". Σήμερα, αναλαμβάνετε έναν κρίσιμο ρόλο στο Κέντρο Επιχειρήσεων της Πολεμικής Αεροπορίας ως Data Analyst. Η αποστολή σας αφορά την ανάλυση της περιτολίας ενός αεροσκάφους πάνω από τον Ελλαδικό χώρο. Η οριζόντια μετατόπισή του σε σχέση με την Αθήνα καθορίζεται από ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού, το οποίο αποτυπώνει τις διαδρομές του τόσο προς τα Ανατολικά όσο και προς τα Δυτικά. Το καθήκον σας είναι να αναλύσετε τα δεδομένα της τροχιάς του, προκειμένου να

ολοκληρώσετε το πλήρες επιχειρησιακό προφίλ της πτήσης. Είστε έτοιμοι; Πατήστε στον σύνδεσμο που εμφανίζεται στην οθόνη σας για να δείτε την αποστολή σας!».

5. Ανάλυση / Τεκμηρίωση των Αποφάσεων / Παρεμβάσεων (Human in the Loop)

Η εφαρμογή της αρχής Human in the Loop αποτυπώνεται στα εξής σημεία:

- **Γλωσσικές προτάσεις:** Αρκετές προτάσεις και αποδόσεις που παρήγαγε το Google Gemini απορρίφθηκαν ή τροποποιήθηκαν σημαντικά, καθώς δεν απέδιδαν με ακρίβεια την παιδαγωγική ορολογία ή αλλοίωναν το προσωπικό συγγραφικό ύφος.
- **Τεχνικές προσαρμογές στα Avatars:** Κατά τη χρήση του HeyGen εντοπίστηκαν αστοχίες και ζητήματα στον συγχρονισμό της κίνησης του στόματος με την ελληνική γλώσσα, τα οποία επιλύθηκαν αποκλειστικά μέσω χειροκίνητων ρυθμίσεων και επαναληπτικών δοκιμών από τη συγγραφέα.
- **Παιδαγωγική εγκυρότητα:** Το περιεχόμενο που προέκυψε από τα εργαλεία σύνθεσης (όπως το NotebookLM) φιλτραρίστηκε, αξιολογήθηκε και τροποποιήθηκε εκτενώς ώστε να ευθυγραμμίζεται πλήρως με τα αναλυτικά προγράμματα και τις γνωστικές ικανότητες των μαθητών/τριών της Α΄ Λυκείου.

6. Κριτική Αποτίμηση της Χρήσης της Τεχνητής Νοημοσύνης

Η αξιοποίηση των εργαλείων Τεχνητής Νοημοσύνης αποδείχθηκε ιδιαίτερα χρήσιμη κυρίως στα στάδια της παραγωγής πολυμεσικού υλικού (avatars, ήχος) και της επικουρικής γλωσσικής υποστήριξης. Σημαντικό πλεονέκτημα αποτέλεσε η εξοικονόμηση χρόνου και η δυνατότητα οπτικοποίησης σύνθετων εννοιών.

Ωστόσο, αναδείχθηκαν και σημαντικοί περιορισμοί: τα εργαλεία ΤΝ αδυνατούν να συλλάβουν απόλυτα την παιδαγωγική λεπτότητα και την τοπική εκπαιδευτική πραγματικότητα χωρίς εντατική ανθρώπινη καθοδήγηση. Οι τεχνικές δυσκολίες συγχρονισμού στα avatars και η ανάγκη διαρκούς διόρθωσης του παραγόμενου ακαδημαϊκού λόγου απέδειξαν ότι η ΤΝ μπορεί να λειτουργήσει μόνο ως βοηθητικό εργαλείο. Το βασικότερο δίδαγμα που προέκυψε είναι ότι ο ανθρώπινος παράγοντας παραμένει αναγκαίος και αναντικατάστατος σε όλα τα στάδια λήψης αποφάσεων, διασφαλίζοντας την ποιότητα, την πρωτοτυπία και την ακαδημαϊκή εγκυρότητα της εργασίας.