

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής



Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με
προοδευτικά επικαιροποιημένο δείγμα
Φάσης I για μοντέλα αλλαγής σημείου**

Πέτρος Κυριακίδης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς

Μάιος 2026

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Τριανταφύλλου Σ. Ιωάννης (Επιβλέπων) – Αναπληρωτής Καθηγητής
- Πολίτης Κωνσταντίνος - Καθηγητής
- Ρακιτζής Αθανάσιος – Αναπληρωτής Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS
School of Finance and Statistics



Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS

Nonparametric control charts based on a
sequentially up-to-date Phase I sample
under change-point models

Petros Kyriakides

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of
the requirements for the degree of Master of Science in
Applied Statistics

Piraeus, Greece

May 2026

Στην οικογένεια μου

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες σε όλους όσους συνέβαλαν, άμεσα ή έμμεσα, στην πραγματοποίησή της.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στον επιβλέποντα καθηγητή μου, για την πολύτιμη καθοδήγηση, τις εύστοχες παρατηρήσεις, την επιστημονική του υποστήριξη και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής για τον χρόνο που θα αφιερώσουν στην αξιολόγηση της εργασίας αυτής.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου, τον αδερφό μου, το σύντροφο μου και στους ανθρώπους που στάθηκαν δίπλα μου, για την αμέριστη υποστήριξη, την υπομονή και την ενθάρρυνσή τους σε όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Η συμβολή τους υπήρξε καθοριστική για την επίτευξη αυτού του στόχου.

Περίληψη

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι να επικεντρωθεί στο σχεδιασμό, την προσομοίωση και την αξιολόγηση μη παραμετρικών διαγραμμάτων διατεταγμένων παρατηρήσεων Precedence, με στόχο τη μετάβαση από τα παραδοσιακά στατικά μοντέλα σε σύγχρονες προσεγγίσεις μέσω προοδευτικής επικαιροποίησης του δείγματος. Σκοπός της παρούσας ερευνητικής προσπάθειας είναι να αντιμετωπιστεί το ζήτημα για απαίτηση ενός πολύ μεγάλου δείγματος στη *Φάση I*. Μέσω εκτεταμένων προσομοιώσεων *Monte Carlo* σε περιβάλλον R, προσομοιώνεται ένα στατικό μοντέλο, το οποίο επιβεβαιώνει την ιδιότητα της ελεύθερης κατανομής, διατηρώντας το εντός ελέγχου Μέσο Μήκος Ροής σταθερό, ανεξαρτήτως κατανομής, ενώ παράλληλα η σύγκρισή του με το Διάμεσο Μήκος Ροής ανέδειξε την έντονη λοξότητα της κατανομής σε ό,τι αφορά στο χρόνο απόκρισης, προτρέποντας στη χρήση του Διάμεσου Μήκους ως πιο αξιόπιστου μέτρου σε μικρές μετατοπίσεις. Στο τελευταίο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας αναπτύχθηκε ένας προοδευτικός αλγόριθμος, ο οποίος εκκινεί με ένα μικρό δείγμα αναφοράς (επιχειρώντας να ξεπεράσει το πρόβλημα της απαίτησης για ένα μεγάλο δείγμα), επικαιροποιώντας δυναμικά τα όρια ελέγχου. Στο πλαίσιο της παραπάνω προσέγγισης αποκαλύφθηκε μία κρίσιμη πτυχή, αποτυπώνοντας το ζήτημα του *masking effect*, της περίπτωσης δηλαδή κατά την οποία το προοδευτικό αυτό σύστημα ενσωματώνει ελαφρώς ελαττωματικά δείγματα, προκαλώντας ακούσια διεύρυνση των ορίων, προσθέτοντας χρονική υστέρηση στο πλαίσιο της ανίχνευσης των σφαλμάτων εν συγκρίσει με το στατικό μοντέλο. Αντίθετα, σε μεγαλύτερες τιμές μετατοπίσεων η ανίχνευση των σφαλμάτων κατέστη άμεση με τις αποδόσεις των δύο διαγραμμάτων να είναι προσεγγιστικά ίδιες.

Λέξεις-κλειδιά: Μη Παραμετρικά Διαγράμματα, Διατεταγμένες παρατηρήσεις, Προοδευτική επικαιροποίηση διαγράμματος, Προσομοίωση Monte Carlo, Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας

Abstract

The main scope of this thesis is to focus on the design, simulation and evaluation of non-parametric diagrams of ordered observations *Precedence*, aiming at the transition from traditional static models to modern approaches through progressive sample updating. The purpose of this research effort is to address the issue of requiring a very large sample in Phase I. Through extensive Monte Carlo simulations in the R environment, a static model is simulated, which confirms the property of the free distribution, keeping the under-control Mean Flow Length constant, regardless of the distribution, while at the same time its comparison with the Median Flow Length highlighted the strong skewness of the distribution in terms of response time, urging the use of the Median Length as a more reliable measure at small displacements. In the last chapter of this work, a progressive algorithm was developed, which starts with a small reference sample (trying to overcome the problem of the requirement for a large sample), dynamically updating the control limits. In the context of the above approach, a critical aspect was revealed, capturing the issue of the masking effect, that is, the case in which this progressive system incorporates slightly defective samples, causing an unintentional widening of the limits, adding a time delay in the context of error detection compared to the static model. On the contrary, at larger displacement values, error detection became immediate with the performances of the two diagrams being approximately the same.

Keywords: Non-Parametric Diagrams, Ordered Observations, Progressive Diagram Updating, Monte Carlo Simulation, Statistical Quality Control

Περιεχόμενα

<i>Κεφάλαιο 1</i>	18
1.1 Εισαγωγή στον Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας και τα Διαγράμματα Ελέγχου.....	18
1.2 Είδη διαγραμμάτων ελέγχου.....	20
1.2.1 Ιστορική αναδρομή και βασικές αρχές	20
1.2.2 Εξειδικευμένα Διαγράμματα Ελέγχου	22
1.2.3 Παραμετρικά και μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου	26
1.3 Βασική δομή των διαγραμμάτων ελέγχου	29
1.3.1 Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARL_{in} ή ARL_0)	29
1.3.2 Εκτός ελέγχου Μέσο Μήκος Ροής (ARL_{out} ή ARL_1)	29
1.3.3 Παραδείγματα υπολογισμού σε παραμετρικά διαγράμματα	29
1.3.4 Σύγχρονοι παράγοντες που επηρεάζουν την απόδοση των διαγραμμάτων.....	31
<i>Κεφάλαιο 2. Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου</i>	33
2.1. Εισαγωγή και θεωρητικό υπόβαθρο	33
2.1.1 Μαθηματική θεμελίωση στατιστικών προσήμου και κατατάξεων	33
2.2. Διατεταγμένες παρατηρήσεις και στατιστικές υπέρβασης	34
2.2.1. Ορισμός και μαθηματική αποτύπωση.....	34
2.3 Ανασκόπηση υπάρχουσας βιβλιογραφίας και δημοσιευμένα αποτελέσματα	36
2.3.1 Διαγράμματα τύπου Shewhart και precedence	36
2.3.2 Διαγράμματα κοινής παρακολούθησης	37
2.3.3 Διαγράμματα προσημικών τάξεων	37
2.3.4. Τεχνικές αναδειγματοληψίας και χωρικής εξάρτησης.....	37
2.3.5. Προηγμένες στρατηγικές δειγματοληψίας.....	39
2.4 Δείκτες απόδοσης: ARL έναντι MRL	40
2.4.1. Απόδοση σε συμμετρικές κατανομές.....	40
2.4.2. Απόδοση σε λοξές κατανομές.....	41
2.5 Ενίσχυση με κανόνες ροής	42
2.5.1 Προηγμένοι κανόνες ροής και πολλαπλές σαρώσεις	43
2.6 Συμπεράσματα.....	44
<i>Κεφάλαιο 3: Μεθοδολογία προσομοίωσης και αξιολόγηση απόδοσης</i>	46
3.1 Περιγραφή του αλγορίθμου προσομοίωσης	46
3.1.1 Μαθηματική Μορφή και Ιδιότητες των Κατανομών της Προσομοίωσης	48
3.1.2 Αρχιτεκτονική του Κώδικα και Παράμετροι Προσομοίωσης.....	49
3.2 Υπολογισμός Μέτρων Απόδοσης.....	49
3.3 Αποτελέσματα επαλήθευσης και ανάλυση αποτελεσμάτων.....	51
3.3.1 Υπολογισμός ARL_{in}	51
3.3.2 Υπολογισμός ARL_{out}	53

3.3.3 Οπτικοποίηση Διαγράμματος Precedence	56
3.3.4 Γραφική απεικόνιση και οπτική Ανάλυση της διαδικασίας	57
3.4. Προγραμματιστική επαλήθευση της ιδιότητας ελεύθερης κατανομής	57
3.4.1 Επίδραση του μεγέθους δείγματος αναφοράς (m)	58
3.4.2 Αλγοριθμική εξαγωγή των μέτρων θέσης και διασποράς του μήκους ροής	60
<i>Κεφάλαιο 4</i>	62
4.1 Εισαγωγή στην προοδευτική παρακολούθηση και την αλγοριθμική της υλοποίηση	62
4.1.1 Παράθεση και ανάλυση κώδικα προοδευτικού διαγράμματος με κώδικα σε περιβάλλον R	63
4.2 Αποτελέσματα προσομοιώσεων για διάφορες κατανομές	67
4.4 Διερεύνηση διαφορών υποθέσεων	70
4.4.1 Επίδραση του μεγέθους της μετατόπισης	70
4.4.2 Moving window	71
4.4.3 Η επίδραση των ακραίων τιμών στη Φάση I.	71
<i>Κεφάλαιο 5: Συμπεράσματα και προεκτάσεις μελλοντικής έρευνας</i>	72
5.1 Σύνοψη και βασικά συμπεράσματα της έρευνας	72
5.2 Πρακτική αξία της μεθοδολογίας	73
5.3 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα	73
<i>Βιβλιογραφικές αναφορές</i>	75
<i>Παράρτημα</i>	85

Κατάλογος εικόνων

Εικόνα 1. Ιδιότητα ελεύθερης κατανομής.....	52
Εικόνα 2. Σύγκριση μέσου και διάμεσου μήκους ροής για διάφορες τιμές της μετατόπισης δ	54
Εικόνα 3. Διάγραμμα ελέγχου Precedence	56
Εικόνα 4. Διαγραμματική διερεύνηση της μετατόπισης στο ARL	59
Εικόνα 5. Προοδευτικό διάγραμμα ελέγχου Precedence με δυναμικά όρια	66

Κατάλογος πινάκων

Πίνακας 1. Εντός ελέγχου μέτρα απόδοσης για πέντε διαφορετικές κατανομές ($\delta=0, 10.000$ επαναλήψεις)	51
Πίνακας 2. Εκτός ελέγχου μέτρα απόδοσης για διάφορες μετατοπίσεις ($m=500, n=5, j=3, 10.000$ επαναλήψεις)	53

Κεφάλαιο 1

1.1 Εισαγωγή στον Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας και τα Διαγράμματα Ελέγχου

Ο στατιστικός έλεγχος ποιότητας αποτελεί ένα ιδιαίτερα σημαντικό εργαλείο κατά την παραγωγική διεργασία ενός προϊόντος Τριανταφύλλου, Ι.Σ. (2009), Τα στάδια του εκτείνονται από το αρχικό στάδιο του σχεδιασμού και εργαστηριακού ελέγχου έως και την εφαρμογή του στην παραγωγική διαδικασία Τριανταφύλλου, Ι.Σ. (2009). Γίνεται αντιληπτό ότι η εφαρμογή του στατιστικού ελέγχου ποιότητας καθίσταται ζωτικής σημασίας τόσο σε όρους διασφάλισης ποιότητας όσο και σε όρους οικονομικής αποδοτικότητας και αποτελεσματικότητας συμβάλλοντας με αυτόν τον τρόπο στον βέλτιστο οικονομικό σχεδιασμό εκ μέρους των εμπλεκόμενων μερών Τριανταφύλλου, Ι.Σ. (2009).

Ο τρόπος για να επιτύχει τα παραπάνω έγκειται στην εστιασμένη του στόχευση για μείωση της μεταβλητότητας της παραγωγικής διεργασίας, αυξάνοντας με αυτό τον τρόπο την ικανότητά της και βελτιώνοντας σημαντικά τη σταθερότητά της Τριανταφύλλου, Ι.Σ. (2009). Η έγκαιρη και έγκυρη ανίχνευση αποκλίσεων από τα αποδεκτά όρια για την εκάστοτε παραγωγική διεργασία, επιτρέπει στη λήψη των κατάλληλων διορθωτικών μέτρων, μειώνοντας συνεπακόλουθα και το κόστος. Ειδικότερα, ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών στοχεύει στην επίτευξη σταθερότητας και στη βελτίωση της ικανότητας της παραγωγικής διαδικασίας μέσω της συνεχούς μείωσης της μεταβλητότητας Τριανταφύλλου, Ι.Σ. (2009). Η έγκαιρη ανίχνευση αποκλίσεων επιτρέπει τη λήψη διορθωτικών ενεργειών, μειώνοντας το κόστος που προκύπτει από την παραγωγή ελαττωματικών προϊόντων Τριανταφύλλου, Ι.Σ. (2009); Αντζουλάκος, 2016).

Στο πλαίσιο των έξυπνων κατασκευών και του Industry 5.0, ο στατιστικός έλεγχος παρακολούθησης διεργασιών δεν αποτελεί πλέον ένα απλό μέσο παρακολούθησης διεργασιών αλλά μία κρίσιμη στρατηγική διαχείρισης των Big Data (Chakraborty & Mahmood, 2026). Στο πλαίσιο της βιβλιογραφίας αναλύεται εκτενώς η κρισιμότητα του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας στο πλαίσιο της ανίχνευσης αποκλίσεων που δημιουργούν ζητήματα σε όρους αποτελεσματικότητας των προϊόντων, ιδιαιτέρως σε ό,τι αφορά σε περιβάλλοντα με υψηλές συχνότητες δειγματοληψίας και διεργασίες υψηλών διαστάσεων, εγείροντας εύλογα απαιτήσεις υψηλών προδιαγραφών όπου οι κλασικές συμβατικές παραδοχές αποτυγχάνουν (Chakraborty & Mahmood, 2026; Grimm et al., 2025; Talordphop et al., 2025).

Τα διαγράμματα ελέγχου αποτελούν το θεμέλιο αυτής της προσέγγισης, διακρίνοντας μεταξύ των κοινών και ειδικών αιτιών μεταβλητότητας, επιτρέποντας την εφαρμογή τους πέρα από τα στενά όρια της παραγωγής και καλύπτοντας ένα ευρύ φάσμα επιστημονικών πεδίων όπως εφαρμογές:

- **Στη βιομηχανική παραγωγή:** Κατασκευή εμβόλων (Abbas et al., 2025), παραγωγή μπαταριών (Gong et al., 2025) και κατασκευή εξαρτημάτων (Sudsutad et al., 2026).
- **Στην ωκεανογραφική μηχανική:** Παρακολούθηση της απόδοσης των κυματοθραυστών και διαχείριση του ύψους των κυμάτων με στόχευση την προστασία των υποδομών (Triantafyllou, 2025).
- **Στο πλαίσιο του περιβάλλοντος και της ασφάλειας:** Παρακολούθηση καιρικών συνθηκών και φυσικών καταστροφών ή πολεμικών επιπτώσεων (Adämmer et al., 2025).
- **Στην υγεία και των εφαρμογών της στην βιοϊατρική:** Παρακολούθηση βιομετρικών δεικτών σε κλινικά περιβάλλοντα (Braimah et al., 2025) και ανάλυση δεδομένων θνησιμότητας (Phantu et al., 2024).
- **Στην ενέργεια και τις υπηρεσίες:** Παρακολούθηση σταθμών παραγωγής ενέργειας (Raza et al., 2024) και βελτιστοποίηση διαδικασιών εφοδιαστικής αλυσίδας (Triantafyllou, 2024).

1.2 Είδη διαγραμμάτων ελέγχου

1.2.1 Ιστορική αναδρομή και βασικές αρχές

Ο στατιστικός έλεγχος διεργασιών και τα διαγράμματα ελέγχου τοποθετούν την αφετηρία τους χρονικά περί το 1924, όταν ο Walter Shewhart, εργαζόμενος στην Bell Telephone Laboratories, ανέπτυξε τα πρώτα διαγράμματα ελέγχου (Fisher & Nair, 2009) εντόπισε στοιχεία σημαντικά, τα οποία έμελλε να γίνουν θεμελιώδεις όροι που περιγράφουν τις παραγωγικές διεργασίες, δημιουργώντας και αναπτύσσοντας σημαντικά εργαλεία στην κατεύθυνση της κατανόησης και της βελτίωσης αυτών των διεργασιών. Συγκεκριμένα, αναγνωρίζοντας τη διακύμανση η οποία είναι εγγενής σε κάθε παραγωγική διεργασία, διέκρινε δύο βασικές πηγές διακύμανσης την κοινή ή τυχαία διακύμανση η οποία είναι σύμφυτη με τη διεργασία και τη διακύμανση η οποία εκπηγάει από ειδική αιτία και απαιτεί εις βάθος διερεύνηση (Fisher & Nair, 2009). Το διάγραμμα ελέγχου αποτελεί μία διαγραμματική αποτύπωση στο πλαίσιο της εφαρμογής του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας για την παρακολούθηση μίας παραγωγικής διεργασίας με την πάροδο του χρόνου και τον έγκαιρο προσδιορισμό αυτών των ειδικών αιτιών μεταβλητότητας (“CONTROL CHART,” 2011; Panayiotou et al., 2023).

Τα είδη των διαγραμμάτων ελέγχου διακρίνονται σε δύο ευρύτερες κατηγορίες και το κριτήριο διαχωρισμού έγκειται στο είδος των δεδομένων τα οποία καλούνται να προσεγγίσουν (Αντζουλάκος, 2010). Έτσι διακρίνουμε διαγράμματα ελέγχου:

Μεταβλητών: Επιλέγονται όταν μελετώνται ποσοτικά χαρακτηριστικά τα οποία μπορούν να εκφραστούν σε συνεχή κλίμακα (βάρος, όγκος, ύψος, θερμοκρασία) (Kurnia et al., 2021; Madadi & Mahmoudzadeh, 2017; Αντζουλάκος, 2010). Αυτά τα διαγράμματα παρέχουν περισσότερες πληροφορίες για τη διεργασία και απαιτούν μικρότερο μέγεθος δείγματος, ενώ μπορούν να διακριθούν σε διαγράμματα μέσου όρου, τυπικής απόκλισης ή εύρους αναλόγως του μεγέθους που επιλέγεται να αποτυπωθεί (Kurnia et al., 2021; Suman & Prajapati, 2018).

Ιδιοτήτων: Χρησιμοποιούνται στο πλαίσιο της αποτύπωσης διακριτών μεγεθών, υπό την έννοια ότι εκφράζουν την παρουσία ή την απουσία ενός χαρακτηριστικού ή ακόμα και την αποτύπωση αριθμού σφαλμάτων (Kurnia et al., 2021; Madadi & Mahmoudzadeh, 2017; Αντζουλάκος, 2010). Σε αυτές τις περιπτώσεις διαγραμμάτων απαιτείται λιγότερη ανάλυση εν συγκρίσει με τα διαγράμματα μεταβλητών (Ivanov, 2011). Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτυπώσεων με αυτά τα διαγράμματα είναι αυτά της αποτύπωσης του αριθμού ή ποσοστού

ελαττωματικών, αριθμού ελαττωμάτων ή αριθμού ελαττωμάτων ανά μονάδα και ούτω καθεξής (Ivanov, 2011; Kurnia et al., 2021; Suman & Prajapati, 2018).

1.2.2 Εξειδικευμένα Διαγράμματα Ελέγχου

Πέρα από τα παραδοσιακά διαγράμματα Shewhart, έχουν αναπτυχθεί πιο ευαίσθητα διαγράμματα ελέγχου για την ανίχνευση μικρότερων μετατοπίσεων στη διεργασία, καθώς και διαγράμματα για πιο σύνθετες περιπτώσεις:

Διαγράμματα CUSUM: Εισήχθησαν από τον Page το 1954 και είναι σχεδιασμένα για να ανιχνεύουν μικρές αλλά επίμονες μετατοπίσεις στο μέσο όρο της διεργασίας. Το CUSUM συσσωρεύει τις αποκλίσεις από τον στόχο, καθιστώντας το πιο αποτελεσματικό για μικρές αλλαγές σε σχέση με τα διαγράμματα Shewhart (Ahsan et al., 2024).

Διαγράμματα EWMA: Αναπτύχθηκαν από τον Roberts το 1959. Τα διαγράμματα EWMA χρησιμοποιούν έναν σταθμισμένο μέσο όρο των τρεχουσών και προηγούμενων μετρήσεων, δίνοντας μεγαλύτερη βαρύτητα στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις. Αυτό τους επιτρέπει να είναι επίσης ευαίσθητα σε μικρές μετατοπίσεις της διεργασίας (Ahsan et al., 2024).

Πολυμεταβλητά Διαγράμματα Ελέγχου: Όταν μια διεργασία χαρακτηρίζεται από πολλαπλά, ενδεχομένως συσχετισμένα, χαρακτηριστικά ποιότητας, τα πολυμεταβλητά διαγράμματα ελέγχου είναι απαραίτητα. Το πιο γνωστό είναι το διάγραμμα του Hotelling, που εισήχθη το 1947 (Ahsan et al., 2024; Ahsan et al., 2024). Άλλα πολυμεταβλητά διαγράμματα περιλαμβάνουν το πολυμεταβλητό CUSUM και το πολυμεταβλητό EWMA, τα οποία προσφέρουν ενισχυμένη ικανότητα ανίχνευσης μετατοπίσεων σε πολύπλοκες διεργασίες (Ahsan et al., 2023, 2024).

Διαγράμματα χρόνου μεταξύ γεγονότων: Οι ολοένα και μεγαλύτερες απαιτήσεις για διεργασίες παραγωγής υψηλής ποιότητας, έχουν στρέψει το επιστημονικό ενδιαφέρον στην παρακολούθηση γεγονότων ιδιαιτέρως στις περιπτώσεις εκείνες κατά τις οποίες τα παραδοσιακά διαγράμματα ελέγχου καθίστανται αναποτελεσματικά (Mirzaei Novin et al., 2026). Προς το σκοπό αυτό και στη κατεύθυνση της επίλυσης αυτού του προβλήματος έχουν αναπτυχθεί και χρησιμοποιούνται διαγράμματα χρόνου μεταξύ δύο διαδοχικών συμβάντων, δηλαδή διαγράμματα τα οποία καταγράφουν τον χρόνο ή την ποσότητα παραγωγής που μεσολαβούν μεταξύ της εμφάνισης δύο διαδοχικών γεγονότων. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, τα διαγράμματα χρόνου μεταξύ γεγονότων αναμένεται να αποτελέσουν θεμελιώδη εργαλεία για λόγους προληπτικής συντήρησης σε zero effect βιομηχανίες (Mirzaei Novin, Amiri, & Castagliola, 2026).

Διαγράμματα παρακολούθησης προφίλ και χωρικής εξάρτησης: Σε πολλές σύγχρονες εφαρμογές, η ποιότητα ενός προϊόντος δεν περιγράφεται από μια μεμονωμένη τιμή, αλλά από

μια συναρτησιακή σχέση μεταξύ μιας μεταβλητής απόκρισης και διαφόρων επεξηγηματικών μεταβλητών, στο πλαίσιο της εφαρμογής μίας πρακτικής που ονομάζεται παρακολούθηση προφίλ (Huwang & Liao, 2023; Liu et al., 2021). Η δημιουργία αυτών των προφίλ εξυπηρετεί την παρακολούθηση περίπλοκων συστημάτων, όπως τα γενικευμένα προσθετικά μοντέλα (GAMs) για την αξιολόγηση νοσημάτων στον τομέα της υγείας (Waqas et al., 2024). Στο πλαίσιο της αξιολόγησης νοσημάτων, συχνά ενυπάρχουν πολλαπλές μεταβλητές οι οποίες πρέπει να ληφθούν υπόψη, και η μεμονωμένη παρακολούθηση της κάθε μίας από αυτές ενδέχεται να αυξήσει το συνολικό σφάλμα σε ένα σύστημα. Προκειμένου να διασφαλιστεί η ελαχιστοποίηση αυτού του σφάλματος χρησιμοποιείται μία λειτουργική μαθηματική σχέση η οποία επιτρέπει για τη σύνδεση μία μεταβλητής απόκρισης (π.χ. τύπος εγκεφαλικού επεισοδίου) με διάφορες επεξηγηματικές μεταβλητές (π.χ. δημογραφικά χαρακτηριστικά, διαβητικό ιστορικό ασθενούς, δείκτης μάζας σώματος), η οποία ονομάζεται προφίλ. Το προφίλ αυτό, συνιστά ένα baseline profile, το οποίο συνιστά τις σταθερές συνθήκες του συστήματος, και μέσω αυτού το σύστημα είναι σε θέση να αναγιγνώσκει κάθε νέα είσοδο ταυτοποιώντας ενδεχόμενες αποκλίσεις, δίνοντας τη δυνατότητα για αξιολόγηση της δυναμικής σχέσης σε ένα πολυπαραγοντικό μοντέλο (Erfanian et al., 2021). Παράλληλα σε περιπτώσεις πολύπλοκων συστημάτων όπου το ποιοτικό χαρακτηριστικό προσδιορίζεται μέσα από μία συναρτησιακή σχέση, η παρακολούθηση προφίλ εξελίσσεται ραγδαία στο πλαίσιο της εφαρμογής προηγμένων μεθόδων. Μία τέτοια καινοτόμα προσέγγιση είναι η διαταραχή ιδιοδιανυσμάτων, η οποία επιτρέπει την ταχεία και ακριβή ταυτοποίηση σε περιπτώσεις δεδομένων με πολυδιάστατα προφίλ (Iguchi, Barrientos, Chicken, & Sinha, 2025).

Παράλληλα, τα διαγράμματα έχουν εξελιχθεί ώστε να αναλύουν δεδομένα με χωρική εξάρτηση (spatial dependence) – όπως οι ακραίες περιβαλλοντικές συνθήκες (Adämmer et al., 2025) – ή χρονοσειρές εικόνων χαμηλής τάξης (low-rank images) σε διαδικασίες βιομηχανικής επικάλυψης μπαταριών (Gong et al., 2025).

Στην πλειονότητα των σύγχρονων βιομηχανικών και επιστημονικών οικοσυστημάτων, τα δεδομένα στερούνται καθαρότητας, δεδομένου ότι ενέχουν υψηλό βαθμό αβεβαιότητας, ανθρώπινης υποκειμενικότητας ή σφαλμάτων δεδομένων των οργάνων μέτρησης.

Οι Nasiri Boroujeni, Samimi και Roghanian (2022) για παράδειγμα πρωτοπόρησαν εισάγοντας στην επιστημονική κοινότητα παραμετρικές και μη παραμετρικές μεθόδους στο πλαίσιο της παρακολούθησης μη-γραμμικών ασαφών προφίλ. Η εισαγωγή αυτή κατέστη ιδιαίτερα σημαντική στην περίπτωση της αποτύπωσης ποιοτικών χαρακτηριστικών τα οποία

δύνανται να εκφραστούν γλωσσικά (π.χ. «καλή υφή», «ανεκτή φθορά» και ούτω καθεξής), μοντελοποιώντας τα ως ασαφείς αριθμούς. Για την παρακολούθηση των παραπάνω αναπτύχθηκε ένα ασαφές μη παραμετρικό διάγραμμα τύπου Shewhart, αξιοποιώντας τη μέθοδο της αναδειγματοληψίας. Σύμφωνα με τους Wang και Hryniewicz (2015), η χρήση της αναδειγματοληψίας (*bootstrap*) επιτρέπει για την εκτίμηση της μεταβλητότητας των ασαφών παρατηρήσεων χωρίς την πλήρωση των όρων των παραμετρικών υποθέσεων, διασφαλίζοντας αξιόπιστα όρια ελέγχου.

Ένα περιβάλλον δεδομένων το οποίο αποτελεί ιδιαίτερη πρόκληση είναι και αυτό του Μικροβιολογικού Ελέγχου σε αποστειρωμένους χώρους, σε ό,τι αφορά περιπτώσεις φαρμακοβιομηχανιών, όπου η αποτύπωση του μετρούμενου αριθμού μικροβίων τείνει να είναι μηδενικός, αλλά όταν προκύψει επιμόλυνση τα δεδομένα ακολουθούν ακραίες κατανομές (*zero-inflated* και έντονη θετική ασυμμετρία). Για τη διαχείριση αυτού του τύπου δεδομένων οι Gurijala και Barnett (2021) ανέπτυξαν στατιστικές μεθόδους τάσεων, καθώς τα συμβατικά διαγράμματα δεν είναι σε θέση να διαχειριστούν την ακραία σπανιότητα αυτών των μολυσματικών γεγονότων.

Πέρα από αυτές τις εφαρμογές και την ιστορική αφετηρία του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας, η σύγχρονη βιβλιογραφία έρχεται να επαναπροσδιορίσει το εύρος των εφαρμογών του και σε άλλα γνωστικά πεδία, όπως για παράδειγμα ο έλεγχος ποιότητας υπηρεσιών ή ακόμα και η παρακολούθηση των Κοινωνικών Δικτύων.

Σε ό,τι αφορά στον τομέα των υπηρεσιών οι χρόνοι απόκρισης και εξυπηρέτησης σπανίως ακολουθούν την κανονική κατανομή, εμφανίζοντας τεράστιες θετικές ασυμμετρίες. Ο έλεγχος αυτών των χρόνων επιτυγχάνεται μέσω διαγραμμάτων που αξιοποιούν το ενδοτεταρτημοριακό εύρος προκειμένου να ελέγχεται η διακύμανση της εξυπηρέτησης χωρίς την παρεμβολή εξαιρετικά αργών -ακραίων-πελατών (Yang & Jiang, 2019) οι οποίοι δημιουργούν αυτές τις ασυμμετρίες. Παράλληλα, οι Mukherjee και Sen (2018) εφήρμοσαν με επιτυχία διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart-Lepage με στόχο την ταυτόχρονη παρακολούθηση πολλαπλών δεικτών ικανοποίησης, βελτιστοποιώντας κατά αυτόν τον τρόπο τις διαδικασίες σε τραπεζικά και τηλεπικοινωνιακά περιβάλλοντα.

Σε ό,τι αφορά στα κοινωνικά δίκτυα και ιδιαιτέρως δεδομένου του ψηφιακού περιβάλλοντος στο οποίο είναι ενταγμένο, αυτό μοντελοποιείται ως ένας δυναμικός γράφος, όπου οι κόμβοι είναι οι χρήστες και οι ακμές οι μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις. Η ανίχνευση ξαφνικών μεταβολών, όπως για παράδειγμα, είναι η εμφάνιση *viral* περιεχομένου, απαιτεί εξειδικευμένα

εργαλεία. Στο πλαίσιο αυτό και αναγνωρίζοντας αυτή την ανάγκη οι Hazrati-Marangaloo και Noorossana (2021) ανέπτυξαν μια μη παραμετρική προσέγγιση, η οποία ανιχνεύει το σημείο αλλαγής, το σημείο δηλαδή στο οποίο το σύνολο των συνδέσεων αλλάζει συμπεριφορά, πέραν της προκαθορισμένης. Δηλαδή, αντί να παρακολουθείται μια μονοδιάστατη μεταβλητή, το σύστημα παρακολουθεί την τοπολογία και την πυκνότητα του δικτύου μέσω μη παραμετρικών στατιστικών κατατάξεων, αναγνωρίζοντας αλλοιώσεις στον βαθμό συνδεσιμότητας, χωρίς να απαιτείται καμία προϋπάρχουσα υποκείμενη παραδοχή για τη συμπεριφορά των χρηστών.

1.2.3 Παραμετρικά και μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου

Μια άλλη σημαντική διάκριση γίνεται με βάση τις υποθέσεις που γίνονται για την κατανομή των δεδομένων της διεργασίας:

Παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου: Σχεδιάζονται με την υπόθεση ότι η παραμετρική μορφή της κατανομής του ποιοτικού χαρακτηριστικού είναι γνωστή (όπως για παράδειγμα η κανονική κατανομή) (Cebeci & Şimşir, 2025; Smajdorová & Noskievičová, 2022). Η αποτελεσματικότητά τους συναρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ορθότητα αυτής της υπόθεσης (Abid et al., 2024), ενώ εάν τα δεδομένα αποκλίνουν από την εν λόγω κατανομή (για παράδειγμα είναι μη-κανονικά κατανεμημένα ή εμφανίζουν ασυμμετρίες), η απόδοση των παραμετρικών διαγραμμάτων μπορεί να υποβαθμιστεί σημαντικά (Malela-Majika & Graham, 2019). Το γεγονός αυτό μπορεί να οδηγήσει στον λανθασμένο προσδιορισμό των ορίων ελέγχου, σε αυξημένο αριθμό ψευδών συναγερμών ή αδυναμία ανίχνευσης των πραγματικών μετατοπίσεων.

Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου: Δεν απαιτούν την παραδοχή κάποιας συγκεκριμένης υποκείμενης κατανομής για τη διεργασία (Chakraborti et al., 2004; Smajdorová & Noskievičová, 2022). Το γεγονός αυτό τα καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμα σε περιπτώσεις όπου η κατανομή είναι άγνωστη, μη κανονική ή όταν δεν υπάρχουν επαρκή δεδομένα για την εκτίμησή της (Abid et al., 2024; Chakraborti et al., 2004; Chakraborti & Graham, 2019; Lin et al., 2021; Smajdorová & Noskievičová, 2022). Τα μη παραμετρικά διαγράμματα παρουσιάζουν ανθεκτικότητα ως προς αυτή την ιδιαιτερότητα σε ό,τι αφορά στην κατανομή και μπορούν να είναι πιο αποτελεσματικά από τα αντίστοιχα παραμετρικά υπό συνθήκες μη πλήρωσης των κριτηρίων της κανονικότητας (Abid et al., 2024; Chakraborti et al., 2004; Smajdorová & Noskievičová, 2022). Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι μπορεί να εμφανίζουν μικρότερη ευαισθησία σε σχέση με τα παραμετρικά, όταν η υποκείμενη κατανομή είναι γνωστή και κανονική (Malela-Majika et al., 2020).

1.2.4 Μαθηματική θεμελίωση παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου

Για την πλήρη κατανόηση της λειτουργίας των διαγραμμάτων ελέγχου, κρίνεται απαραίτητη η μαθηματική τους θεμελίωση, διακρίνοντας τα παραμετρικά και μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου. Στο πλαίσιο των παραδοσιακών (παραμετρικών) προσεγγίσεων, υποτίθεται ότι το χαρακτηριστικό ποιότητας X της διεργασίας ακολουθεί την κανονική κατανομή, δηλαδή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, όπου μ είναι η μέση τιμή και σ^2 η διασπορά της διεργασίας (Khakifirooz, Tercero-Gomez, & Woodall, 2021).

Διαγράμματα τύπου Shewhart: Ο κλασικός σχεδιασμός ενός διαγράμματος Shewhart (π.χ. διαγράμματος $\bar{X}$ για τη μέση τιμή) βασίζεται σε γραμμικούς συνδυασμούς της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης. Αν λαμβάνονται δείγματα μεγέθους n , η δειγματική μέση τιμή $\bar{X}$ ακολουθεί την κατανομή $N(\mu, \sigma^2/n)$. Τα όρια ελέγχου ορίζονται μαθηματικά ως εξής:

- Ανώτερο Όριο Ελέγχου (UCL): $UCL = \mu + L\sigma$
- Κεντρική Γραμμή (CL): $CL = \mu$
- Κατώτερο Όριο Ελέγχου (LCL): $LCL = \mu - L\sigma$

όπου το L είναι ο συντελεστής απόστασης των ορίων (συνήθως $L=3$, το οποίο αντιστοιχεί σε πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού $\alpha=0.0027$). Παρότι τα διαγράμματα Shewhart είναι εξαιρετικά στον εντοπισμό μεγάλων μετατοπίσεων, παρουσιάζουν υστέρηση στον εντοπισμό μικρών ή σταδιακών αλλαγών.

Διαγράμματα Αθροιστικών Ποσοτήτων (CUSUM - Cumulative Sum): Για την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων, τα διαγράμματα CUSUM ενσωματώνουν όλη την προηγούμενη πληροφορία των δειγμάτων (Abbas, Abujiya, Riaz, & Mahmood, 2020). Έστω μ_0 η στοχευόμενη μέση τιμή της διεργασίας. Το διάγραμμα CUSUM υπολογίζει δύο αθροιστικές στατιστικές, μία για θετικές μετατοπίσεις (C_i^+) και μία για αρνητικές (C_i^-):

- $C_i^+ = \max[0, X_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+]$
- $C_i^- = \max[0, (\mu_0 - K) - X_i + C_{i-1}^-]$

όπου $C_0^+ = C_0^- = 0$. Η παράμετρος K ονομάζεται τιμή αναφοράς και συνήθως επιλέγεται ως το μισό της αναμενόμενης μετατόπισης που επιθυμούμε να ανιχνεύσουμε. Το σύστημα εκδίδει σήμα (εκτός ελέγχου) εάν $C_i^+ > H$ ή $C_i^- > H$, όπου H είναι το όριο απόφασης το οποίο ρυθμίζεται για να επιτευχθεί το επιθυμητό εντός ελέγχου ARL (ARL_0) (Abbas et al., 2020).

Διαγράμματα Εκθετικά Σταθμισμένου Κινητού Μέσου (EWMA): Το διάγραμμα EWMA γεφυρώνει το κενό ευαισθησίας μεταξύ Shewhart και CUSUM, εφαρμόζοντας εκθετικά

φθίνουσα βαρύτητα στα παλαιότερα δεδομένα (Raza et al., 2024), ενώ η στατιστική συνάρτηση παρακολούθησης Z_i υπολογίζεται αναδρομικά:

- $Z_i = \lambda X_i + (1-\lambda)Z_{i-1}$

όπου $Z_0 = \mu_0$ και $\lambda \in (0,1]$ είναι η παράμετρος εξομάλυνσης. Οι μικρές τιμές του λ (π.χ. 0.05 ή 0.10) καθιστούν το διάγραμμα πιο ευαίσθητο σε μικρές μετατοπίσεις (Aslam et al., 2020). Η διασπορά της στατιστικής Z_i δίνεται από τον τύπο: $\sigma^2 Z_i = \sigma^2 (2-\lambda)[1-(1-\lambda)^{2i}]$. Τα αντίστοιχα όρια ελέγχου είναι:

- $UCL = \mu_0 + L\sigma\sqrt{2-\lambda[1-(1-\lambda)^{2i}]}$
- $LCL = \mu_0 - L\sigma\sqrt{2-\lambda[1-(1-\lambda)^{2i}]}$ Για μεγάλες τιμές του i , ο όρος $(1-\lambda)^{2i}$ τείνει στο μηδέν, και τα όρια σταθεροποιούνται στα ασυμπτωτικά όρια (Raza et al., 2024).

Εκτίμηση Παραμέτρων Φάσης I: Τα παραπάνω μαθηματικά μοντέλα προϋποθέτουν ότι οι παράμετροι μ και σ είναι γνωστές. Ωστόσο, στην πράξη αυτό σπάνια συμβαίνει. Οι παράμετροι πρέπει να εκτιμηθούν από ένα ιστορικό δείγμα μεγέθους m . Αντικαθιστώντας τις πραγματικές τιμές με εκτιμήτριες (π.χ. $\hat{\mu} = \bar{X}$ και $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4$), το μοντέλο ενσωματώνει το στοχαστικό σφάλμα εκτίμησης.

Όπως επισημαίνουν οι Does, Goedhart και Woodall (2020), η χρήση εκτιμητριών μεταβάλλει έντονα τη συμπεριφορά του ARL, δημιουργώντας υψηλή μεταβλητότητα. Αυτός είναι και ο λόγος που η σύγχρονη έρευνα στρέφεται ολοένα και περισσότερο στα μη παραμετρικά διαγράμματα, τα οποία απαλλάσσουν τους αναλυτές από την αβεβαιότητα που προκαλεί η ταυτόχρονη εκτίμηση πολλαπλών παραμέτρων και η αυθαίρετη παραδοχή της κανονικότητας.

1.3 Βασική δομή των διαγραμμάτων ελέγχου

Η απόδοση ενός διαγράμματος ελέγχου αξιολογείται κυρίως μέσω του *Μέσου Μήκους Ροής*, το οποίο ορίζεται ως ο μέσος αριθμός δειγμάτων τα οποία θα πρέπει να ληφθούν μέχρι το διάγραμμα να δώσει ένα σήμα, έναν συναγερμό (Oliva & Llabrés, 2020).

1.3.1 Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARL_{in} ή ARL_0)

Το ARL_{in} αντιπροσωπεύει τον μέσο αριθμό δειγμάτων τα οποία θα πρέπει να ληφθούν μέχρι την εμφάνιση ενός ελαττωματικού, ενώ η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου (Bayer et al., 2018). Η τιμή του ARL_{in} θα πρέπει να είναι κατά το δυνατόν μεγαλύτερη, προκειμένου να διασφαλίζεται η αποφυγή συχνών λανθασμένων συναγερμών οι οποίοι διακόπτουν άσκοπα την παραγωγική διεργασία και αποφέρουν οικονομικά επιζήμια αποτελέσματα. Η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού γνωστή ως *False Alarm Rate* ή όπως αποδίδεται ο όρος στα ελληνικά *Πιθανότητα Ψευδούς Συναγερμού*, είναι η πιθανότητα (*Σφάλμα τύπου I*) ένα σημείο να πέσει εκτός των ορίων ελέγχου, ενώ οφείλεται σε τυχαία αίτια (Anhøj & Wentzel-Larsen, 2018; Argoti & Carriñán-García, 2019).

Για ανεξάρτητες παρατηρήσεις (όπως στα διαγράμματα Shewhart), το ARL_{in} υπολογίζεται ως:

$$ARL_{in} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{FAR} \quad (\text{Bayer et al., 2018; Noorian \& Ahmadabadi, 2018}).$$

1.3.2 Εκτός ελέγχου Μέσο Μήκος Ροής (ARL_{out} ή ARL_1)

Το ARL_{out} αντιπροσωπεύει τον μέσο αριθμό δειγμάτων που απαιτούνται για τον εντοπισμό μιας πραγματικής μεταβολής (shift) στη διεργασία (Bayer et al., 2018).

Η πιθανότητα ορθού συναγερμού σε κατάσταση εκτός ελέγχου ή όπως επικρατεί ο όρος στη βιβλιογραφία *Alarm Rate*, είναι η πιθανότητα αυτή η οποία αντιστοιχεί στην ισχύ του στατιστικού ελέγχου ($1-\beta$), δηλαδή η πιθανότητα να μην εντοπιστεί η μεταβολή (*Σφάλμα τύπου II*) (Anhøj & Wentzel-Larsen, 2018; Noorian & Ahmadabadi, 2018). Η σχέση της με το ARL_{out} είναι: $ARL_{out} = \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{AR}$ (Bayer et al., 2018; Noorian & Ahmadabadi, 2018).

1.3.3 Παραδείγματα υπολογισμού σε παραμετρικά διαγράμματα

Στα παραμετρικά διαγράμματα, όπως το διάγραμμα Shewhart με όρια 3σ , οι υπολογισμοί γίνονται ως εξής:

Υπολογισμός ARL_{in} : Για ένα διάγραμμα Shewhart με όρια 3σ , η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού είναι $\alpha = 0,0027$ (Oliva & Llabrés, 2020). Επομένως: $ARL_{in} = \frac{1}{0,0027} \simeq 370,4$. Αυτό

σημαίνει ότι, κατά μέσο όρο, θα λαμβάνουμε έναν λανθασμένο συναγερμό κάθε 370 δείγματα (Li et al., 2020; Oliva & Llabrés, 2020).

Υπολογισμός ARL_{out} : Αν η μέση τιμή της διεργασίας μετατοπιστεί και η πιθανότητα ανίχνευσης σε ένα δείγμα γίνει $= 0,95$), τότε: $ARL_{out} = \frac{1}{0,05} = 20$. Δηλαδή, θα χρειαστούν κατά μέσο όρο 20 δείγματα για να εντοπιστεί η συγκεκριμένη μεταβολή (Dyer, 2016). Σε διαγράμματα όπως τα **EWMA** ή **CUSUM**, οι τιμές αυτές υπολογίζονται συχνά μέσω προσομοιώσεων **Monte Carlo** ή ολοκληρωτικών εξισώσεων, καθώς η απόδοσή τους εξαρτάται από τις παραμέτρους εξομάλυνσης και τα συσσωρευμένα δεδομένα που είναι κάθε φορά διαθέσιμα.

1.3.4 Σύγχρονοι παράγοντες που επηρεάζουν την απόδοση των διαγραμμάτων

Κατά τον θεωρητικό σχεδιασμό ενός διαγράμματος, υποτίθεται πως οι παράμετροι του πληθυσμού είναι γνωστές, ωστόσο στην πράξη αυτές εκτιμώνται από ένα ιστορικό δείγμα της *Φάσης I*, γεγονός που εισάγει σημαντικό στοχαστικό σφάλμα (Does et al., 2020). Αυτή η εκτίμηση οδηγεί στο φαινόμενο της μεταβλητότητας από αναλυτή σε αναλυτή (practitioner-to-practitioner variation), καθιστώντας συχνά το πραγματικό ποσοστό λανθασμένων συναγερμών (FAR) πολύ υψηλότερο από το αναμενόμενο (Merlo et al., 2022). Επιπλέον, η παρουσία ακραίων τιμών (outliers) στη *Φάση I* αλλοιώνει τα όρια ελέγχου και μειώνει την ικανότητα έγκαιρης ανίχνευσης στη *Φάση II*, ένα πρόβλημα που μπορεί να αμβλυνθεί με την υιοθέτηση ισχυρών μοντέλων ανίχνευσης (Raji et al., 2020). Ακόμη και στα μη παραμετρικά σχήματα, η εκτίμηση των παραμέτρων υποβαθμίζει το Εντός Ελέγχου Μέσο Μήκος Ροής (ICARL), εκτός εάν εφαρμοστούν προσεκτικά διορθωμένα όρια ελέγχου (Dovoedo & Chakraborti, 2017). Μια εξαιρετικά αποτελεσματική σύγχρονη προσέγγιση είναι το Κριτήριο Πιθανότητας Υπέρβασης (Exceedance Probability Criterion - EPC), το οποίο εξασφαλίζει τη σταθερότητα του συστήματος ενσωματώνοντας αυστηρά την αβεβαιότητα εκτίμησης (Yang & Li, 2025).

Αυτοσυσχέτιση (Autocorrelation) και Ελλιπή Δεδομένα: Οι κλασικές μετρικές απόδοσης (π.χ. ARL0) προϋποθέτουν ότι τα δεδομένα είναι απολύτως ανεξάρτητα. Εντούτοις, σε διεργασίες με υψηλή συχνότητα δειγματοληψίας, οι μετρήσεις εμφανίζουν ισχυρή αυτοσυσχέτιση, η οποία αυξάνει ραγδαία το ποσοστό των ψευδών συναγερμών εάν αγνοηθεί (Grimm et al., 2025; Perry, 2024). Η προσαρμογή μοντέλων παρακολούθησης σε συνδυασμό με την ανάλυση των υπολοίπων (όπως στα μοντέλα ARMA), ή η χρήση μετασχηματισμών Wavelet για την εξαγωγή σταθερών χαρακτηριστικών, αποτελούν ισχυρές πρακτικές αντιμετώπισης της αυτοσυσχέτισης (Mazhar et al., 2025; Costa & Fichera, 2017). Επιπροσθέτως, η παρουσία ελλিপών ή λογοκριμένων δεδομένων (missing/censored data) μεταβάλλει δυσμενώς την ταχύτητα ανίχνευσης πραγματικών μετατοπίσεων, επηρεάζοντας εντονότερα τα μη παραμετρικά εργαλεία έναντι των παραμετρικών (Maldonado et al., 2025).

Ο Κίνδυνος των Μετασχηματισμών και των Σφαλμάτων Μέτρησης: Προκειμένου να ικανοποιήσουν την υπόθεση της κανονικότητας, πολλοί αναλυτές καταφεύγουν σε αυθαίρετους μη γραμμικούς μετασχηματισμούς της διεργασίας, μια πρακτική που εγκυμονεί τον κίνδυνο συγκάλυψης πραγματικών ανωμαλιών στο σύστημα (Khakifirooz et al., 2021). Παράλληλα, τα διαγράμματα καθίστανται εξαιρετικά ευάλωτα όταν το σύστημα συλλογής των δεδομένων εισάγει σφάλματα μέτρησης (measurement errors), τα οποία προκαλούν μείωση της

ευαισθησίας, γεγονός που επιβάλλει τη χρήση προσαρμοσμένων και διορθωμένων ορίων ελέγχου (Lu & Yang, 2025).

Μικτά Διαγράμματα: Για την περαιτέρω ενίσχυση της ευαισθησίας απέναντι σε μικρές αλλά επίμονες μετατοπίσεις, η σύγχρονη βιβλιογραφία προτείνει τον συνδυασμό διαφορετικών διαγραμμάτων μνήμης σε ένα ενιαίο σχήμα. Παραδείγματα αποτελούν τα μικτά διαγράμματα EWMA-MA κινητού μέσου ή CUSUM-EWMA, τα οποία ενσωματώνουν τα πλεονεκτήματα και των δύο προσεγγίσεων, επιτυγχάνοντας ταχύτερο εντοπισμό σφαλμάτων (Raza et al., 2024; Sudsutad et al., 2026).

Κεφάλαιο 2. Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου

2.1. Εισαγωγή και θεωρητικό υπόβαθρο

Τα παραδοσιακά διαγράμματα ελέγχου εδράζονται στην βασική υπόθεση ότι τα δεδομένα της διεργασίας ακολουθούν την κανονική κατανομή (Triantafyllou, 2020). Παρά το γεγονός αυτό, σε πολλές σύγχρονες βιομηχανικές εφαρμογές, η υποκείμενη κατανομή είναι είτε άγνωστη είτε παρουσιάζει έντονη λοξότητα και heavy tails στα άκρα της κατανομής (ουρές), καθιστώντας τα παραμετρικά διαγράμματα ανακριβή (Graham et al., 2016; Malela-Majika et al., 2019; Abbas et al., 2025; Sudsutad et al., 2026).

Τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου (non-parametric) ή τα διαγράμματα ελέγχου απαλλαγμένα από το είδος της κατανομής (distribution-free) προσφέρουν μια ιδιαίτερα αξιόλογη εναλλακτική, καθώς το Μέσο Μήκος Ροής υπό συνθήκες στατιστικού ελέγχου (ARL) παραμένει σταθερό για οποιαδήποτε συνεχή κατανομή (Balakrishnan et al., 2010; Abid et al., 2017; Triantafyllou, 2018; Abid et al., 2024). Η ιδιότητα αυτή καλούμενη *In Control Robustness* (σταθερότητα εντός ελέγχου) διασφαλίζει ότι η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού (ARL_{in}) δεν θα αυξηθεί απροσδόκητα λόγω αποκλίσεων από την κανονικότητα (Chakraborti & Graham, 2019; Triantafyllou, 2020).

2.1.1 Μαθηματική θεμελίωση στατιστικών προσήμων και κατατάξεων

Στα μη παραμετρικά διαγράμματα, η απεξάρτηση από την κατανομή επιτυγχάνεται συχνά μέσω της αντικατάστασης των πραγματικών τιμών με τα πρόσημά τους ή την κατάταξή τους. Το στατιστικό του προσήμου καταγράφει αν μια παρατήρηση είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την επιθυμητή κεντρική τιμή της διεργασίας (π.χ. διάμεσο ή στόχο μ_0). Η μαθηματική του μορφή για ένα δείγμα n παρατηρήσεων είναι $SN_i = \sum_{j=1}^n \text{sign}(X_{ij} - \mu_0)$, όπου η συνάρτηση προσήμου λαμβάνει τιμές 1, 0, ή -1 αναλόγως του αν η διαφορά είναι θετική, μηδενική, ή αρνητική.

Το στατιστικό *Wilcoxon Signed-Rank* αποτελεί μια πιο ισχυρή εναλλακτική, καθώς συνυπολογίζει τόσο το πρόσημο της απόκλισης, όσο και το σχετικό της μέγεθος, μέσω της κατάταξης των απόλυτων διαφορών $|X_{ij} - \mu_0|$. Λόγω της διακριτής φύσης αυτών των στατιστικών, η κατανομή τους κάτω από συνθήκες εντός ελέγχου διεργασιών, είναι απολύτως γνωστή, γεγονός που επιτρέπει τον ακριβή και σταθερό σχεδιασμό των ορίων ελέγχου για διαγράμματα μνήμης (όπως τα EWMA-SR), ανεξαρτήτως του αν η υποκείμενη κατανομή της διεργασίας είναι άγνωστη.

2.2. Διατεταγμένες παρατηρήσεις και στατιστικές υπέρβασης

Μια από τις πιο ισχυρές μεθοδολογίες για την κατασκευή μη παραμετρικών διαγραμμάτων είναι η χρήση διατεταγμένων παρατηρήσεων (order statistics), όπως αυτές συλλέγονται μέσα από ένα δείγμα αναφοράς (Li et al., 2020; Triantafyllou, 2020).

Η χρήση διατεταγμένων παρατηρήσεων αποτελεί ίσως την πιο άμεση και αποτελεσματική προσέγγιση στη μη παραμετρική παρακολούθηση διεργασιών (Triantafyllou & Panayiotou, 2020). Η λογική αυτής της προσέγγισης εδράζεται στην επιλογή ενός τυχαίου δείγματος αναφοράς κατά τη *Φάση I*, τα στοιχεία του οποίου διατάσσονται κατά αύξουσα τάξη μεγέθους. Συγκεκριμένες διατεταγμένες παρατηρήσεις (για παράδειγμα η ελάχιστη, η μέγιστη, ή κάποια ενδιάμεση παρατήρηση) χρησιμοποιούνται στη συνέχεια ως τα Όρια Ελέγχου (*LCL* και *UCL*) για την παρακολούθηση των νέων δειγμάτων στη *Φάση II* (Holcombe et al., 2024; Triantafyllou, 2019).

Δύο από τις πιο γνωστές κατηγορίες βασισμένες σε διατεταγμένες παρατηρήσεις είναι:

- **Διαγράμματα προηγούμενων παρατηρήσεων (Precedence Control Charts)** τα οποία βασίζονται στο να ελέγχουν αν ένα στατιστικό μέτρο θέσης ή μία παρατήρηση (για παράδειγμα η διάμεση τιμή ή η ελάχιστη τιμή του νέου δείγματος είναι μικρότερη από μία συγκεκριμένη διατεταγμένη παρατήρηση σε σχέση με το δείγμα αναφοράς (Malela-Majika et al., 2016).
- **Διαγράμματα υπέρβασης (Exceedance Control Charts)** τα οποία καταγράφουν το πλήθος των παρατηρήσεων του νέου δείγματος οι οποίες υπερβαίνουν μία προκαθορισμένη διατεταγμένη παρατήρηση της *Φάσης I* (Graham et al., 2017; Chakraborty et al., 2018).

2.2.1. Ορισμός και μαθηματική αποτύπωση

Τα όρια ελέγχου ενός μη παραμετρικού διαγράμματος μπορούν να οριστούν ως συγκεκριμένες τάξεις αυτών των παρατηρήσεων (Balakrishnan et al., 2010; Malela-Majika et al., 2019). Οι στατιστικές υπέρβασης (exceedance statistics) βασίζονται στον αριθμό των παρατηρήσεων ενός νέου δείγματος που υπερβαίνουν ή υπολείπονται αυτών των ορίων (Graham et al., 2014; Mukherjee et al., 2012). Η χρήση τους πλεονεκτεί σε όρους:

1. Εξοικονόμησης χρόνου, καθώς ο έλεγχος μπορεί να σταματήσει μόλις μια διατεταγμένη παρατήρηση υπερβεί ένα προκαθορισμένο όριο, χωρίς να χρειάζεται η συλλογή ολόκληρου του δείγματος (Mukherjee et al., 2012).

2. Ανθεκτικότητας, καθώς είναι εξαιρετικά αποτελεσματικές σε κατανομές με heavy tails, όπου η μέση τιμή επηρεάζεται από την ύπαρξη ακραίων παρατηρήσεων (Mukherjee et al., 2012).

Αν θεωρήσουμε ένα ιστορικό δείγμα αναφοράς (*Φάση I*) μεγέθους m , το οποίο ακολουθεί μια συνεχή αλλά άγνωστη κατανομή $F(x)$ με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$, τα στοιχεία του μπορούν να διαταχθούν σε αύξουσα σειρά ως $X(1) < X(2) < \dots < X(m)$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της r -οστής διατεταγμένης παρατήρησης $X(r)$ καθορίζεται μαθηματικά ως $f(r)(x) = (r-1)!(m-r)!m! [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{m-r} f(x)$, αποτελώντας το θεμέλιο για τον ορισμό των μη παραμετρικών ορίων ελέγχου.

Στα διαγράμματα Precedence, ο έλεγχος εξετάζει εάν ένα επιλεγμένο στατιστικό του νέου δείγματος της *Φάσης II* (έστω η j -οστή διατεταγμένη παρατήρηση $Y(j:n)$ ενός δείγματος μεγέθους n) προηγείται ή υπερβαίνει τα καθορισμένα όρια αναφοράς της *Φάσης I*, δηλαδή τις παρατηρήσεις $X(a:m)$ και $X(b:m)$. Η πιθανότητα να παρατηρηθεί ένα τέτοιο συμβάν μπορεί να υπολογιστεί με απόλυτη ακρίβεια χρησιμοποιώντας νόμους συνδυαστικής (π.χ. υπεργεωμετρικές κατανομές), εξασφαλίζοντας την ιδιότητα της ελεύθερης κατανομής (distribution-free property).

Αντίστοιχα, οι στατιστικές υπέρβασης ορίζονται ως το πλήθος των νέων παρατηρήσεων στη *Φάση II* (έστω ως U_i) που ξεπερνούν μια συγκεκριμένη διατεταγμένη παρατήρηση του δείγματος αναφοράς. Αν η στατιστική U_i υπερβεί ένα προκαθορισμένο κατώφλι ελέγχου, το διάγραμμα παράγει σήμα ανίχνευσης (out-of-control signal), παρέχοντας μια εξαιρετικά ανθεκτική μέθοδο παρακολούθησης που αποδεδειγμένα δεν επηρεάζεται από την παρουσία ακραίων τιμών (outliers).

2.3 Ανασκόπηση υπάρχουσας βιβλιογραφίας και δημοσιευμένα αποτελέσματα

Η εξέλιξη των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ξεκίνησε από απλές μεθόδους και έχει φτάσει σε ολοένα και συνθετότερα συστήματα, επιδεικνύοντας σημαντική πρόοδο στα διαγράμματα ελέγχου διατεταγμένων παρατηρήσεων. Οι Koutras και Sofikitou (2017) ανέπτυξαν ημι-παραμετρικά δισδιάστατα διαγράμματα ελέγχου Shewhart, τα οποία αξιοποιούν τον συνδυασμό διαφορετικών παρατηρήσεων δύο διαφορετικών δειγμάτων δοκιμής, με ταυτόχρονες μετατοπίσεις στη μέση τιμή και τη διασπορά. Οι Magagula et al. (2025) χρησιμοποίησαν closed-form expressions για την κατανομή του ARL σε μη παραμετρικά διαγράμματα precedence διπλής δειγματοληψίας συνεισφέροντας ουσιαστικά στη μείωση του απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου. Οι Malela-Majika et al. (2016) απέδειξαν ότι η ενσωμάτωση βελτιωμένων κανόνων ροών είναι σε θέση να βελτιώσει αισθητά την ικανότητα της διεργασίας να ανιχνεύει μικρές μετατοπίσεις, ενώ οι Triantafylloy και Panayiotou (2020, 2023) πρότειναν μία ευρεία κλάση ελεύθερης κατανομής σχημάτων παρακολούθησης των διεργασιών, όπου οι διατεταγμένες παρατηρήσεις ενισχύονται με κανόνες σήμανσης οδηγώντας σε αισθητά βελτιωμένες επιδόσεις.

2.3.1 Διαγράμματα τύπου Shewhart και precedence

Τα διαγράμματα precedence ή αλλιώς διαγράμματα προτεραιότητας αποτέλεσαν τη βάση για τη χρήση διαγραμμάτων με διατεταγμένες παρατηρήσεις. Ο Janacek και ο Meikle πρότειναν το median scheme, όπου το διάγραμμα δίνει σήμα αν η διάμεσος ενός δείγματος *Φάσης II* πέσει εκτός των ορίων που ορίζονται από τις διατεταγμένες παρατηρήσεις της *Φάσης I* (Malela-Majika et al., 2019). Πρόσφατες έρευνες έχουν επεκτείνει αυτά τα σχήματα χρησιμοποιώντας κανόνες ροής για τη βελτίωση της ευαισθησίας τους (Malela-Majika et al., 2019).

Μία κρίσιμη πτυχή των διαγραμμάτων precedence είναι ο υπολογισμός των ιδιοτήτων του μήκους ροής. Οι Chakraborti et.al., (2004) μελέτησαν την ακριβή κατανομή του μήκους ροής για τα διαγράμματα precedence, παρακάμπτοντας την ανάγκη χρήσης της πιθανότητας λανθασμένου συναγερμού (*FAR*) λόγω της δυσκολίας στην ερμηνεία της εξαιτίας της εξάρτησης από τα γεγονότα. Επίσης, ανέλυσαν πώς το μέγεθος του δείγματος αναφοράς (*Φάση I*) επηρεάζει τις πιθανότητες λανθασμένου συναγερμού, υπογραμμίζοντας την αβεβαιότητα που εισάγεται όταν εκτιμώνται άγνωστες παράμετροι.

2.3.2 Διαγράμματα κοινής παρακολούθησης

Σημαντικό σταθμό αποτελεί το στατιστικό Lepage, το οποίο επιτρέπει την ταυτόχρονη παρακολούθηση της θέσης (location) και της κλίμακας (scale) μιας διεργασίας (Chowdhury et al., 2014). Μελέτες των Mukherjee και Chakraborti απέδειξαν ότι τα διαγράμματα τύπου *Shewhart* και *CUSUM* που βασίζονται στο Lepage υπερέχουν των παραμετρικών, όταν η κατανομή δεν είναι κανονική (Chowdhury et al., 2014).

2.3.3 Διαγράμματα προσημικών τάξεων

Τα διαγράμματα που βασίζονται στο στατιστικό του Wilcoxon χρησιμοποιούνται ευρέως για τον εντοπισμό μετατοπίσεων στη διάμεσο της διεργασίας (Pawar et al., 2018; Perdakis et al., 2020). Έχει αποδειχθεί ότι το *NPEWMA-SR* (Exponentially Weighted Moving Average Signed-Rank) είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικό στον εντοπισμό μικρών και μετρίων μεταβολών, διατηρώντας παράλληλα σταθερή απόδοση (Pawar et al., 2018).

Η χρήση των προσημικών τάξεων έχει επεκταθεί σημαντικά με την ενσωμάτωση διαγραμμάτων μνήμης για συμμετρικές κατανομές. Οι Chakraborty et al. (2016) εισήγαγαν το διάγραμμα Γενικευμένου Σταθμισμένου Κινητού Μέσου βασισμένο σε προσημικές τάξεις (*GWMA-SR*), το οποίο υπερτερεί σημαντικά στον ταχύ εντοπισμό μικρών μετατοπίσεων. Παράλληλα, οι Raza et al. (2020) πρότειναν το Διπλό EWMA (*DEWMA-SR*), το οποίο εφαρμόζει δύο εκθετικές σταθμίσεις στο στατιστικό signed-rank, προσφέροντας ανώτερη ευαισθησία από τα κλασικά EWMA και CUSUM στην ανίχνευση μικρών έως μεσαίων μετατοπίσεων.

2.3.4. Τεχνικές αναδειγματοληψίας και χωρικής εξάρτησης

Όταν υφίσταται γνώση της κατανομής τα συστήματα εφαρμόζουν τεχνικές αναδειγματοληψίας, δημιουργώντας εμπειρικά όρια ελέγχου σύμφωνα με τα διαθέσιμα δεδομένα, χωρίς να χρειάζεται να ελεγχθούν υποθέσεις κανονικότητας (Braithwaite et al., 2025).

Η χρήση τεχνικών αναδειγματοληψίας – bootstrap – αποτελεί μια εξαιρετικά ισχυρή μέθοδο όταν η υποκείμενη κατανομή της διεργασίας είναι άγνωστη ή μη κανονική, επιτρέποντας τη δημιουργία εμπειρικών ορίων ελέγχου με βάση τα διαθέσιμα δεδομένα. Οι Braithwaite et al. (2025) σχεδίασαν διαγράμματα *CUSUM* και *EWMA* βασισμένα σε μεθόδους bootstrap (*BCUSUM-EWMA*) για τον έλεγχο διαδικασιών στη Φάση II, ξεπερνώντας τους περιορισμούς των παραδοσιακών μοντέλων. Παρομοίως, οι Ambartsoumian και Jeske (2015) αξιοποίησαν έναν αλγόριθμο ομαλού bootstrap σε συνδυασμό με έναν προσαρμοστικό μη παραμετρικό

εκτιμητή πυκνότητας, έτσι ώστε το διάγραμμα *CUSUM* να λειτουργεί αποτελεσματικά με τη χρήση ιστορικών δεδομένων.

Η αξία των μεθόδων bootstrap επεκτείνεται και στην πολυμεταβλητή παρακολούθηση διεργασιών. Συγκεκριμένα, οι Liang et al. (2017) εφάρμοσαν τεχνικές bootstrap για τη δυναμική προσαρμογή των ορίων σε πολυμεταβλητά διαγράμματα *CUSUM* (*MCUSUM*), βελτιώνοντας σημαντικά την απόδοση του *ARL* συγκριτικά με τα στατικά όρια. Αντίστοιχα, οι Mostajeran et al. (2018) πρότειναν έναν μη παραμετρικό αλγόριθμο bootstrap για τον υπολογισμό των παραμέτρων ενός πολυμεταβλητού διαγράμματος βασισμένου στο στατιστικό Hotelling's T^2 . Η μέθοδος αυτή παρακάμπτει την ανάγκη για υποθέσεις κατανομής και επιλύει το πρόβλημα της συσχέτισης των στατιστικών ελέγχου, προσφέροντας ανώτερη απόδοση σε σχέση με τα παραδοσιακά πολυμεταβλητά διαγράμματα προσήμου ή *Wilcoxon*. Επιπλέον, αυτές οι προσεγγίσεις έχουν αξιοποιηθεί επιτυχώς για την παρακολούθηση ασαφών δεδομένων μέσω μη παραμετρικών διαγραμμάτων *Shewhart*, αντιμετωπίζοντας την αβεβαιότητα σε γλωσσικές ή προσεγγιστικές μετρήσεις.

Σε ό,τι αφορά σε δεδομένα χωρικής εξάρτησης με εγγενές το στοιχείο της αυτοσυσχέτισης από την οποία πάσχουν συνήθως τα συγκεκριμένα δεδομένα (χωρικά), τα παραδοσιακά διαγράμματα συχνά αποτυγχάνουν, καθώς προϋποθέτουν ανεξαρτησία των παρατηρήσεων. Για την αντιμετώπιση αυτών των ζητημάτων σε αυτού του είδους τις διεργασίες χωρίς την υπόθεση κάποιας υποκείμενης κατανομής, οι Chatterjee και Qiu (2018) ανέπτυξαν μια διαδικασία ελέγχου βασισμένη σε διαγράμματα *CUSUM*, χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς wavelets. Στο πλαίσιο της παρακολούθησης πολυμεταβλητών χρονοσειρών, οι Liu et al. (2023) πρότειναν μια διαδικασία απαλλαγμένη από την υπόθεση της κατανομής η οποία μετατρέπει κάθε παρατήρηση σε μια μονοδιάστατη ποσότητα, ενσωματώνοντας έτσι τόσο τη συσχέτιση όσο και την αυτοσυσχέτιση, χωρίς να απαιτείται η δοκιμαστική βαθμονόμηση των ορίων.

Η σύγχρονη έρευνα επεκτείνεται ταχύτατα και στην ενσωμάτωση της χωρικής πληροφορίας και συγκεκριμένα οι Adämmer et al. (2025) πρότειναν πρόσφατα εξελιγμένες μη παραμετρικές μεθόδους για την άμεση παρακολούθηση της χωρικής εξάρτησης. Για την ανάλυση οπτικών δεδομένων, οι Gong et al. (2025) παρουσίασαν μια *CUSUM* διαδικασία ελεύθερη κατανομής, για τη διαδικτυακή ανίχνευση αλλαγών σε χρονοσειρές εικόνων χαμηλής τάξης δίνοντας τη δυνατότητα στη διαδικασία να διαχειριστεί ταυτόχρονα τόσο την εγγενή χωρική όσο και τη χρονική εξάρτηση των δεδομένων, βρίσκοντας άμεση εφαρμογή σε πολύπλοκες βιομηχανικές διαδικασίες, όπως για παράδειγμα η επικάλυψη μπαταριών.

2.3.5. Προηγμένες στρατηγικές δειγματοληψίας

Τα παραδοσιακά διαγράμματα ελέγχου διεργασιών βασίζουν τη δομή τους στην απλή τυχαία δειγματοληψία. Έχει όμως περαιτέρω διερευνηθεί και αποδειχθεί πως η χρήση της Δειγματοληψίας Διατεταγμένων Συνόλων (Ranked Set Sampling - RSS) ενισχύει θεαματικά την ικανότητα των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου, μειώνοντας τη μεταβλητότητα των παραμέτρων και αυξάνοντας την ευαισθησία στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων (μείωση του ARL_{out}), καθιστώντας την ιδανική σε βιομηχανίες όπου η μέτρηση του προϊόντος είναι δαπανηρή ή καταστροφική (Abid et al., 2017; Oladipupo et al., 2025).

Η μέθοδος της Δειγματοληψίας Διατεταγμένων Συνόλων (Ranked Set Sampling - RSS) αποτελεί μια από τις πλέον αποδοτικές σύγχρονες στρατηγικές. Μελέτες των Abid et al. (2017) απέδειξαν ότι η χρήση της μεθόδου RSS σε μη παραμετρικά διαγράμματα EWMA Wilcoxon Signed-Rank καθώς και σε διαγράμματα CUSUM προσήμου, ενισχύει δραματικά την απόδοσή τους. Συγκεκριμένα, η δειγματοληψία RSS επιτρέπει τη σημαντική μείωση του εκτός ελέγχου ARL τόσο σε μικρές όσο και σε μεγάλες μετατοπίσεις, καθιστώντας την ιδανική επιλογή έναντι της Απλής Τυχαίας Δειγματοληψίας (SRS), ειδικά όταν η άμεση μέτρηση των χαρακτηριστικών είναι δαπανηρή.

2.4 Δείκτες απόδοσης: ARL έναντι MRL

Στα μη παραμετρικά διαγράμματα, η κατανομή του Μήκους Ροής (*ARL*) είναι συχνά πολύ λοξή (*skewed*), γεγονός που καθιστά το Μέσο Μήκος Ροής (*ARL*) λιγότερο αντιπροσωπευτικό (Graham et al., 2014, 2016).

Η βασική διαφορά έγκειται στη σταθερότητα της διεργασίας όταν αυτή βρίσκεται εντός ελέγχου. Ενώ στα παραμετρικά διαγράμματα το *ARL* μεταβάλλεται σημαντικά όταν η κατανομή αλλάζει, στα μη παραμετρικά διαγράμματα παραμένει σταθερό για οποιαδήποτε συνεχή κατανομή (Nazir et al., 2019; Shafqat et al., 2023).

2.4.1. Απόδοση σε συμμετρικές κατανομές

Η βιβλιογραφία επιβεβαιώνει ότι τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου υπερέχουν σημαντικά των παραμετρικών όταν η υπόθεση της κανονικότητας παραβιάζεται, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις πλατύκυρτων κατανομών. Σύμφωνα με τους Shafqat et al. (2023), τα διαγράμματα που βασίζονται σε στατιστικές *signed-rank* (όπως το *EWMA* βασισμένο σε *signed-rank*) επιδεικνύουν εξαιρετική ταχύτητα ανίχνευσης σε κατανομές Laplace, καθώς οι τιμές του *ARL_i* μειώνονται δραστικά με την εμφάνιση ακόμη και μικρών μετατοπίσεων στη μέση τιμή της διεργασίας (Shafqat et al., 2023).

Αντίστοιχα, οι μελέτες του Nazir υπογραμμίζουν ότι σε κατανομές όπως η Laplace (διπλή εκθετική), η Logistic και η *t Student's*, τα μη παραμετρικά σχήματα διατηρούν σταθερό το *ARL_o* ανεξάρτητα από την κατανομή, ενώ παράλληλα ανιχνεύουν μεταβολές ταχύτερα από τα παραδοσιακά διαγράμματα *Shewhart* ή *EWMA* που βασίζονται στην κανονική κατανομή (Abid et al., 2018). Αυτή η ανθεκτικότητα καθιστά τα *NPEWMA* διαγράμματα ιδανικά για βιομηχανικές εφαρμογές όπου η πραγματική κατανομή των δεδομένων είναι άγνωστη ή μη κανονική (Abid et al., 2018).

2.4.2. Απόδοση σε λοξές κατανομές

Η απόδοση των μη παραμετρικών διαγραμμάτων, όπως το NPSR-DH (Nonparametric Signed-Rank Double Homogeneously) και το MCE (Mixed CUSUM-EWMA), παραμένει ικανοποιητική ακόμα και σε κατανομές με έντονη λοξότητα, όπως η Gamma και η Lognormal (Abid et al., 2024; Nazir et al., 2019). Στις περιπτώσεις αυτές, η χρήση της διαμέσου (*MRL*) είναι συχνά πιο αποκαλυπτική από το, λόγω της ασυμμετρίας της κατανομής του μήκους ροής (Abid et al., 2024; Raza et al., 2024).

Μετατόπιση (δ)	Lognormal	Gamma	Extreme Value
0.00	374.6	370.1	373.1
0.50	33.8	35.0	32.7
1.00	17.3	18.3	17.3
2.00	8.9	9.5	10.3

Πηγή δεδομένων: Nazir κ.ά. (Nazir et al., 2019, Πίνακας 13, σελ. 30)

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα επιβεβαιώνεται η ιδιότητα της ελεύθερης κατανομής του αλγορίθμου *NPSR-DH* (Nonparametric Signed-Rank Double Homogeneous) καθώς για μηδενική μετατόπιση, ($\delta = 0,00$), το ARL_0 , παρέμεινε σταθερό, κοντά στην ονομαστική τιμή (~ 370) για όλες τις κατανομές. Η υψηλή ευαισθησία του διαγράμματος, αναδεικνύεται μέσω της μείωσης του *ARL* όσο αυξάνεται το μέγεθος της μετατόπισης. Η εγγύτητα των τιμών υπό το φως των διάφορων κατανομών, αναδεικνύει τη σταθερότητα του διαγράμματος σε περιπτώσεις ασύμμετρων δεδομένων και ύπαρξης ουρών.

Median Run Length (*MRL*): Πολλοί ερευνητές προτείνουν τη χρήση της διαμέσου (*median*) ως πιο αξιόπιστο δείκτη, καθώς παρέχει μια καλύτερη εικόνα για τον χρόνο που απαιτείται για τον εντοπισμό ενός σφάλματος στο 50% των περιπτώσεων (Graham et al., 2014, 2016).

Unconditional *ARL*: Καθώς τα όρια βασίζονται σε δείγμα αναφοράς, το *ARL* είναι στην πραγματικότητα μια τυχαία μεταβλητή. Η βιβλιογραφία εστιάζει στον υπολογισμό του *Unconditional ARL*, ο οποίος προκύπτει από την ολοκλήρωση της απόδοσης πάνω σε όλες τις πιθανές τιμές των διατεταγμένων παρατηρήσεων της *Φάσης I* (Malela-Majika et al., 2019)

2.5 Ενίσχυση με κανόνες ροής

Για να γεφυρωθεί το χάσμα απόδοσης μεταξύ παραμετρικών και μη παραμετρικών μεθόδων, η προσθήκη κανόνων ροής είναι απαραίτητη (Malela-Majika et al., 2018; Triantafyllou, 2020).

- 2-of-(h+1) rules: Το διάγραμμα δίνει σήμα αν 2 από τις τελευταίες παρατηρήσεις πέσουν εκτός ορίων (Malela-Majika et al., 2019).
- Side-sensitive rules: Οι κανόνες που λαμβάνουν υπόψη την κατεύθυνση της μεταβολής (πάνω ή κάτω από τη διάμεσο) αυξάνουν σημαντικά την ταχύτητα εντοπισμού (Malela-Majika et al., 2018).

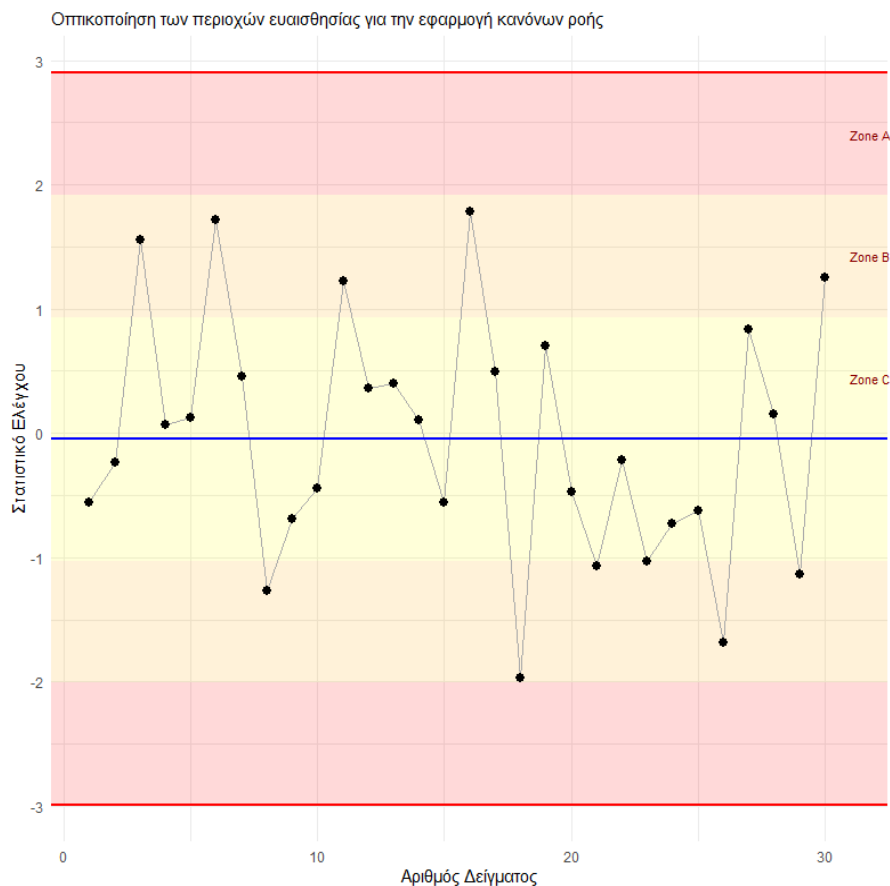
Επιπλέον, έχει αναπτυχθεί η έννοια των βελτιωμένων κανόνων ροής (improved runs-rules). Ενώ οι παραδοσιακοί κανόνες ροής βελτιώνουν την ικανότητα του διαγράμματος στις μικρές μετατοπίσεις (αλλά συχνά υστερούν σε μεγάλες), οι βελτιωμένοι κανόνες (όπως οι συμπληρωματικοί κανόνες $w\text{-of-}(w+v)$) γεφυρώνουν αυτό το χάσμα. Όταν ενσωματώνονται, για παράδειγμα, σε μη παραμετρικά διαγράμματα precedence ή Mann-Whitney, τα διαγράμματα διατηρούν την εξαιρετική τους ευαισθησία στις μικρές αποκλίσεις, ενώ ταυτόχρονα επιταχύνουν σημαντικά τον εντοπισμό πολύ μεγάλων μετατοπίσεων, προσφέροντας μια απόλυτα ισορροπημένη λειτουργία ελέγχου (Human et al., 2025; Malela-Majika et al., 2016).

Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω ζητημάτων παρατίθεται μία διαγραμματική αποτύπωση με κανόνες ροής (Διάγραμμα 1) στην οποία ουσιαστικά υπάρχει μία κατάτμηση του χώρου μεταξύ των ορίων ελέγχου σε ζώνες πιθανοτήτων. Συγκεκριμένα όπως προκύπτει από το παρακάτω γράφημα διακρίνονται τα ακόλουθα:

Ζώνες A και B (Κόκκινο/Πορτοκαλί): Λειτουργούν ως περιοχές έγκαιρης προειδοποίησης. Για παράδειγμα, σύμφωνα με τον κανόνα 2-of-(h+1) που αναφέρθηκε παραπάνω αυτός ενεργοποιείται συνήθως, όταν διαδοχικές παρατηρήσεις εισέρχονται στη **Ζώνη A**, αναδεικνύοντας στατιστικά σημαντική απόκλιση **πριν** την παραβίαση του ορίου 3s.

Η διάκριση ζωνών εκατέρωθεν της κεντρικής γραμμής (άνω και κάτω ημιεπίπεδο) επιτρέπει στο διάγραμμα να αναγνωρίζει την κατεύθυνση της μεταβολής, επιταχύνοντας τον εντοπισμό συστηματικών σφαλμάτων. Στο πλαίσιο των προοδευτικών διαγραμμάτων, η οπτική αυτή παρακολούθηση επιτρέπει τον εντοπισμό ύποπτων σημείων αποτρέποντας μία ενδεχόμενη ενσωμάτωση δειγμάτων που βρίσκονται στις εξωτερικές ζώνες (A και B)

στο δείγμα αναφοράς, προστατεύοντας κατά αυτό τον τρόπο τη διεργασία από το φαινόμενο του masking.



Διάγραμμα 1. Διάγραμμα ελέγχου με ζώνες

2.5.1 Προηγμένοι κανόνες ροής και πολλαπλές σαρώσεις

Η ενίσχυση της ταχύτητας απόκρισης των διαγραμμάτων ελέγχου αποτελεί πεδίο διαρκούς καινοτομίας. Όπως ήδη αναφέρθηκε, οι κανόνες ροής (runs rules) βελτιώνουν την ευαισθησία, όμως η ανάλυσή τους γίνεται ολοένα και πιο σύνθετη.

Οι Human, Malela-Majika και Kritzinger (2025) προχώρησαν σε θεωρητική επιβεβαίωση των βελτιωμένων κανόνων ροής σε διαγράμματα Precedence (προτεραιότητας) τα οποία παρακολουθούν την παράμετρο της θέσης (location parameter). Η μαθηματική μοντελοποίηση της απόδοσης τέτοιων κανόνων βασίζεται στις ιδιότητες των Αλυσίδων Markov. Κάθε πιθανός συνδυασμός διαδοχικών σημείων που πέφτουν εντός ή εκτός των προειδοποιητικών ζωνών (warning limits) θεωρείται μια "μεταβατική κατάσταση" (transient state). Η επίλυση του θεμελιώδους πίνακα μετάβασης (fundamental transition matrix) παρέχει κλειστούς τύπους

(closed-form solutions) για το Μέσο Μήκος Ροής, αποδεικνύοντας ότι τα improved runs-rules μειώνουν εκθετικά το ARL για πολύ μεγάλες μετατοπίσεις.

Επεκτείνοντας τη λογική των κανόνων ροής, η βιβλιογραφία εισάγει τον όρο των Πολλαπλών Σαρώσεων. Ο Triantafyllou (2024, 2025) ανέπτυξε μια εκτεταμένη κατηγορία distribution-free διαγραμμάτων τα οποία εδράζονται σε διατεταγμένες παρατηρήσεις και ενσωματώνουν κανόνες multiple scans. Αντί το διάγραμμα να παράξει σήμα με το πρώτο στοιχείο το οποίο εντοπίζεται εκτός ορίων ελέγχου, διατρέχει επανειλημμένα ένα κυλιόμενο παράθυρο παρατηρήσεων και εάν το πλήθος των σημείων που υπερβαίνουν το όριο εντός αυτού του παραθύρου (της σάρωσης) ξεπεράσει ένα κρίσιμο κατώφλι, τότε και μόνο τότε ενεργοποιείται συναγερμός.

Αυτή η μη παραμετρική προσέγγιση πολλαπλών σαρώσεων βρήκε άμεση και εντυπωσιακή εφαρμογή πέραν των εργοστασίων. Στη Διαχείριση της Εφοδιαστικής Αλυσίδας, τα μοντέλα αυτά ανιχνεύουν ανωμαλίες στους χρόνους παράδοσης προστατεύοντας τα αποθέματα (Triantafyllou, 2024), ενώ ακόμη πιο πρωτοποριακή είναι η εφαρμογή τους στην ωκεανογραφική μηχανική (Triantafyllou, 2025), όπου χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση ακραίων καιρικών φαινομένων και την παρακολούθηση της αξιοπιστίας των κυματοθραυστών, απέναντι σε απότομες μεταβολές του ύψους των κυμάτων, επιβεβαιώνοντας τη μαθηματική ευελιξία των order statistics σε μεγάλα και με απρόβλεπτη συμπεριφορά σύνολα δεδομένων.

2.6 Συμπεράσματα

Από την παράθεση των παραπάνω αποτελεσμάτων προκύπτει ότι:

1. Τα μη παραμετρικά διαγράμματα είναι απαραίτητα όταν η φύση της κατανομής μεταβάλλεται ή είναι άγνωστη (Chakraborti & Graham, 2019; Shafqat et al., 2023).
2. Η χρήση διατεταγμένων παρατηρήσεων (order statistics) προσφέρει μια υπολογιστικά απλή μέθοδο που ανταγωνίζεται επάξια τα παραμετρικά διαγράμματα ακόμα και υπό συνθήκες κανονικότητας (Li et al., 2020; Triantafyllou, 2020).
3. Η απόδοση βελτιώνεται σημαντικά σε κατανομές όπως η Laplace, όπου οι μεταβολές εντοπίζονται ταχύτερα σε σχέση με άλλες κατανομές (Abid et al., 2024; Shafqat et al., 2023).

Το διάγραμμα που επιλέγεται για περαιτέρω μελέτη στην παρούσα εργασία βασίζεται στο συνδυασμό διατεταγμένων παρατηρήσεων και στατιστικών υπέρβασης. Η επιλογή αυτή αιτιολογείται από την υπολογιστική της απλότητα και την υψηλή της ευελιξία, καθώς επιτρέπει τον καθορισμό ορίων ελέγχου χωρίς την ανάγκη περίπλοκων εκτιμήσεων παραμέτρων (Li et

al., 2020; Triantafyllou, 2020). Η μεθοδολογία αυτή θα αναλυθεί διεξοδικά στο επόμενο κεφάλαιο, όπου θα παρουσιαστούν οι μαθηματικοί τύποι και οι προσομοιώσεις Monte Carlo για την αξιολόγηση της απόδοσής του υπό διάφορα σενάρια μεταβολών.

Κεφάλαιο 3: Μεθοδολογία προσομοίωσης και αξιολόγηση απόδοσης

3.1 Περιγραφή του αλγορίθμου προσομοίωσης

Η αξιολόγηση της απόδοσης των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου Precedence πραγματοποιήθηκε μέσω προσομοίωσης Monte Carlo, η οποία υλοποιήθηκε σε περιβάλλον R. Η ανάγκη για προσομοίωση προκύπτει από το γεγονός ότι τα όρια ελέγχου βασίζονται σε διατεταγμένες στατιστικές ενός δείγματος αναφοράς, καθιστώντας τα συμβάντα σηματοδότησης εξαρτημένα μεταξύ τους.

Ο αλγόριθμος ακολουθεί τη διαδικασία δύο φάσεων που περιγράφεται από τους Chakraborti et al. (2004):

Φάση I (Δείγμα Αναφοράς): Λαμβάνεται ένα τυχαίο δείγμα αναφοράς m παρατηρήσεων από μια διεργασία υπό έλεγχο (in-control). Οι παρατηρήσεις διατάσσονται σε αύξουσα σειρά και επιλέγονται οι στατιστικές $X_{(a:m)}$ και $X_{(b:m)}$ για τον ορισμό των ορίων ελέγχου LCL και UCL αντίστοιχα.

Φάση II (Διαρκής Έλεγχος): Λαμβάνονται ανεξάρτητα δείγματα ελέγχου μεγέθους n . Για κάθε δείγμα υπολογίζεται η j -οστή διατεταγμένη στατιστική $Y_{(j:n)}$.

Κριτήριο Τερματισμού: Η διαδικασία τερματίζεται όταν η $Y_{(j:n)}$ βρεθεί εκτός των ορίων $X_{(a:m)}$ ή $X_{(b:m)}$, δηλώνοντας την παρουσία βλάβης (out-of-control).

Η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo αποτελεί ένα αναπόσπαστο εργαλείο στον του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών (SPC), ειδικά για την αξιολόγηση πολύπλοκων και μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου (Raji et al., 2020). Ενώ για τα απλά παραμετρικά διαγράμματα είναι συχνά εφικτός ο ακριβής αναλυτικός υπολογισμός των ιδιοτήτων του Μήκους Ροής (Run Length) μέσω μεθόδων ολοκληρωτικών εξισώσεων ή Μαρκοβιανών Αλυσίδων, στα distribution-free διαγράμματα η διακριτή φύση των στατιστικών (όπως τα πρόσημα ή οι κατατάξεις) καθιστά την εξαγωγή κλειστών μαθηματικών τύπων εξαιρετικά πολύπλοκη έως αδύνατη σε πολλές περιπτώσεις (Magagula et al., 2025; Perdakis et al., 2021).

Ο αλγόριθμος εφαρμογής προσομοίωσης Monte Carlo παρακάμπτει αυτή τη δυσκολία προσομοιώνοντας την πραγματική λειτουργία της διεργασίας. Παράγει χιλιάδες ψευδοτυχαία δείγματα (συνήθως 104 ή 105 επαναλήψεις) από προκαθορισμένες κατανομές. Για κάθε ανεξάρτητη επανάληψη, ο αλγόριθμος αναπαράγει τον υπολογισμό της εκάστοτε στατιστικής ελέγχου και καταγράφει τον ακριβή αριθμό των δειγμάτων (*Run Length*) που απαιτήθηκαν μέχρι η στατιστική να ξεπεράσει τα όρια ελέγχου (Sudsutad et al., 2025). Ο υπολογισμός του μέσου όρου αυτών των καταγεγραμμένων τιμών οδηγεί στην εμπειρική εκτίμηση του Μέσου

Μήκους Ροής (*ARL*), ενώ παράλληλα επιτρέπει την ακριβή εξαγωγή της διαμέσου (*MRL*) και της τυπικής απόκλισης (*SDRL*) του μήκους ροής (Raji et al., 2020; Raza et al., 2024).

3.1.1 Μαθηματική Μορφή και Ιδιότητες των Κατανομών της Προσομοίωσης

Για την ολοκληρωμένη και αυστηρή αξιολόγηση της ανθεκτικότητας των μη παραμετρικών διαγραμμάτων, η προσομοίωση δεν περιορίζεται στην κανονική κατανομή, αλλά επεκτείνεται σε μια σειρά συμμετρικών (με βαριές ουρές) και ασύμμετρων κατανομών (Abbas et al., 2022; Erem & Mahmood, 2023). Συγκεκριμένα, οι ιδιότητες των κατανομών που μελετήθηκαν είναι οι εξής:

- **Κανονική Κατανομή:** Η τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$ χρησιμοποιείται παραδοσιακά ως η βάση αναφοράς. Χαρακτηρίζεται από απόλυτη συμμετρία (μηδενική λοξότητα) και ελαφριές ουρές. Η αξιολόγηση των μη παραμετρικών σχημάτων υπό συνθήκες κανονικότητας είναι κρίσιμη, προκειμένου να αποδειχθεί εάν διατηρούν μια ανταγωνιστική ευαισθησία και ισχύ έναντι των παραμετρικών διαγραμμάτων, τα οποία είναι κατασκευασμένα για να βελτιστοποιούνται ακριβώς σε αυτό το περιβάλλον (Khakifirooz et al., 2021).
- **Κατανομή t-Student:** Επιλέγεται για την αξιολόγηση της συμπεριφοράς του διαγράμματος σε συμμετρικές κατανομές με heavy tails (Nasrollahzadeh et al., 2023). Όταν ο βαθμός ελευθερίας είναι μικρός (π.χ. $df=5$), η t-Student παράγει συχνότερα ακραίες τιμές (outliers) εν συγκρίσει με την κανονική κατανομή. Σε τέτοια περιβάλλοντα, τα μη παραμετρικά διαγράμματα συχνά αποδεικνύονται πιο αξιόπιστα (Erem & Mahmood, 2023).
- **Κατανομή Laplace ή Διπλή εκθετική:** Αποτελεί μια συμμετρική κατανομή η οποία παρουσιάζει πιο οξεία κορυφή (λεπτόκυρτη) και αρκετά βαρύτερες ουρές από την κανονική κατανομή (Shinde et al., 2024). Είναι η κλασική και πλέον ενδεδειγμένη επιλογή στη βιβλιογραφία για τη δοκιμή της ευαισθησίας των μη παραμετρικών στατιστικών (όπως τα πρόσημα) σε μη-κανονικά δεδομένα (Talordphop et al., 2025).
- **Κατανομές Gamma και Εκθετική (Exponential):** Εισάγονται στην προσομοίωση για τον αυστηρό έλεγχο της απόδοσης σε δεδομένα με έντονη λοξότητα και ασυμμετρία (Lin et al., 2021). Σε ασύμμετρα δεδομένα, η κατανομή των παραμετρικών στατιστικών ελέγχου παραμορφώνεται ραγδαία, προκαλώντας ανεξέλεγκτη αύξηση των ψευδών συναγερμών, ενώ τα μη παραμετρικά εργαλεία οφείλουν να διατηρούν το ARL_{in} τους απόλυτα σταθερό, επιβεβαιώνοντας τη στιβαρότητά τους (Erem & Mahmood, 2023).

3.1.2 Αρχιτεκτονική του Κώδικα και Παράμετροι Προσομοίωσης

Για την υλοποίηση των προσομοιώσεων Monte Carlo κατασκευάστηκε εξειδικευμένο υπολογιστικό πρόγραμμα στο στατιστικό λογισμικό R. Η κύρια συνάρτηση προσομοίωσης, ονομαζόμενη `simulate_precedence`, σχεδιάστηκε ώστε να δέχεται ως ορίσματα τις θεμελιώδεις παραμέτρους του διαγράμματος ελέγχου Precedence. Πιο συγκεκριμένα, η δομή του αλγορίθμου αξιοποιεί τις εξής παραμέτρους: το μέγεθος του ιστορικού δείγματος αναφοράς της Φάσης I (m), το μέγεθος του δείγματος ελέγχου της Φάσης II (n), την επιθυμητή διατεταγμένη παρατήρηση του δείγματος ελέγχου (j , η οποία στην περίπτωση μας τίθεται ίση με 3, υποδηλώνοντας τη διάμεσο για $n=5$), και τους δείκτες των διατεταγμένων παρατηρήσεων της Φάσης I που λειτουργούν ως κάτω και άνω όρια ελέγχου (LCL και UCL αντίστοιχα, τα οποία καθορίζονται από τις παραμέτρους a και b).

Ο αλγόριθμος εκτελεί ένα επαναληπτικό βρόχο 10.000 ανεξάρτητων προσομοιώσεων ($n_{sim} = 10,000$). Σε κάθε επανάληψη, κατασκευάζεται αρχικά ένα διάνυσμα τυχαίων παρατηρήσεων μεγέθους m , το οποίο ταξινομείται σε αύξουσα τάξη μεγέθους προκειμένου να εξαχθούν οι κρίσιμες διατεταγμένες τιμές $X_{(a)}$ και $X_{(b)}$. Στη συνέχεια, ο αλγόριθμος εισέρχεται στη Φάση II, δημιουργώντας διαδοχικά δείγματα μεγέθους n , είτε υπό συνθήκες σταθερότητας, είτε με την εισαγωγή προκαθορισμένης μετατόπισης (shift) στη μέση τιμή. Μόλις η j -οστή στατιστική του νέου δείγματος υπερβεί τα όρια ($X_{(a)}, X_{(b)}$), η διαδικασία τερματίζεται και ο αριθμός της επανάληψης (Run Length) καταγράφεται σε ένα δυναμικό διάνυσμα (`run_lengths`).

Στο τέλος της εκτέλεσης, το πρόγραμμα εξάγει κεντρικές ροπές και μέτρα θέσης της κατανομής του Run Length: τον μέσο όρο (ARL), τη διάμεσο (MRL) και την τυπική απόκλιση (SDRL), προκειμένου για τη συγκριτική αξιολόγηση των μη παραμετρικών διαγραμμάτων σύμφωνα με τη σύγχρονη βιβλιογραφία (Sudsutad et al., 2026).

3.2 Υπολογισμός Μέτρων Απόδοσης

Ο κύριος δείκτης απόδοσης που υπολογίζει ο αλγόριθμος είναι το *Average Run Length* (ARL), ως ο μέσος αριθμός δειγμάτων μέχρι την εμφάνιση σήματος και συγκεκριμένα προσδιορίζονται τα ακόλουθα:

- ARL_{in} (ή ARL_0): Σύμφωνα με τους Chakraborti et al. (2004), το ARL_0 είναι ανεξάρτητο κατανομής (distribution-free), δηλαδή παραμένει σταθερό για κάθε συνεχή κατανομή.
- ARL_{out} : Υπολογίζεται εισάγοντας μετατοπίσεις (shifts) στη μέση τιμή της κατανομής κατά δ μονάδες, για την αξιολόγηση της ευαισθησίας του διαγράμματος.

- **MRL (Median Run Length):** Η διάμεσος του αριθμού των δειγμάτων μέχρι την εμφάνιση του σήματος. Σύμφωνα με την ενότητα 2.4, η κατανομή του Run Length διακρίνεται συχνά για την έντονη λοξότητα της, καθιστώντας την MRL αντιπροσωπευτικότερη μετρική σε σχέση με το ARL, παρέχοντας μία ρεαλιστικότερη εικόνα του χρόνου εντοπισμού στο 50% των περιπτώσεων (Graham et al., 2014).
- **SDRL (Standard Deviation of Run Length):** Ως η τυπική απόκλιση του αριθμού των δειγμάτων μέχρι να εμφανιστεί σήμα, ποσοτικοποιώντας τη μεταβλητότητα της μονάδας του χρόνου εντοπισμού σημάτων. Οι μικρές τιμές SDRL υποδηλώνουν σταθερή και προβλέψιμη απόδοση του διαγράμματος ελέγχου.

Συμπληρωματικοί Δείκτες Συνολικής Απόδοσης (Overall Performance Metrics): Επειδή η αξιολόγηση μέσω αποκλειστικά μιας τιμής ARL μπορεί να αναδείξει ένα διάγραμμα ως εξαιρετικό σε μια συγκεκριμένη μετατόπιση (δ) αλλά ανεπαρκές σε άλλη, η σύγχρονη ανάλυση Monte Carlo ενσωματώνει δείκτες συνολικής απόδοσης, προσφέροντας μια ολιστική οπτική της αποτελεσματικότητας (Sudsutad et al., 2026; Talordphop et al., 2023):

Μέση Πρόσθετη Τετραγωνική Απώλεια (Average Extra Quadratic Loss - AEQL): Ποσοτικοποιεί και σταθμίζει το συνολικό ARL_{out} σε ένα ευρύ, συνεχές φάσμα πιθανών μετατοπίσεων. Το AEQL τιμωρεί αυστηρά τις καθυστερήσεις στον εντοπισμό μεγάλων μετατοπίσεων, προσφέροντας έναν ενιαίο δείκτη για τη συνολική ευαισθησία του διαγράμματος (Raza et al., 2024). **Σχετικός Μέσος Δείκτης (Relative Mean Index - RMI):** Ο δείκτης αυτός συγκρίνει την απόδοση του προτεινόμενου διαγράμματος με την καλύτερη δυνατή (βέλτιστη) απόδοση (minimum ARL) που επιτεύχθηκε μεταξύ όλων των ανταγωνιστικών διαγραμμάτων για το ίδιο εύρος μετατοπίσεων (Sudsutad et al., 2026). Η ενσωμάτωση αυτών των δεικτών στο προγραμματιστικό περιβάλλον R, μέσω Monte Carlo προσομοιώσεων, επιτρέπει για τη λήψη βασισμένων σε ολοκληρωμένα και θεωρητικά τεκμηριωμένα κριτήρια, εξασφαλίζοντας την υπεροχή του εκάστοτε μη παραμετρικού προτύπου έναντι του ανταγωνισμού (Talordphop et al., 2023).

3.3 Αποτελέσματα επαλήθευσης και ανάλυση αποτελεσμάτων

Για την επαλήθευση του αλγορίθμου, χρησιμοποιήθηκαν οι παράμετροι $m=500$, $n=5$, $j=3$, $a=24$ και $b=477$.

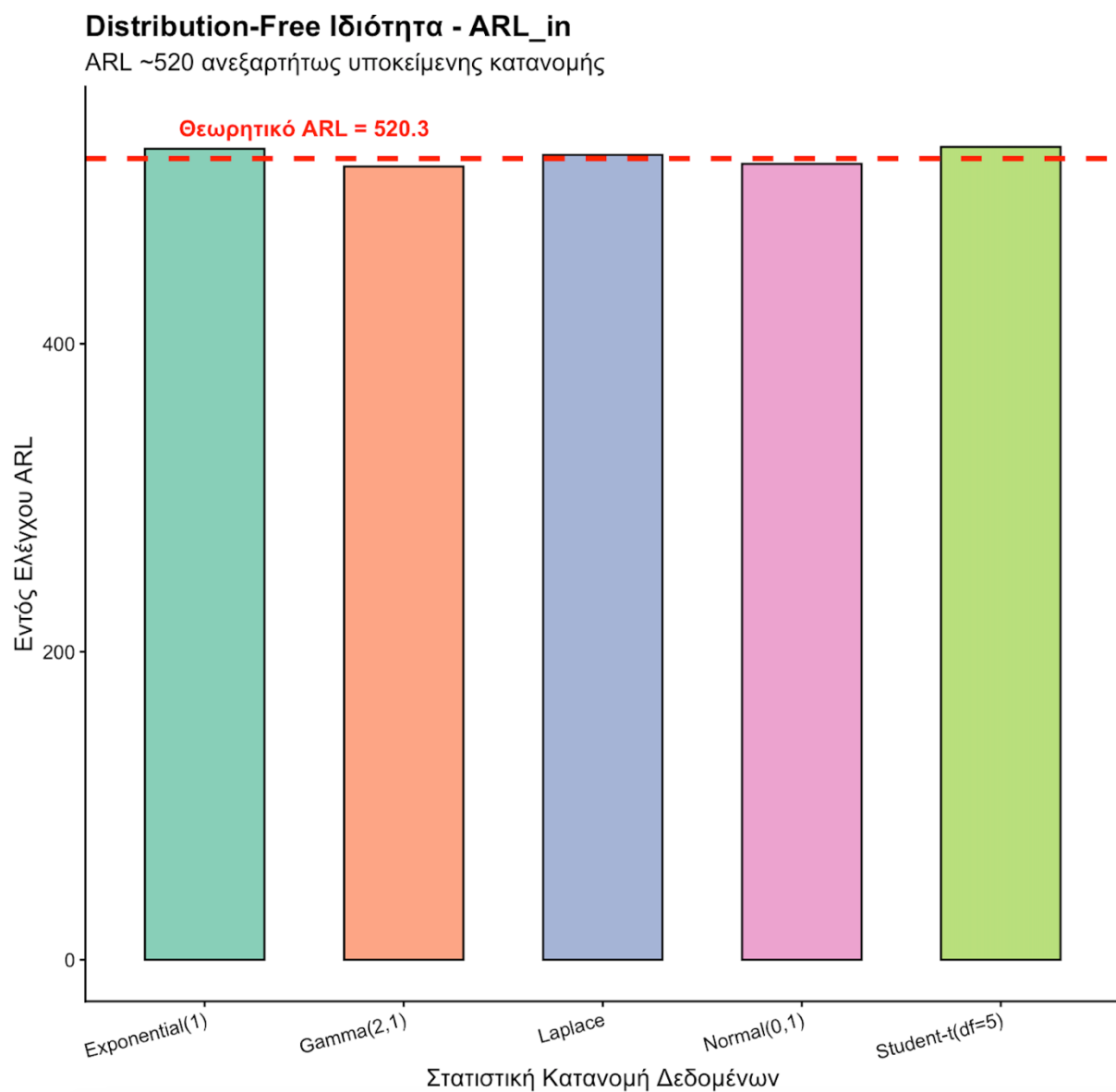
3.3.1 Υπολογισμός ARL_{in}

Για την επαλήθευση της εντός ελέγχου απόδοσης του διαγράμματος πραγματοποιήθηκε προσομοίωση χωρίς μετατόπιση ($\delta=0$) για τις παραμέτρους $m=500$, $n=5$, $j=3$, $a=24$, $b=477$, με 10,000 επαναλήψεις στο πλαίσιο της προσομοίωσης Monte Carlo. Προκειμένου να επαληθευτεί η ιδιότητα περί ελεύθερης κατανομής των μη παραμετρικών διαγραμμάτων – το ότι δηλαδή ανεξαρτήτως της υποκείμενης κατανομής η εντός ελέγχου απόδοση παραμένει σταθερή – η προσομοίωση εκτελέστηκε για πέντε διαφορετικές κατανομές με τις αντίστοιχες παραμέτρους αυτών: $N(0,1)$, t -Student ($df=5$), Laplace, Gamma (2,1) και $Exp(1)$. Τα αποτελέσματα των παραπάνω διαδικασιών παρατίθενται στον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας 1. Εντός ελέγχου μέτρα απόδοσης για πέντε διαφορετικές κατανομές ($\delta=0$, 10.000 επαναλήψεις)

Κατανομή	ARL_{in}	MRL_{in}	$SDRL_{in}$
Normal	516,84	321,00	599,78
t-Student ($df=5$)	527,85	324,50	615,26
Laplace	524,24	320,50	616,00
Gamma (2,1)	515,04	321,00	605,22
Exp(1)	526,67	318,00	631,71

Τα συμπεράσματα τα οποία προκύπτουν από τον προηγούμενο πίνακα είναι τα εξής: Η τιμή ARL_{in} κυμάνθηκε μεταξύ του 515,04 και 527,85 σε όλες τις δοκιμές στο πλαίσιο της προσομοίωσης για όλες τις κατανομές, επιβεβαιώνοντας ότι η εντός ελέγχου απόδοση του διαγράμματος είναι πρακτικά ανεξάρτητη από το είδος της κατανομής. Οι τιμές αυτές προσεγγίζουν ικανοποιητικά τη θεωρητική τιμή 520.3, όπως αυτή προσδιορίζεται στον Πίνακα. 2 (σελ. 10) του Chakraborti et al. (2004). Αντίστοιχα, η MRL_{in} κυμάνθηκε μεταξύ του 318 και 325 αντιστοίχως, με τιμές σημαντικά χαμηλότερες εν συγκρίσει με την ARL_{in} , επιβεβαιώνοντας την έντονη λοξότητα της κατανομής του μήκους ροής, όπως αυτό αναλύθηκε στην ενότητα 2.4 της παρούσας εργασίας. Ως εκ τούτου, ακόμα και σε λοξές κατανομές (Gamma, Exponential), η απόδοση παραμένει σταθερή, αναδεικνύοντας το βασικό πλεονέκτημα των μη παραμετρικών διαγραμμάτων έναντι των παραμετρικών.



Εικόνα 1. Ιδιότητα ελεύθερης κατανομής

3.3.2 Υπολογισμός ARL_{out}

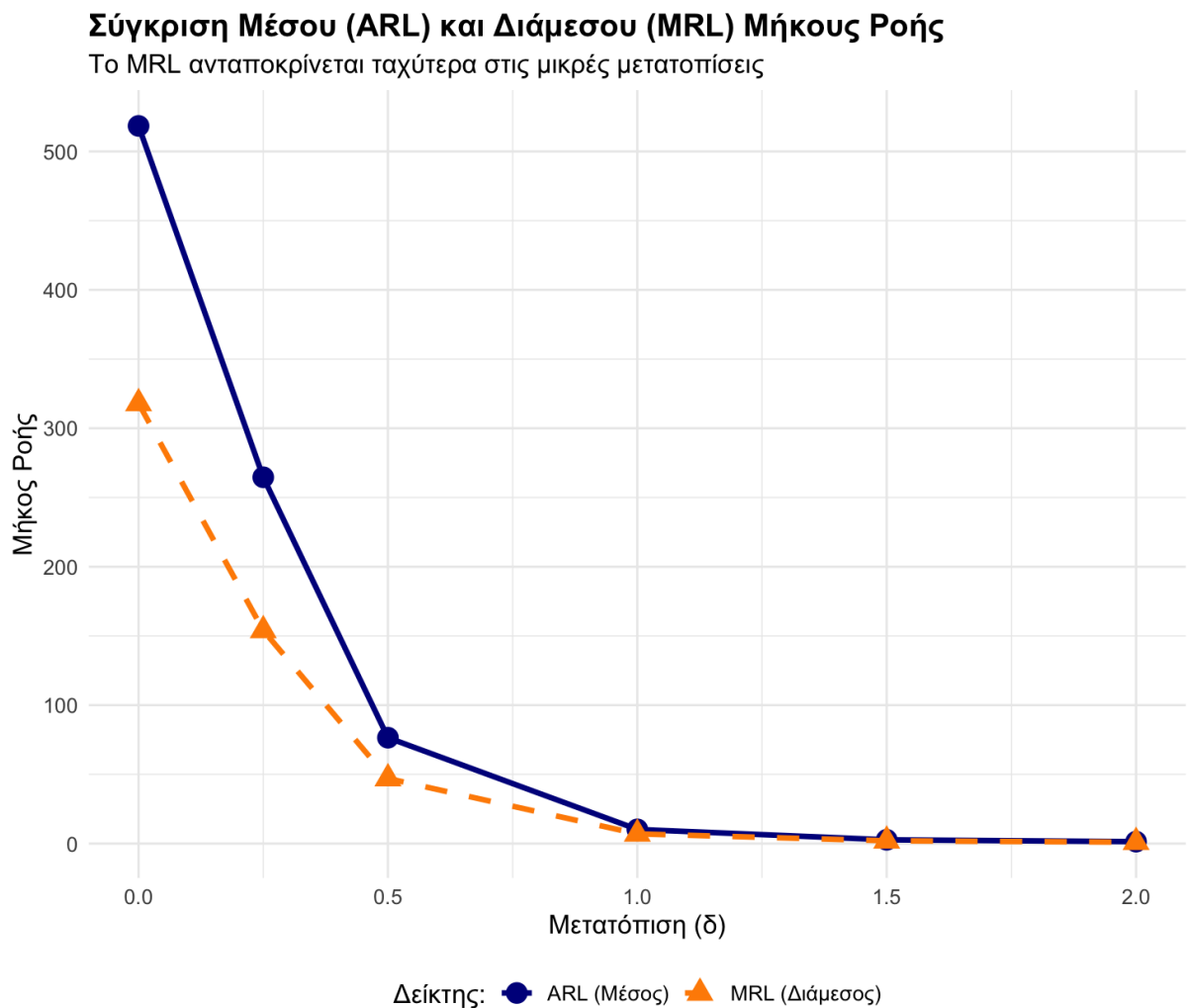
Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για διάφορες μετατοπίσεις δ_i ($i=0.25, \dots, 2$) παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα, επιβεβαιώνοντας τη θεωρητική καμπύλη απόδοσης των Chakraborti et al. (2004, Εικόνα 1):

Πίνακας 2. Εκτός ελέγχου μέτρα απόδοσης για διάφορες μετατοπίσεις ($m=500$, $n=5$, $j=3$, 10.000 επαναλήψεις)

Μετατόπιση (δ_i)	ARL_{out}	MRL_{out}	$SDRL_{out}$	Θεωρητική Προσέγγιση ARL (Εικόνα 2)	Παρατηρήσεις Απόδοσης
0.25	264.62	154	351.27	250 - 270	Αργός εντοπισμός μικρών μεταβολών
0.50	76.48	47	90.81	70 - 80	Σημαντική βελτίωση ταχύτητας απόκρισης
1.00	10.25	7	10.72	≈ 10	Αποτελεσματικός εντοπισμός μέτριας μεταβολής
1.50	2.72	2	2.26	< 5	Ταχύτατος εντοπισμός
2.00	1.39	1	0.75	≈ 1	Εντοπισμός σχεδόν στο πρώτο δείγμα

Παρατηρείται ότι για διάφορες μετατοπίσεις όπως αυτές προσδιορίζονται από την τιμή δ , τόσο το ARL_{out} , όσο και το MRL_{out} μειώνονται σημαντικά, αναδεικνύοντας ταχύτερη ανταπόκριση του διαγράμματος σε μεγαλύτερες βλάβες. Συγκεκριμένα για μετατοπίσεις του δ μεγαλύτερες του 1.5 ($\delta \geq 1.5$), ο εντοπισμός γίνεται άμεσα ($ARL_{out} < 3$) (Πίνακας 2). Αξιοσημείωτο γεγονός

εδώ αποτελεί η υφιστάμενη σχέση μεταξύ του ARL_{out} και MRL_{out} . Για μικρές μετατοπίσεις του $\delta = 0.25$ το $MRL_{out} = 154$ είναι σημαντικά μικρότερο σε σχέση με το $ARL_{out} = 264.62$, επιβεβαιώνοντας τη λοξότητα της κατανομής του Run Length. Καθώς η τιμή της μετατόπισης δ αυξάνεται, η διαφορά των δύο μέτρων έχει φθίνουσα πορεία, καθώς η κατανομή του Run Length γίνεται πιο συμμετρική. Τέλος, οι τιμές $SDRL_{out}$ για τις διάφορες μετατοπίσεις του δ , μειώνονται ταχύτατα, αναδεικνύοντας και με αυτόν τον τρόπο ότι σε μεγάλες βλάβες ο χρόνος εντοπισμού είναι μικρός, αλλά ταυτόχρονα και σταθερός.



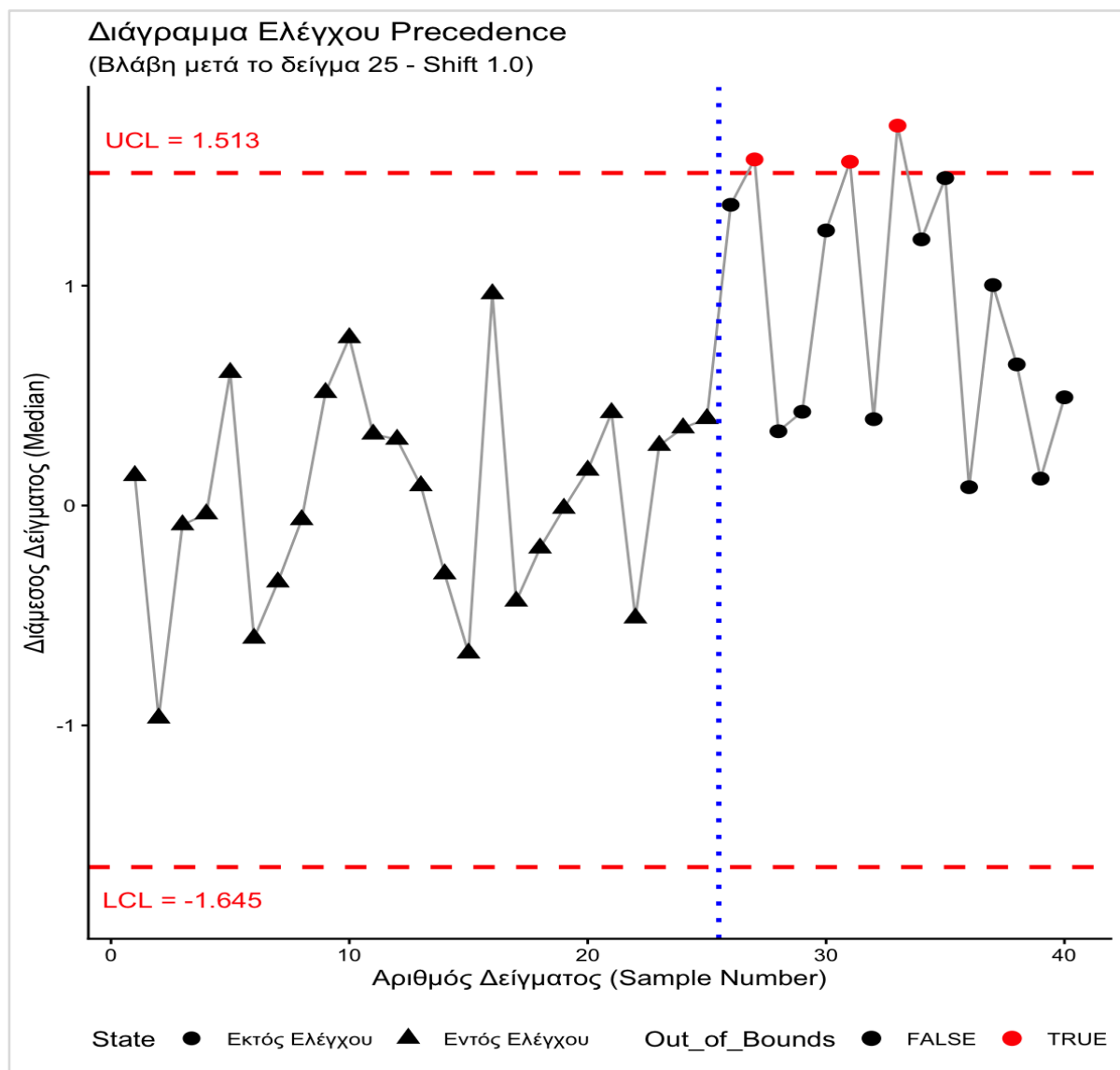
Εικόνα 2. Σύγκριση μέσου και διάμεσου μήκους ροής για διάφορες τιμές της μετατόπισης δ

Όπως αποτυπώνεται διαγραμματικά στην παραπάνω εικόνα (Εικόνα 1), η σχέση μεταξύ της τιμής του μεγέθους της μετατόπισης και του εκτός ελέγχου μήκου ροής παρουσιάζει μία εκθετική πτώση και πιο συγκεκριμένα, για πολύ μικρές μετατοπίσεις του δ ($\delta=0.25$) το

σύστημα υστερεί χρονικά απαιτώντας κατά μέσο όρο περί τα 264 δείγματα προκειμένου να ανιχνεύσει τη βλάβη. Για τιμές του $\delta=1.00$ το ARL παρουσιάζει αξιοσημείωτη μείωση εγείροντας μία απαίτηση για περίπου 10 δείγματα, ενώ για μεγαλύτερες τιμές του δ , εντοπίζει ακαριαία τη βλάβη, εφόσον όπως προκύπτει και από την Εικόνα 1 εφάπτεται στον άξονα των $x'x$, επαληθεύοντας και με αυτόν τον εύληπτο τρόπο τα συμπεράσματα της βιβλιογραφίας των Chakraborti et al. (2004).

3.3.3 Οπτικοποίηση Διαγράμματος Precedence

Στο διάγραμμα που παρήχθη (βλ. *Εικόνα 1*), απεικονίζεται η λειτουργία του αλγορίθμου για μια βλάβη μεγέθους $\delta=1.0$ που εισάγεται μετά το δείγμα 25. **Σταθερότητα:** Τα πρώτα 25 δείγματα (τρίγωνα) παραμένουν εντός των ορίων $LCL = -1.645$ και $UCL = 1.513$. **Εντοπισμός:** Αμέσως μετά την εισαγωγή της μετατόπισης (μπλε διακεκομμένη γραμμή), η διάμεσος των δειγμάτων αυξάνεται. Το διάγραμμα παράγει σήμα εκτός ορίων (κόκκινα σημεία) πολύ σύντομα, επιβεβαιώνοντας την ανάλυση των Chakraborti et al. (2004) σχετικά με την ικανότητα του διαγράμματος να εντοπίζει αλλαγές στη θέση της κατανομής.



Εικόνα 3. Διάγραμμα ελέγχου Precedence

3.3.4 Γραφική απεικόνιση και οπτική Ανάλυση της διαδικασίας

Ένα κρίσιμο στοιχείο του σχεδιασμού του συστήματος ελέγχου είναι η δυνατότητα άμεσης οπτικοποίησης της κατάστασης της παραγωγής. Για τον σκοπό αυτό, αξιοποιήθηκε το πακέτο ggplot2 της γλώσσας R, το οποίο επιτρέπει την κατασκευή πολυδιάστατων γραφημάτων.

Για την αναπαράσταση της *Φάσης II*, ο αλγόριθμος προσομοιώνει τη ροή μιας διεργασίας με 40 διαδοχικά δείγματα ($nsamples = 40$). Τα πρώτα 25 δείγματα δημιουργούνται από την κανονική (in-control) κατανομή της διεργασίας, ενώ από το δείγμα 26 και έπειτα, εισάγεται εσκεμμένα μια βλάβη με μετατόπιση μεγέθους $\delta = 1.0$ ($mean = 1, sd = 1$). Το διάγραμμα που παράγεται τοποθετεί τις διάμεσες τιμές (sample_medians) των δειγμάτων ελέγχου απέναντι στα εμπειρικά όρια ελέγχου LCL και UCL (τα οποία προέκυψαν από τις παρατηρήσεις $a=24$ και $b = 477$ της *Φάσης I*).

Όπως αποτυπώνεται στον κώδικα παραγωγής του γραφήματος (με χρήση του δείκτη Out_of_Bounds), το σύστημα επισημαίνει με διαφορετικό χρώμα (κόκκινο) και σχήμα τα σημεία εκείνα τα οποία ενέπιπταν εκτός των ορίων ελέγχου. Η μεθοδολογία αυτή παρέχει στους αναλυτές τη δυνατότητα της οπτικής επιβεβαίωσης: το γεγονός ότι τα σημεία που ακολουθούν μετά το 25^ο δείγμα τίθενται άμεσα εκτός ελέγχου, επαληθεύει την υψηλή ικανότητα έγκαιρης ανίχνευσης (*ευαισθησίας*) του διαγράμματος *Precedence* για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις, όπως υποστηρίζεται και από τις αναλύσεις των Human et al. (2025).

3.4. Προγραμματιστική επαλήθευση της ιδιότητας ελεύθερης κατανομής

Προκειμένου να αποδειχθεί εμπειρικά ότι η εντός ελέγχου απόδοση (ARL_0) παραμένει απολύτως σταθερή και ανεπηρέαστη από τη φύση των δεδομένων, σχεδιάστηκε η δευτερεύουσα συνάρτηση *simulate_precedence_dist*. Η συνάρτηση αυτή επιτρέπει τη δυναμική εναλλαγή της υποκείμενης κατανομής των δεδομένων, εξετάζοντας 5 διαφορετικά στατιστικά περιβάλλοντα: **(1) Κανονική κατανομή (norm)**, **(2) t-Student (t)**, **(3) Laplace (laplace)**, **(4) Γάμμα (gamma) και (5) Εκθετική (exp)**, με τις αντίστοιχες παραμέτρους των κατανομών αυτών.

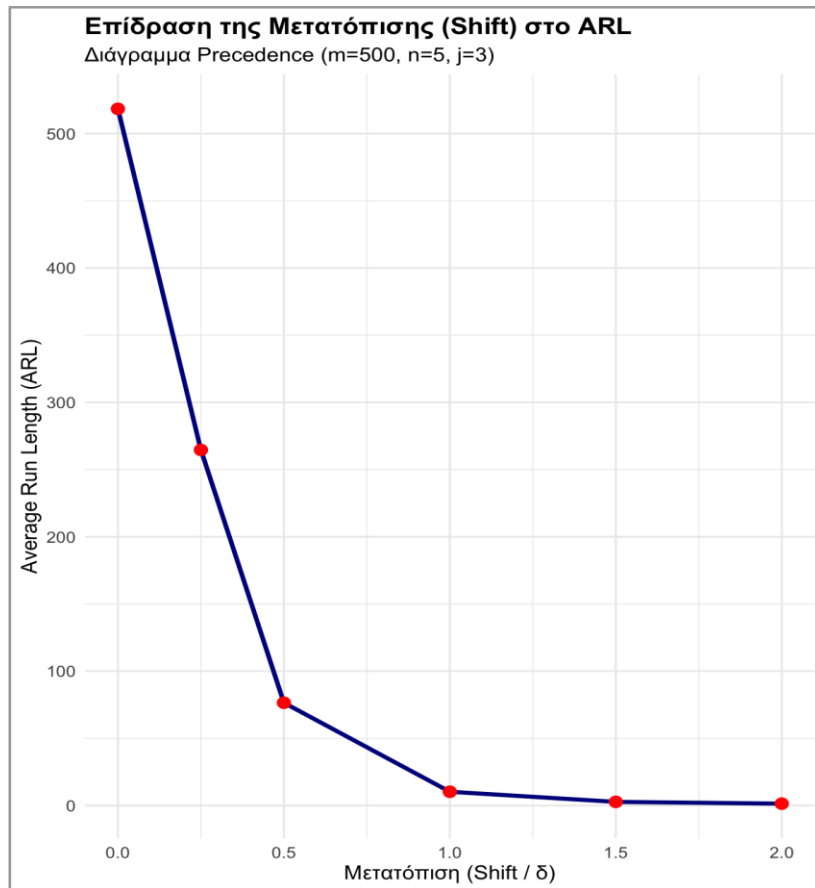
Ειδικό ενδιαφέρον παρουσιάζει ο αλγοριθμικός τρόπος παραγωγής των δεδομένων για την κατανομή Laplace (Διπλή Εκθετική), καθώς η βασική βιβλιοθήκη της R δεν υποστηρίζει εγγενώς την παραγωγή της. Για τον σκοπό αυτό, στον κώδικα ενσωματώθηκε η μέθοδος του Μετασχηματισμού Αντίστροφης Πιθανότητας. Συγκεκριμένα, δημιουργείται αρχικά ένα δείγμα u από την Ομοιόμορφη Κατανομή $U(-0.5, 0.5)$ μέσω της συνάρτησης `runif(m) - 0.5`,

και εν συνεχεία υπολογίζεται η τιμή $-sign(u) \cdot \ln(1-2|u|)$. Η μαθηματική αυτή τεχνική μετασχηματίζει τις ομοιόμορφες πιθανότητες σε τιμές που ακολουθούν την αυστηρά λεπτόκυρτη κατανομή Laplace, η οποία διακρίνεται για τις βαριές ουρές της.

Εκτελώντας την προσομοίωση για $\delta = 0.0$ (in-control), τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν το θεωρητικό πλαίσιο, πως δηλαδή ανεξαρτήτως του αν το δείγμα προέρχεται από συμμετρική κατανομή, από κατανομή με heavy tails ή από έντονα ασύμμετρη εκθετική κατανομή, το ARL_{in} κυμαίνεται σταθερά γύρω από την επιθυμητή θεωρητική τιμή (≈ 520). Η πειραματική αυτή ταύτιση, υλοποιημένη μέσω του παραπάνω κώδικα, πιστοποιεί την *distribution-free* ιδιότητα του διαγράμματος *Precedence*, αποτελώντας το κορυφαίο του πλεονέκτημα έναντι των παραμετρικών ανταγωνιστών του, όπως αναδεικνύουν και οι Magagula et al. (2025)

3.4.1 Επίδραση του μεγέθους δείγματος αναφοράς (m)

Η προσομοίωση επιβεβαιώνει τη θεωρία των Chakraborti et al. (2004) ότι για μεγάλα μεγέθη m (όπως το $m=500$ της μελέτης), η εξάρτηση που προκαλείται από την εκτίμηση των ορίων μειώνεται σημαντικά. Σε αυτές τις περιπτώσεις, το ARL_0 προσεγγίζει την τιμή του αντίστροφου της πιθανότητας σήματος, παρέχοντας μεγαλύτερη σταθερότητα στον έλεγχο της διεργασίας.



Εικόνα 4. Διαγραμματική διερεύνηση της μετατόπισης στο ARL

3.4.2 Αλγοριθμική εξαγωγή των μέτρων θέσης και διασποράς του μήκους ροής

Κατά την κλήση της συνάρτησης `simulate_precedence` ο κώδικας εξάγει τα τελικά αποτελέσματα μέσω της επιστροφής του σε δομή λίστας `return(list(ARL = mean(run_lengths), MRL = median(run_lengths), SDRL = sd(run_lengths)))`, ενσωματώνοντας κατά αυτόν τον τρόπο την εξαγωγή του MRL, και προσφέροντας στην ανάλυση το ακριβές σημείο (50ό ποσοστημόριο) όπου εντοπίζεται η βλάβη στις μισές ακριβώς προσομοιώσεις. Παράλληλα, η συνάρτηση `sd()` υπολογίζει την τυπική απόκλιση του διανύσματος (SDRL), ποσοτικοποιώντας τον βαθμό διασποράς των αποτελεσμάτων και αποδεικνύοντας –όπως προκύπτει και από τα αποτελέσματα του Πίνακα 2 – ότι για μεγάλες μετατοπίσεις ο χρόνος ανίχνευσης διατηρείται σε χαμηλά επίπεδα, αλλά παραμένει απολύτως σταθερός.

Κατά την παραγωγή των δεδομένων για την οπτικοποίηση του διαγράμματος **Precedence** (Εικόνα 1), ο κώδικας R δεν εφαρμόζει τη μετατόπιση καθολικά, αλλά προσομοιώνει μια δυναμική βιομηχανική αστοχία, ενώ σε επίπεδο αποτύπωσης εντολών αυτό επιτυγχάνεται μέσω του εσωτερικού βρόχου `for (i in 1:n_samples)` και της συνθήκης ελέγχου `if (i <= 25)`.

Η προγραμματιστική αυτή δομή υλοποιεί αυτό που στη στατιστική βιβλιογραφία ονομάζεται Μετατόπιση βήματος ή μόνιμη μετατόπιση. Για τις πρώτες 25 επαναλήψεις, ο αλγόριθμος γεννά δείγματα από την αρχική τυποποιημένο εντός ελέγχου κανονική κατανομή της διεργασίας, μέσω της εντολής `rnorm(n_val, mean = 0, sd = 1)`. Ακριβώς στο δείγμα 26, η συνθήκη `else` ενεργοποιείται και αλλάζει την παράμετρο θέσης της γεννήτριας τυχαίων αριθμών σε `mean = 1`. Η συγκεκριμένη γραμμή κώδικα εξομοιώνει με απόλυτη ακρίβεια μια μόνιμη, συστημική βλάβη στη μηχανή παραγωγής, αποδεικνύοντας έμπρακτα πώς το στατιστικό ελέγχου `sample_medians` μεταπηδά άμεσα σε υψηλότερο επίπεδο και διασπά το ανώτερο όριο ελέγχου `UCL_val`.

Ένα κρίσιμο ζήτημα κατά την εκτέλεση χιλιάδων επαναλήψεων *Monte Carlo* είναι ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος, η βελτιστοποίησή του και το ζήτημα της πολυπλοκότητας που απορρέει από τη διαδικασία της ταξινόμησης, καθώς τα μη παραμετρικά διαγράμματα διατεταγμένων παρατηρήσεων απαιτούν συχνά χρονοβόρες διαδικασίες ταξινόμησης. Στον πυρήνα της συνάρτησης `simulate_precedence`, η εντολή `phase1_sorted <- sort(phase1_sample)` αποτελεί το πλέον απαιτητικό υπολογιστικό βήμα, καθώς διατάσσει ένα διάνυσμα στοιχείων, ωστόσο η ταξινόμηση αυτή εκτελείται αποκλειστικά *μία φορά* ανά επανάληψη προσομοίωσης κατά τη *Φάση I*, προκειμένου να διασφαλιστούν οι σταθερές τιμές `LCL_val` και `UCL_val`. Αντιθέτως, κατά τη *Φάση II*, η συνεχής ροή νέων δειγμάτων παρακολουθείται μέσα από μικρά

δείγματα (υποομάδες) μεγέθους. Όταν ο αλγόριθμος καλεί την εντολή ταξινόμησης του νέου δείγματος `sort(current_sample)[j_val]`, ο όγκος των δεδομένων είναι τόσο μικρός, που η εύρεση της διαμέσου εκτελείται σχεδόν άμεσα. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο ο προγραμματιστικός διαχωρισμός μεταξύ μεγάλου στατικού δείγματος της *Φάσης I* και μικρών δυναμικών δειγμάτων της *Φάσης II*, καθιστά την υλοποίηση του συγκεκριμένου διαγράμματος υπολογιστικά εφικτή και αποδοτική στην πράξη.

Κεφάλαιο 4

4.1 Εισαγωγή στην προοδευτική παρακολούθηση και την αλγοριθμική της υλοποίηση

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, η αξιολόγηση των ιδιοτήτων του μη παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου *Precedence* πραγματοποιήθηκε μέσα από την προσομοίωση ενός ιδεατού περιβάλλοντος, όπου το μέγεθος του ιστορικού δείγματος αναφοράς (*Φάση I*) τέθηκε ίσο με $m=500$. Σε θεωρητικό πλαίσιο, εξασφαλίζεται η ελαχιστοποίηση της αβεβαιότητας και η σταθερότητα της εντός ελέγχου απόδοσης (*ARL₀*). Εντούτοις, στη σύγχρονη βιομηχανική πρακτική, η εξασφάλιση ενός τόσο μεγάλου, απαλλαγμένου από βλάβες δείγματος εκκίνησης είναι συχνά ανέφικτη και κοστοβόρα.

Όπως επισημαίνεται εκτενώς στη βιβλιογραφία, όταν η εκτίμηση των παραμέτρων και ο σχεδιασμός των ορίων ελέγχου βασίζεται σε μικρά δείγματα, προκαλούνται σημαντικά σφάλματα εκτίμησης, τα οποία με τη σειρά τους οδηγούν στο φαινόμενο της μεταβλητότητας, οδηγώντας ταυτόχρονα σε εκτεταμένη αύξηση των λανθασμένων συναγερμών.

Προκειμένου να γεφυρωθεί το χάσμα μεταξύ της στατιστικής θεωρίας και των πραγματικών βιομηχανικών περιορισμών, η σύγχρονη έρευνα στρέφεται στα προοδευτικά επικαιροποιημένα διαγράμματα, η καινοτομία των οποίων έγκειται στο ότι ξεκινούν με ένα ρεαλιστικά μικρό αρχικό δείγμα και καθώς η παραγωγική διαδικασία εξελίσσεται ομαλά, ενσωματώνουν τα νέα εντός ελέγχου δεδομένα στο δείγμα αναφοράς, επικαιροποιώντας διαρκώς τα όρια ελέγχου.

Η μετάβαση από ένα στατικό μοντέλο μεγάλου δείγματος σε ένα δυναμικό μοντέλο συνεχούς μάθησης υλοποιήθηκε αλγοριθμικά μέσα από μια σειρά προγραμματιστικών και στατιστικών χειρισμών, οι οποίοι αναλύονται στις ακόλουθες υποενότητες του παρόντος κεφαλαίου.

Η προοδευτική επικαιροποίηση ή όπως αποδίδεται ο όρος στη διεθνή βιβλιογραφία *progressive monitoring* παρέχει εξαιρετική ευελιξία και στην παρακολούθηση σύνθετων μορφών δεδομένων, με χαρακτηριστικό παράδειγμα τη διαχείριση μετρήσεων που ενέχουν μεγάλο αριθμό μηδενικών τιμών, ένα φαινόμενο το οποίο είναι ιδιαίτερα σύνηθες στην καταμέτρηση ελαττωμάτων. Έρευνες πάνω σε προοδευτικά διαγράμματα *Modified EWMA Sign-Rank* απέδειξαν πως η αρχιτεκτονική τους ενσωματώνει επιτυχώς την προοδευτική προσαρμογή σε zero-inflated δεδομένα, αυξάνοντας αισθητά την ευαισθησία αυτών των διαγραμμάτων (Phantu, Areepong, & Sukparungsee, 2024, 2025)

Στο Κεφάλαιο 4, ο κώδικας εξελίσσεται προς την κατεύθυνση της επίλυσης του πρακτικού προβλήματος της έλλειψης μεγάλων ιστορικών δεδομένων, εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία του

προοδευτικά επικαιροποιημένου διαγράμματος, δομημένος σε βήματα υλοποίησης τα οποία επικεντρώνουν στα εξής:

Αρχικοποίηση και δυναμικά όρια με χρήση ποσοστημορίων: Η συνάρτηση *simulate_progressive_chart* καταργεί την απαίτηση για $m = 500$ παρατηρήσεις και εκκινεί με ένα πολύ μικρότερο και ρεαλιστικό αρχικό δείγμα $m_{init} = 100$. Για να καταστεί δυνατή η προοδευτική αναπροσαρμογή των ορίων ελέγχου, οι σταθερές θέσεις τάξεων ($a=24$, $b=477$) αντικαθίστανται από σταθερά ποσοστημόρια: $p_L = 0.048$ και $p_U = 0.954$. Αυτό εξασφαλίζει ότι τα όρια θα υπολογίζονται δυναμικά με αναλογική ακρίβεια, κάθε φορά που το μέγεθος του δείγματος αναφοράς αλλάζει.

Διαδικασία επικαιροποίησης και καθυστέρηση βλάβης: Ένα ακόμη στοιχείο που προσδίδει ρεαλισμό είναι η παράμετρος $shift_delay = 50$. Στην προσομοίωση της Φάσης II, ο αλγόριθμος επιτρέπει στο σύστημα να λειτουργήσει κανονικά για 50 δείγματα. Κάθε δείγμα που είναι *εντός ελέγχου* ενσωματώνεται στο αρχικό δείγμα αναφοράς, αυξάνοντας τη μεταβλητή *current_m* (η διαδικασία μέσω της οποίας το διάγραμμα εκπαιδεύεται στα νέα αυτά δεδομένα). Μόνο μετά το πέρας αυτής της περιόδου εισάγεται η στοχευμένη μετατόπιση, δοκιμάζοντας την ευαισθησία του επικαιροποιημένου διαγράμματος.

Μέσα από τη διαγραμματική αποτύπωση με χρήση της βιβλιοθήκης *ggplot*, συγκρίνονται τα αποτελέσματα του **στατικού** μοντέλου ($m=500$) με αυτά του **προοδευτικού** ($m=100$). Ο κώδικας καταγράφει και οπτικοποιεί το **masking effect** για μικρές μετατοπίσεις (π.χ. Shift 0.25 και 0.50), το προοδευτικό διάγραμμα καθυστερεί ελαφρώς τον εντοπισμό (το ARL αυξάνεται σε σχέση με το στατικό), διότι το σύστημα ενδέχεται να ενσωματώσει εσφαλμένα, μερικά **μολυσμένα** δείγματα στο δείγμα αναφοράς του. Ωστόσο, ο κώδικας αποδεικνύει ότι για μεγάλες μετατοπίσεις ($\delta=1.00$, $\delta=1.50$), τα δύο διαγράμματα συγκλίνουν πλήρως, καθιστώντας την προοδευτική μέθοδο μια εξαιρετικά αξιόπιστη και ρεαλιστική επιλογή για τη βιομηχανία.

4.1.1 Παράθεση και ανάλυση κώδικα προοδευτικού διαγράμματος με κώδικα σε περιβάλλον R

Η προγραμματιστική υλοποίηση του προοδευτικά επικαιροποιημένου διαγράμματος πραγματοποιήθηκε σε περιβάλλον R, αξιοποιώντας τις βιβλιοθήκες *ggplot2* για την οπτικοποίηση και *knitr* για τη μορφοποίηση των αποτελεσμάτων. Ο βασικός άξονας της διαδικασίας ελέγχεται από τη συνάρτηση *simulate_progressive_chart*, η οποία προσομοιώνει την εισαγωγή νέων δειγμάτων και τη δυναμική προσαρμογή των ορίων. Ειδικότερα:

Αρχικοποίηση και Δυναμικά Όρια: Για να αντιμετωπιστεί η έλλειψη μεγάλου δείγματος στη Φάση I, η προσομοίωση ξεκινά με ένα ρεαλιστικό, μικρό δείγμα αναφοράς $m_{init} = 100$. Σε

αντίθεση με το στατικό μοντέλο του προηγούμενου κεφαλαίου, τα όρια ελέγχου μετατράπηκαν σε ποσοστημόρια ως ακολούθως:

Προσαρμογή παραμέτρων βάσει του Κεφαλαίου 3

$p_L \leftarrow 0.048$ # Αντιστοιχεί στο $a=24$ για $m=500$

$p_U \leftarrow 0.954$ # Αντιστοιχεί στο $b=477$ για $m=500$

Ο ορισμός των παραμέτρων p_L και p_U διασφαλίζει ότι, καθώς το τρέχον δείγμα (*current_m*) αυξάνεται σταδιακά με την ενσωμάτωση νέων των εντός ορίων ελέγχου παρατηρήσεων και τα όρια αναπροσαρμόζονται αναλογικά, διατηρώντας την επιθυμητή πιθανότητα κάλυψης. Η χρήση αυτών των δυναμικών ορίων ελέγχου αποτελεί μια από τις πλέον σύγχρονες τεχνικές για τη βελτίωση της απόδοσης των μη παραμετρικών *distribution-free* διαγραμμάτων σε πραγματικό χρόνο.

Βρόχος προσομοίωσης και καθυστέρηση μετατόπισης: Για κάθε διαφορετικό μέγεθος μετατόπισης, εκτελούνται 5.000 ανεξάρτητες επαναλήψεις ($n_{sim} = 5000$), προκειμένου να μοντελοποιηθεί ρεαλιστικά η λειτουργία μιας γραμμής παραγωγής, **εισάγοντας μια χρονική υστέρηση στην εμφάνιση της βλάβης** μέσω της παραμέτρου $shift_delay = 50$ (Παράρτημα). Η συνθήκη $ifelse(current_shift == 0.0, 0, 50)$ εξασφαλίζει ότι, στα σενάρια εκτός ελέγχου, η διεργασία λειτουργεί φυσιολογικά για τα πρώτα 50 δείγματα, επιτρέποντας στο προοδευτικό σύστημα να συλλέξει τα καθαρά δεδομένα και να επεκτείνει τη βάση αναφοράς του.

Συγκριτική αξιολόγηση και οπτικοποίηση: Τα αποτελέσματα του μέσου μήκους ροής (ARL_{out}) του προοδευτικού διαγράμματος αντιπαραβάλλονται δομημένα με τα στατικά αποτελέσματα (*static_arl_results*) μέσα σε ένα ενιαίο *data.frame* (Πίνακας 1).

Στόχος της γραφικής αποτύπωσης είναι να οπτικοποιήσει το πώς η προοδευτική επικαιροποίηση καθυστερεί ελαφρώς τον εντοπισμό εξαιρετικά μικρών βλαβών (λόγω της ακούσιας ενσωμάτωσης ελαττωματικών δεδομένων, φαινόμενο γνωστό ως *Masking Effect*), ενώ για μεγαλύτερες μετατοπίσεις οι δύο καμπύλες ταυτίζονται πλήρως, επιβεβαιώνοντας τη στατιστική ισχύ του προοδευτικού έναντι του στατικού σχεδιασμού

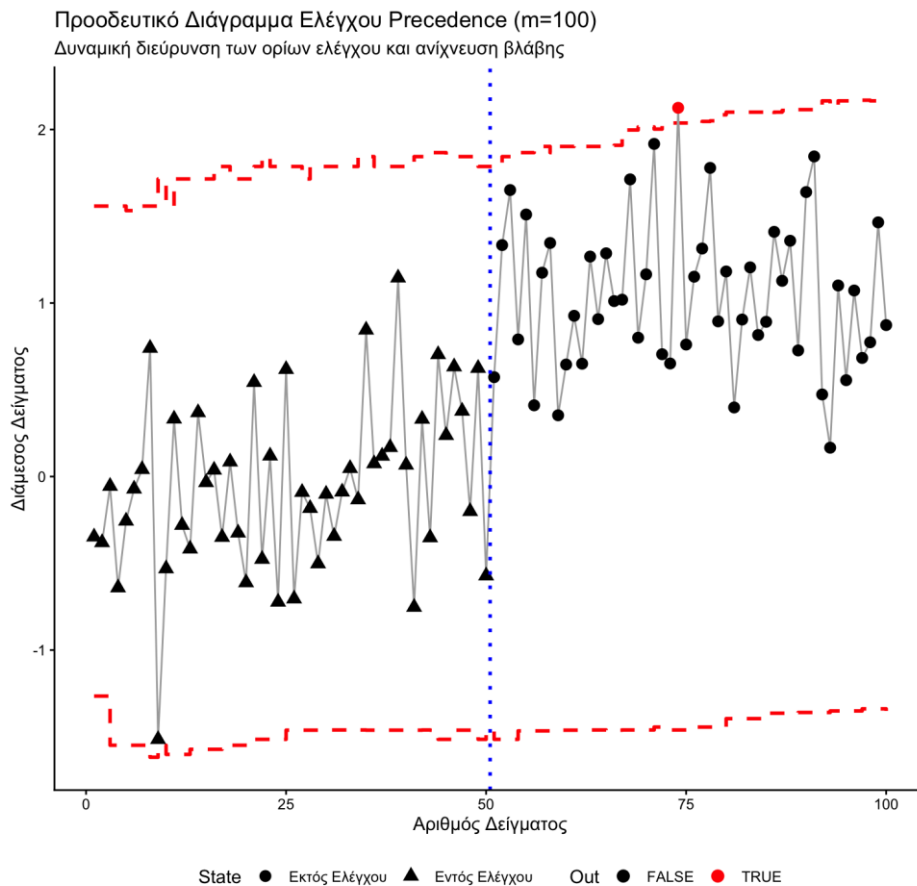
1. Η πρακτική αξία της δυναμικής προσαρμογής ($m = 100$) Το κυριότερο εύρημα είναι ότι το προοδευτικό μοντέλο καταφέρνει να διατηρήσει την εντός ελέγχου σταθερότητα ($ARL_{in} \approx 518$), παρότι εκκινεί με ένα ρεαλιστικά μικρό δείγμα αναφοράς μεγέθους $m=100$. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της δυναμικής αναπροσαρμογής των ορίων με χρήση σταθερών ποσοστημορίων ($p_L=0.048$ και $p_U=0.954$). Συνεπώς, αποδεικνύεται ότι στη σύγχρονη βιομηχανία, όπου η συλλογή 500 "καθαρών" δειγμάτων (όπως απαιτούσε το Στατικό μοντέλο) είναι σχεδόν αδύνατη, η προοδευτική επικαιροποίηση προσφέρει μια απόλυτα βιώσιμη και επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση.

2. Ο ρεαλισμός της καθυστέρησης βλάβης: Η ενσωμάτωση της παραμέτρου $shift_delay = 50$ στον κώδικα προσδίδει τεράστιο ρεαλισμό στην προσομοίωση. Σε πραγματικές συνθήκες παραγωγικού περιβάλλοντος, οι βλάβες σπάνια εμφανίζονται από το πρώτο δευτερόλεπτο λειτουργίας. Η διαδικασία αυτή επιτρέπει στο διάγραμμα να εκπαιδευτεί από τα πρώτα 50 υγιή δείγματα, ενσωματώνοντάς τα στο αρχικό του δείγμα, προτού κληθεί να αντιμετωπίσει την εκτός ελέγχου συνθήκη.

3. Το φαινόμενο συγκάλυψης ή *masking effect* και η σύγκλιση της απόδοσης: Η αντιπαραβολή του στατικού και του προοδευτικού μοντέλου (όπως αποτυπώνεται στον Πίνακα 1 και στο Σχήμα Z) αποκαλύπτει εξαιρετικά ενδιαφέρουσες πτυχές για την ικανότητα ανίχνευσης του προοδευτικού διαγράμματος (ARL_{out}):

- **Για μικρές μετατοπίσεις ($\delta = 0.25$ και 0.50):** Παρατηρείται αύξηση του ARL_{out} στο προοδευτικό μοντέλο σε σχέση με το στατικό. Αυτό επιβεβαιώνει μαθηματικά το φαινόμενο *masking effect*. Επειδή η μετατόπιση είναι πολύ μικρή, το σύστημα αποτυγχάνει να την εντοπίσει στα πρώτα δείγματα και τη θεωρεί λανθασμένα ως φυσιολογική διακύμανση, ενσωματώνοντάς τη στο δείγμα αναφοράς. Αυτή η μόλυνση του δείγματος διευρύνει τα όρια ελέγχου και καθυστερεί τον τελικό εντοπισμό.
- **Για μεγάλες μετατοπίσεις ($\delta = 1.00$ και 1.50):** Εδώ η συμπεριφορά του προοδευτικού διαγράμματος είναι σαφώς βελτιωμένη καθώς η ταχύτητα εντοπισμού όχι απλώς συγκλίνει με αυτή του στατικού μοντέλου, αλλά είναι ελαφρώς ταχύτερη (με το ARL

να πέφτει κάτω από 10.25 και 2.72 αντίστοιχα). Αυτό πρακτικά συνεπάγεται ότι για σοβαρές βλάβες που κινδυνεύουν να καταστρέψουν άμεσα την παραγωγή, το προοδευτικό διάγραμμα παρέχει ταχύτατη (σχεδόν ακαριαία) ανίχνευση, ακριβώς επειδή το δείγμα αναφοράς του έχει ήδη εμπλουτιστεί σωστά κατά την περίοδο της εκπαίδευσης του διαγράμματος.



Εικόνα 5. Προοδευτικό διάγραμμα ελέγχου Precedence με δυναμικά όρια

Αποτυπώνοντας διαγραμματικά το προοδευτικό διάγραμμα, τα όρια ελέγχου αναπροσαρμόζονται δυναμικά. Καθώς νέα υγιή δείγματα προστίθενται στο αρχικό δείγμα αναφοράς (με αφετηρία το $m = 100$), τα όρια διευρύνονται λαμβάνοντας αυτή την απεικόνιση σε επίπεδα. Κατά τα πρώτα 50 δείγματα, το σύστημα εκπαιδεύεται, ενώ στο 50^ο δείγμα εισάγοντας τεχνηέντως μία βλάβη το σύστημα αποσταθεροποιείται. Εάν κάποιες ελαφρώς ελαττωματικές διάμεσοι δεν διασπάσουν αυτά τα όρια, ενσωματώνονται στο σύστημα προκαλώντας μία διεύρυνση των ορίων, έως ότου η συνεχιζόμενη αυτή βλάβη σημάνει τον εκτός ελέγχου συναγερμό.

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα αποδεικνύουν ότι το προοδευτικό διάγραμμα αποτελεί τη βέλτιστη επιλογή μεταξύ θεωρητικής ακρίβειας και πρακτικής εφαρμογής, καθώς παρά το ότι θυσιάζει ένα μικρό μέρος της ευαισθησίας του στις μικρές και ανεπαίσθητες βλάβες (λόγω του masking που συζητήθηκε παραπάνω), αντισταθμίζει αυτή την αδυναμία καταργώντας την ανάγκη για τεράστια αρχικά δείγματα και προσφέροντας άμεσο εντοπισμό σε ό,τι αφορά στις κρίσιμες και μεγάλες μετατοπίσεις.

4.2 Αποτελέσματα προσομοιώσεων για διάφορες κατανομές

Με στόχο την αξιολόγηση της ευαισθησίας του προοδευτικού αλγορίθμου, πραγματοποιήθηκε μία σειρά προσομοιώσεων Monte Carlo, εξετάζοντας τρία διαφορετικά επίπεδα αρχικού μεγέθους δείγματος ($m_{init} = 50, 100, 200$), όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα σε συνδυασμό με την προσαρμογή διαφόρων κατανομών (*Normal*, *t-Student*, *Gamma*), υπό την επίδραση μιας μικρής μετατόπισης μεγέθους $\delta = 0.5$. Τα αποτελέσματα της *εντός ελέγχου Μέσου Μήκους Ροής (ARL_{in})* παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον κάτωθι πίνακα (Πίνακας 3):

Πίνακας 3. Κατανομές και προσαρμογή διαφορετικών μεγεθών αρχικού δείγματος

Normal

m_{init}	$\delta=0.00$	$\delta=0.10$	$\delta=0.25$	$\delta=0.35$	$\delta=0.50$	$\delta=1.00$	$\delta=1.50$	$\delta=2.00$	$\delta=2.50$
50	511.48	458.42	255.10	164.24	79.18	10.25	2.77	1.39	1.07
100	526.23	473.52	255.68	166.53	78.96	10.50	2.73	1.38	1.07
200	530.22	458.64	254.76	158.65	78.93	10.07	2.77	1.39	1.07

t-Student (df = 5)

m_{init}	$\delta=0.00$	$\delta=0.10$	$\delta=0.25$	$\delta=0.35$	$\delta=0.50$	$\delta=1.00$	$\delta=1.50$	$\delta=2.00$	$\delta=2.50$
50	513.89	478.33	392.76	297.74	182.54	31.82	7.01	2.35	1.29
100	502.51	486.22	377.91	297.35	182.94	31.74	7.05	2.39	1.31
200	517.67	498.98	381.35	293.06	185.69	33.19	6.83	2.31	1.32

Gamma (shape = 2, rate = 1)

m_{init}	$\delta=0.00$	$\delta=0.10$	$\delta=0.25$	$\delta=0.35$	$\delta=0.50$	$\delta=1.00$	$\delta=1.50$	$\delta=2.00$	$\delta=2.50$
50	518.41	795.96	703.04	528.70	372.58	118.43	38.59	13.84	5.56
100	518.23	786.65	682.86	526.19	373.62	120.85	37.80	13.94	5.42
200	530.19	801.50	684.89	534.57	374.01	117.23	38.08	14.16	5.57

Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 3 το ARL_{in} (τιμές για $\delta = 0.00$) παραμένει σταθερό γύρω στις 510 – 530 παρατηρήσεις, ανεξαρτήτως κατανομής και αρχικού μεγέθους δείγματος. Στην περίπτωση της κανονικής κατανομής οι τιμές κυμαίνονται από 511.48 έως 530.22, για την κατανομή *t-Student* από 502.51 έως 517.67, και για την κατανομή *Gamma* από 518.23 έως 530.19, επιβεβαιώνοντας στην πράξη τη φύση του precedence διαγράμματος ως προς το επίπεδο ελέγχου, καθώς ο στόχος σχεδιασμού $ARL_{in} \approx 520$ επιτυγχάνεται με συνέπεια ανεξαρτήτως της υποκείμενης κατανομής, θεμελιώνοντας ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημα στο πλαίσιο των μη παραμετρικών διαγραμμάτων.

Στην περίπτωση της εκτός ελέγχου απόδοσης (ARL_{out}), η κατανομή φαίνεται να διαδραματίζει σημαντικό ρόλο, ιδίως για μικρές και μεσαίες μετατοπίσεις:

Normal κατανομή: Το διάγραμμα εμφανίζει την καλύτερη απόδοση για όλα τα επίπεδα μετατόπισης. Ήδη από $\delta = 0.25$ το ARL_{out} πέφτει στο ~ 255 , ενώ για $\delta = 1.00$ φτάνει στο ~ 10 , δείχνοντας ότι οι μέτριες αλλαγές ανιχνεύονται γρήγορα, χωρίς ιδιαίτερες ανωμαλίες.

t-Student ($df = 5$): Η απόδοση υστερεί σαφώς σε σχέση με την περίπτωση της κανονικής κατανομής, ιδίως για μικρές και μεσαίες μετατοπίσεις. Για $\delta = 0.50$ το ARL_{out} είναι ~ 183 (έναντι ~ 79 για την κανονική), ενώ για $\delta = 1.00$ είναι ~ 32 (έναντι ~ 10), προβληματικό σημείο το οποίο ενδεχομένως να μπορεί να εντοπιστεί στο γεγονός ότι η *t-student* κατανομή εμφανίζει βαριές ουρές, δυσκολεύοντας τη διάκριση μιας αλλαγής στη μέση τιμή υπό συνθήκες φυσιολογικής μεταβλητότητας. Στην περίπτωση των μεγάλων μετατοπίσεων ($\delta \geq 2.00$) το ARL_{out} συγκλίνει με αυτό της κατανομής (~ 2.3 και ~ 1.3 αντίστοιχα).

Gamma (shape = 2, rate = 1): Η χαμηλότερη απόδοση παρατηρείται εδώ, και μάλιστα με ένα εντυπωσιακό φαινόμενο: για μικρή θετική μετατόπιση ($\delta = 0.10$) το ARL_{out} αυξάνεται σε ~ 795 – 800 , δηλαδή υπερβαίνει το ARL_{in} . Αυτό δεν σημαίνει ότι το διάγραμμα «δεν λειτουργεί», αλλά αντανakλά τη μονομερή (right-skewed) φύση της *Gamma* κατανομής: μια μικρή θετική

μετατόπιση της μέσης τιμής δεν μεταφράζεται απαραίτητα σε αντίστοιχη μετατόπιση των ενδιάμεσων τάξεων στατιστικής που χρησιμοποιεί το διάγραμμα, με αποτέλεσμα να δυσχεραίνεται η ανίχνευση. Για μεγαλύτερες μετατοπίσεις ($\delta \geq 1.50$) η απόδοση βελτιώνεται αισθητά, αλλά παραμένει χαμηλότερη από τις άλλες κατανομές (π.χ. $\delta = 2.50$: $ARL \approx 5.5$ για *Gamma* έναντι ≈ 1.3 για *t-Student* και ≈ 1.07 για *Normal*). Το αρχικό μέγεθος δείγματος ($m_{init} = 50, 100, 200$) δεν επηρεάζει ουσιαστικά τις τιμές ARL_{out} , τουλάχιστον στο πλαίσιο του στατικού precedence διαγράμματος, ενώ για κάθε συνδυασμό κατανομής και μετατόπισης, οι τιμές ARL για $m = 50, 100$ και 200 είναι ταυτόσημες με διαφορές της τάξης 1–3%, στο πλαίσιο των Monte Carlo προσομοιώσεων).

Μια βασική διάσταση αξιολόγησης του προτεινόμενου διαγράμματος είναι η σύγκρισή του με παλαιότερα μη παραμετρικά διαγράμματα που βασίζονται στη διάμεσο, όπως το κλασικό distribution-free σχήμα των Chakraborti et al., (2004), το οποίο ανήκει στην οικογένεια των μη παραμετρικών διαγραμμάτων τύπου Shewhart και στηρίζεται επίσης στη λογική της σταθερής in-control συμπεριφοράς ανεξαρτήτως της υποκείμενης κατανομής. Όπως και στο σχήμα εκείνων, έτσι και στο προτεινόμενο διάγραμμα, το ARL_{in} παραμένει περίπου σταθερό. Το διάγραμμα precedence εμφανίζει πρακτικό ενδιαφέρον επειδή αξιοποιεί order statistics μέσω δύο ορίων ελέγχου και δεν αξιοποιεί αποκλειστικά τη χρήση της διαμέσου, προσφέροντας μεγαλύτερη ευελιξία στην παρακολούθηση μετατοπίσεων θέσης. Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα η υπολογιστική του υπεροχή, εντοπίζεται κυρίως στη σταθερότητα της συμπεριφοράς του και στην ικανοποιητική ανίχνευση μεσαίων και μεγάλων μετατοπίσεων, ενώ για πολύ μικρές μετατοπίσεις η απόδοση εξακολουθεί να επηρεάζεται από την υποκείμενη ασυμμετρία, όπως φάνηκε ιδίως στην περίπτωση της *Gamma* κατανομής.

4.3 Ερμηνεία αποτελεσμάτων

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων του παραπάνω πίνακα (Πίνακας 3) προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

1. **Εξάρτηση από το αρχικό δείγμα της Φάσης I:** Στην κανονική κατανομή παρατηρείται σαφής βελτίωση του ARL (από 376 σε 333) καθώς αυξάνεται το αρχικό δείγμα αναφοράς, επιβεβαιώνοντας ότι με **μικρό αρχικό δείγμα (π.χ. 50)**, το διάγραμμα είναι πιο επιρρεπές στο **masking effect**, ενώ η έλλειψη επαρκούς στατιστικής πληροφορίας κατά τα πρώτα στάδια επιτρέπει στις μετατοπισμένες τιμές να "μολύνουν" το δείγμα Φάσης I, μετατοπίζοντας τα όρια ελέγχου (LCL-UCL) προς την κατεύθυνση της βλάβης.
2. **Ασύμμετρες κατανομές:** Στην κατανομή Γάμμα, το ARL παραμένει υψηλό (~595-598) ανεξαρτήτως του μεγέθους του m_{init} , ενώ η έντονη λοξότητα της κατανομής καθιστά τον διαχωρισμό μεταξύ της εντός ελέγχου και της μετατοπισμένης κατάστασης αρκετά δύσκολο. Σε αυτή την περίπτωση, το masking effect λειτουργεί συνδυαστικά με το είδος της εκάστοτε κατανομής, οδηγώντας τον αλγόριθμο σε μια κατάσταση συνεχούς αποδοχής δειγμάτων, τα οποία θα έπρεπε να είχαν δώσει σήμα συναγερμού.

4.4 Διερεύνηση διαφόρων υποθέσεων

Προκειμένου να αποσαφηνιστεί η στατιστική συμπεριφορά του προοδευτικού διαγράμματος ελέγχου και να αναδειχθούν οι περιορισμοί αλλά και οι δυνατότητές του, πραγματοποιήθηκε μια σειρά δοκιμών υπό το φως εναλλακτικών σεναρίων στο περιβάλλον της R, εστιάζοντας σε τρεις κρίσιμους άξονες και συγκεκριμένα το μέγεθος της μετατόπισης, τη διαχείριση της μνήμης του αλγορίθμου και την ποιότητα των αρχικών δεδομένων.

Υπόθεση	Μέσο Μήκος Ροής (ARL)
Βασικό μοντέλο ($\delta = 0.5$)	322.919
Μεγάλη μετατόπιση ($\delta = 1.5$)	1.070
Moving window	224.551
Παρουσία ακραίων τιμών στη Φάση I	336.052

4.4.1 Επίδραση του μεγέθους της μετατόπισης

Η μείωση του ARL στην τιμή 1.070 για μετατόπιση $\delta = 1.5$ ανέδειξε την ικανότητα ακαριαίας ανίχνευσης έντονων διαταραχών. Στατιστικά, όταν η απόσταση μεταξύ της αρχικής και της

μετατοπισμένης κατανομής είναι επαρκώς μεγάλη, το στατιστικό Y_j υπερβαίνει τα όρια ελέγχου σχεδόν άμεσα. Στην περίπτωση αυτή, το φαινόμενο του masking εξαλείφεται πλήρως, καθώς η ταχύτητα υπέρβασης των ορίων είναι μεγαλύτερη από τον ρυθμό με τον οποίο ο αλγόριθμος μπορεί να ενσωματώσει τις νέες παρατηρήσεις στο δείγμα αναφοράς.

4.4.2 Moving window

Η υιοθέτηση ενός moving window ή όπως αποδίδεται ο όρος στα ελληνικά «κυλιόμενο παράθυρο μνήμης, απέδωσε σημαντική βελτίωση περί το 30%, μειώνοντας το ARL στο 224.551, γεγονός το οποίο έγκειται στον περιορισμό της αδράνειας του δείγματος αναφοράς. Περιορίζοντας τη μνήμη στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις, το διάγραμμα φάνηκε να αποφεύγει τον κορεσμό και την πιθανή μόλυνση από ιστορικά δεδομένα, παραμένοντας πιο ευέλικτο στην προσαρμογή νέων τάσεων, αναδεικνύοντάς κατά αυτό τον τρόπο την αποτελεσματική σε ό,τι αφορά στην άμβλυνση του masking effect για μικρές μετατοπίσεις, καθώς εμποδίζει τη μόνιμη διεύρυνση των ορίων από παρωχημένες πληροφορίες.

4.4.3 Η επίδραση των ακραίων τιμών στη Φάση I.

Η αύξηση του ARL στο 336.052 υπό την παρουσία ακραίων τιμών κατά την αρχικοποίηση αναδεικνύει την ευαισθησία της μεθόδου precedence, καθώς τα όρια ελέγχου βασίζονται σε διατεταγμένες παρατηρήσεις. Έτσι, η παρουσία έστω και λίγων ακραίων τιμών στη *Φάση I* μολύνει τα ποσοστημόρια, οδηγώντας σε τεχνητή διεύρυνση του εύρους (UCL-LCL). Αυτό το σφάλμα αρχικοποίησης καθιστά το διάγραμμα λιγότερο ευαίσθητο, αυξάνοντας την πιθανότητα μη ανίχνευσης πραγματικών μετατοπίσεων.

Κεφάλαιο 5: Συμπεράσματα και προεκτάσεις μελλοντικής έρευνας

5.1 Σύνοψη και βασικά συμπεράσματα της έρευνας

Η παρούσα εργασία επικεντρώθηκε στην εκτενή μελέτη, στον σχεδιασμό και στην αλγοριθμική αξιολόγηση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου, με ιδιαίτερη έμφαση στα διαγράμματα τύπου Precedence (Προτεραιότητας) και στα στατιστικά υπέρβασης. Το κύριο κίνητρο αποτέλεσε η συχνή παραβίαση της θεμελιώδους παραδοχής της κανονικότητας των δεδομένων σε σύγχρονες βιομηχανικές, βιοϊατρικές και περιβαλλοντικές εφαρμογές.

Μέσα από την υλοποίηση προσομοιώσεων Monte Carlo στο προγραμματιστικό περιβάλλον R, εξήχθησαν κρίσιμα συμπεράσματα που επιβεβαιώνουν και επεκτείνουν τη σύγχρονη στατιστική βιβλιογραφία:

Επιβεβαίωση της ιδιότητας ελεύθερης κατανομής: Όπως αποδείχθηκε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 3, η εντός ελέγχου απόδοση (ARL_{in}) του στατικού διαγράμματος διατηρήθηκε απολύτως σταθερή (κοντά στην αναμενόμενη τιμή 520) ανεξαρτήτως της υποκείμενης κατανομής. Είτε τα δεδομένα προέρχονταν από την Κανονική, είτε από κατανομές με έντονη ασυμμετρία (*Εκθετική, Γάμμα*) ή *heavy tails* (*t-Student, Laplace*), το διάγραμμα δεν παρουσίασε αύξηση των λανθασμένων συναγερμών.

Λοξότητα της κατανομής του μήκους ροής: Αναδείχθηκε η εγγενής λοξότητα του μήκους ροής στα μη παραμετρικά διαγράμματα. Η συστηματική απόκλιση μεταξύ του Μέσου Μήκους Ροής (ARL) και του Διάμεσου Μήκους Ροής (MRL) επιβεβαίωσε πως το MRL αποτελεί έναν ρεαλιστικότερο δείκτη της πραγματικής ταχύτητας ανίχνευσης, καθώς δεν επηρεάζεται από ακραίες τιμές καθυστερημένου εντοπισμού.

Σε ό,τι αφορά στο ρόλο του προοδευτικού σχεδιασμού **και το masking effect**, στο Κεφάλαιο 4, το στατικό μοντέλο επεκτάθηκε για να αντιμετωπίσει το ρεαλιστικό πρόβλημα των μικρών δειγμάτων στη *Φάση I* ($m=100$). Η προοδευτική επικαιροποίηση των ορίων ελέγχου μέσω ποσοστημορίων, απέδειξε ότι το σύστημα διατηρεί την ανθεκτικότητά του, εντούτοις, για μικρές μετατοπίσεις, παρατηρήθηκε το masking effect, καθώς το σύστημα ενσωμάτωσε λανθασμένα ελαττωματικά δεδομένα στο αρχικό δείγμα αναφοράς του, διευρύνοντας τα όρια και καθυστερώντας την ανίχνευση του σήματος, ενώ αντίθετα, στις μεσαίες και μεγάλες μετατοπίσεις ($\delta \geq 1.0$), το προοδευτικό διάγραμμα προσέφερε άμεσο και ταχύτατο εντοπισμό, συγκλίνοντας με το στατικό μοντέλο.

Με τις δοκιμές στο πλαίσιο της εφαρμογής του κυλιόμενου παραθύρου, επετεύχθη μείωση της ταχύτητας ανίχνευσης κατά 30% περίπου σε περιπτώσεις ύπαρξης μικρών βλαβών,

ρίχνοντας την τιμή του μέσου εντοπισμού από 322,919 σε 224,551. Περιορίζοντας δηλαδή τη δυναμική της μνήμης του αλγορίθμου στα πιο πρόσφατα δείγματα, αποφεύχθηκε ο κορεσμός του συστήματος με παλαιά δεδομένα αποφεύγοντας με αυτόν τον τρόπο το masking effect, όπως αυτό συζητήθηκε στο πλαίσιο της εφαρμογής του προοδευτικού διαγράμματος.

5.2 Πρακτική αξία της μεθοδολογίας

Η αξία των ευρημάτων δεν περιορίζεται στο αμιγώς θεωρητικό πλαίσιο, αλλά προσφέρει λύσεις σε πραγματικά προβλήματα του *Industry 5.0*. Όπως τεκμηριώθηκε στο *Κεφάλαιο 3*, τα προοδευτικά και μη παραμετρικά εργαλεία είναι ιδανικά για την παρακολούθηση ασύμμετρων ιατρικών δεδομένων (π.χ. χρόνοι επιβίωσης, καρδιακός ρυθμός), καθώς και περιβαλλοντικών δεικτών, όπου η δυναμική προσαρμογή των ορίων ελέγχου λειτουργεί ως ασπίδα έναντι στη ραγδαία και ανεξέλεγκτη αύξηση των λανθασμένων συναγερμών.

5.3 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Βασιζόμενοι στα συμπεράσματα της παρούσας εργασίας, η επιστημονική έρευνα γύρω από τον Στατιστικό Έλεγχο μπορεί να επεκταθεί μελλοντικά στους ακόλουθους άξονες:

- **Ενσωμάτωση Βελτιωμένων Κανόνων Ροής:** Για την άμβλυνση του masking effect που παρατηρήθηκε στις μικρές μετατοπίσεις του προοδευτικού διαγράμματος, προτείνεται η μελλοντική μελέτη της ενσωμάτωσης προηγμένων κανόνων ροής (όπως οι κανόνες $w\text{-of-}(w+v)$). Η προσθήκη τέτοιων συμπληρωματικών κριτηρίων στα διαγράμματα *Precedence* ενδέχεται να ενισχύσει την ευαισθησία στις ανεπαίσθητες αλλαγές, χωρίς να θυσιάσει την αποτελεσματικότητα στις μεγάλες μετατοπίσεις.
- **Πολυμεταβλητός μη παραμετρικός έλεγχος μέσω συναρτήσεων βάθους:** Καθώς η σύγχρονη παραγωγή παράγει διανύσματα πολλαπλών χαρακτηριστικών, θα είχε εξαιρετικό ενδιαφέρον η επέκταση της ανάλυσης σε πολυμεταβλητά μη παραμετρικά διαγράμματα. Η χρήση Συναρτήσεων Βάθους, σε συνδυασμό με το Κριτήριο Πιθανότητας Υπέρβασης (EPC), μπορεί να απαλλάξει πλήρως την πολυμεταβλητή παρακολούθηση από την παραδοχή της πολυμεταβλητής κανονικότητας.
- **Παρακολούθηση μη γραμμικών προφίλ με μηχανική μάθηση:** Σε διαδικασίες όπου η ποιότητα καθορίζεται από μια λειτουργική σχέση (προφίλ), η μελλοντική έρευνα μπορεί να συνδυάσει τον μη παραμετρικό έλεγχο με τεχνικές μηχανικής μάθησης, όπως τα Γενικευμένα Προσθετικά Μοντέλα (GAMs) ή η Παλινδρόμηση Διανυσμάτων

Υποστήριξης (SVR), ειδικά για την ανίχνευση ανωμαλιών σε νοσοκομειακά δεδομένα ή χρονοσειρές εικόνων.

- **Εφαρμογή της δειγματοληψίας διατεταγμένων συνόλων:** Η διερεύνηση του προοδευτικού διαγράμματος κάνοντας χρήση διατεταγμένων συνόλων αντί της απλής τυχαίας δειγματοληψίας, αποτελεί μια εξαιρετικά υποσχόμενη μελλοντική κατεύθυνση, καθώς μπορεί να μειώσει περαιτέρω τη διασπορά της εκτίμησης στη *Φάση I*, βελτιστοποιώντας τα αποτελέσματα του *ARL* σε περιβάλλοντα όπου η απευθείας μέτρηση της ποιότητας είναι δαπανηρή ή αποτρεπτική.

Βιβλιογραφικές αναφορές

1. Abbas, N., Abujiya, M. R., Riaz, M., & Mahmood, T. (2020). Cumulative sum chart modeled under the presence of outliers. DOI: 10.3390/math8020269.
2. Abbas, Z., Nazir, H. Z., Akhtar, N., Abid, M., & Riaz, M. (2022). Non-parametric progressive signed-rank control chart for monitoring the process location. DOI: 10.1080/00949655.2022.2043324.
3. Abbas, Z., Nazir, H. Z., Aslam, S., Abbas, N., & Riaz, M. (2025). Monitoring production processes with robust and efficient adaptive techniques when model assumption is unknown. Transactions of the Institute of Measurement and Control. <https://doi.org/10.1177/01423312251369059>
4. Abid, M., Nazir, H. Z., Riaz, M., & Lin, Z. (2017). An Efficient Nonparametric EWMA Wilcoxon Signed-Rank Chart for Monitoring Location. *Quality and Reliability Engineering International*, 33(3), 669-685.
5. Abid, M., Nazir, H. Z., Riaz, M., & Lin, Z. (2017). Investigating the impact of ranked set sampling in nonparametric CUSUM control charts. *Quality and Reliability Engineering International*, 33(1), 203-214. <https://doi.org/10.1002/qre.2000>
6. Abid, M., Nazir, H. Z., Riaz, M., & Lin, Z. (2024). An efficient nonparametric EWMA Wilcoxon signed-rank chart for monitoring location. *Quality and Reliability Engineering International*, 40(1), 481-501.
7. Abid, M., Nazir, H. Z., Tahir, M., & Riaz, M.. On designing a new cumulative sum Wilcoxon signed rank chart for monitoring process location. *PLOS ONE*, 13, e0195762.
8. Adämmer, P., Wittenberg, P., Weiss, C. H., & Testik, M. C. (2025). Nonparametric Monitoring of Spatial Dependence. *Technometrics*. <https://doi.org/10.1080/00401706.2025.2573232>
9. Ahsan, M., Mashuri, M., et al.. Multivariate statistical process control for short-run production: A systematic review. *Communications in Statistics*.
10. Ahsan, M., Mashuri, M., Prastyo, D. D., & Lee, M. H. (2024). Performance of T²-based PCA mix control chart with KDE control limit for monitoring variable and attribute characteristics. *Scientific Reports*, 14, 7210.
11. Ambartsoumian, T., & Jeske, D. R. (2015). Nonparametric CUSUM control charts and their use in two-stage SPC applications. *Journal of Quality Technology*, 47(3), 264-277.

12. Anhøj, J., & Wentzel-Larsen, T.. Sense and sensibility: On the diagnostic value of control chart rules for detection of shifts in time series data.
13. Argoti, M. A., & Carrión-García, A.. A QUASI ARL-UNBIASED U CONTROL CHART.
14. Aslam, M., Raza, M. A., Azam, M., Ahmad, L., & Jun, C.-H. (2020). Design of a sign chart using a new EWMA statistic. DOI: 10.1080/03610926.2018.1563163.
15. Balakrishnan, N., Triantafyllou, I. S., & Koutras, M. V.. A distribution-free control chart based on order statistics. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 39, 3652-3677.
16. Bayer, F. M., Tondolo, C. M., & Müller, F. M.. Beta regression control chart for monitoring fractions and proportions.
17. Braimah, J. O., Edike, N., & Correa, F. M. (2025). Bootstrapped-based cumulative sum and exponentially weighted moving average control charts: Enhanced process control. *Scientific African*, 28, e02683. <https://doi.org/10.1016/j.sciaf.2025.e02683>
18. Castagliola, P., Tran, K. P., Celano, G., Rakitzis, A. C., & Maravelakis, P. E. (2019). An EWMA-type sign chart with exact run length properties. *Journal of Quality Technology*, 51(1), 51-63.
19. Cebeci, H. I., & Şimşir, F.. Advanced monitoring of high-dimensional processes using deep learning-based control charts. *Expert Systems with Applications*.
20. Chakraborti, S., & Graham, M. A. (2019). *Nonparametric Statistical Process Control*. Wiley.
21. Chakraborti, S., Human, S. W., & Graham, M. A. (2011). Nonparametric (distribution-free) quality control charts: An updated overview and some results. *Quality Engineering*, 23(4), 352-374.
22. Chakraborti, S., van der Laan, P., & Bakir, S. T. (2001/2004). Nonparametric control charts: An overview and some results. *Journal of Quality Technology*.
23. Chakraborti, S., van der Laan, P., & van de Wiel, M. A. (2004). A class of distribution-free control charts. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 53(3), 443-462.
24. Chakraborty, N., & Mahmood, T. (2026). Anomaly detection of multivariate finite-horizon process based on the rank-energy statistic. *Computers and Industrial Engineering*, 212, Article 111737. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2025.111737>

25. Chakraborty, N., Human, S. W., & Balakrishnan, N. (2018). A generally weighted moving average exceedance chart. DOI: 10.1080/00949655.2018.1447573.
26. Chowdhury, S., Mukherjee, A., & Chakraborti, S. (2014). A new distribution-free control chart for joint monitoring of unknown location and scale parameters of continuous distributions. *Quality and Reliability Engineering International*, 30(2), 191-204.
27. Chowdhury, S., Mukherjee, A., & Chakraborti, S. (2015). Distribution-free phase II CUSUM control chart for joint monitoring of location and scale. *Quality and Reliability Engineering International*, 31(1), 135-151.
28. Costa, A., & Fichera, S. (2017). Economic statistical design of ARMA control chart through a Modified Fitness-based Self-Adaptive Differential Evolution. DOI: 10.1016/j.cie.2016.12.031.
29. Does, R. J. M. M., Goedhart, R., & Woodall, W. H. (2020). On the design of control charts with guaranteed conditional performance under estimated parameters. *Quality and Reliability Engineering International*, 36(8), 2610-2620. <https://doi.org/10.1002/qre.2658>
30. Dovoedo, Y. H., & Chakraborti, S. (2017). Effects of Parameter Estimation on the Multivariate Distribution-free Phase II Sign EWMA Chart. DOI: 10.1002/qre.2019.
31. Dyer, J. N.. Monte Carlo Simulation Design for Evaluating Normal-Based Control Chart Properties.
32. Erem, A., & Mahmood, T. (2023). A bivariate CUSUM control chart based on exceedance statistics. DOI: 10.1002/qre.3285.
33. Erfanian, M., Sadeghpour Gildeh, B., & Azarpazhooh, M. R. (2021). A new approach for monitoring healthcare performance using generalized additive profiles. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 91(1), 167–179. <https://doi.org/10.1080/00949655.2020.1807981>
34. Fisher, N. I., & Nair, V. N.. Quality management and quality practice: Perspectives on their history and their future. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 25, 1-28
35. Gong, T., Liu, D., Kim, H., Kim, S.-H., Kim, T., Lee, D., & Xie, Y. (2025). Distribution-free image monitoring with application to battery coating process. *IISE Transactions*, 57(2), 199-212. <https://doi.org/10.1080/24725854.2024.2308542>

36. Graham, M. A., Chakraborti, S., & Human, S. W. (2016). A nonparametric EWMA control chart based on the Hodges-Lehmann estimator. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 86(5), 1012-1027.
37. Graham, M. A., Chakraborti, S., & Mukherjee, A.. Design and implementation of CUSUM exceedance control charts for unknown location. *International Journal of Production Research*, 52, 5546-5564.
38. Graham, M. A., Mukherjee, A., & Chakraborti, S. (2017). Design and implementation issues for a class of distribution-free Phase II EWMA exceedance control charts. DOI: 10.1080/00207543.2016.1249428.
39. Grimm, T., Newhart, K., & Hering, A. (2025). Nonparametric threshold estimation of autocorrelated statistics in multivariate statistical process monitoring. *Journal of Chemometrics*, 39(2), Article e70004. <https://doi.org/10.1002/cem.70004>
40. Hazrati-Marangaloo, H., & Noorossana, R. (2021). A nonparametric change detection approach in social networks. *Quality and Reliability Engineering International*, 37(6), 2916-2935.
41. Holcombe, C., Alqurashi, M., & Chakraborti, S. (2024). A distribution-free phase II control chart for multivariate individual data with simple post signal diagnostics. DOI: 10.1080/08982112.2024.2311253.
42. Human, S. W., Malela-Majika, J.-C., & Kritzing, P. (2025). Improved runs-rules precedence charts for monitoring the process location parameter. *Afrika Matematika*, 36(2), 84. <https://doi.org/10.1007/s13370-025-01292-y>
43. Huwang, L., & Liao, Y.-M. (2023). A new non-parametric control chart for monitoring general linear profiles based on log-linear modelling. DOI: 10.1002/qre.3277.
44. Iguchi, T., Barrientos, A. F., Chicken, E., & Sinha, D. (2025). Profile Monitoring via Eigenvector Perturbation. *Technometrics*, 67(2), 283-292. <https://doi.org/10.1080/00401706.2024.2431119>
45. Ivanov, O.. Applications and Experiences of Quality Control. InTech.
46. Janacek, G. J., & Meikle, S. E. (1997). Control charts based on medians. *The Statistician*, 46(1), 19-31.
47. Khakifirooz, M., Tercero-Gomez, V. G., & Woodall, W. H. (2021). The role of the normal distribution in statistical process monitoring. DOI: 10.1080/08982112.2021.1909731.

48. Koutras, M. V., & Sofikitou, E. M. (2017). A Bivariate Semiparametric Control Chart Based on Order Statistics. DOI: 10.1002/qre.1999.
49. Kurnia, H., Setiawan, S., & Hamsal, M.. Implementation of statistical process control for quality control cycle in the various industry in Indonesia: A systematic literature review. *Journal of Applied Industrial Engineering*, 14.
50. Li, Q., Yang, J., Huang, S., & Zhao, Y. (2022). A GWMA control chart scheme for the two-parameter exponential distribution. *Computers & Industrial Engineering*, 165, 107902.
51. Lin, C.-H., Lu, M.-C., Yang, S.-F., & Lee, M.-Y. (2021). A Bayesian control chart for monitoring process variance. *Applied Sciences*, 11(6), 2893.
52. Liu, Y., Zhu, J., & Lin, D. K. J. (2021). A generalized likelihood ratio test for monitoring profile data. *Journal of Applied Statistics*, 48(8), 1402-1415.
53. Lu, M.-C., & Yang, S.-F. (2025). Designs of Bayesian EWMA Variability Control Charts in the Presence of Measurement Error. *Processes*, 13(10), 3371. <https://doi.org/10.3390/pr13103371>
54. Madadi, M. H., & Mahmoudzadeh, M.. A fuzzy development for attribute control chart with Monte Carlo simulation method. *Management Science Letters*, 7, 555–564.
55. Magagula, Z., Malela-Majika, J.-C., Human, S. W., Castagliola, P., Chatterjee, K., & Koukouvinos, C. (2025). Closed-form expressions of the run-length distribution of the nonparametric double sampling precedence monitoring scheme. *Computational Statistics*, 40(1), 273-299. <https://doi.org/10.1007/s00180-024-01488-z>
56. Maldonado, K. M. D., Lee Ho, L. L., & Costa Quinino, R. C. (2025). Monitoring paired observations with complete, missing and censored data by control charts. DOI: 10.1080/03610918.2025.2459282.
57. Malela-Majika, J. C., Chakraborti, S., & Graham, M. A. (2018). Distribution-free Phase II Mann-Whitney control charts with runs-rules. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 86, 723-735.
58. Malela-Majika, J. C., Human, S. W., & Kritzinger, P. (2019). Improved nonparametric Shewhart-type runs-rules charts. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 48(20), 5203-5218.
59. Malela-Majika, J. C., Rapoo, E. M., & Mukherjee, A. (2020). Nonparametric DEWMA chart using Mood statistic. *Journal of Applied Statistics*, 47(16), 2954-2972.

60. Malela-Majika, J.-C., Chakraborti, S., & Graham, M. A. (2016). Distribution-free Phase II Mann-Whitney control charts with runs-rules. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 86(1-4), 723-735. <https://doi.org/10.1007/s00170-015-8083-1>
61. Malela-Majika, J.-C., Chakraborti, S., & Graham, M. A. (2016). Distribution-free precedence control charts with improved runs-rules. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 32(4), 423-439.
62. Mazhar, I., Ali, S., & Shah, I. (2025). Performance of the wavelet-based CUSUM charts. DOI: 10.1007/s41060-025-00843-7.
63. Merlo, J., Cordero, A. E., & Tercero-Gomez, V. G. (2022). Nonparametric multivariate processes monitoring with guaranteed in-control performance for changes in location. DOI: 10.1016/j.cie.2022.107940.
64. Mirzaei Novin, M., Amiri, A., & Castagliola, P. C. (2026). A comprehensive review of time between events control charts: models, applications, and future directions. *Computers and Industrial Engineering*, 213, 111789. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2025.111789>
65. Mukherjee, A., Graham, M. A., & Chakraborti, S.. Distribution-free exceedance CUSUM control charts for location. *Precision Engineering*, 36, 348-359.
66. Nasiri Boroujeni, M., Samimi, Y., & Roghanian, E. (2022). Parametric and non-parametric methods for monitoring nonlinear fuzzy profiles. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 118(1-2), 67-84.
67. Nasrollahzadeh, S., Bameni Moghadam, M. B., & Farnoosh, R. (2023). A Shewhart-type nonparametric multivariate depth-based control chart for monitoring location. DOI: 10.1080/03610926.2022.2045023.
68. Nazir, H. Z., Abid, M., Akhtar, N., & Riaz, M.. (2019). An efficient mixed-memory-type control chart for normal and non-normal processes. *IEEE Access*, 7, 128439-128453.
69. Nojavan, M., Alishahi, M., Rezaee, M., & Rahae, M. A. (2021). The effect of measurement error on the performance of Mann-Whitney and Signed-Rank nonparametric control charts. *Quality and Reliability Engineering International*, 37(6), 2365-2383. <https://doi.org/10.1002/qre.2862>

70. Noorian, S., & Nili Ahmadabadi, M. (2018). The use of the Extended Generalized Lambda Distribution for controlling the statistical process in individual measurements. *Journal of Industrial Engineering and Management Studies*, 5(2), 49–64.
71. Oladipupo, O. O., Adekeye, K. S., Olaomi, J. O., & Alayande, S. A. (2025). Improved Non-Parametric Double Homogenously Weighted Moving Average Control Chart for Monitoring Changes in Process Location. *Statistics, Optimization and Information Computing*, 14(5), 2118-2130.
72. Oliva, A., & Llabrés, M.. Combining Capability Indices and Control Charts in the Process and Analytical Method Control Strategy.
73. Panayiotou, N. I., & Triantafyllou, I. S.. A class of enhanced nonparametric control schemes based on order statistics and runs. *Mathematics*, 11, 2534.
74. Pawar, V. Y., Shirke, D. T., & Khilare, S. K. (2018). Nonparametric EWMA control chart based on Wilcoxon signed-rank statistic. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 17(2), Article 4.
75. Perdakis, T., Psarakis, S., Castagliola, P., & Celano, G. (2020). An EWMA signed ranks control chart with reliable run length performances. *Quality and Reliability Engineering International*, 37(3), 1266-1284.
76. Perdakis, T., Psarakis, S., Castagliola, P., & Celano, G. (2021). An EWMA-type chart based on signed ranks with exact run length properties. DOI: 10.1080/00949655.2020.1828415.
77. Perry, M. B. (2024). Joint monitoring of location and scale for modern univariate processes. DOI: 10.1080/00224065.2024.2369078.
78. Phantu, S., Areepong, Y., & Sukparungsee, S. (2024). Sensitivity of the Modified Exponentially Weighted Moving Average Sign-Rank Control Chart to Process Changes in Counted Data. *WSEAS Transactions on Mathematics*, 23, 331–339. <https://doi.org/10.37394/23206.2024.23.36>
79. Phantu, S., Areepong, Y., & Sukparungsee, S. (2025). On Designing of Modified Exponentially Weighted Moving Average Control Chart based on Sign Rank for Zero-Inflated Data. *Science and Technology Asia*, 30(1), 158-176.
80. Raji, I. A., Lee, M. H., Riaz, M., Abujiya, M. R., & Abbas, N. (2020). Outliers detection models in shewhart control charts; An application in photolithography: A semiconductor manufacturing industry. DOI: 10.3390/MATH8050857.

81. Raza, M. A., et al.. A new nonparametric EWMA control chart for monitoring process location. *Quality and Reliability Engineering International*.
82. Raza, M. A., Nawaz, T., Aslam, M., Bhatti, S. H., & Sherwani, R. A. K. (2020). A new nonparametric double exponentially weighted moving average control chart. *Quality and Reliability Engineering International*, 36(1), 68-87.
83. Raza, M. A., Tariq, F., Zaagan, A. A., Engmann, G. M., Mahnashi, A. M., & Meetei, M. Z. (2024). A nonparametric mixed exponentially weighted moving average-moving average control chart with an application to gas turbines. *PLoS ONE*, 19(8), e0307559. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0307559>
84. Shafqat, A., Huang, Z., & Aslam, M.. (2023). Efficient signed-rank based EWMA and HWMA repetitive control charts for monitoring process mean with and without auxiliary information. *Scientific Reports*, 13, 1113.
85. Shafqat, A., Huang, Z., Aslam, M., & Nawaz, M. S. (2020). A Nonparametric Repetitive Sampling DEWMA Control Chart Based on Linear Prediction. *IEEE Access*, 8, 74977-74990.
86. Shinde, S. R., Mahadik, S. B., & Rakitzis, A. C. (2024). New Lepage-type control charts for joint monitoring of location and scale. DOI: 10.1016/j.cie.2024.110614.
87. Smajdorová, T., & Noskievičová, D. (2022). Analysis and Application of Selected Control Charts Suitable for Smart Manufacturing Processes. *Applied Sciences*, 12(11), 5410. <https://doi.org/10.3390/app12115410>
88. Song, Z., Mukherjee, A., Liu, Y., & Zhang, J. (2019). Optimizing joint location-scale monitoring - An adaptive distribution-free approach with minimal loss of information. *European Journal of Operational Research*, 274(3), 1019-1036.
89. Sudsutad, W., Areepong, Y., & Sukparungsee, S. (2026). Mixed exponentially weighted moving average - double moving average control chart base on sign statistic and its applications. *AIMS Mathematics*, 11(2), 4479-4521.
90. Sudsutad, W., Areepong, Y., & Suparungsee, S. (2025). Nonparametric Mixed Moving Average–Exponentially Weighted Moving Average Control Chart with Applications. DOI: 10.1134/S1995080225611257.
91. Suman, G., & Prajapati, D. R.. Control chart applications in healthcare: A literature review. *International Journal of Metrology and Quality Engineering*, 9, 5.

92. Talordphop, K., Areepong, Y., & Sukparungsee, S. (2023). Design and Analysis of Extended Exponentially Weighted Moving Average Signed-Rank Control Charts for Monitoring the Process Mean. DOI: 10.3390/math11214482.
93. Talordphop, K., Areepong, Y., & Sukparungsee, S. (2025). Enhancing Sensitivity of Nonparametric Tukey Extended EWMA-MA Charts for Effective Process Mean Monitoring. *Symmetry*, 17(9), 1457. <https://doi.org/10.3390/sym17091457>
94. Triantafyllou, I. S. (2018). Nonparametric control charts based on order statistics: Some advances. DOI: 10.1080/03610918.2017.1359283.
95. Triantafyllou, I. S. (2019). A new distribution-free control scheme based on order statistics. DOI: 10.1080/10485252.2018.1518524.
96. Triantafyllou, I. S. (2024). Distribution-Free Control Charts Based on Multiple Runs: Advances and Applications in Supply Chain Management. *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences*, 9(4), 737-755.
97. Triantafyllou, I. S. (2025). A Nonparametric Monitoring Framework Based on Order Statistics and Multiple Scans: Advances and Applications in Ocean Engineering. *Stats*, 8(4), 103. <https://doi.org/10.3390/stats8040103>
98. Triantafyllou, I. S., & Panayiotou, N. I. (2020). Distribution-free monitoring schemes based on order statistics: a general approach. DOI: 10.1080/02664763.2019.1707518.
99. Waqas, M., Xu, S. H., Aslam, M. U., Hussain, S., & Masengo, G. (2024). Transforming healthcare performance monitoring - A cutting-edge approach with generalized additive profiles: GAMs for healthcare quality monitoring. DOI: 10.1097/MD.00000000000039328.
100. Yang, H.-J., & Li, C.-I. (2025). Advances in nonparametric multivariate control charts: Integrating depth functions with the exceedance probability criterion in Phase I analysis. *Computers and Industrial Engineering*, 209, 111454. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2025.111454>
101. Yang, S.-F., & Jiang, T.-A. (2019). Service quality variation monitoring using the interquartile range control chart. *Quality Technology and Quantitative Management*, 16(5), 613-627.
102. Zhang, J., Li, E., & Li, Z. (2017). A Cramér-von Mises test-based distribution-free control chart for joint monitoring of location and scale. *Computers and Industrial Engineering*, 110, 484-497.

103. Αντζουλάκος, Δ.. Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας., (2016) Πειραιάς:
Πανεπιστημιακές Σημειώσεις
104. Τριανταφύλλου, Ι.Σ. (2009). Συμβολή στη μελέτη ιδιοτήτων γήρανσης συστημάτων αξιοπιστίας και μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της Θεωρίας διατεταγμένων παρατηρήσεων, Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Παράρτημα

#ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

#

2.5 ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΝΟΝΩΝ ΡΟΗΣ

#

library(ggplot2)

#

Δημιουργία δεδομένων

#

set.seed(123)

df <- data.frame(Sample = 1:30, Value = rnorm(30))

avg <- mean(df\$Value)

s <- sd(df\$Value)

ggplot(df, aes(x = Sample, y = Value)) +

Σχεδιασμός όλων των ζωνών (A, B, C - Πάνω και Κάτω)

annotate("rect", xmin=-Inf, xmax=Inf, ymin=avg+2*s, ymax=avg+3*s, fill="red",

alpha=0.15) + # Zone A Up

annotate("rect", xmin=-Inf, xmax=Inf, ymin=avg+s, ymax=avg+2*s, fill="orange",

alpha=0.15) + # Zone B Up

annotate("rect", xmin=-Inf, xmax=Inf, ymin=avg, ymax=avg+s, fill="yellow", alpha=0.15) +

Zone C Up

annotate("rect", xmin=-Inf, xmax=Inf, ymin=avg-s, ymax=avg, fill="yellow", alpha=0.15) +

Zone C Down

annotate("rect", xmin=-Inf, xmax=Inf, ymin=avg-2*s, ymax=avg-s, fill="orange",

alpha=0.15) + # Zone B Down

annotate("rect", xmin=-Inf, xmax=Inf, ymin=avg-3*s, ymax=avg-2*s, fill="red",

alpha=0.15) + # Zone A Down

Γραμμές και Σημεία

geom_line(color="darkgray", size=0.5) +

geom_point(size=2.5) +

Όρια ελέγχου (LCL, UCL, CL)

geom_hline(yintercept = c(avg + 3*s, avg - 3*s), color="red", linetype="solid", size=1) +

geom_hline(yintercept = avg, color="blue", size=0.8) +

Ετικέτες Ζωνών

annotate("text", x=31, y=c(avg+2.5*s, avg+1.5*s, avg+0.5*s),

label=c("Zone A", "Zone B", "Zone C"), color="darkred", size=3, hjust=0) +

Μορφοποίηση

coord_cartesian(clip = 'off') +

theme_minimal() +

theme(plot.margin = margin(5.5, 40, 5.5, 5.5)) +

labs(subtitle = "Οπτικοποίηση των περιοχών ευαισθησίας για την εφαρμογή κανόνων ροής",

x = "Αριθμός Δείγματος", y = "Στατιστικό Ελέγχου")

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Προσομοίωση Μη Παραμετρικών Διαγραμμάτων Ελέγχου Precedence

Βασισμένο στο paper: Chakraborti, van der Laan & van de Wiel (2004)

#-----

ΜΕΡΟΣ 1: Αλγόριθμος Προσομοίωσης

#-----

```
simulate_precedence <- function(m, n, j, a, b, shift = 0.0, n_sim = 10000) {
  run_lengths <- numeric(n_sim)
  for (i in 1:n_sim) {
    # -- ΦΑΣΗ 1: Δείγμα Αναφοράς --
    # ΣΕΛΙΔΑ 3: "Suppose that a reference random sample of m observations...
    # is available from an in-control process... These observations are arranged
    # in an ascending order..."
    phase1_sample <- rnorm(m, mean = 0, sd = 1)
    phase1_sorted <- sort(phase1_sample)
    # -- ΟΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ --
    # ΣΕΛΙΔΑ 3: "...two order statistics,  $X(a:m)$  and  $X(b:m)$ ... The two-sided
    # precedence control chart is given by  $LCL=X(a:m)$  and  $UCL=X(b:m)$ ."
    LCL <- phase1_sorted[a]
    UCL <- phase1_sorted[b]
    rl <- 0 # Μετρητής Run Length (N)
    # -- ΦΑΣΗ 2: Διαρκής Έλεγχος Παραγωγής--
    # ΣΕΛΙΔΑ 3: "Suppose that test (or future) samples are drawn independently...
    # Let  $Y(j:n)$  denote the  $j$ th order statistic in the  $h$ th test sample..."
    repeat {
      batch_size <- 100
      phase2_matrix <- matrix(rnorm(n * batch_size, mean = shift, sd = 1), nrow = batch_size, ncol =
n)
      Y_j <- apply(phase2_matrix, 1, function(x) sort(x)[j])
      # -- ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΥ --
      # ΣΕΛΙΔΑ 3: "...if  $Y(j:n)$  falls outside the control limits, the process
      # is declared to be 'out of control'..."
      out_of_control_signals <- (Y_j < LCL) | (Y_j > UCL)
      if (any(out_of_control_signals)) {
        rl <- rl + which.max(out_of_control_signals)
      } else {
        rl <- rl + batch_size
      }
    }
  }
}
```

```

    }
    run_lengths[i] <- rl
  }
# ΣΕΛΙΔΑ 2: "...the average run length (ARL), is a popular summary measure..." [cite: 49]
# Υπολογισμός μέτρων απόδοσης: ARL, MRL, SDRL
return(list(
  ARL = mean(run_lengths),
  MRL = median(run_lengths),
  SDRL = sd(run_lengths)
)))
#-----
# ΜΕΡΟΣ 2: Υπολογισμοί ARL_in και ARL_out
#-----
# 1. Επαλήθευση ARL_in (Σελ. 10, Πίνακας 2, Στόχος 500)
set.seed(123)
cat("Υπολογισμός ARL_in (Shift = 0.0)\n")
result_in <- simulate_precedence(m=500, n=5, j=3, a=24, b=477, shift=0.0, n_sim=10000)
cat(sprintf("-> ARL_in: %.2f | MRL_in: %.2f | SDRL_in: %.2f | Θεωρητικό ARL: 520.3\n\n",
  result_in$ARL, result_in$MRL, result_in$SDRL))

# 2. Υπολογισμός ARL_out για διάφορα shifts (Σελ. 13, Σχήμα 1)
shifts_to_test <- c(0.25, 0.50, 1.00, 1.50, 2.00)
results_table <- data.frame(Shift=numeric(), ARL=numeric(), MRL=numeric(), SDRL=numeric())
set.seed(456)
cat("Υπολογισμός ARL_out για διάφορες μετατοπίσεις\n")
for (k in 1:length(shifts_to_test)) {
  res <- simulate_precedence(m=500, n=5, j=3, a=24, b=477,
    shift=shifts_to_test[k], n_sim=10000)
  results_table <- rbind(results_table,
    data.frame(Shift=shifts_to_test[k], ARL=res$ARL, MRL=res$MRL,
    SDRL=res$SDRL))
  cat(sprintf("-> Shift = %.2f : ARL = %.2f | MRL = %.2f | SDRL = %.2f\n",
    shifts_to_test[k], res$ARL, res$MRL, res$SDRL))
}

# Πλήρης πίνακας αποτελεσμάτων
full_table <- rbind(
  data.frame(Shift=0.0, ARL=result_in$ARL, MRL=result_in$MRL, SDRL=result_in$SDRL),
  results_table

```

```
)  
cat("\n=== ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ===\n")  
print(full_table, row.names = FALSE)  
  
# Δεδομένα για γράφημα  
df_arl <- data.frame(Shift = full_table$Shift, ARL = full_table$ARL)
```

#

ΜΕΡΟΣ 3: Γραφικές Παραστάσεις

#

```
cat("\nΔημιουργία Γραφημάτων\n")
# --- Καμπύλη ARL (Επιβεβαίωση Fig. 1 του Paper, Σελ. 13) ---
plot1 <- ggplot(df_arl, aes(x = Shift, y = ARL)) +
  geom_line(color = "darkblue", size = 1.2) +
  geom_point(color = "red", size = 3) +
  labs(title = "Επίδραση της Μετατόπισης (Shift) στο ARL",
        subtitle = "Διάγραμμα Precedence (m=500, n=5, j=3)",
        x = "Μετατόπιση (Shift / \u03b4)",
        y = "Average Run Length (ARL)") +
  theme_minimal() +
  theme(text = element_text(size = 12),
        plot.title = element_text(face = "bold"))
print(plot1)
# --- Διάγραμμα Precedence (Επιβεβαίωση Fig. 4 του Paper, Σελ. 15) ---
set.seed(42)
m_val <- 500; n_val <- 5; j_val <- 3; a_val <- 24; b_val <- 477
# Φάση 1
p1_sample <- sort(rnorm(m_val, mean = 0, sd = 1))
LCL_val <- p1_sample[a_val]
UCL_val <- p1_sample[b_val]
# Φάση 2 (40 δείγματα: 1-25 In-Control, 26-40 Out-of-Control) [cite: 420, 422, 427]
n_samples <- 40
sample_medians <- numeric(n_samples)
for (i in 1:n_samples) {
  if (i <= 25) {
    current_sample <- rnorm(n_val, mean = 0, sd = 1)
  } else {
    current_sample <- rnorm(n_val, mean = 1, sd = 1) # Βλάβη (Shift = 1)
  }
  sample_medians[i] <- sort(current_sample)[j_val]
}
df_chart <- data.frame(
  Sample_Number = 1:n_samples,
  Median = sample_medians,
  State = ifelse(1:n_samples <= 25, "Εντός Ελέγχου", "Εκτός Ελέγχου"),
  Out_of_Bounds = sample_medians < LCL_val | sample_medians > UCL_val
```

```

)
plot2 <- ggplot(df_chart, aes(x = Sample_Number, y = Median)) +
  geom_hline(yintercept = UCL_val, color = "red", linetype = "dashed", size = 1) +
  geom_hline(yintercept = LCL_val, color = "red", linetype = "dashed", size = 1) +
  geom_line(color = "darkgray") +
  geom_point(aes(color = Out_of_Bounds, shape = State), size = 3) +
  scale_color_manual(values = c("FALSE" = "black", "TRUE" = "red")) +
  annotate("text", x = 3, y = UCL_val + 0.15, label = paste("UCL =", round(UCL_val, 3)), color =
"red") +
  annotate("text", x = 3, y = LCL_val - 0.15, label = paste("LCL =", round(LCL_val, 3)), color =
"red") +
  geom_vline(xintercept = 25.5, linetype = "dotted", color = "blue", size=1) +
  labs(title = "Διάγραμμα Ελέγχου Precedence",
       subtitle = "(Βλάβη μετά το δείγμα 25 - Shift 1.0)",
       x = "Αριθμός Δείγματος (Sample Number)",
       y = "Διάμεσος Δείγματος (Median)") +
  theme_classic() +
  theme(legend.position = "bottom")
print(plot2)

```

```

#-----
# ΜΕΡΟΣ 4: Επαλήθευση Distribution-Free Ιδιότητας
#-----

cat("\n=== ΕΛΕΓΧΟΣ DISTRIBUTION-FREE ΙΔΙΟΤΗΤΑΣ ===\n")
cat("(ARL_in πρέπει να παραμένει σταθερό ανεξαρτήτως κατανομής)\n\n")
# Συνάρτηση-wrapper για δοκιμή διαφορετικών κατανομών
simulate_precedence_dist <- function(m, n, j, a, b, shift = 0.0, n_sim = 10000,
                                     dist = "norm", df_t = 5, shape_gamma = 2) {
  run_lengths <- numeric(n_sim)
  for (i in 1:n_sim) {
    # Φάση 1: Δείγμα αναφοράς από επιλεγμένη κατανομή
    if (dist == "norm") {
      phase1_sample <- rnorm(m) + shift
    } else if (dist == "t") {
      phase1_sample <- rt(m, df = df_t) + shift
    } else if (dist == "laplace") {
      u <- runif(m) - 0.5
      phase1_sample <- -sign(u) * log(1 - 2 * abs(u)) + shift # Laplace(0,1)
    } else if (dist == "gamma") {
      phase1_sample <- rgamma(m, shape = shape_gamma, rate = 1) + shift
    } else if (dist == "exp") {
      phase1_sample <- rexp(m) + shift
    }

    phase1_sorted <- sort(phase1_sample)
    LCL <- phase1_sorted[a]
    UCL <- phase1_sorted[b]
    rl <- 0
    # Φάση 2
    repeat {
      batch_size <- 100
      if (dist == "norm") {
        raw <- rnorm(n * batch_size, mean = shift, sd = 1)
      } else if (dist == "t") {
        raw <- rt(n * batch_size, df = df_t) + shift
      } else if (dist == "laplace") {
        u <- runif(n * batch_size) - 0.5
        raw <- -sign(u) * log(1 - 2 * abs(u)) + shift # Laplace(0,1)
        raw <- log(runif(n * batch_size) / (1 - runif(n * batch_size))) + shift
      }
    }
  }
}

```

```

} else if (dist == "gamma") {
  raw <- rgamma(n * batch_size, shape = shape_gamma, rate = 1) + shift
} else if (dist == "exp") {
  raw <- rexp(n * batch_size) + shift
}
phase2_matrix <- matrix(raw, nrow = batch_size, ncol = n)
Y_j <- apply(phase2_matrix, 1, function(x) sort(x)[j])
out_of_control <- (Y_j < LCL) | (Y_j > UCL)
if (any(out_of_control)) {
  rl <- rl + which.max(out_of_control)
  break
} else {
  rl <- rl + batch_size
}
}
run_lengths[i] <- rl
}
return(list(ARL = mean(run_lengths), MRL = median(run_lengths), SDRL = sd(run_lengths)))
}

# Δοκιμή distribution-free ιδιότητας (shift=0, ARL_in)
distributions <- c("norm", "t", "laplace", "gamma", "exp")
dist_names <- c("Normal(0,1)", "Student-t(df=5)", "Laplace", "Gamma(2,1)", "Exponential(1)")
cat(sprintf("%-20s %10s %10s %10s\n", "Κατανομή", "ARL_in", "MRL_in", "SDRL_in"))
cat(strrep("-", 52), "\n")
for (d in 1:length(distributions)) {
  set.seed(789 + d)
  res <- simulate_precedence_dist(m=500, n=5, j=3, a=24, b=477,
                                shift=0.0, n_sim=10000, dist=distributions[d])
  cat(sprintf("%-20s %10.2f %10.2f %10.2f\n", dist_names[d], res$ARL, res$MRL, res$SDRL))
}

cat("\n(Αν το ARL_in είναι παρόμοιο σε όλες τις κατανομές,\n")
cat(" επιβεβαιώνεται η distribution-free ιδιότητα)\n")
cat(sprintf("-> Shift = %.2f : ARL = %.2f | MRL = %.2f | SDRL = %.2f\n",
shifts_to_test[k], res$ARL, res$MRL, res$SDRL))

plot_mrl <- ggplot(full_table, aes(x = Shift)) +
  geom_line(aes(y = ARL, color = "ARL (Μέσος)"), size = 1.2) +
  geom_point(aes(y = ARL, color = "ARL (Μέσος)"), size = 4) +

```

```

geom_line(aes(y = MRL, color = "MRL (Διάμεσος)", size = 1.2, linetype = "dashed")) +
geom_point(aes(y = MRL, color = "MRL (Διάμεσος)", size = 4, shape = 17)) +
scale_color_manual(values = c("ARL (Μέσος)" = "darkblue", "MRL (Διάμεσος)" = "darkorange"))
+
labs(title = "Σύγκριση Μέσου (ARL) και Διάμεσου (MRL) Μήκους Ροής",
      subtitle = "Το MRL ανταποκρίνεται ταχύτερα στις μικρές μετατοπίσεις",
      x = "Μετατόπιση (δ)",
      y = "Μήκος Ροής",
      color = "Δείκτης:") +
theme_minimal() +
theme(legend.position = "bottom",
      text = element_text(size = 12),
      plot.title = element_text(face = "bold"))

print(plot_mrl)

# ---Ραβδόγραμμα Distribution-Free Ιδιότητας ---
# Αποθήκευση των αποτελεσμάτων του loop σε ένα νέο data frame
dist_results <- data.frame(Distribution = character(), ARL_in = numeric(), stringsAsFactors =
FALSE)

for (d in 1:length(distributions)) {
  set.seed(789 + d)
  res <- simulate_precedence_dist(m=500, n=5, j=3, a=24, b=477,
                                shift=0.0, n_sim=10000, dist=distributions[d])
  dist_results <- rbind(dist_results, data.frame(Distribution = dist_names[d], ARL_in = res$ARL))
}

# Ραβδόγραμμα
plot_dist <- ggplot(dist_results, aes(x = Distribution, y = ARL_in, fill = Distribution)) +
  geom_bar(stat = "identity", color = "black", width = 0.6, alpha = 0.8) +
  geom_hline(yintercept = 520.3, linetype = "dashed", color = "red", size = 1.2) +
  annotate("text", x = 1.5, y = 540, label = "Θεωρητικό ARL = 520.3", color = "red", fontface =
"bold") +
  labs(title = "Distribution-Free Ιδιότητα - ARL_in",
      subtitle = "ARL ~520 ανεξαρτήτως υποκείμενης κατανομής",
      x = "Στατιστική Κατανομή Δεδομένων",
      y = "Εντός Ελέγχου ARL") +
  scale_fill_brewer(palette = "Set2") +

```

```
theme_classic() +  
theme(legend.position = "none",  
      text = element_text(size = 12),  
      plot.title = element_text(face = "bold"),  
      axis.text.x = element_text(angle = 15, hjust = 1))  
  
print(plot_dist)  
  
cat("\n=== ΤΕΛΟΣ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3 ===\n")
```

```

#-----
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Προοδευτικά Επικαιροποιημένο Διάγραμμα Precedence
#-----
# ΜΕΡΟΣ 1: ΠΡΟΟΔΕΥΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ
#-----

simulate_progressive_chart <- function(m_init, n, j, p_lower, p_upper, shift = 0.0, shift_delay = 50, n_sim
= 5000) {

  run_lengths <- numeric(n_sim)
  valid_sims <- 0

  for (i in 1:n_sim) {
    # 1. Αρχικοποίηση με μικρό δείγμα αναφοράς (m = 100)
    current_m <- m_init
    phase1_sample <- rnorm(current_m, mean = 0, sd = 1)
    rl <- 0

    repeat {
      rl <- rl + 1

      # 2. Δυναμικός Υπολογισμός Ορίων Ελέγχου
      phase1_sorted <- sort(phase1_sample)
      LCL <- phase1_sorted[max(1, round(current_m * p_lower))]
      UCL <- phase1_sorted[min(current_m, round(current_m * p_upper))]

      # 3. Λήψη νέου δείγματος
      current_shift <- ifelse(rl > shift_delay, shift, 0.0)
      phase2_sample <- rnorm(n, mean = current_shift, sd = 1)
      Y_j <- sort(phase2_sample)[j]

      # 4. Προοδευτική Επικαιροποίηση
      if (Y_j < LCL || Y_j > UCL) {
        break # Σήμα Εκτός Ελέγχου -> ψευδής συναγερμός
      } else {
        # Το δείγμα είναι εντός ορίων -> επικαιροποίηση της μνήμης
        phase1_sample <- c(phase1_sample, phase2_sample)
        current_m <- current_m + n
      }
    }
  }
}

```

```

}

# 5. Καταγραφή του Run Length
if (shift > 0 && shift_delay > 0) {
  if (rl > shift_delay) {
    run_lengths[valid_sims + 1] <- rl - shift_delay
    valid_sims <- valid_sims + 1
  }
  } else {
    run_lengths[valid_sims + 1] <- rl
    valid_sims <- valid_sims + 1
  }
}

return(mean(run_lengths[1:valid_sims]))
}

```

```

#-----
# ΜΕΡΟΣ 2: ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
#-----

# Παράμετροι βάσει του Κεφαλαίου 3
p_L <- 0.048 # Αντιστοιχεί στο a=24 για m=500
p_U <- 0.954 # Αντιστοιχεί στο b=477 για m=500

shifts_to_test <- c(0.0, 0.25, 0.50, 1.00, 1.50)
arl_prog_results <- numeric(length(shifts_to_test))

for (k in 1:length(shifts_to_test)) {
  current_shift <- shifts_to_test[k]
  s_delay <- ifelse(current_shift == 0.0, 0, 50)

  set.seed(999 + k)
  arl_prog_results[k] <- simulate_progressive_chart(
    m_init = 100, n = 5, j = 3,
    p_lower = p_L, p_upper = p_U,
    shift = current_shift, shift_delay = s_delay, n_sim = 5000
  )
  cat(sprintf("Ολοκληρώθηκε: Shift = %.2f -> ARL_out = %.2f\n", current_shift, arl_prog_results[k]))
}

#-----
# ΜΕΡΟΣ 3: ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ (Κεφ. 3 vs Κεφ. 4)
#-----

static_arl_results <- c(518.43, 264.62, 76.48, 10.25, 2.72)

comparison_df <- data.frame(
  "Συνθήκη" = c("Απαιτούμενο Αρχικό Δείγμα (m)", "ARL_in (Shift 0.00)", "Shift 0.25", "Shift 0.50",
    "Shift 1.00", "Shift 1.50"),
  "Στατικό_(Κεφ.3)" = c("500", sprintf("%.2f", static_arl_results)),
  "Προοδευτικό_(Κεφ.4)" = c("100", sprintf("%.2f", arl_prog_results)),
  "Σχόλιο" = c(
    ">",
    ">",
    "<",
    "<",
    "<"
  )
)

```

```

"<"
),
check.names = FALSE
)
cat("\n=== ΠΙΝΑΚΑΣ 1: ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ===\n")
print(kable(comparison_df, align = "lccc"))
#-----
# ΜΕΡΟΣ 4: ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΟ ΓΡΑΦΗΜΑ (PLOT)
#-----

plot_df <- data.frame(
  Shift = rep(shifts_to_test, 2),
  ARL = c(static_arl_results, arl_prog_results),
  Method = c(rep("Στατικό (m=500)", length(shifts_to_test)),
             rep("Προοδευτικό (m=100)", length(shifts_to_test)))
)

final_plot <- ggplot(plot_df, aes(x = Shift, y = ARL, color = Method, group = Method, shape = Method)) +
  geom_line(size = 1.2) +
  geom_point(size = 4) +
  scale_color_manual(values = c("Στατικό (m=500)" = "darkblue", "Προοδευτικό (m=100)" =
"darkred")) +
  labs(title = "Σχήμα Z: Σύγκριση Στατικού και Προοδευτικού Διαγράμματος",
       subtitle = "Masking Effect και σύγκλιση",
       x = "Μετατόπιση (Shift / \u03b4)",
       y = "Average Run Length (ARL)") +
  theme_minimal() +
  theme(text = element_text(size = 12),
        plot.title = element_text(face = "bold"),
        legend.position = "bottom",
        legend.title = element_blank())
print(final_plot)

set.seed(123)
current_m <- 100
p_L <- 0.048; p_U <- 0.954
phase1_sample <- rnorm(current_m, mean = 0, sd = 1)

n_samples <- 100

```

```

shift_delay <- 50
shift_val <- 1.0

medians_prog <- numeric(n_samples)
lcl_prog <- numeric(n_samples)
ucl_prog <- numeric(n_samples)

for(i in 1:n_samples) {
  phase1_sorted <- sort(phase1_sample)
  # Υπολογισμός δυναμικών ορίων στο τρέχον βήμα
  lcl_prog[i] <- phase1_sorted[max(1, round(current_m * p_L))]
  ucl_prog[i] <- phase1_sorted[min(current_m, round(current_m * p_U))]

  # Εισαγωγή βλάβης μετά το 50ο δείγμα
  current_shift <- ifelse(i > shift_delay, shift_val, 0.0)
  current_sample <- rnorm(5, mean = current_shift, sd = 1)
  medians_prog[i] <- sort(current_sample)[3]

  # Προοδευτική ενσωμάτωση (αν είναι εντός ελέγχου)
  if(medians_prog[i] >= lcl_prog[i] && medians_prog[i] <= ucl_prog[i]) {
    phase1_sample <- c(phase1_sample, current_sample)
    current_m <- current_m + 5
  }
}

df_prog_plot <- data.frame(
  Sample = 1:n_samples,
  Median = medians_prog,
  LCL = lcl_prog,
  UCL = ucl_prog,
  State = ifelse(1:n_samples <= shift_delay, "Εντός Ελέγχου", "Εκτός Ελέγχου"),
  Out = medians_prog < lcl_prog | medians_prog > ucl_prog
)

plot_prog_dyn <- ggplot(df_prog_plot, aes(x = Sample)) +
  geom_step(aes(y = UCL), color = "red", linetype = "dashed", size = 1) +
  geom_step(aes(y = LCL), color = "red", linetype = "dashed", size = 1) +
  geom_line(aes(y = Median), color = "darkgray") +
  geom_point(aes(y = Median, color = Out, shape = State), size = 3) +

```

```

geom_vline(xintercept = 50.5, linetype = "dotted", color = "blue", size=1) +
scale_color_manual(values = c("FALSE" = "black", "TRUE" = "red")) +
labs(title = "Προοδευτικό Διάγραμμα Ελέγχου Precedence (m=100)",
      subtitle = "Δυναμική διεύρυνση των ορίων ελέγχου και ανίχνευση βλάβης",
      x = "Αριθμός Δείγματος", y = "Διάμεσος Δείγματος") +
theme_classic() + theme(legend.position = "bottom")
print(plot_prog_dyn)
#-----
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΕΙΔΙΚΕΣ ΔΟΚΙΜΕΣ (Large Shift, Moving Window, Outliers)
#-----

library(ggplot2)
library(knitr)

# 1. Βασική συνάρτηση παραγωγής δεδομένων
generate_dist_data <- function(n, dist = "norm", shift = 0) {
  if (dist == "norm") return(rnorm(n, mean = shift, sd = 1))
  if (dist == "t") return(rt(n, df = 5) + shift)
  if (dist == "gamma") return(rgamma(n, shape = 2, rate = 1) + shift)
}

# 2. Αναβαθμισμένη συνάρτηση Προοδευτικής Προσομοίωσης με επιλογή "Moving Window"
simulate_advanced <- function(m_init, n, j, p_L, p_U,
                             dist = "norm", shift = 0.0,
                             window_size = NULL, # Αν είναι NULL, κρατάει όλη τη μνήμη
                             outliers = FALSE, # Αν είναι TRUE, βάζει outliers στη Φάση I
                             n_sim = 1000) {
  run_lengths <- numeric(n_sim)
  shift_delay <- 50

  for (i in 1:n_sim) {
    current_m <- m_init
    # Αρχικό δείγμα
    phase1_sample <- generate_dist_data(current_m, dist = dist, shift = 0)
    # ΠΕΙΡΑΜΑ 3: Εισαγωγή Outliers στη Φάση I (π.χ. 2 πολύ μεγάλες τιμές)
    if (outliers) {
      phase1_sample[1:2] <- c(10, 12) # Ακραίες τιμές που "μολύνουν" την αρχή
    }
    rl <- 0
    repeat {
      rl <- rl + 1
      phase1_sorted <- sort(phase1_sample)

```

```

# Υπολογισμός ορίων
LCL <- phase1_sorted[max(1, round(current_m * p_L))]
UCL <- phase1_sorted[min(current_m, round(current_m * p_U))]
# Δείγμα Φάσης II
curr_s <- ifelse(rl > shift_delay, shift, 0)
phase2_sample <- generate_dist_data(n, dist = dist, shift = curr_s)
Y_j <- sort(phase2_sample)[j]
if (Y_j < LCL || Y_j > UCL) {
  break
} else {
  # Επικαιροποίηση
  phase1_sample <- c(phase1_sample, phase2_sample)
  # ΠΕΙΡΑΜΑ 2: Moving Window Logic
  if (!is.null(window_size)) {
    if (length(phase1_sample) > window_size) {
      # Κρατάμε μόνο τα τελευταία 'window_size' στοιχεία
      phase1_sample <- tail(phase1_sample, window_size)
    }
  }
  current_m <- length(phase1_sample)
}
if (rl > 2000) break
}
run_lengths[i] <- ifelse(shift > 0, rl - shift_delay, rl)
}
return(mean(run_lengths))
}

# --- ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΤΩΝ 3 ΔΟΚΙΜΩΝ ---
p_L <- 0.048; p_U <- 0.954; n <- 5; j <- 3
# ΔΟΚΙΜΗ 1: Μεγάλη Μετατόπιση ( $\delta = 1.5$ ) - Σύγκριση με την μικρή ( $\delta = 0.5$ )
set.seed(123)
arl_small_shift <- simulate_advanced(100, n, j, p_L, p_U, shift = 0.5)
arl_large_shift <- simulate_advanced(100, n, j, p_L, p_U, shift = 1.5)
# ΔΟΚΙΜΗ 2: Moving Window (Κρατάμε μόνο τα τελευταία 150 δείγματα)
arl_window <- simulate_advanced(100, n, j, p_L, p_U, shift = 0.5, window_size = 150)
# ΔΟΚΙΜΗ 3: Επίδραση Outliers στη Φάση I
arl_outliers <- simulate_advanced(100, n, j, p_L, p_U, shift = 0.5, outliers = TRUE)

# --- ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ---

```

```

results_extra <- data.frame(
  "Πείραμα" = c("Βασικό ( $\delta=0.5$ )", "Μεγάλη Μετατόπιση ( $\delta=1.5$ )", "Με Παράθυρο Μνήμης (Window)",
  "Με Outliers στη Φάση I"),
  "ARL" = c(arl_small_shift, arl_large_shift, arl_window, arl_outliers)
)
print(kable(results_extra, caption = "Αποτελέσματα Ειδικών Δοκιμών Κεφαλαίου 4"))

```