

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ ΑΠΟΤΥΧΙΑΣ ΓΙΑ ΜΕΙΞΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΔΑΡΑΒΙΓΚΑΣ ΖΑΒΑΚΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και
Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς
ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση
του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην
Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς

Ιούλιος 2026

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη Συνέλευση του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ..... συνεδρίασή της, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγητής Πολίτης Κωνσταντίνος (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Τριανταφύλλου Ιωάννης
- Καθηγητής Τζαβελάς Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

Στους γονείς μου

Αθανάσιος και Γεωργία

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics



DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE
MASTER'S PROGRAMME IN
APPLIED STATISTICS

**A STUDY OF THE FAILURE RATE
FOR MIXTURES OF PROBABILITY
DISTRIBUTIONS**

DARAVIGKAS ZAVAKOS CHRISTOS

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and
Insurance Science of the University of Piraeus
in partial fulfillment of the requirements
for the degree of Master of Science in
Applied Statistics

Piraeus
July 2026

The present Master's Thesis was unanimously approved by the three-member Examining Committee appointed by the Assembly of the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus, at its meeting No....., in accordance with the Internal Regulations of the Master's Programme in Applied Statistics.

The members of the Examining Committee were:

- Professor Konstantinos Politis (Supervisor)
- Associate Professor Ioannis Triantafyllou
- Professor Georgios Tzavelas

The approval of the Master's Thesis by the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus does not imply acceptance of the author's opinions.

To my parents

Athanasios and Georgia

Πρόλογος και Ευχαριστίες

Η έννοια της βαθμίδας αποτυχίας κατέχει σημαντική θέση στη Θεωρία Αξιοπιστίας και στη μελέτη χρόνων ζωής. Μέσω αυτής μπορεί να περιγραφεί ο στιγμιαίος ρυθμός με τον οποίο εμφανίζεται ένα ενδεχόμενο αποτυχίας, υπό την προϋπόθεση ότι η υπό μελέτη μονάδα ή το υπό μελέτη σύστημα έχει επιβιώσει μέχρι μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Για τον λόγο αυτό, η βαθμίδα αποτυχίας αποτελεί βασικό εργαλείο σε προβλήματα που σχετίζονται με τη διάρκεια ζωής, τη φθορά και την αξιολόγηση κινδύνου.

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη της βαθμίδας αποτυχίας στο πλαίσιο των μείξεων κατανομών. Οι μείξεις κατανομών προσφέρουν ένα ευέλικτο πλαίσιο μοντελοποίησης δεδομένων που προέρχονται από ανομοιογενείς πληθυσμούς ή εμφανίζουν σύνθετη συμπεριφορά, η οποία δεν μπορεί να περιγραφεί επαρκώς από μία μόνο κατανομή. Στην εργασία αυτή εξετάζονται οι ιδιότητες της βαθμίδας αποτυχίας και ο τρόπος με τον οποίο αυτές διαμορφώνονται όταν συνδυάζονται διαφορετικές κατανομές.

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Επιβλέποντα Καθηγητή μου για την επιστημονική καθοδήγηση, την πολύτιμη βοήθεια και τον χρόνο που αφιέρωσε κατά τη διάρκεια της εκπόνησής της. Οι παρατηρήσεις και οι συμβουλές του συνέβαλαν ουσιαστικά στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω επίσης στην οικογένειά μου και στους κοντινούς μου ανθρώπους, οι οποίοι με στήριξαν με υπομονή και κατανόηση σε όλη την πορεία των σπουδών μου. Η ενθάρρυνσή τους αποτέλεσε σημαντική δύναμη για την επίτευξη των στόχων μου.

Πειραιάς, Ιούλιος 2026

Δαραβίγκας Χρήστος

Περίληψη

Η βαθμίδα αποτυχίας αποτελεί βασικό εργαλείο στη θεωρία αξιοπιστίας και στη μελέτη χρόνων ζωής, καθώς περιγράφει τον στιγμιαίο κίνδυνο αποτυχίας ενός συστήματος που έχει επιβιώσει μέχρι μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται η συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας για μείξεις κατανομών, οι οποίες χρησιμοποιούνται για την περιγραφή ετερογενών πληθυσμών. Αρχικά παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες των κατανομών Εκθετική, Gamma, Erlang, Weibull και Pareto, καθώς και η μονοτονία των αντίστοιχων βαθμίδων αποτυχίας.

Στη συνέχεια εξετάζεται κατά πόσο οι ιδιότητες των επιμέρους κατανομών διατηρούνται όταν αυτές συνδυάζονται σε μία μείξη. Η ανάλυση δείχνει ότι η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης μπορεί να παρουσιάζει διαφορετική και περισσότερο σύνθετη συμπεριφορά από τις βαθμίδες των συνιστωσών της. Ειδικότερα, μια μείξη αύξουσων βαθμίδων αποτυχίας μπορεί να γίνει φθίνουσα ή μη μονότονη, ενώ η αρχική και η τελική της μορφή επηρεάζονται από τα βάρη, τις παραμέτρους και τη συμπεριφορά των ουρών των κατανομών. Τα θεωρητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται μέσα από αριθμητικά παραδείγματα και γραφικές παραστάσεις, οι οποίες αναδεικνύουν τον σημαντικό ρόλο της ετερογένειας στη συνολική συμπεριφορά της μείξης.

Λέξεις-Κλειδιά: Βαθμίδα Αποτυχίας, Μείξεις Κατανομών, Μονοτονία, IFR, DFR, Ετερογένεια.

Abstract

The failure rate is a fundamental tool in reliability theory and lifetime analysis, as it describes the instantaneous risk of failure of a system that has survived up to a specific point in time. This dissertation studies the behaviour of the failure rate for distribution mixtures, which are used to model heterogeneous populations. Initially, the main properties of the Exponential, Gamma, Erlang, Weibull and Pareto distributions are presented, together with the monotonicity of their corresponding failure rates.

The study then examines whether the properties of the individual distributions are preserved when they are combined into a mixture. The analysis shows that the failure rate of a mixture may exhibit a different and more complex behaviour than the failure rates of its components. In particular, a mixture of distributions with increasing failure rates may have a decreasing or non-monotonic failure rate. Moreover, its initial and asymptotic behaviour is influenced by the mixture weights, the distribution parameters and the tail behaviour of the components. The theoretical results are illustrated through numerical examples and graphical representations, highlighting the important role of heterogeneity in the overall behaviour of distribution mixtures.

Keywords: Failure Rate, Distribution Mixtures, Monotonicity, IFR, DFR, Heterogeneity.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων	iv
Κατάλογος Διαγραμμάτων	v
1 Βιβλιογραφική Επισκόπηση	1
2 Βασικές Έννοιες	3
2.1 Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές	3
2.1.1 Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομή	4
2.1.2 Διακύμανση	5
2.2 Συνεχείς Κατανομές	5
2.2.1 Εκθετική Κατανομή	5
2.2.2 Κατανομή Gamma	6
2.2.3 Κατανομή Erlang	8
2.2.4 Κατανομή Weibull	9
2.2.5 Κατανομή Pareto	11
3 Βαθμίδα Αποτυχίας	14
3.1 Συνάρτηση Επιβίωσης και Βαθμίδα Αποτυχίας	14
3.2 Βαθμίδα αποτυχίας συνεχών κατανομών	16
3.2.1 Βαθμίδα αποτυχίας της εκθετικής κατανομής	16
3.2.2 Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής Gamma	17
3.2.3 Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής Erlang	18
3.2.4 Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής Weibull	19
3.2.5 Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής Pareto	20
3.3 Μονοτονία Βαθμίδας Αποτυχίας Συνεχών Κατανομών	21
3.3.1 Μονοτονία βαθμίδας αποτυχίας της εκθετικής	22
3.3.2 Μονοτονία βαθμίδας αποτυχίας της Gamma	23

3.3.3	Μονοτονία βαθμίδας αποτυχίας της Erlang	25
3.3.4	Μονοτονία βαθμίδας αποτυχίας της Weibull	26
3.3.5	Μονοτονία βαθμίδας αποτυχίας της Pareto	27
3.3.6	Σύνοψη Μονοτονίας Βασικών Συνεχών Κατανομών	28
4	Μείξεις Κατανομών	30
4.1	Μείξεις κατανομών	30
4.1.1	Μείξη Κατανομών και Βασικές Ιδιότητες	31
4.2	Μείξεις Συνεχών Κατανομών	33
4.2.1	Μείξεις Κατανομών της Εκθετικής	34
4.2.2	Μείξεις Κατανομών της Gamma	36
4.2.3	Μείξεις Κατανομών της Erlang	39
4.2.4	Μείξεις Κατανομών της Weibull	42
4.2.5	Μείξεις Κατανομών της Pareto	45
4.3	Σύνοψη Μείξεων και Συμπεράσματα	49
5	Ασυμπτωτική Συμπεριφορά της Βαθμίδας Αποτυχίας σε Μείξεις Κατανομών	51
5.1	Μη μονοτονικά σχήματα: bathtub και upside-down bathtub	52
5.1.1	Upside-Down Bathtub	52
5.1.2	Bathtub	53
5.2	Η Γενική Ασυμπτωτική Εικόνα	55
5.2.1	Τελική και αρχική συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας	55
5.3	Συμπεριφορά Ουράς της Βαθμίδας Αποτυχίας σε Μείξεις Δύο Κατανομών	61
5.4	Αναστροφή της Μονοτονίας στη Βαθμίδα Αποτυχίας Μείξεων Κατανομών	66
5.4.1	Μείξη δύο DFR κατανομών	66
5.4.2	Μείξη δύο IFR κατανομών	68
6	Παραδείγματα και εφαρμογές για μείξεις κατανομών και βαθμίδες αποτυχίας	72
6.1	Πρακτική ερμηνεία της βαθμίδας αποτυχίας	72
6.2	Παράδειγμα όπου η μείξη IFR παραμένει IFR	77

6.3	Παράδειγμα όπου η μείξη IFR αλλάζει σε DFR	78
6.4	Η ισχυρότερη συνιστώσα και η συμπεριφορά στην ουρά	78
6.5	Μείξεις με τρεις συνιστώσες	80
6.6	Σύνοψη παραδειγμάτων μείξεων και της συμπεριφοράς της βαθμίδας αποτυχίας	86
6.7	Κάποιες επιπλέον εφαρμογές	87
7	Τελικά Συμπεράσματα	99
	Βιβλιογραφία	102

Κατάλογος πινάκων

3.1	Βαθμίδα αποτυχίας και μονοτονία των κατανομών του Κεφαλαίου 3. . . .	29
4.1	Βαθμίδα αποτυχίας και μονοτονία των γενικών μείξεων του Κεφαλαίου 4. . . .	49
5.1	Αρχική συμπεριφορά της μείξης για διαφορετικές τιμές του p	59
5.2	Σύνοψη των βασικών αποτελεσμάτων για τη βαθμίδα αποτυχίας μιας μείξης.	60
5.3	Βασικά συμπεράσματα της Ενότητας 5.3.	64
5.4	Σύνοψη των βασικών συμπερασμάτων της Ενότητας 5.4.	71
6.1	Σύνοψη παραδειγμάτων μείξεων και της συμπεριφοράς της βαθμίδας απο- τυχίας.	86

Κατάλογος σχημάτων

2.1	Συνάρτηση πυκνότητας της εκθετικής κατανομής για $\lambda = 1$	6
2.2	Συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής Gamma για $X \sim \text{Ga}(2, \frac{1}{2})$	7
2.3	Συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής Erlang για $k = 3$ και $\lambda = 0,7$	9
2.4	Συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής Weibull για $k = 2$ και $\lambda = 2$	11
2.5	Συναρτήσεις πυκνότητας της κατανομής Pareto για $x_m = 1$, $\alpha = 1$ και $\alpha = 2$	13
3.1	Συνάρτηση της βαθμίδας αποτυχίας για Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1$	23
3.2	Συνάρτηση της βαθμίδας αποτυχίας για κατανομή Gamma με παραμέτρους $\lambda = \frac{1}{2}$ και $\alpha = \frac{1}{2}, 1, 2$	25
3.3	Συναρτήσεις βαθμίδας αποτυχίας για κατανομή Erlang με παραμέτρους $\lambda = \frac{1}{2}$ και $k = 1, 2, 3$	26
3.4	Συνάρτηση της βαθμίδας αποτυχίας για κατανομή Weibull με παραμέτρους $\lambda = 2$ και $a = \frac{1}{2}, 1, 2$	27
3.5	Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής Pareto για $x_m = 1$ και διαφορετικές τιμές της α	28
4.1	Φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας για τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών	35
4.2	Αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας για τη μείξη δύο κατανομών Erlang	42
4.3	Βαθμίδα αποτυχίας μείξης δύο Weibull κατανομών.	45
4.4	Φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας μείξης δύο Pareto κατανομών.	48
5.1	Βαθμίδα αποτυχίας με σχήμα <i>upside-down bathtub</i> (Block, Li και Savits, 2003).	53
5.2	Βαθμίδα αποτυχίας με σχήμα <i>bathtub</i> (Block, Li και Savits, 2003).	54
5.3	Τροποποιημένη <i>bathtub</i> βαθμίδα αποτυχίας από μείξη δύο κατανομών Weibull.	55
5.4	Οι βαθμίδες αποτυχίας των δύο DFR κατανομών Weibull και της μείξης τους για $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$	68
5.5	Οι βαθμίδες αποτυχίας των επιμέρους κατανομών και της μείξης για $\gamma = 3, \theta = 2.5, \lambda = 0.25, p_1 = 0.95$ και $p_2 = 0.05$	69

6.1	Οι επιμέρους βαθμίδες αποτυχίας $h_1(t)$, $h_2(t)$ και η βαθμίδα αποτυχίας $h(t)$ της μείξης.	75
6.2	Μείξη Weibull IFR κατανομής με εκθετική συνιστώσα.	76
6.3	Βαθμίδες αποτυχίας των δύο Weibull κατανομών και της μείξης τους για $p = 0.5$	77
6.4	Δύο αύξουσες βαθμίδες αποτυχίας που οδηγούν σε φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας της μείξης για $p = 0.5$	78
6.5	Η βαθμίδα αποτυχίας μείξης τριών κατανομών Erlang.	83
6.6	Η βαθμίδα αποτυχίας τύπου bathtub για μείξη δύο κατανομών Erlang και μίας εκθετικής κατανομής.	85
6.7	Η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης δύο εκθετικών κατανομών.	88
6.8	Η συνολική βαθμίδα αποτυχίας για τη μείξη ελαττωματικών και κανονικών ηλεκτρονικών συσκευών.	90
6.9	Η συνολική βαθμίδα αποτυχίας μετά το pooling των δύο ομάδων.	92
6.10	Βαθμίδα αποτυχίας αντλιών από δύο διαφορετικούς μηχανισμούς.	95
6.11	Βαθμίδα αποτυχίας για τον χρόνο διεκπεραίωσης συνηθισμένων και σύνθετων ασφαλιστικών απαιτήσεων.	98

Κεφάλαιο 1

Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Η βαθμίδα αποτυχίας αποτελεί βασική έννοια στη θεωρία αξιοπιστίας και στην ανάλυση χρόνων ζωής, καθώς περιγράφει τον στιγμιαίο κίνδυνο αποτυχίας μιας μονάδας, δεδομένου ότι αυτή έχει επιβιώσει μέχρι μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Η μορφή της παρέχει πληροφορίες για τη γήρανση και τη μεταβολή της αξιοπιστίας ενός συστήματος.

Οι Barlow και Proschan (1996) και οι Marshall και Olkin (2007) παρουσιάζουν το βασικό θεωρητικό πλαίσιο των κατανομών χρόνου ζωής και των κλάσεων γήρανσης. Ιδιαίτερη σημασία έχουν οι κλάσεις IFR (*Increasing Failure Rate*) και DFR (*Decreasing Failure Rate*), οι οποίες αντιστοιχούν σε αύξουσα και φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας. Ο Finkelstein (2008) δίνει έμφαση στη φυσική ερμηνεία της βαθμίδας αποτυχίας και στη διάκριση μεταξύ της γήρανσης των επιμέρους μονάδων και της μεταβολής της σύνθεσης ενός ετερογενούς πληθυσμού.

Οι μείξεις κατανομών χρησιμοποιούνται για την περιγραφή πληθυσμών που αποτελούνται από υποπληθυσμούς με διαφορετικά χαρακτηριστικά. Η βαθμίδα αποτυχίας μιας μείξης δεν αποτελεί απλώς έναν σταθμισμένο μέσο όρο των επιμέρους βαθμίδων με σταθερά βάρη. Αντίθετα, τα βάρη των συνιστωσών μεταξύ των επιζώντων μεταβάλλονται με τον χρόνο.

Οι συνιστώσες με μεγαλύτερο κίνδυνο αποτυχίας αποδυναμώνονται ταχύτερα, ενώ οι ισχυρότερες συνιστώσες αποκτούν σταδιακά μεγαλύτερη συμμετοχή. Επομένως, η συνολική βαθμίδα αποτυχίας μπορεί να παρουσιάζει διαφορετική μονοτονία από τις βαθμίδες των επιμέρους κατανομών.

Οι Jiang και Murthy (1998) μελέτησαν τη βαθμίδα αποτυχίας μείξεων Weibull κατανομών και έδειξαν ότι η συνολική της μορφή εξαρτάται από τις παραμέτρους και τα βάρη της μείξης. Αντίστοιχα, οι Willmot και Woo (2007) και οι Willmot και Lin (2011) ανέδειξαν τη χρησιμότητα των μείξεων κατανομών Erlang στη θεωρία κινδύνου και στην αναλογιστική επιστήμη. Οι μείξεις αυτές προσφέρουν μεγάλη ευελιξία, χωρίς όμως να διατηρούν πάντοτε τη μονοτονία των επιμέρους βαθμίδων αποτυχίας.

Οι Gurland και Sethuraman (1995) εξέτασαν την επίδραση της συνένωσης δεδομένων από διαφορετικούς πληθυσμούς. Το βασικό τους αποτέλεσμα δείχνει ότι μια μείξη κατανομών με αύξουσες βαθμίδες αποτυχίας μπορεί να παρουσιάζει τελικά φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας.

Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στην ετερογένεια του πληθυσμού. Οι μονάδες με υψηλότερο κίνδυνο αποτυχίας απομακρύνονται γρηγορότερα, με αποτέλεσμα μεταξύ των επιζώντων να κυριαρχούν σταδιακά οι ανθεκτικότερες μονάδες. Συνεπώς, η ανάλυση συγκεκριμένων δεδομένων μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετικό συμπέρασμα από την ξεχωριστή ανάλυση των επιμέρους ομάδων.

Οι Block, Li και Savits (2003) μελέτησαν την αρχική και την τελική συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας σε μείξεις κατανομών. Η αρχική τιμή της βαθμίδας της μείξης καθορίζεται από τις αντίστοιχες αρχικές τιμές των συνιστωσών και από τα βάρη τους. Η αρχική της κλίση επηρεάζεται επιπλέον από την ετερογένεια μεταξύ των επιμέρους βαθμίδων αποτυχίας.

Για μεγάλες χρονικές τιμές, η συμπεριφορά της μείξης καθορίζεται κυρίως από τη συνιστώσα με τη βαρύτερη ουρά ή, ισοδύναμα σε πολλές περιπτώσεις, με τη μικρότερη τελική βαθμίδα αποτυχίας. Μια τέτοια συνιστώσα μπορεί να έχει μικρό αρχικό βάρος, αλλά να κυριαρχήσει τελικά στον πληθυσμό των επιζώντων.

Οι Block και Joe (1997) μελέτησαν ειδικότερα αυτή την ασυμπτωτική συμπεριφορά. Υπό κατάλληλες συνθήκες, η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης προσεγγίζει τη βαθμίδα της ισχυρότερης συνιστώσας. Τα αρχικά βάρη επηρεάζουν κυρίως τη μεταβατική συμπεριφορά και τη χρονική στιγμή κατά την οποία η συνιστώσα αυτή αρχίζει να επικρατεί.

Η βιβλιογραφία δείχνει ότι η μονοτονία των επιμέρους βαθμίδων αποτυχίας δεν αρκεί για τον προσδιορισμό της συμπεριφοράς μιας μείξης. Τα βάρη, οι παράμετροι, η ετερογένεια και η συμπεριφορά των ουρών μπορούν να οδηγήσουν σε αύξουσες, φθίνουσες ή μη μονότονες μορφές.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη της βαθμίδας αποτυχίας για μείξεις εκθετικών κατανομών και κατανομών Gamma, Erlang, Weibull και Pareto. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην αναστροφή της μονοτονίας, στην αρχική και τελική συμπεριφορά της μείξης και στην επίδραση της ισχυρότερης συνιστώσας. Τα θεωρητικά αποτελέσματα συνοδεύονται από αριθμητικά παραδείγματα και γραφικές παραστάσεις.

Κεφάλαιο 2

Βασικές Έννοιες

Η θεωρία των συνεχών κατανομών πιθανοτήτων αποτελεί βασικό υπόβαθρο για τη μελέτη χρόνων ζωής και φαινομένων αξιοπιστίας. Όπως παρουσιάζεται στους Κούτρα (2004), Πανάρετο και Ξεκαλάκη (2000), οι έννοιες της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής είναι απαραίτητες για την περιγραφή συνεχών τυχαίων μεταβλητών. Στο ίδιο πλαίσιο, ο Ross (2014) συνδέει τις κατανομές αυτές με τη μελέτη χρόνων αναμονής και χρόνων ζωής.

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και ορισμένες κατανομές που χρησιμοποιούνται συχνά στη θεωρία αξιοπιστίας, όπως η Εκθετική, η Gamma, η Erlang, η Weibull και η Pareto. Οι Πολίτης (2012) και Χατζηκωνσταντινίδης (2018) αναδεικνύουν τη χρησιμότητα τέτοιων κατανομών στον υπολογισμό βασικών μεγεθών, όπως η μέση τιμή, η διακύμανση και η βαθμίδα αποτυχίας. Η παρουσίαση αυτή λειτουργεί ως θεωρητική βάση για τη μελέτη των μείξεων κατανομών και της συμπεριφοράς της βαθμίδας αποτυχίας στα επόμενα κεφάλαια.

2.1 Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός 2.1.1. Μια συνάρτηση X που αντιστοιχίζει σε κάθε αποτέλεσμα $\omega \in \Omega$ έναν πραγματικό αριθμό $X(\omega)$ λέγεται *τυχαία μεταβλητή*.

Ορισμός 2.1.2. Μια τυχαία μεταβλητή X λέγεται *συνεχής*, αν διαθέτει συνάρτηση πυκνότητας f , ώστε

$$F(x) = P(X \leq x).$$

2.1.1 Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής

Ορισμός 2.1.3. Έστω X μια τυχαία μεταβλητή. Η X λέγεται *απολύτως συνεχής*, αν υπάρχει μη αρνητική συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$$

τέτοια ώστε, για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$, να ισχύει

$$P(X \in A) = \int_A f(x) dx.$$

Η συνάρτηση f ονομάζεται *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* της X .

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση κατανομής της X δίνεται από

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy.$$

Οι βασικές ιδιότητες των δύο συναρτήσεων είναι:

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$,
- $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$,
- εάν f είναι συνεχής, τότε $F'(x) = f(x)$,
- για κάθε $a < b$ ισχύει

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Ορισμός 2.1.4. Έστω X μια απολύτως συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας f . Η μέση ή αναμενόμενη τιμή της X ορίζεται ως

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

υπό την προϋπόθεση ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty.$$

2.1.2 Διακύμανση

Ορισμός 2.1.5. Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένη δεύτερη ροπή και μέση τιμή $\mu = \mathbb{E}[X]$. Η διακύμανση της X ορίζεται ως

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2].$$

Ισοδύναμα,

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

2.2 Συνεχείς Κατανομές

Η θεωρία των συνεχών κατανομών πιθανοτήτων αποτελεί βασικό υπόβαθρο για τη μελέτη χρόνων ζωής και φαινομένων αξιοπιστίας. Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες των συνεχών τυχαίων μεταβλητών, καθώς και οι κατανομές Εκθετική, Gamma, Erlang, Weibull και Pareto, οι οποίες χρησιμοποιούνται ευρέως στην ανάλυση χρόνων ζωής και κινδύνου. Για καθεμία δίνονται η συνάρτηση πυκνότητας, η συνάρτηση κατανομής, η μέση τιμή και η διακύμανση, όπως μπορεί να βρεί κανείς στους Κούτρα (2004), Πανάρετο και Ξεκαλάκη (2000) και Ross (2014).

2.2.1 Εκθετική Κατανομή

Η εκθετική κατανομή αποτελεί μία από τις σημαντικότερες συνεχείς κατανομές στη θεωρία πιθανοτήτων και στην ανάλυση αξιοπιστίας. Χρησιμοποιείται ευρέως για τη μοντελοποίηση χρόνων αναμονής, χρόνων ζωής εξαρτημάτων και διαδικασιών στις οποίες συμβάντα εμφανίζονται τυχαία με σταθερό ρυθμό.

Ορισμός 2.2.1. Μια απολύτως συνεχής τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο ρυθμού $\lambda > 0$, αν η συνάρτηση πυκνότητάς της είναι

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$X \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση αθροιστικής κατανομής (CDF) είναι:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Παρατήρηση 2.2.1. Η εκθετική κατανομή έχει την ιδιότητα έλλειψης μνήμης. Ειδικότερα, για κάθε $s, t \geq 0$ ισχύει

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t).$$

Επομένως, η κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου ζωής, δεδομένου ότι η μονάδα έχει επιβιώσει μέχρι τη χρονική στιγμή s , είναι ίδια με την αρχική κατανομή.

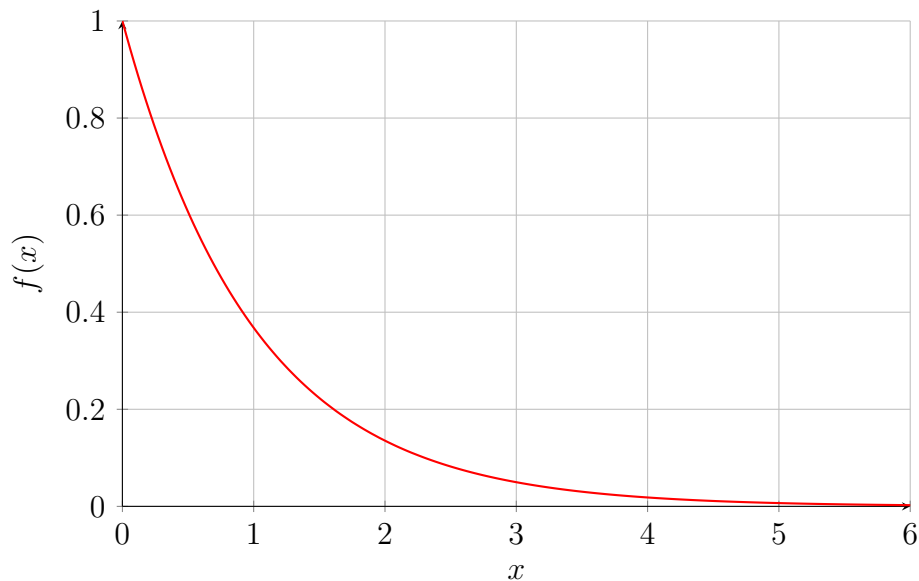
Βασικά χαρακτηριστικά

Για μια εκθετική τυχαία μεταβλητή $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ισχύουν:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{και} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Επιπλέον, η τυπική απόκλιση είναι:

$$\sigma_X = \frac{1}{\lambda}.$$



Σχήμα 2.1: Συνάρτηση πυκνότητας της εκθετικής κατανομής για $\lambda = 1$

2.2.2 Κατανομή Gamma

Η κατανομή Gamma αποτελεί μια γενίκευση της εκθετικής κατανομής και χρησιμοποιείται ευρέως στη μοντελοποίηση χρόνων ζωής, αναμονών και διαδικασιών στην ανάλυση αξιοπιστίας. Η μορφή της καθορίζεται από δύο θετικές παραμέτρους: την παράμετρο

σχήματος $\alpha > 0$ και τον ρυθμό $\lambda > 0$.

Ορισμός 2.2.2. Μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κατανομή Gamma με παράμετρο σχήματος $\alpha > 0$ και παράμετρο ρυθμού $\lambda > 0$, αν η συνάρτηση πυκνότητάς της είναι

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$X \sim \text{Ga}(\alpha, \lambda).$$

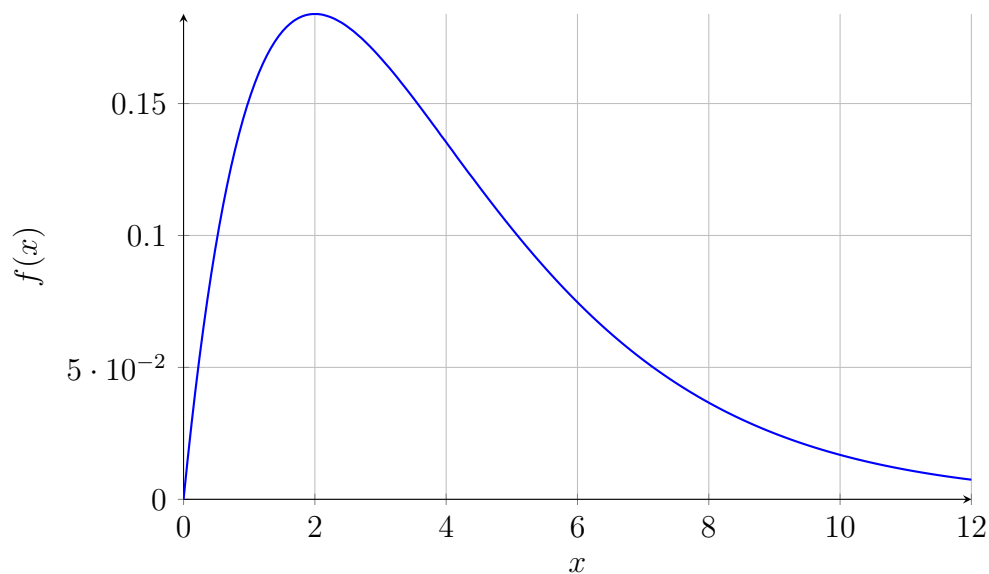
Βασικά χαρακτηριστικά

Για $X \sim \text{Ga}(\alpha, \lambda)$ ισχύουν:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Η τυπική απόκλιση είναι:

$$\sigma_X = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}.$$



Σχήμα 2.2: Συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής Gamma για $X \sim \text{Ga}(2, \frac{1}{2})$.

2.2.3 Κατανομή Erlang

Η κατανομή Erlang αποτελεί ειδική περίπτωση της κατανομής Gamma για ακέραιο σχήμα $k \in \mathbb{N}^*$. Ερμηνεύεται ως το άθροισμα k ανεξάρτητων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών με κοινή παράμετρο λ . Χρησιμοποιείται συχνά σε συστήματα ουρών και διαδικασίες ανανέωσης.

Ορισμός 2.2.3. Αν $k \in \mathbb{N}^*$ και $\lambda > 0$, τότε η κατανομή Erlang ορίζεται ως:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Υπολογισμός της συνάρτησης κατανομής (CDF). Η συνάρτηση κατανομής ορίζεται από

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt.$$

Για $x < 0$, αφού $f_X(t) = 0$ για κάθε $t < 0$, προκύπτει άμεσα ότι

$$F(x) = 0, \quad x < 0.$$

Για $x \geq 0$, έχουμε

$$F(x) = \int_0^x \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!} dt = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^x t^{k-1} e^{-\lambda t} dt.$$

Θέτουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$u = \lambda t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{u}{\lambda}, \quad dt = \frac{du}{\lambda}.$$

Τότε

$$F(x) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^{\lambda x} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-u} \frac{du}{\lambda} = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{\lambda x} u^{k-1} e^{-u} du.$$

Για το ολοκλήρωμα

$$I_k(a) = \int_0^a u^{k-1} e^{-u} du$$

εφαρμόζουμε επαναληπτικά ολοκλήρωση κατά μέρη και λαμβάνουμε

$$I_k(a) = (k-1)! \left(1 - e^{-a} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{a^i}{i!} \right).$$

Θέτοντας $a = \lambda x$, καταλήγουμε ότι

$$F(x) = \frac{1}{(k-1)!} (k-1)! \left(1 - e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} \right),$$

άρα

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!}, & x \geq 0. \end{cases}$$

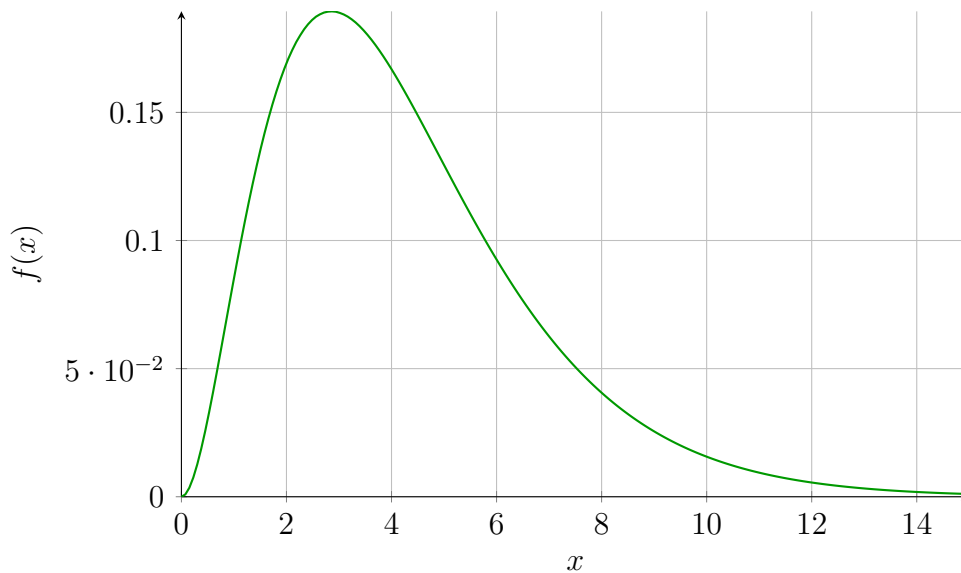
Βασικά χαρακτηριστικά

Για $X \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$ ισχύουν:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{k}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{k}{\lambda^2}.$$

Η τυπική απόκλιση:

$$\sigma_X = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}.$$



Σχήμα 2.3: Συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής Erlang για $k = 3$ και $\lambda = 0,7$.

2.2.4 Κατανομή Weibull

Η κατανομή Weibull χρησιμοποιείται ευρέως στην αξιοπιστία, στη θεωρία επιβίωσης και στη μελέτη χρόνων ζωής, καθώς αποτελεί ένα ευέλικτο μοντέλο για την περιγραφή

της αποτυχίας ενός συστήματος στον χρόνο. Ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων της, μπορεί να περιγράψει αύξοντα, σταθερό ή φθίνοντα ρυθμό αποτυχίας, γεγονός που την καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμη σε πολλές εφαρμογές.

Οι παράμετροι της κατανομής έχουν σαφή ερμηνεία: η παράμετρος σχήματος k καθορίζει τη μορφή της κατανομής και επηρεάζει τη συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας (θα δούμε παρακάτω), ενώ η παράμετρος κλίμακας λ συνδέεται με τη χρονική κλίμακα του φαινομένου. Για τον λόγο αυτό, η κατανομή Weibull αποτελεί βασικό εργαλείο στην ανάλυση δεδομένων διάρκειας ζωής.

Ορισμός 2.2.4. Μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κατανομή Weibull με παράμετρο σχήματος $k > 0$ και παράμετρο κλίμακας $\lambda > 0$, αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right], & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$X \sim \text{Weibull}(k, \lambda).$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση αθροιστικής κατανομής είναι

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right], & x \geq 0. \end{cases}$$

Βασικά χαρακτηριστικά

Για $X \sim \text{Weibull}(k, \lambda)$ ισχύουν:

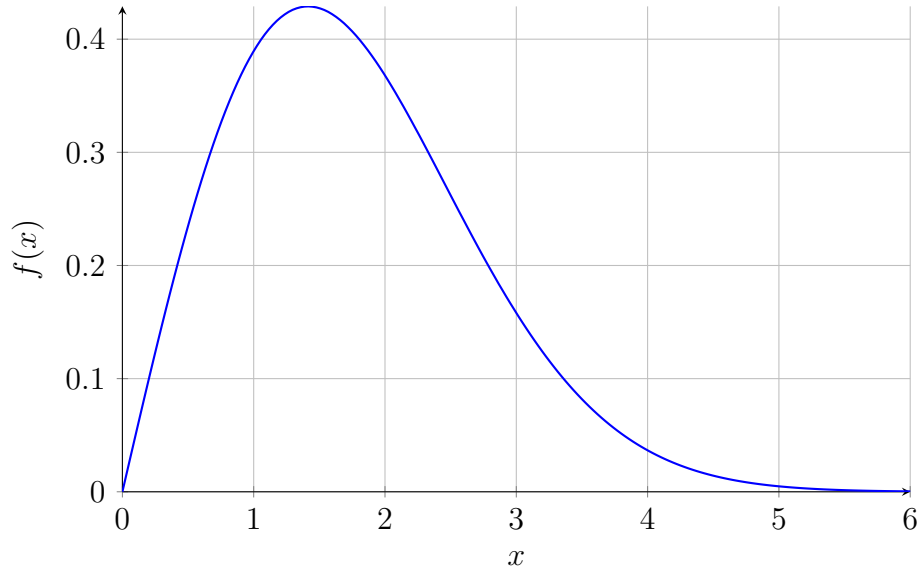
$$\mathbb{E}[X] = \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

και

$$\text{Var}(X) = \lambda^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right].$$

Η τυπική απόκλιση είναι

$$\sigma_X = \lambda \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)}.$$



Σχήμα 2.4: Συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής Weibull για $k = 2$ και $\lambda = 2$.

Πρόταση 2.2.1 (Gupta, Zeng & Wu, 2010). Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κατανομή Weibull με παράμετρο σχήματος $k > 0$ και παράμετρο κλίμακας $\lambda > 0$, δηλαδή

$$f(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp \left[- \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k \right], \quad x > 0.$$

Αν $k = 2$, τότε

$$f(x) = \frac{2x}{\lambda^2} \exp \left[- \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2 \right], \quad x > 0,$$

οπότε η X ακολουθεί κατανομή Rayleigh με παράμετρο κλίμακας $\sigma = \lambda/\sqrt{2}$.

2.2.5 Κατανομή Pareto

Η κατανομή Pareto αποτελεί μία από τις σημαντικότερες κατανομές για τη μελέτη θετικών τυχαίων μεταβλητών με βαριά ουρά. Χρησιμοποιείται κυρίως σε περιπτώσεις όπου οι πολύ μεγάλες τιμές, παρότι εμφανίζονται πιο σπάνια, δεν είναι αμελητέες και επηρεάζουν ουσιαστικά τη συμπεριφορά του φαινομένου. Για τον λόγο αυτό βρίσκει εφαρμογές στην αναλογιστική επιστήμη, στη θεωρία κινδύνου, στην οικονομική ανάλυση και γενικότερα στη μελέτη ακραίων φαινομένων.

Οι παράμετροι της κατανομής έχουν σαφή ερμηνεία: η πρώτη παράμετρος x_m (κατώφλι, δηλαδή η ελάχιστη δυνατή τιμή της τυχαίας μεταβλητής) και η δεύτερη παράμετρος α (παράμετρος σχήματος, η οποία ελέγχει τη μορφή της ουράς της κατανομής). Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της α , τόσο ταχύτερα μειώνεται η πιθανότητα εμφάνισης πολύ μεγάλων τιμών, ενώ όσο μικρότερη είναι, τόσο πιο βαριά είναι η ουρά και τόσο πιθανότερη γίνεται

η εμφάνιση ακραίων παρατηρήσεων.

Ορισμός 2.2.5. Μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Pareto με παραμέτρους x_m και α αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}}, & x \geq x_m, \\ 0, & x < x_m. \end{cases}$$

Η συνάρτηση αθροιστικής κατανομής είναι:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha, \quad x \geq x_m.$$

Παρατήρηση 2.2.2. Η παραπάνω κατανομή είναι η κατανομή Pareto τύπου I, η οποία θα χρησιμοποιηθεί και στη συνέχεια της εργασίας.

Βασικά χαρακτηριστικά

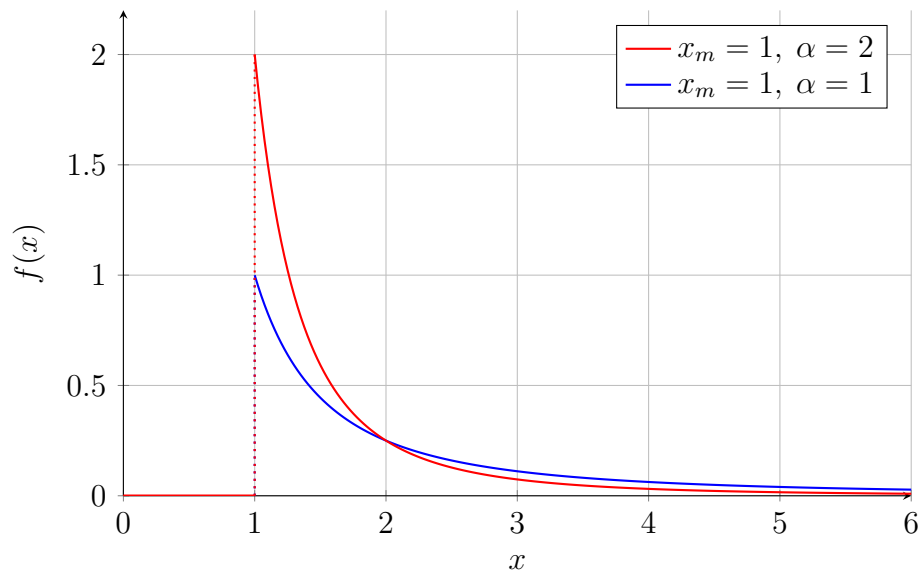
Για $X \sim \text{Pareto}(x_m, \alpha)$ ισχύουν:

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \frac{\alpha x_m}{\alpha - 1}, & \alpha > 1, \\ \infty, & \alpha \leq 1, \end{cases}$$

$$\text{Var}(X) = \begin{cases} \frac{x_m^2 \alpha}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}, & \alpha > 2, \\ \infty, & \alpha \leq 2. \end{cases}$$

Η τυπική απόκλιση είναι:

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} = \frac{x_m}{\alpha - 1} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 2}}, \quad \alpha > 2.$$



Σχήμα 2.5: Συναρτήσεις πυκνότητας της κατανομής Pareto για $x_m = 1$, $\alpha = 1$ και $\alpha = 2$.

Κεφάλαιο 3

Βαθμίδα Αποτυχίας

Η βαθμίδα αποτυχίας αποτελεί βασική έννοια της θεωρίας αξιοπιστίας και της ανάλυσης επιβίωσης, καθώς εκφράζει τον στιγμιαίο κίνδυνο αστοχίας ενός αντικειμένου ηλικίας t , δεδομένου ότι έχει επιβιώσει μέχρι τη χρονική στιγμή t . Στη διεθνή βιβλιογραφία αναφέρεται ως *failure rate* ή *hazard rate*, ενώ στα αναλογιστικά και δημογραφικά μοντέλα χρησιμοποιείται και ο όρος *force of mortality*, όπως αναφέρουν οι Barlow και Proschan (1996), οι Willmot και Lin (2001) και ο Finkelstein (2008).

Για απολύτως συνεχείς κατανομές, η βαθμίδα αποτυχίας καθορίζει πλήρως τη συνάρτηση κατανομής και τη συνάρτηση επιβίωσης. Επιπλέον, η μορφή της περιγράφει τη γήρανση του συστήματος: η αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας συνδέεται με επιδείνωση με την πάροδο του χρόνου, ενώ η φθίνουσα μπορεί να εκφράζει αρχικές αστοχίες ή επιλογή ανθεκτικότερων μονάδων, σύμφωνα με τους Marshall και Olkin (2007). Η σύνδεσή της με τη συνάρτηση επιβίωσης και τη μέση υπολειπόμενη ζωή την καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμη στη μελέτη μοντέλων αξιοπιστίας και κινδύνου, όπως επισημαίνουν οι Willmot και Lin (2011).

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται ο ορισμός και οι βασικές ιδιότητες της βαθμίδας αποτυχίας, καθώς και η μορφή της σε χαρακτηριστικές συνεχείς κατανομές, σύμφωνα με τους Barlow και Proschan (1996), τους Marshall και Olkin (2007) και τους Willmot και Lin (2011). Η ανάλυση αυτή παρέχει το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο για το Κεφάλαιο 4, όπου εξετάζονται οι μείξεις κατανομών, και για το Κεφάλαιο 5, στο οποίο μελετώνται η μονοτονία και η γενικότερη συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας των μείξεων.

3.1 Συνάρτηση Επιβίωσης και Βαθμίδα Αποτυχίας

Ορισμός 3.1.1 (Συνάρτηση Επιβίωσης). Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή που παριστά τον χρόνο ζωής μιας μονάδας ενός συστήματος ή τον χρόνο μέχρι την εμφάνιση μιας αστοχίας. Αν $F(x)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X και $f(x)$ η αντίστοιχη

πυκνότητα πιθανότητας, τότε η συνάρτηση επιβίωσης ορίζεται ως:

$$\bar{F}(x) = P(X > x) = \int_x^\infty f(t) dt, \quad x \geq 0. \quad (3.1.1)$$

Η συνάρτηση επιβίωσης εκφράζει την πιθανότητα το σύστημα να εξακολουθεί να λειτουργεί πέρα από τη χρονική στιγμή x .

Ορισμός 3.1.2 (Συνάρτηση Βαθμίδας Αποτυχίας). Υπό τις ίδιες υποθέσεις, η συνάρτηση βαθμίδας αποτυχίας (hazard rate) $h(x)$ ορίζεται ως:

$$h(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}, \quad x \geq 0. \quad (3.1.2)$$

Για μικρό $\Delta x > 0$ ισχύει

$$\mathbb{P}(x \leq X < x + \Delta x \mid X \geq x) = h(x)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \downarrow 0.$$

Επομένως, η ποσότητα $h(x)\Delta x$ προσεγγίζει την υπό συνθήκη πιθανότητα αποτυχίας στο διάστημα $[x, x + \Delta x)$.

Ισοδύναμα, η βαθμίδα αποτυχίας μπορεί να οριστεί ως:

$$h(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \varepsilon \mid X \geq x)}{\varepsilon}. \quad (3.1.3)$$

Από την ταυτότητα:

$$P(x \leq X < x + \varepsilon \mid X \geq x) = \frac{F(x + \varepsilon) - F(x)}{\bar{F}(x)},$$

προκύπτει:

$$h(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \varepsilon) - F(x)}{\varepsilon \bar{F}(x)}. \quad (3.1.4)$$

Εναλλακτικά, η βαθμίδα αποτυχίας γράφεται ως:

$$h(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\bar{F}(x + \varepsilon)}{\bar{F}(x)} \right), \quad x \geq 0. \quad (3.1.5)$$

Πρόταση 3.1.1. Έστω Y μη αρνητική απολύτως συνεχής τυχαία μεταβλητή με $\mathbb{E}(Y) < \infty$ και $h(Y) > 0$. Τότε

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty \bar{F}(y) dy = \int_0^\infty \frac{f(y)}{h(y)} dy = \mathbb{E} \left[\frac{1}{h(Y)} \right].$$

Απόδειξη. Εφόσον $Y \geq 0$ και $E(Y) < \infty$, με ολοκλήρωση κατά μέρη προκύπτει

$$E(Y) = [-y\bar{F}(y)]_0^\infty + \int_0^\infty \bar{F}(y) dy.$$

Επειδή

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y\bar{F}(y) = 0,$$

έχουμε

$$E(Y) = \int_0^\infty \bar{F}(y) dy.$$

Μέσω της σχέσης (3.1.2),

$$\bar{F}(y) = \frac{f(y)}{h(y)},$$

Συνεπώς,

$$E(Y) = \int_0^\infty \bar{F}(y) dy = \int_0^\infty \frac{f(y)}{h(y)} dy = E\left(\frac{1}{h(Y)}\right). \quad (3.1.6)$$

□

Παρατήρηση 3.1.1. Η σχέση (3.1.6) εκφράζει μια ταυτότητα μεταξύ μέσων τιμών. Δεν συνεπάγεται, ωστόσο, από μόνη της σημειακή αντίστροφη σχέση μεταξύ της διάρκειας ζωής Y και της ποσότητας $h(Y)$.

3.2 Βαθμίδα αποτυχίας συνεχών κατανομών

Στην παρούσα ενότητα υπολογίζεται η βαθμίδα αποτυχίας των συνεχών κατανομών που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2. Για κάθε κατανομή προσδιορίζονται αρχικά η συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ και η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ και, στη συνέχεια, εφαρμόζεται ο γενικός ορισμός

$$h(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)},$$

όπως δίνεται στον τύπο (3.1.2). Παράλληλα, εξετάζεται η μορφή και η μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας, ώστε να αναδειχθούν οι διαφορετικές συμπεριφορές γήρανσης που περιγράφει κάθε κατανομή. Στη συνέχεια, η μεταβλητή x αντικαθίσταται από τη μεταβλητή t , ώστε να τονίζεται ότι εκφράζει χρόνο ζωής και να διατηρείται ενιαίος συμβολισμός στη μελέτη της βαθμίδας αποτυχίας.

3.2.1 Βαθμίδα αποτυχίας της εκθετικής κατανομής

Η εκθετική κατανομή χαρακτηρίζεται από σταθερή βαθμίδα αποτυχίας, γεγονός που υποδηλώνει ότι ο κίνδυνος αστοχίας δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο. Η ιδιότητα αυτή συν-

δέεται με την έλλειψη μνήμης της κατανομής και την καθιστά κατάλληλη για τη μοντελοποίηση συστημάτων με σταθερό ρυθμό αποτυχίας, όπως ορισμένα ηλεκτρονικά εξαρτήματα.

Πρόταση 3.2.1. (Finkelstein, 2008). Η βαθμίδα αποτυχίας της εκθετικής κατανομής με παράμετρο $\lambda > 0$ είναι σταθερή και ίση με λ για κάθε $t \geq 0$.

Απόδειξη. Για $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, η συνάρτηση κατανομής προκύπτει ως:

$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Επομένως, η συνάρτηση επιβίωσης είναι:

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}.$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της βαθμίδας αποτυχίας, έχουμε:

$$h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}}, \quad t \geq 0.$$

Με απλοποίηση της παραπάνω έκφρασης προκύπτει:

$$h(t) = \lambda, \quad t \geq 0. \quad (3.2.1)$$

Το αποτέλεσμα αποδεικνύει ότι η βαθμίδα αποτυχίας της εκθετικής κατανομής είναι ανεξάρτητη του χρόνου. $\square$

3.2.2 Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής Gamma

Η κατανομή Gamma χρησιμοποιείται ευρέως σε εφαρμογές αξιοπιστίας, καθώς επιτρέπει τη μοντελοποίηση διαφορετικών μορφών βαθμίδας αποτυχίας. Όταν η παράμετρος σχήματος είναι θετικός ακέραιος, η Gamma ανάγεται στην κατανομή Erlang και μπορεί να ερμηνευθεί ως το άθροισμα ανεξάρτητων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών με κοινό ρυθμό.

Ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου σχήματος α , η βαθμίδα αποτυχίας είναι φθίνουσα για $0 < \alpha < 1$, σταθερή για $\alpha = 1$ και αύξουσα για $\alpha > 1$, όπως θα παρουσιαστεί στην Ενότητα 3.3.2.

Πρόταση 3.2.2. (Finkelstein, 2008) Η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής Gamma με πα-

ραμέτρους $\alpha > 0$ και $\lambda > 0$ δίνεται από

$$h(t) = \frac{\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\int_t^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1} e^{-\lambda s} ds}, \quad t \geq 0. \quad (3.2.2)$$

Απόδειξη. Έστω $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$, με $\alpha > 0$ και $\lambda > 0$. Η πυκνότητά της είναι

$$f(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Η συνάρτηση επιβίωσης δίνεται από

$$\bar{F}(t) = \int_t^\infty f(s) ds = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty s^{\alpha-1} e^{-\lambda s} ds.$$

Επομένως, μέσω της σχέσης (3.1.2) και απλοποιώντας τον κοινό παράγοντα, προκύπτει

$$h(t) = \frac{t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\int_t^\infty s^{\alpha-1} e^{-\lambda s} ds}, \quad t > 0.$$

□

3.2.3 Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής Erlang

Η κατανομή Erlang είναι ειδική περίπτωση της Gamma με ακέραια παράμετρο σχήματος και εκφράζει τον συνολικό χρόνο ολοκλήρωσης ενός πεπερασμένου αριθμού διαδοχικών εκθετικών σταδίων. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιείται συχνά στη θεωρία ουρών και στην αξιοπιστία για διαδικασίες που ολοκληρώνονται μετά από πεπερασμένο αριθμό φάσεων, όπως αναφέρουν ο Finkelstein (2008) και οι Willmot και Lin (2011).

Παρατήρηση 3.2.1. Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, η κατανομή Erlang αποτελεί ειδική περίπτωση της κατανομής Gamma, όταν η παράμετρος σχήματος λαμβάνει ακέραιες θετικές τιμές. Συγκεκριμένα, για $k \in \mathbb{N}^*$ και $\lambda > 0$, γράφουμε

$$X \sim \text{Erlang}(k, \lambda),$$

όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από

$$f(t) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Πρόταση 3.2.3 (Finkelstein, 2008). *Η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής Erlang με παρα-*

μέτρους $k \in \mathbb{N}^*$ και $\lambda > 0$ δίνεται από

$$h(t) = \frac{\frac{\lambda^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t}}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}, \quad t \geq 0. \quad (3.2.3)$$

Απόδειξη. Για $t \geq 0$, η συνάρτηση επιβίωσης είναι

$$\bar{F}(t) = \int_t^\infty \frac{\lambda^k}{(k-1)!} s^{k-1} e^{-\lambda s} ds.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \lambda s$, προκύπτει

$$\bar{F}(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{\lambda t}^\infty u^{k-1} e^{-u} du.$$

Για $k \in \mathbb{N}^*$, ισχύει

$$\int_{\lambda t}^\infty u^{k-1} e^{-u} du = (k-1)! e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

οπότε

$$\bar{F}(t) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (3.1.2) και απλοποιώντας τον κοινό παράγοντα $e^{-\lambda t}$, λαμβάνουμε

$$h(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)! \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^n}{n!}}, \quad t \geq 0.$$

□

3.2.4 Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής Weibull

Η κατανομή Weibull είναι ιδιαίτερα ευέλικτη, καθώς η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας εξαρτάται από την παράμετρο σχήματος α . Σύμφωνα με τους Marshall και Olkin (2007), για $\alpha > 1$ είναι αύξουσα, για $0 < \alpha < 1$ φθίνουσα, ενώ για $\alpha = 1$ γίνεται σταθερή και η κατανομή ανάγεται στην εκθετική.

Η ευελιξία αυτή επιτρέπει στη Weibull να περιγράφει διαφορετικούς μηχανισμούς φθοράς και γήρανσης, γεγονός που την καθιστά βασικό μοντέλο στην αξιοπιστία, όπως επισημαίνουν οι Barlow και Proschan (1996) και ο Finkelstein (2008).

Πρόταση 3.2.4. (Marshall & Olkin, 2007) Η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής Weibull με παραμέτρους $\alpha > 0$ και $\lambda > 0$ δίνεται από:

$$h(t) = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda} \right)^{\alpha-1}, \quad t > 0. \quad (3.2.4)$$

Απόδειξη. Για $t > 0$, η συνάρτηση κατανομής είναι

$$F(t) = \int_0^t \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{s}{\lambda} \right)^{\alpha-1} \exp \left[- \left(\frac{s}{\lambda} \right)^\alpha \right] ds.$$

Θέτοντας

$$u = \left(\frac{s}{\lambda} \right)^\alpha, \quad du = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{s}{\lambda} \right)^{\alpha-1} ds,$$

προκύπτει

$$F(t) = \int_0^{(t/\lambda)^\alpha} e^{-u} du = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\lambda} \right)^\alpha \right].$$

Επομένως, η συνάρτηση επιβίωσης είναι

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t) = \exp \left[- \left(\frac{t}{\lambda} \right)^\alpha \right].$$

Μέσω της σχέσης (3.1.2), λαμβάνουμε

$$h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{\frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda} \right)^{\alpha-1} \exp \left[- \left(\frac{t}{\lambda} \right)^\alpha \right]}{\exp \left[- \left(\frac{t}{\lambda} \right)^\alpha \right]} = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda} \right)^{\alpha-1}.$$

□

3.2.5 Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής Pareto

Η κατανομή Pareto αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα κατανομής με φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας. Αυτό σημαίνει ότι, όσο αυξάνεται η ηλικία ενός στοιχείου που έχει επιβιώσει μέχρι τη χρονική στιγμή t , ο στιγμιαίος κίνδυνος αστοχίας του μειώνεται. Η ιδιότητα αυτή συνδέεται με τη βαριά δεξιά ουρά της κατανομής και καθιστά την Pareto ιδιαίτερα χρήσιμη στη θεωρία αξιοπιστίας και στην ανάλυση κινδύνου, όταν επιδιώκεται η περιγραφή φαινομένων με decreasing hazard rate (Marshall & Olkin, 2007).

Παρατήρηση 3.2.2. Υπενθυμίζουμε από το Κεφάλαιο 2 ότι η κατανομή Pareto με παραμέτρους $x_m > 0$ και $\alpha > 0$, που συμβολίζεται με

$$X \sim \text{Pareto}(x_m, \alpha),$$

έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\alpha x_m^\alpha}{t^{\alpha+1}}, & t \geq x_m, \\ 0, & t < x_m. \end{cases}$$

Πρόταση 3.2.5. Η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής Pareto με παραμέτρους $x_m > 0$ και $\alpha > 0$ δίνεται από:

$$h(t) = \frac{\alpha}{t}, \quad t \geq x_m. \quad (3.2.5)$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε από τον υπολογισμό της συνάρτησης επιβίωσης:

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t) = \left(\frac{x_m}{t}\right)^\alpha, \quad t \geq x_m.$$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό της βαθμίδας αποτυχίας, για $t \geq x_m$ έχουμε:

$$h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{\frac{\alpha x_m^\alpha}{t^{\alpha+1}}}{\left(\frac{x_m}{t}\right)^\alpha}.$$

Απλοποιώντας τον παραπάνω λόγο:

$$h(t) = \alpha \frac{x_m^\alpha}{t^{\alpha+1}} \cdot \frac{t^\alpha}{x_m^\alpha} = \frac{\alpha}{t}, \quad t \geq x_m.$$

□

3.3 Μονοτονία Βαθμίδας Αποτυχίας Συνεχών Κατανομών

Στην Ενότητα 3.2 υπολογίστηκε η βαθμίδα αποτυχίας για βασικές συνεχείς κατανομές. Στην παρούσα ενότητα εξετάζεται η μονοτονία της, ώστε να διαπιστωθεί αν ο κίνδυνος αστοχίας αυξάνεται, μειώνεται ή παραμένει σταθερός με την πάροδο του χρόνου. Η μορφή αυτή συνδέεται άμεσα με τη γήρανση και την αξιοπιστία ενός συστήματος, όπως επισημαίνουν οι Barlow και Proschan (1996) και ο Finkelstein (2008).

Σκοπός της ενότητας είναι η παρουσίαση των βασικών κατηγοριών μονοτονίας. Η ανάλυση αυτή θα αποτελέσει τη βάση για το Κεφάλαιο 4, όπου θα μελετηθούν οι μείξεις κατανομών και θα συγκριθεί η συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας της μείξης με εκείνη των επιμέρους κατανομών, σύμφωνα με τη σχετική προσέγγιση των Marshall και Olkin (2007).

Ορισμός 3.3.1. Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση βαθμίδας αποτυχίας $h(t)$.

Ανάλογα με τη μονοτονία της $h(t)$, οι κατανομές ταξινομούνται στις ακόλουθες κατηγορίες:

- **IFR (Increasing Failure Rate):** Η κατανομή ανήκει στην κατηγορία IFR εάν η βαθμίδα αποτυχίας $h(t)$ είναι μη φθίνουσα συνάρτηση του t . Η ιδιότητα αυτή υποδηλώνει θετική γήρανση του συστήματος, καθώς ο στιγμιαίος ρυθμός αποτυχίας αυξάνεται με τον χρόνο λειτουργίας.
- **DFR (Decreasing Failure Rate):** Η κατανομή ανήκει στην κατηγορία DFR εάν η βαθμίδα αποτυχίας $h(t)$ είναι μη αύξουσα συνάρτηση του t . Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε αρνητική γήρανση, όπου η πιθανότητα άμεσης αποτυχίας μειώνεται όσο το σύστημα συνεχίζει να λειτουργεί.
- **CFR (Constant Failure Rate):** Η κατανομή ανήκει στην κατηγορία CFR εάν η βαθμίδα αποτυχίας $h(t)$ είναι σταθερή ως προς τον χρόνο. Στην περίπτωση αυτή, η πιθανότητα αποτυχίας είναι ανεξάρτητη του χρόνου λειτουργίας και δεν παρατηρούνται φαινόμενα γήρανσης.
- **BFR (Bathtub Failure Rate):** Η κατανομή ανήκει στην κατηγορία BFR όταν η βαθμίδα αποτυχίας $h(t)$ παρουσιάζει **λεκανοειδή μορφή**. Ειδικότερα, η $h(t)$ αρχικά μειώνεται, στη συνέχεια παραμένει περίπου σταθερή και, τελικά, αυξάνεται. Η συμπεριφορά αυτή περιγράφει συστήματα στα οποία εμφανίζονται αρχικές αστοχίες, ακολουθεί μια περίοδος κανονικής λειτουργίας και, στο τέλος, παρατηρείται γήρανση ή φθορά.
- **UBFR (Upside-down Bathtub Failure Rate):** Η κατανομή ανήκει στην κατηγορία UBFR όταν η βαθμίδα αποτυχίας $h(t)$ παρουσιάζει **ανεστραμμένη λεκανοειδή μορφή**. Δηλαδή, η $h(t)$ αρχικά αυξάνεται και στη συνέχεια μειώνεται. Η περίπτωση αυτή περιγράφει φαινόμενα στα οποία η πιθανότητα άμεσης αποτυχίας αυξάνεται κατά τα πρώτα στάδια λειτουργίας, αλλά μειώνεται μετά την πάροδο ενός κρίσιμου χρονικού σημείου.

Παρατήρηση 3.3.1. Οι μορφές βαθμίδας αποτυχίας bathtub και upside-down bathtub θα μελετηθούν αναλυτικότερα στην Ενότητα 5.1.

3.3.1 Μονοτονία βαθμίδας αποτυχίας της εκθετικής

Αρχίζοντας από την εκθετική κατανομή, η οποία αποτελεί τη βασική περίπτωση σταθερής βαθμίδας αποτυχίας, εξετάζουμε τη μονοτονία της συνάρτησης που υπολογίστηκε στην Ενότητα 3.2.1.

Πρόταση 3.3.1. *Η εκθετική κατανομή έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας και ανήκει στην κατηγορία CFR. Με τους μη αυστηρούς ορισμούς των κλάσεων γήρανσης, ανήκει επίσης στις κλάσεις IFR και DFR.*

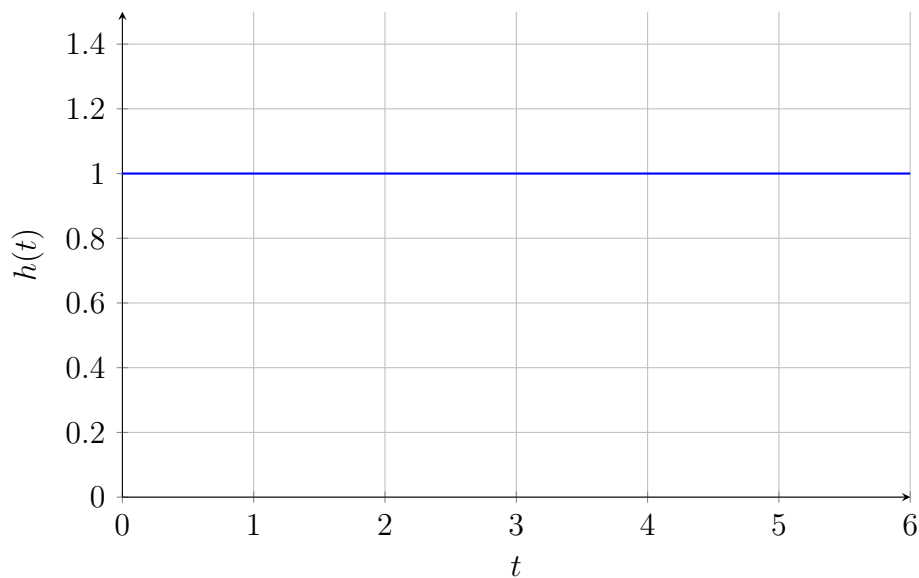
Απόδειξη. Από τη σχέση (3.2.1) ισχύει

$$h(t) = \lambda, \quad t \geq 0.$$

Επομένως,

$$h'(t) = 0. \quad (3.3.1)$$

Άρα, η βαθμίδα αποτυχίας είναι σταθερή. Ως σταθερή συνάρτηση είναι ταυτόχρονα μη φθίνουσα και μη αύξουσα. $\square$



Σχήμα 3.1: Συνάρτηση της βαθμίδας αποτυχίας για Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1$

Παρατήρηση 3.3.2. Η σταθερή βαθμίδα αποτυχίας της εκθετικής κατανομής σημαίνει ότι ο υπό συνθήκη στιγμιαίος ρυθμός αποτυχίας δεν εξαρτάται από την ηλικία του συστήματος. Αυτό δεν σημαίνει ότι η συνολική πιθανότητα αποτυχίας $F(t)$ είναι ανεξάρτητη από τον χρόνο, καθώς η $F(t)$ αυξάνεται με το t .

3.3.2 Μονοτονία βαθμίδας αποτυχίας της Gamma

Η μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας της Gamma εξαρτάται από την παράμετρο σχήματος α . Όπως αναφέρουν οι Marshall και Olkin (2007), είναι αύξουσα για $\alpha > 1$, στα-

θερή για $\alpha = 1$ και φθίνουσα για $0 < \alpha < 1$, αποτέλεσμα που παρουσιάζεται και από τον Finkelstein (2008).

Ορισμός 3.3.2. Έστω $f : I \rightarrow (0, \infty)$ μια θετική συνάρτηση σε ένα διάστημα I .

Η f λέγεται *log-concave*, αν η συνάρτηση $\log f(x)$ είναι κοίλη, ενώ λέγεται *log-convex*, αν η $\log f(x)$ είναι κυρτή.

$$(\log f(x))'' \leq 0 \quad \text{για log-concave}, \quad (\log f(x))'' \geq 0 \quad \text{για log-convex}.$$

Για $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$, η βαθμίδα αποτυχίας δίνεται από τη σχέση (3.2.2). Για τη μελέτη της μονοτονίας της θα χρησιμοποιηθεί αρχικά το ακόλουθο βασικό αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.3.2. (Marshall & Olkin, 2007):

$$\text{αν } f \text{ είναι log-concave} \quad \Rightarrow \quad h(t) \text{ είναι αύξουσα (IFR),}$$

$$\text{αν } f \text{ είναι log-convex} \quad \Rightarrow \quad h(t) \text{ είναι φθίνουσα (DFR).}$$

Πρόταση 3.3.3. Η μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας της κατανομής Γάμμα καθορίζεται από την παράμετρο α ως εξής:

- αν $0 < \alpha < 1$, τότε η $h(t)$ είναι **φθίνουσα** (DFR),
- αν $\alpha = 1$, τότε η $h(t)$ είναι **σταθερή** και $h(t) = \lambda$ (CFR),
- αν $\alpha > 1$, τότε η $h(t)$ είναι **αύξουσα** (IFR).

Απόδειξη. Η λογαριθμική πυκνότητα της κατανομής Gamma είναι

$$\ell(t) = \log f(t) = \log \left(\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) + (\alpha - 1) \log t - \lambda t, \quad t > 0.$$

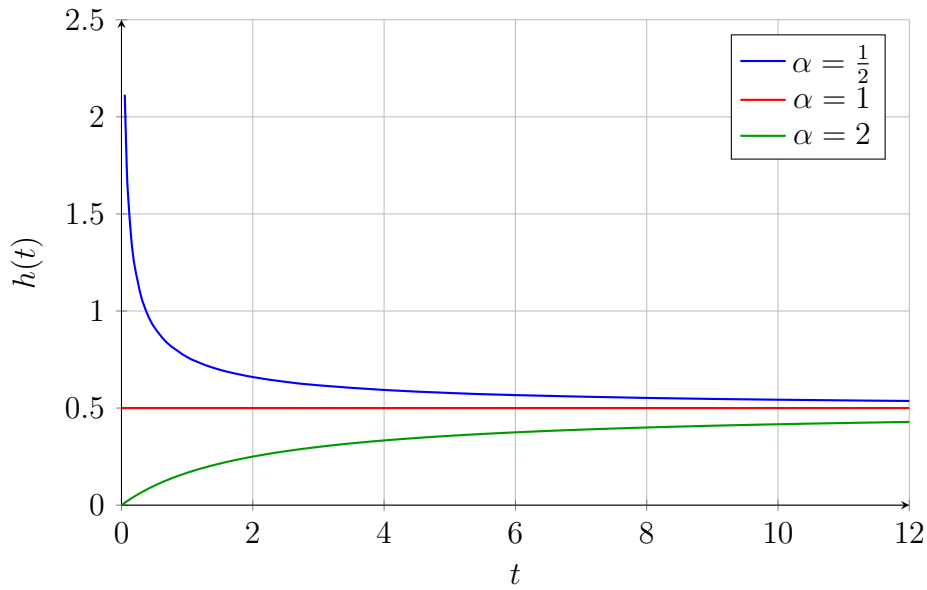
Παραγωγίζοντας δύο φορές, προκύπτει

$$\ell''(t) = -\frac{\alpha - 1}{t^2}, \quad t > 0. \quad (3.3.2)$$

Αν $\alpha > 1$, τότε $\ell''(t) < 0$, οπότε η f είναι log-concave. Επομένως, από την Πρόταση 3.3.2, η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα και η κατανομή είναι IFR.

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\ell''(t) > 0$, οπότε η f είναι log-convex. Άρα, από την Πρόταση 3.3.2, η βαθμίδα αποτυχίας είναι φθίνουσα και η κατανομή είναι DFR.

Τέλος, για $\alpha = 1$, η κατανομή Gamma ανάγεται στην εκθετική και $h(t) = \lambda$. Συνεπώς, η βαθμίδα αποτυχίας είναι σταθερή και η κατανομή είναι CFR. $\square$



Σχήμα 3.2: Συνάρτηση της βαθμίδας αποτυχίας για κατανομή Gamma με παραμέτρους $\lambda = \frac{1}{2}$ και $\alpha = \frac{1}{2}, 1, 2$

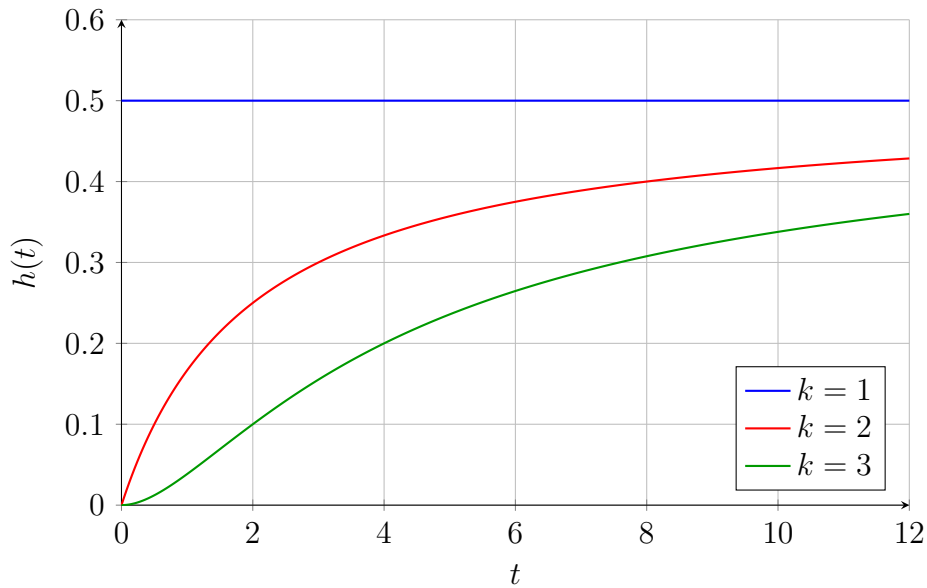
Παρατήρηση 3.3.3. Η παράμετρος σχήματος α συνδέει τη μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας με τη φυσική συμπεριφορά του συστήματος. Για $0 < \alpha < 1$ κυριαρχούν οι πρώιμες αστοχίες, για $\alpha = 1$ δεν παρατηρείται γήρανση, ενώ για $\alpha > 1$ η αύξηση του κινδύνου εκφράζει φθορά με την πάροδο του χρόνου.

3.3.3 Μονοτονία βαθμίδας αποτυχίας της Erlang

Η κατανομή Erlang είναι ειδική περίπτωση της Gamma με ακέραια παράμετρο σχήματος. Επομένως, για $k > 1$ έχει αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας και ανήκει στην κλάση IFR, όπως αναφέρουν οι Gupta, Zeng και Wu (2010) και οι Willmot και Lin (2001).

Πρόταση 3.3.4. *Η μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας της κατανομής Erlang είναι αύξουσα για κάθε $k > 1$ και σταθερή για $k = 1$.*

Απόδειξη. Η κατανομή Erlang αποτελεί ειδική περίπτωση της κατανομής Gamma, όταν η παράμετρος σχήματος λαμβάνει ακέραιες τιμές, δηλαδή $\alpha = k$, με $k \in \mathbb{N}^*$. Επομένως, η μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας της προκύπτει άμεσα από το αντίστοιχο αποτέλεσμα για την Gamma: για $k > 1$ είναι αύξουσα, ενώ για $k = 1$ η Erlang ανάγεται στην εκθετική κατανομή και η βαθμίδα αποτυχίας είναι σταθερή. $\square$



Σχήμα 3.3: Συναρτήσεις βαθμίδας αποτυχίας για κατανομή Erlang με παραμέτρους $\lambda = \frac{1}{2}$ και $k = 1, 2, 3$.

Παρατήρηση 3.3.4. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3, για $k = 1$ η βαθμίδα αποτυχίας είναι σταθερή και ίση με λ , ενώ για $k = 2$ και $k = 3$ είναι αύξουσα και συγκλίνει ασυμπτωτικά προς την τιμή λ . Για σταθερό λ , όσο αυξάνεται το k , η βαθμίδα αποτυχίας παραμένει για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα σε χαμηλότερες τιμές πριν προσεγγίσει το όριο λ .

3.3.4 Μονοτονία βαθμίδας αποτυχίας της Weibull

Η κατανομή Weibull αποτελεί ένα από τα πλέον ευέλικτα μοντέλα χρόνου ζωής, καθώς μπορεί να παρουσιάσει αυξανόμενη, φθίνουσα ή σταθερή βαθμίδα αποτυχίας, ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου σχήματος.

Πρόταση 3.3.5. Η μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας της κατανομής Weibull καθορίζεται από την παράμετρο σχήματος α ως εξής:

- αν $0 < \alpha < 1$, τότε η $h(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα,
- αν $\alpha = 1$, τότε η $h(t)$ είναι σταθερή,
- αν $\alpha > 1$, τότε η $h(t)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Απόδειξη. Από τη σχέση (3.2.4) έχουμε

$$h(t) = \frac{\alpha}{\lambda^\alpha} t^{\alpha-1}, \quad t > 0.$$

Παραγωγίζοντας,

$$h'(t) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\lambda^\alpha} t^{\alpha-2}, \quad t > 0. \quad (3.3.3)$$

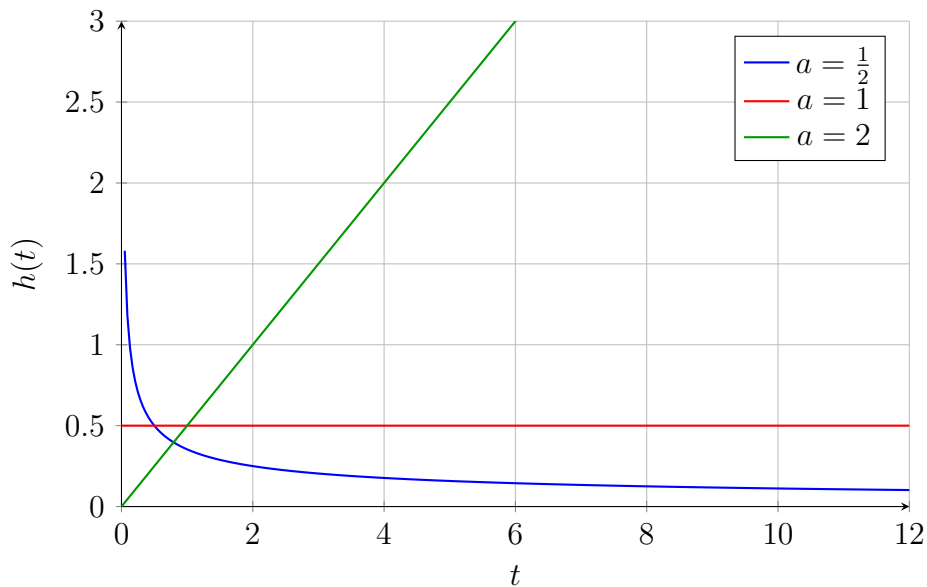
Επειδή $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ και $t > 0$, το πρόσημο της $h'(t)$ καθορίζεται αποκλειστικά από το $\alpha - 1$. Επομένως:

- αν $0 < \alpha < 1$, τότε $h'(t) < 0$,
- αν $\alpha = 1$, τότε

$$h(t) = \frac{1}{\lambda},$$

- αν $\alpha > 1$, τότε $h'(t) > 0$.

□



Σχήμα 3.4: Συνάρτηση της βαθμίδας αποτυχίας για κατανομή Weibull με παραμέτρους $\lambda = 2$ και $a = \frac{1}{2}, 1, 2$.

Παρατήρηση 3.3.5. Το σχήμα επιβεβαιώνει ότι η παράμετρος α καθορίζει τη μορφή της βαθμίδας αποτυχίας: για $0 < \alpha < 1$ είναι φθίνουσα, για $\alpha = 1$ σταθερή και για $\alpha > 1$ αύξουσα.

3.3.5 Μονοτονία βαθμίδας αποτυχίας της Pareto

Η κατανομή Pareto χαρακτηρίζεται από βαριά ουρά και χρησιμοποιείται για την περιγραφή φαινομένων όπου εμφανίζονται μεγάλες τιμές με μη αμελητέα πιθανότητα. Για

την Pareto τύπου I, με $x_m > 0$ και $\alpha > 0$, η βαθμίδα αποτυχίας δίνεται από

$$h(t) = \frac{\alpha}{t}, \quad t \geq x_m.$$

Πρόταση 3.3.6. Η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής Pareto τύπου I είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $\alpha > 0$.

Απόδειξη. Για $t > x_m$, παραγωγίζοντας τη βαθμίδα αποτυχίας

$$h(t) = \frac{\alpha}{t},$$

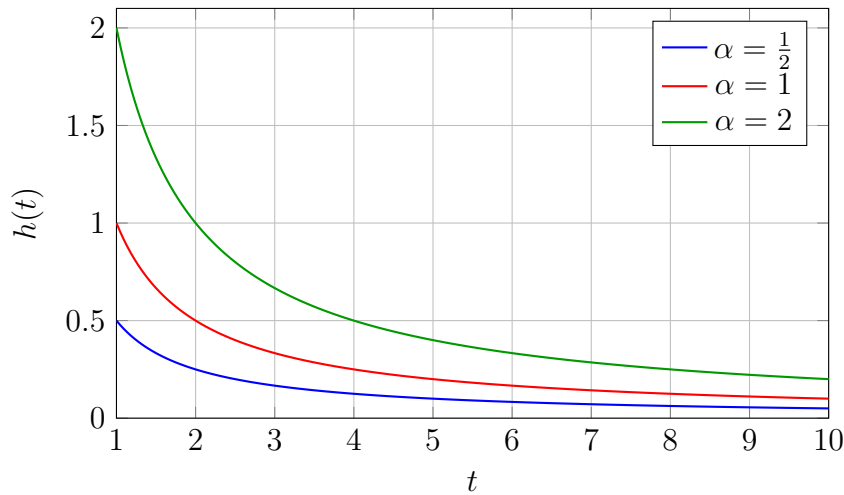
προκύπτει

$$h'(t) = -\frac{\alpha}{t^2}. \quad (3.3.4)$$

Επειδή $\alpha > 0$ και $t^2 > 0$, ισχύει

$$h'(t) < 0, \quad t > x_m.$$

Επομένως, η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής Pareto είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_m, \infty)$ και η κατανομή ανήκει στην κλάση DFR. $\square$



Σχήμα 3.5: Βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής Pareto για $x_m = 1$ και διαφορετικές τιμές της α .

3.3.6 Σύνοψη Μονοτονίας Βασικών Συνεχών Κατανομών

Στην Ενότητα 3.2 υπολογίστηκαν οι βαθμίδες αποτυχίας των βασικών συνεχών κατανομών, ενώ στην Ενότητα 3.3 μελετήθηκε η μονοτονία τους. Από την ανάλυση προέκυψε

ότι η συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας εξαρτάται συχνά από τις παραμέτρους της εκάστοτε κατανομής και μπορεί να είναι αύξουσα, φθίνουσα ή σταθερή. Ο ακόλουθος πίνακας συνοψίζει τα βασικά αυτά αποτελέσματα και διευκολύνει τη σύγκρισή τους.

Κατανομή	Βαθμίδα αποτυχίας $h(t)$	Μονοτονία
Εκθετική	$h(t) = \lambda$	Σταθερή (CFR)
Gamma	$h(t) = \frac{t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\int_t^{\infty} s^{\alpha-1} e^{-\lambda s} ds}$	$0 < \alpha < 1$: φθίνουσα (DFR) $\alpha = 1$: σταθερή (CFR) $\alpha > 1$: αύξουσα (IFR)
Erlang	$h(t) = \frac{\frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}}$	$k = 1$: σταθερή (CFR) $k > 1$: αύξουσα (IFR)
Weibull	$h(t) = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda} \right)^{\alpha-1}$	$0 < \alpha < 1$: φθίνουσα (DFR) $\alpha = 1$: σταθερή (CFR) $\alpha > 1$: αύξουσα (IFR)
Pareto	$h(t) = \frac{\alpha}{t}, \quad t \geq x_m$	Γνησίως φθίνουσα (DFR)

Πίνακας 3.1: Βαθμίδα αποτυχίας και μονοτονία των κατανομών του Κεφαλαίου 3.

Τίθεται, όμως, το ερώτημα αν οι ίδιες ιδιότητες διατηρούνται όταν οι επιμέρους κατανομές συνδυάζονται σε μία μείξη. Το ζήτημα αυτό εξετάζεται στο Κεφάλαιο 4, όπου παρουσιάζονται οι μείξεις κατανομών, και αναλύεται περαιτέρω στο Κεφάλαιο 5, όπου μελετώνται η μονοτονία και η γενικότερη συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας των μείξεων.

Κεφάλαιο 4

Μείξεις Κατανομών

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήθηκαν βασικές κατανομές χρόνου ζωής και οι αντίστοιχες βαθμίδες αποτυχίας τους. Στο παρόν κεφάλαιο εισάγεται η έννοια της μείξης κατανομών, η οποία χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση ετερογενών πληθυσμών και σύνθετων φαινομένων.

Σύμφωνα με τους Marshall και Olkin (2007), μια μείξη προκύπτει όταν μια τυχαία μεταβλητή μπορεί να προέρχεται από διαφορετικές κατανομές, καθεμία από τις οποίες συμμετέχει με συγκεκριμένο βάρος. Οι μείξεις διακρίνονται σε διακριτές, όταν οι συνιστώσες συνδυάζονται με σταθερές πιθανότητες, και σε συνεχείς, όταν η μείξη πραγματοποιείται ως προς μια παράμετρο που ακολουθεί κάποια κατανομή. Η προσέγγιση αυτή επιτρέπει την περιγραφή λανθανουσών ομάδων και ετερογένειας, όπως επισημαίνουν οι Peel και McLachlan (2000).

Στη θεωρία αξιοπιστίας και στην ανάλυση επιβίωσης, οι μείξεις είναι ιδιαίτερα σημαντικές, καθώς η συνολική βαθμίδα αποτυχίας μπορεί να διαφέρει από εκείνες των επιμέρους συνιστωσών. Οι Barlow και Proschan (1996) και ο Finkelstein (2008) τονίζουν τη χρησιμότητά τους στη μοντελοποίηση πληθυσμών με διαφορετικά επίπεδα κινδύνου.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται η γενική μορφή των μείξεων και χαρακτηριστικά παραδείγματα με εκθετικές, Gamma, Erlang, Weibull και Pareto κατανομές.

4.1 Μείξεις κατανομών

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ο βασικός μαθηματικός ορισμός των μείξεων κατανομών και οι κύριες ιδιότητές τους. Αρχικά διακρίνεται η διακριτή από τη συνεχή περίπτωση, ενώ στη συνέχεια εξετάζεται η ερμηνεία της μείξης μέσω υπό συνθήκη κατανομών, καθώς και βασικές σχέσεις για τη συνάρτηση κατανομής, την πυκνότητα, τη μέση τιμή και τη διασπορά.

4.1.1 Μείξη Κατανομών και Βασικές Ιδιότητες

Ορισμός 4.1.1. (Πολίτης, 2012). Έστω τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots$ με συναρτήσεις κατανομής $F_1, F_2, \dots$, και έστω μη αρνητικοί αριθμοί $p_1, p_2, \dots$ τέτοιοι ώστε

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ορίζει μία διακριτή μείξη κατανομής. Οι ποσότητες p_i ονομάζονται βάρη μείξης.

Ορισμός 4.1.2. (Πολίτης, 2012). Έστω οικογένεια κατανομών $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$, όπου θ είναι παράμετρος που παίρνει τιμές σε σύνολο Θ , και έστω G μία κατανομή πάνω στο Θ . Τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\Theta} F_\theta(x) dG(\theta), \quad x \in \mathbb{R},$$

ονομάζεται συνεχής μείξη κατανομή.

Παρατήρηση 4.1.1. Αν η κατανομή G διαθέτει πυκνότητα $g(\theta)$, τότε ο παραπάνω ορισμός γράφεται ως

$$F(x) = \int_{\Theta} F_\theta(x) g(\theta) d\theta.$$

Αντίστοιχα, όταν υπάρχουν πυκνότητες, η πυκνότητα της μείξης δίνεται από

$$f(x) = \int_{\Theta} f_\theta(x) dG(\theta),$$

ή ισοδύναμα

$$f(x) = \int_{\Theta} f_\theta(x) g(\theta) d\theta.$$

Στη διακριτή περίπτωση ισχύει

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i f_i(x).$$

Πρόταση 4.1.1. (Marshall & Olkin, 2007) Κάθε διακριτή ή συνεχής μείξη συναρτήσεων κατανομής είναι και πάλι έγκυρη συνάρτηση κατανομής.

Απόδειξη. Αν

$$F(x) = \sum_{i=1}^n p_i F_i(x), \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1,$$

ή γενικότερα

$$F(x) = \int_{\Theta} F_{\theta}(x) dG(\theta),$$

τότε η F είναι μη φθίνουσα και δεξιά συνεχής, αφού προκύπτει ως κυρτός συνδυασμός ή ως ολοκλήρωμα συναρτήσεων κατανομής. Επιπλέον,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Άρα η F είναι συνάρτηση κατανομής. $\square$

Παρατήρηση 4.1.2. Οι μείξεις κατανομών επεκτείνουν τις κλασικές παραμετρικές οικογένειες και παρέχουν μεγαλύτερη ευελιξία στη στατιστική μοντελοποίηση, ιδίως όταν τα δεδομένα εμφανίζουν ασυμμετρία, βαριές ουρές ή ετερογένεια (Peel & McLachlan, 2000).

Ορισμός 4.1.3. (Οριακή κατανομή) Έστω Θ μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή G . Αν, για κάθε τιμή $\Theta = \theta$, η X έχει κατανομή F_{θ} , δηλαδή

$$X \mid \Theta = \theta \sim F_{\theta},$$

τότε η συνολική κατανομή της X ονομάζεται *οριακή κατανομή* και δίνεται από

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{\Theta} F_{X|\Theta}(x \mid \theta) dG(\theta).$$

Πρόταση 4.1.2. (Ross, 2014). Έστω ότι για κάθε θ , η δεσμευμένη κατανομή $X \mid \Theta = \theta$ είναι απολύτως συνεχής με πυκνότητα $f_{X|\Theta}(x \mid \theta)$. Τότε και η οριακή κατανομή της X είναι απολύτως συνεχής, με πυκνότητα

$$f_X(x) = \int_{\Theta} f_{X|\Theta}(x \mid \theta) dG(\theta).$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της οριακής κατανομής έχουμε

$$F_X(x) = \int_{\Theta} F_{X|\Theta}(x \mid \theta) dG(\theta).$$

Εφόσον για κάθε θ υπάρχει πυκνότητα $f_{X|\Theta}(x \mid \theta)$, παραγωγίζουμε ως προς x και λαμβάνουμε

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \int_{\Theta} f_{X|\Theta}(x \mid \theta) dG(\theta).$$

Άρα η οριακή πυκνότητα της X είναι ο σταθμισμένος μέσος των δεσμευμένων πυκνοτήτων ως προς την κατανομή της Θ . $\square$

Παρατήρηση 4.1.3. Η παραπάνω σχέση εκφράζει το γεγονός ότι η μείξη της κατανομής

προκύπτει ως οριακή κατανομή μιας υπό συνθήκη οικογένειας κατανομών, όταν η παράμετρος είναι και αυτή τυχαία.

Πρόταση 4.1.3. (Ross, 2014). Αν $X \mid \Theta = \theta$ έχει πεπερασμένη μέση τιμή για σχεδόν κάθε θ , τότε

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Theta} \mathbb{E}[X \mid \Theta = \theta] dG(\theta).$$

Στη διακριτή περίπτωση ισχύει

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \mathbb{E}[X_i].$$

Πρόταση 4.1.4. (Ross, 2014). Αν οι σχετικές ποσότητες υπάρχουν, τότε

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[\text{Var}(X \mid \Theta)] + \text{Var}(\mathbb{E}[X \mid \Theta]).$$

Παρατήρηση 4.1.4. Η διασπορά μιας μείξης αναλύεται σε δύο όρους: τον μέσο όρο των υπό συνθήκη διασπορών και τη διασπορά των υπό συνθήκη μέσων τιμών. Αυτό αναδεικνύει τον ρόλο της ετερογένειας στη συνολική μεταβλητότητα.

Πρόταση 4.1.5. (Marshall & Olkin, 2007) Κάθε μείξη κατανομής μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμα:

1. ως σταθμισμένος συνδυασμός επιμέρους κατανομών,
2. ως η οριακή κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής X , όταν η κατανομή της υπό συνθήκη ως προς μια τυχαία παράμετρο Θ δίνεται από μια οικογένεια κατανομών F_{θ} , ενώ η Θ ακολουθεί κάποια κατανομή μείξης G .

4.2 Μείξεις Συνεχών Κατανομών

Στην παρούσα ενότητα εξετάζονται μείξεις συνεχών κατανομών, στις οποίες η συνολική κατανομή προκύπτει ως συνδυασμός επιμέρους συνεχών κατανομών με κατάλληλα βάρη. Οι Barlow και Proschan (1996) και οι Marshall και Olkin (2007) τονίζουν τη χρησιμότητά τους στη μοντελοποίηση ετερογενών πληθυσμών και διαφορετικών επιπέδων κινδύνου.

Η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης μπορεί να παρουσιάζει πιο σύνθετη συμπεριφορά από τις βαθμίδες των επιμέρους συνιστωσών. Στη συνέχεια θα μελετηθούν μείξεις εκθετικών, Gamma, Erlang, Weibull και Pareto κατανομών και θα παρουσιαστούν σχετικά παραδείγματα. Ιδιαίτερα, οι Willmot και Woo (2007) και οι Willmot και Lin (2011) εξε-

τάζουν μείξεις Erlang, ενώ οι Jiang και Murthy (1998) μελετούν τη συμπεριφορά μείξεων Weibull.

4.2.1 Μείξεις Κατανομών της Εκθετικής

Η εκθετική κατανομή χρησιμοποιείται στη θεωρία αξιοπιστίας και στην ανάλυση χρόνων ζωής, κυρίως λόγω της ιδιότητας έλλειψης μνήμης και της σταθερής βαθμίδας αποτυχίας. Ωστόσο, ένα απλό εκθετικό μοντέλο δεν περιγράφει πάντα επαρκώς την ετερογένεια ενός πληθυσμού, όπως αναφέρεται στα Barlow and Proschan (1996), Marshall and Olkin (2007) και Gupta, Zeng and Wu (2010). Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούνται μείξεις εκθετικών κατανομών, οι οποίες προσφέρουν μεγαλύτερη ευελιξία στη μοντελοποίηση.

Ορισμός 4.2.1. (Willmot & Lin, 2001). Έστω τυχαίες μεταβλητές $X_j \sim \text{Exp}(\lambda_j)$, $j = 1, 2, \dots$, και βάρη $p_j > 0$, με

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1.$$

Η τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι ακολουθεί διακριτή μείξη εκθετικών κατανομών, αν η πυκνότητά της γράφεται ως

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \lambda_j e^{-\lambda_j t}, \quad t > 0.$$

Πρόταση 4.2.1. Έστω διακριτή μείξη εκθετικών κατανομών με

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Τότε

$$\bar{F}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i e^{-\lambda_i t},$$

και

$$h(t) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}}{\sum_{i=1}^{\infty} p_i e^{-\lambda_i t}}, \quad t \geq 0.$$

Απόδειξη. Για κάθε συνιστώσα ισχύει

$$\bar{F}_i(t) = e^{-\lambda_i t}.$$

Άρα

$$\bar{F}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \bar{F}_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i e^{-\lambda_i t}.$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει από

$$h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}.$$

□

Παράδειγμα 4.2.1. Στους Willmot & Woo (2007) δίνεται η μείξη δύο εκθετικών κατανομών

$$f(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} e^{-t/2} + \frac{2}{3} \cdot 2e^{-2t}, \quad t > 0.$$

Η συνάρτηση επιβίωσης είναι

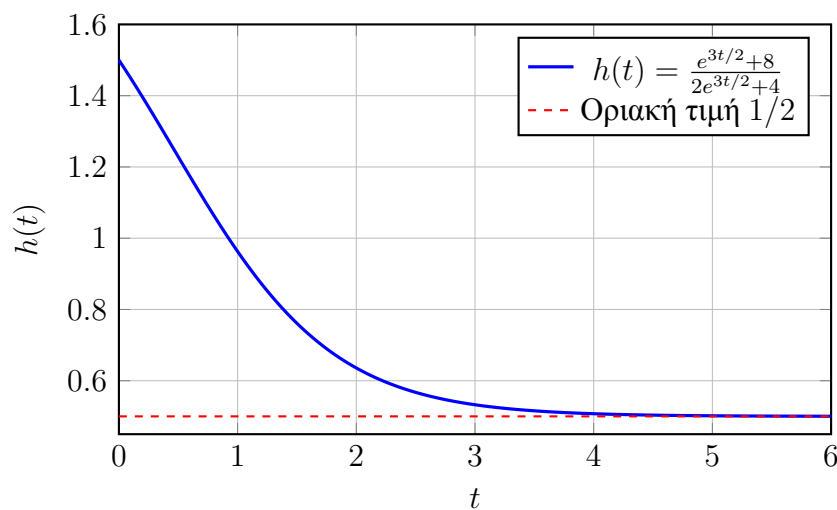
$$\bar{F}(t) = \frac{1}{3} e^{-t/2} + \frac{2}{3} e^{-2t}.$$

Άρα η βαθμίδα αποτυχίας γράφεται

$$h(t) = \frac{\frac{1}{6} e^{-t/2} + \frac{4}{3} e^{-2t}}{\frac{1}{3} e^{-t/2} + \frac{2}{3} e^{-2t}} = \frac{e^{3t/2} + 8}{2e^{3t/2} + 4}.$$

Η συνάρτηση αυτή είναι φθίνουσα, αφού

$$h'(t) = -\frac{18e^{3t/2}}{(2e^{3t/2} + 4)^2} < 0.$$



Σχήμα 4.1: Φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας για τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών

4.2.2 Μείξεις Κατανομών της Gamma

Οι μείξεις Gamma κατανομών αποτελούν ευέλικτα μοντέλα για την περιγραφή δεδομένων με ετερογένεια και διαφορετικά επίπεδα μεταβλητότητας. Σύμφωνα με τους Marshall & Olkin (2007), προκύπτουν ως σταθμισμένοι συνδυασμοί επιμέρους κατανομών και χρησιμοποιούνται συχνά στην ανάλυση χρόνων ζωής, στην αναλογιστική επιστήμη και στη θεωρία κινδύνου.

Ορισμός 4.2.2. (Marshall & Olkin, 2007) Έστω τυχαίες μεταβλητές

$$X_j \sim \Gamma(\alpha_j, \beta_j), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

όπου $\alpha_j > 0$, $\beta_j > 0$, και έστω βάρη

$$p_j > 0, \quad \sum_{j=1}^n p_j = 1.$$

Η τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι ακολουθεί μείξη Gamma κατανομών, αν η συνάρτηση πυκνότητάς της γράφεται ως

$$f(t) = \sum_{j=1}^n p_j f_j(t), \quad t > 0,$$

όπου

$$f_j(t) = \frac{\beta_j^{\alpha_j}}{\Gamma(\alpha_j)} t^{\alpha_j-1} e^{-\beta_j t}, \quad t > 0.$$

Δηλαδή, η κατανομή του X προκύπτει ως σταθμισμένος συνδυασμός επιμέρους Gamma κατανομών, με τα βάρη p_j να εκφράζουν τη συμμετοχή κάθε συνιστώσας στη συνολική μείξη.

Πρόταση 4.2.2. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί μείξη κατανομών Gamma με πυκνότητα

$$f(t) = \sum_{i=1}^n p_i f_i(t),$$

και συνάρτηση επιβίωσης

$$\bar{F}(t) = \sum_{i=1}^n p_i \bar{F}_i(t).$$

Τότε η βαθμίδα αποτυχίας της μείζης δίνεται από

$$h(t) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i f_i(t)}{\sum_{i=1}^n p_i \bar{F}_i(t)}, \quad t > 0.$$

Απόδειξη. Από τον τύπο (3.1.2) και επειδή

$$f(t) = \sum_{i=1}^n p_i f_i(t), \quad \bar{F}(t) = \sum_{i=1}^n p_i \bar{F}_i(t),$$

προκύπτει άμεσα το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 4.2.1. Σύμφωνα με τους Marshall & Olkin (2007), η Gamma κατανομή έχει αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας όταν $\alpha > 1$, σταθερή όταν $\alpha = 1$, και φθίνουσα όταν $0 < \alpha < 1$. Επιπλέον, η κλάση των κατανομών με φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας είναι κλειστή ως προς τις μείξεις, ενώ το ίδιο δεν ισχύει γενικά για τις κατανομές με αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας.

Παράδειγμα 4.2.2. Έστω μείξη δύο Gamma κατανομών

$$X_1 \sim \Gamma(0.5, 1), \quad X_2 \sim \Gamma(0.8, 3),$$

με βάρη

$$p_1 = 0.4 \quad \text{και} \quad p_2 = 0.6.$$

Τότε η πυκνότητα της μείξης είναι

$$f(t) = 0.4f_1(t) + 0.6f_2(t),$$

ενώ η συνάρτηση επιβίωσης είναι

$$\bar{F}(t) = 0.4\bar{F}_1(t) + 0.6\bar{F}_2(t).$$

Για τις δύο συνιστώσες ισχύει

$$f_1(t) = \frac{1^{0.5}}{\Gamma(0.5)} t^{0.5-1} e^{-t} = \frac{1}{\Gamma(0.5)} t^{-1/2} e^{-t},$$

και

$$f_2(t) = \frac{3^{0.8}}{\Gamma(0.8)} t^{0.8-1} e^{-3t} = \frac{3^{0.8}}{\Gamma(0.8)} t^{-0.2} e^{-3t}.$$

Άρα η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης δίνεται από

$$h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{0.4f_1(t) + 0.6f_2(t)}{0.4\bar{F}_1(t) + 0.6\bar{F}_2(t)}.$$

Δηλαδή,

$$h(t) = \frac{0.4 \frac{1}{\Gamma(0.5)} t^{-1/2} e^{-t} + 0.6 \frac{3^{0.8}}{\Gamma(0.8)} t^{-0.2} e^{-3t}}{0.4\bar{F}_1(t) + 0.6\bar{F}_2(t)}.$$

Επειδή $0.5 < 1$ και $0.8 < 1$, οι δύο επιμέρους κατανομές Gamma έχουν φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας. Η μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας της μείξης θα αιτιολογηθεί στο Κεφάλαιο 5, όπου θα παρουσιαστεί το αντίστοιχο αποτέλεσμα διατήρησης της κλάσης DFR υπό μείξη.

Παρατήρηση 4.2.2. Το παράδειγμα αυτό προετοιμάζει το αποτέλεσμα του Κεφαλαίου 5, σύμφωνα με το οποίο μια μείξη DFR κατανομών παραμένει DFR.

Παράδειγμα 4.2.3. Έστω μείξη δύο Gamma κατανομών

$$X_1 \sim \Gamma(1.2, 0.05), \quad X_2 \sim \Gamma(1.2, 1),$$

με βάρη

$$p_1 = 0.01 \quad \text{και} \quad p_2 = 0.99.$$

Τότε η πυκνότητα της μείξης είναι

$$f(t) = 0.01f_1(t) + 0.99f_2(t),$$

και η συνάρτηση επιβίωσης είναι

$$\bar{F}(t) = 0.01\bar{F}_1(t) + 0.99\bar{F}_2(t).$$

Για τις δύο συνιστώσες έχουμε

$$f_1(t) = \frac{0.05^{1.2}}{\Gamma(1.2)} t^{0.2} e^{-0.05t}, \quad f_2(t) = \frac{1^{1.2}}{\Gamma(1.2)} t^{0.2} e^{-t} = \frac{1}{\Gamma(1.2)} t^{0.2} e^{-t}.$$

Άρα η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης δίνεται από

$$h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{0.01f_1(t) + 0.99f_2(t)}{0.01\bar{F}_1(t) + 0.99\bar{F}_2(t)}.$$

Επειδή $1.2 > 1$, και οι δύο επιμέρους Gamma κατανομές έχουν αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας, δηλαδή είναι IFR. Ωστόσο, στη μείξη δεν διατηρείται γενικά η ιδιότητα IFR.

Πράγματι, με αριθμητικό υπολογισμό προκύπτει ότι

$$h(2) \approx 0.884, \quad h(5) \approx 0.548.$$

Επομένως,

$$h(5) < h(2),$$

οπότε η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης δεν είναι αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της. Άρα η μείξη δεν είναι IFR.

Παρατήρηση 4.2.3. Παρότι οι δύο επιμέρους συνιστώσες είναι IFR, οι αριθμητικές τιμές της βαθμίδας αποτυχίας της μείξης δείχνουν ότι αυτή δεν είναι αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της. Η γενικότερη μη διατήρηση της ιδιότητας IFR υπό μείξη θα εξεταστεί αναλυτικά στο Κεφάλαιο 5.

4.2.3 Μείξεις Κατανομών της Erlang

Οι μείξεις Erlang αποτελούν μια ευέλικτη και υπολογιστικά πρόσφορη κλάση κατανομών, με σημαντικές εφαρμογές στη θεωρία κινδύνου και στην αναλογιστική επιστήμη. Όπως δείχνουν οι Willmot & Woo (2007), πολλές ευρύτερες κλάσεις κατανομών μπορούν να αναδιατυπωθούν σε μορφή μείξης Erlang, γεγονός που αιτιολογεί τη σημασία τους στη σχετική βιβλιογραφία.

Ορισμός 4.2.3. (Willmot & Woo, 2007) Έστω διακριτή μείξη κατανομών Erlang

$$X_i \sim \text{Erlang}(i, \beta), \quad i = 1, 2, \dots,$$

με κοινό ρυθμό $\beta > 0$ και βάρη

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Τότε η πυκνότητα της μείξης είναι

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i f_i(t), \quad t > 0,$$

όπου

$$f_i(t) = \frac{\beta(\beta t)^{i-1} e^{-\beta t}}{(i-1)!}.$$

Πρόταση 4.2.3. Η συνάρτηση επιβίωσης της μείζης Erlang δίνεται από

$$\bar{F}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \bar{F}_i(t),$$

όπου για την Erlang κατανομή ισχύει

$$\bar{F}_i(t) = e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}.$$

Επομένως, η βαθμίδα αποτυχίας της μείζης Erlang γράφεται ως

$$h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} p_i \frac{\beta(\beta t)^{i-1} e^{-\beta t}}{(i-1)!}}{\sum_{i=1}^{\infty} p_i e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}}.$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση επιβίωσης της μείζης προκύπτει ως σταθμισμένο άθροισμα των συναρτήσεων επιβίωσης των επιμέρους Erlang κατανομών:

$$\bar{F}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \bar{F}_i(t).$$

Αντικαθιστώντας τον τύπο της επιβίωσης της Erlang κατανομής και χρησιμοποιώντας τον ορισμό

$$h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)},$$

παίρνουμε τη ζητούμενη μορφή της βαθμίδας αποτυχίας. □

Παράδειγμα 4.2.4. Θεωρούμε μείξη δύο κατανομών Erlang με κοινή παράμετρο ρυθμού $\beta = 1$:

$$X_1 \sim \text{Erlang}(2, 1), \quad X_2 \sim \text{Erlang}(3, 1),$$

και βάρη

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}.$$

Οι αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας είναι

$$f_1(t) = te^{-t}, \quad f_2(t) = \frac{t^2}{2}e^{-t}, \quad x \geq 0.$$

Επομένως, η πυκνότητα της μείξης είναι

$$f(t) = \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{2}e^{-t} = e^{-t}\left(\frac{t}{2} + \frac{t^2}{4}\right).$$

Οι συναρτήσεις επιβίωσης των δύο συνιστωσών είναι

$$\overline{F}_1(t) = e^{-t}(1+t)$$

και

$$\overline{F}_2(t) = e^{-t}\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right).$$

Άρα, η συνάρτηση επιβίωσης της μείξης είναι

$$\overline{F}(t) = \frac{1}{2}\overline{F}_1(t) + \frac{1}{2}\overline{F}_2(t) = e^{-t}\left(1+t+\frac{t^2}{4}\right).$$

Η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης δίνεται από

$$h(t) = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} = \frac{\frac{t}{2} + \frac{t^2}{4}}{1+t+\frac{t^2}{4}}.$$

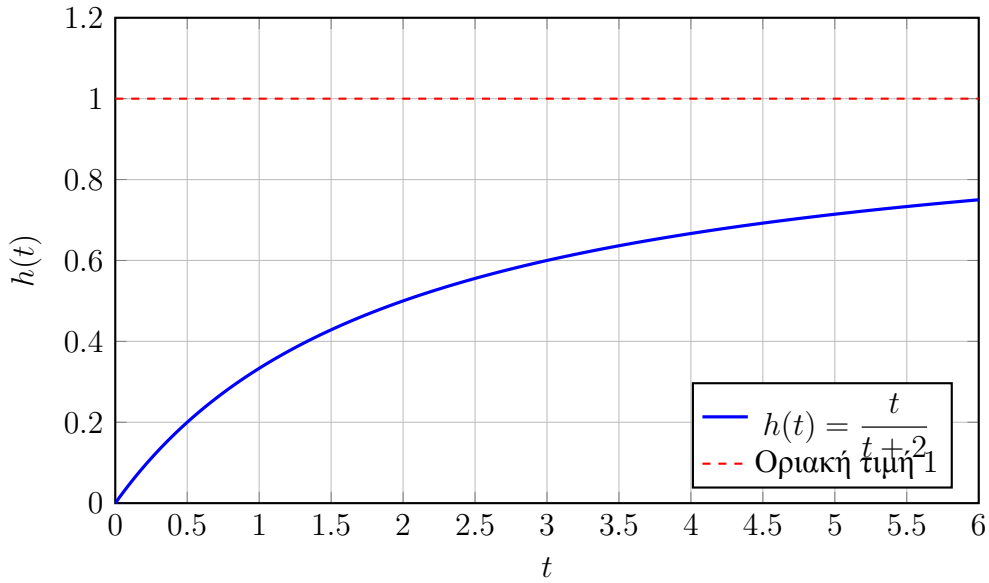
Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με 4, προκύπτει

$$h(t) = \frac{t^2 + 2t}{t^2 + 4t + 4} = \frac{t}{t+2}.$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$h'(t) = \frac{2}{(t+2)^2} > 0, \quad x \geq 0.$$

Επομένως, η βαθμίδα αποτυχίας της συγκεκριμένης μείξης Erlang είναι γνησίως αύξουσα και η μείξη ανήκει στην κλάση IFR.



Σχήμα 4.2: Αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας για τη μείξη δύο κατανομών Erlang

4.2.4 Μείξεις Κατανομών της Weibull

Πριν από τους επόμενους ορισμούς, σημειώνουμε ότι η παρουσίαση των μείξεων κατανομών ακολουθεί τη γενική θεωρητική προσέγγιση των Marshall & Olkin (2007), ενώ για τις επιμέρους παραμετρικές οικογένειες και ειδικότερα για τη μορφή των αντίστοιχων πυκνοτήτων αξιοποιήθηκαν επίσης οι Gupta, Zeng & Wu (2010). Επιπλέον, για τις μείξεις δύο κατανομών Weibull και τη μελέτη της αντίστοιχης βαθμίδας αποτυχίας χρησιμοποιείται η εργασία των Jiang & Murthy (1998), όπου δίνεται παραμετρικός χαρακτηρισμός των πιθανών μορφών της βαθμίδας αποτυχίας μιας τέτοιας μείξης.

Στην παρούσα ενότητα χρησιμοποιείται η ισοδύναμη παραμετροποίηση

$$f_i(t) = \alpha_i \beta_i t^{\beta_i - 1} e^{-\alpha_i t^{\beta_i}}, \quad t > 0,$$

όπου β_i είναι η παράμετρος σχήματος και $\alpha_i = \lambda_i^{-\beta_i}$.

Ορισμός 4.2.4 (Marshall & Olkin, 2007). Έστω τυχαίες μεταβλητές

$$X_i \sim W(\alpha_i, \beta_i)$$

και βάρη $p_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, \dots$. Τότε, η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X , ως διακριτή μείξη κατανομών Weibull, γράφεται ως

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i f_i(t), \quad t > 0,$$

όπου

$$f_i(t) = \alpha_i \beta_i t^{\beta_i - 1} e^{-\alpha_i t^{\beta_i}}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

και

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Δηλαδή,

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \alpha_i \beta_i t^{\beta_i - 1} e^{-\alpha_i t^{\beta_i}}, \quad t > 0.$$

Πρόταση 4.2.4. (Marshall & Olkin, 2007) Έστω ότι η X ακολουθεί διακριτή μείζη κατανομών Weibull με πυκνότητα

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \alpha_i \beta_i t^{\beta_i - 1} e^{-\alpha_i t^{\beta_i}}, \quad t > 0,$$

όπου

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1, \quad \alpha_i > 0 \quad \text{και} \quad \beta_i > 0.$$

Τότε, η συνάρτηση επιβίωσης είναι

$$\bar{F}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i e^{-\alpha_i t^{\beta_i}}, \quad t \geq 0.$$

και η βαθμίδα αποτυχίας δίνεται από

$$h(t) = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} p_j \alpha_j \beta_j t^{\beta_j - 1} e^{-\alpha_j t^{\beta_j}}}{\sum_{j=1}^{\infty} p_j e^{-\alpha_j t^{\beta_j}}}, \quad t \geq 0.$$

Αν $p_k = 1$ για κάποιο k , τότε η X ακολουθεί Weibull $W(\alpha_k, \beta_k)$. Αν τα μόνα μη μηδενικά βάρη είναι τα p_1, p_2 , τότε η X είναι διωνυμική μείζη δύο Weibull κατανομών. Επιπλέον, αν $\beta_j = 1$, η αντίστοιχη Weibull κατανομή ταυτίζεται με την εκθετική κατανομή παραμέτρου α_j .

Απόδειξη. Αν $p_k = 1$ για κάποιο k , τότε όλα τα υπόλοιπα βάρη είναι μηδενικά και

$$f(t) = \alpha_k \beta_k t^{\beta_k - 1} e^{-\alpha_k t^{\beta_k}},$$

οπότε η X ακολουθεί Weibull $W(\alpha_k, \beta_k)$.

Αν τα μόνα μη μηδενικά βάρη είναι τα p_1, p_2 , με $p_1 + p_2 = 1$, τότε

$$f(t) = p_1 \alpha_1 \beta_1 t^{\beta_1-1} e^{-\alpha_1 t^{\beta_1}} + p_2 \alpha_2 \beta_2 t^{\beta_2-1} e^{-\alpha_2 t^{\beta_2}},$$

άρα προκύπτει διωνυμική μείξη δύο Weibull κατανομών.

Για τη συνάρτηση επιβίωσης έχουμε

$$\bar{F}(t) = \int_t^\infty f(s) ds.$$

Επειδή για κάθε συνιστώσα ισχύει

$$\int_t^\infty \alpha_i \beta_i s^{\beta_i-1} e^{-\alpha_i s^{\beta_i}} ds = e^{-\alpha_i t^{\beta_i}},$$

παίρνουμε

$$\bar{F}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i e^{-\alpha_i t^{\beta_i}}.$$

Επομένως, από τον ορισμό

$$h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)},$$

προκύπτει

$$h(t) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} p_i \alpha_i \beta_i t^{\beta_i-1} e^{-\alpha_i t^{\beta_i}}}{\sum_{i=1}^{\infty} p_i e^{-\alpha_i t^{\beta_i}}}.$$

Τέλος, αν $\beta_i = 1$, τότε

$$f_i(t) = \alpha_i e^{-\alpha_i t},$$

δηλαδή η αντίστοιχη Weibull κατανομή ταυτίζεται με την εκθετική. □

Παράδειγμα 4.2.5. Θεωρούμε μείξη δύο κατανομών Weibull με $p_1 = 0.6$, $p_2 = 0.4$, $\alpha_1 = 0.08$, $\beta_1 = 2$, $\alpha_2 = 0.5$ και $\beta_2 = 1$.

Η συνάρτηση επιβίωσης της μείξης είναι

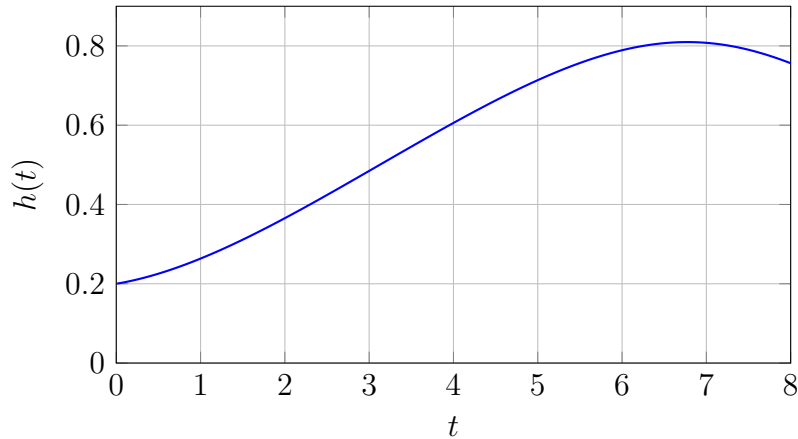
$$\bar{F}(t) = 0.6e^{-0.08t^2} + 0.4e^{-0.5t}, \quad t \geq 0.$$

Οι επιμέρους βαθμίδες αποτυχίας είναι

$$h_1(t) = 0.16t, \quad h_2(t) = 0.5.$$

Επομένως, η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης δίνεται από

$$h(t) = \frac{0.6e^{-0.08t^2}(0.16t) + 0.4e^{-0.5t}(0.5)}{0.6e^{-0.08t^2} + 0.4e^{-0.5t}}.$$



Σχήμα 4.3: Βαθμίδα αποτυχίας μείξης δύο Weibull κατανομών.

Παρατήρηση 4.2.4. Η πρώτη συνιστώσα έχει αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας, ενώ η δεύτερη έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας. Επομένως, θα μπορούσε αρχικά να αναμένεται ότι και η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης θα είναι μη φθίνουσα. Ωστόσο, από το διάγραμμα προκύπτει ότι η $h(t)$ αρχικά αυξάνεται, φτάνει σε μέγιστη τιμή περίπου

$$h(6.77) \approx 0.81,$$

και στη συνέχεια μειώνεται, με

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0.5.$$

Άρα, η μείξη δεν ανήκει στην κατηγορία IFR, αλλά παρουσιάζει μη μονότονη βαθμίδα αποτυχίας με ανεστραμμένη λεκανοειδή μορφή. Η συμπεριφορά αυτή θα αναλυθεί εκτενέστερα στο Κεφάλαιο 5.

4.2.5 Μείξεις Κατανομών της Pareto

Στην παρούσα εργασία θεωρούμε την κατανομή Pareto τύπου I, της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από

$$f(t) = \frac{\alpha x_m^\alpha}{t^{\alpha+1}}, \quad t \geq x_m,$$

όπου $x_m > 0$ είναι το κατώφλι της κατανομής και $\alpha > 0$ η παράμετρος σχήματος. Κατά τη μελέτη μείξεων Pareto, είναι συχνά προτιμότερο να θεωρείται κοινό κατώφλι x_m για όλες τις επιμέρους κατανομές και να μεταβάλλεται μόνο η παράμετρος σχήματος α_j . Με αυτή την επιλογή το μοντέλο διατηρεί κοινό πεδίο ορισμού, ενώ οι αντίστοιχες εκφράσεις της πυκνότητας, της συνάρτησης κατανομής, της συνάρτησης επιβίωσης και της βαθμίδας αποτυχίας αποκτούν απλούστερη μορφή.

Ορισμός 4.2.5. (Marshall & Olkin, 2007). Έστω τυχαίες μεταβλητές $X_j \sim \text{Pareto}(x_m, \alpha_j)$ και $p_j \in (0, 1)$, $j = 1, 2, \dots$, με $x_m > 0$ κοινό για όλες τις επιμέρους κατανομές και $\alpha_j > 0$. Τότε, η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X ως διακριτή μείξη Pareto κατανομών γράφεται ως

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j f_j(t), \quad t \geq x_m,$$

όπου

$$f_j(t) = \frac{\alpha_j x_m^{\alpha_j}}{t^{\alpha_j+1}}, \quad t \geq x_m, \quad j = 1, 2, \dots$$

και

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1.$$

Δηλαδή,

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \frac{\alpha_j x_m^{\alpha_j}}{t^{\alpha_j+1}}, \quad t \geq x_m.$$

Πρόταση 4.2.5. (Marshall & Olkin, 2007) Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί διακριτή μείξη Pareto κατανομών με πυκνότητα

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \frac{\alpha_j x_m^{\alpha_j}}{t^{\alpha_j+1}}, \quad t \geq x_m,$$

όπου $p_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$, $\alpha_j > 0$ και $x_m > 0$. Τότε:

$$\bar{F}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \left(\frac{x_m}{t} \right)^{\alpha_j}, \quad t \geq x_m,$$

$$F(t) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} p_j \left(\frac{x_m}{t} \right)^{\alpha_j}, \quad t \geq x_m,$$

και η βαθμίδα αποτυχίας είναι

$$h(t) = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} p_j \frac{\alpha_j x_m^{\alpha_j}}{t^{\alpha_j+1}}}{\sum_{j=1}^{\infty} p_j \left(\frac{x_m}{t}\right)^{\alpha_j}}, \quad t \geq x_m.$$

Ειδικά, αν $p_k = 1$ για κάποιο k , τότε η X ακολουθεί απλή κατανομή $\text{Pareto}(x_m, \alpha_k)$. Αν τα μόνα μη μηδενικά βάρη είναι τα p_1, p_2 , τότε προκύπτει διωνυμική μείξη δύο Pareto κατανομών.

Απόδειξη. Αν $p_k = 1$, τότε όλα τα υπόλοιπα βάρη είναι μηδενικά και άρα

$$f(t) = \frac{\alpha_k x_m^{\alpha_k}}{t^{\alpha_k+1}}, \quad t \geq x_m,$$

οπότε η X ακολουθεί $\text{Pareto}(x_m, \alpha_k)$.

Αν τα μόνα μη μηδενικά βάρη είναι τα p_1 και p_2 , με $p_1 + p_2 = 1$, τότε

$$f(t) = p_1 \frac{\alpha_1 x_m^{\alpha_1}}{t^{\alpha_1+1}} + p_2 \frac{\alpha_2 x_m^{\alpha_2}}{t^{\alpha_2+1}}, \quad t \geq x_m.$$

Άρα η X είναι διωνυμική μείξη δύο Pareto κατανομών.

Για τη συνάρτηση επιβίωσης έχουμε

$$\bar{F}(t) = P(X > t) = \int_t^{\infty} f(t) dt.$$

Επομένως,

$$\bar{F}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \int_x^{\infty} \frac{\alpha_j x_m^{\alpha_j}}{t^{\alpha_j+1}} dt = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \left(\frac{x_m}{t}\right)^{\alpha_j}.$$

Άρα

$$F(t) = 1 - \bar{F}(t) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} p_j \left(\frac{x_m}{t}\right)^{\alpha_j}.$$

Τέλος, από τον ορισμό της βαθμίδας αποτυχίας,

$$h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)},$$

οπότε προκύπτει ο ζητούμενος τύπος. □

Παράδειγμα 4.2.6. Θεωρούμε μείξη δύο κατανομών Pareto με $x_m = 1$, $p_1 = 0.6$, $p_2 = 0.4$, $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_2 = 3$.

Η πυκνότητα και η συνάρτηση επιβίωσης της μείζης είναι αντίστοιχα

$$f(t) = 0.6 \frac{1}{t^2} + 0.4 \frac{3}{t^4} = \frac{0.6}{t^2} + \frac{1.2}{t^4}, \quad t \geq 1,$$

και

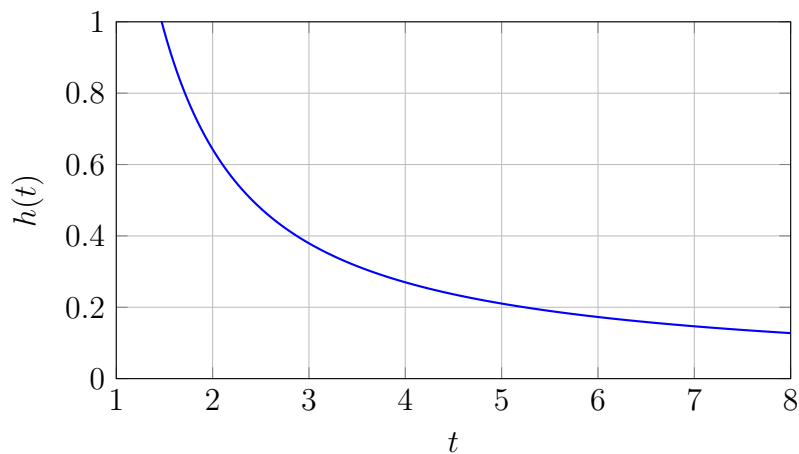
$$\overline{F}(t) = \frac{0.6}{t} + \frac{0.4}{t^3}.$$

Επομένως,

$$h(t) = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} = \frac{\frac{0.6}{t^2} + \frac{1.2}{t^4}}{\frac{0.6}{t} + \frac{0.4}{t^3}} = \frac{3(t^2 + 2)}{t(3t^2 + 2)}.$$

Παραγωγίζοντας,

$$h'(t) = -\frac{9t^4 + 48t^2 + 12}{(3t^3 + 2t)^2} < 0, \quad t \geq 1.$$



Σχήμα 4.4: Φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας μείζης δύο Pareto κατανομών.

Παρατήρηση 4.2.5. Από το $h'(t) < 0$ και το αντίστοιχο σχήμα προκύπτει ότι η βαθμίδα αποτυχίας της μείζης είναι γνησίως φθίνουσα και τείνει στο 0 καθώς $t \rightarrow \infty$.

4.3 Σύνοψη Μείξεων και Συμπεράσματα

Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται συνοπτικά, υπό τις αντίστοιχες προϋποθέσεις, οι γενικές μορφές της βαθμίδας αποτυχίας για τις μείξεις κατανομών που μελετήθηκαν στο Κεφάλαιο 4, καθώς και η αντίστοιχη συμπεριφορά μονοτονίας τους.

Μείξη	Βαθμίδα αποτυχίας $h_X(t)$	Μονοτονία
Εκθετικών	$h_X(t) = \frac{\sum_i p_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}}{\sum_i p_i e^{-\lambda_i t}}$	Φθίνουσα (DFR)
Gamma	$h_X(t) = \frac{\sum_i p_i f_i(t)}{\sum_i p_i F_i(t)}$	DFR, όταν όλες οι συνιστώσες είναι DFR. Γενικά, η IFR δεν διατηρείται.
Erlang	$h_X(t) = \frac{\sum_i p_i \frac{\beta(\beta t)^{i-1}}{(i-1)!}}{\sum_i p_i \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}}$	Δεν παρουσιάζει γενικά καθορισμένη μονοτονία.
Weibull	$h_X(t) = \frac{\sum_i p_i \alpha_i \beta_i t^{\beta_i - 1} e^{-\alpha_i t^{\beta_i}}}{\sum_i p_i e^{-\alpha_i t^{\beta_i}}}$	Μπορεί να είναι αύξουσα, φθίνουσα ή μη μονότονη.
Pareto	$h_X(t) = \frac{1}{t} \frac{\sum_i p_i \alpha_i \left(\frac{x_m}{t}\right)^{\alpha_i}}{\sum_i p_i \left(\frac{x_m}{t}\right)^{\alpha_i}}$	Φθίνουσα (DFR)

Πίνακας 4.1: Βαθμίδα αποτυχίας και μονοτονία των γενικών μείξεων του Κεφαλαίου 4.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων των Κεφαλαίων 3 και 4 αναδεικνύει τη σημαντική επίδραση που έχει η ετερογένεια ενός πληθυσμού στη συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας. Στο Κεφάλαιο 3, η μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας κάθε επιμέρους κατανομής καθορίζεται άμεσα από τις παραμέτρους της. Ειδικότερα, η εκθετική κατανομή έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας, οι κατανομές Gamma και Weibull μπορούν να έχουν φθίνουσα, σταθερή ή αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας, η Erlang έχει σταθερή ή αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας, ενώ η Pareto παρουσιάζει φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας.

Στις μείξεις του Κεφαλαίου 4, η συνολική βαθμίδα αποτυχίας δεν αποτελεί απλό μέσο όρο των επιμέρους βαθμίδων, καθώς η επίδραση κάθε συνιστώσας μεταβάλλεται με τον χρόνο. Για τον λόγο αυτό, η μείξη μπορεί να παρουσιάζει διαφορετική μονοτονία από τις επιμέρους κατανομές.

Χαρακτηριστικό παράδοξο αποτελεί η μείξη εκθετικών κατανομών: παρότι κάθε συνιστώσα έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας, η συνολική βαθμίδα αποτυχίας της μείξης είναι φθίνουσα. Αντίστοιχα, η μείξη κατανομών με αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας δεν διατηρεί αναγκαστικά την ιδιότητα IFR, αλλά μπορεί να εμφανίσει φθίνουσα ή ακόμη και μη μονότονη συμπεριφορά. Το φαινόμενο αυτό είναι ιδιαίτερα εμφανές στις μείξεις Gamma, Erlang και Weibull. Αντίθετα, η κλάση DFR διατηρείται ως προς τις μείξεις, γεγονός που εξηγεί τη φθίνουσα συμπεριφορά μίξεων των οποίων όλες οι συνιστώσες είναι DFR.

Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν ότι η μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας των επιμέρους κατανομών δεν επαρκεί από μόνη της για τον προσδιορισμό της συμπεριφοράς της μείξης. Στο Κεφάλαιο 5 θα παρουσιαστεί το θεωρητικό πλαίσιο που ερμηνεύει αυτές τις αντιστροφές και θα εξεταστούν οι συνθήκες που καθορίζουν την αρχική, την τελική και τη συνολική συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας. Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 6, τα θεωρητικά αποτελέσματα θα εφαρμοστούν σε συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα και θα απεικονιστούν με κατάλληλα διαγράμματα, ώστε να γίνουν σαφέστερες οι διαφορετικές μορφές μονοτονίας που μπορούν να προκύψουν.

Κεφάλαιο 5

Ασυμπτωτική Συμπεριφορά της Βαθμίδας Αποτυχίας σε Μείξεις Κατανομών

Τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου έδειξαν ότι η συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας μιας μείξης δεν καθορίζεται μόνο από τη μονοτονία των επιμέρους συνιστωσών της. Στο παρόν κεφάλαιο το ενδιαφέρον μετατοπίζεται από τον υπολογισμό συγκεκριμένων μείξεων κατανομών στη θεωρητική ερμηνεία των φαινομένων που παρατηρήθηκαν, με έμφαση στην αρχική και την τελική συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας, καθώς και στις πιθανές αντιστροφές της μονοτονίας της.

Η ανάλυση βασίζεται κυρίως σε τρεις βιβλιογραφικές εργασίες. Αρχικά, οι Block, Li και Savits (2003) εξετάζουν την αρχική και την τελική συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας σε μείξεις και συστήματα, αναδεικνύοντας τον ρόλο της συνιστώσας που κυριαρχεί στην ουρά της κατανομής. Στη συνέχεια, οι Block και Joe (1997) μελετούν ειδικότερα τη συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας στην ουρά και τις οριακές τιμές που αυτή μπορεί να λάβει. Τέλος, οι Gurland και Sethuraman (1995) δείχνουν ότι η συνένωση δεδομένων από πληθυσμούς με αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας μπορεί να οδηγήσει σε συνολική βαθμίδα αποτυχίας που είναι τελικά φθίνουσα.

Στόχος του κεφαλαίου είναι να παρουσιαστούν οι θεωρητικές συνθήκες που εξηγούν τις παραπάνω μεταβολές και να αποσαφηνιστεί ο τρόπος με τον οποίο η ετερογένεια επηρεάζει τη μορφή της συνολικής βαθμίδας αποτυχίας. Τα αποτελέσματα αυτά θα εφαρμοστούν στο Κεφάλαιο 6 σε αριθμητικά παραδείγματα και θα συνοδευτούν από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις.

5.1 Μη μονοτονικά σχήματα: bathtub και upside-down bathtub

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή του κεφαλαίου, η μείξη ετερογενών υποπληθυσμών μπορεί να μεταβάλει ουσιαστικά τη μορφή και τη μονοτονία της συνολικής βαθμίδας αποτυχίας. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα μη μονοτονικά σχήματα *bathtub* και *upside-down bathtub*, τα οποία μπορούν να προκύψουν ακόμη και από μείξεις κατανομών με αύξουσες επιμέρους βαθμίδες αποτυχίας (Block, Li και Savits, 2003).

Σχετικές εφαρμογές και αριθμητικά παραδείγματα παρουσιάζονται αναλυτικότερα στο Κεφάλαιο 6.

5.1.1 Upside-Down Bathtub

Η βαθμίδα αποτυχίας τύπου *upside-down bathtub* αρχικά αυξάνεται και στη συνέχεια μειώνεται. Η μορφή αυτή συναντάται κυρίως σε ετερογενείς πληθυσμούς και μείξεις κατανομών, όταν με την πάροδο του χρόνου μειώνεται η επίδραση των ασθενέστερων μονάδων.

Παράδειγμα 5.1.1 (Block, Li και Savits, 2003). Θεωρούμε μείξη με βάρη $p_1 = p_2 = 0,5$ των πυκνοτήτων

$$f_1(t) = e^{-t}, \quad f_2(t) = 16te^{-4t}, \quad t \geq 0.$$

Οι αντίστοιχες συναρτήσεις επιβίωσης είναι

$$\bar{F}_1(t) = e^{-t}, \quad \bar{F}_2(t) = (1 + 4t)e^{-4t},$$

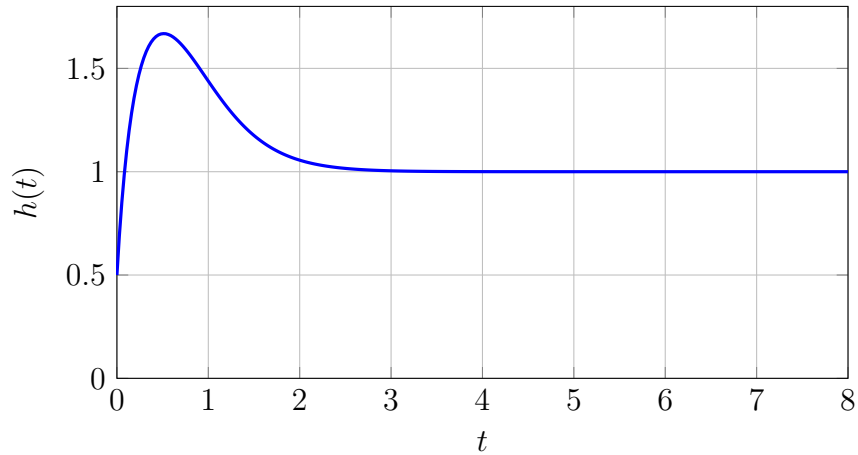
και οι βαθμίδες αποτυχίας

$$h_1(t) = 1, \quad h_2(t) = \frac{16t}{1 + 4t}.$$

Η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης είναι

$$h(t) = \frac{e^{-t} + 16te^{-4t}}{e^{-t} + (1 + 4t)e^{-4t}}.$$

Παρόλο που η $h_1(t)$ είναι σταθερή και η $h_2(t)$ αύξουσα, η $h(t)$ αρχικά αυξάνεται και στη συνέχεια μειώνεται προς το 1. Επομένως, παρουσιάζει σχήμα *upside-down bathtub*.



Σχήμα 5.1: Βαθμίδα αποτυχίας με σχήμα *upside-down bathtub* (Block, Li και Savits, 2003).

5.1.2 Bathtub

Η βαθμίδα αποτυχίας τύπου *bathtub* αρχικά μειώνεται και στη συνέχεια αυξάνεται. Η μορφή αυτή εμφανίζεται συχνά στην αξιοπιστία, περιγράφοντας αρχικές αστοχίες και μεταγενέστερη φθορά λόγω γήρανσης.

Παράδειγμα 5.1.2 (Block, Li και Savits, 2003). Θεωρούμε μείξη με βάρη $p_1 = p_2 = 0,5$ των πυκνοτήτων

$$f_1(t) = 4e^{-4t}, \quad f_2(t) = te^{-t}, \quad t \geq 0.$$

Οι αντίστοιχες συναρτήσεις επιβίωσης είναι

$$\bar{F}_1(t) = e^{-4t}, \quad \bar{F}_2(t) = (1+t)e^{-t},$$

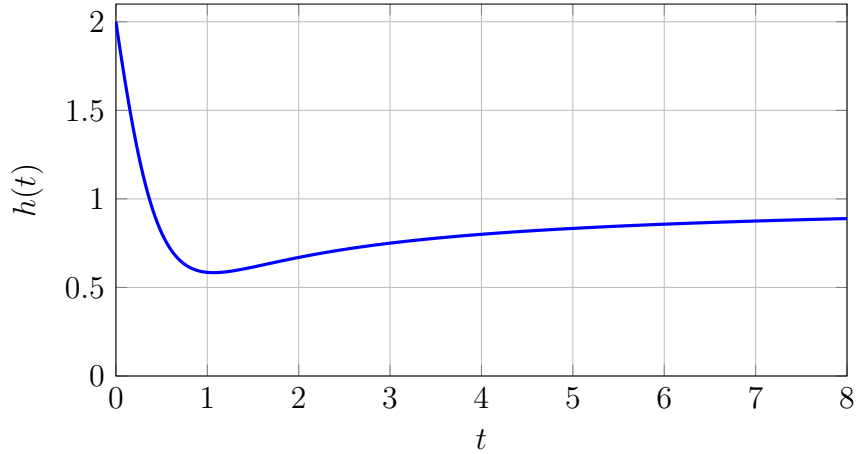
και οι βαθμίδες αποτυχίας

$$h_1(t) = 4, \quad h_2(t) = \frac{t}{1+t}.$$

Η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης είναι

$$h(t) = \frac{4e^{-4t} + te^{-t}}{e^{-4t} + (1+t)e^{-t}}.$$

Η $h(t)$ αρχικά μειώνεται και στη συνέχεια αυξάνεται προς το 1. Συνεπώς, παρουσιάζει σχήμα *bathtub*.



Σχήμα 5.2: Βαθμίδα αποτυχίας με σχήμα *bathtub* (Block, Li και Savits, 2003).

Παρατήρηση 5.1.1. Πέρα από τη βαθμίδα αποτυχίας τύπου *bathtub*, συναντάται και η τροποποιημένη *bathtub*. Η διαφορά τους έγκειται στη συμπεριφορά κατά τα αρχικά στάδια: η *bathtub* αρχικά μειώνεται και στη συνέχεια αυξάνεται, ενώ η τροποποιημένη *bathtub* αρχικά αυξάνεται, έπειτα μειώνεται και τελικά αυξάνεται ξανά.

Παράδειγμα 5.1.3. (Block, Li και Savits, 2003) Θεωρούμε μείξη δύο Weibull κατανομών με ίσα βάρη $p_1 = p_2 = 0,5$ και πυκνότητες

$$f_1(t) = 2te^{-t^2}, \quad f_2(t) = 4t^3e^{-t^4}.$$

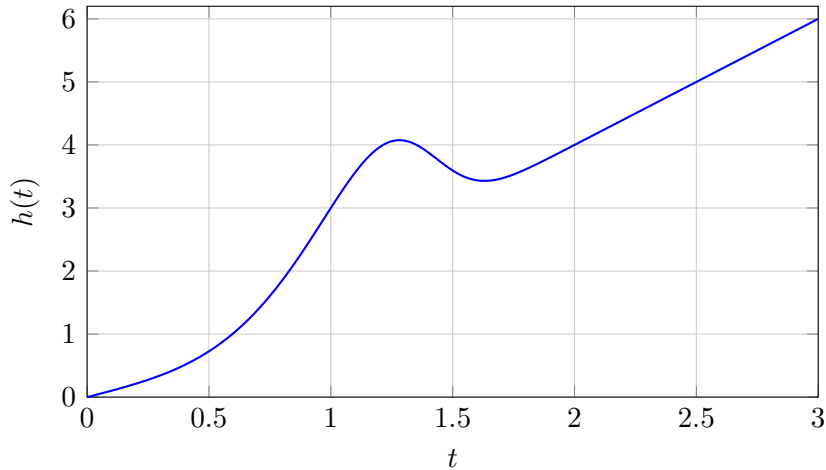
Οι αντίστοιχες βαθμίδες αποτυχίας είναι

$$h_1(t) = 2t, \quad h_2(t) = 4t^3,$$

και είναι γνησίως αύξουσες. Η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης είναι

$$h(t) = \frac{2te^{-t^2} + 4t^3e^{-t^4}}{e^{-t^2} + e^{-t^4}}.$$

Η $h(t)$ αρχικά αυξάνεται, στη συνέχεια μειώνεται και τελικά αυξάνεται ξανά· επομένως παρουσιάζει τροποποιημένη μορφή *bathtub*.



Σχήμα 5.3: Τροποποιημένη bathtub βαθμίδα αποτυχίας από μείξη δύο κατανομών Weibull.

5.2 Η Γενική Ασυμπτωτική Εικόνα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα βασικά αποτελέσματα των Block, Li και Savits (2003) για την αρχική και την τελική συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας σε μείξεις κατανομών. Η βαθμίδα της μείξης μπορεί να εμφανίζει σύνθετη μορφή, ακόμη και όταν οι επιμέρους υποπληθυσμοί έχουν απλή ή γνωστή συμπεριφορά.

Ιδιαίτερη σημασία έχει η ουρά της κατανομής. Για μεγάλες τιμές του χρόνου, η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης καθορίζεται κυρίως από τον ισχυρότερο υποπληθυσμό, δηλαδή από εκείνον που παρουσιάζει τη μεγαλύτερη επιβίωση.

5.2.1 Τελική και αρχική συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας

Πριν από την παρουσίαση των σχετικών αποτελεσμάτων, εισάγεται η έννοια της οριακής βαθμίδας αποτυχίας, η οποία περιγράφει τη συμπεριφορά της βαθμίδας για μεγάλες τιμές του χρόνου και επιτρέπει τη σύγκριση των υποπληθυσμών ως προς την ουρά της κατανομής.

Ορισμός 5.2.1 (Οριακή βαθμίδα αποτυχίας). Έστω X μια μη αρνητική συνεχής τυχαία μεταβλητή με βαθμίδα αποτυχίας $h(t)$. Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = a,$$

όπου $0 \leq a \leq \infty$, τότε το a ονομάζεται οριακή βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής της X .

Στην περίπτωση περισσότερων υποπληθυσμών, η οριακή βαθμίδα αποτυχίας του i -οστού υποπληθυσμού συμβολίζεται με a_i και δίνεται από

$$a_i = \lim_{t \rightarrow \infty} h_i(t),$$

εφόσον το όριο αυτό υπάρχει.

Παρατήρηση 5.2.1. Όπως παρουσιάστηκε στην Ενότητα 4.1.1, η συνάρτηση επιβίωσης και η πυκνότητα μιας πεπερασμένης μείζης δίνονται αντίστοιχα από

$$\bar{F}(t) = \sum_{i=1}^n p_i \bar{F}_i(t), \quad f(t) = \sum_{i=1}^n p_i f_i(t).$$

Επομένως, η βαθμίδα αποτυχίας της μείζης είναι

$$h(t) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i f_i(t)}{\sum_{i=1}^n p_i \bar{F}_i(t)}.$$

Παρατήρηση 5.2.2. Η ακόλουθη πρόταση αποτελεί διατύπωση του Πορίσματος 2.1 των Block, Li και Savits (2003) και περιγράφει την τελική συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας μιας πεπερασμένης μείζης.

Πρόταση 5.2.1. Έστω πεπερασμένη μείζη n υποπληθυσμών με βάρη $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, και βαθμίδες αποτυχίας

$$h_i(t) = \frac{f_i(t)}{\bar{F}_i(t)}.$$

Αν

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_i(t) = a_i \in [0, \infty], \quad i = 1, \dots, n,$$

τότε για τη βαθμίδα αποτυχίας της μείζης

$$h(t) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i f_i(t)}{\sum_{i=1}^n p_i \bar{F}_i(t)}$$

ισχύει είτε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \min_{1 \leq i \leq n} a_i,$$

είτε το όριο της $h(t)$ δεν υπάρχει.

Παρατήρηση 5.2.3. Υπό τις υποθέσεις της Πρότασης 5.2.1, έστω επιπλέον ότι οι οριακές βαθμίδες αποτυχίας a_i είναι πεπερασμένες και ότι υπάρχει μοναδικός ισχυρότερος υποπληθυσμός, δηλαδή

$$a_1 < a_j, \quad j = 2, \dots, n.$$

Τότε

$$h(t) - h_1(t) \longrightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Επομένως,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h_1(t) = a_1.$$

Άρα, η τελική τιμή της βαθμίδας αποτυχίας της μείζης καθορίζεται από τον μοναδικό ισχυρότερο υποπληθυσμό. Για τη μεταφορά και της τελικής μονοτονίας απαιτούνται πρόσθετες συνθήκες σχετικά με τον ρυθμό σύγκλισης και τις παραγώγους, οι οποίες εξετάζονται στην Ενότητα 5.3.

Αντιπαράδειγμα 1. (Block, Li & Savits, 2003) Για κάθε $k = 1, 2, \dots$, θεωρούμε κατανομή Gamma με πυκνότητα

$$f_k(t) = \frac{t^{k-1} e^{-t}}{\Gamma(k)}, \quad t > 0,$$

και γεωμετρικά βάρη

$$p_k = p(1-p)^{k-1}, \quad 0 < p < 1.$$

Για κάθε σταθερό k ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_k(t) = 1.$$

Ωστόσο, η πυκνότητα της άπειρης μείζης είναι

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k f_k(t) \\ &= p e^{-t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((1-p)t)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= p e^{-t} e^{(1-p)t} = p e^{-pt}. \end{aligned}$$

Άρα η μείξη είναι εκθετική με παράμετρο p , επομένως

$$h(t) = p \quad \text{και} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = p \neq 1.$$

Συνεπώς, για άπειρες μείξεις, η σημειακή σύγκλιση $h_k(t) \rightarrow 1$ δεν αρκεί. Η υπόθεση της ομοιόμορφης σύγκλισης στο αντίστοιχο ασυμπτωτικό θεώρημα είναι ουσιώδης.

Πρόταση 5.2.2. (Block, Li & Savits, 2003) Έστω ότι για κάθε $i = 1, \dots, n$ υπάρχει το όριο

$$h_i(0+) = \lim_{t \downarrow 0} h_i(t),$$

και ότι $0 < h_i(0+) < \infty$. Τότε η αρχική τιμή της βαθμίδας αποτυχίας της μείζης δίνεται

από

$$h(0+) = \sum_{i=1}^n p_i h_i(0+).$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της βαθμίδας αποτυχίας της μείξης,

$$h(t) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i f_i(t)}{\sum_{i=1}^n p_i \bar{F}_i(t)}.$$

Λαμβάνοντας $t \downarrow 0$ και χρησιμοποιώντας ότι $\bar{F}_i(0+) = 1$ και $f_i(0+) = h_i(0+)$, προκύπτει

$$h(0+) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i h_i(0+)}{\sum_{i=1}^n p_i} = \sum_{i=1}^n p_i h_i(0+),$$

αφού $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. □

Παρατήρηση 5.2.4. Οι Προτάσεις 5.2.1 και 5.2.2 περιγράφουν δύο διαφορετικές φάσεις της βαθμίδας αποτυχίας της μείξης. Στην αρχή, σύμφωνα με την Πρόταση 5.2.2, η $h(0+)$ είναι ο σταθμισμένος μέσος των αρχικών βαθμίδων αποτυχίας και εξαρτάται από όλους τους υποπληθυσμούς και τα βάρη τους. Αντίθετα, για $t \rightarrow \infty$, η Πρόταση 5.2.1 δείχνει ότι η τελική συμπεριφορά καθορίζεται από τον υποπληθυσμό με τη μικρότερη οριακή βαθμίδα αποτυχίας.

Πρόταση 5.2.3. (Block, Li & Savits, 2003). Έστω πεπερασμένη μείξη n υποπληθυσμών με βάρη $p_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, όπου

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Αν υπάρχουν και είναι πεπερασμένα τα όρια

$$h_i(0+) = \lim_{t \downarrow 0} h_i(t)$$

και

$$h'_i(0+) = \lim_{t \downarrow 0} h'_i(t),$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$, τότε η αρχική παράγωγος της βαθμίδας αποτυχίας της μείξης δίνεται από

$$h'(0+) = \sum_{i=1}^n p_i h'_i(0+) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i p_j (h_i(0+) - h_j(0+))^2.$$

Παράδειγμα 5.2.1. (Block, Li & Savits, 2003) Θεωρούμε μείξη δύο υποπληθυσμών με βάρη $p_1 = p$, $p_2 = 1 - p$, $0 < p < 1$, και βαθμίδες αποτυχίας $h_1(t) = t + 1$ και $h_2(t) = 4t + 5$. Και οι δύο βαθμίδες είναι γνησίως αύξουσες. Επειδή $h_1(0+) = 1$ και

$h_2(0+) = 5$, από την Πρόταση 5.2.2 προκύπτει

$$h(0+) = p + (1 - p)5 = 5 - 4p.$$

Επιπλέον, $h'_1(0+) = 1$ και $h'_2(0+) = 4$, οπότε από την Πρόταση 5.2.3 έχουμε

$$h'(0+) = p + 4(1 - p) - 16p(1 - p) = 16p^2 - 19p + 4.$$

Πίνακας 5.1: Αρχική συμπεριφορά της μείξης για διαφορετικές τιμές του p .

p	$h(0+)$	$h'(0+)$	Μορφή της βαθμίδας αποτυχίας της μείξης
0,10	4,60	$2,26 > 0$	Τροποποιημένη bathtub
0,65	2,40	$-1,59 < 0$	Bathtub
0,95	1,20	$0,39 > 0$	Αύξουσα

Παρατήρηση 5.2.5. Το παράδειγμα δείχνει ότι η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας της μείξης δεν καθορίζεται μόνο από τις επιμέρους βαθμίδες, αλλά εξαρτάται και από τα βάρη. Έτσι, παρότι και οι δύο βαθμίδες είναι αύξουσες, η μείξη μπορεί να είναι αύξουσα, bathtub ή τροποποιημένη bathtub.

Παρατήρηση 5.2.6. Ο δεύτερος όρος της σχέσης είναι μη θετικός. Επομένως, η ετερογένεια των αρχικών βαθμίδων αποτυχίας μπορεί να μειώσει την αρχική κλίση της βαθμίδας αποτυχίας της μείξης.

Πίνακας 5.2 συνοψίζει τα βασικά αποτελέσματα σχετικά με την αρχική και την τελική συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας μιας μείξης. Στο Κεφάλαιο 6 τα αποτελέσματα αυτά εφαρμόζονται σε ένα αναλυτικό αριθμητικό παράδειγμα.

Πίνακας 5.2: Σύνοψη των βασικών αποτελεσμάτων για τη βαθμίδα αποτυχίας μιας μείξης.

Αναφορά	Υποθέσεις	Αποτέλεσμα	Ερμηνεία
Πρόταση 5.2.1	Υπάρχουν τα όρια $\lim_{t \rightarrow \infty} h_i(t) = a_i$.	Είτε $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \min_{1 \leq i \leq n} a_i$, είτε το όριο της $h(t)$ δεν υπάρχει.	Η τελική βαθμίδα καθορίζεται από τη μικρότερη οριακή βαθμίδα.
Πρόταση 5.2.2	Υπάρχουν και είναι πεπερασμένες οι αρχικές τιμές $h_i(0+)$.	$h(0+) = \sum_{i=1}^n p_i h_i(0+)$.	Η αρχική βαθμίδα είναι ο σταθμισμένος μέσος των αρχικών βαθμίδων.
Πρόταση 5.2.3	Υπάρχουν οι τιμές $h_i(0+)$ και οι παράγωγοι $h'_i(0+)$.	Το αποτέλεσμα δίνεται από την $h'(0+)$.	Η ετερογένεια των υποπληθυσμών μειώνει την αρχική κλίση της μείξης.
Παρατήρηση 5.2.3	Υπάρχει μοναδικός ισχυρότερος υποπληθυσμός με $a_1 < a_j, \quad j = 2, \dots, n$.	$h(t) - h_1(t) \rightarrow 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = a_1$.	Η μείξη ακολουθεί ασυμπτωτικά τη συμπεριφορά του ισχυρότερου υποπληθυσμού.

5.3 Συμπεριφορά Ουράς της Βαθμίδας Αποτυχίας σε Μείξεις Δύο Κατανομών

Στην προηγούμενη ενότητα μελετήθηκαν η αρχική και η τελική συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας μιας πεπερασμένης μείξης. Στην παρούσα ενότητα επικεντρωνόμαστε ειδικότερα στις μείξεις δύο κατανομών και στην προσέγγιση των Block και Joe (1997).

Κεντρικό αντικείμενο της ανάλυσης είναι ο λόγος της βαθμίδας αποτυχίας της μείξης προς τη βαθμίδα της ισχυρότερης συνιστώσας. Με τον τρόπο αυτό δεν προσδιορίζεται μόνο το ασυμπτωτικό όριο της μείξης, αλλά και οι συνθήκες υπό τις οποίες η βαθμίδα αποτυχίας της γίνεται τελικά μονότονη και ακολουθεί τη συμπεριφορά της ισχυρότερης συνιστώσας.

Υπενθύμιση. Για μείξη δύο κατανομών χρόνου ζωής με βάρη $p_1, p_2 \in (0, 1)$, όπου $p_1 + p_2 = 1$, πυκνότητες f_1, f_2 και συναρτήσεις επιβίωσης $\bar{F}_1, \bar{F}_2$, ισχύουν

$$f(t) = p_1 f_1(t) + p_2 f_2(t)$$

και

$$\bar{F}(t) = p_1 \bar{F}_1(t) + p_2 \bar{F}_2(t).$$

Επομένως, η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης δίνεται από

$$h(t) = \frac{p_1 f_1(t) + p_2 f_2(t)}{p_1 \bar{F}_1(t) + p_2 \bar{F}_2(t)}.$$

Παρατήρηση 5.3.1. Για μείξη δύο κατανομών με βάρη p και $q = 1 - p$, η βαθμίδα αποτυχίας γράφεται ως

$$h(t) = w_1(t)h_1(t) + w_2(t)h_2(t),$$

όπου

$$w_1(t) = \frac{p \bar{F}_1(t)}{p \bar{F}_1(t) + q \bar{F}_2(t)}, \quad w_2(t) = \frac{q \bar{F}_2(t)}{p \bar{F}_1(t) + q \bar{F}_2(t)}.$$

Επομένως,

$$\min\{h_1(t), h_2(t)\} \leq h(t) \leq \max\{h_1(t), h_2(t)\}.$$

Ορισμός 5.3.1. Λέμε ότι ο δεύτερος υποπληθυσμός είναι ασυμπτωτικά ισχυρότερος από τον πρώτο, αν υπάρχει $T > 0$ τέτοιο ώστε

$$h_2(t) \leq h_1(t), \quad t \geq T.$$

Δηλαδή, για μεγάλες τιμές του χρόνου, ο δεύτερος υποπληθυσμός έχει μικρότερη βαθμίδα αποτυχίας και επομένως επηρεάζει περισσότερο τη συμπεριφορά ουράς της μείξης.

Οι αποδείξεις των Προτάσεων 5.3.1 και 5.3.2 παραλείπονται, καθώς παρουσιάζονται αναλυτικά στην εργασία των Block και Joe (1997).

Πρόταση 5.3.1. (Block και Joe, 1997) Έστω μείξη δύο κατανομών χρόνου ζωής με βάρη $p_1, p_2 \in (0, 1)$, όπου $p_1 + p_2 = 1$, συναρτήσεις επιβίωσης $\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t)$ και βαθμίδες αποτυχίας $h_1(t), h_2(t)$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $T > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < h_2(t) < h_1(t), \quad t \geq T,$$

και ότι

$$c(t) = \frac{h_1(t)}{h_2(t)} \downarrow c, \quad 1 \leq c < \infty.$$

Τότε η βαθμίδα αποτυχίας $h(t)$ της μείξης ικανοποιεί

$$\frac{h(t)}{h_2(t)} \downarrow 1, \quad t \rightarrow \infty.$$

Πρόταση 5.3.2. (Block και Joe, 1997) Έστω μείξη δύο κατανομών με βαθμίδες αποτυχίας $h_1(t)$ και $h_2(t)$ και έστω ότι η δεύτερη συνιστώσα είναι ασυμπτωτικά ισχυρότερη, δηλαδή

$$h_1(t) \geq h_2(t)$$

για επαρκώς μεγάλες τιμές του t .

Υποθέτουμε ότι οι h_1 και h_2 είναι κανονικά μεταβαλλόμενες με δείκτες $\rho_1 \neq -1$ και ρ_2 , αντίστοιχα, και ότι οι παράγωγοί τους είναι τελικά μονότονες. Αν

$$\frac{h_1(t)}{h_2(t)} \uparrow \infty, \quad t \rightarrow \infty,$$

τότε ο λόγος

$$\frac{h(t)}{h_2(t)}$$

είναι τελικά φθίνων.

Αν, επιπλέον, υπάρχει το όριο μίας από τις συναρτήσεις $h_1(t), h_2(t)$ ή του λόγου $f_2(t)/f_1(t)$, ενδεχομένως ίσο με ∞ , τότε

$$\frac{h(t)}{h_2(t)} \downarrow 1, \quad t \rightarrow \infty.$$

Παρατήρηση 5.3.2. Το προηγούμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι, ακόμη και όταν η βαθμίδα αποτυχίας της ασθενέστερης συνιστώσας αυξάνεται πολύ ταχύτερα, η βαθμίδα της μείξης προσεγγίζει ασυμπτωτικά τη βαθμίδα της ισχυρότερης συνιστώσας.

Επιπλέον, έστω ότι οι h_1 και h_2 είναι μονότονες και συγκλίνουν σε πεπερασμένα και θετικά όρια

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_1(t) = a_1 > a_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} h_2(t).$$

Υποθέτουμε ακόμη ότι οι συναρτήσεις

$$|h_i(t) - a_i|, \quad i = 1, 2,$$

είναι κανονικά μεταβαλλόμενες με αρνητικούς δείκτες και ότι οι παράγωγοι $h'_1(t)$ και $h'_2(t)$ είναι τελικά μονότονες.

Τότε η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης συγκλίνει στο a_2 και έχει τελικά την ίδια κατεύθυνση μονοτονίας με τη βαθμίδα αποτυχίας της ισχυρότερης συνιστώσας $h_2(t)$.

Πόρισμα 5.3.1. (Block & Joe, 1997) Υπό τις υποθέσεις της πρότασης (5.3.1), αν η βαθμίδα αποτυχίας της ισχυρότερης συνιστώσας $h_2(t)$ είναι τελικά φθίνουσα και

$$h_2(t) \rightarrow a,$$

τότε η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης είναι επίσης τελικά φθίνουσα και

$$h(t) \rightarrow a.$$

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση,

$$\frac{h(t)}{h_2(t)} \downarrow 1.$$

Επειδή τόσο η $h_2(t)$ όσο και ο λόγος $h(t)/h_2(t)$ είναι τελικά θετικές και φθίνουσες, το γινόμενό τους

$$h(t) = h_2(t) \frac{h(t)}{h_2(t)}$$

είναι τελικά φθίνον. Επιπλέον,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h_2(t) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{h_2(t)} = a.$$

□

Παρατήρηση 5.3.3 (Block και Joe, 1997). Υπό τις τεχνικές συνθήκες κανονικής μεταβολής και τελικά μονότονων παραγώγων που εξετάζουν οι Block και Joe (1997), όταν

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_1(t) = a_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h_2(t) = a_2, \quad a_1 > a_2,$$

η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης έχει τελικά την ίδια κατεύθυνση μονοτονίας με τη βαθμίδα αποτυχίας της ισχυρότερης συνιστώσας $h_2(t)$.

Στον ακόλουθο πίνακα συνοψίζονται τα βασικά αποτελέσματα της ενότητας σχετικά με την τελική συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας μιας μείξης δύο κατανομών. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στον ρόλο της ασυμπτωτικά ισχυρότερης συνιστώσας, η οποία, υπό κατάλληλες προϋποθέσεις, καθορίζει τόσο το όριο όσο και την τελική μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας της μείξης.

Πίνακας 5.3: Βασικά συμπεράσματα της Ενότητας 5.3.

Περίπτωση	Συμπέρασμα
Η δεύτερη συνιστώσα είναι ασυμπτωτικά ισχυρότερη, δηλαδή $h_2(t) \leq h_1(t)$ για μεγάλα t .	Η βαθμίδα της μείξης πλησιάζει τη βαθμίδα της ισχυρότερης συνιστώσας.
Ισχύει $\frac{h_1(t)}{h_2(t)} \downarrow c, \quad 1 \leq c < \infty$.	Τότε $\frac{h(t)}{h_2(t)} \downarrow 1$.
Ισχύει $\frac{h_1(t)}{h_2(t)} \uparrow \infty$.	Ο λόγος $\frac{h(t)}{h_2(t)}$ είναι τελικά φθίνων. Αν, επιπλέον, υπάρχει το όριο μίας από τις συναρτήσεις $h_1(t)$, $h_2(t)$ ή του λόγου $f_2(t)/f_1(t)$, τότε $\frac{h(t)}{h_2(t)} \downarrow 1$.
Η $h_2(t)$ είναι τελικά φθίνουσα και $h_2(t) \rightarrow a$.	Η βαθμίδα της μείξης είναι επίσης τελικά φθίνουσα και $h(t) \rightarrow a$.
Ισχύουν οι συνθήκες κανονικής μεταβολής και τελικά μονότονων παραγώγων της Παρατήρησης 5.3.2.	Η μείξη έχει τελικά την ίδια κατεύθυνση μονοτονίας με την ισχυρότερη συνιστώσα.

Στο Κεφάλαιο 6 θα παρουσιαστούν δύο αναλυτικά αριθμητικά παραδείγματα, στα οποία θα εφαρμοστούν τα βασικά αποτελέσματα της παρούσας ενότητας, ώστε να εξεταστεί στην πράξη η ασυμπτωτική συμπεριφορά και η τελική μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας της μείξης.

5.4 Αναστροφή της Μονοτονίας στη Βαθμίδα Αποτυχίας Μείξεων Κατανομών

Στις προηγούμενες ενότητες εξετάστηκε η αρχική και η τελική συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας των μείξεων, καθώς και ο ρόλος της ισχυρότερης συνιστώσας στη διαμόρφωση της ουράς της μείξης. Κλείνοντας το πέμπτο κεφάλαιο, μελετάται το φαινόμενο της αναστροφής της μονοτονίας, με βάση την προσέγγιση των Gurland και Sethuraman (1995).

Ειδικότερα, ενώ οι μείξεις DFR κατανομών διατηρούν την ιδιότητα DFR, μια μείξη IFR κατανομών μπορεί, μετά από κάποια χρονική στιγμή, να αποκτήσει φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας. Το αποτέλεσμα αυτό αναδεικνύει την επίδραση της ετερογένειας, καθώς η συνολική συμπεριφορά της μείξης μπορεί να διαφέρει ουσιαστικά από εκείνη των επιμέρους συνιστωσών.

Ορισμός 5.4.1. Θεωρούνται δύο κατανομές χρόνου ζωής F_1, F_2 με συναρτήσεις επιβίωσης $\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t)$ και βαθμίδες αποτυχίας $h_1(t), h_2(t)$, αντίστοιχα. Για $p_1, p_2 \in (0, 1)$, με

$$p_1 + p_2 = 1,$$

η συνάρτηση επιβίωσης της μείξης ορίζεται ως

$$\bar{F}_p(t) = p_1 \bar{F}_1(t) + p_2 \bar{F}_2(t).$$

Η αντίστοιχη βαθμίδα αποτυχίας της μείξης είναι

$$h_p(t) = \frac{p_1 \bar{F}_1(t) h_1(t) + p_2 \bar{F}_2(t) h_2(t)}{p_1 \bar{F}_1(t) + p_2 \bar{F}_2(t)}.$$

5.4.1 Μείξη δύο DFR κατανομών

Αρχικά εξετάζεται η περίπτωση μείξης δύο κατανομών με φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας. Όπως θα αποδειχθεί, η ιδιότητα DFR διατηρείται κατά τη μείξη, ανεξάρτητα από τα βάρη των επιμέρους κατανομών. Το αποτέλεσμα παρουσιάζεται αρχικά σε γενική μορφή και στη συνέχεια επαληθεύεται μέσω αριθμητικού παραδείγματος.

Πρόταση 5.4.1. (Gurland & Sethuraman, 1995) Αν οι F_1 και F_2 είναι DFR κατανομές, τότε και η μείξη

$$\bar{F}_p(t) = p_1 \bar{F}_1(t) + p_2 \bar{F}_2(t), \quad p_1 + p_2 = 1,$$

είναι DFR.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$w_i(t) = \frac{p_i \bar{F}_i(t)}{\bar{F}_p(t)}, \quad i = 1, 2.$$

Τότε

$$h_p(t) = w_1(t)h_1(t) + w_2(t)h_2(t)$$

και

$$h'_p(t) = w_1(t)h'_1(t) + w_2(t)h'_2(t) - w_1(t)w_2(t)(h_1(t) - h_2(t))^2.$$

Εφόσον $h'_1(t) \leq 0$ και $h'_2(t) \leq 0$, προκύπτει

$$h'_p(t) \leq 0.$$

Άρα η μείξη είναι DFR. □

Παράδειγμα 5.4.1 (Μείξη δύο DFR κατανομών Weibull). Έστω δύο κατανομές Weibull με συναρτήσεις επιβίωσης

$$\bar{F}_1(t) = e^{-\sqrt{t}}, \quad \bar{F}_2(t) = e^{-2\sqrt{t}}, \quad t > 0.$$

Οι αντίστοιχες βαθμίδες αποτυχίας είναι

$$h_1(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad h_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Εφόσον

$$h'_1(t) = -\frac{1}{4t^{3/2}} < 0, \quad h'_2(t) = -\frac{1}{2t^{3/2}} < 0,$$

και οι δύο κατανομές είναι αυστηρά DFR.

Για $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, η συνάρτηση επιβίωσης της μείξης είναι

$$\bar{F}_p(t) = \frac{1}{2}e^{-\sqrt{t}} + \frac{1}{2}e^{-2\sqrt{t}},$$

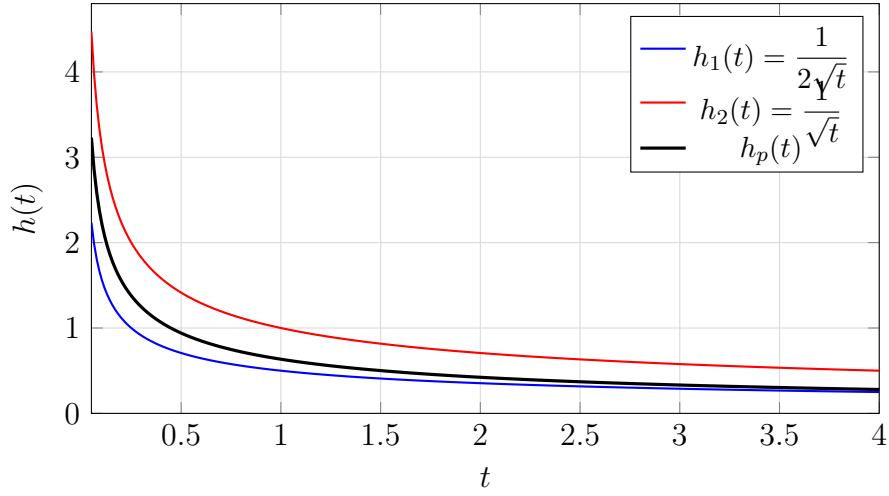
ενώ η βαθμίδα αποτυχίας της είναι

$$h_p(t) = \frac{e^{\sqrt{t}} + 2}{2\sqrt{t}(e^{\sqrt{t}} + 1)}.$$

Παραγωγίζοντας,

$$h'_p(t) = -\frac{\sqrt{t}e^{\sqrt{t}} + (e^{\sqrt{t}} + 2)(e^{\sqrt{t}} + 1)}{4t^{3/2}(e^{\sqrt{t}} + 1)^2} < 0.$$

Άρα η μείζη είναι επίσης αυστηρά DFR.



Σχήμα 5.4: Οι βαθμίδες αποτυχίας των δύο DFR κατανομών Weibull και της μείζης τους για $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$.

5.4.2 Μείζη δύο IFR κατανομών

Σε αντίθεση με την περίπτωση των DFR κατανομών, η ιδιότητα IFR δεν διατηρείται γενικά κατά τη μείζη. Ακόμη και όταν οι επιμέρους κατανομές έχουν αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας, η βαθμίδα αποτυχίας της μείζης μπορεί μετά από κάποιο χρονικό σημείο να γίνει φθίνουσα. Η συμπεριφορά αυτή αναδεικνύεται στη συνέχεια μέσω χαρακτηριστικών αντιπαραδειγμάτων.

Αντιπαράδειγμα 2. (Gurland & Sethuraman, 1995) Η κλάση των IFR κατανομών δεν είναι κλειστή ως προς τις μείξεις. Πράγματι, θεωρούμε μία Weibull κατανομή με βαθμίδα αποτυχίας

$$h_1(t) = \theta \gamma t^{\gamma-1}, \quad \gamma > 1,$$

και μία εκθετική κατανομή με

$$h_2(t) = \lambda.$$

Και οι δύο κατανομές είναι IFR. Ωστόσο, για

$$\gamma = 3, \quad \theta = 2.5, \quad \lambda = 0.25, \quad p_2 = 0.05,$$

η βαθμίδα αποτυχίας $h_p(t)$ της μείζης είναι φθίνουσα για

$$t > t_0 \simeq 0.975.$$

Επομένως, η μείξη είναι τελικά DFR, παρότι οι συνιστώσες της είναι IFR.

Αντίστοιχα, για την κατανομή

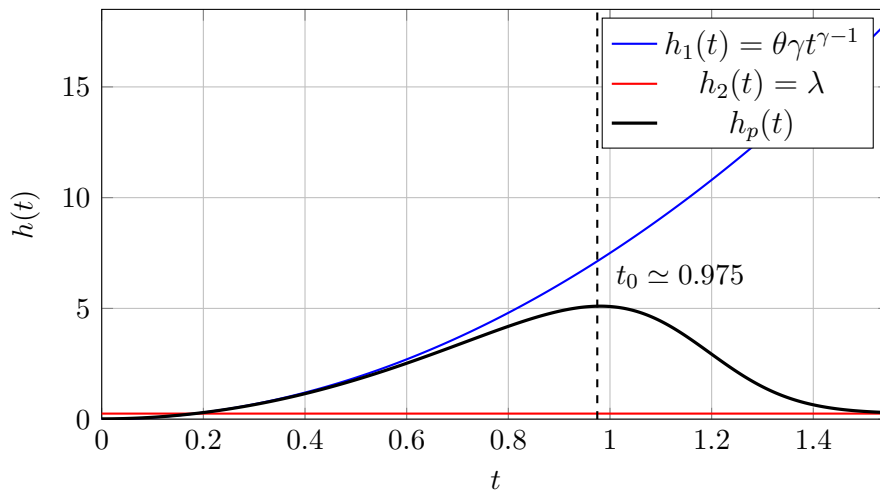
$$\bar{F}_1(t) = \exp\{-\theta(e^t - 1)\}, \quad h_1(t) = \theta e^t,$$

και μία εκθετική κατανομή με $h_2(t) = 1$, για

$$\theta = 20, \quad p_2 = 0.05,$$

η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης είναι φθίνουσα για

$$t > t_0 \simeq 0.0054.$$



Σχήμα 5.5: Οι βαθμίδες αποτυχίας των επιμέρους κατανομών και της μείξης για $\gamma = 3$, $\theta = 2.5$, $\lambda = 0.25$, $p_1 = 0.95$ και $p_2 = 0.05$.

Παρατήρηση 5.4.1. Τα παραπάνω αντιπαραδείγματα δείχνουν ότι

$$F_1, F_2 \in \text{IFR} \not\Rightarrow F_p \in \text{IFR}.$$

Ειδικότερα, η ετερογένεια των συνιστωσών και η χρονική μεταβολή των βαρών τους μεταξύ των επιζώντων μπορούν να αντιστρέψουν την αυξητική τάση των επιμέρους βαθμίδων αποτυχίας. Το συμπέρασμα είναι ότι η μείξη γίνεται *τελικά DFR*, δηλαδή η βαθμίδα αποτυχίας είναι φθίνουσα μόνο μετά από κάποιο t_0 , και όχι κατ' ανάγκην σε ολόκληρο το διάστημα $t \geq 0$.

Παρατήρηση 5.4.2. Υπενθυμίζουμε ότι μια μείξη κατανομών λέγεται *τελικά DFR* αν υπάρχει $t_0 \geq 0$ τέτοιο ώστε η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης να είναι φθίνουσα για κάθε $t \geq t_0$.

Δηλαδή,

$$h'_p(t) \leq 0, \quad t \geq t_0.$$

Παρατήρηση 5.4.3. Η ιδιότητα IFR δεν διατηρείται γενικά υπό τη διαδικασία της μείξης. Δηλαδή, ακόμη και αν οι κατανομές F_1 και F_2 είναι IFR, η μείξη με συνάρτηση επιβίωσης

$$\overline{F}_p(t) = p_1 \overline{F}_1(t) + p_2 \overline{F}_2(t), \quad p_1 + p_2 = 1,$$

δεν είναι απαραίτητα IFR.

Πίνακας 5.4: Σύνοψη των βασικών συμπερασμάτων της Ενότητας 5.4.

Περίπτωση	Υπόθεση	Συμπεριφορά της μείξης	Συμπέρασμα
Μείξη δύο DFR κατανομών	$h'_1(t) \leq 0$ και $h'_2(t) \leq 0$	Ισχύει $h'_p(t) \leq 0$ για κάθε $t \geq 0$.	Η κλάση DFR διατηρείται ως προς τις μείξεις.
Μείξη δύο IFR κατανομών	$h'_1(t) \geq 0$ και $h'_2(t) \geq 0$	Η $h'_p(t)$ δεν είναι απαραίτητα μη αρνητική.	Η κλάση IFR δεν διατηρείται γενικά ως προς τις μείξεις.
Αναστροφή μονοτονίας	Οι επιμέρους βαθμίδες αποτυχίας είναι αύξουσες.	Η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης μπορεί, μετά από κάποιο t_0 , να γίνει φθίνουσα.	Μπορεί να ισχύει $F_1, F_2 \in \text{IFR}, F_p \notin \text{IFR}$, ενώ η μείξη μπορεί να είναι τελικά DFR.
Τελικά DFR μείξη	Υπάρχει $t_0 \geq 0$ τέτοιο ώστε $h'_p(t) \leq 0$ για κάθε $t \geq t_0$.	Η βαθμίδα αποτυχίας δεν είναι αναγκαστικά φθίνουσα σε ολόκληρο το διάστημα, αλλά μόνο στην ουρά.	Η μείξη χαρακτηρίζεται ως τελικά DFR.
Ρόλος της ετερογένειας	Τα βάρη μεταξύ των επιζώντων είναι $w_i(t) = \frac{p_i \bar{F}_i(t)}{\bar{F}_p(t)}$.	Τα βάρη μεταβάλλονται με τον χρόνο και μπορεί να κυριαρχήσει διαφορετική συνιστώσα.	Η μεταβολή της σύνθεσης του πληθυσμού μπορεί να αντιστρέψει τη μονοτονία.
Πρακτική ερμηνεία	Τα δεδομένα προέρχονται από διαφορετικούς υποπληθυσμούς.	Η συνολική βαθμίδα αποτυχίας μπορεί να έχει διαφορετική μορφή από τις επιμέρους βαθμίδες.	Η συνένωση δεδομένων από διαφορετικές ομάδες μπορεί να δώσει λανθασμένη εικόνα για την αξιοπιστία.

Κεφάλαιο 6

Παραδείγματα και εφαρμογές για μείξεις κατανομών και βαθμίδες αποτυχίας

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκε το θεωρητικό πλαίσιο για τις βαθμίδες αποτυχίας, τις IFR και DFR κατανομές, τις μείξεις κατανομών και τη συμπεριφορά τους στην ουρά. Το παρόν κεφάλαιο λειτουργεί συμπληρωματικά: συγκεντρώνει χαρακτηριστικά παραδείγματα από τα άρθρα των Gurland και Sethuraman (1995), Block και Joe (1997), και Block, Li και Savits (2003), και τα μετατρέπει σε εφαρμοστικά σενάρια. Ο στόχος δεν είναι να επαναληφθούν οι αποδείξεις, αλλά να φανεί πώς χρησιμοποιούνται τα θεωρήματα στην πράξη και τι είδους συμπεράσματα μπορούν να προκύψουν από πραγματικά ή υποθετικά δεδομένα αξιοπιστίας.

Κεντρική ιδέα του κεφαλαίου είναι ότι η συμπεριφορά ενός ομογενούς υποπληθυσμού δεν μεταφέρεται πάντα αυτούσια στον συνολικό πληθυσμό. Ακόμη και αν κάθε υποπληθυσμός έχει αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας, η μείξη μπορεί να παρουσιάσει φθίνουσα ή μη μονοτονική βαθμίδα αποτυχίας. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό όταν συνενώνονται δεδομένα από διαφορετικές παρτίδες, διαφορετικούς τύπους μηχανημάτων, διαφορετικούς προμηθευτές ή διαφορετικές ομάδες ασθενών/συσκευών.

6.1 Πρακτική ερμηνεία της βαθμίδας αποτυχίας

Στην Ενότητα 5.2 παρουσιάστηκαν τα βασικά θεωρητικά αποτελέσματα για την αρχική και την ασυμπτωτική συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας μιας μείξης. Στο ακόλουθο παράδειγμα εφαρμόζονται οι Προτάσεις 5.2.1--5.2.3 και η Παρατήρηση 5.2.3, ώστε να προσδιοριστούν στην πράξη η αρχική τιμή, η αρχική κλίση, το τελικό όριο και η τελική μονοτονία της $h(t)$.

Παράδειγμα 6.1.1 (Εφαρμογή των Προτάσεων 5.2.1--5.2.3 και της Παρατήρησης 5.2.3).
Θεωρούμε μείξη δύο υποπληθυσμών με

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{2},$$

και βαθμίδες αποτυχίας

$$h_1(t) = 1 + e^{-t}, \quad h_2(t) = 3 + e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

Από τη σχέση

$$\bar{F}_i(t) = \exp \left\{ - \int_0^t h_i(u) du \right\},$$

προκύπτουν

$$\bar{F}_1(t) = e^{-t-1+e^{-t}}, \quad \bar{F}_2(t) = e^{-3t-1+e^{-t}}.$$

Επομένως, η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης είναι

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{h_1(t)\bar{F}_1(t) + h_2(t)\bar{F}_2(t)}{\bar{F}_1(t) + \bar{F}_2(t)} \\ &= 1 + e^{-t} + \frac{2e^{-2t}}{1 + e^{-2t}}. \end{aligned}$$

Εφαρμογή της Πρότασης 5.2.1. Οι οριακές βαθμίδες των δύο υποπληθυσμών είναι

$$a_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} h_1(t) = 1, \quad a_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} h_2(t) = 3.$$

Άρα

$$\min\{a_1, a_2\} = 1.$$

Πράγματι, από τον τύπο της $h(t)$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 1.$$

Επομένως, η τελική βαθμίδα αποτυχίας της μείξης ισούται με τη μικρότερη οριακή βαθμίδα των επιμέρους υποπληθυσμών.

Εφαρμογή της Πρότασης 5.2.2. Για $t = 0$ έχουμε

$$h_1(0+) = 2, \quad h_2(0+) = 4.$$

Η αρχική βαθμίδα της μείξης είναι ο σταθμισμένος μέσος

$$h(0+) = \frac{1}{2}h_1(0+) + \frac{1}{2}h_2(0+) = 3.$$

Το ίδιο προκύπτει άμεσα και από τον τύπο της $h(t)$.

Εφαρμογή της Πρότασης 5.2.3. Οι αρχικές παράγωγοι είναι

$$h'_1(0+) = h'_2(0+) = -1.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} h'(0+) &= \frac{1}{2}h'_1(0+) + \frac{1}{2}h'_2(0+) - \frac{1}{4}(h_1(0+) - h_2(0+))^2 \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(2 - 4)^2 \\ &= -2. \end{aligned}$$

Άρα η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης είναι αρχικά γνησίως φθίνουσα.

Εφαρμογή της Παρατήρησης 5.2.3. Εφόσον

$$a_1 = 1 < a_2 = 3,$$

ο πρώτος υποπληθυσμός είναι ο μοναδικός ισχυρότερος υποπληθυσμός. Επιπλέον,

$$h'_1(t) = -e^{-t} < 0,$$

οπότε η $h_1(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συγκλίνει στο 1 από πάνω.

Για τη βαθμίδα της μείξης ισχύει

$$h(t) - h_1(t) = \frac{2e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} > 0$$

και

$$h(t) - h_1(t) \longrightarrow 0.$$

Επιπλέον,

$$h'(t) = -e^{-t} - \frac{4e^{-2t}}{(1 + e^{-2t})^2} < 0.$$

Άρα η $h(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συγκλίνει στο 1 από πάνω, δηλαδή από την ίδια κατεύθυνση με τη βαθμίδα αποτυχίας του ισχυρότερου υποπληθυσμού.

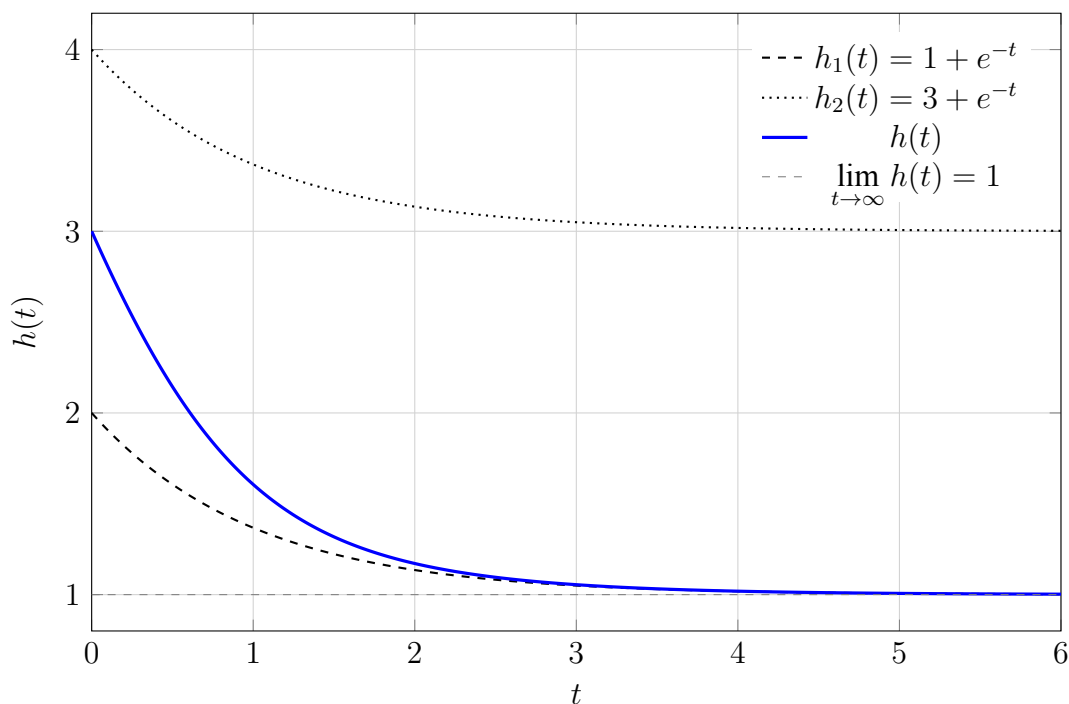
Παρατήρηση 6.1.1. Στο παράδειγμα, η Πρόταση 5.2.1 προσδιορίζει το τελικό όριο

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 1,$$

η Πρόταση 5.2.2 δίνει την αρχική τιμή $h(0+) = 3$ και η Πρόταση 5.2.3 την αρχική κλίση $h'(0+) = -2$. Επιπλέον, από την Παρατήρηση 5.2.3 προκύπτει ότι

$$h(t) - h_1(t) \rightarrow 0.$$

Η γνησίως φθίνουσα συμπεριφορά της $h(t)$ επιβεβαιώνεται άμεσα από τη σχέση $h'(t) < 0$.



Σχήμα 6.1: Οι επιμέρους βαθμίδες αποτυχίας $h_1(t)$, $h_2(t)$ και η βαθμίδα αποτυχίας $h(t)$ της μείξης.

Το βασικό εφαρμοστικό συμπέρασμα των Gurland και Sethuraman (1995) είναι ότι η συνένωση ετερογενών πληθυσμών μπορεί να μεταβάλει τη μορφή της βαθμίδας αποτυχίας. Έτσι, ακόμη και αν κάθε υποπληθυσμός εμφανίζει IFR συμπεριφορά, η συνολική μείξη μπορεί να γίνει τελικά DFR, επειδή με τον χρόνο μεταβάλλεται η σύνθεση του πληθυσμού που παραμένει σε λειτουργία.

- **Επιμέρους ανάλυση:** κάθε υποπληθυσμός μπορεί να είναι IFR.
- **Συνολική ανάλυση:** η μείξη μπορεί να είναι τελικά DFR.

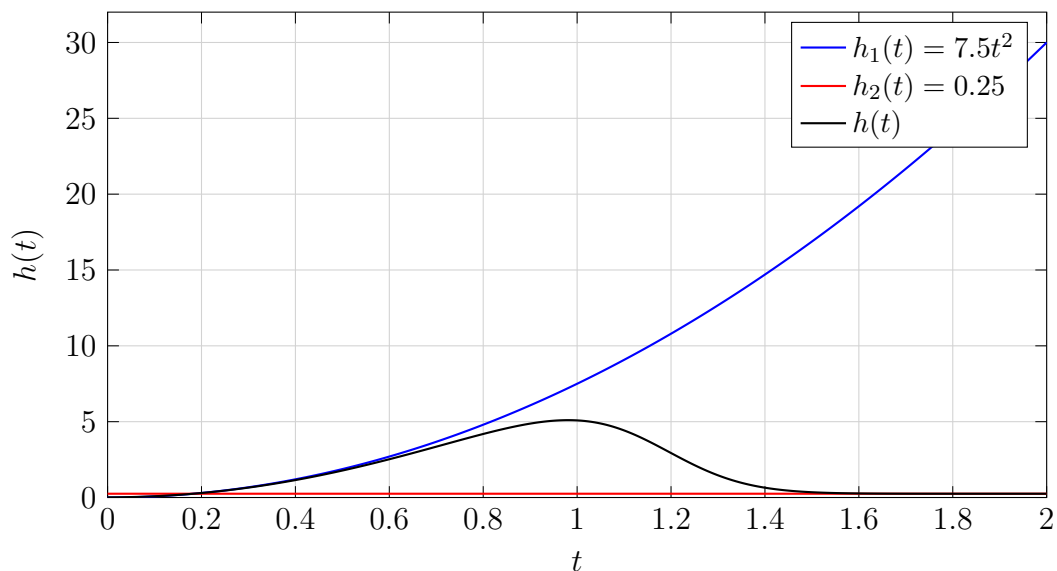
- **Πρακτική συνέπεια:** η αγνόηση της ετερογένειας μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα αξιοπιστίας.

Παράδειγμα 6.1.2. Η Weibull κατανομή είναι από τα πιο συχνά μοντέλα αξιοπιστίας. Για παράμετρο σχήματος $\gamma > 1$ έχει αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας και χρησιμοποιείται για φαινόμενα φθοράς. Στο άρθρο των Gurland και Sethuraman παρουσιάζεται ότι μια IFR Weibull κατανομή μπορεί, όταν αναμειχθεί με κατάλληλη εκθετική κατανομή, να οδηγήσει σε τελικά φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας. Με άλλα λόγια, μια μικρή «μόλυνση» από πιο ισχυρό υποπληθυσμό μπορεί να αλλάξει τη μορφή της ουράς.

$$\bar{F}_1(t) = e^{-\theta t^\gamma}, \quad h_1(t) = \theta \gamma t^{\gamma-1}, \quad \bar{F}_2(t) = e^{-\lambda t}, \quad h_2(t) = \lambda.$$

Για παράδειγμα, με $\theta = 2.5$, $\gamma = 3$ και $\lambda = 0.25$, η Weibull συνιστώσα έχει έντονα αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας $h_1(t) = 7.5t^2$, ενώ η εκθετική συνιστώσα έχει σταθερή βαθμίδα $h_2(t) = 0.25$. Αν η εκθετική ομάδα έχει μικρό βάρος, π.χ. 5%, η συνολική καμπύλη αρχικά επηρεάζεται από τη Weibull συμπεριφορά, αλλά στην ουρά η εκθετική συνιστώσα γίνεται η ισχυρότερη επιζώσα ομάδα. Έτσι η βαθμίδα της μείξης τελικά στρέφεται προς τη μικρότερη εκθετική βαθμίδα. Ο τύπος που καταλείγουν είναι:

$$h(t) = \frac{7,125t^2e^{-2,5t^3} + 0,0125e^{-0,25t}}{0,95e^{-2,5t^3} + 0,05e^{-0,25t}}.$$



Σχήμα 6.2: Μείξη Weibull IFR κατανομής με εκθετική συνιστώσα.

6.2 Παράδειγμα όπου η μείξη IFR παραμένει IFR

Δεν οδηγούν όλες οι μείξεις IFR κατανομών σε DFR συμπεριφορά. Οι Block, Li και Savits (2003) δίνουν ένα απλό παράδειγμα με δύο IFR Weibull κατανομές όπου η μείξη παραμένει αύξουσα. Αυτό είναι χρήσιμο γιατί δείχνει ότι το φαινόμενο της αντιστροφής δεν είναι αυτόματο: εξαρτάται από τις παραμέτρους, τα βάρη και την ισχύ των ουρών.

$$f_1(t) = 2t \exp(-t^2), \quad f_2(t) = 3t^2 \exp(-t^3), \quad p = 0.5$$

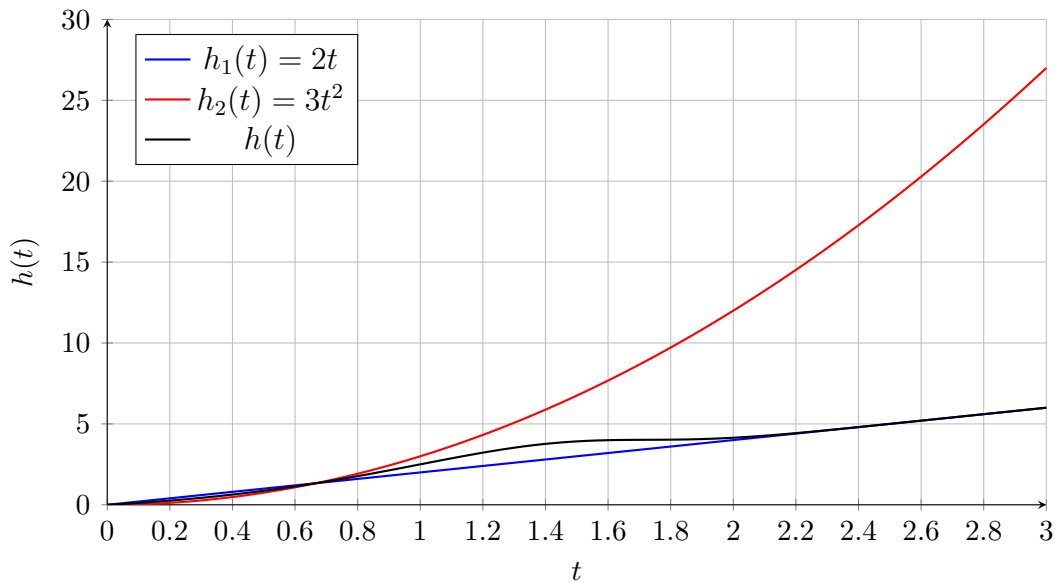
Στο παράδειγμα αυτό και οι δύο συνιστώσες έχουν αύξουσες βαθμίδες αποτυχίας και η συνολική βαθμίδα της μείξης είναι επίσης αύξουσα. Άρα, πριν εξαχθεί συμπέρασμα για pooled δεδομένα, χρειάζεται υπολογισμός ή γραφική επιβεβαίωση της βαθμίδας της μείξης και όχι μόνο έλεγχος των επιμέρους κατανομών.

Εύκολα υπολογίζονται οι επιμέρους βαθμίδες αποτυχίας και η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης. Συγκεκριμένα,

$$h_1(t) = \frac{f_1(t)}{\bar{F}_1(t)} = 2t, \quad h_2(t) = \frac{f_2(t)}{\bar{F}_2(t)} = 3t^2,$$

ενώ, για ίσα βάρη $p_1 = p_2 = 0,5$,

$$h(t) = \frac{2te^{-t^2} + 3t^2e^{-t^3}}{e^{-t^2} + e^{-t^3}}.$$



Σχήμα 6.3: Βαθμίδες αποτυχίας των δύο Weibull κατανομών και της μείξης τους για $p = 0.5$.

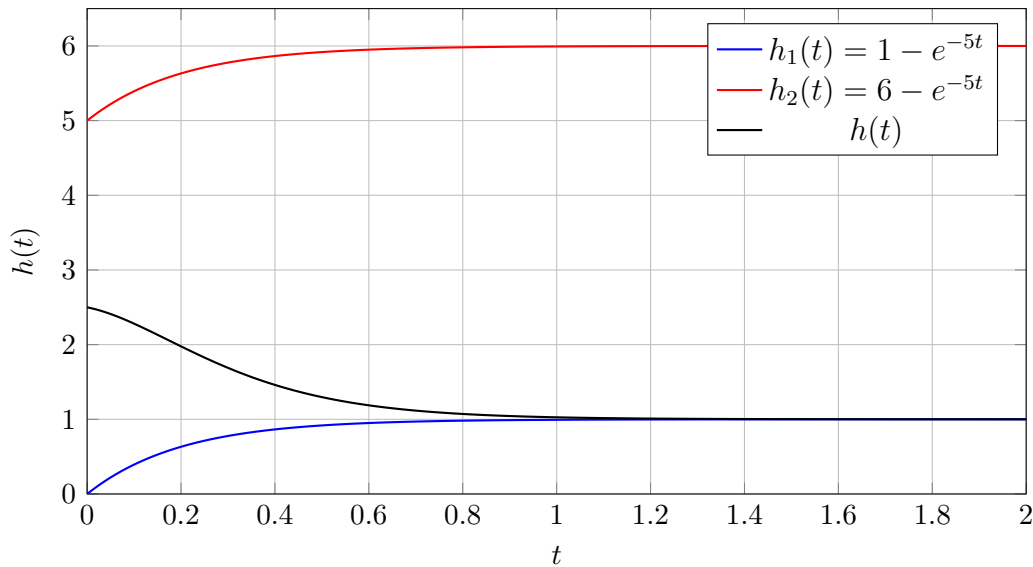
6.3 Παράδειγμα όπου η μείξη IFR αλλάζει σε DFR

Οι Block, Li και Savits (2003) παρουσιάζουν επίσης ένα καθαρό αντιπαράδειγμα: δύο γνησίως αύξουσες βαθμίδες αποτυχίας μπορούν να δώσουν γνησίως φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας στη μείξη. Θεωρούμε τις βαθμίδες αποτυχίας

$$h_1(t) = 1 - e^{-5t}, \quad h_2(t) = 6 - e^{-5t}, \quad p = 0.5$$

Και οι δύο συναρτήσεις είναι αύξουσες. Η πρώτη όμως τείνει στο 1, ενώ η δεύτερη τείνει στο 6. Άρα η πρώτη συνιστώσα είναι ασυμπτωτικά ισχυρότερη, επειδή έχει μικρότερη τελική βαθμίδα αποτυχίας. Η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης, παρότι προκύπτει από δύο IFR συμπεριφορές, φθίνει και συγκλίνει προς το 1 με τύπο:

$$h(t) = \frac{1 + 5e^{-5t} - e^{-10t}}{1 + e^{-5t}}.$$



Σχήμα 6.4: Δύο αύξουσες βαθμίδες αποτυχίας που οδηγούν σε φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας της μείξης για $p = 0.5$.

6.4 Η ισχυρότερη συνιστώσα και η συμπεριφορά στην ουρά

Στην Ενότητα 5.3 παρουσιάστηκαν τα αποτελέσματα των Block και Joe (1997) για τη συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας μιας μείξης στην ουρά. Ασυμπτωτικά ισχυρότερη θεωρείται η συνιστώσα που έχει μικρότερη βαθμίδα αποτυχίας για μεγάλες τιμές του t .

Υπό τις προϋποθέσεις της Πρότασης 5.3.1 ή της Πρότασης 5.3.2, αν η δεύτερη συνιστώσα είναι ισχυρότερη, τότε

$$\frac{h(t)}{h_2(t)} \longrightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty.$$

Η τελική μονοτονία εξετάζεται στην Πρόταση 5.3.3.

Στη συνέχεια, τα αποτελέσματα αυτά εφαρμόζονται σε δύο σύντομα παραδείγματα.

Παράδειγμα 6.4.1. Θεωρούμε μείξη δύο κατανομών με ίσα βάρη και βαθμίδες αποτυχίας

$$h_1(t) = t^2 + 1, \quad h_2(t) = t + 1.$$

Για $t > 1$ ισχύει $h_2(t) < h_1(t)$ και

$$\frac{h_1(t)}{h_2(t)} \longrightarrow \infty.$$

Επομένως, από την Πρόταση 5.3.2,

$$\frac{h(t)}{h_2(t)} \downarrow 1, \quad t \rightarrow \infty.$$

Άρα η βαθμίδα της μείξης προσεγγίζει ασυμπτωτικά την ισχυρότερη συνιστώσα.

Παράδειγμα 6.4.2. Θεωρούμε μείξη δύο κατανομών με ίσα βάρη και

$$h_1(t) = 2 + \frac{3}{t+1}, \quad h_2(t) = 1 + \frac{1}{t+1}.$$

Τότε

$$\frac{h_1(t)}{h_2(t)} \downarrow 2,$$

ενώ η $h_2(t)$ είναι φθίνουσα και

$$h_2(t) \longrightarrow 1.$$

Συνεπώς, η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης είναι τελικά φθίνουσα και

$$h(t) \longrightarrow 1.$$

Παρατήρηση 6.4.1. Μέσα από τα δύο παραδείγματα γίνεται σαφέστερος ο ισχυρισμός ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας της μείξης καθορίζεται από την ισχυρότερη συνιστώσα.

6.5 Μείξεις με τρεις συνιστώσες

Στην παρούσα ενότητα εξετάζονται δύο πεπερασμένες μείξεις τριών κατανομών. Έστω ότι τα βάρη της μείξης είναι

$$p_i > 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

με

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η συνάρτηση επιβίωσης της μείξης δίνονται, αντίστοιχα, από

$$f(t) = \sum_{i=1}^3 p_i f_i(t)$$

και

$$\bar{F}(t) = \sum_{i=1}^3 p_i \bar{F}_i(t).$$

Επομένως, η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης είναι

$$h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{\sum_{i=1}^3 p_i f_i(t)}{\sum_{i=1}^3 p_i \bar{F}_i(t)}, \quad t \geq 0.$$

Για μια τυχαία μεταβλητή

$$X_i \sim \text{Erlang}(k_i, \lambda_i),$$

η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από

$$f_i(t) = \frac{\lambda_i^{k_i} t^{k_i-1} e^{-\lambda_i t}}{(k_i - 1)!}, \quad t \geq 0,$$

ενώ η συνάρτηση επιβίωσης είναι

$$\bar{F}_i(t) = e^{-\lambda_i t} \sum_{r=0}^{k_i-1} \frac{(\lambda_i t)^r}{r!}, \quad t \geq 0.$$

Παράδειγμα 6.5.1 (Μείξη τριών κατανομών Erlang). Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές

$$X_1 \sim \text{Erlang}(2, 2), \quad X_2 \sim \text{Erlang}(3, 1), \quad X_3 \sim \text{Erlang}\left(4, \frac{1}{2}\right),$$

με αντίστοιχα βάρη

$$p_1 = 0,8, \quad p_2 = 0,1, \quad p_3 = 0,1.$$

Για την πρώτη συνιστώσα έχουμε

$$f_1(t) = \frac{2^2 t^{2-1} e^{-2t}}{(2-1)!} = 4te^{-2t},$$

και

$$\bar{F}_1(t) = e^{-2t} \left[1 + \frac{2t}{1!} \right] = (1 + 2t)e^{-2t}.$$

Για τη δεύτερη συνιστώσα έχουμε

$$f_2(t) = \frac{t^{3-1} e^{-t}}{(3-1)!} = \frac{t^2}{2} e^{-t},$$

και

$$\bar{F}_2(t) = e^{-t} \left[1 + t + \frac{t^2}{2} \right].$$

Για την τρίτη συνιστώσα έχουμε

$$f_3(t) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 t^{4-1} e^{-t/2}}{(4-1)!} = \frac{t^3}{96} e^{-t/2},$$

και

$$\bar{F}_3(t) = e^{-t/2} \left[1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{48} \right].$$

Άρα, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μείξης είναι

$$\begin{aligned} f(t) &= p_1 f_1(t) + p_2 f_2(t) + p_3 f_3(t) \\ &= 0,8 (4te^{-2t}) + 0,1 \left(\frac{t^2}{2} e^{-t} \right) + 0,1 \left(\frac{t^3}{96} e^{-t/2} \right). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$f(t) = 3,2te^{-2t} + 0,05t^2 e^{-t} + \frac{t^3}{960} e^{-t/2}.$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση επιβίωσης της μείζης είναι

$$\begin{aligned}\bar{F}(t) &= 0,8(1 + 2t)e^{-2t} \\ &\quad + 0,1 \left(1 + t + \frac{t^2}{2} \right) e^{-t} \\ &\quad + 0,1 \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{48} \right) e^{-t/2}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, η βαθμίδα αποτυχίας της μείζης δίνεται από

$$h(t) = \frac{3,2te^{-2t} + 0,05t^2e^{-t} + \frac{t^3}{960}e^{-t/2}}{0,8(1 + 2t)e^{-2t} + 0,1 \left(1 + t + \frac{t^2}{2} \right) e^{-t} + 0,1 \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{48} \right) e^{-t/2}}.$$

Παρατηρούμε ότι και οι τρεις επιμέρους κατανομές έχουν αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας, αφού

$$k_1 = 2 > 1, \quad k_2 = 3 > 1, \quad k_3 = 4 > 1.$$

Επομένως, και οι τρεις συνιστώσες ανήκουν στην κλάση IFR. Ωστόσο, για τη βαθμίδα αποτυχίας της μείζης προκύπτει αριθμητικά ότι

$$h(0) = 0,$$

ενώ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο περίπου στη χρονική στιγμή

$$t = 0,96, \quad h(0,96) \simeq 0,876.$$

Στη συνέχεια μειώνεται και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο περίπου στη χρονική στιγμή

$$t = 5,58, \quad h(5,58) \simeq 0,221.$$

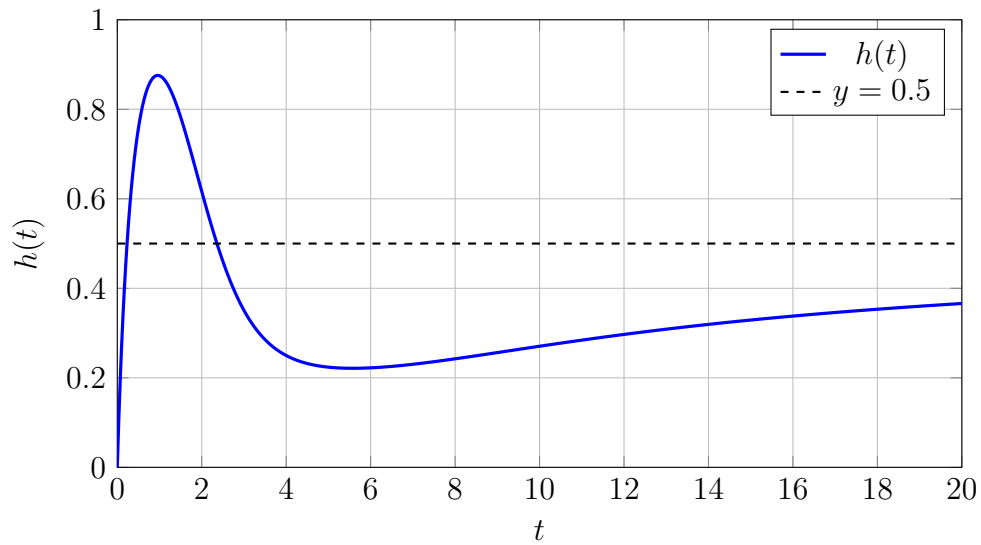
Για μεγάλες τιμές του t , κυριαρχεί η τρίτη συνιστώσα, η οποία έχει τον μικρότερο ρυθμό

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}.$$

Επομένως,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \frac{1}{2}.$$

Άρα, η βαθμίδα αποτυχίας της μείζης αρχικά αυξάνεται, στη συνέχεια μειώνεται και τελικά αυξάνεται προς την τιμή $1/2$. Το παράδειγμα δείχνει ότι μια μείξη κατανομών IFR δεν είναι απαραίτητα και η ίδια IFR.



Σχήμα 6.5: Η βαθμίδα αποτυχίας μείζης τριών κατανομών Erlang.

Παρατήρηση 6.5.1. Παρότι και οι τρεις συνιστώσες είναι κατανομές Erlang με αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας, η βαθμίδα αποτυχίας της μείζης δεν είναι μονότονη. Συνεπώς, η ιδιότητα IFR δεν διατηρείται κατ' ανάγκη κατά τη μείζη κατανομών.

Παράδειγμα 6.5.2 (Μείζη δύο κατανομών Erlang και μίας εκθετικής κατανομής). Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές

$$X_1 \sim \text{Erlang}(2, 1), \quad X_2 \sim \text{Erlang}\left(4, \frac{1}{2}\right), \quad X_3 \sim \text{Exp}(3),$$

με αντίστοιχα βάρη

$$p_1 = 0,4, \quad p_2 = 0,3, \quad p_3 = 0,3.$$

Για την πρώτη συνιστώσα έχουμε

$$f_1(t) = te^{-t},$$

και

$$\overline{F}_1(t) = (1+t)e^{-t}.$$

Για τη δεύτερη συνιστώσα έχουμε

$$f_2(t) = \frac{t^3}{96}e^{-t/2},$$

και

$$\overline{F}_2(t) = \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{48}\right)e^{-t/2}.$$

Η τρίτη συνιστώσα ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda_3 = 3$. Επομένως,

$$f_3(t) = 3e^{-3t},$$

και

$$\overline{F}_3(t) = e^{-3t}.$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μείξης είναι

$$\begin{aligned} f(t) &= p_1 f_1(t) + p_2 f_2(t) + p_3 f_3(t) \\ &= 0,4te^{-t} + 0,3 \left(\frac{t^3}{96} e^{-t/2} \right) + 0,3 (3e^{-3t}). \end{aligned}$$

Άρα,

$$f(t) = 0,4te^{-t} + \frac{t^3}{320} e^{-t/2} + 0,9e^{-3t}.$$

Η συνάρτηση επιβίωσης της μείξης είναι

$$\begin{aligned} \overline{F}(t) &= 0,4(1+t)e^{-t} \\ &\quad + 0,3 \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{48} \right) e^{-t/2} \\ &\quad + 0,3e^{-3t}. \end{aligned}$$

Επομένως, η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης δίνεται από

$$h(t) = \frac{0,4te^{-t} + \frac{t^3}{320} e^{-t/2} + 0,9e^{-3t}}{0,4(1+t)e^{-t} + 0,3 \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{48} \right) e^{-t/2} + 0,3e^{-3t}}.$$

Στη χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε

$$f_1(0) = f_2(0) = 0$$

και

$$f_3(0) = 3.$$

Επομένως,

$$h(0) = \frac{p_3 f_3(0)}{p_1 + p_2 + p_3} = p_3 \lambda_3 = 0,3 \cdot 3 = 0,9.$$

Αριθμητικά, η βαθμίδα αποτυχίας μειώνεται μέχρι περίπου τη χρονική στιγμή

$$t = 4,75,$$

όπου λαμβάνει την τιμή

$$h(4,75) \simeq 0,187.$$

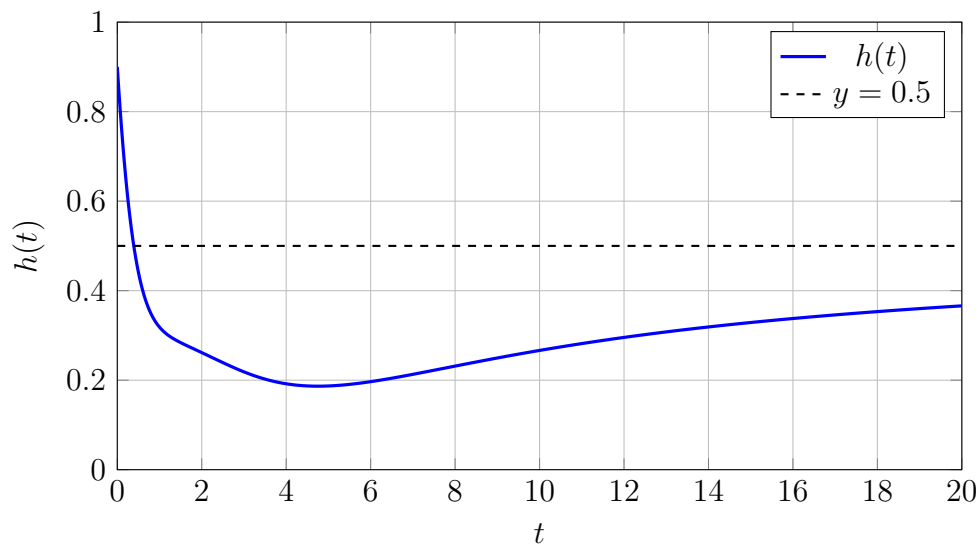
Στη συνέχεια, η βαθμίδα αποτυχίας αυξάνεται. Για μεγάλες τιμές του t , κυριαρχεί η κατανομή

$$\text{Erlang} \left(4, \frac{1}{2} \right),$$

επειδή έχει τη βραδύτερα φθίνουσα ουρά. Συνεπώς,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \frac{1}{2}.$$

Επομένως, η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης παρουσιάζει αρχικά φθίνουσα και στη συνέχεια αύξουσα συμπεριφορά.



Σχήμα 6.6: Η βαθμίδα αποτυχίας τύπου bathtub για μείξη δύο κατανομών Erlang και μίας εκθετικής κατανομής.

Παρατήρηση 6.5.2. Η αρχικά υψηλή τιμή της βαθμίδας αποτυχίας οφείλεται στην εκθετική συνιστώσα με ρυθμό $\lambda_3 = 3$, η οποία μειώνεται ταχύτερα από τις υπόλοιπες καθώς αυξάνεται ο χρόνος. Για μεγάλες τιμές του x , κυριαρχεί η συνιστώσα Erlang με τον μικρότερο ρυθμό. Έτσι, η βαθμίδα αποτυχίας αρχικά μειώνεται και στη συνέχεια αυξάνεται, παρουσιάζοντας μορφή τύπου bathtub.

6.6 Σύνοψη παραδειγμάτων μείξεων και της συμπεριφοράς της βαθμίδας αποτυχίας

Τα παραδείγματα του Πίνακα 6.1 συνοψίζουν αποτελέσματα από τη σχετική βιβλιογραφία. Η μείξη δύο Weibull βασίζεται στο Παράδειγμα 2.2 των Block και Joe (1997), ενώ οι περιπτώσεις Weibull--εκθετικής και Gamma--εκθετικών μείξεων συνδέονται με τα παραδείγματα των Gurland και Sethuraman (1995), τα οποία επανεξετάζονται από τους Block και Joe. Οι δύο συγκεκριμένες IFR βαθμίδες χρησιμοποιούνται ως χαρακτηριστικό αντιπαράδειγμα, δείχνοντας ότι η ιδιότητα IFR δεν διατηρείται πάντοτε υπό μείξη. Τέλος, για πεπερασμένες μείξεις, η βαθμίδα αποτυχίας συγκλίνει στη μικρότερη οριακή βαθμίδα των συνιστωσών, αποτέλεσμα που οι Block και Joe αποδίδουν στους Block, Mi και Savits (1993).

Τα γενικότερα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα παραπάνω παραδείγματα, καθώς και από το σύνολο της διπλωματικής εργασίας, θα παρουσιαστούν αναλυτικότερα στο Κεφάλαιο 7.

Περίπτωση	Συνιστώσες	Συμπεριφορά μείξης	Εφαρμοστικό μήνυμα
Weibull + εκθετική	IFR + σταθερή βαθμίδα	Τελικά DFR για κατάλληλες παραμέτρους	Μικρή ετερογένεια μπορεί να αλλάξει την ουρά.
Δύο IFR	$h_1(t) = 1 - e^{-5t}$, $h_2(t) = 6 - e^{-5t}$	Η μείξη είναι DFR	Η IFR ιδιότητα δεν διατηρείται πάντα.
Δύο Weibull	$f_1(t) = 2te^{-t^2}$, $f_2(t) = 3t^2e^{-t^3}$	Η μείξη παραμένει IFR	Η αντιστροφή δεν είναι αυτόματη.
Gamma/εκθετικές μείξεις	Συνιστώσες με διαφορετικά όρια	Bathtub ή upside-down bathtub	Τα βάρη και οι ουρές καθορίζουν το σχήμα.
Πεπερασμένη μείξη	Υπάρχουν και είναι πεπερασμένες οι οριακές βαθμίδες $a_i = \lim_{t \rightarrow \infty} h_i(t)$.	$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \min_{1 \leq i \leq n} a_i$.	Η συνιστώσα με τη μικρότερη οριακή βαθμίδα καθορίζει την ουρά.

Πίνακας 6.1: Σύνοψη παραδειγμάτων μείξεων και της συμπεριφοράς της βαθμίδας αποτυχίας.

6.7 Κάποιες επιπλέον εφαρμογές

Παράδειγμα Α: δύο παρτίδες εξαρτημάτων

Έστω ότι μια εταιρεία ελέγχει δύο παρτίδες ίδιου εξαρτήματος. Η πρώτη παρτίδα είναι καλύτερης ποιότητας και έχει βαθμίδα αποτυχίας

$$\lambda_1 = 0,02,$$

ενώ η δεύτερη είναι ασθενέστερη και έχει βαθμίδα αποτυχίας

$$\lambda_2 = 0,12.$$

Υποθέτουμε ότι το 70% των εξαρτημάτων προέρχεται από την πρώτη παρτίδα και το 30% από τη δεύτερη. Τότε η συνάρτηση επιβίωσης της μείξης γράφεται

$$\bar{F}(x) = 0,7e^{-0,02x} + 0,3e^{-0,12x}.$$

Η συνολική βαθμίδα αποτυχίας είναι

$$h(x) = \frac{0,7 \cdot 0,02e^{-0,02x} + 0,3 \cdot 0,12e^{-0,12x}}{0,7e^{-0,02x} + 0,3e^{-0,12x}}.$$

Για $x = 0$, έχουμε

$$h(0) = 0,7 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,12 = 0,014 + 0,036 = 0,05.$$

Για $x = 30$, έχουμε

$$\bar{F}(30) = 0,7e^{-0,6} + 0,3e^{-3,6}.$$

Επειδή

$$e^{-0,6} \simeq 0,5488, \quad e^{-3,6} \simeq 0,0273,$$

παίρνουμε

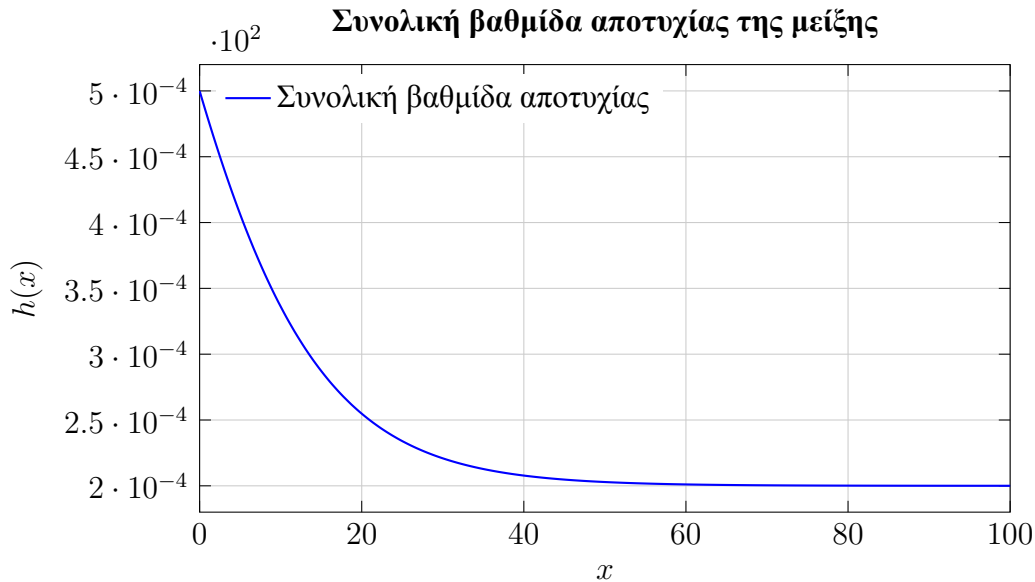
$$\bar{F}(30) = 0,7 \cdot 0,5488 + 0,3 \cdot 0,0273 = 0,3842 + 0,0082 = 0,3924.$$

Ο αριθμητής της $h(30)$ είναι

$$0,7 \cdot 0,02 \cdot 0,5488 + 0,3 \cdot 0,12 \cdot 0,0273 = 0,00768 + 0,00098 = 0,00866.$$

Άρα

$$h(30) = \frac{0,00866}{0,3924} = 0,0221.$$



Σχήμα 6.7: Η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης δύο εκθετικών κατανομών.

Παρατήρηση 6.7.1. Παρατηρούμε ότι η συνολική βαθμίδα αποτυχίας μειώνεται από 0,05 σε περίπου 0,0221. Αυτό δεν σημαίνει ότι τα εξαρτήματα γίνονται καλύτερα με την πάροδο του χρόνου. Αντίθετα, η ασθενέστερη παρτίδα παρουσιάζει αποτυχίες νωρίτερα και, για μεγαλύτερες τιμές του x , στο δείγμα παραμένουν κυρίως εξαρτήματα καλύτερης ποιότητας.

Παράδειγμα B: burn-in σε ηλεκτρονικές συσκευές

Έστω ότι το 10% των ηλεκτρονικών συσκευών έχει κρυφό κατασκευαστικό ελάττωμα και αποτυγχάνει γρήγορα, με βαθμίδα αποτυχίας

$$\lambda_D = 0,8.$$

Το υπόλοιπο 90% των συσκευών είναι κανονικές μονάδες, αλλά εμφανίζει φυσική φθορά που αυξάνεται με τον χρόνο. Έστω ότι η βαθμίδα αποτυχίας των κανονικών μονάδων είναι

$$h_N(x) = 0,02x.$$

Για τις ελαττωματικές μονάδες η συνάρτηση επιβίωσης είναι

$$\bar{F}_D(x) = e^{-0,8x}.$$

Για τις κανονικές μονάδες, επειδή

$$h_N(x) = 0,02x,$$

έχουμε

$$\bar{F}_N(x) = \exp\left(-\int_0^x 0,02u \, du\right) = \exp(-0,01x^2).$$

Άρα η συνολική συνάρτηση επιβίωσης της μείξης είναι

$$\bar{F}(x) = 0,1e^{-0,8x} + 0,9e^{-0,01x^2}.$$

Η συνολική βαθμίδα αποτυχίας είναι

$$h(x) = \frac{0,1 \cdot 0,8e^{-0,8x} + 0,9 \cdot 0,02xe^{-0,01x^2}}{0,1e^{-0,8x} + 0,9e^{-0,01x^2}}.$$

Για $x = 0$, έχουμε

$$h(0) = 0,1 \cdot 0,8 + 0,9 \cdot 0 = 0,08.$$

Για $x = 1$, έχουμε

$$h(1) = \frac{0,08e^{-0,8} + 0,018e^{-0,01}}{0,1e^{-0,8} + 0,9e^{-0,01}}.$$

Επειδή

$$e^{-0,8} \simeq 0,4493, \quad e^{-0,01} \simeq 0,9900,$$

παίρνουμε

$$h(1) = \frac{0,08 \cdot 0,4493 + 0,018 \cdot 0,9900}{0,1 \cdot 0,4493 + 0,9 \cdot 0,9900} = \frac{0,0359 + 0,0178}{0,0449 + 0,8910} = \frac{0,0537}{0,9359} \simeq 0,0574.$$

Για $x = 5$, έχουμε

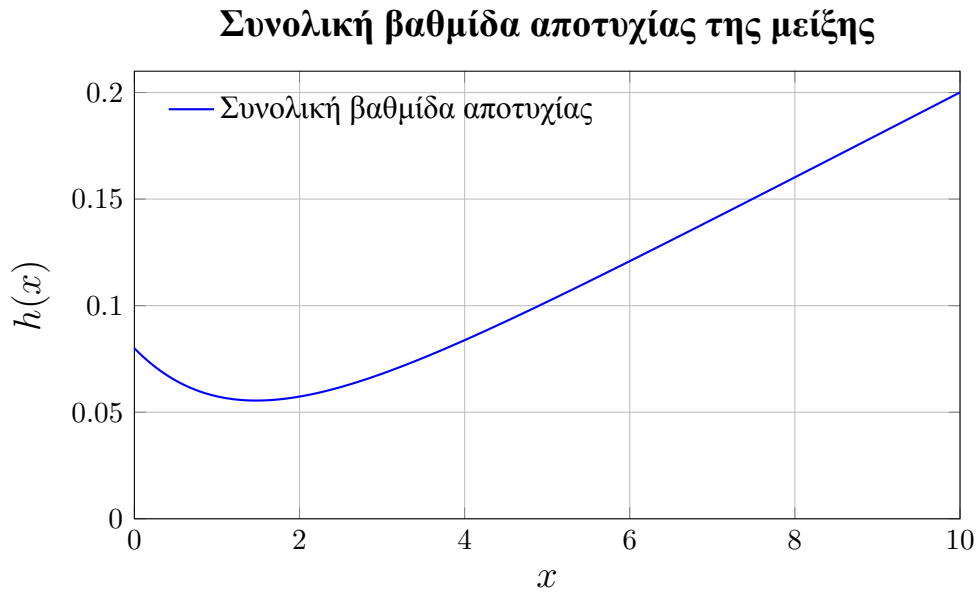
$$h(5) = \frac{0,08e^{-4} + 0,09e^{-0,25}}{0,1e^{-4} + 0,9e^{-0,25}}.$$

Επειδή

$$e^{-4} \simeq 0,0183, \quad e^{-0,25} \simeq 0,7788,$$

παίρνουμε

$$h(5) = \frac{0,08 \cdot 0,0183 + 0,09 \cdot 0,7788}{0,1 \cdot 0,0183 + 0,9 \cdot 0,7788} = \frac{0,00146 + 0,07009}{0,00183 + 0,7009} = \frac{0,07155}{0,7027} \simeq 0,1018.$$



Σχήμα 6.8: Η συνολική βαθμίδα αποτυχίας για τη μείξη ελαττωματικών και κανονικών ηλεκτρονικών συσκευών.

Παρατήρηση 6.7.2. Η συνολική βαθμίδα αποτυχίας παρουσιάζει μορφή τύπου bathtub. Αρχικά μειώνεται, λόγω της γρήγορης αποτυχίας και απομάκρυνσης των ελαττωματικών μονάδων, ενώ στη συνέχεια αυξάνεται εξαιτίας της φυσικής φθοράς των κανονικών μονάδων. Ωστόσο, στο συγκεκριμένο μοντέλο η ενδιάμεση περιοχή, στην οποία η βαθμίδα αποτυχίας παραμένει περίπου σταθερή, δεν είναι ιδιαίτερα εκτεταμένη. Επομένως, η καμπύλη αποτελεί μια απλοποιημένη μορφή της κλασικής καμπύλης bathtub.

Παράδειγμα Γ: Pooling δεδομένων από διαφορετικά περιβάλλοντα λειτουργίας

Έστω ότι ο ίδιος τύπος μηχανήματος λειτουργεί σε δύο διαφορετικά περιβάλλοντα. Στο ήπιο περιβάλλον ο χρόνος ζωής ακολουθεί κατανομή Gamma με παράμετρο σχήματος 2 και ρυθμό

$$\lambda_1 = 0,03,$$

ενώ στο βαρύ περιβάλλον ακολουθεί κατανομή Gamma με ίδιο σχήμα και ρυθμό

$$\lambda_2 = 0,15.$$

Για $i = 1, 2$, η πυκνότητα και η συνάρτηση επιβίωσης είναι αντίστοιχα

$$f_i(x) = \lambda_i^2 x e^{-\lambda_i x}, \quad \bar{F}_i(x) = e^{-\lambda_i x} (1 + \lambda_i x), \quad x \geq 0.$$

Επομένως, η βαθμίδα αποτυχίας της i -οστής ομάδας είναι

$$h_i(x) = \frac{f_i(x)}{\bar{F}_i(x)} = \frac{\lambda_i^2 x}{1 + \lambda_i x}.$$

Επιπλέον,

$$h'_i(x) = \frac{\lambda_i^2}{(1 + \lambda_i x)^2} > 0,$$

οπότε και στα δύο περιβάλλοντα η βαθμίδα αποτυχίας είναι γνησίως αύξουσα. Συνεπώς, καθεμία από τις δύο ομάδες παρουσιάζει IFR συμπεριφορά.

Αν τα δεδομένα των δύο περιβαλλόντων συνενωθούν με ίσα βάρη, τότε η συνολική συνάρτηση επιβίωσης είναι

$$\bar{F}(x) = 0,5e^{-0,03x}(1 + 0,03x) + 0,5e^{-0,15x}(1 + 0,15x).$$

Η συνολική πυκνότητα πιθανότητας είναι

$$f(x) = 0,5(0,03)^2 x e^{-0,03x} + 0,5(0,15)^2 x e^{-0,15x}.$$

Άρα η συνολική βαθμίδα αποτυχίας της μείζης είναι

$$h(x) = \frac{0,5(0,03)^2 x e^{-0,03x} + 0,5(0,15)^2 x e^{-0,15x}}{0,5e^{-0,03x}(1 + 0,03x) + 0,5e^{-0,15x}(1 + 0,15x)}.$$

Για $x = 10$, έχουμε

$$h(10) = \frac{0,5(0,03)^2 \cdot 10e^{-0,3} + 0,5(0,15)^2 \cdot 10e^{-1,5}}{0,5e^{-0,3}(1 + 0,3) + 0,5e^{-1,5}(1 + 1,5)} \approx 0,0374.$$

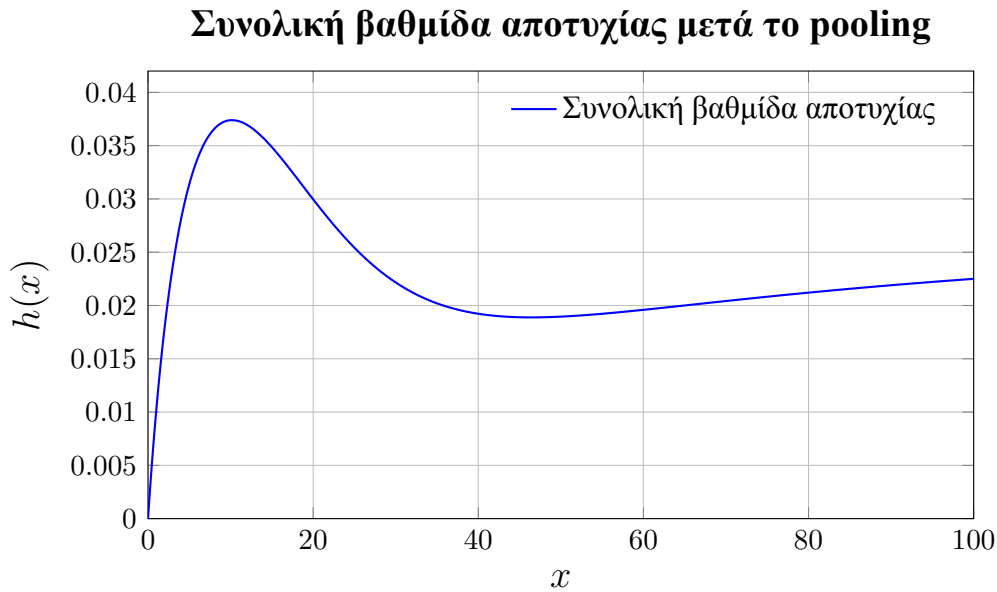
Για $x = 50$, έχουμε

$$h(50) = \frac{0,5(0,03)^2 \cdot 50e^{-1,5} + 0,5(0,15)^2 \cdot 50e^{-7,5}}{0,5e^{-1,5}(1 + 1,5) + 0,5e^{-7,5}(1 + 7,5)} \approx 0,0190.$$

Παρατηρούμε, επομένως, ότι

$$h(50) < h(10),$$

παρόλο που οι βαθμίδες αποτυχίας και των δύο επιμέρους ομάδων είναι γνησίως αύξουσες.



Σχήμα 6.9: Η συνολική βαθμίδα αποτυχίας μετά το pooling των δύο ομάδων.

Παρατήρηση 6.7.3. Η συνένωση των δύο ομάδων μεταβάλλει τη μορφή της βαθμίδας αποτυχίας. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.9, η συνολική βαθμίδα αρχικά αυξάνεται, στη συνέχεια μειώνεται και για μεγάλες τιμές του t αυξάνεται εκ νέου. Επομένως, παρουσιάζει τροποποιημένη μορφή bathtub. Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στη μεταβολή της σύνθεσης του πληθυσμού, καθώς οι μονάδες του βαρύτερου περιβάλλοντος αποτυγχάνουν νωρίτερα.

Παράδειγμα Δ: Αστοχίες βιομηχανικών αντλιών από δύο διαφορετικούς μηχανισμούς

Μια βιομηχανική μονάδα εξετάζει τον χρόνο X μέχρι την αστοχία αντλιών που λειτουργούν συνεχώς. Οι αντλίες προέρχονται από τον ίδιο κατασκευαστή, αλλά εμφανίζουν δύο διαφορετικούς μηχανισμούς αστοχίας.

Το 15% των αντλιών θεωρείται ότι διαθέτει κάποιο κρυφό κατασκευαστικό ελάττωμα και επομένως παρουσιάζει αυξημένο κίνδυνο αστοχίας κατά την αρχική περίοδο λειτουργίας. Για τις αντλίες αυτές χρησιμοποιείται η γενικευμένη εκθετική κατανομή με παραμέτρους

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \lambda = 1.$$

Το υπόλοιπο 85% αποτελείται από κανονικές αντλίες, των οποίων οι αστοχίες οφείλονται κυρίως στη συσσώρευση μηχανικής κόπωσης. Για αυτή την ομάδα χρησιμοποιείται

η αντίστροφη κατανομή Weibull με παράμετρο σχήματος

$$k = 3$$

και παράμετρο κλίμακας

$$\eta = 10.$$

Για τη γενικευμένη εκθετική κατανομή η συνάρτηση κατανομής είναι

$$F_1(x) = (1 - e^{-\lambda x})^\alpha, \quad x \geq 0.$$

Επομένως, η συνάρτηση επιβίωσης είναι

$$\overline{F}_1(x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x})^\alpha,$$

ενώ η πυκνότητα δίνεται από

$$f_1(x) = \alpha \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1}.$$

Για $\alpha = 1/2$ και $\lambda = 1$, λαμβάνουμε

$$\overline{F}_1(x) = 1 - \sqrt{1 - e^{-x}}$$

και

$$f_1(x) = \frac{1}{2} e^{-x} (1 - e^{-x})^{-1/2}.$$

Η βαθμίδα αποτυχίας της πρώτης ομάδας είναι

$$h_1(x) = \frac{\frac{1}{2} e^{-x} (1 - e^{-x})^{-1/2}}{1 - \sqrt{1 - e^{-x}}}.$$

Για την αντίστροφη κατανομή Weibull η συνάρτηση κατανομής δίνεται από

$$F_2(x) = \exp \left\{ - \left(\frac{\eta}{x} \right)^k \right\}, \quad x > 0.$$

Άρα η συνάρτηση επιβίωσης είναι

$$\overline{F}_2(x) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{\eta}{x} \right)^k \right\},$$

ενώ η πυκνότητα είναι

$$f_2(x) = \frac{k\eta^k}{x^{k+1}} \exp \left\{ - \left(\frac{\eta}{x} \right)^k \right\}.$$

Για $k = 3$ και $\eta = 10$, προκύπτει

$$\overline{F}_2(x) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{10}{x} \right)^3 \right\}$$

και

$$f_2(x) = \frac{3000}{x^4} \exp \left\{ - \left(\frac{10}{x} \right)^3 \right\}.$$

Η συνάρτηση επιβίωσης της μείξης είναι

$$\overline{F}(x) = 0,15\overline{F}_1(x) + 0,85\overline{F}_2(x),$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \overline{F}(x) = & 0,15 \left(1 - \sqrt{1 - e^{-x}} \right) \\ & + 0,85 \left[1 - \exp \left\{ - \left(\frac{10}{x} \right)^3 \right\} \right]. \end{aligned}$$

Η πυκνότητα της μείξης είναι

$$f(x) = 0,15f_1(x) + 0,85f_2(x),$$

οπότε η συνολική βαθμίδα αποτυχίας είναι

$$h(x) = \frac{0,15f_1(x) + 0,85f_2(x)}{0,15\overline{F}_1(x) + 0,85\overline{F}_2(x)}.$$

Ενδεικτικά,

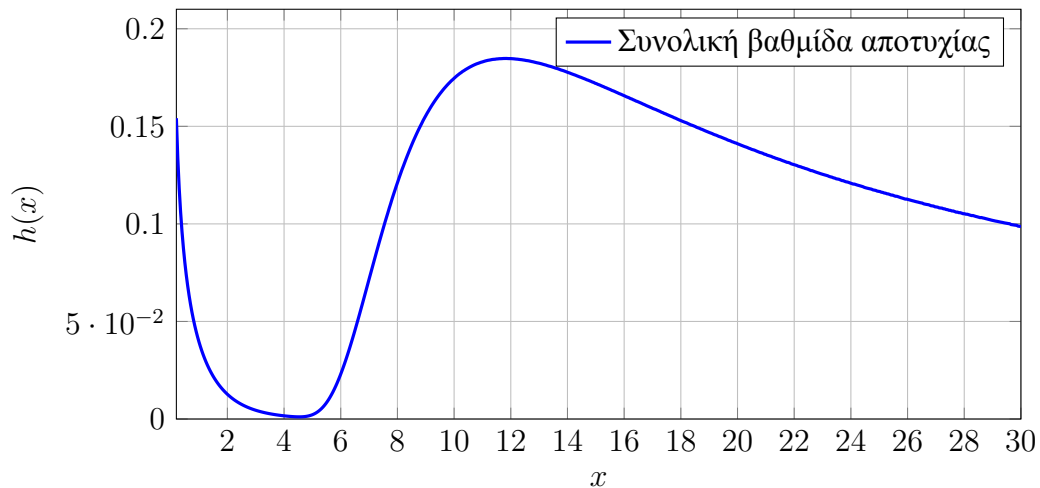
$$h(0,2) \simeq 0,1541, \quad h(1) \simeq 0,0394, \quad h(3) \simeq 0,0045.$$

Η βαθμίδα αποτυχίας λαμβάνει μια πολύ μικρή τιμή περίπου στη χρονική στιγμή

$$x = 4,53, \quad h(4,53) \simeq 0,0011.$$

Στη συνέχεια αυξάνεται εξαιτίας της μηχανικής κόπωσης και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο περίπου στη χρονική στιγμή

$$x = 11,82, \quad h(11,82) \simeq 0,1847.$$



Σχήμα 6.10: Βαθμίδα αποτυχίας αντλιών από δύο διαφορετικούς μηχανισμούς.

Παρατήρηση 6.7.4. Η αρχικά υψηλή βαθμίδα αποτυχίας οφείλεται στις αντλίες με κρυφά κατασκευαστικά ελαττώματα. Μετά την απομάκρυνσή τους, η βαθμίδα αποτυχίας μειώνεται σημαντικά και στη συνέχεια αυξάνεται μέχρι ένα τοπικό μέγιστο. Για ακόμη μεγαλύτερες τιμές του χρόνου μειώνεται εκ νέου, καθώς κυριαρχεί η ουρά της αντίστροφης κατανομής Weibull. Επομένως, η καμπύλη παρουσιάζει σύνθετη μη μονοτονική μορφή και όχι την κλασική μορφή bathtub.

Παράδειγμα Ε: Χρόνος διεκπεραίωσης ασφαλιστικών απαιτήσεων

Μια ασφαλιστική εταιρεία εξετάζει τον χρόνο X , σε ημέρες, μέχρι την ολοκλήρωση μιας ασφαλιστικής απαίτησης. Ο συνολικός πληθυσμός των απαιτήσεων δεν είναι ομοιογενής, καθώς αποτελείται από δύο διαφορετικές κατηγορίες.

Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τις συνηθισμένες απαιτήσεις, οι οποίες αντιστοιχούν στο 85% του συνόλου. Η διεκπεραίωσή τους περιλαμβάνει τρία διαδοχικά στάδια: την καταχώριση της απαίτησης, τον έλεγχο των δικαιολογητικών και την τελική έγκριση της αποζημίωσης. Για τον λόγο αυτό, ο χρόνος διεκπεραίωσής τους περιγράφεται από την κατανομή

$$X_1 \sim \text{Erlang}(3, 0,3).$$

Η δεύτερη κατηγορία, η οποία αντιστοιχεί στο υπόλοιπο 15%, περιλαμβάνει σύνθετες ή δικαστικές απαιτήσεις. Οι συγκεκριμένες υποθέσεις δεν μπορούν να ολοκληρωθούν πριν περάσουν τουλάχιστον πέντε ημέρες και ενδέχεται να παραμείνουν ανοικτές για ιδιαίτερα μεγάλο χρονικό διάστημα. Για την κατηγορία αυτή χρησιμοποιείται η κατανομή

$$X_2 \sim \text{Pareto}(5, 2).$$

Τα βάρη της μείξης είναι επομένως

$$q_1 = 0,85, \quad q_2 = 0,15.$$

Στην παρούσα εφαρμογή, η βαθμίδα αποτυχίας ερμηνεύεται ως ο στιγμιαίος ρυθμός ολοκλήρωσης μιας απαίτησης, υπό την προϋπόθεση ότι αυτή παραμένει ανοικτή μέχρι τη χρονική στιγμή x .

Για τη συνιστώσα Erlang, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι

$$f_1(x) = \frac{0,3^3 x^2 e^{-0,3x}}{2!} = 0,0135 x^2 e^{-0,3x}, \quad x \geq 0,$$

ενώ η συνάρτηση επιβίωσης είναι

$$\bar{F}_1(x) = e^{-0,3x} \left(1 + 0,3x + \frac{(0,3x)^2}{2} \right).$$

Ισοδύναμα,

$$\bar{F}_1(x) = e^{-0,3x} (1 + 0,3x + 0,045x^2).$$

Για τη συνιστώσα Pareto έχουμε

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 5, \\ \frac{2 \cdot 5^2}{x^3} = \frac{50}{x^3}, & x \geq 5, \end{cases}$$

και

$$\bar{F}_2(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 5, \\ \left(\frac{5}{x}\right)^2 = \frac{25}{x^2}, & x \geq 5. \end{cases}$$

Η πυκνότητα της μείξης δίνεται από

$$f_X(x) = q_1 f_1(x) + q_2 f_2(x).$$

Επομένως,

$$f_X(x) = \begin{cases} 0,011475 x^2 e^{-0,3x}, & 0 \leq x < 5, \\ 0,011475 x^2 e^{-0,3x} + \frac{7,5}{x^3}, & x \geq 5. \end{cases}$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση επιβίωσης της μείξης είναι

$$\overline{F}_X(x) = q_1 \overline{F}_1(x) + q_2 \overline{F}_2(x),$$

δηλαδή

$$\overline{F}_X(x) = \begin{cases} 0,85e^{-0,3x} (1 + 0,3x + 0,045x^2) + 0,15, & 0 \leq x < 5, \\ 0,85e^{-0,3x} (1 + 0,3x + 0,045x^2) + \frac{3,75}{x^2}, & x \geq 5. \end{cases}$$

Άρα, η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης γράφεται ως

$$h_X(x) = \frac{f_X(x)}{\overline{F}_X(x)}$$

και επομένως

$$h_X(x) = \begin{cases} \frac{0,011475x^2e^{-0,3x}}{0,85e^{-0,3x} (1 + 0,3x + 0,045x^2) + 0,15}, & 0 \leq x < 5, \\ \frac{0,011475x^2e^{-0,3x} + \frac{7,5}{x^3}}{0,85e^{-0,3x} (1 + 0,3x + 0,045x^2) + \frac{3,75}{x^2}}, & x \geq 5. \end{cases}$$

Για $x < 5$, μόνο οι συνηθισμένες απαιτήσεις μπορούν να έχουν ολοκληρωθεί, ενώ οι σύνθετες υποθέσεις παραμένουν ανοικτές. Ακριβώς στη χρονική στιγμή $x = 5$, αρχίζει να υπάρχει δυνατότητα ολοκλήρωσης και των σύνθετων απαιτήσεων, με αποτέλεσμα την απότομη αύξηση της συνολικής βαθμίδας αποτυχίας.

Ενδεικτικά, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} h_X(x) \simeq 0,076, \quad h_X(5) \simeq 0,148.$$

Η βαθμίδα αποτυχίας συνεχίζει να αυξάνεται και λαμβάνει μέγιστη τιμή περίπου στη χρονική στιγμή

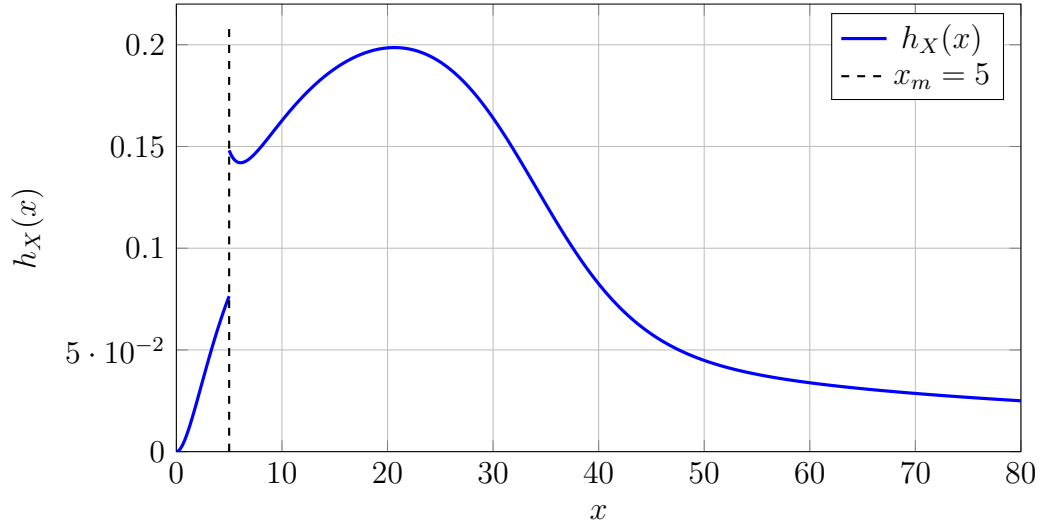
$$x = 20,66, \quad h_X(20,66) \simeq 0,199.$$

Για μεγάλες τιμές του x , η εκθετικά φθίνουσα ουρά της κατανομής Erlang μειώνεται ταχύτερα από την ουρά της κατανομής Pareto. Επομένως, στη μείξη κυριαρχούν τελικά οι σύνθετες απαιτήσεις και ισχύει

$$h_X(x) \sim \frac{2}{x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Κατά συνέπεια,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h_X(x) = 0.$$



Σχήμα 6.11: Βαθμίδα αποτυχίας για τον χρόνο διεκπεραίωσης συνηθισμένων και σύνθετων ασφαλιστικών απαιτήσεων.

Παρατήρηση 6.7.5. Η ασυνέχεια της βαθμίδας αποτυχίας στο σημείο $x = 5$ δεν αποτελεί μαθηματικό σφάλμα. Προκύπτει από την υπόθεση ότι μια σύνθετη ή δικαστική απαίτηση δεν μπορεί να ολοκληρωθεί πριν από το ελάχιστο χρονικό όριο $x_m = 5$. Από τη χρονική αυτή στιγμή και μετά, η συνιστώσα Pareto αρχίζει να συνεισφέρει στην πυκνότητα της μείξης, προκαλώντας την απότομη μεταβολή της συνολικής βαθμίδας αποτυχίας.

Παρατήρηση 6.7.6. Οι συνηθισμένες απαιτήσεις ολοκληρώνονται μέσω διαδοχικών και σχετικά προβλέψιμων σταδίων, ενώ οι σύνθετες απαιτήσεις δημιουργούν μεγάλη δεξιά ουρά στον συνολικό χρόνο διεκπεραίωσης. Για τον λόγο αυτό, η βαθμίδα ολοκλήρωσης αρχικά αυξάνεται, αλλά τελικά μειώνεται, καθώς μεταξύ των απαιτήσεων που παραμένουν ανοικτές κυριαρχούν οι ιδιαίτερα χρονοβόρες υποθέσεις.

Κεφάλαιο 7

Τελικά Συμπεράσματα

Η παρούσα διπλωματική εργασία είχε ως βασικό αντικείμενο τη μελέτη της βαθμίδας αποτυχίας σε μείξεις κατανομών. Κεντρικός στόχος ήταν να εξεταστεί κατά πόσο οι ιδιότητες γήρανσης των επιμέρους κατανομών διατηρούνται όταν αυτές συνδυάζονται για την περιγραφή ενός ετερογενούς πληθυσμού. Η ανάλυση έδειξε ότι η συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας μιας μείξης μπορεί να είναι σημαντικά πιο σύνθετη από τη συμπεριφορά των συνιστωσών της και ότι η μονοτονία των επιμέρους βαθμίδων δεν αρκεί για τον προσδιορισμό της συνολικής μορφής της.

Αρχικά παρουσιάστηκαν οι βασικές συνεχείς κατανομές που χρησιμοποιούνται στη θεωρία αξιοπιστίας και στην ανάλυση χρόνων ζωής. Η εκθετική κατανομή χαρακτηρίζεται από σταθερή βαθμίδα αποτυχίας, ενώ στις κατανομές Gamma και Weibull η μονοτονία καθορίζεται από την παράμετρο σχήματος. Η κατανομή Erlang έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας για μία φάση και αύξουσα για περισσότερες φάσεις, ενώ η κατανομή Pareto αποτελεί χαρακτηριστική περίπτωση φθίνουσας βαθμίδας αποτυχίας. Τα αποτελέσματα αυτά ανέδειξαν ότι, για μία μεμονωμένη κατανομή, η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας συνδέεται άμεσα με τις παραμέτρους της και μπορεί να ερμηνευθεί ως ένδειξη φθοράς, πρώιμων αστοχιών ή απουσίας γήρανσης.

Η εικόνα μεταβάλλεται ουσιαστικά όταν εξετάζονται μείξεις κατανομών. Η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης δεν αποτελεί έναν απλό σταθμισμένο μέσο των επιμέρους βαθμίδων με σταθερά βάρη. Τα πραγματικά βάρη εξαρτώνται από τον χρόνο και από τις πιθανότητες επιβίωσης των συνιστωσών. Οι ομάδες με υψηλότερη βαθμίδα αποτυχίας αποδυναμώνονται ταχύτερα, ενώ οι ανθεκτικότερες ομάδες αποκτούν σταδιακά μεγαλύτερη συμμετοχή στον πληθυσμό των επιζώντων. Συνεπώς, η συνολική βαθμίδα αποτυχίας επηρεάζεται τόσο από τις επιμέρους κατανομές όσο και από τη διαρκή μεταβολή της σύνθεσης του πληθυσμού.

Χαρακτηριστικό αποτέλεσμα αποτελεί η μείξη εκθετικών κατανομών. Παρότι κάθε εκθετική συνιστώσα έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας, η βαθμίδα της μείξης είναι φθί-

νους. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι η ετερογένεια μπορεί από μόνη της να δημιουργήσει φαινομενική μείωση του κινδύνου, χωρίς να βελτιώνεται πραγματικά η αξιοπιστία των επιμέρους μονάδων. Αντίστοιχα, επιβεβαιώθηκε ότι η κλάση των DFR κατανομών διατηρείται ως προς τις μείξεις, ενώ η κλάση IFR δεν διαθέτει την ίδια ιδιότητα. Επομένως, μια μείξη κατανομών με αύξουσες βαθμίδες αποτυχίας δεν είναι αναγκαστικά IFR.

Ιδιαίτερη σημασία είχε η μελέτη της αρχικής και της τελικής συμπεριφοράς της βαθμίδας αποτυχίας. Η αρχική της τιμή ισούται με τον σταθμισμένο μέσο των αρχικών βαθμίδων των υποπληθυσμών. Αντίθετα, η αρχική κλίση περιλαμβάνει έναν πρόσθετο μη θετικό όρο, ο οποίος εκφράζει την ετερογένεια μεταξύ των αρχικών βαθμίδων αποτυχίας. Όσο μεγαλύτερες είναι οι διαφορές μεταξύ των υποπληθυσμών, τόσο περισσότερο μπορεί να μειωθεί η αρχική κλίση της μείξης. Έτσι, ακόμη και όταν όλες οι συνιστώσες είναι αύξουσες, κατάλληλες τιμές των βαρών μπορούν να οδηγήσουν σε αύξουσα, bathtub ή τροποποιημένη bathtub μορφή.

Για μεγάλες χρονικές τιμές, καθοριστικό ρόλο διαδραματίζει η ασυμπτωτικά ισχυρότερη συνιστώσα. Υπό τις κατάλληλες προϋποθέσεις, η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης προσεγγίζει τη βαθμίδα της συνιστώσας με τη μικρότερη οριακή βαθμίδα αποτυχίας ή, γενικότερα, με τη βαρύτερη ουρά. Μια συνιστώσα μπορεί επομένως να έχει πολύ μικρό αρχικό βάρος, αλλά να κυριαρχήσει τελικά, επειδή οι μονάδες της επιβιώνουν περισσότερο. Τα αρχικά βάρη επηρεάζουν κυρίως τη μεταβατική πορεία και τη χρονική στιγμή κατά την οποία η ισχυρότερη συνιστώσα αρχίζει να επικρατεί, χωρίς να καθορίζουν πάντοτε την τελική συμπεριφορά.

Τα αποτελέσματα των Gurland και Sethuraman (1995) ανέδειξαν ιδιαίτερα τον κίνδυνο που δημιουργείται από τη συνένωση δεδομένων. Δύο υποπληθυσμοί με αύξουσες βαθμίδες αποτυχίας μπορούν, όταν εξεταστούν συνολικά, να εμφανίσουν τελικά φθίνουσα βαθμίδα. Επομένως, η μελέτη συγκεντρωτικών δεδομένων χωρίς έλεγχο της ετερογένειας μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα για τη γήρανση και την αξιοπιστία ενός συστήματος. Μια φθίνουσα συνολική βαθμίδα δεν σημαίνει απαραίτητα ότι οι μονάδες βελτιώνονται με τον χρόνο, αλλά μπορεί να σημαίνει ότι οι ασθενέστερες μονάδες έχουν ήδη αποτύχει και ότι στον πληθυσμό παραμένουν κυρίως οι ανθεκτικότερες.

Τα αριθμητικά παραδείγματα και οι γραφικές παραστάσεις του Κεφαλαίου 6 επιβεβαίωσαν στην πράξη τα θεωρητικά αποτελέσματα. Παρουσιάστηκαν περιπτώσεις στις οποίες μια μείξη IFR κατανομών παρέμεινε IFR, καθώς και περιπτώσεις στις οποίες μετατράπηκε σε DFR ή απέκτησε μη μονότονη μορφή. Οι μείξεις με τρεις συνιστώσες έδειξαν ακόμη μεγαλύτερη ευελιξία, παράγοντας καμπύλες με τοπικά μέγιστα και ελάχιστα. Οι εφαρμογές σε παρτίδες εξαρτημάτων, ηλεκτρονικές συσκευές, διαφορετικά περιβάλλοντα λειτουργίας, βιομηχανικές αντλίες και ασφαλιστικές απαιτήσεις ανέδειξαν ότι τα αποτελέσματα δεν έχουν μόνο θεωρητικό ενδιαφέρον, αλλά προσφέρουν χρήσιμες ερμηνείες σε πραγμα-

τικά προβλήματα αξιοπιστίας και κινδύνου.

Συνολικά, το βασικό συμπέρασμα της εργασίας είναι ότι η βαθμίδα αποτυχίας μιας μείξης αποτελεί δυναμικό μέγεθος, το οποίο αντανακλά όχι μόνο τη γήρανση των επιμέρους μονάδων αλλά και τη μεταβολή της σύνθεσης του πληθυσμού. Για την ορθή αξιολόγηση ενός ετερογενούς συστήματος απαιτείται εξέταση των παραμέτρων, των αρχικών βαρών, των συναρτήσεων επιβίωσης, της αρχικής κλίσης και της συμπεριφοράς των ουρών. Η απλή γνώση ότι οι επιμέρους κατανομές είναι IFR ή DFR δεν είναι επαρκής.

Μια φυσική συνέχεια της παρούσας μελέτης θα ήταν η εφαρμογή των αποτελεσμάτων σε πραγματικά δεδομένα με λογοκρισία, η εκτίμηση του αριθμού των συνιστωσών και των βαρών τους, καθώς και η σύγκριση διαφορετικών μοντέλων μείξης. Επιπλέον, θα μπορούσαν να εξεταστούν συνεχείς ή άπειρες μείξεις και να αναπτυχθούν μέθοδοι ευαισθησίας ως προς τις παραμέτρους. Τέτοιες προεκτάσεις θα συνέδεαν ακόμη περισσότερο τη θεωρητική συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας με τη στατιστική συμπερασματολογία και τη λήψη αποφάσεων σε εφαρμογές αξιοπιστίας, επιβίωσης και αναλογιστικού κινδύνου.

Βιβλιογραφία

Ελληνική Βιβλιογραφία

- [1] Χατζηκωνσταντινίδης, Ε. (2018). *Σημειώσεις Π.Μ.Σ. «Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνου»*. Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Πειραιάς.
- [2] Κούτρας, Μ. Β. (2004). *Εισαγωγή στις Πιθανότητες: Θεωρία και Εφαρμογές*. Εκδόσεις Αθ. Σταμούλη, Αθήνα.
- [3] Πανάρετος, Ι. και Ξεκαλάκη, Ε. (2000). *Εισαγωγή στη Στατιστική Σκέψη, Τόμος II: Εκτιμητική και Έλεγχοι Υποθέσεων*. Εκδόσεις Μπένου, Αθήνα.
- [4] Πολίτης, Κ. (2012). *Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου*. Εκδόσεις Αθ. Σταμούλη, Αθήνα.

Αγγλική Βιβλιογραφία

- [5] Barlow, R. E. and Proschan, F. (1996). *Mathematical Theory of Reliability*. Wiley and Sons Inc.
- [6] Block, H. W. and Joe, H. (1997). Tail Behavior of the Failure Rate Functions of Mixtures. *Lifetime Data Analysis*.
- [7] Block, H. W., Li, Y. and Savits, T. H. (2003). Initial and Final Behaviour of Failure Rate Functions for Mixtures and Systems. *Journal of Applied Probability*.
- [8] Finkelstein, M. (2008). *Failure Rate Modelling for Reliability and Risk*. Springer.
- [9] Gupta, A. K., Zeng, W.-B. and Wu, Y. (2010). *Probability and Statistical Models: Foundations for Problems in Reliability and Financial Mathematics*. Birkhäuser, New York.

- [10] Gurland, J. and Sethuraman, J. (1995). How Pooling Failure Data May Reverse Increasing Failure Rates. *Journal of the American Statistical Association*.
- [11] Jiang, R. and Murthy, D. N. P. (1998). Mixture of Weibull Distributions: Parametric Characterization of Failure Rate Function. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*.
- [12] Marshall, A. W. and Olkin, I. (2007). *Life Distributions: Structure of Nonparametric, Semiparametric, and Parametric Families*. Springer Science and Business Media, LLC.
- [13] Peel, D. and McLachlan, G. J. (2000). Robust Mixture Modelling Using the t Distribution. *Statistics and Computing*.
- [14] Politis, K. and Koutras, M. (2006). Some New Bounds for the Renewal Function. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*.
- [15] Ross, S. M. (2014). *Introduction to Probability Models*, 11th edition. Academic Press.
- [16] Willmot, G. E. and Lin, X. S. (2001). *Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications*. Springer Science and Business Media, LLC.
- [17] Willmot, G. E. and Lin, X. S. (2011). Risk Modelling with the Mixed Erlang Distribution. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*.
- [18] Willmot, G. E. and Woo, J. (2007). On the Class of Erlang Mixtures with Risk-Theoretic Applications. *North American Actuarial Journal*.