ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

Το Υπόδειγμα Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων (CAPM), το Μοντέλο Black-Scholes και η Σύνδεσή τους με Στρατηγικές Αντιστάθμισης Κινδύνων

Δημήτριος Κόσυβας

Διπλωματική εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού διπλώματος ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων

ΠΕΙΡΑΙΑΣ, Φεβρουάριος 2025

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

Risk Return Strategies and their Linchpin with the Capital Asset Pricing and Black-Scholes Model

Dimitrios Kosyvas

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Science in Actuarial Science and Risk Management

PIRAEUS, February 2025

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη Συνέλευση του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. ……… συνεδρίασή της, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγήτρια Βερροπούλου Γεωργία
- Καθηγητής Σεβρόγλου Βασίλειος (Επιβλέπων)
- Καθηγητής Τήνιος Πλάτων

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

~ Στους γονείς μου,

που με δίδαξαν με “φως”

και μ’ έμαθαν να “βλέπω” ~

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας τη διπλωματική μου εργασία, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες σε όσους με στήριξαν και συνέβαλαν, είτε άμεσα είτε έμμεσα, στην εκπόνησή της.

Ιδιαίτερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Σεβρόγλου Βασίλειο, για την υπομονή, τη διαρκή ενθάρρυνση και την πολύτιμη καθοδήγηση που μου παρείχε σε όλα τα στάδια της έρευνας και συγγραφής.

Θερμές ευχαριστίες απευθύνω, επίσης, στα υπόλοιπα μέλη της επιτροπής, την κα. Βερροπούλου Γεωργία και τον κ. Τήνιο Πλάτων, για τον χρόνο που διέθεσαν, τις ουσιαστικές υποδείξεις και τις χρήσιμες συμβουλές τους.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω τη βαθιά μου ευγνωμοσύνη προς την οικογένειά μου για τη συνεχή στήριξη και ενθάρρυνση που μου προσέφεραν καθ’ όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα παρουσιάσουμε δύο σημαντικά μοντέλα αποτίμησης / τιμολόγησης της χρηματοοικονομικής επιστήμης. Το πρώτο μοντέλο αφορά την αποτίμηση περιουσιακών στοιχείων, γνωστό και ως CAPM, και το άλλο την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης, γνωστό και ως Black-Scholes-Merton. Αρχικά, αναλύεται το θεωρητικό υπόβαθρο και η μαθηματική θεμελίωση του CAPM, εστιάζοντας στη σχέση κινδύνου και απόδοσης, καθώς και στην αποτελεσματική διαφοροποίηση χαρτοφυλακίων. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η μοντελοποίηση της συμπεριφοράς των τιμών των μετοχών μέσω στοχαστικών διαδικασιών και εισάγεται η μερική διαφορική εξίσωση των Black-Scholes-Merton, η οποία αποτελεί τη βάση για την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Τέλος, αναλύονται οι στρατηγικές αντιστάθμισης κινδύνου, με έμφαση στην αντιστάθμιση Δέλτα, ενώ παράλληλα παρατίθενται χρήσιμα παραδείγματα και εξάγονται σημαντικά συμπεράσματα που συμβάλλουν στην κατανόηση της εφαρμογής αυτών των μοντέλων στις χρηματοοικονομικές αγορές. Μέσω αυτής της μελέτης, αναδεικνύεται η σημασία των θεωρητικών αυτών μοντέλων στη διαχείριση του χρηματοοικονομικού κινδύνου και τη λήψη επενδυτικών στρατηγικών.

Λέξεις-κλειδιά: CAPM, Διαφοροποίηση χαρτοφυλακίου, Μοντέλο Black-Scholes-Merton, Αντιστάθμιση Κινδύνου, Δέλτα Hedging.

Abstract

In this dissertation, we present two significant valuation / pricing models in financial science. The first model concerns the valuation of assets, known as the Capital Asset Pricing Model (CAPM), while the second focuses on the pricing of options, known as the Black-Scholes-Merton model. Initially, we analyze the theoretical background and the mathematical foundation of the CAPM, emphasizing the relationship between risk and return, as well as the efficient diversification of portfolios. Subsequently, we examine the modeling of stock price behavior through stochastic processes and introduce the Black-Scholes-Merton partial differential equation, which serves as the basis for option evaluation. Finally, we analyze risk hedging strategies, with a particular focus on Delta Hedging, while also providing useful examples and drawing key conclusions that contribute to the understanding of the application of these models in financial markets. Through this study, the importance of these theoretical models in financial risk management and investment decision-making is highlighted.

Keywords: CAPM, Diversification, Black-Scholes-Merton Model, Risk Hedging, Delta Hedging

Δομή

Το 1ο κεφάλαιο παρουσιάζει λεπτομερώς το Υπόδειγμα Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων (CAPM), το οποίο αποτελεί ένα από τα θεμελιώδη εργαλεία της σύγχρονης χρηματοοικονομικής θεωρίας. Βασίζεται στην υπόθεση της ισορροπίας της αγοράς και επιχειρεί να προσδιορίσει την απαιτούμενη απόδοση ενός περιουσιακού στοιχείου, λαμβάνοντας υπόψη το συστημικό κίνδυνο που αυτό φέρει. Το θεωρητικό υπόβαθρο του μοντέλου έχει τις ρίζες του από τη θεωρία χαρτοφυλακίου του Markowitz, η οποία υποστηρίζει ότι η διαφοροποίηση των επενδύσεων εξαλείφει το μη συστημικό κίνδυνο. Το CAPM αναπτύχθηκε ως συνέχεια αυτής της προσέγγισης και καθιερώθηκε λόγω της απλότητάς του και της ευρείας εφαρμογής του σε χρηματοοικονομικές αποφάσεις και επενδυτικές στρατηγικές. Περιγράφεται διεξοδικώς η μαθηματική θεμελίωση του υποδείγματος CAPM μέσω της Γραμμής Κεφαλαιαγοράς και της Γραμμής Αγοράς Αξιογράφων, ενώ παράλληλα δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στον συντελεστή βήτα. Επιπλέον, επισημαίνονται ορισμένες κριτικές που δέχεται το μοντέλο εξαιτίας της απλότητας στη χρήση του.

Το 2ο κεφάλαιο επικεντρώνεται στα χρηματοοικονομικά προϊόντα, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στις μετοχές, τα ομόλογα και τα παράγωγα προϊόντα. Συγκεκριμένα, το κεφάλαιο αυτό αναδεικνύει τον ρόλο των χρηματοοικονομικών τίτλων και παραγώγων στις αγορές, τη συμβολή τους στη διαχείριση κινδύνου και τις στρατηγικές που μπορούν να αξιοποιηθούν από επενδυτές και επιχειρήσεις για την επίτευξη χρηματοοικονομικών στόχων.

Το 3ο κεφάλαιο αναλύει τη συμπεριφορά των τιμών των μετοχών μέσω στοχαστικών διαδικασιών και επικεντρώνεται σε βασικά μαθηματικά μοντέλα που περιγράφουν τις κινήσεις αυτές. Ειδικότερα, εξετάζονται οι Μαρκοβιανές διαδικασίες και κάποιες μορφές τους, όπως η διαδικασία Wiener και η γενικευμένη διαδικασία Wiener, οι οποίες χρησιμοποιούνται στη μοντελοποίηση της εξέλιξη της αξίας των μετοχών. Επιπλέον, σε αυτό το κεφάλαιο τονίζεται η καταλληλόλητα της Γεωμετρικής Κίνησης Brown στην περιγραφή της «τυχαίας πορείας» της τιμής των μετοχών, καθώς αυτό το μοντέλο αναλύει τη λογιστική επίδραση της μεταβλητότητας και της αναμενόμενης απόδοσης. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται το Λήμμα του Ito, συνδέοντας έτσι τις στοχαστικές διαδικασίες με την αποτίμηση των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Από την παραπάνω ανάλυση εξάγεται η μερική διαφορική εξίσωση των Black-Scholes-Merton, η οποία παρέχει τη μεθοδολογία για τη «δίκαιη» τιμολόγηση των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης.

Το 4ο κεφάλαιο πραγματεύεται την έννοια της αντιστάθμισης Δέλτα (Delta Hedging) και τη σημασία της στη διαχείριση του κινδύνου στις χρηματοοικονομικές αγορές. Αρχικά, παρουσιάζονται οι συντελεστές ευαισθησίας (The Greeks), εστιάζοντας στο συντελεστή Δέλτα, ο οποίος μετρά τη μεταβολή της αξίας ενός δικαιώματος προαίρεσης όταν αλλάζει η τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου. Έπειτα, αναλύεται η στρατηγική της αντιστάθμισης Δέλτα βασισμένη στο μοντέλο των Black-Scholes-Merton, η οποία επιτυγχάνεται με τη δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου που διατηρεί ουδέτερη θέση Δέλτα (delta neutral). Αυτή η στρατηγική τονίζει τη συνεχή αναπροσαρμογή της θέσης ενός επενδυτή, αφού η τιμή του Δέλτα δεν είναι σταθερή.

Το 5^o Κεφάλαιο πραγματεύεται την εφαρμογή του μοντέλου Black-Scholes-Merton για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης και την πρακτική εφαρμογή της αντιστάθμισης Δέλτα, ενώ στο κεφάλαιο 6^o συνοψίζονται τα κύρια ευρήματα της μελέτης, εστιάζοντας στις θεωρητικές βάσεις, τις εφαρμογές και τους περιορισμούς των χρηματοοικονομικών υποδειγμάτων που αναλύθηκαν.

Συμπερασματικά, τόσο το CAPM όσο και το μοντέλο των Black-Scholes-Merton παραμένουν θεμελιώδη εργαλεία στην χρηματοοικονομική επιστήμη, προσφέροντας χρήσιμες μεθοδολογικές προσεγγίσεις παρά τις αδυναμίες τους. Η κριτική ανάλυση των υποδειγμάτων αυτών συμβάλλει στην κατανόηση των δυνατοτήτων και των περιορισμών τους, ενισχύοντας την ανάγκη για συνεχή βελτίωση και ανάπτυξη πιο ρεαλιστικών χρηματοοικονομικών μοντέλων.

Πίνακας περιεχομένων

Ευρετήριο Διαγραμμάτων

Ευρετήριο Σχημάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο : ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1η : Εισαγωγή και το Θεωρητικό Υπόβαθρο του Υποδείγματος

1.1.1 Εισαγωγή

Ένα από τα βασικότερα ζητήματα που απασχόλησε τον τομέα των χρηματοοικονομικών επιστημών είναι ο ακριβής υπολογισμός των αναμενόμενων αποδόσεων ενός χρεογράφου. Γι' αυτό το λόγο έγινε μια προσπάθεια για ποσοτικοποίηση της σχέσης μεταξύ κινδύνου και αναμενόμενης απόδοσης, προκειμένου να βελτιστοποιηθεί η διαδικασία λήψης επενδυτικών αποφάσεων. Ένα από τα μοντέλα που δημιουργήθηκαν για να δώσουν λύση σε αυτό πρόβλημα ήταν το **Υπόδειγμα Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων,** γνωστό και ως **Capital Asset Pricing Model** ή **CAPM)**.

Το κλασικό αυτό μοντέλο αποτίμησης προσφέρει ένα σύνολο προβλέψεων για τις αναμενόμενες αποδόσεις των χρεογράφων υπό συνθήκες κίνδυνου, με την υπόθεση ότι η αγορά βρίσκεται σε ισορροπία. Το μοντέλο αναπτύχθηκε τη δεκαετία του 1960 από τους Jack Treynor (1961,1962), William Sharpe (1964), John Lintner (1965) και Jan Mossin (1966) ως εξέλιξη της θεωρίας διαχείρισης χαρτοφυλακίου του Markowitz (1952). Η πρωτοποριακή έρευνα για τη θεωρία αποτίμησης επενδύσεων χάρισε στους Harry Markowitz, William Sharpe και Merton Miller το βραβείο Νόμπελ το 1990 για την συνεισφορά τους στον τομέα των οικονομικών επιστημών [1], [7], [10], [23].

Το μοντέλο αυτό καθιερώθηκε στη σύγχρονη εφαρμοσμένη χρηματοοικονομική εξαιτίας της ευελιξίας και της απλότητάς του. Στηρίζεται στην υπόθεση της ισορροπίας της αγοράς και περιγράφει τη σχέση της αναμενόμενης απόδοσης ενός χρεογράφου ή ενός χαρτοφυλακίου με τον κίνδυνο[1]. Συγκεκριμένα, προσπαθεί να προσδιορίσει ποια θα πρέπει να είναι η θεωρητικά αποδεκτή απαιτούμενη απόδοση του υποκείμενου κεφαλαιακού προϊόντος (asset), λαμβάνοντας υπόψη το επίπεδο του συστημικού κινδύνου που αυτό φέρει. Αυτή η "εξάρτηση" της απόδοσης του χρεογράφου από τον συστημικό κίνδυνο (ή αλλιώς κίνδυνος της αγοράς) μετριέται ποσοτικά μέσω του συντελεστή βήτα, ο οποίος εκφράζει την

[1] Η μέτρηση του κινδύνου είναι συνυφασμένη με την τυπική απόκλιση. Η μέτρηση αυτή σχετίζεται με τη συνολική απόκλιση των τιμών της μεταβλητής από τη μέση τιμή. Ωστόσο, στη θεωρία του χαρτοφυλακίου, ισχύει ότι $\text{ο συνολικός κίνδυνος} = \text{συστημικός κίνδυνος} + \text{μη συστημικός κίνδυνος}$.
Συστημικός ή μη διαφοροποιήσιμος κίνδυνος είναι ο κίνδυνος που προκαλείται από γενικότερους παράγοντες του μακροοικονομικού περιβάλλοντος (π.χ. οικονομικές κρίσεις, πολιτικές αναταραχές, αλλαγές στα επιτόκια, πληθωρισμός, ανεργία κλπ.). Αυτός ο κίνδυνος είναι ενσωματωμένος σε όλη την αγορά και δεν μπορεί να εξαλειφθεί μέσω διαφοροποίησης. Μη συστημικός ή διαφοροποιήσιμος κίνδυνος είναι ο κίνδυνος που αφορά ατομικές εταιρείες η συγκεκριμένους κλάδους και μπορεί να εξαλειφθεί με σωστή κατανομή των επενδύσεων.

ευαισθησία της απόδοσης ενός στοιχείου σε σχέση με τις διακυμάνσεις της συνολικής αγοράς.

Η εφαρμογή του CAPM εντοπίζεται σε διάφορους τομείς της χρηματοοικονομικής ανάλυσης και της επενδυτικής στρατηγικής. Συγκεκριμένα, το CAPM χρησιμοποιείται ως ένα μέτρο αξιολόγησης για την βέλτιστη επιλογή χαρτοφυλακίου (portfolio selection), καθώς προσφέρει ένα θεωρητικό υπόβαθρο για τη διαφοροποίηση των επενδύσεων. Έτσι, οι επενδυτές έχουν τη δυνατότητα να κατασκευάσουν αποδοτικά χαρτοφυλάκια που μεγιστοποιούν τις αποδόσεις.

1.1.2 Το θεωρητικό υπόβαθρο του CAPM

Η σχέση μεταξύ risk free rate και risk premium

Η διαδικασία λήψης επενδυτικών αποφάσεων επηρεάζεται από την αβεβαιότητα που επικρατεί στην αγορά. Αυτό συνεπάγεται ότι οι αποφάσεις που λαμβάνονται μπορεί να μην επιφέρουν κερδοφόρα αποτελέσματα. Δηλαδή, οι επενδυτές δεν μπορούν να είναι απόλυτα βέβαιοι για τις μελλοντικές οικονομικές συνθήκες και ως επί των πλείστων για την πορεία των αποδόσεων από τις επενδύσεις τους, αλλά μπορούν να εκτιμήσουν ένα φάσμα πιθανών τιμών. Αντ' αυτού χρησιμοποιούν στατιστικά εργαλεία για να περιγράψουν και να εκτιμήσουν τις μελλοντικές αποδόσεις των επενδύσεών τους. Με άλλα λόγια, καθορίζουν μια κατανομή πιθανοτήτων που εκφράζει τις προσδοκίες τους για τις μελλοντικές αποδόσεις. Η μέση τιμή (ή αναμενόμενη απόδοση) της κατανομής δείχνει την κεντρική τάση των αποδόσεων, ενώ η τυπική απόκλιση δείχνει πόσο αποκλίνουν οι αποδόσεις από τη μέση τιμή. Η μέτρηση του κινδύνου είναι συνυφασμένη με την τυπική απόκλιση, καθώς ανάλογα με την τιμή[2] της μας δείχνει πόσο επικίνδυνη είναι η επένδυση.

Σε αυτό το σημείο θα εισάγουμε την έννοια του **επιτοκίου μηδενικού κινδύνου r_f (risk free rate)**, καθώς αποτελεί τον πυρήνα της επενδυτικής θεωρίας. Πρόκειται για το επιτόκιο απόδοσης μιας επένδυσης που θεωρείται απαλλαγμένη από κίνδυνο. Ουσιαστικά, το risk free rate χρησιμεύει ως σημείο αναφοράς για τις επενδύσεις, διότι αντιπροσωπεύει την ελάχιστη απόδοση που μπορεί να έχει κανείς χωρίς να αναλάβει ρίσκο. Η έννοια του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου συνδέεται με το επιτόκιο εντόκων γραμματίων Δημοσίου (π.χ. βραχυπρόθεσμα κρατικά ομόλογα υψηλής πιστοληπτικής διαβάθμισης), καθώς θεωρούνται οι πιο ασφαλείς[3] επενδύσεις. Εάν μια επένδυση έχει μεγαλύτερο επιτόκιο από το risk free rate, τότε έχει και υψηλότερο κίνδυνο.

---

[2] Η τυπική απόκλιση δείχνει πόσο αποκλίνουν οι πραγματικές αποδόσεις από τη μέση τιμή. Επί της ουσίας μετρά τη μεταβλητότητα των αποδόσεων.

- Αν η τυπική απόκλιση είναι χαμηλή, οι αποδόσεις συγκεντρώνονται κοντά στη μέση τιμή. Συνεπώς, η επένδυση είναι πιο σταθερή.
- Αν η τυπική απόκλιση είναι υψηλή, οι αποδόσεις συγκεντρώνονται μακριά από μέση τιμή. Συνεπώς, η επένδυση είναι πιο επικίνδυνη.

[3] Τα έντοκα γραμμάτια του Δημοσίου εκδίδονται από κυβερνήσεις με υψηλή φερεγγυότητα. Θεωρείται ότι το κράτος δεν θα χρεοκοπήσει και θα αποπληρώσει την επένδυση.

Στη χρηματοοικονομική, οι επενδυτές θέλουν αντάλλαγμα για τον κίνδυνο που αναλαμβάνουν. Ορίζουμε, λοιπόν, **ασφάλιστρο κινδύνου (risk premium)** την επιπλέον απόδοση που απαιτεί ένας επενδυτής πάνω από το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου ως αποζημίωση για τον κίνδυνο που αναλαμβάνει. Έτσι, χρησιμοποιούν το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου ως τη βάση που τους δίνει την ασφαλέστερη δυνατή απόδοση και σύμφωνα με αυτή, οι επενδυτές αποφασίζουν αν αξίζει να αναλάβουν ρίσκο για υψηλότερες αποδόσεις. Για παράδειγμα, έστω ότι το r_f (risk free rate) ανέρχεται στο 2.5%, ενώ μια ριψοκίνδυνη μετοχή υπόσχεται 8.5% απόδοση. Η επιπλέον απόδοση για τον κίνδυνο που αναλαμβάνει υπολογίζεται ως $8.5\% - 2.5\% = 6\%$. Το 6% είναι το ασφάλιστρο κινδύνου, δηλαδή η πρόσθετη ανταμοιβή που απαιτείται για να επενδύσει σε έναν πιο ριψοκίνδυνο τίτλο αντί σε μια ασφαλή επένδυση.

Ωστόσο, έχει παρατηρηθεί ότι αρκετοί δεν προτιμούν τον κίνδυνο και επιλέγουν επενδύσεις με χαμηλότερη αβεβαιότητα. Βέβαια, υπάρχουν και άλλοι που επιθυμούν μια επιπλέον αποζημίωση για το ρίσκο που αναλαμβάνουν. Ο βαθμός στον οποίο ένας επενδυτής είναι διατεθειμένος να διαμορφώσει μια ριψοκίνδυνη στρατηγική εξαρτάται από ένα δείκτη αποστροφής του κινδύνου. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο βαθμός αποστροφής στον κίνδυνο δεν είναι σταθερός και εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως οι προτιμήσεις, η χρησιμότητα και το βιοτικό επίπεδο του κάθε επενδυτή. Αυτοί οι παράγοντες απεικονίζονται ως συνάρτηση χρησιμότητας πάνω σε καμπύλες αδιαφορίας[4]. Μέσω αυτών μπορεί να προσδιοριστεί η ιδανική κατανομή κεφαλαίου ανάμεσα σε ασφαλείς και ριψοκίνδυνες επενδύσεις, ανάλογα τις προτιμήσεις και ανάγκες του καθενός.

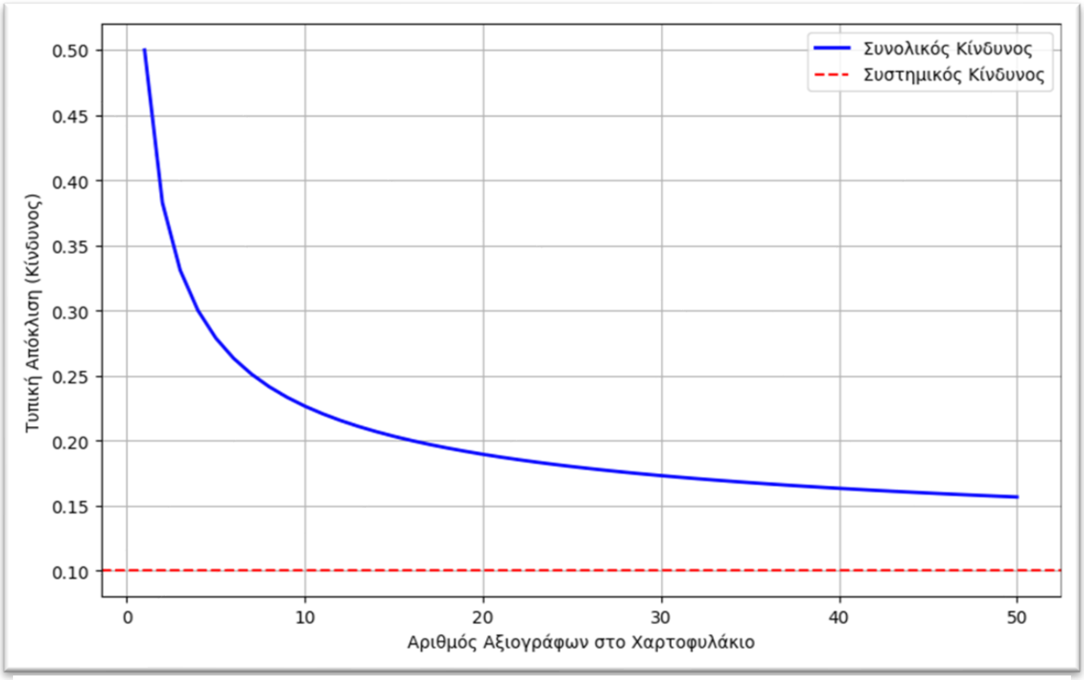
Θεωρία Διαφοροποίησης Χαρτοφυλακίου και CAPM

Προηγουμένως αναφέραμε ότι το υπόδειγμα CAPM αποτελεί ορόσημο για την ανάδυση της θεωρίας αποτίμησης αξιογράφων. Βασίστηκε στη θεωρία του Markowitz, η οποία υποστηρίζει ότι οι επενδυτές μπορούν να μειώσουν τον κίνδυνο μέσω της διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου[5] τους. Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία, το επενδυτικό κοινό δεν πρέπει να τοποθετεί το σύνολο των κεφαλαίων τους σε ένα μόνο περιουσιακό στοιχείο, αλλά να κατανέμει τα χρήματά του με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται ο κίνδυνος, διατηρώντας παράλληλα ικανοποιητική απόδοση. Συγκεκριμένα, μέσω του CAPM <u>οι επενδυτές επιδιώκουν να βελτιστοποιήσουν τη χρησιμότητά τους, δηλαδή να πετύχουν την καλύτερη δυνατή απόδοση για το επίπεδο κινδύνου που είναι διατεθειμένοι να αναλάβουν.</u> Για να επιτευχθεί αυτό, το μοντέλο υποθέτει ότι κατανέμουν το κεφάλαιό τους σε δύο διαφορετικούς τύπους επένδυσης. Ο ένας είναι ένα ακίνδυνο αξιόγραφο, όπως τα κρατικά ομόλογα, και ο άλλος είναι ένα διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο αξιογράφων (όπως μετοχές) με κίνδυνο. Ουσιαστικά, <u>η ορθή διαφοροποίηση ενός χαρτοφυλακίου επιτυγχάνεται με την προσθήκη διαφορετικών μετοχών που δεν είναι απόλυτα συσχετισμένες μεταξύ τους ή ακόμα και αρνητικά συσχετισμένες</u>.

[4] Οι καμπύλες αδιαφορίας είναι γραφικές παραστάσεις που απεικονίζουν πώς ένας επενδυτής συγκρίνει διαφορετικές επιλογές μεταξύ κινδύνου και απόδοσης.

[5] Χαρτοφυλάκιο αξιογράφων ορίζεται ως μια επένδυση κατανεμημένη σε περισσότερα από ένα αξιόγραφα.

Τονίζουμε ότι στην περίπτωση που το χαρτοφυλάκιο απαρτίζεται από μεγάλο πλήθος μετοχών, ο μη συστημικός κίνδυνος τείνει να εξαλειφθεί, αφήνοντας μόνο τον συστημικό κίνδυνο να επηρεάζει τις αποδόσεις του χαρτοφυλακίου. Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 1, απεικονίζεται η σχέση μεταξύ του πλήθους των αξιογράφων που απαρτίζεται το χαρτοφυλάκιο και της τυπικής απόκλισης, η οποία αναφέρεται στον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των αξιογράφων στο χαρτοφυλάκιο, ο συνολικός κίνδυνος του χαρτοφυλακίου μειώνεται προσεγγίζοντας ασυμπτωτικά τον συστημικό κίνδυνο. Η διαφορά (ή το κενό) μεταξύ του συνολικού κινδύνου (μπλε γραμμή) και του συστημικού (κόκκινη γραμμή) είναι ο μη συστημικός κίνδυνος. Επίσης, φαίνεται ότι ο μη συστημικός κίνδυνος μειώνεται λόγω διαφοροποίησης.



Διάγραμμα 1. Το αποτέλεσμα της διαφοροποίησης.

Για να διευκολύνουμε τους μαθηματικούς υπολογισμούς και να επικεντρωθούμε στην οικονομική σημασία του συνδυασμού των αξιογράφων, θα εξετάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από δύο επενδυτικά στοιχεία, την μετοχή Q και Z. Το ποσοστό (βάρος) του συνολικού κεφαλαίου που επενδύεται σε κάθε μία από αυτές τις μετοχές συμβολίζεται με $\boldsymbol{w_Q}$ και $\boldsymbol{w_Z}$ αντίστοιχα. Δεδομένου ότι η συνολική επένδυση κατανέμεται αποκλειστικά μεταξύ αυτών των δύο αξιογράφων, ισχύει ότι $\boldsymbol{w_Q + w_Z = 1}$.

Ο προσδιορισμός της προσδοκώμενης[6] απόδοσης του χαρτοφυλακίου $E(R_{Portfolio})$ ή $E(R_P)$ προκύπτει ως ένα σταθμισμένο άθροισμα των προσδοκώμενων αποδόσεων των δύο αυτών μετοχών. Υπολογίζεται ως [7], [11]:

[6] Οι αποδόσεις των μετοχών δεν είναι γνωστές εκ των προτέρων, αλλά μπορεί να υπολογιστεί η αναμενόμενη τους τιμή με βάση τα ιστορικά δεδομένα και τις προβλέψεις. Με το σκεπτικό ότι επικρατεί αβεβαιότητα στην αγορά, η ακριβής απόδοση δεν είναι βέβαιη αλλά προσδοκώμενη.

$$E(R_P) = w_Q\, E(R_Q) \; + \; w_Z\, E(R_Z)$$

Η διακύμανση σ_P^2 εκφράζει τον συνολικό κίνδυνο των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου και υπολογίζεται ως [7]:

$$\sigma_P^2 = \left(w_Q\, \sigma_Q \; + \; w_Z\, \sigma_Z\right)^2 = w_Q^2\, \sigma_Q^2 + w_Z^2\, \sigma_Z^2 + 2\, w_Q\, w_Z\, \sigma_Q\, \sigma_Z\, \rho_{QZ}$$

όπου $\sigma_Q^2, \sigma_Z^2, \sigma_Q, \sigma_Z$ είναι οι διακυμάνσεις και τυπικές αποκλίσεις των μετοχών Q και Z αντίστοιχα. Το ρ_{QZ} είναι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των αποδόσεων των μετοχών Q και Z.

Η τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου προκύπτει από τη ρίζα της διακύμανσης, δηλαδή $\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2}$. Παρατηρούμε ότι το γινόμενο $\sigma_Q\, \sigma_Z\, \rho_{QZ}$ είναι η συνδιακύμανση $Cov(Q, Z)$, η οποία εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο οι δύο αποδόσεις των μετοχών κινούνται μαζί.

Το εύρος των τιμών που μπορεί να λάβει ο συντελεστής συσχέτισης κυμαίνεται μεταξύ $[-1,1]$. Δηλαδή:

- αν $\rho_{QZ} = +1$, τότε οι μετοχές έχουν <u>τέλεια θετική συσχέτιση</u> και σημαίνει ότι κινούνται πάντα προς την ίδια κατεύθυνση. Σε αυτή την περίπτωση, η διαφοροποίηση δεν επιτυγχάνεται, αφού η διακύμανση του χαρτοφυλακίου σ_P^2 είναι η μέγιστη[7] δυνατή.
- αν $\rho_{QZ} = 0$, τότε οι μετοχές έχουν <u>μηδενική συσχέτιση</u> και σημαίνει ότι οι αποδόσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Σε αυτή την περίπτωση ο κίνδυνος μέσω της διαφοροποίησης μειώνεται αλλά δεν εξουδετερώνεται πλήρως.
- αν $\rho_{QZ} = -1$, τότε οι μετοχές έχουν <u>τέλεια αρνητική συσχέτιση</u> και σημαίνει ότι κινούνται πάντα προς αντίθετη κατεύθυνση. Σε αυτή την περίπτωση, η διακύμανση του χαρτοφυλακίου μειώνεται δραματικά. Μάλιστα, αν επιλεγούν σωστά τα ποσοστά του κεφαλαίου w_Q, w_Z, το χαρτοφυλάκιο ενδέχεται να παρουσιάσει μηδενικό κίνδυνο.

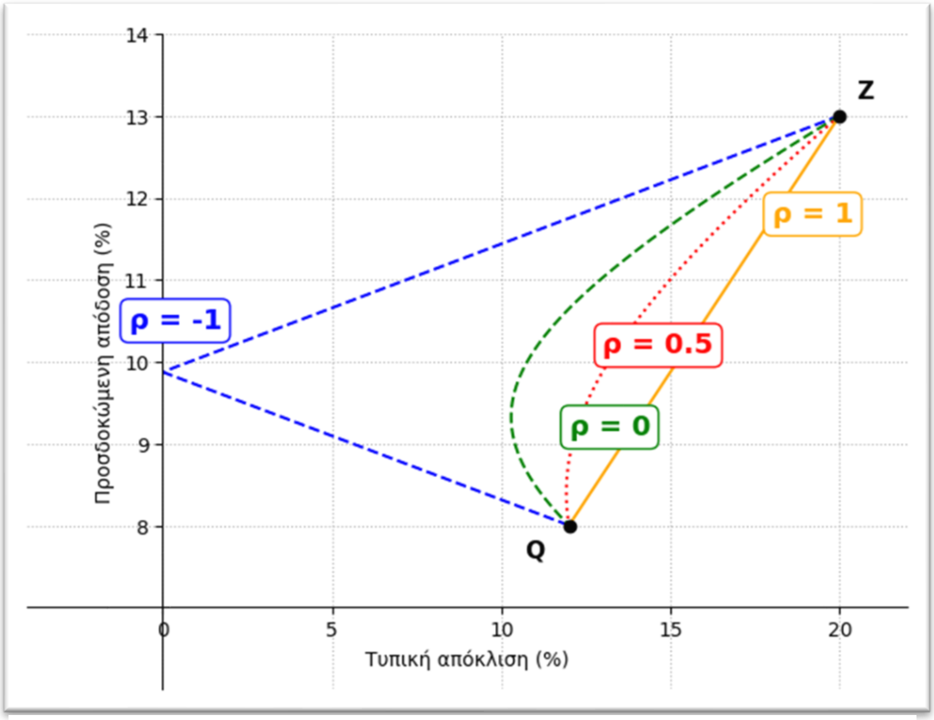
Ωστόσο, σπάνια τα αξιόγραφα εμφανίζουν ακραίες τιμές στον συντελεστή συσχέτισης. Στην πραγματικότητα, οι τιμές του συντελεστή συσχέτισης είναι θετικές αλλά μικρότερες της μονάδας $\rho_{QZ} < 1$. Το Διάγραμμα 2 δείχνει την επίδραση της διαφοροποίησης στο χαρτοφυλάκιο δύο μετοχών Q και Z για διαφορετικούς συντελεστές συσχέτισης.

---

[7] Αν $\rho_{QZ} = +1$, τότε $\sigma_P^2 = w_Q^2\, \sigma_Q^2 + w_Z^2\, \sigma_Z^2 + 2\, w_Q\, w_Z\, \sigma_Q\, \sigma_Z$, που σημαίνει ότι η διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου αποτυγχάνει να μειώσει τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου.

Αν $\rho_{QZ} = 0$, τότε $\sigma_P^2 = w_Q^2\, \sigma_Q^2 + w_Z^2\, \sigma_Z^2$, που σημαίνει ότι η διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου περιορίζει μερικώς τον κίνδυνο.

Αν $\rho_{QZ} = -1$, τότε $\sigma_P^2 = w_Q^2\, \sigma_Q^2 + w_Z^2\, \sigma_Z^2 - 2\, w_Q\, w_Z\, \sigma_Q\, \sigma_Z$, , που σημαίνει ότι η διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου μειώνει σημαντικά τον κίνδυνο.



Διάγραμμα 2. Το αποτέλεσμα της διαφοροποίησης με διαφορετικούς συντελεστές συσχέτισης.

Γενικότερα, αν θελήσουμε να γενικεύσουμε τη διαδικασία διαφοροποίησης για n αριθμό αξιογράφων ενός χαρτοφυλακίου, τότε η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου θα πρόκυπτε ως το σταθμισμένο άθροισμα των αποδόσεων των επιμέρους αξιογράφων. Υπολογίζεται ως [1], [7]: $E(r_P) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(r_i) \quad (1.1).$

Αντίστοιχα, η διακύμανση του χαρτοφυλακίου, που εκφράζει τον συνολικό κίνδυνο, αποτελείται το άθροισμα των διακυμάνσεων κάθε αξιογράφου ξεχωριστά και από το άθροισμα των συνδιακυμάνσεων μεταξύ των αξιογράφων. Υπολογίζεται ως [1], [7]:

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\,\sigma_i^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}\,Cov(r_i, r_j) \qquad (1.2)$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι όσο περισσότερες και λιγότερο συσχετισμένες είναι οι μετοχές σε ένα χαρτοφυλάκιο, τόσο μεγαλύτερο είναι το όφελος της διαφοροποίησης, καθώς μειώνεται ο συνολικός κίνδυνος.

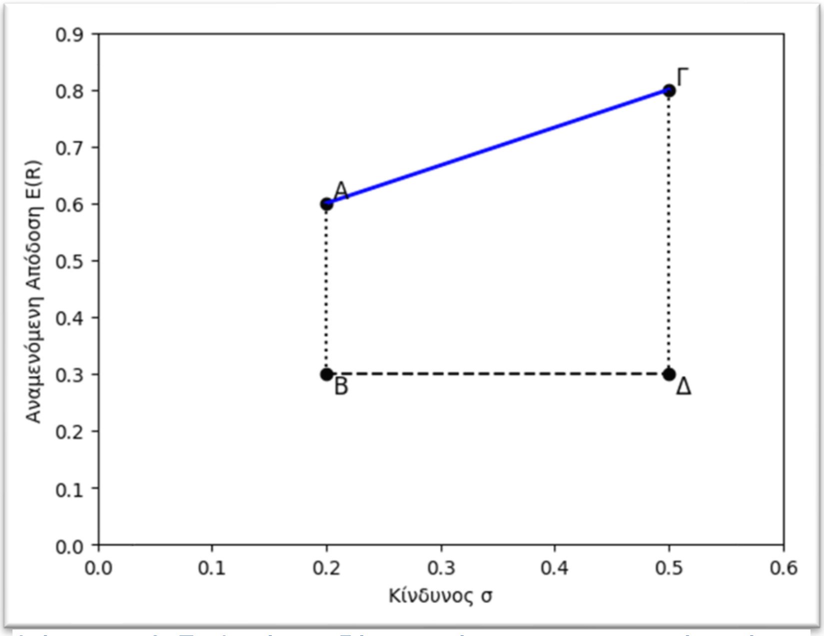
Συνοψίζοντας, η διαφοροποίηση λειτουργεί καλύτερα όταν τα περιουσιακά στοιχεία, που απαρτίζουν ένα χαρτοφυλάκιο, παρουσιάζουν συντελεστή συσχέτισης μικρότερο της μονάδας. Έτσι, οι επενδυτές μπορούν να μειώσουν τον κίνδυνο χωρίς να θυσιάσουν αναλογικά την αναμενόμενη απόδοση. Αυτή είναι η βάση της σύγχρονης θεωρίας χαρτοφυλακίου του Markowitz [15].

Αποτελεσματική Διαφοροποίηση
Η ανάλυση που κάναμε παραπάνω βασίζεται στην θεωρία του χαρτοφυλακίου του Markowitz και αφορά το αποτέλεσμα της διαφοροποίησης σε ένα γενικό πλαίσιο, στο οποίο κατανέμονται τυχαία τα κεφάλαια σε ένα χαρτοφυλάκιο με τέτοιο τρόπο που να μειώνεται ο συνολικός κίνδυνος χωρίς να θυσιάζεται η απόδοση. Ωστόσο, η απλή κατανομή κεφαλαίων σε διαφορετικά περιουσιακά στοιχεία δεν εγγυάται από μόνη της τη βέλτιστη διαφοροποίηση. Υπάρχει όμως ένας τρόπος που οδηγεί στη βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου μέσω της διαφοροποίησης!

Ουσιαστικά, ψάχνουμε να βρούμε την κατάλληλη κατανομή κεφαλαίων σε κάθε περιουσιακό στοιχείο ξεχωριστά, προκειμένου να επιτευχθεί η βέλτιστη σχέση μεταξύ ρίσκου και απόδοσης με το μεγαλύτερο επίπεδο χρησιμότητας.

Για να επιτευχθεί η μεγιστοποίηση της χρησιμότητας ο Markowitz βασίστηκε στον κανόνα μέσου / διακύμανσης. Δηλαδή, όπως απεικονίζεται και στο Διάγραμμα 3:

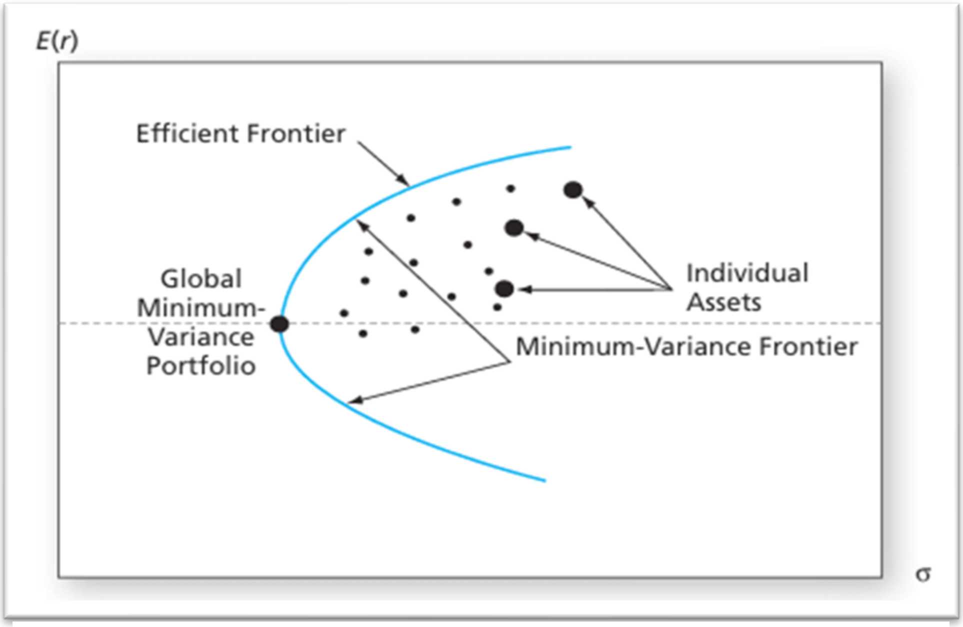
- Όταν δύο επενδύσεις έχουν το ίδιο επίπεδο κινδύνου σ, προτιμάται εκείνη με την υψηλότερη αναμενόμενη απόδοση $E(r)$.
- Όταν δύο επενδύσεις έχουν την ίδια αναμενόμενη απόδοση $E(r)$, προτιμάται εκείνη με τον χαμηλότερο κίνδυνο σ.



Διάγραμμα 3. Επιλογή επενδύσεων σύμφωνα με τον κανόνα μέσου-διακύμανσης.

Στο Διάγραμμα 3 περιγράφει τέσσερις υποθετικές επενδύσεις, κάθε μια από τις οποίες λαμβάνει από μια μέση τιμή και μια τυπική απόκλιση των αποδόσεων. Με βάση των κανόνα μέσου/διακύμανσης, επιλέγονται οι Α και Γ επενδύσεις. Μεταξύ αυτών των δύο δεν είναι δυνατόν να αποφασιστεί ποια υπερισχύει. Αν και η επένδυση Α παρουσιάζει μικρότερη απόδοση και μικρότερο κίνδυνο σε σχέση με την Γ, οι συντηρητικοί επενδυτές που έχουν μεγαλύτερη αποστροφή στον κίνδυνο την επιλέγουν.

Συνοψίζοντας, ο Markowitz υποστήριξε ότι ένα μέρος του κινδύνου μπορεί να εξαλειφθεί λόγω της διαφοροποίησης. Άρα, για κάθε συγκεκριμένο επίπεδο απόδοσης θα πρέπει να υπάρχει ένας ιδανικός συνδυασμός[8] επενδύσεων που να ελαχιστοποιεί τη διακύμανση. Αυτοί οι βέλτιστοι συνδυασμοί σχηματίζουν μια καμπύλη που ονομάζεται Σύνορο Ελάχιστης Διακύμανσης (Minimum Variance Frontier). Το σύνορο αυτό πρόκειται για την γραφική αναπαράσταση των διαφοροποιημένων χαρτοφυλακίων, τα οποία προσφέρουν τη χαμηλότερη δυνατή διακύμανση (κίνδυνο) για μια δεδομένη αναμενόμενη απόδοση. Εντός του συνόρου της ελάχιστης διακύμανσης, υπάρχει ένα και μοναδικό χαρτοφυλάκιο που λαμβάνει τη χαμηλότερη τιμή διακύμανσης και ονομάζεται Global Minimum Variance Portfolio (GMVP). Συνεπώς, οι επενδυτές δεν θα προτιμήσουν χαρτοφυλάκια που εντοπίζονται κάτω από αυτό το σημείο GMVP, αφού για το ίδιο επίπεδο κινδύνου μπορεί να επιτευχθούν υψηλότερες αποδόσεις. Ωστόσο, θα προτιμήσουν χαρτοφυλάκια που βρίσκονται πάνω αυτό το σημείο, διότι επιθυμούν τη μέγιστη δυνατή απόδοση για ένα δεδομένο επίπεδο κινδύνου. Τα χαρτοφυλάκια, λοιπόν, που βρίσκονται στο άνω τμήμα της καμπύλης από το σημείο GMVP σχηματίζουν το Αποτελεσματικό Σύνορο (Efficient Frontier) προσφέροντας στους επενδυτές τη βέλτιστη ισορροπία μεταξύ κινδύνου και απόδοσης.

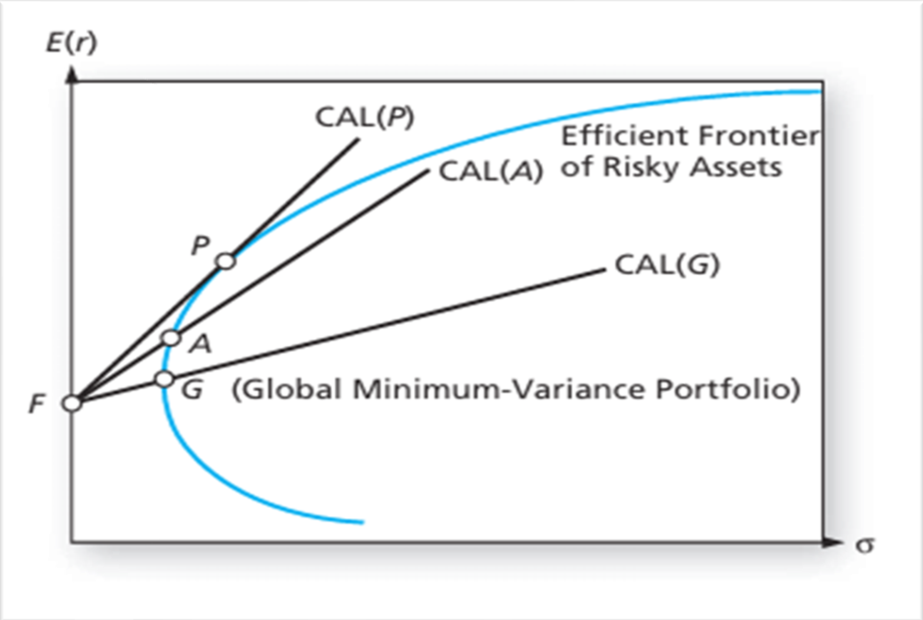


Διάγραμμα 4. Το Σύνορο Ελάχιστης Διακύμανσης για τα επικίνδυνα περιουσιακά στοιχεία (Bodie, Z., Kane, A. and Marcus, A.J. (2005). *Investments* . McGraw-Hill. pp. 220).

Επιπροσθέτως, αν θεωρήσουμε ότι μπορούμε να συνδυάσουμε ένα αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο περιουσιακών στοιχείων που ενέχουν κίνδυνο με ένα ακίνδυνο αξιόγραφο, τότε σχηματίζεται η γραμμή κατανομής κεφαλαίου (Capital Allocation Line - CAL). Αυτή η γραμμή απεικονίζει όλους τους πιθανούς

[8] Στην αγορά υπάρχουν χιλιάδες επενδυτικά προϊόντα, τα οποία συνδυάζονται με αμέτρητους τρόπους και δημιουργούν ένα χαρτοφυλάκιο. Όμως, δεν είναι όλοι οι συνδυασμοί το ίδιο αποδοτικοί, καθώς ορισμένα χαρτοφυλάκια παρουσιάζουν πολύ υψηλή διακύμανση (ρίσκο) και χαμηλή απόδοση, ενώ άλλα δίνουν καλύτερη σχέση ρίσκου και απόδοσης.

συνδυασμούς επενδύσεων που επιλέγει ένας επενδυτής, όταν κατανέμει το κεφάλαιό του μεταξύ του αξιογράφου μηδενικού κινδύνου και ενός αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου. Αξίζει να σημειωθεί ότι η βασική επιδίωξη ενός επενδυτή είναι η μεγιστοποίηση της χρησιμότητάς του. Διαγραμματικά αυτό επιτυγχάνεται όταν επιλέγει το χαρτοφυλάκιο που βρίσκεται πάνω στην γραμμή CAL και εφάπτεται στο αποτελεσματικό σύνορο. Το σημείο επαφής της CAL με το αποτελεσματικό σύνορο ονομάζεται χαρτοφυλάκιο επαφής[9] και αποτελεί το βέλτιστο συνδυασμό μεταξύ των περιουσιακών στοιχείων του ενεργητικού που ενέχουν κίνδυνο και του ακίνδυνου χρεογράφου.



Διάγραμμα 5. Οι γραμμές κατανομής κεφαλαίου με το αποτελεσματικό σύνορο διαφόρων χαρτοφυλακίων (Bodie, Z., Kane, A. and Marcus, A.J. (2005). *Investments* . McGraw-Hill. pp. 224).

Στο Διάγραμμα 5 απεικονίζεται η γραμμή κατανομής κεφαλαίου CAL(P), που είναι η βέλτιστη επιλογή του επενδυτή. Πρόκειται για έναν «άριστο» συνδυασμό του αξιογράφου μηδενικού κινδύνου (F) και του βέλτιστου χαρτοφυλακίου (P). Τα A και G αντιπροσωπεύουν διαφορετικά χαρτοφυλάκια, λιγότερο αποδοτικά, με το G να είναι το χαρτοφυλάκιο που λαμβάνει τη χαμηλότερη τιμή διακύμανσης (GMVP). Το σημείο P αντιπροσωπεύει το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο των στοιχείων του ενεργητικού που περιέχουν κίνδυνο και προσφέρει την υψηλότερη αναμενόμενη απόδοση για κάθε δεδομένο επίπεδο κινδύνου. Ανάλογα με τις προτιμήσεις του και την ανεκτικότητα του στο κίνδυνο, ο επενδυτής μπορεί να προσαρμόζει τη συνολική του έκθεση στον κίνδυνο, επενδύοντας διαφορετικά ποσοστά στο χαρτοφυλάκιο επαφής P και στο ακίνδυνο αξιόγραφο.

[9] Στο χαρτοφυλάκιο επαφής μεγιστοποιείται η απόδοση για κάθε δεδομένο επίπεδο κινδύνου.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2η : Η Μαθηματική Θεμελίωση του Υποδείγματος Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων

Είδαμε ότι η θεωρία του χαρτοφυλακίου εξετάζει τη σχέση μεταξύ κινδύνου και απόδοσης σε ένα χαρτοφυλάκιο που περιλαμβάνει αξιόγραφα με κίνδυνο. Η ανάλυση αυτής της σχέσης ανέδειξε ότι η ορθή διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου οδηγεί στην εξάλειψη του μη συστημικού κινδύνου, επιτρέποντας τους επενδυτές να επικεντρωθούν αποκλειστικά στον συστημικό κίνδυνο. Δεδομένου ότι οι επενδυτές επιθυμούν αποζημίωση για τον κίνδυνο που αναλαμβάνουν, η απουσία του μη συστημικού κινδύνου συνεπάγεται ότι η απαιτούμενη αποζημίωση σχετίζεται αποκλειστικά με τον συστημικό κίνδυνο. Αυτό το συμπέρασμα αποτέλεσε το έναυσμα για περαιτέρω έρευνες, με στόχο την ανάπτυξη ενός υποδείγματος που θα επιτρέπει την αποτίμηση αξιογράφων υψηλού κινδύνου με βάση τον συστημικό τους κίνδυνο.

1.2.1 Οι Υποθέσεις του Υποδείγματος

Το Υπόδειγμα Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων (CAPM) στηρίζεται σε συγκεκριμένες παραδοχές που διευκολύνουν τη θεωρητική του θεμελίωση. Αν και ορισμένες από αυτές δεν ανταποκρίνονται απόλυτα στην πραγματικότητα, παραμένει ακόμα ένα χρήσιμο εργαλείο για την ανάλυση των χρηματαγορών και των επενδύσεων. Οι κύριες υποθέσεις του μοντέλου είναι οι εξής [1], [7]:

1. *Κατάσταση ισορροπίας.* Οι κεφαλαιαγορές λειτουργούν υπό συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού και βρίσκονται σε κατάσταση ισορροπίας. Δεν υφίσταται πληθωρισμός και τα επιτόκια είναι σε ισορροπία.

2. *Οι επενδυτές είναι δέκτες τιμών.* Θεωρείται ότι η αγορά αποτελείται από ένα μεγάλο πλήθος επενδυτών, ο καθένας από τους οποίους διαθέτει σχετικά μικρό κεφάλαιο συγκριτικά με το σύνολο των κεφαλαίων που επενδύονται στο χρηματιστήριο. Ως αποτέλεσμα, κανένας μεμονωμένος επενδυτής δεν μπορεί να επηρεάσει τις τιμές των χρηματοοικονομικών προϊόντων μέσω των συναλλαγών του. Αντιθέτως, όλοι δρουν ως αποδέκτες των τιμών που διαμορφώνονται στην αγορά, δημιουργώντας έτσι συνθήκες παρόμοιες με αυτές του τέλειου ανταγωνισμού.

3. *Ορθολογική συμπεριφορά και αποστροφή κινδύνου.* Όλοι οι επενδυτές θεωρούνται απόλυτα ορθολογικοί και επιθυμούν να αποφύγουν τον κίνδυνο. Έτσι, λαμβάνουν αποφάσεις σύμφωνα με τη θεωρία που διατύπωσε ο Markowitz μεταξύ κινδύνου και απόδοσης. Στόχος τους είναι η βελτιστοποίηση της κατανομής του πλούτου τους, προτιμώντας αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια που προσφέρουν τη μέγιστη αναμενόμενη απόδοση για δεδομένο επίπεδο κινδύνου ή αντίστοιχα το χαμηλότερο δυνατό κίνδυνο για μια επιθυμητή απόδοση. Ο κίνδυνος, που εκφράζεται

μέσω της τυπικής απόκλισης, και η αναμενόμενη απόδοση αποτελούν βασικά στοιχεία της διαδικασίας λήψης επενδυτικών αποφάσεων.

4. *Τέλεια και πλήρης πληροφόρηση.* Όλοι οι επενδυτές διαθέτουν άμεση, πλήρη και χωρίς κόστος πρόσβαση στις ίδιες πληροφορίες. Μάλιστα, οι πληροφορίες διαχέονται άμεσα[10] και χωρίς καθυστέρηση, που συνεπάγεται ότι οποιαδήποτε νέα πληροφορία αντικατοπτρίζεται ακαριαία στις τιμές των αξιογράφων.

5. *Επενδυτικός ορίζοντας μίας περιόδου.* Οι επενδυτές σχεδιάζουν τις επενδυτικές τους αποφάσεις για το χρονικό διάστημα μίας περιόδου και δεν ενδιαφέρονται για τις μελλοντικές εξελίξεις πέρα από αυτήν, γεγονός που σηματοδοτεί μια μυωπική συμπεριφορά. Δηλαδή, αξιολογούν τις αποδόσεις των επενδύσεων για μια κοινή χρονική περίοδο (π.χ. ένα μήνα, ένα τρίμηνο, ένα έτος).

6. *Ομοιογενείς Προσδοκίες.* Επειδή όλοι οι επενδυτές έχουν πρόσβαση στις ίδιες πληροφορίες, έχουν τον ίδιο χρονικό ορίζοντα και λαμβάνουν ορθολογικές αποφάσεις, όλοι αξιολογούν τις επενδυτικές τους επιλογές με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Αυτό σημαίνει ότι έχουν τις ίδιες εκτιμήσεις σχετικά με τις αναμενόμενες αποδόσεις, τη μεταβλητότητα και τις μεταξύ τους συσχετίσεις (συνδιακυμάνσεις) των χρεογράφων. Επομένως, εφαρμόζοντας τη θεωρία της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου του Markowitz, όλοι καταλήγουν σε όμοιες επενδυτικές αποφάσεις. Δηλαδή επιλέγουν παρόμοια αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια που βρίσκονται στο αποτελεσματικό σύνορο.

7. *Διαπραγματεύσιμα χρηματοοικονομικά προϊόντα.* Το μοντέλο επικεντρώνεται σε επενδύσεις που αφορούν διαπραγματεύσιμα αξιόγραφα, όπως μετοχές και ομόλογα, αποκλείοντας μη εμπορεύσιμα στοιχεία, όπως ακίνητα, μη εισηγμένες εταιρείες ή άλλα περιουσιακά στοιχεία που δεν μπορούν να αγοραστούν ή να πωληθούν ελεύθερα στη χρηματαγορά. Επίσης, όλα τα αξιόγραφα θεωρούνται απείρως διαιρετά, πράγμα που σημαίνει ότι οι επενδυτές μπορούν να αγοράσουν ή να πουλήσουν οποιαδήποτε ποσότητα χωρίς περιορισμούς.

8. *Απουσία φορολογικών επιβαρύνσεων και κόστη συναλλαγών.* Στο πλαίσιο του μοντέλου δεν υφίστανται προμήθειες, αμοιβές ή φορολογικές επιβαρύνσεις στις συναλλαγές αγοραπωλησίας χρεογράφων.

9. *Σταθερό και ακίνδυνο επιτόκιο.* Το μοντέλο υποθέτει ότι οι επενδύσεις γίνονται μόνο σε διαπραγματεύσιμα χρεόγραφα και ότι οι επενδυτές έχουν ελεύθερη πρόσβαση σε κεφάλαια χωρίς περιορισμούς. Μπορούν δηλαδή

---

[10]Αυτό ευθυγραμμίζεται με την έννοια της ισχυρής μορφής της Υπόθεσης Αποτελεσματικής Αγοράς, σύμφωνα με την οποία όλες οι διαθέσιμες πληροφορίες αντικατοπτρίζονται άμεσα στις τιμές των χρεογράφων.

είτε να δανείζονται είτε να δανείζουν απεριόριστα[11] με επιτόκιο ίδιο με αυτό του αξιογράφου μηδενικού κινδύνου. Αυτή η υπόθεση διευκολύνει τη μαθηματική θεμελίωση του μοντέλου, αλλά δεν είναι απόλυτα ρεαλιστική, διότι στις πραγματικές αγορές υπάρχουν περιορισμοί στον δανεισμό και διαφορές στα επιτόκια δανεισμού και καταθέσεων.

Αν και οι παραπάνω υποθέσεις είναι αρκετά απλοϊκές και δεν αντικατοπτρίζουν πλήρως την πραγματικότητα, συμβάλλουν στην κατανόηση της λειτουργίας των αγορών και της σχέσης μεταξύ κινδύνου και απόδοσης. Επομένως, αν στην αγορά εμφανιστεί μια επενδυτική ευκαιρία που προσφέρει υψηλή απόδοση με χαμηλό κίνδυνο, όλοι οι επενδυτές θα σπεύσουν να την αξιοποιήσουν. Αυτό θα οδηγήσει σε αυξημένη ζήτηση για το συγκεκριμένο επενδυτικό προϊόν, προκαλώντας την αύξηση της τιμής του και, κατ' επέκταση τη μείωση της μελλοντικής αναμενόμενης απόδοσής του. Η ύπαρξη της τέλειας πληροφόρησης και των ομοιόμορφων προσδοκιών συνεπάγεται ότι η σχέση κινδύνου-απόδοσης είναι η ίδια για όλους τους επενδυτές, καθώς και ότι η αγορά αποτιμά τα χρεόγραφα αποτελεσματικά.

1.2.2 Η Γραμμή Κεφαλαιαγοράς

Σύμφωνα με τις προαναφερθείσες υποθέσεις, όλοι οι επενδυτές συμμερίζονται τις ίδιες προσδοκίες σχετικά με τις αναμενόμενες (μέσες) αποδόσεις, τις διακυμάνσεις και τις συνδιακυμάνσεις των διαθέσιμων επενδυτικών χρεογράφων. Έτσι, όλοι καταλήγουν στο ίδιο χαρτοφυλάκιο της αγοράς Μ, το οποίο στη συνέχεια το συνδυάζουν με ένα ασφαλές περιουσιακό στοιχείο, δηλαδή το αξιόγραφο μηδενικού κινδύνου. Σύμφωνα με τη θεωρία του χαρτοφυλακίου, οι επενδυτές αντιλαμβάνονται το χαρτοφυλάκιο της αγοράς Μ ως ένα σύνολο αξιογράφων που διακινούνται στην αγορά και ενέχουν κίνδυνο. Το κάθε αξιόγραφο συμμετέχει στο χαρτοφυλάκιο αυτό αναλογικά με τη συνολική του αγοραία αξία. Εφόσον, λοιπόν, περικλείει όλα τα αξιόγραφα, το Μ περιέχει τη μεγαλύτερη δυνατή διαφοροποίηση, εξαλείφοντας έτσι τον μη συστημικό κίνδυνο. Αξίζει να επισημάνουμε ότι το χαρτοφυλάκιο της αγοράς[12] Μ δεν είναι απλώς μέρος του συνόλου των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων, όπως αναλύθηκε παραπάνω, αλλά αποτελεί και το σημείο επαφής των επενδυτών με την αγορά. Επειδή όλοι οι επενδυτές συνδυάζουν το χαρτοφυλάκιο της αγοράς με ένα ακίνδυνο περιουσιακό στοιχείο

[11] Το υπόδειγμα επιτρέπει στους επενδυτές να δανείζονται τίτλους από άλλους, με σκοπό να τα πουλήσουν στην αγορά. Ακόμα, επιτρέπει και τις ανοιχτές πωλήσεις (short selling), δηλαδή να πουλήσουν τίτλους που δεν έχουν στην κατοχή τους ελπίζοντας ότι η τιμή θα μειωθεί. Στη συνέχεια, θα τους αγοράσουν φθηνότερα και θα τους επιστρέψουν στον αρχικό κάτοχο, κερδίζοντας τη διαφορά. Ωστόσο, οι ανοιχτές πωλήσεις υπόκεινται σε κανονιστικούς περιορισμούς και ενδέχεται να μην είναι πάντα διαθέσιμες ή να έχουν υψηλό κόστος. Συγκεκριμένα,, οι ρυθμιστικές αρχές, η διαθεσιμότητα των τίτλων και το κόστος δανεισμού επηρεάζουν τη δυνατότητα εφαρμογής αυτής της στρατηγικής στην πράξη.

[12] Το χαρτοφυλάκιο Μ βρίσκεται πάνω στο αποτελεσματικό σύνορο (efficient frontier) και είναι το χαρτοφυλάκιο που μεγιστοποιεί την απόδοση για δεδομένο επίπεδο κινδύνου.

(π.χ. κρατικά ομόλογα), ο τρόπος που τοποθετούνται οι επενδύσεις εξαρτάται από το βαθμό αποστροφής κινδύνου του κάθε επενδυτή.

Οι διαφορετικοί τρόποι κατανομής του κεφαλαίου μεταξύ αυτών των δύο επενδυτικών επιλογών δημιουργούν μια γραμμική σχέση που ονομάζεται **Γραμμή Κεφαλαιαγοράς (Capital Market Line - CML)**, η οποία απεικονίζει τους βέλτιστους συνδυασμούς κινδύνου και αναμενόμενης απόδοσης για έναν επενδυτή όταν η αγορά βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας [7].

Το ποσοστό (βάρος) του συνολικού κεφαλαίου που επενδύεται στο χαρτοφυλάκιο της αγοράς M και στο ακίνδυνο αξιόγραφο συμβολίζεται με w_M και w_F αντίστοιχα. Δεδομένου ότι η συνολική επένδυση κατανέμεται αποκλειστικά μεταξύ αυτών των δύο, ισχύει ότι $w_M + w_F = 1$. Αντικαθιστώντας το w_F με $1 - w_M$, τότε η μαθηματική διατύπωση αυτής της γραμμής προκύπτει από την ακόλουθη σχέση [1], [7], [14]:

$$E(R_X) = w_M\, E(R_M) + (1 - w_M)R_F \qquad (1.3)$$

Δεδομένου ότι η τυπική απόκλιση του ασφαλούς περιουσιακού στοιχείου είναι μηδέν $\sigma_F = 0$ και ότι η συνδιακύμανση των αποδόσεών του με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς είναι επίσης μηδέν $\sigma_{FM} = Cov(R_F, R_M) = 0$, η τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου του επενδυτή απλοποιείται ως εξής [7], [8]:

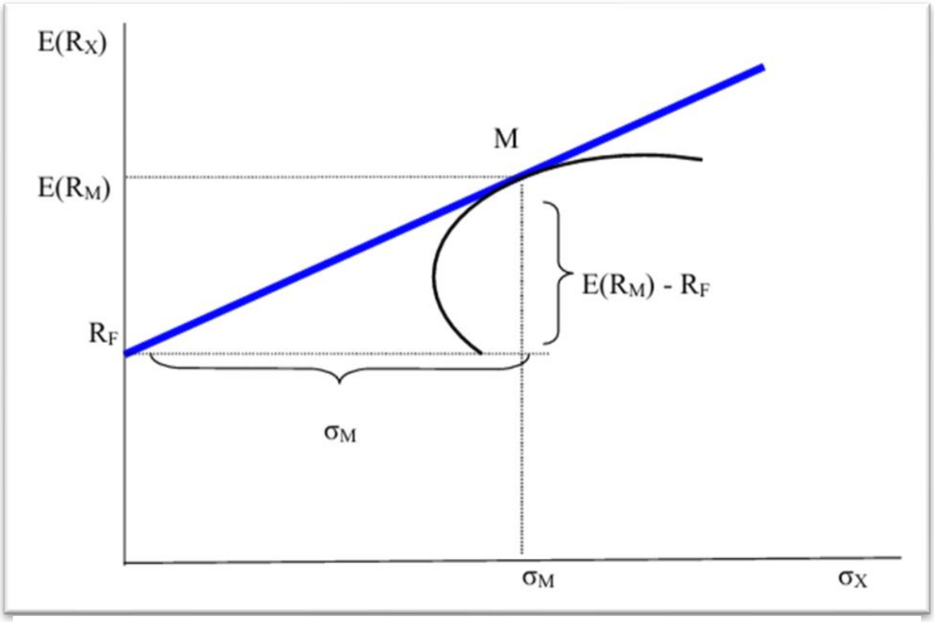
$$\sigma_X = w_M\, \sigma_M \qquad (1.4)$$

Αναδιατάσσοντας την παραπάνω εξίσωση (1.4) ως προς τον συντελεστή κατανομής κεφαλαίου στο χαρτοφυλάκιο της αγοράς και αντικαθιστώντας στην (1.3), προκύπτει ότι [7], [8]:

$$E(R_X) = R_F + \frac{[E(R_M) - R_F]}{\sigma_M}\, \sigma_X \qquad (1.5)$$

Η κλίση στο σημείο M $\frac{\mathrm{E(R_M)-R_F}}{\sigma_\mathrm{M}}$ εκφράζει την ανταμοιβή για την ανάληψη ρίσκου ανά μονάδα κινδύνου, δηλαδή την επιπλέον απόδοση (ως αποζημίωση) που απαιτούν οι επενδυτές για να αναλάβουν μεγαλύτερο κίνδυνο. Για ένα αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο, αυτή η ποσότητα αντικατοπτρίζει **την αγοραία τιμή του κινδύνου** που αναλαμβάνει ο επενδυτής.

Η εξίσωση (1.5) περιγράφει ότι η αναμενόμενη απόδοση ενός αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου X, όταν η αγορά βρίσκεται σε ισορροπία, προκύπτει από το άθροισμα της απόδοσης του ακίνδυνου αξιογράφου και του γινομένου της αγοραίας τιμής κινδύνου με το συνολικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου X.



Διάγραμμα 6. Η Γραμμή Κεφαλαιαγοράς (CML).

Το διάγραμμα 6 απεικονίζει την γραμμή κεφαλαιαγοράς και μας βοηθά να αντιληφθούμε πώς διαμορφώνεται η σχέση μεταξύ του κινδύνου (τυπικής απόκλισης) και αναμενόμενης απόδοσης, με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς Μ να αποτελεί το σημείο αναφοράς για τους επενδυτές που επιδιώκουν τη μέγιστη δυνατή απόδοση για κάθε επίπεδο κινδύνου που αναλαμβάνουν.

Σε περίπτωση που ένας επενδυτής επιλέξει να διαθέσει το συνολικό του κεφάλαιο σε αξιόγραφα που ενέχουν ρίσκο, τότε θα κατανείμει όλα του τα χρήματα στο χαρτοφυλάκιο της αγοράς Μ, καθώς είναι το πιο αποδοτικό χαρτοφυλάκιο από άποψη κινδύνου-απόδοσης, προσδοκώντας μια απόδοση $E(R_M)$.

Εναλλακτικά, αν θέλει να μειώσει την έκθεση του στον κίνδυνο, θα επιλέξει να επενδύσει ένα ποσοστό του κεφαλαίου του στο χαρτοφυλάκιο της αγοράς και το υπόλοιπο σε ένα ασφαλές περιουσιακό τίτλο (π.χ. κρατικά ομόλογα), επιδιώκοντας μια χαμηλότερη, αλλά ασφαλή απόδοση κοντά στο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου R_F.

Μια τρίτη επιλογή είναι η αξιοποίηση της μόχλευσης, μιας στρατηγικής κατά την οποία ο επενδυτής δανείζεται χρήματα με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου R_F για να επενδύσει περισσότερα στο χαρτοφυλάκιο της αγοράς Μ. Αν αυτή η στρατηγική οδηγήσει σε αύξηση των δυνητικών αποδόσεων, τότε οι αποδόσεις του επενδυτή θα είναι υψηλότερες από την $E(R_M)$, επεκτείνοντας με αυτόν τον τρόπο την Γραμμή Κεφαλαιαγοράς πέρα από το σημείο Μ. Όμως, κάτι τέτοιο συνεπάγεται και μεγαλύτερο κίνδυνο.

1.2.3 Η Μαθηματική Διατύπωση του CAPM

Μέχρι στιγμής, έχουμε εξετάσει τη διαδικασία με την οποία οι επενδυτές επιλέγουν τα χαρτοφυλάκια στα οποία τοποθετούν τα κεφάλαιά τους, τόσο στην περίπτωση που το αξιόγραφο ενέχει κίνδυνο, όσο και σε αξιόγραφα μηδενικού κινδύνου. Ουσιαστικά, εξετάστηκε πώς οι επενδυτές επιλέγουν να κατανείμουν τα κεφάλαιά τους, επιδιώκοντας τον βέλτιστο συνδυασμό μέσης απόδοσης και κινδύνου. Το επόμενο στάδιο της ανάλυσης περιλαμβάνει τον τρόπο υπολογισμού της αναμενόμενης απόδοσης ενός μεμονωμένου αξιογράφου ή ενός χαρτοφυλακίου που δεν ανήκει πάνω στην γραμμή κεφαλαιαγοράς, κάτι το οποίο δεν δύναται να επιτευχθεί μέσω της εξίσωσης (1.5).

Προτού προχωρήσουμε, είναι απαραίτητο να υπενθυμίσουμε ότι ο κίνδυνος που συνδέεται με ένα περιουσιακό τίτλο ή ένα χαρτοφυλάκιο διακρίνεται σε δύο βασικές κατηγορίες: α) τον συστημικό κίνδυνο που προκύπτει από τις γενικότερες διακυμάνσεις της αγοράς και τις μακροοικονομικές μεταβολές και β) τον μη συστημικό κίνδυνο που αφορά μόνο το συγκεκριμένο περιουσιακό τίτλο και σχετίζεται με τον οργανισμό που το έχει εκδώσει. Ενώ ο μη συστημικός κίνδυνος μπορεί να μειωθεί ή ακόμα και να εξαλειφθεί μέσω της διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου, ο συστημικός κίνδυνος δεν μπορεί να εξαλειφθεί. Έτσι, λοιπόν, ο κίνδυνος που λαμβάνει υπόψη ο επενδυτής αφορά το συστημικό, καθώς αυτός αντικατοπτρίζει την ευρύτερη συμπεριφορά της αγοράς.

Για την εκτίμηση του συστημικού κινδύνου ενός αξιογράφου, χρησιμοποιείται ο συντελεστής βήτα (β, beta coefficient), ο οποίος υπολογίζεται σύμφωνα με [7], [8]:

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_M)}{Var(R_M)} = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} = \frac{\sigma_i \sigma_M \rho_{i,M}}{\sigma_M^2} \qquad (1.6)$$

Στην εξίσωση (1.6), το $\sigma_{i,M}$ αναφέρεται στη συνδιακύμανση μεταξύ του αξιογράφου i και του συνολικού χαρτοφυλακίου της αγοράς, ενώ το $\rho_{i,M}$ αποτελεί το συντελεστή συσχέτισης μεταξύ τους. Επιπλέον, σ_i , σ_M αφορούν τις τυπικές αποκλίσεις των αποδόσεων του συγκεκριμένου αξιογράφου i και του χαρτοφυλακίου της αγοράς, αντίστοιχα, ενώ σ_M^2 εκφράζει τη διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς.

Συνεπώς, η απόδοση ενός μεμονωμένου περιουσιακού τίτλου επηρεάζεται από την απόδοση του συνολικού χαρτοφυλακίου της αγοράς M, καθώς και από το συντελεστή β του συγκεκριμένου τίτλου σε σχέση με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Ειδικότερα, ο συντελεστής β αποτελεί βασικό στοιχείο του υποδείγματος CAPM και μετρά το βαθμό έκθεσης ενός περιουσιακού τίτλου ή χαρτοφυλακίου στον κίνδυνο της αγοράς.

Με βάση τον μαθηματικό ορισμό του β, όταν εξετάζουμε το συνολικό χαρτοφυλάκιο της αγοράς και το αξιόγραφο μηδενικού κινδύνου, ισχύουν ότι [7], [8]:

$$\beta_M = \frac{Cov(R_M, R_M)}{Var(R_M)} = \frac{\sigma_M^2}{\sigma_M^2} = 1$$

$$\beta_{R_F} = \frac{Cov(R_F, R_M)}{Var(R_M)} = \frac{\sigma_{R_F}\,\sigma_M\,\rho_{R_F}}{\sigma_M^2} = \frac{0\,\sigma_M \rho_{R_F}}{\sigma_M^2} = 0$$

Στον ακόλουθο πίνακα συνοψίζουμε τις τιμές του συντελεστή βήτα και τα χαρακτηριστικά των χρεογράφων με βάση τον συστημικό κίνδυνο.

Τιμές β	Χαρακτηρισμός	Ένταση μεταβολής
$\boldsymbol{\beta < 1}$	Αμυντικά χρεόγραφα	Αν η απόδοση της αγοράς μεταβληθεί κατά 1 ποσοστιαία μονάδα, τότε η απόδοση των χρεογράφων θα κινηθεί προς την ίδια κατεύθυνση, αλλά με μικρότερη ένταση.
$\boldsymbol{\beta = 1}$	Ουδέτερα χρεόγραφα	Η απόδοση των χρεογράφων κινείται απόλυτα εναρμονισμένα με τις διακυμάνσεις της αγοράς, δηλαδή μεταβάλλονται κατά το ίδιο ποσοστό.
$\boldsymbol{\beta > 1}$	Επιθετικά χρεόγραφα	Αν η απόδοση της αγοράς μεταβληθεί κατά 1 ποσοστιαία μονάδα, τότε η απόδοση των χρεογράφων θα κινηθεί προς την ίδια κατεύθυνση, αλλά με μεγαλύτερη ένταση.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι εξετάζουμε δύο διαφορετικά χρεόγραφα.

Χρεόγραφο	Συντελεστής Βήτα
Α (επιθετικό)	1.3
Β (αμυντικό)	0.7

Αν ο γενικός δείκτης της αγοράς αυξηθεί κατά 10%, το χρεόγραφο Α αναμένεται να αυξηθεί κατά $1.3 * 10\% = 13\%$, ενώ το χρεόγραφο Β αναμένεται να αυξηθεί κατά $0.7 * 10\% = 7\%$. Αντίθετα, αν ο δείκτης υποχωρήσει κατά 10%, τα χρεόγραφα αναμένεται να μειωθούν αναλογικά. Με άλλα λόγια, το χρεόγραφο Α με $\beta = 1.3$ θα μειωθεί κατά 13% και το χρεόγραφο Β με $\beta = 0.7$ θα μειωθεί κατά 7%.

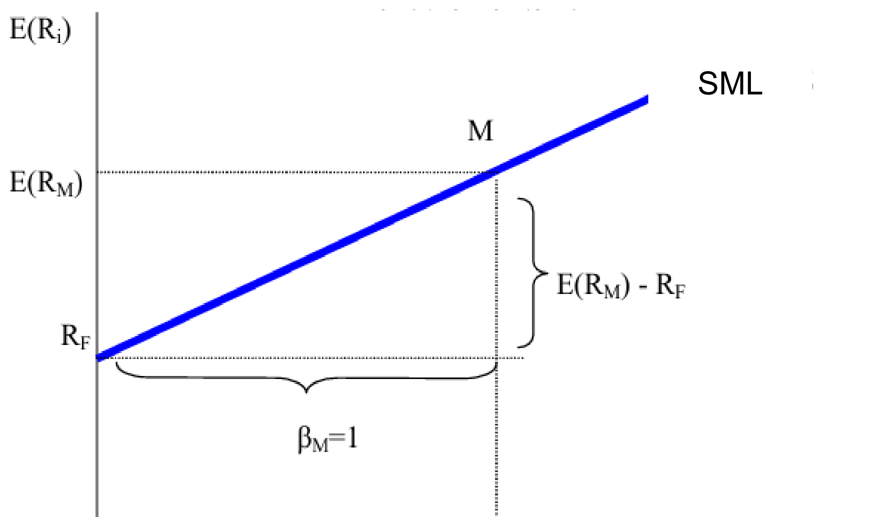
Συνοψίζοντας, ο συντελεστής β μετρά τον βαθμό κινδύνου και την ευαισθησία των τιμών ενός περιουσιακού προϊόντος στις διακυμάνσεις της αγοράς. Τίτλοι με υψηλό βήτα $(\beta > 1)$ είναι περισσότερο ευμετάβλητοι, ενώ τίτλοι με χαμηλό βήτα $(\beta < 1)$ έχουν ηπιότερες μεταβολές.

Σε αυτό το σημείο είμαστε έτοιμοι να εισάγουμε την μαθηματική μορφή του **Υποδείγματος Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων** με την οποία έχει καθιερωθεί στον τομέα των χρηματοοικονομικών επιστημών, καθώς παρέχει έναν εύκολο και άμεσο τρόπο για την ακριβή εκτίμηση του κινδύνου και της σχέσης του με την αναμενόμενη απόδοση. Δίνεται από [1], [7]:

$$E(R_i) = R_F + \beta_i \, [E(R_M) - R_F] \qquad (1.7)$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει ότι η αναμενόμενη απόδοση $E(R_i)$ ενός χρεογράφου ή ενός χαρτοφυλακίου i ισούται με την απόδοση ενός ασφαλούς περιουσιακού τίτλου χωρίς κίνδυνο R_F, συν ένα ασφάλιστρο κινδύνου προσαρμοσμένο στον συστημικό κίνδυνο του συγκεκριμένου περιουσιακού στοιχείου i. Το ασφάλιστρο κινδύνου $E(R_M) - R_F$ αντιπροσωπεύει την αποζημίωση που επιζητούν οι επενδυτές για να διακρατήσουν το χαρτοφυλάκιο της αγοράς εξαιτίας της αβεβαιότητας που συνοδεύει αυτήν την επένδυση.

Η θεωρία χαρτοφυλακίου υποστηρίζει ότι σε ένα πλήρως διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο εξαλείφεται ο μη συστημικός κίνδυνος, με αποτέλεσμα ο συνολικός κίνδυνος να ταυτίζεται με τον συστημικό. Ακόμα, υπενθυμίζουμε ότι ο συστημικός κίνδυνος μετριέται μέσω του συντελεστή βήτα. Αν στο Διάγραμμα 6, που αναπαριστά τη γραμμή κεφαλαιαγοράς, αντικαταστήσουμε την τυπική απόκλιση σ_X με το συντελεστή βήτα β_i, τότε δημιουργείται η Γραμμή Αγοράς Αξιογράφων (Security Market Line - SML).



Διάγραμμα 7. Η Γραμμή Αγοράς Αξιογράφων (SML).

Στο Διάγραμμα 7, η (μπλε γραμμή) SML αναπαριστά την εξίσωση του υποδείγματος CAPM και θεωρείται απαραίτητη η συνεισφορά της στην αξιολόγηση της απόδοσης των επενδυτικών επιλογών. Συγκεκριμένα, εκφράζει τη σχέση μεταξύ κινδύνου και αναμενόμενης απόδοσης, προσδιορίζοντας το επίπεδο της απαιτούμενης απόδοσης για ένα αξιόγραφο όταν η αγορά βρίσκεται σε ισορροπία.

Σύμφωνα με το υπόδειγμα CAPM, σε συνθήκες ισορροπίας της αγοράς όλα τα αξιόγραφα που είναι “δίκαια αποτιμημένα” (fairly priced) τοποθετούνται πάνω στην SML.

Στην πράξη, οι αποδόσεις των χρηματοοικονομικών τίτλων δεν συμπίπτουν πάντα με τις εκτιμήσεις της SML. Ωστόσο, αυτή η απόκλιση αποτελεί ένα δείκτη αξιολόγησης κατά πόσο το αξιόγραφο ενδέχεται να είναι μια ελκυστική (υποτιμημένο) ή κακή επένδυση (υπερτιμημένο).

- Όταν ένα αξιόγραφο είναι <u>υποτιμημένο</u>, η αναμενόμενη απόδοσή του υπερβαίνει την “δίκαιη” ή απαιτούμενη απόδοση που προβλέπει η ευθεία SML. Αυτό συνεπάγεται ότι θα βρίσκεται <u>πάνω από την γραμμή</u>, γεγονός που το καθιστά <u>ελκυστικό</u> για τους επενδυτές, καθώς εκτιμάται ότι αποφέρει υψηλότερη απόδοση σε σχέση με τον κίνδυνο που ενέχει.

- Όταν ένα αξιόγραφο είναι <u>υπερτιμημένο</u>, η αναμενόμενη απόδοσή του είναι χαμηλότερη από την “δίκαιη” ή απαιτούμενη απόδοση που προβλέπει η ευθεία SML. Αυτό συνεπάγεται ότι θα βρίσκεται <u>κάτω από την γραμμή</u>, γεγονός που το καθιστά <u>μη ελκυστικό</u> για τους επενδυτές, αφού πληρώνουν περισσότερο από όσο αξίζει σε σχέση με τον κίνδυνο που ενέχει. Γι’ αυτό το λόγο είτε να αποφεύγουν την αγορά τους είτε να τα πωλούν.

Η διαφορά μεταξύ της δίκαιης απόδοσης μιας μετοχής, όπως προκύπτει από την εξίσωση CAPM, και της πραγματικά αναμενόμενης απόδοσης είναι γνωστή ως συντελεστής α-Jensen (alpha).

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι εξετάζουμε δύο μετοχές με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά και θέλουμε να δούμε ποια από τις δύο αποτελεί μια καλή επενδυτική επιλογή.

Μετοχή	Συντελεστής Βήτα	Αναμενόμενη Απόδοση
E	1	12%
Z	1.5	13%

Δίνεται ότι η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου της αγοράς είναι $E(R_M) = 11\%$ και η απόδοση του περιουσιακού στοιχείου χωρίς κίνδυνο είναι $R_F = 5\%$. Να υπολογιστεί ο συντελεστής α κάθε μετοχής.

Ο συντελεστής α-Jensen (alpha) μετρά αν η μετοχή είναι υποτιμημένη ή υπερτιμημένη βάσει του CAMP. Δίνεται από: $a = E(R)_{πραγματική} - E(R)_{CAPM}$

Η εξίσωση του υποδείγματος CAPM δίνεται από: $E(R_i) = R_F + \beta_i\ [E(R_M) - R_F]$

Για τη μετοχή Ε, έχουμε:

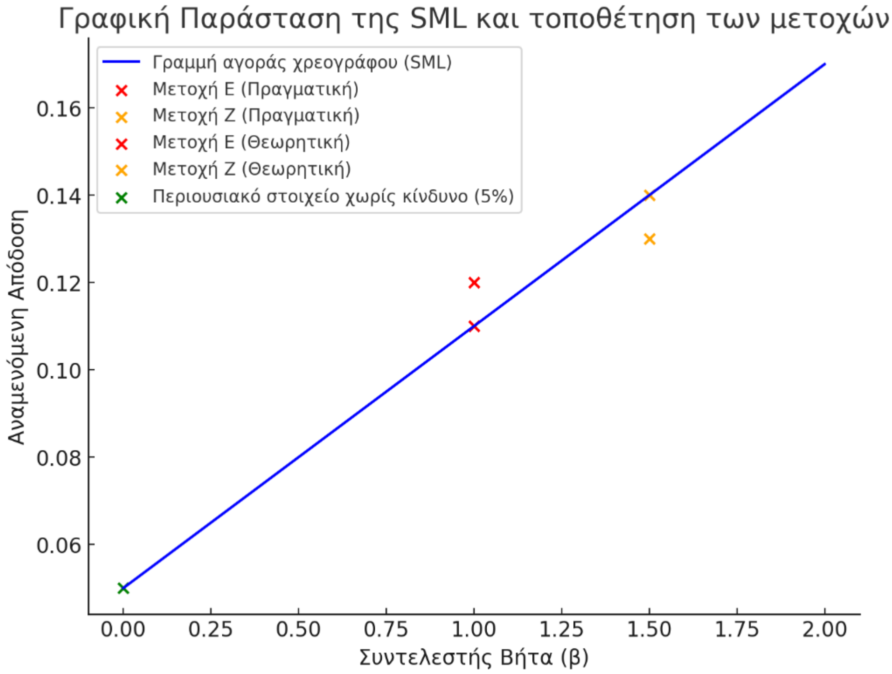
$E(R_E)_{CAPM} = 0.05 + 1 * (0.11 - 0.05) = 0.11.$

Οπότε $\alpha_E = E(R_E)_{Πραγματική} - E(R_E)_{CAPM} = 0.12 - 0.11 = 0.01$ ή 1%

Για τη μετοχή Ζ, έχουμε:

$E(R_Z)_{CAPM} = 0.05 + 1{,}5 * (0.11 - 0.05) = 0.14.$

Οπότε $\alpha_Z = E(R_Z)_{Πραγματική} - E(R_Z)_{CAPM} = 0.13 - 0.14 = -0.01$ ή -1%



Το CAPM υποδεικνύει ότι οι μετοχές που βρίσκονται πάνω από την SML είναι υποτιμημένες, ενώ όσες είναι κάτω από την SML είναι υπερτιμημένες. Παρατηρούμε ότι η μετοχή Ε έχει $\alpha_E = +1\% > 0$ και θεωρείται ως υποτιμημένη, δηλαδή διαπραγματεύεται σε χαμηλότερη τιμή από την πραγματική της αξία. Αυτό σημαίνει ότι η αγορά δεν έχει αναγνωρίσει πλήρως την πραγματικής της αξίας και υπάρχει πιθανότητα να αυξηθεί η τιμή της στο μέλλον. Άρα, θεωρείται μια ελκυστική επένδυση.

Από την άλλη, η μετοχή Ζ έχει $\alpha_Z = -1\% < 0$ και θεωρείται ως υπερτιμημένη, δηλαδή διαπραγματεύεται σε υψηλότερη τιμή από την πραγματική της αξία. Αυτό σημαίνει ότι η αγορά την έχει αξιολογήσει παραπάνω από την πραγματική της αξία και ενδεχομένως να μην είναι μια καλή επενδυτική επιλογή.

1.2.4 Αξιολόγηση του CAPM

Οι αρχικές εμπειρικές έρευνες που εξέτασαν την εγκυρότητα του Υποδείγματος Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων παρείχαν ενδείξεις που υποστήριζαν τη θεωρητική του βάση. Ωστόσο, ακολούθησε ένα πλήθος μελετών που άρχισε να αμφισβητεί την ικανότητά του να ανταποκρίνεται στα πραγματικά δεδομένα της αγοράς, εξαιτίας των προϋποθέσεων πάνω στις οποίες «οικοδομείται» το υπόδειγμα, αφού αυτές συνεπάγονται σημαντικές απλουστεύσεις.

Η μελέτη του Roll (1977) πρωταγωνιστεί στον κόσμο των ερευνητών που ασκούν κριτική προς το υπόδειγμα CAPM. Η κριτική του επικεντρώνεται κυρίως στον τρόπο με τον οποίο αποκλείονται ορισμένα περιουσιακά στοιχεία από τις εμπειρικές δοκιμές του μοντέλου [19]. Συγκεκριμένα, υποστήριξε ότι ένα πλήρως και ακριβές τεστ του CAPM δεν είχε πραγματοποιηθεί μέχρι το 1977, καθώς αυτό θα απαιτούσε τη χρήση όλων των διαθέσιμων περιουσιακών στοιχείων, κάτι το οποίο ήταν πρακτικά αδύνατο. Θεωρούσε ότι το CAPM δεν έχει σημαντική πρακτική εφαρμογή και ότι τα αποτελέσματα μπορεί να είναι ανακριβή, επειδή τα τεστ βασίζονταν σε προσεγγίσεις του χαρτοφυλακίου της αγοράς (π.χ. δείκτες χρηματιστηρίου) και όχι στο πραγματικό χαρτοφυλάκιο που περιλαμβάνει όλα τα περιουσιακά στοιχεία. Ως εκ τούτου, πρότεινε την υιοθέτηση πολυπαραγοντικών μοντέλων, όπως το Arbitrage Pricing Theory (APT), τα οποία προσφέρουν μια πιο αξιόπιστη προσέγγιση για την πρόβλεψη των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων [20].

Ο S. Basu (1977) διερεύνησε τη σχέση μεταξύ του κλάσματος Τιμή προς Κέρδη (P/E) και των αποδόσεων των χρεογράφων. Διαπίστωσε ότι οι μετοχές με χαμηλό λόγο P/E (δηλαδή αυτές που θεωρούνταν υποτιμημένες), παρουσίασαν υψηλότερες μέσες αποδόσεις σε σχέση με μετοχές υψηλού P/E. Οι αποδόσεις τους παρέμεναν υψηλότερες ακόμα και αφού προσαρμόστηκαν για τον κίνδυνο, θέτοντας ερωτήματα σχετικά με την αποδοτικότητα της αγοράς. Σύμφωνα με την υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών, δεν θα έπρεπε να είναι εφικτό να επιτευχθούν υπερβάλλουσες αποδόσεις. Ο Basu επισήμανε ότι ο δείκτης P/E ενδέχεται να λειτουργεί ως εργαλείο πρόβλεψης της μελλοντικής απόδοσης των επενδύσεων [5].

Σε μεταγενέστερη έρευνα, οι I. Friend, R. Westerfield και M. Granito (1978) πραγματοποίησαν εμπειρικές δοκιμές, όπου αντί να χρησιμοποιήσουν τις εκτιμώμενες (ex ante) αποδόσεις, βασίστηκαν σε πραγματικά δεδομένα (ex post) για τις περιόδους 1972, 1974, 1976 και 1977 [11]. Ενσωμάτωσαν, επίσης, πληροφορίες από δείκτες ομολόγων και μεγάλο αριθμό μεμονωμένων χρεογράφων, με στόχο τη βελτίωση των μετρήσεων της απόδοσης των επενδυτικών χαρτοφυλακίων ως προς τον κίνδυνο της αγοράς. Κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι υπάρχει ένα χάσμα μεταξύ της θεωρητικής πρόβλεψης του CAPM και των πραγματικών αποδόσεων των επενδυτικών χαρτοφυλακίων.

Επιπροσθέτως, βασικός πυρήνας του μοντέλου CAPM είναι η υπόθεση ότι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου παραμένει σταθερό καθ’ όλη τη διάρκεια της περιόδου προεξόφλησης. Στην πραγματικότητα, το risk free rate προσδιορίζεται συνήθως μέσω των βραχυπρόθεσμων κρατικών ομολόγων, τα οποία υπόκεινται σε μεταβολές λόγω οικονομικών και μακροοικονομικών παραγόντων.

Παρά τις εγγενείς αδυναμίες και τις εμπειρικές προκλήσεις του, το CAPM εξακολουθεί να αποτελεί πολύτιμο εργαλείο στη χρηματοοικονομική, καθώς προσφέρει μια προσεγγιστική αλλά πρακτική μέθοδο για την κατανόηση της σχέσης μεταξύ αναμενόμενης απόδοσης και συστημικού κινδύνου ενός αξιογράφου ή ενός χαρτοφυλακίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο : ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ : Χρηματοοικονομικοί Τίτλοι

Το κεφάλαιο αυτό επικεντρώνεται στα χρηματοοικονομικά προϊόντα, με ιδιαίτερη έμφαση στις μετοχές, τα ομόλογα και τα παράγωγα. Παρατίθενται οι βασικές κατηγορίες με τα χαρακτηριστικά τους, εστιάζοντας περισσότερο στα δικαιώματα προαίρεσης. Παρουσιάζονται αρκετά παραδείγματα σχετικά με τους χρηματοοικονομικούς τίτλους, ώστε να γίνει κατανοητή η λειτουργία τους στις χρηματοοικονομικές αγορές. Επισημαίνεται ότι οι περισσότερες πληροφορίες προέρχονται από τις πηγές [4], [7] και [13].

2.1 Μετοχές

Η μετοχή (equity ή stock) αποτελεί ένα μερίδιο ιδιοκτησίας, ένα ποσοστό του κεφαλαίου, μιας ανώνυμής εταιρείας. Οι μετοχές διαπραγματεύονται καθημερινά στο χρηματιστήριο, όπου αγοράζονται ή πωλούνται από επενδυτές. Ο επενδυτής που αγοράζει μετοχές μιας εταιρείας καλείται μέτοχος και γίνεται ιδιοκτήτης της μερικώς. Γίνεται δηλαδή "συνιδιοκτήτης" της εταιρείας με βάση το ποσοστό που αντιστοιχεί στις μετοχές που κατέχει. Έτσι, οι μέτοχοι έχουν το δικαίωμα ψήφου για σημαντικές αποφάσεις μέσω της Γενικής Συνέλευσης, καθώς και το δικαίωμα συμμετοχής στα κέρδη της επιχείρησης, συνήθως με τη μορφή μερισμάτων.

Οι κατηγορίες των μετοχών διακρίνονται σε :

- **Κοινές μετοχές (Common Stocks):** Αναφέρονται και ως μετοχικά αξιόγραφα (equity securities) ή, απλά, μετοχές και αποτελούν μερίδια ιδιοκτησίας σε μια εταιρεία. Κάθε μερίδιο ιδιοκτησίας που αντιπροσωπεύεται από μια κοινή μετοχή παρέχει στον κάτοχό του το δικαίωμα μίας ψήφου σε όλα τα θέματα που σχετίζονται με την εταιρική διακυβέρνηση κατά τη ψηφοφορία της Γενικής Συνέλευσης της εταιρείας, καθώς και το δικαίωμα συμμετοχής σε χρηματοοικονομικά οφέλη[13]. Οι κοινές μετοχές εμφανίζουν δύο σημαντικά χαρακτηριστικά:
    - *<u>Υπολειμματική απαίτηση</u>*: Σε περίπτωση ρευστοποίησης του ενεργητικού της εταιρείας, οι κάτοχοι κοινών μετοχών είναι οι τελευταίοι που θα αποζημιωθούν με ό,τι έχει απομείνει, αφού δίνεται προτεραιότητα στους πιστωτές[14].

[13] Οι επιχειρήσεις εκδίδουν κοινές μετοχές με δικαίωμα ψήφου, αλλά και κοινές μετοχές χωρίς αυτό το δικαίωμα. Για το λόγο αυτό, η μετοχή χωρίς δικαίωμα ψήφου μπορεί να διαπραγματεύεται σε πιο χαμηλή τιμή.

[14] Εργαζόμενοι, ομολογιούχοι, προμηθευτές, κρατικές υπηρεσίες κ.λπ.

- *Περιορισμένη ευθύνη*: Σε περίπτωση χρεοκοπίας, οι κάτοχοι κοινών μετοχών χάνουν μόνο το αρχικό κεφάλαιο που επένδυσαν στην εταιρεία.

- **Προνομιούχες μετοχές (Preferred Stocks):** Οι κάτοχοι τους συχνά λαμβάνουν ένα σταθερό εισόδημα με τη μορφή μερίσματος. Οι κάτοχοι δεν έχουν δικαίωμα ψήφου σε ζητήματα σχετικά με το μάνατζμεντ της εταιρείας, αλλά έχουν προτεραιότητα στην καταβολή μερίσματος. Επίσης, σε περίπτωση ρευστοποίησης της επιχείρησης, οι απαιτήσεις τους επί των εσόδων της επιχείρησης θα καλυφθούν γρηγορότερα από αυτούς των κοινών μετοχών.

Οι μετοχές εμπεριέχουν αξία, η οποία αντικατοπτρίζει την αξία της εταιρικής περιουσίας. Η αξία της μετοχής σχετίζεται με τη χρηματική τιμή που αποδίδεται σε μια μετοχή μιας επιχείρησης. Οι μετοχές ανάλογα με το είδος των αξιών τους κατηγοριοποιούνται σε :

- *Ονομαστική αξία*: Η αρχική τιμής της μετοχής καθορίζεται κατά την έκδοσή της από την εταιρεία. Πρόκειται για το τμήμα του μετοχικού κεφαλαίου που αντιστοιχεί σε κάθε μετοχή. Υπολογίζεται ως το πηλίκο της αξίας του μετοχικού κεφαλαίου προς το συνολικό αριθμό των μετοχών που έχει εκδώσει αρχικά η εταιρεία.
- *Λογιστική αξία*: Είναι η θεωρητική αξία της επιχείρησης στην περίπτωση ρευστοποίησης όλων των περιουσιακών στοιχείων της και εξόφλησης του χρέους της. Υπολογίζεται ως το πηλίκο των Ιδίων Κεφαλαίων προς τον συνολικό αριθμό των μετοχών που έχουν εκδοθεί.
- *Αγοραία (Τρέχουσα) αξία*: Η τιμή στην οποία διαπραγματεύεται η μετοχή στο χρηματιστήριο. Αυτή η αξία διαμορφώνεται από την ζήτηση και την προσφορά των επενδυτών και μπορεί να αλλάζει συνεχώς ανάλογα με τις συνθήκες της αγοράς.
- *Πραγματική (Εσωτερική) αξία*: Το άθροισμα της αποτίμησης του όλων των στοιχείων του ενεργητικού και παθητικού της εταιρείας δια το πλήθος των μετοχών. Είναι δηλαδή το πηλίκο της πραγματικής αξίας της περιουσίας της επιχείρησης προς το συνολικό αριθμό των μετοχών που έχουν εκδοθεί. Συγκρίνοντας την εσωτερική αξία με την αγοραία, έχουμε τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε αν η μετοχή είναι υπερτιμημένη ή υποτιμημένη.
- *Αξία κλεισίματος*: Η τιμή της μετοχής στην οποία έκλεισε η διαπραγμάτευση της στο τέλος μιας χρηματιστηριακής ημέρας.
- *Χρηματιστηριακή αξία*: Η τιμή της μετοχής που είναι υπό διαπραγμάτευση καθημερινά στο χρηματιστήριο μέσω προσφορών.

2.2 Ομόλογα

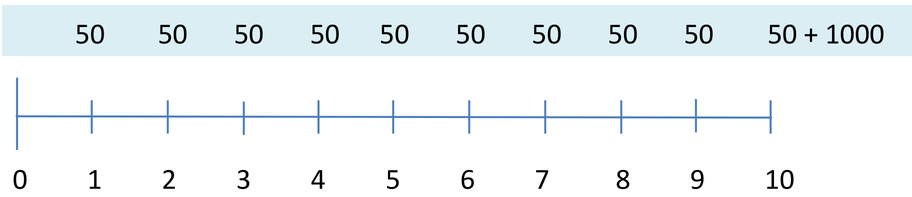
Μια εναλλακτική μέθοδος χρηματοδότησης των επιχειρήσεων είναι η έκδοση ομολόγων (bonds). Τα ομόλογα είναι αξιόγραφα που εκδίδονται είτε από κυβερνήσεις, είτε από άλλους οργανισμούς, συμπεριλαμβανομένων και των τραπεζών, και αξιοποιούνται μέσω της δανειοδότησης κεφαλαίων από το ευρύ επενδυτικό κοινό. Ο επενδυτής που αγοράζει αυτά τα ομόλογα, στην ουσία δανείζει χρήματα στον εκδότη του ομολόγου, με αντάλλαγμα την καταβολή τόκων[15] ανά τακτά χρονικά διαστήματα καθώς και την αποπληρωμή[16] του αρχικού κεφαλαίου στη λήξη του δανείου.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε πως μια μεγάλη φαρμακευτική εταιρεία, η “ MED A.E. ” επιθυμεί να επεκτείνει τις δραστηριότητες της σε νέες αγορές και χρειάζεται πόρους για να χρηματοδοτήσει νέα έργα. Έχει εκτιμήσει ότι οι πόροι, που απαιτούνται για υλοποίηση των αναγκών της, ανέρχονται σε 10 εκατομμύρια €. Όμως, οι μέτοχοι της δεν διαθέτουν επαρκή κεφάλαια. Μη θέλοντας να εκδώσει νέες μετοχές ή να προσφύγει σε δανεισμό από τράπεζες, η επιχείρηση αποφασίζει να εκδώσει εταιρικά ομόλογα, 10.000 το πλήθος ύψους 1.000€ το κάθε ένα, για να συγκεντρώσει 10.000.000€.

Τα ομόλογα έχουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- ✓ Ονομαστική αξία (Face Value): 1.000€ ανά ομόλογο
- ✓ Επιτόκιο (Coupon Rate): 5% ετησίως
- ✓ Διάρκεια (Duration): 10 χρόνια
- ✓ Ημερομηνία Λήξης (Maturity Date): Στο τέλος της δεκαετίας, η επιχείρηση οφείλει να επιστρέψει την ονομαστική αξία στους επενδυτές.



Ο αγοραστής των συγκεκριμένων ομολόγων θα λαμβάνει κάθε χρόνο 50€ για κάθε ομόλογο ως τόκο (το 5% της ονομαστικής αξίας). Στο τέλος των 10 ετών, δηλαδή στη λήξη του ομολογιακού δανείου, η εταιρεία οφείλει να αποπληρώσει τους επενδυτές. Δηλαδή, θα επιστρέψει στους επενδυτές τα 1.000€ ανά ομόλογο καθώς και τον τελικό τόκο.

Με αυτόν τον τρόπο, η “ MED AE” είναι σε θέση να συγκεντρώσει το απαιτούμενο κεφάλαιο για την κάλυψη των αναγκών της, δίχως να προσφύγει στον παραδοσιακό τραπεζικό δανεισμό ή σε έκδοση μετοχικού κεφαλαίου.

[15] Τοκομερίδια: Είναι οι πληρωμές τόκων σε όλη τη διάρκεια ζωής του ομολόγου.

[16] Κατά την ωρίμανση του ομολόγου, ο εκδότης είναι υποχρεωμένος να επιστρέψει το αρχικό ποσό του δανείου στους επενδυτές καταβάλλοντας την ονομαστική αξία του ομολόγου.

2.3 Παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα

Τα παράγωγα αξιόγραφα, ή πιο απλά, παράγωγα διαδραματίζουν έναν συνεχώς αυξανόμενο και σημαντικό ρόλο στις χρηματοοικονομικές αγορές. Με τον όρο ***παράγωγα προϊόντα (derivatives)***, εννοούμε τα επενδυτικά χρηματοοικονομικά εργαλεία των οποίων η αξία προκύπτει από την αξία ενός άλλου ***υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου (underlying asset)***. Πρόκειται, στην ουσία, για συμβόλαια, τα οποία αφορούν μια μελλοντική συναλλαγή, η τιμή των οποίων καθορίζεται άμεσα από την τιμή του υποκείμενου τίτλου [6].

Τα παράγωγα, επειδή «παράγονται» από άλλα απλούστερης μορφής περιουσιακά στοιχεία, δεν έχουν δική τους εγγενή αξία, αλλά η τιμή τους εξαρτάται από τη συμπεριφορά του υποκείμενου προϊόντος. Παραδείγματα *υποκείμενων στοιχείων (underlying assets)* είναι τα εξής: Μετοχές, Ομόλογα Εμπορεύματα (πχ πετρέλαιο, χρυσός), Επιτόκια, Συναλλαγματικές ισοτιμίες, Χρηματοοικονομικοί δείκτες.

Σε κάθε παράγωγο συμβόλαιο εμπλέκονται δύο αντισυμβαλλόμενοι. Ο ένας είναι ο «αγοραστής» του συμβολαίου, ο οποίος λαμβάνει τη long θέση και ο άλλος είναι ο «πωλητής» του συμβολαίου, ο οποίος λαμβάνει τη short θέση. Σε αυτό το σημείο ορίζουμε ως long position, τη θέση που λαμβάνει ένας επενδυτής όταν αγοράζει έναν χρηματοοικονομικό τίτλο, η οποία αποφέρει κέρδος με την αύξηση της τιμής του τίτλου και ζημία με την μείωσή της. Αντίστοιχα, ορίζουμε ως short position τη θέση που λαμβάνει ένας επενδυτής όταν πουλά έναν χρηματοοικονομικό τίτλο, η οποία του αποφέρει κέρδος σε περίπτωση μείωσης της τιμής του τίτλου και ζημία με την αύξηση της τιμής του προϊόντος. Οι θέσεις long και short σε ένα παράγωγο συμβόλαιο είναι άρρηκτα συνδεδεμένες, αφού για κάθε κερδισμένο αντισυμβαλλόμενο, υπάρχει αντίστοιχα ένας χαμένος.

Τα παράγωγα προϊόντα έχουν καθιερωθεί σε διεθνές επίπεδο ως βασικό εργαλείο για τη συντήρηση και κυρίως την ανάπτυξη μιας επιχείρησης. Με τα χαρακτηριστικά και τα οφέλη που προσφέρουν, ενισχύεται η λειτουργία της εταιρείας, καθιστώντας τα απαραίτητα για τους επιχειρηματίες. Μέσω αυτών, οι επιχειρήσεις μειώνουν την έκθεσή τους σε διάφορους κινδύνους, ενώ παράλληλα μπορούν να επωφεληθούν από τα πλεονεκτήματα που παρέχουν.

Στις επόμενες υπο-ενότητες θα παρουσιάσουμε τα σημαντικότερα χρηματοοικονομικά παράγωγα προϊόντα. Αυτά τα ταξινομούνται στις εξής κατηγορίες:

- Προθεσμιακά Συμβόλαια (Forward Contracts)
- Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Future Contracts)
- Συμφωνίες Ανταλλαγής (Swap Agreements)
- Δικαιώματα προαίρεσης (Options)

2.3.1 Προθεσμιακά Συμβόλαια (Forward Contracts)

Τα *προθεσμιακά συμβόλαια (ΠΣ)* αποτελούν την απλούστερη μορφή των παραγώγων. Πρόκειται για μια ιδιωτική συμφωνία μεταξύ δύο συμβαλλομένων για την αγοραπωλησία ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου (εμπορεύματα, συνάλλαγμα) σε μια συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία και σε προκαθορισμένη τιμή. Τα προθεσμιακά συμβόλαια δεν διαπραγματεύονται στο χρηματιστήριο[17], αλλά εξαρτώνται από την συμφωνία μεταξύ των μερών (Over The Counter). Αυτό σημαίνει ότι τα συμβόλαια αυτά προσαρμόζονται στις ανάγκες κάθε συναλλαγής, με τους όρους να διαπραγματεύονται ιδιωτικά μεταξύ του αγοραστή και του πωλητή. Εξαιτίας αυτής της περιπλοκότητας σχετικά με τους όρους διαπραγμάτευσης, τα προθεσμιακά συμβόλαια καθίστανται μη εμπορεύσιμα σε χρηματιστήρια και είναι εκτεθειμένα σε υψηλότερο πιστωτικό κίνδυνο.

Ορισμός Προθεσμιακό συμβόλαιο είναι ένα συμβόλαιο στο οποίο κάποιος επενδυτής Α (αγοραστής – long position) υποχρεούται να αγοράσει από έναν άλλο επενδυτή Β (πωλητής – short position), ή και αντίστροφα ο «πωλητής» να πουλήσει στον «αγοραστή», ένα προϊόν (υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο) σε μια προσυμφωνημένη τιμή (delivery price) και σε μια προκαθορισμένη μελλοντική ημερομηνία (delivery date).

Σε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο:

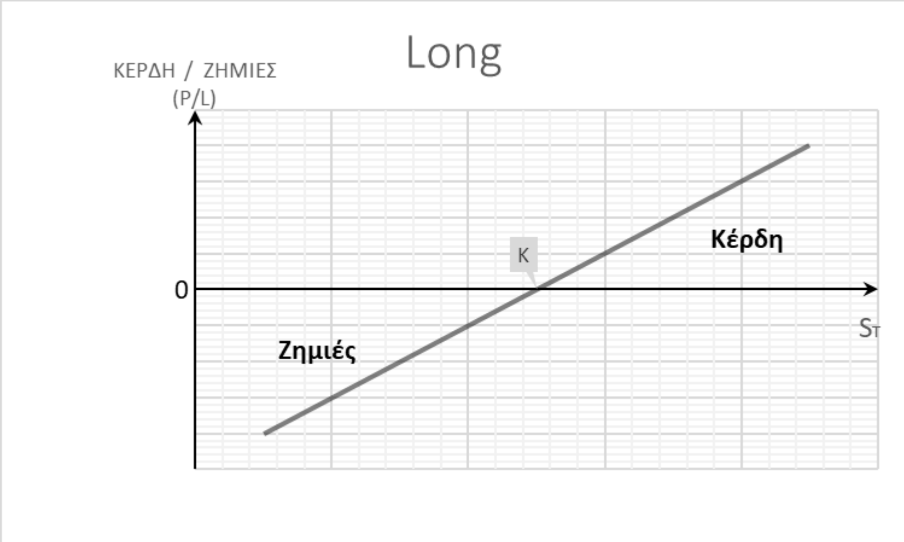
- ✓ Η προσυμφωνημένη τιμή για την μελλοντική αγοραπωλησία ονομάζεται τιμή παράδοσης ή λήξης (delivery price).
- ✓ Η προκαθορισμένη χρονική στιγμή για την μελλοντική αγοραπωλησία ονομάζεται ημερομηνία παράδοσης ή λήξης (delivery date).

Στη <u>λήξη</u> ενός προθεσμιακού συμβολαίου μπορούμε να συμβολίσουμε τα παραπάνω ως:

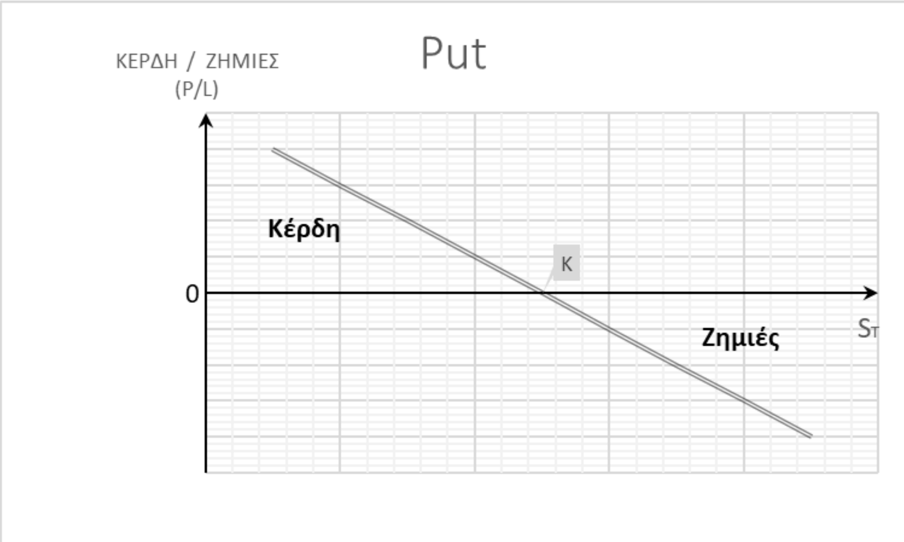
- S_T : η τρέχουσα (spot) τιμή του υποκείμενου τίτλου στη λήξη
- K : η τιμή παράδοσης του συμβολαίου
- T : η ημερομηνία ωρίμανσης του συμβολαίου

Το **κέρδος του αγοραστή** από μια θέση long σε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο τη χρονική στιγμή λήξης του συμβολαίου είναι: $\boldsymbol{S_T - K}$

[17] Εξωχρηματιστηριακά (Over the counter-OTC) για συμφωνίες μεταξύ δύο μερών. Πχ μεταξύ χρηματοπιστωτικών οργανισμών, ή μεταξύ χρηματοπιστωτικών οργανισμών και πελατών τους(fund managers, corporate treasure).



Το **κέρδος του πωλητή** από μια θέση put σε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο τη χρονική στιγμή της λήξης του συμβολαίου είναι: $\boldsymbol{K - S_T}$



Συμπερασματικά, στη θέση long ο αγοραστής κερδίζει, όταν η τρέχουσα τιμή στη λήξη του υπό θεώρηση περιουσιακού στοιχείου ξεπερνά την τιμή που έχει κλείσει στο συμβόλαιο, δηλαδή $\boldsymbol{S_T > K}$.

Αντίθετα, στη θέση put ο πωλητής κερδίζει, όταν η τρέχουσα τιμή στη λήξη του υπό θεώρηση περιουσιακού στοιχείου είναι μικρότερη από την τιμή που έχει κλείσει στο συμβόλαιο, δηλαδή $\boldsymbol{K > S_T}$.

Παράδειγμα

Μια αεροπορική εταιρεία έχει ανάγκη να προμηθευτεί μεγάλες ποσότητες πετρελαίου, έστω 1.000 βαρέλια, προκειμένου να καλύψει τις πτήσεις της. Η τρέχουσα τιμή του πετρελαίου είναι 70$ ανά βαρέλι. Όμως, η εταιρεία ανησυχεί ότι τους επόμενους 6 μήνες η τιμή μπορεί να αυξηθεί σε 100$ εξαιτίας διεθνών γεωπολιτικών εξελίξεων, γεγονός που θα αυξήσει κατά πολύ τα λειτουργικά κόστη της. Για το λόγο αυτό, η εταιρεία συμφωνεί με μια τράπεζα να αγοράσει 1.000 βαρέλια πετρελαίου σε 6 μήνες σε προκαθορισμένη τιμή $K = 70\$$ ανά βαρέλι. Έτσι, εξασφαλίζει ότι ανεξάρτητα από τις διακυμάνσεις της αγοράς, το κόστος της θα παραμείνει σταθερό στα $70 * 1.000 = 70.000\$$. Αν η τιμή του πετρελαίου σε 6 μήνες αυξηθεί στα $S_T = 100\$$ το βαρέλι, τότε η εταιρεία εξοικονομεί $(100 * 1.000) - 70.000 = 100.000 - 70.000 = 30.000\$$. Αν η τιμή του πετρελαίου σε 6 μήνες μειωθεί στα $S_T = 50\$$ το βαρέλι, τότε η εταιρεία χάνει την ευκαιρία να αγοράσει φθηνότερα, αλλά έχει διασφαλίσει την σταθερότητα του κόστους της. Με αυτόν τον τρόπο, η εταιρεία μέσω του προθεσμιακού συμβολαίου κατάφερε να διαχειριστεί τον κίνδυνο από ενδεχόμενες ανατιμήσεις του πετρελαίου, εξασφαλίζοντας σταθερότητα στο κόστος καυσίμων. Βέβαια, αν και δεν επωφελήθηκε από πιθανή μείωση της τιμής του πετρελαίου, προστατεύεται από την οικονομική αστάθεια που θα προκαλούσε μια άνοδος.

2.3.2 Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Future Contracts)

Τα *συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (ΣΜΕ)* είναι χρηματοοικονομικά παράγωγα προϊόντα που αποτελούν δεσμευτικές συμφωνίες μεταξύ δυο αντισυμβαλλομένων για την αγορά ή πώληση ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου (εμπορεύματα, μετοχές, δείκτες) σε μια προκαθορισμένη τιμή και σε μελλοντική ημερομηνία. Αν και η “φιλοσοφία” των ΣΜΕ μοιάζει με αυτήν των προθεσμιακών συμβολαίων, στην πραγματικότητα διαφέρουν σημαντικά. Αρχικά, τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης χαρακτηρίζονται από διαφάνεια, καθώς διαπραγματεύονται καθημερινά σε οργανωμένα χρηματιστήρια και έχουν τυποποιημένους όρους. Επειδή τα δύο μέρη, είναι πιθανό να μη γνωρίζονται μεταξύ τους, το χρηματιστήριο εφαρμόζει μηχανισμούς εγγυήσεων[18] με σκοπό την εκπλήρωση των όρων του συμβολαίου παρέχοντας ασφάλεια στις συναλλαγές. Επίσης, η τυποποίηση έχει να κάνει συνήθως τρεις παράγοντες: πότε θα γίνει η παράδοση, πού θα γίνει η παράδοση, τι θα παραδοθεί. Ωστόσο, υπάρχουν φορές που η ημερομηνία παράδοσης δεν είναι απόλυτα προκαθορισμένη. Δηλαδή, ενδέχεται και οι δύο πλευρές να έχουν συμφωνήσει το μήνα παράδοσης του προϊόντος, αλλά την ακριβή ημερομηνία παράδοσης θα την προσδιορίσει το χρηματιστήριο παραγώγων.

[18] Ο τρόπος που καλύπτεται το χρηματιστήριο σε κίνδυνο αθέτησης είναι μέσω του κεντρικού μηχανισμού εκκαθάρισης, μειώνοντας τον πιστωτικό κίνδυνο. Δηλαδή γίνεται ημερήσια αποτίμηση των θέσεων , η οποία συνεπάγεται και ανάλογη χρέωση/πίστωση των κερδών /των ζημιών, ώστε να υπολογιστεί το περιθώριο ασφάλισης.

Ορισμός Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης είναι μια σύμβαση ανάμεσα σε δύο συμβαλλόμενους κατά την οποία, ο ένας υποχρεούται να αγοράσει (αγοραστής: επιδιώκει αύξηση τιμής προϊόντος - long position), ενώ ό άλλος να πουλήσει (πωλητής: επιδιώκει μείωση τιμής προϊόντος – short position) μια συγκεκριμένη ποσότητα από ένα υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε μια προσυμφωνημένη τιμή (delivery price) κατά την προκαθορισμένη μέρα λήξης του συμβολαίου (delivery date).

Παράδειγμα

Ο επενδυτής ΕΝΑ πιστεύει ότι ο δείκτης μετοχών FTSE/XYZ θα αυξηθεί μέσα στους επόμενους 3 μήνες. Ο δείκτης σήμερα βρίσκεται στις 1.000 μονάδες και κάθε μονάδα του δείκτη κοστίζει 20€. Τον ίδιο δείκτη μετοχών τον παρακολουθεί και ο επενδυτής ΔΥΟ, ο οποίος θεωρεί ότι θα έχει πτώση σε 3 μήνες. Έτσι, ο ΔΥΟ πουλάει ένα ΣΜΕ σε αυτόν τον δείκτη με τιμή Κ=1.000 και ημερομηνία λήξης μετά από 3 μήνες, ενώ παράλληλα ο ΕΝΑ αγοράζει το ίδιο ΣΜΕ.

Η αξία του συμβολαίου υπολογίζεται ως:

$$Αξία\ ΣΜΕ = K * Μονάδα\ δείκτη = 1.000 * 20 = 20.000$$

Οι δύο επενδυτές ανοίγουν έναν λογαριασμό περιθωρίου ασφαλείας (margin account) και καταθέτουν το 10% της συνολικής αξίας του ΣΜΕ.

$$Margin = 10\% * Αξία\ ΣΜΕ = 10\% * 20.000 = 2.000$$

Στο τέλος της ημέρας, η τιμή Κ έχει αλλάξει ανάλογα με τις προσδοκίες των επενδυτών μέσα από τη διαδικασία της προσφοράς και της ζήτησης. Έστω, λοιπόν, ότι η τιμή αυξάνεται στα Κ= 20,5€ και ο αγοραστής αποφασίζει να κλείσει την ανοιχτή θέση του. Τότε, θα είχε κέρδος $(20{,}5 - 20) * 1.000 = 500€$, τα οποία και πιστώνονται στο λογαριασμό περιθωρίου του αγοραστή. Ο πωλητής από την άλλη χρεώνεται στον λογαριασμό περιθωρίου του αυτό το ποσό. Η διαδικασία αύτη, γνωστή ως ημερήσιος διακανονισμός (marked to market) επαναλαμβάνεται στο τέλος κάθε ημερήσιας συνεδρίασης του χρηματιστηρίου μέχρι τη λήξη του ΣΜΕ. Κατά τη διάρκεια αυτής, οι κερδοφόρες ή ζημιογόνες διαφορές που προκύπτουν από τη μεταβολή της τιμής του ΣΜΕ υπολογίζονται και καταβάλλονται στους λογαριασμούς των δύο μερών έως ότου λήξει το συμβόλαιο.

2.3.3 Συμφωνίες Ανταλλαγής (Swap Agreements)

Οι *συμφωνίες ανταλλαγής (swaps)* αποτελούν ειδικά χρηματοοικονομικά συμβόλαια μεταξύ δύο μερών, μέσω των οποίων συμφωνούν να ανταλλάξουν χρηματοροές ή περιουσιακά στοιχεία σε προκαθορισμένα χρονικά διαστήματα με προκαθορισμένους όρους. Οι χρηματοροές αυτές αφορούν διαφορετικά νομίσματα, επιτόκια ή τιμές εμπορευμάτων. Χρησιμοποιούνται για τη διαχείριση κινδύνων (π.χ. μεταβολές επιτοκίων, συναλλαγματικές ισοτιμίες, τιμές εμπορευμάτων), την εξισορρόπηση υποχρεώσεων ή την επίτευξη καλύτερων χρηματοοικονομικών αποτελεσμάτων.

Παράδειγμα

Η εταιρεία Α έχει λάβει ένα δάνειο ύψους 1 εκατομμύριο € με σταθερό επιτόκιο 5%, αλλά πιστεύει ότι τα κυμαινόμενα επιτόκια Euribor θα μειωθούν και επιθυμεί να επωφεληθεί από τη μείωση αυτή. Από την άλλη μεριά, υπάρχει η εταιρεία Β με δάνειο ύψους 1 εκατομμύριο € με κυμαινόμενο επιτόκιο Euribor +1% και ανησυχεί ότι το Euribor θα αυξηθεί, αυξάνοντας έτσι το κόστος του δανείου της. Έτσι, οι δύο εταιρείες συνάπτουν μια συμφωνία ανταλλαγής επιτοκίων (Interest Rate Swap), κατά την οποία: η εταιρεία Α υποχρεώνεται να πληρώνει κυμαινόμενο επιτόκιο (Euribor +1%) στην εταιρεία Β, η εταιρεία Β συμφωνεί να πληρώνει σταθερό επιτόκιο 5% στην εταιρεία Α. Η συμφωνία βασίζεται σε θεωρητικό κεφάλαιο 1 εκατομμύριο €, οι πληρωμές των τόκων γίνονται κάθε τρίμηνο και το κεφάλαιο δεν ανταλλάσσεται.

Σενάριο 1ο: Το Euribor είναι 2%

- ✓ Εταιρεία Α
  - Πληρώνει κυμαινόμενο επιτόκιο: $(2\% + 1\%) * 1\varepsilon\kappa = 30.000€$
  - Λαμβάνει σταθερό επιτόκιο: $5\% * 1\varepsilon\kappa = 50.000€$
  - Το κέρδος της είναι: $50.000 - 30.000 = 20.000€$
- ✓ Εταιρεία Β
  - Πληρώνει σταθερό επιτόκιο: $5\% * 1\varepsilon\kappa = 50.000€$
  - Λαμβάνει κυμαινόμενο επιτόκιο: $(2\% + 1\%) * 1\varepsilon\kappa = 30.000€$
  - Η ζημία της είναι: $30.000 - 50.000 = -20.000€$

Σενάριο 2ο: Το Euribor είναι 3,5%

- ✓ Εταιρεία Α
  - Πληρώνει κυμαινόμενο επιτόκιο: $(3.5\% + 1\%) * 1\varepsilon\kappa = 45.000€$
  - Λαμβάνει σταθερό επιτόκιο: $5\% * 1\varepsilon\kappa = 50.000€$
  - Το κέρδος της είναι: $50.000 - 45.000 = 5.000€$
- ✓ Εταιρεία Β
  - Πληρώνει σταθερό επιτόκιο: $5\% * 1\varepsilon\kappa = 50.000€$
  - Λαμβάνει κυμαινόμενο επιτόκιο: $(3.5\% + 1\%) * 1\varepsilon\kappa = 45.000€$
  - Η ζημία της είναι: $45.000 - 50.000 = -5.000€$

Έτσι, μπορούμε να αποφανθούμε ότι η εταιρεία Α επωφελείται όταν τα κυμαινόμενα επιτόκια είναι χαμηλά, καθώς πληρώνει λιγότερο τόκο μέσω του swap, ενώ η εταιρεία Β προστατεύεται από αυξήσεις στα κυμαινόμενα επιτόκια, καθώς μετατρέπει τις πληρωμές της σε σταθερό επιτόκιο.

2.3.4 Δικαιώματα προαίρεσης (Options)

Τα *δικαιώματα προαίρεσης* αποτελούν την πιο διαδεδομένη κατηγορία χρηματοοικονομικών παραγώγων. Αυτά μπορούν να διαπραγματεύονται τόσο στα χρηματιστήρια όσο και στην OTC αγορά. Η OTC (Over-The-Counter) αγορά λειτουργεί ως ένα δίκτυο επενδυτών που πραγματοποιούν συναλλαγές παραγώγων μέσω τηλεφώνου ή υπολογιστή. Αποτελείται κυρίως από χρηματοπιστωτικά ιδρύματα και τους πελάτες αυτών. Σήμερα, η πλειονότητα των παραγώγων συναλλάσσεται πλέον στην OTC αγορά, παρά στα χρηματιστήρια.

Ορισμός Δικαίωμα προαίρεσης είναι ένα συμβόλαιο μεταξύ δύο συμβαλλομένων – αγοραστή και πωλητή του δικαιώματος – με τη μεσολάβηση του χρηματιστηρίου παραγώγων. Αυτή η συμφωνία δίνει το δικαίωμα στον αγοραστή, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει ή να πουλήσει (αναλόγως το είδος του δικαιώματος) από τον πωλητή ένα υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε μια προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης, κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου ή σε συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία.

Όπως έχουμε αναφέρει, τα συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης είναι συμβάσεις που αφορούν μελλοντικές αγοραπωλησίες χρεογράφων και παρουσιάζουν ομοιότητες με τα προθεσμιακά συμβόλαια και τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης. Ωστόσο, η βασική διαφορά τους έγκειται στο γεγονός ότι τα options δεν υποχρεώνουν τον αγοραστή του δικαιώματος να απαιτήσει την εκπλήρωση της συμφωνίας παρά μόνο εάν τον συμφέρει. Πιο συγκεκριμένα, ο επενδυτής που «αγοράζει» (**κάτοχος / holder**) διατηρεί το δικαίωμα να αγοράσει ή να πουλήσει το υποκείμενο προϊόν εντός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος με βάση τους όρους του συμβολαίου ή ακόμα και να το αφήσει να λήξει ανεκτέλεστο, πληρώνοντας στον πωλητή την τιμή του δικαιώματος (**option price** ή **premium**), χωρίς καμία επιπλέον υποχρέωση. Εάν επιλέξει να μην ασκήσει το δικαίωμά του, απλώς χάνει το ποσό που πλήρωσε στον πωλητή για την αγορά του δικαιώματος. Αντίθετα, ο επενδυτής που «πουλά» (**εκδότης / writer**) εισπράττει το αντίτιμο του δικαιώματος αναλαμβάνοντας την υποχρέωση να αγοράσει ή να πουλήσει το υποκείμενο προϊόν σε προκαθορισμένη τιμή και στη χρονική στιγμή που έχει συμφωνηθεί, εφόσον βέβαια ο αγοραστής αποφασίσει να ασκήσει το δικαίωμά του. Συνεπώς, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο αγοραστής βρίσκεται σε πλεονεκτική θέση, και για αυτό το λόγο υποχρεούται να καταβάλλει ένα αντίτιμο (option premium) στον πωλητή, προκειμένου να αποκτήσει το δικαίωμα.

Υπάρχουν δύο είδη δικαιωμάτων προαίρεσης:

- **Συμβόλαιο δικαιώματος αγοράς (Call Option)**

Δίνουν στον κάτοχο το δικαίωμα να αγοράσει το υποκείμενο προϊόν σε συγκεκριμένη τιμή, πριν ή κατά την ημερομηνία λήξης του συμβολαίου. Συνήθως, αγοράζονται από επενδυτές που προσδοκούν άνοδο της τιμής του υποκείμενου στοιχείου. Στην αγορά, η θέση του επενδυτή πάνω σε ένα call option είναι να αγοράσει ένα call option (Long Call) ή να πουλήσει ένα call option (Short Call).

- **Συμβόλαιο δικαιώματος πώλησης (Put Option)**

Δίνουν στον κάτοχο το δικαίωμα να πουλήσει το υποκείμενο προϊόν σε συγκεκριμένη τιμή, πριν ή κατά την ημερομηνία λήξης του συμβολαίου. Συνήθως, αγοράζονται από επενδυτές που προσδοκούν πτώση της τιμής του υποκείμενου στοιχείου. Στην αγορά, η θέση του επενδυτή πάνω σε ένα put option είναι να αγοράσει ένα put option (Long Put) ή να πουλήσει ένα put option (Short Put).

Τα χαρακτηριστικά και οι όροι που συμφωνούνται σε ένα δικαίωμα προαίρεσης από τις δύο πλευρές είναι τα ακόλουθα [1], [2], [13]:

1. *Ο υποκείμενος τίτλος (ή προϊόν):* Το περιουσιακό στοιχείο που βασίζεται το συμβόλαιο (π.χ. μετοχές, ομόλογα, δείκτες, νομίσματα, εμπορεύματα).
2. *Το μέγεθος του συμβολαίου:* Σχετίζεται με το πλήθος των τίτλων[19] ή την ποσότητα και ποιότητα του προϊόντος που θα ανταλλαχθούν, αν εξασκηθεί το συμβόλαιο.
3. *Η τιμή εξάσκησης K (exercise ή strike price):* Η προσυμφωνημένη τιμή ανά μονάδα του τίτλου (ή του προϊόντος) που θα γίνει η συναλλαγή, εφόσον ο κάτοχος του δικαιώματος επιλέξει να το ασκήσει.
4. *Η τιμή του δικαιώματος C (πριμ ή ασφάλιστρο του δικαιώματος, Option Price):* Το ποσό που καταβάλει ο αγοραστής στον πωλητή για την απόκτηση του δικαιώματος. Εάν ο αγοραστής επιλέξει να ασκήσει το δικαίωμά του, τότε ο πωλητής, έχοντας ήδη λάβει το αντίτιμο, υποχρεούται να εκτελέσει τη συναλλαγή που περιγράφεται στο συμβόλαιο.
5. *Η ημερομηνία λήξης T (exercise date ή maturity)*: Η μέρα που λήγει ή εκπνέει το συμβόλαιο. Μέχρι αυτήν την ημερομηνία, το συμβόλαιο έχει αξία, αλλά μετά τη λήξη του παύει να ισχύει και δεν έχει καμία χρησιμότητα για τον κάτοχό του.
6. *Ο τύπος του δικαιώματος*: Ανάλογα με το χρόνο εξάσκησης T, τα δικαιώματα διακρίνονται σε:
   a. Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματα (European options) τα οποία μπορούν να εξασκηθούν μόνο στην ημερομηνία λήξης τους.
   b. Αμερικανικού τύπου δικαιώματα (American options) τα οποία μπορούν να εξασκηθούν οποιαδήποτε στιγμή καθ' όλη τη διάρκεια της ισχύος του συμβολαίου.

[19] Π.χ. Όταν στην αγορά διαπραγματεύονται options που αφορούν μετοχικούς τίτλους, συνήθως αντιπροσωπεύουν μια συμφωνία για την αγορά ή πώληση 100 μετοχών ανά συμβόλαιο. Αν τα options αφορούν εμπόρευμα, τότε για το χρυσό είναι 100 ουγκιές, για το πετρέλαιο είναι 1000 βαρέλια κ.λπ.
Επίσης, όταν τα options βασίζονται σε έναν χρηματιστηριακό δείκτη (FTSE 100, S&P 500), το μέγεθος του συμβολαίου καθορίζεται από έναν πολλαπλασιαστή (συνήθως το 100) που εφαρμόζεται στην τιμή του δείκτη για να προσδιοριστεί η συνολική αξία του συμβολαίου.

Παράδειγμα κατανόησης

Ας υποθέσουμε ότι ο επενδυτής ΕΝΑ προσδοκά ότι η τιμή της μετοχής της εταιρείας “FOR YOU” θα αυξηθεί στο μέλλον. Βλέπει πως η τιμή της μετοχής σήμερα διαπραγματεύεται στα 90€ και αποφασίζει να αγοράσει ένα δικαίωμα αγοράς επί της μετοχής αυτής με τιμή εξάσκησης $K = 100€$, λήξη σε ένα μήνα και κόστος δικαιώματος 3€ ανά μετοχή, πληρώνοντας αντίτιμο C. Σημειώνεται ότι κάθε συμβόλαιο option αντιστοιχεί σε 100 μετοχές.

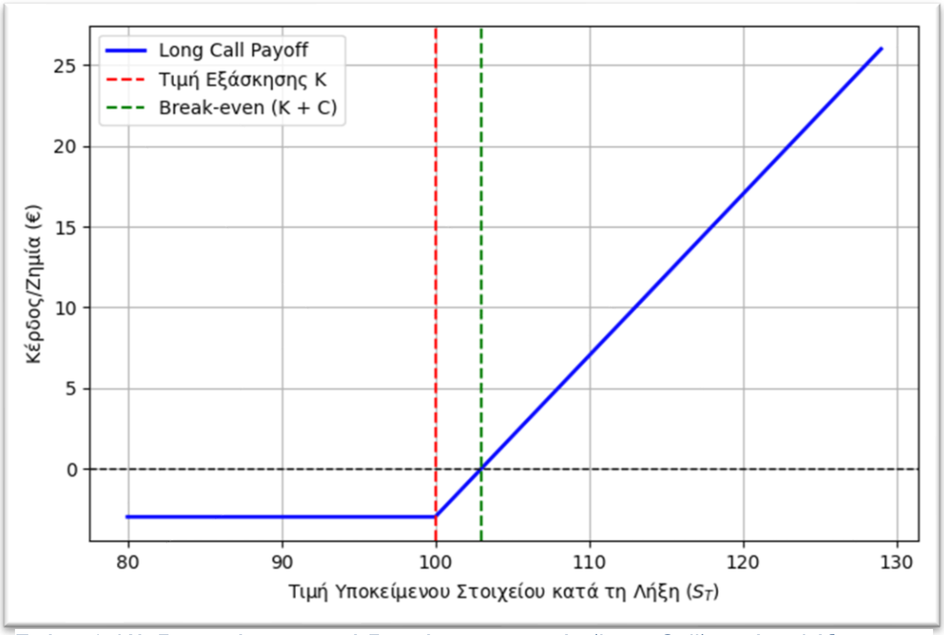
Αν η τιμή της μετοχής την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος αυξηθεί στα 130€, ο ΕΝΑ θα ασκήσει το δικαίωμα του και θα αγοράσει φτηνά τη μετοχή στα 90€. Στη συνέχεια θα πουλήσει ακριβά τη μετοχή στην αγορά στα 130€. Το κέρδος ανά μετοχή που θα αποκομίσει είναι $130 - 100 - 3 = 27€/\mu\varepsilon\tau o\chi\acute{\eta}$. Επειδή κάθε συμβόλαιο option αντιστοιχεί σε 100 μετοχές, το συνολικό κέρδος του ΕΝΑ είναι $27 * 100 = 2.700€$.

Αν η τιμή της μετοχής την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος μειωθεί στα 70€, ο ΕΝΑ <u>δεν</u> θα ασκήσει το δικαίωμα του, αφού η τιμή της μετοχής τώρα είναι χαμηλότερη από την τιμής εξάσκησης. Ο επενδυτής έχει ζημία ίση με το κόστος του option, δηλαδή η συνολική ζημία του ΕΝΑ είναι $-3 * 100 = -300€$.

Γενικότερα, αν S_T είναι η χρηματιστηριακή τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου στο χρόνο εκπνοής του δικαιώματος, K την τιμή εξάσκησης και C την αξία του δικαιώματος αγοράς, τότε το κέρδος του αγοραστή από το δικαίωμα αγοράς θα είναι:

$$K\acute{\varepsilon}\rho\delta o\varsigma_{long\ call} = \max(S_T - K, 0) - C$$

$$,\acute{o}\pi o\upsilon\ \max(S_T - K, 0) = \begin{cases} S_T - K, & \alpha\nu\ S_T > K \\ 0, & \alpha\nu\ S_T \leq K \end{cases}$$



Σχήμα 1. Κέρδος από την αγορά δικαιώματος αγοράς (Long Call) κατά τη λήξη.

Ας υποθέσουμε ότι ο επενδυτής ΔΥΟ, ο οποίος διαθέτει μερικές μετοχές της εταιρείας, αναμένει μια ήπια πτώση στην τιμή της μετοχής της εταιρείας “FOR YOU”. Βλέπει πως η τιμή της μετοχής σήμερα διαπραγματεύεται στα 90€ και αποφασίζει να πουλήσει ένα δικαίωμα αγοράς επί της μετοχής αυτής με τιμή εξάσκησης $K = 100€$, λήξη σε ένα μήνα και κόστος δικαιώματος 3€ ανά μετοχή, λαμβάνοντας το αντίτιμο C. Σημειώνεται ότι κάθε συμβόλαιο option αντιστοιχεί σε 100 μετοχές.

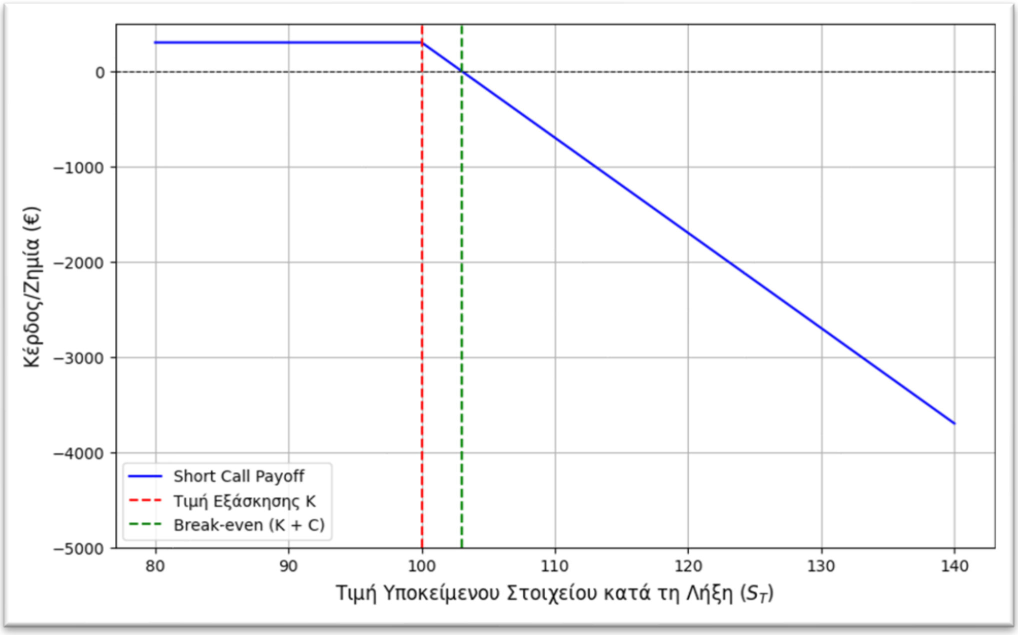
Αν η τιμή της μετοχής την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος αυξηθεί στα 130€, ο αγοραστής του call option θα ασκήσει το δικαίωμα του. Το γεγονός αυτό υποχρεώνει τον ΔΥΟ (πωλητή δικαιώματος) να πουλήσει φτηνά τη μετοχή στην προσυμφωνημένη τιμή των 100€, ενώ αυτή κοστίζει 130€ στην αγορά. Η ζημία ανά μετοχή που θα λάβει αν πουλήσει στα 100€ είναι $3 + 100 - 130 = -27€/\mu\varepsilon\tau o\chi\acute{\eta}$. Επειδή κάθε συμβόλαιο option αντιστοιχεί σε 100 μετοχές, η συνολικό ζημία του ΔΥΟ είναι $-27 * 100 = -2.700€$.

Αν η τιμή της μετοχής την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος μειωθεί στα 70€, ο αγοραστής του call option δεν θα ασκήσει το δικαίωμα του. Ο ΔΥΟ (πωλητής) έχει αποκομίσει το αντίτιμο C ως κέρδος, δηλαδή το συνολικό κέρδος του ΔΥΟ είναι $3 * 100 = 300€$.

Γενικότερα, αν S_T είναι η χρηματιστηριακή τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου στο χρόνο εκπνοής του δικαιώματος, K την τιμή εξάσκησης και C την αξία του δικαιώματος αγοράς, τότε το κέρδος του πωλητή από το δικαίωμα αγοράς θα είναι:

$$K\acute{\varepsilon}\rho\delta o\varsigma_{short\ call} = C - \max(S_T - K, 0)$$

$$,\acute{o}\pi o\upsilon\ -\max(S_T - K, 0) = \begin{cases} K - S_T, & \alpha\nu\ S_T > K \\ 0, & \alpha\nu\ S_T \leq K \end{cases}$$



Σχήμα 2. Κέρδος από την πώληση δικαιώματος αγοράς (Short Call) κατά τη λήξη.

Ας υποθέσουμε ότι ο επενδυτής TPIA προσδοκά ότι η τιμή της μετοχής της εταιρείας “FOR YOU” θα έχει πτωτική τάση στο μέλλον. Βλέπει πως η τιμή της μετοχής σήμερα διαπραγματεύεται στα 90€. Γι’ αυτό αποφασίζει να αγοράσει ένα δικαίωμα πώλησης επί της μετοχής αυτής με τιμή εξάσκησης $K = 100€$, λήξη σε ένα μήνα και κόστος δικαιώματος 3€ ανά μετοχή, πληρώνοντας αντίτιμο P. Σημειώνεται ότι κάθε συμβόλαιο option αντιστοιχεί σε 100 μετοχές.

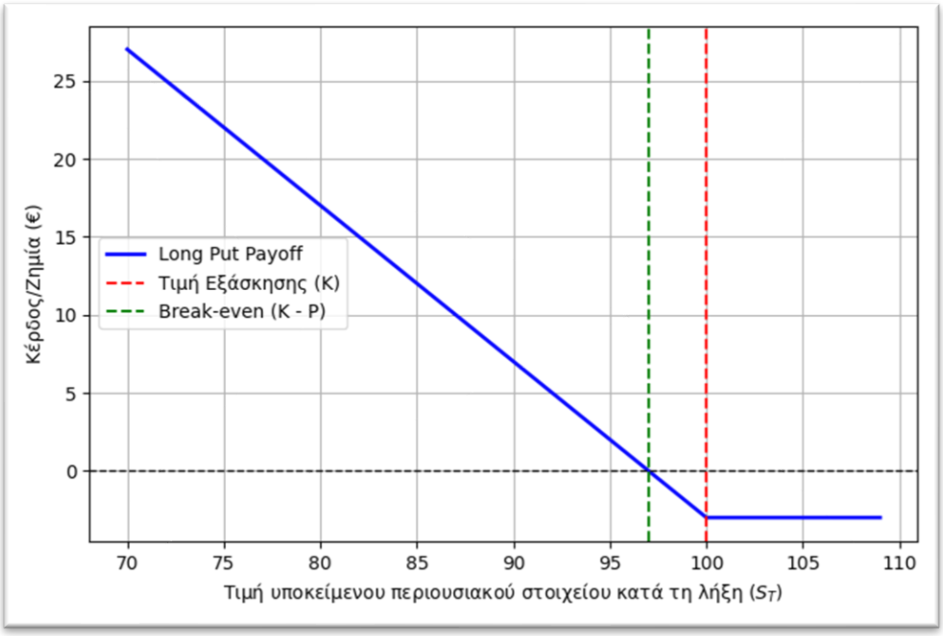
Αν η τιμή της μετοχής την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος αυξηθεί στα 130€, ο TPIA <u>δεν</u> θα ασκήσει το δικαίωμα του, αφού η τιμή της μετοχής τώρα είναι υψηλότερη από την τιμής εξάσκησης. Ο επενδυτής έχει ζημία ίση με το κόστος του option, δηλαδή η συνολική ζημία του TPIA είναι $-3 * 100 = -300€$.

Αν η τιμή της μετοχής την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος μειωθεί στα 70€, ο TPIA θα ασκήσει το δικαίωμα του και θα πουλήσει (ακριβά) τη μετοχή στην προσυμφωνημένη τιμή των 100€, αφού η τιμή της μετοχής τώρα είναι χαμηλότερη από την τιμής εξάσκησης. Στη συνέχεια μπορεί να αγοράσει (φτηνά) τη μετοχή στην αγορά στα 70€. Το κέρδος ανά μετοχή που θα αποκομίσει είναι $100 - 70 - 3 = 27€/μετοχή$. Επειδή κάθε συμβόλαιο option αντιστοιχεί σε 100 μετοχές, το συνολικό κέρδος του ΕΝΑ είναι $27 * 100 = 2.700€$.

Γενικότερα, αν S_T είναι η χρηματιστηριακή τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου στο χρόνο εκπνοής του δικαιώματος, K την τιμή εξάσκησης και C την αξία του δικαιώματος αγοράς, τότε το κέρδος του πωλητή από το δικαίωμα αγοράς θα είναι:

$$Κέρδος_{long\ put} = \max(K - S_T, 0) - P$$

$$,\text{όπου } \max(K - S_T, 0) = \begin{cases} K - S_T, & αν\ K > S_T \\ 0, & αν\ K \leq S_T \end{cases}$$



Σχήμα 3. Κέρδος από την αγορά δικαιώματος πώλησης (Long Put) κατά τη λήξη.

Ας υποθέσουμε ότι ο επενδυτής ΤΕΣΣΕΡΑ αναμένει ότι η τιμή της μετοχής της εταιρείας “FOR YOU” θα έχει μια ήπια ανοδική τάση στο μέλλον. Βλέπει πως η τιμή της μετοχής σήμερα διαπραγματεύεται στα 90€. Γι’ αυτό αποφασίζει να πουλήσει ένα δικαίωμα πώλησης επί της μετοχής αυτής με τιμή εξάσκησης $K = 100€$, λήξη σε ένα μήνα και κόστος δικαιώματος 3€ ανά μετοχή, λαμβάνοντας το αντίτιμο P. Σημειώνεται ότι κάθε συμβόλαιο option αντιστοιχεί σε 100 μετοχές.

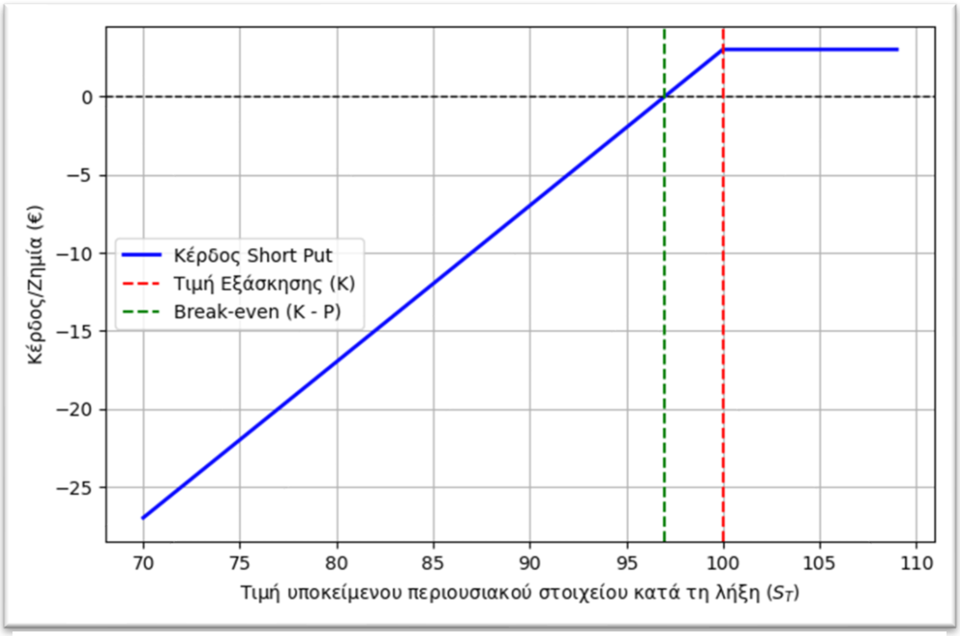
Αν η τιμή της μετοχής την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος αυξηθεί στα 130€, ο αγοραστής του put option δεν θα ασκήσει το δικαίωμα του. Ο ΤΕΣΣΕΡΑ (πωλητής) έχει αποκομίσει το αντίτιμο P ως κέρδος, δηλαδή το συνολικό κέρδος του ΤΕΣΣΕΡΑ είναι $3 * 100 = 300€$.

Αν η τιμή της μετοχής την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος μειωθεί στα 70€, ο αγοραστής του put option θα ασκήσει το δικαίωμα του και θα πουλήσει (ακριβά) τη μετοχή στα 100€, αφού η τιμή της μετοχής τώρα είναι χαμηλότερη από την τιμής εξάσκησης. Το γεγονός αυτό υποχρεώνει τον ΤΕΣΣΕΡΑ (πωλητή δικαιώματος) να αγοράσει τη μετοχή στην προσυμφωνημένη τιμή των 100€, ενώ θα μπορούσε να την αγοράσει φτηνά, καθώς αυτή κοστίζει 70€ στην αγορά. Η ζημία ανά μετοχή που θα λάβει αν πουλήσει στα 70€ είναι $3 + 70 - 100 = -27€/μετοχή$. Επειδή κάθε συμβόλαιο option αντιστοιχεί σε 100 μετοχές, η συνολικό ζημία του ΤΕΣΣΕΤΑ είναι $-27 * 100 = -2.700€$.

Γενικότερα, αν S_T είναι η χρηματιστηριακή τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου στο χρόνο εκπνοής του δικαιώματος, K την τιμή εξάσκησης και C την αξία του δικαιώματος αγοράς, τότε το κέρδος του πωλητή από το δικαίωμα αγοράς θα είναι:

$$Κέρδος_{short\ put} = P - \max(K - S_T, 0)$$

$$,όπου -\max(K - S_T, 0) = \begin{cases} S_T - K, & αν\ K > S_T \\ 0, & αν\ K \leq S_T \end{cases}$$



Σχήμα 4. Κέρδος από την πώληση δικαιώματος πώλησης (Short Put) κατά τη λήξη

Η αξία του συμβολαίου την χρονική στιγμή λήξης καθορίζεται αποκλειστικά από τη σχέση μεταξύ της strike price K και της τρέχουσας τιμής του υποκείμενου τίτλου S_T. Η σχέση αυτή καθορίζει αν θα ασκηθεί το δικαίωμα και ποιο θα είναι το όφελος για τον κάτοχο κάθε φορά. Στις χρηματοοικονομικές αγορές χρησιμοποιούνται κάποιοι όροι για περιγράψουν τη σχέση μεταξύ της strike price K του option και της τρέχουσας τιμής του υποκείμενου τίτλου S_T [13].

Πιο συγκεκριμένα, ένα option θεωρείται "**in the money (ITM)**" όταν έχει εσωτερική αξία. Δηλαδή, αν το δικαίωμα εξασκηθεί, τότε θα αποφέρει θετικό κέρδος στον κάτοχό του.

- Ένα δικαίωμα αγοράς (call option) είναι in the money, όταν η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου είναι υψηλότερη από την τιμή εξάσκησης ($\boldsymbol{S_T > K}$).
- Ένα δικαίωμα πώλησης (put option) είναι in the money, όταν η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου είναι χαμηλότερη από την τιμή εξάσκησης ($\boldsymbol{S_T < K}$).

Ένα option θεωρείται **"at the money (ATM)**" όταν έχει μηδενική εσωτερική αξία. Δηλαδή, αν το δικαίωμα εξασκηθεί δεν θα έχει ούτε κέρδη ούτε ζημιές για τον κάτοχό του. Ένα δικαίωμα αγοράς (call option) και ένα δικαίωμα πώλησης (put option) είναι at the money, όταν η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου είναι ίση με την τιμή εξάσκησης ($\boldsymbol{S_T = K}$).

Ένα option θεωρείται **"out of the money (OTM)**" όταν δεν έχει εσωτερική αξία και έχει μόνο χρονική[20] αξία. Δηλαδή, αν το δικαίωμα εξασκηθεί, τότε θα αποφέρει αρνητικό κέρδος (ή ζημία) στον κάτοχό του.

- Ένα δικαίωμα αγοράς (call option) είναι out of the money, όταν η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου είναι χαμηλότερη από την τιμή εξάσκησης ($\boldsymbol{S_T < K}$).
- Ένα δικαίωμα πώλησης (put option) είναι out of the money, όταν η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου είναι υψηλότερη από την τιμή εξάσκησης ($\boldsymbol{S_T > K}$).

Η εσωτερική αξία (Intrinsic Value) αναφέρεται στην ποσότητα κατά την οποία η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου θα είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης κατά την μέρα εκπνοής του δικαιώματος. Πρόκειται επί της ουσίας για την αξία του δικαιώματος, εφόσον εξασκηθεί άμεσα. Μαθηματικά, η εσωτερική αξία κατά τη λήξη του δικαιώματος δίνεται από:

- Για ένα δικαίωμα αγοράς (call option): $\max(0, S_T - K)$
- Για ένα δικαίωμα πώλησης (put option): $\max(0, K - S_T)$

[20] Η συνολική αξία ενός option ισούται από το άθροισμα της εσωτερικής και χρονικής αξίας. Η εσωτερική αξία αφορά την διαφορά της S_T με την K, ενώ η χρονική αξία δείχνει τις προσδοκίες των συναλλασσόμενων στην μεταβολής της τιμής πριν την εκπνοή του δικαιώματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο : Η ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΩΝ ΜΕΤΟΧΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε τις στοχαστικές διαδικασίες που θεμελιώνουν και περιγράφουν τη συμπεριφορά των χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων υπό το καθεστώς της αβεβαιότητας. Καταλήγει στην κατασκευή του μοντέλου των Black-Scholes-Merton που αποτελεί ένα εύχρηστο μαθηματικό εργαλείο αξιολόγησης και αποτίμησης των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1η : Στοχαστικές διαδικασίες

3.1.1 Μαρκοβιανή διαδικασία

Κάθε μεταβλητή της οποίας η τιμή μεταβάλλεται τυχαία με την πάροδο του χρόνου λέγεται ότι ακολουθεί μια **στοχαστική διαδικασία**. Οι στοχαστικές διαδικασίες διακρίνονται σε [24]:

- διακριτού χρόνου, στις οποίες η τιμή της μεταβλητής μπορεί να αλλάζει μόνο σε συγκεκριμένα (διακριτά) χρονικά σημεία.
- συνεχούς χρόνου, στις οποίες οι αλλαγές μπορούν να συμβούν οποιαδήποτε στιγμή.

Επιπλέον, οι στοχαστικές διαδικασίες ανάλογα με τον τύπο της μεταβλητής διακρίνονται σε:

- διακριτής μεταβλητής, στις οποίες η μεταβλητή μπορεί να λάβει μόνο συγκεκριμένες τιμές.
- συνεχούς μεταβλητής, στις οποίες η μεταβλητή μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα καθορισμένο εύρος.

Στο πλαίσιο της παρούσας ενότητας, εξετάζουμε στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς μεταβλητής και συνεχούς χρόνου για την περιγραφή των τιμών των μετοχών. Γενικότερα, οι στοχαστικές διαδικασίες αποτελούν θεμέλιο για την κατανόηση της τιμολόγησης των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Συνεπώς, αν κατανοήσουμε αυτή τη διαδικασία, τότε θα μας είναι πιο εύκολο να κατανοήσουμε πώς τιμολογούνται τα δικαιώματα προαίρεσης, καθώς και άλλα πιο πολύπλοκα παράγωγα. Αξίζει να σημειωθεί ότι, στην πράξη, δεν παρατηρούμε οι τιμές των μετοχών να ακολουθούν διαδικασίες συνεχούς μεταβλητής και συνεχούς χρόνου. Οι τιμές των μετοχών περιορίζονται σε συγκεκριμένες διακριτές τιμές, όπως τα πολλαπλάσια του ενός cent, και οι μεταβολές στην τιμή τους παρατηρούνται μόνο κατά τη διάρκεια των ωρών λειτουργίας των χρηματιστηρίων. Ωστόσο, η χρήση του μοντέλου συνεχούς μεταβλητής και συνεχούς χρόνου έχει αποδειχθεί εξαιρετικά χρήσιμο για πολλούς σκοπούς.

Καθημερινά επαγγελματίες αναλυτές και επενδυτές παρακολουθούν τις εξελίξεις της αγοράς, μελετούν την πορεία των μετοχών και λαμβάνουν επενδυτικές αποφάσεις, συνήθως με στόχο την επίτευξη υπερκερδών, προσπαθώντας να προβλέψουν το μέλλον. Όμως, όλη αυτή η προσπάθεια δεν αποδίδει πάντα. Αυτό οφείλεται στη μορφή της ασθενούς αποτελεσματικής αγοράς (weak-form efficiency), σύμφωνα με την οποία όλες οι ιστορικές πληροφορίες[21] αντικατοπτρίζονται ήδη στην τρέχουσα τιμή μιας μετοχής. Ως εκ τούτου, οι επενδυτές δεν μπορούν να πετύχουν υψηλές αποδόσεις και υπερκέρδη μέσω της ανάλυσης των παρελθοντικών τιμών. Αυτή η προσέγγιση στηρίζεται στην αρχική υπόθεση ότι οι τιμές των μετοχών ακολουθούν μια **διαδικασία Markov** [13], [24].

Μια Μαρκοβιανή διαδικασία είναι ένας ειδικός τύπος στοχαστικής διαδικασίας, στην οποία η πρόβλεψη για το μέλλον εξαρτάται μόνο από την παρούσα κατάσταση και όχι από το ιστορικό των προηγούμενων καταστάσεων. Κατά συνέπεια, η πρόβλεψη για το μέλλον βασίζεται αποκλειστικά σε εργαλεία πιθανοτήτων, ιδίως στη θεωρία κατανομών, και όχι σε ιστορικά δεδομένα. Έτσι, λέμε ότι έχει την ιδιότητα "χωρίς μνήμη", αφού οι παρελθούσες τιμές και ο τρόπος με τον οποίο αυτές προέκυψαν δεν έχουν σημασία. Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού, η πιθανότητα του αποτελέσματος της επόμενης ρίψης εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα κατάσταση (π.χ. τι ζάρι ρίχνουμε) και δεν επηρεάζεται από τις προηγούμενες ρίψεις.

Από τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό ότι οι αλλαγές μιας μεταβλητής που ακολουθεί την Μαρκοβιανή διαδικασία σε διαδοχικά χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την κανονική κατανομή $\Phi(\mu, \sigma)$, όπου μ είναι η μέση τιμή και σ είναι η τυπική απόκλιση. Αν υποθέσουμε ότι οι τιμές ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$, τότε η κατανομή για μια μικρή μεταβολή Δ_t θα είναι $N\left(0, \sqrt{\Delta_t}\right)$.

3.1.2 Διαδικασία Wiener

Η **διαδικασία Wiener**[22] είναι ένας ειδικός τύπος στοχαστικής διαδικασίας Markov που παρουσιάζει μηδενική μέση μεταβολή (mean change) και ρυθμό διακύμανσης (variance rate) ίσο με 1, ανά έτος. Χρησιμοποιείται ευρέως, στη φυσική για να περιγράψει την κίνηση των σωματιδίων που δέχονται αμέτρητα μικροσκοπικά χτυπήματα, αλλά και στη χρηματοοικονομική ως θεμέλιο για την μοντελοποίηση της εξέλιξης των τιμών περιουσιακών στοιχείων, όπως οι μετοχές [13], [24].

Μια μεταβλητή $w(t),\ t \geq 0$ της οποίας η τιμή μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο ακολουθεί τη διαδικασία Wiener αν ικανοποιεί τις παρακάτω βασικές ιδιότητες:

[21] Παρελθούσες τιμές, αποδόσεις, όγκος συναλλαγών

[22] Αλλιώς και ως Brownian Motion (κίνηση Brown)

I. Αρχική Συνθήκη: $\boldsymbol{w(0) = 0}$

Η διαδικασία ξεκινά από τη χρονική στιγμή $t = 0$.

II. Κανονική κατανομή των αυξήσεων

a. Μεταβολή σε μικρό χρονικό διάστημα Δt

Η μεταβολή Δw κατά τη διάρκεια μιας μικρής χρονικής περιόδου Δt περιγράφεται από τη σχέση:

$$\Delta w = \epsilon \sqrt{\Delta t}$$, όπου

- ϵ είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0{,}1)$
- $\sqrt{\Delta t}$ εξηγεί τη σχέση μεταβολής με το χρόνο

Σύμφωνα με την ιδιότητα II, η Δw ακολουθεί την κανονική κατανομή με:

Μέση τιμή	$mean(\Delta w) = 0$
Τυπική απόκλιση	$std(\Delta w) = \sqrt{\Delta t}$
Διακύμανση	$variance(\Delta w) = \Delta t$

b. Μεταβολή σε μεγάλο χρονικό διάστημα $\boldsymbol{T}$

Ας σκεφτούμε, τώρα, τη μεταβολή στην τιμή του w κατά τη διάρκεια μιας σχετικά μεγάλης χρονικής περιόδου T, η οποία αναπαρίσταται ως $w(T) - w(0)$. Δηλαδή, για $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_i < \cdots t_N = T \; και \; για \; κάθε \; i \; είναι \; \Delta t = t_i - t_{i-1}$

Η διαφορά αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα των μεταβολών του w σε N μικρά χρονικά διαστήματα διάρκειας Δt, δηλαδή:

$$w(T) - w(0) = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i \sqrt{\Delta t}$$, όπου

- $\mathrm{N} = \frac{\mathrm{T}}{\Delta \mathrm{t}}$
- ϵ_i οι ανεξάρτητες κανονικές τυχαίες μεταβλητές

Έτσι, το παραπάνω άθροισμα συγκλίνει σε μια διαδικασία Wiener. Από αυτό προκύπτει ότι:

Μέση τιμή	$mean\big(w(T) - w(0)\big) = 0$
Τυπική απόκλιση	$std\big(w(T) - w(0)\big) = \sqrt{T}$
Διακύμανση	$variance\big(w(T) - w(0)\big) = N * \Delta t = T$

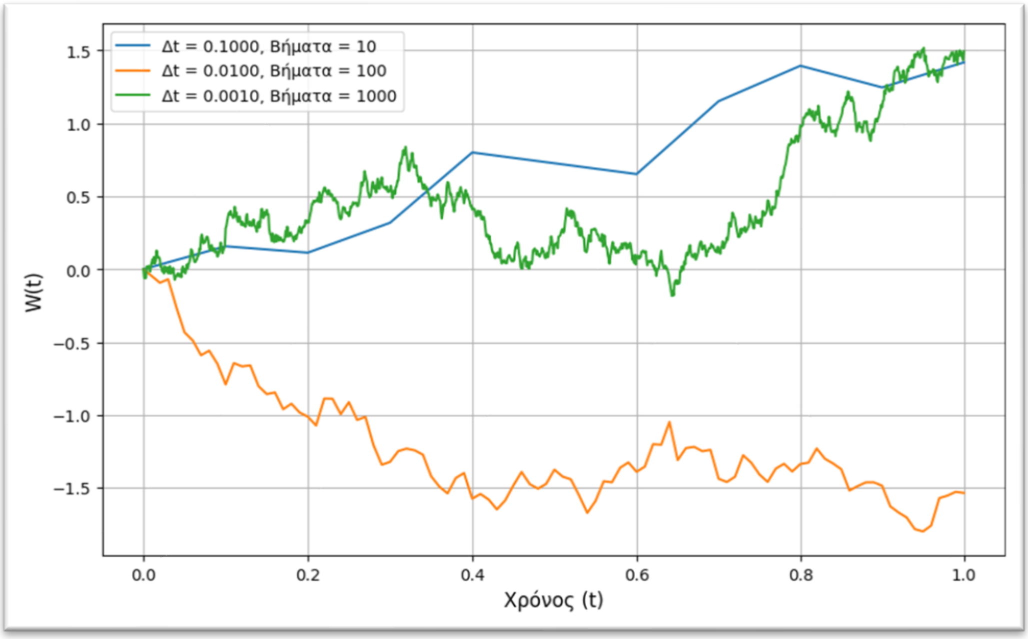
III. Ανεξαρτησία μεταβολών

Οι τιμές Δw για δύο διαφορετικά χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Δηλαδή, οι αυξήσεις της διαδικασίας $w(t) - w(s)$ σε μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητες για οποιαδήποτε $0 \leq s < t$.

Σύμφωνα με την ιδιότητα της ανεξαρτησίας, η μεταβλητή w σχετίζεται με τη βασική αρχή της στοχαστικής διαδικασίας Markov, καθώς η πρόβλεψη για το μέλλον εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή $w(t)$ και όχι από το ιστορικό της.

Παράδειγμα

Ας πούμε ότι μια μεταβλητή w ξεκινά από την τιμή 50, είναι δηλαδή $w_0 = 50$ και ακολουθεί μια διαδικασία Wiener. Στο τέλος του 1 έτους, η w θα έχει μέση τιμή 50 και τυπική απόκλιση 1, το οποίο σημαίνει ότι μπορεί να αποκλίνει γύρω από το 50 κατά ± 1. Στο τέλος των 10 ετών, η μεταβλητή w έχει ακόμα μέση τιμή 50 αλλά τυπική απόκλιση $\sqrt{10} \approx 3{,}162$, το οποίο σημαίνει ότι μπορεί να αποκλίνει κατά $\pm 3{,}162$. Άρα, η αβεβαιότητα για τη μελλοντική τιμή της μεταβλητής αυξάνεται όσο μεγαλώνει η τετραγωνική ρίζα του χρονικού διαστήματος.



Σχήμα 5. Διαδικασία Wiener με μειούμενο βήμα χρόνου Δt → 0

Το παραπάνω διάγραμμα απεικονίζει την σύγκλιση της διαδικασίας Wiener σε αναλογία με το χρόνο. Όσο το Δt μειώνεται, τόσο περισσότερο η καμπύλη προσεγγίζει μια συνεχή στοχαστική διαδικασία.

Σε αυτό το σημείο, αναφορικά με τη $\sqrt{\Delta t}$, αξίζει να επισημάνουμε δύο χαρακτηριστικά της διαδικασίας Wiener. Αρχικά, <u>η συνολική διαδρομή που ακολουθεί η w σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα τείνει στο άπειρο.</u> Αυτό συμβαίνει γιατί η διαδικασία Wiener περιλαμβάνει απειροστά μικρές, τυχαίες μεταβολές σε κάθε χρονικό διάστημα Δt. Όπως φαίνεται και στην πράσινη γραμμή της Εικόνας 1, αυτές οι μεταβολές δεν είναι ομαλές, αλλά “οδοντωτές” (jagged), γεγονός που κάνει τη συνολική διαδρομή της w να μεγαλώνει άπειρα, ακόμα και αν η διαφορά $w(T) - w(0)$ παραμένει πεπερασμένη. Δεύτερον, <u>μέσα σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα, η διαδικασία Wiener επιστρέφει σε οποιαδήποτε συγκεκριμένη τιμή άπειρες φορές.</u> Στο παράδειγμά μας, οι συνεχείς ταλαντώσεις της w γύρω από το 50 κάνουν τη διαδικασία να επιστρέψει στο 50 άπειρες φορές.

3.1.3 Γενικευμένη διαδικασία Wiener

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, η βασική διαδικασία Wiener έχει ρυθμό απόκλισης ίσο με το μηδέν, που σημαίνει ότι η αναμενόμενη τιμή της w σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή στο μέλλον παραμένει ίση με την τρέχουσα τιμή της, αλλά και ρυθμό διακύμανσης ίσο με 1, που σημαίνει ότι η διακύμανση της μεταβολής του w σε ένα χρονικό διάστημα T είναι ίση με T, που υποδηλώνει ότι οι τυχαίες διακυμάνσεις αυξάνονται γραμμικά με το χρόνο, δηλαδή όσο μεγαλύτερο είναι το χρονικό διάστημα, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η διακύμανση.

Η γενικευμένη διαδικασία Wiener για μια μεταβλητή x είναι μια επέκταση της βασικής διαδικασίας Wiener, dw, στην οποία προστίθενται δύο στοιχεία: <u>ο ρυθμός ολίσθησης ή απόκλισης (drift rate)</u>, ο οποίος αφορά μια σταθερά α που εκφράζει τη μέση αύξηση ή μείωση της μεταβλητής x σε κάθε μονάδα χρόνου και <u>ο συντελεστής διακύμανσης ή μεταβλητότητα (variance rate)</u> που συμβολίζεται με b. Η μαθηματική μορφή της γενικευμένης διαδικασίας Wiener είναι η εξής [13]:

$$dx = \alpha\, dt + b\, dw \quad \acute{o}\pi o \upsilon\ \alpha, b\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$$

Θα περιγράψουμε τους όρους της παραπάνω εξίσωσης για να γίνει πιο κατανοητή.

$$dx = \underbrace{\alpha\, dt}_{\text{Deterministic}} + \underbrace{b\, dw}_{\text{Stochastic}}$$

- dx: Η μικρή μεταβολή στη μεταβλητή x κατά τη διάρκεια του dt.
- $\alpha\, dt$: Η σταθερή συνιστώσα της μεταβολής
- $b\, dw$: Η στοχαστική συνιστώσα της μεταβολής, όπου dw είναι η βασική διαδικασία Wiener.

Το <u>ντετερμινιστικό μέρος $\boldsymbol{\alpha\, dt}$</u> περιγράφει τη μέση τάση (drift rate) της μεταβλητής x να αυξάνεται ή να μειώνεται με σταθερό ρυθμό α ανά μονάδα χρόνου dt. Χωρίς την επίδραση της στοχαστικής συνιστώσας <u>$b\, dw$</u>, η μεταβλητή[23] x θα αυξανόταν ή θα μειωνόταν γραμμικά με σταθερό ρυθμό α, δηλαδή $x = x_0 + \alpha\, t$, όπου x_0 είναι η αρχική τιμής της x την στιγμή $t = 0$. Σε ένα χρονικό διάστημα T, η μεταβλητή x αυξάνεται κατά αT.

Το <u>στοχαστικό μέρος **b dw**</u> μπορεί να θεωρηθεί ως «θόρυβος ή μεταβλητότητα» στη διαδρομή που ακολουθεί η μεταβλητή x. Εισάγει, δηλαδή τυχαίες διακυμάνσεις γύρω από τη μέση τάση που ορίζεται από το <u>$\alpha\, dt$</u>. Ο συντελεστής b καθορίζει το μέγεθός των τυχαίων διακυμάνσεων. Το b^2 (variance rate) αντιπροσωπεύει την ένταση ή το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η διακύμανση με την πάροδο του χρόνου. Όσο μεγαλύτερο είναι το b, τόσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητα στη

---

[23] Η εξίσωση θα ήταν $dx = \alpha\, dt$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\frac{dx}{dt} = \alpha$.
Αν την ολοκληρώσουμε ως προς το χρόνο, τότε θα προκύψει μια σταθερή ανέλιξη $x = x_0 + \alpha\, t$.

μεταβλητή x. Το dw αφορά μια στοχαστική μεταβλητή[24] που ακολουθεί τη βασική διαδικασία Wiener με μηδενική μέση τιμή και διακύμανση ίση με dt.

Συνεπώς, η γενικευμένη διαδικασία Wiener, σύμφωνα με την εξίσωση $dx = \alpha\, dt + b\, dw$, έχει αναμενόμενο ρυθμό απόκλισης α και ρυθμό διακύμανσης b^2 (με α, b σταθερά).

Για ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt, η μεταβολή της μεταβλητής x εκφράζεται ως

$$\Delta x = \alpha\, \Delta t + b\, \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

όπου ϵ είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$. Άρα, η μεταβολή Δx ακολουθεί την κανονική κατανομή με:

Μέση τιμή	$mean(\Delta x) = \alpha\, \Delta t$
Τυπική απόκλιση	$std(\Delta x) = b\, \sqrt{\Delta t}$
Διακύμανση	$variance(\Delta x) = b^2 \Delta t$

Για χρονικά διαστήματα μήκους T, η μεταβολή της τυχαίας μεταβλητής x ακολουθεί την κανονική κατανομή με:

Μέση τιμή	$mean(\Delta x) = \alpha\, T$
Τυπική απόκλιση	$std(\Delta x) = b\, \sqrt{T}$
Διακύμανση	$variance(\Delta x) = b^2\, T$

Παράδειγμα

Έστω ότι η ταμειακή θέση μιας εταιρείας (μετρημένη σε εκατομμύρια ευρώ) ακολουθεί μια γενικευμένη διαδικασία Wiener με ρυθμό απόκλισης (drift rate) $\alpha = 40$ ανά έτος και ρυθμό διακύμανσης (variance rate) $b^2 = 625$. Ακόμα, γνωρίζουμε ότι η αρχική τιμή της ταμειακής θέσης είναι $x_0 = 60$.

Στο τέλος του πρώτου εξαμήνου $T = 0{,}5$, η ταμειακή θέση θα έχει κανονική κατανομή με μέση τιμή $E(x) = x_0 + \alpha\, T = 60 + 40 * 0{,}5 = 80$ και τυπική απόκλιση $std(x) = b\, \sqrt{T} = 25 * \sqrt{0{,}5.} \cong 17{,}68$.

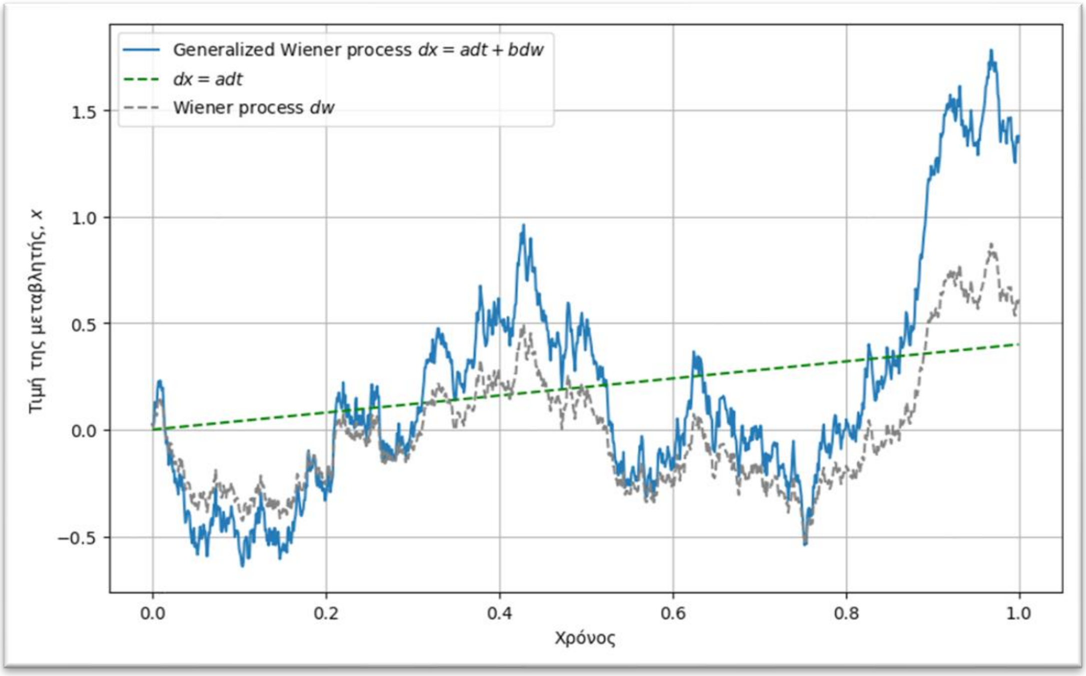
Στο τέλος του πρώτου έτους $T = 1$, η ταμειακή θέση θα έχει κανονική κατανομή με μέση τιμή $E(x) = x_0 + \alpha\, T = 60 + 40 * 1 = 100$ και τυπική απόκλιση $std(x) = b\, \sqrt{T} = 25 * \sqrt{1} = 25$.

---

[24] Η **<u>μέση τιμή</u>** της dw για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα dt είναι $\boldsymbol{E[dw] = 0}$ **<u>Η διακύμανση</u>** της dw ισούται με το χρονικό διάστημα dt, δηλαδή $\boldsymbol{Var[dw] = dt}$. Αυτό ισχύει γιατί η στοχαστική διαδικασία dw έχει τη μορφή $dw = \epsilon \sqrt{dt}$, όπου η τυχαία μεταβλητή $\epsilon \sim N(0,1)$. Άρα, $Var(dw) = Var\left(\epsilon \sqrt{dt}\right) = (\sqrt{dt})^2 * Var(\epsilon) = dt$

Στο τέλος τεσσάρων ετών $T = 4$, η ταμειακή θέση θα έχει κανονική κατανομή με μέση τιμή $E(x) = x_0 + \alpha\, T = 60 + 40 * 4 = 220$ και τυπική απόκλιση $std(x) = b\,\sqrt{T} = 25 * \sqrt{4} = 50$.

Συμπεραίνουμε ότι η αβεβαιότητα για την ταμειακή θέση στο μέλλον, όπως μετράται από την τυπική απόκλιση, αυξάνεται με την τετραγωνική ρίζα του χρόνου. Αξίζει να τονίσουμε ότι αν η ταμειακή θέση να γίνει αρνητική, τότε η εταιρεία ίσως να χρειαστεί δανεισμό.



Σχήμα 6. Γενικευμένη διαδικασία Wiener με α =0.4 και b=1.6

Το παραπάνω διάγραμμα απεικονίζει τρεις καμπύλες που αναπαριστούν

- $\mathbf{dx = \alpha\, dt}$: Μια γραμμική αύξηση (πράσινη διακεκομμένη γραμμή) με ρυθμό $\alpha = 0.4$ αφορά την ντετερμινιστική συνιστώσα.
- Η βασική διαδικασία Wiener $\mathbf{dw}$: Μια «οδοντωτή» στοχαστική πορεία (γκρι καμπύλη).
- Η γενικευμένη διαδικασία Wiener (μπλε καμπύλη), η οποία συνδυάζει την ντετερμινιστική τάση και τη στοχαστική μεταβλητότητα.

3.1.4 Διαδικασία Ito

Σε αυτό το σημείο θα αναφερθούμε σε έναν ακόμα τύπο στοχαστικής διαδικασίας, γνωστός ως διαδικασία Ito. Πρόκειται για μια γενικευμένη διαδικασία Wiener, με τη διαφορά όμως ότι οι παράμετροι α και b δεν είναι σταθερές, αλλά εξαρτώνται τόσο από την τρέχουσα τιμή της μεταβλητής x όσο και από το χρόνο t. Αλγεβρικά, η διαδικασία Ito αποδίδεται ως [3], [13], [24]:

$$dx = \alpha(x,t)dt + b(x,t)dw, \qquad \text{όπου}$$

η παράμετρος $\boldsymbol{\alpha(x,t)}$ εκφράζει τον μέσο ρυθμό απόκλισης της μεταβλητής ανά μονάδα χρόνου, η παράμετρος $\boldsymbol{b(x,t)}$ είναι ο ρυθμός διακύμανσης ανά μονάδα χρόνου και το $\boldsymbol{dw}$ αφορά το στοχαστικό στοιχείο μιας διαδικασίας Wiener, η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και διακύμανση ίση με dt.

Κατά τη διάρκεια ενός μικρού χρονικού διαστήματος μεταξύ t και $t + \Delta t$, έχουμε αλλαγή της μεταβλητής x σε $x + \Delta x$, δηλαδή η τιμή της x μεταβάλλεται κατά:

$$\Delta x = \alpha(x,t)\Delta t + b(x,t)\epsilon\sqrt{\Delta t}, \qquad \text{όπου}$$

Ο όρος $\boldsymbol{\alpha(x,t)\Delta t}$ είναι το ντετερμινιστικό μέρος που αντιστοιχεί στη μέση μεταβολή (drift rate) και ο όρος $\boldsymbol{b(x,t)\epsilon\sqrt{\Delta t}}$ εισάγει τη στοχαστική μεταβλητότητα. Θα υποθέσουμε ότι ο ρυθμός απόκλισης $\alpha(x,t)$ και ο ρυθμός διακύμανσης $b(x,t)$ της στοχαστικής μεταβλητής x παραμένουν σταθεροί κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος μεταξύ t και $t + \Delta t$. Δηλαδή, οι τιμές των α, b δεν αλλάζουν σε αυτό το μικρό διάστημα. Επίσης, αξίζει να επισημάνουμε ότι η κίνηση Ito είναι Μαρκοβιανή, καθώς η μεταβολή της μεταβλητής x σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμής της x τη στιγμή t και όχι από το ιστορικό των τιμών της.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2η : Η περιγραφή της κίνησης των τιμών των μετοχών

3.2.1 Η κίνηση των τιμών των μετοχών

Η ανάλυση της πορείας των τιμών των μετοχών αποτελεί δύσκολο έργο για τους επενδυτές, καθώς οι τιμές δεν ακολουθούν ένα σταθερό ρυθμό ανόδου ή καθόδου μακροπρόθεσμα, γεγονός που συχνά οδηγεί σε αστάθεια εξαιτίας της αβεβαιότητας που χαρακτηρίζει τις χρηματοπιστωτικές αγορές. Επίσης, οι επενδυτές αποφεύγουν να βασίζονται αποκλειστικά στα ιστορικά δεδομένα[25] για

[25] Οι γεωπολιτικές εξελίξεις, τεχνολογικές καινοτομίες ή απρόβλεπτα οικονομικά σοκ είναι παράγοντες οι οποίοι δεν καταγράφονται πάντοτε στο ιστορικό δείγμα.

να προβλέψουν την κίνηση των τιμών, καθώς αυτά αντικατοπτρίζουν τη συμπεριφορά της αγοράς στο παρελθόν και δεν εγγυώνται ότι οι ίδιες συνθήκες θα εμφανιστούν ξανά στο μέλλον [13].

Προηγουμένως αναφέραμε ότι η γενικευμένη διαδικασία Wiener έχει σταθερό αναμενόμενο ρυθμό απόκλισης α (drift rate) και σταθερό ρυθμό διακύμανσης b^2. Η υπόθεση αυτή, ότι το drift rate είναι σταθερό σε απόλυτους όρους, πρακτικά σημαίνει ότι οι μετοχές θα έχουν την ίδια προσδοκώμενη μεταβολή ανεξάρτητα από την τιμή τους και διαφορετικό ποσοστό απόδοσης. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε δύο μετοχές αξίας 20 και 50 ευρώ αντίστοιχα. Αν το drift είναι σταθερό στα 5€ ανά έτος, τότε και οι δύο μετοχές αναμένεται να έχουν αύξηση κατά 5€ ανεξαρτήτως της τιμής τους. Δηλαδή:

- η μετοχή των 20€ θα αυξηθεί στα 25€
- η μετοχή των 50€ θα αυξηθεί στα 55€

Το ποσοστό απόδοσης που θα αποκομίσουν από τις παραπάνω είναι:

- η αύξηση κατά 5€ στη μετοχή των 20€ αντιστοιχεί στο ποσοστό $\frac{5}{20} = 25\%$
- η αύξηση κατά 5€ στη μετοχή των 50€ αντιστοιχεί στο ποσοστό $\frac{5}{50} = 10\%$.

Παρατηρούμε ότι αν το drift είναι σταθερό σε απόλυτες τιμές (5€), τότε μια σχετικά φθηνή μετοχή των 20€ παρουσιάζει ποσοστιαία μεγαλύτερη αύξηση από μια ακριβότερη μετοχή των 50€. Αυτό δεν συνάδει με το στόχο των επενδυτών, οι οποίοι θέλουν οι αποδόσεις να είναι αναλογικές σε σχέση με το κεφάλαιο που επενδύουν. Στην πραγματικότητα, οι επενδυτές απαιτούν το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης να είναι ανεξάρτητο από την τιμή της μετοχής. Για παράδειγμα, ένας επενδυτής που επιθυμεί αναμενόμενη απόδοση 10% ετησίως, θέλει να πετύχει αυτό το ποσοστό ανεξάρτητα από το αν η αξία της μετοχής είναι 20€ ή 50€.

Καταλήγουμε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι αυτό το μοντέλο δεν ανταποκρίνεται πλήρως στις απαιτήσεις των επενδυτών, οι οποίοι επιθυμούν μια σταθερή ποσοστιαία απόδοση αντί για μια σταθερή απόλυτη μεταβολή της τιμής, αφού οι μετοχές διαφορετικής αξίας έχουν και διαφορετικές προσδοκίες κερδοφορίας.

Ας εστιάσουμε, όμως, σε μια διαφορετική προσέγγιση η οποία περιγράφει τη στοχαστική διαδικασία για την τιμή μιας μετοχής χωρίς μερίσματα. Αντί να ορίσουμε έναν σταθερό (σε απόλυτες τιμές) ρυθμό ολίσθησης α, ορίζουμε τον ρυθμό ολίσθησης[26] ως ποσοστό της τρέχουσας τιμής της μετοχής. Σύμφωνα με αυτή τη προσέγγιση, αν η τιμή της μετοχής είναι S τη στιγμή t, τότε ο ρυθμός ολίσθησης δίνεται από: $\alpha = \mu S$, όπου μ μια σταθερή παράμετρος. Η παραδοχή που έχουμε κάνει είναι ότι το μοντέλο περιγράφει τη μεταβολή της τιμής της μετοχής με βάση έναν σταθερό ποσοστιαίο ρυθμό απόδοσης μ, που είναι

[26] Η αναμενόμενη απόδοση είναι σταθερή ως ποσοστό της τιμής της μετοχής.

ανάλογος της τρέχουσας τιμής της μετοχής. Έτσι, σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt, η εξίσωση που περιγράφει τη μεταβολή στην τιμή της μετοχής εκφράζεται ως:

$$\Delta S = \mu S \Delta t, \qquad \text{όπου}$$

μ είναι η αναμενόμενη ποσοστιαία απόδοση (ή μέσος ρυθμός απόδοσης) της μετοχής (expected rate of return) εκφρασμένος σε δεκαδική μορφή και S είναι η τρέχουσα τιμή της μετοχής.

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί τον ντετερμινιστικό όρο του μοντέλου, όταν δεν υπάρχει αβεβαιότητα, δηλαδή ο συντελεστής του όρου dw είναι μηδέν. Για ένα απειροελάχιστο χρονικό διάστημα Δt (δηλαδή πηγαίνει στο όριο 0), η μεταβολή ΔS μετατρέπεται στη διαφορική της μορφή $dS = \mu S dt$. Διαιρούμε με S και παίρνουμε [13]:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

Ερμηνεύεται ως η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της μετοχής $\frac{dS}{S}$ σε ένα απειροελάχιστο χρονικό διάστημα dt που είναι ίση με τον αναμενόμενο ρυθμό απόδοσης μ.

Ολοκληρώνοντας σε $[0, T]$, έχουμε:

$$\int_{S_0}^{S_T} \frac{1}{S} dS = \int_0^T \mu dt \;\; => \;\; lnS_T - lnS_0 = \mu T \quad \text{ή} \quad S_T = S_0 e^{\mu T}, \qquad \text{όπου}$$

Η εξίσωση $S_T = S_0 e^{\mu T}$ υποδεικνύει ότι, όταν απουσιάζει ο παράγοντας της αβεβαιότητας, η τιμή της μετοχής αυξάνεται εκθετικά με ρυθμό μ, δηλαδή με συνεχή ανατοκισμό.

Στην πράξη, υπάρχει αβεβαιότητα, και η τιμή της μετοχής δεν είναι απόλυτα προβλέψιμη. Στο μοντέλο ο στοχαστικός όρος αντιπροσωπεύει το τυχαίο στοιχείο στις μεταβολές της τιμής της μετοχής. Η παραδοχή που κάνουμε είναι ότι η μεταβλητότητα της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής $\frac{dS}{S}$ κατά τη διάρκεια ενός μικρού χρονικού διαστήματος Δt παραμένει αμετάβλητη, ανεξάρτητα από την τιμή της μετοχής. Δηλαδή, είτε η τιμή της μετοχής είναι 20€ είτε 50€, ο επενδυτής θα είναι το ίδιο αβέβαιος σχετικά με την ποσοστιαία απόδοση της τιμής $\frac{dS}{S}$. Αυτό υποδηλώνει ότι η τυπική απόκλιση της μεταβολής σε αυτό το διάστημα Δt είναι ανάλογη της τιμής της μετοχής. Έτσι, έχουμε ότι [2], [3], [13]:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw$$

ή αλλιώς

$$\boldsymbol{\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dw} \qquad (3.1)$$

όπου μ είναι ο αναμενόμενος ρυθμός απόδοσης της μετοχής (expected rate of return) και σ η μεταβλητότητα (volatility) της τιμής της μετοχής. Επίσης, υποθέτουμε ότι μ, σ είναι σταθερά.

Η εξίσωση (3.1) αποτελεί το πιο γνωστό μοντέλο που χρησιμοποιείται ευρέως για να περιγράψει την συμπεριφορά της τιμής των μετοχών. Το μοντέλο αυτό είναι γνωστό ως *Γεωμετρική κίνηση Brown*.

Το μοντέλο σε διακριτό χρόνο

Σε διακριτό χρόνο με χρονικό διάστημα Δt, το μοντέλο γίνεται:

$$\Delta S = \mu\, S\, \Delta t + \sigma\, S\, \epsilon\, \sqrt{\Delta t}$$

ή αλλιώς

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \epsilon\, \sqrt{\Delta t}$$

Το αριστερό μέρος της παραπάνω εξίσωσης είναι η ποσοστιαία απόδοση της μετοχής σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt. Ο όρος $\mu \Delta t$ είναι η ντετερμινιστική συνιστώσα του μοντέλου και περιγράφει την αναμενόμενη ποσοστιαία απόδοση της μετοχής στο μικρό διάστημα Δt. Ο όρος $\sigma \epsilon\, \sqrt{\Delta t}$ είναι η στοχαστική συνιστώσα του μοντέλου και περιγράφει την τυχαία διακύμανση της ποσοστιαίας απόδοσης της μετοχής λόγω αβεβαιότητας. Θυμίζουμε ότι ϵ είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$. Επίσης, υποθέτουμε ότι μ, σ είναι σταθερά.

Για ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt, η ποσοστιαία απόδοση της μετοχής ($\frac{\Delta S}{S}$) ακολουθεί την κανονική κατανομή με:

Μέση τιμή	$mean\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \mu\, \Delta t$
Τυπική απόκλιση	$std\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \sigma\, \sqrt{\Delta t}$
Διακύμανση	$variance\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \sigma^2 \Delta t$

Για μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα μήκους T, η ποσοστιαία απόδοση της μετοχής ($\frac{\Delta S}{S}$) ακολουθεί την κανονική κατανομή με:

Μέση τιμή	$mean\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \mu\, T$
Τυπική απόκλιση	$std\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \sigma\, \sqrt{T}$
Διακύμανση	$variance\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \sigma^2\, T$

Παράδειγμα

Έστω μια μη μερισματική μετοχή η οποία δίνει μια αναμενόμενη απόδοση 10% ετησίως με συνεχή ανατοκισμό και έχει μεταβλητότητα 25% ετησίως. Δηλαδή, $\mu = 10\%$ και $\sigma = 0.25$. Η κίνηση της τιμής της μετοχής περιγράφεται από:

$$\frac{dS}{S} = 0.1dt + 0.25dw$$

Αν σε ένα χρονικό διάστημα $\Delta t = 1\ \mu \acute{\eta} \nu \alpha \varsigma \approx 0{,}082\ \tau o \upsilon\ \chi \rho \acute{o} \nu o \upsilon$, η τιμή της μετοχής είναι 100€ και $\epsilon = 0.8$, τότε το μοντέλο είναι: $\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}$. Άρα έχουμε:

$$\frac{\Delta S}{100} = 0.1 * 0.082 + 0.25 * 0.8 * \sqrt{0{,}082} \ => \Delta S = 0.82 + 5{,}73 => \Delta S = 6.55$$

Η νέα τιμή της μετοχής είναι $S_{\nu \acute{\epsilon} \alpha} = S + \Delta S = 100 + 6.55 = 106.55$€.

Περιγραφή παραμέτρων

Σε αυτήν την ενότητα αναλύσαμε την κίνηση της τιμής μιας μη μερισματικής μετοχής και αναφερθήκαμε σε δύο παραμέτρους μ και σ. Η παράμετρος μ εκφράζει τον αναμενόμενο ρυθμό απόδοσης (σε ετήσια βάση) που μπορεί να αποκομίσει ένας επενδυτής σε ένα μικρό χρονικό διάστημα. Συνήθως, οι επενδυτές τείνουν να ζητούν υψηλότερες αποδόσεις ως αντάλλαγμα για την ανάληψη μεγαλύτερου ρίσκου. Η τιμή της παραμέτρου μ επηρεάζεται από το επίπεδο του συστηματικού[27] ρίσκου, καθώς και από τα επιτόκια της αγοράς. Όσο μεγαλύτερο είναι το επίπεδο των επιτοκίων, τόσο μεγαλύτερη απόδοση θα απαιτούν οι επενδυτές. Σε έναν risk-neutral[28] κόσμο, η αναμενόμενη απόδοση μ ισούται με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Ωστόσο, κατά την αποτίμηση παραγώγων, ο προσδιορισμός της μ δεν είναι καθοριστικής σημασίας, αφού τα παράγωγα εξαρτώνται περισσότερο από την μεταβλητότητα της μετοχής και λιγότερο από την αναμενόμενη απόδοση.

Η παράμετρος σ αναφέρεται στη μεταβλητότητα (volatility) της τιμής της μετοχής, είναι δηλαδή το μέτρο του κινδύνου ή της αβεβαιότητας σχετικά με τις μελλοντικές τιμές της μετοχής. Η σ^2 είναι ο ρυθμός διακύμανσης (variance rate) και εκφράζει την ένταση της αβεβαιότητας στη μεταβολή της τιμής. Οι υψηλές τιμές της σ δείχνουν ότι η τιμή της μετοχής είναι πιο ασταθής και ενδέχεται να παρουσιάσει μεγάλες διακυμάνσεις σε μικρά χρονικά διαστήματα. Η μεταβλητότητα σ διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην αποτίμηση παραγώγων. Ενδεικτικά, οι τιμές της σ κυμαίνονται στο εύρος $[0.15 - 0{,}6]$ (15% έως 60%), αντικατοπτρίζοντας τη διακύμανση των αποδόσεων για διάφορους τύπους μετοχών.

[27] Το ρίσκο που δεν μπορεί να εξαλειφθεί μέσω διαφοροποίησης χαρτοφυλακίου του επενδυτή.

[28] Ένας κόσμος ουδέτερος προς τον κίνδυνο είναι μια υποθετική κατάσταση στην οποία οι επενδυτές είναι αδιάφοροι ως προς τον κίνδυνο. Δεν απαιτούν επιπλέον απόδοση για να αναλάβουν κίνδυνο, αλλά απαιτούν μόνο το risk free rate (επιτόκιο χωρίς κίνδυνο).

3.2.2 Λήμμα Ito

Ο Kiyosι Ito (1915-2008) υπήρξε ένας από τους κορυφαίους Ιάπωνες μαθηματικούς του $20^{ου}$ αιώνα. Η κυριότερη συνεισφορά του αφορά τον τομέα των πιθανοτήτων και της στοχαστικής ανάλυσης, αναπτύσσοντας το περίφημο Λήμμα του Ito και τη στοχαστική ολοκλήρωση. Το λήμμα του Ito αποτελεί θεμελιώδες εργαλείο στη στοχαστική ανάλυση, το οποίο συχνά εφαρμόζεται για τη μελέτη των παραγώγων, αφού συνδέει τη στοχαστική φύση του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου με την αποτίμηση αυτών των προϊόντων. Τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα εξαρτώνται από την αξία ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου (π.χ. μιας μετοχής). Η εξέλιξη των τιμών αυτών των περιουσιακών στοιχείων συχνά ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία.

Προηγουμένως, μιλήσαμε για τη διαδικασία Ito και είδαμε ότι πρόκειται για έναν τύπο στοχαστικής διαδικασίας που περιγράφεται ως εξής [3], [13], [24]:

$$dx = \alpha(x,t)dt + b(x,t)dw, \qquad \text{όπου}$$

α, b είναι παράμετροι που εξαρτώνται από την τιμή της μεταβλητής x και το χρόνο t και $\mathrm{d}w$ ο στοχαστικός όρος που ακολουθεί τη βασική διαδικασία Wiener (ή τη γεωμετρική κίνηση Brown) με μηδενική μέση τιμή και διακύμανση ίση με dt. Συνεπώς, παρατηρούμε ότι η μεταβλητή x έχει ρυθμό απόκλισης α και ρυθμό διακύμανσης b^2.

Το λήμμα Ito είναι βασικό εργαλείο στη στοχαστική ανάλυση, γιατί γενικεύει τον κανόνα της αλυσίδας για στοχαστικές διαδικασίες. Έτσι, μπορούμε πλέον να αναλύσουμε πώς μια συνάρτηση, που εξαρτάται από μια στοχαστική διαδικασία και το χρόνο, εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου. Έστω μια συνάρτηση $G(x,t)$, η οποία εξαρτάται από τη στοχαστική διαδικασία Ito $x(t)$ και τον χρόνο t. Μπορούμε να υπολογίσουμε τη στοχαστική μεταβολή της $G(x,t)$ βάσει του λήμματος Ito. Ο μαθηματικός τύπος για το λήμμα του Ito δίνεται από [3], [13], [24]:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\,\alpha(x,t) \;+\; \frac{\partial G}{\partial t} \;+\; \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\,b^2(x,t)\right)dt \;+\; \frac{\partial G}{\partial x}\,b(x,t)dw$$

ή πιο απλά

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\,\alpha \;+\; \frac{\partial G}{\partial t} \;+\; \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\,b^2\right)dt \;+\; \frac{\partial G}{\partial x}\,bdw \qquad (3.2)$$

Η εξίσωση (3.2) περιγράφει πώς η μεταβλητή $G(x,t)$, που εξαρτάται από το x και το t, εξελίσσεται μέσα στο χρόνο dt όταν η x ακολουθεί τη στοχαστική διαδικασία Ito. Αναλυτικά,

- ο όρος $\frac{\partial G}{\partial x}\,\alpha(x,t)dt$ δείχνει πώς η μεταβολή της G εξαρτάται από τον ρυθμό απόκλισης $\alpha(x,t)$ και περιγράφει πώς η μέση μεταβολή της x επηρεάζει την εξέλιξη της G.

- ο όρος $\frac{\partial G}{\partial t}dt$ εκφράζει την επίδραση του χρόνου στη συνάρτηση G και περιγράφει πώς μεταβάλλεται η G από το χρόνο, ανεξάρτητα από τη διαδικασία της x.
- ο όρος[29] $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2(x,t)dt$ εκφράζει τη διόρθωση που προκαλεί η στοχαστική φύση του x στην εξέλιξη της G, όταν η G δεν είναι γραμμική ως προς x, εξαιτίας του τυχαίου θορύβου dw.
- Ο όρος $\frac{\partial G}{\partial x}b(x,t)dw$ εκφράζει την τυχαία μεταβολή της G που προέρχεται από το στοχαστικό μέρος της διαδικασίας.

Άρα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση G ακολουθεί μια διαδικασία Ito και παρουσιάζει:

$$\text{ρυθμός ολίσθησης} = \frac{\partial G}{\partial x}\,\alpha + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2$$

$$\text{ρυθμός διακύμανσης} = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 b^2$$

Το λήμμα του Ito είναι ιδιαίτερα σημαντικό στη χρηματοοικονομική ανάλυση, καθώς εφαρμόζεται για τη αποτίμηση των παραγώγων. Στην περίπτωση μιας στοχαστικής διαδικασίας (γεωμετρική κίνηση Brown) που περιγράφει την κίνηση της τιμής μιας μετοχής S σε χρόνο t, είδαμε ότι το μοντέλο που περιγράφει τη συμπεριφορά της τιμής των μετοχών δίνεται από:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw, \qquad \textit{όπου } \mu, \sigma \textit{ σταθερά}$$

Το λήμμα του Ito (στη γενική του εξίσωση) για μια συνάρτηση $G(S,t)$ είναι:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial t}\,dt + \frac{\partial G}{\partial S}\,dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}(dS)^2$$

Αναπτύσσουμε το τετράγωνο[30] στο $dS = \mu S dt + \sigma S dw$ και λαμβάνουμε ότι $(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt$.

Αντικαθιστούμε το dS και το $(dS)^2$ στη γενική εξίσωση του λήμματος Ito

[29] Με βάση το ανάπτυγμα Taylor, ο τρίτος όρος προκύπτει λόγω της στοχαστικής φύσης του dw. Η δεύτερη παράγωγος δείχνει την καμπυλότητα της G. Αν η G είναι γραμμική, τότε $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0$. Αν η G δεν είναι γραμμική, τότε $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \neq 0$ και το $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ μας δείχνει πόσο απότομα αλλάζει η κλίση της G σε σχέση με το x.

[30] $(dS)^2 = (\mu S dt + \sigma S dw)^2 <=> (dS)^2 = \mu^2 (dt)^2 S^2 + 2\mu\, \sigma\, S^2\, dt\, dw + \sigma^2 S^2 (dw)^2 = \sigma^2 S^2 (dw)^2 = \sigma^2 S^2 dt$

- $(dt)^2 \approx 0$, επειδή το dt είναι πολύ μικρό (2ης τάξης) το θεωρούμε αμελητέο
- $(dw)^2 = dt$ από την ιδιότητα της Wiener
- $dt * dw \approx 0$, επειδή το dt είναι πολύ μικρό το θεωρούμε αμελητέο

$$dG = \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{\partial G}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dw) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt$$

Απλοποιώντας, παίρνουμε

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\,\mu\, S \;+\; \frac{\partial G}{\partial t} \;+\; \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt \;+\; \frac{\partial G}{\partial S}\,\sigma\, S\, dw$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το λήμμα Ito για μια συνάρτηση $G(S,t)$ καταλήγουμε στην εξίσωση

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\,\mu\, S \;+\; \frac{\partial G}{\partial t} \;+\; \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt \;+\; \frac{\partial G}{\partial S}\,\sigma\, S\, dw$$

Το λήμμα Ito είναι το εργαλείο που επιτρέπει τη μετάβαση από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση της S στη στοχαστική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την $G(S,t)$. Ουσιαστικά, με την πάροδο του χρόνου, η μεταβολή της G επηρεάζεται με δύο τρόπους: άμεσα λόγω της εξάρτησης από τον χρόνο t και έμμεσα λόγω της εξάρτησης από την τιμή της S. Τέλος, παρατηρούμε ότι η S και η $G(S,t)$ υπόκεινται στην ίδια πηγή αβεβαιότητας, δηλαδή το στοχαστικό όρο dw. Πιο απλά, η διαδικασία Wiener dw που βρίσκεται στη βάση της στοχαστικής διαδικασίας είναι ακριβώς η ίδια με τη διαδικασία Wiener της συνάρτησης.

3.2.3 Η Λογαριθμική Ιδιότητα

Θα θεωρήσουμε ότι η τιμή της μετοχής S ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown, δηλαδή $dS = \mu S dt + \sigma S dw$, όπου μ είναι ο αναμενόμενος ρυθμός απόδοσης της μετοχής, σ η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής και dw το στοχαστικό στοιχείο της διαδικασίας Wiener (μ, σ είναι σταθερά). **Ορίζουμε $\boldsymbol{G = lnS}$.** Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα Ito για να περιγράψουμε τη στοχαστική διαδικασία που ακολουθεί ο φυσικός λογάριθμος lnS, όταν η S ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown. Το λήμμα του Ito για μια συνάρτηση $G(S,t)$ είναι:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial t}\,dt + \frac{\partial G}{\partial S}\,dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}(dS)^2$$

Αφού έχουμε ορίσει την $G = lnS$, θα υπολογίσουμε τις παραγώγους[31] και θα προκύψει:

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{\partial (lnS)}{\partial S} = \frac{1}{S}\,, \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{1}{S}\right) = \frac{\partial}{\partial S}(S^{-1}) = -S^{-2} = -\frac{1}{S^2}\,, \qquad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

[31] Ο κανόνας για την παράγωγο

- Του λογαρίθμου είναι $\frac{d}{dx}(lnx) = \frac{1}{x}$
- Της δύναμης είναι $\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$

Για να βρούμε την 2η παράγωγο, θα παράγουμε τη σχέση της 1ης, δηλαδή $\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}$

$$dG = \frac{\partial G}{\partial S}\, dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}(dS)^2$$

Αντικαθιστούμε το dS και το $(dS)^2$ και έχουμε:

$$dG = \frac{1}{S}(\mu\, S\, dt + \sigma\, S\, dw) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S^2}\right)\sigma^2 S^2 dt$$

Απλοποιώντας θα προκύψει [24]:

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dw \qquad (3.3)$$

Η εξίσωση (3.3) εκφράζει τη στοχαστική διαδικασία που ακολουθεί η $G = lnS$. Στην περίπτωση που οι παράμετροι μ, σ είναι σταθερές, τότε παρατηρούμε ότι η $G = lnS$ ακολουθεί τη γενικευμένη διαδικασία Wiener και έχει

- σταθερό ρυθμό ολίσθησης (drift rate) $= \mu - \frac{\sigma^2}{2}$
- σταθερό ρυθμό διακύμανσης (variance rate) $= \sigma^2$

Ας σκεφτούμε, τώρα, τη μεταβολή της $G = lnS$ κατά τη διάρκεια μιας σχετικά μεγάλης χρονικής περιόδου T, η οποία αναπαρίσταται ως $G(T) - G(0)$ ή ισοδύναμα $lnS_T - lnS_0$. Από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση (1.6), προκύπτει ότι $d(lnS) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dw$. Ολοκληρώνοντας τη διαδικασία $G = lnS$ από $t = 0$ έως $t = T$, έχουμε :

$$lnS_T - lnS_0 = \int_0^T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \int_0^T \sigma dw$$

Στον ντετερμινιστικό όρο $\int_0^T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt$ ο συντελεστής $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ είναι σταθερός, οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται: $\int_0^T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\int_0^T 1\, dt = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T$.

Στον στοχαστικό όρο $\int_0^T \sigma dw$, το σ είναι σταθερό και το dw αφορά μια στοχαστική μεταβλητή που ακολουθεί τη βασική διαδικασία Wiener με μηδενική μέση τιμή και διακύμανση ίση με dt. Γνωρίζουμε ότι η αναμενόμενη[32] τιμή $E\left[\int_0^T dw\right] = 0$ και ότι η διακύμανση είναι $Var\left[\int_0^T dw\right] = T$. Άρα, επειδή η στοχαστική ολοκλήρωση της διαδικασίας Wiener $\int_0^T dw$ είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή *0* και διακύμανση *T*, ισχύει ότι $\int_0^T \sigma dw \sim N\,(0, \sigma^2 T)$. Έτσι, προκύπτει:

$$lnS_T - lnS_0 \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T,\ \sigma^2 T\right)$$

---

[32]Ισχύει ότι $E[dw] = 0$ για κάθε χρονική στιγμή t. Άρα, $E\left[\int_0^T dw\right] = \int_0^T E[dw] = \int_0^T 0\, dt = 0.$

ή ισοδύναμα

$$lnS_T \sim N\left(lnS_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \qquad \sigma^2 T\right)$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η μεταβολή του φυσικού λογαρίθμου $lnS_T - lnS_0$ της μετοχής S σε χρόνο T ακολουθεί την κανονική κατανομή με:

Μέση τιμή	$mean(lnS_T - lnS_0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T$
Τυπική απόκλιση	$std(lnS_T - lnS_0) = \sigma\sqrt{T}$
Διακύμανση	$variance(lnS_T - lnS_0) = \sigma^2 T$

όπου S_0 είναι η τιμή της μετοχής τη στιγμή $t = 0$ και S_T είναι η τιμή της μετοχής τη στιγμή $t = T$.

Επομένως, η S_T ακολουθεί τη λογαριθμική[33] κανονική κατανομή ($S_T \sim Lognormal$), δηλαδή η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής τη χρονική στιγμή T περιγράφεται από τη λογαριθμοκανονική κατανομή.

Αξίζει να σημειωθεί, η αβεβαιότητα στην τιμή της μετοχής αυξάνεται με το χρόνο T, καθώς η διακύμανση είναι ανάλογη του T. Η τυπική απόκλιση, που μετράει πόσο διασκορπισμένες μπορεί να είναι οι πιθανές τιμές της μετοχής, ισούται με $\sigma\sqrt{T}$. Αυξάνεται, δηλαδή, με τη ρίζα του χρόνου.

Παράδειγμα

Έστω ότι έχουμε μια μετοχή με αρχική αξία 50€ με αναμενόμενη απόδοση 12% ανά έτος και μεταβλητότητα 25% ανά έτος. Ψάχνουμε να βρούμε σε ποιο εύρος τιμών θα βρίσκεται η τιμή της μετοχής σε 6 μήνες με 99% πιθανότητα.

Η κατανομή της lnS_T είναι κανονική. Άρα, $lnS_T \sim N\left(lnS_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T,\ \sigma^2 T\right)$. Τα δεδομένα μας είναι $lnS_0 = ln50 \approx 3.912$, $\mu = 0.12$, $\sigma = 0.25$ και $\mathrm{T} = 0.5$ ή $6\ \mu\acute{\eta}\nu\varepsilon\varsigma$.

Η μέση τιμή της lnS_T είναι:

$$mean(lnS_T) = lnS_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T = 3.912 + \left(0.12 - \frac{0.25^2}{2}\right)0.5 = 3.956$$

Η διακύμανση της lnS_T είναι:

$$Var(lnS_T) = \sigma^2 T = 0.25^2 * 0.5 = 0.03125$$

Η τυπική απόκλιση της lnS_T είναι:

[33]Η λογαριθμική κανονική κατανομή είναι η κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής της οποίας ο φυσικός λογάριθμος είναι κανονικά κατανεμημένος.

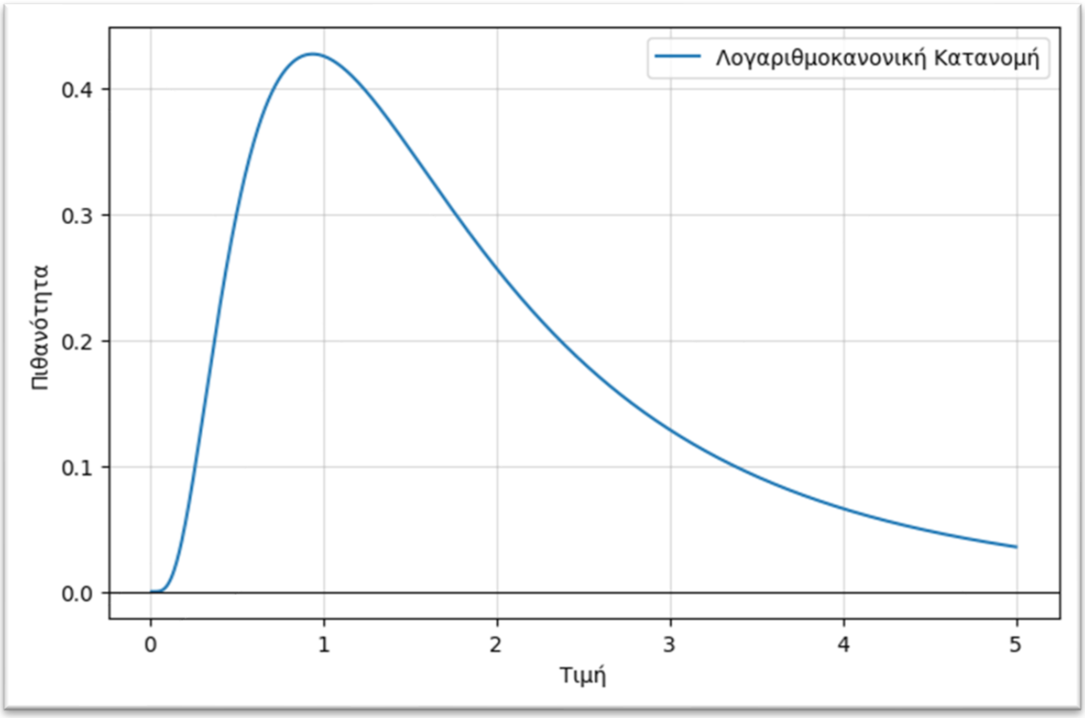
$$std(lnS_T) = \sqrt{Var(lnS_T)} = \sqrt{0.03125} = 0.1768$$

Άρα, $lnS_T \sim N(\, 3.956,\ 0{,}25^2)$

Το διάστημα εμπιστοσύνης 99% βασίζεται στο γεγονός ότι μια κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή βρίσκεται εντός $z = 2.576$ τυπικών αποκλίσεων από τη μέση τιμή. Το κάτω όριο της lnS_T είναι $L_S = mean(lnS_T) - 2.576 * std(lnS_T) = 3.501$. Το πάνω όριο της lnS_T είναι $U_S = mean(lnS_T) + 2.576 * std(lnS_T) = 4{,}412$.

Χρησιμοποιώντας την εκθετική συνάρτηση θα μετατρέψουμε[34] το lnS_T σε S_T και θα πάρουμε: $3.501 < lnS_T < 4{,}412 <=> e^{3.501} < S_T < e^{4.412}$. Κάνουμε τις πράξεις και έχουμε: $33.15 < S_T < 82.43$.

Το εύρος των τιμών για την τιμή της μετοχής μετά από 6 μήνες με 99% διάστημα εμπιστοσύνης θα είναι $[33.15,\ 82.43]$.



Σχήμα 7. Η Λογαριθμική κανονική κατανομή

Η εικόνα δείχνει την Λογαριθμοκανονική κατανομή, η οποία παρουσιάζει κάποιες ιδιότητες. Αρχικά, μια μεταβλητή με λογαριθμοκανονική κατανομή δεν μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές αλλά μόνο τιμές από το μηδέν έως το άπειρο. Επίσης, η κατανομή αυτή είναι ασύμμετρη (skewed), δηλαδή το μέσο (mean), η διάμεσος

[34] $lnS_T = x => S_T = e^x$

(median) και η επικρατούσα τιμή (mode) δεν συμπίπτουν[35]. Όπως φαίνεται και στην εικόνα, η κατανομή έχει μια ουρά προς τα δεξιά.

Η μέση τιμή $E(S_T)$ της μεταβλητής S_T που ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή δίνεται από [13], [24]:

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T}$$

και η διακύμανση $Var(S_T)$ της μεταβλητής S_T από [13], [24]:

$$Var(S_T) = S_0^2 e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1)$$

Παράδειγμα

Έστω ότι έχουμε μια μετοχή με αρχική αξία 50€ με αναμενόμενη απόδοση 12% ανά έτος και μεταβλητότητα 25% ανά έτος. Ψάχνουμε να βρούμε την αναμενόμενη τιμή και διακύμανση της μετοχής μετά από δύο χρόνια.

Τα δεδομένα μας είναι $\mu = 0.12$, $\sigma = 0.25$ και $\mathrm{T} = 2\ έτη$.

Η αναμενόμενη τιμή $E(S_T)$ της μετοχής δίνεται από $E(S_T) = S_0 e^{\mu T}$. Οπότε, θα πάρουμε $E(S_T) = 50e^{0.12*2} = 50\ e^{0.24} \approx 63.56$. Υπολογίζουμε ότι η αναμενόμενη τιμή της μετοχής ύστερα από 2 χρόνια θα είναι 63.56€.

Η διακύμανση $Var(S_T)$ της μετοχής S_T δίνεται από $Var(S_T) = S_0^2 e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1)$. Οπότε, θα πάρουμε $Var(S_T) = 50^2 e^{2*0{,}12*2}\left(e^{0{,}25^2*2} - 1\right) \approx 537.94$

Η τυπική απόκλιση της μετοχής S_T είναι $std(S_T) = \sqrt{Var(S_T)} = \sqrt{537.94} \approx 23.19$ και σημαίνει ότι η τιμή της μετοχής μετά από δύο έτη ενδέχεται να κυμαίνεται περίπου 23.19 πάνω ή κάτω από την αναμενόμενη τιμή 63.56€.

Συνοψίζοντας, η μετοχή είναι ελκυστική, αφού προσδοκάμε αύξηση από αρχική τιμή μετοχής 50€ σε αναμενόμενη τιμή μετοχής 63.56€. Ωστόσο, η υψηλή μεταβλητότητα σηματοδοτεί υψηλό ρίσκο, αφού η μετοχή είναι πιθανό να αποκλίνει σημαντικά από την αναμενόμενη τιμή.

ΕΝΟΤΗΤΑ 3η : Το μοντέλο των Black-Scholes-Merton

3.3.1 Οι υποθέσεις του μοντέλου

Στις αρχές της δεκαετίας του 1970 σημειώθηκε μία από τις πιο σημαντικές εξελίξεις στον τομέα της χρηματοοικονομικής θεωρίας και συγκεκριμένα στην αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης από τους Fischer Black, Myron Scholes και Robert Merton. Το 1973 δημοσίευσαν την έρευνά τους με τίτλο “ The Pricing of Options and Corporate Liabilities” η οποία έφερε στο προσκήνιο ένα μαθηματικό μοντέλο

[35] Στη λογαριθμοκανονική κατανομή ισχύει ότι $\mathrm{mode} < \mathrm{median} < \mathrm{mean}$.

για την τιμολόγηση ευρωπαϊκών παραγώγων. Το μοντέλο αυτό έγινε γνωστό ως μοντέλο των Black-Scholes-Merton και έκτοτε άσκησε τεράστια επίδραση στον τομέα της διαχείρισης κινδύνου και των στρατηγικών αντιστάθμισης. Μάλιστα, το 1997 αναγνωρίστηκε η σπουδαιότητα του μοντέλου με Βραβείο Νόμπελ στα Οικονομικά, το οποίο απονεμήθηκε στους Myron Scholes και Robert Merton. Ο Fischer Black αποβίωσε το 1995, γι' αυτό και δεν έλαβε το βραβείο [6], [13].

Η βασική ιδέα για να κατασκευαστεί η διαφορική εξίσωση ήταν να προσδιοριστεί η αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης χωρίς ρίσκο, δηλαδή να αντισταθμίζεται ένα δικαίωμα με αγορά ή πώληση του υποκείμενου τίτλου (π.χ. μετοχή), ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος. Γι' αυτό κατασκεύασαν ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από το δικαίωμα προαίρεσης (option) και ένα μερίδιο της υποκείμενης μετοχής, εξετάζοντας τη στιγμιαία μεταβολή της αξίας αυτού του χαρτοφυλακίου. Έτσι, τόσο το option όσο και η μετοχή εξαρτώνται από την ίδια πηγή αβεβαιότητας, την τυχαία μεταβολή της τιμής της μετοχής. Έκαναν την παραδοχή αυτό το χαρτοφυλάκιο να προσαρμόζεται με τρόπο που να εξουδετερώνει τον κίνδυνο. Δηλαδή, το χαρτοφυλάκιο αυτό να είναι ουδέτερο κινδύνου (risk-neutral), που σημαίνει ότι η συνολική του αξία να μην επηρεάζεται από τις τυχαίες μεταβολές της τιμής της μετοχής. Ωστόσο, αυτό το χαρτοφυλάκιο παραμένει ουδέτερο από κινδύνους μόνο για πολύ σύντομο χρονικό διάστημα, επειδή οι τιμές της μετοχής και του option αλλάζουν συνεχώς. Γι' αυτό απαιτείται συνεχής αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου, μια διαδικασία που ονομάζεται dynamic hedging. Επίσης, υπέθεσαν πως δεν υπάρχει ευκαιρία για arbitrage[36], το οποίο συνεπάγεται ότι η απόδοση του χαρτοφυλακίου ισούται με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (risk free rate).[37]

Οι υποθέσεις που χρησιμοποίησαν οι Black-Scholes-Merton για να εξάγουν τη διαφορική εξίσωση είναι οι εξής [4], [13]:

- Οι αγορές όπου ο υποκείμενος τίτλος και τα δικαιώματα διαπραγματεύονται είναι τέλειες, δηλαδή δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών και υπάρχει τέλεια πληροφόρηση. Επίσης, δεν υπάρχουν φόροι. Όλοι οι τίτλοι μπορούν να διαιρεθούν σε μικρότερα κομμάτια.
- Το δικαίωμα είναι ευρωπαϊκού τύπου.
- Η τιμή του υποκείμενου τίτλου S ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown $dS = \mu S dt + \sigma S dw$, με μ, σ σταθερά.
- Η μεταβλητότητα σ παραμένει σταθερή και οι αποδόσεις των τίτλων ακολουθούν την λογαριθμοκανονική κατανομή.
- Ο υποκείμενος τίτλος δεν καταβάλλει μέρισμα.
- Επιτρέπεται η ανοιχτή θέση πώλησης του υποκείμενου τίτλου (short selling).

[36] Το arbitrage αναφέρεται σε μια επενδυτική στρατηγική που κάποιος εξασφαλίζει (στιγμιαία) βέβαιο κέρδος χωρίς την ανάληψη κινδύνου. Πρόκειται για τη διαδικασία ταυτόχρονης αγοράς και πώλησης ενός περιουσιακού στοιχείου, κατά την οποία ο επενδυτής εκμεταλλεύεται την ανισορροπία της τιμής.

[37] Αν η απόδοση ήταν μεγαλύτερη ή μικρότερη από το risk free rate, τότε θα υπήρχαν ευκαιρίες arbitrage, κάτι που αντιβαίνει τη λογική του μοντέλου.

- Οι συναλλαγές των τίτλων γίνονται συνεχώς.
- Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r παραμένει σταθερό μέχρι τη λήξη του δικαιώματος.
- Δεν υφίστανται ευκαιρίες για βέβαιο κέρδος (arbitrage), αφού το ίδιο το μοντέλο καθορίζει την τιμή του δικαιώματος.

3.3.2 Η μερική διαφορική εξίσωση Black-Scholes-Merton

Θυμίζουμε ότι ο βασικός σκοπός του μοντέλου είναι η δημιουργία ενός risk-free χαρτοφυλακίου που αποτελείται από ένα πλήθος μετοχών και ένα κεφάλαιο που έχει επενδυθεί σε επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Το χαρτοφυλάκιο πρέπει να έχει την ίδια αξία με την τιμή ενός παράγωγου σε κάθε χρονική στιγμή. Ο λόγος που έχει σχεδιαστεί έτσι είναι για να αντισταθμίζει τον κίνδυνο από τις αλλαγές στην τιμή της μετοχής μέσω της συνεχούς αναπροσαρμογής.

Το μοντέλο θεωρεί ότι η κίνηση της τιμής της μετοχής περιγράφεται από την εξίσωση της γεωμετρικής κίνησης Brown, δηλαδή $dS = \mu S dt + \sigma S dw$. Επίσης, αν T είναι η ημερομηνία λήξης (maturity date), τότε το t αντιπροσωπεύει εκείνη τη χρονική στιγμή που βρίσκεται το παράγωγο (και όχι αποκλειστικά την στιγμή 0). Ο χρόνος που απομένει μέχρι τη λήξη είναι $T - t$.

Έστω ότι η τιμής ενός παράγωγου χρηματοοικονομικού προϊόντος h εξαρτάται από την τιμή της μετοχής S και το χρόνο t, δηλαδή $h = h(S, t)$. Κάνοντας χρήση του λήμματος Ito, βρίσκουμε τη μεταβολή του h [24]:

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial S}\mu S + \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial h}{\partial S}\sigma S\, dw$$

Για μικρό χρονικό διάστημα Δt, η κίνηση της τιμής δίνεται από τη διακριτή της μορφή $\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta w$ και η μεταβολή του παράγωγου δίνεται από:

$$\Delta h = \left(\frac{\partial h}{\partial S}\mu S + \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t + \frac{\partial h}{\partial S}\sigma S\, \Delta w$$

όπου $\Delta w = \epsilon\sqrt{\Delta t}$, δηλαδή τόσο το παράγωγο $h(S, t)$ όσο και η S υπόκεινται στην ίδια πηγή αβεβαιότητας.

Όπως είπαμε, η βασική ιδέα για την εξαγωγή της εξίσωσης Black-Scholes-Merton είναι η κατασκευή ενός risk-free χαρτοφυλακίου. Το χαρτοφυλάκιο αυτό αποτελείται από

- μια short θέση (πώληση) σέ ένα παράγωγο: $-\boldsymbol{h}$
- μια long θέση (αγορά) σε $\frac{\partial h}{\partial S}$ μετοχές: $+\boldsymbol{\frac{\partial h}{\partial S} S}$

Επομένως, αν A είναι η αξία του χαρτοφυλακίου, τότε

$$A = -h + \frac{\partial h}{\partial S} S$$

Για μικρό χρονικό διάστημα Δt, η μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου δίνεται από τη διακριτή της μορφή

$$\Delta A = -\Delta h + \frac{\partial h}{\partial S}\Delta S$$

Αντικαθιστώντας κατάλληλα τα Δh και ΔS παρατηρούμε ότι το στοχαστικό μέρος $\Delta w = \epsilon\sqrt{\Delta t}$ απαλείφεται. Αυτό σημαίνει ότι το χαρτοφυλάκιο για το μικρό διάστημα Δt είναι χωρίς ρίσκο. Προκύπτει,

$$\Delta A = \left(-\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t$$

Δεδομένου ότι το χαρτοφυλάκιο είναι ακίνδυνο στο διάστημα Δt, η απόδοσή του στιγμιαία πρέπει να ισούται με την απόδοση χρεογράφων μηδενικού κινδύνου r. Αυτό διασφαλίζει ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage. Στην περίπτωση που η απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι μεγαλύτερη από το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, τότε οι επενδυτές θα μπορούσαν να δανειστούν χρήματα για να αγοράσουν το χαρτοφυλάκιο και να εξασφαλίσουν βέβαιο κέρδος από τη διαφορά των αποδόσεων. Αν η απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι μικρότερη από το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, τότε οι επενδυτές θα μπορούσαν να πουλήσουν το χαρτοφυλάκιο και να επενδύσουν τα χρήματα σε χρεόγραφα μηδενικού κινδύνου, εξασφαλίζοντας και πάλι βέβαιο κέρδος.

Οπότε, ισχύει ότι

$$\Delta A = r\,A\,\Delta t$$

με r το επιτόκιο χωρίς ρίσκο (risk free rate). Αντικαθιστούμε καταλλήλως και έχουμε $\left(-\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(-h + \frac{\partial h}{\partial S}S\right)\Delta t$. Αναδιατάσσουμε τους όρους και καταλήγουμε στην μερική διαφορική εξίσωση των Black-Scholes-Merton

$$\frac{\partial h}{\partial t} + rS\frac{\partial h}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = r\,h \qquad (3.4)$$

Η μερική διαφορική εξίσωση των Black-Scholes-Merton έχει πολλές λύσεις, αλλά η πιο ορθή λύνεται εφαρμόζοντας κατάλληλες οριακές συνθήκες για την τιμή των παραγώγων. Πιο απλά, επειδή η εξίσωση αυτή είναι γενική, έχει πολλές διαφορετικές λύσεις και κάθε λύση αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό χρηματοοικονομικό παράγωγο. Οι οριακές συνθήκες καθορίζουν ποια συγκεκριμένη λύση ταιριάζει για ένα συγκεκριμένο παράγωγο.

Η οριακή συνθήκη για ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (call option) είναι η αξία του δικαιώματος στη λήξη να εξαρτάται από το αν η τιμή της μετοχής S είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης K

$$h = \max\,(S - K, 0)\,, \qquad όταν\; t = T$$

Η οριακή συνθήκη για ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης (put option) είναι η αξία του δικαιώματος στη λήξη να εξαρτάται από το αν η τιμή της μετοχής S είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης K

$$h = \max\,(K - S, 0)\,, \qquad όταν\; t = T$$

3.3.3 Η φόρμουλα των Black-Scholes-Merton

Η μερική διαφορική εξίσωση των Black-Scholes-Merton χρησιμοποιεί το υπόβαθρο της γεωμετρικής κίνησης Brown, προκειμένου να μοντελοποιήσουν τη συμπεριφορά της τιμής της μετοχής. Αυτό το μοντέλο παρέχει έναν θεωρητικά ακριβή τρόπο αποτίμησης των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης. Οι λύσεις αυτές που βασίστηκαν στη δημιουργία σχέσεων άμεσης επίλυσης (closed form solution) είναι ουσιαστικά οι τύποι για την τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και πώλησης.

Η πιο γνωστή επίλυση της εξίσωσης Black-Scholes-Merton για την τιμολόγηση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς (call option) δίνεται [4], [13]:

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

Χρησιμοποιώντας την αρχή της ισότητας των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης (put call parity)[38], λαμβάνουμε την εξίσωση για την τιμολόγηση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης (put option) [4], [13]:

$$P_t = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

Όπου: $\boldsymbol{C_t}$ είναι η τρέχουσα αξία ενός call option

$\boldsymbol{P_t}$ είναι η τρέχουσα αξία ενός put option

$\boldsymbol{S_t}$ είναι η τρέχουσα αξία του υποκείμενου τίτλου τη χρονική στιγμή t

$\boldsymbol{K}$ είναι η τιμής εξάσκησης του δικαιώματος

$\boldsymbol{r}$ είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (το μοντέλο υποθέτει έναν κόσμο ουδέτερο στον κίνδυνο με το επιτόκιο να ανατοκίζεται συνεχώς)

$(\boldsymbol{T - t})$ είναι ο χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος

[38]Η αρχή της ισότητας των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης (put call parity) είναι μια θεμελιώδη μαθηματική σχέση που συνδέει την τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς (call option) με την τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης (put option), όταν και τα δύο βασίζονται στο ίδιο υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο, έχουν ίδια τιμή εξάσκησης και ίδια λήξη. Δίνεται από $C - P = S_0 - Ke^{-r(T-t)}$. Βασίζεται στην ιδέα ότι δεν υπάρχει δυνατότητα arbitrage, επομένως η διαφορά της τιμής ενός call και ενός put option ισούται με την τρέχουσα αξία του υποκείμενου τίτλου μείον την παρούσα αξία της τιμής εξάσκησης.

$\boldsymbol{\sigma}$ είναι η μεταβλητότητα της τιμής του υποκείμενου τίτλου (το μοντέλο υποθέτει σταθερή μεταβλητότητα)

$\boldsymbol{N(x)}$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της κανονικής κατανομής. Δηλαδή το $\mathrm{N(x)}$ δίνει την πιθανότητα μια τυχαία μεταβλητή w που ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$, να είναι μικρότερη από x. Ισχύει ότι $N(-x) = 1 - N(x)$.

Ισχύει ότι: $\boldsymbol{d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}}$, με

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Παράδειγμα

Έστω ότι υπάρχει ένα δικαίωμα πώλησης στη μετοχή της εταιρείας “Η Αργώ. ΑΕ” με τον χρόνο που μεσολαβεί έως τη λήξη του να είναι 1 έτος και με τιμή εξάσκησης 96€. Η τιμή της μετοχής διαπραγματεύεται στο χρηματιστήριο Αθηνών στα 100€. Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου του χρεογράφου είναι 8% ετησίως και η τυπική απόκλιση των μετοχικών αποδόσεων της εταιρείας “Η Αργώ. ΑΕ” είναι 25% ετησίως. Ζητείται ο υπολογισμός της αξίας του δικαιώματος αγοράς και πώλησης.

Τα δεδομένα μας είναι ότι η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι $S_t = 100$, η τιμή εξάσκησης $K = 96$, $r = 0.08$ το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, ο χρόνος που απομένει μέχρι τη λήξη είναι $T - t = 1$ και η μεταβλητότητα είναι $\sigma = 0.25$. Αρχικά, θα βρούμε τα d_1, d_2.

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\ln\left(\frac{100}{96}\right) + \left(0.08 + \frac{0.25^2}{2}\right)1}{0.25\sqrt{1}} = 0.6082$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} <=> d_2 = 0.6082 - \ 0.25\sqrt{1} = 0.3582$$

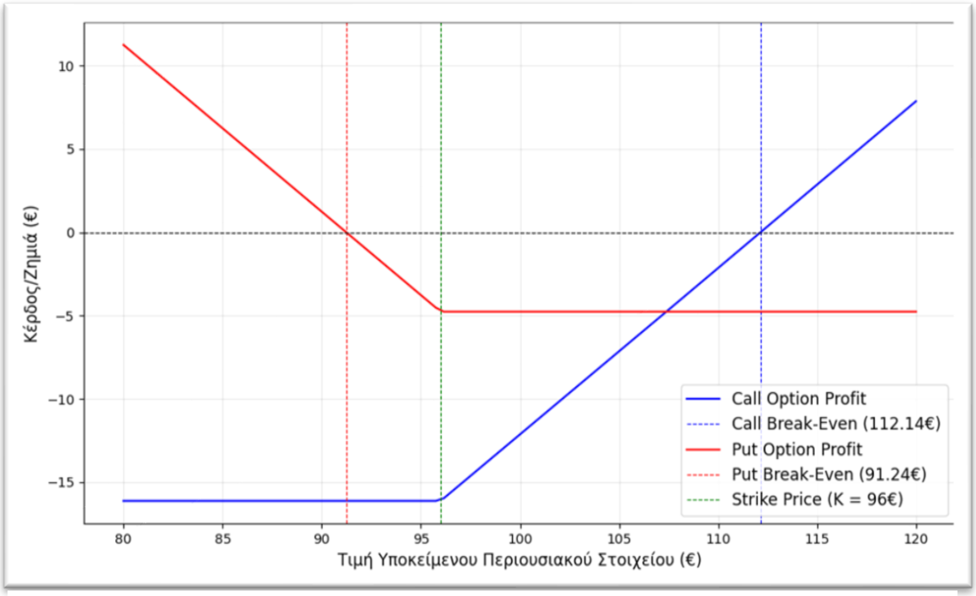
Με την βοήθεια ενός υπολογιστικού φύλλο excel, εισάγουμε τη συνάρτηση NORMSDIST και υπολογίζουμε τα $N(d_1), N(d_2)$. Προκύπτει $N(d_1) = 0.7284$ και $N(d_2) = 0.6399$. Ισχύει ότι $N(-x) = 1 - N(x)$. Άρα, βρίσκουμε ότι $N(-d_1) = 0{,}2715$ και $N(-d_2) = 0.3601$

Η αξία του call υπολογίζεται ως:

$$C = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) = 100 * 0.7284 - 96 * e^{-0.08*1} * 0.6399 \approx 16.14€$$

Η αξία του put υπολογίζεται ως:

$$P = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_tN(-d_1) = 96 * e^{-0.08*1} * 0.3601 - 100 * 0.2715 \approx 4.76€$$



Σχήμα 8. Κέρδος/Ζημία για τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης

Για να έχει κάποιος επενδυτής (αγοραστής) κέρδος με το call option, η τιμή της μετοχής πρέπει να αυξηθεί πάνω από την τιμή εξάσκησης συν το κόστος του call $(K + C)$. Στο παράδειγμα μας η τιμή της μετοχής πρέπει να είναι πάνω από 112.14€.

Για να έχει κάποιος επενδυτής (αγοραστής) κέρδος με το put option, η τιμή της μετοχής πρέπει να πέσει κάτω από την τιμή εξάσκησης μείον το κόστος του put $(K - C)$. Στο παράδειγμα μας η τιμή της μετοχής πρέπει να είναι κάτω από 91.24€.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο : ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗ ΔΕΛΤΑ

4.1 Συντελεστές ευαισθησίας (The Greeks)

Τα Greeks στις χρηματοοικονομικές αγορές αποτελούν εργαλεία αξιολόγησης του κινδύνου στις συναλλαγές των δικαιωμάτων προαίρεσης. Στην ουσία, είναι μέτρα κινδύνου και βοηθούν το επενδυτικό κοινό να κατανοήσει πώς οι διάφοροι παράγοντες, όπως η μεταβολή των τιμών των περιουσιακών στοιχείων, ο χρόνος μέχρι την εκπνοή του δικαιώματος και η μεταβλητότητα, επηρεάζουν την αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης. Παρακάτω, αναλύουμε τους σημαντικότερους συντελεστές ευαισθησίας [26].

- **Delta (Δέλτα)** μετρά την ευαισθησία της τιμής του option όταν αλλάζει η τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου.
- **Theta (Θήτα)** υπολογίζει τη μείωση της αξίας του option καθώς πλησιάζει η ημερομηνία της λήξης του.
- **Gamma (Γάμμα)** αποτυπώνει την ευαισθησία του Δέλτα όταν αλλάζει η τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου.
- **Vega (Βέγκα)** μετρά πόσο επηρεάζεται η αξία του option σε αλλαγές της μεταβλητότητας
- **Rho (Ρο)** μετρά την ευαισθησία της τιμής του option σε μεταβολές των επιτοκίων.

Στην παρούσα εργασία εμείς θα ασχοληθούμε με την ανάλυση και ερμηνεία του Δέλτα.

4.2 Η αντιστάθμιση Δέλτα (delta hedging)

Το Delta Hedging είναι μια στρατηγική διαχείρισης του κινδύνου που χρησιμοποιείται στις αγορές των παραγώγων, με κυριότερη εφαρμογή τα options, και στοχεύει στη μείωση ή εξουδετέρωση του κινδύνου από τις μεταβολές της τιμής ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου. Όπως αναφέραμε, <u>το delta ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι ένας δείκτης που υπολογίζει πόσο θα μεταβληθεί η τιμή ενός option, όταν η τιμή του υποκείμενου προϊόντος μεταβάλλεται κατά μία μονάδα</u>. Αποτελεί την κλίση της καμπύλής που περιγράφει τη σχέση μεταξύ τιμής δικαιώματος και του παράγωγου προϊόντος.

Ο βασικός σκοπός της τεχνικής του Delta Hedging είναι η δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου που ελαχιστοποιεί τον κίνδυνο από τις διακυμάνσεις της τιμής του option. Αυτό επιτυγχάνεται εξισορροπώντας τις πιθανές ζημιές/κέρδη που προκύπτουν από το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο με τις αντίστοιχες μεταβολές στην αξία του option. Ουσιαστικά, δημιουργείται μια ουδέτερη θέση Δέλτα (delta neutral), κατά την οποία η συνολική έκθεση στο υποκείμενο στοιχείο εξισορροπείται, περιορίζοντας έτσι την επίδραση των μεταβολών στην αγορά. Ωστόσο, πρέπει να τονίσουμε ότι η τιμή για το Δέλτα ενός option δεν παραμένει σταθερή, γεγονός που δείχνει ότι η θέση ενός επενδυτή έχει αντισταθμιστεί για ένα μικρό χρονικό διάστημα. Στην πραγματικότητα, αν ο επενδυτής επιδιώκει μια ουδέτερη θέση Δέλτα, τότε οφείλει να τροποποιεί συνεχώς τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου του, δηλαδή τον αριθμό των options και την ποσότητα του υποκείμενου προϊόντος που κατέχει.

Για δικαιώματα αγοράς το Δέλτα είναι ο ρυθμός μεταβολής της τιμής του call σε σχέση με την τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου και δένεται από [13]:

$$Δέλτα_{αγοράς} \text{ ή } Δ_{call} = \frac{\partial C_t}{\partial S}, \qquad όπου\ C_t\ η\ αξία\ του\ δικαιώματος\ αγοράς\ τη\ στιγμή\ t$$

Η τιμή του Δέλτα για ένα δικαίωμα αγοράς (call option) είναι θετική και κυμαίνεται μεταξύ $[0,1]$. Για παράδειγμα, αν το delta ενός δικαιώματος αγοράς είναι 0.2, αυτό πρακτικά σημαίνει ότι για κάθε 1€ αύξηση στην τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, η τιμή του δικαιώματος αγοράς θα αυξηθεί κατά 0.2€. Έστω, λοιπόν, ότι υπάρχει ένας επενδυτής (αγοραστής) που έχει στην κατοχή του αυτό το call option. Αν θέλει να αντισταθμίσει τον κίνδυνο και να κάνει hedge αυτή τη θέση, τότε πρέπει να πουλήσει (short) 0.2 μετοχές για κάθε call option που κατέχει. Στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής αυξηθεί[39] κατά μία μονάδα, η απώλεια από τη short θέση θα αντισταθμίσει το κέρδος από το call option. Το αντίθετο ισχύει στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής μειωθεί[40] κατά μία μονάδα.

Για δικαιώματα πώλησης το Δέλτα είναι ο ρυθμός μεταβολής της τιμής του put σε σχέση με την τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου και δίνεται από [13]:

$$Δέλτα_{πώλησης} \text{ ή } Δ_{put} = \frac{\partial P_t}{\partial S}, \quad όπου\ P_t\ η\ αξία\ του\ δικαιώματος\ αγοράς\ τη\ στιγμή\ t$$

Η τιμή του Δέλτα για ένα δικαίωμα πώλησης (put option) είναι αρνητική και κυμαίνεται μεταξύ $[-1,0]$. Για παράδειγμα, αν το delta ενός δικαιώματος πώλησης είναι -0.2, αυτό πρακτικά σημαίνει ότι για κάθε 1€ αύξηση στην τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, η τιμή του δικαιώματος πώλησης θα μειωθεί κατά 0.2€. Έστω, λοιπόν, ότι υπάρχει ένας επενδυτής (αγοραστής) που έχει στην κατοχή του αυτό το put option. Αν θέλει να αντισταθμίσει τον κίνδυνο και να κάνει hedge αυτή τη θέση, τότε πρέπει να αγοράσει (long) 0.2 μετοχές για κάθε put option που κατέχει. Στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής αυξηθεί[41] κατά μία μονάδα,

---

[39] Αν η τιμή της μετοχής αυξηθεί κατά 1 μονάδα, τότε η αξία του call option αυξάνεται κατά 0.2 μονάδες, η short θέση στη μετοχή θα έχει απώλεια 0.2 μονάδες (γιατί η τιμή της αυξήθηκε και ο επενδυτής την πούλησε). Συνολικά, η θέση παραμένει ουδέτερη.

[40] Αν η τιμή της μετοχής μειωθεί κατά 1 μονάδα, τότε η αξία του call option μειώνεται κατά 0.2 μονάδες, η short θέση στη μετοχή θα έχει κέρδος 0.2 μονάδες (γιατί η τιμή της μειώθηκε και ο επενδυτής την πούλησε ακριβότερα). Συνολικά, η θέση παραμένει ουδέτερη.

[41] Αν η τιμή της μετοχής αυξηθεί κατά 1 μονάδα, τότε η αξία του put option μειώνεται κατά 0.2 μονάδες, η long θέση στη μετοχή θα έχει κέρδος 0.2 μονάδες (γιατί η τιμή της αυξήθηκε και ο επενδυτής την αγόρασε φτηνά). Συνολικά, η θέση παραμένει ουδέτερη.

η απώλεια από το put option θα αντισταθμίσει το κέρδος από τη long θέση. Το αντίθετο ισχύει στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής μειωθεί[42] κατά μία μονάδα.

Ο δείκτης Δέλτα είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με το μοντέλο του Black-Scholes-Merton, καθώς εξάγεται μέσα από την εξίσωση τους. Συγκεκριμένα, για δικαιώματα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου πάνω σε υποκείμενους τίτλους που δεν δίνουν μέρισμα, ισχύει ότι [2,] [3], [7] :

$$Δέλτα_{αγοράς} \text{ ή } Δ_{call} = N(d_1)$$

Για δικαιώματα πώλησης ευρωπαϊκού τύπου πάνω σε υποκείμενους τίτλους που δεν δίνουν μέρισμα, ισχύει ότι [2,] [3], [7] :

$$Δέλτα_{πώλησης} \text{ ή } Δ_{put} = -N(-d_1) = N(d_1) - 1$$

[42] Αν η τιμή της μετοχής μειωθεί κατά 1 μονάδα, τότε η αξία του put option αυξάνεται κατά 0.2 μονάδες, η long θέση στη μετοχή θα έχει ζημία 0.2 μονάδες (γιατί η τιμή της μειώθηκε και ο επενδυτής την αγόρασε ακριβότερα). Συνολικά, η θέση παραμένει ουδέτερη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο : ΕΝΑ ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένα από τα αντικείμενα αυτής της εργασίας είναι η τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης με βάση τις υποθέσεις του μοντέλου Black-Scholes-Merton, αλλά και πώς εφαρμόζεται η αντιστάθμιση Δέλτα, προκειμένου ο επενδυτής αναπροσαρμόζοντας τη θέση του σε ένα υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο, να καταφέρει να μειώσει τον κίνδυνο από τις μεταβολές της αξίας του δικαιώματος προαίρεσης. Για να κατανοήσουμε καλύτερα την πρακτική εφαρμογή δυναμικής αντιστάθμισης Δέλτα, θα παρουσιάσουμε ένα απλό αριθμητικό παράδειγμα. Σκοπός του παραδείγματος είναι να αναδείξει τον τρόπο με τον οποίο το μοντέλο Black-Scholes-Merton μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά για τη διαχείριση κινδύνων και τη βελτιστοποίηση των αποδόσεων, δημιουργώντας ένα βιώσιμο και δυνητικά κερδοφόρο χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από μετοχές και δικαιώματα προαίρεσης.

5.1 Περιγραφή σεναρίου

Τα δεδομένα του προβλήματος είναι τα ακόλουθα: Θεωρούμε έναν επενδυτή που πουλάει 10 δικαιώματα αγοράς (short call) ευρωπαϊκού τύπου, ενώ παράλληλα για να αντισταθμίσει τη θέση του δανείζεται χρήματα και αγοράζει Δέλτα μετοχές. Κάθε δικαίωμα αντιστοιχεί σε 100 μετοχές. Καθώς η τιμή της μετοχής αλλάζει, το Δέλτα του δικαιώματος αγοράς μεταβάλλεται, επομένως ο επενδυτής πρέπει να αναπροσαρμόζει τη θέση του εβδομαδιαίως. Αυτό σημαίνει ότι αγοράζει ή πουλάει μετοχές για να διατηρεί τη σωστή ποσότητα Δέλτα που απαιτείται για την αντιστάθμιση κάθε φορά. Αναπροσαρμόζοντας, λοιπόν, κάθε φορά τη θέση του ο επενδυτής πουλάει τις μετοχές που είχε αγοράσει (για να αντισταθμίσει τον κίνδυνο), χρησιμοποιεί τα χρήματα από την πώληση των μετοχών για να ξεχρεώσει τον δανεισμό του (είχε δανειστεί χρήματα για να αγοράσει μετοχές) και τη χρονική στιγμή της λήξης υπολογίζει το συνολικό αποτέλεσμα $P\&L$ της στρατηγικής. Έτσι, τη χρονική στιγμή της λήξης που ο επενδυτής ρευστοποιεί τη μετοχική του θέση και εξοφλώντας το δανεισμό, μπορεί να υπολογίσει αν το σύνολο των συναλλαγών του είχε θετικό ή αρνητικό αποτέλεσμα. Αν με τη στρατηγική αυτή υπάρχει κέρδος, ο επενδυτής συνεχίζει με την ίδια μέθοδο. Εναλλακτικά, σε περίπτωση ζημίας, η στρατηγική μπορεί να τροποποιηθεί ή να εφαρμοστεί με διαφορετική συχνότητα αναπροσαρμογής, ώστε να μειωθεί το σφάλμα αντιστάθμισης. Υποθέτουμε ότι η αρχική τιμή της μετοχής είναι $S_0 = 950€$, η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος είναι $K = 1000€$ με λήξη σε έναν μήνα και σταθερή μεταβλητότητα $\sigma = 40\%$. Η μετοχή δεν καταβάλλει μερίσματα και το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι $r = 5\%$. Η αναπροσαρμογή γίνεται εβδομαδιαίως και τα κόστη συναλλαγής είναι μηδενικά.

Η αξία του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς δίνεται από την εξίσωση Black-Scholes-Merton

$$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

με $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

και $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

Ως είπαμε, στόχος του παραδείγματος είναι να παρουσιαστεί η εφαρμογή της δυναμικής αντιστάθμισης Δέλτα σε θέση πώλησης (short) ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς (call), με εβδομαδιαία αναπροσαρμογή (weekly rebalancing) βάσει του μοντέλου Black-Scholes-Merton.

<u>Κανόνας αναπροσαρμογής ανά εβδομάδα</u>: Πριν από κάθε συναλλαγή, το ταμειακό υπόλοιπο (cash account) κεφαλαιοποιείται ως εξής:

$$Cash_{t_{\kappa+1}} = Cash_{t_\kappa} * e^{r\delta} - Q(\Delta_{call_{t_{\kappa+1}}} - \Delta_{call_{t_\kappa}}) S_{t_{\kappa+1}}$$

όπου $\delta = \frac{1}{52}$ είναι το χρονικό βήμα (ανά εβδομάδα), $e^{r\delta}$ είναι ο παράγοντας συνεχούς ανατοκισμού για το χρονικό βήμα δ (ανά εβδομάδα) στο ετήσιο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r, $Q = 1000$ είναι οι συνολικές μονάδες μετοχών ανά 1 μονάδα Δέλτα option[43], $\Delta_{call_{t_\kappa}}$ είναι το Δέλτα του call (per share) στη χρονική στιγμή t_κ, ($\Delta_{call_{t_{\kappa+1}}} - \Delta_{call_{t_\kappa}}$) είναι η μεταβολή[44] του Δέλτα ανά option από τη χρονική στιγμή t_κ στη $t_{\kappa+1}$, και $S_{t_{\kappa+1}}$ είναι η τιμή της μετοχής τη στιγμή που γίνεται το re-hedge.

Συνοπτικά, ο όρος $Cash_{t_\kappa} * e^{r\delta}$ εκφράζει το ταμειακό υπόλοιπο στην αρχή της περιόδου κ, το οποίο τοκίζεται στο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου για το διάστημα $\delta = \frac{1}{52}$ (εβδομαδιαία αναπροσαρμογή).

Ο όρος $Q(\Delta_{call_{t_{\kappa+1}}} - \Delta_{call_{t_\kappa}}) S_{t_{\kappa+1}}$ εκφράζει το κόστος ή το έσοδο από την αναπροσαρμογή του αριθμού των μετοχών που κατέχει ο επενδυτής στο rebalancing.

---

[43] $Q = N * M = 10 * 100 = 1000$

- N: ο αριθμός των συμβολαίων αγοράς που πουλάμε. Στο παράδειγμά μας είναι 10.
- M: ο πολλαπλασιαστής συμβολαίου (πόσες μετοχές αντιστοιχούν σε ένα option). Στο παράδειγμά μας κάθε δικαίωμα αντιστοιχεί σε 100 μετοχές.

[44] Από τη μεταβολή ($\Delta_{call_{t_{\kappa+1}}} - \Delta_{call_{t_\kappa}}$) προκύπτει ότι :

- Αν η διαφορά είναι **θετική** , τότε πρέπει να αυξήσουμε τις μετοχές **αγοράζοντας**, και το Cash μειώνεται.
- Αν η διαφορά είναι **αρνητική**, τότε πρέπει να μειώσουμε τις μετοχές **πουλώντας**, και το Cash αυξάνεται.

Επί της ουσίας, το ταμειακό υπόλοιπο είναι ένας λογαριασμός που συγκεντρώνει όλες τις μη-μετοχικές ροές που προκύπτουν από τη διαδικασία της αντιγραφής (replication) του δικαιώματος. Σε αυτές τις ροές περιλαμβάνονται το αρχικό premium από την πώληση των 10 calls, τα έσοδα/έξοδα από τις πωλήσεις/αγορές μετοχών για την εβδομαδιαία αναπροσαρμογή της θέσης (re-hedging), οι τόκοι που συσσωρεύονται μέσω κατάθεσης ή δανεισμού στο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, καθώς και τυχόν μερίσματα ή κόστη συναλλαγών (στο παράδειγμά μας έχουμε υποθέσει ότι δεν υπάρχουν μερίσματα και κόστη συναλλαγών). Ενημερώνεται ανά βήμα με $Cash_{t_{\kappa+1}}$ και μαζί με τις μετοχές $Q * \Delta_{call_{t_\kappa}} * S_{t_\kappa}$ σχηματίζει την αξία του αντισταθμισμένου χαρτοφυλακίου V_{t_κ} κάθε φορά.

Στη λήξη ρευστοποιούνται όλες οι μετοχές στην S_T, δηλαδή $\Delta_{call_{T\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{o}}} * S_T$ και καταβάλλεται το payoff της short θέσης, το οποίο δίνεται από: $Q * \max[S_T - K, 0]$.

Το τελικό P&L δίνεται:

$$P\&L = Cash_T + \text{Έσοδα από μετοχές} - Payoff \quad <=>$$

$$P\&L = Cash_T + (\Delta_{call_{T\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{o}}} * S_T) - Q * \max[S_T - K, 0]$$

5.2 Εβδομαδιαία εξέλιξη

Εβδομάδα 0 (Αρχική Κατάσταση)

Τα δεδομένα μας είναι:

Τιμή μετοχής S_0	950
Χρόνος μέχρι τη λήξη $(T-t)$	$\frac{1}{12} \approx 0.083$
Επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r	0.05
Τιμή εξάσκησης K	1000
Μεταβλητότητα σ	0.4

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\ln\left(\frac{950}{1000}\right) + \left(0.05 + \frac{0.4^2}{2}\right)\left(\frac{1}{12}\right)}{0.4\sqrt{\frac{1}{12}}} = -0.3504$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = -0.3504 - 0.4\sqrt{\frac{1}{12}} = -0.4659$$

$$C_0 = 950\, N(-0.3504) - 1000e^{-0.05\frac{1}{12}} N(-0.4659) = 25.55$$

Για δικαιώματα αγοράς το Δέλτα είναι ο ρυθμός μεταβολής της τιμής του call σε σχέση με την τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου και δένεται από:

$$\Delta\acute{\varepsilon}\lambda\tau\alpha_{\alpha\gamma o\rho\acute{\alpha}\varsigma} \text{ ή } \Delta_{call} = \frac{\partial C_t}{\partial S}, \qquad \acute{o}\pi o\upsilon\ C_t\ \eta\ \alpha\xi\acute{\iota}\alpha\ \tau o\upsilon\ \delta\iota\kappa\alpha\iota\acute{\omega}\mu\alpha\tau o\varsigma\ \alpha\gamma o\rho\acute{\alpha}\varsigma\ \tau\eta\ \sigma\tau\iota\gamma\mu\acute{\eta}\ t$$

Οπότε, έχουμε $\Delta_{call_{t_0}} = \frac{\partial C_0}{\partial S} = N(d_1) = N(-0.3504) = 0.3630$ και σημαίνει ότι για κάθε 1€ αύξηση στην τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, η τιμή του δικαιώματος αγοράς θα αυξηθεί κατά 0.3630€.

Η στρατηγική αντιστάθμισης που εφαρμόζεται από τον επενδυτή είναι:

i. Πουλάει τα 10 ευρωπαϊκά call options και εισπράττει το αρχικό premium[45], το οποίο ισούται με $Q * C_0 = 1000 * 25.55 = 25550$€

ii. Αγοράζει $Q * \Delta_{call_{t_0}} = 1000 * 0.3630 = 363$ μετοχές αξίας $Q * \Delta_{call_{t_0}} * S_0 = 1000 * 0.3630 * 950 = 344850$€, προκειμένου να αντισταθμίσει τη θέση του.

iii. Χρηματοδότηση: Επειδή τα έσοδα από το premium των 25550€ δεν επαρκούν για να χρηματοδοτήσουν την αγορά των μετοχών, δανείζεται το υπόλοιπο ποσό, δηλαδή $344850 - 25550 = 319300$€

Έτσι, το αρχικό ταμειακό υπόλοιπο διαμορφώνεται σε $Cash_{t_0} = -319300$€ και είναι αρνητικό, επειδή ακριβώς δανείζεται αυτό το ποσό.

[45] Το αρχικό premium είναι το ποσό που μπαίνει στο ταμείο αμέσως μετά την πώληση των calls, δηλαδή είναι εισροή μετρητών και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να χρηματοδοτήσει την αγορά μετοχών για την αντιστάθμιση.

Εβδομάδα 1

Τα δεδομένα μας είναι:

Η νέα τιμή της μετοχής προήλθε από το μοντέλο της Γεωμετρικής Κίνησης Brown[46]. Θεωρούμε ότι είναι 977.03

Νέα Τιμή μετοχής S_1	977.03
Χρόνος μέχρι τη λήξη $(T-t)$	$\frac{1}{12}-\frac{1}{52}\approx 0.0641$
Επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r	0.05
Τιμή εξάσκησης K	1000
Μεταβλητότητα σ	0.4

$$d_1=\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}=\frac{\ln\left(\frac{977.03}{1000}\right)+\left(0.05+\frac{0.4^2}{2}\right)(0.0641)}{0.4\sqrt{0.0641}}=-0.1472$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}=-0.1472-0.4\sqrt{0.0641}=-0.2484$$

$$C_1=977.03N(-0.1472)-1000e^{-0.05*0.0641}N(-0.2484)=30.75$$

Έχουμε $\Delta_{call_{t_1}}=\frac{\partial C_1}{\partial S}=N(d_1)=0.4415$ και σημαίνει ότι για κάθε 1€ αύξηση στην τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, η τιμή του δικαιώματος αγοράς θα αυξηθεί κατά 0.4415€.

Ο επενδυτής είχε αρχικά 363 μετοχές, αλλά παρατηρούμε ότι τώρα το νέο Δέλτα των calls αυξήθηκε σε 0.4415. Άρα, για να διατηρήσει την αντιστάθμιση, πρέπει να κατέχει συνολικά $Q*\Delta_{call_{t_1}}=1000*0.4415=441.5$ μετοχές.

Οπότε, ο επενδυτής πρέπει να αγοράσει περισσότερες για να φτάσει στη νέα Δ. Θα αγοράσει επιπλέον $(\Delta_{call_{t_1}}-\Delta_{call_{t_0}})=441.5-363=78.5$ μετοχές.

[46] Η εξέλιξη της τιμής ενός περιουσιακού στοιχείου με βάση μια στοχαστική διαδικασία δίνεται από: $S_{t+1}=S_t*e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)dt}+\sigma\sqrt{dt}\,dw$

Η αναπροσαρμογή της θέσης που εφαρμόζεται από τον επενδυτή είναι:

i. Αγοράζει μετοχές αξίας $78.5 * 977.03 = 76696.86$€

ii. Χρηματοδότηση: Επειδή δεν διαθέτει μετρητά (αφού το cash account είναι αρνητικό), δανείζεται χρήματα για να αγοράσει αυτές τις μετοχές αξίας 76696.86€

Το νέο ταμειακό υπόλοιπο μετά τον ανατοκισμό της προηγούμενης εβδομάδας και το κόστος αγοράς, διαμορφώνεται σε -396304.02€

$$Cash_{t_{\kappa+1}} = Cash_{t_\kappa} * e^{r\delta} - Q(\Delta_{call_{t_{\kappa+1}}} - \Delta_{call_{t_\kappa}})S_{t_{\kappa+1}} <=>$$

$$Cash_{t_1} = Cash_{t_0} * e^{0.05*\frac{1}{52}} - 1000(\Delta_{call_{t_1}} - \Delta_{call_{t_0}})S_{t_1} <=>$$

$$Cash_{t_1} = (-319300)e^{0.05*\frac{1}{52}} - 78.5 * 977.03 <=>$$

$$Cash_{t_1} = -396304.02€$$

Εβδομάδα 2

Τα δεδομένα μας είναι:

Νέα Τιμή μετοχής S_2	968.65
Χρόνος μέχρι τη λήξη $(T-t)$	$\frac{1}{12}-\frac{2}{52}\approx 0.0449$
Επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r	0.05
Τιμή εξάσκησης K	1000
Μεταβλητότητα σ	0.4

$$d_1=\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}=\frac{\ln\left(\frac{968.65}{1000}\right)+\left(0.05+\frac{0.4^2}{2}\right)(0.0449)}{0.4\sqrt{0.0449}}=-0.3069$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}=-0.3069-0.4\sqrt{0.0449}=-0.3917$$

$$C_2=968.65N(-0.3069)-1000e^{-0.05*0.0449}N(-0.3917)=20.69$$

Έχουμε $\Delta_{call_{t_2}}=\frac{\partial C_2}{\partial S}=N(d_1)=0.3795$ και σημαίνει ότι για κάθε 1€ αύξηση στην τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, η τιμή του δικαιώματος αγοράς θα αυξηθεί κατά 0.3795€.

Μετά την πτώση της μετοχής στα 968.65€, το νέο Δέλτα των calls υποχωρεί σε 0.3795. Άρα, ο επενδυτής για να διατηρήσει την αντιστάθμιση, πρέπει να κατέχει $Q*\Delta_{call_{t_2}}=1000*0.3795=379.5$ μετοχές. Πριν είχε 441.5 μετοχές. Άρα, πρέπει να πουλήσει μετοχές για να φτάσει στη νέα Δ. Θα πουλήσει $441.5-379.5=62$ μετοχές.

Η αναπροσαρμογή της θέσης που εφαρμόζεται από τον επενδυτή είναι:

i. Πουλάει μετοχές αξίας $62 * 968.65 = 60056.3€$

ii. Έχει έσοδα από την πώληση μετοχών αξίας $60056.3€$

Τα έσοδα χρησιμοποιούνται για τη μείωση του δανεισμού. Έτσι, το νέο ταμειακό υπόλοιπο μετά τον ανατοκισμό και την πώληση διαμορφώνεται σε $= -336628.97€$

$$Cash_{t_{\kappa+1}} = Cash_{t_\kappa} * e^{r\delta} - Q(\Delta_{call_{t_{\kappa+1}}} - \Delta_{call_{t_\kappa}})S_{t_{\kappa+1}} <=>$$

$$Cash_{t_2} = Cash_{t_1} * e^{0.05*\frac{1}{52}} - 1000(\Delta_{call_{t_2}} - \Delta_{call_{t_1}})S_{t_2} <=>$$

$$Cash_{t_2} = -396304.02 * e^{0.05*\frac{1}{52}} - (-62) * 968.65 <=>$$

$$Cash_{t_2} = -336628.97€$$

Εβδομάδα 3

Τα δεδομένα μας είναι:

Νέα Τιμή μετοχής S_3	1004.93
Χρόνος μέχρι τη λήξη $(T-t)$	$\frac{1}{12}-\frac{3}{52}\approx 0.0256$
Επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r	0.05
Τιμή εξάσκησης K	1000
Μεταβλητότητα σ	0.4

$$d_1=\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}=\frac{\ln\left(\frac{1004.93}{1000}\right)+\left(0.05+\frac{0.4^2}{2}\right)(0.0256)}{0.4\sqrt{0.0256}}=0.1288$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}=0.1288-0.4\sqrt{0.0256}=0.0648$$

$$C_3=1004.93N(0.1288)-1000e^{-0.05*0.0256}N(0.0648)=28.80$$

Έχουμε $\Delta_{call_{t_3}}=\frac{\partial C_3}{\partial S}=N(d_1)=0.5513$ και σημαίνει ότι για κάθε 1€ αύξηση στην τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, η τιμή του δικαιώματος αγοράς θα αυξηθεί κατά 0.5513€.

Με την άνοδο της μετοχής στα 1004.93€, το νέο Δέλτα αυξάνεται σε 0.5513. Άρα, για να διατηρήσει την αντιστάθμιση, πρέπει να κατέχει συνολικά $Q*\Delta_{call_{t_3}}=1000*0.5513=551.3$ μετοχές. Πριν είχε 379.5 μετοχές. Άρα, πρέπει να αγοράσει μετοχές για να φτάσει στη νέα Δ. Θα αγοράσει $\Delta_{call_3}-\Delta_{call_{t_2}}=551.3\ -379.5=171.8$ μετοχές.

Η αναπροσαρμογή της θέσης που εφαρμόζεται από τον επενδυτή είναι:

i. Αγοράζει μετοχές αξίας $171.8 * 1004.93 = 172646.97€$

ii. Χρηματοδότηση: Επειδή δεν διαθέτει μετρητά (αφού το cash account είναι αρνητικό), δανείζεται χρήματα για να αγοράσει αυτές τις μετοχές αξίας $172646.97€$

Η αγορά αυτή αυξάνει εκ νέου το δανεισμό, με αποτέλεσμα το νέο ταμειακό υπόλοιπο να ισούται με $-509599.78€$

$$Cash_{t_{\kappa+1}} = Cash_{t_\kappa} * e^{r\delta} - Q(\Delta_{call_{t_{\kappa+1}}} - \Delta_{call_{t_\kappa}})S_{t_{\kappa+1}} <=>$$

$$Cash_{t_3} = Cash_{t_2} * e^{0.05*\frac{1}{52}} - 1000(\Delta_{call_{t_3}} - \Delta_{call_{t_2}})S_{t_3} <=>$$

$$Cash_{t_3} = -336628.97 * e^{0.05*\frac{1}{52}} - 171.8 * 1004.93 <=>$$

$$Cash_{t_3} = -509599.78€$$

Εβδομάδα 4 (Λήξη)

Τα δεδομένα μας είναι:

Νέα Τιμή μετοχής S_T	1096.62
Χρόνος μέχρι τη λήξη $(T-t)$	0
Επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r	0.05
Τιμή εξάσκησης K	1000
Μεταβλητότητα σ	0.4

Στη λήξη, δεν απαιτείται περαιτέρω αναπροσαρμογή της Δέλτα, καθώς το δικαίωμα προαίρεσης λήγει. Ο επενδυτής ρευστοποιεί τη μετοχική θέση στην τρέχουσα τιμή S_T και καταβάλλει το payoff της short θέσης, ολοκληρώνοντας με αυτόν τον τρόπο τη διαδικασία αντιστάθμισης.

Στη λήξη το δικαίωμα αγοράς έχει αξία $C_t = \max[S_T - K, 0] = 96.62$. Συνεπώς το δικαίωμα θα ασκηθεί, αφού $S_T > K$.

Το ταμειακό υπόλοιπο της προηγούμενης εβδομάδας κεφαλαιοποιείται για μία ακόμα εβδομάδα και διαμορφώνεται στα -510090.01€

$$Cash_{t_{\kappa+1}} = Cash_{t_\kappa} * e^{r\delta} <=> Cash_T = Cash_{t_3} e^{0.05*\frac{1}{52}} = -510090.01€$$

Ο επενδυτής αποφασίζει να κλείσει τη θέση του, οπότε γίνονται τα παρακάτω:

i. Πουλάει τις μετοχές που έχει στην κατοχή του και λαμβάνει έσοδα $1096.62 * 551.3 = 604566{,}61€$
ii. Καθώς $S_T > K$, το δικαίωμα ασκείται και ο επενδυτής καταβάλει το payoff από την short θέση στα call (εκκαθάριση συμβολαίων). Οπότε του κοστίζει $Payoff = Q * \max[S_T - K, 0] = 1000 * 96.62 = 96620€$

Το P/L (Profit or Loss) είναι το τελικό οικονομικό αποτέλεσμα της στρατηγικής, το οποίο μας δείχνει αν ο επενδυτής κέρδισε ή έχασε χρήματα μετά το κλείσιμο όλων των θέσεων του. Ολοκληρώνοντας το παράδειγμά, το τελικό οικονομικό ισοζύγιο (P/L) της στρατηγικής ανήλθε σε -2143.4, γεγονός που συνεπάγεται ζημία.

$$P\&L = Cash_T + Έσοδα\ από\ μετοχές - Payoff\ \ <=>$$

$$P\&L = -510090.01 + 604566{,}61 - 96620 = -2143.4€$$

5.3 Ερμηνεία και συμπεράσματα

Το αριθμητικό παράδειγμα κατέδειξε αναλυτικά τον τρόπο εφαρμογής της στρατηγικής αντιστάθμισης Δέλτα σε μια short θέση ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς, με βάση το υπόδειγμα Black-Scholes-Merton. Ο επενδυτής προσαρμόζει περιοδικά τη θέση του σε μετοχές, χρηματοδοτώντας τις αντίστοιχες αγοραπωλησίες μέσω του ταμειακού υπολοίπου, με στόχο την εξουδετέρωση του κινδύνου που απορρέει από την ανοικτή θέση στα options.

Προκειμένου να αποτυπωθεί συνοπτικά η εξέλιξη της στρατηγικής δυναμικής αντιστάθμισης Δέλτα σε όλη τη διάρκεια του παραδείγματος, παρατίθεται ο ακόλουθος συγκεντρωτικός πίνακας, στον οποίο παρουσιάζονται οι βασικές μεταβλητές και οι διαδοχικές αναπροσαρμογές της θέσης του επενδυτή.

Συνοπτική παρουσίαση της δυναμικής αντιστάθμισης Δέλτα

Εβδομάδα	Τιμή μετοχής (S)	Δέλτα (Δ)	Μετοχές (Q*S)	Μεταβολή μετοχών	Ταμειακό υπόλοιπο
0	950	0.363	363	+ 363	- 319300
1	977.03	0.4415	441.5	+ 78.5	- 396304.02
2	968.65	0.3795	379.5	- 62	- 336628.97
3	1004.93	0.5513	551.3	+ 171.8	- 509599.78
4 (T)	1096.62	-	551.3	0	- 510090.01

Όπως προκύπτει από τα στοιχεία του πίνακα, η δυναμική προσαρμογή της θέσης σε μετοχές αντανακλά τις μεταβολές του Δέλτα, οι οποίες επηρεάζονται άμεσα από τη διακύμανση της τιμής του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου και τον υπολειπόμενο χρόνο μέχρι τη λήξη. Παράλληλα, παρατηρείται ότι το ταμειακό υπόλοιπο επιβαρύνεται σημαντικά λόγω της χρηματοδότησης των αγορών μετοχών, γεγονός που αποτυπώνει το ρόλο του δανεισμού στη διαδικασία αντιστάθμισης.

Τελικό Αποτέλεσμα Στρατηγικής

Ταμειακό υπόλοιπο στη λήξη	- 510090.01
Έσοδα από πώληση μετοχών	+ 604566.61
Payoff short calls	- 96620
Τελικό P&L	**-2143.40**

Παρά τη συστηματική αυτή διαδικασία, το τελικό αποτέλεσμα της προσομοίωσης ήταν μια μικρή ζημία ύψους 2143.40€, η οποία δεν υποδηλώνει την αστοχία του μοντέλου αλλά αντικατοπτρίζει την περιοδική (διακριτή) φύση της αναπροσαρμογής. Στην πραγματικότητα, η τιμή του Δέλτα μεταβάλλεται διαρκώς με την εξέλιξη της τιμής του υποκείμενου τίτλου και του χρόνου μέχρι τη λήξη, όμως η αναπροσαρμογή πραγματοποιείται μόνο σε εβδομαδιαία βάση. Αυτή η χρονική ασυνέχεια δημιουργεί το σφάλμα αντιστάθμισης, δηλαδή μια μικρή απόκλιση από το θεωρητικό αποτέλεσμα της συνεχούς αντιστάθμισης.

Σύμφωνα με τη θεωρητική θεμελίωση του υποδείγματος Black-Scholes-Merton, αν η αναπροσαρμογή ήταν συνεχής, το αντισταθμισμένο χαρτοφυλάκιο θα απέδιδε ακριβώς την απόδοση του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου εξαλείφοντας κάθε κίνδυνο και μηδενίζοντας το τελικό $P\&L$. Η διακριτή, όμως, εφαρμογή οδηγεί σε μικρές αποκλίσεις, θετικές ή αρνητικές, ανάλογα με τη μεταβλητότητα της αγοράς και τη συχνότητα των αναπροσαρμογών.

Συνεπώς, το αποτέλεσμα της στρατηγικής επιβεβαιώνει τον πρακτικό ρόλο της αντιστάθμισης Δέλτα ως μηχανισμού διαχείρισης και περιορισμού του κινδύνου, και όχι ως εργαλείο κερδοφορίας. Όσο πιο συχνή είναι η διαδικασία αναπροσαρμογής, τόσο μικρότερο είναι το σφάλμα αντιστάθμισης και πλησιέστερη η πορεία του χαρτοφυλακίου στην θεωρητική πρόβλεψη του υποδείγματος. Το συγκεκριμένο παράδειγμα, επομένως, αναδεικνύει με σαφήνεια τη χρησιμότητα και τους πρακτικούς περιορισμούς της αντιστάθμισης Δέλτα στην πραγματική αγορά.

Κεφάλαιο 6ο : ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στο πρώτο σκέλος της παρούσας διπλωματικής εργασίας αναλύθηκαν τα κυριότερα χαρακτηριστικά του Υποδείγματος Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων (CAPM) και εξετάστηκε ο τρόπος λειτουργίας του. Διερευνήθηκε ο ρόλος που διαδραμάτισε η σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου στην δημιουργία του μοντέλου, καθώς και οι βασικές παραδοχές που τέθηκαν για τη διαμόρφωση και μαθηματική θεμελίωσή του. Επιπλέον, παρουσιάστηκε ο τρόπος με τον οποίο υφίσταται η έννοια της αποτελεσματικής διαφοροποίησης που μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από αξιόγραφα μη συσχετισμένα μεταξύ τους. Όπως διαπιστώθηκε, η διαφοροποίηση επιτρέπει την εξάλειψη του συνολικού κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου για κάθε επιθυμητό επίπεδο απόδοσης. Η παρατήρηση αυτή συνέβαλε στην ανάπτυξη της θεωρίας του συνόρου των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων. Ο συνδυασμός ενός διαφοροποιημένου χαρτοφυλακίου αξιογράφων που ενέχουν κίνδυνο και ενός ασφαλούς επενδυτικού τίτλου οδηγεί στη δημιουργία του Χαρτοφυλακίου της Αγοράς. Αυτό το χαρτοφυλάκιο αποτελεί βασικό σημείο αναφοράς για την ανάλυση της απόδοσης ενός αξιογράφου.

Παρά τη θεωρητική του σημασία, το CAPM έχει δεχθεί κριτική για τις αυστηρές του παραδοχές, όπως η υπόθεση ομοιογενούς πληροφόρησης, της τέλειας αγοράς και της σταθερότητας του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου, με αποτέλεσμα να αποτυγχάνει. Πρώτος ο Roll αμφισβήτησε την πρακτική εφαρμογή του μοντέλου, ενώ μεταγενέστερες εμπειρικές μελέτες έδειξαν αποκλίσεις μεταξύ των θεωρητικών προβλέψεων του CAPM και των πραγματικών αποδόσεων των χρεογράφων, προτείνοντας εναλλακτικά πολυπαραγοντικά υποδείγματα όπως το Arbitrage Pricing Theory (APT). Ωστόσο, το CAPM παραμένει μια από τις πιο διαδεδομένες θεωρητικές προσεγγίσεις για την αξιολόγηση επενδύσεων και τον προσδιορισμό του κόστους κεφαλαίου στις χρηματοοικονομικές αγορές.

Στο δεύτερο σκέλος της παρούσας διπλωματικής εργασίας αναλύθηκαν τα κυριότερα χαρακτηριστικά του μοντέλου Black-Scholes-Merton που αποτελεί ορόσημο για την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Ωστόσο, εμφανίζει αρκετές αδυναμίες που περιορίζουν την πρακτική του εφαρμογή. Αρχικά, το μοντέλο των Black-Scholes-Merton υποθέτει ότι η μεταβλητότητα (volatility) της μετοχής παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια ωρίμανσης του δικαιώματος προαίρεσης. Σε πολύ σύντομα χρονικά διαστήματα, η μεταβλητότητα μπορεί να φαίνεται σχετικά σταθερή. Ωστόσο, μακροπρόθεσμα, η μεταβλητότητα αλλάζει και μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί σημαντικά. Μάλιστα, οι χρηματοπιστωτικές αγορές δεν ακολουθούν σταθερή μεταβλητότητα, αλλά χαρακτηρίζονται από περιόδους υψηλών και χαμηλών διακυμάνσεων που αλληλοδιαδέχονται η μία την άλλη.

Επιπροσθέτως, μία από τις βασικές υποθέσεις του μοντέλου είναι ότι οι τιμές των υπό θεώρηση περιουσιακών στοιχείων ακολουθούν μια στοχαστική διαδικασία τυχαίου περιπάτου, γνωστή ως Γεωμετρική Κίνηση Brown. Η υπόθεση αυτή σημαίνει ότι οι μελλοντικές τιμές της μετοχής είναι τυχαίες και η πιθανότητα ανόδου ή καθόδου είναι ίση. Δηλαδή, κάθε νέα τιμή καθορίζεται τυχαία με βάση την προηγούμενη τιμή, ακολουθώντας μια κανονική κατανομή των λογαριθμικών αποδόσεων. Στην πράξη, η υπόθεση αυτή δεν ανταποκρίνεται πλήρως στις αγορές, διότι οι τιμές των μετοχών δεν κινούνται εντελώς τυχαία, αλλά επηρεάζονται από οικονομικά, πολιτικά δεδομένα, ανθρώπινες προσδοκίες.

Επίσης, το μοντέλο υποθέτει απουσία κόστους συναλλαγών, καθώς θεωρεί ότι δεν υπάρχουν προμήθειες, bid-ask spreads ή περιορισμοί ρευστότητας. Ωστόσο, στην πράξη, οι χρηματιστές αντιμετωπίζουν συναλλακτικά κόστη τα οποία επηρεάζουν τόσο την τιμολόγηση των options όσο και την αποτελεσματικότητα των στρατηγικών αντιστάθμισης. Επιπλέον, το μοντέλο προϋποθέτει τη δυνατότητα συνεχούς αντιστάθμισης, δηλαδή την άμεση και χωρίς κόστος αναπροσαρμογή της θέσης ενός trader. Όμως, η συνεχής αντιστάθμιση είναι ανέφικτη λόγω του κόστους συναλλαγών και των χρονικών καθυστερήσεων στην αγορά. Τέλος, το μοντέλο υποθέτει ότι το επιτόκιο χωρίς ρίσκο παραμένει σταθερό, κάτι το οποίο δεν υφίσταται, αφού τα επιτόκια μεταβάλλονται συνεχώς, επηρεάζοντας την αξία των δικαιωμάτων προαίρεσης και τις στρατηγικές αντιστάθμισης.

Καταλήγοντας, το μαθηματικό μοντέλο των Black-Scholes-Merton βασίζεται σε απλές υποθέσεις, οι οποίες συχνά οδηγούν σε αποκλίσεις μεταξύ των θεωρητικών τιμών των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων και των πραγματικών αγοραίων τιμών τους. Παρόλα αυτά, παρά τις αδυναμίες του, παραμένει μέχρι και σήμερα ένα από τα πιο χρήσιμα διδακτικά υποδείγματα στον τομέα των χρηματοοικονομικών επιστημών.

Βιβλιογραφία

Ελληνική

[1] Αθανασιάδης, Ι.Α. (2008-2011).Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά Υποδείγματα Λήψης Επενδυτικών Αποφάσεων. ΠΑΜΑΚ. Σχολή Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής, Διδακτορική Διατριβή.

[2] Βασιλείου, Π.-Χ.Γ. (2001) *Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά*. Εκδόσεις: Ζήτη.

[3] Μπούτσικας, Μ. (2005-2007). *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα (Εισαγωγή στη στοχαστική χρηματοοικονομική ανάλυση)*. Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης. Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[4] Μυλωνάς, Ν. (2005). *Αγορές και Προϊόντα Παραγώγων.* Εκδόσεις: Τυπωθήτω.

Ξενόγλωσση

[5] Basu, S. (1977). *Investment performance of Common Stocks in Relation to their Price-Earnings Ratios: A Test of the Efficient Market Hypothesis*. The Journal of Finance. 32(3).

[6] Black, F. and Scholes, M. (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Journal of Political Economy 81, pp. 637-654.

[7] Bodie, Z., Kane, A. and Marcus, A.J. (2005). *Investments*. New York: McGraw-Hill / Irwin.

[8] Brealey, R.A., Myers, S.C. (2003). *Principles of Corporate Finance*, New York: McGraw-Hill / Irwin.

[9] Fama, E.F. and French, K.R. (1992). *The Cross – Section of Expected Stock Returns*, The Journal of Finance, 47(2).

[10] Fama, E.F. and French, K.R. (2004). *The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence*, The Journal of Economic Perspectives, 18(3).

[11] Friend, I. Westerfield, R. and Granito, M. (1978). New Evidence on the Capital Asset Pricing Model. The Journal of Finance. 33(3).

[12] Howison, S.D., Kelly, F.P. and Wilmott, P. (1995). *Mathematical Models in Finance*. Chapman and Hall. London.

[13] Hull, J.C. (2012). *Options, Futures, and Other Derivatives*. 8th Edition. Pearson.

[14] Markowitz, H. (1952). *Portfolio Selection*. The Journal of Finance, 7(1).

[15] Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. New York.

[16] McCauley, J. and Gunarante, G. (2003). *On CAPM and B-S differing risk-return strategies*. University of Huston. MPRA Paper No. 2162.

[17] Merton, R.C. (1973). *An Intertemporal Capital Asset Pricing Model*. Econometrica. pp 867-887.

[18] Osborne M. F. M. and Cootner P. *The random character of stock market prices*. MIT. Cambridge.

[19] Roll, R. (1977). A Critique of the Asset Pricing Theory's Test. The Journal of Finance. pp. 129-176.

[20] Roll, R. and Ross, S. A. (1980). *An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory*. The Journal of Finance, 35(5).

[21] Ross, S. A. (1976). *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*. Journal of Economic Theory. 13(3).

[22] Sharpe, W.F. (1963). *A Simpified Model for Portfolio Analysis*. Management Science. 9. pp. 277-293.

[23] Sharpe, W.F. (1964). *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*. The Journal of Finance.19. pp. 425-442.

[24] Shreve, S.E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous Time Models*. Springer.

Διαδικτυακοί Ιστότοποι

[25] Chen, J. (2024, June 20). *Delta Hedging: Definition, How It Works, and Example. Investopedia*. https://www.investopedia.com/terms/d/deltahedging.asp

[26] Hayes, A. (2023, May 3). *What Are Greeks in Finance and How Are They Used.* Investopedia. https://www.investopedia.com/terms/g/greeks.asp

[27] Kenton, W. (2024, July 1). *Capital Asset Pricing Model (CAPM): Definition, Formula, and Assumptions*. Investopedia. https://www.investopedia.com/terms/c/capm.asp