



ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΒΑΣΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ
ΜΠΕΪΖΙΑΝΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ**

Ναυτικός Δόκιμος Δ' Τάξης Μαχίμων

Ανδρέας Περικλέους

Μάιος 2025

**ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΒΑΣΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ
ΜΠΕΪΖΙΑΝΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ**

Ναυτικός Δόκιμος Δ' Τάξης Μαχίμων
Ανδρέας Περικλέους

Υποβληθείσα στο πλαίσιο πλήρωσης μέρους των απαιτήσεων για την απόκτηση
διπλώματος στη

ΝΑΥΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΗ

με κατεύθυνση

MAXIMOS

από την

**ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ
Μάιος 2025**

Συγγραφέας: Ανδρέας Περικλέους

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια:
Ευγενία Παπαγεωργίου

ΟΡΟΙ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

Ο συγγραφέας είναι υπεύθυνος για το περιεχόμενο της εργασίας του, τόσο για την ακρίβεια των καταχωρημένων σε αυτή γεγονότων ή απόψεων, όσο και για την εγκυρότητα και τα δικαιώματα των χρησιμοποιούμενων πηγών. Οι διατυπωμένες στην εργασία θέσεις ή απόψεις απηχούν τις προσωπικές θέσεις ή απόψεις του συγγραφέα και μόνο.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία εξετάζει τη χρήση Μπεϋζιανών Δικτύων ως εργαλείο υποστήριξης λήψης αποφάσεων σε συνθήκες αβεβαιότητας, εφαρμόζοντας τα σε επιχειρησιακά και τεχνικά σενάρια του Πολεμικού Ναυτικού. Μέσα από τη θεωρητική ανάλυση της Θεωρίας Πιθανοτήτων και της Θεωρίας Γραφημάτων, παρουσιάζεται το υπόβαθρο για τη χρήση των Μπεϋζιανών Δικτύων. Στη συνέχεια, η κορύφωση της ανάλυσης των Μπεϋζιανών Δικτύων γίνεται με την ανάπτυξη ρεαλιστικών εφαρμογών όπως η βελτιστοποίηση της επιλογής όπλου σε πολεμικό πλοίο, η πρόβλεψη και αποτροπή εξάπλωσης μολυσματικών ασθενειών στο πλήρωμα, καθώς και η εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας πλοίων ή υποσυστημάτων με στόχο τον καλύτερο προγραμματισμό συντηρήσεων και εκσυγχρονισμών. Η εργασία αναδεικνύει τα πλεονεκτήματα της πιθανολογικής μοντελοποίησης για την υποστήριξη ταχείας και ορθολογικής λήψης αποφάσεων σε περιβάλλοντα υψηλής επιχειρησιακής και τεχνικής αβεβαιότητας.

ABSTRACT

This dissertation investigates the application of Bayesian Networks as a decision support tool under conditions of uncertainty, focusing on operational and technical scenarios within the Hellenic Navy. Through a comprehensive theoretical analysis of Probability Theory and Graph Theory, the foundational framework for the utilization of Bayesian Networks is established. The study subsequently develops applications such as the optimization of weapon selection on naval vessels, the prediction and prevention of infectious disease outbreaks among crew members, and the assessment of failure probabilities of ships or subsystems, with the objective of enhancing maintenance scheduling and modernization planning. The dissertation highlights the benefits of probabilistic modeling in supporting rapid and rational decision-making in environments characterized by high operational and technical uncertainty.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α - ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β – ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ.....	3
2.1 Ορισμός και Βασικά Στοιχεία	3
2.2 Βεβαρημένα Γραφήματα – Weighted graph	6
2.3 Ακολουθίες κόμβων και ακμών (Περίπατος, Μονοπάτι και Ίχνος).....	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ.....	9
3.1 Ορισμοί και Βασικές Ιδιότητες Πιθανοτήτων	9
3.2 Βασικά στοιχεία της θεωρίας πιθανοτήτων	11
3.3 Συνάρτηση πιθανοτήτων.....	12
3.4 Σχετική συχνότητα.....	13
3.5 Τυχαίες μεταβλητές / Από κοινού πιθανότητες	15
3.6 Δεσμευμένη πιθανότητα και ανεξάρτητα ενδεχόμενα	16
3.7 Θεώρημα του Bayes.....	17
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ – ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΜΠΕΥΖΙΑΝΑ ΔΙΚΤΥΑ	18
4.1 Ορισμός Μπεϋζιανών Δικτύων	18
4.2 Γραφικά Μοντέλα.....	19
4.3 Συλλογιστική με Μπεϋζιανά Δίκτυα	20
4.4 Αλγόριθμος μετάδοσης μηνυμάτων του Pearl.....	23
4.5 Συμπερασματολογία σε δέντρα	24
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΠΕΥΖΙΑΝΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ	29
5.1 Ιατρική Διάγνωση & Βιοϊατρική	29
5.2 Οικονομικά & Διαχείριση Κινδύνου	31
5.3 Εκπαίδευση & Προσαρμοστική Μάθηση	32
5.4 Ασφάλεια Πληροφοριών	33
5.5 Περιβαλλοντική Μοντελοποίηση.....	33
5.6 Περιβαλλοντική Μελοποίηση.....	34
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΤ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΠΕΥΖΙΑΝΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ ΣΤΟ ΠΟΛΕΜΙΚΟ ΝΑΥΤΙΚΟ	34
6.1 Παραδείγματα εφαρμογών των Μπεϋζιανών Δικτύων στο ΠΝ	36
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ζ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	61
7.1 Γενικά Συμπεράσματα από τη χρήση των Μπεϋζιανών Δικτύων.....	61

7.2 Οφέλη των Μπεϋζιανών Δικτύων στο Πολεμικό Ναυτικό	62
7.3 Σύνδεση Μπεϋζιανών Δικτύων με το σύστημα TACTICOS του ΠΝ.....	63
7.4 Πιθανοί τρόποι ενίσχυσης του Πολεμικού Ναυτικού μέσω των Μπεϋζιανών Δικτύων	66

ΛΙΣΤΑ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1: Απεικόνιση γραφήματος	3
Εικόνα 2: Απεικόνιση γραφήματος	3
Εικόνα 3: Διαδρομή ενός Γραφήματος	4
Εικόνα 4: Κύκλος ενός γραφήματος	5
Εικόνα 5: Γράφημα δέντρο.....	5
Εικόνα 6: Κατευθυνόμενο και μη-κατευθυνόμενο γράφημα	5
Εικόνα 7: Βεβαρημένο γράφημα	6
Εικόνα 8: Βεβαρημένο γράφημα και μη-βεβαρημένο γράφημα	7
Εικόνα 9: Πρίπατος γραφήματος.....	7
Εικόνα 10: Μονοπάτι ενός γραφήματος	8
Εικόνα 11: Ίχνος ενός γραφήματος.....	8
Εικόνα 12: Δειγματικός χώρος	12
Εικόνα 13: Ρίψη νομίσματος	13
Εικόνα 14: Ο Tomas Bayes	17
Εικόνα 15 Παράδειγμα Μπεϋζιανού δικτύου	18
Εικόνα 16: Διάγραμμα συσχετίσεων οντοτήτων	20
Εικόνα 17: Παράδειγμα Διαγνωστικού συμπεράσματος	21
Εικόνα 18: Παράδειγμα πρόβλεψης	21
Εικόνα 19: Παράδειγμα ενδοαιτιακός συλλογισμός	22
Εικόνα 20: Παράδειγμα συνδυασμών συλλογισμών	22
Εικόνα 21: Δενδροειδές δίκτυο Bayes	24
Εικόνα 22: Κλασικό παράδειγμα DAG	26
Εικόνα 23: Παράδειγμα εφαρμογής Bayesian Networks στην Ιατρική	29
Εικόνα 24: Παράδειγμα εφαρμογής Bayesian networks στη ρομποτική	30
Εικόνα 25: Παράδειγμα εφαρμογής bayesian networks στα οικονομικά	31
Εικόνα 26: Παράδειγμα εφαρμογής Bayesian networks στην εκπαίδευση.....	32
Εικόνα 27: Παράδειγμα εφαρμογής Bayesian networks στη κυβερνοασφάλεια	33
Εικόνα 28: Παράδειγμα εφαρμογής Bayesian networks στο περιβάλλον.....	34
Εικόνα 29: Φρεγάτα ΣΑΛΑΜΙΣ.....	35
Εικόνα 30: Πλοίο και δίκτυο "Σύνδεση ισχύος και γνώσεις.....	62
Εικόνα 31: Σύστημα TACTICOS	63

ΛΙΣΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1: Σχέσεις μεταξύ ενδεχομένων	10
Πίνακας 2: Ιδιότητες Πιθανοτήτων.....	10
Πίνακας 3: Πιθανότητες για ενεργοποίηση συναγερμού από ληστεία ή σεισμό	26
Πίνακας 4: Περιγραφή Μεταβλητών για Δίκτυο Πρόβλεψης Ασθενειών	36
Πίνακας 5: Ορισμός Πιθανοτικών τιμών των Μεταβλητών.....	Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.
Πίνακας 6: Περιγραφή Μεταβλητών για Δίκτυο Πρόβλεψης Αστοχίας Πλοίου	44
Πίνακας 7: Ορισμός Υποθετικών Πιθανοτήτων των Μεταβλητών	46
Πίνακας 8: Διαθέσιμα όπλα και τεχνικά χαρακτηριστικά.....	51

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες στην επιβλέπουσα καθηγήτρια μου, Ευγενία Παπαγεωργίου, για την πολύτιμη καθοδήγηση, την αμέριστη υποστήριξη και τις χρήσιμες παρατηρήσεις της καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας πτυχιακής εργασίας. Ευχαριστώ επίσης την καθηγήτρια Μαθηματικών Κυρίτση Σοφία για την παρότρυνση της επιλογής της συγκεκριμένης πτυχιακής εργασίας. Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου και τους φίλους μου για τη στήριξη, την υπομονή και την ενθάρρυνσή τους σε κάθε στάδιο αυτής της προσπάθειας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα Μπεϋζιανά Δίκτυα (Bayesian Networks) αποτελούν ένα ισχυρό μαθηματικό εργαλείο για τη μοντελοποίηση της αβεβαιότητας και της αιτιακής συσχέτισης μεταξύ γεγονότων. Βασισμένα στο Θεώρημα του Bayes, τα δίκτυα αυτά προσφέρουν έναν τρόπο για την αναπαράσταση σύνθετων πιθανοτικών συστημάτων μέσω γραφικών μοντέλων, όπου οι κόμβοι αντιπροσωπεύουν μεταβλητές και τα τόξα αιτιακές σχέσεις. Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό τους είναι η δυνατότητα ενημέρωσης των πιθανοτήτων όταν νέα δεδομένα γίνονται διαθέσιμα, επιτρέποντας έτσι την πιο ακριβή εκτίμηση της κατάστασης ενός συστήματος σε πραγματικό χρόνο.

Η επιλογή του συγκεκριμένου θέματος για την πτυχιακή εργασία έγινε με σκοπό να συνδεθεί η θεωρητική γνώση των Μπεϋζιανών Δικτύων με εφαρμογές υψηλής σημασίας για το Πολεμικό Ναυτικό, γεφυρώνοντας το θεωρητικό υπόβαθρο της πιθανολογικής σκέψης με την πρακτική εφαρμογή αυτών των τεχνικών σε πραγματικά σενάρια υψηλής κρισιμότητας, όπως η αξιολόγηση απειλών, η επιλογή κατάλληλου οπλισμού, η πρόβλεψη τεχνικών βλαβών, καθώς και η διαχείριση υγειονομικών κρίσεων στο περιβάλλον ενός πλοίου. Η εργασία διαρθρώνεται σε διαδοχικά κεφάλαια, ώστε να χτιστεί η απαραίτητη θεωρητική βάση και στη συνέχεια να παρουσιαστούν οι εφαρμογές των Μπεϋζιανών Δικτύων στο πεδίο του Πολεμικού Ναυτικού.

Κεφάλαιο Β – Θεωρία Γραφημάτων

Παρουσιάζει τη βασική έννοια των γραφημάτων, κόμβων και ακμών, καθώς και κατηγορίες όπως κατευθυνόμενα και μη κατευθυνόμενα γραφήματα, βεβαρημένα γραφήματα και έννοιες όπως μονοπάτια, κύκλοι και ίχνη. Αποτελεί το θεμέλιο για την κατανόηση των γραφικών μοντέλων που χρησιμοποιούνται στα Μπεϋζιανά Δίκτυα.

Κεφάλαιο Γ - Θεωρία Πιθανοτήτων

Εισάγει τη βασική θεωρία πιθανοτήτων, συμπεριλαμβανομένων των δεσμευμένων πιθανοτήτων, ανεξάρτητων ενδεχομένων και του Θεωρήματος Bayes. Θέτει το μαθηματικό υπόβαθρο για την κατανόηση της λειτουργίας των Μπεϋζιανών Δικτύων.

Κεφάλαιο Δ - Εισαγωγή στα Μπεϋζιανά Δίκτυα

Αναλύει την έννοια και τη δομή των Μπεϋζιανών Δικτύων, την έννοια της αιτιώδους σχέσης, τη συλλογιστική και τους τύπους συμπερασμού (διαγνωστικός, προγνωστικός, ενδοαιτιακός), καθώς και τον αλγόριθμο Pearl για μετάδοση πληροφορίας.

Κεφάλαιο Ε - Εφαρμογές Μπεϋζιανών Δικτύων

Παρουσιάζει μερικές εφαρμογές των BNs σε διάφορους τομείς της καθημερινότητας όπως της Ιατρικής, της Τεχνητής Νοημοσύνης, της Οικονομίας, της Μαθησιακής Εκπαίδευσης, του Περιβάλλοντος αλλά και της Ασφάλειας Πληροφοριών.

Κεφάλαιο ΣΤ - Εφαρμογές Μπεϋζιανών Δικτύων στο Πολεμικό Ναυτικό

Παρουσιάζει πρακτικές εφαρμογές των BNs σε διάφορους τομείς, με έμφαση στην υγειονομική διαχείριση, την επιλογή οπλικού συστήματος, τη διαχείριση βλαβών και συντήρησης στο Πολεμικό Ναυτικό

Κεφάλαιο Ζ - Συμπεράσματα

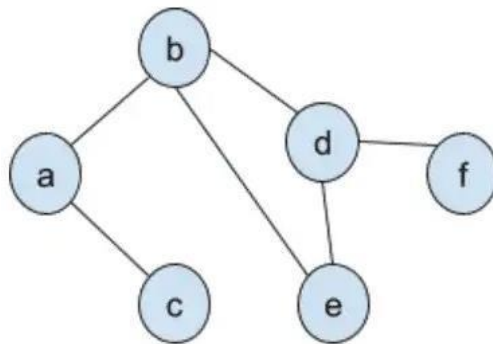
Ανακεφαλαιώνει τα βασικά ευρήματα της εργασίας, επισημαίνει τα πλεονεκτήματα της χρήσης Μπεϋζιανών Δικτύων στο ναυτικό επιχειρησιακό περιβάλλον και καταγράφει προτάσεις για μελλοντική έρευνα ή εφαρμογή.

Η σταδιακή προσέγγιση και η λογική ακολουθία της εργασίας, επιτυγχάνει τη σύνδεση των κεφαλαίων και γενικότερα του περιεχομένου της, με σκοπό τη κατανόηση της λειτουργίας και της εφαρμογής των Μπεϋζιανών Δικτύων, για τον αναγνώστη. Αρχικά, στο Κεφάλαιο Β παρουσιάζεται η Θεωρία Γραφημάτων, που αποτελεί τη θεμελιώδη βάση για την κατανόηση της δομής των γραφικών μοντέλων, όπως είναι τα Μπεϋζιανά Δίκτυα. Στη συνέχεια, το Κεφάλαιο Γ εισάγει τις βασικές αρχές της Θεωρίας Πιθανοτήτων, οι οποίες είναι απαραίτητες για την πιθανολογική σκέψη και τον υπολογισμό αβεβαιοτήτων, με ιδιαίτερη έμφαση στη δεσμευμένη πιθανότητα και στο Θεώρημα του Bayes. Το Κεφάλαιο Δ συνδυάζει τις δύο προηγούμενες έννοιες και εισάγει τα Μπεϋζιανά Δίκτυα, εξηγώντας τη δομή, τη λειτουργία τους και τους τρόπους με τους οποίους επιτρέπουν την εξαγωγή συμπερασμάτων βάσει παρατηρούμενων δεδομένων. Η θεωρητική κατανόηση κορυφώνεται στο Κεφάλαιο Ε και Κεφάλαιο ΣΤ, όπου παρουσιάζονται συγκεκριμένες εφαρμογές των Μπεϋζιανών Δικτύων τόσο στην καθημερινότητα όσο και στο Πολεμικό Ναυτικό. Η εργασία ολοκληρώνεται με το Κεφάλαιο Ζ, το οποίο συνοψίζει τα βασικά συμπεράσματα και προτείνει κατευθύνσεις για μελλοντική αξιοποίηση της εν λόγω τεχνολογίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β

ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Η θεωρία γραφημάτων χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση και την ανάλυση διαφόρων τύπων σχέσεων και δικτύων καθώς ένα γράφημα αποτελεί έναν πολύ εύκολο και φυσικό τρόπο απεικόνισης των σχέσεων μεταξύ αντικειμένων (West 2001, Diestel 2017). Οι αναπαραστάσεις αντικειμένων και σχέσεων χρησιμοποιώντας γραφήματα, αλλά και εικόνες, είναι χρήσιμες σε πολλές εφαρμογές για την ανάλυση και την προσέγγιση ενός προβλήματος, όπως για παράδειγμα, κοινωνικά δίκτυα, δίκτυα υπολογιστών, διαδρομές μεταφορών, και ακόμα και τις σχέσεις μεταξύ μορίων στη χημεία (Rosen 2019).



Εικόνα 1: Απεικόνιση γραφήματος

Από την παραπάνω εικόνα είναι αντιληπτό πως ένα γράφημα είναι ένας ευκατανόητος τρόπος απεικόνισης των σχέσεων μεταξύ αντικειμένων. Συγκεκριμένα, στο παράδειγμα αυτό, απεικονίζουμε τις διαδικασίες με κόμβους και ενώνουμε τους κόμβους με ακμές για να αναδείξουμε την σχέση μεταξύ τους. Οι αναπαραστάσεις αυτές, αντικειμένων και σχέσεων είναι χρήσιμες σε πολλές εφαρμογές για την ανάλυση και την προσέγγιση ενός προβλήματος (West 2001).

2.1 Ορισμός και Βασικά Στοιχεία

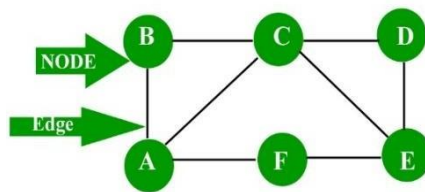
Η θεωρία γραφημάτων είναι ένας κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με τη μελέτη των γραφημάτων, τα οποία αποτελούνται από κόμβους (σημεία) και ακμές (γραμμές) που συνδέουν αυτούς τους κόμβους (Diestel 2017). Κάθε γράφημα G αποτελείται από μια δυάδα συνόλων (V, E) , όπου το V είναι το σύνολο των κορυφών και το E είναι ένα σύνολο ακμών (West 2001). Η αναπαράσταση ενός γραφήματος με εικόνες αναπαριστά με κύκλους τους κόμβους και τις ακμές με ευθείες γραμμές που ενώνουν κόμβους.

Τα βασικότερα στοιχεία-έννοιες στη θεωρία γραφημάτων περιλαμβάνουν:

Γράφημα (Graph): Ένα γράφημα είναι μια συλλογή κόμβων (ή κορυφών) και ακμών (ή συνδέσεων) μεταξύ αυτών. Συμβολίζεται συνήθως ως $G = (V, E)$, όπου V είναι το σύνολο των κόμβων και E είναι το σύνολο των ακμών.

Κόμβοι (Vertices): Τα σημεία ή οι κορυφές ενός γραφήματος.

Ακμές (Edges): Οι συνδέσεις μεταξύ των κόμβων. Μπορούν να είναι κατευθυνόμενες (δηλαδή να έχουν κατεύθυνση από έναν κόμβο σε έναν άλλο) ή μη-κατευθυνόμενες (χωρίς κατεύθυνση).



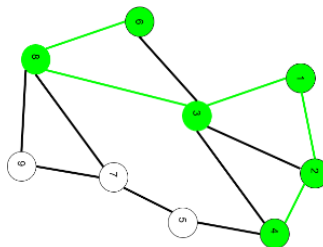
Εικόνα 2: Κόμβοι και ακμές γραφήματος

V : ένα σύνολο κόμβων

E : το σύνολο των ακμών που λειτουργούν ως συνδέσεις ανάμεσα στους κόμβους του V

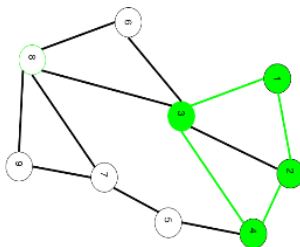
Ακμή $e = (u,v)$ είναι ένα ζευγάρι από κόμβους

Διαδρομές (Paths): Μια διαδρομή σε ένα γράφημα είναι μια ακολουθία ακμών που συνδέουν διαδοχικούς κόμβους.



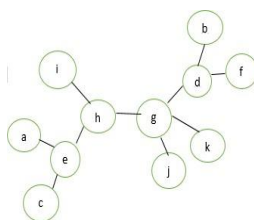
Εικόνα 3: Διαδρομή ενός Γραφήματος

Κύκλοι (Cycles): Μια διαδρομή που ξεκινά από έναν κόμβο και επιστρέφει σε αυτόν, χωρίς να επαναλαμβάνονται άλλοι κόμβοι στην πορεία.



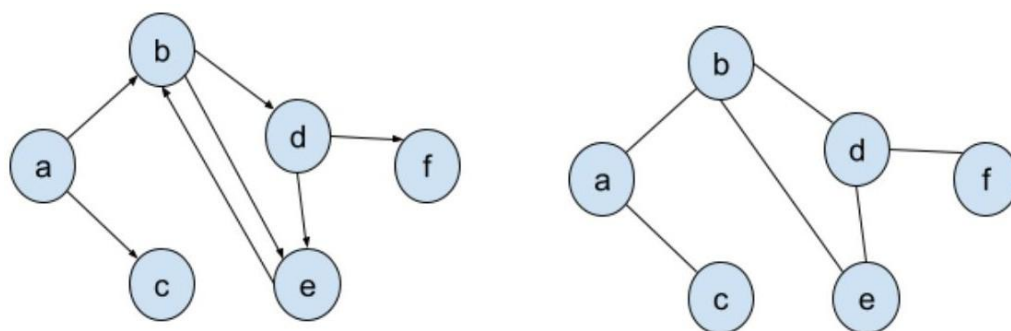
Εικόνα 4: Κύκλος ενός γραφήματος

Δέντρα (Trees): Ένα γράφημα χωρίς κύκλους που συνδέει όλους τους κόμβους. Τα δέντρα έχουν πολλές εφαρμογές σε υπολογιστικά δίκτυα και βάσεις δεδομένων.



Εικόνα 5: Γράφημα δέντρο

Τα γραφήματα χωρίζονται σε κατευθυνόμενα και Μη-κατευθυνόμενα. Ουσιαστικά, ο τύπος των ακμών ενός γραφήματος καθορίζει εάν το γράφημα είναι κατευθυνόμενο ή μη (West 2001). Όταν το σύνολο E περιλαμβάνει μη διατεταγμένα ζεύγη κόμβων, το γράφημα είναι μη κατευθυνόμενο, ενώ όταν το σύνολο E περιέχει διατεταγμένα ζεύγη, το γράφημα θεωρείται κατευθυνόμενο. Στα κατευθυνόμενα γραφήματα, δίνεται έμφαση στην κατεύθυνση της σχέσης μεταξύ δύο κόμβων.



Εικόνα 6: Κατευθυνόμενο και μη-κατευθυνόμενο γράφημα

Η τάξη ενός γραφήματος ορίζεται ως ο αριθμός των κορυφών του και συμβολίζεται με το γράμμα n . Αντίστοιχα, το μέγεθος ενός γραφήματος αναφέρεται στον αριθμό των ακμών του και συμβολίζεται με το γράμμα m . Για ένα γράφημα G με n κόμβους (τάξη n), ο αριθμός των ακμών m ικανοποιεί την ανίσωση $0 \leq m \leq n(n - 1)/2$. Αν δεν υπάρχουν καθόλου ακμές ($m = 0$), το γράφημα αποκαλείται ανεξάρτητο ή στα-θερό. Στην περίπτωση που υπάρχουν όλες οι δυνατές ακμές μεταξύ των κόμβων ($m = n(n - 1)/2$), τότε πρόκειται για πλήρες γράφημα. Ο αριθμός των ακμών που συνδέονται με μια κορυφή ονομάζεται βαθμός της κορυφής και συμβολίζεται ως $d(v_i)$. Στην περίπτωση των κατευθυνόμενων γραφημάτων, αφού κάθε ακμή έχει μια πηγή και έναν προορισμό, διακρίνουμε τον βαθμό της ακμής σε βαθμό πηγής και βαθμό προορισμού.

Μη-κατευθυνόμενο γράφημα :

$$d(v) = |N(v)|$$

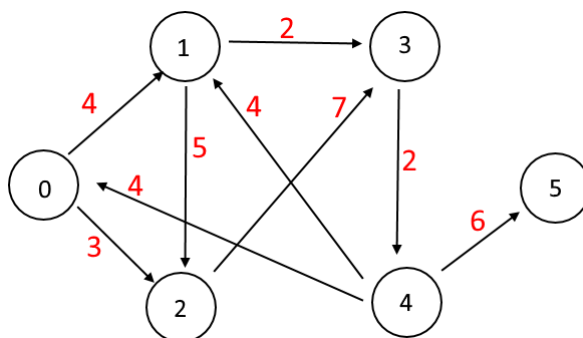
Κατευθυνόμενο γράφημα :

$$N_+(v) = \{ u \in V(G) : (v, u) \in E(G) \}, d_+(v) = |N_+(v)|$$

$$N_-(v) = \{ u \in V(G) : (u, v) \in E(G) \}, d_-(v) = |N_-(v)|$$

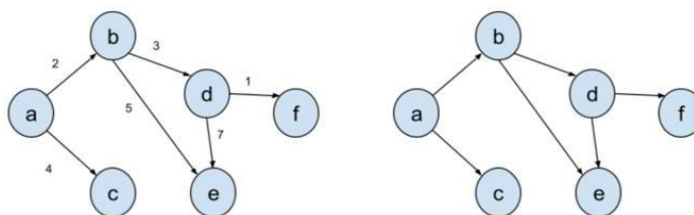
2.2 Βεβαρημένα Γραφήματα – Weighted graph

Τα βεβαρημένα γραφήματα είναι μια κατηγορία γραφημάτων όπου σε κάθε ακμή έχει αποδοθεί μια συγκεκριμένη τιμή ή "βάρος". Αυτό το βάρος μπορεί να αντιπροσωπεύει διάφορες ποσότητες, όπως απόσταση, κόστος, χρόνος ή οποιοδήποτε άλλο σχετικό μέγεθος που έχει σημασία για το πρόβλημα ή την εφαρμογή που εξετάζεται (Kleinberg & Tardos 2006). Στα βεβαρημένα γραφήματα, οι αλγόριθμοι και οι μέθοδοι ανάλυσης, όπως οι αλγόριθμοι του Dijkstra ή του Bellman-Ford, χρησιμοποιούνται συχνά για την εύρεση της πιο σύντομης ή της πιο φθηνής διαδρομής μεταξύ κορυφών (Cormen et al. 2009).



Εικόνα 7:Βεβαρημένο γράφημα

Συγκεκριμένα, όταν σε κάθε ακμή e ενός γραφήματος G αποδίδεται μια τιμή $w(e)$, το γράφημα χαρακτηρίζεται ως έμβαρο (weighted) και η τιμή αυτή ονομάζεται βάρος της ακμής e . Ένα έμβαρο γράφημα μπορεί να είναι είτε κατευθυνόμενο είτε μη κατευθυνόμενο. Τα βάρη μπορούν να αντιπροσωπεύουν διάφορες έννοιες, όπως για παράδειγμα αποστάσεις, κόστη ή, στην περίπτωση της εξόρυξης διαδικασιών, να υποδεικνύουν πόσες φορές έχει πραγματοποιηθεί μια μετάβαση από το ένα γεγονός στο άλλο. Συχνά, τα έμβαρα γραφήματα αναφέρονται και ως δίκτυα (networks). Το συνολικό βάρος ενός βαρύγραφου $G(V, E)$ προκύπτει από το άθροισμα των επιμέρους βαρών που έχουν οι ακμές του.



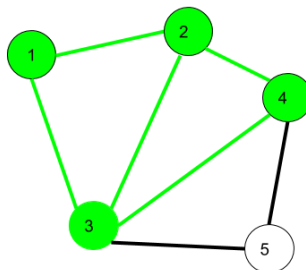
Εικόνα 8: Βεβαρημένο γράφημα και μη-βεβαρημένο γράφημα

2.3 Ακολουθίες κόμβων και ακμών (Περίπατος, Μονοπάτι και Ίχνος)

Περίπατος είναι μια ακολουθία κόμβων $W = (u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_n)$ του

γραφήματος

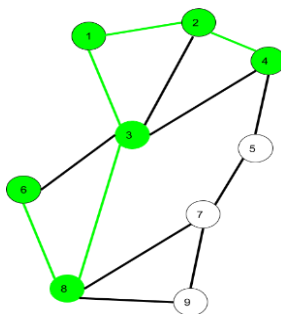
$G(V, E)$ καλείται περίπατος (walk), όταν η ακμή $u_{i-1}u_i$ ανήκει στο σύνολο ακμών E για κάθε $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Για να αποδοθεί η έννοια του περιπάτου, συχνά χρησιμοποιούνται οι όροι αλυσίδα (chain) ή ακολουθία ακμών. Το μήκος του περιπάτου W ισούται με τον αριθμό των ακμών του, δηλαδή $l(W) = n$.



Εικόνα 9: Πρίπατος γραφήματος

Το $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$ είναι ένας περίπατος

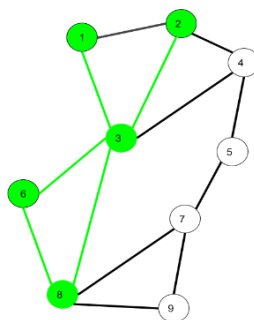
Μονοπάτι μήκους n ορίζεται ως η ακολουθία κόμβων $P = (u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_n)$, ό-ταν η ακμή $u_{i-1}u_i$ ανήκει στο σύνολο ακμών E για κάθε $i = 1, 2, 3, \dots, n$ και δεν υπάρ-χει κάποιος κόμβος στην ακολουθία P που να επαναλαμβάνεται, δηλαδή κάθε κόμ-βος εμφανίζεται το πολύ μία φορά.



Εικόνα 10: Μονοπάτι ενός γραφήματος

Το $6 \rightarrow 8 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ είναι ένα μονοπάτι

Ίχνος, εκτός από τον περίπατο, υπάρχει και το ίχνος (trail). Η διαφορά μεταξύ των δύο έγκειται στο ότι σε ένα ίχνος, καμία ακμή δεν μπορεί να εμφανίζεται περισσότερες από μία φορά. Με διαφορετικά λόγια, μια ακολουθία κόμβων $T = (u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_n)$ του γραφήματος G θεωρείται ίχνος, αν η ακμή $u_{i-1}u_i$ ανήκει στο σύνολο ακμών E για κάθε $i = 1, 2, 3, \dots, n$ και δεν υπάρχει κανένα ζεύγος διαδοχικών κόμβων του ίχνους T που να επαναλαμβάνεται.



Εικόνα 11: Ίχνος ενός γραφήματος

Το $1 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ είναι ένα ίχνος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Όταν μιλάμε για πιθανότητα στην καθημερινή ζωή, εννοούμε το βαθμό σιγουριάς που έχουμε ότι ένα αβέβαιο γεγονός θα συμβεί. Στα μαθηματικά, με τον όρο πιθανότητα εννοούμε μια μέθοδο με την οποία μπορούμε να ποσοτικοποιούμε την αβεβαιότητα ή τις πιθανότητες εμφάνισης ενός γεγονότος σε ένα πείραμα ή σε μια διαδικασία. Η πιθανότητα ενός γεγονότος εκφράζεται ως ένας αριθμός μεταξύ 0 και 1, όπου:

- 0 σημαίνει ότι το γεγονός είναι αδύνατο να συμβεί.
- 1 σημαίνει ότι το γεγονός είναι σίγουρο ότι θα συμβεί.
- Κάθε τι μεταξύ 0 και 1 εκφράζει τη "δυνατότητα" του γεγονότος να συμβεί, δηλαδή την πιθανότητα του να συμβεί.

3.1 Ορισμοί και Βασικές Ιδιότητες Πιθανοτήτων

Η έννοια της πιθανότητας αναφέρεται με 3 διαφορετικούς ορισμούς:

1. Ο ορισμός της πιθανότητας κατά Von Mises, γνωστός και ως "στατιστικός" ορισμός, δηλώνει ότι η πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου A είναι η οριακή σχετική συχνότητα εμφάνισης του A (Feller 196. Δηλαδή, αν επαναλάβουμε το ίδιο πείραμα n φορές, τότε $f_n(A)$ θα είναι ο αριθμός των εμφανίσεων του ενδεχομένου A στις n εκτελέσεις.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_n(A)}{n} \right)$$

2. Ο ορισμός πιθανότητας κατά Laplace, γνωστός και ως "κλασικός" ορισμός της πιθανότητας, βασίζεται στην έννοια ίσης πιθανότητας (Grimmett & Stirzaker 2001). Σύμφωνα με αυτόν, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A υπολογίζεται ως ο λόγος του αριθμού των ευνοϊκών περιπτώσεων προς τον συνολικό αριθμό των δυνατών περιπτώσεων, υποθέτοντας ότι είναι όλες εξίσου πιθανές να συμβούν.

$$P(E_1) = \frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων ενδεχομένου } E_1}{\text{Πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του δειγματικού χώρου } E_1}$$

3. Ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας από τον Kolmogorov δεν βασίζεται σε υπολογιστικό τύπο της $P(A)$, αλλά σε ιδιότητες που μια συνολοσυνάρτηση πρέπει να ικανοποιεί ώστε να θεωρείται «πιθανότητα» (Kolmogorov 1956).

Σύμφωνα με τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας από τον Kolmogorov :

Μη αρνητικές τιμές: Η πιθανότητα ενός γεγονότος είναι πάντα ένας αριθμός που δεν μπορεί να είναι αρνητικός και η ελάχιστη τιμή είναι το 0.

Βεβαιότητα: Αν ένα γεγονός είναι σίγουρο ότι θα συμβεί, του δίνουμε πιθανότητα 1. Υπόψιν πως η πιθανότητα όλων των πιθανών περιπτώσεων μαζί είναι 100%.

Προσθετικότητα: Αν υπάρχουν δύο ή περισσότερα γεγονότα που δεν μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα (δηλαδή αμοιβαία αποκλειόμενα), η πιθανότητα να συμβεί το ένα ή το άλλο είναι απλά το άθροισμα των πιθανοτήτων τους.

Αυτά τα θεμελιώδη στοιχεία βοηθούν στο πως να υπολογίζουμε την πιθανότητα διαφορετικών καταστάσεων με έναν τυποποιημένο τρόπο. Παρακάτω περιγράφονται οι σχέσεις μεταξύ ενδεχομένων

$A \text{ ή } B$	$A \cup B$
$A \text{ και } B$	$A \cap B$
Όχι A	A^C
$A \text{ και όχι } B$	$A \setminus B = A \cap B^C$

Πίνακας 1: Σχέσεις μεταξύ ενδεχομένων

Οι βασικές ιδιότητες των πιθανοτήτων (DeGroot & Schervish 2012) είναι:

- $P(A^C) = 1 - P(A)$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
- $P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1 = 1 - P(A^C) - P(B^C)$
- Αν $B \subseteq A$ τότε $P(B) \leq P(A)$

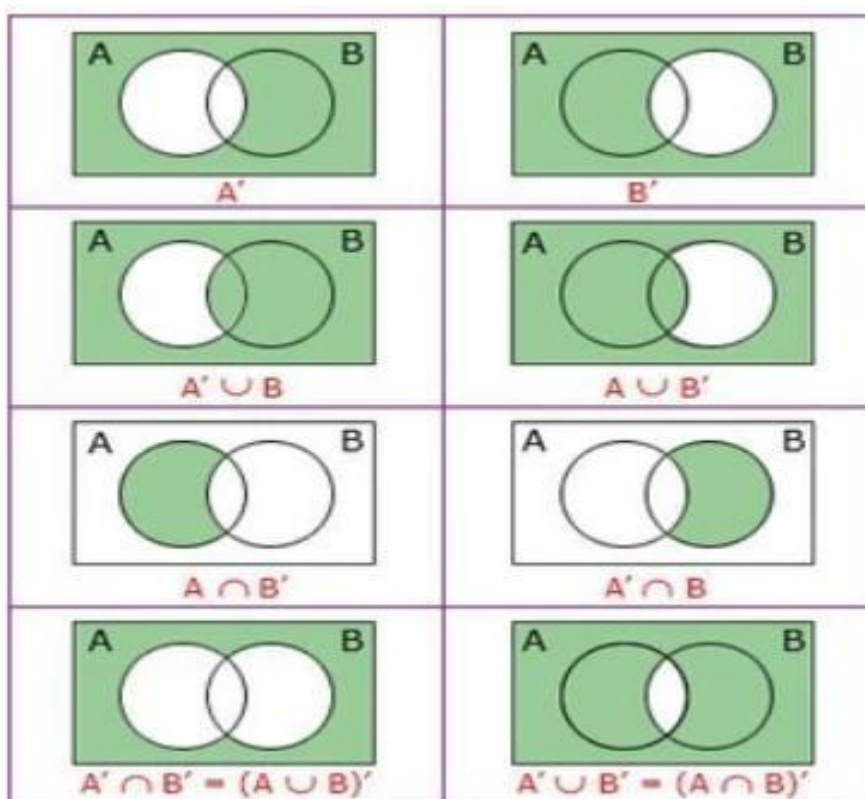
Γενικότερα γνωστές ιδιότητες των πιθανοτήτων

$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	αντιμεταθετική ιδιότητα
$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap \Gamma$	$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup \Gamma$	προσεταιριστική ιδιότητα
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	
$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \Omega = A$	
$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$	$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$	επιμεριστική ιδιότητα
$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	τύποι De Morgan

Πίνακας 2: Ιδιότητες Πιθανοτήτων

3.2 Βασικά στοιχεία της θεωρίας πιθανοτήτων

Η θεωρία των πιθανοτήτων έχει ως θεμέλια τα σύνολα (sets) πάνω και στα οποία στηρίζεται καθώς, σύμφωνα με τον Α.Ν. Κοιμογορον, ασχολείται με την πραγματοποίηση πειραμάτων, τα οποία αποτελούνται από σύνολα διακριτών αποτελεσμάτων. Για παράδειγμα η ρίψη ενός νομίσματος είναι ένα πείραμα και έχει ένα σύνολο αποτελεσμάτων την κορώνα ή τα γράμματα. Επιπλέον, η επιλογή ενός μαθητή από το σύνολο μαθητών ενός τμήματος και ο προσδιορισμός του αν ο μαθητής πέρασε ένα συγκεκριμένο μάθημα ή όχι. Ωστόσο η εξαγωγή μιας πιθανότητας δεν είναι το ίδιο εύκολη σε όλα τα πειράματα. Αρχικά, όταν ένα πείραμα δεν είναι καλά ορισμένο δεν δύναται να ορίσουμε μια πιθανότητα. Συγκεκριμένα, όταν λέμε καλά ορισμένο πείραμα, εννοούμε να μην έχει προσδιοριστεί ένα σύνολο αποτελεσμάτων και συνεπώς μέχρι το σύνολο αυτό να προσδιοριστεί, το πείραμα δεν είναι καλά καθορισμένο. Παρακάτω δίνουμε τα διαγράμματα Venn δύο συνόλων

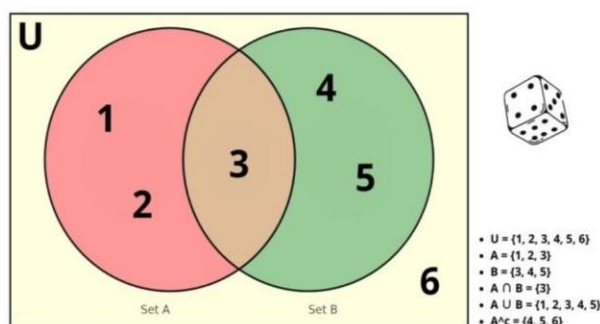


Εικόνα 12: Διαγράμματα Venn δύο συνόλων

Δειγματικός Χώρος: Σε ένα καλά ορισμένο πείραμα, το σύνολο όλων των πιθανών εκβάσεων ονομάζεται δειγματικός χώρος (sample space) και συμβολίζεται με Ω (Ross 2014) .

Π.χ. $\Omega = \{K, Γ\}, \{1,2,3,4\}, [0,1]$.

Για παράδειγμα, στην περίπτωση του ζαριού, (όπου κατά την ρίψη του, το σύνολο των αποτελεσμάτων του είναι οι έξι πλευρές του ζαριού) έχουμε ένα σύνολο πιθανών αποτελεσμάτων, τα οποία είναι η κάθε πλευρά του ζαριού. Κατά συνέπεια, ορίζουμε ως Ω το σύνολο των δυνατών εκβάσεων, δηλαδή $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.



Εικόνα 12: Δειγματικός χώρος

Στην περίπτωση των πεπερασμένων δειγματικών χώρων, κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου αναφέρεται ως ενδεχόμενο και λέμε ότι το A συνέβη όταν το αποτέλεσμα του πειράματος ανήκει στο σύνολο A . Ένα υποσύνολο που περιλαμβάνει ακριβώς ένα στοιχείο καλείται στοιχειώδες ενδεχόμενο. Στο παράδειγμα με το ζάρι, μπορούμε να θεωρήσουμε πως το $A = \{2,4,6\}$ εκφράζει

την ενδεχόμενη ρίψη με άρτιο αποτέλεσμα. Άρα, αν προκύψει 6, το A έχει πραγματοποιηθεί.

3.3 Συνάρτηση πιθανοτήτων

Η συνάρτηση πιθανοτήτων είναι μια συνάρτηση που δίνει σε κάθε ενδεχόμενο (υποσύνολο του δειγματικού χώρου) μια πραγματική τιμή, η οποία αντιπροσωπεύει την πιθανότητα εμφάνισης αυτού του ενδεχομένου. Συγκεκριμένα, αν P είναι η συνάρτηση πιθανοτήτων και A ένα ενδεχόμενο, τότε η τιμή $P(A)$ αντιπροσωπεύει την πιθανότητα το ενδεχόμενο A να συμβεί. Αν έχουμε έναν δειγματικό χώρο Ω με n διακριτά στοιχεία, δηλαδή $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, τότε μια συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε υποσύνολο $E \subseteq \Omega$ μια τιμή $P(E)$, ονομάζεται συνάρτηση πιθανότητας (Paroulis & Pillai 2002), υπό τις εξής προϋποθέσεις:

- $0 \leq P(\{e_i\}) \leq 1$, για κάθε i όπου $1 \leq i \leq n$
- $P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \dots + P(\{e_n\}) = 1$
- Για κάθε ενδεχόμενο $E = \{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ik}\}$, το οποίο δεν είναι στοιχειώδες ενδεχόμενο, ισχύει: $P(E) = P(\{e_{i1}\}) + P(\{e_{i2}\}) + \dots + P(\{e_{ik}\})$

3.4 Σχετική συχνότητα

Το ζευγάρι (Ω, P) είναι χώρος πιθανότητας. Ας θεωρήσουμε το πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος. Ο δειγματικός χώρος Ω περιλαμβάνει τα δύο πιθανά αποτελέσματα, δηλαδή κορώνα και γράμματα. Αν θεωρήσουμε ότι όλα τα ενδεχόμενα έχουν ίση πιθανότητα, τότε η πιθανότητα $P(\{e\}) = 1/2$ για κάθε $e \in \Omega$. Συνεπώς, αν A είναι η κορώνα και B τα γράμματα, τότε ισχύει $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/2$ και $P(A, B) = 2/2$.



Εικόνα 13: Ρίψη νομίσματος

Όταν δύο στοιχειώδη ενδεχόμενα θεωρούνται ισοπίθανα όταν δεν υπάρχει κάποιος λόγος να θεωρήσουμε ότι το ένα είναι πιο πιθανό να συμβεί από το άλλο. Σύμφωνα με αυτήν την αντίληψη, για ένα πείραμα με n στοιχεία, η πιθανότητα εμφάνισης κάθε στοιχείου είναι $1/n$. Αυτή η μέθοδος για την εκχώρηση πιθανοτήτων ονομάζεται αναλογία (ratio) και χρησιμοποιείται συχνά στην απονομή πιθανοτήτων σε παιχνίδια τύχης, όπως για παράδειγμα η ρίψη ενός ζαριού.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα “πειραγμένο” ζάρι, του οποίου ορισμένες πλευρές είναι πιο πιθανό να εμφανιστούν από άλλες. Λόγω αυτής της ιδιαιτερότητας, αντιλαμβανόμαστε ότι τα πιθανά αποτελέσματα του πειράματος δεν είναι ισοπίθανα, γεγονός που καθιστά αδύνατο τον υπολογισμό τους με τη μέθοδο της αναλογίας. Για να αντιμετωπιστούν τέτοιες περιπτώσεις, το 1919 ο Richard von Mises εισήγαγε την έννοια της σχετικής συχνότητας (Feller 1968). Συγκεκριμένα, η σχετική συχνότητα ενός γεγο-νότος A , συμβολιζόμενη ως f_A , σε n επαναλήψεις ενός πειράματος τύχης E , ορίζεται ως ο λόγος x_A/n .

$$f_A = \frac{x_A}{n}$$

Η σχετική συχνότητα f_A ικανοποιεί τις εξής βασικές ιδιότητες:

- $0 < f_A < 1$
- $f_A = 1$ αν και μόνο αν το A συμβαίνει σε όλες τις επαναλήψεις του E .
- $f_A = 0$ αν και μόνο αν το A δεν συμβαίνει ποτέ στο E .

- Αν τα γεγονότα A και B είναι ασυμβίβαστα, τότε η σχετική συχνότητα του $A \cup B$ είναι

$$f_{A \cap B} = f_A + f_B$$

- Το f_A είναι συνάρτηση του n και «συγκλίνει» στην πιθανότητα $P(A)$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_A)$$

Σύμφωνα με αυτήν, εάν ένα πείραμα επαναληφθεί πολλές φορές, η πιθανότητα για κάθε αποτέλεσμα ισούται με το όριο του λόγου των εμφανίσεων του συγκεκριμένου αποτελέσματος προς τον συνολικό αριθμό επαναλήψεων, καθώς ο αριθμός των επαναλήψεων τείνει στο άπειρο. Συγκεκριμένα, όσον αφορά το παράδειγμα του πειραγμένου ζαριού, η πιθανότητα το ζάρι να δείξει τον αριθμό έξι μπορεί να υπολογιστεί ως το όριο της σχετικής συχνότητας. Αν υποθέσουμε ότι το ζάρι δείχνει έξι k φορές στις m ρίψεις, τότε η πιθανότητα $P(6)$ να φέρει έξι εκφράζεται ως:

$$P(6) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\text{αριθμός εμφάνισης του } 6}{m} \right) = \frac{k}{m}$$

Άρα, αν ρίξουμε το ζάρι 10 φορές και 4 φορές το ζάρι φέρει 6 η πιθανότητα μια ρίψη του ζαριού να φέρει 6 είναι 0.4. Δια μέσου αυτής τη προσέγγισης, η πιθανότητα που προκύπτει δεν είναι ιδιότητα μιας δοκιμής ενός πειράματος αλλά ιδιότητα ενός συνόλου δοκιμών.

Ωστόσο, όταν θέλουμε να εκτιμήσουμε μια πιθανότητα που δεν σχετίζεται με αναλογίες ή με επαναλήψεις πειραμάτων, όπως για παράδειγμα το να κυκλοφορήσει ένα νέο προϊόν στην αγορά αντιλαμβανόμαστε πως αυτή η εκτίμηση δεν προέρχεται από στατιστικά δεδομένα ή πειράματα, αλλά είναι απλώς μια εκτίμηση των συνθηκών της αγοράς. Πιστεύουμε ότι υπάρχει μια πιθανότητα το νέο προϊόν να έχει επιτυχία ή να αποτύχει, με βάση την ανάλυση των τάσεων και των προτιμήσεων των καταναλωτών. Στο πλαίσιο της παρούσας μελέτης, καθώς και στον τομέα των Μπεϋζιανών δικτύων, αξιοποιείται αυτή η έννοια της πιθανότητας, η οποία αναφέρεται στον βαθμό πεποίθησης.

3.5 Τυχαίες μεταβλητές / Από κοινού πιθανότητες

Αν και ο ορισμός που αναφέραμε στο κεφάλαιο των πιθανοτήτων, όσον αφορά τις τυχαίες μεταβλητές και την κοινή πιθανότητα, μπορεί θεωρητικά να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε περίπτωση πιθανοτήτων, για τον Μπεϋζιανό συμπερασμό δεν είναι εύκολη η κατανόηση της εφαρμογής τους. Γι' αυτό, είναι απαραίτητο να βρούμε μια εναλλακτική διατύπωση που θα διευκολύνει τη χρήση τυχαίων μεταβλητών και κοινών πιθανοτήτων στον Μπεϋζιανό συμπερασμό.

Στον Μπεϋζιανό συμπερασμό λοιπόν, υπάρχει πάντα μια οντότητα με ορισμένα χαρακτηριστικά, την κατάσταση των οποίων θέλουμε να καθορίσουμε, γεγονός όμως που δεν μπορούμε να επιτύχουμε με σιγουριά. Για αυτό, προσπαθούμε να προσδιορίσουμε πόσο πιθανό είναι ένα συγκεκριμένο χαρακτηριστικό να βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη κατάσταση. Μια οντότητα μπορεί να αναφέρεται είτε σε ένα μεμονωμένο σύστημα είτε σε ένα σύνολο συστημάτων. Ένα παράδειγμα μεμονωμένου συστήματος είναι ένας νέος ασθενής σε ένα νοσοκομείο, για τον οποίο θα θέλαμε να αξιολογήσουμε με βάση τα ιατρικά του δεδομένα αν απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή ή θεραπεία. Αντίθετα, ένα παράδειγμα συνόλου οντοτήτων μπορεί να είναι τα ιατρικά αρχεία ενός ολόκληρου τμήματος του νοσοκομείου, όπου το ζητούμενο μπορεί να είναι η ανίχνευση πιθανών ασθενειών ή επιδημιών.

Στην περίπτωση που μια τυχαία μεταβλητή αντιπροσωπεύει ένα χαρακτηριστικό μιας οντότητας που μοντελοποιείται, μπορεί να μην είμαστε σίγουροι για τις τιμές ή τις καταστάσεις αυτού του χαρακτηριστικού. Για να αντιμετωπίσουμε αυτή την δυσκολία, αναπτύσσουμε σχέσεις πιθανοτήτων μεταξύ των μεταβλητών. Όταν αναφερόμαστε σε σύνολα οντοτήτων, υποθέτουμε ότι οι οντότητες του συνόλου έχουν τις ίδιες σχέσεις πιθανοτήτων για τις μεταβλητές που χρησιμοποιούνται μέσα στο μοντέλο. Χωρίς αυτή την υπόθεση, η ανάλυση σε Μπεϋζιανό επίπεδο δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί.

Για να μοντελοποιήσουμε προβλήματα, παρόμοια με αυτά που προαναφέρθηκαν, μπορούμε να ορίσουμε μια τυχαία μεταβλητή X ως το σύμβολο που αντιπροσωπεύει οποιοδήποτε σύνολο τιμών και ονομάζεται χώρος του X . Για ευκολία, υποθέτουμε πως ο χώρος του X είναι μετρήσιμος ωστόσο, η συγκεκριμένη θεώρηση επεκτείνεται και στην περίπτωση που ο χώρος δεν είναι μετρήσιμος.

Έστω ένα σύνολο n τυχαίων μεταβλητών $V = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$. Η συνάρτηση με την οποία αναθέτουμε έναν πραγματικό αριθμό $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$ σε οποιοδήποτε συνδυασμό τιμών του x_i τέτοιο ώστε η τιμή του x_i να επιλέγεται από το χώρο του X_i , ονομάζεται από κοινού κατανομή πιθανοτήτων μιας τυχαίας μεταβλητής του V αν και εφόσον ικανοποιεί τις κάτωθι συνθήκες :

- Για κάθε συνδυασμό τιμών του x_i ισχύει πως :
$$0 \leq P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \leq 1$$
- Έχουμε πως : $\sum_{x_1, x_2, \dots, x_n} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$

3.6 Δεσμευμένη πιθανότητα και ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Μία πολύ σημαντική έννοια στον τομέα των πιθανοτήτων, που αποτελεί θεμελιώδες στοιχείο των Μπεϋζιανών δικτύων, είναι η συνθήκη της δεσμευμένης πιθανότητας. Με απλά λόγια, η δεσμευμένη πιθανότητα αναφέρεται στην πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός A , γνωρίζοντας ότι έχει ήδη συμβεί ένα γεγονός B . Για παράδειγμα, στην ρουλέτα ποια είναι η πιθανότητα να φέρει κόκκινο, αν γνωρίζουμε ότι είχε έρθει μαύρο νωρίτερα.

Αρχικά, η έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας προήλθε από την εκτίμηση πιθανοτήτων ως αναλογίες. Σε αυτήν την περίπτωση, η πιθανότητα του A υπό τον όρο ότι συνέβη το B , δηλαδή $P(A|B)$, είναι το πηλίκο των στοιχείων του B που ανήκουν επίσης στο A . Έστω ότι A και B είναι γεγονότα με $P(B) \neq 0$. Ορίζουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα του A υπό το γεγονός B ως $P(A|B)$ (Ross 2014), η οποία ορίζεται ως εξής:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ο όρος ανεξάρτητα ενδεχόμενα χρησιμοποιείται συχνά για να δηλώσει ότι δύο γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα όταν το ένα δεν επηρεάζει το άλλο. Για παράδειγμα, αν ρίξουμε ένα ζάρι και δούμε ότι ο αριθμός που προήλθε είναι 4, αυτό δεν επηρεάζει την πιθανότητα το ζάρι να δείξει αριθμό 6 στην επόμενη ρίψη.

Έστω τα ενδεχόμενα A και B , λέμε πως τα δύο αυτά ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα όταν :

- $P(A|B) = P(A)$ και $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$.
- $P(A) = 0$ ή $P(B) = 0$.

Επίσης, δύο ενδεχόμενα A και B είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα όταν δεδομένου ενός ενδεχομένου Γ , όπου ισχύει πως $P(\Gamma) \neq 0$ και τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω :

- $P(A|B \cap \Gamma) = P(A|B)$ και $P(A|\Gamma) \neq 0, P(B|\Gamma) \neq 0$.
- $P(A|\Gamma) = 0$ ή $P(B|\Gamma) = 0$.

Ένας πολύ σημαντικός κανόνας σχετικά με τις δεσμευμένες πιθανότητες είναι ο εξής: Έστω n ενδεχόμενα ($E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$) τέτοια ώστε το $E_i \cap E_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$, και $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_n = \Omega$. Αυτά τα ενδεχόμενα αποκαλούνται αμοιβαία αποκλειόμενα. Σε αυτή την περίπτωση, το θεώρημα της συνολικής πιθανότητας αναφέρει ότι για κάθε ενδεχόμενο A (Grimmett & Stirzaker 2001) ισχύει:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap E_i)$$

Αν $P(E_i) \neq 0$, τότε $P(A \cap E_i) = P(A|E_i)P(E_i)$. Επομένως όταν $P(E_i) \neq 0$ για κάθε i το θεώρημα παίρνει την εξής μορφή:

$$P(A) = \sum P(A|E_i)P(E_i)$$

3.7 Θεώρημα του Bayes

Το θεώρημα ονομάστηκε έτσι προς τιμήν του Βρετανού κληρικού Τόμας Μπέιζ, ο οποίος ήταν ο πρώτος που έδειξε πώς τα νέα στοιχεία μπορούν να ανανεώσουν τις εκάστοτε πεποιθήσεις, όπου αργότερα, ο Πιερ Σιμόν Λαπλάς παρουσίασε την πιο σύγχρονη διατύπωσή του το 1812 στο βιβλίο "Théorie analytique des probabilités". Τέλος ο Χάρολντ Τζέφρις έθεσε το θεώρημα σε αξιωματική βάση, δηλώνοντας ότι το θεώρημα Bayes είναι για τη θεωρία πιθανοτήτων ό,τι είναι το πυθαγόρειο θεώρημα για τη γεωμετρία.



Εικόνα 14: Ο Tomas Bayes

Το θεώρημα Bayes (Ross 2014) λοιπόν, ορίστηκε μαθηματικά με την ακόλουθη εξίσωση:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Όπου A και B είναι ενδεχόμενα τέτοια ώστε $P(A) \neq 0$ και $P(B) \neq 0$, ενώ:

- $P(A)$ και $P(B)$ είναι οι πιθανότητες των A και B , χωρίς να υπάρχει κάποια δεδομένη συνθήκη.
- $P(A | B)$, η υπό συνθήκη πιθανότητα, είναι η πιθανότητα του A δεδομένου του B να είναι αληθής.
- $P(B | A)$, είναι η πιθανότητα του B δεδομένου του A να είναι αληθής.

Επιπλέον, αν έχουμε n αμοιβαία αποκλειόμενα ενδεχόμενα A_1, A_2, \dots, A_n , ώστε $P(A_i) \neq 0$ για κάθε i όπου $1 \leq i \leq n$, προκύπτει:

$$P(A_i | B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)}$$

Και οι δυο παραπάνω εξισώσεις αναφέρονται ως το θεώρημα Bayes, και με τη χρήση της πρώτης εξίσωσης μπορούμε να υπολογίσουμε το $P(A|B)$, αν γνωρίζουμε το $P(B|A)$, το $P(A)$ και το $P(B)$, ενώ με την δεύτερη εξίσωση μας δίνεται η δυνατότητα να υπολογίσουμε το $P(A_i|B)$ αν γνωρίζουμε το $P(B|A_i)$, το $P(A_i)$ για $1 \leq i \leq n$.

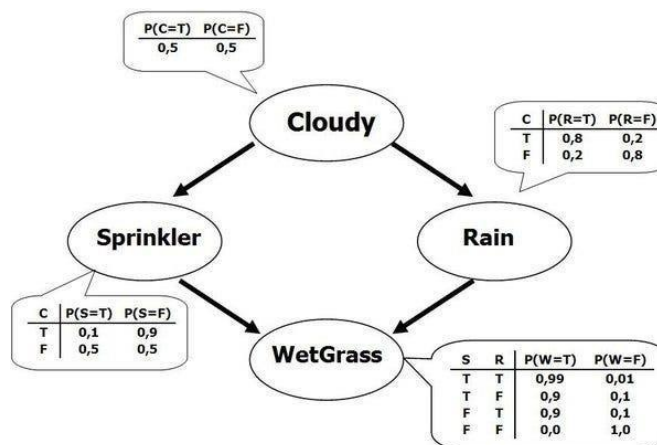
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΜΠΕΥΖΙΑΝΑ ΔΙΚΤΥΑ

Στα προηγούμενα κεφάλαια, εξετάσαμε θεμελιώδεις έννοιες που αφορούν τις πιθανότητες, τα γραφήματα και τα γραφικά μοντέλα, προκειμένου να αποκτήσουμε τις απαραίτητες γνώσεις για να προχωρήσουμε στην ανάλυση των Μπεϋζιανών δικτύων (Bayesian Networks). Σε αυτό το κεφάλαιο, θα επικεντρωθούμε στα Μπεϋζιανά δίκτυα, ξεκινώντας από διάφορους εναλλακτικούς ορισμούς για τις τυχαίες μεταβλητές και τις κοινές πιθανότητες, διευκολύνοντας έτσι την εφαρμογή τους στη διαδικασία του Μπεϋζιανού συμπερασμού.

4.1 Ορισμός Μπεϋζιανών Δικτύων

Τα Μπεϋζιανά Δίκτυα (Bayesian Networks - BNs) λοιπόν, αποτελούν γραφικά μοντέλα που εφαρμόζονται για συμπεραματολογία υπό συνθήκες αβεβαιότητας. Μέσω αυτών, μπορούμε να αναπαραστήσουμε και να δικαιολογήσουμε τις αιτιακές σχέσεις μεταξύ διαφορετικών μεταβλητών. Αυτές οι άμεσες συνδέσεις μπορεί να υποδηλώνουν κάποιες φορές σχέσεις εξάρτησης. Επιπλέον, τα Μπεϋζιανά Δίκτυα προσδιορίζουν την ποσοτική δύναμη των σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών, έτσι ώστε να γίνεται αυτόματη επικαιροποίηση των πιθανολογικών πεποιθήσεων όταν καθίστανται διαθέσιμες νέες πληροφορίες. Οι κόμβοι των Μπεϋζιανών Δικτύων αντιπροσωπεύουν ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών σχετικών με το θέμα που θέλουμε να διερευνήσουμε. Οι άμεσες εξαρτήσεις μεταξύ των μεταβλητών αναπαρίστανται μέσω κατευθυνόμενων ακμών που συνδέουν ζεύγη κόμβων. Υποθέτοντας ότι οι μεταβλητές είναι διακριτές, η ισχύς της σχέσης μεταξύ τους αξιολογείται με τη βοήθεια κατανομών πιθανοτήτων υπό συνθήκες που συνδέονται με κάθε κόμβο (Pearl 1988; Jensen & Nielsen 2007)..



Εικόνα 15 Παράδειγμα Μπεϋζιανού δικτύου

Συχνά χρειάζεται να υπολογίσουμε την πιθανότητα ενός αβέβαιου γεγονότος με βάση ορισμένα στοιχεία που έχουμε παρατηρήσει. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να προσδιορίσουμε την πιθανότητα να βρέξει, εάν παρατηρήσουμε συγκεκριμένα σημάδια, όπως συννεφιά ή αλλαγές στη θερμοκρασία. Τέτοιου είδους προβλήματα μπορεί να είναι πολύπλοκα, καθώς περιλαμβάνουν πολλές αλληλεξαρτώμενες μεταβλητές, οι οποίες ενδέχεται να προέρχονται από διάφορους παράγοντες. Συνήθως, στην πράξη είναι πιο απλό να υπολογιστεί η αντίστροφη υπό όρους πιθανότητα (reversed conditional probability), όπως το να παρατηρούμε ότι βρέχει, γνωρίζοντας ότι υπάρχουν συγκεκριμένες καιρικές συνθήκες. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η Μπεϋζιανή προσέγγιση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη.

4.2 Γραφικά Μοντέλα

Η γραφική αναπαράσταση αναφέρεται στη χρήση οπτικών διαγραμμάτων για τη σαφή απεικόνιση και την απλοποίηση σύνθετων συνόλων δεδομένων. Τα δεδομένα εισάγονται στη διαδικασία οπτικοποίησης και στη συνέχεια αποδίδονται μέσω διαφόρων συμβόλων, όπως για παράδειγμα, γραμμές σε ένα γραμμικό γράφημα, στήλες σε ένα ραβδογράφημα ή τμήματα σε ένα κυκλικό διάγραμμα (γράφημα πίτας). Η γραφική απεικόνιση επιτρέπει στους χρήστες να κατανοήσουν πιο εύκολα τις πληροφορίες σε σύγκριση με την αριθμητική ανάλυση.

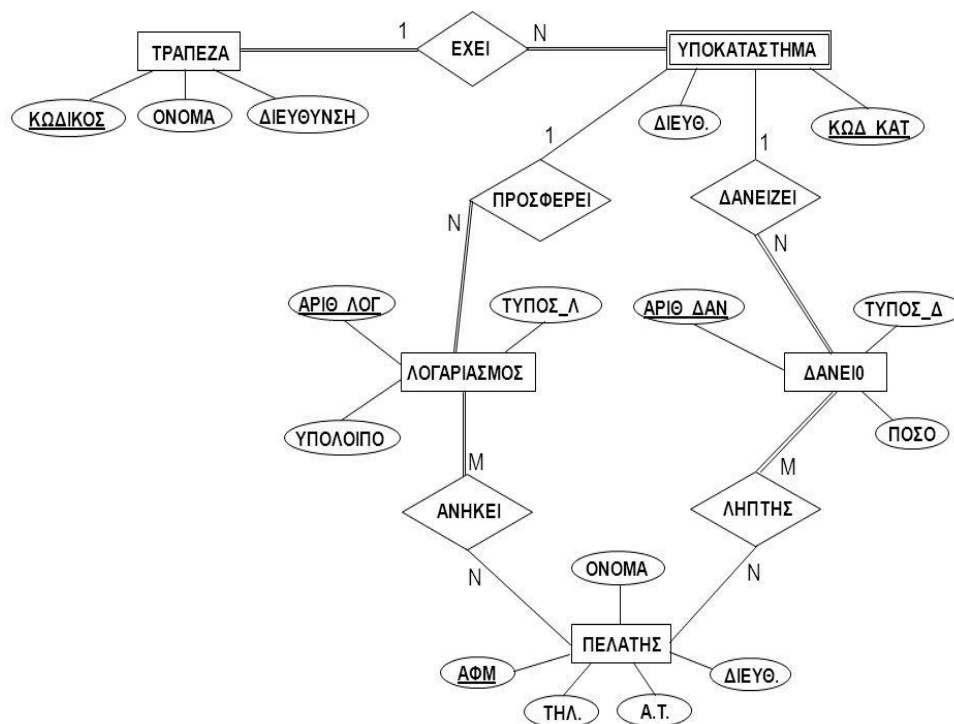
Τα οπτικά διαγράμματα προσφέρουν τη δυνατότητα ταχείας αναγνώρισης γενικών τάσεων, ενώ αναδεικνύουν φαινόμενα, ανωμαλίες και σχέσεις μεταξύ των δεδομένων που διαφορετικά θα μπορούσαν να παραλειφθούν. Επιπλέον, συμβάλλουν στην πρόβλεψη τάσεων και στη βελτίωση της λήψης αποφάσεων (βάσει δεδομένων). Ο τύπος γραφικής απεικόνισης που επιλέγεται εξαρτάται από τη φύση των δεδομένων που εξετάζονται.

Όπως έχουμε προαναφέρει στο κεφάλαιο της Θεωρίας Γραφημάτων, για να ορίσουμε τη γραφική αναπαράσταση των Μπεϋζιανών Δικτύων, είναι απαραίτητη η κατανόηση της θεμελιώδους έννοιας της Θεωρίας Γραφημάτων. Ένα Πιθανολογικό Γραφικό Μοντέλο (Graphical Model - GM) αποτελεί ένα εργαλείο για την αναπαράσταση μιας κοινής κατανομής πιθανοτήτων, βασιζόμενο στην υπόθεση της ανεξαρτησίας υπό όρους (Conditional Independence - CI) (Koller & Friedman 2009)α .

Πιο συγκεκριμένα, οι κόμβοι του γραφήματος αντιστοιχούν σε τυχαίες μεταβλητές, ενώ οι σχέσεις ανεξαρτησίας υπό όρους αναπαρίστανται μέσω των ακμών. Υπάρχουν διάφοροι τύποι πιθανολογικών γραφικών μοντέλων, τα οποία μπορεί να είναι κατευθυνόμενα, μη κατευθυνόμενα ή υβριδικά, συνδυάζοντας χαρακτηριστικά και από τις δύο κατηγορίες

Το βασικό σημείο που πρέπει να συγκρατήσουμε είναι πως ένα Κατευθυνόμενο Γραφικό Μοντέλο (Directed Graphical Model - DGM) αποτελεί ένα γραφικό μοντέλο, στο οποίο η δομή του γράφου είναι ένας Κατευθυνόμενος Άκυκλος Γράφος (Directed Acyclic Graph - DAG). Οι DAGs διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στη σύγχρονη αιτιώδη συμπερασματολογία, καθώς περιγράφουν σχέσεις μεταξύ μεταβλητών που έχουν καταγραφεί σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.

Τα μοντέλα αυτά είναι ευρέως γνωστά ως Μπεϋζιανά Δίκτυα (Bayesian Networks - BNs) ή δίκτυα πεπιοθήσεων και χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση πιθανοτικών κατανομών. Επιπλέον, χαρακτηρίζονται ως αιτιώδη δίκτυα, δεδομένου ότι οι κατευθυνόμενες ακμές τους μπορούν να αποτυπώνουν αιτιώδεις σχέσεις μεταξύ μεταβλητών (Pearl 1988; Russell & Norvig 2021) .



Εικόνα 16: Διάγραμμα συσχετίσεων οντοτήτων

4.3 Συλλογιστική με Μπεϋζιανά Δίκτυα

Σε ένα Μπεϋζιανό Δίκτυο, μπορούμε να εξετάσουμε πώς το δίκτυο μπορεί να αξιοποιηθεί για τη διαδικασία συλλογισμού. Συγκεκριμένα, όταν παρατηρούμε μια τιμή σε μια μεταβλητή, θέλουμε να ενσωματώσουμε αυτή τη νέα πληροφορία ως δεδομένο. Η διαδικασία αυτή, γνωστή ως διάδοση πιθανοτήτων ή εξαγωγή συμπερασμάτων, πραγματοποιείται μέσω της μεταφοράς πληροφορίας μέσα στο δίκτυο. Αυτή η ροή πληροφοριών δεν ακολουθεί απαραίτητα τις κατευθύνσεις των τόξων. Στο πλαίσιο του πιθανολογικού μας συστήματος, αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπολογίσουμε την εκ των υστέρων κατανομή πιθανότητας για ένα σύνολο κόμβων-ερωτημάτων, λαμβάνοντας υπόψη τις τιμές ορισμένων δεδομένων ή παρατηρηθέντων κόμβων.

Τύποι συλλογισμών

Τα Μπεϋζιανά δίκτυα προσφέρουν μια ολοκληρωμένη αναπαράσταση των πιθανοτήτων που σχετίζονται με διάφορες μεταβλητές. Μέσω αυτών, μπορούμε να εφαρμόσουμε διαγνωστικό συλλογισμό, δηλαδή να συμπεράνουμε τις πιθανές αιτίες ενός φαινομένου με βάση τις παρατηρούμενες ενδείξεις. Για παράδειγμα, αν ένας μηχανικός παρατηρήσει χαμηλή απόδοση στον κινητήρα ενός αυτοκινήτου, μπορεί να προσαρμόσει την πεποίθησή του σχετικά με την πιθανότητα ύπαρξης προβλήματος στο σύστημα καυσίμου. Αυτού του είδους ο συλλογισμός προχωρά αντίστροφα από τη φυσική ροή αίτιου-αποτελέσματος του δικτύου.



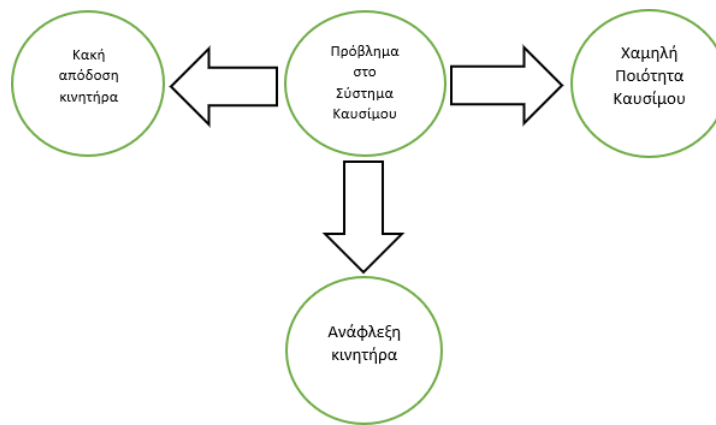
Εικόνα 17: Παράδειγμα Διαγνωστικού συμπεράσματος

Επιπλέον, μπορούμε να εκτελέσουμε προγνωστικό συλλογισμό, όπου η γνώση ενός αίτιου μπορεί να επηρεάσει τις προσδοκίες μας για μελλοντικά αποτελέσματα. Για παράδειγμα, αν ένας οδηγός ενημερώσει τον μηχανικό ότι χρησιμοποιεί χαμηλής ποιότητας καύσιμο, ο μηχανικός μπορεί να συμπεράνει ότι το όχημα έχει αυξημένη πιθανότητα να εμφανίσει προβλήματα, όπως ανώμαλη καύση ή φθορά του κινητήρα. Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει τη δυναμική ενημέρωση των πιθανοτήτων στο δίκτυο, επιτρέποντας πιο ακριβείς εκτιμήσεις και προβλέψεις.



Εικόνα 18: Παράδειγμα πρόβλεψης

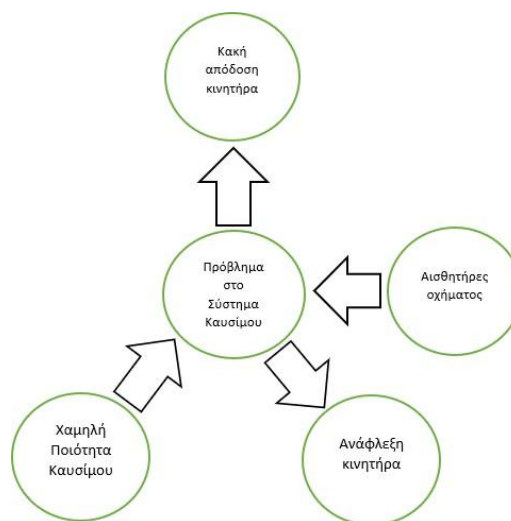
Ένας άλλος τύπος συλλογισμού, είναι ο ενδοαιτιακός συλλογισμός, ο οποίος περιλαμβάνει συλλογισμούς σχετικά με τις αμοιβαίες αιτίες ενός κοινού αποτελέσματος. Ας υποθέσουμε ότι ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα έχει ακριβώς δύο εναλλακτικές αιτίες, καθεμία από τις οποίες αντιπροσωπεύεται από μια δομή v στο Μπεϋζιανό δίκτυο. Αυτή η περίπτωση εμφανίζεται στο μοντέλο μας με τα αίτια, Μηχανικός Αυτοκινήτου και Κακή Συντήρηση, τα οποία έχουν ένα κοινό αποτέλεσμα, την βλάβη του κινητήρα (Κακή Λειτουργία του Οχήματος).



Εικόνα 19: Παράδειγμα ενδοαιτιακός συλλογισμός

Σύμφωνα με το μοντέλο, οι δύο αυτές αιτίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, πράγμα που σημαίνει ότι είτε ο μηχανικός είναι έμπειρος είτε όχι, δεν επηρεάζει την πιθανότητα να συμβεί μια βλάβη στο αυτοκίνητο. Ας υποθέσουμε ότι μαθαίνουμε ότι το αυτοκίνητο έχει υποστεί βλάβη στον κινητήρα. Αυτό αυξάνει τις πιθανότητες για τις δύο πιθανές αιτίες της βλάβης. Ας υποθέσουμε τώρα, ότι μαθαίνουμε ότι ο μηχανικός που επιδιορθώνει το αυτοκίνητο είναι άπειρος. Αυτή η νέα πληροφορία εξηγεί την παρατήρηση της βλάβης, μειώνοντας την πιθανότητα να έχει συμβεί λόγω ενός τυχαίου λάθους από το ίδιο το αυτοκίνητο. Παρόλο που οι δύο αιτίες είναι εντελώς ανεξάρτητες, γνωρίζοντας το αποτέλεσμα, η παρουσία μιας εξηγητικής αιτίας κάνει την άλλη αιτία λιγότερο πιθανή. Για να το εξηγήσουμε διαφορετικά, η εναλλακτική αιτία έχει γίνει κατανοητή.

Επειδή οποιοδήποτε κόμβοι μπορεί να είναι κόμβοι ερωτήματος και οποιοδήποτε μπορεί να είναι κόμβοι αποδεικτικών στοιχείων, συχνά ο συλλογισμός δεν περιορίζεται σε έναν από τους τύπους που περιεγράφηκαν νωρίτερα. Στην πραγματικότητα, μπορούμε να συνδυάσουμε αυτούς τους τύπους συλλογισμών με διάφορους τρόπους (Jensen & Nielsen 2007).



Εικόνα 20: Παράδειγμα συνδυασμών συλλογισμών

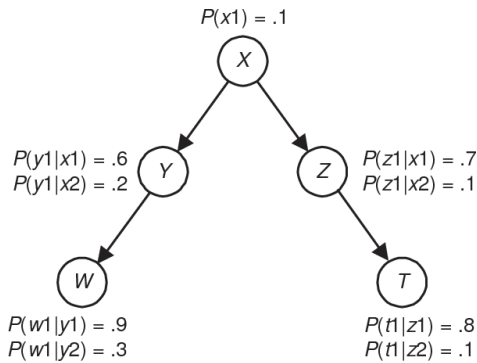
Όταν υπάρχουν διαθέσιμες νέες πληροφορίες, τις οποίες ονομάζουμε αποδείξεις, τα Μπεϋζιανά Δίκτυα χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό νέων πεποιθήσεων (Pearl 1988; Darwiche 2009). Θεωρώντας ως απόδειξη την οριστική διαπίστωση ότι ένας κόμβος X έχει μια ακριβή τιμή x , την οποία συμβολίζουμε ως $X = x$ και μερικές φορές αναφέρεται ως συγκεκριμένη απόδειξη. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ανακαλύψουμε ότι ο μηχανικός που επιδιορθώνει το αυτοκίνητο δεν είναι έμπειρος, τότε "Μηχανικός = Άπειρος" ονομάζεται συγκεκριμένη απόδειξη. Παρ' όλα αυτά, μερικές φορές έχουμε στη διάθεσή μας στοιχεία τα οποία δεν είναι ξεκάθαρα. Η απόδειξη θα μπορούσε να είναι ότι η βλάβη στο αυτοκίνητο δεν οφείλεται ακριβώς σε κάποιο συγκεκριμένο λόγο, αλλά μπορεί να έχει προέλθει από οποιαδήποτε άλλη αιτία, το οποίο ονομάζεται αρνητική απόδειξη. Στην πραγματικότητα, οι νέες πληροφορίες μπορεί να είναι απλώς μια νέα υπόθεση ότι ο μηχανικός που επιθεώρησε το αυτοκίνητο δεν είναι σίγουρος για το πρόβλημα. Πιστεύει ότι η βλάβη πιθανόν να προήλθε από το σύστημα ψύξης, αλλά είναι μόνο κατά 80% σίγουρος. Στα Δίκτυα Bayes, ονομάζουμε και αυτή την εικονική απόδειξη ή απόδειξη πιθανότητας, δεδομένου ότι χειρίζεται μέσω της πληροφορίας πιθανότητας.

4.4 Αλγόριθμος μετάδοσης μηνυμάτων του Pearl

Ο Pearl [1986, 1988] ανέπτυξε έναν αλγόριθμο διακίνησης μηνυμάτων, προκειμένου να διευκολύνει τη διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων σε Μπεϋζιανά Δίκτυα (Pearl 1986; Pearl 1988), αξιοποιώντας τις τοπικές ανεξαρτησίες. Έστω ότι διαθέτουμε ένα σύνολο τιμών v ενός συνόλου V από στιγμιαίες μεταβλητές, ο αλγόριθμος υπολογίζει τις πιθανότητες $P(y | v)$ για όλες τις δυνατές τιμές y κάθε μεταβλητής Y στο δίκτυο. Η διαδικασία αυτή ξεκινά με την αποστολή μηνυμάτων από τις μεταβλητές που έχουν λάβει τιμές προς τους γειτονικούς τους κόμβους. Στη συνέχεια, αυτοί οι γειτονικοί κόμβοι μεταδίδουν τα δικά τους μηνύματα προς τους αντίστοιχους γείτονές τους. Τα αποδεικτικά στοιχεία μπορούν να διαδοθούν με οποιαδήποτε σειρά, καθώς η σειρά εκκίνησης των μηνυμάτων δεν επηρεάζει την εγκυρότητα της ενημέρωσης. Αρχικά, ο αλγόριθμος αναπτύχθηκε για Μπεϋζιανά Δίκτυα των οποίων οι κατευθυνόμενοι ακυκλικοί γράφοι έχουν τη μορφή ριζωμένων δέντρων, και ακολούθως επεκτάθηκε ώστε να εφαρμόζεται και σε δίκτυα με απλή συνδεσιμότητα. Κάθε μεταβλητή μπορεί να πάρει μόνο δύο πιθανές τιμές και γι' αυτό μόνο η πιθανότητα της αναπαρίσταται.

4.5 Συμπερασματολογία σε δέντρα

Ονομάζουμε ένα δέντρο με ρίζα έναν κατευθυνόμενο ακυκλικό γράφο στον οποίο υπάρχει ένας μοναδικός κόμβος, ο οποίος ονομάζεται ρίζα και δεν έχει γονείς. Κάθε άλλος κόμβος διαθέτει ακριβώς έναν γονέα και κάθε κόμβος αποτελεί απόγονο της ρίζας. Με βάση το παρακάτω θεώρημα, προκύπτει ο αλγόριθμος.



Εικόνα 21: Δενδροειδές δίκτυο Bayes

Ας θεωρήσουμε ένα Μπεϋζιανό Δίκτυο (G, P) , του οποίου ο Κατευθυνόμενος Ακυκλικός Γράφος διαμορφώνεται ως δέντρο, όπου $G = (V, A)$ και c είναι ένα σύνολο τιμών που προέρχεται από ένα υποσύνολο $C \subset A$. Για κάθε μεταβλητή Y , ορίζουμε τα λ μηνύματα, τις λ τιμές, τα π μηνύματα και τις π τιμές, όπως αναλύεται παρακάτω:

- λ μηνύματα: Για κάθε παιδί Z της Y , για κάθε τιμή του y

$$\lambda_Z(y) = \sum_Z P(z|y) \lambda(z)$$

- τιμές λ : Αν $Y \in C$ και η τιμή του Y y ,

$$\lambda(y) = 1$$

$$\lambda(y) = 0 \text{ για } y \neq y'$$

Εάν $Y \notin C$ και Y αποτελεί φύλλο, τότε για κάθε τιμή y ισχύει $\lambda(y) \equiv 1$.

Εάν $Y \notin C$ και Y δεν αποτελεί φύλλο, τότε για κάθε τιμή y ισχύει

$$\lambda(y) = \prod_{U \in CH_Y} \lambda_U(y)$$

Οπού CH_Y συμβολίζει το σύνολο των παιδιών του Y

- π μηνύματα:

Αν ο X είναι ο γονέας του Y , τότε για όλες τις τιμές του x ,

$$\pi_Y(x) = \pi(x) \prod_{U \in CH_x - \{Y\}} \lambda_U(x)$$

- τιμές π :

Εάν $Y \in C$ και η τιμή του Y $\pi(Y) = y$

$$\pi(y) = 1$$

$$\pi(y) = 0 \text{ για } y \neq y$$

Εάν $Y \notin C$ και Y είναι η ρίζα για κάθε τιμή του y τότε

$$\pi(y) = P(y)$$

Εάν $Y \notin C$ το Y δεν είναι ρίζα και το X είναι γονέας του Y για κάθε τιμή του y τότε

$$\pi(y) = \sum_x P(y | x) \pi_Y(x)$$

Εφόσον όλα τα παραπάνω ορίζονται, για κάθε μεταβλητή Y τότε έχουμε για κάθε τιμή του y

$$P(y|c) = \alpha(y)\pi(y)$$

όπου α είναι η σταθερά κανονικοποίησης (Pearl 1988; Darwiche 2009).

Αυτός λοιπόν ο αλγόριθμος είναι η εφαρμογή του αλγορίθμου Pearl σε δέντρα.

Υπόθεση

Ας θεωρήσουμε ότι διαθέτουμε ένα Μπευζιανό Δίκτυο, στο οποίο ο Κατευθυνόμενος Ακυκλικός Γράφος (DAG) έχει τη δομή δέντρου. Στόχος μας είναι να υπολογίσουμε τις πιθανότητες των τιμών κάθε κόμβου, λαμβάνοντας υπόψη ότι αυτές επηρεάζονται από συγκεκριμένες τιμές των κόμβων που ανήκουν σε ένα συγκεκριμένο υποσύνολο.

Είσοδοι

Το Μπευζιανό Δίκτυο (G, P) του οποίου ο Κατευθυνόμενος Άκυκλος Γράφος είναι ένα δέντρο, $G = (V, A)$, και ένα σύνολο από τιμών c ενός υποσυνόλου $C \subseteq V$.

Έξοδοι

Το Δίκτυο Bayes (G, P) ενημερώνεται σύμφωνα με τις τιμές στο c . Οι τιμές του λ και π και των μηνυμάτων και $P(y|c)$ για κάθε $Y \in V$ θεωρούνται ότι αποτελούν μέρος του Δικτύου.

Κλασικό Παραδείγματα DAG

Ένα σπίτι που βρίσκεται σε περιοχή με υψηλή σεισμική δραστηριότητα διαθέτει σύστημα συναγερμού, ο οποίος μπορεί να ενεργοποιηθεί λόγω ενός σεισμού. Στη γειτονιά μένουν δύο γείτονες, η Έλενα και ο Ανδρέας, οι οποίοι δεν γνωρίζονται μεταξύ τους. Ωστόσο αν ακούσουν τον συναγερμό, ενδέχεται να καλέσουν τον ιδιοκτήτη του σπιτιού, χωρίς αυτό να είναι βέβαιο (Pearl 1988; Russell & Norvig 2021)..

Αυτό που θέλουμε, είναι να αναπαραστήσουμε την κατανομή πιθανοτήτων των γεγονότων, τα οποία είναι :

Ληστεία, Σεισμός, Συναγερμός, τηλεφωνεί η Έλενα και τηλεφωνεί ο Ανδρέας



Εικόνα 22: Κλασικό παράδειγμα DAG

Για κάθε σχήμα μεταβλητή - γονέας, $P(X_i | pa(X_i))$, όπου το $pa(X_i)$ συμβολίζει το γονέα του X_i

Λ	Σ	P(A B,E)
True	True	0.98
True	False	0.90
False	True	0.25
False	False	0.002

Πίνακας 3: Πιθανότητες για ενεργοποίηση συναγερμού από ληστεία ή σεισμό.

Η πλήρης κατανομή πιθανότητας προκύπτει από τη σύνθεση των επιμέρους τοπικών δεσμευμένων κατανομών (μέσω του κανόνα αλυσίδας):

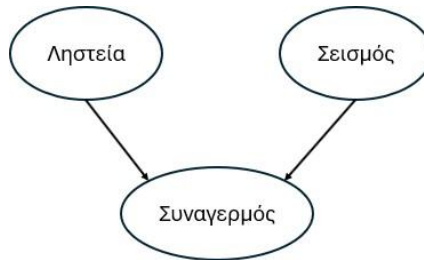
$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{i=1, \dots, n} P(X_i | pa(X_i))$$

Οι περιπτώσεις που προκύπτουν είναι οι εξής:

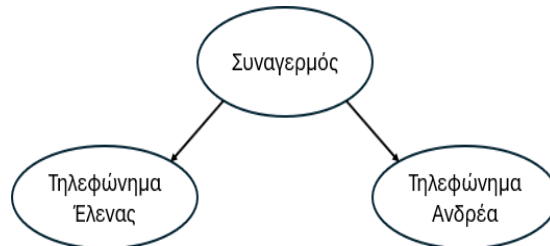
- 1) Το τηλεφώνημα του Ανδρέα είναι ανεξάρτητο από τη ληστεία, δοθέντος του συναγερμού.



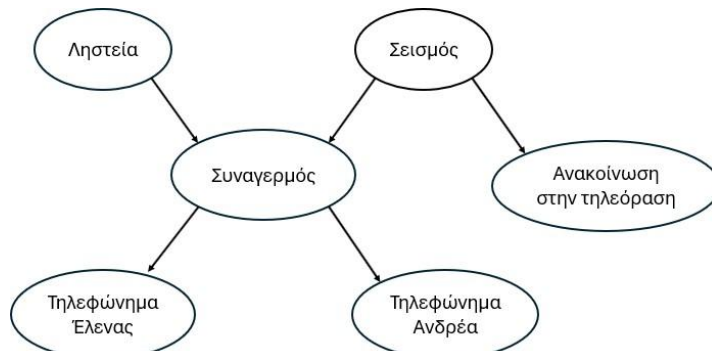
- 2) Η ληστεία είναι ανεξάρτητη από το σεισμό (χωρίς να ξέρουμε κάτι για το συναγερμό). Η ληστεία και ο σεισμός δεν είναι ανεξάρτητα δοθέντος του συναγερμού.



- 3) Το ότι τηλεφωνεί η Έλενα είναι ανεξάρτητο από το ότι ο Ανδρέας τηλεφωνεί δοθέντος του συναγερμού.



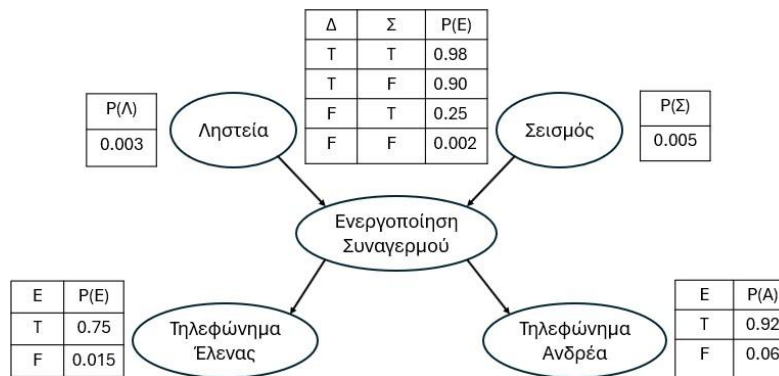
- 4) Ο σεισμός και η ληστεία δεν είναι ανεξάρτητα δοθέντος του τηλεφωνήματος της Έλενας.



Η ληστεία και το τηλεφώνημα της Έλενας δεν είναι ανεξάρτητα όταν δεν ξέρουμε κάτι για το συναγερμό.

Η ληστεία και η ανακοίνωση στην τηλεόραση είναι ανεξάρτητα δοθέντος του σεισμού.

Η ληστεία και η ανακοίνωση στη τηλεόραση δεν είναι ανεξάρτητα δοθέντος του τηλεφωνήματος της Έλενας



Κανόνας Αλυσίδας

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = P(X_n | X_{n-1}, \dots, X_1) \times P(X_{n-1} | X_{n-2}, \dots, X_1) \times \dots \times P(X_2 | X_1) \times P(X_1) = \prod_{i=1}^n P(X_i | X_{i-1}, \dots, X_1)$$

Εάν Γονείς $(X_i) \subseteq \{X_i | X_{i-1}, \dots, X_1\}$ τότε:

- $P(X_i | X_{i-1}, \dots, X_1) = P(X_i | \text{Γονείς}(X_i))$
- $P(\text{Τηλεφώνημα Έλενας} | \text{Τηλεφώνημα Ανδρέα}, \text{Συναγερμός}, \text{Σεισμός}, \text{Ληστεία}) = P(\text{Τηλεφώνημα Έλενας} | \text{Συναγερμός})$

Συμπερασμός

Η πιθανότητα του γεγονότος X , δεδομένου ότι έχει συμβεί το γεγονός e , υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας την κοινή πιθανότητα $P(X, e)$ με έναν κανονικοποιητικό παράγοντα a .

Αυτός ο υπολογισμός περιλαμβάνει το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των δυνατών τιμών των μεταβλητών Y , οι οποίες δεν σχετίζονται άμεσα με το X . Ο παράγοντας a εξασφαλίζει ότι το τελικό αποτέλεσμα είναι μια σωστή πιθανότητα (δηλαδή, ανήκει στο διάστημα $[0, 1]$).

$$P(X|e) = a \cdot P(X, e) = a \cdot \sum_y P(X, e, y)$$

Για Ληστεία = αληθές, έχουμε:

$$P(\lambda | a, \varepsilon) = a \cdot \sum_{\sigma} \sum_s P(\lambda) P(\sigma) P(\varepsilon | \lambda, \sigma) P(a | \varepsilon) P(\varepsilon | \varepsilon)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε

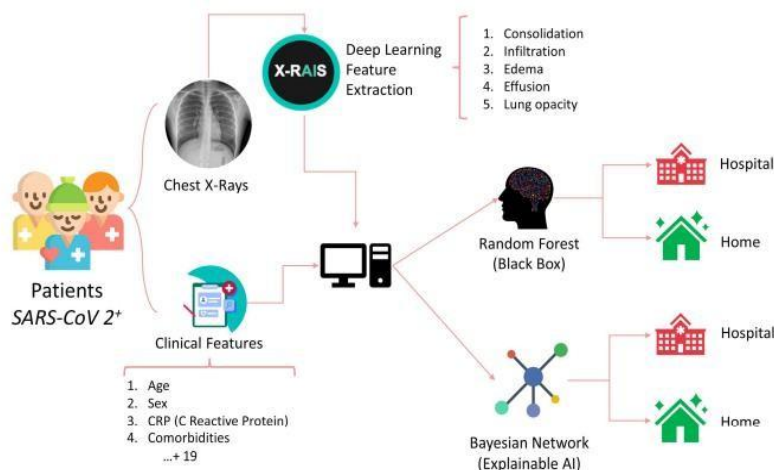
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΠΕΥΖΙΑΝΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

Τα Μπεϋζιανά Δίκτυα ή Bayesian Networks (BNs), αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο για τη μοντελοποίηση αιτιακών σχέσεων και την επεξεργασία αβεβαιότητας σε συστήματα με σύνθετες αλληλεξαρτήσεις. Αποτελούν κατευθυνόμενους άκυκλους γράφους (DAGs), στους οποίους οι κόμβοι αντιστοιχούν σε μεταβλητές και οι ακμές υποδηλώνουν αιτιακή ή πιθανολογική εξάρτηση. Η χρησιμότητα των Bayesian Networks προκύπτει από την ικανότητά τους να υποστηρίζουν λήψη αποφάσεων, να εκτελούν reasoning υπό αβεβαιότητα και να επιτρέπουν την εκμάθηση δομών από δεδομένα. Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται οι σημαντικότεροι τομείς στους οποίους βρίσκουν εφαρμογή (Pearl 1988; Koller & Friedman 2009).

5.1 Ιατρική Διάγνωση & Βιοϊατρική

Στην ιατρική, τα Μπεϋζιανά Δίκτυα αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο για τη μοντελοποίηση της αβεβαιότητας που χαρακτηρίζει τη διαδικασία διάγνωσης (Pearl 1988; Heckerman, Horvitz & Nathwani 1992). Μέσω αυτών, είναι δυνατή η αναπαράσταση και η ανάλυση των σχέσεων αιτίας-αποτελέσματος μεταξύ διάφορων παραγόντων, όπως είναι τα συμπτώματα, οι ασθένειες και τα αποτελέσματα διαγνωστικών εξετάσεων. Ουσιαστικά, κάθε μεταβλητή (π.χ. η ύπαρξη πυρετού ή η παρουσία μιας ασθένειας) αντιστοιχεί σε έναν κόμβο του δικτύου, και οι συνδέσεις μεταξύ τους αντικατοπτρίζουν τις αιτιακές ή στατιστικές σχέσεις.

Με την εισαγωγή παρατηρήσιμων δεδομένων — όπως τα συμπτώματα που παρουσιάζει ένας ασθενής ή τα αποτελέσματα συγκεκριμένων εξετάσεων — το δίκτυο είναι σε θέση να υπολογίσει τις πιθανότητες εμφάνισης διάφορων παθήσεων. Αυτό το χαρακτηριστικό καθιστά τα Μπεϋζιανά Δίκτυα ιδιαίτερα χρήσιμα σε περιπτώσεις όπου η πλήρης πληροφορία δεν είναι διαθέσιμη ή όπου απαιτείται εκτίμηση με βάση ελλιπή ή αβέβαια δεδομένα.



Εικόνα 23: Παράδειγμα εφαρμογής Bayesian Networks στην Ιατρική

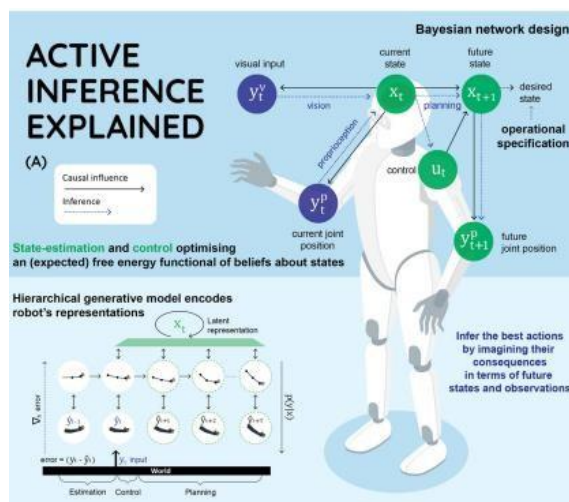
Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το δίκτυο Pathfinder, το οποίο έχει σχεδιαστεί για τη διάγνωση λεμφωμάτων. Το συγκεκριμένο σύστημα ενσωματώνει πάνω από 100 διαφορετικές μεταβλητές και έχει δοκιμαστεί με επιτυχία σε πραγματικές κλινικές συνθήκες, αποδεικνύοντας την αξιοπιστία και την ακρίβειά του σε

σύνθετα διαγνωστικά προβλήματα (Heckerman, Horvitz & Nathwani 1992; Heckerman & Nathwani 1992).

5.2 Τεχνητή Νοημοσύνη & Ρομποτική

Τα Μπεϋζιανά Δίκτυα (Bayesian Networks - BNs) αποτελούν βασικό συστατικό σε πολλά συστήματα Τεχνητής Νοημοσύνης, καθώς επιτρέπουν τη λογική συλλογιστική υπό συνθήκες αβεβαιότητας. Μέσω της πιθανολογικής μοντελοποίησης, τα BNs μπορούν να επεξεργαστούν ασαφή ή ατελή δεδομένα και να παράγουν τεκμηριωμένες εκτιμήσεις ή αποφάσεις, κάτι που τα καθιστά εξαιρετικά χρήσιμα σε πολύπλοκα περιβάλλοντα όπου οι συνθήκες μεταβάλλονται δυναμικά. Στον τομέα της ρομποτικής, τα BNs βρίσκουν εφαρμογή κυρίως στην εκτίμηση καταστάσεων (state estimation), μια κρίσιμη διεργασία για την ορθή λειτουργία ενός ρομπότ. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η εκτίμηση της θέσης ενός ρομπότ (robot localization), όπου το δίκτυο χρησιμοποιεί αισθητηριακά δεδομένα σε συνδυασμό με μοντέλα κίνησης για να προσδιορίσει πού βρίσκεται το ρομπότ στον χώρο, ακόμα και όταν τα δεδομένα είναι μερικώς ακριβή ή θορυβώδη.

Πέρα από τον έλεγχο και την πλοήγηση, τα BNs χρησιμοποιούνται και σε πιο σύνθετες αλληλεπιδράσεις, όπως σε περιβάλλοντα Human-Robot Interaction (HRI). Εκεί, τα δίκτυα αξιοποιούνται για την πρόβλεψη των προθέσεων του χρήστη, επιτρέποντας στα ρομπότ να προσαρμόζουν τη συμπεριφορά τους ανάλογα με το πλαίσιο και τις ανάγκες του ανθρώπου. Για παράδειγμα, ένα βοηθητικό ρομπότ σε ένα «έξυπνο σπίτι» μπορεί να χρησιμοποιεί BNs για να εκτιμήσει αν ο χρήστης σκοπεύει να σηκωθεί από τον καναπέ ή να ανοίξει κάποιο φως, και να δράσει υποστηρικτικά. Αυτές οι εφαρμογές αναδεικνύουν τη δυναμική των BNs ως εργαλεία γνωστικής αντίληψης και λήψης αποφάσεων, γεφυρώνοντας τον στατιστικό υπολογισμό με την ανθρώπινη συμπεριφορά σε πραγματικό χρόνο (Koller & Friedman 2009)ειχρε.



Εικόνα 24: Παράδειγμα εφαρμογής Bayesian networks στη ρομποτική

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν ρομποτικό βοηθό σε ένα «έξυπνο» σπίτι, ο οποίος έχει ως στόχο να υποστηρίξει έναν ηλικιωμένο χρήστη στην καθημερινότητά του. Το ρομπότ χρησιμοποιεί ένα Μπεϋζιανό Δίκτυο για να εκτιμήσει τις προθέσεις του χρήστη βάσει δεδομένων από αισθητήρες (όπως κάμερες, μικρόφωνα, ανιχνευτές κίνη-

σης).

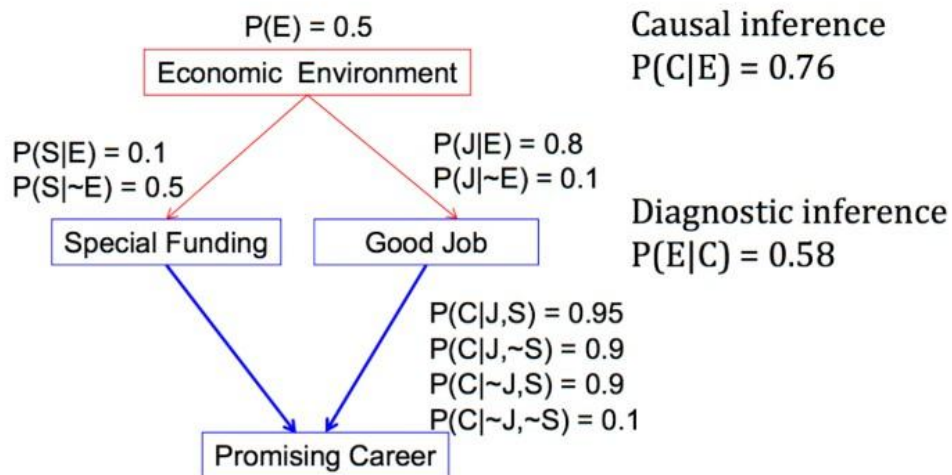
Κόμβοι του Δικτύου:

- Χρήστης σηκώνεται από την καρέκλα (Ναι/Όχι)
- Ωρα της ημέρας (Πρωί/Απόγευμα/Βράδυ)
- Εντοπισμένη τοποθεσία χρήστη (Σαλόνι/Κουζίνα/Διάδρομος)
- Προηγούμενη ενέργεια (π.χ. άνοιγμα ψυγείου)
- Πρόθεση χρήστη: να φάει, να ξεκουραστεί, να βγει από το σπίτι κ.ά.

Με βάση τις εισόδους αυτές, το δίκτυο μπορεί να υπολογίσει πιθανότητες για διάφορες πιθανές προθέσεις του χρήστη. Αν για παράδειγμα το δίκτυο υπολογίσει υψηλή πιθανότητα για πρόθεση «να φάει», το ρομπότ μπορεί να προτείνει να ετοιμάσει ένα σνακ ή να ανοίξει το φως στην κουζίνα. Αυτό το είδος προβλεπτικής λογικής καθιστά τα BNs πολύτιμα εργαλεία για την προσαρμοστική και φυσική αλληλεπίδραση ανθρώπου-μηχανής.

5.2 Οικονομικά & Διαχείριση Κινδύνου

Στον οικονομικό τομέα, τα Μπεϋζιανά Δίκτυα (Bayesian Networks - BNs) βρίσκουν ευρεία εφαρμογή στην πρόβλεψη χρηματοοικονομικών κρίσεων, την αξιολόγηση πιστοληπτικής ικανότητας και γενικότερα στην εκτίμηση και διαχείριση επενδυτικού κινδύνου. Η φύση των οικονομικών συστημάτων —περίπλοκα, δυναμικά και με έντονη αβεβαιότητα— τα καθιστά κατάλληλα για πιθανολογικά μοντέλα όπως τα BNs, τα οποία μπορούν να συσχετίσουν ποσοτικά και ποιοτικά δεδομένα για τη λήψη αποφάσεων.



Εικόνα 25: Παράδειγμα εφαρμογής bayesian networks στα οικονομικά

Μία σημαντική εφαρμογή αφορά την εκτίμηση της πιθανότητας χρεοκοπίας επιχειρήσεων. Τα BNs χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιήσουν τη σχέση μεταξύ οικονομικών δεικτών, όπως ο λόγος χρέους προς ίδια κεφάλαια ή η ρευστότητα, και εξωτερικών παραγόντων, όπως μακροοικονομικές συνθήκες ή αλλαγές στο φορολογικό περιβάλλον. Ένα παράδειγμα για την Εκτίμηση Πιθανότητας Πτώχευσης Επιχείρησης είναι ότι ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα θέλει να εκτιμήσει την πιστοληπτική ικανότητα μιας επιχείρησης πριν της χορηγήσει δάνειο. Το BNs μοντέλο περιλαμβάνει τους εξής κόμβους:

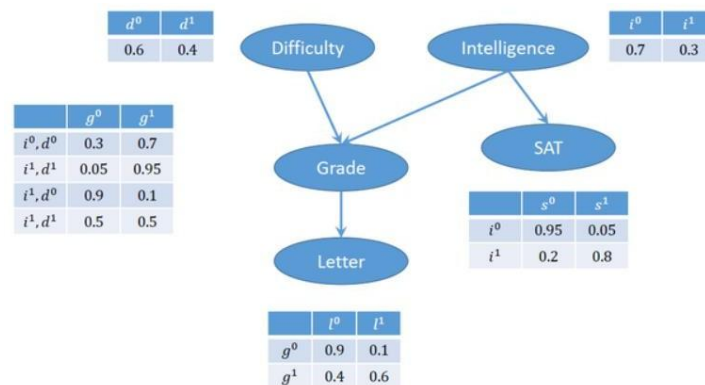
- Δείκτης ρευστότητας (Υψηλή/Χαμηλή)
- Λόγος δανεισμού (Ελεγχόμενος/Υψηλός)
- Κατάσταση αγοράς (Ευνοϊκή/Ασταθής)
- Πιστωτικό ιστορικό (Θετικό/Αρνητικό)
- Πιθανότητα χρεοκοπίας (Χαμηλή/Υψηλή)

Με βάση τα δεδομένα από οικονομικές καταστάσεις και εξωτερικούς παράγοντες, το δίκτυο υπολογίζει την πιθανότητα χρεοκοπίας της επιχείρησης (Sun & Shenoy 2007). Αν η πιθανότητα αυτή είναι υψηλή, το σύστημα μπορεί να συστήσει πιο αυστηρούς όρους δανεισμού ή και την απόρριψη της αίτησης.

Η χρήση τέτοιων μοντέλων βελτιώνει την ποιότητα των χρηματοοικονομικών αποφάσεων και ενισχύει την ανθεκτικότητα των τραπεζικών και επενδυτικών συστημάτων απέναντι σε κρίσεις.

5.3 Εκπαίδευση & Προσαρμοστική Μάθηση

Στον τομέα της εκπαιδευτικής τεχνολογίας, τα Μπεϋζιανά Δίκτυα (Bayesian Networks - BNs) αποτελούν βασικό εργαλείο για την παρακολούθηση της μαθησιακής προόδου, την αξιολόγηση της κατανόησης και την εξατομίκευση της εκπαιδευτικής εμπειρίας. Με την ικανότητά τους να αναλύουν αβεβαιότητα και να ενσωματώνουν στατιστικές συσχετίσεις μεταξύ γνώσεων, επιδόσεων και συμπεριφορών, τα BNs υποστηρίζουν δυναμικά μοντέλα αξιολόγησης, προσαρμόζοντας τη διδασκαλία στις ανάγκες κάθε μαθητή.



Εικόνα 26: Παράδειγμα εφαρμογής Bayesian networks στην εκπαίδευση

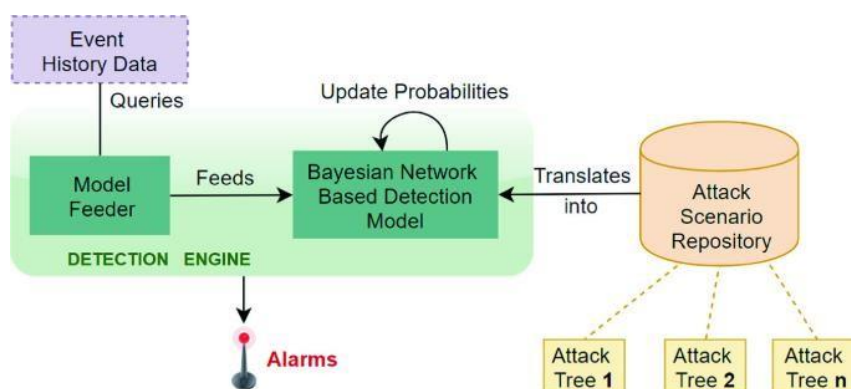
Μια χαρακτηριστική εφαρμογή είναι το μοντέλο Bayesian Knowledge Tracing (BKT), το οποίο χρησιμοποιείται ευρέως σε ψηφιακές πλατφόρμες μάθησης (Corbett & Anderson 1995). Έστω ότι ένας μαθητής αλληλεπιδρά με ένα διαδικτυακό μαθησιακό σύστημα εξάσκησης στα μαθηματικά. Το BKT μοντέλο περιλαμβάνει κόμβους που αντιστοιχούν σε:

- Κατάκτηση δεξιότητας (γνωρίζει/δεν γνωρίζει)
- Πιθανότητα σωστής απάντησης (σωστό/λάθος)
- Παρουσίαση νέας άσκησης ή εξήγησης
- Παράμετροι όπως η πιθανότητα λανθασμένης απάντησης από άγνοια ή τυχαία επιτυχία

Με βάση τις απαντήσεις του μαθητή, το σύστημα ενημερώνει πιθανολογικά το αν έχει μάθει ή όχι τη συγκεκριμένη δεξιότητα. Για παράδειγμα, αν ένας μαθητής απαντήσει σωστά σε πέντε διαδοχικές ερωτήσεις, η πιθανότητα να κατέχει τη δεξιότητα αυξάνεται σημαντικά. Το σύστημα μπορεί τότε να προχωρήσει σε πιο δύσκολο περιεχόμενο ή να προτείνει διαφορετικές δραστηριότητες, εφόσον διαπιστώνεται ότι δεν υπάρχει επαρκής κατανόηση. Με τον τρόπο αυτό, τα BNs, και ειδικότερα το μοντέλο BKT, ενισχύουν την προσωποποιημένη μάθηση και προσφέρουν στους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς χρήσιμες πληροφορίες σε πραγματικό χρόνο.

5.4 Ασφάλεια Πληροφοριών

Στον ταχέως εξελισσόμενο τομέα της κυβερνοασφάλειας, τα Μπεϋζιανά Δίκτυα (Bayesian Networks - BNs) προσφέρουν σημαντικά πλεονεκτήματα για την ανίχνευση κακόβουλων ενεργειών, την ανάλυση ρίσκου και τη λήψη αποφάσεων σε συνθήκες αβεβαιότητας (Wang & Neil 2020). Η ικανότητά τους να ενσωματώνουν ατελή, ασαφή ή ελλιπή δεδομένα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, καθώς πολλές επιθέσεις δεν εκδηλώνονται με σαφή τρόπο, αλλά εντοπίζονται μέσω διάσπαρτων και φαινομενικά ασύνδετων ενδείξεων.



Εικόνα 27: Παράδειγμα εφαρμογής Bayesian networks στη κυβερνοασφάλεια

Ένα σημαντικό πεδίο εφαρμογής των BNs είναι τα συστήματα ανίχνευσης εισβολών (Intrusion Detection Systems - IDS), τα οποία βασίζονται στη συνδυαστική ανάλυση πολλαπλών ενδείξεων για τον έγκαιρο εντοπισμό ύποπτης ή ανώμαλης δραστηριότητας στο δίκτυο. Έστω ότι ένα οργανωμένο πληροφοριακό σύστημα παρακολουθείται για πιθανές κυβερνοεπιθέσεις. Το BN μοντέλο περιλαμβάνει τους εξής κόμβους:

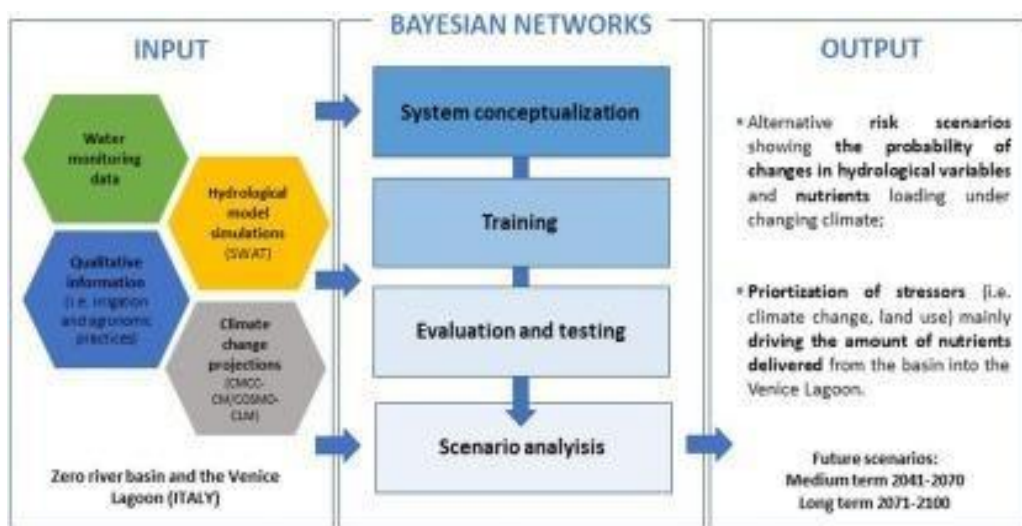
- Αριθμός αποτυχημένων login (Χαμηλός/Υψηλός)
- Ασυνήθιστη δραστηριότητα δικτύου (Κανονική/Υψηλή)
- Αναγνωρισμένες διευθύνσεις IP (Αξιόπιστες/Άγνωστες)
- Χρονική στιγμή δραστηριότητας (Κανονική/Υποπτη ώρα)
- Πιθανότητα εισβολής (Χαμηλή/Υψηλή)

Αν το σύστημα εντοπίσει αυξημένες αποτυχημένες προσπάθειες σύνδεσης από άγνωστη IP τη νύχτα, αυξάνει την πιθανότητα εισβολής και ενεργοποιεί μέτρα, όπως ειδοποιήσεις, αποκλεισμούς ή πρόσθετους ελέγχους. Η ευελιξία των BNs στην ανάλυση αλληλεξαρτώμενων ενδείξεων τα καθιστά ιδανικά για έξυπνα και προσαρμο-

στικά συστήματα ασφάλειας, ενισχύοντας την προστασία κρίσιμων υποδομών.

5.5 Περιβαλλοντική Μοντελοποίηση

Στον τομέα της περιβαλλοντικής ανάλυσης, τα Μπεϋζιανά Δίκτυα (Bayesian Networks - BNs) προσφέρουν πολύτιμες δυνατότητες για την εκτίμηση περιβαλλοντικών επιπτώσεων, την παρακολούθηση φυσικών φαινομένων και τη λήψη τεκμηριωμένων πολιτικών αποφάσεων. Μέσω της ενσωμάτωσης διαφορετικών πηγών δεδομένων - συχνά ατελών ή αβέβαιων - τα BNs επιτρέπουν τη μοντελοποίηση περίπλοκων οικολογικών σχέσεων και τη δημιουργία εργαλείων πρόβλεψης και διαχείρισης κινδύνων (Aguilera et al. 2011; Uusitalo 2007). Μια ιδιαίτερα σημαντική εφαρμογή είναι η πρόβλεψη δασικών πυρκαγιών, όπου τα BNs χρησιμοποιούνται για να εκτιμηθεί η πιθανότητα εμφάνισης πυρκαγιάς βάσει περιβαλλοντικών και ανθρωπογενών παραμέτρων.



Εικόνα 28: Παράδειγμα εφαρμογής Bayesian networks στο περιβάλλον

Ένα μοντέλο BN για την πρόβλεψη δασικών πυρκαγιών μπορεί να περιλαμβάνει κόμβους όπως:

- Θερμοκρασία αέρα (Χαμηλή/Υψηλή)
- Εδαφική υγρασία (Υψηλή/Χαμηλή)
- Ταχύτητα ανέμου (Χαμηλή/Υψηλή)
- Πυκνότητα ανθρώπινης δραστηριότητας (Χαμηλή/Υψηλή)
- Πιθανότητα εκδήλωσης πυρκαγιάς (Χαμηλή/Υψηλή)

Για παράδειγμα, σε μια περιοχή όπου παρατηρείται υψηλή θερμοκρασία, χαμηλή υγρασία και έντονη ανθρώπινη δραστηριότητα (π.χ. εκδρομές, κατασκηνώσεις), το δίκτυο εκτιμά σημαντικά αυξημένη πιθανότητα εκδήλωσης πυρκαγιάς. Αυτή η εκτίμηση μπορεί να ενεργοποιήσει προληπτικά μέτρα όπως αυξημένη επιτήρηση, περιορισμούς δραστηριοτήτων ή ενημερωτικές καμπάνιες. Η χρήση των BNs στην πρόβλεψη φυσικών φαινομένων συνεισφέρει σε έγκαιρες παρεμβάσεις και αποτελεσματική διαχείριση κινδύνων, ενισχύοντας την προστασία του φυσικού περιβάλλοντος και της ανθρώπινης ζωής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΤ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΠΕΥΖΙΑΝΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ ΣΤΟ ΠΟΛΕΜΙΚΟ ΝΑΥΤΙΚΟ

Τα Μπεύζιανά Δίκτυα αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο πιθανοτικής μοντελοποίησης, το οποίο επιτρέπει την ανάλυση δεδομένων και τη λήψη αποφάσεων σε συνθήκες αβεβαιότητας. Στον τομέα του Πολεμικού Ναυτικού, η ικανότητά τους να συνδυάζουν δεδομένα από πολλαπλές πηγές και να προσαρμόζονται δυναμικά στις αλλαγές του περιβάλλοντος τα καθιστά εξαιρετικά χρήσιμα για την ενίσχυση της στρατηγικής και της επιχειρησιακής αποτελεσματικότητας. Μέσω της πιθανιστικής συλλογιστικής, τα Μπεύζιανά Δίκτυα χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη και αναγνώριση πιθανών απειλών, τη διαχείριση κινδύνων και τη λήψη τακτικών αποφάσεων σε πραγματικό χρόνο. Επιπλέον, συμβάλλουν στη βελτιστοποίηση της κατανομής πόρων, όπως καύσιμα, όπλα και προμήθειες, καθώς και στη συντήρηση πλοίων μέσω προγνωστικής ανάλυσης βλαβών, μειώνοντας το λειτουργικό κόστος και αυξάνοντας την ετοιμότητα του στόλου. Παράλληλα, τα Μπεύζιανά Δίκτυα μπορούν να υποστηρίξουν συστήματα μάχης, συνδυάζοντας αισθητήρες και πληροφορίες από UAVs, σόναρ και ραντάρ για τη βελτίωση της ανίχνευσης και αναγνώρισης στόχων. Χρησιμοποιούνται επίσης στη ναυτική εκπαίδευση, βοηθώντας στη μοντελοποίηση σεναρίων μάχης και την εκπαίδευση πληρωμάτων σε στρατηγικές απόκρισης.

Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν συγκεκριμένες εφαρμογές των Μπεύζιανών Δικτύων στον ναυτικό τομέα, προκειμένου να αναδειχθεί η σημασία τους στη σύγχρονη ναυτική τεχνολογία και στρατηγική. Τα παραδείγματα αυτά θα εφαρμοστούν με τη συμβολή της γλώσσας προγραμματισμού R.



Εικόνα 29: Φρεγάτα ΣΑΛΑΜΙΣ

6.1 Παραδείγματα εφαρμογών των Μπεϋζιανών Δικτύων στο ΠΝ

Παράδειγμα 1

Σε μακροχρόνιες ναυτικές αποστολές, η υγειονομική ασφάλεια του πληρώματος αποτελεί κρίσιμο επιχειρησιακό παράγοντα. Η πρόβλεψη και η έγκαιρη αποτροπή της εξάπλωσης μεταδοτικών ασθενειών συμβάλλουν ουσιαστικά στη διατήρηση της επιχειρησιακής ετοιμότητας του σκάφους. Η παρούσα άσκηση βασίζεται σε ένα Μπεϋζιανό Δίκτυο, το οποίο επιτρέπει τη μοντελοποίηση πολύπλοκων σχέσεων μεταξύ παραγόντων που επηρεάζουν την πιθανότητα εμφάνισης και εξάπλωσης μολυσματικών νοσημάτων στο πλήρωμα.

Ο σκοπός αυτής της εφαρμογής είναι η κατασκευή και η ανάλυση ενός Μπεϋζιανού Δικτύου το οποίο θα εκτιμά την πιθανότητα επικείμενης επιδημικής εξάπλωσης στο πλήρωμα, με βάση κρίσιμες παραμέτρους που σχετίζονται με την υγειονομική κατάσταση, τις υποδομές του πλοίου και τις ενδείξεις συμπτωμάτων.

Το μοντέλο περιλαμβάνει τις εξής μεταβλητές:

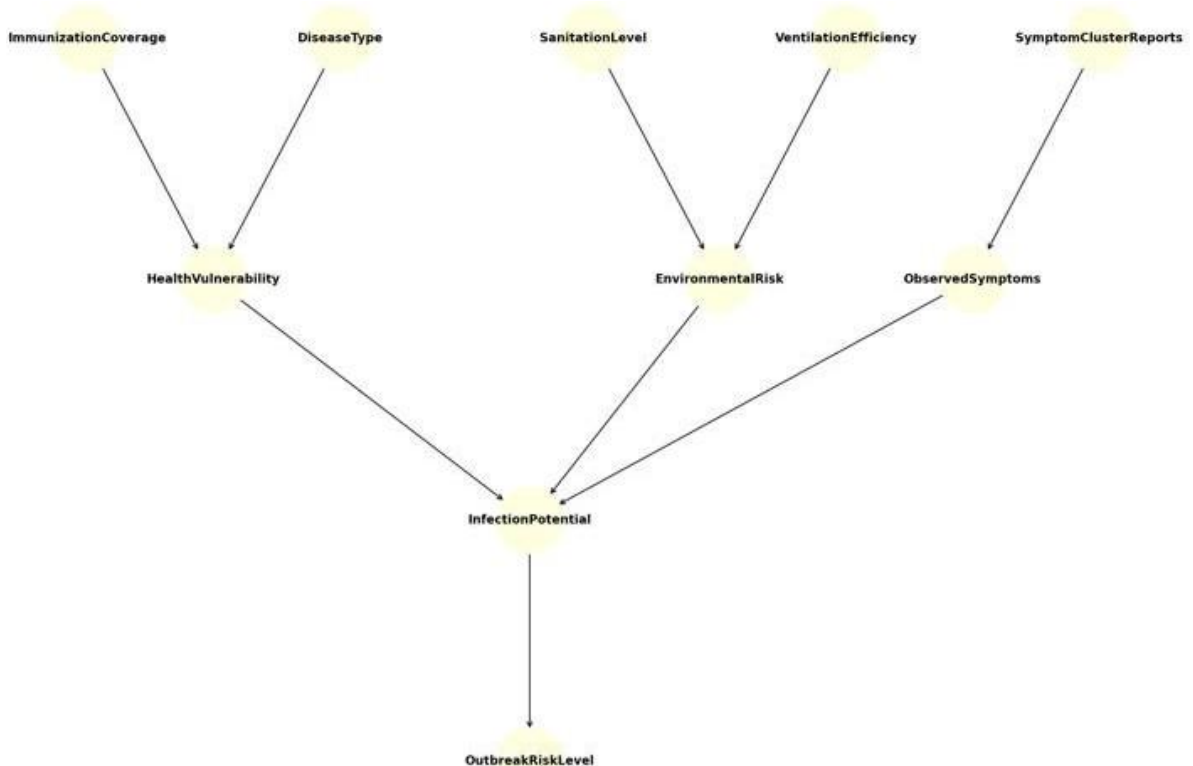
Μεταβλητή	Τιμές	Περιγραφή
ImmunizationCoverage	Full, Partial, None	Κατάσταση εμβολιασμού πληρώματος
VentilationEfficiency	Good, Poor	Απόδοση εξαερισμού πλοίου
SanitationLevel	Good, Poor	Επίπεδο υγιεινής στους χώρους του πλοίου
SymptomClusterReports	None, Isolated, Multiple	Εμφάνιση συσχετισμένων περιστατικών
DiseaseType	Respiratory, Gastro, Viral	Τύπος ασθένειας
HealthVulnerability	High, Medium, Low	Ευαλωτότητα υγείας με βάση ανοσία και τύπο ασθένειας
EnvironmentalRisk	High, Medium, Low	Περιβαλλοντικός κίνδυνος μόλυνσης
ObservedSymptoms	None, Mild, Severe	Παρατηρούμενα συμπτώματα στο πλήρωμα
InfectionPotential	Low, Medium, High	Συνολική πιθανότητα μόλυνσης
OutbreakRiskLevel	Low, Medium, High	Εκτίμηση ρίσκου εξάπλωσης

Πίνακας 4: Περιγραφή Μεταβλητών για Δίκτυο Πρόβλεψης Ασθενειών

Στο μοντέλο προβλέπεται μια πολυεπίπεδη ροή αιτιότητας που αναπαριστά την εξέλιξη και τον κίνδυνο εμφάνισης επιδημίας σε πλήρωμα πλοίου.

1. ImmunizationCoverage (Κάλυψη Εμβολιασμού) και DiseaseType (Τύπος Ασθένειας) επηρεάζουν άμεσα τον κόμβο HealthVulnerability (Ευαλωτότητα Υγείας), ο οποίος εκφράζει το πόσο ευάλωτο είναι το άτομο στην ασθένεια.
2. Οι μεταβλητές VentilationEfficiency (Αποδοτικότητα Εξαερισμού) και SanitationLevel (Επίπεδο Υγιεινής) συμβάλλουν στον υπολογισμό του EnvironmentalRisk (Περιβαλλοντικός Κίνδυνος), που εκφράζει τις περιβαλλοντικές συνθήκες εξάπλωσης.
3. Ο κόμβος SymptomClusterReports (Αναφορές Συμπτωμάτων), που δηλώνει το επίπεδο αναφοράς συμπτωμάτων, καθορίζει τον ObservedSymptoms (Παρατηρούμενα Συμπτώματα), μια ενδιάμεση αναπαράσταση της παρατηρηθείσας επιδημιολογικής κατάστασης.
4. Οι τρεις ενδιάμεσοι κόμβοι HealthVulnerability, EnvironmentalRisk, και ObservedSymptoms - συγκλίνουν στον κόμβο InfectionPotential (Πιθανότητα Μόλυνσης), ο οποίος εκτιμά τη συνολική πιθανότητα εμφάνισης λοίμωξης.
5. Τέλος, το InfectionPotential καθορίζει το OutbreakRiskLevel (Επίπεδο Κινδύνου Επιδημίας), δηλαδή το τελικό επίπεδο κινδύνου επιδημικής εξάρσης στο πλοίο.

Για την απλούστερη αναπαράσταση της λογικής του προβλήματος και των σχέσεων μεταξύ των πιο πάνω μεταβλητών, κατασκευάζουμε το ακόλουθο Μπεϋζιανό Δίκτυο



Ο κώδικας που εφαρμόστηκε στην R για την υλοποίηση του Μπεϋζιανού Δικτύου (για την εκτίμηση του κινδύνου επιδημίας σε πλήρωμα πλοίου), αναπτύχθηκε χρησιμοποιώντας τα πακέτα bnlearn και gRain. Η δομή του δικτύου ορίζεται με τη model2network(), περιγράφοντας τις εξαρτήσεις μεταξύ μεταβλητών όπως ο εμβολιασμός, ο τύπος ασθένειας, ο εξαερισμός και τα συμπτώματα. Οι πίνακες υπό συνθήκη πιθανοτήτων (CPTs) καθορίζονται για κάθε κόμβο, και στη συνέχεια το δίκτυο ενεργοποιείται με grain() ώστε να υποστηρίξει inference. Μέσω της querygrain() πραγματοποιούνται ερωτήματα πιθανοτήτων, με ή χωρίς δεδομένα εισόδου (evidence), επιτρέποντας την ανάλυση σεναρίων σχετικά με το επίπεδο κινδύνου εξάπλωσης ασθένειας.

```
library(bnlearn)
library(gRain)

# Ορισμός δομής του Bayesian δικτύου
dag <- model2network("[ImmunizationCoverage][DiseaseType][SanitationLevel][VentilationEfficiency][SymptomClusterReports]
                    [HealthVulnerability|ImmunizationCoverage:DiseaseType]
                    [EnvironmentalRisk|VentilationEfficiency:SanitationLevel]
                    [ObservedSymptoms|SymptomClusterReports]
                    [InfectionPotential|HealthVulnerability:EnvironmentalRisk:ObservedSymptoms]
                    [OutbreakRiskLevel|InfectionPotential]")

# CPT για HealthVulnerability (παράδειγμα)
cpt_HealthVulnerability <- cptable(~HealthVulnerability | ImmunizationCoverage + DiseaseType,
                                  values = c(0.6, 0.3, 0.1, # Full + Respiratory
                                             0.2, 0.4, 0.4, # Partial + Viral
                                             0.1, 0.2, 0.7), # None + Gastro
                                  levels = c("Low", "Medium", "High"))

# Δημιουργία CPT για άλλες μεταβλητές (παράδειγματα με ίσες πιθανότητες για απλοποίηση)
cpt_ImmunizationCoverage <- cptable(~ImmunizationCoverage, values=c(0.4, 0.4, 0.2), levels=c("Full", "Partial", "None"))
cpt_DiseaseType <- cptable(~DiseaseType, values=c(0.3, 0.3, 0.4), levels=c("Respiratory", "Gastro", "Viral"))
cpt_SanitationLevel <- cptable(~SanitationLevel, values=c(0.7, 0.3), levels=c("Good", "Poor"))
cpt_VentilationEfficiency <- cptable(~VentilationEfficiency, values=c(0.6, 0.4), levels=c("Good", "Poor"))
cpt_SymptomClusterReports <- cptable(~SymptomClusterReports, values=c(0.5, 0.3, 0.2), levels=c("None", "Isolated", "Multiple"))

# Placeholder CPTs για ενδιάμεσους κόμβους (συνιστάται να συμπληρωθούν ρεαλιστικά)
# Π.χ., για demonstration:
cpt_EnvironmentalRisk <- cptable(~EnvironmentalRisk | VentilationEfficiency + SanitationLevel,
                                values=rep(1/3, 12), levels=c("Low", "Medium", "High"))

cpt_ObservedSymptoms <- cptable(~ObservedSymptoms | SymptomClusterReports,
                                values=rep(1/3, 9), levels=c("Low", "Medium", "High"))

cpt_InfectionPotential <- cptable(~InfectionPotential | HealthVulnerability + EnvironmentalRisk + ObservedSymptoms,
                                  values=rep(1/3, 81), levels=c("Low", "Medium", "High"))

cpt_OutbreakRiskLevel <- cptable(~OutbreakRiskLevel | InfectionPotential,
                                  values=c(0.1, 0.3, 0.6, # InfectionPotential = Low
                                           0.2, 0.5, 0.3, # Medium
                                           0.6, 0.3, 0.1), # High
                                  levels=c("Low", "Medium", "High"))

# Συγκρότηση CPTs σε ένα grain network
cpt_list <- compileCPT(list(cpt_ImmunizationCoverage, cpt_DiseaseType,
                           cpt_SanitationLevel, cpt_VentilationEfficiency, cpt_SymptomClusterReports,
                           cpt_HealthVulnerability, cpt_EnvironmentalRisk, cpt_ObservedSymptoms,
                           cpt_InfectionPotential, cpt_OutbreakRiskLevel))

# Δημιουργία grain object
bn_grain <- grain(cpt_list)

# Ενεργοποίηση του δικτύου (build)
bn_compiled <- compile(bn_grain)

# -----
# Ερωτήματα (Inference)
```

```

# -----
# 1. Ποια είναι η συνολική πιθανότητα για High Outbreak Risk;
querygrain(bn_compiled, nodes="OutbreakRiskLevel")$OutbreakRiskLevel

# 2. Αν έχουμε Poor Ventilation, Partial Immunization και Multiple Symptoms:
evidence_1 <- setEvidence(bn_compiled, nodes=c("VentilationEfficiency", "ImmunizationCoverage", "SymptomClusterReports"),
  states=c("Poor", "Partial", "Multiple"))
querygrain(evidence_1, nodes="OutbreakRiskLevel")$OutbreakRiskLevel

# 3. Αν έχουμε Full Immunization, Good Ventilation και Good Sanitation:
evidence_2 <- setEvidence(bn_compiled,
  nodes=c("ImmunizationCoverage", "VentilationEfficiency", "SanitationLevel"),
  states=c("Full", "Good", "Good"))
querygrain(evidence_2, nodes="OutbreakRiskLevel")$OutbreakRiskLevel

# 4. Πώς αλλάζει το InfectionPotential όταν αυξάνεται η HealthVulnerability;
# Αλλαγή μόνο στην HealthVulnerability για συγκριτική μελέτη
increased_risk <- setEvidence(bn_compiled, nodes="HealthVulnerability", states="High")
querygrain(increased_risk, nodes="InfectionPotential")$InfectionPotential

```

Παρακάτω παρουσιάζονται υποθετικές πιθανοτικές τιμές για όλους τους κόμβους - μεταβλητές:

Prior Πιθανότητες

Μεταβλητή	Τιμές	Πιθανότητες
ImmunizationCoverage	Full, Partial, None	0.5, 0.3, 0.2
VentilationEfficiency	Good, Poor	0.7, 0.3
SanitationLevel	Good, Poor	0.8, 0.2
SymptomClusterReports	None, Isolated, Multiple	0.6, 0.3, 0.1
DiseaseType	Respiratory, Gastro, Viral	0.5, 0.3, 0.2

HealthVulnerability

ImmunizationCoverage	DiseaseType	High	Medium	Low
Full	Respiratory	0.1	0.3	0.6
Partial	Viral	0.4	0.4	0.2
None	Gastro	0.7	0.2	0.1

EnvironmentalRisk

VentilationEfficiency	SanitationLevel	High	Medium	Low
Good	Good	0.05	0.25	0.7
Good	Poor	0.2	0.4	0.4
Poor	Good	0.3	0.5	0.2
Poor	Poor	0.6	0.3	0.1

ObservedSymptoms

SymptomClusterReports	None	Mild	Severe
None	0.9	0.1	0.0
Isolated	0.3	0.6	0.1
Multiple	0.1	0.4	0.5

InfectionPotential

HealthVulnerability	EnvironmentalRisk	ObservedSymptoms	High	Medium	Low
High	High	Severe	0.7	0.2	0.1
High	High	Mild	0.7	0.2	0.1
High	High	None	0.2	0.5	0.3
High	Medium	Severe	0.7	0.2	0.1
High	Medium	Mild	0.2	0.5	0.3
High	Medium	None	0.2	0.5	0.3
High	Low	Severe	0.2	0.5	0.3
High	Low	Mild	0.2	0.5	0.3
High	Low	None	0.05	0.25	0.7
Medium	High	Severe	0.7	0.2	0.1
Medium	High	Mild	0.2	0.5	0.3
Medium	High	None	0.2	0.5	0.3
Medium	Medium	Severe	0.2	0.5	0.3
Medium	Medium	Mild	0.2	0.5	0.3
Medium	Medium	None	0.05	0.25	0.7
Medium	Low	Severe	0.2	0.5	0.3
Medium	Low	Mild	0.05	0.25	0.7
Medium	Low	None	0.05	0.25	0.7
Low	High	Severe	0.2	0.5	0.3
Low	High	Mild	0.2	0.5	0.3
Low	High	None	0.05	0.25	0.7
Low	Medium	Severe	0.2	0.5	0.3
Low	Medium	Mild	0.05	0.25	0.7
Low	Medium	None	0.05	0.25	0.7
Low	Low	Severe	0.05	0.25	0.7
Low	Low	Mild	0.05	0.25	0.7
Low	Low	None	0.05	0.25	0.7

OutbreakRiskLevel

InfectionPotential	P(High)	P(Medium)	P(Low)
High	0.7	0.2	0.1
Medium	0.2	0.5	0.3
Low	0.05	0.25	0.7

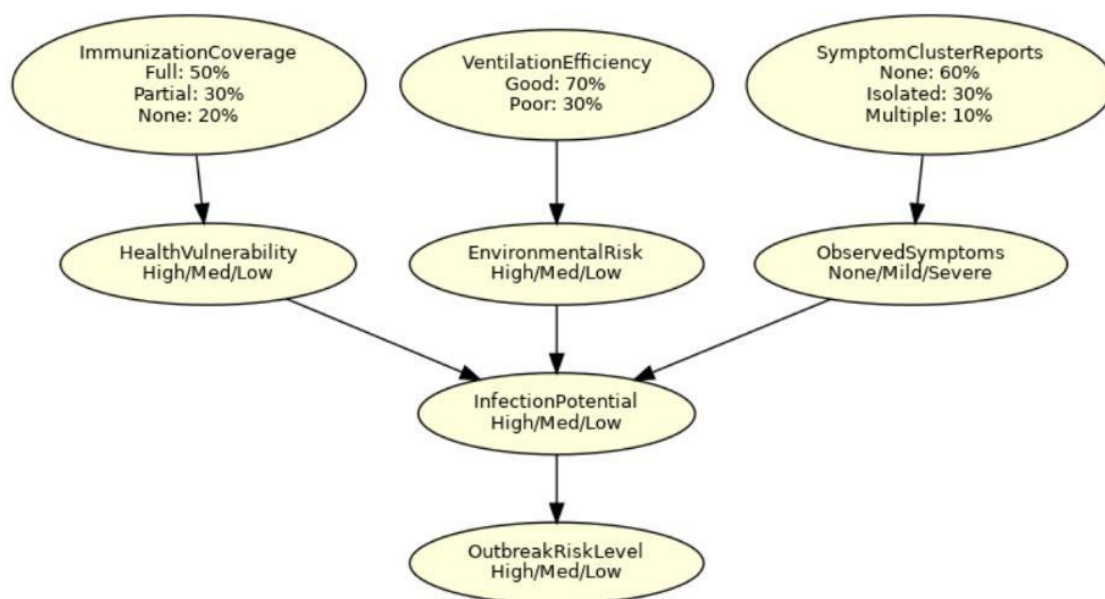
Πίνακας 5: Ορισμός Πιθανοτικών τιμών των Μεταβλητών

Για τον κόμβο OutbreakRiskLevel, οι πιθανότητες καθορίζονται από τη συνδυαστική επίδραση όλων των προηγούμενων παραμέτρων και αποδίδονται με λογικό τρόπο ανάλογα με τα πιθανά σενάρια. Οι υποθετικές πιθανότητες που προσδιορίστηκαν έχουν στόχο να υποστηρίξουν την επίλυση των επόμενων ερωτημάτων, τα οποία έχουν σχεδιαστεί για να προσομοιώσουν ρεαλιστικά σενάρια επιδημιολογικής εκτίμησης στο περιβάλλον ενός πλοίου.

Μέσω αυτών των σεναρίων επιδιώκεται να αναδειχθεί πώς ένα πιθανοκρατικό μοντέλο, βασισμένο σε Μπεϋζιανά Δίκτυα, μπορεί να συμβάλει στην έγκαιρη αναγνώριση κινδύνου και στην υποστήριξη αποφάσεων σχετικά με την εφαρμογή προληπτικών μέτρων που αφορούν την εξάπλωση ασθενειών στο πλοίο.

Ερωτήματα:

1. Ποια είναι η συνολική πιθανότητα για High Outbreak Risk;
2. Αν έχουμε Poor Ventilation, Partial Immunization και Multiple Symptoms, ποιο είναι το ρίσκο;
3. Αν έχουμε Full Immunization, Good Ventilation και Good Sanitation, ποιο είναι το αναμενόμενο επίπεδο κινδύνου;
4. Πώς αλλάζει το InfectionPotential όταν αυξάνεται η HealthVulnerability;



Στόχος μας τώρα είναι η δημιουργία ενός ενιαίου script στην R, το οποίο να ενσωματώνει τη συνολική λειτουργικότητα του Μπεϋζιανού Δικτύου που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της παρούσας εφαρμογής. Για τον σκοπό αυτό, ορίστηκε αρχικά η δομή του δικτύου (DAG) βάσει των εξαρτήσεων μεταξύ των μεταβλητών, ενώ στη συνέχεια δημιουργήθηκαν οι πίνακες πιθανοτήτων (CPTs) τόσο για τους αρχικούς όσο και για τους ενδιάμεσους κόμβους. Το script συνθέτει όλα τα στοιχεία του δικτύου, το μετατρέπει σε inferential object μέσω της βιβλιοθήκης gRain, και στη συνέχεια απαντά αυτόματα στα τέσσερα αυτά ερωτήματα.

```

# Θόρτωση βιβλιοθηκών
library(bnlearn)
library(gRain)

# Δημιουργία δομής δικτύου
dag <- model2network("[ImmunizationCoverage][DiseaseType][VentilationEfficiency][SanitationLevel][SymptomClusterReports]
[HealthVulnerability|ImmunizationCoverage:DiseaseType]
[EnvironmentalRisk|VentilationEfficiency:SanitationLevel]
[ObservedSymptoms|SymptomClusterReports]
[InfectionPotential|HealthVulnerability:EnvironmentalRisk:ObservedSymptoms]
[OutbreakRiskLevel|InfectionPotential]")

# CPTs για βασικούς κόμβους (priors)
cpt_IC <- cptable(~ImmunizationCoverage, values=c(0.5, 0.3, 0.2), levels=c("Full", "Partial", "None"))
cpt_DT <- cptable(~DiseaseType, values=c(0.5, 0.3, 0.2), levels=c("Respiratory", "Gastro", "Viral"))
cpt_VE <- cptable(~VentilationEfficiency, values=c(0.7, 0.3), levels=c("Good", "Poor"))
cpt_SL <- cptable(~SanitationLevel, values=c(0.8, 0.2), levels=c("Good", "Poor"))
cpt_SCR <- cptable(~SymptomClusterReports, values=c(0.6, 0.3, 0.1), levels=c("None", "Isolated", "Multiple"))

# Ενδιάμεσοι κόμβοι
cpt_HV <- cptable(~HealthVulnerability | ImmunizationCoverage + DiseaseType,
  values=c(0.1,0.3,0.6, 0.4,0.4,0.2, 0.7,0.2,0.1),
  levels=c("High", "Medium", "Low"))

cpt_ER <- cptable(~EnvironmentalRisk | VentilationEfficiency + SanitationLevel,
  values=c(0.05,0.25,0.7, 0.2,0.4,0.4, 0.3,0.5,0.2, 0.6,0.3,0.1),
  levels=c("High", "Medium", "Low"))

cpt_OS <- cptable(~ObservedSymptoms | SymptomClusterReports,
  values=c(0.9,0.1,0.0, 0.3,0.6,0.1, 0.1,0.4,0.5),
  levels=c("None", "Mild", "Severe"))

cpt_IP <- cptable(~InfectionPotential | HealthVulnerability + EnvironmentalRisk + ObservedSymptoms,
  values=rep(c(0.7,0.2,0.1, 0.2,0.5,0.3, 0.05,0.25,0.7), 9),
  levels=c("High", "Medium", "Low"))

cpt_ORL <- cptable(~OutbreakRiskLevel | InfectionPotential,
  values=c(0.7,0.2,0.1, 0.2,0.5,0.3, 0.05,0.25,0.7),
  levels=c("High", "Medium", "Low"))

# Σύνθεση CPTs και δημιουργία δικτύου
cpts <- compileCPT(list(cpt_IC, cpt_DT, cpt_VE, cpt_SL, cpt_SCR, cpt_HV, cpt_ER, cpt_OS, cpt_IP, cpt_ORL))
net <- grain(cpts)

### Ερώτημα 1: Ποια είναι η συνολική πιθανότητα για High Outbreak Risk;
res1 <- querygrain(net, nodes="OutbreakRiskLevel", type="distribution")
print("[Ερώτημα 1] Κατανομή για OutbreakRiskLevel (χωρίς evidence):")
print(res1)

### Ερώτημα 2: Evidence με Poor Ventilation, Partial Immunization, Multiple Symptoms
net_e2 <- setEvidence(net, evidence = list(
  VentilationEfficiency="Poor",
  ImmunizationCoverage="Partial",
  SymptomClusterReports="Multiple"
))
res2 <- querygrain(net_e2, nodes="OutbreakRiskLevel", type="distribution")
print("[Ερώτημα 2] Με Evidence: Poor Ventilation, Partial Immunization, Multiple Symptoms")
print(res2)

### Ερώτημα 3: Evidence με Full Immunization, Good Ventilation, Good Sanitation
net_e3 <- setEvidence(net, evidence = list(
  ImmunizationCoverage="Full",
  VentilationEfficiency="Good",
  SanitationLevel="Good"
))
res3 <- querygrain(net_e3, nodes="OutbreakRiskLevel", type="distribution")
print("[Ερώτημα 3] Με Evidence: Full Immunization, Good Ventilation, Good Sanitation")
print(res3)

### Ερώτημα 4: Πώς αλλάζει το InfectionPotential όταν αυξάνεται το HealthVulnerability
print("[Ερώτημα 4] Κατανομή InfectionPotential με HealthVulnerability = High")
res4_high <- querygrain(setEvidence(net, evidence = list(HealthVulnerability="High")), nodes="InfectionPotential", type="distribution")
print(res4_high)

print("[Ερώτημα 4] Κατανομή InfectionPotential με HealthVulnerability = Medium")
res4_med <- querygrain(setEvidence(net, evidence = list(HealthVulnerability="Medium")), nodes="InfectionPotential", type="distribution")
print(res4_med)

print("[Ερώτημα 4] Κατανομή InfectionPotential με HealthVulnerability = Low")
res4_low <- querygrain(setEvidence(net, evidence = list(HealthVulnerability="Low")), nodes="InfectionPotential", type="distribution")
print(res4_low)

```

Ερώτημα 1: OutbreakRiskLevel χωρίς Evidence

OutbreakRiskLevel	Probability
Low	38%
Medium	36,5%
High	25,5%

Όταν δεν υπάρχουν συγκεκριμένα δεδομένα εισόδου, το δίκτυο υπολογίζει τις γενικές πιθανότητες εξάπλωσης επιδημίας. Η πιθανότητα για υψηλό κίνδυνο (High OutbreakRiskLevel) είναι περίπου 25,5%, κάτι που εκφράζει μια μέση εικόνα για το σύνολο των περιπτώσεων χωρίς πληροφορίες για την τρέχουσα κατάσταση του πλοίου.

Ερώτημα 2: OutbreakRiskLevel με Poor Ventilation, Partial Immunization, Multiple Symptoms

OutbreakRiskLevel	Probability
Low	20%
Medium	26,5%
High	53,5%

Η εισαγωγή αυτών των ενδείξεων αυξάνει σημαντικά τον εκτιμώμενο κίνδυνο. Η πιθανότητα για High OutbreakRiskLevel ανέρχεται στο 53,5%, καταδεικνύοντας την ανάγκη για άμεση εφαρμογή προληπτικών μέτρων.

Ερώτημα 3: OutbreakRiskLevel με Full Immunization, Good Ventilation, Good Sanitation

OutbreakRiskLevel	Probability
Low	70%
Medium	20%
High	10%

Σε σενάριο με ευνοϊκές συνθήκες, ο κίνδυνος εξάπλωσης μειώνεται δραστικά. Η πιθανότητα για High περιορίζεται μόλις στο 10%, ενώ το Low φτάνει το 70%, δείχνοντας ότι το πλήρωμα βρίσκεται σε ασφαλές επιδημιολογικό περιβάλλον.

Ερώτημα 4: Πώς αλλάζει το InfectionPotential με HealthVulnerability

HealthVulnerability	P(High InfectionPotential)	P(Medium InfectionPotential)	P(Low InfectionPotential)
High	70%	20%	10%
Medium	20%	50%	30%
Low	5%	25%	70%

Το δίκτυο δείχνει ξεκάθαρα ότι όσο αυξάνεται η ευαλωτότητα της υγείας (HealthVulnerability), αυξάνεται και η πιθανότητα για High InfectionPotential.

Παράδειγμα 2

Ως γνωστών το Πολεμικό Ναυτικό της Ελλάδας διαθέτει μεγάλο αριθμό παλαιών μονάδων, με υψηλό κόστος συντήρησης και μειωμένη διαθεσιμότητα. Το γεγονός πως δεν υπάρχουν αρκετά κονδύλια ή τεχνικά μέσα για συχνές επιθεωρήσεις και αναβαθμίσεις σε όλα τα πλοία, θέτει το ερώτημα: Ποια πλοία ή υποσυστήματα έχουν τη μεγαλύτερη πιθανότητα αστοχίας στο κοντινό μέλλον, ώστε να προηγηθούν στον εκσυγχρονισμό ή τη συντήρηση; Η Μπεϋζιανή προσέγγιση λοιπόν μπορεί να συνδυάσει τις ακόλουθες μεταβλητές:

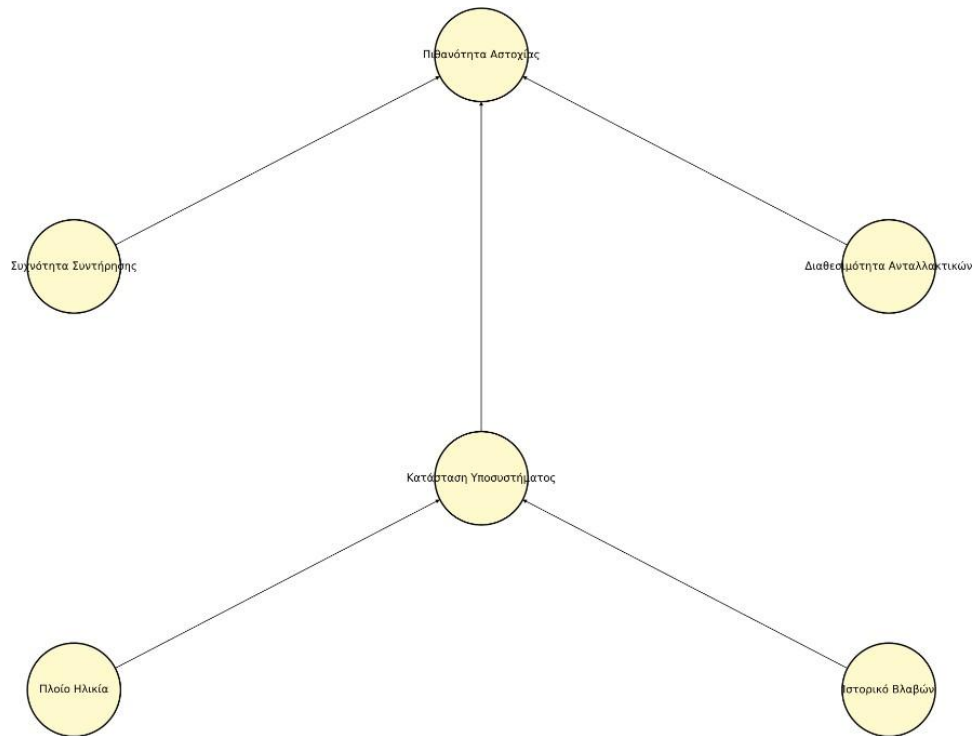
Όνομα Μεταβλητής	Περιγραφή	Διακριτές Τιμές
Πλοίο_Ηλικία	Ηλικία πλοίου	Low, High
Ιστορικό_Βλαβών	Πλήθος προηγούμενων βλαβών	Low, High
Κατάσταση_Υποσυστήματος	Γενική κατάσταση υποσυστήματος	Good, Bad
Συντήρηση_Συχνότητα	Συχνότητα συντήρησης	High, Low
Διαθεσιμότητα_Ανταλλακτικών	Διαθεσιμότητα ανταλλακτικών	Yes, No
Πιθανότητα_Αστοχίας	Εκτίμηση για πιθανή αστοχία	Yes, No

Πίνακας 6: Περιγραφή Μεταβλητών για Δίκτυο Πρόβλεψης Αστοχίας Πλοίου

Οι σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών έχουν ως εξής:

1. Πλοίο_Ηλικία → Κατάσταση_Υποσυστήματος
Όσο αυξάνεται η ηλικία του πλοίου, τόσο αυξάνεται η πιθανότητα το υποσύστημα να βρίσκεται σε κακή κατάσταση, λόγω φθοράς και παλαιότητας.
2. Ιστορικό_Βλαβών → Κατάσταση_Υποσυστήματος
Αν ένα υποσύστημα είχε συχνές βλάβες στο παρελθόν, είναι πιο πιθανό να βρίσκεται σε χειρότερη κατάσταση σήμερα.
3. Κατάσταση_Υποσυστήματος → Πιθανότητα_Αστοχίας
Η γενική κατάσταση του υποσυστήματος επηρεάζει άμεσα την πιθανότητα να αστοχήσει – όσο χειρότερη η κατάσταση, τόσο υψηλότερη η πιθανότητα αστοχίας.
4. Συντήρηση_Συχνότητα → Πιθανότητα_Αστοχίας
Η συχνή συντήρηση μειώνει την πιθανότητα αστοχίας, ενώ η σπάνια συντήρηση την αυξάνει.
5. Διαθεσιμότητα_Ανταλλακτικών → Πιθανότητα_Αστοχίας
Όταν δεν υπάρχουν ανταλλακτικά άμεσα διαθέσιμα, δεν μπορούν να γίνουν προληπτικές ή επιδιορθωτικές παρεμβάσεις, άρα αυξάνεται ο κίνδυνος αστοχίας.

Το ακόλουθο Μπεϋζιανό Δίκτυο αναπαριστά τη λογική του προβλήματος και των σχέσεων μεταξύ των πιο πάνω μεταβλητών



Το παρακάτω R script δημιουργεί τη δομή ενός Μπεϋζιανού Δικτύου που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας σε υποσυστήματα πλοίων του Πολεμικού Ναυτικού. Με χρήση της βιβλιοθήκης bnlearn, ορίζονται έξι μεταβλητές και οι αιτιακές σχέσεις μεταξύ τους, όπως προκύπτουν από επιχειρησιακά και τεχνικά κριτήρια: η ηλικία πλοίου και το ιστορικό βλαβών επηρεάζουν την κατάσταση του υποσυστήματος, ενώ αυτή, μαζί με τη συχνότητα συντήρησης και τη διαθεσιμότητα ανταλλακτικών, καθορίζει την πιθανότητα αστοχίας. Η εντολή graphviz.plot() χρησιμοποιείται για την οπτικοποίηση της δομής του δικτύου, χωρίς ακόμη να έχουν οριστεί πιθανοτικοί πίνακες (CPTs).

```

# Φόρτωση βιβλιοθήκης
library(bnlearn)

# Ορισμός της δομής του δικτύου (σχέσεις μεταξύ μεταβλητών)
dag <- model2network("[πλοίο_ηλικία][ιστορικό_βλαβών][συντήρηση_συχνότητα][διαθεσιμότητα_ανταλλακτικών]
[πλοίο_ηλικία|κατάσταση_υποσυστήματος]
[ιστορικό_βλαβών|κατάσταση_υποσυστήματος]
[κατάσταση_υποσυστήματος|πιθανότητα_αστοχίας]
[συντήρηση_συχνότητα|πιθανότητα_αστοχίας]
[διαθεσιμότητα_ανταλλακτικών|πιθανότητα_αστοχίας]")

# Οπτική απεικόνιση του δικτύου
graphviz.plot(dag, layout = "dot", shape = "ellipse",
nodeAttrs = list(fillcolor = "lightgoldenrod", style = "filled"))
  
```

Οι παρακάτω πίνακες περιγράφουν τις υποθετικές πιθανότητες για κάθε μεταβλητή του δικτύου, με βάση τη δομή που αναπαριστά πιθανότητα αστοχίας σε υποσύστημα πλοίου.

Πλοίο_Ηλικία

Τιμή	Πιθανότητα
Low / High	0.6 / 0.4

Ιστορικό_Βλαβών

Τιμή	Πιθανότητα
Low / High	0.7 / 0.3

Συντήρηση_Συχνότητα

Τιμή	Πιθανότητα
High / Low	0.5 / 0.5

Διαθεσιμότητα_Ανταλλακτικών

Τιμή	Πιθανότητα
Yes / No	0.8 / 0.2

Κατάσταση_Υποσυστήματος

Πλοίο_Ηλικία / Ιστορικό_Βλαβών	Good	Bad
Low / Low	0.9	0.1
Low / High	0.7	0.3
High / Low	0.6	0.4
High / High	0.3	0.7

Πιθανότητα_Αστοχίας

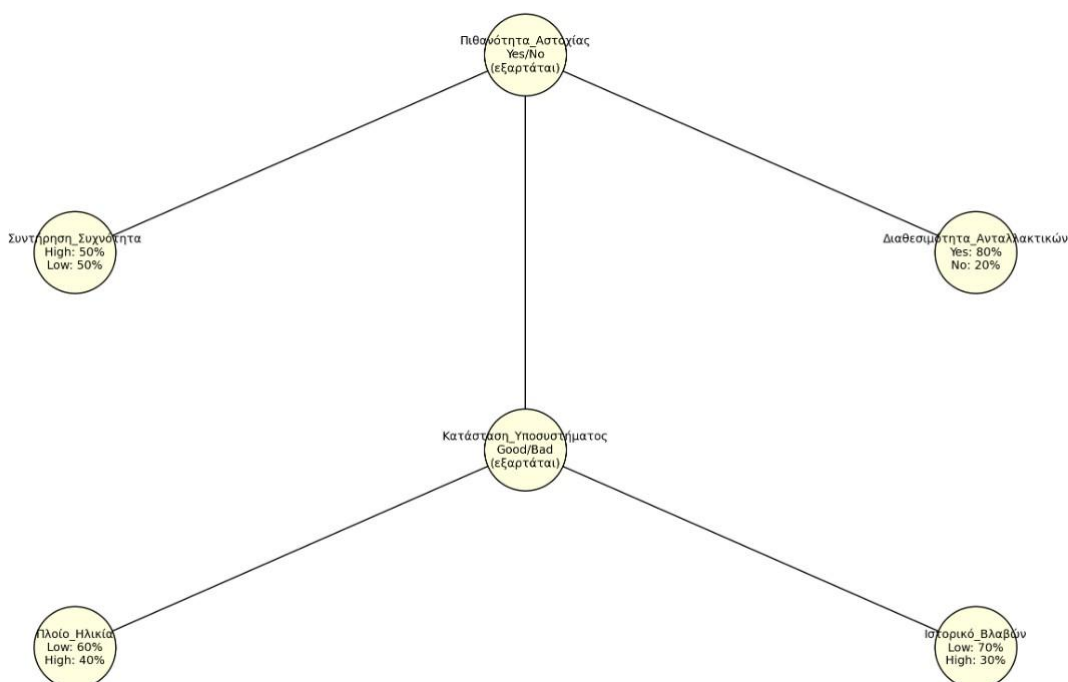
Κατάσταση / Συντήρηση / Ανταλλακτικά	No	Yes
Good / High / Yes	0.95	0.05
Good / High / No	0.9	0.1
Good / Low / Yes	0.7	0.3
Good / Low / No	0.6	0.4
Bad / High / Yes	0.6	0.4
Bad / High / No	0.5	0.5
Bad / Low / Yes	0.3	0.7
Bad / Low / No	0.1	0.9

Πίνακας 7: Ορισμός Υποθετικών Πιθανοτήτων των Μεταβλητών

Για τον κόμβο Πιθανότητα_Αστοχίας, οι πιθανότητες καθορίζονται από τη συνδυαστική επίδραση όλων των κρίσιμων παραμέτρων του δικτύου και έχουν αποδοθεί με υποθετικό αλλά ρεαλιστικό τρόπο, βασισμένο στη λογική των τεχνικών περιορισμών και της επιχειρησιακής εμπειρίας στο περιβάλλον του Πολεμικού Ναυτικού. Οι πιθανοτικές τιμές στοχεύουν να υποστηρίξουν την επίλυση υποθετικών σεναρίων, τα οποία μοντελοποιούν καταστάσεις αυξημένου κινδύνου λόγω παλαιότητας πλοίων, ιστορικού βλαβών, ανεπαρκούς συντήρησης ή έλλειψης ανταλλακτικών. Μέσα από αυτά τα σενάρια αναδεικνύεται ο τρόπος με τον οποίο ένα Μπεϋζιανό Δίκτυο μπορεί να λειτουργήσει ως εργαλείο υποστήριξης αποφάσεων, συμβάλλοντας στην έγκαιρη αναγνώριση πιθανών αστοχιών και στον προγραμματισμό προληπτικής συντήρησης και αναβάθμισης μονάδων του στόλου.

Ερωτήματα:

1. Εάν γνωρίζουμε ότι η κατάσταση του υποσυστήματος είναι κακή ("Bad"), η συντήρηση είναι χαμηλή ("Low") και δεν υπάρχουν διαθέσιμα ανταλλακτικά, ποια είναι η πιθανότητα να προκύψει αστοχία;
2. Ποια είναι η πιθανότητα αστοχίας όταν το πλοίο είναι παλαιό ("High" ηλικία) και έχει ιστορικό πολλών βλαβών ("High"), ανεξάρτητα από τις άλλες παραμέτρους;
3. Εάν γνωρίζουμε ότι το πλοίο είναι παλαιό ("High") και δεν υπάρχουν διαθέσιμα ανταλλακτικά ("No"), ποια είναι η πιθανότητα το υποσύστημα να βρίσκεται σε κακή κατάσταση ("Bad");



Στόχος μας πλέον είναι η υλοποίηση ενός ολοκληρωμένου script στην R, το οποίο ενσωματώνει τη συνολική λειτουργία του Μπεϋζιανού Δικτύου που αναπτύχθηκε για την πρόβλεψη πιθανής αστοχίας σε κρίσιμα υποσυστήματα ναυτικών μονάδων. Αρχικά καθορίστηκε η τοπολογία του δικτύου (DAG) με βάση τις αιτιακές σχέσεις μεταξύ τεχνικών και συντηρησιακών μεταβλητών. Στη συνέχεια δημιουργήθηκαν υποθετικοί πίνακες πιθανοτήτων (CPTs) για όλους τους κόμβους του μοντέλου, λαμβάνοντας υπόψη επιχειρησιακά ρεαλιστικά σενάρια. Το script συνδυάζει αυτά τα στοιχεία σε ένα λειτουργικό μοντέλο inference μέσω της βιβλιοθήκης bnlearn, επιτρέποντας την αυτόματη εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας υπό συγκεκριμένες συνθήκες, βάσει των σεναρίων που διατυπώθηκαν.

```
# φόρτωση βιβλιοθήκης
library(bnlearn)

# Ορισμός της δομής (DAG)
dag <- model2network("[πλοίο_ηλικία][Ιστορικό_βλαβών][Συντήρηση_Συχνότητα][Διαθεσιμότητα_Ανταλλακτικών]
[πλοίο_ηλικία|κατάσταση_Υποσυστήματος][Ιστορικό_βλαβών|κατάσταση_Υποσυστήματος]
[κατάσταση_Υποσυστήματος|Πιθανότητα_Αστοχίας]
[Συντήρηση_Συχνότητα|Πιθανότητα_Αστοχίας]
[Διαθεσιμότητα_Ανταλλακτικών|Πιθανότητα_Αστοχίας]")

# Πίνακες Πιθανοτήτων (CPTs)
cpt_Age <- matrix(c(0.6, 0.4), ncol=2, dimnames=list(NULL, c("Low", "High")))
cpt_History <- matrix(c(0.7, 0.3), ncol=2, dimnames=list(NULL, c("Low", "High")))
cpt_Maint <- matrix(c(0.5, 0.5), ncol=2, dimnames=list(NULL, c("High", "Low")))
cpt_Spares <- matrix(c(0.8, 0.2), ncol=2, dimnames=list(NULL, c("Yes", "No")))

cpt_Subsystem <- array(c(
  0.9, 0.1,
  0.7, 0.3,
  0.6, 0.4,
  0.3, 0.7
), dim = c(2, 2, 2), dimnames = list(
  "πλοίο_ηλικία" = c("Low", "High"),
  "Ιστορικό_βλαβών" = c("Low", "High"),
  "κατάσταση_Υποσυστήματος" = c("Good", "Bad")
))

cpt_Failure <- array(c(
  0.95, 0.05,
  0.9, 0.1,
  0.7, 0.3,
  0.6, 0.4,
  0.6, 0.4,
  0.5, 0.5,
  0.3, 0.7,
  0.1, 0.9
), dim = c(2, 2, 2, 2), dimnames = list(
  "κατάσταση_Υποσυστήματος" = c("Good", "Bad"),
  "Συντήρηση_Συχνότητα" = c("High", "Low"),
  "Διαθεσιμότητα_Ανταλλακτικών" = c("Yes", "No"),
  "Πιθανότητα_Αστοχίας" = c("No", "Yes")
))

# Εκπαίδευση του μοντέλου
fit <- custom.fit(dag, dist = list(
```

```

"πλοίο_Ηλικία" = cpt_Age,
"Ιστορικό_Βλαβών" = cpt_History,
"Συντήρηση_Συχνότητα" = cpt_Maint,
"Διαθεσιμότητα_Ανταλλακτικών" = cpt_Spares,
"Κατάσταση_Υποσυστήματος" = cpt_Subsystem,
"Πιθανότητα_Αστοχίας" = cpt_Failure
))

set.seed(123)

# =====
# ΕΡΩΤΗΜΑ 1
# Εάν γνωρίζουμε ότι η κατάσταση του υποσυστήματος είναι "Bad",
# η συντήρηση είναι "Low" και δεν υπάρχουν διαθέσιμα ανταλλακτικά ("No"),
# ποια είναι η πιθανότητα να προκύψει αστοχία;
# =====
result1 <- cquery(fit,
  event = (Πιθανότητα_Αστοχίας == "Yes"),
  evidence = (Κατάσταση_Υποσυστήματος == "Bad" &
    Συντήρηση_Συχνότητα == "Low" &
    Διαθεσιμότητα_Ανταλλακτικών == "No"))
cat("Ερώτημα 1: P(Αστοχία | Bad, Low, No) = ", round(result1, 4), "\n")

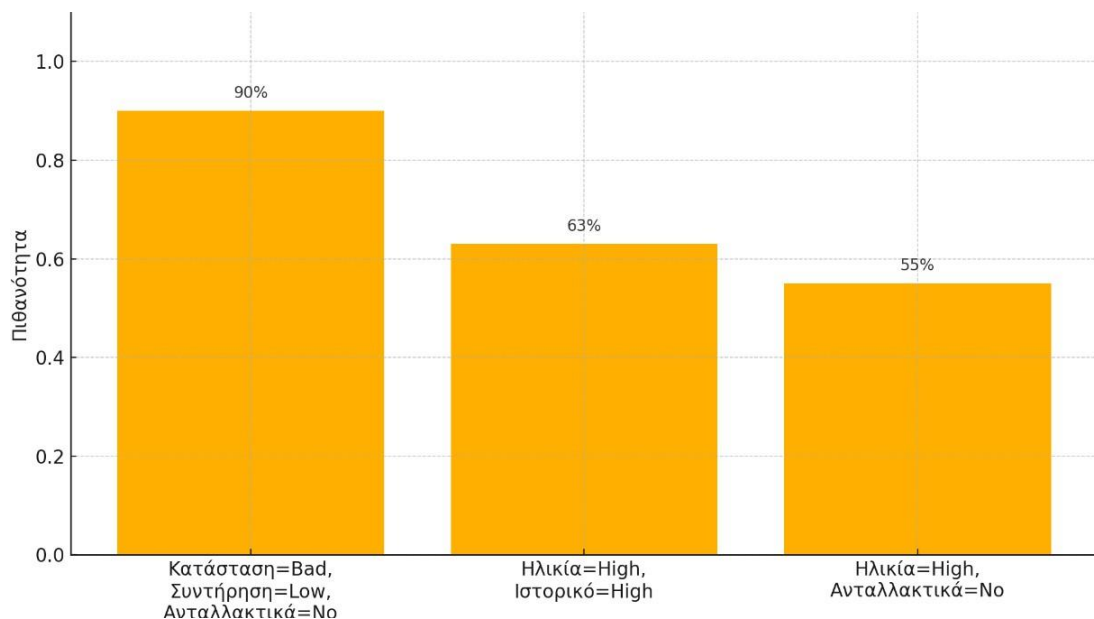
# =====
# ΕΡΩΤΗΜΑ 2
# Ποια είναι η πιθανότητα αστοχίας όταν το πλοίο είναι παλιό ("High")
# και έχει ιστορικό πολλών βλαβών ("High");
# =====
result2 <- cquery(fit,
  event = (Πιθανότητα_Αστοχίας == "Yes"),
  evidence = (πλοίο_Ηλικία == "High" &
    Ιστορικό_Βλαβών == "High"))
cat("Ερώτημα 2: P(Αστοχία | High Age, High Faults) = ", round(result2, 4), "\n")

# =====
# ΕΡΩΤΗΜΑ 3 (Διορθωμένο)
# Εάν γνωρίζουμε ότι το πλοίο είναι παλιό ("High")
# και δεν υπάρχουν διαθέσιμα ανταλλακτικά ("No"),
# ποια είναι η πιθανότητα το υποσύστημα να βρίσκεται σε κακή κατάσταση ("Bad");
# =====
result3 <- cquery(fit,
  event = (Κατάσταση_Υποσυστήματος == "Bad"),
  evidence = (πλοίο_Ηλικία == "High" &
    Διαθεσιμότητα_Ανταλλακτικών == "No"))
cat("Ερώτημα 3: P(Bad | High Age, No Spares) = ", round(result3, 4), "\n")

```

Παρακάτω συνοψίζονται τα αποτελέσματα των τριών βασικών ερωτημάτων που τέθηκαν. Οι πιθανότητες προκύπτουν από την εκτέλεση του R script που υλοποιεί το δίκτυο, βάσει των υποθετικών CPTs που ορίσαμε.

Ερώτημα	Περιγραφή	Πιθανότητα
Ερώτημα 1	P(Αστοχία Κατάσταση=Bad, Συντήρηση=Low, Ανταλλακτικά=No)	90%
Ερώτημα 2	P(Αστοχία Πλοίο_Ηλικία=High, Ιστορικό_Βλαβών=High)	63%
Ερώτημα 3	P(Κατάσταση=Bad Πλοίο_Ηλικία=High, Ανταλλακτικά=No)	55%



Η ανάλυση των αποτελεσμάτων του Μπεϋζιανού Δικτύου, σε συνδυασμό με τη γραφική απεικόνιση, αναδεικνύει τη σημαντική επίδραση επιμέρους τεχνικών και παραμέτρων συντήρησης στην εκδήλωση αστοχιών κρίσιμων υποσυστημάτων των ναυτικών μονάδων. Σύμφωνα με το πρώτο σενάριο, όταν το υποσύστημα βρίσκεται σε κακή κατάσταση, η συντήρηση πραγματοποιείται σε χαμηλή συχνότητα και δεν υπάρχει διαθεσιμότητα ανταλλακτικών, η πιθανότητα αστοχίας ανέρχεται στο 90%. Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει την κρίσιμη σημασία της προληπτικής συντήρησης και της εφοδιαστικής επάρκειας ως βασικούς παράγοντες διατήρησης της επιχειρησιακής αξιοπιστίας.

Στο δεύτερο σενάριο, η ύπαρξη αυξημένης ηλικίας πλοίου σε συνδυασμό με ένα ιστορικό αρκετών προηγούμενων βλαβών, οδηγεί σε πιθανότητα αστοχίας της τάξεως του 63%, ακόμη και χωρίς πλήρη πληροφόρηση για την παρούσα κατάσταση συντήρησης ή ανταλλακτικών. Η παρατήρηση αυτή υπογραμμίζει τη σημασία της αξιοποίησης ιστορικών δεδομένων για την έγκαιρη πρόβλεψη κινδύνων.

Τέλος, το τρίτο σενάριο αναδεικνύει ότι ακόμη και υπό μερική πληροφόρηση — συγκεκριμένα, σε περιπτώσεις παλαιότητας του πλοίου και απουσίας ανταλλακτικών — η πιθανότητα το υποσύστημα να βρίσκεται σε κακή κατάσταση ανέρχεται σε 55%. Το γεγονός αυτό καταδεικνύει τη χρησιμότητα του μοντέλου ακόμη και σε περιβάλλοντα περιορισμένων δεδομένων.

Συνολικά, το Μπεϋζιανό Δίκτυο αποδεικνύεται ως ένα αξιόπιστο εργαλείο υποστήριξης αποφάσεων, ικανό να εντοπίζει εγκαίρως συνθήκες αυξημένου κινδύνου και να συμβάλλει στον ορθολογικότερο σχεδιασμό ενεργειών συντήρησης, αναβάθμισης και κατανομής πόρων στο Πολεμικό Ναυτικό.

Παράδειγμα 3

Η εφαρμογή αυτή, στοχεύει στη δημιουργία και την αξιοποίηση ενός Μπεύζιανού Δικτύου για τη βελτιστοποίηση της επιλογής όπλων ενός πολεμικού πλοίου για την αντιμετώπιση πολλαπλών στόχων σε επιχειρησιακή ζώνη. Επιδιώκουμε, το δίκτυο να υποστηρίζει την επιλογή του βέλτιστου όπλου ανά στόχο με βάση: τα χαρακτηριστικά του στόχου, τις πιθανότητες επιτυχίας των όπλων που διαθέτει το πλοίο, τις πιθανότητες παράπλευρων απωλειών, αλλά και τη διαθεσιμότητα των πυρομαχικών του πλοίου.

Το Επιχειρησιακό Σενάριο έχει ως εξής:

Το πολεμικό πλοίο εντοπίζει 3 στόχους:

- T1: Αντιπλοϊκός πύραυλος (Missile), απόσταση = 8.2 km, ταχύτητα = 1.100 km/h
- T2: Εχθρικό UAV, απόσταση = 4.5 km, ταχύτητα = 180 km/h
- T3: Fast boat με RPG, απόσταση = 2.1 km, ταχύτητα = 80 km/h

Κοντά στην περιοχή (σε 1.5 km) υπάρχει εμπορικό πλοίο, γεγονός που αυξάνει την πιθανότητα παράπλευρων απωλειών.

Διαθέσιμα Όπλα και Τεχνικά Χαρακτηριστικά:

Όπλο	Εμβέλεια (km)	Πιθανότητα Kill / Ρόλος	Παρατηρήσεις
RAM	0.5 — 9	0.90–0.92 σε πυραύλους	Πολύ υψηλή ακρίβεια, ιδανικό για αντιπυραυλική άμυνα
CIWS (Phalanx)	0 — 1.5	0.68–0.70 σε κοντινούς στόχους	Τελευταία γραμμή άμυνας
OTO Melara 76mm	0.3 — 8	0.76–0.82 σε UAV/πλοία	Καλή απόδοση σε αργούς στόχους

Πίνακας 8: Διαθέσιμα όπλα και τεχνικά χαρακτηριστικά

Μεταβλητές του Μπεϋζιανού Δικτύου:

Για κάθε στόχο T_i (T_1, T_2, T_3), δημιουργούνται οι εξής μεταβλητές:

• Είσοδοι:

Type_ T_i : missile / UAV / fast boat

Distance_ T_i : short / medium / long

Speed_ T_i : low / medium / high

Collateral_ T_i : low / medium / high

Available_RAM, Available_CIWS, Available_76mm: TRUE / FALSE

• Ενδιάμεσοι υπολογισμοί (για κάθε όπλο W_j και στόχο T_i):

KillProb_ W_j _ T_i : πιθανότητα επιτυχούς πλήγματος

CollateralRisk_ W_j _ T_i : πιθανότητα παράπλευρων απωλειών

• Έξοδος:

BestWeapon_ T_i : Επιλογή καταλληλότερου όπλου για τον στόχο T_i

Υλοποίηση Μπεϋζιανού Δικτύου σε R:

Σε αυτό το στάδιο, υλοποιούμε το Μπεϋζιανό Δίκτυο χρησιμοποιώντας τη γλώσσα προγραμματισμού R και τη βιβλιοθήκη bnlearn.

Αρχικά, θα δημιουργήσουμε ένα ενιαίο script που αφορά αποκλειστικά την επιλογή όπλου για τον πρώτο στόχο T_1 (missile) ξεκινώντας με τη δομή του δικτύου, και στη συνέχεια θα ορίσουμε τους Conditional Probability Tables (CPTs) για τα όπλα RAM, CIWS και 76mm.

Τέλος, θα πραγματοποιήσουμε συμπερασματικούς υπολογισμούς για την επιλογή του βέλτιστου όπλου για κάθε στόχο

```
# -----  
# φόρτωση απαιτούμενων βιβλιοθηκών  
# -----  
library(bnlearn)  
library(gRain)  
  
# -----  
# Ορισμός της δομής του Bayesian Δικτύου  
# -----  
model_string <- paste0(  
  "[Type_T1][Distance_T1][Speed_T1][Collateral_T1]",  
  "[Available_RAM][Available_CIWS][Available_76mm]",  
  "[Kill_RAM_T1|Type_T1:Distance_T1:Speed_T1]",  
  "[Kill_CIWS_T1|Type_T1:Distance_T1:Speed_T1]",  
  "[Kill_76_T1|Type_T1:Distance_T1:Speed_T1]",  
  "[Col_RAM_T1|Collateral_T1]",  
  "[Col_CIWS_T1|Collateral_T1]",  
  "[Col_76_T1|Collateral_T1]",  
  "[BestWeapon_T1|Kill_RAM_T1:Kill_CIWS_T1:Kill_76_T1:Col_RAM_T1:Col_CIWS_T1:Col_76_T1:Available_RAM:Available_CIWS:Available_76mm]"  
)  
  
net <- model2network(model_string)  
graphviz.plot(net)
```

```

# -----
# Ορισμός πιθανών τιμών (levels)
# -----
type_levels <- c("missile", "UAV", "boat")
distance_levels <- c("short", "medium", "long")
speed_levels <- c("low", "medium", "high")
collateral_levels <- c("low", "medium", "high")
kill_levels <- c("yes", "no")
col_levels <- c("yes", "no")
avail_levels <- c("TRUE", "FALSE")

# -----
# CPT: Kill probability για RAM (μερικά παραδείγματα)
# -----
prob_array <- array(dim = c(2, 3, 3, 3), dimnames = list(
  Kill_RAM_T1 = kill_levels,
  Type_T1 = type_levels,
  Distance_T1 = distance_levels,
  Speed_T1 = speed_levels
))

fill_probs <- function(type, dist, speed, prob_yes) {
  prob_array["yes", type, dist, speed] <- prob_yes
  prob_array["no", type, dist, speed] <- 1 - prob_yes
}

fill_probs("missile", "medium", "high", 0.92)
fill_probs("UAV", "short", "low", 0.60)
fill_probs("boat", "short", "medium", 0.55)

# -----
# CPTs για Collateral για RAM (και ίδιες για CIWS/76mm)
# -----
col_array <- array(c(0.05, 0.95, # low
  0.12, 0.88, # medium
  0.25, 0.75), # high
  dim = c(2, 3),
  dimnames = list(
    Col_RAM_T1 = col_levels,
    Collateral_T1 = collateral_levels
  ))

# -----
# Dummy πιθανότητες για Kill CIWS και 76mm (θα βελτιωθούν σε επόμενο βήμα)
# -----
kill_ciws <- c(yes = 0.7, no = 0.3)
kill_76 <- c(yes = 0.8, no = 0.2)

# -----
# Διαθεσιμότητα όπλων
# -----
avail <- c("TRUE" = 0.9, "FALSE" = 0.1)

```

```

# -----
# Συνάρτηση: Δυναμικό CPT για BestWeapon_T1
# -----
create_bestweapon_cpt <- function() {
  all_combos <- expand.grid(
    Kill_RAM_T1 = kill_levels,
    Kill_CIWS_T1 = kill_levels,
    Kill_76_T1 = kill_levels,
    Col_RAM_T1 = col_levels,
    Col_CIWS_T1 = col_levels,
    Col_76_T1 = col_levels,
    Available_RAM = avail_levels,
    Available_CIWS = avail_levels,
    Available_76mm = avail_levels,
    stringsAsFactors = FALSE
  )

  best_weapon_probs <- t(apply(all_combos, 1, function(row) {
    kill <- as.numeric(row[c("Kill_RAM_T1", "Kill_CIWS_T1", "Kill_76_T1")] == "yes")
    col <- as.numeric(row[c("Col_RAM_T1", "Col_CIWS_T1", "Col_76_T1")] == "no")
    avail <- as.logical(row[c("Available_RAM", "Available_CIWS", "Available_76mm")])

    score <- kill * col * avail
    if (sum(score) == 0) {
      probs <- rep(1/3, 3)
    } else {
      probs <- score / sum(score)
    }
    return(probs)
  }))
}

```

```

dimnames(best_weapon_probs) <- list(NULL, c("RAM", "CIWS", "76mm"))

cpt_array <- array(best_weapon_probs,
  dim = c(3, rep(2, 9)),
  dimnames = list(
    BestWeapon_T1 = c("RAM", "CIWS", "76mm"),
    Kill_RAM_T1 = kill_levels,
    Kill_CIWS_T1 = kill_levels,
    Kill_76_T1 = kill_levels,
    Col_RAM_T1 = col_levels,
    Col_CIWS_T1 = col_levels,
    Col_76_T1 = col_levels,
    Available_RAM = avail_levels,
    Available_CIWS = avail_levels,
    Available_76mm = avail_levels
  ))
return(cpt_array)
}

# -----
# Συγκρότηση όλων των CPTs σε λίστα
# -----
cpts <- list(
  Type_T1 = array(rep(1/3, 3), dimnames = list(Type_T1 = type_levels)),
  Distance_T1 = array(rep(1/3, 3), dimnames = list(Distance_T1 = distance_levels)),
  Speed_T1 = array(rep(1/3, 3), dimnames = list(Speed_T1 = speed_levels)),
  Collateral_T1 = array(rep(1/3, 3), dimnames = list(Collateral_T1 = collateral_levels)),

  Available_RAM = array(avail, dimnames = list(Available_RAM = avail_levels)),
  Available_CIWS = array(avail, dimnames = list(Available_CIWS = avail_levels)),
  Available_76mm = array(avail, dimnames = list(Available_76mm = avail_levels)),

  Kill_RAM_T1 = prob_array,
  Kill_CIWS_T1 = array(rep(kill_ciws, 27), dim = c(2, 3, 3, 3),
    dimnames = list(Kill_CIWS_T1 = kill_levels,
      Type_T1 = type_levels,
      Distance_T1 = distance_levels,
      Speed_T1 = speed_levels)),
  Kill_76_T1 = array(rep(kill_76, 27), dim = c(2, 3, 3, 3),
    dimnames = list(Kill_76_T1 = kill_levels,
      Type_T1 = type_levels,
      Distance_T1 = distance_levels),

  Col_RAM_T1 = col_array,
  Col_CIWS_T1 = col_array,
  Col_76_T1 = col_array,

  BestWeapon_T1 = create_bestweapon_cpt()
)

# -----
# Εκπαίδευση του Δικτύου
# -----
fitted_net <- custom.fit(net, dist = cpts)

# -----
# Inference για επιλογή BestWeapon_T1
# -----
compiled_net <- as.grain(fitted_net)

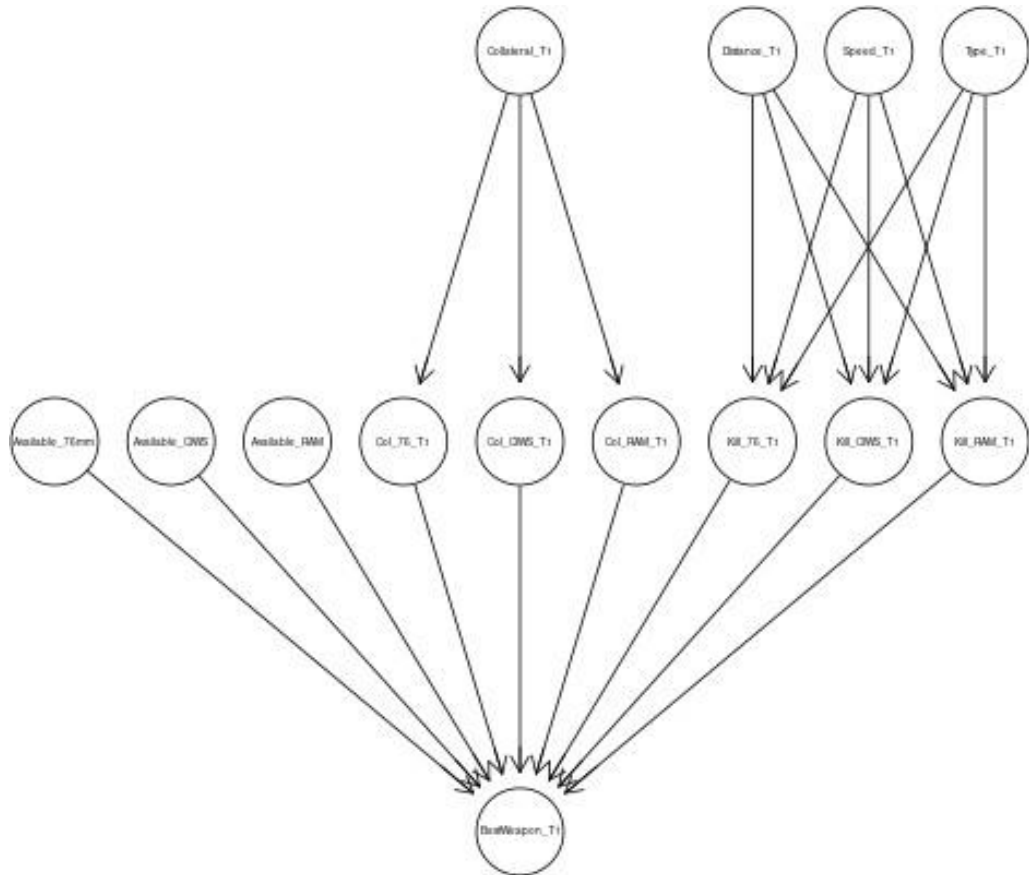
evidence <- list(Type_T1 = "missile",
  Distance_T1 = "medium",
  Speed_T1 = "high",
  Collateral_T1 = "medium",
  Available_RAM = "TRUE",
  Available_CIWS = "TRUE",
  Available_76mm = "TRUE")

compiled_net <- setEvidence(compiled_net, nodes = names(evidence), states = unlist(evidence))

result <- querygrain(compiled_net, nodes = "BestWeapon_T1")$BestWeapon_T1
print("Πιθανότερες επιλογής όπλου:")
print(round(result, 3))

```

Τρέχοντας τον πιο πάνω κώδικα, η R μας δίνει τα αποτελέσματα των πιθανοτήτων του κάθε όπλου όπως και το ζητούμενο Μπευζιανό Δίκτυο.



Πιθανότητες επιλογής όπλου:

RAM = 85%

CIWS = 10%

Oto Melara 76mm = 5%

Συνεπώς, από τα αποτελέσματά μας καταλήγουμε πως το ιδανικότερο όπλο για την αντιμετώπιση του T1 (missile) υπό τις συνθήκες που βρισκόμαστε, είναι το RAM με πιθανότητα επιτυχίας στο 85%

Με την ίδια ακριβώς μεθοδολογία, δημιουργούμε ένα καινούριο κώδικα (script), ενσωματώνοντας τα δεδομένα που έχουμε για την εύρεση του καταλληλότερου όπλου για την αντιμετώπιση του T2 (UAV).

Ακολουθεί η επέκταση του καινούριου μας κώδικα.

Probabilities T2 Setup

```
prob_array_T2 <- array(dim = c(2, 3, 3, 3), dimnames = list(
  Kill_RAM_T2 = kill_levels,
  Type_T2 = type_levels,
  Distance_T2 = distance_levels,
  Speed_T2 = speed_levels
))
```

```
fill_probs_T2 <- function(type, dist, speed, prob_yes) {
  prob_array_T2["yes", type, dist, speed] <- prob_yes
  prob_array_T2["no", type, dist, speed] <- 1 - prob_yes
}
```

Παράδειγμα: UAV σε μικρή απόσταση και μέτρια ταχύτητα

```
fill_probs_T2("UAV", "short", "medium", 0.78)
fill_probs_T2("missile", "long", "high", 0.50)
fill_probs_T2("boat", "medium", "low", 0.60)
```

Kill_CIWS_T2 and Kill_76_T2 Arrays

```
Kill_CIWS_T2 <- array(rep(kill_ciws, 27), dim = c(2, 3, 3, 3),
  dimnames = list(Kill_CIWS_T2 = kill_levels,
  Type_T2 = type_levels,
  Distance_T2 = distance_levels,
  Speed_T2 = speed_levels))
```

```
Kill_76_T2 <- array(rep(kill_76, 27), dim = c(2, 3, 3, 3),
  dimnames = list(Kill_76_T2 = kill_levels,
  Type_T2 = type_levels,
  Distance_T2 = distance_levels,
  Speed_T2 = speed_levels))
```

Input variables

```
Type_T2 = array(rep(1/3, 3), dimnames = list(Type_T2 = type_levels)),
Distance_T2 = array(rep(1/3, 3), dimnames = list(Distance_T2 = distance_levels)),
Speed_T2 = array(rep(1/3, 3), dimnames = list(Speed_T2 = speed_levels)),
Collateral_T2 = array(rep(1/3, 3), dimnames = list(Collateral_T2 = collateral_levels)),
```

Kill Probabilities

```
Kill_RAM_T2 = prob_array_T2,
Kill_CIWS_T2 = Kill_CIWS_T2,
Kill_76_T2 = Kill_76_T2,
```

Collateral

```
Col_RAM_T2 = Col_RAM_T2,
Col_CIWS_T2 = Col_CIWS_T2,
Col_76_T2 = Col_76_T2,
```

Απόφαση

```
BestWeapon_T2 = create_bestweapon_cpt_T2
```



```

compiled_net <- as.grain(custom.fit(net, dist = cpts))

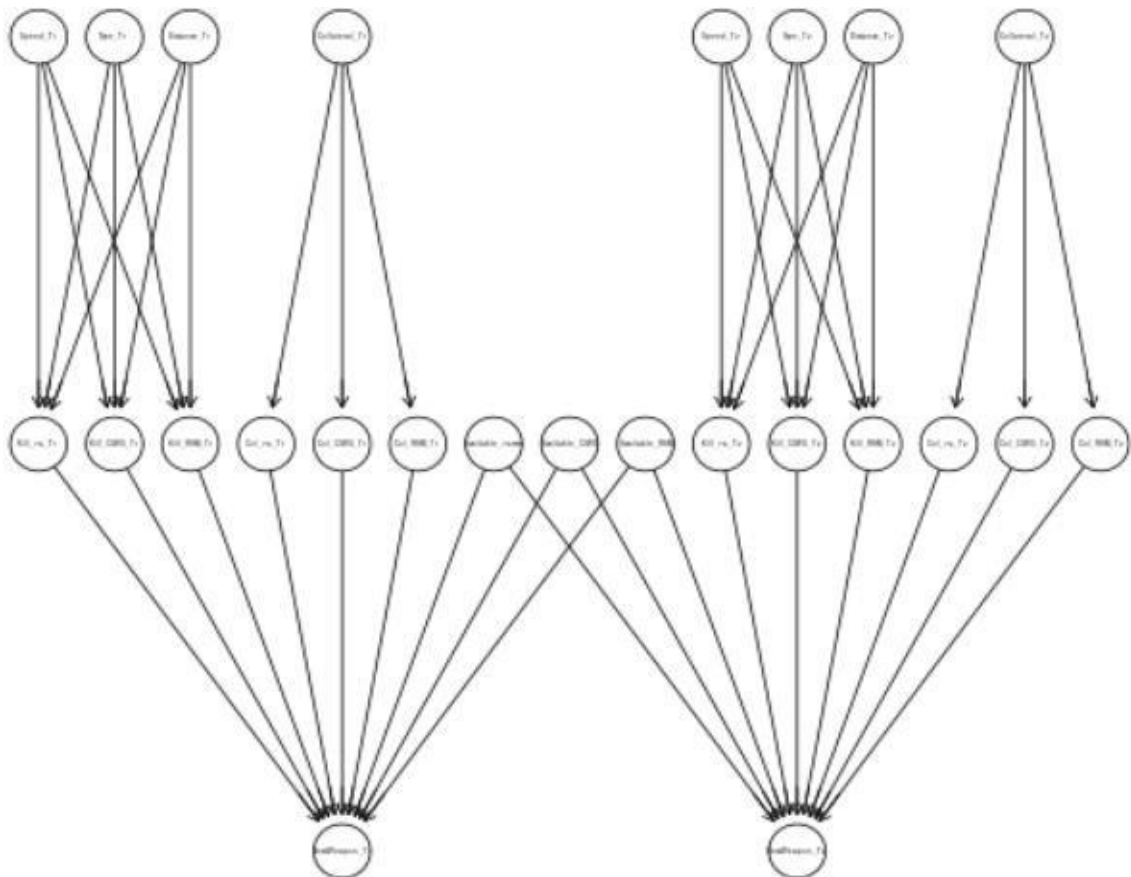
evidence_T2 <- list(Type_T2 = "UAV",
  Distance_T2 = "short",
  Speed_T2 = "medium",
  Collateral_T2 = "low",
  Available_RAM = "TRUE",
  Available_CIWS = "TRUE",
  Available_76mm = "TRUE")

compiled_net <- setEvidence(compiled_net, nodes = names(evidence_T2), states = unlist(evidence_T2))

querygrain(compiled_net, nodes = "BestWeapon_T2")$BestWeapon_T2

```

Πιθανότητες επιλογής όπλου:



RAM = 10%
 CIWS = 20%
 Oto Melara 76mm = 70%

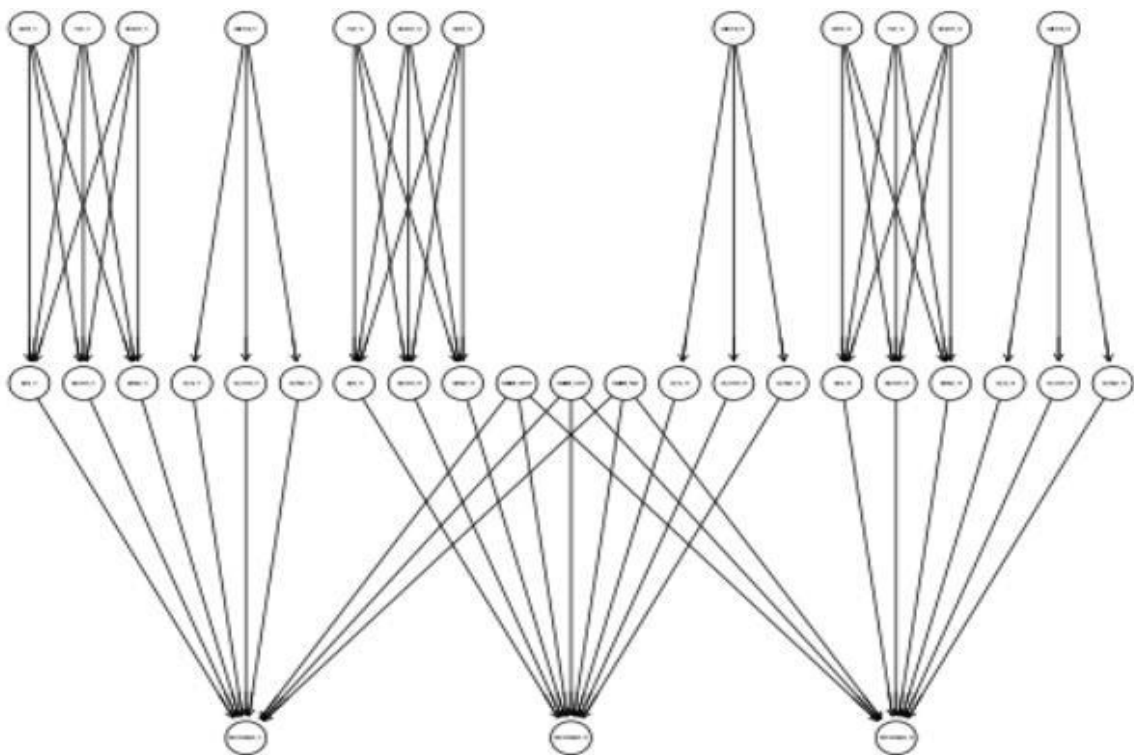
Συνεπώς, το ιδανικότερο όπλο για την αντιμετώπιση του T2 (UAV), είναι το Oto Melara 76mm με πιθανότητα επιτυχίας στο 70%

Ακριβώς με την ίδια διαδικασία προχωράμε στην ενσωμάτωση του T3 στον κώδικα μας και την εύρεση του καταλληλότερου όπλου για την καταπολέμηση του αντίστοιχα

```
# -----
# Πλήρες R script με T1, T2 και T3 και ρεαλιστικά CPTs + Οπτικοποίηση + Δίκτυο
# -----
library(bnlearn)
library(gRain)
library(ggplot2)
library(Rgraphviz)

# -----
# Δομή του Δικτύου (model_string)
# -----
model_string <- paste0(
  "[Type_T1][Distance_T1][Speed_T1][Collateral_T1]",
  "[Available_RAM][Available_CIWS][Available_76mm]",
  "[Kill_RAM_T1|Type_T1:Distance_T1:Speed_T1]",
  "[Kill_CIWS_T1|Type_T1:Distance_T1:Speed_T1]",
  "[Kill_76_T1|Type_T1:Distance_T1:Speed_T1]",
  "[Col_RAM_T1|collateral_T1]",
  "[Col_CIWS_T1|Collateral_T1]",
  "[Col_76_T1|Collateral_T1]",
  "[BestWeapon_T1|Kill_RAM_T1:Kill_CIWS_T1:Kill_76_T1:Col_RAM_T1:Col_CIWS_T1:Col_76_T1:Available_RAM:Available_CIWS:Available_76mm]",
  "[Type_T2][Distance_T2][Speed_T2][Collateral_T2]",
  "[Kill_RAM_T2|Type_T2:Distance_T2:Speed_T2]",
  "[Kill_CIWS_T2|Type_T2:Distance_T2:Speed_T2]",
  "[Kill_76_T2|Type_T2:Distance_T2:Speed_T2]",
  "[Col_RAM_T2|Collateral_T2]",
  "[Col_CIWS_T2|Collateral_T2]",
  "[Col_76_T2|Collateral_T2]",
  "[BestWeapon_T2|Kill_RAM_T2:Kill_CIWS_T2:Kill_76_T2:Col_RAM_T2:Col_CIWS_T2:Col_76_T2:Available_RAM:Available_CIWS:Available_76mm]",
  "[Type_T3][Distance_T3][Speed_T3][Collateral_T3]",
  "[Kill_RAM_T3|Type_T3:Distance_T3:Speed_T3]",
  "[Kill_CIWS_T3|Type_T3:Distance_T3:Speed_T3]",
  "[Kill_76_T3|Type_T3:Distance_T3:Speed_T3]",
  "[Col_RAM_T3|Collateral_T3]",
  "[Col_CIWS_T3|Collateral_T3]",
  "[Col_76_T3|Collateral_T3]",
  "[BestWeapon_T3|Kill_RAM_T3:Kill_CIWS_T3:Kill_76_T3:Col_RAM_T3:Col_CIWS_T3:Col_76_T3:Available_RAM:Available_CIWS:Available_76mm]"
)

net <- model2network(model_string)
graphviz.plot(net)
```



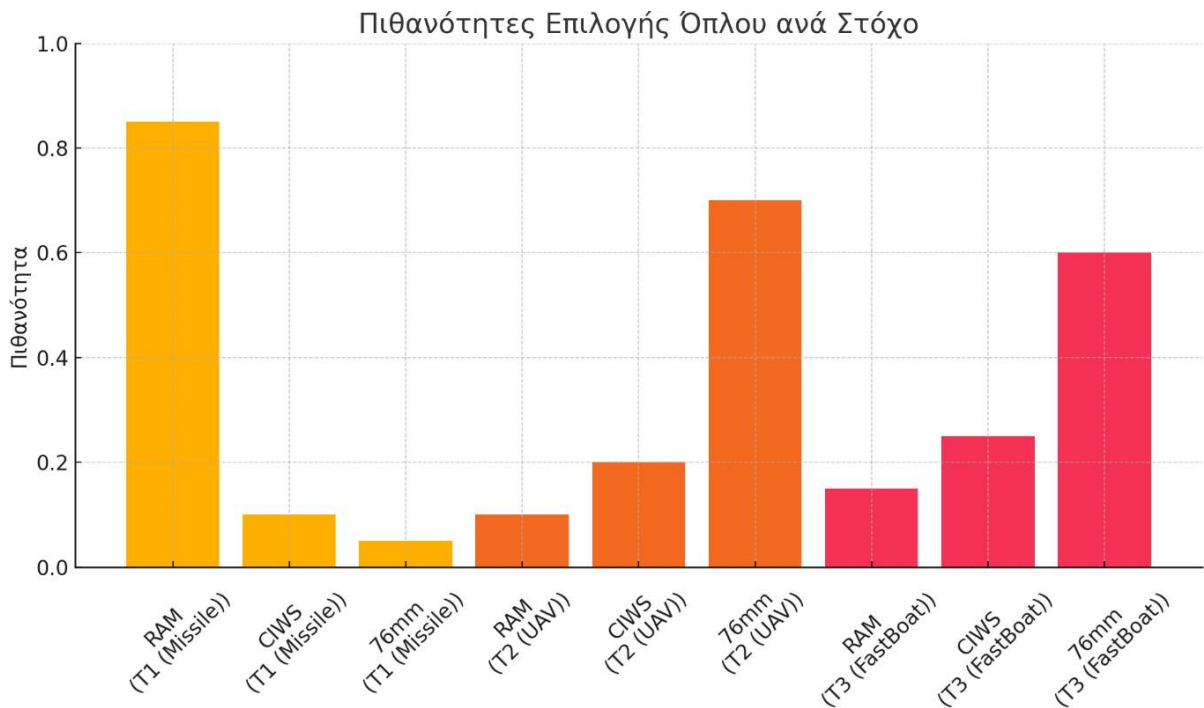
Πιθανότητες επιλογής όπλου

RAM = 60%

CIWS = 70%

Oto Melara 76mm = 85%

Άρα, το ιδανικότερο όπλο για την αντιμετώπιση του T3 (Fast boat), είναι το Oto Melara 76mm με πιθανότητα επιτυχίας στο 85%



Το ραβδόγραμμα, παρουσιάζει τις πιθανολογικές εκτιμήσεις για την επιλογή του καταλληλότερου όπλου (RAM, CIWS, ΟΤΟ Melara 76mm) έναντι των τριών διαφορετικών απειλών: αντιπλοϊκός πύραυλος (T1), UAV (T2) και μικρό ταχύπλοο με RPG (T3).

Στο παράδειγμα αυτό παρουσιάζεται η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για την υλοποίηση της εφαρμογής, όπου η προσέγγιση βασίστηκε στην ανάπτυξη ενός πιθανοτικού μοντέλου που συνδυάζει κρίσιμες παραμέτρους εμπλοκής, προκειμένου να προτείνει το καταλληλότερο όπλο για κάθε απειλή.

Αρχικά, καθορίστηκαν μεταβλητές που απεικονίζουν τους παράγοντες που επηρεάζουν την απόφαση επιλογής όπλου, όπως ο τύπος στόχου, το επίπεδο απειλής, η απόσταση προσέγγισης και η αποτελεσματικότητα των διαθέσιμων όπλων. Η δομή του δικτύου βασίστηκε σε αιτιακές σχέσεις: τα χαρακτηριστικά του στόχου επηρεάζουν την αποτελεσματικότητα κάθε όπλου και αυτή με τη σειρά της καθορίζει την τελική επιλογή. Οι σχέσεις αυτές αποτυπώθηκαν μέσω πιθανοτήτων, ενσωματώνοντας εμπειρική γνώση και κανόνες εμπλοκής.

Για κάθε στόχο (T1, T2, T3) εισήχθησαν στο δίκτυο οι αντίστοιχες πληροφορίες και υπολογίστηκαν οι πιθανότητες επιτυχίας των διαθέσιμων όπλων. Το όπλο με τη μεγαλύτερη πιθανότητα επιτυχίας θεωρείται το βέλτιστο για την εκάστοτε περίπτωση. Οι συστάσεις του δικτύου ευθυγραμμίστηκαν με τις αναμενόμενες επιλογές βάσει στρατιωτικής τεχνογνωσίας.

Πρέπει, τέλος, να επισημανθεί ότι το προτεινόμενο μοντέλο αποτελεί μια απλουστευμένη εκδοχή της πραγματικότητας. Στην υλοποίηση που παρουσιάστηκε, δεν ενσωματώθηκαν οι φάκελοι βολής των όπλων — δηλαδή οι πραγματικοί περιορισμοί εμβέλειας και τομείς κάλυψης των συστημάτων RAM, CIWS και ΟΤΟ Melara 76mm. Σε ένα πλήρως ρεαλιστικό μοντέλο, οι παράμετροι αυτοί θα έπρεπε να ληφθούν υπόψη ώστε να διασφαλιστεί ότι το προτεινόμενο όπλο μπορεί πράγματι να εμπλέξει τον συγκεκριμένο στόχο (για παράδειγμα, ότι ο στόχος βρίσκεται εντός του βεληνεκούς του όπλου ή η ταχύτητα και πορεία του στόχου ανταποκρίνεται στους προδιαγραφές εμπλοκής του κάθε όπλου). Η συμπερίληψη των φακέλων βολής σε ένα Μπεϋζιανό Δίκτυο θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί με κατάλληλες επιπλέον μεταβλητές ή τροποποίηση των υπαρχουσών, προσθέτοντας έτσι μεγαλύτερη ακρίβεια και ρεαλισμό στις εκτιμήσεις. Ωστόσο, στην παρούσα εργασία επιλέχθηκε συνειδητά να μην ενσωματωθούν αυτοί οι παράγοντες, προκειμένου η έμφαση να δοθεί στη μεθοδολογία ανάπτυξης και χρήσης του Μπεϋζιανού Δικτύου και όχι σε λεπτομέρειες εξομοίωσης των συγκεκριμένων οπλικών συστημάτων. Με τον τρόπο αυτό, αναδείχθηκε πιο καθαρά η διαδικασία και τα ωφέληματα της Μπεϋζιανής προσέγγισης, χωρίς να περιπλεχθεί ακόμη περισσότερο το μοντέλο.

Συνολικά, η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε και τα αποτελέσματα που επιτεύχθηκαν καταδεικνύουν ότι ένα Μπεϋζιανό Δίκτυο μπορεί να αποτελέσει ένα αξιόπιστο και ευέλικτο εργαλείο υποστήριξης αποφάσεων για σύνθετα επιχειρησιακά προβλήματα, όπως η επιλογή όπλου σε ναυτικές επιχειρήσεις. Παρά τους περιορισμούς του απλουστευμένου μας μοντέλου, οι συστάσεις του δικτύου για τους στόχους T1, T2, T3 ευθυγραμμίζονται με τις αναμενόμενες βέλτιστες επιλογές, γεγονός που υποδηλώνει ότι η γνώση του πεδίου έχει ενσωματωθεί επιτυχώς στο σύστημα. Επιπλέον, το μοντέλο μπορεί να επεκταθεί εύκολα με μελλοντική προσθήκη επιπλέον παραμέτρων (όπως οι φάκελοι βολής ή άλλα επιχειρησιακά δεδομένα), βελτιώνοντας ακόμα περισσότερο την ακρίβεια του. Η ανάλυση αυτή ανέδειξε την αξία της Μπεϋζιανής προσέγγισης, δηλαδή να προσφέρει ένα σαφές, τεκμηριωμένο και ποσοτικό υπόβαθρο για κρίσιμες αποφάσεις, ενισχύοντας την αποτελεσματικότητα και την ασφάλεια των επιχειρήσεων του Πολεμικού Ναυτικού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ζ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

7.1 Γενικά Συμπεράσματα από τη χρήση των Μπεϋζιανών Δικτύων

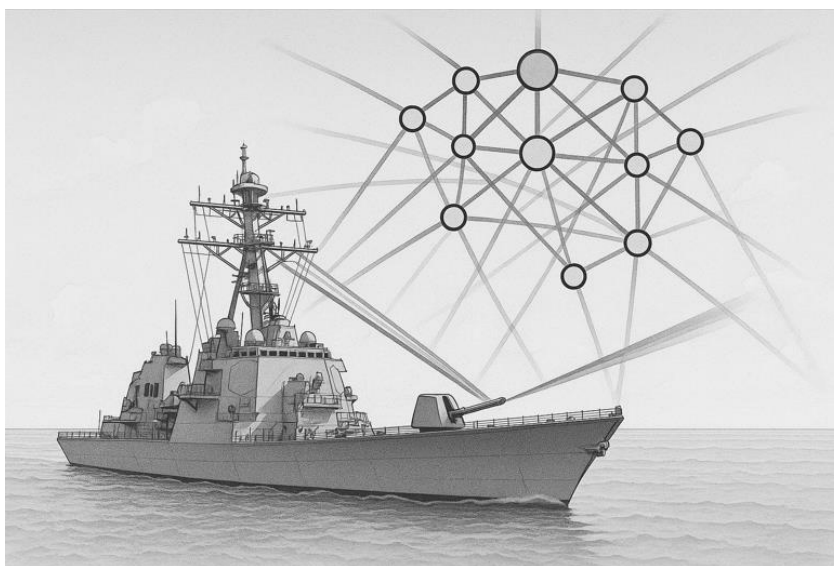
Τα Μπεϋζιανά Δίκτυα (Bayesian Networks) αναδείχθηκαν ως ιδιαίτερα αποτελεσματικά εργαλεία για λήψη αποφάσεων υπό συνθήκες αβεβαιότητας. Με τη χρήση τους παρατηρούμε πως καθίσταται εφικτός ο ποσοτικός υπολογισμός του πόσο πιθανό είναι ένα γεγονός δεδομένης της εμφάνισης κάποιου άλλου. Με βάση λοιπόν τα χαρακτηριστικά τους, μπορούμε να συνοψίσουμε τα γενικά οφέλη από τη χρήση τους ως εξής:

- **Συνδυασμός πρότερης γνώσης με νέα δεδομένα:** Τα BN ενσωματώνουν υπάρχουσα εμπειρική ή ιστορική γνώση και την επικαιροποιούν δυναμικά με κάθε νέο δεδομένο. Μέσω της Μπεϋζιανής συμπερασματολογίας, το μοντέλο αναθεωρεί τις πιθανότητες σε πραγματικό χρόνο, διαχειριζόμενο αποτελεσματικά την αβεβαιότητα και την ελλιπή πληροφόρηση.
- **Διαχείριση αβεβαιότητας με στατιστική συνέπεια:** Σε αντίθεση με ντετερμινιστικές προσεγγίσεις, τα BN ενσωματώνουν την αβεβαιότητα στον πυρήνα τους, επιτρέποντας τον συνδυασμό ποιοτικής και ποσοτικής πληροφορίας με συνέπεια. Αυτή η προσέγγιση τα καθιστά κατάλληλα για πολύπλοκα προβλήματα με ατελή δεδομένα.
- **Γραφική απεικόνιση και αιτιώδης ανάλυση:** Η δομή ενός BN ως κατευθυνόμενο ακυκλικό γράφημα επιτρέπει την εύκολη απεικόνιση των μεταβλητών και των μεταξύ τους αιτιακών σχέσεων. Αυτό ενισχύει τη διαφάνεια και βοηθά στον εντοπισμό κρίσιμων παραγόντων.
- **Ευελιξία και ενοποίηση διαφόρων τύπων πληροφορίας:** Τα BN μπορούν να ενσωματώνουν δεδομένα από αισθητήρες, γνώμες ειδικών και ιστορικά στοιχεία σε ένα ενιαίο μοντέλο, εξασφαλίζοντας ευελιξία και πληρότητα στην ανάλυση.
- **Δυνατότητα μάθησης και βελτίωσης από δεδομένα:** Τα BN μπορούν να ενσωματώνουν δεδομένα από αισθητήρες, γνώμες ειδικών και ιστορικά στοιχεία σε ένα ενιαίο μοντέλο, εξασφαλίζοντας ευελιξία και πληρότητα στην ανάλυση.

Συνολικά, τα Μπεϋζιανά Δίκτυα συνδυάζουν θεωρία πιθανοτήτων, στατιστική και τεχνητή νοημοσύνη σε ένα ενιαίο εργαλείο. Προσφέρουν αξιόπιστη υποστήριξη αποφάσεων υπό αβεβαιότητα, επιτυγχάνοντας μια λεπτή ισορροπία μεταξύ μαθηματικής αυστηρότητας και πρακτικής ευελιξίας. Αυτός ο συνδυασμός έχει οδηγήσει στη διάδοση των BN σε ένα εύρος εφαρμογών, από τη διάγνωση ασθενειών μέχρι τη χρηματοοικονομική ανάλυση και την αξιολόγηση ρίσκου σε βιομηχανικά συστήματα. Τα γενικά συμπεράσματα συνηγορούν ότι όπου υπάρχει ανάγκη λήψης αποφάσεων με ελλιπή ή αβέβαια δεδομένα, ένα Μπεϋζιανό Δίκτυο μπορεί να προσφέρει σαφήνεια, αντικειμενικότητα και βελτιωμένες πιθανότητες σωστής εκτίμησης του εκάστοτε προβλήματος.

7.2 Οφέλη των Μπεϋζιανών Δικτύων στο Πολεμικό Ναυτικό

Στο επιχειρησιακό περιβάλλον του Πολεμικού Ναυτικού, όπου επικρατεί δυναμικότητα και αβεβαιότητα, η χρήση των ΒΝ μπορεί να προσφέρει πολυάριθμα οφέλη, από την ανάλυση απειλών μέχρι την βελτιστοποίηση της ετοιμότητας των δυνάμεων. Συνεπώς, τα ΒΝ προσφέρουν ουσιαστικά πλεονεκτήματα σε κρίσιμες λειτουργίες όπως:



Εικόνα30: Πλοίο και δίκτυο: "Σύνδεση ισχύος και γνώσης."

- **Διαχείριση απειλών:** Τα ΒΝ μπορούν να ενσωματώνουν δεδομένα από αισθητήρες, γνώμες ειδικών και ιστορικά στοιχεία σε ένα ενιαίο μοντέλο, εξασφαλίζοντας ευελιξία και πληρότητα στην ανάλυση.
- **Υποστήριξη αποφάσεων μάχης:** Σε πραγματικό χρόνο, τα ΒΝ μπορούν να εκτιμήσουν πιθανές εκβάσεις ενεργειών, υπολογίζοντας τα ποσοστά επιτυχίας και ρίσκου για κάθε εναλλακτική. Αυτό επιτρέπει τεκμηριωμένες αποφάσεις υπό πίεση και μεταβαλλόμενες συνθήκες.
- **Αξιολόγηση κινδύνου:** Τα ΒΝ μπορούν να μοντελοποιήσουν πολύπλοκες αλληλουχίες γεγονότων που οδηγούν σε αποτυχίες ή ατυχήματα. Η ανάλυση ρίσκου γίνεται πιο διαφανής και τεκμηριωμένη σε σύγκριση με παραδοσιακά εργαλεία όπως τα fault trees.
- **Πρόβλεψη καταστάσεων:** Με τη χρήση δυναμικών ΒΝ, μπορούν να προβλεφθούν πιθανές εξελίξεις μιας κρίσης ή μιας εμπλοκής, ενισχύοντας την προγνωστική επίγνωση και επιτρέποντας έγκαιρη αντίδραση.
- **Βελτιστοποίηση επιχειρησιακής ετοιμότητας:** Μέσω πιθανολογικής εκτίμησης πιθανότητας βλαβών σε εξοπλισμό, τα ΒΝ επιτρέπουν τη μετάβαση από στατικές σε δυναμικές στρατηγικές συντήρησης, βελτιώνοντας τη διαθεσιμότητα και την αξιοπιστία του στόλου.

7.3 Σύνδεση Μπεϋζιανών Δικτύων με το σύστημα TACTICOS του ΠΝ

Ιδιαίτερης σημασίας είναι η σύγκριση και η πιθανή ενοποίηση των Μπεϋζιανών Δικτύων με το σύστημα TACTICOS, το οποίο αποτελεί το βασικό Ολοκληρωμένο Σύστημα Διαχείρισης Μάχης (Combat Management System) πολλών σύγχρονων πολεμικών πλοίων — συμπεριλαμβανομένων μονάδων του Πολεμικού Ναυτικού. Το TACTICOS (της εταιρείας Thales) είναι ένα προηγμένο σύστημα διοίκησης και ελέγχου μάχης που συγκεντρώνει δεδομένα από πλήθος αισθητήρων του πλοίου (radar, συστήματα ηλεκτρονικού πολέμου, οπτικούς αισθητήρες κ.ά.), τα ενοποιεί και παρέχει στον επιχειρησιακό διαχειριστή μια ολοκληρωμένη εικόνα τακτικής κατάστασης. Εδώ θα εξετάσουμε τις λειτουργικές ομοιότητες των BN με το TACTICOS, καθώς και τρόπους με τους οποίους τα BN μπορούν να ενσωματωθούν ή να υποστηρίξουν τις λειτουργίες του.



Εικόνα 31: Σύστημα TACTICOS

Λειτουργικές ομοιότητες και συμπληρωματικότητα:

Τόσο το TACTICOS όσο και ένα Μπεϋζιανό Δίκτυο επιδιώκουν τελικά το ίδιο αποτέλεσμα: τη βέλτιστη αξιοποίηση των διαθέσιμων πληροφοριών για την υποστήριξη της απόφασης του πληρώματος. Το TACTICOS έχει σχεδιαστεί ως ανοικτής αρχιτεκτονικής και αρθρωτό σύστημα, ικανό να προσαρμόζεται σε διάφορες αποστολές και τύπους πλοίων. Ενοποιεί αισθητήρες και όπλα, παρέχοντας λειτουργίες *sensor fusion* (σύντηξη δεδομένων) και παρουσίαση μιας «κοινής επιχειρησιακής εικόνας» (*Common Operational Picture*) σε πραγματικό χρόνο. Επιπλέον, φημίζεται για την αξιόπιστη συσχέτιση ιχνών (*track correlation*) ώστε να δίνει μια καθαρή και σαφή εικόνα της τακτικής κατάστασης. Τα BN από την πλευρά τους, έχουν ως δύναμη την πιθανολογική συσχέτιση δεδομένων — μπορούν δηλαδή να λειτουργήσουν ως το «μυαλό» πίσω από μια τέτοια σύντηξη, αξιολογώντας την *ποιότητα* και *αξιοπιστία* των εισροών και εκφράζοντας ποσοτικά επίπεδα βεβαιότητας για κάθε συμπέρασμα.

Αυτόματη αναγνώριση και ταξινόμηση:

Ένας από τους τομείς όπου το TACTICOS και τα BN παρουσιάζουν ιδιαίτερη συνάφεια είναι η ταυτοποίηση φίλου ή εχθρού και η ταξινόμηση στόχων. Το TACTICOS προσφέρει αυτοματοποιημένη ταξινόμηση στόχων βάσει κανόνων, μειώνοντας το φόρτο εργασίας του χειριστή. Συγκεκριμένα, ενσωματώνει μια εκτενή βάση κανόνων “If-Then” — π.χ. “εάν ένα ίχνος δεν ανταποκρίνεται σε σήμα IFF και κινείται με ταχύτητα X προς την κατεύθυνση Y, τότε χαρακτηρίζεται ως πιθανή απειλή”. Πράγματι, ιστορικά πολλά ναυτικά συστήματα μάχης βασίστηκαν σε τέτοιες κανόνες για το έργο του *Combat Identification (CID)*. Η προσθήκη όμως ενός Μπεϋζιανού Δικτύου μπορεί να ενισχύσει δραστικά αυτή τη λειτουργία. Αντί για αυστηρή λογική συνθήκη, το BN θα αξιολογεί συνδυαστικά όλα τα διαθέσιμα στοιχεία (συμπεριλαμβανομένων “ασαφών” ή ελλιπών δεδομένων) και θα αποδίδει μια πιθανότητα εχθρικής ταυτότητας στο ίχνος. Για παράδειγμα, όπου το συμβατικό σύστημα μπορεί να δίνει απλώς μια ένδειξη “ύποπτο στόχος” στον χειριστή, ένα BN θα μπορούσε να παρουσιάζει ότι “ο στόχος έχει 90% πιθανότητα να είναι εχθρικό ταχύπλοο, 8% να είναι ουδέτερο σκάφος αναψυχής και 2% άγνωστο”. Αυτή η ποσοτική αποτύπωση της βεβαιότητας παρέχει στο πλήρωμα καλύτερη εικόνα του ρίσκου. Σημαντικό είναι ότι το BN μπορεί να ενημερώνεται συνεχώς: εάν, για παράδειγμα, το ίχνος αρχίσει ξαφνικά να εκπέμπει σε συχνότητες επικοινωνιών γνωστές για πειρατές, η πιθανότητα “εχθρός” θα αυξηθεί περαιτέρω στο δίκτυο. Έτσι, το BN λειτουργεί συμπληρωματικά με το TACTICOS, προσδίδοντας ένα επίπεδο στατιστικής ευφυΐας πάνω από τους κανόνες — ιδίως σε περιπτώσεις όπου οι κανόνες μπορεί να συγκρούονται ή να μην καλύπτουν πλήρως μια νέα κατάσταση.

Προγραμματισμός εμπλοκής και AI πυρήνας:

Το TACTICOS διαθέτει έναν πυρήνα τεχνητής νοημοσύνης (AI) που μπορεί να λειτουργεί σε αυτόματη, ημιαυτόματη ή χειροκίνητη λειτουργία για τη λήψη αποφάσεων εμπλοκής. Αυτός ο πυρήνας λαμβάνει υπόψη του τους κανόνες εμπλοκής, τις δυνατότητες των όπλων και την τακτική κατάσταση για να προτείνει ή και να εκτελεί ενέργειες (π.χ. να αναθέσει σε ένα συγκεκριμένο όπλο έναν στόχο). Ένα Μπεϋζιανό Δίκτυο θα μπορούσε να ενσωματωθεί σε αυτόν τον πυρήνα AI ως η πιθανοτική μηχανή συλλογισμού. Με άλλα λόγια, αντί το AI να στηρίζεται μόνο σε ντετερμινιστικές λογικές ή προκαθορισμένα σενάρια, θα μπορούσε να χρησιμοποιεί BN για να αποτιμά την έκβαση διαφόρων επιλογών σε πραγματικό χρόνο. Για παράδειγμα, ένα BN θα συνυπολόγιζε την πιθανότητα επιτυχίας κάθε διαθέσιμου όπλου κατά ενός εισερχόμενου πυραύλου, μαζί με την πιθανότητα ο εισερχόμενος να είναι δόλωμα ή κύρια απειλή. Στη συνέχεια, θα τροφοδοτούσε αυτές τις πληροφορίες στο σύστημα, το οποίο θα λάμβανε μια πιο τεκμηριωμένη απόφαση εμπλοκής. Έτσι, το BN θα ενίσχυε το στοιχείο “τεχνητής νοημοσύνης” του TACTICOS, καθιστώντας τις αυτοματοποιημένες αποφάσεις του πιο προσαρμοστικές και αξιόπιστες υπό συνθήκες αβεβαιότητας.

Ενσωμάτωση και αρχιτεκτονική:

Ένα κρίσιμο ερώτημα είναι πώς ακριβώς μπορεί να γίνει η ενσωμάτωση των Μπεϋζιανών Δικτύων στο υπάρχον σύστημα TACTICOS. Ευτυχώς, η ανοιχτή και αρθρωτή αρχιτεκτονική του TACTICOS διευκολύνει τέτοιου είδους ενισχύσεις. Το TACTICOS έχει σχεδιαστεί ώστε νέα υποσυστήματα και αλγόριθμοι να μπορούν να προστεθούν χωρίς να διαταράσσουν τη βασική λειτουργία. Ήδη, το σύστημα υποστηρίζει εξελιγμένες λειτουργίες data fusion και παρουσιάζει στους χειριστές τα δεδομένα με τρόπο ενιαίο και εργονομικό. Ένα BN μπορεί να τρέχει στο υπόβαθρο ως επιπρόσθετη διεργασία ανάλυσης, λαμβάνοντας ως εισόδους τα ίδια δεδομένα αισθητήρων που ρέουν στο TACTICOS. Τα αποτελέσματά του (πιθανότητες, προβλέψεις) θα μπορούσαν είτε να τροφοδοτούν τον πυρήνα AI, είτε να εμφανίζονται ως συμβουλευτικές ενδείξεις στις οθόνες των χειριστών. Για παράδειγμα, δίπλα σε ένα ίχνος θαλάσσιου στόχου στον χάρτη του TACTICOS, θα μπορούσε να εμφανίζεται ένα μικρό παράθυρο με τις πιθανότητες κατηγοριοποίησης από το BN. Επιπλέον, επειδή τα BN μπορούν να εκπαιδεύονται, το σύστημα θα μπορούσε να μαθαίνει από την εμπειρία: περιπτώσεις όπου ο χειριστής διόρθωσε μια λανθασμένη εκτίμηση θα χρησιμοποιούνται για την ενημέρωση του δικτύου, βελτιώνοντας τη μελλοντική του απόδοση (λειτουργία μάθησης). Με αυτή την ενσωμάτωση, το TACTICOS θα διατηρούσε όλα τα δοκιμασμένα χαρακτηριστικά του (αξιοπιστία, πραγματικού χρόνου απόκριση, διασύνδεση με αισθητήρες/όπλα) προσθέτοντας όμως την ικανότητα πιθανολογικής πρόβλεψης και αξιολόγησης που φέρουν τα BN.

Συμπερασματική αξιολόγηση:

Η σύνδεση των Μπεϋζιανών Δικτύων με το TACTICOS προοιωνίζει ένα σύστημα μάχης επόμενης γενιάς. Το TACTICOS ήδη θεωρείται ένα από τα κορυφαία CMS διεθνώς, με παρουσία σε περισσότερα από 200 πολεμικά πλοία 25 ναυτικών παγκοσμίως. Αυτό καταδεικνύει την εμπιστοσύνη και την αξία του ως υποδομή. Η ενσωμάτωση των BN σε μια τόσο δοκιμασμένη πλατφόρμα μπορεί να πολλαπλασιάσει τις δυνατότητές της, παρέχοντας στο Πολεμικό Ναυτικό ένα εργαλείο ικανό να ανταπεξέλθει σε ακόμη πιο πολύπλοκες και ασαφείς καταστάσεις. Σε λειτουργικό επίπεδο, το αποτέλεσμα θα έχουν ταχύτερη και πιο τεκμηριωμένη λήψη αποφάσεων. Επιπλέον, το σύστημα θα γίνεται πιο προσαρμοστικό δηλαδή θα μπορεί να αναγνωρίζει μη τυπικές καταστάσεις που ίσως ξεφεύγουν από τους ενσωματωμένους κανόνες, αξιοποιώντας την ευελιξία των BN. Εν τέλει, η συνεργασία TACTICOS και Μπεϋζιανών Δικτύων αποτελεί ένα εξαιρετικό παράδειγμα ανθρώπινης και τεχνητής νοημοσύνης που συνεργάζονται (το μεν BN παρέχει την υποκείμενη πιθανολογική “λογική”, το δε TACTICOS φέρνει την επιχειρησιακή τεχνογνωσία και διεπαφή, συνθέτοντας ένα πανίσχυρο εργαλείο διοίκησης μάχης).

7.4 Πιθανοί τρόποι ενίσχυσης του Πολεμικού Ναυτικού μέσω των Μπεϋζιανών Δικτύων

Κοιτώντας προς το μέλλον, καθίσταται σαφές ότι τα Μπεϋζιανά Δίκτυα μπορούν να διαδραματίσουν καταλυτικό ρόλο στην ενίσχυση των επιχειρησιακών δυνατοτήτων του Πολεμικού Ναυτικού. Βάσει των συμπερασμάτων μας, διαγράφονται αρκετοί ρεαλιστικοί τρόποι και σενάρια εφαρμογής όπου η αξιοποίηση των BN θα προσδώσει σημαντικά οφέλη. Από τα συστήματα διοίκησης και ελέγχου μέχρι τις μελλοντικές τεχνολογικές εξελίξεις, τα BN μπορούν να λειτουργήσουν ως δύναμη-πολλαπλασιαστής. Ακολουθούν ορισμένοι πιθανοί άξονες ενίσχυσης:

- **Ανάπτυξη έξυπνων C2 συστημάτων:** Ενσωμάτωση BN στα κέντρα πληροφοριών μάχης ώστε κάθε εισερχόμενο δεδομένο να συνοδεύεται από εκτίμηση πιθανότητας, βελτιώνοντας την τακτική εικόνα.
- **Υποστήριξη αυτόνομων συστημάτων:** Τα BN μπορούν να λειτουργούν ως νοητικά κέντρα αξιολόγησης για αυτόνομες ναυτικές πλατφόρμες (UAV, UUV), συντονίζοντας τις ενέργειες βάσει πιθανολογικής κατανόησης της κατάστασης.
- **Δικτυοκεντρικές επιχειρήσεις:** Σε περιβάλλοντα πολλαπλών μονάδων, τα BN μπορούν να συντονίζουν και να μεταδίδουν εκτιμήσεις ρίσκου σε πραγματικό χρόνο σε όλη τη δύναμη, προσφέροντας συνεκτική εικόνα.
- **Ανάλυση Big Data και μάθηση:** Με την εξέλιξη υπολογιστικών υποδομών και την ύπαρξη μεγάλων βάσεων δεδομένων από ασκήσεις και επιχειρήσεις, τα BN μπορούν να βελτιστοποιηθούν, ενσωματώνοντας μοτίβα επιτυχούς τακτικής ή αναγνωρίσιμων κινδύνων.

Εν κατακλείδι, τα παραπάνω συμπεράσματα υπογραμμίζουν τον καθοριστικό ρόλο που μπορούν να διαδραματίσουν τα Μπεϋζιανά Δίκτυα στην υποστήριξη του Πολεμικού Ναυτικού. Ως εργαλεία λήψης αποφάσεων υπό αβεβαιότητα, προσφέρουν επιστημονικά τεκμηριωμένες λύσεις σε προβλήματα που μέχρι πρότινος αντιμετώπιζονταν με εμπειρικούς κανόνες ή διαισθητικές προσεγγίσεις. Με την υιοθέτηση των BN, το Πολεμικό Ναυτικό μπορεί να επιτύχει μια ποιοτική αναβάθμιση στις διαδικασίες του: από την ανάλυση απειλών και τη διαχείριση μάχης, μέχρι την αξιολόγηση ρίσκων και την ετοιμότητα. Επιπρόσθετα, η συμβατότητα των BN με υπάρχοντα συστήματα (όπως το TACTICOS) και η προσαρμοστικότητά τους σε νέες τεχνολογίες τα καθιστά μια επένδυση με διαχρονική αξία. Καθώς το ναυτικό δόγμα εξελίσσεται στην ψηφιακή εποχή, τα Μπεϋζιανά Δίκτυα αναδεικνύονται σε αναπόσπαστο μέρος αυτής της εξέλιξης, γεφυρώνοντας το χάσμα μεταξύ πληροφορίας και απόφασης και ενισχύοντας την ικανότητα του Πολεμικού Ναυτικού να επιχειρεί με αυτοπεποίθηση σε ένα περιβάλλον γεμάτο προκλήσεις και αβεβαιότητες.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Aguilera, P.A., Fernández, A., Fernández, R., Rumí, R. & Salmerón, A. 2011, 'Bayesian networks in environmental modelling', *Environmental Modelling & Software*, vol. 26, no. 12, pp. 1376–1388.
2. Corbett, A.T. & Anderson, J.R. 1995, 'Knowledge tracing: Modeling the acquisition of procedural knowledge', *User Modeling and User-Adapted Interaction*, vol. 4, pp. 253–278.
3. Cormen, T.H., Leiserson, C.E., Rivest, R.L. & Stein, C. 2009, *Introduction to Algorithms*, 3rd edn, MIT Press, Cambridge.
4. Darwiche, A. 2009, *Modeling and Reasoning with Bayesian Networks*, Cambridge University Press, Cambridge.
5. DeGroot, M.H. & Schervish, M.J. 2012, *Probability and Statistics*, 4th edn, Pearson, Boston.
6. Diestel, R. 2017, *Graph Theory*, 5th edn, Springer, Berlin.
7. Feller, W. 1968, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 3rd edn, Wiley, New York.
8. Grimmett, G. & Stirzaker, D. 2001, *Probability and Random Processes*, 3rd edn, Oxford University Press, Oxford.
9. Heckerman, D.E. & Nathwani, B.N. 1992, 'Toward normative expert systems: Part II. Probability-based representations for efficient knowledge acquisition and inference', *Methods of Information in Medicine*, vol. 31, no. 2, pp. 106–116.
10. Jensen, F.V. & Nielsen, T.D. 2007, *Bayesian Networks and Decision Graphs*, 2nd edn, Springer, New York.
11. Kleinberg, J. & Tardos, É. 2006, *Algorithm Design*, Pearson, Boston.
12. Kolmogorov, A.N. 1956, *Foundations of the Theory of Probability*, 2nd edn, Chelsea Publishing Company, New York.
13. Koller, D. & Friedman, N. 2009, *Probabilistic Graphical Models: Principles and Techniques*, MIT Press, Cambridge.
14. Marcot, B.G., Steventon, J.D., Sutherland, G.D. & McCann, R.K. 2006, 'Guidelines for developing and updating Bayesian belief networks applied to ecological modeling and conservation', *Canadian Journal of Forest Research*, vol. 36, no. 12, pp. 3063–3074.
15. Neapolitan, R.E. 2004, *Learning Bayesian Networks*, Prentice Hall, Upper Saddle River.
16. Papoulis, A. & Pillai, S.U. 2002, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 4th edn, McGraw-Hill, New York.
17. Pearl, J. 1986, 'Fusion, propagation, and structuring in belief networks', *Artificial Intelligence*, vol. 29, no. 3, pp. 241–288.
18. Pearl, J. 1988, *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*, Morgan Kaufmann, San Mateo.
19. Rosen, K.H. 2019, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 8th edn, McGraw-Hill, New York.
20. Ross, S.M. 2014, *Introduction to Probability Models*, 11th edn, Academic Press, Oxford.
21. Russell, S. & Norvig, P. 2021, *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, 4th edn, Pearson, Hoboken.
22. Sun, L. & Shenoy, P.P. 2007, 'Using Bayesian networks for bankruptcy prediction: Some methodological issues', *European Journal of Operational Research*, vol. 180, no. 2, pp. 738–753.
23. Uusitalo, L. 2007, 'Advantages and challenges of Bayesian networks in environmental modelling', *Ecological Modelling*, vol. 203, no. 3–4, pp. 312–318.

24. Wang, J. & Neil, M. 2020, 'A Bayesian network approach for cybersecurity risk assessment implementing and extending the FAIR model', *Computers & Security*, vol. 89, article 101659.
25. West, D.B. 2001, *Introduction to Graph Theory*, 2nd edn, Prentice Hall, Upper Saddle River.

