

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής



Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ

ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΟΣ ΡΥΘΜΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗΣ
ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑΣ

ΓΙΑ

ΜΟΧΛΕΥΜΕΝΑ ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΜΕΣΩ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ
ΕΞΟΡΥΞΗΣ MARTINGALE

Αργύριος Κ. Γάτας

Διπλωματική εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου
Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στην *Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων*.

Πειραιάς

Μάρτιος 2026



Μακροπρόθεσμος Ρυθμός Ανάπτυξης Αναμενόμενης Ωφελιμότητας για Μοχλευμένα Αμοιβαία Κεφάλαια μέσω
Προσέγγισης Εξόρυξης Martingale

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ



Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ

ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΟΣ ΡΥΘΜΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗΣ
ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑΣ

ΓΙΑ

ΜΟΧΛΕΥΜΕΝΑ ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΜΕΣΩ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ
ΕΞΟΡΥΞΗΣ MARTINGALE

Αργύριος Κ. Γάτας

Διπλωματική εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου
Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στην *Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων*.

Πειραιάς

Μάρτιος 2026



Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη Συνέλευση του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή της, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Σεβρόγλου Βασίλειος Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Πολίτης Κωνσταντίνος Καθηγητής
- Τζαβελάς Γεώργιος Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.



UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics



Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

EXPECTED UTILITY AND LONG-TERM GROWTH RATE FOR LEVERAGED EXCHANGED-TRADED FUND VIA A MARTINGALE EXTRACTION APPROACH

By

Argyrios K. Gatas

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science
of the University of Piraeus in partial fulfilment of the
requirements for the degree of Master of Science in Actuarial
Science and Risk Management

Piraeus, Greece
March 2026



Μακροπρόθεσμος Ρυθμός Ανάπτυξης Αναμενόμενης Ωφελιμότητας για Μοχλευμένα Αμοιβαία Κεφάλαια μέσω
Προσέγγισης Εξόρυξης Martingale



Μακροπρόθεσμος Ρυθμός Ανάπτυξης Αναμενόμενης Ωφελιμότητας για Μοχλευμένα Αμοιβαία Κεφάλαια μέσω
Προσέγγισης Εξόρυξης Martingale

Στους γονείς μου
Κωνσταντίνο και Σοφία



Μακροπρόθεσμος Ρυθμός Ανάπτυξης Αναμενόμενης Ωφελιμότητας για Μοχλευμένα Αμοιβαία Κεφάλαια μέσω
Προσέγγισης Εξόρυξης Martingale



Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες στο Πανεπιστήμιο Πειραιώς και το Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Αναλογιστικής Επιστήμης και Διαχείρισης Κινδύνων του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, για την πολύτιμη ακαδημαϊκή εκπαίδευση και τις γνώσεις που μου παρείχε. Ιδιαίτερη ευγνωμοσύνη οφείλω στον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Βασίλειο Σεβρόγλου, για την αμέριστη υποστήριξη, την καθοδήγηση και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε σε όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Η αφοσίωση και η πολύτιμη επιστημονική του καθοδήγηση υπήρξαν καθοριστικοί παράγοντες στην ολοκλήρωση αυτής της προσπάθειας. Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες προς τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον Καθηγητή Πολίτη Κωνσταντίνο και τον Καθηγητή Τζαβέλα Γεώργιο, για τον χρόνο που αφιέρωσαν στην αξιολόγηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, καθώς και για τις πολύτιμες παρατηρήσεις και υποδείξεις τους. Επιπλέον, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες προς τους γονείς μου, οι οποίοι στάθηκαν δίπλα μου σε κάθε βήμα αυτής της διαδρομής, προσφέροντάς μου αμέριστη στήριξη, αγάπη και ενθάρρυνση. Χωρίς την πολύτιμη βοήθειά τους, η ολοκλήρωση αυτής της εργασίας δεν θα ήταν δυνατή. Ευχαριστώ, επίσης, τους συμφοιτητές μου για την πολύτιμη συνεργασία και την οικογένειά μου για την κατανόηση και τη συνεχή ενθάρρυνση σε κάθε στάδιο αυτής της προσπάθειας.



Μακροπρόθεσμος Ρυθμός Ανάπτυξης Αναμενόμενης Ωφελιμότητας για Μοχλευμένα Αμοιβαία Κεφάλαια μέσω
Προσέγγισης Εξόρυξης Martingale



Περίληψη

Η παρούσα εργασία μελετά τον μακροχρόνιο ρυθμό ανάπτυξης της αναμενόμενης ωφελιμότητας που προκύπτει από την κατοχή ενός μοχλευμένου διαπραγματεύσιμου αμοιβαίου κεφαλαίου (Leveraged Exchange-Traded Fund – ETF), το οποίο αποτελεί ένα χαρτοφυλάκιο σταθερής αναλογίας του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου αναφοράς. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση ωφελιμότητας τύπου power, αναπτύσσουμε μια αναλυτική προσέγγιση που βασίζεται στη μέθοδο martingale extraction και περιλαμβάνει τον προσδιορισμό του ιδιοζεύγους (eigenpair) που αντιστοιχεί στον απειροστικό γεννήτορα (infinitesimal generator) μιας μαρκοβιανής χρονικά ομογενούς στοχαστικής διάχυσης. Παράγουμε ρητά τους μακροχρόνιους ρυθμούς ανάπτυξης για διάφορα μοντέλα του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου αναφοράς, όπως:

- το μοντέλο γεωμετρικής κίνησης Brown (Geometric Brownian Motion),
- το μοντέλο GARCH,
- το μοντέλο inverse GARCH,
- το εκτεταμένο μοντέλο CIR,
- το μοντέλο 3/2,
- καθώς και τα μοντέλα στοχαστικής μεταβλητότητας Heston και 3/2.

Επιπλέον, εξετάζουμε την επίδραση στοχαστικών επιτοκίων, όπως στο μοντέλο Vasicek και στο μοντέλο βραχυχρόνιου επιτοκίου inverse GARCH. Προσδιορίζουμε τον βέλτιστο λόγο μόχλευσης (optimal leverage ratio) για έναν μακροχρόνιο επενδυτή και διερευνούμε την επίδραση των παραμέτρων των μοντέλων στη βέλτιστη επενδυτική στρατηγική. Τέλος δίνουμε κάποια συμπεράσματα καθώς και δύο χρήσιμες εφαρμογές.



Μακροπρόθεσμος Ρυθμός Ανάπτυξης Αναμενόμενης Ωφελιμότητας για Μοχλευμένα Αμοιβαία Κεφάλαια μέσω
Προσέγγισης Εξόρυξης Martingale



Abstract

This paper studies the long-term growth rate of expected utility from holding a leveraged exchanged-traded fund (LETF), which is a constant proportion portfolio of reference assets. Working with the power utility function, we develop an analytical approach that employs martingale extraction and involves finding the eigenpair associated with the infinitesimal generator of a Markovian time-homogeneous diffusion. We derive explicitly the long-term growth rates under a number of models for the reference asset, including the geometric Brownian motion model, GARCH model, inverse GARCH model, extended CIR model, 3/2 model, quadratic model, as well as Heston and 3/2 stochastic volatility models. We also investigate the impact of stochastic interest rate such as the Vasicek model and the inverse GARCH short rate model. We determine the optimal leverage ratio for the long-term investor and examine the effects of model parameters. Finally, we provide some conclusions as well as two useful applications.



Μακροπρόθεσμος Ρυθμός Ανάπτυξης Αναμενόμενης Ωφελιμότητας για Μοχλευμένα Αμοιβαία Κεφάλαια μέσω
Προσέγγισης Εξόρυξης Martingale



Μακροπρόθεσμος Ρυθμός Ανάπτυξης Αναμενόμενης Ωφελιμότητας για Μοχλευμένα Αμοιβαία Κεφάλαια μέσω
Προσέγγισης Εξόρυξης Martingale



Ευχαριστίες.....	9
Περίληψη	11
Περιεχόμενα	15
Εισαγωγή.....	17
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Εισαγωγή στις Πιθανότητες και στη Θεωρία Μέτρου Χώροι Πιθανότητας – Τυχαίες Μεταβλητές – Μέση Τιμή	
1.1 Χώροι Πιθανοτήτων	20
1.2 σ-Άλγεβρες	24
1.3 Τυχαίες Μεταβλητές – Μέση Τιμή	26
1.4 Ανεξαρτησία	33
Θεωρία Μέτρου	
1.5 Μέτρα	39
1.6 Σύνολα Μέτρου Μηδέν	42
1.7 Μέτρα στο \mathbb{R}	43
1.8 Μέτρο Lebesgue στο \mathbb{R}^n	45
1.9 Εξωτερικό Μέτρο Lebesgue	46
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Εισαγωγή στις Στοχαστικές Διαδικασίες και στα Martingales	
2.1 Στοχαστικές Διαδικασίες	48
2.2 Κίνηση Brown (Wiener)	50
2.3 Στοχαστική Ολοκλήρωση / Στοχαστικός Λογισμός	54
2.4 Martingale	60
2.5 Εκθετικά Martingale	63
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Προσέγγιση Εξόρυξης Martingale για Μοχλευμένα Αμοιβαία Κεφάλαια (ETFs)	
3.1 Εισαγωγή στην Προσέγγιση Εξόρυξης Martingale για ETFs	67
3.2 Μοχλευμένα Αμοιβαία Κεφάλαια (ETFs)	68
3.3 Εξόρυξη Martingale (Martingale Extraction)	70
3.4 Μονοδιάστατες Διαδικασίες	73
3.5 Το Μοντέλο GBM (Geometric Brownian Motion)	74
3.6 Το Μοντέλο GARCH	75
3.7 Το Αντίστροφο Μοντέλο GARCH	78
3.8 Το Επεκτεταμένο Μοντέλο CIR	80
3.9 Το Μοντέλο 3/2	84
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Προσέγγιση Εξόρυξης Martingale για Μοχλευμένα Αμοιβαία Κεφάλαια— Μοντέλα Στοχαστικής Μεταβλητότητας με Στοχαστική Τιμή Αναφοράς και Στοχαστικό Επιτόκιο	
4.1 Μοντέλα Στοχαστικής Μεταβλητότητας	87
4.2 Το Μοντέλο Heston	88
4.3 Το Μοντέλο Μεταβλητότητας 3/2	92
4.4 ETFs με Στοχαστική Τιμή Αναφοράς και Στοχαστικό Επιτόκιο	
4.4.1 Επιτόκιο Vasicek	95
4.4.2 Επιτόκιο τύπου Inverse-GARCH	98
4.5 Συμπεράσματα.....	101
Παράρτημα Α.....	105
Παράρτημα Β.....	109
Βιβλιογραφία	113



Μακροπρόθεσμος Ρυθμός Ανάπτυξης Αναμενόμενης Ωφελιμότητας για Μοχλευμένα Αμοιβαία Κεφάλαια μέσω
Προσέγγισης Εξόρυξης Martingale



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα διαπραγματεύσιμα αμοιβαία κεφάλαια (ETFs) αποτελούν δημοφιλή χρηματοοικονομικά προϊόντα σχεδιασμένα να ακολουθούν την αξία ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου ή δείκτη. Με συνολικά διαχειριζόμενα κεφάλαια που ξεπερνούν τα 2 τρισεκατομμύρια δολάρια, τα ETFs διαπραγματεύονται στα μεγάλα χρηματιστήρια όπως οι μετοχές, ακόμα και αν το υποκείμενο στοιχείο δεν είναι άμεσα διαθέσιμο για διαπραγμάτευση. Στο πλαίσιο της συνεχώς αναπτυσσόμενης αγοράς των ETFs, τα μοχλευμένα ETFs (LETFs) δημιουργούνται για να προσφέρουν ένα σταθερό πολλαπλασιαστικό συντελεστή β στις ημερήσιες αποδόσεις ενός δείκτη αναφοράς. Για παράδειγμα, το ProShares Ultra S&P 500 (SSO) στοχεύει να αποδώσει διπλάσια ημερήσια κέρδη ($\beta = 2$) σε σχέση με τον δείκτη S&P 500. Οι πιο συνηθισμένοι συντελεστές μόχλευσης κυμαίνονται μεταξύ $\beta \in \{1, 2, 3\}$ και $\beta \in \{-1, -2, -3\}$, επιτρέποντας στους επενδυτές να λαμβάνουν ανοδικές ή καθοδικές θέσεις στην αγορά χωρίς τη χρήση δανεισμού ή περιθωρίου ασφαλείας (margin account). Για τους κερδοσκοπικούς επενδυτές, τα LETFs αποτελούν ιδιαίτερα ελκυστικά και ρευστοποιήσιμα εργαλεία κατά τη διάρκεια περιόδων έντονης μεταβλητότητας.

LETF	Αντίστοιχο ETF /Δείκτης	Συντελεστής Μόχλευσης	Κατεύθυνση
SPXL	SPY (S&P 500)	+3x	Long
SPXS	SPY (S&P 500)	-3x	Short
TQQQ	QQQ (Nasdaq-100)	+3x	Long
SQQQ	QQQ (Nasdaq-100)	-3x	Short
UDOW	DIA (Dow Jones)	+3x	Long
SDOW	DIA (Dow Jones)	-3x	Short
FAS	XLF (Financial Sector)	+3x	Long
FAZ	XLF (Financial Sector)	-3x	Short
LABU	XBI (Biotech)	+3x	Long
LABD	XBI (Biotech)	-3x	Short
TNA	IWM (Russell 2000)	+3x	Long
TZA	IWM (Russell 2000)	-3x	Short
SSO	SPY (S&P 500)	+2x	Long
SDS	SPY (S&P 500)	-2x	Short
QLD	QQQ (Nasdaq-100)	+2x	Long
QID	QQQ (Nasdaq-100)	-2x	Short
UWM	IWM (Russell 2000)	+2x	Long
TWM	IWM (Russell 2000)	-2x	Short
MVV	MDY (S&P MidCap 400)	+2x	Long
MZZ	MDY (S&P MidCap 400)	-2x	Short

Πίνακας 1 : Αμερικάνικα 3x, 2x LETFs



Για τους κατόχους LETFs και τους δυνητικούς επενδυτές, είναι ζωτικής σημασίας η κατανόηση της δυναμικής της τιμής και του αντίκτυπου της μόχλευσης στον κίνδυνο και την απόδοση των προϊόντων αυτών. Παρατηρήσεις από την αγορά δείχνουν ότι τα LETFs υπόκεινται στο φαινόμενο της αποσύνθεσης λόγω μεταβλητότητας (volatility decay effect), που αντικατοπτρίζει τη μείωση της αξίας τους λόγω της πραγματοποιημένης διακύμανσης του δείκτη αναφοράς. Διάφορες μελέτες, όπως αυτές των Avellaneda και Zhang (2010), Cheng και Madhavan (2009), Leung και Ward (2015), και Leung και Santoli (2016), παρουσιάζουν διακριτές και συνεχείς στοχαστικές μεθοδολογίες για την ανάλυση της εξάρτησης των LETFs από το υποκείμενο στοιχείο, συμπεριλαμβανομένης της επίδρασης της μεταβλητότητας. Επιπλέον, η Επιτροπή Κεφαλαιαγοράς των ΗΠΑ (SEC) το 2009 εξέδωσε προειδοποίηση για την επικινδυνότητα των LETFs, ιδιαίτερα όσον αφορά τη μακροχρόνια διακράτησή τους. Οι Leung και Santoli (2012) ανέλυσαν τους αποδεκτούς χρονικούς ορίζοντες διακράτησης των LETFs με βάση διάφορα μέτρα κινδύνου.

Σε αυτή την εργασία, μελετούμε τον μακροπρόθεσμο ρυθμό ανάπτυξης της αναμενόμενης ωφελιμότητας από την κατοχή ενός LETF. Συγκεκριμένα, εξετάζουμε διαφορετικά στοχαστικά μοντέλα για την τιμή ενός LETF, συμβολιζόμενη ως L_t , και αναλύουμε τον ρυθμό ανάπτυξης που περιγράφεται από το όριο:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log E[u(L_t)]$$

όπου η $u(\cdot)$ είναι η συνάρτηση χρησιμότητας ισχύος (power utility function) της μορφής

$$u(w) = w^a, \text{ με } 0 < a \leq 1.$$

Ως εκ τούτου, ο συντελεστής σχετικής αποστροφής κινδύνου ορίζεται ως $\rho = 1 - a$. Στην περίπτωση $a=1$, που αντιστοιχεί σε μηδενική αποστροφή κινδύνου, το όριο αντιπροσωπεύει τον μακροπρόθεσμο ρυθμό ανάπτυξης της αναμενόμενης απόδοσης ενός LETF.

Κατά συνέπεια, η ανάλυση της παραπάνω σχέσης μας επιτρέπει να κατανοήσουμε τη μακροπρόθεσμη εξέλιξη της ωφελιμότητας και των αποδόσεων για διαφορετικούς τύπους επενδυτών.

Μία από τις κύριες συνεισφορές της εργασίας είναι η παρουσίαση μιας νέας μεθόδου για τον αναλυτικό υπολογισμό του παραπάνω ορίου, χρησιμοποιώντας την τεχνική της εξόρυξης martingale (martingale extraction). Μέσω αυτής της μεθόδου, το πρόβλημα του προσδιορισμού του μακροπρόθεσμου ρυθμού ανάπτυξης μετασχηματίζεται σε ένα πρόβλημα εύρεσης ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων (eigenpair problem) ενός διαφορικού τελεστή δεύτερης τάξης, ο οποίος συνδέεται με τον απειροστό γεννήτορα της διαδικασίας αναφοράς.



Τα αποτελέσματά μας επιτρέπουν τον προσδιορισμό του βέλτιστου συντελεστή μόχλευσης (β^*) για έναν μακροχρόνιο επενδυτή με αποστροφή κινδύνου. Για ένα LETF με τιμή $L_t \equiv L_t(\beta)$ βρίσκουμε τη βέλτιστη μόχλευση που μεγιστοποιεί τον μακροχρόνιο ρυθμό ανάπτυξης:

$$\beta^* = \arg \max_{\beta \in \mathbb{R}} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log E[u(L_t(\beta))]$$

Επιπλέον, εξετάζουμε μέσω αναλυτικών εκφράσεων τον συνδυασμένο αντίκτυπο της αποστροφής κινδύνου και των παραμέτρων του μοντέλου στη βέλτιστη επιλογή μόχλευσης.

Υπάρχουν αρκετές σχετικές μελέτες που εστιάζουν στον μακροχρόνιο ρυθμό ανάπτυξης της αναμενόμενης ωφελιμότητας. Η θεμελιώδης εργασία των Fleming και Sheu (1999) ανέλυσε τον βέλτιστο ρυθμό ανάπτυξης της αναμενόμενης χρησιμότητας του πλούτου, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση χρησιμότητας τύπου HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion). Οι Akian et al. (1999) διερεύνησαν τις βέλτιστες στρατηγικές επενδύσεων υπό κόστος συναλλαγών με στόχο τη μεγιστοποίηση του μακροχρόνιου μέσου ρυθμού ανάπτυξης για λογαριθμική χρησιμότητα. Παρόμοια, οι Zhu (2014), Christensen και Wittlinger (2012), Guasoni και Mayerhofer (2016) και άλλοι ερευνητές εξέτασαν στρατηγικές επενδύσεων υπό διαφορετικά στοχαστικά περιβάλλοντα, συμπεριλαμβανομένων μοντέλων με στοχαστική μεταβλητότητα και κόστος συναλλαγών.

Η μέθοδος εξόρυξης martingale είναι μια σχετικά νέα αναλυτική τεχνική που έχει χρησιμοποιηθεί σε διάφορα χρηματοοικονομικά και οικονομικά προβλήματα. Μελέτες των Hansen και Scheinkman (2009), Borovicka et al. (2011), Qin και Linetsky (2015) αξιοποίησαν αυτή τη μεθοδολογία για τη μελέτη της μακροπρόθεσμης συμπεριφοράς των αγορών και της προσαρμογής του κινδύνου. Η συμβολή μας σε αυτό το πλαίσιο είναι η εφαρμογή της τεχνικής αυτής για τον ρητό υπολογισμό του μακροπρόθεσμου ρυθμού ανάπτυξης της αναμενόμενης ωφελιμότητας των LETFs.

Η εργασία μας διαρθρώνεται έχει ως εξής: Στην **Ενότητα 1** παρουσιάζεται μια εισαγωγή στις βασικές έννοιες των πιθανοτήτων και της θεωρίας μέτρου, όπως οι σ -άλγεβρες, οι χώροι πιθανοτήτων και οι τυχαίες μεταβλητές. Στην **Ενότητα 2** εισάγονται οι στοχαστικές διαδικασίες και παρουσιάζονται βασικές έννοιες που σχετίζονται με τη θεωρία των martingales. Στις **Ενότητες 3,4** παρουσιάζεται η κύρια μεθοδολογική προσέγγιση της εργασίας, η οποία βασίζεται στη μέθοδο martingale extraction. Συγκεκριμένα, εξετάζεται το πρόβλημα της μακροχρόνιας ανάπτυξης της αναμενόμενης ωφελιμότητας για μοχλευμένα διαπραγματεύσιμα αμοιβαία κεφάλαια (LETFs) όταν η διαδικασία αναφοράς ακολουθεί μονοδιάστατη μαρκοβιανή διάχυση. Παράλληλα, μελετώνται μοντέλα στοχαστικής μεταβλητότητας καθώς και μοντέλα στοχαστικών επιτοκίων. Τέλος, παρουσιάζονται τα βασικά συμπεράσματα της μελέτης, ενώ στα Παραρτήματα Α και Β παρατίθενται δύο εφαρμογές που υποστηρίζουν τα αποτελέσματα της εργασίας.



Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή στις Πιθανότητες και στην Θεωρία Μέτρου

Χώροι πιθανότητας – Τυχαίες μεταβλητές – Μέση τιμή

Στο παρόν κεφάλαιο παραθέτουμε ορισμένες εισαγωγικές έννοιες και κάποιους βασικούς συμβολισμούς και ορισμούς που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία.

1.1 Χώροι Πιθανοτήτων

Ορισμός 1.1:

Ένας χώρος πιθανοτήτων είναι ένας μετρικός χώρος με συνολικό μέτρο ίσο με 1 και τον συμβολίζουμε με $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ όπου:

- Ω είναι ένα σύνολο (μερικές φορές ονομάζεται χώρος δειγμάτων στην στοιχειώδη θεωρία πιθανοτήτων). Τα στοιχεία του Ω συμβολίζονται με ω και ονομάζονται αποτελέσματα.
- \mathcal{F} είναι μια σ -άλγεβρα (ή σ -πεδίο, οι όροι χρησιμοποιούνται συνώνυμα εδώ) υποσυνόλων του Ω . Τα υποσύνολα αυτά λέγονται ενδεχόμενα.
- \mathbb{P} είναι μια συνάρτηση από \mathcal{F} στο $[0, 1]$ με $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ και τέτοια ώστε, αν $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{F}$ είναι ξένα μεταξύ τους (αμοιβαία αποκλειόμενα), τότε:

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}[E_j]$$

Λέμε “πιθανότητα του E ” για $\mathbb{P}[E]$

Διακριτός Χώρος Πιθανοτήτων:

Ένας διακριτός χώρος πιθανοτήτων είναι ένας τέτοιος ώστε το Ω να είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο. Σε αυτή την περίπτωση, συνήθως παίρνουμε την \mathcal{F} να είναι όλα τα υποσύνολα του Ω (δηλαδή $\mathcal{F} = 2^\Omega$) και το μέτρο πιθανότητας \mathbb{P} ορίζεται με μια συνάρτηση $p: \Omega \rightarrow [0, 1]$ με $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Τότε:

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega).$$



Θα εξετάσουμε ένα σημαντικό παράδειγμα εδώ: τον χώρο πιθανοτήτων που σχετίζεται με άπειρο αριθμό ρίψεων νομίσματος.

Θεωρούμε ότι το 0 αντιστοιχεί σε «κορώνα» και το 1 σε «γράμματα». Για κάθε θετικό ακέραιο n ορίζουμε:

$$\Omega = \{ \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_j = 0 \text{ ή } 1 \}$$

Κάθε Ω_n είναι ένα πεπερασμένο σύνολο με 2^n στοιχεία. Μπορούμε να θεωρήσουμε το Ω_n ως χώρο πιθανοτήτων με σ -άλγεβρα 2^{Ω_n} και πιθανότητα p_n που ορίζεται ως:

$$p_{n(\omega)} = 2^{-n}, \quad \omega \in \Omega_n.$$

Ορίζουμε τη \mathcal{F}_n να είναι η σ -άλγεβρα όλων των ενδεχομένων που εξαρτώνται μόνο από τις πρώτες n ρίψεις. Πιο συγκεκριμένα, \mathcal{F}_n είναι η συλλογή όλων των υποσυνόλων του Ω τέτοια ώστε να υπάρχει $E \subseteq 2^{\Omega_n}$ με:

$$A = \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : (\omega_1, \dots, \omega_n) \in E\}.$$

Η \mathcal{F}_n είναι μια πεπερασμένη σ -άλγεβρα (περιέχει 2^{2^n} υποσύνολα) και ισχύει:

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \dots$$

Αν ένα σύνολο A είναι της μορφής (1) τότε ορίζουμε:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_n(E).$$

Αυτός ο ορισμός είναι συνεπής, και έτσι προκύπτει μια συνάρτηση \mathbb{P} επι του:

$$\mathcal{F}^0 := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_j$$

Υπενθυμίζουμε ότι μια σ -άλγεβρα υποσυνόλων του Ω είναι μια συλλογή υποσυνόλων που περιέχει το Ω , και είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα και πεπερασμένες ενώσεις. Για να δείξουμε ότι \mathcal{F}^0 είναι σ -άλγεβρα, αρκεί να δείξουμε ότι αν $E_1, E_2 \in \mathcal{F}^0$ τότε $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{F}^0$.



Πρόταση 1.1:

Η \mathcal{F}^0 είναι άλγεβρα αλλά όχι σ -άλγεβρα.

Απόδειξη:

Αν $E \in \mathcal{F}^0$, τότε $E \in \mathcal{F}_n$ για κάποιο n . Άρα και το συμπλήρωμα $E^c \in \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$. Αν $E_1, E_2 \in \mathcal{F}_n$, τότε υπάρχει $k = \max(n_1, n_2)$ τέτοιο ώστε $E_1, E_2 \in \mathcal{F}_k$ και επομένως $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}^0$. Άρα \mathcal{F}^0 είναι άλγεβρα.

Για να δείξουμε ότι \mathcal{F}^0 , δεν είναι σ -άλγεβρα, θεωρούμε το σύνολο:

$$E = \{(1, 1, 1, \dots)\}.$$

Το E δεν ανήκει στην \mathcal{F}^0 , αλλά μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη τομή ενδεχομένων που ανήκουν στην \mathcal{F}^0 :

$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_j = 1\}.$$

Πρόταση 1.2:

Η συνάρτηση \mathbb{P} είναι μέτρο (προσθετικό) στην \mathcal{F}^0 , δηλαδή:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- Αν $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{F}^0$ είναι ξένα και $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}^0$, τότε:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)$$

Απόδειξη:

Είναι προφανές ότι $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι η \mathbb{P} είναι πεπερασμένα προσθετική, δηλαδή αν τα $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{F}^0$ είναι ξένα μεταξύ τους τότε:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n E_j\right) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(E_j)$$



(Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε ότι υπάρχει N τέτοιος ώστε τα $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{F}_n$ και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσθετικότητα του P_n .)

Η απόδειξη της αριθμήσιμης υποπροσθετικότητας είναι πιο δύσκολη. Στην πραγματικότητα ισχύει το εξής ισχυρότερο γεγονός: έστω ότι τα $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{F}^0$, είναι ξένα & $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}^0$.

Τότε υπάρχει N τέτοιος ώστε $E_j = \emptyset$ για $j > N$.

Μόλις δείξουμε αυτό, η αριθμήσιμη προσθετικότητα προκύπτει από την πεπερασμένη.

Για να το δείξουμε αυτό, θεωρούμε το Ω ως το τοπολογικό χώρο:

$$\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots$$

με την τοπολογία γινομένου, όπου σε κάθε $\{0,1\}$ δίνουμε τη διακριτή τοπολογία (όλα τα υποσύνολα είναι ανοιχτά). Η τοπολογία γινομένου είναι η μικρότερη τοπολογία ώστε όλα τα σύνολα στην \mathcal{F}^0 να είναι ανοιχτά.

Παρατηρούμε επίσης ότι όλα τα σύνολα στην \mathcal{F}^0 είναι κλειστά αφού είναι συμπληρώματα συνόλων της \mathcal{F}^0 .

Από το θεώρημα του Tychonoff προκύπτει ότι ο χώρος Ω είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος υπό αυτή την τοπολογία.

Έστω E_1, E_2, \dots όπως παραπάνω και $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}^0$. Τότε τα E_1, E_2, \dots είναι ανοιχτή κάλυψη του κλειστού (και άρα συμπαγούς) συνόλου E . Άρα υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο E_1, E_2, \dots, E_n .

Εφόσον τα E_1, E_2, \dots είναι ξένα, αυτό σημαίνει ότι $E_j = \emptyset$ για $j > N$.

Έστω \mathcal{F} η μικρότερη σ -άλγεβρα που περιέχει την \mathcal{P} . Τότε το Θεώρημα Επέκτασης του Carathéodory μάς λέει ότι η \mathbb{P} μπορεί να επεκταθεί μοναδικά σε έναν πλήρη χώρο μέτρου $(\mathbb{P}, \overline{\mathcal{F}}, \mathbb{P})$ όπου $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}$.



1.2 σ-Άλγεβρες

Μια σ-άλγεβρα σε ένα σύνολο X είναι μια συλλογή υποσυνόλων του X που περιέχει το \emptyset και το X , και είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα, πεπερασμένες ενώσεις, αριθμήσιμες ενώσεις και αριθμήσιμες τομές.

Ορισμός 1.2:

Μια σ-άλγεβρα σε ένα σύνολο X είναι μια συλλογή \mathcal{A} υποσυνόλων του X ώστε:

- a) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
- b) Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $A^c \in \mathcal{A}$
- c) Αν $A_i \in \mathcal{A}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, τότε:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

Από του νόμους του De Morgan, μια συλλογή είναι σ-άλγεβρα αν περιέχει το \emptyset και είναι κλειστή υπό συμπληρώματα και αριθμήσιμες ενώσεις (ή ισοδύναμα, αριθμήσιμες τομές).

Παράδειγμα 1:

Αν X είναι σύνολο, τότε:

- $\{\emptyset, X\}$
- $\mathcal{P}(X)$ (το σύνολο όλων των υποσυνόλων)

Είναι σ-άλγεβρες στο X . Η πρώτη είναι η μικρότερη και η δεύτερη η μεγαλύτερη.

Οι μετρήσιμοι χώροι είναι το πεδίο ορισμού των μέτρων.



Ορισμός 1.3:

Ένας μετρήσιμος χώρος είναι ένα ζεύγος (X, \mathcal{A}) όπου X είναι μη κενό σύνολο και \mathcal{A} σ -άλγεβρα στο X .

Είναι χρήσιμο να συγκρίνουμε τον ορισμό της σ -άλγεβρας με αυτόν του τοπολογικού χώρου (X, \mathcal{T}) :

- Το συμπλήρωμα ενός μετρήσιμου συνόλου είναι μετρήσιμο, αλλά το συμπλήρωμα ενός ανοικτού συνόλου γενικά δεν είναι ανοικτό.
- Αριθμήσιμες ενώσεις και τομές μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμες, ενώ στις ανοιχτές είναι μόνο οι πεπερασμένες τομές.
- Η μορφή τους είναι παρόμοια, αλλά δεν συνδυάζονται εύκολα.

Αν \mathcal{F} είναι συλλογή υποσυνόλων του X , τότε υπάρχει η μικρότερη σ -άλγεβρα που περιέχει την \mathcal{F} , και συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{F})$.

Ορισμός 1.4:

Αν \mathcal{F} είναι συλλογή υποσυνόλων του X , τότε η σ -άλγεβρα που παράγεται από την \mathcal{F} είναι:

$$\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap \{ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \text{ και } \mathcal{A} \text{ είναι } \sigma\text{-άλγεβρα} \}$$

Η τομή αυτή δεν είναι κενή, γιατί η $\mathcal{P}(X)$ είναι πάντα σ -άλγεβρα.

Πρόταση 1.3:

Αν \mathcal{F} είναι συλλογή υποσυνόλων του X και \mathcal{A} σ -άλγεβρα, τότε:

$$\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$$

Μεταξύ των πιο σημαντικών σ -αλγεβρών είναι οι σ -άλγεβρες Borel.

Ορισμός 1.5:

Έστω (X, \mathcal{T}) ένας τοπολογικός χώρος. Η σ -άλγεβρα Borel είναι:

$$\mathfrak{B}(X) = \sigma(\mathcal{T})$$

δηλαδή η σ -άλγεβρα που παράγεται από τη συλλογή των ανοικτών συνόλων του X .



1.3 Τυχαίες μεταβλητές – Μέση τιμή

Ορισμός 1.6:

Μια τυχαία μεταβλητή X είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση από έναν χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ στο \mathbb{R} , δηλαδή είναι μια συνάρτηση:

$$X: \Omega \rightarrow (-\infty, \infty)$$

Τέτοια ώστε για κάθε σύνολο Borel B , να ισχύει

$$X^{-1}(B) = \{X \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Εδώ χρησιμοποιούμε τη συντομογραφία

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B\}.$$

Αν X είναι τυχαία μεταβλητή, τότε για κάθε σύνολο Borel $B \subseteq \mathbb{R}$, το $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση σε σύνολα Borel:

$$\mu_{X(B)} = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)).$$

Αυτή η συνάρτηση είναι πράγματι μέτρο, και το $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mu_X)$ είναι χώρος πιθανοτήτων. Το μέτρο μ_X καλείται κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X .

- Αν το μ_X δίνει μέτρο μόνο σε αριθμήσιμα σημεία του \mathbb{R} , τότε η X λέγεται διακριτή τυχαία μεταβλητή.
- Αν το μ_X δίνει μηδενικό μέτρο σε κάθε μεμονωμένο σημείο και άρα και σε κάθε αριθμήσιμο σύνολο, τότε λέγεται συνεχής τυχαία μεταβλητή.

Κάθε τυχαία μεταβλητή μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα μιας διακριτής και μιας συνεχούς μεταβλητής. Όλες οι τυχαίες μεταβλητές σε διακριτούς χώρους είναι διακριτές,



Η κατανομή μ_X δίνεται συχνά με όρους της συνάρτησης κατανομής :

$$F_{X(x)} = \mathbb{P}(X \leq x) = \mu_X((-\infty, x]).$$

Η $F = F_X$ ικανοποιεί:

- ❖ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- ❖ $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
- ❖ Η F είναι μη φθίνουσα συνάρτηση,
- ❖ Η F είναι δεξιά συνεχής, για κάθε x ,

$$F_{X(x)} = \mathbb{P}\{X \leq x\} = \mu_X(-\infty, x].$$

Αντιστρόφως, κάθε συνάρτηση F που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες είναι συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής. Το αντίστοιχο μέτρο προκύπτει ως:

$$\mu_X((-\infty, x]) = F_{X(x)},$$

Και επεκτείνεται στα σύνολα Borel.

Για ορισμένες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X , υπάρχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f_X :

$\mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ τέτοια ώστε:

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Αν υπάρχει τέτοια συνάρτηση, ονομάζεται πυκνότητα. Αν η πυκνότητα υπάρχει τότε:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Αν η συνάρτηση πυκνότητας f είναι συνεχής στο t , τότε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού δίνει:

$$f(x) = F'(x)$$

Μια πυκνότητα f ικανοποιεί :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$



Αντιστρόφως, κάθε μη αρνητική συνάρτηση που ολοκληρώνεται στη μονάδα είναι πυκνότητα κάποιας τυχαίας μεταβλητής.

Παράδειγμα 2: Αν E είναι ένα ενδεχόμενο, τότε η δείκτρια συνάρτηση του E είναι η τυχαία μεταβλητή:

$$1_{E(\omega)} = \begin{cases} 1, & \omega \in E \\ 0, & \omega \notin E \end{cases}$$

Παράδειγμα 3: Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ο χώρος πιθανοτήτων για άπειρες ρίψεις νομίσματος.

Ορίζουμε:

$$X_n(\omega_1, \omega_2, \dots) = \omega_n = \begin{cases} 1, & \text{αν η } n\text{-οστή ρίψη βγάλει κορώνα} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \text{πλήθος των κορωνών στις πρώτες } n \text{ ρίψεις.}$$

Οι X_1, X_2, \dots είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές. Αν \mathcal{F}_n είναι η σ -άλγεβρα των γεγονότων που εξαρτώνται μόνο από τις πρώτες n ρίψεις, τότε και S_n είναι τυχαία μεταβλητή επί του $(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$.

Ωστόσο, το S_{n+1} δεν είναι τυχαία μεταβλητή επί του ίδιου χώρου.

Παράδειγμα 4: Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας επί του $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Η τετριμμένη τυχαία μεταβλητή είναι:

$$X = x,$$

Και έχει κατανομή $\mu_X = \mu$. Κάθε μέτρο πιθανότητας στο \mathbb{R} είναι κατανομή τυχαίας μεταβλητής.

Παράδειγμα 5: Μια τυχαία μεταβλητή X έχει κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 αν η πυκνότητά της είναι:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

Αν $\mu = 0$ και $\sigma = 1$ τότε λέγεται ότι X έχει τυπική κανονική κατανομή. Η συνάρτηση κατανομής της είναι η γνωστή:



$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

Παράδειγμα 6: Αν X είναι τυχαία μεταβλητή και $g: (\mathbb{R}, \mathfrak{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση, τότε και η $Y = g(X)$ είναι τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός 1.7

Αν X είναι μη αρνητική τυχαία μεταβλητή, η αναμενόμενη τιμή της ή μέση τι, X , συμβολιζόμενη με $\mathbb{E}[X]$, δίνεται από:

$$\mathbb{E}[X] = \int X d\mathbb{P}$$

Αν X είναι τυχαία μεταβλητή με $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, τότε ορίζουμε την μέση τιμή ως:

$$\mathbb{E}[X] = \int X d\mathbb{P}$$

Αν X παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές και $\mathbb{E}[|X|] = \infty$, τότε η μέση τιμή δεν ορίζεται.

Αν X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή που παίρνει τιμές a_1, a_2, \dots , τότε ισχύει:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mathbb{P}(X = a_j),$$

υπό την προϋπόθεση ότι το άθροισμα συγκλίνει απολύτως.

Λήμμα 1.1:

Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή μ_X . Τότε:

$$\mathbb{E}[X] = \int X d\mu_X.$$

(Το ένα ολοκλήρωμα υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει και το άλλο.)



Απόδειξη:

Υποθέτουμε πρώτα ότι $X \geq 0$. Έστω n, k θετικοί ακέραιοι και ορίζουμε:

$$A_{k,n} = \left\{ \omega: \frac{k-1}{n} \leq X(\omega) < \frac{k}{n} \right\}.$$

Για κάθε n , θεωρούμε τη διακριτή τυχαία μεταβλητή X_n , με τιμές στο $\{\frac{k}{n}: k \in \mathbb{Z}\}$:

$$X_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \cdot 1_{A_{k,n}}.$$

Τότε:

$$X_n - \frac{1}{n} \leq X \leq X_n.$$

Άρα:

$$\mathbb{E}[X_n] - \frac{1}{n} \leq \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[X_n].$$

Αλλά:

$$\mathbb{E} \left[X_n - \frac{1}{n} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{n} \mathbb{P}(A_{k,n}).$$

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \cdot \mathbb{P}A_{k,n}.$$

Και

$$\frac{k-1}{n} \cdot \mu_X \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right] \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} x d\mu_X \leq \frac{k}{n} \cdot \mu_X \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right].$$

Αθροίζοντας, καταλήγουμε στο:

$$\mathbb{E} \left[X_n - \frac{1}{n} \right] \leq \int_{[0, \infty)} x d\mu_X \leq \mathbb{E}[X_n]$$

Αφήνοντας το $n \rightarrow \infty$, προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Η γενική περίπτωση αποδεικνύεται γράφοντας $X = X^+ - X^-$.

Συγκεκριμένα, η προσδοκία μιας τυχαίας μεταβλητής εξαρτάται μόνο από την κατανομή της και όχι από τον ίδιο τον χώρο πιθανοτήτων.



Αν η X έχει πυκνότητα f , τότε το μέτρο μ_X είναι το ίδιο με τη συνάρτηση $f(x)dx$, και η προσδοκία γράφεται :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(X) dx ,$$

Και αυτό υπάρχει μόνο αν:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(X) dx < \infty .$$

Επειδή ο ορισμός της προσδοκίας βασίζεται στο ολοκλήρωμα Lebesgue, όλα τα γνωστά θεωρήματα του Lebesgue ολοκληρώματος (π.χ. γραμμικότητα, Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης, Λήμμα του Fatou, Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης) ισχύουν και για την προσδοκία.

Λήμμα 1.2:

Εστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή μ_X και g Borel μετρήσιμη συνάρτηση.

Τότε:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int g(x)d\mu_X$$

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι g είναι μη αρνητική. Τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων g_n τέτοια ώστε $g_{n(x)} \uparrow g(x)$.

Για τις απλές συναρτήσεις, ισχύει:

$$\mathbb{E}[g_n(X)] = \int g_n(x)d\mu_X .$$

Άρα, με το θεώρημα μονότονης σύγκλισης:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int g(x)d\mu_X .$$

Η γενική περίπτωση αποδεικνύεται γράφοντας $g = g^+ - g^-$ και $g^+(X), g^-(X)$.



Αν η X έχει πυκνότητα f , τότε ισχύει:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int g(x)f(x)dx.$$

Ορισμός 1.8

Η διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2],$$

Όπου υποθέτουμε ότι η προσδοκία υπάρχει.

Παρατηρούμε:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Η διασπορά συχνά συμβολίζεται ως $\sigma^2(X)$ και η τετραγωνική ρίζα της σ , ονομάζεται τυπική απόκλιση.

Λήμμα 1.3:

Έστω X τυχαία μεταβλητή.

Ανισότητα του Markov:

Αν $a > 0$, τότε:

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{a}.$$

Ανισότητα του Chebyshev:

Αν $a > 0$, τότε:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}.$$



Απόδειξη:

Έστω $X_\alpha = \alpha \cdot 1_{\{|X| \geq \alpha\}}$. Τότε $X_\alpha \leq |X|$, άρα:

$$\alpha \cdot \mathbb{P}(|X| \geq \alpha) = \mathbb{E}[X_\alpha] \leq \mathbb{E}[|X|].$$

Για την ανισότητα του Chebyshev εφαρμόζουμε την Markov στην τυχαία μεταβλητή

$|X - \mathbb{E}[X]|^2$, ώστε:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]|^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]]^2}{a^2}.$$

1.4 Ανεξαρτησία

Σε όλη αυτή την ενότητα υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας χώρος πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Όλες οι σ-άλγεβρες θεωρούνται υπό σ-άλγεβρες της \mathcal{A} και όλες οι τυχαίες μεταβλητές ορίζονται σε αυτόν τον χώρο.

Ορισμός 1.9

- Δύο ενδεχόμενα A, B λέγονται ανεξάρτητα αν:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

- Μια συλλογή ενδεχομένων $\{A_\alpha\}$ λέγεται ανεξάρτητη αν για κάθε διαφορετικά $A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_n}$, ισχύει:

$$\mathbb{P}(A_{\alpha_1} \cap \dots \cap A_{\alpha_n}) = \mathbb{P}(A_{\alpha_1}) \dots \mathbb{P}(A_{\alpha_n}).$$

- Μια συλλογή ενδεχομένων $\{A_\alpha\}$ λέγεται κατά ζεύγη ανεξάρτητη αν για κάθε διαφορετικά $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}$:

$$\mathbb{P}(A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2}) = \mathbb{P}(A_{\alpha_1})\mathbb{P}(A_{\alpha_2}).$$

Η ανεξαρτησία συνεπάγεται κατά ζεύγη ανεξαρτησία αλλά όχι το αντίστροφο.



Παράδειγμα 7:

Ρίχνουμε δύο ζάρια. Έστω:

- $A_1 = \{\text{άθροισμα ρίψεων} = 7\}$
- $A_2 = \{\text{άθροισμα ρίψεων} = 1\}$
- $A_3 = \{\text{άθροισμα ρίψεων} = 6\}$

Τότε:

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{6}$$

Και

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{36}$$

Όμως:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{36} \neq \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$$

Άρα είναι κατά ζεύγη ανεξάρτητα αλλά όχι πλήρως ανεξάρτητα.

Ορισμός 1.10

Μια πεπερασμένη συλλογή σ-αλγεβρών $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ λέγεται ανεξάρτητη αν για οποιαδήποτε $A_i \in \mathcal{F}_i$, ισχύει:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_n).$$

Μια άπειρη συλλογή σ-αλγεβρών λέγεται ανεξάρτητη αν κάθε πεπερασμένη υποσυλλογή είναι ανεξάρτητη.

Ορισμός 1.11

Αν X είναι τυχαία μεταβλητή και \mathcal{F} είναι σ-άλγεβρα, τότε λέμε ότι X είναι \mathcal{F} -μετρήσιμη αν για κάθε Borel σύνολο B ισχύει:

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Δηλαδή, αν X είναι τυχαία μεταβλητή σε χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, τότε ορίζουμε $\mathcal{F}(X)$ ως την μικρότερη σ-άλγεβρα για την οποία το X είναι $\mathcal{F}(X)$ -μετρήσιμη.



Στην πραγματικότητα, ισχύει ότι:

$$\mathcal{F}(X) = \{X^{-1}(B) : B \text{ Borel}\}.$$

(Προφανώς, αυτό περιέχει το δεξί μέρος, και μπορεί να ελεγχθεί ότι είναι σ -άλγεβρα. Αν $\{X_\alpha\}$ είναι συλλογή τυχαίων μεταβλητών, τότε $\mathcal{F}(\{X_\alpha\})$ είναι η μικρότερη σ -άλγεβρα ώστε κάθε X_α να είναι \mathcal{F} -μετρήσιμη.)

Παράδειγμα 8:

Αν ρίχνουμε 2 ζάρια και X είναι το άθροισμα, τότε αρκεί να ξέρουμε ποια από τα:

- $E_{1,j} = \{1\text{η ρίψη είναι } j\}$
- $E_{2,j} = \{2\text{η ρίψη είναι } j\}$

Έχουν συμβεί για να υπολογίσουμε το X .

Γενικά, αν X είναι οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή, μπορούμε να προσδιορίσουμε το X γνωρίζοντας για ποια $E_c = \{X < c\}$ ισχύει ότι έχουν συμβεί.

Λήμμα 1.4:

Εστω \mathcal{F} και \mathcal{G} δύο άλγεβρες γεγονότων που είναι ανεξάρτητες, δηλαδή για όλα τα $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}$, ισχύει:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Τότε οι σ -άλγεβρες $\sigma(\mathcal{F})$ και $\sigma(\mathcal{G})$ είναι επίσης ανεξάρτητες.

Απόδειξη:

Ορίζουμε μέτρα:

$$\mu_B(A) = \mathbb{P}(A \cap B), \mu(A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

και τα δύο είναι πεπερασμένα μέτρα και συμφωνούν στην \mathcal{F}^0 . Επομένως, με το θεώρημα επέκτασης του Caratheodory, ταυτίζονται στο $\sigma(\mathcal{F})$. Άρα:



$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), A \in \sigma(\mathcal{F}), B \in \mathcal{G}^0$$

Επαναλαμβάνοντας, παίρνουμε το ζητούμενο.

Αν X_1, \dots, X_n είναι τυχαίες μεταβλητές, τότε ο διανυσματική τυχαία μεταβλητή $X = (X_1, \dots, X_n)$

Θεωρείται να παίρνει τιμές στην \mathbb{R}^n .

Το μέτρο κατανομής είναι :

$$\mu(B) = \mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in B).$$

Κάθε X_i έχει κατανομή μ_{X_i} και λέγονται οριακές κατανομές.

Η συνάρτηση κοινής κατανομής είναι:

$$F(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, \dots, X_n \leq t_n) = \mu((-\infty, t_1] \times \dots \times (-\infty, t_n]).$$

Ορισμός 1.12:

Οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_n λέγονται ανεξάρτητες αν ισχύει οποιαδήποτε από τις παρακάτω συνθήκες (ισοδύναμα):

- Για όλα τα Borel σύνολα B_1, \dots, B_n :

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \dots \mathbb{P}(X_n \in B_n)$$

- Οι σ -άλγεβρες $\mathcal{F}(X_1), \dots, \mathcal{F}(X_n)$ είναι ανεξάρτητες.
- Το μέτρο κατανομής είναι:

$$\mu = \mu_{X_1} \times \dots \times \mu_{X_n}$$

- Για κάθε $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$F(t_1, \dots, t_n) = F_{X_1}(t_1) \dots F_{X_n}(t_n)$$

Αν οι τυχαίες μεταβλητές X_1, \dots, X_n έχουν κοινή πυκνότητα $f(x_1, \dots, x_n)$, τότε:

$$\mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in B) = \int_B f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n$$

Οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n).$$



Μια άπειρη συλλογή τυχαίων μεταβλητών λέγεται ανεξάρτητη αν κάθε πεπερασμένη υποσυλλογή είναι ανεξάρτητη.

Πρόταση 1.4:

Αν X_1, \dots, X_n είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και g_1, \dots, g_n είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε οι $g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$ είναι επίσης ανεξάρτητες.

Πρόταση 1.5:

Αν X, Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ και $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$, τότε:

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

Απόδειξη:

Αρχικά για απλές μεταβλητές:

$$S = \sum_{i=1}^m a_i 1_{A_i}, \quad T = \sum_{j=1}^n b_j 1_{B_j}$$

Αν S είναι $\mathcal{F}(X)$ – μετρήσιμη και T είναι $\mathcal{F}(Y)$ -μετρήσιμη, και X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε:

$$\mathbb{E}[ST] = \mathbb{E}[S] \cdot \mathbb{E}[T]$$

Αν τώρα X, Y είναι μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές, υπάρχει ακολουθία $S_n \uparrow X, T_n \uparrow Y$. Με το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης:

$$\mathbb{E}[XY] = \lim \mathbb{E}[S_n T_n] = \lim \mathbb{E}[S_n] \cdot \mathbb{E}[T_n] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

Γενικά για X, Y γράφουμε:

$$X = X^+ - X^-, \quad Y = Y^+ - Y^-$$



όπου όλα τα μέλη είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Άρα, από γραμμικότητα του ολοκληρώματος, έχουμε το ζητούμενο.

Το κανόνα πολλαπλασιασμού για την προσδοκία μπορούμε να τον δούμε ως εφαρμογή του θεωρήματος του Fubini.

Αν μ_X, μ_Y είναι οι κατανομές των X και Y , και είναι ανεξάρτητες, τότε η κατανομή του (X, Y) είναι το γινόμενο μέτρο $\mu_X \times \mu_Y$.

Άρα:

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{\mathbb{R}^2} xy d(\mu_X \times \mu_Y) = \left(\int x d\mu_X \right) \left(\int y d\mu_Y \right) = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Οι τυχαίες μεταβλητές X, Y για τις οποίες ισχύει $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ λέγονται ορθογώνιες.

Από την προηγούμενη πρόταση, οι ανεξάρτητες ολοκληρώσιμες μεταβλητές είναι ορθογώνιες.

Πρόταση 1.6:

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένη διασπορά.

Αν είναι κατά ζεύγη ορθογώνιες, δηλαδή $i \neq j \Rightarrow \mathbb{E}[X_i X_j] = 0$, τότε:

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)$$

Απόδειξη:

Χωρίς βλάβη γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι μεταβλητές έχουν μέση τιμή 0.

Τότε:

$$\text{Var}\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^n X_j\right)^2\right] = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[X_j^2] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i X_j] = \sum_{j=1}^n \text{Var}(X_j) + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] = \sum_{j=1}^n \text{Var}(X_j)$$

Λόγω ορθογωνιότητας.

Αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιείται ευρέως όταν οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες. Δεν ισχύει γενικά ότι:

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

Δύο ακραίες περιπτώσεις όταν $X = Y$ τότε $\text{Var}(X + Y) = 4\text{Var}(X)$ ή $X = -Y \Rightarrow \text{Var}(X + Y) = 0$.



Θεωρία Μέτρου

1.5 Μέτρα

Ένα μέτρο είναι μια αριθμήσιμη προσθετική, μη αρνητική πραγματική συνάρτηση που ορίζεται σε μία σ -άλγεβρα.

Ορισμός 1.13:

Ένα μέτρο μ σε μετρήσιμο χώρο (X, \mathcal{A}) είναι μια συνάρτηση:

$$\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$$

Τέτοια ώστε:

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- Αν $\{A_i \in \mathcal{A}: i \in \mathbb{N}\}$ είναι μια αριθμήσιμη ξένη συλλογή συνόλων, τότε:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Σε σύγκριση με ένα εξωτερικό μέτρο, ένα κανονικό μέτρο δεν χρειάζεται να ορίζεται σε όλα τα υποσύνολα ενός συνόλου, αλλά είναι αριθμήσιμα προσθετικό και όχι απλά υποπροσθετικό.

Ένα μέτρο μ σε σύνολο X λέγεται:

- Πεπερασμένο αν $\mu(X) < \infty$,
- σ -πεπερασμένο αν $X = \bigcup_n A_n$ με $A_n \in \mathcal{A}$ και $\mu(A_n) < \infty$,
- Ένας χώρος πιθανοτήτων είναι πεπερασμένος με $\mu(X) = 1$

Ένας μετρήσιμος χώρος (X, \mathcal{A}, μ) αποτελείται από ένα σύνολο X , μια σ -άλγεβρα \mathcal{A} επί του X και ένα μέτρο μ ορισμένο στο \mathcal{A} .

Όταν τα A και μ είναι κατανοητά από τα συμφραζόμενα, αναφερόμαστε απλά στον μετρικό χώρο X .



Ορισμός 1.14:

Αν (X, \mathcal{A}, μ) είναι μετρήσιμος χώρος και $E \subseteq X$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο, τότε ο υπο-χώρος $(E, \mathcal{A}_E, \mu_E)$ ορίζεται περιορίζοντας το μέτρο:

- $\mathcal{A}_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$
- $\mu_E(A \cap E) = \mu(A \cap E)$

Η κατασκευή μη τετριμμένων μέτρων, όπως το μέτρο Lebesgue, απαιτεί ουσιαστική προσπάθεια. Ωστόσο, υπάρχει ένα απλό παράδειγμα:

Παράδειγμα 9:

Έστω X οποιοδήποτε μη κενό σύνολο. Ορίζουμε:

$$v: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty], v(E) = \text{πλήθος στοιχείων του } E$$

Όπου:

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(E) = \infty$ αν το E δεν είναι πεπερασμένο

Τότε v είναι μέτρο, γνωστό ως μέτρο πλήθους (counting measure). Κάθε υποσύνολο του X είναι μετρήσιμο ως προς το v .

Το μέτρο είναι:

- πεπερασμένο αν το X είναι πεπερασμένο.
- σ -πεπερασμένο αν το X είναι αριθμήσιμο.

Μια χρήσιμη συνέπεια της αριθμήσιμης προσθετικότητας είναι η ιδιότητα μονοτονίας:

Πρόταση 1.7:

Αν $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων, δηλαδή $A_i \subseteq A_{i+1}$, τότε:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

Αν $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία και $\mu(A_1) < \infty$, τότε:

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$



Απόδειξη:

Αν η ακολουθία $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα, τότε θέτούμε $B_i = A_{i+1} \setminus A_i$. Τότε τα B_i είναι ξένα και ισχύει:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum \mu(B_i)$$

Επιπλέον, αφού $A_j = \bigcup_{i=1}^j B_i$, τότε:

$$\mu(A_j) = \sum_{i=1}^j \mu(B_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j)$$

και αποδεικνύεται η πρώτη σχέση.

Αν τώρα $\{A_i\}$ είναι φθίνουσα με $\mu(A_1) < \infty$, τότε το $B_i = A_1 \setminus A_i$ είναι αύξουσα ακολουθία και:

$$\mu(B_i) = \mu(A_1) - \mu(A_i) \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim \mu(A_i)$$

Γιατί:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mu(A_1) - \lim \mu(A_i) \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim \mu(A_i)$$

Παράδειγμα 10:

Για να δείξουμε ότι η υπόθεση $\mu(A_1) < \infty$ είναι αναγκαία, θεωρούμε το μέτρο πληθυσμού ν στο \mathbb{N} με:

$$A_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\} \Rightarrow \nu(A_n) = \infty$$

Αλλά:

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \emptyset \Rightarrow \nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$$



1.6 Σύνολα Μέτρου Μηδέν

Ένα σύνολο N έχει μέτρο μηδέν αν $\mu(N) = 0$. Αν μια ιδιότητα ισχύει για όλα τα $x \in X \setminus N$, λέμε ότι ισχύει σχεδόν παντού ή a.e(almost everywhere).

Ορισμός 1.15:

Ένας μετρήσιμος χώρος (X, \mathcal{A}, μ) λέγεται πλήρης αν κάθε υποσύνολο συνόλου μέτρου μηδέν είναι μετρήσιμο.

Η πληρότητα εξαρτάται από το μέτρο μ , όχι μόνο από την σ -άλγεβρα \mathcal{A} . Ο κάθε μετρικός χώρος μπορεί να επεκταθεί μοναδικά σε πλήρη μετρικό χώρο ως:

$$(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$$

Θεώρημα 1:

Αν (X, \mathcal{A}, μ) είναι μετρικός χώρος, τότε ορίζουμε :

$$\bar{\mathcal{A}} = \{A \cup M : A \in \mathcal{A}, M \subseteq N \text{ και } N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0\}$$

και θέτουμε:

$$\bar{\mu}(A \cup M) = \mu(A)$$

Τότε $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ είναι πλήρης μετρικός χώρος και η μοναδική επέκταση του μ .

Απόδειξη:

Η συλλογή $\bar{\mathcal{A}}$ είναι σ -άλγεβρα :

- Κλειστή υπό συμπληρώματα $(A \cup M)^c = (A^c \cap M^c)^c$
- Κλειστή υπό αριθμήσιμες ενώσεις:

Αν $A_i \in \mathcal{A}$ και $M_i \subseteq N_i$ με $\mu(N_i) = 0$, τότε:

$$\bigcup (A_i \cup M_i) = \left(\bigcup A_i \right) \cup \left(\bigcup M_i \right) \in \bar{\mathcal{A}}$$

εφόσον $\bigcup M_i \subseteq \bigcup N_i$ και $\mu(\bigcup N_i) = 0$

Άρα $\bar{\mu}$ είναι καλά ορισμένο και μοναδική επέκταση του μ .



1.7 Μέτρα στο \mathbb{R}

Εκτός από τα θετικά μέτρα είναι χρήσιμο να αναφέρουμε και μερικά πράγματα για συναρτήσεις μέτρου που λαμβάνουν τιμές στο \mathbb{R} και όχι μόνο στο $[0, \infty)$.

Ορισμός 1.16:

Έστω (S, \mathcal{E}) μετρήσιμος χώρος. Μια απεικόνιση $\mu: \mathcal{E} \rightarrow (-\infty, \infty)$ ονομάζεται *signed (si) μέτρο* αν:

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. Για καθε αριθμήσιμη ξένη ακολουθία $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στο \mathcal{S} η σειρά $\sum_n \mu(A_n)$ είναι αθροίσιμη και $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$

(Αυτό είναι ίδιος ορισμός με τα μέτρα, αλλά το μ τώρα μπορεί να είναι αρνητικό ή θετικό.)

Ορισμός 1.17:

Μια ακολουθία $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (-\infty, \infty)$ είναι αθροίσιμη αν και οι δύο σειρές:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^+ < \infty$$

είναι συγκλίνουσα. Τότε το άθροισμα $\sum a_n$ ορίζεται ως :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^+ - \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^-$$

Σχόλιο:

Μια σειρά με στοιχεία σε $(-\infty, \infty)$ είναι αθροίσιμη αν και μόνο αν το άθροισμα των θετικών και αρνητικών μερών είναι πεπερασμένο.



Ορισμός 1.18:

Για $A \in \mathcal{E}$, μια πεπερασμένη συλλογή ξένων μετρήσιμων συνόλων $\{B_1, \dots, B_n\} \subset \mathcal{E}$ λέγεται μετρήσιμη διαμέριση του A αν:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = A \text{ και } B_i \cap B_j = \emptyset \text{ (} i \neq j \text{)}$$

Το σύνολο όλων των τέτοιων διαμερίσεων του A συμβολίζεται με $\Pi_{\mathcal{E}}(A)$.

Ορισμός 1.19:

Για ένα si μέτρο μ , ορίζουμε τη συνολική μεταβολή στο A ως:

$$|\mu|(A) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\mu(B_i)| : \{B_i\}_{i=1}^n \in \Pi_{\mathcal{E}}(A) \right\}$$

Η τιμή $|\mu|(S) \in [0, \infty)$ καλείται ολική μεταβολή του μ .

Θεώρημα Hahn–Jordan

Έστω (S, \mathcal{E}, μ) με signed μέτρο μ . Τότε υπάρχουν δύο θετικά μέτρα μ^+, μ^- ώστε:

- $\mu = \mu^+ - \mu^-$
- μ^+, μ^- είναι αμοιβαία ξένα, δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο $D \in \mathcal{E}$ τέτοιο ώστε:

$$\mu^+(A) = \mu(A \cap D^c), \quad \mu^-(A) = -\mu(A \cap D), \quad \forall A \in \mathcal{E}$$

- Η συνολική μεταβολή είναι:

$$|\mu|(A) = \mu^+(A) + \mu^-(A)$$



1.8 Μέτρο Lebesgue στο \mathbb{R}^n

Ο στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε μια έννοια όγκου — ή μέτρου Lebesgue — για γενικά υποσύνολα του \mathbb{R}^n η οποία να γενικεύει τον συνηθισμένο όγκο γεωμετρικών σχημάτων, όπως κύβων ή ορθογωνίων.

Αν $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ είναι η συλλογή των Lebesgue – μετρήσιμων συνόλων και:

$$\mu: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$$

είναι το μέτρο Lebesgue, τότε θέλουμε:

1. Η $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ να περιέχει όλα τα n -διάστατα ορθογώνια.
2. Για κάθε τέτοιο ορθογώνιο R , η $\mu(R)$ να είναι ίση με τον γεωμετρικό όγκο του.
3. Η μ να είναι αριθμήσιμα προσθετική:

Αν $\{A_i\}$ είναι ξένα και μετρήσιμα, τότε:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Η αριθμήσιμη προσθετικότητα είναι απαραίτητη για την αιτιολόγηση των ορίων, ενώ η πεπερασμένη προσθετικότητα είναι πολύ αδύναμη. Αντίθετα, η υπερβολικά ισχυρή ιδιότητα, όπου η μέτρηση κάθε μεμονωμένου σημείου είναι μηδέν, θα συνεπαγόταν ότι όλα τα υποσύνολα του \mathbb{R}^n έχουν μηδενικό μέτρο!

Δεν είναι δυνατόν να οριστεί μέτρο Lebesgue σε όλα τα υποσύνολα του \mathbb{R}^n με γεωμετρικά λογικό τρόπο:

- *Hausdorff (1914)*: Δεν υπάρχει αριθμήσιμα προσθετικό μέτρο σε όλα τα υποσύνολα του \mathbb{R}^n το οποίο να είναι αναλλοίωτο υπό μεταθέσεις και περιστροφές και να αποδίδει μέτρο 1 στον μοναδιαίο κύβο.
- Αν $n \geq 3$, τότε δεν υπάρχει τέτοιο μέτρο.
- Το αποτέλεσμα ενισχύεται από το παράδοξο Banach–Tarski: μια σφαίρα μπορεί να τεμαχιστεί σε πεπερασμένα κομμάτια και να ανασυντεθεί σε οποιονδήποτε άλλο όγκο!
- *Banach (1923)*: Αν $n = 1$ ή $n = 2$ τότε υπάρχουν μερικές λύσεις αλλά όχι αριθμήσιμα προσθετικές.

Ωστόσο, μπορεί να οριστεί μέτρο σε μια σ -άλγεβρα $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ αρκετά μεγάλη για πρακτικούς σκοπούς.



1.9 Εξωτερικό Μέτρο Lebesgue

Χρησιμοποιούμε ορθογώνια ως βασικά σύνολα για τον ορισμό. Ένα n -διάστατο ορθογώνιο έχει τη μορφή:

Ορισμός 1.20:

Ορθογώνιο $R \subseteq \mathbb{R}^n$ της μορφής:

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \dots \times [a_n, b_n]$$

Όπου $-\infty < a_i \leq b_i < \infty$, και ο όγκος του ορίζεται:

$$\mu(R) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$

Αν $n = 1$ ή $n = 2$, είναι απλά μήκος ή εμβαδόν. Ορίζουμε και $\mu(\emptyset) = 0$.

Ορίζουμε $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ ως την συλλογή όλων των τέτοιων ορθογωνίων. Τότε:

$$\mu: \mathcal{R}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty)$$

Ορισμός 1.21:

Το εξωτερικό μέτρο *Lebesgue* ενός συνόλου $E \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι:

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i, R_i \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n) \right\} \quad (2)$$

Δηλαδή, το άθροισμα όλων των καλύψεων από ορθογώνια.

Η απεικόνιση:

$$\mu^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty)$$

είναι το εξωτερικό μέτρο Lebesgue

Στον παραπάνω ορισμό το άθροισμα $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i)$ και το εξωτερικό μέτρο $\mu^*(E)$: μπορεί να λάβει την τιμή ∞ .



Δεν απαιτείται τα ορθογώνια R_i να είναι ξένα. Επομένως, ο ίδιος όγκος μπορεί να εμφανίζεται σε πολλούς όρους στο άθροισμα του δεξιού μέρους της σχέσης (2) – αυτό όμως δεν επηρεάζει την τιμή του κάτω φράγματος.

Παράδειγμα 11:

Έστω $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ το σύνολο των ρητών αριθμών μεταξύ 0 και 1. Τότε το E έχει εξωτερικό μέτρο μηδέν. Για να το αποδείξουμε, έστω $\{q_i: i \in \mathbb{N}\}$ μια απαρίθμηση των στοιχείων του E . Δεδομένου οποιουδήποτε $\varepsilon > 0$, θέτουμε το R_i να είναι ένα διάστημα μήκους $\frac{\varepsilon}{2^i}$ που περιέχει το q_i . Τότε:

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \implies 0 \leq \mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) = \varepsilon$$

Άρα $\mu^*(E) = 0$, αφού το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετο.

Η ίδια επιχειρηματολογία δείχνει ότι κάθε αριθμήσιμο σύνολο έχει εξωτερικό μέτρο μηδέν. Παρατήρησε ότι αν προσπαθούσαμε να καλύψουμε το E με πεπερασμένο αριθμό διαστημάτων, τότε λόγω της πυκνότητας του E στο $[0,1]$ τα διαστήματα θα έπρεπε να καλύπτουν ολόκληρο το $[0,1]$ και επομένως να έχουν συνολικό μήκος τουλάχιστον 1.

Αυτό το παράδειγμα δείχνει γιατί είναι απαραίτητη η χρήση αριθμήσιμων καλύψεων με ορθογώνια, και όχι απλά πεπερασμένων, για τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου. Το λεγόμενο “κόλπο του αριθμήσιμου ε ” εμφανίζεται συχνά σε αποδείξεις στη θεωρία μέτρου.

Θεώρημα 2 — Ιδιότητες του Εξωτερικού Μέτρου Lebesgue μ^*

Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue μ^* ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

- a) $\mu^*(\emptyset) = 0$
- b) Αν $E \subseteq F$, τότε $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$
- c) Αν $\{E_i \subseteq \mathbb{R}^n: i \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμη συλλογή συνόλων, τότε :

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: Εισαγωγή στις Στοχαστικές Διαδικασίες - Martingales

2.1 Στοχαστικές Διαδικασίες

Ας υποθέσουμε ότι η θερμοκρασία ενός αισθητήρα σε ένα εργοστάσιο μετρείται κάθε χρονική στιγμή μεταξύ 9:00 π.μ. και 10:00 π.μ. Καθώς η θερμοκρασία επηρεάζεται από διάφορους μικρούς, τυχαίους παράγοντες (όπως μικρές μεταβολές στην ισχύ του εξοπλισμού, θόρυβος μέτρησης κ.λπ.), θεωρούμε ότι η μέτρηση σε κάθε χρονική στιγμή t είναι τυχαία μεταβλητή.

Έτσι, το $X_t(\omega)$ παριστάνει την τυχαία τιμή της θερμοκρασίας που παρατηρείται τη χρονική στιγμή t , υπό την έκβαση ω . Για να εκτιμήσουμε τη θερμοκρασία στις 10:00 π.μ., έχει νόημα να λάβουμε υπόψη μας ολόκληρη την πορεία $X_t(\omega)$ από τις 9:00 έως τις 10:00 π.μ.

Αυτή η ανάγκη για παρακολούθηση της χρονικής εξέλιξης ενός τυχαίου φαινομένου είναι χαρακτηριστική εφαρμογή των στοχαστικών διαδικασιών (stochastic processes). Το κατάλληλο μαθηματικό εργαλείο για τη μελέτη τέτοιων φαινομένων είναι ένα μοντέλο στοχαστικής διαδικασίας.

Ορισμός 2.1 :

Μια στοχαστική διαδικασία X είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών:

$$(X_t, t \in T) = (X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega),$$

Ορισμένων πάνω σε κάποιο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Για τους σκοπούς μας, το σύνολο χρόνου T θεωρείται συνήθως διάστημα, όπως $T = [a, b]$, $[a, b)$, ή $[a, \infty)$, με $a < b$. Τότε η διαδικασία X λέγεται διαδικασία συνεχούς χρόνου.

Αντίθετα, όταν το T είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, μιλάμε για διαδικασία διακριτού χρόνου.

Κατά σύμβαση, το γράμμα t ερμηνεύεται ως χρόνος.



Μια στοχαστική διαδικασία X είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών :

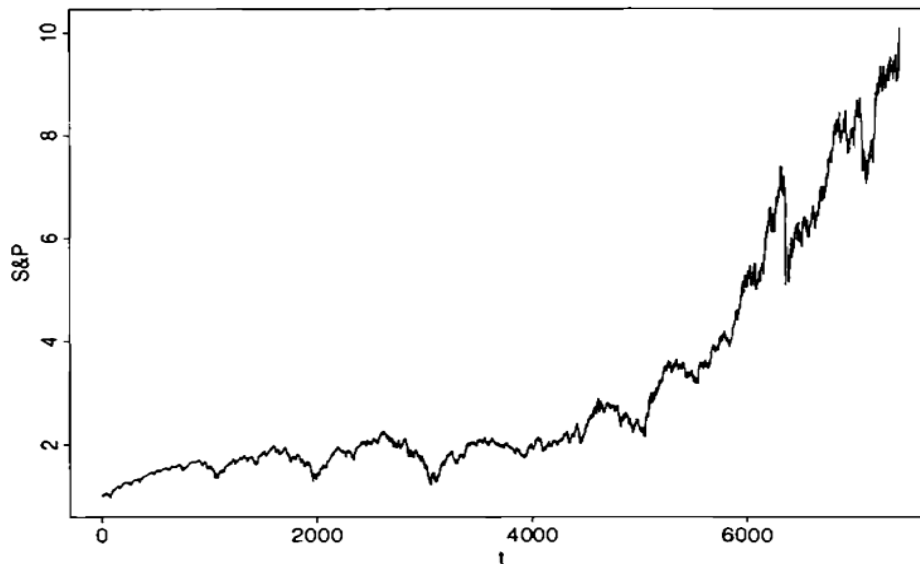
- ❖ Για σταθερό χρόνο t , το $X_t(\omega)$ είναι τυχαία μεταβλητή.

$$X_t = X_t(\omega), \omega \in \Omega.$$

- ❖ Για σταθερή έκβαση $\omega \in \Omega$, το $X_t(\omega)$ είναι συνάρτηση του χρόνου:

$$X_t = X_t(\omega), t \in T.$$

Η δεύτερη αυτή συνάρτηση λέγεται τροχιά, ή μονοπάτι δείγματος της διαδικασίας.



Σχήμα 1. Οι (κλιμακωμένες) ημερήσιες τιμές του δείκτη S&P σε περίοδο 7.422 ημερών.

Το γράφημα υποδεικνύει ότι μπορούμε να θεωρήσουμε τη χρονοσειρά του S&P ως δείγμα πορείας μιας διαδικασίας συνεχούς χρόνου. Αν σε μια χρονοσειρά υπάρχουν τόσες πολλές τιμές ώστε οι χρονικές στιγμές $t \in T$ να είναι «πυκνές» μέσα σε ένα διάστημα, τότε μπορεί κανείς να ερμηνεύσει αυτή τη διαδικασία διακριτού χρόνου ως διαδικασία συνεχούς χρόνου. Στην πράξη, οι τροχιές (sample paths) μιας πραγματικής διαδικασίας συνεχούς χρόνου καταγράφονται πάντα σε διακριτές χρονικές στιγμές. Ανάλογα με το πρόβλημα, πρέπει να αποφασιστεί ποιο μοντέλο —διακριτού ή συνεχούς χρόνου— είναι καταλληλότερο.



2.2 Κίνηση Brown (Wiener)

Η κίνηση Brown αποτελεί το βασικό μοντέλο τυχαίας συνεχούς κίνησης και εμφανίζεται κεντρικά στη θεωρία πιθανοτήτων, στη στοχαστική ανάλυση και στις εφαρμογές (φυσική, χρηματοοικονομικά κ.ά.). Φανταστείτε ότι $B_t = B_t(\omega)$ παραστάει την θέση ενός σωματιδίου στη χρονική στιγμή t .

Για σταθερό t , το B_t είναι τυχαία μεταβλητή· για σταθερό ω , η απεικόνιση $t \rightarrow B_t(\omega)$ είναι τυχαία συνάρτηση από $[0, \infty)$ στο \mathbb{R} . Έτσι μπορούμε να δούμε την κίνηση Brown είτε ως οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{B_t\}_{t \geq 0}$ με δείκτη τον χρόνο είτε ως τυχαία συνάρτηση.

Ορισμός 2.2 :

Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{B_t, t \in [0, \infty)\}$ ορισμένη σε χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ λέγεται κίνηση Brown αν ισχύουν:

- ❖ $B(0) = B_0$
- ❖ Οι διαφορές $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες για κάθε $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, δηλαδή οι μεταβολές είναι ανεξάρτητες ή ισοδύναμα οι διαφορές είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.
- ❖ Για κάθε $0 \leq s < t$,

$$B_t - B_s \sim \mathcal{N}(\mu(t-s), \sigma^2(t-s)).$$

Δηλαδή οι διαφορές $B(t+s) - B(t)$ είναι κανονικά κατανομημένες (Gauss) με μέσο 0 και διασπορά σ .

Όταν $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$ μιλάμε για τυπική κίνηση Brown ή διεργασία Wiener και γράφουμε απλώς $W = (W_t)_{t \geq 0}$.

Η τυπική κίνηση Brown είναι Γκαουσιανή διαδικασία με:

$$\mathbb{E}[W_t] = 0, \text{Cov}(W_s, W_t) = \min\{s, t\}, \quad s, t \geq 0$$

Ενώ στην γενική περίπτωση μ, σ :

$$\mathbb{E}[B_t] = \mu t, \quad \text{Cov}(B_s, B_t) = \sigma^2 \min\{s, t\}.$$



Κίνηση Brown ως Μαρκοβιανή διαδικασία

Μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου X_t λέγεται Μαρκοβιανή (Markov) αν, για κάθε t , η υπό συνθήκη $\{X_s: s \geq t\}$ δεδομένου ότι $\{X_r: r \leq t\}$.

Η κίνηση Brown είναι μαρκοβιανή. Πράγματι, έστω B_t κίνηση Brown με παραμέτρους (m, σ^2) και

$$Y_s := B_{t+s}, \quad 0 \leq s < \infty$$

Τότε η υπό συνθήκη κατανομή της διεργασίας $\{Y_s\}_{s \geq 0}$ ως προς \mathcal{F}_t είναι κίνηση Brown με αρχική συνθήκη $Y_0 = B_t$. Πράγματι, αν ορίσουμε

$$\widehat{B}_s := B_{t+s} - B_t, \quad s \geq 0.$$

Τότε \widehat{B} είναι κίνηση Brown με παραμέτρους (m, σ^2) , ανεξάρτητη του \mathcal{F}_t , και $Y_s = B_t + \widehat{B}_s$.

Άρα, δεδομένου του B_t , το $\{Y_s\}$ έχει τους νόμους της ίδιας κίνησης Brown που ξεκινά από την τιμή B_t , γεγονός που αποδεικνύει την ιδιότητα Markov.

Κίνηση Brown ως Γκαουσιανή διαδικασία

Μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t \geq 0}$ λέγεται Γκαουσιανή (Gaussian process) αν για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ η από κοινού κατανομή είναι πολυδιάστατη κανονική. Για Γκαουσιανές διαδικασίες οι πεπερασμένες κατανομές καθορίζονται πλήρως από τις μέσες τιμές και τις συνδιακυμάνσεις:

$$m_t = \mathbb{E}[X_t], \quad \Gamma_{st} = \text{Cov}(X_s, X_t).$$

Αν B_t είναι τυπική κίνηση Brown και $0 < t_1 < \dots < t_n$, τότε τα διανύσματα $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ γράφονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των ανεξαρτήτων τυποποιημένων κανονικών

$$Z_j := \frac{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}}{\sqrt{t_j - t_{j-1}}}, \quad j = 1, \dots, n,$$

με $t_0 := 0$. Επομένως, B είναι Γκαουσιανή διαδικασία με μηδενική μέση τιμή.

Αν $s < t$ υπολογίζουμε

$$\mathbb{E}[B_s B_t] = \mathbb{E}[B_s (B_s + B_t - B_s)] = \mathbb{E}[B_s^2] + \mathbb{E}[B_s (B_t - B_s)] = s + \mathbb{E}[B_s] \mathbb{E}[B_t - B_s] = s$$

επειδή η αύξηση $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη του \mathcal{F}_s και έχει μέσο 0.



Γενικά λοιπόν

$$\text{Cov}(B_s, B_t) = \min \{s, t\}.$$

Η περιγραφή της κίνησης Brown ως Γκαουσιανής διαδικασίας προσδιορίζει μόνο τις πεπερασμένες κατανομές. Άλλα χαρακτηριστικά δεν καθορίζονται αποκλειστικά από αυτές και απαιτούν πρόσθετη υπόθεση (όπως στο κλασικό ορισμό της κίνησης Brown).

Πολυδιάστατη κίνηση Brown

Στη χρηματοοικονομική συχνά μας ενδιαφέρει η ταυτόχρονη αποτίμηση πολλών περιουσιακών στοιχείων. Η πολυδιάστατη κίνηση Brown B_t είναι τυχαία διαδικασία με συνεχείς τροχιές σε χώρο d διαστάσεων. Μπορεί να ιδωθεί ως διάνυσμα από μονοδιάστατες κινήσεις Brown, ενδεχομένως με συσχετίσεις μεταξύ τους.

Θα γράφουμε

$$B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)^T.$$

Αν υιοθετήσουμε τις ίδιες υποθέσεις όπως στο μονοδιάστατο σχήμα (ανεξάρτητες, στάσιμες αυξήσεις και συνεχείς τροχιές), τότε οι αυξήσεις πρέπει να είναι πολυδιάστατα κανονικές.

Αυτό χρησιμοποιείται στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.3:

Η διαδικασία $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)^T$ λέγεται d -διάστατη κίνηση Brown που ξεκινά από το μηδέν με μετατόπιση (drift) $m = (m_1, \dots, m_d)^T \in \mathbb{R}^d$ και πίνακα συνδιακύμανσης $\Gamma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ως προς τη διήθηση (\mathcal{F}_t) , αν:

1. $B_0 = 0$.
2. Για κάθε $0 \leq s < t$,

$$B_t - B_s \sim \mathcal{N}_d((t-s)m, (t-s)\Gamma),$$

δηλαδή η αύξηση είναι πολυδιάστατα κανονική με μέσο $(t-s)m$ και συνδιακύμανση $(t-s)\Gamma$.

3. Για κάθε $0 \leq s < t$, η αύξηση $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη της \mathcal{F}_s (ιδιότητα ανεξαρτήτων αυξήσεων).
4. Με πιθανότητα 1, η απεικόνιση $t \mapsto B_t$ είναι συνεχής.



Από τα παραπάνω έπεται ότι κάθε συνιστώσα B_t^k είναι (μονοδιάστατη) κίνηση Brown με μετατόπιση m_k και διακύμανση Γ_{kk} ως προς \mathcal{F}_t .

Αν ειδικότερα $m = 0$ και $\Gamma = I_d$ (μοναδιαίος πίνακας), τότε οι συνιστώσες B^1, \dots, B^d είναι ανεξάρτητες τυπικές κινήσεις Brown, και το B ονομάζεται τυπική d -διάστατη κίνηση Brown.

Ορισμός 2.4: (Διαδικασία συνδιακύμανσης)

Έστω X_t, Y_t δύο διαδικασίες ορισμένες στο ίδιο πιθανό χωρίο. Η συνδιακύμανση των X και Y ως προς το πλέγμα $\{j/n\}_{j \in \mathbb{N}}$ ορίζεται από

$$\langle X, Y \rangle_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \leq tn} \left(X\left(\frac{j}{n}\right) - X\left(\frac{j-1}{n}\right) \right) \left(Y\left(\frac{j}{n}\right) - Y\left(\frac{j-1}{n}\right) \right),$$

όπου το άθροισμα τρέχει σε όλα τα j με $j/n \leq t$ και το όριο λαμβάνεται (συνήθως) στην πιθανότητα (ή ομοιόμορφα επί συμπαγών χρονικών διαστημάτων).

Αν $X = Y$, τότε η συνδιακύμανση ταυτίζεται με τη τετραγωνική διακύμανση:

$$\langle X, X \rangle_t = [X]_t.$$

Συνδιακύμανση συνιστωσών πολυδιάστατης κίνησης Brown

Έστω $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)^\top$ κίνηση Brown με μηδενική μετατόπιση και πίνακας συνδιακύμανσης Γ . Τότε, για $0 \leq s < t$ και κάθε $i, k \in \{1, \dots, d\}$,

$$\mathbb{E}[(B_t^i - B_s^i)(B_t^k - B_s^k)] = (t - s) \Gamma_{ik}.$$

Όπως και στην τετραγωνική διακύμανση, ο όρος μετατόπισης (drift) δεν συμβάλλει στη συνδιακύμανση.



Θεώρημα 2.1

Αν B_t είναι d -διάστατη κίνηση Brown με μετατόπιση m και πίνακα συνδιακύμανσης Γ , τότε

$$\langle B^i, B^k \rangle_t = \Gamma_{ik}t, \quad t \geq 0$$

Ειδικότερα, αν $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$ είναι τυπική d -διάστατη κίνηση Brown στο \mathbb{R}^d (δηλαδή $m = 0$ και $\Gamma = I_d$), τότε οι συνιστώσες είναι ανεξάρτητες και

$$\langle B^i, B^k \rangle_t = 0, \quad i \neq k, \quad \text{ενώ} \langle B^i, B^i \rangle_t = t.$$

2.3 Στοχαστική Ολοκλήρωση/Στοχαστικός Λογισμός

Πριν περάσουμε στον στοχαστικό λογισμό, είναι χρήσιμο να θυμηθούμε τις βασικές ιδέες του «συνηθισμένου» διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού. Η κεντρική ιδέα του λογισμού είναι ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε μια συνάρτηση γνωρίζοντας τον ρυθμό μεταβολής της.

Για παράδειγμα, έστω ότι $f(t)$ παριστά τη θέση ενός (μονοδιάστατου) σωματιδίου τη χρονική στιγμή t , και ότι είναι γνωστός ο ρυθμός μεταβολής της

$$df(t) = C(t, f(t)) dt,$$

ή, στην καθιερωμένη γραφή,

$$\frac{df}{dt} = f'(t) = C(t, f(t)).$$

Με άλλα λόγια, τη στιγμή t το γράφημα της f μετακινείται, για ένα απειροστό χρονικό διάστημα, κατά μήκος ευθείας με κλίση $C(t, f(t))$. Πρόκειται για διαφορική εξίσωση, όπου ο ρυθμός εξαρτάται τόσο από τον χρόνο όσο και από τη θέση.

Αν δοθεί αρχική συνθήκη $f(0) = x_0$, τότε (υπό κατάλληλες υποθέσεις για τη συνάρτηση ρυθμού C) η λύση ορίζεται και δίνεται από

$$f(t) = x_0 + \int_0^t C(s, f(s)) ds.$$

Όταν είμαστε τυχεροί, το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί ρητά και να βρούμε ακριβώς τη συνάρτηση. Διαφορετικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε υπολογιστικές μεθόδους για προσεγγιστική λύση.

Η απλούστερη —αλλά χρήσιμη— τεχνική είναι η μέθοδος Euler: διαλέγουμε ένα μικρό βήμα Δt και γράφουμε

$$f((k+1)\Delta t) = f(k\Delta t) + \Delta t C(k\Delta t, f(k\Delta t)).$$



Ο στοχαστικός λογισμός είναι ανάλογος, με τη διαφορά ότι προσθέτουμε τυχαιότητα στον ρυθμό μεταβολής. Θα δίνουμε νόημα σε εξισώσεις του τύπου

$$dX_t = m(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t,$$

όπου B_t είναι τυπική κίνηση Brown. Πρόκειται για στοχαστική διαφορική εξίσωση (SDE): την «διαβάζουμε» ως εξής—τη χρονική στιγμή t , η διεργασία X_t εξελίσσεται σαν κίνηση Brown με drift $m(t, X_t)$ και διακύμανση $\sigma(t, X_t)^2$.

Η ακριβής λύση τέτοιων εξισώσεων είναι πολύ δυσκολότερη από τις μη στοχαστικές περιπτώσεις και συχνά καταφεύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους. Μία βασική είναι η στοχαστική μέθοδος Euler, που επιτρέπει προσομοιώσεις Monte Carlo της διεργασίας. Ο κανόνας προσομοίωσης είναι:

$$X((k+1)\Delta t) = X(k\Delta t) + \Delta t m(k\Delta t, X(k\Delta t)) + \sqrt{\Delta t} \sigma(k\Delta t, X(k\Delta t)) N_k,$$

όπου $N_k \sim \mathcal{N}(0,1)$ ανεξάρτητα.

Στον κλασικό λογισμό ορίζουμε πρώτα την παράγωγο, μετά το ολοκλήρωμα, και συνδέουμε τα δύο. Στον στοχαστικό λογισμό η παράγωγος δεν ορίζεται με τον ίδιο τρόπο, άρα για να δώσουμε αυστηρή μαθηματική διατύπωση εστιάζουμε στον στοχαστικό ολοκληρωτικό. Θα λέμε ότι η διεργασία X_t είναι λύση της (3.1) εάν (για κατάλληλες συνθήκες μετρησιμότητας/ολοκληρωσιμότητας) ισχύει η ολοκληρωτική σχέση:

$$X_t = X_0 + \int_0^t m(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$$

Η πρώτη ολοκλήρωση είναι συνηθισμένο (Riemann/ Lebesgue) ολοκλήρωμα, ενώ η δεύτερη είναι στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô. Αυτή η μορφή είναι το θεμέλιο για την ανάλυση και τις προσομοιώσεις SDEs.

Ο όρος $\int_0^t m(s, X_s) ds$ είναι το συνηθισμένο (ντετερμινιστικό) ολοκλήρωμα του λογισμού· ο ολοκληρωτέος $m(s, X_s)$ είναι τυχαίος, αλλά αυτό δεν δημιουργεί πρόβλημα στον ορισμό του ολοκληρώματος.

Το ουσιαδές ζητούμενο είναι να δώσουμε ακριβές νόημα στον δεύτερο όρο και, γενικότερα, στο στοχαστικό ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int_0^t A_s dB_s.$$



Υπάρχουν διάφορες προσεγγίσεις στη στοχαστική ολοκλήρωση. Η προσέγγιση που θα ακολουθήσουμε —και η πλέον διαδεδομένη στα μαθηματικά των χρηματοοικονομικών— είναι αυτή του ολοκληρώματος Itô.

Στοχαστικό Ολοκλήρωμα :

Έστω B_t τυπική (μονοδιάστατη) κίνηση Brown ως προς μία διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Θέλουμε να ορίσουμε τη διεργασία

$$Z_t = \int_0^t A_s dB_s.$$

Διαισθητικά, το Z συμπεριφέρεται σαν «κίνηση Brown με τοπικό ρυθμό διασποράς A_s^2 »: πράγματι, αργότερα θα δούμε ότι η τετραγωνική διακύμανση του είναι $\langle Z \rangle_t = \int_0^t A_s^2 ds$.

Κατ' αναλογία με το διακριτό στοχαστικό ολοκλήρωμα, ερμηνεύουμε το A_s ως το ποσό θέσης/στοίχισης τη χρονική στιγμή s (αρνητικές τιμές αντιστοιχούν σε short). Όπως και στο διακριτό σχήμα, απαιτούμε οι στρατηγικές να μην «βλέπουν» το μέλλον: το A_s πρέπει να είναι μετρήσιμο ως προς \mathcal{F}_s .

Επειδή στον συνεχή χρόνο η τελευταία προϋπόθεση είναι λεπτή, ξεκινάμε από απλές περιπτώσεις και περνάμε σε γενικότερες με όρια:

- αρχικά ορίζουμε το ολοκλήρωμα για απλές προβλέψιμες διαδικασίες

$$A_s = \sum_k \xi_k \mathbf{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(s), \text{ με } \xi_k \mathcal{F}_{t_k} - \text{μετρήσιμες}$$

θέτοντας

$$\int_0^t A_s dB_s := \sum_k \xi_k (B_{t_{k+1} \wedge t} - B_{t_k \wedge t})$$

- στη συνέχεια επεκτείνουμε κατ' απόλυτη συνέχεια L^2 όριο σε γενικότερες τετραγωνικά ολοκληρώσιμες προβλέψιμες A .

Αυτή είναι η κατασκευή του ολοκληρώματος Itô, η οποία χρησιμοποιείται κατεξοχήν στα μαθηματικά των χρηματοοικονομικών.



Ο τύπος του Itô

Ο τύπος του Itô είναι το «θεμελιώδες θεώρημα» του στοχαστικού λογισμού. Πριν τον διατυπώσουμε, θυμίζουμε το θεμελιώδες θεώρημα του κλασικού λογισμού. Έστω ότι f είναι C^1 (δηλαδή έχει συνεχώς παραγωγίσιμη παράγωγο). Τότε, με ανάπτυξη Taylor γύρω από το t γράφουμε, για μικρό s ,

$$f(t + s) = f(t) + f'(t) s + o(s),$$

όπου $o(s)$ δηλώνει όρο με $o(s)/s \rightarrow 0$ όταν $s \rightarrow 0$.

Γράφουμε τώρα την $f(1)$ ως «τηλεσκοπικό» άθροισμα:

$$f(1) = f(0) + \sum_{j=1}^n \left[f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \right].$$

Με την προσέγγιση Taylor,

$$f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) = f'\left(\frac{j-1}{n}\right) \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Άρα,

$$f(1) = f(0) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f'\left(\frac{j-1}{n}\right) \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Το πρώτο όριο είναι το άθροισμα Riemann που ορίζει το ορισμένο ολοκλήρωμα, ενώ το δεύτερο μηδενίζεται επειδή $n o(1/n) \rightarrow 0$. Επομένως,

$$f(1) = f(0) + \int_0^1 f'(t) dt$$

Αυτή η επιχειρηματολογία με αθροίσματα Riemann θα αποτελέσει το πρότυπο και για τον στοχαστικό λογισμό, όπου θα αντικαταστήσουμε τις ντετερμινιστικές αυξήσεις με αυξήσεις κίνησης Brown και θα εμφανιστούν επιπλέον όροι «δεύτερης τάξης» που οδηγούν στον τύπο του Itô.



Θεώρημα 2.2 (Itô I)

Αν $f \in C^2(\mathbb{R})$ και B_t είναι τυπική κίνηση Brown, τότε για κάθε $t \geq 0$ ισχύει

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds$$

Συχνά γράφεται και στη «διαφορική» μορφή

$$df(B_t) = f'(B_t) dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t) dt$$

Δηλαδή, η διεργασία $Y_t := f(B_t)$ στο χρόνο t «συμπεριφέρεται» σαν κίνηση Brown με drift $\frac{1}{2} f''(B_t)$ και «τοπική διακύμανση» $(f'(B_t))^2$. Παρατηρούμε ότι το $f'(B_t)$ είναι συνεχές και προσαρμοσμένη διεργασία, οπότε το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int f'(B_s) dB_s$ είναι καλώς ορισμένο.

Επεκτείνουμε τον τύπο του Itô σε συναρτήσεις που εξαρτώνται και από τον χρόνο

Θεώρημα 2.3 (Itô II)

Έστω $f(t, x)$ συνάρτηση κλάσης C^1 ως προς t και C^2 ως προς x .

Αν B_t είναι τυπική κίνηση Brown, τότε για κάθε $t \geq 0$

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t \partial_x f(s, B_s) dB_s + \int_0^t [\partial_t f(s, B_s) + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(s, B_s)] ds.$$

Ισοδύναμα, στη διαφορική μορφή

$$df(t, B_t) = \partial_x f(t, B_t) dB_t + [\partial_t f(t, B_t) + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(t, B_t)] dt.$$



Παράδειγμα 11 :

Έστω $f(t, x) = e^{at+bx}$. Τότε

$$\partial_t f = af, \quad \partial_x f = bf, \quad \partial_{xx} f = b^2 f.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Itô στη διεργασία $X_t = f(t, B_t) = \exp(at + bB_t)$, παίρνουμε

$$dX_t = [\partial_t f + \frac{1}{2} \partial_{xx} f]_{(t, B_t)} dt + [\partial_x f]_{(t, B_t)} dB_t = (a + \frac{b^2}{2}) X_t dt + b X_t dB_t.$$

Ορισμός 2.5:

Μια διαδικασία X_t λέγεται γεωμετρική κίνηση Brown με drift m και μεταβλητότητα σ αν ικανοποιεί την SDE

$$dX_t = mX_t dt + \sigma X_t dB_t \quad \text{ή} \quad \frac{dX_t}{X_t} = m dt + \sigma dB_t \quad (3.14)$$

Εδώ B_t είναι τυπική κίνηση Brown. Πρόκειται για το κλασικό μοντέλο GBM, θεμέλιο του Black-Scholes.



2.4 Martingale

Θα εισάγουμε τώρα την έννοια των martingale με την βοήθεια των «δίκαιων» παιχνιδιών. Μπορούμε να θεωρήσουμε την «αξία» ενός δίκαιου παιχνιδιού όπως, για παράδειγμα, την περιουσία ενός παίκτη σε ένα παιχνίδι με ρίψεις κέρματος ως μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών δεικτοδοτημένη στον χρόνο. Δηλαδή, η αξία του παιχνιδιού κάποια χρονική στιγμή t παριστάνεται από μια τυχαία μεταβλητή X_t , η οποία μπορεί να μεταβληθεί στο επόμενο βήμα χρόνου $t + 1$.

Στην αρχή εξηγήσαμε ότι, για ένα «δίκαιο» παιχνίδι, η αναμενόμενη μελλοντική αξία του παιχνιδιού υπό την πληροφορία που διαθέτουμε μέχρι τη χρονική στιγμή t ισούται με την τρέχουσα αξία. Τυπικά, την πληροφορία μας μέχρι και τη στιγμή t την αναπαριστούμε με μια σ -άλγεβρα \mathcal{F}_t . Η οικογένεια $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ αυξάνει με τον χρόνο καθώς αποκαλύπτονται γεγονότα και πραγματοποιούνται αποτελέσματα.

Ορισμός 2.6

Εστω $\{X_n\}_{n \in \{1,2,3,\dots\}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών πάνω στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Εστω επίσης $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \{1,2,3,\dots\}}$ ακολουθία σ -άλγεβρων με $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$ για κάθε n . Την ακολουθία $\{(X_n, \mathcal{F}_n)\}_{n \geq 1}$ την ονομάζουμε Martingale αν ισχύουν:

- i. $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$.
- ii. X_n είναι \mathcal{F}_n -μετρήσιμη (δηλ. «γνωστή» με βάση την πληροφορία μέχρι τον χρόνο n).
- iii. $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$.
- iv. $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$ σχεδόν βέβαια.

• Η (i) λέει ότι η πληροφορία που διαθέτουμε σε κάθε βήμα περιλαμβάνει ό,τι ξέραμε πριν, συν τυχόν νέα γεγονότα («μάθηση χωρίς μνημη»). Η ακολουθία $\{\mathcal{F}_n\}$ λέγεται διύλιση (filtration).

• Συχνά, για κάποιο n , η σ -άλγεβρα \mathcal{F}_n είναι ακριβώς αυτή που παράγεται από τις τιμές (X_1, \dots, X_n) , ή από κάποια άλλη ακολουθία παρατηρήσεων (Y_1, \dots, Y_n) .

Τότε γράφουμε $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ ή $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ αντίστοιχα. Έτσι, αντί για $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ γράφουμε και $\mathbb{E}(X_{n+1} | X_1, \dots, X_n)$ (ή $\mathbb{E}(X_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n)$).



- Η (ii) είναι η «προσαρμοστικότητα» (*adaptedness*): κάθε X_n είναι μετρήσιμο ως προς την πληροφορία της στιγμής n . Στο σύνηθες πλαίσιο όπου \mathcal{F}_n παράγεται από τις παρελθούσες/παρούσες τιμές της διαδικασίας, αυτή η μετρησιμότητα έρχεται αυτόματα από τον ορισμό των σ -αλγεβρών.
- Η (iii) ζητά ολοκληρωσιμότητα: το $|X_n|$ (ισοδύναμα, το X_n) να έχει πεπερασμένη αναμενόμενη τιμή για κάθε n .
- Η (iv) είναι η καίρια «ιδιότητα martingale»: η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή της «επόμενης» τιμής, δεδομένης όλης της τρέχουσας πληροφορίας, ισούται με την τωρινή τιμή. Ισοδύναμα, αν $\Delta X_{n+1} := X_{n+1} - X_n$, τότε $\mathbb{E}(\Delta X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 0$: το αναμενόμενο «κέρδος» στο επόμενο βήμα, με βάση όσα γνωρίζουμε τώρα, είναι μηδέν (δίκαιο παιχνίδι).

Πρόταση 2.1

Εστω ότι $\{(X_n, \mathcal{F}_n)\}_{n \geq 1}$ είναι martingale. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[X_{n+k} | \mathcal{F}_n] = X_n \text{ σχεδόν βέβαια.}$$

Απόδειξη.

Από τον Ορισμό των Martingale ισχύει $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$ σχεδόν βέβαια. Επίσης, γνωρίζουμε ότι (χαρακτηρισμός υπό συνθήκη αναμενόμενης τιμής μέσω ολοκληρωμάτων), για κάθε $E \in \mathcal{F}_n$,

$$\int_E \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) d\mathbb{P} = \int_E X_n d\mathbb{P}.$$

Άρα,

$$\int_E X_{n+1} d\mathbb{P} = \int_E X_n d\mathbb{P}, \forall E \in \mathcal{F}_n.$$

Επειδή $E \in \mathcal{F}_n \Rightarrow E \in \mathcal{F}_{n+1}$ (διύλιση), επαναλαμβάνοντας το ίδιο επιχείρημα για

$\mathbb{E}(X_{n+2} | \mathcal{F}_{n+1}) = X_{n+1}$ παίρνουμε

$$\int_E X_{n+2} d\mathbb{P} = \int_E X_{n+1} d\mathbb{P} = \int_E X_n d\mathbb{P}, \forall E \in \mathcal{F}_n.$$



Κατ' επαγωγή προκύπτει

$$\int_E X_{n+k} d\mathbb{P} = \int_E X_n d\mathbb{P} \quad \forall E \in \mathcal{F}_n.$$

Εφαρμόζοντας ξανά τον χαρακτηρισμό της υπό συνθήκη αναμενόμενης τιμής, συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{E}(X_{n+k} | \mathcal{F}_n) = X_n \quad \text{σχεδόν βέβαια.}$$

Το αποτέλεσμα εκφράζει ότι, σε «δίκαιο» παιχνίδι, όσο μακριά κι αν κοιτάζουμε στο μέλλον, η τωρινή αναμενόμενη τιμή με βάση την πληροφορία \mathcal{F}_n παραμένει η τρέχουσα τιμή X_n .

Ορισμός 2.7 (Supermartingale/Submartingale).

Μια ακολουθία $\{(X_n, \mathcal{F}_n)\}_{n \geq 1}$ λέγεται *submartingale* αν ικανοποιεί τις (i)–(iii) του Ορισμού 5.1 και επιπλέον

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq X_n \quad \sigma. \beta$$

Λέγεται *supermartingale* αν

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq X_n \quad \sigma. \beta$$

Ερμηνεία.

- *Submartingale*: «ευνοϊκό» παιχνίδι· η υπό συνθήκη αναμενόμενη μελλοντική αξία είναι τουλάχιστον η τρέχουσα.
- *Supermartingale*: «δυσμενές» παιχνίδι· η υπό συνθήκη αναμενόμενη μελλοντική αξία δεν ξεπερνά την τρέχουσα.
- *Martingale*: οριακή περίπτωση ισότητας.



Παράδειγμα 12:

Στο αρχικό δίκαιο παιχνίδι με κέρμα, η περιουσία W_n του παίκτη είναι προσαρμοσμένη στη διύλιση που παράγεται από τις παρελθούσες ρίψεις και ικανοποιεί την ιδιότητα Martingale. Αν όμως το κέρμα είναι «στημένο» υπέρ κορώνας (π.χ. πιθανότητα $p > 1/2$ για κέρδος), τότε $\mathbb{E}(W_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq W_n$ και η $\{W_n\}$ είναι submartingale (παιχνίδι υπέρ του παίκτη). Αντίθετα, αν $p < 1/2$, η $\{W_n\}$ είναι supermartingale (παιχνίδι εις βάρος του παίκτη).

Θεώρημα 2.4 (Tower Property)

Έστω X ολοκληρώσιμη, \mathcal{F} -μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Έστω $\mathcal{F}_m, \mathcal{F}_n$ σ -άλγεβρες με $\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$.

Τότε

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_m) = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_m), \quad \text{σχεδόν βέβαια.}$$

2.5 Εκθετικά martingale

Έστω $\{W_t\}_{0 \leq t < \infty}$ τυπική κίνηση Brown υπό το μέτρο πιθανότητας \mathbb{P} και $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t < \infty}$ η φυσική της διύλιση. Υπενθυμίζουμε ότι, υπό \mathbb{P} και για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$, η διεργασία

$$Z_\theta(t) = \exp \left\{ \theta W_t - \frac{1}{2} \theta^2 t \right\}, t \geq 0,$$

είναι martingale ως προς (\mathcal{F}_t) . Τα εκθετικά αυτά martingale αποτελούν τους λόγους πιθανοφάνειας (likelihood ratios) που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή νέων μέτρων πιθανότητας \mathbb{P}_θ — βλ. Cameron–Martin / Girsanov.

Η Z_θ είναι ειδική περίπτωση μιας πολύ ευρύτερης κλάσης εκθετικών martingale. Συγκεκριμένα, έστω $\{\theta_s\}_{s \geq 0}$ μια προσαρμοσμένη, τοπικά \mathcal{H}^2 διαδικασία (δηλ. προβλέψιμη με $\int_0^t \theta_s^2 ds < \infty$ σ.β. για κάθε $t \geq 0$, ώστε τα ολοκληρώματα Itô $\int_0^t \theta_s dW_s$ να είναι καλώς ορισμένα).

Τότε ορίζουμε τη στοχαστική εκθετική (ή εκθετικό του Doléans–Dade)

$$Z(t) = \exp \left\{ \int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right\}, t \geq 0$$



η οποία, υπό κατάλληλες ήπιες συνθήκες (π.χ. Novikov ή Kazamaki), είναι martingale και χρησιμοποιείται ως πυρήνας για αλλαγές μέτρου τύπου Girsanov.

Θεώρημα Novikov

Εστω $\{\theta_s\}_{s \geq 0}$ προβλέψιμη διαδικασία ώστε για κάθε $t \geq 0$

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right\} \right] < \infty.$$

Θέτουμε

$$Z(t) = \exp \left\{ \int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right\}.$$

Τότε για κάθε $t \geq 0$ ισχύει

$$\mathbb{E}[Z(t)] = 1,$$

κι επιπλέον $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$ είναι θετικό martingale ως προς τη διήθηση (\mathcal{F}_t) .

Απόδειξη

Θέτουμε

$$f(x, t) = \exp \left\{ x - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right\}, \quad Y_t = \int_0^t \theta_s dW_s,$$

οπότε

$$Z(t) = f(Y_t, t).$$

Η διεργασία Y_t είναι Itô-διαδικασία (ως στοχαστικό ολοκλήρωμα), άρα εφαρμόζουμε τον τύπο του Itô στη $f(Y_t, t)$:

$$\begin{aligned} dZ(t) &= f_t(Y_t, t) dt + \frac{1}{2} f_{xx}(Y_t, t) d\langle Y \rangle_t + f_x(Y_t, t) dY_t \\ &= -\frac{1}{2} \theta_t^2 Z(t) dt + \frac{1}{2} (Z(t)) \theta_t^2 dt + Z(t) \theta_t dW_t \\ &= Z(t) \theta_t dW_t. \end{aligned}$$

$$\text{χρησιμοποιήσαμε ότι } d\langle Y \rangle_t = \theta_t^2 dt$$



Συνεπώς

$$dZ(t) = Z(t) \theta_t dW_t$$

Ολοκληρώνοντας (και με $Z(0) = 1$) παίρνουμε τη γνωστή στοχαστική διαφορική εξίσωση.

$$Z(t) = 1 + \int_0^t Z(s) \theta_s dW_s$$

Άρα Z είναι L^2 -martingale, εφόσον για κάθε $T < \infty$ η διαδικασία $Z(\cdot)1_{\{\cdot \leq T\}}$ ανήκει στην κλάση \mathcal{H}^2 (κάτι που ελέγχεται εύκολα π.χ. όταν θ είναι μη-τυχαία και συνεχής, αφού τότε το Y_t είναι κανονικό).

Το Θεώρημα Girsanov

Εστώ $\{\theta_t\}$ προσαρμοσμένη διαδικασία που ικανοποιεί τις υποθέσεις της πρότασης Novikov και έστω $Z(t)$ όπως ορίστηκε παραπάνω.

Για κάθε $T > 0$ ορίζουμε μέτρο \mathbb{Q} πάνω στο (Ω, \mathcal{F}) μέσω του λόγου πιθανοφάνειας

$$\mathbb{Q}(F) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z(T)1_F), \quad F \in \mathcal{F}_T$$

δηλαδή $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_T} = Z(T)$.

Θέτουμε

$$\tilde{W}(t) = W(t) - \int_0^t \theta_s ds.$$

Τότε, υπό το νέο μέτρο \mathbb{Q} , η διαδικασία \tilde{W} είναι τυπική κίνηση Brown ως προς τη διήθηση (\mathcal{F}_t) .

Με άλλα λόγια, η αλλαγή μέτρου με πυρήνα το εκθετικό martingale «αφαιρεί» το drift $\int_0^t \theta_s ds$ απλο το W , μετατρέποντας το \tilde{W} σε Brownian motion υπό \mathbb{Q} (Girsanov).



Θεώρημα Girsanov II

Υπό το μέτρο πιθανότητας \mathbb{Q} , η στοχαστική διεργασία $\{\tilde{W}(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ είναι τυπική κίνηση Wiener (standard Brownian motion).

Το αποτέλεσμα αυτό περιλαμβάνει ως ειδική περίπτωση το θεώρημα Cameron–Martin. Οι εφαρμογές του στη μαθηματική χρηματοοικονομική υπερβαίνουν κατά πολύ τους (σχετικά) απλούς υπολογισμούς, π.χ. για *barrier options*. Ενδεικτικά, χρησιμοποιείται τιμολογώντας επιλογές στην αγορά συναλλάγματος υπό πιο γενικά μοντέλα ισοτιμιών. Σε περαιτέρω ανάπτυξη, εφαρμόζεται σε πολυπαραγοντικά μοντέλα (*multi-factor*), συμπεριλαμβανομένων παραγώγων τύπου *quantos*.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: Προσέγγιση Εξόρυξης Martingale για Μοχλευμένα Αμοιβαία Κεφάλαια

3.1 Εισαγωγή στην προσέγγιση εξόρυξης Martingale για LETFs

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας, όπου \mathbb{P} είναι το υποκειμενικό μέτρο πιθανότητας. Θέτουμε $\mathbb{F} \equiv (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ η δύλιση που παράγεται από μια n -διάστατη τυπική κίνηση Brown \mathcal{B} . Εξετάζουμε έναν δείκτη αναφοράς (π.χ. τον S&P 500), του οποίου η διαδικασία τιμής X είναι μονοδιάστατη, θετική χρονικά ομογενής διάχυση Markov που ικανοποιεί:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu_t dt + \sigma_t \cdot dB_t, \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

Όπου η διεργασία ρυθμού μεταβολής (drift) μ_t και η διανυσματική μεταβλητότητα σ_t είναι και οι δύο \mathbb{F} -προσαρμοσμένες. Στο σημείο αυτό δεν επιβάλλουμε συγκεκριμένη παραμετρική στοχαστική μορφή ούτε για το drift ούτε για τη μεταβλητότητα, πολλά γνωστά μοντέλα, όπως το μοντέλο Heston, καθώς και άλλα στοχαστικά ή τοπικά μοντέλα μεταβλητότητας, υπάγονται στο παραπάνω πλαίσιο.

Επιπλέον, το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο περιγράφεται από τη διαδικασία $(r_t)_{t \geq 0}$, η οποία ανάλογα με το μοντέλο μπορεί να είναι είτε σταθερή είτε στοχαστική.



3.2 Μοχλευμένα Αμοιβαία Κεφάλαια (ETFs)

Ένα μοχλευμένο ETF (ETF) είναι χαρτοφυλάκιο σταθερής αναλογίας πάνω στο περιουσιακό στοιχείο αναφοράς X . Για ένα long -ETF με βάση το X , ο λόγος μόχλευσης είναι $\beta \geq 1$. Σε κάθε χρονική στιγμή t , ποσό μετρητών ίσο με βL_t (δηλαδή β φορές την τρέχουσα αξία του κεφαλαίου) τοποθετείται στο X , ενώ το ποσό $(\beta - 1)L_t$ δανείζεται στο άτοκο επιτόκιο r_t .

Αυστηρά μιλώντας, για $\beta \in [0,1)$ δεν υπάρχει μόχλευση:

επενδύεται μόνο μέρος της αξίας του αμοιβαίου σε επισφαλές στοιχείο και δεν γίνεται δανεισμός. Για ένα short-ETF με $\beta < 0$ λαμβάνεται short θέση ύψους βL_t στο X ενώ το ποσό $(1 - \beta)L_t$ παραμένει στον λογαριασμό χρηματαγοράς με απόδοση r_t .

Κατά συνέπεια, η τιμή του ETF ικανοποιεί:

$$\frac{dL_t}{L_t} = \beta \frac{dX_t}{X_t} - ((\beta - 1)r_t)dt = (\beta\mu_t - (\beta - 1)r_t)dt + \beta\sigma_t dB_t.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θέτουμε $L_0 = X_0 = 1$

Η τιμή του ETF στη χρονική στιγμή t γράφεται:

$$\begin{aligned} L_t &= X_t^\beta \exp \left\{ \int_0^t (-(\beta - 1)r_s - \frac{1}{2}\beta(\beta - 1)|\sigma_s|^2) ds \right\} \\ &= \exp \left\{ \int_0^t (\beta\mu_s - (\beta - 1)r_s - \frac{1}{2}\beta^2|\sigma_s|^2) ds + \beta \int_0^t \sigma_s dB_s \right\}, \quad (3.2) \end{aligned}$$

Όπου $|\cdot|$ είναι η ν -διάστατη νόρμα.

Η προτίμηση κινδύνου του επενδυτή μοντελοποιείται με τη συνάρτηση χρησιμότητας ισχύος

$$u(w) = w^a, \quad w > 0, \quad 0 < a \leq 1$$

Ο συντελεστής σχετικής αποστροφής κινδύνου είναι

$$\rho := -\frac{wu''(w)}{u'(w)} = 1 - a, \quad \forall w > 0$$

Η αναμενόμενη χρησιμότητα μέχρι τον χρόνο t είναι

$$\mathbb{E}^\mathbb{P}[L_t^a] = \mathbb{E}^\mathbb{P} \left[X_t^{\alpha\beta} \exp \left\{ \int_0^t \left(-a(\beta - 1)r_s - \frac{1}{2}\alpha\beta(\beta - 1)|\sigma_s|^2 \right) ds \right\} \right], \quad (3.3)$$

όπου η (3.3) προκύπτει απλώς υψώνοντας την παραπάνω έκφραση του L_t στην δύναμη a .



Χρησιμοποιώντας τη γνωστή αναπαράσταση

$$X_t = \exp \left\{ \int_0^t \left(\mu_s - \frac{1}{2} |\sigma_s|^2 \right) ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \right\},$$

Παίρνουμε

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [L_t^a] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\exp \left\{ \int_0^t \left(a\beta\mu_s - \alpha(\beta-1)r_s - \frac{1}{2} \alpha\beta^2 |\sigma_s|^2 \right) ds + \alpha\beta \int_0^t \sigma_s dB_s \right\} \right],$$

Θέτουμε τώρα τον στοχαστικό εκθετικό (Doléans–Dade)

$$H_t := \exp \left\{ \alpha\beta \int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2 \int_0^t |\sigma_s|^2 ds \right\}.$$

Τότε, υπό την τυπική συνθήκη Novikov ώστε το H_t να είναι \mathbb{P} – martingale με $\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [H_t] = 1$, έχουμε

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [L_t^a] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[H_t \exp \left\{ \int_0^t \left(a\beta\mu_s - \alpha(\beta-1)r_s - \frac{1}{2} \alpha\beta^2 |\sigma_s|^2 \right) ds + \alpha\beta \int_0^t \sigma_s dB_s \right\} \right], \quad (3.4)$$

Στο (3.4) θέσαμε τον στοχαστικό εκθετικό

$$H_t := \exp \left\{ \alpha\beta \int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2 \int_0^t |\sigma_s|^2 ds \right\}. \quad (3.5)$$

Ιδιαίτερα, όταν $\alpha=1$, ο βαθμός σχετικής αποστροφής κινδύνου $\rho = 1 - \alpha$ μηδενίζεται τότε η προσδοκία στην (3.3) ισούται με τη αναμενόμενη απόδοση από την διακράτηση του L στο διάστημα $[0, t]$.

Έστω ότι η τοπική martingale H_t της (3.5) είναι πράγματι martingale. Ορίζουμε τότε νέο μέτρο $\widehat{\mathbb{P}}$ μέσω του παράγωγου Radon-Nikodym

$$\frac{d\widehat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = H_t \quad (3.6)$$

Με το Θεώρημα Girsanov, η διεργασία

$$\widehat{B}_t := B_t - \alpha\beta \int_0^t \sigma_s ds, \quad t \geq 0, \quad (3.7)$$

είναι τυπική κίνηση Brown υπό $\widehat{\mathbb{P}}$. Αντικαθιστώντας την (3.7) στις (3.1) και (3.4) παίρνουμε

$$\frac{dX_t}{X_t} = (\mu_t + \alpha\beta|\sigma_t|^2 dt + \sigma_t d\widehat{B}_t,$$



Και

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^a] = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}} \left[\exp \left\{ \int_0^t \left(a\beta\mu_s - \alpha(\beta - 1)r_s - \frac{1}{2}\alpha(1 - \alpha)\beta^2|\sigma_s|^2 \right) ds \right\} \right]. \quad (3.8)$$

Για την ανάλυση της αναμενόμενης χρησιμότητας θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο εξόρυξης martingale (martingale extraction), η οποία παρουσιάζεται στη §3.3. Η μέθοδος αυτή επιτρέπει να εκφράσουμε την αναμενόμενη χρησιμότητα σε μορφή πιο κατάλληλη για θεωρητική μελέτη και υπολογισμό.

3.3 Εξόρυξη Martingale (Martingale extraction)

Εξετάζουμε τη μέθοδο εξόρυξης martingale για μια γενική πολυδιάστατη, χρονικά ομογενή διάχυση Markov G_t στο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ με όλισθηση $b(G_t)$ και μεταβλητότητα $\sigma(G_t)$. Η στοχαστική διαφορική εξίσωση γράφεται ως:

$$dG_t = b(G_t)dt + \sigma(G_t)dB_t$$

Όπου B_t είναι η d -διάστατη κίνηση Brown, $b: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ είναι διάνυσμα στήλη και $\sigma: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$

πίνακας. Υποθέτουμε ότι b και σ είναι διαφορίσιμα και η ΣΔΕ έχει ισχυρή λύση. Η d -διάστατη διεργασία G_t μπορεί να περιλαμβάνει πολλαπλές συνιστώσες του μοντέλου (π.χ. δείκτη αναφοράς, στοχαστική μεταβλητότητα, στοχαστικό επιτόκιο ή άλλους στοχαστικούς παράγοντες). Σταθεροποιούμε μια συνεχώς διαφορίσιμη (δύο φορές) πολυμεταβλητή συνάρτηση $k(\cdot)$ δηλώνουμε με \mathcal{L} τον απειροστικό γεννήτορα του G_t με ρυθμό θανάτου k , δηλαδή για επαρκώς ομαλές φ ,

$$\mathcal{L}\varphi(x) = b(x) \cdot \nabla\varphi(x) + \frac{1}{2} \text{tr}(a(x)\nabla^2\varphi(x)) - k(x)\varphi(x), \quad a(x) := \sigma(x)\sigma(x)^T.$$

Έστω ότι υπάρχει ιδιοζεύγος (λ, φ) με

$$\mathcal{L}\varphi = -\lambda\varphi \quad (3.9)$$

Όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\varphi > 0$ είναι συνεχής και δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη.



Τότε η διεργασία $M_t := e^{\lambda\tau - \int_0^t k(G_s) ds} \varphi(G_t) \varphi(G_0)^{-1}$ (3.10)

είναι τοπικό martingale.

Πράγματι, εφαρμόζοντας το λήμμα του Itô στο $e^{\lambda\tau - \int_0^t k(G_s) ds} \varphi(G_t)$ και χρησιμοποιώντας την ιδιοεξίσωση $\mathcal{L}\varphi = -\lambda\varphi$, το dt-μέρος του dM_t μηδενίζεται.

Για σχετική ανάπτυξη δείτε επίσης Hurd & Kuznetsov (2008).

Ορισμός 3.1

Έστω (λ, φ) ιδιοζεύγος του τελεστή- \mathcal{L} που ικανοποιεί την (3.9), με $\varphi > 0$ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Αν η διεργασία:

$$M_t := e^{\lambda\tau - \int_0^t k(G_s) ds} = M_t e^{-\lambda\tau} \varphi^{-1}(G_t) \varphi(G_0),$$

Είναι martingale, τότε λέμε ότι το ζεύγος (λ, φ) επιτρέπει την εξόρυξη martingale του παράγοντα $e^{-\int_0^t k(G_s) ds}$ και το ονομάζουμε αποδεκτό ιδιοζεύγος.

Από τον ορισμό του M_t προκύπτει η ταυτότητα

$$e^{-\int_0^t k(G_s) ds} = M_t e^{-\lambda\tau} \varphi^{-1}(G_t) \varphi(G_0),$$

την οποία ερμηνεύουμε ως «εξόρυξη» του martingale M_t από τον παράγοντα προεξόφλησης.

Με κάθε αποδεκτό ιδιοζεύγος (λ, φ) ορίζουμε μετασχηματισμένο μέτρο \mathbb{Q}^φ ως

$$\mathbb{Q}^\varphi(A) := \int_A M_t d\mathbb{P} = \mathbb{E}^\mathbb{P}[\mathbb{I}_A M_t], \text{ για } A \in \mathcal{F}_\tau \quad (3.11)$$

Για συντομία γράφουμε \mathbb{Q} αντί \mathbb{Q}^φ . Αλλάζοντας μέτρο από \mathbb{P} σε \mathbb{Q} παίρνουμε:

$$\mathbb{E}^\mathbb{P} \left[e^{-\int_0^t k(G_s) ds} f(G_t) \right] = e^{-\lambda\tau} \varphi(G_0) \mathbb{E}^\mathbb{Q}[(\varphi^{-1}f)G_t]. \quad (3.12)$$

Συχνά το δεξί μέλος είναι πολύ ευκολότερο για ανάλυση και υπολογισμό, διότι $\mathbb{E}^\mathbb{Q}[(\varphi^{-1}f)G_t]$

Εξαρτάται μόνο από την οριακή κατανομή του G_t , ενώ το $\mathbb{E}^\mathbb{P} \left[e^{-\int_0^t k(G_s) ds} f(G_t) \right]$ εξαρτάται από ολόκληρη τη διαδρομή $(G_s)_{0 \leq s \leq t}$.

Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στα LETFs, όπου εμφανίζεται έντονα εξάρτηση από τη διαδρομή.



Η δυναμική του G μεταβάλλεται και αυτή υπό το μέτρο \mathbb{Q} . Θέτουμε τον πυρήνα Girsanov

$$\varphi(x) := \sigma(x)^T \nabla \log \varphi(x) = \frac{\sigma(x)^T \nabla \varphi(x)}{\varphi(x)} \quad (3.13)$$

Τότε το martingale M_t ικανοποιεί

$$\frac{dM_t}{M_t} = \varphi(G_t) \cdot dB_t.$$

και από το θεώρημα Girsanov, η διεργασία

$$W_t := B_t - \int_0^t \varphi G(s) ds, \quad t \geq 0$$

Είναι τυπική κίνηση Brown υπό \mathbb{Q} . Συνεπώς, υπό \mathbb{Q} η G εξελίσσεται ως:

$$dG(t) = (b + \sigma \varphi)G(t)dt + \sigma G(t)dW_t = (b + \alpha \nabla \log \varphi)G(t)dt + \sigma G(t)dW_t, \quad (3.14)$$

Όπου $\alpha = \sigma \sigma^T$. Δηλαδή, η φ επηρεάζει μόνο το drift (και όχι τον διαχύνοντα όρο).

Εάν επιπλέον η πυκνότητα της G_t υπό \mathbb{Q} είναι διαθέσιμη κλειστά, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε/μελετήσουμε το $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(\varphi^{-1}f)(G_t)]$.

Σε πολλές περιπτώσεις επιλέγουμε (λ, φ) ώστε ο όρος $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(\varphi^{-1}f)(G_t)]$ να συγκλίνει όταν $t \rightarrow \infty$ σε μη μηδενική σταθερά. Από αυτό προκύπτει ο μακροχρόνιος ρυθμός ανάπτυξης της αναμενόμενης χρησιμότητας των LETFs.

Πρόταση 3.1.

Έστω (λ, φ) ένα αποδεκτό ιδιοζεύγος του \mathcal{L} και \mathbb{Q} το αντίστοιχο μετασχηματισμένο μέτρο. Αν $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(\varphi^{-1}f)(G_t)]$ συγκλίνει σε μη μηδενική σταθερά καθώς $t \rightarrow \infty$, τότε ισχύει:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[e^{-\int_0^t k G_s ds} f G(t) \right] = -\lambda$$



3.4 Μονοδιάστατες Διαδικασίες

Δείχνουμε πώς η τεχνική εξόρυξης martingale εφαρμόζεται για την ανάλυση του ρυθμού μεγέθυνσης της αναμενόμενης χρησιμότητας για LETFs. Σε αυτήν την ενότητα, το περιουσιακό στοιχείο αναφοράς X_t είναι μονοδιάστατη διάχυση Markov που ικανοποιεί:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = 1 \quad (3.15)$$

Όπου B είναι μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown υπό το υποκειμενικό μέτρο \mathbb{P} . Υποθέτουμε ότι οι μ και σ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες ώστε η (3.15) να έχει ισχυρή λύση. Σε όλη την ενότητα, το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο είναι σταθερό $r > 0$.

Σύμφωνα με την (3.3), η αναμενόμενη χρησιμότητα από τη διακράτηση του LETF είναι

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^a] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[X_t^{\alpha\beta} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha\beta(\beta - 1) \int_0^t \sigma^2(X(u)) du \right\} \right] e^{ra(1-b)t}.$$

Για να χρησιμοποιήσουμε την εξόρυξη martingale, ταυτίζουμε το X_t με το G_t της (3.2)

Ορίζουμε το απειροστό γεννήτορα \mathcal{L} του X_t με ρυθμό θανάτου(killing rate)

$$k(x) = \frac{1}{2} \alpha\beta(\beta - 1) \sigma^2(x).$$

Τότε για κατάλληλες φ ,

$$\mathcal{L}\varphi(x) = \frac{1}{2} x^2 \sigma^2(x) \varphi''(x) + \mu(x) x \varphi'(x) - \frac{1}{2} \alpha\beta(\beta - 1) \sigma^2(x) \varphi(x)$$

Κρίσιμο βήμα είναι να βρεθεί—όσο γίνεται ρητά—ένα ιδιοζεύγος (λ, φ) με $\varphi > 0$ που ικανοποιεί $\mathcal{L}\varphi = -\lambda\varphi$ είναι αξιοσημείωτο ότι ένα τέτοιο ζεύγος υπάρχει όταν $\beta(\beta - 1) \geq 0$ (Pinsky, 1995)

Η συνθήκη αυτή ισχύει για όλα τα LETFs, αφού τυπικά οι λόγοι μόχλευσης ικανοποιούν

$\beta \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$. Αν υπάρχει αποδεκτό ιδιοζεύγος (λ, φ) που επιτρέπει την εξόρυξη του

$\exp \left\{ \frac{1}{2} \alpha\beta(\beta - 1) \int_0^t \sigma^2(X_u) du \right\}$ τότε η αναμενόμενη χρησιμότητα γράφεται:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^a] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[X_t^{\alpha\beta} \varphi^{-1}(X(t)) \right] e^{(ra(1-\beta)-\lambda)t} \varphi(1), \quad (3.16)$$



όπου \mathbb{Q} είναι το αντίστοιχο μετασχηματισμένο μέτρο της §3.2. Σημειώνουμε ότι ο όρος $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t^{\alpha\beta} \varphi^{-1}X(t)]$ εξαρτάται μόνο από την οριακή κατανομή του X_t υπό \mathbb{Q} , γεγονός που απλοποιεί ουσιαστικά την ανάλυση του $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{L}_t^a]$.

Συνδυάζοντας το (3.16) με την Πρόταση 3.1, προκύπτει ο μακροχρόνιος ρυθμός μεγέθυνσης της αναμενόμενης χρησιμότητας στο μονοδιάστατο πλαίσιο. Συγκεκριμένα,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{L}_t^a] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t^{\alpha\beta} \varphi^{-1}X(t)] + ar(1 - \beta) - \lambda \quad (3.17)$$

Αν επιπλέον $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t^{\alpha\beta} \varphi^{-1}X(t)] \rightarrow c \neq 0$ όταν $t \rightarrow \infty$, ότε ο πρώτος όρος στο (3.17) μηδενίζεται και παίρνουμε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{L}_t^a] = ar(1 - \beta) - \lambda.$$

Ιδιαίτερα, θέτοντας $\alpha = 1$ (μηδενική αποστροφή κινδύνου) ανακτούμε τον μακροχρόνιο ρυθμό μεγέθυνσης της αναμενόμενης απόδοσης του LETF. Παρατηρούμε ξανά ότι η ιδιοτιμή λ παίζει καίριο ρόλο στον μακροχρόνιο ρυθμό, ενώ ο όρος $ar(1 - \beta)$ εξαρτάται ρητά από το επιτόκιο r , την παράμετρο αποστροφής κινδύνου α και τον λόγο μόχλευσης β . Σημαντικό είναι ότι η λ εξαρτάται από α , β και τις δυναμικές $\mu(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ όχι όμως από το r .

3.5 Το μοντέλο GBM

Ως άσκηση προθέρμανσης παρουσιάζουμε τον μακροχρόνιο ρυθμό μεγέθυνσης της αναμενόμενης χρησιμότητας στη γεωμετρική κίνηση Brown (GBM):

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dB_t, \quad t \geq 0$$

με $\sigma \neq 0$. Ο αντίστοιχος γεννήτορας (με <<ρυθμό θανάτου>> $k = \frac{1}{2}\alpha\beta(\beta - 1)\sigma^2$) είναι

$$\mathcal{L}\varphi(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \varphi''(x) + \mu x \varphi'(x) - \frac{1}{2}\alpha\beta(\beta - 1)\sigma^2 \varphi(x).$$

Για να εφαρμόσουμε την εξόρυξη martingale, βρίσκουμε το ιδιοζεύγος

$$(\lambda, \varphi(x)) = \left(-\alpha\beta\mu + \frac{1}{2}\alpha(1 - \alpha)\beta^2\sigma^2, x^{\alpha\beta} \right).$$



Από τον τύπο (3.2) προκύπτει αμέσως

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^a] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[1]e^{\{\alpha\beta\mu - \alpha(\beta-1)r - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\beta^2\sigma^2\}t} = e^{\{\alpha\beta\mu - \alpha(\beta-1)r - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\beta^2\sigma^2\}t}.$$

Άρα

Το δεξί μέλος αποτελείται από δύο μέρη: τον όρο $\alpha(1 - \beta)r$ και την αρνητική ιδιοτιμή $-\lambda$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^a] = \alpha(1 - \beta)r + \alpha\beta\mu - \frac{1}{2}\alpha(1 - \alpha)\beta^2\sigma^2. \quad (3.18)$$

Παρατηρούμε επίσης ότι ο μακροχρόνιος ρυθμός είναι τετραγωνική συνάρτηση του β .

Μεγιστοποιώντας το (3.18) ως προς $\beta \in \mathbb{R}$, βρίσκουμε τον βέλτιστο λόγο μόχλευσης

$$\beta^* = \frac{\mu - r}{(1 - \alpha)\sigma^2}.$$

Ο β^* είναι ανεξάρτητος του πλούτου, ανάλογος με τον δείκτη Sharpe $(\mu - r)/\sigma$ και αντιστρόφως ανάλογος με τον συντελεστή σχετικής αποστροφής κινδύνου $\rho = 1 - \alpha$. Ο επενδυτής επιλέγει $\beta^* > 0$ αν και μόνο αν $\mu > r$ (αντίστοιχα $\beta^* < 0$ όταν $\mu < r$). Το αποτέλεσμα ευθυγραμμίζεται με τη βέλτιστη στρατηγική στο κλασικό πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου του Merton.

3.6 Το μοντέλο GARCH

Στην ενότητα αυτή μελετούμε ένα θετικό μέσης επαναφοράς μοντέλο για τη διαδικασία τιμής αναφοράς X_t . Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι ικανοποιεί το μοντέλο συνεχούς χρόνου GARCH (βλ. Lewis (2000)):

$$dX_t = (\theta - \alpha X_t)d_t + \sigma dB_t, \quad \alpha, \theta, \sigma > 0 \quad (3.19)$$

Όπου B είναι μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown. Το μοντέλο Garch αποκαλείται και μη ομογενές γεωμετρική κίνηση Brown (inhomogeneous GBM). Ο αντίστοιχος γεννήτορας (με <<ρυθμό θανάτου>> $k(x) = \frac{1}{2}\alpha\beta((\beta - 1)\sigma^2)$ είναι

$$\mathcal{L}\varphi(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \varphi''(x) + (\theta - \alpha x)\varphi'(x) - \frac{1}{2}\alpha\beta(\beta - 1)\sigma^2 \varphi(x).$$

Για να εφαρμόσουμε την εξόρυξη martingale, λύνουμε το ιδιοπρόβλημα $\mathcal{L}\varphi - \lambda\varphi$ και λαμβάνουμε $(\lambda, \varphi(x)) = \left(\frac{1}{2}\alpha\beta(\beta - 1)\sigma^2, 1\right)$.



Εφόσον η ιδιοσυνάρτηση είναι σταθερά, το μετασχηματισμένο μέτρο \mathbb{Q} συμπίπτει με το \mathbb{P} (βλ. (3.13) – (3.14)). Από τον τύπο (3.16) προκύπτει

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^a] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t^{a\beta}] \exp \left\{ a(1 - \beta)r - \frac{1}{2} \alpha\beta(\beta - 1)\sigma^2 t \right\}. \quad (3.20)$$

Για την αποτίμηση του (3.20) δείχνουμε πρώτα ότι:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t^{a\beta}] = \text{θετική σταθερά, αν } -\alpha\beta + \frac{2\alpha}{\sigma^2} + 1 > 0 \\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t^{a\beta}] \rightarrow \infty & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (3.21)$$

Η απόδειξη ακολουθεί ως εξής:

Θέτουμε $Y_t := \frac{2\theta}{\sigma^2 X_t}$. Τότε Y_t συγκλίνει σε τυχαία μεταβλητή Gamma με παράμετρο $\gamma := \frac{2a}{\sigma^2} + 1$, δηλαδή η πυκνότητα του $p(y; t)$ συγκλίνει στην $p(y; \infty) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} y^{\gamma-1} e^{-y}$ ($t \rightarrow \infty$), βλ. Zhao (2009).

Με τη σημείωση $p \lesssim q$ αν υπάρχει $c > 0$ ώστε $p \leq cq$, τα ασυμπτωτικά των $p(y; t)$ κοντά στο 0 και στο ∞ εξασφαλίζουν τη χρήση κυρίαρχης σύγκλισης.

$$\text{Επιπλέον } \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t^{a\beta}] = \left(\frac{2\theta}{\sigma^2}\right)^{\alpha\beta} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Y_t^{-\alpha\beta}] = \left(\frac{2\theta}{\sigma^2}\right)^{\alpha\beta} \int_0^\infty y^{-\alpha\beta} p(y; t) dy,$$

$$\text{Οπότε } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t^{a\beta}] = \left(\frac{2\theta}{\sigma^2}\right)^{\alpha\beta} \frac{\Gamma(\gamma - \alpha\beta)}{\Gamma(\gamma)} \text{ εφόσον } \gamma - \alpha\beta > 0,$$

Ενώ αλλιώς το ολοκλήρωμα (άρα η ροπή) αποκλίνει στο ∞ . Αυτό αποδεικνύει το (3.21).

Επομένως από το (3.7) προκύπτει ότι, όταν $\gamma := \frac{2a}{\sigma^2} + 1 - \alpha\beta > 0$ η ροπή $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t^{a\beta}]$ συγκλίνει σε πεπερασμένη θετική σταθερά, ενώ διαφορετικά αποκλίνει στο ∞ .

Πρόταση 3.2.

Έστω L_t LETF με υποκείμενη διαδικασία τιμής X_t που ικανοποιεί το GARCH (3.19).

Τότε,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^a] = \begin{cases} ar(1 - \beta) - \frac{1}{2} \alpha\beta(\beta - 1)\sigma^2, & \text{αν } \frac{2a}{\sigma^2} + 1 > \alpha\beta, \\ \infty & \end{cases} \quad (3.22)$$



Το αποτέλεσμα αυτό οδηγεί σε δύο σενάρια. Αν $\frac{2\alpha}{\sigma^2} + 1 > \alpha\beta$ υπάρχει πεπερασμένος μακροχρόνιος ρυθμός μεγέθυνσης. Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός είναι γραμμικός ως προς α , φθίνων ως προς σ^2 και δεν εξαρτάται από τη θ . Αντίθετα, όταν $\frac{2\alpha}{\sigma^2} + 1 \leq \alpha\beta$, το όριο στο (3.22) είναι ∞ . Το δεύτερο σενάριο ισχύει και όταν $\alpha = 1$ οπότε η συνθήκη

$$\beta < \frac{2\alpha}{\sigma^2} + 1$$

αποδίδει ένα άνω φράγμα στον λόγο μόχλευσης για να υπάρχει πεπερασμένος μακροχρόνιος ρυθμός απόδοσης.

Με βάση την πρόταση (3.2), μεγιστοποιούμε ως προς β τη συνάρτηση

$$\Lambda(\beta) := \alpha r(1 - \beta) - \frac{1}{2} \alpha \beta (\beta - 1) \sigma^2,$$

Όστε να προσδιορίσουμε τον βέλτιστο λόγο μόχλευσης μακροχρόνιου επενδυτή. Απ' ευθείας παραγωγή δίνει:

$$\Lambda'(\beta) = -\alpha r - \alpha \sigma^2 \beta + \frac{1}{2} \alpha \sigma^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\beta^* = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}$$

Το αξιοπρόσεκτο εδώ, σε αντίθεση με το GBM, είναι ότι ο β^* δεν εξαρτάται από το α · άρα επενδυτές με διαφορετικούς βαθμούς αποστροφής κινδύνου (αλλά ίδιο r και σ) επιλέγουν τον ίδιο βέλτιστο λόγο μόχλευσης. Ο β^* εξαρτάται γραμμικά από το επιτόκιο r και αντιστρόφως από τη διακύμανση σ^2 . Σημειώστε επίσης ότι το μοντέλο GARCH τείνει στο GBM όταν $\alpha \downarrow 0$ ωστόσο, τόσο ο βέλτιστος ρυθμός όσο και ο β^* δεν συγκλίνουν αναγκαστικά στα αντίστοιχα του GBM, επειδή τα δύο υποδείγματα ενσωματώνουν διαφορετικό risk premium και παρουσιάζουν ποιοτικά διαφορετική στοχαστική δυναμική.



3.7 Το αντίστροφο μοντέλο GARCH

Ως εναλλακτική του μοντέλου GARCH, θεωρούμε τώρα ότι η τιμή αναφοράς X_t ακολουθεί το αντίστροφο Garch (γνωστό και ως Pearl–Verhulst logistic process: βλ. Tuckwell, 1974):

$$\frac{dX_t}{X_t} = (\theta - \alpha X_t)dt + \sigma dB_t, \quad \alpha, \theta, \sigma > 0 \quad (3.23)$$

Και τα δύο μοντέλα (GARCH και αντίστροφο GARCH) είναι θετικά και μέσης επαναφοράς. Θέτοντας $Y_t := X_t^{-1}$ και εφαρμόζοντας Itô βρίσκουμε

$$dY_t = (a - (\theta - \sigma^2)Y_t)dt - \sigma Y_t dB_t,$$

δηλαδή το Y_t υπακούει σε GARCH δυναμική.

Ο απειροστός γεννήτορας του X_t (με ρυθμό θανάτου $k(x) = \frac{1}{2}\alpha\beta(\beta - 1)\sigma^2$) είναι

$$\mathcal{L}\varphi(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \varphi''(x) + (\theta - \alpha x)x\varphi'(x) - \frac{1}{2}\alpha\beta(\beta - 1)\sigma^2 \varphi(x).$$

Με άμεση αντικατάσταση επαληθεύουμε ότι το ιδιοζεύγος

$$(\lambda, \varphi(x)) = \left(\frac{1}{2}\alpha\beta(\beta - 1)\sigma^2, 1\right)$$

Είναι αποδεκτό για την εξόρυξη martingale. Εφόσον $\varphi = 1$, το μετασχηματισμένο μέτρο \mathbb{Q} συμπίπτει με το \mathbb{P} (βλ. (3.13)–(3.14)). Από τον τύπο (3.16) παίρνουμε

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^a] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t^{a\beta}] \exp\left\{\left(a(1 - \beta)r - \frac{1}{2}a\beta(\beta - 1)\sigma^2\right)t\right\}$$

Επειδή $Y_t = 1/X_t$ ικανοποιεί Garch, το (3.21)

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t^{a\beta}] = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Y_t^{-a\beta}] = (\text{θετική σταθερά}), & \text{αν } \alpha\beta + \frac{2\theta}{\sigma^2} > 1, \\ \infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Αυτό οδηγεί στο ακόλουθο ασυμπτωτικό αποτέλεσμα.



Πρόταση 3.3

Έστω L_t LETF με υποκείμενη διαδικασία τιμής X_t που ικανοποιεί το αντίστροφο GARCH (3.23).

Τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [L_t^a] = \begin{cases} ar(1 - \beta) - \frac{1}{2} \alpha \beta (\beta - 1) \sigma^2, & \text{αν } \alpha \beta + \frac{2\theta}{\sigma^2} > 1, \\ \infty & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.24)$$

Άρα ο μακροχρόνιος ρυθμός μεγέθυνσης μπορεί να είναι πεπερασμένος ή άπειρος, ανάλογα με τον λόγο μόχλευσης β την παράμετρο αποστροφής κινδύνου α και τις παραμέτρους (θ, σ) , ενώ **δεν** εξαρτάται από το a . Σημειώνουμε ότι τα όρια στο (3.22) (για GARCH) και στο (3.24) (για αντίστροφο GARCH) είναι τα ίδια

Με απευθείας παραγωγή, ο βέλτιστος λόγος μόχλευσης για μακροχρόνιο επενδυτή προκύπτει από τη μεγιστοποίηση της

$$\Lambda(\beta) = ar(1 - \beta) - \frac{1}{2} \alpha \beta (\beta - 1) \sigma^2,$$

η οποία δίνει

$$\beta^* = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}.$$

Σε αντίθεση με το GBM, ο β^* εδώ δεν εξαρτάται από την α και άρα επενδυτές με διαφορετική αποστροφή κινδύνου καταλήγουν στον ίδιο βέλτιστο λόγο μόχλευσης (για δεδομένα r, σ). Παρότι, όταν $\alpha \downarrow 0$, το αντίστροφο GARCH εκφυλίζεται στο GBM με $\mu = \theta$, ο β^* και ο μακροχρόνιος ρυθμός που προβλέπει το υπόδειγμα δεν συγκλίνουν γενικά στα αντίστοιχα του GBM—το ίδιο φαινόμενο παρατηρήθηκε και στο GARCH—καθώς τα δύο μοντέλα παρουσιάζουν ουσιώδεις διαφορές στη δομή ρίσκου και σε άλλα ποιοτικά χαρακτηριστικά.



3.8 Το επεκτεταμένο μοντέλο CIR.

Θα στρέψουμε τώρα την προσοχή μας στο επεκτεταμένο υπόδειγμα Cox-Ingersoll-Ross γνωστό και ως (CIR) (βλ. Cox κ.ά., 1985):

$$dX_t = (\theta + \mu X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dB_t, \quad t \geq 0, \quad (3.25)$$

Με παραμέτρους $\mu, \sigma > 0$ και $\theta \geq \sigma^2$. Για $\mu > 0$ η διεργασία είναι παροδική και εκτρέπεται στο ∞ .

Ο αντίστοιχος απειροστός γεννήτορας (με <<ρυθμό θανάτου>> $k(x) = \frac{1}{2}\alpha\beta(\beta - 1)\frac{\sigma^2}{x}$) γράφεται

$$\mathcal{L}\varphi(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x\varphi''(x) + (\theta + \mu x)\varphi'(x) - \frac{1}{2}\alpha\beta(\beta - 1)\frac{\sigma^2}{x}\varphi(x).$$

Θέτουμε

$$\kappa := \left(\frac{1}{2} - \frac{\theta}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\theta}{\sigma^2}\right)^2 + \alpha\beta(\beta - 1)}$$

(η ρίζα είναι πραγματική επειδή $\beta \notin [0,1]$, όπως συμβαίνει στα LETFs).

Με ευθεία αντικατάσταση επαληθεύεται ότι το ζεύγος

$$(\lambda, \varphi(x)) = \left(\mu\kappa + \frac{2\mu\theta}{\sigma^2}, e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}x} x^\kappa\right)$$

είναι αποδεκτό ιδιοζεύγος της \mathcal{L} (βλ. (3.9)).

Υπό το μετασχηματισμένο μέτρο \mathbb{Q} που ορίζεται από το παραπάνω ιδιοζεύγος, η X_t ικανοποιεί (βλ. (3.14))

$$dX_t = (\theta + \kappa\sigma^2 - \mu X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t, \quad (3.26)$$

Όπου W είναι \mathbb{Q} – Brown. Πρόκειται για κλασικό mean-reverting CIR, όταν ισχύει ο όρος Feller, το 0 είναι απρόσιτο όριο.

Με χρήση της (3.2), η αναμενόμενη χρησιμότητα γράφεται

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^a] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X_t^{\alpha\beta - \kappa} e^{\frac{2\mu}{\sigma^2}X_t}\right] \exp\left\{\left(\alpha r(1 - \beta) - \mu\kappa - \frac{2\mu\theta}{\sigma^2}\right)t\right\} \varphi(1) \quad (3.27)$$

Όπου $\varphi(1) = e^{-2\mu/\sigma^2}$ είναι σταθερός παράγοντας (αδιάφορος για ασυμπτωτική ανάλυση).

Για το δεξί μέλος της (3.27) προκύπτει το long term όριο



$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[X_t^{\alpha\beta - \kappa} e^{\frac{2\mu}{\sigma^2} X_t} \right] = \begin{cases} \mu \left(\alpha\beta + \frac{2\theta}{\sigma^2} + \kappa \right), & \text{αν } \alpha\beta + \frac{2\theta}{\sigma^2} + \kappa > 0 \\ +\infty, & \text{αν } \alpha\beta + \frac{2\theta}{\sigma^2} + \kappa \leq 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε αμέσως για τον προσδιορισμό του μακροχρόνιου ρυθμού μεγέθυνσης της $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^a]$.

Συνδυάζοντας τα (3.27)–(3.28) προκύπτει ο μακροχρόνιος ρυθμός μεγέθυνσης της αναμενόμενης χρησιμότητας.

Αξιολογούμε το όριο που διατυπώνεται στη σχέση (3.28) υπό το εκτεταμένο υπόδειγμα CIR.

Υπενθυμίζουμε ότι, υπό το μετασχηματισμένο μέτρο \mathbb{Q} , η δυναμική της διεργασίας X_t δίνεται από τη σχέση (3.27):

$$dX_t = (l - \mu X_t)dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t,$$

Όπου $l := \theta + \kappa \sigma^2$.

Πρόταση 3.4

Για κάθε $p \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[X_t^p e^{\frac{2\mu}{\sigma^2} X_t} \right] = \begin{cases} \left(p + \frac{2l}{\sigma^2} \right) \mu, & \text{αν } p + \frac{2l}{\sigma^2} > 0 \\ +\infty, & \text{αν } p + \frac{2l}{\sigma^2} \leq 0 \end{cases}$$

Έστω $p(x)$ και $q(x)$ δύο θετικές συναρτήσεις της μεταβλητής x .

Γράφουμε

$$p(x) \sim q(x) \text{ καθώς } x \rightarrow x_0,$$

εάν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)}$$

και είναι ίσο με μία μη μηδενική πεπερασμένη σταθερά.

Επιπλέον, γράφουμε

$$p \leq q,$$

εάν υπάρχει θετική σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$p(x) \leq c q(x)$$

για κάθε x στο πεδίο ορισμού τους.



Απόδειξη

Η πυκνότητα πιθανότητας $g(x; t)$ της διεργασίας X_t , για σταθερό χρόνο t , είναι γνωστό ότι δίνεται από

$$g(x; t) = h_t e^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{q/2} I_q(2\sqrt{uv}), \quad (\text{A.1})$$

όπου I_q είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης q , και

$$h_t = \frac{2\mu}{\sigma^2(1 - e^{-\mu t})}, \quad q = \frac{2\ell}{\sigma^2} - 1, \quad u = h_t e^{-\mu t}, \quad v = h_t X_0.$$

Με ελαφρά αναδιάταξη των όρων, προκύπτει η ισοδύναμη μορφή

$$g(x; t) = k_t h_t e^{-h_t x} x^{q/2} I_q(2h_t e^{-\mu t/2} \sqrt{x}),$$

όπου

$$k_t = e^{-h_t e^{-\mu t}} e^{\mu q t/2}.$$

Μας ενδιαφέρει ο ασυμπτωτικός ρυθμός της ποσότητας

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \int_0^\infty x^p e^{\frac{2\mu}{\sigma^2} x} g(x; t) dx.$$

Με άμεση εκτίμηση, λαμβάνουμε τις ανισότητες

$$\int_0^\infty x^{p+q} e^{-p_t x} dx \leq \int_0^\infty x^p e^{\frac{2\mu}{\sigma^2} x} g(x; t) dx \leq \int_0^\infty x^{p+q} e^{-p_t x} e^{2h_t e^{-\mu t/2} \sqrt{x}} dx, \quad (\text{A.2})$$

όπου

$$p_t = h_t - \frac{2\mu}{\sigma^2}.$$

Οι παραπάνω εκτιμήσεις προκύπτουν από τις γνωστές ασυμπτωτικές ανισότητες της συνάρτησης Bessel,

$$z^q \leq I_q(z) \leq z^q e^z.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι, εάν

$$p + q + 1 > 0,$$

τότε τα ολοκληρώματα στο αριστερό και δεξιό μέλος της σχέσης (A.2) ικανοποιούν

$$(\text{αριστερό και δεξιό μέλος της (A.2)}) \sim e^{(p+q+1)at}.$$



Εξετάζουμε το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της σχέσης (A.2):

$$\int_0^{\infty} x^{p+q} e^{-p_t x} e^{2h_t e^{-\mu t/2} \sqrt{x}} dx.$$

Θέτοντας τη μεταβλητή

$$y = p_t x,$$

παίρνουμε

$$\int_0^{\infty} x^{p+q} e^{-p_t x} e^{2h_t e^{-\mu t/2} \sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} y^{p+q} e^{-y} e^{2h_t e^{-\mu t/2} p_t^{-1/2} \sqrt{y}} dy$$

Καθώς $t \rightarrow \infty$, η ποσότητα

$$h_t e^{-\mu t/2} p_t^{-1/2}$$

συγκλίνει σε μία θετική σταθερά. Συνεπώς, το ολοκληρωτικό μέλος συγκλίνει σε μία θετική πεπερασμένη σταθερά.

Με άμεσο υπολογισμό, προκύπτει ότι

$$p_t^{-p-q-1} \sim e^{(p+q+1)\mu t}.$$

Άρα,

$$(\text{δεξιό μέλος της (A.2)}) \sim e^{(p+q+1)\mu t}.$$

Η απόδειξη για το αριστερό μέλος της σχέσης (A.2) είναι ανάλογη, υπό την προϋπόθεση ότι

$$p + q + 1 > 0.$$

Αντιθέτως, εάν

$$p + q + 1 \leq 0,$$

τότε το αριστερό μέλος της (A.2) αποκλίνει στο άπειρο.

Πρόταση 3.5

Έστω ότι η υποκείμενη διαδικασία τιμής X_t ικανοποιεί το εκτεταμένο CIR (3.25). Τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [L_t^a] = \begin{cases} ar + \alpha\beta(\mu - r), & \text{αν } \alpha\beta + \frac{2\theta}{\sigma^2} + \kappa > 0 \\ \infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



Το αποτέλεσμα έχει αρκετές συνέπειες. Πρώτον, ο μακροχρόνιος ρυθμός είναι αφινικός ως προς τον λόγο μόχλευσης β και το excess return $\mu - r$ και γραμμικός ως προς την a . Δεν εξαρτάται ρητά από τις παραμέτρους θ, σ , πέρα από τη συνθήκη που διαχωρίζει τα δύο σενάρια παραπάνω. Στο σενάριο όπου $a\beta + \frac{2\theta}{\sigma^2} + \kappa > 0$ γράφουμε το όριο ως συνάρτηση του β :

$$\Lambda(\beta) := ar + \alpha\beta(\mu - r).$$

Για $\beta = 0$ παίρνουμε $\Lambda(0) = ar$ το «μοχλευμένο» ETF στην ουσία αυξάνεται ντετερμινιστικά με ρυθμό r και η χρησιμότητα στο χρόνο t είναι e^{art} .

Δεύτερον, η $\Lambda(\beta)$ αποκαλύπτει την βέλτιστη επιλογή μόχλευσης για έναν στατικό επενδυτή. Σε ανοδική αγορά με $\mu > r$ προτιμάται υψηλότερη θετική μόχλευση (στην πράξη οι διαθέσιμοι λόγοι μόχλευσης φράσσονται συνήθως στο +3). Αντίθετα, σε πτωτική αγορά με $\mu < r$ είναι προτιμότερη πιο αρνητική μόχλευση (ο κατώτατος συνήθως διαθέσιμος λόγος στα LETFs είναι -3)

3.9 Το μοντέλο 3/2.

Εξετάζουμε τώρα το μοντέλο 3/2 για την τιμή αναφοράς του X_t :

$$\frac{dX_t}{X_t} = (\theta - \alpha X_t)dt + \sigma X_t^{\frac{1}{2}}dB_t \Leftrightarrow dX_t = (\theta - \alpha X_t)X_t dt + \sigma X_t^{\frac{3}{2}}dB_t \quad (3.29)$$

Με $\alpha, \theta, \sigma > 0$. Το μοντέλο είναι θετικό και μέσης επαναφοράς, και χρησιμοποιείται ευρέως για επιτόκια και μεταβλητότητα (Ahn and Gao (1999), Carr and Sun (2007)). Άρα είναι κατάλληλο για LETFs σταθερού εισοδήματος και μεταβλητότητας με μέση επαναφερόμενη τιμή αναφοράς.

Ο αντίστοιχος γεννήτορας (με «ρυθμό θανάτου» $\kappa(x) = \frac{1}{2}\alpha\beta(\beta - 1)\sigma^2 x$) είναι:

$$\mathcal{L}\varphi(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^3 \varphi''(x) + (\theta - \alpha x)\varphi'(x) - \frac{1}{2}\alpha\beta(\beta - 1)\sigma^2 x\varphi(x).$$

Θέτοντας $\kappa(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\sigma^2}\right)^2 + \alpha\beta(\beta - 1)} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\sigma^2}\right)$ προκύπτει (με άμεση αντικατάσταση) ότι το ζεύγος $(\lambda, \varphi(x)) = (\theta\kappa, x^{-\kappa})$ είναι αποδεκτό ιδιοζεύγος της \mathcal{L} (απο (3.9)).

Υπό το μετασχηματισμένο μέτρο \mathbb{Q} που αντιστοιχεί στο παραπάνω ιδιοζεύγος, η X_t ικανοποιεί

$$dX_t = (\theta - (\alpha + \sigma^2\kappa)X_t)X_t dt + \sigma X_t^{3/2}dW_t,$$

Όπου $dW_t = dB_t + \sigma\kappa X_t^{1/2}dt$ είναι \mathbb{Q} - Brown. Παρατηρούμε ότι υπό \mathbb{Q} το X_t είναι ξανά μοντέλο 3/2 με αναπαραμετροποίηση.



Με χρήση του (3.2), η αναμενόμενη χρησιμότητα γράφεται:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^a] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t^{a\beta+k}] \exp\{(ar(1-\beta) - \theta\kappa)t\}.$$

Δείχνουμε ότι

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t^{a\beta+k}] = \text{θετική σταθερά, αν } \frac{2\alpha}{\sigma^2} + \kappa - \alpha\beta + 2 > 0 \\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t^{a\beta+k}] \rightarrow \infty, \text{ διαφορετικά.} \end{cases}$$

Απόδειξη ως εξής:

Θέτουμε $Y_t := 1/X_t$. Τότε, χρησιμοποιώντας Itô και την παραπάνω δυναμική υπό \mathbb{Q}

$$dY_t = a(\sigma^2(\kappa + 1) - \theta Y_t)dt - \sigma\sqrt{Y_t}dW_t,$$

οπότε το Y_t είναι διαδικασία τύπου CIR. Εξετάζοντας την πυκνότητα της CIR καταλήγουμε στα παραπάνω κριτήρια σύγκλισης για τη ροπή $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t^{a\beta+k}]$, και κατά συνέπεια θα προκύψει στην επόμενη πρόταση ο μακροχρόνιος ρυθμός μεγέθυνσης.

Πρόταση 3.6

Έστω L_t ένα β -LETF του οποίου το υποκείμενο X_t ικανοποιεί το μοντέλο 3/2 (3.9.1). Τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^a] = \begin{cases} ar(1-\beta) - \theta\kappa, & \text{αν } \frac{2\alpha}{\sigma^2} - \alpha\beta + 2 > 0 \\ \infty & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\text{Όπου } \kappa(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\sigma^2}\right)^2 + \alpha\beta(\beta-1)} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\sigma^2}\right)$$

Γενικά, το πρόσημο του $\frac{2\alpha}{\sigma^2} + \kappa - \alpha\beta + 2$ εξαρτάται από τις παραμέτρους του μοντέλου (θ, α, σ) τον βαθμό αποστροφής κινδύνου α και τον λόγο μόχλευσης β . Παρόλα αυτά, για τιμές αγοράς $|\beta| \leq 3$ η συνθήκη $\frac{2\alpha}{\sigma^2} + \kappa - \alpha\beta + 2 > 0$ ικανοποιείται.

Στα σενάρια όπου $\frac{2\alpha}{\sigma^2} + \kappa - \alpha\beta + 2 > 0$, θέτουμε:

$$\Lambda(\beta) := ar(1-\beta) - \theta\kappa.$$



Βέλτιστος λόγος μόχλευσης

Παραγωγίζοντας,

$$\Lambda'(\beta) = -\alpha r - \theta \kappa'(\beta) = -\alpha r - \frac{\theta \alpha (2\beta - 1)}{2 \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\sigma^2}\right)^2 + \alpha \beta (\beta - 1)}}$$

- Αν $\alpha \geq \frac{\theta^2}{r^2}$ η εξίσωση $\Lambda'(\beta) = 0$ δεν έχει λύση και $\Lambda'(\beta) < 0$ για κάθε β . Άρα η Λ είναι φθίνουσα ως προς β και, πρακτικά, η στρατηγική $\beta^* = -3$ είναι βέλτιστη (κατώτατο διαθέσιμο όριο).
- Αν $\alpha < \frac{\theta^2}{r^2}$ λύνοντας την $\Lambda'(\beta) = 0$ βρίσκουμε ότι το μέγιστο της Λ επιτυγχάνεται στο

$$\beta^* = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{2\alpha}{\sigma^2}\right)^2 - \alpha}{\frac{\theta^2}{r^2} - \alpha}}$$

Ο αριθμός μέσα στη ρίζα είναι θετικός, διότι $\alpha \leq 1 < \left(1 + \frac{2\alpha}{\sigma^2}\right)^2$

Επιπλέον $\beta^* = 0$ αν και μόνον αν

$$1 + \frac{2\alpha}{\sigma^2} = \frac{\theta}{r}.$$

(Σε αυτή την περίπτωση το βέλτιστο είναι «χωρίς μόχλευση».)



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο:

Προσέγγιση Εξόρυξης Martingale για Μοχλευμένα Αμοιβαία Κεφάλαια- Μοντέλα Στοχαστικής Μεταβλητότητας με Στοχαστική Τιμή Αναφοράς και Στοχαστικό Επιτόκιο

4.1 Μοντέλα στοχαστικής μεταβλητότητας.

Σε αυτή την ενότητα αναλύουμε τη μέθοδο εξόρυξης martingale για LETFs όταν η μεταβλητότητα είναι στοχαστική.

Έστω B_t τυπική κίνηση Brown υπό \mathbb{P} . Η τιμή της X_t ικανοποιεί την ΣΔΕ

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma(Y_t) \cdot dB_t,$$

Όπου μ είναι σταθερά, $\sigma(\cdot) \in \mathbb{R}^d$ είναι διανυσματική συνάρτηση και Y_t μια Markov διάχυση που «οδηγεί» τη στοχαστική μεταβλητότητα. Σε όλη την ενότητα το επιτόκιο είναι σταθερό $r > 0$

Όπως στην προηγούμενη ενότητα, ορίζουμε νέο μέτρο $\hat{\mathbb{P}}$ μέσω

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left\{ \alpha\beta \int_0^t \sigma(Y_s) dB_s - \frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2 \int_0^t |\sigma(Y_s)|^2 ds \right\}.$$

Τότε η διεργασία $\hat{B}_t := B_t - \alpha\beta \int_0^t \sigma(Y_s) dB_s$ είναι τυπική κίνηση Brown υπό $\hat{\mathbb{P}}$.

Από την (3.8) προκύπτει

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}} [L_t^\alpha] = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}} \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha(1-\alpha)\beta^2 \int_0^t u_s ds \right\} \right] e^{\{\alpha r + \alpha\beta(\mu-r)\}t}$$

Κατ' εφαρμογή της (3.12), με τον οδηγό μεταβλητότητας Y_t να παίζει εδώ τον ρόλο του G_t

της §3.2, η ιδέα είναι να «εξορύξουμε» martingale από τον παραγοντικό όρο

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha(1-\alpha)\beta^2 \int_0^t |\sigma(Y_s)|^2 ds \right\}$$

ώστε να υπολογίσουμε ρητά την αναμενόμενη χρησιμότητα.



4.2 Το μοντέλο Heston.

Παρουσιάζουμε παράδειγμα όπου η τιμή αναφοράς ακολουθεί το υπόδειγμα Heston (βλ. Heston, 1993):

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + \sqrt{u_t} X_t dB_t, \\ du_t &= (\theta - \alpha u_t) dt + \delta \sqrt{u_t} dZ_t, \quad t \geq 0 \quad (4.1) \end{aligned}$$

Όπου B_t και Z_t είναι συσχετισμένες κινήσεις Brown με $\langle B, Z \rangle_t = \rho t$ και $\rho \in [-1, 1]$.

Υποθέτουμε $\mu, \theta, \alpha, \delta > 0$ και $2\theta > \delta^2$. Σε όλη την ενότητα $r > 0$.

Ορίζουμε το $\widehat{\mathbb{P}}$ μέτρο όπως στις (3.6)–(3.7), δηλαδή

$$\frac{d\widehat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left\{ \alpha\beta \int_0^t \sqrt{u_s} dB_s - \frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2 \int_0^t u_s ds \right\}.$$

οπότε η διεργασία:

$$\widehat{B}_t := B_t - \alpha\beta \int_0^t \sqrt{u_s} ds.$$

Είναι $\widehat{\mathbb{P}}$ –κίνηση Brown. Από την (3.8) η αναμενόμενη χρησιμότητα γράφεται

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [L_t^a] = \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}} \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} a(1-a)\beta^2 \int_0^t u_s ds \right\} \right] e^{\{ar + a\beta(\mu-r)\}t}$$

Η στοχαστική μεταβλητότητα v_t είναι (υπό \mathbb{P}) επαναπαραμετροποιημένη CIR:

$$du_t = \theta - (\alpha - \alpha\beta\delta\rho)u_t dt + \delta\sqrt{u_t} d\widehat{Z}_t,$$

Όπου $\widehat{Z}_t := -\rho\alpha\beta \int_0^t \sqrt{u_s} ds$ είναι μέτρο $\widehat{\mathbb{P}}$ -Brown (Η συσχέτιση $\langle \widehat{B}, \widehat{Z} \rangle_t = \rho t$ διατηρείται.)

Με αυτόν τον μετασχηματισμό, στην επόμενη ανάλυση θα εφαρμόσουμε την εξόρυξη martingale στον όρο $\exp \left\{ -\frac{1}{2} a(1-a)\beta^2 \int_0^t u_s ds \right\}$ για τον ρητό υπολογισμό της $\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [L_t^a]$

Θα εφαρμόσουμε τώρα την εξόρυξη martingale στον παράγοντα $\exp \left\{ -\frac{1}{2} a(1-a)\beta^2 \int_0^t u_s ds \right\}$.



Θεωρούμε τη διεργασία στοχαστικής μεταβλητότητας u_t να παίζει τον ρόλο του G_t της §3.2. Ο απειροστικός γεννήτορας \mathcal{L} του u_t με «ρυθμό θανάτου» $\frac{1}{2}a(1-a)\beta^2v$ είναι

$$\mathcal{L}\phi(v) = \frac{1}{2} \delta^2 v \phi''(v) + (\theta - (a - \alpha\beta\delta\rho)v)\phi'(v) - \frac{1}{2} \alpha(1-\alpha)\beta^2 v \phi(v).$$

Με ευθεία αντικατάσταση βρίσκουμε αποδεκτό ιδιοζεύγος

$$(\lambda, \varphi(v)) = (\theta\kappa, e^{-\kappa v}), \quad \kappa := \frac{1}{\delta^2} \left(\sqrt{(a - \alpha\beta\delta\rho)^2 + \alpha(1-\alpha)\beta^2\delta^2} - a + \alpha\beta\delta\rho \right).$$

Έστω \mathbb{Q} το μετασχηματισμένο μέτρο που αντιστοιχεί στο ζεύγος (λ, ϕ) . Τότε u_t ικανοποιεί (υπό \mathbb{Q}) επαναπαραμετροποιημένο CIR:

$$du_t = (\theta - \sqrt{(a - \alpha\beta\delta\rho)^2 + \alpha(1-\alpha)\beta^2\delta^2} u_t)dt + \delta\sqrt{u_t} dW_t,$$

όπου W_t είναι \mathbb{Q} -κίνηση Brown.

Κατά συνέπεια, η αναμενόμενη χρησιμότητα γράφεται

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^\alpha] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{\kappa u_t}] \exp\{(ar + \alpha\beta(\mu - r) - \theta\kappa)t\}$$

Σημείωση: $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{\kappa u_t}]$ συγκλίνει σε μη μηδενική σταθερά όταν $t \rightarrow \infty$.

Πρόταση 4.1.

Έστω L_t ένα β -LETF του οποίου η τιμή αναφοράς X_t ακολουθεί το μοντέλο Heston (4.1). Τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^\alpha] = ar + \alpha\beta(\mu - r) - \theta\kappa, \quad (4.2)$$

όπου

$$\kappa = \frac{1}{\delta^2} \left(\sqrt{(a - \alpha\beta\delta\rho)^2 + \alpha(1-\alpha)\beta^2\delta^2} - a + \alpha\beta\delta\rho \right).$$

Για να μελετήσουμε την εξάρτηση από β , ορίζουμε

$$\Lambda(\beta) := \frac{\alpha\delta^2}{\theta} (\mu - r)\beta - \sqrt{(a - \alpha\beta\delta\rho)^2 + \alpha(1-\alpha)\beta^2\delta^2} + \alpha\beta\delta\rho. \quad (4.3)$$



Θέτουμε

$$C_1 := \alpha(1 - \alpha)\delta^2 + \alpha^2\delta^2\rho^2, \quad C_2 := -\alpha a \delta \rho, \quad C_3 := a^2, \quad D := \frac{\alpha\delta^2}{\theta}(\mu - r) - \alpha\delta\rho.$$

Τότε

$$\Lambda(\beta) = D\beta - \sqrt{C_1\beta^2 + 2C_2\beta + C_3}.$$

Παράγωγοι:

$$\Lambda'(\beta) = D - \frac{C_1\beta + C_2}{\sqrt{C_1\beta^2 + 2C_2\beta + C_3}}, \quad \Lambda''(\beta) = \frac{C_2^2 - C_1C_3}{(C_1\beta^2 + 2C_2\beta + C_3)^{3/2}}.$$

Επειδή $C_2^2 - C_1C_3 = -a^2\alpha(1 - \alpha)\delta^2 < 0$, η Λ είναι αυστηρά κοίλη ως προς β .

Βέλτιστος λόγος μόχλευσης β^*

- Περίπτωση (i): $C_1 > D^2$. Η εξίσωση $\Lambda'(\beta) = 0$ έχει μία μοναδική λύση, οπότε

$$\beta^* = -\frac{C_2}{C_1} \pm \frac{|D|}{C_1} \sqrt{\frac{C_1C_3 - C_2^2}{C_1 - D^2}}.$$

(Η επιλογή του προσήμου δίνεται από το ότι το μέγιστο της κοίλης Λ είναι μοναδικό.)

- Περίπτωση (ii): $C_1 \leq D^2$. Η $\Lambda'(\beta) = 0$ δεν έχει λύση.
 - Αν $D > 0$, τότε $\Lambda'(\beta) > 0$ για όλα τα β και η Λ είναι αύξουσα· πρακτικά το βέλτιστο είναι το μέγιστο διαθέσιμο β , δηλαδή $\beta^* = 3$.
 - Αν $D < 0$, τότε Λ είναι φθίνουσα· το βέλτιστο είναι $\beta^* = -3$.

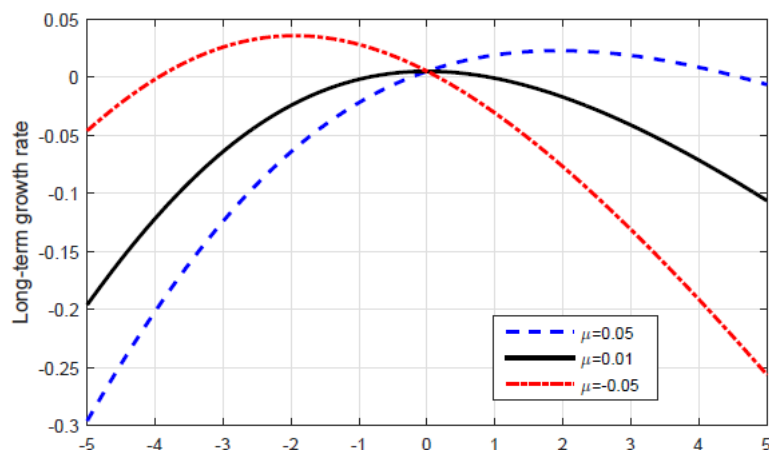
Η συνθήκη $D > 0$ είναι συμβατή με «ανοδική» αγορά (τυπικά $\mu > r$), οπότε η υψηλότερη θετική μόχλευση είναι προτιμητέα· αντίθετα, όταν $D < 0$ (πτωτική αγορά) προτιμάται αρνητική μόχλευση.



Το Σχήμα 1 απεικονίζει το μακροχρόνιο ρυθμό ανάπτυξης της Πρότασης 4.1 ως συνάρτηση του συντελεστή μόχλευσης β . Οι παράμετροι είναι :

$$a = 0.5, \quad r = 0.01, \quad \theta = 0.16, \quad \delta = 0.89, \quad \alpha = 3.1, \quad \rho = -0.5$$

μαζί με $\mu \in \{0.05, 0.01, -0.05\}$. Όπως μπορούμε να δούμε, όταν η υπερβάλλουσα απόδοση ($\mu - r$) είναι θετική, τότε ο βέλτιστος λόγος μόχλευσης είναι θετικός ($\beta^* = 1.93$ όταν $\mu - r = 0.04$). Αντίθετα, όταν η τιμή αναφοράς X_t κινείται καθοδικά ($\mu = -0.05$), τότε είναι βέλτιστο για τον επενδυτή να επιλέξει ένα short LETF, δηλαδή $\beta = -1.95$.



Σχήμα 1 (Tim Leung * Hyungbin Park †)

Μακροχρόνιος ρυθμός ανάπτυξης χρησιμότητας ως συνάρτηση του συντελεστή μόχλευσης β υπό το μοντέλο Heston. Για τρεις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου ολίσθησης (drift) $\mu \in \{0.05, 0.01, -0.05\}$.

οι βέλτιστες τιμές μόχλευσης β^* που μεγιστοποιούν τους ρυθμούς ανάπτυξης είναι αντίστοιχα οι $\{1.93, 0, -1.95\}$



4.3 Το μοντέλο μεταβλητότητας 3/2

Στο υπόδειγμα μεταβλητότητας 3/2 των Carr–Sun (2007), η τιμή αναφοράς X_t ικανοποιεί

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sqrt{u_t} dB_t, \quad (4.4)$$

$$du_t = (\theta - \alpha u_t) u_t dt + \delta u_t^{3/2} dZ_t, \quad t \geq 0$$

όπου B_t και Z_t είναι τυπικές κινήσεις Brown με στιγμιαία συσχέτιση $\langle B, Z \rangle_t = \rho t$, $\rho \in [-1, 1]$.

Σ' όλη την ενότητα το επιτόκιο είναι σταθερό $r > 0$

Όπως προηγουμένως, ορίζουμε το μέτρο $\hat{\mathbb{P}}$ έτσι ώστε η διεργασία

$$\hat{B}_t := B_t - \alpha \beta \int_0^t \sqrt{u_s} ds$$

να είναι $\hat{\mathbb{P}}$ -κίνηση Brown. Τότε, η αναμενόμενη χρησιμότητα γράφεται

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^a] = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[\exp \{ -\frac{1}{2} \alpha(1 - \alpha)\beta^2 \int_0^t u_s ds \}] e^{\{ar + \alpha\beta(\mu - r)\}t}$$

Υπό το $\hat{\mathbb{P}}$ η στοχαστική μεταβλητότητα u_t ακολουθεί εκ νέου (επαναπαραμετροποιημένο) υπόδειγμα 3/2:

$$du_t = (\theta - (a - \alpha\beta\delta\rho) u_t) u_t dt + \delta u_t^{3/2} d\hat{Z}_t,$$

όπου \hat{Z}_t είναι $\hat{\mathbb{P}}$ -κίνηση Brown με $\langle \hat{B}, \hat{Z} \rangle_t = \rho t$.

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο εξόρυξης martingale βλέποντας τη διεργασία μεταβλητότητας u_t ως τη διεργασία G_t . Με «ρυθμό θανάτου» $\frac{1}{2} a(1 - a)\beta^2 u$, ο απειροστικός γεννήτορας της διάχυσης u_t είναι

$$\mathcal{L}\varphi(u) = \frac{1}{2} \delta^2 u^3 \varphi'' + (\theta - (a - \alpha\beta\delta\rho)u) \varphi'(u) - \frac{1}{2} \alpha(1 - \alpha)\beta^2 u \varphi(u).$$

Με ευθεία επαλήθευση προκύπτει αποδεκτό ιδιοζεύγος

$$(\lambda, \varphi(u)) = (\theta\kappa, u^{-\kappa}), \quad \kappa := \frac{1}{\delta^2} \left(\sqrt{\left(a - \alpha\beta\delta\rho + \frac{\delta^2}{2} \right)^2 + \alpha(1 - \alpha)\beta^2 \delta^2} - a + \alpha\beta\delta\rho + \frac{\delta^2}{2} \right).$$



Έστω \mathbb{Q} το μετασχηματισμένο μέτρο ως προς το (λ, ϕ) .

Τότε η v_t ικανοποιεί (υπό \mathbb{Q}) επαναπαραμετροποιημένο υπόδειγμα 3/2:

$$dv_t = \left(\theta - \left(\sqrt{(a - \alpha\beta\delta\rho + \frac{\delta^2}{2})^2 + \alpha(1 - \alpha)\beta^2\delta^2} - \frac{\delta^2}{2} \right) v_t \right) v_t dt + \delta v_t^{3/2} dW_t,$$

όπου W_t είναι \mathbb{Q} -κίνηση Brown.

Κατά συνέπεια, η αναμενόμενη χρησιμότητα γράφεται

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^\alpha] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[v_t^\kappa] e^{(\alpha r + \alpha\beta(\mu - r) - \theta\kappa)t} v_0^{-\kappa}$$

Δείχνουμε ότι $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[v_t^\kappa] \rightarrow$ θετική σταθερά καθώς $t \rightarrow \infty$, εξετάζοντας τη διαδικασία $Y_t := 1/v_t$,

η οποία είναι CIR υπό \mathbb{Q} . Η οριακή της κατανομή είναι Gamma με τυπό

$$\gamma = \frac{1}{\delta^2} \left(\sqrt{(a - \alpha\beta\delta\rho + \frac{\delta^2}{2})^2 + \alpha(1 - \alpha)\beta^2\delta^2} + a - \alpha\beta\delta\rho + \frac{\delta^2}{2} \right) + 1,$$

οπότε η ροπή $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[v] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y_t^{-\kappa}]$ είναι πεπερασμένη και συγκλίνει, άρα ο παραπάνω τύπος παρέχει τον μακροχρόνιο ρυθμό μεγέθυνσης που θα συνοψιστεί στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.2.

Έστω L_t ένα β -LETF με υποκείμενη διεργασία X_t που ικανοποιεί το υπόδειγμα 3/2(4.4). Τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^\alpha] = \alpha r + \alpha\beta(\mu - r) - \theta\kappa, \quad (4.5)$$

όπου

$$\kappa = \frac{1}{\delta^2} \left(\sqrt{(a - \alpha\beta\delta\rho + \frac{\delta^2}{2})^2 + \alpha(1 - \alpha)\beta^2\delta^2} - a + \alpha\beta\delta\rho + \frac{\delta^2}{2} \right).$$

(Η περατότητα του ορίου προκύπτει επειδή η ροπή $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[v_t^\kappa]$ συγκλίνει). Αν αποτύχει η αντίστοιχη προϋπόθεση, τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^\alpha] = \infty$.)



Για τη μελέτη της εξάρτησης από το β ορίζουμε, με βάση το (4.5),

$$\Lambda(\beta) := \left(\frac{(\mu - r)\delta}{\theta} - \rho \right) \alpha \delta \beta - \sqrt{\left(a - \alpha \beta \delta \rho + \frac{\delta^2}{2} \right)^2 + \alpha(1 - \alpha)\beta^2 \delta^2}.$$

Θέτουμε ακόμη τις σταθερές

$$C_1 = \alpha(1 - \alpha)\delta^2 + \alpha^2 \delta^2 \rho^2, \quad C_2 = -\alpha \delta \rho \left(a + \frac{\delta^2}{2} \right), \quad C_3 = \left(a + \frac{\delta^2}{2} \right)^2,$$

$$D = \left(\frac{\mu - r}{\theta} \delta - \rho \right) \alpha \delta,$$

οπότε η $\Lambda(\beta)$ γράφεται κομψά ως

$$\Lambda(\beta) = D \beta - \sqrt{C_1 \beta^2 + 2C_2 \beta + C_3}.$$

Όπως και στο Heston (§4.1), η Λ είναι *αυστηρά κοίλη* ως προς β

$$(\text{επειδή } C_2^2 - C_1 C_3 = -\alpha(1 - \alpha)\delta^2 \left(a + \frac{\delta^2}{2} \right)^2 < 0).$$

Άρα ο βέλτιστος συντελεστής μόχλευσης για έναν στατικό επενδυτή είναι:

- Αν $C_1 > D^2$: η εξίσωση $\Lambda'(\beta) = 0$ έχει μοναδική λύση και

$$\beta^* = -\frac{C_2}{C_1} \pm \frac{|D|}{C_1} \sqrt{\frac{C_1 C_3 - C_2^2}{C_1 - D^2}}$$

(Το πρόσημο επιλέγεται ώστε να δίνει το μοναδικό μέγιστο της κοίλης Λ .)

- Αν $C_1 \leq D^2$: δεν υπάρχει εσωτερικό μέγιστο.
 - Αν $D > 0$, η Λ είναι αύξουσα σε όλο το πεδίο: βέλτιστο β το μέγιστο διαθέσιμο (συνήθως $\beta^* = 3$).
 - Αν $D < 0$, η Λ είναι φθίνουσα: βέλτιστο β το ελάχιστο διαθέσιμο (συνήθως $\beta^* = -3$).

Διαισθητικά, $D > 0$ αντιστοιχεί σε «ανοδικό» περιβάλλον (υψηλό $\mu - r$ ή/και ευνοϊκή ρ), οπότε προτιμάται ισχυρότερη θετική μόχλευση· ενώ $D < 0$ σε «πτωτικό» περιβάλλον, όπου προτιμάται αρνητική μόχλευση.



4.4 LETFs με Στοχαστική Τιμή Αναφοράς και Στοχαστικό Επιτόκιο

Τώρα θα μελετήσουμε τον μακροχρόνιο ρυθμό ανάπτυξης της αναμενόμενης χρησιμότητας από τη διακράτηση ενός LETF όταν τόσο η τιμή αναφοράς X_t όσο και το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο r_t είναι στοχαστικά.

4.4.1 Επιτόκιο Vasicek

Ξεκινάμε με το υπόδειγμα επιτοκίου του Vasicek (1977). Η τιμή αναφοράς X_t και το επιτόκιο r_t ικανοποιούν τις ΣΔΕ

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dB_t, \quad (4.6)$$

$$dr_t = (\theta - a r_t) dt + \delta dZ_t, \quad (4.7)$$

για $\mu, \sigma, \theta, a, \delta > 0$, όπου B_t και Z_t είναι κινήσεις Brown με συσχέτιση $\langle B, Z \rangle_t = \rho t$, $\rho \in [-1, 1]$.

Σε όλη την ενότητα θα ισχύει $r > 0$.

Ορίζουμε το μέτρο $\hat{\mathbb{P}}$ όπως πριν. Τότε η διεργασία

$$\hat{B}_t := -\alpha\beta\sigma t + B_t$$

είναι $\hat{\mathbb{P}}$ -κίνηση Brown. Από την (3.8) προκύπτει

Υπό το $\hat{\mathbb{P}}$, το επιτόκιο r_t ικανοποιεί

$$dr_t = (\theta + \alpha\beta\delta\rho\sigma - a r_t) dt + \delta d\hat{Z}_t,$$

όπου $\hat{Z}_t := Z_t - \rho\alpha\beta\sigma t$ είναι $\hat{\mathbb{P}}$ -κίνηση Brown.

Από την (3.8) προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^\alpha] = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[\exp\left\{-\alpha(\beta-1)\int_0^t r_s ds\right\}\right] e^{\{a\beta\mu - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\beta^2\sigma^2\}t}.$$

Υπό το $\hat{\mathbb{P}}$, το επιτόκιο r_t ικανοποιεί

$$dr_t = (\theta + \alpha\beta\delta\rho\sigma - a r_t) dt + \delta d\hat{Z}_t,$$

όπου $\hat{Z}_t := Z_t - \rho\alpha\beta\sigma t$ είναι $\hat{\mathbb{P}}$ -κίνηση Brown.



Εφαρμόζουμε τη μέθοδο εξόρυξης martingale παίρνοντας τη διεργασία r_t ως τον G_t της §3.2. Με «ρυθμό θανάτου» $k(r) = \alpha(\beta - 1)r$, ο απειροστικός γεννήτορας του r_t (υπό $\hat{\mathbb{P}}$) είναι

$$\mathcal{L}\phi(r) = \frac{1}{2} \delta^2 \phi''(r) + (\theta + \alpha\beta\delta\rho\sigma - ar)\phi'(r) - \alpha(\beta - 1)r\phi(r).$$

Με δοκιμή $\phi(r) = e^{\xi r}$ και επιλογή $\xi = -\frac{\alpha(\beta-1)}{a}$ (ώστε να μηδενιστεί ο όρος σε r), λαμβάνουμε αποδεκτό ιδιοζεύγος

$$(\lambda, \varphi(r)) = \left(\frac{\alpha(1-b)}{2a^2} [-a\delta^2(1-\beta) + 2\alpha(\theta + \alpha\beta\delta\rho\sigma)], e^{-\frac{\alpha(\beta-1)}{a}r} \right).$$

Αν \mathbb{Q} είναι το μετασχηματισμένο μέτρο που αντιστοιχεί στο παραπάνω ιδιοζεύγος (βλ. (3.11) – (3.14)), τότε το r_t ικανοποιεί ξανά εξίσωση τύπου OU(Ornstein-Uhlenbeck):

$$dr_t = \left(\theta + \alpha\beta\delta\rho\sigma + \frac{\alpha\delta^2(1-\beta)}{a} - ar_t \right) dt + \delta dW_t,$$

όπου W_t είναι \mathbb{Q} -κίνηση Brown.

Κατά συνέπεια, από (3.12) και την αναπαράσταση της §4.4,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [L_t^\alpha] &= \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}} \left[e^{-\alpha(\beta-1) \int_0^t r_s ds} \right] e^{\{\alpha\beta\mu - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\beta^2\sigma^2\}t} \\ &= e^{-\lambda t} e^{-\kappa r_0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{\kappa r_t}] e^{\{\alpha\beta\mu - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\beta^2\sigma^2\}t}, \end{aligned}$$

όπου $\kappa := \frac{\alpha(\beta-1)}{a}$.

Επειδή υπό \mathbb{Q} το r_t είναι OU, η ροπή $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{\kappa r_t}]$ συγκλίνει σε θετική σταθερά (όριο $t \rightarrow \infty$). Συνοψίζοντας, αυτό οδηγεί στην αντίστοιχη πρόταση για τον μακροχρόνιο ρυθμό.

Πρόταση 4.3.

Εστω ότι η τιμή αναφοράς X_t και το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο r_t ικανοποιούν τις (4.6)–(4.7).

Τότε:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [L_t^\alpha] = \alpha\beta\mu - \frac{1}{2} \alpha(1-\alpha)\beta^2\sigma^2 + \frac{\alpha^2\delta^2}{2a^2} (1-\beta)^2 - \frac{\alpha(1-\beta)}{a} (\theta + \alpha\beta\delta\rho\sigma) \quad (4.8)$$



Για να βρούμε τον βέλτιστο λόγο μόχλευσης β^* ενός στατικού επενδυτή, εξετάζουμε την εξάρτηση από β .

Ορίζουμε

$$\Lambda(\beta) := C_1\beta^2 + C_2\beta,$$

όπου

$$C_1 = -\frac{1}{2} \alpha(1-\alpha)\sigma^2 + \frac{\alpha^2\delta^2}{2a^2} + \frac{\alpha^2\delta\rho\sigma}{a}, \quad C_2 = \alpha\mu + \frac{\alpha\theta}{\alpha} - \frac{\alpha^2\delta^2}{\alpha^2} - \frac{\alpha^2\delta\rho\sigma}{\alpha}$$

Παρατηρούμε ότι η $\Lambda(\beta)$ είναι τετραγωνική συνάρτηση του β .

- Αν $C_1 < 0$ (κοίλη), το μέγιστο είναι εσωτερικό και

$$\beta^* = -\frac{C_2}{2C_1}.$$

- Αν $C_1 = 0$, η $\Lambda(\beta) = C_2\beta$ είναι γραμμική: επιλέγουμε πιο θετική (αντίστοιχα πιο αρνητική) μόχλευση όταν $C_2 > 0$ (αντίστοιχα $C_2 < 0$).
- Αν $C_1 > 0$ (κυρτή), δεν υπάρχει εσωτερικό μέγιστο: προτιμάται το ακραίο διαθέσιμο β (μεγαλύτερο αν $C_2 > 0$, μικρότερο αν $C_2 < 0$).

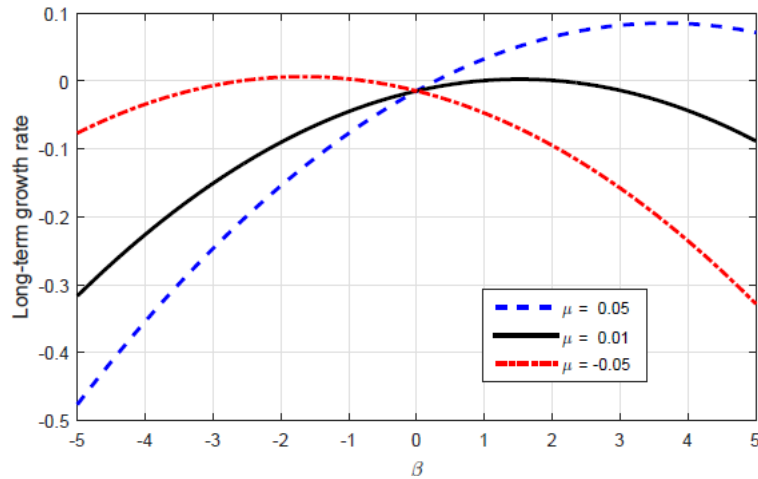
Στο Σχήμα 2 παρουσιάζουμε τον ρυθμό μακροπρόθεσμης ανάπτυξης ως συνάρτηση του β για διάφορες τιμές του μ . Οι παράμετροι είναι:

$$\alpha = 0.8, \quad r = 0.01, \quad \theta = 0.16, \quad \delta = 0.89, \quad \alpha = 3, \quad \sigma = 0.3, \quad \rho = -0.5$$

Βλέπουμε ότι ένας θετικός (αντίστοιχα αρνητικός) λόγος μόχλευσης β^* είναι βέλτιστος σε ανοδική(bull) (αντίστοιχα καθοδική(bear)) αγορά με $\mu = 0.05$ (αντίστοιχα $\mu = -0.05$)

Ένα θετικά μοχλευμένο ETF με $\beta^* = 1.52$ είναι προτιμότερο ακόμη και όταν το βασικό περιουσιακό στοιχείο δεν προσφέρει υπερβάλλουσα απόδοση (δηλ. $\mu - r = 0$)

Αυτό παρουσιάζει μια ενδιαφέρουσα αντίθεση με το μοντέλο Heston που φαίνεται στο Σχήμα 1 και με το μοντέλο GBM, όπου ο βέλτιστος λόγος μόχλευσης είναι $\beta^* = 0$ όταν $\mu = r$



Σχήμα 2 (Tim Leung * Hyungbin Park †)

4.4.2 Επιτόκιο τύπου Inverse-Garch

Ως εναλλακτικό υπόδειγμα για το στοχαστικό βραχυπρόθεσμο επιτόκιο θεωρούμε τη διάχυση inverse-GARCH (βλ. §3.7). Υποθέτουμε ότι η τιμή αναφοράς X_t και το επιτόκιο r_t ικανοποιούν τις ΣΔΕ

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dB_t, \quad dr_t = (\theta - ar_t) r_t dt + \delta r_t dZ_t, \quad (4.9)$$

όπου B_t και Z_t είναι κινήσεις Brown με συσχέτιση $\langle B, Z \rangle_t = \rho t$, $\rho \in [-1, 1]$. Θεωρούμε $\mu, a, \delta > 0$ και $\theta > \delta^2$.

Ακολουθώντας τη διαδικασία της §3, ορίζουμε το μέτρο $\hat{\mathbb{P}}$ ώστε

$$\hat{B}_t := B_t - \alpha\beta\sigma t$$

να είναι $\hat{\mathbb{P}}$ -κίνηση Brown. Τότε, από την (3.8), η αναμενόμενη χρησιμότητα γράφεται

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [L_t^\alpha] = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}} \left[\exp \left\{ -a(\beta - 1) \int_0^t r_s ds \right\} \right] \exp \left\{ a\beta\mu t - \frac{1}{2} a(1 - a)\beta^2 \sigma^2 t \right\}.$$

Υπό το $\hat{\mathbb{P}}$, το επιτόκιο r_t εξελίσσεται σύμφωνα με

$$dr_t = (\theta + \alpha\beta\delta\rho\sigma - ar_t) r_t dt + \delta r_t d\hat{Z}_t$$

Όπου $\hat{Z}_t := Z_t - \rho\alpha\beta\sigma t$ είναι $\hat{\mathbb{P}}$ -κίνηση Brown.



Εφαρμόζουμε την εξόρυξη martingale για τον παράγοντα $\exp \{-\alpha(\beta - 1) \int_0^t r_s ds\}$, παίρνοντας το r_t ως τη διεργασία G_t της §3.2.

Με «ρυθμό θανάτου» $k(r) = \alpha(\beta - 1)r$, ο γεννήτορας του r_t (υπό $\hat{\mathbb{P}}$) είναι

$$\mathcal{L}\phi(r) = \frac{1}{2} \delta^2 r^2 \phi''(r) + (\theta + \alpha\beta\delta\rho\sigma - ar)r \phi'(r) - \alpha(\beta - 1)r \phi(r).$$

Επαληθεύεται ότι

$$(\lambda, \phi(r)) = \left(-\frac{1}{2a^2} \alpha \delta^2 (\beta - 1)(\alpha\beta - \alpha + a) + \frac{1}{a} \alpha(\beta - 1)(\theta + \alpha\beta\delta\rho\sigma), r^{\alpha(1-\beta)/a}\right)$$

είναι αποδεκτό ιδιοζεύγος της \mathcal{L} , εφόσον

$$\theta + \alpha\beta\delta\rho\sigma - \frac{\alpha\delta^2(\beta - 1)}{a} > \delta^2,$$

που εξηγεί και τον περιορισμό στις παραμέτρους.

Με αλλαγή μέτρου στο αντίστοιχο \mathbb{Q} , το r_t ικανοποιεί

$$dr_t = \left(\theta + \alpha\beta\delta\rho\sigma - \frac{\alpha\delta^2(\beta - 1)}{a} - ar_t\right)r_t dt + \delta r_t dW_t$$

όπου W_t είναι \mathbb{Q} -Brown.

Συνδέοντας τα μέτρα μέσω της αναμενόμενης χρησιμότητας, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [L_t^\alpha] &= \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}} \left[\exp \left\{ -\alpha(\beta - 1) \int_0^t r_s ds \right\} \right] \exp \{ \alpha\beta\mu t - \frac{1}{2} \alpha(1 - \alpha)\beta^2 \sigma^2 t \} \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[r_t^{\frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha}} \right] \exp \left(\alpha\beta\mu - \frac{1}{2} \alpha(1 - \alpha)\beta^2 \sigma^2 + \frac{1}{2a^2} \alpha\delta^2(\beta - 1)(\alpha\beta - \alpha + a) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\alpha} \alpha(\beta - 1)(\theta + \alpha\beta\delta\rho\sigma) \right) t r_0^{\frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha}} \quad (4.10) \end{aligned}$$

από όπου, εξετάζοντας τον τελευταίο όρο, προκύπτει ότι

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[r_t^{\frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha}} \right] = \text{θετική σταθερά αν } \frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha} + \frac{2}{\delta^2} (\theta + \alpha\beta\delta\rho\sigma) - 1 > 0 \\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[r_t^{\alpha(1-\beta)/\alpha} \right] \rightarrow \infty, \text{ διαφορετικά} \end{cases}$$



Πρόταση 4.4.

Θεωρήστε την τιμή αναφοράς X_t και το επιτόκιο r_t που ικανοποιούν τις (4.9). Αν

$$\frac{\alpha(1-\beta)}{a} + \frac{2}{\delta^2}(\theta + \alpha\beta\delta\sigma\rho) - 1 > 0,$$

τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^\alpha] = \alpha\beta\mu - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\beta^2\sigma^2 + \frac{\alpha^2\delta^2}{2a^2}(1-\beta)^2 - \frac{\alpha}{a}(1-\beta)(\theta + \alpha\beta\delta\sigma\rho). \quad (4.11)$$

Διαφορετικά,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t^\alpha] = \infty$$

Χρησιμοποιώντας το (4.11), βρίσκουμε τον βέλτιστο λόγο μόχλευσης ενός στατικού επενδυτή μελετώντας τη συνάρτηση

$$\Lambda(\beta) := \alpha\beta\mu - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\beta^2\sigma^2 + \frac{\alpha^2\delta^2}{2a^2}(1-\beta)^2 - \frac{\alpha}{a}(1-\beta)(\theta + \alpha\beta\delta\sigma\rho).$$

Για σταθερές παραμέτρους, η $\Lambda(\beta)$ είναι τετραγωνική (υπό την παραπάνω συνθήκη για $|\beta| \geq 3$). Η διαδικασία εύρεσης του μέγιστου είναι ίδια με της §4.4.



4.4 Συμπεράσματα

Η παρούσα εργασία μελέτησε συστηματικά την αποτίμηση και τη βελτιστοποίηση μοχλευμένων διαπραγματεύσιμων αμοιβαίων κεφαλαίων (ETFs) μέσω της μεθόδου εξόρυξης martingale σε ένα ευρύ φάσμα υποδειγμάτων για τη δυναμική τόσο της τιμής αναφοράς όσο και του επιτοκίου και της μεταβλητότητας. Κεντρικό αντικείμενο ήταν ο μακροχρόνιος ρυθμός ανάπτυξης της αναμενόμενης χρησιμότητας ενός επενδυτή με χρησιμότητα ισχύος $u(w) = w^\alpha$ και σταθερό λόγο μόχλευσης β .

Η ανάλυση ανέδειξε τρία αλληλένδετα επίπεδα συμπερασμάτων: (i) κλειστοί τύποι και συνθήκες περατότητας του ρυθμού, (ii) πώς οι παράμετροι των μοντέλων επηρεάζουν το αποτέλεσμα, (iii) πώς διαμορφώνεται ο βέλτιστος λόγος μόχλευσης β^* και ποια όρια/κίνδυνοι ανακύπτουν.

GBM

Στη γεωμετρική κίνηση Brown (GBM) ο ρυθμός είναι τετραγωνικός στο β και προκύπτει ο κλασικός τύπος

$$g(\beta) = \alpha(1 - \beta)r + \alpha\beta\mu - \frac{1}{2}\alpha(1 - \alpha)\beta^2\sigma^2,$$

με βέλτιστη μόχλευση $\beta^* = \frac{\mu - r}{(1 - \alpha)\sigma^2}$.

Το συμπέρασμα είναι ότι το β^* κλιμακώνεται με τον δείκτη Sharpe και είναι αντιστρόφως ανάλογο της σχετικής αποστροφής κινδύνου. Η GBM λειτουργεί ως σημείο αναφοράς για να εκτιμηθεί η επίδραση πρόσθετων πηγών κινδύνου (στοχαστική μεταβλητότητα/επιτόκιο).

GARCH, inverse-GARCH, CIR και 3/2.

Στα GARCH και inverse-GARCH σε χρόνο συνεχές, ο ρυθμός αποκτά συνθήκες ύπαρξης που επιβάλλουν *άνω/κάτω φράγματα* στο β , ανεξάρτητα από α σε ορισμένες περιπτώσεις, ενώ στο GBM δεν υφίσταται τέτοιος περιορισμός. Στο GARCH ο μακροχρόνιος ρυθμός είναι πεπερασμένος όταν $\frac{2\alpha}{\sigma^2} + 1 > \alpha\beta$ αντιδιαμετρικά, στο inverse-GARCH η συνθήκη αντιστρέφεται ως προς θ και οδηγεί επίσης σε ρητό όριο.



Στο επεκτεταμένο CIR το ιδιοζευγικό πρόβλημα δίνει ρυθμό αφινικό ως προς β ,

$\Lambda(\beta) = \alpha\gamma + \alpha\beta(\mu - r)$, υπό σαφή αναγκαιότητα που εμπλέκει την παράμετρο κ .

Έτσι, η επιλογή μόχλευσης έχει γραμμική σε ανοδική αγορά ($\mu > r$) ευνοείται θετική β , ενώ σε πτωτική αρνητική.

Στο μοντέλο 3/2 η κατάσταση είναι πιο «σκληρή»: μέσω της παραμέτρου κ προκύπτει κοίλη Λ και ισχυρά όρια για τη β , αλλά—για ρεαλιστικά $|\beta| \leq 3$ η αναγκαία συνθήκη τείνει να ικανοποιείται.

Στοχαστική μεταβλητότητα: Heston και μεταβλητότητα 3/2.

Με στοχαστική μεταβλητότητα ο ρυθμός παίρνει τη μορφή $\alpha\gamma + \alpha\beta(\mu - r) - \theta\kappa$ με κ που συσσωματώνει την vol-of-vol δ και τη συσχέτιση ρ .

Κρίσιμες παρατηρήσεις:

- *Αρνητική συσχέτιση* ($\rho < 0$), όπως σε μετοχές, αυξάνει τον «ιδιοτιμικό φόρο» $\theta\kappa$ και μειώνει το β^* . Αντίστροφα, θετική ρ ευνοεί μεγαλύτερη μόχλευση.
- Η vol-of-vol αυξάνει τη μεταβλητότητα της χρησιμότητας και τείνει να «στριμώχνει» το βέλτιστο β προς το μηδέν.
- Η $\Lambda(\beta)$ είναι αυστηρά κοίλη σε β (Heston και vol-3/2), άρα όταν δεν ισχύει οριακή περίπτωση, υπάρχει μοναδικό εσωτερικό β^* : όταν οι παράμετροι ωθούν το σύστημα, το μέγιστο μετακινείται στα επιτρεπτά άκρα (± 3).

Στοχαστικά επιτόκια: Vasicek και inverse-GARCH.

Με στοχαστικό r_t ο ρυθμός εμπλουτίζεται από όρους $(1 - \beta)$ και εμφανίζει τετραγωνικό εξάρτημα σε β . Στο Vasicek η επίδραση του επιτοκιακού κινδύνου μπορεί να ωθήσει σε θετική μόχλευση ακόμη και όταν $\mu \approx r$, διότι το τμήμα που προκύπτει από την εξόρυξη προσθέτει θετικό/αρνητικό «carry» ανάλογα με $(\theta, a, \delta, \rho)$. Στο inverse-GARCH επιτόκιο εμφανίζεται ρητή συνθήκη περατότητας που δεσμεύει το β , ενώ ο τελικός ρυθμός έχει την ίδια τετραγωνική δομή αλλά με διαφορετική κλίση (εξαρτώμενη από θ και την ένταση στροφών δ). Πρακτικά: σε καθεστώτα ανόδου επιτοκίων και θετικής συσχέτισης με την απόδοση του υποκείμενου, ο βέλτιστος λόγος μπορεί να μετακινηθεί αισθητά, ενώ η ύπαρξη ορίου εξασφαλίζει ότι υπερβολική θετική μόχλευση δεν είναι βιώσιμη.



Ενιαία εικόνα για το β^* .

Σε όλα τα υποδείγματα ο βέλτιστος λόγος μόχλευσης καθορίζεται από ανταγωνισμό:

(α) αναμενόμενο πλεόνασμα $\alpha\beta(\mu - r)$,

(β) ποινή διακύμανσης/καμπυλότητας $\propto \alpha(1 - \alpha)\beta^2$ όταν ο παράγοντας κινδύνου είναι διάχυση με σταθερή ένταση,

(γ) ιδιοτιμικό κόστος θ_k (ή ανάλογος όρος), που «συμπυκνώνει» mean-reversion, vol-of-vol, συσχέτιση και επιτοκιακό μηχανισμό.

Το β^* κινείται προς τα άκρα όταν (i) το «καθαρό slope» D είναι μεγάλο σε απόλυτη τιμή (Heston/vol-3/2), (ii) ο τετραγωνικός όρος γίνεται ασθενής (μικρή σή $C_1 \approx 0$), ή (iii) τα επιτόκια προσθέτουν carry. Αντίθετα, αυξημένη αβεβαιότητα (μεγάλη δ , αρνητική ρ) *συρρικνώνει* τη βέλτιστη μόχλευση.

Επιπτώσεις για σχεδιασμό και διαχείριση LETFs.

- Σε περιβάλλοντα με έντονη mean-reversion ή στοχαστικά επιτόκια πρέπει να ορίζονται *πολιτικές ορίων* στο β , καθώς η περατότητα του ρυθμού δεν είναι δεδομένη.
- Η βελτιστοποίηση του β είναι *μοντέλο-εξαρτώμενη*:
GBM \rightarrow κλασική συνταγή Sharpe/aversion
Heston/vol-3/2 \rightarrow ρυθμίσεις με βάση (δ, ρ)
Vasicek/inverse-GARCH \rightarrow «συντονισμός» με το καθεστώς επιτοκίων.
- Για διαχειριστές προϊόντων, τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι η επιλογή σταθερού β πρέπει να συνοδεύεται από *ρητά κριτήρια βιωσιμότητας* και *stress tests* στις παραμέτρους μεταβλητότητας και επιτοκίων.

Η ανάλυση εστιάζει σε *στατικό επενδυτή* με σταθερό β και χρησιμότητα ισχύος, αγνοώντας συναλλακτικά κόστη, φόρους και διακριτοποίηση (ημερήσια αναπροσαρμογή LETFs). Η επέκταση σε *δυναμικό β_t* , σε *πολυπαραγοντικά* υποδείγματα (π.χ. πολλαπλές πηγές μεταβλητότητας/επιτοκίων) και σε ροές/tracking error προϊόντων αποτελεί φυσικό επόμενο βήμα.

Επιπλέον, η εμπειρική *βαθμονόμηση* των παραμέτρων (ιδίως ρ και δ) είναι κρίσιμη: μικρές μεταβολές μπορούν να μετακινήσουν αισθητά το β^* .



Συνοψίζοντας, η μέθοδος εξόρυξης martingale προσφέρει ένα ενιαίο, μαθηματικά στιβαρό πλαίσιο για να συγκρίνουμε υποδείγματα και να παραγάγουμε κλειστές μορφές για τον μακροχρόνιο ρυθμό των LETFs. Η σύγκριση έδειξε ότι:

- το GBM παρέχει το «καθαρό» τετραγωνικό trade-off,
- τα mean-reverting υποδείγματα εισάγουν όρια βιωσιμότητας της μόχλευσης,
- η στοχαστική μεταβλητότητα και η συσχέτιση λυγίζουν το β^* προς το 0,
- τα στοχαστικά επιτόκια μπορούν να ανατρέψουν την ουδετερότητα όταν $\mu \approx r$, δίνοντας θετικό (ή αρνητικό) κίνητρο μόχλευσης.

Η πρακτική συνέπεια είναι σαφής: ο βέλτιστος σχεδιασμός και η χρήση LETFs δεν είναι «ένα νούμερο για όλους», αλλά προκύπτει από την αλληλεπίδραση (Sharpe, vol-of-vol, συσχέτιση, καθεστώς επιτοκίων) που αποτυπώνεται ποσοτικά από τους ιδιοτιμικούς όρους της εξόρυξης martingale.

Στη μελέτη μας για τον μακροχρόνιο ρυθμό ανάπτυξης της αναμενόμενης χρησιμότητας των LETF, προτείνουμε την προσέγγιση *martingale extraction* και μετατρέπουμε μια εξάρτηση από την τροχιά (path-dependent expectation) σε μη εξαρτώμενη από την τροχιά ποσότητα. Η μετατροπή αυτή είναι σαφώς πιο φιλική στην ανάλυση και οδηγεί σε ρητές λύσεις. Κατά τον προσδιορισμό του μακροχρόνιου ρυθμού ανάπτυξης, επιδεικνύουμε και επιλύουμε επίσης το ενσωματωμένο πρόβλημα ιδιοζεύγους (ιδιοτιμή–ιδιοσυνάρτηση). Σε κάθε ένα από τα μονοπαραγοντικά και πολυπαραγοντικά μοντέλα που εξετάζονται εδώ, προσδιορίζουμε την ιδιοτιμή και την ιδιοσυνάρτηση, καθώς και το όριο του ρυθμού ανάπτυξης.

Με βάση τον τύπο για τον μακροχρόνιο ρυθμό, βρίσκουμε ακόμη τον βέλτιστο λόγο μόχλευσης και μελετούμε την επίδραση των επιμέρους παραμέτρων του μοντέλου. Τα αποτελέσματα είναι χρήσιμα όχι μόνο για ιδιώτες ή θεσμικούς επενδυτές, αλλά και για παρόχους και ρυθμιστικές αρχές ETF, καθώς τους επιτρέπουν να γνωρίζουν τη μακροπρόθεσμη επίδοση κάθε LETF που διαπραγματεύεται στην αγορά.

Για λόγους διευκόλυνσης του αναγνώστη, δύο αναλυτικές εφαρμογές που υλοποιήθηκαν στη γλώσσα προγραμματισμού Python, καθώς και τα συμπληρωματικά αποτελέσματα που σχετίζονται με την παρούσα εργασία, παρατίθενται στα Παραρτήματα Α και Β που ακολουθούν. Στην αρχή κάθε παραρτήματος παρατίθεται το αντίστοιχο αρχείο κώδικα (.py) που χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή των αποτελεσμάτων.



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Εφαρμογή 1

Πότε έχει σημασία η στοχαστική μεταβλητότητα; (Heston)

Στο υπόδειγμα Heston ο μακροχρόνιος ρυθμός μεγέθυνσης της αναμενόμενης χρησιμότητας για ένα β -LETF γράφεται (βλ. Πρόταση 4.1):

$$g(\beta) = \alpha r + \alpha\beta(\mu - r) - \theta \kappa(\beta),$$

όπου

$$\kappa(\beta) = \frac{1}{\delta^2} \left(\sqrt{(a - \alpha\beta\delta\rho)^2 + \alpha(1 - \alpha)\beta^2\delta^2} - a + \alpha\beta\delta\rho \right).$$

Σε σχέση με το GBM, η στοχαστική μεταβλητότητα εισάγει έναν πρόσθετο όρο $\theta\kappa(\beta)$, ο οποίος εξαρτάται μη γραμμικά από τη μόχλευση β και ενσωματώνει δύο βασικές πηγές κινδύνου: (i) τη μεταβλητότητα της μεταβλητότητας (vol-of-vol) μέσω του δ και (ii) το leverage effect μέσω της συσχέτισης ρ .

Αυτό που θέλουμε να δούμε με αυτήν την εφαρμογή είναι το πως η στοχαστική μεταβλητότητα επηρεάζει:

- τον μακροχρόνιο ρυθμό
- τον βέλτιστο λόγο μόχλευσης

Στην αρχική αριθμητική διερεύνηση της Εφαρμογής χρησιμοποιήθηκαν οι παράμετροι:

$$\alpha = 0.8, \quad \mu = 0.08, \quad r = 0.02, \quad \theta = 0.04, \quad a = 2.0,$$

και εξετάστηκαν $\delta \in \{0.3, 0.6, 0.9\}$ και $\rho \in \{-0.7, -0.3, 0, 0.3\}$ (με περιορισμό $\beta \in [-3, 3]$).

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι για όλες τις παραπάνω τιμές προκύπτει:

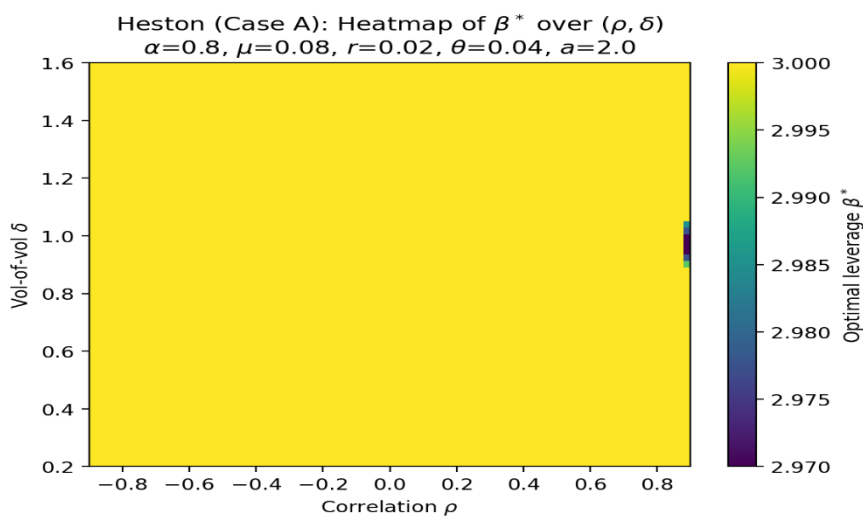
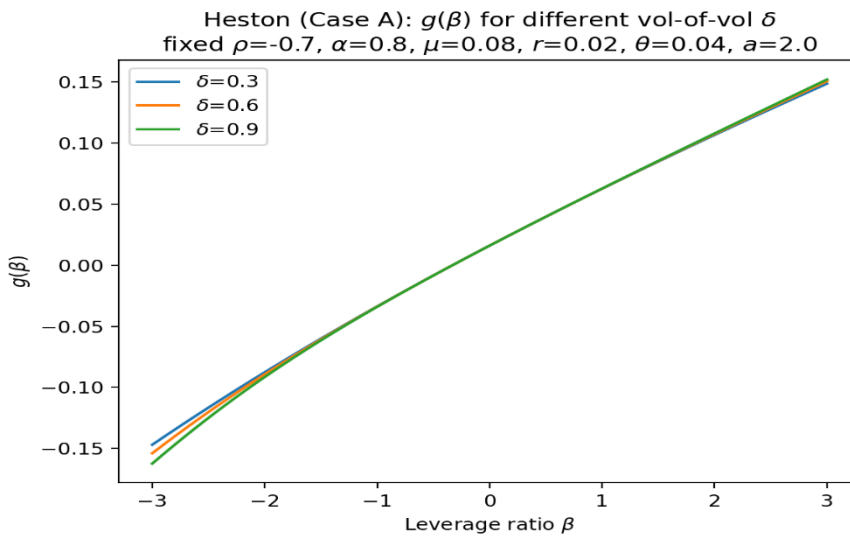
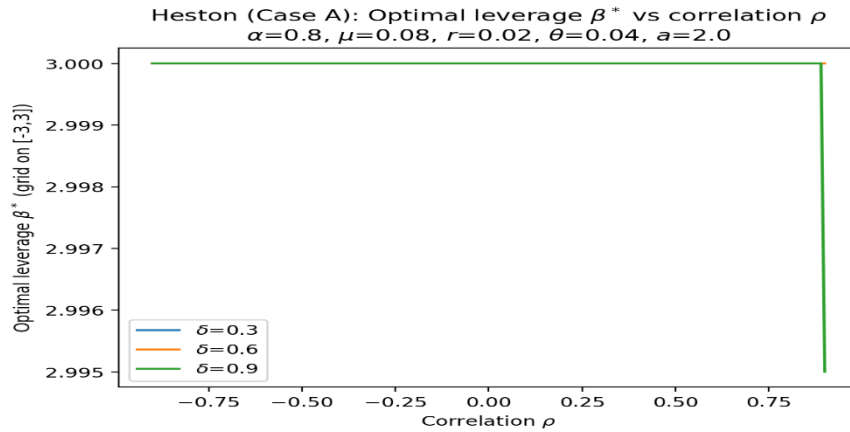
$$\beta^* \approx 3,$$

δηλαδή το μέγιστο του $g(\beta^*)$ επιτυγχάνεται στο άνω όριο του επιτρεπτού διαστήματος.

Επίσης παρατηρούμε όσο αυξάνει ρ το $g(\beta^*)$ μειώνεται και όσο αυξάνει το δ το $g(\beta^*)$ αυξάνει. Αυτό σημαίνει ότι, στο συγκεκριμένο παραμετρικό περιβάλλον, το όφελος από το excess return $\alpha\beta(\mu - r)$ κυριαρχεί έναντι της $\theta\kappa(\beta)$, ακόμη και μετά την εισαγωγή στοχαστικής μεταβλητότητας.



Παράλληλα, η μεταβολή της συσχέτισης ρ επηρεάζει το επίπεδο του $g(\beta)$ (άρα την ελκυστικότητα της μόχλευσης), χωρίς όμως να αλλάζει το γεγονός ότι η βέλτιστη λύση παραμένει boundary (βλ. το διάγραμμα $\beta^* - \rho$ και το heatmap $\beta^*(\rho, \delta)$).



Σχημα 3,4,5



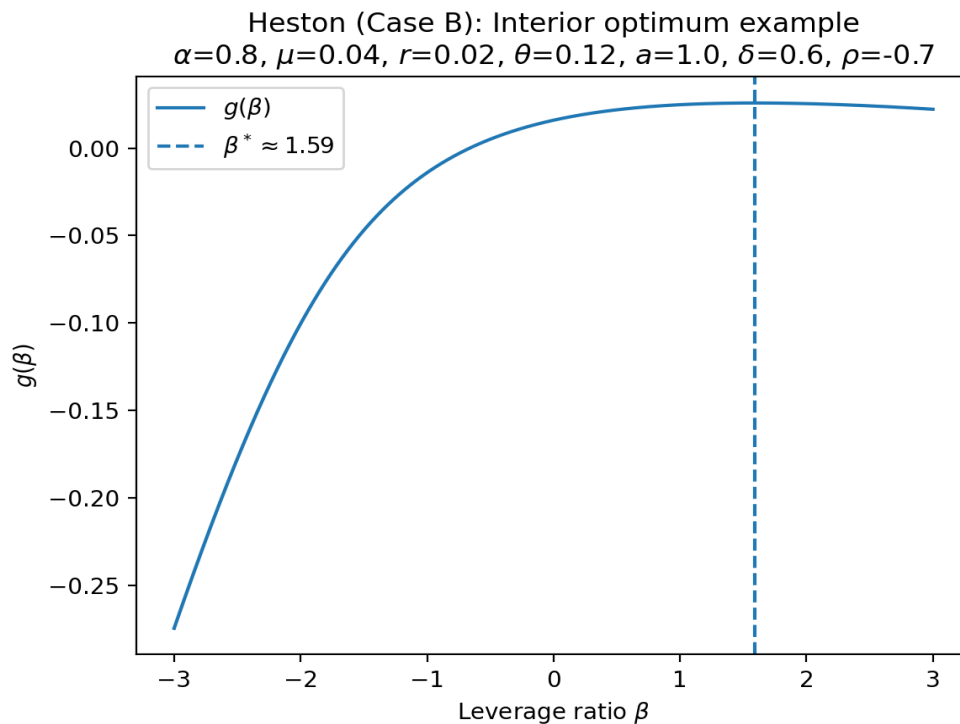
Για να αναδειχθεί πότε η στοχαστική μεταβλητότητα “μετακινεί” ουσιαστικά τη βέλτιστη μόχλευση προς τα κάτω, εξετάστηκε ένα εναλλακτικό καθεστώς με:

$$\alpha = 0.8, \quad \mu = 0.04, \quad r = 0.02, \quad \theta = 0.12, \quad a = 1.0,$$

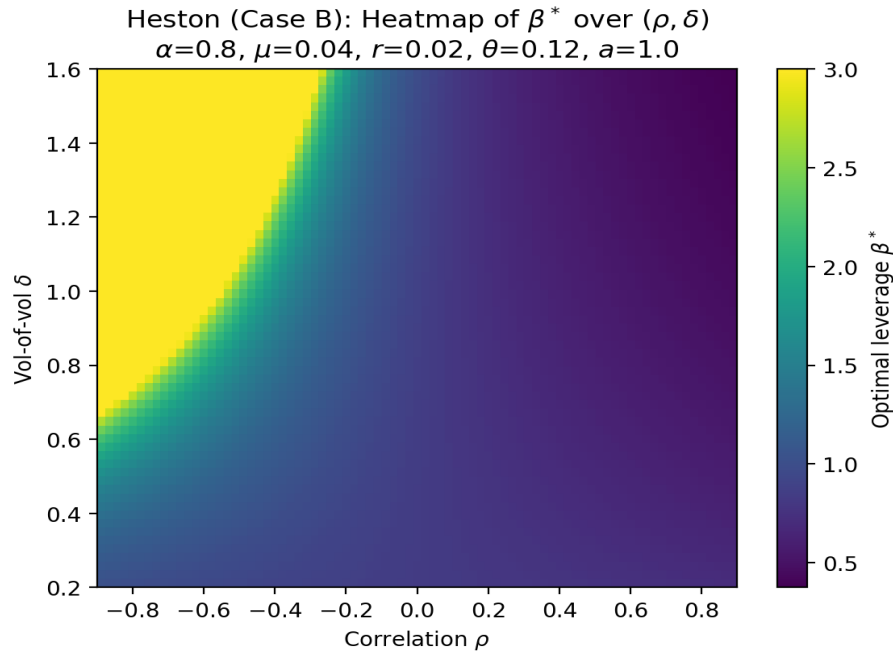
δηλαδή (i) μικρότερο excess return ($\mu-r$) και (ii) μεγαλύτερη μέση μεταβλητότητα θ . Για παράδειγμα, με $\delta = 0.6$ και $\rho = -0.7$ προκύπτει:

$$\beta^* \approx 1.59,$$

δηλαδή εμφανίζεται εσωτερικό μέγιστο εντός $[-3,3]$ και όχι λύση στο όριο. Η συμπεριφορά αυτή υποδεικνύει ότι όταν η $\theta\kappa(\beta)$ γίνεται συγκρίσιμη με το όφελος από το excess return, το Heston δρα ως ενδογενής μηχανισμός απομόχλευσης περιορίζοντας την επιθυμητή μόχλευση.



Σχήμα 6



Σχήμα 7

Συμπέρασμα

Η στοχαστική μεταβλητότητα έχει ουσιαστική σημασία για τη σχεδίαση μόχλευσης όταν συντρέχουν (σε κάποιο βαθμό) οι εξής συνθήκες:

- χαμηλότερο excess return $(\mu-r)$ (περιβάλλον χαμηλού Sharpe),
- υψηλότερη θ (μεγαλύτερη μέση μεταβλητότητα),
- υψηλότερη δ (μεγαλύτερο vol-of-vol),
- και/ή ισχυρό leverage effect (συχνά $\rho < 0$), που επηρεάζει μη γραμμικά τον όρο $\kappa(\beta)$.

Σε αντίθετη περίπτωση η βέλτιστη μόχλευση παραμένει συχνά στο πρακτικό όριο της αγοράς (π.χ. $\beta = 3$), ακόμη και υπό στοχαστική μεταβλητότητα.



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Εφαρμογή 2

Σε αυτή την Εφαρμογή εξετάζουμε πώς η δυναμική του επιτοκίου επηρεάζει τη βέλτιστη μόχλευση ενός επενδυτή που διακρατά ένα leveraged ETF. Συγκεκριμένα συγκρίνουμε δύο υποδείγματα στοχαστικών επιτοκίων:

- το υπόδειγμα Vasicek, όπου το επιτόκιο ακολουθεί Ornstein–Uhlenbeck διαδικασία,
- το υπόδειγμα inverse-GARCH diffusion, όπου το επιτόκιο έχει πολλαπλασιαστική στοχαστική μεταβλητότητα.

Η θεωρητική ανάλυση του Κεφαλαίου 4 έδειξε ότι και στα δύο υποδείγματα ο μακροχρόνιος ρυθμός μεγέθυνσης της αναμενόμενης χρησιμότητας έχει τη μορφή:

$$g(\beta) = \alpha\beta\mu - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\beta^2\sigma^2 + \frac{\alpha^2\delta^2}{2a^2}(1-\beta)^2 - \frac{\alpha}{a}(1-\beta)(\theta + \alpha\beta\delta r)$$

όμως στο inverse-GARCH εμφανίζεται επιπλέον συνθήκη περατότητας που περιορίζει το επιτρεπτό σύνολο τιμών της μόχλευσης.

Για να μελετήσουμε τη σημασία αυτής της διαφοράς, εξετάζουμε τρία καθεστώτα επιτοκίων.

Στην πρώτη περίπτωση εξετάζουμε ένα περιβάλλον όπου τα επιτόκια είναι σχετικά χαμηλά και παρουσιάζουν περιορισμένη μεταβλητότητα. Τα αποτελέσματα των υπολογισμών συνοψίζονται ως εξής:

- Για το υπόδειγμα Vasicek η βέλτιστη μόχλευση προκύπτει

$$\beta^* = 3.$$

- Για το υπόδειγμα inverse-GARCH η βέλτιστη μόχλευση είναι

$$\beta^* \approx 2.02.$$

Επιπλέον, μόνο το

$$83.6\%$$

του διαστήματος μόχλευσης $[-3,3]$ είναι μαθηματικά αποδεκτό στο inverse-GARCH.



Το αποτέλεσμα αυτό υποδηλώνει ότι η πολλαπλασιαστική στοχαστική μεταβλητότητα του επιτοκίου δημιουργεί περιοχές τιμών της μόχλευσης όπου η αναμενόμενη χρησιμότητα δεν παραμένει πεπερασμένη. Συνεπώς, το μοντέλο επιβάλλει έναν ενδογενή περιορισμό στη μόχλευση.

Στη δεύτερη περίπτωση εξετάζουμε ένα περιβάλλον στο οποίο τα επιτόκια παρουσιάζουν αυξημένη μεταβλητότητα και τάση ανόδου.

Τα αποτελέσματα είναι τα εξής:

- Στο μοντέλο Vasicek η βέλτιστη μόχλευση παραμένει

$$\beta^* = 3$$

με τιμή της συνάρτησης μεγέθυνσης

$$g(\beta^*) \approx 0.206.$$

- Στο μοντέλο inverse-GARCH η βέλτιστη μόχλευση μειώνεται σε

$$\beta^* \approx 2.08$$

ενώ ο αντίστοιχος ρυθμός μεγέθυνσης είναι

$$g(\beta^*) \approx 0.134.$$

Η διαφορά μεταξύ των δύο μοντέλων γίνεται πλέον πιο έντονη. Η στοχαστική μεταβλητότητα του επιτοκίου στο inverse-GARCH επιφέρει σημαντικότερη ποινή στον όρο χρηματοδότησης της στρατηγικής μόχλευσης, με αποτέλεσμα να μειώνεται η βέλτιστη τιμή του β

Στην τρίτη περίπτωση εξετάζεται ένα περιβάλλον υψηλότερων επιτοκίων όπου όμως η διαδικασία παρουσιάζει ταχεία επαναφορά προς τη μακροχρόνια μέση τιμή.

Σε αυτή την περίπτωση τα αποτελέσματα είναι:

$$\beta^* = 3$$

και για τα δύο υποδείγματα.



Επιπλέον, στο μοντέλο inverse-GARCH ολόκληρο το διάστημα μόχλευσης $[-3,3]$ είναι πλέον εφικτό. Η ταχεία μέση επαναφορά περιορίζει τις μεγάλες αποκλίσεις του επιτοκίου και αποτρέπει την εμφάνιση εκρηκτικής συμπεριφοράς στη δυναμική του μοντέλου.

Ως αποτέλεσμα, τα δύο υποδείγματα οδηγούν σε παρόμοιες στρατηγικές μόχλευσης.

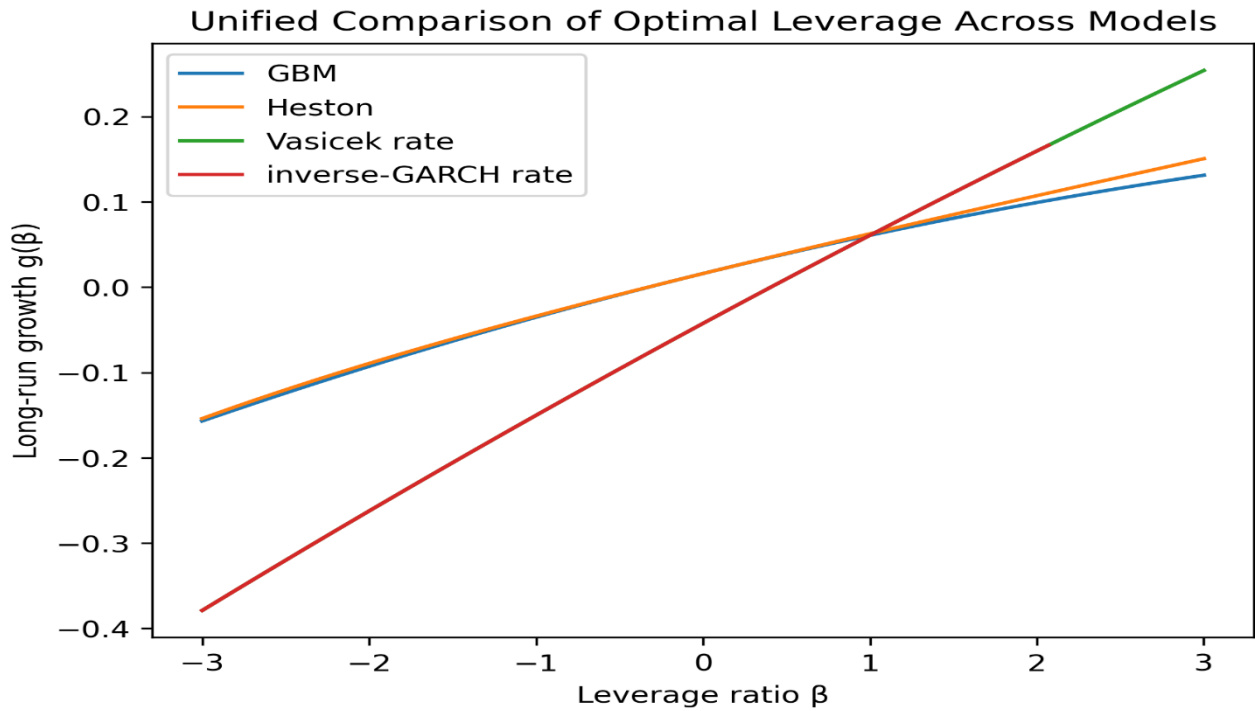
Συμπέρασμα

Τα αριθμητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι η δυναμική του επιτοκίου μπορεί να επηρεάσει ουσιαστικά τη βέλτιστη επιλογή μόχλευσης.

Το υπόδειγμα Vasicek οδηγεί σε ομαλές συναρτήσεις μεγέθυνσης και συχνά σε λύσεις ορίου, όπου η βέλτιστη μόχλευση βρίσκεται στο μέγιστο επιτρεπτό επίπεδο. Αντίθετα, το υπόδειγμα inverse-GARCH μπορεί να δημιουργήσει ενδογενείς περιορισμούς στη μόχλευση λόγω της συνθήκης περατότητας των ροπών.

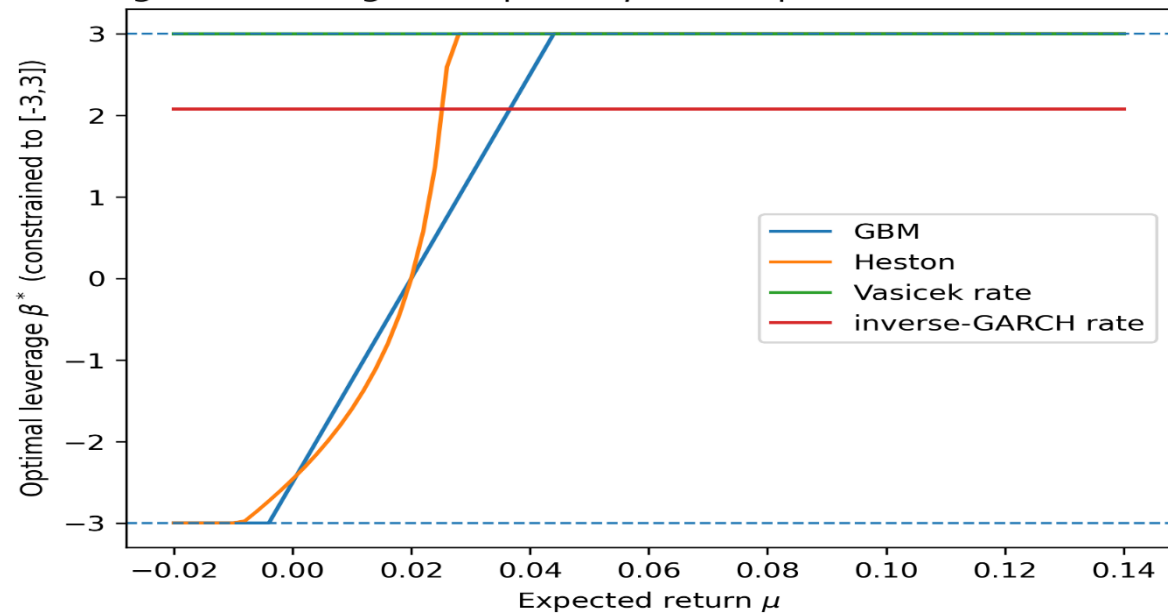
Η διαφορά αυτή είναι ιδιαίτερα εμφανής σε περιβάλλοντα αυξημένης μεταβλητότητας των επιτοκίων, όπου η πολλαπλασιαστική στοχαστική δυναμική του inverse-GARCH περιορίζει την ελκυστικότητα των στρατηγικών υψηλής μόχλευσης.

Συνολικά, τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι η σχεδίαση στρατηγικών μόχλευσης δεν εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητότητα του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, αλλά και από τη στοχαστική συμπεριφορά των συνθηκών χρηματοδότησης. Για τον λόγο αυτό, η επιλογή του κατάλληλου μοντέλου επιτοκίων αποτελεί κρίσιμο παράγοντα για τη σωστή αξιολόγηση των leveraged επενδυτικών στρατηγικών.



Το Σχήμα 8 παρουσιάζει τη συνάρτηση μακροχρόνιας μεγέθυνσης $g(\beta)$ για όλα τα μοντέλα που εξετάστηκαν στην παρούσα εργασία. Παρατηρούμε ότι όσο το μοντέλο ενσωματώνει περισσότερες πηγές αβεβαιότητας, τόσο αυξάνεται η ποινή κινδύνου και περιορίζεται η ελκυστικότητα των στρατηγικών υψηλής μόχλευσης.

Leverage Phase Diagram: Optimal β^* vs Expected Return across Models



Το σχήμα 9 παρουσιάζει την βέλτιστη μόχλευση β^* ως συνάρτηση της αναμενόμενης απόδοσης μ , για τα μοντέλα GBM, Heston, Vasicek και inverse-GARCH.



Βιβλιογραφία

- Ahn, D.-H., Dittmar, R. F., & Gallant, A. R. (2002). Quadratic term structure models: Theory and evidence. *Review of Financial Studies*, 15(1), 243–288.
- Ahn, D.-H., & Gao, B. (1999). A parametric nonlinear model of term structure dynamics. *Review of Financial Studies*, 12(4), 721–762.
- Akian, M., Sulem, A., & Taksar, M. I. (1999). Dynamic optimisation of a long-term growth rate for a mixed portfolio with transaction costs: The logarithmic utility case. Technical Report RR-3626, INRIA.
- Applebaum, D. (2009). *Lévy Processes and Stochastic Calculus* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- Avellaneda, M., & Zhang, S. (2010). Path-dependence of leveraged ETF returns. *SIAM Journal of Financial Mathematics*, 1, 586–603.
- Bass, R. F. (2011). *Stochastic Processes*. Cambridge University Press.
- Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure* (3rd ed.). Wiley.
- Björk, T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time* (3rd ed.). Oxford University Press.
- Bogachev, V. I. (2007). *Measure Theory* (Vols. I–II). Springer.
- Borovicka, J., Hansen, L., Hendricks, M., & Scheinkman, J. (2011). Risk price dynamics. *Journal of Financial Econometrics*, 9(1), 3–65.
- Brigo, D., & Mercurio, F. (2006). *Interest Rate Models—Theory and Practice* (2nd ed.). Springer.
- Carr, P., & Sun, J. (2007). A new approach for option pricing under stochastic volatility. *Review of Derivatives Research*, 10(2), 87–150.
- Cheng, M., & Madhavan, A. (2009). The dynamics of leveraged and inverse exchange-traded funds. *Journal of Investment Management*, 4.
- Christensen, S., & Wittlinger, M. (2012). Optimal relaxed portfolio strategies for growth rate maximization problems with transaction costs. arXiv preprint arXiv:1209.0305.
- Cox, J. C., Ingersoll Jr, J. E., & Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2), 385–407.
- Dellacherie, C., & Meyer, P.-A. (1982). *Probabilities and Potential B: Theory of Martingales*. North-Holland.
- Dembo, A. (2013). *Stochastic Processes* (course notes). Stanford University.
- Doob, J. L. (1953). *Stochastic Processes*. Wiley.
- Durrett, R. (2019). *Probability: Theory and Examples* (5th ed.). Cambridge University Press.



- Fleming, W., & Sheu, S. (1999). Optimal long term growth rate of expected utility of wealth. *Annals of Applied Probability*, 9(3), 871–903.
- Folland, G. B. (1999). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* (2nd ed.). Wiley.
- Guasoni, P., & Mayerhofer, E. (2016). The limits of leverage. SSRN 2446817.
- Hall, P., & Heyde, C. C. (1980). *Martingale Limit Theory and Its Application*. Academic Press.
- Hansen, L. P. (2012). Dynamic valuation decomposition within stochastic economies. *Econometrica*, 80(3), 911–967.
- Hansen, L. P., & Scheinkman, J. A. (2009). Long-term risk: An operator approach. *Econometrica*, 77(1), 177–234.
- Hata, H., & Sekine, J. (2006). Solving long term optimal investment problems with Cox–Ingersoll–Ross interest rates. *Advances in Mathematical Economics*, 8, 231–255.
- Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6(2), 327–343.
- Holmes-Cerfon, M. (2015). *Brownian Motion (lecture notes)*. University of British Columbia.
- Hurd, T., & Kuznetsov, A. (2008). Explicit formulas for Laplace transforms of stochastic integrals. *Markov Processes and Related Fields*, 14(2), 277–290.
- Kallenberg, O. (2002). *Foundations of Modern Probability* (2nd ed.). Springer.
- Karatzas, I., & Shreve, S. E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus* (2nd ed.). Springer.
- Lalley, S. (2012). *Change of Measure and the Girsanov Theorem (lecture notes)*. University of Chicago.
- Lawler, G. F. (2010). *Stochastic Calculus: An Introduction with Applications (lecture notes)*. University of Chicago.
- Leung, T., Lorig, M., & Pascucci, A. (2016). Leveraged ETF implied volatilities from ETF dynamics. *Mathematical Finance*.
- Leung, T., Park, H., et al. (2023). Robust long-term growth rate of expected utility for leveraged ETFs.
- Leung, T., & Santoli, M. (2012). Leveraged exchange-traded funds: Admissible leverage and risk horizon. *Journal of Investment Strategies*, 2(1), 39–61.
- Leung, T., & Santoli, M. (2016). *Leveraged Exchange-Traded Funds: Price Dynamics and Options Valuation*. SpringerBriefs in Quantitative Finance, Springer.
- Leung, T., & Sircar, R. (2015). Implied volatility of leveraged ETF options. *Applied Mathematical Finance*, 22(2), 162–188.
- Leung, T., & Ward, B. (2015). The golden target: Analyzing the tracking performance of leveraged gold ETFs. *Studies in Economics and Finance*, 32(3), 278–297.



- Lewis, A. (2000). *Option valuation under stochastic volatility: With Mathematica code*. Finance Press.
- Linetsky, V. (2004). The spectral decomposition of the option value. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 7(3), 337–384.
- Liptser, R. S., & Shiryaev, A. N. (2001). *Statistics of Random Processes I–II* (2nd ed.). Springer.
- Mao, X. (2007). *Stochastic Differential Equations and Applications* (2nd ed.). Horwood.
- Øksendal, B. (2003). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications* (6th ed.). Springer.
- Park, H. (2016). Sensitivity analysis of long-term cash flows. arXiv preprint arXiv:1511.03744.
- Pham, H. (2003). A large deviations approach to optimal long term investment. *Finance and Stochastics*, 7(2), 169–195.
- Pham, H. (2015). Long time asymptotics for optimal investment. In *Large Deviations and Asymptotic Methods in Finance* (pp. 507–528). Springer.
- Pinsky, R. (1995). *Positive harmonic functions and diffusion* (Vol. 45). Cambridge University Press.
- Protter, P. (2005). *Stochastic Integration and Differential Equations* (2nd ed.). Springer.
- Qin, L., & Linetsky, V. (2015). Positive eigenfunctions of Markovian pricing operators: Hansen–Scheinkman factorization and Ross recovery. arXiv preprint arXiv:1411.3075.
- Revuz, D., & Yor, M. (1999). *Continuous Martingales and Brownian Motion* (3rd ed.). Springer.
- Rogers, L. C. G., & Williams, D. (2000). *Diffusions, Markov Processes and Martingales* (Vols. I–II, 2nd ed.). Cambridge University Press.
- Rompotis, G. G. (2014). On leveraged and inverse ETFs. Working Paper.
- Schilling, R. L., & Partzsch, L. (2012). *Brownian Motion: An Introduction to Stochastic Processes*. De Gruyter.
- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer.
- Tuckwell, H. (1974). A study of some diffusion models of population growth. *Theoretical Population Biology*, 5(3), 345–357.
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177–188.
- Williams, D. (1991). *Probability with Martingales*. Cambridge University Press.
- Zhao, B. (2009). Inhomogeneous geometric Brownian motion. SSRN 1429449.
- Zhu, L. (2014). Optimal strategies for a long-term static investor. *Stochastic Models*, 30(3), 300–318.
- Žitković, G. (2016). *Stochastic Processes & Stochastic Calculus* (lecture notes). University of Texas at Austin.



Μακροπρόθεσμος Ρυθμός Ανάπτυξης Αναμενόμενης Ωφελιμότητας για Μοχλευμένα Αμοιβαία Κεφάλαια μέσω
Προσέγγισης Εξόρυξης Martingale

