

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής



Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΜΕΣΩ
ΤΗΣ ΑΝΕΛΙΞΗΣ
VARIANCE - GAMMA**

Χρήστος Π. Στρατηγόπουλος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς,
Μάρτιος 2026

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής



Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΜΕΣΩ
ΤΗΣ ΑΝΕΛΙΞΗΣ
VARIANCE - GAMMA**

Χρήστος Π. Στρατηγόπουλος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς,
Μάρτιος 2026

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη Συνέλευση του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή της σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Μιχαήλ Μπούτσικας, Αν. Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Κωνσταντίνος Πολίτης, Καθηγητής
- Γεώργιος Ψαρράκος, Αν. Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS
School of Finance and Statistics



Department of Statistics and Insurance Science

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**OPTION PRICING USING
VARIANCE - GAMMA PROCESS**

By
Christos P. Stratigopoulos

MSc Dissertation
submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of
the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements
for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece,
March 2026

*Στην οικογένεια
και τους φίλους μου*

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία αντιπροσωπεύει το επίκεντρο των ερευνητικών μου ενδιαφερόντων, και η ολοκλήρωση της δεν θα ήταν εφικτή χωρίς την συμβολή ορισμένων σημαντικών ανθρώπων.

Αρχικά, οφείλω να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Μ. Μπούτσικα, ο οποίος με καθοδήγησε σε κάθε στάδιο της εργασίας. Η διαθεσιμότητά του και η εμπιστοσύνη που έδειξε στις δυνατότητες μου υπήρξαν καθοριστικές για την επιτυχή περάτωση της παρούσας μελέτης. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω το σύνολο των διδασκόντων του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών για τις γνώσεις και τα εφόδια που προσέφεραν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος, ένα ιδιαίτερο ευχαριστώ ανήκει στην οικογένεια μου και τους φίλους μου, για την υποστήριξη και την ενθάρρυνση που μου παρείχαν καθ' όλη τη διάρκεια συγγραφής της εργασίας.

Χρήστος Στρατηγόπουλος

Περίληψη

Το υπόδειγμα των Black and Scholes έθεσε το θεωρητικό πλαίσιο εντός του οποίου κατέστη εφικτή η συστηματική τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης, με τον αντίστοιχο τύπο να αποτελεί σημείο αναφοράς στη σύγχρονη χρηματοοικονομική πρακτική. Ωστόσο, οι γνωστές εμπειρικές ασυμβατότητες του υποδείγματος, όπως η υπόθεση της κανονικότητας των λογαριθμικών αποδόσεων των αξιογράφων και της σταθερής μεταβλητότητας, ανέδειξαν την ανάγκη ενσωμάτωσης πρόσθετης πολυπλοκότητας για τη μοντελοποίηση της υποκείμενης διαδικασίας. Μια κατεύθυνση προς την υπέρβαση των εν λόγω περιορισμών του υποδείγματος αφορά τη μελέτη υποδειγμάτων που εισάγουν μια αλματική συνιστώσα στη δυναμική των τιμών, όπως είναι εκείνα των καθαρά αλματικών διαδικασιών. Οι καθαρά αλματικές διαδικασίες συνιστούν μέλος της κλάσης των διαδικασιών Lévy, με την ιδιότητα ότι οι διαδρομές τους διαμορφώνονται αποκλειστικά μέσω αλμάτων, χωρίς την παρουσία συνιστώσας διάχυσης.

Στο πλαίσιο αυτό, η διαδικασία Variance–Gamma, ως χαρακτηριστικό παράδειγμα της κλάσης των προαναφερθέντων διαδικασιών, προκύπτει ως γενίκευση του κλασικού μοντέλου διάχυσης της κίνησης Brown. Συγκεκριμένα, κατασκευάζεται με αντικατάσταση του χρονικού δεικτοσυνόλου της κίνησης Brown με μια διαδικασία γάμμα. Με τον τρόπο αυτό εισάγεται η έννοια του «οικονομικού χρόνου», η οποία αποτυπώνει την ιδέα ότι ο ρυθμός εξέλιξης της πληροφορίας στις αγορές δεν καθορίζεται από ντετερμινιστικά χρονικά διαστήματα, αλλά από στοχαστικούς μηχανισμούς. Με τον τρόπο αυτό, καθίσταται εφικτή η μοντελοποίηση διαφορετικών επιπέδων μεταβλητότητας του υποκείμενου τίτλου σε διαφορετικές χρονικές στιγμές του οικονομικού χρονικού δείκτη, καθιστώντας το προτεινόμενο υπόδειγμα καταλληλότερο να προσαρμόζεται στην μεταβαλλόμενη ένταση με την οποία πραγματοποιείται η διαδοχή πληροφορίας στις εκάστοτε συνθήκες της αγοράς. Το υπόδειγμα εισάγει δύο επιπλέον παραμέτρους οι οποίες ρυθμίζουν την ασυμμετρία και την κύρτωση της κατανομής των αποδόσεων, αποτυπώνοντας πιο σύνθετα χαρακτηριστικά της δυναμικής του υποκείμενου τίτλου.

Τεχνικές αποτίμησης που βασίζονται τόσο στον αναλυτικό τύπο όσο και στον μετασχηματισμό Esscher εφαρμόστηκαν με στόχο τον υπολογισμό της αξίας του παραγώγου SPX. Τα εμπειρικά αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι το προτεινόμενο υπόδειγμα επιτυγχάνει βελτιωμένη προσαρμογή σε σχέση με το υπόδειγμα των Black and Scholes, το οποίο αποτελεί ειδική περίπτωση του γενικότερου υποδείγματος που αναπτύσσεται στην παρούσα διπλωματική εργασία.

Abstract

The Black and Scholes model established the theoretical framework within which the systematic pricing of options became possible, with the corresponding formula serving as a benchmark in modern financial engineering practice. However, the well-known empirical inconsistencies of the model, such as the assumption of normality of logarithmic returns on securities and constant volatility, highlighted the need to incorporate additional complexity to model the underlying process. One approach to overcoming these limitations of the model involves studying models that introduce a jump component into price dynamics, such as those of pure-jump processes. Pure-jump processes are members of the class of Lévy processes, with the property that the paths are formed entirely via jumps, without the presence of a diffusion component.

In this context, the Variance–Gamma process, as a typical example of the class of the processes mentioned above, emerges as a generalization of the classical Brownian motion diffusion model. Specifically, it is constructed by replacing the time index set of Brownian motion with a gamma process. This introduces the concept of «economic time», which reflects the idea that the rate of information evolution in markets is not determined by deterministic time intervals, but by stochastic mechanisms. This makes it possible to model different levels of volatility of the underlying security at different points in time of the economic time index, making the proposed model more suitable for adapting to the changing intensity with which information is passed on in the given market conditions. The model introduces two additional parameters that control the asymmetry and kurtosis of the return distribution, capturing more complex characteristics of the underlying security's dynamics.

Valuation techniques based on both the analytical formula and the Esscher transformation were applied in order to calculate the value of the SPX derivative. The empirical results demonstrate that the proposed model achieves improved fit compared to the Black and Scholes model, which is a special case of the more general model developed in this MSc thesis.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων	xviii
Κατάλογος Σχημάτων	xx
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ	4
2.1 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΜΕΤΡΟΥ	4
2.1.1 Εισαγωγή στην έννοια του μέτρου	4
2.1.2 Μετρήσιμες συναρτήσεις και ολοκληρωσιμότητα	6
2.1.3 Τυχαίες μεταβλητές και μέση τιμή	9
2.1.4 Δεσμευμένη μέση τιμή	12
2.1.5 Στοχαστική Ανεξαρτησία	14
2.1.6 Χαρακτηριστικές συναρτήσεις	14
2.2 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΚΑΙ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ MARTINGALE	15
2.2.1 Στοχαστικές Διαδικασίες	15
2.2.2 Η έννοια της διήθησης	17
2.2.3 Διαδικασίες Martingale (Στοιχηματικές διαδικασίες)	19
2.3 ΑΝΕΛΙΞΗ POISSON ΚΑΙ ΚΙΝΗΣΗ BROWN	20
2.3.1 Ανέλιξη Poisson	20
2.3.2 Κίνηση Brown	22
2.4 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΤÔ	26
2.4.1 Το ολοκλήρωμα Itô	26
2.4.2 Τύπος του Itô και διαδικασίες Itô	31
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΛÉVY	34
3.1 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΛÉVY: ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ	34
3.1.1 Διαδικασίες Lévy και Απείρως Διαcretές Κατανομές	34
3.1.2 Τύπος των Lévy–Khintchine για διαδικασίες Lévy	39
3.2 POISSON ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΡΟ ΛÉVY	41
3.2.1 Σύνθετη Διαδικασία Poisson	41
3.2.2 Τυχαία μέτρα Poisson	43
3.2.3 Μέτρο Lévy	47
3.3 ΑΠΟΣΥΝΘΕΣΗ ΛÉVY-ΙΤÔ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ ΤΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ ΛÉVY	48
3.3.1 Αποσύνθεση Lévy-Itô	48
3.3.2 Ιδιότητες Διαδρομών	53
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ VARIANCE–GAMMA	55
4.1 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ VARIANCE–GAMMA : ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ	56
4.1.1 Διαδικασίες CGMY	56
4.1.2 Διαδικασία Variance–Gamma (VG)	58
4.1.3 Μέτρο Lévy της διαδικασίας VG και ερμηνεία των παραμέτρων	64
4.2 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΩΝ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ VG	67

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ	73
5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΑΓΟΡΩΝ ΤΩΝ Black and Scholes	74
5.1.1 Αυτοχρηματοδοτούμενα χαρτοφυλάκια	74
5.1.2 Αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης υπό καθεστώς no-arbitrage	80
5.1.3 Τύπος των Black and Scholes	83
5.1.4 Αδυναμίες του υποδείγματος των Black and Scholes	84
5.2 ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΑΓΟΡΩΝ VARIANCE-GAMMA	86
5.2.1 Τιμολόγηση με χρήση του αναλυτικού τύπου	86
5.2.2 Βαθμονόμηση των παραμέτρων του αναλυτικού VG υποδείγματος	89
5.2.3 Μετασχηματισμός Esscher της διαδικασίας VG	92
5.2.4 Τιμολόγηση με χρήση του μετασχηματισμού Esscher	95
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ	98
6.1 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ	98
6.2 ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ BLACK AND SCHOLEΣ ΚΑΙ VG	100
6.2.1 Αξιολόγηση της απόδοσης της μεθόδου βαθμονόμησης	100
6.2.2 Εκτίμηση των παραμέτρων με χρήση της μεθόδου βαθμονόμησης	101
6.3 ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ESSCHER	104
6.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	109
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	111
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	128

Κατάλογος Πινάκων

6.1	Τιμές του αξιογράφου συναρτήσει των αντίστοιχων τιμών εξάσκησης	99
6.2	Τιμές της παραμέτρου h^* και των μετασχηματισμένων παραμέτρων ($\sigma, \tilde{\nu}, \tilde{\theta}$).	105
6.3	Σύγκριση των υποδειγμάτων ως προς το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.	108

Κατάλογος Σχημάτων

3.1	Οι βασικές σχέσεις μεταξύ των διαδικασιών Lévy, των απείρως διαιρετών κατανομών και των τριάδων Lévy.	53
4.1	Μέτρο Lévy της διαδικασίας VG για διαφορετική σύνθεση των παραμέτρων. . . .	65
4.2	Συνάρτηση πυκνότητας της διαδικασίας VG για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων. 66	
4.3	Τρεις διαδρομές της διαδικασίας VG $X_{t;\sigma,\nu,\theta}^{VG}$ με παραμέτρους $(\sigma, \nu, \theta) = (1, 1, 0)$ (αριστερά) και $(\sigma, \nu, \theta) = (2, 2, 0)$ (δεξιά).	72
6.1	Επιφάνεια της αντικειμενικής συνάρτησης της μεθόδου μη-γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων για το υπόδειγμα VG, ως προς τις παραμέτρους σ, ν	100
6.2	Διάγραμμα των ισοϋψών καμπυλών της αντικειμενικής συνάρτησης της μεθόδου μη-γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων για το υπόδειγμα VG, ως προς τις παραμέτρους σ, ν	101
6.3	Σύγκριση των παρατηρούμενων τιμών με τις αντίστοιχες που προκύπτουν από την βαθμονόμηση των υποδειγμάτων.	102
6.4	Επιφάνεια σφάλματος τιμολόγησης μεταξύ των υποδειγμάτων VG και Black and Scholes ως προς το moneyness (S/K) και τον χρόνο έως την λήξη.	103
6.5	Σύγκριση των τιμών των διακαιωμάτων προαίρεσης που προκύπτουν από τα υποδείγματα VG και Black and Scholes ως συνάρτηση του moneyness, για διαφορετικούς χρόνους έως τη λήξη.	104
6.6	Γραφική απεικόνιση της συνάρτησης $H(h)$ (αριστερό διάγραμμα) και της λύσης h^* ως συνάρτηση του επιτοκιακού ρυθμού για $(\sigma, \nu, \theta) = (0.141, 0.0031, -0.194)$, $h_1 = -170.7625$ και $h_2 = 190.1833$	105
6.7	Συναρτήσεις κατανομής του μετασχηματισμού Esscher της διαδικασίας VG με χρήση του αλγορίθμου FFT, για διαφορετικούς χρόνους εξάσκησης.	107
6.8	Σύγκριση των τιμών του παραγώγου SPX και των εκτιμώμενων τιμών που προκύπτουν από τη βαθμονόμηση των παραμέτρων των υποδειγμάτων VG και Black-Scholes, καθώς και από την εφαρμογή του μετασχηματισμού Esscher στη διαδικασία VG ως προς την τιμή εξάσκησης, για διαφορετικούς χρόνους εξάσκησης. 108	

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μετά από την παρουσίαση του έργου των Black, Scholes και Merton στην τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου, το υπόδειγμα που εισήγαγαν καθιερώθηκε ως σημείο αναφοράς και αποτελεί έως σήμερα τη θεωρητική και πρακτική βάση της σύγχρονης χρηματοοικονομικής μοντελοποίησης. Υπό το υπόδειγμα των Black and Scholes η стоχαστική αβεβαιότητα των λογαριθμικών αποδόσεων των αξιογράφων θεωρείται ότι περιγράφεται από την κίνηση Brown, μια διαδικασία διάχυσης για την οποία γίνεται η απλουστευτική υπόθεση ότι η μεταβλητότητα (volatility) του υποκείμενου τίτλου παραμένει σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα παρατήρησης. Σε πλήρη αναντιστοιχία με τις υποθέσεις του υποδείγματος, πληθώρα ερευνητικών μελετών καταγράφουν ότι η μεταβλητότητα των περιουσιακών τίτλων δεν παραμένει σταθερή διαχρονικά, αλλά ομαδοποιείται σε συστάδες οι οποίες συνδέονται με διαφορετικές φάσεις του οικονομικού χρονικού κύκλου. Οι συστάδες αυτές αντιστοιχούν σε διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας και κινδύνου, υποδηλώνοντας ότι η δυναμική της μεταβλητότητας είναι κατ' ουσία χρονικά μεταβαλλόμενη. Βέβαια, ο ορισμός των φάσεων του οικονομικού χρονικού κύκλου και ποιο μέτρο είναι καταλληλότερο για τον χαρακτηρισμό της εν λόγω χρονικής συνιστώσας, δεν αποτελεί μονοσήμαντη επιλογή και καθορίζεται συχνά μέσω εμπειρικών τεκμηρίων ή από το σκοπό της εκάστοτε ανάλυσης.

Η ανωτέρω ασυμβατότητα του μοντέλου των Black and Scholes με τα εμπειρικά δεδομένα οδήγησε στην ανάγκη επέκτασης της κλασικής θεωρίας αποτίμησης παραγώγων. Μια σημαντική κλάση επεκτάσεων περιλαμβάνει την εισαγωγή ασυνεχειών στη δυναμική της υποκείμενης διαδικασίας, μέσω προσθήκης μιας άλματικής συνιστώσας. Σε αυτή τη κατηγορία επεκτάσεων, οι Dilip Madan και Eugene Seneta (1990), εισήγαγαν μια καθαρά άλματική στοχαστική διαδικασία, τη διαδικασία Variance–Gamma, προκειμένου να αποτυπώσουν την παρουσία συχνών και ενίοτε έντονων κατακόρυφων μεταβολών των περιουσιακών τίτλων, οι οποίες δεν μπορούν να περιγραφούν επαρκώς από ένα μοντέλο διάχυσης. Το τριπαραμετρικό υπόδειγμα Variance–Gamma, πέραν της παραμέτρου μεταβλητότητας, εισάγει δύο επιπλέον παραμέτρους, οι οποίες (σε αντίθεση με την κανονική κατανομή) αποτυπώνουν πιο σύνθετα χαρακτηριστικά της κατανομής των λογαριθμικών αποδόσεων, όπως η ασυμμετρία και η κύρτωση. Με τον τρόπο αυτό το υπόδειγμα καθίσταται ικανό να αναπαράγει με μεγαλύτερη ακρίβεια την κίνηση των αξιογράφων, τα οποία, όπως εμπειρικά έχει διαπιστωθεί, καταγράφουν παχύτερες ουρές και υψηλότερη κύρτωση σε σύγκριση με την κανονική κατανομή.

Οι D. Madan, P. Carr και E. Chang (1998), αξιοποιώντας τις ωφέλιμες ιδιότητες της διαδικασίας Variance–Gamma, προσδιόρισαν τον αντίστοιχο αναλυτικό τύπο αποτίμησης, ανάλογο με τον αξιοσημείωτο τύπο των Black and Scholes, για τον υπολογισμό της δίκαιης no–arbitrage αξίας ενός δικαιώματος προαίρεσης. Παράλληλα, πλήθος ερευνητών, αναγνωρίζοντας την συμβολή των D. Madan και E. Seneta, επιχείρησε να προσεγγίσει την τιμή του παραγώγου μέσω εναλλακτικών μεθόδων, αξιοποιώντας τόσο αναλυτικές όσο και αριθμητικές τεχνικές, με στόχο τη βελτίωση της ακρίβειας αποτίμησης.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η αξιολόγηση της επίδοσης του υποδείγματος τιμολόγησης Variance–Gamma, έναντι του υποδείγματος Black and Scholes, με έμφαση στον εντοπισμό και την ανάλυση των σημείων στα οποία τα δύο μοντέλα διαφοροποιούνται τόσο σε θεωρητικό όσο και σε εμπειρικό επίπεδο. Προκειμένου να καταστεί αυτό εφικτό, κρίνεται αναγκαία η παρουσίαση των βασικών θεωρητικών εργαλείων που απαιτούνται με σκοπό την κατανόηση των ιδιοτήτων της διαδικασίας Variance–Gamma, καθώς και της κλάσης των στοχαστικών διαδικασιών στην οποία αυτή επάγεται. Για τον σκοπό αυτό, η εργασία δομείται σε τρία μέρη εκ των οποίων στο πρώτο (Κεφάλαιο 2 και 3) παρατίθεται το βασικό θεωρητικό υπόβαθρο των στοχαστικών διαδικασιών, καθώς και των διαδικασιών Lévy, οι οποίες αποτελούν την ευρύτερη κλάση στοχαστικών διαδικασιών στην οποία εντάσσεται η διαδικασία VG. Στο δεύτερο μέρος (Κεφάλαιο 4 και 5) πραγματοποιείται μια εκτενής ανάλυση των χαρακτηριστικών των διαδρομών της διαδικασίας Variance–Gamma, και παρουσιάζονται οι βασικές μέθοδοι αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης όταν η δυναμική του υποκείμενου τίτλου περιγράφεται από την εν λόγω διαδικασία. Τέλος, στο τρίτο μέρος (Κεφάλαιο 6) με χρήση του προγραμματιστικού πακέτου R, εφαρμόζονται οι προαναφερθείσες μέθοδοι σε πραγματικά δεδομένα της αγοράς, με στόχο την εμπειρική αξιολόγηση της επίδοσης του προτεινόμενου υποδείγματος. Αναλυτικότερα:

- Στο **Κεφάλαιο 2** πραγματοποιείται μια αναδρομή στα βασικά στοιχεία της θεωρίας μέτρου και των στοχαστικών διαδικασιών, παρουσιάζοντας τις θεμελιώδεις έννοιες οι οποίες θα θεωρούνται δεδομένες στα επόμενα Κεφάλαια.
- Το **Κεφάλαιο 3** αποσκοπεί στην εισαγωγή του αναγνώστη στη θεωρία των διαδικασιών Lévy, καθώς και στην παρουσίαση των ιδιοτήτων οι οποίες προσδιορίζουν μονοσήμαντα την εν λόγω κλάση. Ειδικότερα, εξετάζονται οι απείρως διαιρετές κατανομές και αναδεικνύεται η ένα-προς-ένα αντιστοιχία τους με την τριάδα Lévy, η οποία θεμελιώνεται μέσω της αναπαράστασης Lévy–Khintchine. Τέλος, γίνεται μια σύντομη αναφορά στο μέτρο Poisson το οποίο είναι σημαντικό για την κατασκευή της κανονικής μορφής των διαδικασιών Lévy, γνωστή ως αποσύνθεση Lévy–Itô.
- Στο **Κεφάλαιο 4** παρουσιάζεται αναλυτικά η διαδικασία Variance–Gamma, με ιδιαίτερη έμφαση στη μορφή του μέτρου Lévy που της αντιστοιχεί. Στη συνέχεια, δίνεται η ερμηνεία των παραμέτρων της διαδικασίας, αναδεικνύοντας τον τρόπο με τον οποίο η μεταβολή τους επηρεάζει τη μορφή του μέτρου Lévy, και κατ’ επέκταση τη συμπεριφορά των διαδρομών της διαδικασίας Variance–Gamma. Τέλος, δίνονται δύο αλγόριθμοι προσομοίωσης των διαδρομών της διαδικασίας.
- Στο **Κεφάλαιο 5** παρέχουμε μια αναλυτική παρουσίαση του υποδείγματος των Black and Scholes, ξεκινώντας από την θεωρία των αυτοχρηματοδοτούμενων χαρτοφυλακίων και των πλήρων αγορών, καθώς και από τη θεμελιώδη αρχή της απουσίας ευκαιριών για arbitrage, οι οποίες συνιστούν τα θεωρητικά θεμέλια της αποτίμησης παραγώγων. Στο πλαίσιο αυτό διατυπώνεται η Risk-Neutral Pricing Formula και παρουσιάζεται ο κλασικός τύπος των Black and Scholes. Ακολούθως, αναλύονται οι βασικές ασυνέπειες του υποδείγματος των Black and Scholes ως προς την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης, οι οποίες αναδεικνύουν την ανάγκη χρήσης εναλλακτικών προσεγγίσεων αποτίμησης. Στο πλαίσιο αυτό παρουσιάζονται δύο μεθοδολογικές προσεγγίσεις για την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης υπό το υπόδειγμα Variance–Gamma: η προσέγγιση που βασίζεται στον αναλυτικό τύπο που εισήγαγαν οι D. Madan, P. Carr και E. Chang (1998) και η προσέγγιση που στηρίζεται στο μετασχηματισμό Esscher.

- Στο **Κεφάλαιο 6** παρουσιάζεται η υλοποίηση των ανωτέρω μεθόδων αποτίμησης με χρήση της μεθόδου βαθμονόμησης των παραμέτρων και της εφαρμογής του μετασχηματισμού Esscher. Παράλληλα, παρατίθενται και αναλύονται τα εμπειρικά αποτελέσματα που προκύπτουν σχετικά με την ισχύ του προτεινόμενου υποδείγματος Variance–Gamma.
- Στο **Παράρτημα** παρουσιάζεται ο σχετικός κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή των αποτελεσμάτων που αντιστοιχούν στα ανωτέρω Κεφάλαια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο, πραγματοποιείται μια σύντομη ανασκόπηση κάποιων βασικών μαθηματικών εννοιών και εργαλείων από τη θεωρία μέτρου και τη θεωρία πιθανοτήτων, τα οποία θα μας βοηθήσουν να παρουσιάσουμε την βασική ορολογία που θα χρησιμοποιηθεί καθ' όλη την διάρκεια της παρούσας εργασίας, και να θέσουμε τα θεμέλια για τη μελέτη κάποιων βασικών χρηματοοικονομικών μοντέλων.

2.1 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΜΕΤΡΟΥ

2.1.1 Εισαγωγή στην έννοια του μέτρου

Η έννοια του μέτρου αποτελεί μια απλή γενίκευση πιο διαδεδομένων και γνωστών εννοιών όπως αυτών του μήκους, του όγκου ή της επιφάνειας, σε πιο αφηρημένα σύνολα. Πριν ορίσουμε πιο αυστηρά την έννοια του μέτρου, υπενθυμίζουμε συνοπτικά κάποιες βασικές έννοιες από την θεωρία συνόλων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.1 (σ-άλγεβρα) Έστω ένα σύνολο E , και ας θεωρήσουμε μια συλλογή υποσυνόλων του E , έστω \mathcal{E} , η οποία

- 1) Περιέχει το κενό σύνολο, δηλαδή $\emptyset \in \mathcal{E}$.
- 2) Για κάθε ακολουθία $(A_n, n \geq 1)$ ξένων υποσυνόλων του E , τότε $\bigcup_{n=1} A_n \in \mathcal{E}$.
- 3) Περιέχει το συμπληρωματικό σύνολο κάθε στοιχείου της συλλογής \mathcal{E} , δηλαδή για κάθε $A \in \mathcal{E}$, απαιτούμε το $A^c \in \mathcal{E}$.

Μια τέτοια συλλογή υποσυνόλων καλείται *σ-άλγεβρα* και τα στοιχεία της καλούνται *μετρήσιμα σύνολα*.

Για την κατασκευή σ-αλγεβρών συνήθως ξεκινάμε με μια συλλογή συνόλων που θα θέλαμε να είναι μετρήσιμα και προσθέτουμε νέα σύνολα, φροντίζοντας η συλλογή να ικανοποιεί την ιδιότητα κλειστότητας ως προς την συμπλήρωση και τις αριθμήσιμες ενώσεις των μελών της. Με αυτό το τρόπο επεκτείνουμε την συλλογή, έως ότου η τελική οικογένεια συνόλων να σχηματίζει μια σ-άλγεβρα. Το ακόλουθο αποτέλεσμα εξασφαλίζει ότι η παραπάνω διαδικασία είναι πάντα ικανή για την κατασκευή τέτοιων συλλογών.

Πρόταση 2.1.1 Δεδομένης μιας συλλογής \mathcal{A} υποσυνόλων του E υπάρχει μοναδική σ -άλγεβρα, και συμβολικά γράφουμε $\sigma(\mathcal{A})$, για την οποία ισχύει ότι:

Αν μια οποιαδήποτε σ -άλγεβρα \mathcal{F}' περιέχει την συλλογή \mathcal{A} , τότε $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}'$. Η σ -άλγεβρα $\sigma(\mathcal{A})$ είναι η μικρότερη σ -άλγεβρα που περιέχει την \mathcal{A} και ονομάζεται σ -άλγεβρα που παράγεται από την \mathcal{A} .

Η σ -άλγεβρα που παράγεται από όλα τα ανοιχτά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών καλείται σ -άλγεβρα *Borel*. Η σ -άλγεβρα Borel θα συμβολίζεται με $\mathcal{B}(E)$ ή απλά \mathcal{B} και όλα τα σύνολα τα οποία ανήκουν σε αυτήν, θα λέγονται σύνολα Borel.

Πρόταση 2.1.2 Η οικογένεια \mathcal{B} των Borel συνόλων πληροί τις παρακάτω ιδιότητες:

- 1) η οικογένεια \mathcal{B} περιέχει όλα τα κλειστά υποσύνολα του \mathbb{R} .
- 2) αν $A \in \mathcal{B}$ τότε $\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{B}$.
- 3) Για κάθε ακολουθία $(A_n, n \geq 1)$ ξένων υποσυνόλων του E , τότε $\bigcap_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{B}$.

Οι ιδιότητες 1) και 2) προκύπτουν άμεσα από τον Ορισμό 2.1.1, ενώ η ιδιότητα 3) από τους τύπους του De Morgan. Παρακάτω θα δούμε ότι ο ορισμός μέτρου επί του \mathcal{B} θα εξασφαλίσει ότι όλα τα ανοιχτά και κλειστά σύνολα είναι μετρήσιμα.

Ορισμός 2.1.2 (Η έννοια του μέτρου) Έστω ένα σύνολο E και \mathcal{F} μια σ -άλγεβρα υποσυνόλων του E . Το ζεύγος (E, \mathcal{F}) καλείται *μετρήσιμος χώρος*. Ένα *μέτρο* επί του (E, \mathcal{F}) ορίζεται ως μια απεικόνιση

$$\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty], \quad A \mapsto \mu(A)$$

τέτοια ώστε:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) Για οποιαδήποτε ακολουθία ξένων συνόλων $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$,

$$\mu \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$$

Αυτή η αριθμησιμη προσθετική ιδιότητα είναι γνωστή στην βιβλιογραφία ως σ -προσθετικότητα.

Από τον παραπάνω ορισμό είδαμε ότι το μέτρο μ αποτελεί μια συνολοσυνάρτηση η οποία αντιστοιχίζει ένα οποιοδήποτε μετρήσιμο σύνολο $A \in \mathcal{F}$ σε έναν θετικό πραγματικό αριθμό $\mu(A) \in [0, \infty]$, ο οποίος καλείται *μέτρο του A* . Το μέτρο ενός συνόλου A μπορεί να είναι πεπερασμένο ή το άπειρο. Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι, αν $\mu(E) < \infty$, τότε για κάθε μετρήσιμο σύνολο A , εφόσον το συμπλήρωμα του επαληθεύει την σχέση $A \cup A^c = E$, η προσθετική ιδιότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθορίσουμε το μέτρο του συμπληρώματος A^c ως $\mu(A^c) = \mu(E) - \mu(A)$.

Κάθε μέτρο που ορίζεται στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, καλείται *μέτρο Borel*. Ένα από τα πιο γνωστά παραδείγματα ενός μέτρου Borel είναι το *μέτρο Lebesgue*. Για οποιοδήποτε σύνολο A της οικογένειας των Borel συνόλων, το μέτρο Lebesgue δίνεται από τον τύπο

$$\lambda(A) = \int_A dx$$

Επιπλέον, για κάθε θετική συνεχή συνάρτηση $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, μπορεί κανείς να ορίσει ένα μέτρο στο \mathbb{R}

$$\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$$

$$A \mapsto \mu(A) = \int_A \rho(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x) \rho(x) dx$$

Η συνάρτηση ρ καλείται *πυκνότητα του μ ως προς το μέτρο Lebesgue λ* .

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, αν μ είναι ένα μέτρο επί του μετρήσιμου χώρου (E, \mathcal{F}) , το $\mu(E)$ δεν χρειάζεται να είναι πεπερασμένο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.3 (Πεπερασμένο μέτρο) Ένα μέτρο μ επί του μετρήσιμου χώρου (E, \mathcal{F}) καλείται *πεπερασμένο* αν $\mu(E) < \infty$. Η ποσότητα $\mu(E)$ καλείται *συνολική μάζα του μέτρου μ* .

Από τον προηγούμενο ορισμό είναι προφανές ότι για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subset E$ με $\mu(E) < \infty$, το $\mu(A)$ είναι πεπερασμένο. Ένα πεπερασμένο μέτρο με συνολική μάζα 1 καλείται *μέτρο πιθανότητας* και η τριάδα (E, \mathcal{F}, μ) καλείται *πιθανοθεωρητικός χώρος*. Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι δεν είναι όλα τα μέτρα πεπερασμένα, με χαρακτηριστικό παράδειγμα να αποτελεί η περίπτωση του μέτρου Lebesgue στο \mathbb{R} , του οποίου η συνολική μάζα είναι το άπειρο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.4 (σ -πεπερασμένο μέτρο) Ένα μέτρο μ επί ενός μετρήσιμου χώρου (E, \mathcal{F}) , καλείται *σ -πεπερασμένο* αν μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $(A_n, n \geq 1)$ υποσυνόλων του \mathcal{F} τέτοια ώστε να ορίζει μια διαμέριση του E , δηλαδή $\cup_{n \geq 1} A_n = E$ με $A_{n_1} \cap A_{n_2} = \emptyset$, για κάθε $n_1 \neq n_2$, με $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, και $\mu(A_n) < \infty, \forall n$.

2.1.2 Μετρήσιμες συναρτήσεις και ολοκληρωσιμότητα

Ας θεωρήσουμε δύο μετρήσιμους χώρους (F, \mathcal{F}) και (E, \mathcal{E}) , και έστω μια συνάρτηση $f : F \rightarrow E$. Σε αυτό το σημείο μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε ένα μέτρο σε ένα σύνολο της μορφής

$$\{x \in F, f(x) \in A\}, \forall A \in \mathcal{E}$$

Ωστόσο, δεν υπάρχει λόγος να θεωρήσουμε ότι το παραπάνω σύνολο είναι μετρήσιμο. Η ιδιότητα αυτή εξασφαλίζεται αν θεωρήσουμε ότι η δεδομένη συνάρτηση είναι μετρήσιμη

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.5 (Μετρήσιμη συνάρτηση) Μία συνάρτηση $f : E \rightarrow F$ καλείται *μετρήσιμη*, αν για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \in \mathcal{E}$, το σύνολο

$$f^{-1}(A) = \{x \in E, f(x) \in A\}$$

είναι μετρήσιμο υποσύνολο του E και συμβολικά γράφουμε $[f \in A]$. Επιπλέον, η f καλείται *\mathcal{F} -μετρήσιμη* αν κάθε σύνολο της μορφής $[f \in A] \in \mathcal{F}$.

Γενικά η έννοια της μετρησιμότητας είναι επιθυμητό να ορίζεται έτσι ώστε όλες οι συνεχείς συναρτήσεις να είναι μετρήσιμες. Κάτι τέτοιο μπορεί εύκολα να εξασφαλιστεί αν περιοριστούμε στην οικογένεια των Borel συνόλων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.6 (Borel-μετρήσιμη συνάρτηση) Έστω δύο μετρικοί χώροι X και Y , εφοδιασμένοι με την ευκλείδεια μετρική. Η συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ καλείται *Borel-μετρήσιμη* αν αντιστρέφει τα ανοικτά υποσύνολα του Y σε Borel υποσύνολα του X , δηλαδή για κάθε ανοικτό $U \subseteq Y$ έχουμε $f^{-1}(U) \subseteq \mathcal{B}(X)$.

Προφανώς, κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ είναι Borel-μετρήσιμη γιατί για κάθε ανοικτό $U \subseteq Y$ το σύνολο $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό και συνεπώς Borel. Το αντίστροφο δεν ισχύει (βλέπε συνάρτηση Dirichlet).

Έστω τώρα ένας μετρήσιμος χώρος (E, \mathcal{E}) . Μια μετρήσιμη συνάρτηση καλείται *απλή* αν

$$f = \sum_{j=1}^n c_j 1_{A_j}$$

για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, όπου $c_j \in \mathbb{R}$ και $A_j \in \mathcal{E}$ με $1 \leq j \leq n$. Η συνάρτηση 1_A που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο άθροισμα καλείται *δείκτρια συνάρτηση* και παίρνει τις τιμές 1 αν $x \in A$ και 0 διαφορετικά.

Μια σημαντική ιδιότητα των μετρήσιμων συναρτήσεων είναι ότι μπορούν να γραφούν ως άθροισμα του θετικού και του αρνητικού μέρους τους. Πιο συγκεκριμένα, αν $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση, τότε το θετικό μέρος της συνάρτησης f ορίζεται ως $f^+ = \max(f(x), 0)$, ενώ το αρνητικό μέρος ορίζεται ως $f^- = -\min(f(x), 0)$, για οποιοδήποτε $x \in E$. Αν f^+ , f^- είναι πεπερασμένες συναρτήσεις, τότε η συνάρτηση f γράφεται και με την ακόλουθη μορφή

$$f = f^+ - f^-$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.7 (Ολοκληρωσιμότητα απλών συναρτήσεων) Έστω $\Sigma(E)$ ο γραμμικός χώρος όλων των απλών συναρτήσεων, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, και ας θεωρήσουμε ένα μέτρο μ στον μετρήσιμο χώρο (E, \mathcal{E}) . Το *ολοκλήρωμα της συνάρτησης f ως προς το μέτρο μ* , είναι μια γραμμική αντιστοίχιση από το $\Sigma(E)$ στο \mathbb{R} , και ορίζεται ως

$$I_\mu(f) = \sum_{j=1}^n c_j \mu(A_j)$$

Ο παραπάνω ορισμός επεκτείνεται για οποιαδήποτε θετική μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, θέτοντας

$$I_\mu(f) = \sup \{I_\mu(\varphi) \mid \varphi \text{ απλή συνάρτηση και } \varphi \leq f\}$$

ενώ δεν τίθεται ο περιορισμός το ολοκλήρωμα $I_\mu(f)$ να είναι πεπερασμένο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.8 (Ολοκληρωσιμότητα μετρήσιμων συναρτήσεων) Έστω μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ και μ ένα μέτρο επί του μετρήσιμου χώρου (E, \mathcal{E}) . Αν τα ολοκληρώματα $I_\mu(f^+)$ και $I_\mu(f^-)$ είναι πεπερασμένα, τότε η συνάρτηση f λέγεται ότι είναι μ -ολοκληρώσιμη και το ολοκλήρωμα της γράφεται ως η διαφορά

$$I_\mu(f) = I_\mu(f^+) - I_\mu(f^-)$$

Όταν το μ είναι το μέτρο Lebesgue, το ολοκλήρωμα $I_\mu(f)$ είναι απλά το ολοκλήρωμα Lebesgue της f , και γράφουμε

$$I_\mu(f) = \int_{x \in E} f(x) \mu(dx) = \int_E f d\mu$$

Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση f λέγεται ότι είναι *Lebesgue-ολοκληρώσιμη*.

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο μέτρα, έστω μ_1 και μ_2 τα οποία ορίζονται επί του ίδιου μετρήσιμου χώρου (E, \mathcal{E}) .

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.9 (Απόλυτη συνέχεια) Το μέτρο μ_2 λέγεται ότι είναι *απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο μ_1* , όταν για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \in \mathcal{E}$ έχουμε ότι

$$\mu_1(A) = 0 \Rightarrow \mu_2(A) = 0$$

και συμβολικά γράφουμε ότι $\mu_1 \ll \mu_2$. Τα μέτρα μ_1 και μ_2 λέγεται ότι είναι *ισοδύναμα* αν $\mu_1 \ll \mu_2$ και $\mu_2 \ll \mu_1$.

Ένα βασικό αποτέλεσμα του παραπάνω ορισμού δίνεται από το επόμενο θεώρημα, το οποίο είναι γνωστό και ως *Θεώρημα Radon-Nikodym*.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.10 (Θεώρημα Radon-Nikodym) Αν το μέτρο μ_2 είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο μ_1 τότε υπάρχει μια συνάρτηση $f : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ τέτοια ώστε για κάθε μετρήσιμο σύνολο A

$$\mu_2(A) = \int_A f d\mu_1 = \mu_1(f1_A)$$

Η συνάρτηση f καλείται *πυκνότητα* ή *Radon-Nikodym παράγωγος* του μ_2 ως προς το μ_1 και συμβολικά γράφουμε

$$f = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}$$

2.1.3 Τυχαίες μεταβλητές και μέση τιμή

Σε αυτή την παράγραφο θα προβούμε σε διεξοδική μελέτη της έννοιας του μέτρου πιθανότητας, στο οποίο αναφερθήκαμε, αν και αρκετά φευγαλέα, στα προηγούμενα, ενώ παράλληλα θα ορίσουμε μια νέα κατηγορία μετρήσιμων συναρτήσεων, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε για την μετάβαση μας από το σύνολο των πειραματικών αποτελεσμάτων σε αριθμητικά μεγέθη που καθορίζονται από αυτά.

Έστω Ω ένα σύνολο εφοδιασμένο με μία σ -άλγεβρα \mathcal{F} . Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε ότι το Ω αναπαριστά το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης, ενώ η σ -άλγεβρα \mathcal{F} θα θεωρείται ως το σύνολο όλων των πιθανών ενδεχομένων του. *Μέτρο πιθανότητας* στο χώρο (Ω, \mathcal{F}) θα λέγεται ένα πεπερασμένο μέτρο με συνολική μάζα 1 και θα συμβολίζεται με P , ενώ ο χώρος (Ω, \mathcal{F}, P) θα λέγεται *πιθανοθεωρητικός χώρος* ή απλά *χώρος πιθανότητας*. Τα σύνολα που εμπεριέχονται στην σ -άλγεβρα \mathcal{F} καλούνται *ενδεχόμενα* και για αυτά μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα. Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου ορίζεται ως ένα μέτρο το οποίο λαμβάνει τιμές στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$, δηλαδή

$$P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

Ένα ενδεχόμενο με πιθανότητα 1, λέμε ότι συμβαίνει *σχεδόν βέβαια*. Αντίθετα, αν ένα ενδεχόμενο έχει μηδενική πιθανότητα, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο είναι *απίθανο*.

Δύο πιθανοθεωρητικά μέτρα P και Q που ορίζονται επί του χώρου (Ω, \mathcal{F}) είναι *ισοδύναμα* ή *συγκρίσιμα* όταν

$$P \sim Q \Leftrightarrow [\forall A \in \mathcal{F}, P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0]$$

δηλαδή αποδίδουν πιθανότητα μηδέν στα ίδια ενδεχόμενα. Ο συγκεκριμένος ισχυρισμός είναι ισοδύναμος με την έννοια της απόλυτης συνέχειας που συναντήσαμε παραπάνω.

Όταν μας δίνεται ένας χώρος πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) , τότε οι μετρήσιμες απεικονίσεις από τον Ω στο \mathbb{R} ονομάζονται *τυχαίες μεταβλητές* και συμβολίζονται συνήθως με X, Y, \dots .

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.10 (Τυχαία μεταβλητή) Μια τυχαία μεταβλητή X με τιμές στο $E \subset \mathbb{R}$ καλείται μία μετρήσιμη συνάρτηση $X : \Omega \rightarrow E$, όπου (Ω, \mathcal{F}, P) είναι χώρος πιθανότητας. Το $X(\omega)$, όπου $\omega \in \Omega$, περιγράφει το αποτέλεσμα της τυχαίας μεταβλητής αν συμβεί το ω και αναφέρεται ως η *πραγματοποίηση της X στο ω* . Οι τιμές τους θεωρούνται ως τα αποτελέσματα ποσοτικών παρατηρήσεων στο σύνολο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.11 Αν X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές και (Ω, \mathcal{F}, P) ένας χώρος πιθανότητας, τότε γράφουμε ότι $X = Y$ *P -σχεδόν παντού*, αν

$$P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$$

Γενικά θα λέμε ότι μια σχέση ισχύει *P -σχεδόν παντού* ή *P -σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$* αν ισχύει για κάθε $\omega \in \Omega$ εκτός ίσως από ένα μετρήσιμο σύνολο $A \subset \Omega$ με $\mu(A) = 0$.

Οι τυχαίες μεταβλητές αποτελούν ένα από τα πιο σημαντικά εργαλεία της θεωρίας πιθανοτήτων, καθώς μας δίνουν την δυνατότητα να περιγράψουμε με ευκολία τα ενδεχόμενα που

μας ενδιαφέρουν. Έτσι, αν για παράδειγμα θεωρήσουμε το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου, όπου μελετάται η εξέλιξη της τιμής μιας μετοχής μεταξύ δυο διαδοχικών μεταβολών της, και θεωρώντας τον χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) όπου Ω είναι το σύνολο όλων των δυνατών σεναρίων (όπως άνοδος ή πτώση της τιμής της μετοχής), τότε το σύνολο $[X \in A]$, όπου X τυχαία μεταβλητή που αποδίδει σε κάθε σενάριο την τελική τιμή της μετοχής μετά το βήμα, συγκεντρώνει όλα τα όλα εκείνα τα σενάρια της αγοράς όπου η τελική τιμή ανήκει στο A . Με αυτό τον τρόπο η τυχαία μεταβλητή ομαδοποιεί όλα εκείνα τα τυχαία σενάρια του Ω για τα οποία αποδίδει τιμές σε κάποιο διάστημα της πραγματικής ευθείας.

Ωστόσο, θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί, πως μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ενδεχομένων που σχετίζονται με τις τυχαίες μεταβλητές. Το πρόβλημα της ποσοτικοποίησης τέτοιων ενδεχομένων ανάγεται στον καθορισμό ενός μέτρου πιθανότητας που καθορίζει πλήρως την συμπεριφορά της τυχαίας μεταβλητής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.12 (Νόμος τυχαίων μεταβλητών) Έστω (Ω, \mathcal{F}, P) ένας χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \rightarrow E \subset \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή. *Νόμος ή κατανομή της X* είναι το μέτρο πιθανότητας στο E που ορίζεται από

$$p_X(A) = P(X \in A) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \in A)$$

Επομένως, αντί να περιγράφουμε την πιθανότητα των γεγονότων στο Ω , μεταφέρουμε την πιθανότητα στον χώρο E , όπου λαμβάνει τιμές η τυχαία μεταβλητή X , και άρα θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι η κατανομή p_X είναι η εικόνα του μέτρου P μέσω της απεικόνισης X .

Αν δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν την ίδια κατανομή, δηλαδή $p_X = p_Y$, τότε τα X και Y λέγεται ότι είναι *ισοδύναμα κατά κατανομή* και γράφουμε $X \stackrel{d}{=} Y$. Προφανώς αν $X = Y$ P -σχεδόν παντού, τότε είναι και $X \stackrel{d}{=} Y$.

Ας θεωρήσουμε τώρα, μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \rightarrow E \subset \mathbb{R}$ επί του χώρου πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) . Αν υπάρχει Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$p_X(A) = \int_A f_X d\lambda = \int_A f_X(x) dx$$

όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue, τότε η f_X καλείται *συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X* . Από τα παραπάνω μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας υπάρχει αν η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής είναι απόλυτα συνεχές μέτρο ως προς το μέτρο Lebesgue, σύμφωνα με το Θεώρημα Radon-Nikodym. Επιπλέον, η συνάρτηση πυκνότητας f_X που ορίσαμε δεν είναι τίποτε άλλο από την Radon-Nikodym παράγωγο του p_X ως προς το μέτρο Lebesgue λ , δηλαδή ορίζεται από τον τύπο

$$f_X = \frac{dp_X}{dx}.$$

Στην προηγούμενη παράγραφο, αναφέραμε ότι αν μ είναι ένα μέτρο επί ενός μετρήσιμου χώρου (E, \mathcal{E}) και $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση, τότε μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης f ως προς το μέτρο του χώρου, ως μια απεικόνιση από το σύνολο των μετρήσιμων συναρτήσεων στην πραγματική ευθεία. Στην περίπτωση που θεωρούμε τον χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) , τότε η απεικόνιση I_P (δηλαδή το ολοκλήρωμα της συνάρτησης

f ως προς το μέτρο πιθανότητας) καλείται *μέση τιμή* και συμβολίζεται με E_P . Επομένως, αν $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή, τότε η μέση τιμή της X ως προς το μέτρο P ορίζεται από τον ακόλουθο τύπο

$$E_P(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x dp_X(x)$$

Αν, επιπλέον, αξιοποιήσουμε το αποτέλεσμα του Θεωρήματος Radon-Nikodym, τότε η μέση τιμή γράφεται απλούστερα στη μορφή

$$E_P(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$$

όπου f_X είναι η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X . Το παραπάνω ολοκλήρωμα υπάρχει αν τα ολοκληρώματα $E_P(X^+)$ και $E_P(X^-)$ είναι πεπερασμένα ή, ισοδύναμα, αν $E_P(|X|) < \infty$ και σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι *P-ολοκληρώσιμη*. Από μια πιθανολογική σκοπιά, η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X απεικονίζει την μακροπρόθεσμη συμπεριφορά της, ιδιότητα που της προσδίδει προβλεπτικό χαρακτήρα, επιτρέποντας, υπό συγκεκριμένες συνθήκες (όπως αυτές ορίζονται από τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών), τον υπολογισμό της τιμής της X που είναι πιθανότερο να παρατηρηθεί σε μεγάλο πλήθος επαναλήψεων ενός πειράματος τύχης. Έτσι, η μέση τιμή λειτουργεί ως ένα κεντρικό σημείο αναφοράς γύρω από το οποίο συσσωρεύονται οι τιμές της X .

Αν $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια Borel-μετρήσιμη συνάρτηση και $X : E \rightarrow \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή, τότε ο ορισμός της μέσης τιμής επεκτείνεται και στην περίπτωση όπου θεωρούμε την σύνθεση $g \circ X$. Πιο συγκεκριμένα, η μέση τιμή της σύνθεσης προκύπτει από τον ακόλουθο τύπο

$$E_P(g(X)) = \int_{\Omega} g(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dp_X(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx$$

Προφανώς, η παραπάνω μέση τιμή υπάρχει αν η σύνθεση $g \circ X$ είναι *P-ολοκληρώσιμη*.

Παρακάτω παρατίθενται κάποιες βασικές ιδιότητες της μέσης τιμής που θα συναντήσουμε αρκετά και σε υπόλοιπα κεφάλαια.

- 1) $E_P(aX + \beta Y) = aE_P(X) + \beta E_P(Y)$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$ και $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές.
- 2) Για οποιαδήποτε κυρτή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αποδεικνύεται ότι

$$f(E_P(X)) \leq E_P(f(X))$$

Η παραπάνω ανισότητα είναι γνωστή και ως ανισότητα Jensen.

- 3) Αν $(X_n, n \in \mathbb{N})$ μια αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών η οποία συγκλίνει σημειακά, σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$, στην τυχαία μεταβλητή X , τότε από θεώρημα μονότονης σύγκλισης προκύπτει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_P(X_n) = E_P(X)$$

- 4) Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, αν $(X_n, n \in \mathbb{N})$ μια ακολουθία *P-ολοκληρώσιμων* τυχαίων μεταβλητών η οποία συγκλίνει κατά σημείο στην X και υπάρχει μια μη αρνητική *P-ολοκληρώσιμη* τυχαία μεταβλητή Y τέτοια ώστε $|X_n| < Y, \forall n \in \mathbb{N}$, τότε η X είναι *P-ολοκληρώσιμη* και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_P(X_n) = E_P(X)$$

Μια εξίσου σημαντική έννοια, η οποία αξιοποιείται στην θεωρία κατανομών για να περιγράψει τον βαθμό στον οποίο οι τιμές της μεταβλητής αποκλίνουν από την μέση τιμή της, είναι η *διακύμανση*. Σαν διακύμανση, $Var(X)$, της τυχαίας μεταβλητής $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, στον (Ω, \mathcal{F}, P) χώρος πιθανότητας ορίζεται η ποσότητα

$$Var(X) = E_P [(X - E_P(X))^2] = E_P(X^2) - (E_P(X))^2$$

Η διακύμανση αποτυπώνει τον τρόπο με τον οποίο οι παρατηρήσεις της τυχαίας μεταβλητής διασκορπίζονται στο πεδίο τιμών τους, παρέχοντας μια εικόνα του πόσο αβέβαιη ή ασταθής μπορεί να είναι η συμπεριφορά τους.

2.1.4 Δεσμευμένη μέση τιμή

Ας θεωρήσουμε τον χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) , και έστω $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ μια σ-άλγεβρα. Όταν πραγματοποιείται ένα πείραμα το οποίο μοντελοποιεί ο χώρος πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) , η πληροφορία που μας παρέχεται μέσω της \mathcal{M} είναι σε ποια στοιχεία περιέχεται το αποτέλεσμα του πειράματος. Η πληροφορία ενδεχομένως να μην υποδείξει ποιο ακριβώς είναι το ω , αλλά θα το περιορίσει. Γενικότερα, μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε πώς μπορούμε να παράγουμε καλύτερες “εκτιμήσεις” για μια τυχαία μεταβλητή X , δεδομένης κάποιας πληροφορίας \mathcal{M} .

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.13 (Υπό συνθήκη μέση τιμή) Έστω (Ω, \mathcal{F}, P) χώρος πιθανότητας, $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα και $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ μια P -ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή. Μία \mathcal{M} -μετρήσιμη συνάρτηση $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθέντος της πληροφορίας \mathcal{M} , και συμβολικά γράφουμε $Y = E(X | \mathcal{M})$, αν η Y ικανοποιεί την σχέση

$$\int_A Y dP = \int_A X dP$$

ή ισοδύναμα

$$E_P(Y \cdot 1_A) = E_P(X \cdot 1_A)$$

για κάθε $A \in \mathcal{M}$.

Η έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής μας λέει ότι αν θέλουμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της τυχαίας μεταβλητής X σε σύνολα της σ-άλγεβρας \mathcal{M} , δεν είναι ανάγκη να χρησιμοποιήσουμε την X , της οποίας η μορφή ενδέχεται να είναι αρκετά περίπλοκη. Ο υπολογισμός τέτοιων ολοκληρωμάτων μπορεί να καταστεί εφικτός και μέσω της τυχαίας μεταβλητής Y , καθώς όπως είδαμε είναι μια συνάρτηση η οποία είναι μετρήσιμη ως προς μια μικρότερη σ-άλγεβρα, και επομένως αποτελεί ένα απλούστερο αντικείμενο σε σχέση με την τυχαία μεταβλητή X .

Η ύπαρξη και η μοναδικότητα συναρτήσεων όπως αυτών που ορίστηκαν στον *Ορισμό 2.1.13* μπορούν εύκολα να εξασφαλιστούν αν θεωρήσουμε ένα πεπερασμένο μέτρο Q_X στον χώρο (Ω, \mathcal{M}) ως

$$Q_X(A) = E_P(X \cdot 1_A)$$

όπου $E_P(X \cdot 1_A) = \int_A X dP$ για οποιοδήποτε $A \in \mathcal{M}$. Προφανώς, το μέτρο Q_X είναι συνεχές μέτρο ως προς το μέτρο P , και συνεπώς, από το Θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει Borel-

μετρήσιμη συνάρτηση $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$Q_X(A) = \int_A Y dP = \int_A X dP = E_P(X \cdot 1_A)$$

Επιπλέον, προκύπτει άμεσα ότι η δεσμευμένη μέση τιμή μπορεί να εκφραστεί και ως η Radon-Nikodym παράγωγος του μέτρου Q_X ως προς το μέτρο P , δηλαδή δίνεται από την μορφή

$$E_P(X | \mathcal{M}) = \frac{dQ_X}{dP}$$

Έστω τώρα οι τυχαίες μεταβλητές X και Z οι οποίες ορίζονται επί του ίδιου πιθανοθεωρητικού χώρου (Ω, \mathcal{F}, P) . Αν $\mathcal{M} = \sigma(Z) \subset \mathcal{F}$, όπου $\sigma(Z)$ είναι η μικρότερη σ -άλγεβρα του Ω ως προς την οποία η Z είναι μετρήσιμη, τότε γράφουμε $E(X | Z)$, αντί για $E(X | \sigma(Z))$, την δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθείσης της Z . Η $Y = E(X | Z)$ είναι Borel-μετρήσιμη συνάρτηση από το Ω στο \mathbb{R} και κάθε σύνολο $[Y \in B]$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ αποτελεί στοιχείο της $\sigma(Z)$. Επομένως, από το λήμμα Doob-Dynkin, υπάρχει Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$g(Z) = E_P(X | Z)$$

Η $E_P(X | Z)$ ως συνάρτηση του ω είναι σταθερή P -σχεδόν για κάθε ω όπου $Z(\omega)$ είναι σταθερό, και σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε καταχρηστικά τον συμβολισμό

$$g(Z) = E_P(X | Z = z)$$

Στη συνέχεια παρουσιάζονται κάποιες θεμελιώδεις ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής που θα μας φανούν αρκετά χρήσιμες σε επόμενα κεφάλαια. Σε ότι ακολουθεί θεωρούμε ότι (Ω, \mathcal{F}, P) είναι ο χώρος πιθανότητας στον οποίο ορίζεται μια P -ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή X και $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ σ -άλγεβρα.

- 1) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $X_1, X_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{F} -μετρήσιμες και P -ολοκληρώσιμες τυχαίες μεταβλητές τότε

$$E_P(\alpha X_1 + \beta X_2 | \mathcal{M}) = \alpha E_P(X_1 | \mathcal{M}) + \beta E_P(X_2 | \mathcal{M})$$

- 2) Αν $X_1 \leq X_2$, τότε $E_P(X_1 | \mathcal{M}) \leq E_P(X_2 | \mathcal{M})$

- 3) Για οποιαδήποτε κυρτή συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ προκύπτει από την ανισότητα Θενσεν ότι

$$\varphi(E_P(X | \mathcal{M})) \leq E_P(\varphi(X) | \mathcal{M})$$

- 4) Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι \mathcal{M} -μετρήσιμη τότε

$$E_P(X | \mathcal{M}) = X$$

- 5) Αν Y είναι μια \mathcal{M} -μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή και $E_P(|Y|), E_P(|XY|) < \infty$ τότε

$$E_P(XY | \mathcal{M}) = Y E_P(X | \mathcal{M})$$

- 6) Αν $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ σ -άλγεβρες με $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{F}$ τότε για κάθε τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$E_P(E_P(X | \mathcal{R}_1) | \mathcal{R}_2) = E_P(X | \mathcal{R}_1) = E_P(E_P(X | \mathcal{R}_2) | \mathcal{R}_1)$$

2.1.5 Στοχαστική Ανεξαρτησία

Ας θεωρήσουμε δύο πειράματα τύχης τα οποία μοντελοποιούνται από τους χώρους πιθανότητας $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ και $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$. Όταν πραγματοποιούνται τα δύο αυτά πειράματα, τότε σε αρκετές περιπτώσεις συμβαίνει η έκβαση του ενός να μην επηρεάζει την έκβαση του άλλου, και αντίστροφα. Κατά βάση, η πληροφορία που παράγεται από την πραγματοποίηση του ενός δεν παρέχει καμία γνώση για την πραγματοποίηση του άλλου, και άρα η τυχαιότητα στα αποτελέσματα δεν καθορίζεται από κανέναν άλλο παράγοντα, παρά μόνον από το ίδιο το πείραμα. Το διαισθητικό μας αποτέλεσμα μπορεί να διατυπωθεί αυστηρά σύμφωνα με τον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.14 Έστω (Ω, \mathcal{F}, P) ένας χώρος πιθανότητας και ας θεωρήσουμε ότι $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ είναι μια ακολουθία σ -αλγεβρών όπου $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}, \forall k \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία των σ -αλγεβρών λέγεται ότι είναι *ανεξάρτητη* αν για οποιοδήποτε σύνολο δεικτών i_1, i_2, \dots, i_p και $A_{i_j} \in \mathcal{F}_{i_j}, 1 \leq j \leq p$,

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_p}) = \prod_{1 \leq j \leq p} P(A_{i_j})$$

Επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό αναφέροντας ότι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ λέγεται ότι είναι *ανεξάρτητη*, αν η ακολουθία $\{\sigma(X_n), n \in \mathbb{N}\}$ είναι ανεξάρτητη. Αν επιπλέον οι κατανομές $p_{X_1}, p_{X_2}, \dots, p_{X_n}$ είναι ισοδύναμες, τότε λέμε ότι η ακολουθία $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ αποτελείται από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

Ας θεωρήσουμε τους μετρήσιμους χώρους $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2), \dots, (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$. Ορίζουμε το γινόμενο τους ως τον χώρο (Ω, \mathcal{F}, P) , όπου Ω είναι το Καρτεσιανό γινόμενο $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_k$ εφοδιασμένο με την σ -άλγεβρα $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_k$, η οποία παράγεται από όλα τα σύνολα της μορφής $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$, όπου $A_i \in \mathcal{F}_i, i \in \{1, \dots, k\}$ και $\mu = \mu_1 \times \mu_2 \times \dots \times \mu_k$ είναι το *μέτρο γινόμενο* για το οποίο ισχύει ότι

$$\mu(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = \prod_{1 \leq i \leq k} \mu_i(A_i)$$

Έστω το τυχαίο διάνυσμα $\tilde{x} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, όπου $X_j, j \in \mathbb{N}$ είναι τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στο χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) . Οι τυχαίες μεταβλητές $X_j, j \in \mathbb{N}$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν το επαγόμενο μέτρο $p_{\tilde{x}}$ από το τυχαίο διάνυσμα $\tilde{x} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, είναι μέτρο γινόμενο, δηλαδή ισχύει ότι

$$p_{\tilde{x}} = p_{X_1} \times p_{X_2} \times \dots \times p_{X_n}$$

2.1.6 Χαρακτηριστικές συναρτήσεις

Η έννοια της χαρακτηριστικής συνάρτησης αποτελεί ένα πολύτιμο εργαλείο μελέτης, καθώς μέσω της γνώσης μας για τη μορφή της, καθορίζεται μονοσήμαντα η κατανομή οποιασδήποτε τυχαίας μεταβλητής και παρέχεται ένας εναλλακτικός, υπολογιστικά, τρόπος προσέγγισης της συνάρτησης πυκνότητας. Επιπλέον, η χαρακτηριστική συνάρτηση μέσω των αναλυτικών ιδιοτήτων της, συνδέεται με αρκετές από τις πιθανοθεωρητικές ιδιότητες των τυχαίων μεταβλητών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.15 (Χαρακτηριστική συνάρτηση) Έστω X μία τυχαία μεταβλητή ορισμένη στο χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) με τιμές στο σύνολο \mathbb{R} και κατανομή πιθανότητας p_X . Η *χαρακτηριστική συνάρτηση* $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται από την σχέση

$$\varphi_X(u) = E_P(e^{iuX}) = \int_{\Omega} e^{iuX} dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} dp_X(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f_X(x) dx$$

για κάθε $u \in \mathbb{R}$, όπου f_X είναι η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X .

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι, από τον τρόπο με τον οποίο ορίσαμε την χαρακτηριστική συνάρτηση, υπάρχει πάντοτε για κάθε $u \in \mathbb{R}$, εφ' όσον

$$E_P(|e^{iuX}|) = 1$$

Οι παρακάτω ιδιότητες των χαρακτηριστικών συναρτήσεων είναι στοιχειώδεις.

- 1) Η χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_X(u)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής για κάθε $u \in \mathbb{R}$.
- 2) Αν $E_P(|X|^n) < \infty$ και η φ_X είναι n φορές διαφορίσιμη στο $u = 0$, τότε

$$E_P(X^n) = \frac{1}{i^n} \cdot \left[\frac{d^n}{du^n} \varphi_X(u) \right]_{u=0}$$

Η ποσότητα $E_P(X^n)$ καλείται *ροπή n τάξης της τυχαίας μεταβλητής γύρω από το 0*. Για λόγους πληρότητας, αναφέρεται ότι η ποσότητα $E_P((X - E_P(X))^n)$ καλείται *ροπή n τάξης της τυχαίας μεταβλητής γύρω από τη μέση τιμή της* και συμβολικά γράφουμε $m_n(X) = E_P((X - E_P(X))^n)$.

- 3) Η χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_X(u)$, $u \in \mathbb{R}$, μιας τυχαίας μεταβλητής καθορίζει μονοσήμαντα την κατανομή της. Επιπρόσθετα, αν $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο τυχαίες μεταβλητές με $\varphi_X = \varphi_Y$, τότε $X \stackrel{d}{=} Y$.
- 4) Αν X_j , $j = 1, 2, \dots, n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με αντίστοιχες χαρακτηριστικές συναρτήσεις $\varphi_{X_j}(u)$, $j = 1, 2, \dots, n$, τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_{S_n}(u)$ του αθροίσματος $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ δίνεται από το γινόμενο

$$\varphi_{S_n}(u) = \varphi_{X_1}(u)\varphi_{X_2}(u) \cdots \varphi_{X_n}(u), \quad u \in \mathbb{R}$$

2.2 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΚΑΙ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ MARTINGALE

2.2.1 Στοχαστικές Διαδικασίες

Η χρήση των τυχαίων μεταβλητών στη περιγραφή των τυχαίων φαινομένων εξαρτάται άμεσα από το πόσο περίπλοκη είναι η δομή τους. Δεν είναι λίγες οι περιπτώσεις όπου ερχόμαστε αντιμέτωποι με την μελέτη πιο σύνθετων και χρονικά εξαρτημένων φαινομένων που δεν δύναται να αναπαρασταθούν επαρκώς από μία τυχαία μεταβλητή. Το πρόβλημα της πολυπλοκότητας στην μοντελοποίηση τέτοιων φαινομένων μπορεί να επιλυθεί με την κατασκευή ενός μαθηματικού προτύπου το οποίο λαμβάνει υπόψη την χρονική εξέλιξη της συμπεριφοράς τους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.1 (Στοχαστική ανέλιξη) Μια οικογένεια $X = \{X_t, t \in T\}$ τυχαίων μεταβλητών ορισμένων στον ίδιο πιθανοθεωρητικό χώρο (Ω, \mathcal{F}, P) με τιμές στο σύνολο \mathbb{R} και παράμετρο $t \in T$, όπου T ένα σύνολο δεικτών, καλείται *στοχαστική ανέλιξη*.

Η θεωρία των στοχαστικών ανελίξεων έχει ως κύριο σκοπό την περιγραφή και μελέτη στοχαστικών συστημάτων, η μελλοντική εξέλιξη των οποίων εξαρτάται από την παρελθοντική τους πορεία. Ο λόγος για τον οποίο μια στοχαστική ανέλιξη αποτελεί κατάλληλο εργαλείο μελέτης χρονικά εξαρτημένων φαινομένων, κρύβεται στην δυναμική οπτική που της προσδίδεται μέσω της παραμέτρου t , η οποία συνήθως παριστά χρόνο.

Γενικότερα, μια στοχαστική ανέλιξη $X = \{X_t, t \in T\}$ ορίζεται ως μια συνάρτηση του ζεύγους (ω, t) , δηλαδή μια απεικόνιση $(\omega, t) \mapsto X(\omega, t), t \in T, \omega \in \Omega$. Τα μοντέλα που εξετάζουμε διακριτοποιούνται ανάλογα με την μορφή του δεικτοσυνόλου T . Αν $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ τότε η στοχαστική ανέλιξη θα καλείται *διακριτού χρόνου*, ενώ αν $T = [0, \infty)$ θα καλείται *συνεχούς χρόνου*. Επιπλέον, αν γνωρίζουμε ότι έχει πραγματοποιηθεί ένα σενάριο ω_0 του Ω , η στοχαστική ανέλιξη μπορεί να αντιμετωπιστεί ως μια συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή $t \mapsto X(\omega_0, t), t \in T$, την οποία θα καλούμε *πραγματοποίηση* ή *διαδρομή* της στοχαστικής ανελίξης. Ωστόσο, η γραφική αναπαράσταση των διαδρομών μιας στοχαστικής ανελίξης εξαρτάται άμεσα και από την μορφή του δειγματοχώρου Ω . Με αφορμή την προηγούμενη διαπίστωση, αναφέρεται ότι οι στοχαστικές διαδικασίες κατηγοριοποιούνται σε *διακριτού χώρου καταστάσεων* αν λαμβάνουν τιμές στο σύνολο $\Omega = \{0, 1, \dots\}$, και σε *συνεχούς χώρου καταστάσεων* αν λαμβάνουν τιμές στο σύνολο $\Omega = (-\infty, \infty)$. Σε ό,τι αφορά τη συνέχεια θα περιοριστούμε στην μελέτη φαινομένων που αναπαρίστανται από συνεχούς χρόνου στοχαστικές ανελίξεις, παρουσιάζοντας μια γενικευμένη μορφή των υποδειγμάτων καθώς και των ιδιοτήτων που τα διέπουν.

Προηγουμένως, αναφέραμε ότι η μελέτη των διαδρομών των στοχαστικών ανελίξεων, ως συνέπεια της γνώσης ενός σεναρίου του δειγματοχώρου, ανάγεται στη μελέτη συναρτήσεων του χρόνου. Προτού όμως μεταβούμε από το πλαίσιο μελέτης συλλογών τυχαίων μεταβλητών, στο πλαίσιο μελέτης συναρτήσεων θα πρέπει να ορίσουμε έναν μετρικό χώρο ο οποίος να επιτρέπει την κατασκευή μέτρων. Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση που οι σχηματιζόμενες τροχιές της στοχαστικής ανελίξης είναι συνεχείς σε ολόκληρο το διάστημα T . Αν περιοριστούμε στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων

$$C([0, T_0], \mathbb{R}) = \{f : [0, T_0] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής}\}$$

εφοδιασμένο με την νόρμα $\|f\|_\infty = \sup\{|f(s)| : s \in [0, T_0]\}$, τότε η επαγόμενη τοπολογία περιέχει σύνολα της μορφής

$$B(f, \epsilon) = \{g \in C([0, T_0], \mathbb{R}) \mid \|f - g\|_\infty < \epsilon\}$$

όπου, για κάθε $\epsilon > 0$, η σφαίρα $B(f, \epsilon)$ περιέχει όλες τις συναρτήσεις που διαφέρουν από την f λιγότερο από ϵ σε όλο το διάστημα $[0, T_0]$. Η σ -άλγεβρα που παράγεται από όλα τα ανοιχτά σύνολα που ορίζονται από την προαναφερθείσα τοπολογία είναι Borel, και επομένως ο χώρος

$$(C([0, T_0], \mathbb{R}), \mathcal{B}(C([0, T_0], \mathbb{R})))$$

είναι μετρήσιμος. Άρα μέσα σε αυτό το χώρο μπορούμε να ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας, το οποίο περιγράφει την κατανομή μας στοχαστικής ανελίξης (δηλαδή των δειγματικών διαδρομών), ως ένα μέτρο που προκύπτει από την από κοινού συμπεριφορά των τυχαίων

μεταβλητών που την συνθέτουν. Ωστόσο, η μοντελοποίηση των διαδικασιών μέσω του παραπάνω σχεδιασμού εμφανίζει αδυναμίες όταν μεταξύ των διαφόρων διαδρομών της στοχαστικής ανέλιξης παρουσιάζονται ασυνέχειες. Προκειμένου να υπερπηδήσουμε το πρόβλημα των ασυνεχειών που προκύπτουν ανάμεσα στα σημεία του διαστήματος $[0, T_0]$, θα εισαγάγουμε την κλάση των càdlàg συναρτήσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.2 (càdlàg συναρτήσεις) Μια συνάρτηση $f : [0, T_0] \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται ότι είναι càdlàg αν είναι δεξιά συνεχής με αριστερά όρια, δηλαδή για κάθε $t \in [0, T_0]$ τα όρια

$$f(t^-) = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ t > s}} f(s) \quad \text{και} \quad f(t^+) = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ t < s}} f(s)$$

υπάρχουν και $f(t) = f(t^+)$. Επιπλέον, αν ένα σημείο $t_0 \in [0, T_0]$ αποτελεί σημείο ασυνέχειας, ορίζουμε ως

$$\Delta f(t_0) = f(t_0) - f(t_0^-)$$

το “άλμα” της f στο t_0 .

Προφανώς, κάθε συνεχής συνάρτηση είναι càdlàg. Ωστόσο, το αντίστροφο δεν ισχύει αφού εξ’ ορισμού οι càdlàg συναρτήσεις μπορεί να περιέχουν ασυνέχειες. Συμβολίζοντας τον χώρο των càdlàg συναρτήσεων ως

$$D([0, T_0], \mathbb{R}) = \{f : [0, T_0] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ càdlàg}\}$$

και σε συνδυασμό με τα παραπάνω, είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων αποτελεί υπόχωρος του $D([0, T_0], \mathbb{R})$. Αποδεικνύεται ότι στον χώρο $D([0, T_0], \mathbb{R})$ μπορούμε να ορίσουμε μια μετρική, γνωστή στην βιβλιογραφία ως Skorokhod μετρική, εισάγοντας μια τοπολογία κατάλληλη για την μελέτη συναρτήσεων με ασυνέχειες. Επιπλέον, η σ -άλγεβρα που παράγεται από την συλλογή ανοιχτών συνόλων που ορίζουν τον τοπολογικό χώρο είναι Borel, γεγονός που μας διευκολύνει να ορίσουμε πιθανοτικά μέτρα πάνω στη σ -άλγεβρα $\mathcal{B}(D([0, T_0], \mathbb{R}))$ με σκοπό την μελέτη της πιθανοθεωρητικής συμπεριφοράς των διαδρομών της στοχαστικής ανέλιξης. Επομένως, επεκτείνοντας τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο χώρο των càdlàg συναρτήσεων, είναι εφικτός ο αυστηρός μαθηματικός χειρισμός ανελίξεων με άλματα, παρέχοντας ένα πιο γενικό και ευέλικτο πλαίσιο για την μοντελοποίηση των υποδειγμάτων που θα αναπτύξουμε στη συνέχεια.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι $X = \{X_t, t \in T\}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη και \mathcal{E} μια σ -άλγεβρα. Η στοχαστική ανέλιξη θα λέγεται ότι είναι ανεξάρτητη από την \mathcal{E} , αν για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ και για οποιοδήποτε επιλογή $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ τιμών του δεικτοσυνόλου T , η $\sigma(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ είναι ανεξάρτητη από την \mathcal{E} .

2.2.2 Η έννοια της διήθησης

Μέχρι στιγμής αναφέραμε ότι η δυναμική πτυχή των στοχαστικών ανελίξεων αντανακλά την διαίσθηση της χρονοεξαρτώμενης συμπεριφοράς των τυχαίων φαινομένων, ως αποτέλεσμα της προσθήκης του δείκτη t ως χρονική μεταβλητή. Επιπλέον, είδαμε ότι η πραγματοποίηση

ενός σεναρίου του δειγματοχώρου επιτρέπει την μελέτη των χαρακτηριστικών των διαδρομών, παρέχοντας την δυνατότητα για ανάλυση της πλήρους εξέλιξης των διαδικασιών στο χρόνο. Ωστόσο, η πληροφορία της μεταβολής των καταστάσεων του φαινομένου, καθ' όλη την διάρκεια του εξεταζόμενου χρονικού διαστήματος, δεν παρέχεται στο σύνολό της εκ των προτέρων, αλλά αποκαλύπτεται προοδευτικά καθώς μεταβάλλονται οι τιμές του δείκτη t , διαχωρίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο την παρελθοντική από την άγνωστη μελλοντική κίνηση της στοχαστικής ανάλυσης. Προκειμένου όμως να αντιληφθούμε πιο αυστηρά τις διαισθητικές έννοιες της πληροφορίας και της αιτιότητας που διέπει τις στοχαστικές ανελίξεις και την εξέλιξη των τυχαίων φαινομένων, χρειαζόμαστε ένα πιο δομημένο πλαίσιο το οποίο να εξυπηρετεί αυτό το σκοπό. Αυτό επιτυγχάνεται με την εισαγωγή της σημαντικής έννοιας της διήθησης

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.3 (Διήθηση) Έστω (Ω, \mathcal{F}, P) ένας χώρος πιθανότητας. Διήθηση ή ροή πληροφορίας ή φιλτράρισμα καλούμε μια αύξουσα συλλογή σ -άλγεβρων $\{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} : t \in [0, T]\}$ τέτοια ώστε

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \quad \text{για κάθε } t, s \geq 0 \text{ με } s \leq t$$

Η τετράδα $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, καλείται φιλτραρισμένος χώρος πιθανότητας.

Μια διήθηση $\{\mathcal{F}_t\}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα «φίλτρο» ροής πληροφοριών που μας επιτρέπει να περιγράψουμε ποια πληροφορία είναι διαθέσιμη σε κάθε χρονική στιγμή. Έτσι, για κάποιο σημείο s του χρονικού ορίζοντα, και δεδομένης της τρέχουσας πληροφορίας, έστω \mathcal{F}_s , επιτυγχάνεται μια σαφής διάκριση μεταξύ των ενδεχομένων του δειγματοχώρου που έχουν πραγματοποιηθεί και εκείνων που είναι πιο πιθανό να πραγματοποιηθούν, προσφέροντας έναν χάρτη του τι έχει οριστικά συμβεί και τι παραμένει αβέβαιο από την οπτική του παρατηρητή. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η \mathcal{F}_s προσφέρει ένα μαθηματικό ανάλογο των γλωσσικών διατυπώσεων σχετικά με το τι γνωρίζουμε τη χρονική στιγμή s , ανάγοντας την αφηρημένη περιγραφή των γεγονότων που έχουν ήδη συμβεί σε ένα αυστηρό και δομημένο πλαίσιο όπως είναι η σ -άλγεβρα.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι η εξέλιξη των χρονικά μεταβαλλόμενων καταστάσεων ενός τυχαίου φαινομένου περιγράφεται από μια στοχαστική διαδικασία (συνεχούς χρόνου) $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ και έστω ο χώρος πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) εφοδιασμένος με μια διήθηση $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$. Αξιοποιώντας το γεγονός ότι η σ -άλγεβρα $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$ παρέχει μια πλήρη εποπτεία της πληροφορίας που γνωρίζουμε μέχρι και τη χρονική στιγμή $s \in [0, T]$, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ολόκληρη η διαδρομή της στοχαστικής ανάλυσης μέχρι και τη χρονική στιγμή s , ανήκει στη διαθέσιμη πληροφορία \mathcal{F}_s . Από την τελευταία συνάγεται άμεσα ότι $\sigma(X_s) \subseteq \mathcal{F}_s$ και επομένως, η τυχαία μεταβλητή X_s είναι \mathcal{F}_s -μετρήσιμη. Με βάση την προηγούμενη διαπίστωση οδηγούμαστε φυσιολογικά στον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.4 Έστω ο χώρος πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) εφοδιασμένος με μια διήθηση $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$. Μια στοχαστική διαδικασία $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ θα λέμε ότι είναι *προσαρμοσμένη στη διήθηση* $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ ή $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ -*προσαρμοσμένη*, αν για κάθε $s \in [0, T]$ η τυχαία μεταβλητή X_s είναι \mathcal{F}_s -μετρήσιμη.

Προφανώς, αν η διαθέσιμη πληροφορία για την τροχιά της στοχαστικής ανάλυσης $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ μέχρι και τη χρονική στιγμή $s \in [0, T]$ παρέχεται μέσω των τιμών της X , τότε η μικρότερη παραγόμενη σ -άλγεβρα $\sigma(X_t, 0 \leq t \leq s)$ περιέχει ακριβώς τη γνώση για την

διαδικασία στην ολότητα της έως και την χρονική στιγμή εκείνη. Με άλλα λόγια, δεδομένου ότι βρισκόμαστε στη χρονική στιγμή $s \in [0, T]$, χωρίς καμία επιπλέον πληροφορία πέρα από τις ίδιες τις τιμές που λαμβάνει η διαδικασία, η $\sigma(X_t, 0 \leq t \leq s)$ μπορεί να θεωρηθεί ως η μοναδική πηγή πληροφορίας που περιγράφει πλήρως όλα τα ενδεχόμενα για την διαδρομή της διαδικασίας και ως προς την οποία κάθε στοιχείο της συλλογής $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ είναι μετρήσιμο. Επομένως, η οικογένεια $\{\sigma(X_t, 0 \leq t \leq s), s \in [0, T]\}$ αποτελεί ένα φιλτράρισμα του χώρου πιθανότητας ως προς το οποίο η στοχαστική διαδικασία X είναι προσαρμοσμένη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.5 (Φυσικό φιλτράρισμα) Έστω $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ μια στοχαστική διαδικασία ορισμένη στον φιλτραρισμένο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Το φιλτράρισμα $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ καλείται *φυσικό φιλτράρισμα της διαδικασίας X* αν για κάθε $s \in [0, T]$,

$$\mathcal{F}_s = \sigma(X_t, 0 \leq t \leq s)$$

όπου $\sigma(X_t, 0 \leq t \leq s)$ η σ -άλγεβρα που παράγεται από τις τυχαίες μεταβλητές $X_t, 0 \leq t \leq s$.

Για λόγους σαφήνειας, θα συμβολίζουμε τη σ -άλγεβρα $\sigma(X_t, 0 \leq t \leq s)$ με \mathcal{F}_s^X ενώ η φυσική διήθηση $\{\mathcal{F}_s^X, t \in [0, T]\}$ θα αναφέρεται συχνά και ως *ιστορία της διαδικασίας X* .

2.2.3 Διαδικασίες Martingale (Στοιχηματικές διαδικασίες)

Σε αρκετές περιπτώσεις, η μαθηματική διατύπωση ενός τυχαίου φαινομένου συνδέεται με συγκεκριμένες κατηγορίες στοχαστικών υποδειγμάτων μέσα από την εισαγωγή ιδιοτήτων που επιβάλλουν συγκεκριμένους κανόνες στη ροή πληροφορίας και στη χρονική εξέλιξη των φαινομένων. Μέσω των ιδιοτήτων αυτών μοντελοποιείται ουσιαστικά πως το παρελθόν επηρεάζει ή προκαλεί την μελλοντική συμπεριφορά του φαινομένου, θεμελιώνοντας έτσι έναν αιτιακό τρόπο εξέλιξης του. Μια από τις ιδιότητες που θα εξετάσουμε σε αυτή την παράγραφο είναι η ιδιότητα Martingale, η οποία επιτρέπει την ανάπτυξη της ελκυστικής από μαθηματικής άποψης θεωρίας των διαδικασιών Martingale.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.6 (Διαδικασίες Martingale) Μια στοχαστική διαδικασία $X = \{X_t, t \geq 0\}$ ορισμένη στον φιλτραρισμένο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ λέμε ότι είναι *martingale ως προς την διήθηση $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$* , αν η X είναι \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένη και ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες

- α) $E(|X_t|) < \infty$, για κάθε $t \geq 0$
- β) $E(X_s | \mathcal{F}_t) = X_t$, για κάθε $s > t, t \geq 0$

Από τον παραπάνω ορισμό βλέπουμε ότι η συνθήκη β), η οποία στη σχετική βιβλιογραφία αναφέρεται και ως ιδιότητα martingale, έχει νόημα αν προηγουμένως έχουμε εξασφαλίσει ότι για κάθε $t \geq 0$, η τυχαία μεταβλητή X_t είναι P -ολοκληρώσιμη. Επιπλέον, για να αποτρέψουμε οποιαδήποτε σύγχυση, πρέπει να τονίσουμε ότι αν επί του ίδιου μετρήσιμου χώρου (Ω, \mathcal{F}) εφοδιασμένου με ένα φιλτράρισμα $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ ορίζονται διάφορα μέτρα πιθανότητας, θα λέμε

ότι η στοχαστική διαδικασία X είναι P -martingale ως προς την διήθηση $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, προκειμένου να αποσαφηνίσουμε ότι η έννοια του martingale εξαρτάται από το μέτρο πιθανότητας P .

2.3 ANELIΞH POISSON KAI KINHΣH BROWN

2.3.1 Ανέλιξη Poisson

Η ιδιότητα càdlàg, όπως είδαμε στα προηγούμενα, μας έδωσε μια πρώτη οπτική σχετικά με την περιγραφή διαδρομών στοχαστικών διαδικασιών που χαρακτηρίζονται από την ασυνεχή συμπεριφορά τους, θέτοντας τα θεμέλια για την μελέτη διαδικασιών που αποτελούν μοντέλα δόμησης του μαθηματικού πλαισίου μέσα στο οποίο δύνανται να εξεταστούν πιο περίπλοκα τυχαία φαινόμενα. Η διαδικασία Poisson είναι ένα θεμελιώδες παράδειγμα τέτοιων μοντέλων και, όπως θα δούμε, αποτελεί την βάση πάνω στην οποία μπορούμε να επεκταθούμε και να αναπτύξουμε μια σειρά ανώτερων στοχαστικών υποδειγμάτων με πιο σύνθετη μορφή.

Προτού όμως παραθέσουμε τον ακριβή ορισμό και τις ιδιότητες της διαδικασίας Poisson, αξίζει να σταθούμε εν συντομία σε δύο είδη κατανομών, οι οποίες θα αποτελέσουν τα θεμέλια για την κατασκευή και την κατανόηση του συγκεκριμένου μοντέλου: την εκθετική κατανομή και την κατανομή Poisson. Από την θεωρία πιθανοτήτων γνωρίζουμε ότι μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, όπου (Ω, \mathcal{F}, P) είναι χώρος πιθανότητας, λέγεται ότι *ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$* , και συμβολικά γράφουμε $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, αν η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής δίνεται από την σχέση

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{x \geq 0}$$

Η εκθετική κατανομή αποτελεί χρήσιμο εργαλείο όταν το αντικείμενο μελέτης αφορά την μοντελοποίηση του χρόνου αναμονής μέχρι να συμβεί ένα συγκεκριμένο τυχαίο γεγονός, με εφαρμογές τόσο σε στοχαστικά συστήματα εξυπηρέτησης (π.χ. θεωρία ουρών αναμονής), όσο και σε συστήματα αξιοπιστίας (όπου μας ενδιαφέρει ο χρόνος ζωής ενός συστήματος ή ενός εξαρτήματος). Ο λόγος για τον οποίο η εκθετική κατανομή διακρίνεται από άλλες κατανομές οφείλεται στη μοναδική ιδιότητα της έλλειψης μνήμης που διαθέτει.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.1 (Αμνήμονη ιδιότητα) Μια μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή T λέμε ότι έχει κατανομή με την αμνήμονη ιδιότητα, αν για κάθε $t, s > 0$

$$P(T > t + s \mid T > t) = P(T > t)$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η εκθετική κατανομή είναι η μοναδική κατανομή με την αμνήμονη ιδιότητα, και επομένως αν μια τυχαία μεταβλητή T έχει την αμνήμονη ιδιότητα, τότε αυτή ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Η σπουδαιότητα της αμνήμονης ιδιότητας έγκειται στο γεγονός ότι η κατανομή του πρόσθετου χρόνου αναμονής δεν εξαρτάται από το διάστημα που ήδη έχει παρέλθει, και επομένως η κατανομή του $T - t$, δεδομένης της πληροφορίας $\{T > t\}$, είναι η ίδια με την κατανομή της T .

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση της κατανομής Poisson. Μια τυχαία μεταβλητή $N : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$, όπου (Ω, \mathcal{F}, P) χώρος πιθανότητας, λέγεται ότι ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$, και συμβολικά γράφουμε $N \sim \text{Pois}(\lambda)$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$f_N(n) = P(N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

Η κατανομή Poisson χρησιμοποιείται στον πραγματικό κόσμο όταν μελετάμε το πλήθος των γεγονότων που λαμβάνουν χώρα σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα, και των οποίων η εμφάνιση σχετίζεται με έναν αριθμό $\lambda > 0$, ο οποίος λέγεται ότι εκφράζει τον ρυθμό εμφάνισης των γεγονότων. Ένα σχόλιο που αναφέρουμε σε αυτό το σημείο αφορά την διάκριση μεταξύ της εκθετικής κατανομής και της Poisson κατανομής ως προς τη φύση του μέτρου πιθανότητας που ορίζουν. Η συγκεκριμένη διάκριση υπάγεται σε ένα μέτρο-θεωρητικό πλαίσιο ανάλυσης στο οποίο εξετάζεται η θεμελιώδης διαφορά μεταξύ των διάχυτων (diffuse) και των ατομικών (atomic) μέτρων, αναδεικνύοντας τον διαχωρισμό μεταξύ συνεχών και διακριτών, όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία, κατανομών.

Έχοντας θέσει το γνωστικό υπόβαθρο που απαιτείται για την συνέχεια της παρούσας παραγράφου, ας περάσουμε στον ορισμό της διαδικασίας Poisson.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.2 (Διαδικασία Poisson) Έστω $\{\tau_i, i \geq 1\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών (δηλαδή τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την εκθετική κατανομή) με παράμετρο $\lambda > 0$ και $T_n = \sum_{1 \leq j \leq n} \tau_j$, όπου $n \in \mathbb{N}$. Η διαδικασία $\{N_t, t \geq 0\}$ που ορίζεται ως

$$N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{t \geq T_n}$$

καλείται *διαδικασία Poisson με ρυθμό ή ένταση λ* .

Βάσει του ορισμού, γίνεται φανερό ότι η διαδικασία Poisson καταγράφει το πλήθος των γεγονότων που εμφανίζονται έως και τη χρονική στιγμή t , με τα γεγονότα να ακολουθούν ένα στοχαστικό μοτίβο εμφάνισης σε μη ντετερμινιστικούς χρόνους. Η ακολουθία $\{\tau_i, i \geq 1\}$ προσδιορίζει τα μήκη των χρονικών διαστημάτων που μεσολαβούν μεταξύ διαδοχικών αφίξεων του εξεταζόμενου φαινομένου, ενώ τα αθροίσματα τους $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ αποτυπώνουν τις χρονικές στιγμές εμφάνισης. Με αυτό τον τρόπο, το μοντέλο συλλαμβάνει δύο πηγές τυχειότητας οι οποίες, σε συνδυασμό, συνθέτουν την διαθέσιμη χρονική πληροφορία. Παρακάτω παρουσιάζουμε τις βασικές ιδιότητες της διαδικασίας Poisson, οι οποίες αρκούν για να καθορίσουν αμφιμονοσήμαντα τις τροχιές μιας τέτοιας ανέλιξης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.3.1 (Ιδιότητες διαδικασίας Poisson) Έστω $N = \{N_t, t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson, ορισμένη στον χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) . Τότε πληρούνται οι παρακάτω συνθήκες:

- 1) Για κάθε $\omega \in \Omega$, η διαδρομή $t \mapsto N_t(\omega)$ είναι τμηματικά σταθερή και αυξάνεται με άλματα μεγέθους 1.
- 2) Οι διαδρομές $t \mapsto N_t$ είναι càdlàg P -σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$.

3) Για κάθε $t > 0$, η τυχαία μεταβλητή $N_t \sim \text{Pois}(\lambda t)$, δηλαδή

$$P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ενώ η χαρακτηριστική συνάρτηση της N_t δίνεται από

$$\varphi_{N_t}(u) = E(e^{iuN_t}) = \exp\{\lambda t(e^{iu} - 1)\}, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

4) Η N έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, δηλαδή $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n$

$$N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$$

είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

5) Η N έχει στάσιμες (ή ομογενείς) προσαυξήσεις, δηλαδή $\forall t > s$, η $N_t - N_s$ έχει την ίδια κατανομή με την N_{t-s} .

Από τις ιδιότητες που παρουσιάσαμε παραπάνω, μπορούμε να φανταστούμε μια διαδρομή της ανέλιξης ως μια βηματική συνάρτηση η οποία πραγματοποιεί άλματα μεγέθους 1 σε χρονικές στιγμές εμφάνισης του γεγονότος. Η ιδιότητα της ανεξαρτησίας των προσαυξήσεων διασφαλίζει ότι τα γεγονότα που συμβαίνουν μεταξύ μη επικαλυπτόμενων χρονικών διαστημάτων δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, διατηρώντας την ίδια στοχαστική συμπεριφορά ανεξάρτητα από τον αριθμό ή τις χρονικές στιγμές προηγούμενων εμφανίσεων. Με άλλα λόγια, δεν υφίσταται μηχανισμός αιτιότητας που να μεταφέρει την πληροφορία κατά μήκος του χρονικού ορίζοντα, με αποτέλεσμα η μελλοντική εξέλιξη της διαδικασίας να μην κληρονομεί χαρακτηριστικά του παρελθόντος. Η ομογένεια των προσαυξήσεων δηλώνει ότι το πλήθος των γεγονότων που συμβαίνουν σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα εξαρτάται μόνο από το μήκος του, και όχι από το χρονικό σημείο όπου ξεκινάει η απαρίθμηση, γεγονός που συνεπάγεται ότι κάθε χρονικό διάστημα που εξετάζεται ο αριθμός των αφίξεων, η διαδικασία να επανεκκινείται με την ίδια κατανομή και παράμετρο ανάλογη του μήκους του διαστήματος.

2.3.2 Κίνηση Brown

Ένα από τα πιο σημαντικά υποδείγματα στη στοχαστική ανάλυση το οποίο έχει αναδειχθεί για το πλήθος των εφαρμογών σε ένα μεγάλο εύρος επιστημονικών πεδίων, είναι η κίνηση Brown. Αν και η προέλευση του συγκεκριμένου υποδείγματος εντοπίστηκε στην παρατήρηση της τυχαίας κίνησης των σωματιδίων σε υγρά ή αέρια (όπως παρατηρήθηκε από τον Robert Brown, και διαπιστώθηκε από τον Albert Einstein), στην εποχή μας διαδραματίζει κεντρικό ρόλο στην ανάλυση και κατανόηση μιας ευρείας κλίμακας φαινομένων που διέπονται από στοχαστικές μεταβολές. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει στη χρηματοοικονομική μοντελοποίηση, όπου η κίνηση Brown χρησιμοποιείται ευρέως για την περιγραφή και την πρόβλεψη της τυχαίας συμπεριφοράς των τιμών των αξιογράφων, ως συνέπεια των ιδιόμορφων διαδρομών οι οποίες επιτρέπουν την απεικόνιση της δυναμικής των αγορών με μεγαλύτερη ακρίβεια, αντανακλώντας τόσο τις μικρές μεταβολές όσο και τις ξαφνικές διακυμάνσεις στις τιμές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.3 (Κίνηση Brown) Μια στοχαστική διαδικασία $B = \{B_t, t \geq 0\}$ ορισμένη στον χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) με τιμές στο σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} , καλείται *κίνηση Brown* ή *διαδικασία Wiener*, αν πληρεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- 1) $P(B_0 = 0) = 1$
- 2) Για κάθε $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, οι τυχαίες μεταβλητές $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες (η B έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις).

- 3) Αν $s, t \geq 0$, τότε

$$P(B_{s+t} - B_s \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx$$

για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Δηλαδή, οι προσαυξήσεις της B κατανέμονται σύμφωνα με την κανονική κατανομή.

- 4) Για κάθε $t > s$, η $B_t - B_s$ έχει την ίδια κατανομή με την B_{t-s} (η B έχει στάσιμες προσαυξήσεις).
- 5) Οι διαδρομές της B είναι συνεχείς P -σχεδόν παντού, δηλαδή η απεικόνιση $t \mapsto B_t(\omega)$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Η κανονική κατανομή που αναγράφεται παραπάνω, αναφέρεται σε μια κατανομή πιθανότητας η οποία είναι απόλυτα συνεχές μέτρο ως προς το μέτρο Lebesgue και η συνάρτηση πυκνότητας της δίνεται από

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 0$ αποτελούν παραμέτρους της κατανομής. Γενικότερα, λέμε ότι μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, όπου (Ω, \mathcal{F}, P) χώρος πιθανότητας, ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}$ και σ^2 , όπου $\sigma > 0$, και συμβολικά γράφουμε $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, αν η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής δίνεται από την f_X , ενώ η μέση τιμή και η διακύμανση της X δίνονται αντίστοιχα από, $E(X) = \mu$ και $Var(X) = \sigma^2$. Με βάση τον συμβολισμό, προκύπτει ότι για οποιαδήποτε $t > s \geq 0$, η τυχαία μεταβλητή

$$B_t - B_s \sim N(0, t - s)$$

Στον παραπάνω ορισμό υιοθετήθηκε η σύμβαση ότι η κίνηση Brown ξεκινά από το σημείο 0. Πρόκειται, ωστόσο, για μια απλή επιλογή αρχικής συνθήκης, καθώς θα μπορούσε να ληφθεί οποιοδήποτε άλλο σημείο $x \in \mathbb{R}$, ως σημείο εκκίνησης της διαδικασίας. Η επιλογή του 0 ως σημείο εκκίνησης απλώς διευκολύνει την παρουσίαση, καθώς δεν επηρεάζει καθόλου την γενικότητα. Στην πράξη, οι περισσότεροι συγγραφείς αναφέρουν την κίνηση Brown με αρχικό σημείο το 0 ως τυπική κίνηση Brown και τη συμβολίζουν συχνά με $W = \{W_t, t \geq 0\}$. Σε ό,τι ακολουθεί θα θεωρούμε ότι η W είναι προσαρμοσμένη στη φυσική της διήθηση $\{F_t^W, t \geq 0\}$.

Προκειμένου να αναλύσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των τροχιών της κίνησης Brown, κρίνεται σημαντική η αναφορά στο μέτρο που αυτή επάγει. Για οποιαδήποτε πεπερασμένη

ακολουθία δεικτών του T , έστω $\tau = (t_1, \dots, t_n)$, $n \in \mathbb{N}$, ορίζεται η από κοινού κατανομή του τυχαίου διανύσματος $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ ως

$$v_t(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \int_{A_1} \int_{A_2} \dots \int_{A_n} \prod_{1 \leq j \leq n} p(t_j - t_{j-1}, x_{j-1}, x_j) dx_n \dots dx_2 dx_1$$

για $A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, όπου με $p(t; x, y)$ συμβολίζουμε την συνάρτηση πυκνότητας της κανονικής κατανομής (ή τον πυρήνα Gauss, όπως λέμε), δηλαδή

$$p(t; x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}, \quad t \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα, μια οποιαδήποτε ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ με από κοινού κατανομή που δίνεται από την ν_τ . Αν η οικογένεια $\{\nu_\tau, \tau \in T\}$ ικανοποιεί τις συνθήκες συνέπειας (κατά Kolmogorov), τότε από θεώρημα επέκτασης του Kolmogorov υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας P στον μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{F}) \triangleq (\mathbb{R}^{[0, \infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, \infty)}))$, δηλαδή τον χώρο όλων των πραγματικών συναρτήσεων $\omega : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, και μια στοχαστική διαδικασία $X : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ικανοποιείται η σχέση

$$v_t(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = P(X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \dots, X_{t_n} \in A_n)$$

Η ακολουθία $\{\nu_\tau, \tau \in T\}$ λέμε ότι ορίζει μια *οικογένεια κατανομών πεπερασμένης διάστασης της X* . Συνέπεια της παραπάνω διατύπωσης αποτελεί το γεγονός ότι υπό το μέτρο πιθανότητας P οι τροχιές της διαδικασίας X , δηλαδή $X_t(\omega) \triangleq \omega(t)$, είναι “σχεδόν” τυπική κίνηση Brown, εξαιρώντας την απαίτηση της συνέχειας των διαδρομών. Χωρίς περαιτέρω επέκταση των παραπάνω εννοιών, αναφέρεται ότι η κατασκευή ενός μέτρου πιθανότητας στον χώρο $(C([0, \infty), \mathbb{R}), \mathcal{B}(C([0, \infty), \mathbb{R})))$ παρέχεται μέσω του αναλλοίωτου νόμου του Donsker (Donsker’s Invariance Principle), σύμφωνα με τον οποίο λαμβάνοντας μια κατάλληλη ακολουθία τυχαίων περιπάτων $X^n = \{X_t^n, t \geq 0\}$ με επαγόμενα μέτρα P^n στον $(C([0, \infty), \mathbb{R}), \mathcal{B}(C([0, \infty), \mathbb{R})))$, τότε η ακολουθία $\{P^n, n \in \mathbb{N}\}$ συγκλίνει ασθενώς σε ένα μοναδικό μέτρο P^* στον $C[0, \infty)$, υπό τον οποίο οποιαδήποτε διαδικασία απεικονίσεων (coordinate mapping process) $X_t(\omega) \triangleq \omega(t)$ στον $C[0, \infty)$, είναι τυπική κίνηση Brown. Το μέτρο P^* αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως μέτρο Wiener, ενώ ο χώρος πιθανότητας $(C([0, \infty), \mathbb{R}), \mathcal{B}(C([0, \infty), \mathbb{R})))$ καλείται *κανονικός χώρος πιθανότητας της κίνησης Brown (canonical probability space)*. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να μεταβεί στο σύγγραμμα των I. Karatza και S. E. Shreve (1988) για μια πιο λεπτομερή παρουσίαση της κατασκευής του μέτρου Wiener και της σχετικής θεωρίας σύγκλισης των μέτρων πιθανότητας. Ο Donsker επισημοποίησε ακριβώς την ιδέα ότι η διαδικασία Wiener αποτελεί το συνεχές ανάλογο μιας διαδικασίας τυχαίου περιπάτου, αποδεικνύοντας ότι η πρώτη λαμβάνεται ως το συνεχές όριο (continuum limit) της δεύτερης. Πρακτικά αυτό σημαίνει πως όταν συμπιέζουμε κατάλληλα ένα διακριτό τυχαίο περίπατο (δηλαδή συρρικνώνουμε τα χρονικά διαστήματα των βημάτων) ώστε το πλήθος των βημάτων να αυξάνεται, προκύπτει ως όριο μια διαδικασία με συνεχείς τροχιές.

Το μέτρο Wiener, όπως συνάγεται από τα παραπάνω, αποτελεί το μαθηματικό αντικείμενο που ορίζει πλήρως την πιθανοτική συμπεριφορά της κίνησης Brown στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων. Υπό το μέτρο αυτό, οι τυπικές διαδρομές της διαδικασίας εμφανίζουν ορισμένα χαρακτηριστικά.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.1 (Ιδιότητες των διαδρομών της κίνησης Brown) Έστω $W_t = \{W_t, t \geq 0\}$ κίνηση Brown έχει τις παρακάτω ιδιότητες

- 1) Η W είναι άπειρης κύμανσης (infinite variation).
- 2) Η W_t είναι μη-διαφορίσιμη P^* -σχεδόν βέβαια στο t , για κάθε $t \geq 0$.

Η πρώτη ιδιότητα δηλώνει ότι για οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta \in \mathcal{R}$, όπου

$$\mathcal{R} = \{\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\} \mid \Delta \text{ διαμέριση του } [0, t]\}$$

το σύνολο όλων των διαμερίσεων του $[0, t]$, και για κάθε $t > 0$

$$\sup_{\Delta} \sum_j |\omega(t_{j+1}) - \omega(t_j)| = \infty$$

όπου $B_t(\omega) = \omega(t)$, $\omega \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ και $t \geq 0$ μια διαδικασία απεικονίσεων που προκύπτουν ως πιθανές διαδρομές της κίνησης Brown. Το γεγονός ότι η W είναι άπειρης κύμανσης εκφράζει ότι, αν θεωρήσουμε μια διαδρομή $\omega(\cdot)$ της διαδικασίας και εξετάσουμε τις τιμές $\omega(t_j)$ σε μια οποιαδήποτε διαμέριση του $[0, t]$, τότε το άθροισμα

$$\sum_j |\omega(t_{j+1}) - \omega(t_j)|$$

μεγαλώνει απεριόριστα όσο λεπταίνει η διαμέριση. Αυτή η ιδιότητα αποτυπώνει το πυκνό φάσμα των τυχαίων ταλαντώσεων που πραγματοποιεί η διαδρομή στη διάρκεια παρατήρησης, χαρακτηρίζοντας με αυτό τον τρόπο την ιδιάζουσα φύση των διαδρομών της κίνησης Brown. Επιπλέον, οι ακανόνιστες διαδρομές εξηγούν ακριβώς το λόγο για τον δεν μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f επάνω στην κίνηση Brown $\int f(s, \omega) dW_s$ σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της Riemann-Stieltjes ολοκλήρωσης. Προκειμένου να δοθεί ουσιαστικό νόημα σε ένα τέτοιο ολοκλήρωμα, αξιοποιείται η θεωρία στοχαστικής ολοκλήρωσης, στην οποία εισάγεται το ολοκλήρωμα Itô ως η κατάλληλη εναλλακτική.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα που προκύπτει ως συνέπεια των ιδιοτήτων της ανεξαρτησίας των προσαυξήσεων της W και της ιδιότητας 4) της δεσμευμένης μέση τιμής, είναι ότι για οποιαδήποτε $t \geq 0$, η $W = \{W_t, t \geq 0\}$ είναι martingale ως προς το φυσικό της φιλτράρισμα $\{\mathcal{F}_t^W, t \geq 0\}$. Συγκεκριμένα, θεωρώντας ότι η μέση τιμή λαμβάνεται ως προς το μέτρο Wiener, προκύπτει ότι η W ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες

- 1) Για κάθε $t > 0$,

$$E(|W_t|) \leq \sqrt{E(W_t^2)} = \sqrt{\text{Var}(W_t) + (E(W_t))^2} = \sqrt{t} < \infty$$

- 2) Για κάθε $t \geq s \geq 0$

$$\begin{aligned} E(W_t \mid \mathcal{F}_s^W) &= E(W_t - W_s + W_s \mid \mathcal{F}_s^W) = E(W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s^W) + E(W_s \mid \mathcal{F}_s^W) \\ &= E(W_t - W_s) + W_s \\ &= W_s \end{aligned}$$

Κλείνοντας, αναφέρουμε ότι οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία $B = \{B_t, t \geq 0\}$ προκύπτει ως γραμμικός μετασχηματισμός της τυπικής κίνησης Brown, είναι και αυτή κίνηση Brown. Συγκεκριμένα αν $\{W_t, t \geq 0\}$ είναι τυπική κίνηση Brown, τότε η νέα διαδικασία

$$B_t = \mu t + \sigma W_t, \quad t \geq 0$$

είναι κίνηση Brown με παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 0$. Η παράμετρος μ αναφέρεται ως τάση (drift) και η παράμετρος σ ως πτητικότητα (volatility) της κίνησης Brown, και συμβολικά γράφουμε ότι

$$B = \{B_t, t \geq 0\} \sim BM(\mu, \sigma^2)$$

Προφανώς, $W = \{W_t, t \geq 0\} \sim BM(0, 1)$.

2.4 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΤÔ

2.4.1 Το ολοκλήρωμα Ιτô

Η μελέτη της διαδικασίας Weiner W στη προηγούμενη παράγραφο ανέδειξε ότι η ιδιομορφία των διαδρομών της - “παθολογία” η οποία όπως είδαμε οφείλεται στην ιδιότητα της να διαθέτει άπειρη κύμανση - καθιστά αδύνατο τον ορισμό ολοκληρωμάτων μιας συνάρτησης f επί της W . Προκειμένου να κατανοήσουμε το πρόβλημα που εμφανίζεται από πρακτική σκοπιά, αναφέρουμε το παρακάτω παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική (self-financing strategy) στο χρόνο $t_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, n$, η οποία (θεωρώντας την απλούστερη μορφή της) συντίθεται από Δ_{t_i} μετοχές μιας Ανώνυμης Εταιρίας. Έστω ότι με V_{t_i} συμβολίζεται η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου αυτού την χρονική στιγμή t_i . (Η έννοια του αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου και της επενδυτικής στρατηγικής θα αναλυθεί διεξοδικά στο Κεφάλαιο 5. Για τους σκοπούς της ανάλυσης, υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης διαθέτει βασική εξοικείωση με την σχετική ορολογία). Τότε, η αξία της εν λόγω αυτοχρηματοδοτούμενης επενδυτικής στρατηγικής (self-financing investment strategy) στον χρόνο $t = kh$ με αρχική αξία V_0 , δεδομένου ότι το χαρτοφυλάκιο περιέχει Δ_t μετοχές, θα είναι

$$V_0 + \sum_{1 \leq j \leq k} \Delta_{t_{j-1}} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}})$$

Σε αυτό το σημείο επιλέγουμε να θεωρήσουμε ότι η κίνηση Brown $\{W_t\}$ μοντελοποιεί την τιμή της μετοχής. Στην πραγματικότητα, η εν λόγω υπόθεση δεν είναι απολύτως ορθή, καθώς η κίνηση Brown μπορεί να πάρει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές, γεγονός που δεν αποτυπώνει ρεαλιστικά την εξέλιξη των τιμών των αξιογράφων (S. Shreve (2004)). Ωστόσο, προς το παρόν, θα παραλείψουμε αυτή την ασυμβατότητα για λόγους απλότητας. Δεδομένου ότι η κίνηση Brown δεν είναι διαδικασία φραγμένης κύμανσης, η κλασική ολοκλήρωση κατά Riemann-Stieltjes δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Το γεγονός αυτό καθιστά αναγκαία την διαμόρφωση νέων θεωρητικών πλαισίων και τεχνικών προκειμένου ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^t f(s, \omega) dW_s(\omega)$ να αποκτήσουν μαθηματική σαφήνεια.

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τη σχετική θεωρία που περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να οριστούν ολοκληρώματα επάνω σε μια κίνηση Brown, ακολουθώντας τη θεωρητική

θεμελίωση που υποδείχθηκε από τον Kiyoshi Itô. Ας θεωρήσουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $W = \{W_t, t \geq 0\}$ είναι μια $\mathcal{F}_t - BM(0, 1)$ ορισμένη στον φιλτραρισμένο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Σε ότι ακολουθεί, θα θεωρούμε ότι το φιλτράρισμα $\{\mathcal{F}_t\}$ είναι το φυσικό φιλτράρισμα της διαδικασίας Weiner. Ο ορισμός ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int_0^T f(s, \omega) dW_s(\omega) \quad (2.1)$$

όπου T πεπερασμένη θετική σταθερά, βασίζεται στη παραδοχή ότι η προς ολοκλήρωση στοχαστική διαδικασία $\{f(t), t \in [0, T]\}$ είναι \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένη, δηλαδή η $f(t, \cdot)$ είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη για κάθε $t \in [0, T]$, και ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρωτική συνθήκη

$$E_P \left(\int_0^T f^2(s) ds \right) = \int_{\Omega} \int_0^T f^2(s, \omega) ds dP(\omega) < \infty \quad (2.2)$$

δηλαδή η f είναι *τετραγωνικά ολοκληρώσιμη*. Συμβολίζουμε με $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2[0, T]$ τον χώρο των \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένων στοχαστικών διαδικασιών $\{f(t), t \in [0, T]\}$ οι οποίες ικανοποιούν την ολοκληρωτική συνθήκη (2.2), δηλαδή

$$\mathcal{H}^2 = \left\{ \{f(t), t \in [0, T]\} : \eta f(t, \cdot) \text{ είναι } \mathcal{F}_t\text{-μετρήσιμη } \forall t \in [0, T], E_P \left(\int_0^T f^2(s, \omega) ds \right) < \infty \right\}$$

Η στρατηγική που θα ακολουθήσουμε προκειμένου να ορίσουμε το ολοκλήρωμα (2.1) δεν διαφέρει ουσιαστικά από εκείνη που χρησιμοποιήθηκε για τον ορισμό ολοκληρωμάτων μετρήσιμων συναρτήσεων ως προς το μέτρο Lebesgue. Αρχικά, απαιτείται να ορίσουμε το στοχαστικό ανάλογο των απλών συναρτήσεων που μελετήσαμε στην παράγραφο 2.1.2.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4.1 (Απλή διαδικασία) Έστω διαμέριση $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ του διαστήματος $[0, T]$, με $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Μια στοχαστική διαδικασία $\{\delta(t), t \in [0, T]\}$, ονομάζεται *απλή ή βηματική διαδικασία (simple process)* (ως προς την διαμέριση Π), εάν για κάθε $\omega \in \Omega$ μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\delta(t, \omega) = \sum_{1 \leq i \leq n} \varphi_i(\omega) \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i)}(t) \quad (2.3)$$

όπου $\varphi_i(\cdot) = \delta(t_{i-1}, \cdot)$ είναι $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -μετρήσιμη και ικανοποιεί

$$E_P(\varphi_i^2) < \infty.$$

Συμβολίζουμε την κλάση των όλων των απλών συναρτήσεων ως \mathcal{H}_0^2 . Προφανώς, ισχύει ότι $\mathcal{H}_0^2 \subset \mathcal{H}^2$. Για διαδικασίες της μορφής (2.3), ορίζουμε το *στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô (Itô's stochastic integral)* ως μια γραμμική απεικόνιση από τον υπόχωρο \mathcal{H}_0^2 στον $L^2(dP)$, δηλαδή τον χώρο όλων τυχαίων μεταβλητών που ικανοποιούν την συνθήκη τετραγωνικής ολοκληρωσιμότητας (βλ. M. Steele (2000)).

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4.2 (Το στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô στον \mathcal{H}_0^2) Αν $\delta \in \mathcal{H}_0^2$, τότε το στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô της δ ως προς την $W = \{W_t, t \in [0, T]\}$ ορίζεται ως

$$I(\delta) := \int_0^T \delta(s) dW_s = \sum_{1 \leq i \leq n} \varphi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

Προκειμένου να επεκτείνουμε τον ορισμό στοχαστικών ολοκληρωμάτων από τον χώρο των απλών διαδικασιών \mathcal{H}_0^2 στον χώρο όλων των διαδικασιών \mathcal{H}^2 , θα πρέπει να βεβαιωθούμε ότι ο ορισμός στοχαστικών ολοκληρωμάτων επί του \mathcal{H}^2 έχει νόημα. Για τον σκοπό αυτό, παρουσιάζονται στη συνέχεια δύο θεμελιώδη αποτελέσματα, τα οποία θέτουν την θεωρητική βάση για την επέκταση του στοχαστικού ολοκληρώματος στον χώρο \mathcal{H}^2 .

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.1 (Ισομετρία Itô στον \mathcal{H}_0^2) Αν $\delta \in \mathcal{H}_0^2$, τότε

$$\|I(\delta)\|_{L^2(dP)} = \|\delta\|_{L^2(dt \times dP)}$$

όπου

$$\|I(\delta)\|_{L^2(dP)}^2 = E(I(\delta)^2) \quad \text{και} \quad \|\delta\|_{L^2(dt \times dP)}^2 = E\left(\int_0^T |\delta(s)|^2 ds\right).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.2 (Ο \mathcal{H}_0^2 είναι πυκνός στον \mathcal{H}^2) Για κάθε $\delta \in \mathcal{H}^2$, υπάρχει μια ακολουθία διαδικασιών $\{\delta_n\}$ με $\delta_n \in \mathcal{H}_0^2$ τέτοια ώστε

$$\|\delta - \delta_n\|_{L^2(dt \times dP)} \rightarrow 0$$

καθώς $n \rightarrow \infty$.

Το τελευταίο θεώρημα πρακτικά μας δίνει την δυνατότητα να προσεγγίσουμε οποιοδήποτε στοιχείο του χώρου \mathcal{H}^2 με μια ακολουθία απλών διαδικασιών. Συγκεκριμένα, αν $\delta \in \mathcal{H}^2$ και $\{\delta_n\} \subset \mathcal{H}_0^2$, τότε η $\{\delta_n\}$ συγκλίνει στη δ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{L^2(dt \times dP)}$. Θεωρούμε τώρα, για κάθε n , το ολοκλήρωμα $I(\delta_n)$ που ορίζεται από την σχέση (2.4). Η βασική ιδέα προκειμένου να αποδείξουμε ότι το στοχαστικό ολοκλήρωμα ορίζεται για κάθε στοιχείο του χώρου \mathcal{H}^2 είναι να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε $\{\delta_n\} \subset \mathcal{H}_0^2$ η ακολουθία $\{I(\delta_n)\}$ είναι $\|\cdot\|_{L^2(dP)}$ -συγκλίνουσα. Αξιοποιώντας το γεγονός ότι η $\{\delta_n\}$ είναι $\|\cdot\|_{L^2(dt \times dP)}$ -συγκλίνουσα, έπεται ότι η $\{\delta_n\}$ είναι $\|\cdot\|_{L^2(dt \times dP)}$ -βασική, και επομένως, από ισομετρία Itô, η $\{I(\delta_n)\}$ είναι $\|\cdot\|_{L^2(dP)}$ -βασική. Δεδομένου τώρα ότι ο χώρος $L^2(dP)$ είναι πλήρης (βλ. M. Steele (2001)), έπεται ότι η ακολουθία $\{I(\delta)\}$ συγκλίνει σε στοιχείο του $L^2(dP)$, το οποίο ορίζουμε ως $I(\delta)$. Επιπλέον, αποδεικνύεται εύκολα ότι το στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô $I(\delta)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της ακολουθίας απλών διαδικασιών $\{\delta_n\}$, και επομένως είναι καλά ορισμένο (βλ. M. Steele (2001), pp. 81).

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4.3 (Το στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô) Έστω $\delta \in \mathcal{H}^2$. Το στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô της δ ως προς την $W = \{W_t, t \in [0, T]\}$ ορίζεται ως το ακόλουθο όριο

$$I(\delta) := \int_0^T \delta(s) dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} I(\delta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \delta_n(s) dW_s$$

όπου $\{\delta_n\} \subset \mathcal{H}_0^2$ τέτοια ώστε $\|\delta - \delta_n\|_{L^2(dt \times dP)} \rightarrow 0$, για $n \rightarrow \infty$, και τα ολοκληρώματα $I(\delta_n)$ ορίζονται σύμφωνα με τον Ορισμό 2.4.2.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται κάποιες θεμελιώδεις ιδιότητες του ολοκληρώματος Itô.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.3 (Ιδιότητες του ολοκληρώματος Itô) Για κάθε $\delta, f \in \mathcal{H}^2$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα Itô ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες

1) (Μετρησιμότητα) Η τυχαία μεταβλητή $I(\delta)$ είναι \mathcal{F}_T -μετρήσιμη.

2) (Γραμμικότητα)

$$I(\alpha\delta + \beta f) = \alpha I(\delta) + \beta I(f), \quad \sigma.β.$$

3) (Μηδενική μέση τιμή)

$$E(I(\delta)) = E\left(\int_0^T \delta(s) dW_s\right) = 0$$

4) (Ισομετρία Itô)

$$\|I(\delta)\|_{L^2(dP)} = \|\delta\|_{L^2(dt \times dP)}$$

Προηγουμένως, εξετάσαμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα κατά Itô στην περίπτωση όπου τα άκρα ολοκλήρωσης είναι σταθερά. Το επόμενο βήμα είναι να επεκτείνουμε τον ορισμό αυτό, εξετάζοντας την περίπτωση όπου το άνω όριο ολοκλήρωσης μεταβάλλεται ως προς τον χρόνο. Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, την απλή διαδικασία $\delta \mathbf{1}_{[0,t]} = \{\delta(s) \mathbf{1}_{[0,t]}(s), s \in [0, T]\} \in \mathcal{H}_0^2$, τέτοια ώστε

$$\delta \mathbf{1}_{[0,t]}(s, \omega) = \begin{cases} \delta(s, \omega), & s \in [0, t] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ακολουθώντας την μορφή (2.4) και θεωρώντας μια διαμέριση $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ του διαστήματος $[0, T]$, με $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, το στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô της διαδικασίας $\delta \mathbf{1}_{[0,t]}$ για $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$I_t := I(\delta_{[0,t]}) = \int_0^t \delta(s) dW_s = \int_0^T \delta(s) \mathbf{1}_{[0,t]}(s) dW_s = \sum_{1 \leq i \leq k} \varphi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \varphi_{k+1}(W_t - W_{t_k}) \quad (2.4)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα διαθέτει οικονομική ερμηνεία, καθώς, σύμφωνα με τον S. Shreve (2004), εκφράζει το συνολικό κέρδος μιας επενδυτικής στρατηγικής (ή ενός δυναμικού χαρτοφυλακίου) στο χρόνο t που προκύπτει από την διαπραγμάτευση επί του martingale W_t . Το γεγονός ότι η διαπραγμάτευση πραγματοποιείται επί ενός martingale, υποδηλώνει διαισθητικά ότι το κέρδος μιας τέτοιας στρατηγικής αναμένεται να παραμείνει στάσιμο στο χρόνο. Πιο αυστηρά, αν θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο που μεταβάλλει την σύνθεση του κάθε χρονική στιγμή σύμφωνα με μια απλή διαδικασία, και δεδομένου ότι η σύνθεση του χαρτοφυλακίου υπόκειται στην ίδια ροή πληροφορίας με την υποκείμενη διαδικασία, τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι το στοχαστικό κέρδος $\{I_t\}$ είναι martingale (ως martingale μετασχηματισμός της στοχαστικής σύνθεσης από την υποκείμενη διαδικασία (βλ. Lamberton, D., Lapeyre, B. (2011))).

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.4 Αν $\delta \in \mathcal{H}_0^2$, τότε η στοχαστική διαδικασία $\{I_t = \int_0^t \delta(s) dW_s, t \in [0, T]\}$ είναι μια συνεχής, τετραγωνικά ολοκληρώσιμη \mathcal{F}_t -martingale (continuous, square-integrable \mathcal{F}_t -martingale), P -σχεδόν παντού.

Η ιδιότητα των συνεχών διαδρομών της διαδικασίας $I = \{I_t, t \in [0, T]\}$ προκύπτει άμεσα από την σχέση (2.4) και το γεγονός ότι για την συνάρτηση $g_\omega(t) = W_t(\omega)$ έχουμε ότι $g_\omega \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$, P -σχεδόν παντού.

Με χρήση, τώρα, της παραπάνω κατασκευής για το ολοκλήρωμα Itô στον \mathcal{H}^2 , αν $\delta I_{[0,t]} \in \mathcal{H}^2$, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε μια στοχαστική διαδικασία $I = \{I_t, t \in [0, T]\}$, της οποίας η τιμή για κάθε t να δίνεται από

$$I_t := \int_0^t \delta(s) dW_s, \quad t \in [0, T] \quad (2.5)$$

Η διαδικασία $I = \{I_t, t \in [0, T]\}$ καλείται το *άριστο ολοκλήρωμα του Itô* της διαδικασίας $\delta \in \mathcal{H}^2$ ως προς την διαδικασία Wiener (βλ. Α. Γιαννακόπουλος (2003)). Οι ιδιότητες του ολοκληρώματος Itô, όπως διατυπώθηκαν στο Θεώρημα 2.4.3, διατηρούνται αναλλοίωτες για το άριστο ολοκλήρωμα Itô (2.5), με την επιπλέον ιδιότητα ότι η I αποτελεί τετραγωνικά ολοκληρώσιμη \mathcal{F}_t -martingale.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.5 Αν $\delta \in \mathcal{H}^2$, τότε η στοχαστική διαδικασία $I = \{I_t, t \in [0, T]\}$ είναι μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη \mathcal{F}_t -martingale, δηλαδή για οποιαδήποτε $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$E(I_t - I_s \mid \mathcal{F}_s) = 0, \quad \sigma.\beta.$$

Μένει να δείξουμε ότι η συνάρτηση $t \mapsto I(t)$ είναι συνεχής P -σχεδόν παντού. Θεωρούμε μια ακολουθία διαδικασιών $\{\delta_n I_{[0,t]}(s)\} \subset \mathcal{H}_0^2$. Σύμφωνα με το θεώρημα 2.4.2, υπάρχει $\delta I_{[0,t]} \in \mathcal{H}^2$ τέτοια ώστε

$$\|\delta_n I_{[0,t]} - \delta I_{[0,t]}\|_{L^2(dt \times dP)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Έστω, επιπλέον, η στοχαστική διαδικασία $\{I_t^{(n)}\}$ που ορίζεται όπως στην σχέση (2.4) για την $\delta_n I_{[0,t]}$, για κάθε n . Προκειμένου να δείξουμε ότι η διαδικασία I έχει συνεχείς διαδρομές αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία $\{I^{(n)}\}$ συγκλίνει ως προς την ομοιόμορφη νόρμα στην I στον χώρο $C([0, T], \mathbb{R})$. Δεδομένου ότι η $I_t^{(n)}$ και η I_t είναι martingale ως προς την διήθηση $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$, έπεται ότι η διαφορά $I_t - I_t^{(n)}$ είναι \mathcal{F}_t -martingale (και συνεπώς \mathcal{F}_t -submartingale). Με την βοήθεια της ανισότητας Doob (Doob's maximal inequality), αποδεικνύεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} P \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |I_t - I_t^{(n)}| \geq \frac{1}{n} \right) < \infty$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα των Borel-Cantelli, προκύπτει ότι το σύνολο

$$\Omega_0 = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{0 \leq t \leq T} |I_t(\omega) - I_t^{(m)}(\omega)| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

είναι σύνολο μηδενικού μέτρου πιθανότητας, δηλαδή για οποιοδήποτε $\omega \in \Omega_0$ η πιθανότητα η ανισότητα

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |I_t(\omega) - I_t^{(n)}(\omega)| \geq \frac{1}{n}$$

να συμβεί για άπειρο αριθμό φυσικών n είναι μηδενική (βλ. P. Kloeden και E. Platen (1992)). Πρακτικά, η τελευταία διαπίστωση μας λέει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |I_t(\omega) - I_t^{(n)}(\omega)| = 0, \quad \sigma.β.$$

δηλαδή,

$$I_t^{(n)} \rightarrow I_t \quad \text{ομοιόμορφα στο } [0, T], \quad \sigma.β..$$

Από τα παραπάνω, έπεται άμεσα ότι η I_t είναι συνεχής συνάρτηση για κάθε $t \in [0, T]$, ως όριο συνεχών συναρτήσεων ως προς την ομοιόμορφη νόρμα.

2.4.2 Τύπος του Itô και διαδικασίες Itô

Όπως είδαμε, η αδυναμία της κλασικής Riemann-Stieltjes ολοκλήρωσης να αντιμετωπίσει προβλήματα που ανακύπτουν από την εισαγωγή της τυχαιότητας, ανέδειξε την ανάγκη ανάπτυξης της θεωρίας του στοχαστικού ολοκληρώματος Itô. Η θεωρία αυτή, πέρα από την θεμελιώδη θεωρητική της σημασία, φέρει και σημαντικής πρακτικής αξίας, καθώς, όπως αναφέρθηκε, εξυπηρετεί ένα ευρύ φάσμα χρηματοοικονομικών εφαρμογών, με χαρακτηριστική να είναι η μοντελοποίηση του κέρδους μιας επενδυτικής στρατηγικής. Βέβαια, η μοντελοποίηση της αξίας δυναμικών χαρτοφυλακίων δεν μπορεί να επιτευχθεί με την απευθείας εφαρμογή μιας κίνησης Brown, καθώς η αξιοποίηση ενός τέτοιου μοντέλου για την υποκείμενη διαδικασία δεν υπακούει τους “λογικούς” κανόνες της αγοράς. Είναι προφανές ότι στη θέση της κίνησης Brown θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια διαφορετική στοχαστική διαδικασία, για την οποία θα θέλαμε να πληρούνται ορισμένα επιθυμητά χαρακτηριστικά, καθοριζόμενα αποκλειστικά από τους κανόνες που διέπουν τα εκάστοτε μοντέλα αγορών. Ανεξάρτητα, όμως, από την μορφή ή τους μηχανισμούς που διέπουν τα τυχαία φαινόμενα, είναι εμφανής η ανάγκη επέκτασης της θεωρίας στοχαστικών ολοκληρωμάτων στην περίπτωση όπου η ολοκλήρωση δεν ορίζεται ως προς τις μεταβολές της κίνησης Brown. Στο πλαίσιο αυτό, θα μελετήσουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_0^t \delta(s) dY_s$$

όπου Y_t είναι μια στοχαστική ανέλιξη η οποία γενικεύει την χρήση της κίνησης Brown για τον παραπάνω σκοπό. Η διαδικασία Y_t ανήκει σε μια ευρύτερη κλάση διαδικασιών, γνωστή ως κλάση των διαδικασιών Itô, στην οποία, όπως θα δούμε στη συνέχεια, βρίσκει εφαρμογή ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα του λογισμού Itô.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4.4 (Διαδικασίες Itô) Έστω ο φιλτραρισμένος χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ και $\{W_t, t \geq 0\} \sim \mathcal{F}_t - BM(0, 1)$. Η στοχαστική διαδικασία $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ θα καλείται *διαδικασία Itô* αν μπορεί να αναπαρασταθεί στη μορφή

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dW_s$$

όπου X_0 είναι \mathcal{F}_0 -μετρήσιμη και u, v είναι κάποιες $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ -προσαρμοσμένες στοχαστικές ανέλιξεις οι οποίες ικανοποιούν τις παρακάτω ολοκληρωτικές συνθήκες

$$E \left(\int_0^t v^2(s, \omega) ds \right) < \infty \quad \sigma.β., \quad \int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty \quad \sigma.β.$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να γραφεί σε διαφορική μορφή ως

$$dX_t = udt + v dW_t$$

Στη σχετική βιβλιογραφία συναντάμε πληθώρα παραδειγμάτων διαδικασιών Itô, με χαρακτηριστικές περιπτώσεις την κίνηση Brown και την διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck. Γενικότερα, όλες οι γνωστές διαδικασίες διάχυσης εντάσσονται στην κλάση των διαδικασιών Itô, με εξαίρεση εκείνες που περιλαμβάνουν άλματα μεταξύ των διαδρομών τους (βλ. S. Shreve (2004)).

Έχοντας ορίσει την κλάση των διαδικασιών Itô, είμαστε έτοιμοι να παρουσιάσουμε την μορφή των στοχαστικών ολοκληρωμάτων Itô ως προς διαδικασίες Itô, δηλαδή ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_0^t \delta(s) dX_s$, όπου δ είναι μια $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ -προσαρμοσμένη στοχαστική ανέλιξη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4.5 (Το ολοκλήρωμα Itô ως προς μια διαδικασία Itô) Έστω $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ μια διαδικασία Itô και $\{\delta(t), 0 \leq t \leq T\}$ μια $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ -προσαρμοσμένη στοχαστική ανέλιξη. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Itô της δ ως προς μια διαδικασία Itô την ποσότητα

$$\int_0^t \delta(s) dX_s = \int_0^t \delta(s)u(s) ds + \int_0^t \delta(s)v(s) dW_s$$

Θα ολοκληρώσουμε την παρούσα παράγραφο παρουσιάζοντας το Λήμμα του Itô. Το Λήμμα του Itô αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της στοχαστικής ανάλυσης καθώς, στην σχετική βιβλιογραφία αναγνωρίζεται ως το στοχαστικό ανάλογο του κανόνα της αλυσίδας που γνωρίζουμε από την κλασική ανάλυση. Όπως και ο κανόνας της αλυσίδας, το Λήμμα του Itô προσφέρει έναν γενικευμένο κανόνα παραγωγίσισης αντίστοιχο με εκείνον του λογισμού πολλών μεταβλητών, αλλά τροποποιημένο κατάλληλα ώστε να είναι να συμβατός με στοχαστικά ολοκληρώματα (βλ. A. Γιαννακόπουλος (2003)).

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.6 (Το Λήμμα του Itô για διαδικασίες Itô) Έστω $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ μια διαδικασία Itô,

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dW_s$$

με $dX_t = udt + v dW_t$, και f μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε, για κάθε $t \geq 0$, ισχύει ότι

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \int_0^t f''(X_s) d[X, X]_s$$

όπου με $[X, X]_t$ συμβολίζουμε την τετραγωνική κύμανση που συσσωρεύεται από την διαδικασία Itô στο διάστημα $[0, t]$, η οποία εξ' ορισμού δίνεται από την παρακάτω ποσότητα

$$[X, X]_t = \int_0^t v^2(s) ds$$

Όμοια, για οποιαδήποτε συνάρτηση της X_t της μορφής $f(t, x) \in C^{1,2}$ (όπου με $C^{1,2}$ συμβολίζουμε τον χώρο των συναρτήσεων $f(t, x)$ με συνεχή πρώτη παράγωγο ως προς την πρώτη μεταβλητή και συνεχή δεύτερη παράγωγο ως προς τη δεύτερη μεταβλητή), μπορεί να εκφραστεί σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα της μορφής

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t f_s(s, X_s) ds + \int_0^t f_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, X_s) d[X, X]_s \\ &= f(0, X_0) + \int_0^t \left(f_s(s, X_s) + f_x(s, X_s)u(s) + \frac{1}{2}f_{xx}(s, X_s)v^2(s) \right) ds + \int_0^t f_x(s, X_s)v(s) dW_s \end{aligned}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί υπό την παρακάτω ισοδύναμη διαφορική μορφή

$$df(t, X_t) = \left(f_t(t, X_t) + f_x(t, X_t)u(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)v^2(t) \right) dt + f_x(t, X_t)v(t) dW_t$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΛÉVY

Από το προηγούμενο κεφάλαιο, η έντονη διαφοροποίηση που εντοπίζεται μεταξύ των χαρακτηριστικών των διαδρομών της διαδικασίας Poisson και της κίνησης Brown, με μια πρώτη ματιά, δημιουργεί την εντύπωση ότι πρόκειται για δύο τελείως διαφορετικά στοχαστικά υποδείγματα. Μια πραγματοποίηση της κίνησης Brown χαρακτηρίζεται από την συνεχή συμπεριφορά της και τις άπειρες ταλαντώσεις που εκδηλώνονται σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα, ως συνέπεια της άπειρης μεταβολής της, ενώ αντίθετα η διαδικασία Poisson, παρουσιάζει γνήσιως αύξουσες και τμηματικά συνεχείς διαδρομές με διακριτά άλματα σε τυχαίες χρονικές στιγμές. Ωστόσο, η μορφή των διαδρομών τους δεν θα έπρεπε να αποτελεί γνώμονα για την υπαγωγή τους σε διαφορετικές κλάσεις: αν συγκρίνουμε προσεκτικά τους ορισμούς τους, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι μοιράζονται ορισμένες θεμελιώδεις κοινές ιδιότητες. Αυτές οι κοινές ιδιότητες αποτελούν τον πυρήνα μιας ευρύτερης και εξαιρετικά ευέλικτης κλάσης στοχαστικών διαδικασιών, γνωστών στη βιβλιογραφία ως διαδικασίες Lévy.

3.1 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΛÉVY: ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

3.1.1 Διαδικασίες Lévy και Απείρως Διαιρητές Κατανομές

Η χρήση μοντέλων που βασίζονται στη κίνηση Brown, αν και αποτελεί μια συνήθης προσέγγιση για τη στοχαστική μοντελοποίηση των τιμών των αξιόγραφων, στηρίζεται στην υπόθεση της κανονικότητας, η οποία, σύμφωνα με αρκετούς ερευνητές, δεν αντανακλά επαρκώς στις πραγματικές συνθήκες της αγοράς. Ο περιορισμός της εφαρμογής τέτοιων μοντέλων στο πραγματικό κόσμο, ιδίως σε περιπτώσεις όπου τα δεδομένα της αγοράς εμφανίζουν άλματα ή συνδέονται με πλατύκυρτες και συχνά ασύμμετρες κατανομές, οδήγησε στην ανάδειξη των διαδικασιών Lévy. Οι διαδικασίες αυτές επιτρέπουν την αποτύπωση της σύνθετης και συχνά ασυνεχούς συμπεριφοράς των χρηματοοικονομικών αγορών, προσφέροντας ένα πιο ακριβές και ρεαλιστικό πλαίσιο μοντελοποίησης σε σύγκριση με τα κλασικά Brownian μοντέλα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1.1 (Διαδικασίες Lévy) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ ένας φιλτραρισμένος χώρος πιθανότητας. Μια càdlàg, $\{\mathcal{F}_t\}$ -προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία $L = \{L_t, t \geq 0\}$ με τιμές στο σύνολο των πραγματικών, καλείται διαδικασία Lévy αν πληροί τις κάτωθι ιδιότητες:

- 1) $P(L_0 = 0) = 1$.
- 2) Η L έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, δηλαδή η τυχαία μεταβλητή $L_t - L_s$ είναι ανεξάρτητη της πληροφορίας \mathcal{F}_s , για κάθε $t > s \geq 0$.
- 3) Η L έχει στάσιμες προσαυξήσεις, δηλαδή για κάθε $t, s \geq 0$, η κατανομή του $L_{t+s} - L_t$ δεν εξαρτάται από το t .

4) Η L είναι στοχαστικά συνεχής (stochastically continuous), δηλαδή για κάθε $t \geq 0$ και αυθαίρετη σταθερά $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} P(|L_{t+h} - L_t| > \varepsilon) = 0.$$

Ανάμεσα στις ιδιότητες που αναφέρθηκαν στον προηγούμενο ορισμό, αναφέρεται ότι η συνεισφορά της ιδιότητας 4) είναι σημαντική ώστε να εξαιρεθούν εκείνες οι διαδικασίες οι οποίες χαρακτηρίζονται από ασυνέχειες σε καθορισμένες, μη τυχαίες χρονικές στιγμές. Με αυτό τον τρόπο, διασφαλίζεται ότι σε κάθε προκαθορισμένη χρονική στιγμή $t \geq 0$, η πιθανότητα να εμφανιστεί άλμα της διαδικασίας είναι μηδενική, διασαφηνίζοντας ότι τυχόν ασυνέχειες της διαδικασίας L μπορούν να προκύψουν σε διαστήματα που καθορίζονται τυχαία και όχι βάσει κάποιας νομοτέλειας.

Πέρα από τις θεμελιώδεις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τις διαδικασίες Lévy, ένα ακόμη χρήσιμο χαρακτηριστικό είναι η σύνδεση τους με τις απείρως διαιρετές κατανομές. Παρακάτω παρουσιάζουμε τη σημασία αυτής της αντιστοιχίας και το πως η θεωρία των απείρως διαιρετών κατανομών προσφέρει ένα ισχυρό εργαλείο για την ανάλυση και τον χαρακτηρισμό των διαδικασιών Lévy.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1.2 (Απείρως Διαιρετή Κατανομή) Έστω (Ω, \mathcal{F}, P) ένας χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή p_X . Λέμε ότι η κατανομή p_X είναι *απείρως διαιρετή* αν, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $X_1^{(1/n)}, X_2^{(1/n)}, \dots, X_n^{(1/n)}$ τέτοια ώστε

$$X \stackrel{d}{=} X_1^{(1/n)} + X_2^{(1/n)} + \dots + X_n^{(1/n)} \quad (3.1)$$

Ισοδύναμα με τον παραπάνω ορισμό, η κατανομή p_X μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι απείρως διαιρετή αν, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει μια κατανομή μ , κοινή για όλες τις τυχαίες μεταβλητές που εμφανίζονται στο δεξί μέλος της (3.1), τέτοια ώστε

$$p_X = \mu * \dots * \mu = \mu^{*n} \quad (3.2)$$

Η πράξη $(*)$ που εμφανίζεται στην τελευταία σχέση συμβολίζει τη *συνέλιξη κατανομών*. Για δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $Y, Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένες στον χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) , με νόμους μ και ν αντίστοιχα, η συνέλιξη $\mu * \nu$ ορίζεται ως το μέτρο πιθανότητας επί του \mathbb{R} , που δίνει την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής του αθροίσματος $Y + Z$, δηλαδή για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$(\mu * \nu)(A) = P(Y + Z \in A) = E[\mathbf{1}_A(Y + Z)] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(y + z) \mu(dy) \nu(dz)$$

Αν $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ανεξάρτητες και ισοδύναμες κατά κατανομή τυχαίες μεταβλητές με νόμο μ , τότε η κατανομή ν του αθροίσματος των $X_j, j = 1, \dots, n$ δίνεται από τη n -οστού βαθμού συνέλιξη της κατανομής μ

$$\nu = \mu * \dots * \mu = \mu^{*n} \quad (3.3)$$

και λέμε ότι το μέτρο μ είναι η *n -οστή ρίζα συνέλιξης του μέτρου ν* (*n th convolution root of ν*), και συμβολικά γράφουμε $\mu = \nu^{1/n}$. Από τη σχέση (3.3) συνάγεται άμεσα το συμπέρασμα ότι το

μέτρο μ που εμφανίζεται στη σχέση (3.2) αποτελεί τη n -οστή ρίζα συνέλιξης του μέτρου p_X , και επομένως η (3.2) παίρνει την μορφή

$$p_X = p_X^{1/n} * \cdots * p_X^{1/n} = \left(p_X^{1/n}\right)^{*n}$$

όπου $p_X^{1/n} = p_{X_1^{(1/n)}} = \cdots = p_{X_n^{(1/n)}}$ είναι ο νόμος των τυχαίων μεταβλητών $X_j^{(1/n)}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Ανακαλώντας το γεγονός ότι η κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής καθορίζεται μονοσήμαντα από την μορφή της χαρακτηριστικής της συνάρτησης, ο χαρακτηρισμός μιας τυχαίας μεταβλητής με κατανομή πιθανότητας που ανήκει στην οικογένεια των απείρως διαιρετών νόμων δύναται να πραγματοποιηθεί μέσω της αναγνώρισης μιας συγκεκριμένης δομής στην αντίστοιχη χαρακτηριστική συνάρτηση. Οι P. Lévy (1934) και A. Khintchine (1937) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η εν λόγω δομή αποτυπώνεται μέσω μιας φορμαλιστικής αναπαράστασης, γνωστής στη βιβλιογραφία ως αναπαράσταση Lévy–Khintchine, η οποία εξυπηρετεί τον παραπάνω σκοπό, αποδεικνύοντας ότι η αναπαράσταση αυτή παρέχει ένα πλήρες πλαίσιο για την ταυτοποίηση και την κατασκευή κάθε απείρως διαιρετής κατανομής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.1 (Αναπαράσταση Lévy–Khintchine) Ο νόμος μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι απείρως διαιρετός, αν και μόνο αν υπάρχει μια τριάδα (b, c, ν) , όπου $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^+$ και ν ένα θετικό μέτρο επί του \mathbb{R} που ικανοποιεί τις συνθήκες

- $\nu(\{0\}) = 0$
- $\nu(A) < \infty$ για κάθε συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) σύνολο $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
- $\int_{|x| \leq 1} |x|^2 \nu(dx) < \infty$ και $\int_{|x| > 1} \nu(dx) < \infty$

τέτοια ώστε

$$\varphi_X(u) = E(e^{iuX}) = e^{\psi(u)}, \quad u \in \mathbb{R} \quad (3.4)$$

$$\psi(u) = -\frac{u^2 c}{2} + ibu + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}) \nu(dx) \quad (3.5)$$

Η τριάδα (b, c, ν) καλείται *τριάδα Lévy* ή *χαρακτηριστική τριάδα*, ενώ η συνάρτηση $\psi(u)$ που εμφανίζεται στον εκθέτη της σχέσης (3.5) καλείται *εκθέτης Lévy* ή *χαρακτηριστικός εκθέτης*.

Από το παραπάνω θεώρημα, αξίζει να σημειωθεί ότι η χαρακτηριστική τριάδα (b, c, ν) προσδιορίζει μοναδικά την μορφή της χαρακτηριστικής συνάρτησης (Sato (1999), Theorem 8.1(ii)). Αυτό συνεπάγεται ότι η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία των απείρως διαιρετών κατανομών με την δομή των χαρακτηριστικών συναρτήσεων που παρουσιάζεται συνδυαστικά από τις σχέσεις (3.4) και (3.5), καθορίζεται πλήρως από τους όρους της χαρακτηριστικής τριάδας. Ο ρόλος κάθε όρου της χαρακτηριστικής τριάδας θα αναφερθεί με μεγαλύτερη λεπτομέρεια σε επόμενες παραγράφους, όπου θα εξεταστεί η θεωρητική και πρακτική συνεισφορά τους στην κατασκευή και ανάλυση των διαδικασιών Lévy.

Η αναφορά στην απείρως διαιρετή φύση μιας κατανομής ανοίγει τον δρόμο για τη μελέτη των μέτρων πιθανότητας που μπορούν να εμφανιστούν ως νόμοι των τυχαίων μεταβλητών που συνθέτουν μια διαδικασία Lévy. Δεδομένου ότι η οικογένεια των διαδικασιών Lévy συγκροτεί όλες εκείνες τις διαδικασίες που χαρακτηρίζονται από την ανεξαρτησία και την στασιμότητα των προσαυξήσεων τους, και θεωρώντας ότι η $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ ανήκει στην κλάση των διαδικασιών Lévy, μπορούμε να δείξουμε ότι, για οποιοδήποτε $t \geq 0$, η τυχαία μεταβλητή X_t μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ανεξάρτητων και ισόνομων όρων, όπως προβλέπει η σχέση (3.1). Ο αποδεικτικός συλλογισμός εμπλέκει την διάσπαση ενός αυθαίρετου διαστήματος $[0, t]$, όπου $t > 0$, σε ισομήκη (μη επικαλυπτόμενα) υποδιαστήματα ώστε οι προσαυξήσεις εντός αυτών να διαμορφώνουν το επιθυμητό άθροισμα. Αν συμβολίσουμε τα υποδιαστήματα με $[(k-1)\Delta, k\Delta]$, $k = 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}$ και Δ τέτοιο ώστε $n\Delta = t$, προκύπτει ότι η ακολουθία

$$\left\{ Y_k^{(1/n)}, 1 \leq k \leq n \right\} = \left\{ X_{k\Delta} - X_{(k-1)\Delta}, 1 \leq k \leq n \right\}$$

αποτελείται από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, ισόνομες με την X_Δ , για τις οποίες ικανοποιείται η σχέση

$$X_t = Y_1^{(1/n)} + Y_2^{(1/n)} + \dots + Y_n^{(1/n)} = X_{t/n} + (X_{2t/n} - X_{t/n}) + \dots + (X_t - X_{(n-1)t/n})$$

Θεωρώντας ότι το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει για οποιαδήποτε επιλογή του Δ , αναδεικνύουμε την θεωρητική σύζευξη των διαδικασιών Lévy με τις απείρως διαιρετές κατανομές, αποκαλύπτοντας ότι αν $L = \{L_t, t \geq 0\}$ είναι μια διαδικασία Lévy τότε για κάθε t , η L_t έχει απείρως διαιρετή κατανομή.

Οι διαδικασίες Lévy, όπως αναφέρθηκε, αποτελούν μια γενικευμένη οικογένεια ανεξίτητων που ενοποιούν και διευρύνουν τις βασικές ιδιότητες των κλασικών στοχαστικών διαδικασιών, οικοδομώντας ένα ενιαίο πλαίσιο όπου μπορούμε να μελετήσουμε παράλληλα όλα τα μοντέλα που συνθέτουν την οικογένεια. Εξετάζοντας συστηματικά τις διαδικασίες Lévy, κάθε αποτέλεσμα το οποίο εξάγεται για την κλάση ειδικεύεται στα επί μέρους μοντέλα που ανήκουν σε αυτή. Έτσι, ενώ μέχρι πρότινος θα μπορούσε ο αναγνώστης να θεωρεί ότι ο μοναδικός βαθμός ελευθερίας είναι η επιλογή του νόμου των προσαυξήσεων της διαδικασίας, στην πραγματικότητα δεν θα πρέπει να δημιουργείται αυτή η εσφαλμένη εντύπωση, αφού ακόμη και η κατανομή επιλέγεται ώστε να είναι απείρως διαιρετή. Ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα διαδικασιών που ενσωματώνουν τις ανωτέρω ιδιότητες στα χαρακτηριστικά τους γνωρίσματα είναι η κίνηση Brown και η διαδικασία Poisson, στις οποίες αναφερθήκαμε στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου και, όπως προείδασαμε στη αρχή του παρόντος, αποτελούν μέλη της κλάσης των διαδικασιών Lévy.

Ας προχωρήσουμε στην ξεχωριστή μελέτη της σύνδεσης των δύο βασικών διαδικασιών Lévy με τις απείρως διαιρετές κατανομές, ξεκινώντας με την περίπτωση της κίνησης Brown. Έστω $W = \{W_t, t \geq 0\}$ τυπική κίνηση Brown και ας θεωρήσουμε ότι σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t \geq 0$, η κατανομή πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής W_t δίνεται από την κατανομή Gauss, δηλαδή

$$\gamma(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t} dx$$

με μάζα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Σε αυτό το σημείο θα θέλαμε να δείξουμε ότι η κατανομή πιθανότητας που δίνεται από την τελευταία σχέση είναι απείρως διαιρετή.

Προκειμένου να γίνει αυτό, θα θεωρήσουμε την γενικότερη περίπτωση μιας κανονικής κατανομής. Έστω, λοιπόν, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ με κατανομή πιθανότητας που δίνεται από

$$\gamma^*(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

όπου $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 0$ είναι παράμετροι της κατανομής. Τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση της X δίνεται από την έκφραση

$$\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

η οποία, μετά από πράξεις, παίρνει την ακόλουθη μορφή για κάθε $u \in \mathbb{R}$

$$\varphi_X(u) = \exp \left\{ -\frac{u^2\sigma^2}{2} + iu\mu \right\}$$

Παρατηρούμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X , μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$\varphi_X(u) = \left(\exp \left\{ -\frac{u^2\sigma^2}{2n} + iu\frac{\mu}{n} \right\} \right)^n$$

για κάθε φυσικό n . Παρατηρώντας ότι η παράσταση μέσα στην παρένθεση αποτελεί την χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής $X^{(1/n)} \sim N(\mu/n, \sigma^2/n)$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X αναπαρίσταται ως το άθροισμα n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $\{X_j^{(1/n)}, 1 \leq j \leq n\}$ με $X_j^{(1/n)} \sim N(\mu/n, \sigma^2/n)$, αποδεικνύοντας το ζητούμενο. Εκφράζοντας, τώρα, την χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X σε όρους της αναπαράστασης Lévy–Khintchine, διαπιστώνουμε ότι η χαρακτηριστική τριάδα που αντιστοιχεί στην κατανομή Gauss είναι η $(b, c, \nu) = (\mu, \sigma^2, 0)$. Με γνώμονα την τελευταία, η κατανομή πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής W_t (για κάθε $t \geq 0$) αντιστοιχεί στην χαρακτηριστική τριάδα $(b, c, \nu) = (0, t, 0)$. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με την αναπαράσταση Lévy–Khintchine η χαρακτηριστική συνάρτηση για την τυπική κίνηση Brown

$$\varphi_{W_t}(u) = \exp \left\{ -\frac{u^2 t}{2} \right\}, \quad u \in \mathbb{R}$$

Γενικεύοντας το παραπάνω αποτέλεσμα, για οποιαδήποτε διαδικασία $B = \{B_t, t \geq 0\} \sim BM(\mu, \sigma^2)$ όπου για κάθε $t \geq 0$ έχουμε $B_t \sim N(t\mu, t\sigma^2)$, η χαρακτηριστική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί σε όρους της τριάδας Lévy $(t\mu, t\sigma^2, 0)$ ως

$$\varphi_{B_t}(u) = \exp \left\{ -\frac{u^2 t \sigma^2}{2} + iut\mu \right\}, \quad u \in \mathbb{R}$$

Σε αντιστοιχία με την περίπτωση της κίνησης Brown, εξετάζουμε τώρα την περίπτωση της διαδικασίας Poisson $N = \{N_t, t \geq 0\}$. Υπενθυμίζεται ότι αν μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ , τότε η χαρακτηριστική της συνάρτηση δίνεται από

$$\varphi_X(u) = E(e^{iuX}) = \exp [\lambda(e^{iu} - 1)], \quad u \in \mathbb{R}$$

Για να δείξουμε ότι η κατανομή Poisson είναι απείρως διαιρετή, αρκεί να δούμε πως, για κάθε φυσικό αριθμό n , η παραπάνω έκφραση μπορεί να γραφεί ως

$$\varphi_X(u) = \left(\exp \left[\frac{\lambda}{n} (e^{iu} - 1) \right] \right)^n$$

Αναγνωρίζοντας ότι η παράσταση $\exp[\lambda/n \cdot (e^{iu} - 1)]$ αντιστοιχεί στην χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής $X^{(1/n)} \sim \text{Pois}(\lambda/n)$, έπεται άμεσα, από ιδιότητες χαρακτηριστικών συναρτήσεων, ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι ισοδύναμη κατά κατανομή με την τυχαία μεταβλητή του αθροίσματος n ανεξάρτητων αντίγραφων της $X^{(1/n)}$. Η τελευταία διαπίστωση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$ ανήκει στην οικογένεια των απείρως διαιρετών κατανομών, αφού για κάθε φυσικό n μπορούμε να την εκφράσουμε ως συνέλιξη n το πλήθος κατανομών Poisson με παράμετρο λ/n . Δεδομένου, πλέον, ότι η κατανομή Poisson πληροί την ιδιότητα του Ορισμού 3.1.2, και βασιζόμενοι στο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.1.1, μπορούμε να βρούμε μια τριάδα (b, c, ν) τέτοια ώστε για κάθε $u \in \mathbb{R}$ ο χαρακτηριστικός εκθέτης της κατανομής Poisson να δίνεται από την σχέση (3.5). Συγκρίνοντας την χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X με την έκφραση

$$\varphi_X(u) = \exp \left\{ -\frac{u^2 c}{2} + ibu + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}) \nu(dx) \right\}$$

διαπιστώνουμε ότι οι δύο πρώτοι όροι της χαρακτηριστικής τριάδας είναι μηδέν, ενώ το μέτρο ν δίνεται από την σχέση $\nu(dx) = \lambda \delta_1(dx)$, όπου με δ_1 συμβολίζουμε το μέτρο Dirac με μοναδιαία μάζα στο σημείο 1. Με αυτά τα δεδομένα, η χαρακτηριστική τριάδα που αντιστοιχεί στην κατανομή Poisson με παράμετρο λ δίνεται υπό την ακόλουθη μορφή

$$(b, c, \nu) = (0, 0, \lambda \delta_1).$$

Έτσι, για οποιαδήποτε επιλογή του t , προκύπτει με βάση την παραπάνω ανάλυση ότι η τυχαία μεταβλητή $N_t \sim \text{Pois}(\lambda t)$ έχει απείρως διαιρετή κατανομή, η οποία αντιστοιχεί στην χαρακτηριστική τριάδα $(0, 0, t\lambda \delta_1)$.

3.1.2 Τύπος των Lévy–Khinchine για διαδικασίες Lévy

Το γεγονός ότι οποιαδήποτε διαδικασία Lévy συντίθεται αποκλειστικά από τυχαίες μεταβλητές με απείρως διαιρετό νόμο, όσο και αν θέτει συγκεκριμένους περιορισμούς στις πιθανές επιλογές για την κατανομή των προσαυξήσεων της διαδικασίας, παρέχει ένα σαφές μαθηματικό πλαίσιο για την κατανόηση των θεμελιωδών ιδιοτήτων της. Στο εν λόγω πλαίσιο, κεντρική θέση κατέχει η αναπαράσταση Lévy–Khinchine, η οποία, μέσω της χαρακτηριστικής τριάδας (b, c, ν) , προσφέρει ένα ξεκάθαρο υπολογιστικό εργαλείο για την περιγραφή της χαρακτηριστικής συνάρτησης των διαδικασιών Lévy, συνιστώντας ότι η ταυτοποίηση του νόμου των διαδικασιών του Ορισμού 3.1.1 συντελείται στην πράξη με την βοήθεια των χαρακτηριστικών όρων b, c και ν . Προτού, προχωρήσουμε στην αναπαράσταση Lévy–Khinchine για διαδικασίες Lévy, είναι σκόπιμο να εξετάσουμε δύο σημαντικά αποτελέσματα που σχετίζονται με τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις τους.

ΛΗΜΜΑ 3.1.1 Αν η διαδικασία $X = \{X_t, t \geq 0\}$ είναι στοχαστικά συνεχής, τότε η απεικόνιση $u \mapsto \varphi_{X_t}(u)$ είναι συνεχής για κάθε $u \in \mathbb{R}$.

Έστω τώρα $L = \{L_t, t \geq 0\}$ μία διαδικασία Lévy και ας θεωρήσουμε ότι η απεικόνιση $t \mapsto \varphi_{L_t}(u)$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση που αντιστοιχεί στην τυχαία μεταβλητή L_t , δηλαδή

$$\varphi_{L_t}(u) \equiv \varphi_t(u) = E(e^{iuL_t})$$

όπου $u \in \mathbb{R}$. Για $s \geq 0$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες 1), 2) και 3) του Ορισμού 3.1.1, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \varphi_{t+s}(u) &= E(e^{iu(L_{t+s}-L_s)} e^{iuL_s}) = E(e^{iu(L_{t+s}-L_s)})E(e^{iuL_s}) \\ &= E(e^{iuL_t})E(e^{iuL_s}) = \varphi_t(u)\varphi_s(u) \end{aligned}$$

και

$$\varphi_0(u) = 1$$

Από Λήμμα 3.1.1, αφού η L είναι στοχαστικά συνεχής για κάθε $t \geq 0$, έπεται ότι η απεικόνιση $t \mapsto \varphi_t(u)$ είναι συνεχής συνάρτηση ως προς t . Θεωρώντας σταθερό u , από ιδιότητες χαρακτηριστικών συναρτήσεων, έχουμε ότι η $\varphi_t(u)$ είναι συνεχής συνάρτηση ως προς t (ως συνέπεια της ομοιόμορφης συνέχειας), ενώ από Sato (1999) (*Lemma 7.5, pp. 23*) η $\varphi_t(u) \neq 0$, για κάθε $u \in \mathbb{R}$. Επομένως, από Sato (1999) (*Lemma 7.6, pp. 23*), υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$\varphi_t(u) = e^{t\psi(u)}, \quad u \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

ή, ισοδύναμα

$$f_t(u) = \log(\varphi_t(u)), \quad u \in \mathbb{R}$$

Επειδή η απεικόνιση $t \mapsto \varphi_t(u)$ είναι συνεχής συνάρτηση ως προς t , προκύπτει ότι η $t \mapsto f_t(u)$ είναι επίσης συνεχής συνάρτηση ως προς t . Παρατηρώντας ότι η εξίσωση $\varphi_{t+s}(u) = \varphi_t(u)\varphi_s(u)$ οδηγεί στην ισοδύναμη σχέση

$$f_{t+s}(u) = f_t(u) + f_s(u)$$

αναγνωρίζουμε τη συναρτησιακή εξίσωση του Cauchy (Cauchy's functional equation), της οποίας κάθε συνεχής λύση είναι αναγκαστικά γραμμική. Επομένως, καταλήγουμε στην έκφραση

$$f_t(u) = tf_1(u)$$

και αντικαθιστώντας στην (3.6) παίρνουμε ότι

$$\varphi_t(u) = e^{tf_1(u)}$$

Αξιοποιώντας το γεγονός ότι η L_1 έχει απείρως διαιρετή κατανομή, καταλήγουμε ότι υπάρχει χαρακτηριστική τριάδα (b, c, ν) , όπου $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^+$ και ν ένα θετικό μέτρο πιθανότητας επί του \mathbb{R} , που ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 3.1.1, τέτοια ώστε για κάθε $u \in \mathbb{R}$

$$\varphi_1(u) = e^{\psi(u)}$$

όπου $\psi(u)$ είναι ο χαρακτηριστικός εκθέτης της τυχαίας μεταβλητής L_1 . Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα της ανάλυσης που προηγήθηκε, διατυπώνεται το κεντρικό συμπέρασμα για την χαρακτηριστική συνάρτηση των διαδικασιών Lévy.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.2 (Χαρακτηριστική συνάρτηση διαδικασιών Lévy) Αν $L = \{L_t, t \geq 0\}$ μια διαδικασία Lévy, τότε για κάθε $t \geq 0$ και $u \in \mathbb{R}$, η χαρακτηριστική συνάρτηση της L_t δίνεται από

$$\varphi_{L_t}(u) = E(e^{iuL_t}) = e^{t\psi(u)} \quad (3.7)$$

όπου $\psi(u)$ είναι ο χαρακτηριστικός εκθέτης που αντιστοιχεί στον απείρως διαιρετό νόμο της τυχαίας μεταβλητής L_1 .

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1.3 (Χαρακτηριστικός εκθέτης μιας διαδικασίας Lévy) Ορίζουμε τον χαρακτηριστικό εκθέτη ψ της L ως

$$\psi(u) = -\frac{u^2c}{2} + ibu + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux\mathbf{1}_{\{|x|<1\}}) \nu(dx)$$

όπου

$$E(e^{iuL_1}) = e^{\psi(u)}$$

Εκφράζοντας την χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής L_t , σε όρους της χαρακτηριστικής τριάδας (b, c, ν) του νόμου της τυχαίας μεταβλητής L_1 , η (3.7) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$\varphi_{L_t}(u) = e^{t\psi(u)} = \exp \left\{ t \left(-\frac{u^2c}{2} + ibu + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux\mathbf{1}_{\{|x|<1\}}) \nu(dx) \right) \right\}$$

Έτσι, η ίδια δομή που καθορίζει τον νόμο της τυχαίας μεταβλητής L_1 , μέσω της τριάδας (b, c, ν) , αρκεί για να ορίσει πλήρως την κατανομή της L_t , σε κάθε χρονικό σημείο t . Επιπλέον, από την παραπάνω έκφραση γίνεται άμεσα σαφές ότι, για οποιοδήποτε $t \geq 0$, η χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής L_t δίνεται υπό τη μορφή της αναπαράστασης Lévy–Khintchine, με χαρακτηριστική τριάδα $(bt, ct, t\nu)$. Μέχρι στιγμής, έχουμε αναπτύξει την σχετική θεωρία βασιζόμενοι στο αποτέλεσμα ότι οι προσανξήσεις κάθε διαδικασίας Lévy κατανέμονται σύμφωνα με έναν απείρως διαιρετό νόμο. Ο αντίστροφος ισχυρισμός, δηλαδή ότι δοθέντος ενός απείρως διαιρετού νόμου, ή ισοδύναμα μιας τριάδας Lévy (b, c, ν) που αντιστοιχεί σε έναν απείρως διαιρετό νόμο, είναι εφικτή η κατασκευή μιας διαδικασίας Lévy, έστω $L = \{L_t, t \geq 0\}$, με την ίδια χαρακτηριστική τριάδα, εδράζεται για ακόμη μια φορά στην αναπαράσταση Lévy–Khintchine. Όπως θα δούμε παρακάτω, η ύπαρξη της τριάδας Lévy παρέχει όλα τα απαραίτητα στοιχεία προκειμένου να συναρμολογήσουμε μια τέτοια διαδικασία, εξασφαλίζοντας ότι ο χαρακτηριστικός της εκθέτης ταυτίζεται με εκείνον του αρχικού απείρως διαιρετού νόμου.

3.2 POISSON ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΡΟ LÉVY

3.2.1 Σύνθετη Διαδικασία Poisson

Οι διαδικασίες Lévy, όπως αναφέραμε και στον ορισμό, διακρίνονται (σχεδόν βέβαια) από τροχιές càdlàg, δηλαδή από ασυνεχείς τροχιές με άλματα που εμφανίζονται σε τυχαίες,

μεμονωμένες χρονικές στιγμές. Η εν λόγω τοπική δομή επιτρέπει να μεταφέρουμε ισχυρά αποτελέσματα της ανάλυσης στο στοχαστικό χώρο. Ένα από αυτά αναφέρει ότι κάθε càdlàg συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα από βηματικές συναρτήσεις (βλ. D. Applebaum (2009), pp. 140). Κατά συνέπεια, είναι φυσικό να θεωρήσουμε ότι κάθε διαδικασία Lévy μπορεί να προσεγγιστεί αυθαίρετα από μια διαδικασία με τμηματικά σταθερές τροχιές. Από την μελέτη των τροχιών της διαδικασίας Poisson γίνεται φανερό ότι το ίδιο βηματικό μοτίβο θα πρέπει να μεταφέρεται σε ένα τέτοιο υπόδειγμα, με την διαφορά ότι το μήκος κάθε άλματος της διαδικασίας θα πρέπει να αποτελεί αποκύημα της τυχαιότητας. Η σύνθετη διαδικασία Poisson αποτελεί ακριβώς το στοχαστικό μοντέλο που ενσωματώνει τα παραπάνω χαρακτηριστικά, προσφέροντας ένα πρακτικό εργαλείο προκειμένου κανείς να αποκτήσει μια εικόνα των ιδιοτήτων των γενικότερων διαδικασιών Lévy.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2.1 (Σύνθετη Διαδικασία Poisson) Μια στοχαστική διαδικασία $X = \{X_t, t \geq 0\}$ καλείται σύνθετη διαδικασία Poisson (compound Poisson process) με ένταση $\lambda > 0$ και κατανομή του μεγέθους των αλμάτων f , αν για κάθε $t \geq 0$ η τυχαία μεταβλητή X_t δίνεται από

$$X_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j \quad (3.8)$$

όπου $\{Y_j, j \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή f και $\{N_t\}$ είναι μια διαδικασία Poisson με ένταση λ , ανεξάρτητη από την $\{Y_j, j \geq 1\}$.

Σε αναλογία με την περίπτωση της διαδικασίας Poisson, οι τροχιές μιας σύνθετης διαδικασίας Poisson εμφανίζουν απότομες μεταβολές ύψους Y_j σε τυχαία σημεία του χρονικού ορίζοντα, ενώ μεταξύ δύο διαδοχικών αλμάτων η διαδικασία παραμένει σταθερή διατηρώντας την τελευταία τιμή της. Η διαδικασία N_t συμπυκνώνει όλη την χρονική πληροφορία που σχετίζεται με την εμφάνιση των αλμάτων, καταγράφοντας πόσο και πόσο συχνά αυτά συμβαίνουν. Μπορούμε, λοιπόν, να φανταστούμε πως παράλληλα με την διαδικασία X «τρέχει» και μια διαδικασία απαρίθμησης N_t , η οποία υπαγορεύει τις χρονικές στιγμές μεταβολών της πρώτης, με τρόπο ώστε κάθε φορά που η N_t αυξάνεται κατά μια μονάδα, η X πραγματοποιεί άλμα ύψους Y_{N_t} . Έτσι, η ένταση λ ελέγχει την συχνότητα εμφάνισης των αλμάτων, ενώ ο νόμος f καθορίζει το μέγεθος τους.

Με βάση την μορφή των διαδρομών της X αλλά και τον τρόπο κατασκευής της, είναι εύκολο να δούμε ότι οι ιδιότητες μιας σύνθετης διαδικασίας Poisson έρχονται σε πλήρη αντιστοιχία με τα κριτήρια που ορίζουν μια διαδικασία Lévy. Συγκεκριμένα, θεωρώντας ότι $X = \{X_t, t \geq 0\}$ είναι σύνθετη διαδικασία Poisson τότε για κάθε επιλεγμένο χρονικό διάστημα και δεσμεύοντας ως προς την τροχιά της N_t , μπορούμε να δείξουμε ότι οι προσαυξήσεις της διαδικασίας είναι ανεξάρτητες και ομογενείς. Επιπλέον, δεδομένου ότι η $N = \{N_t, t \geq 0\}$ εμφανίζει ασυνέχειες σε τυχαίες χρονικές στιγμές, συνάγεται ότι για οποιοδήποτε $t \geq 0$ σταθερό, $N_{t-} = N_t$ με πιθανότητα 1, ή ισοδύναμα

$$P \left(N_s \xrightarrow[s \nearrow t]{s < t} N_t \right) = 1$$

Αφού η $\{N_t, t \geq 0\}$, όπως αναφέρθηκε, υπαγορεύει τα άλματα της X , συμπεραίνουμε ότι η X

πραγματοποιεί άλματα μόνο στα ίδια τυχαία χρονικά σημεία εμφάνισης αλμάτων της πρώτης. Επομένως, ισχύει ότι

$$P \left(X_s \xrightarrow[s \nearrow t]{s \leq t} X_t \right) = 1$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η σχεδόν βέβαιη σύγκλιση προϋποθέτει την σύγκλιση κατά πιθανότητα (βλ. Cont R. και Tankov P. (2004), pp. 45–47), προκύπτει ότι για κάθε $t \geq 0$ και αυθαίρετη σταθερά $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{s \rightarrow t} P(|X_s - X_t| > \varepsilon) = 0$$

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό η τελευταία σχέση επαληθεύει την ιδιότητα (4) του Ορισμού 3.1.1. Συνεπώς, με βάση όσα προαναφέρθηκαν, καταλήγουμε στο ότι κάθε σύνθετη διαδικασία Poisson υπάγεται στην οικογένεια των διαδικασιών Lévy. Βέβαια, η σπουδαιότητα της σύνθετης διαδικασίας Poisson έγκειται στο ότι αποτελεί την μοναδική διαδικασία Lévy με το χαρακτηριστικό των τμηματικά σταθερών διαδρομών. Ακόμη και η διαδικασία Poisson δεν είναι παρά ένα ειδικό παράδειγμα σύνθετης διαδικασίας Poisson με ομοιόμορφα άλματα μοναδιαίου ύψους, γεγονός που αναδεικνύει τη σύνθετη εκδοχή ως το πληρέστερο μοντέλο βηματικής συμπεριφοράς μέσα στην γενική οικογένεια των Lévy.

Προκειμένου να περιγράψουμε συναρτησιακά τη στατιστική συμπεριφορά του τυχαίου αθροίσματος των αλμάτων της X , θα εστιάσουμε στη χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής του.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2.1 (Χαρακτηριστική συνάρτηση της σύνθετης διαδικασίας Poisson) Έστω $X = \{X_t, t \geq 0\}$ μια σύνθετη διαδικασία Poisson με τιμές στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Για οποιοδήποτε $t \geq 0$, η χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X_t δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\varphi_{X_t}(u) = E(e^{iuX_t}) = \exp \left\{ t\lambda \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) f(dx) \right\}, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

όπου με λ δηλώνεται η ένταση και με f το ύψος των αλμάτων.

Η παραπάνω σχέση ταυτίζεται με τον τύπο των Lévy–Khintchine στην ιδιαίτερη περίπτωση όπου

$$(b, c, \nu) = (0, 0, t\lambda f)$$

Αυτό ήταν άλλωστε αναμενόμενο αφού, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η σύνθετη διαδικασία Poisson αποτελεί μέλος της κλάσης διαδικασιών Lévy και, συνεπώς, για κάθε $t \geq 0$ η τυχαία μεταβλητή X_t κατανέμεται σύμφωνα με έναν απείρως διαιρετό νομό που αντιστοιχεί ακριβώς στην παραπάνω τριάδα.

3.2.2 Τυχαία μέτρα Poisson

Ας θεωρήσουμε, τώρα, μια σύνθετη διαδικασία Poisson $X = \{X_t, t \geq 0\}$ με ένταση $\lambda \geq 0$ και κατανομή του μεγέθους των αλμάτων f , καθώς και μια ακολουθία $\{T_j, j \geq 1\}$ η οποία

καταγράφει τις τυχαίες στιγμές κατά τις οποίες μια διαδικασία Poisson $N = \{N_t, t \geq 0\}$ ιδίας έντασης με την X , πραγματοποιεί άλματα. Από την στιγμή που κάθε άλμα της N_t προκαλεί ταυτόχρονα και άλμα της X_t , οι τυχαίοι χρόνοι T_1, T_2, \dots συμπίπτουν ακριβώς με τα σημεία ασυνέχειας της X . Συνεπώς, ολόκληρη η αλματική συμπεριφορά της X μπορεί να κωδικοποιηθεί μέσω μιας ακολουθίας ζευγών (T_j, Y_j) , όπου η τυχαία μεταβλητή Y_j παριστά το μέγεθος του άλματος που πραγματοποιείται τη στιγμή T_j . Διαισθητικά, αν γνωρίζουμε ότι έχει πραγματοποιηθεί ένα σενάριο ω του Ω , τότε η αντίστοιχη τροχιά $t \mapsto X_t(\omega)$, λειτουργεί σαν ένας μηχανισμός που γεννά τα σημεία

$$\{(T_j(\omega), Y_j(\omega)), j \geq 1\}$$

σχηματίζοντας μια διαδικασία σημείων στο επίπεδο $(0, \infty) \times \mathbb{R}$. Σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[0, t]$ το πλήθος αυτών των σημείων απαριθμείται από την διαδικασία Poisson N_t . Ωστόσο, η ποσοτικοποίηση του πλήθους των σημείων δεν αρκεί προκειμένου να περιγράψουμε την συμπεριφορά αυτών στο επίπεδο, αφού εξίσου σημαντικό είναι να γνωρίζουμε και την ακριβή χωρική τους διάταξη, δηλαδή που ακριβώς τοποθετούνται. Συνεπώς, απαιτείται ένα ισχυρότερο εργαλείο απαρίθμησης, ικανό να καταγράφει όχι μόνον πόσα σημεία εμφανίζονται σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα, αλλά και πόσα από αυτά αντιστοιχούν σε άλματα της X με μέγεθος που βρίσκεται σε ένα συγκεκριμένο εύρος τιμών. Το εργαλείο που ικανοποιεί την ανωτέρω απαίτηση είναι το τυχαίο μέτρο (random measure). Ας υποθέσουμε ότι επιλέγουμε ένα αυθαίρετο μετρήσιμο σύνολο $A \in \mathcal{B}([0, \infty)) \times \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ και ας θεωρήσουμε μια τυχαία μεταβλητή

$$N : \mathcal{B}([0, \infty)) \times \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$$

που ορίζεται ως,

$$N(A) = \#\{j \geq 0 : (T_j, Y_j) \in A\} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{(T_j, Y_j) \in A\}}$$

Η τυχαία μεταβλητή $N(A)$ απαριθμεί τον πλήθος των αλμάτων της διαδικασίας X που πραγματοποιούνται σε χρόνους και με μεγέθη που ανήκουν στο A .

ΛΗΜΜΑ 3.2.1 Έστω (Ω, \mathcal{F}, P) χώρος πιθανότητας και $A_1, A_2, \dots, A_k, k \geq 1$ ξένα σύνολα της σ -άλγεβρας $\mathcal{B}([0, \infty)) \times \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Τότε, ισχύουν τα εξής:

1. Οι τυχαίες μεταβλητές $N(A_1), N(A_2), \dots, N(A_k)$ είναι ανεξάρτητες
2. Για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ η τυχαία μεταβλητή $N(A_j)$ ακολουθεί την κατανομή Ποισσον με ένταση

$$\lambda_j = \lambda \int_{A_j} dt \times F(dx)$$

3. P -σχεδόν κάθε ω , η απεικόνιση

$$A \mapsto N(\omega, A)$$

ορίζει μέτρο επί του $\mathcal{B}([0, \infty)) \times \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

Από τον ίδιο τον ορισμό της τυχαίας μεταβλητής N γίνεται φανερό ότι το πλήθος των σημείων που καταγράφει εξαρτάται άμεσα από την εξέλιξη της διαδικασίας X . Διαφορετικές

πραγματοποιήσεις της X ή, ισοδύναμα, διαφορετικά σενάρια του δειγματοχώραρου παράγουν διαφορετικά σύνολα σημείων στο επίπεδο και, συνεπώς, διαφορετικές τιμές για το $N(A)$ σε κάθε Borel σύνολο A . Έτσι, ενώ για κάθε ω η απεικόνιση $A \mapsto N(\omega, A)$ (σύμφωνα με το λήμμα) ικανοποιεί τις ιδιότητες ενός μέτρου, οι ίδιες οι τιμές του $N(A)$ είναι τυχαίες όταν μεταβάλλεται το ω , γεγονός που εξηγεί ακριβώς τον λόγο για τον οποίο το N χαρακτηρίζεται ως τυχαίο μέτρο. Στην πραγματικότητα, το τυχαίο μέτρο N αποτελεί ειδική περίπτωση της γενικότερης έννοιας του τυχαίου μέτρου Poisson, που ορίζεται παρακάτω.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2.2 (Τυχαίο Μέτρο Poisson) Έστω (Ω, \mathcal{F}, P) χώρος πιθανότητας και μ ένα σ -πεπερασμένο μέτρο επί του μετρήσιμου χώρου (E, \mathcal{E}) . Το τυχαίο μέτρο

$$M : \Omega \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(\omega, A) \mapsto M(\omega, A)$$

καλείται **τυχαίο μέτρο Poisson (Poisson random measure) επί του E με μέτρο έντασης (intensity measure) μ** , αν

- 1) P -σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$, το $M(\omega, \cdot)$ είναι ένα σ -πεπερασμένο μέτρο επί του E : για κάθε μετρήσιμο και φραγμένο σύνολο $A \in \mathcal{E}$, το $M(A) < \infty$ αποτελεί τυχαία μεταβλητή με τιμές στο σύνολο των φυσικών.
- 2) Για κάθε $A \in \mathcal{E}$, η τυχαία μεταβλητή $M(\cdot, A) = M(A)$ ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\mu(A)$, δηλαδή

$$P(M(A) = k) = \frac{(\mu(A))^k}{k!} e^{-\mu(A)}, \quad \forall k \in \mathbb{K}$$

όπου $0 \leq \mu(A) < \infty$.

- 3) Για κάθε $A \in \mathcal{E}$ αν $\mu(A) = \infty$ τότε $M(A) = \infty$ σχεδόν βέβαια.
- 4) Για κάθε πεπερασμένη συλλογή αμοιβαία ασυμβίβαστων μετρήσιμων συνόλων $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{E}$ οι τυχαίες μεταβλητές $M(A_1), M(A_2), \dots, M(A_k)$ είναι ανεξάρτητες.

Η διαπίστωση ότι το M αποτελεί σχεδόν βέβαια μέτρο μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε την τυπική θεωρία ολοκλήρωσης κατά Lebesgue προκειμένου να ορίσουμε ολοκληρώματα μετρήσιμων συναρτήσεων ως προς αυτό. Έστω λοιπόν (E, \mathcal{E}, μ) μετρήσιμος χώρος και ας θεωρήσουμε ότι $E = [0, T] \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Για οποιαδήποτε απλή συνάρτηση

$$f = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{1}_{A_j}, \quad c_j \geq 0, \quad A_j \in \mathcal{E}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

ορίζουμε το Poisson ολοκλήρωμα της f ως ένα πεπερασμένο άθροισμα της μορφής

$$X(f) := \int_E f dM = \sum_{j=1}^n c_j M(A_j)$$

Δεδομένου ότι η απεικόνιση $\omega \mapsto M(\omega, A)$ είναι μετρήσιμη για κάθε $A \in \mathcal{E}$, έπεται ότι το ολοκλήρωμα $X(f)$ ως συνάρτηση του ω , είναι επίσης μετρήσιμη και επομένως αποτελεί τυχαία

μεταβλητή. Στην περίπτωση τώρα όπου η $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, τότε μπορούμε να γράψουμε την f ως διαφορά του θετικού και του αρνητικού μέρους της, δηλαδή $f = f_+ - f_-$. Αν η f πληροί την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας

$$\mu(|f|) = \int_{[0,T]} \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} |f(s, y)| \mu(ds \times dy) < \infty \quad (3.9)$$

τότε τα ολοκληρώματα

$$X_+(f) = \int_{[0,T]} \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} f_+(s, y) M(ds \times dy), \quad X_-(f) = \int_{[0,T]} \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} f_-(s, y) M(ds \times dy)$$

είναι σχεδόν βέβαια πεπερασμένα (Cont R. και Tankov P. (2004), pp. 73) και επομένως, το ολοκλήρωμα

$$X(f) := X_+(f) - X_-(f) = \int_{[0,T]} \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} f(s, y) M(ds \times dy)$$

είναι καλά ορισμένο. Από Sato (1999) (Theorem 19.5, pp. 123) το ολοκλήρωμα $X(f)$ είναι τυχαία μεταβλητή με τιμές στο \mathbb{R} και, εφόσον ικανοποιείται η συνθήκη (3.9), η μέση τιμή της X δίνεται από τη σχέση

$$E(X(f)) = \mu(f) = \int_{[0,T]} \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} f(s, y) \mu(ds \times dy)$$

Δεδομένου ότι για οποιοδήποτε $A \in \mathcal{E}$, η τυχαία μεταβλητή $M(A)$ λαμβάνει τιμές στο $\mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$, προκύπτει ότι για κάθε ω το τυχαίο μέτρο $M(\omega, \cdot)$ είναι μέτρο απαρίθμησης (counting measure). Συνεπώς, υπάρχει μια αριθμήσιμη συλλογή τυχαίων σημείων, $\mathcal{P}(\omega)$, τέτοια ώστε για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \in \mathcal{E}$,

$$M(\omega, A) = |A \cap \mathcal{P}(\omega)| = \sum_{(t_i, y_i) \in \mathcal{P}(\omega)} \mathbf{1}_A(t_i, y_i)$$

Επομένως, για οποιαδήποτε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα $X(f)$ δεν είναι τίποτε άλλο παρά το τυχαίο άθροισμα των τιμών της f στα σημεία $(t_i, y_i) \in \mathcal{P}(\omega)$, δηλαδή

$$X(f)(\omega) = \int_{[0,T]} \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} f(s, y) M(\omega, ds \times dy) = \sum_{(t_i, y_i) \in \mathcal{P}(\omega)} f(t_i, y_i)$$

Περιορίζοντας το ολοκλήρωμα της f ως προς το μέτρο M στο χώρο $[0, t] \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$, κατασκευάζουμε για οποιοδήποτε $t \geq 0$, την τυχαία μεταβλητή,

$$X_t(f) = \int_0^t \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} f(s, y) M(ds \times dy) = \sum_{\{n, T_n \leq t\}} f(T_n, Y_n) \quad (3.10)$$

Η οικογένεια $\{X_t(f), t \geq 0\}$ συνιστά μια στοχαστική διαδικασία με τιμές στο σύνολο των πραγματικών. Η παρουσία του αθροίσματος υποδηλώνει ότι η διαδικασία εξελίσσεται μέσω αλμάτων ύψους $f(T_n, Y_n)$ σε τυχαίες χρονικές στιγμές T_n και επομένως κάθε τροχιά της είναι càdlàg. Υπό την κατασκευή (3.10) μπορούμε να αποτυπώσουμε με ενιαίο τρόπο διαδικασίες με αλματική δομή. Το παρακάτω λήμμα εξειδικεύει ακριβώς αυτήν την ιδέα, καθορίζοντας το πλαίσιο εφαρμογής των αθροισμάτων της μορφής (3.10).

ΛΗΜΜΑ 3.2.2 Έστω N ένα τυχαίο μέτρο Poisson επί του μετρήσιμου χώρου $(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}), dt \times \nu(dx))$ όπου ν είναι ένα μέτρο με μάζα στον $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Έστω ακόμη $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ με $0 < \nu(B) < \infty$. Τότε η διαδικασία που ορίζεται ως

$$X_t := \int_0^t \int_B y N(ds \times dy), \quad t > 0$$

είναι σύνθετη διαδικασία Poisson με ρυθμό $\nu(B)$ και κατανομή των αλμάτων $\nu(B)^{-1} \nu(dx)|_B$.

3.2.3 Μέτρο Lévy

Το μέτρο ν που εμφανίστηκε στο προηγούμενο λήμμα, αναδεικνύεται σε κεντρική συνιστώσα της ανάλυσης της αλματικής συμπεριφοράς μιας σύνθετης διαδικασίας Poisson, καθώς, όπως είδαμε, ποσοτικοποιεί τον ρυθμό εμφάνισης των αλμάτων συγκεκριμένου μεγέθους. Βέβαια, η σπουδαιότητα του μέτρου ν αποδίδεται στο ότι αποτυπώνει τον αναμενόμενο αριθμό τέτοιων αλμάτων για οποιαδήποτε πραγματοποίηση μιας σύνθετης διαδικασίας Poisson στη μονάδα του χρόνου. Η ερμηνεία αυτή δεν αποτελεί προϊόν αυθαίρετης παρατήρησης, αφού εδράζεται στην ύπαρξη του τυχαίου μέτρου Poisson M . Έστω (Ω, \mathcal{F}, P) χώρος πιθανότητας και ας θεωρήσουμε ένα, αυθαίρετα επιλεγμένο, μετρήσιμο σύνολο $A \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$. Όπως γνωρίζουμε, ένα τυχαίο μέτρο $M(A)$ με μέτρο έντασης $\mu(ds \times dx) = ds \times \nu(dx)$ απαριθμεί για κάθε $\omega \in \Omega$ το πλήθος των σημείων της συλλογής $\mathcal{P}(\omega)$ που εμπίπτουν στο A , και ικανοποιεί την σχέση

$$E(M(A)) = \mu(A) = \iint_A ds \times \nu(dx)$$

Αν επιλέξουμε το A τέτοιο ώστε $A = [0, 1] \times B$, όπου $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ με $0 < \nu(B) < \infty$, τότε

$$E(M(A)) = \nu(B)$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, σε κάθε διαδικασία càdlàg $X = \{X_t, t \geq 0\}$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα τυχαίο μέτρο Poisson M επί του μετρήσιμου χώρου $([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathcal{B}([0, \infty)) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ με μέτρο έντασης $\mu(ds \times dx) = ds \times \nu(dx)$. Συνεπώς, όπως και επισημαίνουν οι Cont R. και Tankov P. (2004), η ερμηνεία που αποδίδουμε στο μέτρο ν μεταφέρεται πιστά σε κάθε διαδικασία Lévy. Συγκεκριμένα, αν $X = \{X_t, t \geq 0\}$ είναι διαδικασία Lévy με τιμές στο \mathbb{R} , τότε για οποιοδήποτε μετρήσιμο σύνολο $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\nu(B) = E(\#\{t \in [0, 1] : \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in B\})$$

Το μέτρο ν είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως μέτρο Lévy.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2.1 (Μέτρο Lévy) Έστω ν ένα μέτρο Borel επί του \mathbb{R} . Το ν καλείται **μέτρο Lévy (Lévy measure)** αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

- $\nu(\{0\}) = 0$
- $\int_{|x| \leq 1} |x|^2 \nu(dx) < \infty$ και $\int_{|x| > 1} \nu(dx) < \infty$

Οι ολοκληρωτικές προϋποθέσεις που διατυπώθηκαν στον παραπάνω ορισμό συμπίπτουν ακριβώς με εκείνες που απαιτούνται προκειμένου να αναγνωρισθεί ένα μέτρο ως χαρακτηριστικός όρος της τριάδας Lévy, και συνεπώς το μέτρο ν που εμφανίζεται στην χαρακτηριστική τριάδα (b, c, ν) της αναπαράστασης Lévy–Khintchine είναι μέτρο Lévy. Το μέτρο Lévy καταλαμβάνει κεντρική θέση στη θεωρία των διαδικασιών Lévy, καθώς είναι υπεύθυνο για την περιγραφή της αλματικής τους δυναμικής. Ιδιαίτερα, η δεύτερη ολοκληρωτική συνθήκη

$$\int_{|x|>1} \nu(dx) = \nu(\mathbb{R} \setminus (-1, 1)) < \infty$$

εξυπηρετεί την περατότητα του πλήθους των μεγάλων αλμάτων σε οποιαδήποτε περιοχή μακριά από το 0, όπου το μέτρο ν δεν έχει μάζα, ενώ με τον όρο “μεγάλα άλματα” αναφερόμαστε σε άλματα μεγέθους κατ’ απόλυτη τιμή μεγαλύτερων της μονάδας.

Το μέτρο Lévy προσδίδει τον θεωρητικό πλούτο στην οικογένεια των διαδικασιών Lévy καθώς, όπως αναφέραμε αρκετές φορές, είναι εκείνο που συμπυκνώνει κρίσιμες πληροφορίες σχετικά με την δομή των διαδικασιών μέσα στη κλάση. Πολλές από τις ιδιότητες των διαδρομών των διαδικασιών της οικογένειας μπορούν να αναγνωριστούν απευθείας από την ανάλυση του ίδιου του μέτρου. Σε επόμενη παράγραφο θα δούμε ότι η “μορφολογία” του μέτρου Lévy παρέχει ένα κριτήριο ταξινόμησης, επιτρέποντας τη διάκριση μεταξύ διαδικασιών πεπερασμένης ή άπειρης δραστηριότητας (finite or infinite activity) και διαδικασιών πεπερασμένης ή άπειρης μεταβολής (finite or infinite variation).

3.3 ΑΠΟΣΥΝΘΕΣΗ ΛÉVY-ITÔ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ ΤΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ ΛÉVY

3.3.1 Αποσύνθεση Lévy–Itô

Η έννοια της άπειρης διαιρετότητας, όπως είδαμε νωρίτερα, λειτούργησε ως συνδετικός κόμβος μεταξύ των διαδικασιών Lévy και της αναπαράστασης Lévy–Khintchine, εξασφαλίζοντας ότι σε κάθε χρονική στιγμή, ο χαρακτηρισμός και η περιγραφή της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής που ανήκει στο στοχαστικό διάνυσμα αποδίδεται μέσω της χαρακτηριστικής τριάδας που αντιστοιχεί σε αυτή. Βέβαια, όπως επισημαίνει ο J. L. Bretagnolle (1973), στην μεταφρασμένη έκδοση του P. Ouwehand (2015), η αναπαράσταση Lévy–Khintchine, στην πραγματικότητα, αναδύεται ως προϊόν της λεπτομερούς διάσπασης των διαδρομών μιας διαδικασίας Lévy. Η ιδέα αυτή εντοπίζεται ήδη στο έργο του P. Lévy (1934), όταν κατέληξε στον αξιοσημείωτο τύπο για τον λογάριθμο της χαρακτηριστικής συνάρτησης, και αποδείχθηκε με πληρότητα από τον K. Itô (1942). Ο Itô ήταν εκείνος ο οποίος κατάφερε να υλοποιήσει την αρχική νοητική αναπαράσταση της ιδέας του Lévy για την περιγραφή της δομής των διαδικασιών Lévy σε συγκεκριμένη κατασκευή, εισάγοντας τη κανονική μορφή των διαδικασιών Lévy (canonical form for Lévy processes) γνωστή ως αποσύνθεση Lévy–Itô. Με τον τρόπο αυτό έδωσε μια νέα απόδειξη και μια βαθύτερη κατανόηση της κανονικής μορφής Lévy–Khintchine των απείρως διαιρετών κατανομών (N. Ikeda (1996)). Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιάσουμε το θεμελιώδες αποτέλεσμα της αποσύνθεσης Lévy–Itô, αντιστρέφοντας την συλλογιστική πορεία του Itô και αξιοποιώντας την αναπαράσταση Lévy–Khintchine. Έτσι, θα δείξουμε ότι κάθε διαδικασία Lévy

μπορεί να γραφεί ως άθροισμα τριών ανεξάρτητων διαδικασιών Lévy, κάθε μια με διαφορετικές ιδιότητες τροχιών, επιτρέποντας την λεπτομερή ανάλυση της αρχικής διαδικασίας.

Ας θεωρήσουμε την χαρακτηριστική τριάδα (b, c, ν) , όπου $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^+$ και ν μέτρο Lévy, η οποία αντιστοιχεί σε έναν απείρως διαιρετό νόμο ρ . Σκοπός μας είναι η κατασκευή μιας διαδικασίας Lévy $X = \{X_t, t \geq 0\}$ τέτοια ώστε η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X_1 να συμπίπτει με την ρ . Ο χαρακτηριστικός εκθέτης της αναπαράστασης Lévy–Khintchine του νόμου ρ δίνεται από

$$\psi(u) = -\frac{u^2 c}{2} + ibu + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}) \nu(dx), \quad u \in \mathbb{R} \quad (3.11)$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε τον χαρακτηριστικό εκθέτη ως άθροισμα τριών όρων

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \psi^{(1)}(u) + \psi^{(2)}(u) + \psi^{(3)}(u), \quad u \in \mathbb{R} \quad (3.12) \\ \psi^{(1)}(u) &= -\frac{u^2 c}{2} + ibu, \\ \psi^{(2)}(u) &= \nu(\mathbb{R} \setminus (-1, 1)) \int_{|x| \geq 1} (e^{iux} - 1) \frac{\nu(dx)}{\nu(\mathbb{R} \setminus (-1, 1))}, \\ \psi^{(3)}(u) &= \int_{|x| < 1} (e^{iux} - 1 - iux) \nu(dx). \end{aligned}$$

Ας θεωρήσουμε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega^1, \mathcal{F}^1, P^1)$ στον οποίο ορίζουμε μια στοχαστική διαδικασία $X^{(1)} = \{X_t^{(1)}, t \geq 0\}$ η οποία αντιστοιχεί στον χαρακτηριστικό εκθέτη $\psi^{(1)}$. Από την μορφή του εκθέτη προκύπτει άμεσα ότι η $X^{(1)}$ είναι μια κίνηση Brown με τάση b και μεταβλητότητα που δίνεται από την παράμετρο c , δηλαδή

$$X_t^{(1)} = \sqrt{c}W_t + bt, \quad t \geq 0$$

Δοθέντος του μέτρου Lévy ν , επιλέγουμε, τώρα, ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega^2, \mathcal{F}^2, P^2)$ τέτοιο ώστε να μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τυχαίο μέτρο Poisson N επί του μετρήσιμου χώρου $(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}), dt \times \nu(dx))$ (η ύπαρξη του τυχαίου μέτρου εξασφαλίζεται από Theorem 6.5 των Baurdoux και Parapantoleon (2015)). Στον ίδιο χώρο πιθανότητας ορίζουμε μια σύνθετη διαδικασία Poisson $X^{(2)} = \{X_t^{(2)}, t \geq 0\}$ με ένταση αλμάτων $0 < \nu(\mathbb{R} \setminus (-1, 1)) < \infty$ και κατανομή μεγέθους των αλμάτων $F(dx) = \nu(\mathbb{R} \setminus (-1, 1))^{-1} \nu(dx)$ περιορισμένη στο $\{x : |x| \geq 1\}$, τέτοια ώστε για κάθε $\omega \in \Omega^2$

$$X_t^{(2)}(\omega) = \int_0^t \int_{D(1, \infty)} y N(ds \times dy, \omega), \quad t > 0$$

όπου $D(1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$. Από τον τρόπο ορισμού της προκύπτει άμεσα ότι ο χαρακτηριστικός εκθέτης της $X^{(2)}$ δίνεται ακριβώς από τον δεύτερο όρο του αθροίσματος της (3.12). Προκειμένου να ολοκληρωθεί η κατασκευή μιας διαδικασίας Lévy με χαρακτηριστικό εκθέτη που δίνεται από την σχέση (3.11), απομένει να τεκμηριωθεί η ύπαρξη μιας τρίτης συνιστώσας της οποίας ο χαρακτηριστικός εκθέτης δίνεται από την $\psi^{(3)}$. Για να αποκτήσουμε μια πρώτη εικόνα της μορφής της στοχαστικής συνιστώσας που αντιστοιχεί στην $\psi^{(3)}$, αρκεί να

γράφουμε τον εκθέτη σε άθροισμα όρων που αντιστοιχούν σε διαδοχικά χωρία γύρω από το μηδέν. Έστω μια φθίνουσα ακολουθία $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ με $0 < \varepsilon_n < 1$, $\varepsilon_0 = 1$ και $\varepsilon_n \rightarrow 0$, και θέτουμε

$$D_{(\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1})} = \{x \in \mathbb{R} : \varepsilon_n \leq |x| \leq \varepsilon_{n-1}\}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \psi^{(3)}(u) &= \int_{|x| < 1} (e^{iux} - 1 - iux) \nu(dx) \\ &= \sum_{n \geq 0} \nu(D_{(\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1})}) \left(\int_{D_{(\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1})}} (e^{iux} - 1) \frac{\nu(dx)}{\nu(D_{(\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1})})} - iu \int_{D_{(\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1})}} x \frac{\nu(dx)}{\nu(D_{(\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1})})} \right) \end{aligned}$$

Απομονώνοντας τους όρους της παραπάνω απειροσειράς, καθένας από τους προσθετούς ταυτίζεται με τον χαρακτηριστικό εκθέτη μιας αντισταθμισμένης σύνθετης διαδικασίας Poisson (compensated compound Poisson). Συγκεκριμένα, αναφερόμαστε σε μια σύνθετη διαδικασία Poisson με ένταση αλμάτων $\lambda_n = \nu(D_{(\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1})})$ και κατανομή μεγέθους των αλμάτων $F_n(dx) = \nu(D_{(\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1})})^{-1} \nu(dx)|_{D_{(\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1})}}$ από την οποία έχει αφαιρεθεί μια γραμμική τάση (linear drift), δηλαδή μια ντετερμινιστική διαδικασία που δίνεται υπό την μορφή

$$t\lambda_n \int_{D_{(\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1})}} x F_n(dx), \quad t \geq 0$$

Έτσι, η κατασκευαστική διαδικασία ανάγεται στο να δείξουμε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων των αντισταθμισμένων σύνθετων διαδικασιών Poisson συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια διαδικασία του ίδιου τύπου, της οποίας ο χαρακτηριστικός εκθέτης να δίνεται από τη $\psi^{(3)}$. Έστω, λοιπόν, η φθίνουσα ακολουθία $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ όπως παραπάνω. Στον ίδιο χώρο πιθανότητας $(\Omega^2, \mathcal{F}^2, P^2)$, όπου είναι ορισμένο το τυχαίο μέτρο Poisson N , εισάγουμε την οικογένεια ανεξάρτητων στοχαστικών διαδικασιών $\{Y_t^{(n)}, t \geq 0\}$, $n = 1, 2, \dots$ ορίζοντας για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $t \geq 0$,

$$Y_t^{(n)} = \int_0^t \int_{D_{(\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1})}} \{xN(ds \times dx) - x\nu(dx)\}, \quad t > 0$$

και ως υποθέσουμε ότι οι διαδρομές $\omega \mapsto Y_t^{(n)}(\omega)$ ανήκουν στο $D([0, t], \mathbb{R})$, P^2 -σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega^2$. Έστω ακόμα η ακολουθία μερικών αθροισμάτων

$$S_t^{(n)} = Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)} + \dots + Y_t^{(n)} = \int_0^t \int_{D_{(\varepsilon_n, 1)}} \{xN(ds \times dx) - x\nu(dx)\}$$

όπου $D_{(\varepsilon_n, 1)} = \{x \in \mathbb{R} : \varepsilon_n \leq |x| \leq 1\}$.

ΛΗΜΜΑ 3.3.1 Για κάθε $\omega \in \Omega^2$, η

$$S_t^{(n)}(\omega) = \int_0^t \int_{D_{(\varepsilon_n, 1)}} \{xN(ds \times dx, \omega) - x\nu(dx)\}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε ένα στοιχείο του $D([0, \infty], \mathbb{R})$ σε κάθε φραγμένο χρονικό διάστημα καθώς $n \rightarrow \infty$.

Επομένως, υπάρχει στοχαστική διαδικασία $S = \{S_t, t \geq 0\}$ με càdlàg διαδρομές τέτοια ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in [0, t]} |S_s^{(n)} - S_s| = 0$$

P^2 -σχεδόν βέβαια. Ορίζουμε, για κάθε $\omega \in \Omega^2$ και $0 < \varepsilon < 1$, τη διαδικασία

$$X_t^{(3, \varepsilon)}(\omega) = \int_0^t \int_{D(\varepsilon, 1)} \{xN(ds \times dx, \omega) - x\nu(dx)\}$$

με χαρακτηριστικό εκθέτη που δίνεται από την έκφραση

$$\psi^{(3, \varepsilon)}(u) = \int_{\varepsilon < |x| < 1} (e^{iux} - 1 - iux) \nu(dx)$$

Για κάθε $h : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$, θεωρούμε την νόρμα

$$\|h\| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min \left\{ 1, \sup_{t \in [0, n]} |h(t)| \right\}$$

στο χώρο των càdlàg συναρτήσεων $D([0, \infty], \mathbb{R})$. Η σύγκλιση $\|h_n - h\| \rightarrow 0$ ισοδυναμεί με την ομοιόμορφη σύγκλιση της $h_n(t)$ στην $h(t)$ σε κάθε φραγμένο διάστημα (Sato (1999)). Για $0 < \varepsilon, \varepsilon' < 1$, έχουμε ότι

$$\limsup_{\varepsilon, \varepsilon' \downarrow 0} \left\| X^{(3, \varepsilon)}(\cdot, \omega) - X^{(3, \varepsilon')}(\cdot, \omega) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\varepsilon, \varepsilon' \in (0, 1/n)} \left\| X^{(3, \varepsilon)}(\cdot, \omega) - X^{(3, \varepsilon')}(\cdot, \omega) \right\|$$

Ο Sato (1999) επιλέγοντας κατάλληλη ακολουθία σημείων $\varepsilon_j^{(n)}, \varepsilon_j'^{(n)} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1/n)$ με $j = 1, 2, \dots, k_n$ ώστε

$$P \left(\sup_{\varepsilon, \varepsilon' \in (0, 1/n)} \left\| X^{(3, \varepsilon)}(\cdot, \omega) - X^{(3, \varepsilon')}(\cdot, \omega) \right\| - \max_j \left\| X^{(3, \varepsilon_j^{(n)})}(\cdot, \omega) - X^{(3, \varepsilon_j'^{(n)})}(\cdot, \omega) \right\| > \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}$$

και αναδιατάσσοντας τους όρους $\varepsilon_j^{(n)}, \varepsilon_j'^{(n)}$ σε φθίνουσα σειρά, έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, αποδεικνύει ότι

$$\sup_{\varepsilon, \varepsilon' \in (0, 1/n)} \left\| X^{(3, \varepsilon)}(\cdot, \omega) - X^{(3, \varepsilon')}(\cdot, \omega) \right\| - \sup_{j, k \in J(n)} \left\| X^{(3, \varepsilon_j)}(\cdot, \omega) - X^{(3, \varepsilon_k)}(\cdot, \omega) \right\| \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} 0$$

όπου $J(n) = \{j \in \mathbb{N} : \varepsilon_j \in (0, 1/n)\}$. Επικαλούμενος το επιχείρημα ότι η σύγκλιση κατά πιθανότητα επάγει την σχεδόν βέβαιη σύγκλιση μέσω μιας υποκολουθίας και εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του Λήμματος 3.3.1, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι

$$\limsup_{\varepsilon, \varepsilon' \downarrow 0} \left\| X^{(3, \varepsilon)}(\cdot, \omega) - X^{(3, \varepsilon')}(\cdot, \omega) \right\| = 0$$

για κάθε $\omega \in \Omega^2$. Συνεπώς, η οικογένεια $\{X^{(3, \varepsilon)}, 0 < \varepsilon < 1\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy μέσα στον χώρο $D([0, \infty], \mathbb{R})$, γεγονός που αποδεικνύει ότι η $X^{(3, \varepsilon)}(\cdot, \omega)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε στοιχείο του χώρου $D([0, \infty], \mathbb{R})$ σε κάθε φραγμένο διάστημα καθώς $\varepsilon \downarrow 0$. Ορίζουμε το όριο της $X^{(3, \varepsilon)}$

καθώς $\varepsilon \downarrow 0$, ως $X^{(3)}$. Σύμφωνα με τον Sato, η διαδικασία $X^{(3)}$ ικανοποιεί τις συνθήκες (1), (2) και (4) του ορισμού 3.1.1. Επιπλέον, δεδομένου ότι το μέτρο έντασης του τυχαίου μέτρου N εκφράζεται ως $\mu(ds \times dx) = ds \times \nu(dx)$, οι προσαυξήσεις της διαδικασίας $X^{(3)}$ είναι στάσιμες. Συνεπώς, η διαδικασία $X^{(3)}$ αποτελεί διαδικασία Λέβυ με χαρακτηριστικό εκθέτη $\psi^{(3)}$.

Εξετάζοντας, τώρα, την ανεξαρτησία των τριών στοχαστικών διαδικασιών που κατασκευάσαμε προηγουμένως, παρατηρούμε ότι τα σύνολα $A \times \{x : |x| < 1\}$ και $A \times \{x : |x| \geq 1\}$, $A \in \mathcal{B}([0, \infty))$ είναι ξένα μεταξύ τους. Βάσει των ιδιοτήτων του τυχαίου μέτρου Poisson, οι τυχαίες μεταβλητές $N(A \times \{x : |x| < 1\})$ και $N(A \times \{x : |x| \geq 1\})$ είναι ανεξάρτητες, και κατά συνέπεια οι διαδικασίες $X^{(2)}$ και $X^{(3)}$ είναι ανεξάρτητες. Επιπλέον, η $X^{(1)}$ παραμένει ανεξάρτητη των $X^{(2)}$ και $X^{(3)}$ διότι ορίζεται σε διαφορετικό χώρο πιθανότητας.

Ας θεωρήσουμε τώρα τον χώρο γινόμενο $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\Omega^1, \mathcal{F}^1, P^1) \times (\Omega^2, \mathcal{F}^2, P^2)$ στον οποίο ορίζουμε μία στοχαστική διαδικασία $X = \{X_t, t \geq 0\}$ με

$$\begin{aligned} X_t &= X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)} \\ &= bt + \sqrt{c}W_t + \int_0^t \int_{D(1, \infty)} xN(dt \times dx) + \int_0^t \int_{D_{(1, \infty)}^c} x(N(dt \times dx) - \nu(dx)dt), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Η παραπάνω διαδικασία βλέπουμε ότι διαμορφώνεται ως άθροισμα ανεξάρτητων διαδικασιών Λέβυ και επομένως, προκύπτει άμεσα ότι η διαδικασία X είναι διαδικασία Λέβυ με χαρακτηριστικό εκθέτη

$$\psi(u) = -\frac{u^2 c}{2} + ibu + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}) \nu(dx), \quad u \in \mathbb{R}$$

Με γνώμονα την τελευταία διαπίστωση γίνεται πλέον σαφές ότι δοθείσας μιας χαρακτηριστικής τριάδας (b, c, ν) , που αντιστοιχεί σε έναν απείρως διαιρετό νόμο, είναι δυνατή η κατασκευή μιας διαδικασίας Λέβυ ως αθροίσματος τριών ανεξάρτητων μελών της ίδιας οικογένειας. Η σύνθεση αυτή είναι μοναδική, αποδίδοντας χαρακτηριστικό εκθέτη ταυτόσημο με εκείνον του αρχικού απείρως διαιρετού νόμου. Το αποτέλεσμα αυτό ανοίγει τον δρόμο για τη διατύπωση του κεντρικού θεωρήματος της παρούσας παραγράφου, το οποίο, όπως προαναφέρθηκε, είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως αποσύνθεση Λέβυ–Itô.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3.1 (Αποσύνθεση Λέβυ–Itô) Έστω ρ ένας απείρως διαιρετός νόμος που αντιστοιχεί στην χαρακτηριστική τριάδα (b, c, ν) , όπου $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^+$ και ν μέτρο Λέβυ. Τότε υπάρχει ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ στον οποίο ορίζεται μια διαδικασία Λέβυ $X = \{X_t, t \geq 0\}$, η οποία, για κάθε $t \geq 0$, γράφεται ως

$$X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} X_t^{(3, \varepsilon)} \quad (3.13)$$

όπου

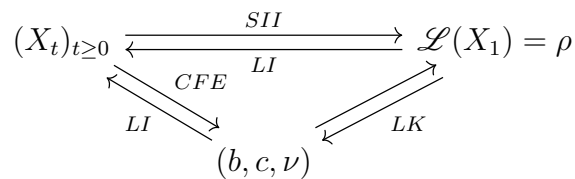
$$\begin{aligned} X_t^{(1)} &= \sqrt{c}W_t + bt, \quad W_t \sim BM(0, 1) \\ X_t^{(2)} &= \int_0^t \int_{|x| \geq 1} xN(ds \times dx) \\ X_t^{(3, \varepsilon)} &= \int_0^t \int_{\varepsilon < |x| < 1} x(N(ds \times dx) - \nu(dx)dt) \end{aligned}$$

και N τυχαίο μέτρο Poisson ορισμένο στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ με μέτρο έντασης $\mu(dt \times dx) = dt \times \nu(dx)$. Οι όροι της (3.13) είναι ανεξάρτητοι και η σύγκλιση του

τελευταίου όρου είναι σχεδόν βέβαια και ομοιόμορφη σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[0, T]$, $T > 0$.

Από την μορφή της αναπαράστασης (3.13), γίνεται φανερό ότι το συνεχές μέρος της διαδικασίας X περιγράφεται αποκλειστικά από τους χαρακτηριστικούς όρους b και c της χαρακτηριστικής τριάδας. Όταν αυτές λαμβάνουν τιμές διάφορες του μηδενός τότε ολόκληρη η συμπεριφορά της X μεταξύ διαδοχικών αλμάτων ή ακόμα και πριν την εμφάνιση αυτών κωδικοποιείται μέσω μιας κίνησης Brown με παράμετρο τάσης (drift) b και μεταβλητότητας (volatility) c . Οι επόμενες δύο συνιστώσες είναι ασυνεχείς διαδικασίες Lévy και ενσωματώνουν στη X ολόκληρη την δυναμική των αλμάτων η οποία περιγράφεται μέσω του μέτρου Lévy. Ο ορισμός αυτών μέσω της κατάτμησης του χώρου $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ σε $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ και $(-1, 1)$ δεν λειτουργεί μόνο ως πρακτικός διαχωρισμός μεταξύ μεγάλων και μικρών αλμάτων, αλλά δίνει έναν τρόπο να ελέγξουμε πως το τυχαίο μέτρο Poisson N επιδρά στις διαδρομές της διαδικασίας. Με αυτό τον χειρισμό μπορούμε να αντιμετωπίσουμε διαφορετικά τα σημεία που αντιστοιχούν σε άλματα μεγέθους αυθαίρετα κοντά στο μηδέν, σε σχέση με εκείνα με που απέχουν θετικά από αυτό.

Το παρακάτω διάγραμμα αναπαριστά την ροή των αποτελεσμάτων που διατυπώθηκαν, συνδέοντας όλες τις κεντρικές έννοιες που μας απασχόλησαν στο παρόν κεφάλαιο. Με LK συμβολίζουμε τον τύπο Lévy–Khintchine, με LI την αποσύνθεση Lévy–Itô, με CFE τη συναρτησιακή εξίσωση του Cauchy, ενώ με SII την ιδιότητα των στάσιμων και ανεξάρτητων προσαυξήσεων. Το διάγραμμα αυτό μπορεί να βρεθεί στις σχετικές σημειώσεις των Baurdoux και Paparantoleon (2015) (pp. 5).



Σχήμα 3.1: Οι βασικές σχέσεις μεταξύ των διαδικασιών Lévy, των απείρως διαιρετών κατανομών και των τριάδων Lévy.

3.3.2 Ιδιότητες Διαδρομών

Η μορφή των τροχιών μιας διαδικασίας Lévy έχει άμεση συνάφεια με τις ιδιότητες του μέτρου Lévy που της αντιστοιχεί. Η σύνδεση αυτή γίνεται ξεκάθαρη αν θυμηθούμε πως το μέτρο Lévy λειτουργεί ως εργαλείο καταμέτρησης των αλμάτων, αποδίδοντας την αναμενόμενη τιμή αυτών στην μονάδα του χρόνου. Επομένως, για να κατανοήσουμε τη συνολική επίδραση των αλμάτων εξετάζουμε τη μάζα του μέτρου πάνω σε ολόκληρο τον άξονα. Το κεντρικό ερώτημα είναι λοιπόν τι συμβαίνει στην περίπτωση όπου η συνολική μάζα του μέτρου απειρίζεται. Το προηγούμενο ερώτημα οδηγεί στο επόμενο αποτέλεσμα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3.1 Έστω $X = \{X_t, t \geq 0\}$ μια διαδικασία Lévy με χαρακτηριστική τριάδα (b, c, ν) .

- 1) Αν $\nu(\mathbb{R}) < \infty$, τότε σχεδόν όλες οι διαδρομές της X έχουν πεπερασμένο πλήθος αλμάτων σε κάθε κλειστό και φραγμένο χρονικό διάστημα. Σε αυτή την περίπτωση, η διαδικασία X είναι *πεπερασμένης δραστηριότητας* (*finite activity*).
- 2) Αν $\nu(\mathbb{R}) = \infty$, τότε σχεδόν όλες οι διαδρομές της X εμφανίζουν άπειρο πλήθος αλμάτων σε κάθε κλειστό και φραγμένο χρονικό διάστημα. Σε αυτή την περίπτωση, η διαδικασία X είναι *άπειρης δραστηριότητας* (*infinite activity*).

Η παραπάνω πρόταση έρχεται να συνοψίσει μια διαισθητικά αναμενόμενη σχέση ανάμεσα στο μέτρο Lévy και την πυκνότητα των ασυνεχειών της διαδικασίας, αναδεικνύοντας ότι η μορφή του μέτρου είναι σημαντική ώστε να κρίνουμε αν οι διαδρομές της διαδικασίας διατηρούν την περατότητα των αλμάτων ή όχι. Ωστόσο, αυτό από μόνο του δεν επαρκεί προκειμένου κανείς να αποτυπώσει πλήρως την συμπεριφορά των διαδρομών μιας τέτοιας διαδικασίας στο επίπεδο, αφού, όπως υποδεικνύει η αποσύνθεση Lévy–Itô, εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό και από τους υπόλοιπους χαρακτηριστικούς όρους της χαρακτηριστικής τριάδας. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η παρουσία μιας κίνησης Brown στη σχέση (3.13) θα προσέθετε τη χαρακτηριστική ακανόνιστη μορφή στο συνεχές μέρος των διαδρομών της διαδικασίας. Σε αυτή την περίπτωση είναι τετριμμένο να θεωρήσουμε ότι η X είναι διαδικασία άπειρης κύμανσης. Ωστόσο, θα ήταν εύλογο να αναρωτηθούμε αν η απουσία του Brownian όρου ανάγει την μελέτη των διαδρομών της διαδικασίας για ακόμα μια φορά στη μελέτη της αλματικής της συμπεριφοράς. Ο Α. Κυπριανού (2006), απαντά καταφατικά σε αυτό το ερώτημα, αναλύοντας ότι στην πραγματικότητα η διάκριση μιας διαδικασίας σε άπειρης ή πεπερασμένης κύμανσης κρίνεται από την συνεισφορά των μικρών αλμάτων, και συγκεκριμένα από την οριακή διαδικασία (limiting process) $X^{(3)}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3.2 Μια διαδικασία Lévy $X = \{X_t, t \geq 0\}$ που αντιστοιχεί στην Lévy–Khintchine χαρακτηριστική τριάδα (b, c, ν) έχει διαδρομές *πεπερασμένης κύμανσης* (*finite variation*) αν και μόνο αν

$$c = 0 \quad \text{και} \quad \int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$$

Προκειμένου να δούμε ότι η ολοκληρωτική συνθήκη επάγει την περατότητα της συνολικής κύμανσης της διαδικασίας X αρκεί να δούμε ότι από την στιγμή που ισχύει, εξασφαλίζει ότι το supremum άθροισμα των κατακόρυφων μεταβολών της $X^{(3)}$ πάνω σε οποιαδήποτε διαμέριση ενός κλειστού διαστήματος $[t, t']$, με $t < t'$, παραμένει φραγμένο, δηλαδή

$$TV(X_t^{(3)}) = \sup_{\pi} \sum_{1 \leq j \leq n} |X_{t_j}^{(3)} - X_{t_{j-1}}^{(3)}| < \infty, \quad \sigma.β.$$

όπου $\pi = \{t = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t'\}$. Η διαδικασία $X^{(2)}$ είναι σύνθετη διαδικασία Poisson και άρα έχει από μόνη της πεπερασμένη κύμανση. Για την πλήρη απόδειξη της παραπάνω πρότασης ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στις σχετικές σημειώσεις διαλέξεων του Paparantoleon (2000).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ VARIANCE-GAMMA

Στο πεδίο της σύγχρονης χρηματοοικονομικής μοντελοποίησης οι διαδικασίες Lévy έχουν στρέψει το ενδιαφέρον αρκετών επιστημόνων στη μελέτη των ωφέλιμων ιδιοτήτων που επιτρέπουν την ακριβέστερη αποτύπωση πρόσκαιρων ή, πιθανόν, μακροπρόθεσμων ανισοροπιών της αγοράς, ως αποτέλεσμα εξωγενών παραγόντων που τις δημιουργούν. Ο βασικός λόγος για τον οποίο αυτά τα μοντέλα έχουν καθιερωθεί μεταξύ των διαφόρων σύγχρονων προσεγγίσεων της συμπεριφοράς των υποκείμενων αγαθών, έγκειται, όπως επισημάνθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, στην ενσωμάτωση της αλματικής συνιστώσας στην υποκείμενη διαδικασία. Μέσα σε αυτή τη κλάση επεκτάσεων της κλασικής αποτίμησης, όπως αυτή προτάθηκε από τους Black, Scholes και Merton (1973), δύναται να διακρίνουμε δύο σημαντικές κατηγορίες.

Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τα λεγόμενα μοντέλα διάχυσης με άλματα (jump diffusion models). Η υπόθεση ότι ο λογάριθμος των αποδόσεων εξελίσσεται σύμφωνα με μια διαδικασία διάχυσης με άλματα, έρχεται να υποκαταστήσει την κλασική προσέγγιση μοντέλων που στηρίζονται αποκλειστικά σε διαδικασίες διάχυσης (pure diffusion models), καθώς βασίζεται στην παραδοχή ότι η εξέλιξη των τιμών περιγράφεται μέσω μιας διαδικασίας διάχυσης (diffusion process) η οποία συνοδεύεται από άλματα διαφόρων μεγεθών, άλματα τα οποία, όπως ερμηνεύουν οι Cont R. και Tankov P. (2003), αντανακλούν την επίδραση των σπάνιων γεγονότων που συμβαίνουν στην αγορά. Σύμφωνα με τους Cox J. και Ross S. (1976), τα μοντέλα διάχυσης που ενσωματώνουν μια αλματική διαδικασία, ανεξάρτητα της συμβατότητας τους με τον πραγματικό κόσμο, τυποποιούν με μεγαλύτερη ακρίβεια την διαίσθηση μας, αποτυπώνοντας με ρεαλιστικό τρόπο τις προσδοκίες των επενδυτών.

Η δεύτερη κατηγορία, η οποία πρόκειται να μας απασχολήσει στο παρόν κεφάλαιο, συνίσταται από διαδικασίες με διαδρομές οι οποίες εξελίσσονται αποκλειστικά μέσω αλμάτων (pure jump processes). Κατά βάση, τα υποδείγματα που ανήκουν στην κλάση χαρακτηρίζονται από την απουσία της παραμέτρου διαχύσεως, εξετάζοντας την περίπτωση όπου η δυναμική των τιμών, πέρα από το προφανές, ότι δηλαδή μεταβάλλεται μέσω αλμάτων, δύναται περαιτέρω να ποικίλει ανάλογα με την περατότητα ή μη του ολοκληρώματος του μέτρου Lévy. Αυτή η ιδιότυπη προσέγγιση υιοθετήθηκε από αρκετούς συγγραφείς με πρωτοπόρους τους Cox J. και Ross S. (1976) οι οποίοι μελέτησαν την εν λόγω δομή των τιμών υπό καθεστώς πεπερασμένης δραστηριότητας. Ωστόσο, οι Cont R. και Tankov P. (2003) επιφυλάσσονται της καταλληλότητας της εφαρμογής τέτοιων μοντέλων στην αγορά καθώς, όπως αναφέρουν, δεν αντικατοπτρίζουν την ρεαλιστική οπτική της δυναμικής των τιμών. Στη συνέχεια, ένα μεγάλο μέρος της έρευνας εστίασε στην μελέτη διαδικασιών άπειρης δραστηριότητας. Η ένταξη τέτοιων μοντέλων στην χρηματοοικονομική βιβλιογραφία οφείλεται στην ικανότητα τους τόσο στο να ακολουθούν τις ιδιάζουσες διαδρομές των κινήσεων των τιμών μέσω των άπειρων μικρών αλμάτων που εμφανίζονται σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα, όσο και στο να καταγράφουν τις σπάνιες μεγάλες μεταβολές που εκδηλώνονται με μεγάλα άλματα. Αυτός ήταν ο λόγος άλλωστε για τον οποίο αμφισβητήθηκε η χρήση των κλασικών μοντέλων διάχυσης με άλματα, όπως εκείνο του

Merton (1976), από τους Geman H., Madan D. και Yor M. (2002), επισημαίνοντας ότι η προσθήκη μιας συνιστώσας διάχυσης σε ένα καθαρά αλματικό μοντέλο (pure jump model) για την μελέτη των υποκείμενων αγαθών, είναι περιττή (Carr P., Geman H., Madan D. και Yor M. (2002)).

Από την προηγούμενη συζήτηση αναδεικνύεται ότι οι καθαρά αλματικές διαδικασίες αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο προκειμένου να σκιαγραφήσουμε την εξέλιξη των τιμών στην αγορά, καθιστώντας την εφαρμογή τους επαρκή και συχνά ανώτερη έναντι της επίδοσης οποιασδήποτε διαδικασίας διάχυσης. Στο πλαίσιο αυτό ξεχωρίζουμε δύο σημαντικές υποκλάσεις των καθαρά αλματικών διαδικασιών, οι οποίες αποτελούν την κεντρική δομή του παρόντος κεφαλαίου, τις διαδικασίες CGMY και τη διαδικασία Variance–Gamma (VG). Αρχικά εξετάζουμε τη θεωρητική δομή της οικογένειας των CGMY διαδικασιών, με έμφαση στα χαρακτηριστικά του μέτρου Lévy, ενώ στη συνέχεια παρουσιάζουμε τη διαδικασία Variance–Gamma, ως ειδική περίπτωση των διαδικασιών της προαναφερθείσας οικογένειας, με ιδιαίτερη έμφαση στην κατασκευή και στις ιδιότητες της κατανομής της. Τέλος, αναλύουμε τις κυριότερες τεχνικές προσομοίωσης Monte Carlo που προτείνονται στη σχετική βιβλιογραφία.

4.1 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ VARIANCE–GAMMA : ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

4.1.1 Διαδικασίες CGMY

Οι καθαρά αλματικές διαδικασίες αποτελούν μια από τις πλέον ευέλικτες κλάσεις των διαδικασιών Lévy. Τα επιμέρους μοντέλα της κλάσης διαφοροποιούνται ανάλογα με την μορφή και την συχνότητα των αλμάτων που εμφανίζονται στις διαδρομές τους, διακρινόμενα σε διαδικασίες άπειρης ή πεπερασμένης κύμανσης και άπειρης ή πεπερασμένης δραστηριότητας. Η διάκριση αυτή επιτρέπει την επιλογή του κατάλληλου μοντέλου που αποδίδει με μεγαλύτερη ακρίβεια την συμπεριφορά των τιμών και ανταποκρίνεται καλύτερα στις ιδιαιτερότητες κάθε αγοράς, καθιστώντας την κλάση των καθαρά αλματικών διαδικασιών ορόσημο στη σύγχρονη προσέγγιση για την περιγραφή της δυναμικής των υποκείμενων αγαθών. Μέσα σε αυτή την κλάση, οι Carr P., Geman H., Madan D. και Yor M. (2002) πρότειναν ένα πολυπαραμετρικό μοντέλο με δομή ικανή να προσαρμόζεται σε κάθε δυνατή μορφή της υποκείμενης διαδικασίας, μεταβάλλοντας κατάλληλα τις τιμές των παραμέτρων του. Το όνομα του μοντέλου είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως CGMY, και προέρχεται από τα αρχικά των προαναφερθέντων.

Ορίζουμε μια διαδικασία CGMY με παραμέτρους C , G , M και Y , ως τη διαδικασία Lévy $X^{CGMY}(t; C, G, M, Y)$ με μέτρο Lévy που δίνεται από

$$\nu^{CGMY}(dx) = \begin{cases} C \frac{e^{-G|x|}}{|x|^{1+Y}} dx, & x < 0 \\ C \frac{e^{-M|x|}}{|x|^{1+Y}} dx, & x > 0 \end{cases}$$

ή από την ισοδύναμη έκφραση

$$\nu^{CGMY}(dx) = C \frac{e^{Gx}}{|x|^{1+Y}} \mathbf{1}_{\{x < 0\}} dx + C \frac{e^{-M|x|}}{|x|^{1+Y}} \mathbf{1}_{\{x > 0\}} dx \quad (4.1)$$

όπου $C > 0$, $G > 0$, $M \geq 0$ και $Y < 2$. Η τελευταία συνθήκη διασφαλίζει ότι το μέτρο ν^{CGMY} πληροί την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας της συνάρτησης x^2 σε περιοχή κοντά στο μηδέν.

Όπως αναφέρθηκε, ο κατάλληλος προσδιορισμός των παραμέτρων του μοντέλου αποτελεί βασική προϋπόθεση για την αξιόπιστη και έγκυρη αποτύπωση των πολυσύνθετων χαρακτηριστικών της υπό μελέτη υποκείμενης διαδικασίας. Οι P. Carr, H. Geman, D. Madan και M. Yor (2002) παραθέτουν διεξοδικά το ρόλο και τη σημασία κάθε παραμέτρου, αναδεικνύοντας πως ο κατάλληλος συνδυασμός τιμών τους ρυθμίζει τη μορφή του μέτρου Lévy και κατ'επέκταση τις ιδιότητες των διαδρομών των διαδικασιών CGMY. Ειδικότερα, όπως αναφέρουν, οι παράμετροι G και M ελέγχουν τον ρυθμό εκθετικής πτώσης εκατέρωθεν της πυκνότητας του μέτρου Lévy, καθορίζοντας έτσι τον βαθμό ασυμμετρίας της κατανομής της διαδικασίας X^{CGMY} . Όταν $G < M$, η αριστερή ουρά της κατανομής της διαδικασίας X^{CGMY} είναι βαρύτερη σε σχέση με εκείνη από τα δεξιά, γεγονός που μεταφράζεται σε υψηλότερη πιθανότητα εμφάνισης μεγάλων αρνητικών αλμάτων. Στην ειδική περίπτωση όπου $G = M$, η οποία αντιστοιχεί σε συμμετρική πυκνότητα Lévy, η παράμετρος C καθορίζει την κύρτωση της κατανομής του μοντέλου, εκφράζοντας την ένταση των αλμάτων και ποσοτικοποιώντας την δραστηριότητα της διαδικασίας. Η παράμετρος Y περιγράφει την συμπεριφορά του μέτρου Lévy κοντά στο μηδέν. Η ιδιότητα αυτή φέρει ιδιαίτερης σημασίας, καθώς επιτρέπει να διαπιστωθεί αν η διαδικασία είναι άπειρης ή πεπερασμένης κύμανσης και άπειρης ή πεπερασμένης δραστηριότητας, συμβάλλοντας καθοριστικά στην κατηγοριοποίηση των διαδικασιών και υπαγορεύοντας τα βασικά χαρακτηριστικά των διαδρομών τους.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1.1 (Ιδιότητες του μέτρου Lévy της διαδικασίας CGMY) Μια διαδικασία CGMY παρουσιάζει απολύτως μονότονη (completely monotone) πυκνότητα Lévy για τιμές της παραμέτρου $Y > -1$. Επιπλέον, είναι άπειρης δραστηριότητας όταν $Y > 0$, ενώ εμφανίζει άπειρη κύμανση όταν $Y > 1$.

Η ιδιότητα της απόλυτης μονοτονίας χαρακτηρίζει εκείνες τις συναρτήσεις $f : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ οι οποίες είναι απείρως διαφορίσιμες και ικανοποιούν την συνθήκη

$$(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$$

για κάθε $x > 0$ και $n \geq 1$. Προκειμένου να δείξουμε ότι η πυκνότητα Lévy της διαδικασίας CGMY είναι απολύτως μονότονη όταν $Y > -1$, θα εξετάσουμε αρχικά την περίπτωση όπου $Y < -1$. Τότε έχουμε ότι $1 + Y < 0$, και επομένως η πυκνότητα

$$x^{-(1+Y)} e^{-\beta x}, \quad \beta = G, M$$

αυξάνεται για τιμές του x κοντά στο μηδέν, ενώ μειώνεται καθώς το x τείνει στο άπειρο. Η αλλαγή της μονοτονίας συνιστά ακριβώς ότι σε αυτή την περίπτωση η παραπάνω πυκνότητα δεν είναι απολύτως μονότονη. Στην αντίθετη περίπτωση, όταν $Y > -1$, μπορούμε να γράψουμε την πυκνότητα Lévy ως

$$x^{-(1+Y)} e^{-\beta x} = \int_{\beta}^{\infty} \frac{(\alpha - \beta)^Y}{\Gamma(1 + Y)} e^{-\alpha x} d\alpha = \int_{\beta}^{\infty} e^{-\alpha x} \zeta(d\alpha) \quad (4.2)$$

όπου

$$\zeta(d\alpha) = 1_{(\alpha > \beta)} \frac{(\alpha - \beta)^Y}{\Gamma(1 + Y)} d\alpha$$

ένα μη-αρνητικό μέτρο Borel, πεπερασμένο σε κάθε συμπαγές υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Από την (4.2) μπορούμε εύκολα να αντιληφθούμε ότι η πυκνότητα Lévy αποτελεί τον μετασχηματισμό Laplace του μέτρου ζ και άρα, εκμεταλλευόμενοι το αποτέλεσμα του θεωρήματος του Bernstein (H. Sendov και S. Shan (2015), *Theorem 1.1*, pp. 2), εξασφαλίζουμε πλέον την απόλυτη μονοτονία. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις που αναφέρονται στο παραπάνω θεώρημα προκύπτουν άμεσα από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος στην (3.14) και από την πρόταση 3.3.1. Για μεγαλύτερη σαφήνεια ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο σχετικό άρθρο των P. Carr, H. Geman, D. Madan και M. Yor (2002) (pp. 10).

Ας θεωρήσουμε τώρα την διαδικασία $X^{CGMY} = \{X_t^{CGMY}, t \geq 0\}$. Από το θεώρημα των Lévy–Khintchine, η χαρακτηριστική συνάρτηση της διαδικασίας X^{CGMY} δίνεται από την αναπαράσταση

$$\varphi^{CGMY}(u, t) = E(\exp(iuX_t^{CGMY})) = \exp\left(t \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) \nu^{CGMY}(dx)\right)$$

Από την σχέση (4.1), το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί στην παρακάτω ισοδύναμη μορφή

$$\begin{aligned} \varphi^{CGMY}(u, t) &= \exp\left(t \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) \nu^{CGMY}(dx)\right) \\ &= \exp\left(t \int_0^{+\infty} (e^{iux} - 1) C \frac{e^{-Mx}}{x^{1+Y}} dx\right) + \exp\left(t \int_{-\infty}^0 (e^{iux} - 1) C \frac{e^{Gx}}{(-x)^{1+Y}} dx\right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Απομονώνοντας τα ολοκλήρωμα στην (4.3) και μετασχηματίζοντας κατάλληλα την μεταβλητή ολοκλήρωσης, αποδεικνύεται ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση της διαδικασίας X^{CGMY} μπορεί να γραφτεί σε κλειστή μορφή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1.2 (Χαρακτηριστική συνάρτηση της διαδικασίας CGMY) Η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας διαδικασίας Lévy με μέτρο Lévy ταυτόσημο με εκείνο της σχέσης (4.1), δίνεται από

$$\varphi^{CGMY}(u, t; C, G, M, Y) = \exp\{tC \Gamma(-Y) [(M - iu)^Y - M^Y + (G + iu)^Y - G^Y]\}$$

4.1.2 Διαδικασία Variance–Gamma (VG)

Στη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών, η κίνηση Brown αποτελεί ένα από τα πιο ευρέως μελετημένα μοντέλα, με εφαρμογές που, όπως έχει αναφερθεί, εστιάζουν κυρίως στην ανάλυση και πρόβλεψη της δυναμικής των τιμών στις χρηματοοικονομικές αγορές. Ωστόσο, η αυτούσια εφαρμογή του υποδείγματος έχει προβληματίσει αρκετά τους ερευνητές καθώς, όπως καταδεικνύουν ιστορικά δεδομένα, η κατανομή των αποδόσεων παρουσιάζει έντονη κύρτωση και βαρύτερες ουρές σε σύγκριση με όσα προβλέπει η υπόθεση της κανονικότητας (βλ. P. K. Clark (1973), H. Geman και T. Anné (2000)). Ο Clark (1973) υποστηρίζει ότι η παρατηρούμενη απόκλιση μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι οι τιμές των αξιολογίων χαρακτηρίζονται από διαφορετικά

επίπεδα μεταβλητότητας κατά μήκος διαφορετικών περιόδων συναλλαγών (trading periods), ενώ ο ρυθμός εξέλιξης τους επηρεάζεται έντονα από την ένταση της συναλλακτικής δραστηριότητας και ειδικότερα από τον όγκο συναλλαγών. Θεωρώντας ότι η ροή πληροφορίας στην οποία εκτίθενται οι επενδυτές μεταβάλλεται τυχαία και αποκαλύπτεται με διαφορετική συχνότητα με την πάροδο του χρόνου, θέτει υπό αμφισβήτηση την καταλληλότητα της χρονικής κλίμακας στην οποία αποτιμάται η υποκείμενη διαδικασία (underlying process). Η προσέγγιση αυτή αναδεικνύει την ανάγκη προσδιορισμού μιας εναλλακτικής έννοιας μέτρησης του χρόνου, ικανής να αποτυπώσει πληρέστερα την δυναμική των τιμών, να εξηγήσει τις διαφοροποιήσεις που παρατηρούνται στα διάφορα επίπεδα μεταβλητότητας και να εξομαλύνει τις αποκλίσεις από την κανονικότητα. Έτσι, αναπροσαρμόζοντας τη χρονική κλίμακα της υποκείμενης διαδικασίας μέσω ανάθεσης ως χρονικό δείκτη μιας αύξουσας στοχαστικής διαδικασίας με ανεξάρτητες και ομογενείς προσαιξήσεις, εισήγαγε την έννοια της στοχαστικής χρονικής μεταβολής (stochastic time change) στη χρηματοοικονομική βιβλιογραφία. Στο πλαίσιο της χρηματοοικονομικής ερμηνείας, κάθε σημείο της στοχαστικής χρονικής κλίμακας δεν εκφράζει χρόνο με την συμβατική έννοια, αλλά ένα συγκεκριμένο οικονομικό μέγεθος, όπως ο όγκος ή ο αριθμός συναλλαγών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα υποδείγματος που προκύπτει με την τεχνική που αναφέρθηκε παραπάνω αποτελεί η διαδικασία Variance–Gamma (VG). Η διαδικασία Variance–Gamma (VG) εισήχθη από τους D. Madan και E. Seneta (1990) ως γενίκευση της κίνησης Brown με στόχο να αντιμετωπίσει ορισμένες αδυναμίες που παρουσιάζει το μοντέλο των Black και Sholes στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης (F. Fiorani (2004)). Η νέα αυτή διαδικασία διαμορφώνεται παρατηρώντας μια κίνηση Brown σε μια στοχαστική χρονική κλίμακα η οποία σχηματίζεται μέσω μιας διαδικασίας γάμμα (gamma process). Έτσι, κάθε χρηματοοικονομικό γεγονός θεωρείται ότι διαδέχεται το προηγούμενο σε γάμμα κατανομημένο χρόνο με σταθερή μέση τιμή και σταθερή (θετική) διακύμανση, ενώ σε κάθε μια από αυτές τις τυχαίες στιγμές, η διαδικασία VG υπαγορεύει την αλματική συμπεριφορά της διαδρομής της υποκείμενης διαδικασίας επιβάλλοντας άλματα κανονικά κατανομημένου μεγέθους.

Έως τώρα, η κατασκευή στοχαστικών διαδικασιών οι οποίες θεωρούνται ότι αποτελούν μέλη των διαδικασιών Lévy βασίζονται στην παραδοχή ότι υπάρχει μια χαρακτηριστική τριάδα που αντιστοιχεί σε έναν απείρως διαιρετό νόμο. Η ίδια λογική αποτελεί την βάση για την κατασκευή της διαδικασίας VG. Προκειμένου να διαμορφώσουμε το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο των ιδιοτήτων της διαδικασίας VG, στη συνέχεια παρουσιάζουμε την κατανομή Variance–Gamma (VG). Η κατανομή VG με παραμέτρους $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ και $\mu \in \mathbb{R}$, καλείται εκείνη η κατανομή της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από την έκφραση

$$f_{VG}(x) = \frac{\exp\left\{\frac{\theta(x-\mu)}{\sigma^2}\right\}}{\sigma\sqrt{\pi}\Gamma(r/2)} \left(\frac{(x-\mu)^2}{2(\theta^2 + \sigma^2)}\right)^{\frac{r-1}{4}} K_{\frac{r-1}{2}}\left(\frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\theta^2 + \sigma^2}|x-\mu|\right), \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

όπου $K_\alpha(x)$ είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους, τάξης α (modified Bessel function of the second kind, of order α), και συμβολικά θα γράφουμε $VG(r, \theta, \sigma, \mu)$. Οι R. Finley και E. Seneta (2008) εισάγουν μια διαφορετική παραμετροποίηση της κατανομής VG εξετάζοντας την περίπτωση όπου η σχέση (4.4) δίνεται ισοδύναμα από την παρακάτω

$$f_{VG}(x) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha^\alpha e^{\theta_0(x-\mu)/\sigma_0^2}}{\sigma_0 \Gamma(\alpha)} \left(\frac{|x-\mu|}{\sqrt{\theta_0^2 + 2\alpha\sigma_0^2}} \right)^{\alpha-\frac{1}{2}} K_{\alpha-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sigma_0^2} \sqrt{\theta_0^2 + 2\alpha\sigma_0^2} |x-\mu| \right), \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.5)$$

όπου η (4.5) σχετίζεται με την παραμετροποίηση της (4.4) για $r = 2\alpha$, $\sigma^2 = \sigma_0^2/2\alpha$, $\theta = \theta_0/2\alpha$, ενώ θέτοντας $\alpha = 1/\nu$ λαμβάνουμε την παραμετροποίηση που δίνεται από τους D. Madan, P. Carr και E. Chang (1998). Οι ιδιότητες της συγκεκριμένης κατανομής εξετάζονται διεξοδικά στο σχετικό άρθρο των A. Fisher, R. Gaunt και A. Sarantsev (2023) (*Section 2.1, pp. 3-4*). Ας θεωρήσουμε τώρα μια τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί την κατανομή VG, συμβολικά $X \sim VG(r, \theta, \sigma, \mu)$. Τότε, η χαρακτηριστική συνάρτηση της X δίνεται από την έκφραση

$$\varphi_X(u) = e^{i\mu u} \left(\frac{1}{1 - 2i\theta u + \sigma^2 u^2} \right)^{-r/2} \quad (4.6)$$

Παρατηρώντας ότι η (4.6) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$\varphi_X(u) = \left[e^{i\mu/n} \left(\frac{1}{1 - 2i\theta u + \sigma^2 u^2} \right)^{-r/(2n)} \right]^n = \varphi_{X^{(1/n)}}(u)$$

για κάθε φυσικό n , όπου $X^{(1/n)} \sim VG(r/n, \theta, \sigma, \mu/n)$, διαπιστώνεται άμεσα η κλειστότητα της κατανομής VG ως προς την πράξη συνέλιξης και, κατ' επέκταση, η ένταξη της στην κλάση των απείρως διαιρετών κατανομών, με μέτρο Lévy

$$\nu(dx) = \left(\frac{r}{2|x|} e^{-\lambda+|x|} \mathbf{1}_{x<0} + \frac{r}{2x} e^{-\lambda-x} \mathbf{1}_{x>0} \right) dx \quad (4.7)$$

όπου $\lambda_{\pm} = (\sqrt{\theta^2 + \sigma^2} \pm \theta)/\sigma^2$. Από το θεώρημα Lévy-Itô, μπορούμε να ορίσουμε μια διαδικασία Lévy που αντιστοιχεί στην απείρως διαιρετή κατανομή VG. Η διαδικασία Lévy που προκύπτει είναι ακριβώς η διαδικασία Variance–Gamma (VG).

Πριν προχωρήσουμε στην κατασκευή της διαδικασίας VG, θα παρουσιάσουμε συνοπτικά την διαδικασία γάμμα $\gamma = (\gamma_t, t \geq 0)$, ξεκινώντας από την κατανομή γάμμα. Μια τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι ακολουθεί την κατανομή γάμμα με παράμετρο σχήματος (*shape parameter*) $\alpha > 0$ και παράμετρο ρυθμού (*rate parameter*) $\lambda > 0$, και συμβολικά γράφουμε $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, αν η κατανομή πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από

$$\mu_{\alpha,\lambda}(dx) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{x>0\}} dx \quad (4.8)$$

με μάζα στο σύνολο $\mathbb{R}^{++} = (0, \infty)$. Η χαρακτηριστική συνάρτηση της X δίνεται από την έκφραση

$$\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}^{++}} e^{iux} \mu_{\alpha,\lambda}(dx) = \int_{\mathbb{R}^{++}} e^{iux} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

η οποία μετά από πράξεις παίρνει την ακόλουθη μορφή για κάθε $u \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X(u) = \left(1 - \frac{i u}{\lambda} \right)^{-\alpha} \quad (4.9)$$

Ισοδύναμα, η παραπάνω έκφραση μπορεί να γραφεί ως

$$\varphi_X(u) = \left[\left(1 - \frac{iu}{\lambda} \right)^{-\alpha/n} \right]^n$$

για κάθε φυσικό αριθμό n . Παρατηρώντας ότι η παράσταση μέσα στην παρένθεση αποτελεί την χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής $X^{(1/n)} \sim \Gamma(\alpha/n, \lambda)$, έπεται ότι η κατανομή πιθανότητας που δίνεται από την έκφραση (4.8) είναι απείρως διαιρετή. Ωστόσο, η επιλογή των χαρακτηριστικών όρων της τριάδας Lévy του νόμου $\mu_{\alpha, \lambda}(dx)$ δεν είναι άμεση. Αξιοποιώντας το ολοκλήρωμα Frullani (A. Kyprianou (2006), *Lemma 1.7*, pp. 8), η (4.9) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\varphi_X(u) = \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}^{++}} (1 - e^{iux}) \beta x^{-1} e^{-\alpha x} dx \right\}, \quad u \in \mathbb{R}$$

Η παραπάνω έκφραση για την χαρακτηριστική συνάρτηση ταυτίζεται με την αναπαράσταση Lévy–Khintchine με χαρακτηριστική τριάδα

$$(b, c, \nu) = \left(- \int_{0 \leq |x| < 1} x \nu(dx), 0, \frac{dx}{x} \alpha e^{-\lambda x} \right)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Lévy-Itô, μπορούμε να ορίσουμε μια διαδικασία Lévy που αντιστοιχεί στην παραπάνω χαρακτηριστική τριάδα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.2.1 (Διαδικασία Γάμμα) Έστω $\alpha(t), t \geq 0$ μια αύξουσα και δεξιά συνεχής συνάρτηση, με $\alpha(0) = 0$. Μια στοχαστική διαδικασία $\gamma^{(\lambda)} = \{\gamma_t^{(\lambda)}, t \geq 0\}$ καλείται *διαδικασία γάμμα (gamma process)* με παράμετρο $\lambda > 0$, αν πληροί τις κάτωθι ιδιότητες:

- 1) $P(\gamma_0^{(\lambda)} = 0) = 1$
- 2) Η $\gamma^{(\lambda)}$ έχει ανεξάρτητες και γάμμα κατανομημένες προσαυξήσεις, δηλαδή για κάθε $t, s \geq 0$,

$$\gamma_t^{(\lambda)} - \gamma_s^{(\lambda)} \sim \Gamma(\alpha(t) - \alpha(s), \lambda)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου η συνάρτηση σχήματος $\alpha(t) = at$, όπου a σταθερά, τότε η διαδικασία του παραπάνω ορισμού αποκτά επιπλέον την ιδιότητα των στάσιμων προσαυξήσεων, ικανοποιώντας έτσι όλες τις απαιτούμενες προϋποθέσεις προκειμένου να αναγνωριστεί ως διαδικασία Lévy (N. Singpurwalla (1997)). Η διαδικασία γάμμα χαρακτηρίζεται από σχεδόν βέβαια γνησίως αύξουσες διαδρομές αφού, όπως αποδεικνύει ο A. Kyprianou (2006) (pp. 8), για κάθε $t > s > 0$, ισχύει ότι $\gamma_t^{(\lambda)} > \gamma_s^{(\lambda)}$, σχεδόν βέβαια και επομένως διαθέτει αποκλειστικά θετικές προσαυξήσεις, ενώ ταυτόχρονα, αποτελεί διαδικασία άπειρης δραστηριότητας. Μια εναλλακτική διατύπωση του παραπάνω ορισμού αναφέρει ότι μια διαδικασία γάμμα $\gamma^{(\mu, \nu)} = \{\gamma_t^{(\mu, \nu)}, t \geq 0\}$ με μέσο ρυθμό (mean rate) μ και ρυθμό διακύμανσης (variance rate) ν είναι μια διαδικασία Lévy με ανεξάρτητες και γάμμα προσαυξήσεις σε μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα, τέτοια ώστε για κάθε χρονικό διάστημα $(t, t+h)$, η πυκνότητα της προσαυξήσης $g = \gamma_{t+h}^{(\mu, \nu)} - \gamma_t^{(\mu, \nu)}$ να δίνεται από την Radon-Nikodym παράγωγο του μέτρου $\mu_{(\mu^2 h)/\nu, \mu/\nu}(dx)$ ως προς το μέτρο Lebesgue, δηλαδή

$$f(g) = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{\frac{\mu^2 h}{\nu}} \frac{g^{\frac{\mu^2 h}{\nu}-1} \exp\{-\frac{\mu}{\nu}g\}}{\Gamma\left(\frac{\mu^2 h}{\nu}\right)}, \quad g > 0$$

Για λόγους σαφήνειας, όταν αναφερόμαστε στη διαδικασία γάμμα θα θεωρούμε τη συγκεκριμένη παραμετροποίηση της όπως ορίστηκε στην τελευταία. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την διαδικασία του παραπάνω ορισμού παραπέμπουμε στα σχετικά άρθρα των N. Singpurwalla (1997), H. van der Weide (1997), και M. Yor (2007) και στο βιβλίο του A. Kyprianou (2006) (pp. 7-8).

Ας θεωρήσουμε μια κίνηση Brown $B = \{B_t, t \geq 0\}$ με τάση $\theta \in \mathbb{R}$ και πητικότητα $\sigma > 0$, δηλαδή

$$B_t = \theta t + \sigma W_t, \quad t \geq 0$$

όπου $W = \{W_t, t \geq 0\} \sim BM(0, 1)$ και έστω μια διαδικασία γάμμα $\gamma^{(1, \nu)} = (\gamma_t^{(1, \nu)}, t \geq 0)$ με μοναδιαίο μέσο ρυθμό και ρυθμό διακύμανσης ν , ανεξάρτητη της B . Η διαδικασία VG αποτελεί μια καθαρά αλματική διαδικασία (pure jump process) και εκφράζεται σε όρους των παραπάνω διαδικασιών ως

$$X_{t; \sigma, \nu, \theta}^{\text{VG}} = B_{\gamma_t^{(1, \nu)}} = \theta \gamma_t^{(1, \nu)} + \sigma W_{\gamma_t^{(1, \nu)}}, \quad t \geq 0 \quad (4.10)$$

Από την (4.10), κάθε χρονική στιγμή στην οποία αποτιμάται η κίνηση Brown ακολουθεί την ίδια οικονομική ερμηνεία με αυτή που αναφέραμε στην αρχή της παρούσας παραγράφου. Υπό την ερμηνεία αυτή, κάθε σημείο της χρονικής κλίμακας εκφράζει ένα σχετικό οικονομικό μέγεθος. Σε πλήρη αντιστοιχία με το συστηματικό κίνδυνο, το μέγεθος αυτό αντανακλά την συνολική κατάσταση της οικονομίας, καθιστώντας το κατάλληλο χρονικό δείκτη να αποτυπώσει την συλλογική δυναμική των αγορών και την έννοια του συστηματικού χρόνου (D. Madan και E. Seneta (1990)). Ωστόσο, το οικονομικό “ρολόι” δεν παράγει το ίδιο πλέγμα χρονικών κόμβων με το ημερολογιακό, καθώς ο γενεσιουργός μηχανισμός του πρώτου διέπεται αποκλειστικά από στοχαστικούς παράγοντες. Το γεγονός αυτό καταδεικνύει ότι οι ημερολογιακές χρονικές μονάδες δεν είναι συγκρίσιμες με τις αντίστοιχες οικονομικές, καθώς ο ρυθμός διαδοχής των σημείων της οικονομικής χρονικής κλίμακας δεν καθορίζεται από ντετερμινιστικά ημερολογιακά διαστήματα, αλλά αυξάνεται ή μειώνεται ανάλογα με την ένταση εμφάνισης της καινούργιας πληροφορίας που λαμβάνουμε από την αγορά. Η εισαγωγή της διαδικασίας γάμμα αποτυπώνει ακριβώς την ακανόνιστη ροή πληροφορίας, καταμετρώντας, σύμφωνα με τους D. Madan και E. Seneta (1990), πόσες οικονομικές χρονικές μονάδες αντιστοιχούν σε μια ημερολογιακή χρονική μονάδα. Έτσι, η διαδικασία, η οποία, όπως αναφέρθηκε, μοντελοποιεί τον οικονομικό χρόνο (economic time), καθορίζει την στοχαστική χρονική κλίμακα μεταβολής της κίνησης Brown και, συνολικά, υπαγορεύει τις χρονικές στιγμές αλμάτων της διαδικασίας VG.

Η διαδικασία VG αποτελεί μέλος της κλάσης των διαδικασιών Lévy με την ιδιότητα των VG κατανομημένων προσαυξήσεων, ανεξάρτητων για οποιοδήποτε ζεύγος μη επικαλυπτόμενων χρονικών διαστημάτων. Ειδικότερα, από την έκφραση (4.9) προκύπτει ότι για κάθε χρονικό διάστημα $(t, t+h)$, $t, h > 0$, η προσαύξηση

$$X_{t+h}^{\text{VG}} - X_t^{\text{VG}} = \theta \left(\gamma_{t+h}^{(1, \nu)} - \gamma_t^{(1, \nu)} \right) + \sigma \left(W_{\gamma_{t+h}^{(1, \nu)}} - W_{\gamma_t^{(1, \nu)}} \right)$$

είναι ισοδύναμη κατά κατανομή με την τυχαία μεταβλητή

$$\theta \left(\gamma_{t+h}^{(1,\nu)} - \gamma_t^{(1,\nu)} \right) + \sigma \left(\gamma_{t+h}^{(1,\nu)} - \gamma_t^{(1,\nu)} \right)^{1/2} X$$

όπου $\gamma_{(t+h)}^{(1,\nu)} - \gamma_t^{(1,\nu)} \sim \Gamma(h/\nu, 1/\nu)$ και $X \sim N(0, 1)$. Αξιοποιώντας τις ιδιότητες της κατανομής VG (R. Gaunt και A. Sarantsev (2023)), έπεται ότι

$$X_{t+h}^{\text{VG}} - X_t^{\text{VG}} \sim \text{VG}(2h/\nu, \theta\nu/2, \sigma\sqrt{\nu/2}, 0)$$

ενώ, κατ' αναλογία, για κάθε $t > 0$,

$$X_t^{\text{VG}} \sim \text{VG}(2t/\nu, \theta\nu/2, \sigma\sqrt{\nu/2}, 0).$$

Συνδυάζοντας την τελευταία με την έκφραση (4.6), μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι για οποιαδήποτε επιλογή του $t > 0$, η χαρακτηριστική συνάρτηση της διαδικασίας $X^{\text{VG}} = \{X_t^{\text{VG}}, t \geq 0\}$, δίνεται από

$$\varphi_{X_t}(u) = \left(\frac{1}{1 - i\theta\nu u + \nu\frac{\sigma^2}{2}u^2} \right)^{t/\nu}$$

Η παραπάνω μορφή της χαρακτηριστικής συνάρτησης, σύμφωνα με τους D. Madan, P. Carr και E. Chang (1998), μπορεί να προκύψει ως γινόμενο των παρακάτω χαρακτηριστικών συναρτήσεων

$$\varphi_{\gamma_t^{(\mu_+, \nu_+)}}(u) = \left(\frac{1}{1 - i(\nu_+/\mu_+)u} \right)^{\left(\frac{\mu_+^2}{\nu_+}\right)t}$$

και

$$\varphi_{-\gamma_t^{(\mu_-, \nu_-)}}(u) = \left(\frac{1}{1 + i(\nu_-/\mu_-)u} \right)^{\left(\frac{\mu_-^2}{\nu_-}\right)t}$$

όπου

$$\mu_+ = \frac{1}{2}\sqrt{\theta^2 + \frac{2\sigma^2}{\nu}} + \frac{\theta}{2}, \quad \mu_- = \frac{1}{2}\sqrt{\theta^2 + \frac{2\sigma^2}{\nu}} - \frac{\theta}{2}$$

και

$$\nu_+ = \mu_+^2\nu, \quad \nu_- = \mu_-^2\nu$$

Η συγκεκριμένη αναδιατύπωση της χαρακτηριστικής συνάρτησης αποκαλύπτει μια εναλλακτική αναπαράσταση της διαδικασίας VG ως διαφορά δύο ανεξάρτητων διαδικασιών γάμμα, δηλαδή

$$X_t^{\text{VG}} = \gamma_t^{(\mu_+, \nu_+)} - \gamma_t^{(\mu_-, \nu_-)}, \quad t \geq 0 \quad (4.11)$$

όπου

$$\gamma_t^{(\mu_+, \nu_+)} \sim \Gamma(t/\nu, 1/\lambda'_+), \quad \gamma_t^{(\mu_-, \nu_-)} \sim \Gamma(t/\nu, 1/\lambda'_-), \quad \lambda'_\pm = \frac{1}{2}\sqrt{\theta^2\nu^2 + 2\sigma^2\nu} \pm \frac{\theta\nu}{2}.$$

Σε αντίθεση με την ερμηνεία της διαδικασίας γάμμα ως διαδικασία που εκφράζει τον οικονομικό χρόνο, όπως παρουσιάστηκε στην αναπαράσταση (4.10), η παραπάνω εναλλακτική απεικόνιση

της διαδικασίας VG προβάλλει μια διαφορετική ερμηνευτική προσέγγιση. Συγκεκριμένα, όπως αναφέρουν D. Madan και E. Seneta (1990), κάθε επιμέρους διαδικασία αποτυπώνει την στοχαστική συμπεριφορά είτε των θετικών (κέρδη) είτε των αρνητικών (απώλειες) μεταβολών της διαδικασίας VG, οι οποίες συνδέονται αντιστοίχως με ανοδικές ή καθοδικές μεταβολές των αποδόσεων. Κατ' αυτό τον τρόπο, ο χρονικός χαρακτήρας που αρχικά είχε αποδοθεί στη διαδικασία γάμμα μετασχηματίζεται πλήρως, καθώς η διαδικασία αυτή αξιοποιείται πλέον για τη μοντελοποίηση του ύψους των αλμάτων, λειτουργώντας ως στοχαστικό υπόδειγμα που αποτυπώνει τις διακριτές μεταβολές της διαδικασίας VG.

4.1.3 Μέτρο Lévy της διαδικασίας VG και ερμηνεία των παραμέτρων

Παραπάνω είδαμε ότι η διαδικασία VG δύναται να εκφραστεί μέσω δύο εναλλακτικών αναπαραστάσεων. Η πρώτη αφορά την περιγραφή της ως κίνηση Brown με μετασχηματισμό της χρονικής κλίμακας (time-changed Brownian motion), ενώ η δεύτερη την εκφράζει ως διαφορά δυο ανεξάρτητων διαδικασιών γάμμα. Οι συγκεκριμένες αναπαραστάσεις οδηγούν σε διαφορετικές εκφράσεις για την μορφή του μέτρου Lévy, οι οποίες διατυπώνονται σε όρους που αντιστοιχούν στις παραμετροποιήσεις που παρουσιάστηκαν παραπάνω.

Στην περίπτωση όπου η διαδικασία VG εκφράζεται ως διαφορά διαδικασιών γάμμα, το μέτρο Lévy λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$\nu_{VG}(dx) = \frac{\mu_+^2}{\nu_+} \frac{e^{-\frac{\mu_+}{\nu_+}x}}{x} \mathbf{1}_{\{x>0\}} dx + \frac{\mu_-^2}{\nu_-} \frac{e^{-\frac{\mu_-}{\nu_-}|x|}}{|x|} \mathbf{1}_{\{x<0\}} dx \quad (4.12)$$

Από την παραπάνω έκφραση, παρατηρούμε ότι και στα δύο μέλη της άθροισης εμφανίζεται ο παράγοντας $|x|^{-1}$. Η παρουσία αυτού του όρου συνεπάγεται ότι το ολοκλήρωμα του μέτρου Lévy είναι άπειρο, γεγονός που κατατάσσει τη διαδικασία VG στην κλάση των διαδικασιών άπειρης δραστηριότητας. Παράλληλα, είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η ποσότητα $|x|$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς το μέτρο Lévy της διαδικασίας VG, και επομένως, αξιοποιώντας το αποτέλεσμα της Πρότασης 3.3.2, η διαδικασία VG είναι διαδικασία πεπερασμένης κύμανσης. Επιπλέον, από την (4.12), η διαδικασία VG αποτελεί ειδική περίπτωση της διαδικασίας CGMY για τιμές των παραμέτρων του μοντέλου

$$Y = 0$$

$$C = \frac{\mu_+^2}{\nu_+} = \frac{\mu_-^2}{\nu_-} = \frac{1}{\nu}$$

$$G = \frac{1}{\lambda_-} = \frac{\mu_-}{\nu_-}$$

$$M = \frac{1}{\lambda_+} = \frac{\mu_+}{\nu_+}$$

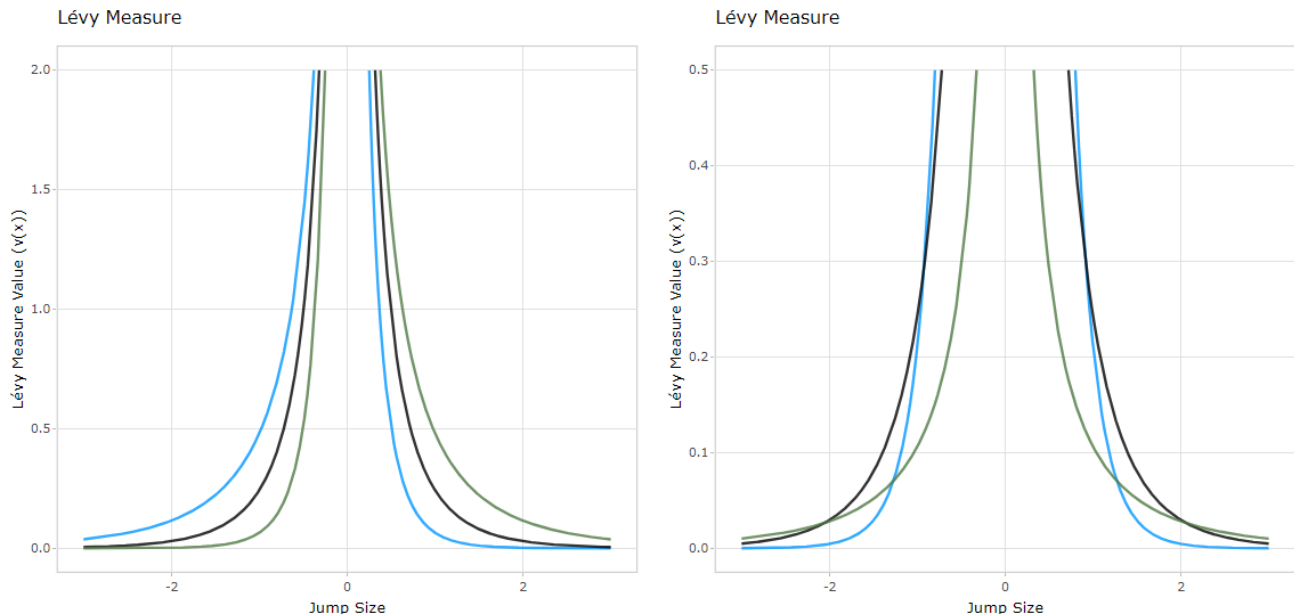
Λόγω της τιμής που λαμβάνει η παράμετρος Y , η διαδικασία VG χαρακτηρίζεται από απολύτως μονότονη πυκνότητα Lévy. Το γεγονός αυτό επιβάλλει στην αλματική δομή της διαδικασίας να

διαμορφώνεται με τέτοιο τρόπο ώστε, σε μια τυπική διαδρομή, τα μικρά άλματα να εμφανίζονται με μεγαλύτερη συχνότητα σε σχέση με τα μεγάλα (Carr P., Geman H., Madan D. και Yor M. (2002)). Έτσι, αντανακλάται η πραγματική τάση της αγοράς προς συχνές, μικρής κλίμακας μεταβολές.

Χρησιμοποιώντας, τώρα, τη συνήθη παραμετροποίηση (σ, ν, θ) της διαδικασίας VG που συναντήσαμε στην αναπαράσταση (4.10), το μέτρο Lévy λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$\nu_{VG}(dx) = \frac{1}{\nu|x|} \exp \left\{ \frac{\theta}{\sigma^2} x - \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\nu} + \frac{\theta^2}{\sigma^2}} |x| \right\} dx \quad (4.13)$$

Η παραπάνω έκφραση για το μέτρο Lévy αποσαφηνίζει την λειτουργική σημασία κάθε παραμέτρου στη μαθηματική περιγραφή του υποδείγματος, αναδεικνύοντας τον τρόπο με τον οποίο συμβάλουν στη διαμόρφωση των διαδρομών της διαδικασίας. Σύμφωνα με τη σχέση (4.13), αρνητικό πρόσημο της παραμέτρου θ συνδέεται με υψηλή συχνότητα εμφάνισης αρνητικών αλμάτων. Σε επίπεδο κατανομής των αλμάτων της διαδικασίας VG, το χαρακτηριστικό αυτό υποδηλώνει ότι σε μια τυπική διαδρομή αρνητικά άλματα συμβαίνουν με μεγαλύτερη σχετική πιθανότητα σε σύγκριση με τα αντίστοιχα θετικά (D. Madan, P. Carr και E. Chang (1998)). Ως εκ τούτου, αναμένεται η διαδικασία να πραγματοποιεί κατακόρυφα άλματα προς τα κάτω συχνότερα από ότι προς τα πάνω, γεγονός που όπως θα δούμε αντανακλά την ασυμμετρία της δυναμικής της. Αντίστροφα, στην περίπτωση όπου η παράμετρος θ λαμβάνει θετικό πρόσημο, παρατηρούνται αντίθετα αποτελέσματα, καθώς η διαδικασία τείνει να εμφανίζει συχνότερα θετικά άλματα σε σχέση με τα αντίστοιχα αρνητικά. Στην ειδική περίπτωση όπου $\theta = 0$, προκύπτει η συμμετρική μορφή του μέτρου Lévy η οποία αντιστοιχεί στην συμμετρική διαδικασία VG.

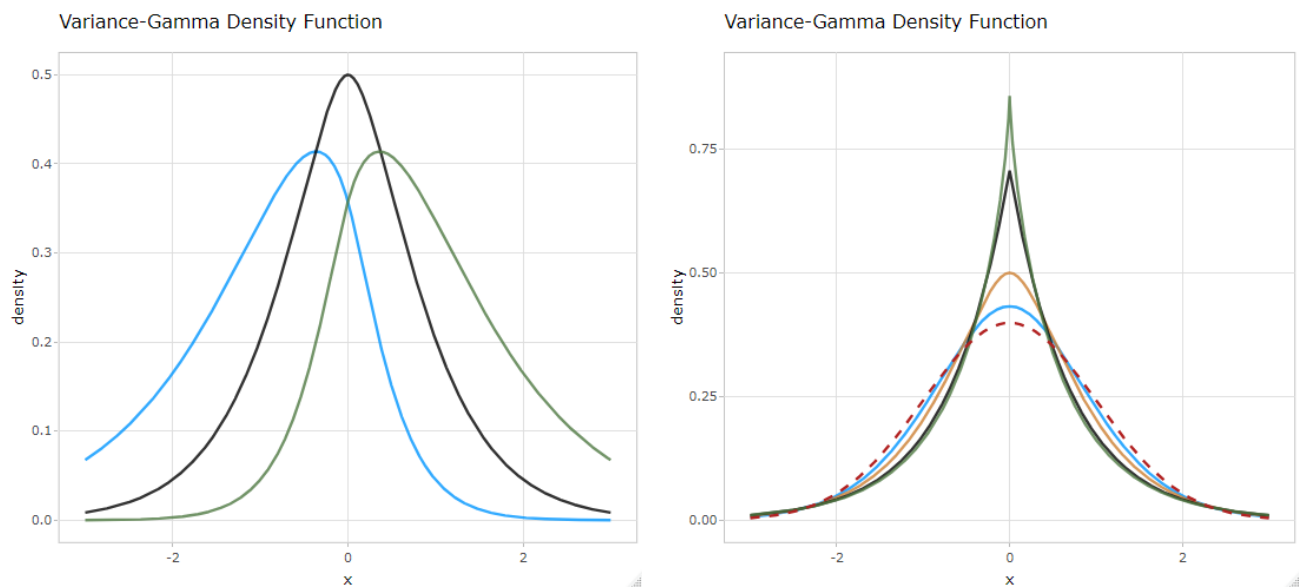


Σχήμα 4.1: Μέτρο Lévy της διαδικασίας VG για διαφορετική σύνθεση των παραμέτρων.

- $\theta = -1$, • $\theta = 0$, • $\theta = 1$ και $\sigma = 1$, $\nu = 1$ (Αριστερή εικόνα) και
- $\nu = 0.2$, • $\nu = 1$, • $\nu = 5$ και $\sigma = 1$, $\theta = 0$ (Δεξιά εικόνα)

Για λόγους πληρότητας, αναφέρεται ότι η περίπτωση της συμμετρικής διαδικασίας VG ήταν

εκείνη η οποία αποτέλεσε την πρώτη παρουσίαση του μοντέλου VG από τους D. Madan και E. Seneta (1990). Στη συνέχεια, το μοντέλο επεκτάθηκε, ώστε να ενσωματώνει μεγαλύτερη ποικιλομορφία στις διαδρομές του, ποικιλομορφία, η οποία, όπως είδαμε, καθορίζεται από το πρόσημο της παραμέτρου θ . Η γενίκευση αυτή επέτρεψε την ευρύτερη εφαρμογή του μοντέλου σε ρεαλιστικά δεδομένα, όπου οι αρνητικές και οι θετικές μεταβολές δεν συμβαίνουν με την ίδια συχνότητα. Η παράμετρος ν ρυθμίζει τον ρυθμό εκθετικής πτώσης του μέτρου Lévy γύρω από το μηδέν, γεγονός που, όπως εξετάζουν οι D. Madan, P. Carr και E. Chang (1998), επηρεάζει την ένταση εμφάνισης μεγάλων αλμάτων. Υψηλές τιμές της παραμέτρου αυξάνουν την πιθανοφάνεια μεγάλων αλμάτων, και συνεπώς, αποτυπώνουν την ύπαρξη έντονης μεταβλητότητας και ακραίων γεγονότων στη δυναμική της διαδικασίας. Στο Σχήμα 4.1 επιλέγεται η (σ, ν, θ) αναπαράσταση, και οι παράμετροι μεταβάλλονται κατάλληλα, ώστε να αποτυπωθούν γραφικά και με σαφήνεια τα αποτελέσματα που αναφέρθηκαν παραπάνω.



Σχήμα 4.2: Συνάρτηση πυκνότητας της διαδικασίας VG για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων. Στο αριστερό γράφημα απεικονίζεται η επίδραση της παραμέτρου θ , στη μορφή της κατανομής VG, για $(\sigma = 1, \nu = 0.5)$: — $\theta = -1$, — $\theta = 0$, — $\theta = 1$. Στο δεξί γράφημα εξετάζεται η μεταβολή της κατανομής VG για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου ν , και $(\sigma = 1, \theta = 0)$, σε σύγκριση με την κανονική κατανομή: — $\nu = 0.2$, — $\nu = 0.5$, — $\nu = 1$, — $\nu = 1.2$, - - - $N(0, 1)$.

Όπως διαπιστώσαμε, διαφορετική παραμετροποίηση της διαδικασίας οδηγεί σε διαφοροποιημένη αλματική συμπεριφορά, γεγονός που προκύπτει άμεσα από την δομή του μέτρου Lévy. Ωστόσο, η συμβατότητα της παραπάνω ερμηνείας με τα χαρακτηριστικά των μονοπατιών της διαδικασίας θα πρέπει να επιβεβαιωθεί από την κατανομή των προσανυξήσεων. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αναλύοντας την επίδραση των παραμέτρων στα βασικά μέτρα θέσης και διασποράς της κατανομής. Εκμεταλλευόμενοι το σχετικό άρθρο των D. Madan, P. Carr και E. Chang (1998), αναφέρεται ότι το πρόσημο της ασυμμετρίας ακολουθεί πιστά το πρόσημο της παραμέτρου θ ενώ ο βαθμός κύρτωσης της κατανομής ρυθμίζεται αποκλειστικά από την παράμετρο ν . Αναλυτικότερα, αρνητικό πρόσημο της παραμέτρου θ συνεπάγεται αρνητική ασυμμετρία της κατανομής, γεγονός που υποδηλώνει ότι σε μια τυπική διαδρομή της

διαδικασίας η προσαύξηση εμφανίζει αυξημένη πιθανότητα να λάβει αρνητικές τιμές σε σχέση με τις θετικές. Το χαρακτηριστικό αυτό έρχεται να επαληθεύσει αυτό που, σε διαισθητικό επίπεδο, αναφέραμε παραπάνω σχετικά την αυξημένη συχνότητα των αρνητικών αλμάτων έναντι των θετικών. Προκειμένου να αντιληφθούμε την επίδραση της παραμέτρου ν , θα εξετάσουμε την ειδική περίπτωση όπου $\theta = 0$, η οποία αντιστοιχεί σε συμμετρική κατανομή. Η παράμετρος ν ποσοτικοποιεί τον βαθμό απόκλισης της κύρτωσης της κατανομής των προσαυξήσεων από την κύρτωση της κανονικής κατανομής (excess kurtosis). Υψηλές τιμές της παραμέτρου αντιστοιχούν σε βαρύτερες ουρές, γεγονός που αντανακλά την υψηλή πιθανότητα εμφάνισης ακραίων τιμών σε σχέση με την κανονική κατανομή. Το αποτέλεσμα είναι απόλυτα συνεπές με τις προσδοκίες που διαμορφώνονται από την συμπεριφορά του μέτρου Lévy που είδαμε παραπάνω.

4.2 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΩΝ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ VG

Στη σχετική βιβλιογραφία εντοπίζουμε δύο βασικές τεχνικές Monte-Carlo για την κατασκευή διαδρομών της διαδικασίας VG. Η πρώτη τεχνική, γνωστή ως sequential sampling, αξιοποιεί τις αναπαραστάσεις της διαδικασίας VG που εξετάστηκαν παραπάνω, επιτρέποντας, για οποιαδήποτε επιλογή σημείων του χρονικού οριζοντα, την προοδευτική παραγωγή σημείων της διαδικασίας, τα οποία στο τέλος συνθέτουν μια τυπική διαδρομή της. Ας θεωρήσουμε μια κίνηση Brown $B = \{B_t, t \geq 0\}$ με παράμετρο τάσης θ και πτητικότητα σ . Με χρήση sequential sampling για οποιαδήποτε ακολουθία διακριτών χρονικών στιγμών $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ τα σημεία της διαδικασίας μπορούν να παραχθούν επαναληπτικά μέσω της σχέσης

$$B_{t_i} = B_{t_{i-1}} + \theta(t_i - t_{i-1}) + \sigma \sqrt{t_i - t_{i-1}} Z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$Z_i \sim N(0, 1) \text{ iid}$$

με αρχική συνθήκη $B_0 = 0$. Προκειμένου να παράγουμε σημεία της διαδικασίας VG, σύμφωνα με την αναπαράσταση (4.10), αντικαθιστούμε τον χρονικό δείκτη της διαδικασίας B με μια διαδικασία γάμμα. Μια διαδικασία γάμμα με παραμέτρους (μ, ν) μπορεί να ληφθεί επίσης μέσω sequential sampling, θεωρώντας διακριτοποίηση του χρονικού οριζοντα σε n χρονικά σημεία $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, σύμφωνα με την επαναληπτική σχέση

$$\gamma_{t_i}^{(\mu, \nu)} = \gamma_{t_{i-1}}^{(\mu, \nu)} + \Delta_i, \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Delta_i \sim \Gamma((t_i - t_{i-1})\mu^2/\nu, \nu/\mu), \quad \text{ανεξάρτητες τ.μ.}$$

με αρχική συνθήκη $\gamma_0 = 0$. Αξιοποιώντας την ίδια ακριβώς λογική που χρησιμοποιείται για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από τη διαδικασία γάμμα, μπορούμε να παράγουμε σημεία της διαδικασίας VG εφαρμόζοντας τη σχέση (4.11). Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι αλγόριθμοι για την παραγωγή διαδρομών της διαδικασίας VG σύμφωνα με τις επαναληπτικές μεθόδους που αναφέρθηκαν.

Αλγόριθμος 1: Προσομοίωση διαδικασίας VG με παραμέτρους (σ, ν, θ) ως κίνηση Brown με στοχαστικά μεταβαλλόμενη χρονική κλίμακα που περιγράφεται από μια διαδικασία γάμμα (Gamma Time-Changed Brownian motion)

Βήμα 1) Διακριτοποιούμε το χρονικό ορίζοντα $[0, T]$ σε n διακεκριμένους χρονικούς κόμβους $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ και θεωρούμε υποδιαστήματα πλάτους $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, όπου $i = 1, 2, \dots, n$ και n φυσικός, ώστε $\sum_{i=1}^n \Delta t_i = T$.

Βήμα 2) Θέτουμε $X_0^{VG} = 0$, $\gamma_0 = 0$ και $i = 1$.

Βήμα 3) Παράγουμε τους τυχαίους αριθμούς:

$$\Delta \gamma_i = \gamma_{t_i}^{(1, \nu)} - \gamma_{t_{i-1}}^{(1, \nu)} \sim \Gamma(\Delta t_i / \nu, 1/\nu) \quad \text{και} \quad Z_i \sim N(0, 1)$$

οποίοι είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και από τους ήδη παραγόμενους τυχαίους αριθμούς.

Βήμα 4) Παράγουμε τον τυχαίο αριθμό:

$$X_{t_i}^{VG} = X_{t_{i-1}}^{VG} + \theta \Delta \gamma_i + \sigma \sqrt{\Delta \gamma_i} Z_i$$

και θέτουμε $i = i + 1$

Βήμα 5) Αν $i = n + 1$ σταματάμε, διαφορετικά επιστρέφουμε στο Βήμα 3.

Αλγόριθμος 2: Προσομοίωση διαδικασίας VG με παραμέτρους (σ, ν, θ) ως διαφορά διαδικασιών γάμμα

Βήμα 1) Διακριτοποιούμε το χρονικό ορίζοντα $[0, T]$ σε n διακεκριμένους χρονικούς κόμβους $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ και θεωρούμε υποδιαστήματα πλάτους $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, όπου $i = 1, 2, \dots, n$ και n φυσικός, ώστε $\sum_{i=1}^n \Delta t_i = T$.

Βήμα 2) Θέτουμε $X_0^{VG} = 0$, $\gamma_0^{(\mu-, \nu-)} = 0$, $\gamma_0^{(\mu+, \nu+)} = 0$ και $i = 1$.

Βήμα 3) Παράγουμε τους τυχαίους αριθμούς:

$$\Delta \gamma_i^- = \gamma_{t_i}^{(\mu-, \nu-)} - \gamma_{t_{i-1}}^{(\mu-, \nu-)} \sim \Gamma(\Delta t_i / \nu, \mu_- / \nu_-)$$

$$\Delta \gamma_i^+ = \gamma_{t_i}^{(\mu+, \nu+)} - \gamma_{t_{i-1}}^{(\mu+, \nu+)} \sim \Gamma(\Delta t_i / \nu, \mu_+ / \nu_+)$$

οι οποίοι είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και από τους ήδη παραγόμενους τυχαίους αριθμούς.

Βήμα 4) Παράγουμε τον τυχαίο αριθμό:

$$X_{t_i}^{VG} = X_{t_{i-1}}^{VG} + \Delta \gamma_i^+ - \Delta \gamma_i^-$$

και θέτουμε $i = i + 1$.

Βήμα 5) Αν $i = n + 1$ σταματάμε, διαφορετικά επιστρέφουμε στο Βήμα 3.

Η δεύτερη τεχνική, γνωστή ως *bridge sampling*, προσφέρει ένα πιο σύνθετο πλαίσιο προσέγγισης καθώς βασίζεται στη δειγματοληψία σημείων της διαδικασίας σε διαδοχικά μη επικαλυπτόμενα στρώματα, τα οποία καθορίζονται επαναληπτικά με τρόπο ώστε σε κάθε βήμα να διχοτομούν τον χρονικό ορίζοντα. Προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα τη λογική της μεθόδου, θα εξετάσουμε αρχικά την εφαρμογή της στην παραγωγή τυχαίων αριθμών από την κίνηση Brown και την διαδικασία γάμμα.

Έστω μια κίνηση Brown $B = \{B_t, t \geq 0\}$ με παράμετρο τάσης θ και πητικότητας σ και ας θεωρήσουμε αυθαίρετες χρονικές στιγμές $0 \leq \tau_1 < t < \tau_2$. Η κεντρική ιδέα της τεχνικής *bridge sampling* έγκειται στη δυνατότητα παραγωγής τιμών της διαδικασίας σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t \in (\tau_1, \tau_2)$, υπό την προϋπόθεση ότι είναι γνωστές οι τιμές που έχουν παραχθεί στις χρονικές στιγμές τ_1 και τ_2 . Βάσει του σχετικού άρθρου των C. Ribeiro και N. Webber (2002) (*Ch. 3, pp. 6*), δοθείσης της προσαύξησης $z = B_{\tau_2} - B_{\tau_1}$, η κατανομή πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $x = B_t - B_{\tau_1}$ δίνεται από

$$x \sim N\left(\frac{t - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}z, \frac{(t - \tau_1)(\tau_2 - t)}{\tau_2 - \tau_1}\sigma^2\right)$$

έτσι ώστε

$$B_t = \frac{\tau_2 - t}{\tau_2 - \tau_1}B_{\tau_1} + \frac{t - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}B_{\tau_2} + \sigma\sqrt{\frac{(t - \tau_1)(\tau_2 - t)}{\tau_2 - \tau_1}}Z \quad (4.14)$$

όπου $Z \sim N(0, 1)$. Έτσι, προκειμένου να παράγουμε μια τυπική διαδρομή της διαδικασίας, αρχικά παράγουμε μια τιμή της στο τελικό χρονικό σημείο και στη συνέχεια διαιρούμε επαναληπτικά τον χρονικό ορίζοντα σε μικρότερα υποδιαστήματα. Σε κάθε βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας, κάθε υποδιάστημα διαιρείται σε δύο μικρότερα και στο σημείο διαίρεσης παράγεται μια νέα τιμή της κίνησης Brown, η οποία λαμβάνεται βάσει της τελευταίας σχέσης. Έτσι, αν σε κάποιο στάδιο της διαδικασίας, έχουμε καταλήξει σε μια διαμέριση του χρονικού ορίζοντα $[0, T]$ σε n διακεκριμένους χρονικούς κόμβους $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = T$, τότε στην επόμενη επανάληψη, κάθε υποδιάστημα $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, διαιρείται εκ νέου σε δύο μικρότερα τμήματα. Στο νέο σημείο διαίρεσης $\tau' \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$, δοθέντος ότι οι τιμές B_{τ_i} και $B_{\tau_{i-1}}$ είναι γνωστές, παράγεται η αντίστοιχη τιμή της κίνησης Brown $B_{\tau'}$ ακολουθώντας την σχέση (4.14). Σε κάθε επανάληψη, το πλέγμα χρονικών κόμβων γίνεται ολοένα και πιο πυκνό, οδηγώντας τελικά σε μια πλήρη αναπαράσταση της διαδρομής της διαδικασίας.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια διαδικασία γάμμα $\gamma^{(\mu, \nu)} = \{\gamma_t^{(\mu, \nu)}, t \geq 0\}$ με παραμέτρους (μ, ν) . Έστω ακόμα αυθαίρετες χρονικές στιγμές $0 \leq \tau_1 < t < \tau_2$. Ορίζοντας τις προσαυξήσεις

$$g = \gamma_t^{(\mu, \nu)} - \gamma_{\tau_1}^{(\mu, \nu)} \quad \text{και} \quad g' = \gamma_{\tau_2}^{(\mu, \nu)} - \gamma_{\tau_1}^{(\mu, \nu)}$$

αποδεικνύεται (C. Ribeiro και N. Webber (2002), *Ch. 3, pp. 7*) ότι

$$\frac{g}{g'} \sim \text{Beta}\left(\frac{(t - \tau_1)}{\nu}, \frac{(\tau_2 - t)}{\nu}\right) \quad (4.15)$$

όπου με $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ συμβολίζουμε την *κατανομή βήτα* με παραμέτρους (α, β) . Για λόγους πληρότητας, αναφέρουμε ότι μια τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι *ακολουθεί την κατανομή βήτα*, και συμβολικά γράφουμε $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$, αν η κατανομή πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από

$$b_{(\alpha,\beta)}(dx) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

όπου $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} dy$ είναι η συνάρτηση βήτα. Από την (4.15) προκύπτει άμεσα ότι η τιμή της διαδικασίας στο χρονικό σημείο $t \in (\tau_1, \tau_2)$, δοθέντος των τιμών $\gamma_{\tau_1}^{(\mu,\nu)}$ και $\gamma_{\tau_2}^{(\mu,\nu)}$, μπορεί να ληφθεί από την παρακάτω σχέση

$$\gamma_t^{(\mu,\nu)} = \gamma_{\tau_1}^{(\mu,\nu)} + \beta_t (\gamma_{\tau_2}^{(\mu,\nu)} - \gamma_{\tau_1}^{(\mu,\nu)})$$

για $\beta_t \sim \text{Beta}((t - \tau_1)/\nu, (\tau_2 - t)/\nu)$. Η διαδικασία παραγωγής μιας τυπικής διαδρομής της διαδικασίας γάμμα, με χρήση bridge sampling, ακολουθεί το πρότυπο που περιγράφηκε για την περίπτωση της κίνησης Brown.

Έχοντας παρουσιάσει την τεχνική bridge sampling για την παραγωγή τυχαίων αριθμών για τις δύο βασικές διαδικασίες που συνθέτουν την διαδικασία VG, στη συνέχεια παρατίθενται οι δυο κύριοι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται για την δειγματοληψία της. Οι αλγόριθμοι αυτοί περιγράφονται διεξοδικά στη σχετική βιβλιογραφία (Α. Avramidis και P. L'Ecuyer (2006) και M. C. Fu (2007)).

Αλγόριθμος 3: Προσομοίωση διαδικασίας VG με παραμέτρους (σ, ν, θ) μέσω *Brownian-Gamma Bridge Sampling (BGBS)* σε αυθαίρετους χρόνους $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = T$

Βήμα 1) Θέτουμε $X_0 = 0$, $\gamma_0^{(1,\nu)} = 0$ και $n = 2^k$ ($T = \tau_n$).

Βήμα 2) Παράγουμε τυχαίους αριθμούς:

$$\gamma_{\tau_n}^{(1,\nu)} \sim \Gamma(\tau_n/\nu, 1/\nu)$$

και

$$X_{\tau_n} \sim N(\theta \gamma_{\tau_n}^{(1,\nu)}, \sigma^2 \gamma_{\tau_n}^{(1,\nu)}).$$

Βήμα 3) Θέτουμε $s = 1$ και $m = 2^{k-s}$.

Βήμα 4) Θέτουμε $j = 1$.

Βήμα 5) Θέτουμε $i = (2j - 1)m$.

Βήμα 6) Παράγουμε τον τυχαίο αριθμό:

$$Y_i \sim \text{Beta}((\tau_i - \tau_{i-m})/\nu, (\tau_{i+m} - \tau_i)/\nu)$$

ανεξάρτητα από τους ήδη παραγόμενους τυχαίους αριθμούς.

Βήμα 7) Θέτουμε $\gamma_{\tau_i} = \gamma_{\tau_{i-m}} + (\gamma_{\tau_{i+m}} - \gamma_{\tau_{i-m}})Y_i$.

Βήμα 8) Παράγουμε τον τυχαίο αριθμό $Z_i \sim N(0, (\gamma_{\tau_{i+m}} - \gamma_{\tau_i})\sigma^2 Y_i)$ ανεξάρτητα από τους ήδη παραγόμενους τυχαίους αριθμούς.

Βήμα 9) Θέτουμε $X_{\tau_i}^{VG} = Y_i X_{\tau_{i+m}}^{VG} + (1 - Y_i) X_{\tau_{i-m}}^{VG} + Z_i$.

Βήμα 10) Αν $j = 2^{s-1}$ προχωράμε στο Βήμα 11. Διαφορετικά θέτουμε $j = j + 1$ και επιστρέφουμε στο Βήμα 5.

Βήμα 11) Αν $s = k$, σταματάμε την διαδικασία παραγωγής τυχαίων αριθμών της διαδικασίας VG. Διαφορετικά θέτουμε $s = s + 1$, $m = 2^{k-s}$ και επιστρέφουμε στο Βήμα 4.

Αλγόριθμος 4: Προσομοίωση διαδικασίας VG με παραμέτρους (σ, ν, θ) μέσω *Difference-of-Gammas Bridge Sampling (DGBS)* σε αυθαίρετους χρόνους $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = T$

Βήμα 1) Θέτουμε $\gamma_0^{(\mu_-, \nu_-)} = 0$, $\gamma_0^{(\mu_+, \nu_+)} = 0$ και $n = 2^k$ ($T = \tau_n$).

Βήμα 2) Παράγουμε ανεξάρτητα τους τυχαίους αριθμούς $\gamma_{\tau_n}^{(\mu_-, \nu_-)} \sim \Gamma(\tau_n/\nu, \mu_-/\nu_-)$ και $\gamma_{\tau_n}^{(\mu_+, \nu_+)} \sim \Gamma(\tau_n/\nu, \mu_+/\nu_+)$

Βήμα 3) Θέτουμε $s = 1$ και $m = 2^{k-s}$.

Βήμα 4) Θέτουμε $j = 1$.

Βήμα 5) Θέτουμε $i = (2j - 1)m$.

Βήμα 6) Παράγουμε τους τυχαίους αριθμούς

$$Y_i^+, Y_i^- \sim \text{Beta}((\tau_i - \tau_{i-m})/\nu, (\tau_{i+m} - \tau_i)/\nu)$$

ανεξάρτητα από τους ήδη παραγόμενους τυχαίους αριθμούς.

Βήμα 7) Θέτουμε:

$$\gamma_{\tau_i}^{(\mu_-, \nu_-)} = \gamma_{\tau_{i-m}}^{(\mu_-, \nu_-)} + \left(\gamma_{\tau_{i+m}}^{(\mu_-, \nu_-)} - \gamma_{\tau_{i-m}}^{(\mu_-, \nu_-)} \right) Y_i^-$$

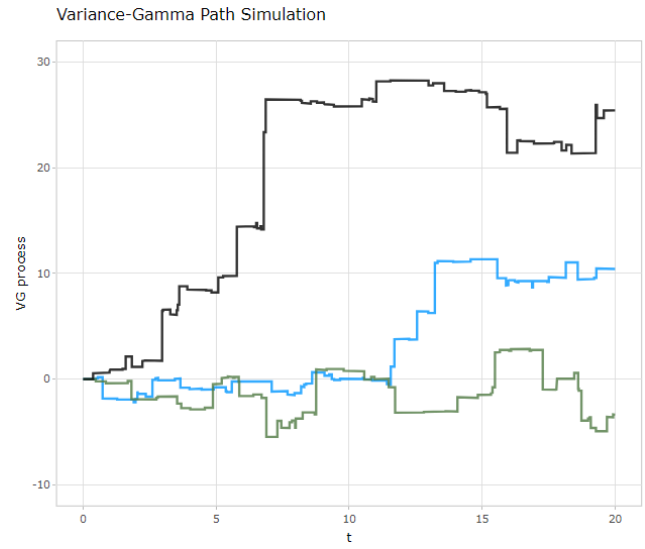
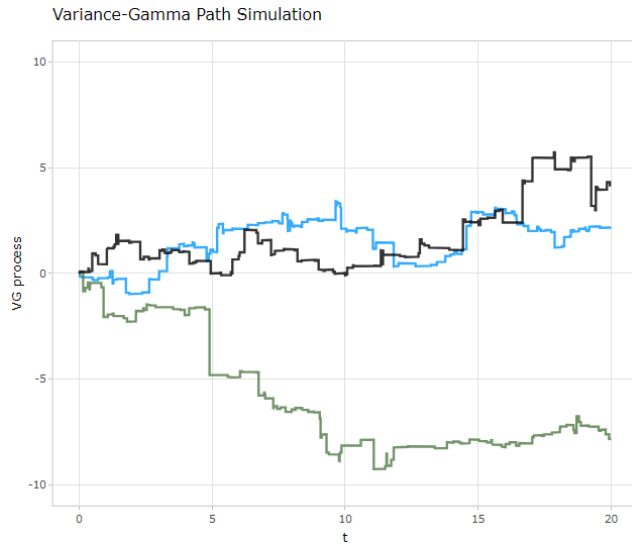
και

$$\gamma_{\tau_i}^{(\mu_+, \nu_+)} = \gamma_{\tau_{i-m}}^{(\mu_+, \nu_+)} + \left(\gamma_{\tau_{i+m}}^{(\mu_+, \nu_+)} - \gamma_{\tau_{i-m}}^{(\mu_+, \nu_+)} \right) Y_i^+$$

Βήμα 8) Θέτουμε $X_{\tau_i}^{VG} = \gamma_{\tau_i}^{(\mu_+, \nu_+)} - \gamma_{\tau_i}^{(\mu_-, \nu_-)}$.

Βήμα 9) Αν $j = 2^{k-1}$ προχωράμε στο Βήμα 10. Διαφορετικά θέτουμε $j = j + 1$ και επιστρέφουμε στο Βήμα 5.

Βήμα 10) Αν $s = k$, σταματάμε την διαδικασία παραγωγής τυχαίων αριθμών της διαδικασίας VG. Διαφορετικά θέτουμε $s = s + 1$, $m = 2^{k-s}$ και επιστρέφουμε στο Βήμα 4.



Σχήμα 4.3: Τρεις διαδρομές της διαδικασίας $VG X_{t;\sigma,\nu,\theta}^{VG}$ με παραμέτρους $(\sigma, \nu, \theta) = (1, 1, 0)$ (αριστερά) και $(\sigma, \nu, \theta) = (2, 2, 0)$ (δεξιά).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ

Η αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης (options) επί περιουσιακών στοιχείων φέρει τις ρίζες του πολύ πριν από την καθιέρωση του αξιοσημείωτου υποδείγματος των Black and Scholes (1973). Ο πρώτος που επιχείρησε να διαμορφώσει ένα θεωρητικό πλαίσιο αποτίμησης ήταν ο Γάλλος μαθηματικός Louis Bachelier (1900) ο οποίος προτυποποίησε τις μεταβολές των τιμών των αξιογράφων στην αγορά του Παρισιού χρησιμοποιώντας την κίνηση Brown, μια προσέγγιση η οποία έμελλε να αποτελέσει σημείο αναφοράς για τη μετέπειτα ανάπτυξη πιο σύνθετων μοντέλων από αυτό που εισήγαγε ο Bachelier. Βέβαια, η προσέγγιση του Bachelier δέχθηκε έντονη αμφισβήτηση, καθώς η κίνηση Brown μπορεί να λάβει και αρνητικές τιμές με μεγάλη πιθανότητα. Η διαπίστωση αυτή δημιουργεί ένα ουσιώδες πρόβλημα, καθώς αντιβαίνει τους κανόνες της αγοράς, σύμφωνα με τους οποίους οι επενδυτές διαθέτουν περιορισμένη ευθύνη (limited liability) μέχρι το ύψος της συμμετοχής τους επί των μετοχικών κεφαλαίων. Η εν λόγω νομική δομή τους παρέχει το προνόμιο της απαλλαγής από το κίνδυνο απωλειών των προσωπικών τους κεφαλαίων πέραν της αρχικής τους επένδυσης. Συνεπώς, εάν το μοντέλο της κίνησης Brown εφαρμοζόταν αυτούσιο αυτό θα σήμαινε ότι οι τιμές των μετοχών θα μπορούσαν να πάρουν και αρνητικές τιμές, γεγονός που σε πραγματικές συνθήκες της αγοράς θα οδηγούσε τους επενδυτές σε απροθυμία απόκτησης μετοχικής συμμετοχής. Λαμβάνοντας υπόψιν την ασυνέπεια που προέκυπτε από την κίνηση Brown, ο Samuelson (1965), υιοθετώντας τις ιδέες της διατριβής του Bachelier, εισήγαγε την *γεωμετρική (ή οικονομική) κίνηση Brown*, ένα μοντέλο στο οποίο, σε αντίθεση με το προσθετικό μοντέλο του Bachelier, η αγοραία αξία οποιασδήποτε μετοχής υπόκειται στις ίδιες *ποσοστιαίες* μεταβολές ανά μονάδα χρόνου ανεξάρτητα από την ίδια την τιμή (P. Samuelson (1965)). Η θεώρηση αυτή του Samuelson αποτέλεσε βασική υπόθεση για το μοντέλο αγορών που αναπτύχθηκε από τους Black and Scholes, σύμφωνα με την οποία οι τιμές των μετοχών εξελίσσονται σύμφωνα με μια λογαριθμοκανονική κατανομή (π.χ. βλέπε D. Chance και R. Brooks (2010)). Ωστόσο, το οικονομικό υπόδειγμα που προτάθηκε από τον Samuelson, και το οποίο αποτέλεσε τη βάση για το μοντέλο των Black and Scholes, παρουσιάζει ορισμένες αδυναμίες στην περιγραφή της δυναμικής της υποκείμενης διαδικασίας καθώς, όπως επισημαίνουν οι Geman και Ané (2000), προκύπτουν εμπειρικά τεκμήρια ότι η κατανομή των αποδόσεων των τιμών των αξιογράφων αποκλίνει σημαντικά από την κανονικότητα.

Το θεωρητικό υπόβαθρο της παραπάνω ασυμβατότητας μπορεί επίσης να τεκμηριωθεί, καθώς πληθώρα ερευνητών, μεταξύ των οποίων και ο Clark, υποστηρίζουν ότι οι υποθέσεις του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος δεν επαληθεύονται πλήρως στις πραγματικές συνθήκες της αγοράς. Ο Clark (1973) εξετάζει το ενδεχόμενο η κύρια αιτία αυτής της απόκλισης να οφείλεται στο γεγονός ότι το πλήθος των επιμέρους επιδράσεων που συνθέτουν τις ημερήσιες μεταβολές των τιμών είναι τυχαίο και συνδέεται, όπως αναφέρει, με τον όγκο συναλλαγών (trading volume). Υπό το πρίσμα της παραπάνω εναλλακτικής προσέγγισης, οι τιμές των λογαριθμικών αποδόσεων των αξιογράφων μπορεί να θεωρηθούν ότι υπόκεινται σε ένα οικονομικό ρολόι το οποίο, όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, μεταβάλλεται στοχαστικά, καθορίζοντας τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες αποτιμάμε την υποκείμενη διαδικασία. Οι Geman και Ané (2000), εξετάζοντας την περίπτωση του αριθμού των συναλλαγών (number of trades) ως

το κατάλληλο οικονομικό μέγεθος που υπαγορεύει τις μεταβολές του στοχαστικού χρόνου, καταγράφουν ότι η κανονικότητα της κατανομής της διαδικασίας των αποδόσεων μπορεί να αποκατασταθεί δεσμεύοντας ως προς το προτεινόμενο οικονομικό μέγεθος. Η αναθεωρημένη εκδοχή του Clark, δηλαδή η μετάβαση από έναν ντετερμινιστικό σε έναν στοχαστικό χρονικό δείκτη βάσει του οποίου αποτιμάται η γεωμετρική κίνηση Brown, ανοίγει τον δρόμο για την χρήση πιο σύνθετων υποδειγμάτων για την μοντελοποίηση της υποκείμενης διαδικασίας, τα οποία ενσωματώνουν την παραπάνω θεώρηση. Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, η διαδικασία Variance-Gamma (VG) αποτελεί χαρακτηριστική εφαρμογή της ιδέας του Clark.

Η αφορμή για την εισαγωγή της διαδικασίας VG στην χρηματοοικονομική βιβλιογραφία προκύπτει από την ανάγκη υπέρβασης των περιορισμών που τίθενται υπό τις αυστηρές υποθέσεις του υποδείγματος των Black and Scholes. Υπό το υπόδειγμα VG, η διαδικασία των λογαριθμικών αποδόσεων αποτελεί μια καθαρά αλματική διαδικασία (pure jump process), η οποία χαρακτηρίζεται από το άπειρο πλήθος αλμάτων σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα. Παράλληλα, οι επιθυμητές ιδιότητες της κίνησης Brown (όπως οι ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις σε μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα) διατηρούνται αναλλοίωτες υπό το εναλλακτικό υπόδειγμα για την περιγραφή της στοχαστικής αβεβαιότητας (D. Madan και F. Milne (1991)). Η διαδικασία VG, πέραν της παραμέτρου πτητικότητας της κίνησης Brown, διαθέτει επιπλέον παραμέτρους που ρυθμίζουν την κύρτωση (kurtosis) και την λοξότητα (skewness) της κατανομής των αποδόσεων. Σε αντίθεση με την κίνηση Brown, η οποία αποτυγχάνει να ανιχνεύσει τα προαναφερθέντα χαρακτηριστικά που καθοδηγούν την μορφή της κατανομής των αποδόσεων των αξιογράφων, το τριπαραμετρικό υπόδειγμα που προτάθηκε από τους D. Madan και E. Seneta, εμφανίζεται περισσότερο ευέλικτο να προσαρμόζεται σε πραγματικά δεδομένα της αγοράς. Κατ' αυτόν τον τρόπο, διορθώνονται οι γνωστές αποκλίσεις του μοντέλου των Black and Scholes, οι οποίες συνδέονται άμεσα με την ανεπάρκεια του να λειτουργεί ως ένας ανθεκτικός μηχανισμός για την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης (D. Madan, P. Carr και E. Chang (1998)).

Το παρόν κεφάλαιο αποσκοπεί στην μελέτη των υποδειγμάτων αγορών Black and Scholes και VG, παρουσιάζοντας τις κατάλληλες συνθήκες υπό τις οποίες καθίσταται εφικτή η δίκαιη τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης, καθώς και τους σχετικούς τύπους αποτίμησης.

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΑΓΟΡΩΝ ΤΩΝ Black and Scholes

5.1.1 Αυτοχρηματοδοτούμενα χαρτοφυλάκια

Υπό το υπόδειγμα των Black and Scholes (BS) θεωρούμε ότι η αγορά, εξεταζόμενη στο χρονικό διάστημα $[0, T]$ με $T > 0$, αποτελείται από δύο περιουσιακά στοιχεία, μια μετοχή, της οποίας η αξία θεωρούμε ότι μεταβάλλεται σε συνεχή χρόνο ενώ αυτή δεν καταβάλλει μερίδια καθ' όλη τη χρονική διάρκεια παρατήρησης της εξεταζόμενης αγοράς (*continuously traded non-dividend-paying risky asset*) και ένα ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου που δεν ενέχει κίνδυνο (*riskless zero-coupon asset*). Το γεγονός ότι το ομόλογο είναι μηδενικού ρίσκου σημαίνει ότι ο εκδότης του ομολόγου δεν θα αθετήσει τις υποχρεώσεις του έναντι του κατόχου του ομολόγου (π.χ. βλέπε M. Musiela και M. Rutkowski (2006)).

Το ομόλογο θεωρείται ότι ανατοκίζεται με συνεχή ανατοκισμό και σταθερό βραχυπρόθεσμο επιτοκιακό ρυθμό, έστω r , (*short-term ή riskless interest rate*), αποδίδοντας μια χρηματική μονάδα κατά τη χρονική στιγμή λήξης του T (*bond's maturity date*). Έστω $B(t, T)$ η τιμή του ομολόγου

στο χρόνο $t \in [0, T]$. Για οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t \in [0, T]$, η τιμή του ομολόγου, υπό το υπόδειγμα των BS, θεωρούμε ότι ικανοποιεί την παρακάτω (συνήθη) διαφορική εξίσωση

$$dB(t, T) = rB(t, T) dt.$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση της οποίας η μορφή δίνεται από

$$B(t, T) = e^{-r(T-t)} \quad (5.1)$$

και επομένως η τιμή του ομολόγου εξελίσσεται σύμφωνα με την ντετερμινιστική διαδικασία (5.1).

Η διαδικασία της τιμής της μετοχής $S = \{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ θεωρούμε ότι ακολουθεί μια διαδικασία Itô η οποία δίνεται από

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_u du + \int_0^t \sigma S_u dW_u$$

ή, ισοδύναμα, σε μορφή στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (5.2)$$

όπου $\mu \in \mathbb{R}$ παριστά την τάση της μετοχής (*drift* ή *appreciation rate*), $\sigma > 0$ την μεταβλητότητα (*volatility*) και S_0 την αρχική αξία της. Στην (5.2), η $W = \{W_t, 0 \leq t \leq T\}$ είναι μια διαδικασία Wiener ορισμένη στον φιλτραρισμένο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, όπου το φιλτράρισμα $\{\mathcal{F}_t\}$ είναι το φυσικό φιλτράρισμα της διαδικασίας Wiener. Σε ό,τι ακολουθεί, θεωρούμε ότι το φιλτράρισμα που προκύπτει από τις τυχαίες μεταβολές της κίνησης των τιμών της μετοχής συμπίπτει με το φυσικό φιλτράρισμα της διαδικασίας Wiener, δεδομένου ότι η μοναδική πηγή τυχαιότητας, η οποία δομεί την ροή πληροφορίας του υποδείγματος (5.2), προέρχεται αποκλειστικά από την τελευταία (π.χ. βλέπε M. Capinski και E. Kopp (2012)). Αποδεικνύεται ότι ο προσδιορισμός της διαδικασίας που περιγράφει την εξέλιξη της δυναμικής των τιμών της μετοχής, και ο οποίος αποτελεί τη λύση της (5.2), είναι μοναδικός (π.χ. βλέπε M. Musiela και M. Rutkowski (2006)) και δίνεται από την σχέση

$$S_t = S_0 \exp \left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right) \quad (5.3)$$

Η μορφή της (5.3) είναι γνωστή στη βιβλιογραφία και αντιστοιχεί σε μια διαδικασία που ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown. Για λόγους πληρότητας, αναφέρεται ότι μια στοχαστική συνάρτηση $X = \{X_t, t \geq 0\}$ ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) , λέγεται ότι *ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown με παράμετρο τάσης $\mu \in \mathbb{R}$ και μεταβλητότητας $\sigma > 0$* , και συμβολικά γράφουμε $X \sim GBM(\mu, \sigma)$, αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- 1) Οι διαδρομές της X είναι συνεχείς P -σχεδόν παντού.
- 2) Αν $t > 0$ και $s \geq 0$, η τυχαία μεταβλητή

$$\ln \left(\frac{X_{t+s}}{X_s} \right) \sim N(t\mu, t\sigma^2)$$

- 3) Η τυχαία μεταβλητή X_{t+s}/X_s είναι ανεξάρτητη της πληροφορίας $\sigma(X_u, 0 \leq u \leq s)$.

4) Για κάθε $t \geq u$, η τυχαία μεταβλητή X_t/X_u έχει την ίδια κατανομή με την X_{t-u}/X_0 .

Έστω τώρα μια στοχαστική διαδικασία η οποία δίνεται από το ζεύγος $(\delta^0, \delta^1) = \{(\delta_t^0, \delta_t^1), 0 \leq t \leq T\}$. Η παραπάνω στοχαστική διαδικασία ορίζεται έτσι ώστε, σε κάθε χρονική στιγμή $0 \leq t \leq T$, τα δ_t^0 και δ_t^1 να περιγράφουν, αντίστοιχα, το πλήθος των μετοχών και των ομολόγων που κατέχουμε, ώστε το διάνυσμα (δ_t^0, δ_t^1) να περιγράφει τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου (ή της επενδυτικής στρατηγικής) τη χρονική στιγμή t . Οι διαδικασίες δ^0 και δ^1 θεωρούνται ότι είναι ορισμένες στον φιλτραρισμένο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, όπου για κάθε $0 \leq t \leq T$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1.1 (Αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο) Ένα χαρτοφυλάκιο $(\delta^0, \delta^1) = \{(\delta_t^0, \delta_t^1), 0 \leq t \leq T\}$, με συνολική αξία στο χρόνο $0 \leq t \leq T$,

$$V_t^{(\delta^0, \delta^1)} = \delta_t^0 S_t + \delta_t^1 B_t$$

καλείται *αυτοχρηματοδοτούμενο (self-financing portfolio)*, αν η διαδικασία της αξίας του

$$V^{(\delta^0, \delta^1)} = \left\{ V_t^{(\delta^0, \delta^1)}, 0 \leq t \leq T \right\} \quad (5.4)$$

ικανοποιεί τη σχέση

$$V_t^{(\delta^0, \delta^1)} = V_0 + \int_0^t \delta_u^0 dS_u + \int_0^t \delta_u^1 dB_u$$

ή, ισοδύναμα, στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dV_t^{(\delta^0, \delta^1)} = \delta_t^0 dS_t dt + \delta_t^1 dW_t \quad (5.5)$$

Από τη σχέση (5.4), και λαμβάνοντας υπόψη τη μοντελοποίηση των BS για την αξία της υποκείμενης μετοχής, είναι εμφανές ότι η αξία μιας αυτοχρηματοδοτούμενης επενδυτικής στρατηγικής είναι διαδικασία Ιτδ. Επιπλέον, προκειμένου να δοθεί νόημα στην σχέση (5.4), τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στη δεξιά πλευρά της τελευταίας πρέπει να είναι καλά ορισμένα. Οι συνθήκες κάτω υπό τις οποίες αυτό διασφαλίζεται είναι τέτοιες ώστε για κάθε $t \in [0, T]$ να ισχύει ότι

$$\int_0^t (\delta_u^0)^2 du < \infty, \quad \sigma.β., \quad \int_0^t |\delta_u^1| du < \infty, \quad \sigma.β.$$

Η αυτοχρηματοδοτούμενη συνθήκη (self-financing condition) περιγράφει μια στρατηγική συναλλαγών η οποία δεν απαιτεί επαυξημένη κεφαλαιακή εισροή ή εκροή πέραν της αρχικής επένδυσης, γεγονός που πρακτικά υποδηλώνει ότι κάθε αναδιάταξη της σύνθεσης του χαρτοφυλακίου πρέπει να προέρχεται αποκλειστικά από το υφιστάμενο διαθέσιμο κεφάλαιο. Έτσι, η αγορά ενός νέου περιουσιακού στοιχείου θα πρέπει να χρηματοδοτείται από την πώληση ενός παλαιού, ενώ παράλληλα η αγοραπωλησία θα πρέπει να διεξάγεται εντός του ίδιου διανύσματος περιουσιακών τίτλων που απαρτίζουν το χαρτοφυλάκιο. Στο πλαίσιο του υποδείγματος των BS, η χρήση αυτοχρηματοδοτούμενων επενδυτικών στρατηγικών εκφράζει ότι οι μεταβολές στην αξία του χαρτοφυλακίου σε κάθε χρονική στιγμή αποδίδεται αποκλειστικά στη

στοχαστική δυναμική των τιμών αξιογράφων που το απαρτίζουν, και ειδικότερα στη δυναμική της τιμής της μετοχής (π.χ. βλέπε A. Pascucci (2011)). Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η χρήση τέτοιων χαρτοφυλακίων αποτελεί το μέσο μέσω του οποίου μπορούμε να αναπαραγάγουμε την απόδοση (return) ενός δικαιώματος προαίρεσης, ώστε κάθε χρονική στιγμή η αξία του χαρτοφυλακίου να ακολουθεί την αξία του παραγώγου (replicating strategy).

Ας θεωρήσουμε την προεξοφλημένη αξία της υποκείμενης μετοχής (discounted price process)

$$\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$$

όπου με r συμβολίζουμε το επιτόκιο της αγοράς χωρίς κίνδυνο. Από το τρόπο που ορίσαμε την διαδικασία $S = \{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ η παραπάνω παίρνει την μορφή

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp \left\{ (\mu - r)t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t \right\} \quad (5.6)$$

Από τα προηγούμενα κεφάλαια, γνωρίζουμε ότι η διαδικασία Weiner είναι P -martingale ως προς το φυσικό της φιλτράρισμα. Το επόμενο βήμα είναι να εξετάσουμε αν και υπό ποιες προϋποθέσεις η διαδικασία που περιγράφει την παρούσα αξία της μετοχής στο χρόνο κληρονομεί την ιδιότητα martingale από την διαδικασία Weiner. Ακολουθώντας τους Musiela και Rutkowski, αποδεικνύεται ότι η διαδικασία \tilde{S} είναι P -martingale ως προς το φυσικό φιλτράρισμα της διαδικασίας Weiner αν και μόνο αν η ντετερμινιστική τάση της διαδικασίας S είναι ίση με τον ρυθμό επιτοκίου, δηλαδή $\mu = r$. Αντίστοιχα, για κάθε $0 \leq u < t \leq T$, αν $\mu > r$, τότε $E_P(\tilde{S}_t | \mathcal{F}_u) > \tilde{S}_u$ (δηλαδή η διαδικασία \tilde{S} είναι P -submartingale), ενώ αν $\mu < r$, τότε $E_P(\tilde{S}_t | \mathcal{F}_u) < \tilde{S}_u$ (οπότε η διαδικασία \tilde{S} είναι P -supermartingale). Βέβαια, αν και δεν μπορούμε γενικά να θεωρήσουμε ότι στην αγορά (υπό το μέτρο P) ισχύει μια τέτοια αυστηρή συνθήκη όπως $\mu = r$, υπό την οποία η παρούσα αξία της υποκείμενης μετοχής θα ήταν P -martingale, μπορούμε να προχωρήσουμε αλλάζοντας το μέτρο πιθανότητας με ένα ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας Q με τα ίδια μηδενικά σύνολα με το P (π.χ. βλέπε M. Capinski και E. Kopp (2012)). Από τη σχετική βιβλιογραφία γνωρίζουμε ότι, αν W είναι μια διαδικασία Weiner τότε η διαδικασία $\exp\{-1/2\sigma^2 t + \sigma W_t\}$ είναι P -martingale. Επομένως, μπορούμε να επιχειρήσουμε να εκφράσουμε την παρούσα αξία της υποκείμενης μετοχής σε αντίστοιχη μορφή, ώστε να αξιοποιήσουμε αυτή την ιδιότητα. Γράφοντας την (5.6) στη μορφή

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma \left(\frac{\mu - r}{\sigma} t + W_t \right) \right\}$$

και θέτοντας

$$W_t^Q = \beta t + W_t$$

όπου $\beta = (\mu - r)/\sigma$, παίρνουμε

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t^Q \right\}. \quad (5.7)$$

Από την μορφή αυτή γίνεται σαφές ότι αν καταφέρουμε να κατασκευάσουμε ένα μέτρο πιθανότητας Q υπό το οποίο η διαδικασία W_t^Q θα είναι διαδικασία Weiner, τότε η διαδικασία που περιγράφει την προεξοφλημένη αξία της μετοχής θα είναι Q -martingale ως προς το φυσικό φιλτράρισμα της τελευταίας (σε αυτό το σημείο θεωρούμε ότι $\mathcal{F}_t^{W^Q} = \mathcal{F}_t^W$ μας και οι δύο διαδικασίες διαφέρουν μόνο κατά μια ντετερμινιστική συνιστώσα η οποία δεν επηρεάζει τη ροή πληροφορίας) (M. Capinski και E. Kopp (2012)).

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1.1 (Θεώρημα Cameron–Martin–Girsanov) Έστω ο φιλτραρισμένος χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ και $W = \{W_t, 0 \leq t \leq T\} \sim (P, \{\mathcal{F}_t\}) - BM(0, 1)$. Έστω επιπλέον, $\{\theta_t, 0 \leq t \leq T\}$ μια $\{\mathcal{F}_t\}$ -προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία που ικανοποιεί την συνθήκη τετραγωνικής ολοκληρωσιμότητας

$$\int_0^T \theta_t^2 dt < \infty, \quad P - \sigma.\beta.$$

Για κάθε $0 \leq t \leq T$, ορίζουμε τη διαδικασία

$$L_t^\theta = \exp \left(- \int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right)$$

Αν η $\{L_t^\theta\}$ είναι P -martingale (exponential martingale associated to the process θ), τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα νέο μέτρο πιθανότητας Q στο χώρο (Ω, \mathcal{F}) τέτοιο ώστε

- $Q \sim P$
- Για κάθε $A \subset \mathcal{F}$,

$$Q(A) = \int_A L_T^\theta dP = E_P(L_T \mathbf{1}_A)$$

- Υπό το Q η διαδικασία

$$W^Q = \{W_t^Q, 0 \leq t \leq T\}, \quad W_t^Q = W_t + \int_0^t \theta_s ds$$

είναι $\{\mathcal{F}_t\}$ - $BM(0, 1)$. Επιπλέον, η W^Q έχει την ιδιότητα αναπαράστασης martingale, δηλαδή για κάθε $(Q, \{\mathcal{F}_t^{W^Q}\})$ -martingale $\{\Lambda_t, 0 \leq t \leq T\}$ υπάρχει κάποια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, $\mathcal{F}_t^{W^Q}$ -προσαρμοσμένη στοχαστική ανέλιξη $\{G_t, 0 \leq t \leq T\}$ τέτοια ώστε

$$\Lambda_t = \Lambda_0 + \int_0^t G_x dW_x^Q, \quad t \in [0, T]$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1.2 (Συνθήκη του Novikov) Αν η στοχαστική διαδικασία $\{\theta_t, 0 \leq t \leq T\}$ ικανοποιεί τη συνθήκη του Novikov

$$E \left(\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \theta_t^2 dt \right\} \right) < \infty$$

τότε η διαδικασία $L^\theta = \{L_t^\theta, 0 \leq t \leq T\}$ είναι P -martingale ως προς τη διήθηση $\{\mathcal{F}_t\}$.

Από το θεώρημα CMG και επιλέγοντας $\theta_t = (\mu - r)/\sigma$ (ντετερμινιστική), αποδεικνύεται ότι υπάρχει μέτρο πιθανότητας Q ισοδύναμο με το P με Radon-Nikodym παράγωγο ως προς το μέτρο P ίση με

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \beta^2 T - \beta W_T \right\} = L_T^\theta, \quad P - \sigma.\beta.$$

(όπου $L^\theta = \{L_t^\theta, 0 \leq t \leq T\}$ P -martingale) υπό το οποίο, η στοχαστική διαδικασία

$$W^Q = \{W_t^Q, 0 \leq t \leq T\}, \quad W_t^Q = W_t + \beta t$$

είναι $\{\mathcal{F}_t\}$ -προσαρμοσμένη διαδικασία Wiener. Επιπλέον, η προεξοφλημένη αξία της υποκείμενης μετοχής, όπως δίνεται από τη σχέση (5.7), είναι Q -martingale ως προς το φυσικό φιλτράρισμα της διαδικασίας W^Q και ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t dW_t^Q. \quad (5.8)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1.2 (Μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου) Το μέτρο Q καλείται μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου (*risk-neutral probability measure*), ενώ ο χώρος πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, Q) αναφέρεται ως κόσμος ουδέτερου κινδύνου (*risk-neutral world*).

Αξιοποιώντας τώρα την ακόλουθη πρόταση, μπορούμε να δώσουμε μια εναλλακτική περιγραφή της αυτοχρηματοδοτούμενης συνθήκης σε όρους των προεξοφλημένων αξιών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.1.1 Η επενδυτική στρατηγική (δ^0, δ^1) είναι αυτοχρηματοδοτούμενη αν και μόνο αν η παρούσα (προεξοφλημένη) αξία του χαρτοφυλακίου $\tilde{V}_t^{(\delta^0, \delta^1)} = e^{-rt} V_t^{(\delta^0, \delta^1)}$ την χρονική στιγμή $t \in [0, T]$, ικανοποιεί τη σχέση

$$\tilde{V}_t^{(\delta^0, \delta^1)} = V_0^{(\delta^0, \delta^1)} + \int_0^t \delta_u^0 d\tilde{S}_u \quad (5.9)$$

ή, ισοδύναμα, τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$d\tilde{V}_t^{(\delta^0, \delta^1)} = \delta_t^0 d\tilde{S}_t$$

Από την παραπάνω προκύπτει ότι, εφόσον είναι γνωστή η αρχική αξία του χαρτοφυλακίου $V_0^{(\delta^0, \delta^1)}$ και η διαδικασία που περιγράφει το πλήθος των μετοχών που το απαρτίζουν, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση που πρέπει να κατέχουμε στα ομόλογα ώστε η στρατηγική επενδύσεων να πληροί την αυτοχρηματοδοτούμενη συνθήκη. Πράγματι, η γνώση των δ^0 και $V_0^{(\delta^0, \delta^1)}$ καθορίζει μοναδικά την αξία του χαρτοφυλακίου μέσω της (5.6), ενώ η διαδικασία που περιγράφει το πλήθος των ομολόγων προκύπτει από τη σχέση

$$\delta_t^1 = \frac{V_t - \delta_t^0 S_t}{B_t}.$$

Με άλλα λόγια, οι δύο αυτές ποσότητες αρκούν έτσι ώστε να καθορίσουμε μοναδικά την αξία ενός αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου (δ^0, δ^1) όταν εργαζόμαστε με προεξοφλημένες αξίες.

Λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 5.1.1 καθώς και την ισότητα (5.8), η (5.9) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t^{(\delta^0, \delta^1)} &= V_0^{(\delta^0, \delta^1)} + \int_0^t \delta_u^0 d\tilde{S}_u \\ &= V_0^{(\delta^0, \delta^1)} + \int_0^t \sigma \delta_u^0 \tilde{S}_u dW_u^Q \end{aligned}$$

Από την παραπάνω μορφή προκύπτει άμεσα ότι η προεξοφλημένη αξία μιας αυτοχρηματοδοτούμενης επενδυτικής στρατηγικής είναι martingale υπό το μέτρο Q . Πράγματι, υπό το Q η διαδικασία W_t^Q είναι τυπική κίνηση Brown, και δεδομένου ότι η $\tilde{V}_t^{(\delta^0, \delta^1)}$ γράφεται ως ολοκλήρωμα Itô ως προς την τελευταία, έπεται ότι αποτελεί Q – martingale.

5.1.2 Αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης υπό καθεστώς no-arbitrage

Στη παρούσα παράγραφο θα επικεντρωθούμε στη διαμόρφωση των συνθηκών υπό τις οποίες μπορούμε να αναπαράγουμε την τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης μέσω ενός κατάλληλου αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου. Για το σκοπό αυτό θα εισάγουμε τις βασικές έννοιες των δικαιωμάτων προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου (call και put), καθώς και τις έννοιες της επιτρεπτότητας (admissibility) και της απουσίας ευκαιριών για arbitrage, διατυπωμένες απευθείας σε όρους του μέτρου πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου.

Ένα δικαίωμα προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου αποτελεί μια διμερή σύμβαση μεταξύ δυο αντισυμβαλλόμενων μερών. Ο αγοραστής του δικαιώματος (buyer) καταβάλλει στο πωλητή (writer) κατά τη χρονική στιγμή έναρξης του παραγώγου ένα χρηματικό ποσό, γνωστό ως *ασφάλιστρο* (premium), το οποίο αντιπροσωπεύει την αρχική αξία του παραγώγου. Σε αντάλλαγμα, ο εκδότης του παραγώγου παραχωρεί το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο, στην περίπτωση δικαιώματος αγοράς (call option), ή να το πωλήσει, στην περίπτωση δικαιώματος πώλησης (put option), σε μια προκαθορισμένη τιμή, η οποία καλείται *τιμή εξάσκησης* (strike price), και σε μια προκαθορισμένη χρονική στιγμή στο μέλλον, γνωστή ως *χρόνος λήξης* ή *χρόνος εξάσκησης* (expiration date ή maturity). Σε αντίθεση με τα δικαιώματα Αμερικανικού τύπου, τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης μπορούν να εξασκηθούν κατά τη χρονική στιγμή λήξης τους. Στο εξής θα περιοριστούμε στην μελέτη χρηματοοικονομικών παραγώγων Ευρωπαϊκού τύπου. Επιπλέον, θα θεωρήσουμε ότι η τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης ορίζεται από μια μη αρνητική, \mathcal{F}_T – προσαρμοσμένη, τυχαία μεταβλητή η οποία, στην περίπτωση δικαιώματος αγοράς, δίνεται από $U_T = (S_T - K)^+$, ενώ στην περίπτωση ενός δικαιώματος πώλησης, δίνεται από $U_T = (K - S_T)^+$, όπου S_T η αξία της υποκείμενης μετοχής κατά τη χρονική στιγμή λήξης του δικαιώματος, K η τιμή εξάσκησης και $(x)^+ = \max\{0, x\}$.

Η τιμολόγηση χρηματοοικονομικών παραγώγων στο υπόδειγμα των BS βασίζεται στην ιδέα ότι μπορούμε να σχηματίσουμε μια αυτοχρηματοδοτούμενη επενδυτική στρατηγική, της οποίας η σύνθεση στο χρόνο T , (δ_T^0, δ_T^1) , είναι τέτοια ώστε να αναπαράγει την αξία του παραγώγου στο χρόνο λήξης του, αντισταθμίζοντας πλήρως τη θέση που κατέχουμε σε αυτό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1.3 (Χαρτοφυλάκιο αναπαραγωγής και πλήρης αγορά) Ένα (απλό) χρηματοοικονομικό προϊόν Ευρωπαϊκού τύπου με αξία στο χρόνο λήξης του $F(S_T)$ είναι *αντισταθμίσιμο* (*hedgeable* ή *replicable*), αν υπάρχει μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική (δ^0, δ^1) η οποία έχει τελική αξία ίση με την αξία του παραγώγου στο χρόνο T , δηλαδή

$$V_T^{(\delta^0, \delta^1)} = F(S_T)$$

Στην περίπτωση αυτή, το χαρτοφυλάκιο (δ^0, δ^1) καλείται *χαρτοφυλάκιο αναπαραγωγής* ή *εξασφάλισης* (*replicating strategy*) της αξίας του παραγώγου. Επιπλέον, μια αγορά καλείται *πλήρης* (*complete*) αν κάθε (απλό) παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν Ευρωπαϊκού τύπου είναι αντισταθμίσιμο.

Στο υπόδειγμα των BS μια βασική προϋπόθεση ώστε ένα χαρτοφυλάκιο να είναι χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης είναι αυτό να είναι επιτρεπτό (admissible), υπό την έννοια ότι δεν επιτρέπονται επενδυτικές στρατηγικές οι οποίες συνεπάγονται απεριόριστο δανεισμό ή μη φραγμένες ζημιές (π.χ. βλέπε A. Pascucci (2011)).

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1.4 (Επιτρεπτά χαρτοφυλάκια) Ένα χαρτοφυλάκιο (δ^0, δ^1) καλείται *επιτρεπτό* (*admissible*) αν η αξία του κάθε χρονική στιγμή είναι κάτω φραγμένη, δηλαδή υπάρχει μια σταθερά C τέτοια ώστε

$$V_t^{(\delta^0, \delta^1)} \geq C, \quad \text{για κάθε } t \in [0, T].$$

Η επιβολή της παραπάνω συνθήκης στο σύνολο των στρατηγικών εντός του μοντέλου των BS συνεπάγεται την απουσία ευκαιριών για arbitrage στην αγορά (π.χ. βλέπε M. Musiela και M. Rutkowski (2006)). Η τελευταία μεταφράζεται σε αδυναμία των επενδυτών να κατασκευάσουν ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο μηδενικής αρχικής αξίας, το οποίο να αποφέρει σίγουρο κέρδος χωρίς κίνδυνο με θετική πιθανότητα. Παρακάτω παραθέτουμε μια εναλλακτική διατύπωση της συνθήκης επιτρεπτότητας για τα αυτοχρηματοδοτούμενα χαρτοφυλάκια σε όρους του μέτρου πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου Q , και αναφέρουμε το βασικό αποτέλεσμα που συνδέεται με την απουσία ευκαιριών για arbitrage στο υπόδειγμα των BS.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1.5 (Το υπόδειγμα αγορών των Black and Scholes) Μια αυτοχρηματοδοτούμενη επενδυτική στρατηγική (δ^0, δ^1) καλείται Q -επιτρεπτή (Q -admissible) αν η προεξοφλημένη αξία της επενδυτικής στρατηγικής $\tilde{V}^{(\delta^0, \delta^1)}$ είναι Q -martingale. Συμβολίζουμε με $\Phi(Q)$ την κλάση όλων των Q -επιτρεπτών επενδυτικών στρατηγικών. Η τριάδα $\mathcal{M}_{BS} = (S, B, \Phi(Q))$ καλείται *μοντέλο των Black and Scholes*.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1.6 (Στρατηγικές arbitrage) Μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική (δ^0, δ^1) της οποίας η αξία $V^{(\delta^0, \delta^1)}$ είναι τέτοια ώστε

1) $V_0^{(\delta^0, \delta^1)} = 0$, σ.β.

2) Για κάποιο $\tau \in [0, T]$, $V_\tau^{(\delta^0, \delta^1)} \geq 0$, σ.β. με $P(V_\tau^{(\delta^0, \delta^1)} > 0) > 0$

καλείται *στρατηγική arbitrage* (*arbitrage strategy*) ή *ευκαιρία για arbitrage* (*arbitrage opportunity*).

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.1.2 (No-arbitrage principle) Η κλάση $\Phi(Q)$ δεν περιέχει ευκαιρίες για arbitrage.

Έχοντας πλέον εισαγάγει τα βασικά δομικά εργαλεία, είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε στην παρουσίαση του κεντρικού αποτελέσματος της παρούσας παραγράφου. Ας θεωρήσουμε ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο (δ^0, δ^1) τέτοιο ώστε $(\delta^0, \delta^1) \in \Phi(Q)$, και έστω U_T η αξία ενός παράγωγου χρηματοοικονομικού προϊόντος στο χρόνο λήξης του. Το ζητούμενο είναι να προσδιορίσουμε την μορφή του διανύσματος σύνθεσης (δ^0, δ^1) κατά τρόπο ώστε το εν λόγω χαρτοφυλάκιο να αποτελεί χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης της αξίας του παραγώγου. Ορίζουμε την ανέλιξη $U_t = E_Q \left(e^{-r(T-t)} U_T \middle| \mathcal{F}_t^{W^Q} \right)$, $t \in [0, T]$. Υπό το μέτρο ουδέτερου κινδύνου Q η ανέλιξη $\tilde{U} = \left\{ \tilde{U}_t = e^{-rt} U_t, 0 \leq t \leq T \right\}$ είναι martingale. Πράγματι, για $0 < s < t \leq T$

$$\begin{aligned}
E_Q \left(\tilde{U}_t \middle| \mathcal{F}_s^{W^Q} \right) &= E_Q \left(e^{-rt} E_Q \left(e^{-r(T-t)} U_T \middle| \mathcal{F}_t^{W^Q} \right) \middle| \mathcal{F}_s^{W^Q} \right) \\
&= e^{-rt} E_Q \left(E_Q \left(e^{-r(T-t)} U_T \middle| \mathcal{F}_t^{W^Q} \right) \middle| \mathcal{F}_s^{W^Q} \right) \\
&= e^{-rs} E_Q \left(e^{-r(T-s)} U_T \middle| \mathcal{F}_s^{W^Q} \right) \\
&= e^{-rs} U_s \\
&= \tilde{U}_s
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι η διαδικασία W^Q είναι τυπική κίνηση Brown υπό το μέτρο Q , η W^Q έχει την ιδιότητα αναπαράστασης martingale και συνεπώς υπάρχει $\{G_t, 0 \leq t \leq T\}$ – προσαρμοσμένη στοχαστική ανέλιξη τέτοια ώστε

$$\tilde{U}_t = U_0 + \int_0^t G_s dW_s^Q, \quad t \in [0, T]$$

Κατασκευάζοντας το χαρτοφυλάκιο (δ^0, δ^1) έτσι ώστε $V_0^{(\delta^0, \delta^1)} = U_0$ και την χρονική στιγμή να περιέχει

$$\delta_t^0 = \frac{G_t}{\sigma \tilde{S}_t}$$

μετοχές, τότε θα έχει παρούσα αξία στο χρόνο t ,

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_t^{(\delta^0, \delta^1)} &= V_0^{(\delta^0, \delta^1)} + \int_0^t \delta_u^0 d\tilde{S}_u \\
&= V_0^{(\delta^0, \delta^1)} + \int_0^t \frac{G_u}{\sigma \tilde{S}_u} \tilde{S}_u dW_u^Q \\
&= U_0 + \int_0^t G_u dW_u^Q \\
&= \tilde{U}_t
\end{aligned}$$

και επομένως $V_t^{(\delta^0, \delta^1)} = U_t$ για κάθε $t \in [0, T]$. Επιπλέον, από την γνώση των δ^0 και $V_0^{(\delta^0, \delta^1)}$, και δεδομένου ότι το χαρτοφυλάκιο (δ^0, δ^1) είναι αυτοχρηματοδοτούμενο, προκύπτει άμεσα ότι η διαδικασία που περιγράφει το πλήθος των ομολόγων δίνεται από τη σχέση

$$\delta_t^1 = e^{-rt} (V_t - \delta_t^0 S_t)$$

Συνεπώς, κατασκευάσαμε ένα Q – επιτρεπτό αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο, το οποίο αναπαράγει ακριβώς την αξία του παραγώγου κατά το χρόνο λήξης του. Ως εκ τούτου, το χαρτοφυλάκιο αυτό αποτελεί χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης για το εν λόγω παράγωγο, ενώ μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτό είναι μοναδικό υπό την έννοια ότι, αν υπάρχουν δύο αυτοχρηματοδοτούμενα χαρτοφυλάκια που αναπαράγουν το ίδιο χρηματοοικονομικό παράγωγο, τότε έχουν αναγκαστικά την ίδια σύνθεση (π.χ. βλέπε M. Capinski και E. Korpp (2012), pp. 29, Proposition 2.26). Επιπλέον, αυτό που συνάγεται άμεσα από το παραπάνω είναι ότι η αγορά που περιγράφεται από των μοντέλο των BS, $\mathcal{M}_{BS} = (S, B, \Phi(Q))$, είναι πλήρης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1.3 Στο μοντέλο αγορών $\mathcal{M}_{BS} = (S, B, \Phi(Q))$ ισχύουν τα ακόλουθα:

- Κάθε δικαίωμα προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου με αξία στο χρόνο λήξης του $U_T = F(S_T)$, είναι αντισταθμίσιμο.
- Υπό το μέτρο ουδέτερου κινδύνου Q ,

$$S = \{S_t, 0 \leq t \leq T\} \sim_Q GBM(\mu^* = r - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma).$$

- Η αξία οποιουδήποτε χαρτοφυλακίου εξασφάλισης την χρονική στιγμή $t \in [0, T]$ δίνεται από τη σχέση

$$V_t = E_Q \left(e^{-r(T-t)} U_T \middle| \mathcal{F}_t^{W^Q} \right)$$

όπου $W^Q = \{W_t^Q, 0 \leq t \leq T\} \sim Q - BM(0, 1)$. Συνεπώς, η *no-arbitrage* αξία, U_t , του δικαιώματος προαίρεσης στο χρόνο $t \in [0, T]$ θα δίνεται από την έκφραση

$$U_t = E_Q \left(e^{-r(T-t)} U_T \middle| \mathcal{F}_t^{W^Q} \right). \quad (5.10)$$

Η σχέση (5.10) είναι γνωστή ως *Risk-Neutral Pricing Formula (RNPF)*.

5.1.3 Τύπος των Black and Scholes

Με χρήση της προσέγγισης του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης (replicating portfolio approach) είδαμε ότι η σύνθεση του αντίστοιχου χαρτοφυλακίου μπορεί να κατασκευαστεί έτσι ώστε η αξία του να ακολουθεί τη δυναμική της αξίας του δικαιώματος προαίρεσης σε κάθε χρονική στιγμή. Στο πλαίσιο της αγοράς που περιγράφεται από το υπόδειγμα αγορών των Black and Scholes, το γεγονός αυτό οδήγησε άμεσα στον προσδιορισμό ενός τύπου (RNPF), που περιγράφει την τιμή του παραγώγου σε οποιοδήποτε χρονικό σημείο εντός του διαστήματος πριν τη λήξη του. Βέβαια, η σπουδαιότητα στο έργο των Black, Scholes και Merton, δεν περιορίζεται μόνο στη κατασκευή ενός υποδείγματος αγορών όπου επιτρέπεται η αποτίμηση χωρίς arbitrage, αλλά επεκτείνεται και στη δυνατότητα εξαγωγής ενός κλειστού τύπου για την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης, υπό την προαναφερθείσα ιδεατή αγορά. Ο τύπος αυτός είναι γνωστός στη βιβλιογραφία ως τύπος των Black and Scholes. Παρακάτω, παρουσιάζουμε αρχικά τον τύπο των Black and Scholes για δικαιώματα αγοράς και κατόπιν τον αντίστοιχο τύπο για δικαιώματα πώλησης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1.4 (Τύπος των Black and Scholes) Στο μοντέλο αγορών $\mathcal{M}_{BS} = (S, B, \Phi(Q))$, η *no-arbitrage* αξία ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με ημερομηνία λήξης T και τιμή εξάσκησης K στο χρόνο t θα είναι ίση με

$$C^{\text{call}}(t, S_t) = S_t \Phi(\omega) - e^{-r(T-t)} K \Phi(\omega - \sigma \sqrt{T-t})$$

όπου

$$\omega = \frac{r(T-t) + \sigma^2(T-t)/2 - \ln(K/S_t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

και $\Phi(\cdot)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής, δηλαδή

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{y^2/2\sigma^2} dy$$

Επιπλέον, $\sigma > 0$ είναι η μεταβλητότητα της τιμής της υποκείμενης μετοχής και r το επιτόκιο της αγοράς χωρίς κίνδυνο.

Για την απόδειξη του τύπου των Black and Scholes παραπέμπουμε στο σύγγραμμα των D. Lambertson και B. Lapeyre (2011) (*Remark 4.3.3, pp. 94*). Στο πλαίσιο της αγοράς που περιγράφεται από το υπόδειγμα των BS, και υπό το οποίο δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage, τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης τα οποία μοιράζονται κοινά χαρακτηριστικά (δηλαδή διαπραγματεύονται επί του ίδιου υποκείμενου τίτλου και διαθέτουν κοινές ημερομηνία λήξης και τιμή εξάσκησης), οφείλουν, σε κάθε χρονική στιγμή, να ικανοποιούν μια σχέση η οποία είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως Put-Call Parity.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.1.3 (Put-Call Parity) Η σχέση της δίκαιης (no-arbitrage) αξίας μεταξύ ενός δικαιώματος αγοράς, $C^{\text{call}}(t, S_t)$, και της δίκαιης αξίας ενός δικαιώματος πώλησης, $C^{\text{put}}(t, S_t)$, Ευρωπαϊκού τύπου με τιμή εξάσκησης K και ημερομηνία εξάσκησης T , δίνεται από την παρακάτω ισότητα

$$C^{\text{call}}(t, S_t) - C^{\text{put}}(t, S_t) = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

για κάθε $t \in [0, T]$.

Η σχέση Put-Call Parity, σε συνδυασμό με την γνώση της μορφής της δίκαιης αξίας ενός δικαιώματος αγοράς από τον τύπο των Black and Scholes, καθιστά άμεσα εφικτό τον προσδιορισμό ενός αντίστοιχου κλειστού τύπου για την τιμή ενός δικαιώματος πώλησης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1.5 (No-arbitrage) αξία ενός δικαιώματος πώλησης Στο μοντέλο αγορών $\mathcal{M}_{BS} = (S, B, \Phi(Q))$, η no-arbitrage αξία ενός δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με ημερομηνία λήξης T και τιμή εξάσκησης K στο χρόνο t θα είναι ίση με

$$C^{\text{put}}(t, S_t) = e^{-r(T-t)} K \Phi(\sigma\sqrt{T-t} - \omega) - S_t \Phi(-\omega)$$

όπου ω , $\Phi(\cdot)$, σ και r , όπως παραπάνω.

5.1.4 Αδυναμίες του υποδείγματος των Black and Scholes

Η κατασκευή ενός τύπου, ο οποίος συνδυάζει ευκολία και ταχύτητα υπολογισμών στην αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης υπήρξε ο βασικός λόγος για τον οποίο η συμβολή των Black, Scholes και Merton καθιερώθηκε στη χρηματοοικονομική επιστήμη. Ο Rubinstein (1994), αναγνωρίζοντας το εύρος και την επίδραση του υποδείγματος, αναφέρεται στο υπόδειγμα των BS ως ένα εκ των πιο επιτυχημένων υποδειγμάτων στις κοινωνικές επιστήμες, υπογραμμίζοντας ότι ο εξαγόμενος τύπος αποτελεί ένα από τα πιο αξιοποιήσιμα εργαλεία στην ανθρώπινη ιστορία. Βέβαια, παρά τη σημασία και βαρύτητα που έχει αποδοθεί στη φόρμουλα που περιγράφει την

δίκαιη αξία των δικαιωμάτων προαίρεσης, πολλοί ερευνητές επιφυλάσσουν της εγκυρότητας των αποτελεσμάτων του τύπου των BS όταν εφαρμόζεται σε πραγματικά δεδομένα της αγοράς. Συγκεκριμένα, πλήθος εμπειρικών μελετών καταγράφουν ασυνέπειες μεταξύ των τιμών που προβλέπει το υπόδειγμα και των αντίστοιχων παρατηρούμενων αγοραίων, με χαρακτηριστικό παράδειγμα την έρευνα των Macbeth και Merville (1979). Ειδικότερα, οι Macbeth και Merville (1979), καταγράφουν ότι εάν θεωρήσουμε ότι το μοντέλο BS αποτιμά ορθά τα at-the-money options, τότε το μοντέλο προβλέπει κατά μέσο όρο μικρότερες αξίες όταν οι πραγματικές αγοραίες αξίες των options είναι in-the-money και, αντίθετα, υψηλότερες αξίες όταν τα options είναι out-of-the-money.

Αρκετοί υποστηρίζουν ότι μια από τις αιτίες που φαίνεται να συμβάλλει στην συστηματική ασυνέπεια μεταξύ των τιμών έγκειται κυρίως στο ότι, το μοντέλο αδυνατεί να αποτιμήσει με ακρίβεια την αξία των παραγώγων σε περιβάλλον όπου οι λογαριθμικές αποδόσεις των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων δεν ακολουθούν κανονική κατανομή. Αυτό έρχεται να επιβεβαιωθεί από το γεγονός ότι οι ημερήσιες αποδόσεις των μετοχών περιλαμβάνουν βαρύτερες ουρές στην μορφή της κατανομής τους με ισχυρή ένδειξη υψηλότερης κύρτωσης σε σχέση με αυτό που προβλέπεται υπό την υπόθεση της κανονικότητας (H. Geman και T. Ané (2000)).

Παράλληλα, άλλοι αναφέρουν ότι, ακόμα και αν υποθέσουμε ότι ένα μοντέλο προσέγγισης της κατανομής των αποδόσεων, όπως εκείνο που προτείνουν οι Black and Scholes, ισχύει, τότε δεχόμαστε αυτόματα σαν δεδομένο ότι η μεταβλητότητα (volatility) της υποκείμενης διαδικασίας παραμένει στάσιμη, υπόθεση η οποία, ακολουθώντας τους Macbeth και Merville (1979), δεν επαληθεύεται εμπειρικά. Σε σχέση με το τελευταίο, στην πράξη, έχει διαπιστωθεί ότι η μεταβλητότητα, και συγκεκριμένα η τεκμαρτή μεταβλητότητα των μετοχών και γενικότερα των περιουσιακών τίτλων, μεταβάλλεται ως προς τις διαφορετικές τιμές εξάσκησης των παραγώγων. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως volatility smile. Υπό το υπόδειγμα των Black and Scholes θα αναμέναμε ότι, ανεξάρτητα από την τιμή εξάσκησης των παραγώγων, η τεκμαρτή μεταβλητότητα, η οποία προκύπτει ως μια εκτίμηση της πραγματικής μεταβλητότητας αντιστρέφοντας τον τύπο των BS, θα παρέμενε σταθερή σε όλο το εύρος των τιμών εξάσκησης. Η υπόθεση της σταθερής μεταβλητότητας αποτελεί άλλωστε έναν από τους βασικούς “πυλώνες” του μοντέλου. Έτσι αν έχουμε δύο δικαιώματα τα οποία διαπραγματεύονται επί του ίδιου περιουσιακού τίτλου, έχουν κοινή ημερομηνία εξάσκησης αλλά διαφορετικές τιμές εξάσκησης, τότε η εκτίμηση της μεταβλητότητας παρατηρείται εμπειρικά ότι μπορεί να διαφοροποιείται, ενώ αν το μοντέλο ήταν ορθό, οι εκτιμήσεις θα συνέπιπταν.

Με άλλα λόγια, τα εμπειρικά τεκμήρια αναδεικνύουν την εσφαλμένη (ή τουλάχιστον ανεπαρκή) φύση της βασικής υπόθεσης του υποδείγματος, σύμφωνα με την οποία η δυναμική των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown με σταθερή μεταβλητότητα. Ως αποτέλεσμα, έχει αναπτυχθεί μια εκτενής βιβλιογραφία που προτείνει θεωρητικά υποδείγματα με περισσότερο ευέλικτες, και σε αρκετές περιπτώσεις, πιο ρεαλιστικές παραδοχές ως προς την “πραγματική” κατανομή των αποδόσεων. Μια από τις βασικές κατευθύνσεις, η οποία έχει τεθεί και στο περιεχόμενο της εν λόγω εργασίας, είναι η εισαγωγή των αλματικών ασυνεχειών στα υποδείγματα για την περιγραφή της υποκείμενης διαδικασίας. Ως χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της κατηγορίας υποδειγμάτων αποτελεί η διαδικασία Variance–Gamma. Ακολουθώντας το Κεφάλαιο 4, η διαδικασία VG ενσωματώνει την ιδιάζουσα δυναμική, σύμφωνα με την οποία οι τιμές των αξιογράφων μεταβάλλονται αποκλειστικά μέσω αλμάτων. Σε αντίθεση με τα κλασικά jump diffusion μοντέλα τα οποία αποτυπώνουν τις σπάνιες και απότομες μεταβολές των τιμών μέσω μεγάλων αλμάτων, η διαδικασία VG χαρακτηρίζεται από μια πλουσιότερη και πιο ευέλικτη αλματική δομή. Συγκεκριμένα, το μοντέλο επιτρέπει

τόσο τις συχνές μικρές μεταβολές, μέσω μικρών αλμάτων, όσο και τις αντίστοιχες λιγότερο συχνές μεγάλες μεταβολές, μέσω μεγάλων αλμάτων, αποτυπώνοντας έτσι με πιο ρεαλιστικό τρόπο την ετερογένεια της μεταβλητότητας κατά μήκος διαφορετικών οικονομικών περιόδων. Παρακάτω, θα παρουσιάσουμε το θεωρητικό μοντέλο αποτίμησης όταν η υποκείμενη διαδικασία ακολουθεί το γεωμετρικό αντίστοιχο του εναλλακτικού υποδείγματος VG, θα κατασκευάσουμε τις αντίστοιχες φόρμουλες για την δίκαιη αξία των δικαιωμάτων προαίρεσης και θα μελετήσουμε κατά πόσο η εισαγωγή της VG στην περιγραφή της δυναμικής των περιουσιακών τίτλων βελτιώνει την αποτίμηση των δικαιωμάτων έναντι του κλασικού υποδείγματος των BS.

5.2 ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΑΓΟΡΩΝ VARIANCE-GAMMA

5.2.1 Τιμολόγηση με χρήση του αναλυτικού τύπου

Στην παρούσα ενότητα αναπτύσσεται η σχετική μεθοδολογία δόμησης ενός αναλυτικού τύπου αποτίμησης (analytical formula), ο οποίος επεκτείνει τον κλασικό τύπο των BS, και καθιστά δυνατή τη τιμολόγηση της δίκαιης αξίας ενός δικαιώματος προαίρεσης όταν η υποκείμενη διαδικασία ακολουθεί τη διαδικασία VG. Για το σκοπό αυτό, θα ακολουθήσουμε κατ' αναλογία τη προσέγγιση που υιοθετήσαμε στο υπόδειγμα αγορών των Black and Scholes, προσαρμόζοντας την στο πλαίσιο της νέας στοχαστικής δυναμικής.

Ας θεωρήσουμε μια χρηματοοικονομική αγορά σε συνεχή χρόνο, στην οποία διαπραγματεύονται τρία περιουσιακά στοιχεία: μια μετοχή, ένα ομόλογο με τα ίδια χαρακτηριστικά όπως προηγουμένως και ένα δικαίωμα προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου με τιμή εξάσκησης K και χρόνο εξάσκησης T . Επιπλέον, όπως και προηγουμένως, υποθέτουμε ότι η μετοχή δεν καταβάλλει μερίσματα κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος. Οι Madan, Carr και Chang (1998), επεκτείνοντας την αρχική παραμετροποίηση του συμμετρικού μοντέλου VG που εισήχθη από τους Madan και Seneta (1990), προτείνουν την αντικατάσταση του ρόλου της κίνησης Brown, στο κλασικό γεωμετρικό υπόδειγμα αποτίμησης, από την διαδικασία VG. Βάσει των νέων προδιαγραφών, η δυναμική της αξίας των μετοχών περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση

$$S_t = S_0 \exp \{ \mu t + X_{t;\sigma,\nu,\theta}^{\text{VG}} + \omega t \} \quad (5.11)$$

όπου $X_{t;\sigma,\nu,\theta}^{\text{VG}}$ είναι μια διαδικασία VG με παραμέτρους (σ, ν, θ) , ενώ η παράμετρος μ παριστά την τάση της μετοχής ή, όπως αναφέρεται στο σχετικό άρθρο των Madan, Carr και Chang (1998), τον μέσο ρυθμό απόδοσης (mean rate of return). Ο όρος ωt λειτουργεί ως όρος διόρθωσης ή, όπως αναφέρουν οι R. Korn et al. (2010), ως όρος αντιστάθμισης (compensation term), και εισάγεται στην (5.11) προκειμένου να διασφαλιστεί ότι η αναμενόμενη αξία της μετοχής, οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t \in [0, T]$, ικανοποιεί τη σχέση

$$E(S_t) = S_0 e^{\mu t}$$

και δίνεται από

$$\omega t = \frac{t}{\nu} \ln \left(1 - \theta \nu - \frac{\sigma^2 \nu}{2} \right).$$

Στην ουσία, η τιμή της παραμέτρου ω προσδιορίζεται ως συνθήκη απουσίας ευκαιριών για arbitrage (no-arbitrage condition) (π.χ. βλέπε F. Fiorani (2004)) και προκύπτει υπολογίζοντας τη

χαρακτηριστική συνάρτηση της $X_{t;\sigma,\nu,\theta}^{VG}$ στο σημείο $u = 1/i$ (D. Madan, P. Carr και E. Chang (1998)), δηλαδή

$$w = -\frac{1}{t} \ln \left(\phi_{X^{VG}}(u, t)|_{u=1/i} \right) = \frac{1}{\nu} \ln \left(1 - \theta\nu - \frac{\sigma^2\nu}{2} \right)$$

Όπως και προηγουμένως, μας ενδιαφέρει η αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης σε ένα πλαίσιο αποτίμησης βασισμένο σε έναν κόσμο ουδέτερου κινδύνου. Στο πλαίσιο αυτό, η διαδικασία που περιγράφει την παρούσα αξία της μετοχής (market account discounted stock prices) είναι martingale. Υπό το αντίστοιχο μέτρο ουδέτερου κινδύνου, η μέση απόδοση της μετοχής μ είναι ίση με το βραχυπρόθεσμο επιτοκιακό ρυθμό r , δηλαδή $\mu = r$. Αντικαθιστώντας την παράμετρο μ με r προκύπτει η σχέση

$$S_t = S_0 \exp \left\{ rt + X_{t;\tilde{\sigma},\tilde{\nu},\tilde{\theta}}^{VG} + \tilde{\omega}t \right\} \quad (5.12)$$

η οποία περιγράφει τη δυναμική της υποκείμενης διαδικασίας υπό το μέτρο ουδέτερου κινδύνου. Στο εξής, όταν αναφερόμαστε στην (5.12) θα κάνουμε λόγο για τη διαδικασία ουδέτερου κινδύνου (risk-neutral process), ενώ η σχέση (5.11) θα αναφέρεται ως στατιστική διαδικασία (statistical process), καθώς περιγράφει τη δυναμική της τιμής της μετοχής υπό το πραγματικό μέτρο πιθανότητας.

Σύμφωνα με τους Madan, Carr και Chang (1998), η πυκνότητα πιθανότητας των λογαριθμικών αποδόσεων $Y = \log(S_t/S_0)$, υπό το πραγματικό μέτρο πιθανότητας, δεσμεύοντας ως προς την πραγματοποίηση της διαδικασίας που καθορίζει την στοχαστική χρονική κλίμακα, δίνεται από την κανονική κατανομή. Συγκεκριμένα, δεσμεύοντας ως προς την τυχαία μεταβλητή $g \sim \Gamma(t/\nu, 1/\nu)$, η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή

$$\mu t + \frac{t}{\nu} \ln \left(1 - \theta\nu - \frac{\sigma^2\nu}{2} \right) + \theta g$$

και διακύμανση $\sigma^2 g$, δηλαδή προκύπτει ότι

$$Y|g \sim N \left(\mu t + \frac{t}{\nu} \ln \left(1 - \theta\nu - \frac{\sigma^2\nu}{2} \right) + \theta g, \sigma^2 g \right). \quad (5.13)$$

Συνδυάζοντας την (5.13) με την πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής g , η περιθώρια πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y μπορεί να γραφεί ως

$$h(y) = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi g}} \exp \left\{ -\frac{\left(y - \left(\mu t + \frac{t}{\nu} \ln \left(1 - \theta\nu - \frac{\sigma^2\nu}{2} \right) + \theta g \right) \right)^2}{2\sigma^2 g} \right\} \cdot \left(\frac{1}{\nu} \right)^{\frac{t}{\nu}} \frac{g^{\frac{t}{\nu}-1} \exp \left\{ -\frac{g}{\nu} \right\}}{\Gamma \left(\frac{t}{\nu} \right)} dg \quad (5.14)$$

Επικαλούμενοι τα αποτελέσματα των I. S. Gradshteyn και I. M. Ryzhik (1980), οι Madan et al. (1998) εκφράζουν την πυκνότητα (5.14) σε κλειστή αναλυτική μορφή, μέσω της συνάρτησης Bessel δευτέρου είδους. Συγκεκριμένα, όταν η S_t ακολουθεί το στατιστικό VG υπόδειγμα της σχέσης (5.11), η πυκνότητα πιθανότητας της Y δίνεται από

$$h(y) = \frac{2 \exp(\theta x/\sigma^2)}{\nu^{t/\nu} \sqrt{2\pi} \sigma \Gamma(t/\nu)} \left(\frac{x^2}{2\sigma^2/\nu + \theta^2} \right)^{\frac{t}{2\nu} - \frac{1}{4}} \cdot K_{\frac{t}{\nu} - \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sigma^2} \sqrt{x^2 \left(\frac{2\sigma^2}{\nu} + \theta^2 \right)} \right)$$

όπου K είναι τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους και

$$x = y - \mu t - \frac{t}{\nu} \ln(1 - \theta\nu - \sigma^2\nu/2).$$

Από τα προηγούμενα, γνωρίζουμε ότι η αξία ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με τιμή εξάσκησης K και ημερομηνία λήξης T , την χρονική στιγμή $t \in [0, T]$, δίνεται από

$$e^{-r(T-t)} E((S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t)$$

όπου η μέση τιμή λαμβάνεται ως προς την διαδικασία ουδέτερου κινδύνου της σχέσης (5.12) (D. Madan, P. Carr και E. Chang (1998)). Ακολουθώντας τώρα τη προσέγγιση δόμησης του τύπου της δίκαιης αξίας ενός δικαιώματος αγοράς που εισήγαγαν οι Madan και Milne (1991), καθώς και το σκεπτικό που παρουσιάστηκε προηγουμένως για τον υπολογισμό της πυκνότητας $h(y)$, οι Madan et al. (1998) αποδεικνύουν έναν κλειστό αναλυτικό τύπο για την αξία ενός δικαιώματος αγοράς. Η προσέγγιση τους βασίζεται στον υπολογισμό της αξίας του δικαιώματος ολοκληρώνοντας την υπό συνθήκη αξία του, δοθέντος του γάμμα κατανεμημένου τυχαίου χρόνου g , ως προς g . Συγκεκριμένα, η τιμή του δικαιώματος εκφράζεται ως ακολούθως

$$C^{\text{call}}(t, S_t) = \int_0^\infty c(g) \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{t}{\nu}} \frac{g^{\frac{t}{\nu}-1} \exp\{-\frac{g}{\nu}\}}{\Gamma\left(\frac{t}{\nu}\right)} dg$$

όπου $c(g)$ είναι η υπό συνθήκη αξία του δικαιώματος προαίρεσης, με τη δέσμευση να πραγματοποιείται ως προς g (η αναλυτική έκφραση του όρου $c(g)$, μπορεί να βρεθεί στο Παράρτημα του άρθρου των D. Madan, P. Carr και E. Chang (1998), βλ. *σχέση (A5)*, pp. 98). Σε αντίθεση με τους Madan και Milne (1991), οι οποίοι προσεγγίζουν το προκύπτον ολοκλήρωμα μέσω αριθμητικών μεθόδων ολοκλήρωσης, οι Madan et al. (1998) καταλήγουν σε μία τελική αναλυτική λύση εκφρασμένη σε όρους της τροποποιημένης συνάρτησης Bessel δευτέρου είδους και της εκφυλισμένης υπεργεωμετρικής συνάρτησης δύο μεταβλητών (degenerate hypergeometric function of two variables). Για λόγους συντομίας, παραλείπουμε την αναλυτική απόδειξη και προχωρούμε απευθείας στο επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο παρέχει την δίκαιη αξία ενός δικαιώματος αγοράς υπό το υπόδειγμα VG.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.2.1 (Αναλυτική φόρμουλα ενός δικαιώματος αγοράς υπό το υπόδειγμα VG) Η αξία ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με τιμή εξάσκησης K και ημερομηνία λήξης T όταν η $S = \{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ ακολουθεί το VG υπόδειγμα ουδέτερου κινδύνου της σχέσης (5.12), δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} C_{\text{VG}}^{\text{call}}(t, S_t) &= S_t \Psi \left(d \sqrt{\frac{1-c_1}{\tilde{\nu}}}, (a+s) \sqrt{\frac{\tilde{\nu}}{1-c_1}}, \frac{T-t}{\tilde{\nu}} \right) \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} \Psi \left(d \sqrt{\frac{1-c_2}{\tilde{\nu}}}, a s \sqrt{\frac{\tilde{\nu}}{1-c_2}}, \frac{T-t}{\tilde{\nu}} \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

όπου

$$d = \frac{1}{s} \left(\ln(S_t/K) + r(T-t) + \frac{T-t}{\tilde{\nu}} \ln \left(\frac{1-c_1}{1-c_2} \right) \right)$$

$$c_1 = \frac{\tilde{\nu}(a+s)^2}{2}, \quad c_2 = \frac{\tilde{\nu}a^2}{2}, \quad a = -\frac{\tilde{\theta}s}{\tilde{\sigma}^2}, \quad s = \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tilde{\theta}}{\tilde{\sigma}}\right)^2 \frac{\tilde{\nu}}{2}}},$$

$\tilde{\sigma}$, $\tilde{\nu}$ και $\tilde{\theta}$ είναι οι παράμετροι της διαδικασίας VG υπό το μέτρο ουδέτερου κινδύνου και

$$\begin{aligned} \Psi(a, \beta, \gamma) &= \frac{c^{\gamma+\frac{1}{2}} \exp\{\text{sign}(a)c\} (1+u)^\gamma}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\gamma)\gamma} \\ &\cdot K_{\gamma+\frac{1}{2}}(c)\Phi\left(\gamma, 1-\gamma, 1+\gamma; \frac{1+u}{2}, -\text{sign}(a)c(1+u)\right) \\ &- \text{sign}(a) \frac{c^{\gamma+\frac{1}{2}} \exp\{\text{sign}(a)c\} (1+u)^{1+\gamma}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\gamma)(1+\gamma)} \\ &\cdot K_{\gamma-\frac{1}{2}}(c)\Phi\left(1+\gamma, 1-\gamma, 2+\gamma; \frac{1+u}{2}, -\text{sign}(a)c(1+u)\right) \\ &+ \text{sign}(a) \frac{c^{\gamma+\frac{1}{2}} \exp\{\text{sign}(a)c\} (1+u)^\gamma}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\gamma)\gamma} \\ &\cdot K_{\gamma-\frac{1}{2}}(c)\Phi\left(\gamma, 1-\gamma, 1+\gamma; \frac{1+u}{2}, -\text{sign}(a)c(1+u)\right) \end{aligned}$$

με $c = |a|\sqrt{2+\beta^2}$, $u = \beta/\sqrt{2+\beta^2}$, K_α η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους τάξης α και Φ είναι η εκφυλισμένη υπεργεωμετρική συνάρτηση δύο μεταβλητών, η οποία έχει την παρακάτω αναπαράσταση

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \cdot \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta} e^{uy} du.$$

Όπως επισημαίνουν οι Madan, Carr και Chang (1998), το ιδιαίτερα αξιοσημείωτο στοιχείο της σχέσης (5.15) είναι ότι ενοποιεί, υπό ένα ενιαίο αναλυτικό τύπο, τρεις διαφορετικές φόρμουλες αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης. Ειδικότερα, η (5.15) εμφωλεύει το γενικό υπόδειγμα αποτίμησης VG (VG options pricing formula), τη συμμετρική εκδοχή του υποδείγματος αποτίμησης VG (symmetric VG options pricing formula), η οποία προκύπτει θέτοντας την παράμετρο $\tilde{\theta}$ (ή την παράμετρο a) ίση με μηδέν, καθώς και τον κλασικό τύπο των Black and Scholes (Black and Scholes pricing formula), ο οποίος ανακτάται ως οριακή περίπτωση της (5.15) όταν η παράμετρος $\tilde{\nu}$ τείνει στο μηδέν ($\tilde{\nu} \rightarrow 0$) (βλ. A. Fischer, E. Gaunt και A. Sarantsev (2023)). Επιπλέον, αξιοποιώντας τη σχέση Put-Call Parity, μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τον αντίστοιχο αναλυτικό τύπο αποτίμησης στην περίπτωση ενός δικαιώματος πώλησης (υπό το υπόδειγμα VG).

5.2.2 Βαθμονόμηση των παραμέτρων του αναλυτικού VG υποδείγματος

Η εφαρμογή του αναλυτικού τύπου (5.15) για την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης απαιτεί την εκτίμηση των παραμέτρων του υποδείγματος. Η μεθοδολογία που ακολουθείται

προκειμένου να καταστεί εφικτή η εκτίμηση των παραμέτρων καλείται βαθμονόμηση (calibration). Η βαθμονόμηση των παραμέτρων του υποδείγματος VG συνίσταται στον προσδιορισμό των παραμέτρων $\tilde{\sigma}, \tilde{\nu}$ και $\tilde{\theta}$ οι οποίες δεν μπορούν να παρατηρηθούν άμεσα από την αγορά, αλλά εκτιμώνται κατά τρόπο ώστε οι προκύπτουσες (προβλεπόμενες) αξίες των δικαιωμάτων να είναι συνεπείς με τις παρατηρούμενες αξίες που λαμβάνονται από την αγορά. Οι Madan, Carr και Chang (1998) στο πλαίσιο της βαθμονόμησης των παραμέτρων του υποδείγματος VG, υιοθετούν αρχικά την θεώρηση ότι οι παρατηρούμενες αξίες των δικαιωμάτων προαίρεσης μπορούν να αναπαρασταθούν μέσω ενός πολλαπλασιαστικού μοντέλου ή, όπως αναφέρουν οι Madan και Daal (2005), μέσω ενός μοντέλου πολλαπλασιαστικού σφάλματος (multiplicative error formulation). Η επιλογή ενός πολλαπλασιαστικού μοντέλου, έναντι ενός προσθετικού, αποσκοπεί στην συνεκτίμηση της αναμενόμενης ετεροσκεδαστικότητας των τιμών των δικαιωμάτων ως προς την τιμή εξάσκησης (D. Madan, P. Carr και E. Chang (1998)). Στη συνέχεια η εκτίμηση των παραμέτρων του υποδείγματος πραγματοποιείται με χρήση της μεθόδου των μη γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων.

Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο μοντέλο

$$\hat{C}_i = C_i(\tilde{\Theta}) \exp \{ \eta \epsilon_i - \eta^2/2 \} \quad (5.16)$$

όπου με \hat{C}_i συμβολίζουμε την παρατηρούμενη αξία του i -οστού δικαιώματος αγοράς, με C_i την αντίστοιχη θεωρητική αξία που προκύπτει από το υπόδειγμα για το διάνυσμα των παραμέτρων $\tilde{\Theta}$, το οποίο αντιστοιχεί στην παραμετροποίηση υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου. Επιπλέον, ϵ_i είναι ο i -οστός όρος σφάλματος, ο οποίος εκφράζει έναν διαταρακτικό παράγοντα και υποτίθεται ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και μοναδιαία διακύμανση, ενώ η είναι μια θετική σταθερά η οποία ρυθμίζει τη διασπορά του μέγεθος του σφάλματος. Εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό, προκύπτει άμεσα ότι η πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής \hat{C} , δίνεται από

$$f_{\hat{C}}(\hat{c}) = f_{\ln \hat{c}}(\ln \hat{c}) \frac{1}{\hat{c}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2}} \frac{1}{\hat{c}} \exp \left\{ -\frac{\ln \hat{c} - \ln c(\tilde{\Theta}) + \eta^2/2}{2\eta^2} \right\}$$

Στη συνέχεια, προκειμένου να εκτιμήσουμε το διάνυσμα των παραμέτρων $\tilde{\Theta}$, εφαρμόζουμε τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας (D. Madan και E. Daal (2005)). Λαμβάνοντας τον λογάριθμο της πιθανοφάνειας, προκύπτει

$$\begin{aligned} \ln L(\tilde{\Theta}, \eta) = & -\frac{1}{2\eta^2} \sum_{1 \leq i \leq M} \left(\ln(\hat{C}_i) - \ln(C_i(\tilde{\Theta})) + \frac{\eta^2}{2} \right)^2 \\ & - \frac{M}{2} \ln(2\pi\eta^2) - \sum_{1 \leq i \leq M} \ln(\hat{C}_i) \end{aligned} \quad (5.17)$$

όπου με M συμβολίζουμε το μέγεθος του υπό μελέτη δείγματος. Απομακρύνοντας τους όρους που δεν εξαρτώνται από τις προς εκτίμηση παραμέτρους, η παραπάνω έκφραση παίρνει την μορφή

$$2 \ln L(\tilde{\Theta}, \eta) = -\frac{1}{\eta^2} \sum_{1 \leq i \leq M} \left(\ln(\hat{C}_i) - \ln(C_i(\tilde{\Theta})) + \frac{\eta^2}{2} \right)^2 - M \ln \eta^2$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} \frac{2 \ln L(\tilde{\Theta}, \eta)}{M} &= -\frac{1}{M\eta^2} \sum_{1 \leq i \leq M} \left(\ln(\hat{C}_i) - \ln(C_i(\tilde{\Theta})) \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{M} \sum_{1 \leq i \leq M} \left(\ln(\hat{C}_i) - \ln(C_i(\tilde{\Theta})) \right) - \frac{\eta^2}{4} - \ln(\eta^2) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Αντικαθιστώντας το άθροισμα τετραγώνων των λογαριθμικών διαφορών με την έκφραση

$$k^2 = \frac{1}{M} \sum_{1 \leq i \leq M} \left(\ln(\hat{C}_i) - \ln(C_i(\tilde{\Theta})) \right)^2 = \eta^2 + \frac{\eta^4}{4} \quad (5.19)$$

η οποία προκύπτει λαμβάνοντας τη μερική παράγωγο της πιθανοφάνειας (5.16) ως προς η και θέτοντας την ίση με το μηδέν, η σχέση (5.17) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\frac{2 \ln L(\tilde{\Theta}, \eta)}{M} = -\ln \eta^2 - \left(\xi + \frac{\eta^2}{2} \right) \quad (5.20)$$

όπου με ξ συμβολίζουμε το μέσο όρο των λογαριθμικών διαφορών. Επικαλούμενοι το νόμο των μεγάλων αριθμών, προκύπτει ότι για $M \rightarrow \infty$, η ποσότητα ξ συγκλίνει στην τιμή $\eta^2/2$ (D. Madan, P. Carr και E. Chang (1998)). Σύμφωνα με τους Madan, Carr και Chang (1998), η μεγιστοποίηση της πιθανοφάνειας (5.19) ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση της παραμέτρου η . Ισοδύναμα, εκφράζοντας την η ως συνάρτηση του k από την (5.18),

$$\eta = \sqrt{2(\sqrt{1+k^2} - 1)}$$

το πρόβλημα βαθμονόμησης ανάγεται στην ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, k , η οποία δίνεται από

$$k = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{1 \leq i \leq M} \left(\ln(\hat{C}_i) - \ln(C_i(\tilde{\Theta})) \right)^2} \quad (5.21)$$

Συγκεκριμένα το πρόβλημα βαθμονόμησης που επιχειρούμε να λύσουμε διατυπώνεται ως εξής

$$\min_{\tilde{\sigma}, \tilde{\nu}, \tilde{\theta}} \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{1 \leq i \leq M} \left(\ln(\hat{C}_i) - \ln(C_i^{(\tilde{\sigma}, \tilde{\nu}, \tilde{\theta})}(K_i, T_i, r_i)) \right)^2}$$

όπου \hat{C}_i είναι η παρατηρηθείσα αγοραία αξία του i -οστού δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K_i , χρόνο λήξης T_i και επιτοκιακό ρυθμό r_i , ενώ $C_i^{(\tilde{\sigma}, \tilde{\nu}, \tilde{\theta})}$ δηλώνει τη θεωρητική αξία του αντίστοιχου δικαιώματος, όπως προκύπτει από το υπόδειγμα VG της σχέσης (5.15) υπό την παραμετροποίηση ουδέτερου κινδύνου $(\tilde{\sigma}, \tilde{\nu}, \tilde{\theta})$.

5.2.3 Μετασχηματισμός Esscher της διαδικασίας VG

Στην προηγούμενη παράγραφο, χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.12) για την περιγραφή της δυναμικής της υποκείμενης διαδικασίας, υποθέσαμε ρητά ότι εργαζόμαστε σε έναν κόσμο ουδέτερου κινδύνου, χωρίς να διατυπώσουμε αναλυτικά το αντίστοιχο πλαίσιο αλλαγής μέτρου. Συγκεκριμένα, θεωρήσαμε απευθείας ότι η παράμετρος τάσης της μετοχής ικανοποιεί την σχέση $\mu = r$. Βέβαια, την μετάβαση από τον φυσικό κόσμο στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου, είναι αναγκαίο να ακολουθεί ο κατάλληλος μετασχηματισμός των παραμέτρων του υποδείγματος. Με την επιβολή της συνθήκης $\mu = r$, υποθέσαμε ότι οι παράμετροι $\tilde{\sigma}, \tilde{\nu}$ και $\tilde{\theta}$ βρίσκονται ήδη στη μετασχηματισμένη μορφή που αντιστοιχεί στο μέτρο ουδέτερου κινδύνου (R. Korn (2010)). Σε αντίθεση με το υπόδειγμα αγορών των Black and Scholes, η αγορά που περιγράφεται από το υπόδειγμα VG δεν είναι πλήρης (incomplete market). Πράγματι, όπως επισημαίνει η H. Geman (Gerber και Shiu (1994)), η παρουσία στοχαστικής μεταβλητότητας (stochastic volatility) (χαρακτηριστικό το οποίο ενσωματώνεται εγγενώς στη διαδικασία VG) συνιστά μια φυσική πηγή μη πληρότητας της αγοράς. Ως άμεση συνέπεια, το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου δεν είναι μοναδικό (R. Korn (2010)), γεγονός που συνεπάγεται ότι η παραμετροποίηση που πρότειναν οι Madan, Carr και Chang (1998), υπό την οποία είναι εφικτή η τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης, δεν είναι μοναδική.

Στις επόμενες παραγράφους, επεκτείνουμε την ανωτέρω θεώρηση, παρουσιάζοντας ένα πλαίσιο αποτίμησης, το οποίο βασίζεται σε κατάλληλο μετασχηματισμό των παραμέτρων του υποδείγματος, με σκοπό τη συνεπή αναδιατύπωση του μηχανισμού τιμολόγησης υπό τον αντίστοιχο κόσμο ουδέτερου κινδύνου. Συγκεκριμένα, παρακάτω εξετάζεται ένας ιδιαίτερα δημοφιλής μηχανισμός κατασκευής ισοδύναμων μέτρων πιθανότητας, γνωστός στην βιβλιογραφία ως μετασχηματισμός Esscher. Η μέθοδος του μετασχηματισμού Esscher εισήχθη στη θεωρία αποτίμησης παραγώγων δικαιωμάτων προαίρεσης από τους Gerber και Shiu (1994). Ο μετασχηματισμός Esscher αποτελεί μια τεχνική αποτίμησης παραγώγων σε υποδείγματα αγορών όπου οι λογαριθμικές αξίες των υποκείμενων περιουσιακών τίτλων περιγράφονται από διαδικασίες με ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις (Gerber και Shiu (1994)). Με χρήση του μετασχηματισμού Esscher, η παρούσα αξία του διαπραγματευόμενου περιουσιακού τίτλου ικανοποιεί την ιδιότητα martingale, υπό το επαγόμενο ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου. Παρακάτω, παρατίθεται ο ορισμός του μετασχηματισμού Esscher και, μέσω του επαγόμενου μέτρου πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου, αναπτύσσεται η αντίστοιχη εναλλακτική μεθοδολογία αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης στο πλαίσιο του υποδείγματος VG.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.2.1 (Μετασχηματισμός Esscher) Έστω $f(x, t)$ η συνάρτηση πυκνότητας μιας διαδικασίας Lévy $X = \{X_t, t \geq 0\}$ την χρονική στιγμή t . Ο μετασχηματισμός Esscher με παράμετρο $h \in \mathbb{R}$ της συνάρτησης πυκνότητας $f(x, t)$ ορίζεται ως

$$\hat{f}(x, t, h) = \frac{e^{hx} f(x, t)}{M(h, t)} \quad (5.22)$$

όπου με $M(h, t)$ συμβολίζουμε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαιάς μεταβλητής X_t την χρονική στιγμή t η οποία δίνεται από

$$M(h, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{hx} f(x, t) dx.$$

Από τον ορισμό προκύπτει άμεσα ότι ο μετασχηματισμός Esscher μιας πυκνότητας πιθανότητας ορίζει μια νέα συνάρτηση πυκνότητας. Πράγματι, όπως αναφέρουν οι R. Shenyoy και

P. Kempthorne (2024), η εμφάνιση της ροπογεννήτριας στον παρονομαστή του δεξιά μέλους της (5.22) λειτουργεί ως όρος κανονικοποίησης, διασφαλίζοντας ότι η μετασχηματισμένη πυκνότητα $\hat{f}(x, t, h)$ ολοκληρώνεται στη μονάδα. Με χρήση του παραπάνω μετασχηματισμού, το αρχικό (πραγματικό) μέτρο πιθανότητας P τροποποιείται, επάγοντας ένα νέο μέτρο πιθανότητας Q^h . Το μέτρο αυτό ορίζεται μέσω της Radon-Nikodym παραγώγου ως προς το μέτρο πιθανότητας P , η οποία δίνεται από

$$\frac{dQ^h}{dP} = \frac{e^{hX_t}}{M(h, t)}$$

Η παράμετρος h , σύμφωνα με τους Gerber και Shiu (1994), παίζει καθοριστικό ρόλο, καθώς επιλέγεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε το επαγόμενο τροποποιημένο μέτρο πιθανότητας Q^h να αποτελεί μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου. Ως εκ τούτου, αναζητούμε την τιμή $h = h^*$ τέτοια ώστε, η παρούσα αξία του υποκειμένου περιουσιακού τίτλου $\{e^{-rt}S_t \mid t \geq 0\}$, όπου $S_t = S_0e^{X_t}$, να είναι martingale ως προς το μέτρο πιθανότητας που αντιστοιχεί στο h^* .

ΛΗΜΜΑ 5.2.1 Η τιμή $h = h^*$ η οποία καθιστά την προεξοφλημένη διαδικασία $\{e^{-rt}S_t \mid t \geq 0\}$ martingale υπό το τροποποιημένο μέτρο πιθανότητας Q^{h^*} καθορίζεται μέσω της σχέσης

$$e^{rt} = \frac{M(h^* + 1, t)}{M(h^*, t)}$$

η οποία, κάνοντας χρήση του τύπου των Lévy–Khintchine, ισοδυναμεί με

$$e^r = \frac{M(h^* + 1, 1)}{M(h^*, 1)}$$

ή

$$r = \ln \left(\frac{M(h^* + 1, 1)}{M(h^*, 1)} \right). \quad (5.23)$$

Αν υπάρχει λύση h^* της εξίσωσης (5.23), τότε ο μετασχηματισμός Esscher με παράμετρο h^* καλείται μετασχηματισμός Esscher ουδέτερου κινδύνου (*risk neutral Esscher transform*), ενώ το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας Q^{h^*} καλείται μέτρο πιθανότητας Esscher ουδέτερου κινδύνου (*risk neutral Esscher probability measure*).

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι η δυναμική της υποκειμένης διαδικασίας περιγράφεται από

$$S_t = S_0 e^{X_{t;\sigma,\nu,\theta}^{\text{VG}}}$$

Έστω επιπλέον $M(\cdot, t)$ η ροπογεννήτρια συνάρτηση της διαδικασίας VG, $X_{t;\sigma,\nu,\theta}^{\text{VG}}$, η οποία δίνεται από

$$M(h, t) = \left(\frac{1}{1 - h\theta\nu - \nu\frac{\sigma^2}{2}h^2} \right)^{t/\nu}, \quad h_1 < h < h_2$$

όπου

$$h_1 = -\frac{\theta}{\sigma^2} - \sqrt{\frac{\theta^2}{\sigma^4} + \frac{2}{\nu\sigma^2}}, \quad h_2 = -\frac{\theta}{\sigma^2} + \sqrt{\frac{\theta^2}{\sigma^4} + \frac{2}{\nu\sigma^2}}.$$

Υπό τον μετασχηματισμό Esscher, ορίζουμε την κλάση μέτρων πιθανότητας $\{Q^h : h \in (h_1, h_2)\}$. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση του μοντέλου VG ως προς το μέτρο Q^h υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} M(u, t, h) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{uX_t} Q^h(dX_t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} \hat{f}(x, t, h) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(h+u)t} f(x, t)}{M(h, t)} dx \\ &= \frac{M(h+u, t)}{M(h, t)} = \left(\frac{M(h+u, 1)}{M(h, 1)} \right)^t \\ &= M(u, 1, h)^t, \quad h_1 < h < h_2 - u \end{aligned}$$

όπου

$$M(u, 1, h) = \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\nu\sigma^2 h^2 - \nu\theta h}{1 - \nu\theta(h+u) - \nu\frac{\sigma^2}{2}(h+u)^2} \right)^{1/\nu}$$

Εξετάζοντας τις απαραίτητες συνθήκες για να έχουμε $h = h^*$ τέτοια ώστε

$$E^{h^*} (e^{-rt} S_t | \mathcal{F}_0) = S_0$$

θα κάνουμε χρήση του Λήμματος 5.2.1. Από το Λήμμα 5.2.1, έχουμε ότι η τιμή h^* καθορίζεται μέσω της λύσης της παρακάτω σχέσης

$$e^{rt} = \left(\frac{M(h^* + 1, 1)}{M(h^*, 1)} \right)^t = M(1, 1, h^*)^t, \quad h_1 < h^* < h_2 - 1$$

ή, ισοδύναμα,

$$e^r = \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\nu\sigma^2 h^{*2} - \nu\theta h^*}{1 - \nu\theta(h^* + 1) - \nu\frac{\sigma^2}{2}(h^* + 1)^2} \right)^{1/\nu} \quad (5.24)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $H(h)$ η οποία ορίζεται ως

$$H(h) = \frac{1 - \frac{1}{2}\nu\sigma^2 h^2 - \nu\theta h}{1 - \nu\theta(h+1) - \nu\frac{\sigma^2}{2}(h+1)^2}$$

με την παράγωγο ως προς h να δίνεται από

$$\frac{dH}{dh}(h) = \frac{\frac{\nu^2\sigma^2}{2}h^2 + \theta\nu^2(\frac{\sigma^2}{2} + \theta)h + \theta\nu^2(\frac{\sigma^2}{2} + \theta) + \nu\sigma^2}{(1 - \nu\theta(h+1) - \nu\frac{\sigma^2}{2}(h+1)^2)^2}$$

Για την συνάρτηση $H(h)$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες

$$\frac{dH}{dh}(h) > 0, \forall h \in (h_1, h_2 - 1), \quad \lim_{h \rightarrow h_1} H(h) = 0, \quad \lim_{h \rightarrow h_2 - 1^-} H(h) = \infty \quad (5.25)$$

Μέσω των ιδιοτήτων (5.25) εξασφαλίζονται η ύπαρξη και η μοναδικότητα της h^* η οποία επαληθεύει την (5.24) (A. H. Nzokem (2023)).

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.2.2 (Μετασχηματισμός Esscher της διαδικασίας VG) Ο μετασχηματισμός Esscher της διαδικασίας VG, $X_{\sigma, \nu, \theta}^{\text{VG}} = \{X_{t; \sigma, \nu, \theta}^{\text{VG}}, t \geq 0\}$, είναι επίσης διαδικασία VG με παραμέτρους $(\sigma, \tilde{\nu}, \tilde{\theta})$, όπου

$$\tilde{\theta} = \theta + h\sigma^2, \quad \tilde{\nu} = \frac{\nu}{1 - \nu\theta h - \nu\frac{\sigma^2}{2}h^2}$$

Ο μετασχηματισμός Esscher της διαδικασίας VG διατηρεί αναλλοίωτη την δομή του αρχικού υποδείγματος VG, εισάγοντας έναν επιπλέον όρο ($h\sigma^2$) στην παράμετρο που ρυθμίζει την συμπεριφορά της ασυμμετρίας της κατανομής του, ενώ παράλληλα αναπροσαρμόζει την παράμετρο κλίμακας της κατανομής γάμμα κατά έναν παράγοντα ίσο με $\frac{1}{1 - \nu\theta h - \nu\frac{\sigma^2}{2}h^2}$ (Α. Η. Nzokem (2023)). Στην περίπτωση $h = h^*$, η οποία καθορίζει τις αναγκαίες συνθήκες για την μετάβαση από το φυσικό μέτρο στο μέτρο πιθανότητας Esscher ουδέτερου κινδύνου, οι παραπάνω παράμετροι δύνανται να χαρακτηριστούν ως *οι παράμετροι ουδέτερου κινδύνου της διαδικασίας VG*.

5.2.4 Τιμολόγηση με χρήση του μετασχηματισμού Esscher

Αξιοποιώντας τα παραπάνω εργαλεία και έχοντας προσδιορίσει το επιθυμητό μέτρο πιθανότητας Esscher ουδέτερου κινδύνου, παρουσιάζουμε στην συνέχεια τον αντίστοιχο τύπο για τον υπολογισμό της δίκαιης αξίας ενός δικαιώματος αγοράς όταν η δυναμική του υποκείμενου τίτλου περιγράφεται από την γεωμετρική διαδικασία VG.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.2.3 Ας θεωρήσουμε την αξία ενός περιουσιακού τίτλου ο οποίος περιγράφεται από

$$S_t = S_0 e^{X_{t; \sigma, \nu, \theta}^{\text{VG}}}$$

όπου $X_{t; \sigma, \nu, \theta}^{\text{VG}}$ είναι διαδικασία VG με παραμέτρους (σ, ν, θ) . Έστω ακόμα ότι στην υπό μελέτη αγορά βρίσκεται υπό διαπραγμάτευση ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με τιμή εξάσκησης K και χρόνο λήξης T με τιμή στο χρόνο λήξης ίση με $(S_0 e^{X_{T; \sigma, \nu, \theta}^{\text{VG}}} - K)_+$ (terminal payoff of for the contingent claim). Τότε, η no-arbitrage αξία του δικαιώματος στο χρόνο $t < T$ δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$C_{\text{VG}}^{\text{call}}(t, S_t) = S_t \left[1 - \hat{F} \left(\log \left(\frac{K}{S_t} \right), T - t, h^* + 1 \right) \right] - K e^{-r(T-t)} \left[1 - \hat{F} \left(\log \left(\frac{K}{S_t} \right), T - t, h^* \right) \right] \quad (5.26)$$

όπου

$$\hat{F}(x, T - t, h^*) = \int_{-\infty}^x \hat{f}(y, T - t, h^*) dy \quad (5.27)$$

είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της διαδικασίας VG με παραμέτρους $(\sigma, \tilde{\nu}, \tilde{\theta})$ για $h = h^*$, και $\hat{f}(y, T - t, h^*)$ είναι ο μετασχηματισμός Esscher, με παράμετρο h^* , της συνάρτησης πυκνότητας της διαδικασίας VG.

Με χρήση τώρα του μετασχηματισμού Fourier και εργαζόμενοι υπό το μέτρο πιθανότητας Esscher ουδέτερου κινδύνου, ο μετασχηματισμός Esscher της πυκνότητας πιθανότητας $\hat{f}(y, \tau, h^*)$,

όπου $\tau = T - t$, της διαδικασίας VG με παράμετρο h^* , μπορεί εκφραστεί μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier ως

$$\hat{f}(y, \tau, h^*) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iyz} \mathcal{F}[\hat{f}](z, \tau, h^*) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iyz - \tau\psi^*(z)} dz$$

όπου

$$\mathcal{F}[\hat{f}](y, \tau, h^*) = e^{-\tau\psi^*(-y)}$$

ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $\hat{f}(y, \tau, h^*)$, και

$$\psi^*(u) = \frac{1}{\tilde{\nu}} \log \left(1 - i\tilde{\theta}\tilde{\nu}u + \tilde{\nu}\frac{\sigma^2}{2}u^2 \right)$$

ο χαρακτηριστικός εκθέτης της διαδικασίας VG με παραμέτρους $(\sigma, \tilde{\nu}, \tilde{\theta})$ και $h = h^*$ (A. H. Nzokem (2023)). Ο Nzokem (2023) (βλ. σχέση (74) pp. 19), υπολογίζοντας τον μετασχηματισμό Fourier της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής $\hat{F}(y, t, h^*)$ μέσω της σχέσης

$$\mathcal{F}[\hat{F}](y, \tau, h^*) = \frac{\mathcal{F}[\hat{f}](y, \tau, h^*)}{iy} + \pi \mathcal{F}[\hat{f}](0)\delta(y),$$

όπου με $\delta(\cdot)$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση δέλτα του Dirac, καταλήγει στο ότι η σχέση (5.27) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως το Gil-Palaez ολοκλήρωμα (Gil-Palaez inversion integral) (βλ. P. Hughett (1998))

$$\hat{F}(y, \tau, h^*) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi^*(z)}{iz} e^{-iyz} dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iyz - \tau\psi^*(z)}}{iz} dz \quad (5.28)$$

όπου με ϕ^* , ψ^* συμβολίζουμε αντίστοιχα τη χαρακτηριστική συνάρτηση και το χαρακτηριστικό εκθέτη της διαδικασίας VG υπό την παραμετροποίηση ουδέτερου κινδύνου. Βέβαια, η κλειστή μορφή της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής, αντίστοιχης της σχέσης (5.28), μπορεί να ανακτηθεί και μέσω μιας εναλλακτικής προσέγγισης. Συγκεκριμένα, εισάγουμε την βοηθητική συνάρτηση \hat{F}_ρ , η οποία ορίζεται ως

$$\hat{F}_\rho(y, \tau, h^*) = e^{-\rho y} \hat{F}(y, \tau, h^*)$$

για κάποια θετική σταθερά ρ . Ακολουθώντας τον αποδεικτικό συλλογισμό του Hirsra (2013) (pp. 3-4) η αρχική συνάρτηση \hat{F} μπορεί να ανακτηθεί από τη σχέση

$$\hat{F}(y, \tau, h^*) = \frac{e^{\rho y}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[\hat{F}_\rho](z, \tau, h^*) e^{-iyz} dz = \frac{e^{\rho y}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi^*(z + \rho i)i}{z + \rho i} e^{-iyz} dz \quad (5.29)$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε αριθμητικά το ολοκλήρωμα στην (5.29), σύμφωνα με τον Tanaka (2013), εφαρμόζουμε τον κανόνα του τραπεζίου (trapezoidal rule), ο οποίος οδηγεί στην ακόλουθη προσέγγιση

$$\hat{F}(n\tilde{\Delta}, \tau, h^*) \approx \frac{e^{\rho n\tilde{\Delta}}}{2\pi} G_{\phi^*, \Delta, N}(n\tilde{\Delta})$$

όπου

$$G_{\phi^*, \Delta, N}(x) = \sum_{-N \leq m \leq N-1} \Delta \frac{\phi^*(m\Delta + \rho i)i}{m\Delta + \rho i} e^{-im\Delta x} \quad (5.30)$$

με $\Delta, \tilde{\Delta} > 0$. Σε αυτό το σημείο, για τον αποδοτικό υπολογισμό του αθροίσματος στην (5.30), χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο Fast Fourier Transform (FFT). Ο αλγόριθμος FFT αποτελεί έναν αποδοτικό τρόπο υπολογισμού του Discrete Fourier Transform (DFT), ο οποίος μειώνει την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αρχικού DFT από τάξης $\mathcal{O}(N^2)$ υπολογισμών σε τάξης $\mathcal{O}(N \log(N))$ υπολογισμών. Η υπολογιστική επίδοση του αλγορίθμου FFT συνιστά ένα ιδιαίτερα σημαντικό χαρακτηριστικό του, καθώς για μεγάλα N , ο όρος $\log(N)$ καθίσταται ολοένα και πιο αμελητέος σε σύγκριση με το N . Σχεδόν όλα τα υπολογιστικά πακέτα παρέχουν ενσωματωμένες υλοποιήσεις του αλγορίθμου FFT. Ως εκ τούτου, δεν κρίνεται σκόπιμη η αναλυτική παρουσίαση του ίδιου του αλγορίθμου. Περιοριζόμαστε μόνο στις βασικές συνθήκες που απαιτούνται για την άμεση εφαρμογή του. Συγκεκριμένα, για την απευθείας χρήση του αλγορίθμου FFT τα διακριτά βήματα Δ και $\tilde{\Delta}$ θα πρέπει να ικανοποιούν την σχέση

$$\Delta \tilde{\Delta} = \frac{\pi}{N}$$

Επιπλέον, προκειμένου να επιτευχθούν ακριβείς αριθμητικές προσεγγίσεις των τιμών $\hat{F}(n\tilde{\Delta})$, $n = -N, \dots, N-1$, απαιτείται η επιλογή επαρκώς μικρού βήματος Δ (K. Tanaka (2013)).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο παρουσιάσαμε δυο διαφορετικές μεθοδολογίες προκειμένου να καταστεί εφικτή η τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου υπό το υπόδειγμα Variance-Gamma. Σκοπός του παρόντος Κεφαλαίου είναι η εφαρμογή των μεθόδων αυτών σε πραγματικά δεδομένα της αγοράς, καθώς και η αξιολόγηση της επίδοσης τους σε σύγκριση με το υπόδειγμα των Black and Scholes. Αναλυτικότερα, αφού συλλεχθεί το σύνολο των διαθέσιμων τιμών των δικαιωμάτων προαίρεσης από την αγορά, θα κάνουμε χρήση της μεθόδου βαθμονόμησης που εισήχθησε νωρίτερα προκειμένου να εξάγουμε το βέλτιστο διάνυμα παραμέτρων, το οποίο προκύπτει με ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης που διατυπώθηκε στη Παράγραφο 5.2.2. Στη συνέχεια, θα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό Esscher, λαμβάνοντας αρχικά το διάνυμα παραμέτρων που προκύπτει από την εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας στις ημερήσιες λογαριθμικές αποδόσεις του υποκειμένου δείκτη επί του οποίου διαπραγματεύεται το υπό μελέτη παράγωγο. Έπειτα, μέσω του κατάλληλου μετασχηματισμού των παραμέτρων της VG που παρουσιάσαμε στην Παράγραφο 5.2.3, θα κάνουμε χρήση του τύπου (5.24) ώστε να υπολογίσουμε την τιμή του δικαιώματος αγοράς υπό το υπόδειγμα VG. Τέλος, θα προχωρήσουμε στον προσδιορισμό του βέλτιστου υποδείγματος, βάσει του αντίστοιχου κριτηρίου επίδοσης.

6.1 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Το σύνολο δεδομένων που θα χρησιμοποιηθεί για την αξιολόγηση των μεθόδων αποτίμησης αποτελείται από συνολικά 108 παρατηρηθείσες τιμές του παραγώγου SPX. Τα δικαιώματα προαίρεσης SPX αποτελούν συμβόλαια που διαπραγματεύονται στο χρηματιστήριο παραγώγων CBOE Global Markets (Chicago Board Options Exchange), και έχουν σχεδιαστεί ώστε να παρακολουθούν τη δυναμική του δείκτη S&P500 (Standard & Poor's 500). Ο δείκτης S&P500 περιλαμβάνει 500 από τις μεγαλύτερες εισηγμένες εταιρίες των Ηνωμένων Πολιτειών και θεωρείται ευρέως ως αντιπροσωπευτικός δείκτης της συνολικής πορείας της αμερικανικής χρηματιστηριακής αγοράς και ως βαρόμετρο της οικονομικής σταθερότητας της χώρας. Εφόσον ο S&P500 αποτελεί χρηματιστηριακό δείκτη και όχι διαπραγματεύσιμη μετοχή, τα δικαιώματα προαίρεσης SPX διαφοροποιούνται από τα τυπικά δικαιώματα προαίρεσης επί μετοχών. Συγκεκριμένα, προσφέρουν μια περισσότερο μακροοικονομική εικόνα, καθώς παρέχουν στους επενδυτές τη δυνατότητα να εκφράσουν τις προσδοκίες τους σχετικά με τη συνολική πορεία της αγοράς και να λάβουν θέσεις επί του γενικότερου επενδυτικού κλίματος, αντί να εκτίθενται στους ιδιοσυγκρασιακούς κινδύνους που συνδέονται με μια μεμονωμένη εταιρεία. Για λόγους πληρότητας, σημειώνουμε ότι καθ' όλη τη διάρκεια του Κεφαλαίου θα θεωρείται ότι ο δείκτης δεν αποδίδει μερίσματα. Το σύνολο δεδομένων αποτελείται από τιμές της αγοράς του παραγώγου με ημερομηνία διαπραγμάτευσης την 2026-02-06 και τρεις διαφορετικές ημερομηνίες εξάσκησης: 2026-02-20, 2026-04-17 και 2026-07-17. Η τιμή κλεισίματος του δείκτη κατά την ημερομηνία εξαγωγής των δεδομένων ανέρχεται στις 6915.52 μονάδες.

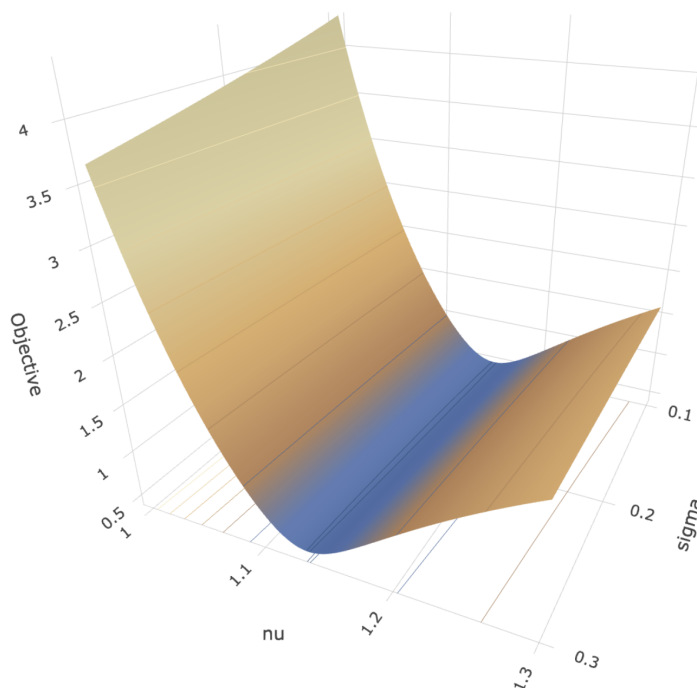
Option	K	1 Month (T=0.08) Call Option	3 Months (T=0.25) Call Option	6 Months (T=0.5) Call Option
1	800	5899.97	5920.11	6092.38
2	4500	2444.73	2470.71	2060.87
3	5300	1563.57	1657.03	1715.65
4	5675	1231.01	1229.58	1276.77
5	5700	1281.78	1189.30	1269.05
6	5900	983.90	1072.57	1129.49
7	6250	563.20	676.36	927.49
8	6330	638.74	718.59	832.24
9	6400	504.00	580.17	699.67
10	6560	352.74	481.59	661.60
11	6575	358.95	439.41	534.10
12	6690	223.80	345.68	538.21
13	6720	225.40	393.70	536.88
14	6740	272.10	346.17	542.00
15	6800	159.50	252.20	413.00
16	6825	139.20	240.70	408.80
17	6840	107.50	199.70	395.10
18	6880	95.50	218.10	364.40
19	6910	78.97	159.99	356.88
20	6960	49.79	175.50	308.50
21	7010	27.65	134.50	248.10
22	7020	23.41	141.10	332.72
23	7040	16.70	124.30	266.78
24	7080	8.45	102.53	200.43
25	7090	6.30	103.21	195.48
26	7100	5.30	100.29	236.90
27	7130	2.80	64.40	178.30
28	7190	0.82	55.50	152.60
29	7230	0.50	46.20	170.60
30	7240	0.37	52.30	132.10
31	7400	0.15	17.30	97.14
32	7450	0.10	10.50	87.85
33	7625	0.17	3.56	45.00
34	7850	0.05	1.05	17.70
35	8800	0.05	0.15	0.87
36	9400	0.05	0.10	0.35
Risk Free Rate		3.72%	3.69%	3.62%

Πίνακας 6.1: Τιμές του αξιολογίου συναρτήσει των αντίστοιχων τιμών εξάσκησης

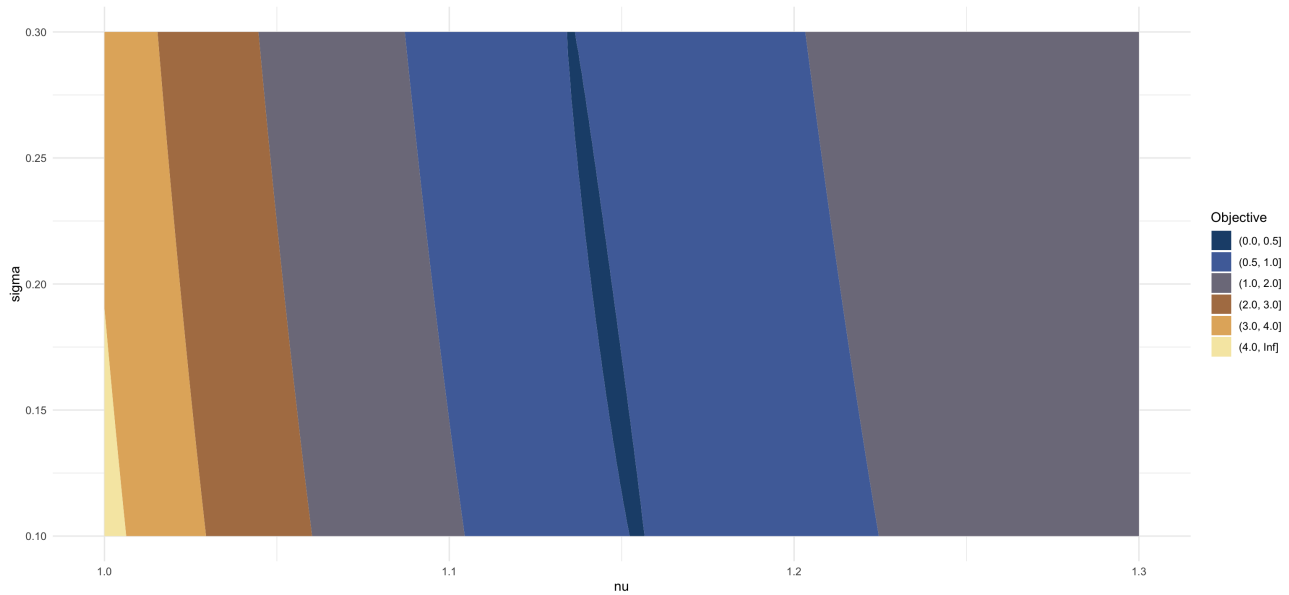
6.2 ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ BLACK AND SCHOLES ΚΑΙ VG

6.2.1 Αξιολόγηση της απόδοσης της μεθόδου βαθμονόμησης

Προτού προχωρήσουμε στην εφαρμογή της μεθόδου βαθμονόμησης που παρουσιάσαμε στην Παράγραφο 5.2.2, θα αξιολογήσουμε την αποτελεσματικότητα της σε συνθήκες προσομοίωσης. Συγκεκριμένα, θα αξιοποιήσουμε τη σχέση (5.16) προκειμένου να παράξουμε ένα σύνολο προσομοιωμένων τιμών του παραγώγου, και με βάση τα προσομοιωμένα δεδομένα θα επιχειρήσουμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του υποκείμενου μοντέλου. Η παραγωγή των δεδομένων θα πραγματοποιηθεί με χρήση του μοντέλου πολλαπλασιαστικού σφάλματος, όπως αυτό παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 5.2.2, θέτοντας την τιμή της σταθεράς η ίση με 0.08. Ως υπόδειγμα αναφοράς λαμβάνεται το συμμετρικό υπόδειγμα VG, με διάνυσμα παραμέτρων $(\sigma, \nu, \theta) = (0.2, 1.2, 0)$. Επιπλέον, θεωρούμε ότι τα υπό μελέτη αξιόγραφα διαθέτουν ημερομηνίες εξάσκησης σε χρονικούς ορίζοντες 3 μηνών, 6 μηνών και 1 έτους. Οι αντίστοιχοι ετήσιοι επιτοκιακοί ρυθμοί λαμβάνονται ίσοι με 2%, 3% και 6% για κάθε χρονική περίοδο. Τέλος, υποθέτουμε ότι η παρούσα τιμή της υποκείμενης μετοχής είναι \$1000, ενώ οι τιμές εξάσκησης ορίζονται στο διάστημα $[500, 2500]$ με βήμα 50, με την ίδια διάταξη να λαμβάνεται για κάθε μια από τις τρεις ημερομηνίες λήξης. Τα παρακάτω διαγράμματα απεικονίζουν τη μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης k (βλ. σχέση (5.21)), θεωρώντας ότι οι παράμετροι σ και ν μεταβάλλονται, ενώ η παράμετρος θ διατηρείται σταθερή.



Σχήμα 6.1: Επιφάνεια της αντικειμενικής συνάρτησης της μεθόδου μη-γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων για το υπόδειγμα VG, ως προς τις παραμέτρους σ, ν .



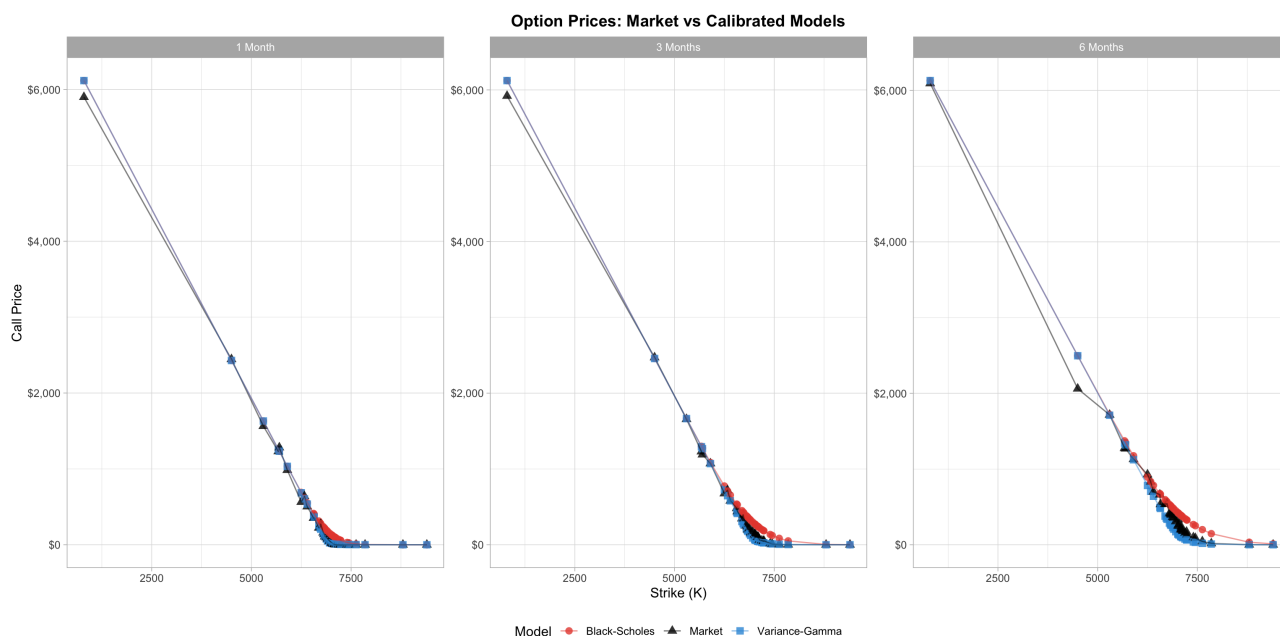
Σχήμα 6.2: Διάγραμμα των ισοϋψών καμπυλών της αντικειμενικής συνάρτησης της μεθόδου μη-γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων για το υπόδειγμα VG, ως προς τις παραμέτρους σ, ν .

Η διαγραμματική παρουσίαση της αντικειμενικής συνάρτησης k παρέχει μια πρώτη ένδειξη της ικανότητας της μεθόδου βαθμονόμησης να ανιχνεύει με επιτυχία το βέλτιστο διάνυσμα παραμέτρων. Πιο αναλυτικά, από το Σχήμα 6.2, το οποίο απεικονίζει τις ισοϋψείς καμπύλες της αντικειμενικής συνάρτησης, παρατηρείται ότι η περιοχή ελαχιστοποίησης επιτυγχάνεται για τιμές των παραμέτρων σ και ν κοντά στις πραγματικές τους τιμές. Ωστόσο, απομένει να διερευνηθεί κατά πόσο η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώνεται και στην πράξη. Για το σκοπό αυτό θα προχωρήσουμε στον προσδιορισμό των βέλτιστων παραμέτρων με χρήση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης Nelder–Mead (Downhill Simplex method), ο οποίος αποτελεί έναν ευρέως χρησιμοποιούμενο αλγόριθμο για προβλήματα μη γραμμικής βελτιστοποίησης. Η εφαρμογή του αλγορίθμου πραγματοποιήθηκε μέσω της συνάρτησης `stats::optim()` του προγραμματιστικού πακέτου R, με αρχικό διάνυσμα παραμέτρων $(\sigma, \nu, \theta) = (0.3, 0.1, 0.1)$, μέγιστο πλήθος επαναλήψεων του αλγορίθμου ίσο με 10^6 και σχετικό επίπεδο ανοχής (relative tolerance) ίσο με 10^{-10} . Ο αλγόριθμος κατάφερε να συγκλίνει μετά από μόλις λίγα δευτερόλεπτα επιτυγχάνοντας βέλτιστο διάνυσμα παραμέτρων $(\sigma, \nu, \theta) = (0.193373, 1.122613, -0.000935)$ και βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ίση με 0.497847. Από τα αποτελέσματα της διαδικασίας βελτιστοποίησης είναι εμφανές ότι οι παράμετροι του μοντέλου VG λαμβάνουν τιμές πολύ κοντά σε αυτό που θεωρήσαμε κατά την αρχικοποίηση της μεθόδου προσομοίωσης, γεγονός που ενισχύει την αξιοπιστία της μεθόδου βαθμονόμησης.

6.2.2 Εκτίμηση των παραμέτρων με χρήση της μεθόδου βαθμονόμησης

Στη παρούσα παράγραφο θα επιχειρήσουμε να αποδώσουμε στον αναγνώστη μια εμπειρικά τεκμηριωμένη σύγκριση μεταξύ του υποδείγματος VG και του υποδείγματος Black and Scholes, εκτιμώντας τις παραμέτρους κάθε υποδείγματος μέσω της μεθόδου βαθμονόμησης. Παρά τις γνωστές ασυμβατότητες του μοντέλου των Black and Scholes, οι οποίες αναλύθηκαν στο

Κεφάλαιο 5, το συγκεκριμένο υπόδειγμα παραμένει ένα από τα πλέον ευρέως χρησιμοποιούμενα με εφαρμογές που καλύπτουν μεγάλο εύρος τόσο της θεωρητικής ανάλυσης όσο και της χρηματοοικονομικής πρακτικής. Για το λόγο αυτό, είναι σκόπιμο να χρησιμοποιηθεί ως σημείο αναφοράς, προκειμένου να αξιολογηθεί η επίδοση του υποδείγματος VG στο πλαίσιο της αποτίμησης παραγώγων. Προκειμένου να γίνει εκτίμηση των παραμέτρων αμφότερων των υποδειγμάτων, θα προβούμε σε ελασχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 5.2.2. Σημειώνεται ότι για τη διαδικασία βαθμονόμησης, η βελτιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης πραγματοποιήθηκε μέσω του αλγορίθμου Nelder–Mead στην περίπτωση του υποδείγματος VG, ενώ στην περίπτωση του Black and Scholes κάναμε χρήση της μεθόδου Brent–Dekker. Στην περίπτωση του υποδείγματος VG ο αλγόριθμος Nelder–Mead κατάφερε να επιτύχει βέλτιστο διάνυσμα παραμέτρων $(\sigma, \nu, \theta) = (0.076262, 0.650493, 0.000003)$. Αντίστοιχα στην περίπτωση του υποδείγματος Black and Scholes η εφαρμογή του αλγορίθμου Brent–Dekker ήταν σχεδόν ακαριαία, καταλήγοντας σε βέλτιστη εκτίμηση της μεταβλητότητας σ ίση με 0.210399.



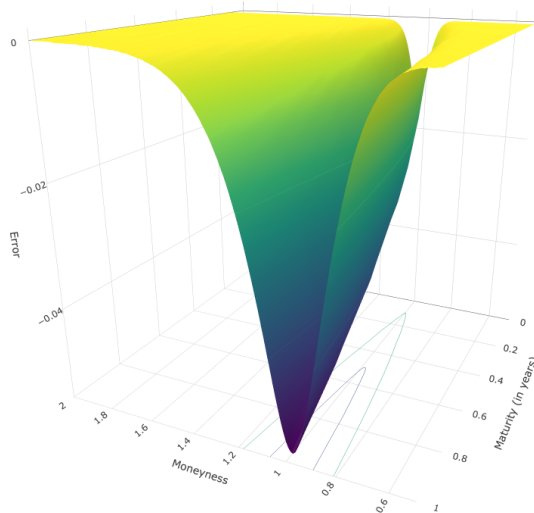
Σχήμα 6.3: Σύγκριση των παρατηρούμενων τιμών με τις αντίστοιχες που προκύπτουν από την βαθμονόμηση των υποδειγμάτων.

Από το παραπάνω διάγραμμα, το μοντέλο Black and Scholes παρουσιάζει ασθενή προσαρμογή, καθώς όπως φαίνεται τείνει να υπερεκτιμά τα at-the-money options σε σύγκριση με το υπόδειγμα VG. Η παραπάνω γραφική διαγνωστική ανάλυση επιβεβαιώνεται και ποσοτικά, καθώς αξιολογώντας την επίδοση των υποδειγμάτων με χρήση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το υπόδειγμα VG επιτυγχάνει σημαντικά καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα της αγοράς σε σύγκριση με το υπόδειγμα Black and Scholes. Συγκεκριμένα, το μέσο τετραγωνικό σφάλμα για το υπόδειγμα VG υπολογίστηκε ίσο με 7750.837 ενώ για το υπόδειγμα Black and Scholes ανέρχεται σε 12942.63 (αύξηση κατά περίπου 67%). Επομένως, μια πρώτη συμπερασματολογία που μπορεί να εξαχθεί βάσει των παραπάνω αποτελεσμάτων είναι ότι το υπόδειγμα VG φαίνεται να αποτελεί καταλληλότερη επιλογή για την περιγραφή της δυναμικής της υπό μελέτη αγοράς.

Προκειμένου να γενικεύσουμε την ανάλυση μας, αξιοποιώντας τα διανύσματα παραμέτρων που προέκυψαν από τη διαδικασία βαθμονόμησης για αμφότερα τα υποδείγματα, θα εξετάσουμε πιο διεξοδικά τις διαφοροποιήσεις που παρατηρούνται μεταξύ των δύο μοντέλων. Για το σκοπό αυτό, θα κατασκευάσουμε ένα πειραματικό σύνολο δεδομένων λαμβάνοντας ένα ευρύ φάσμα 151 τιμών του moneyness ($\kappa = S/K$), από 0.5 έως 2, καθώς και διαφορετικές ημερομηνίες εξάσκησης. Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε το σφάλμα ως την κανονικοποιημένη διαφορά μεταξύ της τιμής ενός δικαιώματος προαίρεσης που προκύπτει από την αναλυτική φόρμουλα του υποδείγματος VG και της αντίστοιχης τιμής που προκύπτει από τον τύπο των Black and Scholes, ως εξής

$$Error(\kappa, \tau) = \frac{C_{VG}^{call}(S, \tau)}{K} - \frac{C_{BS}^{call}(S, \tau)}{K}$$

όπου με τ συμβολίσουμε τον χρόνο εξάσκησης. Το Σχήμα 6.4 απεικονίζει το σφάλμα $Error(\kappa, \tau)$ ως συνάρτηση του χρόνου εξάσκησης και του moneyness (κ). Επιπλέον, αναφέρεται ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου S είναι σταθερή και ίση με την τιμή κλεισίματος του δείκτη (όπως παραπάνω), ενώ το moneyness μεταβάλλεται ανάλογα με την τιμή εξάσκησης.

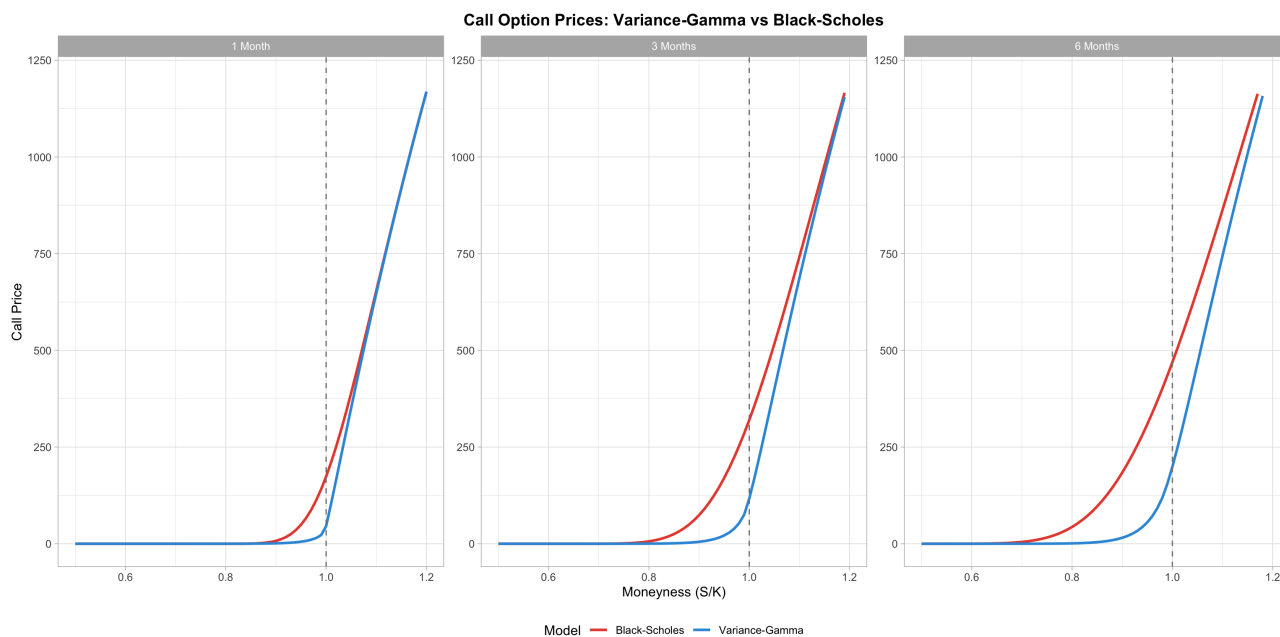


Σχήμα 6.4: Επιφάνεια σφάλματος τιμολόγησης μεταξύ των υποδειγμάτων VG και Black and Scholes ως προς το moneyness (S/K) και τον χρόνο έως την λήξη.

Το παραγόμενο διάγραμμα καταδεικνύει, ή τουλάχιστον επιβεβαιώνει το αρχικό μας συμπέρασμα, ότι το μοντέλο Black and Scholes τείνει να υπερκοστολογεί τα at-the-money δικαιώματα αγοράς σε σύγκριση με το υπόδειγμα VG. Παράλληλα, η απόκλιση μεταξύ των δύο υποδειγμάτων φαίνεται να εντείνεται καθώς αυξάνεται ο χρόνος έως την εξάσκηση, ενώ οι διαφορές τους εμφανίζονται να εξομαλύνονται αμφότερες των δύο πλευρών του διαγράμματος.

Το επόμενο σχήμα παράγει αποτελέσματα συνεπή με το προηγούμενο, παρέχοντας ωστόσο ελαφρώς πλουσιότερη πληροφόρηση σχετικά με τα σημεία απόκλισης των δύο υποδειγμάτων. Πιο αναλυτικά, από το σχήμα 6.5, καθίσταται εμφανές ότι όσο αυξάνεται ο χρόνος έως την

εξάσκηση, το μοντέλο Black and Scholes προσδίδει μεγαλύτερη αξία στο αξιόγραφο όταν αυτό είναι at-the-money. Αντιθέτως, όταν το αξιόγραφο είναι είτε deep in-, είτε deep out-of-the-money, τα δύο μοντέλα εμφανίζουν παρόμοια συμπεριφορά και οδηγούν σε συγκρίσιμες αποτιμήσεις.



Σχήμα 6.5: Σύγκριση των τιμών των δικαιωμάτων προαίρεσης που προκύπτουν από τα υποδείγματα VG και Black and Scholes ως συνάρτηση του moneyness, για διαφορετικούς χρόνους έως τη λήξη.

6.3 ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ESSCHER

Στο τέλος του προηγούμενου Κεφαλαίου, καταφέραμε να διατυπώσουμε μια εναλλακτική κλειστή μορφή για την δίκαιη no-arbitrage αξία ενός δικαιώματος αγοράς, κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού Esscher. Ωστόσο, σε αντίθεση με την φόρμουλα της δίκαιης αξίας (5.24), η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής του μετασχηματισμού Esscher της διαδικασίας VG δεν διαθέτει κλειστό τύπο. Παρά τον περιορισμό αυτό, με κατάλληλο χειρισμό, καταφέραμε να εκφράσουμε την συνάρτηση κατανομής σε μια προσεγγιστική μορφή, η οποία μπορεί να υπολογιστεί αποτελεσματικά με χρήση του αλγορίθμου FFT. Σκοπός της παρούσας παραγράφου είναι να παρουσιάσουμε αναλυτικά τα βήματα εφαρμογής της μεθόδου αποτίμησης, αξιοποιώντας το μετασχηματισμό Esscher, παρουσιάζοντας τα βασικά αποτελέσματα σε σύγκριση τόσο με τις τιμές της αγοράς όσο και με τα αποτελέσματα που λάβαμε μέσω της μεθόδου βαθμονόμησης.

Στο πρώτο στάδιο υλοποίησης της μεθοδολογίας, συλλέχθηκαν 775 παρατηρηθείσες τιμές του δείκτη S&P500 για την χρονική περίοδο από 2023-01-01 έως 2026-02-06. Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε εκτίμηση των παραμέτρων του υποδείγματος VG στις ημερήσιες λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας, αξιοποιώντας την αντίστοιχη υλοποίηση που παρέχεται μέσω της συνάρτησης VGfit του πακέτου Variance Gamma των D. Scott και C. Y. Dong (2025). Το βέλτιστο ετήσιο διάνυσμα παραμέτρων (annualized parameters)

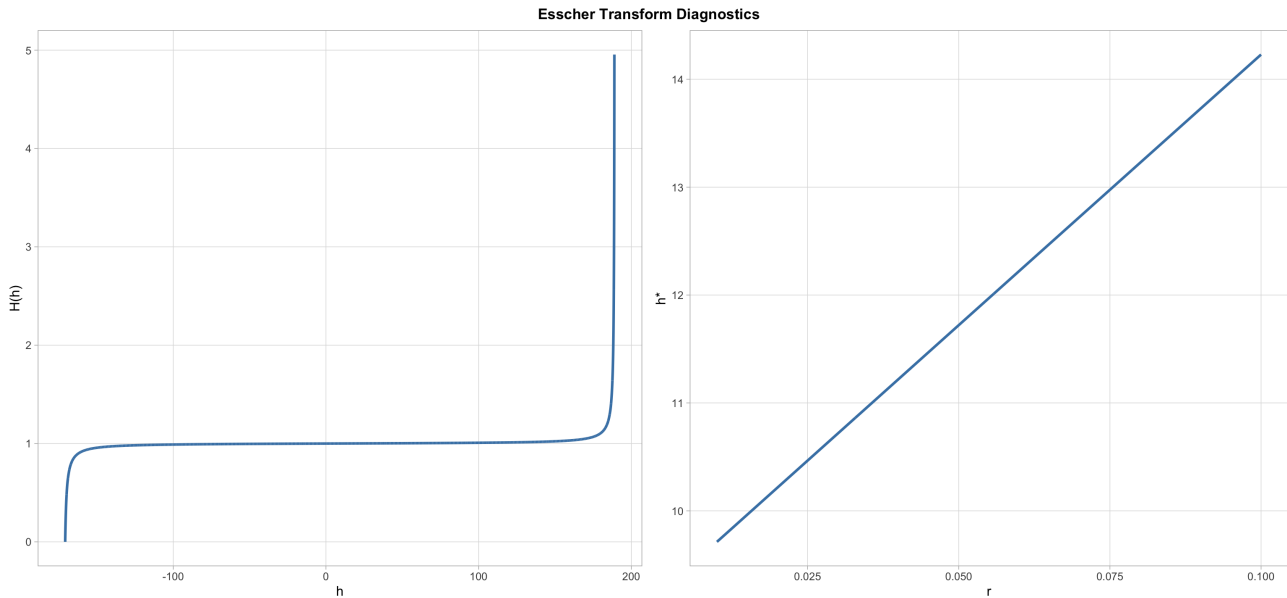
εκτιμήθηκε ως

$$(\hat{\sigma}, \hat{\nu}, \hat{\theta}) = (0.141311, 0.003084, -0.193904).$$

Χρησιμοποιώντας τις εκτιμηθείσες παραμέτρους του υποδείγματος, εξετάστηκε η συμπεριφορά της συνάρτησης

$$H(h) = \frac{1 - \frac{1}{2}\nu\sigma^2h^2 - \nu\theta h}{1 - \nu\theta(h+1) - \nu\frac{\sigma^2}{2}(h+1)^2}$$

στο διάστημα $[h_1, h_2 - 1]$. Ειδικότερα, όπως προκύπτει από το αριστερό διάγραμμα του σχήματος 6.6, η $H(h)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση εντός του εν λόγω διαστήματος, γεγονός που διασφαλίζει την ύπαρξη μοναδικής λύσης h^* η οποία επαληθεύει την (5.24). Επιπλέον, από το δεξιό διάγραμμα του σχήματος 6.6, όπου απεικονίζεται η λύση της (5.24) ως συνάρτηση του επιτοκιακού ρυθμού r , για τιμές του r μικρότερες από 10%, διαπιστώνεται άμεσα ότι η λύση h^* είναι θετικά συσχετισμένη με το επιτόκιο της αγοράς r .



Σχήμα 6.6: Γραφική απεικόνιση της συνάρτησης $H(h)$ (αριστερό διάγραμμα) και της λύσης h^* ως συνάρτηση του επιτοκιακού ρυθμού για $(\sigma, \nu, \theta) = (0.141, 0.0031, -0.194)$, $h_1 = -170.7625$ και $h_2 = 190.1833$.

Για κάθε τιμή του επιτοκιακού ρυθμού που παρατίθεται στον Πίνακα 6.1, υπολογίστηκε η αντίστοιχη τιμή της παραμέτρου h^* , όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 6.2. Επιπλέον, στον ίδιο πίνακα παρατίθενται οι παράμετροι ουδέτερου κινδύνου της διαδικασίας VG (βλέπε Θεώρημα 5.2.2).

Time to Maturity	Risk Free Rate	h^*	σ	$\tilde{\nu}$	$\tilde{\theta}$
1 Month	3.72%	11.07853	0.1413106	0.003075257	0.02731938
3 Months	3.69%	11.06347	0.1413106	0.003075253	0.02701861
6 Months	3.62%	11.02832	0.1413106	0.003075244	0.0263168

Πίνακας 6.2: Τιμές της παραμέτρου h^* και των μετασχηματισμένων παραμέτρων $(\sigma, \tilde{\nu}, \tilde{\theta})$.

Στο επόμενο στάδιο, αξιοποιούνται οι ανωτέρω μετασχηματισμένες παράμετροι και επιχειρείται ο υπολογισμός της συνάρτησης κατανομής μέσω της εφαρμογής του αλγορίθμου FFT. Η διαδικασία αρχικοποιείται με τον καθορισμό της έκτασης της επιφάνειας του πλέγματος τιμών, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της (5.30), καθώς και για την αριθμητική προσέγγιση της συνάρτησης κατανομής, μέσω των παραμέτρων Δ και $\tilde{\Delta}$. Για λόγους πληρότητας, αναφέρεται ότι η επιλογή της παραμέτρου Δ αφήνεται στην ευχέρεια του χρήστη. Στην παρούσα εφαρμογή, η παράμετρος Δ ορίστηκε ίση με 0.2. Με χρήση της παραμέτρου αυτής και αξιοποιώντας τη συνθήκη $\Delta\tilde{\Delta} = \pi/N$, όπου N είναι επαρκώς μεγάλο και συνήθως επιλέγεται ως δύναμη του 2, υπολογίζεται την τιμή της παραμέτρου $\tilde{\Delta}$. Στη συνέχεια, ορίζεται το πλέγμα τιμών (χ, u) ως εξής

$$\begin{aligned}\chi_n &= n\tilde{\Delta}, \quad n = -N, \dots, N-1 \\ u_m &= m\Delta, \quad m = -N, \dots, N-1.\end{aligned}$$

Για κάθε τιμή του διανύσματος u , υπολογίζεται το αντίστοιχο διάνυσμα τιμών της ακόλουθης σχέσης

$$\psi_\rho^*(u) = \Delta \frac{\phi^*(u + \rho i)i}{u + \rho i}$$

όπου με ϕ^* δηλώνεται η χαρακτηριστική συνάρτηση της διαδικασίας VG υπό το μέτρο πιθανότητας Esscher ουδέτερου κινδύνου και ρ η σταθερά απόσβεσης (damping parameter), η οποία για τους σκοπούς της εφαρμογής έχει οριστεί ίση με 0.5.

Προκειμένου να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος FFT στο περιβάλλον της R, χρησιμοποιείται η ενσωματωμένη συνάρτηση `fft()`, η οποία λαμβάνει ως όρισμα ένα (εν γένει μιγαδικό) διάνυσμα $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ και επιστρέφει τον μη κανονικοποιημένο μονομεταβλητό διακριτό μετασχηματισμό Fourier (Discrete Fourier Transform (DFT)) της αντίστοιχης ακολουθίας τιμών ζ . Συγκεκριμένα, η έξοδος ορίζεται από

$$y(h) = \sum_{k=1}^n \zeta_k \exp\{-2\pi i(k-1)(h-1)/n\}. \quad (6.1)$$

Βέβαια, προκειμένου να καταστεί δυνατή η άμεση εφαρμογή του αλγορίθμου είναι αναγκαίο να αναδιατυπωθεί η (5.28) σε μορφή συμβατή με την αντίστοιχη της (6.1). Θεωρούμε την ποσότητα

$$G_{\phi^*, \Delta, N}(x) = \sum_{-N \leq m \leq N-1} \Delta \psi_\rho^*(m\Delta) e^{-im\Delta x}$$

και την υπολογίζουμε στα σημεία $\chi_n = n\tilde{\Delta}$. Τότε

$$\begin{aligned}G(n\tilde{\Delta}) &= \sum_{-N \leq m \leq N-1} \Delta \psi_\rho^*(m\Delta) e^{-imn\Delta\tilde{\Delta}} \\ &= \sum_{-N \leq m \leq N-1} \Delta \psi_\rho^*(m\Delta) e^{-2\pi i \frac{mn}{2N}}\end{aligned}$$

Θέτοντας $k = m + N$, οπότε $k = 0, 1, \dots, 2N - 1$ και $m = k - N$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 G(n\tilde{\Delta}) &= \sum_{0 \leq k \leq 2N-1} \Delta\psi_{\rho}^*((k-N)\Delta) e^{-2\pi i \frac{(k-N)n}{2N}} \\
 &= e^{i\pi n} \sum_{0 \leq k \leq 2N-1} \Delta\psi_{\rho}^*((k-N)\Delta) e^{-2\pi i \frac{kn}{2N}} \\
 &= (-1)^n \sum_{0 \leq k \leq 2N-1} \Delta\psi_{\rho}^*((k-N)\Delta) e^{-2\pi i \frac{kn}{2N}}
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

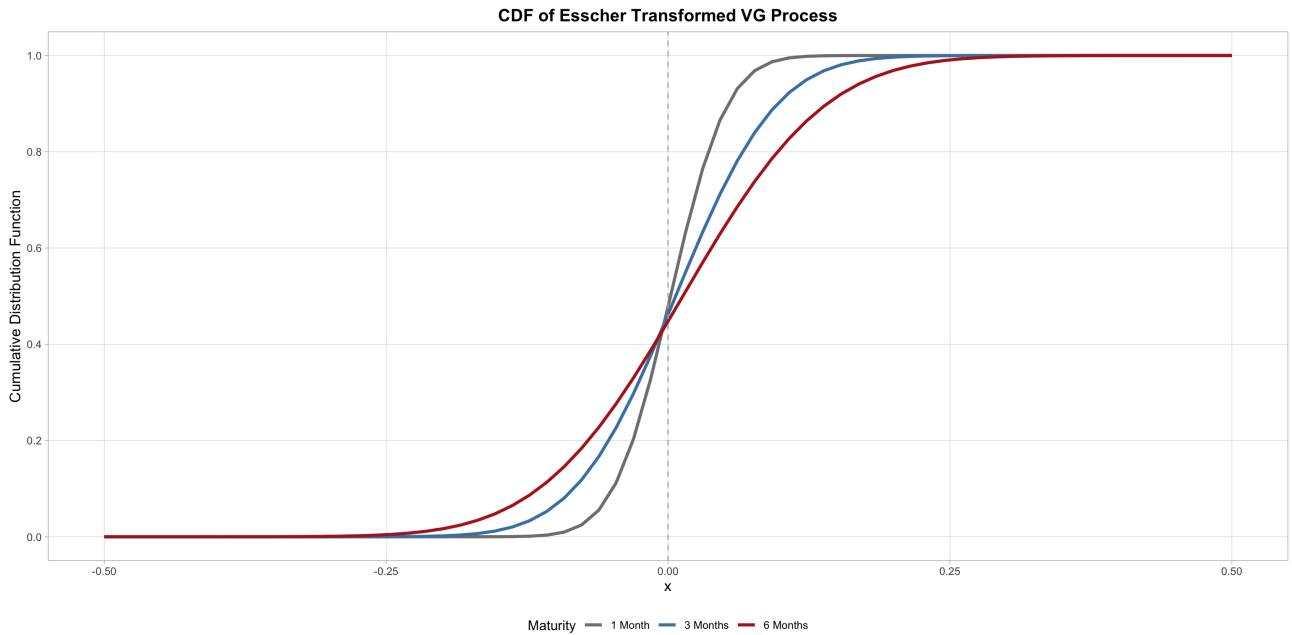
Η (6.2) είναι πλέον ακριβώς στη μορφή της (6.1). Συνεπώς, περνάμε ως όρισμα το διάνυσμα

$$\zeta_i = \Delta\psi_{\rho}^*((k-N)\Delta), \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1$$

στη συνάρτηση $\text{fft}()$, προκειμένου να υπολογίσουμε τις τιμές του αθροίσματος για διαφορετικές τιμές του δείκτη n , ενώ ο πρόσθετος παράγοντας $(-1)^n$ ενσωματώνεται εκ των υστέρων για την ανάκτηση του διανύσματος τιμών $G(n\tilde{\Delta})$ για $n = -N, \dots, N - 1$. Η προεπιλεγμένη διάταξη εξόδου της συνάρτησης τοποθετεί τη συνιστώσα μηδενικής συχνότητας (zero frequency) στη αρχή του διανύσματος, ακολουθούμενη από τις θετικές συχνότητες, ενώ οι αρνητικές συχνότητες εμφανίζονται στο τέλος (λόγω περιοδικότητας). Βέβαια, για λόγους ερμηνείας, θα προβούμε σε αναδιάταξη του διανύσματος εξόδου, ώστε η μηδενική συχνότητα να μεταφερθεί στο κέντρο του φάσματος. Τελικά, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής υπολογίζεται ως

$$\hat{F}(n\tilde{\Delta}) = \frac{e^{\rho n\tilde{\Delta}}}{2\pi} \text{Re} \left(G_{\phi^*, \Delta, N}(n\tilde{\Delta}) \right)$$

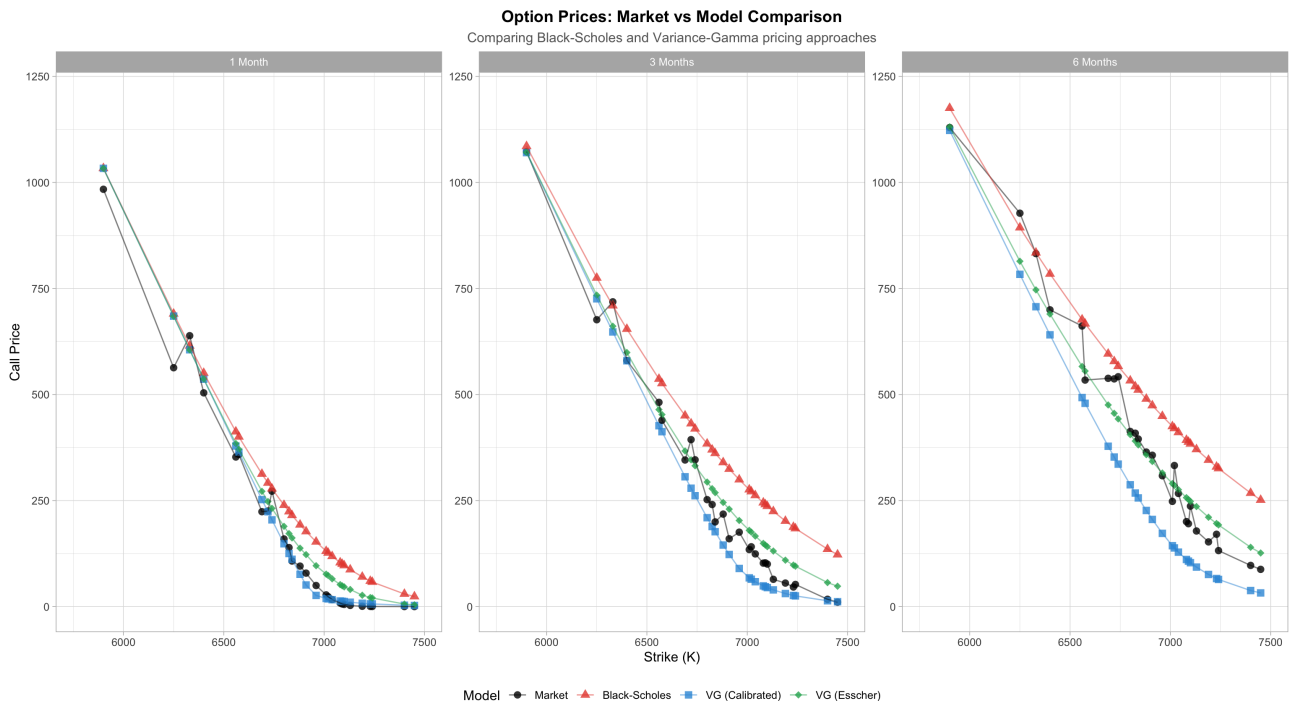
Για κάθε ημερομηνία εξάσκησης, αξιοποιώντας τις μετασχηματισμένες παραμέτρους του Πίνακα 6.2, παρουσιάζονται στη συνέχεια οι αντίστοιχες συναρτήσεις κατανομής, όπως αυτές υπολογίστηκαν με την μεθοδολογία που περιγράφηκε παραπάνω.



Σχήμα 6.7: Συναρτήσεις κατανομής του μετασχηματισμού Esscher της διαδικασίας VG με χρήση του αλγορίθμου FFT, για διαφορετικούς χρόνους εξάσκησης.

Από το παραπάνω διάγραμμα επιβεβαιώνεται ότι η αριθμητική διαδικασία υπολογισμού της συνάρτησης κατανομής που παρουσιάστηκε παραπάνω οδηγεί σε αποτέλεσμα το οποίο παρουσιάζει τα αναμενόμενα χαρακτηριστικά μίας έγκυρης συνάρτησης κατανομής.

Στο τελευταίο στάδιο της ανάλυσης, και φυσικά αξιοποιώντας όλα τα διαθέσιμα εργαλεία και αποτελέσματα, εφαρμόζεται η σχέση (5.26) με σκοπό τον υπολογισμό της δίκαιης αξίας ενός δικαιώματος αγοράς με χρήση του μετασχηματισμού Esscher. Η σχετική μεθοδολογία υπολογισμού, όπως υλοποιήθηκε με χρήση της προγραμματιστικού πακέτου R, παρατίθεται αναλυτικά στο Παράρτημα. Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζονται συνολικά οι εκτιμώμενες τιμές της δίκαιης αξίας του παραγώγου SPX, όπως αυτές προέκυψαν από τη βαθμονόμηση των παραμέτρων των υποδειγμάτων VG και Black and Scholes, καθώς και από την εφαρμογή του μετασχηματισμού Esscher στη διαδικασία VG. Επιπλέον, ως μέτρο αξιολόγησης της προσαρμογής των εκτιμήσεων, παρατίθεται στο Πίνακα 6.3 και η αντίστοιχη τιμή του μέσου τετραγωνικού σφάλματος για κάθε υπόδειγμα.



Σχήμα 6.8: Σύγκριση των τιμών του παραγώγου SPX και των εκτιμώμενων τιμών που προκύπτουν από τη βαθμονόμηση των παραμέτρων των υποδειγμάτων VG και Black-Scholes, καθώς και από την εφαρμογή του μετασχηματισμού Esscher στη διαδικασία VG ως προς την τιμή εξάσκησης, για διαφορετικούς χρόνους εξάσκησης.

Model	MSE
<i>Black and Scholes (via Calibration)</i>	12942.63
<i>Variance-Gamma (via Calibration)</i>	7750.84
<i>Variance-Gamma (via Esscher Transform)</i>	4505.17

Πίνακας 6.3: Σύγκριση των υποδειγμάτων ως προς το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Αξιολογώντας πρώτα γραφικά την επίδοση των υποδειγμάτων, από το σχήμα 6.8 παρατηρείται ότι το μοντέλο VG σαφώς υπερέχει έναντι του υποδείγματος Black and Scholes ανεξαρτήτως της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή των τιμών των δικαιωμάτων. Ειδικότερα, από το πρώτο διάγραμμα προκύπτει ότι οι εκτιμώμενες τιμές του παραγώγου, όπως αυτές υπολογίστηκαν μέσω του αναλυτικού τύπου με χρήση των παραμέτρων που προέκυψαν μέσω της μεθόδου βαθμονόμησης, εμφανίζει μεγαλύτερη συνέπεια ως προς την αναπαραγωγή των παρατηρούμενων τιμών της αγοράς. Ωστόσο, η εν λόγω συνέπεια φαίνεται να εξασθενεί καθώς αυξάνεται ο χρόνος έως την λήξη, δεδομένου ότι για υψηλότερους χρόνους εξάσκησης το υπόδειγμα τείνει να υποκοστολογεί το παράγωγο. Σχετικά με την τελευταία περίπτωση, το υπόδειγμα VG με εφαρμογή του μετασχηματισμού Esscher εμφανίζεται χαρακτηριστικά, όπως προκύπτει από το τελευταίο γράφημα, να ακολουθεί πιο πιστά την πορεία που διαγράφει η τεθλασμένη γραμμή που αντιστοιχεί στο σύνολο δεδομένων της αγοράς. Παράλληλα, δεν φαίνεται να παρουσιάζει σημαντικές αποκλίσεις για κανέναν από τους υπόλοιπους χρόνους λήξης του παραγώγου. Επιπλέον, για κάθε χρόνο εξάσκησης, το υπόδειγμα Black and Scholes υπεριοκοστολογεί συστηματικά το παράγωγο όταν αυτό είναι near- ή at-the-money.

Θεωρώντας πλέον το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ως κριτήριο αξιολόγησης και λαμβάνοντας το υπόδειγμα Black and Scholes ως μοντέλο αναφοράς, διαπιστώνεται ότι το υπόδειγμα VG παρουσιάζει ανώτερη επίδοση, επιβεβαιώνοντας για ακόμη μία φορά τα γραφικά συμπεράσματα. Βέβαια, ιδιαίτερης σημασίας αποτελεί το γεγονός ότι η εφαρμογή του μετασχηματισμού Esscher βελτίωσε περαιτέρω την προσαρμογή, επιτυγχάνοντας χαμηλότερο σφάλμα ακόμη και σε σύγκριση με την μέθοδο βαθμονόμησης των παραμέτρων του αναλυτικού τύπου αποτίμησης. Το αποτέλεσμα αυτό κρίνεται αναμενόμενο, δεδομένου ότι η εφαρμογή του μετασχηματισμού Esscher προϋποθέτει την εκτίμηση μιας πρόσθετης παραμέτρου, η οποία όπως είδαμε δύναται να προσαρμόζεται ανάλογα με το εκάστοτε επιτόκιο της αγοράς, παρέχοντας μεγαλύτερη ευελιξία στο πλαίσιο αποτίμησης. Συνεπώς, βάσει των παραπάνω, προκύπτει ότι το υπόδειγμα VG, ανεξάρτητα της τεχνικής εκτίμησης των τιμών του παραγώγου, αποτελεί την καταλληλότερη επιλογή.

Σημειώνεται, ότι τόσο η επιλογή του υποδείγματος όσο και τα παρακάτω συμπεράσματα που προκύπτουν από την ανάλυση αφορούν το υπό εξέταση σύνολο δεδομένων, ενώ θεωρείται τετραμμένο ότι δεν μπορούν να γενικευθούν, καθώς η εγκυρότητα τους ενδέχεται να μην επαληθεύεται σε διαφορετικά σύνολα δεδομένων ή υπό διαφορετικές συνθήκες της αγοράς.

6.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η εφαρμογή του τριπαραμετρικού υποδείγματος VG στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης, όπως προέκυψε από την εμπειρική ανάλυση που προηγήθηκε, οδήγησε σε αποτελέσματα τα οποία ανέδειξαν τη σαφή υπεροχή του έναντι του κλασικού υποδείγματος των Black and Scholes. Το εύρημα αυτό θα μπορούσε να θεωρηθεί αναμενόμενο, δεδομένου ότι η δομή του υποδείγματος VG επιτρέπει μεγαλύτερη ευελιξία στη προσαρμογή του στις παρατηρούμενες τιμές της αγοράς, μέσω της εισαγωγής επιπλέον παραμέτρων που δύναται να αποτυπώσουν με μεγαλύτερη ακρίβεια τα χαρακτηριστικά της κατανομής των λογαριθμικών αποδόσεων όπως η αυξημένη συσσώρευση μάζας πιθανότητας περί την αρχή των αξόνων. Η ιδιότητα αυτή αντανακλάται άμεσα στην καταλληλότητα του μοντέλου να αποτιμά με συνέπεια τις τιμές του παραγώγου που βρίσκονται near- ή at-the-money. Σε αυτή τη περίπτωση δεν αναμένεται η τιμή

της υποκείμενης διαδικασίας να παρουσιάζει μεγάλες αποκλίσεις, ιδίως όταν η διάρκεια ζωής του παραγώγου είναι βραχυπρόθεσμη.

Δεδομένου ότι τα at-the-money δικαιώματα προαίρεσης αντιστοιχούν σε υψηλότερο επενδυτικό ενδιαφέρον στην αγορά παραγώγων, κυρίως λόγω της συχνής χρήσης τους από τους επενδυτές για την κατασκευή σύνθετων επενδυτικών στρατηγικών, η συνεπής και αξιόπιστη τιμολόγηση των εν λόγω δικαιωμάτων είναι ιδιαίτερα σημαντική προκειμένου να καταστεί εφικτή η ορθή διαχείριση κινδύνου. Η ανάγκη αυτή, σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα της ανωτέρω ανάλυσης, παρέχει αδιαμφισβήτητα ισχυρά εμπειρικά τεκμήρια υπέρ της ανωτερότητας του προτεινόμενου υποδείγματος VG.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Π.1 Κώδικας για τη γραφική αναπαράσταση των διαδρομών της διαδικασίας VG

Στον κάτωθι πλαίσιο δίνεται ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε προκειμένου να παραχθεί η γραφική αναπαράσταση του μέτρου Lévy της διαδικασίας VG (βλ. Σχήμα 4.1).

```
# Install necessary libraries for data frame manipulation and plotting
library(ggplot2)
library(plotly)
library(ipp3)

# =====
# Levy Density Function of the Variance-Gamma (VG) Process Using CGM (C, G, M) Parameterization
# =====
# Levy density function for a generalized VG process (CGM form)
levymvg_cgm <- function(x, C, G, M) {
  y <- numeric(length(x))

  # Logical masks for three jump cases
  idx_neg <- x < 0
  idx_pos <- x > 0
  idx_zero <- x == 0

  # Handle negative parameter setup
  if (!all(c(C, G, M) > 0)) {
    stop("G, G and M must be positive")
  }

  # For negative jumps : v(dx) = C * exp(- G|x|) / |x|
  if (any(idx_neg)) {
    y[idx_neg] <- C * exp(-G * abs(x[idx_neg])) / abs(x[idx_neg])
  }

  # For positive jumps : v(dx) = C * exp(- Mx) / x
  if (any(idx_pos)) {
    y[idx_pos] <- C * exp(-M * x[idx_pos]) / x[idx_pos]
  }

  # Treat zero as singularity by assigning Inf value
  if (any(idx_zero)) {
    y[idx_zero] <- Inf
  }
  y
}

# Parameter identification of VG process
vg_to_cgm <- function(sigma, nu, theta) {
  stopifnot(nu > 0, sigma >= 0)
  lambda_dot_plus <- (1 / 2) * sqrt(theta^2 * nu^2 + 2 * sigma^2 * nu) + (theta * nu) / 2
  lambda_dot_minus <- (1 / 2) * sqrt(theta^2 * nu^2 + 2 * sigma^2 * nu) - (theta * nu) / 2
  list(
    C = 1 / nu,
    G = 1 / lambda_dot_minus,
    M = 1 / lambda_dot_plus
  )
}

# Evaluate Levy density for a grid of values
levy_density_vg <- function(x, sigma, nu, theta) {
  # Initialize parameters
  parameters <- vg_to_cgm(sigma, nu, theta)

  # Call Levy density function
  levymvg_cgm(x, C = parameters$C, G = parameters$G, M = parameters$M)
}

# -----
x <- c(seq(-3, -1e-4, length.out = 20000),
      seq(1e-4, 3, length.out = 20000))
sigma <- 1
nu <- 1
thetas <- c(-1, 0, 1)
```

```

# Plot of Levy density function for varying values of theta parameter
plot_1 <- purrr::map_dfr(thetas, function(th) {
  tibble(
    x = x,
    y = levy_density_vg(x, sigma, nu, th),
    theta = factor(th, levels = thetas)
  )
}) |>
mutate(theta_val = as.numeric(as.character(theta)),
       theta_cat = factor(
         case_when(
           theta_val < 0 ~ "neg_theta",
           theta_val == 0 ~ "zero_theta",
           TRUE ~ "pos_theta"
         ),
         levels = c("neg_theta", "zero_theta", "pos_theta")
       )
) |>
filter(is.finite(y)) |>
ggplot(mapping = aes(x = x, y = y, color = theta_cat, linetype = theta_cat)) +
geom_line(linewidth = 0.7, alpha = 0.8) +
scale_color_manual(values = c("neg_theta" = "#0096FF",
                              "zero_theta" = "black",
                              "pos_theta" = "#4F7942")) +
scale_linetype_manual(values = c("neg_theta" = "solid",
                                 "zero_theta" = "solid",
                                 "pos_theta" = "solid")) +
scale_y_continuous(limits = c(0, 2)) +
labs(title = "Lévy Measure") +
theme_light() +
theme(legend.position = "none")

ggplotly(plot_1) |>
style(showlegend = FALSE) |>
layout(
  yaxis = list(title = list(text = "Lévy Measure Value (v(x))")),
  xaxis = list(title = list(text = "Jump Size"))
)

# -----
x <- c(seq(-3, -1e-4, length.out = 20000),
       seq(1e-4, 3, length.out = 20000))

sigma <- 1
nu <- c(0.2, 1, 5)
theta <- 0

# Plot of Levy density function for varying values of nu parameter
plot_2 <- purrr::map_dfr(nu, function(nu) {
  tibble(
    x = x,
    y = levy_density_vg(x, sigma, nu, theta),
    nu = factor(nu, levels = nu)
  )
}) |>
mutate(nu_val = as.numeric(as.character(nu)),
       nu_cat = factor(
         case_when(
           nu_val == 0.2 ~ "nu_eq_0.2",
           nu_val == 1 ~ "nu_eq_1",
           TRUE ~ "nu_eq_5"
         ),
         levels = c("nu_eq_0.2", "nu_eq_1", "nu_eq_5")
       )
) |>
filter(is.finite(y)) |>
ggplot(mapping = aes(x = x, y = y, color = nu_cat, linetype = nu_cat)) +
geom_line(linewidth = 0.7, alpha = 0.8) +
scale_color_manual(values = c("nu_eq_0.2" = "#0096FF",
                              "nu_eq_1" = "black",
                              "nu_eq_5" = "#4F7942")) +
scale_linetype_manual(values = c("nu_eq_0.2" = "solid",
                                 "nu_eq_1" = "solid",
                                 "nu_eq_5" = "solid")) +
scale_y_continuous(limits = c(0, 0.5)) +
labs(title = "Lévy Measure") +
theme_light() +
theme(legend.position = "none")

ggplotly(plot_2) |>
style(showlegend = FALSE) |>
layout(
  yaxis = list(title = list(text = "Lévy Measure Value (v(x))")),
  xaxis = list(title = list(text = "Jump Size"))
)

```

Ακολουθώντας την θεωρητική ανάλυση των παραμέτρων της διαδικασίας VG που

αναπτύχθηκε στην Παράγραφο 4.1, στον παρακάτω κώδικα εξετάζεται γραφικά την επίδραση κάθεμίας εξ αυτών στη μορφή της αντίστοιχης κατανομής (βλ. Σχήμα 4.2).

```

# =====
# Exploring the Effect of Different Parameter Configurations on the
# Variance-Gamma (VG) Probability Density Function
# =====
# Set x-grid
x <- seq(-6, 6, length.out = 10000)

# Parameter initialization for VG distribution
nu <- 0.5
sigma <- 1
theta_values <- c(-1, 0, 1)

# Plot VG distribution for varying values of theta parameter
plot_1 <- purrr::map_dfr(theta_values, function(th) {
  tibble(
    x = x,

    # Return the PDF of Variance Gamma distribution at points x
    y = VarianceGamma::dvg(x, param = c(
      vgC = 0,
      sigma = sigma,
      theta = th,
      nu = nu
    )),
    theta = factor(th, levels = theta_values)
  )
}) |>
mutate(theta = as.numeric(as.character(theta)),
       theta_cat = factor(
         case_when(theta < 0 ~ "neg_theta", theta == 0 ~ "zero_theta", TRUE ~ "pos_theta"),
         levels = c("neg_theta", "zero_theta", "pos_theta")
       )) |>
filter(is.finite(y)) |>
ggplot(mapping = aes(
  x = x,
  y = y,
  color = theta_cat,
  linetype = theta_cat
)) +
geom_line(linewidth = 0.7, alpha = 0.8) +
scale_color_manual(values = c(
  "neg_theta" = "#0096FF",
  "zero_theta" = "black",
  "pos_theta" = "#4F7942"
)) +
scale_linetype_manual(values = c(
  "neg_theta" = "solid",
  "zero_theta" = "solid",
  "pos_theta" = "solid"
)) +
scale_y_continuous(limits = c(0, 0.5)) +
scale_x_continuous(limits = c(-3, 3)) +
labs(title = "Variance-Gamma Density Function") +
theme_light() +
theme(legend.position = "none")

ggplotly(plot_1) |>
style(showlegend = FALSE) |>
layout(
  yaxis = list(title = list(text = "density")),
  xaxis = list(title = list(text = "x"))
)

# =====
# Parameter initialization for VG distribution
nu_values <- c(0.2, 0.5, 1, 1.2)
sigma <- 1
theta <- 0

# Plot VG distribution for varying values of nu parameter
plot_2 <- purrr::map_dfr(nu_values, function(nu) {
  tibble(
    x = x,
    y = VarianceGamma::dvg(x, param = c(vgC = 0, sigma = sigma, theta = theta, nu = nu)),
    nu = factor(nu, levels = nu_values)
  )
}) |>
mutate(nu = as.numeric(as.character(nu)),
       nu_cat = factor(
         case_when(
           nu == 0.2 ~ "nu_eq_0.2",
           nu == 0.5 ~ "nu_eq_0.5",
           nu == 1 ~ "nu_eq_1",
           TRUE ~ "nu_eq_2"
         )
       ),

```

```

      levels = c("nu_eq_0.2", "nu_eq_0.5", "nu_eq_1", "nu_eq_2")
    }) |>
  filter(is.finite(y)) |>
  ggplot(mapping = aes(x = x, y = y, color = nu_cat, linetype = nu_cat)) +
  geom_line(linewidth = 0.7, alpha = 0.8) +
  scale_color_manual(values = c("nu_eq_0.2" = "#0096FF",
                                "nu_eq_0.5" = "#CD7F32",
                                "nu_eq_1" = "black",
                                "nu_eq_2" = "#4F7942")) +
  scale_linetype_manual(values = c("nu_eq_0.2" = "solid",
                                   "nu_eq_0.5" = "solid",
                                   "nu_eq_1" = "solid",
                                   "nu_eq_2" = "solid")) +
  stat_function(fun = dnorm,
               args = list(mean = 0, sd = 1),
               linewidth = 0.7, linetype = 'dashed', color = "firebrick") +
  scale_y_continuous(limits = c(0, 0.9)) +
  scale_x_continuous(limits = c(-3, 3)) +
  labs(title = "Variance-Gamma Density Function") +
  theme_light() +
  theme(legend.position = "none")

ggplotly(plot_2) |>
  style(showlegend = FALSE) |>
  layout(
    yaxis = list(title = list(text = "density")),
    xaxis = list(title = list(text = "x"))
  )

```

Παρακάτω δίνεται ο κώδικας για την προσομοίωση των διαδρομών της διαδικασίας VG χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Brownian-Gamma Bridge Sampling (BGBS) (βλ. Αλγόριθμο 3 σελ. 69 και Σχήμα 4.3).

```

# =====
# Brownian-Gamma Bridge Sampling (BGBS) for Simulating the Variance-Gamma (VG) Process
# =====
# Brownian-Gamma Bridge Sampling (BGBS) for VG process
vg_process_simulation <- function(times,
                                  theta = -0.1,
                                  sigma = 1,
                                  nu = 0.2) {

  # Set time grid as strictly increasing
  times = as.numeric(times)
  stopifnot(isTRUE(all(diff(times) > 0)))

  # Require n = 2 ^ k
  n <- length(times) - 1L
  if (!(n > 0 & bitwAnd(n, n - 1) == 0)) {
    stop("Length(times) - 1 must be power of 2.")
  }

  gamma <- rep(NA, n + 1)
  x_vg <- rep(NA, n + 1)

  # Set boundary values
  gamma[1] <- 0
  x_vg[1] <- 0
  gamma[n + 1] <- rgamma(1, shape = (tail(times, 1)) / nu, rate = 1 / nu)
  x_vg[n + 1] <- rnorm(1, mean = theta * gamma[n + 1], sd = sigma * sqrt(gamma[n + 1]))

  # Fill midpoints by dyadic partition
  kappa <- as.integer(log2(n))
  for (s in 1:kappa) {
    m <- 2^(kappa - s)

    for (j in 1:(2^(s - 1))) {
      i <- (2 * j - 1) * m + 1

      # Generate the random number Y from beta distribution (as in
      # Ribeiro et al. (2002)) independently of past random numbers.
      psi <- rbeta(1, shape1 = (times[i] - times[i - m]) / nu, shape2 = (times[i + m] - times[i]) / nu)

      gamma[i] <- gamma[i - m] + (gamma[i + m] - gamma[i - m]) * psi

      # Generate a random number from normal distribution with zero mean and
      sd_zeta <- sigma * sqrt((gamma[i + m] - gamma[i]) * psi)
      zeta <- rnorm(1, mean = 0, sd = sd_zeta)

      # Return VG midpoint update

```

```

    x_vg[i] <- psi * x_vg[i + m] + (1 - psi) * x_vg[i - m] + zeta
  }
}

# Return data frame with VG values across different time nodes
as_tibble(tibble(t = times, VG = x_vg), index = t)
}

# Function for simulation of n_paths of VG paths via BGS
brownian_gamma_bridge <- function(n_paths = 1,
                                  T = 20,
                                  k = 10,
                                  nu = 1,
                                  theta = 0,
                                  sigma = 1,
                                  seed = 1) {

  # Basic checks
  stopifnot(n_paths >= 1, T > 0, k >= 1, nu > 0, sigma >= 0)
  if (!is.null(seed)) {
    set.seed(seed)
  }

  # Initialize time grid
  times <- seq(0, T, length.out = 2^k + 1)

  # Simulate n_paths independent paths and add path id
  purrr::map_dfr(1:n_paths,
                ~ vg_process_simulation(times, theta, sigma, nu) |>
                mutate(path = factor(.x))) |>
    as_tsibble(index = t, key = path)
}

# -----
# Parameter setup
T <- 20 # total time horizon
k <- 15 # grid size (number of intervals)
nu <- 1 # variance rate of gamma process
theta <- 0 # skew parameter for the VG process
sigma <- 1 # process volatility parameter
n_paths <- 3 # number of simulated paths

# Simulate VG paths for parameters (sigma, nu, theta) = (1, 1, 0)
vg_paths <- brownian_gamma_bridge(n_paths, T, k, nu, theta, sigma, seed = 99)

# Plot for the simulated paths
simulation_plot_1 <-
  vg_paths |>
  ggplot(aes(t, VG, color = path)) +
  geom_line(linewidth = 0.7, alpha = 0.8) +
  scale_color_manual(values = c("1" = "#0096FF",
                                "2" = "#4F7942",
                                "3" = "black")) +
  labs(title = "Variance-Gamma Path Simulation") +
  scale_y_continuous(limits = c(-10, 10)) +
  scale_x_continuous(limits = c(0, 20)) +
  theme_light() +
  theme(legend.position = "none")

ggplotly(simulation_plot_1) |>
  style(showlegend = FALSE) |>
  layout(
    yaxis = list(title = list(text = "VG process")),
    xaxis = list(title = list(text = "t"))
  )

# -----
# Parameter setup
T <- 20
k <- 15
nu <- 2
theta <- 0
sigma <- 2
n_paths <- 3

# Simulate VG paths for parameters (sigma, nu, theta) = (2, 2, 0)
vg_paths <- brownian_gamma_bridge(n_paths, T, k, nu, theta, sigma, seed = 1)

# Plot for the simulated paths
simulation_plot_2 <-
  vg_paths |>
  ggplot(aes(t, VG, color = path)) +
  geom_line(linewidth = 0.7, alpha = 0.8) +
  scale_color_manual(values = c("1" = "#0096FF",
                                "2" = "#4F7942",
                                "3" = "black")) +
  labs(title = "Variance-Gamma Path Simulation") +
  scale_y_continuous(limits = c(-10, 30)) +
  scale_x_continuous(limits = c(0, 20)) +

```

```

theme_light() +
theme(legend.position = "none")

ggplotly(simulation_plot_2) |>
style(showlegend = FALSE) |>
layout(
  yaxis = list(title = list(text = "VG process")),
  xaxis = list(title = list(text = "t"))
)

```

Π.2 Κώδικας για τη Βαθμονόμηση των υποδειγμάτων Black and Scholes και VG

Στον παρακάτω κώδικα παρατίθενται οι συναρτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν για τη βαθμονόμηση του υποδείγματος Black and Scholes.

```

# -----
# Black-Scholes Call Option Formula
# -----
bs_call_price <- function(S0, K, r, T, sigma) {
  d1 <- (log(S0 / K) + (r + 0.5 * sigma^2) * T) / (sigma * sqrt(T))
  d2 <- d1 - sigma * sqrt(T)

  bs_call <- S0 * pnorm(d1) - K * exp(-r * T) * pnorm(d2)
  return(bs_call)
}

bs_call_vec <- function(S0, K, r, T, sigma) {
  mapply(function(K_i, r_i, T_i) bs_call_price(S0, K_i, r_i, T_i, sigma),
    K, r, T, SIMPLIFY = TRUE)
}

# -----
# BS Calibration Objective
# -----
bs_calibration_objective <- function(sigma, data, S0, floor_price = 1e-12) {
  tryCatch({

    call_model <- bs_call_vec(S0, data$K, data$r, data$T, sigma)

    if (anyNA(call_model)) {
      stop("NA values produced during B-S computation - process has been terminated")
    }

    call_model <- pmax(call_model, floor_price)
    call_obs <- pmax(data$call_price, floor_price)

    # Compute objective function
    obj <- sqrt(mean((log(call_obs) - log(call_model))^2))

    return(obj)
  }, error = function(e)
    return(NA_real_))
}

# -----
# BS Calibration Process
# -----
bs_calibration_process <- function(data, S0, start_sigma = 0.2) {
  cat("Calibrating Black-Scholes Model...\n")

  cat(sprintf("Starting optimization process:\n"))
  cat(sprintf("  Initial parameters: sigma=%.3f\n", start_sigma))

  fit <- optim(
    par = start_sigma,
    fn = bs_calibration_objective,
    data = data,
    S0 = S0,
    method = "Brent",
    lower = 0.01,
    upper = 2.0
  )

  sigma_hat <- fit$par
  cat(sprintf("Optimization complete:\n"))
  cat(sprintf("  Estimated: sigma = %.6f\n", sigma_hat))
}

```

```

cat(sprintf(" Final objective minimum: %.6f\n\n", fit$value))

list(sigma = sigma_hat, objective = fit$value)
}

```

Διαδικασία Βαθμονόμησης του υποδείγματος VG με χρήση του αναλυτικού τύπου που εισήχθη στη Παράγραφο 5.2.1 σχέση (5.15) (βλ. Θεώρημα 5.2.1).

```

# -----
# Calculate Psi Function
# -----
psi_function <- function(alpha, beta, gamma_val) {
  tryCatch({

    # Validate inputs
    if(!all(is.finite(c(alpha, beta, gamma_val)))) {
      stop("Non-Finite input detected")
    }

    # Compute variables for downstream computation
    c_val <- abs(alpha) * sqrt(2 + beta^2)
    u_val <- beta / sqrt(2 + beta^2)
    sgn <- sign(alpha)

    # Compute modified Bessel function of the second kind
    K_minus <- besselK(c_val, nu = gamma_val - 1/2)
    K_plus <- besselK(c_val, nu = gamma_val + 1/2)

    # Check Bessel function results
    if (!is.finite(K_minus) || !is.finite(K_plus)) {
      stop("Bessel function returned non-finite value")
    }

    prefactor <- (c_val^(gamma_val + 1/2) * exp(sgn * c_val) *
      (1 + u_val)^gamma_val) / (sqrt(2 * pi) * gamma(gamma_val))

    # Compute arguments for phi function
    phi_x <- (1 + u_val) / 2
    phi_y <- -sgn * c_val * (1 + u_val)

    # Calculate first component
    psi_1 <- (prefactor / gamma_val) *
      K_plus *
      phi_function(gamma_val, 1 - gamma_val, 1 + gamma_val, phi_x, phi_y)

    # Calculate second component
    psi_2 <- -sgn * ((prefactor * (1 + u_val)) / (1 + gamma_val)) *
      K_minus *
      phi_function(1 + gamma_val, 1 - gamma_val, 2 + gamma_val, phi_x, phi_y)

    # Calculate third component
    psi_3 <- sgn * (prefactor / gamma_val) *
      K_minus *
      phi_function(gamma_val, 1 - gamma_val, 1 + gamma_val, phi_x, phi_y)

    psi_value <- psi_1 + psi_2 + psi_3

    if (!is.finite(psi_value)) {
      stop("Psi computation failed: Non-finite value")
    }

    return(psi_value)
  }, error = function(e) {
    warning(paste("psi_function error:", e$message))
  })
}

phi_function <- function(a, b, c, x, y) {
  tryCatch({
    # Validate inputs (must be finite)
    if (!all(is.finite(c(a, b, c, x, y)))) {
      stop("Non-finite input detected")
    }

    # Define the integrand term
    integrand <- function(u) {
      term_1 <- u^(a - 1)
      term_2 <- (1 - u)^(c - a - 1)
      term_3 <- (1 - u * x)^(b)
      term_4 <- exp(u * y)

      result <- term_1 * term_2 * term_3 * term_4

      # Handle numerical issues

```

```

    result[!is.finite(result)] <- NA_real_
    return(result)
  }

  # Compute the integral
  integrand_result <- integrate(
    f = integrand,
    lower = 0,
    upper = 1,
    rel.tol = 1e-10,
    stop.on.error = FALSE
  )

  if (integrand_result$message != "OK") {
    warning(paste("Integration Failed:", integrand_result$message))
  }

  factor_term <- gamma(c) / (gamma(a) * gamma(c - a))

  # Final result
  phi_value <- factor_term * integrand_result$value

  return(phi_value)
}, error = function(e) {
  warning(paste("phi_function error:", e$message))
  return(NA_real_)
})
}

# -----
# Analytical Formula for European Call Option Price under VG
# -----
analytical_formula <- function(S_0, K, r, T, theta, sigma, nu) {

  # Use tryCatch to handle parameter constraint violations
  tryCatch({

    # Basic parameter validation
    if (sigma <= 0 || nu <= 0) {
      stop("sigma and nu must be positive")
    }

    # Compute quantities for analytical formulation
    zeta <- -theta / (sigma^2)
    s <- sigma / sqrt(1 + 0.5 * theta^2 * nu / sigma^2)
    alpha <- zeta * s

    c_1 <- (nu * (alpha + s)^2) / 2
    c_2 <- (nu * alpha^2) / 2

    # Check martingale condition: 1 - theta*nu - 0.5*sigma^2*nu > 0
    martingale_check <- 1 - theta * nu - 0.5 * sigma^2 * nu
    if (martingale_check <= 0) {
      stop(sprintf(
        "Martingale condition violated: 1 - theta*nu - 0.5*sigma^2*nu = %.6f <= 0",
        martingale_check
      ))
    }

    # Check c_1 and c_2 constraints (must be < 1 for log to be well-defined)
    if (c_1 >= 1 || c_2 >= 1) {
      stop(sprintf(
        "Parameter constraint violated: c_1 = %.6f, c_2 = %.6f (both must be < 1)",
        c_1, c_2
      ))
    }

    # Compute log ratio and d parameter
    log_c <- log((1 - c_1) / (1 - c_2))
    d <- (log(S_0 / K) + r * T + (T / nu) * log_c) / s

    # Arguments for Psi function
    a_1 <- d * sqrt((1 - c_1) / nu)
    b_1 <- (alpha + s) * sqrt(nu / (1 - c_1))
    c_psi <- T / nu

    a_2 <- d * sqrt((1 - c_2) / nu)
    b_2 <- alpha * s * sqrt(nu / (1 - c_2))

    # Compute Psi values :
    # Risk neutral probability that the stock price, S_t, exceeds
    # the strike price, K, using the density obtained on normalizing
    # the product of the stock price with the risk neutral density
    # of the stock price (Madan et al. (1998))
    rnp_normalized <- psi_function(a_1, b_1, c_psi)

    # Risk neutral probability that the stock price, S_t, (i.e. stock price
    # evaluated at time t) exceeds the strike price, K (Madan et al. (1998))
    rnp_exceed <- psi_function(a_2, b_2, c_psi)

    # Validate if the produced probability elements are not NAs
    if (is.na(rnp_exceed) || is.na(rnp_normalized)) {

```

```

    stop("NA probability elements detected")
  }

  # European call price
  price <- S_0 * rnp_normalized - K * exp(-r * T) * rnp_exceed

  return(price)

}, error = function(e) {
  return(NA_real_)
})
}

# -----
# Vectorized call price computation
# -----
call_vec <- function(S0, K, r, T, theta, sigma, nu) {
  mapply(function(K_i, r_i, T_i)
    analytical_formula(S0, K_i, r_i, T_i, theta, sigma, nu),
    K,
    r,
    T,
    SIMPLIFY = TRUE)
}

# -----
# Simulate mock option data for testing
# -----
simulate_mock_option_data <- function(S0, r, K, T, theta, sigma, nu,
  eta = 0.08, seed = 1234) {

  set.seed(seed)

  # Extract VG call option data
  call_vg <- call_vec(S0, K, r, T, theta, sigma, nu)

  if (anyNA(call_vg)) {
    stop("Some theoretical prices are NA")
  }

  # Multiplicative error formulation
  eps <- rnorm(length(call_vg))
  call_sim <- call_vg * exp(eta * eps - 0.5 * eta^2)

  data.frame(
    K = K,
    r = r,
    T = T,
    call_price = call_sim
  )
}

# -----
# Calibration Objective Function
# -----
calibration_objective <- function(p, data, S0, floor_price = 1e-12) {
  tryCatch({
    sigma <- p[1]
    nu <- p[2]
    theta <- p[3]

    # Compute omega (martingale condition).
    # Stop the process if it is violated
    martingale_condition <- (1 - theta * nu - (sigma^2 * nu) / 2)
    if (!is.finite(martingale_condition) || martingale_condition <= 0) {
      stop(sprintf(
        "Martingale condition is violated: (martingale_condition=%s)",
        martingale_condition
      ))
    }
  })

  # Compute model prices
  call_model <- call_vec(S0, data$K, data$r, data$T, theta, sigma, nu)

  if (anyNA(call_model)) {
    stop("Model prices contain NA values")
  }

  call_model <- pmax(call_model, floor_price)
  call_obs <- pmax(data$call_price, floor_price)

  # Objective function
  obj <- sqrt(mean((log(call_obs) - log(call_model))^2))

  return(obj)

}, error = function(e) {
  warning(paste(e$message))
  return(NA_real_)
})
}

# -----

```

```

# Main Calibration Process
# -----
vg_calibration_process <- function(data, S0, start_sigma = 0.2, start_nu = 0.25,
                                  start_theta = 0, maxit = 1e+6) {
  tryCatch({
    cat("Calibrating Variance-Gamma Model...\n")

    cat(
      sprintf(
        "  Initial parameters: sigma=%.4f, nu=%.4f, theta=%.4f\n",
        start_sigma,
        start_nu,
        start_theta
      )
    )

    cat("Starting VG optimization process...")
    # Implement Nelder-Mead optimization algorithm
    fit <- optim(
      par = c(start_sigma, start_nu, start_theta),
      fn = calibration_objective,
      data = data,
      S0 = S0,
      method = "Nelder-Mead",
      control = list(maxit = maxit, reltol = 1e-10)
    )

    # Results
    sigma_hat <- fit$par[1]
    nu_hat <- fit$par[2]
    theta_hat <- fit$par[3]

    cat("\nOptimization complete:\n")
    cat(
      sprintf(
        "  Estimated: sigma=%.6f, nu=%.6f, theta=%.6f\n",
        sigma_hat,
        nu_hat,
        theta_hat
      )
    )

    cat(sprintf("  Final objective minimum: %.6f\n", fit$value))

    list(
      theta = theta_hat,
      sigma = sigma_hat,
      nu = nu_hat,
      loss = fit$value,
      convergence = fit$convergence,
      optim_result = fit
    )

  }, error = function(e) {
    stop(paste("Calibration failed:", e$message))
  })
}

```

Στο ακόλουθο πλαίσιο παρουσιάζεται η κύρια διαδικασία βαθμονόμησης των υποδειγμάτων, η οποία εφαρμόστηκε για την παραγωγή των αποτελεσμάτων και τη διαμόρφωση των συμπερασμάτων της Παραγράφου 6.2.2.

```

# -----
# Get Option Data
# -----
library(fpp3)
option_data <- read.csv("~/Desktop/VG_bibliography/option_data.csv") |> select(-X)
S0 <- unique(option_data$current_index_price)

# -----
# Calibrate BS Model and VG Model and Compute Prices and Errors
# -----
options(scipen = 999)
bs_params <- bs_calibration_process(option_data, S0)
vg_params <- vg_calibration_process(option_data, S0)

calibration_results <- option_data |>
(function(df) {
  df |>
  mutate(
    bs_price = bs_call_vec(S0, K, r, T, bs_params$sigma),
    vg_price = call_vec(S0, K, r, T, vg_params$theta, vg_params$sigma, vg_params$nu),
    bs_error = call_price - bs_price,
    vg_error = call_price - vg_price,

```

```

      bs_error_sq = bs_error^2,
      vg_error_sq = vg_error^2,
      error_diff = abs(bs_error - vg_error),
    )
  })() |>
  mutate(across(where(is.numeric) & !c(K, T), ~round(., 4)))

# Calculate MSE for each model
bs_cal_mse <- mean(calibration_results$bs_error_sq) |> print()
vg_cal_mse <- mean(calibration_results$vg_error_sq) |> print()

# -----
# Create Error Plot
# -----
library(plotly)
mock_data <- data.frame(moneyness = seq(0.5, 2, by = 0.01)) |>
  mutate(K = S0 / moneyness) |>
  cross_join(data.frame(T = c(0.08, 0.167, 0.25, 0.5, 0.76, 1),
                        r = 0.035)) |>
  arrange(T, K) |>
  mutate(
    bs_price = bs_call_vec(S0, K, r, T, bs_params$sigma),
    vg_price = call_vec(S0, K, r, T, vg_params$theta, vg_params$sigma, vg_params$nu),
    price_diff = (vg_price - bs_price) / K,
    raw_diff = vg_price - bs_price
  ) |>
  mutate(across(where(is.numeric) & !c(K, T), ~round(., 4)))

surf_df <- mock_data |>
  select(T, moneyness, price_diff) |>
  arrange(T, moneyness) |>
  tidyr::pivot_wider(
    names_from = moneyness,
    values_from = price_diff
  ) |>
  arrange(T)

y_vals <- surf_df$T
x_vals <- as.numeric(names(surf_df)[-1])
z_mat <- as.matrix(surf_df[, -1])

plot_ly(
  x = x_vals,
  y = y_vals,
  z = z_mat,
  type = "surface",
  showscale = FALSE,
  contours = list(
    z = list(
      show = TRUE,
      usecolormap = TRUE,
      highlightcolor = "#ff0000",
      project = list(z = TRUE)
    )
  )
) |>
  layout(
    scene = list(
      xaxis = list(title = "Moneyness", range = c(0.5, 2)),
      yaxis = list(title = "Maturity (in years)", range = c(0, 1)),
      zaxis = list(title = "Error")
    )
  )

```

Π.3 Κώδικας για τη εύρεση της δίκαιης αξίας του δικαιώματος προαίρεσης με χρήση του μετασχηματισμού Esscher

Στο επόμενο πλαίσιο παρατίθενται οι βοηθητικές συναρτήσεις (utils functions) που χρησιμοποιήθηκαν προκειμένου να παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της Παραγράφου 6.3.

```

# -----
# Compute Bounds for Moment-Generating Function
# -----
compute_mgf_bounds <- function(sigma, nu, theta) {
  # Calculate bounds for downstream H function calculation
  h_1 <- -theta/sigma^2 - sqrt(theta^2 / sigma^4 + 2 / (nu * sigma^2))

```

```

h_2 <- -theta/sigma^2 + sqrt(theta^2 / sigma^4 + 2 / (nu * sigma^2))

return(list(h_1 = h_1, h_2 = h_2))
}

# -----
# Compute H(h) function
# -----
H_function <- function(h, sigma, nu, theta) {
  numerator <- 1 - 0.5 * nu * sigma^2 * h^2 - nu * theta * h
  denominator <- 1 - nu * theta * (h + 1) - 0.5 * nu * sigma^2 * (h + 1)^2

  # Check if denominator is non zero
  if (abs(denominator) < 1e-20) {
    stop(sprintf('Parameter calculation failed - H at h = %.4f is not a number.', h))
  }

  return(numerator / denominator)
}

# -----
# Calculate h* parameter
# -----
find_h_star <- function(sigma, nu, theta, r) {

  bounds <- compute_mgf_bounds(sigma, nu, theta)
  h_1 <- bounds$h_1
  h_2 <- bounds$h_2

  # Search interval is (h1, h2 - 1)
  eps <- 1e-8
  lower <- h_1 + eps
  upper <- h_2 - 1 - eps

  target_value <- exp(nu * r)

  H_lower <- H_function(lower, sigma, nu, theta)
  H_upper <- H_function(upper, sigma, nu, theta)

  if (H_lower > target_value || H_upper < target_value) {
    warning("Target may be outside the range of H(h) in the interval")
  }

  # Define the function to find root of
  objective <- function(h) {
    H_function(h, sigma, nu, theta) - target_value
  }

  # Find solution
  result <- tryCatch({
    uniroot(objective, interval = c(lower, upper), tol = 1e-12, maxiter = 1000)
  }, error = function(e) {
    stop(paste("uniroot failed:", e$message))
  })

  h_star <- result$root

  # Verification
  H_at_h_star <- H_function(h_star, sigma, nu, theta)

  return(list(
    h_star = h_star,
    h1 = h_1,
    h2 = h_2,
    target_value = target_value,
    H_at_h_star = H_at_h_star,
    convergence = abs(H_at_h_star - target_value),
    iterations = result$iter
  ))
}

# -----
# Plotting Diagnostics
# -----
# Compute list H(h) outputs for plotting
H_function_vec <- function(h_vec, sigma, nu, theta) {
  sapply(h_vec, function(h) H_function(h, sigma, nu, theta))
}

esscher_diagnostics <- function(sigma, nu, theta, r) {

  result <- find_h_star(sigma_est, nu_est, theta_est, r)

  # Create h values and compute H(h)
  eps <- 1e-08
  h_vals <- seq(result$h1 + eps, result$h2 - 1 - eps, length.out = 50000)
  H_vals <- H_function_vec(h_vals, sigma, nu, theta)

  # Cap extreme values for plotting
  H_vals_capped <- ifelse(H_vals > 5, NA, H_vals)

  # Plot H(h) vs h -----

```

```

p1 <- data.frame(h = h_vals, H = H_vals_capped) |>
ggplot(mapping = aes(x = h, y = H)) +
  geom_line(color = "steelblue", linewidth = 1) +
  # geom_hline(yintercept = target_value, linetype = "dashed", color = "red", linewidth = 0.8) +
  # geom_point(aes(x = h_star, y = target_value), color = "red", size = 3) +
  labs(
    x = "h",
    y = "H(h)"
  ) +
  theme_light() +
  theme(
    plot.title = element_text(hjust = 0.5, face = "bold"),
    panel.grid.minor = element_blank()
  )

# Plot h* vs r -----
r_vals <- seq(0.01, 0.1, length.out = 500)
h_star_vals <- numeric(length(r_vals))

for (i in seq_along(r_vals)) {
  tryCatch({
    res <- find_h_star(sigma, nu, theta, r_vals[i])
    h_star_vals[i] <- res$h_star
  }, error = function(e) {
    h_star_vals[i] <- NA
  })
}

p2 <- data.frame(r = r_vals, h_star = h_star_vals) |>
ggplot(mapping = aes(x = r, y = h_star)) +
  geom_line(color = "steelblue", linewidth = 1) +
  labs(
    x = "r",
    y = "h*"
  ) +
  theme_light() +
  theme(
    plot.title = element_text(hjust = 0.5, face = "bold"),
    panel.grid.minor = element_blank()
  )

combined_plot <- gridExtra::grid.arrange(p1, p2, ncol = 2, nrow = 1,
  top = grid::textGrob(
    sprintf("Esscher Transform Diagnostics"),
    gp = grid::gpar(fontsize = 12, fontface = "bold")
  ))

return(list(
  plot = combined_plot, result
))
}

# -----
# Compute the Characteristic Function of VG Process
# -----
vg_characteristic_function <- function(u, t, sigma, nu, theta) {
  # Compute characteristic function of VG
  inner <- 1 - 1i * u * theta * nu + 0.5 * sigma^2 * nu * u^2
  vg_term <- inner^(-t / nu)

  return(vg_term)
}

# -----
# Compute Risk Neutral Parameters of the VG Process Under Esscher Transform
# -----
esscher_transform_params <- function(sigma, nu, theta, h) {
  # Transform VG parameters under Esscher measure with parameter h
  theta_tilde <- theta + h * sigma^2
  denominator <- 1 - nu * theta * h - nu * (sigma^2 / 2) * h^2

  if (denominator <= 0) {
    stop(sprintf("Invalid Esscher parameter h = %.4f: denominator = %.6f <= 0", h, denominator))
  }

  nu_tilde <- nu / denominator

  return(list(
    sigma = sigma,
    nu = nu_tilde,
    theta = theta_tilde
  ))
}

# -----
# Compute Cumulative Distribution Function via FFT Algorithm
# -----
vg_cdf_fft <- function(t, sigma, nu, theta, rho, N, delta) {
  # x_vals: points at which to evaluate CDF
  # t: time to maturity
  # rho: damping parameter
  # N: number of grid points

```

```

# Determine grid from constraint Delta * Delta_tilde = pi / N
delta_tilde <- pi / (N * delta)
u_vec <- (-N):(N-1) * delta
x_vec <- (-N):(N-1) * delta_tilde

# Compute (phi*(m * Delta + rho * i) * i) / (m * Delta + rho * i) for all m = -N, ..., N - 1
psi_rho <- function(u, t, sigma, nu, theta, rho) {
  values <- u + rho * li
  phi_val <- vg_characteristic_function(values, t, sigma, nu, theta)
  return(phi_val * li / values)
}
psi_vals <- sapply(u_vec, function(u) psi_rho(u, t, sigma, nu, theta, rho))

# Compute G_{(psi_rho, Delta, N)}(n * Delta_dilte) using FFT algorithm
# G(x) = sum_{m = -N}^{N-1} (Delta * (phi*(m * Delta + rho * i) * i) / (m * Delta + rho * i) * e^{-i * m * Delta * x})
#
# For x = n * Delta_tilde:
# G(n * Delta_tilde) =
#   = sum_{m = -N}^{N-1} (Delta * (phi*(m * Delta + rho * i) * i) / (m * Delta + rho * i)
#     * e^{-i * m * Delta * Delta_tilde * n})
#   = sum_{m = -N}^{N-1} (Delta * (phi*(m * Delta + rho * i) * i) / (m * Delta + rho * i)
#     * e^{-i * m * n * pi / N})
#
# Set k = m + N and psi_rho(m * Delta) = (phi*(m * Delta + rho * i) * i) / (m * Delta + rho * i):
# G(n * Delta_tilde) =
#   = sum_{k = 0}^{2 * N - 1} (Delta * psi_rho((k - N) * Delta)
#     * e^{-2 * i * (k - N) * n * pi / (2 * N)})
#   = e^{i * pi * n} * sum_{k = 0}^{2 * N - 1} (Delta * psi_rho((k - N) * Delta)
#     * e^{-2 * i * (k - N) * n * pi / (2 * N)})
#   = (-1)^n * sum_{k = 0}^{2 * N - 1} (Delta * psi_rho((k - N) * Delta)
#     * e^{-2 * i * k * n * pi / (2 * N)})
#
# Computes the Discrete Fourier Transform (DFT) of an array with a fast algorithm,
# the "Fast Fourier Transform" (FFT) (source: https://www.rdocumentation.org/packages/stats/versions/3.6.2/topics/fft)
# By applying fft() function, i.e. y <- fft(z), we get:
# y_k = sum_{k = 0}^{N-1} z_k * e^{-2 * pi * i * k * n / N}
# where z is a real or complex array containing the values to be transformed.
# Thus, z vector in our case is psi_vals computed earlier multiplied by Delta.

# Multiply psi_vals by Delta
fft_input <- delta * psi_vals

# Implement FFT algorithm
fft_result <- fft(fft_input, inverse = FALSE)

# Rearrange the FFT output, moving the zero frequency to center of the spectrum.
# The default output of the FFT algorithm places the zero frequency at the
# beginning, followed by positive frequencies and then negative frequencies
# in reverse order. Although, the positive and negative frequency components
# are mirror images of each other, so we need to shift the zero frequency
# component to the center of the array to get this so called symmetric image
# (i.e. with negative frequencies on the left and positive frequencies on the right).
# (source: https://logs-lense-training.github.io/python-for-science/contents/signal_process_fft.html)
# For length 2*N - 1 vector x_0, ..., x_{(2*N-1)}, R stores it as x[1], ..., x[2*N]
# so we should apply the shifting step described above by rearrange fft_results
# as shown below.
fft_shifted <- pracma::fftshift(fft_result)
G_vals <- (-1)^((-N):(N-1)) * fft_shifted

# Compute CDF
F_grid <- (exp(rho * x_vec) / (2 * pi)) * Re(G_vals)

return(
  list(F_grid = F_grid, x = x_vec)
)
}

```

Κύριο μέρος της διαδικασίας υπολογισμού της δίκαιης αξίας του δικαιώματος SPX με χρήση του μετασχηματισμού Esscher.

```

# -----
# Download Two Years S&P500 Data from Yahoo! Finance and
# Compute the VG Parameters Under the Physical Probability Measure via MLE
# -----
library(VarianceGamma)
library(purrr)
library(quantmod)
library(fpp3)
library(plotly)
library(ggplot2)
library(patchwork)
# Download S&P500 daily data from Yahoo Finance
getSymbols('^GSPC',
  src = "yahoo",

```

```

      from = "2023-01-01",
      to = "2026-02-06")

sp_data <- GSPC |>
  as.data.frame() |>
  rownames_to_column('date') |>
  as.data.frame() |>
  mutate(date = as.Date(date)) |>
  select(date, sp_close = GSPC.Close) |>
  mutate(
    log_relative_returns = log(sp_close / first(sp_close)),
    log_daily_returns = log(sp_close / lag(sp_close))
  ) |>
  select(date, log_relative_returns, log_daily_returns)|>
  mutate(index = 'SP500') |>
  filter(!is.na(log_daily_returns)) |>
  filter(is.finite(log_daily_returns))

vg_params <- summary(
  sp_data |>
  filter(!is.na(log_daily_returns)) |>
  pull(log_daily_returns) |>
  vgFit(startMethod = 'Nelder-Mead', startValues = 'MoM', plots = FALSE)
)$param

# Annualized parameters
sigma_est <- vg_params[["sigma"]] * sqrt(252)
nu_est <- vg_params[["nu"]] / 252
theta_est <- vg_params[["theta"]] * 252

cat(sprintf("VG estimated parameters: sigma = %.6f, nu = %.6f, theta = %.6f", sigma_est, nu_est, theta_est))
# -----
# Plot Diagnostics (Plot H(h) vs h and h* vs r) and
# Calculate Best Parameter h* for Different Interest Rates
# -----
diagnostics <- esscher_diagnostics(
  sigma = sigma_est,
  nu = nu_est,
  theta = theta_est,
  r = 0.03
)

# Compute h* and transform parameters
r_vector <- unique(option_data$r)
h_star_vec <- sapply(c(r_lm = r_vector[1], r_3m = r_vector[2], r_6m = r_vector[3]), function(r) {
  find_h_star(sigma_est, nu_est, theta_est, r)$h_star
})
params_list <- lapply(h_star_vec, function(h) {
  esscher_transform_params(sigma_est, nu_est, theta_est, h)
})
# -----
# Compute the CDF of the Esscher Transformed VG Process via FFT Algorithm
# for each option in option_data, for each rate
# -----
result_data <- option_data |>
  mutate(
    neg_log_moneyness = log(K / S0),
    h_star = map_dbl(r, ~find_h_star(sigma_est, nu_est, theta_est, .x)$h_star),
    params = map(h_star, ~esscher_transform_params(sigma_est, nu_est, theta_est, .x))
  ) |>
  mutate(
    sigma_tilde = map_dbl(params, 'sigma'),
    nu_tilde = map_dbl(params, 'nu'),
    theta_tilde = map_dbl(params, 'theta'),
    cdf_fft = pmmap_dbl(list(neg_log_moneyness, T, params), function(x, t, p) {
      vg_cdf_fft(x, t, p$sigma, p$nu, p$theta, rho = 0.5)
    })
  )
  # cdf_via_integration = pmmap_dbl(list(log_moneyness, T, params), function(x, t, p) {
  #   vg_cdf_via_integration(x, t, p$sigma, p$nu, p$theta, rho = 0.5)
  # })
  ) |>
  select(-params)

# -----
# Plot resulting CDF
# -----
cdf_plot_data <- option_data |>
  mutate(
    h_star = map_dbl(r, ~find_h_star(sigma_est, nu_est, theta_est, .x)$h_star),
    params = map(h_star, ~esscher_transform_params(sigma_est, nu_est, theta_est, .x))
  ) |>
  distinct(T, params, bucket) |>
  mutate(
    fft_output = map2(T, params, function(t, p) {
      vg_cdf_fft(t, p$sigma, p$nu, p$theta, rho = 0.5, N = 2^12, delta = 0.05)
    })
  ) |>
  crossing(x_vals = seq(-0.5, 0.5, length.out = 1000)) |>
  mutate(
    # Interpolate to get CDF at each x_vals
    cdf_fft = map2_dbl(fft_output, x_vals, function(fft_out, x) {
      F_interp <- approx(fft_out$x, fft_out$F_grid, xout = x, rule = 2)$y
    })
  )

```

```

    })
  } |>
  select(-fft_output)

cdf_plot_data |>
  ggplot(mapping = aes(x = x_vals, y = cdf_fft, color = bucket)) +
  geom_line(linewidth = 1.2) +
  geom_vline(xintercept = 0, linetype = "dashed", color = "gray70", linewidth = 0.5) +
  labs(
    title = "CDF of Esscher Transformed VG Process",
    x = "x",
    y = "Cumulative Distribution Function",
    color = "Maturity"
  ) +
  scale_color_manual(values = c(
    "1 Month" = "grey50",
    "3 Months" = "steelblue",
    "6 Months" = "firebrick"
  )) +
  scale_y_continuous(breaks = seq(0, 1, 0.2)) +
  theme_light() +
  theme(
    plot.title = element_text(hjust = 0.5, face = "bold", size = 14),
    axis.title = element_text(size = 12),
    panel.grid.minor = element_blank(),
    legend.position = "bottom"
  )

# -----
# Compute Call Option Prices via Esscher Transformation
# -----
options(scipen = 999)
est_call_data_esscher <- result_data |>
  select(
    K, T, call_price, r, h_star, neg_log_moneyness
  ) |>
  mutate(
    params_h_star = map(h_star, ~esscher_transform_params(sigma_est, nu_est, theta_est, .x)),
    params_h_star_plus_one = map(h_star + 1, ~esscher_transform_params(sigma_est, nu_est, theta_est, .x))
  ) |>
  mutate(
    cdf_h_star = pmap_dbl(list(neg_log_moneyness, T, params_h_star), function(x, t, p) {
      fft_out <- vg_cdf_fft(t, p$sigma, p$nu, p$theta, rho = 0.5, N = 2^12, delta = 0.05)
      F_interp <- approx(fft_out$x, fft_out$F_grid, xout = x, rule = 2)$y
    })),
    cdf_h_star_plus_one = pmap_dbl(list(neg_log_moneyness, T, params_h_star_plus_one), function(x, t, p) {
      fft_out <- vg_cdf_fft(t, p$sigma, p$nu, p$theta, rho = 0.5, N = 2^12, delta = 0.05)
      F_interp <- approx(fft_out$x, fft_out$F_grid, xout = x, rule = 2)$y
    })
  ) |>
  mutate(
    call_price_vg = S0 * (1 - cdf_h_star_plus_one) - K * exp(- r * T) * (1 - cdf_h_star),
    epsilon = call_price - call_price_vg,
    epsilon_sq = epsilon^2
  ) |>
  select(K, T, call_price, call_price_vg, epsilon, epsilon_sq) |>
  mutate(across(where(is.numeric) & !c(K, T), ~round(., 4)))

# Calculate MSE
esscher_mse <- mean(est_call_data_esscher$epsilon_sq) |> print()

```

Γραφική σύγκριση των υποδειγμάτων για κάθε τεχνική που χρησιμοποιήθηκε (βλ. Σχήμα 6.8).

```

# -----
# Multi-Model Option Pricing Comparison Plot
# -----
# Merge the datasets
merged_data <- calibration_results |>
  select(K, T, call_price, bs_price, vg_price) |>
  rename(
    call_market = call_price,
    call_bs = bs_price,
    call_vg_calibrated = vg_price
  ) |>
  left_join(
    est_call_data_esscher |>
      select(K, T, call_price_vg) |>
      rename(call_vg_esscher = call_price_vg),
    by = c("K", "T")
  )

# Create maturity labels for faceting
merged_data <- merged_data |>

```

```

mutate(maturity_label = factor(
  case_when(
    T == 0.08 ~ "1 Month",
    T == 0.25 ~ "3 Months",
    T == 0.5 ~ "6 Months"
  ),
  levels = c("1 Month", "3 Months", "6 Months")
)
)

# Pivot longer for plotting
plot_data <- merged_data |>
pivot_longer(
  cols = c(call_market, call_bs, call_vg_calibrated, call_vg_esscher),
  names_to = "model",
  values_to = "price"
) |>
mutate(
  model = case_when(
    model == "call_market" ~ "Market",
    model == "call_bs" ~ "Black-Scholes",
    model == "call_vg_calibrated" ~ "VG (Calibrated)",
    model == "call_vg_esscher" ~ "VG (Esscher)"
  ),
  model = factor(model, levels = c("Market", "Black-Scholes", "VG (Calibrated)", "VG (Esscher)"))
)

# Create the plot
p <- ggplot(plot_data, aes(x = K, y = price, color = model, shape = model)) +
  geom_point(size = 2.5, alpha = 0.8) +
  geom_line(aes(group = model), alpha = 0.5) +
  facet_wrap(~maturity_label, scales = "free_y") +
  scale_color_manual(values = c(
    "Market" = "black",
    "Black-Scholes" = "#E74C3C",
    "VG (Calibrated)" = "#3498DB",
    "VG (Esscher)" = "#27AE60"
  )) +
  scale_shape_manual(values = c(
    "Market" = 16,
    "Black-Scholes" = 17,
    "VG (Calibrated)" = 15,
    "VG (Esscher)" = 18
  )) +
  labs(
    title = "Option Prices: Market vs Model Comparison",
    subtitle = "Comparing Black-Scholes and Variance-Gamma pricing approaches",
    x = "Strike (K)",
    y = "Call Price",
    color = "Model",
    shape = "Model"
  ) +
  theme_light() +
  theme(
    plot.title = element_text(hjust = 0.5, face = "bold"),
    plot.subtitle = element_text(hjust = 0.5, color = "gray40"),
    legend.position = "bottom"
  ) +
  xlim(5750, 7500) +
  ylim(0, 1200)

print(p)

```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Γιαννακόπουλος, Α. Ν. (2003). *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στην Χρηματοοικονομική*. Σημειώσεις Διαλέξεων, ΕΚΠΑ.

Ξένη

Ané, T. & Geman, H. (2000). Order flow, transaction clock, and normality of asset returns. *The Journal of Finance*, **55**(5), 2259–2284. <https://doi.org/10.1111/0022-1082.00286>

Applebaum, D. (2009). *Lévy processes and stochastic calculus (2nd ed)*. Cambridge University Press.

Avramidis, A. N. & L'Ecuyer, P. (2006). Efficient monte carlo and quasi-monte carlo option pricing under the variance gamma model. *Management Science*, **52**(12), 1930–1944. <https://doi.org/10.1287/mnsc.1060.0575>

Baurdoux, E. & Papantoleon, A. (2015). An Introduction to Levy Processes (Lecture notes from courses at TU Berlin, LSE and CIMAT).

Bretagnolle, J. L. (1973). Processus à Accroissements Indépendants. In *Ecole d'Été de Probabilités*, Lecture Notes in Mathematics **307**, Springer.

Capiński, M. & Kopp, P. E. (2012). *Discrete models of financial markets*. Cambridge University Press.

Carr, P., Geman, H., Madan, D. B. & Yor, M. (2002). The fine structure of asset returns: An empirical investigation. *The Journal of Business*, **75**(2), 305–333. <https://doi.org/10.1086/338705>

Chance, D. M. & Brooks, R. (2010). *An introduction to derivatives and risk management* (8. ed., international student ed). South-Western Cengage Learning.

Clark, P. K. (1973). A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices. *Econometrica*, **41**(1), 135. <https://doi.org/10.2307/1913889>

Cox, J. C. & Ross, S. A. (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, **3**(1–2), 145–166. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(76\)90023-4](https://doi.org/10.1016/0304-405X(76)90023-4)

- Daal, E. A. & Madan, D. B. (2005). An empirical examination of the variance-gamma model for foreign currency options. *The Journal of Business*, **78**(6), 2121–2152. <https://doi.org/10.1086/497039>
- Finlay, R. & Seneta, E. (2008). Option pricing with VG like models. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **11**(08), 943–955. <https://doi.org/10.1142/S0219024908005093>
- Fiorani, F. (2004). Option pricing under the variance gamma process. *Munich Personal RePEc Archive*, Paper No. 15395. <https://mpa.ub.uni-muenchen.de/15395/>
- Fischer, A., Gaunt, R. E., & Sarantsev, A. (2025). The variance-gamma distribution: A review. *Statistical Science*, **40**(2). <https://doi.org/10.1214/24-STS929>
- Fu, M.C. (2007). Variance-Gamma and Monte Carlo. In: Fu, M.C., Jarrow, R.A., Yen, JY.J., Elliott, R.J. (eds) *Advances in Mathematical Finance*. Birkhäuser Boston. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4545-8_2
- Geman, H., Madan, D. B. & Yor, M. (2002). Stochastic volatility, jumps and hidden time changes. *Finance and Stochastics*, **6**(1), 63–90. <https://doi.org/10.1007/s780-002-8401-3>
- Gerber, H. U. & Shiu, E. S. W. (1994). Option pricing by esscher transforms. *Transactions of the Society of Actuaries*, **46**, 99–191.
- Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M. & Jeffrey, A. (1980). *Table of integrals, series, and products* (Corr. and enl. ed). Academic Press.
- Hirsa, A. (2013). *Computational methods in finance*. CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Hughett, P. (1998). Error bounds for numerical inversion of a probability characteristic function. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **35**(4), 1368–1392. <https://www.jstor.org/stable/2587182>
- Ikedo, N. (with Watanabe, S., Fukushima, M. & Kunita, H.). (1996). *Itô's stochastic calculus and probability theory*. Springer Japan.
- Karatzas, I. & Shreve, S. E. (1988). *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer US. <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0302-2>
- Kloeden, P. E. & Platen, E. (1992). *Numerical solution of stochastic differential equations*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-12616-5>
- Korn, R., Korn, E. & Krisandt, G. (2010). *Monte carlo methods and models in finance and insurance*. CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781420076196>
- Kyprianou, A. E. (2006). *Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications*. Springer.

- Lamberton, D. & Lapeyre, B. (2011). *Introduction to stochastic calculus applied to finance* (Second edition). CRC Press.
- Macbeth, J. D. & Merville, L. J. (1979). An empirical examination of the black-scholes call option pricing model. *The Journal of Finance*, **34**(5), 1173–1186. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1979.tb00063.x>
- Madan, D. B., Carr, P. P. & Chang, E. C. (1998). The variance gamma process and option pricing. *Review of Finance*, **2**(1), 79–105. <https://doi.org/10.1023/A:1009703431535>
- Madan, D. B. & Milne, F. (1991). Option pricing with v. G. Martingale components1. *Mathematical Finance*, **1**(4), 39–55. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9965.1991.tb00018.x>
- Madan, D. B. & Seneta, E. (1990). The variance gamma (V. G.) model for share market returns. *The Journal of Business*, **63**(4), 511. <https://doi.org/10.1086/296519>
- Musiela, M. & Rutkowski, M. (2006). *Martingale methods in financial modelling*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/b137866>
- Nzokem, A. H. (2023). Pricing european options under stochastic volatility models: Case of five-parameter variance-gamma process. *Journal of Risk and Financial Management*, **16**(1), 55. <https://doi.org/10.3390/jrfm16010055>
- Papantoleon, A. (2000). An introduction to Levy Processes with Applications in Finance (Lecture Notes).
- Pascucci, A. (2011). *Pde and martingale methods in option pricing*. Springer Milan. <https://doi.org/10.1007/978-88-470-1781-8>
- Ribeiro, C. & Webber, N. (2002). Valuing path-dependent options in the variance-gamma model by Monte Carlo with a gamma bridge. *The Journal of Computational Finance*, **7**(2), 81–100. <https://doi.org/10.21314/JCF.2003.110>
- Rubinstein, M. (1994). Implied binomial trees. *The Journal of Finance*, **49**(3), 771–818. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1994.tb00079.x>
- Samuelson, P. A. (1965). Rational Theory of Warrant Pricing. *Industrial Management Review*, **6**(2), 13–31.
- Satô, K. (1999). *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge University Press.
- Sendov, H. & Shan, S. (2015). New representation theorems for completely monotone and bernstein functions with convexity properties on their measures. *Journal of Theoretical Probability*, **28**(4), 1689–1725. <https://doi.org/10.1007/s10959-014-0557-9>

- Shenoy, R. & Kempthorne, P. (2025). The variance-gamma process for option pricing (arXiv:2510.14093). arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2510.14093>
- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance ii: Continuous-time models*. Springer New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4296-1>
- Singpurwalla, N. (1997). *Gamma Processes and their Generalizations: An Overview*. In: Cooke, R., Mendel, M., Vrijling, H. (eds) *Engineering Probabilistic Design and Maintenance for Flood Protection*. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-3397-5_5
- Steele, J. M. (2001). *Stochastic calculus and financial applications* (4. print). Springer.
- Tanaka, K. (2013). A new method for fast computation of cumulative distribution functions by fractional FFT. *JSIAM Letters*, **5**(0), 57–60. <https://doi.org/10.14495/jsiaml.5.57>
- Tankov, P. & Cont, R. (2003). *Financial modelling with jump processes*. Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9780203485217>
- van der Weide, H. (1997). *Gamma processes*. In: Cooke, R., Mendel, M., Vrijling, H. (eds) *Engineering Probabilistic Design and Maintenance for Flood Protection*. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-3397-5_6
- Yor, M. (2007). Some Remarkable Properties of Gamma Processes. In: Fu, M.C., Jarrow, R.A., Yen, J.Y.J., Elliott, R.J. (eds) *Advances in Mathematical Finance*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser Boston. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4545-8_3

