ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής

και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΑΠΟΔΟΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΩΝ

ΒΙΚΤΩΡ ΤΡΑΠΟΥΖΑΝΛΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Υποβλήθηκε στο

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

του Πανεπιστημίου Πειραιώς

ΠΕΙΡΑΙΑΣ

ΜΑΡΤΙΟΣ 2025

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής

και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΑΠΟΔΟΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΩΝ

ΒΙΚΤΩΡ ΤΡΑΠΟΥΖΑΝΛΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Υποβλήθηκε στο

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

του Πανεπιστημίου Πειραιώς

ΠΕΙΡΑΙΑΣ

ΜΑΡΤΙΟΣ 2025

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Insurance Science

Department of Statistics and Insurance Science

CONTRIBUTIONS IN THE DEVELOPMENT OF TECHNIQUES AND ALGORITHMS FOR THE CONSTRUCTION OF EFFICIENT FACTORIAL DESIGNS

VICTOR TRAPOUZANLIS

PhD Thesis

Submitted to the

Department of Statistics and Insurance Science

of the University of Piraeus

PIRAEUS

MARCH 2025

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω την ειλικρινή και βαθιά μου ευγνωμοσύνη στον επιβλέποντά μου, κ. Χ. Ευαγγελάρα, για την αμέριστη καθοδήγηση, την αδιάλειπτη υποστήριξη και τη σημαντική επιστημονική του συνεισφορά καθ' όλη τη διάρκεια της διδακτορικής μου διατριβής. Η εμπιστοσύνη που έδειξε στις όποιες δυνατότητές μου, καθώς και η σταθερή ενθάρρυνσή του, αποτέλεσαν θεμέλια την επιτυχή ολοκλήρωση αυτής της διαδρομής.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στη σύζυγό μου, Όλγα, για την ανεξάντλητη υπομονή, την αληθινή αγάπη και την ακούραστη στήριξή της σε κάθε στάδιο αυτής της απαιτητικής πορείας. Η παρουσία της και η πίστη της σε εμένα υπήρξαν το πιο πολύτιμο στήριγμα σε όλη αυτή τη διαδρομή.

Τέλος, αφιερώνω αυτό το έργο στα παιδιά μου, Παναγιώτη και Άννα, που με τη ζωντάνια, την ανεμελιά και την άδολη αγάπη τους μου υπενθυμίζουν καθημερινά το πραγματικό νόημα των κόπων και των προσπαθειών.

Περίληψη

Σε αυτή τη διατριβή, εστιάζουμε στη μελέτη μιας σημαντικής κατηγορίας αποδοτικών σχεδιασμών κρησαρίσματος τριών επιπέδων, γνωστών ως σχεδιασμών για definitive screening (DS). Τα τελευταία 15 χρόνια, οι σχεδιασμοί DS μελετώνται συστηματικά λόγω των πλεονεκτημάτων τους έναντι των παραδοσιακών σχεδιασμών κρησαρίσματος δύο επιπέδων. Αρχικά κατασκευάστηκαν με τρία μηδενικά ανά στήλη, αλλά έχουν εξελιχθεί ώστε να περιλαμβάνουν περισσότερα μηδενικά ανά στήλη, βελτιώνοντας ακόμη περισσότερο την αποδοτικότητά τους σε σχέση με τους αρχικούς DS που είχαν κατασκευαστεί.

Παρουσιάζουμε μια μεθοδολογία για την κατασκευή αποδοτικών σχεδιασμών DS με δύο και τρεις στήλες, οι οποίοι παρουσιάζουν την ελάχιστη συσχέτιση μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν σε τετραγωνικές επιδράσεις, για κάθε πλήθος εκτελέσεων, n. Με τη χρήση αυτών των σχεδιασμών σε έναν αλγόριθμο επέκτασης, κατασκευάζουμε βέλτιστους – ως προς το ίδιο κριτήριο – σχεδιασμούς με περισσότερες από τρεις στήλες. Επιπλέον, κατασκευάζουμε πλήρεις λίστες μη-ισόμορφων σχεδιασμών DS με περιττό n ($13 \leq n \leq 33$), $2 \leq p \leq (n-1)/2$ στήλες, και 3, 5 ή 7 μηδενικά ανά στήλη, οι οποίοι αξιολογούνται στη συνέχεια με τη χρήση γνωστών κριτηρίων για τον εντοπισμό των καλύτερων σχεδιασμών για κάθε n.

Λέξεις κλειδιά: Σχεδιασμοί κρησαρίσματος για Definitive screening, Αλγόριθμος επέκτασης, Γραμμικά μοντέλα τετραγωνικών επιδράσεων, Τεχνική αναδίπλωσης, Συσχέτιση, D–αποδοτικότητα, Προβολικές ιδιότητες

Abstract

In this dissertation, we focus on the study of a significant category of efficient three-level screening designs, known as definitive screening (DS) designs. Over the past 15 years, DS designs have been systematically studied due to their advantages over traditional two-level screening designs. Initially constructed with three zeros per column, DS designs have evolved to include more zeros per column, improving further their efficiency compared to the original DS designs.

We present a methodology for constructing efficient DS designs with minimum correlation between columns representing quadratic effects, for every run order *n* and two and three columns. We use these designs and an extension algorithm to construct optimal designs with more than three columns. Additionally, we provide complete lists of non-isomorphic DS designs with odd n $(13 \leq n \leq 33)$, $2 \leq p \leq (n-1)/2$ columns, and 3, 5, or 7 zeros per column. All constructed designs are evaluated using known criteria to identify the best designs for each n studied.

Keywords: Definitive screening designs, Extension algorithm, Second order linear models, Fold-over, Correlation, D–efficiency, Projection properties

Πίνακας Περιεχομένων

Εισαγωγή xvi

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Πειραματικοί Σχεδιασμοί και Σχεδιασμοί Κρησαρίσματος 1

1.1 Πειραματικοί σχεδιασμοί: Σκοπός, βασικές έννοιες και ορισμοί 1

1.2 Ιστορική αναδρομή στους πειραματικούς σχεδιασμούς 5

1.2.1 Βασικές κατηγορίες πειραματικών σχεδιασμών 6

1.3 Ορθογώνιοι σχηματισμοί 8

1.4 Σχεδιασμοί κρησαρίσματος 10

1.4.1 Πίνακες και σχεδιασμοί Hadamard 11

1.4.2 Σχεδιασμοί Plackett – Burman 11

1.4.3 Προβολικές ιδιότητες 13

1.4.4 Παρατηρήσεις 15

1.5 Σχεδιασμοί κρησαρίσματος με τρία επίπεδα 16

1.5.1 Οι ορθογώνιοι σχηματισμοί τριών επιπέδων 17

1.5.2 Οι σχεδιασμοί αποκριτικών επιφανειών 18

1.5.3 Οι σχεδιασμοί για definitive screening 18

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Οι σχεδιασμοί DS 19

2.1 Σχεδιασμοί Definitive screening (DS) 19

2.1.1 Κατασκευή σχεδιασμών DS 21

2.1.2 Αξιολόγηση σχεδιασμών DS 22

2.2 Κατασκευή σχεδιασμών DS με χρήση conference πινάκων 22

2.3 Σχεδιασμοί DS με χρήση κυκλικών γεννητόρων 24

2.4 Σχεδιασμοί DS με χρήση weighing πινάκων 24

2.5 Κατασκευή σχεδιασμών DS με αφαίρεση στηλών 26

2.6 Κατασκευή σχεδιασμών DS με χρήση σχεδιασμών conference 27

2.7 Οι σχεδιασμοί OMARS 29

2.8 Σύνοψη 29

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Σχεδιασμοί DS με την ελάχιστη συσχέτιση στις στήλες που αντιστοιχούν σε τετραγωνικές επιδράσεις 33

3.1 Εισαγωγή 33

3.2 Η μορφή των σχεδιασμών DS με δύο στήλες 35

3.3 Βέλτιστοι σχεδιασμοί DS τριών στηλών 41
3.3.1 Η περίπτωση των $\boldsymbol{n \equiv 1 \bmod 4}$ εκτελέσεων 45
3.3.2 Η περίπτωση των $\boldsymbol{n \equiv 2 \bmod 4}$ εκτελέσεων 53
3.3.3 Η περίπτωση των $\boldsymbol{n \equiv 3 \bmod 4}$ εκτελέσεων 55
3.3.4 Η περίπτωση των $\boldsymbol{n \equiv 0 \bmod 4}$ εκτελέσεων 58
3.4 Βέλτιστοι σχεδιασμοί DS με περισσότερες από 3 στήλες 59
3.4.1 Σχολιασμός αποτελεσμάτων 62
3.5 Γενικές παρατηρήσεις, συμπεράσματα και προτάσεις 69
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Λίστες σχεδιασμών DS με τρία , πέντε και επτά μηδενικά ανά στήλη 71
4.1 Εισαγωγή 71
4.2 Ένας αλγόριθμος επέκτασης για την κατασκευή σχεδιασμών 71
4.3 Αξιολόγηση σχεδιασμών DS και συγκρίσεις 76
4.3.1 Αξιολόγηση σχεδιασμών DS με $n \equiv 1 \bmod 4$ εκτελέσεις 78
4.3.2 Αξιολόγηση σχεδιασμών DS με $n \equiv 3 \bmod 4$ εκτελέσεις 84
4.4 Προβολικές ιδιότητες σχεδιασμών DS 85
4.4.1 Προβολικές ιδιότητες των σχεδιασμών DS διάστασης $\boldsymbol{25 \times 12}$ 86
4.4.2 Προβολικές ιδιότητες των σχεδιασμών DS διάστασης $\boldsymbol{33 \times 16}$ 89
4.5 Συμπεράσματα και προτάσεις 92
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 94

Ευρετήριο Πινάκων

Κεφάλαιο 1	
Πίνακας 1.1: Plackett – Burman πίνακας 16 εκτελέσεων	12
Κεφάλαιο 2	
Πίνακας 2.1: Η τυπική δομή ενός definitive screening σχεδιασμού	20
Κεφάλαιο 3	
Πίνακας 3.1: Γενική μορφή σχεδιασμού DS με δύο στήλες	35
Πίνακας 3.2: Σχεδιασμός με δυο στήλες και στήλες τετραγωνικών επιδράσεων	37
Πίνακας 3.3: Σχεδιασμοί με δυο στήλες, περιττό αριθμό εκτελέσεων και $z \leq 7$ μηδενικά ανά στήλη	39
Πίνακας 3.4: 13×2 σχεδιασμός	40
Πίνακας 3.5: Σχεδιασμοί με δυο στήλες, άρτιο αριθμό εκτελέσεων και$z \leq 7$ μηδενικά ανά στήλη	40
Πίνακας 3.6: Γενική μορφή σχεδιασμού DS με τρεις στήλες	41
Πίνακας 3.7: Γενική μορφή σχεδιασμού με τρεις στήλες	44
Πίνακας 3.8: Η μορφή της λύσης για $n = 8m + 1$, $z = 3$ και $t_1 = t_2 = t_3 = 1$	46
Πίνακας 3.9: Σχεδιασμοί D τριών στηλών με $z \leq 7$ zeros ανά στήλη και ελάχιστη συσχέτιση σε απόλυτη τιμή C_{qq}, $n = 4k + 1$ εκτελέσεις και k άρτιος	50
Πίνακας 3.10: Σχεδιασμοί D τριών στηλών με $z \leq 7$ zeros ανά στήλη και ελάχιστη συσχέτιση σε απόλυτη τιμή C_{qq} $n = 4k + 1$ εκτελέσεις και k περιττός	51
Πίνακας 3.11: Συσχετίσεις μεταξύ τετραγωνικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων δυο παραγόντων για $n = 8m + 5$, $n = 8m + 1$ και $z = 3$	51
Πίνακας 3.12: Συσχετίσεις μεταξύ τετραγωνικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων δυο παραγόντων για $n = 8m + 5$, $n = 8m + 1$ και $z = 5$	52
Πίνακας 3.13: Συσχετίσεις μεταξύ τετραγωνικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων δυο παραγόντων για $n = 8m + 5$, $n = 8m + 1$ και $z = 7$	53
Πίνακας 3.14: Σχεδιασμοί D τριών στηλών με $z \leq 7$ zeros ανά στήλη και ελάχιστη συσχέτιση σε απόλυτη τιμή C_{qq} $n = 4k + 2$ εκτελέσεις	54
Πίνακας 3.15: Συσχετίσεις μεταξύ τετραγωνικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων δυο παραγόντων για $n = 8m + 2$, $n = 8m + 6$ και $z = 4$	54
Πίνακας 3.16: Συσχετίσεις μεταξύ τετραγωνικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων δυο παραγόντων για $n = 8m + 2$, $n = 8m + 6$ και $z = 6$	54, 55

Πίνακας 3.17: Σχεδιασμοί D τριών στηλών με $z \leq 7$ zeros ανά στήλη και ελάχιστη συσχέτιση σε απόλυτη τιμή C_{qq} $n = 4k + 3$ εκτελέσεις και k περιττός	55
Πίνακας 3.18: Σχεδιασμοί D τριών στηλών με $z \leq 7$ zeros ανά στήλη και ελάχιστη συσχέτιση σε απόλυτη τιμή C_{qq} $n = 4k + 3$ εκτελέσεις και k άρτιος	56
Πίνακας 3.19: Συσχετίσεις μεταξύ τετραγωνικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων δυο παραγόντων για $n = 8m + 7$, $n = 8m + 3$ και $z = 7$	57
Πίνακας 3.20: Συσχετίσεις μεταξύ τετραγωνικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων δυο παραγόντων για $n = 8m + 7$, $n = 8m + 3$ και $z = 5$	57
Πίνακας 3.21: Σχεδιασμοί D τριών στηλών με z≤7 zeros ανά στήλη και ελάχιστη συσχέτιση σε απόλυτη τιμή C_{qq} $n = 4k$ εκτελέσεις	58
Πίνακας 3.22: Συσχετίσεις μεταξύ τετραγωνικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων δυο παραγόντων για $n = 8m$, $n = 8m + 4$ και $z = 6$	59
Πίνακας 3.23: Πλήθος μη–ισόμορφων σχεδιασμών D με $z = 5$ και $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη και ελάχιστη απόλυτη συσχέτιση για τις στήλες των τετραγωνικών επιδράσεων, $17 \leq n \leq 33$, n odd	61
Πίνακας 3.24: Πλήθος μη–ισόμορφων σχεδιασμών D με $z = 3$ μηδενικά ανά στήλη και ελάχιστη απόλυτη συσχέτιση για τις στήλες των τετραγωνικών επιδράσεων, $21 \leq n \leq 33$, $n \equiv 1 \, mod \, 4$	61
Πίνακας 3.25: Τιμές D–αποδοτικότητας χρήσιμων μοντέλων και μέσος όρος συσχετίσεων στηλών που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες επιδράσεις για σχεδιασμούς DS με 25 εκτελέσεις και 3 στήλες	62
Πίνακας 3.26: Ο σχεδιασμός 25z5p3#3 και το correlation plot	63
Πίνακας 3.27: Ο σχεδιασμός 25z7p3#3 και το correlation plot	63
Πίνακας 3.28: Τιμές D–αποδοτικότητας χρήσιμων μοντέλων και μέσος όρος συσχετίσεων στηλών που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες επιδράσεις για σχεδιασμούς DS με 25 εκτελέσεις και 4 στήλες	64
Πίνακας 3.29: Ο σχεδιασμός 25z7p4#5 και το correlation plot	65
Πίνακας 3.30: Τιμές D–αποδοτικότητας χρήσιμων μοντέλων και μέσος όρος συσχετίσεων στηλών που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες επιδράσεις για σχεδιασμούς DS με 33 εκτελέσεις και 3 στήλες	65
Πίνακας 3.31: Ο σχεδιασμός 33z5p3#3 και το correlation plot	66
Πίνακας 3.32: Ο σχεδιασμός 33z7p3#4 και το correlation plot	66
Πίνακας 3.33: Τιμές D–αποδοτικότητας χρήσιμων μοντέλων και μέσος όρος συσχετίσεων στηλών που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες επιδράσεις για σχεδιασμούς DS με 33 εκτελέσεις και 4 στήλες	67
Πίνακας 3.34: Ο σχεδιασμός 33z5p4#13 και το correlation plot	68
Πίνακας 3.35: Ο σχεδιασμός 33z7p4#14 και το correlation plot	68
Κεφάλαιο 4	

Πίνακας 4.1: Πλήθος μη–ισόμορφων σχεδιασμών διάστασης $n \times p$ με $z = 3$ μηδενικά ανά στήλη και ένα κεντρικό σημείο (ο αριθμός μέσα σε παρένθεση δείχνει τον συνολικό αριθμό σχεδιασμών με ένα ή περισσότερα κεντρικά σημεία)	75
Πίνακας 4.2: Πλήθος μη–ισόμορφων σχεδιασμών διάστασης $n \times p$ με $z = 5$ μηδενικά ανά στήλη και ένα κεντρικό σημείο (ο αριθμός μέσα σε παρένθεση δείχνει τον συνολικό αριθμό σχεδιασμών με ένα ή περισσότερα κεντρικά σημεία)	75
Πίνακας 4.3: Πλήθος μη–ισόμορφων σχεδιασμών διάστασης $n \times p$ με $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη και ένα κεντρικό σημείο (ο αριθμός μέσα σε παρένθεση δείχνει τον συνολικό αριθμό σχεδιασμών με ένα ή περισσότερα κεντρικά σημεία)	76
Πίνακας 4.4: Οι καλύτεροι σχεδιασμοί $n \times p$ με τις αντίστοιχες τιμές των κριτηρίων αξιολόγησης που χρησιμοποιήθηκαν, όταν $n \equiv 1 mod\ 4$, $n \leq 33$ και $3 \leq\ p \leq\ 4$	79
Πίνακας 4.5: Οι καλύτεροι σχεδιασμοί $n \times p$ με τις αντίστοιχες τιμές των κριτηρίων αξιολόγησης που χρησιμοποιήθηκαν, όταν $n \equiv 1 mod\ 4$, $n \leq 33$ και $5 \leq\ p \leq\ 6$	80
Πίνακας 4.6: Οι καλύτεροι σχεδιασμοί $n \times p$ με τις αντίστοιχες τιμές των κριτηρίων αξιολόγησης που χρησιμοποιήθηκαν, όταν $n \equiv 1 mod\ 4$, $n \leq 33$ και $7 \leq\ p \leq\ 9$	82
Πίνακας 4.7: Οι καλύτεροι σχεδιασμοί $n \times p$ με τις αντίστοιχες τιμές των κριτηρίων αξιολόγησης που χρησιμοποιήθηκαν, όταν $n \equiv 1 mod\ 4$, $n \leq 33$ και $7 \leq\ p \leq\ 9$	82
Πίνακας 4.8: Ο 25×4 σχεδιασμός DS με ID z=7 #37 και το correlation plot	83
Πίνακας 4.9: Οι καλύτεροι σχεδιασμοί $n \times p$ με τις αντίστοιχες τιμές των κριτηρίων αξιολόγησης που χρησιμοποιήθηκαν, όταν $n \equiv 3\ mod\ 4$, $n \leq 33$, $p = 3$ και $p = 4$	84
Πίνακας 4.10: Οι καλύτεροι σχεδιασμοί $n \times p$ με τις αντίστοιχες τιμές των κριτηρίων αξιολόγησης που χρησιμοποιήθηκαν, όταν $n \equiv 3\ mod\ 4$, $n \leq 33$ και $5 \leq p \leq 7$	85
Πίνακας 4.11: Προβολικές ιδιότητες σε 3 στήλες για σχεδιασμούς 25 εκτελέσεων και 12 στηλών	87
Πίνακας 4.12: Προβολικές ιδιότητες σε 4 στήλες για σχεδιασμούς 25 εκτελέσεων και 12 στηλών	88
Πίνακας 4.13: Ο σχεδιασμός f12z7#2 25 εκτελέσεων και 12 στηλών με 7 μηδενικά ανά στήλη	89

Πίνακας 4.14: Προβολικές ιδιότητες σε 3 στήλες για σχεδιασμούς 33 εκτελέσεων και 16 στηλών	90
Πίνακας 4.15: Προβολικές ιδιότητες σε 4 στήλες για σχεδιασμούς 33 εκτελέσεων και 16 στηλών	91
Πίνακας 4.16: Ο σχεδιασμός f16z7#11 με 32 εκτελέσεις και 16 στηλών με 7 μηδενικά ανά στήλη	92

Εισαγωγή

Η διατριβή αυτή εστιάστηκε στη μελέτη μιας σημαντικής κατηγορίας αποδοτικών σχεδιασμών κρησαρίσματος με τρία επίπεδα (–1, 0 και +1), τους σχεδιασμούς για definitive screening (σχεδιασμοί DS). Οι σχεδιασμοί DS, μελετώνται συστηματικά τα τελευταία 15 έτη αφού παρουσιάζουν σημαντικά πλεονεκτήματα έναντι των «κλασικών» σχεδιασμών κρησαρίσματος δύο επιπέδων. Οι σχεδιασμοί αυτοί έχουν μια συγκεκριμένη μορφή (fold–over) και η αρχική κατασκευή τους είχε τρία μηδενικά ανά στήλη. Όμως, στην εξέλιξη της μελέτης τους, έχουν προταθεί πλέον κατασκευές με περισσότερα μηδενικά ανά στήλη. Στη διατριβή αυτή, η οποία αποτελείται από τέσσερα Κεφάλαια, παρουσιάζεται αρχικά μία μεθοδολογία για την κατασκευή αποδοτικών σχεδιασμών DS με n εκτελέσεις και p στήλες, η χρήση των οποίων εξασφαλίζει την ελάχιστη δυνατή (απόλυτη) συσχέτιση μεταξύ των τετραγωνικών επιδράσεων των υπό εξέταση παραγόντων. Στη συνέχεια, εφαρμόζονται τεχνικές εξαντλητικής απαρίθμησης (exhaustive search) και κατασκευάζονται λίστες μη ισόμορφων σχεδιασμών DS με n εκτελέσεις και p στήλες, για πλήθος εκτελέσεων $n \leq 33$, n περιττός, και με 3 ή 5 ή 7 μηδενικά ανά στήλη. Οι σχεδιασμοί που κατασκευάζονται αξιολογούνται με τη χρήση δημοφιλών κριτηρίων και εντοπίζονται οι βέλτιστοι προς χρήση ως προς το κάθε κριτήριο.

Στο πρώτο Κεφάλαιο παρουσιάζονται συνοπτικά βασικές έννοιες και ορισμοί της περιοχής των Πειραματικών Σχεδιασμών και περιγράφονται οι κυριότεροι σχεδιασμοί (κυρίως με δύο και τρία επίπεδα) που παραδοσιακά χρησιμοποιούνται για την ανάδειξη παραγόντων με σημαντικές επιδράσεις στα αρχικά στάδια του πειραματισμού (screening – κρησάρισμα). Περιγράφονται επίσης και τα κυριότερα κριτήρια που εφαρμόζονται για την αξιολόγηση τους.

Στο δεύτερο Κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση της βιβλιογραφίας που αφορά σε μεθόδους κατασκευής και αξιολόγησης των σχεδιασμών DS. Το Κεφάλαιο συνοψίζει τα κυριότερα έως σήμερα αποτελέσματα στην περιοχή αυτή, τα οποία και ενισχύθηκαν με τα αποτελέσματα της διατριβής αυτής.

Στο τρίτο Κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση της μεθοδολογίας που προτείνεται για την κατασκευή σχεδιασμών DS οι οποίοι εμφανίζουν ελάχιστη συσχέτιση μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν σε τετραγωνικές επιδράσεις. Κατασκευάζεται αρχικά ο βέλτιστος (ως προς το συγκεκριμένο κριτήριο) n x 2 σχεδιασμός για κάθε πλήθος εκτελέσεων n, και

στη συνέχεια δίνεται η μορφή αυτών των σχεδιασμών με τρεις στήλες. Ως εφαρμογή της μεθόδου, κατασκευάζονται όλοι οι μη–ισόμορφοι σχεδιασμοί με τρεις στήλες και με $z \leq 7$ μηδενικά ανά στήλη, οι οποίοι έχουν ελάχιστη συσχέτιση μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν σε τετραγωνικές επιδράσεις, για κάθε πλήθος εκτελέσεων n. Επειδή η επέκταση της μεθόδου για την εύρεση του πλήθους των μη ισόμορφων και βέλτιστων – ως προς το προαναφερθέν κριτήριο – σχεδιασμών με περισσότερες από τρεις στήλες και για κάθε n είναι εξαιρετικά πολύπλοκη στην εφαρμογή της, χρησιμοποιήθηκαν τα ευρήματα των τριών στηλών σε έναν αλγόριθμο επέκτασης (extension algorithm), και κατασκευάστηκαν όλοι οι μη–ισόμορφοι και βέλτιστοι (ως προς το συγκεκριμένο κριτήριο) σχεδιασμοί με περισσότερες από τρεις στήλες για περιττό πλήθος εκτελέσεων $n < 35$ και με 3 ή 5 ή 7 μηδενικά ανά στήλη.

Στο τέταρτο και τελευταίο Κεφάλαιο, κατασκευάζονται οι πλήρεις λίστες μη–ισόμορφων σχεδιασμών DS, με περιττό αριθμό εκτελέσεων n, $13 \leq n \leq 33$, με $2 \leq k \leq (n-1)/2$ στήλες και με τρία, πέντε και επτά μηδενικά ανά στήλη. Οι σχεδιασμοί αυτοί αξιολογούνται με χρήση γνωστών κριτηρίων και, για κάθε πλήθος εκτελέσεων n που μελετήθηκε, δίνονται οι βέλτιστοι σχεδιασμοί.

Από την διδακτορική διατριβή προέκυψαν οι ακόλουθες εργασίες που δημοσιεύτηκαν ή έχουν γίνει δεκτές για δημοσίευση σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά:

- H. Evangelaras and V. Trapouzanlis, Three-level designs for definitive screening with minimum correlation among columns that correspond to pure quadratic effects, *Journal of Statistical Theory and Practice*, 18, 55 (2024).

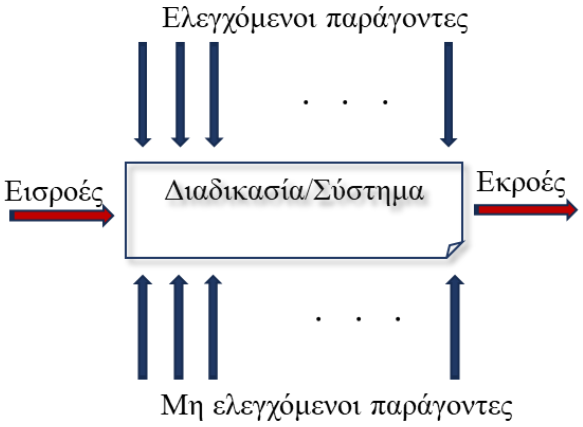
- H. Evangelaras and V. Trapouzanlis, Enumeration and evaluation of orthogonal three-level designs with small number of runs for definitive screening, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, to appear (2025).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Πειραματικοί Σχεδιασμοί και Σχεδιασμοί Κρησαρίσματος

1.1 Πειραματικοί σχεδιασμοί: Σκοπός, βασικές έννοιες και ορισμοί

Ένα πείραμα είναι μια ερευνητική διαδικασία κατά την οποία οι τιμές ή οι καταστάσεις μιας ή και περισσότερων μεταβλητών μεταβάλλονται συστηματικά και παρατηρούνται οι επακόλουθες αλλαγές σε μία ή περισσότερες εξαρτημένες μεταβλητές (βλ. Roger E. Kirk, *Experimental Design: Procedures for the Behavioral Sciences*, 1968). Στη διαδικασία αυτή, στόχος είναι να εντοπιστούν και να αναλυθούν οι αιτίες που προκαλούν μεταβολές στην απόκριση και οφείλονται στις συστηματικές μεταβολές των τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών, με σκοπό τη βελτιστοποίηση της υποκείμενης διαδικασίας. Κατά τον Montgomery, (*Design and Analysis of Experiments*, 2013), το πείραμα είναι μια δοκιμή ή σειρά δοκιμών, κατά την οποία γίνονται σκόπιμες αλλαγές στις εισόδους μιας διαδικασίας ή ενός συστήματος, ώστε να παρατηρήσουμε και να εντοπίσουμε τους λόγους για τις αλλαγές που παρατηρούνται στην απόκριση εξόδου (βλέπε εικόνα 1.1).



Εικόνα 1.1:Το γενικό μοντέλο μιας διαδικασίας ή συστήματος

Αυτό που επιδιώκεται, είναι (α) ο προσδιορισμός των μεταβλητών εισόδου, είτε αυτές είναι ελεγχόμενες είτε όχι, και οι οποίες ενδεχομένως ευθύνονται για τις παρατηρούμενες αλλαγές στην απόκριση, (β) η ανάπτυξη ενός μοντέλου που συνδέει την απόκριση με τις σημαντικές ελεγχόμενες μεταβλητές εισόδου και (γ) η χρήση αυτού του μοντέλου για τη

βελτίωση της διαδικασίας ή του συστήματος ή για τη λήψη άλλων αποφάσεων. Σε αυτή τη διαδικασία που περιλαμβάνει το σχεδιασμό των πειραμάτων καθώς και τη στατιστική τους ανάλυση με στόχο την εξαγωγή συμπερασμάτων, χρησιμοποιείται συγκεκριμένη ορολογία που αφορά στις σημαντικές παραμέτρους της όλης διαδικασίας. Αναλυτικότερα:

- Ο **παράγοντας** (factor) είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή που χρησιμοποιείται σε έναν πειραματικό σχεδιασμό, του οποίου οι τιμές ή οι καταστάσεις μεταβάλλονται προμελετημένα ώστε να μελετηθούν οι όποιες μεταβολές δημιουργούνται στην διαδικασία που μελετάται. Ένας παράγοντας μπορεί να είναι είτε ποσοτικός ή ποιοτικός, ανάλογα με το είδος των δεδομένων που εκφράζει. Οι ποσοτικοί παράγοντες είναι μετρήσιμες ποσότητες που εκφράζονται με αριθμούς, όπως ο χρόνος, το βάρος ή η θερμοκρασία. Οι ποιοτικοί παράγοντες περιγράφουν κατηγορίες ή χαρακτηριστικά, όπως το είδος, ο τύπος ή η θέση, και συχνά εκφράζονται με ονομαστικές ή ταξινομημένες τιμές.
- Η **στάθμη ή το επίπεδο** (level) ενός παράγοντα αναφέρεται στη συγκεκριμένη τιμή ή κατάσταση που λαμβάνει ο παράγοντας σε ένα πείραμα ή μελέτη. Αυτή η τιμή καθορίζει σε ποια συνθήκη ή παράμετρο επιθυμούμε να παρατηρήσουμε ή να μετρήσουμε την απόκριση ή την αντίδραση της εξαρτημένης μεταβλητής. Τα επίπεδα ενός ποσοτικού παράγοντα επιλέγονται με βάση το εύρος τιμών που μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε για αυτόν τον παράγοντα, ώστε να καλύπτουν το φάσμα των δυνατών τιμών που μπορεί να πάρει. Για έναν ποιοτικό παράγοντα, τα επίπεδα μπορεί να είναι είτε όλες οι καταστάσεις που θεωρούμε σημαντικές είτε ένα τυχαίο δείγμα από το σύνολο των δυνατών καταστάσεων. Ειδικά, για τους ποιοτικούς παράγοντες, τα επίπεδα καθορίζονται ανάλογα με το ενδιαφέρον της μελέτης.
- Η **θεραπεία** (treatment) αναφέρεται στο σύνολο των πειραματικών συνθηκών που επιλέγονται ή ελέγχονται σε ένα πείραμα. Αυτές οι συνθήκες ουσιαστικά χρησιμοποιούνται για να παρατηρηθεί η αντίδραση ή η μεταβολή στη διαδικασία. Μια θεραπεία είναι ουσιαστικά ένας συνδυασμός των επιπέδων των παραγόντων που μελετώνται στο πείραμα. Έτσι, αν μελετώνται m παράγοντες με επίπεδα ο καθένας $s_1, s_2, \dots, s_m$ τότε υπάρχουν $s_1 \cdot s_2 \cdots s_m$ διαφορετικές θεραπείες που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθούν. Επομένως, στη περίπτωση που εξετάζεται μόνο ένας παράγοντας, η έννοια της θεραπείας και του επιπέδου ταυτίζονται, καθώς το επίπεδο του παράγοντα αποτελεί και τη θεραπεία του πειράματος.

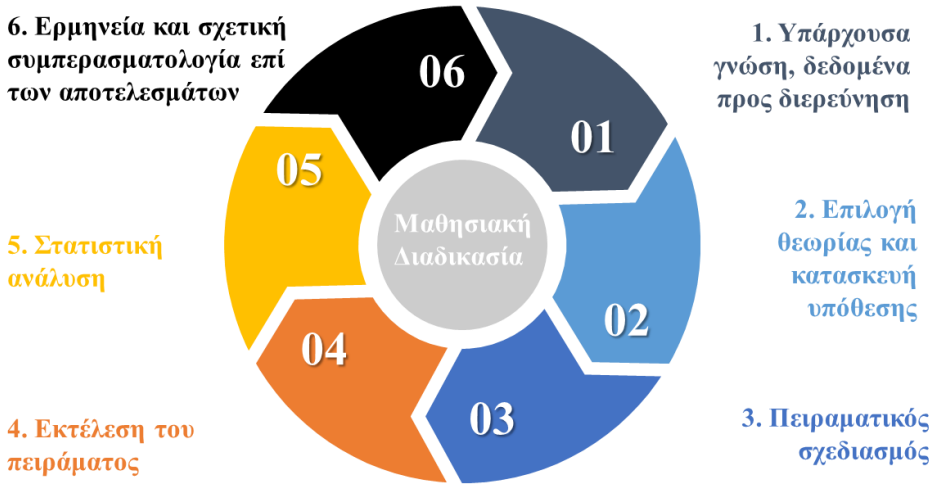
- Η **απόκριση** (response) του πειράματος είναι η μεταβλητή της οποίας το αποτέλεσμα μπορεί να περιγράψει την απόδοση ή τη συμπεριφορά της διαδικασίας που μελετάται. Στόχος είναι η ανάδειξη αυτών των θεραπειών οι οποίες ουσιαστικά οδηγούν τις τιμές της απόκρισης σε επιθυμητά επίπεδα και συνεπώς κάνει τη διαδικασία που μελετάται αποδοτική. Είναι σημαντικό να ορίζεται με ακρίβεια και να είναι ποσοτικά μετρήσιμη, ώστε τα αποτελέσματα να είναι σαφή και αναπαραγωγίσιμα.
- Η **επίδραση** (effect) στη μεταβλητή απόκρισης ορίζεται ως η αλλαγή που παρατηρείται ή μετράται στη μεταβλητή απόκρισης, όταν αλλάζουν προμελετημένα οι θεραπείες του πειράματος. Αυτή η αλλαγή αντικατοπτρίζει το αν και πως οι παράγοντες επηρεάζουν την εξαρτημένη μεταβλητή, παρέχοντας πληροφορίες για τη σχέση αιτίας – αποτελέσματος στο πλαίσιο της ανάλυσης. Η αποτίμηση και η αξιολόγηση των παραγοντικών επιδράσεων είναι το κυριότερο αντικείμενο της στατιστικής ανάλυσης που έπεται της συλλογής των δεδομένων. Οι παραγοντικές επιδράσεις χωρίζονται σε κατηγορίες, ανάλογα με το πόσοι από τους παράγοντες «συμμετέχουν» σε αυτές. Υπάρχουν λοιπόν οι κύριες επιδράσεις, οι αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων κ.ο.κ. Το πλήθος των παραγόντων που «συνεισφέρουν» σε μια επίδραση (κύρια ή αλληλεπίδραση) λέγεται και τάξη της επίδρασης.
- Η **πειραματική ή δειγματοληπτική μονάδα** είναι η βασική μονάδα ενός πειράματος, πάνω στην οποία πραγματοποιούνται οι μετρήσεις της απόκρισης. Πρόκειται για το αντικείμενο (π.χ. άτομο, υλικό, φυτό, ζώο) στο οποίο εφαρμόζεται μια συγκεκριμένη θεραπεία και στη συνέχεια καταγράφεται η απόκριση της μεταβλητής ενδιαφέροντος. Η σωστή επιλογή και καθορισμός των πειραματικών μονάδων είναι κρίσιμη για την εγκυρότητα και αξιοπιστία των αποτελεσμάτων.
- Το **πειραματικό σφάλμα**, είναι η μεταβλητότητα που υπάρχει στην απόκριση και η οποία δεν μπορεί να αποδοθεί σε αλλαγή θεραπείας.

Ο έλεγχος του πειραματικού σφάλματος είναι κρίσιμη διεργασία κατά το σχεδιασμό ενός πειράματος. Η μείωση του πειραματικού σφάλματος και η αύξηση της ακρίβειας των συμπερασμάτων, απαιτούν την εναρμόνιση με τρεις βασικές αρχές που διέπουν τους πειραματικούς σχεδιασμούς και αφορούν την επανάληψη (replication), την τυχαιοποίηση (randomization) και την ομαδοποίηση (blocking) των θεραπειών. Συγκεκριμένα:

- Η **επανάληψη** αναφέρεται στην ανεξάρτητη μέτρηση της απόκρισης με τη χρήση της ίδιας θεραπείας. Όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο μικρότερο γίνεται το τυπικό σφάλμα, το οποίο επηρεάζει την ακρίβεια της εκτίμησης μιας επίδρασης.
- Η **τυχαιοποίηση** περιλαμβάνει τη χρήση μιας τυχαίας διαδικασίας, πρώτον για την επιλογή των πειραματικών μονάδων, δεύτερον για τη σειρά εφαρμογής των θεραπειών (π.χ. ποιο δείγμα λαμβάνει ποια θεραπεία), και τρίτον για τη σειρά μέτρησης των αποκρίσεων. Ο σκοπός της τυχαιοποίησης είναι να εξουδετερώσει τυχόν μεροληψία που μπορεί να εισάγει ο πειραματιστής. Επιπλέον, διασφαλίζει ότι οποιαδήποτε διαφορά στα αποτελέσματα αποδίδεται στις θεραπείες και όχι σε εξωτερικούς παράγοντες.
- Τέλος, η **ομαδοποίηση** είναι μια μέθοδος που χρησιμοποιείται όταν οι πειραματικές μονάδες δεν είναι απόλυτα ομοιογενείς. Χωρίζουμε τις μονάδες σε ομάδες (blocks) που είναι όσο το δυνατόν παρόμοιες (ομοιογενείς) ως προς τα χαρακτηριστικά που μπορούν να επηρεάσουν την απόκριση (π.χ. παρτίδες προϊόντων, γεωγραφικές τοποθεσίες). Για να είναι αποτελεσματική η ομαδοποίηση, η διακύμανση εντός κάθε ομάδας πρέπει να είναι μικρότερη από τη διακύμανση μεταξύ των ομάδων. Αυτό σημαίνει ότι οι μονάδες μέσα σε κάθε ομάδα πρέπει να είναι όσο πιο ομοιογενείς γίνεται, ενώ οι διαφορές μεταξύ διαφορετικών ομάδων πρέπει να είναι σημαντικές. Έτσι, το πειραματικό σφάλμα μειώνεται, καθώς αφαιρούνται οι επιδράσεις των εξωτερικών παραγόντων που προκαλούν μεταβλητότητα.

Οι πειραματικοί σχεδιασμοί αποτελούν για πολλές Επιστήμες, το θεμέλιο του τρόπου διερεύνησης και της μαθησιακής διαδικασίας, συνδέοντας τη θεωρία με την εμπειρική παρατήρηση. Η κυκλική ροή (εικόνα 1.2) της μαθησιακής διαδικασίας στην επιστήμη, αντικατοπτρίζει τη διαρκή διαδικασία με την οποία η γνώση αναπτύσσεται και εξελίσσεται μέσω της συστηματικής διερεύνησης και αξιολόγησης. Ξεκινώντας από την υπάρχουσα γνώση, η διαδικασία συνεχίζεται με την επιλογή ή πρόταση μιας θεωρίας προς δοκιμή ή εξερεύνηση, η οποία διατυπώνεται ως υπόθεση. Η υπόθεση αυτή πρέπει να είναι ικανή να παράγει διαφορετικά πιθανά συμπεράσματα, εξασφαλίζοντας ότι μπορεί να δοκιμαστεί εμπειρικά. Για παράδειγμα, στη Στατιστική, συχνά χρησιμοποιείται η «μηδενική υπόθεση» ως βάση για την αξιολόγηση μιας συγκεκριμένης κατάστασης, όπως η απουσία επίδρασης ή διαφοράς. Μετά τη διατύπωση της υπόθεσης, ο πειραματικός σχεδιασμός καθορίζει τη δομή και τη μεθοδολογία της έρευνας, επιτρέποντας τη συλλογή δεδομένων μέσω της

εκτέλεσης του πειράματος. Στη συνέχεια, τα δεδομένα αναλύονται στατιστικά για να ελεγχθούν οι υποθέσεις και να εξαχθούν συμπεράσματα.



Εικόνα 1.2: Η κυκλική ροή της μαθησιακής διαδικασίας στην επιστήμη

Τα αποτελέσματα ερμηνεύονται και ακολουθεί η συμπερασματολογία που συμβάλλει στην επικαιροποίηση ή την αναθεώρηση της αρχικής γνώσης. Αυτή η κυκλική διαδικασία εξασφαλίζει τη συνεχή πρόοδο της επιστήμης, αναδεικνύοντας τη σημασία της πειραματικής προσέγγισης και της κριτικής αξιολόγησης.

1.2 Ιστορική αναδρομή στους πειραματικούς σχεδιασμούς

Η ανάπτυξη των πειραματικών σχεδιασμών ως επιστημονικής μεθοδολογίας, οφείλεται κατά κύριο λόγο στο έργο του Ronald A. Fisher, ο οποίος εισήγαγε σημαντικές αρχές της στατιστικής ανάλυσης και των πειραματικών διαδικασιών στα έργα του «*The Arrangement of Field Experiments*» (1926) και «*The Design of Experiments*» (1935). Οι μέθοδοι που ανέπτυξε για την Ανάλυση Διακύμανσης, την Τυχαιοποίηση και την Επανάληψη, βρήκαν αρχικά εφαρμογή σε πειράματα αγροτικής παραγωγής, όπου ήταν κρίσιμο να ελεγχθεί το πειραματικό σφάλμα. Το έργο του, μαζί με τις παράλληλες έρευνες των Neyman (1925) και Wishart (1930), αποτέλεσε θεμέλιο λίθο για τη χρήση στατιστικών πειραματικών σχεδιασμών στις φυσικές, κοινωνικές και οικονομικές επιστήμες.

Η συμβολή των Fisher και Neyman είχε τόσο θεωρητική όσο και πρακτική σημασία, επηρεάζοντας την εξέλιξη της μεθόδου δειγματοληψίας και τον σχεδιασμό μεγάλων ερευνών. Η επιρροή αυτή αποτυπώνεται στις μελέτες των Yated (1964, 1975), Cochrane

(1976), και Box (1978), οι οποίες συνέβαλαν στη βελτίωση των εργαλείων πειραματικής ανάλυσης. Το πλούσιο αυτό υπόβαθρο οδήγησε σε επεκτάσεις του πειραματικού σχεδιασμού και σε βιομηχανικές εφαρμογές, όπως η ανάλυση συστημάτων ποιότητας μέσω των σχεδιασμών Box – Behnken και τη μέθοδο Taguchi. Αυτές οι μέθοδοι συνέβαλαν στη βελτίωση της παραγωγικής διαδικασίας και την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης.

Στις κοινωνικές και οικονομικές επιστήμες, η σύνδεση με τους πειραματικούς σχεδιασμούς επισημαίνεται από ερευνητές όπως οι Levitt and List (2009) στην οικονομία της συμπεριφοράς και όπως επίσης οι Ferber and Hirsch (1982), Hausman and Wise (1985), Manski and Garfinkel (1992), Greenberg and Shroder (2004), στην κοινωνιολογική έρευνα. Έτσι, οι μέθοδοι που αρχικά αναπτύχθηκαν για την αγροτική παραγωγή επαναχρησιμοποιούνται πλέον σε ευρύτατο φάσμα επιστημών, ενισχύοντας τη σύνδεση μεταξύ θεωρητικών και πρακτικών εφαρμογών στατιστικής ανάλυσης.

1.2.1 Βασικές κατηγορίες πειραματικών σχεδιασμών

Με την ανάπτυξη της περιοχής των πειραματικών σχεδιασμών στην πάροδο των ετών, έχουν κατασκευαστεί και μελετηθεί σχεδιασμοί διάφορων τύπων προς χρήση σε εφαρμογές. Οι κυριότερες κατηγορίες που θα μπορούσε κάποιος να τους ταξινομήσει, λαμβάνοντας υπόψη τη χρήση τους, είναι οι παραγοντικοί σχεδιασμοί (factorial designs), οι σχεδιασμοί κατά ομάδες (block designs), οι σχεδιασμοί κρησαρίσματος (screening designs) και οι σχεδιασμοί αποκριτικών επιφανειών (response surface designs). Σημειώνεται ότι – από πλευράς δομής και σχεδιασμού – κάποιες από τις παραπάνω κατηγορίες μπορεί να έχουν αρκετά κοινά στοιχεία και η διαφοροποίησή τους γίνεται κατά το στάδιο της διαχείρισης των παραγόντων, δηλαδή κατά τη διαδικασία εφαρμογής των στατιστικών μεθόδων και της μοντελοποίησης της απόκρισης. Σε κάθε κατηγορία, σημαντικό ρόλο παίζει το πλήθος των επιπέδων στα οποία εξετάζεται ο κάθε παράγοντας, καθώς το πλήθος αυτό συνεισφέρει σημαντικά στο μέγεθος του σχεδιασμού (δηλαδή το πλήθος των μετρήσεων που θα χρειαστεί να γίνουν, ώστε να εκτελεστεί) αλλά και στον τρόπο μοντελοποίησης της απόκρισης.

Οι **παραγοντικοί σχεδιασμοί** χρησιμοποιούνται σε πειράματα όπου οι επιδράσεις αρκετών παραγόντων πρέπει να εξεταστούν ταυτόχρονα, με στόχο να εντοπιστούν οι σημαντικές εξ' αυτών. Αρχικά, ο σχεδιασμός των θεραπειών του πειράματος βασίστηκε σε αλλαγές επιπέδων σε έναν παράγοντα κάθε φορά (one factor at a time), αλλά η προσέγγισή

αυτή δεν επέτρεπε τη μελέτη αλληλεπιδράσεων μεταξύ των παραγόντων. Οι **πλήρεις παραγοντικοί σχεδιασμοί** (full factorial designs, βλ. Wu και Hamada, 2000) διορθώνουν αυτό το μειονέκτημα, καθώς χρησιμοποιούν όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των επιπέδων των παραγόντων σε κάθε πλήρη επανάληψη του πειράματος. Η προσέγγιση αυτή επιτρέπει την εκτίμηση των επιδράσεων όλων των παραγόντων του πειράματος, δίνοντας μια πληρέστερη κατανόηση του φαινομένου που εξετάζεται. Ένα «μειονέκτημα» που προκύπτει κατά την εφαρμογή πλήρων παραγοντικών σχεδιασμών είναι το εξαιρετικά μεγάλο πλήθος μετρήσεων που μπορεί να χρειαστεί για την εκτέλεσή των. Όταν ο αριθμός των παραγόντων είναι μεγάλος, ή όταν το πλήθος των επιπέδων που μελετώνται οι παράγοντες είναι επίσης μεγάλο, και δεδομένου ότι χρησιμοποιούνται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί επιπέδων των παραγόντων, τότε θα προκύπτει η ανάγκη εκτέλεσης ενός αρκετά μεγάλου αριθμού πειραμάτων, κάτι που είναι συχνά δαπανηρό και χρονοβόρο. Για παράδειγμα, αν μελετάμε τρεις παράγοντες με δύο επίπεδα ο καθένας, χρειάζονται οκτώ εκτελέσεις για έναν πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό. Αν όμως τα επίπεδα του κάθε παράγοντα θέλουμε να είναι πέντε, τότε θα χρειαστούν 125 πειραματικές εκτελέσεις. Επίσης, αν οι παράγοντες δύο επίπεδων γίνουν πέντε (από τρεις), τότε θα χρειαστούν 32 εκτελέσεις.

Σε περιπτώσεις λοιπόν κατά τις οποίες πρέπει να μελετηθούν αρκετοί παράγοντες και σε μεγάλο πλήθος επιπέδων, δημιουργήθηκε η ανάγκη εύρεσης αποδοτικών παραγοντικών σχεδιασμών οι οποίοι θα μπορούσαν να δώσουν χρήσιμα συμπεράσματα για τις παραγοντικές επιδράσεις, με σημαντικά μειωμένο όμως τον απαιτούμενο αριθμό εκτελέσεων. Στη λογική αυτή, οδηγηθήκαμε στη δημιουργία και τη χρήση των **κλασματικών παραγοντικών σχεδιασμών** (fractional factorial designs). Σε αυτήν την προσέγγιση, χρησιμοποιείται ένα υποσύνολο όλων των δυνατών θεραπειών που δημιουργούν τα επίπεδα των παραγόντων. Η χρήση τους και η δημοφιλία τους βασίζεται σε τρεις βασικές αρχές που διέπουν τις παραγοντικές επιδράσεις, τη σποραδικότητα, την ιεραρχία και την κληρονομικότητα (Wu and Hamada, 2000). Η αρχή της σποραδικότητας των επιδράσεων (effect sparsity principle) αναφέρει ότι ο αριθμός των σημαντικών παραγοντικών επιδράσεων σε ένα πείραμα είναι μικρός, σε σχέση με το σύνολο των επιδράσεων που δημιουργούνται. Η αρχή της ιεραρχίας των επιδράσεων (effect hierarchy principle) αναφέρει ότι επιδράσεις χαμηλής τάξης είναι πιθανότερο να είναι σημαντικές από αυτές υψηλής τάξης. Τέλος, η αρχή της κληρονομικότητας των επιδράσεων (effect heredity

principle) λέει ότι για να είναι μια αλληλεπίδραση σημαντική πρέπει όλοι οι «γονείς» της να είναι σημαντικοί.

Η επίκληση των τριών αυτών αρχών είναι απαραίτητη για τη χρησιμότητα των κλασματικών αυτών σχεδιασμών αφού είναι φανερό ότι η χρήση αυτής της κατηγορίας σχεδιασμών δεν είναι δυνατό να οδηγήσει στην αποτίμηση και αξιολόγηση όλων των παραγοντικών επιδράσεων. Μάλιστα, επειδή σε κάθε κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό εμφανίζεται το φαινόμενο της σύγχυσης (confounding) των επιδράσεων, μια μη προσεκτική επιλογή του υποσυνόλου των θεραπειών του πλήρους σχεδιασμού, μπορεί να οδηγήσει σε έναν τελείως ακατάλληλο σχεδιασμό.

Στη λογική λοιπόν των αρχών της σποραδικότητας και της ιεραρχίας των επιδράσεων, ένας απαραίτητος στόχος που πρέπει να πληρείται με τη χρήση ενός κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού είναι, κατ' ελάχιστον, η ανεξάρτητη εκτίμηση των κύριων παραγοντικών επιδράσεων. Αυτό επιτυγχάνεται όταν ο σχεδιασμός ανήκει στην κατηγορία των ορθογώνιων σχηματισμών. Η περίπτωση κατά την οποία οι κύριες επιδράσεις εκτιμώνται και με τον ελάχιστο αριθμό πειραματικών εκτελέσεων, γεγονός που καθιστά το σχεδιασμό «οικονομικό», οδήγησε στην ανάπτυξη των λεγόμενων σχεδιασμών κρησαρίσματος. Οι ορθογώνιοι σχηματισμοί και οι σχεδιασμοί κρησαρίσματος περιγράφονται συνοπτικά στις επόμενες παραγράφους.

1.3 Ορθογώνιοι σχηματισμοί

Ένας ορθογώνιος σχηματισμός $OA(n, m, s, t)$ είναι ένας πίνακας διαστάσεων $n\ x\ m$, όπου για στοιχεία του χρησιμοποιούνται s διαφορετικά σύμβολα με τέτοιο τρόπο ώστε σε κάθε επιλογή t στηλών από το σχηματισμό, να εμφανίζονται όλες οι δυνατές s^t γραμμές τον ίδιο αριθμό φορών. Το τελευταίο απαιτεί το s^t να διαιρεί το n. Η παράμετρος t λέγεται και ισχύς του σχεδιασμού.

Οι ορθογώνιοι σχηματισμοί, αν και συνδυαστικές δομές, μπορεί να χρησιμοποιηθούν στη Στατιστική, ως κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί. Σε καθεμία από τις m στήλες του αντιστοιχείται και ένας υπό εξέταση παράγοντας με s επίπεδα, και οι συνδυασμοί των επιπέδων των m αυτών παραγόντων θα φαίνονται στις n γραμμές του. Η ισχύς t του σχηματισμού φανερώνει την ικανότητα του σχεδιασμού να επιτρέπει την εκτίμηση κυρίων επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων χωρίς σύγχυση (confounding). Σημειώνεται ότι οι

πλήρεις παραγοντικοί σχεδιασμοί ανήκουν στην κατηγορία των Ορθογώνιων Σχηματισμών. Οι ορθογώνιοι σχηματισμοί διακρίνονται σε δύο τύπους: τους κορεσμένους και τους μη κορεσμένους. Ένας ορθογώνιος σχηματισμός λέγεται κορεσμένος, αν έχει τον μέγιστο δυνατό αριθμό στηλών, δεδομένου του αριθμού των εκτελέσεών του και της ισχύος του. Οι ορθογώνιοι σχηματισμοί με δεδομένες παραμέτρους n, m και s μπορούν να κατασκευαστούν με διάφορες τεχνικές.

Δύο ορθογώνιοι σχηματισμοί λέγονται ισόμορφοι αν ο ένας μπορεί να προκύψει από τον άλλο με μεταθέσεις γραμμών ή και στηλών ή και συμβόλων σε κάθε στήλη. Δύο μη ισόμορφοι σχηματισμοί μπορεί να έχουν διαφορετικές στατιστικές ιδιότητες, αν χρησιμοποιηθούν ως κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί. Για το λόγο αυτό, είναι ιδιαίτερα χρήσιμη η γνώση της πλήρους λίστας μη ισόμορφων ορθογώνιων σχηματισμών με δεδομένες παραμέτρους n, m και s. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τους ορθογώνιους σχηματισμούς δείτε Hedayat, Sloane and Stufken (1999).

Στη χρήση τους ως κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί, οι ορθογώνιοι σχηματισμοί χωρίζονται σε δύο κατηγορίες που σχετίζονται με τον τρόπο της σύγχυσης των παραγοντικών επιδράσεων σε αυτούς, τους απλούς (regular) και τους σύνθετους (non-regular). Στους απλούς, η σύγχυση των επιδράσεων έχει απλή δομή, καθώς δύο επιδράσεις θα είναι είτε ασυσχέτιστες ή πλήρως συσχετισμένες. Απλοί ορθογώνιοι σχηματισμοί συνήθως προκύπτουν όταν ο αριθμός των γραμμών, n, είναι δύναμη του 2. Από την άλλη, οι σύνθετοι σχεδιασμοί έχουν πολύπλοκη δομή σύγχυσης επιδράσεων, καθώς δύο επιδράσεις δεν θα είναι ούτε ασυσχέτιστες, ούτε και πλήρως συσχετισμένες. Το τελευταίο, καταλήγει να είναι πλεονέκτημα, αφού με τη χρήση τους μπορούμε να λάβουμε πληροφορία για κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις που ενδιαφέρουν, δείτε Wang and Wu (1995).

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι πληροφορία για τη δομή της σύγχυσης των επιδράσεων δίνεται από τη διακριτική ικανότητα (resolution), R, του σχεδιασμού. Σε σχεδιασμούς με διακριτική ικανότητα $R = II$, οι κύριες επιδράσεις συγχέονται μεταξύ τους. Σε σχεδιασμούς με διακριτική ικανότητα $R = III$, οι κύριες επιδράσεις δεν συγχέονται μεταξύ τους, αλλά συγχέονται με αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων. Σε σχεδιασμούς με διακριτική ικανότητα $R = IV$, οι κύριες επιδράσεις δε συγχέονται ούτε μεταξύ τους ούτε με αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων, αλλά αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων συγχέονται μεταξύ τους. Σε σχεδιασμούς με διακριτική ικανότητα $R = V$, οι κύριες επιδράσεις καθώς και οι αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων δε συγχέονται η μία με την άλλη. Θεωρητικά λοιπόν, όσο

μεγαλύτερη η διακριτική ικανότητα του σχεδιασμού τόσο και καλύτερα, αναφορικά με τη σύγχυση των επιδράσεων. Όμως, όσο μεγαλώνει η διακριτική ικανότητα, τόσο μεγαλώνει και το πλήθος των εκτελέσεων που απαιτούνται στο σχεδιασμό.

1.4 Σχεδιασμοί κρησαρίσματος

Οι σχεδιασμοί κρησαρίσματος χρησιμοποιούνται στα αρχικά στάδια μιας πειραματικής διαδικασίας όπου συνήθως έχουν αναγνωριστεί για μελέτη αρκετοί παράγοντες που θεωρείται ότι επηρεάζουν σημαντικά την απόκριση αλλά αναμένεται σχετικά λίγοι από αυτούς να έχουν σημαντική συνεισφορά σε αυτή. Η λογική της συγκεκριμένης προσέγγισης βασίζεται στην αρχή της σποραδικότητας των επιδράσεων (Box and Meyer, 1986). Στόχος του πειραματιστή είναι η εφαρμογή μιας γρήγορης, οικονομικής και αξιόπιστης μεθόδου κρησαρίσματος των παραγόντων αυτών. Επειδή, όπως και αναφέρθηκε προηγουμένως, το πλήθος των επιπέδων που μελετάται κάθε παράγοντας αυξάνει το πειραματικό κόστος, ως σχεδιασμοί κρησαρίσματος χρησιμοποιούνται συνήθως κορεσμένοι ορθογώνιοι σχηματισμοί δύο επιπέδων (τα λεγόμενα και ως χαμηλό και υψηλό επίπεδο για κάθε παράγοντα), με τα δυο επίπεδα των παραγόντων να κωδικοποιούνται με -1 και $+1$. Το σύνηθες γραμμικό μοντέλο πρώτης τάξης (1.1) με ανεξάρτητα κανονικά σφάλματα χρησιμοποιείται για την ανάλυση των δεδομένων και την ανάδειξη των παραγόντων με σημαντικές κύριες επιδράσεις στην απόκριση.

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i, \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{1.1}$$

Σημειώνεται ότι η χρήση ενός ορθογώνιου σχηματισμού δύο επιπέδων για το σκοπό αυτό, οδηγεί σε διαγώνιο πίνακα πληροφορίας του μοντέλου (1.1). Σε πιο σύνθετες μελέτες, είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί και το γραμμικό μοντέλο δεύτερης τάξης (1.2), το οποίο περιλαμβάνει τόσο κύριες επιδράσεις όσο και αλληλεπιδράσεις μεταξύ των παραγόντων.

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_{ij} + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{m} \beta_{jk} x_{ij} x_{ik} + \varepsilon_i, \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{1.2}$$

Σε αυτή την περίπτωση βέβαια, πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένας ορθογώνιος σχηματισμός κατάλληλης ισχύος, ώστε να μπορεί να εκτιμηθούν όλοι οι παράμετροι που ενδιαφέρουν στο μοντέλο.

Παραδοσιακά, οι σχεδιασμοί που προέρχονται από τους πίνακες Hadamard και οι σχεδιασμοί Plackett – Burman είναι αυτοί που κατά κόρον χρησιμοποιήθηκαν και χρησιμοποιούνται για την εκτέλεση πειραμάτων κρησαρίσματος. Οι σχεδιασμοί αυτοί παρουσιάζονται στα επόμενα.

1.4.1 Πίνακες και σχεδιασμοί Hadamard

Ένας πίνακας Hadamard H τάξης n, είναι ένας τετραγωνικός πίνακας διαστάσεων $n \times n$ με στοιχεία $+1$ και -1 για τον οποίο ισχύει $H' \cdot H = H \cdot H' = n \cdot I_n$, όπου I_n ο μοναδιαίος πίνακας. Η ιδιότητα αυτή συνεπάγεται ότι οι γραμμές και οι στήλες του πίνακα έχουν εσωτερικό γινόμενο ίσο με το 0, ή όπως συνηθίζεται να λέγεται, είναι ορθογώνιες μεταξύ τους. Επίσης, από αυτή προκύπτει ότι η τάξη n πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 4. Ένας πίνακας Hadamard λέγεται κανονικοποιημένος όταν η πρώτη του γραμμή και στήλη περιέχουν μόνο $+1$. Οποιοσδήποτε πίνακας Hadamard μπορεί να κανονικοποιηθεί πολλαπλασιάζοντας είτε γραμμές είτε και στήλες του με -1, όπου χρειάζεται. Η υπάρξή τους οφείλεται στο Γάλλο μαθηματικό J. Hadamard (βλ. Hadamard (1893), Seberry (2017)).

Αν αφαιρέσουμε την πρώτη στήλη με τις μονάδες από έναν κανονικοποιημένο πίνακα Hadamard τάξης n θα προκύψει ένας ορθογώνιος σχηματισμός $OA(n, n-1,2,2)$. Οι σχεδιασμοί που προκύπτουν με αυτό τον τρόπο, γνωστοί και ως σχεδιασμοί Hadamard, είναι ιδανικοί για την προσαρμογή του γραμμικού μοντέλου (1.1) με τον ελάχιστο αριθμό παρατηρήσεων και για το λόγο αυτό έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως ως σχεδιασμοί κρησαρίσματος.

1.4.2 Σχεδιασμοί Plackett – Burman

Οι σχεδιασμοί Plackett – Burman (PB) είναι μια κατηγορία κορεσμένων ορθογώνιων σχηματισμών δύο επιπέδων που προτάθηκε από τους Plackett and Burman το 1946 με σκοπό την εκτίμηση των κύριων επιδράσεων μεγάλου αριθμού παραγόντων με τον ελάχιστο αριθμό εκτελέσεων. Συγκεκριμένα, επιτρέπουν την εκτίμηση των κύριων επιδράσεων $n-1$ παραγόντων με n εκτελέσεις, εφόσον το n είναι πολλαπλάσιο του 4 και ανήκουν στην κατηγορία των ορθογώνιων σχηματισμών, $OA(n, n-1,2,2)$. Οι Plackett και Burman δημιούργησαν σχεδιασμούς για τιμές n από 8 έως 100, με εξαίρεση την περίπτωση $n = 92$ που δημοσιεύθηκε αρκετά αργότερα από τους Baumert, Colomb and Hall (1962).

Οι σχεδιασμοί PB κατασκευάζονται με κυκλική μετάθεση είτε ενός διανύσματος γεννήτορα με $n-1$ στοιχεία $+1$ και -1, ή block πινάκων. Στην κατασκευή με τη χρήση ενός διανύσματος, γίνονται διαδοχικά $n-2$ κυκλικές μεταθέσεις του διανύσματος και προστίθεται μια τελευταία εκτέλεση με όλα τα στοιχεία της ίσα με -1. Παρακάτω δίνεται η κατασκευή του σχεδιασμού PB με 16 εκτελέσεις και 15 στήλες, που βασίζεται στις κυκλικές μεταθέσεις του διανύσματος:

$$(+\ +\ +\ +\ -\ +\ -\ +\ +\ -\ -\ +\ -\ -\ -).$$

Ο σχεδιασμός που προκύπτει δίνεται στον πίνακα 1.1, είναι ένας $OA(16,15,2,2)$ και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως σχεδιασμός κρησαρίσματος για τη μελέτη των κύριων επιδράσεων 15 παραγόντων με δύο επίπεδα, με τη χρήση του μοντέλου (1.1).

Σ1	Σ2	Σ3	Σ4	Σ5	Σ6	Σ7	Σ8	Σ9	Σ10	Σ11	Σ12	Σ13	Σ14	Σ15
+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	-	-
-	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	-
-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-
-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+
+	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-
-	+	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-
-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	+
+	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+
+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-
-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	-	+
+	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	-
-	+	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+
+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+
+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+
+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Πίνακας 1.2: Plackett – Burman πίνακας 16 εκτελέσεων

Για την ιστορία, η μεθοδολογία κατασκευής των σχεδιασμών Plackett – Burman (κυκλική μετάθεση ενός διανύσματος – γεννήτορα) είχε δοθεί νωρίτερα από τον Paley (1933) για κατασκευή ορθογώνιων πινάκων. Οι κυκλικές μεταθέσεις των γεννητόρων του Paley παράγουν και αυτοί ορθογώνιους σχηματισμούς. Μάλιστα, για κάποιες περιπτώσεις (π.χ. $n=32$), ο Paley είχε δώσει δύο διανύσματα γεννήτορες που καταλήγουν σε σχεδιασμό. Σημειώνεται ότι όλοι αυτοί ανήκουν στην οικογένεια των σχεδιασμών Hadamard. Η ονομασία «σχεδιασμοί Plackett – Burman» που έχει επικρατήσει στη

βιβλιογραφία, έχει επικρατήσει επειδή οι Plackett και Burman ήταν οι πρώτοι που χρησιμοποίησαν αυτούς τους σχηματισμούς στο σχεδιασμό πειραμάτων.

1.4.3 Προβολικές ιδιότητες

Μετά την προσαρμογή του γραμμικού μοντέλου κύριων επιδράσεων (βλ. (1.1)) και την αναγνώριση των παραγόντων που εμφανίζεται να έχουν σημαντικές κύριες επιδράσεις με τη χρήση ενός κορεσμένου σχεδιασμού κρησαρίσματος δύο επιπέδων με n γραμμές και $n-1$ στήλες, ακολουθεί η δεύτερη φάση του κρησαρίσματος, κατά την οποία ο αρχικός σχεδιασμός «προβάλλεται» στους σημαντικούς παράγοντες, οι οποίοι ας υποθέσουμε ότι είναι k. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι απομονώνονται οι k $(< n-1)$ στήλες του αρχικού σχεδιασμού που αντιστοιχούν στους σημαντικούς παράγοντες και δημιουργείται ένας (μη-κορεσμένος) ορθογώνιος σχηματισμός $OA(n, k, 2, t)$, ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μελετηθούν πιο συστηματικά οι επιδράσεις αυτών των k παραγόντων, εφόσον ο νέος σχεδιασμός το επιτρέπει. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι μετά τη χρήση του σχεδιασμού του πίνακα 1.1 προέκυψαν σημαντικές οι κύριες επιδράσεις των παραγόντων που είχαμε αναθέσει στις στήλες Σ1 – Σ4. Με τη διαδικασία της προβολής, θα προκύψει ο σχεδιασμός

Σ1	Σ2	Σ3	Σ4
+	+	+	+
-	+	+	+
-	-	+	+
-	-	-	+
+	-	-	-
-	+	-	-
-	-	+	-
+	-	-	+
+	+	-	-
-	+	+	-
+	-	+	+
-	+	-	+
+	-	+	-
+	+	-	+
+	+	+	-
-	-	-	-

ο οποίος είναι ο πλήρης παραγοντικός σχεδιασμός για τη μελέτη τεσσάρων παραγόντων με δύο επίπεδα ο καθένας. Δεδομένης λοιπόν της μορφής του σχεδιασμού – προβολή όλες οι

παραγοντικές επιδράσεις των τεσσάρων αυτών παραγόντων μπορούν να εκτιμηθούν ανεξάρτητα η μία από την άλλη, γεγονός που φαίνεται ιδανικό για τη μελέτη μας. Επειδή όμως οι πειραματιστές δεν είναι σε θέση να γνωρίζουν εκ των προτέρων ποιοι παράγοντες θα έχουν τελικά σημαντικές επιδράσεις και σε ποιες στήλες τελικά θα ανατεθούν οι σημαντικοί παράγοντες θα έπρεπε ιδανικά μια τέτοια βέλτιστη εξέλιξη να πρόκυπτε για οποιαδήποτε επιλογή k εκ των $n-1$ στηλών του σχεδιασμού, και για κάθε k. Συνεπώς, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η μελέτη των προβολικών ιδιοτήτων (projection properties) των σχεδιασμών κρησαρίσματος καθότι με αυτή μπορεί κάποιος πειραματιστής να κρίνει τη χρησιμότητα του αρχικού σχεδιασμού κρησαρίσματος για αυτή τη δεύτερη φάση ανάλυσης.

Η προβολική ιδιότητα διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην επιλογή του κατάλληλου σχεδιασμού κρησαρίσματος. Σε περιπτώσεις όπου υπάρχουν αρκετοί μη ισόμορφοι $OA(n, n-1,2,2)$ που μπορεί να χρησιμοποιηθούν σαν σχεδιασμοί κρησαρίσματος, η σύγκριση των προβολικών τους ιδιοτήτων μπορεί να είναι καθοριστική για την τελική επιλογή του σχεδιασμού που θα χρησιμοποιηθεί. Οι Box and Tyssedal (1996) συνοψίζουν αυτή την ιδιότητα ως την εξασφάλιση της δυνατότητας εκτίμησης των επιδράσεων που ενδιαφέρουν για τους παράγοντες που προέκυψε να είναι σημαντικοί στο αρχικό κρησάρισμα. Πρακτικά, και λόγω της αρχής της σποραδικότητας των επιδράσεων, οι προβολικές ιδιότητες των σχεδιασμών κρησαρίσματος μελετώνται για μικρές τιμές του k, συνήθως $k < 5$ και το ενδιαφέρον εστιάζεται στην εκτίμηση των παραμέτρων ενός γραμμικού μοντέλου με κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων της μορφής που δίνεται στην (1.2).

Η αποτελεσματικότητα της εκτίμησης των παραμέτρων του μοντέλου (1.2) βασίζεται στις τεχνικές ανάδειξης της κρυφής προβολικής ιδιότητας (hidden projection property) ενός πειραματικού σχεδιασμού, όπως περιγράφεται στους Wang and Wu (1995). Χρησιμοποιείται το κριτήριο της D–αποδοτικότητας (D–efficiency) που ποσοτικοποιεί την ικανότητα ενός σχεδιασμού να εκτιμήσει τις παραμέτρους ενός γραμμικού μοντέλου της μορφής

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i,1} + \beta_2 x_{i,2} + \cdots + \beta_{m-1} x_{i,m-1} + \varepsilon_i, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

με m υπό εκτίμηση παραμέτρους και πίνακα μοντέλου $X = (\mathbf{1}, x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$. Η D–αποδοτικότητα του συγκεκριμένου μοντέλου, δοθέντος σχεδιασμού, υπολογίζεται από τον τύπο:

$$D_{eff} = |W'W|^{1/m}$$

όπου $W = (\mathbf{1}/\|\mathbf{1}\|, x_1/\|x_1\|, \dots, x_{m-1}/\|x_{m-1}\|)$ είναι ο κανονικοποιημένος πίνακας του μοντέλου.

Η τιμή της D–αποδοτικότητας κυμαίνεται από 0 έως 1. Όταν η τιμή είναι 1, σημαίνει ότι οι παράμετροι του μοντέλου εκτιμώνται με τη μέγιστη δυνατή αποτελεσματικότητα. Σε αυτή την περίπτωση βέβαια, ο πίνακας πληροφορίας $X'X$ του μοντέλου θα είναι διαγώνιος. Αν η D–αποδοτικότητα είναι μηδέν, τότε οι παράμετροι του μοντέλου δεν μπορεί να εκτιμηθούν και συνεπώς, ο σχεδιασμός που χρησιμοποιείται είναι ανεπαρκής για το συγκεκριμένο μοντέλο.

1.4.4 Παρατηρήσεις

Σύμφωνα με την παρουσίαση που προηγήθηκε, για το κρησάρισμα των παραγόντων που μελετώνται σε ένα πείραμα παραδοσιακά χρησιμοποιούνται κορεσμένοι ορθογώνιοι σχηματισμοί δύο επιπέδων (σχεδιασμοί PB, σχεδιασμοί Hadamard). Οι σχεδιασμοί αυτοί έχουν $n-1$ στήλες και με τη χρήση τους μελετώνται αρχικά οι κύριες επιδράσεις $n-1$ παραγόντων με δύο επίπεδα σε συνολικά n εκτελέσεις, με το πλήθος n να είναι πολλαπλάσιο του 4. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι το πλήθος των στηλών αφήνει υπόλοιπο 3 όταν διαιρείται με το 4. Για περιπτώσεις που πρέπει να μελετηθεί πλήθος παραγόντων το οποίο δεν συμπίπτει με αυτή την αριθμητική, συνήθως επιλέγεται ένας κορεσμένος σχεδιασμός αρχικά και στη συνέχεια αφαιρούνται όσες στήλες χρειάζεται για να μείνει ένας (σχεδόν κορεσμένος) σχεδιασμός προς χρήση. Η διαδικασία αυτή, αν και εύκολη, μπορεί να μην καταλήγει στη βέλτιστη επιλογή. Για παράδειγμα, αν πρέπει να μελετηθούν 13 παράγοντες με δύο επίπεδα με έναν σχεδιασμό κρησαρίσματος, κάποιος θα επέλεγε έναν $OA(16,15,2,2)$ και θα αφαιρούσε δύο από τις 15 στήλες του καταλήγοντας με έναν $OA(16,13,2,2)$ προς χρήση, χωρίς όμως να είναι βέβαιος ότι έχει προκρίνει τη βέλτιστη επιλογή. Σε αυτή την περίπτωση, θα ήταν χρήσιμη η πλήρης λίστα μη ισόμορφων ορθογώνιων σχηματισμών $OA(16,13,2,2)$, ώστε να ακολουθηθεί η διαδικασία μελέτης των προβολικών ιδιοτήτων που περιεγράφηκε στην ενότητα 1.4.3 για την επιλογή της βέλτιστης λύσης.

Το πρόβλημα της εύρεσης πλήρων λιστών μη ισόμορφων σχεδιασμών με συγκεκριμένες παραμέτρους αν και απαιτητικό υπολογιστικά, έχει αναπτυχθεί ιδιαιτέρως

τα τελευταία χρόνια. Εκτός από υπολογιστική ισχύ, η οποία πλέον παρέχεται επαρκώς από την ανάπτυξη της Πληροφορικής, χρειάζεται και αποδοτικούς αλγορίθμους, τις περισσότερες φορές σχεδιασμένους αποκλειστικά για το πρόβλημα που μελετάται. Σε κάθε περίπτωση, η γνώση όλων των δυνατών σχεδιασμών με συγκεκριμένες παραμέτρους που μπορεί να είναι διαθέσιμοι προς χρήση, είναι ένα ισχυρό εργαλείο για την επιλογή του βέλτιστου σχεδιασμού, ανάλογα με τις απαιτήσεις του προβλήματος που μελετάται.

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί στο σημείο αυτό ότι υπάρχουν περιπτώσεις που υπάρχει αρχικά υποψία ύπαρξης καμπυλότητας στην απόκριση. Οι περιπτώσεις αυτές δεν μπορεί να μελετηθούν με σχεδιασμούς δύο επιπέδων και συνεπώς χρειάζεται η ανάπτυξη μεθοδολογίας για την κατασκευή και αξιολόγηση αποδοτικών σχεδιασμών με τρία επίπεδα. Στην επόμενη παράγραφο γίνεται μια σύντομη ανασκόπηση των σχεδιασμών που χρησιμοποιούνται για τέτοιες περιπτώσεις, καταλήγοντας στους σχεδιασμούς για definitive screening, οι οποίοι αποτελούν και το πεδίο έρευνας της παρούσας διατριβής.

1.5 Σχεδιασμοί κρησαρίσματος με τρία επίπεδα

Σε περιπτώσεις υποψίας ύπαρξης καμπυλότητας στην απόκριση, μια συνήθης πρακτική είναι η χρησιμοποίηση ενός τρίτου επιπέδου προς μελέτη για κάθε παράγοντα εκτός των $+1$ (υψηλό) και -1 (χαμηλό). Το επίπεδο αυτό είναι το «κέντρο» του χώρου πειραματισμού για κάθε παράγοντα και λαμβάνει την τιμή μηδέν στην αντίστοιχη κωδικοποίηση των επιπέδων του κάθε παράγοντα για τη μοντελοποίηση της απόκρισης. Αρκετές φορές χρησιμοποιείται για αυτό ο όρος «μεσαίο» επίπεδο. Η θεραπεία που δημιουργείται όταν όλοι οι παράγοντες μελετώνται στο «κέντρο» τους, καλείται κεντρικό σημείο. Σημειώνεται ότι οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται ομοιάζουν με τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται στους σχεδιασμούς αποκριτικών επιφανειών (response surface designs) και προϋποθέτουν ότι οι παράγοντες που μελετώνται είναι ποσοτικοί, ώστε να έχει νόημα η απόσταση των τριών επιπέδων που χρησιμοποιούνται. Για το λόγο αυτό, σε ό,τι ακολουθεί και αναφέρεται σε σχεδιασμούς με τρία επίπεδα, θα θεωρούμε ότι μελετώνται ποσοτικοί παράγοντες.

Το μοντέλο που ενδιαφέρει σε αυτή την περίπτωση είναι είτε το μοντέλο γραμμικών – τετραγωνικών επιδράσεων (1.3)

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_{ij} + \sum_{j=1}^{m} \beta_{jj} x_{ij}^2 + \varepsilon_i \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{1.3}$$

είτε το μοντέλο που περιέχει, εκτός από τις γραμμικές και τετραγωνικές επιδράσεις, και τις αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων (1.4)

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_{ij} + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{m} \beta_{jk} x_{ij} x_{ik} + \sum_{j=1}^{m} \beta_{jj} x_{ij}^2 + \varepsilon_i \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{1.4}$$

Σε αντιστοιχία με την περίπτωση των δύο επιπέδων, και όσον αφορά την οικονομία στο πλήθος των εκτελέσεων που απαιτούνται στο σχεδιασμό, αρχικά προτιμώνται σχεδιασμοί που μπορούν να εκτιμήσουν το μοντέλο (1.3) με το μικρότερο δυνατό κόστος. Σημειώνεται ότι αρκετές φορές ενδιαφέρει και η εκτίμηση του μοντέλου (1.2) το οποίο δεν περιλαμβάνει τετραγωνικές επιδράσεις. Τέλος, για την αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας της εκτίμησης των παραμέτρων των μοντέλων που προσαρμόζονται, χρησιμοποιείται συνήθως το κριτήριο της D-αποδοτικότητας.

1.5.1 Οι ορθογώνιοι σχηματισμοί τριών επιπέδων

Σε αντιστοιχία με τους ορθογώνιους σχηματισμούς δύο επιπέδων, υπάρχουν στη βιβλιογραφία ορθογώνιοι σχηματισμοί τριών επιπέδων οι οποίοι κάλλιστα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως σχεδιασμοί κρησαρίσματος για την περίπτωση που παρουσιάζουμε και αφορά τη μελέτη των επιδράσεων ποσοτικών παραγόντων με τρία επίπεδα. Τέτοιοι σχηματισμοί έχουν προταθεί από τους Plackett and Burman (1946) ενώ υπάρχουν αρκετοί οι οποίοι έχουν κατασκευαστεί με τη χρήση αλγοριθμικών τεχνικών, στα πλαίσια της έρευνας για τη δημιουργία πλήρων καταλόγων μη ισόμορφων ορθογώνιων σχηματισμών με τρία επίπεδα. Οι σχηματισμοί αυτοί, που όπως ήδη αναφέρθηκε είναι συνδυαστικές δομές, παρουσιάζονται με τη χρήση των συμβόλων 0, 1 και 2. Για τη μοντελοποίηση της απόκρισης με τη χρήση είτε του (1.3) ή του (1.4) θα χρειαστεί να αντιστοιχήσουμε σε αυτά τα σύμβολα το χαμηλό, μεσαίο και υψηλό επίπεδο κάθε παράγοντα, που στη συνέχεια θα τα κωδικοποιήσουμε με -1, 0 και $+1$, αντίστοιχα. Η διαδικασία αξιολόγησης των σχεδιασμών που υπάρχουν προς χρήση ομοιάζει με ό,τι περιεγράφηκε στην ενότητα 1.4.3.

1.5.2 Οι σχεδιασμοί αποκριτικών επιφανειών

Εναλλακτικές προτάσεις σχεδιασμού για την περίπτωση που παρουσιάζουμε περιλαμβάνουν εκτός από τη χρήση των ορθογώνιων σχηματισμών τριών επιπέδων, αποτελούν οι σχεδιασμοί αποκριτικών επιφανειών προσαρμοσμένοι με τρία επίπεδα, όπως για παράδειγμα οι κεντρικά σύνθετοι σχεδιασμοί (Central Composite Designs) με $a = 1$, που προτάθηκαν από τους Box and Wilson (1951). Δεν θα προχωρήσουμε σε περαιτέρω παρουσίαση του συγκεκριμένου πεδίου, καθώς κάτι τέτοιο θα υπερέβαινε τον σκοπό της παρούσας διατριβής.

1.5.3 Οι σχεδιασμοί για definitive screening

Οι Jones and Nachtsheim (2011) πρότειναν μια νέα κατηγορία σχεδιασμών κρησαρίσματος, τους σχεδιασμούς για definitive screening (σχεδιασμοί DS) οι οποίοι χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των παραμέτρων των μοντέλων (1.4), (1.3) ή και (1.2) και είναι σχεδιασμένοι με τέτοιο τρόπο ώστε:

- οι γραμμικές κύριες επιδράσεις να μη συγχέονται μεταξύ τους, ούτε με αλληλεπιδράσεις 2 παραγόντων, ούτε και με τις τετραγωνικές επιδράσεις και
- το πλήθος των εκτελέσεων που απαιτούνται να είναι ίσο με το διπλάσιο του πλήθους των παραγόντων $+1$, ώστε να μπορεί να εκτιμηθούν οι παράμετροι του μοντέλου (1.3) με το ελάχιστο πλήθος εκτελέσεων.

Οι σχεδιασμοί αυτοί είναι ιδιαίτερα ενδιαφέροντες και μελετώνται εκτενώς από τη στιγμή που παρουσιάστηκαν στη βιβλιογραφία, από διάφορους ερευνητές που προτείνουν τόσο μεθόδους κατασκευής όσο και τροποποιήσεις – γενικεύσεις στην κατασκευή τους. Στη διατριβή αυτή, προτείνουμε τεχνικές και μεθόδους για την κατασκευή αποδοτικών σχεδιασμών για definitive screening, ενώ ενισχύουμε την υπάρχουσα βιβλιογραφία αναφορικά με την κατασκευή πλήρων καταλόγων μη ισόμορφων σχεδιασμών για definitive screening η οποία γίνεται με τη χρήση αλγόριθμων εξαντλητικής απαρίθμησης, τροποποιημένων ώστε να περιοριστεί η υπολογιστική πολυπλοκότητα που αυτοί γενικά απαιτούν. Τέλος, μελετάμε τις ιδιότητες των σχεδιασμών που κατασκευάσαμε και προτείνουμε τους βέλτιστους με βάση συγκεκριμένα κριτήρια που υπάρχουν στη βιβλιογραφία. Στο επόμενο Κεφάλαιο παρουσιάζεται συνοπτικά η υπάρχουσα βιβλιογραφία σχετική με τους σχεδιασμούς για definitive screening και τη μελέτη τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Οι σχεδιασμοί DS

Στο κεφάλαιο που προηγήθηκε κάναμε εκτενή αναφορά στους σχεδιασμούς κρησαρίσματος που συχνά οι πειραματιστές χρησιμοποιούν στα πρώτα στάδια μιας έρευνας για να εντοπίσουν τους παράγοντες που επηρεάζουν σημαντικά τις τιμές μιας μεταβλητής απόκρισης. Σύμφωνα με τον Montgomery (2013), οι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί χρησιμοποιούνται για να εντοπιστούν οι παράγοντες που έχουν σημαντική επίδραση, τόσο από την άποψη των επιδράσεων πρώτης τάξης όσο και των αλληλεπιδράσεων δύο παραγόντων και των τετραγωνικών επιδράσεων. Παραδοσιακά, και στα πρώιμα στάδια του πειραματισμού, αυτοί οι σχεδιασμοί επικεντρώνονται κυρίως στις γραμμικές κύριες επιδράσεις των παραγόντων, καθώς η χρήση τους γίνεται σε δύο επίπεδα, ενώ η διακριτική ικανότητά τους είναι συνήθως III ή IV. Όμως, οι σχεδιασμοί διακριτικής ικανότητας III συγχέουν πλήρως τις κύριες επιδράσεις με τις αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων, προκαλώντας αβεβαιότητα στα αποτελέσματα ενώ επιπλέον, αυτοί οι σχεδιασμοί, λόγω χρήσης δύο επιπέδων, δεν έχουν τη δυνατότητα αποτίμησης της καμπυλότητας, που προκύπτει από σημαντικές τετραγωνικές επιδράσεις. Η προσθήκη κεντρικών σημείων σε σχεδιασμούς δύο επιπέδων μπορεί να βοηθήσει, αλλά δεν επιτρέπει ξεχωριστή εκτίμηση των τετραγωνικών επιδράσεων κάθε παράγοντα, οδηγώντας σε περαιτέρω αβεβαιότητα.

2.1 Σχεδιασμοί Definitive screening (DS)

Για την αντιμετώπιση τέτοιων περιπτώσεων, οι Jones and Nachtsheim (2011) πρότειναν τους σχεδιασμούς για definitive screening (DS). Αυτοί οι σχεδιασμοί χρησιμοποιούν την τεχνική της αναδίπλωσης (fold-over) και έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:

- Οι παράγοντες μελετώνται σε τρία επίπεδα –1, 0 και +1 και είναι ποσοτικοί.
- Ο απαιτούμενος αριθμός εκτελέσεων είναι κατά ένα μεγαλύτερος από το διπλάσιο του αριθμού των παραγόντων και

- Οι στήλες που αντιστοιχούν στις γραμμικές επιδράσεις είναι ασυσχέτιστες τόσο με τις στήλες που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές επιδράσεις όσο και με τις στήλες που αντιστοιχούν στις αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων.

Η τελευταία απαίτηση προκύπτει άμεσα από τη fold–over μορφή των σχεδιασμών, Ye (1998). Η νέα αυτή κατηγορία σχεδιασμών κρησαρίσματος, ονομάστηκε Definite Screening Designs, και έχει τη δομή που φαίνεται στον πίνακα 2.1.

Ζεύγος εκτελέσεων	Εκτέλεση	Παράγοντες				
		$x_{i,1}$	$x_{i,2}$	$x_{i,3}$	$\cdots$	$x_{i,m}$
1	1	0	± 1	± 1	$\cdots$	± 1
	2	0	∓ 1	∓ 1	$\cdots$	∓ 1
2	3	± 1	0	± 1	$\cdots$	± 1
	4	∓ 1	0	∓ 1	$\cdots$	∓ 1
2	5	± 1	± 1	0	$\cdots$	± 1
	6	∓ 1	∓ 1	0	$\cdots$	∓ 1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	$2m-1$	± 1	± 1	± 1	$\cdots$	0
	$2m$	∓ 1	∓ 1	∓ 1	$\cdots$	0
Center point	$2m+1$	0	0	0	$\cdots$	0

Πίνακας 2.1: Η τυπική δομή ενός σχεδιασμού definitive screening

Για την κατασκευή ενός σχεδιασμού με m στήλες και $2m+1$ γραμμές χρησιμοποιήθηκε η τεχνική fold-over. Δημιουργείται αρχικά ένας $m \times m$ πίνακας A με στοιχεία -1, 0 και 1, έτσι ώστε σε κάθε στήλη να υπάρχει μόνο ένα μηδενικό, και στη συνέχεια δημιουργείται ο $m \times m$ πίνακας $-A$, ο οποίος προκύπτει από τον A αν πολλαπλασιάσουμε όλα του τα στοιχεία με -1 (τεχνική fold-over). Τέλος, προστίθεται μια επιπλέον εκτέλεση, το «κεντρικό σημείο», όπου όλοι οι παράγοντες τοποθετούνται στο «μεσαίο» επίπεδό τους, το 0. Η μορφή που προκύπτει για το σχεδιασμό δίνεται στη σχέση (2.1).

$$D = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Κάποια επιπλέον επιθυμητά χαρακτηριστικά αυτών των σχεδιασμών είναι ότι οι αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων δεν συγχέονται πλήρως με άλλες αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων, αν και μπορεί να συσχετίζονται μεταξύ τους ενώ, σε αντίθεση με τους σχεδιασμούς διακριτικής ικανότητας III, IV και V με προστιθέμενα κεντρικά σημεία, όλες οι τετραγωνικές επιδράσεις μπορούν να εκτιμηθούν σε μοντέλα σαν το (1.3) που περιλαμβάνουν τους γραμμικούς και τετραγωνικούς όρους κύριων επιδράσεων. Τέλος, οι τετραγωνικές επιδράσεις δεν συγχέονται πλήρως με τις αλληλεπιδράσεις, αν και μπορεί να είναι συσχετισμένες.

2.1.1 Κατασκευή σχεδιασμών DS

Ο αλγόριθμος κατασκευής των προτεινόμενων σχεδιασμών από τους Jones and Nachtsheim (2011), αφορά μια επαναληπτική διαδικασία βελτιστοποίησης ενός πίνακα σχεδιασμού, με σκοπό τη μεγιστοποίηση της ορίζουσας του πίνακα πληροφορίας του μοντέλου των κύριων επιδράσεων (1.1). Ο αλγόριθμος αυτός βασίζεται σε μια παραλλαγή του coordinate exchange αλγορίθμου (Meyer and Nachtsheim, 1995). Στόχος είναι η μεγιστοποίηση της ορίζουσας του πίνακα πληροφορίας, η οποία αποτελεί μέτρο της ποιότητας του σχεδιασμού για την εκτίμηση των κύριων επιδράσεων. Σε κάθε βήμα, εξετάζεται η αλλαγή τιμών των μη μηδενικών στοιχείων σε ± 1. Εάν η τροποποίηση οδηγεί σε βελτίωση της ορίζουσας, ο πίνακας ενημερώνεται με τη νέα διάταξη. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να μην υπάρξουν περαιτέρω βελτιώσεις ή μέχρι να επιτευχθεί το μέγιστο επιτρεπτό πλήθος επαναλήψεων του αλγόριθμου.

Συνολικά, ο αλγόριθμος χαρακτηρίζεται από τέσσερα βασικά σημεία: τη διατήρηση της ορθογωνιότητας των στηλών του σχεδιασμού, τη βελτιστοποίηση μέσω της μεγιστοποίησης της ορίζουσας του πίνακα πληροφορίας, την αποφυγή τοπικών μεγίστων μέσω τυχαίων αρχικών τιμών και τη γρήγορη σύγκλιση μέσω στοχευμένων αλλαγών στις τιμές των στοιχείων του πίνακα. Αυτή η συνδυαστική προσέγγιση εξασφαλίζει έναν αποδοτικό σχεδιασμό με υψηλή ακρίβεια στις εκτιμήσεις. Με τη διαδικασία αυτή, οι Jones and Nachtsheim (2011) κατασκεύασαν σχεδιασμούς DS με 4 έως και 30 παράγοντες. Όπως σημειώνουν, για την περίπτωση όπου το πλήθος των παραγόντων είναι ίσο με 12, δεν προέκυψε ορθογώνιος σχεδιασμός με τη χρήση της τεχνικής των.

2.1.2 Αξιολόγηση σχεδιασμών DS

Οι σχεδιασμοί που κατασκευάστηκαν από τους Jones and Nachtsheim (2011), αξιολογήθηκαν βάσει πολλών και διαφορετικών κριτηρίων για να μπορεί να είναι εφικτή η επιλογή του αποδοτικότερου κατά περίπτωση. Πέραν του μέτρου της D–αποδοτικότητας έμφαση δόθηκε και στις συσχετίσεις που προκύπτουν από τις στήλες που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες επιδράσεις παραγόντων. Οι συσχετίσεις μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές επιδράσεις των παραγόντων q και s με $q \neq s$, και οι συσχετίσεις μεταξύ της στήλης της αλληλεπίδρασης δυο παραγόντων, s και t, με τη στήλη που αντιστοιχεί στην τετραγωνική επίδραση του παράγοντα q, δόθηκαν από τις σχέσεις:

$$r^{c}_{qq,ss}(m) = \frac{1}{3} - \frac{1}{m-1}$$

$$r^{c}_{qq,st}(m) = \pm\sqrt{\frac{2m-1}{3(m-1)(m-2)}}$$

Οι συσχετίσεις αυτές προκύπτουν ως συνάρτηση του πλήθους των παραγόντων.

Η αξιολόγηση επεκτάθηκε στη σύγκριση των τυπικών σφαλμάτων των συντελεστών (ως λόγος τυπικών σφαλμάτων από εναλλακτικούς ορθογώνιους σχεδιασμούς), καθώς και στην ισχύ των στατιστικών ελέγχων για την ανίχνευση σημαντικών επιδράσεων, λαμβάνοντας υπόψη τη συσχέτιση μεταξύ των τετραγωνικών όρων των επιδράσεων και των αλληλεπιδράσεων δύο παραγόντων. Επιπλέον, εξετάστηκαν οι προβολικές ιδιότητες των σχεδιασμών, εστιάζοντας στις προβολές δύο και τριών παραγόντων.

2.2 Κατασκευή σχεδιασμών DS με χρήση conference πινάκων

Οι σχεδιασμοί DS, όπως προτάθηκαν από τους Jones and Nachtsheim (2011) όπως είδαμε κατασκευάστηκαν με τη χρήση αλγόριθμου βελτιστοποίησης. Οι Xiao et al (2012) χαρακτήρισαν αυτή την τεχνική ως «computerized searching» και πρότειναν έναν θεωρητικό τρόπο κατασκευής σχεδιασμών, με τη χρήση των conference πινάκων.

Ένας conference πίνακας τάξης m είναι ένας, διαστάσεων $m \times m$, πίνακας C με διαγώνια στοιχεία 0 και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία εκτός διαγώνιου ίσα με ± 1, ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση $CC' = (m-1)I_m$, όπου I_m είναι ένας $m \times m$ μοναδιαίος πίνακας. Οι Xiao et al (2012), χρησιμοποίησαν στην μορφή (2.1) των Jones and Nachtsheim (2011) ένα conference πίνακα C τάξης m, καταλήγοντας σε σχεδιασμούς της μορφής

$$D = \begin{pmatrix} C \\ -C \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Ο σχεδιασμός αυτός στη γενική του μορφή, έχει τις ίδιες ιδιότητες και χαρακτηριστικά με εκείνους των Jones and Nachtsheim (2011), κληρονομεί δηλαδή όλες τις καλές ιδιότητες των σχεδιασμών DS. Επιπλέον όμως, έχει μια σημαντική ιδιότητα, που δεν ικανοποιείται σε όλους τους σχεδιασμούς που κατασκεύασαν οι Jones and Nachtsheim (2011). Οι στήλες του σχεδιασμού είναι ορθογώνιες μεταξύ τους. Επίσης, οι σχεδιασμοί που προκύπτουν με τη χρήση conference πινάκων για τις περιπτώσεις των 12 παραγόντων και πάνω, ήταν όλοι τους πιο αποτελεσματικοί, βάσει του μέτρου της D–αποδοτικότητας. Συγκεκριμένα, για m άρτιο και $4 \leq m \leq 10$ η αποδοτικότητα των προτεινόμενων σχεδιασμών είναι ακριβώς η ίδια με αυτή των αρχικών. Ωστόσο, για τις περιπτώσεις $12 \leq m \leq 30$ (εκτός από την περίπτωση $m = 22$ όπου δεν προκύπτει σχεδιασμός από conference πίνακα), η αποδοτικότητα των σχεδιασμών που κατασκευάζονται από τους conference πίνακες, είναι σαφώς καλύτερη από εκείνον των σχεδιασμών που προτάθηκαν από τους Jones and Nachtsheim (2011).

Η μέθοδος που προτείνεται από τους Xiao et al (2012) λειτουργεί μόνο όταν το m είναι άρτιος αριθμός, καθώς για αυτές τις τιμές υπάρχουν πίνακες conference. Όταν ο αριθμός των παραγόντων m είναι περιττός, προτείνεται από τους συγγραφείς η διαγραφή της τελευταίας στήλης ενός conference πίνακα διαστάσεων $(m+1) \times (m+1)$. Ωστόσο, αυτό θα συνεπάγεται δυο εκτελέσεις παραπάνω από όσες είναι απαραίτητες από την αρχική μορφή τέτοιων σχεδιασμών. Για περιττό αριθμό παραγόντων και $2m+1$ εκτελέσεις, δεν βρέθηκαν καλύτεροι σχεδιασμοί από αυτούς που προτάθηκαν από τους Jones and Nachtsheim (2011).

2.3 Σχεδιασμοί DS με χρήση κυκλικών γεννητόρων

Οι Nguyen and Stylianou (2013) παρουσιάζουν έναν αλγόριθμο για την κατασκευή σχεδιασμών DS, τόσο για άρτιο όσο και για περιττό αριθμό παραγόντων, χρησιμοποιώντας τη τεχνική των κυκλικών μεταθέσεων σε κάποιους γεννήτορες. Οι σχεδιασμοί που κατασκευάζονται με τον συγκεκριμένο αλγόριθμο είναι πιο αποδοτικοί από αυτούς που πρότειναν οι Jones and Nachtsheim (2011) ενώ, με τη χρήση της μεθόδου, δύναται να κατασκευαστούν και μεγαλύτεροι σε διάσταση σχεδιασμοί.

Ο γενικός αλγόριθμος κατασκευής στοχεύει στην εύρεση ενός εξειδικευμένου πίνακα C διαστάσεων $m \times m$, με στοιχεία από το σύνολο $\{0, \pm 1\}$ και με μηδενική διαγώνιο. Από τους πίνακες που θα προκύψουν, επιλέγεται εκείνος που αποδίδει την μεγαλύτερη τιμή για την ορίζουσα του πίνακα $C'C$. Η διαδικασία κατασκευής βασίζεται στους σχεδιασμούς μη πλήρων ομάδων (incomplete block designs ή IBDs), στους ισορροπημένους σχεδιασμούς μη πλήρων ομάδων (balanced incomplete block designs ή BIBDs) και στους σχεδιασμούς resolvable group divisible (RGDs). Οι RGDs, όπως αυτοί ορίστηκαν από τους John and Mitchell (1977), είναι επί της ουσίας σχεδιασμοί IBDs με την ιδιότητα ότι ο αριθμός των ομάδων που περιέχουν κάθε ζεύγος θεραπειών διαφέρει το πολύ κατά ένα. Περισσότερες πληροφορίες για τους IBDs δίνονται στις εργασίες των Raghavarao and Padgett (2005) όπως και των Nguyen and Blagoeva (2014). Οι John and Williams (1995) παρέχουν μια πολύ σαφή ανάλυση των κυκλικών IBDs ενώ ο Nguyen (1994) περιγράφει μια αλγοριθμική προσέγγιση για την κατασκευή τους.

Στην εργασία τους, οι Nguyen and Stylianou (2013), κατασκεύασαν σχεδιασμούς με έως και 50 στήλες, πολλές περισσότερες δηλαδή από τους αρχικούς σχεδιασμούς των Jones and Nachtsheim (2011). Μάλιστα, αυτοί οι σχεδιασμοί για αρκετές περιπτώσεις είναι προτιμότεροι βάσει του κριτηρίου της D–αποδοτικότητας με το οποίο και αξιολογήθηκαν και συγκρίθηκαν στη συνέχεια.

2.4 Σχεδιασμοί DS με χρήση weighing πινάκων

Μια άλλη πρόταση κατασκευής σχεδιασμών DS έγινε από τους Georgiou, Stylianou and Aggarwal (2012), οι οποίοι χρησιμοποίησαν weighing πίνακες στην μορφή (2.1) των Jones and Nachtsheim (2011). Ένας weighing πίνακας $W = W(m, k)$, είναι ένας

τετραγωνικός πίνακας τάξης m με στοιχεία $\{0, \pm 1\}$, με k μη μηδενικά στοιχεία ανά στήλη και γραμμή, ο οποίος ικανοποιεί την σχέση $W'W = WW' = kI_m$. Η παράμετρος k είναι γνωστή ως βάρος του πίνακα W. Να σημειώσουμε ότι ένας weighing πίνακας $W(n, n-1)$, τάξης n και βάρους $n-1$ είναι ένας conference πίνακας της ίδιας τάξης.

Με βάση τους weighing πίνακες και των ιδιοτήτων τους, οι Georgiou et al. (2012) στην εργασία τους εισήγαγαν μια νέα σειρά από σχεδιασμούς DS οι οποίοι ξέφευγαν από την παραδοσιακή δομή αυτών των σχεδιασμών, αφού επέτρεπαν τη χρήση περισσότερων μηδενικών ανά στήλη καθώς και περισσότερα από ένα κεντρικά σημεία. Κατασκευαστικά, οι σχεδιασμοί είναι της μορφής

$$D = \begin{pmatrix} W \\ 0_{s \times m} \\ -W \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Όπου με το $0_{s \times m}$ συμβολίζουμε τον μηδενικό πίνακα διαστάσεων $s \times m$ (τα κεντρικά σημεία δηλαδή) που μπορεί να είναι περισσότερα από ένα, $s \geq 1$. Ο πίνακας D που προκύπτει μπορεί να θεωρηθεί ως ένας σχεδιασμός DS με $2m + s$ εκτελέσεις, που μπορεί να εξετάσει m ποσοτικούς παράγοντες τριών επιπέδων.

Από την πρόταση αυτή των Georgiou et al. (2012), κατασκευάστηκαν πολλοί νέοι ορθογώνιοι σχεδιασμοί DS με πολύ καλές ιδιότητες. Αυτοί οι σχεδιασμοί είναι αποδοτικοί, σύμφωνα με το κριτήριο της D–αποδοτικότητας και παρέχουν ανεξάρτητες εκτιμήσεις για τις κύριες επιδράσεις, οι οποίες δεν επηρεάζονται από καμία επίδραση δευτέρου βαθμού (τετραγωνική ή αλληλεπίδραση). Η κατασκευή τους προσέγγισή τους είναι σχετικά εύκολη και δεν απαιτεί υπολογιστική ισχύ, καθώς γίνεται χρήση γνωστών weighing πινάκων. Αξίζει και πάλι να αναφερθεί ότι η συγκεκριμένη εργασία άνοιξε το δρόμο για την χρήση περισσοτέρων του ενός μηδενικού ανά στήλη, δίνοντας έτσι την δυνατότητα να κατασκευαστούν αποδοτικότεροι σχεδιασμοί DS. Παραδείγματα κατασκευής δόθηκαν με τη χρήση weighing πινάκων με 1, 2 και 3 μηδενικά, που οδηγούν σε σχεδιασμούς DS με 3, 5 και 7 μηδενικά ανά στήλη, αν χρησιμοποιηθεί ένα κεντρικό σημείο.

Τέλος, στην ίδια εργασία, προσδιορίστηκαν και οι συσχετίσεις μεταξύ στηλών που αντιστοιχούν σε επιδράσεις δευτέρου βαθμού (τετραγωνικές και αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων). Οι συσχετίσεις αυτές είναι συνάρτηση των παραμέτρων k, m, t, και s, όπου t το πλήθος των μηδενικών ανά στήλη. Πιο συγκεκριμένα:

για τις τετραγωνικές επιδράσεις: $Corr(x_{jj}, x_{ll}) = 1 + \frac{[t-(m-k)](2m+s)}{k[s+2(m-k)]}$

ενώ για τις αλληλεπιδράσεις δυο παραγόντων: $Corr(x_{pq}, x_{jl}) = \frac{\sum_{i=1}^{2m+s} x_{i,pq} x_{i,jl}}{4k-2m+2t}$

όπου x_{jj} η στήλη που αντιστοιχεί στη τετραγωνική επίδραση του παράγοντα x_j, x_{ll} η στήλη που αντιστοιχεί στη τετραγωνική επίδραση του παράγοντα x_l, x_{pq} η στήλη που αφορά την αλληλεπίδραση των παραγόντων x_p και x_q, και τέλος x_{jl} η στήλη που αφορά την αλληλεπίδραση των παραγόντων x_j και x_l. Η συσχέτιση μεταξύ των τετραγωνικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων δυο παραγόντων είναι πάντα ίση με μηδέν.

2.5 Κατασκευή σχεδιασμών DS με αφαίρεση στηλών

Μια ενδιαφέρουσα πρόταση κατασκευής σχεδιασμών DS έρχεται από τους Vazquez, Goos and Schoen (2019). Οι προτεινόμενοι σχεδιασμοί δεν ακολουθούν ακριβώς τον τρόπο δόμησης του «κλασσικού» σχεδιασμού DS όπως αυτός προτάθηκε από τους Jones and Nachtsheim (2011). Οι σχεδιασμοί προκύπτουν από αφαίρεση στηλών (dropping columns) σε «κλασσικούς» σχεδιασμούς DS. Στην εργασία, γίνεται μια εξαντλητική αναζήτηση (exhaustive search) των καλύτερων συνόλων από 1 έως 8 στήλες που μπορούν να αφαιρεθούν από τους σχεδιασμούς με έως και 24 παράγοντες. Στο συγκεκριμένο πλαίσιο αναζήτησης, διαπιστώνεται ότι ορισμένες στατιστικές ιδιότητες των πειραματικών σχεδιασμών που προκύπτουν, εξαρτώνται από τις ακριβείς στήλες που αφαιρούνται, ενώ άλλες ιδιότητες είναι ανεπηρέαστες από το ποιες στήλες αφαιρούνται. Αυτή η τελευταία παρατήρηση θα γίνει σημείο αναφοράς από τους συγγραφείς, στη προσπάθεια ταξινόμησης (classification) των σχεδιασμών που απορρέουν από αυτή την διαδικασία.

Όπως ήδη αναφέραμε, όταν παρουσιάσαμε τη σχετική εργασία, η αφαίρεση στηλών προτάθηκε και από τους Xiao et al. (2012). Αυτή η αφαίρεση στηλών οδήγησε, κατά τους συγγραφείς, στους προβολικούς σχεδιασμούς DS (pDSDs). Οι προβολικοί σχεδιασμοί συχνά προσφέρουν καλύτερες ιδιότητες αναφορικά με τη σύγχυση των επιδράσεων, αυξάνοντας έτσι την πιθανότητα να ανιχνευθούν οι σημαντικές ή αλλιώς ενεργές επιδράσεις που πράγματι επηρεάζουν την μεταβλητή απόκρισης σε ένα πείραμα. Σχετικά αναφέρουμε ότι οι Stone et al. (2014) έδειξαν ότι ένας pDSD με περισσότερες εκτελέσεις μπορεί να είναι πιο αποδοτικός από έναν αντίστοιχο σχεδιασμό με λιγότερες εκτελέσεις. Παρόμοια, ο Patil

(2017) μείωσε την σύγχυση των επιδράσεων σε σχεδιασμό επτά παραγόντων αφαιρώντας επιπλέον στήλες. Οι Errore et al. (2017), μέσω προσομοιώσεων, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι προβολικοί σχεδιασμοί είναι πιο αποτελεσματικοί στην ανίχνευση ενεργών επιδράσεων και συνέστησαν τη χρήση τους.

Παρόλα αυτά, δεν είχε πραγματοποιηθεί μια συστηματική μελέτη για την επιλογή των καλύτερων υποσυνόλων των k στηλών που πρέπει να αφαιρεθούν από ένα DS σχεδιασμό με $n = m + k$ στήλες. Σε καθεμία από τις εφαρμογές που αναφέρθηκαν παραπάνω, οι συγγραφείς αφαιρούσαν αυθαίρετα τις τελευταίες k στήλες. Ωστόσο, στην εργασία τους οι Goos et al. (2018) έδειξαν ότι υπάρχουν αξιοσημείωτες διαφορές στην ισχύ του στατιστικού ελέγχου (δύναμη ελέγχου) για την ανίχνευση στατιστικά σημαντικών (ενεργών) επιδράσεων αλλά αντίστοιχα και στα ποσοστά Σφάλματος Τύπου I, ανάλογα με τα διαφορετικά σύνολα στηλών που αφαιρούνται. Έτσι, δόθηκε έμφαση στο να βρεθούν τα καλύτερα εκείνα σύνολα k στηλών που πρέπει να αφαιρεθούν, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα κριτήρια ικανά να διακρίνουν τους σχεδιασμούς που προκύπτουν από την αφαίρεση στηλών.

2.6 Κατασκευή σχεδιασμών DS με χρήση σχεδιασμών conference

Οι Schoen, Eendebak, Vazquez and Goos (2022), στη λογική της κατασκευής σχεδιασμών DS με λιγότερες στήλες από αυτές που η «κλασσική» κατασκευή τους θεωρεί, προχώρησαν στην κατασκευή και απαρίθμηση όλων των μη ισόμορφων $n \times k$ σχεδιασμών DS, με $n \equiv 1 mod\ 4$ και $k \leq (n-1)/2$, οι οποίοι έχουν $z = 3$ μηδενικά ανά στήλη. Η κατασκευή που προτάθηκε βασίζεται στους σχεδιασμούς conference. Οι σχεδιασμοί conference μπορεί να προκύψουν από τους πίνακες conference μετά από την αφαίρεση στηλών. Ένας conference σχεδιασμός X είναι ένας $n \times k$ πίνακας με στοιχεία $\{-1, 0, 1\}$, $k \leq n$ στήλες, ένα μηδενικό σε κάθε στήλη και το πολύ ένα μηδενικό σε κάθε γραμμή για τον οποίο ισχύει $X'X = (n-1) \cdot I_k$. Σημειώνεται ότι ένας πίνακας conference είναι ένας σχεδιασμός conference με $k = n$. Οι Schoen, Eendebak, Vazquez and Goos (2022) χρησιμοποίησαν ένα $n \times k$ conference σχεδιασμό X στη θέση του A στη μορφή (2.1). Μετά από αυτή τη θεώρηση, ο όρος σχεδιασμός DS χρησιμοποιείται πλέον για οποιοδήποτε σχεδιασμό προκύπτει από αυτή τη μεθοδολογία.

Στόχος των συγγραφέων ήταν η ανάπτυξη και εφαρμογή μεθοδολογίας τόσο για τη συστηματική απαρίθμηση των σχεδιασμών conference διάστασης $n \times k$ όσο και των αντίστοιχων σχεδιασμών DS που στη συνέχεια κατασκευάζονται, καθώς και η διερεύνηση της ύπαρξης σχεδιασμών DS που δεν μπορούν να κατασκευαστούν από τους σχεδιασμούς conference. Για το σκοπό αυτό, προτάθηκε ένας αλγόριθμος απαρίθμησης, που ονομάζεται Minimum Complete Set αλγόριθμος (MCS). Ο αλγόριθμος αυτός, σύμφωνα με τους συγγραφείς, είναι αρκετά γρήγορος και άρα υπολογιστικά αποδοτικός και εγγυάται την κατασκευή, για συγκεκριμένο πλήθος εκτελέσεων n, του «αποδοτικότερου» σχεδιασμού DS με οποιαδήποτε από τα γνωστά κριτήρια μέτρησης της αποδοτικότητας. Ο αλγόριθμος MCS εκτελείται σε τρία βασικά μέρη:

- **Basic algorithm**: Αφορά στην κατασκευή όλων των μη ισόμορφων σχεδιασμών conference για έναν δεδομένο αριθμό γραμμών και στηλών.
- **Extension algorithm**: Από το σύνολο των $n \times k$ μη ισόμορφων σχεδιασμών conference, επιλέγεται ένας κάθε φορά και σ' αυτόν προστίθεται μια στήλη που καταλήγει σε σχεδιασμό conference με n γραμμές και $k + 1$ στήλες.
- **(Reduction algorithm)**: Οι $n \times (k + 1)$ conference που προκύπτουν από το προηγούμενο βήμα, ελέγχονται για ισομορφισμό και τελικά επιλέγεται ένας από κάθε μη–ισόμορφη κλάση.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, από fold–over μορφή των σχεδιασμών DS προκύπτει ότι οι στήλες που αντιστοιχούν στις γραμμικές επιδράσεις είναι ασυσχέτιστες τόσο με τις στήλες που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές επιδράσεις όσο και με τις στήλες που αντιστοιχούν στις αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων. Αν επιπλέον ο πίνακας που θα χρησιμοποιηθεί στην (2.1) είναι ορθογώνιος (σχεδιασμός conference ή weighing πίνακας), τότε οι στήλες που αντιστοιχούν στις γραμμικές επιδράσεις είναι ασυσχέτιστες και μεταξύ τους. Ωστόσο, οι στήλες που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές επιδράσεις όσο και οι στήλες που αντιστοιχούν στις αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων. μπορεί να συσχετίζονται. Μια μεγάλη απόλυτη συσχέτιση υποδηλώνει ότι δύο επιδράσεις δεύτερης τάξης συγχέονται σε μεγάλο βαθμό, γεγονός που επηρεάζει τη δυνατότητα ενός σχεδιασμού DS να προσαρμόσει ένα μοντέλο σαν το (1.4).

Στη λογική αυτή, οι Schoen, Eendebak, Vazquez and Goos (2022) πρότειναν, στα πλαίσια της αξιολόγησης των σχεδιασμών DS που κατασκεύασαν, την απαρίθμηση εκείνων που ελαχιστοποιούν τη συσχέτιση μεταξύ των στηλών που αναφέρονται στις επιδράσεις

δεύτερης τάξης. Συγκεκριμένα, εντόπισαν τους βέλτιστους σχεδιασμούς σύμφωνα με το κριτήριο $G - aberration$, Schoen et al. (2019) και το κριτήριο $\beta - aberration$, Cheng and Ye (2004).

2.7 Οι σχεδιασμοί OMARS

Οι Nunes Ares and Goos (2019), πρότειναν μια κλάση σχεδιασμών επιφανειών απόκρισης (Response surface designs – RSDs) για τη μελέτη ποσοτικών παραγόντων που ομοιάζει αρκετά με τους σχεδιασμούς DS. Οι σχεδιασμοί αυτοί, που ονομάστηκαν OMARS σχεδιασμοί (Orthogonal Minimally Aliased Response Surface designs) πληρούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Κάθε στήλη έχει τρία επίπεδα, –1, 0 και 1, και ίσο αριθμό ± 1.
- Οι στήλες που αντιστοιχούν στις γραμμικές κύριες επιδράσεις είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους.
- Οι στήλες που αντιστοιχούν στις κύριες επιδράσεις είναι ασυσχέτιστες με τις στήλες που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές επιδράσεις και με τις στήλες που αντιστοιχούν στις αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων.
- Δεν υπάρχουν επαναλαμβανόμενες εκτελέσεις.
- Δεν υπάρχουν κεντρικά σημεία.

Οι Nunes Ares and Goos (2019), χρησιμοποιώντας τεχνικές ακέραιου προγραμματισμού, κατασκεύασαν μια βάση με 55531 τέτοιους σχεδιασμούς με 3 έως 7 παράγοντες. Αφού κατασκευάστηκαν όλοι οι δυνατοί μη–ισόμορφοι σχεδιασμοί, αυτοί αξιολογήθηκαν και ταξινομήθηκαν βάσει μιας πληθώρας κριτηρίων που περιλαμβάνει και την εξέταση των προβολικών ιδιοτήτων τους.

2.8 Σύνοψη

Στις παραγράφους του Κεφαλαίου 2 που προηγήθηκαν, έγινε μια συνοπτική παρουσίαση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας σχετικά με τους σχεδιασμούς DS, οι οποίοι έχουν μελετηθεί εκτενώς λόγω των ελκυστικών ιδιοτήτων τους στη διαδικασία ανάδειξης των σημαντικών παραγόντων ενός πειράματος. Όπως είδαμε λοιπόν, η αρχική μορφή των

σχεδιασμών DS για τη μελέτη q ποσοτικών παραγόντων με τρία επίπεδα περιλαμβάνει ένα κεντρικό σημείο, συνολικά $z = 3$ μηδενικά ανά στήλη και $n = 2q + 1$ εκτελέσεις. Στην αρχική αυτή μορφή δεν δόθηκε έμφαση στην ορθογωνιότητα των στηλών που σχηματίζουν το σχεδιασμό, αν και έγινε προσπάθεια αυτή τελικά να ικανοποιείται. Στη συνέχεια, προτάθηκε η χρήση πινάκων conference για την κατασκευή τους, γεγονός που κατέληγε στη δημιουργία σχεδιασμών με ορθογώνιες στήλες. Συνεπώς, οι $(2q + 1) \times q$ σχεδιασμοί DS που προέκυψαν με τη χρήση των πινάκων conference είχαν πολύ επιθυμητές ιδιότητες αφού οι στήλες που αντιστοιχούν στις γραμμικές επιδράσεις είναι

- ασυσχέτιστες μεταξύ τους,
- ασυσχέτιστες με τις στήλες που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές επιδράσεις, και
- ασυσχέτιστες με τις στήλες που αντιστοιχούν στις αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων.

Στη συνέχεια, η μορφή αυτών των σχεδιασμών γενικεύτηκε αφού η χρήση των weighing πινάκων επέτρεπε τη χρήση περισσότερων μηδενικών ανά στήλη με ταυτόχρονη διατήρηση των επιθυμητών ιδιοτήτων στους παραγόμενους σχεδιασμούς DS διαστάσεων $(2q + 1) \times q$. Τέλος, η χρήση των σχεδιασμών conference οδήγησε στην κατασκευή σχεδιασμών DS με $z = 3$ μηδενικά ανά στήλη που διατηρούν τις επιθυμητές ιδιότητες για πλήθος στηλών $k \leq q$. Αναφορικά με την τελευταία αυτή εξέλιξη, αναφέρουμε ότι οι Schoen, Eendebak, Vazquez and Goos (2022) έχουν κατασκευάσει λίστες μη–ισόμορφων $n \times k$ σχεδιασμών DS για $n \equiv 1 mod\ 4$ εκτελέσεις, $n \leq 49$, τρία μηδενικά ανά στήλη και $k \leq (n - 1)/2$ στήλες.

Στη διατριβή αυτή αναπτύσσουμε περαιτέρω την περιοχή των σχεδιασμών DS με προτάσεις τεχνικών και αλγορίθμων που οδηγούν:

- στην απευθείας κατασκευή σχεδιασμών DS, με οποιοδήποτε πλήθος μηδενικών ανά στήλη, οι οποίοι έχουν την ελάχιστη (απόλυτη) συσχέτιση μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές επιδράσεις και
- στην ενίσχυση της λίστας των μη–ισόμορφων σχεδιασμών των Schoen, Eendebak, Vazquez and Goos (2022), με την εύρεση πλήρων καταλόγων μη–ισόμορφων DS σχεδιασμών διάστασης $n \times k$ οι οποίοι έχουν τρία ή περισσότερα μηδενικά ανά στήλη, χρησιμοποιώντας αλγόριθμο εξαντλητικής απαρίθμησης, κατάλληλα τροποποιημένο όπου υπάρχει η ανάγκη να περιοριστεί η υπολογιστική πολυπλοκότητα.

Στο Κεφάλαιο 3, μελετάται η συσχέτιση μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές επιδράσεις σε σχεδιασμούς DS με n εκτελέσεις, s κεντρικά σημεία και z μηδενικά ανά στήλη και παρουσιάζεται μία τεχνική που οδηγεί στην κατασκευή σχεδιασμών DS με δύο και τρεις στήλες που ελαχιστοποιούν αυτή τη συσχέτιση. Εφαρμογή της μεθόδου γίνεται για σχεδιασμούς με που έχουν έως επτά μηδενικά ανά στήλη. Τα αποτελέσματα αυτά αξιοποιούνται στη συνέχεια, για την κατασκευή σχεδιασμών με περισσότερες από τρεις στήλες και για πλήθος εκτελέσεων $n \leq 33$.

Στο Κεφάλαιο 4, κατασκευάζονται λίστες μη–ισόμορφων σχεδιασμών DS με 3, 5 και 7 μηδενικά ανά στήλη, για πλήθος εκτελέσεων $n \leq 33$, και n περιττό. Οι σχεδιασμοί αξιολογούνται και προτείνονται οι αποδοτικότεροι με βάση γνωστά κριτήρια αξιολόγησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Σχεδιασμοί DS με την ελάχιστη συσχέτιση στις στήλες που αντιστοιχούν σε τετραγωνικές επιδράσεις

3.1 Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο που προηγήθηκε, έγινε εκτενέστατος λόγος για τους σχεδιασμούς DS με τρία επίπεδα οι οποίοι εισήχθησαν από τους Jones and Nachtsheim (2011) και χρησιμοποιούνται για την ανάδειξη των σημαντικών παραγόντων σε πειράματα με ποσοτικούς παράγοντες. Στην αρχική μορφή των σχεδιασμών DS, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, για τη μελέτη q ποσοτικών παραγόντων με τη χρήση τριών επιπέδων, ο αριθμός των εκτελέσεων είναι ίσος με $n = 2q + 1$ και κάθε στήλη έχει $z = 3$ μηδενικά. Η fold–over δομή τους προσφέρει επιθυμητές κατά τη μοντελοποίηση ιδιότητες αναφορικά με τη συσχέτιση των επιδράσεων που μελετώνται.

Κατά την βιβλιογραφική ανασκόπηση που προηγήθηκε, είδαμε ότι την τελευταία δεκαετία προτάθηκαν τροποποιήσεις στην αρχική δομή των σχεδιασμών DS και μελετήθηκαν σχεδιασμοί με περισσότερα από τρία μηδενικά ανά στήλη αλλά και με λιγότερους παράγοντες προς μελέτη από τον αριθμό q, με τη χρήση $n = 2q + 1$ εκτελέσεων. Η μελέτη των ιδιοτήτων αυτών των σχεδιασμών εστιάζεται κυρίως

- στην ικανότητά τους να εκτιμούν τις παραμέτρους μοντέλων που περιλαμβάνουν γραμμικές ή και τετραγωνικές επιδράσεις ή και αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων της μορφής (1.2), (1.3) και (1.4) που παρουσιαστήκαν στο Κεφάλαιο 1, καθώς και
- στις συσχετίσεις που προκύπτουν στις στήλες που αντιστοιχούν σε τετραγωνικές επιδράσεις.

Στο παρόν Κεφάλαιο θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στη συσχέτιση των στηλών που αντιστοιχούν σε καθαρές τετραγωνικές επιδράσεις σε έναν $n \times p$ σχεδιασμό τύπου DS, με z μηδενικά ανά στήλη. Οι συγκεκριμένες συσχετίσεις είναι συνήθως πολύ ισχυρές και επηρεάζουν τη δυνατότητα εκτίμησης των μοντέλων που περιέχουν τετραγωνικές επιδράσεις, σαν τα (1.3) και (1.4). Στόχος μας είναι η απευθείας κατασκευή σχεδιασμών

τύπου DS με την ελάχιστη δυνατή (απόλυτη) συσχέτιση μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές επιδράσεις των υπό εξέταση παραγόντων.

Συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε μια τεχνική κατασκευής σχεδιασμών με την οποία ελέγχουμε απευθείας τη συσχέτιση των στηλών που αντιστοιχεί στις τετραγωνικές επιδράσεις των παραγόντων. Οι υπό μελέτη σχεδιασμοί θα έχουν την παρακάτω fold–over μορφή (που διατηρούν όλοι οι σχεδιασμοί τύπου DS)

$$D = \begin{pmatrix} A_{q\times p} \\ 0_{s\times p} \\ -A_{q\times p} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

όπου $A_{q\times p}$ είναι ένας πίνακας διαστάσεων $q \times p$ με στοιχεία –1, 0 και +1, $0_{s\times q}$ είναι ένας πίνακας διαστάσεων $s \times p$ με όλα τα στοιχεία του ίσα με 0, και ο $-A_{q\times p}$ είναι ο $A_{q\times p}$ με τα στοιχεία του πολλαπλασιασμένα με –1. Σημειώνεται ότι η μορφή αυτή είναι η γενική μορφή που έχουν οι σχεδιασμοί τύπου DS, επιτρέπει περισσότερα από 1 κεντρικά σημεία στο σχεδιασμό και έχει $n = 2q + s$ εκτελέσεις συνολικά για τη μελέτη $p \leq q$ παραγόντων. Όταν $s = 1$ και $p = q$, τότε η μορφή αυτή ταυτίζεται με την αρχικά προτεινόμενη μορφή των σχεδιασμών DS των Jones και Nachtsheim (2011).

Η προτεινόμενη μέθοδος κατασκευής απαιτεί την εύρεση της μορφής που πρέπει να έχουν οι σχεδιασμοί τύπου DS με δύο στήλες και την διατήρηση αυτής της μορφής σε όλες τις δυάδες στηλών σε σχεδιασμούς με περισσότερες στήλες. Η εφαρμογή της μεθόδου γίνεται για σχεδιασμούς με $z = 3, 5$ και 7 μηδενικά ανά στήλη – καθώς σχεδιασμοί αυτής της μορφής έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία – όπου και κατασκευάζουμε κλάσεις μη–ισόμορφων $n \times 3$ σχεδιασμών με τρεις στήλες, για κάθε n.

Για την κατασκευή σχεδιασμών με περισσότερες στήλες προτείνουμε τη χρήση ενός αλγόριθμου επέκτασης (extension algorithm). Με τη χρήση αυτού του αλγορίθμου, κατασκευάζονται όλοι οι μη–ισόμορφοι σχεδιασμοί τύπου DS με $n \leq 33$ εκτελέσεις και με τρία, πέντε ή επτά μηδενικά ανά στήλη. Σημειώνεται ότι δύο σχεδιασμοί DS είναι ισόμορφοι αν ο ένας μπορεί να πάρει τη μορφή του άλλου μετά από μεταθέσεις γραμμών ή και στηλών ή και με πολλαπλασιασμό των στοιχείων μίας ή περισσότερων στηλών με – 1.

3.2 Η μορφή των σχεδιασμών DS με δύο στήλες

Ας θεωρήσουμε δύο από τις p στήλες στη γενική μορφή του σχεδιασμού D που δίνεται στην (3.1). Δημιουργείται ένας πίνακας με $n\ (= 2q + s)$ γραμμές και δύο στήλες με στοιχεία –1, 0 και +1. Είναι προφανές ότι κάθε γραμμή αυτού του πίνακα θα ταυτίζεται με μία από τις ακόλουθες εννέα περιπτώσεις

$$(-1,-1), (-1,0), (-1,+1), (0,-1), (0,0), (0,+1), (+1,-1), (+1,0) \text{ και } (+1,+1)$$

που μπορεί να προκύψουν από τη χρήση των στοιχείων -1, 0 και $+1$. Είναι λογικό κάποιες από αυτές τις εννέα περιπτώσεις να μην εμφανίζονται καθόλου στον πίνακα με τις n γραμμές και τις δύο στήλες, ενώ κάποιες άλλες να εμφανίζονται μία ή και περισσότερες φορές. Επιπλέον, λόγω της fold–over δομής του D, που προφανώς θα διατηρείται και στο δίστηλο που επιλέγεται, οι φορές που θα εμφανίζεται η γραμμή $(-1,-1)$ θα ταυτίζεται με τις φορές που θα εμφανίζεται η $(+1,+1)$ και το ίδιο θα ισχύει για τις γραμμές $(-1,+1)$ και $(+1,-1)$, τις γραμμές $(-1,0)$ και $(+1,0)$ και τις γραμμές $(0,-1)$ και $(0,+1)$. Συνεπώς, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο $n \times 2$ πίνακας που σχηματίζεται θα έχει τη μορφή που φαίνεται στον πίνακα 3.1, όπου τα α_i, $i = 1,2, \dots ,5$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί, αφού δείχνουν το πόσες φορές εμφανίζεται η κάθε γραμμή στον $n \times 2$ πίνακα.

Γραμμή	Στήλη 1	Στήλη 2	Πλήθος φορών εμφάνισης
1	-1	-1	a_1
2	-1	0	a_2
3	-1	$+1$	a_3
4	0	-1	a_4
5	0	0	a_5
6	0	$+1$	a_4
7	$+1$	-1	a_3
8	$+1$	0	a_2
9	$+1$	$+1$	a_1

Πίνακας 3.1: Γενική μορφή σχεδιασμού DS με δύο στήλες

Οι ποσότητες α_i πρέπει να ικανοποιούν ορισμένες σχέσεις αφού θέλουμε ο D να είναι σχεδιασμός DS. Αρχικά, αφού ο συνολικός αριθμός των γραμμών είναι ίσος με n, θα πρέπει

$$2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_5 = n.$$

Επιπλέον, αφού το πλήθος των μηδενικών κάθε στήλης θα πρέπει να είναι ίσο με z, θα πρέπει

$$2 \cdot \alpha_4 + \alpha_5 = z,$$

όπως προκύπτει από την 1η στήλη και

$$2 \cdot \alpha_2 + \alpha_5 = z$$

όπως προκύπτει από τη 2η. Τέλος, θέλουμε οι δύο στήλες να είναι ορθογώνιες, το οποίο επιτυγχάνεται όταν το εσωτερικό γινόμενό τους είναι ίσο με 0, δηλαδή

$$2 \cdot \alpha_1 - 2 \cdot \alpha_3 = 0.$$

Προκύπτει λοιπόν ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με πέντε αγνώστους

$$\begin{aligned} 2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_5 &= n \\ 2 \cdot \alpha_4 + \alpha_5 &= z \\ 2 \cdot \alpha_2 + \alpha_5 &= z \\ 2 \cdot \alpha_1 - 2 \cdot \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (3.2) προκύπτει η λύση

$$\begin{aligned} a_1 = a_3 &= \frac{n + t - 2 \cdot z}{4} \\ a_2 = a_4 &= \frac{z - t}{2} \\ \alpha_5 &= t \end{aligned} \tag{3.3}$$

που ουσιαστικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή ενός $n \times 2$ σχεδιασμού DS με z μηδενικά ανά στήλη και t κεντρικά σημεία.

Από το γεγονός ότι οι ποσότητες α_i, $i = 1,2, \dots ,5$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί, προκύπτουν αρκετά ενδιαφέροντα πορίσματα σχετικά με τις ποσότητες n, z και t. Συγκεκριμένα, από την ποσότητα a_2 προκύπτει ότι το $z - t$ πρέπει να είναι άρτιος αριθμός με $z \geq t$. Συνεπώς, όταν το πλήθος των κεντρικών σημείων t είναι άρτιος, το z είναι επίσης άρτιος, ενώ όταν t είναι περιττός, το z είναι επίσης περιττός. Επιπλέον, παρατηρώντας την ποσότητα α_1 προκύπτει ότι αν το t είναι άρτιος η ποσότητα $t - 2z$ είναι άρτιος και συνεπώς, το πλήθος των γραμμών n είναι άρτιος ($n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ ή $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$) ενώ, αν το t είναι περιττός, τότε το n είναι περιττός ($n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ ή $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$). Να επισημάνουμε τέλος ότι οι σχεδιασμοί που προκύπτουν από τους συνδυασμούς τιμών των z, t και n είναι

και μοναδικοί. Επίσης, για κάθε n, μπορεί να προκύψουν διάφοροι σχεδιασμοί για διάφορα z και t.

Ας εξετάσουμε τώρα τις δύο στήλες που αντιστοιχούν στις δυο τετραγωνικές επιδράσεις q_1 και q_2 των δύο παραγόντων που θα ανατεθούν στις δύο στήλες του σχεδιασμού. Ο πίνακας 3.2 δίνει τη γενική μορφή του σχεδιασμού με n γραμμές, z μηδενικά ανά στήλη και t κεντρικά σημεία μαζί με τη μορφή των στηλών που αντιστοιχούν στις δύο τετραγωνικές επιδράσεις των παραγόντων.

			Στήλες τετραγωνικών επιδράσεων		
f_1	f_2	Πλήθος φορών εμφάνισης	q_1	q_2	$q_1 \cdot q_2$
-1	-1	$\frac{n+t-2\cdot z}{4}$	1	1	1
-1	0	$\frac{z-t}{2}$	1	0	0
-1	1	$\frac{n+t-2\cdot z}{4}$	1	1	1
0	-1	$\frac{z-t}{2}$	0	1	0
0	0	t	0	0	0
0	1	$\frac{z-t}{2}$	0	1	0
1	-1	$\frac{n+t-2\cdot z}{4}$	1	1	1
1	0	$\frac{z-t}{2}$	1	0	0
1	1	$\frac{n+t-2\cdot z}{4}$	1	1	1
Αθροίσματα		n	$n-z$	$n-z$	$n+t-2z$

Πίνακας 3.2: Σχεδιασμός με δυο στήλες και στήλες τετραγωνικών επιδράσεων

Ο συντελεστής συσχέτισης Pearson $C_{q_1q_2}$ των στηλών που αντιστοιχούν στις δύο τετραγωνικές επιδράσεις υπολογίζεται με τη χρήση του

$$C_{q_1q_2} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} q_{1i}q_{2i} - \sum_{i=1}^{n} q_{1i} \cdot \sum_{i=1}^{n} q_{2i}}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} q_{1i}^2 - (\sum_{i=1}^{n} q_{1i})^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} q_{2i}^2 - (\sum_{i=1}^{n} q_{2i})^2}}$$

όπου, αν αντικαταστήσουμε τα αθροίσματα για τις στήλες που αφορούν τις τετραγωνικές επιδράσεις θα προκύψει ότι

$$C_{q_1q_2} = \frac{n(n+t-2z) - (n-z)\cdot(n-z)}{\sqrt{n(n-z) - (n-z)^2}\sqrt{n(n-z) - (n-z)^2}} = \frac{n(n+t-2z) - (n-z)^2}{n(n-z) - (n-z)^2}$$

ή τελικά

$$C_{q_1q_2} = \frac{nt - z^2}{z(n - z)} \tag{3.4}$$

Είναι φανερό ότι η συσχέτιση αυτή επηρεάζεται από τρεις βασικές παραμέτρους: Τον αριθμό των εκτελέσεων του σχεδιασμού n, τον αριθμό των μηδενικών σε κάθε στήλη z και τον αριθμό των περιπτώσεων t όπου το ζεύγος τιμών $(0,0)$ εμφανίζεται στο σχεδιασμό των δύο στηλών. Η ύπαρξη κεντρικού σημείου στον σχεδιασμό συνεπάγεται ότι το t πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το μηδέν. Όταν t είναι ίσο με z, η συσχέτιση $C_{q_1q_2}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της κάτι που οδηγεί σε πλήρη συσχέτιση των τετραγωνικών επιδράσεων, γεγονός αναμενόμενο αφού σε αυτή την περίπτωση ο πίνακας A του σχεδιασμού D δεν περιέχει μηδενικά. Η περίπτωση αυτή δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον και δεν θα μελετηθεί στα επόμενα.

Συνοψίζοντας, οι λύσεις (3.3) μας δίνουν και την δυνατότητα να κατασκευάσουμε σχεδιασμούς δύο στηλών με συγκεκριμένο αριθμό μηδενικών ανά στήλη z, με συγκεκριμένο πλήθος κεντρικών σημείων t, και με συνολικό αριθμό εκτελέσεων n. Στη συνέχεια, για κάθε παραγόμενο σχεδιασμό, η συσχέτιση $C_{q_1q_2}$ μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν στις δύο τετραγωνικές επιδράσεις υπολογίζεται από την (3.4), επιτρέποντας τον εντοπισμό του σχεδιασμού με τη μικρότερη απόλυτη συσχέτιση των τετραγωνικών στηλών. Ας δούμε για παράδειγμα την περίπτωση που θέλουμε έναν σχεδιασμό με $z = 9$ μηδενικά ανά στήλη. Σε αυτή την περίπτωση, και με βάση όσα προηγουμένως αναφέρθηκαν, μπορεί να χρησιμοποιηθούν είτε 1, είτε 3, είτε 5, είτε 7 κεντρικά σημεία, t και μπορεί να σχηματιστούν σχεδιασμοί για περιττό αριθμό εκτελέσεων. Συγκεκριμένα, αν $t = 1$ ή 5 τότε σχεδιασμοί υπάρχουν για $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ ενώ όταν $t = 3$ ή 7, σχεδιασμοί υπάρχουν όταν $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$.

Για σχεδιασμούς με $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, θέτοντας στην (3.4) όπου $z = 9$ και $t = 1$ προκύπτει $C_{q_1q_2} = \frac{n-81}{9n-81}$ ενώ, θέτοντας όπου $z = 9$ και $t = 5$ προκύπτει $C_{q_1q_2} = \frac{5n-81}{9n-81}$. Με απλή σύγκριση των απολύτων τιμών για κάθε n, προκύπτει ότι ελάχιστη απόλυτη συσχέτιση μεταξύ των στηλών των τετραγωνικών επιδράσεων προκύπτει με την επιλογή πέντε κεντρικών σημείων για $n = 17, 21$ και 25 και ενός κεντρικού σημείου για $n > 25$. Ομοίως, για σχεδιασμούς με $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$, θέτοντας στην (3.4) όπου $z = 9$ και $t = 3$ προκύπτει

$C_{q_1q_2} = \frac{3n-81}{9n-81}$ ενώ, θέτοντας όπου $z = 9$ και $t = 7$ προκύπτει $C_{q_1q_2} = \frac{7n-81}{9n-81}$ και οι συγκερίσεις προκύπτουν εύκολα για κάθε n.

Εστιάζοντας τώρα σε σχεδιασμούς με $z \leq 7$ μηδενικά ανά στήλη, που όπως έχει ήδη αναφερθεί έχουν μελετηθεί στη βιβλιογραφία (βλ. Georgiou, Stylianou και Aggarwal (2014)), δίνονται αρχικά στον πίνακα 3.3 τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα για τις περιπτώσεις που προκύπτουν ανάλογα με το πλήθος z των μηδενικών ανά στήλη και το πλήθος t των κεντρικών σημείων, όταν οι εκτελέσεις n είναι περιττός αριθμός.

n περιττός						
Γραμμές	$n = 4k + 1$				$n = 4k + 3$	
	$z = 3,$ $t = 1$	$z = 5,$ $t = 1$	$z = 7,$ $t = 1$	$z = 7,$ $t = 5$	$z = 5,$ $t = 3$	$z = 7,$ $t = 3$
	$D1.1$	$D1.2$	$D1.3$	$D1.4$	$D3.1$	$D3.2$
$(-1,-1)$ & $(+1,+1)$	$\frac{n-5}{4}$	$\frac{n-9}{4}$	$\frac{n-13}{4}$	$\frac{n-9}{4}$	$\frac{n-7}{4}$	$\frac{n-11}{4}$
$(-1,0)$ & $(+1,0)$	1	2	3	1	1	2
$(-1,+1)$ & $(+1,-1)$	$\frac{n-5}{4}$	$\frac{n-9}{4}$	$\frac{n-13}{4}$	$\frac{n-9}{4}$	$\frac{n-7}{4}$	$\frac{n-11}{4}$
$(0,-1)$ & $(0,+1)$	1	2	3	1	1	2
$(0,0)$	1	1	1	5	3	3
C_{qq}	$\frac{n-9}{3n-9}$	$\frac{n-25}{5n-25}$	$\frac{n-49}{7n-49}$	$\frac{5n-49}{7n-49}$	$\frac{3n-25}{5n-25}$	$\frac{3n-49}{7n-49}$

Πίνακας 3.3: Σχεδιασμοί με δυο στήλες, περιττό αριθμό εκτελέσεων και $z \leq 7$ μηδενικά ανά στήλη

Όπως και στο παράδειγμα που αναφέραμε προηγουμένως αναφορικά με τους σχεδιασμούς δύο στηλών με $z = 9$ μηδενικά ανά στήλη, μια ενδιαφέρουσα περίπτωση προκύπτει για $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη, όπου υπάρχουν δύο σχεδιασμοί δύο στηλών, ένας με 1 και ένας με 5 κεντρικά σημεία. Ο σχεδιασμός με 5 κεντρικά σημεία υπερτερεί, ως προς την ελάχιστη (απόλυτη) συσχέτιση μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές επιδράσεις, του σχεδιασμού με 1 κεντρικό σημείο μόνο στην περίπτωση όπου $n = 13$. Για $n \geq 17$, ο σχεδιασμός με 1 κεντρικό σημείο δίνει μικρότερη απόλυτη συσχέτιση μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές επιδράσεις. Ο σχεδιασμός με $n = 13$ και με 5 κεντρικά σημεία παρουσιάζεται στον πίνακα 3.4.

f_1	f_2
-1	-1
-1	0
-1	+1
0	-1
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	+1
+1	-1
+1	0
+1	+1
$C_{qq} = 0.381$	

Πίνακας 3.4: 13×2 σχεδιασμός

Ο πίνακας 3.5 ολοκληρώνει τα αποτελέσματα για τις περιπτώσεις που προκύπτουν ανάλογα με το πλήθος z των μηδενικών ανά στήλη και το πλήθος t των κεντρικών σημείων, όταν οι εκτελέσεις n είναι άρτιος αριθμός.

n άρτιος			
Γραμμές	$n = 4k$	$n = 4k + 2$	
	$z = 6,$ $t = 4$	$z = 4,$ $t = 2$	$z = 6,$ $t = 2$
	$D0.1$	$D2.1$	$D2.2$
$(-1,-1)$ & $(+1,+1)$	$\frac{n-8}{4}$	$\frac{n-6}{4}$	$\frac{n-10}{4}$
$(-1,0)$ & $(+1,0)$	1	1	2
$(-1,+1)$ & $(+1,-1)$	$\frac{n-8}{4}$	$\frac{n-6}{4}$	$\frac{n-10}{4}$
$(0,-1)$ & $(0,+1)$	1	1	2
$(0,0)$	4	2	2
C_{qq}	$\frac{4n-36}{6n-36}$	$\frac{2n-16}{4n-16}$	$\frac{2n-36}{6n-36}$

Πίνακας 3.5: Σχεδιασμοί με δυο στήλες, άρτιο αριθμό εκτελέσεων και$z \leq 7$ μηδενικά ανά στήλη

Στην επόμενη παράγραφο, θα εκμεταλλευτούμε τα αποτελέσματα αυτά για να κατασκευάσουμε σχεδιασμούς τύπου DS με τρεις στήλες.

3.3 Βέλτιστοι σχεδιασμοί DS τριών στηλών

Σε αντιστοιχία με την προσέγγιση που ακολουθήσαμε στην παράγραφο 3.2, αν θεωρήσουμε τρεις από τις p στήλες στη γενική μορφή του σχεδιασμού D που δίνεται στην (3.1) θα δημιουργήσουμε έναν πίνακα με $n\ (=2q+s)$ γραμμές και τρεις στήλες (οι οποίες θα συμβολίζονται με C1, C2 και C3) με στοιχεία -1, 0 και $+1$. Κάθε γραμμή αυτού του πίνακα θα ταυτίζεται αυτή τη φορά με μία από τις 27 διαφορετικές τοποθετήσεις που μπορεί να προκύψουν από τη χρήση των στοιχείων -1, 0 και $+1$ σε ένα διάνυσμα–γραμμή τριών θέσεων.

					Οι τρεις επιλογές 2 στηλών		
Γραμμή	C1	C2	C3	Πλήθος φορών εμφάνισης	C1,C2	C1,C3	C2,C3
1	–1	–1	–1	α_1	$-,-$	$-,-$	$-,-$
2	–1	–1	0	α_2	$-,-$	$-$,0	$-$,0
3	–1	–1	+1	α_3	$-,-$	$-,+$	$-,+$
4	–1	0	–1	α_4	$-$,0	$-,-$	$0,-$
5	–1	0	0	α_5	$-$,0	$-$,0	0,0
6	–1	0	+1	α_6	$-$,0	$-,+$	$0,+$
7	–1	+1	–1	α_7	$-,+$	$-,-$	$+,-$
8	–1	+1	0	α_8	$-,+$	$-$,0	$+$,0
9	–1	+1	1	α_9	$-,+$	$-,+$	$+,+$
10	0	–1	–1	α_{10}	$0,-$	$0,-$	$-,-$
11	0	–1	0	α_{11}	$0,-$	0,0	$-$,0
12	0	–1	+1	α_{12}	$0,-$	$0,+$	$-,+$
13	0	0	–1	α_{13}	0,0	$0,-$	$0,-$
14	0	0	0	α_{14}	0,0	0,0	0,0
15	0	0	+1	α_{13}	0,0	$0,+$	0,1
16	0	+1	–1	α_{12}	$0,+$	$0,-$	$+,-$
17	0	+1	0	α_{11}	$0,+$	00	$+$,0
18	0	+1	+1	α_{10}	$0,+$	$0,+$	$+,+$
19	+1	–1	–1	α_9	$+,-$	$+,-$	$-,-$
20	+1	–1	0	α_8	$+,-$	$+$,0	$-$,,0
21	+1	–1	+1	α_7	$+,-$	$+,+$	$-,+$
22	+1	0	–1	α_6	$+$,0	$+,-$	$0,-$
23	+1	0	0	α_5	$+$,0	$+$,0	0,0
24	+1	0	+1	α_4	$+$,0	$+,+$	$0,+$
25	+1	+1	–1	α_3	$+,+$	$+,-$	$+,-$
26	+1	+1	0	α_2	$+,+$	$+$,0	$+$,0
27	+1	+1	+1	α_1	$+,+$	$+,+$	$+,+$

Πίνακας 3.6: Γενική μορφή σχεδιασμού DS με τρεις στήλες

Επίσης, και πάλι κάποιες από αυτές τις 27 τριάδες στοιχείων μπορεί να μην εμφανίζονται καθόλου στον πίνακα με τις n γραμμές και τις τρεις στήλες, ενώ κάποιες άλλες μπορεί να εμφανίζονται μία ή και περισσότερες φορές. Επιπλέον, λόγω της fold–over δομής του D, θα ισχύει και πάλι η ταύτιση των φορών εμφάνισης κάθε γραμμής με τρία στοιχεία, $\boldsymbol{r}$, και της γραμμής που προκύπτει από την $\boldsymbol{r}$ όταν όλα τα στοιχεία της πολλαπλασιαστούν με -1. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο $n \times 3$ πίνακας που σχηματίζεται θα έχει τη μορφή που φαίνεται στον πίνακα 3.6, όπου και πάλι οι ποσότητες a_i, $i = 1,2, \dots ,13$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί, αφού δείχνουν το πόσες φορές εμφανίζεται η κάθε γραμμή σε αυτόν τον $n \times 3$ πίνακα.

Στο τελευταίο μέρος του πίνακα 3.6 δίνονται οι σχεδιασμοί δύο στηλών που μπορεί να προκύψουν από το σχεδιασμό με τρεις στήλες αν επιλέξουμε δύο εξ αυτών. Σημειώνεται, ότι καθεμία από αυτές τις δυάδες στηλών, θα πρέπει να ικανοποιεί τις σχέσεις (3.3) αναφορικά με το πλήθος εμφάνισης καθενός από τους 9 συνδυασμούς που προκύπτουν. Αν συμβαίνει κάτι τέτοιο, τότε ο σχεδιασμός των τριών στηλών θα είναι ένας επιθυμητός DS σχεδιασμός με τρεις στήλες. Αν επιπλέον οι τρεις δυάδες στηλών έχουν και τη συγκεκριμένη μορφή που δίνει την ελάχιστη (απόλυτη) συσχέτιση μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν σε τετραγωνικές επιδράσεις, τότε και ο σχεδιασμός με τρεις στήλες θα διατηρεί την ιδιότητα αυτή.

Ας δούμε αρχικά πως μπορούμε να εξάγουμε τη μορφή που θα έχει ο σχεδιασμός DS τριών στηλών, με n γραμμές και z μηδενικά ανά στήλη, εκμεταλλευόμενοι την πληροφορία που προκύπτει από τα τρία δίστηλα. Σημειώνουμε, ότι δεν είναι απαραίτητο κάθε δίστηλο που δημιουργείται να έχει τον ίδιο αριθμό κεντρικών σημείων t και γι' αυτό το λόγο θα χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα t_1, t_2 και t_3 για να δηλώνουμε το πλήθος των κεντρικών σημείων των δίστηλων C1C2, C1C3 και C2C3, αντίστοιχα. Εξετάζοντας αρχικά τις στήλες C1, C2 και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (3.3) θα έχουμε ότι η γραμμή $(-1,-1)$ και η γραμμή $(-1,+1)$ θα πρέπει να εμφανίζεται συνολικά $(n + t_1 - 2 \cdot z)/4$ φορές. Συνεπώς, προκύπτει ότι

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_7 + a_8 + a_9 = \frac{n + t_1 - 2z}{4}.$$

Επίσης, οι γραμμές $(-1, 0)$ και $(0, -1)$ θα πρέπει να εμφανίζονται συνολικά $(z - t_1)/2$ φορές, οπότε

$$a_4 + a_5 + a_6 = a_{10} + a_{11} + a_{12} = \frac{z - t_1}{2},$$

και τέλος, από τα t_1 κεντρικά σημεία έχουμε

$$2a_{13} + a_{14} = t_1.$$

Προκύπτουν δηλαδή πέντε εξισώσεις που πρέπει να ικανοποιούν οι μη αρνητικές ακέραιες ποσότητες α_i, $i = 1,2, \dots, 13$. Δουλεύοντας ανάλογα με τα δίστηλα (C1,C3) και (C2,C3), θα δημιουργηθούν άλλες 10 σχέσεις και τελικά θα προκύψει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων που πρέπει να ικανοποιούν τα α_i.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = \dfrac{n + t_1 - 2z}{4} \\ a_4 + a_5 + \mathrm{a}_6 = \dfrac{\mathrm{z} - t_1}{2} \\ \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 = \dfrac{n + t_1 - 2z}{4} \\ a_{10} + a_{11} + a_{12} = \dfrac{\mathrm{z} - t_1}{2} \\ a_{13} + a_{14} + a_{13} = t_1 \\ a_1 + a_4 + a_7 = \dfrac{n + t_2 - 2z}{4} \\ a_2 + a_5 + a_8 = \dfrac{\mathrm{z} - t_2}{2} \\ a_3 + a_6 + a_9 = \dfrac{n + t_2 - 2z}{4} \\ a_{10} + a_{13} + a_{12} = \dfrac{\mathrm{z} - t_2}{2} \\ a_{11} + a_{14} + a_{11} = t_2 \\ a_1 + a_{10} + a_9 = \dfrac{n + t_3 - 2z}{4} \\ a_2 + a_{11} + a_8 = \dfrac{\mathrm{z} - t_3}{2} \\ a_3 + a_{12} + a_7 = \dfrac{n + t_3 - 2z}{4} \\ a_4 + a_{13} + a_6 = \dfrac{\mathrm{z} - t_3}{2} \\ a_5 + a_{14} + a_5 = t_3 \end{cases} \tag{3.5}$$

Η λύση του συστήματος, δίνεται στον πίνακα 3.7, που ουσιαστικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή ενός $n \times 3$ σχεδιασμού DS με z μηδενικά ανά στήλη και s κεντρικά σημεία της μορφής $(0,0,0)$.

Γραμμή	f_1	f_2	f_3	Πλήθος φορών εμφάνισης
1	-1	-1	-1	$\alpha_1 = \quad r_1$
	+1	+1	+1	
2	-1	-1	0	$\alpha_2 = \quad z + r_3 + r_2 - (n + 2t_3 + 2t_2 + t_1 - 2s)/4$
	+1	+1	0	
3	-1	-1	+1	$\alpha_3 = \quad (n - 3z + t_3 + t_2 + t_1 - s)/2 \ - r_3 - r_2 - r_1$
	+1	+1	-1	
4	-1	0	-1	$\alpha_4 = \quad (n - 2z + t_2)/4 \ - r_2 - r_1$
	+1	0	+1	
5	-1	0	0	$\alpha_5 = \quad (t_3 - s)/2$
	+1	0	0	
6	-1	0	+1	$\alpha_6 = \quad z + r_2 + r_1 - (n + 2t_3 + t_2 + 2t_1 - 2s)/4$
	+1	0	-1	
7	-1	+1	-1	$\alpha_7 = \quad r_2$
	+1	-1	+1	
8	-1	+1	0	$\alpha_8 = \quad (n - 2z + t_1)/4 \ - r_3 - r_2$
	+1	-1	0	
9	-1	+1	+1	$\alpha_9 = \quad r_3$
	+1	-1	-1	
10	0	-1	-1	$\alpha_{10} = \quad (n - 2z + t_3)/4 \ - r_3 - r_1$
	0	+1	+1	
11	0	-1	0	$\alpha_{11} = \quad (t_2 - s)/2$
	0	+1	0	
12	0	-1	+1	$\alpha_{12} = \quad z + r_3 + r_1 - (n + t_3 + 2t_2 + 2t_1 - 2s)/4$
	0	+1	-1	
13	0	0	-1	$\alpha_{13} = \quad (t_1 - s)/2$
	0	0	+1	
14	0	0	0	$\alpha_{14} = \quad s$

Πίνακας 3.7: Γενική μορφή σχεδιασμού με τρεις στήλες

Όπως είναι φανερό, η πολυπλοκότητα αντιμετώπισης της περίπτωσης των τριών στηλών αυξάνεται, καθώς φαίνεται ότι μπορεί να προκύψουν αρκετές λύσεις ανά περίπτωση αφού, εκτός των τιμών των n, z, t_1, t_2 και t_3 υπάρχουν και τρεις ελεύθερες παράμετροι (r_1, r_2 και r_3) που οι αποδεκτές τιμές τους ορίζουν και κάποιον σχεδιασμό.

Αναφορικά με την κατασκευή σχεδιασμών DS με τρεις στήλες που να έχουν την ελάχιστη (απόλυτη) συσχέτιση μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν σε τετραγωνικές επιδράσεις μπορούμε, αφού αρχικά διακρίνουμε τη βέλτιστη μορφή που πρέπει να έχει κάθε δίστηλο όπως περιεγράφηκε στην παράγραφο 3.2, να σταθεροποιήσουμε τις τιμές των z, t_1, t_2 και t_3 στη λύση που δίνεται στον πίνακα 3.7, να βρούμε τις αποδεκτές τιμές του s και στη συνέχεια να παράγουμε τους σχεδιασμούς βρίσκοντας τις τιμές των r_1, r_2 και r_3 που καταλήγουν σε μη αρνητικές ακέραιες τιμές για τα α_i. Στις επόμενες ενότητες, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για την κατασκευή σχεδιασμών τριών στηλών με $z \leq 7$

μηδενικά ανά στήλη, χρησιμοποιώντας τη γενική μορφή της λύσης που παρατίθεται στον πίνακα 3.7 και τις βέλτιστες μορφές δύο στηλών που δίνονται στους πίνακες 3.3 και 3.5, για κάθε n.

3.3.1 Η περίπτωση των $n \equiv 1 \bmod 4$ εκτελέσεων

Εξετάζουμε αρχικά την περίπτωση των τριών μηδενικών ανά στήλη, $z = 3$. Είναι ξεκάθαρο ότι οι σχεδιασμοί τριών στηλών με πλήθος εκτελέσεων $n = 4k + 1$ που ελαχιστοποιούν τη μέγιστη απόλυτη τιμή της συσχέτισης των αντίστοιχων στηλών για τις τετραγωνικές επιδράσεις πρέπει να προκύπτουν από δίστηλους σχεδιασμούς που έχουν την μορφή του σχεδιασμού $D1.1$ του πίνακα 3.4. Επομένως, θέτουμε στη λύση του πίνακα 3.7 της προηγούμενης ενότητας, τις τιμές $n = 4k + 1$, $z = 3$ και $t_1 = t_2 = t_3 = 1$. Από την τελευταία συνθήκη προκύπτει άμεσα ότι $s = 1$. Προκύπτει ότι η μορφή των λύσεων γίνεται

Γραμμή	f_1	f_2	f_3	Πλήθος φορών εμφάνισης
1	-1	-1	-1	$\alpha_1 = r_1$
	+1	+1	+1	
2	-1	-1	0	$\alpha_2 = 2 - k + r_3 + r_2$
	+1	+1	0	
3	-1	-1	+1	$\alpha_3 = 2k - 3 - r_3 - r_2 - r_1$
	+1	+1	-1	
4	-1	0	-1	$\alpha_4 = k - 1 - r_2 - r_1$
	+1	0	+1	
5	-1	0	0	$\alpha_5 = 0$
	+1	0	0	
6	-1	0	+1	$\alpha_6 = 2 - k + r_2 + r_1$
	+1	0	-1	
7	-1	+1	-1	$\alpha_7 = r_2$
	+1	-1	+1	
8	-1	+1	0	$\alpha_8 = k - 1 - r_3 - r_2$
	+1	-1	0	
9	-1	+1	+1	$\alpha_9 = r_3$
	+1	-1	-1	
10	0	-1	-1	$\alpha_{10} = k - 1 - r_3 - r_1$
	0	+1	+1	
11	0	-1	0	$\alpha_{11} = 0$
	0	+1	0	
12	0	-1	+1	$\alpha_{12} = 2 - k + r_3 + r_1$
	0	+1	-1	
13	0	0	-1	$\alpha_{13} = 0$
	0	0	+1	
14	0	0	0	$\alpha_{14} = 1$

και βασίζεται στις μη αρνητικές ακέραιες τιμές των ελεύθερων μεταβλητών r_1, r_2 και r_3. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογα με το αν το k είναι περιττός αριθμός (μπορεί δηλαδή να γραφεί ως $k = 2m + 1$) ή άρτιος αριθμός ($k = 2m$). Προκύπτει ένας μη–ισόμορφος σχεδιασμός σε κάθε περίπτωση, ο οποίος δίνεται στον πίνακα 3.9 για k άρτιο και στον πίνακα 3.10 για k περιττό. Θα περιγράψουμε αναλυτικά τη διαδικασία επίλυσης για την περίπτωση όπου $k = 2m$. Σημειώνεται ότι όλες οι υπόλοιπες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται ανάλογα. Η λύση λαμβάνει τη μορφή

Γραμμή	f_1	f_2	f_3	Πλήθος φορών εμφάνισης
1	-1	-1	-1	$\alpha_1 = r_1$
	+1	+1	+1	
2	-1	-1	0	$\alpha_2 = 2 - 2m + r_3 + r_2$
	+1	+1	0	
3	-1	-1	+1	$\alpha_3 = 4m - 3 - r_3 - r_2 - r_1$
	+1	+1	-1	
4	-1	0	-1	$\alpha_4 = 2m - 1 - r_2 - r_1$
	+1	0	+1	
5	-1	0	0	$\alpha_5 = 0$
	+1	0	0	
6	-1	0	+1	$\alpha_6 = 2 - 2m + r_2 + r_1$
	+1	0	-1	
7	-1	+1	-1	$\alpha_7 = r_2$
	+1	-1	+1	
8	-1	+1	0	$\alpha_8 = 2m - 1 - r_3 - r_2$
	+1	-1	0	
9	-1	+1	+1	$\alpha_9 = r_3$
	+1	-1	-1	
10	0	-1	-1	$\alpha_{10} = 2m - 1 - r_3 - r_1$
	0	+1	+1	
11	0	-1	0	$\alpha_{11} = 0$
	0	+1	0	
12	0	-1	+1	$\alpha_{12} = 2 - 2m + r_3 + r_1$
	0	+1	-1	
13	0	0	-1	$\alpha_{13} = 0$
	0	0	+1	
14	0	0	0	$\alpha_{14} = 1$

Πίνακας 3.8: Η μορφή της λύσης για $n = 8m + 1$, $z = 3$ και $t_1 = t_2 = t_3 = 1$

Από τις μη αρνητικές ποσότητες α_2, α_4, α_6, α_8, α_{10}και α_{12} προκύπτει ότι θα πρέπει να ισχύει ότι $2m - 2 \leq r_1 + r_2$ και $r_1 + r_3$ και $r_2 + r_3 \leq 2m - 1$, όπου r_1, r_2 και r_3 μη αρνητικοί ακέραιοι. Οι λύσεις του συγκεκριμένου συστήματος ανισώσεων ταυτίζονται με τις λύσεις των παρακάτω 8 συστημάτων 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους:

$r_1 + r_2 = 2m - 2$ $r_1 + r_3 = 2m - 2$ $r_2 + r_3 = 2m - 2$	$r_1 + r_2 = 2m - 2$ $r_1 + r_3 = 2m - 2$ $r_2 + r_3 = 2m - 1$	$r_1 + r_2 = 2m - 2$ $r_1 + r_3 = 2m - 1$ $r_2 + r_3 = 2m - 2$	$r_1 + r_2 = 2m - 1$ $r_1 + r_3 = 2m - 2$ $r_2 + r_3 = 2m - 2$
$r_1 + r_2 = 2m - 1$ $r_1 + r_3 = 2m - 1$ $r_2 + r_3 = 2m - 2$	$r_1 + r_2 = 2m - 1$ $r_1 + r_3 = 2m - 2$ $r_2 + r_3 = 2m - 1$	$r_1 + r_2 = 2m - 2$ $r_1 + r_3 = 2m - 1$ $r_2 + r_3 = 2m - 1$	$r_1 + r_2 = 2m - 1$ $r_1 + r_3 = 2m - 1$ $r_2 + r_3 = 2m - 1$

Από τα συστήματα αυτά προκύπτουν τέσσερις αποδεκτές μη αρνητικές ακέραιες λύσεις για τις παραμέτρους r_1, r_2, r_3 και συγκεκριμένα οι:

A $(r_1, r_2, r_3) = (m-1, m-1, m-1)$ B $(r_1, r_2, r_3) = (m, m-1, m-1)$

C $(r_1, r_2, r_3) = (m-1, m, m-1)$ και D $(r_1, r_2, r_3) = (m-1, m-1, m)$,

όπου με αντικατάσταση στη λύση του πίνακα προκύπτουν 3.8 οι ακόλουθοι 4 σχεδιασμοί με $n = 8m + 1$ γραμμές και 3 στήλες.

Row	f_1	f_2	f_3	A	B	C	D
1	-1	-1	-1	$m-1$	m	$m-1$	$m-1$
	+1	+1	+1	$m-1$	m	$m-1$	$m-1$
2	-1	-1	0	0	0	1	1
	+1	+1	0	0	0	1	1
3	-1	-1	+1	m	$m-1$	$m-1$	$m-1$
	+1	+1	-1	m	$m-1$	$m-1$	$m-1$
4	-1	0	-1	1	0	0	1
	+1	0	+1	1	0	0	1
5	-1	0	0	0	0	0	0
	+1	0	0	0	0	0	0
6	-1	0	+1	0	1	1	0
	+1	0	-1	0	1	1	0
7	-1	+1	-1	$m-1$	$m-1$	m	$m-1$
	+1	-1	+1	$m-1$	$m-1$	m	$m-1$
8	-1	+1	0	1	1	0	0
	+1	-1	0	1	1	0	0
9	-1	+1	+1	$m-1$	$m-1$	$m-1$	m
	+1	-1	-1	$m-1$	$m-1$	$m-1$	m
10	0	-1	-1	1	0	1	0
	0	+1	+1	1	0	1	0
11	0	-1	0	0	0	0	0
	0	+1	0	0	0	0	0
12	0	-1	+1	0	1	0	1
	0	+1	-1	0	1	0	1
13	0	0	-1	0	0	0	0
	0	0	+1	0	0	0	0
14	0	0	0	1	1	1	1

Ας κρατήσουμε τώρα το σχεδιασμό της λύσης A στη μορφή που δίνεται και ας γράψουμε τους σχεδιασμούς των λύσεων B, C και D σε ισοδύναμες μορφές, ως εξής: Στον

Β αλλάζουμε τα πρόσημα στη στήλη f_3, στον C αλλάζουμε τα πρόσημα στις στήλες f_2 και f_3, και στον D αλλάζουμε τα πρόσημα στη στήλη f_2 (*για την οικονομία του χώρου δίνουμε μόνο τις μορφές του πίνακα* A):

	f_1	f_2	f_3	B
1	-1	-1	+1	m
2	-1	-1	0	0
3	-1	-1	-1	$m-1$
4	-1	0	+1	0
5	-1	0	0	0
6	-1	0	-1	1
7	-1	+1	+1	$m-1$
8	-1	+1	0	1
9	-1	+1	-1	$m-1$
10	0	-1	+1	0
11	0	-1	0	0
12	0	-1	-1	1
13	0	0	+1	0
14	0	0	0	1

	f_1	f_2	f_3	C
1	-1	+1	+1	$m-1$
2	-1	+1	0	1
3	-1	+1	-1	$m-1$
4	-1	0	+1	0
5	-1	0	0	0
6	-1	0	-1	1
7	-1	-1	+1	m
8	-1	-1	0	0
9	-1	-1	-1	$m-1$
10	0	+1	+1	1
11	0	+1	0	0
12	0	+1	-1	0
13	0	0	+1	0
14	0	0	0	1

	f_1	f_2	f_3	D
1	-1	+1	-1	$m-1$
2	-1	+1	0	1
3	-1	+1	+1	$m-1$
4	-1	0	-1	1
5	-1	0	0	0
6	-1	0	+1	0
7	-1	-1	-1	$m-1$
8	-1	-1	0	0
9	-1	-1	+1	m
10	0	+1	-1	0
11	0	+1	0	0
12	0	+1	+1	1
13	0	0	-1	0
14	0	0	0	1

Ας ξαναγράψουμε τώρα αναλυτικά τους 4 σχεδιασμούς διάστασης $(8m+1)\times 3$ που προέκυψαν μετά τους μετασχηματισμούς που έγιναν στις μορφές B, C και D.

f_1	f_2	f_3	A	B	C	D
-1	-1	-1	$m-1$	$m-1$	$m-1$	$m-1$
+1	+1	+1	$m-1$	$m-1$	$m-1$	$m-1$
-1	-1	0	0	0	0	0
+1	+1	0	0	0	0	0
-1	-1	+1	m	m	m	m
+1	+1	-1	m	m	m	m
-1	0	-1	1	1	1	1
+1	0	+1	1	1	1	1
-1	0	0	0	0	0	0
+1	0	0	0	0	0	0
-1	0	+1	0	0	0	0
+1	0	-1	0	0	0	0
-1	+1	-1	$m-1$	$m-1$	$m-1$	$m-1$
+1	-1	+1	$m-1$	$m-1$	$m-1$	$m-1$
-1	+1	0	1	1	1	1
+1	-1	0	1	1	1	1
-1	+1	+1	$m-1$	$m-1$	$m-1$	$m-1$
+1	-1	-1	$m-1$	$m-1$	$m-1$	$m-1$
0	-1	-1	1	1	1	1
0	+1	+1	1	1	1	1
0	-1	0	0	0	0	0
0	+1	0	0	0	0	0
0	-1	+1	0	0	0	0
0	+1	-1	0	0	0	0
0	0	-1	0	0	0	0
0	0	+1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Προκύπτει λοιπόν ότι και οι τέσσερις σχεδιασμοί έχουν ακριβώς την ίδια μορφή (ισόμορφοι) και συνεπώς προκύπτει μοναδικός (κάτω από ισομορφισμούς) $(8m + 1) \times 3$ σχεδιασμός που σχηματίζεται χρησιμοποιώντας τις τιμές που δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

f_1	f_2	f_3	A
-1	-1	-1	$m-1$
+1	+1	+1	
-1	-1	0	0
+1	+1	0	
-1	-1	+1	m
+1	+1	-1	
-1	0	-1	1
+1	0	+1	
-1	0	0	0
+1	0	0	
-1	0	+1	0
+1	0	-1	
-1	+1	-1	$m-1$
+1	-1	+1	
-1	+1	0	1
+1	-1	0	
-1	+1	+1	$m-1$
+1	-1	-1	
0	-1	-1	1
0	+1	+1	
0	-1	0	0
0	+1	0	
0	-1	+1	0
0	+1	-1	
0	0	-1	0
0	0	+1	
0	0	0	1

Σημειώνεται ότι ο σχεδιασμός αυτός παρουσιάζεται και στον πίνακα 3.9.

Ομοίως, όταν το $z = 5$, ένας σχεδιασμός με τρεις στήλες πρέπει να περιλαμβάνει τρεις δίστηλους σχεδιασμούς της μορφής του $D1.2$ σχεδιασμού που δίνεται στον πίνακα 3.4. Συνεπώς, θέτουμε στη λύση του πίνακα 3.7 τις τιμές $z = 5$ και $t_1 = t_2 = t_3 = 1$. Αυτή η τελευταία συνθήκη οδηγεί επίσης στο ότι $s = 1$. Και πάλι, με μια διεξοδική αναζήτηση για τις τιμές των r_1, r_2 και r_3, όπως περιεγράφηκε προηγουμένως, καταλήγουμε σε σχεδιασμούς που ανήκουν σε τρεις μη–ισόμορφες κλάσεις, οι οποίες παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.9. όταν το k είναι άρτιος αριθμός (δηλαδή, $k = 2m$) και σε δύο μη–ισόμορφες κλάσεις όταν το k είναι περιττός αριθμός (δηλαδή, $k = 2m + 1$) και παρουσιάζονται στον πίνακα 3.10.

Τέλος, όταν το $z = 7$, ένας σχεδιασμός με τρεις στήλες μπορεί να έχει τους τρεις δίστηλους σχεδιασμούς του σε μία από τις μορφές των $D1.3$ ή $D1.4$ σχεδιασμών (βλέπε πίνακα 3.4). Ωστόσο, η μορφή $D1.4$ παράγει σχεδιασμούς με την ελάχιστη απόλυτη τιμή της συσχέτισης που αφορά τις στήλες των τετραγωνικών επιδράσεων μόνο στην περίπτωση όπου $n = 13$. Δεν εξετάζουμε περαιτέρω αυτήν την περίπτωση, καθώς οι σχεδιασμοί που προκύπτουν, περιέχουν στήλες με μεγάλο αριθμό μηδενικών (ο αριθμός αυτός ξεπερνά το μισό των συνολικών εκτελέσεων του σχεδιασμού) και επομένως είναι τετριμμένοι. Χρησιμοποιώντας τη μορφή $D1.4$ και τη διαδικασία που έχει ήδη παρουσιαστεί, μπορούμε να δημιουργήσουμε σχεδιασμούς με τρεις στήλες για $n \geq 17$ θέτοντας στη λύση του πίνακα 3.7 τις τιμές $z = 7$ και $t_1 = t_2 = t_3 = 1$, κάτι που δίνει $s = 1$. Στη συνέχεια, για τις τιμές των παραμέτρων r_1, r_2 και r_3, όπως αυτές θα προκύψουν στη περίπτωση αυτή, παίρνουμε σχεδιασμούς που ανήκουν σε τέσσερις μη–ισόμορφες κλάσεις όταν k είναι άρτιος ($k = 2m$), όπως παρουσιάζεται στον πίνακα 3.9 και σε τέσσερις μη–ισόμορφες κλάσεις όταν k είναι περιττός αριθμός ($k = 2m + 1$) όπως φαίνεται στον πίνακα 3.10.

$n = 4k + 1$, k άρτιος									
Rows		$k = 2m$ (i.e. $n = 8m + 1$)							
		$z = 3$	$z = 5$			$z = 7, n > 17$			
$(-1,-1,-1)$ & $(1,1,1)$	a_1	m	$m-2$	$m-2$	$m-1$	$m-3$	$m-4$	$m-3$	$m-3$
$(-1,-1,0)$ & $(1,1,0)$	a_2	0	2	2	2	0	2	2	2
$(-1,-1,1)$ & $(1,1,-1)$	a_3	$m-1$	$m-2$	$m-2$	$m-3$	m	$m-1$	$m-2$	$m-2$
$(-1,0,-1)$ & $(1,0,1)$	a_4	0	2	1	0	3	3	2	3
$(-1,0,0)$ & $(1,0,0)$	a_5	0	0	0	0	0	0	0	0
$(-1,0,1)$ & $(1,0,-1)$	a_6	1	0	1	2	0	0	1	0
$(-1,1,-1)$ & $(1,-1,1)$	a_7	$m-1$	$m-2$	$m-1$	$m-1$	$m-3$	$m-2$	$m-2$	$m-3$
$(-1,1,0)$ & $(1,-1,0)$	a_8	1	0	0	0	3	1	1	1
$(-1,1,1)$ & $(1,-1,-1)$	a_9	$m-1$	m	$m-1$	$m-1$	$m-3$	$m-2$	$m-2$	$m-1$
$(0,-1,-1)$ & $(0,1,1)$	a_{10}	0	0	1	0	3	3	2	1
$(0,-1,0)$ & $(0,1,0)$	a_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0
$(0,-1,1)$ & $(0,1,-1)$	a_{12}	1	2	1	2	0	0	1	2
$(0,0,-1)$ & $(0,0,1)$	a_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0
$(0,0,0)$	s	1	1	1	1	1	1	1	1

Πίνακας 3.9: Σχεδιασμοί D τριών στηλών με $z \leq 7$ zeros ανά στήλη και ελάχιστη συσχέτιση σε απόλυτη τιμή C_{qq}, $n = 4k + 1$ εκτελέσεις και k άρτιος

Σημειώνεται ότι η μορφή των σχεδιασμών που δίνεται είναι γενική. Προφανώς ένας σχεδιασμός τριών στηλών μπορεί να δημιουργηθεί δεδομένου ότι όλες οι τιμές a_i, όπως και οι τιμές m, είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί. Για παράδειγμα, για $n = 21$ και $z = 7$ προκύπτει ότι $m = 2$, όποτε υπάρχει ένας μόνο σχεδιασμός που μπορεί να κατασκευαστεί (οι τρεις πρώτοι σχεδιασμοί του πίνακα 3.10 δεν μπορούν να σχηματιστούν σε αυτή την περίπτωση).

$n = 4k + 1$, k περιττός								
Rows		$k = 2m + 1$ (i.e. $n = 8m + 5$)						
		$z = 3$	$z = 5$		$z = 7, n > 17$			
$(-1,-1,-1)$ & $(1,1,1)$	a_1	$m-1$	$m-2$	$m-1$	$m-3$	$m-4$	$m-3$	$m-2$
$(-1,-1,0)$ & $(1,1,0)$	a_2	1	2	1	1	3	2	1
$(-1,-1,1)$ & $(1,1,-1)$	a_3	m	$m-1$	$m-1$	m	$m-1$	$m-1$	$m-1$
$(-1,0,-1)$ & $(1,0,1)$	a_4	1	2	1	3	3	3	2
$(-1,0,0)$ & $(1,0,0)$	a_5	0	0	0	0	0	0	0
$(-1,0,1)$ & $(1,0,-1)$	a_6	0	0	1	0	0	0	1
$(-1,1,-1)$ & $(1,-1,1)$	a_7	m	$m-1$	$m-1$	$m-2$	$m-1$	$m-2$	$m-2$
$(-1,1,0)$ & $(1,-1,0)$	a_8	0	0	1	2	0	1	2
$(-1,1,1)$ & $(1,-1,-1)$	a_9	m	m	$m-1$	$m-2$	$m-1$	$m-1$	$m-2$
$(0,-1,-1)$ & $(0,1,1)$	a_{10}	1	1	1	3	3	2	2
$(0,-1,0)$ & $(0,1,0)$	a_{11}	0	0	0	0	0	0	0
$(0,-1,1)$ & $(0,1,-1)$	a_{12}	0	1	1	0	0	1	1
$(0,0,-1)$ & $(0,0,1)$	a_{13}	0	0	0	0	0	0	0
$(0,0,0)$	s	1	1	1	1	1	1	1

Πίνακας 3.10: Σχεδιασμοί D τριών στηλών με $z \leq 7$ zeros ανά στήλη και ελάχιστη συσχέτιση σε απόλυτη τιμή C_{qq} $n = 4k + 1$ εκτελέσεις και k περιττός

Αντίστοιχα, όταν $n = 29$ (δηλαδή $m = 3$) και $z = 7$, μπορούν να κατασκευαστούν τρεις μη–ισόμορφοι σχεδιασμοί. Εφόσον $m - 4 = -1$, η δεύτερη μορφή σχεδιασμού που παρατίθεται στον πίνακα 3.10 για την περίπτωση αυτή, δεν μπορεί να σχηματιστεί.

Κλείνουμε την ενότητα αυτή με τη μελέτη των συσχετίσεων μεταξύ της στήλης που αντιστοιχεί σε μία τετραγωνική επίδραση παράγοντα και σε αυτήν που αντιστοιχεί στην αλληλεπίδραση των δυο άλλων παραγόντων. Με απλή εφαρμογή του τύπου, προκύπτουν οι τιμές που δίνονται στους πίνακες 3.11, 3.12 και 3.13. Συγκεκριμένα, για τον μοναδικό σχεδιασμό που προκύπτει για $z = 3$ όταν $n = 8m + 1$ και $n = 8m + 5$, οι αντίστοιχες συσχετίσεις δίνονται στον πίνακα 3.11. Στον πίνακα 3.12 δίνονται οι συσχετίσεις όταν έχουμε πέντε μηδενικά ανά στήλη ($z = 5$), για τους δυο σχεδιασμούς όταν $n = 8m + 5$ και τους τρεις όταν $n = 8m + 1$.

Συσχετίσεις ($z = 3$)	$n = 8m + 5$	$n = 8m + 1$
$Corr(q_1, f_2 f_3)$	$\frac{-2(8m+5)}{\sqrt{24m(8m+5)(8m+2)}}$	$\frac{2(8m+1)}{\sqrt{3(8m-2)(8m+1)(8m-4)}}$
$Corr(q_2, f_1 f_3)$	$\frac{-2(8m+5)}{\sqrt{24m(8m+5)(8m+2)}}$	$\frac{2(8m+1)}{\sqrt{3(8m-2)(8m+1)(8m-4)}}$
$Corr(q_3, f_1 f_2)$	$\frac{-2(8m+5)}{\sqrt{24m(8m+5)(8m+2)}}$	$\frac{2(8m+1)}{\sqrt{3(8m-2)(8m+1)(8m-4)}}$

Πίνακας 3.11: Συσχετίσεις μεταξύ τετραγωνικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων δυο παραγόντων για $n = 8m + 5$, $n = 8m + 1$ και $z = 3$

Συσχετίσεις ($z = 5$), Σχεδιασμός 1	$n = 8m + 5$	$n = 8m + 1$
$Corr(q_1, f_2 f_3)$	0	$\frac{4(8m+1)}{\sqrt{5(8m-4)(8m+1)(8m-8)}}$
$Corr(q_2, f_1 f_3)$	$\frac{-4(8m+5)}{\sqrt{40m(8m+5)(8m-4)}}$	$\frac{-4(8m+1)}{\sqrt{5(8m-4)(8m+1)(8m-8)}}$
$Corr(q_3, f_1 f_2)$	$\frac{-4(8m+5)}{\sqrt{40m(8m+5)(8m-4)}}$	$\frac{-4(8m+1)}{\sqrt{5(8m-4)(8m+1)(8m-8)}}$
Συσχετίσεις ($z = 5$), Σχεδιασμός 2	$n = 8m + 5$	$n = 8m + 1$
$Corr(q_1, f_2 f_3)$	0	0
$Corr(q_2, f_1 f_3)$	0	0
$Corr(q_3, f_1 f_2)$	0	$\frac{-4(8m+1)}{\sqrt{5(8m-4)(8m+1)(8m-8)}}$
Συσχετίσεις ($z = 5$), Σχεδιασμός 3		$n = 8m + 1$
$Corr(q_1, f_2 f_3)$		$\frac{4(8m+1)}{\sqrt{5(8m-4)(8m+1)(8m-8)}}$
$Corr(q_2, f_1 f_3)$		$\frac{4(8m+1)}{\sqrt{5(8m-4)(8m+1)(8m-8)}}$
$Corr(q_3, f_1 f_2)$		$\frac{-4(8m+1)}{\sqrt{5(8m-4)(8m+1)(8m-8)}}$

Πίνακας 3.12: Συσχετίσεις μεταξύ τετραγωνικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων δυο παραγόντων για $n = 8m + 5$, $n = 8m + 1$ και $z = 5$

Τέλος, στον πίνακα 3.13 δίνονται οι τιμές των συσχετίσεων όταν έχουμε επτά μηδενικά ανά στήλη ($z = 7$), για τους τέσσερις σχεδιασμούς όταν $n = 8m + 5$ και τους επίσης τέσσερις σχεδιασμούς όταν $n = 8m + 1$.

Συσχετίσεις ($z = 7$), Σχεδιασμός 1	$n = 8m + 5$	$n = 8m + 1$
$Corr(q_1, f_2 f_3)$	$\frac{-6(8m+5)}{\sqrt{7(8m-2)(8m+5)(8m-8)}}$	$\frac{-6(8m+1)}{\sqrt{7(8m-6)(8m+1)(8m-12)}}$
$Corr(q_2, f_1 f_3)$	$\frac{-6(8m+5)}{\sqrt{7(8m-2)(8m+5)(8m-8)}}$	$\frac{-6(8m+1)}{\sqrt{7(8m-6)(8m+1)(8m-12)}}$
$Corr(q_3, f_1 f_2)$	$\frac{2(8m+5)}{\sqrt{7(8m-2)(8m+5)(8m-8)}}$	$\frac{6(8m+1)}{\sqrt{7(8m-6)(8m+1)(8m-12)}}$
Συσχετίσεις ($z = 7$), Σχεδιασμός 2	$n = 8m + 5$	$n = 8m + 1$
$Corr(q_1, f_2 f_3)$	$\frac{-6(8m+5)}{\sqrt{7(8m-2)(8m+5)(8m-8)}}$	$\frac{-6(8m+1)}{\sqrt{7(8m-6)(8m+1)(8m-12)}}$
$Corr(q_2, f_1 f_3)$	$\frac{-6(8m+5)}{\sqrt{7(8m-2)(8m+5)(8m-8)}}$	$\frac{-6(8m+1)}{\sqrt{7(8m-6)(8m+1)(8m-12)}}$

$Corr(q_3, f_1f_2)$	$\frac{-6(8m+5)}{\sqrt{7(8m-2)(8m+5)(8m-8)}}$	$\frac{-2(8m+1)}{\sqrt{7(8m-6)(8m+1)(8m-12)}}$
Συσχετίσεις ($z = 7$), Σχεδιασμός 3	$n = 8m+5$	$n = 8m+1$
$Corr(q_1, f_2f_3)$	$\frac{-2(8m+5)}{\sqrt{7(8m-2)(8m+5)(8m-8)}}$	$\frac{-2(8m+1)}{\sqrt{7(8m-6)(8m+1)(8m-12)}}$
$Corr(q_2, f_1f_3)$	$\frac{-6(8m+5)}{\sqrt{7(8m-2)(8m+5)(8m-8)}}$	$\frac{-2(8m+1)}{\sqrt{7(8m-6)(8m+1)(8m-12)}}$
$Corr(q_3, f_1f_2)$	$\frac{-2(8m+5)}{\sqrt{7(8m-2)(8m+5)(8m-8)}}$	$\frac{-2(8m+1)}{\sqrt{7(8m-6)(8m+1)(8m-12)}}$
Συσχετίσεις ($z = 7$), Σχεδιασμός 4	$n = 8m+5$	$n = 8m+1$
$Corr(q_1, f_2f_3)$	$\frac{-2(8m+5)}{\sqrt{7(8m-2)(8m+5)(8m-8)}}$	$\frac{2(8m+1)}{\sqrt{7(8m-6)(8m+1)(8m-12)}}$
$Corr(q_2, f_1f_3)$	$\frac{-2(8m+5)}{\sqrt{7(8m-2)(8m+5)(8m-8)}}$	$\frac{-6(8m+1)}{\sqrt{7(8m-6)(8m+1)(8m-12)}}$
$Corr(q_3, f_1f_2)$	$\frac{2(8m+5)}{\sqrt{7(8m-2)(8m+5)(8m-8)}}$	$\frac{-2(8m+1)}{\sqrt{7(8m-6)(8m+1)(8m-12)}}$

Πίνακας 3.13: Συσχετίσεις μεταξύ τετραγωνικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων δυο παραγόντων για $n = 8m+5$, $n = 8m+1$ και $z = 7$

3.3.2 Η περίπτωση των $n \equiv 2 \bmod 4$ εκτελέσεων

Η περίπτωση σχεδιασμών με $n \equiv 2 \bmod 4$ εκτελέσεις αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο. Στον πίνακα 3.14 παρουσιάζουμε τους μη–ισόμορφους σχεδιασμούς με τρεις στήλες που προκύπτουν από την προσέγγισή μας, όταν χρησιμοποιούμε τους σχεδιασμούς με δύο στήλες $D2.1$ και $D2.2$ του πίνακα 3.5 για $z = 4$ και $z = 6$ αντίστοιχα, λαμβάνοντας τις κατάλληλες τιμές για τις ποσότητες t_1, t_2, t_3 και s. Όταν $z = 4$, προκύπτει ένας μοναδικός σχεδιασμός είτε το k είναι περιττός είτε είναι άρτιος αριθμός. Όταν $z = 6$, προκύπτουν δύο μη–ισόμορφοι σχεδιασμοί όταν το k είναι περιττός (δηλαδή $k = 2m+1$) και τρεις μη–ισόμορφοι σχεδιασμοί όταν το k είναι άρτιος (δηλαδή $k = 2m$).

Στη συνέχεια παραθέτουμε πίνακες με τις συσχετίσεις μεταξύ της στήλης που αντιστοιχεί σε μία τετραγωνική επίδραση παράγοντα και σε αυτήν που αντιστοιχεί στην αλληλεπίδραση των δυο άλλων παραγόντων. Ο πίνακας 3.15 περιέχει τις τιμές που προκύπτουν από τους σχεδιασμούς του πίνακα 3.14, για $z = 4$, έναν για $n = 8m+6$ και έναν $n = 8m+2$. Οι τιμές των εν λόγω συσχετίσεων όταν το $z = 6$ για τους δυο σχεδιασμούς της περίπτωσης όπου $n = 8m+6$ και τους τρεις σχεδιασμούς της περίπτωσης $n = 8m+2$, (βλέπε πίνακα 3.14), δίνονται στον πίνακα 3.16.

$n = 4k + 2$								
Rows		$k = 2m + 1, (n = 8m + 6)$			$k = 2m, (n = 8m + 2)$			
		$z = 4$	$z = 6$		$z = 4$	$z = 6$		
$(-1,-1,-1)$ & $(1,1,1)$	a_1	m	$m-1$	$m-1$	m	m	$m-1$	$m-2$
$(-1,-1,0)$ & $(1,1,0)$	a_2	0	0	1	0	0	2	2
$(-1,-1,1)$ & $(1,1,-1)$	a_3	m	m	$m-1$	$m-1$	$m-2$	$m-3$	$m-2$
$(-1,0,-1)$ & $(1,0,1)$	a_4	0	1	1	0	0	0	1
$(-1,0,0)$ & $(1,0,0)$	a_5	0	0	0	0	0	0	0
$(-1,0,1)$ & $(1,0,-1)$	a_6	1	1	1	1	2	2	1
$(-1,1,-1)$ & $(1,-1,1)$	a_7	m	$m-1$	$m-1$	$m-1$	$m-2$	$m-1$	$m-1$
$(-1,1,0)$ & $(1,-1,0)$	a_8	1	2	1	1	2	0	0
$(-1,1,1)$ & $(1,-1,-1)$	a_9	$m-1$	$m-2$	$m-1$	$m-1$	$m-2$	$m-1$	$m-1$
$(0,-1,-1)$ & $(0,1,1)$	a_{10}	1	2	1	0	0	0	1
$(0,-1,0)$ & $(0,1,0)$	a_{11}	0	0	0	0	0	0	0
$(0,-1,1)$ & $(0,1,-1)$	a_{12}	0	0	1	1	2	2	1
$(0,0,-1)$ & $(0,0,1)$	a_{13}	0	0	0	0	0	0	0
$(0,0,0)$	s	2	2	2	2	2	2	2

Πίνακας 3.14: Σχεδιασμοί D τριών στηλών με $z \leq 7$ zeros ανά στήλη και ελάχιστη συσχέτιση σε απόλυτη τιμή C_{qq} $n = 4k + 2$ εκτελέσεις

Συσχετίσεις $(z = 4)$, Σχεδιασμός 1	$n = 8m + 6$	$n = 8m + 2$
$Corr(q_1, f_2 f_3)$	$\frac{-2(8m+6)}{\sqrt{32m(8m+2)(8m+6)}}$	$\frac{2(8m+2)}{\sqrt{(32m-8)(8m+2)(8m-4)}}$
$Corr(q_2, f_1 f_3)$	$\frac{2(8m+6)}{\sqrt{32m(8m+2)(8m+6)}}$	$\frac{2(8m+2)}{\sqrt{(32m-8)(8m+2)(8m-4)}}$
$Corr(q_3, f_1 f_2)$	$\frac{2(8m+6)}{\sqrt{32m(8m+2)(8m+6)}}$	$\frac{2(8m+2)}{\sqrt{(32m-8)(8m+2)(8m-4)}}$

Πίνακας 3.15: Συσχετίσεις μεταξύ τετραγωνικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων δυο παραγόντων για $n = 8m + 2, n = 8m + 6$ και $z = 4$

Συσχετίσεις $(z = 6)$, Σχεδιασμός 1	$n = 8m + 6$	$n = 8m + 2$
$Corr(q_1, f_2 f_3)$	$\frac{-4(8m+6)}{\sqrt{48m(8m+6)(8m-4)}}$	$\frac{4(8m+2)}{\sqrt{6(8m-4)(8m+2)(8m-8)}}$
$Corr(q_2, f_1 f_3)$	0	$\frac{4(8m+2)}{\sqrt{6(8m-4)(8m+2)(8m-8)}}$
$Corr(q_3, f_1 f_2)$	$\frac{4(8m+6)}{\sqrt{48m(8m+6)(8m-4)}}$	$\frac{4(8m+2)}{\sqrt{6(8m-4)(8m+2)(8m-8)}}$
Συσχετίσεις $(z = 6)$, Σχεδιασμός 2	$n = 8m + 6$	$n = 8m + 2$
$Corr(q_1, f_2 f_3)$	0	$\frac{4(8m+2)}{\sqrt{6(8m-4)(8m+2)(8m-8)}}$
$Corr(q_2, f_1 f_3)$	0	$\frac{4(8m+2)}{\sqrt{6(8m-4)(8m+2)(8m-8)}}$
$Corr(q_3, f_1 f_2)$	0	$\frac{-4(8m+2)}{\sqrt{6(8m-4)(8m+2)(8m-8)}}$

Συσχετίσεις ($z = 6$), Σχεδιασμός 3		$n = 8m + 2$
$Corr(q_1, f_2 f_3)$		0
$Corr(q_2, f_1 f_3)$		0
$Corr(q_3, f_1 f_2)$		$\frac{-4(8m+2)}{\sqrt{6(8m-4)(8m+2)(8m-8)}}$

Πίνακας 3.16: Συσχετίσεις μεταξύ τετραγωνικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων δυο παραγόντων για $n = 8m + 2$, $n = 8m + 6$ και $z = 6$

3.3.3 Η περίπτωση των $n \equiv 3 \bmod 4$ εκτελέσεων

Όταν το $n \equiv 3 \bmod 4$, μπορούμε να κατασκευάσουμε σχεδιασμούς με τρεις στήλες που ελαχιστοποιούν την απόλυτη συσχέτιση στις αντίστοιχες τετραγωνικές στήλες χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους που προκύπτουν από τους σχεδιασμούς της μορφής $D3.1$ και $D3.2$ του πίνακα 3.4 για $z = 5$ και $z = 7$ αντίστοιχα. Σε αυτή την περίπτωση, προκύπτει $t_1 = t_2 = t_3 = 3$ και στις δύο περιπτώσεις αλλά αυτή η επιλογή μπορεί να οδηγήσει σε τιμές του s που να είναι είτε ίσες με 1 είτε με 3.

$n = 4k + 3$, k περιττός						
Rows		$k = 2m + 1$ $(n = 8m + 7)$				
		$z = 5$		$z = 7$		
$(-1,-1,-1)$ & $(1,1,1)$	a_1	$m-1$	m	$m-2$	$m-1$	$m-1$
$(-1,-1,0)$ & $(1,1,0)$	a_2	1	0	2	1	0
$(-1,-1,1)$ & $(1,1,-1)$	a_3	m	m	$m-1$	$m-1$	m
$(-1,0,-1)$ & $(1,0,1)$	a_4	1	0	1	1	1
$(-1,0,0)$ & $(1,0,0)$	a_5	0	1	0	0	1
$(-1,0,1)$ & $(1,0,-1)$	a_6	0	0	1	1	0
$(-1,1,-1)$ & $(1,-1,1)$	a_7	m	m	m	$m-1$	$m-1$
$(-1,1,0)$ & $(1,-1,0)$	a_8	0	0	0	1	1
$(-1,1,1)$ & $(1,-1,-1)$	a_9	m	m	$m-1$	$m-1$	$m-1$
$(0,-1,-1)$ & $(0,1,1)$	a_{10}	1	0	2	1	1
$(0,-1,0)$ & $(0,1,0)$	a_{11}	0	1	0	0	1
$(0,-1,1)$ & $(0,1,-1)$	a_{12}	0	0	0	1	0
$(0,0,-1)$ & $(0,0,1)$	a_{13}	0	1	0	0	1
$(0,0,0)$	s	3	1	3	3	1

Πίνακας 3.17: Σχεδιασμοί D τριών στηλών με $z \leq 7$ zeros ανά στήλη και ελάχιστη συσχέτιση σε απόλυτη τιμή C_{qq} $n = 4k + 3$ εκτελέσεις και k περιττός

Χρησιμοποιώντας αυτές τις τιμές στη γενική λύση του πίνακα 3.7 για $z = 5$, προκύπτουν δύο μη–ισόμορφοι σχεδιασμοί όταν το k είναι περιττός αριθμός $(k = 2m + 1)$

και παρουσιάζονται στον πίνακα 3.17. Όταν το k είναι άρτιος αριθμός ($k = 2m$). υπάρχει μόνο ένας σχεδιασμός, που παρουσιάζεται στον πίνακα 3.18.

Η περίπτωση $z = 7$ είναι πιο περίπλοκη ως προς τη δομή των κατασκευασμένων σχεδιασμών. Όταν το k είναι περιττός αριθμός (δηλαδή, $k = 2m + 1$), προκύπτουν τρεις μη–ισόμορφοι σχεδιασμοί που παρουσιάζονται στον πίνακα 3.17 ενώ όταν το k είναι άρτιος αριθμός (δηλαδή, $k = 2m$), προκύπτουν τέσσερις μη–ισόμορφοι σχεδιασμοί που παρουσιάζονται στον πίνακα 3.18.

$n = 4k + 3$, k άρτιος						
Rows		$k = 2m$, $(n = 8m + 3)$				
		$z = 5$	$z = 7$			
$(-1,-1,-1)$ & $(1,1,1)$	a_1	$m-1$	$m-2$	$m-3$	$m-2$	$m-2$
$(-1,-1,0)$ & $(1,1,0)$	a_2	0	0	2	1	1
$(-1,-1,1)$ & $(1,1,-1)$	a_3	m	m	$m-1$	$m-1$	$m-1$
$(-1,0,-1)$ & $(1,0,1)$	a_4	1	2	2	1	1
$(-1,0,0)$ & $(1,0,0)$	a_5	0	0	0	0	1
$(-1,0,1)$ & $(1,0,-1)$	a_6	0	0	0	1	0
$(-1,1,-1)$ & $(1,-1,1)$	a_7	$m-1$	$m-2$	$m-1$	$m-1$	$m-1$
$(-1,1,0)$ & $(1,-1,0)$	a_8	1	2	0	1	0
$(-1,1,1)$ & $(1,-1,-1)$	a_9	$m-1$	$m-2$	$m-1$	$m-2$	$m-1$
$(0,-1,-1)$ & $(0,1,1)$	a_{10}	1	2	2	2	1
$(0,-1,0)$ & $(0,1,0)$	a_{11}	0	0	0	0	1
$(0,-1,1)$ & $(0,1,-1)$	a_{12}	0	0	0	0	0
$(0,0,-1)$ & $(0,0,1)$	a_{13}	0	0	0	0	1
$(0,0,0)$	s	3	3	3	3	1

Πίνακας 3.18: Σχεδιασμοί D τριών στηλών με $z \leq 7$ zeros ανά στήλη και ελάχιστη συσχέτιση σε απόλυτη τιμή C_{qq} $n = 4k + 3$ εκτελέσεις και k άρτιος

Στον πίνακα 3.19 παραθέτουμε τις συσχετίσεις μεταξύ της στήλης που αντιστοιχεί σε μία τετραγωνική επίδραση παράγοντα και σε αυτήν που αντιστοιχεί στην αλληλεπίδραση των δυο άλλων παραγόντων για τις περιπτώσεις των σχεδιασμών που παραθέτουμε στους πίνακες 3.17 και 3.18 και συγκεκριμένα όταν $n = 8m + 7$ και $n = 8m + 3$, όταν το $z = 7$. Τα αποτελέσματα για τους σχεδιασμούς της περίπτωσης $z = 5$ δίνονται στον πίνακα 3.20.

Συσχετίσεις ($z = 7$), Σχεδιασμός 1	$n = 8m + 7$	$n = 8m + 3$
$Corr(q_1, f_2f_3)$	$\frac{-4(8m+7)}{\sqrt{56m(8m+7)(8m-4)}}$	$\frac{-4(8m+3)}{\sqrt{7(8m-4)(8m+3)(8m-8)}}$
$Corr(q_2, f_1f_3)$	0	$\frac{-4(8m+3)}{\sqrt{7(8m-4)(8m+3)(8m-8)}}$
$Corr(q_3, f_1f_2)$	$\frac{-4(8m+7)}{\sqrt{56m(8m+7)(8m-4)}}$	$\frac{4(8m+3)}{\sqrt{7(8m-4)(8m+3)(8m-8)}}$
Συσχετίσεις ($z = 7$), Σχεδιασμός 2	$n = 8m + 7$	$n = 8m + 3$
$Corr(q_1, f_2f_3)$	0	$\frac{-4(8m+3)}{\sqrt{7(8m-4)(8m+3)(8m-8)}}$
$Corr(q_2, f_1f_3)$	0	$\frac{-4(8m+3)}{\sqrt{7(8m-4)(8m+3)(8m-8)}}$
$Corr(q_3, f_1f_2)$	0	$\frac{-4(8m+3)}{\sqrt{7(8m-4)(8m+3)(8m-8)}}$
Συσχετίσεις ($z = 7$), Σχεδιασμός 3	$n = 8m + 7$	$n = 8m + 3$
$Corr(q_1, f_2f_3)$	$\frac{-2(8m+7)}{\sqrt{56m(8m+7)(8m-4)}}$	$\frac{-4(8m+3)}{\sqrt{7(8m-4)(8m+3)(8m-8)}}$
$Corr(q_2, f_1f_3)$	$\frac{-2(8m+7)}{\sqrt{56m(8m+7)(8m-4)}}$	0
$Corr(q_3, f_1f_2)$	$\frac{2(8m+7)}{\sqrt{56m(8m+7)(8m-4)}}$	0
Συσχετίσεις ($z = 7$), Σχεδιασμός 4		$n = 8m + 3$
$Corr(q_1, f_2f_3)$		$\frac{-2(8m+3)}{\sqrt{7(8m-4)(8m+3)(8m-8)}}$
$Corr(q_2, f_1f_3)$		$\frac{-2(8m+3)}{\sqrt{7(8m-4)(8m+3)(8m-8)}}$
$Corr(q_3, f_1f_2)$		$\frac{-2(8m+3)}{\sqrt{7(8m-4)(8m+3)(8m-8)}}$

Πίνακας 3.19: Συσχετίσεις μεταξύ τετραγωνικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων δυο παραγόντων για $n = 8m + 7$, $n = 8m + 3$ και $z = 7$

Συσχετίσεις ($z = 5$), Σχεδιασμός 1	$n = 8m + 7$	$n = 8m + 3$
$Corr(q_1, f_2f_3)$	$\frac{-2(8m+7)}{\sqrt{40m(8m+2)(8m+7)}}$	$\frac{-2(8m+3)}{\sqrt{5(8m-2)(8m+3)(8m-4)}}$
$Corr(q_2, f_1f_3)$	$\frac{-2(8m+7)}{\sqrt{40m(8m+2)(8m+7)}}$	$\frac{-2(8m+3)}{\sqrt{5(8m-2)(8m+3)(8m-4)}}$
$Corr(q_3, f_1f_2)$	$\frac{-2(8m+7)}{\sqrt{40m(8m+2)(8m+7)}}$	$\frac{2(8m+3)}{\sqrt{5(8m-2)(8m+3)(8m-4)}}$
Συσχετίσεις ($z = 5$), Σχεδιασμός 2	$n = 8m + 7$	
$Corr(q_1, f_2f_3)$	0	
$Corr(q_2, f_1f_3)$	0	
$Corr(q_3, f_1f_2)$	0	

Πίνακας 3.20: Συσχετίσεις μεταξύ τετραγωνικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων δυο παραγόντων για $n = 8m + 7$, $n = 8m + 3$ και $z = 5$

3.3.4 Η περίπτωση των $n \equiv 0 \bmod 4$ εκτελέσεων

Τα αποτελέσματα της περίπτωσης των $n \equiv 0 \bmod 4$ εκτελέσεων δίνονται στον πίνακα 3.21, όπου παραθέτουμε τους μη–ισόμορφους σχεδιασμούς τριών στηλών που προκύπτουν από την προσέγγισή μας όταν χρησιμοποιούμε τον σχεδιασμό δύο στηλών $D0.1$ (βλέπε πίνακα 3.4) για $z = 6$. Σε αυτή την περίπτωση, οι τιμές των t_1, t_2 και t_3 είναι ίσες με 4, γεγονός που οδηγεί σε δύο δυνατές τιμές για το s, ήτοι 2 ή 4. Η αναζήτηση τιμών για τις παραμέτρους r_1, r_2 και r_3, όταν το s είναι ίσο με 2 ή 4, δίνει ένα μοναδικό σχεδιασμό όταν το k είναι περιττός αριθμός (δηλαδή $k = 2m + 1$) και δύο μη–ισόμορφους σχεδιασμούς όταν το k είναι άρτιος αριθμός (δηλαδή $k = 2m$). Ο ένας από αυτούς έχει δύο κεντρικά σημεία και ο άλλος τέσσερα.

$n = 4k$				
Rows		$k = 2m + 1$, $(n = 8m + 4)$	$k = 2m$, $(n = 8m)$	
		$z = 6$	$z = 6$	
$(-1, -1, -1)$ & $(1, 1, 1)$	a_1	m	$m - 1$	$m - 2$
$(-1, -1, 0)$ & $(1, 1, 0)$	a_2	0	0	1
$(-1, -1, 1)$ & $(1, 1, -1)$	a_3	$m - 1$	$m - 1$	$m - 1$
$(-1, 0, -1)$ & $(1, 0, 1)$	a_4	0	0	1
$(-1, 0, 0)$ & $(1, 0, 0)$	a_5	0	1	0
$(-1, 0, 1)$ & $(1, 0, -1)$	a_6	1	0	0
$(-1, 1, -1)$ & $(1, -1, 1)$	a_7	$m - 1$	$m - 1$	$m - 1$
$(-1, 1, 0)$ & $(1, -1, 0)$	a_8	1	0	0
$(-1, 1, 1)$ & $(1, -1, -1)$	a_9	$m - 1$	$m - 1$	$m - 1$
$(0, -1, -1)$ & $(0, 1, 1)$	a_{10}	0	0	1
$(0, -1, 0)$ & $(0, 1, 0)$	a_{11}	0	1	0
$(0, -1, 1)$ & $(0, 1, -1)$	a_{12}	1	0	0
$(0, 0, -1)$ & $(0, 0, 1)$	a_{13}	0	1	0
$(0, 0, 0)$	s	4	2	4

Πίνακας 3.21: Σχεδιασμοί D τριών στηλών με z≤7 zeros ανά στήλη και ελάχιστη συσχέτιση σε απόλυτη τιμή C_{qq} $n = 4k$ εκτελέσεις

Για τους δυο σχεδιασμούς που προκύπτουν όταν $n = 8m$ και τον έναν σχεδιασμό που προκύπτει όταν $n = 8m + 4$ για $z = 6$, υπολογίστηκαν και οι συσχετίσεις μεταξύ της στήλης που αντιστοιχεί σε μία τετραγωνική επίδραση παράγοντα και σε αυτήν που αντιστοιχεί στων αλληλεπίδραση των δυο άλλων παραγόντων. Οι τιμές δίνονται στον πίνακα 3.22.

Συσχετίσεις ($z = 6$), Σχεδιασμός 1	$n = 8m$	$n = 8m + 4$
$Corr(q_1, f_2 f_3)$	0	$\frac{2(8m+4)}{\sqrt{6(8m-2)(8m+4)(8m-4)}}$
$Corr(q_2, f_1 f_3)$	0	$\frac{2(8m+4)}{\sqrt{6(8m-2)(8m+4)(8m-4)}}$
$Corr(q_3, f_1 f_2)$	0	$\frac{2(8m+4)}{\sqrt{6(8m-2)(8m+4)(8m-4)}}$
Συσχετίσεις ($z = 6$), Σχεδιασμός 2	$n = 8m$	
$Corr(q_1, f_2 f_3)$	$\frac{-16m}{\sqrt{48m(8m-6)(8m-8)}}$	
$Corr(q_2, f_1 f_3)$	$\frac{-16m}{\sqrt{48m(8m-6)(8m-8)}}$	
$Corr(q_3, f_1 f_2)$	$\frac{-16m}{\sqrt{48m(8m-6)(8m-8)}}$	

Πίνακας 3.22: Συσχετίσεις μεταξύ τετραγωνικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων δυο παραγόντων για $n = 8m$, $n = 8m + 4$ και $z = 6$

3.4 Βέλτιστοι σχεδιασμοί DS με περισσότερες από 3 στήλες

Η μέθοδος που περιγράφεται στην παράγραφο 3.3 μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να επιτρέπει την κατασκευή σχεδιασμών με τέσσερις στήλες με τη μικρότερη απόλυτη συσχέτιση των στηλών που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές επιδράσεις. Ωστόσο, η υλοποίηση αυτής της μεθόδου γίνεται αρκετά πολύπλοκη, καθώς θα υπάρχουν πλέον 40 μη αρνητικοί ακέραιοι (τα αντίστοιχα a_i για την περίπτωση των τεσσάρων στηλών) που θα πρέπει να υπολογιστούν, ενώ η διαδικασία θα χρησιμοποιήσει 6 δίστηλα που το καθένα θα δώσει, όπως είδαμε, 5 εξισώσεις. Θα προκύψουν δηλαδή 10 ελεύθερες μεταβλητές προς σωστή διαχείριση.

Μολαταύτα, μπορούμε να κατασκευάσουμε σχεδιασμούς με περισσότερες από τρεις στήλες οι οποίοι να έχουν την επιθυμητή ιδιότητα, αξιοποιώντας τη δομή των σχεδιασμών τριών στηλών που ήδη κατασκευάστηκαν για μια συγκεκριμένη τιμή του n. Η ιδέα βασίζεται στον προσδιορισμό όλων των δυνατών στηλών με n στοιχεία που μπορεί να χρησιμοποιηθούν και οι οποίες καταλήγουν σε έναν βέλτιστο σχεδιασμό και στη συνέχεια, η επέκταση ενός βέλτιστου σχεδιασμού με p στήλες σε έναν σχεδιασμό με $p + 1$ στήλες προσθέτοντας σε αυτόν μία από αυτές τις στήλες που προσδιορίστηκαν.

Ένα πλάνο αλγορίθμου που μπορεί να εφαρμοστεί για την κατασκευή αυτή έχει ως εξής:

1. Θέσε τις τιμές των n και z σε συγκεκριμένες τιμές.
2. Κατασκεύασε όλους τους μη–ισόμορφους σχεδιασμούς που μπορούν να κατασκευαστούν για αυτήν τη συγκεκριμένη επιλογή των n και z (για $z \leq 7$, χρησιμοποίησε τα αποτελέσματα των πινάκων 3.9, 3.10, 3.14, 3.17, 3.18 και 3.21).
3. Διέκρινε τα διανύσματα-στήλες μεγέθους n με z μηδενικά, που αντιστοιχούν στην τρίτη στήλη κάθε σχεδιασμού που κατασκευάστηκε στο βήμα 2.
4. Μετάθεσε τα σύμβολα σε κάθε διάνυσμα-στήλη μεγέθους n με z μηδενικά που εντοπίστηκε στο βήμα 3 και κράτησε όλες τις διαφορετικές μεταθέσεις (που προφανώς παράγουν ένα σχεδιασμό ισόμορφο με τον αρχικό σχεδιασμό στο οποίο ανήκει η στήλη), σε ένα σύνολο $S(n)$.
5. Χρησιμοποίησε το σύνολο $N(p)$ των μη–ισόμορφων σχεδιασμών $n \times p$ και πρόσθεσε στον καθένα κάθε επιπλέον στήλη από το σύνολο $S(n)$. Κράτησε μόνο εκείνους τους $n \times (p + 1)$ πίνακες που είναι τύπου DS και επιπλέον ικανοποιούν την επιθυμητή ιδιότητα με τις ελάχιστες απόλυτες συσχετίσεις, σε ένα σύνολο $A(p + 1)$.
6. Έλεγξε όλους τους σχεδιασμούς του συνόλου $A(p + 1)$ για ισομορφισμό και κρατήστε μόνο τους μη–ισόμορφους σχεδιασμούς στο σύνολο $N(p + 1)$.
7. Επανάλαβε τα βήματα 5 και 6 χρησιμοποιώντας το νέο σύνολο $N(p + 1)$, μέχρι το σύνολο $A(.)$ των πινάκων που ικανοποιούν την επιθυμητή ιδιότητα να είναι κενό.

Η αρχική τιμή για το βήμα 5 είναι για $p = 3$. Το βήμα 4 φαίνεται αρκετά δύσκολο να υλοποιηθεί ειδικά για μεγάλες τιμές του n, αλλά η πολυπλοκότητα των υπολογισμών μπορεί να μειωθεί σημαντικά αν χρησιμοποιηθεί η μορφή των δύο πρώτων στηλών του σχεδιασμού και να συνδυαστούν οι μεταθέσεις των αντίστοιχων στοιχείων μέσα στα εννέα blocks που σχηματίζουν αυτές οι δύο στήλες.

Ο Πίνακας 3.23 παρουσιάζει τον αριθμό των μη–ισόμορφων σχεδιασμών που προέκυψαν από την υλοποίηση της προτεινόμενης διαδικασίας για $z = 5$ και $z = 7$ και για $19 \leq n \leq 33$, όπου το n είναι περιττός αριθμός, εκμεταλλευόμενοι, στο βήμα 2, τα αποτελέσματα των παραγράφων 3.3.1 και 3.3.3. Επίσης, στον ίδιο πίνακα, εμφανίζεται η ελάχιστη απόλυτη τιμή C_{QQ} της συσχέτισης των στηλών που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές επιδράσεις, για κάθε σχεδιασμό. Σημειώνουμε ότι οι σχεδιασμοί με $z = 3$

μηδενικά ανά στήλη που υπάρχουν όταν $n \equiv 1\, mod\, 4$ δίνουν την ίδια τιμή C_{QQ} για μια δεδομένη τιμή του n. Αυτοί οι σχεδιασμοί έχουν απαριθμηθεί από τους Schoen, Eendebak, Vazquez και Goos (2022) για έως και 49 εκτελέσεις, και το πλήθος των μη–ισόμορφων σχεδιασμών για $21 \leq n \leq 33$ και $p \leq 16$ παρουσιάζεται στον πίνακα 3.24 μαζί με την αντίστοιχη τιμή C_{QQ}.

z	n	$minC_{QQ}$	Πλήθος μη–ισόμορφων σχεδιασμών											
			p											
			3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$z = 5$	19	0.457	1	2	1	1	1	1	0					
	21	0.050	2	2	1	0								
	23	0.489	2	3	2	2	1	1	1	1	0			
	25	0.000	3	13	18	19	0							
	27	0.509	1	3	2	5	2	2	1	1	1	1	0	
	29	0.033	2	10	47	71	0							
	31	0.523	2	5	5	12	7	7	3	3	1	1	1	1
	33	0.057	3	29	248	1335	983	317	0					
$z = 7$	19	0.095	3	6	1	0								
	21	0.286	1	0										
	23	0.179	3	8	4	2	1	0						
	25	0.190	3	5	0									
	27	0.229	4	20	22	21	0							
	29	0.130	3	12	32	0								
	31	0.262	3	20	57	82	10	0						
	33	0.088	4	37	60	0								

Πίνακας 3.23: Πλήθος μη–ισόμορφων σχεδιασμών D με $z = 5$ και $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη και ελάχιστη απόλυτη συσχέτιση για τις στήλες των τετραγωνικών επιδράσεων, $17 \leq n \leq 33$, n odd.

		p													
n	C_{qq}	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$n = 21$	0.222	1	3	2	2	1	1	1	1						
$n = 25$	0.242	1	3	2	5	2	2	1	1	1	1				
$n = 29$	0.256	1	5	5	12	7	7	3	3	1	1	1	1		
$n = 33$	0.267	1	4	7	30	48	77	42	37	17	13	3	3	1	1

Πίνακας 3.24: Πλήθος μη–ισόμορφων σχεδιασμών D με $z = 3$ μηδενικά ανά στήλη και ελάχιστη απόλυτη συσχέτιση για τις στήλες των τετραγωνικών επιδράσεων, $21 \leq n \leq 33$, $n \equiv 1\, mod\, 4$

3.4.1 Σχολιασμός αποτελεσμάτων

Η κατασκευή μη–ισόμορφων σχεδιασμών με την ελάχιστη (απόλυτη) συσχέτιση μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν σε τετραγωνικές επιδράσεις για δοθέν πλήθος εκτελέσεων n, μπορεί να αναδείξει τον/τους βέλτιστο/ους εξ' αυτών, με βάση και κάποιο ή κάποια άλλα δημοφιλή κριτήρια. Στην παράγραφο αυτή θα σχολιάσουμε περιπτώσεις που προέκυψαν για πλήθος εκτελέσεων $n = 25$ και 33. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε προφανώς να μελετήσουμε οποιαδήποτε περίπτωση θέλουμε.

Ο πίνακας 3.25 συνοψίζει την πληροφορία που προκύπτει για τους μη–ισόμορφους σχεδιασμούς που κατασκευάσαμε με $n = 25$ εκτελέσεις και $p = 3$ στήλες αναφορικά με τα κριτήρια της D–αποδοτικότητας για την εκτίμηση των μοντέλων (1.2), (1.3) και (1.4). Θυμίζουμε ότι, με βάση τους πίνακες 3.23 και 3.24, κατασκευάστηκε ένας σχεδιασμός DS με $z = 3$ μηδενικά ανά στήλη, τρεις σχεδιασμοί DS με $z = 5$ μηδενικά ανά στήλη και τρεις σχεδιασμοί DS με $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη, που έχουν την ελάχιστη (απόλυτη) συσχέτιση μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν σε τετραγωνικές επιδράσεις, ανά περίπτωση.

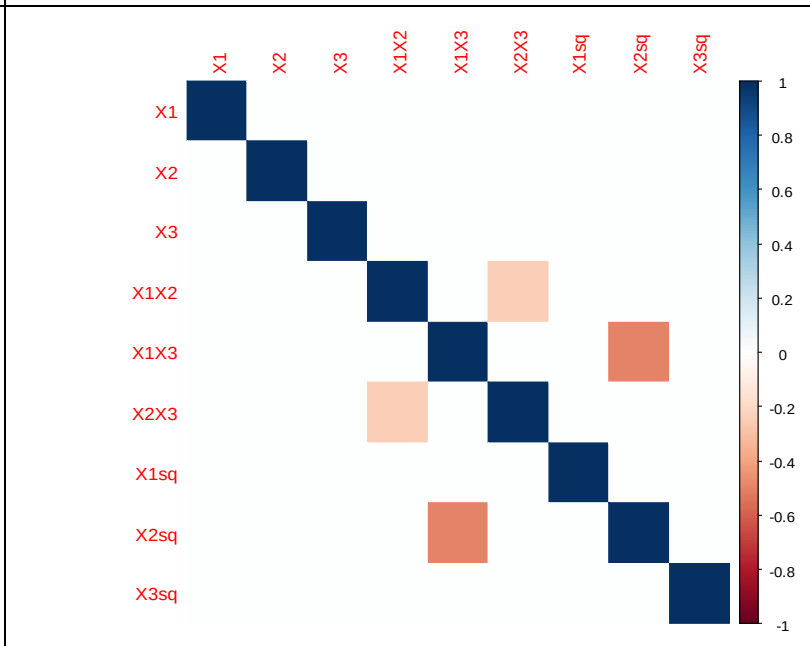
Σχεδιασμός	D – αποδοτικότητα			Μέσος όρος συσχετίσεων μεταξύ στηλών		
	(1.2)	(1.3)	(1.4)	τετραγωνικών επιδράσεων	όλων των επιδράσεων	αλληλεπιδράσεων δύο παραγόντων
25z3p3#1	99.60	39.39	50.52	0.242	0.051	0.100
25z5p3#1	97.60	50.17	54.93	0.000	0.063	0.250
25z5p3#2	96.53	50.17	53.72	0.000	0.063	0.250
25z5p3#3	99.08	50.17	59.57	0.000	0.021	0.083
25z7p3#1	90.57	56.88	0.00	0.190	0.122	0.500
25z7p3#2	95.46	56.88	57.50	0.190	0.075	0.278
25z7p3#3	98.62	56.88	64.93	0.190	0.051	0.167

Πίνακας 3.25: Τιμές D–αποδοτικότητας χρήσιμων μοντέλων και μέσος όρος συσχετίσεων στηλών που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες επιδράσεις για σχεδιασμούς DS με 25 εκτελέσεις και 3 στήλες

Στον πίνακα 3.26 δίνεται ο σχεδιασμός 25z5p3#3 που δίνει βέλτιστες τιμές στα κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν όταν $z = 5$, και στον πίνακα 3.27 δίνεται ο σχεδιασμός 25z7p3#3 που δίνει βέλτιστες τιμές στα κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν όταν $z = 7$ και είναι ιδιαίτερα ανταγωνιστικός με τον 25z5p3#3. Αξίζει να αναφερθεί ότι ο 25z7p3#3 εκτιμά το πλήρες γραμμικό μοντέλο δεύτερης τάξης (1.4) με μεγαλύτερη D–αποδοτικότητα από όλους τους άλλους σχεδιασμούς που παρουσιάζονται. Για κάθε σχεδιασμό παρουσιάζεται και το γράφημα των συσχετίσεων μεταξύ των στηλών που σχηματίζουν τον πίνακα μοντέλου του (1.4).

O DS 25z5p3#3	Correlation plot

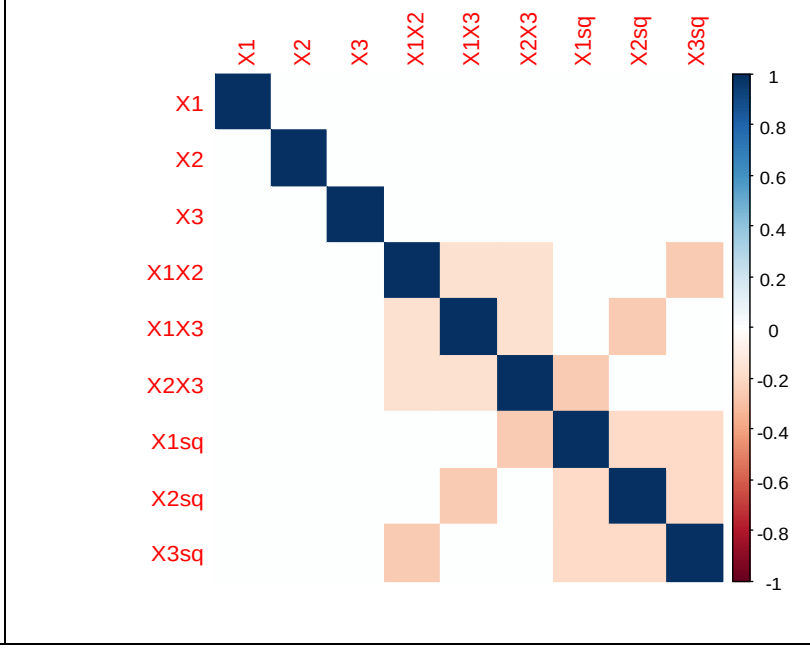
1	0	1
1	0	1
1	1	0
1	1	1
1	1	−1
1	1	−1
1	−1	0
1	−1	1
1	−1	−1
1	−1	−1
0	1	1
0	1	−1
0	0	0
0	−1	1
0	−1	−1
−1	1	1
−1	1	1
−1	1	−1
−1	1	0
−1	−1	1
−1	−1	1
−1	−1	−1
−1	−1	0
−1	0	−1
−1	0	−1



Πίνακας 3.26: Ο σχεδιασμός 25z5p3#3 και το correlation plot

O DS 25z7p3#3	Correlation plot

1	0	1
1	0	1
1	0	−1
1	1	0
1	1	0
1	1	−1
1	−1	0
1	−1	1
1	−1	−1
0	1	1
0	1	1
0	1	−1
0	0	0
0	−1	1
0	−1	−1
0	−1	−1
−1	1	1
−1	1	−1
−1	1	0
−1	−1	1
−1	−1	0
−1	−1	0
−1	0	1
−1	0	−1
−1	0	−1



Πίνακας 3.27: Ο σχεδιασμός 25z7p3#3 και το correlation plot

Ο πίνακας 3.28 συνοψίζει την πληροφορία που ανάλογα προκύπτει για τους μη–ισόμορφους σχεδιασμούς που κατασκευάσαμε με $n = 25$ εκτελέσεις και $p = 4$ στήλες. Με βάση τους πίνακες 3.23 και 3.24, κατασκευάστηκαν τρεις σχεδιασμοί DS με $z = 3$ μηδενικά

ανά στήλη, δεκατρείς σχεδιασμοί DS με $z = 5$ μηδενικά ανά στήλη και πέντε σχεδιασμοί DS με $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη, που έχουν την ελάχιστη (απόλυτη) συσχέτιση μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν σε τετραγωνικές επιδράσεις, ανά περίπτωση.

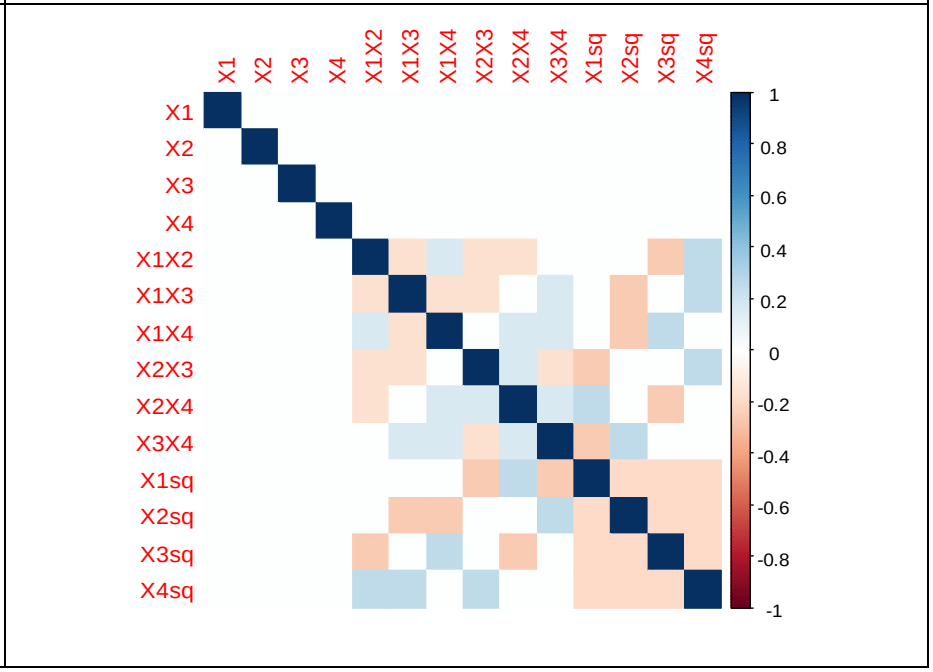
Σχεδιασμός	D – αποδοτικότητα			Μέσος όρος συσχετίσεων μεταξύ στηλών		
	(1.2)	(1.3)	(1.4)	τετραγωνικών επιδράσεων	όλων των επιδράσεων	αλληλεπιδράσεων δύο παραγόντων
25z3p4#1	93.75	37.75	0.00	0.242	0.079	0.160
25z3p4#2	73.29	37.75	0.00	0.242	0.092	0.240
25z3p4#3	98.89	37.75	50.98	0.242	0.065	0.080
25z5p4#1	96.28	48.90	52.86	0	0.049	0.100
25z5p4#2	94.90	48.90	0.00	0	0.066	0.133
25z5p4#3	82.78	48.90	0.00	0	0.115	0.300
25z5p4#4	87.71	48.90	0.00	0	0.066	0.200
25z5p4#5	0.00	48.90	0.00	0	0.115	0.300
25z5p4#6	88.06	48.90	0.00	0	0.066	0.200
25z5p4#7	91.47	48.90	0.00	0	0.066	0.133
25z5p4#8	95.61	48.90	0.00	0	0.049	0.100
25z5p4#9	97.60	48.90	58.85	0	0.033	0.067
25z5p4#10	90.46	48.90	53.64	0	0.049	0.167
25z5p4#11	97.60	48.90	58.31	0	0.033	0.067
25z5p4#12	91.47	48.90	0.00	0	0.049	0.167
25z5p4#13	89.11	48.90	0.00	0	0.049	0.167
25z7p4#1	0.00	54.78	0.00	0.19	0.180	0.400
25z7p4#2	0.00	54.78	0.00	0.19	0.124	0.267
25z7p4#3	89.83	54.78	0.00	0.19	0.087	0.178
25z7p4#4	0.00	54.78	0.00	0.19	0.106	0.222
25z7p4#5	96.84	54.78	62.77	0.19	0.068	0.133

Πίνακας 3.28: Τιμές D–αποδοτικότητας χρήσιμων μοντέλων και μέσος όρος συσχετίσεων στηλών που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες επιδράσεις για σχεδιασμούς DS με 25 εκτελέσεις και 4 στήλες

Στον πίνακα 3.29 δίνεται ο σχεδιασμός 25z7p4#5 που δίνει τις βέλτιστες τιμές των κριτηρίων που χρησιμοποιήθηκαν, μαζί με το γράφημα των συσχετίσεων μεταξύ των στηλών που σχηματίζουν τον πίνακα του μοντέλου (1.4). Ο σχεδιασμός αυτός θα αναφερθεί ξανά στην παράγραφο 4.3.1, όπου αξιολογούνται όλοι οι σχεδιασμοί DS που μπορεί να κατασκευαστούν, ανεξαρτήτως των ιδιοτήτων τους με βάση συγκεκριμένα κριτήρια.

O DS 25z7p4#5	Correlation plot

1	0	1	1
1	0	1	–1
1	0	–1	1
1	1	0	1
1	1	0	–1
1	1	–1	0
1	–1	0	–1
1	–1	1	0
1	–1	–1	0
0	1	1	1
0	1	1	–1
0	1	–1	–1
0	0	0	0
0	–1	1	1
0	–1	–1	1
0	–1	–1	–1
–1	1	1	0
–1	1	–1	0
–1	1	0	1
–1	–1	1	0
–1	–1	0	1
–1	–1	0	–1
–1	0	1	–1
–1	0	–1	1
–1	0	–1	–1



Πίνακας 3.29: Ο σχεδιασμός 25z7p4#5 και το correlation plot

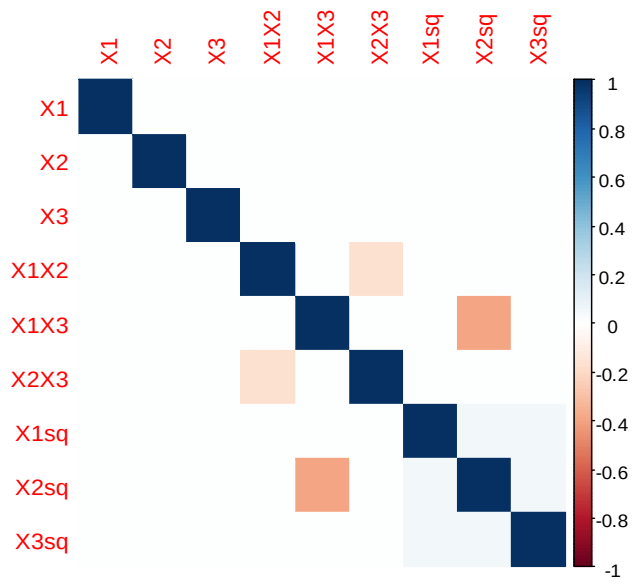
Ο πίνακας 3.30 που ακολουθεί, συνοψίζει την πληροφορία που προκύπτει για τους μη–ισόμορφους σχεδιασμούς που κατασκευάσαμε με $n = 33$ εκτελέσεις και $p = 3$ στήλες αναφορικά με τα κριτήρια της D–αποδοτικότητας για την εκτίμηση των μοντέλων (1.2), (1.3) και (1.4). Έχουν κατασκευαστεί 3 σχεδιασμοί DS με $z = 5$ μηδενικά ανά στήλη και άλλοι 4 σχεδιασμοί με $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη. Αυτοί έχουν την ελάχιστη απόλυτη συσχέτιση μεταξύ οποιονδήποτε δύο στηλών που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές επιδράσεις και η οποία είναι ίση με 0.057 για τους σχεδιασμούς με 5 μηδενικά ανά στήλη και 0.088 για τους σχεδιασμούς με 7 μηδενικά ανά στήλη.

Σχεδιασμός	D – αποδοτικότητα			Μέσος όρος συσχετίσεων μεταξύ στηλών		
	(1.2)	(1.3)	(1.4)	τετραγωνικών επιδράσεων	όλων των επιδράσεων	αλληλεπιδράσεων δύο παραγόντων
33z5p3#1	98.62	44.48	53.19	0.057	0.052	0.167
33z5p3#2	98.91	44.48	53.23	0.057	0.052	0.167
33z5p3#3	99.60	44.48	55.59	0.057	0.020	0.056
33z7p3#1	96.72	51.27	54.72	0.088	0.064	0.233
33z7p3#2	96.58	51.27	53.13	0.088	0.080	0.300
33z7p3#3	98.44	51.27	59.01	0.088	0.048	0.167
33z7p3#4	99.54	51.27	61.71	0.088	0.032	0.100

Πίνακας 3.30: Τιμές D–αποδοτικότητας χρήσιμων μοντέλων και μέσος όρος συσχετίσεων στηλών που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες επιδράσεις για σχεδιασμούς DS με 33 εκτελέσεις και 3 στήλες

Ο DS 33z5p3#3	Correlation plot

1	0	1
1	0	1
1	1	0
1	1	1
1	1	1
1	1	-1
1	1	-1
1	1	-1
1	-1	0
1	-1	1
1	-1	1
1	-1	-1
1	-1	-1
1	-1	-1
0	1	1
0	1	-1
0	0	0
0	-1	1
0	-1	-1
-1	1	1
-1	1	1
-1	1	1
-1	1	-1
-1	1	-1
-1	1	0
-1	-1	1
-1	-1	1
-1	-1	1
-1	-1	-1
-1	-1	-1
-1	-1	0
-1	0	-1
-1	0	-1

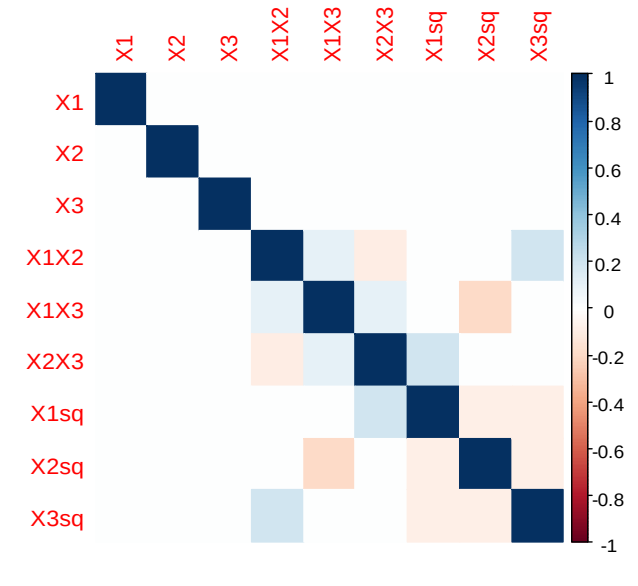


Πίνακας 3.31: Ο σχεδιασμός 33z5p3#3 και το correlation plot

Από τους σχεδιασμούς που δίνονται στον πίνακα 3.30, επιλέγουμε τον 33z5p3#3 για την περίπτωση των 5 μηδενικών ανά στήλη και τον 33z7p3#4 όταν έχουμε 7 μηδενικά ανά στήλη. Αυτοί δίνουν τις βέλτιστες τιμές των κριτηρίων που χρησιμοποιήθηκαν και παρουσιάζονται στους πίνακες 3.31 και 3.32 αντίστοιχα, μαζί με τα γράφημα των συσχετίσεων μεταξύ των στηλών που σχηματίζουν τον πίνακα του πλήρες μοντέλου (1.4).

Ο DS 33z7p3#4	Correlation plot

1	0	1
1	0	1
1	0	-1
1	1	0
1	1	1
1	1	1
1	1	-1
1	1	-1
1	-1	0
1	-1	0
1	-1	1
1	-1	-1
1	-1	-1
0	1	1
0	1	-1
0	1	-1
0	0	0
0	-1	1
0	-1	1
0	-1	-1
-1	1	1
-1	1	1
-1	1	-1
-1	1	0
-1	1	0
-1	-1	1
-1	-1	1
-1	-1	-1
-1	-1	-1
-1	-1	0
-1	0	1
-1	0	-1
-1	0	-1



Πίνακας 3.32: Ο σχεδιασμός 33z7p3#4 και το correlation plot

Σχεδιασμός	D – αποδοτικότητα			Μέσος όρος συσχετίσεων μεταξύ στηλών		
	(1.2)	(1.3)	(1.4)	τετραγωνικών επιδράσεων	όλων των επιδράσεων	αλληλεπιδράσεων δύο παραγόντων
33z5p4#1	95.03	43.14	52.01	0.057	0.052	0.133
33z5p4#2	98.2	43.14	54.73	0.057	0.041	0.067
33z5p4#3	97.65	43.14	52.91	0.057	0.053	0.089
33z5p4#4	94.74	43.14	51.42	0.057	0.052	0.133
33z5p4#5	97.88	43.14	50.97	0.057	0.053	0.089
33z5p4#6	98.43	43.14	54.29	0.057	0.041	0.067
33z5p4#7	94.96	43.14	52.08	0.057	0.052	0.133
33z5p4#8	96.84	43.14	51.34	0.057	0.078	0.133
33z5p4#9	98.43	43.14	53.45	0.057	0.041	0.067
33z5p4#10	98.43	43.14	55.32	0.057	0.041	0.067
33z5p4#11	95.55	43.14	55.22	0.057	0.040	0.111
33z5p4#12	95.55	43.14	54.94	0.057	0.040	0.111
33z5p4#13	98.97	43.14	57.15	0.057	0.029	0.044
33z5p4#14	98.93	43.14	57.11	0.057	0.029	0.044
33z5p4#15	98.93	43.14	56.76	0.057	0.029	0.044
33z7p4#1	95.97	49.9	54.75	0.088	0.063	0.120
33z7p4#2	96.81	49.9	57.55	0.088	0.057	0.107
33z7p4#3	96.7	49.9	57.34	0.088	0.063	0.120
33z7p4#4	97.19	49.9	58.53	0.088	0.057	0.107
33z7p4#5	97.27	49.9	59.2	0.088	0.057	0.107
33z7p4#6	97.27	49.9	59.42	0.088	0.057	0.107
33z7p4#7	93.68	49.9	58.08	0.088	0.064	0.173
33z7p4#8	98.06	49.9	60.96	0.088	0.050	0.093
33z7p4#9	93.29	49.9	56.04	0.088	0.070	0.187
33z7p4#10	97.19	49.9	57.91	0.088	0.057	0.107
33z7p4#11	97.19	49.9	59	0.088	0.057	0.107
33z7p4#12	96.45	49.9	57.52	0.088	0.063	0.120
33z7p4#13	95.67	49.9	57.03	0.088	0.070	0.133
33z7p4#14	98.89	49.9	63.14	0.088	0.044	0.080
33z7p4#15	94.1	49.9	60.27	0.088	0.057	0.160

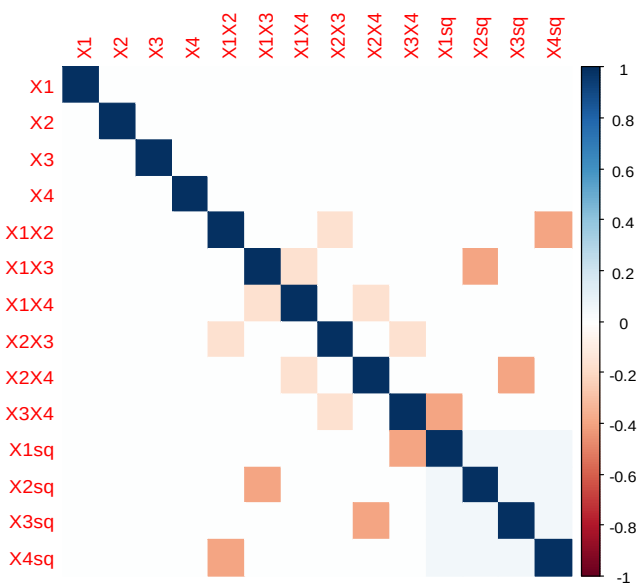
Πίνακας 3.33: Τιμές D–αποδοτικότητας χρήσιμων μοντέλων και μέσος όρος συσχετίσεων στηλών που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες επιδράσεις για σχεδιασμούς DS με 33 εκτελέσεις και 4 στήλες

Τέλος στον πίνακα 3.33, για εξοικονόμηση χώρου, δίνεται η πληροφορία που προκύπτει για 30 τους μη–ισόμορφους σχεδιασμούς DS που κατασκευάσαμε με $n = 33$ εκτελέσεις και $p = 4$ στήλες. Συγκεκριμένα, έχουν κατασκευαστεί 29 σχεδιασμοί DS με $z = 5$ μηδενικά ανά στήλη και άλλοι 37 σχεδιασμοί με $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη που έχουν την ελάχιστη απόλυτη συσχέτιση μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές επιδράσεις. Από αυτούς, παρουσιάζουμε 15 σχεδιασμούς με τη μεγαλύτερη D–αποδοτικότητα για την εκτίμηση του μοντέλου (1.4) όταν έχουμε $z = 5$ μηδενικά ανά

στήλη, και άλλους 15 όταν τα μηδενικά είναι $z = 7$ ανά στήλη. Διακρίνουμε τους σχεδιασμούς 33z5p4#13 και 33z7p4#14 οι οποίοι μας δίνουν τις βέλτιστες τιμές των κριτηρίων που χρησιμοποιήθηκαν, για $z = 5$ και $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη αντίστοιχα. Αυτοί οι σχεδιασμοί δίνονται στους πίνακες 3.34 και 3.35 αντίστοιχα, μαζί με το γράφημα των συσχετίσεων μεταξύ των στηλών που σχηματίζουν τον πίνακα του μοντέλου (1.4).

O DS 33z5p4#13	Correlation plot

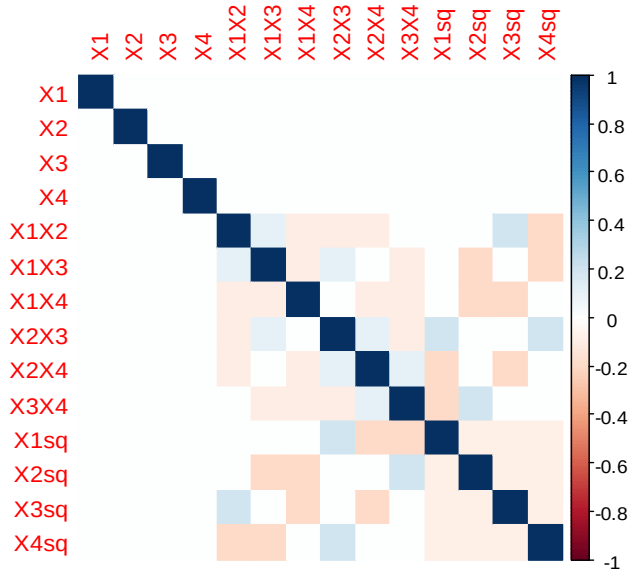
1	0	1	1
1	0	1	-1
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	-1
1	1	-1	0
1	1	-1	1
1	1	-1	-1
1	-1	0	-1
1	-1	1	1
1	-1	1	-1
1	-1	-1	1
1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1
0	1	1	1
0	1	-1	-1
0	0	0	0
0	-1	1	1
0	-1	-1	-1
-1	1	1	1
-1	1	1	-1
-1	1	1	-1
-1	1	-1	1
-1	1	-1	-1
-1	1	0	1
-1	-1	1	1
-1	-1	1	-1
-1	-1	1	0
-1	-1	-1	1
-1	-1	-1	0
-1	-1	0	-1
-1	0	-1	1
-1	0	-1	-1



Πίνακας 3.34: Ο σχεδιασμός 33z5p4#13 και το correlation plot

O DS 33z7p4#14	Correlation plot

1	0	1	1
1	0	1	-1
1	0	-1	1
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	-1
1	1	-1	0
1	1	-1	-1
1	-1	0	1
1	-1	0	-1
1	-1	1	0
1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1
0	1	1	1
0	1	-1	1
0	1	-1	-1
0	0	0	0
0	-1	1	1
0	-1	1	-1
0	-1	-1	-1
-1	1	1	1
-1	1	1	-1
-1	1	-1	0
-1	1	0	1
-1	1	0	-1
-1	-1	1	1
-1	-1	1	0
-1	-1	-1	1
-1	-1	-1	0
-1	-1	0	-1
-1	0	1	-1
-1	0	-1	1
-1	0	-1	-1



Πίνακας 3.35: Ο σχεδιασμός 33z7p4#14 και το correlation plot

3.5 Γενικές παρατηρήσεις, συμπεράσματα και προτάσεις

Στο παρόν κεφάλαιο περιγράψαμε, όσο το δυνατόν πιο αναλυτικά, μία μέθοδο κατασκευής μη–ισόμορφων σχεδιασμών τύπου DS με n εκτελέσεις, με δύο και τρεις στήλες και z μηδενικά ανά στήλη η χρήση των οποίων επιτυγχάνει την ελάχιστη (απόλυτη) συσχέτιση μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν σε τετραγωνικές επιδράσεις. Εφαρμόσαμε τη διαδικασία για σχεδιασμούς με έως επτά μηδενικά ανά στήλη, και βρήκαμε τη μορφή των μη–ισόμορφων σχεδιασμών με την επιθυμητή ιδιότητα, για κάθε τιμή των εκτελέσεων n. Δείξαμε επίσης, τον τρόπο με τον οποίο, για συγκεκριμένο πλήθος εκτελέσεων, μπορούμε να αξιοποιούμε τις λίστες των μη–ισόμορφων σχεδιασμών διάστασης $n \times 3$ και με βάσει ενός αλγορίθμου επέκτασης, να κατασκευάσουμε σχεδιασμούς με περισσότερες από τρεις στήλες. Αναλυτικά κατασκευάστηκαν σχεδιασμοί με την επιθυμητή ιδιότητα με $n \leq 33$ εκτελέσεις, n περιττός, που περιέχουν τρία, πέντε και επτά μηδενικά ανά στήλη, και που διατηρούν την ελάχιστη δυνατή (απόλυτη) συσχέτιση μεταξύ των στηλών των τετραγωνικών επιδράσεων.

Η επιλογή της ελαχιστοποίησης της (απόλυτης) τιμής της συσχέτισης μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές επιδράσεις στηρίχθηκε στη λογική ότι αυτή η συσχέτιση συχνά είναι πιο έντονη από τη συσχέτιση μεταξύ μιας τετραγωνικής στήλης και μιας στήλης αλληλεπίδρασης δύο παραγόντων, ή μεταξύ στηλών που αντιστοιχούν σε αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων. Σημειώνουμε ότι η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε μπορεί να τροποποιηθεί για να ελαχιστοποιηθεί η συσχέτιση μεταξύ στηλών που αντιστοιχούν σε άλλου τύπου επιδράσεις, οδηγώντας σε ένα σύστημα εξισώσεων με λύσεις όπως εκείνες που παραθέσαμε στην (3.3) και στον πίνακα 3.7. Ωστόσο, αυτή η τροποποίηση καθιστά το σύστημα εξισώσεων αρκετά πολύπλοκο όταν εξετάζεται η συσχέτιση μεταξύ στηλών που αντιστοιχούν σε αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων, επειδή για τον υπολογισμό αυτής της συσχέτισης απαιτείται αρχικά η κατασκευή σχεδιασμών με τέσσερις στήλες. Η αναζήτηση αυτή ξεφεύγει από το πλαίσιο της παρούσας μελέτης, αλλά μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο μελλοντικής έρευνας.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι η εφαρμογή της μεθόδου μας για τιμές του z μεγαλύτερες από 7 είναι άμεση. Σχεδιασμοί με δύο στήλες μπορούν εύκολα να παραχθούν χρησιμοποιώντας τις λύσεις της (3.3), ενώ σχεδιασμοί με τρεις στήλες μπορούν να προκύψουν ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στην παράγραφο 3.3. Ωστόσο, σημειώνουμε ότι η αναζήτηση μη–ισόμορφων $n \times 3$ σχεδιασμών σε τέτοιες περιπτώσεις

μπορεί να είναι απαιτητική, καθώς οι τρεις ελεύθερες παράμετροι r_1, r_2 και r_3 και οι τιμές t_1, t_2 και t_3 στο σύστημα των εξισώσεων (3.5) μπορούν να λάβουν πολλές διαφορετικές και αποδεκτές τιμές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Λίστες σχεδιασμών DS με τρία , πέντε και επτά μηδενικά ανά στήλη

4.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2, στην αρχική μορφή των σχεδιασμών DS, όπως αυτή προτάθηκε από τους Jones and Nachtsheim (2011), σε κάθε παράγοντα εμφανίζεται τρεις φορές το επίπεδο μηδέν σε κάθε στήλη. Οι Georgiou, Stylianou and Aggarwal (2012) χρησιμοποιώντας weighing πίνακες, κατασκεύασαν σχεδιασμούς DS με περισσότερα από τρία μηδενικά ανά στήλη. Οι Schoen et al. (2022) κατασκεύασαν πλήρεις λίστες μη–ισόμορφων $n \times p$ σχεδιασμών DS για $n \leq 49$ εκτελέσεις, όπου $n \equiv 1 \bmod 4$, με τρία μηδενικά ανά στήλη και με $p \leq (n-1)/2$.

Στο παρόν κεφάλαιο θα επεκτείνουμε τις λίστες αυτές καθώς κατασκευάζουμε λίστες μη–ισόμορφων σχεδιασμών DS, οι οποίοι έχουν τρία, πέντε και επτά μηδενικά ανά στήλη, με $n \leq 33$ εκτελέσεις και περιττό n. Επιπλέον, αξιολογούμε όλους του σχεδιασμούς που κατασκευάζουμε με τη χρήση γνωστών κριτηρίων, αναδεικνύοντας με αυτόν τον τρόπο τους βέλτιστους για κάθε περίπτωση.

4.2 Ένας αλγόριθμος επέκτασης για την κατασκευή σχεδιασμών

Σε αυτή την ενότητα, περιγράφουμε τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για την κατασκευή καταλόγων μη–ισόμορφων σχεδιασμών DS με $z = 3$, 5 και 7 μηδενικά ανά στήλη. Υπενθυμίζουμε ότι δύο τέτοιοι σχεδιασμοί είναι ισόμορφοι αν ο ένας μπορεί να πάρει τη μορφή του άλλου μετά από μεταθέσεις γραμμών ή/και στηλών ή/και αλλαγής πρόσημων σε μία ή περισσότερες στήλες. Είναι προφανές ότι για ένα δεδομένο πλήθος εκτελέσεων n, μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από ένας σχεδιασμοί διαστάσεων $n \times p$.

Για καθορισμένο πλήθος εκτελέσεων n, μια πιθανή στήλη ενός σχεδιασμού DS θα πρέπει να περιέχει ακριβώς z μηδενικά, με το z να είναι περιττός αριθμός, καθώς

επιδιώκουμε σχεδιασμούς με ένα κεντρικό σημείο και με fold-over δομή, όπως δίνεται στη μορφή (3.1). Συνεπώς, κάθε στήλη θα είναι μια μετάθεση των στοιχείων του διανύσματος

$$c_{n,z} = [\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{1}]'$$

όπου το $\mathbf{1}$ είναι ένα διάνυσμα μεγέθους $(n - z)/2$ με όλα τα στοιχεία του ίσα με $+1$, και το $\mathbf{0}$ είναι ένα διάνυσμα μήκους z με όλα τα στοιχεία ίσα με μηδέν. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η πρώτη στήλη κάθε σχεδιασμού είναι η $c_{n,z}$. Για την εφαρμογή της διαδικασίας, αυτό που αρχικά πρέπει να επιτευχθεί είναι η δημιουργία του συνόλου με όλες τις πιθανές στήλες του σχεδιασμού που, όπως αναφέραμε, τα στοιχεία τους είναι μεταθέσεις των στοιχείων της αρχικής στήλης $c_{n,z}$ με fold-over δομή. Αυτές οι στήλες λοιπόν έχουν τη μορφή $[\boldsymbol{s}, 0, -\boldsymbol{s}]'$ όπου το $\boldsymbol{s}$ είναι διάνυσμα με $(z - 1)/2$ μηδενικά και $(n - z)/2$ στοιχεία ίσα με $+1$ ή -1. Για δεδομένες τιμές των n και z, τοποθετούμε όλες τις δυνατές στήλες ενός σχεδιασμού DS διαστάσεων $n \times p$ με z μηδενικά ανά στήλη σε ένα σύνολο $C(n, z)$.

Στο πρώτο βήμα του αλγορίθμου, σχηματίζουμε όλους τους $n \times 2$ πίνακες επεκτείνοντας τη μοναδική στήλη $c_{n,z}$ με μια στήλη από το σύνολο $C(n, z)$. Ένας αποδεκτός σχεδιασμός DS διάστασης $n \times 2$ παράγεται όταν η στήλη που χρησιμοποιείται από το $C(n, z)$, είναι ορθογώνια προς την αρχική $c_{n,z}$. Με αυτόν τον τρόπο, τοποθετούμε όλους τους ορθογώνιους σχεδιασμούς διάστασης $n \times 2$ που προκύπτουν, σε ένα σύνολο $A(n, 2)$. Στη συνέχεια, ενημερώνουμε το σύνολο $C(n, z)$ των πιθανών στηλών, διατηρώντας μόνο εκείνες που οδήγησαν σε έναν ορθογώνιο σχεδιασμό. Στη συνέχεια, ελέγχουμε όλους τους σχεδιασμούς στο $A(n, 2)$ για ισομορφισμό και κρατάμε μόνο τους μη–ισόμορφους σχεδιασμούς στο σύνολο $N(n, 2)$.

Στο δεύτερο βήμα του αλγορίθμου, σχηματίζουμε όλους τους $n \times 3$ πίνακες, επεκτείνοντας όλους τους σχεδιασμούς στο $N(n, 2)$ με μια στήλη από το ενημερωμένο σύνολο $C(n, z)$. Ένας αποδεκτός σχεδιασμός $n \times 3$ προκύπτει όταν όλες οι στήλες του είναι ορθογώνιες ανά δύο. Τοποθετούμε όλους τους ορθογώνιους σχεδιασμούς διάστασης $n \times 3$ που προκύπτουν στο σύνολο $A(n, 3)$. Ενημερώνουμε ξανά το σύνολο $C(n, z)$ κρατώντας μόνο τις στήλες που οδήγησαν σε ορθογώνιο σχεδιασμό. Τέλος, ελέγχουμε όλους τους σχεδιασμούς στο $A(n, 3)$ για ισομορφισμό και διατηρούμε μόνο τους μη–ισόμορφους σχεδιασμούς στο σύνολο $N(n, 3)$.

Η διαδικασία συνεχίζεται με παρόμοιο τρόπο, επεκτείνοντας το σύνολο των μη–ισόμορφων σχεδιασμών με μία επιπλέον στήλη, και τερματίζεται όταν δεν προκύπτει περαιτέρω αποδεκτή επέκταση. Μια περίληψη της διαδικασίας για την κατασκευή λίστας μη–ισόμορφων σχεδιασμών με n εκτελέσεις, $k+1$ στήλες και z μηδενικά ανά στήλη από τη λίστα μη–ισόμορφων σχεδιασμών με k στήλες έχει ως εξής:

1. Χρησιμοποίησε το σύνολο $N(n,k)$ των μη–ισόμορφων σχεδιασμών διάστασης $n \times k$ και πρόσθεσε σε αυτούς μια επιπλέον στήλη από το (ενημερωμένο) σύνολο $C(n,z)$. Διατήρησε μόνο τους πίνακες $n \times (k+1)$ που πληρούν την ιδιότητα της ορθογωνιότητας στο σύνολο $A(n,k+1)$.

2. Ενημέρωσε το σύνολο $C(n,z)$ κρατώντας μόνο τις στήλες που οδήγησαν σε ορθογώνιο σχεδιασμό.

3. Έλεγξε όλους τους σχεδιασμούς στο $A(n,k+1)$ για ισομορφισμό και διατήρησε τους μη–ισόμορφους σχεδιασμούς στο σύνολο $N(n,k+1)$.

Ο αλγόριθμος αυτός έχει μεγάλη υπολογιστική πολυπλοκότητα κυρίως λόγω του βήματος 3, στο οποίο ελέγχονται οι παραγόμενοι σχεδιασμοί για ισομορφισμό. Αν το σύνολο $A(n,k+1)$ περιέχει πολλούς πίνακες, το οποίο είναι σύνηθες για μεγάλες τιμές n και k, και καθώς χρειάζεται να γίνει έλεγχος ισομορφισμού σε όλα τα ζευγάρια σχεδιασμών μέσα στο $A(n,k+1)$, είναι προφανές ότι η διαδικασία αυτή καταλήγει να είναι εξαιρετικά χρονοβόρα.

Μπορούμε να περιορίσουμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα αυτού του βήματος διαμερίζοντας αρχικά το σύνολο $A(n,k+1)$ σε υποσύνολα, με τέτοιο τρόπο ώστε δύο σχεδιασμοί που ανήκουν σε διαφορετικά υποσύνολα, να είναι μη–ισόμορφοι. Αυτό μπορεί εύκολα να επιτευχθεί με τη χρήση ενός ή και περισσότερων κριτηρίων αξιολόγησης των οποίων οι τιμές παραμένουν αναλλοίωτες σε ισόμορφους σχεδιασμούς, όπως για παράδειγμα είναι ο μέσος όρος των συσχετίσεων των στηλών που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες επιδράσεις ή η D–αποδοτικότητα των μοντέλων (1.2), (1.3) και (1.4). Τα υποσύνολα που θα δημιουργηθούν θα περιέχουν το καθένα λιγότερους πίνακες από το σύνολο $A(n,k+1)$ και συνεπώς χρειάζονται πολύ λιγότερες συγκρίσεις πινάκων ανά δύο. Το βήμα 3 λοιπόν μπορεί να χωριστεί σε επιμέρους βήματα, ως εξής:

3α. Υπολόγισε την τιμή ενός (ή και περισσότερων) κριτηρίου του οποίου η τιμή παραμένει αναλλοίωτη σε ισόμορφους σχεδιασμούς για όλους τους σχεδιασμούς στο $A(n, k+1)$, και κράτησε όλες τις διαφορετικές τιμές που προκύπτουν.

3β. Δημιούργησε f σύνολα, $A_i(n, k+1),\ i = 1,2, \dots, f$, όπου f οι διαφορετικές τιμές του κριτηρίου που προέκυψαν, και τοποθέτησε κάθε σχεδιασμό του $A(n, k+1)$ σε καθένα από τα f σύνολα, ανάλογα με την τιμή του κριτηρίου που δίνει.

3γ. Έλεγξε όλους τους σχεδιασμούς σε καθένα $A_i(n, k+1),\ i = 1,2, \dots, f$, και διατήρησε τους μη–ισόμορφους σχεδιασμούς στο σύνολο $N_i(n, k+1)$.

3δ. Δημιούργησε το σύνολο $N(n, k+1)$ ενώνοντας όλα τα $N_i(n, k+1)$ σε ένα σύνολο.

Σημειώνουμε ότι αυτή η διαδικασία κατασκευής μπορεί να παράγει σχεδιασμούς διάστασης $n \times p$ που έχουν περισσότερα από ένα κεντρικά σημεία. Αυτό είναι ωστόσο αποδεκτό κατά την εφαρμογή της διαδικασίας, καθώς ένας σχεδιασμός με p στήλες και περισσότερα από ένα κεντρικά σημεία μπορεί να παραγάγει έναν σχεδιασμό με ένα κεντρικό σημείο όταν «επεκταθεί» σε επόμενα βήματα με επιπλέον στήλες.

Ο αριθμός των μη–ισόμορφων σχεδιασμών διάστασης $n \times p$ με ένα κεντρικό σημείο που βρέθηκαν για $n \leq 33$, με n περιττό, παρουσιάζεται στον πίνακα 4.1 για $z = 3$ και στους πίνακες 4.2 και 4.3 για $z = 5$ και $z = 7$ αντίστοιχα. Στους πίνακες αυτούς παρατίθεται επίσης (σε παρένθεση) ο συνολικός αριθμός των μη–ισόμορφων σχεδιασμών διάστασης $n \times p$ με ένα ή περισσότερα κεντρικά σημεία που κατασκευάστηκαν από τη διαδικασία που μόλις περιγράψαμε πιο πάνω. Αξίζει να αναφέρουμε ότι η απαρίθμηση των σχεδιασμών που παρουσιάζεται στον πίνακα 4.1 για $n \leq 33$ και $z = 3$ έχει επίσης δοθεί από τους Schoen, Eendebak, Vazquez and Goos (2022). Οι σχεδιασμοί με 5 και 7 μηδενικά ανά στήλη είναι νέοι στη βιβλιογραφία και ενδεχομένως να έχουν καλύτερες ιδιότητες σε σχέση με τους σχεδιασμούς με 3 μηδενικά ανά στήλη. Στην επόμενη παράγραφο θα αξιολογήσουμε τους σχεδιασμούς DS με τρία, πέντε και επτά μηδενικά ανά στήλη που κατασκευάστηκαν για $n \leq 33$ και θα αναδείξουμε τους καλύτερους προς χρήση, με βάση γνωστά κριτήρια αξιολόγησης.

	p														
n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
13	1(1)	1(1)	1(1)	1(1)	1(1)										
15	0(1)	0(0)													
17	1(1)	1(1)	2(2)	1(1)	1(1)	1(1)	1(1)								
19	0(1)	0(1)	0(2)	0(1)	0(1)	0(1)	0(1)	0(0)							
21	1(1)	1(1)	3(3)	2(2)	2(2)	1(1)	1(1)	1(1)	1(1)						
23	0(1)	0(0)													
25	1(1)	1(1)	3(3)	2(2)	5(5)	2(2)	2(2)	1(1)	1(1)	1(1)	1(1)				
27	0(1)	0(1)	0(2)	0(1)	0(2)	0(2)	0(1)	0(1)	0(1)	0(1)	0(1)	0(0)			
29	1(1)	1(1)	5(5)	5(5)	12(12)	7(7)	7(7)	3(3)	3(3)	1(1)	1(1)	1(1)	1(1)		
31	0(1)	0(0)													
33	1(1)	1(1)	4(4)	7(7)	30(30)	48(48)	77(77)	42(42)	37(37)	17(17)	13(13)	3(3)	3(3)	1(1)	1(1)

Πίνακας 4.1: Πλήθος μη–ισόμορφων σχεδιασμών διάστασης $n \times p$ με $z = 3$ μηδενικά ανά στήλη και ένα κεντρικό σημείο (ο αριθμός μέσα σε παρένθεση δείχνει τον συνολικό αριθμό σχεδιασμών με ένα ή περισσότερα κεντρικά σημεία)

	p														
n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
13	1(2)	2(3)	2(3)	1(1)	1(1)										
15	0(1)	1(2)	0(1)	0(1)	0(1)	0(0)									
17	1(2)	3(3)	6(6)	3(3)	3(3)	1(1)	1(1)								
19	0(1)	0(1)	0(2)	0(1)	0(1)	0(1)	0(1)	0(0)							
21	1(2)	3(4)	9(11)	10(11)	12(13)	7(8)	5(6)	1(1)	1(1)						
23	0(1)	1(2)	0(3)	0(2)	0(2)	0(1)	0(1)	0(1)	0(1)	0(0)					
25	1(2)	4(4)	19(19)	38(38)	81(81)	61(61)	61(61)	27(27)	20(20)	5(5)	5(5)				
27	0(1)	0(1)	0(3)	0(2)	0(5)	0(2)	0(2)	0(1)	0(1)	0(1)	0(1)	0(0)			
29	1(2)	3(4)	22(24)	101 (102)	242 (244)	36(37)	15(16)	4(5)	3(4)	1(2)	1(2)	0(0)			
31	0(1)	1(2)	0(5)	0(5)	0(12)	0(7)	0(7)	0(3)	0(3)	0(1)	0(1)	0(1)	0(1)	0(0)	
33	1(2)	4	37(37)	352 (352)	3244 (3244)	8165 (8165)	9931 (9931)	8158 (8158)	6316(6316)	3404 (3404)	1729 (1729)	519 (519)	202 (202)	30 (30)	17 (17)

Πίνακας 4.2: Πλήθος μη–ισόμορφων σχεδιασμών διάστασης $n \times p$ με $z = 5$ μηδενικά ανά στήλη και ένα κεντρικό σημείο (ο αριθμός μέσα σε παρένθεση δείχνει τον συνολικό αριθμό σχεδιασμών με ένα ή περισσότερα κεντρικά σημεία)

	p														
n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
13	1(2)	0(1)	0(1)	0(0)											
15	0(2)	1(4)	2(5)	1(2)	1(2)	1(1)									
17	1(2)	1(3)	4(5)	2(3)	2(3)	1(1)	1(1)								
19	0(2)	1(4)	4(10)	3(6)	1(4)	0(1)	0(1)	0(0)							
21	1(2)	3(4)	9(11)	1(2)	1(2)	0(1)	0(1)	0(0)							
23	0(2)	1(5)	7(18)	7(18)	6(19)	4(12)	2(8)	0(1)	0(1)	0(0)					
25	1(2)	5(7)	37(40)	86(88)	144 (146)	99(100)	74(75)	35(36)	18(19)	5(5)	4(4)				
27	0(2)	1(5)	9(28)	15(53)	14(95)	0(61)	0(61)	0(27)	0(20)	0(4)	0(4)	0(0)			
29	1(2)	5(6)	68(71)	485 (487)	1109 (1114)	61(63)	14(16)	1(2)	1(2)	0(1)	0(1)	0(0)			
31	0(2)	1(5)	12(36)	32 (134)	49(293)	37(74)	18(34)	10(15)	5(9)	2(4)	1(3)	0(0)			
33	1(2)	6(8)	152 (157)	3713 (3718)	40874 (40886)	82744 (82751)	48501 (48508)	23192 (23195)	13307 (13310)	6486 (6487)	2876 (2877)	844 (845)	250 (251)	36 (36)	14 (14)

Πίνακας 4.3: Πλήθος μη–ισόμορφων σχεδιασμών διάστασης $n \times p$ με $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη και ένα κεντρικό σημείο (ο αριθμός μέσα σε παρένθεση δείχνει τον συνολικό αριθμό σχεδιασμών με ένα ή περισσότερα κεντρικά σημεία)

4.3 Αξιολόγηση σχεδιασμών DS και συγκρίσεις

Στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιήσουμε γνωστά και δημοφιλή κριτήρια για να αξιολογήσουμε τους σχεδιασμούς που κατασκευάσαμε με $n \leq 33$ εκτελέσεις και με τρία, πέντε και επτά μηδενικά ανά στήλη. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της D–αποδοτικότητας για την αξιολόγηση της συνολικής αποδοτικότητας στην εκτίμηση των επιδράσεων του γραμμικού μοντέλου (1.4) που περιλαμβάνει εκτός τις γραμμικές επιδράσεις, και εκείνες των τετραγωνικών επιδράσεων όπως και αλληλεπιδράσεων δυο παραγόντων. Η D–αποδοτικότητα του συγκεκριμένου μοντέλου θα συμβολίζεται με *D-full* στους πίνακες που ακολουθούν. Επειδή το μοντέλο (1.4) δεν μπορεί πάντοτε να εκτιμηθεί, ιδιαιτέρως όταν αυξάνεται ο αριθμός των στηλών του σχεδιασμού που χρησιμοποιείται, οι τιμές της D–αποδοτικότητας θα υπολογιστούν και για τα δύο άλλα χρήσιμα μοντέλα: Το (1.3) που περιλαμβάνει μόνο τις γραμμικές και τετραγωνικές επιδράσεις (οι τιμές της αποδοτικότητας σημειώνονται ως *D-LQ* στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων) καθώς και το (1.2) που θα περιλαμβάνει τις γραμμικές επιδράσεις και τις αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων (οι τιμές της αποδοτικότητας για αυτό το μοντέλο σημειώνονται ως *D-L2FIs*).

Επιπλέον, θα υπολογίσουμε τον συντελεστή συσχέτισης Pearson ανάμεσα σε όλα τα ζεύγη των στηλών που αντιστοιχούν σε επιδράσεις στον πίνακα μοντέλου του (1.4) και θα συνοψίσουμε τα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τέσσερις μέσους όρους αυτών: Το μέσο όρο των συσχετίσεων όλων των ζευγών στηλών (σημειώνεται ως $Avecorr$ στα αποτελέσματα), το μέσο όρο των συσχετίσεων μεταξύ στηλών που αντιστοιχούν σε τετραγωνικές επιδράσεις (σημειώνεται ως $QQcorr$ στα αποτελέσματα), το μέσο όρο των συσχετίσεων μεταξύ στηλών που αντιστοιχούν σε αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων (σημειώνεται ως $2FIcorr$ στα αποτελέσματα) και το μέσο όρο των συσχετίσεων μεταξύ στηλών που αντιστοιχούν σε τετραγωνικές επιδράσεις και στηλών που αντιστοιχούν σε αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων (σημειώνεται ως $Q2FIcorr$ στα αποτελέσματα). Οι τρεις πρώτοι μέσοι όροι είχαν χρησιμοποιηθεί και για την αξιολόγηση των σχεδιασμών του Κεφαλαίου 3, στην παράγραφο 3.4.1.

Για τις συγκρίσεις μεταξύ των σχεδιασμών και την παρουσίαση των αποτελεσμάτων, έχουμε φιλτράρει τη λίστα με τους σχεδιασμούς που κατασκευάστηκαν και αξιολογούμε μόνο τους σχεδιασμούς $n \times p$ που έχουν ένα κεντρικό σημείο και δίνουν τιμές συσχέτισης μικρότερες του 1. Κάθε σχεδιασμός μπορεί να εντοπιστεί στη λίστα με τον αριθμό ταυτότητάς του (ID). Για παράδειγμα, δεδομένου ενός συγκεκριμένου πλήθους εκτελέσεων n και πλήθους στηλών p, το ID «$z = 7$ #2» αναφέρεται στο δεύτερο σχεδιασμό στη λίστα των μη–ισόμορφων σχεδιασμών με n εκτελέσεις, p στήλες και $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη. Στους πίνακες που ακολουθούν, παρουσιάζουμε τις καλύτερες τιμές που βρέθηκαν βάσει των κριτηρίων αξιολόγησης που χρησιμοποιήσαμε και τον αριθμό ID του σχεδιασμού που δίνει αυτές τις καλύτερες τιμές για τα κριτήρια αυτά. Να επισημάνουμε ότι όταν το μοντέλο (1.4) μπορεί να εκτιμηθεί, παρουσιάζουμε μόνο την τιμή της D–αποδοτικότητας που προέκυψε από αυτό το μοντέλο. Εάν το μοντέλο (1.4) δεν δύναται να εκτιμηθεί, παρουσιάζουμε την καλύτερη D–αποδοτικότητα που βρέθηκε από το μοντέλο (1.2) που περιλαμβάνει τις γραμμικές επιδράσεις και τις αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων και, αν και αυτό δεν μπορεί να εκτιμηθεί, εμφανίζουμε την καλύτερη D–αποδοτικότητα που βρέθηκε από το μοντέλο (1.3) των κύριων επιδράσεων (γραμμικών και τετραγωνικών).

4.3.1 Αξιολόγηση σχεδιασμών DS με $n \equiv 1 \bmod 4$ εκτελέσεις

Η πιο ενδιαφέρουσα σύγκριση για DS σχεδιασμούς διάστασης $n \times p$ προκύπτει όταν $n \equiv 1 \bmod 4$, καθώς οι σχεδιασμοί αυτοί έχουν ένα κεντρικό σημείο, είτε είναι με $z = 3$, είτε με $z = 5$, είτε $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη. Σημειώνουμε ξανά ότι οι σχεδιασμοί DS διάστασης $n \times p$ με $z = 3$ μηδενικά ανά στήλη για $n \leq 49$ έχουν ήδη συζητηθεί στη σχετική βιβλιογραφία. Από τη μελέτη μας, όπως αναπτύσσεται στην παρούσα ενότητα, προκύπτει ότι υπάρχουν σχεδιασμοί DS με $z = 5$ ή $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη που είναι ανταγωνιστικοί με αυτούς που έχουν $z = 3$ μηδενικά ανά στήλη. Η υπεροχή αυτών των σχεδιασμών γίνεται πιο ξεκάθαρη όταν εξετάζεται το κριτήριο της D–αποδοτικότητας. Γενικά, όταν ο αριθμός των στηλών p είναι μικρός, οι σχεδιασμοί με $z = 5$ και $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη συμπεριφέρονται καλύτερα από αυτούς που έχουν τρία μηδενικά, για τα περισσότερα από τα χρησιμοποιούμενα κριτήρια. Λεπτομέρειες παρουσιάζονται στους πίνακες αυτής της ενότητας.

Στον πίνακα 4.4 παρουσιάζουμε τις καλύτερες τιμές που προέκυψαν από την αξιολόγησή μας, όταν συγκρίνονται σχεδιασμοί DS με $z = 3, 5$ ή $z = 7$ μηδενικά και με τρεις και τέσσερις στήλες, ήτοι $p = 3$ και $p = 4$ αντίστοιχα, ενώ στον πίνακα 4.5 παρουσιάζουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα της αξιολόγησης των σχεδιασμών DS για $p = 5$ και $p = 6$. Τέλος, στους Πίνακες 4.6 και 4.7 αξιολογούνται οι σχεδιασμοί DS που κατασκευάσαμε όταν $n \equiv 1 \bmod 4$ με $p \geq 7$ στήλες. Αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχουν σχεδιασμοί DS διάστασης $n \times p$ με περισσότερα από ένα κεντρικά σημεία, οι οποίοι συμπεριφέρονται καλύτερα από τους σχεδιασμούς που αναφέρονται στους πίνακες, όταν εξετάζονται ορισμένα κριτήρια. Για παράδειγμα, όταν $n = 33$ και $p = 3$, υπάρχει σχεδιασμός DS με $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη και τρία κεντρικά σημεία, ο οποίος δίνει μηδενικές τιμές όταν εξετάζεται η συσχέτιση των στηλών που αντιστοιχούν σε αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφερθεί ότι οι παραγόμενες λίστες σχεδιασμών DS διάστασης $n \times p$ που βρέθηκαν με τη διαδικασία που περιγράψαμε, περιλαμβάνουν και τους σχεδιασμούς DS που έχουν την ελάχιστη (απόλυτη) συσχέτιση μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές επιδράσεις. Η γνώση της πλήρους λίστας μη–ισόμορφων σχεδιασμών διάστασης $n \times p$ οδηγεί και στην ανάδειξη του βέλτιστου σχεδιασμού

διάστασης $n \times p$, ως προς κάποιο κριτήριο, όπως φαίνεται από την περίπτωση που εξετάζουμε μετά την παράθεση των πινάκων 4.4 – 4.7 με τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα.

n	p	$D-full$	$D-L2FIs$	$D-LQ$	$Avecorr$	$QQcorr$	$2FIcorr$	$Q2FIcorr$
13	3	0.722 z=5 #3			0.025 z=5 #3	0.133 z=3 #1	0 z=5 #3	0 z=5 #3
17	3	0.612 z=5 #3			0.046 z=5 #3	0.133 z=5 #2,3	0.167 z=3 #1 z=5 #3	0.084 z=5 #3
21	3	0.655 z=7 #4			0.004 z=5 #4	0.005 z=5 #3,4	0 z=5 #4	0 z=5 #4
25	3	0.649 z=7 #5			0.021 z=5 #4	0 z=5 #2,3,4	0.1 z=3 #1	0.056 z=5 #4
29	3	0.637 z=7 #6			0.003 z=5 #4	0.033 z=5 #3,4	0 z=5 #4	0 z=5 #4
33	3	0.617 z=7 #6			0.02 z=5 #4	0.057 z=5 #2,3,4	0.056 z=5 #4	0.044 z=5 #4
13	4			0.516 z=3 #1	0.12 z=3 #1	0.133 z=3 #1	0.3 z=3 #1	0.233 z=3 #1
17	4		0.968 z=3 #1		0.064 z=5 #6	0.133 z=5 #4,5,6	0.133 z=3 #1 z=5 #6	0.125 z=5 #6
21	4		0.979 z=5 #7		0.032 z=5 #7	0.05 z=5 #10,11	0.15 z=3 #1	0.099 z=5 #11
25	4	0.634 z=7 #37			0.033 z=5 #15,17	0 z=5, 13 σχεδιασμοί	0 z=7#37	0 z=7#37
29	4	0.637 z=7 #40			0.037 z=5 #23,24	0.033 z=5, 10 σχεδιασμοί	0.09 z=7 #2	0.073 z=5 #22,23,24
33	4	0.631 z=7 #156			0.029 z=5 #34,35,37	0.057 z=5, 29 σχεδιασμοί	0.044 z=5 #34,35,37	0 z=7 #120

Πίνακας 4.4: Οι καλύτεροι σχεδιασμοί $n \times p$ με τις αντίστοιχες τιμές των κριτηρίων αξιολόγησης που χρησιμοποιήθηκαν, όταν $n \equiv 1 mod\ 4$, $n \leq 33$ και $3 \leq p \leq 4$

n	p	$D-full$	$D-L2FIs$	$D-LQ$	$Avecorr$	$QQcorr$	$2FIcorr$	$Q2FIcorr$
13	5			0.507 z=3 #1	0.159 z=3 #1	0.133 z=3 #1	0.333 z=3 #1	0.279 z=3 #1
17	5			0.579 z=7 #2	0.115 z=3 #1	0.19 z=3 #1	0.2 z=3 #1	0.22 z=3 #1
21	5			0.53 z=7 #1	0.078 z=5 #11	0.05 z=5 #11	0.167 z=3 #2	0.118 z=5 #11
25	5		0.887 z=7 #81		0.055 z=5 #23,25,37	0 z=5, 18 σχεδιασμοί	0.100 z=5 #23,25,37	0.088 z=7 #23
29	5		0.958 z=3 #5		0.051 z=5 #102	0.033 z=5, 47 σχεδιασμοί	0.103 z=7 #83	0.088 z=7 #99,100, 101,102
33	5	0.597 z=7 #2812			0.033 z=5 #274,275	0.057 z=5, 248 σχεδιασμοί	0.037 z=5 #274,275	0.067 z=7 #2131, 2146,2170
13	6			0.5 z=3 #1	0.192 z=3 #1	0.133 z=3 #1	0.357 z=3 #1	0.31 z=3 #1
17	6			0.566 z=7 #3	0.134 z=3 #1	0.19 z=3 #1	0.21 z=3 #1	0.245 z=3 #1
21	6			0.515 z=7 #1	0.125 z=3 #1	0.222 z=3 #1,2	0.207 z=3 #1	0.208 z=3 #1,2
25	6			0.492 z=7, 42 σχεδιασμοί	0.064 z=5 #67,81	0 z=5, 19 σχεδιασμοί	0.100 z=5 #67,81	0.131 z=7 #39
29	6			0.475 z=7, 237 σχεδιασμοί	0.071 z=5 #210	0.033 z=5, 71 σχεδιασμοί	0.129 z=7 #159	0.117 z=5, 28 σχεδιασμοί
33	6		0.908 z=5 #1164		0.049 z=5 #1164, 1297	0.057 z=5, 1335 σχεδιασμοί	0.067 z=5 #1164, 1297	0.099 z=7, 10 σχεδιασμοί

Πίνακας 4.5: Οι καλύτεροι σχεδιασμοί $n \times p$ με τις αντίστοιχες τιμές των κριτηρίων αξιολόγησης που χρησιμοποιήθηκαν, όταν $n \equiv 1 mod\ 4$, $n \leq 33$ και $5 \leq p \leq 6$

n	p	$D-LQ$	$Avecorr$	$QQcorr$	$2FIcorr$	$Q2FIcorr$
17	7	0.430	0.148	0.190	0.217	0.262
		z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1
21	7	0.386	0.142	0.222	0.223	0.223
		z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1
25	7	0.477	0.121	0.242	0.181	0.150
		z=7, 39 σχεδιασμοί	z=3 #2	z=3 #1,2	z=3 #2	z=7 #1
29	7	0.444	0.107	0.247	0.155	0.160
		z=7, 33 σχεδιασμοί	z=3 #7 z=7 #31	z=7, 36 σχεδιασμοί	z=3 # 7	z=7 #38
33	7	0.444	0.065	0.057	0.085	0.113
		z=7, 432 σχεδιασμοί	z=5, 12 σχεδιασμοί	z=5, 983 σχεδιασμοί	z=3 #46	z=7, 20 σχεδιασμοί
17	8	0.426	0.160	0.190	0.222	0.275
		z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1
21	8	0.381	0.156	0.222	0.234	0.234
		z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1
25	8	0.466	0.132	0.242	0.19	0.158
		z=7, 32 σχεδιασμοί	z=3 #1	z=3 #1,2	z=3 #1 z=7 #53	z=3 #1
29	8	0.433	0.115	0.253	0.161	0.173
		z=7, 4 σχεδιασμοί	z=3 #7	z=7, 5 σχεδιασμοί	z=3 #7	z=7 #9,11
33	8	0.426	0.07	0.057	0.095	0.119
		z=7, 116 σχεδιασμοί	z=5 #1951,4618	z=5, 317 σχεδιασμοί	z=5 #1951,4618	z=7, 18 σχεδιασμοί
21	9	0.378	0.167	0.222	0.243	0.243
		z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1
25	9	0.457	0.143	0.242	0.194	0.192
		z=7, 13 σχεδιασμοί	z=3 #1 z=7 #10	z=3 #1	z=7 #10	z=3 #1
29	9	0.401	0.132	0.256	0.186	0.194
		z=7 #1	z=3 #2	z=3 #1,2,3	z=3 #2	z=3 #1,2,3 z=7 #1
33	9	0.413	0.096	0.179	0.11	0.135
		z=7, 5434 σχεδιασμοί	z=3 #38	z=7, 5432 σχεδιασμοί	z=3 #38	z=7 #1,11125,15411

Πίνακας 4.6: Οι καλύτεροι σχεδιασμοί $n \times p$ με τις αντίστοιχες τιμές των κριτηρίων αξιολόγησης που χρησιμοποιήθηκαν, όταν $n \equiv 1 mod\ 4$, $n \leq 33$ και $7 \leq p \leq 9$

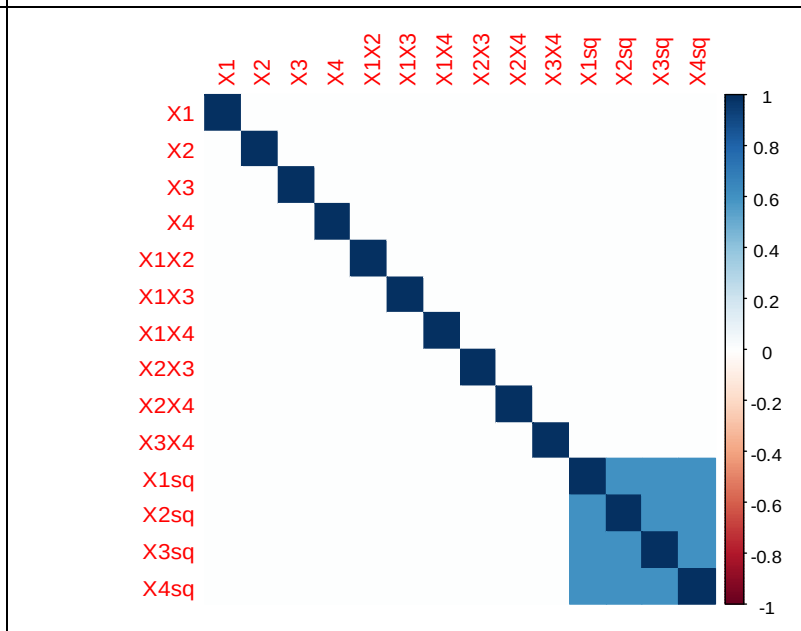
n	p	$D-LQ$	$Avecorr$	$QQcorr$	$2FIcorr$	$Q2FIcorr$
21	10	0.375	0.178	0.222	0.25	0.249
		z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1
25	10	0.448	0.151	0.242	0.202	0.211
		z=7, 9 σχεδιασμοί	z=3 #1	z=3 #1	z=7 #12	z=7 #3
29	10	0.394	0.141	0.256	0.194	0.199
		z=7 #1	z=3 #1,2,3	z=3 #1,2,3	z=3 #1,2	z=3 #1,2
33	10	0.404	0.102	0.186	0.119	0.139
		z=7, 5037 σχεδιασμοί	z=3 #1,24,25,32	z=7, 5037 σχεδιασμοί	z=3 #1,24,25,32	z=7 #1,4410,5525
25	11	0.441	0.156	0.242	0.205	0.221
		z=7 # 2,3,4,5	z=7 #3	z=3 # 1	z=7 #3	z=7 #4
29	11	0.314	0.148	0.256	0.199	0.204
		z=3 # 1	z=3 #1	z=3 # 1	z=3 #1	z=3 #1
33	11	0.396	0.106	0.188	0.123	0.16
		z=7, 2094 σχεδιασμοί	z=3 #1	z=7, 2096 σχεδιασμοί	z=3 #1	z=7 #2226,3337,4452
25	12	0.435	0.16	0.242	0.206	0.225
		z=7 #2,3,4	z=7 #3	z=3 #1	z=7 #3	z=3 #4
29	12	0.312	0.154	0.256	0.204	0.207
		z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1	z=3 #1
33	12	0.39	0.11	0.188	0.128	0.145
		z=7, 431 σχεδιασμοί	z=3 #6	z=7, 431 σχεδιασμοί	z=3 #7	z=3 #1
29	13	0.31	0.16	0.256	0.208	0.211
		z=1 #1	z=1 #1	z=1 #1	z=1 #1	z=1 #1
33	13	0.384	0.114	0.194	0.132	0.147
		z=7, 348 σχεδιασμοί	z=3 #1,2	z=7, 348 σχεδιασμοί	z=3 #1,2	z=7 #845
29	14	0.308	0.165	0.256	0.211	0.213
		z=1 #1	z=1 #1	z=1 #1	z=1 #1	z=1 #1
33	14	0.379	0.117	0.197	0.133	0.149
		z=7, 173 σχεδιασμοί	z=3 #1	z=7, 173 σχεδιασμοί	z=3 #1	z=7 #251
33	15	0.374	0.12	0.198	0.137	0.194
		z=7, 30 σχεδιασμοί	z=3 #1	z=7, 30 σχεδιασμοί	z=3 #1	z=7, 7 σχεδιασμοί
33	16	0.37	0.122	0.198	0.138	0.196
		z=7, 14 σχεδιασμοί	z=3 #1	z=7, 9 σχεδιασμοί	z=3 #1	z=7, 4 σχεδιασμοί

Πίνακας 4.7: Οι καλύτεροι σχεδιασμοί $n \times p$ με τις αντίστοιχες τιμές των κριτηρίων αξιολόγησης που χρησιμοποιήθηκαν, όταν $n \equiv 1 mod\ 4$, $n \leq 33$ και $7 \leq p \leq 9$

Για να γίνει απολύτως κατανοητή η χρησιμότητα της λίστας όλων των μη–ισόμορφων σχεδιασμών DS διάστασης $n \times p$, ας δούμε με ακόμα μεγαλύτερη σχολαστικότητα την περίπτωση σχεδιασμών DS με 25 εκτελέσεις και 4 στήλες. Θυμίζουμε ότι στον πίνακα 3.29 της παραγράφου 3.4.1 του Κεφαλαίου 3, δόθηκε ο σχεδιασμός 25z7p4#5 με 25 εκτελέσεις και 4 στήλες που δίνει τις βέλτιστες τιμές των κριτηρίων που χρησιμοποιήθηκαν, ανάμεσα σε όλους τους σχεδιασμούς DS οι οποίοι δίνουν την ελάχιστη (απόλυτη) συσχέτιση μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές επιδράσεις. Ο σχεδιασμός αυτός, εκτιμά το μοντέλο (1.4) με D–αποδοτικότητα ίση με 62.77%. Από τον πίνακα 4.4 προκύπτει ότι υπάρχει σχεδιασμός DS με 25 γραμμές και 4 στήλες που εκτιμά το μοντέλο (1.4) με μεγαλύτερη D–αποδοτικότητα που είναι ίση με 63.42%. Ο σχεδιασμός αυτός (με ID $z = 7$ #37 στη σχετική λίστα των 25×4 σχεδιασμών με 7 μηδενικά ανά στήλη) προφανώς δεν δίνει την ελάχιστη (απόλυτη) συσχέτιση μεταξύ των στηλών που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές επιδράσεις, αλλά μπορεί να εκτιμήσει το μοντέλο (1.4) αποδοτικότερα. Ο σχεδιασμός αυτός δίνεται στον πίνακα 4.8 και ανήκει στην κατηγορία των κεντρικά σύνθετων σχεδιασμών (central composite design) με $a = 1$ και ένα κεντρικό σημείο, που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 1.5.2 του Κεφαλαίου 1.

Ο 25×4 DS με ID z=7 #37	Correlation plot

1	1	1	1
1	1	1	–1
1	1	–1	1
1	1	–1	–1
1	–1	1	1
1	–1	1	–1
1	–1	–1	1
1	–1	–1	–1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
0	0	0	0
0	0	0	–1
0	0	–1	0
0	–1	0	0
–1	0	0	0
–1	1	1	1
–1	1	1	–1
–1	1	–1	1
–1	1	–1	–1
–1	-1	1	1
–1	-1	1	–1
–1	-1	–1	1
–1	-1	–1	–1



Πίνακας 4.8: Ο 25×4 σχεδιασμός DS με ID z=7 #37 και το correlation plot

4.3.2 Αξιολόγηση σχεδιασμών DS με n≡3 mod 4 εκτελέσεις

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της αξιολόγησης για τους σχεδιασμούς DS διάστασης $n \times p$ που κατασκευάσαμε, για $n \equiv 3 \bmod 4$ εκτελέσεις. Οι περισσότεροι από αυτούς τους σχεδιασμούς υπάρχουν, ειδικά για τις μεγαλύτερες τιμές του p, για $z = 5$ και $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη. Ο πίνακας 4.9 παρουσιάζει τις καλύτερες τιμές που βρέθηκαν με βάση τα κριτήρια που εξετάσαμε, από τους σχεδιασμούς με $p = 3$ και 4 στήλες. Από μια γρήγορη ματιά στις τιμές αυτού του πίνακα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν σχεδιασμοί DS με $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη, τα οποία συμπεριφέρονται καλύτερα από σχεδιασμούς με $z = 5$ μηδενικά ανά στήλη στη μεγάλη πλειονότητα των περιπτώσεων που μελετήσαμε.

n	p	$D-full$	$D-L2FIs$	$Avecorr$	$QQcorr$	$2FIcorr$	$Q2FIcorr$
15	3	0.689		0.033	0.071	0	0
		z=5 #2		z=5 #2	z=7 #3	z=5 #2	z=5 #2
19	3	0.691		0.057	0.095	0.25	0.112
		z=7 #3		z=7 #3	z=7 #3	z=7 #3	z=7 #3
23	3	0.672		0.041	0.179	0	0
		z=7 #4		z=5 #2	z=7 #4	z=5 #2	z=5 #2
27	3	0.644		0.048	0.229	0.125	0.073
		z=7 #4		z=7 #4	z=7 #4	z=7 #4	z=7 #4
31	3	0.618		0.046	0.262	0	0
		z=7 #4		z=7 #4	z=7 #4	z=5 #2	z=5 #2
15	4		0.818	0.105	0.071	0.3	0.194
			z=7 #5	z=7 #4	z=7 #4,5	z=7 #4	z=7 #4
19	4		0.815	0.094	0.095	0.25	0.154
			z=7 #5	z=7 #8	z=7 #5,8,9	z=7 #5	z=7 #8
23	4	0.651		0.065	0.179	0.144	0.098
		z=7 #15		z=7 #15	z=7, 6 σχεδιασμοί	z=7 #14	z=7 #15,18
27	4	0.64		0.045	0.229	0.067	0.073
		z=7 #20		z=7 #24,26	z=7, 12 σχεδιασμοί	z=7 #24,26	z=7, 5 σχεδιασμοί
31	4	0.635		0.046	0.262	0.06	0.072
		z=7 #36		z=7 #36	z=7, 10 σχεδιασμοί	z=7 #36	z=7, 4 σχεδιασμοί

Πίνακας 4.9: Οι καλύτεροι σχεδιασμοί $n \times p$ με τις αντίστοιχες τιμές των κριτηρίων αξιολόγησης που χρησιμοποιήθηκαν, όταν $n \equiv 3\ mod\ 4$, $n \leq 33$, $p = 3$ και $p = 4$

Παρομοίως, ο πίνακας 4.10 συνοψίζει τις καλύτερες τιμές με βάση τα κριτήρια που εξετάσαμε για σχεδιασμούς $p \geq 5$ στήλες και $z = 5$ και $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη. Όπως δείχνουν οι τιμές αυτού του πίνακα, οι σχεδιασμοί με $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη υπερέχουν

έναντι των αντίστοιχων σχεδιασμών με $z = 5$ μηδενικά ανά στήλη και για αυτές τις περιπτώσεις.

n	p	$Dfull$	$D-L2FIs$	$D-LQ$	$Avecorr$	$QQcorr$	$2FIcorr$	$Q2FIcorr$
15	5			0.703 z=7 #2	0.14 z=7 #2	0.071 z=7 #2	0.3 z=7 #2	0.248 z=7 #2
19	5			0.631 z=7 #6	0.131 z=7 #6	0.095 z=7 #6	0.294 z=7 #6	0.215 z=7 #6
23	5		0.706 z=7 #17		0.096 z=7 #18	0.179 z=7, 3 σχεδιασμοί	0.204 z=7 #18	0.147 z=7 #18
27	5		0.759 z=7 #50		0.077 z=7 #51	0.229 z=7, 4 σχεδιασμοί	0.136 z=7 #51	0.123 z=7, 3 σχεδιασμοί
31	5	0.457 z=7 #120			0.062 z=7 #134	0.262 z=7, 10 σχεδιασμοί	0.1 z=7 #134	0.092 z=7, 3 σχεδιασμοί
15	6			0.698 z=7 #2	0.155 z=7 #2	0.071 z=7 #2	0.271 z=7 #2	0.276 z=7 #2
23	6			0.562 z=7 #18,19	0.119 z=7 #19	0.179 z=7 #18,19	0.224 z=7 #19	0.174 z=7 #19
27	6			0.515 z=7 #94,95	0.091 z=7 #94	0.229 z=7 #94,95	0.156 z=7 #94	0.137 z=7 #94,95
31	6			0.478 z=7, 11 σχεδιασμοί	0.069 z=7 #293	0.262 z=7, 11 σχεδιασμοί	0.106 z=7 #293	0.102 z=7, 6 σχεδιασμοί
15	7			0.694 z=7 #1	0.164 z=7 #1	0.071 z=7 #1	0.25 z=7 #1	0.296 z=7 #1
23	7			0.557 z=7 #12	0.139 z=7 #12	0.179 z=7 #12	0.24 z=7 #12	0.192 z=7 #12
31	7			0.471 z=7, 10 σχεδιασμοί	0.075 z=7 #74	0.262 z=7, 10 σχεδιασμοί	0.11 z=7 #74	0.11 z=7, 8 σχεδιασμοί

Πίνακας 4.10: Οι καλύτεροι σχεδιασμοί $n \times p$ με τις αντίστοιχες τιμές των κριτηρίων αξιολόγησης που χρησιμοποιήθηκαν, όταν $n \equiv 3\ mod\ 4$, $n \leq 33$ και $5 \leq p \leq 7$

4.4 Προβολικές ιδιότητες σχεδιασμών DS

Η μελέτη των προβολικών ιδιοτήτων των σχεδιασμών κρησαρίσματος αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για τους ερευνητές για την επιλογή του κατάλληλου σχεδιασμού για τη μελέτη των πολλών παραγόντων που ενδιαφέρουν, όπως αναφέρθηκε και στην παράγραφο

1.4.3. Η διαδικασία που ακολουθείται συνοπτικά έχει ως εξής: Από ένα σχεδιασμό με n εκτελέσεις και p στήλες, δημιουργούνται όλοι οι σχεδιασμοί που προκύπτουν επιλέγοντας k στήλες από τις p διαθέσιμες. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτουν $\binom{p}{k}$ σχεδιασμοί οι οποίοι και αξιολογούνται ως προς τη δυνατότητά τους να εκτιμήσουν ένα επιθυμητό μοντέλο, όπως για παράδειγμα είναι το (1.4). Οι σχεδιασμοί με n εκτελέσεις και k στήλες που προκύπτουν λέγονται, όπως είδαμε, και σχεδιασμοί – προβολή ή πιο απλά προβολές σε k στήλες. Κάθε προβολή σε k στήλες προφανώς διατηρεί τις κατασκευαστικές ιδιότητες του σχεδιασμού από τον οποίο προήλθε και προφανώς, αν υπάρχουν οι λίστες όλων των μη–ισόμορφων σχεδιασμών με διαστάσεις $n \times p$ για κάθε $p = 2,3,..$, θα είναι ισόμορφος σχεδιασμός με κάποιον από τη σχετική λίστα των μη–ισόμορφων $n \times k$ σχεδιασμών. Η κατασκευή λοιπόν λιστών μη–ισόμορφων σχεδιασμών με διαστάσεις $n \times p$ για κάθε $p = 2,3,..$, βοηθάει αρκετά στην μελέτη των προβολικών ιδιοτήτων σχεδιασμών με n εκτελέσεις και μεγάλο πλήθος στηλών.

Στην παρούσα παράγραφο, θα εκμεταλλευτούμε τις λίστες μη–ισόμορφων σχεδιασμών DS που κατασκευάσαμε και θα μελετήσουμε τις προβολικές ιδιότητες σε τρεις και τέσσερις διαστάσεις όλων των μη–ισόμορφων σχεδιασμών DS με $n = 25$ εκτελέσεις και $p = 12$ στήλες καθώς και με $n = 33$ εκτελέσεις και $p = 16$ στήλες. Οι συγκεκριμένες περιπτώσεις μελετώνται λεπτομερώς επειδή υπάρχουν αρκετοί τέτοιοι μη–ισόμορφοι $n \times p$ σχεδιασμοί DS, όπως προκύπτει από τους πίνακες 4.1, 4.2 και 4.3.

4.4.1 Προβολικές ιδιότητες των σχεδιασμών DS διάστασης 25×12

Για $n = 25$, υπάρχουν συνολικά δέκα μη–ισόμορφοι σχεδιασμοί DS με 25 εκτελέσεις και 12 στήλες: Ένας με $z = 3$ μηδενικά ανά στήλη (που σημειώνεται ως f12z3#1), πέντε με $z = 5$ μηδενικά ανά στήλη (σημειώνονται ως f12z5#1 έως f12z5#5) και τέσσερις με $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη (σημειώνονται ως f12z7#1 έως f12z7#4).

Ο πίνακας 4.11 παρουσιάζει τις προβολικές ιδιότητες αυτών των δέκα μη–ισόμορφων σχεδιασμών DS, όταν προβάλλονται σε 3 στήλες. Σημειώνουμε ότι από κάθε σχεδιασμό 12 στηλών, προκύπτουν 220 σχεδιασμοί 3 στηλών ως προβολές. Αναφέρουμε, για κάθε $z = 3,\ 5$ και 7, τον αριθμό των εμφανίσεων καθενός από τους μη–ισόμορφους σχεδιασμούς DS 25 εκτελέσεων και 3 στηλών που ήδη έχουμε εντοπίσει, ως προβολή από

κάθε σχεδιασμό διάστασης 25×12 που προβάλλουμε σε τρεις διαστάσεις. Για τις συγκρίσεις, καταγράφουμε (σε παρένθεση) την D–αποδοτικότητα του μοντέλου (1.4) για κάθε μη–ισόμορφο σχεδιασμό 3 στηλών που προκύπτει.

$n = 25, z = 3$							
Σχεδιασμός f12z3xx	f3z3#1 (0.505)						
#1	220						
$n = 25, z = 5$							
Σχεδιασμός f12z5xx	f3z5#1 (0)	f3z5#2 (0.549)	f3z5#3 (0.537)	f3z5#4 (0.596)			
#1	60	16	24	120			
#2	60	40	0	120			
#3	60	0	40	120			
#4	60	0	40	120			
#5	60	0	40	120			
$n = 25, z = 7$							
Σχεδιασμός f12z7xx	f3z7#1 (0.625)	f3z7#2 (0.566)	f3z7#3 (0)	f3z7#4 (0.575)	f3z7#5 (0.649)	f3z7#6 (0.614)	f3z7#7 (0.595)
#1	96	48	0	0	64	12	0
#2	126	18	7	9	48	12	0
#3	144	0	16	0	48	12	0
#4	120	24	4	12	48	12	0

Πίνακας 4.11: Προβολικές ιδιότητες σε 3 στήλες για σχεδιασμούς 25 εκτελέσεων και 12 στηλών

Είναι προφανές ότι οι τέσσερις σχεδιασμοί των 12 στηλών με $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη, έχουν τις καλύτερες προβολικές ιδιότητες σε 3 στήλες, καθώς προκύπτουν προβολές 3 στηλών που εκτιμούν το μοντέλο (1.4) με τη μεγαλύτερη αποδοτικότητα. Οι τιμές της D–αποδοτικότητας που λαμβάνονται από κάθε σχεδιασμό 3 στηλών για αυτούς τους σχεδιασμούς είναι μεγαλύτερες από την D–αποδοτικότητα που λαμβάνεται από τον μοναδικό σχεδιασμό 3 στηλών που προκύπτει όταν ο μοναδικός σχεδιασμός 12 στηλών με $z = 3$ μηδενικά ανά στήλη προβάλλεται σε 3 στήλες. Σημειώνουμε ότι για $z = 5$, και οι πέντε σχεδιασμοί των 12 στηλών παρέχουν έναν σχεδιασμό – προβολή σε 3 στήλες που δεν μπορεί να εκτιμήσει το μοντέλο (1.4). Αυτός ο σχεδιασμός 3 στηλών (f3z5#1) εμφανίζεται 60 φορές ως προβολή στους σχεδιασμούς των 12 στηλών.

Ο πίνακας 4.12 παρουσιάζει τις προβολικές ιδιότητες των δέκα σχεδιασμών DS διάστασης 25×12, όταν προβάλλονται σε 4 στήλες. Σε αυτή την περίπτωση, προκύπτουν 495 σχεδιασμοί 4 στηλών ως προβολές. Στον πίνακα, για κάθε $z = 3, 5$ και 7, δίνουμε τον αριθμό των εμφανίσεων καθενός από τους μη–ισόμορφους σχεδιασμούς DS 25 εκτελέσεων

και 4 στηλών που ήδη έχουμε εντοπίσει, ως προβολή από κάθε σχεδιασμό διάστασης 25×12 που προβάλλουμε σε τέσσερις διαστάσεις. Για εξοικονόμηση χώρου, ειδικά για $z = 7$ όπου υπάρχουν 40 μη–ισόμορφοι σχεδιασμοί με 25 εκτελέσεις και 4 στήλες, παρουσιάζουμε μόνο τους καλύτερους εξ' αυτών (με βάση την τιμή της D–αποδοτικότητας) που εμφανίζονται ως προβολές μαζί με το πόσες φορές εμφανίστηκαν ως προβολή, καθώς και τον αριθμό των σχεδιασμών–προβολή που δεν μπορούν να εκτιμήσουν το μοντέλο (1.4).

$n = 25, z = 3$		
Σχεδιασμός f12z3xx	f4z3#2 (0.51)	Σχεδιασμοί με μηδενική D-efficiency
#1	165	330

$n = 25, z = 5$					
Σχεδιασμός f12z5xx	f4z5#15 (0.589)	f4z5#17 (0.583)	f4z5#16 (0.536)	f4z5#7 (0.529)	Σχεδιασμοί με μηδενική D- efficiency
#1	48	0	0	48	399
#2	0	0	60	120	315
#3	0	0	0	0	495
#4	0	48	0	0	447
#5	48	0	0	0	447

$n = 25, z = 7$					
Σχεδιασμός f12z7xx	f4z7#37 (0.634)	f4z7#36 (0.628)	f4z7#14 (0.619)	Σχεδιασμοί με μη μηδενική D-efficiency (0.47-0.60)	Σχεδιασμοί με μηδενική D- efficiency
#1	0	0	96	192	207
#2	3	0	18	330	144
#3	3	0	0	312	180
#4	3	0	24	306	162

Πίνακας 4.12: Προβολικές ιδιότητες σε 4 στήλες για σχεδιασμούς 25 εκτελέσεων και 12 στηλών

Όπως παρατηρήθηκε και στην περίπτωση των προβολών σε 3 στήλες, οι τέσσερις σχεδιασμοί 25 εκτελέσεων και 12 στηλών με $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη έχουν καλύτερες προβολικές ιδιότητες σε 4 στήλες. Η χρήση τους ως σχεδιασμών κρησαρίσματος παρέχει προβολές 4 στηλών που μπορούν να εκτιμήσουν το μοντέλο (1.4) με υψηλότερη πιθανότητα από τους σχεδιασμούς με $z = 3$ ή $z = 5$ μηδενικά ανά στήλη. Ο σχεδιασμός f12z7#2 έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να παράγει μία προβολή 4 στηλών που μπορεί να εκτιμήσει το μοντέλο (1.4), καθώς μόνο 144 από τις 495 προβολές 4 στηλών έχουν μηδενική D-αποδοτικότητα. Αυτός ο σχεδιασμός δίνεται στον πίνακα 4.13.

Σχεδιασμός									
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	0	0	1	-1	-1	1	1	-1	-1
0	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	0	-1	0	0	1
-1	-1	-1	1	0	-1	-1	0	0	1
1	-1	-1	0	-1	1	0	-1	1	0
-1	1	-1	-1	0	0	1	0	-1	1
-1	-1	1	-1	0	0	-1	1	0	-1
1	-1	-1	-1	1	1	0	1	-1	0
-1	1	-1	0	-1	1	0	1	1	-1
-1	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	-1	0	1	-1	-1	1	1	0
1	-1	1	0	1	-1	0	-1	-1	1
-1	1	1	1	-1	-1	0	-1	1	0
1	1	-1	1	0	0	1	-1	0	1
1	-1	1	1	0	0	-1	0	1	-1
-1	1	1	0	1	-1	0	1	-1	0
1	1	1	-1	0	1	1	0	0	-1
-1	-1	-1	1	1	0	1	0	0	-1
0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	1
-1	0	0	-1	1	1	-1	-1	1	1
0	-1	0	-1	-1	-1	1	1	1	1
0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Πίνακας 4.13: Ο σχεδιασμός f12z7#2 25 εκτελέσεων και 12 στηλών με 7 μηδενικά ανά στήλη

4.4.2 Προβολικές ιδιότητες των σχεδιασμών DS διάστασης 33×16

Για $n = 33$, υπάρχουν συνολικά τριάντα δύο μη–ισόμορφοι σχεδιασμοί DS διάστασης 33×16: Ένας με $z = 3$ μηδενικά, δεκαεπτά με $z = 5$ μηδενικά και δεκατέσσερις με $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη. Οι πίνακες 4.14 και 4.15 παρουσιάζουν, με τρόπο παρόμοιο με την περίπτωση των 25 εκτελέσεων, τις προβολικές ιδιότητες των τριάντα δύο αυτών σχεδιασμών σε 3 και 4 στήλες, αντίστοιχα. Στην περίπτωση που οι αρχικοί 33×16 σχεδιασμοί προβάλλονται σε 3 στήλες, προκύπτουν 560 σχεδιασμοί με 33 γραμμές και 3 στήλες, από κάθε σχεδιασμό 16 στηλών ενώ, στην περίπτωση που οι αρχικοί 33×16 σχεδιασμοί προβάλλονται σε 4 στήλες, προκύπτουν 1820 σχεδιασμοί με 4 στήλες.

Στην περίπτωση της μελέτης των προβολών σε τρεις στήλες, οι δεκατέσσερις DS σχεδιασμοί 33 εκτελέσεων, 16 στηλών με $z = 7$ μηδενικά ανά στήλη έχουν τις καλύτερες προβολικές ιδιότητες σε 3 στήλες, καθώς προκύπτουν σχεδιασμοί–προβολή με 3 στήλες που εκτιμούν το μοντέλο (1.4) με μεγαλύτερη αποδοτικότητα από τους σχεδιασμούς με $z = 3$ και $z = 5$ μηδενικά ανά στήλη. Οι τιμές της D–αποδοτικότητας που προκύπτουν για το μοντέλο (1.4) από κάθε μη–ισόμορφο σχεδιασμό με 33 εκτελέσεις και τρεις στήλες που μπορεί να εμφανιστεί ως σχεδιασμός–προβολή στην περίπτωση αυτή, είναι μεγαλύτερες από αυτή την τιμή που προκύπτει από τον μοναδικό σχεδιασμό 33 εκτελέσεων και τριών

στηλών που εμφανίζεται ως προβολή όταν ο μοναδικός σχεδιασμός 33 εκτελέσεων και 16 στηλών με $z = 3$ μηδενικά ανά στήλη προβληθεί σε 3 στήλες.

$n = 33, z = 3$	
Σχεδιασμός f16z3xx	f3z3#1 (0.468)
#1	560

$n = 33, z = 5$				
Σχεδιασμός f16z5xx	f3z5#1 (0)	f3z5#2 (0.532)	f3z5#3 (0.532)	f3z5#4 (0.556)
#1	112	24	88	336
#2	112	0	112	336
#3	112	64	48	336
#4	112	0	112	336
#5	112	0	112	336
#6	112	24	88	336
#7	112	16	96	336
#8	112	0	112	336
#9	112	0	112	336
#10	112	24	88	336
#11	112	0	112	336
#12	112	32	80	336
#13	112	0	112	336
#14	112	24	88	336
#15	112	0	112	336
#16	112	0	112	336
#17	112	0	112	336

$n = 33, z = 7$								
Σχεδιασμός f16z7xx	f3z7#1 (0.563)	f3z7#2 (0.584)	f3z7#3 (0.547)	f3z7#4 (0.531)	f3z7#5 (0.59)	f3z7#6 (0.617)	f3z7#7 (0.546)	f3z7#8 (0.577)
#1	0	288	0	16	144	96	0	16
#2	0	288	0	16	144	96	0	16
#3	0	288	0	16	144	96	0	16
#4	0	288	12	16	120	108	0	16
#5	0	288	36	16	72	132	0	16
#6	24	264	6	10	126	114	0	16
#7	24	264	8	12	116	120	0	16
#8	24	264	48	4	60	144	0	16
#9	32	256	4	8	128	116	0	16
#10	40	248	12	4	116	124	0	16
#11	64	224	0	0	128	128	0	16
#12	64	224	24	0	80	152	0	16
#13	72	216	16	0	88	152	0	16
#14	72	216	16	0	88	152	0	16

Πίνακας 4.14: Προβολικές ιδιότητες σε 3 στήλες για σχεδιασμούς 33 εκτελέσεων και 16 στηλών

Με παρόμοια λογική προσέγγισης, χρήσιμα συμπεράσματα μπορεί να προκύψουν και από τον πίνακα 4.15, όπου μελετώνται οι προβολικές ιδιότητες σε 4 διαστάσεις. Από τα αποτελέσματα που δίνονται στον πίνακα αυτό προκύπτει ότι ο σχεδιασμός f16z7#11 μας

δίνει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να προκύψει ένας σχεδιασμός προβολής τεσσάρων στηλών που να μπορεί να εκτιμήσει το μοντέλο (1.4), καθώς μόνο 27 από τις 1820 προβολές τεσσάρων στηλών δίνουν μηδενική τιμή D–αποδοτικότητας. Ο εν λόγω σχεδιασμός παρουσιάζεται στον πίνακα 4.16.

$n = 33, z = 3$					
Σχεδιασμός f16z3xx	f4z3#2 (0.483)	f4z3#4 (0.474)	Σχεδιασμοί με μηδενική D- efficiency		
#1	1092	504	224		
$n = 33, z = 5$					
Σχεδιασμός f16z5xx	f4z5#34 (0.572)	f4z5#35 (0.571)	f4z5#37 (0.568)	Σχεδιασμοί με μη μηδενική D- efficiency (0.47 - 0.55)	Σχεδιασμοί με μηδενική D-efficiency
#1	96	12	24	920	768
#2	72	24	30	902	792
#3	80	8	36	980	716
#4	32	40	44	952	752
#5	96	24	72	788	840
#6	96	24	72	830	798
#7	80	30	82	828	800
#8	0	168	84	560	1008
#9	0	72	84	752	912
#10	60	24	84	878	774
#11	72	48	84	764	852
#12	96	24	88	832	780
#13	0	78	90	728	924
#14	96	24	90	830	780
#15	70	42	102	776	900
#16	96	42	102	764	816
#17	0	16	124	784	896
$n = 33, z = 7$					
Σχεδιασμός f16z7xx	f4z7#156 (0.631)	f4z7#147 (0.61)	f4z7#157 (0.603)	Σχεδιασμοί με μη μηδενική D- efficiency (0.4 - 0.6)	Σχεδιασμοί με μηδενική D-efficiency
#1	12	0	0	1700	108
#2	0	0	24	1690	106
#3	24	0	0	1626	170
#4	0	0	24	1702	94
#5	0	0	24	1759	37
#6	0	12	12	1729	67
#7	8	8	12	1724	68
#8	12	0	24	1734	50
#9	8	12	6	1735	59
#10	2	28	2	1735	53
#11	0	0	32	1761	27
#12	28	24	8	1722	38
#13	16	32	14	1725	33
#14	30	32	4	1706	48

Πίνακας 4.15: Προβολικές ιδιότητες σε 4 στήλες για σχεδιασμούς 33 εκτελέσεων και 16 στηλών

Σχεδιασμός f16z7#11														
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	0	0	-1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	0	0	0	1
1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	0	1	1	0	0	-1	1
1	-1	-1	-1	1	1	0	0	-1	0	1	1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	1	-1	-1	0	1	0	-1	-1	1	1	0
-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	0	-1	1	0	-1	0	1
-1	1	-1	0	-1	0	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1
-1	1	-1	-1	0	0	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	1
-1	-1	1	1	1	1	0	-1	-1	0	-1	-1	-1	1	0
-1	-1	1	-1	-1	1	0	0	1	-1	-1	1	1	-1	0
-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	0	-1	1	-1	0	0	-1
0	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1
0	1	0	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	0	0	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	0	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1
0	-1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
0	0	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	1	1	-1	1	1	-1	-1	0	1	-1	1	0	0	1
1	1	-1	1	1	-1	0	0	-1	1	1	-1	-1	1	0
1	1	-1	-1	-1	-1	0	1	1	0	1	1	1	-1	0
1	-1	1	1	0	0	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1
1	-1	1	0	1	0	1	1	-1	-1	0	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	0	1	-1	0	1	0	-1
-1	1	1	1	-1	1	1	0	-1	0	1	1	-1	-1	0
-1	1	1	1	-1	-1	0	0	1	0	-1	-1	1	1	1
-1	1	-1	-1	1	1	1	1	0	-1	-1	0	0	1	-1
-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	0	0	0	-1
-1	-1	-1	0	0	1	-1	1	1	1	0	-1	-1	-1	1
-1	-1	-1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1
0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Πίνακας 4.16: Ο σχεδιασμός f16z7#11 με 32 εκτελέσεις και 16 στηλών με 7 μηδενικά ανά στήλη

4.5 Συμπεράσματα και προτάσεις

Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάσαμε μια μεθοδολογία για την κατασκευή λιστών από μη–ισόμορφους σχεδιασμούς DS διάστασης $n \times p$, οι οποίοι διατηρούν την fold-over δομή, έχουν τουλάχιστον ένα κεντρικό σημείο και έχουν τρία, πέντε ή επτά μηδενικά ανά στήλη, για $n \leq 33$ εκτελέσεις, με n περιττό και $p \geq 2$. Όλοι οι σχεδιασμοί που κατασκευάστηκαν αξιολογήθηκαν χρησιμοποιώντας γνωστά κριτήρια. Με βάσει αυτά τα κριτήρια, επισημαίνουμε τους καλύτερους σχεδιασμούς που έχουν ένα κεντρικό σημείο και παράγουν τιμές συσχέτισης μικρότερες από 1.

Επιπλέον, μελετήσαμε τις προβολικές ιδιότητες σε τρεις και τέσσερις διαστάσεις των σχεδιασμών με $n = 25$ εκτελέσεις και 12 στήλες καθώς και αυτών με 33 εκτελέσεις και 16 στήλες. Πραγματοποιήσαμε συγκρίσεις και εντοπίσαμε τους σχεδιασμούς που υπερέχουν, σύμφωνα με τα κριτήρια που χρησιμοποιήσαμε. Από τη συνολική διαδικασία, οι σχεδιασμοί που κατασκευάστηκαν και προτάθηκαν μπορούν να αποτελέσουν χρήσιμο

εργαλείο για την επιλογή αποδοτικών σχεδιασμών για ποσοτικούς παράγοντες σε πειράματα που απαιτούν περιορισμένο αριθμό εκτελέσεων.

Η λίστα σχεδιασμών που καταρτίσαμε επεκτείνει τη λίστα που δημοσιεύθηκε από τους Schoen, Eendebak, Vazquez and Goos (2022), με σχεδιασμούς που έχουν πέντε και επτά μηδενικά ανά στήλη. Όπως προέκυψε από την αξιολόγησή μας, μπορεί να υπάρξουν σχεδιασμοί με πέντε ή επτά μηδενικά ανά στήλη που να έχουν καλύτερες ιδιότητες από εκείνους με τρία μηδενικά ανά στήλη, σύμφωνα με τα κριτήρια αξιολόγησης που εφαρμόσαμε.

Οι σχεδιασμοί που προτείνουμε μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν και ως σχεδιασμοί OMARS, εφόσον αφαιρεθούν τα κεντρικά σημεία. Ωστόσο, αυτή η εφαρμογή βρίσκεται εκτός του πεδίου της παρούσας διατριβής και δεν εξετάζεται περαιτέρω. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι, παρόλο που η διαδικασία κατασκευής που χρησιμοποιήσαμε είναι υπολογιστικά απαιτητική, μπορεί να τροποποιηθεί εύκολα ώστε να αναζητηθούν σχεδιασμοί με περισσότερα από επτά μηδενικά ανά στήλη ή για την κατασκευή σχεδιασμών τριών επιπέδων στους οποίους ο αριθμός των μηδενικών ανά στήλη διαφέρει. Η τελευταία περίπτωση ενδέχεται να οδηγήσει σε σχεδιασμούς με ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες ιδιότητες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- L. Baumert, S. W. Golomb and M. Hall Jr. (1962), Discovery of an Hadamard Matrix of Order 92, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **68**, 237-238.
- P. D. Berger and R. E. Maurer (2001), *Experimental Design with Applications in Management, Engineering and the Sciences*, 1st Edition, Duxbury Press.
- P. D. Berger, R. E. Maurer and G. B. Celli (2018), *Experimental Design With Applications in Management, Engineering, and the Sciences*, 2nd Edition, CRC Press.
- G. E. P. Box, W. G. Hunter and J. S. Hunter (1978), *Statistics for Experimenters: An Introduction to Design, Data Analysis, and Model Building*, 1st Edition, Wiley.
- G. E. P. Box and R. D. Meyer (1986), An Analysis for Unreplicated Fractional Factorials, *Technometrics*, **28**, 11-18.
- G. E. P. Box and J. Tyssedal (1996), Projective Properties of Certain Orthogonal Arrays, *Biometrika*, **83**, 950-956.
- G. E. P. Box and K. B. Wilson (1951), On the Experimental Attainment of Optimum Conditions, *Journal of the Royal Statistical Society*, **13**, 1-45.
- A. Dean, D. Voss and D. Draguljić (2017), *Design and Analysis of Experiments*, 2nd Edition, Springer.
- R. Ferber and W. Z. Hirsch (1982), *Social Experimentation and Economic Policy*, 1st Edition, Cambridge University Press.
- R. A. Fisher (1926), *The Arrangement of Field Experiments, Journal of the Ministry of Agriculture*, **33**, 503-515.
- R. A. Fisher (1966), *The Design of Experiments*, 8th Edition, Hafner Publishing Company.

- R. A. Fisher and J. Wishart (1930), The Arrangement of Field Experiments and the Statistical Reduction of the Results, *Imperial Bureau of Soil Science (London)*, Technical Communication Number **10**, 1-23.
- S. D. Georgiou, S. Stylianou and M. Aggarwal (2013), Efficient Three-Level Screening Designs Using Weighing Matrices, *Statistics*, **48(4)**, 815-833.
- P. Goos and B. Jones (2011), *Optimal Design of Experiments: A Case Study Approach*, 1st Edition, Wiley.
- D. Greenberg and M. Shroder (2004), *The Digest of Social Experiments*, 3rd Edition, Urban Institute Press.
- J. Hadamard (1893), Resolution d' une Question Relative aux Determinants, *Bull des Sciences Math*, **2**, 240-246.
- A. S. Hedayat, N. J. A. Sloane and J. Stufken (1999), *Orthogonal Arrays*, 1999th Edition, Springer.
- J. A. John and T. J. Mitchell (1977), Optimal Incomplete Block Designs, *Journal of the Royal Statistical Society*, **39**, 39–43.
- J. A. John and E. R. Williams (1995), *Cyclic and Computer-Generated Designs*, 1st Edition, Chapman & Hall.
- B. Jones and C. J. Nachtsheim (2011), A Class of Three-Level Designs for Definitive Screening in the Presence of Second-Order Effects, *Journal of Quality Technology*, **43(1)**, 1-15.
- R. E. Kirk (1968), *Experimental Design: Procedures for the Behavioral Sciences*, 3rd Edition, Brooks/Cole.
- J. Lawson (2015), *Design and Analysis of Experiments with R*, 1st Edition, CRC Press.
- S. D. Levitt and J. A. List (2009), Field Experiments in Economics: The Past, the Present, and the Future, *European Economic Review*, **57**, 1-18.

- C. Y. Lin, P. Yang and S. W. Cheng (2004), Minimum Contamination and β-Aberration Criteria for Screening Quantitative Factors, *Statistica Sinica*, **27**, 607-623.
- R. K. Meyer and C. J. Nachtsheim (1995), The Coordinate-Exchange Algorithm for Constructing Exact Optimal Experimental Designs, *Technometrics*, **37**, 60-69.
- D. C. Montgomery (2013), *Design and Analysis of Experiments*, 8th Edition, Wiley.
- D. C. Montgomery and G. C. Runger (2018), *Applied Statistics and Probability for Engineers*, 6th Edition, Wiley.
- R. H. Myers, D. C. Montgomery and C. M. Anderson-Cook (2016), *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*, 4th Edition, Wiley.
- J. Neyman (1925), Contributions of the Theory of Small Samples Drawn from a Finite Population, *Biometrika*, **17**, 472-479.
- N. K. Nguyen and K. T. Blagoeva (2014), Incomplete Block Designs, *International Encyclopedia of Statistical Science*, 653-655.
- N. K. Nguyen and S. Stylianou (2013), Constructing Definitive Screening Designs Using Cyclic Generators, *Journal of Statistical Theory and Practice*, **7**, 713-724.
- G. W. Oehlert (2000), *A First Course in Design and Analysis of Experiments*, 1st Edition, W. H. Freeman and Company.
- R. E. A. C. Paley (1933), On Orthogonal Matrices, *Journal of Mathematics and Physics*, **12**, 311-320.
- R. L. Plackett and J. P. Burman (1946), The Design of Optimum Multifactorial Experiments, *Biometrika*, **33**, 305-325.
- D. Raghavarao and L. V. Padgett (2005), *Block Designs: Analysis, Combinatorics, and Applications*, 1st Edition, World Scientific Publishing.
- D. Rasch, J. Pilz, L. R. Verdooren and A. Gebhardt (2011), *Optimal Experimental Design with R*, 1st Edition, Chapman & Hall.

- E. D. Schoen, P. T. Eendebak, A. R. Vazquez and P. Goos (2022), Systematic Enumeration of Definitive Screening Designs, *Statistics and Computing*, **32**, 109.
- J. Seberry (2017), *Orthogonal Designs: Hadamard Matrices, Quadratic Forms and Algebras*, 1st Edition, Springer.
- A. R. Vazquez, P. Goos and E. D. Schoen (2019), Projections of Definitive Screening Designs by Dropping Columns: Selection and Evaluation, *Technometrics*, **62(1)**, 37-47.
- R. Walpole and R. Myers (2011), *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, 8th Edition, Pearson.
- J. C. Wang and C. F. J. Wu (1995), A Hidden Projection Property of Plackett-Burman and Related Designs, *Statistica Sinica*, **5**, 235-250.
- C. F. J. Wu and M. S. Hamada (2009), *Experiments: Planning, Analysis and Optimization*, 2nd Edition, Wiley.
- L. Xiao, D. K. J. Lin and F. Bai (2012), Constructing Definitive Screening Designs Using Conference Matrices, *Journal of Quality Technology*, **44(1)**, 2-8.
- F. Yates and W. G. Cochran (1938), The Analysis of Groups of Experiments, The *Journal of Agricultural Science*, **28**, 556-580.
- K. Q. Ye (1998), Orthogonal Column Latin Hypercubes and Their Application in Computer Experiments, *Journal of the American Statistical Association*, **93(444)**, 1430–1439.