

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΜΕΛΕΤΗ ΑΠΟΔΟΧΗΣ ΕΞΑΡΤΗΜΑΤΩΝ  
ΜΕΣΩ ΤΕΣΤ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ**

Μαρία Π. Αλμυράντη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς  
Ιούνιος 2007



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΜΕΛΕΤΗ ΑΠΟΔΟΧΗΣ ΕΞΑΡΤΗΜΑΤΩΝ  
ΜΕΣΩ ΤΕΣΤ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ**

Μαρία Π. Αλμυράντη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς  
Ιούνιος 2007

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- ..... (Επιβλέπων)
- .....
- .....

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**



**DEPARTMENT OF STATISTICS  
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN  
APPLIED STATISTICS**

**START-UP DEMONSTRATION TESTS**

By

**Maria P. Almiradi**

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance  
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of  
the requirements for the degree of Master of Science in  
Applied Statistics

Piraeus, Greece  
June 2007

РАНЕКІШНО ТЕРАПІА

*Στους γονείς μου  
Παναγιώτη και Φρειδερίκη  
και στον αδερφό μου Κυριάκο*

РАНЕКІШНО ТЕРАПІА



## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου αλλά και τον αδερφό μου για την αμέριστη συμπαράστασή τους όλα αυτά τα χρόνια, χωρίς τη βοήθεια των οποίων δε θα είχα πετύχει σχεδόν τίποτα από τα όσα έχω κάνει μέχρι σήμερα, τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κούτρα Μάρκο για την άψογη συνεργασία που είχαμε αλλά και για τη μεγάλη βοήθεια που μου προσέφερε προκειμένου να φέρω σε πέρας αυτή τη διπλωματική εργασία, τον κ. Αντζουλάκο Δημήτριο και τον κ. Πολίτη Κωσταντίνο για το διάβασμα της εν λόγω διπλωματικής καθώς και δυο πολύ ξεχωριστά άτομα που μου συμπαράσταθηκαν καθόλη τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής.

РАВЕЉИЧНО ТЕРАЈА

# Περίληψη

Σε ένα τεστ εκκίνησης (Start-up Demonstration Test), προκειμένου να αποφασίσουμε αν ένα εξάρτημα/προϊόν είναι ποιοτικά αποδεκτό, το υποβάλλουμε σε διαδοχικές εκκινήσεις λειτουργίας και με βάση τα αποτελέσματα που προκύπτουν, λαμβάνουμε τη σχετική απόφαση αποδοχής ή απορριψής του.

Η διαδικασία ελέγχου μέσω τεστ εκκίνησης βασίζεται σε διάφορα κριτήρια που σχετίζονται με τον αριθμό των επιτυχημένων και αποτυχημένων εκκινήσεων λειτουργίας και μελετάται είτε κάτω από την υπόθεση ανεξαρτησίας των δοκιμών είτε όταν υπάρχει Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ τους. Σκοπός σε κάθε τεστ είναι ο όσο το δυνατό πιο γρήγορος και αξιόπιστος έλεγχος της καταλληλότητας διαφόρων εξαρτημάτων.

Παραδείγματα εξαρτημάτων για τα οποία εφαρμόζονται συνήθως τέτοιες διαδικασίες είναι: μηχανήματα χορτοκοπτικής, αντλίες νερού, εξωλέμβιες μηχανές, αλυσοπρίονα, εκχιονιστικά μηχανήματα, Η/Υ καθώς και άλλες ηλεκτρικές συσκευές.

Σκοπός της διπλωματικής είναι η παρουσίαση και η μελέτη των κυριότερων διαδικασιών που έχουν προταθεί για τη λήψη απόφασης μέσω τεστ εκκίνησης, καθώς και των μεθόδων εκτίμησης παραμέτρων στην περίπτωση που διαθέτουμε δεδομένα που έχουν προκύψει από τεστ εκκίνησης.

РАВЕЛЪТНО ТЕРАА

# Abstract

In a start-up demonstration test we wish to decide if an equipment is qualitatively acceptable; we submit it to continuous start-ups and taking into accounts the outcomes we decide either to accept or to reject the equipment.

The decision made in a start-up demonstration test is based on different criteria, which are related to the number of successful or not start-ups. These criteria are examined under the assumption of independence between the start-ups, or when a Markovian dependence between them is present. In every start-up demonstration test the aim is to arrive at a decision as fast as possible.

Examples of application of start-up demonstration tests include the examination of lawn mowers, water pumps, outboard motors, chain saws, snow blowers and other power operation equipments.

The aim of the present dissertation is the presentation and study of the basic processes that have been proposed for the acceptance or rejection of an equipment through start-up demonstration test, and also the methods of inference of the parameters in case that we have statistical data from a start-up procedure.

РАВЕЛЪТНО ТЕРАА

# Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων	xv
Κατάλογος Σχημάτων	xvii
Κατάλογος Συντομογραφιών	xix

## 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Στατιστικός έλεγχος ποιότητας και τεστ εκκίνησης	1
1.2 Κριτήρια λήψης απόφασης που σχετίζονται με τεστ εκκίνησης	2

## 2 ΑΠΑΛΑ ΤΕΣΤ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ

2.1 Τεστ εκκίνησης με κριτήριο τον αριθμό των επιτυχημένων δοκιμών	6
2.2 Τεστ εκκίνησης με κριτήριο τον αριθμό των συνεχόμενων επιτυχημένων δοκιμών	9
2.2.1 Η συνάρτηση πιθανότητας του μήκους	9
2.2.2 Μέσο μήκος	16
2.2.3 Εκτίμηση της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης	20
2.3 CS τεστ εκκίνησης με Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ των μονάδων	26
2.3.1 Η Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ	28
2.3.2 Μέσο μήκος	32
2.3.3 Εκτίμηση της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης	27

## 3 ΤΕΣΤ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ ΠΟΥ ΒΑΣΙΖΟΝΤΑΙ ΣΤΟΝ ΑΡΙΘΜΟ

### ΤΩΝ ΕΠΙΤΥΧΗΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΤΥΧΗΜΕΝΩΝ ΕΚΚΙΝΗΣΕΩΝ

3.1 Τεστ εκκίνησης για $c$ συνεχόμενες επιτυχίες και $d$ συνολικά αποτυχίες με ανεξάρτητες δοκιμές	40
3.1.1 Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους	41

3.1.2	Μέσο μήκος.....	44
3.2	Μια διαφορετική προσέγγιση του CSTF τεστ .....	46
3.3	Εκτίμηση της πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης.....	52
3.4	Τεστ εκκίνησης για $c$ συνεχόμενες επιτυχίες και $d$ συνολικά αποτυχίες με Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ των δοκιμών .....	57
3.4.1	Συνάρτηση πιθανότητας.....	58
3.4.2	Συνάρτηση κατανομής .....	62
3.4.3	Μέσο μήκος.....	66
3.5	Εναλλακτικά τεστ εκκίνησης που βασίζονται στον αριθμό των επιτυχιών και αποτυχιών .....	68
3.5.1	Τεστ εκκίνησης για $c$ συνεχόμενες επιτυχίες και $d$ συνεχόμενες αποτυχίες .....	68
3.5.2	Τεστ εκκίνησης για $c$ συνολικά επιτυχίες και $d$ συνεχόμενες αποτυχίες .....	69
3.5.3	Τεστ εκκίνησης για $c$ συνολικά επιτυχίες και $d$ συνολικά αποτυχίες .....	70
3.6	Πρακτικές μέθοδοι για την επιλογή του κατάλληλου τεστ εκκίνησης .....	71
3.6.1	Εύρεση του «βέλτιστου» τεστ εκκίνησης .....	71
3.6.2	Σύγκριση μεταξύ τεστ εκκίνησης.....	74
<b>4</b>	<b>ΤΕΣΤ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ ΜΕ ΔΙΟΡΘΩΤΙΚΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ</b>	
4.1	Μοντέλο με μια διορθωτική ενέργεια με ανεξάρτητες δοκιμές εκκίνησης .....	78
4.1.1	Συνάρτηση πιθανότητας και μέσο μήκος.....	79
4.1.2	Εκτίμηση των άγνωστων πιθανοτήτων επιτυχίας εκκίνησης .....	84
<b>5</b>	<b>ΔΙΑΦΟΡΑ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ ΤΕΣΤ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ</b>	
5.1	Τεστ εκκίνησης με τη χρήση μιας στατιστικής συνάρτησης σάρωσης, με ανεξάρτητες δοκιμές.....	87



5.1.1	Συνάρτηση πιθανότητας και μέσο μήκος.....	88
5.1.2	Εκτίμηση της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης...	95
5.2	Τεστ εκκίνησης με τη χρήση μιας στατιστικής συνάρτησης σάρωσης, όταν οι δοκιμές έχουν Μαρκοβιανή εξάρτηση .....	100
5.2.1	Πιθανογεννήτρια συνάρτηση και μέσο μήκος .....	100
5.3	Τεστ εκκίνησης δυο φάσεων.....	102
5.3.1	Συνάρτηση πιθανότητας και μέσο μήκος.....	103
<b>Παραρτήματα</b>	.....	106
Π1.	Προγράμματα <i>Matlab</i> .....	106
<b>Περίληψη</b>		
<b>Abstract</b>		
<b>Βιβλιογραφία</b>	.....	123

## Κατάλογος πινάκων

2.2.1	Πιθανότητα να συμβούν 10 συνεχόμενες επιτυχημένες εκκινήσεις σε 10 ακριβώς δοκιμές εκκίνησης, σε 20 ή λιγότερες, και σε 40 ή περισσότερες, για $p = 0.5, 0.7, 0.9$ και $0.99$ .....	15
2.2.2	Αριθμός των δοκιμών μέσα στις οποίες συμβαίνει η αποδοχή του εξαρτήματος με πιθανότητα 50%, 90% και 95%, θεωρώντας $p = 0.90, 0.95$ και $0.99$ .....	15
2.2.3	Μέσο μήκος και διακύμανση του μήκους ενός CS τεστ εκκίνησης με $c = 10$ , για διάφορες τιμές του $p$ . .....	17
2.3.1	Πιθανότητα για μια μονάδα να έχει 10 συνεχόμενες επιτυχημένες εκκινήσεις σε 10 ακριβώς δοκιμές, σε 20 ή λιγότερες, και σε 30 ή περισσότερες εκκινήσεις για διάφορες τιμές των πιθανοτήτων επιτυχίας $(p_0, p_1, p_2)$ . .....	31
3.3.1	Σύγκριση εκτιμητών $\hat{p}_{AS}$ και $\hat{p}_{SF}$ .....	56
3.4.1	Εκτιμώμενες και πραγματικές πιθανότητες κατανομής $P[Z_{8,5} = z]$ για ένα Μαρκοβιανό μοντέλο με $p_0 = 0.7, p_1 = 0.9, p_2 = 0.233$ . .....	65
3.4.2	Εκτιμώμενες και πραγματικές πιθανότητες κατανομής $P[Z_{8,5} = z]$ για ένα i.i.d μοντέλο με $p = 0.7$ . .....	66
3.6.1	Προσδιορισμός του βέλτιστου CSTF τεστ για διάφορες τιμές των $p_0, p_A$ για δοσμένα $\alpha=0.05, \beta=0.05$ . Οι τελευταία στήλη υπολογίζεται για $p = p_A$ .....	74
3.6.2	Τεστ εκκίνησης που ικανοποιούν τα κριτήρια για δοσμένες τιμές των $p_0, p_A$ , όταν $\alpha = 0.05, \beta = 0.05$ . .....	75
3.6.3	Τεστ εκκίνησης που ικανοποιούν τα κριτήρια για δοσμένες τιμές των $p_0, p_A$ , όταν $\alpha = 0.05, \beta = 0.05$ . .....	77
4.1.1	Αποτελέσματα (μέσω προσομοίωσης) για τεστ με μια διορθωτική ενέργεια για $n = 10$ ίδιες μονάδες με $c = 10$ και $p_0 = 0.8, p_1 = 0.9$ .....	85

5.1.1	Προσομοιωμένα αποτελέσματα ενός τεστ με τη χρήση μιας στατιστικής συνάρτησης σάρωσης για $n = 20$ ίδιες μονάδες ενός εξοπλισμού με $p = 0.9, r = 4$ και $k = 9$ .....	98
-------	---	----

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

## Κατάλογος σχημάτων

2.1.1	Η αθροιστική πιθανότητα κατανομής των δοκιμών που απαιτούνται για να συμβούν $c$ επιτυχημένες εκκινήσεις, για $p = 0.9, 0.95$ και $0.99$ .....	7
2.1.1	Η αθροιστική πιθανότητα κατανομής των δοκιμών που απαιτούνται για να συμβούν $c = 5, 10, 20$ επιτυχημένες εκκινήσεις, για $p = 0.99$ .....	8
2.2.1	Πιθανότητα αποδοχής για $c = 10$ και $p = 0.99, p = 0.9, p = 0.7$ και $p = 0.5$ .....	12
2.2.2	Πιθανότητα αποδοχής για $c = 4$ και $p = 0.99, p = 0.9, p = 0.7$ και $p = 0.5$ .....	13
2.2.3	Πιθανότητα αποδοχής για $c = 30$ και $p = 0.99, p = 0.9, p = 0.7$ και $p = 0.5$ .....	13
2.2.4	Πιθανότητα αποδοχής για $p = 0.99$ και $c = 10, 20, 40$ και $80$ .....	14
2.2.5	Το μέσο μήκος του τεστ για $c = 10$ .....	18
2.2.6	Το μέσο μήκος του τεστ για $c = 20$ .....	18
2.2.7	Μέσο μήκος για $c=8, 25$ και $50$ .....	19
2.2.8	Διακύμανση του μήκους $c=5, 10$ και $30$ .....	19
2.3.1	Πιθανότητα να απαιτούνται συνολικά $y$ ή λιγότερες δοκιμές ώστε να είναι το εξάρτημα για $c = 10$ και $p_0 = 0.8, p_1 = 0.9, p_2 = 0.9$ .....	30
2.3.2	Μέσο μήκος του τεστ για συσχετισμένες δοκιμές εκκίνησης συναρτήσει του $p_1$ για $c = 10, p_2 = 0.8, p_0 = 0.99$ .....	34
2.3.3	Μέσο μήκος του τεστ για συσχετισμένες δοκιμές εκκίνησης συναρτήσει του $p_2$ για $c = 10, p_1 = 0.95, p_0 = 0.99$ .....	34
2.3.4	Διακύμανση του μήκους του τεστ συναρτήσει του $c$ , για $p_1 = 0.95$ , $p_2=0.8, p_0=0.99$ .....	35
2.3.5	Διακύμανση του μήκους του τεστ συναρτήσει του $p_1$ , για $c = 10$ , $p_2=0.8, p_0=0.99$ .....	35

2.3.6	Διακύμανση του μήκους του τεστ συναρτήσει του $p_2$ , για $c = 10$ , $p_1=0.95, p_0=0.9$ .....	36
3.1.1	Πιθανότητα το τεστ να τελειώσει σε $y$ ή λιγότερες δοκιμές, συναρτήσει του $c$ , για $d = 5$ και $p = 0.9$ .....	43
3.1.2	Πιθανότητα το τεστ να τελειώσει σε $y$ ή λιγότερες δοκιμές, συναρτήσει του $d$ , για $c = 10$ και $p = 0.9$ .....	44
3.1.3	Μέσο μήκος του τεστ συναρτήσει του $d$ με $p = 0.9$ και $c = 10$ .....	45
3.1.4	Μέσο μήκος του τεστ συναρτήσει του $c$ με $p = 0.9$ και $d = 5$ .....	46
3.2.1	Χώρος καταστάσεων και οι πιθανότητες μετάβασης ενός CSTF.....	47
3.4.1	Πιθανότητα αποδοχής συναρτήσει του $d$ , για $c=9$ με $p_0 = 0.9, p_1 = 0.8$ και $p_2 = 0.7$ .....	59
3.4.2	Πιθανότητα αποδοχής συναρτήσει του $c$ , για $d = 5$ με $p_0 = 0.9, p_1 = 0.8$ και $p_2 = 0.7$ .....	60
3.4.3	Πιθανότητα αποδοχής συναρτήσει του $d$ , για $c = 9$ , $p_0 = 0.9, p_2 = 0.7$ και $p_1$ μεταβλητό.....	60
3.4.4	Πιθανότητα αποδοχής συναρτήσει του $d$ , για $c = 9$ , $p_1 = 0.8, p_2 = 0.7$ και $p_0$ μεταβλητό .....	61
3.4.5	Πιθανότητα αποδοχής συναρτήσει του $d$ , για $c = 9$ , $p_1 = 0.8, p_0 = 0.9$ και $p_2$ μεταβλητό .....	61
3.4.6	Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ $Z_{8,5}$ για ανεξάρτητες δοκιμές με $p = 0.7$ και για Μαρκοβιανή εξάρτηση με $p_0 = 0.7, p_1 = 0.9, p_2 = 0.233$ .....	63
3.4.7	Μέσο μήκος συναρτήσει του $d$ , για Μαρκοβιανή αλυσίδα με $p_0 = 0.9, p_1 = 0.8, p_2 = 0.7$ και $c=9$ .....	67
3.4.8	Μέσο μήκος συναρτήσει του $c$ , για Μαρκοβιανή αλυσίδα με $p_0 = 0.9, p_1 = 0.8, p_2 = 0.7$ και $d=5$ . .....	67
4.1.1	Μέσο μήκος ενός τεστ με μια διορθωτική ενέργεια με $c = 10$ και $p_0 = 0.8$ συναρτήσει του $p_1$ .....	81

4.1.2 Μέσο μήκος ενός τεστ με μια διορθωτική ενέργεια με $c = 10$ και $p_0 = 0.95$ συναρτήσει του $p_1$ .	81
4.1.3 Μέσο μήκος ενός τεστ με μια διορθωτική ενέργεια με $c = 10$ και $p_1 = 0.95$ συναρτήσει του $p_0$ .	82
4.1.4 Μέσο μήκος ενός τεστ με μια διορθωτική ενέργεια με $p_0 = 0.6$ συναρτήσει του $p_1$ (δεξιά) και ενός CS (αριστερά), για $c = 10$ .	82
5.1.1 Μέσος χρόνος αναμονής του τεστ συναρτήσει του $q$ , για $k=9$ και $r=4$ .	92
5.1.2 Μέσος χρόνος αναμονής του τεστ συναρτήσει του $p$ , για $k=9$ και $r=4$ .	92
5.1.3 Μέσος χρόνος αναμονής του τεστ συναρτήσει του $k$ , για $p=0.9$ και $r=4$ .	93
5.1.4 Μέσος χρόνος αναμονής του τεστ συναρτήσει του $r$ , για $p=0.9$ και $k=9$ .	93
5.1.5 Διασπορά του χρόνου αναμονής ενός τεστ με τη χρήση μιας στατιστικής συνάρτησης σάρωσης για $k = 9, r = 4$ , συναρτήσει του $p$ .	94

## Κατάλογος συντομογραφιών

τ.μ.	τυχαία μεταβλητή
σ.π.π.	συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
α.σ.κ.	αθροιστική συνάρτηση κατανομής
i.i.d.	ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli
δ.ε.	διάστημα εμπιστοσύνης
E.M.Π.	εκτιμητήρια μέγιστης πιθανοφάνειας
E.M.P.	εκτιμητήρια μεθόδου ροπών
CS	Τεστ εκκίνησης για $c$ συνεχόμενες επιτυχίες
CSTF	Τεστ εκκίνησης για $c$ συνεχόμενες επιτυχίες και $d$ συνολικά αποτυχίες
CSCF	Τεστ εκκίνησης για $c$ συνεχόμενες επιτυχίες και $d$ συνεχόμενες αποτυχίες
TSCF	Τεστ εκκίνησης για $c$ συνολικά επιτυχίες και $d$ συνεχόμενες αποτυχίες
TSTF	Τεστ εκκίνησης για $c$ συνολικά επιτυχίες και $d$ συνολικά αποτυχίες

# РАСЧЕТНО ТЕРА



# 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Στατιστικός έλεγχος ποιότητας και τεστ εκκίνησης

Η επιλογή ενός προϊόντος-εξαρτήματος καθορίζεται κυρίως από δυο παράγοντες: την ποιότητά του και την τιμή του. Ο στατιστικός έλεγχος ποιότητας αποτελεί μια μέθοδο ελέγχου παραγωγικών διεργασιών για τη βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων, ενώ επιπλέον αφορά τη χρήση στατιστικών μεθόδων για την ανάλυση της διαδικασίας διεκπεραίωσης ενός έργου και των εκροών του. Ένας από τους βασικούς στόχους του είναι η ανακάλυψη μη συμμορφούμενων με τις προδιαγραφές παραγόμενων προϊόντων η οποία σηματοδοτεί τη λήψη διορθωτικών ενεργειών για την απομάκρυνση των αιτιών που είναι υπεύθυνες για τις αποκλίσεις, συμβάλλοντας έτσι στη διατήρηση της ποιότητας των προϊόντων.

Το τεστ εκκίνησης αποτελεί μια διαδικασία στατιστικού ελέγχου η οποία διεξάγεται πριν το εξάρτημα προωθηθεί προς την κατανάλωση, με σκοπό την απόρριψη των ελαττωματικών ή τη βελτίωση τους, και βασίζεται στην επιτυχημένη εκκίνηση λειτουργίας του. Είναι προφανές ότι, μέσα από τη συγκεκριμένη διαδικασία ελέγχου, αποδεικνύεται η αξιοπιστία του εκάστοτε εξαρτήματος. Για παράδειγμα, ένα εργοστάσιο παραγωγής σχεδιάζει να αγοράσει ένα πλήθος συσκευών. Πριν ληφθεί η απόφαση αγοράς, ο μηχανικός παραγωγής αναλαμβάνει τον έλεγχο της ποιότητας των νέων συσκευών μέσω στατιστικού ελέγχου χρησιμοποιώντας τεστ εκκίνησης. Ο όρος *τεστ εκκίνησης* περιλαμβάνει τη διαδικασία ελέγχου ενός επιλεγμένου τυχαίου δείγματος (π.χ σωρός) συσκευών ιδίου τύπου οι οποίες υποβάλλονται σε διαδοχικές εκκινήσεις, που είναι άλλοτε ανεξάρτητες και ισόνομες δοκιμές Bernoulli (i.i.d) και άλλοτε συσχετισμένες μεταξύ τους, και με βάση ένα καθορισμένο κριτήριο λαμβάνεται η σχετική απόφαση αποδοχής ή απόρριψης του. Το κριτήριο που χρησιμοποιείται κάθε φορά είναι αυτό που διαφοροποιεί τα τεστ εκκίνησης και στηρίζεται στον αριθμό των επιτυχημένων ή μη εκκινήσεων των συσκευών. Ανεξάρτητα από το είδος

του κριτηρίου υπάρχουν ποσότητες όπως το μήκος του τεστ, η κατανομή του και η εκτίμηση της πιθανότητας της επιτυχίας εκκίνησης οι οποίες πρέπει να υπολογίζονται. Στόχος κάθε τεστ αποτελεί η λήψη ορθής απόφασης αποδοχής ή απόρριψης του μηχανήματος με χρήση όσο το δυνατό λιγότερων δοκιμών.

Λόγω λοιπόν της πρακτικής αξίας που παρουσιάζει η δημιουργία αξιόπιστων διαδικασιών ελέγχου της καταλληλότητας εξαρτημάτων μέσω τεστ εκκίνησης, τα τελευταία χρόνια υπάρχει αυξανόμενο ερευνητικό ενδιαφέρον στην περιοχή αυτή. Αντικείμενο της παρούσης εργασίας αποτελεί η μελέτη και παρουσίαση των διαφόρων τεστ εκκίνησης που έχουν προταθεί, καθένα από τα οποία βασίζεται σε διαφορετικό κριτήριο λήψης απόφασης.

## 1.2 Κριτήρια λήψης απόφασης που σχετίζονται με τεστ εκκίνησης

Η μελέτη των τεστ εκκίνησης φαίνεται να ξεκινάει από τους Hahn and Shapiro (1967) οι οποίοι μελέτησαν απλά τεστ που βασίζονται στην επίτευξη συγκεκριμένου αριθμού επιτυχημένων εκκινήσεων (*Successful start-up tests*). Το μόνο κριτήριο λήψης απόφασης στο συγκεκριμένο μοντέλο είναι να υπάρξουν  $c$  επιτυχίες (όχι απαραίτητα συνεχόμενες) έτσι ώστε να γίνει αποδεκτό το εξάρτημα.

Στη συνέχεια οι Hahn and Gage (1983), πρότειναν τα συνεχόμενα τεστ εκκίνησης (*Consecutive start-up tests*) σύμφωνα με τα οποία ένα προϊόν γίνεται αποδεκτό εάν συμβούν  $c$  συνεχόμενες επιτυχημένες προσπάθειες εκκίνησης, όπου το  $c$  είναι ένας προκαθορισμένος αριθμός. Στο συγκεκριμένο τεστ οι δοκιμές εκκίνησης θεωρούνται ανεξάρτητες και ισόνομες (i.i.d) δοκιμές Bernoulli, με γνωστή και σταθερή πιθανότητα επιτυχίας εκκίνησης ίση με  $p$ . Για τη συγκεκριμένη κατηγορία των τεστ εκκίνησης χρησιμοποιήθηκε αργότερα ο όρος CS (*Consecutive Success*). Το τεστ αυτό αποτέλεσε αντικείμενο έρευνας και για τους Viveros and Balakrishnan (1993) οι οποίοι γενικεύσαν τα αποτελέσματα των Hahn and Gage θεωρώντας ότι το αποτέλεσμα της κάθε δοκιμής εξαρτάται από την προηγούμενη.

Οι Balakrishnan Balasubramanian and Viveros (1995), στην προσπάθεια να βελτιώσουν την πιθανότητα επιτυχίας εκκίνησης, μελέτησαν το πρόβλημα μέσω μιας διαφορετικής προσέγγισης εισάγοντας την έννοια της διορθωτικής παρέμβασης. Η συγκεκριμένη θεωρία βρίσκει εφαρμογή στο απλό διορθωτικό μοντέλο (*Single Corrective Action Model*) για ανεξάρτητες δοκιμές στο οποίο η μοναδική διορθωτική πράξη στο

εξάρτημα γίνεται τη στιγμή που συμβαίνει η *πρώτη* αποτυχία. Γενικεύοντας τη μεθοδολογία αυτή προκύπτει ένα ακολουθιακό διορθωτικό μοντέλο στο οποίο η παρέμβαση στο εξάρτημα γίνεται κάθε φορά που συμβαίνει μια αποτυχία. Όπως εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς η εισαγωγή των τεστ εκκίνησης με διορθωτική παρέμβαση αποσκοπεί στη βελτίωση της ποιότητας ενός πιθανώς ελαττωματικού προϊόντος έτσι ώστε να μην απορριφθεί.

Με το ίδιο διορθωτικό μοντέλο αλλά κάτω από την υπόθεση Μαρκοβιανής εξάρτησης μεταξύ των προσπαθειών εκκίνησης ασχολήθηκαν και οι Balakrishnan, Mohanty and Aki(1997)

Οι Koutras and Balakrishnan (1999) πρότειναν ένα τεστ εκκίνησης, τόσο για ανεξάρτητες όσο και για συσχετισμένες δοκιμές, το οποίο με τη χρήση μιας απλής στατιστικής συνάρτησης σάρωσης οδηγεί στην πρόωρη απόρριψη ενός πιθανώς ελαττωματικού εξαρτήματος. Πρότειναν λοιπόν τα ακόλουθα κριτήρια:

1. Εάν το εξάρτημα αποτύχει να ξεκινήσει στις  $r - 1$  πρώτες δοκιμές, τότε μια ακόμη αποτυχία σε κάποια από τις συνεχόμενες δοκιμές θα οδηγήσει σε απόρριψη του εξαρτήματος.
2. Εάν το εξάρτημα ξεκινήσει επιτυχημένα στις  $r - 1$  πρώτες δοκιμές, τότε θα έχουμε απόρριψη μόνο αν συμβούν δυο αποτυχίες που να απέχουν μεταξύ τους απόσταση το πολύ  $k$ .
3. Εάν δε συμβεί ούτε το (1) ούτε το (2) μέσα σε ένα προκαθορισμένο αριθμό δοκιμών (έστω  $N$ ), τότε το εξάρτημα γίνεται αποδεκτό.

Οι Balakrishnan and Chan (1999) πρότειναν ένα πιο πολύπλοκο τεστ εκκίνησης το οποίο περιλαμβάνει δυο στάδια και διευκολύνει στη γρήγορη απόρριψη ενός πιθανώς χαλασμένου εξαρτήματος ενώ ταυτόχρονα παρέχει τη δυνατότητα σε όποιον κάνει το τεστ να βάλει πιο αυστηρούς περιορισμούς για την αποδοχή του εξαρτήματος, στην περίπτωση που συμβούν περισσότερες αποτυχίες από τον προκαθορισμένο αριθμό. Τα κριτήρια που πρότειναν για την λήψη απόφασης είναι:

1. Γίνεται αποδοχή του εξαρτήματος (στο πρώτο στάδιο) αν συμβούν  $c_1$  επιτυχίες πριν από  $d_1$  αποτυχίες.
2. Αν συμβούν  $d_1$  αποτυχίες πριν από  $c_1$  επιτυχίες, τότε το εξάρτημα γίνεται αποδεκτό αν  $c_2$  επιτυχίες παρατηρηθούν πριν από τις επόμενες  $d_2$  αποτυχίες.

3. Το εξάρτημα απορρίπτεται αν δε συμβούν  $c_1$  επιτυχίες πριν από  $d_1$  αποτυχίες και επιπλέον ούτε  $c_2$  επιτυχίες παρατηρηθούν πριν από τις επόμενες  $d_2$  αποτυχίες.

Οι Balakrishnan and Chan (2000) συνεχίζοντας την προσπάθεια εύρεσης τεστ εκκίνησης που να οδηγούν στη γρηγορότερη αλλά και πιο αξιόπιστη λήψη απόφασης, πρότειναν μια τροποποίηση του CS, για i.i.d Bernoulli δοκιμές, σύμφωνα με την οποία το τεστ τερματίζεται και το εξάρτημα απορρίπτεται εάν ένας προκαθορισμένος αριθμός αποτυχιών συμβεί πριν από τον προκαθορισμένο αριθμό των συνεχόμενων επιτυχιών. Σύμφωνα με το τεστ αυτό, το εξάρτημα γίνεται αποδεκτό εάν παρατηρηθούν  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες πριν από  $d$  συνολικά αποτυχίες ενώ απορρίπτεται αν  $d$  συνολικά αποτυχίες συμβούν πριν από  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες. Για το συγκεκριμένο τεστ χρησιμοποιείται αργότερα ο όρος CSTF (*Consecutive Success Total Failures*).

Συνεχίζοντας τη μελέτη πάνω στο CSTF τεστ ο Martin (2003) προσπάθησε να γενικεύσει τα αποτελέσματα των Balakrishnan and Chan (2000), θεωρώντας ότι οι δοκιμές έχουν Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ τους. Στη μεθοδολογία που πρότεινε θεώρησε ως δεδομένο το χρόνο που συμβαίνει η πρώτη αποτυχία υπολογίζοντας τις ποσότητες που σχετίζονται με το τεστ αυτό, ενώ ταυτόχρονα σύγκρινε τα αποτελέσματα του τεστ για ανεξάρτητες και συσχετισμένες δοκιμές με σκοπό να βρει το κατάλληλο μοντέλο για κάθε περίπτωση.

Με το CSTF τεστ αλλά μέσα από μια εντελώς διαφορετική προσέγγιση ασχολήθηκαν και οι Smith and Griffith (2005), θεωρώντας τις δοκιμές εκκίνησης ως καταστάσεις μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας.

Πάνω στον τρόπο δημιουργίας του CSTF τεστ βασίζεται και η εύρεση ακόμα πιο πολύπλοκων τεστ στα οποία η αποδοχή ή απόρριψη ενός εξαρτήματος εξαρτάται από το συνεχόμενο (ή συνολικό) αριθμό επιτυχιών και συνεχόμενο (ή συνολικό) αριθμό αποτυχιών. Αναφορικά τα τεστ αυτά είναι τα εξής:

1. Τεστ για συνεχόμενες επιτυχίες και συνεχόμενες αποτυχίες (CSCF): στο τεστ αυτό η απόφαση αποδοχής λαμβάνεται αν  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες συμβούν πριν από  $d$  συνεχόμενες αποτυχίες.
2. Τεστ για συνολικές επιτυχίες και συνεχόμενες αποτυχίες (TSCF): στο τεστ αυτό η απόφαση αποδοχής λαμβάνεται αν  $c$  συνολικές επιτυχίες συμβούν πριν από  $d$  συνεχόμενες αποτυχίες.

3. Τεστ για συνολικές επιτυχίες και συνολικές αποτυχίες (TSTF): στο τεστ αυτό η απόφαση αποδοχής λαμβάνεται αν  $c$  συνολικές επιτυχίες συμβούν πριν από  $d$  συνολικές αποτυχίες.

Όλα τα τεστ εκκίνησης που αναφέρθηκαν παραπάνω αποτελούν σημαντικό εργαλείο για τον τεχνικό ή τον υπεύθυνο ελέγχου ποιότητας στην προσπάθειά του να ελέγξει την αξιοπιστία ενός προϊόντος-εξαρτήματος όσο το δυνατό γρηγορότερα, με μεγαλύτερη ασφάλεια και με το μικρότερο κόστος. Στα κεφάλαια που θα ακολουθήσουν θα γίνει μια λεπτομερής ανάλυση των μοντέλων τεστ εκκίνησης που αναφέρθηκαν παραπάνω.

# 2

## Απλά Τεστ Εκκίνησης

Η διαδικασία ελέγχου ενός εξαρτήματος μέσω απλών τεστ εκκίνησης βασίζεται κυρίως στον αριθμό των επιτυχημένων εκκινήσεων λειτουργίας του. Μια πρώτη μορφή απλού τεστ εκκίνησης δόθηκε από τους Hahn and Shapiro (1967), σύμφωνα με το οποίο ένα εξάρτημα γίνεται αποδεκτό αν επιτευχθεί ένας συγκεκριμένος αριθμός επιτυχημένων εκκινήσεων (όχι απαραίτητα συνεχόμενων). Κάνοντας πιο αυστηρό το προηγούμενο κριτήριο, οι Hahn and Gage (1983) πρότειναν ένα απλό τεστ στο οποίο οι επιτυχημένες προσπάθειες έπρεπε να είναι και συνεχόμενες. Το τεστ αυτό βρίσκει εφαρμογή τόσο στην περίπτωση που μεταξύ των δοκιμών υπάρχει ανεξαρτησία όσο και όταν υπάρχει Μαρκοβιανή εξάρτηση.

### 2.1 Τεστ εκκίνησης με κριτήριο τον αριθμό των επιτυχημένων δοκιμών εκκίνησης

Στο συγκεκριμένο τεστ εκκίνησης η αποδοχή ενός εξαρτήματος εξαρτάται από τον αριθμό των επιτυχημένων προσπαθειών εκκίνησης.

Έστω ότι κάποιο εξάρτημα υποβάλλεται σε ανεξάρτητες δοκιμές εκκίνησης (πειράματα). Σε κάθε δοκιμή είναι πιθανό να συμβούν δυο ενδεχόμενα: επιτυχία (συμβολισμός  $S$ ) ή αποτυχία ( $F$ ) (ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli). Το αποτέλεσμα  $S$  έχει πιθανότητα εμφάνισης ίση με  $p$ , ενώ το αποτέλεσμα  $F$  αντίστοιχα  $1-p$ , όπου  $p$  σταθερό, ίδιο για κάθε δοκιμή. Έχουμε δηλαδή επαναλήψεις του ίδιου πειράματος κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή (τ.μ)  $X$ , η οποία παριστάνει το πλήθος των επαναλήψεων (δοκιμών εκκίνησης) του πειράματος μέχρι να συμβούν  $c$  επιτυχίες, με τον

περιορισμό η τελευταία δοκιμή να δίνει επιτυχία, δηλαδή οι δοκιμές να σταματάνε όταν εμφανισθεί η  $c$  επιτυχία. Όπως είναι φανερό η τυχαία μεταβλητή  $X$  ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή.

Στο τεστ αυτό σκοπός είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας  $Q(x)$  να απαιτούνται ακριβώς  $x$ , όχι αναγκαστικά συνεχόμενες, δοκιμές εκκίνησης μέχρι να συμβούν  $c$  επιτυχημένες εκκινήσεις. Αυτή η πιθανότητα είναι ίση με

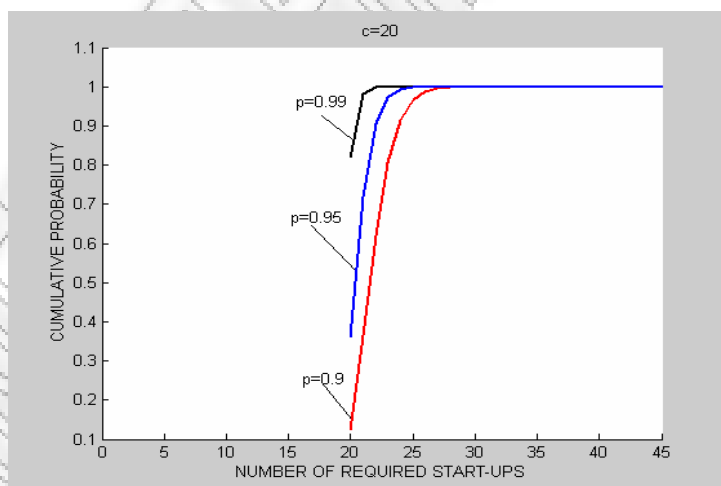
$$Q(x) = \binom{x-1}{c-1} p^c (1-p)^{x-c} = \frac{(x-1)!}{(x-c)!(c-1)!} p^c (1-p)^{x-c}, \quad x = c, c+1, \dots$$

και βρίσκεται συναρτήσει των παραμέτρων  $c, p$ .

Η πιθανότητα αποδοχής ενός εξαρτήματος σε  $y$  ή λιγότερες δοκιμές δίνεται από την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ) της τ.μ.  $X$  και είναι ίση με

$$P(x) = \sum_{x=c}^y Q(x)$$

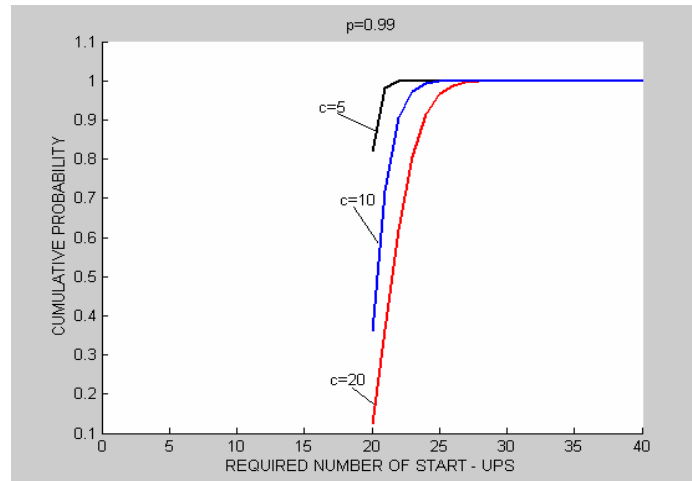
Στα σχήματα που ακολουθούν παρουσιάζεται η επιρροή που έχει η μεταβολή των  $c, p$  στον υπολογισμό τη συγκεκριμένης πιθανότητας.



**Σχήμα 2.1.1:** Η αθροιστική πιθανότητα κατανομής των δοκιμών που απαιτούνται για να συμβούν  $c$  επιτυχημένες εκκινήσεις, για  $p = 0.9, 0.95$  και  $0.99$ .

Από το παραπάνω διάγραμμα είναι φανερό ότι όσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα επιτυχίας εκκίνησης τόσο μεγαλύτερη είναι και η πιθανότητα να γίνει αποδεκτό το εξάρτημα που ελέγχεται. Πιο αναλυτικά η πιθανότητα να συμβούν  $c=20$  επιτυχημένες εκκινήσεις ενός εξαρτήματος μέσα στις πρώτες 20 δοκιμές για  $p = 0.9$  είναι 0.1, ενώ η αντίστοιχη

πιθανότητα για  $p = 0.99$  είναι 0.82. Δηλαδή, όσο πιο μεγάλο είναι το  $p$  τόσο λιγότερες δοκιμές απαιτούνται ώστε να ληφθεί η απόφαση της αποδοχής του εξαρτήματος.



**Σχήμα 2.1.2:** Η αθροιστική πιθανότητα κατανομής των δοκιμών που απαιτούνται για να συμβούν  $c = 5, 10, 20$  επιτυχημένες εκκινήσεις, για  $p = 0.99$ .

Από το παραπάνω διάγραμμα είναι φανερό ότι όσο αυξάνει το  $c$  μειώνεται η πιθανότητα μέσα στο συγκεκριμένο αριθμό δοκιμών να έχουμε αποδοχή. Για παράδειγμα η πιθανότητα να συμβούν  $c = 10$  επιτυχημένες δοκιμές μέσα στις 10 πρώτες δοκιμές για  $p = 0.99$  είναι 0.9, ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα για  $c = 20$  είναι 0.82.

Αξιοσημείωτο είναι ότι οι καμπύλες που προκύπτουν για συγκεκριμένο τεστ εκκίνησης είναι πολύ απότομες, δηλαδή η αθροιστική πιθανότητα των δοκιμών φτάνει πολύ γρήγορα στην τιμή 1, γεγονός που οφείλεται στο ότι οι  $c$  επιτυχημένες εκκινήσεις δεν είναι συνεχόμενες. Κατά συνέπεια στο συγκεκριμένο μοντέλο η αποδοχή μιας μονάδας του εξοπλισμού είναι πολύ πιθανό να συμβεί αρκετά γρήγορα, γεγονός που καθιστά το κριτήριο αρκετά ελαστικό (από τα Σχήματα 2.1.1, 2.1.2 είναι φανερό ότι για όλες τις τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν είναι βέβαιο ότι εντός των 25 πρώτων δοκιμών θα έχουμε οδηγηθεί σε αποδοχή της μονάδας!). Συνεπώς, η απόφαση σχετικά με την αξιοπιστία του εξοπλισμού μπορεί να οδηγήσει πιθανότατα στην αποδοχή ελαττωματικών προϊόντων. Για το λόγο αυτό είναι επιτακτική η εύρεση κάποιου πιο αυστηρού κριτηρίου που να εξασφαλίζει μόνο την αποδοχή των πιο αξιόπιστων εξαρτημάτων.



## 2.2 Τεστ εκκίνησης με κριτήριο τον αριθμό των συνεχόμενων επιτυχημένων δοκιμών εκκίνησης, με ανεξάρτητες δοκιμές εκκίνησης

Η διαδικασία ελέγχου μέσω τεστ εκκίνησης για συνεχόμενες επιτυχίες είναι ίδια με αυτή της Ενότητας 2.1 με τον περιορισμό ότι οι  $c$  επιτυχημένες εκκινήσεις πρέπει να είναι και *συνεχόμενες*. Το συγκεκριμένο τεστ θα συμβολίζεται στη συνέχεια με τον όρο CS τεστ (Consecutive Successful start-ups demonstration test).

### 2.2.1 Η συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ

Έστω λοιπόν ότι  $n$  ίδια εξαρτήματα υποβάλλονται σε CS τεστ θεωρώντας τις δοκιμές εκκίνησης ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Bernoulli, με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας εκκίνησης.

Στη συνέχεια θα συμβολίσουμε με  $X$  την τ.μ. που παριστάνει τον αριθμό των απαιτούμενων εκκινήσεων ώστε να γίνει αποδεκτό το εξάρτημα, δηλαδή το χρόνο αναμονής μέχρι να τελειώσει το τεστ (ή αλλιώς το μήκος του τεστ).

Η μεταβλητή  $X$  ονομάζεται γενικά *μήκος του τεστ εκκίνησης* και στο συγκεκριμένο τεστ ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή τάξης  $c$ . (βλ. Balakrishnan and Viveros (1993)).

Έστω  $p$  η σταθερή πιθανότητα επιτυχίας εκκίνησης για κάθε δοκιμή και  $c$  ο απαιτούμενος αριθμός των συνεχόμενων επιτυχημένων εκκινήσεων ώστε να γίνει αποδεκτό το εξάρτημα.

Αν συμβολίσουμε με  $P(x) = P(X = x)$  την πιθανότητα να απαιτούνται ακριβώς  $x$  δοκιμές για να έχουμε αποδοχή, τότε η πιθανότητα να απαιτούνται συνολικά το πολύ  $y$  δοκιμές για να έχουμε αποδοχή (αθροιστική συνάρτηση κατανομής των απαιτούμενων δοκιμών) θα δίνεται προφανώς από τον τύπο

$$R(y) = \sum_{x=c}^y P(x).$$

Οι Balakrishnan and Viveros (1993) απέδειξαν ότι η συνάρτηση πιθανότητας  $P(x)$  της τ.μ.  $X$  δίνεται από τον αναδρομικό τύπο

$$P(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ p^c, & x = c \\ (1-p)p^c, & x = c+1, c+2, \dots, 2c \\ (1-p)p^c \left[ 1 - \sum_{t=1}^{x-2c} P(c+t-1) \right], & x = 2c+1, 2c+2, \dots \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Η απόδειξη της παραπάνω σχέσης προκύπτει εύκολα για κάθε κλάδο ξεχωριστά κάνοντας χρήση απλών αρχών της θεωρίας των πιθανοτήτων.

Έτσι, για  $x < c$  είναι φανερό ότι η πιθανότητα να συμβούν  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες σε λιγότερες από  $c$  δοκιμές είναι μηδενική, οπότε

$$P(x) = 0, \quad x < c.$$

Αν θεωρήσουμε στη συνέχεια την περίπτωση  $x = c$ . Τότε η ακολουθία των  $c$  δοκιμών που οδηγούν στην αποδοχή είναι

$$\underbrace{pppppp \dots p}_c = p^c$$

και η πιθανότητα να συμβούν ακριβώς  $c$  επιτυχίες σε  $c$  ανεξάρτητες δοκιμές όπου η πιθανότητα επιτυχίας κάθε δοκιμής είναι  $p$ , θα δίνεται από τον τύπο

$$P(x) = p^c, \quad x = c.$$

Στη συνέχεια, για  $c+1 \leq x \leq 2c$  είναι φανερό ότι, για να συμβούν  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες στις  $c+1$  πρώτες δοκιμές επιβάλλεται η πρώτη δοκιμή να είναι αποτυχία (με πιθανότητα  $(1-p)$ ), και οι επόμενες  $c$  να είναι επιτυχίες (με πιθανότητα  $p^c$ ). Γενικά λοιπόν, η πιθανότητα να συμβεί μια αποτυχία που να ακολουθείται από  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες είναι το γινόμενο των δυο προαναφερθέντων πιθανοτήτων, δηλαδή  $(1-p)p^c$ . Όσο λοιπόν το πλήθος των δοκιμών δεν ξεπερνά τις  $2c$ , ισχύει ότι αν απαιτούνται  $c+r$  δοκιμές έτσι ώστε να έχουμε αποδοχή, θα πρέπει οι τελευταίες  $c$  προσπάθειες εκκίνησης να είναι επιτυχημένες (με πιθανότητα  $p^c$ ), ενώ η αμέσως προηγούμενη (π.χ. η  $r$  προσπάθεια) να είναι αποτυχημένη (με πιθανότητα  $(1-p)$ ). Τα αποτελέσματα των υπόλοιπων  $r-1$  δοκιμών, δηλαδή το πλήθος των επιτυχιών ή αποτυχιών, δεν επηρεάζουν το πείραμα αφού  $r-1 < c$ , δηλαδή η πιθανότητα να συμβούν  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες στις  $r-1$  δοκιμές είναι μηδενική. Στη συγκεκριμένη λοιπόν περίπτωση για κάθε τιμή του  $x$  η πιθανότητα ισούται με το γινόμενο των δυο προαναφερθέντων πιθανοτήτων, δηλαδή

$$P(X = x) = (1 - p)p^c, \quad x = c + 1, c + 2, \dots, 2c.$$

Τέλος, για την περίπτωση  $x \geq 2c + 1$  η απόδειξη βασίζεται στο ίδιο σκεπτικό με αυτή του κλάδου 3, με τη διαφορά ότι σε αυτή την περίπτωση υπάρχει και ο επιπρόσθετος περιορισμός οι  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες να συμβούν για πρώτη φορά στο τέλος των  $x$  δοκιμών και όχι κάπου ενδιάμεσα. Π.χ αν  $c = 3$  και  $x = 2c + 1 = 7$  τότε οι 3 συνεχόμενες επιτυχίες είναι πολύ πιθανό να μη συμβούν στις τρεις τελευταίες δοκιμές αλλά νωρίτερα, ακόμα και στις τρεις πρώτες όπου εκεί θα τελειώσει το πείραμα. Για να συμβούν λοιπόν  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες για πρώτη φορά μετά από  $x$  ακριβώς δοκιμές θα πρέπει να συμβούν ταυτόχρονα τα τρία ακόλουθα ενδεχόμενα: οι τελευταίες  $c$  δοκιμές να είναι επιτυχημένες (με πιθανότητα  $p^c$ ), η αμέσως προηγούμενη από αυτές δοκιμή (π.χ. η  $(x - c)$  δοκιμή) να είναι αποτυχία (με πιθανότητα  $1 - p$ ), και στις προηγούμενες  $(x - c - 1)$  δοκιμές να μην έχουν συμβεί  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες. Το τελευταίο έχει πιθανότητα

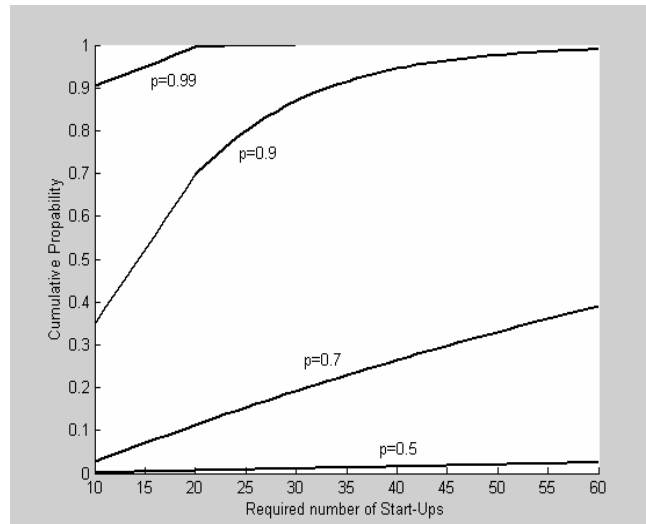
$$1 - [P(c) + P(c + 1) + \dots + P(x - c - 1)] = 1 - \sum_{t=1}^{x-2c} P(c + t - 1).$$

Εξαιτίας της ανεξαρτησίας των δοκιμών, προκύπτει ότι η πιθανότητα να συμβούν  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες για πρώτη φορά στην  $x$  δοκιμή είναι ίση με το γινόμενο των τριών προαναφερθέντων πιθανοτήτων, δηλαδή

$$P(x) = (1 - p)p^c \left[ 1 - \sum_{t=1}^{x-2c} P(c + t - 1) \right], \quad x = 2c + 1, 2c + 2, \dots$$

Η πρακτική σημασία καθώς και η χρησιμότητα του παραπάνω τύπου σε ένα τεστ εκκίνησης γίνεται πιο φανερή μέσα από την επόμενη εφαρμογή.

Έστω ότι ένας μηχανικός παραγωγής αναλαμβάνει να εξετάσει την ποιότητα μιας γεννήτριας μέσω ενός CS τεστ εκκίνησης. Στο τεστ αυτό ο μηχανικός απαιτεί να συμβούν  $c = 10$  συνεχόμενες επιτυχημένες δοκιμές εκκίνησης με πιθανότητα επιτυχίας  $p$  για κάθε δοκιμή. Στο γράφημα που ακολουθεί δίνεται η πιθανότητα να απαιτούνται συνολικά  $y$  ή λιγότερες δοκιμές έτσι ώστε να έχουμε αποδοχή της γεννήτριας-μονάδας για τις περιπτώσεις  $p = 0.99, p = 0.9, p = 0.7$  και  $p = 0.5$ .



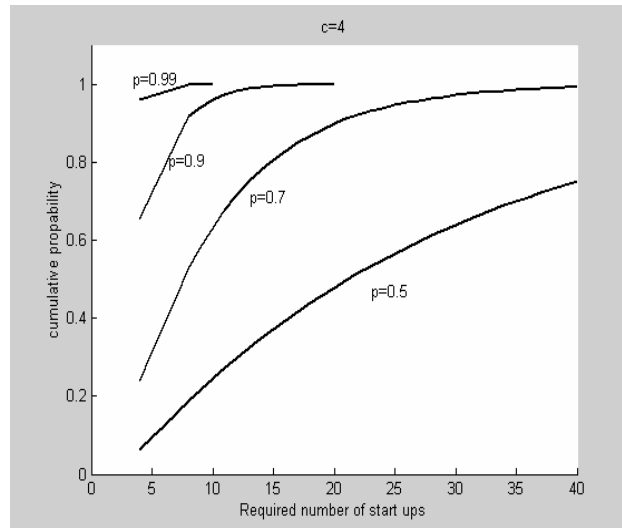
**Σχήμα 2.2.1:** Πιθανότητα αποδοχής για  $c = 10$  και  $p = 0.99$ ,  $p = 0.9$ ,  $p = 0.7$  και  $p = 0.5$ .

Από το παραπάνω διάγραμμα προκύπτουν άμεσα τα ακόλουθα συμπεράσματα σχετικά με την επίδραση της πιθανότητας επιτυχίας  $p$  στο τεστ εκκίνησης.

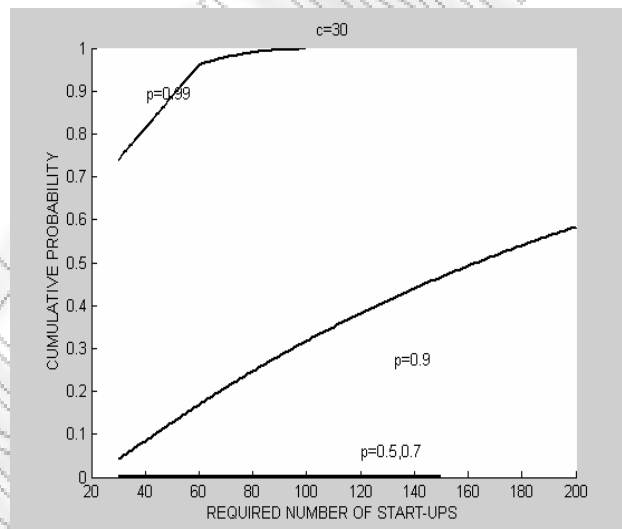
1. Η πιθανότητα να συμβούν 10 συνεχόμενες επιτυχίες σε λιγότερες από 10 δοκιμές είναι μηδενική.
2. Η πιθανότητα που εξετάζουμε είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς τον αριθμό των δοκιμών εκκίνησης, δηλαδή όσο αυξάνονται οι δοκιμές αυξάνεται και η πιθανότητα να γίνει αποδεκτό το μηχάνημα. Αυτό είναι προφανές αφού η ποσότητα που απεικονίζεται στο σχήμα είναι ουσιαστικά μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής.
3. Όσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης σε μια δοκιμή, τόσο μεγαλύτερη είναι και η πιθανότητα να απαιτούνται  $y$  ή λιγότερες δοκιμές έτσι ώστε να έχουμε αποδοχή του εξαρτήματος. Συγκεκριμένα, για πολύ μεγάλες τιμές του  $p$  π.χ. 0.9 και 0.99 η αθροιστική πιθανότητα τείνει στη μονάδα, ενώ αντίθετα για μικρές τιμές π.χ.  $p = 0.5$ , 0.7 η πιθανότητα αυτή είναι αρκετά μικρή. Δηλαδή εξαρτήματα με πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης κάτω από 0.6 θεωρούνται πρακτικά ελαττωματικά και δεν έχει νόημα να υποβάλλονται σε τεστ.

Ενδιαφέροντα όμως συμπεράσματα σχετικά με το τεστ εκκίνησης προκύπτουν και από τη μελέτη της πιθανότητας αποδοχής ως συνάρτηση του αριθμού των απαιτούμενων

συνεχόμενων επιτυχημένων εκκινήσεων που πρέπει να συμβούν ώστε να γίνει αποδεχτό το μηχάνημα. Για  $c = 4$  και  $c = 30$ , οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις δίνονται παρακάτω.



**Σχήμα 2.2.2:** Πιθανότητα αποδοχής για  $c = 4$  και  $p = 0.99$ ,  $p = 0.9$ ,  $p = 0.7$  και  $p = 0.5$ .



**Σχήμα 2.2.3:** Πιθανότητα αποδοχής για  $c = 30$  και  $p = 0.99$ ,  $p = 0.9$ ,  $p = 0.7$  και  $p = 0.5$ .

Από τη σύγκριση των διαγραμμάτων συμπεραίνουμε ότι,

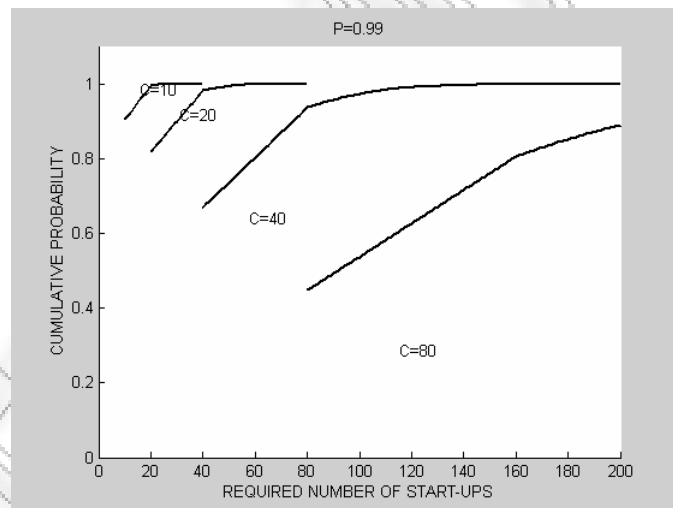
1. Όταν το  $c$  είναι μεγάλο, τότε η πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης πρέπει να είναι αρκετά υψηλή ώστε να μπορέσει να γίνει αποδεχτό τελικά το εξάρτημα. Συγκεκριμένα στο Σχήμα 2.2.3 φαίνεται ότι για  $c = 30$  απαιτείται το  $p$  να είναι τουλάχιστον 0.99 ώστε η πιθανότητα αποδοχής να πάρει υψηλές τιμές ενώ για

$p = 0.90$  χρειάζονται τουλάχιστον 200 δοκιμές για να φτάσει στην τιμή 0.6. Επιπλέον για μικρές τιμές του  $p$ , π.χ. 0.5 και 0.7 η πιθανότητα αποδοχής είναι σχεδόν μηδενική, όσες δοκιμές και αν γίνουν.

2. Όσο μειώνεται το  $c$  τόσο λιγότερες δοκιμές χρειάζονται μέχρι να συμβούν οι  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες, ενώ ταυτόχρονα ακόμα και για μικρές τιμές του  $p$  είναι πολύ πιθανό να γίνει αποδεκτό το μηχάνημα.

Συνοψίζοντας συμπεραίνουμε ότι, αν ο αριθμός των απαιτούμενων συνεχόμενων δοκιμών είναι πολύ μεγάλος τότε το τεστ εκκίνησης CS είναι στην ουσία μη πρακτικό αφού απαιτούνται πολλές δοκιμές εκκίνησης του εξαρτήματος με αποτέλεσμα η διαδικασία ελέγχου να γίνεται αρκετά χρονοβόρα.

Στα ίδια συμπεράσματα καταλήγουμε και από τη μελέτη των καμπύλων της ακόλουθης γραφικής παράστασης.



**Σχήμα 2.2.4:** Πιθανότητα αποδοχής για  $p = 0.99$  και  $c = 10, 20, 40$  και 80.

Στο Σχήμα 2.2.4 φαίνεται πιο καθαρά η επιρροή του  $c$ . Μελετώντας τις δυο ακραίες τιμές  $c=10$  και  $c=80$  για  $p=0.99$  προκύπτει ότι, στην πρώτη περίπτωση η πιθανότητα αποδοχής φτάνει πολύ γρήγορα στην τιμή 1, ενώ αντίστοιχα στη δεύτερη περίπτωση προσεγγίζει την τιμή 0.8 όταν το πλήθος των δοκιμών φτάσει στις 200. Επομένως όσο πιο ελαστικό είναι το κριτήριο ως προς  $c$  τόσο πιο γρήγορα θα γίνει αποδεκτό το εξάρτημα, ενώ όσο αυξάνεται το  $c$  αυξάνονται και οι απαιτούμενες δοκιμές ώστε να φτάσουμε σε αποδοχή. Συμπερασματικά,

για πολύ μεγάλες τιμές του  $c$  είναι πολύ πιθανό το τεστ να μην τερματιστεί και επομένως να μην καθίσταται εφικτή η λήψη απόφασης σχετικά με την ποιότητα του εξαρτήματος.

Όλα τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τα παραπάνω διαγράμματα καθώς και απαντήσεις σε ερωτήματα του τύπου:

α) ποια είναι η πιθανότητα να συμβούν 10 συνεχόμενες επιτυχίες σε ακριβώς 10 δοκιμές εκκίνησης, σε λιγότερες από 20 ή σε περισσότερες από 40, καθώς και

β) ποιος είναι ο αριθμός των δοκιμών που οδηγεί σε επιτυχημένο τεστ με συγκεκριμένη πιθανότητα επιτυχίας για κάθε δοκιμή, προκύπτουν με τη χρήση της αναδρομικής σχέσης 2.2.1. Ορισμένα τέτοια αποτελέσματα συνοψίζονται στους Πίνακες 2.2.1 και 2.2.2.

	$p = 0.5$	$p = 0.7$	$p = 0.9$	$p = 0.99$
10 ακριβώς δοκιμές ( $P(10)$ )	0.01	0.04	0.68	0.91
20 ή λιγότερες δοκιμές ( $R(20)$ )	0.03	0.12	0.35	0.98
40 ή περισσότερες, ( $1-R(39)$ )	1-0.04	1-0.18	1-0.91	1-0.99

**Πίνακας 2.2.1:** Πιθανότητα να συμβούν 10 συνεχόμενες επιτυχημένες εκκινήσεις σε 10 ακριβώς δοκιμές εκκίνησης, σε 20 ή λιγότερες, και σε 40 ή περισσότερες, για  $p = 0.5, 0.7, 0.9$  και  $0.99$ .

Απαιτούμενος αριθμός δοκιμών	$p = 0.5$	$p = 0.7$	$p = 0.9$	$p = 0.99$
50% πιθανότητα	$\approx \infty$	72	16	10
90% πιθανότητα	$\approx \infty$	340	33	10
95% πιθανότητα	$\approx \infty$	402	41	17

**Πίνακας 2.2.2:** Αριθμός των δοκιμών μέσα στις οποίες συμβαίνει η αποδοχή του εξαρτήματος με πιθανότητα 50%, 90% και 95%, για  $p = 0.90, 0.95$  και  $0.99$ .

Συμπερασματικά από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι, το τεστ εκκίνησης για συνεχόμενες επιτυχίες είναι πιο εύχρηστο για τον έλεγχο πολύ αξιόπιστων εξαρτημάτων.

## 2.2.2 Μέσο μήκος

Το μέσο μήκος ενός τεστ εκκίνησης είναι η ποσότητα που έχει τη μεγαλύτερη πρακτική χρησιμότητα, αφού εκφράζει πόσες κατά μέσο όρο προσπάθειες απαιτούνται ώστε να τελειώσει το τεστ (με αποδοχή ή όχι ανάλογα με το κριτήριο που χρησιμοποιείται).

Αν θεωρήσουμε όπως αναφέρθηκε πιο πάνω ως  $X$  την τ.μ. που εκφράζει το μήκος ενός τεστ εκκίνησης, ως  $p$  την πιθανότητα επιτυχίας εκκίνησης για κάθε δοκιμή και  $c$  τον προκαθορισμένο αριθμό των συνεχόμενων επιτυχιών που απαιτούνται για να έχουμε αποδοχή του εξαρτήματος τότε η μέση τιμή του μήκους του τεστ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xP(x) = \frac{1 - p^c}{(1 - p)p^c}. \quad (2.2.2)$$

Η απόδειξη του τύπου (2.2.2) μπορεί να γίνει αν υπολογιστεί αρχικά η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του μήκους του τεστ. Για τον υπολογισμό αυτό παρατηρούμε αρχικά ότι, στο CS τεστ μια τυπική ακολουθία η οποία οδηγεί στην αποδοχή του εξαρτήματος θα έχει τη μορφή

$$\underbrace{SS \dots SF}_{\substack{0 \leq j \leq c-1 \\ i \geq 0 \text{ φορές}}} \underbrace{SS \dots S}_c$$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου αυτού είναι ίση με

$$\left\{ \sum_{j=0}^{c-1} (pt)^j qt \right\}^i (pt)^c = \left( \frac{1 - (pt)^c}{1 - pt} qt \right)^i (pt)^c.$$

Επομένως, η αντίστοιχη πιθανογεννήτρια συνάρτηση του  $X$  θα είναι ίση με

$$\begin{aligned} G_X(t) &= E(t^x) = \sum_{x=0}^{\infty} P(x)t^x \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{c-1} (pt)^j qt \right\}^i (pt)^c = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{1 - (pt)^c}{1 - pt} qt \right\}^i (pt)^c = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1 - (pt)^c}{1 - pt} qt} (pt)^c = \frac{(pt)^c (1 - pt)}{1 - t + qp^c t^{c+1}} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$



Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς  $z$  βρίσκουμε

$$E(X) = \mu'_1 = G'_X(1) = \frac{1-p^c}{(1-p)p^c}. \quad (2.2.4)$$

Θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει την πιθανογεννήτρια  $G_X(z)$  για δημιουργήσει μια αναδρομική σχέση για τις παραγοντικές ροπές  $r$  τάξης. Πράγματι είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$\begin{aligned} \mu'_r = E(X^r) &= \left[ \frac{\partial^r}{\partial t^r} G_X(t) \right]_{t=1} = \\ &= \frac{c^r - p(c+1)^r}{q} + \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} \left\{ \frac{1}{qp^c} - (c+1)^{r-i} \right\} \mu'_i, \quad r \geq 1 \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (2.2.5) για  $r=2$  μπορεί να υπολογιστεί η ροπή δεύτερης τάξης μέσω του τύπου

$$\mu'_2 = -(1+c)^2 + \frac{c^2 - (1+c)^2 p}{1-p} + \frac{3 + 2(1-p^c)}{p^c(1-p)}. \quad (2.2.6)$$

Συνδυάζοντας τα  $\mu'_1, \mu'_2$  μπορούμε να υπολογίσουμε τη διακύμανση

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2 = \\ &= \frac{1}{(1-p)^2 p^{2c}} - \frac{2c+1}{(1-p)p^c} - \frac{p}{(1-p)^2}. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Συνοπτικά εφαρμόζοντας τις σχέσεις (2.2.2) και (2.2.7) για διάφορες τιμές του  $p$  για ένα CS τεστ εκκίνησης με  $c=10$  προκύπτουν οι τιμές που περιέχονται στον Πίνακα 2.2.3.

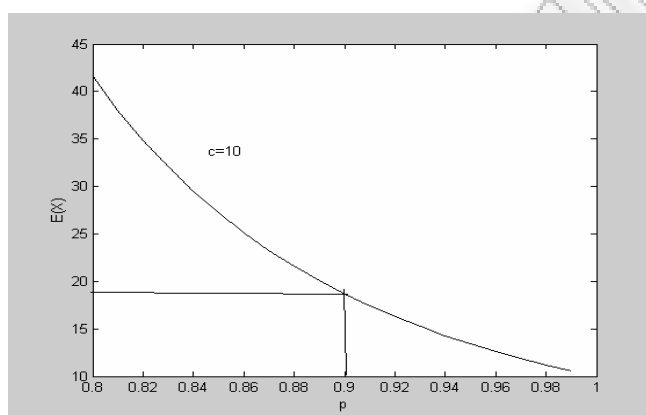
	$P(\text{αποδοχής})$	$E(X)$	$\text{Var}(X)$
$p = 0.5$	0.01	2046	4151294
$p = 0.7$	0.04	114.07	11439
$p = 0.9$	0.68	18.69	130.25
$p = 0.99$	0.91	10.57	4.302

**Πίνακας 2.2.3:** Μέσο μήκος και διακύμανση του μήκους ενός CS τεστ εκκίνησης με  $c=10$ , για διάφορες τιμές του  $p$ .

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, εφαρμόζοντας τη σχέση (2.2.2) για  $p=0.9$  και  $c=10$  προκύπτει (σύμφωνα με τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα)  $E(X)=18.69$ . Αυτό σημαίνει ότι

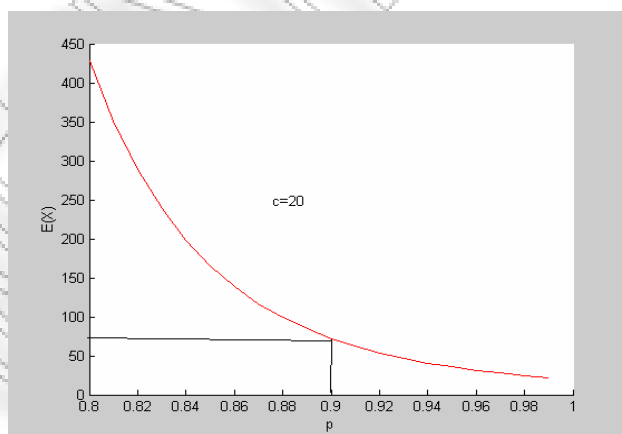
κατά μέσο όρο απαιτούνται 19 προσπάθειες εκκίνησης του μηχανήματος ώστε να παρθεί η απόφαση αποδοχής του.

Από τον τύπο (2.2.2) είναι εμφανές ότι η μέση τιμή είναι φθίνουσα συνάρτηση του  $p$ , η οποία τείνει να γίνει ίση με το  $c$  καθώς το  $p$  τείνει στο 1, ενώ παίρνει πολύ μεγάλες τιμές καθώς το  $p$  τείνει στο μηδέν. Αυτό φαίνεται γραφικά και από το Σχήμα (2.2.5) όπου απεικονίζεται το μέσο μήκος του τεστ συναρτήσει των  $p, c$ .



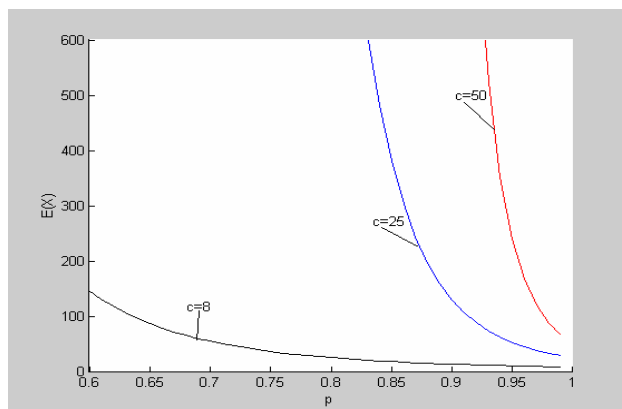
Σχήμα 2.2.5: Το μέσο μήκος του τεστ για  $c = 10$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση για  $c = 10$  και  $p = 0.9$  απαιτούνται κατά μέσο όρο 19 δοκιμές.



Σχήμα 2.2.6: Το μέσο μήκος του τεστ για  $c = 20$

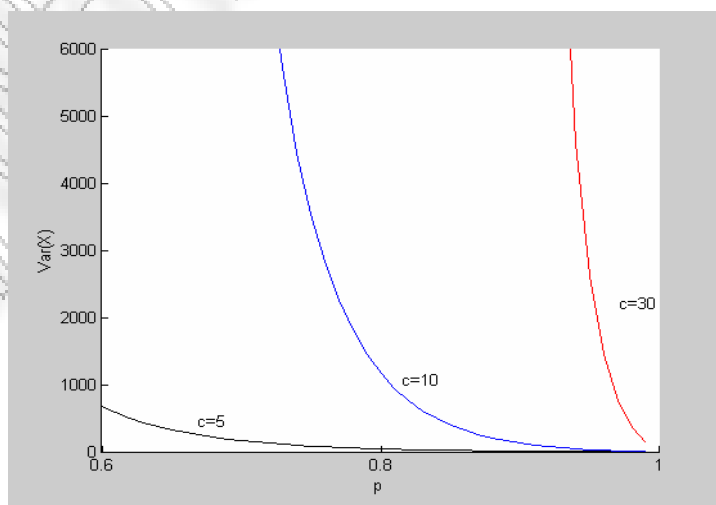
Στη συγκεκριμένη περίπτωση για  $c = 20$  και  $p = 0.9$  απαιτούνται κατά μέσο όρο 133 δοκιμές.



**Σχήμα 2.2.7:** Μέσο μήκος για  $c=8, 25$  και  $50$ .

Από το Σχήμα 2.2.7 συμπεραίνουμε ότι, το μέσο μήκος του τεστ μειώνεται καθώς η πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης αυξάνεται, ενώ αντίθετα αυξάνεται όσο αυξάνεται ο απαιτούμενος αριθμός συνεχόμενων επιτυχημένων εκκινήσεων. Επομένως, για μεγάλες τιμές του  $c$  η διαδικασία ελέγχου μέσω του CS τεστ είναι πολύ χρονοβόρα, αφού απαιτείται ο δεκαπλάσιος κατά μέσο όρο αριθμός δοκιμών μέχρι να πάρουμε κάποια απόφαση ακόμα και για πολύ αξιόπιστα εξαρτήματα, και συνεπώς οικονομικά ασύμφωρη.

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τον τύπο (2.2.2) για διάφορες τιμές του  $c$  προκύπτει ότι, για  $c \leq 18$  απαιτούνται το πολύ 60 δοκιμές για να γίνει αποδεκτό το μηχάνημα. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι για  $(c, p) = (10, 0.9)$  υπολογίζεται  $E(X)=18$ , για  $(15, 0.9)$  υπολογίζεται ότι  $E(X)=40$  και για  $(18, 0.9)$  είναι  $E(X)=57$ . Δηλαδή, για πολύ αξιόπιστα εξαρτήματα η απόφαση αποδοχής ή μη μπορεί να ληφθεί σε αρκετά ικανοποιητικό χρόνο.



**Σχήμα 2.2.8:** Διακύμανση του μήκους για  $c=5, 10$  και  $30$ .

Στο Σχήμα 2.2.8 δίνεται γραφικά η παράσταση της διακύμανσης του μήκους του τεστ. Από το σχήμα μπορούμε να διακρίνουμε ότι η διακύμανση παίρνει γενικά μεγάλες τιμές και μάλιστα όσο πιο μεγάλο είναι το  $c$  τόσο μεγαλώνει και η τιμή της. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η διακύμανση είναι φθίνουσα ως προς  $p$ . Αυτό είναι λογικό αφού όσο πιο αξιόπιστη είναι μια μονάδα τόσο πιο μικρή θα είναι η τυπική απόκλιση του μήκους του τεστ από τη μέση τιμή, δηλαδή για όλες τις μονάδες που υποβάλλονται σε τεστ θα απαιτείται ο ίδιος περίπου αριθμός δοκιμών μέχρι την αποδοχή τους. Είναι λοιπόν εμφανές ότι πρέπει να προτιμάμε εξαρτήματα με μεγάλο  $p$  (από 0.8 και πάνω) και  $c$  μικρό έτσι ώστε να έχουμε όσο το δυνατό μικρότερη διακύμανση του μήκους του τεστ.

### 2.2.3 Εκτίμηση της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης

Σε ένα τεστ εκκίνησης γενικά εκτός από την εύρεση του μήκους του μέσω της θεωρίας των πιθανοτήτων, εξίσου σημαντικός είναι και ο υπολογισμός εκτιμήσεων της άγνωστης πιθανότητας  $p$  με χρήση της στατιστικής. Η εύρεση των εκτιμητριών του  $p$  γίνεται στη συνέχεια με χρήση δυο μεθόδων: της μεθόδου της μέγιστης πιθανοφάνειας και της μεθόδου των ροπών (Viveros and Balakrishnan (1993)).

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονίσουμε ότι η πρώτη μέθοδος των Viveros and Balakrishnan βρίσκει εφαρμογή σε όλα σχεδόν τα τεστ εκκίνησης για την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων.

#### A. Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε αν ένα εξάρτημα είναι ποιοτικά αποδεκτό. Για το λόγο αυτό ελέγχουμε  $n$  μονάδες, δηλαδή διεξάγουμε  $n$  τεστ για συνεχόμενες επιτυχίες. Τα τεστ αυτά γίνονται στην ίδια μονάδα ή σε πανομοιότυπες μονάδες έτσι ώστε η αξιοπιστία του τεστ να παραμένει η ίδια. Για το  $i$ -οστό τεστ, θεωρούμε ως  $X_i$  την μεταβλητή που εκφράζει το συνολικό αριθμό των δοκιμών εκκίνησης μέχρι την αποδοχή της μονάδας. Στη συνέχεια καταγράφουμε τα ζευγάρια  $(S_1, F_1), (S_2, F_2), \dots, (S_n, F_n)$  όπου

$S_i$  είναι ο αριθμός των παρατηρούμενων επιτυχιών, και

$F_i$  είναι ο αριθμός των παρατηρούμενων αποτυχιών

μέχρι την αποδοχή της  $i$  μονάδας. Είναι φανερό ότι  $X_i = S_i + F_i$ .

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας της μεταβλητής  $X$  θα δίνεται από τη σχέση

$$L(p) = L(p | x) = \prod_{i=1}^n p^{S_i} (1-p)^{F_i} = p^S (1-p)^F = p^S (1-p)^{X-S}, \quad (2.2.8)$$

όπου

$$S = \sum_{i=1}^n S_i, \quad F = \sum_{i=1}^n F_i,$$

και

$$X = S + F = \sum_{i=1}^n X_i$$

είναι ο συνολικός αριθμός των προσπαθειών όλων των τεστ εκκίνησης.

Η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του  $p$  (Ε.Μ.Π.) έστω  $\hat{p}$  θα έχει την ιδιότητα  $L(\hat{p}(x)) = \max L(p \setminus x)$ . Για τον υπολογισμό του μέγιστου της συνάρτησης πιθανοφάνειας (λόγω της μορφής της) αρκεί να εργαστούμε με το λογαριθμό της. Προφανώς η τιμή του  $p$  που μεγιστοποιεί το  $\ln L(p)$  είναι η Ε.Μ.Π.  $\hat{p}$ , γιατί ο λογάριθμος είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \partial \ln(L(p)) / \partial p = 0 &\Rightarrow \partial(S \ln p) / \partial p + \partial(F \ln(1-p)) / \partial p = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow S \frac{1}{p} - F \frac{1}{1-p} = 0 &\Rightarrow S(1-p) = Fp \Rightarrow S = (S+F)p \Rightarrow \\ \hat{p} = \frac{S}{S+F} = \frac{S}{X} & \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Η πληροφορία κατά Fisher (δηλαδή η «ποσότητα» της πληροφορίας που περιέχεται στα δεδομένα  $X$  για την άγνωστη παράμετρο  $p$ ) στη συγκεκριμένη περίπτωση, είναι ίση με

$$I(p) = - \left[ \frac{\partial^2 \ln L(p)}{\partial p^2} \right]_{p=\hat{p}} = \frac{X}{p(1-p)} \quad (2.2.10)$$

και θα εκτιμάται από την ποσότητα

$$I(\hat{p}) = \frac{X}{\hat{p}(1-\hat{p})} = \frac{X^3}{S(X-S)} \quad (2.2.11)$$

Για να υπολογίσουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε.) για το  $p$  είναι απαραίτητη η γνώση της διασποράς της Ε.Μ.Π. Επειδή η πληροφορία κατά Fisher εκφράζει το αντίστροφο

της διασποράς που υπάρχει στο δείγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (2.2.11) για τον υπολογισμό του διαστήματος εμπιστοσύνης.

Επιπλέον είναι γνωστό ότι, αν το  $\hat{p}$  είναι μια πραγματική παράμετρος και το δείγμα  $X = (X_1, \dots, X_n), n = 1, 2, \dots$  είναι τυχαίο δείγμα τότε η ε.μ.π.  $\hat{p}(X_1, \dots, X_n)$  για  $n \rightarrow \infty$  ακολουθεί προσεγγιστικά την κανονική κατανομή

$$N\left(p, \frac{1}{nI_1(p)}\right) = N\left(p, \frac{1}{I(p)}\right),$$

όπου  $I_1(p)$  είναι η πληροφορία κατά Fisher που περιέχεται σε μια παρατήρηση.

Επομένως η μεταβλητή

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{I(\hat{p})}}$$

θα ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή, και το αντίστοιχο προσεγγιστικό  $100(1-\alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για το  $p$  θα έχει άκρα

$$\hat{p} \pm \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p})}} \quad (2.2.12)$$

όπου  $z_{\alpha/2}$  είναι το άνω  $\alpha/2$  ποσοστιαίο σημείο της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το συγκεκριμένο διάστημα εμπιστοσύνης μπορεί να περιλαμβάνει και τιμές (για την πιθανότητα  $p$ ) μεγαλύτερες από τη μονάδα ή μικρότερες από το μηδέν. Το πρώτο συμβαίνει στην περίπτωση που υψηλά αξιόπιστα εξαρτήματα (δηλαδή με πιθανότητα επιτυχημένης εκκίνησης πάνω από 0.95) υποβάλλονται σε τεστ λίγες μόνο φορές, δηλαδή όταν το πλήθος των  $n$  μονάδων είναι μικρό. Στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι λογικό να συμβούν πολύ περισσότερες επιτυχίες από ότι αποτυχίες με αποτέλεσμα να μην εμφανίζεται μεγάλη διασπορά στο δείγμα (δηλαδή το  $I(\hat{p})$  έχει μικρή τιμή) και η εκτίμηση του  $p$  να τείνει στη μονάδα. Άμεση συνέπεια του παραπάνω είναι ότι, τα όρια του διαστήματος εμπιστοσύνης για το  $p$  υπερβαίνουν τα συνηθισμένα όρια. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ξεπεραστεί με τη χρήση του λογαριθμικού μετασχηματισμού

$$\phi = g(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) \Rightarrow p = \frac{e^\phi}{1+e^\phi}.$$

(που μελέτησε ο Spratt (1973)), ο οποίος κάνει πιο συμμετρικό το δείγμα και κατά συνέπεια και τη συνάρτηση πιθανοφάνειας.

Η αντίστοιχη εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του  $\phi$  δίνεται από τον τύπο

$$\hat{\phi} = \ln\left(\frac{\hat{p}}{1-\hat{p}}\right)$$

και η αντίστοιχη πληροφορία Fisher είναι ίση με

$$I(\hat{p}) = \hat{p}(1-\hat{p})$$

Τέλος το προσεγγιστικό  $100(1-\alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης που προκύπτει για το  $p$  θα έχει ως άκρα τις ποσότητες

$$\frac{\hat{p}}{\hat{p} + (1-\hat{p}) \exp[\pm z_{\alpha/2} / \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}]} \quad (2.2.13)$$

## B. Μέθοδος των ροπών

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται στην περίπτωση όπου δε γνωρίζουμε των αριθμό των επιτυχημένων και αποτυχημένων εκκινήσεων κάθε μονάδας αλλά μόνο το συνολικό αριθμό των δοκιμών μέχρι την αποδοχή της, δηλαδή τις τιμές των τυχαίων μεταβλητών  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Η ροπή  $k$ -τάξης δίνεται από τον τύπο

$$m_k = E(X^k) = \sum_{x=0}^{\infty} x^k P(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Εάν τώρα  $X = (X_1, \dots, X_n), n = 1, 2, \dots$  είναι ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή  $P(x)$ , η δειγματική ροπή  $k$ -τάξης ορίζεται από τη σχέση

$$\mu_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Οι δειγματικές ροπές έχουν τις εξής δυο βασικές ιδιότητες :

1.  $E_p(\mu_k) = m_k, \forall p, k = 1, 2, \dots$ , δηλαδή η δειγματική ροπή  $k$ -τάξης είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της ροπής  $k$ -τάξης της κατανομής.
2.  $\mu_k \rightarrow m_k$  καθώς  $n \rightarrow \infty, k = 1, 2, \dots$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των ροπών, για την εκτίμηση των παραμέτρων, στη συγκεκριμένη περίπτωση του  $p$ , αρκεί να θέσουμε

$$m_1 = \mu_1$$

και να λύσουμε την τελευταία εξίσωση ως προς  $p$ . Η λύση της εξίσωσης θα δώσει την εκτιμήτρια μέσω της μεθόδου των ροπών (E.M.P) ή ροποεκτιμήτρια.

Πιο αναλυτικά, για το τεστ εκκίνησης που γίνεται σε  $n$  πανομοιότυπες μονάδες έχουμε ότι

$$m_1 = E(X) = \frac{1-p^c}{(1-p)p^c}.$$

Θέτουμε λοιπόν

$$m_1 = \mu_1(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

οπότε η Ε.Μ.Ρ. θα βρίσκεται από τη λύση της εξίσωσης

$$\bar{X} = \frac{1-p^c}{(1-p)p^c}. \quad (2.2.14)$$

Παρατηρούμε ότι η ροπή πρώτης τάξης

$$\mu_1(p) = \frac{1-p^c}{(1-p)p^c}$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση του  $p$ , οπότε η Ε.Μ.Ρ του  $p$  είναι μοναδική.

Επιπλέον, για  $c = 1$  και  $2$  η Ε.Μ.Ρ. μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από τους τύπους

$$\tilde{p} = \frac{1}{\bar{X}} \quad \text{και} \quad \tilde{p} = \frac{2}{\sqrt{4\bar{X} + 1} - 1},$$

αντίστοιχα.

Για τον υπολογισμό της  $Var(X)$ , δηλαδή της εκτίμησης της διακύμανσης της μεταβλητής  $X$ , χρησιμοποιούμε τον τύπο (βλέπε (2.2.7)).

$$Var(X) = \frac{1}{(1-\tilde{p})^2 \tilde{p}^{2c}} - \frac{2c+1}{(1-\tilde{p})\tilde{p}^c} - \frac{\tilde{p}}{(1-\tilde{p})^2}.$$

Επιπλέον κάνοντας χρήση του κεντρικού θεωρήματος προκύπτει ότι η τυχαία μεταβλητή

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_1(p))}{\sqrt{Var(\bar{X})}}$$

θα ακολουθεί ασυμπτωτικά την κανονική κατανομή  $N(0,1)$ .

Με τη συγκεκριμένη διαδικασία προκύπτει ένα προσεγγιστικό  $100(1-\alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης, για την συνάρτηση  $\mu_1(p)$ , με άκρα

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\bar{X})/n}.$$

Από το τελευταίο υπολογίζεται ένα προσεγγιστικό  $100(1-\alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για το  $p$ , μέσω του τύπου

$$[\mu_1^{-1}(\bar{X} + z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\bar{X})/n}), \mu_1^{-1}(\bar{X} - z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\bar{X})/n})] \quad (2.2.15)$$

όπου η συνάρτηση  $\mu_1^{-1}(\cdot)$  είναι η αντίστροφη συνάρτηση της  $\mu_1(p)$ .



**Παράδειγμα:** Έστω τα ακόλουθα δεδομένα που προκύπτουν, μέσω προσομοίωσης και αφορούν μια ακολουθία δοκιμών Bernoulli, για ένα CS τεστ εκκίνησης με  $c = 10$  το οποίο γίνεται σε  $n=12$  πανομοιότυπες μονάδες ενός μηχανήματος με  $p = 0.8$ .

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

$i$	Συχνότητα εμφάνισης αποτελεσμάτων	$S_i$	$F_i$	$X_i$
1	1111101111111111	15	1	16
2	111111011111011110101 11111110 11101111111111	57	13	70
3	111110111111101011111 10101111110111111111	37	6	43
4	1111111111	10	0	10
5	011101111111111	13	2	15
6	111011111110111111110 1111111111	29	3	32
7	1111010110111110111100 0111101111111111	26	7	32
8	0111111111011101111101 11101111111111	32	6	38
9	111110111010110111111 1111	22	4	26
10	1111101111111101011111 11111	24	3	27
11	1011111111001011111101 111001101111101110111 0111101111101111011011 0101101110010101101111 111111	71	23	94
12	1000111100010111011110 0101111101110011111111 11	32	14	46
ΣΥΝΟΛΟ		368	82	45 0

Για τα συγκεκριμένα δεδομένα υπολογίζουμε τις ποσότητες

$$S = \sum_{i=1}^{10} S_i = 368$$

$$F = \sum_{i=1}^{10} F_i = 82$$

$$X = \sum_{i=1}^{10} X_i = 450.$$

Κάνοντας εφαρμογή της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας βρίσκεται η αντίστοιχη εκτιμήτρια

$$\hat{p} = \frac{S}{X} = 0.8178$$

και η πληροφορία

$$I(\hat{p}) = \frac{X}{\hat{p}(1-\hat{p})} = 3020.$$

Το 95% διάστημα εμπιστοσύνης που προκύπτει με τη συγκεκριμένη μέθοδο είναι

$$0.8178 \pm \frac{1.96}{\sqrt{3020}} = [0.7821, 0.8535],$$

ενώ το αντίστοιχο διάστημα που υπολογίζεται μέσω του τύπου (2.2.13) είναι

$$\frac{0.8178}{0.8178 + 0.1822 \exp[\mp 1.96/8.188]} = [0.7794, 0.8508].$$

Με παρόμοιο τρόπο για τη μέθοδο ροπών έχουμε

$$\bar{X} = \frac{X}{10} = 37.5$$

και προκύπτει η Ε.Μ.Ρ

$$\tilde{p} = 0.8116.$$

Επομένως από τη σχέση (2.2.15) προκύπτει το αντίστοιχο 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την πιθανότητα εκκίνησης

$$[\mu^{-1}(54.57), \mu^{-1}(20.43)] = [0.7708, 0.8875].$$

Από τα παραπάνω δ.ε. είναι φανερό ότι και στις δυο περιπτώσεις η εκτίμηση της πιθανότητας εκκίνησης είναι πολύ κοντά στην πραγματική τιμή  $p = 0.8$  παρότι το δείγμα είναι μικρό. Επιπλέον, τα προσεγγιστικά δ.ε που προκύπτουν με τις δυο μεθόδους είναι πολύ κοντά μεταξύ τους και ταυτόχρονα μέσα στα επιτρεπτά όρια, γεγονός που δικαιολογείται από

το ότι η πιθανότητα εκκίνησης έχει μια μεσαία τιμή, ούτε πολύ υψηλή, ούτε πολύ χαμηλή. Ένα πιο γενικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι το δ.ε. που υπολογίζεται με τη μέθοδο των ροπών είναι πλατύτερο από το αντίστοιχο που δίνει η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας. Το συγκεκριμένο συμπέρασμα είναι λογικό αφού η μέθοδος των ροπών βασίζεται μόνο στο συνολικό αριθμό των δοκιμών εκκίνησης όποτε η αντίστοιχη πληροφορία που δίνει το δείγμα για την παράμετρο είναι μικρότερη από αυτή της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας, η οποία βασίζεται στον αριθμό των επιτυχημένων και αποτυχημένων εκκινήσεων ξεχωριστά. Κατά συνέπεια η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας δίνει γενικά καλύτερους εκτιμητές του  $p$ .

### 2.3 CS τεστ εκκίνησης με Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ των μονάδων

Επειδή κατά τη διάρκεια ενός τεστ εκκίνησης παρατηρείται συνήθως κάποιου είδους εξάρτηση μεταξύ των δοκιμών οι Balakrishnan, Balasubramanian and Viveros (1995) πρότειναν μια γενίκευση του CS τεστ εκκίνησης για ανεξάρτητες δοκιμές. Στο τεστ αυτό υποθέτουμε ότι οι δοκιμές έχουν Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ τους, δηλαδή το αποτέλεσμα της κάθε δοκιμής εκκίνησης εξαρτάται από το αποτέλεσμα της προηγούμενης (ιδιότητα της Μαρκοβιανής αλυσίδας 1<sup>ης</sup> τάξης).

Πιο συγκεκριμένα, θα θεωρήσουμε ένα Μαρκοβιανό μοντέλο δυο καταστάσεων με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{matrix} E & A \\ \begin{matrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{matrix} \end{matrix}$$

όπου

$p_1$ : η πιθανότητα επιτυχίας όταν η προηγούμενη δοκιμή είναι επιτυχία.

$p_2$ : η πιθανότητα επιτυχίας όταν η προηγούμενη δοκιμή είναι αποτυχία.

και

$q_1$ : η πιθανότητα να έχουμε μια αποτυχημένη εκκίνηση μετά από μια επιτυχημένη.

$q_2$ : η πιθανότητα να έχουμε μια αποτυχημένη εκκίνηση μετά από μια αποτυχημένη.

Τέλος θα συμβολίσουμε με  $p_0$ ,  $q_0$  την αντίστοιχη πιθανότητα επιτυχίας και αποτυχίας στην πρώτη δοκιμή εκκίνησης αντίστοιχα.

### 2.3.1 Η συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ

Η κατανομή της τ.μ.  $X$ , που εκφράζει το μήκος του τεστ μέχρι να συμβούν για πρώτη φορά  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες στο μονυέλο που δόθηκε παραπάνω, ονομάζεται Μαρκοβιανή-γεωμετρική κατανομή τάξης  $c$ .

Η συνάρτηση πιθανότητας  $f(x) = P(X = x)$  μπορεί να υπολογισθεί με την βοήθεια της αναδρομικής σχέσης

$$f(x) = q_2 f(x-1) + \sum_{i=2}^c q_1 p_2 p_1^{i-2} f(x-i), \quad x > c+1 \quad (2.3.1)$$

με αρχικές συνθήκες:

$$P_X(x) = 0, \quad x = 0, 1, 2, \dots, c-1$$

$$P_X(c) = p_0 p_1^{c-1}$$

$$P_X(c+1) = q_0 p_2 p_1^{c-1}$$

$$P_X(c+2) = (q_0 q_2 + p_0 q_1) p_2 p_1^{c-1}.$$

Για την απόδειξη των σχέσεων αυτών παρατηρούμε αρχικά ότι υπάρχουν δυο ενδεχόμενα το πείραμα να τελειώσει σε  $c+2$  ακριβώς δοκιμές εκκίνησης.

Αν η πρώτη δοκιμή είναι επιτυχία, για να γίνει αποδεκτό το εξάρτημα στην  $c+2$  δοκιμή θα πρέπει η δεύτερη δοκιμή να οδηγήσει σε αποτυχία και οι  $c$  συνεχόμενες τελευταίες εκκινήσεις να είναι πετυχημένες. Έτσι παίρνουμε μια διαδοχή δοκιμών της μορφής

$$\underbrace{S F S S S \dots S}_c$$

με αντίστοιχη πιθανότητα  $p_0 q_1 p_2 p_1^{c-1}$ .

Αν η πρώτη δοκιμή είναι αποτυχία, για να γίνει αποδεκτό το εξάρτημα θα πρέπει να έχουμε αντίστοιχα μια διαδοχή δοκιμών της μορφής

$$\underbrace{F F S S S \dots S}_c$$

με αντίστοιχη πιθανότητα  $q_0 q_2 p_2 p_1^{c-1}$ .

Προσθέτοντας τις πιθανότητες που προκύπτουν από τις δυο παραπάνω περιπτώσεις προκύπτει η πιθανότητα

$$P_X(c+2) = (q_0q_2 + p_0q_1)p_2p_1^{c-1} = q_2f(c+1) + q_1p_2f(c).$$

Με παρόμοιο τρόπο η πιθανότητα να τελειώσει το τεστ σε  $c+3$  δοκιμές αναλύεται ως εξής

$$\begin{aligned} P(c+3) &= p_0p_1q_1p_2p_1^{c-1} + p_0q_1q_2p_2p_1^{c-1} + q_0p_2q_1p_2p_1^{c-1} = \\ &= q_2f(c+2) + q_1p_2f(c+1) + q_1p_2p_1f(c). \end{aligned}$$

Για  $x = c+r$  προκύπτει επαγωγικά ότι η πιθανότητα αποδοχής είναι ίση με

$$P(c+r) = q_2f(c+r-1) + q_1p_2f(c+r-2) + \dots + q_1p_2p_1^{r-1}f(c).$$

Και θέτοντας  $x = c+r, r = 1, 2, \dots, c$  καταλήγουμε στον τύπο (2.3.1).

Από την αναδρομική σχέση που βρέθηκε για τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ.  $X$  μπορεί να βρεθεί η πιθανογεννήτρια συναρτησή της, η οποία θα έχει τη μορφή

$$G_X(t) = E(t^X) = \frac{p_1^{c-1}t^c[p_0 + (p_2 - p_0 - p_0p_1)t + p_1(p_0 - p_2)t^2]}{1 - (p_1 + q_2)t + (p_1 - p_2)t^2 + q_1p_2p_1^{c-1}t^{c+1}} \quad (2.3.2)$$

**Παρατήρηση:** Όταν οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, δηλαδή ισχύει  $p_0 = p_1 = p_2 = p$  τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της μεταβλητής  $X$  παίρνει τη μορφή

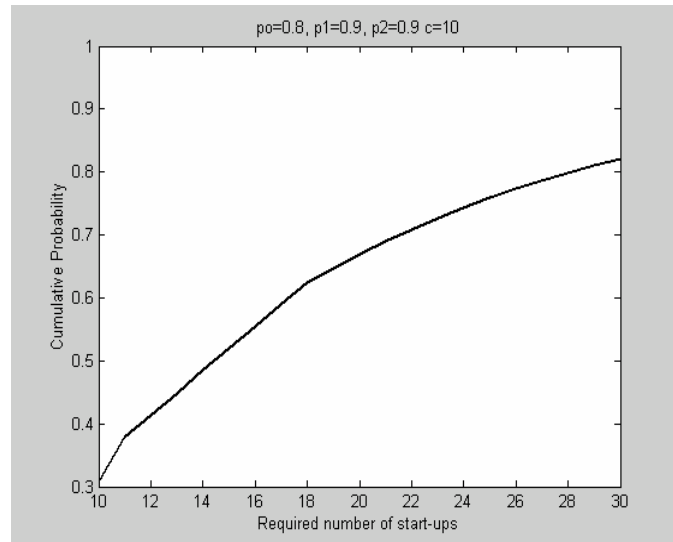
$$G_X(t) = E(t^X) = \frac{p^c t^c (1 - pt)}{1 - t + qp^c t^{c+1}}$$

όπου  $q = 1 - p$ . Με τον τρόπο αυτό ξαναφτάνουμε στην έκφραση (2.2.3) η οποία αποτελεί μια ειδική περίπτωση της σχέσης (2.3.2).

Στη συνέχεια, ας συμβολίσουμε και πάλι με

$$R(y) = \sum_{x=1}^y P(x),$$

την πιθανότητα να απαιτούνται συνολικά  $y$  ή λιγότερες δοκιμές ώστε να είναι αποδεκτή η κάθε μονάδα (συνάρτηση κατανομής του μήκους του τεστ). Στο Σχήμα 2.3.1 δίνεται γραφικά η μορφή της συνάρτησης  $R(y)$ .



**Σχήμα 2.3.1:** Πιθανότητα να απαιτούνται συνολικά  $y$  ή λιγότερες δοκιμές ώστε να γίνει αποδεκτό το εξάρτημα για  $c = 10$  και  $p_0 = 0.8, p_1 = 0.9, p_2 = 0.9$ .

Είναι φανερό από το διάγραμμα, ότι συνάρτηση  $R(y)$  είναι αύξουσα συνάρτηση των δοκιμών, δηλαδή όσο περισσότερες προσπάθειες εκκίνησης γίνονται τόσο πιο πιθανό είναι μέσα σε αυτές τις προσπάθειες να συμβούν  $c=10$  συνεχόμενες επιτυχημένες.

Η γραφική παράσταση της  $R(y)$  για συσχετισμένες εκκινήσεις είναι της ίδιας μορφής με αυτή των διαγραμμάτων για το CS για ανεξάρτητες δοκιμές αφού στην ουσία τα δύο μοντέλα είναι τα ίδια με μόνη διαφορά ότι, όταν έχουμε συσχετισμένες δοκιμές, το κριτήριο γίνεται πιο χαλαρό.

Όπως έγινε και στη μελέτη του τεστ για ανεξάρτητες δοκιμές, έτσι και εδώ θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά της  $R(y)$  συναρτήσει των παραμέτρων  $p_0, p_1, p_2$ . Η επίδραση της Μαρκοβιανής εξάρτησης θα γίνει πιο κατανοητή μέσα από την μελέτη του πίνακα που ακολουθεί.

		$p_1 = 0.6$			$p_1 = 0.8$			$p_1 = 0.95$			
		$p_2$			$p_2$			$p_2$			
		$p_0$	0.6	0.8	0.9	0.6	0.8	0.9	0.6	0.8	0.9
Ακριβώς 10 δοκιμές $P(X = 10)$											
				9			9			9	
				1	1				8	0.38	0.3
20 ή λιγότερες δοκιμές $P(X \leq 20)$	0.6	0.01	0.0	0.0	0.8	0.8	0.8	0.3	0.38	0.3	
	0.8	0.01	0.0	0.0	0.1	0.11	0.1	0.5	0.50	0.5	
	0.9	0.01	0.0	0.0	0.1	0.13	0.1	0.6	0.62	0.6	
30 ή περισσότερες δοκιμές $P(X \geq 30)$	0.6	0.01	0.0	0.0	0.1	0.13	0.1	0.6	0.62	0.6	
	0.8	0.03	0.0	0.0	0.3	0.32	0.3	0.8	0.88	0.8	
	0.9	0.03	0.0	0.0	0.3	0.32	0.3	0.8	0.88	0.8	
30 ή περισσότερες δοκιμές $P(X \geq 30)$	0.6	0.03	0.0	0.0	0.3	0.32	0.3	0.8	0.88	0.8	
	0.8	0.03	0.0	0.0	0.3	0.32	0.3	0.8	0.88	0.8	
	0.9	0.03	0.0	0.0	0.3	0.33	0.3	0.8	0.89	0.9	
30 ή περισσότερες δοκιμές $P(X \geq 30)$	0.6	0.03	0.0	0.0	0.3	0.33	0.3	0.8	0.89	0.9	
	0.8	0.95	0.9	0.9	0.5	0.53	0.5	0.0	0.03	0.0	
	0.9	0.95	0.9	0.9	0.5	0.52	0.5	0.0	0.03	0.0	
30 ή περισσότερες δοκιμές $P(X \geq 30)$	0.6	0.95	0.9	0.9	0.5	0.53	0.5	0.0	0.03	0.0	
	0.8	0.95	0.9	0.9	0.5	0.52	0.5	0.0	0.03	0.0	
	0.9	0.95	0.9	0.9	0.5	0.52	0.5	0.0	0.03	0.0	



**Πίνακας 2.3.1:** Πιθανότητα για μια μονάδα να έχει 10 συνεχόμενες επιτυχημένες εκκινήσεις σε 10 ακριβώς δοκιμές, σε 20 ή λιγότερες, και σε 30 ή περισσότερες εκκινήσεις για διάφορες τιμές των πιθανοτήτων επιτυχίας ( $p_0, p_1, p_2$ ).

Θεωρώντας λοιπόν ένα Μαρκοβιανό μοντέλο τεστ εκκίνησης με  $c = 10$  που γίνεται σε εξαρτήματα μεσαίας ή υψηλής αξιοπιστίας (πιθανότητες επιτυχίας με τιμές από 0.6 μέχρι 0.99) προκύπτουν τα αποτελέσματα του Πίνακα 2.3.1 για τις πιθανότητες αποδοχής. Από τα αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι η πιθανότητα επιτυχίας  $p_1$  είναι αυτή με τη μεγαλύτερη επιρροή στις πιθανότητες που έχουν υπολογιστεί, ενώ η επίδραση της  $p_2$  είναι αμελητέα. Αυτό είναι λογικό αφού το κριτήριο αποδοχής βασίζεται στις συνεχόμενες επιτυχίες. Αν λοιπόν συμβεί κάποια αποτυχία τότε ο αριθμός των συνεχόμενων επιτυχιών που έχει συμβεί μέχρι εκείνη τη στιγμή στην ουσία μηδενίζεται και ο πειραματιστής/υπεύθυνος ελέγχου ποιότητας ξεκινάει να μετράει πάλι από την αρχή μέχρι να συμβούν 10 συνεχόμενες επιτυχίες. Συνεπώς η επιτυχία που συμβαίνει μετά από μια αποτυχία δεν παίζει ουσιαστικό ρόλο στα αποτελέσματα αφού μετά από αυτή πρέπει να συμβούν άλλες  $c - 1$  συνεχόμενες επιτυχίες για να γίνει αποδεκτή η μονάδα. Αντιθέτως η επιτυχία που συμβαίνει μετά από μια επιτυχία επηρεάζει το αποτέλεσμα αφού οδηγεί τη μονάδα ένα βήμα πιο κοντά στην αποδοχή. Επιπλέον είναι εμφανές ότι, για πολύ αξιόπιστα εξαρτήματα, η Μαρκοβιανή επίδραση είναι σχεδόν δυσδιάκριτη, ενώ για εξαρτήματα με χαμηλή αξιοπιστία όπου οι πιθανότητες  $p_1$  και  $p_2$  διαφέρουν σημαντικά (από 0.5 και πάνω) η Μαρκοβιανή εξάρτηση επηρεάζει τις πιθανότητες αποδοχής. Όσον αφορά την αρχική πιθανότητα επιτυχίας  $p_0$  παρατηρούμε ότι επηρεάζει τις πιθανότητες μόνο στην περίπτωση που ο αριθμός των δοκιμών είναι μικρός και ταυτόχρονα το  $p_1$  έχει μεγάλη τιμή (βλέπε πάνω μέρος της τρίτης στήλης του Πίνακα 2.3.1).

### 2.3.2 Μέσο μήκος

Το μέσο μήκος του τεστ υπολογίζεται παραγωγίζοντας την πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ.  $X$  (βλ. σχέση 2.3.2) ως προς  $t$ . Πράγματι προκύπτει

$$E(X) = G'_X(1) = 1 - \frac{p_0}{p_2} + \frac{1}{p_2(1-p_1)p_1^{c-1}} \{1 - p_1 + p_2 - p_2 p_1^{c-1}\} \quad (2.3.3)$$

Η σχέση 2.3.3 βρίσκει εφαρμογή στην εκτίμηση του μέσου αριθμού δοκιμών που θα χρειαστεί να γίνουν μέχρι την αποδοχή μιας μονάδας, για συγκεκριμένες τιμές των  $c, p_0, p_1$  και  $p_2$ .

Μέσω της πιθανογεννήτριας  $G_X(t)$  προκύπτει εύκολα αναδρομική σχέση για τις παραγοντικές ροπές  $k$  τάξης, όπως και στην περίπτωση των ανεξάρτητων δοκιμών.

Πράγματι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu'_k &= E(X^k) = \left[ \frac{d^k}{dt^k} G_X(t) \right]_{t=1} = \\ &= \frac{p_0 c^k + (p_2 - p_0 - p_0 p_1)(c+1)^k + p_1(p_0 - p_2)(c+2)^k}{q_1 p_2} \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \left[ \frac{p_1 + q_2 - (p_1 - p_2)2^{k-1}}{q_1 p_2 p_1^{c-1}} - (c+1)^{k-i} \right] E(X^i). \end{aligned}$$

Για  $k = 2$  προκύπτει η παραγοντική ροπή δεύτερης τάξης

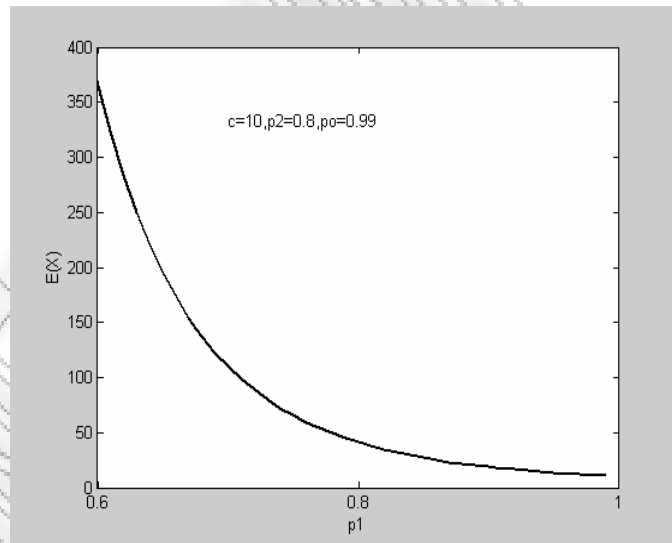
$$\begin{aligned} \mu'_2 &= \frac{1}{(p_1 - 1)^2 p_2^2} (p_1^{-2c} (-2p_1^2 (-1 + p_1 - p_2) + \\ &(p_1 - 1)p_1^{2c} p_2 (p_1 p_2 - (p_1 + 1)p_0) + \\ &p_1^{c+1} (p_2 ((p_1 - 1)(1 + 2c + 3p_1) + \\ &p_2 - 3p_1 p_2) + 2(p_1 - 1)(1 - p_1 + p_2)p_0))) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Συνδυάζοντας τα  $\mu'_1, \mu'_2$  μπορούμε να υπολογίσουμε τη διακύμανση

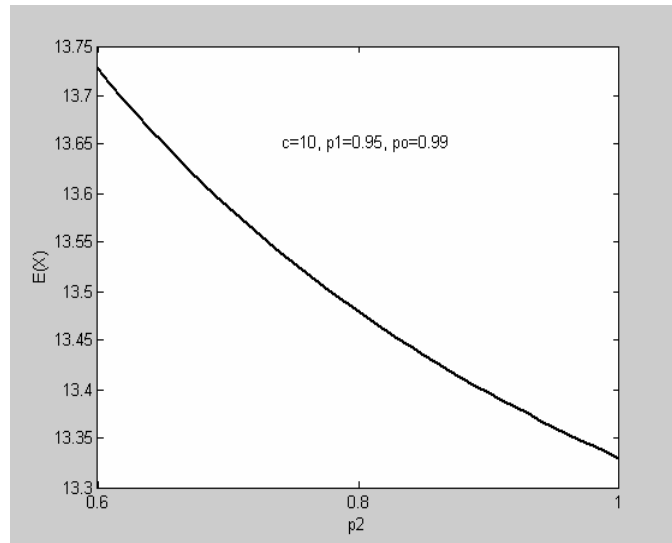
$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = \\
&= \frac{1}{(p_1 - 1)^2 p_2^2} (p_1^{-2c} (-p_1^2 (1 + 2p_1 - 2p_2) + \\
&\quad 2(p_1 - 1)(p_2 - p_1)p_0) + \\
&\quad p_1^{2c} (-p_1 p_2^2 + (p_1 - 1)^2 p_2 p_0 - (p_1 - 1)^2 p_0^2))
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο (2.3.5) για  $p_0 = 0.99, p_1 = 0.9, p_2 = 0.8$  και  $c = 10$  προκύπτει ότι  $\text{Var}(X) = 129$ , ενώ για  $p_0 = 0.99, p_1 = 0.9, p_2 = 0.8$  και  $c = 20$  είναι  $\text{Var}(X) = 3147$ . Είναι φανερό ότι όσο μεγαλώνει το  $c$  η διακύμανση αυξάνεται παρότι έχουμε υψηλές πιθανότητες επιτυχίας εκκίνησης.

Στα Σχήματα 2.3.2 και 2.3.3 απεικονίζεται γραφικά το μέσο μήκος του τεστ συναρτήσει των παραμέτρων  $p_1, p_2$  για συγκεκριμένες τιμές των  $p_0$  και  $c$ .



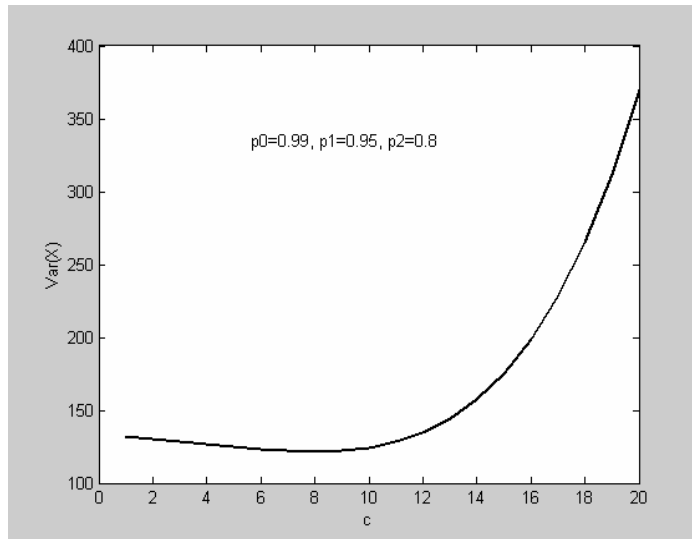
**Σχήμα 2.3.2:** Μέσο μήκος του τεστ για συσχετισμένες δοκιμές εκκίνησης συναρτήσει του  $p_1$ , για  $c = 10, p_2 = 0.8, p_0 = 0.99$ .



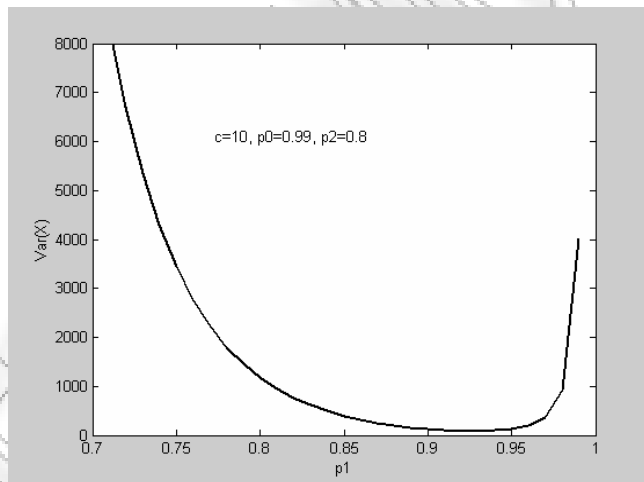
**Σχήμα 2.3.3:** Μέσο μήκος του τεστ για συσχετισμένες δοκιμές εκκίνησης συναρτήσει του  $p_2$ , για  $c = 10, p_1 = 0.95, p_0 = 0.99$ .

Στα διαγράμματα είναι φανερή και η επίδραση της Μαρκοβιανής συσχέτισης μεταξύ των δοκιμών εκκίνησης. Από το Σχήμα 2.3.2 φαίνεται ότι το  $p_1$  επηρεάζει σημαντικά τον αριθμό των δοκιμών που απαιτούνται για να τελειώσει το τεστ και μάλιστα όσο πιο μεγάλο είναι, τόσο λιγότερες δοκιμές χρειάζονται. Αντίθετα η επίδραση του  $p_2$  είναι αμελητέα αφού ο μέσος αριθμός δοκιμών είναι ίσος με 13 όσο και αν μεταβληθεί το  $p_2$ .

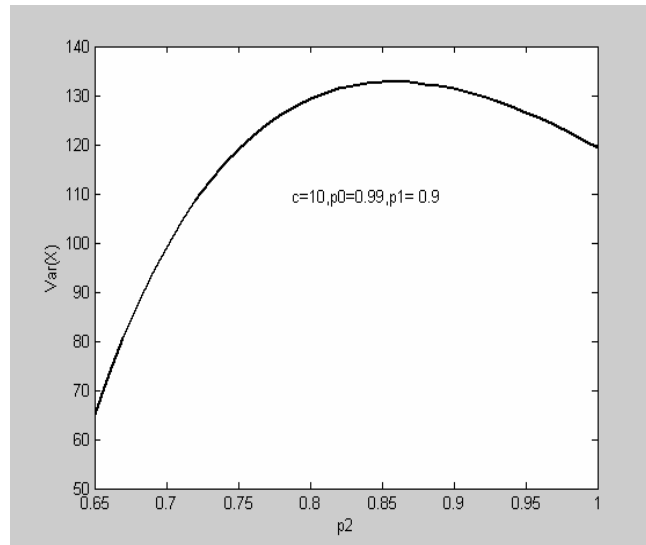
Στη συνέχεια στα τρία σχήματα που ακολουθούν δίνεται η γραφική μελέτη της διακύμανσης του μήκους του τεστ συναρτήσει των παραμέτρων  $c, p_1, p_2$ .



**Σχήμα 2.3.4:** Διακόμανση του μήκους του τεστ συναρτήσει του  $c$ , για  $p_1 = 0.95, p_2 = 0.8, p_0 = 0.99$ .



**Σχήμα 2.3.5:** Διακόμανση του μήκους του τεστ συναρτήσει του  $p_1$ , για  $c = 10, p_2 = 0.8, p_0 = 0.99$ .



**Σχήμα 2.3.6:** Διακύμανση του μήκους του τεστ συναρτήσει του  $p_2$ , για  $c = 10, p_1 = 0.95, p_0 = 0.9$ .

Όπως μπορεί εύκολα να διακρίνει κανείς από τα Σχήμα 2.3.4 και 2.3.6, η διακύμανση είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς  $c$ . Αντίθετα από τα Σχήματα 2.3.5 και 2.3.6 είναι φανερό ότι, δεν είναι μονότονη ως προς  $p_1$  και  $p_2$  αντίστοιχα. Συγκεκριμένα για εξαρτήματα με μικρό  $p_1$  είναι φθίνουσα, ενώ όσο το  $p_1$  τείνει να γίνει ίσο με το  $p_2$ , γίνεται αύξουσα (Σχήμα 2.3.5). Αντίθετα στο Σχήμα 2.3.6 μπορεί κανείς να διακρίνει ότι για μικρό  $p_2$  η διακύμανση είναι φθίνουσα ενώ όσο μεγαλώνει και τείνει να γίνει ίσο με το  $p_1$ , η διακύμανση γίνεται φθίνουσα. Συμπερασματικά, θα μπορούσε κανείς να παρατηρήσει ότι όταν η πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης μετά από μια επιτυχία είναι περίπου ίση με με την πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης μετά από μια αποτυχία, η διακύμανση του μήκους είναι μικρή ενώ όταν οι δυο αυτές πιθανότητες διαφέρουν πολύ μεταξύ τους η διακύμανση του μήκους του τεστ έχει μεγάλες τιμές.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η επίδραση του  $p_1$  στη μεταβολή της διακύμανσης είναι πολύ μεγάλη ενώ αντίθετα η μεταβολή του  $p_2$  δεν επιρεάζει τόσο πολύ τη διακύμανση.

### 2.3.3 Εκτίμηση της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης

Όπως και στην περίπτωση του CS τεστ για ανεξάρτητες δοκιμές έτσι και στο CS τεστ για συσχετισμένες δοκιμές με άγνωστη πιθανότητα επιτυχίας, οι εκτιμήτριες των άγνωστων παραμέτρων  $p_j, j = 0,1,2$  υπολογίζονται με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας και τη μέθοδο των ροπών.

#### A. Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Έστω πάλι το τεστ εκκίνησης που γίνεται σε  $n$  μονάδες ενός εξαρτήματος. Θεωρούμε  $(\delta_i, S_{1i}, F_{1i}, S_{2i}, F_{2i})$  την πληροφορία που αναφέρεται στο τεστ που γίνεται στην  $i$ -οστή μονάδα, όπου  $\delta_i=1$  ή  $0$  αναλόγως με το αν η πρώτη δοκιμή είναι επιτυχία ή αποτυχία,  $S_{1i}(F_{1i})$  είναι ο αριθμός των επιτυχημένων (αποτυχημένων) δοκιμών εκκίνησης όταν η προηγούμενη δοκιμή είναι επιτυχημένη, και  $S_{2i}(F_{2i})$  ο αριθμός των επιτυχημένων (αποτυχημένων) δοκιμών εκκίνησης όταν η προηγούμενη δοκιμή είναι αποτυχημένη. Η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανοφάνειας θα δίνεται από τον τύπο

$$L(p_0, p_1, p_2) = p_0^{S_0} (1-p_0)^{F_0} p_1^{S_1} (1-p_1)^{F_1} p_2^{S_2} (1-p_2)^{F_2},$$

όπου

$$S_0 = \sum_{i=1}^n \delta_i$$

$$F_0 = n - S_0$$

$$S_j = \sum_{i=1}^n S_{ji}$$

$$F_j = \sum_{i=1}^n F_{ji}, \quad \text{για } j=1,2.$$

Η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας  $\hat{p}$  αποτελεί τη λύση της εξίσωσης

$$\frac{\partial \ln L(p_0, p_1, p_2)}{\partial p_j} = 0.$$

Η πληροφορία κατά Fisher είναι ένας διαγώνιος πίνακας 3x3 με στοιχεία της κυρίας διαγώνιου ίσα με

$$I(p_j) = - \left[ \frac{\partial^2 \ln L(p_0, p_1, p_2)}{\partial p_j^2} \right], \quad j=1,2.$$

Εκτελώντας τους υπολογισμούς καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\hat{p}_j = \frac{S_j}{S_j + F_j}$$

και

$$I(\hat{p}_j) = \frac{S_j + F_j}{\hat{p}_j(1 - \hat{p}_j)}$$

Με ανάλογο τρόπο όπως και στην περίπτωση που έχουμε ανεξάρτητες δοκιμές προκύπτει το επόμενο προσεγγιστικό  $100(1-\alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο  $p_j$

$$\left( \hat{p}_j - \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p}_j)}}, \hat{p}_j + \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p}_j)}} \right)$$

## B. Μέθοδος ροπών

Όπως και στη περίπτωση που έχουμε ανεξάρτητες δοκιμές, έτσι και στο Μαρκοβιανό μοντέλο η ροπή  $k$  τάξης δίνεται από τον τύπο

$$m_k = E(X^k) = \sum_{x=0}^{\infty} x^k P(x), \quad k = 1,2,3.$$

Εάν τώρα  $(X_1, \dots, X_n), n = 1,2, \dots$  είναι ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή  $P(x)$ , η δειγματική ροπή  $k$  τάξης ορίζεται από τη σχέση

$$\mu_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, \quad k = 1,2,3.$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των ροπών, για την εκτίμηση των τριών παραμέτρων  $p_0, p_1, p_2$  αρκεί να θέσουμε

$$m_1 = \mu_1$$



$$m_2 = \mu_2$$

$$m_3 = \mu_3.$$

Είναι φανερό ότι, για να υπολογίσουμε τις εκτιμήτριες των  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  χρειάζεται πρώτα να υπολογίσουμε τα

$$G'_X(1) = E(X) = \mu_1$$

$$G''_X(1) = E(X(X-1)) = \mu_2 - \mu_1$$

$$G'''_X(1) = E(X(X-1)(X-2)) = \mu_3 - 3\mu_2 + 2\mu_1.$$

Παρατηρούμε ότι προκύπτει ένα σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους του οποίου η επίλυση απαιτεί αρκετά πολύπλοκους υπολογισμούς. Για το λόγο αυτό η μέθοδος των ροπών μπορούμε να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση των παραμέτρων στην περίπτωση που υπάρχει Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ των δοκιμών, μόνο με παράλληλη αριθμητικών μεθόδων επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων εξισώσεων.

# 3

## Τεστ Εκκίνησης που Βασίζονται στον Αριθμό των Επιτυχημένων και Αποτυχημένων Εκκινήσεων

Από την ανάλυση που έχει παρουσιαστεί μέχρι τώρα είναι φανερό ότι, οι περισσότεροι συγγραφείς (Hahn and Gage (1983), Viveros and Balakrishnan (1993)) μελέτησαν τα τεστ εκκίνησης θεωρώντας ως βασικό κριτήριο αποδοχής ενός εξαρτήματος τον αριθμό των συνεχόμενων επιτυχημένων εκκινήσεων λειτουργίας του. Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό το πείραμα θα συνεχίζεται μέχρι να συμβεί ο προκαθορισμένος αριθμός συνεχόμενων επιτυχιών χωρίς το αποτέλεσμα του πειράματος να επηρεάζεται από τον αριθμό των αποτυχημένων προσπαθειών. Επειδή αυτή η διαδικασία θεωρήθηκε ως μη πρακτική και δεν διευκόλυνε στη γρήγορη απόρριψη ενός μη ποιοτικά καλού σωρού εξαρτημάτων, προτάθηκαν διάφορα τεστ εκκίνησης στα οποία ο αριθμός των αποτυχιών θεωρείται ως βασικό κριτήριο λήψης απόφασης. Από τα τεστ αυτά το πιο σημαντικό είναι το τεστ για  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες και  $d$  συνολικές αποτυχίες, ενώ υπάρχουν και κάποιες παραλλαγές του οι οποίες θα παρουσιαστούν εν συντομία στο κεφάλαιο αυτό.

### 3.1 Τεστ εκκίνησης για $c$ συνεχόμενες επιτυχίες και $d$ συνολικά αποτυχίες, με ανεξάρτητες δοκιμές

Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, το εξάρτημα γίνεται αποδεκτό αν  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες συμβούν πριν από  $d$  συνολικά αποτυχίες ή απορρίπτεται στην αντίθετη περίπτωση. Το τεστ που βασίζεται στο συγκεκριμένο κριτήριο αποτελεί μια τροποποίηση του CS τεστ και ονομάζεται εν συντομία CSTF (Consecutive Successes Total Failures) τεστ εκκίνησης.

Στο τεστ αυτό, η τυχαία μεταβλητή  $X$  παριστάνει και πάλι το χρόνο αναμονής μέχρι να τελειώσει το πείραμα. Η κατανομή του χρόνου αυτού αποτελεί μια μορφή της γεωμετρικής κατανομής τάξης  $(c,d)$  με τη διαφορά όμως ότι στο CSTF οι  $d$  αποτυχίες δεν είναι συνεχόμενες. Πιο συγκεκριμένα, η κατανομή του χρόνου αναμονής μέχρι την εμφάνιση μιας ροής  $c$  συνεχόμενων επιτυχιών ή  $d$  συνεχόμενων αποτυχιών (όποια συμβεί γρηγορότερα) θα ονομάζεται «συντομότερη» γεωμετρική κατανομή τάξης  $(c,d)$ , (*sooner geometric distribution of order  $(c,d)$* ).

### 3.1.1 Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους

Έστω  $n$  ίδιες μονάδες ενός εξοπλισμού που υποβάλλονται σε ανεξάρτητες δοκιμές εκκίνησης. Στη συνέχεια θα συμβολίσουμε με  $X$  το συνολικό αριθμό δοκιμών μέχρι τον τερματισμό του τεστ (αποδοχή ή απόρριψη του εξαρτήματος).

Έστω  $p$  η πιθανότητα επιτυχίας εκκίνησης σε κάθε δοκιμή,  $q = 1 - p$  η πιθανότητα αποτυχίας σε κάθε δοκιμή,  $c$  ο απαιτούμενος αριθμός συνεχόμενων επιτυχιών για να έχουμε αποδοχή και  $d$  ο αριθμός αποτυχιών που απαιτούνται για να έχουμε απόρριψη,

Για την εύρεση της πιθανογεννήτριας συνάρτησης της τ.μ.  $X$  παρατηρούμε αρχικά ότι, υπάρχουν δυο περιπτώσεις που οδηγούν στον τερματισμό του τεστ.

- Μια διαδοχή δοκιμών που οδηγεί σε αποδοχή μιας μονάδας στην  $r$ -οστή εκκίνηση, με  $d$  αποτυχίες, είναι της μορφής

$$\underbrace{S \dots SF}_{r_1} \underbrace{S \dots SF}_{r_2} \dots \underbrace{F S \dots SF}_{r_k} \underbrace{S \dots S}_c,$$

με αντίστοιχη πιθανότητα  $p^{r_1} q^{r_2} q \dots q p^{r_k} q p^c$ . Επομένως, η πιθανογεννήτρια της τ.μ.

$A$ : αριθμός των δοκιμών μέχρι να έχουμε αποδοχή της μονάδας

στη συγκεκριμένη περίπτωση θα είναι ίση με

$$\begin{aligned} G_A^{(k)}(t) &= (1 + pt + \dots + p^{c-1}t^{c-1})qt(1 + pt + \dots + p^{c-1}t^{c-1})qt \\ &\dots qt(1 + pt + \dots + p^{c-1}t^{c-1})qt p^c t^c = \\ &= (1 + pt + \dots + p^{c-1}t^{c-1})^k (qt)^k p^c t^c = \\ &= p^c t^c q^k t^k \left( \sum_{j=0}^{c-1} pt \right)^k = p^c q^k t^{k+c} \left( \frac{1 - p^c t^c}{1 - pt} \right)^k \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

όπου  $0 \leq r_i \leq c-1, i=1,2,\dots,k, \sum_{i=1}^k r_i + k + c = r$  και  $0 \leq k \leq d-1$ .

- Μια διαδοχή δοκιμών εκκίνησης που οδηγεί στην απόρριψη μιας μονάδας κατά την  $r$ -οστή εκκίνηση είναι της μορφής

$$\underbrace{S \dots S}_{r_1} \underbrace{F S \dots S}_{1\eta} \underbrace{F}_{r_2} \dots \underbrace{F S \dots S}_{r_d} \underbrace{F}_{d-\text{οσπή}},$$

με αντίστοιχη πιθανότητα  $p^{r_1} q p^{r_2} q \dots q p^{r_d} q$ . Επομένως, η αντίστοιχη πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ.  $R$ : αριθμός των δοκιμών μέχρι να έχουμε απόρριψη της μονάδας, θα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} G_R(t) &= (1 + pt + \dots + p^{c-1} t^{c-1})^d (qt)^d = \\ &= q^d t^d \left( \sum_{j=0}^{c-1} p^j t^j \right)^d = q^d t^d \left( \frac{1 - p^c t^c}{1 - pt} \right)^d. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

όπου  $0 \leq r_i \leq c-1, i=1,2,\dots,d, \sum_{i=1}^d r_i + d = r$ .

Προσθέτοντας τις σχέσεις (3.1.1) και (3.1.2) προκύπτει η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της μεταβλητής  $X$  από τον τύπο

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{k=0}^{d-1} G_A^{(k)}(t) + G_R(t) = \\ &= p^c t^c \sum_{k=0}^{d-1} \left\{ qt \left( \frac{1 - p^c t^c}{1 - pt} \right) \right\}^k + q^d t^d \left( \frac{1 - p^c t^c}{1 - pt} \right)^d. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Στη συνέχεια, με χρήση της  $G_X(t)$  μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση πιθανότητας της μεταβλητής  $X$ . Πιο αναλυτικά, θεωρούμε ότι

$$\left( \frac{1 - p^c t^c}{1 - pt} \right)^k = \sum_{r=0}^{k(c-1)} t^r p^r B_k(r),$$

όπου

$$B_k(r) = \sum_{i=0}^{\min(k, \lceil r/c \rceil)} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{k+r-ic-1}{r-ic}$$

Επομένως η σχέση (3.1.3) γράφεται

$$G_X(t) = \sum_r p^r t^r \left[ \sum_{k=0}^{d-1} \left( \frac{q}{p} \right)^k B_k(r-k-c) + \left( \frac{q}{p} \right)^d B_d(r-d) \right]$$

και συγκρίνοντας την τελευταία με τη σχέση

$$G_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X=x)t^x$$

μπορούμε εύκολα να εξάγουμε έναν τύπο για τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ.  $X$ . Πιο συγκεκριμένα θα έχουμε

$$P(x) = \Pr(X=x) = p^x \left[ \sum_{k=0}^{d-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k B_k(x-k-c) + \left(\frac{q}{p}\right)^d B_d(x-d) \right] \quad (3.1.4)$$

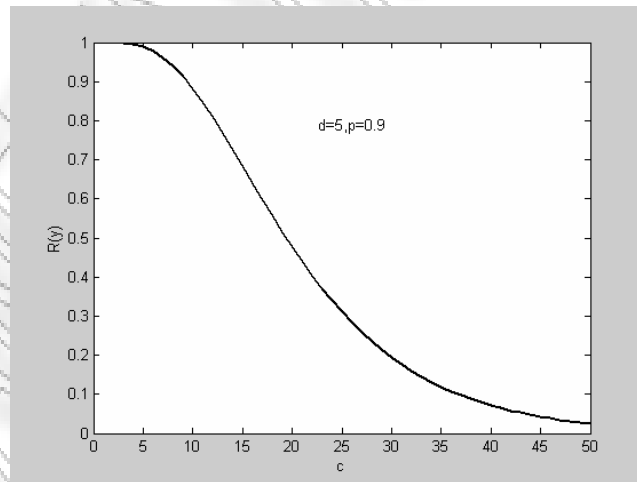
όπου  $x = \min(c, d), \min(c, d) + 1, \dots, cd$ .

Είναι προφανές ότι για  $0 \leq x < \min(c, d)$  είναι  $P(X=x) = 0$ .

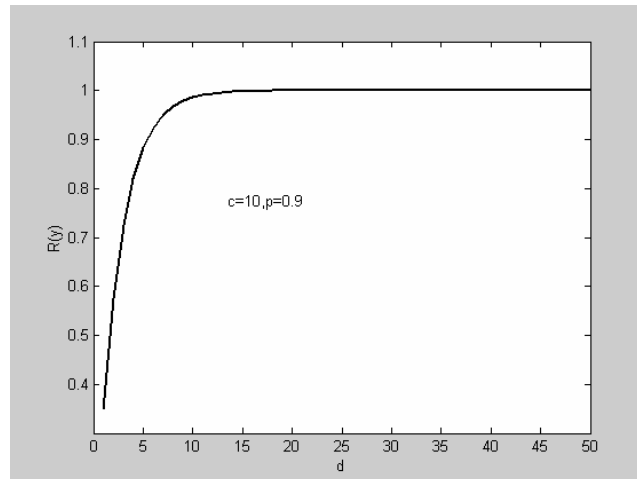
Είναι φανερό ότι, αθροίζοντας τη συνάρτηση πιθανότητας προκύπτει η αθροιστική συνάρτηση κατανομής του μήκους

$$R(y) = \sum_{x=1}^y P(X=x).$$

Στα Σχήματα 3.1.1 και 3.1.2 δίνεται γραφικά η μορφή της πιθανότητας το τεστ να τελειώσει σε  $y$  ή λιγότερες δοκιμές συναρτήσει των  $c, d$ .



**Σχήμα 3.1.1:** Πιθανότητα το τεστ να τελειώσει σε  $y$  ή λιγότερες δοκιμές συναρτήσει του  $c$ , για  $d=5$  και  $p=0.9$



**Σχήμα 3.1.2:** Πιθανότητα το τεστ να τελειώσει σε  $y$  ή λιγότερες δοκιμές συναρτήσει του  $d$ , για  $c=10$  και  $p = 0.9$

Από το Σχήμα 3.1.1 μπορεί κανείς να διακρίνει ότι η πιθανότητα να τελειώσει το τεστ σε  $y$  ή λιγότερες δοκιμές μειώνεται όταν  $d$  είναι σταθερό (π.χ  $d = 5$ ) και το  $c$  αυξάνεται. Αυτό είναι λογικό, αφού αφού όσο μεγαλύτερο είναι το  $c$  τόσο πιο πιθανό είναι να συμβούν οι  $d$  συνολικά αποτυχίες πριν από τις  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες, οπότε είναι και μικρότερη η πιθανότητα αποδοχής της μονάδας. Επιπλέον, είναι εμφανές ότι για την περίπτωση που  $c$  σταθερό και  $d$  να αυξάνεται (βλ. Σχήμα 3.1.2) συμβαίνει το αντίθετο και η πιθανότητα αποδοχής είναι αύξουσα.

### 3.1.2 Μέσο μήκος

Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση  $G_X(t)$  (βλ. σχέση (3.1.3)) ως προς  $t$  βρίσκουμε

$$E(X) = G'_X(1) = \frac{1-p^c}{qp^c} \{1 - (1-p^c)^d\}.$$

Μελετώντας τον παραπάνω τύπο προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

1. Στην περίπτωση που  $d = 1$  δίνεται ότι

$$E(X) = \frac{1-p^c}{q}.$$

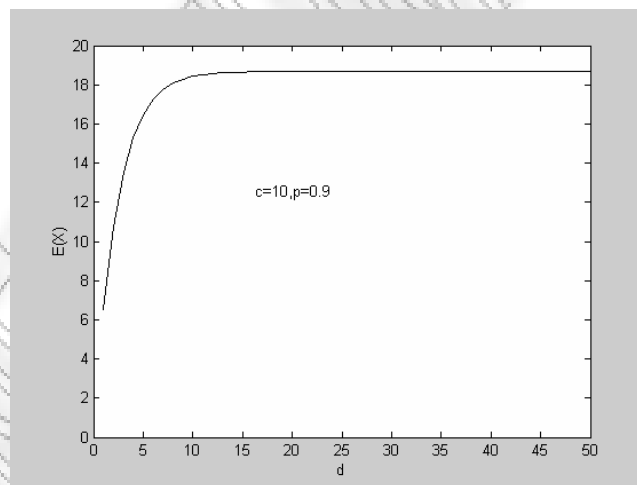
2. Όταν  $d \rightarrow \infty$  είναι φανερό ότι, η μεταβλητή  $X$  ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή τάξης  $c$  για την οποία ισχύει

$$E(X) = \frac{1 - p^c}{qp^c}.$$

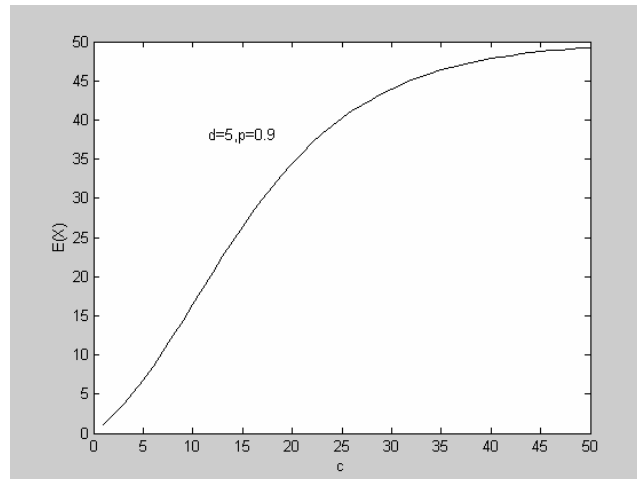
Η τιμή αυτή αποτελεί τη μέση τιμή του χρόνου αναμονής στο CS για ανεξάρτητες δοκιμές.

3. Συγκρίνοντας τις σχέσεις από τα δυο προηγούμενα συμπεράσματα παρατηρούμε ότι, ο χρόνος αναμονής μειώνεται περίπου κατά  $(1 - p)^{d+1} / qp^c$  εξαιτίας της απόρριψης των μονάδων όταν παρατηρούνται πάνω από  $d$  αποτυχίες. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το CSTF τεστ είναι πιο περιοριστικό από το CS με αποτέλεσμα να φτάνουμε πιο γρήγορα στην απόφαση αποδοχής ή μη.
4. Η μέση τιμή  $E(X)$  είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς  $d$  και έχει μέγιστη τιμή  $(1 - p^c) / qp^c$ .

Στα Σχήματα 3.1.3 και 3.1.4 δίνεται γραφικά η μορφή του μέσου μήκους του τεστ.



**Σχήμα 3.1.3:** Μέσο μήκος του τεστ συναρτήσει του  $d$  με  $p = 0.9$  και  $c = 10$



**Σχήμα 3.1.4:** Μέσο μήκος του τεστ συναρτήσει του  $c$  με  $p = 0.9$  και  $d = 5$

Από τα Σχήματα 3.1.3 και 3.1.4 είναι φανερό ότι η μέση τιμή είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς  $c$  και  $d$  αντίστοιχα. Επιπλέον, μπορούμε εύκολα να διακρίνουμε ότι για  $d$  σταθερό και  $c \rightarrow \infty$  είναι σίγουρο ότι οι  $d$  αποτυχίες θα συμβούν πριν από τις  $c$  επιτυχίες οπότε θα έχουμε γρήγορη απόρριψη ενός ελαττωματικού εξαρτήματος. Αντίθετα, στην περίπτωση που  $c$  είναι σταθερό και  $d \rightarrow \infty$ , έχουμε στην ουσία ένα CS τεστ, όπου οι αποτυχίες δεν επηρεάζουν τη λήψη απόφασης και το τεστ αργεί να τελειώσει.

Στη συνέχεια, θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει την πιθανογεννήτρια  $G_X(t)$  για να υπολογίσει και τις υπόλοιπες παραγοντικές ροπές (όπως έγινε στην περίπτωση του CS τεστ), αλλά επειδή η ύπαρξη δυο παραμέτρων  $c, d$  καθιστά τη διαδικασία αρκετά πολύπλοκη και χρονοβόρα θα περιοριστούμε μόνο στον υπολογισμό του μέσου μήκους.

### 3.2 Μια διαφορετική προσέγγιση του CSTF τεστ εκκίνησης

Σύμφωνα με τους Smith and Griffith (2003, 2005) η διαδικασία ελέγχου μέσω ενός CSTF τεστ μπορεί να μελετηθεί με χρήση μιας Μαρκοβιανής αλυσίδα  $\{Y_n\}$  σε διακριτό χρόνο και χώρο καταστάσεων της μορφής

$$\{(r, s : 0 \leq r \leq c, 0 \leq s \leq d \cup \{(0, d)\}\},$$

όπου  $Y_n = (r, s)$  σημαίνει ότι, μετά από την  $n$ -οστή δοκιμή έχουν συμβεί  $r$  συνεχόμενες επιτυχίες και  $s$  συνολικές αποτυχίες.



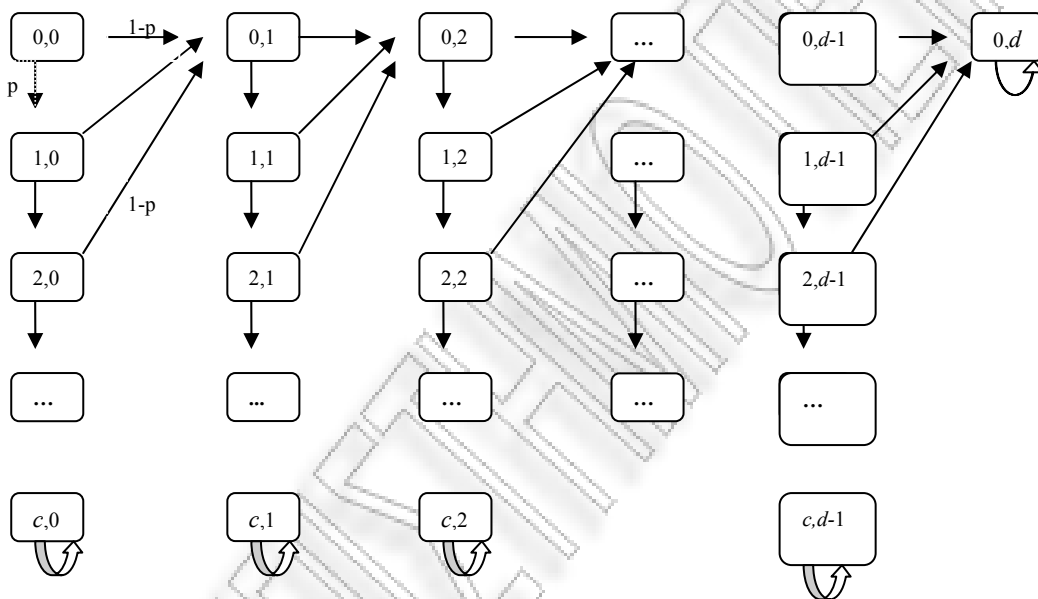
Οι πιθανότητες μετάβασης της συγκεκριμένης αλυσίδας είναι της μορφής

$$P(Y_n = (r + 1, s) / Y_{n-1} = (r, s)) = p$$

και

$$P(Y_n = (0, s + 1) / Y_{n-1} = (r, s)) = q = 1 - p .$$

Στο Σχήμα 3.2.1 απεικονίζεται ο χώρος καταστάσεων της Μαρκοβιανής Αλυσίδας που περιγράψαμε, καθώς επίσης και οι δυνατές μεταβάσεις από μια κατάσταση σε κάποια άλλη.



**Σχήμα 3.2.1:** Χώρος καταστάσεων και οι πιθανότητες μετάβασης ενός *CSTF*.

Από το σχήμα είναι φανερό ότι, όταν βρισκόμαστε σε κάποια συγκεκριμένη κατάσταση, μετακινούμαστε προς το κάτω μέρος της αντίστοιχης στήλης με πιθανότητα  $p$ , ή μεταβαίνουμε στην κορυφή της επόμενης στήλης με πιθανότητα  $q = 1 - p$ . Μοναδική εξαίρεση αποτελούν οι απορροφητικές καταστάσεις, δηλαδή οι καταστάσεις οι οποίες μεταβαίνουν στον εαυτό τους με πιθανότητα ίση με 1, στις οποίες και τερματίζεται το τεστ. Όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα, τέτοιες καταστάσεις είναι: οι καταστάσεις στο κάτω μέρος των στηλών που οδηγούν στην αποδοχή του εξαρτήματος, και η μοναδική κατάσταση στην τελευταία στήλη που οδηγεί στην απόρριψη.

Σύμφωνα λοιπόν με την παραπάνω ανάλυση η πιθανότητα απόρριψης μιας μονάδας θα δίνεται από τον τύπο

$$P(\text{απόρριψη}) = (1 - p^c)^d = 1 - P(\text{αποδοχή})$$

Για την απόδειξη της σχέσης αυτής χρησιμοποιούμε το χώρο καταστάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας (βλ. Σχήμα 3.2.1), ο οποίος αποτελείται από  $d$  απορροφητικές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να έχουμε αποδοχή και μια κατάσταση όπου έχουμε απόρριψη.

Η διαδικασία του τεστ ξεκινάει από την κατάσταση  $(0,0)$  και καταλήγει στην  $(c,0)$ , δηλαδή το τεστ τελειώνει με αποδοχή της μονάδας με πιθανότητα  $p^c$ . Αν δεν συμβεί αυτό μεταβαίνει στην επόμενη κατάσταση με πιθανότητα  $(1 - p^c)$  και συνεχίζεται μέχρι να εμφανισθούν  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες. Για κάθε  $i < d$  η κατανομή των απορροφητικών καταστάσεων που οδηγούν στην αποδοχή είναι γεωμετρική με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(\text{συμβαίνει απορρόφηση στην κατάσταση } (c,i)) = p^c (1 - p^c)^i$$

Στη συνέχεια, αθροίζοντας όλες τις καταστάσεις που οδηγούν σε αποδοχή προκύπτει εύκολα η πιθανότητα αποδοχής

$$\begin{aligned} P(\text{αποδοχή}) &= \sum_{i=0}^{d-1} P(\text{συμβαίνει απορρόφηση στην κατάσταση } (c,i)) = \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} p^c (1 - p^c)^i = p^c \frac{1 - (1 - p^c)^d}{1 - (1 - p^c)} = 1 - (1 - p^c)^d \end{aligned}$$

Επιπλέον παρατηρούμε ότι, η μοναδική κατάσταση στην οποία έχουμε απόρριψη είναι η  $(0,d)$ . Για να καταλήξει εκεί η διαδικασία, θα πρέπει να έχει αποτύχει να φτάσει στο κάτω μέρος κάθε μιας από τις υπόλοιπες  $d$  στήλες με πιθανότητα  $(1 - p^c)^d$ . Επομένως η πιθανότητα να τελειώσει το τεστ με απόρριψη μιας μονάδας είναι

$$P(\text{απόρριψη}) = (1 - p^c)^d$$

Στη μελέτη που ακολουθεί δίνεται μια γενική μεθοδολογία, η οποία με τη χρήση των ιδιοτήτων της Μαρκοβιανής Αλυσίδας προσδιορίζει πλήρως τις ποσότητες που σχετίζονται με το μήκος ενός τεστ της μορφής CSTF. Με τις κατάλληλες τροποποιήσεις (ανάλογα με το κριτήριο λήψης απόφασης για κάθε τεστ), μπορούν να προκύψουν αντίστοιχα αποτελέσματα και για τεστ της μορφής CSCF, TSCF, TSTF. (βλ. Ενότητα 3.5)

Έστω λοιπόν η Μαρκοβιανή Αλυσίδα με χώρο καταστάσεων που περιγράψαμε λίγο παραπάνω (βλ. Σχήμα 3.2.1). Είναι γνωστό ότι, για κάθε Μαρκοβιανή αλυσίδα υπάρχουν κάποιες απορροφητικές καταστάσεις οι οποίες οδηγούν στον τερματισμό του πειράματος. Στη παραπάνω αλυσίδα οι καταστάσεις αυτές είναι οι  $(c,0), (c,1), (c,2), \dots, (c, d-1)$ , και  $(0, d)$ . Οι υπόλοιπες καταστάσεις είναι μεταβατικές, και το σύνολο τους συμβολίζεται με  $T$ .

Έστω λοιπόν ο μονοδιάστατος πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης  $P$ , ο οποίος είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ R & Q \end{bmatrix},$$

όπου

- $P_1$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης  $(d+1) \times (d+1)$  που περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης από μια απορροφητική κατάσταση σε μια άλλη,
- $R$  είναι ένας  $(cd) \times (d+1)$  πίνακας που περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης από μια μεταβατική σε μια απορροφητική κατάσταση,
- $Q$  είναι ένας  $(cd) \times (cd)$  πίνακας που περιέχει τις πιθανότητες ανάμεσα στις μεταβατικές καταστάσεις, και
- $\mathbf{0}$  ο μηδενικός πίνακας που περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης από μια απορροφητική κατάσταση σε μια μεταβατική.

Είναι φανερό ότι,  $(d+1)$  είναι ο αριθμός των απορροφητικών καταστάσεων και  $(cd)$  είναι ο αριθμός των μεταβατικών καταστάσεων.

Για τον υπολογισμό των ποσοτήτων που αφορούν το μήκος του τεστ, που συμβολίζεται με  $X$ , θα χρησιμοποιήσουμε επιπλέον τις ποσότητες

- $I$ : μοναδιαίος πίνακας  $(cd) \times (cd)$
- $M = (I - Q)^{-1}$ : θεμελιώδης πίνακας διάστασης  $(cd) \times (cd)$
- $e_m$ : διάνυσμα στήλη  $(1 \times cf)$ , όπου το  $m$ -οστό στοιχείο είναι μονάδα και τα υπόλοιπα στοιχεία είναι ίσα με 0.
- $\mathbf{1}_z$ : το μοναδιαίο διάνυσμα στήλη  $1 \times z$
- $N_{ij}$ : τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον αριθμό των φορών η διαδικασία επισκέπτεται την κατάσταση  $j$  πριν καταλήξει σε μια απορροφητική κατάσταση, έχοντας ξεκινήσει αρχικά από την κατάσταση  $i$ . ( $i, j \in T$ ).

- $N_i = \sum_{j \in T} N_{ij}$  : ο συνολικός αριθμός των φορών που η διαδικασία είναι στις μεταβατικές καταστάσεις πριν μπει σε απορροφητική κατάσταση, έχοντας ξεκινήσει από μια μεταβατική κατάσταση  $i$ .
- $\mu_{ij} = E(N_{ij})$  για  $i, j \in T$ .
- $M_\rho = [\sum_{j \in T} \mu_{ij}] = M1_{cd}$  : διάνυσμα στήλη με  $cd$  στοιχεία, όπου το  $m$ -οστό στοιχείο είναι το άθροισμα των στοιχείων της  $m$ -οστής γραμμής του πίνακα  $M$ .
- $M_{\rho^2} = [(\sum_{j \in T} \mu_{ij})^2] = \text{diag}(M_\rho)M_\rho$  : διάνυσμα στήλη με  $cd$  στοιχεία όπου το  $m$ -οστό στοιχείο είναι το τετράγωνο του αθροίσματος των στοιχείων της  $m$ -οστής γραμμής του πίνακα  $M$ .

Σύμφωνα με την παραπάνω γενική προσέγγιση μπορεί εύκολα να υπολογίσει κανείς το αναμενόμενο μέσο μήκος του τεστ μέσω του τύπου

$$E(X) = e_1' M 1_{cd}.$$

Η διακύμανση του  $Y$  δίνεται από

$$\text{Var}(X) = e_1' [(2M - I)M_\rho - M_{\rho^2}].$$

Η συνάρτηση πιθανότητας του μήκους παίρνει τη μορφή

$$P(X = m) = e_1' Q^{m-1} R 1_{d+4}, \text{ όπου } Q^0 = I,$$

ενώ η συνάρτηση κατανομής υπολογίζεται εύκολα από τη σχέση

$$P(X \leq m) = e_1' \sum_{i=0}^{m-1} Q^i R 1_{d+4}, \text{ όπου } Q^0 = I.$$

Τέλος, οι πιθανότητες απόρριψης και αποδοχής του εξαρτήματος είναι ίση με

$$P(\text{απόρριψη}) = e_1' M \text{Re}_{d+1} = 1 - P(\text{αποδοχή})$$

Η πρακτική σημασία της συγκεκριμένης μεθοδολογίας θα γίνει πιο κατανοητή μέσα από το αριθμητικό παράδειγμα που ακολουθεί.

**Παράδειγμα:** Έστω ότι ένας μηχανικός παραγωγής αναλαμβάνει να ελέγξει την ποιότητα μιας συσκευής με πιθανότητα επιτυχίας εκκίνησης  $p = 0.9$ . Οι προδιαγραφές που πρέπει να πληρούνται ώστε να τελειώσει με αποδοχή το τεστ είναι να συμβούν  $c = 4$  επιτυχημένες εκκινήσεις λειτουργίας πριν από  $d = 2$  αποτυχημένες.

Ο αντίστοιχος πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης μπορεί εύκολα να υπολογιστεί, με βάση τα προαναφερθέντα και βρίσκεται ίσως με

	(4,0)	(4,1)	(0,2)	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)
(4,0)	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(4,1)	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(0,2)	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
(0,0)	0	0	0	0	0.9	0	0	0.1	0	0	0
(1,0)	0	0	0	0	0	0.9	0	0.1	0	0	0
(2,0)	0	0	0	0	0	0	0.9	0.1	0	0	0
(3,0)	0.9	0	0	0	0	0	0	0.1	0	0	0
(0,1)	0	0	0.1	0	0	0	0	0	0.9	0	0
(1,1)	0	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0.9	0
(2,1)	0	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0.9
(3,1)	0	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0

Συνδυάζοντας τον πίνακα μετάβασης με τους τύπους που δόθηκαν παραπάνω προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα

$$M = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.81 & 0.729 & 0.3439 & 0.3095 & 0.2786 & 0.2507 \\ 0 & 1 & 0.9 & 0.81 & 0.271 & 0.2439 & 0.2195 & 0.9976 \\ 0 & 0 & 1 & 0.9 & 0.19 & 0.171 & 0.1539 & 0.1385 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.1 & 0.09 & 0.081 & 0.0729 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.9 & 0.81 & 0.729 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.9 & 0.81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M\mathbf{1}_8 = \begin{bmatrix} 4.6217 \\ 4.442 \\ 2.5534 \\ 1.3439 \\ 3.439 \\ 1.71 \\ 1.9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E(X) = e_1' M \mathbf{1}_8 = 4.6217$$

$$M'_\rho = M\mathbf{1}_8' = [4.6217 \quad 4.442 \quad 2.5534 \quad 1.3439 \quad 3.439 \quad 1.71 \quad 1.9 \quad 1]$$

$$\begin{aligned} M_{\rho^2} &= [(\sum_{j \in I} \mu_{ij})^2] = \text{diag}(M_\rho) M'_\rho = \\ &= [21.36 \quad 19.73 \quad 6.52 \quad 1.806 \quad 11.827 \quad 2.924 \quad 3.61 \quad 1] \end{aligned}$$

$$P(\text{απόρριψη}) = e_1' M \text{Re}_3 = 0.1183$$

$$P(\text{αποδοχή}) = 0.8817.$$

### 3.3 Εκτίμηση της πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης

Όπως και στην περίπτωση του τεστ για συνεχόμενες επιτυχίες έτσι και για το CSTF είναι ωφέλιμο να υπολογιστούν οι εκτιμήτριες της άγνωστης πιθανότητας εκκίνησης. Οι Ε.Μ.Π μπορούν να υπολογιστούν με δυο μεθόδους: με την κλασική μέθοδο των Viveros and Balakrishnan (1993), η οποία βρίσκει εφαρμογή σε κάθε είδους τεστ αν είναι γνωστές οι συνολικές επιτυχημένες και αποτυχημένες εκκινήσεις λειτουργίας αντίστοιχα, και με τη μέθοδο της Μαρκοβιανής προσέγγισης.

Ας θεωρήσουμε αρχικά ότι, γίνεται CSTF τεστ εκκίνησης σε  $n$  ίδια ή πανομοιότυπα εξαρτήματα, με  $c, d$  να έχουν συγκεκριμένες τιμές. Για το  $i$ -οστό εξάρτημα, όπου  $1 \leq i \leq n$ , συμβολίζουμε με  $S_i, F_i$  το συνολικό αριθμό των επιτυχημένων και αποτυχημένων εκκινήσεων λειτουργίας αντίστοιχα, μέχρι να τελειώσει το τεστ. Για το τυχαίο δείγμα των  $n$

μονάδων που υποβάλλονται σε τεστ παράγονται  $n$  τυχαία διανύσματα της μορφής  $(S_1, F_1), (S_2, F_2), \dots, (S_n, F_n)$  με αντίστοιχες παρατηρούμενες τιμές  $(s_1, f_1), (s_2, f_2), \dots, (s_n, f_n)$ . Είναι φανερό ότι, η συνάρτηση πιθανοφάνειας  $L(p)$  είναι ανάλογη με την πιθανότητα των συνολικών επιτυχιών  $s_i$  και των συνολικών αποτυχιών  $f_i$ , δηλαδή με την τιμή  $p^{s_i}(1-p)^{f_i}$ . Αυτό αποδεικνύεται μελετώντας τις δυο πιθανές περιπτώσεις που οδηγούν στο τερματισμό του τεστ.

Έτσι, για  $f_i = d$  είναι φανερό ότι, το  $i$ -οστό τεστ τελειώνει όταν συμβούν  $d$  συνολικά αποτυχίες. Αυτό σημαίνει ότι η τελευταία δοκιμή (π.χ. η  $(s_i + f_i)$ ) ήταν αποτυχία, η οποία συνέβη με πιθανότητα  $(1-p)$ . Για να τελειώσει όμως το τεστ με αυτό τον τρόπο θα πρέπει στην προηγούμενη δοκιμή  $(s_i + f_i - 1)$  να είχαν συμβεί  $s_i$  επιτυχίες με πιθανότητα  $p$  και  $f_i - 1$  αποτυχίες με πιθανότητα  $(1-p)$ , κατανομημένες όμως με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μην υπήρχαν  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες. Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω η πιθανότητα να τελειώσει το τεστ με απόρριψη είναι ανάλογη της ποσότητας  $p^{s_i}(1-p)^{f_i-1} p = p^{s_i}(1-p)^{f_i}$ .

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια την περίπτωση  $f_i < d$ . Τότε για να τελειώσει το  $i$ -οστό τεστ με αποδοχή θα πρέπει οι  $c$  τελευταίες εκκινήσεις λειτουργίας να είναι επιτυχημένες με πιθανότητα  $p^c$ . Για να γίνει όμως αυτό θα πρέπει στις προηγούμενες  $(s_i + f_i - c)$  δοκιμές να έχουν συμβεί  $s_i - c$  επιτυχίες με πιθανότητα  $p^{s_i-c}$  και  $f_i$  αποτυχίες με πιθανότητα  $(1-p)^{f_i}$ , κατανομημένες με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μην υπήρχαν  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες. Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω η πιθανότητα να τελειώσει το τεστ με αποδοχή είναι ανάλογη της ποσότητας  $p^c p^{s_i-c} p^{f_i} = p^{s_i}(1-p)^{f_i}$ .

Συμπερασματικά προκύπτει ότι η συνάρτηση πιθανοφάνειας  $L(p)$  για τα στοιχεία  $(s_1, f_1), (s_2, f_2), \dots, (s_n, f_n)$ , είναι της μορφής

$$L(p) = \prod_{i=1}^n p^{s_i} (1-p)^{f_i} = p^{\sum s_i} (1-p)^{\sum f_i},$$

όπου  $f_i \leq d, i = 1, 2, \dots, n$ .

Στη συνέχεια γράφοντας

$$s = \sum s_i, \quad g = \sum f_i,$$

προκύπτει ότι,

$$L(p) \propto p^s (1-p)^g,$$

όπου το σύμβολο  $\propto$  σημαίνει ότι η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι ανάλογη της ποσότητας  $p^s (1-p)^g$ .

Η Ε.Μ.Π που θα προκύψει σύμφωνα με αυτή τη διαδικασία συμβολίζεται με  $\hat{p}_{SF}$  και δίνεται από τον τύπο

$$\hat{p}_{SF} = \frac{s}{s+g}.$$

Επισημαίνεται ότι, η παραπάνω εκτιμήτρια είναι ισοδύναμη με αυτή που υπολόγισαν οι Viveros και Balakrishnan (1993) για τα απλά CS τεστ εκκίνησης.

Η πληροφορία κατά Fisher στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ίση με

$$I(p_{SF}) = \left[ \frac{\partial^2 \ln(L(p))}{\partial p^2} \right]_{p=\hat{p}_{SF}}$$

και εκτιμάται από την ποσότητα

$$I(\hat{p}_{SF}) = \frac{s \left( \frac{g}{s+g} \right)^2 + g \left( \frac{s}{s+g} \right)^2}{\left( \frac{s}{s+g} \right)^2 \left( \frac{g}{s+g} \right)^2} = \frac{(s+g)^3}{sg} = \frac{(s+g)}{\hat{p}_{SF}(1-\hat{p}_{SF})}.$$

Το αντίστοιχο προσεγγιστικό  $100(1-\alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για την πιθανότητα επιτυχίας εκκίνησης θα έχει άκρα

$$\hat{p}_{SF} \pm \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p}_{SF})}}.$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την εκτιμήτρια της άγνωστης πιθανότητας  $p$  βασιζόμενοι στη Μαρκοβιανή προσέγγιση του τεστ (βλ. Ενότητα 3.2). Θεωρώντας λοιπόν όλες τις προϋποθέσεις που ισχύουν στη Ενότητα 3.2 είναι φανερό ότι, το τεστ θα τελειώσει με έναν από τους  $d+1$  τρόπους οι οποίοι οφείλονται στις  $d+1$  απορροφητικές καταστάσεις

$$(c,0), (c,1), (c,2), \dots, (c,d-1), (0,d),$$

με αντίστοιχες πιθανότητες



$$\begin{aligned}
p_1 &= p^c, \\
p_2 &= (1 - p^c)p^c, \\
p_3 &= (1 - p^c)^2 p^c, \\
&\dots\dots\dots, \\
p_d &= (1 - p^c)^{(c-1)} p^c, \\
p_{d+1} &= (1 - p^c)^d.
\end{aligned}$$

Επειδή όμως το τεστ γίνεται σε ένα τυχαίο δείγμα  $n$  εξαρτημάτων, για τις αντίστοιχες συχνότητες εμφάνισης των απορροφητικών καταστάσεων θα ισχύει ότι

$$n_1 = n_{(c,0)}, n_2 = n_{(c,1)}, n_{(c,2)}, \dots, n_{(c,d-1)}, n_{d+1} = n_{(0,d)},$$

Ενώ οι τελευταίες τυχαίες μεταβλητές θα ακολουθούν μια πολυωνυμική κατανομή με πιθανότητα

$$\begin{aligned}
P(Y_1 = n_1, Y_2 = n_2, \dots, Y_{d+1} = n_{d+1}) = \\
(p^c)^{n_{(c,0)}} ((1 - p^c)p^c)^{n_{(c,1)}} ((1 - p^c)^2 p^c)^{n_{(c,2)}} \dots ((1 - p^c)^d)^{n_{(0,d)}}.
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
\ln(L(p)) = n_{(c,0)} c \ln(p) + n_{(c,1)} \ln(1 - p^c) + n_{(c,1)} c \ln(p) + n_{(c,2)} 2 \ln(1 - p^c) + \\
+ n_{(c,2)} c \ln(p) + \dots + n_{(c,i)} i \ln(1 - p^c) + n_{(c,i)} c \ln(p) + \dots + \\
+ n_{(c,d-1)} (d - 1) \ln(1 - p^c) + n_{(c,d-1)} c \ln(p) + n_{(c,d)} d \ln(1 - p^c).
\end{aligned}$$

Επομένως η ε.μ.π  $\hat{p}_{AS}$  προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης

$$\frac{\partial \ln(L(p))}{\partial p} = \frac{c}{p} \sum_{i=0}^{d-1} n_{(c,i)} - \frac{cp^{c-1}}{1 - p^c} \sum_{i=0}^{d-1} i n_{(c,i)} - \frac{cp^{c-1}}{1 - p^c} f n_{(0,d)} = 0$$

και θα είναι της μορφής

$$\hat{p}_{AS} = \sqrt[c]{\frac{n - n_{(0,d)}}{n - n_{(0,d)} + \sum_{i=1}^{d-1} i n_{(c,i)} + f n_{(0,d)}}}.$$

Ενώ η εκτιμώμενη πληροφορία κατά Fisher είναι

$$I(\hat{p}_{AS}) = \frac{c}{\hat{p}_{AS}^2} (n - n_{(0,d)}) + c \left( \sum_{i=1}^{d-1} i n_{(c,i)} + f n_{(0,d)} \right) \times \left[ \frac{(c-1) \hat{p}_{AS}^{c-2}}{1 - \hat{p}_{AS}^c} + \frac{\hat{p}_{AS}^{c-1} (c \hat{p}_{AS}^{c-1})}{(1 - \hat{p}_{AS}^c)^2} \right].$$

Επομένως, το προσεγγιστικό  $(1-\alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για το  $p$  που προκύπτει θα έχει άκρα

$$\hat{p}_{AS} \pm \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p}_{AS})}}.$$

Η εύρεση δυο εκτιμητριών μέγιστης πιθανοφάνειας της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης καθιστά αναγκαία και τη σύγκριση μεταξύ τους.

Για το λόγο αυτό, οι Smith and Griffith (2003, 2005) θεωρώντας ένα CSTF τεστ με  $c=10$ ,  $d=2$ ,  $p=0.90$ , και  $n = 52$  έκαναν πολλές φορές προσομοίωση και υπολόγισαν κάθε φορά τις εκτιμήτριες  $\hat{p}_{AS}$ ,  $\hat{p}_{SF}$  καθώς και τα αντίστοιχα 95% διαστήματα εμπιστοσύνης. Συγκεντρώνοντας λοιπόν τα αποτελέσματα, παρατήρησαν ότι προέκυψε κάποια ελάχιστη, μέση και μέγιστη τιμή για την κάθε εκτιμήτρια αντίστοιχα. Τα αριθμητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.3.1, απ' όπου μπορεί εύκολα να διακρίνει κανείς ότι η μέση εκτιμήτρια που βρήκαν είναι πιο κοντά στην πραγματική τιμή του  $p$  και δίνει 95% διάστημα εμπιστοσύνης πλάτους  $\leq 0.05$ .

	$\hat{p}_{SF}$	Κάτω όριο Δ.Ε.	Πάνω όριο Δ.Ε.	Πλάτος Δ.Ε.	$\hat{p}_{AS}$	Κάτω όριο Δ.Ε.	Πάνω όριο Δ.Ε.	Πλάτος Δ.Ε.
Ελάχιστη	0.860	0.830	0.890	0.039	0.851	0.817	0.886	0.039
Μέση	0.900	0.875	0.925	0.050	0.900	0.874	0.926	0.052
Μέγιστη	0.938	0.919	0.958	0.062	0.940	0.921	0.960	0.068

**Πίνακας 3.3.1:** Σύγκριση των δυο εκτιμητριών  $\hat{p}_{AS}$  και  $\hat{p}_{SF}$  της άγνωστης παραμέτρου.

Από τα αποτελέσματα είναι φανερό ότι οι δυο Ε.Μ.Π. παίρνουν τιμές πολύ κοντά στην πραγματική τιμή του  $p$  και δίνουν περίπου τα ίδια διαστήματα εμπιστοσύνης.

Βέβαια ο υπολογισμός της εκτιμήτριας  $\hat{p}_{SF}$  είναι πρακτικά ευκολότερος ενώ ταυτόχρονα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε τεστ με διαφορετικά κριτήρια, σε αντίθεση με την εκτιμήτρια  $\hat{p}_{AS}$ . Παρόλα αυτά ένα μειονέκτημα της  $\hat{p}_{SF}$  είναι ότι, για τον υπολογισμό της, είναι απαραίτητη η γνώση όχι μόνο του αριθμού των συνολικών επιτυχημένων εκκινήσεων λειτουργίας αλλά και του αριθμού των συνεχόμενων επιτυχιών και αποτυχιών ξεχωριστά,

δηλαδή απαιτείται η γνώση μεγαλύτερης πληροφορίας από το δείγμα από ότι στην περίπτωση της  $\hat{P}_{AS}$ .

### 3.4 Τεστ εκκίνησης για $c$ συνεχόμενες επιτυχίες και $d$ συνολικά αποτυχίες με Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ των δοκιμών

Ας θεωρήσουμε ένα CSTF τεστ εκκίνησης όπου η κατάσταση του εξαρτήματος κάθε χρονική στιγμή παριστάνεται από μια Μαρκοβιανή αλυσίδα  $X_1, X_2, \dots$  με διακριτό χώρο καταστάσεων  $\{0,1\}$ , όπου η τιμή 1 αναφέρεται σε επιτυχία και η τιμή 0 σε αποτυχία.

Στη συνέχεια ας συμβολίσουμε με  $p_0$  την πιθανότητα επιτυχίας στην πρώτη δοκιμή,  $p_1$  την πιθανότητα επιτυχίας όταν η προηγούμενη δοκιμή ήταν επιτυχία,  $p_2$  την πιθανότητα επιτυχίας όταν η προηγούμενη δοκιμή ήταν αποτυχία. Επίσης, ας συμβολίσουμε με  $c$  τον αριθμό των συνεχόμενων επιτυχημένων δοκιμών που απαιτούνται για την αποδοχή της μονάδας,  $d$  τον αριθμό των αποτυχιών που οδηγούν σε απόρριψη, και με  $Z_{c,d}$  τη τ.μ που παριστάνει τις συνολικές δοκιμές μέχρι τον τερματισμό του πειράματος. Ορίζουμε τέλος με

$$T \text{ τον χρόνο της πρώτης αποτυχίας,}$$

$$S_{c,d} = \begin{cases} 1 & \text{αν η μονάδα γίνει αποδεκτή} \\ 0 & \text{αν η μονάδα απορριφθεί} \end{cases}$$

και με  $I_a(b)$  την επόμενη δείκτρια συνάρτηση

$$I_a(b) = \begin{cases} 1 & \text{αν } a=b \\ 0 & \text{αν } a \text{ όχι ίσο με } b \end{cases}$$

Για τον υπολογισμό των ποσοτήτων που σχετίζονται με το μήκος του τεστ ο Martin (2003) θεώρησε ότι  $p_0 = p_2$ . Γενικά ισχύει ότι, η πιθανότητα επιτυχίας  $p_2$  είναι διαφορετική από την  $p_0$ , για την απλοποίηση όμως των πράξεων ο Martin χρησιμοποίησε τις βοηθητικές μεταβλητές  $X_1^*, X_2^*, \dots$ , με αρχική πιθανότητα επιτυχίας  $P(X_1^* = 1) = p_2$  και ίδιες πιθανότητες μετάβασης με τα αρχικά δεδομένα.

Σύμφωνα με την παραπάνω παραδοχή ορίζονται επιπλέον και οι ποσότητες  $Z_{c,d}^*$  και  $S_{c,d}^*$  που είναι ανάλογες των  $Z_{c,d}$ ,  $S_{c,d}$ , αντίστοιχα.

### 3.4.1 Συνάρτηση πιθανότητας

Σύμφωνα με τις παραπάνω προϋποθέσεις θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής  $S_{c,d}^*$  και ανάλογα θα προκύψουν τα αποτελέσματα για την  $S_{c,d}$ .

Έστω αρχικά ότι  $d=1$ . Τότε μια τυπική ακολουθία η οποία οδηγεί στην αποδοχή της μονάδας θα έχει τη μορφή

$$\underbrace{FSS\dots S}_c$$

και η πιθανότητα του ενδεχομένου αυτού θα είναι ίση με  $P[S_{c,1}^* = 1] = p_2 p_1^{c-1}$

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια την περίπτωση  $d = 2, 3, \dots$ . Τότε η ακολουθία των δοκιμών που οδηγούν στην αποδοχή είναι

$$FF \underbrace{SS\dots SFSS\dots SFSS\dots S}_{\text{t φορές}} \underbrace{SS\dots S}_c$$

με αντίστοιχη πιθανότητα

$$\begin{aligned} P[S_{c,d}^* = 1] &= (1 - p_2)P[S_{c,d-1}^* = 1] + \sum_{t=2}^c \{P[S_{c,d-1}^* = 1] p_2 p_1^{t-2} (1 - p_1)\} + p_2 p_1^{c-1} = \\ &= (1 - p_2 p_1^{c-1})P[S_{c,d-1}^* = 1] + P[S_{c,1}^* = 1]. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Επαναλαμβάνοντας τη σχέση (3.4.1) για  $d = 2, 3, \dots$  προκύπτει

$$\begin{aligned} P[S_{c,d}^* = 1] &= P[S_{c,1}^* = 1] \sum_{r=0}^{d-1} (1 - p_2 p_1^{c-1})^r = p_2 p_1^{c-1} \frac{1 - (1 - p_2 p_1^{c-1})^d}{1 - (1 - p_2 p_1^{c-1})} = \\ &= 1 - (1 - p_2 p_1^{c-1})^d. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Αν στους τύπους (3.4.1) και (3.4.2) θέσουμε  $p_2 = p_0$  προκύπτουν οι αντίστοιχες πιθανότητες αποδοχής

$$P[S_{c,1} = 1] = p_0 p_1^{c-1}, \text{ για } d = 1$$

και

$$P[S_{c,d} = 1] = (1 - p_0 p_1^{c-1})P[S_{c,d-1} = 1] + p_0 p_1^{c-1}, \text{ για } d = 2, 3, \dots$$

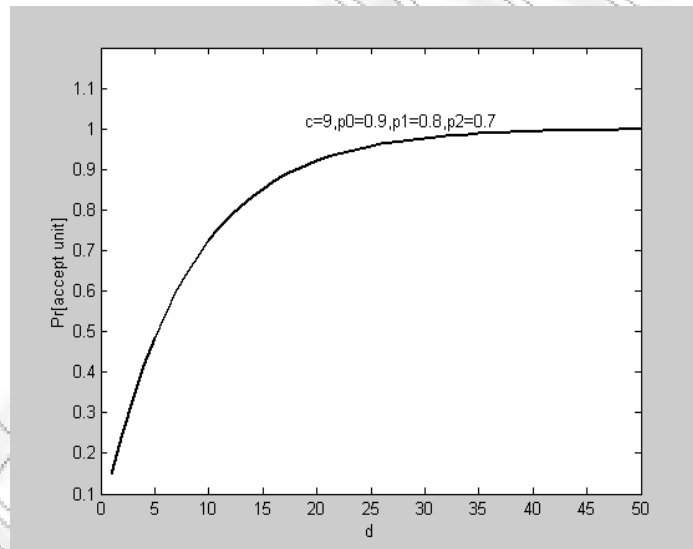
Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.4.2) στην τελευταία σχέση, προκύπτει τελικά η πιθανότητα αποδοχής μιας μονάδας

$$P[S_{c,d} = 1] = 1 - (1 - p_0 p_1^{c-1})(1 - p_2 p_1^{c-1})^{d-1} \quad \text{για } d = 1, 2, \dots \quad (3.4.5)$$

Είναι φανερό ότι η πιθανότητα αποδοχής είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς  $d$  η οποία τείνει στο 1 καθώς το  $d \rightarrow \infty$ , πράγμα αναμενόμενο αφού όσο περισσότερες αποτυχίες απαιτούνται για να απορριφθεί ένα εξάρτημα, τόσο πιο πιθανό είναι οι απαιτούμενες συνεχόμενες επιτυχίες να συμβούν πριν από αυτές.

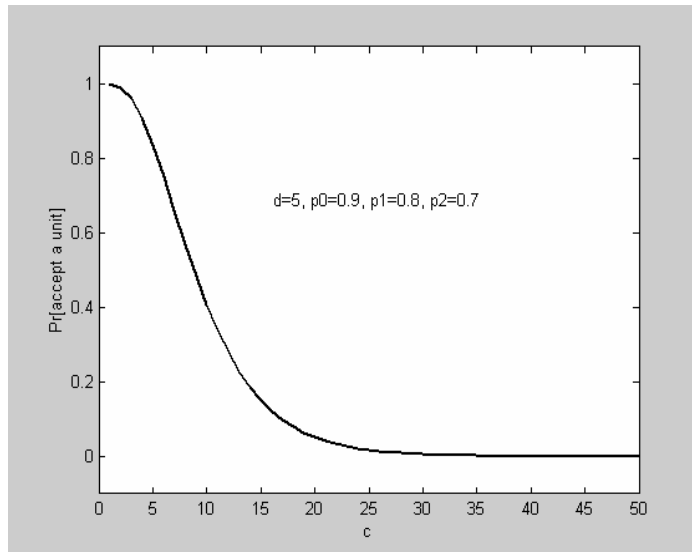
Αντίθετα, η πιθανότητα αποδοχής είναι φθίνουσα ως προς  $c$  και τείνει στο μηδέν όταν  $c \rightarrow \infty$ .

Αυτό φαίνεται γραφικά στα Σχήματα 3.4.1 και 3.4.2 όπου απεικονίζεται η πιθανότητα αποδοχής συναρτήσει των  $d$  και  $c$  αντίστοιχα.



**Σχήμα 3.4.1:** Πιθανότητα αποδοχής συναρτήσει του  $d$ , για  $c=9$  με  $p_0 = 0.9$ ,  $p_1 = 0.8$  και  $p_2 = 0.7$ .

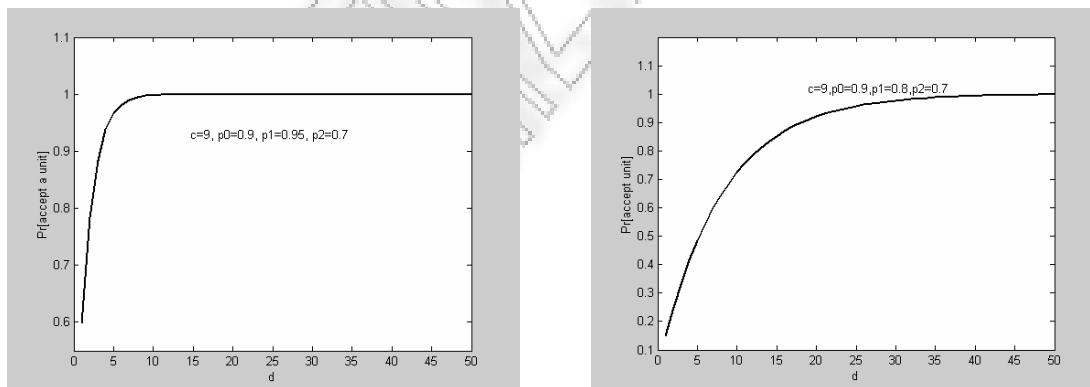
Στο Σχήμα 3.4.1 παρατηρούμε ότι, αν ο αριθμός των απαιτούμενων συνεχόμενων επιτυχιών είναι σταθερός (π.χ.  $c=9$ ) τότε η πιθανότητα αποδοχής αυξάνεται καθώς αυξάνεται ο αριθμός των απαιτούμενων αποτυχιών. Από την παρατήρηση αυτή είναι εύκολο να συμπεράνει κανείς ότι όσο το  $d$  αυξάνεται, το CSTF τεστ για  $(c, d)$  γίνεται ισοδύναμο με το απλό CS με το ίδιο  $c$ .



**Σχήμα 3.4.2:** Πιθανότητα αποδοχής συναρτήσει του  $c$ , για  $d=5$  με  $p_0 = 0.9$ ,  $p_1 = 0.8$  και  $p_2 = 0.7$ .

Από τη σχέση (3.4.5) φαίνεται ότι, η πιθανότητα αποδοχής επηρεάζεται εκτός από τη μεταβολή των  $c, d$  και από τη μεταβολή των πιθανοτήτων μετάβασης.

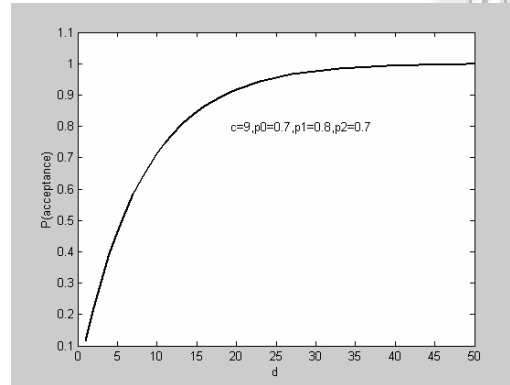
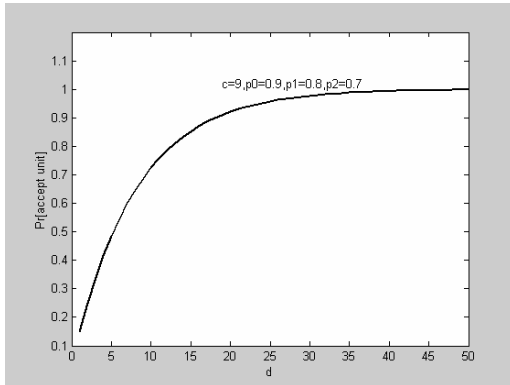
Ας θεωρήσουμε λοιπόν ένα CSTF τεστ με  $c = 9, d = 5$ ,  $p_0 = 0.9, p_2 = 0.7$  και  $p_1$  μεταβλητό. Η επίδραση της μεταβολής του  $p_1$  στην πιθανότητα αποδοχής απεικονίζεται γραφικά στο Σχήμα 3.4.3.



**Σχήμα 3.4.3:** Πιθανότητα αποδοχής συναρτήσει του  $d$ , για  $c = 9$ ,  $p_0 = 0.9, p_2 = 0.7$  και  $p_1$  μεταβλητό.

Στα δυο παραπάνω διαγράμματα παριστάνεται η πιθανότητα αποδοχής συναρτήσει του  $d$ , για  $c=9$  και  $p_0 = 0.9, p_1 = 0.95, p_2 = 0.7$  (αριστερά) και η αντίστοιχη πιθανότητα για τα ίδια δεδομένα αλλά με  $p_1 = 0.8$  (δεξιά). Είναι φανερό ότι η μεταβολή του  $p_1$  επηρεάζει σε

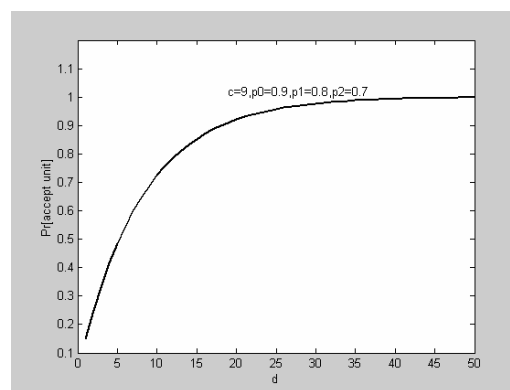
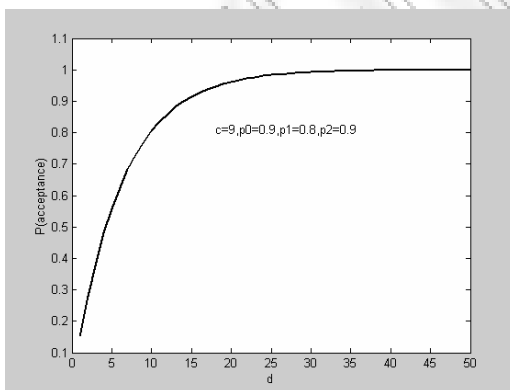
μεγάλο βαθμό την πιθανότητα αποδοχής και συγκεκριμένα, όσο αυξάνεται το  $p_1$  αυξάνεται και η πιθανότητα να γίνει αποδεκτή η μονάδα.



**Σχήμα 3.4.4:** Πιθανότητα αποδοχής συναρτήσει του  $d$ , για  $c = 9$ ,  $p_1 = 0.8$ ,  $p_2 = 0.7$  και  $p_0$  μεταβλητό.

Στα δυο παραπάνω διαγράμματα παριστάνεται η πιθανότητα αποδοχής συναρτήσει του  $d$ , για  $c=9$  και  $p_0 = 0.9$ ,  $p_1 = 0.95$ ,  $p_2 = 0.7$  (δεξιά) και η αντίστοιχη πιθανότητα για τα ίδια δεδομένα αλλά με  $p_0 = 0.7$  (αριστερά).

Μπορεί εύκολα κανείς να διακρίνει ότι, η μεταβολή του  $p_0$  επηρεάζει αμυδρά την πιθανότητα αποδοχής αφού οι δυο καμπύλες είναι σχεδόν όμοιες. Βέβαια όπως φαίνεται η αύξηση του  $p_0$  συνεπάγεται μια μικρή αύξηση της πιθανότητας αποδοχής.



**Σχήμα 3.4.5:** Πιθανότητα αποδοχής συναρτήσει του  $d$ , για  $c = 9$ ,  $p_1 = 0.8$ ,  $p_0 = 0.9$  και  $p_2$  μεταβλητό.

Στα δυο παραπάνω διαγράμματα παριστάνεται η πιθανότητα αποδοχής συναρτήσει του  $d$ , για  $c=9$  και  $p_0 = 0.9, p_1 = 0.95, p_2 = 0.7$  (αριστερά) και η αντίστοιχη πιθανότητα για τα ίδια δεδομένα αλλά με  $p_2 = 0.9$  (δεξιά).

Είναι φανερό ότι η μεταβολή του  $p_2$  επηρεάζει αμυδρά την πιθανότητα αποδοχής, αφού οι δυο καμπύλες είναι σχεδόν όμοιες. Βέβαια εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς από τις δυο γραφικές παραστάσεις ότι, η αύξηση του  $p_2$  συνεπάγεται και αύξηση της πιθανότητας αποδοχής.

### 3.4.2 Συνάρτηση κατανομής

Για τον υπολογισμό της κατανομής του μήκους του τεστ, δηλαδή της μεταβλητής  $Z_{c,d}$ , απαιτείται πρώτα η εύρεση της κατανομής της  $Z_{c,d}^*$ .

Ας θεωρήσουμε αρχικά  $P[Z_{1,1}^* = 1] = 1$ . Τότε για  $c > 1$  προκύπτει ότι

$$P[Z_{c,1}^* = z] = \begin{cases} 1 - p_2 & \alpha \nu & z = 1 \\ p_2 p_1^{z-2} (1 - p_1) & \alpha \nu & z = 2, 3, \dots, c-1 \\ p_2 p_1^{c-2} & \alpha \nu & z = c \end{cases}$$

(βλ. Martin (2003)).

Στη συνέχεια, για την περίπτωση  $d = 2, 3, \dots$ , είναι φανερό ότι ο αριθμός των δοκιμών μέχρι να τελειώσει το τεστ είναι  $z = \min(c, d), \min(c, d) + 1, \dots, cd$ , με την προϋπόθεση ότι ο χρόνος της πρώτης αποτυχίας είναι  $T$ . Η αντίστοιχη πιθανότητα αποδοχής θα ικανοποιεί τις αναδρομικές σχέσεις

$$P[Z_{c,d}^* = z] = (1 - p_2)P[Z_{c,d-1}^* = z - 1] + \sum_{t=2}^{\min(c, z-1)} \{p_2 p_1^{t-2} (1 - p_1) P[Z_{c,d-1}^* = z - t]\} + I_z(c) p_2 p_1^{c-1}. \quad (3.4.6)$$

Αντίστοιχα, για τις αρχικές μεταβλητές  $Z_{c,d}$  θα έχουμε ότι  $P[Z_{1,1} = 1] = 1$ , ενώ για την περίπτωση  $c > 1$  καταλήγουμε στη συνάρτηση

$$P[Z_{c,1} = z] = \begin{cases} 1 - p_0 & \alpha \nu & z = 1 \\ p_0 p_1^{z-2} (1 - p_1) & \alpha \nu & z = 2, 3, \dots, c-1 \\ p_0 p_1^{c-2} & \alpha \nu & z = c. \end{cases} \quad (3.4.7)$$



Τέλος για  $d = 2, 3, \dots$ , και  $z = \min(c, d), \min(c, d) + 1, \dots, cd$ , η πιθανότητα να τελειώσει το τεστ σε  $z$  δοκιμές θα ικανοποιεί τις αναδρομικές σχέσεις

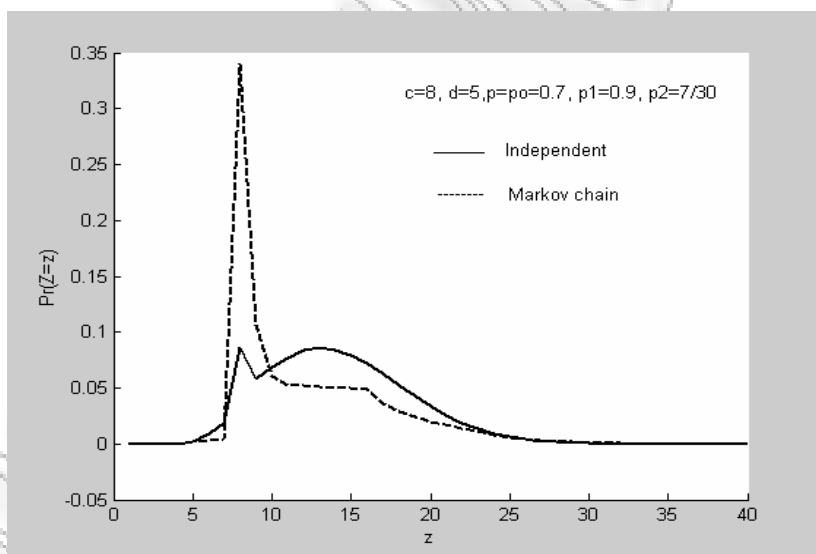
$$P[Z_{c,d} = z] = (1 - p_0)P[Z_{c,d-1}^* = z - 1] + \sum_{t=2}^{\min(c,z-1)} \{p_0 p_1^{t-2} (1 - p_1) P[Z_{c,d-1}^* = z - t]\} + I_z(c) p_0 p_1^{c-1} \quad (3.4.8)$$

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια στη σχέση (3.4.8) τις (3.4.6) και (3.4.7) προκύπτει η συνάρτηση πιθανότητας του μήκους του τεστ.

Αθροίζοντας τις παραπάνω πιθανότητες μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την επιθυμητή κατανομή του μήκους του τεστ, η οποία θα δίνεται από τον τύπο

$$R(y) = \sum_{z=\min(c,d), (c,d)+1, \dots}^y P(Z_{c,d} = z)$$

Στο Σχήμα 3.4.6 απεικονίζεται γραφικά η συνάρτηση πιθανότητας του μήκους για ένα CSTF με  $c = 8$  και  $d = 5$  κάτω από την υπόθεση ανεξαρτησίας των δοκιμών (i.i.d) αλλά και όταν υπάρχει Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ τους.



**Σχήμα 3.4.6:** Συνάρτηση πιθανότητας του μήκους  $Z_{8,5}$  για ανεξάρτητες δοκιμές με  $p = 0.7$  και για Μαρκοβιανή εξάρτηση με  $p_0 = 0.7, p_1 = 0.9, p_2 = 0.233$

Από το Σχήμα 3.4.6 είναι εύκολο να διακρίνει κανείς ότι οι γραφικές παραστάσεις της πιθανότητας  $P[Z_{8,5} = z]$  έχουν μέγιστο στο  $z=8$ . Πιο αναλυτικά, στο σημείο αυτό υπολογίζοντας την πραγματική τιμή της πιθανότητας να τελειώσει το τεστ σε  $z$  δοκιμές (μέσω των τύπων 3.1.4 και 3.4.8) παρατηρούμε ότι διαφέρει πολύ από όλες τις υπόλοιπες τιμές που

δίνονται στους Πίνακες 3.4.1 και 3.4.2. Αυτό οφείλεται στο ότι πριν τις 8 δοκιμές το τεστ τελειώνει με απόρριψη ενώ ο συνδυασμός των αποτελεσμάτων ( $S, F$ ) είναι τέτοιος ώστε η πιθανότητα  $P[Z_{8,5} = z]$  να έχει μικρές τιμές. Στο σημείο  $z=8$  μπορεί να έχουμε για πρώτη φορά αποδοχή του εξαρτήματος οπότε η πιθανότητα να τελειώσει το τεστ παίρνει τη μέγιστη τιμή. Στη συνέχεια, για  $z > 8$  τόσο στην περίπτωση αποδοχής όσο και στην περίπτωση απόρριψης ο αριθμός των αποτυχιών και των επιτυχιών που συμβαίνουν είναι έτσι κατανομημένος ώστε η τιμή της πιθανότητας  $P[Z_{8,5} = z]$  να μειώνεται.

Επιπλέον, στο Σχήμα (3.4.6) φαίνεται ότι υπάρχει μεγάλη απόκλιση στη συνάρτηση πιθανότητας του μήκους ανάμεσα σε ένα i.i.d μοντέλο  $Z_{c,d}$  και στο αντίστοιχο Μαρκοβιανό.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, στη συγκεκριμένη παρατήρηση κατέληξε ο Martin (2003) μέσα από ένα παράδειγμα, στην προσπάθεια του να μελετήσει τη σημασία επιλογής ενός κατάλληλου τεστ εκκίνησης. Θεωρώντας λοιπόν τα δυο μοντέλα του Σχήματος 3.4.6 (για την καλύτερη σύγκριση των μοντέλων έστω  $p = p_0$ ) πήρε  $n = 50$  ίδια εξαρτήματα όπου το καθένα μπαίνει σε λειτουργία 200 φορές. Προσομοιώνοντας το κάθε μοντέλο ξεχωριστά (με τη μέθοδο Monte Carlo) υπολόγισε τις εκτιμήτριες των παραμέτρων του κάθε μοντέλου (E.M.Π.) (βλ. Viveros and Balakrishnan 1993). Η διαδικασία που ακολούθησε για την εύρεση εκτιμήσεων των πιθανοτήτων  $P(Z_{c,d} = z)$  είναι η ακόλουθη.

Στην πρώτη προσομοίωση, θεώρησε ότι οι εκκινήσεις έχουν Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ τους και παρήγε μια διαδοχή αποτελεσμάτων με βάση τα οποία υπολόγισε στη συνέχεια τις εκτιμήτριες  $\hat{p}_0=0.68$ ,  $\hat{p}_1=0.9008$ ,  $\hat{p}_2=0.2295$ . Ακολούθως, υπέθεσε ότι τα αποτελέσματα της προσομοίωσης αφορούσαν ένα i.i.d μοντέλο και υπολόγισε την εκτιμήτρια  $\hat{p} = 0.6979$ . Αντικαθιστώντας τις εκτιμήσεις αυτές στη σχέση (3.4.8) προέκυψαν τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.4.1 (δίνονται μερικές ενδεικτικές τιμές). Συμπερασματικά αν κάποιος πειραματιστής θεωρήσει εσφαλμένα ότι ένα μοντέλο είναι i.i.d ενώ στην πραγματικότητα είναι Μαρκοβιανό, οι εκτιμώμενες πιθανότητες  $P(Z_{c,d} = z)$  που προκύπτουν από την προσομοίωση απέχουν πολύ από τις πραγματικές τιμές (που υπολογίζονται αντικαθιστώντας στη σχέση (3.4.6) τις πραγματικές παραμέτρους).

Στη συνέχεια κάνοντας και μια δεύτερη προσομοίωση, θεώρησε i.i.d εκκινήσεις και παρήγαγε μια άλλη διαδοχή αποτελεσμάτων καθώς και την εκτιμήτρια  $\hat{p} = 0.7047$ . Με την ίδια διαδικασία όπως πριν, προσάρμοσε τα αποτελέσματα υποθέτοντας ότι αφορούν μια

Μαρκοβιανή αλυσίδα και υπολόγισε τις εκτιμήτριες  $\hat{p}_0=0.58$ ,  $\hat{p}_1=0.7066$ ,  $\hat{p}_2=0.7024$ .. Στον Πίνακα 3.4.2 καταγράφονται οι εκτιμώμενες πιθανότητες  $P(Z_{c,d} = z)$ . Είναι φανερό ότι, αν ο πειραματιστής θεωρήσει Μαρκοβιανή εξάρτηση μεταξύ των δοκιμών ενώ στην πραγματικότητα είναι ανεξάρτητες, τότε οι εκτιμώμενες πιθανότητες είναι σχεδόν ίδιες με τις πραγματικές τιμές, επειδή η ανεξαρτησία είναι μια ειδική περίπτωση της Μαρκοβιανής αλυσίδας.

Γενικεύοντας τα αποτελέσματα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, η εσφαλμένη παραδοχή ενός Μαρκοβιανού μοντέλου τάξης  $r$ , ενώ στην πραγματικότητα το μοντέλο είναι τάξης  $u > r$  δίνει φτωχές εκτιμήσεις των πιθανοτήτων  $P(Z_{c,d} = z)$ . Αυτό συνέβη και στην πρώτη προσομοίωση όπου θεωρήσαμε εσφαλμένα ένα i.i.d μοντέλο (Μαρκοβιανό μηδενικής τάξης) ενώ στην πραγματικότητα είχαμε Μαρκοβιανό πρώτης τάξης. Αντίστροφα μια Μαρκοβιανή ροή τάξης  $u$  είναι και Μαρκοβιανή τάξης  $r > u$ .

Πρέπει να σημειωθεί ότι, στους πίνακες που ακολουθούν περιλαμβάνονται οι 16 πρώτες δοκιμές, ενώ από την 30<sup>η</sup> δοκιμή και μετά οι πιθανότητες που υπολογίζονται παίρνουν τιμές πολύ κοντά στο μηδέν.

<b>z</b>	<b>i.i.d δοκιμές</b>	<b>Μαρκοβιανή αλυσίδα</b>	<b>Πραγματικές τιμές</b>
5	0.003	0.113	0.104
6	0.009	0.037	0.037
7	0.018	0.364	0.037
8	0.086	0.071	0.371
9	0.059	0.070	0.069
10	0.069	0.068	0.069
11	0.078	0.067	0.067
12	0.084	0.036	0.037
13	0.086	0.032	0.033
14	0.085	0.028	0.029
15	0.080	0.025	0.026
16	0.072	0.018	0.019

**Πίνακας 3.4.1:** Εκτιμώμενες και πραγματικές πιθανότητες  $P[Z_{8,5} = z]$  για ένα Μαρκοβιανό μοντέλο με  $p_0 = 0.7$ ,  $p_1 = 0.9$ ,  $p_2 = 0.233$ .

<b>z</b>	<b>i.i.d δοκιμές</b>	<b>Μαρκοβιανή αλυσίδα</b>	<b>Πραγματικές τιμές</b>
5	0.002	0.003	0.002
6	0.008	0.010	0.009
7	0.017	0.021	0.018
8	0.088	0.083	0.087
9	0.057	0.069	0.058
10	0.067	0.072	0.069
11	0.076	0.079	0.077
12	0.082	0.084	0.083
13	0.085	0.086	0.086
14	0.084	0.083	0.084
15	0.080	0.078	0.080
16	0.073	0.070	0.072

**Πίνακας 3.4.2:** Εκτιμώμενες και πραγματικές πιθανότητες  $P[Z_{8,5} = z]$  για ένα i.i.d μοντέλο με  $p = 0.7$ .

### 3.4.3 Μέσο μήκος

Το μέσο μήκος που απαιτείται για τον τερματισμό του τεστ δίνεται από τον τύπο (βλ. Martin (2003))

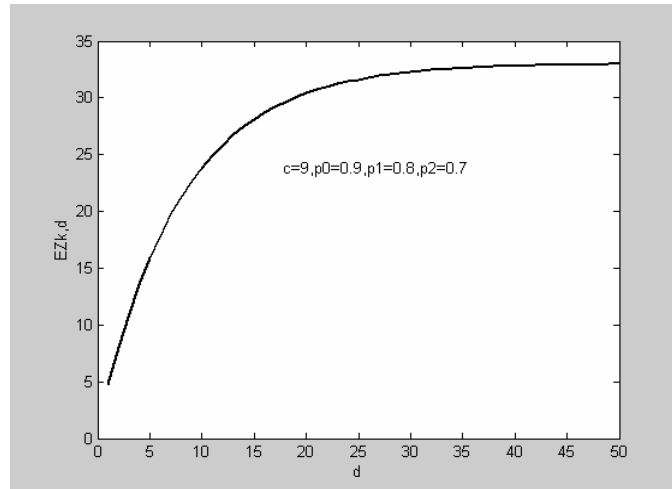
$$E(Z_{c,d}) = \frac{1-p_1 + p_0(1-p_1^{c-1})}{1+p_1} + \frac{(1-p_0p_1^{c-1})[1-p_1 + p_2(1-p_1^{c-1})][1-(1-p_2p_1^{c-1})^{d-1}]}{p_2(1-p_1)p_1^{c-1}} \quad (3.4.9)$$

Είναι φανερό ότι, όταν  $d \rightarrow \infty$  η σχέση (3.4.9) παίρνει τη μορφή

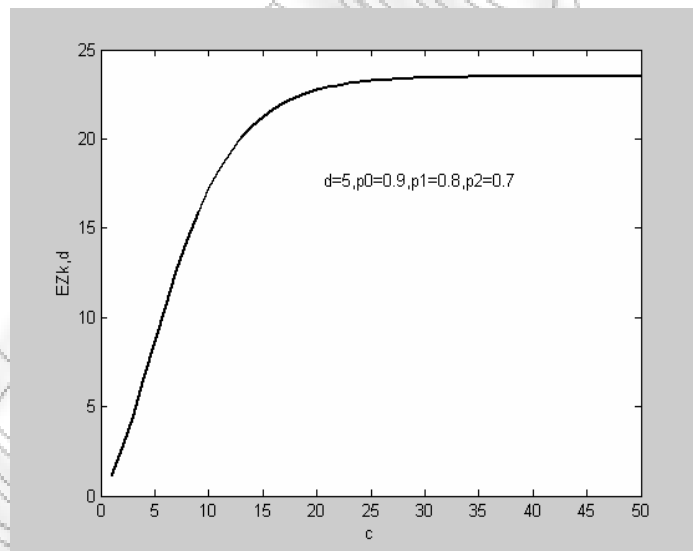
$$1 - \frac{p_0}{p_2} + \frac{1-p_1 + p_2(1-p_1^{c-1})}{p_2(1-p_1)p_1^{c-1}},$$

η οποία αντιστοιχεί στο μέσο μήκος ενός απλού Μαρκοβιανού τεστ εκκίνησης της μορφής CS (Viveros and Balakrishnan (1993)).

Η γραφική παράσταση του μέσου μήκους του τεστ απεικονίζεται στα επόμενα δυο σχήματα.



**Σχήμα 3.4.7:** Μέσο μήκος συναρτήσει του  $d$  για Μαρκοβιανή αλυσίδα με  $p_0 = 0.9, p_1 = 0.8, p_2 = 0.7$  και  $c=9$



**Σχήμα 3.4.8:** Μέσο μήκος συναρτήσει του  $c$  για Μαρκοβιανή αλυσίδα με  $p_0 = 0.9, p_1 = 0.8, p_2 = 0.7$  και  $d = 5$ .

Είναι φανερό ότι από τα Σχήματα (3.4.7) και (3.4.8) προκύπτουν τα ίδια συμπεράσματα για το μέσο μήκος του τεστ με αυτά του αντίστοιχου μοντέλου για ανεξάρτητες δοκιμές. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι το i.i.d μοντέλο αποτελεί μια ειδική περίπτωση του Μαρκοβιανού για  $p = p_0 = p_1 = p_2$ .

### 3.5 Εναλλακτικά Τεστ εκκίνησης που βασίζονται σε αριθμό επιτυχιών και αποτυχιών

Επεκτείνοντας τη μελέτη τους πάνω στο τεστ εκκίνησης CSTF (βλ. Ενότητα 3.2) οι Smith and Griffith (2005) δημιούργησαν και κάποια επιπλέον κριτήρια τα οποία βασίζονται τόσο στις επιτυχημένες εκκινήσεις λειτουργίας μιας μονάδας όσο και στις αποτυχημένες. Στα τεστ αυτά (όπου οι δοκιμές εκκίνησης μεταξύ των μονάδων θεωρούνται ανεξάρτητες με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας  $p$ ) θα γίνει μια συνοπτική αναφορά στις τρεις παραγράφους που ακολουθούν.

#### 3.5.1 Τεστ εκκίνησης που βασίζονται σε $c$ συνεχόμενες επιτυχίες και $d$ συνεχόμενες αποτυχίες

Έστω τεστ εκκίνησης σύμφωνα με το οποίο ένα εξάρτημα θεωρείται ποιοτικά αποδεκτό εάν συμβούν  $c$  συνεχόμενες επιτυχημένες εκκινήσεις πριν από  $d$  συνεχόμενες αποτυχημένες ενώ απορρίπτεται στην αντίθετη περίπτωση. Το τεστ αυτό ονομάζεται εν συντομία CSCF (Consecutive Successes-Consecutive Failures). Αξίζει να σημειωθεί ότι το συγκεκριμένο κριτήριο είναι πιο αυστηρό ως προς την απόρριψη από αυτό του CSTF, αφού απαιτεί και οι αποτυχίες να είναι συνεχόμενες.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα κάνουμε χρήση μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας  $\{Y_n\}$ , με χώρο καταστάσεων της μορφής

$$\{(r, s) : 0 \leq r \leq c, s = 0\} \cup \{(r, s) : r = 0, 0 \leq s \leq d\},$$

όπου  $Y_n = (r, s)$  σημαίνει ότι κατά τη  $n$ -οστή δοκιμή έχουν συμβεί  $r$  συνεχόμενες επιτυχίες και  $s$  συνεχόμενες αποτυχίες. Στη συγκεκριμένη αλυσίδα υπάρχουν μόνο δυο απορροφητικές καταστάσεις  $(c, 0)$  και  $(0, d)$ , που αντιστοιχούν στις δυο περιπτώσεις με τις οποίες τερματίζεται το τεστ.

Επομένως, οι μη μηδενικές πιθανότητες μετάβασης θα είναι της μορφής

$$P(Y_n = (r+1, 0) / Y_{(n-1)} = (r, s)) = p$$

και

$$P(Y_n = (0, s+1) / Y_{(n-1)} = (r, s)) = 1 - p = q.$$

Η πιθανότητα αποδοχής του εξαρτήματος θα είναι

$$P(\text{αποδοχή}) = \frac{p^c + (1-p)(1-(1-p)^{d-1})p^{c-1}}{1-(1-p^{c-1})(1-(1-p)^{d-1})}$$

Ενώ αντίστοιχα η πιθανότητα απόρριψης

$$P(\text{απόρριψη}) = \frac{p(1-p)^{d-1}(1-p^{c-1}) + (1-p)^d}{1-(1-p^{c-1})(1-(1-p)^{d-1})}$$

### 3.5.2 Τεστ εκκίνησης που βασίζονται σε $c$ συνολικά επιτυχίες και $d$ συνεχόμενες αποτυχίες

Σύμφωνα με το τεστ αυτό το εξάρτημα γίνεται αποδεκτό εάν συμβούν  $c$  συνολικά επιτυχίες πριν από  $d$  συνεχόμενες αποτυχίες και απορρίπτεται στην αντίθετη περίπτωση. Το τεστ αυτό ονομάζεται εν συντομία TSCF (Total Successes Consecutive Failures). Οι καταστάσεις λειτουργίας της κάθε μονάδας αποτελούν το χώρο καταστάσεων μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας  $\{Y_n\}$ , ο οποίος θα έχει τώρα τη μορφή

$$\{(r, s) : 0 \leq r \leq c, 0 \leq s \leq d\} \cup \{(c, 0)\},$$

όπου  $Y_n = (r, s)$  σημαίνει ότι μετά το  $n$ -οστό τεστ έχουν συμβεί  $r$  συνολικές επιτυχίες και  $s$  συνεχόμενες αποτυχίες. Είναι φανερό ότι οι υπάρχουν  $(c+1)$  καταστάσεις που οδηγούν στον τερματισμό του τεστ, και είναι οι  $(c, 0), (0, d), (1, d), \dots, (c-1, d)$ .

Οι μη μηδενικές πιθανότητες μετάβασης είναι της μορφής

$$P(Y_n = (r+1, 0) / Y_{(n-1)} = (r, s)) = p$$

και

$$P(Y_n = (r, s+1) / Y_{(n-1)} = (r, s)) = 1-p = q.$$

Προκύπτουν λοιπόν οι πιθανότητες αποδοχής και απόρριψης αντίστοιχα ως

$$P(\text{αποδοχή}) = (1-(1-p)^d)^c$$

και

$$P(\text{απόρριψη}) = 1 - (1-(1-p)^d)^c$$

### 3.5.3 Τεστ εκκίνησης που βασίζονται σε $c$ συνολικά επιτυχίες και $d$ συνολικά αποτυχίες

Στο συγκεκριμένο τεστ το εξάρτημα γίνεται αποδεκτό αν συμβούν  $c$  συνολικά επιτυχίες πριν από  $d$  συνολικά αποτυχίες ενώ απορρίπτεται στην αντίθετη περίπτωση. Το τεστ αυτό ονομάζεται εν συντομία TSTF (Total Successes Total Failures). Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{Y_n\}$ , με χώρο καταστάσεων

$$\{(r, s) : 0 \leq r \leq c, 0 \leq s < d\} \cup \{(r, s) : 0 \leq r < c, s = d\},$$

όπου  $Y_n = (r, s)$  σημαίνει ότι μετά την  $n$ -οστή δοκιμή έχουν συμβεί  $r$  συνολικά επιτυχίες και  $s$  συνολικά αποτυχίες. Είναι φανερό ότι οι υπάρχοντες  $(c + d)$  καταστάσεις που οδηγούν στον τερματισμό του τεστ, πιο συγκεκριμένα

$$(c, 0), (c, 1), \dots, (c, d - 1), (0, d), (1, d), \dots, (c - 1, d).$$

Οι αντίστοιχες μη μηδενικές πιθανότητες μετάβασης είναι της μορφής

$$P(Y_n = (r + 1, s) / Y_{(n-1)} = (r, s)) = p$$

και

$$P(Y_n = (r, s + 1) / Y_{(n-1)} = (r, s)) = 1 - p = q.$$

Στη συνέχεια δίνεται η πιθανότητα αποδοχής μιας μονάδας

$$P(\text{αποδοχή}) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{c+i-1}{c-1} p^c (1-p)^i,$$

καθώς και η πιθανότητα απόρριψης

$$P(\text{απόρριψη}) = \sum_{j=0}^{c-1} \binom{d+j-1}{d-1} p^j (1-p)^d$$

Για τις αποδείξεις των πιθανοτήτων των παραπάνω τριών τεστ εκκίνησης παραπέμπουμε στη σχετική μελέτη των Smith and Griffith (2005).



### 3.6 Πρακτικές μέθοδοι για την επιλογή του κατάλληλου τεστ εκκίνησης

Η δημιουργία όλων των προαναφερθέντων τεστ εκκίνησης της μορφής  $(c, d)$  είναι φανερό ότι δίνει στον πειραματιστή τη δυνατότητα να επιλέξει το κατάλληλο μοντέλο ανάλογα με τα δεδομένα που έχει στη διάθεση του κάθε φορά. Ταυτόχρονα όμως, από πρακτικής απόψεως, δημιουργείται και η απορία σχετικά με τον τρόπο που πρέπει να γίνει η επιλογή αυτή. Έτσι, αν ένας υπεύθυνος ελέγχου ποιότητας θέλει να ελέγξει ένα σωρό εξαρτημάτων, τα ερωτήματα που δημιουργούνται είναι: πως μπορεί να αποφασίσει ποιο τεστ πρέπει να χρησιμοποιήσει και επιπλέον, ποιες τιμές των  $c, d$  πρέπει να θεωρήσει ως όρια προδιαγραφών για το τεστ που επέλεξε.

Στα ερωτήματα αυτά η απάντηση δόθηκε από τους Smith and Griffith (2003, 2005) οι οποίοι μέσα από πρακτικές μεθόδους έδωσαν κριτήρια επιλογής ενός μοντέλου καθώς και εύρεσης των κατάλληλων παραμέτρων.

#### 3.6.1 Εύρεση του «βέλτιστου» τεστ εκκίνησης

Ας θεωρήσουμε αρχικά ένα τεστ εκκίνησης με παραμέτρους  $c, d$  που γίνεται για να ελεγχθεί η αξιοπιστία ενός εξοπλισμού. Στο τεστ αυτό θα συμβολίσουμε με  $X$  την τ.μ που εκφράζει το μήκος του. Ο πειραματιστής (π.χ. ο μηχανικός παραγωγής) θέλει να υπάρχει μεγάλη πιθανότητα αποδοχής ενός εξοπλισμού υψηλής ποιότητας, δηλαδή εξοπλισμός για τον οποίο ισχύει  $p \geq p_A$ , όπου  $p_A$  η μικρότερη αποδεκτή αξιοπιστία, ενώ αντίθετα να υπάρχει μικρή πιθανότητα αποδοχής ενός εξοπλισμού κακής ποιότητας, για το οποίο ισχύει  $p \leq p_0$ , όπου  $p_0$  είναι ένα όριο κάτω από το οποίο η μονάδα θεωρείται ως μη αξιόπιστη. Επειδή υπάρχουν πολλά τεστ που να πληρούν τις παραπάνω προϋποθέσεις η επιλογή του «βέλτιστου» από αυτά γίνεται με οικονομικά κριτήρια, δηλαδή στην πράξη επιλέγεται το τεστ που έχει το μικρότερο μέσο μήκος. Για την εύρεση του πιο αξιόπιστου τεστ έχει προταθεί η ακόλουθη μεθοδολογία (Smith and Griffith (2003, 2005)).

Αρχικά ας θεωρήσουμε τις συνθήκες

$$P(\text{αποδοχή} | p = p_A) = 1 - \beta$$

και

$$(3.6.1)$$

$$P(\text{αποδοχή} | p = p_0) = \alpha$$

όπου  $\alpha = P(\text{σφάλμα τύπου I}) = P(\text{λανθασμένη αποδοχή ενός κακού εξοπλισμού})$  και  $\beta = P(\text{σφάλμα τύπου II}) = P(\text{λανθασμένη απόρριψη ενός καλού εξοπλισμού})$ . Τόσο στο  $\alpha$  όσο και στο  $\beta$  δίνονται συνήθως πολύ μικρές τιμές.

Το σύστημα των δυο παραπάνω ανισώσεων έχει άγνωστες τις ποσότητες  $c, d$ . Επειδή όμως, τα  $c$  και  $d$  είναι ακέραιοι, το σύστημα (3.6.1) μπορεί να λυθεί μόνο προσεγγιστικά οπότε η επιλογή των παραμέτρων γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες

$$P(\text{αποδοχή} | p = p_A) > 1 - \beta$$

και

$$P(\text{αποδοχή} | p = p_0) < \alpha$$

Λύνοντας τις παραπάνω ανισότητες για συγκεκριμένη τιμή της πιθανότητας αποδοχής, προκύπτει η σχέση

$$LB = \frac{\ln(1 - (1 - \alpha)^{1/d})}{\ln(p_0)} < c < \frac{\ln(1 - \beta^{1/d})}{\ln(p_A)} = UB \quad (3.6.2)$$

όπου LB είναι το κάτω φράγμα (Lower Bound), UB το άνω φράγμα (Upper Bound) της ανίσωσης αντίστοιχα.

Η σχέση (3.6.2) επαληθεύεται για ζευγάρια  $(c, d)$  που ικανοποιούν ταυτόχρονα και τις δυο συνθήκες. Έτσι, μετά από δοκιμές προκύπτει ότι το βέλτιστο τεστ είναι αυτό για το οποίο το  $d$  παίρνει όσο το δυνατό μικρότερη τιμή και παράλληλα υπάρχει τουλάχιστον ένας ακέραιος  $c$  που ικανοποιεί την (3.2.6). Συνήθως ο  $c$  επιλέγουμε να είναι ο αμέσως μεγαλύτερος ακέραιος από το κάτω φράγμα της ανίσωσης.

Για παράδειγμα, για  $d = 3$  η σχέση (3.6.2) παίρνει τη μορφή  $10,59 < c < 12,3$ , οπότε  $c = [LB] + 1 = [10,59] + 1 = 11$ .

Για να μπορέσουν να αποδείξουν τα πλεονεκτήματα του τεστ που πρότειναν οι Smith and Griffith το συγκρίνανε με έναν έλεγχο ποσοστών της μορφής

$$H_0 : p = p_0$$

$$H_1 : p \neq p_0, p = p_A.$$

Θεώρησαν δηλαδή ότι, ο σωρός που ελέγχεται αποτελείται από ελαττωματικά και μη εξαρτήματα και έλεγξαν τα ποσοστά εμφανισής τους στο συγκεκριμένο σωρό.

Το μέγεθος του δείγματος που απαιτείται για τον έλεγχο των ποσοστών, με επίπεδα σημαντικότητας  $\alpha$  και  $\beta$ , συμβολίζεται με  $n_z$  (ακέραιος αριθμός) και ισχύει

$$n_z \geq \left( \frac{z_\alpha \sqrt{p_0(1-p_0)} - z_{(1-\beta)} \sqrt{p_A(1-p_A)}}{p_A - p_0} \right)^2,$$

όπου  $z_\alpha$  είναι το άνω  $\alpha$ -ποσοστιαίο σημείο της τυποποιημένης κανονική κατανομής  $N(0,1)$ .

Συνοψίζοντας, αν το μέγεθος του δείγματος  $n_z$  βρεθεί πολύ μεγαλύτερο από το μέσο μήκος του τεστ, ( $n_z \gg E(X)$ ), τότε η μέθοδος αυτή είναι καλύτερη από τον έλεγχο των ποσοστών και οδηγεί σε πιο γρήγορη λήψη απόφασης.

Η πρακτική σημασία της μεθόδου εύρεσης του «βέλτιστου» των Smith and Griffith θα γίνει πιο κατανοητή μέσα από το παράδειγμα που ακολουθεί.

**Παράδειγμα:** Έστω ένα CSTF τεστ με  $\alpha = 0.05, \beta = 0.05, p_A = p = 0.99, p_0 = 0.85$ . Το βέλτιστο μοντέλο που προκύπτει με τη μέθοδο που αναφέραμε αποδέχεται τον εξοπλισμό εάν  $c = 23$  συνεχόμενες επιτυχίες συμβούν πριν από  $d = 2$  συνολικά αποτυχίες. Για το τεστ αυτό βρέθηκε ότι το μέσο μήκος του είναι ίσο με  $E(X) = 24.90$  (όπου  $p = p_A$ ), με διακύμανση 5.40. Επιπλέον, από τους παραπάνω τύπους, βρέθηκε ότι το μέγεθος του δείγματος για τον έλεγχο των ποσοστών είναι ίσο με 29 δοκιμές και η πιθανότητα  $P(X \leq n_z)$  το μήκος του προτεινόμενου τεστ να είναι λιγότερο από 29 δοκιμές είναι ίση με 0.87. Επιπρόσθετα η πιθανότητα το μήκος του τεστ να είναι μικρότερο ή ίσο με 33 είναι 0.90, δηλαδή  $I_{0.90} = 33$ .

Από τα αποτελέσματα είναι φανερό ότι το προτεινόμενο τεστ είναι πιο αποτελεσματικό από το τεστ των ποσοστών, αφού απαιτεί λιγότερες δοκιμές εκκίνησης και οδηγεί πιο γρήγορα στην αποδοχή ή όχι του εξοπλισμού.

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι, η μεθοδολογία των Smith and Griffith για την εύρεση του βέλτιστου τεστ δεν υπερτερεί πάντα του ελέγχου των ποσοστών. Πράγματι αυτό είναι εύκολο να το διαπιστώσει κανείς μελετώντας τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.6.1.

$p_A$	$p_0$	$c$	$d$	$P(\text{αποδοχή}   p_A)$	$P(\text{αποδοχή}   p_0)$	$n_z$	$E(X)$
0.99	0.95	96	7	0.9652	0.0498	171	157
0.99	0.85	23	2	0.9574	0.0470	29	25
0.95	0.70	13	5	0.9727	0.0475	20	18
0.90	0.80	35	119	0.9510	0.0471	133	370
0.85	0.65	16	39	0.9507	0.0388	48	79

**Πίνακας 3.6.1:** Προσδιορισμός του βέλτιστου CSTF τεστ για διάφορες τιμές των  $p_0, p_A$  με  $\alpha=0.05, \beta=0.05$ . Η τελευταία στήλη υπολογίζεται για  $p = p_A$ .

Αξίζει να σημειωθεί ότι, η μέθοδος των Smith and Griffith για τον προσδιορισμό των βέλτιστων παραμέτρων ( $c, d$ ) βρίσκει εφαρμογή κυρίως στο CSTF, ενώ για τα υπόλοιπα τεστ (βλ. Ενότητα 3.5) δε δίνει καλά αποτελέσματα.

### 3.6.2 Σύγκριση μεταξύ τεστ εκκίνησης

Εκτός από τον προσδιορισμό των παραμέτρων  $c, d$  που αφορούν στο βέλτιστο μοντέλο για κάθε είδους τεστ, εξίσου σημαντική από πρακτικής πλευράς είναι και η επιλογή του πιο κατάλληλου τεστ της μορφής ( $c, d$ ). Πρέπει να σημειωθεί ότι η σύγκριση δε χρειάζεται στην περίπτωση που τα τεστ είναι της μορφής ( $c, 1$ ) γιατί τότε είναι ισοδύναμα μεταξύ τους, αφού ανεξαρτήτως από τον αριθμό (συνεχόμενο ή συνολικό) των επιτυχιών που απαιτούνται για την αποδοχή του εξοπλισμού, όταν συμβεί η πρώτη αποτυχία έχουμε απόρριψη και στις τέσσερις περιπτώσεις. Σε κάθε άλλη περίπτωση η σύγκριση αν και είναι δύσκολη, αφού δεν υπάρχει κάποια σειρά κατάταξης ανάμεσα στα τεστ, κρίνεται αναγκαία. Συγκεκριμένα, έχει αποδειχτεί ότι δεν υπάρχει κάποιο τεστ το οποίο να είναι ομοιόμορφα καλύτερο για όλες τις τιμές των  $p_0, p_A, \alpha, \beta$ .

Σύμφωνα με τα κριτήρια που έχουν προταθεί για τη σύγκριση των τεστ (βλ. Smith και Griffith), βέλτιστο θεωρείται αυτό που πληρεί τις ακόλουθες τρεις προϋποθέσεις

1. Έχει το ελάχιστο μέσο μήκος (συμβ:  $E(X)$ ).
2. Έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα  $P(X \leq n_2)$  να τερματιστεί πριν από τον αντίστοιχο έλεγχο ποσοστών.
3. Έχει το μικρότερο 90-οστό ποσοστημόριο του μήκους (συμβ:  $l_{0.90} = (P[X \leq l] \geq 0.90)$ )

Στον Πίνακα 3.6.2 που ακολουθεί παρουσιάζεται το είδος του τεστ που ικανοποιεί το κάθε κριτήριο, για συγκεκριμένες τιμές των  $p_0, p_A$ . Έπιπλέον, δίνονται αποτελέσματα μόνο για τρία τεστ αφού το TSCF δε συμμετέχει στη σύγκριση επειδή στερείται πρακτικότητας έναντι των υπολοίπων.

$p_A$	$p_0$	Μικρότερο $E(X)$	Μεγαλύτερη $P(X \leq n_2)$	Μικρότερο $l_{0.90}$
0.99	0.95	CSTF	CSTF	TSTF
0.99	0.90	CSTF	CSTF	TSTF
0.99	0.75	CSTF	CSTF	CSTF
0.99	0.70	CSTF	CSTF	CSTF
<b>0.95</b>	<b>0.90</b>	<b>TSTF</b>	<b>TSTF</b>	<b>TSTF</b>
0.95	0.80	CSTF	CSTF	TSTF
0.95	0.75	CSTF	CSTF	TSTF
0.95	0.70	CSCF	CSCF	TSTF
<b>0.90</b>	<b>0.80</b>	<b>TSTF</b>	<b>TSTF</b>	<b>TSTF</b>
<b>0.90</b>	<b>0.70</b>	<b>TSTF</b>	<b>TSTF</b>	<b>TSTF</b>
0.90	0.60	CSTF	CSTF	TSTF
<b>0.85</b>	<b>0.75</b>	<b>TSTF</b>	<b>TSTF</b>	<b>TSTF</b>
<b>0.85</b>	<b>0.65</b>	<b>TSTF</b>	<b>TSTF</b>	<b>TSTF</b>
<b>0.80</b>	<b>0.70</b>	<b>TSTF</b>	<b>TSTF</b>	<b>TSTF</b>
<b>0.80</b>	<b>0.60</b>	<b>TSTF</b>	<b>TSTF</b>	<b>TSTF</b>

**Πίνακας 3.6.2:** Τεστ εκκίνησης που ικανοποιούν τα κριτήρια για δοσμένες τιμές των  $p_0, p_A$ , όταν  $\alpha = 0.05, \beta = 0.05$ .

Από τα αποτελέσματα του πίνακα είναι φανερό ότι δεν υπάρχει πάντα κάποιο τεστ που να ικανοποιεί και τα τρία κριτήρια ταυτόχρονα. Για παράδειγμα, για  $p_0 = 0.95$  και  $p_A = 0.80$ , το CSTF ικανοποιεί τα δυο πρώτα κριτήρια, ενώ το τρίτο κριτήριο επιτυγχάνεται από ένα TSTF.

Επειδή όμως η σύγκριση των τεστ μέσω των τριών κριτηρίων δεν καταλήγει πάντα στην επιλογή του πιο κατάλληλου, προτάθηκε ένα επιπλέον κριτήριο που βασίζεται στη σύγκριση των μηκών ροής. Βασική προϋπόθεση για την εφαρμογή του συγκεκριμένου κριτηρίου είναι τα δυο τεστ που θα συγκριθούν να έχουν ανεξάρτητες δοκιμές με κοινή πιθανότητα επιτυχίας εκκίνησης  $p$ .

Έστω για παράδειγμα, ένα CSTF και ένα TSTF τεστ, με  $X$  και  $Y$  τα μήκη τους αντίστοιχα. Η λήψη απόφασης για το ποιο είναι καλύτερο βασίζεται στον υπολογισμό της πιθανότητας  $P(X > Y)$ , η οποία θα δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \sum_y P(X > y)P(Y = y) = \sum_y (1 - P(X \leq y))P(Y = y) = \\ &= \sum_y (1 - F_X(y))P(Y = y) \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Η παραπάνω πιθανότητα υπολογίζεται εύκολα αν γνωρίζουμε την κατανομή των τ.μ  $X$  και  $Y$ . Προσαρμόζοντας τη σχέση (3.6.3) στη συγκεκριμένη περίπτωση προκύπτει η σχέση  $P(CSTF > TSTF)$  που παριστάνει την πιθανότητα το μήκος του CSTF να είναι μεγαλύτερο από το μήκος του TSTF. Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, το τεστ που θα έχει την μικρότερη πιθανότητα να τερματιστεί αργότερα από τα άλλα τεστ, θα είναι και το πιο εύρηστο.

Στη συνέχεια δίνεται ένα παράδειγμα σύγκρισης τεστ εκκίνησης και με τα τέσσερα κριτήρια που αναφέρθηκαν παραπάνω.

**Παράδειγμα:** Έστω ένας μηχανικός παραγωγής που ελέγχει ένα σωρό από εξαρτήματα και ενδιαφέρεται να βρει το πιο αποτελεσματικό τεστ εκκίνησης για δοσμένες τιμές  $p_0 = 0.90$ ,  $p_A = 0.70$  και  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.05$ . Αφού προσδιορίσει τις βέλτιστες παραμέτρους  $c, d$  για κάθε τεστ ξεχωριστά στη συνέχεια συγκρίνει τα τεστ μεταξύ τους.

SDT	$c$	$d$	$P(\text{αποδοχή}   p_A)$	$P(\text{αποδοχή}   p_0)$	$E(X)$	$P(X \leq n_z)$	$l_{0.90}$
<b>TSTF</b>	<b>34</b>	<b>8</b>	<b>0.9523</b>	<b>0.0458</b>	<b>37.43</b>	<b>0.8464</b>	<b>40</b>
CSCF	16	3	0.9619	0.0490	42.29	0.5995	83
CSTF	16	15	0.9538	0.0487	41.93	0.5803	83

**Πίνακας 3.6.3:** Σύγκριση των βέλτιστων *CSTF*, *TSTF*, και *CSCF* τεστ εκκίνησης για  $p_0 = 0.90$ ,  $p_A = 0.70$  και  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.05$ .

Από τον Πίνακα 3.6.3 προκύπτει ότι, το TSTF έχει το μικρότερο μέσο μήκος ροής, τη μεγαλύτερη πιθανότητα να τελειώσει νωρίτερα από ένα έλεγχο ποσοστών, και το χαμηλότερο 90-οστό ποσοστημόριο του μήκους. Πιο συγκεκριμένα, το TSTF τεστ απαιτεί τέσσερις περίπου λιγότερες δοκιμές εκκίνησης από τα άλλα δύο, CSCF και CSTF. Επιπλέον παρουσιάζεται μεγάλη διαφορά στην πιθανότητα να τελειώσει το τεστ νωρίτερα από τον έλεγχο ποσοστών. Πιο συγκεκριμένα, αυτή η πιθανότητα είναι 0.8464 για το TSTF, 0.5995 για το CSCF και 0.5803 για το CSTF. Ωστόσο, το 90-οστό ποσοστημόριο του TSTF (40) είναι λιγότερο από το μισό των αντίστοιχων CSCF (83) και CSTF (83). Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα είναι εμφανές ότι το TSTF τεστ ικανοποιεί και τα τρία κριτήρια, γεγονός που το καθιστά το πιο αποτελεσματικό.

Παρόλα αυτά, αν γίνει χρήση της σχέσης (3.6.3) προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα

$$P(CSTF < TSTF) = 0.5452$$

$$P(CSCF < TSTF) = 0.5644$$

$$P(CSTF < CSCF) = 0.5094 .$$

Το παράδοξο είναι ότι, ενώ σύμφωνα με τα τρία προηγούμενα κριτήρια το TSTF αποδείχθηκε το καταλληλότερο τεστ εκκίνησης, σύμφωνα με το κριτήριο αυτό (για τα ίδια πάντα δεδομένα) η πιθανότητα το μήκος ενός CSTF (ή CSCF) να είναι μικρότερο από το μήκος ενός TSTF είναι αρκετά μεγάλη, πάνω από 0.5. Συμπερασματικά, αν η επιλογή του καταλληλότερου και πιο αξιόπιστου τεστ βασιστεί αποκλειστικά σε αυτό το κριτήριο τότε το τεστ αυτό θα είναι ένα CSTF (ή CSCF).

Συνοπτικά συμπεραίνουμε ότι, η λήψη απόφασης για το ποιο τεστ είναι το καλύτερο δεν είναι πάντα εύκολη αλλά εξαρτάται από το κριτήριο που χρησιμοποιείται κάθε φορά.

# 4

## Τεστ εκκίνησης με διορθωτικές ενέργειες

Μια διαφοροποίηση του τεστ εκκίνησης για  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες αποτελεί το τεστ με διορθωτική ενέργεια. Αν και το κριτήριο λήψης απόφασης είναι το ίδιο, η διαφορά οφείλεται στο ότι ο πειραματιστής παρεμβαίνει κατά τη διάρκεια του τεστ, πραγματοποιώντας κάποια επιδιόρθωση στο εξάρτημα, με σκοπό να βελτιώσει την πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης και συνεπακόλουθα την ποιότητά του. Η διορθωτική αυτή ενέργεια μπορεί να γίνει είτε τη στιγμή που παρατηρείται η πρώτη αποτυχημένη προσπάθεια λειτουργίας, είτε και κάθε φορά που συμβαίνει μια αποτυχημένη εκκίνηση.

### 4.1 Μοντέλο με μια διορθωτική ενέργεια με ανεξάρτητες δοκιμές

Έστω ότι ελέγχεται ένας σωρός  $n$  ίδιων εξαρτημάτων και ότι η ενέργεια συμβαίνει τη στιγμή που παρατηρείται η πρώτη αποτυχία. (Single Corrective Action Model).

Αρχικά, ας θεωρήσουμε ως  $p_0$  τη σταθερή πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης μέχρι τη στιγμή της πρώτης αποτυχίας και ας συμβολίσουμε με  $p_1$  την πιθανότητα επιτυχίας μετά την πρώτη αποτυχία και με  $S_0$  τον αριθμό των επιτυχιών μέχρι τη στιγμή της πρώτης αποτυχίας ή μέχρι να συμβούν  $c$  συνεχόμενες επιτυχημένες προσπάθειες. Θέτουμε  $F_0 = 1$  ή  $0$  ανάλογα με το αν συμβεί μια αποτυχία ή όχι πριν από την πρώτη αποτυχία, και ορίζουμε ως  $S_1, F_1$  τον αριθμό των επιτυχιών, αποτυχιών μετά την πρώτη αποτυχία μέχρι να συμβούν  $c$  συνεχόμενες επιτυχημένες εκκινήσεις αντίστοιχα.



#### 4.1.1 Συνάρτηση πιθανότητας και μέσο μήκος

Σύμφωνα με το παραπάνω μοντέλο παρατηρούμε ότι, υπάρχουν δυο περιπτώσεις ώστε να τερματιστεί το τεστ. Αν οι πρώτες  $c$  εκκινήσεις είναι επιτυχημένες, χωρίς να συμβεί καμία αποτυχία, τότε έχουμε μια διαδοχή αποτελεσμάτων της μορφής

$$\underbrace{S_0 S_0 \dots S_0}_c$$

με αντίστοιχη πιθανότητα  $(p_0)^c$ .

Στη συνέχεια μπορούμε εύκολα να γράψουμε την πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ.  $X$  (μήκος του τεστ) η οποία θα είναι ίση με

$$G_X(t) = (p_0 t)^c \quad (4.1.1)$$

Αν συμβεί μια αποτυχία πριν συμβούν  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες, για να γίνει αποδεκτό το εξάρτημα θα πρέπει να έχουμε αντίστοιχα μια διαδοχή δοκιμών της μορφής

$$\underbrace{S_0 S_0 \dots S_0}_{0 \leq j \leq c-1} \underbrace{F S_1 S_1 \dots S_1}_{0 \leq r \leq c-1} \underbrace{F S_1 S_1 \dots S_1}_c$$

με αντίστοιχη πιθανογεννήτρια συνάρτηση της  $X$  που αναλύεται ως εξής

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{j=0}^{c-1} (p_0 t)^j (q_0 t) \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \sum_{r=0}^{c-1} (p_1 t)^r q_1 t \right\}^i (p_1 t)^c = \\ &= \frac{1 - (p_0 t)^c}{1 - p_0 t} \frac{q_0 p_1^c t^{c+1} (1 - p_1 t)}{1 - p_1 t - q_1 t (1 - p_1^c t^c)} = \\ &= \frac{q_0 p_1^c t^{c+1} (1 - p_1 t) (1 - p_0^c t^c)}{(1 - p_0 t) (1 - t + q_1 p_1^c t^{c+1})} \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

όπου  $q_i = 1 - p_i$ , για  $i = 0, 1$ .

Αθροίζοντας τις σχέσεις (4.1.1) και (4.1.2) προκύπτει τελικά

$$G_X(t) = E(t^X) = p_0^c t^c + \frac{q_0 p_1^c t^{c+1} (1 - p_1 t) (1 - p_0^c t^c)}{(1 - p_0 t) (1 - t + q_1 p_1^c t^{c+1})} \quad (4.1.3)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί και με τη μορφή

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) t^x = p_0^c t^c + \frac{q_0 p_1^c t^{c+1} (1 - p_1 t) (1 - p_0^c t^c)}{(1 - p_0 t) (1 - t + q_1 p_1^c t^{c+1})}.$$

Στη συνέχεια, εξισώνοντας τους συντελεστές των  $t^x$  από την τελευταία σχέση μπορούν να προκύψουν αναδρομικοί τύποι για τις πιθανότητες αποδοχής.

Έτσι, για  $c = 1$

$$P(X = 0) = 0,$$

$$P(X = 1) = p_0,$$

$$P(X = x) = q_0 q_1^{x-2} p_1 \quad \text{για } x=2,3,\dots$$

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια την περίπτωση  $c \geq 2$ . Τότε

$$(1 - p_0 t)(1 - t + q_1 p_1^c t^{c+1})[G_X(t) - p_0^c t^c] = q_0 p_1^c t^{c+1} (1 - p_1 t)(1 - p_0^c t^c).$$

Η παραπάνω σχέση σε συνδυασμό με τη σχέση

$$G_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) t^x = \sum_{x=0}^{\infty} g(x) t^x$$

μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\begin{aligned} & \sum_{x=0}^{\infty} g(x) t^x - \sum_{x=1}^{\infty} g(x-1) t^x + q_1 p_1^c \sum_{x=c+1}^{\infty} g(x-c-1) t^x - p_0 \sum_{x=1}^{\infty} g(x-1) t^x + p_0 \sum_{x=2}^{\infty} g(x-2) t^x \\ & - p_0 q_1 p_1^c \sum_{x=c+2}^{\infty} g(x-c-2) = p_0 t^c + (q_0 p_1^c - p_0^c - p_0^{c+1}) t^{c+1} + (p_0^{c+1} - q_0 p_1^{c+1}) t^{c+2} \\ & + (q_1 p_1^c p_0^c - q_0 p_1^c p_0^c) t^{2c+1} + (q_0 p_0^c p_1^{c+1} - q_1 p_1^c p_0^{2c+2}) t^{2c+2}. \end{aligned}$$

Έτσι, εξισώνοντας τους συντελεστές των  $t^x$  στα δυο μέλη της παραπάνω ισότητας

Προκύπτουν οι ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις για το μήκος του τεστ

$$g(0) = 0$$

$$g(1) - (1 - p_0)g(0) = 0$$

$$g(2) - g(1) - p_0 g(1) + p_0 g(0) = 0$$

.....

$$g(c-1) - g(c-2) - p_0 g(c-2) + p_0 g(c-3) = 0$$

$$g(c+1) - g(c) + q_1 p_1^c g(0) - p_0 g(c) + p_0 g(c-1) = q_0 p_1^c + q_0 p_0^c - p_0^c - p^{c+1}$$

$$g(c+r) - g(c+r-1) + q_1 p_1^c g(r-1) - p_0 g(c+r-1) + p_0 g(c+r-2) -$$

$$p_0 q_1 p_1^c g(r-2) = 0, \quad r = 3, \dots, c$$

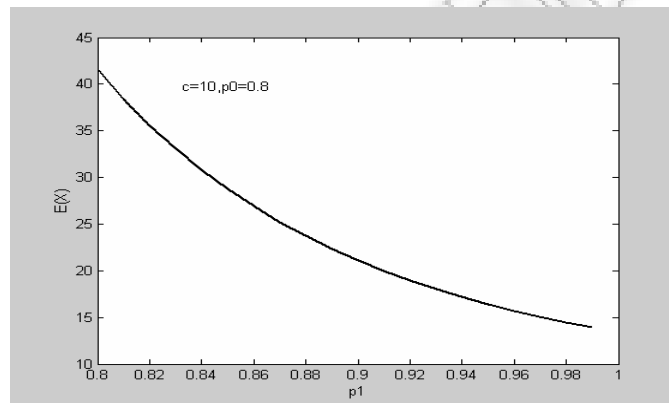
$$g(2c+1) - g(2c) + q_1 p_1^c g(c) - p_0 g(2c) + p_0 g(2c-1) - p_0 q_1 p_1^c g(c-1) = q_1 p_1^c p_0^c - q_0 p_1^c p_0^c$$

$$g(2c+2) - g(2c+1) + q_1 p_1^c g(c+1) - p_0 g(2c+1) + p_0 g(2c) - p_0 q_1 p_1^c g(c) = q_0 p_1^{c+1} p_0^c - q_1 p_1^c p_0^{c+1}.$$

Επιπλέον, το μέσο μήκος του τεστ υπολογίζεται εύκολα με χρήση της πιθανογεννήτριας  $G_X(t)$ , και θα δίνεται από τον τύπο

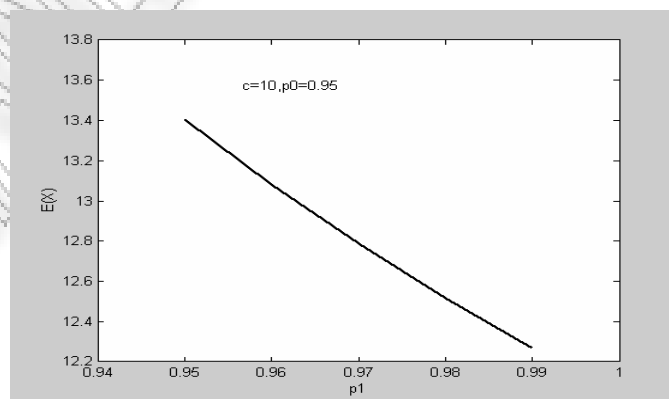
$$E(X) = \left[ \frac{d}{dt} G_X(t) \right]_{t=1} = (1 - p_0^c) \left[ \frac{1}{q_1 p_1^c} - \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_0} \right]$$

Στα σχήματα που ακολουθούν δίνεται η γραφική παράσταση του μέσου μήκους συναρτήσει του  $p_1$  ενώ παράλληλα γίνεται και σύγκριση με ένα απλό τεστ εκκίνησης.



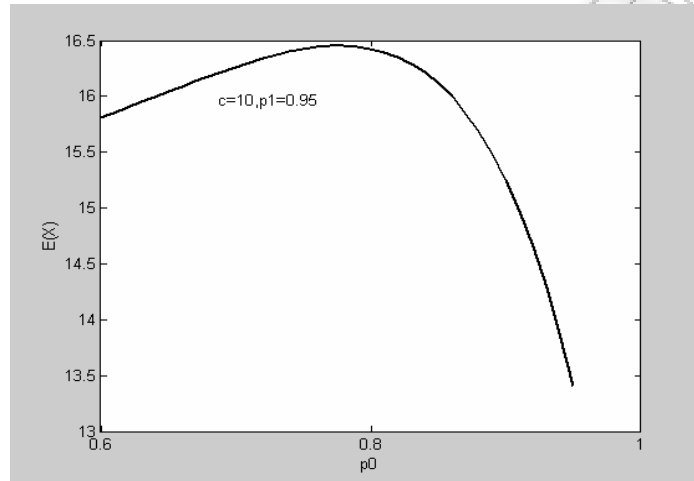
**Σχήμα 4.1.1:** Μέσο μήκος ενός τεστ με μια διορθωτική ενέργεια με  $c = 10$  και  $p_0 = 0.8$ , συναρτήσει του  $p_1$ .

Από το παραπάνω σχήμα είναι φανερό ότι, η αύξηση της πιθανότητας εκκίνησης μετά την πρώτη αποτυχία συνεπάγεται και τη μείωση του μέσου μήκους του τεστ ενώ ταυτόχρονα η πιθανότητα να γίνει αποδεκτό το εξάρτημα είναι λογικό να αυξάνεται.



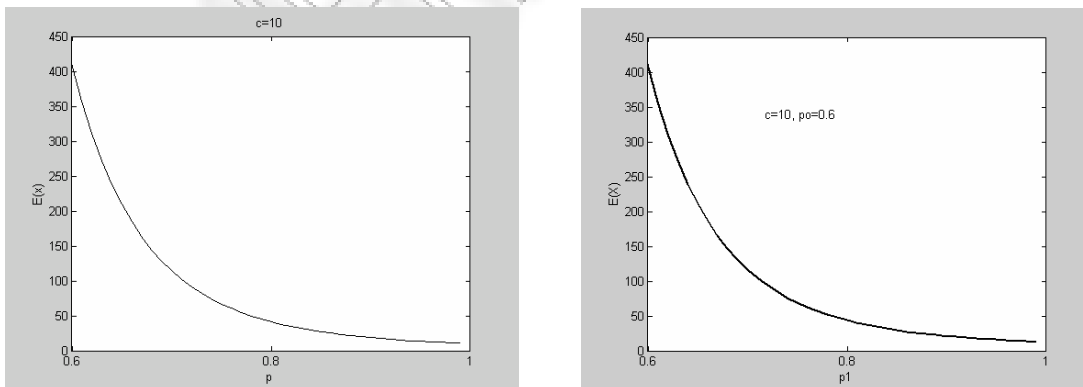
**Σχήμα 4.1.2:** Μέσο μήκος ενός τεστ με μια διορθωτική ενέργεια με  $c = 10$  και  $p_0 = 0.95$  συναρτήσει του  $p_1$ .

Στη περίπτωση που η αρχική πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης είναι αρκετά μεγάλη, το εξάρτημα θεωρείται ποιοτικά αποδεκτό και δεν επιδέχεται σημαντική επιδιόρθωση. Όπως μπορεί εύκολα να παρατηρήσει κανείς στο Σχήμα (4.1.2) ότι το μέσο μήκος στη περίπτωση αυτή δε μεταβάλλεται σημαντικά μετά τη διορθωτική ενέργεια, επηρεάζεται δηλαδή περισσότερο από το  $p_0$  παρά από το  $p_1$ .



**Σχήμα 4.1.3:** Μέσο μήκος ενός τεστ με μια διορθωτική ενέργεια με  $c = 10$  και  $p_1 = 0.95$  συναρτήσεως του  $p_0$ .

Από το παραπάνω σχήμα είναι εύκολο να διακρίνει κανείς ότι για  $0.6 \leq p_0 \leq 0.8$  το μέσο μήκος αυξάνεται ελάχιστα, ενώ από ένα σημείο και μετά (περίπου  $p_0 = 0.8$ ) παρατηρείται μια έντονη μειωσή του.



**Σχήμα 4.1.4:** Μέσο μήκος ενός τεστ με μια διορθωτική ενέργεια με  $p_0 = 0.6$  συναρτήσεως του  $p_1$  (δεξιά) και ενός CS (αριστερά), για  $c = 10$ .

Από τη σύγκριση των δυο παραπάνω διαγραμμάτων προκύπτει το συμπέρασμα ότι, αν το  $p_0$  είναι μικρό τότε η διορθωτική ενέργεια κρίνεται απαραίτητη, ενώ μετά από αυτή το μέσο μήκος μειώνεται πάρα πολύ και εξαρτάται ουσιαστικά μόνο από το  $p_1$ . Πιο αναλυτικά παρατηρούμε ότι, αν η αρχική πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης είναι μικρή τότε το διορθωτικό μοντέλο λειτουργεί σαν το αντίστοιχο CS, με  $p_1 = p$ .

Στο σημείο αυτό αξίζει να γίνει μια σύντομη αναφορά στη γενίκευση του μοντέλου με μια διορθωτική ενέργεια. Στην περίπτωση αυτή η παρέμβαση στο εξάρτημα γίνεται διαδοχικά κάθε φορά που συμβαίνει μια αποτυχία με σκοπό να βελτιωθεί η αξιοπιστία του (Sequential Corrective action model).

Στο γενικό αυτό μοντέλο, συμβολίζουμε με  $p_i$  τη σταθερή πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης των δοκιμών που γίνονται μετά την  $i$ -οστή αποτυχία και πριν την  $(i+1)$ -οστή αποτυχία, και με  $p_0$  την αρχική πιθανότητα επιτυχίας πριν γίνει οποιαδήποτε ενέργεια στο εξάρτημα.

Η μέση τιμή της τ.μ  $X$  (συνολικός αριθμός δοκιμών μέχρι την αποδοχή του εξαρτήματος) δίνεται από τον τύπο

$$E(X) = c + \sum_{j=1}^{\infty} p_j^c R_j [(c+1)j + S_j - cT_j]$$

όπου

$$R_j = \prod_{i=0}^{j-1} (1 - p_i^c) \quad ,$$

$$S_j = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{p_i}{q_i} \quad ,$$

$$T_j = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{1 - p_i^c} .$$

Είναι προφανές ότι, η μέση τιμή για το μοντέλο με μια διορθωτική ενέργεια προκύπτει ως ειδική περίπτωση του παραπάνω τύπου για  $p_i = p_1, i \geq 2$

Επιπλέον, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι, στο μοντέλο αυτό παρόλο που οι διορθωτικές ενέργειες γίνονται τις στιγμές που συμβαίνει κάποια αποτυχία δεν γίνονται απαραίτητα σε συνεχόμενες αποτυχίες.

#### 4.1.2 Εκτίμηση των άγνωστων πιθανοτήτων επιτυχίας εκκίνησης

Ας θεωρήσουμε αρχικά ότι  $n$  μονάδες ενός εξαρτήματος υποβάλλονται σε τεστ εκκίνησης με μια διορθωτική ενέργεια. Αν είναι γνωστά όλα τα διαδοχικά αποτελέσματα εκκίνησης για κάθε μια από τις μονάδες, η συνάρτηση πιθανοφάνειας θα δίνεται από τον τύπο

$$L(p_0, p_1) = p_0^{S_0} q_0^{F_0} p_1^{S_1} q_1^{F_1},$$

όπου

$$S_0 = \sum_{i=1}^n S_{0i},$$

είναι ο αριθμός των επιτυχιών πριν από την διορθωτική παρέμβαση,

$$F_0 = \sum_{i=1}^n F_{0i},$$

είναι ο αριθμός των πρώτων αποτυχιών πριν από την αποδοχή των μονάδων (δηλαδή είναι,  $F_{0i} = 0$ , εάν οι  $c$  πρώτες προσπάθειες εκκίνησης είναι όλες επιτυχημένες και  $F_{0i} = 1$  σε κάθε άλλη περίπτωση),

$$S_1 = \sum_{i=1}^N S_{1i}$$

είναι ο αριθμός των επιτυχιών μετά από την διορθωτική ενέργεια και

$$F_1 = \sum_{i=1}^N F_{1i}$$

είναι ο αριθμός των αποτυχιών μετά από τη διορθωτική παρέμβαση.

Από τη συνάρτηση πιθανοφάνειας προκύπτουν εύκολα οι εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας και η αντίστοιχη εκτιμώμενη πληροφορία κατά Fisher. Πράγματι, έχουμε

$$\hat{p}_j = \frac{S_j}{S_j + F_j} \quad (4.1.4)$$

και

$$I(\hat{p}_j) = \left( -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p_j^2} \right)_{p_j = \hat{p}_j} = \frac{S_j + F_j}{\hat{p}_j(1 - \hat{p}_j)}, \quad \text{για } j = 0, 1. \quad (4.1.5)$$

(βλ. Balakrishnan, Balasubramanian and Viveros (1995)). Χρησιμοποιώντας την ασυμπτωτική κανονικότητα της εκτιμήτριας μέγιστης πιθανοφάνειας, προκύπτει το επόμενο προσεγγιστικό  $100(1-\alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για τις παραμέτρους  $p_j$

$$\left( \hat{p}_j - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p}_j)}}, \hat{p}_j + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p}_j)}} \right) \quad (4.1.6)$$

( $z_{\alpha/2}$  είναι το άνω ποσοστιαίο σημείο της τυποποιημένης κανονικής κατανομής).

**Παράδειγμα:** Ας θεωρήσουμε τα δεδομένα του Πίνακα 4.1.1, που παρουσιάστηκαν από τους Balakrishnan, Balasubramanian and Viveros (1994), και αφορούν ένα τεστ εκκίνησης με μια διορθωτική ενέργεια για  $n = 10$  ίδιες ή πανομοιότυπες μονάδες ενός εξαρτήματος, με  $c = 10$  και  $p_0 = 0.8, p_1 = 0.9$ .

$i$	Συχνότητα εμφάνισης $S$ ή $F$	$S_{0i}$	$F_{0i}$	$S_{1i}$	$F_{1i}$	$X_i$
1	111011111111010111110111111111	3	1	24	3	31
2	01111111111	0	1	10	0	11
3	01111111111	0	1	10	0	11
4	111111101111111111	7	1	10	0	18
5	111111111	10	0	0	0	10
6	1001010111111110111111111	1	1	20	4	26
7	011111101111111111	0	1	16	1	18
8	1111111110101101111111111	9	1	13	2	25
9	111101111111111	4	1	10	0	15
10	11111101111111111	6	1	10	0	17
Σύνολο		40	9	123	10	182

**Πίνακας 4.1.1:** Αποτελέσματα (μέσω προσομοίωσης) για τεστ με μια διορθωτική ενέργεια για  $n = 10$  ίδιες μονάδες, με  $c = 10$  και  $p_0 = 0.8, p_1 = 0.9$ .

Από τα δεδομένα υπολογίζουμε τις ποσότητες

$$S_0 = \sum_{i=1}^{10} S_{0i} = 40,$$

$$F_0 = \sum_{i=1}^{10} F_{0i} = 9,$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{10} S_{1i} = 123,$$

$$F_1 = \sum_{i=1}^{10} F_{1i} = 10.$$

Στη συνέχεια από τις σχέσεις (4.1.4) και (4.1.5) βρίσκουμε

$$\hat{p}_0 = \frac{40}{49} = 0.816, \quad I(\hat{p}_0) = \frac{49}{0.15} = 326.666$$

$$\hat{p}_1 = \frac{123}{133} = 0.925 \quad I(\hat{p}_1) = \frac{133}{0.069} = 1927.536.$$

Τα αντίστοιχα 95% διαστήματα εμπιστοσύνης για τις πιθανότητες επιτυχίας εκκίνησης  $p_0, p_1$  υπολογίζονται από τον τύπο (4.1.6) και είναι αντίστοιχα

$$\left( \hat{p}_0 - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p}_0)}}, \hat{p}_0 + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p}_0)}} \right) =$$

$$\left( 0.816 - \frac{1.96}{\sqrt{326.66}}, 0.816 + \frac{1.96}{\sqrt{326.66}} \right) = (0.708, 0.924)$$

και

$$\left( \hat{p}_1 - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p}_1)}}, \hat{p}_1 + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p}_1)}} \right)$$

$$\left( 0.925 - \frac{1.96}{\sqrt{1927.536}}, 0.925 + \frac{1.96}{\sqrt{1927.536}} \right) = (0.88, 0.97)$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε ότι, οι εκτιμήτριες που προκύπτουν είναι πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές  $p_0 = 0.8, p_1 = 0.9$  ενώ το διάστημα εμπιστοσύνης για το  $p_1$  είναι στενότερο από το αντίστοιχο του  $p_0$ , γεγονός που οφείλεται στο ότι μετά την πρώτη αποτυχία γίνονται περισσότερες δοκιμές μέχρι να τελειώσει το τεστ. Επιπλέον είναι φανερό, ότι μετά τη διορθωτική ενέργεια που γίνεται τη στιγμή της πρώτης αποτυχίας, η πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης βελτιώνεται κατά πολύ (αυξάνεται από 0.816 σε 0.925), οπότε αυξάνεται και η πιθανότητα αποδοχής της μονάδας.



# 5

## Διάφορα Εναλλακτικά Τεστ Εκκίνησης

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει αναφορά και ανάλυση σε δυο εναλλακτικά τεστ εκκίνησης στα οποία η λήψη απόφασης για την αποδοχή του εξαρτήματος δε βασίζεται τόσο σε συγκεκριμένο αριθμό επιτυχημένων ή αποτυχημένων εκκινήσεων, αλλά σε κάποια πιο ιδιαίτερα κριτήρια.

### 5.1 Τεστ εκκίνησης με τη χρήση μιας στατιστικής συνάρτησης σάρωσης, με ανεξάρτητες δοκιμές

Σύμφωνα με το συγκεκριμένο τεστ η λήψη απόφασης για την αποδοχή ή όχι ενός εξαρτήματος βασίζεται στα επόμενα τρία κριτήρια (Koutras and Balakrishnan (1999)):

1. Εάν το εξάρτημα αποτύχει να ξεκινήσει επιτυχημένα στις πρώτες  $r - 1$  δοκιμές, τότε με μια επιπρόσθετη αποτυχία σε κάποια από τις επομενες δοκιμές το εξάρτημα απορρίπτεται.
2. Εάν το εξάρτημα ξεκινά με επιτυχία στις  $r - 1$  πρώτες δοκιμές, τότε θα απορριφθεί μόνο αν στη συνέχεια συμβούν δυο αποτυχημένες προσπάθειες εκκίνησης που να απέχουν μεταξύ τους απόσταση μικρότερη ή ίση με  $k$ .
3. Αν δεν συμβεί κανένα από τα (1) και (2) για ένα προκαθορισμένο αριθμό δοκιμών (έστω  $N$ ), τότε το εξάρτημα γίνεται αποδεκτό.

Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με κριτήριο (1) είναι σημαντικό το εξάρτημα να ξεκινήσει με επιτυχία στις  $(r - 1)$  πρώτες δοκιμές ενώ στη περίπτωση που δε συμβεί δεν επιτρέπεται να συμβεί καμία άλλη αποτυχία μέχρι να τελειώσει το τεστ. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι σύμφωνα με το κριτήριο (2) το εξάρτημα απορρίπτεται με τη χρήση μιας απλής στατιστικής σάρωσης με ένα παράθυρο μεγέθους  $k$ .

Αξίζει να σημειωθεί ότι, στο συγκεκριμένο τεστ ο αριθμός των δοκιμών μέσα στις οποίες πρέπει να ληφθεί η απόφαση απόρριψης του εξαρτήματος είναι προκαθορισμένος, σε αντίθεση με τα προηγούμενα τεστ όπου οι δοκιμές συνεχίζονταν μέχρι να εμφανισθεί το εκάστοτε κριτήριο. Η διαφορά αυτή καθιστά το τεστ πιο εύχρηστο σε σύγκριση με τα προηγούμενα, και οδηγεί στη πιο γρήγορη απόρριψη του εξαρτήματος.

### 5.1.1 Συνάρτηση Πιθανότητας και μέσο μήκος

Ας θεωρήσουμε αρχικά ως,  $Y_i$  τη μεταβλητή που εκφράζει το αποτέλεσμα της  $i$  προσπάθειας εκκίνησης, η οποία παίρνει την τιμή 1 αν συμβεί επιτυχία και 0 αν συμβεί αποτυχία, με αντίστοιχες πιθανότητες  $p$  και  $q=1-p$ . Συμβολίζουμε με  $X$  το χρόνο αναμονής μέχρι την απόρριψη του εξαρτήματος (δηλαδή το μήκος του τεστ), με  $g(x)=P(X=x)$  τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ  $X$  και με  $G_X(t)=\sum_{x=0}^{\infty} t^x g(x)$  την πιθανογεννήτρια συνάρτηση της  $X$ .

Σύμφωνα με τα κριτήρια λήψης απόφασης, υπάρχουν δυο περιπτώσεις ώστε το πείραμα να τελειώσει με απόρριψη του εξαρτήματος.

- Η πρώτη αποτυχημένη προσπάθεια εκκίνησης να συμβεί μέσα στις  $(r-1)$  πρώτες δοκιμές και η δεύτερη στην  $r$ -οστή δοκιμή ή μετά από αυτήν. Η αντίστοιχη διαδοχή αποτελεσμάτων για τη συγκεκριμένη περίπτωση είναι της μορφής

$$\underbrace{12\dots(r-1)}_{1Fk(r-2)S} \underbrace{r(r+1)\dots F}_{\geq 0S}$$

με πιθανογεννήτρια συνάρτηση του χρόνου αναμονής

$$\begin{aligned} G_1(t) &= (r-1)qt(pt)^{r-2} \sum_{i=0}^{\infty} (pt)^i (qt) = \\ &= (r-1) \frac{(qt)^2 (pt)^{r-2}}{1-pt}. \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

- Στις πρώτες  $(r-1)$  δοκιμές να μη συμβεί κάποια αποτυχία, αλλά από την  $r$ -οστή και μετά να συμβούν 2 αποτυχίες (για πρώτη φορά) που να απέχουν μεταξύ τους

απόσταση το πολύ  $k$ . Μια διαδοχή αποτελεσμάτων που περιγράφει την περίπτωση αυτή είναι της μορφής

$$\underbrace{12\dots(r-1)r(r+1)\dots F}_{\geq 0S} \underbrace{\dots}_{\geq 0S} \underbrace{SS\dots SF}_{\geq k-1} \underbrace{SS\dots SF}_{\geq k-1} \dots \underbrace{SS\dots SF}_{\geq k-1} \underbrace{SS\dots SF}_{\leq k-2},$$

$j \text{ φορές}, j \geq 0$

με αντίστοιχη πιθανογεννήτρια συνάρτηση του χρόνου αναμονής που αναλύεται ως εξής:

$$\begin{aligned} G_2(t) &= (pt)^{r-1} \sum_{i=0}^{\infty} (pt)^i (qt) \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{l=k-1}^{\infty} (pt)^l qt \right)^j \right] \sum_{m=0}^{k-2} (pt)^m (qt) = \\ &= (pt)^{r-1} (qt)^2 \frac{1-(pt)^{k-1}}{(1-pt)^2} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ (pt)^{k-1} \frac{qt}{(1-pt)} \right\}^j = \\ &= (pt)^{r-1} (qt)^2 \frac{1-(pt)^{k-1}}{(1-pt)\{1-pt-qp^{k-1}t^k\}}. \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

- Επιπλέον, απόρριψη μπορεί να έχουμε και αν συμβούν δυο αποτυχημένες προσπάθειες εκκίνησης μέσα στις  $(r-1)$  πρώτες δοκιμές. Έτσι παίρνουμε μια διαδοχή δοκιμών της μορφής

$$\underbrace{SSF\dots SF}_{r-1}$$

με αντίστοιχη πιθανογεννήτρια συνάρτηση του χρόνου αναμονής

$$\begin{aligned} G_3(t) &= q^2 t^2 + 2pq^2 t^3 + \dots + (r-2)p^{r-3} q^2 t^{r-1} = \\ &= \frac{q^2 t^2}{(1-pt)^2} \{1 - (r-1)(pt)^{r-2} + (r-2)(pt)^{r-1}\}. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Αθροίζοντας τις σχέσεις (5.1.1), (5.1.2) και (5.1.3) προκύπτει η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του χρόνου αναμονής  $X$  μέχρι την απόρριψη του εξαρτήματος

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \frac{(qt)^2}{(1-pt)^2} \{1 - (r-1)(pt)^{r-2} + (r-2)(pt)^{r-1}\} + \\ &= (r-1) \frac{(qt)^2 (pt)^{r-2}}{1-pt} + (pt)^{r-1} \frac{(qt)^2 \{1 - (pt)^{k-1}\}}{(1-pt)(1-pt-qp^{k-1}t^k)}. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Από την πιθανογεννήτρια  $G_X(t)$  με τη βοήθεια αλγεβρικών πράξεων είναι εύκολο να υπολογίσει κανείς τη συνάρτηση πιθανότητας.

Σύμφωνα με τα κριτήρια λήψης απόφασης είναι εμφανές ότι για λιγότερες από δυο δοκιμές το τεστ δεν έχει νόημα, δηλαδή προκύπτει ότι

$$g(0) = g(1) = 0 \text{ για } x = 0,1.$$

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια την περίπτωση  $x \geq 2$ . Η σχέση (5.1.4) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\begin{aligned} (1-pt)^2(1-pt-qp^{k-1}t^k)G_X(t) &= \\ &= q^2t^2 - q^2pt^3 - q^3p^{k-1}t^{k+2} - q^2p^{r+k-2}t^{r+k} + q^2p^{r+k-2}t^{r+k+1} \end{aligned}$$

όπου

$$G_X(t) = \sum_{x=2}^{\infty} P(X=x)t^x,$$

Εξισώνοντας στη συνέχεια τους συντελεστές του  $z^n$  στα δυο μέλη της ισότητας προκύπτουν οι ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις

$$g(2) = q^2,$$

$$g(3) - 3pg(2) = -q^2p,$$

$$g(x) - 3pg(x-1) + 3p^2g(x-2) - p^3g(x-3) = 0, \quad \text{για } x = 4, \dots, k+1,$$

$$g(k+2) - 3pg(k+1) + 3p^2g(k) - p^3g(k-1) - qp^{k-1}g(2) = -q^3p^{k-1},$$

$$g(x) - 3pg(x-1) + 3p^2g(x-2) - p^3g(x-3) - qp^{k-1}g(x-k)$$

$$+ 2qp^k g(x-k-1) - qp^{k+1} g(x-k-2) = 0, \text{ για } x = k+3, \dots, k+r-1,$$

$$g(k+r) - 3pg(k+r-1) + 3p^2g(k+r-2) - p^3g(k+r-3) - qp^{k-1}g(r)$$

$$+ 2qp^k g(r-1) - qp^{k+1} g(r-2) = -q^2p^{k+r-2},$$

$$g(k+r+1) - 3pg(k+r) + 3p^2g(k+r-1) - p^3g(k+r-2) - qp^{k-1}g(r+1)$$

$$+ 2qp^k g(r) - qp^{k+1} g(r-1) = q^2p^{k+r-2},$$

$$g(x) - 3pg(x-1) + 3p^2g(x-2) - p^3g(x-3) - qp^{k-1}g(x-k) \\ + 2qp^k g(x-k-1) - qp^{k+1}g(x-k-2) = 0, \quad x = k+r+2, k+r+3, \dots$$

Οι παραπάνω αναδρομικές σχέσεις μπορούν να γραφτούν σε απλούστερη μορφή ως εξής

$$g(x) = 0, \text{ για } x = 0, 1. \\ = (x-1)q^2 p^{x-2}, \text{ για } 2 \leq x \leq k+r-1 \\ = pg(x-1) + qp^{k-1}g(x-k) - (r-1)q^3 p^{x-3}, \text{ για } x \geq k+r.$$

Στη συνέχεια για τον υπολογισμό του μέσου χρόνου εργαζόμαστε όπως και στην περίπτωση των υπολοίπων τεστ. Αρχικά παραγωγίζουμε την πιθανογεννήτρια  $G_X(t)$  και βρίσκουμε

$$G_X'(t) = \frac{q^2 \{2t - (r+1)p^{r-1}t^r + (r-1)p^r t^{r+1}\}}{(1-pt)^3} \\ + \frac{q^2 p^{r-1} t^r \{(r+1) - rpt - (r+k)p^{k-1}t^{k-1} + (r+k-1)p^k t^k\}}{(1-pt)^2 (1-pt - qp^{k-1}t^k)}, \quad (5.1.5) \\ + \frac{q^2 p^r t^{r+1} (1 - p^{k-1}t^{k-1})(1 + kqp^{k-2}t^{k-1})}{(1-pt)(1-pt - qp^{k-1}t^k)^2}.$$

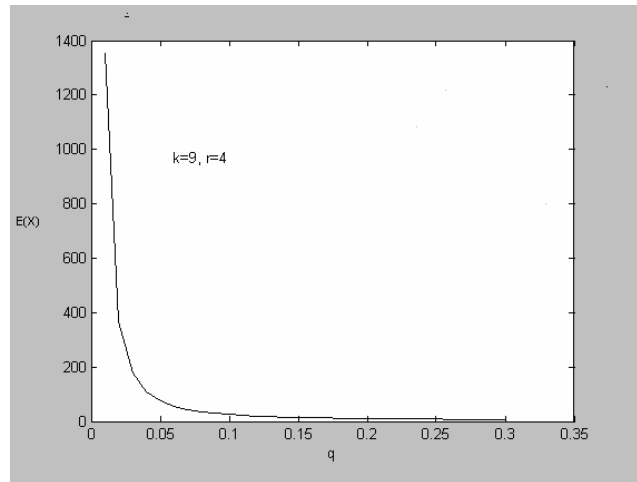
Θέτοντας στη συνέχεια  $t=1$  και απλοποιώντας την έκφραση που προκύπτει υπολογίζεται εύκολα ο μέσος χρόνος αναμονής ως εξής

$$E(X) = G_X'(1) = \frac{2}{q} + \frac{p^{k+r-2}}{q(1-p^{k-1})}. \quad (5.1.6)$$

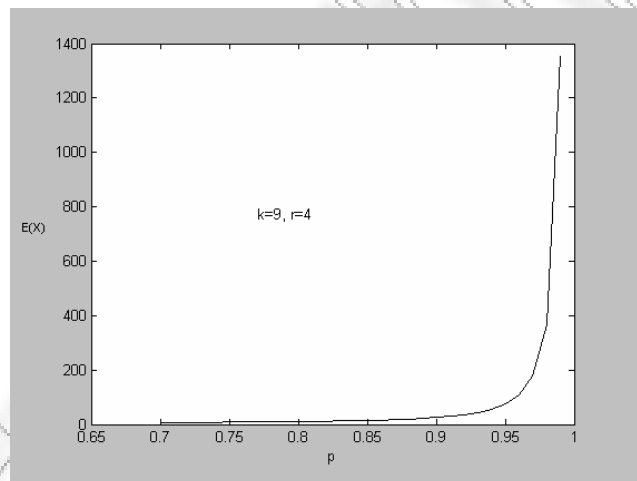
Από τη σχέση (5.1.6) είναι φανερό ότι  $E(X) \rightarrow 2$  όταν  $q \rightarrow 1$  ενώ  $E(X) \rightarrow \infty$  όταν  $q \rightarrow 0$ .

Πιο αναλυτικά, είναι εύκολο να συμπεράνει κανείς ότι μέσω του συγκεκριμένου τεστ καταλήγουμε στη γρήγορη απόρριψη ενός ελαττωματικού εξοπλισμού, ενώ αντίθετα απαιτείται άπειρος χρόνος για την απόρριψη ενός ποιοτικά καλού. Επιπλέον, βγάζουμε το συμπέρασμα ότι η μέση τιμή  $E(X)$  είναι μια φθίνουσα συνάρτηση ως προς  $q$ .

Στα παραπάνω συμπεράσματα μπορούμε να καταλήξουμε και από τη γραφική μελέτη του μέσου χρόνου αναμονής συναρτήσεως των  $q$ ,  $p$ ,  $k$  και  $r$ .

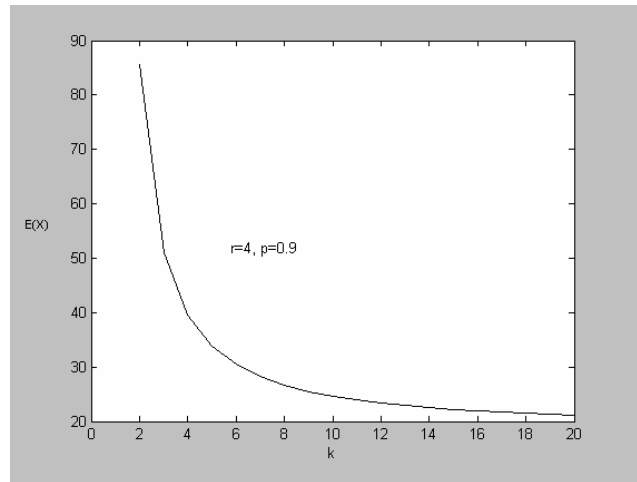


**Σχήμα 5.1.1:** Μέσος χρόνος αναμονής του τεστ συναρτήσει του  $q$ , για  $k=9$  και  $r=4$



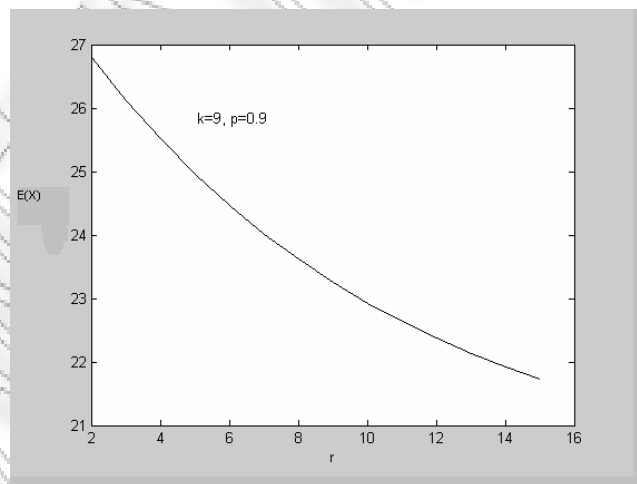
**Σχήμα 5.1.2:** Μέσος χρόνος αναμονής του τεστ συναρτήσει του  $p$ , για  $k=9$  και  $r=4$

Απο τα Σχήμα 5.1.1 και 5.1.2 μπορούμε να διακρίνουμε ότι, ο μέσος χρόνος αναμονής του τεστ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς  $q$  και αύξουσα ως προς  $p$  αντίστοιχα. Επομένως, είναι φανερό ότι το τεστ με τη χρήση μιας στατιστικής συνάρτησης σάρωσης λειτουργεί καλύτερα στην περίπτωση ελλατωματικών εξαρτημάτων οδηγώντας στη γρήγορη απόρριψη τους, ενώ αντίθετα όταν έχουμε πολύ αξιόπιστα εξαρτήματα ο μέσος χρόνος που απαιτείται για την απορριφή τους είναι αρκετά μεγάλος και το τεστ αργεί να δώσει αποτελέσματα.



**Σχήμα 5.1.3:** Μέσος χρόνος αναμονής του τεστ συναρτήσει του  $k$ , για  $p=0.9$  και  $r=4$

Από το Σχήμα 5.1.3 προκύπτει καθαρά ότι ο μέσος χρόνος αναμονής είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς  $k$ . Αυτό είναι λογικό αφού όσο μεγαλύτερο είναι το παράθυρο μέσα στο οποίο πρέπει να συμβούν οι δυο αποτυχίες, τόσο πιο πιθανό είναι να συμβεί αυτό. Επιπλέον, από την κλίση της καμπύλης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για  $2 \leq k \leq 10$  ο μέσος χρόνος αναμονής μέχρι την απόρριψη της μονάδας είναι αρκετά μεγάλος, ενώ για  $k > 10$  μειώνεται απότομα και παίρνει πολύ μικρές τιμές.



**Σχήμα 5.1.4:** Μέσος χρόνος αναμονής του τεστ συναρτήσει του  $r$ , για  $p=0.9$  και  $k=9$

Επιπλέον, από το Σχήμα 5.1.4 συμπεραίνουμε ότι ο μέσος χρόνος μέχρι την απόρριψη της κάθε μονάδας δεν επираζεται τόσο πολύ από τη μεταβολή του  $r$ , αφού  $21 \leq E(X) \leq 27$ . Αυτό συμβαίνει γιατί αναφερόμαστε μόνο στις  $(r-1)$  πρώτες δοκιμές οι οποίες είναι προφανώς ένα

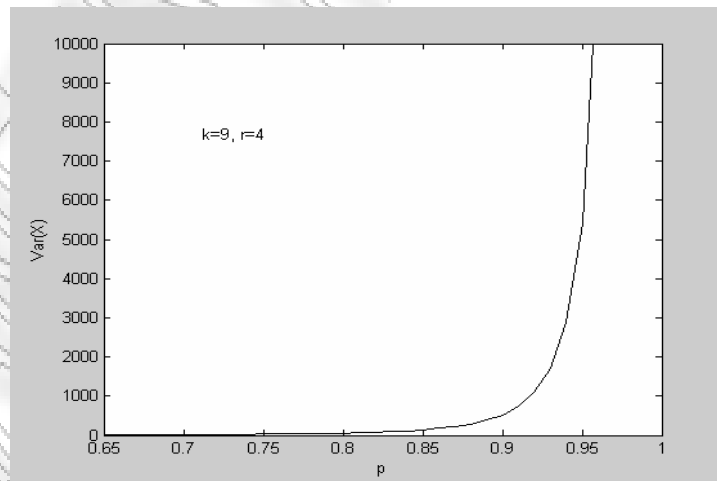
μικρό μόνο μέρος των συνολικών δοκιμών μέχρι τον τερματισμό του τεστ. Βέβαια, παρότι η επιροή του  $r$  είναι μικρή, η αύξησή του έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του μέσου αριθμού δοκιμών.

Από τη σχέση (5.1.5) μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε παραγοντικές ροπές μεγαλύτερων τάξεων (όπως έχουμε κάνει και στα προηγούμενα τεστ). Έτσι, μπορεί εύκολα να προκύψει η διασπορά του χρόνου αναμονής η οποία θα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) = & \frac{2p}{q^2} - \frac{p^{2k+2r-4}}{\{q(1-p^{k-1})\}^2} \\ & + \frac{p^{k+r-3} \{-3p + 5p^2 + 2(k+r)pq + (3-2r)p^k q\}}{\{q(1-p^{k-1})\}^2} \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

(βλ. Koutras and Balakrishnan (1999)).

Η γραφική παράσταση της διασποράς του χρόνου αναμονής για ένα τεστ με μια διορθωτική πράξη με  $k=9, r=4$  συναρτήσει της πιθανότητας επιτυχούς εκκίνησης, δίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



**Σχήμα 5.1.5:** Διασπορά του χρόνου αναμονής ενός τεστ με τη χρήση μιας στατιστικής συνάρτησης σάρωσης, για  $k=9$  και  $r=4$ , συναρτήσει του  $p$



### 5.1.2 Εκτίμηση της άγνωστης πιθανότητας επιτυχίας εκκίνησης

Όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενα κεφάλαια, οι εκτιμήτριες της άγνωστης πιθανότητας εκκίνησης μπορούν να υπολογιστούν με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας και τη μέθοδο των ροπών. Για το συγκεκριμένο τεστ αναλύονται στη συνέχεια οι δυο αυτές μέθοδοι.

#### A. Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Έστω ένα τυχαίο δείγμα  $n$  μονάδων ενός εξοπλισμού που υποβάλλονται σε τεστ εκκίνησης η κάθε μια ξεχωριστά, και ας συμβολίσουμε με  $X_1, X_2, \dots, X_n$  τις τ.μ. που μετρούν το χρόνο αναμονής μέχρι την απόρριψη της κάθε μονάδας. Αν θεωρήσουμε γνωστά όλα τα δυαδικά αποτελέσματα της μορφής

$$(S_1, F_1), (S_2, F_2), \dots, (S_n, F_n)$$

όπου  $S_i, F_i$  ο συνολικός αριθμός επιτυχημένων και αποτυχημένων εκκινήσεων λειτουργίας αντίστοιχα, μέχρι την απόρριψη της  $i$ -μονάδας.

Είναι φανερό ότι,

$$S_i + F_i = X_i \text{ για } i = 1, 2, \dots, n.$$

Έτσι, η συνάρτηση πιθανοφάνειας αναλύεται ως εξής

$$L(p) = p^{S_1} q^{F_1} p^{S_2} q^{F_2} \dots p^{S_n} q^{F_n} = p^S q^F,$$

όπου

$$S = \sum_{i=1}^n S_i, \quad F = \sum_{i=1}^n F_i$$

ο συνολικός αριθμός των επιτυχημένων, αποτυχημένων εκκινήσεων, και

$$X = \sum_{i=1}^n X_i = S + F.$$

Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι η  $S$  είναι επαρκής συνάρτηση για την παράμετρο  $p$ . Στη συνέχεια, λύνοντας την εξίσωση

$$\partial \ln(L(p)) / \partial p = 0$$

μπορούμε να υπολογίσουμε την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας  $\hat{p}$ . Έτσι προκύπτει η σχέση

$$\hat{p} = \frac{S}{S+F} = \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{S}{X} \quad (5.1.8)$$

Η πληροφορία κατά Fisher στη συγκεκριμένη περίπτωση, είναι ίση με

$$I(p) = \left( -\frac{d^2 \log L}{dp^2} \right)_{p=\hat{p}} = \frac{S+F}{p(1-p)},$$

και θα εκτιμάται από την ποσότητα

$$I(\hat{p}) = \frac{S+F}{\hat{p}(1-\hat{p})} = \frac{X}{\hat{p}(1-\hat{p})} \quad (5.1.9)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (5.1.7) και (5.1.8), υπολογίζεται ένα  $100(1-\alpha)\%$  προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης για την άγνωστη πιθανότητα  $p$  που θα έχει άκρα

$$\hat{p} \pm \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{I(\hat{p})}} \quad (5.1.10)$$

(Βλ. Viveros and Balakrishnan (1993)).

## B. Μέθοδος ροπών

Στη μέθοδο αυτή θεωρούμε ότι είναι γνωστοί μόνο οι χρόνοι αναμονής  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , με δειγματικό μέσο

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

ο οποίος ως γνωστόν είναι αμερόληπτος εκτιμητής της μέσης τιμής  $E(X)$ . Προκειμένου να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των ροπών θα πρέπει να θέσουμε

$$\bar{X} = h(p)$$

όπου 
$$h(p) = E(X_i) = \frac{2}{q} + \frac{p^{k+r-2}}{q(1-p^{k-1})}$$

είναι αύξουσα συνάρτηση του  $p$ . Επομένως η εκτιμήτρια ροπών  $\tilde{p}$  είναι μοναδική και αποτελεί τη λύση της εξίσωσης

$$\bar{X} = h(p) = \frac{2}{1-p} + \frac{p^{k+r-2}}{(1-p)(1-p^{k-1})} \quad (5.1.11)$$

Για την ειδική περίπτωση που  $k = r = 2$ , η σχέση (5.1.10) παίρνει τη μορφή

$$(1-p)^2 = \frac{1}{\bar{X}-1}$$

και επιλύοντας την προκύπτει η εκτιμήτρια ροπών

$$\tilde{p} = 1 - (\bar{X} - 1)^{-1/2}$$

Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, προκύπτει ένα προσεγγιστικό  $100(1-\alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης, με άκρα

$$\left( \bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}} \right), \quad (5.1.12)$$

όπου  $\tilde{\sigma}$  είναι η εκτιμώμενη τυπική απόκλιση της μεταβλητής  $T$ , η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\tilde{\sigma} = \text{Var}(X) = \frac{2\tilde{p}}{q^2} - \frac{\tilde{p}^{2k+2r-4}}{\{q(1-\tilde{p}^{k-1})\}^2} + \frac{\tilde{p}^{k+r-3} \{-3\tilde{p} + 5\tilde{p}^2 + 2(k+r)\tilde{p}q + (3-2r)\tilde{p}^k q\}}{\{q(1-\tilde{p}^{k-1})\}^2}.$$

Όπως είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς, η σχέση (5.1.11) μας δίνει ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την παραμετρική συνάρτηση  $\bar{X} = h(p)$ , από το οποίο αντιστρέφοντας την συνάρτηση  $h(p)$  (αφού είναι φθίνουσα ως προς  $p$ ), προκύπτει το επόμενο προσεγγιστικό  $100(1-\alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για την πιθανότητα  $p$

$$\left( h^{-1} \left( \bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}} \right), h^{-1} \left( \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}} \right) \right). \quad (5.1.13)$$

**Παράδειγμα:** Έστω  $n = 20$  ίδιες μονάδες με πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης  $p = 0.9$ . Σύμφωνα με τα κριτήρια λήψης απόφασης του τεστ εάν το εξάρτημα αποτύχει να ξεκινήσει τη λειτουργία του στις 3 πρώτες δοκιμές εκκίνησης ( $r = 4$ ), μια επιπρόσθετη αποτυχημένη προσπάθεια σε κάποια από τις επόμενες δοκιμές θα οδηγήσει σε απορριψή του. Αντίθετα, αν το εξάρτημα ξεκινήσει επιτυχημένα στις 3 πρώτες δοκιμές, θα απορριφθεί μόνο να παρατηρηθούν δυο αποτυχημένες εκκινήσεις μέσα σε ένα παράθυρο  $k = 9$  αποτελεσμάτων.

Προσομοιώνοντας τα δεδομένα του πειράματος προκύπτουν οι τιμές των ποσοτήτων  $S_i, F_i$  και  $X_i$ , του Πίνακα 5.1.1. Επειδή η απόρριψη του κάθε εξαρτήματος μπορεί να γίνει με δυο διαφορετικούς τρόπους, στη στήλη (ToF) δίνεται ο τύπος της αποτυχίας που προκαλεί την απόρριψη: το 0 σημαίνει ότι παρατηρήθηκε μια αποτυχία στις 3 πρώτες εκκινήσεις και ότι το



Για τα συγκεκριμένα δεδομένα μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τις ποσότητες

$$S = \sum_{i=1}^{20} S_i = 592,$$

$$F = \sum_{i=1}^{20} F_i = 55,$$

$$X = \sum_{i=1}^{20} X_i = S + F = 647,$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στις σχέσεις (5.1.7) και (5.1.8), προκύπτει η Ε.Μ.Π του  $p$  ως εξής

$$\hat{p} = \frac{S}{S+F} = \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{\sum_{i=1}^n T_i} = \frac{592}{647} = 0.9149.$$

Η εκτιμώμενη πληροφορία κατά Fisher είναι

$$I(\hat{p}) = \frac{X}{\hat{p}(1-\hat{p})} = \frac{647}{0.079} = 8189.87.$$

Ένα προσεγγιστικό 95% δ.ε για το  $p$  μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση (5.1.9) και είναι το εξής:

$$\left(0.9149 - \frac{1.96}{\sqrt{8189.87}}, 0.9149 + \frac{1.96}{\sqrt{8189.87}}\right) = (0.8932, 0.9366).$$

Η Ε.Μ.Ρ του  $p$  υπολογίζεται λύνοντας την εξίσωση

$$h(p) = \bar{X} = 32.35$$

όπου

$$h(p) = \frac{2}{1-p} + \frac{p^{11}}{(1-p)(1-p^8)}$$

Έτσι βρίσκουμε

$$\tilde{p} = h^{-1}(32.35) = 0.9152.$$

Επιπλέον, αντικαθιστώντας την εκτίμηση αυτή στη σχέση (5.1.7), παίρνουμε την εκτιμώμενη διακύμανση της τ.μ  $T$  ως  $\tilde{\sigma} = 22.6$ . Στη συνέχεια, από τη σχέση (5.1.13), θα προκύψει το

επόμενο προσεγγιστικό 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το  $p$  (βασισμένο στην ε.μ.ρ  $\tilde{p}$ ) με άκρα

$$\left( h^{-1}\left(32.35 - 1.96 \frac{22.6}{\sqrt{20}}\right), h^{-1}\left(32.35 + 1.96 \frac{22.6}{\sqrt{20}}\right) \right) = (0.8904, 0.9557).$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι, παρότι το δείγμα είναι μικρό  $n = 20$ , και οι δυο μέθοδοι δίνουν εκτιμήτριες πολύ κοντά στην πραγματική τιμή του  $p$  ( $p = 0.9$ ). Επιπλέον, τα δυο διαστήματα εμπιστοσύνης που προκύπτουν είναι αρκετά στενά και ταυτόχρονα πολύ κοντά μεταξύ τους.

## 5.2 Τεστ εκκίνησης με τη χρήση μιας στατιστικής σάρωσης όταν οι δοκιμές έχουν Μαρκοβιανή εξάρτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μέχρι τώρα μελετήσαμε την περίπτωση ενός τεστ με τη χρήση μιας στατιστικής συνάρτησης σάρωσης για ανεξάρτητες δοκιμές εκκίνησης. Επειδή όμως, είναι πιο ρεαλιστικό να θεωρούμε ότι μεταξύ των μονάδων υπάρχει κάποιου είδους εξάρτηση, θα μελετήσουμε το συγκεκριμένο τεστ και κάτω από αυτή την προϋπόθεση.

Έτσι, για το μοντέλο αυτό ας συμβολίσουμε με  $p_0, q_0$  την πιθανότητα επιτυχίας, αποτυχίας εκκίνησης στην πρώτη δοκιμή, με  $p_1, q_1$  την πιθανότητα επιτυχίας, αποτυχίας εκκίνησης για κάθε δοκιμή με την προϋπόθεση ότι η προηγούμενη είναι επιτυχία, και με  $p_2, q_2$  την πιθανότητα επιτυχίας, αποτυχίας εκκίνησης για κάθε δοκιμή με την προϋπόθεση ότι η προηγούμενη είναι αποτυχία.

### 5.2.1 Πιθανογεννήτρια συνάρτηση και μέσο μήκος

Σύμφωνα με το μοντέλο που δόθηκε προηγουμένως (βλ. Ενότητα 5.2) και για την περίπτωση της Μαρκοβιανής εξάρτησης μεταξύ των μονάδων υπάρχουν τρία πιθανά ενδεχόμενα που οδηγούν στην απόρριψη ενός εξαρτήματος.

Αν συμβούν 2 αποτυχημένες προσπάθειες εκκίνησης στις  $r - 1$  πρώτες δοκιμές, η αντίστοιχη πιθανογεννήτρια συνάρτηση του χρόνου αναμονής θα είναι

$$\begin{aligned}
G_1(t) &= q_0 q_2 t^2 + \sum_{j=3}^{r-1} q_0 p_1^{j-3} p_2 q_1 t^j \\
&+ \sum_{j=4}^{r-1} (j-3) p_0 p_1^{j-4} p_2 q_1^2 t^j + \sum_{j=3}^{r-1} p_0 p_1^{j-3} q_2 q_1 t^j \\
&= q_0 q_2 t^2 + (q_0 p_2 + p_0 q_2) q_1 t^3 \left\{ \frac{1 - (p_1 t)^{r-3}}{1 - p_1 t} \right\} - \frac{(r-3) p_0 p_2 q_1^2 p_1^{r-4} t^r}{1 - p_1 t} \\
&+ p_0 p_2 q_1^2 t^4 \left\{ \frac{1 - (p_1 t)^{r-3}}{(1 - p_1 t)^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Αν συμβεί μια αποτυχία εκκίνησης στις  $r-1$  πρώτες δοκιμές και μια δεύτερη μετά την  $r$  δοκιμή, τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του χρόνου αναμονής αναλύεται ως εξής

$$\begin{aligned}
G_2(t) &= \frac{q_0 p_2 q_1 p_1^{r-3} z^r}{1 - p_1 z} + \frac{(r-3) p_0 p_2 q_1^2 p_1^{r-4} z^r}{1 - p_1 z} \\
&+ p_0 p_1^{r-3} q_1 q_2 z^r + \frac{p_0 p_1^{r-3} q_1^2 p_2 z^{r+1}}{1 - p_1 z}
\end{aligned}$$

Αν τέλος δε συμβεί καμία αποτυχία στις  $r-1$  πρώτες δοκιμές, αλλά συμβούν 2 αποτυχίες, από την  $r$  δοκιμή και μετά, σε ένα παράθυρο  $k$  δοκιμών, τότε

$$\begin{aligned}
G_3(t) &= p_0 p_1^{r-2} t_{r-1} \left\{ q_1 t + p_1 q_1 z^2 + p_1^2 q_1 t^3 + \dots \right\} \times \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \left\{ p_2 p_1^{k-2} t^{k-1} + p_2 p_1^{k-1} t^k + \dots \right\} q_1 t \right]^l \\
&\times \left\{ q_2 t + p_2 q_1 t^2 + p_2^2 p_1 q_1 t^3 + p_2 p_1^2 q_1 t^4 + \dots + p_2 p_1^{k-3} q_1 t^{k-1} \right\} \\
&= \frac{p_0 p_1^{r-2} q_1 t^r}{1 - p_1 t} \cdot \frac{q_2 t + (p_2 - p_1) t^2 - p_2 p_1^{k-2} q_1 t}{1 - p_1 t - p_2 p_1^{k-2} q_1 t^k}
\end{aligned}$$

Αθροίζοντας τις τρεις τελευταίες σχέσεις προκύπτει η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του χρόνου αναμονής  $X$  που θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}
G_X(t) &= \frac{q_0 q_2 t^2 + \{q_0(p_2 - p_1) + q_2(p_0 - p_1)\} t^3 + (p_1 - p_0)(p_1 - p_2) t^4}{(1 - p_1 t)^2} \\
&- \frac{p_0 p_1^{r-2} q_1 q_2 t^{r+1}}{1 - p_1 t} - \frac{p_0 p_1^{r-2} q_1^2 p_2 t^{r+2}}{(1 - p_1 t)^2} \\
&+ \frac{p_0 p_1^{r-2} q_1 t^r}{1 - p_1 t} \cdot \frac{q_2 t + (p_2 p_1) t^2 - p_2 p_1^{k-2} q_1 t^k}{1 - p_1 t - p_2 p_1^{k-2} q_1 t^k}.
\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Είναι φανερό ότι ο παραπάνω τύπος αποτελεί τη γενική μορφή της πιθανογεννήτριας συνάρτησης του χρόνου αναμονής  $X$  και ότι αν θέσουμε σε αυτόν  $p_0 = p_1 = p_2 = p$  και  $q_0 = q_1 = q_2 = q$  τότε θα καταλήξουμε στον τύπο (5.1.5) που αποτελεί την πιθανογεννήτρια συνάρτηση του χρόνου  $X$  για ανεξάρτητες δοκιμές.

Στη συνέχεια, παραγωγίζοντας την πιθανογεννήτρια  $G_T(z)$  ως προς  $z$  και θέτοντας  $z = 1$  προκύπτει η μέση τιμή του χρόνου  $T$  ως

$$E(X) = G'_X(1) = \frac{2 + p_0 + p_2 - 2p_1}{q_1} + \frac{p_0 p_1^{r+k-4} p_2 (q_1 + p_2)}{q_1 (1 - p_2 p_1^{k-2})}$$

Αν στη σχέση αυτή θέσουμε  $p_0 = p_1 = p_2 = p$  και  $q_0 = q_1 = q_2 = q$  τότε προκύπτει η μέση τιμή του χρόνου  $X$  για ανεξάρτητες δοκιμές.

### 5.3 Τεστ εκκίνησης δυο φάσεων

Έστω το τυπικό παράδειγμα ενός μηχανικού παραγωγής που ελέγχει ένα σωρό συσκευών. Αρχικά, θεωρεί ότι η κάθε μονάδα του σωρού θα γίνει αποδεκτή αν συμβεί ένας συγκεκριμένος αριθμός  $c_1$  συνεχόμενων επιτυχημένων εκκινήσεων πριν από  $d_1$  αποτυχίες. Καθώς όμως προχωράει το πείραμα παρατηρεί ότι δεν έχουν συμβεί  $c_1$  επιτυχίες πριν από  $d_1$  αποτυχίες, και θέλοντας να αποφύγει το ενδεχόμενο αποδοχής μιας ελαττωματικής μονάδας, βάζει ένα πιο αυστηρό περιορισμό. Σύμφωνα με αυτόν, απαιτεί να συμβούν  $c_2$  συνεχόμενες επιτυχημένες εκκινήσεις λειτουργίας πριν από  $d_2$  αποτυχημένες ώστε να αποδεχτεί τελικά την κάθε συσκευή.

Συνοψίζοντας είναι φανερό ότι το τεστ που αναφέραμε περιλαμβάνει δυο φάσεις με τα εξής κριτήρια:

1. Η αποδοχή του εξαρτήματος γίνεται (στην πρώτη φάση) αν συμβούν  $c_1$  συνεχόμενες επιτυχίες πριν από  $d_1$  αποτυχίες.



2. Αν δε συμβούν  $c_1$  συνεχόμενες επιτυχίες πριν από  $d_1$  αποτυχίες, τότε το εξάρτημα γίνεται αποδεκτό αν παρατηρηθούν  $c_2$  συνεχόμενες επιτυχίες πριν από τις επόμενες  $d_2$  αποτυχίες (δεύτερη φάση).
3. Το εξάρτημα απορρίπτεται αν δε συμβούν  $c_1$  συνεχόμενες επιτυχίες πριν από  $d_1$  αποτυχίες και επιπλέον ούτε  $c_2$  συνεχόμενες επιτυχίες πριν από τις επόμενες  $d_2$  αποτυχίες.

### 5.3.1 Συνάρτηση Πιθανότητας και μέσο μήκος

Έστω  $X$  η τ.μ. που εκφράζει το μήκος του τεστ εκκίνησης δυο φάσεων με ανεξάρτητες δοκιμές και σταθερή πιθανότητα επιτυχίας εκκίνησης ίση με  $p$ . Σύμφωνα με τα κριτήρια λήψης απόφασης το τεστ θα τερματιστεί με τρεις πιθανούς τρόπους.

Για να έχουμε αποδοχή της μονάδας στην πρώτη φάση θα πρέπει να παρατηρήσουμε μια διαδοχή δοκιμών της μορφής

$$\underbrace{SS \dots SF}_{\substack{0 \leq j \leq c_1 - 1 \\ 0 \leq i \leq d_1 - 1}} \underbrace{SS \dots S}_{c_1}$$

με αντίστοιχη πιθανογεννήτρια συνάρτηση του μήκους

$$\begin{aligned} G_{X_1}(t) &= \sum_{i=0}^{d_1-1} \left( \sum_{j=0}^{c_1-1} (pt)^j qt \right)^i (pt)^{c_1} = \sum_{i=0}^{d_1-1} \left( \frac{1-(pt)^{c_1}}{1-pt} qt \right)^i p^{c_1} t^{c_1} = \\ &= \frac{(1-pt)^{d_1} - (1-p^{c_1} t^{c_1})^{d_1} (qt)^{d_1}}{(1-pt)^{d_1-1} (1-pt-qt+qp^{c_1} t^{c_1+1})} p^{c_1} t^{c_1}. \end{aligned}$$

Για να έχουμε αποδοχή της μονάδας στη δεύτερη φάση θα πρέπει να πάρουμε αντίστοιχα μια διαδοχή δοκιμών της μορφής

$$\underbrace{SS \dots SF}_{\leq c_1 - 1} \underbrace{SS \dots SF}_{1\eta \leq c_1 - 1} \underbrace{SS \dots SF}_{\leq c_1 - 1} \underbrace{SS \dots SF}_{d_1\eta \leq c_2 - 1} \underbrace{SS \dots SF}_{\leq c_2 - 1} \underbrace{SS \dots SF}_{1\eta \leq c_2 - 1} \underbrace{SS \dots SF}_{\leq c_2 - 1} \underbrace{SS \dots S}_{r\eta \leq c_2}$$

όπου  $0 \leq r \leq d_2 - 1$ , με πιθανογεννήτρια συνάρτηση που αναλύεται ως εξής

$$G_{X_2}(t) = \left( \frac{1 - (pt)^{c_1}}{1 - pt} qt \right)^{d_1} \sum_{r=0}^{d_2-1} \left( \frac{1 - (pt)^{c_2}}{1 - pt} qt \right)^r p^{c_2} t^{c_2} =$$

$$= \frac{(1 - p^{c_1} t^{c_1})^{d_1} (qt)^{d_1} \{ (1 - pt)^{d_2} - (1 - p^{c_2} t^{c_2})^{d_2} (qt)^{d_2} \} p^{c_2} t^{c_2}}{(1 - pt)^{d_1+d_2-1} \{ 1 - pt - qt + qp^{c_2} t^{c_2+1} \}}.$$

Τέλος, για να έχουμε απόρριψη της μονάδας, η αντίστοιχη διαδοχή δοκιμών θα πρέπει να είναι

$$\underbrace{S \dots S}_{\leq c_1-1} \underbrace{F S}_{1\eta} \underbrace{S \dots S}_{\leq c_1-1} \underbrace{F}_{2\eta} \dots \underbrace{F S}_{d_1\eta} \underbrace{S \dots S}_{\leq c_2-1} \underbrace{F S}_{1\eta} \underbrace{S \dots S}_{\leq c_2-1} \underbrace{F}_{2\eta} \dots \underbrace{S \dots S}_{\leq c_2-1} \underbrace{F}_{d_2\eta}$$

με αντίστοιχη πιθανογεννήτρια συνάρτηση του μήκους

$$G_{X_3}(t) = \left( \sum_{j=0}^{c_1-1} (pt)^j qt \right)^{d_1} \left( \sum_{i=0}^{c_2-1} (pt)^i qt \right)^{d_2} =$$

$$= \frac{(1 - p^{c_1} t^{c_1})^{d_1} (1 - p^{c_2} t^{c_2})^{d_2}}{(1 - pt)^{d_1+d_2}} (qt)^{d_1+d_2}.$$

Αθροίζοντας τις τρεις τελευταίες σχέσεις, προκύπτει η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της μεταβλητής  $X$ . Έτσι, παίρνουμε

$$G_X(t) = \frac{(1 - p^{c_1} t^{c_1})^{d_1} (1 - p^{c_2} t^{c_2})^{d_2} q^{d_1+d_2} t^{d_1+d_2}}{(1 - pt)^{d_1+d_2}} +$$

$$\frac{\{ (1 - pt)^{d_1} - (1 - p^{c_1} t^{c_1})^{d_1} q^{d_1} t^{d_1} \} p^{c_1} t^{c_1}}{(1 - pt)^{d_1-1} \{ 1 - t + qp^{c_1} t^{c_1+1} \}} + \quad (5.3.1)$$

$$\frac{(1 - p^{c_1} t^{c_1})^{d_1} q^{d_1} p^{c_2} t^{d_1+c_2} \{ (1 - pt)^{d_2} - (1 - p^{c_2} t^{c_2})^{d_2} q^{d_2} t^{d_2} \}}{(1 - pt)^{d_1+d_2-1} \{ 1 - t + qp^{c_2} t^{c_2+1} \}}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης αυτής με το  $(1 - t + qp^{c_1} t^{c_1+1}) (1 - t + qp^{c_2} t^{c_2+1})$  και εκτελώντας αλγεβρικές πράξεις προκύπτει ο επόμενος αναδρομικός τύπος για τη συνάρτηση πιθανότητας  $P(x) = P(X = x)$  της τ.μ  $X$

$$P(x) - 2P(x-1) + P(x-2) + qp^{c_1} P(x - c_1 - 1) - qp^{c_1} P(x - c_1 - 2) + qp^{c_2} P(x - c_2 - 1)$$

$$- qp^{c_2} P(x - c_2 - 2) + q^2 p^{c_1+c_2} P(x - c_1 - c_2 - 2) =$$

$$= \sum_{i=0}^3 R_i(x) + \sum_{i=0}^4 S_i(x), \quad x = M, M+1, M+2, \dots, M^*$$

όπου  $M = \min(c_1, d_1 + c_2, d_1 + d_2), M^* = c_1 d_1 + c_2 d_2,$

$R_i(x), i = 1, 2, 3$  και  $S_i(x), i = 1, 2, 3, 4$  είναι ποσότητες με τις οποίες έχουν αντικατασταθεί πολύπλοκες αλγεβρικές παραστάσεις ώστε η συνάρτηση πιθανότητας να δοθεί σε όσο πιο απλή μορφή γίνεται.

(βλ. Balakrishnan and Chan (1999)).

Επιπλέον, παραγωγίζοντας την πιθανογεννήτρια  $G_X(t)$  ως προς  $t$  και θέτοντας  $t = 1$  προκύπτει το μέσο μήκος του τεστ που θα δίνεται από τη σχέση

$$E(X) = G_X'(1) = \frac{1}{q} \left[ \left( \frac{1}{p^{c_1}} - 1 \right) \{1 - (1 - p^{c_1})^{d_1}\} + \left( \frac{1}{p^{c_2}} - 1 \right) (1 - p^{c_1})^{d_1} \{1 - (1 - p^{c_2})^{d_2}\} \right]$$

Από τη τελευταία σχέση μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι,

1. Όταν  $d_1 \rightarrow \infty$  το τεστ τερματίζεται στην πρώτη φάση. Πιο αναλυτικά, είναι σίγουρο ότι οι  $c_1$  συνεχόμενες επιτυχίες θα συμβούν πριν τις  $d_1$  αποτυχίες οπότε το τεστ είναι ισοδύναμο με ένα CS για  $c = c_1$ .

$$E(X) = \frac{1}{q} \left( \frac{1}{p^c} - 1 \right) = \frac{1 - p^c}{qp^c}.$$

Αυτό το αποτέλεσμα αντιστοιχεί στο κλασικό τεστ εκκίνησης για  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες. (Viveros και Balakrishnan (1993)).

2. Όταν  $c_2 \rightarrow \infty$  και  $d_2 \rightarrow 0$ , τότε το τεστ σταματάει μόλις συμβούν  $c_1 = c$  συνεχόμενες επιτυχημένες εκκινήσεις ή όταν συμβούν  $d_1 = d$  συνολικά αποτυχίες (όποιο από τα δύο συμβεί πρώτο)

$$E(X) = \frac{1}{q} \left( \frac{1}{p^c} - 1 \right) \{1 - (1 - p^c)^d\}.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα αντιστοιχεί στο CSTF για  $c$  συνεχόμενες επιτυχίες και  $d$  αποτυχίες (Balasubramanian, Viveros και Balakrishnan (1993)).

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

## ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ *MATLAB*

### ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 1: ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

#### Ενότητα 2.1

##### Ορισμός της συνάρτησης πιθανότητας $Q(x)$

```
function p = myFactorial(n)
%FACTORIAL Factorial function.
% FACTORIAL(N) is the product of all the integers from 1 to
N,
% i.e. prod(1:N). Since double precision numbers only have
about
% 15 digits, the answer is only accurate for N <= 21. For
larger N,
% the answer will have the right magnitude, and is accurate
for
% the first 15 digits.
%
% See also PROD.

% Copyright 1984-2001 The MathWorks, Inc.
% $Revision: 1.5 $
[size]=length(n);
for i=1:size
    t(i)=factorial(n(i));
end
p = t;
function t = distribFunc1(x,p,c)

if (x<c)
    t=0;
else
Q1=myFactorial(x-1).*(p.^c).*(1-p).^(x-c);
Q2 =myFactorial(x-c).*myFactorial(c-1);
Q=Q1./Q2;
t=Q;
End
```

### Ορισμός της α.σ.κ

```
function j = lessThan_X_AttemptsDisFun1(p,c,Y_max,line)

y=c:Y_max;
for i=c:Y_max
    P(i-c+1)=0;
    for x=1:i
        P(i-c+1) = P(i-c+1) + distribFunc1(x,p,c);
    end
end
end
plot(y,P,line,'LineWidth',2,...
      'MarkerEdgeColor','k',...
      'MarkerFaceColor','k',...
      'MarkerSize',5);

j=0;
```

### Γραφικές παραστάσεις της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής

```
function j = allPlotLessThan_X_AttemptsDsFn1()
hold on;
j = lessThan_X_AttemptsDisFun1(0.99,10,40,'k');
lessThan_X_AttemptsDisFun1(0.99,5,80,'r');
lessThan_X_AttemptsDisFun1(0.99,10,100,'b');
lessThan_X_AttemptsDisFun1(0.99,20,100,'m');
hold off;

function j = allPlotLessThan_X_AttemptsDsFn1()
hold on;
j = lessThan_X_AttemptsDisFun1(0.99,20,40,'k');
lessThan_X_AttemptsDisFun1(0.9,20,80,'r');
lessThan_X_AttemptsDisFun1(0.95,20,100,'b');
lessThan_X_AttemptsDisFun1(0.99,20,100,'g');
hold off;
```

## Ενότητα 2.2

### Ορισμός της συνάρτησης πιθανότητας $P(x)$

```
function P = distribFunc2(x,p,c)
if (x<c)
    P = 0;
end
if (x==c)
    P =p^c;
end
if ((x>c) & (x<=2*c))
    P = (1-p)*p.^c;
end
```

```

if (x>2*c)
    temp = 0;
    for t = 1:x-2*c;
        temp = temp + distribFunc2(c+t-1,p,c);
    end
    P=(1-p)*p^c*(1-temp);
End

```

### Ορισμός της α.σ.κ

```

function j = lessThan_X_Attempts(p,c,Y_max,line)
y=c:Y_max;
for i=c:Y_max
    P(i-c+1)=0;
    for x=1:i
        P(i-c+1) = P(i-c+1) + distribFunc2(x,p,c);
    end
end
end
plot(y,P,line,'LineWidth',2,...
      'MarkerEdgeColor','k',...
      'MarkerFaceColor','k',...
      'MarkerSize',5);
j=0;

```

### Γραφικές παραστάσεις της α.σ.κ

```

function j = allPlotLessThan_X_Attempts()
hold on;
j = lessThan_X_Attempts(0.99,10,40,'k');
lessThan_X_Attempts(0.9,20,80,'k');
lessThan_X_Attempts(0.7,40,100,'k');
lessThan_X_Attempts(0.5,80,100,'k');
hold off;

```

### Μέσο μήκος του τεστ

```

function j = meanX(c,line)
p=0.8:0.01:1;
Q1 = 1-p.^c;
Q2 = (1-p).*p.^c;
Q=Q1./Q2;
plot(p,Q,line);

```

### Γραφικές παραστάσεις του μέσου μήκους

```
function j = allMeanPlot()
hold on;
j = meanX(10,'k');
j = meanX(20,'b');
j = meanX(30,'r');
hold off;
```

### Διακύμανση του μήκους

```
function Q = varX(c,line)

p=0.6:0.01:1;
Q1 = 1./(((1-p).^2).*p.^(2*c));
Q2 = (2*c+1)./((1-p).*p.^c);
Q3 = p./((1-p).^2);
Q = Q1-Q2-Q3;
plot(p,Q,line);
```

### Γραφικές παραστάσεις της διακύμανσης

```
function j = allVarPlot()

hold on;
j = varX(5,'k');
j = varX(10,'b');
j = varX(30,'r');
hold off;
```

## Ενότητα 2.3

### Μέσο μήκος του τεστ

```
function Q = markovianMeanX(p0,p1,p2,c)

f1 = 1./(p2*(1-p1).*p1.^(c-1));
f2 = 1-p1+p2-p2.*p1.^(c-1);
Q = 1-p0./p2+f1.*f2;
```

### Γραφικές παραστάσεις του μέσου μήκους συναρτήσει των $p_1, p_2$

```
function p =
plotMarkovianMeanX(p0,p1,p2,c,flag,MaxVal,MinVal,line)

% if flag=1 it is plotted as a
% function of p0. If flag is 0
% it is plotted as a function of c
```

```

% If flag is 3
% it is plotted as a function of p2
% If flag is 2
% it is plotted as a function of p1

if (flag==1)
    p0=MinVal:0.01:MaxVal;
    m=MarkovianMeanX(p0,p1,p2,c);
    plot(p0,m,line,'LineWidth',2,...
         'MarkerEdgeColor','k',...
         'MarkerFaceColor','k',...
         'MarkerSize',5);
end

if (flag==0)
    for c=1:MaxVal
        m(c)=MarkovianMeanX(p0,p1,p2,c);
    end
    c=1:MaxVal;
    plot(c,m,line,'LineWidth',2,...
         'MarkerEdgeColor','k',...
         'MarkerFaceColor','k',...
         'MarkerSize',5);
end

if (flag==2)
    p1=MinVal:0.01:MaxVal;
    m=MarkovianMeanX(p0,p1,p2,c);
    plot(p1,m,line,'LineWidth',2,...
         'MarkerEdgeColor','k',...
         'MarkerFaceColor','k',...
         'MarkerSize',5);
end

if (flag==3)
    p2=MinVal:0.01:MaxVal;
    m=MarkovianMeanX(p0,p1,p2,c);
    plot(p2,m,line,'LineWidth',2,...
         'MarkerEdgeColor','k',...
         'MarkerFaceColor','k',...
         'MarkerSize',5);
end
End

```



## ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 2: ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Ενότητα 3.1

#### Ορισμός μέσου μήκους

```
function Q = MeanX(p, c, d)
f1 = 1-p.^c;
f2 = (1-p).*p.^c;
f3 = 1-(1-p.^c).^d;
Q = f3.*f1./f2;
```

#### Γραφικές παραστάσεις μέσου μήκους συναρτήσει του c

```
function Q = meanPlot(p, c, d)
c = 1:50;
Q=MeanX(p, c, d);
plot(c, Q, 'k');
```

### Ενότητα 3.4

#### Ορισμός πιθανότητας αποδοχής μιας μονάδας

```
function p = PrOfAcceptOfUnit(c, d, p0, p1, p2)
p=1-(1-p0.*p1.^(c-1)).*(1-p2.*p1.^(c-1)).^(d-1);
```

#### Γραφικές παραστάσεις της πιθανότητας αποδοχής συναρτήσει των d και c

```
function p =
plotPrOfAcceptOfUnit(c, d, p0, p1, p2, flag, MaxVal, line)

% if flag=1 it is plotted as a
% function of d. If flag is 0
% it is plotted as a function of c

if (flag==1)
    d=1:MaxVal;
    m=PrOfAcceptOfUnit(k, d, p0, p1, p2);
    plot(d, m, line, 'LineWidth', 2, ...
         'MarkerEdgeColor', 'k', ...
         'MarkerFaceColor', 'k', ...
         'MarkerSize', 5);
else
    c=1:MaxVal;
    m=PrOfAcceptOfUnit(k, d, p0, p1, p2);
    plot(k, m, line, 'LineWidth', 2, ...
         'MarkerEdgeColor', 'k', ...
         'MarkerFaceColor', 'k', ...
```

```

        'MarkerSize',5);
    End

```

Συνάρτηση Κατανομής

```

function p = plotEndProbOrigin(c,d,p0,p1,p2,p,MaxVal,line)

    for z=1:MaxVal
        m(z) = endProbOrigin(c,d,z,p0,p1,p2);
        l(z) = endProbOrigin(c,d,z,p,p,p);
    end
    z=1:MaxVal;
    hold on;
    plot(z,m,'--k','LineWidth',2,...
        'MarkerEdgeColor','k',...
        'MarkerFaceColor','k',...
        'MarkerSize',5);
    plot(z,l,line,'LineWidth',2,...
        'MarkerEdgeColor','k',...
        'MarkerFaceColor','k',...
        'MarkerSize',5);
    hold off;
    p=0;

```

**Ορισμός της συνάρτησης P[Z<sub>c,1</sub>=z]**

```

function prob = endProbOrigin(c,d,z,p0,p1,p2)

% The distribution of the number of trials
% in the test

if (z==0)
    prob = 0;
elseif ((z==1)&(d==1)&(c==1))
    prob = 1;
elseif ((z==1)&(d==1)&(c>1))
    prob = 1-p0;
elseif ((d==1)&(z>1)&(z<c)&(c>1))
    prob = (1-p1)*p0*p1^(z-2);
elseif ((z==c)&(d==1)&(c>1))
    prob = p0*p1^(c-2);
elseif ((d==1)&(z>c))
    prob = 0;
elseif (d>1)
    a = [c,z-1];
    f(1)=0;
    for t=2:min(a)
        temp = endProbOrigin(c,d-1,z-t,p0,p1,p2);
        f(t) = temp*(1-p1)*p0*p1^(t-2);
    end
end

```

```

end
prob = (1-p0)*endProbOrigin(c,d-1,z-1,p0,p1,p2) + sum(f) +
Iab(z,c)*p0*p1^(c-1);
end

```

**Ορισμός της συνάρτησης  $P\{Z_{c,d}=z\}$**

```

function prob = endProbStar(c,d,z,p0,p1,p2)

% The distribution of the number of trials
% in the test

if (z==0)
    prob = 0;
elseif ((z==1)&(d==1)&(c==1))
    prob = 1;
elseif ((z==1)&(d==1)&(c>1))
    prob = 1-p2;
elseif ((d==1)&(z>1)&(z<c)&(c>1))
    prob = (1-p1)*p2*p1^(z-2);
elseif ((z==c)&(d==1)&(c>1))
    prob = p2*p1^(c-2);
elseif ((d==1)&(z>c))
    prob = 0;
elseif (d>1)
    a = [c,z-1];
    f(1)=0;
    for t=2:min(a)
        temp = endProbStar(c,d-1,z-t,p0,p1,p2);
        f(t) = temp*(1-p1)*p2*p1^(t-2);
    end
    prob = (1-p2)*endProbStar(c,d-1,z-1,p0,p1,p2) + sum(f) +
Iab(z,c)*p2*p1^(c-1);
end

```

```

function i = Iab(a,b)
if (a==b)
    i=1;
else
    i=0;
end

```

**Αθροιστική συνάρτηση κατανομής του μήκους  $Z_{8,5}$  για ανεξάρτητες δοκιμές με  $p=0.7$  και για Μαρκοβιανή εξάρτηση με  $p_0=0.7, p_1=0.9, p_2=0.233$**

```

function p = plotEndProbOrigin(c,d,p0,p1,p2,p,MaxVal,line)
for z=1:MaxVal

```

```

        m(z) = endProbOrigin(c,d,z,p0,p1,p2);
        l(z) = endProbOrigin(c,d,z,p,p,p);
    end
    z=1:MaxVal;
    hold on;
    plot(z,m,'--k','LineWidth',2,...
        'MarkerEdgeColor','k',...
        'MarkerFaceColor','k',...
        'MarkerSize',5);
    plot(z,l,line,'LineWidth',2,...
        'MarkerEdgeColor','k',...
        'MarkerFaceColor','k',...
        'MarkerSize',5);
    hold off;
    p=0;

```

### **Ορισμός Μέσου μήκους EZcd**

```

function y = EZcd(k,d,p0,p1,p2)
Q1 = 1-p1+p0.*(1-p1.^(c-1));
Q2 = 1-p1;
Q3 = (1-p0.*p1.^(c-1)).*(1-p1+p2.*(1-p1.^(c-1))).*(1-(1-p2.*p1.^(c-1)).^(d-1));
Q4 = p2*(1-p1).*p1.^(c-1);
y = Q1/Q2 + Q3/Q4;

```

### **Γραφικές παραστάσεις του μέσου μήκους EZcd συναρτήσει των c και d**

```

function p = plotEZcd(c,d,p0,p1,p2,flag,MaxVal,line)
% if flag=1 it is plotted as a
% function of d. If flag is 0
% it is plotted as a function of c
if (flag==1)
    d=1:MaxVal;
    m=EZcd(k,d,p0,p1,p2);
    plot(d,m,line,'LineWidth',2,...
        'MarkerEdgeColor','k',...
        'MarkerFaceColor','k',...
        'MarkerSize',5);
else
    for c=1:MaxVal
        m(k)=EZcd(c,d,p0,p1,p2);
    end
    c=1:MaxVal;
    plot(c,m,line,'LineWidth',2,...
        'MarkerEdgeColor','k',...
        'MarkerFaceColor','k',...
        'MarkerSize',5);

```

```
end
```

## ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 3: ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### Ενότητα 4.1

#### Ορισμός μέσου μήκους

```
function Q = MeanX(p0,p1,c)
f1 = 1-p0.^c;
f2 = 1./((1-p1).^p1.^c);
f3 = 1./(1-p1);
f4 = 1./(1-p0);
Q = f1.*(f2-f3+f4);
```

#### Γραφική παράσταση του $E(X)$ συναρτήσει του $p_1$

```
% if flag=1 it is plotted as a
% function of p0. If flag is 0
% it is plotted as a function of c
% If flag is 2
% it is plotted as a function of p2
% If flag is 3
% it is plotted as a function of p1

if (flag==1)
    p0=MinVal:0.01:MaxVal;
    m=MeanX(p0,p1,c);
    plot(p0,m,line,'LineWidth',2,...
        'MarkerEdgeColor','k',...
        'MarkerFaceColor','k',...
        'MarkerSize',5);
end

if (flag==0)
    for c=1:MaxVal
        m(c)=MeanX(p0,p1,c);
    end
    c=1:MaxVal;
    plot(c,m,line,'LineWidth',2,...
        'MarkerEdgeColor','k',...
        'MarkerFaceColor','k',...
        'MarkerSize',5);
end

if (flag==2)
```

```

p1=MinVal:0.01:MaxVal;
m=MeanX(p0,p1,c);
plot(p1,m,line,'LineWidth',2,...
      'MarkerEdgeColor','k',...
      'MarkerFaceColor','k',...
      'MarkerSize',5);
end

```

## ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 4: ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### Ενότητα 5.1

#### Γραφικές παραστάσεις του μέσου χρόνου αναμονής

```

function j = meanT(k,r,line)

p=0.7:0.01:0.99;
q = 1-p;
Q1 = 2./q;
Q2 = p.^(k+r-2);
Q3 = q.*(1-p.^(k-1));
Q=Q1+Q2./Q3;
plot(q,Q,line);

```

#### Προσομοίωση ενός τεστ με τη χρήση μιας στατιστικής συνάρτησης σάρωσης για n=20

#### ίδιες μονάδες ενός εξοπλισμού με p=0.9 και r=4 και k=9

```

function [ToF,totSuc,totFail,totT,totRes] = simulate(p,r,k,n)

for i = 1:n
    [TF,s,f,t,res] = unitTest(p,r,k);
    suc(i) = s;
    fail(i) = f;
    T(i) = t;
    totRes(i,1) = {res};
    ToF(i) = TF;
end
totSuc = sum(suc);
totFail = sum(fail);
totT = sum (T);

function res = test(p)

y = rand(1);

```

```

if (y<(1-p))
    res = 0;
else
    res = 1;
end

function [ToF,suc,fail,T,res] = unitTest(p,r,k)

ToF = 0;
ended = 0;
i = 0;
zeroPos1 = 0;
zeroPos2 = 0;
while ended==0
    i = i+1;
    res(i) = test(p);
    if (i==(r-1))
        if ((sum(res)==1)&(r-2 ~ =1))
            ended = 1;
        elseif (sum(res)==r-2)
            ToF = 1;
        elseif (sum(res)==r-1)
            ToF = 2;
        end
    elseif (i>(r-1))
        if (ToF==1)
            if (res(i)==0)
                ended = 1;
            end
        elseif (ToF==2)
            if ((zeroPos1 == zeroPos2)&(res(i)==0))
                zeroPos1 = i;
                if ((abs(zeroPos2-zeroPos1)<k) & (i>r-1) & (zeroPos2
~ =0))
                    ended = 1;
                end
            elseif ((zeroPos1 ~= zeroPos2) & (res(i)==0))
                zeroPos2 = i;
                if (abs(zeroPos2-zeroPos1)<k)
                    ended = 1;
                end
            end
            zeroPos1 = zeroPos2;
        end
    end
end
end
end
suc = sum(res);
fail = length(res)-sum(res);
T = length(res);

```

```
Gia n///20
```

```
(0.9, 4, 9, 20)
```

```
{1,1}
```

```
1 0 1 1 1 0
```

```
>> totRes{2,1}
```

```
ans =
```

```
Columns 1 through 17
```

```
1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1
```

```
Columns 18 through 20
```

```
1 1 0
```

```
>> totRes{3,1}
```

```
ans =
```

```
Columns 1 through 17
```

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

```
Columns 18 through 34
```

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1
```

```
Columns 35 through 51
```

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

```
Columns 52 through 68
```

```
1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

```
Columns 69 through 85
```

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

```
Columns 86 through 91
```

```
1 1 1 0 1 0
```

```
>> totRes{4,1}
```

```
ans =
```

```
Columns 1 through 17
```

```
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

```
Columns 18 through 24
```

```
1 1 1 1 1 1 0
```

```
>> totRes{5,1}
```



```

ans =

Columns 1 through 17
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

Columns 18 through 34
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

Columns 35 through 40
 1 1 1 1 0 0

```

```
>> totRes{6,1}
```

```
ans =

 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0

```

```
>> totRes{7,1}
```

```
ans =

 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0

```

```
>> totRes{7,1}
```

```
ans =

 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0

```

```
>> totRes{8,1}
```

```
ans =

Columns 1 through 17
 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

Columns 18 through 34
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1

Columns 35 through 45
 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0

```

```
>> totRes{9,1}
```

```
ans =

Columns 1 through 17
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1

Columns 18 through 31
 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0

```

```
>> totRes{10,1}
```

```
ans =
```

```
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
```

```
>> totRes{11,1}
```

```
ans =
```

```
Columns 1 through 17
```

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
```

```
Columns 18 through 20
```

```
1 1 0
```

```
>> totRes{12,1}
```

```
ans =
```

```
1 1 1 1 0 0
```

```
>> totRes{13,1}
```

```
ans =
```

```
1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0
```

```
>> totRes{14,1}
```

```
ans =
```

```
1 1 1 1 0 1 1 1 0
```

```
>> totRes{15,1}
```

```
ans =
```

```
Columns 1 through 17
```

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

```
Columns 18 through 34
```

```
1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

```
Columns 35 through 51
```

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
```

```
Columns 52 through 53
```

```
1 0
```

```
>> totRes{16,1}
```

```
ans =
```

```
1 1 0 1 1 1 1 1 0
```

```
>> totRes{17,1}
```

```
ans =
```

```
Columns 1 through 17
```

```

1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
Columns 18 through 34
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1
Columns 35 through 51
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
Columns 52 through 68
1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
Columns 69 through 85
1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
Columns 86 through 102
1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
Columns 103 through 119
1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1
Columns 120 through 129
1 1 1 0 1 1 1 1 1 0
>> totRes{18,1}
ans =
1 1 1 1 1 1 1 1 0 0
>> totRes{19,1}
ans =
Columns 1 through 17
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
Columns 18 through 34
1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1
Columns 35 through 51
1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1
Columns 52 through 67
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0
>> totRes{20,1}
ans =
Columns 1 through 17
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

```

Columns 18 through 26

1 1 1 1 1 0 1 1 0

totSuc =

592

totFail =

55

totT =

647

ПАМ'ЯТІ ПЕРПА

## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Hahn, G. J. and Gage, J. B., (1983) "Evaluation of a Start-Up Demonstration Test.", *Journal of Quality Technology*, **15**, 103-106.
- [2] Hahn, G.J and Shapiro, S. S (1967). *Statistical Models in Engineering*. John Wiley and Sons, New York, NY.
- [3] Sprott, D. A. (1973). "Normal Likelihoods and Their Relation to a Large Sample Theory of Estimation". *Biometrika* **60**, pp. 457-465.
- [4] Viveros, R. and Balakrishnan, N., (1993), "Statistical Inference From a Start-Up Demonstration Test Data.", *Journal of Quality Technology*, **25**, 119-130..
- [5] Balakrishnan, N., Balasubramanian, K. and Viveros, R. (1995), "Start-Up Demonstration Tests Under Correlation and Corrective Action", *Naval Research Logistics*, **42**, 1271-1276.
- [6] Balakrishnan, N. ; Mohanty, S. G. ; and Aki, S. (1997), "Start-up Demonstration Tests under Markov Dependence Model with Corrective Actions". *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 49, pp. 155-169.
- [7] Koutras, M. V. and Balakrishnan, N. (1999), "A Start-Up Demonstration Test Using a Simple Scan Based Statistic", *Scan Statistics and Applications*, 251-267.
- [8] Balakrishnan, N. and Chan, P. S. (1999), "Two Stage Start-Up Demonstration Testing".
- [9] Balakrishnan, N. and Chan, P. S. (2000), "Start-Up Demonstration Tests with Rejection of Units Upon Observing d Failures", *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **52**, 184-196.
- [10] Donald, E. K. Martin, (2003), "Markovian start-up demonstration tests with rejection of units upon observing d failures", *European Journal of Operational Research* **155**, 474-486.
- [11] Smith, M. D and Griffith, W. S. (2005), "Start-Up Demonstration Tests Based on Consecutive Successes and Total Failures", *Journal Of Quality Technology*, **33**, 186-198.
- [12] Smith, M. D and Griffith, W. S (2003), "The Analysis and Comparison of Start-Up Demonstration Tests", *Technical Report*.
- [13] Balakrishnan, N. and Koutras, M. V. (2002), "Runs and Scans with Applications", *John Willey and Sons, INC*.



