ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΣΤΗΝ **ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ**

ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΜΕΤΡΩΝ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΚΑΙ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Μαρία Γ. Νικολάου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων*

Πειραιάς

Δεκέμβριος 2024

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ **ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ**

ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΜΕΤΡΩΝ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΚΑΙ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Μαρία Γ. Νικολάου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων*

Πειραιάς

Δεκέμβριος 2024

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Ευστάθιος Χατζηκωνστανίδης (Επιβλέπων) (Καθηγητής)
- Παναγιώτης Ξένος (Επίκουρος Καθηγητής)
- Γεώργιος Τζαβελάς (Αναπληρωτής Καθηγητής)

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN

ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

BOUNDS FOR RUIN MEASURES IN THE CLASSICAL AND RENEWAL RISK MODEL

By

Maria G. Nikolaou

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

December 2024

Στους γονείς μου

Γεώργιο και Αντιγόνη

Ευχαριστίες

Καταρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κο. Ευστάθιο Χατζηκωνστανίδη για τον πολύτιμο χρόνο του ως επιβλέπων της διπλωματικής μου εργασίας. Η επιστημονική του συμβουλευτική καθοδήγηση καθώς και οι εύστοχες και πολύ εποικοδομητικές παρατηρήσεις που μου προσέφερε, σε όλα τα στάδια της εκπόνησης της εργασίας, αποτέλεσαν καταλυτικό παράγοντα για την υλοποίησή της.

Επιπλέον, θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες στον κο. Παναγιώτη Ξένο και τον κο. Γεώργιο Τζαβελά που συμμετείχαν στην εξεταστική επιτροπή της διπλωματικής μου εργασίας, καθώς και σε όλους τους καθηγητές μου, για την συμβολή τους στην ολοκλήρωση των σπουδών μου.

Τέλος, οφείλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και ιδίως τους γονείς μου, που αποτέλεσαν το μέγιστο στήριγμα για μένα, με την υπομονή και την προθυμία τους να με βοηθήσουν, καθ’όλη την διαδρομή των σπουδών μου, μέχρι σήμερα.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Η παρούσα εργασία ασχολείται με τα φράγματα της πιθανότητας μεγάλου μεγέθους απαίτησης στην περίπτωση των σύνθετων κατανομών που μοντελοποιούν τον κίνδυνο αυτό. Παρουσιάζουμε τις περιπτώσεις κατανομών ατομικής απαίτησης με αναλυτική ροπογεννήτρια συνάρτηση και κατανομές στις οποίες η ροπογεννήτρια συνάρτηση δεν ορίζεται. Τέτοιες κατανομές είναι αυτές με βαριά ουρά και παρότι ο υπολογισμός των φραγμάτων της πιθανότητας είναι αρκετά πολύπλοκος (με ασυμπτωτικές τεχνικές ή όχι), εντούτοις η σημασία περιορισμού της πιθανότητας σε φράγματα άνω και κάτω είναι υψίστης σημασίας για τις ασφαλιστικές επιχειρήσεις στο θέμα της διαχείρισης μελλοντικού κινδύνου.

Ο συνολικός κίνδυνος είναι διπλά στοχαστικός υπό την έννοια του ότι συντίθεται από τυχαίο πλήθος τυχαίων μεγεθών μεμονωμένων κινδύνων οι οποίοι είτε προσομοιάζονται είτε όχι από την ίδια κατανομής. Η πιθανότητα του συνολικού κινδύνου – ο οποίος μοντελοποιείται από σύνθετη κατανομή - είτε δίδεται με αναλυτική έκφραση (μέσω κατανομής) είτε μέσω φραγμάτων με τεχνικές ασυμπτωτικές (εφόσον το μέγεθος τείνει στο διηνεκές) ή μη ασυμπτωτικές τεχνικές. Η πληρέστερη γνώση των ιδιοτήτων της κατανομής μεμονωμένου κινδύνου δύναται να οδηγήσουν σε βέλτιστο υπολογισμό των φραγμάτων της ζητούμενης πιθανότητας και να συμβάλλουν στην αποφυγή της περίπτωσης χρεοκοπίας η οποία εδώ μελετάτε υπό το πρίσμα του κλασικού μοντέλου και του ανανεωτικού προτύπου μοντέλου.

Abstract

This paper deals with the probability bounds of a large claim size in the case of complex distributions that model this risk. We present the cases of individual demand distributions with an analytical moment generator function and distributions in which the moment generator function is not defined. Such distributions are those with heavy tails and although the calculation of the probability bounds is quite complex (either with asymptotic techniques or not), nevertheless the importance of limiting the probability to upper and lower bounds is of utmost importance for insurance companies in the matter of future risk management.

Aggregate risk is doubly stochastic in the sense that it is composed of a random number of random individual risk sizes that are either simulated or not from the same distribution. The probability of the total risk - which is modeled by a complex distribution - is either given analytically (through a distribution) or through bounds with asymptotic (as long as the magnitude tends to perpetuity) or non-asymptotic techniques.

A more complete knowledge of the properties of the individual risk distribution may lead to an optimal calculation of the barriers of the requested probability and contribute to the avoidance of the bankruptcy case which is studied here in the light of the classical model and the renewal standard model.

Παράρτημα όρων (με τη σειρά που εμφανίζονται στο κείμενο)

NWU: New worse than used: $\bar{F}(x+y) \geq \bar{F}(x)+\bar{F}(y)$

NBU: New better than used: $\bar{F}(x+y) \leq \bar{F}(x)+\bar{F}(y)$

IFR: Increasing failure rate, $\dfrac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(y)}$ μη αύξουσα ως προς τη μεταβλητή y για σταθερή μεταβλητή x

DFR: Decreasing failure rate, $\dfrac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(y)}$ μη φθίνουσα ως προς τη μεταβλητή y για σταθερή μεταβλητή x

UWA: Used worse than aged, $r(y)=\dfrac{\int_0^\infty \bar{F}(y+t)}{\bar{F}(y)}dy$ ικανοποιεί

, $0<r(\infty)=\lim_{y\to\infty} r(y)<\infty, \quad \bar{F}(y+x) \leq \bar{F}(y)e^{-\frac{x}{r(\infty)}}, \quad x,y \geq 0$

UBA: Used better than aged, $r(y)=\dfrac{\int_0^\infty \bar{F}(y+t)}{\bar{F}(y)}dy$ ικανοποιεί

, $0<r(\infty)=\lim_{y\to\infty} r(y)<\infty, \quad \bar{F}(y+x) \geq \bar{F}(y)e^{-\frac{x}{r(\infty)}}, \quad x,y \geq 0$

NWUC: New worse than used class: $\bar{F}_1(x+y) \geq \bar{F}_1(x)\bar{F}_1(y)$

NBUC: New better than used class: $\bar{F}_1(x+y) \leq \bar{F}_1(x)\bar{F}_1(y)$

DMRL: Decreasing mean residual lifetime, αν η συνάρτηση $r(y)=\dfrac{\int_0^{\infty}\bar{F}(y+t)}{\bar{F}(y)}dy$

είναι μη αύξουσα ως προς y.

IMRL: Increasing mean residual lifetime, αν η συνάρτηση $r(y)=\dfrac{\int_0^{\infty}\bar{F}(y+t)}{\bar{F}(y)}dy$ είναι

μη φθίνουσα ως προς y.

UBAE: Used better than aged in expectation, αν η συνάρτηση

$r(y)=\dfrac{\int_0^{\infty}\bar{F}(y+t)}{\bar{F}(y)}dy \geq r(\infty)$

UWAE: Used worse than aged in expectation, αν η συνάρτηση

$r(y)=\dfrac{\int_0^{\infty}\bar{F}(y+t)}{\bar{F}(y)}dy \leq r(\infty)$

DS-NWU: Discrete strongly new worse than used, αν η συνάρτηση πιθανότητας $P(N=n)=p_n$ είναι τέτοια ώστε $p_{n+m+1} \geq p_n p_m, \qquad n,m=0,1,2,...$

D-DFR: Discrete decreasing failure rate, αν $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}, n=0,1,2,3,...$ είναι μη φθίνουσα.

DS-DFR: Discrete strongly decreasing failure rate αν η συνάρτηση πιθανότητας $P(N=n)=p_n$ είναι μη αύξουσα.

D-IMRL: Discrete IMRL,

D-DMRL: Discrete DMRL

D-IMRL or D-DMRL $\Leftrightarrow$ $r_n = E\left(N-n \middle| N>n\right) = \dfrac{\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)\,p_k}{a_n} = \dfrac{\sum_{k=n}^{\infty} a_k}{a_n}$

Mean lifetime residual function $r(y) = \dfrac{\int_y^{\infty} \bar{F}(x)\,dx}{\bar{F}(y)} = \dfrac{E(Y)\bar{F}_1(x)}{\bar{F}(y)}$

D-NWU: Discrete NWU, H κατανομή $\{p_n; n=0,1,2,...\}$ είναι D-NWU αν

$p_{n+m} \geq p_n \cdot p_m, \quad n,m = 0,1,2,...$

D-NBU: Discrete NBU, H κατανομή $\{p_n; n=0,1,2,...\}$ είναι D-NBU αν

$p_{n+m} \leq p_n \cdot p_m, \quad n,m = 0,1,2,...$

Εισαγωγή

Αρκετές δεκαετίες έως σήμερα, ο τομέας των Πιθανοτήτων και ειδικά οι εφαρμοσμένες πιθανότητες πραγματεύονται προβλήματα στη θεωρία κινδύνου. Ο κίνδυνος μοντελοποιείται από τυχαίο άθροισμα τυχαίων μεγεθών κινδύνων και το συνολικό αυτό σχήμα αυξάνει τη στοχαστικότητα του οποιουδήποτε μοντέλου πρόβλεψης.

Η τελική περιγραφή του κινδύνου μπορεί να γίνει είτε αναλυτικά με χρήση κατανομής περιγραφής της ποσοτικοποίησης ύπαρξης κινδύνου πολύ μεγάλου μεγέθους είτε με φράγματα άνω και κάτω τα οποία μπορεί ασφαλώς να μην δίνουν το ακριβές αποτέλεσμα, αλλά πάραυτα ένα καλό σχετικά εύρος στο οποίο κινείται αυτή η πιθανότητα.

Ως προς την προσαρμογή της έννοιας μεγάλου μεγέθους μελετούμε στην παρούσα εργασία την ουρά της κατανομής του συνολικού κινδύνου κατά τρόπο ασυμπτωτικό και μη ασυμπτωτικό. Η εργασία αυτή στηρίζεται στη εκδοτική μελέτη του Lundberg (Willmot & Lin, 2001) έχοντας τις αρχές της στη μελέτη του ιδίου με τον Cramer (Gerber, 1979) περί ανισοτήτων σε προβλήματα θεωρίας χρεοκοπίας στην ασφάλιση και συνολικά προβάλλει τη σύνδεση μεταξύ φραγμάτων στις πιθανότητες και ασυμπτωτικών μαθηματικών τύπων.

Το κλασικό φράγμα στην πιθανότητα που μελετούμε περιλαμβάνει εκθετικό τύπο και πράγματι η συνθήκη αυτή είναι βολική για την περίπτωση κατανομών με όχι τόσο βαριά ουρά. Στην άλλη περίπτωση της κατανομής με βαριά ουρά που είναι απαιτητή για να μοντελοποιήσει πολύ μεγάλα μεγέθη ζημιάς, γίνεται προσέγγιση με τη βοήθεια της κατανομής Pareto.

Η δομή της εργασίας αυτής αποτελείται από τις σύνθετες κατανομές (κεφάλαιο 1) για τις οποίες αρχικά παρουσιάζουμε την περιγραφή της ατομικής απαίτησης με τη βοήθεια τη συνάρτηση κατανομής, αναμενόμενης τιμής και διασποράς και τέλος την κατανόηση της έννοιας της κατανομής βαρύτερης ουράς καθώς είναι όρος συγκριτικός. Κατόπιν, η σύνθεση αυτών σε στοχαστικό μοντέλο με τυχαίο πλήθος απαιτήσεων με τη βοήθεια της ροπογεννήτριας ή πιθανογεννήτριας συνάρτησης που ολοκληρώνεται με την παρουσίαση άνω και κάτω φραγμάτων της πιθανότητας του συνολικού κινδύνου. Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε άνω και κάτω φράγματα για κλάσεις αξιοπιστίας της κατανομής του ύψους της ατομικής ζημιάς για πλήθος ειδικών περιπτώσεων της κατανομής αυτής (συγκεντρωτικά οι όροι παρατίθενται στο ειδικό παράρτημα όρων). Εφόσον η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη καθώς με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace δυνάμεθα να μελετήσουμε με σχετική επάρκεια τα παραπάνω φράγματα, καλύπτουμε με τη βοήθεια του κεφαλαίου 3 την περίπτωση κατανομών για τις οποίες δεν ορίζεται η ροπογεννήτρια συνάρτηση, όπως πχ η κατανομή Pareto. Στο κεφάλαιο 4 εξειδικεύουμε την περίπτωση του πλήθος απαιτήσεων μοντελοποιώντας αυτό ως κατανομή Γεωμετρική ή τη γενικευμένη αυτής Αρνητική Διωνυμική κατανομή. Το κεφάλαιο αυτό ολοκληρώνεται με την παρουσίαση του κλασικού μοντέλου χρεοκοπίας ώστε στο τελευταίο κεφάλαιο 5 να παρουσιάσουμε το ανανεωτικό πρότυπο μοντέλου της θεωρίας χρεοκοπίας. Η βασική διαφορά των δύο μοντέλων είναι το πλήθος απαιτήσεων το οποίο μοντελοποιείται στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου με την κατανομή Poisson.

Ο ευρύτερος στόχος της εργασίας αυτής είναι να συμβάλλει σε περαιτέρω ώθηση μελέτης του πολύπλοκου αυτού ζητήματος της προσέγγισης της πιθανότητας χρεοκοπίας για μεγάλη μεγέθη κινδύνων.

Κεφάλαιο 1. Άνω και κάτω φράγματα για τη δεξιά ουρά σύνθετων κατανομών

1.1 Σύνθετες κατανομές και κατανομές βαριάς ουράς

1.1.1 *Σύνθετες κατανομές*

Έχοντας κατανοήσει τα χαρακτηριστικά κάθε τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) έστω X και αναφερόμαστε στην συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$ ή πιθανότητας $f_X(x) = P(X = x)$ για συνεχείς ή διακριτές αντίστοιχα, με συνάρτηση κατανομής $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$ ή $F(x)=\sum_{-\infty}^{x} f_X(t)$ αντίστοιχα, θα δούμε πως αυτές αθροίζονται ώστε να προκύψει μια νέα τ.μ. έστω Y επίσης συνεχής.

Η κατανομή της Y εφόσον πρόκειται για άθροισμα πεπερασμένου πλήθους τ.μ. είναι πράξη συνέλιξης (*) με βαθμό που καθορίζεται από το πλήθος των τ.μ. που αθροίζονται (Κουτσόπουλος, 1999). Για παράδειγμα αν προσθέσουμε δύο τ.μ. X και Z με συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x)$ και $f_Z(z)$ αντίστοιχα, τότε έχουμε συνέλιξη 2^{ου} βαθμού με συνάρτηση πιθανότητας (ή πυκνότητας, αντίστοιχα)

$$f_Y(y) = \sum_{t \le y} f_X(t) \cdot f_Z(y-t), \text{ αν είναι διακριτές, και}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(t) \cdot f_Z(y-t)\,dt, \text{ αν είναι συνεχείς}$$

Στην περίπτωση πεπερασμένου πλήθους ισόνομων τ.μ. που αθροίζονται, δηλαδή $Y = X_1+\ldots+X_n$, τότε

$$f_Y(y) = f^{*(n)}(y) = \sum_{t \le y} f_X(t) \cdot f^{*(n-1)}(y-t), \text{ αν είναι διακριτές, και}$$

$$f_Y(y) = f^{*(n)}(y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(t) \cdot f^{*(n-1)}(y-t)\,dt, \text{ αν είναι συνεχείς}$$

Όπου σύμβολο $*$ υποδηλώνει την συνελικτική πράξη, και $f^{*(0)}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0 \\ 0, & y \neq 0 \end{cases}$

Η συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) της τ.μ. του αθροίσματος

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X_1 + \ldots + X_n \leq y) = F^{*n}(y), \quad y \geq 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

με ουρά,

$$\bar{F}_Y(y) = P(Y > y) = P(X_1 + \ldots + X_n > y) = \bar{F}^{*n}(y), \quad y \geq 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

και $F^{*0}(x)=1$.

Η χρήση της ροπογεννήτριας συνάρτησης από την άλλη επιτρέπει σε αρκετές περιπτώσεις την εύρεση της κατανομής της συνέλιξης καθώς η ροπογεννήτρια συνάρτηση του αθροίσματος είναι γινόμενο ροπογεννητριών συναρτήσεων των τ.μ. εφόσον αυτές είναι ανεξάρτητες, δηλαδή

$$M_X(t) \cdot M_Z(t) = M_{X+Z}(t)$$

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \left(M_X(t)\right)^n$$

Μια άλλη εξίσου σημαντική περίπτωση που αφορά τη δημιουργία νέας κατανομής από διακριτή μίξη κατανομών. Η διακριτή μίξη κατανομών είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη στη θεωρία κινδύνου ώστε να προσομοιώσει κινδύνους που έχουν διαφορετική συχνότητα σε μικρά, μεσαία και μεγάλα μεγέθη.

Έστω τ.μ. $X_1,\ldots,X_n$ από διαφορετικές κατανομές με συνάρτηση πυκνότητας $f_1(x)$, …, $f_n(x)$ αντίστοιχα, τότε η μίξη αυτών με συντελεστές βάρη $w_1,\ldots,w_n$, ώστε $w_1+\ldots+w_n=1$, αποδίδει την νέα κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot f_i(x)$$

και ροπή k-τάξης αυτής $\sum_{i=1}^{n} w_i E\left(X_i^k\right)$

Στη θεωρία κινδύνου τόσο το μέγεθος της ατομικής ζημιάς (X) αλλά και το πλήθος των ζημιών (N) είναι συνήθως άγνωστα εκ των προτέρων. Σε αυτή την περίπτωση εφόσον μοντελοποιηθούν κατάλληλα με κατανομή, τότε η συνολική ζημιά S περιγράφεται από το μοντέλο συλλογικού κινδύνου

$$S = \begin{cases} X_1 + \ldots + X_N, & N > 0 \\ 0, & N = 0 \end{cases} \quad \alpha\nu\ f(0) = 0$$

ή

$$S = X_1 + \ldots + X_N, \alpha\nu\ f(0) \neq 0$$

Πρόκειται για σύνθετη κατανομή της συνολικής ζημιάς με ευρεία εφαρμογή στην ασφαλιστική επιστήμη.

Για μεγάλα χαρτοφυλάκια, ακολούθως του Κ.Ο.Θ,

$$S \sim Normal(\mu, \sigma^2)$$

όπου,

$$\mu = E(S) = E(X) \cdot E(N),$$

$$\sigma^2 = Var(S) = Var(X) \cdot E(N) + Var(N) \cdot E^2(X)$$

Αν το χαρτοφυλάκιο χωρίζεται σε m-κατηγορίες, τότε

$$S = S_1 + \ldots + S_m$$

όπου $S_j = X_1^{(j)} + \ldots + X_{Nj}^{(j)}$, j=1,…,m ο επιμέρους συνολικός κίνδυνος της j-κατηγορίας, με ατομικό κίνδυνο τ.μ. $X^{(j)}$ και πλήθος κινδύνων τ.μ. N_j. Ισχύει,

$$E(S) = E(S_1) + \ldots + E(S_j)$$

$Var(S) = Var(S_1)+\ldots+Var(S_j)$ (λόγω ανεξαρτησίας χαρτοφυλακίων) όπου,

$$E(S_j) = E(X^{(j)}) \cdot E\left(N_j\right) \text{ και}$$

$$Var(S_j) = Var(X^{(j)}) \cdot E(N_j) + Var(N_j) \cdot E^2(X^{(j)})$$

Η κατανομή της συνολικής ζημιάς προκύπτει είτε με χρήση ροπογεννήτριας συνάρτησης αν η τ.μ. X είναι συνεχής τ.μ.

$$M_S(t) = P_N\{M_X(t)\}$$

είτε με χρήση πιθανογεννήτριας συνάρτησης αν η τ.μ. X είναι διακριτή τ.μ.

$$P_S(t) = P_N\{P_X(t)\}$$

Η συνάρτηση ροπογεννήτριας της τ.μ. X, $M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \mathrm{L}_X(t) = M_X(-t)$ όπου L υποδηλώνει το μετασχηματισμό Laplace. Αντίστοιχα η ροπογεννήτρια συνάρτηση της συνολικής ζημιάς S είναι $M_S(t) = E\left(e^{tS}\right) = P_N(\mathrm{L}_X(t))$.

Έστω ότι η συνάρτηση ροπογεννήτριας της συνεχούς συνολικής ζημιάς είναι

$$M_S(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot M_1(t)+\ldots+\alpha_k \cdot M_k(t)$$

όπου $\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_k=1$, και $M_1, \ldots, M_k$ είναι ροπογεννήτριες συναρτήσεις κατανομών, τότε η συνάρτηση κατανομής της συνολικής ζημιάς είναι

$$F_S(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot F_1(t)+\ldots+\alpha_k \cdot F_k(t), \quad t \geq 0$$

και η συνάρτηση πυκνότητας

$$f_S(t) = \begin{cases} \alpha_0, & t = 0 \\ \alpha_1 \cdot f_1(t)+\ldots+\alpha_k \cdot f_k(t), & t > 0 \end{cases}$$

Στην περίπτωση όπου η τ.μ. X είναι διακριτή, άρα και η συνολική ζημιά S είναι διακριτή τ.μ. τότε η συνάρτηση πιθανότητας $g(x)$ = P $(S=x)$ είναι

$$P(S=x)=g(x)=\begin{cases} P_N(f_X(0)), & x=0, \quad f_X(0)>0 \\ P(N=0), & x=0, \quad f_X(0)=0 \\ \dfrac{1}{1-a\cdot f_X(0)}\cdot\sum_{i=1}^{x}(a+\dfrac{b}{x}\cdot i)\cdot f_x(i)\cdot g(x-i), x\neq 0 \end{cases}$$

όπου *α*, *β* είναι παράμετροι της οικογένειας κατανομών *R*(*α*, *β*, 0) με συνθήκη

$$P(N=n)=P(N=n-1)\cdot(a+\frac{b}{n}), \quad n=1,2,\ldots.$$

Στην περίπτωση όπου η τμ *N* δεν είναι οικογένειας κατανομών *R*(*α*, *β*, 0) τότε, η συνάρτηση πιθανότητας

$$g(x)=P(S=x)=\sum_{n=1}^{\infty}f^{*(n)}(x)\cdot P(N=n)$$

και η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής *G*(*x*) και ουρά $\bar{G}(x)$

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{*n}(x)\cdot P(N=n), \qquad \bar{G}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{F}^{*n}(x)\cdot P(N=n)$$

Υψηλή σημασία δε αποδίδεται στον προσδιορισμό του άνω και κάτω φράγματος της πιθανότητας η συνολική ζημιά να υπερβεί ένα μεγάλο μέγεθος. Ένα μεγάλο μέγεθος συνολικής ζημιάς δύναται να οδηγήσει σε χρεοκοπία την ασφαλιστική εταιρεία λόγω μη επαρκούς αποθεματικού ή και συσσωρευμένων ασφαλίστρων. Σε μερικές περιπτώσεις η ουρά της κατανομής της συνολικής ζημιάς είναι γνωστή κατανομή, συνεπώς έχουμε ακριβή υπολογισμό της πιθανότητας.

Κλασικό παράδειγμα αποτελεί η κατανομή της συνολικής ζημιάς ως σύνθετης γεωμετρικής με ατομικές απαιτήσεις που ακολουθούν την εκθετική κατανομή και το άθροισμα *n* - τυχαίων μεταβλητών (συνέλιξη *n* - βαθμού) την κατανομή Erlang. Ας δούμε πιο αναλυτικά την περίπτωση της κατανομής βαριάς ουράς (Χατζηκωνσταντινίδης, 2015).

Μια κατανομή έχει δεξιά ουρά την συνάρτηση επιβίωσης αυτής

$$P_r(X > x) = S(x) = \bar{F}(x) = 1 - F(x), \qquad x > a \in \mathbb{R}$$

Χαρακτηριστική κατανομή που δεν έχει ουρά είναι η ομοιόμορφη με παραμέτρους 0 και $\beta > 0$ ($X \sim U(0, \beta)$) διότι οι τιμές της τ.μ. X φράσσονται άνω από την παράμετρο β.

Η κατανομή με ουρά χρησιμεύει για την μοντελοποίηση ζημιών μεγάλου μεγέθους με μικρή συχνότητα, ώστε όσο μεγαλύτερο μέγεθος τόσο μικρότερη συχνότητα:

$$\lim_{x \to \infty} \bar{F}(x) = 0$$

Ευρέως χρησιμοποιούμενες κατανομές ουράς είναι

- η εκθετική παραμέτρου $\lambda > 0$, με $\bar{F}(x) = e^{-\lambda \cdot x}, \qquad x > 0$
- η διπαραμετρική εκθετική παραμέτρων $\beta > 0$, $\lambda > 0$ με $\bar{F}(x) = e^{-\lambda(x-\beta)}, \qquad x > \beta$
- η Γάμμα με παραμέτρους $\nu > 0$ και $\lambda > 0$ (ή Erlang), με $\bar{F}(x) = e^{-\lambda \cdot x} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\lambda^k \cdot x^k}{k!}, \qquad x > 0$
- η Weibull με παραμέτρους $c > 0$, $\gamma > 0$ με $\bar{F}(x) = e^{-c \cdot x^{\gamma}}, \qquad x > 0$
- η Pareto με παραμέτρους $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ με $\bar{F}(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\left(x + \lambda\right)^{\alpha}}, \qquad x > 0$
- η Burr με παραμέτρους $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, $\tau > 0$ με $\bar{F}(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\left(x^{\tau} + \lambda\right)^{\alpha}}, \qquad x > 0$
- η λογαριθμοκατανομή που προκύπτει από τον εκθετικό μετασχηματισμό της τ.μ. X: $Y = e^X$, η συνάρτηση επιβίωσης της τ.μ. Y είναι:

$$\bar{F}_Y(x) = P_r(Y \geq x) = P_r(e^X \geq x) = P_r(X \geq \ln x) = \bar{F}_X(\ln x), \; x > 0$$

Για παράδειγμα η λογαριθμοκανονική με παραμέτρους $\mu \in \Re$ και $\sigma > 0$, με συνάρτηση επιβίωσης:

$$\bar{F}(x) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$$

Η κανονική κατανομή αν και είναι ίσως η πιο χρήσιμη και ευρέως χρησιμοποιούμενη κατανομή στη Στατιστική, ωστόσο δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει τη μεταβλητότητα των μεγεθών ατομικών ζημιών σε χαρτοφυλάκια κινδύνων. Ο βασικός λόγος είναι ότι το μέγεθος ατομικής ζημιάς είναι μη-αρνητική τ.μ., συνήθως με θετική λοξότητα, ενώ η κανονική κατανομή παίρνει και αρνητικές τιμές (ορίζεται σ' ολόκληρο το διάστημα) που αυτές προφανώς δεν μπορούν να εκφράζουν χρηματικά ποσά όπως τα μεγέθη ζημιών, και επιπλέον είναι και συμμετρική (γύρω από το μέσο). Έτσι η κανονική κατανομή είναι ακατάλληλη ως μοντέλο ζημιοκατανομών, η οποία ωστόσο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως προσεγγιστική κατανομή για τα μεγέθη ζημιών, όταν φυσικά συντρέχουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος. Όμως, όπως έχει παρατηρηθεί στην πράξη από τη μελέτη και ανάλυση χαρτοφυλακίων ζημιών, ο εκθετικός μετασχηματισμός της κανονικής κατανομής (που είναι θετική τ.μ.) είναι ένα από τα πλέον καταλληλότερα μοντέλα ζημιοκατανομών η οποία έχει επίσης και ένα πάρα πολύ μεγάλο εύρος εφαρμογών και σε άλλα επιστημονικά πεδία, όπως στη θεωρία αξιοπιστίας, ασύρματη επικοινωνία, βιολογία, ιατρική, δημογραφία, χημεία (Klebanov, 2013). Ιδιαίτερα, στα στοχαστικά χρηματοοικονομικά μαθηματικά (και σε άλλα πεδία του αναλογισμού, όπως στη θεωρία χρεοκοπίας και στις ασφαλίσεις ζωής), η λογαριθμοκανονική κατανομή χρησιμοποιείται για να περιγράψει την εξέλιξη των τιμών των μετοχών στο περίφημο μοντέλο των Black-Scholes (Shinde & Takale, 2012). Επίσης, χρησιμοποιείται για την περιγραφή φυσικών φαινομένων, όπως στην υδρολογία για την ανάλυση ακραίων τιμών διαφόρων μεταβλητών, π.χ. των μηνιαίων και ετήσιων μέγιστων τιμών της καθημερινής βροχόπτωσης. X).

Αν μια συνεχής κατανομή είναι δεξιάς ουράς, τότε η μέση τιμή αυτής $E(X)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$E(X)=\int_0^{\infty}\bar{F}(x)dx$$

Η ιδιότητα αυτή δίνει τη δυνατότητα πιο εύκολου υπολογισμού της μέσης τιμής μια κατανομής. Ας δούμε για παράδειγμα την κατανομή Pareto με παραμέτρους $\alpha>0$ και $\lambda > 0$.

$$E(X)=\int_0^{\infty}\bar{F}(x)dx=\int_0^{\infty}\frac{\lambda^{\alpha}}{\left(x+\lambda\right)^{a}}dx=\frac{\lambda}{a-1}\cdot\int_0^{\infty}\frac{\left(a-1\right)\lambda^{\alpha-1}}{\left(x+\lambda\right)^{a-1+1}}dx=\frac{\lambda}{a-1}\cdot\int_0^{\infty}f_1(x)dx=\frac{\lambda}{a-1}$$

όπου $f_1(x)=\dfrac{\left(a-1\right)\lambda^{\alpha-1}}{\left(x+\lambda\right)^{a-1+1}}, x>0$ είναι η σ.π.π. της διπαραμετρικής κατανομής Pareto με παραμέτρους $\alpha > 1$ και $\lambda > 0$.

Εδώ χρειάζεται προσοχή διότι αν η ουρά της κατανομής είναι ιδιαίτερα περίπλοκη τότε δεν είναι χρήσιμη η ιδιότητα αυτή. Για παράδειγμα, αν πρόκειται για λογαριθμοκατανομή $Y = e^X$ τότε χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της ροπογεννήτριας συνάρτησης:

$$E\left(Y\right)=E\left(e^{X}\right)=M_X\left(1\right)$$

Για παράδειγμα, αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε

$$E\left(Y\right)=E\left(e^{X}\right)=M_X\left(1\right)=\left.e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}\right|_{t=1}=e^{\mu t+\frac{\sigma^2}{2}}$$

Το παραπάνω ισχύει υπό την προϋπόθεση της ύπαρξης της ροπογεννήτριας συνάρτησης. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση για παράδειγμα της διπαραμετρικής κατανομής X ~ Pareto(α, λ) δεν ορίζεται, άρα δεν ορίζεται και η μέση τιμή της Y ~ LPareto(α, λ). Πράγματι,

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \cdot f(x)dx = \int_0^\infty e^{tx} \cdot \frac{a\lambda^a}{(x+\lambda)^{a+1}} dx = a\lambda^a \int_0^\infty \frac{e^{tx}}{(x+\lambda)^{a+1}} dx = a\lambda^a \int_0^\infty g(x)dx$$

Όμως, (βλέπε επίσης παράδειγμα 1) η εκθετική συνάρτηση στον αριθμητή του κλάσματος τρέχει πιο γρήγορα σε σχέση με το πολυώνυμο του παρονομαστή, άρα $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$

Συνεπώς, δεν ορίζεται η ροπογεννήτρια της Pareto, άρα και η μέση τιμή της LPareto.

1.1.2 *Κατανομές βαρύτερης ουράς*

Για να συγκρίνουμε κατανομές με τ.μ. X και Y ως προς αυτή βαρύτερης ουράς, υπολογίζουμε το κάτωθι όριο:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_X(x)}{f_Y(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}_X(x)}{\bar{F}_Y(x)} = \begin{cases} 0, & Y: \text{ βαρύτερης δεξιάς ουράς} \\ \infty, & X: \text{βαρύτερης δεξιάς ουράς} \end{cases}$$

Αν όμως $\lim_{x\to\infty} \frac{f_X(x)}{f_Y(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}_X(x)}{\bar{F}_Y(x)} = c > 0$, τότε είναι ανάλογης ουράς.

Ακολουθούν παραδείγματα σύγκρισης ουρών κατανομών.

Παράδειγμα 1.

Έστω οι κατανομές εκθετική παραμέτρου $\lambda > 0$ (X) και Pareto παραμέτρων $\alpha > 0$ και $\delta > 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}_X(x)}{\bar{F}_Y(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\lambda\cdot x}}{\dfrac{\delta^\alpha}{(x+\delta)^\alpha}} = \delta^\alpha \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{(x+\delta)^\alpha}{e^{\lambda\cdot x}} = 0$$

Παρότι τόσο ο αριθμητής αλλά και ο παρονομαστής συγκλίνουν στο άπειρο, στον παρονομαστή η εκθετική συνάρτηση θετικά ορισμένης δυνάμεως συγκλίνει πιο γρήγορα στο άπειρο σε σχέση με το πολυώνυμο στον αριθμητή. Αυτό είναι εύκολο να παρατηρηθεί με το θεώρημα De L’ Hospital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x+\delta\right)^{\alpha}}{e^{\lambda\cdot x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a\left(x+\delta\right)^{\alpha-1}}{\lambda e^{\lambda\cdot x}}=.....=0$$

όπου με συνεχείς παραγωγίσεις στον αριθμητή το πολυώνυμο χάνει βαθμό ενώ ο παρονομαστής παραμένει ίδιος. Παρατηρούμε επίσης ότι το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο των παραμέτρων *α*, *λ*, *δ*. Ως συμπέρασμα θα λέγαμε ότι οποιαδήποτε λοιπόν Pareto είναι κατανομή βαρύτερης ουράς σε σχέση με οποιαδήποτε εκθετική.

Παράδειγμα 2.

Η λογαριθμοκατανομή είναι βαρύτερης ουράς σε σχέση με την αρχική κατανομή. Έστω για παράδειγμα η τ.μ. X που ακολουθεί την Weibull και η τ.μ. Y που ακολουθεί την LWeibull με ίδιες παραμέτρους c και γ και οι δύο, άρα η σ.κ. αυτής είναι $\bar{F}_Y(x)=\bar{F}_X(\ln x)=e^{-c\cdot(\ln x)^{\gamma}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\bar{F}_X(x)}{\bar{F}_Y(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-c\cdot x^{\gamma}}}{e^{-c\cdot(\ln x)^{\gamma}}}=\lim_{x\to\infty}e^{c\cdot\left\{(\ln x)^{\gamma}-x^{\gamma}\right\}}=0$$

διότι ln$x$ < x, συνεπώς η LWeibull είναι κατανομή βαρύτερης ουράς σε σχέση με την Weibull.

Παράδειγμα 3.

Η Erlang παραμέτρους $\nu > 1$ και $\lambda>0$ προκύπτει από τη συνέλιξη ν- βαθμού ανεξάρτητων ισόνομων εκθετικών παραμέτρου λ. Έστω η τ.μ. Y ακολουθεί την

Erlang, τότε $Y = X_1 + \ldots + X_\nu$, όπου η τ.μ. X ακολουθεί την εκθετική. Θα υπολογίσουμε εδώ το όριο των πηλίκων των σ.π.π. για μεγαλύτερη ευκολία:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_X(x)}{f_Y(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\lambda\cdot e^{-\lambda x}}{\dfrac{\lambda^\nu e^{-\lambda x}x^{\nu-1}}{(\nu-1)!}}=\lambda^{-a+1}\cdot(\nu-1)!\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\nu-1}}=0$$

Άρα η Erlang είναι κατανομή βαρύτερης ουράς σε σχέση με την εκθετική. Μάλιστα, όπως μπορούμε να δούμε, όσο μεγαλύτερος βαθμός συνέλιξης τόσο βαρύτερη ουρά η κατανομή. Συγκρίνοντας τις $Y \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$ με την $X \sim \text{Erlang}(\nu, \lambda)$, $k < \nu$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_X(x)}{f_Y(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda x}x^{k-1}}{(k-1)!}}{\dfrac{\lambda^\nu e^{-\lambda x}x^{\nu-1}}{(\nu-1)!}}=\frac{(\nu-1)!}{(k-1)!}\cdot\lambda^{k-\nu}\cdot\lim_{x\to\infty}x^{k-\nu}=0$$

Παράδειγμα 4.

Εκτός από τη σύγκριση μεταξύ διαφορετικών ποιοτικά κατανομών (βλ. παραδείγματα 1, 2, 3) δύναται και η σύγκριση ποιοτικά ίδιας κατανομής με αλλαγή στις παραμέτρους ώστε να μελετήσουμε την επίδραση της παραμέτρου (ή των παραμέτρων) στην δεξιά ουρά της κατανομής. Θα συγκρίνουμε δύο κατανομές Weibull, έστω τ.μ. $X \sim \text{Weibull}(\alpha, \gamma)$ και τ.μ. $Y \sim \text{Weibull}(\beta, \delta < \gamma)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\bar{F}_X(x)}{\bar{F}_Y(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-\alpha\cdot x^\gamma}}{e^{-\beta\cdot x^\delta}}=\lim_{x\to\infty}e^{\beta x^\delta-\alpha x^\gamma}=0$$

Παρατηρούμε ότι αν $\gamma > \delta$, δηλαδή αν μειώνεται η δεύτερη παράμετρος της Weibull και ανεξάρτητα από τη σχέση μεταξύ των παραμέτρων α και β, τότε η κατανομή Weibull έχει βαρύτερη δεξιά ουρά. Αυτό οφείλεται στο ότι στον εκθέτη της βάσης του νεπερίου λογαρίθμου (e) το πολυώνυμο είναι $\delta - \gamma < 0$ βαθμού.

Μια μεγάλη κατηγορία κατανομών βαριάς ουράς περιγράφεται κάτωθι.

1.1.3 *Η κλάση των υποεκθετικών κατανομών*

Σύμφωνα με τον Κωνσταντινίδη (2012), μια κατανομή $B(x)$ ανήκει στην *κλάση των κατανομών με βαριές ουρές K*, και γράφουμε $\overline{B} \in K$, αν $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει

$$\int_0^\infty e^{\varepsilon y} dB(y) = \infty$$

Επίσης είναι χρήσιμο να χαρακτηρίσουμε τις κατανομές των μεγάλων αποζημιώσεων με τη βοήθεια της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της ουράς της κατανομής $\overline{B}(x)$, για $x \to \infty$

Η ουρά της βαριάς κατανομής $B(x)$ ανήκει στην κλάση των υποεκθετικών ουρών, και γράφουμε , αν $\forall\, \nu = 2,3.....$ ισχύει η ακόλουθη συνθήκη

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{P_r}\left(A_\nu > x\right)}{\mathrm{P_r}\left(M_\nu > x\right)} = 1$$

με $A_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i, \quad M_\nu = \max\left(Z_i\right), i = 1,...,\nu$ και η ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. $Z_1,\ldots,Z_\nu$ με κατανομή $B(x)$.

Σύμφωνα πάντα με τον Κωνσταντινίδη (2001), η σύγκριση μεταξύ του αθροίσματος A_ν και του μεγίστου M_ν των ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. $Z_1,\ldots,Z_\nu$ που μπορούμε να τις δούμε ως αποζημιώσεις, είναι καθοριστική για την εκτίμηση των ακραίων τιμών. Σε εργασία των Rootzen και Tajvidi (1997) παρατηρήθηκε ότι σε μια περίοδο 12 ετών από το 1982 μέχρι το 1993, η πιο δαπανηρή αποζημίωση (δηλαδή η μέγιστη M_ν) από θυελλώδεις ανέμους καλύπτει το 25% της συνολικής αποζημίωσης (A_ν) στην περίοδο αυτή και είναι 2.7 φορές μεγαλύτερη από τη δεύτερη σε μέγεθος αποζημίωση, ενώ οι πρώτες 4 αποζημιώσεις καλύπτουν το μισό περίπου της συνολικής αποζημίωσης της περιόδου.

Είναι εφικτός ο ακριβής υπολογισμός του μεγάλου μεγέθους ζημιάς αν πρόκειται για κατανομή δεξιάς ουράς? Η απάντηση είναι και ναι και όχι ιδιαίτερα στην περίπτωση όπου η κατανομή έχει πολύ βαριά ουρά. Παρακάτω θα δούμε παραδείγματα ακριβούς και μη υπολογισμού.

i. *Περίπτωση κατανομής μίξης Erlang.*

Πράγματι, Αν το πλήθος ζημιών είναι τ.μ. $N \sim G_1(p)$, $n = 1, 2, \ldots$ με $P_N(t) = p / (1 - q t)$, $p + q = 1$ και το μέγεθος ατομικής ζημιάς είναι τ.μ. $X \sim \mathrm{E}(\lambda)$ με σ.κ. $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, x>0 και $M_X(t) = \lambda / (\lambda - t)$, $\lambda > t$, τότε

$$M_S(t) = \frac{p \cdot M_X(t)}{1 - q \cdot M_X(t)} = \frac{p \cdot \frac{\lambda}{\lambda - t}}{1 - q \cdot \frac{\lambda}{\lambda - t}} = \frac{p\lambda}{p\lambda - t}$$

άρα $S \sim \mathrm{E}(\lambda p)$ με $\overline{G}(s) = e^{-\lambda p s}$

Αν όμως το πλήθος ζημιών είναι κατανομή Poisson, η ουρά της σύνθετης Poisson που αφορά τη συνολική ζημιά δεν προσδιορίζεται αναλυτικά, συνεπώς εδώ αναδύεται η σημασία των φραγμάτων άνω και κάτω της πιθανότητας μεγάλης συνολικής ζημιάς. Πράγματι, μέσω της ροπογεννήτριας συνάρτησης της συνολικής ζημιάς για την απλή περίπτωση της ατομικής απαίτησης η οποία μοντελοποιείται με κατανομή εκθετική παραμέτρου $\theta > 0$:

$$M_S(t) = P_N\left(M_X(t)\right) = e^{\theta\left(M_X(t) - 1\right)} = e^{\theta\left(\frac{\lambda}{\lambda - t} - 1\right)} = e^{\frac{\theta t}{\lambda - t}}$$

παρατηρούμε ότι δεν αντιστοιχεί σε γνωστή κατανομή.

Η ουρά της συνάρτησης κατανομής της συνολικής ζημιάς είναι $\bar{G}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{F}^{*n}(x)\cdot P(N=n)$ ως μίξη ουρών κατανομών Erlang(n, λ) με συντελεστές

p_n = $P(N = n)$= $e^{-\theta}\frac{\theta^n}{n!}, n=0,1,\ldots$, εφόσον $F^{*n}(x) = P(X_1+\ldots+X_n = x) = P_r(Y = x)$, Y~Erlang(n, λ). Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μίξης κατανομών Erlang(n, λ) είναι (έστω τυχαία μεταβλητή Y)

$$f(y)=\sum_{n=1}^{r}p_n\cdot\frac{\lambda(\lambda y)^{n-1}e^{-\lambda y}}{(n-1)!},\qquad y>0$$

Ορίζοντας $Q(z)=\sum_{k=1}^{r}q_k z^k$ και με βάση το μεταχημματισμό Laplace για την τ.μ. Y που αναπαριστά το άθροισμα των τ.μ. X,

$$E\left(e^{-sY}\right)=Q\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)$$

τότε προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace

$$E\left(e^{-sX}\right)=C\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$$

όπου $C(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n=P\{Q(z)\}$. Αντικαθιστώντας τις πιθανότητες p_n με τους συντελεστές c_n τότε

$$\bar{G}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left\{e^{-\beta x}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(\lambda x)!}{j!}\right\}$$

και αλλάζοντας τη σειρά των αθροισμάτων, η ομάδα του Lundberg προσδιορίζει την ουρά

$$\bar{G}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{C}_j \frac{(\lambda x)^j}{j!}, \qquad x \geq 0$$

όπου $\bar{C}_j = \sum_{n=j+1}^{\infty} c_n, \qquad j = 0,1,2,\ldots\infty.$

Οι συντελεστές c_n υπολογίζονται από την αναδρομική σχέση του Panjer: $\frac{c_n}{c_{n-1}} = a + \frac{b}{n}$

όπου οι παράμετροι *α* και *b* καθορίζονται ανάλογα με την κατανομή του πλήθους ζημιών.

Ασυμπτωτικά, τέλος, η ουρά της κατανομής συνολικής ζημιάς προσεγγίζεται από την ομάδα του Embrechts (1985):

$$\bar{G}(x) \sim \frac{Cx^a e^{-\kappa x}}{\kappa \left\{ \tau E\left(Ye^{\kappa Y}\right) \right\}^{a+1}}, \qquad x \to \infty$$

όπου $\kappa > 0$:

$$E\left(e^{\kappa Y}\right) = \int_0^{\infty} e^{\kappa Y} dF(y) = \frac{1}{\tau} \text{ και } \tau = \lim_{n \to \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n}$$

ii. *Περίπτωση σύνθετης Pascal-εκθετικής*

Η κατανομή Pascal είναι η κατανομή της αρνητικής διωνυμικής με παραμέτρους $a \in \{1,2,\ldots.,\infty\}$ και $\phi \in (0,1)$ με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(N = n) = p_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!}(1-\phi)^a \phi^n, \qquad n = 0,1,2,\ldots,\infty$$

και πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P(z) = \left(\frac{1-\phi}{1-\phi z}\right)^a, \qquad |z| < 1/\phi.$

Λήμμα. Στην περίπτωση της σύνθετης κατανομής Pascal, για ατομικές απαιτήσεις που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$, η ουρά της κατανομής της συνολικής ζημιάς είναι

$$\bar{G}(x) = e^{-\lambda(1-\phi)x} \sum_{i=0}^{a-1} \frac{\{\lambda(1-\phi)x\}^i}{i!} \left\{ \sum_{j=i+1}^{a} \binom{a}{j} (1-\phi)^{a-j} \phi^j \right\}, \qquad x \geq 0$$

Απόδειξη

Η απόδειξη της παραπάνω σχέσεως βασίζεται αρχικά στον μετασχηματισμό Laplace της τ.μ. X,

$$\begin{aligned}
E\left(e^{-sX}\right) &= \left(\frac{1-\phi}{1-\phi \dfrac{\lambda}{\lambda+s}} \right)^a \\
&= \left\{ \frac{(1-\phi)(\lambda+s)}{s+\lambda(1-\phi)} \right\}^a \\
&= \left\{ 1-\phi\left(\frac{s}{s+\lambda(1-\phi)} \right) \right\}^a \\
&= \left\{ 1-\phi+\phi\frac{\lambda(1-\phi)}{s+\lambda(1-\phi)} \right\}^a \\
&= \sum_{j=0}^{a} \binom{a}{j} (1-\phi)^{a-j} \phi^j \left\{ \frac{\lambda(1-\phi)}{s+\lambda(1-\phi)} \right\}^j
\end{aligned}$$

Εφόσον,

$$\left\{ \frac{\lambda(1-\phi)}{s+\lambda(1-\phi)} \right\}^j = \int_0^\infty e^{-sy} \frac{\{\lambda(1-\phi)\}^j y^{j-1} e^{-\lambda(1-\phi)y}}{(j-1)!} dy$$

τότε και

$$\bar{G}(x)=\sum_{j=1}^{a}\binom{a}{j}(1-\phi)^{a-j}\phi^{j}\int_{x}^{\infty}\frac{\{\lambda(1-\phi)\}^{j}y^{j-1}e^{-\lambda(1-\phi)y}}{(j-1)!}dy$$
$$=\sum_{j=1}^{a}\binom{a}{j}(1-\phi)^{a-j}\phi^{j}\sum_{i=0}^{j-1}\frac{\{\lambda(1-\phi)x\}^{j}}{i!}e^{-\lambda(1-\phi)x}$$

οπότε και αλλάζοντας τη σειρά των αθροισμάτων προκύπτει ότι

$$\bar{G}(x)=e^{-\lambda(1-\phi)x}\sum_{i=0}^{a-1}\frac{\{\lambda(1-\phi)x\}^{i}}{i!}\left\{\sum_{j=i+1}^{a}\binom{a}{j}(1-\phi)^{a-j}\phi^{j}\right\},\qquad x\geq 0$$

Για την ειδική περίπτωση όπου $\alpha = 1$, άρα η κατανομή του πλήθους ζημιών είναι τυχαία μεταβλητή $N\sim G_0(\alpha = 1)$:

$$\bar{G}(x)=\phi e^{-\lambda(1-\phi)x}\qquad x\geq 0$$

Πράγματι, αυτό επαληθεύεται και από τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της συνολικής ζημιάς

$$M_S(t)=(1-\phi)+\phi\cdot\frac{\lambda(1-\phi)}{\lambda(1-\phi)-t}$$

με συνάρτηση κατανομής $G(x)=(1-\phi)+\phi\left(1-e^{-\lambda(1-\phi)x}\right)\quad x\geq 0$.

Για $\alpha \neq 1$ γενικά, η προσέγγιση της πιθανότητας p_n με τη βοήθεια του Stirling:

$$p_n\sim\frac{(1-\phi)}{\Gamma(a)}n^{a-1}\phi^{n},\qquad n\to\infty$$

τότε η ουρά της κατανομής των συνολικών απαιτήσεων προσεγγίζεται ως εξής:

$$\bar{G}(x)\sim\frac{\phi^{a}}{(a-1)!}\{\lambda(1-\phi)x\}^{a-1}e^{-\lambda(1-\phi)x},\qquad x\to\infty$$

iii. Περίπτωση σύνθετης τροποποιημένης γεωμετρικής – μίξης εκθετικών

Έστω $0 < \varphi < 1$ και συνάρτηση πιθανότητας $p_n = (1-p_0)(1-\phi)\phi^n, \quad n = 1,2,3,....$ με πιθανογεννήτρια συνάρτηση

$$P(z) = p_0 + (1-p_0)\frac{(1-\phi)z}{1-\phi z}$$

Έστω επίσης η ατομική ζημιά είναι τ.μ. X μίξη εκθετικών με παραμέτρους α και $\beta >$ α, με συνάρτηση κατανομής $F(x) = 1 - qe^{-ax} - (1-q)e^{-\beta x}, \quad x \geq 0$

Λήμμα. Ο μετασχηματισμός Laplace της ουράς της κατανομής των συνολικών ζημιών είναι

$$\mathrm{L}_{\bar{G}}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\bar{G}(x)\,dx = (1-p_0)\frac{s+\psi}{(s+r_1)(s+r_2)}$$

Απόδειξη

Το παραπάνω ισχύει εφόσον,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-sx}\bar{G}(x)\,dx &= \frac{1}{s}\left\{1-p_0-(1-p_0)\frac{(1-\phi)E\left(e^{-sY}\right)}{1-\phi E\left(e^{-sY}\right)}\right\}\\ &= \frac{1-p_0}{s}\left\{\frac{1-E\left(e^{-sY}\right)}{1-\phi E\left(e^{-sY}\right)}\right\}\end{aligned}$$

Υποθέτοντας ότι $\alpha < \beta$, τότε η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ είναι μίξη δύο εκθετικών κατανομών με συντελεστές $q = \dfrac{\beta}{\beta - a} > 1$ και $1\text{-}q < 0$ οπότε και

$$E\left(e^{-sY}\right) = \int_0^\infty e^{-sy}dF(y) = q\left(\frac{a}{a+s}\right) + (1-q)\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)$$

οπότε και ο μετασχηματισμός Laplace της ουράς της κατανομής είναι

$$\int_0^\infty e^{-sx}\bar{G}(x)\,dx = \frac{1-p_0}{s}\left\{\frac{q\left(\dfrac{s}{a+s}\right)+(1-q)\left(\dfrac{s}{\beta+s}\right)}{1-\phi\left\{q\left(\dfrac{a}{a+s}\right)+(1-q)\left(\dfrac{\beta}{\beta+s}\right)\right\}}\right\}$$

$$=(1-p_0)\left\{\frac{q(\beta+s)+(1-q)(a+s)}{(a+s)(\beta+s)-\phi\{qa(\beta+s)+(1-q)\beta(a+s)\}}\right\}$$

$$=(1-p_0)\left\{\frac{s+q\beta+a(1-q)}{s^2+\{(1-q\phi)a+(1-(1-q)\phi)\beta\}s+(1-\phi)a\beta}\right\}$$

Η δευτεροβάθμια εξίσωση στον παρονομαστή έχει διακριτές πραγματικές ρίζες r_1, r_2 λύσεις της εξίσωσης

$$s^2+\{a(1-q\phi)+\beta(1-(1-q)\phi)\}s+(1-\phi)a\beta=(s+r_1)(s+r_2)$$

με $\psi=\alpha(1-q)+\beta q$, $\alpha < \beta$, $0 < q = \beta\,/\,(\beta - \alpha) < 1$. Ως εκ τούτου,

$$\int_0^\infty e^{-sx}\bar{G}(x)\,dx=(1-p_0)\frac{s+\psi}{(s+r_1)(s+r_2)}$$

$$=\frac{1-p_0}{r_2-r_1}\left\{\frac{\psi-r_1}{s+r_1}+\frac{r_2-\psi}{s+r_2}\right\}$$

Λόγω απεικονιστικής μοναδικότητας του μετασχηματισμού Laplace,

$$\mathrm{L}^{-1}(\mathrm{L}_{\bar{G}})(x) = \bar{G}(x)=\frac{1-p_0}{r_2-r_1}\left\{(\psi-r_1)e^{-r_1x}+(r_2-\psi)e^{-r_2\psi}\right\},\qquad x\geq 0$$

iv. Περίπτωση *σύνθετης μίξης Poisson.*

Έστω, η τυχαία μεταβλητή του πλήθους ζημιών N με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(N=n)=p_n=\int_0^\infty\frac{(\lambda x)^n e^{-\lambda x}}{n!}k(x)\,dx,\qquad n=0,1,2,\ldots$$

όπου

$$k(x) \sim Cx^{a}e^{-bx}, x \to \infty, C > 0, \beta > 0, \ \alpha \in \mathbb{R} \ .$$

Ασυμπτωτικά, η ουρά της κατανομής συνολικής ζημιάς είναι

$$\bar{G}(x) \sim \frac{C(\lambda+\beta)^{-a-1} x^{a} e^{-\kappa x}}{\kappa \left\{ \frac{\lambda}{\lambda+\beta} E\left(Ye^{\kappa Y}\right) \right\}^{a+1}}, \qquad x \to \infty$$

για $\kappa > 0$: $E\left(e^{\kappa Y}\right) = \frac{\lambda+\beta}{\lambda}$

1.2 Άνω φράγματα για τη δεξιά ουρά σύνθετων κατανομών

Έστω $0 < \varphi_1 < 1$ ώστε $\alpha_{n+1} \le \phi_1 a_n, \quad n = 0,1,2,...$ και κατά γενίκευση $a_n \le a_0 \phi_1^{n}$. Επίσης έστω συνάρτηση κατανομής $B(y)$:

$$\int_0^{\infty} \left\{\bar{B}(y)\right\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi_1}$$

και $V(x) : \bar{V}(x) \ge 0, \qquad \bar{V}(x)\bar{B}(y) \le \bar{V}(x+y), \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$

Τότε ισχύουν, για $c : \bar{B}(c) > 0 \Rightarrow \bar{V}(c) \ge \bar{V}(0)\bar{B}(c)$ και επαγωγικά, $\bar{V}(kc) \ge \bar{V}(0)\left\{\bar{B}(c)\right\}^{k}, k = 0,1,2,....$

Για τη διμεταβλητή συνάρτηση

$$c(x,z) = \frac{\int_z^{\infty} \left\{\bar{B}(y)\right\}^{-1} dF(y)}{\bar{V}(x-z)\bar{F}(z)}, \qquad 0 \le z \le x, \qquad \bar{F}(z) > 0$$

ώστε $\underbrace{\inf c(x,z)}_{0 \le z \le x, \bar{F}(z)} = c_1^{-1}(x)$, όπου $c_1(x)$ αύξουσα συνάρτηση που ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$\bar{F}(z) \le \frac{c_1(x)}{\bar{V}(x-z)} \int_z^\infty \left\{ \bar{B}(y) \right\}^{-1} dF(y), \qquad 0 \le z \le x$$

Θεώρημα 1.1. Έστω $0 < \varphi_1 < 1$ ώστε $\alpha_{n+1} \le \phi_1 a_n, \quad n = 0,1,2,...$ και κατά γενίκευση $a_n \le a_0 \phi_1^n$. Επίσης έστω συνάρτηση κατανομής $B(y)$: $\int_0^\infty \left\{ \bar{B}(y) \right\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi_1}$

και $V(x) : \bar{V}(x) \ge 0, \quad \bar{V}(x)\bar{B}(y) \le \bar{V}(x+y), \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$. Με βάση τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει ότι

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi_1 \bar{V}(0)} c_1(x), \, x \ge 0$$

Απόδειξη 1.1. Για $k = 0, 1, 2, \dots$ ορίζουμε

$$\overline{G}_k(z) = \sum_{m=0}^{k} a_m \left\{ \overline{F}^{*(m+1)}(z) - \overline{F}^{*m}(z) \right\}, \quad z \ge 0$$

όπου $\bar{F}^{*0}(z) = 0$. Θα δείξουμε τώρα επαγωγικά και για $0 \le z \le x$ ότι

$$\overline{G}_k(z) \le \frac{1-p_0}{\phi_1} \; \frac{c_1(x)}{\overline{V}(x-z)}.$$

Εφόσον $\bar{F}(z) \le \frac{c_1(x)}{\bar{V}(x-z)} \int_z^\infty \left\{ \bar{B}(y) \right\}^{-1} dF(y), \quad 0 \le z \le x$ άρα

$$\begin{aligned}
\overline{G}_0(z) &= (1-p_0)\,\overline{F}(z) \\
&\le (1-p_0)\,c_1(x)\left\{\overline{V}(x-z)\right\}^{-1} \int_z^\infty \left\{\overline{B}(y)\right\}^{-1} dF(y) \\
&\le (1-p_0)\,c_1(x)\left\{\overline{V}(x-z)\right\}^{-1} \int_0^\infty \left\{\overline{B}(y)\right\}^{-1} dF(y) \\
&= \frac{1-p_0}{\phi_1}\;\frac{c_1(x)}{\overline{V}(x-z)},
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, για $m = 0, 1, 2, \ldots$ και εφαρμόζοντας το νόμο ολικής πιθανότητας,

$$\overline{F}^{*(m+1)}(z) = \overline{F}(z) + \int_0^z \overline{F}^{*m}(z-y)dF(y),$$

οπότε και

$$\begin{aligned} &\int_0^z \overline{G}_k(z-y)dF(y) \\ = &\sum_{m=0}^{k} a_m \int_0^z \left\{\overline{F}^{*(m+1)}(z-y) - \overline{F}^{*m}(z-y)\right\} dF(y) \\ = &\sum_{m=0}^{k} a_m \left\{\overline{F}^{*(m+2)}(z) - \overline{F}(z) - \overline{F}^{*(m+1)}(z) + \overline{F}(z)\right\}, \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\int_0^z \overline{G}_k(z-y)dF(y) = \sum_{m=0}^{k} a_m \left\{\overline{F}^{*(m+2)}(z) - \overline{F}^{*(m+1)}(z)\right\}$$

Συνεπώς για $\alpha_{n+1} \le \phi_1 a_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$

$$\begin{aligned} \overline{G}_{k+1}(z) &= a_0\overline{F}(z) + \sum_{m=1}^{k+1} a_m \left\{\overline{F}^{*(m+1)}(z) - \overline{F}^{*m}(z)\right\} \\ &\le (1-p_0)\overline{F}(z) + \phi_1 \sum_{m=1}^{k+1} a_{m-1} \left\{\overline{F}^{*(m+1)}(z) - \overline{F}^{*m}(z)\right\} \\ &= (1-p_0)\,\overline{F}(z) + \phi_1 \sum_{m=0}^{k} a_m \left\{\overline{F}^{*(m+2)}(z) - \overline{F}^{*(m+1)}(z)\right\} \end{aligned}$$

άρα και

$$\overline{G}_{k+1}(z) \le (1-p_0)\,\overline{F}(z) + \phi_1 \int_0^z \overline{G}_k(z-y)dF(y)$$

Η παραπάνω ανίσωση εξελίσεται ως κάτωθι:

$$\begin{aligned}
\overline{G}_{k+1}(z) &\leq (1-p_0)\overline{F}(z) + \phi_1 \int_0^z \overline{G}_k(z-y)dF(y) \\
&\leq \frac{(1-p_0)\,c_1(x)}{\overline{V}(x-z)} \int_z^\infty \left\{\overline{B}(y)\right\}^{-1} dF(y) \\
&\quad + (1-p_0)\,c_1(x) \int_0^z \left\{\overline{V}(x+y-z)\right\}^{-1} dF(y) \\
&\leq \frac{(1-p_0)\,c_1(x)}{\overline{V}(x-z)} \int_0^\infty \left\{\overline{B}(y)\right\}^{-1} dF(y) \\
&= \frac{1-p_0}{\phi_1}\,\frac{c_1(x)}{\overline{V}(x-z)}.
\end{aligned}$$

Εφόσον, $a_m = a_{m+1} + p_{m+1}$, και

$$\overline{G}_k(z) = \sum_{m=0}^{k} a_m \left\{\overline{F}^{*(m+1)}(z) - \overline{F}^{*m}(z)\right\}, \quad z \geq 0$$

τότε και

$$\begin{aligned}
\overline{G}_k(z) &= \sum_{m=0}^{k} a_m \overline{F}^{*(m+1)}(z) - \sum_{m=0}^{k} a_m \overline{F}^{*m}(z) = \\
&= \sum_{m=0}^{k} a_{m+1} \overline{F}^{*(m+1)}(z) + \sum_{m=0}^{k} p_{m+1} \overline{F}^{*(m+1)}(z) - \sum_{m=0}^{k} a_m \overline{F}^{*m}(z) = \\
&= \sum_{m=1}^{k+1} a_{m+1} \overline{F}^{*m}(z) + \sum_{m=1}^{k+1} p_m \overline{F}^{*m}(z) - \sum_{m=1}^{k} a_m \overline{F}^{*m}(z)
\end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, για $k = 0, 1, 2, \ldots,$ $\overline{G}_k(z) = a_{k+1}\overline{F}^{*(k+1)}(z) + \sum_{m=1}^{k+1} p_m \overline{F}^{*m}(z), \qquad z \geq 0$

Ακολούθως, εφόσον $a_{k+1}\overline{F}^{*(k+1)} \leq a_{k+1}$ και $\lim_{k\to\infty} a_{k+1} = 0$ τότε και $\lim_{k\to\infty} \overline{G}_k(z) = \overline{G}(z)$.

Άρα

$$\lim_{k\to\infty} \overline{G}_k(z) = \overline{G}(z) \leq \frac{1-p_0}{\phi_1}\frac{c_1(x)}{\overline{V}(x-z)}, \qquad 0 \leq z \leq x$$

Στις ειδικές περιπτώσεις όπου ισχύει

Λήμμα 1.1.1. Αν 0 < φ < 1, $\alpha_{n+1} \le \phi_1 a_n, \quad n = 0,1,2,\dots$, $\int_0^\infty e^{\kappa y} dF(y) dy = \frac{1}{\phi_1}$ τότε

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi_1} \alpha_1(x) e^{-\kappa x}$$

όπου $\alpha_1(x) = c_1(x) e^{\kappa x}$ ή ισοδυνάμως $\frac{1}{\alpha_1(x)} = \frac{\inf_{0\le z\le x, \bar{F}(z)>0} \int_z^\infty e^{\kappa y} dF(y)}{\{e^{\kappa z} \bar{F}(z)\}}, \quad x \ge 0$

Απόδειξη 1.1.1 Έστω $B(y) = 1 - e^{-\kappa y}$, και $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \le \bar{V}(x+y), \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$, τότε

$$c(x,z) = e^{\kappa x} \cdot \frac{\int_z^\infty e^{\kappa y} dF(y)}{e^{\kappa z} \bar{F}(z)}$$

και $\underbrace{\inf c(x,z)}_{0\le z\le x, \bar{F}(z)} = c_1^{-1}(x) = \frac{e^{\kappa x}}{a_1(x)}$.

Εφόσον επίσης

$$\int_z^\infty e^{\kappa y} dF(y) \ge \int_z^\infty e^{\kappa z} dF(y) = e^{\kappa z} \bar{F}(z)$$

και $\alpha^{-1}(x) \ge 1$ τότε και $\bar{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi_1} \alpha_1(x) e^{-\kappa x}$.

Λήμμα 1.1.2. Αν 0 < φ < 1, $\alpha_{n+1} \le \phi_1 a_n, \quad n = 0,1,2,\dots$, η συνάρτηση B είναι τέτοια ώστε $\bar{B}(x+y) \ge \bar{B}(x)\bar{B}(y)$ (NWU) για κάθε x, y, τότε

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi_1} c_1(x), \quad x \ge 0$$

όπου $\underbrace{\inf c(x,z)}_{0\le z\le x,\bar{F}(z)} = c_1^{-1}(x)$ και $c(x,z) = \dfrac{\int_z^\infty \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y)}{\bar{B}(x-z)\bar{F}(z)}, \quad x \ge 0, \quad 0 \le z \le x$

Απόδειξη 1.1.2. Προκύπτει από το θεώρημα 1 και το λήμμα 1.1 εφόσον εφόσον η $B(y)$ είναι NWU άρα $V(y) = B(y)$ και $\bar{B}(0)=1$.

Λήμμα 1.1.3. Αν $0 < \varphi < 1$, $\alpha_{n+1} \le \phi_1 a_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$, η συνάρτηση B είναι τέτοια ώστε $\int_0^\infty \{\bar{B}(t)\}^{-1} dF(t) = \dfrac{1}{\phi_1}$, $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \le \bar{V}(x+y), \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$, τότε

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi_1 \bar{V}(0)} \bar{V}(x), \quad x \ge 0$$

Απόδειξη 1.1.3. Εφόσον η συνάρτηση $\bar{V}(y)$ είναι μη αύξουσα προκύπτει ότι για $y \ge z$ τότε

$$\bar{V}(x-z)\bar{B}(y) \le \bar{V}(x+y-z) \le \bar{V}(x)$$

και εφόσον

$$c(x,z) = \frac{\int_z^\infty \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y)}{\bar{B}(x-z)\bar{F}(z)} \ge \frac{\int_z^\infty \{\bar{V}(x)\}^{-1} dF(y)}{\bar{F}(z)} = \{\bar{V}(x)\}^{-1} \quad x \ge 0, \quad 0 \le z \le x$$

τότε $\underbrace{\inf c(x,z)}_{0\le z\le x,\bar{F}(z)} = c_1^{-1}(x) \ge \dfrac{1}{\bar{V}(x)} \Rightarrow c_1(x) \le \bar{V}(x)$ οπότε σε συνδυασμό με το θεώρημα 1 προκύπτει η απόδειξη του τρέχοντος λήμματος.

Λήμμα 1.1.4. Αν $0 < \varphi < 1$, $\alpha_{n+1} \le \phi_1 a_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$, η συνάρτηση B του λήμματος 1.3 είναι τέτοια ώστε $\bar{B}(x+y) \le \bar{B}(x)\bar{B}(y)$ (NWUC) για κάθε x, y, τότε

$$\bar{G}(x) \leq \frac{1-p_0}{\phi_1}\bar{B}_1(x)$$

όπου $B_1(y) = 1 - \bar{B}_1(y) = \dfrac{\int_0^y \bar{B}(t)\,dt}{\int_0^\infty \bar{B}(t)\,dt}$ η συνάρτηση ισορροπίας της $B(y)$.

Απόδειξη 1.1.4. Εφόσον η $B(y)$ είναι NWUC και $V(y) = B_1(y)$, το αποτέλεσμα προκύπτει από το λήμμα 1.3 εφόσον και $\bar{B}(0) = 1$.

Λήμμα 1.1.5. Αν $0 < \varphi < 1$, $\alpha_{n+1} \leq \phi_1 a_n$, $n = 0,1,2,\ldots$, η συνάρτηση B του λήμματος 1.3 είναι τέτοια ώστε $B(x) \geq B(0)$ (NWUE), τότε

$$\bar{G}(x) \leq \frac{1-p_0}{\phi_1} \cdot \frac{\int_0^\infty y\,dB(y)}{x + \int_0^\infty y\,dB(y)}$$

Απόδειξη 1.1.5. Εφόσον $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \leq \bar{V}(x+y)$ τότε και $\bar{B}(y) \leq \bar{V}(y)$ όπου

$$\bar{V}(x) = \frac{\int_0^\infty y\,dB(y)}{x + \int_0^\infty y\,dB(y)}$$

πρόκειται δηλαδή για την κατανομή Pareto η οπία είναι DFR και ως εκ τούτου NWU. Οπότε $\bar{B}(y) \leq \bar{V}(y) \leq \bar{V}(x+y)/\bar{V}(x)$ με $V(0) = 0$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται με τη βοήθεια του λήμματος 1.3.

1.3 Κάτω φράγματα για τη δεξιά ουρά σύνθετων κατανομών

Όπως και στην περίπτωση των άνω φραγμάτων, έστω $0 < \varphi_2 < 1$ ώστε $a_{n+1} \geq \phi_2 a_n$, $n = 0,1,2,\ldots$ Μια βέλτιστη προσέγγιση είναι $\varphi_2 = 1 / z_0$ όπου z_0 είναι η ακτίνα σύγκλισης της πιθανογεννήτριας συνάρτησης $P(z)$. Υποθέτουμε επίσης ότι $B(y)$ είναι συνάρτηση κατανομής που ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_0^\infty \left\{\bar{B}(y)\right\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi_2}$$

και για τη συνάρτηση κατανομής $V(x)$ ισχύει $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \geq \bar{V}(x+y), \quad x, y \geq 0$.

Ορίζουμε

$$c_2(x) : \frac{1}{c_2(x)} = \sup c(x,z), \qquad c(x,z) = \frac{\int_z^\infty \left\{\bar{B}(y)\right\}^{-1} dF(y)}{\bar{V}(x-z)\bar{F}(z)}, \quad 0 \leq z \leq x, \qquad \bar{F}(z) > 0$$

και $c_1(x) : \frac{1}{c_1(x)} = \inf c(x,z)$, $0 \leq z \leq x$, $\bar{F}(z) > 0$ η οποία είναι αύξουσα συνάρτηση και ικανοποιεί τη σχέση

$$\bar{F}(z) \leq \frac{c_1(x)}{\bar{V}(x-z)} \int_z^\infty \left\{\bar{B}(y)\right\}^{-1} dF(y), \qquad 0 \leq z \leq x$$

Προσδιορίζουμε τώρα τα κάτω φράγματα της ουράς της κατανομής συνολικών ζημιών.

Θεώρημα 1.2. Έστω $0 < \varphi_2 < 1$ ικανοποιεί $a_{n+1} \geq \phi_2 a_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$ και $\int_0^\infty \left\{\bar{B}(y)\right\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi_2}$. Αν $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \geq \bar{V}(x+y), x \geq 0, y \geq 0$ τότε

$$\bar{G}(x) \geq \frac{1-p_0}{\phi_2 \bar{V}(0)} \cdot c_2(x), \qquad x \geq 0$$

όπου $c(x,z) = e^{\kappa x} \cdot \frac{\int_z^\infty e^{\kappa y} dF(y)}{e^{\kappa z}\bar{F}(z)}$ και

$$c_2(x) : \frac{1}{c_2(x)} = \inf c(x,z), \quad 0 \le z \le x, \qquad \bar{F}(z) > 0$$

Απόδειξη 1.2. Αν $c_2(x) = 0$ τότε η απόδειξη είναι προφανής. Αν θεωρήσουμε ότι $c_2(x) > 0$ τότε $c(x,0) = \frac{1}{\phi_2}\bar{V}(x) < \infty$. Συνεπώς $\bar{V}(x-z) > 0, 0 \le z \le x$.

Ακολούθως ορίζοντας $A_1(z) = 1 - \bar{A}_1(z) = \phi_2 \int_0^z \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y)$ και κατά γενίκευση $A_k(z) = 1 - \bar{A}_k(z)$ τότε εφαρμόζοντας το νόμο ολικής πιθανότητας έχουμε

$$\bar{A}_{k+1}(z) = \bar{A}_1(z) + \int_0^z \bar{A}_k(z-y)\, dA_1(y), \qquad k = 1,2,3,...$$

Θα δείξουμε τώρα επαγωγικά ότι $\bar{G}_k(z) \ge \frac{(1-p_0)c_2(x)\bar{A}_{k+1}(z)}{\phi_2 \bar{V}(x-z)}, 0 \le z \le x$ όπου

$$\bar{G}_k(z) = \sum_{m=0}^{k} a_m \left\{ \bar{F}^{*(m+1)}(z) - \bar{F}^{*m}(z) \right\}, \quad z \ge 0$$

Εφόσον $\bar{F}(z) \ge \frac{c_2(x)}{\bar{V}(x-z)} \int_z^\infty \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y), 0 \le z \le x$, τότε

$$\begin{aligned}
\bar{G}_0(z) &= (1-p_0)\bar{F}(z) \\
&\ge (1-p_0)c_2(x)\{\bar{V}(x-z)\}^{-1} \int_z^\infty \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y) \\
&= \frac{1-p_0}{\phi_2} \frac{c_2(x)}{\bar{V}(x-z)} \bar{A}_1(z)
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$
\begin{aligned}
\overline{G}_{k+1}(z) &= a_0\overline{F}(z)+\sum_{m=1}^{k+1} a_m\left\{\overline{F}^{*(m+1)}(z)-\overline{F}^{*m}(z)\right\}\\
&\geq (1-p_0)\,\overline{F}(z)+\phi_2\sum_{m=1}^{k+1} a_{m-1}\left\{\overline{F}^{*(m+1)}(z)-\overline{F}^{*m}(z)\right\}\\
&= (1-p_0)\,\overline{F}(z)+\phi_2\sum_{m=0}^{k} a_{m}\left\{\overline{F}^{*(m+2)}(z)-\overline{F}^{*(m+1)}(z)\right\},
\end{aligned}
$$

και σε συνδυασμό με τη σχέση

$$
\int_0^z \overline{G}_k(z-y)dF(y)=\sum_{m=0}^{k} a_m\left\{\overline{F}^{*(m+2)}(z)-\overline{F}^{*(m+1)}(z)\right\}
$$

προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
&\overline{G}_{k+1}(z)\geq \overline{G}_0(z)+\phi_2\int_0^z \overline{G}_k(z-y)\,dF(y)\\
&\quad\geq \frac{1-p_0}{\phi_2}\frac{c_2(x)}{\overline{V}(x-z)}\overline{A}_1(z)+(1-p_0)c_2(x)\int_0^z\left\{\overline{V}(x+y-z)\right\}^{-1}\overline{A}_{k+1}(z-y)\,dF(y)\\
&\quad\geq \frac{1-p_0}{\phi_2}\frac{c_2(x)}{\overline{V}(x-z)}\left\{\overline{A}_1(z)+\phi_2\right\}\int_0^z\left\{\overline{B}(y)\right\}^{-1}\overline{A}_{k+1}(z-y)\,dF(y)=\\
&\quad= \frac{1-p_0}{\phi_2}\frac{c_2(x)}{\overline{V}(x-z)}\left\{\overline{A}_1(z)+\int_0^z\overline{A}_{k+1}(z-y)\,dA_1(y)\right\}\\
&\quad= \frac{1-p_0}{\phi_2}\frac{c_2(x)}{\overline{V}(x-z)}\overline{A}_{k+2}(z)
\end{aligned}
$$

Εφόσον, $\lim\limits_{k\to\infty}A_k(x)=0$ άρα και $\lim\limits_{k\to\infty}\overline{A}_k(x)=1$ τότε $z=x$ για προκύπτει ότι

$$
\overline{G}_k(z)\geq\frac{1-p_0}{\phi_2\overline{V}(0)}c_2(x)\,\overline{A}_{k+1}(z)
$$

και σε συνδυασμό με $\lim\limits_{k\to\infty}\overline{G}_k(z)=\overline{G}(z)$ και $\lim\limits_{k\to\infty}\overline{A}_k(x)=1$ προκύπτει ότι

$$
\lim_{k\to\infty}\overline{G}_k(x)=\overline{G}(x)\geq\frac{1-p_0}{\phi_2\overline{V}(0)}c_2(x)\lim_{k\to\infty}\overline{A}_{k+1}(x)=\frac{1-p_0}{\phi_2\overline{V}(0)}c_2(x)
$$

Λήμμα 1.2.1. Έστω 0 < φ_2 < 1 ικανοποιεί $a_{n+1} \geq \phi_2 a_n, \quad n = 0,1,2,...$ τότε

$$\bar{G}(x) \geq \frac{1-p_0}{\phi_2} \cdot a_2(x) \cdot e^{-\kappa x}, \quad x \geq 0,$$

όπου $\int_0^\infty e^{\kappa y} dF(y) dy = \frac{1}{\phi_2}$ και $\frac{1}{\alpha_2(x)} = \sup \int_z^\infty e^{ky} dF(y) / \{e^{\kappa z} \bar{F}(z)\}, \quad x \geq 0$

Απόδειξη 1.2.1. Έστω $B(y) = 1 - e^{-\kappa y}$ και $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \geq \bar{V}(x+y), x \geq 0, y \geq 0$ εφαρμόζεται με *V(x)* = *B*(*x*), τότε σε συνδυασμό με το θεώρημα 2, προκύπτει το ζητούμενο.

Λήμμα 1.2.2. Έστω 0 < φ_2 < 1 ικανοποιεί $a_{n+1} \geq \phi_2 a_n, \quad n = 0,1,2,...$ και η συνάρτηση B είναι NBU δηλαδή, $\bar{B}(x+y) \leq \bar{B}(x)\bar{B}(y), \quad x, y \geq 0$ τότε,

$$\bar{G}(x) \geq \frac{1-p_0}{\phi_2} \cdot c_2(x)$$

όπου

$$c_2(x) : \frac{1}{c_2(x)} = \inf c(x,z), \quad 0 \leq z \leq x, \quad \bar{F}(z) > 0$$

Απόδειξη 1.2.2. Εφόσον η συνάρτηση B είναι NBU άρα $\bar{B}(0) \leq \bar{B}(0)\bar{B}(0) \Rightarrow \bar{B}(0) = 1$ και $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \geq \bar{V}(x+y), x \geq 0, y \geq 0$ εφαρμόζεται με *V(x)* = *B*(*x*) σε συνδυασμό με το θεώρημα 2, προκύπτει το ζητούμενο.

Λήμμα 1.2.3. Έστω 0 < φ_2 < 1 ικανοποιεί $a_{n+1} \geq \phi_2 a_n, \quad n = 0,1,2,...$ και

$\int_0^\infty \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi_2}$, $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \geq \bar{V}(x+y)$, τότε

$$\bar{G}(x) \geq \frac{1-p_0}{\phi_2 \bar{V}(0)} \cdot \gamma(x) \cdot \bar{V}(x),$$

όπου m = inf{x : $F(x)$ = 1} και $\gamma(x) = \max\{\phi_2 \bar{F}(x), \bar{B}(m)\}$. Ειδικότερα αν $\bar{B}(x+y) \le \bar{B}(x)\bar{B}(y), \quad x, y \ge 0$ τότε

$$\bar{G}(x) \ge \frac{1-p_0}{\phi_2 \bar{V}(0)} \cdot \gamma(x) \cdot \bar{B}(x),$$

Απόδειξη 1.2.3. Εφόσον η $\bar{V}(x)$ είναι μη αύξουσα, τότε . Συνεπώς και με εφαρμογή $\bar{V}(x) \le \bar{V}(x-z)$, $0 \le z \le x$, ισχύει $c(x,z) \le \frac{\int_z^\infty \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y)}{\bar{V}(x)\bar{F}(z)}$.

Αν $\bar{B}(m) > 0$ τότε $c(x,z) \le \frac{\int_z^\infty \{\bar{B}(m)\}^{-1} dF(y)}{\bar{V}(x)\bar{F}(z)} = \{\bar{V}(x)\bar{B}(m)\}^{-1}$ και $c_2^{-1}(x) \le \{\bar{V}(x)\bar{B}(m)\}^{-1}$. Το θεώρημα 2 εφαρμόζεται οπότε $\bar{G}(x) \ge \frac{1-p_0}{\phi_2 \bar{V}(0)} \bar{B}(m)\bar{V}(x), x \ge 0$

Επίσης $c(x,z) \le \frac{\int_z^\infty \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y)}{\bar{V}(x)\bar{F}(z)} = \{\phi_2 \bar{V}(x)\bar{F}(x)\}^{-1}$, $0 \le z \le x$, οπότε σε εφαρμογή του θεωρήματος 2, $\bar{G}(x) \ge \frac{1-p_0}{\bar{V}(0)} \bar{F}(x)\bar{V}(x), x \ge 0$ ή εφόσον $B(x) = V(x)$ και NBU τότε $\bar{G}(x) \ge \frac{1-p_0}{\phi_2 \bar{V}(0)} \cdot \gamma(x) \cdot \bar{B}(x)$

Λήμμα 1.2.4. Έστω 0 < φ_2 < 1 ικανοποιεί $a_{n+1} \ge \phi_2 a_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$ και $\bar{B}(x+y) \le \bar{B}(x)\bar{B}(y), \quad x, y \ge 0$ δηλαδή είναι NBUC τότε

$$\bar{G}(x) \ge \frac{1-p_0}{\phi_2 \bar{V}(0)} \cdot \gamma(x) \cdot \bar{B}_1(x), \; x \ge 0$$

Απόδειξη 1.2.4. Προκύπτει από το λήμμα 2.3 εφόσον η $B(y)$ είναι NBUC και θέσουμε $B_1(y) = V(y)$.

Κεφάλαιο 2. Φράγματα για κλάσεις αξιοπιστίας της κατανομής του ύψους της ατομικής ζημιάς.

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματευόμαστε τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 1 με πρόσθετες υποθέσεις σχετικά με την συνάρτηση κατανομής $F(y)$. Οι υποθέσεις αυτές εμπλέκουν τη συνάρτηση απόπτωσης της συνάρτησης κατανομής.

Μια πρώτη περίπτωση αφορά την NWU (New Worse than Used) ή NBU (New Better than Used) κατανομή της ατομικής απαίτησης για την οποία ισχύει (NWU) $\overline{F}(x+y) \geq \overline{F}(x)\overline{F}(y)$, ή (NBU) $\overline{F}(x+y) \leq \overline{F}(x)\overline{F}(y)$, αντίστοιχα, για $x, y \geq 0$.

Θεώρημα 2.1.

(NWU) Αν $\alpha_{n+1} \leq \phi \cdot a_n$, n = 0, 1, 2, … τότε

$$\overline{G}(x) \leq (1-p_0)\left\{\overline{F}(x)\right\}^{1-\phi}, x \geq 0$$

(NBU) Αν $\alpha_{n+1} \geq \phi \cdot a_n$, n = 0, 1, 2, ... τότε

$$\overline{G}(x) \geq (1-p_0)\left\{\overline{F}(x)\right\}^{1-\phi}, x \geq 0$$

Απόδειξη 2.1.

Εφόσον η F(y) είναι NWU (NBU) το αυτό ισχύει για την B(y) όπου $B(y) = 1-\left\{\overline{F}(y)\right\}^{1-\phi} \Leftrightarrow \overline{B}(y) = \left\{\overline{F}(y)\right\}^{1-\phi}$. Επίσης,

$$\phi\int_z^{\infty}\left\{\overline{F}(y)\right\}^{\phi-1} dF(y) = -\left\{\overline{F}(y)\right\}^{\phi}\Big|_z^{\infty} = \left\{\overline{F}(z)\right\}^{\phi}$$

$$\frac{1}{\phi} = \frac{\overline{B}(z)}{\overline{F}(z)}\int_z^{\infty}\left\{\overline{B}(y)\right\}^{-1} dF(y)$$

Εφόσον $\bar{B}(x-z)\bar{B}(z) \le (\ge) \bar{B}(x)$ τότε και (βλ. κεφάλαιο 1 για τη συνάρτηση c(x, z))

$$c(x,z) \ge (\le) \frac{\bar{B}(z)}{\bar{B}(x)\bar{F}(z)} \int_z^{\infty} \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi \bar{B}(x)}$$

Συνδυάζοντας τα λήμματα 1.1.5 και 1.2.5 του κεφαλαίου 1,

$$\frac{1}{\phi \bar{B}(x)} \le (\ge) \frac{1}{c_1(x)} \cdot \frac{1}{c_2(x)}$$

η απόδειξη ολοκληρώνεται από τα λήμματα 1.1.2 και 1.2.2 του κεφαλαίου 1.

Θεώρημα 2.2. Έστω $0 < \varphi_1 < 1$, $\alpha_{n+1} \le \phi_1 \cdot a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ και η $B(y)$: $\int_0^{\infty} \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi_1}$. Αν η V(x) είναι συνάρτηση κατανομής: $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \le \bar{V}(x+y), x \ge 0, y \ge 0$ και $H_x(y)$ είναι συνάρτηση κατανομής:

$$\bar{H}_x(y) \le \inf_{0 \le z \le x, \bar{F}(z) > 0} \bar{F}(z+y) / \bar{F}(z), \qquad y \ge 0$$

τότε

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi_1} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{dH_x(y)}{\bar{V}(x+y)} \right\}^{-1}, \qquad x \ge 0$$

Απόδειξη 2.2. Έστω $H_x(y) = \Pr(W_x \le y), y \ge 0$. Τότε $\Pr(W_x \le y) \le \Pr(T_z \le y), 0 \le z \le x, \bar{F}(z) > 0$. Εφόσον η συνάρτηση $\frac{1}{\bar{V}(x)}$ είναι μη φθίνουσα ως προς τη μεταβλητή y, προκύπτει από τη μελέτη του Ross (1966, p. 405) ότι:

$$c(x,z) \geq \tau(x,z) = E\left\{\frac{1}{\bar{V}(x+T_z)}\right\}$$
$$\geq E\left\{\frac{1}{\bar{V}(x+W_x)}\right\} = \int_0^\infty \left\{\bar{V}(x+y)\right\}^{-1} dH_x(y)$$

Συνεπώς (οι συναρτήσεις $c_1(x)$, $c_2(x)$) ,

$$\frac{1}{c_1(x)} \geq \int_0^\infty \left\{\bar{V}(x+y)\right\}^{-1} dH_x(y) \Leftrightarrow c_1(x) \leq \frac{1}{\int_0^\infty \left\{\bar{V}(x+y)\right\}^{-1} dH_x(y)}$$

και κατόπιν το ζητούμενο προκύπτει από το θεώρημα 1.1.

Θεώρημα 2.3. Έστω $0 < \varphi_2 < 1$ και $\alpha_{n+1} \geq \phi_2 \cdot a_n$ και η $B(y)$ ικανοποιεί $\int_0^\infty \left\{\bar{B}(y)\right\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi_2}$. Αν η V(x) ικανοποιεί τη σχέση $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \geq \bar{V}(x+y), x \geq 0, y \geq 0$ και η $H_x(y)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\bar{H}_x(y) \geq \sup_{0 \leq z \leq x, \bar{F}(z)>0} \bar{F}(z+y)/\bar{F}(z), \qquad y \geq 0$$

τότε

$$\overline{G}(x) \geq \frac{1-p_0}{\phi_2 \overline{V}(0)} \left\{\int_0^\infty \frac{dH_x(y)}{\overline{V}(x+y)}\right\}^{-1}, \quad x \geq 0$$

Απόδειξη 2.3. Εφόσον (όπως και με την απόδειξη του θεωρήματος 2.2)

$$\begin{aligned} c(x,z) &\leq \tau(x,z) = E\left\{1/\overline{V}(x+T_z)\right\} \\ &\leq E\left\{1/\overline{V}(x+W_x)\right\} = \int_0^\infty \left\{\overline{V}(x+y)\right\}^{-1} dH_x(y). \end{aligned}$$

Συνεπώς, από τη σχέση $\frac{1}{c_2(x)} = \sup_{0 \leq z \leq x, \bar{F}(z)>0} c(x,z)$ προκύπτει ότι

$$\frac{1}{c_2(x)} \leq \int_0^\infty \left\{\overline{V}(x+y)\right\}^{-1} dH_x(y)$$

και το τελικό ζητούμενο προκύπτει με τη βοήθεια του θεωρήματος 1.2.

Λήμμα 2.3.1. Αν $0 < \varphi < 1$, $\alpha_{n+1} \leq (\geq) \phi \cdot a_n$ και $B(y)$ είναι συνάρτηση κατανομής που ικανοποιεί τη σχέση $\phi^{-1} = \int_0^\infty \left\{\overline{B}(y)\right\}^{-1} dF(y)$ και $V(x)$ είναι συνάρτηση κατανομής που ικανοποιεί τη σχέση $\overline{V}(x)\overline{B}(y) \leq (\geq) \overline{V}(x+y)$ για τη συνάρτηση κατανομής F τύπου NWU (≤) ή NBU (≥) αντίστοιχα, για $x, y \geq 0$, τότε

$$\overline{G}(x) \leq \frac{1-p_0}{\phi \overline{V}(0)} \left\{ \int_0^\infty \frac{dF(y)}{\overline{V}(x+y)} \right\}^{-1}, x \geq 0 \text{ (NWU)}$$

ή

$$\overline{G}(x) \geq \frac{1-p_0}{\phi \overline{V}(0)} \left\{ \int_0^\infty \frac{dF(y)}{\overline{V}(x+y)} \right\}^{-1}, x \geq 0 \text{ (NBU)}$$

Απόδειξη 2.3.1. Εφόσον η F είναι τύπου NWU ($\overline{F}(z+y)/\overline{F}(z) \leq \overline{F}(y)$) ή NBU ($\overline{F}(z+y)/\overline{F}(z) \geq \overline{F}(y)$) τότε αντίστοιχα από τα θεωρήματα 2.2 και 2.3 προκύπτει αν $H_x(y) = F(y)$.

Λήμμα 2.3.2. Αν $0 < \varphi < 1$, $\alpha_{n+1} \leq (\geq) \phi \cdot a_n$ και $B(y)$ είναι συνάρτηση κατανομής που ικανοποιεί τη σχέση $\phi^{-1} = \int_0^\infty \left\{\overline{B}(y)\right\}^{-1} dF(y)$ και $V(x)$ είναι συνάρτηση κατανομής που ικανοποιεί τη σχέση $\overline{V}(x)\overline{B}(y) \leq (\geq) \overline{V}(x+y)$ για τη συνάρτηση κατανομής F τύπου IFR (≤) ή DFR (≥) αντίστοιχα, για $x, y \geq 0$, τότε

$$(\text{IFR})\ \overline{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi\overline{V}(0)}\overline{F}(x) / \int_x^\infty \left\{\overline{V}(y)\right\}^{-1} dF(y), x \ge 0$$

$$(\text{DFR})\ \overline{G}(x) \ge \frac{1-p_0}{\phi\overline{V}(0)}\overline{F}(x) / \int_x^\infty \left\{\overline{V}(y)\right\}^{-1} dF(y), x \ge 0$$

Απόδειξη 2.3.2. Η συνάρτηση κατανομής F είναι όχι αύξουσα (IFR) αν για $0 \le z \le x$, $\frac{\overline{F}(z+y)}{\overline{F}(z)} \ge \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)}$, και αντίστοιχα όχι φθίνουσα (DFR) αν $0 \le z \le x$, $\frac{\overline{F}(z+y)}{\overline{F}(z)} \le \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)}$. Αν IFR τότε το θεώρημα 2.2, ή αν DFR τότε το θεώρημα 2.3 ικανοποιούνται με $H_x(y) = 1 - \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)}$. Εφόσον $dH_x(y) = \frac{dF(x+y)}{\overline{F}(x)}$ και

$$\frac{1}{\overline{F}(x)} \int_0^\infty \left\{\overline{V}(x+y)\right\}^{-1} dF(x+y) = \frac{1}{\overline{F}(x)} \int_x^\infty \left\{\overline{V}(y)\right\}^{-1} dF(y)$$

το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα.

Λήμμα 2.3.3. Αν $0 < \varphi < 1$, $\alpha_{n+1} \le (\ge) \phi \cdot a_n$ και $B(y)$ είναι συνάρτηση κατανομής που ικανοποιεί τη σχέση $\phi^{-1} = \int_0^\infty \left\{\overline{B}(y)\right\}^{-1} dF(y)$ και $V(x)$ είναι συνάρτηση κατανομής που ικανοποιεί τη σχέση $\overline{V}(x)\overline{B}(y) \le (\ge) \overline{V}(x+y)$ για τη συνάρτηση κατανομής F τύπου UBA (≤) δηλαδή $\overline{F}(x+y) \ge \overline{F}(y) e^{-x/r(\infty)}$, $x, y \ge 0$ ή UWA (≥) δηλαδή $\overline{F}(x+y) \le \overline{F}(y) e^{-x/r(\infty)}$, $x, y \ge 0$ και η συνάρτηση $r(y)$: $0 < r(\infty) = r(y), y \to \infty < \infty$ ορίζεται ως

$$r(y) = \int_0^\infty \left\{\overline{F}(y+t) / \overline{F}(y)\right\} dt$$

τότε,

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-\rho_0}{\phi\bar{V}(0)} \cdot \left\{ \frac{1}{r(\infty)} \int_0^\infty \frac{e^{-y/r(\infty)}}{\bar{V}(x+y)} dy \right\}^{-1}, \quad x \ge 0 \text{ (UBA)}$$

ή

$$\bar{G}(x) \ge \frac{1-\rho_0}{\phi\bar{V}(0)} \cdot \left\{ \frac{1}{r(\infty)} \int_0^\infty \frac{e^{-y/r(\infty)}}{\bar{V}(x+y)} dy \right\}^{-1}, \quad x \ge 0 \text{ (UWA)}$$

Απόδειξη 2.3.3. Εφόσον η F(y) είναι UBA ή UWA με $\bar{F}(z+y)/\bar{F}(z) \ge e^{-y/r(\infty)}$ ή $\bar{F}(z+y)/\bar{F}(z) \le e^{-y/r(\infty)}$ αντίστοιχα, τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα 2.2 ή 2.3 αντίστοιχα για $H_x(y) = e^{-y/r(\infty)}$ ισχύουν οι παραάνω σχέσεις.

Λήμμα 2.3.4. Αν $0 < \varphi < 1$, $\alpha_{n+1} \le (\ge) \phi \cdot a_n$ και $B(y)$ είναι συνάρτηση κατανομής που ικανοποιεί τη σχέση $\phi^{-1} = \int_0^\infty \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y)$ και $V(x)$ είναι συνάρτηση κατανομής που ικανοποιεί τη σχέση $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \le (\ge) \bar{V}(x+y)$ και για τη συνάρτηση κατανομής $F(y)$ με ρυθμό απόπτωσης

$$\mu(y) = -\frac{d}{dy} \ln \bar{F}(y)$$

τότε αν $\mu(y) \le \mu$

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-\rho_0}{\phi\bar{V}(0)} \cdot \left\{ \int_0^\infty \frac{\mu e^{-\mu y}}{\bar{V}(x+y)} dy \right\}^{-1}, \quad y \ge 0$$

ή αν $\mu(y) \ge \mu$

$$\bar{G}(x) \ge \frac{1-\rho_0}{\phi\bar{V}(0)} \cdot \left\{ \int_0^\infty \frac{\mu e^{-\mu y}}{\bar{V}(x+y)} dy \right\}^{-1}, \quad y \ge 0$$

Απόδειξη 2.3.4. Εφόσον $\dfrac{\bar{F}(z+y)}{\bar{F}(z)} = e^{-\int_0^y \mu(z+t)dt} \geq e^{-\int_0^y \mu dt} = e^{-\mu y}$ αν $\mu(y) \leq \mu$ και $\dfrac{\bar{F}(z+y)}{\bar{F}(z)} = e^{-\int_0^y \mu(z+t)dt} \leq e^{-\int_0^y \mu dt} = e^{-\mu y}$ αν $\mu(y) \geq \mu$, τότε ισχύουν αντιστόιχως το άνω και κάτω φράγμα της ουράς της $G(x)$ εφόσον $H_x(y) = 1 - e^{-\mu y}$.

Ας δούμε το παράδειγμα της κατανομής του Burr με παραμέτρους α, β και $\gamma = 2$, με ουρά συνάρτηση κατανομής

$$\bar{F}(y) = \left(\frac{\beta^2}{\beta^2 + y^2}\right)^a, \qquad y \geq 0, \qquad a, \beta > 0$$

Ο ρυθμός απόπτωσης είναι

$$\mu(y) = -\frac{d}{dy}\ln \bar{F}(y) = \frac{2\alpha y}{\beta^2 + y^2}, \qquad y \geq 0$$

με $\mu(0) = \mu(\infty) = 0$ και $\dfrac{d}{dy}\mu(y) = \dfrac{2\alpha\left(\beta^2 - y^2\right)}{\left(\beta^2 + y^2\right)^2}$.

Η συνάρτηση $\mu(y)$ αποκτά μέγιστη τιμή $\mu(\beta) = \alpha / \beta$ για $y = \beta$ και ακολούθως φθίνει. Σύμφωνα με την παραπάνω συνθήκη του λήμματος 2.3.4 για $\mu = \alpha / \beta$ τότε η συνάρτηση $H_x(y) = 1 - e^{-ay/\beta}$ αποτελεί ένα άνω φράγμα για την ουρά $\bar{G}(x)$.

Εισάγοντας πρόσθετες συνθήκες δυνάμεθα να υπολογίσουμε άνω και κάτω φράγματα με μεγαλύτερη ακρίβεια. Για αρχή, θεωρώντας ότι η συνάρτηση $\dfrac{1}{\bar{V}(y)}$ είναι κυρτή ως προς τη μεταβλητή y, δηλαδή $\frac{d}{dy}\mu_V(y)+\{\mu_V(y)\}^2 \geq 0$ ή ισοδύναμα $\frac{d}{dy}\mu^{-1}(y)\leq 1$ και αν είναι διπλά διαφορίσιμη με ρυθμό απόπτωσης

$$\mu_V(y) = -\frac{d}{dy}\ln\bar{V}(y), \qquad y \geq 0$$

προκύπτει ότι

$$\frac{1}{\bar{V}(y)} = \exp\left\{\int_0^y \mu_V(t)\,dt\right\}.$$

Για να το συνδέσουμε με τα παραπάνω, η $\frac{1}{\bar{V}(y)}$ είναι κυρτή ως προς τη μεταβλητή y αν η συνάρτηση $1-\bar{V}(y)$ είναι IFR. Προχωρούμε ακολούθως στα κάτωθι θεωρήματα με βάση την κυρτότητα της συνάρτησης $\frac{1}{\bar{V}(y)}$.

Θεώρημα 2.4 Έστω $0 < \varphi_1 < 1$, και η $B(y)$ ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^\infty \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi_1}$. Αν η $V(x)$ ικανοποιεί τη σχέση $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \leq \bar{V}(x+y)$, x, y ≥ 0, τότε με βάση την κυρτότητα της συνάρτησης $\frac{1}{\bar{V}(y)}$

$$\bar{G}(x) \leq \frac{1-\rho_0}{\phi\bar{V}(0)}\bar{V}\left(x+r_*(x)\right), \qquad x \geq 0$$

όπου

$$r_*(x) = \inf_{0<z\leq x,\bar{F}(z)>0} r(z)$$

και $r(y)=\dfrac{\int_y^{\infty}(t-y)\,dF(t)}{\bar{F}(y)}, \quad y\geq 0$

Απόδειξη 2.4. Έστω $z+r(z)=\dfrac{1}{\bar{F}(z)}\int_z^{\infty} y\,dF(y)$, τότε ως συνάρτηση του y η $\dfrac{1}{\bar{V}(x+y-z)}$ είναι κυρτή, τότε αν $\tau(x,z)=\dfrac{1}{\bar{F}(z)}\int_z^{\infty}\left\{\bar{V}(x+y-z)\right\}^{-1}dF(y)$ για $0\leq z\leq x$, $\bar{F}(z)>0$ και έστω $P_r(T_z\leq y)=1-\dfrac{\bar{F}(z+y)}{\bar{F}(z)}$, η αλλαγή μεταβλητής από y σε $y+z$ οδηγεί σε

$$\begin{aligned}\tau(x,z)&=E\left\{\frac{1}{\bar{V}(x+T_x)}\right\}\\ &\geq\frac{1}{\bar{V}(x+r(z))}\geq\frac{1}{\bar{V}(x+r_*(x))}\end{aligned}$$

διότι η $\bar{V}(y)$ είναι μη αύξουσα συνάρτηση. Συνεπώς από τον ορισμό

$$\frac{1}{c_1(x)}=\inf_{0\leq z\leq x,\bar{F}(z)>0}c(x,z),\quad x\geq 0$$

οπότε $\dfrac{1}{c_1(x)}\geq\dfrac{1}{\bar{V}(x+r_*(x))}\Leftrightarrow c_1(x)\leq\bar{V}(x+r_*(x))$ και $\bar{V}(x+r_*(x))\leq\bar{V}(x)$ άρα $c_1(x)\leq\bar{V}(x)$ και το άνω φράγμα της ουράς της κατανομής $G(x)$ προκύπτει από την εφαρμογή του θεωρήματος 1.1.

Θεώρημα 2.5. Έστω $0<\varphi_1<1$, και η $B(y)$ ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^{\infty}\left\{\bar{B}(y)\right\}^{-1}dF(y)=\dfrac{1}{\phi_1}$. Αν η $V(x)$ ικανοποιεί τη σχέση $\bar{V}(x)\bar{B}(y)\leq\bar{V}(x+y)$, x, y ≥

0, τότε με βάση την κυρτότητα της συνάρτησης $\frac{1}{\bar{V}(y)}$ και αν επιπρόσθετα για τη συνάρτηση $H_x(y)$ για την οποία ισχύει

$$\int_y^\infty \bar{H}_x(t)dt \leq \inf_{0<z\leq x, \bar{F}(z)>0} \int_y^\infty \frac{\bar{F}(t+z)}{\bar{F}(z)} dt$$

τότε,

$$\bar{G}(x) \leq \frac{1-\rho_0}{\phi \bar{V}(0)} \left\{ \int_0^\infty \frac{dH_x(y)}{\bar{V}(x+y)} \right\}^{-1}, \qquad x \geq 0$$

Απόδειξη 2.5. Με βάση την απόδειξη του θεωρήματος 2.4, έστω $H_x(y) = \Pr(W_x \leq y)$ και $P_r(T_z \leq y) = 1 - \frac{\bar{F}(z+y)}{\bar{F}(z)}$. Τότε

$$\int_y^\infty \bar{H}_x(t)dt \leq \inf_{0<z\leq x, \bar{F}(z)>0} \int_y^\infty \frac{\bar{F}(t+z)}{\bar{F}(z)} dt \Rightarrow \int_y^\infty \Pr(W_x > t)dt \leq \int_y^\infty \Pr(T_z > t)dt$$

οπότε και $E\left\{\frac{1}{\bar{V}(x+W_x)}\right\} \leq E\left\{\frac{1}{\bar{V}(x+T_z)}\right\}$ λόγω κυρτότητας της $\frac{1}{\bar{V}(y)}$

Εφόσον $c(x,z) \geq \tau(x,z) \geq E\left\{\frac{1}{\bar{V}(x+W_x)}\right\}$ και $\frac{1}{c_1(x)} \geq E\left\{\frac{1}{\bar{V}(x+W_x)}\right\}$ το άνω φράγμα της ουράς της κατανομής $G(x)$ προκύπτει από την εφαρμογή του θεωρήματος 1.1.

Θεώρημα 2.6. Έστω < φ_2 < 1 και $\alpha_{n+1} \geq \varphi_2 \alpha_n$, n = 0, 1, 2,.... και η $B(y)$ ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^\infty \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi_2}$. Αν η $V(x)$ ικανοποιεί τη σχέση $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \leq \bar{V}(x+y)$, x, $y \geq 0$, τότε με βάση την κυρτότητα της συνάρτησης $\frac{1}{\bar{V}(y)}$ και αν επιπρόσθετα για τη συνάρτηση $H_x(y)$ για την οποία ισχύει

$$\int_y^{\infty} \bar{H}_x(t)dt \geq \sup_{0<z\leq x, \bar{F}(z)>0} \int_y^{\infty} \frac{\bar{F}(t+z)}{\bar{F}(z)} dt \qquad y \geq 0$$

τότε,

$$\bar{G}(x) \geq \frac{1-\rho_0}{\phi_2 \bar{V}(0)} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{dH_x(y)}{\bar{V}(x+y)} \right\}^{-1}, \qquad x \geq 0$$

Απόδειξη 2.6. Προκύπτει από την αντιστροφή των ανισοτήτων του θεωρήματος 2.5.

Λήμμα 2.6.1.

α) Αν $0 < \varphi < 1$ και $\alpha_{n+1} \leq \varphi\, \alpha_n$, $n = 0, 1, 2,\ldots.$ και η $B(y)$ ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^{\infty} \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi}$. Αν η κυρτή συνάρτηση $\frac{1}{\bar{V}(x)}$ ικανοποιεί τη σχέση $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \leq \bar{V}(x+y)$, x, $y \geq 0$, και η F είναι NWUC (NWU Class) δηλαδή $\bar{F}(x+y) \geq \bar{F}(x)\bar{F}(y)$ τότε

$$\bar{G}(x) \geq \frac{1-\rho_0}{\phi \bar{V}(0)} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{dF(y)}{\bar{V}(x+y)} \right\}^{-1}, \qquad x \geq 0$$

β) Αν $0 < \varphi < 1$ και $\alpha_{n+1} \geq \varphi\, \alpha_n$, $n = 0, 1, 2,\ldots.$ και η $B(y)$ ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^{\infty} \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi}$. Αν η κυρτή συνάρτηση $\frac{1}{\bar{V}(x)}$ ικανοποιεί τη σχέση $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \geq \bar{V}(x+y)$, x, $y \geq 0$, και η F είναι NBUC (NBU Class), δηλαδή $\bar{F}(x+y) \leq \bar{F}(x)\bar{F}(y)$ τότε

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-\rho_0}{\phi\bar{V}(0)} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{dF(y)}{\bar{V}(x+y)} \right\}^{-1}, \qquad x \ge 0$$

Απόδειξη 2.6.1. Εφόσον η συνάρτηση F(y) είναι NWUC (α) ή NBUC (β) τότε (α): $\bar{F}_1(y+z) \ge \bar{F}_1(y)\bar{F}(z)$ ή (β)): $\bar{F}_1(y+z) \le \bar{F}_1(y)\bar{F}(z)$ και τα άνω και κάτω φράγματα προκύπτουν από την εφαρμογή του θεωρήματος 2.5 αν $H_x(y) = F(y)$.

Λήμμα 2.6.2.

α) Αν $0 < \varphi < 1$ και $\alpha_{n+1} \le \varphi\, \alpha_n$, $n = 0, 1, 2,....$ και η $B(y)$ ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^{\infty} \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi}$. Αν η κυρτή συνάρτηση $\frac{1}{\bar{V}(x)}$ ικανοποιεί τη σχέση $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \le \bar{V}(x+y)$, $x, y \ge 0$, και η F είναι DMRL (DMR Lifetime) με $\bar{F}(x) > 0$, δηλαδή

$$\frac{E(Y)\bar{F}_1(y+z)}{\bar{F}(z)} = r(z)\frac{\bar{F}_1(z+y)}{\bar{F}_1(z)} \ge r(x)\frac{\bar{F}_1(y+x)}{\bar{F}_1(x)},$$

τότε

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-\rho_0}{\phi\bar{V}(0)} \bar{F}(x) / \left\{ \int_0^{\infty} \bar{V}(y) dF(y) \right\}^{-1}, \qquad x \ge 0$$

β) Αν $0 < \varphi < 1$ και $\alpha_{n+1} \ge \varphi\, \alpha_n$, $n = 0, 1, 2,....$ και η $B(y)$ ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^{\infty} \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi}$. Αν η κυρτή συνάρτηση $\frac{1}{\bar{V}(x)}$ ικανοποιεί τη σχέση $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \ge \bar{V}(x+y)$, x, y ≥ 0, και η F είναι IMRL (IMR Lifetime) με $\bar{F}(x) > 0$, δηλαδή

$$\frac{E(Y)\bar{F}_1(y+z)}{\bar{F}(z)} = r(z)\frac{\bar{F}_1(z+y)}{\bar{F}_1(z)} \geq r(x)\frac{\bar{F}_1(y+x)}{\bar{F}_1(x)}$$

$$\frac{E(Y)\bar{F}_1(y+z)}{\bar{F}(z)} = r(z)\frac{\bar{F}_1(z+y)}{\bar{F}_1(z)} \leq r(x)\frac{\bar{F}_1(y+x)}{\bar{F}_1(x)}$$

τότε

$$\bar{G}(x) \geq \frac{1-\rho_0}{\phi\bar{V}(0)}\bar{F}(x) / \left\{\int_0^\infty \bar{V}(y)\,dF(y)\right\}^{-1}, \qquad x \geq 0$$

Απόδειξη 2.6.2. Εφόσον

$$r(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{F}(x)dx}{\bar{F}(y)} = \frac{E(Y)\bar{F}_1(y)}{\bar{F}(y)}$$

τότε $\frac{E(Y)\bar{F}_1(y+z)}{\bar{F}(z)} = r(z)\cdot\frac{\bar{F}_1(y+z)}{\bar{F}_1(z)}$. Εφόσον η $F(y)$ είναι DMRL (α) ή IMRL (β) τότε ισοδυνάμως η $F_1(y)$ είναι IFR (α) ή DFR (β). Η συνάρτηση $\frac{\bar{F}_1(y+z)}{\bar{F}_1(z)}$ στην περίπτωση (α) είναι μη αύξουσα ενώ στην περίπτωση (β) είναι μη φθίνουσα. Ως εκ τούτου για $0 \leq z \leq x$,

$$\frac{E(Y)\bar{F}_1(y+z)}{\bar{F}(z)} = r(z)\cdot\frac{\bar{F}_1(y+z)}{\bar{F}_1(z)} \geq r(x)\cdot\frac{\bar{F}_1(y+x)}{\bar{F}_1(x)} \quad \text{(α)}$$

$$\frac{E(Y)\bar{F}_1(y+z)}{\bar{F}(z)} = r(z)\cdot\frac{\bar{F}_1(y+z)}{\bar{F}_1(z)} \leq r(x)\cdot\frac{\bar{F}_1(y+x)}{\bar{F}_1(x)} \quad \text{(β)}$$

και το θεώρημα 2.5 για την (α) περίπτωση και το θεώρημα 2.6 για την (β) περίπτωση εφαρμόζονται για $H_x(y) = 1 - \frac{\bar{F}(y+x)}{\bar{F}(x)}$ ώστε να ολοκληρωθεί η απόδειξη.

Λήμμα 2.6.3

(α) Αν $0 < \varphi < 1$ και $\alpha_{n+1} \le \varphi\, \alpha_n$, $n = 0, 1, 2,....$ και η $B(y)$ ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^\infty \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi}$. Αν η κυρτή συνάρτηση $\frac{1}{\bar{V}(x)}$ ικανοποιεί τη σχέση $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \le \bar{V}(x+y)$, x, $y \ge 0$, και η συνάρτηση $r(y) = \int_y^\infty \bar{F}(x)dx / \bar{F}(y) \ge r$, $r > 0$ τότε

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-\rho_0}{\phi\bar{V}(0)} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{e^{-y/r}}{\bar{V}(x+y)} dy \right\}^{-1}, \quad x \ge 0$$

(β) Αν $0 < \varphi < 1$ και $\alpha_{n+1} \ge \varphi\, \alpha_n$, $n = 0, 1, 2,....$ και η $B(y)$ ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^\infty \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi}$. Αν η κυρτή συνάρτηση $\frac{1}{\bar{V}(x)}$ ικανοποιεί τη σχέση $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \ge \bar{V}(x+y)$, x, $y \ge 0$, και η συνάρτηση $r(y) = \int_y^\infty \bar{F}(x)dx / \bar{F}(y) \le r$, $r > 0$ τότε

$$\bar{G}(x) \ge \frac{1-\rho_0}{\phi\bar{V}(0)} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{e^{-y/r}}{\bar{V}(x+y)} dy \right\}^{-1}, \quad x \ge 0$$

Απόδειξη 2.6.3. Εφόσον

$$r(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{F}(x)dx}{\bar{F}(y)} = \frac{E(Y)\bar{F}_1(y)}{\bar{F}(y)}$$

και

$$\bar{F}_1(y) = e^{-\int_0^y \{r(x)\}^{-1}dx}, \quad y \ge 0$$

τότε για $0 \le z \le x,\ \bar{F}(z) > 0$ και

$$\begin{aligned} E(Y)\bar{F}_1(y+z)/\bar{F}(z) &= r(z)\bar{F}_1(y+z)/\bar{F}_1(z) \\ &= r(z)e^{-\int_z^{y+z}\{r(t)\}^{-1}dt} \end{aligned}$$

$$(\alpha) \ge \quad re^{-\int_z^{y+z} r^{-1}dt}$$

$$(\beta) \le \quad re^{-\int_z^{y+z} r^{-1}dt}$$

$$= re^{-y/r}$$

Τα θεωρήματα 2.5 και 2.6 εφαρμόζονται για $H_y(x) = 1 - e^{-y/r}$ ώστε να προκύψουν τα φράγματα της ουράς της κατανομής $G(x)$.

Λήμμα 2.6.4

(α) Αν $0 < \varphi < 1$ και $\alpha_{n+1} \le \varphi\, \alpha_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ και η $B(y)$ ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^\infty \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi}$. Αν η κυρτή συνάρτηση $\frac{1}{\bar{V}(x)}$ ικανοποιεί τη σχέση $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \le \bar{V}(x+y)$, $x,\ y \ge 0$, και η συνάρτηση F είναι NWUE (NWE in Expectation), δηλαδή $r(y) = \int_y^\infty \bar{F}(y+t)dt / \bar{F}(y) \ge r(0)$, τότε

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-\rho_0}{\phi\bar{V}(0)}\left\{\frac{1}{E(Y)}\int_0^\infty \frac{e^{-y/E(Y)}}{\bar{V}(x+y)}dy\right\}^{-1}, \qquad x \ge 0$$

(β) Αν $0 < \varphi < 1$ και $\alpha_{n+1} \ge \varphi\, \alpha_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ και η $B(y)$ ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^\infty \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi}$. Αν η κυρτή συνάρτηση $\frac{1}{\bar{V}(x)}$ ικανοποιεί τη σχέση

$\bar{V}(x)\bar{B}(y) \geq \bar{V}(x+y)$, x, $y \geq 0$, και η συνάρτηση F είναι NBUE (NBU in Expectation), δηλαδή $r(y) = \int_y^\infty \bar{F}(y+t)\,dt / \bar{F}(y) \leq r(0)$, τότε

$$\bar{G}(x) \geq \frac{1-\rho_0}{\phi \bar{V}(0)} \left\{ \frac{1}{E(Y)} \int_0^\infty \frac{e^{-y/E(Y)}}{\bar{V}(x+y)} dy \right\}^{-1}, \qquad x \geq 0$$

Απόδειξη 2.6.4. Για $r = E(Y)$ εφαρμόζουμε το λήμμα 2.6.3 και προκύπτει το ζητούμενο σε κάθε περίπτωση (α) και (β).

Λήμμα 2.6.5.

(α) Αν $0 < \varphi < 1$ και $\alpha_{n+1} \leq \varphi\, \alpha_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ και η $B(y)$ ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^\infty \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi}$. Αν η κυρτή συνάρτηση $\frac{1}{\bar{V}(x)}$ ικανοποιεί τη σχέση $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \leq \bar{V}(x+y)$, x, $y \geq 0$, και η συνάρτηση F είναι UBAE (UBA in Expectation), δηλαδή $r(y) = \int_y^\infty \bar{F}(y+t)\,dt / \bar{F}(y) \geq r(\infty)$, τότε

$$\bar{G}(x) \leq \frac{1-\rho_0}{\phi \bar{V}(0)} \left\{ \frac{1}{r(\infty)} \int_0^\infty \frac{e^{-y/r(\infty)}}{\bar{V}(x+y)} dy \right\}^{-1}, \qquad x \geq 0$$

(β) Αν $0 < \varphi < 1$ και $\alpha_{n+1} \geq \varphi\, \alpha_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ και η $B(y)$ ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^\infty \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi}$. Αν η κυρτή συνάρτηση $\frac{1}{\bar{V}(x)}$ ικανοποιεί τη σχέση $\bar{V}(x)\bar{B}(y) \geq \bar{V}(x+y)$, x, $y \geq 0$, και η συνάρτηση F είναι UWAE (UWA in Expectation), δηλαδή $r(y) = \int_y^\infty \bar{F}(y+t)\,dt / \bar{F}(y) \leq r(\infty)$, τότε

$$\bar{G}(x) \geq \frac{1-\rho_0}{\phi \bar{V}(0)} \left\{ \frac{1}{r(\infty)} \int_0^\infty \frac{e^{-y/r(\infty)}}{\bar{V}(x+y)} dy \right\}^{-1}, \qquad x \geq 0$$

Απόδειξη 2.6.5. Για $r = r(\infty)$ εφαρμόζουμε το λήμμα 2.6.3 και προκύπτει το ζητούμενο σε κάθε περίπτωση (α) και (β).

Κεφάλαιο 3. Άνω και κάτω εκθετικά φράγματα και φράγματα τύπου Pareto.

Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε ειδικές περιπτώσεις για τις ουρές $\bar{B}(y)$ που δύνανται να χρησιμοποιηθούν ως φράγματα.

3.1 Εκθετικά φράγματα

Μια πολύ σημαντική περίπτωση φραγμάτων είναι τα εκθετικά. Ένα εκθετικό φράγμα στην ουρά της κατανομής δύναται να υφίσταται εφόσον η ροπογεννήτρια της κατανομής υπάρχει. Η ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_0^\infty e^{tx} f_X(x) dx$$

και η γνώση των ιδιοτήτων της κατανομής επιτρέπει τον υπολογισμό καλύτερων φραγμάτων.

Επιλέγοντας $\bar{B}(y) = e^{-ky}$ για παράμετρο $k > 0$, και εφόσον για την ουρά

$$\bar{V}(x) = \bar{B}(x) = e^{-kx}$$

ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$\bar{V}(x)\bar{B}(y) \le \bar{V}(x+y), \quad x, y \ge 0 \text{ και}$$

$$\bar{V}(x)\bar{B}(y) \ge \bar{V}(x+y), \quad x, y \ge 0 \text{ και}$$

για τις παραμέτρους $0 < \varphi_1 < 1$ και $k > 0$ ισχύει $\int_0^\infty e^{ky} dF(y) = \frac{1}{\phi_1}$, (δηλαδή η

παράμετρος $k > 0$ είναι λύση της προσαρμοσμένης εξίσωσης του Lundberg

$$\int_0^\infty e^{ky} dF(y) = \frac{1}{\phi}),$$

τότε για 0 < φ < 1 παραθέτουμε τα κάτωθι λήμματα.

Λήμμα 3.1.1. Αν $a_{n+1} \le \phi \cdot a_n, \quad n = 0,1,2,...$ ισχύει

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi} \cdot e^{-kx}, \quad x \ge 0$$

Απόδειξη 3.1.1. Χρησιμοποιώντας το λήμμα 1.1.3 για $\bar{B}(x) = e^{-kx}$

Λήμμα 3.1.2. Αν $a_{n+1} \ge \phi \cdot a_n, \quad n = 0,1,2,...$ ισχύει

$$\bar{G}(x) \ge \frac{1-p_0}{\phi} \cdot \gamma(x) \cdot e^{-kx}, \quad x \ge 0$$

όπου

$$m = \inf\{x : F(x) = 1\}$$

και $\gamma(x) = \max\{\phi \cdot \bar{F}(x), e^{-km}\}$.

Απόδειξη 3.1.2. Χρησιμοποιώντας το λήμμα 1.2.3 για $\bar{B}(x) = e^{-kx}$

Στην περίπτωση όπου περαιτέρω περιορισμοί ισχύουν για τις κατανομές των ατομικών απαιτήσεων τότε ισχύουν:

Λήμμα 3.1.3 Αν $a_{n+1} \le (\ge) \phi \cdot a_n, \quad n = 0,1,2,...$ τότε ισχύει

$$\bar{G}(x) \le (\ge) \frac{1-p_0}{\phi \cdot \int_0^\infty e^{ky} dH_x(y)} \cdot e^{-kx}, \quad x \ge 0$$

όπου για την περίπτωση του άνω φράγματος ισχύει $\bar{H}_x(y) \leq \inf_{0 \leq z \leq x, \bar{F}(z)>0} \frac{\bar{F}(z+y)}{\bar{F}(z)}, \quad y \geq 0$ και για την περίπτωση του κάτω φράγματος ισχύει $\bar{H}_x(y) \geq \sup_{0 \leq z \leq x, \bar{F}(z)>0} \frac{\bar{F}(z+y)}{\bar{F}(z)}, \quad y \geq 0$

Απόδειξη 3.1.3. Η περίπτωση του άνω και κάτω φράγματος της ουράς της κατανομής $G(x)$ αποδεικνύεται από τα θεωρήματα 2.2 και 2.3 αντίστοιχα αν εφαρμόσουμε $\bar{V}(x) = \bar{B}(x) = e^{-kx}$.

Λήμμα 3.1.4. Αν $a_{n+1} \leq \phi \cdot a_n, \quad n = 0,1,2,...$ και αν η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ ικανοποιεί τη σχέση (MWUC):

$$\bar{F}_1(x+y) \geq \bar{F}(x) \cdot \int_y^{\infty} \bar{F}(t)\,dt / E(Y) = \bar{F}(x) \cdot \bar{F}_1(y)$$

τότε ισχύει

$$\bar{G}(x) \leq (1-p_0) \cdot e^{-kx}, \quad x \geq 0$$

ενώ για $a_{n+1} \geq \phi \cdot a_n, \quad n = 0,1,2,...$ και αν η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ ικανοποιεί τη σχέση (NBUC):

$$\bar{F}_1(x+y) \leq \bar{F}(x) \cdot \int_y^{\infty} \bar{F}(t)\,dt / E(Y) = \bar{F}(x) \cdot \bar{F}_1(y)$$

τότε ισχύει

$$\bar{G}(x) \geq (1-p_0) \cdot e^{-kx}, \quad x \geq 0$$

Απόδειξη 3.1.4. Με βάση το θεώρημα 2.4 αν εφαρμόσουμε $\bar{V}(x) = \bar{B}(x) = e^{-kx}$.

Λήμμα 3.1.5. Αν $a_{n+1} \le \phi \cdot a_n, \quad n = 0,1,2,...$ και η συνάρτηση $r(y) = \dfrac{\bar{F}_1(y)}{\bar{F}(y)/E(Y)}$

είναι μη αύξουσα ως προς τη μεταβλητή y > 0, με $\bar{F}(x)$ > 0, τότε

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi} \cdot \bar{F}(x) / \int_x^\infty e^{kx} dF(y), \quad x \ge 0$$

ενώ αν $a_{n+1} \ge \phi \cdot a_n, \quad n = 0,1,2,...$ και η συνάρτηση $r(y) = \dfrac{\bar{F}_1(y)}{\bar{F}(y)/E(Y)}$ είναι μη

φθίνουσα ως προς τη μεταβλητή y > 0, με $\bar{F}(x)$ > 0, τότε

$$\bar{G}(x) \ge \frac{1-p_0}{\phi} \cdot \bar{F}(x) / \int_x^\infty e^{kx} dF(y), \quad x \ge 0$$

Απόδειξη 3.1.5. Εφαρμόζοντας το θεώρημα 2.5 για $\bar{V}(x) = \bar{B}(x) = e^{-kx}$

Λήμμα 3.1.6. Αν $a_{n+1} \le \phi \cdot a_n, \quad n = 0,1,2,...$ και η συνάρτηση

$r(y) = \dfrac{\bar{F}_1(y)}{\bar{F}(y)/E(Y)} \le r, \quad 0 < r$ τότε

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi} \cdot \{1 - k \cdot r\} \cdot e^{-kx}, \quad x \ge 0$$

ενώ αν $a_{n+1} \ge \phi \cdot a_n, \quad n = 0,1,2,...$ και η συνάρτηση $r(y) = \dfrac{\bar{F}_1(y)}{\bar{F}(y)/E(Y)} \ge r, \quad 0 < r$

τότε

$$\bar{G}(x) \ge \frac{1-p_0}{\phi} \cdot \{1 - k \cdot r\} \cdot e^{-kx}, \quad x \ge 0$$

Απόδειξη 3.1.6. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 2.6 για $\bar{V}(x) = \bar{B}(x) = e^{-kx}$.

Λήμμα 3.1.7. Αν $a_{n+1} \le \phi \cdot a_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$ και η συνάρτηση $r(y) = \dfrac{\bar{F}_1(y)}{\bar{F}(y)/E(Y)} \ge r(0)$, τότε

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi} \cdot \{1 - k \cdot E(Y)\} \cdot e^{-kx}, \qquad x \ge 0$$

ενώ για $a_{n+1} \le \phi \cdot a_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$ και η συνάρτηση $r(y) = \dfrac{\bar{F}_1(y)}{\bar{F}(y)/E(Y)} \le r(0)$,

τότε

$$\bar{G}(x) \ge \frac{1-p_0}{\phi} \cdot \{1 - k \cdot E(Y)\} \cdot e^{-kx}, \qquad x \ge 0$$

Απόδειξη 3.1.7. Εφαρμόζουμε το λήμμα 3.6 για $r = E(Y)$.

Λήμμα 3.1.8. Αν $a_{n+1} \le \phi \cdot a_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$ και η συνάρτηση $r(y) = \dfrac{\bar{F}_1(y)}{\bar{F}(y)/E(Y)} \ge r(\infty)$, τότε

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi} \cdot \{1 - k \cdot r(\infty)\} \cdot e^{-kx}, \qquad x \ge 0$$

ενώ για $a_{n+1} \ge \phi \cdot a_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$ και η συνάρτηση $r(y) = \dfrac{\bar{F}_1(y)}{\bar{F}(y)/E(Y)} \le r(\infty)$,

τότε

$$\bar{G}(x) \ge \frac{1-p_0}{\phi} \cdot \{1 - k \cdot r(\infty)\} \cdot e^{-kx}, \qquad x \ge 0$$

Απόδειξη 3.1.8. Εφαρμόζουμε το λήμμα 3.6 για $r = r(\infty)$

3.2 Φράγματα Pareto

3.2 Φράγματα Pareto

Τα εκθετικά φράγματα είναι ιδιαιτέρως χρήσιμα εφόσον όμως υπάρχει η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής και ορίζεται πεπερασμένος αριθμός ροπών (έως τάξη m): $E\left(X^j\right)<\infty, \quad j \le m$. Στην περίπτωση της κατανομής της Pareto αυτό δεν ισχύει. Πράγματι, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αυτής με παραμέτρους α > 0 και δ > 0, είναι

$$f(x)=\frac{a\delta^a}{(x+\delta)^{a+1}}, \qquad x>0$$

με ουρά

$$\bar{F}(x)=\frac{\delta^a}{(x+\delta)^a}, \qquad x\ge 0$$

Η ροπογγενήτρια συνάρτηση είναι

$$M_X(t)=\int_0^\infty e^{tx}\cdot\frac{a\delta^a}{(x+\delta)^{a+1}}dx \to \infty$$

εφόσον $\lim_{x\to\infty} e^{tx}\cdot\frac{a\delta^a}{(x+\delta)^{a+1}}=\infty$ (για τη συνάρτηση $g(x)\ge 0$ η συνθήκη $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή ώστε να ισχύει $\int_0^\infty g(x)dx<\infty$ κάτω και υπό άλλες συνθήκες ασφαλώς. Αν $\lim_{x\to\infty} g(x)>0$ τότε ισχύει ότι $\int_0^\infty g(x)dx=\infty$).

Η κατανομή της Pareto είναι ιδιότητας $\bar{F}(x+y)\ge\bar{F}(x)\cdot\bar{F}(y), \quad x,y\ge 0$ και αυτό διευκολύνει την επιλογή της ουράς της κατανομής

$$\bar{B}(y) = \bar{V}(y) = (1 + k \cdot y)^{-m}, \qquad k > 0$$

όπου η παράμετρος k ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_0^\infty (1 + ky)^m \, dF(y) = \frac{1}{\phi_1}.$$

Για το συντελεστή m αν πρόκειται για ακέραιο σε συνδυασμό με την παράμετρο k ισχύει

$$\sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} E\left(Y^j\right) k^j = \frac{1}{\phi_1} - 1.$$

Αν $m = 1$ τότε $k = \dfrac{(1-\phi_1)}{\phi_1 E(Y)}$ και αν $m = 2$ τότε

$$k = \frac{\sqrt{\dfrac{E\left(Y^2\right)}{\phi_1} - Var(Y) - E(Y)}}{E\left(Y^2\right)}.$$

Γενικότερα για $m \geq 1$ η συνάρτηση $\dfrac{1}{\bar{V}(y)} = (1 + k \cdot y)^m$ είναι κυρτή για την τιμή φ_1 ώστε

$$\frac{1}{\phi_1} = \int_0^\infty (1 + k \cdot y)^m \, dF(y) \geq \left(1 + k \cdot E(Y)\right)^m \Leftrightarrow k \leq \frac{\phi_1^{-1/m} - 1}{E(Y)}$$

Με βάση τα παραπάνω αποκτούμε τα κάτωθι φράγματα Pareto.

Λήμμα 3.2.1. Αν $0 < \varphi_1 < 1$ και $a_{n+1} \leq \phi \cdot a_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$, k, $m > 0$, τότε

$$\bar{G}(x) \leq \frac{1 - p_0}{\phi_1}(1 + kx)^{-m}, \qquad x \geq 0$$

Απόδειξη 3.2.1. Εφαρμόζουμε το λήμμα 1.1.3. με $\bar{B}(y) = (1 + ky)^{-m}$

Λήμμα 3.2.2. Αν 0 < φ1 < 1 και $a_{n+1} \le \phi \cdot a_n$, $n = 0,1,2,\ldots$, και $\int_0^{\infty} (1+ky)^m \, dF(y) = \frac{1}{\phi_1}$, $k > 0$ και $m \ge 1$, τότε

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi_1}\left(1+k \cdot x + k \cdot r_*(x)\right)^{-m}, \qquad x \ge 0$$

όπου

$$r_*(x) = \inf_{0 \le z \le x, \bar{F}(z) > 0} r(z) .$$

Απόδειξη 3.2.2. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 2.4 με $\bar{B}(y) = \bar{V}(y) = (1+ky)^{-m}$

Λήμμα 3.2.3. Αν 0 < φ1 < 1 και $a_{n+1} \le \phi \cdot a_n$, $n = 0,1,2,\ldots$, k > 0, $m \in \{1,2,3,\ldots.\}$ και (NWUC) $\bar{F}(x+y) \ge \bar{F}(x) \cdot \bar{F}(y)$, $x, y \ge 0$ τότε

$$\bar{G}(x) \le \left\{ \frac{1-p_0}{\phi_1}(1+k \cdot x)^m + \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} E\left(Y^j\right) k^j (1+k \cdot x)^{m-j} \right\}^{-1}, \qquad x \ge 0$$

Απόδειξη 3.2.3. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 2.4. με $\bar{B}(y) = \bar{V}(y) = (1+ky)^{-m}$ ώστε

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi_1}\left\{ \int_0^{\infty} (1+kx+ky)^m \, dF(y) \right\}^{-1}, \qquad x \ge 0$$

όπου $(1+kx+ky)^m = \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} (ky)^j (1+k \cdot x)^{m-j}$.

Λήμμα 3.2.4. Αν $0 < \varphi_1 < 1$ και $a_{n+1} \le \phi \cdot a_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$, $\int_0^\infty (1+ky)^m \, dF(y) = \frac{1}{\phi_1}$,

$k > 0$, $m \in \{1,2,3,\ldots.\}$ και η συνάρτηση

$r(y) = \int_y^\infty \bar{F}(x)dx / \bar{F}(y) = \frac{\bar{F}_1(y)}{\bar{F}(y)/E(Y)} \ge r > 0$ τότε

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi_1 (kr)^m m!} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} \left(\frac{1+kx}{kr} \right)^j \right\}^{-1}, \qquad x \ge 0$$

Απόδειξη 3.2.4. Από το θεώρημα 2.6 με $\bar{B}(y) = \bar{V}(y) = (1+ky)^{-m}$ τότε και

$$\overline{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi_1} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^\infty (1 + \kappa x + \kappa y)^m e^{-y/r} dy \right\}^{-1}, \quad x \ge 0.$$

Η αλλαγή στη μεταβλητή ολοκλήρωσης από y σε $t = (1 + kx + ky)/(kr)$ οδηγεί σε

$$\frac{1}{r} \int_0^\infty (1+kx+ky)^m e^{-y/r} dy = (kr)^m e^{\frac{1+kx}{kr}} \int_{\frac{1+kx}{kr}}^\infty t^m e^{-t} dt$$

δηλαδή, $\bar{G}(x) \le \frac{(1-p_0) e^{-\frac{1+kx}{kr}}}{\phi_1 (kr)^m} \left\{ \int_{\frac{1+kx}{kr}}^\infty t^m e^{-t} dt \right\}^{-1}, x \ge 0$.

Εφόσον, $\int_{\frac{1+kx}{kr}}^\infty t^m e^{-t} dt = (m!) e^{-\frac{1+kx}{kr}} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \left(\frac{1+kx}{kr} \right)^j$ τότε αντικαθιστώντας στην παραπάνω ανισότητα προκύπτει το ζητούμενο άνω φράγμα της ουράς της $G(x)$.

Στην περίπτωση που εξετάζουμε εδώ, αν γενικότερα $m \ge 1$ και όχι κατά ανάγκη ακέραιος, τότε αν $a_{n+1} \le \phi \cdot a_n$ θα ισχύει

$$\bar{G}(x) \le \frac{(1-p_0)e^{-\frac{1+kx}{kr}}}{\phi_1 (kr)^m \Gamma(m+1)} \left\{1-\Gamma\left(m+1, \frac{1+kx}{kr}\right)\right\}^{-1}, \qquad x \ge 0$$

όπου $\Gamma(a,x) = \int_0^x \frac{t^{a-1}e^{-t}}{\Gamma(a)} dt$ είναι η συνάρτηση γάμα.

Λήμμα 3.2.5. Αν $0 < \varphi_1 < 1$ και $a_{n+1} \le \phi \cdot a_n, \quad n = 0,1,2,\dots$, $\int_0^\infty (1+ky)^m \, dF(y) = \frac{1}{\phi_1}$, $k > 0$, $m \in \{1,2,3,\dots\}$, $r(y) = \frac{\bar{F}_1(y)}{\bar{F}(y)/E(Y)} \ge r(0) > 0$ ($F(y)$: NWUE) τότε

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi_1 (kE(Y))^m m!} \left\{\sum_{j=1}^m \frac{1}{j!}\left(\frac{1+kx}{kE(Y)}\right)^j\right\}^{-1}, \qquad x \ge 0$$

Απόδειξη 3.2.5. Εφαρμόζουμε το λήμμα 3.2.4 με $r = E(Y)$.

Λήμμα 3.2.6. Αν $0 < \varphi_1 < 1$ και $a_{n+1} \le \phi \cdot a_n, \quad n = 0,1,2,\dots$, $\int_0^\infty (1+ky)^m \, dF(y) = \frac{1}{\phi_1}$, $k > 0$, $m \in \{1,2,3,\dots\}$, $r(y) = \frac{\bar{F}_1(y)}{\bar{F}(y)/E(Y)} \ge r(\infty) > 0$, ($F(y)$: UBAE) τότε

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi_1 (k \cdot r(\infty))^m m!} \left\{\sum_{j=1}^m \frac{1}{j!}\left(\frac{1+kx}{k \cdot r(\infty)}\right)^j\right\}^{-1}, \qquad x \ge 0$$

Απόδειξη 3.2.6. Εφαρμόζουμε το λήμμα 3.2.4 με $r = r(\infty)$.

Κεφάλαιο 4. Άνω και κάτω φράγματα για την περίπτωση της σύνθετης γεωμετρικής και ανάλογων κατανομών.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τη γεωμετρική και αρνητική διωνυμική κατανομή πλήθους απαιτήσεων.

4.1 Περιγραφή άνω και κάτω φραγμάτων

Η γεωμετρική κατανομή G(p) με παράμετρο $0 < p < 1$, είναι το πλήθος $n = 0, 1, 2, ...$ αποτυχών δοκιμασιών (ανεξάρτητων μεταξύ τους με πιθανότητα επιτυχίας p ανά δοκιμή) μέχρι την πρώτη επιτυχία εκφραζόμενη ως τυχαία μεταβλητή N με συνάρτηση πιθανότητας $P(N=n) = p\cdot(1-p)^n$, μέση τιμή $E(N) = \frac{1-p}{p}$, διασπορά $V(N) = \frac{1-p}{p^2}$, ροπογεννήτρια συνάρτηση

$$M_N(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^t}$$

και πιθανογεννήτρια συνάρτηση

$$P_N(t) = \frac{p}{1-(1-p)t}.$$

Η πιο απλή περίπτωση περιγραφής της κατανομής της ουράς των συνολικών απαιτήσεων $\bar{G}(x)$ σχετίζεται με την εκθετική κατανομή ατομικών απαιτήσεων παραμέτρου $\lambda > 0$. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση των συνολικών απαιτήσεων είναι

$$M(t) = P_N(M_X(t)) = \frac{\lambda p}{\lambda p - t}$$

και αντιστοιχεί στην εκθετική κατανομή παραμέτρου λp με ουρά:

$$\bar{G}(x) = e^{-\lambda p x}$$

Αντίστοιχα, η αρνητική διωνυμική Nbin(r, p), με παραμέτρους r = 1, 2, ... και 0 < p < 1 είναι το πλήθος n = 0, 1, 2, ... αποτυχών δοκιμασιών (ανεξάρτητων μεταξύ τους με πιθανότητα επιτυχίας p ανά δοκιμή) μέχρι την r- επιτυχία εκφραζόμενη ως τυχαία μεταβλητή N με συνάρτηση πιθανότητας $P(N = n) = p \cdot (1 - p)^n$,μέση τιμή

$E(N) = r \cdot \dfrac{1-p}{p}$, διασπορά $V(N) = r \cdot \dfrac{1-p}{p^2}$, ροπογεννήτρια συνάρτηση

$$M_N(t) = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^t} \right)^r$$

και πιθανογεννήτρια συνάρτηση

$$P_N(t) = \left(\frac{p}{1-(1-p)t} \right)^r .$$

Για την ειδική περίπτωση συνάρτηση πιθανότητας

$$P(N = n) = p_n = (1 - p_0)(1 - \phi)\phi^{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

όπου 0 < φ < 1, πρόκειται για την τροποποιημένη γεωμετρική. Αν οι συντελεστές της ακολουθίας $\{\alpha_n\}_n$ ώστε

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k = (1 - p_0)\phi^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

τότε ισχύει $a_{n+1} = \phi a_n$

Αν διαφορετικά $a_{n+1} \le \phi a_n$ ή $a_{n+1} \ge \phi a_n$ τότε υφίστανται φράγματα για την ουρά των συνολικών απαιτήσεων $\bar{G}(x)$ ως προς την συνάρτηση κατανομής $B(y)$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_0^{\infty} \left\{ \bar{B}(y) \right\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi}$$

Αν $\bar{B}(x) = e^{-kx}$ τότε $\bar{V}(x) = \bar{B}(x) = e^{-kx}$ και ο συντελεστής επιλέγεται ώστε να ισχύει

$$\int_0^{\infty} e^{ky} dF(y) = \frac{1}{\phi}$$

Τα άνω και κάτω φράγματα για την ουρά των συνολικών απαιτήσεων $\bar{G}(x)$ ορίζονται σε σχέση με τους όρους α_1(x) και α_2(x) όπου

$$\frac{1}{\alpha_1(x)} = \inf_{0 \le z \le x, \bar{F}(z) > 0} \int_z^{\infty} e^{ky} dF(y) / \left\{ e^{kz} \bar{F}(z) \right\}, \qquad x \ge 0$$

και

$$\frac{1}{\alpha_2(x)} = \sup_{0 \le z \le x, \bar{F}(z) > 0} \int_z^{\infty} e^{ky} dF(y) / \left\{ e^{kz} \bar{F}(z) \right\}, \qquad x \ge 0$$

Σε ότι αφορά τη συνάρτηση πιθανότητας $p_n = P(N = n)$, n = 1, 2, 3,... αν $0 < \varphi < 1$ και $k > 0$ έχουμε τα εξής φράγματα για την ουρά των συνολικών απαιτήσεων $\bar{G}(x)$:

Λήμμα 4.1. Αν $p_n = (1 - p_0)(1 - \phi)\phi^{n-1}$ τότε ισχύει

$$\frac{1 - p_0}{\phi} \alpha_2(x) e^{-kx} \le \bar{G}(x) \le \frac{1 - p_0}{\phi} \alpha_1(x) e^{-kx}, \qquad x \ge 0$$

Απόδειξη 4.1. Εφαρμόζουμε τα λήμματα 1.1.1 και 1.1.3

Λήμμα 4.2. Επιπρόσθετα του 7.1, αν $\int_0^\infty e^{ky} dF(y) = \frac{1}{\phi}$ τότε για $\gamma(x) = \max\{\phi \bar{F}(x), e^{-km}\}, m = \inf\{x : F(x) = 1\}$ ισχύει

$$\frac{1-p_0}{\phi} \gamma(x) e^{-kx} \leq \bar{G}(x) \leq \frac{1-p_0}{\phi} e^{-kx}, \qquad x \geq 0$$

Απόδειξη 4.2. Εφαρμόζουμε τα θεωρήματα 3.1 και 3.2.

Λήμμα 4.3. Επιπρόσθετα των 4.1 και 4.2, αν η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ είναι IMRL τότε

$$\frac{(1-p_0)\bar{F}(x)}{\phi \int_x^\infty e^{ky} dF(y)} \leq \bar{G}(x) \leq (1-p_0) e^{-kx}, \qquad x \geq 0$$

Απόδειξη 4.3. Εφόσον η συνάρτηση IMRL συνεπάγεται σε NWUC τότε εφαρμόζονται τα θεωρήματα 3.4 και 3.5.

Λήμμα 7.4. Επιπρόσθετα των 4.1 και 4.2, αν η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ είναι DMRL και $\bar{F}(x) > 0$ τότε

$$(1-p_0) e^{-kx} \leq \bar{G}(x) \leq \frac{(1-p_0)\bar{F}(x)}{\phi \int_x^\infty e^{ky} dF(y)}, \qquad x \geq 0$$

Απόδειξη 4.4. Εφόσον η συνα΄ρτηση DMRL συναπάγεται NBUC τότε εφαρμόζουμε

τα θεωρήματα 3.4 και 3.5.

Λήμμα 4.5. Επιπρόσθετα των 4.1 και 4.2, αν η συνάρτηση $r(y)=\frac{\int_y^\infty \bar{F}(x)dx}{\bar{F}(y)}=\frac{E(Y)\bar{F}_1(x)}{\bar{F}(y)}$ ικανοποιεί την ανισότητα

$r_1 \le r(y) \le r_2, \quad y \ge 0, \quad 0 \le r_1, r_2 < \infty$, τότε

$$\frac{(1-p_0)(1-kr_2)e^{-kx}}{\phi} \le \bar{G}(x) \le \frac{(1-p_0)(1-kr_1)e^{-kx}}{\phi}$$

Απόδειξη 4.5. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 3.6

Θεώρημα 4.1. Συνολικά των λημμάτων 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 και 4.5 παραθέτουμε την ανισότητα κάτω και άνω φράγματος για την ουρά των συνολικών απαιτήσεων $\bar{G}(x)$:

$$\bar{G}(x) \le \frac{(1-p_0)\alpha_1(x)e^{-kx}}{\phi} - (1-p_0)\left\{\alpha_1(x)e^{-kx}\int_x^\infty e^{ky}dF(y) - \bar{F}(x)\right\}$$

και

$$\bar{G}(x) \ge \frac{(1-p_0)\alpha_2(x)e^{-kx}}{\phi} + (1-p_0)\left\{\bar{F}(x) - \alpha_2(x)e^{-kx}\int_x^\infty e^{ky}dF(y)\right\}$$

Απόδειξη 4.1 θεωρήματος. Από τις σχέσεις

$$\overline{G}_k(z) = \sum_{m=0}^{k} a_m \left\{\overline{F}^{*(m+1)}(z) - \overline{F}^{*m}(z)\right\}, \quad z \ge 0$$

και

$$\lim_{k\to\infty} \overline{G}_k(z) = \overline{G}(z),$$

για $k\to\infty$ $\bar{G}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left\{\bar{F}^{*(m+1)}(x) - \bar{F}^{*m}(x)\right\}$

και $\int_0^x \bar{G}(x-y)\,dF(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{\bar{F}^{*(m+2)}(x) - \bar{F}^{*(m+1)}(x)\right\}$. Τότε για $\alpha_{m+1} = \varphi\ \alpha_m$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \phi\int_0^x \overline{G}(x-y)dF(y) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1}\left\{\overline{F}^{*(m+2)}(x) - \overline{F}^{*(m+1)}(x)\right\} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m\left\{\overline{F}^{*(m+1)}(x) - \overline{F}^{*m}(x)\right\} \\ &= \overline{G}(x) - a_0\overline{F}(x). \end{aligned}$$

δηλαδή, $\bar{G}(x) = \phi\int_0^x \bar{G}(x-y)\,dF(y) + (1-\rho_0)\bar{F}(x)$.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \overline{G}(x) &\leq (1-p_0)\int_0^x \alpha_1(x-y)e^{-\kappa(x-y)}dF(y) + (1-p_0)\overline{F}(x) \\ &\leq (1-p_0)\alpha_1(x)e^{-\kappa x}\int_0^x e^{\kappa y}dF(y) + (1-p_0)\overline{F}(x) \\ &= (1-p_0)\alpha_1(x)e^{-\kappa x}\left\{\frac{1}{\phi} - \int_x^{\infty} e^{\kappa y}dF(y)\right\} + (1-p_0)\overline{F}(x). \end{aligned}$$

Λήμμα 4.6. Επιπρόσθετα των 4.1 και 4.2 και $E(Y) = \int_0^{\infty} y\,dF(y) < \infty$, τότε

$$\bar{G}(x) \leq \frac{E(X)}{x + \dfrac{\phi}{1-p0}\cdot E(X)}, \qquad x \geq 0$$

Απόδειξη 4.6. Εφόσον $E(Y) < \infty$, η σχέση $\phi^{-1} = \int_0^{\infty} (1+ky)\, dF(y)$ ικανοποιείται για k = $(1 - \varphi) / \{\varphi E(Y)\}$, και από το λήμμα 3.2.1 για m = 1 έχουμε

$$\bar{G}(x) \le \frac{(1-p_0)E(Y)}{\phi E(Y)+(1-\phi)x}, x \ge 0$$

και

$$\sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = (1-p_0)\sum_{n=0}^{\infty}\phi^n = (1-p_0)/(1-\phi),$$

οπότε $E(X) = E(Y)\,(1 - p_0) / (1 - \varphi)$, άρα $E(Y) = E(X)\,(1 - \varphi) / (1 - p_0)$ και αντικαθις΄τωντας στην παραπάνω ανισότητα προκύπτει το ζητούμενο.

Θεώρημα 4.2. Ακολούθως του θεωρήματος σύμφωνα με το οποίο αν ισχύει $a_n \le K\phi^n$ όπου $\phi \in (0,1)$ και n = 1, 2, 3, ... τότε

$$\bar{G}(x) \le \frac{K}{\phi} \cdot \psi_\phi(x) - (K-a_0)\bar{F}(x)$$

ενώ αν ισχύει η αντίθετη ανισότητα $a_n \le K\phi^n$ τότε

$$\bar{G}(x) \ge \frac{K}{\phi} \cdot \psi_\phi(x) - (K-a_0)\bar{F}(x)$$

Απόδειξη θεωρήματος 4.2.

$$\begin{aligned}
\overline{G}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ \overline{F}^{*(n+1)}(x) - \overline{F}^{*n}(x) \right\} \\
&\le (\ge)\ a_0\overline{F}(x) + \frac{K}{\phi}\sum_{n=1}^{\infty}\phi^{n+1}\left\{ \overline{F}^{*(n+1)}(x) - \overline{F}^{*n}(x) \right\} \\
&= a_0\overline{F}(x) + \frac{K}{\phi}\left\{ \sum_{n=1}^{\infty}(1-\phi)\phi^n\overline{F}^{*n}(x) - \phi\overline{F}(x) \right\}
\end{aligned}$$

Αν τώρα $K = \alpha_0$, τότε $\bar{G}(x) \le (\ge) \frac{1-p_0}{\phi} \psi_\phi(x), x \ge 0$. Εφαρμόζοντας τα κάτω και άνω φράγματα των θεωρημάτων 1.1.1 και 1.2.1 στην ουρά της σύνθετης γεωμετρικής $\psi_\varphi(x)$, τότε έχουμε $\psi_\varphi(x) \le c_1(x)$ και $\psi_\varphi(x) \ge c_2(x)$ οπότε και

$$\overline{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi \overline{V}(0)} c_1(x) \text{ and } \overline{G}(x) \ge \frac{1-p_0}{\phi \overline{V}(0)} c_2(x).$$

Και στις δύο περιπτώσεις η συνάρτηση ψ_φ(x) της ουράς της κατανομής της σύνθετης γεωμετρικής περιγράφεται ως εξής:

$$\psi_\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\phi) \cdot \phi^n \cdot \bar{F}^{*n}(x)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $K = \alpha_0$ και $a_n \le K\phi^n$ τότε,

$$\bar{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi} \cdot \psi_\phi(x) \qquad x \ge 0$$

ενώ αν $a_n \le K\phi^n$ τότε

$$\bar{G}(x) \ge \frac{1-p_0}{\phi} \cdot \psi_\phi(x) \qquad x \ge 0$$

Εφαρμόζοντας τις ειδικές ανισωτικές σχέσεις $a_{n+1} \le \phi_1 a_n$ ή ισοδυνάμως $a_n \le a_n \phi_1^n, \quad n = 0,1,2,...$ ή $a_{n+1} \ge \phi_2 a_n$ ή ισοδυνάμως $a_n \le a_n \phi_1^n, \quad n = 0,1,2,...$και $\frac{1}{\phi_1} = \frac{1}{\phi_2} = \int_0^\infty \{\bar{B}(y)\}^{-1} dF(y)$ τότε η συνάρτηση ψ_φ(x) φράσσεται:

$$c_2(x) \le \psi_\phi(x) \le c_1(x)$$

όπου $\frac{1}{c_1(x)} = \inf_{0 \le z \le x, \bar{F}(z) > 0} c(x,z)$ και $\frac{1}{c_2(x)} = \sup_{0 \le z \le x, \bar{F}(z) > 0} c(x,z)$ ώστε να προκύπτει η κάτωθι ανισότητα φραγμάτων της ουράς της κατανομής των συνολικών απαιτήσεων:

$$\frac{1-p_0}{\phi \bar{V}(0)} \cdot c_2(x) \le \bar{G}(x) \le \frac{1-p_0}{\phi \bar{V}(0)} \cdot c_1(x)$$

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω για μίξη κατανομών Erlang, αν η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης κατανομής της μίξης είναι $\frac{d}{dy}F(y) = \sum_{k=1}^{r} q_k \frac{\beta(\beta y)^{k-1} e^{-\beta y}}{(k-1)!}$ τότε

$$\bar{G}(x) = e^{-\beta y} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{C}_j \cdot \frac{(\beta x)^j}{j!} \qquad x \ge 0$$

όπου $\bar{C}_j = \sum_{n=j+1}^{\infty} c_n$ και $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = P\{Q(z)\}$. Η συνάρτηση

$$P(z) = p_0 + (1-p_0)\frac{(1-\phi)z}{1-\phi z}$$

και

$$\sum_{j=0}^{\infty} \bar{C}_j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j+1}^{\infty} c_n z^j = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_n z^j = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-z^n}{1-z} \right) =$$
$$\frac{1-C(z)}{1-z} = (1-p_0) \cdot \frac{1-Q(z)}{1-z} \cdot \frac{1}{1-\phi Q(z)}$$

Θεώρημα 4.3. Ακολούθως του κάτωθι *θεωρήματος*, σύμφωνα με το οποίο αν η ακολουθία $\{p_n; n = 0,1,2,...\}$ είναι διακριτή σύνθετη γεωμετρική κατανομή, τότε είναι DS-NWU (Discrete Strongly – NWU).

Απόδειξη 4.3. Ισχύει εφόσον,

$$\begin{aligned} a_{m+n+1} &= Pr(N > m+n+1) \\ &\ge Pr(N > m + \frac{1}{2})Pr(N > n + \frac{1}{2}) \\ &= Pr(N > m)Pr(N > n) \\ &= a_m a_n \end{aligned}$$

Η συνάρτηση πιθανογεννήτριας της σύνθετης γεωμετρικής είναι:

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{1-p}{1-pQ(z)}, \qquad |z|<z_0$$

όπου $0<p<1$ και $Q(z)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$

Σε ισοδύναμη μορφή, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής είναι

$$P(z)=\frac{1-\alpha_0}{1-\alpha_0 K(z)}$$

όπου

$$0<\alpha_0=\frac{p(1-q_0)}{1-pq_0}<1$$

και

$$K(z)=\sum_{n=1}^{\infty} k_n z^n = \frac{Q(z)-q_0}{1-q_0}$$

Θεώρημα 4.4.

Έστω η ακολουθία $\{p_n; n=0,1,2,...\}$ είναι διακριτή σύνθετη γεωμετρική κατανομή με πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P(z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \dfrac{1-p}{1-pQ(z)}$, $|z|<z_0$ και η συνάρτηση $Q(z)$ είναι πιθανογεννήτρια κατανομής τύπου D-DFR (Discrete-DFR), τότε και η ακολουθία $\{p_n; n=0,1,2,...\}$ είναι DS-DFR (Discrete Strongly-DFR).

Απόδειξη 4.4 θεωρήματος. Εφόσον $k_n = q_n / (1 - q_0)$ και $\bar{K}_n = \dfrac{\bar{Q}_n}{1-q_0}$ όπου

$\bar{K}_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} k_j$. Η ακολουθία $\{k_n, n = 1, 2, 3, ...\}$ είναι D-DFR εφόσον η ακολουθία $\{q_n,$

$n = 1, 2, 3, ...\}$ είναι D-DFR. Εφόσον $a_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} p_j$ τότε και

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1 - P(z)}{1 - z} = a_0 \frac{1 - W(z)}{1 - z},$$

όπου

$$W(z) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n z^n = \frac{(1 - a_0)K(z)}{1 - a_0 K(z)},$$

το οποίο και οδηγεί σε $a_n = \alpha_0 \sum_{j=n+1}^{\infty} w_j$, όπου και η ακολουθία $\{w_n, n = 1, 2, 3, ...\}$ είναι D-DFR όπως επίσης και η ακολουθία $\{p_n, n = 1, 2, 3, ...\}$ είναι D-DFR με $p_1 = p_0\, a_0\, k_1 = p_0\, (1 - p_0)\, k_1 \leq p_0\, (1 - p_0)$ και κατ' επέκταση είναι DS-DFR.

Στη συνήθη των περιπτώσεων, δεν είναι απλοί οι όροι της ακολουθίας pn και ακολουθούμε την κάτωθι προσέγγιση:

$$P(z) = pP(z)Q(z) + (1-p)$$

εφόσον οι όροι της ακολουθίας ορίζονται ως:

$$p_n = p\sum_{k=0}^{n} q_k p_{n-k}, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Αν επίσης η συνάρτηση $Q(z)$ έχει ακτίνα σύγκλισης $\tau > 1$ ώστε $Q(\tau) = \dfrac{1}{p}$ τότε $z_0 = \tau$

και

$$p_n \sim \frac{1-p}{pQ'(z_0)}\left(\frac{1}{z_0}\right)^{n+1}, n \to \infty$$

Θεώρημα 4.5: Ακολούθως του θεωρήματος 4.4, τότε

$$a_n \le \gamma_n \left(\frac{1}{z_0}\right)^{n+1}, \qquad n = 0,1,2,...$$

όπου $\frac{1}{\gamma_n} = \inf_{m \in \{0,1,2,...,n\}, \bar{Q}_m > 0} \left\{ \frac{\sum_{j=m+1}^{\infty} q_j z_0^j}{z_0^{m+1} \bar{Q}_m} \right\}$.

Απόδειξη θεωρήματος 4.5. Αν $z_0 = 1$ τότε $\gamma_n = 1$. Γενικά, η ζώνη σύγκλισης z_0 ικανοποιεί τη σχέση $K(z_0) \le \frac{1}{a_0}$. Επίσης ισχύει ότι $k_n = \frac{q_n}{1-q_0}$ και $\bar{K}_n = \frac{\bar{Q}_n}{1-q_0} = k_{n+1} + k_{n+2} + ...$ Η ακολουθία γ_n είναι μη φθίνουσα και ικανοποιεί τη σχέση

$$\overline{K}_n \le \gamma_n \sum_{j=n+1}^{\infty} k_j z_0^{j-n-1}; \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

με ισότητα αν $\bar{K}_n = 0$. Επίσης

$$\frac{1}{\gamma_0} = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} q_j z_0^j}{z_0 \overline{Q}_0} = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} k_j z_0^j}{z_0 \overline{K}_0} = \frac{K(z_0)}{z_0}.$$

Συνεπώς, $\gamma_0 / z_0 = 1 / K(z_0) \ge a_0$. Επίσης,

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1 - a_0 K(z) - (1 - a_0)}{(1 - z)\{1 - a_0 K(z)\}} = \frac{a_0\{1 - K(z)\}}{(1 - z)\{1 - a_0 K(z)\}},$$

που δύναται να εκφρασθεί και ως

$$A(z) = a_0 K(z) A(z) + a_0\{1 - K(z)\}/(1 - z).$$

Λαμβάνοντας τώρα τη σειρά της ακολουθίας

$$a_n = a_0 \sum_{j=1}^{n} k_j a_{n-j} + a_0 \overline{K}_n; \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

αν $a_j \le \gamma_j z_0^{-j-1}$ για j = 0, 1, 2, ..., n-1, τότε

$$\begin{aligned} a_n &\le a_0 \sum_{j=1}^{n} k_j \gamma_{n-j} z_0^{j-n-1} + a_0 \gamma_n \sum_{j=n+1}^{\infty} k_j z_0^{j-n-1} \\ &\le a_0 \gamma_n z_0^{-n-1} \left\{ \sum_{j=1}^{n} k_j z_0^j + \sum_{j=n+1}^{\infty} k_j z_0^j \right\} \\ &= \gamma_n z_0^{-n-1} \{a_0 K(z_0)\} \end{aligned}$$

Με βάση το παραπάνω θεώρημα προκύπτουν τα κάτωθι χρήσιμα αποτελέσματα.

Λήμμα 4.5.1. $a_n \le \left(\dfrac{1}{z_0}\right)^{n+1}, \quad n = 0,1,2,...$

Απόδειξη 4.5.1. Εφόσον

$$\frac{\sum_{k=m+1}^{\infty} q_k z_0^k}{z_0^{m+1} \overline{Q}_m} \ge \frac{\sum_{k=m+1}^{\infty} q_k z_0^{m+1}}{z_0^{m+1} \overline{Q}_m} = 1,$$

τότε $\gamma_n \le 1$ και $a_n \le \gamma_n z_0^{-n-1} \le z_0^{-n-1}$.

Λήμμα 4.5.2 Αν η συνάρτηση $Q(z)$ είναι DS-NWU (Discrete Strongly-NWU) τότε,

$$a_n \le \frac{1}{Q(z_0)} \left(\frac{1}{z_0}\right)^{n+1}, \quad n = 0,1,2,...$$

Απόδειξη 4.5.2. Ισχύει για $z_0 = 1$. Αν $z_0 > 1$ τότε $\bar{Q}_{j+m+1} \geq \bar{Q}_j \bar{Q}_m$ και

$$\begin{aligned}
\sum_{j=m+1}^{\infty} q_j z_0^j &= \overline{Q}_m z_0^{m+1} + z_0^{m+1}(z_0-1)\sum_{j=0}^{\infty}\overline{Q}_{j+m+1} z_0^j \\
&\geq \overline{Q}_m z_0^{m+1}\left\{1+(z_0-1)\sum_{j=0}^{\infty}\overline{Q}_j z_0^j\right\} \\
&= \overline{Q}_m z_0^{m+1}\left\{1+(z_0-1)\frac{Q(z_0)-1}{z_0-1}\right\} \\
&= \overline{Q}_m z_0^{m+1}\{Q(z_0)\}.
\end{aligned}$$

Οπότε προκύπτει $1/\gamma_n \geq Q(z_0) \Leftrightarrow \gamma_n \leq 1/Q(z_0)$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται με την εφαρμογή του θεωρήματος 4.4.

Λήμμα 4.5.3. Επιπρόσθετα του 4.5.1, αν η συνάρτηση $Q(z)$ είναι D-NWU (Dicrete-NWU) τότε,

$$a_n \leq \frac{1}{Q(z_0)+q_0(z_0-1)}\left(\frac{1}{z_0}\right)^{n+1}, \qquad n = 0,1,2,...$$

Απόδειξη 4.5.3. Ισχύει για $z_0 = 1$. Αν $z_0 > 1$ τότε $\bar{Q}_{j+m} \geq \bar{Q}_j \bar{Q}_m$ και

$$\begin{aligned}
\sum_{j=m+1}^{\infty} q_j z_0^j &= \overline{Q}_m z_0^{m+1} + z_0^{m}(z_0-1)\sum_{j=1}^{\infty}\overline{Q}_{j+m} z_0^j \\
&\geq \overline{Q}_m z_0^{m+1} + \overline{Q}_m z_0^{m+1}\left(1-\frac{1}{z_0}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\overline{Q}_j z_0^j \\
&= \overline{Q}_m z_0^{m+1}\left\{1+\left(1-\frac{1}{z_0}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\overline{Q}_j z_0^j - 1 + q_0\right)\right\} \\
&= \overline{Q}_m z_0^{m+1}\left\{1+\frac{1}{z_0}(z_0-1)\left(\frac{Q(z_0)-1}{z_0-1}-1+q_0\right)\right\} \\
&= \overline{Q}_m z_0^{m+1}\left\{\frac{z_0+Q(z_0)-1+(z_0-1)(q_0-1)}{z_0}\right\} \\
&= \overline{Q}_m z_0^{m}\{Q(z_0)+q_0(z_0-1)\}.
\end{aligned}$$

Οπότε προκύπτει ότι $1 / \gamma_n \geq \{Q(z_0) + q_0 (z_0 - 1)\} / z_0$, που ολοκληρ΄βνει την απόδειξη.

Θεώρημα 4.6. Έστω η ακολουθία $\{p_n; n = 0,1,2,...\}$ είναι διακριτή σύνθετη γεωμετρική κατανομή με πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{1-p}{1-pQ(z)}$, $|z| < z_0$ και $\tau > 1$ ώστε $Q(\tau) = \frac{1}{p}$, τότε $z_0 = \tau$ και

$$a_n \geq \beta_n \left(\frac{1}{z_0}\right)^{n+1}, \qquad n = 0,1,2,...$$

όπου

$$\frac{1}{\beta_n} = \sup_{m \in \{0,1,2,...,n\}, \bar{Q}_m > 0} \left\{ \frac{\sum_{k=m+1}^{\infty} q_k z_0^k}{z_0^{m+1} \bar{Q}_m} \right\}$$

Απόδειξη θεωρήματος 4.6. $K(z_0) = 1 / a_0$ όπου $z_0 = \tau$ εφόσον $P(z) < \infty$ για $z < z_0$ και $P(z) = \infty$ για $z \geq z_0$. Η ακολουθία β_n είναι μη αύξουσα και ικανοποιεί τη σχέση

$$\overline{K}_n \geq \beta_n \sum_{j=n+1}^{\infty} k_j z_0^{j-n-1}; \quad n = 0,1,2,\cdots$$

Η συνέχεια της απόδειξης είναι ίδια με του θεωρήματος 4.5 αν αντικαταστήσουμε την ακολουθία γ_n με την ακολουθία β_n.

Θεώρημα 4.7. Έστω η ακολουθία $\{p_n; n = 0,1,2,...\}$ είναι διακριτή σύνθετη γεωμετρική κατανομή με πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{1-p}{1-pQ(z)}$, $|z| < z_0 = \tau$ και $\tau > 1$, και η συνάρτηση $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$ είναι τέτοια ώστε να ικανοποιεί τη σχέση

$$\bar{Q}^{*}_{m+j} \geq \frac{\bar{Q}_m \bar{Q}_j}{1-q_0}, \qquad j, m = 0,1,2,\ldots$$

όπου $Q(\tau) = \dfrac{1}{p}$ και $a_n \leq a_0 \left(\dfrac{1}{z_0}\right)^n, \qquad n = 0,1,2,\ldots.$

Στην περίπτωση δε όπου $a_n \geq a_0 \left(\dfrac{1}{z_0}\right)^n$ τότε $\bar{Q}^{*}_{m+j} \leq \dfrac{\bar{Q}_m \bar{Q}_j}{1-q_0}, \qquad j, m = 0,1,2,\ldots$

Απόδειξη 4.7. Ισχύει

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} \overline{Q}_j z_0^j = \mu_Q \left\{ \overline{Q}^*_m z_0^{m+1} + (z_0 - 1) \sum_{j=m+1}^{\infty} \overline{Q}^*_j z_0^j \right\}$$

και

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{j=m+1}^{\infty} q_j z_0^j}{z_0^{m+1} \overline{Q}_m} &= 1 + \frac{z_0 - 1}{z_0^{m+1} \overline{Q}_m} \sum_{j=m+1}^{\infty} \overline{Q}_j z_0^j \\
&= 1 + \frac{\mu_Q (z_0 - 1)}{z_0^{m+1} \overline{Q}_m} \left\{ \overline{Q}^*_m z_0^{m+1} + (z_0 - 1) \sum_{j=m+1}^{\infty} \overline{Q}^*_j z_0^j \right\} \\
&= 1 + \frac{\mu_Q (z_0 - 1) \overline{Q}^*_m}{\overline{Q}_m} + \frac{\mu_Q (z_0 - 1)^2}{z_0 \overline{Q}_m} \sum_{j=1}^{\infty} \overline{Q}^*_{m+j} z_0^j \\
&\geq (\leq) \quad 1 + \frac{\mu_Q (z_0 - 1) \overline{Q}^*_m}{\overline{Q}_m} + \frac{\mu_Q (z_0 - 1)^2}{z_0 (1 - q_0)} \sum_{j=1}^{\infty} \overline{Q}^*_j z_0^j.
\end{aligned}$$

Αν $m = 0$ και $\bar{Q}_0 = 1 - q_0$ τότε

$$\frac{\sum_{j=m+1}^{\infty} q_j z_0^j}{z_0^{m+1} \overline{Q}_m}$$

$$\geq (\leq) \quad 1 + \frac{\mu_Q (z_0 - 1) \overline{Q}^*_m}{\overline{Q}_m} + \frac{z_0 - 1}{z_0 (1 - q_0)} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \overline{Q}_j z_0^j - \mu_Q \overline{Q}^*_0 z_0 \right\}$$

$$= \quad 1+\mu_Q(z_0-1)\left\{\frac{\overline{Q}_m^*}{\overline{\overline{Q}}_m}-\frac{\overline{Q}_0^*}{\overline{\overline{Q}}_0}\right\}+\frac{z_0-1}{z_0(1-q_0)}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\overline{Q}_j z_0^j-\overline{Q}_0\right\}$$

Η παραπάνω διαδικασία για $j = 0$ οπότε και $\overline{Q}_0 = 1 - q_0$ έχει ως εξής:

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{j=m+1}^{\infty} q_j z_0^j}{z_0^{m+1}\overline{Q}_m} \quad \geq (\leq) \quad & 1+\frac{z_0-1}{z_0(1-q_0)}\left\{\frac{Q(z_0)-1}{z_0-1}-(1-q_0)\right\} \\ = \quad & 1+\frac{Q(z_0)-1}{z_0(1-q_0)}-\frac{z_0-1}{z_0} \\ = \quad & \frac{Q(z_0)-1+(1-q_0)}{z_0(1-q_0)} \\ = \quad & \frac{Q(z_0)-q_0}{z_0(1-q_0)}.\end{aligned}$$

και σε συνδυασμό με

$$\frac{\sum_{j=m+1}^{\infty} q_j z_0^j}{z_0^{m+1}\overline{Q}_m} \geq (\leq)\ \frac{K(z_0)}{z_0} = \frac{1}{a_0 z_0}$$

και $Q(z_0) = 1 / p$, $\gamma_n \leq \alpha_0 z_0$, ($\beta_n \geq \alpha_0 z_0$) προκύπτει η απόδειξη.

Με βάση τα παραπάνω θεωρήματα

Λήμμα 4.7.1. αν η ακολουθία $\{p_n; n = 0,1,2,...\}$ είναι διακριτή σύνθετη γεωμετρική κατανομή με πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \dfrac{1-p}{1-pQ(z)}$, $\quad |z| < z_0$ και η συνάρτηση $Q(z)$ είναι D-IMRL (Discrete-IMRL) καθώς επίσης και $\tau > 1$, $Q(\tau) = \dfrac{1}{p}$, τότε

$$z_0 = \tau \text{ και } a_n \le a_0 \left(\frac{1}{z_0}\right)^n, \qquad n = 0,1,2,....$$

ενώ αν η συνάρτηση $Q(z)$ είναι D-DMRL (Discrete-DMRL)(και ισχύουν οι συνθήκες $\tau > 1$, $Q(\tau) = \frac{1}{p}$) τότε $a_n \ge a_0 \left(\frac{1}{z_0}\right)^n, \quad n = 0,1,2,....$

Απόδειξη 4.7.1. Το αποτέλεσμα προκύπτει από το θεώρημα 4.7.

Λήμμα 4.7.2. Αν η ακολουθία $\{p_n; n = 0,1,2,...\}$ είναι διακριτή σύνθετη γεωμετρική κατανομή με πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{1-p}{1-pQ(z)}, \quad |z| < z_0$ και η συνάρτηση πιθανογεννήτριας $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$ είναι τέτοια ώστε η κατανομή $\{q_n; n = 0,1,2,...\}$ είναι D-NBU (Discrete-NBU), $\tau > 1$ και $Q(\tau) = \frac{1}{p}$ τότε

$$z_0 = \tau \text{ και } a_n \ge a_0 \left(\frac{1}{z_0}\right)^n, \qquad n = 0,1,2,....$$

ενώ αν η μόνη διαφορά είναι D-NWU αντί D-NBU τότε

$$a_n \le a_0 \left(\frac{1}{z_0}\right)^n, \qquad n = 0,1,2,....$$

Απόδειξη 4.7.2. Στην περίπτωση D-NBU $\bar{Q}_{j+m} \le \bar{Q}_j \bar{Q}_m$ ισχύει, και για m = j = 0 προκύπτει ότι $\bar{Q}_0 \ge 1$ και $q_0 = 0$. Συνεπώς

$$\sum_{n=j+m+1}^{\infty} q_n^* \le (\ge)\, \bar{Q}_m \sum_{n=j+1}^{\infty} q_n^*, \text{ i.e. } \sum_{n=j+1}^{\infty} \bar{Q}_{n+m} \le (\ge)\, \bar{Q}_m \sum_{n=j+1}^{\infty} \bar{Q}_n,$$

κ

και την εφαρμογή του θεωρήματος 4.7.

Λήμμα 4.7.3. Αν η ακολουθία $\{p_n; n=0,1,2,...\}$ είναι διακριτή σύνθετη γεωμετρική κατανομή με πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P(z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{1-p}{1-pQ(z)}$, $|z|<z_0>1$ τότε

$$\bar{G}(x) \le \gamma_\infty \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z_0}\right)\left(\frac{1}{z_0}\right)^n \bar{F}^{*n}(x), \qquad x \ge 0$$

όπου $\gamma_\infty = \lim_{n\to\infty}\gamma_n$ και $\frac{1}{\gamma_n} = \inf_{m\in\{0,1,2,...,n\},\bar{Q}_m>0}\left\{\frac{\sum_{j=m+1}^{\infty} q_j z_0^j}{z_0^{m+1}\bar{Q}_m}\right\}$

Αν επιπρόσθετα $Q_0 = 1/\alpha_0$ τότε

$$\bar{G}(x) \ge \beta_\infty \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z_0}\right)\left(\frac{1}{z_0}\right)^n \bar{F}^{*n}(x), \quad x \ge 0,$$

Όπου $\beta_\infty = \lim_{n\to\infty}\beta_n$ και β_n ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{1}{\beta_n} = \sup_{m\in\{0,1,2,\cdots,n\},\bar{Q}_m>0}\left\{\frac{\sum_{k=m+1}^{\infty} q_k z_0^k}{z_0^{m+1}\bar{Q}_m}\right\}$$

Απόδειξη 4.7.3. $K(z_0) = 1/\, a_0$ με $z_0 = \tau$ για $P(z) < \infty$ για $z < z_0$ και $P(z) = \infty$ για $z \ge z_0$.

Επίσης η β_n είναι μη αύξουσα και ικανοποιεί τη σχέση

$$\overline{K}_n \geq \beta_n \sum_{j=n+1}^{\infty} k_j z_0^{j-n-1}; \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Η συνέχεια της απόδειξης είναι ίδια με του θεωρήματος 4.7 αν αντικαταστήσουμε την ακολουθία γ_n με την ακολουθία β_n.

4.2 Εφαρμογή στην πιθανότητα χρεοκοπίας

Θεωρούμε ότι οι ζημιές ή συμβάντα λαμβάνουν χώρα σε πλήθος το οποίο μοντελοποιείται από την κατανομή Poisson την οποία θα συμβολίζουμε ως N. Τα χαρακτηριστικά αυτής είναι το διακριτό πλήθος που δύναται να έχει τιμές από 0 μέχρι το άπειρο (απροσδιόριστο) και έχει το μέγιστο βαθμό τυχαιότητας. Η κατανομή αυτή έχει σημαντική χρήση στην περιγραφή του πλήθους συμβάντων σε ένα ορισμένο χρονικό πλαίσιο το οποίο ονομάζουμε *μονάδα χρόνου*. Συνήθως η μονάδα χρόνου είναι τόσο μεγαλύτερη όσο λιγότερα συμβάντα υφίστανται. Έτσι, αν θέλουμε να μελετήσουμε τις πτώσεις επιβατηγών αεροσκαφών επιλέγουμε το έτος ως χρονική μονάδα, ενώ για τα τροχαία ατυχήματα επιλέγουμε την ημέρα ως χρονική μονάδα. Τέλος, η σημαντική πληροφορία που μας παρέχει η κατανομή αυτή των συμβάντων είναι το πλήθος και όχι το πότε αυτά λαμβάνουν χώρα στη μονάδα του χρόνου. Δηλαδή η πιθανότητα n- συμβάντων είναι ίδια ανεξάρτητα αν αυτά γίνουν στην αρχή, στο τέλος ή ομοιόμορφα στο χρόνο αναφοράς.

Ορίζουμε τη συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Poisson με παράμετρο $\lambda>0$ ως εξής

$$\Pr(N = x) = f(x; \lambda) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, x = 0,1,2, \ldots.$$

με αναμενόμενη τιμή και διασπορά ίσες με λ, και ροπογεννήτρια συνάρτηση

$$M_N(u) = e^{\lambda(e^u - 1)}$$

και πιθανογεννήτρια συνάρτηση

$$P_N(u) = e^{\lambda(u-1)}$$

Η παράμετρός λ είναι ο αναμενόμενος αριθμός ζημιών $E(N)$ όσο και η διασπορά Var(N) στη μονάδα του χρόνου και προσδιορίζεται από μεθόδους εκτίμησης όπως η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας και η μέθοδος ροπών (Ηλιόπουλος, 2013). Πιο αναλυτικά, ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου $\lambda > 0$ είναι ο δειγματικός μέσος του πλήθους ζημιών των n-προηγούμενων χρονικών περιόδων:

$$\hat{\lambda} = \bar{N} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} N_i$$

όπου N_i είναι το παρατηρούμενο πλήθος ζημιών της i- μοναδιαίας μονάδα χρόνου, $i = 1,\ldots,n$. Ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\lambda}$ της παραμέτρου $\lambda > 0$ είναι πλήρως αποτελεσματικός, δηλαδή είναι αμερόληπτος και ελάχιστης διασποράς σε σχέση με όποιον άλλο εκτιμητή $\tilde{\lambda}$ (Πολίτης, 2017):

$$E(\hat{\lambda}) = \lambda, \qquad Var(\hat{\lambda}) \leq Var(\tilde{\lambda})$$

Τέλος, ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας ταυτίζεται με τον εκτιμητή της μεθόδου των ροπών.

Η παράμετρος $\lambda > 0$ δεν είναι σταθερή αλλά δύναται να μεταβάλλεται και συνεπώς να τυχαιοποιείται ως τυχαία μεταβλητή (Κουτσόπουλος, 1999). Πρόκειται για την περίπτωση της εκ των προτέρων κατανομής και η τ.μ. του πλήθους των ζημιών N είναι δεσμευμένη κατανομή $N|\lambda$ ~Poisson(λ), όπου λ είναι η εκ των προτέρων κατανομή. Προκύπτει έτσι ότι ο αναμενόμενος αριθμός ζημιών ανεξάρτητα της παραμέτρου λ είναι

$$E(N) = E\{E(N|\lambda)\} = E(\lambda)$$

με αντίστοιχη διασπορά

$$Var(N) = Var\{E(N|\lambda)\} + E\{Var(N|\lambda)\} = Var(\lambda) + E(\lambda)$$

Ας πάρουμε την περίπτωση της μοντελοποίησης της εκ των προτέρων κατανομής λ ως εκθετική μέσης τιμής ίσης με την παράμετρο $\theta > 0$. Τότε ο αναμενόμενος αριθμός ζημιών στη μονάδα του χρόνου είναι $E(N) = E(\lambda) = \theta$ και η διασπορά είναι $Var(N) = Var(\lambda) + E(\lambda) = \theta^2 + \theta$

Αν επεκταθούμε σε χρόνο $t > 0$, τότε το πλήθος των ζημιών $N(t)$ είναι στοχαστική ανέλιξη Poisson με παράμετρο λt. Εδώ παρατηρούμε την εφαρμογή της αρχής της αναλογίας.

Η κατανομή Poisson συνδέεται με την εκθετική κατανομή, καθώς το μεσοδιάστημα εμφάνισης ζημιών είναι εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\lambda$ (ή ισοδύναμα παράμετρο $\lambda > 0$). Βασική προϋπόθεση είναι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και αυτό είναι σύνηθες στη θεωρία κινδύνου καθώς η ανέλιξη του πλήθους ζημιών $N(t)$ είναι ανανεωτική.

Οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των ζημιών, όπως είπαμε νωρίτερα, ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$, και η οποία χαρακτηρίζεται ως κατανομή με έλλειψη μνήμης. Πράγματι, η συνάρτησης κατανομής αυτής είναι

$$F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda y}, y > 0 \ .$$

και η πιθανότητα να μεσολαβήσει χρονικό διάστημα $Y < s+y$ (έως την επόμενη ζημιά) δοθέντος ότι $Y > s$ είναι ανεξάρτητη της τιμής s και ίση με την πιθανότητα να μεσολαβήσει χρονικό διάστημα $Y < y$:

$$P(Y < s + y | Y > s) = 1 - e^{-\lambda y} = P(Y < y)$$

Όπως η εκθετική κατανομή, έτσι και η ανέλιξη Poisson δεν έχει μνήμη.

Η συνολική ζημιά σε χρόνο t > 0 είναι επίσης σύνθετη Poisson (CP; Compound Poisson):

$$S(t) \sim CP(\lambda \cdot t,\, f_X),$$

όπου f_X είναι η συνάρτηση πυκνότητας ή πιθανότητας της ατομικής ζημιάς, και περιγράφεται από το κάτωθι μοντέλο συλλογικού κινδύνου

$$S(t) = \begin{cases} 0, & N(t) = 0 \\ X_1 + \ldots + X_{N(t)}, & N(t) > 0 \end{cases}$$

με αναμενόμενη ζημιά $E\left(S(t)\right) = \lambda \cdot t \cdot E\left(X\right)$ και διασπορά $Var\left(S(t)\right) = \lambda \cdot t \cdot E\left(X^2\right)$.

Αν η ατομική ζημιά είναι διακριτή, τότε η συνολική ζημιά είναι επίσης διακριτή τυχαία μεταβλητή με σ.π. $g(x)$ η οποία προσδιορίζεται από την αναδρομική σχέση:

$$g\left(x\right) = \begin{cases} e^{-\lambda t\left(f_X(0)-1\right)}, & x = 0 \\ \dfrac{\lambda t}{x} \cdot \sum_{u=1}^{x} u \cdot f_X\left(u\right) \cdot g\left(x-u\right), & x > 0 \end{cases}$$

4.3 Κλασσικό μοντέλο Χρεοκοπίας σε συνεχή χρόνο t > 0

Το πλεόνασμα $u(t)$ παριστάνεται με μια ανέλιξη στο χρόνο t > 0 και προσδιορίζεται από το απόθεμα u = $u(0)$, το ρυθμό (ή ένταση) εισροών c και το ρυθμό εκροών ή ζημιών λόγω απαιτήσεων $S(t)$:

$$u(t) = u + c \cdot t - S(t)$$

Η βασική υπόθεση της εταιρείας είναι η ένταση ταμειακών εισροών c να υπερβαίνει την αναμενόμενη συνολική ζημιά στη μονάδα του χρόνου $E(S(1)) = \lambda\, E(X)$, διότι σε αντίθετη περίπτωση η χρεοκοπία στο διηνεκές είναι βέβαιη (Πολίτης, 2017).

Η υπόθεση $c > \lambda E(X)$ είναι αναγκαία αλλά δεν μπορεί να αποτρέψει τη χρεοκοπία εφόσον μια μεγάλη ζημιά X δύναται να δημιουργήσει έλλειμμα πλεονάσματος $u(T) < 0$ όπου T είναι ο χρόνος χρεοκοπίας.

Ο χρόνος χρεοκοπίας *T;* είναι αυτός όταν η συνολική ζημιά υπερβεί το άθροισμα αποθέματος και εισροών:

$$u(T) < 0 \Leftrightarrow S(T) > u + c \cdot T,$$

και ορίζεται από τη σχέση

$$T = \begin{cases} inf\{\, t\colon U(t) < 0\} \\ \infty, U(t) > 0, \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Πρόκειται για ελλειμματική τυχαία μεταβλητή, εφόσον μπορεί με θετική πιθανότητα να απειρισθεί, υπό την προϋπόθεση ότι $c > \lambda$ Ε(X).

Μια βασική παράμετρος που καθορίζει σημαντικά την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι το απόθεμα της εταιρείας κατά την έναρξη της δραστηριότητας της, δηλαδή το χρόνο $t = 0$. Τελικά, σε συνδυασμό με το χρόνο $t > 0$, η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως διμετάβλητη συνάρτηση του αποθέματος u και του χρόνου t>0

$$\Psi\left(u,t\right) = \mathrm{P_r}\left(\exists\, \tau, 0 < \tau < t : u(\tau) < 0\right)$$

και είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του αποθέματος $\dfrac{\partial \Psi}{\partial u} < 0$ και γνησίως αύξουσα συνάρτηση του χρόνου $\dfrac{\partial \Psi}{\partial t} > 0$.

Αν και η πρώτη συνθήκη μας δείχνει λογική, η δεύτερη είναι μάλλον λίγο απαισιόδοξη για μακροπρόθεσμα σενάρια.

Είναι γεγονός λοιπόν ότι υψηλό απόθεμα μειώνει μεν την πιθανότητα χρεοκοπίας χωρίς όμως να είναι ικανή συνθήκη να τη διατηρήσει χαμηλή στο χρόνο. Για το λόγο αυτό επιβάλλεται αλλαγή στρατηγικής λαμβάνοντας υπόψη τα νέα δεδομένα σε ότι αφορά κυρίως την μοντελοποίηση της τ.μ. ύψους ζημιάς ή την θεώρηση της έντασης των ζημιών ως συνάρτηση του χρόνου $\lambda(t)$ παρά σταθερή. Στο διηνεκές πάντως η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ασυμπτωτικά μονομεταβλητή συνάρτηση ως προς το αρχικό απόθεμα:

$$\Psi(u) = \lim_{t \to \infty} \Psi(u, t)$$

Μια βασική και σχετικά απλή παράμετρος που καθορίζει τον κίνδυνο χρεοκοπίας είναι το περιθώριο ασφάλειας $\theta > 0$ που εκφράζει το σχετικό αναμενόμενο κέρδος για την εταιρεία στη μονάδα του χρόνου:

$$\theta = \frac{c}{\lambda \cdot E(X)} - 1$$

Το περιθώριο ασφάλειας είναι ανάλογο της ροής εισφορών και αντιστρόφως ανάλογο της έντασης ζημιών και αναμενόμενης ζημιάς. Όσο μεγαλύτερο είναι το περιθώριο ασφάλειας τόσο πρακτικά μειώνεται ο κίνδυνος χρεοκοπίας καθώς μεγαλώνει η απόσταση του κλάσματος από τη μονάδα ή ισοδύναμα μεγαλώνει η απόσταση του ρυθμού εισφορών από την συνολικό αναμενόμενο μέγεθος ζημιάς στη μονάδα του χρόνου. Το πρόβλημα είναι ότι υψηλές τιμές του περιθωρίου ασφάλειας, κυρίως θ>1, θέτουν θέμα χαμηλής ανταγωνιστικότητας βάζοντας σε κίνδυνο μελλοντικές ταμειακές εισροές (Πολίτης, 2017). Ένα για παράδειγμα υψηλό ασφάλιστρο μπορεί να διασφαλίζει την κάλυψη μεγάλου μεγέθους ζημιάς, αλλά δεν είναι ελκυστικό για να προσελκύσει υποψήφια άτομα προς ασφάλιση.

Το αναμενόμενο ύψος ζημιάς $E(X)$ και το περιθώριο ασφάλειας θ αποτελούν βασικές παραμέτρους για την πιθανότητα μη χρεοκοπίας $\delta(u) = 1-\Psi(u)$

η οποία υπολογίζεται από την διαφορική εξίσωση:

$$(\theta+1)\cdot E(X)\cdot\frac{d\delta(u)}{du}=\delta(u)-\int_0^u\delta(u-x)f(x)dx$$

με αρχική τιμή $\delta(0) = \theta/(1+\theta)$.

Στην περίπτωση $t\to\infty$, μπορεί να αποδειχθεί ότι ένα άνω και κάτω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι το εξής:

$$\frac{\bar{H}(u)}{\bar{H}(u)+\theta}\leq\Psi(u)\leq e^{-R\cdot u}$$

όπου

$$\bar{H}(u)=\frac{1}{E(X)}\int_u^\infty\bar{F}_X(x)dx$$

και ο συντελεστής προσαρμογής R είναι θετική λύση της εξίσωσης του Lundberg:

$$-\frac{1}{R}+\frac{1}{R}M_X(R)=\frac{c}{\lambda}$$

όπου $M_X(t)$ είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση του ύψους ατομικής ζημιάς X

Σε πολλές των περιπτώσεων, στην ατομική ζημιά προσαρμόζεται η εκθετική κατανομή με παράμετρο $\beta > 0$, και η πιθανότητα χρεοκοπίας στο διηνεκές υπολογίζεται με ακρίβεια από την σχέση $\Psi(u)=\Psi(0)\cdot e^{-R\cdot u}$ όπου ο συντελεστής προσαρμογής R ως λύση της εξίσωσης του Lundberg είναι

$$R = \beta \cdot \frac{\theta}{\theta + 1}.$$

Στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής ζημιάς, υπολογίζουμε το αποθεματικό ώστε η πιθανότητα χρεοκοπίας να είναι κάτω από ορισμένο επιθυμητό όριο πιθανότητας p:

$$\Psi(u) \le p \Leftrightarrow \Psi(0) \cdot e^{-R \cdot u} \le p \Leftrightarrow e^{-R \cdot u} \le \frac{p}{\Psi(0)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -R \cdot u \le \ln\left(\frac{p}{\Psi(0)}\right) \Leftrightarrow u \ge -\frac{1}{R} \cdot \ln\left(\frac{p}{\Psi(0)}\right)$$

Άρα $\min(u) = u_{\min} = -\frac{1}{R} \cdot \ln\left(\frac{p}{\Psi(0)}\right)$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{d}{dp} u_{\min} = -\frac{1}{R} \cdot \Psi(0) < 0$$

οπότε όσο μικρότερη επιθυμητή πιθανότητα χρεοκοπίας τόσο μεγαλύτερο το ελάχιστο απόθεμα. Επίσης, για μικρή επιθυμητή πιθανότητα χρεοκοπίας p και συνήθως $p < \Psi(0)$, όσο μεγαλύτερος ο συντελεστής προσαρμογής R τόσο πιο χαμηλό δύναται να είναι το ελάχιστο αποθεματικό.

Ένα άνω φράγμα για το συντελεστή προσαρμογής δίνεται από τη σχέση

$$R \le \frac{2 \cdot E(X) \cdot \theta}{E(X^2)}$$

Μια επίσης πολύ βασική τιμή στο διάγραμμα είναι η κατανομή των κλιμακωτών υψών ή πτώση πλεονάσματος.

Αν το μέγεθος αποζημίωσης είναι συνεχής τ.μ., τότε οι διαδοχικές πτώσεις πλεονάσματος είναι ισόνομες και ανεξάρτητες τ.μ. με συνάρτηση κατανομής

$$F_{L_1}(x) = \frac{1}{E(X)} \cdot \int_0^x \left(1 - F_X(t)\right) dt, \qquad x > 0$$

και σ.π.π. $f_{L1}(x) = \dfrac{1 - F_X(x)}{E(X)}, x > 0$.

Το άθροισμα των πτώσεων πλεονάσματος $L_1 + ... + L_k$ ορίζεται ως μέγιστη σωρευτική απώλεια L με ροπογεννήτρια συνάρτηση

$$M_L(u) = \frac{\theta}{1 + \theta - M_{L_1}(u)}$$

και συνάρτηση κατανομής $F_L(u) = \delta(u)$. Η κατανομή της L είναι σύνθετη γεωμετρική με συνάρτηση πιθανότητας $P\left(N = n\right) = p_n = \dfrac{\theta}{1+\theta} \cdot \left(\dfrac{1}{1+\theta}\right)^n, n = 0, 1, 2, ...$

Η μέση τιμή και διασπορά της μέγιστης σωρευτικής απώλειας είναι

$$E(L) = \frac{E(X^2)}{2\theta E(X)} = \left\{UB(R)\right\}^{-1}, \qquad Var(L) = \frac{E(X^3)}{3\theta E(X)} + \left(\frac{E(X^2)}{2\theta E(X)}\right)^2$$

όπου $UB(R)$ είναι το άνω φράγμα του συντελεστή προσαρμογής.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας δοθέντος αποθέματος $u > 0$ με την πρώτη απαίτηση ικανοποιεί τη σχέση

$$\Psi_1(u) = \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \left(1 - F_X\left(u + c \cdot t\right)\right) dt$$

ή ισοδυνάμως

$$\Psi_1(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^\infty \Psi_1(u - y) dH_1\left(y\right) + \frac{1}{1+\theta} \bar{H}_1\left(u\right)$$

όπου,

$$H_1(y) = \frac{1}{E(Y)} \int_0^y \bar{H}(t)\,dt, \qquad y \geq 0$$

Στην ειδική περίπτωση όπου η *H*(*y*) είναι μίξη κατανομών Erlang, οι Abate και Whitt (1999) παρουσίασαν μια αναλυτική συνάρτηση που περιγράφει την πιθανότητα χρεοκοπίας:

$$\Psi(u) = 1 - \frac{\theta e^{\tau u}}{1+\theta} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\tau)^k}{k!} \eta_k(u) \right\}$$

όπου $\tau = \dfrac{1}{(1+\theta)E(Y)}$ και $\eta_k(u) = \int_0^{\infty} (u-t)^k e^{-\tau t} dH^{*k}(t)$, και $H^{*k}(t)$ είναι η συνέλιξη *k*-βαθμού της *H*.

Η ακριβώς παραπάνω σχέση της πιθανότητας χρεοκοπίας χρησιμοποιήθηκε και από το Shiu (1989) για διακριτή κατανομή της *H*(*y*) και από τον Willmot (1988b) για κατανομή γάμμα με πρώτη παράμετρο μη ακέραια.

Η μοναδιαία θετική λύση κ της εξίσωσης

$$1 + \kappa(1+\theta)E(Y) = \int_0^{\infty} e^{\kappa t} dH(t)$$

ονομάζεται συντελεστής προσαρμογής και η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ασυμπτωτικά

$$\Psi(u) \to \frac{\theta E(Y)}{\int_0^{\infty} y e^{\kappa y} dH(y) - (1+\theta)E(Y)}, \qquad u \to \infty$$

και αναφέρεται ως ασυμπτωτική σχέση της πιθανότητας χρεοκοπίας κατά Cramer-Lundberg.

Στην περίπτωση που η κατανομή $H(y)$ είναι IFR τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας φράσσεται κάτω:

$$\Psi(u) \geq \left(1+\kappa\frac{c}{\lambda}\right)^{-1} e^{-\kappa u}$$

και αν είναι DFR τότε φράσσεται άνω

$$\Psi(u) \leq \left(1+\kappa\frac{c}{\lambda}\right)^{-1} e^{-\kappa u}$$

Στην περίπτωση της $H(y)$ ως DFR (1) ή IFR (2) τότε η κατανομή $H_1(y)$ είναι IMRL ή DMRL αντίστοιχα και ισχύουν

$$^{(1)}\Psi(u) \geq \frac{1}{1+\theta} e^{-\kappa u}, \qquad ^{(2)}\Psi(u) \leq \frac{1}{1+\theta} e^{-\kappa u}$$

και για την πιθανότητα χρεοκοπίας με μηδενικό απόθεμα ισχύει

$$^{(1)}\Psi(0) \geq \frac{1}{1+\kappa\frac{c}{\lambda}}, \qquad ^{(2)}\Psi(0) \leq \frac{1}{1+\kappa\frac{c}{\lambda}}$$

Τέλος, το κάτωθι θεώρημα προσδιορίζει τα φράγματα της πιθανότητα χρεοκοπίας με πολύ καλή εκτίμηση μικρές τιμές του περιθωρίου ασφάλειας. Για τους συντελεστές $\{q_k; k=1,2,3\}$ όπου $q_k = \int_0^\infty x^k dH(x)$

$$\frac{1}{1+\theta} e^{-\kappa_1 u} - K \leq \Psi(u) \leq \frac{1}{1+\theta} e^{-\kappa_1 u} + K$$

όπου

$$\kappa_1 = \frac{2q_1\theta}{q_2(1+\theta)}, \qquad K = \frac{4q_1q_3\theta}{3q_2^2(1+\theta)}$$

Κεφάλαιο 5. Ανανεωτικό μοντέλο θεωρίας κινδύνου.

5.1 Περιγραφή άνω και κάτω φραγμάτων

Έστω $\{X_1, X_2, \ldots\}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών (θετικά ορισμένες) με συνάρτηση κατανομής

$$A(x) = 1 - \bar{A}(x) = \mathrm{P_r}\left(X \le x\right),$$

αναμενόμενη τιμή

$$E\left(X\right) = \int_0^\infty x dA(x) = \int_0^\infty \bar{A}(x)$$

και μετασχηματισμό Laplace-Stiltjes

$$\tilde{a}\left(s\right) = \int_0^\infty e^{-sx} dA(x).$$

Επίσης έστω $\{Y_1, Y_2, \ldots\}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών (θετικά ορισμένες) και ανεξάρτητες με τις τυχαίες μεταβλητές $\{X_1, X_2, \ldots\}$ με συνάρτηση κατανομής

$$H\left(y\right) = 1 - \bar{H}\left(y\right) = \mathrm{P_r}\left(Y \le y\right)$$

αναμενόμενη τιμή

$$E\left(Y\right) = \int_0^\infty y dH\left(y\right) = \int_0^\infty \bar{H}\left(y\right) < E\left(X\right)$$

και μετασχηματισμό Laplace-Stiltjes

$$\tilde{h}\left(s\right) = \int_0^\infty e^{-sy} dH\left(y\right).$$

Ορίζουμε

$$H_1(y) = 1 - \bar{H}_1(y) = \int_0^y \bar{H}(t)\,dt / E(Y)$$

την συνάρτηση κατανομής ισορροπίας της $H(y)$ και

$$\tilde{h}_1(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\,dH_1(y).$$

Έστω ο τυχαίος περίπατος $\left\{ S_n = \sum_{k=1}^{n} (Y_k - X_k);\, n = 1, 2, ... \right\}$ με την οποία ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\psi(x) = \mathrm{P_r}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{S_n > x\} \right), \ x \geq 0$$

για την οποία προκύπτει ότι $\psi(x) = 1, \quad x \geq 0$ αν $E(Y) \geq E(X)$.

Σε συνδυασμό με τη θεωρία χρεοκοπίας του κεφαλαίου 4, η συνάρτηση $\psi(x)$ είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας για απόθεμα $x \geq 0$, Y_k είναι το μέγεθος της k- απαίτησης, $X_k = c\ T_k$, όπου c είναι ο ρυθμός εισφορών στη μονάδα του χρόνου και T_k είναι το μεσοδιάστημα μεταξύ της (k-1) και k απαίτησης. Συνεπώς S_n είναι η καθαρή μείωση της ανέλιξης πλεονάσματος μέχρι την n- απαίτηση. Η συνθήκη $E(Y) < E(X)$ διασφαλίζει την αβεβαιότητα χρεοκοπίας στο διηνεκές.

Στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας η κατανομή μεσοδιαστημάτων (ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές) είναι εκθετική παραμέτρου $\lambda > 0$ (βλ. κεφάλαιο 4) μέσης τιμής 1 / λ, όπου λ είναι ο ρυθμός απαιτήσεων στη μονάδα χρόνου. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση είναι

$$E\left(e^{Xt}\right) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \qquad \lambda > t$$

και μετασχηματισμό Laplace

$$\tilde{a}(s) = E\left(e^{-Xs}\right) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

Στο ανανεωτικό μοντέλο η κατανομή των μεσοδιαστημάτων δεν είναι εκθετική. Εντούτοις, οι τυχαίες μεταβλητές (ανεξάρτητες και ισόνομες) μεσοδιαστημάτων Y_1, Y_2, …. είναι μέσης τιμής $E(Y) = 1 / \lambda$.

Για παράδειγμα αν η κατανομή μεσοδιαστημάτων είναι Erlang με παραμέτρους $\nu = 2, 3, \ldots$ και $\beta > 0$ τότε $E(Y) = \nu / \beta = 1 / \lambda \Leftrightarrow \lambda = \beta / \nu$. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής αυτής είναι

$$E\left(e^{Xt}\right) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\nu}$$

και ο μετασχηματισμός Laplace είναι

$$\tilde{a}(s) = E\left(e^{-Xs}\right) = \left(\frac{\beta}{\beta + s}\right)^{\nu}$$

Σε άλλη περίπτωση που η κατανομή μεσοδιαστημάτων είναι μίξη εκθετικών με παραμέτρους $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\kappa$, $\kappa = 2, 3, \ldots$ με συντελεστές $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$ ώστε $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\kappa = 1$, τότε $E(Y) = \frac{a_1}{\beta_1} + \frac{a_2}{\beta_2} + \ldots + \frac{a_\kappa}{\beta_\kappa} = \frac{1}{\lambda}$

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της μίξης εκθετικών είναι $\sum_{j=1}^{\kappa} a_j \cdot \frac{\lambda_j}{\lambda_j - t}$ με μετασχηματισμό Laplace $\sum_{j=1}^{\kappa} a_j \cdot \frac{\lambda_j}{\lambda_j + s}$

Η αναλυτική έκφραση της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι περίπλοκη και ακολούθως παρουσιάζουμε την ανισότητα αυτής κατά Willmot (1996).

Θεώρημα 5.1. Έστω ότι $B(x)$ είναι απόλυτα συνεχής DFR συνάρτηση κατανομής με ρυθμό απώλειας $\mu_{\mathrm{B}}(x) = -\dfrac{d}{dx}\ln \overline{B}(x)$ που ικανοποιεί $\mu_{\mathrm{B}}(\infty) > 0$. Αν επίσης η $B(x)$ ικανοποιεί την γενικευμένη συνθήκη του Lunberg:

$$\tilde{a}\{\mu_{\mathrm{B}}(\infty)\} \cdot E\{1/\overline{B}(Y)\} = 1$$

τότε

$$\psi(x) \le \sigma \overline{B}(x), \qquad x \ge 0$$

όπου

$$\frac{1}{\sigma} = \inf_{x \ge 0} \frac{\overline{B}(x)}{\overline{H}(x)} \int_x^{\infty} \{\overline{B}(y)\}^{-1} dH(y)$$

Απόδειξη θεωρήματος 5.1. Ορίζουμε $\psi_0(x) = 0$ και $\psi_k(x) = \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{k} \{S_n > x\} \right)$, k = 1, 2, 3, ... Από το νόμο ολικής πιθανότητας έχουμε

$$\psi_{k+1}(x) = \int_0^{\infty} \left\{ \overline{H}(x+t) + \int_0^{x+t} \psi_k(x+t-y)\, dH(y) \right\} dA(t)$$

Επαγωγικά ισχύει $\psi_k(x) \le \sigma \overline{B}(x)$ για k = 1, 2, 3, ... και από τη σχέση

$$\overline{H}(x) \le \sigma \overline{B}(x) \int_x^{\infty} \{\overline{B}(y)\}^{-1} dH(y) \le$$

$$\begin{aligned}
&\psi_{k+1}(x) \\
\le\ & \int_0^{\infty} \left\{ \sigma \overline{B}(x+t) \int_{x+t}^{\infty} \frac{dH(y)}{\overline{B}(y)} + \sigma \int_0^{x+t} \overline{B}(x+t-y)\, dH(y) \right\} dA(t) \\
\le\ & \sigma \int_0^{\infty} \left\{ \overline{B}(x+t) \int_{x+t}^{\infty} \frac{dH(y)}{\overline{B}(y)} + \overline{B}(x+t) \int_0^{x+t} \frac{dH(y)}{\overline{B}(y)} \right\} dA(t) \\
=\ & \sigma \int_0^{\infty} \overline{B}(x+t) \left\{ \int_0^{\infty} \frac{dH(y)}{\overline{B}(y)} \right\} dA(t)
\end{aligned}$$

Εφόσον η $B(x)$ είναι DFR τότε και είναι NWU συνεπώς $\bar{B}(x+t-y) \le \bar{B}(x+t)/\bar{B}(y)$. Σε συνδυασμό με τη σχέση $\int_0^{\infty} dH(y)/\bar{B}(y) = 1/\tilde{a}\{\mu_B(\infty)\}$ προκύπτει ότι

$$\psi_{k+1}(x) \le \frac{\sigma}{\tilde{a}\{\mu_B(\infty)\}} \int_0^{\infty} \bar{B}(x+t)\,dA(t)$$

Η $B(x)$ είναι DFR με $\mu_B(\infty) < \infty$ και συνεπάγεται ότι είναι UWA που μας δίνει την επόμενη σχέση $\bar{B}(x+t) \le \bar{B}(x)e^{-\mu_B(\infty)t}$ και αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\psi_{k+1}(x) \le \frac{\sigma}{\tilde{a}\{\mu_B(\infty)\}} \int_0^{\infty} \bar{B}(x)e^{-\mu_B(\infty)t}\,dA(t) = \sigma\bar{B}(x)$$

Τελικά, $\psi(x) = \lim_{k\to\infty}\psi_k(x) \le \sigma\bar{B}(x)$

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει το κάτωθι λήμμα:

Λήμμα 5.1.1. Αν $\kappa > 0$ ικανοποιεί την συνθήκη του Lundberg $\tilde{a}(\kappa)\tilde{h}(-\kappa) = 1$ τότε

$$\psi(x) \le \sigma_1 e^{-\kappa x}, \qquad x \ge 0$$

όπου σ_1 τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{\sigma_1} = \inf_{x\ge 0} \frac{\int_x^{\infty} e^{\kappa y}\,dH(y)}{e^{\kappa x}\bar{H}(x)}$$

Απόδειξη λήμματος 5.1.1. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 5.1 για $\bar{B}(x) = e^{-\kappa x}$

Θεώρημα 5.2. Έστω $\kappa > 0$ που ικανοποιεί την συνθήκη του Lundberg $\tilde{a}(\kappa)\tilde{h}(-\kappa)=1$, τότε

$$\psi(x) \geq \sigma_2 e^{-\kappa x}, \qquad x \geq 0$$

όπου

$$\frac{1}{\sigma_2} = \sup_{x\geq 0} \frac{\int_x^{\infty} e^{\kappa y} dH(y)}{e^{\kappa x}\bar{H}(x)}$$

Απόδειξη θεωρήματος 5.2. Σύμφωνα με το μετασχηματισμό του Esscher, η συνάρτηση κατανομής $H_\kappa^*(y)$ είναι τέτοια ώστε $dH_k^*(y) = \frac{e^{ky}dH(y)}{\int_0^\infty e^{kx}dH(x)}, \qquad y \geq 0$

Όμμοια, έστω η συνάρτηση κατανομής $A_k(t)$ ορίζεται ως:

$$dA_k(t) = \frac{e^{-kt}dA(t)}{\int_0^\infty e^{-kx}dA(x)}, \qquad t \geq 0$$

Ορίζουμε $\psi_0^*(x) = 0$ και για n = 0, 1, 2, ...

$$\psi_{n+1}^*(x) = \int_0^\infty \left\{ \bar{H}_k^*(x+t) + \int_0^{x+t} \psi_n^*(x+t-y)\, dH_k^*(y) \right\} dA_k(t)$$

Κατόπιν ορίζουμε $M_{S1}(t) = \tilde{a}(t)\tilde{h}(-t)$. Εφόσον $M_{S1}(0) = M_{S1}(k) = 1$ τότε και $M'_{S1}(t) = \tilde{a}'(t)\tilde{h}(-t) - \tilde{a}(t)\tilde{h}'(-t)$ και

$$
\begin{aligned}
M'_{S_1}(\kappa) &= \frac{\tilde{a}'(\kappa)\tilde{h}(-\kappa) - \tilde{a}(\kappa)\tilde{h}'(-\kappa)}{\tilde{a}(\kappa)\tilde{h}(-\kappa)} \\
&= \frac{\tilde{a}'(\kappa)}{\tilde{a}(\kappa)} - \frac{\tilde{h}'(-\kappa)}{\tilde{h}(-\kappa)} \\
&= -\int_0^\infty y dA_\kappa(y) + \int_0^\infty y dH^*_\kappa(y).
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, $\int_0^\infty y dH_k^*(y) > \int_0^\infty y dA_k(y)$ και σε συνδυασμό με το όριο $\lim_{n\to\infty} \psi_n^*(x) = 1, x \geq 0$

και την ανισότητα $\psi_n(x) \geq \sigma_2 e^{-kx}\psi_n^*(x)$ που επαγωγικά αποδεικνύεται ως εξής:

$$
\overline{H}(x+t) \geq \sigma_2 e^{-\kappa(x+t)} \int_{x+t}^\infty e^{\kappa y} dH(y),
$$

Για $n = 1$ ισχύει

$$
\begin{aligned}
\psi_1(x) &= \int_0^\infty \overline{H}(x+t) dA(t) \\
&\geq \sigma_2 e^{-\kappa x} \int_0^\infty e^{-\kappa t} \int_{x+t}^\infty e^{\kappa y} dH(y) dA(t) \\
&= \sigma_2 e^{-\kappa x} \int_0^\infty \overline{H}^*_\kappa(x+t) dA_\kappa(t) \\
&= \sigma_2 e^{-\kappa x} \psi_1^*(x)
\end{aligned}
$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για n οπότε για n+1 έχουμε,

$$
\begin{aligned}
&\psi_{n+1}(x) \geq \int_0^\infty \left\{ \sigma_2 e^{-\kappa(x+t)} \int_{x+t}^\infty e^{\kappa y} dH(y) \right. \\
&+ \left. \sigma_2 \int_0^{x+t} \psi_n^*(x+t-y) e^{-\kappa(x+t-y)} dH(y) \right\} dA(t) \\
&= \sigma_2 e^{-\kappa x} \left\{ \int_0^\infty e^{\kappa y} dH(y) \right\} \\
&\times \int_0^\infty e^{-\kappa t} \left\{ \overline{H}^*_\kappa(x+t) + \int_0^{x+t} \psi_n^*(x+t-y) dH^*_\kappa(y) \right\} dA(t) \\
&= \sigma_2 e^{-\kappa x} \int_0^\infty \left\{ \overline{H}^*_\kappa(x+t) + \int_0^{x+t} \psi_n^*(x+t-y) dH^*_\kappa(y) \right\} dA_\kappa(t) \\
&= \sigma_2 e^{-\kappa x} \psi_{n+1}^*(x),
\end{aligned}
$$

Οπότε και $\psi(x)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)\ge\sigma_2 e^{-kx}\lim_{n\to\infty}\psi_n^*(x)=\sigma_2 e^{-kx}$

Συνδυάζοντας το λήμμα 5.1.1 έχουμε τη διπλή ανίσωση

$$\sigma_2 e^{-\kappa x}\le\psi(x)\le\sigma_1 e^{-\kappa x},\qquad x\ge 0$$

η οποία μας δίνει το κάτωθι λήμμα:

Λήμμα 5.2.1. Αν $H(y)=1-e^{-y/E(Y)},\quad y\ge 0$ τότε $\psi(x)=\{1-\kappa E(Y)\}e^{-\kappa x},\quad x\ge 0$ όπου $\kappa > 0$ ικανοποιεί τη σχέση $\tilde{\alpha}(\kappa)=1-\kappa E(Y)$.

Απόδειξη 5.2.1. Η διπλή ανίσωση $\sigma_2 e^{-\kappa x}\le\psi(x)\le\sigma_1 e^{-\kappa x},\quad x\ge 0$ σε συνδυασμό με $\tilde{h}(s)=\{1+sE(Y)\}^{-1}$ και $\sigma_1 = \sigma_2 = 1- k\,E(Y)$ αποδεικνύουν το ζητούμενο.

Αν η συνάρτηση $H(y)$ είναι NWUC τότε $\psi(x)\le\dfrac{e^{-\kappa x}}{E\{e^{\kappa Y}\}}$ ενώ αν είναι NBUC τότε

$$\psi(x)\ge\frac{e^{-\kappa x}}{E\{e^{\kappa Y}\}}$$

Αν $A(x)=1-e^{-\frac{x}{E(X)}}$ εφαρμόζεται το κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας και η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(x)$ έχει άνω ή κάτω φράγμα αντίστοιχα την ποσότητα $\psi(0)e^{-\kappa x}, x\ge 0$ αν η συνάρτηση $H_1(y)$ είναι NWUC $\psi(x)\le\psi(0)e^{-\kappa x}, x\ge 0$ ή NBUC $\psi(x)\ge\psi(0)e^{-\kappa x}, x\ge 0$ αντίστοιχα.

Στην γενική περίπτωση, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι σύνθετη γεωμετρική κατανομής ουράς:

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\phi)\phi^n\bar{F}^{*n}(x),\qquad x\ge 0$$

Η παραπάνω μορφή εμφανίζει προβλήματα στην εφαρμογή λόγω της δυσκολίας υπολογισμού της παραμέτρου φ και της συνάρτησης $F(x)$. Αντιθέτως αν η $H(y)$ είναι εκθετική τότε $F(x) = H(x)$ και $\varphi = 1 - \kappa E(Y)$ οπότε και $\psi(x) = \{1 - \kappa E(Y)\} e^{-\kappa x}, \quad x \geq 0$

Στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας με $A(x) = 1 - e^{-\frac{x}{E(X)}}$ τότε

$$F(x) = H_1(x) \text{ και } \varphi = E(Y) / E(X).$$

Αν η $H(x)$ είναι DFR τότε αμφότερες $F(x)$ και $1\text{-}\psi(x)$ είναι αμφότερες DFR.

Στην περίπτωση όπου η συνάρτηση $F(x)$ είναι σε μη αναλυτική μορφή και η παράμετρος $\kappa > 0$ ικανοποιεί τη σχέση $\tilde{a}(\kappa)\tilde{h}(-\kappa) = 1$ και $\frac{1}{\phi} = \int_0^\infty e^{\kappa y} dF(y)$ τότε

$$\psi(x) \sim \frac{1-\phi}{\phi\kappa \int_0^\infty y e^{\kappa y} dF(y)} \cdot e^{-\kappa x}, x \to \infty$$

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου η κατανομή (ισόνομων και ανεξάρτητων) των τυχαίων μεταβλητών Y_1, Y_2, … είναι διαφορετική από την κατανομή (επίσης ισόνομων και ανεξάρτητων μεταξύ τους) X_2, X_3, …

Αν $A^d(x)$ είναι τροποποιημένη με καθυστέρηση ανανεωτική διαδικασία, όπου

$$A^d(x) = 1 - \bar{A}^d(x) = \mathrm{P_r}(X_1 \leq x)$$

και μετασχηματισμό Laplace

$$\tilde{a}^d(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dA^d(x)$$

Οι μεταβλητές X_1, X_2, … αναπαριστούν χρόνους συμβάντων και ο χρόνος του πρώτου συμβάντος διαφέρει ως προς την κατανομή από το χρόνο του δεύτερου συμβάντος. Για αυτό το λόγο παρότι έχουμε ισονομία στις τυχαίες μεταβλητές X_2, X_3, … η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X_1 είναι διαφορετική από τις υπόλοιπες.

Όπως ορίσαμε την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi^d(x)$ για την ακολουθία χρόνων συμβάντων X_2, X_3, …., θα ορίσουμε και την πιθανότητα χρεοκοπίας ισορροπίας $\psi^e(x)$. Για την τελευταία δε αρχικά ορίζουμε την κατανομή ισορροπίας $F_1(y)$ της αρχικής κατανομής με συνάρτηση κατανομής $F(y)$:

$$\bar{F}_1(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{F}(x)\,dx}{\int_0^\infty \bar{F}(x)\,dx}$$

Η κατανομή του χρόνου για την κατανομή ισορροπίας μέχρι το επόμενο συμβάν είναι

$$A_1(x) = 1 - \bar{A}_1(x) = \frac{\int_0^\infty A^d(t)\,dt}{E(X)} = A^d(x)$$

με μετασχηματισμό Laplace $\tilde{a}^d(s) = \tilde{a}_1(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dA_1(x)$ και πρόκειται για την ανανεωτική διαδικασία συμβάντων κινδύνου με καθυστέρηση (ή στάσιμη). Ως εκ τούτου στο εξής θα χρησιμοποιούμε το σύνολο τυχαίων μεταβλητών $\{X_2, X_3, \ldots\}$ αντί για $\{X_1, X_2, \ldots\}$ για την οποία η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

$$\psi^d(x) = \mathrm{P_r}\left(\bigcup_{n=1}^\infty \left\{\sum_{k=1}^n (Y_k - X_k) > x\right\}\right) =$$
$$\int_0^\infty \left\{\bar{H}(x+t) + \int_0^{x+t} \psi(x+t-y)\,dH(y)\right\} dA^d(t), \qquad x \geq 0$$

Για την ανανεωτική διαδικασία ισορροπίας η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι $\psi^e(x)$ και εφόσον $A^d(x) = A_1(x)$ τότε και $\psi^d(x) = \psi^e(x)$.

Θεώρημα 5.3. Έστω $B(x)$ είναι απόλυτα συνεχής DFR συνάρτηση κατανομής με ρυθμό απώλειας $\mu_B(x) = -\frac{d}{dx}\ln \bar{B}(x)$ που ικανοποιεί $\mu_B(\infty) > 0$. Αν επιπρόσθετα $\tilde{\alpha}\{\mu_B(\infty)\}E\left\{\frac{1}{\bar{B}(Y)}\right\} = 1$ τότε

$$\psi^d(x) \le \sigma \frac{\tilde{a}^d(\mu_B(\infty))}{\tilde{\alpha}\{\mu_B(\infty)\}}\bar{B}(x), \qquad x \ge 0$$

ή ισοδυνάμως

$$\psi^d(x) \le \frac{\sigma\bar{B}(x)}{\tilde{a}\{\mu_B(\infty)\}}\int_0^\infty e^{-\mu_B(\infty)t}dA^d(t)$$

όπου

$$\frac{1}{\sigma} = \inf_{x\ge 0}\frac{\bar{B}(x)}{\bar{H}(x)}\int_x^\infty \{\bar{B}(y)\}^{-1}dH(y)$$

Απόδειξη θεωρηματος 5.3. Εφόσον $\bar{H}(x+t) \le \sigma\bar{B}(x+t)\int_{x+t}^\infty \{\bar{B}(y)\}^{-1}dH(y)$ τότε από το θεώρημα 5.1 έχουμε

$$\begin{aligned}
&\psi^d(x)\\
\le\; & \int_0^\infty \left\{\sigma\bar{B}(x+t)\int_{x+t}^\infty \frac{dH(y)}{\bar{B}(y)} + \sigma\int_0^{x+t}\bar{B}(x+t-y)dH(y)\right\}dA^d(t)\\
\le\; & \sigma\int_0^\infty \left\{\bar{B}(x+t)\int_{x+t}^\infty \frac{dH(y)}{\bar{B}(y)} + \bar{B}(x+t)\int_0^{x+t}\frac{dH(y)}{\bar{B}(y)}\right\}dA^d(t)\\
=\; & \frac{\sigma}{\tilde{a}\{\mu_B(\infty)\}}\int_0^\infty \bar{B}(x+t)dA^d(t),
\end{aligned}$$

Εφόσον η $B(x)$ είναι DFR με $\mu_B(\infty) < \infty$ τότε είναι και UWA και ως εκ τούτου

$\bar{B}(x+t) \le \bar{B}(x) = e^{-\mu_B(\infty)t}$ οπότε και $\psi^d(x) \le \dfrac{\sigma \bar{B}(x)}{\tilde{a}\{\mu_B(\infty)\}} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\mu_B(\infty)t} dA^d(t)$

Προκύπτει δε το κάτωθι λήμμα,

Λήμμα 5.3.1. Αν $\kappa > 0$ ικανοποιεί τη σχέση $\tilde{a}(\kappa)\tilde{h}(-\kappa) = 1$ τότε

$$\psi^d(x) \le \frac{\sigma_1 \tilde{a}^d(\kappa)}{\tilde{a}(\kappa)} e^{-\kappa x}, \qquad x \ge 0$$

και

$$\psi^e(x) \le \sigma_1 \frac{E(Y)}{E(X)} \tilde{h}_1(-\kappa) e^{-\kappa x}, \qquad x \ge 0$$

για τη σταθερά σ_1 ώστε

$$\psi^d(x) \le \frac{\sigma_1 \tilde{a}^d(\kappa)}{\tilde{a}(\kappa)} e^{-\kappa x}, \qquad x \ge 0$$

ή ισοδυνάμως

$$\psi^d(x) \le \sigma_1 \frac{E(Y)}{E(X)} \tilde{h}_1(-\kappa) e^{-\kappa x}, \qquad x \ge 0$$

Απόδειξη λήμματος 5.3.1. Η σχέση $\psi^d(x) \le \dfrac{\sigma_1 \tilde{a}^d(\kappa)}{\tilde{a}(\kappa)} e^{-\kappa x}, \quad x \ge 0$ είναι ειδική περίπτωση της σχέσεως $\psi^d(x) \le \sigma \dfrac{\tilde{a}^d(\mu_B(\infty))}{\tilde{\alpha}\{\mu_B(\infty)\}} \bar{B}(x), \quad x \ge 0$ με $\bar{B}(x) = e^{-kx}$. Αν $\tilde{\alpha}^d(k) = \tilde{\alpha}_1(k)$ τότε

$$\frac{\tilde{a}_1(\kappa)}{\tilde{a}(\kappa)} = \frac{1-\tilde{a}(\kappa)}{\kappa E(X)\tilde{a}(\kappa)} = \frac{\tilde{h}(-\kappa)-1}{\kappa E(X)} = \frac{E(Y)}{E(X)}\tilde{h}_1(-\kappa),$$

οπότε και προκύπτει το ζητούμενο.

Θεώρημα 5.4. Έστω για $\kappa > 0$ $\tilde{a}(\kappa)\tilde{h}(-\kappa)=1$ τότε

$$\psi^d(x) \geq \sigma_2 \frac{\tilde{a}^d(\kappa)}{\tilde{a}(\kappa)} e^{-\kappa x}, \qquad x \geq 0$$

και

$$\psi^e(x) \geq \sigma_2 \frac{E(Y)}{E(X)} \tilde{h}_1(-\kappa) e^{-\kappa x}, \qquad x \geq 0$$

για την παράμετρο σ_2 για την οποία ισχύει

$$\frac{1}{\sigma_2} = \sup_{x\geq 0} \frac{\int_x^\infty e^{\kappa y} dH(y)}{e^{\kappa x}\bar{H}(x)}$$

Απόδειξη θεωρήματος 5.4. Από το θεώρημα 5.2 έχουμε

$$\begin{aligned}
&\psi^d(x) \\
\geq\ & \int_0^\infty \sigma_2 \left\{ e^{-\kappa(x+t)} \int_{x+t}^\infty e^{\kappa y} dH(y) + \int_0^{x+t} e^{-\kappa(x+t-y)} dH(y) \right\} dA^d(t) \\
\leq\ & \sigma_2 e^{-\kappa x} \int_0^\infty e^{-\kappa t} \left\{ \int_{x+t}^\infty e^{\kappa y} dH(y) + \int_0^{x+t} e^{\kappa y} dH(y) \right\} dA^d(t) \\
=\ & \sigma_2 e^{-\kappa x} \tilde{h}(-\kappa) \int_0^\infty e^{-\kappa t} dA^d(t),
\end{aligned}$$

και σε συνδυασμό με το λήμμα 5.3.1 προκύπτει το ζητούμενο.

Συνδυάζοντας το λήμμα IIIi με το θεώρημα IV έχουμε

$$\sigma_2 \frac{\tilde{a}^d(\kappa)}{\tilde{a}(\kappa)} e^{-\kappa x} \le \psi^d(x) \le \sigma_1 \frac{\tilde{a}^d(\kappa)}{\tilde{a}(\kappa)} e^{-\kappa x}, \qquad x \ge 0$$

και

$$\sigma_2 \frac{E(Y)}{E(X)} \tilde{h}_1(-\kappa) e^{-\kappa x} \le \psi^e(x) \le \sigma_1 \frac{E(Y)}{E(X)} \tilde{h}_1(-\kappa) e^{-\kappa x}, \qquad x \ge 0$$

Θεώρημα 5.4. Αν $\kappa > 0$ ικανοποιεί τη σχέση $\tilde{a}(\kappa)\tilde{h}(-\kappa) = 1$ τότε

$$\psi^d(x) \sim \frac{(1-\phi)\tilde{a}^d(\kappa)}{\phi\kappa\tilde{a}(\kappa)\int_0^\infty y e^{\kappa y} dF(y)} \cdot e^{-\kappa x}, \qquad x \to \infty$$

και

$$\psi^e(x) \sim \frac{(1-\phi)E(Y)\tilde{h}_1(-\kappa)}{\phi\kappa E(X)\int_0^\infty y e^{\kappa y} dF(y)} \cdot e^{-\kappa x}, \qquad x \to \infty$$

Απόδειξη θεωρήματος 5.4. $\tilde{h}(-k) < \infty$ και $e^{kx}\overline{H}(x) \le \int_x^\infty e^{ky} dH(y)$. Επίσης, $e^{k(x-y)}\psi(x-y) \le 1$ για $y \le x$ και

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to\infty} e^{\kappa x}\left\{\overline{H}(x) + \int_0^x \psi(x-y)dH(y)\right\} \\
= & \lim_{x\to\infty} \int_0^x \{e^{\kappa(x-y)}\psi(x-y)\} e^{\kappa y} dH(y) \\
= & \int_0^x \{\lim_{x\to\infty} e^{\kappa(x-y)}\psi(x-y)\} e^{\kappa y} dH(y) \\
= & \frac{(1-\phi)\tilde{h}(-\kappa)}{\phi\kappa\int_0^\infty y e^{\kappa y} dF(y)},
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} e^{\kappa x}\psi^d(x) \\
=\;& \lim_{x\to\infty}\int_0^\infty e^{\kappa(x+t)}\left\{\overline{H}(x+t)+\int_0^{x+t}\psi(x+t-y)dH(y)\right\}e^{-\kappa t}dA^d(t) \\
=\;& \int_0^\infty \lim_{x\to\infty} e^{\kappa(x+t)}\left\{\overline{H}(x+t)+\int_0^{x+t}\psi(x+t-y)dH(y)\right\}e^{-\kappa t}dA^d(t) \\
=\;& \frac{(1-\phi)\tilde{a}^d(\kappa)}{\phi\kappa\tilde{a}(\kappa)\int_0^\infty ye^{\kappa y}dF(y)}.
\end{aligned}
$$

Η απόδειξη προκύπτει με τη συνέργεια του λήμματος 5.3.1.

Λήμμα 5.4.1. Αν $H(y)=1-e^{-y/E(y)}, \quad y>0$ τότε $\lim_{x\to\infty} e^{kx}\overline{H}(x)=0$ εφόσον

$$\psi^d(x)=\tilde{a}^d(\kappa)e^{-\kappa x}, \quad x\geq 0$$

και

$$\psi^e(x)=\frac{E(Y)}{E(X)}e^{-\kappa x}, \quad x\geq 0$$

όπου $\kappa >$ 0 ικανοποιεί τη σχέση $\tilde{\alpha}(\kappa)=1-\kappa E(Y)$.

Απόδειξη λήμματος 5.4.1. Αν $\sigma_1 = \sigma_2 = 1- k\,E(Y)$, και $\tilde{h}(s)=\{1+sE(Y)\}^{-1}$ τότε $\tilde{a}(k)=1-kE(Y)=\sigma_1=\sigma_2$. Επίσης, $\tilde{h}_1(-k)=\tilde{h}(-k)=1/\tilde{a}(k)=1/\sigma_1=1/\sigma_2$ και το ζητούμενο προκύπτει από τη σχέση

$$\sigma_2\frac{E(Y)}{E(X)}\tilde{h}_1(-\kappa)e^{-\kappa x}\leq\psi^e(x)\leq\sigma_1\frac{E(Y)}{E(X)}\tilde{h}_1(-\kappa)e^{-\kappa x}, \quad x\geq 0$$

Η παρακάτω σχέση συνδέει την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi^d(x)$ που βασίζεται στους χρόνους συμβάντων X_2, X_3, …. με την κλασική πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(x)$.

Αν $\overline{A}^d(x)\geq\overline{A}(x)$ τότε $\psi^d(x)\leq\psi(x)$ ή αν $\overline{A}^d(x)\leq\overline{A}(x)$ τότε $\psi^d(x)\geq\psi(x)$, $x\geq$ 0.

Θεώρημα 5.5. Για την ανανεωτική διαδικασία κινδύνου ισορροπίας ισχύει

$$\psi^e(x) = \frac{E(Y)}{E(X)}\left\{\int_0^x \psi(x-y)\,dH_1(y) + \bar{H}_1(y)\right\}, \qquad x \geq 0$$

Απόδειξη θεωρήματος 5.5.

Εφόσον $1-\psi^d(u) = \int_0^\infty \int_0^{u+t} \{1-\psi(u+t-y)\}\,dH(y)\,A^d(t)$ και

$$\begin{aligned} 1-\psi^e(u) &= \int_0^\infty \frac{\overline{A}(t)}{E(X)} \int_0^{u+t} \{1-\psi(u+t-y)\}\,dH(y)dt \\ &= \frac{1}{E(X)} \int_u^\infty \overline{A}(t-u) \int_0^t \{1-\psi(t-y)\}\,dH(y)dt. \end{aligned}$$

Σε συνδυασμό με $\overline{A}(0)=1$ τότε,

$$\begin{aligned} -E(X)\frac{d}{du}\psi^e(u) &= -\int_0^u \{1-\psi(u-y)\}\,dH(y) \\ &+ \int_0^\infty \int_0^{u+t} \{1-\psi(u+t-y)\}\,dH(y)dA(t). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$E(X)\frac{d}{du}\psi^e(u) = \int_0^u \{1-\psi(u-y)\}\,dH(y) - \{1-\psi(u)\}\,.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση στο διάστημα $(0, x)$,

$$\begin{aligned} &E(X)\,\{\psi^e(x)-\psi^e(0)\} \\ &= \int_0^x \int_0^u \{1-\psi(u-y)\}\,dH(y)du - \int_0^x \{1-\psi(u)\}\,du \\ &= \int_0^x \int_0^{x-y} \{1-\psi(u)\}\,dudH(y) - \int_0^x \{1-\psi(u)\}\,du \end{aligned}$$

και αλλάζοντας τη σειρά της ολοκλήρωσης

$$\begin{aligned}&\int_0^x \int_0^{x-y} \{1-\psi(u)\}\, du dH(y)\\ =\ &\int_0^x \{1-\psi(u)\}\, du - \int_0^x \{1-\psi(x-y)\}\, \overline{H}(y) dy,\end{aligned}$$

Εφόσον $\psi^e(\infty)=0$ και $\psi(\infty)=0$, $\int_0^\infty \bar{H}(y)\,dy = E(Y)$ τότε, προκύπτει ότι

$\psi^e(x) = \psi^e(0) - \frac{1}{E(X)} \int_0^\infty \bar{H}(y)\,dy$, δηλαδή $\psi^e(0) = \frac{E(Y)}{E(X)}$ και

$$\begin{aligned}\psi^e(x) &= \frac{E(Y)}{E(X)} \left\{1 - \int_0^x \{1-\psi(x-y)\}\, dH_1(y)\right\}\\ &= \frac{E(Y)}{E(X)} \left\{\overline{H}_1(x) + \int_0^x \psi(x-y) dH_1(y)\right\},\end{aligned}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $A(x) = 1 - e^{-\frac{x}{E(X)}}$, $\phi = \frac{E(Y)}{E(X)}$ και $F(x) = H_1(x)$, η κλασσική πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(x)$ συμβολίζεται $\psi^c(x)$ και είναι

$$\psi^c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{1 - \frac{E(Y)}{E(X)}\right\} \left\{\frac{E(Y)}{E(X)}\right\}^n \bar{H}_1^{*n}(x), \qquad x \geq 0$$

Αν επιπρόσθετα $A(x) = A_1(x)$ τότε και $\psi^e(x) = \psi^c(x)$, δηλαδή

$$\psi^c(x) = \frac{E(Y)}{E(X)} \left\{\int_0^x \psi^c(x-y)\, dH_1(y) + \bar{H}_1(x)\right\}, \qquad x \geq 0$$

Θεώρημα 5.6. Αν η $A(x)$ είναι NWUE τότε ισχύει

$$\psi^c(x) \leq \psi^e(x) \leq \psi(x),\ x \geq 0$$

διαφορετικά αν η $A(x)$ είναι NBUE τότε ισχύει

$$\psi^c(x) \geq \psi^e(x) \geq \psi(x),\ x \geq 0$$

Απόδειξη θεωρήματος 5.6. Εφόσον η $A(x)$ είναι NWUE (NBUE) τότε $\bar{A}_1(x) \geq (\leq) \bar{A}(x)$ και $\psi^e(x) \leq (\geq) \psi(x)$, $x \geq 0$. Η συνάρτηση $\psi^e(x)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\psi^e(x) \geq (\leq) \frac{E(Y)}{E(X)} \left\{ \int_0^x \psi^e(x-y)\,dH_1(y) + \bar{H}_1(x) \right\}, \qquad x \geq 0$$

Αν $$\tau_n(x) = \frac{E(Y)}{E(X)} \left\{ \int_0^x \tau_n(x-y)\,dH_1(y) + \bar{H}_1(x) \right\} - (+)\frac{1}{n}, \qquad x \geq 0$$ τότε,

$\psi^e(0) > (<) \tau_n(0)$, $n > 0$. Θα δείξουμε τώρα ότι $\psi^e(x) > (<) \tau_n(x)$ για $0 \leq x \leq x_0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \psi^e(x_0) - \tau_n(x_0) \\ &\geq (\leq) \frac{E(Y)}{E(X)} \int_0^{x_0} \{\psi^e(x_0 - y) - \tau_n(x_0 - y)\} dH_1(y) + (-)\frac{1}{n} > (<)\ 0, \end{aligned}$$

Συνεπώς, δεν υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε να ικανοποιεί την παραπάνω σχέση οπότε και $\psi^e(x) > (<) \tau_n(x)$, $x \geq 0$. Σε συνδυασμό με το όριο $\psi^e(x) \geq (\leq) \lim_{n\to\infty} \tau_n(x) = \psi^c(x)$ προκύπτει το ζητούμενο.

5.2 Εφαρμογές

5.2.1 *Περίπτωση κλασικού μοντέλου χρεοκοπίας*

1. Η ατομική απαίτηση είναι εκθετική κατανομή παραμέτρου $\beta > 0$. Η πιθανότητα χρεοκοπίας υπολογίζεται αναλυτικά (βλ. κεφάλαιο 4) από την εξίσωση

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru}, \qquad \theta = \frac{\beta c}{\lambda} - 1, \qquad R = \beta \frac{\theta}{\theta+1}$$

Η συνάρτηση που υπολογίζει την πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από το κάτωθι κώδικα του λογισμικού Matlab (Mathwork TM):

```
function psi = psi_u(u,c,lamda, b)

EX=1/b;

theta = c/(lamda*EX)-1;

R=b*theta/(theta+1);

psi0 = 1./(1. + theta);

psi=psi0*exp(-R*u);
```

Αποτελέσματα

Πίνακας 1

Παράμετροι				Απόθεμα *u*					
c	λ	β		0	1	2	3	4	5
2	1	1	ψ(u)	*0,500*	*0,303*	*0,184*	*0,112*	*0,068*	*0,041*
3	2	1,2		*0,556*	*0,326*	*0,191*	*0,112*	*0,066*	*0,039*
4	3	2,4		*0,536*	*0,280*	*0,146*	*0,076*	*0,040*	*0,021*
5	4	1,6		*0,500*	*0,225*	*0,101*	*0,045*	*0,020*	*0,009*
6	5	1,8		*0,463*	*0,176*	*0,067*	*0,025*	*0,010*	*0,004*

2. Η ατομική απαίτηση είναι μίξη εκθετικών παραμέτρων $\beta_1, \beta_2 > 0$ και βάρη α_1, α_2 ώστε $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Η πιθανότητα χρεοκοπίας υπολογίζεται αναλυτικά (βλ. κεφάλαιο 4) από την εξίσωση

$$\psi(u) = c_1 e^{-r_1 u} + c_2 e^{-r_2 u}$$

όπου r_1, r_2 είναι λύσεις εξίσωσης Lunberg αποδεκτές υπό τον περιορισμό $0 < r_1 < \beta_1 < r_2 < \beta_2$ και είναι επίλυση του συστήματος

$$c_1 + c_2 = \frac{1}{1+\theta}$$
$$c_1 r_1 + c_2 r_2 = \frac{\theta}{(1+\theta)^2 E(X)}$$

Όπου $\theta = \dfrac{c}{\lambda E(X)} - 1$, $E(X) = \dfrac{a_1}{\beta_1} + \dfrac{a_2}{\beta_2}$

Παραθέτουμε τον κώδικα του λογισμικού Matlab που χρησιμοποιήσαμε

```
clear all
a1=0.6;a2=0.4;c=2;lamda=1;beta1=4;beta2=1; % parametroi
%
syms r
solve('a1*beta1/(beta1-r)+a2*beta2/(beta2-r) = r*c/lamda+1.','r')
%ypologizontai r1, r2
r1=r(1);
r2=r(2);
%
if (r1>0) & (r1<beta1) & (r2 > beta1) & (r2 < beta2),
   disp('apodekta r1, r2')
```

```
  %
  EX=a1/beta1+a2/beta2;
  %
  theta=c/(lamda*EX)-1;
  %
  A=[1. 1. ; r1 r2];B=[1./(1+theta); theta/((1+theta)^2*EX)];
  %
  c12=inv(A)*B; % ypologismos c1, c2
  c1=c12(1);
  c2=c12(2);
  u=1:5, % apothemata
  for i=1:5,
  y(i)=c1*exp(-r1*u(i))+c2*exp(-r2*u(i));
  end
else
  disp(' mi apodekta r1, r2')
end
```

Αποτελέσματα

Πίνακας 2

Παράμετροι							Απόθεμα u				
α_1	α_2	c	λ	β_1	β_2		1	2	3	4	5
0.3	0.7	3	1	1	2		*0,071*	*0,026*	*0,010*	*0,004*	*0,002*
0.5	0.5	2	2	1	3	ψ(u)	*0,430*	*0,291*	*0,198*	*0,135*	*0,092*

0.8	0.2	1	3	4	3		*0,382*	*0,183*	*0,088*	*0,042*	*0,020*
0.6	0.4	2	1	4	1		*0,104*	*0,047*	*0,022*	*0,010*	*0,005*

3. Η ατομική απαίτηση είναι Erlang με παραμέτρους $v > 0$ και $\beta > 0$. Το πάνω φράγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας υπολογίζεται (βλ. κεφάλαιο 4) αριθμητικά με χρήση λογισμικού Matlab, τον κώδικα τον οποίο παραθέτουμε παρακάτω

```
clear
syms r c lamda beta v
solve('beta^v/(beta-r)^v = r *c/lamda + 1.','r')
u=1:5; % times apothematos
for i=1:5,
y(i)=exp(-r*u(i)); % ano fragmata lundberg
end
```

Ο συντελεστής προσαρμογής προέρχεται από την επίλυση της εξίσωσης του Lundberg (αναλυτικά στο κεφάλαιο 4) $\left(\frac{\beta}{\beta - r}\right)^{v} = r \cdot \frac{c}{\lambda} + 1$

Αποτελέσματα

Πίνακας 3

Παράμετροι					Απόθεμα *u*				
c	*λ*	*ν*	*β*		1	2	3	4	5
2	2	2	2		0,050	0,002	<0,001	<0,001	<0,001
3	5	2	3	ψ(u)≤	0,011	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001
5	3	3	2		0,903	0,815	0,736	0,665	0,601
4	2	4	2		*0,040*	*0,002*	*0,000*	*0,000*	*0,000*

5.2.2 *Περίπτωση ανανεωτικού πρότυπου*

1. Θα δείξουμε ότι (Πολίτης, 2017) η πιθανότητα χρεοκοπίας με την πρώτη αποζημίωση ικανοποιεί τη σχέση $\psi_1(u) = 1 - \frac{1}{c}\int_u^\infty f\left(\frac{x-u}{c}\right)F(x)\,dx$, όπου *f*(*x*) και *F*(*x*) οι συναρτήσεις πυκνότητας και κατανομής του μεγέθους απαίτησης αντίστοιχα.

   Απ.

$$\psi_1(u) = \int_u^\infty f(x)\{1 - F(u+cx)\}\,dx$$

$$\Leftrightarrow 1 - \psi_1(u) = 1 - \int_u^\infty f(x)\{1 - F(u+cx)\}\,dx =$$

$$= 1 - \int_u^\infty f(x)\,dx + \int_u^\infty f(x)F(u+cx)\,dx =$$

$$\int_u^\infty f(x)F(u+cx)\,dx$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $t = u + cx$, οπότε και $dt = c\,dx$

$$\int_u^{\infty} f(x)F(u+cx)\,dx = \frac{1}{c}\int_u^{\infty} f\left(\frac{t-u}{c}\right)F(t)\,dt$$

2. Εφαρμόζουμε την παραπάνω απόδειξη για κατανομή μεγέθους απαιτήσεων εκθετική παραμέτρου β > 0.

$$\psi_1(u) = 1 - \frac{1}{c}\int_u^{\infty} f\left(\frac{x-u}{c}\right)F(x)\,dx =$$
$$1 - \frac{1}{c}\int_u^{\infty} \beta e^{-\beta\frac{x-u}{c}}\left\{1-e^{-\beta x}\right\}dx =$$
$$1 - \frac{1}{c}\int_u^{\infty} \beta e^{-\beta\frac{x-u}{c}}dx + \frac{1}{c}\int_u^{\infty} \beta e^{-\beta\left\{\frac{x-u}{c}+x\right\}}dx =$$
$$1 - \frac{1}{c}\int_u^{\infty} \beta e^{-\beta\frac{x-u}{c}}dx + \frac{1}{c}\int_u^{\infty} \beta e^{-\beta\frac{x-u+xc}{c}}dx$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $t = (x\text{-}u)\,/\,c$

$$1 - \frac{1}{c}\int_u^{\infty} \beta e^{-\beta\frac{x-u}{c}}dx + \frac{1}{c}\int_u^{\infty} \beta e^{-\beta\left\{\frac{x-u}{c}+x\right\}}dx =$$
$$1 - \int_0^{\infty} \beta e^{-\beta t}dt + \int_0^{\infty} \beta e^{-\beta\{t(c+1)+u\}}dt =$$
$$1 - 1 + \int_0^{\infty} \beta e^{-\beta tc+\beta t+\beta u}dt = e^{-\beta u}\int_0^{\infty} \beta e^{-\beta t(c+1)}dt =$$
$$\frac{e^{-\beta u}}{c+1}\int_0^{\infty} \beta(c+1)e^{-\beta t(c+1)}dt = \frac{e^{-\beta u}}{c+1}$$

Άρα $\psi_1(u) = \dfrac{e^{-\beta u}}{c+1}$

3. Έστω ότι η κατανομή των αποζημιώσεων είναι εκθετική με παράμετρο 1.4, c = 2 και η κατανομή ενδιάμεσων χρόνων είναι κατανομή πυκνότητας $g(t) = 0.5e^{-t} + 2e^{-4t}, t > 0$. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας με την πρώτη αποζημίωση και το συντελεστή προσαρμογής στο μοντέλο.

Παρατηρούμε ότι η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων συμβάντων είναι μίξη εκθετικών με παραμέτρους β_1=1 και β_2=4 με βάρη 0.5 και 0.5 αντίστοιχα. Η μέση τιμή είναι 5/8.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας με την πρώτη απαίτηση είναι:

$$\psi_1(u)=$$
$$\int_0^\infty g(t)\bar{F}(u+ct)dt=\int_0^\infty\left(0.5e^{-t}+2e^{-4t}\right)e^{-1.4(u+2t)}dt=$$
$$\int_0^\infty 0.5e^{-t}e^{-1.4(u+2t)}dt+\int_0^\infty 2e^{-4t}e^{-1.4(u+2t)}dt=$$

$$0.5e^{-1.4u}\int_0^\infty e^{-3.8t}dt+2e^{-1.4u}\int_0^\infty e^{-6.8t}=$$
$$\frac{0.5e^{-1.4u}}{3.8}\int_0^\infty 3.8e^{-3.8t}dt+\frac{2e^{-1.4u}}{6.8}\int_0^\infty 6.8e^{-6.8t}=$$
$$\frac{0.5e^{-1.4u}}{3.8}+\frac{2e^{-1.4u}}{6.8}=0.4257e^{-1.4u},\qquad u\geq 0$$

Το περιθώριο ασφαλείας είναι $\theta=\dfrac{c}{\lambda E(X)}-1$ όπου $\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{5}{8}\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{8}{5}$, και

$E(X)=\dfrac{5}{7}$ άρα θ = $\dfrac{3}{4}$. Τέλος, $R=\beta\dfrac{\theta}{\theta+1}=\dfrac{7}{5}\cdot\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+1}=0.4759$

Βιβλιογραφία

Embrechts P, Maejima M. & Teugels J. Asymptotic Behaviour of compound distributions. ASTIN Bulletin, 15, 45-48, 1985

Gerber H. An Introduction to Mathematical Risk Theory, S.S. Huebner Foundation, Univ. Pensylvania, Philadelphia, 1979.

Klebanov, L., B., Heavy Tailed Distributions, notes in Charles Univeristy, Prague, 2003

Rootzen H & Tajvidi N. Extreme value statistics and wind storm losses: A case study. Scand. Actuarial J, 1997(1), 1997.

Shibde A., S., Takale K., C., Study of Black-Scholes Model and its Applications. Procedia Engineering, 38:270-279, 2012

Shiu E. The probability of eventual ruin in the compound binomial model. ASTIN Bulletin, 19, 179-190, 1989

Widder D. The Laplace Transform, Princeton Univ. Press. 1946

Willmot GE. A non-exponential generalization of an inequality arising in queuing and insurance risk. J. Applied Probability, 33, 176-183, 1996.

Willmot GE & Lin XS, Lundberg Approximatios for Compound Distributions with Insurance Applications, in Lecture Notes in Statistics, Springer 2001, New York

Ηλιόπουλος Γ., Βασικές μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων, Εκδ. Σταμούλης, Αθήνα, 2013

Κουτσόπουλος Κ., Αναλογιστικά μαθηματικά, Μέρος I, Θεωρία των κινδύνων, Εκδ. Συμμετρία, Αθήνα, 1999

Κωνσταντινίδης Δ.Γ., Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου, Μέρος Β’, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2012

Πολίτης Θ: *Μέτρα Κινδύνου στην Αναλογιστική Επιστήμη,* Μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου. Παν. Πειραιώς, Πειραιάς, 2014

Πολίτης Κ., Εισαγωγή στη θεωρία συλλογικού κινδύνου, Εκδ. Σταμούλης, Αθήνα, 2017

Χαντζηκωνσταντινίδης Ε., Πανεπιστημιακές σημειώσεις μαθήματος Κατανομές Απώλειας, Παν. Πειραιώς, Πειραιάς, 2015