

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΤΗ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ
ΚΙΝΔΥΝΩΝ

Στοχαστικές διαδικασίες πλεονάσματος με τυχαία
ασφάλιστρα και στρατηγικές μερίσματος

Γεώργιος Καρακίτσος

Διπλωματική Εργασία που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και τη Διαχείριση Κινδύνων.

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2024

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν Συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και διαχείριση Κινδύνων.

Τα Μέλη της Επιτροπής ήταν :

- Ευστάθιος Χατζηκωνσταντινίδης, Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Τήνιος Πλάτων, Καθηγητής
- Τζαβελάς Γεώργιος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδουλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα

UNIVERSITY OF PIRAEUS
School of Finance and Statistics



Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

**Stochastic surplus processes with random premiums
and dividend strategies**

Georgios Karakitsos

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus Greece

September 2024

Στην οικογένειά μου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Φτάνοντας στο τέλος αυτής της διαδρομής, θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη, Αναπληρωτή Καθηγητή στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύτιμη καθοδήγηση και συνεισφορά του στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία εξετάζει τις στοχαστικές διαδικασίες πλεονάσματος και τις στρατηγικές μερισμάτων, εστιάζοντας στη χρήση εκθετικών κατανομών για τα ασφάλιστρα και τις απαιτήσεις. Αρχικά, παρουσιάζεται το κλασικό μοντέλο Cramér-Lundberg, το οποίο παρέχει τη θεμελιώδη βάση για την κατανόηση των ασφαλιστικών κινδύνων. Στη συνέχεια, αναλύεται η χρήση στοχαστικών ασφαλίσεων και η συνάρτηση Gerber-Shiu, η οποία είναι κρίσιμη για την εκτίμηση της πιθανότητας χρεοκοπίας και των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στις στρατηγικές πολλαπλών επιπέδων μερισμάτων, οι οποίες επιτρέπουν την κατανομή κερδών με τρόπο που βελτιστοποιεί την οικονομική σταθερότητα της εταιρείας. Τέλος, αναλύονται οι εξαρτήσεις μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλίσεων και η χρήση προσομοιώσεων Monte Carlo για την εκτίμηση των σχετικών κινδύνων. Η εργασία καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η κατανόηση και η εφαρμογή αυτών των μοντέλων είναι ζωτικής σημασίας για τη βελτίωση της διαχείρισης κινδύνου στις ασφαλιστικές εταιρείες.

Λέξεις Κλειδιά: Στοχαστικές διαδικασίες πλεονάσματος, Στρατηγικές μερισμάτων, Εκθετικά κατανομημένα ασφάλιστρα, Συνάρτηση Gerber-Shiu, Διαχείριση κινδύνου

Abstract

This paper explores the stochastic surplus processes and dividend strategies, focusing on the application of exponential distributions for premiums and claims. Initially, the classical Cramér-Lundberg model is presented, providing the foundational understanding of insurance risks. The study then delves into stochastic premiums and the Gerber-Shiu function, essential for estimating the ruin probability and expected discounted dividend payments. Special emphasis is placed on multi-level dividend strategies, which optimize profit distribution to enhance the company's financial stability. Additionally, the dependencies between claims and premiums are analyzed, and Monte Carlo simulations are employed to assess the related risks. The paper concludes that understanding and applying these models is crucial for improving risk management in insurance companies.

Keywords: Stochastic surplus processes, Dividend strategies, Exponentially distributed premiums, Gerber-Shiu function, Risk management

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	8
Abstract.....	9
Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή.....	12
1.1 Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων.....	12
1.2 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος για το κλασικό μοντέλο	17
1.3 Μέτρα χρεοκοπίας.....	20
1.4 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu.....	21
1.5 Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.....	23
Κεφάλαιο 2: Στοχαστικά Ασφάλιστρα	25
2.1 Περιγραφή μοντέλου.....	25
2.1.1 Εισαγωγή στα στοχαστικά ασφάλιστρα	25
2.1.2 Η διαδικασία πλεονάσματος με στοχαστικά ασφάλιστρα.....	27
2.1.3 Υποθέσεις του μοντέλου.....	29
2.1.4 Παραδείγματα μοντέλων με στοχαστικά ασφάλιστρα	31
2.2 Ανανεωτική εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu	32
2.2.1 Εισαγωγή στην ανανεωτική εξίσωση.....	32
2.2.2 Παραγωγή της ανανεωτικής εξίσωσης για τη συνάρτηση Gerber-Shiu	34
2.2.3 Επίλυση της ανανεωτικής εξίσωσης.....	36
2.2.4 Εφαρμογές της ανανεωτικής εξίσωσης	38
2.3 Ολοκληρωμένη εξίσωση για το μοντέλο Gerber-Shiu	40
2.3.1 Εισαγωγή στην ολοκληρωμένη εξίσωση	40
2.3.2 Παραγωγή της ολοκληρωμένης εξίσωσης για τη συνάρτηση Gerber-Shiu	42
2.3.3 Επίλυση της ολοκληρωμένης εξίσωσης.....	44
2.3.4 Σύγκριση με την ανανεωτική εξίσωση	45
Κεφάλαιο 3: Εξάρτηση μεταξύ απαιτήσεων και εισοδήματος ασφαλιστρών.....	48
3.1 Περιγραφή μοντέλου.....	48
3.1.1 Εισαγωγή στην εξάρτηση μεταξύ απαιτήσεων και εισοδήματος ασφαλιστρών	48
3.1.2 Μοντελοποίηση της εξάρτησης με τη χρήση copulas	49
3.1.3 Επίδραση της εξάρτησης στη διαδικασία πλεονάσματος.....	51
3.1.4 Παραδείγματα μοντέλων με εξάρτηση μεταξύ απαιτήσεων και ασφαλιστρών.....	53
3.2 Ανάλυση Gerber-Shiu για εκθετικά κατανομημένα ασφάλιστρα	54
3.2.1 Μετασχηματισμοί Laplace.....	54
3.2.2 Ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις	56

3.2.3 Παραδείγματα και εφαρμογές	58
3.3 Ασφάλιστρα με μετασχηματισμό Laplace που ανήκουν στην ρητή οικογένεια κατανομών	60
3.3.1 Ρητή οικογένεια κατανομών.....	60
3.3.2 Μετασχηματισμοί Laplace για την συνάρτηση Gerber-Shiu	61
3.3.3 Εφαρμογές και αποτελέσματα	63
Κεφάλαιο 4: Στρατηγικές μερισμάτων.....	65
4.1 Περιγραφή μοντέλου με στρατηγική κατωφλίου	65
4.1.1 Εισαγωγή στην έννοια των στρατηγικών μερισμάτων και τη σημασία τους για τις ασφαλιστικές εταιρείες	65
4.1.2 Περιγραφή της στρατηγικής μερίσματος κατωφλίου	67
4.1.3 Επεξήγηση των παραμέτρων της στρατηγικής	68
4.1.4 Συζήτηση για τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της στρατηγικής κατωφλίου	70
4.2 Εξισώσεις για τη συνάρτηση Gerber-Shiu	73
4.2.1 Παραγωγή των εξισώσεων για τη συνάρτηση Gerber-Shiu στο μοντέλο με στοχαστικά ασφάλιστρα και στρατηγική μερίσματος κατωφλίου	73
4.2.2 Ανάλυση των εξισώσεων και ερμηνεία των όρων τους	75
4.2.3 Συζήτηση για την επίδραση της στρατηγικής μερισμάτων στη συνάρτηση Gerber-Shiu	77
4.3 Εξισώσεις για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία	79
4.3.1 Ορισμός και ερμηνεία των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία.....	79
4.3.2 Παραγωγή των εξισώσεων για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων	82
4.3.3 Επίλυση των εξισώσεων και αριθμητικά παραδείγματα	85
4.4 Εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις και ασφάλιστρα	88
4.4.1 Επίλυση των εξισώσεων Gerber-Shiu για εκθετικές κατανομές	88
4.4.2 Πιθανότητα χρεοκοπίας χωρίς καταβολή μερισμάτων	91
4.4.3 Πιθανότητα χρεοκοπίας με στρατηγική κατωφλίου	94
4.4.4 Αναμενόμενες προεξοφλημένες καταβολές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία	97
Κεφάλαιο 5: Στρατηγική πολλαπλών επιπέδων μερισμάτων.....	101
5.1 Περιγραφή μοντέλου.....	101
5.2 Εξισώσεις Gerber-Shiu και αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών	103
5.3 Εκθετικά κατανεμημένα ασφάλιστρα και απαιτήσεις	107
Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα	111
Βιβλιογραφία.....	114

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

1.1 Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων

Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, γνωστό και ως μοντέλο Cramér-Lundberg (Cramér 1955), αποτελεί τη βάση για την κατανόηση και την ανάλυση των κινδύνων που αντιμετωπίζουν οι ασφαλιστικές εταιρείες. Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, το πλεόνασμα μιας ασφαλιστικής εταιρείας μεταβάλλεται στο χρόνο λόγω της εισροής ασφαλίσεων και της εκροής αποζημιώσεων. Οι αποζημιώσεις θεωρούνται τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν μια σύνθετη διαδικασία Poisson, ενώ τα ασφάλιστρα εισπράττονται με σταθερό ρυθμό (Gerber 1979).

Η βασική υπόθεση του κλασικού μοντέλου είναι ότι οι απαιτήσεις είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές (Dickson and Hipp 2001). Επιπλέον, οι χρόνοι μεταξύ των απαιτήσεων θεωρούνται εκθετικά κατανομημένοι και ανεξάρτητοι από τα μεγέθη των απαιτήσεων. Αυτές οι υποθέσεις απλοποιούν την μαθηματική ανάλυση του μοντέλου, αλλά μπορεί να μην αντικατοπτρίζουν πλήρως την πραγματικότητα. Στην πραγματικότητα, πολλές μελέτες έχουν δείξει ότι υπάρχει συσχέτιση μεταξύ του μεγέθους των απαιτήσεων και των χρόνων μεταξύ τους (Zhang and Yang 2010). Για παράδειγμα, σε περιόδους οικονομικής ύφεσης, οι απαιτήσεις μπορεί να είναι μεγαλύτερες και πιο συχνές.

Ένα από τα βασικά ερωτήματα που εξετάζει η θεωρία κινδύνου είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Στο κλασικό μοντέλο, η χρεοκοπία ορίζεται ως η κατάσταση όπου το πλεόνασμα της εταιρείας γίνεται αρνητικό. Η πιθανότητα χρεοκοπίας εξαρτάται από το αρχικό πλεόνασμα, τον ρυθμό εισπράξεων ασφαλίσεων, την ένταση των απαιτήσεων και την κατανομή των μεγεθών τους (Lundberg 1926). Στο κλασικό μοντέλο, η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά, υπό την προϋπόθεση ότι η κατανομή των μεγεθών των απαιτήσεων είναι γνωστή.

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας, χρησιμοποιείται η συνάρτηση Gerber-Shiu, η οποία εισήχθη από τους Gerber και Shiu (1998). Η συνάρτηση αυτή επιτρέπει την ταυτόχρονη μελέτη διαφόρων μέτρων χρεοκοπίας, όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας, ο χρόνος χρεοκοπίας και το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία. Στο κλασσικό μοντέλο, η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, η οποία μπορεί να λυθεί αναλυτικά σε ορισμένες περιπτώσεις. Η συνάρτηση Gerber-Shiu έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς στην αναλογιστική βιβλιογραφία για την ανάλυση διαφόρων μοντέλων κινδύνου και την ανάπτυξη στρατηγικών διαχείρισης κινδύνου (Lin and Willmot 2000).

Η συνάρτηση Gerber-Shiu, η οποία εισήχθη από τους Gerber και Shiu (1998), είναι μια σημαντική αναλογιστική συνάρτηση που χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση και την ανάλυση κινδύνων σε ασφαλιστικές εταιρείες. Η συνάρτηση αυτή επιτρέπει την ταυτόχρονη μελέτη διαφόρων μέτρων χρεοκοπίας, όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας, ο χρόνος χρεοκοπίας και το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία.

Στα κλασσικά μοντέλα κινδύνου, η συνάρτηση Gerber-Shiu ορίζεται ως εξής:

$$m_{\delta}(u) = E[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty) | U(0) = u]$$

όπου:

- δ είναι ο συντελεστής προεξόφλησης, ο οποίος λαμβάνει υπόψη την χρονική αξία του χρήματος.
- T είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, δηλαδή ο χρόνος που το πλεόνασμα της εταιρείας γίνεται αρνητικό για πρώτη φορά.
- $U(T-)$ είναι το πλεόνασμα της εταιρείας αμέσως πριν την χρεοκοπία.
- $|U(T)|$ είναι το έλλειμμα της εταιρείας κατά τη χρεοκοπία (το μέγεθος του αρνητικού πλεονάσματος).
- $I(T < \infty)$ είναι η συνάρτηση του ενδεχομένου της χρεοκοπίας, η οποία παίρνει την τιμή 1 αν η εταιρεία χρεοκοπήσει και 0 διαφορετικά.
- $w(x, y)$ είναι μια συνάρτηση ποινής, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσει διάφορα μέτρα χρεοκοπίας.
- u είναι το αρχικό πλεόνασμα της εταιρείας.

Η συνάρτηση Gerber-Shiu μπορεί να ερμηνευθεί ως η αναμενόμενη προεξοφλημένη αξία της ποινής που θα υποστεί η ασφαλιστική εταιρεία σε περίπτωση χρεοκοπίας. Η ποινή αυτή μπορεί να είναι, για παράδειγμα, το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία ή μια συνάρτηση του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία.

Η συνάρτηση Gerber-Shiu έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς στην αναλογιστική βιβλιογραφία για τη μελέτη διαφόρων μοντέλων κινδύνου, συμπεριλαμβανομένων των κλασικών μοντέλων, των μοντέλων Sparre Andersen και των μοντέλων με στοχαστικά ασφάλιστρα. Η συνάρτηση αυτή έχει αποδειχθεί ένα πολύτιμο εργαλείο για την κατανόηση και την ανάλυση των κινδύνων που αντιμετωπίζουν οι ασφαλιστικές εταιρείες, καθώς και για την ανάπτυξη αποτελεσματικών στρατηγικών διαχείρισης κινδύνου.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα του κλασικού μοντέλου είναι η ανισότητα Lundberg, η οποία δίνει ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας (Lundberg 1926). Σύμφωνα με την ανισότητα αυτή, η πιθανότητα χρεοκοπίας μειώνεται εκθετικά με την αύξηση του αρχικού πλεονάσματος.

Ο τύπος της ανισότητας Lundberg είναι ως εξής:

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}, u \geq 0$$

όπου $\psi(u)$ είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας και R ο συντελεστής προσαρμογής.

Επιπλέον, ο ασυμπτωτικός τύπος Cramer-Lundberg παρέχει μια προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν το αρχικό πλεόνασμα είναι μεγάλο. Αυτά τα αποτελέσματα είναι σημαντικά για τον προσδιορισμό του απαιτούμενου κεφαλαίου που πρέπει να διατηρεί μια ασφαλιστική εταιρεία για να αποφύγει τη χρεοκοπία (Grandell 1991).

Ο ασυμπτωτικός τύπος Cramer-Lundberg είναι ένας σημαντικός τύπος στη θεωρία κινδύνου, ο οποίος μας δίνει μια προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας μιας ασφαλιστικής εταιρείας όταν το αρχικό της κεφάλαιο είναι μεγάλο. Σύμφωνα με τον τύπο αυτό, η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$

προσεγγίζεται από την εκθετική συνάρτηση e^{-Ru} , όπου R είναι ο συντελεστής προσαρμογής.

Ο ασυμπτωτικός τύπος Cramer-Lundberg είναι ο εξής:

$$\psi(u) \sim C * e^{-Ru}, u \rightarrow \infty$$

όπου C είναι μια σταθερά που εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του μοντέλου κινδύνου.

Ο τύπος αυτός μας λέει ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας μειώνεται εκθετικά καθώς το αρχικό κεφάλαιο της εταιρείας αυξάνεται. Ο ρυθμός μείωσης καθορίζεται από τον συντελεστή προσαρμογής R , ο οποίος εξαρτάται από τον ρυθμό εισπράξεων των ασφαλιστρών, την ένταση των απαιτήσεων και την κατανομή των μεγεθών τους.

Ο ασυμπτωτικός τύπος Cramer-Lundberg είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τους αναλογιστές, καθώς τους επιτρέπει να εκτιμήσουν την πιθανότητα χρεοκοπίας μιας ασφαλιστικής εταιρείας με μεγάλο αρχικό κεφάλαιο. Αυτή η εκτίμηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη λήψη αποφάσεων σχετικά με τη διαχείριση κινδύνου και τον καθορισμό των αποθεματικών της εταιρείας.

Στο κλασσικό μοντέλο έχουν μελετηθεί και άλλα μέτρα χρεοκοπίας, όπως η μέγιστη σωρευτική απώλεια, η οποία εκφράζει τη μέγιστη δυνατή συνολική ζημιά που μπορεί να υποστεί η εταιρεία σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (Li 2008). Επίσης, έχει μελετηθεί η κατανομή του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία και η κατανομή του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία (Yang and Zhang 2001). Αυτά τα μέτρα παρέχουν μια πιο λεπτομερή εικόνα της πιθανής χρεοκοπίας και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη πιο αποτελεσματικών στρατηγικών διαχείρισης κινδύνου.

Παρά τις απλοποιητικές υποθέσεις του, το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για την κατανόηση και την ανάλυση των κινδύνων που αντιμετωπίζουν οι ασφαλιστικές εταιρείες. Τα αποτελέσματα του μοντέλου αυτού μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των ασφαλιστρών, τον καθορισμό των αποθεματικών και τη λήψη αποφάσεων

σχετικά με τη διαχείριση κινδύνου. Ωστόσο, η εγκυρότητα των αποτελεσμάτων του κλασσικού μοντέλου εξαρτάται από την ακρίβεια των υποθέσεων που γίνονται. Επομένως, είναι σημαντικό να εξετάζονται και πιο ρεαλιστικά μοντέλα που λαμβάνουν υπόψη την εξάρτηση μεταξύ των απαιτήσεων και των χρόνων μεταξύ τους, καθώς και άλλους παράγοντες που επηρεάζουν την οικονομική κατάσταση μιας ασφαλιστικής εταιρείας.

Στη σύγχρονη αναλογιστική επιστήμη, το κλασσικό μοντέλο έχει επεκταθεί και τροποποιηθεί με διάφορους τρόπους, προκειμένου να ληφθούν υπόψη πιο ρεαλιστικές υποθέσεις. Για παράδειγμα, έχουν αναπτυχθεί μοντέλα που επιτρέπουν την εξάρτηση μεταξύ των απαιτήσεων και των χρόνων μεταξύ τους (Boucherie and Boxma 2005), καθώς και μοντέλα που λαμβάνουν υπόψη την επίδραση των επενδύσεων και των διακυμάνσεων των επιτοκίων στην οικονομική κατάσταση μιας ασφαλιστικής εταιρείας (Taylor 1980). Επιπλέον, έχουν αναπτυχθεί μοντέλα που ενσωματώνουν στρατηγικές μερισμάτων, όπως η στρατηγική κατωφλίου, η οποία επιτρέπει την καταβολή μερισμάτων στους μετόχους όταν το πλεόνασμα της εταιρείας υπερβαίνει ένα συγκεκριμένο όριο (Labbé and Sendova 2009).

Συνοψίζοντας, το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου αποτελεί τη βάση για την κατανόηση και την ανάλυση των κινδύνων που αντιμετωπίζουν οι ασφαλιστικές εταιρείες. Παρά τις απλοποιητικές υποθέσεις του, το μοντέλο αυτό έχει σημαντική πρακτική αξία και έχει επεκταθεί με διάφορους τρόπους για να ληφθούν υπόψη πιο ρεαλιστικές υποθέσεις. Η μελέτη των μοντέλων κινδύνου αποτελεί ένα σημαντικό πεδίο έρευνας στην αναλογιστική επιστήμη και συμβάλλει στην ανάπτυξη πιο αποτελεσματικών στρατηγικών διαχείρισης κινδύνου για τις ασφαλιστικές εταιρείες.

1.2 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος για το κλασσικό μοντέλο

Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος αποτελεί κεντρικό αντικείμενο μελέτης στη θεωρία κινδύνου, καθώς περιγράφει την εξέλιξη του κεφαλαίου μιας ασφαλιστικής εταιρείας στο χρόνο. Στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου, γνωστό και ως μοντέλο Cramér-Lundberg, η διαδικασία πλεονάσματος διαμορφώνεται από την ισορροπία μεταξύ των εισπραττόμενων ασφαλίσεων και των καταβαλλόμενων αποζημιώσεων.

Στο κλασσικό μοντέλο, τα ασφάλιστρα θεωρούνται ότι εισπράττονται με σταθερό ρυθμό, ενώ οι αποζημιώσεις μοντελοποιούνται ως τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν μια σύνθετη διαδικασία Poisson. Η υπόθεση της σταθερότητας των ασφαλίσεων απλοποιεί την ανάλυση, αλλά μπορεί να μην είναι ρεαλιστική σε πολλές περιπτώσεις. Για παράδειγμα, ο ρυθμός εισπράξεων μπορεί να μεταβάλλεται λόγω αλλαγών στον αριθμό των ασφαλισμένων ή λόγω διαφορετικών ασφαλιστικών προϊόντων.

Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στο κλασσικό μοντέλο μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά ως εξής:

$$U(t) = u + ct - S(t)$$

όπου:

$U(t)$ είναι το πλεόνασμα της εταιρείας τη χρονική στιγμή t .

u είναι το αρχικό πλεόνασμα της εταιρείας.

c είναι ο σταθερός ρυθμός εισπράξεων ασφαλίσεων.

$S(t)$ είναι η συνολική αξία των αποζημιώσεων που έχουν καταβληθεί μέχρι τη χρονική στιγμή t .

Η διαδικασία $S(t)$ είναι μια σύνθετη διαδικασία Poisson, η οποία προκύπτει από το άθροισμα των μεγεθών των μεμονωμένων αποζημιώσεων που συμβαίνουν σε τυχαίες χρονικές στιγμές. Οι χρόνοι μεταξύ των αποζημιώσεων ακολουθούν

εκθετική κατανομή, ενώ τα μεγέθη των αποζημιώσεων είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές.

Η ανάλυση της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος στο κλασσικό μοντέλο επιτρέπει τον υπολογισμό διαφόρων μέτρων κινδύνου, όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας. Η χρεοκοπία ορίζεται ως η κατάσταση όπου το πλεόνασμα της εταιρείας γίνεται αρνητικό, δηλαδή όταν οι συνολικές αποζημιώσεις υπερβαίνουν τα συνολικά ασφάλιστρα και το αρχικό κεφάλαιο. Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ένα κρίσιμο μέτρο για την αξιολόγηση της φερεγγυότητας και της βιωσιμότητας μιας ασφαλιστικής εταιρείας (Charalamporoulou 2021).

Στο κλασσικό μοντέλο, η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά μέσω της επίλυσης μιας ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης, η οποία προκύπτει από την εφαρμογή της συνάρτησης Gerber-Shiu (Gerber and Shiu 1998). Η συνάρτηση αυτή επιτρέπει την ταυτόχρονη μελέτη διαφόρων μέτρων χρεοκοπίας, όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας, ο χρόνος χρεοκοπίας και το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία. Η επίλυση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης μπορεί να γίνει με διάφορες μεθόδους, όπως η μέθοδος των μετασχηματισμών Laplace.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα του κλασσικού μοντέλου είναι η ανισότητα Lundberg, η οποία δίνει ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας (Lundberg 1926). Σύμφωνα με την ανισότητα αυτή, η πιθανότητα χρεοκοπίας μειώνεται εκθετικά με την αύξηση του αρχικού πλεονάσματος. Επιπλέον, ο ασυμπτωτικός τύπος Cramer-Lundberg παρέχει μια προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν το αρχικό πλεόνασμα είναι μεγάλο. Αυτά τα αποτελέσματα είναι σημαντικά για τον προσδιορισμό του απαιτούμενου κεφαλαίου που πρέπει να διατηρεί μια ασφαλιστική εταιρεία για να αποφύγει τη χρεοκοπία.

Στο κλασσικό μοντέλο έχουν μελετηθεί και άλλα μέτρα χρεοκοπίας, όπως η μέγιστη σωρευτική απώλεια, η οποία εκφράζει τη μέγιστη δυνατή συνολική ζημιά που μπορεί να υποστεί η εταιρεία σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Επίσης, έχει μελετηθεί η κατανομή του πλεονάσματος αμέσως πριν τη

χρεοκοπία και η κατανομή του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία. Αυτά τα μέτρα παρέχουν μια πιο λεπτομερή εικόνα της πιθανής χρεοκοπίας και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη πιο αποτελεσματικών στρατηγικών διαχείρισης κινδύνου.

Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο έχει μελετηθεί εκτενώς στην αναλογιστική βιβλιογραφία και έχουν αναπτυχθεί διάφορες επεκτάσεις και παραλλαγές του μοντέλου. Μια σημαντική επέκταση είναι η εισαγωγή στοχαστικών ασφαλιστρων, όπου ο ρυθμός εισπράξεων δεν είναι σταθερός, αλλά ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία, όπως για παράδειγμα μια σύνθετη διαδικασία Poisson (Boikov 2002).

Επιπλέον, έχουν αναπτυχθεί μοντέλα που επιτρέπουν την εξάρτηση μεταξύ των απαιτήσεων και των χρόνων μεταξύ τους. Η εξάρτηση αυτή μπορεί να μοντελοποιηθεί με διάφορους τρόπους, όπως η χρήση copulas, οι οποίες επιτρέπουν την περιγραφή της εξάρτησης μεταξύ τυχαίων μεταβλητών με ευέλικτο τρόπο. Για παράδειγμα, η Farlie-Gumbel-Morgenstern copula έχει χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση της εξάρτησης μεταξύ των απαιτήσεων και των χρόνων μεταξύ τους (Ragulina 2017).

Μια άλλη σημαντική επέκταση του κλασικού μοντέλου είναι η ενσωμάτωση στρατηγικών μερισμάτων. Οι στρατηγικές μερισμάτων καθορίζουν τον τρόπο με τον οποίο η ασφαλιστική εταιρεία κατανέμει τα κέρδη της στους μετόχους της. Μια από τις πιο συνηθισμένες στρατηγικές μερισμάτων είναι η στρατηγική κατωφλίου, όπου τα μερίσματα καταβάλλονται μόνο όταν το πλεόνασμα της εταιρείας υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο όριο (Labbé and Sendova 2009).

Συμπερασματικά, η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για την κατανόηση και την ανάλυση των κινδύνων που αντιμετωπίζουν οι ασφαλιστικές εταιρείες. Το κλασικό μοντέλο Cramér-Lundberg, παρά τις απλοποιητικές υποθέσεις του, παρέχει ένα βασικό πλαίσιο για τη μελέτη της διαδικασίας πλεονάσματος και έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη πολλών επεκτάσεων και παραλλαγών που λαμβάνουν υπόψη πιο ρεαλιστικές υποθέσεις. Η έρευνα στον τομέα αυτό συνεχίζεται με στόχο την ανάπτυξη

ακόμα πιο εξελιγμένων μοντέλων που θα επιτρέπουν την ακριβέστερη περιγραφή και πρόβλεψη των κινδύνων που αντιμετωπίζουν οι ασφαλιστικές εταιρείες.

1.3 Μέτρα χρεοκοπίας

Η έννοια της χρεοκοπίας αποτελεί κεντρικό άξονα στην αναλογιστική επιστήμη και τη θεωρία κινδύνου, καθώς περιγράφει την κατάσταση κατά την οποία μια ασφαλιστική εταιρεία αδυνατεί να ανταποκριθεί στις οικονομικές της υποχρεώσεις, δηλαδή να καλύψει τις απαιτήσεις των ασφαλισμένων της. Η χρεοκοπία συνήθως ορίζεται ως η στιγμή που το πλεόνασμα της εταιρείας, δηλαδή η διαφορά μεταξύ των περιουσιακών της στοιχείων και των υποχρεώσεών της, γίνεται αρνητικό.

Στο κλασικό μοντέλο κινδύνου, γνωστό και ως μοντέλο Cramér-Lundberg, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ένα από τα βασικά μέτρα κινδύνου που εξετάζονται. Η πιθανότητα αυτή εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, όπως το αρχικό πλεόνασμα της εταιρείας, τον ρυθμό εισπράξεων των ασφαλιστρών, την ένταση των απαιτήσεων και την κατανομή του μεγέθους τους. Στο κλασικό μοντέλο, η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά, υπό την προϋπόθεση ότι η κατανομή του μεγέθους των απαιτήσεων είναι γνωστή (Charalamporoulou 2021).

Εκτός από την πιθανότητα χρεοκοπίας, υπάρχουν και άλλα μέτρα που χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση του κινδύνου χρεοκοπίας. Ένα από αυτά είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, δηλαδή ο χρόνος που μεσολαβεί μέχρι το πλεόνασμα της εταιρείας να γίνει αρνητικό. Ο χρόνος χρεοκοπίας είναι μια τυχαία μεταβλητή και η κατανομή του μπορεί να μας δώσει πληροφορίες για το πόσο γρήγορα μπορεί να χρεοκοπήσει μια εταιρεία.

Ένα άλλο σημαντικό μέτρο χρεοκοπίας είναι το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία, δηλαδή το μέγεθος του αρνητικού πλεονάσματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Το έλλειμμα αυτό μπορεί να ερμηνευθεί ως το ποσό που η εταιρεία δεν μπορεί να

καλύψει από τις υποχρεώσεις της. Η κατανομή του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία μπορεί να μας δώσει πληροφορίες για τη σοβαρότητα της χρεοκοπίας.

Για την ταυτόχρονη μελέτη των παραπάνω μέτρων χρεοκοπίας, οι Gerber και Shiu (1998) εισήγαγαν την έννοια της συνάρτησης ποινής, η οποία είναι γνωστή ως συνάρτηση Gerber-Shiu. Η συνάρτηση αυτή επιτρέπει τον υπολογισμό της αναμενόμενης προεξοφλημένης αξίας μιας ποινής που καταβάλλεται κατά τη χρεοκοπία. Η ποινή αυτή μπορεί να είναι μια συνάρτηση του χρόνου χρεοκοπίας, του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία ή και άλλων παραγόντων.

Στο κλασικό μοντέλο κινδύνου, η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, η οποία μπορεί να λυθεί αναλυτικά σε ορισμένες περιπτώσεις. Η λύση της εξίσωσης αυτής μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, τον χρόνο χρεοκοπίας και το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία.

Η έννοια της χρεοκοπίας και τα μέτρα που τη συνοδεύουν έχουν μελετηθεί εκτενώς στην αναλογιστική βιβλιογραφία. Για παράδειγμα, ο Dickson και ο Hipp (2001) μελέτησαν τον χρόνο χρεοκοπίας για διαδικασίες κινδύνου Erlang(2), ενώ ο Li (2008) εξέτασε τον χρόνο ανάκαμψης και τη μέγιστη σοβαρότητα της χρεοκοπίας σε ένα μοντέλο Sparre-Andersen.

Συμπερασματικά, η έννοια της χρεοκοπίας και τα μέτρα που τη συνοδεύουν αποτελούν κεντρικό αντικείμενο μελέτης στη θεωρία κινδύνου. Η κατανόηση αυτών των μέτρων είναι απαραίτητη για την αποτελεσματική διαχείριση των κινδύνων που αντιμετωπίζουν οι ασφαλιστικές εταιρείες.

1.4 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

Η συνάρτηση Gerber-Shiu, που εισήχθη από τους Gerber και Shiu (1998), αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο στην αναλογιστική επιστήμη για την ανάλυση των κινδύνων που αντιμετωπίζουν οι ασφαλιστικές εταιρείες. Πρόκειται για μια προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής που επιτρέπει την ταυτόχρονη μελέτη

διαφόρων μέτρων χρεοκοπίας, όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας, ο χρόνος χρεοκοπίας και το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία.

Η συνάρτηση Gerber-Shiu ορίζεται ως η αναμενόμενη προεξοφλημένη αξία μιας ποινής που καταβάλλεται κατά τη χρεοκοπία μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Η ποινή αυτή μπορεί να είναι μια συνάρτηση του χρόνου χρεοκοπίας, του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία, του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία, ή και άλλων παραγόντων που σχετίζονται με τη χρεοκοπία. Η προεξόφληση λαμβάνει υπόψη τη χρονική αξία του χρήματος, καθώς μια ποινή που καταβάλλεται στο μέλλον έχει μικρότερη αξία από μια ποινή που καταβάλλεται στο παρόν.

Στο κλασικό μοντέλο κινδύνου, η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί αναλυτικά σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή ή ανήκουν στην ρητή οικογένεια κατανομών (Zhang and Yang 2010). Η λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης επιτρέπει τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας, του χρόνου χρεοκοπίας και άλλων μέτρων κινδύνου.

Η συνάρτηση Gerber-Shiu έχει επεκταθεί και σε άλλα μοντέλα κινδύνου, όπως το μοντέλο Sparre Andersen και το μοντέλο με στοχαστικά ασφάλιστρα. Στο μοντέλο Sparre Andersen, οι χρόνοι μεταξύ των απαιτήσεων δεν είναι απαραίτητα εκθετικά κατανομημένοι, αλλά μπορούν να ακολουθούν οποιαδήποτε κατανομή. Στο μοντέλο με στοχαστικά ασφάλιστρα, ο ρυθμός εισπράξεων των ασφαλίσεων δεν είναι σταθερός, αλλά ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία, όπως για παράδειγμα μια σύνθετη διαδικασία Poisson.

Η συνάρτηση Gerber-Shiu έχει επίσης χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη της επίδρασης των στρατηγικών μερισμάτων στην πιθανότητα χρεοκοπίας. Οι στρατηγικές μερισμάτων καθορίζουν τον τρόπο με τον οποίο μια ασφαλιστική εταιρεία κατανέμει τα κέρδη της στους μετόχους της. Μια από τις πιο συνηθισμένες στρατηγικές μερισμάτων είναι η στρατηγική κατωφλίου, όπου τα

μερίσματα καταβάλλονται μόνο όταν το πλεόνασμα της εταιρείας υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο όριο (Ragulina 2017).

Η ανάλυση της συνάρτησης Gerber-Shiu σε μοντέλα με στρατηγικές μερισμάτων είναι πιο πολύπλοκη, καθώς η καταβολή μερισμάτων επηρεάζει τη διαδικασία πλεονάσματος. Ωστόσο, η συνάρτηση Gerber-Shiu μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μελετηθεί η επίδραση των στρατηγικών μερισμάτων στην πιθανότητα χρεοκοπίας και να προσδιοριστούν οι βέλτιστες στρατηγικές που μεγιστοποιούν την αξία της εταιρείας για τους μετόχους της.

Η συνάρτηση Gerber-Shiu έχει αποδειχθεί ένα πολύτιμο εργαλείο για την κατανόηση και την ανάλυση των κινδύνων που αντιμετωπίζουν οι ασφαλιστικές εταιρείες. Η ευελιξία της συνάρτησης αυτής επιτρέπει τη μοντελοποίηση μιας ευρείας γκάμας καταστάσεων, ενώ η δυνατότητα προεξόφλησης των μελλοντικών ταμειακών ροών την καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμη για τη λήψη αποφάσεων σχετικά με τη διαχείριση κινδύνου.

1.5 Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (Defective Renewal Equation - DRE) αποτελεί ένα θεμελιώδες εργαλείο στη μελέτη της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος και, κατ' επέκταση, στην αξιολόγηση του κινδύνου χρεοκοπίας μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Η εξίσωση αυτή περιγράφει τη σχέση μεταξύ της συνάρτησης Gerber-Shiu, η οποία εισήχθη από τους Gerber και Shiu (1998), και των πιθανοτήτων μετάβασης του πλεονάσματος σε διαφορετικές καταστάσεις.

Στο κλασικό μοντέλο κινδύνου, η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση εκφράζει τη συνάρτηση Gerber-Shiu ως συνάρτηση των πιθανοτήτων μετάβασης του πλεονάσματος μετά από μια απαίτηση. Η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί αναλυτικά σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή ή ανήκουν στην ρητή οικογένεια κατανομών (Zhang and Yang 2010).

Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας, του χρόνου χρεοκοπίας και άλλων μέτρων κινδύνου. Για παράδειγμα, ο Willmot (2007) μελέτησε την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου με γενικούς χρόνους μεταξύ απαιτήσεων, ενώ οι Willmot και Woo (2010) εφάρμοσαν την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για την ανάλυση του πλεονάσματος σε μια κλάση κατανομών Coxian για τους χρόνους μεταξύ απαιτήσεων.

Στο πλαίσιο της εργασίας της Charalamporouliou (2021), η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση παρουσιάζεται ως ένα κεντρικό εργαλείο για την ανάλυση της συνάρτησης Gerber-Shiu. Η εργασία αυτή εξετάζει τη διαδικασία πλεονάσματος με στοχαστικά ασφάλιστρα και αναφέρει ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της μορφής:

$$m(u) = \varphi \delta \int m(u - y) f \delta(y) dy + H \delta, w(u), u \geq 0$$

όπου $\varphi \delta$ είναι μια σταθερά, $f \delta$ είναι μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και $H \delta, w(u)$ είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από τη συνάρτηση ποινής w . Η εργασία αυτή δεν αναφέρει συγκεκριμένα αποτελέσματα για την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, αλλά τονίζει τη σημασία της για την ανάλυση της συνάρτησης Gerber-Shiu και των μέτρων χρεοκοπίας.

Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για την ανάλυση της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος και την αξιολόγηση του κινδύνου χρεοκοπίας. Η εξίσωση αυτή έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς στην αναλογιστική βιβλιογραφία και έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη πολλών θεωρητικών και πρακτικών αποτελεσμάτων. Η μελέτη της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης συνεχίζει να αποτελεί ένα σημαντικό πεδίο έρευνας στην αναλογιστική επιστήμη, καθώς η κατανόηση των ιδιοτήτων της μπορεί να οδηγήσει σε νέες μεθόδους και εργαλεία για τη διαχείριση του κινδύνου.

Κεφάλαιο 2: Στοχαστικά Ασφάλιστρα

2.1 Περιγραφή μοντέλου

2.1.1 Εισαγωγή στα στοχαστικά ασφάλιστρα

Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, γνωστό και ως μοντέλο Cramér-Lundberg, τα ασφάλιστρα θεωρούνται ότι εισπράττονται με σταθερό ρυθμό. Αυτή η υπόθεση απλοποιεί την μαθηματική ανάλυση του μοντέλου, αλλά στην πραγματικότητα, τα ασφάλιστρα μπορούν να μεταβάλλονται στο χρόνο. Για παράδειγμα, μια ασφαλιστική εταιρεία μπορεί να προσελκύσει περισσότερους ασφαλισμένους σε μια συγκεκριμένη περίοδο, με αποτέλεσμα να αυξηθούν τα έσοδά της από ασφάλιστρα. Αντίθετα, σε περιόδους οικονομικής κρίσης, ο αριθμός των ασφαλισμένων μπορεί να μειωθεί, οδηγώντας σε μείωση των εσόδων από ασφάλιστρα. Επιπλέον, η εταιρεία μπορεί να προσφέρει διαφορετικά ασφαλιστικά προϊόντα με διαφορετικά ασφάλιστρα, γεγονός που επηρεάζει τη συνολική εισροή ασφαλίσεων.

Για να ληφθούν υπόψη αυτές οι διακυμάνσεις, τα στοχαστικά ασφάλιστρα εισάγονται ως μια εναλλακτική προσέγγιση στη θεωρία κινδύνου. Στο πλαίσιο αυτό, τα ασφάλιστρα δεν θεωρούνται πλέον σταθερά, αλλά μοντελοποιούνται ως τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν μια συγκεκριμένη κατανομή πιθανότητας. Η χρήση στοχαστικών ασφαλίσεων επιτρέπει την πιο ρεαλιστική μοντελοποίηση της διαδικασίας είσπραξης ασφαλίσεων, καθώς λαμβάνει υπόψη τη μεταβλητότητα που παρατηρείται στην πράξη.

Η εισαγωγή στοχαστικών ασφαλίσεων στη θεωρία κινδύνου έχει σημαντικές επιπτώσεις στην ανάλυση του κινδύνου χρεοκοπίας. Στο κλασικό μοντέλο, η πιθανότητα χρεοκοπίας υπολογίζεται με βάση τη σταθερή εισροή ασφαλίσεων. Ωστόσο, όταν τα ασφάλιστρα είναι στοχαστικά, η πιθανότητα χρεοκοπίας εξαρτάται όχι μόνο από το μέσο ρυθμό εισπράξεων, αλλά και από τη διακύμανση και τη μορφή της κατανομής των ασφαλίσεων (Labbé and Sendova 2009).

Η μοντελοποίηση των ασφαλίσεων ως στοχαστικές διαδικασίες μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Μια συνηθισμένη προσέγγιση είναι η χρήση μιας σύνθετης διαδικασίας Poisson, όπου ο αριθμός των ασφαλισμένων που καταβάλλουν ασφάλιστρα σε μια δεδομένη χρονική περίοδο ακολουθεί μια διαδικασία Poisson, ενώ το μέγεθος του κάθε ασφαλίστου είναι μια τυχαία μεταβλητή με κάποια συγκεκριμένη κατανομή. Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει την ευέλικτη μοντελοποίηση των ασφαλίσεων, καθώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαφορετικές κατανομές για το μέγεθος των ασφαλίσεων, όπως η εκθετική, η λογαριθμική κανονική ή η Pareto (Zhang and Yang 2010).

Μια άλλη προσέγγιση είναι η χρήση ανανεωτικών διαδικασιών, όπου ο χρόνος μεταξύ των εισπράξεων ασφαλίσεων ακολουθεί μια ανανεωτική διαδικασία, ενώ το μέγεθος του κάθε ασφαλίστου είναι μια τυχαία μεταβλητή. Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει τη μοντελοποίηση καταστάσεων όπου ο χρόνος μεταξύ των εισπράξεων ασφαλίσεων δεν είναι απαραίτητα εκθετικά κατανεμημένος, αλλά μπορεί να ακολουθεί οποιαδήποτε κατανομή.

Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί και άλλα μοντέλα για τη μοντελοποίηση των στοχαστικών ασφαλίσεων, όπως τα μοντέλα Markov-modulated Poisson processes και τα μοντέλα Cox processes. Στα μοντέλα αυτά, η ένταση της διαδικασίας Poisson που περιγράφει την άφιξη των ασφαλίσεων μεταβάλλεται στο χρόνο, ανάλογα με την κατάσταση ενός υποκείμενου περιβάλλοντος.

Η εισαγωγή των στοχαστικών ασφαλίσεων στη θεωρία κινδύνου έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη νέων μεθόδων και εργαλείων για την ανάλυση του κινδύνου χρεοκοπίας. Για παράδειγμα, έχουν αναπτυχθεί νέες ανανεωτικές εξισώσεις και ολοκληρωμένες εξισώσεις που λαμβάνουν υπόψη τη στοχαστικότητα των ασφαλίσεων (Ragulina 2019). Επιπλέον, έχουν προταθεί νέες προσεγγίσεις για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας και άλλων μέτρων κινδύνου, όπως η μέθοδος των martingales και η μέθοδος των προσομοιώσεων Monte Carlo.

Συμπερασματικά, η εισαγωγή των στοχαστικών ασφαλίσεων στη θεωρία κινδύνου αποτελεί μια σημαντική εξέλιξη που επιτρέπει την πιο ρεαλιστική

μοντελοποίηση της διαδικασίας είσπραξης ασφαλίστρων. Η χρήση στοχαστικών ασφαλίστρων έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη νέων μεθόδων και εργαλείων για την ανάλυση του κινδύνου χρεοκοπίας και τη βελτίωση της διαχείρισης κινδύνου στις ασφαλιστικές εταιρείες.

2.1.2 Η διαδικασία πλεονάσματος με στοχαστικά ασφάλιστρα

Η διαδικασία πλεονάσματος με στοχαστικά ασφάλιστρα αποτελεί μια σημαντική επέκταση του κλασσικού μοντέλου κινδύνου στην αναλογιστική επιστήμη. Ενώ το κλασσικό μοντέλο Cramér-Lundberg θεωρεί ότι τα ασφάλιστρα εισπράττονται με σταθερό ρυθμό, η πραγματικότητα συχνά απαιτεί μια πιο ευέλικτη προσέγγιση. Στο πλαίσιο αυτό, τα στοχαστικά ασφάλιστρα επιτρέπουν τη μοντελοποίηση της μεταβλητότητας που παρατηρείται στην είσπραξη των ασφαλίστρων, καθιστώντας το μοντέλο πιο ρεαλιστικό και προσαρμοσμένο στις πραγματικές συνθήκες της ασφαλιστικής αγοράς.

Στο άρθρο των Zhang και Yang (2010), οι συγγραφείς εξετάζουν ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, όπου το εισόδημα από τα ασφάλιστρα ακολουθεί μια σύνθετη διαδικασία Poisson. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός των ασφαλίστρων που εισπράττονται σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα ακολουθεί μια διαδικασία Poisson, ενώ το μέγεθος κάθε ασφαλίστρου είναι μια τυχαία μεταβλητή. Οι συγγραφείς αναλύουν τη διαδικασία πλεονάσματος υπό την υπόθεση ότι υπάρχει μια συγκεκριμένη δομή εξάρτησης μεταξύ των απαιτήσεων, των χρόνων μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλίστρων. Συγκεκριμένα, υποθέτουν ότι η κατανομή των χρόνων μεταξύ των απαιτήσεων και η κατανομή των ασφαλίστρων εξαρτώνται από το μέγεθος των απαιτήσεων.

Στην εργασία της Ragulina (2017), εξετάζεται ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα όπου οι δομές εξάρτησης μεταξύ των απαιτήσεων και των χρόνων μεταξύ τους, καθώς και μεταξύ των ασφαλίστρων και των χρόνων μεταξύ τους, μοντελοποιούνται με τη χρήση copulas Farlie-Gumbel-Morgenstern. Η συγγραφέας λαμβάνει υπόψη και την καταβολή μερισμάτων στους μετόχους της ασφαλιστικής εταιρείας, σύμφωνα με μια στρατηγική

κατωφλίου. Στην εργασία αυτή, η διαδικασία πλεονάσματος περιγράφεται από μια εξίσωση που περιλαμβάνει τα στοχαστικά ασφάλιστρα, τις απαιτήσεις και τα μερίσματα.

Στην εργασία της Ragulina (2019), παρουσιάζεται ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και μια στρατηγική μερισμάτων πολλαπλών επιπέδων. Η συγγραφέας εξετάζει την περίπτωση όπου τα μεγέθη των απαιτήσεων και των ασφαλίσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή και παρουσιάζει αναλυτικούς τύπους για την πιθανότητα χρεοκοπίας και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων.

Στο κλασικό μοντέλο, η διαδικασία πλεονάσματος μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά ως εξής:

$$U(t) = u + \sum(P_i) - \sum(Y_i)$$

όπου:

$U(t)$ είναι το πλεόνασμα της εταιρείας τη χρονική στιγμή t

u είναι το αρχικό πλεόνασμα της εταιρείας

P_i είναι το μέγεθος του i -οστού ασφαλίστρου

Y_i είναι το μέγεθος της i -οστής απαίτησης

Στην περίπτωση των στοχαστικών ασφαλίσεων, το μέγεθος των ασφαλίσεων P_i είναι μια τυχαία μεταβλητή. Αυτό σημαίνει ότι η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται πιο πολύπλοκη, καθώς εξαρτάται όχι μόνο από τον αριθμό των απαιτήσεων και το μέγεθός τους, αλλά και από τον αριθμό των ασφαλίσεων και το μέγεθός τους.

Στην εργασία του Βοϊκον (2002), παρουσιάζεται το κλασικό μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα. Ο Βοϊκον θεωρεί ότι ο αριθμός των ασφαλίσεων ακολουθεί μια διαδικασία Poisson, ενώ το μέγεθος των ασφαλίσεων ακολουθεί μια γενική κατανομή. Ο συγγραφέας αναλύει τη διαδικασία πλεονάσματος και υπολογίζει την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Συνοψίζοντας, η εισαγωγή των στοχαστικών ασφαλίσεων στη θεωρία κινδύνου αποτελεί μια σημαντική επέκταση που επιτρέπει την πιο ρεαλιστική μοντελοποίηση της διαδικασίας είσπραξης ασφαλίσεων. Η χρήση στοχαστικών ασφαλίσεων έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη νέων μεθόδων και εργαλείων για την ανάλυση του κινδύνου χρεοκοπίας και τη βελτίωση της διαχείρισης κινδύνου στις ασφαλιστικές εταιρείες.

2.1.3 Υποθέσεις του μοντέλου

Στο κλασικό μοντέλο κινδύνου, γνωστό και ως μοντέλο Cramér-Lundberg, μια από τις βασικές υποθέσεις είναι ότι τα ασφάλιστρα εισπράττονται με σταθερό ρυθμό. Ωστόσο, αυτή η υπόθεση δεν ανταποκρίνεται πάντα στην πραγματικότητα, καθώς τα ασφάλιστρα μπορούν να μεταβάλλονται λόγω διαφόρων παραγόντων, όπως η μεταβολή του αριθμού των ασφαλισμένων ή η εισαγωγή νέων ασφαλιστικών προϊόντων. Για την αντιμετώπιση αυτής της ασυμφωνίας, τα στοχαστικά ασφάλιστρα εισάγονται ως μια εναλλακτική προσέγγιση στη θεωρία κινδύνου.

Στο μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, τα ασφάλιστρα δεν θεωρούνται πλέον σταθερά, αλλά μοντελοποιούνται ως τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν μια συγκεκριμένη κατανομή πιθανότητας. Η κατανομή αυτή μπορεί να είναι εκθετική, λογαριθμική κανονική, Pareto ή οποιαδήποτε άλλη κατανομή που ταιριάζει στα δεδομένα της ασφαλιστικής εταιρείας. Η χρήση στοχαστικών ασφαλίσεων επιτρέπει την πιο ρεαλιστική μοντελοποίηση της διαδικασίας είσπραξης ασφαλίσεων, καθώς λαμβάνει υπόψη τη μεταβλητότητα που παρατηρείται στην πράξη.

Μια από τις βασικές υποθέσεις του μοντέλου με στοχαστικά ασφάλιστρα είναι ότι τα ασφάλιστρα είναι ανεξάρτητα και ισόνομα κατανομημένα. Αυτή η υπόθεση απλοποιεί την ανάλυση του μοντέλου, αλλά μπορεί να μην είναι ρεαλιστική σε ορισμένες περιπτώσεις. Για παράδειγμα, τα ασφάλιστρα που καταβάλλονται από τους ασφαλισμένους μπορεί να εξαρτώνται από το είδος του ασφαλιστικού προϊόντος που έχουν επιλέξει ή από το ιστορικό των απαιτήσεών τους.

Μια άλλη σημαντική υπόθεση του μοντέλου είναι ότι η διαδικασία των ασφαλίσεων είναι ανεξάρτητη από τη διαδικασία των απαιτήσεων. Αυτή η υπόθεση σημαίνει ότι η εισροή ασφαλίσεων δεν επηρεάζεται από την εκροή αποζημιώσεων. Ωστόσο, στην πραγματικότητα, οι ασφαλιστικές εταιρείες μπορεί να προσαρμόζουν τα ασφάλιστρα που χρεώνουν ανάλογα με το επίπεδο των απαιτήσεων που αντιμετωπίζουν.

Στην εργασία των Zhang και Yang (2010), οι συγγραφείς εξετάζουν ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, όπου το εισόδημα από τα ασφάλιστρα ακολουθεί μια σύνθετη διαδικασία Poisson. Οι συγγραφείς υποθέτουν ότι η κατανομή των χρόνων μεταξύ των απαιτήσεων και η κατανομή των ασφαλίσεων εξαρτώνται από το μέγεθος των απαιτήσεων. Αυτή η υπόθεση επιτρέπει τη μοντελοποίηση της εξάρτησης μεταξύ των εισροών και των εκροών της ασφαλιστικής εταιρείας.

Στην εργασία της Ragulina (2017), εξετάζεται ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα όπου οι δομές εξάρτησης μεταξύ των απαιτήσεων και των χρόνων μεταξύ τους, καθώς και μεταξύ των ασφαλίσεων και των χρόνων μεταξύ τους, μοντελοποιούνται με τη χρήση copulas Farlie-Gumbel-Morgenstern. Η συγγραφέας υποθέτει ότι τα μεγέθη των απαιτήσεων και των ασφαλίσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή, αλλά η μέθοδος της copula επιτρέπει τη μοντελοποίηση και άλλων κατανομών.

Η υπόθεση της εκθετικής κατανομής για τα μεγέθη των απαιτήσεων και των ασφαλίσεων είναι μια κοινή υπόθεση στα μοντέλα κινδύνου, καθώς απλοποιεί την μαθηματική ανάλυση. Ωστόσο, υπάρχουν και άλλες κατανομές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν, όπως η λογαριθμική κανονική ή η Pareto. Η επιλογή της καταλληλότερης κατανομής εξαρτάται από τα δεδομένα της ασφαλιστικής εταιρείας και το είδος των κινδύνων που καλύπτει.

Συμπερασματικά, η μοντελοποίηση των ασφαλίσεων ως στοχαστικές διαδικασίες είναι μια σημαντική εξέλιξη στη θεωρία κινδύνου, καθώς επιτρέπει την πιο ρεαλιστική απεικόνιση της λειτουργίας μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Οι

υποθέσεις που γίνονται για τη διαδικασία των ασφαλίσεων, όπως η κατανομή των μεγεθών των ασφαλίσεων και η εξάρτηση μεταξύ των ασφαλίσεων και των απαιτήσεων, επηρεάζουν σημαντικά τα αποτελέσματα του μοντέλου.

2.1.4 Παραδείγματα μοντέλων με στοχαστικά ασφάλιστρα

Τα μοντέλα κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα αποτελούν μια σημαντική επέκταση των κλασικών μοντέλων, όπως το μοντέλο Cramér-Lundberg, όπου τα ασφάλιστρα θεωρούνται σταθερά. Στα στοχαστικά μοντέλα, τα ασφάλιστρα μοντελοποιούνται ως τυχαίες μεταβλητές, επιτρέποντας την ανάλυση πιο ρεαλιστικών σεναρίων, όπου το εισόδημα από ασφάλιστρα μπορεί να μεταβάλλεται λόγω διαφόρων παραγόντων, όπως η μεταβλητότητα του αριθμού των ασφαλισμένων ή η διαφοροποίηση των ασφαλιστικών προϊόντων.

Ένα παράδειγμα μοντέλου με στοχαστικά ασφάλιστρα είναι το μοντέλο που προτείνεται από τους Zhang και Yang (2010), όπου το εισόδημα από ασφάλιστρα ακολουθεί μια σύνθετη διαδικασία Poisson. Σε αυτό το μοντέλο, ο αριθμός των ασφαλίσεων που εισπράττονται σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα ακολουθεί μια διαδικασία Poisson, ενώ το μέγεθος κάθε ασφαλίστρου είναι μια τυχαία μεταβλητή. Οι συγγραφείς υποθέτουν ότι η κατανομή των χρόνων μεταξύ των απαιτήσεων και η κατανομή των ασφαλίσεων εξαρτώνται από το μέγεθος των απαιτήσεων, επιτρέποντας έτσι τη μοντελοποίηση της εξάρτησης μεταξύ των εισροών και των εκροών της ασφαλιστικής εταιρείας.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα προσέγγιση παρουσιάζεται στην εργασία της Ragulina (2017), όπου η εξάρτηση μεταξύ των απαιτήσεων και των χρόνων μεταξύ τους, καθώς και μεταξύ των ασφαλίσεων και των χρόνων μεταξύ τους, μοντελοποιείται με τη χρήση copulas Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM). Η συγγραφέας εξετάζει επίσης την επίδραση μιας στρατηγικής μερισμάτων κατωφλίου, όπου τα μερίσματα καταβάλλονται μόνο όταν το πλεόνασμα της εταιρείας υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο όριο, στη διαδικασία πλεονάσματος.

Στην εργασία της Ragulina (2019), παρουσιάζεται ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και μια στρατηγική μερισμάτων πολλαπλών επιπέδων. Η συγγραφέας λαμβάνει υπόψη ότι τα μεγέθη των απαιτήσεων και των ασφαλίσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή και καταλήγει σε αναλυτικούς τύπους για την πιθανότητα χρεοκοπίας και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων.

Στην διπλωματική εργασία της Charalamporoulou (2021), εξετάζεται το μοντέλο κινδύνου που προτάθηκε από τον Βοϊκον (2002), όπου τα ασφάλιστρα δεν εισπράττονται με σταθερό ρυθμό, αλλά περιγράφονται από μια στοχαστική διαδικασία Poisson. Η εργασία αυτή αναλύει τη διαδικασία πλεονάσματος υπό διάφορες υποθέσεις για την κατανομή των ασφαλίσεων και παρουσιάζει αναλυτικά αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας και άλλα μέτρα κινδύνου. Επιπλέον, εξετάζει την περίπτωση όπου τα ατομικά ασφάλιστρα ακολουθούν την κατανομή Erlang, η οποία αποτελεί μια γενίκευση της εκθετικής κατανομής.

Συνολικά, η βιβλιογραφία παρουσιάζει μια ποικιλία μοντέλων με στοχαστικά ασφάλιστρα, τα οποία επιτρέπουν την ανάλυση του κινδύνου χρεοκοπίας υπό ρεαλιστικές υποθέσεις. Η επιλογή του κατάλληλου μοντέλου εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης ασφαλιστικής εταιρείας και τις διαθέσιμες πληροφορίες για την είσπραξη των ασφαλίσεων.

2.2 Ανανεωτική εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu

2.2.1 Εισαγωγή στην ανανεωτική εξίσωση

Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (DRE) αποτελεί ένα θεμελιώδες εργαλείο στην αναλογιστική επιστήμη και τη θεωρία κινδύνου, καθώς επιτρέπει την ανάλυση της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος και την εκτίμηση της πιθανότητας χρεοκοπίας μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Η εξίσωση αυτή περιγράφει τη σχέση μεταξύ της συνάρτησης Gerber-Shiu, η οποία εισήχθη από τους Gerber και Shiu (1998), και των πιθανοτήτων μετάβασης του πλεονάσματος σε διαφορετικές καταστάσεις.

Στο πλαίσιο των μοντέλων κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, η ανανεωτική εξίσωση διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην κατανόηση της δυναμικής του πλεονάσματος. Συγκεκριμένα, η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση εκφράζει τη συνάρτηση Gerber-Shiu ως συνάρτηση των πιθανοτήτων μετάβασης του πλεονάσματος μετά από μια απαίτηση ή την είσπραξη ενός ασφάλιστρου. Οι πιθανότητες αυτές εξαρτώνται από την κατανομή των απαιτήσεων, την κατανομή των ασφαλίστρων, καθώς και από τη σχέση μεταξύ τους.

Η εργασία των Zhang και Yang (2010) παρουσιάζει ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και εξάρτηση μεταξύ του εισοδήματος και των απαιτήσεων. Οι συγγραφείς χρησιμοποιούν την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για να υπολογίσουν την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, η οποία αποτελεί μια γενίκευση της συνάρτησης Gerber-Shiu. Στην εργασία τους, αναλύουν την περίπτωση όπου τα ασφάλιστρα ακολουθούν εκθετική κατανομή και παρουσιάζουν αναλυτικές εκφράσεις για τη συνάρτηση ποινής.

Στην εργασία της Ragulina (2017), εξετάζεται ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, εξαρτήσεις και μια στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου. Η συγγραφέας χρησιμοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για να υπολογίσει τη συνάρτηση Gerber-Shiu και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία. Η ανάλυση της εργασίας αυτής δείχνει ότι η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση της διαδικασίας πλεονάσματος σε μοντέλα με στοχαστικά ασφάλιστρα και εξαρτήσεις.

Στην εργασία της Ragulina (2019), παρουσιάζεται ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και μια στρατηγική μερισμάτων πολλαπλών επιπέδων. Η συγγραφέας χρησιμοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για να υπολογίσει τη συνάρτηση Gerber-Shiu και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων. Η εργασία αυτή δείχνει ότι η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση μπορεί να επεκταθεί και σε μοντέλα με πιο σύνθετες στρατηγικές μερισμάτων.

Στη διπλωματική της εργασία, η Charalamporoulou (2021) εξετάζει τη διαδικασία πλεονάσματος με στοχαστικά ασφάλιστρα, εστιάζοντας στην ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Η εργασία αυτή παρουσιάζει αναλυτικά την παραγωγή της εξίσωσης και αναφέρει ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της μορφής:

$$m(u) = \varphi\delta \int m(u - y)f\delta(y)dy + H\delta, w(u), u \geq 0$$

όπου $\varphi\delta$ είναι μια σταθερά, $f\delta$ είναι μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και $H\delta, w(u)$ είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από τη συνάρτηση ποινής w . Η εργασία αυτή δεν αναφέρει συγκεκριμένα αποτελέσματα για την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, αλλά τονίζει τη σημασία της για την ανάλυση της συνάρτησης Gerber-Shiu και των μέτρων χρεοκοπίας.

Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για την ανάλυση της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος και την αξιολόγηση του κινδύνου χρεοκοπίας σε μοντέλα με στοχαστικά ασφάλιστρα. Η εξίσωση αυτή έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς στην αναλογιστική βιβλιογραφία και έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη πολλών θεωρητικών και πρακτικών αποτελεσμάτων.

2.2.2 Παραγωγή της ανανεωτικής εξίσωσης για τη συνάρτηση Gerber-Shiu

Η ανανεωτική εξίσωση αποτελεί θεμελιώδες εργαλείο στη μελέτη της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος και κατ' επέκταση στην εκτίμηση της πιθανότητας χρεοκοπίας μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Στο πλαίσιο των μοντέλων κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, η ανανεωτική εξίσωση διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην κατανόηση της δυναμικής του πλεονάσματος. Συγκεκριμένα, η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση εκφράζει τη συνάρτηση Gerber-Shiu ως συνάρτηση των πιθανοτήτων μετάβασης του πλεονάσματος μετά από μια απαίτηση ή την είσπραξη ενός ασφάλιστρου. Οι πιθανότητες αυτές εξαρτώνται από την κατανομή των απαιτήσεων, την κατανομή των ασφαλίστρων, καθώς και από τη σχέση μεταξύ τους.

Η παραγωγή της ανανεωτικής εξίσωσης για τη συνάρτηση Gerber-Shiu σε ένα μοντέλο με στοχαστικά ασφάλιστρα μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους, ανάλογα με τις υποθέσεις και τα χαρακτηριστικά του μοντέλου. Μια συνηθισμένη προσέγγιση είναι η χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας, το οποίο επιτρέπει την ανάλυση της διαδικασίας πλεονάσματος σε διαφορετικά σενάρια, ανάλογα με το είδος του πρώτου γεγονότος που συμβαίνει (απαίτηση ή είσπραξη ασφαλίστρου).

Για παράδειγμα, στο άρθρο των Zhang και Yang (2010), οι συγγραφείς εξετάζουν ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και εξάρτηση μεταξύ του εισοδήματος και των απαιτήσεων. Συγκεκριμένα, υποθέτουν ότι η κατανομή των χρόνων μεταξύ των απαιτήσεων και η κατανομή των ασφαλίστρων εξαρτώνται από το μέγεθος των απαιτήσεων. Οι συγγραφείς χρησιμοποιούν το θεώρημα ολικής πιθανότητας για να αναλύσουν τη διαδικασία πλεονάσματος, λαμβάνοντας υπόψη τα διαφορετικά σενάρια που μπορούν να προκύψουν μετά από μια απαίτηση ή την είσπραξη ενός ασφαλίστρου.

Στην εργασία της Ragulina (2017), εξετάζεται ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, εξαρτήσεις και μια στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου. Η συγγραφέας χρησιμοποιεί επίσης το θεώρημα ολικής πιθανότητας για να παράγει την ανανεωτική εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu. Στην εργασία αυτή, η ανάλυση γίνεται πιο περίπλοκη λόγω της ύπαρξης εξαρτήσεων μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλίστρων, καθώς και λόγω της στρατηγικής μερισμάτων.

Στην εργασία της Ragulina (2019), η οποία εξετάζει ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και μια στρατηγική μερισμάτων πολλαπλών επιπέδων, η παραγωγή της ανανεωτικής εξίσωσης γίνεται με παρόμοιο τρόπο. Η συγγραφέας χρησιμοποιεί το θεώρημα ολικής πιθανότητας και λαμβάνει υπόψη τα πολλαπλά επίπεδα μερισμάτων, γεγονός που καθιστά την ανάλυση πιο σύνθετη.

Στη διπλωματική της εργασία, η Charalamporou (2021) εξετάζει τη διαδικασία πλεονάσματος με στοχαστικά ασφάλιστρα, εστιάζοντας στην ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Η εργασία αυτή παρουσιάζει αναλυτικά την παραγωγή της εξίσωσης, χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας και λαμβάνοντας υπόψη τα διαφορετικά σενάρια που μπορούν να προκύψουν μετά από μια απαίτηση ή την είσπραξη ενός ασφαλιστρού. Η συγγραφέας αναφέρει ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της μορφής:

$$m(u) = \varphi \delta \int_0^u m(u-y) f \delta(y) dy + H_{\delta, w}(u), u \geq 0$$

όπου $\varphi \delta$ είναι μια σταθερά, $f \delta$ είναι μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και $H_{\delta, w}(u)$ είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από τη συνάρτηση ποινής w . Η εργασία αυτή δεν αναφέρει συγκεκριμένα αποτελέσματα για την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, αλλά τονίζει τη σημασία της για την ανάλυση της συνάρτησης Gerber-Shiu και των μέτρων χρεοκοπίας.

Συνολικά, η παραγωγή της ανανεωτικής εξίσωσης για τη συνάρτηση Gerber-Shiu σε μοντέλα με στοχαστικά ασφάλιστρα αποτελεί ένα σημαντικό βήμα στην ανάλυση του κινδύνου χρεοκοπίας. Η εξίσωση αυτή επιτρέπει τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας, του χρόνου χρεοκοπίας και άλλων μέτρων κινδύνου, λαμβάνοντας υπόψη τη στοχαστικότητα των ασφαλιστρών και τη σχέση τους με τις απαιτήσεις. Η μελέτη της ανανεωτικής εξίσωσης σε διάφορα μοντέλα κινδύνου μπορεί να οδηγήσει σε νέες γνώσεις και εργαλεία για τη διαχείριση του κινδύνου στις ασφαλιστικές εταιρείες.

2.2.3 Επίλυση της ανανεωτικής εξίσωσης

Η επίλυση της ανανεωτικής εξίσωσης αποτελεί ένα κρίσιμο βήμα στην ανάλυση των μοντέλων κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα. Η ανανεωτική εξίσωση, που προκύπτει από τη σχέση:

$$m(u) = \phi_\delta \int_0^u m(u-y) f_\delta(y) dy + H_{\delta,w}(u), \quad u \geq 0$$

όπου $m(u)$ είναι η συνάρτηση Gerber-Shiu, ϕ_δ είναι μια σταθερά, $f_\delta(y)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία και $H_{\delta,w}(u)$ είναι μια συνάρτηση που περιγράφει την αναμενόμενη προεξοφλημένη ποινή που καταβάλλεται κατά τη χρεοκοπία, μπορεί να λυθεί με διάφορες μεθόδους.

Μια από τις βασικές μεθόδους επίλυσης είναι η χρήση μετασχηματισμών Laplace. Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace και στις δύο πλευρές της ανανεωτικής εξίσωσης, μπορούμε να μετατρέψουμε την ολοκληρωτική εξίσωση σε μια αλγεβρική εξίσωση, η οποία μπορεί να λυθεί ευκολότερα. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, μπορούμε να βρούμε τη λύση της αρχικής ανανεωτικής εξίσωσης (Su et al., 2020).

Μια άλλη μέθοδος επίλυσης είναι η χρήση της μεθόδου των ανανεωτικών μετρήσεων. Αυτή η μέθοδος βασίζεται στην ιδέα ότι η διαδικασία πλεονάσματος μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ανανεωτικών διαδικασιών, μπορούμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση Gerber-Shiu ως συνάρτηση των πιθανοτήτων μετάβασης του πλεονάσματος σε διαφορετικές καταστάσεις (Fang & Oosterlee, 2022).

Η επίλυση της ανανεωτικής εξίσωσης μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκη, ειδικά σε περιπτώσεις όπου τα ασφάλιστρα ακολουθούν μια γενική κατανομή. Ωστόσο, υπάρχουν αναλυτικές λύσεις για ορισμένες ειδικές περιπτώσεις, όπως όταν τα ασφάλιστρα ακολουθούν εκθετική κατανομή ή ανήκουν στην ρητή οικογένεια κατανομών (Zhang and Yang, 2010). Στην περίπτωση των εκθετικά κατανομημένων ασφαλίσεων, η ανανεωτική εξίσωση μπορεί να μετατραπεί σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση, η οποία μπορεί να λυθεί με τη χρήση των συνθηκών ορίου.

Στην εργασία της Charalamporoulou (2021), η συγγραφέας εξετάζει την επίλυση της ανανεωτικής εξίσωσης για τη συνάρτηση Gerber-Shiu στην περίπτωση όπου τα ασφάλιστρα ακολουθούν την κατανομή Erlang(n). Η συγγραφέας χρησιμοποιεί τη μέθοδο των μετασχηματισμών Laplace για να μετατρέψει την ανανεωτική εξίσωση σε μια αλγεβρική εξίσωση και στη συνέχεια εφαρμόζει τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace για να βρει τη λύση της αρχικής εξίσωσης (Charalamporoulou, 2021).

Συνοψίζοντας, η επίλυση της ανανεωτικής εξίσωσης για τη συνάρτηση Gerber-Shiu αποτελεί ένα σημαντικό βήμα στην ανάλυση των μοντέλων κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα. Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου επίλυσης εξαρτάται από τις υποθέσεις και τα χαρακτηριστικά του μοντέλου. Η κατανόηση των μεθόδων αυτών είναι απαραίτητη για την αποτελεσματική διαχείριση του κινδύνου στις ασφαλιστικές εταιρείες.

2.2.4 Εφαρμογές της ανανεωτικής εξίσωσης

Μια από τις βασικές εφαρμογές της ανανεωτικής εξίσωσης είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Στο κλασικό μοντέλο κινδύνου, η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως η πιθανότητα το πλεόνασμα της εταιρείας να γίνει αρνητικό σε κάποια χρονική στιγμή. Η ανανεωτική εξίσωση επιτρέπει τον υπολογισμό αυτής της πιθανότητας με αναδρομικό τρόπο, λαμβάνοντας υπόψη τις πιθανότητες μετάβασης του πλεονάσματος σε διαφορετικές καταστάσεις μετά από κάθε απαίτηση.

Η ανανεωτική εξίσωση μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό άλλων σημαντικών μέτρων κινδύνου, όπως ο χρόνος χρεοκοπίας και το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία. Ο χρόνος χρεοκοπίας είναι ο χρόνος που μεσολαβεί μέχρι το πλεόνασμα της εταιρείας να γίνει αρνητικό για πρώτη φορά, ενώ το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία είναι το μέγεθος του αρνητικού πλεονάσματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Η ανανεωτική εξίσωση επιτρέπει τον υπολογισμό της κατανομής αυτών των μέτρων, παρέχοντας σημαντικές πληροφορίες για την αξιολόγηση του κινδύνου χρεοκοπίας.

Επιπλέον, η ανανεωτική εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη της επίδρασης διαφόρων παραγόντων στην πιθανότητα χρεοκοπίας και σε άλλα μέτρα κινδύνου. Για παράδειγμα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξεταστεί η επίδραση της μεταβλητότητας των ασφαλίσεων ή των απαιτήσεων στην πιθανότητα χρεοκοπίας. Επίσης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μελετηθεί η επίδραση διαφόρων στρατηγικών διαχείρισης κινδύνου, όπως η στρατηγική μερισμάτων, στην πιθανότητα χρεοκοπίας.

Στην εργασία των Zhang και Yang (2010), οι συγγραφείς χρησιμοποιούν την ανανεωτική εξίσωση για να αναλύσουν ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και εξάρτηση μεταξύ του εισοδήματος και των απαιτήσεων. Συγκεκριμένα, υποθέτουν ότι η κατανομή των χρόνων μεταξύ των απαιτήσεων και η κατανομή των ασφαλίσεων εξαρτώνται από το μέγεθος των απαιτήσεων. Οι συγγραφείς δείχνουν ότι η ανανεωτική εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής, η οποία αποτελεί μια γενίκευση της συνάρτησης Gerber-Shiu.

Στην εργασία της Ragulina (2017), η ανανεωτική εξίσωση χρησιμοποιείται για την ανάλυση ενός μοντέλου κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, εξαρτήσεις και μια στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου. Η συγγραφέας δείχνει ότι η ανανεωτική εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της συνάρτησης Gerber-Shiu και των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία.

Στην εργασία της Ragulina (2019), η ανανεωτική εξίσωση χρησιμοποιείται για την ανάλυση ενός μοντέλου κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και μια στρατηγική μερισμάτων πολλαπλών επιπέδων. Η συγγραφέας δείχνει ότι η ανανεωτική εξίσωση μπορεί να επεκταθεί και σε μοντέλα με πιο σύνθετες στρατηγικές μερισμάτων.

Συνολικά, η ανανεωτική εξίσωση αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για την ανάλυση της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος και την αξιολόγηση του κινδύνου χρεοκοπίας σε μοντέλα με στοχαστικά ασφάλιστρα. Η εξίσωση αυτή

επιτρέπει τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας και άλλων μέτρων κινδύνου, λαμβάνοντας υπόψη τη στοχαστικότητα των ασφαλίσεων και τη σχέση τους με τις απαιτήσεις. Η μελέτη της ανανεωτικής εξίσωσης σε διάφορα μοντέλα κινδύνου μπορεί να οδηγήσει σε νέες γνώσεις και εργαλεία για τη διαχείριση του κινδύνου στις ασφαλιστικές εταιρείες.

2.3 Ολοκληρωμένη εξίσωση για το μοντέλο Gerber-Shiu

2.3.1 Εισαγωγή στην ολοκληρωμένη εξίσωση

Η ολοκληρωμένη εξίσωση (IE) αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο στην αναλογιστική επιστήμη και τη θεωρία κινδύνου, καθώς προσφέρει μια εναλλακτική προσέγγιση στην ανάλυση της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος και την εκτίμηση της πιθανότητας χρεοκοπίας μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Σε αντίθεση με την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (DRE), η οποία εστιάζει στις πιθανότητες μετάβασης του πλεονάσματος μετά από μια απαίτηση ή την είσπραξη ενός ασφαλίστρου, η ολοκληρωμένη εξίσωση εξετάζει τη διαδικασία πλεονάσματος σε ένα συνεχές χρονικό διάστημα, λαμβάνοντας υπόψη όλες τις πιθανές μεταβολές του πλεονάσματος λόγω των εισπράξεων ασφαλίσεων και των καταβολών αποζημιώσεων (Gerber & Shiu, 1998; Dickson, 2005).

Στο άρθρο των Zhang και Yang (2010), οι συγγραφείς εξετάζουν ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και εξάρτηση μεταξύ του εισοδήματος και των απαιτήσεων. Στην εργασία τους, αναφέρουν ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ολοκληρωμένη εξίσωση της μορφής:

$$m(u) = \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta} \int_0^{\infty} m(u+x) dG(x) + \frac{\lambda}{\mu+\lambda+\delta} \left[\int_0^u m(u-y)f(y) dy + \zeta(u) \right], \quad u \geq 0$$

όπου $m(u)$ είναι η συνάρτηση Gerber-Shiu, μ είναι η ένταση των ασφαλίσεων, λ είναι η ένταση των απαιτήσεων, δ είναι ο συντελεστής προεξόφλησης, $G(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής του μεγέθους των ασφαλίσεων, $f(y)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του μεγέθους των απαιτήσεων και $\zeta(u)$

είναι μια συνάρτηση που περιγράφει την αναμενόμενη προεξοφλημένη ποινή που καταβάλλεται κατά τη χρεοκοπία (Zhang & Yang, 2010).

Η παραπάνω εξίσωση εκφράζει τη συνάρτηση Gerber-Shiu ως συνάρτηση των πιθανοτήτων μετάβασης του πλεονάσματος σε διαφορετικές καταστάσεις μετά από μια απαίτηση ή την είσπραξη ενός ασφαλίστρου, σταθμισμένες με τις αντίστοιχες πιθανότητες. Ο πρώτος όρος στο δεξί μέρος της εξίσωσης αντιπροσωπεύει την αναμενόμενη προεξοφλημένη ποινή που καταβάλλεται μετά την είσπραξη ενός ασφαλίστρου, ενώ ο δεύτερος όρος αντιπροσωπεύει την αναμενόμενη προεξοφλημένη ποινή που καταβάλλεται μετά από μια απαίτηση.

Στην εργασία της Charalamporoulou (2021), η ολοκληρωμένη εξίσωση παρουσιάζεται ως μια εναλλακτική προσέγγιση στην ανάλυση της συνάρτησης Gerber-Shiu. Η συγγραφέας αναφέρει ότι η ολοκληρωμένη εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας και άλλων μέτρων κινδύνου, καθώς και για τη μελέτη της επίδρασης των παραμέτρων του μοντέλου στην πιθανότητα χρεοκοπίας (Charalamporoulou, 2021).

Συνοψίζοντας, η ολοκληρωμένη εξίσωση αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για την ανάλυση της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος σε μοντέλα με στοχαστικά ασφάλιστρα. Η εξίσωση αυτή επιτρέπει τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας και άλλων μέτρων κινδύνου, λαμβάνοντας υπόψη τη στοχαστικότητα των ασφαλίστρων και τη σχέση τους με τις απαιτήσεις. Η μελέτη της ολοκληρωμένης εξίσωσης σε διάφορα μοντέλα κινδύνου μπορεί να οδηγήσει σε νέες γνώσεις και εργαλεία για τη διαχείριση του κινδύνου στις ασφαλιστικές εταιρείες (Gerber & Shiu, 1998; Dickson, 2005; Zhang & Yang, 2010; Charalamporoulou, 2021).

2.3.2 Παραγωγή της ολοκληρωμένης εξίσωσης για τη συνάρτηση Gerber-Shiu

Η ολοκληρωμένη εξίσωση (IE) αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο στην ανάλυση της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος, ειδικά σε μοντέλα κινδύνου που ενσωματώνουν στοχαστικά ασφάλιστρα. Σε αντίθεση με την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (DRE), η οποία εστιάζει στις πιθανότητες μετάβασης του πλεονάσματος μετά από ένα ζημιογόνο γεγονός, η ολοκληρωμένη εξίσωση εξετάζει τη διαδικασία πλεονάσματος σε ένα συνεχές χρονικό διάστημα, λαμβάνοντας υπόψη όλες τις πιθανές μεταβολές του πλεονάσματος λόγω των εισπράξεων ασφαλίσεων και των καταβολών αποζημιώσεων (Gerber & Shiu, 1998; Dickson, 2005).

Στο άρθρο των Zhang και Yang (2010), οι συγγραφείς εξετάζουν ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, όπου το εισόδημα από τα ασφάλιστρα ακολουθεί μια σύνθετη διαδικασία Poisson. Στο άρθρο αυτό, παρουσιάζεται η παραγωγή της ολοκληρωμένης εξίσωσης για τη συνάρτηση Gerber-Shiu, η οποία ορίζεται ως η αναμενόμενη προεξοφλημένη αξία μιας ποινής που καταβάλλεται κατά τη χρεοκοπία μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Η ποινή αυτή μπορεί να είναι μια συνάρτηση του χρόνου χρεοκοπίας, του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία, του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία, ή και άλλων παραγόντων που σχετίζονται με τη χρεοκοπία (Zhang & Yang, 2010).

Η ολοκληρωμένη εξίσωση εκφράζει τη συνάρτηση Gerber-Shiu ως συνάρτηση των πιθανοτήτων μετάβασης του πλεονάσματος σε διαφορετικές καταστάσεις μετά από μια απαίτηση ή την είσπραξη ενός ασφαλίστρου, σταθμισμένες με τις αντίστοιχες πιθανότητες. Η παραγωγή της ολοκληρωμένης εξίσωσης ξεκινάει από τη σχέση:

$$m(u) = \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta} \int_0^\infty m(u+x) dG(x) + \frac{\lambda}{\mu+\lambda+\delta} \left[\int_0^u m(u-y) f(y) dy + \zeta(u) \right], \quad u \geq 0$$

όπου $m(u)$ είναι η συνάρτηση Gerber-Shiu, μ είναι η ένταση των ασφαλίσεων, λ είναι η ένταση των απαιτήσεων, δ είναι ο συντελεστής προεξόφλησης, $G(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής του μεγέθους των ασφαλίσεων, $f(y)$ είναι η

συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του μεγέθους των απαιτήσεων και $\zeta(u)$ είναι μια συνάρτηση που περιγράφει την αναμενόμενη προεξοφλημένη ποινή που καταβάλλεται κατά τη χρεοκοπία.

Ο πρώτος όρος στο δεξί μέρος της εξίσωσης αντιπροσωπεύει την αναμενόμενη προεξοφλημένη ποινή που καταβάλλεται μετά την είσπραξη ενός ασφαλιστρού, ενώ ο δεύτερος όρος αντιπροσωπεύει την αναμενόμενη προεξοφλημένη ποινή που καταβάλλεται μετά από μια απαίτηση.

Στην εργασία της Ragulina (2017), η ολοκληρωμένη εξίσωση χρησιμοποιείται για την ανάλυση ενός μοντέλου κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, εξαρτήσεις και μια στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου. Η συγγραφέας δείχνει πώς η ολοκληρωμένη εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της συνάρτησης Gerber-Shiu και των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία. Συγκεκριμένα, η Ragulina λαμβάνει υπόψη την περίπτωση όπου τα μεγέθη των απαιτήσεων και των ασφαλιστρών ακολουθούν εκθετική κατανομή και παρουσιάζει αναλυτικούς τύπους για την πιθανότητα χρεοκοπίας και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων (Ragulina, 2017).

Στην εργασία της Charalamporoulou (2021), η ολοκληρωμένη εξίσωση παρουσιάζεται ως μια εναλλακτική προσέγγιση στην ανάλυση της συνάρτησης Gerber-Shiu. Η συγγραφέας αναφέρει ότι η ολοκληρωμένη εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας και άλλων μέτρων κινδύνου, καθώς και για τη μελέτη της επίδρασης των παραμέτρων του μοντέλου στην πιθανότητα χρεοκοπίας (Charalamporoulou, 2021).

Η ολοκληρωμένη εξίσωση μπορεί να λυθεί με διάφορες μεθόδους, όπως η μέθοδος των μετασχηματισμών Laplace. Στην περίπτωση των εκθετικά κατανομημένων ασφαλιστρών, η ολοκληρωμένη εξίσωση μπορεί να μετατραπεί σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση, η οποία μπορεί να λυθεί με τη χρήση των συνθηκών ορίου. Η λύση της ολοκληρωμένης εξίσωσης μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τη συνάρτηση Gerber-Shiu και, στη συνέχεια, να

υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας και άλλα μέτρα κινδύνου (Dickson, 2005; Gerber & Shiu, 1998).

2.3.3 Επίλυση της ολοκληρωμένης εξίσωσης

Η ολοκληρωμένη εξίσωση (IE) που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu σε ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα είναι ένα ισχυρό εργαλείο για την ανάλυση της πιθανότητας χρεοκοπίας και άλλων σχετικών με αυτήν μεγεθών. Η επίλυση της εν λόγω εξίσωσης μπορεί να γίνει με διάφορες μεθόδους, ανάλογα με τις υποθέσεις και τα χαρακτηριστικά του μοντέλου.

Μια από τις πιο συνηθισμένες μεθόδους επίλυσης της ολοκληρωμένης εξίσωσης είναι η χρήση μετασχηματισμών Laplace. Μετασχηματίζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης ως προς το αρχικό πλεόνασμα, μπορούμε να μετατρέψουμε την ολοκληρωτική εξίσωση σε μια αλγεβρική εξίσωση, η οποία είναι συνήθως ευκολότερη στην επίλυση. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, μπορούμε να βρούμε τη λύση της αρχικής ολοκληρωμένης εξίσωσης. Αυτή η μέθοδος είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική όταν η κατανομή των ασφαλίσεων και των απαιτήσεων είναι εκθετική ή ανήκει στην ρητή οικογένεια κατανομών (Zhang and Yang 2010).

Μια άλλη μέθοδος επίλυσης της ολοκληρωμένης εξίσωσης είναι η μέθοδος των ανανεωτικών μετρήσεων. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην ιδέα ότι η διαδικασία πλεονάσματος μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ανανεωτικών διαδικασιών, μπορούμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση Gerber-Shiu ως συνάρτηση των πιθανοτήτων μετάβασης του πλεονάσματος σε διαφορετικές καταστάσεις.

Στην εργασία της Ragulina (2017), η συγγραφέας εξετάζει ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, εξαρτήσεις και μια στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου. Η συγγραφέας επιλύει την ολοκληρωμένη εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των μετασχηματισμών

Laplace. Στην περίπτωση που τα μεγέθη των απαιτήσεων και των ασφαλιστρών ακολουθούν εκθετική κατανομή, η συγγραφέας καταλήγει σε αναλυτικούς τύπους για την πιθανότητα χρεοκοπίας και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων.

Στην εργασία της Ragulina (2019), η οποία εξετάζει ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και μια στρατηγική μερισμάτων πολλαπλών επιπέδων, η συγγραφέας χρησιμοποιεί τη μέθοδο των μετασχηματισμών Laplace για να επιλύσει την ολοκληρωμένη εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu. Η εργασία αυτή δείχνει ότι η μέθοδος των μετασχηματισμών Laplace μπορεί να εφαρμοστεί και σε πιο σύνθετα μοντέλα κινδύνου.

Στη διπλωματική της εργασία, η Charalamproroulou (2021) εξετάζει τη διαδικασία πλεονάσματος με στοχαστικά ασφάλιστρα, εστιάζοντας στην επίλυση της ολοκληρωμένης εξίσωσης. Η συγγραφέας αναφέρει ότι η ολοκληρωμένη εξίσωση μπορεί να λυθεί με διάφορες μεθόδους, όπως η μέθοδος των μετασχηματισμών Laplace και η μέθοδος των ανανεωτικών μετρήσεων. Επιπλέον, παρουσιάζει ένα παράδειγμα επίλυσης της ολοκληρωμένης εξίσωσης στην περίπτωση όπου τα ασφάλιστρα ακολουθούν την κατανομή Erlang(n).

Συνοψίζοντας, η επίλυση της ολοκληρωμένης εξίσωσης αποτελεί ένα σημαντικό βήμα στην ανάλυση των μοντέλων κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα. Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου επίλυσης εξαρτάται από τις υποθέσεις και τα χαρακτηριστικά του μοντέλου. Η κατανόηση των μεθόδων αυτών είναι απαραίτητη για την αποτελεσματική διαχείριση του κινδύνου στις ασφαλιστικές εταιρείες.

2.3.4 Σύγκριση με την ανανεωτική εξίσωση

Στη θεωρία κινδύνου, τόσο η ολοκληρωμένη εξίσωση (IE) όσο και η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (DRE) χρησιμοποιούνται για την ανάλυση της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος και την εκτίμηση της πιθανότητας

χρεοκοπίας μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Ωστόσο, οι δύο αυτές εξισώσεις παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές ως προς την προσέγγιση και τις υποθέσεις που χρησιμοποιούν, καθώς και ως προς τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά τους.

Η ολοκληρωμένη εξίσωση εξετάζει τη διαδικασία πλεονάσματος σε ένα συνεχές χρονικό διάστημα, λαμβάνοντας υπόψη όλες τις πιθανές μεταβολές του πλεονάσματος λόγω των εισπράξεων ασφαλιστρών και των καταβολών αποζημιώσεων (Zhang and Yang 2010). Αυτό σημαίνει ότι η ολοκληρωμένη εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση πιο σύνθετων μοντέλων κινδύνου, όπου οι χρόνοι μεταξύ των απαιτήσεων και τα μεγέθη των απαιτήσεων και των ασφαλιστρών ακολουθούν γενικές κατανομές.

Από την άλλη πλευρά, η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση εστιάζει στις πιθανότητες μετάβασης του πλεονάσματος μετά από μια απαίτηση ή την είσπραξη ενός ασφαλιστρου. Αυτή η προσέγγιση απλοποιεί την ανάλυση, καθώς επιτρέπει την αναδρομική επίλυση της εξίσωσης. Ωστόσο, η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση μπορεί να μην είναι κατάλληλη για την ανάλυση μοντέλων με πιο σύνθετες υποθέσεις, όπως η εξάρτηση μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλιστρών.

Ένα πλεονέκτημα της ολοκληρωμένης εξίσωσης είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό μιας ευρύτερης γκάμας μέτρων κινδύνου, όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας, ο χρόνος χρεοκοπίας, το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία και η μέγιστη σωρευτική απώλεια. Αντίθετα, η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση εστιάζει κυρίως στην πιθανότητα χρεοκοπίας και στον χρόνο χρεοκοπίας.

Ένα μειονέκτημα της ολοκληρωμένης εξίσωσης είναι ότι η επίλυσή της μπορεί να είναι πιο δύσκολη από την επίλυση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης, ειδικά σε περιπτώσεις όπου οι κατανομές των ασφαλιστρών και των απαιτήσεων είναι πολύπλοκες. Ωστόσο, η χρήση αριθμητικών μεθόδων και η ανάπτυξη αλγορίθμων έχει καταστήσει την επίλυση της ολοκληρωμένης εξίσωσης πιο εφικτή.

Συνολικά, η επιλογή μεταξύ της ολοκληρωμένης εξίσωσης και της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης εξαρτάται από τις υποθέσεις και τα χαρακτηριστικά του μοντέλου κινδύνου που εξετάζεται, καθώς και από τα μέτρα κινδύνου που μας ενδιαφέρουν. Η ολοκληρωμένη εξίσωση προσφέρει μια πιο γενική προσέγγιση, ενώ η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση μπορεί να είναι πιο εύκολη στην επίλυση σε ορισμένες περιπτώσεις.

Κεφάλαιο 3: Εξάρτηση μεταξύ απαιτήσεων και εισοδήματος ασφαλιστρών

3.1 Περιγραφή μοντέλου

3.1.1 Εισαγωγή στην εξάρτηση μεταξύ απαιτήσεων και εισοδήματος ασφαλιστρών

Στα κλασικά μοντέλα κινδύνου, μια βασική υπόθεση είναι η ανεξαρτησία μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλιστρών. Ωστόσο, αυτή η υπόθεση δεν ανταποκρίνεται πάντα στην πραγματικότητα. Συχνά, υπάρχει μια σχέση μεταξύ του μεγέθους και της συχνότητας των απαιτήσεων και του εισοδήματος από τα ασφάλιστρα. Για παράδειγμα, σε περιόδους οικονομικής ύφεσης, οι απαιτήσεις μπορεί να είναι μεγαλύτερες και πιο συχνές, ενώ τα ασφάλιστρα μπορεί να μειώνονται λόγω της μείωσης του αριθμού των ασφαλισμένων ή της αλλαγής των ασφαλιστικών προϊόντων που επιλέγουν οι καταναλωτές.

Η εξάρτηση μεταξύ απαιτήσεων και εισοδήματος ασφαλιστρών μπορεί να οφείλεται σε διάφορους παράγοντες. Ένας παράγοντας είναι οι οικονομικές συνθήκες. Σε περιόδους οικονομικής ανάπτυξης, οι απαιτήσεις μπορεί να είναι μικρότερες και λιγότερο συχνές, ενώ τα ασφάλιστρα μπορεί να αυξάνονται λόγω της αύξησης του διαθέσιμου εισοδήματος των καταναλωτών. Αντίθετα, σε περιόδους οικονομικής ύφεσης, οι απαιτήσεις μπορεί να είναι μεγαλύτερες και πιο συχνές, ενώ τα ασφάλιστρα μπορεί να μειώνονται.

Ένας άλλος παράγοντας που μπορεί να επηρεάσει την εξάρτηση μεταξύ απαιτήσεων και ασφαλιστρών είναι η συμπεριφορά των ασφαλισμένων. Για παράδειγμα, σε περιόδους αβεβαιότητας, οι ασφαλισμένοι μπορεί να είναι πιο πιθανό να υποβάλουν απαιτήσεις, ενώ σε περιόδους σταθερότητας, μπορεί να είναι λιγότερο πιθανό. Επιπλέον, η εισαγωγή νέων ασφαλιστικών προϊόντων ή η αλλαγή των όρων των υπαρχόντων προϊόντων μπορεί επίσης να επηρεάσει τη συχνότητα και το μέγεθος των απαιτήσεων.

Η κατανόηση της εξάρτησης μεταξύ απαιτήσεων και εισοδήματος ασφαλιστρών είναι σημαντική για την ακριβή εκτίμηση του κινδύνου χρεοκοπίας μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Τα κλασικά μοντέλα κινδύνου, όπως το μοντέλο Cramér-Lundberg, υποθέτουν ανεξαρτησία μεταξύ απαιτήσεων και ασφαλιστρών, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε υποεκτίμηση του κινδύνου χρεοκοπίας. Για το λόγο αυτό, έχουν αναπτυχθεί μοντέλα που λαμβάνουν υπόψη την εξάρτηση μεταξύ απαιτήσεων και ασφαλιστρών, όπως το μοντέλο που παρουσιάζεται στο άρθρο των Zhang και Yang (2010).

Συμπερασματικά, η εξάρτηση μεταξύ απαιτήσεων και εισοδήματος ασφαλιστρών είναι ένα σημαντικό ζήτημα στη θεωρία κινδύνου. Η κατανόηση αυτής της εξάρτησης είναι απαραίτητη για την ακριβή εκτίμηση του κινδύνου χρεοκοπίας και τη λήψη κατάλληλων μέτρων διαχείρισης κινδύνου.

3.1.2 Μοντελοποίηση της εξάρτησης με τη χρήση copulas

Η υπόθεση της ανεξαρτησίας μεταξύ των ζημιών και των ασφαλιστρών δεν είναι ρεαλιστική. Στην πραγματικότητα, η πιθανότητα εμφάνισης και το μέγεθος των ζημιών είναι δυνατόν να επηρεάζουν το μέγεθος και τη συχνότητα των ασφαλιστρών. Για παράδειγμα, μετά από μια μεγάλη φυσική καταστροφή, μια ασφαλιστική εταιρεία μπορεί να αυξήσει τα ασφάλιστρα για να καλύψει τις αυξημένες αποζημιώσεις που αναμένεται να καταβάλει. Επιπλέον, η χρονική στιγμή που ένας ασφαλισμένος υποβάλλει μια απαίτηση μπορεί να εξαρτάται από το μέγεθος της απαίτησης. Για παράδειγμα, οι ασφαλισμένοι μπορεί να είναι πιο πιθανό να υποβάλουν μια απαίτηση αμέσως μετά από ένα ατύχημα, παρά μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα.

Για τη μοντελοποίηση της εξάρτησης μεταξύ των ζημιών και των ασφαλιστρών, μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες μέθοδοι. Μια από τις πιο δημοφιλείς μεθόδους είναι η χρήση των copulas. Οι copulas είναι συναρτήσεις που επιτρέπουν τη μοντελοποίηση της εξάρτησης μεταξύ τυχαίων μεταβλητών, ανεξάρτητα από τις οριακές τους κατανομές. Με άλλα λόγια, οι copulas

επιτρέπουν την ανάλυση της δομής εξάρτησης μεταξύ των ζημιών και των ασφαλίστρων, χωρίς να χρειάζεται να κάνουμε συγκεκριμένες υποθέσεις για τις κατανομές τους.

Μια από τις πιο γνωστές οικογένειες copulas είναι οι Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) copulas. Οι FGM copulas έχουν το πλεονέκτημα ότι είναι εύκολες στην εφαρμογή και μπορούν να μοντελοποιήσουν ένα ευρύ φάσμα δομών εξάρτησης. Στην εργασία της Ragulina (2017), η συγγραφέας χρησιμοποιεί τις FGM copulas για να μοντελοποιήσει την εξάρτηση μεταξύ των ζημιών και των χρόνων μεταξύ τους, καθώς και μεταξύ των ασφαλίστρων και των χρόνων μεταξύ τους.

Ένα άλλο παράδειγμα χρήσης copulas στη μοντελοποίηση της εξάρτησης μεταξύ ζημιών και ασφαλίστρων δίνεται στην εργασία των Zhang και Yang (2010). Οι συγγραφείς υποθέτουν ότι η κατανομή των χρόνων μεταξύ των απαιτήσεων και η κατανομή των ασφαλίστρων εξαρτώνται από το μέγεθος των απαιτήσεων. Αυτή η υπόθεση επιτρέπει τη μοντελοποίηση της εξάρτησης μεταξύ των εισροών και των εκροών της ασφαλιστικής εταιρείας.

Εκτός από τις FGM copulas, υπάρχουν και άλλες οικογένειες copulas που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μοντελοποίηση της εξάρτησης μεταξύ ζημιών και ασφαλίστρων, όπως οι Gaussian copulas, οι Archimedean copulas και οι t-copulas. Η επιλογή της κατάλληλης copula εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά των δεδομένων και τη φύση της εξάρτησης που θέλουμε να μοντελοποιήσουμε.

Η χρήση copulas για τη μοντελοποίηση της εξάρτησης μεταξύ ζημιών και ασφαλίστρων έχει πολλά πλεονεκτήματα. Πρώτον, επιτρέπει την πιο ρεαλιστική μοντελοποίηση της διαδικασίας πλεονάσματος, λαμβάνοντας υπόψη τη μεταβλητότητα και την εξάρτηση που παρατηρούνται στην πράξη. Δεύτερον, επιτρέπει την ακριβέστερη εκτίμηση της πιθανότητας χρεοκοπίας και άλλων μέτρων κινδύνου. Τρίτον, μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη πιο αποτελεσματικών στρατηγικών διαχείρισης κινδύνου, καθώς λαμβάνει υπόψη τη σχέση μεταξύ των εισροών και των εκροών της ασφαλιστικής εταιρείας.

Συμπερασματικά, η μοντελοποίηση της εξάρτησης μεταξύ ζημιών και ασφαλίσεων με τη χρήση copulas αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο στην αναλογιστική επιστήμη. Η χρήση copulas επιτρέπει την πιο ρεαλιστική και ακριβή μοντελοποίηση της διαδικασίας πλεονάσματος, καθώς και την ανάπτυξη πιο αποτελεσματικών στρατηγικών διαχείρισης κινδύνου.

3.1.3 Επίδραση της εξάρτησης στη διαδικασία πλεονάσματος

Η υπόθεση της ανεξαρτησίας μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλίσεων αποτελεί μια βασική παραδοχή στα κλασικά μοντέλα κινδύνου, όπως το μοντέλο Cramér-Lundberg. Ωστόσο, η υπόθεση αυτή δεν είναι πάντα ρεαλιστική, καθώς στην πράξη μπορεί να υπάρχει σημαντική εξάρτηση μεταξύ αυτών των δύο μεταβλητών. Η εξάρτηση αυτή μπορεί να επηρεάσει σημαντικά τη διαδικασία πλεονάσματος μιας ασφαλιστικής εταιρείας και, κατά συνέπεια, την πιθανότητα χρεοκοπίας της.

Η εξάρτηση μεταξύ απαιτήσεων και ασφαλίσεων μπορεί να προκύψει από διάφορους παράγοντες. Για παράδειγμα, σε περιόδους οικονομικής ύφεσης, οι απαιτήσεις μπορεί να είναι μεγαλύτερες και πιο συχνές, ενώ τα ασφάλιστρα μπορεί να μειώνονται λόγω της μείωσης του διαθέσιμου εισοδήματος των καταναλωτών (Zhang and Yang 2010). Επιπλέον, η εισαγωγή νέων ασφαλιστικών προϊόντων ή η αλλαγή των όρων των υπαρχόντων προϊόντων μπορεί επίσης να επηρεάσει τη συχνότητα και το μέγεθος των απαιτήσεων, καθώς και το εισόδημα από ασφάλιστρα.

Η ύπαρξη εξάρτησης μεταξύ απαιτήσεων και ασφαλίσεων μπορεί να έχει σημαντικές επιπτώσεις στη διαδικασία πλεονάσματος. Στο κλασικό μοντέλο κινδύνου, το πλεόνασμα της εταιρείας μεταβάλλεται στο χρόνο λόγω της εισροής ασφαλίσεων και της εκροής αποζημιώσεων. Όταν οι απαιτήσεις και τα ασφάλιστρα είναι ανεξάρτητα, η διαδικασία πλεονάσματος είναι μια τυχαία βόλτα με ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένα βήματα. Ωστόσο, όταν υπάρχει

εξάρτηση, η διαδικασία πλεονάσματος δεν είναι πλέον μια τυχαία βόλτα, καθώς τα βήματα δεν είναι ανεξάρτητα.

Η εξάρτηση μεταξύ απαιτήσεων και ασφαλίσεων μπορεί να οδηγήσει σε αυξημένη μεταβλητότητα της διαδικασίας πλεονάσματος. Αυτό συμβαίνει επειδή μια μεγάλη απαίτηση μπορεί να συνοδεύεται από μείωση των ασφαλίσεων, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε απότομη μείωση του πλεονάσματος. Αντίστοιχα, μια περίοδος με πολλές απαιτήσεις μπορεί να συνοδεύεται από μείωση των ασφαλίσεων, γεγονός που μπορεί να αυξήσει τον κίνδυνο χρεοκοπίας.

Στην εργασία των Zhang και Yang (2010), οι συγγραφείς εξετάζουν ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και εξάρτηση μεταξύ του εισοδήματος και των απαιτήσεων. Οι συγγραφείς δείχνουν ότι η εξάρτηση μεταξύ απαιτήσεων και ασφαλίσεων μπορεί να έχει σημαντική επίδραση στην πιθανότητα χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα, δείχνουν ότι η θετική εξάρτηση μεταξύ απαιτήσεων και ασφαλίσεων μπορεί να μειώσει την πιθανότητα χρεοκοπίας, ενώ η αρνητική εξάρτηση μπορεί να την αυξήσει.

Στην εργασία της Ragulina (2017), εξετάζεται ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, εξαρτήσεις και μια στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου. Η συγγραφέας δείχνει ότι η εξάρτηση μεταξύ απαιτήσεων και ασφαλίσεων μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την αποτελεσματικότητα της στρατηγικής μερισμάτων. Συγκεκριμένα, η θετική εξάρτηση μπορεί να οδηγήσει σε υψηλότερες αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων, ενώ η αρνητική εξάρτηση μπορεί να οδηγήσει σε χαμηλότερες αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων.

Συνοψίζοντας, η εξάρτηση μεταξύ απαιτήσεων και εισοδήματος ασφαλίσεων είναι ένας σημαντικός παράγοντας που επηρεάζει τη διαδικασία πλεονάσματος και την πιθανότητα χρεοκοπίας μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Η κατανόηση αυτής της εξάρτησης είναι απαραίτητη για την ανάπτυξη ρεαλιστικών μοντέλων κινδύνου και την αποτελεσματική διαχείριση του κινδύνου.

3.1.4 Παραδείγματα μοντέλων με εξάρτηση μεταξύ απαιτήσεων και ασφαλίσεων

Η υπόθεση της ανεξαρτησίας μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλίσεων δεν είναι ρεαλιστική. Στην πραγματικότητα, η πιθανότητα εμφάνισης και το μέγεθος των ζημιών είναι δυνατόν να επηρεάζουν το μέγεθος και τη συχνότητα των ασφαλίσεων. Για παράδειγμα, μετά από μια μεγάλη φυσική καταστροφή, μια ασφαλιστική εταιρεία μπορεί να αυξήσει τα ασφάλιστρα για να καλύψει τις αυξημένες αποζημιώσεις που αναμένεται να καταβάλει. Επιπλέον, η χρονική στιγμή που ένας ασφαλισμένος υποβάλλει μια απαίτηση μπορεί να εξαρτάται από το μέγεθος της απαίτησης. Για παράδειγμα, οι ασφαλισμένοι μπορεί να είναι πιο πιθανό να υποβάλουν μια απαίτηση αμέσως μετά από ένα ατύχημα, παρά μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα.

Για τη μοντελοποίηση της εξάρτησης μεταξύ των ζημιών και των ασφαλίσεων, μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες μέθοδοι. Μια από τις πιο δημοφιλείς μεθόδους είναι η χρήση των copulas. Οι copulas είναι συναρτήσεις που επιτρέπουν τη μοντελοποίηση της εξάρτησης μεταξύ τυχαίων μεταβλητών, ανεξάρτητα από τις οριακές τους κατανομές. Με άλλα λόγια, οι copulas επιτρέπουν την ανάλυση της δομής εξάρτησης μεταξύ των ζημιών και των ασφαλίσεων, χωρίς να χρειάζεται να κάνουμε συγκεκριμένες υποθέσεις για τις κατανομές τους.

Μια από τις πιο γνωστές οικογένειες copulas είναι οι Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) copulas. Οι FGM copulas έχουν το πλεονέκτημα ότι είναι εύκολες στην εφαρμογή και μπορούν να μοντελοποιήσουν ένα ευρύ φάσμα δομών εξάρτησης. Στην εργασία της Ragulina (2017), η συγγραφέας χρησιμοποιεί τις FGM copulas για να μοντελοποιήσει την εξάρτηση μεταξύ των ζημιών και των χρόνων μεταξύ τους, καθώς και μεταξύ των ασφαλίσεων και των χρόνων μεταξύ τους. Σε αυτό το μοντέλο, η εξάρτηση μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλίσεων εκφράζεται μέσω της παραμέτρου θ της FGM copula. Η τιμή της παραμέτρου θ καθορίζει τη δύναμη και την κατεύθυνση της εξάρτησης. Για παράδειγμα, όταν θ είναι θετική, υπάρχει θετική εξάρτηση μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλίσεων, δηλαδή υψηλότερες απαιτήσεις

συνδέονται με υψηλότερα ασφάλιστρα. Αντίθετα, όταν θ είναι αρνητική, υπάρχει αρνητική εξάρτηση μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλίστρων, δηλαδή υψηλότερες απαιτήσεις συνδέονται με χαμηλότερα ασφάλιστρα.

Ένα άλλο παράδειγμα μοντέλου που λαμβάνει υπόψη την εξάρτηση μεταξύ απαιτήσεων και ασφαλίστρων παρουσιάζεται στην εργασία των Zhang και Yang (2010). Οι συγγραφείς υποθέτουν ότι η κατανομή των χρόνων μεταξύ των απαιτήσεων και η κατανομή των ασφαλίστρων επηρεάζονται από το μέγεθος των απαιτήσεων. Συγκεκριμένα, εξετάζουν δύο περιπτώσεις: στην πρώτη περίπτωση, οι χρόνοι μεταξύ των απαιτήσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο που εξαρτάται από το μέγεθος της προηγούμενης απαίτησης. Στη δεύτερη περίπτωση, η κατανομή των ασφαλίστρων εξαρτάται από το μέγεθος της προηγούμενης απαίτησης.

Στην εργασία των Ragulina (2019), η συγγραφέας εξετάζει ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και μια στρατηγική μερισμάτων πολλαπλών επιπέδων. Η συγγραφέας δεν εξετάζει ρητά την εξάρτηση μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλίστρων, αλλά το μοντέλο της μπορεί να επεκταθεί για να συμπεριλάβει και αυτή την εξάρτηση. Για παράδειγμα, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί μια copula για να μοντελοποιηθεί η εξάρτηση μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλίστρων σε κάθε επίπεδο της στρατηγικής μερισμάτων.

3.2 Ανάλυση Gerber-Shiu για εκθετικά κατανεμημένα ασφάλιστρα

3.2.1 Μετασχηματισμοί Laplace

Η ανάλυση Gerber-Shiu αποτελεί μια ισχυρή μεθοδολογία στην αναλογιστική επιστήμη για τη μελέτη της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος και την εκτίμηση της πιθανότητας χρεοκοπίας μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Οι μετασχηματισμοί Laplace αποτελούν ένα σημαντικό εργαλείο στην ανάλυση

Gerber-Shiu, καθώς επιτρέπουν τη μετατροπή πολύπλοκων ολοκληρωτικών και διαφορικών εξισώσεων σε απλούστερες αλγεβρικές εξισώσεις, οι οποίες μπορούν να επιλυθούν ευκολότερα (Zhang and Yang 2010).

Στην εργασία των Zhang και Yang (2010), οι συγγραφείς χρησιμοποιούν μετασχηματισμούς Laplace για να αναλύσουν ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και εξάρτηση μεταξύ του εισοδήματος και των απαιτήσεων. Οι συγγραφείς λαμβάνουν υπόψη την περίπτωση όπου τα ατομικά ασφάλιστρα ακολουθούν εκθετική κατανομή και εφαρμόζουν μετασχηματισμούς Laplace για να υπολογίσουν την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής. Μετασχηματίζοντας τις ολοκληρωτικές εξισώσεις που διέπουν τη συνάρτηση Gerber-Shiu, οι συγγραφείς καταλήγουν σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων, το οποίο μπορούν να λύσουν για να βρουν τους μετασχηματισμούς Laplace των συναρτήσεων Gerber-Shiu. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, μπορούν να υπολογίσουν τις συναρτήσεις Gerber-Shiu στο πεδίο του χρόνου.

Η εργασία της Ragulina (2017) εξετάζει ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, εξαρτήσεις και μια στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου. Η συγγραφέας χρησιμοποιεί μετασχηματισμούς Laplace για να αναλύσει τη συνάρτηση Gerber-Shiu και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία. Συγκεκριμένα, η Ragulina (2017) εφαρμόζει μετασχηματισμούς Laplace στις ολοκληρωδιαφορικές εξισώσεις που διέπουν τη συνάρτηση Gerber-Shiu και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων, μετατρέποντάς τις σε αλγεβρικές εξισώσεις. Στη συνέχεια, επιλύοντας αυτές τις εξισώσεις, μπορεί να υπολογίσει τους μετασχηματισμούς Laplace των εν λόγω συναρτήσεων και, μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, να βρει τις συναρτήσεις στο πεδίο του χρόνου.

Στην εργασία της Ragulina (2019), η οποία εξετάζει ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και μια στρατηγική μερισμάτων πολλαπλών επιπέδων, η συγγραφέας χρησιμοποιεί επίσης μετασχηματισμούς Laplace για να αναλύσει τη συνάρτηση Gerber-Shiu. Η συγγραφέας δείχνει ότι η μέθοδος των μετασχηματισμών Laplace μπορεί να εφαρμοστεί και σε πιο σύνθετα μοντέλα

κινδύνου, όπου η διαδικασία πλεονάσματος επηρεάζεται από πολλαπλά επίπεδα μερισμάτων.

Στη διπλωματική της εργασία, η Charalamporou (2021) εξετάζει τη διαδικασία πλεονάσματος με στοχαστικά ασφάλιστρα, εστιάζοντας στην ανάλυση Gerber-Shiu για εκθετικά καταμεμημένα ασφάλιστρα. Η συγγραφέας χρησιμοποιεί μετασχηματισμούς Laplace για να υπολογίσει την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής και την πιθανότητα χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα, η Charalamporou (2021) εφαρμόζει μετασχηματισμούς Laplace στις ολοκληρωτικές εξισώσεις που διέπουν τη συνάρτηση Gerber-Shiu, μετατρέποντάς τες σε αλγεβρικές εξισώσεις. Στη συνέχεια, επιλύοντας αυτές τις εξισώσεις, μπορεί να υπολογίσει τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu και, μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, να βρει τη συνάρτηση στο πεδίο του χρόνου.

Συνολικά, οι μετασχηματισμοί Laplace αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο στην ανάλυση Gerber-Shiu για μοντέλα κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα. Η χρήση των μετασχηματισμών Laplace επιτρέπει την απλούστευση των εξισώσεων που διέπουν τη συνάρτηση Gerber-Shiu και τον υπολογισμό των μέτρων κινδύνου με αναλυτικό τρόπο.

3.2.2 Ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις

Οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις (DRE) αποτελούν ένα σημαντικό εργαλείο στην αναλογιστική επιστήμη για την ανάλυση της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος και την εκτίμηση της πιθανότητας χρεοκοπίας μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Συγκεκριμένα, οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις εκφράζουν τη συνάρτηση Gerber-Shiu ως συνάρτηση των πιθανοτήτων μετάβασης του πλεονάσματος μετά από μια απαίτηση ή την είσπραξη ενός ασφαλίστρου. Οι πιθανότητες αυτές εξαρτώνται από την κατανομή των απαιτήσεων, την κατανομή των ασφαλίστρων, καθώς και από τη σχέση μεταξύ τους.

Στην εργασία των Zhang και Yang (2010), οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για τη μελέτη ενός μοντέλου κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και εξάρτηση μεταξύ του εισοδήματος και των απαιτήσεων. Οι συγγραφείς υποθέτουν ότι η κατανομή των χρόνων μεταξύ των απαιτήσεων και η κατανομή των ασφαλίσεων εξαρτώνται από το μέγεθος των απαιτήσεων. Στην περίπτωση που τα ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανομημένα, οι συγγραφείς δείχνουν ότι οι συναρτήσεις Gerber-Shiu ικανοποιούν ένα σύστημα ελλειμματικών ανανεωτικών εξισώσεων. Επιλύοντας αυτό το σύστημα, μπορούν να υπολογίσουν τις συναρτήσεις Gerber-Shiu και, στη συνέχεια, την πιθανότητα χρεοκοπίας και άλλα μέτρα κινδύνου.

Στην εργασία της Ragulina (2017), εξετάζεται ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, εξαρτήσεις και μια στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου. Η συγγραφέας χρησιμοποιεί ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις για να μελετήσει την επίδραση της εξάρτησης μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλίσεων στην πιθανότητα χρεοκοπίας και στις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία. Συγκεκριμένα, δείχνει ότι η ύπαρξη θετικής εξάρτησης μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλίσεων μπορεί να μειώσει την πιθανότητα χρεοκοπίας, ενώ η αρνητική εξάρτηση μπορεί να την αυξήσει.

Στην εργασία της Ragulina (2019), παρουσιάζεται ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και μια στρατηγική μερισμάτων πολλαπλών επιπέδων. Η συγγραφέας παράγει ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις για τη συνάρτηση Gerber-Shiu και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία. Στη συνέχεια, εξετάζει την περίπτωση όπου τα μεγέθη των απαιτήσεων και των ασφαλίσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή και βρίσκει αναλυτικούς τύπους για την πιθανότητα χρεοκοπίας και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων.

Στη διπλωματική της εργασία, η Charalamporoulou (2021) εξετάζει τη διαδικασία πλεονάσματος με στοχαστικά ασφάλιστρα, εστιάζοντας στην ανάλυση Gerber-Shiu για εκθετικά κατανομημένα ασφάλιστρα. Η συγγραφέας παρουσιάζει αναλυτικά την παραγωγή της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης

για τη συνάρτηση Gerber-Shiu και δείχνει πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας. Επιπλέον, εξετάζει την περίπτωση όπου τα μεγέθη των ασφαλίσεων έχουν μετασχηματισμό Laplace που ανήκει στην ρητή οικογένεια κατανομών και δείχνει ότι και σε αυτήν την περίπτωση μπορούν να επιτευχθούν οι μετασχηματισμοί Laplace για τις προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής.

Συνολικά, η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για την ανάλυση της стоχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος σε μοντέλα με στοχαστικά ασφάλιστρα. Η εξίσωση αυτή επιτρέπει τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας και άλλων μέτρων κινδύνου, λαμβάνοντας υπόψη τη στοχαστικότητα των ασφαλίσεων και τη σχέση τους με τις απαιτήσεις. Η μελέτη της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης σε διάφορα μοντέλα κινδύνου μπορεί να οδηγήσει σε νέες γνώσεις και εργαλεία για τη διαχείριση του κινδύνου στις ασφαλιστικές εταιρείες.

3.2.3 Παραδείγματα και εφαρμογές

Η ανάλυση Gerber-Shiu αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο στην αναλογιστική επιστήμη για τη μελέτη της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος και την εκτίμηση της πιθανότητας χρεοκοπίας μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση των εκθετικά κατανομημένων ασφαλίσεων, η ανάλυση Gerber-Shiu μπορεί να εφαρμοστεί για την εύρεση αναλυτικών λύσεων για την πιθανότητα χρεοκοπίας και άλλα μέτρα κινδύνου.

Ένα παράδειγμα εφαρμογής της ανάλυσης Gerber-Shiu για εκθετικά κατανομημένα ασφάλιστρα παρουσιάζεται στην εργασία των Zhang και Yang (2010). Οι συγγραφείς εξετάζουν ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, όπου το εισόδημα από τα ασφάλιστρα ακολουθεί μια σύνθετη διαδικασία Poisson. Υποθέτοντας ότι τα ατομικά ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανομημένα, οι συγγραφείς καταλήγουν σε αναλυτικές εκφράσεις για τους μετασχηματισμούς Laplace των συναρτήσεων Gerber-Shiu. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, μπορούν να

υπολογίσουν τις συναρτήσεις Gerber-Shiu στο πεδίο του χρόνου και, κατά συνέπεια, την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Ένα άλλο παράδειγμα εφαρμογής παρουσιάζεται στην εργασία της Ragulina (2017), η οποία εξετάζει ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, εξαρτήσεις και μια στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου. Η συγγραφέας υποθέτει ότι τα μεγέθη των απαιτήσεων και των ασφαλίσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή και χρησιμοποιεί την ανάλυση Gerber-Shiu για να υπολογίσει την πιθανότητα χρεοκοπίας και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία. Η συγγραφέας δείχνει ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας επηρεάζεται από την εξάρτηση μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλίσεων, καθώς και από την ύπαρξη της στρατηγικής μερισμάτων.

Στην διπλωματική της εργασία, η Charalamporoulou (2021) παρουσιάζει ένα αριθμητικό παράδειγμα εφαρμογής της ανάλυσης Gerber-Shiu για εκθετικά κατανομημένα ασφάλιστρα. Η συγγραφέας θεωρεί ότι οι απαιτήσεις και τα κατώφλια είναι εκθετικά κατανομημένα και υπολογίζει τις πιθανότητες χρεοκοπίας για διάφορες τιμές της παραμέτρου θ , η οποία εκφράζει την εξάρτηση μεταξύ των απαιτήσεων και των χρόνων μεταξύ τους.

Επιπλέον, η Charalamporoulou (2021) εξετάζει την περίπτωση όπου τα ασφάλιστρα ακολουθούν την κατανομή Erlang, η οποία αποτελεί μια γενίκευση της εκθετικής κατανομής. Η συγγραφέας δείχνει ότι η ανάλυση Gerber-Shiu μπορεί να εφαρμοστεί και σε αυτήν την περίπτωση, και παρουσιάζει αναλυτικούς τύπους για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Συνοψίζοντας, η ανάλυση Gerber-Shiu για εκθετικά κατανομημένα ασφάλιστρα αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για την κατανόηση και την εκτίμηση του κινδύνου χρεοκοπίας σε ασφαλιστικές εταιρείες. Η εφαρμογή της ανάλυσης αυτής σε διάφορα μοντέλα κινδύνου επιτρέπει την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων για τη διαχείριση του κινδύνου και τη βελτίωση της φερεγγυότητας των ασφαλιστικών εταιρειών.

3.3 Ασφάλιστρα με μετασχηματισμό Laplace που ανήκουν στην ρητή οικογένεια κατανομών

3.3.1 Ρητή οικογένεια κατανομών

Στην αναλογιστική επιστήμη, η ρητή οικογένεια κατανομών (rational family of distributions) αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για τη μοντελοποίηση των ασφαλίσεων. Αυτή η οικογένεια κατανομών περιλαμβάνει κατανομές των οποίων ο μετασχηματισμός Laplace μπορεί να εκφραστεί ως ρητή συνάρτηση, δηλαδή ως λόγος δύο πολυωνύμων. Η ρητή οικογένεια κατανομών περιλαμβάνει πολλές γνωστές κατανομές, όπως η εκθετική κατανομή, η κατανομή Erlang και τα μείγματα εκθετικών κατανομών.

Η χρήση της ρητής οικογένειας κατανομών για τη μοντελοποίηση των ασφαλίσεων έχει πολλά πλεονεκτήματα. Καταρχάς, επιτρέπει την αναλυτική επίλυση πολλών προβλημάτων στη θεωρία κινδύνου, όπως ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας και της συνάρτησης Gerber-Shiu (Zhang and Yang 2010). Επιπλέον, η ρητή οικογένεια κατανομών είναι αρκετά ευέλικτη, καθώς μπορεί να προσαρμοστεί σε μια ποικιλία δεδομένων.

Στην εργασία των Zhang και Yang (2010), οι συγγραφείς εξετάζουν ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, όπου τα ασφάλιστρα έχουν μετασχηματισμό Laplace που ανήκει στην ρητή οικογένεια κατανομών. Οι συγγραφείς δείχνουν ότι σε αυτή την περίπτωση, οι μετασχηματισμοί Laplace των προεξοφλημένων συναρτήσεων ποινής μπορούν να εκφραστούν σε αναλυτική μορφή. Αυτό επιτρέπει τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας και άλλων μέτρων κινδύνου με αναλυτικό τρόπο, χωρίς να χρειάζεται η χρήση αριθμητικών μεθόδων.

Στη διπλωματική εργασία της Charalamporou (2021), η συγγραφέας εξετάζει επίσης την περίπτωση όπου τα ασφάλιστρα έχουν μετασχηματισμό Laplace που ανήκει στην ρητή οικογένεια κατανομών. Η συγγραφέας παρουσιάζει τη μεθοδολογία για την εύρεση των μετασχηματισμών Laplace των

συναρτήσεων Gerber-Shiu και δίνει παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου αυτής σε συγκεκριμένα μοντέλα κινδύνου.

3.3.2 Μετασχηματισμοί Laplace για την συνάρτηση Gerber-Shiu

Η ανάλυση Gerber-Shiu αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο στην αναλογιστική επιστήμη για τη μελέτη της стоχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος και την εκτίμηση της πιθανότητας χρεοκοπίας μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Οι μετασχηματισμοί Laplace αποτελούν ένα σημαντικό εργαλείο στην ανάλυση Gerber-Shiu, καθώς επιτρέπουν τη μετατροπή πολύπλοκων ολοκληρωτικών και διαφορικών εξισώσεων σε απλούστερες αλγεβρικές εξισώσεις, οι οποίες μπορούν να επιλυθούν ευκολότερα.

Στην εργασία των Zhang και Yang (2010), οι συγγραφείς εξετάζουν ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και εξάρτηση μεταξύ του εισοδήματος και των απαιτήσεων. Στην περίπτωση που τα ασφάλιστρα έχουν ρητούς μετασχηματισμούς Laplace, οι συγγραφείς δείχνουν ότι οι μετασχηματισμοί Laplace των προεξοφλημένων συναρτήσεων ποινής μπορούν να εκφραστούν σε αναλυτική μορφή. Αυτό επιτρέπει τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας και άλλων μέτρων κινδύνου με αναλυτικό τρόπο, χωρίς να χρειάζεται η χρήση αριθμητικών μεθόδων.

Συγκεκριμένα, οι Zhang και Yang (2010) θεωρούν ότι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu, $\hat{m}(s)$, μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\hat{m}(s) = \frac{1}{s} \left(1 - \frac{c}{c+s} \frac{1 - G^*(s)}{1 - G^*(c)} \right)$$

όπου:

- $\hat{m}(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu,
- c είναι το σταθερό ασφάλιστρο,

- $G^*(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης κατανομής των ζημιών.

Αυτή η έκφραση επιτρέπει τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu, που χρησιμοποιείται στην ανάλυση κινδύνου και στην ασφάλιση για την αξιολόγηση της πιθανότητας πτώχευσης και άλλων σχετικών ποσοτήτων.

Στη συνέχεια, οι συγγραφείς δείχνουν ότι το πολυώνυμο $p_{(n-1)}(s)$ μπορεί να προσδιοριστεί με βάση τις ρίζες της εξίσωσης Lundberg, η οποία είναι μια εξίσωση που προκύπτει από την απαίτηση το αναμενόμενο πλεόνασμα της εταιρείας να είναι θετικό. Οι ρίζες της εξίσωσης Lundberg μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εκφράσουν το πολυώνυμο $p_{(n-1)}(s)$ με τη μέθοδο της παρεμβολής Lagrange.

Στην εργασία της Ragulina (2017), η συγγραφέας εξετάζει ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, εξαρτήσεις και μια στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου. Η συγγραφέας χρησιμοποιεί μετασχηματισμούς Laplace για να αναλύσει τη συνάρτηση Gerber-Shiu και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία. Συγκεκριμένα, η Ragulina (2017) εφαρμόζει μετασχηματισμούς Laplace στις ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις που διέπουν τη συνάρτηση Gerber-Shiu και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων, μετατρέποντάς τις σε αλγεβρικές εξισώσεις. Στη συνέχεια, επιλύοντας αυτές τις εξισώσεις, μπορεί να υπολογίσει τους μετασχηματισμούς Laplace των εν λόγω συναρτήσεων και, μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, να βρει τις συναρτήσεις στο πεδίο του χρόνου.

Στη διπλωματική της εργασία, η Charalamporoulou (2021) εξετάζει τη διαδικασία πλεονάσματος με στοχαστικά ασφάλιστρα, εστιάζοντας στην ανάλυση Gerber-Shiu για εκθετικά κατανεμημένα ασφάλιστρα. Η συγγραφέας παρουσιάζει αναλυτικά τη διαδικασία υπολογισμού των μετασχηματισμών Laplace των συναρτήσεων Gerber-Shiu, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ότι ο

μετασχηματισμός Laplace της συνέλιξης δύο συναρτήσεων ισούται με το γινόμενο των μετασχηματισμών Laplace των συναρτήσεων αυτών.

Συνολικά, οι μετασχηματισμοί Laplace αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο στην ανάλυση Gerber-Shiu για μοντέλα κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα. Η χρήση των μετασχηματισμών Laplace επιτρέπει την απλούστευση των εξισώσεων που διέπουν τη συνάρτηση Gerber-Shiu και τον υπολογισμό των μέτρων κινδύνου με αναλυτικό τρόπο. Η μελέτη της εφαρμογής των μετασχηματισμών Laplace σε διάφορα μοντέλα κινδύνου μπορεί να οδηγήσει σε νέες γνώσεις και εργαλεία για τη διαχείριση του κινδύνου στις ασφαλιστικές εταιρείες.

3.3.3 Εφαρμογές και αποτελέσματα

Η ενότητα αυτή εξετάζει την περίπτωση όπου τα μεγέθη των ασφαλίστρων δεν ακολουθούν απαραίτητα την εκθετική κατανομή, αλλά μια πιο γενική κατανομή που ονομάζεται ρητή οικογένεια κατανομών. Αυτή η οικογένεια κατανομών περιλαμβάνει κατανομές των οποίων ο μετασχηματισμός Laplace μπορεί να εκφραστεί ως ρητή συνάρτηση, δηλαδή ως λόγος δύο πολυωνύμων. Η εκθετική κατανομή αποτελεί ειδική περίπτωση της ρητής οικογένειας κατανομών.

Στην εργασία των Zhang και Yang (2010), οι συγγραφείς δείχνουν ότι όταν τα μεγέθη των ασφαλίστρων έχουν μετασχηματισμό Laplace που ανήκει στην ρητή οικογένεια κατανομών, τότε οι μετασχηματισμοί Laplace των προεξοφλημένων συναρτήσεων ποινής μπορούν επίσης να υπολογιστούν. Οι συγγραφείς αναφέρουν ότι, αν οι ρίζες της εξίσωσης Lundberg είναι διακεκριμένες, τότε η συνάρτηση Gerber-Shiu μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα εκθετικών όρων.

Στην διπλωματική εργασία της Charalamporoulou (2021), η συγγραφέας εξετάζει επίσης την περίπτωση όπου τα ασφάλιστρα έχουν μετασχηματισμό Laplace που ανήκει στην ρητή οικογένεια κατανομών. Η συγγραφέας παρουσιάζει τη μεθοδολογία για την εύρεση των μετασχηματισμών Laplace των συναρτήσεων Gerber-Shiu και δίνει παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου

αυτής σε συγκεκριμένα μοντέλα κινδύνου. Η συγγραφέας αναφέρει ότι η χρήση της ρητής οικογένειας κατανομών για τη μοντελοποίηση των ασφαλίστρων επιτρέπει την αναλυτική επίλυση πολλών προβλημάτων στη θεωρία κινδύνου, όπως ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας και της συνάρτησης Gerber-Shiu.

Συνολικά, η χρήση της ρητής οικογένειας κατανομών για τη μοντελοποίηση των ασφαλίστρων αποτελεί μια σημαντική επέκταση της ανάλυσης Gerber-Shiu, καθώς επιτρέπει την εφαρμογή της μεθόδου σε ένα ευρύτερο φάσμα περιπτώσεων. Η ανάλυση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας και άλλων μέτρων κινδύνου, καθώς και για τη μελέτη της επίδρασης των παραμέτρων του μοντέλου στην πιθανότητα χρεοκοπίας.

Κεφάλαιο 4: Στρατηγικές μερισμάτων

4.1 Περιγραφή μοντέλου με στρατηγική κατώφλιου

4.1.1 Εισαγωγή στην έννοια των στρατηγικών μερισμάτων και τη σημασία τους για τις ασφαλιστικές εταιρείες

Οι στρατηγικές μερισμάτων αποτελούν ένα σημαντικό εργαλείο στη θεωρία κινδύνου, καθώς επιτρέπουν στις ασφαλιστικές εταιρείες να διαχειρίζονται το πλεόνασμά τους και να ανταμείβουν τους μετόχους τους. Η βασική ιδέα πίσω από τις στρατηγικές μερισμάτων είναι η καταβολή ενός μέρους του πλεονάσματος στους μετόχους, υπό την προϋπόθεση ότι το πλεόνασμα υπερβαίνει ένα συγκεκριμένο όριο. Η επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής μερισμάτων είναι ένα κρίσιμο ζήτημα για τις ασφαλιστικές εταιρείες, καθώς επηρεάζει τόσο την πιθανότητα χρεοκοπίας όσο και την αξία της εταιρείας για τους μετόχους της.

Στην κλασική θεωρία κινδύνου, το μοντέλο Cramér-Lundberg δεν λαμβάνει υπόψη την καταβολή μερισμάτων. Ωστόσο, στην πραγματικότητα, οι ασφαλιστικές εταιρείες συχνά καταβάλλουν μερίσματα στους μετόχους τους. Η ενσωμάτωση των στρατηγικών μερισμάτων στα μοντέλα κινδύνου επιτρέπει την ανάλυση της επίδρασης της καταβολής μερισμάτων στην πιθανότητα χρεοκοπίας και σε άλλα μέτρα κινδύνου.

Μια από τις πιο απλές και συνηθισμένες στρατηγικές μερισμάτων είναι η στρατηγική κατώφλιου (threshold dividend strategy). Σύμφωνα με αυτήν τη στρατηγική, η εταιρεία καταβάλλει μερίσματα μόνο όταν το πλεόνασμά της υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο όριο, το οποίο ονομάζεται κατώφλι. Όταν το πλεόνασμα είναι κάτω από το κατώφλι, η εταιρεία δεν καταβάλλει μερίσματα και διατηρεί το πλεόνασμα ως αποθεματικό για την κάλυψη μελλοντικών απαιτήσεων. Όταν το πλεόνασμα υπερβαίνει το κατώφλι, η εταιρεία καταβάλλει ένα μέρος του πλεονάσματος ως μερίσμα, ενώ το υπόλοιπο διατηρείται ως αποθεματικό.

Η στρατηγική κατωφλίου έχει μελετηθεί εκτενώς στην αναλογιστική βιβλιογραφία. Στην εργασία των De Finetti (1957), ο συγγραφέας εξετάζει μια απλή περίπτωση της στρατηγικής κατωφλίου σε ένα διακριτό μοντέλο κινδύνου. Στην εργασία των Gerber και Shiu (1998), οι συγγραφείς αναλύουν τη στρατηγική κατωφλίου στο κλασικό μοντέλο κινδύνου και δείχνουν ότι η βέλτιστη στρατηγική κατωφλίου μεγιστοποιεί την αναμενόμενη προεξοφλημένη αξία των μελλοντικών μερισμάτων.

Στην εργασία της Ragulina (2017), η συγγραφέας εξετάζει ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, εξαρτήσεις και μια στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου. Η συγγραφέας αναλύει τη διαδικασία πλεονάσματος υπό την υπόθεση ότι υπάρχει εξάρτηση μεταξύ των απαιτήσεων και των χρόνων μεταξύ τους, καθώς και μεταξύ των ασφαλίσεων και των χρόνων μεταξύ τους. Η συγγραφέας δείχνει ότι η ύπαρξη εξάρτησης επηρεάζει σημαντικά την πιθανότητα χρεοκοπίας και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων.

Στην εργασία της Ragulina (2019), η συγγραφέας εξετάζει ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και μια στρατηγική μερισμάτων πολλαπλών επιπέδων. Η στρατηγική αυτή είναι μια γενίκευση της στρατηγικής κατωφλίου, όπου η εταιρεία μπορεί να καταβάλλει μερίσματα σε διαφορετικά επίπεδα, ανάλογα με το ύψος του πλεονάσματος. Η συγγραφέας δείχνει ότι η στρατηγική πολλαπλών επιπέδων μπορεί να είναι πιο αποτελεσματική από τη στρατηγική κατωφλίου, καθώς επιτρέπει την πιο ευέλικτη διαχείριση του πλεονάσματος.

Συνοψίζοντας, η στρατηγική κατωφλίου αποτελεί μια σημαντική στρατηγική μερισμάτων που έχει μελετηθεί εκτενώς στην αναλογιστική βιβλιογραφία. Η στρατηγική αυτή επιτρέπει στις ασφαλιστικές εταιρείες να διαχειρίζονται το πλεόνασμά τους και να ανταμείβουν τους μετόχους τους, ενώ παράλληλα διασφαλίζουν την οικονομική τους σταθερότητα.

4.1.2 Περιγραφή της στρατηγικής μερίσματος κατωφλίου

Η στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου αποτελεί μια από τις πιο κλασικές και ευρέως μελετημένες στρατηγικές στην αναλογιστική επιστήμη και τη θεωρία κινδύνου. Η βασική ιδέα πίσω από αυτήν τη στρατηγική είναι η εξής: μια ασφαλιστική εταιρεία θέτει ένα προκαθορισμένο επίπεδο πλεονάσματος, το οποίο ονομάζεται κατώφλι. Όταν το πλεόνασμα της εταιρείας, δηλαδή η διαφορά μεταξύ των περιουσιακών της στοιχείων και των υποχρεώσεών της, υπερβαίνει αυτό το κατώφλι, η εταιρεία καταβάλλει ένα μέρος του πλεονάσματος ως μέρισμα στους μετόχους της. Αντίθετα, όταν το πλεόνασμα είναι κάτω από το κατώφλι, η εταιρεία δεν καταβάλλει μερίσματα και διατηρεί το πλεόνασμα ως αποθεματικό για την κάλυψη μελλοντικών απαιτήσεων.

Η στρατηγική μερίσματος κατωφλίου έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών λόγω της απλότητας και της αποτελεσματικότητάς της. Στην εργασία των De Finetti (1957), ο συγγραφέας εξετάζει μια απλή περίπτωση της στρατηγικής κατωφλίου σε ένα διακριτό μοντέλο κινδύνου, όπου το πλεόνασμα μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί κατά ένα σταθερό ποσό σε κάθε χρονική περίοδο. Ο De Finetti δείχνει ότι η βέλτιστη στρατηγική κατωφλίου, δηλαδή το κατώφλι που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη προεξοφλημένη αξία των μελλοντικών μερισμάτων, εξαρτάται από τον ρυθμό προεξόφλησης και την πιθανότητα αύξησης ή μείωσης του πλεονάσματος.

Στην εργασία των Gerber και Shiu (1998), οι συγγραφείς αναλύουν τη στρατηγική κατωφλίου στο κλασικό μοντέλο κινδύνου, όπου το πλεόνασμα μεταβάλλεται συνεχώς στο χρόνο λόγω της εισροής ασφαλίσεων και της εκροής αποζημιώσεων. Οι Gerber και Shiu δείχνουν ότι η βέλτιστη στρατηγική κατωφλίου εξαρτάται από τον ρυθμό προεξόφλησης, την ένταση των απαιτήσεων και την κατανομή του μεγέθους των απαιτήσεων.

Η στρατηγική μερίσματος κατωφλίου έχει επίσης μελετηθεί σε πιο σύνθετα μοντέλα κινδύνου. Στην εργασία της Ragulina (2017), η συγγραφέας εξετάζει ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, εξαρτήσεις και μια

στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου. Στο μοντέλο αυτό, τα ασφάλιστρα δεν εισπράττονται με σταθερό ρυθμό, αλλά ακολουθούν μια στοχαστική διαδικασία. Επιπλέον, υπάρχει εξάρτηση μεταξύ των απαιτήσεων και των χρόνων μεταξύ τους, καθώς και μεταξύ των ασφαλιστρών και των χρόνων μεταξύ τους. Η Ragulina δείχνει ότι η ύπαρξη εξάρτησης επηρεάζει σημαντικά την πιθανότητα χρεοκοπίας και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων.

Στην εργασία της Ragulina (2019), η συγγραφέας επεκτείνει την ανάλυση της σε ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και μια στρατηγική μερισμάτων πολλαπλών επιπέδων. Στη στρατηγική αυτή, η εταιρεία μπορεί να καταβάλλει μερίσματα σε διαφορετικά επίπεδα, ανάλογα με το ύψος του πλεονάσματος. Η Ragulina δείχνει ότι η στρατηγική πολλαπλών επιπέδων μπορεί να είναι πιο αποτελεσματική από τη στρατηγική κατωφλίου, καθώς επιτρέπει την πιο ευέλικτη διαχείριση του πλεονάσματος.

Στη διπλωματική της εργασία, η Charalamporoulou (2021) εξετάζει τη διαδικασία πλεονάσματος με στοχαστικά ασφάλιστρα στο πλαίσιο της στρατηγικής μερίσματος κατωφλίου. Η συγγραφέας παρουσιάζει αναλυτικά τη διαδικασία πλεονάσματος και τις εξισώσεις που τη διέπουν, καθώς και αριθμητικά παραδείγματα για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας και των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων.

Συμπερασματικά, η στρατηγική μερίσματος κατωφλίου αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για τη διαχείριση του κινδύνου στις ασφαλιστικές εταιρείες. Η βιβλιογραφία που αναφέρθηκε παραπάνω παρέχει μια εμπειρισταωμένη ανάλυση της στρατηγικής αυτής, τόσο σε απλά όσο και σε πιο σύνθετα μοντέλα κινδύνου. Η κατανόηση της στρατηγικής κατωφλίου και των επιπτώσεών της στη διαδικασία πλεονάσματος είναι απαραίτητη για τη λήψη αποφάσεων σχετικά με την καταβολή μερισμάτων και τη διασφάλιση της οικονομικής σταθερότητας των ασφαλιστικών εταιρειών.

4.1.3 Επεξήγηση των παραμέτρων της στρατηγικής

Η στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου αποτελεί μια από τις βασικές προσεγγίσεις στη διαχείριση κινδύνου για τις ασφαλιστικές εταιρείες. Σε αυτήν την στρατηγική, η εταιρεία ορίζει ένα προκαθορισμένο επίπεδο πλεονάσματος, το οποίο ονομάζεται κατώφλι (threshold). Όταν το πλεόνασμα της εταιρείας, δηλαδή η διαφορά μεταξύ των περιουσιακών της στοιχείων και των υποχρεώσεών της, υπερβαίνει αυτό το κατώφλι, η εταιρεία καταβάλλει ένα μέρος του πλεονάσματος ως μέρισμα στους μετόχους της (Charalamporoulou 2021).

Οι παράμετροι της στρατηγικής μερίσματος κατωφλίου είναι το κατώφλι (b) και ο ρυθμός μερισμάτων (d). Το κατώφλι (b) είναι το επίπεδο πλεονάσματος πάνω από το οποίο η εταιρεία αρχίζει να καταβάλλει μερίσματα. Ο ρυθμός μερισμάτων (d) είναι το ποσοστό του πλεονάσματος που υπερβαίνει το κατώφλι και καταβάλλεται ως μέρισμα.

Η επιλογή του κατωφλίου και του ρυθμού μερισμάτων είναι ένα κρίσιμο ζήτημα για τις ασφαλιστικές εταιρείες. Ένα υψηλό κατώφλι μπορεί να οδηγήσει σε μεγαλύτερη ασφάλεια για την εταιρεία, καθώς διασφαλίζει ότι θα υπάρχει επαρκές αποθεματικό για την κάλυψη μελλοντικών απαιτήσεων. Ωστόσο, ένα υψηλό κατώφλι μπορεί επίσης να οδηγήσει σε δυσαρέσκεια των μετόχων, οι οποίοι μπορεί να αναμένουν την καταβολή μερισμάτων. Από την άλλη πλευρά, ένα χαμηλό κατώφλι μπορεί να αυξήσει την ελκυστικότητα της εταιρείας για τους μετόχους, αλλά μπορεί επίσης να αυξήσει τον κίνδυνο χρεοκοπίας, καθώς η εταιρεία μπορεί να μην έχει επαρκή αποθεματικά για να καλύψει μελλοντικές απαιτήσεις (Ragulina 2017).

Ο ρυθμός μερισμάτων επηρεάζει επίσης την πιθανότητα χρεοκοπίας και την αξία της εταιρείας για τους μετόχους. Ένας υψηλός ρυθμός μερισμάτων μπορεί να αυξήσει την ελκυστικότητα της εταιρείας για τους μετόχους, αλλά μπορεί επίσης να αυξήσει τον κίνδυνο χρεοκοπίας, καθώς η εταιρεία μπορεί να μην έχει επαρκή αποθεματικά για να καλύψει μελλοντικές απαιτήσεις. Αντίθετα, ένας χαμηλός ρυθμός μερισμάτων μπορεί να μειώσει τον κίνδυνο χρεοκοπίας, αλλά μπορεί επίσης να μειώσει την ελκυστικότητα της εταιρείας για τους μετόχους (Ragulina 2019).

Στην εργασία της Ragulina (2017), η συγγραφέας εξετάζει ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, εξαρτήσεις και μια στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου. Η συγγραφέας αναλύει τη διαδικασία πλεονάσματος υπό την υπόθεση ότι υπάρχει εξάρτηση μεταξύ των απαιτήσεων και των χρόνων μεταξύ τους, καθώς και μεταξύ των ασφαλίσεων και των χρόνων μεταξύ τους. Η Ragulina δείχνει ότι η ύπαρξη εξάρτησης επηρεάζει σημαντικά την πιθανότητα χρεοκοπίας και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων.

Στην εργασία της Ragulina (2019), η συγγραφέας επεκτείνει την ανάλυση της σε ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και μια στρατηγική μερισμάτων πολλαπλών επιπέδων. Η στρατηγική αυτή είναι μια γενίκευση της στρατηγικής κατωφλίου, όπου η εταιρεία μπορεί να καταβάλλει μερίσματα σε διαφορετικά επίπεδα, ανάλογα με το ύψος του πλεονάσματος. Η Ragulina δείχνει ότι η στρατηγική πολλαπλών επιπέδων μπορεί να είναι πιο αποτελεσματική από τη στρατηγική κατωφλίου, καθώς επιτρέπει την πιο ευέλικτη διαχείριση του πλεονάσματος.

Στη διπλωματική της εργασία, η Charalamporou (2021) εξετάζει τη διαδικασία πλεονάσματος με στοχαστικά ασφάλιστρα στο πλαίσιο της στρατηγικής μερίσματος κατωφλίου. Η συγγραφέας παρουσιάζει αναλυτικά τη διαδικασία πλεονάσματος και τις εξισώσεις που τη διέπουν, καθώς και αριθμητικά παραδείγματα για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας και των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων. Η Charalamporou δείχνει ότι η επιλογή του κατωφλίου και του ρυθμού μερισμάτων επηρεάζει σημαντικά την πιθανότητα χρεοκοπίας και την αξία της εταιρείας για τους μετόχους.

4.1.4 Συζήτηση για τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της στρατηγικής κατωφλίου

Η στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου, ως ένας από τους πιο κλασικούς και ευρέως μελετημένους τρόπους διαχείρισης κινδύνου για τις ασφαλιστικές

εταιρείες, παρουσιάζει τόσο πλεονεκτήματα όσο και μειονεκτήματα. Σύμφωνα με αυτήν τη στρατηγική, η εταιρεία ορίζει ένα προκαθορισμένο επίπεδο πλεονάσματος, το οποίο ονομάζεται κατώφλι (threshold) (Charalamporoulou 2021). Όταν το πλεόνασμα της εταιρείας, δηλαδή η διαφορά μεταξύ των περιουσιακών της στοιχείων και των υποχρεώσεών της, υπερβαίνει αυτό το κατώφλι, η εταιρεία καταβάλλει ένα μέρος του πλεονάσματος ως μέρισμα στους μετόχους της. Αντίθετα, όταν το πλεόνασμα είναι κάτω από το κατώφλι, η εταιρεία δεν καταβάλλει μερίσματα και διατηρεί το πλεόνασμα ως αποθεματικό για την κάλυψη μελλοντικών απαιτήσεων.

Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα της στρατηγικής κατωφλίου είναι η απλότητα και η ευκολία εφαρμογής της. Η στρατηγική αυτή είναι εύκολα κατανοητή και εφαρμόσιμη, καθώς απαιτεί μόνο τον καθορισμό ενός κατωφλίου και ενός ρυθμού μερισμάτων (Ragulina 2017). Επιπλέον, η στρατηγική κατωφλίου μπορεί να προσαρμοστεί στις ιδιαίτερες ανάγκες και χαρακτηριστικά κάθε ασφαλιστικής εταιρείας. Για παράδειγμα, μια εταιρεία με υψηλότερο κίνδυνο χρεοκοπίας μπορεί να επιλέξει ένα υψηλότερο κατώφλι, ενώ μια εταιρεία με χαμηλότερο κίνδυνο χρεοκοπίας μπορεί να επιλέξει ένα χαμηλότερο κατώφλι.

Ένα άλλο πλεονέκτημα της στρατηγικής κατωφλίου είναι ότι μπορεί να βελτιώσει την εικόνα της εταιρείας προς τους μετόχους της. Η καταβολή μερισμάτων αποτελεί ένα θετικό μήνυμα προς τους μετόχους, καθώς δείχνει ότι η εταιρεία είναι κερδοφόρα και έχει τη δυνατότητα να τους ανταμείψει για την επένδυσή τους. Αυτό μπορεί να αυξήσει την εμπιστοσύνη των μετόχων στην εταιρεία και να οδηγήσει σε αύξηση της τιμής της μετοχής της.

Επιπλέον, η στρατηγική κατωφλίου μπορεί να βοηθήσει στην προσέλκυση νέων επενδυτών. Οι επενδυτές είναι πιο πιθανό να επενδύσουν σε μια εταιρεία που καταβάλλει μερίσματα, καθώς αυτό αποτελεί ένδειξη της καλής οικονομικής της κατάστασης και της δυνατότητάς της να δημιουργεί κέρδη. Επομένως, η εφαρμογή μιας στρατηγικής μερισμάτων κατωφλίου μπορεί να συμβάλει στην αύξηση του κεφαλαίου της εταιρείας και στη βελτίωση της ανταγωνιστικότητάς της.

Ωστόσο, η στρατηγική μερίσματος κατωφλίου παρουσιάζει και ορισμένα μειονεκτήματα. Ένα από τα βασικά μειονεκτήματα είναι ότι μπορεί να αυξήσει τον κίνδυνο χρεοκοπίας της εταιρείας. Όταν η εταιρεία καταβάλλει μερίσματα, μειώνει τα αποθεματικά της, τα οποία είναι απαραίτητα για την κάλυψη μελλοντικών απαιτήσεων. Εάν οι απαιτήσεις αυξηθούν απροσδόκητα, η εταιρεία μπορεί να βρεθεί σε δυσχερή οικονομική θέση και να οδηγηθεί σε χρεοκοπία.

Ένα άλλο μειονέκτημα της στρατηγικής κατωφλίου είναι ότι μπορεί να οδηγήσει σε ασταθή καταβολή μερισμάτων. Εάν το πλεόνασμα της εταιρείας κυμαίνεται γύρω από το κατώφλι, τότε η εταιρεία μπορεί να καταβάλλει μερίσματα σε ορισμένες περιόδους και να μην καταβάλλει σε άλλες. Αυτό μπορεί να δημιουργήσει αβεβαιότητα στους μετόχους και να μειώσει την εμπιστοσύνη τους στην εταιρεία.

Επιπλέον, η στρατηγική κατωφλίου μπορεί να μην είναι η βέλτιστη στρατηγική για όλες τις ασφαλιστικές εταιρείες. Η βέλτιστη στρατηγική εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, όπως το μέγεθος της εταιρείας, το είδος των κινδύνων που καλύπτει, η ανοχή της στον κίνδυνο και οι προσδοκίες των μετόχων της. Για παράδειγμα, μια μικρή εταιρεία με υψηλό κίνδυνο χρεοκοπίας μπορεί να προτιμήσει μια πιο συντηρητική στρατηγική μερισμάτων, ενώ μια μεγάλη εταιρεία με χαμηλό κίνδυνο χρεοκοπίας μπορεί να προτιμήσει μια πιο επιθετική στρατηγική.

Συμπερασματικά, η στρατηγική μερίσματος κατωφλίου αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για τη διαχείριση του κινδύνου στις ασφαλιστικές εταιρείες, αλλά πρέπει να εφαρμόζεται με προσοχή. Η επιλογή του κατάλληλου κατωφλίου και ρυθμού μερισμάτων είναι κρίσιμη για την εξισορρόπηση των συμφερόντων της εταιρείας και των μετόχων της.

4.2 Εξισώσεις για τη συνάρτηση Gerber-Shiu

4.2.1 Παραγωγή των εξισώσεων για τη συνάρτηση Gerber-Shiu στο μοντέλο με στοχαστικά ασφάλιστρα και στρατηγική μερίσματος κατωφλίου

Η συνάρτηση Gerber-Shiu είναι ένα ισχυρό εργαλείο στην ανάλυση κινδύνου και την αναλογιστική επιστήμη, το οποίο χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση της πιθανότητας πτώχευσης, καθώς και άλλων σημαντικών ποσοτήτων όπως οι αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων μέχρι την πτώχευση. Η εφαρμογή της συνάρτησης Gerber-Shiu σε μοντέλα με στοχαστικά ασφάλιστρα και στρατηγικές μερισμάτων αποτελεί αντικείμενο εντατικής έρευνας, ιδιαίτερα όταν αυτές οι στρατηγικές περιλαμβάνουν καθορισμένα κατώφλια.

Το κλασικό μοντέλο κινδύνου, όπως περιγράφεται από τον Cramér-Lundberg, υποθέτει ότι οι απαιτήσεις ακολουθούν μία διαδικασία Poisson και τα ασφάλιστρα είναι σταθερά με την πάροδο του χρόνου. Ωστόσο, σε πρακτικές εφαρμογές, τα ασφάλιστρα μπορεί να είναι στοχαστικά, γεγονός που περιπλέκει την ανάλυση του μοντέλου. Τα στοχαστικά ασφάλιστρα μπορούν να αναπαρασταθούν ως διαδικασίες Poisson με μεταβλητή ένταση, όπου η ένταση αυτή ακολουθεί μία προκαθορισμένη κατανομή (Boi et al., 2003).

Οι στρατηγικές μερισμάτων είναι ουσιαστικές για τη διαχείριση των ταμειακών ροών μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Οι στρατηγικές μερισμάτων κατωφλίου ορίζουν ότι οι μέτοχοι λαμβάνουν μερίσματα μόνο όταν το πλεόνασμα της εταιρείας υπερβαίνει ένα καθορισμένο κατώφλι. Μία πιο εξελιγμένη προσέγγιση είναι η στρατηγική μερισμάτων πολλαπλών στρωμάτων, όπου το πλεόνασμα διανέμεται σε διάφορα επίπεδα ανάλογα με την τρέχουσα κατάσταση του πλεονάσματος (Ragulina, 2017).

Εξισώσεις για τη Συνάρτηση Gerber-Shiu

Η συνάρτηση Gerber-Shiu, $m(x)$, για ένα δεδομένο πλεόνασμα x , μπορεί να οριστεί ως η αναμενόμενη τιμή μιας προεξοφλημένης ποινής κατά την πτώχευση. Στο πλαίσιο των στοχαστικών ασφαλίσεων και των στρατηγικών

μερισμάτων, οι εξισώσεις που ικανοποιεί η συνάρτηση αυτή περιλαμβάνουν συνήθως ολοκληρωτικές και διαφορικές εξισώσεις.

Σύμφωνα με τον Ragulina (2017), η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί τις ακόλουθες εξισώσεις σε ένα μοντέλο με στοχαστικά ασφάλιστρα και στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου:

$$\mathbb{E}[e^{-\delta\tau}w(X_{\tau-}, |X_{\tau}|)1(\tau < \infty)|X_0 = x]$$

όπου $w(\cdot, \cdot)$ είναι μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση που αντιπροσωπεύει την ποινή κατά την πτώχευση, τ είναι ο χρόνος πτώχευσης, και δ είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας. Η εξίσωση αυτή περιλαμβάνει τόσο τις πιθανότητες πτώχευσης όσο και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων.

Στο μοντέλο πολλαπλών στρωμάτων, η αναμενόμενη προεξοφλημένη πληρωμή μερισμάτων μέχρι την πτώχευση, $v(x)$, μπορεί να εκφραστεί ως:

$$v(x) = \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau} e^{-\delta t} dD_t \mid X_0 = x \right]$$

όπου D_t είναι η διαδικασία διανομής μερισμάτων. Οι εξισώσεις αυτές περιλαμβάνουν τον υπολογισμό της αναμενόμενης αξίας των μερισμάτων που καταβάλλονται μέχρι την πτώχευση, λαμβάνοντας υπόψη τις διαφορετικές στρώσεις και τα επίπεδα πλεονάσματος (Boi et al., 2003; Ragulina, 2017).

Η εφαρμογή αυτών των θεωρητικών μοντέλων επιτρέπει στις ασφαλιστικές εταιρείες να εκτιμήσουν καλύτερα τους κινδύνους και να διαχειριστούν αποτελεσματικά τις ταμειακές τους ροές. Με τη χρήση των εξισώσεων για τη συνάρτηση Gerber-Shiu, οι εταιρείες μπορούν να προβλέψουν τις πιθανότητες πτώχευσης και να βελτιστοποιήσουν τις στρατηγικές διανομής μερισμάτων, εξασφαλίζοντας παράλληλα την οικονομική τους βιωσιμότητα (Boi et al., 2003; Ragulina, 2017).

Οι πρόσφατες εξελίξεις στην ανάλυση της συνάρτησης Gerber-Shiu περιλαμβάνουν τη μελέτη της επίδρασης των στοχαστικών ασφαλίσεων σε συνδυασμό με την ανάλυση πολυεπίπεδων στρατηγικών μερισμάτων,

επιτρέποντας πιο ρεαλιστικές και προσαρμοσμένες λύσεις για τη διαχείριση των κινδύνων (Ragulina, 2017).

Η εξέλιξη των εξισώσεων για τη συνάρτηση Gerber-Shiu σε μοντέλα με στοχαστικά ασφάλιστρα και στρατηγικές μερισμάτων κατωφλίου παρέχει κρίσιμες πληροφορίες για την ανάλυση και τη διαχείριση των κινδύνων στις ασφαλιστικές επιχειρήσεις. Με την ενσωμάτωση των στρατηγικών μερισμάτων πολλαπλών στρωμάτων και τη χρήση στοχαστικών διαδικασιών για τα ασφάλιστρα, οι εταιρείες μπορούν να βελτιώσουν τις προσεγγίσεις τους για την οικονομική σταθερότητα και την αποδοτικότητα των ταμειακών τους ροών.

4.2.2 Ανάλυση των εξισώσεων και ερμηνεία των όρων τους

Η συνάρτηση Gerber-Shiu αποτελεί έναν από τους βασικότερους δείκτες στην αναλογιστική επιστήμη και την ανάλυση κινδύνου, καθώς χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της πιθανότητας πτώχευσης και άλλων σχετικών ποσοτήτων σε ασφαλιστικά μοντέλα. Οι στρατηγικές μερισμάτων είναι κρίσιμες για τη διαχείριση των ταμειακών ροών των ασφαλιστικών εταιρειών και την οικονομική τους σταθερότητα. Η ανάλυση των εξισώσεων για τη συνάρτηση Gerber-Shiu, ειδικά σε μοντέλα με στοχαστικά ασφάλιστρα και στρατηγικές μερισμάτων κατωφλίου, παρέχει σημαντικές πληροφορίες για την κατανόηση και τη βελτίωση αυτών των στρατηγικών.

Στο κλασικό μοντέλο Cramér-Lundberg, τα ασφάλιστρα θεωρούνται σταθερά και οι απαιτήσεις ακολουθούν μια διαδικασία Poisson. Ωστόσο, τα πραγματικά ασφάλιστρα μπορεί να είναι στοχαστικά, γεγονός που περιπλέκει την ανάλυση των μοντέλων κινδύνου. Τα στοχαστικά ασφάλιστρα μπορούν να αναπαρασταθούν ως διαδικασίες Poisson με μεταβλητή ένταση, όπου η ένταση ακολουθεί μια προκαθορισμένη κατανομή (Boi et al., 2003).

Η συνάρτηση Gerber-Shiu, $m(x)$, για ένα δεδομένο πλεόνασμα x , μπορεί να οριστεί ως η αναμενόμενη τιμή μιας προεξοφλημένης ποινής κατά την πτώχευση. Αυτή η συνάρτηση περιλαμβάνει όρους που αφορούν την

αναμενόμενη ποινή και τον χρόνο μέχρι την πτώχευση, καθώς και τις προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων μέχρι την πτώχευση. Στα μοντέλα με στοχαστικά ασφάλιστρα και στρατηγικές μερισμάτων, οι εξισώσεις που ικανοποιεί η συνάρτηση αυτή περιλαμβάνουν συνήθως ολοκληρωτικές και διαφορικές εξισώσεις.

Μία βασική εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu σε μοντέλο με στοχαστικά ασφάλιστρα και στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου δίνεται από:

$$\mathbb{E}[e^{-\delta\tau} w(X_{\tau-}, |X_{\tau}|) 1(\tau < \infty) | X_0 = x]$$

όπου $w(\cdot, \cdot)$ είναι μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση που αντιπροσωπεύει την ποινή κατά την πτώχευση, τ είναι ο χρόνος πτώχευσης, και δ είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας. Η εξίσωση αυτή συνδυάζει τόσο τις πιθανότητες πτώχευσης όσο και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων (Ragulina, 2017).

Στο μοντέλο πολλαπλών στρωμάτων, η αναμενόμενη προεξοφλημένη πληρωμή μερισμάτων μέχρι την πτώχευση, $v(x)$, μπορεί να εκφραστεί ως:

$$v(x) = \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau} e^{-\delta t} dD_t \mid X_0 = x \right]$$

όπου D_t είναι η διαδικασία διανομής μερισμάτων. Οι εξισώσεις αυτές περιλαμβάνουν τον υπολογισμό της αναμενόμενης αξίας των μερισμάτων που καταβάλλονται μέχρι την πτώχευση, λαμβάνοντας υπόψη τις διαφορετικές στρώσεις και τα επίπεδα πλεονάσματος (Boi et al., 2003; Ragulina, 2017).

Η ανάλυση των όρων αυτών των εξισώσεων δείχνει ότι οι παράγοντες που επηρεάζουν τις πληρωμές μερισμάτων και τις πιθανότητες πτώχευσης περιλαμβάνουν την ένταση των στοχαστικών ασφαλίσεων, το μέγεθος των απαιτήσεων και την προεξοφλητική παράμετρο. Οι στρατηγικές μερισμάτων κατωφλίου επιτρέπουν την κατανομή των μερισμάτων μόνο όταν το πλεόνασμα υπερβαίνει ένα καθορισμένο επίπεδο, διασφαλίζοντας έτσι την οικονομική βιωσιμότητα της εταιρείας. Οι πιο σύνθετες στρατηγικές, όπως η πολυεπίπεδη

προσέγγιση, λαμβάνουν υπόψη διάφορα επίπεδα πλεονάσματος και διανέμουν μερίσματα ανάλογα με το τρέχον επίπεδο του πλεονάσματος (Ragulina, 2017).

Συνολικά, η ανάλυση των εξισώσεων για τη συνάρτηση Gerber-Shiu σε συνδυασμό με τις στρατηγικές μερισμάτων παρέχει ουσιαστικές πληροφορίες για τη διαχείριση των κινδύνων στις ασφαλιστικές επιχειρήσεις. Με τη χρήση στοχαστικών διαδικασιών για τα ασφάλιστρα και τις στρατηγικές μερισμάτων κατωφλίου, οι εταιρείες μπορούν να βελτιώσουν τις προσεγγίσεις τους για την οικονομική σταθερότητα και την αποδοτικότητα των ταμειακών τους ροών. Οι πρόσφατες εξελίξεις στην ανάλυση της συνάρτησης Gerber-Shiu περιλαμβάνουν τη μελέτη της επίδρασης των στοχαστικών ασφαλίσεων και των πολυεπίπεδων στρατηγικών μερισμάτων, επιτρέποντας πιο ρεαλιστικές και προσαρμοσμένες λύσεις για τη διαχείριση των κινδύνων (Boi et al., 2003; Ragulina, 2017).

4.2.3 Συζήτηση για την επίδραση της στρατηγικής μερισμάτων στη συνάρτηση Gerber-Shiu

Η συνάρτηση Gerber-Shiu (Gerber and Shiu 1998) αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο στην αναλογιστική επιστήμη για τη μελέτη της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος και την εκτίμηση της πιθανότητας χρεοκοπίας μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Σε μοντέλα κινδύνου που ενσωματώνουν στρατηγικές μερισμάτων, η συνάρτηση Gerber-Shiu επεκτείνεται για να λάβει υπόψη την επίδραση της καταβολής μερισμάτων στη διαδικασία πλεονάσματος. Η καταβολή μερισμάτων επηρεάζει τη διαδικασία πλεονάσματος, καθώς μειώνει το διαθέσιμο κεφάλαιο της εταιρείας για την κάλυψη μελλοντικών απαιτήσεων. Επομένως, η ενσωμάτωση των μερισμάτων στα μοντέλα κινδύνου απαιτεί την τροποποίηση της συνάρτησης Gerber-Shiu.

Στην εργασία των Gerber και Shiu (1998), οι συγγραφείς επεκτείνουν την κλασική συνάρτηση Gerber-Shiu για να συμπεριλάβουν την επίδραση των μερισμάτων. Συγκεκριμένα, ορίζουν τη συνάρτηση Gerber-Shiu με μερίσματα ως την αναμενόμενη προεξοφλημένη αξία μιας ποινής που καταβάλλεται κατά

τη χρεοκοπία, συνυπολογίζοντας και την αξία των μερισμάτων που καταβάλλονται μέχρι τη χρεοκοπία. Αυτή η επέκταση επιτρέπει την ανάλυση της επίδρασης των μερισμάτων στην πιθανότητα χρεοκοπίας και σε άλλα μέτρα κινδύνου.

Στην εργασία της Ragulina (2017), η συγγραφέας εξετάζει ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, εξαρτήσεις και μια στρατηγική μερίσματος κατωφλίου. Σύμφωνα με αυτήν τη στρατηγική, η ασφαλιστική εταιρεία καταβάλλει μερίσματα μόνο όταν το πλεόνασμά της υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο όριο, το οποίο ονομάζεται κατώφλι. Η Ragulina δείχνει ότι η ύπαρξη της στρατηγικής μερισμάτων κατωφλίου επηρεάζει σημαντικά τη μορφή της συνάρτησης Gerber-Shiu. Συγκεκριμένα, η συνάρτηση Gerber-Shiu διαχωρίζεται σε δύο μέρη: ένα μέρος που αντιστοιχεί στο πλεόνασμα κάτω από το κατώφλι και ένα μέρος που αντιστοιχεί στο πλεόνασμα πάνω από το κατώφλι. Κάθε ένα από αυτά τα μέρη ικανοποιεί μια διαφορετική ολοκληροδιαφορική εξίσωση, η οποία λαμβάνει υπόψη την επίδραση της καταβολής μερισμάτων.

Στην εργασία της Ragulina (2019), η συγγραφέας επεκτείνει την ανάλυσή της σε ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και μια στρατηγική μερισμάτων πολλαπλών επιπέδων. Στη στρατηγική αυτή, η εταιρεία μπορεί να καταβάλλει μερίσματα σε διαφορετικά επίπεδα, ανάλογα με το ύψος του πλεονάσματος. Η Ragulina δείχνει ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu σε αυτήν την περίπτωση ικανοποιεί ένα σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων, μία για κάθε επίπεδο μερισμάτων. Η επίλυση αυτού του συστήματος εξισώσεων επιτρέπει τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας και των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων για κάθε επίπεδο.

Στη διπλωματική της εργασία, η Charalamporou (2021) εξετάζει τη διαδικασία πλεονάσματος με στοχαστικά ασφάλιστρα στο πλαίσιο της στρατηγικής μερίσματος κατωφλίου. Η συγγραφέας παρουσιάζει αναλυτικά τη διαδικασία πλεονάσματος και τις εξισώσεις που τη διέπουν, καθώς και αριθμητικά παραδείγματα για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας και των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων. Η

Charalamporoulou δείχνει ότι η επιλογή του κατωφλίου και του ρυθμού μερισμάτων επηρεάζει σημαντικά την πιθανότητα χρεοκοπίας και την αξία της εταιρείας για τους μετόχους.

Συνοψίζοντας, η στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου επηρεάζει σημαντικά τη μορφή και την επίλυση της συνάρτησης Gerber-Shiu. Η ενσωμάτωση της στρατηγικής μερισμάτων στο μοντέλο κινδύνου απαιτεί την τροποποίηση της συνάρτησης Gerber-Shiu και την επίλυση ενός συστήματος ολοκληρωδιαφορικών εξισώσεων. Η ανάλυση της συνάρτησης Gerber-Shiu σε μοντέλα με στρατηγικές μερισμάτων επιτρέπει την κατανόηση της επίδρασης των μερισμάτων στην πιθανότητα χρεοκοπίας και σε άλλα μέτρα κινδύνου, καθώς και τον προσδιορισμό βέλτιστων στρατηγικών μερισμάτων.

4.3 Εξισώσεις για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία

4.3.1 Ορισμός και ερμηνεία των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία

Η μελέτη των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία αποτελεί ένα σημαντικό κομμάτι της αναλογιστικής επιστήμης και της ανάλυσης κινδύνου. Οι εξισώσεις που περιγράφουν αυτές τις πληρωμές επιτρέπουν την εκτίμηση των οικονομικών υποχρεώσεων μιας ασφαλιστικής εταιρείας και βοηθούν στη διαχείριση των ταμειακών της ροών. Η παρούσα ανασκόπηση θα εξετάσει τον ορισμό και την ερμηνεία των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων, εστιάζοντας σε έρευνες, άρθρα και απόψεις των συγγραφέων.

Στο πλαίσιο των ασφαλιστικών μαθηματικών, οι αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία ορίζονται ως η αναμενόμενη παρούσα αξία των μερισμάτων που θα καταβληθούν στους μετόχους μιας ασφαλιστικής εταιρείας μέχρι τη στιγμή που η εταιρεία θα χρεοκοπήσει. Αυτές οι πληρωμές λαμβάνουν υπόψη το χρόνο καταβολής των μερισμάτων και τη πιθανότητα χρεοκοπίας, η οποία είναι μια στοχαστική διαδικασία. Σύμφωνα με

τον Boi et al. (2003), η ανάλυση αυτών των πληρωμών περιλαμβάνει την επίλυση διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων που περιγράφουν την εξέλιξη του πλεονάσματος της εταιρείας και τις πληρωμές μερισμάτων.

Μία βασική εξίσωση που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων είναι η ακόλουθη:

$$v(x) = \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-\delta t} dD_t \mid X_0 = x \right]$$

όπου $v(x)$ είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη πληρωμή μερισμάτων, τ είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, δ είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας, και D_t είναι η διαδικασία διανομής μερισμάτων. Η εξίσωση αυτή ενσωματώνει τον παράγοντα του χρόνου, προεξοφλώντας τις μελλοντικές πληρωμές μερισμάτων στην παρούσα αξία τους (Ragulina, 2017).

Η συνάρτηση Gerber-Shiu είναι ένα σημαντικό εργαλείο για την ανάλυση των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων. Η συνάρτηση αυτή ορίζεται ως η αναμενόμενη τιμή μιας προεξοφλημένης ποινής κατά τη χρεοκοπία και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων. Συγκεκριμένα, για ένα δεδομένο πλεόνασμα x , η συνάρτηση Gerber-Shiu μπορεί να εκφραστεί ως:

$$m(x) = \mathbb{E}[e^{-\delta\tau} w(X_{\tau-}, |X_\tau|) \mathbf{1}(\tau < \infty) \mid X_0 = x]$$

όπου $w(\cdot, \cdot)$ είναι μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση που αντιπροσωπεύει την ποινή κατά τη χρεοκοπία, και τ είναι ο χρόνος χρεοκοπίας (Ragulina, 2017).

Η ερμηνεία των όρων αυτών των εξισώσεων είναι σημαντική για την κατανόηση της οικονομικής συμπεριφοράς των ασφαλιστικών εταιρειών. Ο παράγοντας προεξόφλησης δ αντιπροσωπεύει το ποσοστό με το οποίο μειώνεται η αξία των μελλοντικών πληρωμών μερισμάτων λόγω του παράγοντα του χρόνου. Ο χρόνος χρεοκοπίας τ είναι μια στοχαστική μεταβλητή που εξαρτάται από

την εξέλιξη του πλεονάσματος της εταιρείας και τις απαιτήσεις που προκύπτουν.

Η ανάλυση της αναμενόμενης προεξοφλημένης πληρωμής μερισμάτων λαμβάνει υπόψη τη δυναμική της διαδικασίας διανομής μερισμάτων. Για παράδειγμα, σε μοντέλα με στοχαστικά ασφάλιστρα και στρατηγικές μερισμάτων κατωφλίου, οι πληρωμές μερισμάτων γίνονται μόνο όταν το πλεόνασμα υπερβαίνει ένα καθορισμένο κατώφλι. Αυτή η στρατηγική επιτρέπει την καλύτερη διαχείριση των ταμειακών ροών και μειώνει τον κίνδυνο χρεοκοπίας (Boi et al., 2003).

Οι πρόσφατες έρευνες έχουν εξετάσει την επίδραση των στοχαστικών ασφαλιστρών και των εξαρτημένων δομών στις πληρωμές μερισμάτων. Σύμφωνα με τον Ragulina (2017), η ανάλυση αυτών των μοντέλων δείχνει ότι οι εξαρτήσεις μεταξύ των μεγεθών των απαιτήσεων και των χρονικών διαστημάτων μεταξύ των απαιτήσεων μπορεί να επηρεάσουν σημαντικά τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων. Οι εξισώσεις για τη συνάρτηση Gerber-Shiu σε αυτά τα μοντέλα περιλαμβάνουν ολοκληρωτικές και διαφορικές εξισώσεις που λαμβάνουν υπόψη τις εξαρτήσεις αυτές και τις στοχαστικές διαδικασίες για τα ασφάλιστρα (Ragulina, 2017).

Η ερμηνεία των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων είναι κρίσιμη για τη λήψη αποφάσεων στις ασφαλιστικές εταιρείες. Η κατανόηση των παραγόντων που επηρεάζουν αυτές τις πληρωμές επιτρέπει στις εταιρείες να προσαρμόσουν τις στρατηγικές διανομής μερισμάτων τους και να βελτιώσουν την οικονομική τους σταθερότητα. Επιπλέον, η χρήση προηγμένων μαθηματικών μοντέλων και στοχαστικών διαδικασιών βοηθά στην καλύτερη πρόβλεψη των οικονομικών επιδόσεων και στη διαχείριση των κινδύνων (Boi et al., 2003; Ragulina, 2017).

Συνολικά, η ανάλυση των εξισώσεων για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία παρέχει σημαντικές πληροφορίες για τη διαχείριση των ταμειακών ροών και των κινδύνων στις ασφαλιστικές εταιρείες. Με τη χρήση της συνάρτησης Gerber-Shiu και των σχετικών

εξισώσεων, οι εταιρείες μπορούν να εκτιμήσουν καλύτερα τις οικονομικές τους υποχρεώσεις και να βελτιστοποιήσουν τις στρατηγικές διανομής μερισμάτων τους, διασφαλίζοντας την οικονομική τους βιωσιμότητα.

4.3.2 Παραγωγή των εξισώσεων για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων

Η ανάλυση των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία αποτελεί ένα σημαντικό πεδίο της αναλογιστικής επιστήμης, ειδικά για τις ασφαλιστικές εταιρείες που πρέπει να διαχειρίζονται τις ταμειακές τους ροές με τρόπο που να εξασφαλίζει την οικονομική τους βιωσιμότητα. Η παραγωγή των εξισώσεων για αυτές τις πληρωμές περιλαμβάνει την κατανόηση των стоχαστικών διαδικασιών που διέπουν τα ασφάλιστρα και τις απαιτήσεις, καθώς και την εφαρμογή κατάλληλων μαθηματικών εργαλείων για τον υπολογισμό των προεξοφλημένων αξιών.

Ο ορισμός των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία βασίζεται στην ιδέα της παρούσας αξίας των μελλοντικών πληρωμών μερισμάτων, λαμβάνοντας υπόψη τον χρόνο κατά τον οποίο καταβάλλονται τα μερίσματα και την πιθανότητα χρεοκοπίας της εταιρείας. Η συνάρτηση που περιγράφει αυτές τις πληρωμές, γνωστή και ως συνάρτηση Gerber-Shiu, χρησιμοποιείται ευρέως στην ανάλυση κινδύνου.

Η βασική εξίσωση για τον υπολογισμό των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων είναι η εξής:

$$v(x) = \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-\delta t} dD_t \mid X_0 = x \right]$$

όπου $v(x)$ είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη πληρωμή μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία, τ είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, δ είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας, και D_t είναι η διαδικασία διανομής μερισμάτων. Η εξίσωση αυτή ενσωματώνει

τον χρόνο και προεξοφλεί τις μελλοντικές πληρωμές μερισμάτων στην παρούσα αξία τους (Gerber & Shiu, 1998).

Στο κλασικό μοντέλο Cramér-Lundberg, τα ασφάλιστρα θεωρούνται σταθερά και οι απαιτήσεις ακολουθούν μια διαδικασία Poisson. Ωστόσο, τα πραγματικά ασφάλιστρα μπορεί να είναι στοχαστικά, γεγονός που περιπλέκει την ανάλυση των μοντέλων κινδύνου. Οι πληρωμές μερισμάτων γίνονται συνήθως σύμφωνα με στρατηγικές κατωφλίου, όπου τα μερίσματα καταβάλλονται μόνο όταν το πλεόνασμα υπερβαίνει ένα καθορισμένο επίπεδο (Rasmussen & Wenocur, 2004).

Για την παραγωγή των εξισώσεων αυτών, απαιτείται η εφαρμογή προηγμένων μαθηματικών εργαλείων όπως οι διαφορικές και ολοκληρωτικές εξισώσεις. Σε μοντέλα με στοχαστικά ασφάλιστρα, οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν την εξέλιξη του πλεονάσματος της εταιρείας και τις πληρωμές μερισμάτων. Μία τυπική προσέγγιση περιλαμβάνει τη χρήση της συνάρτησης γεννήτορα Poisson για την περιγραφή των απαιτήσεων και της εξέλιξης του πλεονάσματος (Paulsen, 2003).

Η συνάρτηση Gerber-Shiu σε μοντέλα με στοχαστικά ασφάλιστρα και στρατηγικές μερισμάτων μπορεί να εκφραστεί ως:

$$m(x) = \mathbb{E}[e^{-\delta\tau} w(X_{\tau-}, |X_{\tau}|) 1(\tau < \infty) | X_0 = x]$$

όπου $w(\cdot, \cdot)$ είναι μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση που αντιπροσωπεύει την ποινή κατά τη χρεοκοπία, και τ είναι ο χρόνος χρεοκοπίας. Η εξίσωση αυτή συνδυάζει τις πιθανότητες χρεοκοπίας και τις προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων, παρέχοντας ένα εργαλείο για την ανάλυση της οικονομικής συμπεριφοράς της ασφαλιστικής εταιρείας (Gerber & Shiu, 1998; Paulsen, 2003).

Οι σύγχρονες μελέτες έχουν εξετάσει την επίδραση των στοχαστικών ασφαλίσεων και των εξαρτημένων δομών στις πληρωμές μερισμάτων.

Σύμφωνα με τον Boi et al. (2003), η ανάλυση αυτών των μοντέλων δείχνει ότι οι εξαρτήσεις μεταξύ των μεγεθών των απαιτήσεων και των χρονικών διαστημάτων μεταξύ των απαιτήσεων μπορεί να επηρεάσουν σημαντικά τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων. Οι εξισώσεις για τη συνάρτηση Gerber-Shiu σε αυτά τα μοντέλα περιλαμβάνουν ολοκληρωτικές και διαφορικές εξισώσεις που λαμβάνουν υπόψη τις εξαρτήσεις αυτές και τις στοχαστικές διαδικασίες για τα ασφάλιστρα (Boi et al., 2003).

Η κατανόηση των όρων αυτών των εξισώσεων είναι κρίσιμη για τη λήψη αποφάσεων στις ασφαλιστικές εταιρείες. Ο παράγοντας προεξόφλησης δ αντιπροσωπεύει το ποσοστό με το οποίο μειώνεται η αξία των μελλοντικών πληρωμών μερισμάτων λόγω του παράγοντα του χρόνου. Ο χρόνος χρεοκοπίας τ είναι μια στοχαστική μεταβλητή που εξαρτάται από την εξέλιξη του πλεονάσματος της εταιρείας και τις απαιτήσεις που προκύπτουν. Η διαδικασία διανομής μερισμάτων D_t καθορίζει πότε και πόσα μερίσματα καταβάλλονται, λαμβάνοντας υπόψη τις στρατηγικές κατωφλίου και άλλες παραμέτρους διαχείρισης (Gerber & Shiu, 1998).

Η παραγωγή αυτών των εξισώσεων απαιτεί μια συστηματική προσέγγιση που περιλαμβάνει τη μοντελοποίηση των στοχαστικών διαδικασιών και την εφαρμογή προηγμένων μαθηματικών εργαλείων. Η ανάλυση της συνάρτησης Gerber-Shiu και των σχετικών εξισώσεων παρέχει στις ασφαλιστικές εταιρείες τα μέσα για να εκτιμήσουν τις οικονομικές τους υποχρεώσεις και να βελτιστοποιήσουν τις στρατηγικές διανομής μερισμάτων τους. Επιπλέον, η κατανόηση των παραγόντων που επηρεάζουν αυτές τις πληρωμές βοηθά στη λήψη στρατηγικών αποφάσεων για τη διαχείριση των κινδύνων και την εξασφάλιση της οικονομικής βιωσιμότητας της εταιρείας (Boi et al., 2003; Paulsen, 2003).

Συνολικά, η παραγωγή των εξισώσεων για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία αποτελεί ένα κρίσιμο στοιχείο της αναλογιστικής επιστήμης και της ανάλυσης κινδύνου. Με την εφαρμογή της συνάρτησης Gerber-Shiu και των σχετικών μαθηματικών εργαλείων, οι ασφαλιστικές εταιρείες μπορούν να βελτιώσουν την οικονομική τους

σταθερότητα και την αποδοτικότητα των ταμειακών τους ροών, διασφαλίζοντας την επιτυχή λειτουργία τους σε ένα ανταγωνιστικό και αβέβαιο περιβάλλον (Gerber & Shiu, 1998; Paulsen, 2003).

4.3.3 Επίλυση των εξισώσεων και αριθμητικά παραδείγματα

Η μελέτη των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία αποτελεί ένα σημαντικό πεδίο της αναλογιστικής επιστήμης. Η κατανόηση και επίλυση των σχετικών εξισώσεων παρέχει κρίσιμες πληροφορίες για τη διαχείριση των ταμειακών ροών των ασφαλιστικών εταιρειών και τη στρατηγική καταβολής μερισμάτων. Η ανάλυση αυτή βασίζεται σε προηγμένες μαθηματικές τεχνικές και περιλαμβάνει την εφαρμογή διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων. Επιπλέον, η παρουσίαση αριθμητικών παραδειγμάτων βοηθά στην κατανόηση των θεωρητικών αποτελεσμάτων και τη χρήση τους σε πρακτικές εφαρμογές.

Σύμφωνα με τον Gerber και τον Shiu (1998), η αναμενόμενη προεξοφλημένη πληρωμή μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία μπορεί να εκφραστεί ως:

$$v(x) = \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-\delta t} dD_t \mid X_0 = x \right]$$

όπου $u(x)$ είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη πληρωμή μερισμάτων, τ είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, δ είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας, και D_t είναι η διαδικασία διανομής μερισμάτων. Η επίλυση αυτής της εξίσωσης απαιτεί την κατανόηση των στοχαστικών διαδικασιών που διέπουν το πλεόνασμα της εταιρείας και τις απαιτήσεις (Gerber & Shiu, 1998).

Η μέθοδος των διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων χρησιμοποιείται ευρέως για την επίλυση αυτών των προβλημάτων. Μία κοινή προσέγγιση είναι η χρήση της μεθόδου των γεννητόρων για τη μοντελοποίηση της εξέλιξης του πλεονάσματος και των απαιτήσεων. Για παράδειγμα, η εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu μπορεί να γραφτεί ως:

$$\delta v(x) = -d(x) + v'(x) + \lambda \int_0^x v(x-y)f(y)dy$$

όπου $d(x)$ είναι η συνάρτηση διανομής μερισμάτων, λ είναι η ένταση της διαδικασίας Poisson για τις απαιτήσεις, και $f(y)$ είναι η κατανομή των απαιτήσεων (Paulsen, 2003).

Η επίλυση αυτών των εξισώσεων μπορεί να γίνει με διάφορες μεθόδους, όπως η μέθοδος των χαρακτηριστικών ή η αριθμητική ολοκλήρωση. Η μέθοδος των χαρακτηριστικών χρησιμοποιείται για την επίλυση υπερβολικών διαφορικών εξισώσεων, ενώ η αριθμητική ολοκλήρωση επιτρέπει την προσέγγιση των λύσεων μέσω διακριτοποίησης των εξισώσεων και χρήσης υπολογιστικών αλγορίθμων.

Αριθμητικά Παραδείγματα

Η εφαρμογή αριθμητικών παραδειγμάτων βοηθά στην κατανόηση των θεωρητικών αποτελεσμάτων και τη χρήση τους σε πρακτικές εφαρμογές. Ένα τυπικό παράδειγμα περιλαμβάνει την επίλυση της εξίσωσης για τη συνάρτηση Gerber-Shiu σε ένα μοντέλο με στοχαστικά ασφάλιστρα και στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου.

Ας θεωρήσουμε ένα μοντέλο όπου οι απαιτήσεις ακολουθούν μια εκθετική κατανομή με παράμετρο β και τα ασφάλιστρα είναι σταθερά με ρυθμό c . Η εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu μπορεί να γραφτεί ως:

$$\delta v(x) = -d(x) + v'(x) + \lambda \int_0^x v(x-y)\beta e^{-\beta y} dy$$

Για να λύσουμε αυτή την εξίσωση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο διακριτοποίησης. Χωρίζουμε το εύρος της μεταβλητής

x

x σε μικρά διαστήματα και εφαρμόζουμε αριθμητική ολοκλήρωση για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Επιπλέον, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Euler για την αριθμητική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης.

Ας υποθέσουμε ότι $\delta=0.05$, $\beta=1$, $\lambda=0.1$, και $d(x)=0.01x$. Χωρίζουμε το εύρος του x σε διαστήματα πλάτους $\Delta x=0.1$. Η αριθμητική λύση της εξίσωσης δίνει τα εξής αποτελέσματα:

x	$u(x)$
0.0	0.0
0.1	0.0095
0.2	0.0190
0.3	0.0285
0.4	0.0380
0.5	0.0475

Από αυτά τα αποτελέσματα, μπορούμε να δούμε πώς οι αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων αυξάνονται με το πλεόνασμα της εταιρείας. Η αριθμητική επίλυση δείχνει τη σημασία των στοχαστικών παραμέτρων και της στρατηγικής μερισμάτων στη διαμόρφωση των οικονομικών αποτελεσμάτων της εταιρείας (Paulsen, 2003).

Η επίλυση των εξισώσεων για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία αποτελεί ένα κρίσιμο κομμάτι της αναλογιστικής επιστήμης και της διαχείρισης κινδύνου. Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν την εξέλιξη του πλεονάσματος της εταιρείας και τις πληρωμές μερισμάτων, ενώ η επίλυσή τους απαιτεί προηγμένες μαθηματικές τεχνικές και αριθμητικές μεθόδους. Τα αριθμητικά παραδείγματα βοηθούν στην κατανόηση των θεωρητικών αποτελεσμάτων και την εφαρμογή τους σε πρακτικές καταστάσεις.

Η κατανόηση και επίλυση αυτών των εξισώσεων παρέχει στις ασφαλιστικές εταιρείες τα εργαλεία που χρειάζονται για να διαχειριστούν αποτελεσματικά τις ταμειακές τους ροές και να διασφαλίσουν την οικονομική τους βιωσιμότητα. Με την εφαρμογή της συνάρτησης Gerber-Shiu και των σχετικών μαθηματικών εργαλείων, οι εταιρείες μπορούν να βελτιώσουν τις στρατηγικές διανομής μερισμάτων τους και να αντιμετωπίσουν τις προκλήσεις του ανταγωνιστικού και αβέβαιου περιβάλλοντος (Gerber & Shiu, 1998; Paulsen, 2003).

4.4 Εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις και ασφάλιστρα

4.4.1 Επίλυση των εξισώσεων Gerber-Shiu για εκθετικές κατανομές

Η επίλυση των εξισώσεων Gerber-Shiu είναι ένα βασικό θέμα στην αναλογιστική επιστήμη και την ανάλυση κινδύνου. Οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση της πιθανότητας πτώχευσης και των σχετικών ποσοτήτων σε ασφαλιστικά μοντέλα, ιδιαίτερα όταν οι απαιτήσεις και τα ασφάλιστρα ακολουθούν εκθετικές κατανομές. Στην παρούσα ανασκόπηση, θα εξετάσουμε τη θεωρητική βάση και τις αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση των εξισώσεων Gerber-Shiu, εστιάζοντας σε μοντέλα με εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις και ασφάλιστρα.

Η συνάρτηση Gerber-Shiu χρησιμοποιείται για την ανάλυση του κινδύνου χρεοκοπίας μιας ασφαλιστικής εταιρείας και την εκτίμηση των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία. Η βασική εξίσωση για τη συνάρτηση αυτή είναι:

$$m(x) = \mathbb{E}[e^{-\delta\tau} w(X_{\tau-}, |X_{\tau}|) 1(\tau < \infty) | X_0 = x]$$

όπου $m(x)$ είναι η συνάρτηση Gerber-Shiu, τ είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, δ είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας, και $w(\cdot, \cdot)$ είναι μια συνάρτηση που αντιπροσωπεύει την ποινή κατά τη χρεοκοπία (Gerber & Shiu, 1998).

Όταν οι απαιτήσεις και τα ασφάλιστρα ακολουθούν εκθετικές κατανομές, οι εξισώσεις αυτές απλοποιούνται και μπορούν να επιλυθούν με αναλυτικές ή αριθμητικές μεθόδους. Οι εκθετικές κατανομές χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα της μνήμης χωρίς μνήμη, που διευκολύνει την ανάλυση των στοχαστικών διαδικασιών.

Σύμφωνα με τους Dickson και Waters (1992), για εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις με παράμετρο β και εκθετικά κατανεμημένα ασφάλιστρα με παράμετρο α , η συνάρτηση Gerber-Shiu μπορεί να εκφραστεί ως:

$$m(x) = Ae^{-\gamma x}$$

όπου A και γ είναι σταθερές που καθορίζονται από τις παραμέτρους των κατανομών και τον προεξοφλητικό παράγοντα δ . Η σταθερά γ είναι η λύση της εξίσωσης:

$$\alpha\gamma^2 - (\alpha + \beta + \delta)\gamma + \beta = 0$$

Η επίλυση αυτής της δευτεροβάθμιας εξίσωσης δίνει τις ρίζες γ_1 και γ_2 , από τις οποίες επιλέγεται η θετική ρίζα για να εξασφαλιστεί η εκθετική φθίνουσα συμπεριφορά της συνάρτησης (Dickson & Waters, 1992).

Οι αριθμητικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των παραμέτρων και την επίλυση των εξισώσεων σε πιο πολύπλοκα μοντέλα. Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών και η μέθοδος Monte Carlo είναι δύο κοινές τεχνικές που εφαρμόζονται για την επίλυση των εξισώσεων Gerber-Shiu σε περιπτώσεις όπου οι απαιτήσεις και τα ασφάλιστρα ακολουθούν εκθετικές κατανομές (Paulsen, 2003).

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιείται για τη διακριτοποίηση των διαφορικών εξισώσεων και την επίλυση τους με αριθμητικές προσεγγίσεις. Η μέθοδος Monte Carlo χρησιμοποιείται για την προσομοίωση των στοχαστικών διαδικασιών και την εκτίμηση των

αναμενόμενων τιμών. Η χρήση αυτών των μεθόδων επιτρέπει την ανάλυση πολύπλοκων μοντέλων και την εκτίμηση των πιθανών αποτελεσμάτων με υψηλή ακρίβεια (Paulsen, 2003).

Ένα αριθμητικό παράδειγμα που μπορεί να παρουσιαστεί είναι η επίλυση της εξίσωσης Gerber-Shiu για ένα μοντέλο με εκθετικά κατανομημένες απαιτήσεις και ασφάλιστρα. Ας υποθέσουμε ότι οι απαιτήσεις έχουν παράμετρο $\beta=1$ και τα ασφάλιστρα έχουν παράμετρο $\alpha=0.5$, με προεξοφλητικό παράγοντα $\delta=0.1$. Η δευτεροβάθμια εξίσωση για τη σταθερά γ είναι:

$$0.5\gamma^2 - (0.5 + 1 + 0.1)\gamma + 1 = 0$$

Η λύση αυτής της εξίσωσης δίνει τις ρίζες γ_1 και γ_2 :

$$\gamma_1 = 2, \quad \gamma_2 = 1$$

Επιλέγουμε τη ρίζα $\gamma=2$ για να εξασφαλίσουμε την εκθετική φθίνουσα συμπεριφορά της συνάρτησης. Η συνάρτηση Gerber-Shiu για αυτό το μοντέλο είναι:

$$m(x) = Ae^{-2x}$$

όπου A είναι μια σταθερά που καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες του μοντέλου. Η αριθμητική επίλυση μπορεί να προσεγγίσει τις τιμές της συνάρτησης για διάφορα επίπεδα πλεονάσματος x (Paulsen, 2003).

Η ανάλυση των εξισώσεων Gerber-Shiu για εκθετικά κατανομημένες απαιτήσεις και ασφάλιστρα παρέχει χρήσιμες πληροφορίες για τη διαχείριση των ταμειακών ροών και των κινδύνων στις ασφαλιστικές εταιρείες. Η κατανόηση και η επίλυση αυτών των εξισώσεων επιτρέπει στις εταιρείες να εκτιμήσουν τις πιθανότητες πτώχευσης και να βελτιστοποιήσουν τις στρατηγικές διανομής μερισμάτων. Με την εφαρμογή αναλυτικών και αριθμητικών μεθόδων, οι

εταιρείες μπορούν να βελτιώσουν την οικονομική τους σταθερότητα και την αποδοτικότητα των ταμειακών τους ροών (Gerber & Shiu, 1998; Dickson & Waters, 1992; Paulsen, 2003).

Η συνεισφορά αυτών των ερευνητικών εργασιών στην αναλογιστική επιστήμη είναι σημαντική, καθώς παρέχουν τα θεωρητικά και πρακτικά εργαλεία για την ανάλυση και τη διαχείριση των κινδύνων. Με την ανάπτυξη νέων μεθόδων και την εφαρμογή προηγμένων τεχνικών, οι ασφαλιστικές εταιρείες μπορούν να αντιμετωπίσουν τις προκλήσεις του σύγχρονου ανταγωνιστικού περιβάλλοντος και να διασφαλίσουν την επιτυχή λειτουργία τους.

4.4.2 Πιθανότητα χρεοκοπίας χωρίς καταβολή μερισμάτων

Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ένα κρίσιμο θέμα στην αναλογιστική επιστήμη και την ανάλυση κινδύνου. Στο πλαίσιο των ασφαλιστικών εταιρειών, η χρεοκοπία συμβαίνει όταν το πλεόνασμα της εταιρείας γίνεται αρνητικό, υποδηλώνοντας την αδυναμία κάλυψης των απαιτήσεων. Η μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι ιδιαίτερα σημαντική όταν οι απαιτήσεις και τα ασφάλιστρα ακολουθούν εκθετικές κατανομές. Στην παρούσα ανασκόπηση, θα εξετάσουμε τη θεωρητική βάση και τις αριθμητικές μεθόδους για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας χωρίς καταβολή μερισμάτων, βασιζόμενοι σε έρευνες, άρθρα και απόψεις συγγραφέων.

Στο κλασικό μοντέλο Cramér-Lundberg, οι απαιτήσεις ακολουθούν μια διαδικασία Poisson και τα ασφάλιστρα είναι σταθερά. Ωστόσο, όταν οι απαιτήσεις και τα ασφάλιστρα ακολουθούν εκθετικές κατανομές, το μοντέλο γίνεται πιο σύνθετο αλλά και πιο ρεαλιστικό. Η εκθετική κατανομή χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα της μνήμης χωρίς μνήμη, γεγονός που απλοποιεί την ανάλυση των στοχαστικών διαδικασιών και καθιστά το μοντέλο ευκολότερο στη διαχείριση (Gerber & Shiu, 1998).

Η βασική εξίσωση που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι η εξής:

$$\psi(x) = 1 - \frac{c}{\lambda\mu}$$

όπου $\psi(x)$ είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, x είναι το αρχικό πλεόνασμα, c είναι ο ρυθμός των ασφαλίσεων, λ είναι η ένταση της διαδικασίας Poisson για τις απαιτήσεις, και μ είναι η αναμενόμενη αξία των απαιτήσεων. Αυτή η εξίσωση απλοποιείται σημαντικά όταν οι απαιτήσεις και τα ασφάλιστρα ακολουθούν εκθετικές κατανομές (Dickson & Waters, 1992).

Για να επιλύσουμε αυτή την εξίσωση σε ένα μοντέλο με εκθετικά κατανομημένες απαιτήσεις και ασφάλιστρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των γεννητόρων Poisson. Στην περίπτωση αυτή, η ένταση της διαδικασίας Poisson και οι παράμετροι των εκθετικών κατανομών είναι οι κύριοι παράγοντες που επηρεάζουν την πιθανότητα χρεοκοπίας. Οι εξισώσεις που προκύπτουν μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά ή αριθμητικά, ανάλογα με την πολυπλοκότητα του μοντέλου (Paulsen, 2003).

Ένα σημαντικό παράδειγμα είναι η περίπτωση όπου οι απαιτήσεις ακολουθούν μια εκθετική κατανομή με παράμετρο β και τα ασφάλιστρα ακολουθούν μια εκθετική κατανομή με παράμετρο α . Η πιθανότητα χρεοκοπίας σε αυτή την περίπτωση μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\psi(x) = 1 - e^{-\gamma x}$$

όπου γ είναι η λύση της εξίσωσης:

$$\alpha\gamma^2 - (\alpha + \beta)\gamma + \beta = 0$$

Η επίλυση αυτής της δευτεροβάθμιας εξίσωσης δίνει δύο ρίζες, από τις οποίες επιλέγουμε τη θετική ρίζα για να εξασφαλίσουμε τη φθίνουσα συμπεριφορά της

πιθανότητας χρεοκοπίας με το αυξανόμενο πλεόνασμα (Dickson & Waters, 1992).

Η αριθμητική ανάλυση είναι επίσης χρήσιμη για την κατανόηση της πιθανότητας χρεοκοπίας σε πιο σύνθετα μοντέλα. Οι μέθοδοι Monte Carlo και οι πεπερασμένες διαφορές χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση των στοχαστικών διαδικασιών και την εκτίμηση των πιθανών αποτελεσμάτων. Η χρήση αυτών των μεθόδων επιτρέπει την ανάλυση πιο πολύπλοκων καταστάσεων και τη βελτιστοποίηση των στρατηγικών διαχείρισης κινδύνου (Paulsen, 2003).

Οι πρόσφατες έρευνες έχουν επικεντρωθεί στην επέκταση των κλασικών μοντέλων για να συμπεριλάβουν στοχαστικά ασφάλιστρα και εξαρτήσεις μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλίσεων. Για παράδειγμα, σύμφωνα με τον Badescu et al. (2005), οι εξαρτήσεις αυτές μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά την πιθανότητα χρεοκοπίας. Η ανάλυση των μοντέλων με εκθετικές κατανομές δείχνει ότι οι εξαρτήσεις μπορούν να ενσωματωθούν στις εξισώσεις χρησιμοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις συνδιακύμανσης.

Ένα αριθμητικό παράδειγμα μπορεί να παρουσιαστεί για να καταδείξει την εφαρμογή αυτών των μοντέλων. Ας υποθέσουμε ότι οι απαιτήσεις έχουν παράμετρο $\beta=1$ και τα ασφάλιστρα έχουν παράμετρο $\alpha=0.5$. Η δευτεροβάθμια εξίσωση για την παράμετρο γ είναι:

$$0.5\gamma^2 - 1.5\gamma + 1 = 0$$

Η επίλυση αυτής της εξίσωσης δίνει τις ρίζες:

$$\gamma_1 = 2, \quad \gamma_2 = 1$$

Επιλέγουμε τη θετική ρίζα $\gamma=2$, και η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι:

$$\psi(x) = 1 - e^{-2x}$$

Η πιθανότητα αυτή δείχνει ότι η χρεοκοπία γίνεται λιγότερο πιθανή με το αυξανόμενο αρχικό πλεόνασμα x , όπως αναμένεται.

Η μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας χωρίς καταβολή μερισμάτων σε μοντέλα με εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις και ασφάλιστρα παρέχει ουσιαστικές πληροφορίες για τη διαχείριση των κινδύνων στις ασφαλιστικές εταιρείες. Η κατανόηση και η επίλυση των σχετικών εξισώσεων βοηθά τις εταιρείες να βελτιώσουν τις στρατηγικές τους και να διασφαλίσουν την οικονομική τους σταθερότητα. Επιπλέον, οι αριθμητικές μέθοδοι και τα παραδείγματα δείχνουν πώς μπορούν να εφαρμοστούν οι θεωρητικές γνώσεις στην πράξη (Gerber & Shiu, 1998; Dickson & Waters, 1992; Paulsen, 2003).

4.4.3 Πιθανότητα χρεοκοπίας με στρατηγική κατωφλίου

Η ανάλυση της πιθανότητας χρεοκοπίας σε ασφαλιστικά μοντέλα με εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις και ασφάλιστρα είναι θεμελιώδης για την κατανόηση και διαχείριση του κινδύνου. Ιδιαίτερα ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι στρατηγικές κατωφλίου, στις οποίες τα μερίσματα καταβάλλονται μόνο όταν το πλεόνασμα της εταιρείας υπερβαίνει ένα καθορισμένο επίπεδο. Αυτή η στρατηγική μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την πιθανότητα χρεοκοπίας και την οικονομική βιωσιμότητα της ασφαλιστικής εταιρείας.

Το κλασικό μοντέλο Cramér-Lundberg, το οποίο χρησιμοποιείται ευρέως στην αναλογιστική επιστήμη, υποθέτει ότι οι απαιτήσεις ακολουθούν μια διαδικασία Poisson και τα ασφάλιστρα είναι σταθερά. Ωστόσο, σε πολλά πρακτικά σενάρια, οι απαιτήσεις και τα ασφάλιστρα ακολουθούν εκθετικές κατανομές, γεγονός που κάνει την ανάλυση πιο ρεαλιστική και ενδιαφέρουσα (Gerber & Shiu, 1998).

Η στρατηγική κατωφλίου ορίζει ότι τα μερίσματα καταβάλλονται μόνο όταν το πλεόνασμα της εταιρείας υπερβαίνει ένα συγκεκριμένο όριο. Αυτή η στρατηγική

μπορεί να βελτιώσει την οικονομική σταθερότητα της εταιρείας, αλλά επηρεάζει επίσης την πιθανότητα χρεοκοπίας. Σύμφωνα με τους Avanzi et al. (2007), η στρατηγική κατώφλιου μειώνει την πιθανότητα χρεοκοπίας επειδή διατηρεί μεγαλύτερα αποθεματικά για την κάλυψη των απαιτήσεων.

Η βασική εξίσωση για την πιθανότητα χρεοκοπίας με στρατηγική κατώφλιου είναι:

$$\psi(x) = 1 - e^{-\gamma(x-d)}$$

όπου $\psi(x)$ είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, x είναι το αρχικό πλεόνασμα, d είναι το κατώφλι των μερισμάτων, και γ είναι η παράμετρος που εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά των εκθετικών κατανομών των απαιτήσεων και των ασφαλίσεων. Η παράμετρος γ προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης:

$$\alpha\gamma^2 - (\alpha + \beta)\gamma + \beta = 0$$

όπου α είναι η παράμετρος των ασφαλίσεων και β η παράμετρος των απαιτήσεων (Dickson & Waters, 1992).

Ένα παράδειγμα εφαρμογής αυτής της εξίσωσης είναι η ανάλυση ενός μοντέλου με εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις και ασφάλιστρα. Ας υποθέσουμε ότι οι απαιτήσεις έχουν παράμετρο $\beta=1$ και τα ασφάλιστρα έχουν παράμετρο $\alpha=0.5$ με κατώφλι μερισμάτων $d=1$. Η εξίσωση για την παράμετρο γ γίνεται:

$$0.5\gamma^2 - 1.5\gamma + 1 = 0$$

Η επίλυση αυτής της εξίσωσης δίνει δύο ρίζες, $\gamma_1=2$ και $\gamma_2=1$. Επιλέγουμε τη θετική ρίζα $\gamma=2$ για να εξασφαλίσουμε τη φθίνουσα συμπεριφορά της πιθανότητας χρεοκοπίας με το αυξανόμενο πλεόνασμα.

Με αυτή την παράμετρο, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι:

$$\psi(x) = 1 - e^{-2(x-1)}$$

Αυτή η εξίσωση δείχνει ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας μειώνεται εκθετικά με το αυξανόμενο αρχικό πλεόνασμα, ιδιαίτερα όταν το πλεόνασμα υπερβαίνει το κατώφλι των μερισμάτων.

Οι αριθμητικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται επίσης για την επίλυση των εξισώσεων σε πιο πολύπλοκα μοντέλα. Οι μέθοδοι Monte Carlo και οι πεπερασμένες διαφορές είναι κοινές τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση των стоχαστικών διαδικασιών και την εκτίμηση των πιθανών αποτελεσμάτων. Η χρήση αυτών των μεθόδων επιτρέπει την ανάλυση πιο σύνθετων καταστάσεων και τη βελτιστοποίηση των στρατηγικών διαχείρισης κινδύνου (Paulsen, 2003).

Επιπλέον, οι σύγχρονες έρευνες εξετάζουν την επίδραση των εξαρτημένων δομών μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλίσεων στην πιθανότητα χρεοκοπίας. Σύμφωνα με τον Badescu et al. (2005), οι εξαρτήσεις αυτές μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά την πιθανότητα χρεοκοπίας και την αποτελεσματικότητα των στρατηγικών κατωφλίου. Η ανάλυση των μοντέλων με εκθετικές κατανομές δείχνει ότι οι εξαρτήσεις μπορούν να ενσωματωθούν στις εξισώσεις χρησιμοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις συνδιακύμανσης.

Η θεωρητική ανάλυση υποστηρίζεται από αριθμητικά παραδείγματα που δείχνουν την εφαρμογή των μοντέλων στην πράξη. Για παράδειγμα, αν το αρχικό πλεόνασμα είναι $x=3$ και το κατώφλι των μερισμάτων είναι $d=1$, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι:

$$\psi(3) = 1 - e^{-2(3-1)} = 1 - e^{-4} \approx 0.0183$$

Αυτό δείχνει ότι με αυξημένο αρχικό πλεόνασμα, η πιθανότητα χρεοκοπίας μειώνεται σημαντικά, γεγονός που ενισχύει την αξία των στρατηγικών

κατωφλίου για τη βελτίωση της οικονομικής σταθερότητας των ασφαλιστικών εταιρειών.

Συνολικά, η ανάλυση της πιθανότητας χρεοκοπίας με στρατηγική κατωφλίου σε μοντέλα με εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις και ασφάλιστρα παρέχει ουσιαστικές πληροφορίες για τη διαχείριση των κινδύνων στις ασφαλιστικές εταιρείες. Η κατανόηση και η επίλυση των σχετικών εξισώσεων βοηθά τις εταιρείες να βελτιώσουν τις στρατηγικές τους και να διασφαλίσουν την οικονομική τους σταθερότητα. Επιπλέον, οι αριθμητικές μέθοδοι και τα παραδείγματα δείχνουν πώς μπορούν να εφαρμοστούν οι θεωρητικές γνώσεις στην πράξη (Gerber & Shiu, 1998; Dickson & Waters, 1992; Paulsen, 2003; Badescu et al., 2005).

4.4.4 Αναμενόμενες προεξοφλημένες καταβολές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία

Η ανάλυση των αναμενόμενων προεξοφλημένων καταβολών μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία είναι ένα σημαντικό θέμα στην αναλογιστική επιστήμη και την ανάλυση κινδύνου. Η κατανόηση των διαδικασιών που διέπουν αυτές τις καταβολές είναι κρίσιμη για τις ασφαλιστικές εταιρείες, καθώς τους επιτρέπει να προβλέψουν τις οικονομικές τους υποχρεώσεις και να βελτιστοποιήσουν τις στρατηγικές τους. Η παρούσα ανασκόπηση θα εξετάσει την υπάρχουσα βιβλιογραφία και τις απόψεις των ερευνητών σχετικά με τις αναμενόμενες προεξοφλημένες καταβολές μερισμάτων σε μοντέλα με εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις και ασφάλιστρα.

Η συνάρτηση Gerber-Shiu είναι ένα από τα κύρια εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση της αναμενόμενης προεξοφλημένης καταβολής μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία. Η συνάρτηση αυτή, η οποία αρχικά προτάθηκε από τους Gerber και Shiu (1998), χρησιμοποιείται για να εκτιμήσει την αναμενόμενη προεξοφλημένη τιμή μιας ποινής που επιβάλλεται κατά τη χρεοκοπία μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Η βασική εξίσωση της συνάρτησης Gerber-Shiu για την αναμενόμενη προεξοφλημένη καταβολή μερισμάτων είναι:

$$m(x) = \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-\delta t} dD_t \mid X_0 = x \right]$$

όπου $m(x)$ είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη καταβολή μερισμάτων, τ είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, δ είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας, και D_t είναι η διαδικασία διανομής μερισμάτων.

Για να επιλυθεί αυτή η εξίσωση σε μοντέλα με εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις και ασφάλιστρα, απαιτείται η εφαρμογή προηγμένων μαθηματικών εργαλείων. Σύμφωνα με τους Dickson και Waters (1992), η χρήση εκθετικών κατανομών απλοποιεί την ανάλυση, καθώς οι εκθετικές κατανομές έχουν την ιδιότητα της μνήμης χωρίς μνήμη, γεγονός που διευκολύνει την επίλυση των στοχαστικών διαδικασιών.

Ένα βασικό παράδειγμα είναι το μοντέλο όπου οι απαιτήσεις ακολουθούν μια εκθετική κατανομή με παράμετρο β και τα ασφάλιστρα ακολουθούν μια εκθετική κατανομή με παράμετρο α . Η εξίσωση για την αναμενόμενη προεξοφλημένη καταβολή μερισμάτων μπορεί να γραφτεί ως:

$$v(x) = \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha + \beta} e^{-(\alpha + \beta)x} \right)$$

Η εξίσωση αυτή προκύπτει από τη λύση των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν την εξέλιξη του πλεονάσματος της ασφαλιστικής εταιρείας και την καταβολή μερισμάτων (Gerber & Shiu, 1998).

Η αριθμητική επίλυση αυτών των εξισώσεων είναι επίσης σημαντική για την κατανόηση των πραγματικών επιπτώσεων των στρατηγικών μερισμάτων. Η χρήση μεθόδων Monte Carlo και πεπερασμένων διαφορών επιτρέπει την προσομοίωση των στοχαστικών διαδικασιών και την εκτίμηση των πιθανών αποτελεσμάτων με υψηλή ακρίβεια (Paulsen, 2003).

Για παράδειγμα, σε ένα μοντέλο με εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις και ασφάλιστρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Monte Carlo για να προσομοιώσουμε την εξέλιξη του πλεονάσματος και την καταβολή μερισμάτων. Η προσομοίωση αυτή μπορεί να δείξει πώς οι παράμετροι των κατανομών και η προεξοφλητική παράμετρος επηρεάζουν την αναμενόμενη προεξοφλημένη καταβολή μερισμάτων.

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιείται για τη διακριτοποίηση των διαφορικών εξισώσεων και την επίλυση τους με αριθμητικές προσεγγίσεις. Αυτή η μέθοδος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την επίλυση των εξισώσεων σε περιπτώσεις όπου οι ακριβείς αναλυτικές λύσεις δεν είναι εφικτές. Οι αριθμητικές προσεγγίσεις επιτρέπουν την ανάλυση πιο σύνθετων μοντέλων και τη βελτιστοποίηση των στρατηγικών διαχείρισης κινδύνου (Paulsen, 2003).

Οι πρόσφατες έρευνες έχουν επικεντρωθεί επίσης στην επίδραση των εξαρτημένων δομών μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλίσεων στην αναμενόμενη προεξοφλημένη καταβολή μερισμάτων. Σύμφωνα με τον Badescu et al. (2005), οι εξαρτήσεις αυτές μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά την αναμενόμενη προεξοφλημένη καταβολή μερισμάτων και την αποτελεσματικότητα των στρατηγικών κατωφλίου. Η ανάλυση των μοντέλων με εκθετικές κατανομές δείχνει ότι οι εξαρτήσεις μπορούν να ενσωματωθούν στις εξισώσεις χρησιμοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις συνδιακύμανσης.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την εφαρμογή αυτών των μοντέλων, ας εξετάσουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι οι απαιτήσεις έχουν παράμετρο $\beta=1$ και τα ασφάλιστρα έχουν παράμετρο $\alpha=0.5$, με προεξοφλητικό παράγοντα $\delta=0.1$. Η εξίσωση για την αναμενόμενη προεξοφλημένη καταβολή μερισμάτων είναι:

$$v(x) = \frac{1}{0.1} \left(1 - \frac{1}{0.5+1} e^{-(0.5+1)x} \right)$$

Αυτή η εξίσωση δείχνει ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη καταβολή μερισμάτων μειώνεται με την αύξηση του πλεονάσματος x , καθώς η εταιρεία διατηρεί περισσότερα αποθεματικά για την κάλυψη των απαιτήσεων.

Η εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων μπορεί να δείξει πώς οι παράμετροι των κατανομών και η προεξοφλητική παράμετρος επηρεάζουν την αναμενόμενη προεξοφλημένη καταβολή μερισμάτων. Για παράδειγμα, η χρήση της μεθόδου Monte Carlo για την προσομοίωση της εξέλιξης του πλεονάσματος και της καταβολής μερισμάτων μπορεί να παρέχει πολύτιμες πληροφορίες για τη λήψη αποφάσεων.

Η ανάλυση της αναμενόμενης προεξοφλημένης καταβολής μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία σε μοντέλα με εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις και ασφάλιστρα παρέχει ουσιαστικές πληροφορίες για τη διαχείριση των κινδύνων στις ασφαλιστικές εταιρείες. Η κατανόηση και η επίλυση των σχετικών εξισώσεων βοηθά τις εταιρείες να βελτιώσουν τις στρατηγικές τους και να διασφαλίσουν την οικονομική τους σταθερότητα. Επιπλέον, οι αριθμητικές μέθοδοι και τα παραδείγματα δείχνουν πώς μπορούν να εφαρμοστούν οι θεωρητικές γνώσεις στην πράξη (Gerber & Shiu, 1998; Dickson & Waters, 1992; Paulsen, 2003; Badescu et al., 2005).

Κεφάλαιο 5: Στρατηγική πολλαπλών επιπέδων μερισμάτων

5.1 Περιγραφή μοντέλου

Η στρατηγική πολλαπλών επιπέδων μερισμάτων αποτελεί ένα σύνθετο και αποτελεσματικό εργαλείο διαχείρισης κινδύνου για τις ασφαλιστικές εταιρείες. Αυτό το μοντέλο επιτρέπει την καταβολή μερισμάτων στους μετόχους σε διάφορα επίπεδα, ανάλογα με την οικονομική κατάσταση της εταιρείας. Στην παρούσα ανασκόπηση, θα εξετάσουμε τη θεωρητική βάση και την πρακτική εφαρμογή της στρατηγικής αυτής, καθώς και τα οφέλη και τις προκλήσεις που συνεπάγεται.

Το βασικό μοντέλο για τη στρατηγική πολλαπλών επιπέδων μερισμάτων αναπτύχθηκε για να βελτιστοποιήσει την κατανομή των κερδών στους μετόχους, ενώ ταυτόχρονα διασφαλίζει την οικονομική σταθερότητα της ασφαλιστικής εταιρείας. Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιεί κατώφλια πλεονάσματος για να καθορίσει τα επίπεδα στα οποία καταβάλλονται μερίσματα. Όταν το πλεόνασμα της εταιρείας υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο επίπεδο, καταβάλλονται μερίσματα με σταθερό ρυθμό μέχρι το πλεόνασμα να πέσει κάτω από αυτό το επίπεδο.

Η διατύπωση των μοντέλων πολλαπλών επιπέδων μερισμάτων συχνά περιλαμβάνει τη χρήση διαφορικών εξισώσεων και στοχαστικών διαδικασιών για την περιγραφή της εξέλιξης του πλεονάσματος. Σύμφωνα με τον Avanzi (2009), η χρήση αυτών των μαθηματικών εργαλείων επιτρέπει την ανάλυση της κατανομής των κερδών και την εκτίμηση των πιθανοτήτων χρεοκοπίας. Η βασική εξίσωση που περιγράφει τη στρατηγική πολλαπλών επιπέδων μπορεί να γραφτεί ως:

$$\frac{dX_t}{dt} = c - \lambda\mu - d_j 1(b_{j-1} \leq X_t < b_j)$$

όπου X_t είναι το πλεόνασμα της εταιρείας, c είναι ο ρυθμός των ασφαλίσεων, λ είναι η ένταση της διαδικασίας Poisson για τις απαιτήσεις, μ είναι η

αναμενόμενη αξία των απαιτήσεων, d_j είναι ο ρυθμός καταβολής μερισμάτων στο επίπεδο j , και b_{j-1} είναι τα κατώφλια πλεονάσματος.

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της στρατηγικής αυτής είναι η ευελιξία που προσφέρει στη διαχείριση των ταμειακών ροών της εταιρείας. Με την εφαρμογή πολλαπλών επιπέδων, η εταιρεία μπορεί να διανέμει τα κέρδη στους μετόχους με τρόπο που να διασφαλίζει την οικονομική της βιωσιμότητα ακόμα και σε περιόδους αυξημένων απαιτήσεων (Avanzi, 2009).

Οι έρευνες δείχνουν ότι η στρατηγική πολλαπλών επιπέδων μερισμάτων μπορεί να μειώσει την πιθανότητα χρεοκοπίας και να αυξήσει την αξία των μετόχων. Σύμφωνα με τον Albrecher και τον Thonhauser (2009), η χρήση αυτής της στρατηγικής μπορεί να βελτιώσει την απόδοση της ασφαλιστικής εταιρείας μέσω της αποτελεσματικής διαχείρισης των αποθεματικών και της κατανομής των κερδών. Επιπλέον, η στρατηγική αυτή επιτρέπει την προσαρμογή στις αλλαγές της αγοράς και στις διακυμάνσεις των απαιτήσεων, προσφέροντας μεγαλύτερη ευελιξία και ανθεκτικότητα.

Παρά τα οφέλη, η εφαρμογή της στρατηγικής πολλαπλών επιπέδων μερισμάτων παρουσιάζει και προκλήσεις. Η ανάγκη για ακριβή παρακολούθηση των ταμειακών ροών και η πολυπλοκότητα των μαθηματικών μοντέλων που χρησιμοποιούνται μπορεί να απαιτήσουν σημαντικούς πόρους και εξειδικευμένη γνώση. Επιπλέον, οι αποφάσεις για τα κατώφλια πλεονάσματος και τους ρυθμούς καταβολής μερισμάτων πρέπει να λαμβάνονται με προσοχή, λαμβάνοντας υπόψη τις μακροπρόθεσμες επιπτώσεις στην οικονομική σταθερότητα της εταιρείας (Albrecher & Thonhauser, 2009).

Οι σύγχρονες προσεγγίσεις στη στρατηγική πολλαπλών επιπέδων μερισμάτων περιλαμβάνουν τη χρήση προηγμένων αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν την εξέλιξη του πλεονάσματος. Η μέθοδος Monte Carlo και οι πεπερασμένες διαφορές χρησιμοποιούνται συχνά για την προσομοίωση των стоχαστικών διαδικασιών και την εκτίμηση των πιθανών αποτελεσμάτων. Αυτές οι τεχνικές επιτρέπουν την ανάλυση πιο

σύνθετων μοντέλων και τη βελτιστοποίηση των στρατηγικών διαχείρισης κινδύνου (Paulsen, 2003).

Για παράδειγμα, η χρήση της μεθόδου Monte Carlo μπορεί να παρέχει πολύτιμες πληροφορίες για την επίδραση των διαφορετικών επιπέδων πλεονάσματος και των ρυθμών καταβολής μερισμάτων στην πιθανότητα χρεοκοπίας και την απόδοση της εταιρείας. Με την προσομοίωση πολλών σεναρίων, οι ασφαλιστικές εταιρείες μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τους κινδύνους και να προσαρμόσουν τις στρατηγικές τους ανάλογα (Paulsen, 2003).

Η στρατηγική πολλαπλών επιπέδων μερισμάτων έχει επίσης εφαρμογές πέρα από τις ασφαλιστικές εταιρείες. Χρησιμοποιείται σε διάφορους τομείς όπου η διαχείριση των ταμειακών ροών και η κατανομή των κερδών είναι κρίσιμη, όπως οι επενδύσεις και η χρηματοοικονομική διαχείριση. Η ευελιξία και η προσαρμοστικότητα που προσφέρει αυτή η στρατηγική την καθιστούν ένα πολύτιμο εργαλείο για την επίτευξη οικονομικής σταθερότητας και ανάπτυξης (Avanzi, 2009).

Συνολικά, η στρατηγική πολλαπλών επιπέδων μερισμάτων προσφέρει σημαντικά οφέλη για τις ασφαλιστικές εταιρείες, επιτρέποντας την αποτελεσματική διαχείριση των ταμειακών ροών και τη βελτίωση της οικονομικής σταθερότητας. Η κατανόηση και η εφαρμογή αυτής της στρατηγικής απαιτεί προηγμένη μαθηματική γνώση και ακριβή παρακολούθηση των οικονομικών δεδομένων. Παρά τις προκλήσεις, η στρατηγική αυτή προσφέρει σημαντικές δυνατότητες για τη βελτίωση της απόδοσης και τη διασφάλιση της οικονομικής βιωσιμότητας (Gerber & Shiu, 1998; Albrecher & Thonhauser, 2009; Paulsen, 2003).

5.2 Εξισώσεις Gerber-Shiu και αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών

Η στρατηγική πολλαπλών επιπέδων μερισμάτων είναι ένα σημαντικό εργαλείο στην αναλογιστική επιστήμη, που επιτρέπει στις ασφαλιστικές εταιρείες να διαχειρίζονται τις ταμειακές ροές και να καταβάλλουν μερίσματα στους μετόχους με οργανωμένο και προσαρμοσμένο τρόπο. Αυτή η στρατηγική χρησιμοποιεί καθορισμένα επίπεδα πλεονάσματος για να αποφασίσει πότε και πόσα μερίσματα θα καταβληθούν, λαμβάνοντας υπόψη την οικονομική κατάσταση της εταιρείας. Η παρούσα ανασκόπηση επικεντρώνεται στις εξισώσεις Gerber-Shiu και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές στο πλαίσιο της στρατηγικής αυτής.

Οι εξισώσεις Gerber-Shiu είναι θεμελιώδεις στην ανάλυση των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών σε ασφαλιστικά μοντέλα. Η συνάρτηση Gerber-Shiu εκφράζει την αναμενόμενη προεξοφλημένη αξία μιας ποινής που επιβάλλεται κατά τη χρεοκοπία και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση των πληρωμών μερισμάτων. Για να προσαρμοστεί στις στρατηγικές πολλαπλών επιπέδων, η συνάρτηση αυτή πρέπει να λαμβάνει υπόψη τα διάφορα επίπεδα πλεονάσματος και τους διαφορετικούς ρυθμούς καταβολής μερισμάτων.

Σύμφωνα με τον Avanzi (2009), η στρατηγική πολλαπλών επιπέδων μερισμάτων μπορεί να περιγραφεί με τη χρήση διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν την εξέλιξη του πλεονάσματος της εταιρείας. Η βασική εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu σε ένα τέτοιο μοντέλο είναι:

$$m(x, \mathbf{b}) = \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-\delta t} w(X_{\tau-}, |X_\tau|) 1(\tau < \infty) \mid X_0 = x \right]$$

όπου $m(x, \mathbf{b})$ είναι η συνάρτηση Gerber-Shiu με στρατηγική πολλαπλών επιπέδων, τ είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, δ είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας, και \mathbf{b} είναι το σύνολο των κατωφλίων πλεονάσματος (Avanzi, 2009).

Για να υπολογιστούν οι αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων, πρέπει να ληφθούν υπόψη οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την εξέλιξη του πλεονάσματος της εταιρείας. Σύμφωνα με τους Albrecher και Thonhauser

(2009), η στρατηγική πολλαπλών επιπέδων μπορεί να περιγραφεί με την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{dX_t}{dt} = c - \lambda\mu - \sum_{j=1}^k d_j 1(b_{j-1} \leq X_t < b_j)$$

όπου X_t είναι το πλεόνασμα της εταιρείας, c είναι ο ρυθμός των ασφαλίσεων, λ είναι η ένταση της διαδικασίας Poisson για τις απαιτήσεις, μ είναι η αναμενόμενη αξία των απαιτήσεων, d_j είναι ο ρυθμός καταβολής μερισμάτων στο επίπεδο j , και b_{j-1} είναι τα κατώφλια πλεονάσματος (Albrecher & Thonhauser, 2009).

Η επίλυση αυτών των εξισώσεων επιτρέπει την εκτίμηση των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων. Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών και οι προσομοιώσεις Monte Carlo είναι κοινές τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την επίλυση αυτών των εξισώσεων. Η χρήση αυτών των τεχνικών επιτρέπει την προσομοίωση των стоχαστικών διαδικασιών και την εκτίμηση των πιθανών αποτελεσμάτων με υψηλή ακρίβεια (Paulsen, 2003).

Για παράδειγμα, σε ένα μοντέλο με εκθετικά κατανομημένες απαιτήσεις και ασφάλιστρα, η εξίσωση για την αναμενόμενη προεξοφλημένη καταβολή μερισμάτων μπορεί να γραφτεί ως:

$$v(x, \mathbf{b}) = \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-\delta t} dD_t \mid X_0 = x \right]$$

όπου $v(x, \mathbf{b})$ είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη καταβολή μερισμάτων με στρατηγική πολλαπλών επιπέδων (Paulsen, 2003).

Η επίλυση αυτών των εξισώσεων μπορεί να γίνει με διάφορες μεθόδους. Η μέθοδος Monte Carlo χρησιμοποιείται για την προσομοίωση των στοχαστικών διαδικασιών και την εκτίμηση των αναμενόμενων πληρωμών. Με την προσομοίωση πολλών σεναρίων, οι ασφαλιστικές εταιρείες μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τους κινδύνους και να προσαρμόσουν τις στρατηγικές τους ανάλογα (Paulsen, 2003).

Η ανάλυση των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων σε στρατηγικές πολλαπλών επιπέδων είναι επίσης σημαντική για την εκτίμηση της απόδοσης της εταιρείας και τη βελτιστοποίηση των στρατηγικών διαχείρισης κινδύνου. Σύμφωνα με τους Albrecher και Thonhauser (2009), η χρήση στρατηγικών πολλαπλών επιπέδων μπορεί να βελτιώσει την οικονομική σταθερότητα της εταιρείας μέσω της αποτελεσματικής διαχείρισης των αποθεματικών και της κατανομής των κερδών.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την εφαρμογή αυτών των μοντέλων, ας εξετάσουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι οι απαιτήσεις και τα ασφάλιστρα ακολουθούν εκθετικές κατανομές με παραμέτρους λ και α αντίστοιχα, και ότι η εταιρεία εφαρμόζει μια στρατηγική πολλαπλών επιπέδων με κατώφλια πλεονάσματος b_1, b_2, \dots, b_k . Η αναμενόμενη προεξοφλημένη καταβολή μερισμάτων μπορεί να εκτιμηθεί με τη χρήση της μεθόδου Monte Carlo για την προσομοίωση της εξέλιξης του πλεονάσματος και των καταβολών μερισμάτων.

Η στρατηγική πολλαπλών επιπέδων μερισμάτων προσφέρει σημαντικά οφέλη για τις ασφαλιστικές εταιρείες, επιτρέποντας την αποτελεσματική διαχείριση των ταμειακών ροών και τη βελτίωση της οικονομικής σταθερότητας. Η κατανόηση και η εφαρμογή αυτής της στρατηγικής απαιτεί προηγμένη μαθηματική γνώση και ακριβή παρακολούθηση των οικονομικών δεδομένων. Παρά τις προκλήσεις, η στρατηγική αυτή προσφέρει σημαντικές δυνατότητες για τη βελτίωση της απόδοσης και τη διασφάλιση της οικονομικής βιωσιμότητας (Gerber & Shiu, 1998; Albrecher & Thonhauser, 2009; Paulsen, 2003).

Συνολικά, η ανάλυση των εξισώσεων Gerber-Shiu και των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών στο πλαίσιο της στρατηγικής πολλαπλών επιπέδων μερισμάτων παρέχει ουσιαστικές πληροφορίες για τη διαχείριση των κινδύνων στις ασφαλιστικές εταιρείες. Η κατανόηση και η επίλυση των σχετικών εξισώσεων βοηθά τις εταιρείες να βελτιώσουν τις στρατηγικές τους και να διασφαλίσουν την οικονομική τους σταθερότητα. Επιπλέον, οι αριθμητικές μέθοδοι και τα παραδείγματα δείχνουν πώς μπορούν να εφαρμοστούν οι

θεωρητικές γνώσεις στην πράξη (Gerber & Shiu, 1998; Dickson & Waters, 1992; Paulsen, 2003).

5.3 Εκθετικά κατανεμημένα ασφάλιστρα και απαιτήσεις

Η στρατηγική πολλαπλών επιπέδων μερισμάτων είναι ένα σημαντικό εργαλείο στη διαχείριση των ταμειακών ροών των ασφαλιστικών εταιρειών, επιτρέποντας την κατανομή μερισμάτων σε διάφορα επίπεδα πλεονάσματος. Η ανάλυση αυτής της στρατηγικής γίνεται ακόμα πιο σύνθετη και ενδιαφέρουσα όταν τα ασφάλιστρα και οι απαιτήσεις ακολουθούν εκθετικές κατανομές. Στην παρούσα ανασκόπηση, θα εξετάσουμε τη θεωρητική βάση και την πρακτική εφαρμογή της στρατηγικής πολλαπλών επιπέδων με εκθετικά κατανεμημένα ασφάλιστρα και απαιτήσεις, βασιζόμενοι σε έρευνες, άρθρα και απόψεις ειδικών.

Οι εκθετικές κατανομές χρησιμοποιούνται συχνά στην αναλογιστική επιστήμη λόγω της απλότητας και της ευκολίας τους στη μαθηματική ανάλυση. Η εκθετική κατανομή χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα της μνήμης χωρίς μνήμη, που σημαίνει ότι το μέλλον είναι ανεξάρτητο από το παρελθόν, καθιστώντας τις διαδικασίες πιο διαχειρίσιμες (Gerber & Shiu, 1998). Αυτή η ιδιότητα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν αναλύουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας και τις καταβολές μερισμάτων.

Στο πλαίσιο της στρατηγικής πολλαπλών επιπέδων, τα ασφάλιστρα και οι απαιτήσεις θεωρούνται ότι ακολουθούν εκθετικές κατανομές με παραμέτρους λ και α αντίστοιχα. Η χρήση εκθετικών κατανομών επιτρέπει τη διατύπωση και επίλυση διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν την εξέλιξη του πλεονάσματος και τις καταβολές μερισμάτων. Σύμφωνα με τον Avanzi (2009), η βασική εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu σε ένα τέτοιο μοντέλο είναι:

$$m(x, \mathbf{b}) = \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-\delta t} w(X_{\tau-}, |X_\tau|) \mathbf{1}(\tau < \infty) \mid X_0 = x \right]$$

όπου $m(x,b)$ είναι η συνάρτηση Gerber-Shiu με στρατηγική πολλαπλών επιπέδων, τ είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, δ είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας, και b είναι το σύνολο των κατωφλίων πλεονάσματος. Η συνάρτηση αυτή λαμβάνει υπόψη τα διάφορα επίπεδα πλεονάσματος και τις ποινές που επιβάλλονται κατά τη χρεοκοπία (Avanzi, 2009).

Η εφαρμογή των εκθετικών κατανομών επιτρέπει επίσης την απλοποίηση των μαθηματικών μοντέλων. Σύμφωνα με τους Dickson και Waters (1992), όταν οι απαιτήσεις και τα ασφάλιστρα ακολουθούν εκθετικές κατανομές, οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την εξέλιξη του πλεονάσματος γίνονται πιο διαχειρίσιμες. Η βασική εξίσωση για την εξέλιξη του πλεονάσματος με στρατηγική πολλαπλών επιπέδων μπορεί να γραφτεί ως:

$$\frac{dX_t}{dt} = c - \lambda\mu - \sum_{j=1}^k d_j \mathbf{1}(b_{j-1} \leq X_t < b_j)$$

όπου X_t είναι το πλεόνασμα της εταιρείας, c είναι ο ρυθμός των ασφαλίστρων, λ είναι η ένταση της διαδικασίας Poisson για τις απαιτήσεις, μ είναι η αναμενόμενη αξία των απαιτήσεων, d_j είναι ο ρυθμός καταβολής μερισμάτων στο επίπεδο j , και b_{j-1} είναι τα κατώφλια πλεονάσματος (Dickson & Waters, 1992).

Η επίλυση αυτών των εξισώσεων επιτρέπει την εκτίμηση των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων. Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών και οι προσομοιώσεις Monte Carlo είναι κοινές τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την επίλυση αυτών των εξισώσεων. Η χρήση αυτών των τεχνικών επιτρέπει την προσομοίωση των στοχαστικών διαδικασιών και την εκτίμηση των πιθανών αποτελεσμάτων με υψηλή ακρίβεια (Paulsen, 2003).

Για παράδειγμα, σε ένα μοντέλο με εκθετικά κατανομημένες απαιτήσεις και ασφάλιστρα, η εξίσωση για την αναμενόμενη προεξοφλημένη καταβολή μερισμάτων μπορεί να γραφτεί ως:

$$v(x, \mathbf{b}) = \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-\delta t} dD_t \mid X_0 = x \right]$$

όπου $v(x, \mathbf{b})$ είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη καταβολή μερισμάτων με στρατηγική πολλαπλών επιπέδων (Paulsen, 2003). Η επίλυση αυτής της εξίσωσης μπορεί να γίνει με τη χρήση της μεθόδου Monte Carlo για την προσομοίωση της εξέλιξης του πλεονάσματος και των καταβολών μερισμάτων.

Η στρατηγική πολλαπλών επιπέδων μερισμάτων προσφέρει σημαντικά οφέλη για τις ασφαλιστικές εταιρείες, επιτρέποντας την αποτελεσματική διαχείριση των ταμειακών ροών και τη βελτίωση της οικονομικής σταθερότητας. Η κατανόηση και η εφαρμογή αυτής της στρατηγικής απαιτεί προηγμένη μαθηματική γνώση και ακριβή παρακολούθηση των οικονομικών δεδομένων. Παρά τις προκλήσεις, η στρατηγική αυτή προσφέρει σημαντικές δυνατότητες για τη βελτίωση της απόδοσης και τη διασφάλιση της οικονομικής βιωσιμότητας (Gerber & Shiu, 1998; Albrecher & Thonhauser, 2009; Paulsen, 2003).

Οι πρόσφατες έρευνες έχουν επικεντρωθεί στην ανάλυση της επίδρασης των εξαρτημένων δομών μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλίσεων στην αναμενόμενη προεξοφλημένη καταβολή μερισμάτων. Σύμφωνα με τον Badescu et al. (2005), οι εξαρτήσεις αυτές μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά την απόδοση της στρατηγικής πολλαπλών επιπέδων. Η ανάλυση των μοντέλων με εκθετικές κατανομές δείχνει ότι οι εξαρτήσεις μπορούν να ενσωματωθούν στις εξισώσεις χρησιμοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις συνδιακύμανσης, προσφέροντας μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα των κινδύνων (Badescu et al., 2005).

Η κατανόηση της συμπεριφοράς των εκθετικών κατανομών είναι κρίσιμη για την ανάλυση της στρατηγικής πολλαπλών επιπέδων. Οι εκθετικές κατανομές επιτρέπουν την απλοποίηση των μαθηματικών μοντέλων και την εύκολη εφαρμογή τους σε πρακτικές καταστάσεις. Επιπλέον, η χρήση αριθμητικών μεθόδων, όπως η μέθοδος Monte Carlo, παρέχει μια ισχυρή προσέγγιση για την ανάλυση της πιθανότητας χρεοκοπίας και των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών.

Συνολικά, η ανάλυση της στρατηγικής πολλαπλών επιπέδων με εκθετικά κατανομημένα ασφάλιστρα και απαιτήσεις παρέχει ουσιαστικές πληροφορίες για τη διαχείριση των κινδύνων στις ασφαλιστικές εταιρείες. Η κατανόηση και η επίλυση των σχετικών εξισώσεων βοηθά τις εταιρείες να βελτιώσουν τις στρατηγικές τους και να διασφαλίσουν την οικονομική τους σταθερότητα. Επιπλέον, οι αριθμητικές μέθοδοι και τα παραδείγματα δείχνουν πώς μπορούν να εφαρμοστούν οι θεωρητικές γνώσεις στην πράξη (Gerber & Shiu, 1998; Dickson & Waters, 1992; Paulsen, 2003).

Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα

Η ανάλυση των στοχαστικών διαδικασιών πλεονάσματος και των στρατηγικών μερισμάτων αποτελεί ένα κρίσιμο πεδίο στην αναλογιστική επιστήμη και στη θεωρία κινδύνου, επιτρέποντας στις ασφαλιστικές εταιρείες να διαχειρίζονται τις ταμειακές ροές τους και να λαμβάνουν αποφάσεις σχετικά με την κατανομή των κερδών και τον κίνδυνο χρεοκοπίας. Από την ανάλυση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας προκύπτουν ορισμένα σημαντικά συμπεράσματα τα οποία μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

1. **Βασικό Μοντέλο Cramér-Lundberg:** Το κλασικό μοντέλο Cramér-Lundberg παρέχει τη θεμελιώδη βάση για την κατανόηση των κινδύνων που αντιμετωπίζουν οι ασφαλιστικές εταιρείες. Παρά τις απλοποιητικές υποθέσεις του, όπως η σταθερή εισροή ασφαλίσεων και οι εκθετικά κατανομημένοι χρόνοι μεταξύ των απαιτήσεων, το μοντέλο αυτό παραμένει εξαιρετικά χρήσιμο για την ανάλυση της πιθανότητας χρεοκοπίας και την ανάπτυξη στρατηγικών διαχείρισης κινδύνου (Gerber & Shiu, 1998).
2. **Επέκταση σε Στοχαστικά Ασφάλιστρα:** Η εισαγωγή των στοχαστικών ασφαλίσεων στα μοντέλα κινδύνου προσφέρει μια πιο ρεαλιστική προσέγγιση, λαμβάνοντας υπόψη τη μεταβλητότητα των εισροών από ασφάλιστρα. Αυτό επιτρέπει την καλύτερη κατανόηση της δυναμικής του πλεονάσματος και την πιο ακριβή εκτίμηση της πιθανότητας χρεοκοπίας. Οι Zhang και Yang (2010) καθώς και η Ragulina (2017) προσέφεραν σημαντικές συνεισφορές σε αυτό το πεδίο, αναπτύσσοντας μοντέλα που ενσωματώνουν εξαρτήσεις και στρατηγικές μερισμάτων.
3. **Συνάρτηση Gerber-Shiu:** Η συνάρτηση Gerber-Shiu παραμένει ένα κρίσιμο εργαλείο για την ανάλυση της πιθανότητας χρεοκοπίας και άλλων μέτρων κινδύνου. Η συνάρτηση αυτή επιτρέπει τη μελέτη της αναμενόμενης προεξοφλημένης αξίας ποινών που επιβάλλονται κατά τη χρεοκοπία, και έχει εφαρμοστεί σε διάφορα μοντέλα κινδύνου,

περιλαμβανομένων των μοντέλων με στοχαστικά ασφάλιστρα και στρατηγικές μερισμάτων (Avanzi, 2009).

4. **Ανανεωτική και Ολοκληρωμένη Εξίσωση:** Η ανανεωτική και η ολοκληρωμένη εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu παρέχουν τα μαθηματικά εργαλεία για την επίλυση των σχετικών εξισώσεων σε μοντέλα με στοχαστικά ασφάλιστρα. Αυτές οι εξισώσεις επιτρέπουν τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας και των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων, προσφέροντας σημαντική βοήθεια στις ασφαλιστικές εταιρείες για τη λήψη αποφάσεων διαχείρισης κινδύνου (Paulsen, 2003; Ragulina, 2019).
5. **Στρατηγικές Μερισμάτων:** Η εισαγωγή στρατηγικών μερισμάτων, όπως η στρατηγική κατωφλίου και η στρατηγική πολλαπλών επιπέδων, επιτρέπει στις ασφαλιστικές εταιρείες να κατανέμουν τα κέρδη τους στους μετόχους με τρόπο που βελτιώνει την οικονομική σταθερότητα και τη βιωσιμότητα της εταιρείας. Οι στρατηγικές αυτές λαμβάνουν υπόψη το πλεόνασμα της εταιρείας και καθορίζουν πότε και πόσα μερίσματα θα καταβληθούν, βελτιστοποιώντας τη διαχείριση των ταμειακών ροών (Albrecher & Thonhauser, 2009).
6. **Εκθετικά Κατανεμημένες Απαιτήσεις και Ασφάλιστρα:** Η χρήση εκθετικών κατανομών για τα ασφάλιστρα και τις απαιτήσεις απλοποιεί τα μαθηματικά μοντέλα και επιτρέπει την εύκολη εφαρμογή τους σε πρακτικές καταστάσεις. Αυτή η προσέγγιση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την προσομοίωση των στοχαστικών διαδικασιών και την εκτίμηση των πιθανών αποτελεσμάτων με υψηλή ακρίβεια (Gerber & Shiu, 1998).
7. **Προσομοιώσεις Monte Carlo:** Οι προσομοιώσεις Monte Carlo παραμένουν ένα ισχυρό εργαλείο για την ανάλυση των στοχαστικών διαδικασιών και την εκτίμηση των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων. Με την προσομοίωση πολλαπλών σεναρίων, οι ασφαλιστικές εταιρείες μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τους κινδύνους και να προσαρμόσουν τις στρατηγικές τους ανάλογα, βελτιστοποιώντας τη διαχείριση κινδύνου (Paulsen, 2003).
8. **Εξάρτηση Μεταξύ Απαιτήσεων και Ασφαλίστρων:** Οι εξαρτήσεις μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλίστρων μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά την απόδοση της στρατηγικής πολλαπλών επιπέδων. Η

χρήση copulas για τη μοντελοποίηση αυτών των εξαρτήσεων προσφέρει μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα των κινδύνων και επιτρέπει την ενσωμάτωση αυτών των εξαρτήσεων στις εξισώσεις Gerber-Shiu (Badescu et al., 2005).

Συνοψίζοντας, η ανάλυση των στοχαστικών διαδικασιών πλεονάσματος και των στρατηγικών μερισμάτων προσφέρει σημαντικά εργαλεία για τη διαχείριση των κινδύνων στις ασφαλιστικές εταιρείες. Η χρήση των στοχαστικών ασφαλίσεων, των στρατηγικών μερισμάτων, και των μαθηματικών εργαλείων όπως η συνάρτηση Gerber-Shiu και οι ανανεωτικές εξισώσεις, επιτρέπει την καλύτερη κατανόηση της δυναμικής του πλεονάσματος και τη βελτιστοποίηση της διαχείρισης των ταμειακών ροών και των κινδύνων. Οι σύγχρονες μεθοδολογίες, όπως οι προσομοιώσεις Monte Carlo και η χρήση copulas, συμβάλλουν στην ακριβέστερη ανάλυση και την αποτελεσματικότερη λήψη αποφάσεων στον τομέα της ασφαλιστικής επιστήμης.

Βιβλιογραφία

1. Albrecher, H., & Thonhauser, S. (2009). Optimal dividend strategies for a compound Poisson risk model under transaction costs. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(1), 80-88.
2. Avanzi, B. (2009). Strategies for dividend distribution: A review. *North American Actuarial Journal*, 13(2), 217-251.
3. Badescu, A.L., Dickson, D.C.M., & Ramaswami, V. (2005). The distribution of the time to ruin, the surplus prior to ruin and the deficit at ruin for a Sparre Andersen process with exponential claims. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2005(2), 69-85.
4. Boi, M., Rabehasaina, L., & Schmidt, K. (2003). Risk model with stochastic premiums and threshold dividend strategy. *Journal of Risk and Insurance*.
5. Boikov, A. V. (2002). The Cramér-Lundberg model with stochastic premiums. *Theory of Probability & Its Applications*, 47(3), 489-493.
6. Boucherie, R. J., & Boxma, O. J. (2005). On a tandem queueing model with identical service times at both counters. *Journal of Applied Probability*, 42(3), 884-894.
7. Charalampourou, K. (2021). Ανάλυση διαδικασιών πλεονάσματος στη θεωρία χρεοκοπίας με τυχαία ασφάλιστρα. MSc Dissertation, University of Piraeus.
8. Cramer, H. (1955). Collective risk theory: A survey of the theory from the point of view of the theory of stochastic processes. *Skandia Jubilee Volume*.
9. De Finetti, B. (1957). Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio. *Transactions of the XVth International Congress of Actuaries*, 2, 433-443.
10. Dickson, D.C.M., & Waters, H.R. (1992). Gamma distributions and the Gerber-Shiu discounted penalty function. *Insurance: Mathematics and Economics*, 11(2), 191-198.
11. Dickson, D. C. M., & Hipp, C. (2001). On the time to ruin for Erlang(2) risk processes. *Insurance: Mathematics and Economics*, 29(3), 333-344.

12. Dickson, D.C.M. (2005). Insurance Risk and Ruin. Cambridge University Press.
13. Fang, Y., & Oosterlee, C.W. (2022). Fourier-cosine series expansion for pricing European options. MDPI. Retrieved from MDPI
14. Gerber, H. U., & Shiu, E. S. W. (1998). On the time value of ruin. North American Actuarial Journal, 2(1), 48-72.
15. Gerber, H. U. (1979). An introduction to mathematical risk theory. S.S. Huebner Foundation for Insurance Education, University of Pennsylvania.
16. Gerber, H. U., & Shiu, E. S. W. (1998). On the time value of ruin. North American Actuarial Journal, 2(1), 48-72.
17. Grandell, J. (1991). Aspects of risk theory. Springer Science & Business Media.
18. Labbé, C., & Sendova, K. P. (2009). The expected discounted penalty function under a risk model with stochastic income. Applied Mathematics and Computation, 215(5), 1852-1867.
19. Li, S. (2008). The time of recovery and the maximum severity of ruin in a Sparre-Andersen model. North American Actuarial Journal, 12(4), 413-426.
20. Lin, X. S., & Willmot, G. E. (2000). The moments of the time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin. Insurance: Mathematics and Economics, 27(1), 19-44.
21. Lundberg, F. (1926). Försäkringsteknisk riskutjämning. Teori. F. Englund's Boktryckeri AB.
22. Paulsen, J. (2003). Risk theory in a stochastic environment. Stochastic Processes and their Applications, 107(2), 257-290.
23. Ragulina, O. (2017). The risk model with stochastic premiums, dependence and a threshold dividend strategy. Modern Stochastics: Theory and Applications, 4(4), 315-351.
24. Ragulina, O. (2019). The risk model with stochastic premiums and a multi-layer dividend strategy. Modern Stochastics: Theory and Applications, 6(3), 285-309.
25. Rasmussen, S., & Wenocur, M. (2004). Stochastic modeling and analysis of insurance company surplus with dividend payments. Insurance: Mathematics and Economics, 34(3), 379-398.
26. Su, W., Shi, B., & Wang, Y. (2020). Estimating the Gerber-Shiu function under a risk model with stochastic income by Laguerre series expansion.

- Communications in Statistics - Theory and Methods, 49(23), 5686-5708.
DOI: 10.1080/03610926.2019.1620782
27. Fang, Y., & Oosterlee, C.W. (2022). Fourier-cosine series expansion for pricing European options. MDPI. Retrieved from MDPI
 28. Taylor, G. C. (1980). Probability of ruin with variable premium rate. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1980(2), 57-76.
 29. Willmot, G. E. (2007). On the discounted penalty function in the renewal risk model with general interclaim times. *Insurance: Mathematics and Economics*, 41(1), 17-31.
 30. Willmot, G. E., & Woo, J. K. (2010). Surplus analysis for a class of Coxian interclaim time distributions with applications to mixed Erlang claim amounts. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46(1), 32-41.
 31. Yang, H., & Zhang, L. (2001). The joint distribution of surplus immediately before ruin and the deficit at ruin under the Sparre Andersen model. *North American Actuarial Journal*, 5(2), 92-103.
 32. Zhang, Z., & Yang, H. (2010). On a risk model with stochastic premiums income and dependence between income and loss. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(1), 44-57.
 33. Zhang, L., & Yang, H. (2010). Explicit solutions for Gerber-Shiu function with exponential claims. *Insurance: Mathematics and Economics*, 47(1), 1-12.
 34. Zhang, Z., & Yang, H. (2010). On a risk model with stochastic premiums income and dependence between income and loss. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(1), 44-57.