ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΜΕΛΕΤΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ ΣΤΗΝ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΖΗΜΙΩΝ

Γεώργιος Ε. Ανδριέλος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείρισης Κινδύνων*

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2024

Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ
Σ χ ο λ ή Χ ρ η μ α τ ο ο ι κ ο ν ο μ ι κ ή ς κ α ι Σ τ α τ ι σ τ ι κ ή ς

Τ μ ή μ α Σ τ α τ ι σ τ ι κ ή ς κ α ι Α σ φ α λ ι σ τ ι κ ή ς Ε π ι σ τ ή μ η ς

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΜΕΛΕΤΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ ΣΤΗΝ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΖΗΜΙΩΝ

Γεώργιος Ε. Ανδριέλος

Δ ι π λ ω μ α τ ι κ ή Ε ρ γ α σ ί α

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων*

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2024

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Ψαρράκος Γεώργιος (Αναπληρωτής Καθηγητής) (Επιβλέπων)
- Βερροπούλου Γεωργία (Καθηγήτρια)
- Πολίτης Κωνσταντίνος (Αναπληρωτής Καθηγητής)

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

ON THE SENSITIVITY AND IMPACT OF OUTLIERS IN LOSS RESERVING

By

George E. Andrielos

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece
September 2024

Στους γονείς μου

Μανώλη και Φωτεινή

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου κ. Ψαρράκο για την τιμή που μου έκανε να είναι ο επιβλέπων της εν λόγω διπλωματικής. Η προθυμία του, η καθοδήγηση του και οι συμβουλές που μου προσέφερε καθ’ όλη τη διάρκεια συγγραφής της παρούσης υπήρξαν καθοριστικές.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω την κα. Βερροπούλου και τον κ. Πολίτη που δέχτηκαν να συμμετάσχουν στην τριμελή εξεταστική επιτροπή καθώς και όλους τους καθηγητές που είχα κατά την διάρκεια της ακαδημαϊκής μου ζωής για τις πολύτιμες γνώσεις που μου μετέδωσαν και με βοήθησαν να εξελιχθώ.

Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ το οφείλω στην οικογένεια μου και ιδιαίτερα στους γονείς μου, που ήταν πάντα εκεί, ανιδιοτελείς και πρόθυμοι να βοηθήσουν σε οτιδήποτε χρειαζόμουν για να πετύχω τους στόχους μου.

Περίληψη

Η αποθεματοποίηση ζημιών αποτελεί μια ιδιαίτερα κρίσιμη διαδικασία για τις ασφαλιστικές εταιρείες. Σκοπός είναι με την χρήση τεχνικών αποθεματοποίησης, η εκτίμηση κεφαλαίων που θα χρειαστούν έτσι ώστε να είναι σε θέση να καλύψουν μελλοντικές υποχρεώσεις για ασφαλιστικούς κινδύνους που έχουν ήδη επέλθει και έχουν ήδη δηλωθεί ή θα δηλωθούν στο μέλλον. Ωστόσο αποτελεί ιδιαίτερη πρόκληση για τον υπολογισμό των κεφαλαίων αυτών η ευαισθησία που παρουσιάζουν οι τεχνικές αποθεματοποίησης στις ακραίες τιμές.

Η παρούσα εργασία η οποία γράφτηκε στο πλαίσιο απόκτησης του μεταπτυχιακού τίτλου «Αναλογιστικής Επιστήμης και Διαχείρισης Κινδύνων» του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς επικεντρώνεται στην αντιμετώπιση προβλημάτων που δημιουργούνται από την επίδραση των ακραίων τιμών στα δεδομένα των ζημιών. Στην εργασία αυτή θα γίνει αρχικά μια ανασκόπηση των κυριότερων εννοιών που απαρτίζουν το κομμάτι των γενικών ασφαλίσεων καθώς και των μεθόδων αποθεματοποίησης για τις οποίες θα δοθούν και αναλυτικά αριθμητικά παραδείγματα. Τελειώνοντας θα διερευνηθεί η ευαισθησία των αποθεμάτων και της πρόβλεψης των μέσων τετραγωνικών σφαλμάτων σύμφωνα με το μοντέλο του Mack.

Είναι απαραίτητο να τονιστεί ότι οποιοδήποτε μοντέλο και αν εφαρμοστεί, είτε αυτό είναι βασισμένο σε κάποια απλή μέθοδο είτε αποτελεί πιο πολύπλοκο στατιστικό μοντέλο, απαιτεί την γνώση, την κρίση αλλά και την εμπειρία του αναλογιστή.

Abstract

Loss reserving is a particularly critical process for insurance companies. The purpose is to use reserving techniques to estimate the funds that will be needed to be able to cover future liabilities for insurance risks that have already occurred and have been or will be declared in the future. However, a particular challenge for the calculation of these funds is the sensitivity of reserving techniques to outliers.

This paper, which was written in the context of obtaining a Master's degree in «Actuarial Science and Risk Management» from the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus, focuses on addressing problems created by the impact of outliers on loss data. In this paper, we will first review the main concepts that make up the general insurance part of the subject as well as the methods of reserving for which detailed numerical examples will be given. Finally, the sensitivity of reserves and the prediction of mean square errors according to Mack's model will be investigated.

It is necessary to emphasize that whatever model is applied, whether it is based on a simple method or is a more complex statistical model, it requires the knowledge, judgment and experience of the actuary.

Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να μελετήσουμε την ευαισθησία και την επίδραση που παρουσιάζουν οι ακραίες τιμές στην αποθεματοποίηση ζημιών. Η αποθεματοποίηση για τους κλάδους ασφαλίσεων κατά ζημιών αποτελεί μια εξαιρετικά δύσκολη υπόθεση η οποία πρέπει να προσεγγίζεται με συστηματικό, υπεύθυνο και επιστημονικό τρόπο για την ορθή λειτουργία των ασφαλιστικών εταιρειών. Σκοπός της αποθεματοποίησης είναι η εκτίμηση του απαιτούμενου αποθέματος το οποίο θα πρέπει να έχει διαθέσιμο το χαρτοφυλάκιο μιας ασφαλιστικής εταιρείας προκειμένου να είναι σε θέση να καλύψει μελλοντικές απαιτήσεις από ασφαλιστικούς κινδύνους που έχουν συμβεί και έχουν ήδη δηλωθεί ή θα δηλωθούν στο μέλλον. Ο λόγος που η αποθεματοποίηση αποτελεί ένα τόσο σημαντικό παράγοντα για τις ασφαλιστικές εταιρείες είναι διότι επηρεάζει την κερδοφορία τους, την αξία τους (αρκετά σημαντικό σε περιπτώσεις εξαγοράς), την φορολογία τους, προβλήματα που ενδέχεται να προκύψουν διαπιστώνονται νωρίς, την φερεγγυότητα και την βιωσιμότητα τους καθώς και ένα μέρος του ισολογισμού τους.

Οι ασφαλιστικές εταιρείες πρέπει να γνωρίζουν το ποσό που είναι υποχρεωμένες να πληρώσουν για αποζημιώσεις. Ωστόσο, μπορεί να περάσουν πολλά χρόνια μέχρι να μάθουν τις συνολικές τελικές ζημιές. Υπάρχουν πολλές αιτίες για τις καθυστερήσεις που υφίστανται στις συνολικές απαιτήσεις. Η καθυστέρηση μπορεί να συμβεί πριν από την κοινοποίηση της απαίτησης ή/και μεταξύ της κοινοποίησης και του τελικού διακανονισμού. Είναι σαφές ότι παρόλο που οι ασφαλιστικές εταιρείες δεν γνωρίζουν κάθε χρόνο το ακριβές ποσό για τις συνολικές αποζημιώσεις, πρέπει να προσπαθήσουν να εκτιμήσουν αυτό το ποσό με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη σιγουριά και ακρίβεια γίνεται.

Ο αναλογιστής που θα κληθεί να εκτιμήσει αυτά τα αποθέματα με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη σιγουριά και ακρίβεια προκειμένου να είναι σε θέση η ασφαλιστική να καλύψει αυτές τις απαιτήσεις θα χρειαστεί να έρθει αντιμέτωπος με μια σειρά από προκλήσεις εκ των οποίων είναι και η επίδραση των ακραίων τιμών. Η ευαισθησία που παρουσιάζουν οι τεχνικές των μεθόδων αποθεματοποίησης στις ακραίες τιμές αποτελεί μια ιδιαίτερη πρόκληση για τον εκάστοτε αναλογιστή.

Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζουμε συνοπτικά κάποιες έννοιες που αφορούν γενικότερα το κομμάτι των ασφαλίσεων καθώς και κάποιες βασικές έννοιες που είναι απαραίτητες για την κατανόηση της αποθεματοποίησης.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε τις πιο γνωστές μεθόδους αποθεματοποίησης παραθέτοντας και αναλυτικά παραδείγματα για την εκάστοτε μέθοδο. Οι μέθοδοι αυτές είναι η Chain Ladder, η Bornhuetter-Ferguson, η Loss Ratio (Δείκτη Ζημιών) καθώς και το μοντέλο του Mack.

Στο Κεφάλαιο 3 το οποίο αποτελεί και το βασικό κεφάλαιο αυτής της διπλωματικής περιγράφουμε την ευαισθησία των αποθεμάτων και της εκτίμησης των μέσων τετραγωνικών σφαλμάτων σύμφωνα με το μοντέλο του Mack. Επίσης παραθέτονται οι επιδραστικές συναρτήσεις (impact functions) για ποσοστημόρια όταν τα συνολικά αποθέματα υποθέτουμε ότι κατανέμονται λογαριθμοκανονικά. Τέλος, γίνονται συγκρίσεις μεταξύ των επιδραστικών συναρτήσεων για αποθέματα μεμονωμένων ετών ατυχήματος σύμφωνα με το μοντέλο του Mack και τη μεθοδολογία Bornhuetter-Ferguson.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ασφαλίσεις κατά Ζημιών

1.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα εξετάσουμε τις Ασφαλίσεις κατά Ζημιών και πιο συγκεκριμένα θα δούμε τις ασφαλιστικές καλύψεις που περιέχονται στον συγκεκριμένο κλάδο καθώς και τα είδη των ασφαλίστρων, των απαιτήσεων, των ζημιών και των αποθεμάτων που υπάρχουν σε αυτόν. Πριν ξεκινήσουμε όμως να αναφερόμαστε στις Ασφαλίσεις κατά Ζημιών καλό θα ήταν να αναφερθούμε σε κάποιες βασικές έννοιες οι οποίες θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε καλύτερα το κομμάτι της ασφάλισης.

Αρχικά κοιτάζοντας το προφίλ ρίσκου ενός ατόμου βλέπουμε ότι υπάρχει μια εξαιρετικά μεγάλη ποικιλία πιθανών αποτελεσμάτων, το καθένα με μια συγκεκριμένη οικονομική συνέπεια. Έτσι κάθε άτομο εκτίθεται σε ένα σημαντικό βαθμό κινδύνου που σχετίζεται με κινδύνους όπως ο θάνατος, η ανικανότητα κλπ. Με την αγορά ενός ασφαλιστηρίου συμβολαίου, ένα άτομο μπορεί να μεταφέρει αυτό τον κίνδυνο ή τη μεταβλητότητα των πιθανών αποτελεσμάτων σε μια ασφαλιστική εταιρεία με αντάλλαγμα μια καθορισμένη πληρωμή. Θα μπορούσαμε, επομένως, να συμπεράνουμε ότι εάν ένας ασφαλιστής πουλήσει n ασφαλιστήρια συμβόλαια σε n αριθμό ατόμων, αναλαμβάνει τον συνολικό κίνδυνο των n ατόμων. Στην πραγματικότητα, ο ασφαλιστής, μέσω προσεκτικής κάλυψης και επιλογής ασφαλιστηρίων συμβολαίων θα καταλήξει σε ένα μέσο κίνδυνο που είναι σχετικά μικρότερος σε σχέση με τον αρχικό κίνδυνο για μεμονωμένους ασφαλισμένους.

Η παραπάνω διαδικασία που περιγράψαμε μας δίνει την δυνατότητα να προχωρήσουμε στους ορισμούς του ασφαλιστικού προϊόντος , της ασφαλιστικής εταιρείας και του κινδύνου:

Με τον όρο «Ασφαλιστικό προϊόν» αναφερόμαστε στην διαδικασία μεταφοράς ενός ή περισσότερων κινδύνων από ένα άτομο (ασφαλισμένος) προς ένα άλλο άτομο ή συνήθως προς μία ομάδα ατόμων που χαρακτηρίζεται ως ασφαλιστική εταιρεία (ασφαλιστής) έναντι ενός προσυμφωνημένου τιμήματος (χρηματικού ποσού) που χαρακτηρίζεται ως

«Ασφάλιστρο». Τα ασφαλιστικά προϊόντα μπορεί να καλύπτουν διάφορους τομείς όπως ζωή, υγεία, αυτοκίνητα, κατοικία, επιχειρήσεις και άλλους. Κάθε ασφαλιστικό προϊόν έχει τους δικούς του όρους, προϋποθέσεις και κανόνες που καθορίζουν τις λεπτομέρειες της κάλυψης και τις υποχρεώσεις και δικαιώματα των εμπλεκόμενων μερών. Σε αντίθεση με άλλα εμπορικά προϊόντα, ο κύκλος παραγωγής του ασφαλιστικού προϊόντος είναι αντίστροφος καθώς πρώτα γίνεται η πληρωμή από τον ασφαλισμένο και σε επόμενο χρόνο παρέχεται το προϊόν (κάλυψη σε περίπτωση επέλευσης κινδύνου).

Αναφορικά με τον όρο «Ασφαλιστική Εταιρεία» τον χρησιμοποιούμε όταν αναφερόμαστε σε μία συγκεκριμένη δομή ατόμων (μέτοχοι) η οποία αναλαμβάνει και διαχειρίζεται κινδύνους με κύριο σκοπό το δικό τους οικονομικό όφελος. Η κύρια πηγή εισροών που έχει μια ασφαλιστική εταιρεία είναι τα ασφάλιστρα ενώ μια δευτερεύουσα πηγή αποτελούν οι επενδύσεις. Αντίστοιχα με τις εισροές κύρια πηγή εκροών είναι οι αποζημιώσεις ενώ μία δευτερεύουσα πηγή αποτελούν τα έξοδα λειτουργίας.

Η έννοια του κινδύνου συνυπάρχει σε κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα και ως συνέπεια αυτού δεν θα μπορούσε να μην συναντάται και στον τομέα των ασφαλίσεων ο οποίος είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με το κομμάτι της ανθρώπινης φύσης. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο κίνδυνος είναι αδιαχώριστος από τις έννοιες της πιθανότητας και της αβεβαιότητας παρόλο που και οι δύο έννοιες είναι απόλυτα διακριτές οντότητες από την έννοια του κινδύνου. Ως «Κίνδυνος» λοιπόν νοείται η οικονομική απώλεια που ενδέχεται να προκύψει είτε από κάποιο φυσικό κίνδυνο (θάνατο, ασθένεια, ανικανότητα), είτε από ανθρώπινη πράξη (τροχαίο ατύχημα), είτε στο πλαίσιο της άσκησης οικονομικής δραστηριότητας (επενδυτική δραστηριότητα). Αξίζει να αναφέρουμε ότι ο κίνδυνος δεν είναι το όποιο ζημιογόνο γεγονός αλλά η οικονομική συνέπεια του ζημιογόνου γεγονότος καθώς επίσης και ότι το ζημιογόνο γεγονός πρέπει να είναι τυχαίο.

1.2 Κλάδοι Ασφάλισης κατά Ζημιών

Οι ασφαλίσεις μπορούμε να πούμε ότι διακρίνονται σε ασφαλίσεις προσώπων και σε γενικές ασφαλίσεις. Οι γενικές ασφαλίσεις εμπεριέχουν τις ασφαλίσεις πραγμάτων (περιουσιακών στοιχείων) και τις ασφαλίσεις αστικής ευθύνης (ευθύνης για ζημιές που προκαλούμε σε άλλους). Σύμφωνα με το άρθρο 4 του νόμου 4364/2016 οι κλάδοι των

Ασφαλίσεων κατά Ζημιών που αποτυπώνουν το εύρος των κινδύνων και οι οποίοι δύναται να ασφαλιστούν είναι οι εξής:

I. **Κλάδος 1: «Ατυχήματα»** (συμπεριλαμβανομένων των εργατικών ατυχημάτων και των επαγγελματικών ασθενειών)
   - Κατ' αποκοπήν παροχές.
   - Περιοδικές παροχές αποζημιώσεων.
   - Συνδυασμούς των ανωτέρω.
   - Μεταφερόμενα πρόσωπα.

II. **Κλάδος 2: «Ασθένειες»**
   - Περιοδικές παροχές αποζημιώσεων.
   - Κατ' αποκοπήν παροχές.
   - Συνδυασμούς των ανωτέρω.

III. **Κλάδος 3: «Χερσαία οχήματα»** (εκτός σιδηροδρομικών)
   Καλύπτει κάθε ζημία, την οποία υφίστανται αυτοκινούμενα και μη, χερσαία οχήματα εκτός των σιδηροδρομικών.

IV. **Κλάδος 4: «Σιδηροδρομικά οχήματα»**
   Καλύπτει κάθε ζημία, την οποία υφίστανται τα σιδηροδρομικά οχήματα.

V. **Κλάδος 5: «Αεροσκάφη»**
   Καλύπτει κάθε ζημία, την οποία υφίστανται αεροσκάφη.

VI. **Κλάδος 6: «Πλοία»**
   Καλύπτει κάθε ζημία, την οποία υφίστανται:
   - Ποτάμια σκάφη.
   - Λιμναία σκάφη.
   - Θαλάσσια σκάφη/πλοία.

VII. **Κλάδος 7: «Μεταφερόμενα εμπορεύματα»** (συμπεριλαμβανομένων των εμπορευμάτων, αποσκευών και κάθε άλλου αγαθού)

Καλύπτει κάθε ζημία, την οποία υφίστανται τα μεταφερόμενα εμπορεύματα, περιλαμβανομένων αποσκευών και κάθε άλλου αγαθού, ανεξαρτήτως του μεταφορικού μέσου.

VIII. Κλάδος 8: «Πυρκαγιά και στοιχεία της φύσεως»

Καλύπτει κάθε ζημία που υφίστανται αγαθά, εξαιρουμένων των αγαθών που περιλαμβάνονται στους κλάδους 3, 4, 5, 6 και 7 ανωτέρω, εφόσον προξενείται από:

- Πυρκαγιά.
- Έκρηξη.
- Θύελλα.
- Στοιχεία της φύσεως άλλα εκτός θύελλας.
- Πυρηνική ενέργεια.
- Καθίζηση του εδάφους.

IX. Κλάδος 9: «Λοιπές ζημίες αγαθών»

Καλύπτει κάθε ζημία που υφίστανται αγαθά, εξαιρουμένων των αγαθών που περιλαμβάνονται στους κλάδους 3, 4, 5, 6 και 7 ανωτέρω, εφόσον προξενήθηκε από χαλάζι ή παγετό, καθώς και από κάθε άλλο συμβάν, όπως κλοπή, εκτός των συμβάντων που υπάγονται στον κλάδο 8.

X. Κλάδος 10: «Αστική ευθύνη από χερσαία αυτοκίνητα οχήματα»

Καλύπτει κάθε είδους αστική ευθύνη, που προκύπτει από τη χρήση χερσαίων αυτοκινήτων οχημάτων, συμπεριλαμβανομένης της ευθύνης του μεταφορέως.

XI. Κλάδος 11: «Αστική ευθύνη από αεροσκάφη»

Καλύπτει κάθε είδους αστική ευθύνη, που προκύπτει από τη χρήση αεροσκαφών, συμπεριλαμβανομένης της ευθύνης του μεταφορέως.

XII. Κλάδος 12: «Αστική ευθύνη από θαλάσσια, λιμναία και ποτάμια σκάφη»

Καλύπτει κάθε είδους αστική ευθύνη, που προκύπτει από τη χρήση θαλάσσιων, λιμναίων ή ποτάμιων σκαφών, συμπεριλαμβανομένης της ευθύνης του μεταφορέως.

XIII. Κλάδος 13: «Γενική αστική ευθύνη»

Καλύπτει κάθε είδους αστική ευθύνη που δεν εμπίπτει στους κλάδους 10 έως 12 ανωτέρω.

XIV. Κλάδος 14: «Πιστώσεις»

Στον ως άνω κλάδο, ο ασφαλιστής έναντι ασφαλίστρου καλύπτει τον ασφαλισμένο για ζημία την οποία αυτός πιθανόν να υποστεί ως αποτέλεσμα της αποτυχίας ενός ή περισσοτέρων οφειλετών του να εκπληρώσουν τις υποχρεώσεις τους προς αυτόν (ασφαλισμένο). Καλύπτει τα εξής:

- Γενική αφερεγγυότητα.
- Εξαγωγικές πιστώσεις (αφορά εξαγωγικές πιστώσεις που δεν γίνονται για λογαριασμό ή με την υποστήριξη του Κράτους).
- Πωλήσεις με δόσεις.
- Ενυπόθηκες πιστώσεις.
- Αγροτικές πιστώσεις.

XV. Κλάδος 15: «Εγγυήσεις»

Στον ως άνω κλάδο ο ασφαλιστής έναντι ασφαλίστρου εγγυάται για τον ασφαλισμένο την εκτέλεση από αυτόν των συμβατικών του υποχρεώσεων. Περιλαμβάνει:

- Άμεσες εγγυήσεις.
- Έμμεσες εγγυήσεις.

XVI. Κλάδος 16: «Διάφορες χρηματικές απώλειες»

Καλύπτει διάφορες χρηματικές απώλειες που προκαλούνται από κινδύνους, όπως:

- Κίνδυνος απώλειας επαγγελματικής απασχόλησης.
- Γενική ανεπάρκεια εισοδήματος.
- Κακοκαιρία.
- Απώλεια κερδών.
- Τρέχοντα γενικά έξοδα.
- Απρόβλεπτες εμπορικές δαπάνες.
- Απώλεια/Μείωση αγοραίας αξίας.
- Απώλεια μισθωμάτων ή εισοδημάτων.

- Έμμεσες εμπορικές απώλειες εκτός από αυτές που ήδη αναφέρθηκαν.
- Μη εμπορικές οικονομικές απώλειες.
- Λοιπές οικονομικές απώλειες.

XVII. Κλάδος 17: «Νομική προστασία»

Περιλαμβάνει την ανάληψη δικαστικών εξόδων και την παροχή νομικής προστασίας.

XVIII. Κλάδος 18: «Βοήθεια»

Περιλαμβάνει την ανάληψη της υποχρέωσης άμεσης παροχής βοήθειας, στις περιπτώσεις και με τους όρους που προβλέπει σύμβαση, σε χρήμα ή σε είδος, έναντι προηγούμενης καταβολής ασφαλίστρου, προς πρόσωπα, που περιέχονται σε δυσχερή θέση κατά τη διάρκεια μετακινήσεων ή απουσίας από την κατοικία ή από τον τόπο συνήθους διαμονής τους είτε υπό άλλες περιστάσεις ανεξάρτητα από μετακίνηση ή απουσία. Η σε είδος παροχή βοήθειας είναι δυνατόν να συνίσταται και στην χρησιμοποίηση του προσωπικού και του εξοπλισμού που ανήκουν σε αυτόν που παρέχει την βοήθεια. Δεν συνιστούν υπηρεσίες βοήθειας οι υπηρεσίες συντήρησης ή διατήρησης, η εξυπηρέτηση μετά την πώληση, ούτε η απλή υπόδειξη ή πρόβλεψη παροχής βοήθειας ως μεσολάβηση.

1.3 «Έκθεση» στον Κίνδυνο (Risk Exposure)

Μία πολύ βασική έννοια για την διαδικασία της τιμολόγησης αφορά την «έκθεση» στον κίνδυνο η οποία αποτελεί την βασική μονάδα μέτρησης του κινδύνου για τον οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το ασφάλιστρο. Η μέτρηση του κινδύνου παρουσιάζει σημαντικές διαφορές από τον ένα κλάδο ζημιών στον άλλο. Η μονάδα έκθεσης στον κίνδυνο εξαρτάται κάθε φορά από τα χαρακτηριστικά της μονάδας που καλύπτεται, για παράδειγμα ένα σκάφος που ασφαλίζεται για την περίοδο του ενός έτους αντιπροσωπεύει μία μονάδα έκθεσης στον κίνδυνο για την ασφάλιση σκαφών.

Ο αναλογιστής διαμορφώνει μία τιμή ανά μονάδα έκθεσης στον κίνδυνο αφού πρώτα έχει επιλεγεί η έκθεση στον κίνδυνο, τότε το ασφάλιστρο θα υπολογιστεί ως το γινόμενο της τιμής ανά μονάδα έκθεσης στον κίνδυνο και του αριθμού μονάδων έκθεσης στον κίνδυνο. Τα πιο συνηθισμένα μέτρα έκθεσης στον κίνδυνο είναι τα εξής:

1.3.1 Εγγεγραμμένες μονάδες έκθεσης (Written exposures)

Είναι ο συνολικός αριθμός των μονάδων έκθεσης στον κίνδυνο που είναι εγγεγραμμένες σε ασφαλιστήρια συμβόλαια κατά τη διάρκεια μιας καθορισμένης περιόδου (π.χ. έτος, εξάμηνο, τρίμηνο κλπ).

1.3.2 Δεδουλευμένες μονάδες έκθεσης (Earned exposures)

Για μια συγκεκριμένη περίοδο είναι οι μονάδες έκθεσης στον κίνδυνο που αντιπροσωπεύουν εκείνο το μέρος των εγγεγραμμένων εκθέσεων για τους κινδύνους που έχει αναλάβει η ασφαλιστική εταιρεία και αφορούν το συγκεκριμένο τμήμα της περιόδου της ασφάλισης που έχει εκπνεύσει.

1.3.3 Μη-Δεδουλευμένες μονάδες έκθεσης (Unearned exposures)

Είναι οι μονάδες έκθεσης στον κίνδυνο που αποτελούν εκείνο το μέρος των εγγεγραμμένων εκθέσεων για τις οποίες δεν έχει παρασχεθεί μέχρι αυτή τη χρονική στιγμή η ασφαλιστική τους κάλυψη.

1.3.4 Εν-ισχύ μονάδες έκθεσης (In-force exposures)

Είναι ο αριθμός των ασφαλιστικών μονάδων που εκτίθενται στον κίνδυνο σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

1.3.5 Αριθμητικό Παράδειγμα

Για την κατανόηση των παραπάνω εννοιών ας δούμε το εξής παράδειγμα:

Έστω ότι μία επιχείρηση έχει εκδώσει 3 (τρία) ετήσια[1] ασφαλιστήρια συμβόλαια αυτοκινήτων στις ημερομηνίες 01/01/2021, 01/06/2021 και 01/07/2021 και για απλότητα ας θεωρήσουμε ότι για κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο υπάρχει μία μονάδα έκθεσης στον κίνδυνο, τότε οι μονάδες έκθεσης στον κίνδυνο για τις εγγεγραμμένες, τις δεδουλευμένες και τις εν-ισχύ εκθέσεις για τα έτη 2021 και 2022 θα είναι:

[1] Στη μέτρηση της έκθεσης του κινδύνου έχει σημασία η χρονική διάρκεια ισχύος του συμβολαίου.

Πίνακας 1.1: Δεδομένα Ασφαλιστηρίων Συμβολαίων (πηγή: Πιτσέλης, 2020)

Ημερομηνία Ασφάλισης	Εγγεγραμμένες Εκθέσεις		Δεδουλευμένες Εκθέσεις		Εν-ισχύ Εκθέσεις
	2021	*2022*	*2021*	*2022*	*1/1/2022*
1/1/2021	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00
1/6/2021	1,00	0,00	0,5834	0,4166	1,00
1/7/2021	1,00	0,00	0,5	0,5	1,00
Σύνολο	***3,00***	***0,00***	***2,0834***	***0,9166***	***2,00***

1.4 Ασφάλιστρο (Premium)

Ο όρος «Ασφάλιστρο» (Premium) είναι το χρηματικό ποσό το οποίο συμφωνεί ο ασφαλισμένος να καταβάλλει για ασφαλιστική κάλυψη για μια χρονική περίοδο, είτε τμηματικά είτε εφάπαξ στην ασφαλιστική εταιρεία προκειμένου εκείνη να τον αποζημιώσει σε περίπτωση ζημιάς. Τα ασφάλιστρα διακρίνονται σε:

1.4.1 Εγγεγραμμένα ασφάλιστρα (Written premiums)

Είναι τα συνολικά ασφάλιστρα όλων των ασφαλιστηρίων συμβολαίων που εκδόθηκαν σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο ασφαλιστικής κάλυψης και τα οποία αναμένει η ασφαλιστική εταιρεία να εισπράξει. Οποιαδήποτε στιγμή κατά τη διάρκεια ισχύος του συμβολαίου, το εγγεγραμμένο ασφάλιστρο υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\text{Εγγεγραμμένο Ασφάλιστρο} = \text{Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο} + \text{Μη-Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο}.$$

1.4.2 Δεδουλευμένα ασφάλιστρα (Earned premiums)

Είναι τα ασφάλιστρα που αποτελούν εκείνο το μέρος των εγγεγραμμένων ασφαλίστρων και αφορούν την συγκεκριμένη περίοδο της ασφάλισης που έχει λήξει. Για τον υπολογισμό του δεδουλευμένου ασφαλίστρου πρέπει να κοιτάξουμε την διάρκεια του συμβολαίου και να καθορίσουμε πόσος χρόνος έχει ήδη παρέλθει. Επομένως το δεδουλευμένο ασφάλιστρο δίνεται από τον τύπο:

$$\text{Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο} = \frac{\text{Συνολικό Ασφάλιστρο}}{365 * \text{Αριθμός ημερών που έχουν παρέλθει}}.$$

Επιπρόσθετα, για τον υπολογισμό του δεδουλευμένου ασφαλίστρου αντί για τον αριθμό των ημερών που έχουν παρέλθει, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ολόκληρους μήνες που έχουν παρέλθει.

$$\text{Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο} = \frac{\text{Συνολικό Ασφάλιστρο}}{\text{Πλήρης Ασφαλιστική Περίοδος σε μήνες} * \text{Μήνες που έχουν παρέλθει}}.$$

1.4.3 Μη-Δεδουλευμένα ασφάλιστρα (Unearned premiums)

Είναι τα ασφάλιστρα που αποτελούν εκείνο το μέρος των εγγεγραμμένων ασφαλίστρων για τους κινδύνους που έχει αναλάβει η ασφαλιστική εταιρεία και δεν έχει χορηγηθεί ακόμη η ασφαλιστική τους κάλυψη. Για το κομμάτι των ασφαλίστρων που δεν έχει δεδουλευτεί ακόμα η ασφαλιστική εταιρεία κρατάει και ένα απόθεμα για τις ζημιές που μπορεί να γεννήσει αυτό το μη-δεδουλευμένο ασφάλιστρο.

1.4.4 Εν-ισχύ ασφάλιστρα (In-force premiums)

Είναι το συνολικό ποσό του ασφαλίστρου που αντιστοιχεί σε όλη την περίοδο ασφαλιστικής κάλυψης για όλα τα ασφαλιστήρια συμβόλαια που είναι σε ισχύ, που δεν έχουν λήξει δηλαδή σε μια συγκεκριμένη ημερομηνία.

1.4.5 Αριθμητικό Παράδειγμα

Για την κατανόηση των παραπάνω εννοιών ας δούμε το εξής παράδειγμα:

Αντίστοιχα με το παράδειγμα που είδαμε παραπάνω έστω ότι μία επιχείρηση έχει εκδώσει 3 (τρία) ετήσια ασφαλιστήρια συμβόλαια αυτοκινήτων στις ημερομηνίες 01/01/2021, 01/06/2021 και 01/07/2021. Το ετήσιο ασφάλιστρο για καθένα από αυτά τα 3 (τρία) ετήσια ασφαλιστήρια συμβόλαια ήταν σταθερό και ίσο με 100 ευρώ, τότε τα εγγεγραμμένα, τα δεδουλευμένα και τα εν-ισχύ ασφάλιστρα για τα έτη 2021 και 2022 θα είναι:

Πίνακας 1.2: Δεδομένα Ασφαλιστηρίων Συμβολαίων (πηγή: Πιτσέλης, 2020)

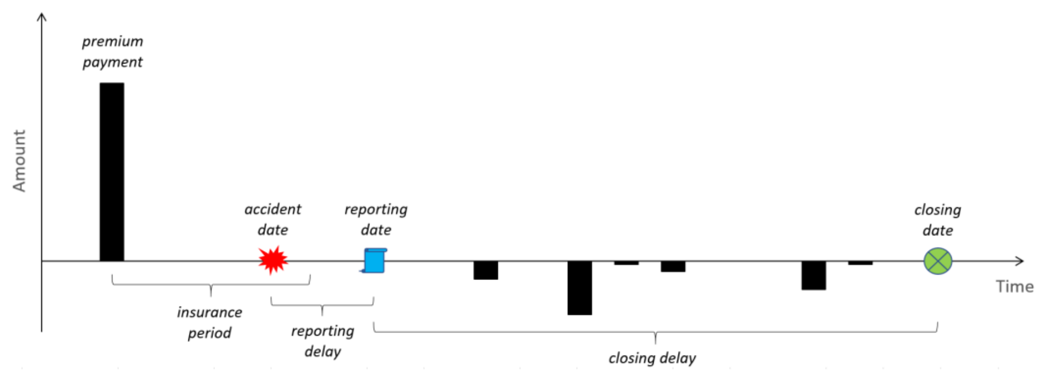
Ημερομηνία Ασφάλισης	Εγγεγραμμένα Ασφάλιστρα		Δεδουλευμένα Ασφάλιστρα		Εν-ισχύ Ασφάλιστρα
	2021	***2022***	***2021***	***2022***	***1/1/2022***
1/1/2021	100	0	100	0	0
1/6/2021	100	0	58,34	41,66	100
1/7/2021	100	0	50	50	100
Σύνολο	***300***	***0***	***208,34***	***91,66***	***200***

1.5 Απαίτηση (Claim)

Ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο περιλαμβάνει την πληρωμή χρημάτων (δηλαδή ασφάλιστρο) από τον ασφαλισμένο σε μια ασφαλιστική εταιρεία με αντάλλαγμα την αποζημίωση του ασφαλισμένου για τις οικονομικές συνέπειες ενός γεγονότος που καλύπτεται από το συμβόλαιο. Εάν το γεγονός καλύπτεται από το ασφαλιστήριο συμβόλαιο, ο ασφαλισμένος (ή άλλα άτομα όπως προβλέπεται στο ασφαλιστήριο συμβόλαιο) ζητά από την ασφαλιστική εταιρεία αποζημίωση βάσει του συμβολαίου. Η αξίωση αυτή ονομάζεται απαίτηση (claim) και το άτομο που υποβάλλει την απαίτηση ονομάζεται ενάγων ή απαιτητής (claimant).

Ο ενάγων μπορεί να είναι ασφαλισμένος ή ένα τρίτο άτομο που ισχυρίζεται ότι υπάρχουν τραυματισμοί ή ζημιές που καλύπτονται από το ασφαλιστήριο συμβόλαιο. Η ημερομηνία του γεγονότος που προκλήθηκε η ζημιά ονομάζεται ημερομηνία ατυχήματος (accident date). Για τους περισσότερους κλάδους ζημιών (lines of business) και κινδύνους, το ατύχημα είναι ένα ξαφνικό γεγονός. Για ορισμένους κλάδους ζημιών και κινδύνους, η απώλεια μπορεί να είναι αποτέλεσμα συνεχούς ή επαναλαμβανόμενης έκθεσης στις ίδιες συνθήκες κινδύνου. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η ημερομηνία ατυχήματος είναι συχνά η ημερομηνία κατά την οποία η ζημιά ή η απώλεια είναι εμφανής.

Μέχρι ο ενάγων να αναφέρει την απαίτηση στην ασφαλιστική εταιρεία (δηλαδή την ημερομηνία αναφοράς - report date), η ασφαλιστική δεν γνωρίζει την απαίτηση. Απαιτήσεις που δεν είναι επί του παρόντος γνωστές από την ασφαλιστική αναφέρονται ως μη αναφερθείσες απαιτήσεις ή απαιτήσεις που έχουν συμβεί αλλά δεν έχουν αναγγελθεί (Incurred But Not Reported - IBNR). Μετά την ημερομηνία αναφοράς, η απαίτηση είναι γνωστή στην εταιρεία και ταξινομείται ως αναγγελθείσα απαίτηση (reported claim). Μέχρι να διευθετηθεί η αναγγελθείσα απαίτηση θεωρείται ανοιχτή απαίτηση (open claim). Μόλις διευθετηθεί κατηγοριοποιείται ως κλειστή απαίτηση (closed claim). Σε ορισμένες περιπτώσεις, μπορεί να προκύψει περαιτέρω δραστηριότητα μετά το κλείσιμο της απαίτησης με συνέπεια η απαίτηση να ανοίξει ξανά (re-opened claim). Στο παρακάτω σχεδιάγραμμα απεικονίζεται γραφικά η χρονική σειρά μιας απαίτησης.



Πηγή: Case Reserving in Non-Life Practice using Individual Data and Machine Learning, 2017. Marco Aleandri

1.6 Ζημιά (Loss)

Η ζημιά είναι το ποσό της αποζημίωσης που έχει καταβληθεί ή αναμένεται να καταβληθεί στον απαιτητή, όπως ορίζεται στους όρους του ασφαλιστηρίου συμβολαίου. Κάτι που αξίζει να σημειώσουμε είναι ότι πολλές φορές οι όροι απαίτηση και ζημιά χρησιμοποιούνται ως ισοδύναμοι. Ο όρος απαίτηση χρησιμοποιείται συχνότερα στα πρότυπα των αναλογιστικών οργανισμών της Αμερικής και του Καναδά όπως επίσης και σε διεθνείς αναλογιστικούς οργανισμούς. Παρόλα αυτά πολλοί ασφαλιστικοί οργανισμοί στην Αμερική και στον Καναδά χρησιμοποιούν τον όρο ζημιά. Στην παρούσα διπλωματική ο όρος απαίτηση θα αναφέρεται στην αξίωση για αποζημίωση και ο όρος ζημιά θα αναφέρεται στο ποσό της αποζημίωσης.

1.6.1 Πληρωθείσες ζημιές (Paid Losses)

Είναι το ποσό των ζημιών που έχει ήδη καταβληθεί στους απαιτητές για κάποια ζημιά.

1.6.2 Επισυμβάσες ζημιές (Incurred Losses)

Είναι το άθροισμα των πληρωθεισών ζημιών και του τρέχοντος αποθέματος εκκρεμών ζημιών με την μέθοδο φάκελο προς φάκελο (το οποίο και θα αναλύσουμε στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου) για μια απαίτηση ή για μια ομάδα απαιτήσεων, δηλαδή το συνολικό ύψος της ζημιάς που έχει πραγματοποιηθεί.

$$Επισυμβάσες\ Ζημιές = Πληρωθείσες\ Ζημιές + ΑΕΖ\ Φ/Φ.$$

1.6.3 (Εκτιμώμενες) Τελικές Ζημιές (Estimated Ultimate Losses)

Τελική ζημιά είναι το χρηματικό ποσό που απαιτείται για το κλείσιμο και τον διακανονισμό όλων των απαιτήσεων για μια καθορισμένη ομάδα ασφαλιστηρίων συμβολαίων. Αυτό το ποσό περιλαμβάνει τις πραγματικές πληρωμές που έχουν πραγματοποιηθεί μέχρι σήμερα (πληρωθείσες ζημιές - paid losses), μια εκτίμηση των μελλοντικών πληρωμών που έχουν καθοριστεί από έναν διακανονιστή ζημιών (εκκρεμείς ζημιές – μέθοδος φάκελος προς φάκελο) και μια εκτίμηση των πρόσθετων πληρωμών που έχουν καθοριστεί από έναν αναλογιστή (IBNR).

Το συνολικό άθροισμα των επισυμβασών ζημιών για όλες τις γνωστές απαιτήσεις μπορεί να μην ισούται με την τελική ζημιά για πολλά χρόνια. Οι επισυμβάσες ζημιές και οι τελικές ζημιές διαφέρουν για δύο λόγους. Πρώτον, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, ενδέχεται να υπάρξουν απαιτήσεις που δεν έχουν αναφερθεί. Το ποσό που εκτιμάται ότι θα διακανονίσει τελικά αυτές τις μη αναφερθείσες απαιτήσεις αναφέρεται ως αποθεματικό που έχει πραγματοποιηθεί αλλά δεν έχει αναγγελθεί (IBNR). Δεύτερον, η ακρίβεια των αποθεμάτων των επισυμβασών ζημιών εξαρτάται από τις πληροφορίες που είναι γνωστές κατά τη στιγμή υπολογισμού του αποθέματος. Κατά συνέπεια, οι επισυμβάσες ζημιές για τις υπάρχουσες απαιτήσεις ενδέχεται να μεταβληθούν με την πάροδο του χρόνου. Επομένως, η εκτιμώμενη τελική ζημιά είναι το άθροισμα των επισυμβασών ζημιών, του αποθεματικού IBNR και του αποθεματικού IBNER (Incurred But Not Enough Reported), δηλαδή:

(Εκτιμώμενες) Τελικές Ζημιές = Επισυμβάσες Ζημιές + IBNR απόθεμα + IBNER απόθεμα.

1.7 Τεχνικές Προβλέψεις

Οι τεχνικές προβλέψεις είναι οι προβλέψεις που κάθε ασφαλιστική επιχείρηση πρέπει να σχηματίζει στο παθητικό κατά την σύνταξη των οικονομικών της καταστάσεων ούτως ώστε να απεικονίσει λογιστικά διάφορες υποχρεώσεις που έχει από τους ασφαλιστικούς κινδύνους που ανέλαβε, είτε αυτοί επήλθαν, είτε βρίσκονται ακόμα υπό ασφαλιστική κάλυψη στο τέλος της θεωρούμενης περιόδου. Οι τεχνικές προβλέψεις για τις ασφαλίσεις ζημιών σχηματίζονται από τις εξής κατηγορίες:

- Απόθεμα μη Δεδουλευμένων Ασφαλίστρων.
- Απόθεμα Κινδύνων εν Ισχύ.
- Απόθεμα Εκκρεμών Ζημιών.
- Απόθεμα Εξόδων Διακανονισμού Ζημιών.

1.7.1 Απόθεμα μη Δεδουλευμένων Ασφαλίστρων (Unearned Premium Reserve)

Είναι το απόθεμα που θα πρέπει να κρατάει η ασφαλιστική εταιρεία για ζημιές οι οποίες μπορούν να γεννηθούν από τα ασφάλιστρα που δεν έχουν δεδουλευτεί ακόμα. Η ασφαλιστική εταιρεία εκδίδει συμβόλαια καθ' όλη την διάρκεια ενός ημερολογιακού έτους. Επομένως η περίοδος ασφαλιστικής κάλυψης πολλών συμβολαίων εκτείνεται μέσα σε δύο ημερολογιακά έτη. Το μέρος του ασφαλίστρου που ξεπερνάει την 31/12 κάθε έτους χαρακτηρίζεται ως Απόθεμα μη Δεδουλευμένου Ασφαλίστρου.

Για τον υπολογισμό του ΑΜΔΑ συνήθεις υποθέσεις είναι:

- Ομοιόμορφη κατανομή του ασφαλιστικού κινδύνου.

- Τα εγγεγραμμένα ασφάλιστρα ταυτίζονται με τα εισπραχθέντα.

Σε περίπτωση που δεν ισχύει η ομοιόμορφη κατανομή του κινδύνου, μπορεί να σχηματιστεί το ΑΜΔΑ με διαφορετικό τρόπο μετά από έγκριση της ΔΕΙΑ (Διεύθυνση Εποπτείας Ιδιωτικής Ασφάλισης).

Ο ακριβής υπολογισμός του ΑΜΔΑ για κάθε συμβόλαιο δίνεται από το πηλίκο του χρόνου που εκτείνεται μετά την 31/12 του ημερολογιακού έτους προς το συνολικό χρόνο της ασφαλιστικής κάλυψης του συγκεκριμένου συμβολαίου επί το αντίστοιχο ασφάλιστρο. Δηλαδή από τον παρακάτω τύπο:

$$ΑΜΔΑ = \frac{Ημερομηνία\ λήξης\ -\ Ημερομηνία\ υπολογισμού}{Ημερομηνία\ λήξης\ -\ Ημερομηνία\ έναρξης} * Ασφάλιστρο.$$

Για παράδειγμα, άμα θεωρήσουμε ένα ετήσιο ασφαλιστήριο συμβόλαιο το οποίο εκδόθηκε στις 30/06/2019 με ετήσιο ασφάλιστρο 200 ευρώ, την 31/12/2019 από τα 200 ευρώ που είναι το ασφάλιστρο θα έχουμε (6/12 * 200 =) 100 ευρώ που έχουν δεδουλευτεί και (6/12 * 200 =) 100 ευρώ που δεν έχουν δεδουλευτεί, αυτά τα 100 ευρώ που δεν έχουν δεδουλευτεί υπάρχει περίπτωση να γεννήσουν κάποιες μελλοντικές ζημιές, για το λόγο αυτό κρατάμε ένα απόθεμα.

1.7.2 Απόθεμα Κινδύνων εν Ισχύ ή ΑΚΕΙ (Unexpired Risk Reserve)

Είναι ένα επιπρόσθετο απόθεμα επί του ΑΜΔΑ, δηλαδή αφορά μια πρόσθετη πρόβλεψη η οποία σχηματίζεται κατά την ημερομηνία σύνταξης των οικονομικών καταστάσεων όταν το ΑΜΔΑ συμπεριλαμβανομένων και των εισπρακτέων ασφαλίστρων, δεν επαρκεί για την κάλυψη των προβλεπόμενων ζημιών και εξόδων των ασφαλιστηρίων που είναι εν ισχύ κατά το κλείσιμο του ισολογισμού. Πολλές φορές μπορεί να υπάρξει σύγχυση μεταξύ των όρων ΑΜΔΑ και ΑΚΕΙ. Όμως τα δύο αποθέματα είναι διαφορετικά μεταξύ τους γιατί το ΑΜΔΑ αφορά το ασφάλιστρο που αντιστοιχίζεται στην χρονική περίοδο μετά την ημερομηνία αποτίμησης και μέχρι την λήξη της ασφαλιστικής σύμβασης ενώ το ΑΚΕΙ αποθεματοποιείται για να καλύψει κινδύνους που ήδη υπάρχουν πριν την ημερομηνία αποτίμησης.

1.7.3 Απόθεμα Εκκρεμών Ζημιών ή ΑΕΖ (Outstanding Claims Reserve)

Το Απόθεμα Εκκρεμών Ζημιών αποτελεί ένα πολύ σημαντικό μέγεθος για μια ασφαλιστική εταιρεία. Όταν ένα σύνολο απαιτήσεων αναγγέλλεται στην ασφαλιστική και η πληρωμή τους αναμένεται να πραγματοποιηθεί σε μελλοντική χρονική περίοδο, η εταιρεία δημιουργεί ένα απόθεμα για τις συγκεκριμένες απαιτήσεις το οποίο καλείται απόθεμα εκκρεμών ζημιών και το οποίο είναι μια εκτίμηση του χρηματικού ποσού που απαιτείται για να διακανονισθούν τελικά αυτές οι απαιτήσεις. Επομένως το απόθεμα που κρατάει η εταιρεία για την κάλυψη των ζημιών που είναι εκκρεμείς, αφορά ζημιές που έχουν συμβεί αλλά δεν έχουν διευθετηθεί ακόμη, συμπεριλαμβανομένων και των εξόδων διακανονισμού αυτών των ζημιών. Η εκτίμηση του ποσού αυτού βασίζεται σε ό,τι γνωρίζουμε για τις ζημιές σε μια συγκεκριμένη ημερομηνία.

Το απόθεμα εξαιρεί οποιεσδήποτε πληρωμές έχουν ήδη πραγματοποιηθεί. Κατά συνέπεια, είναι η διαφορά μεταξύ των ασφαλιστικών απαιτήσεων που έχουν κατατεθεί και των απαιτήσεων που έχουν διακανονισθεί. Το ποσό του αποθεματικού παρακολουθείται και προσαρμόζεται καθώς πραγματοποιούνται οι πληρωμές και λαμβάνονται πρόσθετες πληροφορίες σχετικά με τις απαιτήσεις.

Ο αρχικός υπολογισμός γίνεται με τη μέθοδο «Φάκελο προς Φάκελο» (Φ/Φ) και στη συνέχεια εφαρμόζονται και στατιστικές μέθοδοι για τους τελικούς υπολογισμούς προκειμένου να εξασφαλιστεί η μέγιστη επάρκεια των αντίστοιχων αποθεμάτων. Επομένως, οι ασφαλιστικές εταιρείες, εκτός από το απόθεμα που σχηματίζουν με βάση τη μέθοδο «Φάκελο προς Φάκελο», είναι υποχρεωμένες να σχηματίζουν και ένα επιπλέον απόθεμα με την χρήση στατιστικών μεθόδων για ζημιές που χαρακτηρίζονται ως IBNR (Incurred But Not Reported). Ο υπολογισμός του Αποθέματος Εκκρεμών Ζημιών δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$AEZ = AEZ\ \Phi/\Phi + AEZ\ A/\Sigma\ (IBNR).$$

1.7.3.1 Απόθεμα Εκκρεμών Ζημιών «Φάκελο προς Φάκελο» (Reported But Not Settled – RBNS ή Case by case)

Είναι το απόθεμα που κρατάει η εταιρεία για τις ζημιές που έχουν συμβεί, που έχουν αναγγελθεί αλλά δεν έχουν διευθετηθεί, μπορεί να έχει διευθετηθεί ένα μέρος τους μπορεί όμως και κανένα. Ο υπολογισμός προκύπτει από μια εκτίμηση που κάνει ο διακανονιστής ζημιών της ασφαλιστικής εταιρείας όταν ανοίγει έναν νέο φάκελο για μια ζημιά, το ποσό που θα κρατήσει σαν απόθεμα προκειμένου να διακανονισθεί αυτή η ζημιά εξαρτάται από το μέγεθος και την σφοδρότητα της. Επίσης λαμβάνει υπόψη οποιαδήποτε άλλη πληροφορία μπορεί να είναι διαθέσιμη εκείνη την στιγμή στην εταιρεία σχετικά με το συμβάν όπως πληροφορίες από πραγματογνώμονες, εξωτερικούς συνεργάτες της ασφαλιστικής, δικαστικές αποφάσεις καθώς και από την επαγγελματική του εμπειρία. Κάτι που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι στο ΑΕΖ Φ/Φ συνυπολογίζονται και τα άμεσα έξοδα διακανονισμού μιας ζημιάς τα οποία περιγράφουμε στη συνέχεια.

1.7.3.2 Απόθεμα Εκκρεμών Ζημιών με Αναλογιστικές/Στατιστικές Μεθόδους (IBNR)

Είναι το απόθεμα που θα πρέπει να κρατήσει η εταιρεία προκειμένου να παρέχεται για μελλοντικές πληρωμές για τις ζημιές οι οποίες έχουν συμβεί αλλά δεν έχουν αναγγελθεί (IBNR) ακόμα στην ασφαλιστική εταιρεία. Άρα είναι το ποσό που εκτιμάται ότι απαιτείται για να διευθετηθούν ολοκληρωτικά οι απαιτήσεις αυτές που δεν έχουν δηλωθεί. Οι μέθοδοι υπολογισμού του IBNR είναι οι τριγωνικές μέθοδοι βάσει των τριγώνων των πληρωθεισών (Paid triangles) ή των επισυμβασών (Incurred triangles) ζημιών. Πιο συγκεκριμένα:

$$IBNR = Ultimate\ Paid\ Losses - RBNS - Paid,\ για\ Paid\ Triangles.$$

$$IBNR = Ultimate\ Incurred\ Losses - Incurred,\ για\ Incurred\ Triangles.$$

Σχετικά με το απόθεμα IBNR μπορούμε να πούμε ότι αποτελείται από το άθροισμα δύο ειδών αποθεμάτων:

I. του καθαρού IBNR (pure IBNR) ή IBNYR (Incurred But Not Yet Reported) και
II. του IBNER (Incurred But Not Enough Reported).

Η πρώτη περίπτωση αφορά αποθέματα για ζημιές που έχουν συμβεί και δεν έχουν ακόμα αναγγελθεί και η δεύτερη περίπτωση αφορά αποθέματα για ζημιές που έχουν συμβεί αλλά δεν έχουν αναγγελθεί επαρκώς. Το μεγαλύτερο μέρος του IBNR αποτελείται από το IBNER, όπου το συγκεκριμένο απόθεμα καλύπτει το κίνδυνο της πιθανής ελλιπούς πληροφόρησης του διακανονιστή, η οποία μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένη εκτίμηση του RBNS.

1.7.4 Απόθεμα Εξόδων Διακανονισμού Ζημιών (Loss Adjustment Expenses-LAE)

Είναι ένα απόθεμα που κρατάει η εταιρεία για όλα τα έξοδα τα οποία θα κληθεί να πληρώσει και αφορούν την διαδικασία διευθέτησης των αποζημιώσεων. Αυτά τα έξοδα ονομάζονται έξοδα διακανονισμού ζημιών (LAE) και χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, στα άμεσα έξοδα διακανονισμού ζημιών (ALAE) και στα έμμεσα έξοδα διακανονισμού ζημιών (ULAE). Για να υπολογίσουμε το συγκεκριμένο απόθεμα χρησιμοποιούμε τον τύπο:

Έξοδα Διακανονισμού Ζημιών = Άμεσα Έξοδα Διακανονισμού Ζημιών + Έμμεσα Έξοδα Διακανονισμού Ζημιών.

1.7.4.1 Άμεσα Έξοδα Διακανονισμού Ζημιών (Allocated Loss Adjustment Expenses - ALAE)

Είναι τα έξοδα τα οποία θα κληθεί να πληρώσει η ασφαλιστική εταιρεία τα οποία όμως μπορούν να αποδοθούν άμεσα και εύκολα με κάποια συγκεκριμένη ζημιά. Κυρίως τα ALAE έξοδα έχουν να κάνουν με πληρωμές ζημιών, έξοδα εμπειρογνωμόνων, έξοδα διακανονισμού ζημιών καθώς και με έξοδα προς δικηγόρους αν χρειαστεί μια υπόθεση να πάει δικαστικά.

1.7.4.2 Έμμεσα Έξοδα Διακανονισμού Ζημιών (Unallocated Loss Adjustment Expenses - ULAE)

Έχουν να κάνουν με έξοδα που αφορούν και πάλι ζημιές αλλά δεν σχετίζονται άμεσα με μια συγκεκριμένη ζημιά, γι' αυτό το λόγο παρακολουθούνται σε συγκεντρωτικό επίπεδο. Για παράδειγμα, για την μισθοδοσία των υπαλλήλων του τμήματος αποζημιώσεων ή για την γραφική ύλη η οποία καταναλώνεται προκειμένου να διευθετηθούν οι ζημιές και να λειτουργήσει το τμήμα αποζημιώσεων.

Για την συγγραφή του τρέχοντος κεφαλαίου χρησιμοποιήσαμε τις εξής πηγές:

Άρθρο 4 νόμου 4364/2016, Ζυμπίδης (2008), Πιτσέλης (2020), Brown & Gottlieb (2007), Friedland (2010) και Werner et al. (2016)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μέθοδοι Αποθεματοποίησης

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε μια σημαντική διαδικασία για μια ασφαλιστική εταιρεία, την αποθεματοποίηση ζημιών, τον τρόπο δηλαδή με τον οποίο οι ασφαλιστικές εταιρείες αποθεματοποιούν χρήματα προς όφελος των ασφαλισμένων τους προκειμένου να είναι σε θέση να ανταποκριθούν επαρκώς στις μελλοντικές τους υποχρεώσεις. Αποτελεί δηλαδή μια εκτίμηση των κεφαλαίων τα οποία θα πρέπει να έχει διαθέσιμα μια ασφαλιστική εταιρεία προκειμένου να είναι σε θέση να καλύψει μελλοντικές ζημιές που μπορεί να προκύψουν από ασφαλιστήρια συμβόλαια τα οποία έχει ήδη εγγράψει.

Η στρατηγική της διαδικασίας αποθεματοποίησης χωρίζεται σε τέσσερα (4) στάδια ως εξής:

I. **Ανάλυση στατιστικών δεδομένων.**
   Ο αναλογιστής σε αυτή την πρώτη φάση αξιολογεί την ομοιογένεια και την αξιοπιστία των δεδομένων.

II. **Επιλογή κατάλληλων τεχνικών αποθεματοποίησης.**
   Στη δεύτερη φάση και αφού πρώτα έχει γίνει η ανάλυση των δεδομένων επιλέγονται κάποιες από τις καταλληλότερες μεθόδους αποθεματοποίησης που θεωρείται ότι ταιριάζουν με τα δεδομένα.

III. **Αξιολόγηση αποτελεσμάτων των διαφόρων τεχνικών αποθεματοποίησης.**
   Στην τρίτη φάση γίνεται αξιολόγηση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τις μεθόδους αποθεματοποίησης που εφαρμόστηκαν.

IV. Δημιουργία προβολών για την εξέλιξη των αποθεμάτων.

Στην τέταρτη φάση επιλέγεται η καταλληλότερη μέθοδος και βάση αυτής ο αναλογιστής προβαίνει στη δημιουργία προβολών για την εξέλιξη των αποθεμάτων στα επόμενα έτη.

Μία σημαντική εργασία ενός αναλογιστή είναι ο υπολογισμός του αποθέματος για την κάλυψη ανεξόφλητων υποχρεώσεων που έχει μια ασφαλιστική εταιρεία προς τους πελάτες της. Στην αναλογιστική επιστήμη χρησιμοποιούνται αρκετές μέθοδοι για την εκτίμηση αυτού του αποθέματος. Οι μέθοδοι αυτές παρόλο που αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο στην προσπάθεια του αναλογιστή να εκτιμήσει αυτό το απόθεμα, καταλυτικό ρόλο στην τελική του απόφαση συνιστά τόσο η εμπειρία όσο και η κρίση του.

Για την συγγραφή του τρέχοντος κεφαλαίου χρησιμοποιήσαμε τις εξής πηγές:

Σημειώσεις Ελληνικής και Αγγλικής Ένωσης Αναλογιστών, Ζυμπίδης (2008), Πιτσέλης (2020), Brown & Gottlieb (2007), Friedland (2010), Werner et al. (2016), Wuthrich (2023), Bornhuetter & Ferguson (1972), Hardy (2022) και Mack (1993).

2.2 Τρίγωνο Εξέλιξης Ζημιών (Run-off triangles)

Προτού προχωρήσουμε στις μεθόδους αποθεματοποίησης ζημιών καλό θα ήταν να επισημάνουμε για αρχή ότι υπάρχουν διάφοροι τρόποι που μπορούμε να παρουσιάσουμε τα δεδομένα των ζημιών μας, οι οποίοι δίνουν έμφαση σε διάφορες πτυχές των δεδομένων. Η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη μέθοδος η οποία συναντάται και στις περισσότερες μεθόδους είναι τα τρίγωνα εξέλιξης ζημιών. Τα τρίγωνα εξέλιξης αποτελούν ένα από τα πιο συνηθισμένα εργαλεία που οι αναλογιστές χρησιμοποιούν για να οργανώσουν δεδομένα προκειμένου να αναλύσουν αν υπάρχουν τάσεις σε ιστορικά δεδομένα. Στην ουσία οι αναλογιστές τα χρησιμοποιούν για να ποσοτικοποιήσουν την ιστορική εξέλιξη των ζημιών. Η διαδικασία προσαρμογής των ζημιών που δεν έχουν εξελιχθεί ακόμα σε μια εκτιμώμενη τελική τιμή είναι γνωστή ως εξέλιξη ζημιών (loss development).

Η εξέλιξη ενός τριγώνου μπορεί να είναι είτε θετική είτε αρνητική. Για παράδειγμα, ο αριθμός των ζημιών που σχετίζεται με ζημιές που εμφανίζονται σε ένα συγκεκριμένο έτος ατυχήματος (accident year), συχνά θα αυξηθεί από το ένα σημείο αποτίμησης στο άλλο μέχρι όλες οι ζημιές να αναφερθούν. Υπάρχουν ωστόσο κάποιες περιπτώσεις όπου ο αριθμός των ζημιών μειώνεται από το ένα σημείο αποτίμησης στο άλλο.

Υπάρχουν 3 σημαντικές διαστάσεις σε ένα τρίγωνο εξέλιξης:

- Οι γραμμές, όπου κάθε γραμμή σε ένα τρίγωνο εξέλιξης αντιπροσωπεύει την περίοδο όπου προήλθε μια ζημιά (origin period ή occurrence period ή experience period).
- Οι διαγώνιες, όπου κάθε διαγώνιος σε ένα τρίγωνο εξέλιξης αντιπροσωπεύει διαδοχικές ημερομηνίες αποτίμησης (valuation date).
- Οι στήλες, όπου κάθε στήλη σε ένα τρίγωνο αντιπροσωπεύει την περίοδο εξέλιξης (development period) μιας ζημιάς, δηλαδή τη διαχρονική εξέλιξη πληρωμής μιας ζημιάς και σχετίζεται άμεσα με τον συνδυασμό της περιόδου προέλευσης (γραμμή) και της ημερομηνίας αποτίμησης (διαγώνιος) που χρησιμοποιήθηκαν για την δημιουργία του τριγώνου.

Το πρώτο βήμα για την δημιουργία τριγώνων είναι να προσδιορίσουμε το χρονικό διάστημα για την οργάνωση των δεδομένων μας. Το χρονικό διάστημα αυτό αντιπροσωπεύει τις γραμμές του τριγώνου. Τα πιο συνηθισμένα χρονικά διαστήματα που συναντάμε είναι τα εξής:

- Έτος ατυχήματος (Accident year).
- Ημερολογιακό έτος (Calendar year).
- Έτος αναφοράς (Report year).
- Έτος ανάληψης (Underwriting year).
- Ασφαλιστικό έτος (Policy year).
- Δημοσιονομικό έτος (Fiscal year).

Οι ζημιές μπορούν να κατηγοριοποιηθούν κατά χρονικά διαστήματα διαφορετικά από τα ετήσια. Οι αναλογιστές χρησιμοποιούν επίσης μηνιαία, τριμηνιαία, τετραμηνιαία και εξαμηνιαία δεδομένα για την ανάπτυξη εκτιμήσεων για τις ζημιές. Υπάρχουν πολλών ειδών τύποι δεδομένων για τις ζημιές που μπορούν να παρουσιαστούν σε ένα τρίγωνο εξέλιξης. Οι πιο συνηθισμένοι είναι οι εξής:

- Προσαυξητικές ή σωρευτικές επισυμβάσες ζημιές.
- Εκκρεμείς ζημιές.
- Προσαυξητικές ή σωρευτικές πληρωθείσες ζημιές.
- Πλήθος προσαυξητικών ή σωρευτικών αναφερθεισών απαιτήσεων.
- Πλήθος ανοιχτών απαιτήσεων.

Επίσης οι αναλογιστές χρησιμοποιούν τους τύπους δεδομένων της λίστας που είδαμε παραπάνω προκειμένου να δημιουργήσουν τρίγωνα με τους λόγους και τους μέσους όρους των δεδομένων αυτών των ζημιών, όπως είναι:

- $Μέσος\ όρος\ πλήθους\ ανοιχτών\ απαιτήσεων = \frac{Επισυμβάσες\ ζημιές - Πληρωθείσες\ ζημιές}{Πλήθος\ ανοιχτών\ απαιτήσεων}$.
- $Μέσος\ όρος\ πληρωθεισών\ ζημιών = \frac{Πληρωθείσες\ ζημιές}{Πλήθος\ αναφερθεισών\ απαιτήσεων - Πλήθος\ ανοιχτών\ απαιτήσεων}$.
- $Μέσος\ όρος\ επισυμβασών\ ζημιών = \frac{Επισυμβάσες\ ζημιές}{Πλήθος\ αναφερθεισών\ απαιτήσεων}$.

Από την λίστα που αναφέρθηκε παραπάνω και αφορούσε τους τύπους δεδομένων που μπορούμε να εισάγουμε σε ένα τρίγωνο ζημιών συμπεραίνουμε ότι οι τύποι δεδομένων μας είναι είτε ποσά ζημιών είτε πλήθος ζημιών. Επιπρόσθετα, οι ζημιές μπορεί να είναι είτε σε προσαυξητική (Incremental) είτε σε σωρευτική (Cumulative) μορφή, για τις πληρωθείσες και επισυμβάσες ζημιές. Στον παρακάτω πίνακα μπορούμε να δούμε την μορφή που έχει ένα τρίγωνο εξέλιξης ζημιών.

Πίνακας 2.1: Τρίγωνο Εξέλιξης Ζημιών

Έτος Ατυχήματος (Accident Year)	Έτος Εξέλιξης (Development Year)							
	1	**2**	**…**	**j-1**	**j**	**…**	**I-1**	**I**
1	X_{11}	X_{12}	…	$X_{1,j-1}$	X_{1j}	…	$X_{1,I-1}$	X_{1I}
2	X_{21}	X_{22}	…	$X_{2,j-1}$	X_{2j}	…	$X_{2,I-1}$	
…	…	…	…	…	…	…		
i-1	$X_{i-1,1}$	$X_{i-1,2}$	…	$X_{i-1,j-1}$	$X_{i-1,j}$			
i	X_{i1}	X_{i2}	…	$X_{i,j-1}$				
…	…	…	…					
I-1	$X_{I-1,1}$	$X_{I-1,2}$						
I	X_{I1}							

Ορίζουμε ως $X_{i,j}$ μια τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει τις προσαυξητικές ζημιές (Incremental losses) για το i έτος ατυχήματος και το j έτος εξέλιξης.

Στην περίπτωση που προσθέσουμε για κάθε έτος ατυχήματος τις προσαυξητικές ζημιές λαμβάνουμε τις σωρευτικές ζημιές (Cumulative losses). Οι οποίες συμβολίζονται με την τυχαία μεταβλητή $C_{i,j}$ και ισχύει ότι:

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} X_{ik} \,.$$

Επομένως το τρίγωνο των σωρευτικών ζημιών προκύπτει χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση καθώς και τα δεδομένα των προσαυξητικών ζημιών του Πίνακα 2.1.

Πίνακας 2.2: Σωρευτικό Τρίγωνο Εξέλιξης Ζημιών

Έτος Ατυχήματος (Accident Year)	**Έτος Εξέλιξης (Development Year)**							
	1	***2***	***…***	***j-1***	***j***	***…***	***I-1***	***I***
1	C_{11}	C_{12}	…	$C_{1,j-1}$	C_{1j}	…	$C_{1,I-1}$	C_{1I}
2	C_{21}	C_{22}	…	$C_{2,j-1}$	C_{2j}	…	$C_{2,I-1}$	
…	…	…	…	…	…	…		
i-1	$C_{i-1,1}$	$C_{i-1,2}$	…	$C_{i-1,j-1}$	$C_{i-1,j}$			
i	C_{i1}	C_{i2}	…	$C_{i,j-1}$				
…	…	…	…					
I-1	$C_{I-1,1}$	$C_{I-1,2}$						
I	C_{I1}							

Να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι η πάνω αριστερή γωνία του τριγώνου αντιπροσωπεύει "γνωστές" παρελθούσες ζημιές, ενώ η κάτω δεξιά γωνία αντιπροσωπεύει "άγνωστες" μελλοντικές ζημιές. Σκοπός είναι να εξετάσουμε μεθόδους εκτίμησης για την εύρεση αυτών των άγνωστων ζημιών έτσι ώστε να συμπληρώσουμε το κάτω δεξιό τρίγωνο. Για κάθε έτος ατυχήματος, η διαφορά μεταξύ του αριθμού στην ακραία δεξιά στήλη και του συνολικού ποσού που έχει καταβληθεί μέχρι σήμερα (τελευταία διαγώνιος του τριγώνου) θα μας δώσει την εκτίμηση του ποσού που πρέπει να κρατήσουμε σήμερα για να καλύψουμε τις μελλοντικές υποχρεώσεις που θα προκύψουν.

2.3 Μέθοδος Chain Ladder

Η μέθοδος Chain Ladder γνωστή και σαν μέθοδος εξέλιξης, είναι μια από τις πιο συχνές μεθοδολογίες για την εκτίμηση ζημιών. Η συγκεκριμένη μέθοδος βασίζεται στην υπόθεση ότι οι συνολικές ζημίες θα μεταβούν από τις μη-πληρωθείσες στις πληρωθείσες με ένα μοτίβο που είναι γενικά σταθερό με την πάροδο του χρόνου. Ως εκ τούτου, τα ιστορικά μοτίβα εξέλιξης των ζημιών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την πρόβλεψη της εξέλιξης των μελλοντικών ζημιών.

Επομένως, σε αυτή την μέθοδο, οι αναλογιστές χρησιμοποιούν τα τρίγωνα εξέλιξης για να παρακολουθήσουν την ιστορική εξέλιξη των ζημιών. Η υπόθεση στην Chain Ladder είναι ότι οι ζημιές που έχουν καταγραφεί μέχρι σήμερα θα συνεχίσουν να εξελίσσονται με παρόμοιο τρόπο και στο μέλλον, δηλαδή ότι το παρελθόν αποτελεί μια καλή ένδειξη του μέλλοντος. Οι αναλογιστές εφαρμόζουν την Chain Ladder τόσο στις πληρωθείσες όσο και στις επισυμβάσες ζημιές. Και οι δύο προσεγγίσεις, αν και χρησιμοποιούν διαφορετικά δεδομένα έχουν κοινό στόχο που είναι η βέλτιστη εκτίμηση του τελικού κόστους των ζημιών.

Κάποιες βασικές υποθέσεις της μεθόδου είναι οι εξής:

I. Η εξέλιξη του παρελθόντος θα επαναληφθεί και στο μέλλον (πχ. δικαστικές ζημιές, αντασφαλιστικά όρια, μίξη χαρτοφυλακίου κλπ).
II. Ο πληθωρισμός του παρελθόντος θα επαναληφθεί.
III. Δεν υπάρχει εξέλιξη των ζημιών πέραν του άνω δεξιού ορίου του τριγώνου.
IV. Υπάρχουν αρκετές πληροφορίες για το κάτω δεξί όριο του τριγώνου.

2.3.1 Περιγραφή διαδικασίας εκτίμησης

Η μέθοδος Chain Ladder αποτελείται από εφτά βασικά βήματα τα οποία είναι τα εξής:

- **Βήμα 1^{ο}:** ***Συλλογή δεδομένων των ζημιών σε ένα τρίγωνο εξέλιξης.***
  Εισάγουμε τις ζημιές μας σε ένα τρίγωνο εξέλιξης και αναλόγως σε τι μορφή μας έχουν δοθεί δημιουργούμε το τρίγωνο των σωρευτικών ζημιών.

- **Βήμα 2^{ο}:** ***Υπολογισμός των συντελεστών εξέλιξης (link ratios ή age-to-age factors ή loss development factors).***
  Το επόμενο μας βήμα αφορά τον υπολογισμό των συντελεστών εξέλιξης. Οι συντελεστές εξέλιξης απεικονίζουν την μεταβολή των ζημιών από τη μια ημερομηνία αποτίμησης στην επόμενη, δηλαδή για ένα συγκεκριμένο έτος ατυχήματος μεταξύ δύο διαδοχικών ετών. Για τον υπολογισμό των συντελεστών εξέλιξης διαιρούμε δύο διαδοχικά ποσά ζημιών. Δηλαδή θα έχουμε τον εξής τύπο:

$$f_{ij} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}.$$

- **<u>Βήμα 3ο</u>: *Υπολογισμός μέσων όρων για τους συντελεστές εξέλιξης.***

  Αφού συμπληρώσουμε το τρίγωνο των συντελεστών εξέλιξης, το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε τους μέσους όρους των συντελεστών. Οι αναλογιστές χρησιμοποιούν μια ευρεία ποικιλία μέσων όρων για τους συντελεστές. Μερικοί από τους πιο συνηθισμένους μέσους όρους περιλαμβάνουν:

  - Αριθμητικός μέσος όρος.
  - Αριθμητικός μέσος όρος εξαιρουμένων της μικρότερης και της μεγαλύτερης τιμής.
  - Σταθμισμένος μέσος όρος.

    Ο σταθμισμένος μέσος όρος χρησιμοποιείται ως στάθμιση για τα σωρευτικά ποσά των επισυμβασών ή των πληρωθεισών ζημιών. Ο υπολογισμός για αυτόν τον τύπο μέσου όρου μπορεί να προκύψει με δύο διαφορετικούς τρόπους:

    I. Είτε αθροίζοντας τις ζημιές για ένα συγκεκριμένο αριθμό ετών ενός έτους εξέλιξης διαιρώντας με το άθροισμα των ζημιών για τα ίδια έτη του προηγούμενου έτους εξέλιξης, δηλαδή:

    $$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{m-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{m-j} C_{ij}}.$$

    II. Είτε σταθμίζοντας τις ζημιές ενός έτους εξέλιξης με τα f_{ij} και διαιρώντας αυτές με το άθροισμα των ζημιών του έτους εξέλιξης που πήραμε, δηλαδή:

    $$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{m-j} f_{ij} \times C_{ij}}{\sum_{i=1}^{m-j} C_{ij}}.$$

  - Γεωμετρικός μέσος όρος (ν-οστή ρίζα του γινομένου των ν συντελεστών εξέλιξης για το έτος εξέλιξης).

- **<u>Βήμα 4ο</u>: *Επιλογή των συντελεστών εξέλιξης.***

  Ο επιλεγμένος συντελεστής εξέλιξης αντιπροσωπεύει την εξέλιξη που αναμένεται σε μεταγενέστερο διάστημα. Κατά την επιλογή των συντελεστών εξέλιξης, οι αναλογιστές εξετάζουν τα ιστορικά δεδομένα εξέλιξης των ζημιών, τους συντελεστές εξέλιξης και τους διάφορους μέσους όρους τους. Τέλος αναμένεται να υπάρχει διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων για την εκτίμηση του τελικού κόστους των ζημιών αν επιλεχθεί διαφορετική ομάδα συντελεστών εξέλιξης.

Όταν επιλέγουν συντελεστές εξέλιξης, οι αναλογιστές εξετάζουν την εμπειρία εξέλιξης των ζημιών για τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

I. Ομαλή εξέλιξη των επιμέρους αλλά και του μέσου όρου των συντελεστών σε όλες τις περιόδους εξέλιξης. Ιδανικά, το μοτίβο θα πρέπει να δείχνει σταθερά φθίνουσα εξέλιξη από αποτίμηση σε αποτίμηση (δηλαδή, καθώς απομακρυνόμαστε περισσότερο από την περίοδο ατυχήματος), ιδίως στις μεταγενέστερες ημερομηνίες αποτιμήσεις.
II. Σταθερότητα των συντελεστών για την ίδια περίοδο εξέλιξης. Ιδανικά, θα πρέπει να υπάρχει ένα σχετικά μικρό εύρος συντελεστών (μικρή διακύμανση) εντός κάθε διαστήματος εξέλιξης (δηλαδή, κάτω από τις στήλες). Αναζητούμε τη σταθερότητα των συντελεστών εξέλιξης και εντός των διαφόρων μέσων όρων για την ίδια περίοδο εξέλιξης.
III. Αξιοπιστία της εμπειρίας. Οι αναλογιστές προσδιορίζουν γενικά την αξιοπιστία με βάση τον όγκο και την ομοιογένεια της εμπειρίας για ένα δεδομένο έτος ατυχήματος. Εάν η εμπειρία εξέλιξης των ζημιών του ασφαλιστή έχει περιορισμένη αξιοπιστία λόγω του περιορισμένου όγκου ζημιών, οργανωτικών αλλαγών ή άλλων παραγόντων, μπορεί να είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν συντελεστές εξέλιξης αναφοράς (benchmark) από τον ασφαλιστικό κλάδο.
IV. Αλλαγές στα πρότυπα. Οι αναλογιστές επανεξετάζουν τους συντελεστές εξέλιξης για να εντοπίσουν συστηματικά πρότυπα που μπορεί να υποδηλώνουν αλλαγές στις εσωτερικές λειτουργίες ή στο εξωτερικό περιβάλλον.
V. Εφαρμογή της ιστορικής εμπειρίας. Οι αναλογιστές καθορίζουν την καταλληλότητα των ιστορικών συντελεστών εξέλιξης για την προβολή της μελλοντικής εξέλιξης των ζημιών με βάση ποιοτικές πληροφορίες σχετικά με τις αλλαγές στο χαρτοφυλάκιο εργασιών και τις δραστηριότητες της ασφαλιστικής εταιρείας με την πάροδο του χρόνου. Εξετάζουν επίσης την

επίδραση των αλλαγών σε εξωτερικούς παράγοντες που δεν έχουν ακόμη εκδηλωθεί στην εμπειρία των επισυμβασών ζημιών.

Προκειμένου ο εκάστοτε αναλογιστής να επιλέξει συντελεστές εξέλιξης για κάθε χρονικό διάστημα εξέλιξης, καθώς και ουρά εξέλιξης (tail factor) είναι απαραίτητη η κρίση του, αφού πρώτα εξετάσει όλους τους συντελεστές και τους διάφορους μέσους όρους.

Αναγνωρίζουμε ότι οι επιλογές των συντελεστών είναι υποκειμενικές και πιθανότατα θα διαφέρουν από τον έναν αναλογιστή στον άλλο, ίσως και σημαντικά, καθώς η διαδικασία επιλογής περιλαμβάνει σημαντική αναλογιστική κρίση. Όταν διαφορετικοί αναλογιστές εφαρμόζουν τη δική τους εμπειρία και διορατικότητα στην ανάλυση των ίδιων δεδομένων, οι επιλεγμένοι συντελεστές συνήθως διαφέρουν – άλλοτε κατά μικρό και άλλοτε κατά μεγάλο ποσό. Είναι σημαντικό να εκτιμηθεί ότι υπάρχουν περισσότερες από μία λογικές επιλογές συντελεστών εξέλιξης και ουράς εξέλιξης.

- **Βήμα 5^{o}: *Επιλογή της ουράς εξέλιξης (tail factor).***

  Η ουρά εξέλιξης απαιτείται όταν το παλαιότερο έτος του τριγώνου δεν έχει εξελιχθεί πλήρως. Η ανάγκη για την ουρά εξέλιξης μπορεί να προσδιοριστεί κοιτάζοντας το τρίγωνο και βλέποντας ότι εξακολουθεί να εξελίσσεται. Για παράδειγμα μία ουρά εξέλιξης 1,10 σημαίνει ότι, αναμένουμε ότι θα εξελιχθούν οι ζημιές κατά 10% περαιτέρω από το $n-1$ έτος μέχρι το τελικό n έτος. Αντίθετα η χρήση ουράς εξέλιξης 1,00 υποδηλώνει ότι δεν υπάρχει πρόσθετη εξέλιξη των ζημιών που περιλαμβάνονται στο τρίγωνο. Επομένως εάν τα δεδομένα είναι διαθέσιμα, ο αναλογιστής θα πρέπει να αναλύσει την εξέλιξη μέχρι το σημείο στο οποίο η εξέλιξη σταματάει (δηλαδή έως ότου οι επιλεγμένοι συντελεστές εξέλιξης να είναι ίσοι με 1,00). Ο αριθμός των απαιτούμενων περιόδων εξέλιξης ποικίλλει ανάλογα με τον κλάδο ασφάλισης και τον τύπο δεδομένων.

  Μερικές φορές τα δεδομένα δεν παρέχουν αρκετές περιόδους εξέλιξης. Αυτό συμβαίνει όταν οι συντελεστές για τις μεταγενέστερες περιόδους εξέλιξης εξακολουθούν να είναι σημαντικά μεγαλύτεροι από 1.000. Όταν συμβαίνει αυτό, ο αναλογιστής θα πρέπει να καθορίσει μία ουρά εξέλιξης για να φέρει τις ζημιές από την τελευταία παρατηρήσιμη περίοδο εξέλιξης σε μια τελική τιμή.

Για ορισμένους κλάδους ασφάλισης και ορισμένους τύπους δεδομένων, η ουρά εξέλιξης μπορεί να είναι ιδιαίτερα δύσκολο να επιλεγεί λόγω της περιορισμένης διαθεσιμότητας των σχετικών δεδομένων. Το σημείο εξέλιξης πέρα από το οποίο δεν απαιτείται ουρά εξέλιξης ποικίλλει σε μεγάλο βαθμό ανά κλάδο ασφάλισης. Για καλύψεις κλάδων με μικρή εξέλιξη, οι ασφαλιστές γενικά διακανονίζουν τις ζημιές εντός μηνών ή λίγων ετών από την ημερομηνία του ατυχήματος. Ωστόσο, για κλάδους με μακρά εξέλιξη, ορισμένες ζημιές μπορεί να χρειαστούν περισσότερα από δεκαπέντε χρόνια για να φτάσουν σε οριστικό διακανονισμό.

Η ουρά εξέλιξης είναι ζωτικής σημασίας, καθώς επηρεάζει την εκτίμηση των ζημιών για όλα τα έτη ατυχήματος και μπορεί να δημιουργήσει δυσανάλογη επιρροή στο σύνολο των εκτιμώμενων ζημιών. Επίσης παίζει σημαντικό ρόλο σε αρκετές μεθόδους αποθεματοποίησης.

- **Βήμα 6^{ο}:** ***Υπολογισμός των σωρευτικών συντελεστών εξέλιξης (CDF ή age-to-ultimate factors ή claim development factors to ultimate).***

  Υπολογίζουμε τους σωρευτικούς συντελεστές εξέλιξης ως το γινόμενο της ουράς και των επιλεγμένων συντελεστών εξέλιξης. Άρα, με βάση τους επιλεγμένους συντελεστές εξέλιξης από το βήμα 4 και την ουρά εξέλιξης από το βήμα 5.

- **Βήμα 7^{ο}:** ***(Εκτίμηση) Τελικού Κόστους και Αποθέματος Ζημιών.***

  Οι τελικές ζημιές είναι ίσες με το γινόμενο της τελευταίας αποτίμησης των πληρωθεισών ή επισυμβασών ζημιών (δηλαδή τα ποσά που εμφανίζονται στην τελευταία διαγώνιο του τριγώνου) κάθε έτους ατυχήματος και των σωρευτικών συντελεστών εξέλιξης. Τέλος για να βρούμε το απόθεμα για κάθε έτος ατυχήματος αφαιρούμε τα ποσά που βρίσκονται στην τελευταία διαγώνιο του τριγώνου από τις τελικές ζημιές.

2.3.2 Αριθμητικό παράδειγμα

Για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου Chain Ladder, θα παραθέσουμε το παρακάτω αριθμητικό παράδειγμα. Στον πίνακα που ακολουθεί απεικονίζονται οι προσαυξητικές πληρωθείσες ζημιές που αφορούν τις υλικές ζημιές για τον κλάδο αυτοκινήτου μιας Ασφαλιστικής Εταιρείας:

Πίνακας 2.3: Τρίγωνο προσαυξητικών πληρωθεισών ζημιών

Έτος Ατυχήματος (Accident Year)	Έτος Εξέλιξης (Development Year)							
	12	24	36	48	60	72	84	96
2011	8.463.296	3.195.607	1.531.270	1.223.518	790.502	535.019	260.346	20.483
2012	7.731.158	3.199.188	1.558.943	1.134.803	746.654	500.896	210.750	
2013	8.096.346	3.218.832	1.644.041	1.112.697	798.310	538.397		
2014	7.672.794	3.385.380	1.388.445	1.105.318	810.151			
2015	9.355.712	3.910.942	1.698.271	1.179.495				
2016	9.678.429	3.870.224	1.601.239					
2017	9.236.218	3.941.347						
2018	9.740.789							

Αρχικά πριν ξεκινήσουμε την διαδικασία εκτίμησης των τελικών ζημιών βλέπουμε ότι στο τρίγωνο μας υπάρχουν οκτώ (8) διαγώνιοι με ετήσιες ημερομηνίες αποτίμησης από 31 Δεκεμβρίου 2011 έως 31 Δεκεμβρίου 2018.

Ξεκινώντας την διαδικασία εκτίμησης των τελικών ζημιών και εύρεσης των αποθεμάτων υπολογίζουμε τις σωρευτικές πληρωθείσες ζημιές για κάθε έτος ατυχήματος προσθέτοντας κάθε φορά στο έτος εξέλιξης που θέλουμε να βρούμε τα προηγούμενα. Για παράδειγμα, για το έτος ατυχήματος 2011 οι σωρευτικές πληρωθείσες ζημιές υπολογίζονται ως εξής:

$$C_{2011\ 12} = 8.463.296$$
$$C_{2011\ 24} = 8.463.296 + 3.195.607 = 11.658.903$$
$$C_{2011\ 36} = 8.463.296 + 3.195.607 + 1.531.270 = 13.190.173$$
$$C_{2011\ 48} = 8.463.296 + 3.195.607 + 1.531.270 + 1.223.518 = 14.413.691$$
$$C_{2011\ 60} = 8.463.296 + 3.195.607 + 1.531.270 + 1.223.518 + 790.502 = 15.204.193$$
$$C_{2011\ 72} = 8.463.296 + 3.195.607 + 1.531.270 + 1.223.518 + 790.502 + 535.019 \\ = 15.739.212$$
$$C_{2011\ 84} = 8.463.296 + 3.195.607 + 1.531.270 + 1.223.518 + 790.502 + 535.019 \\ + 260.346 = 15.999.558$$
$$C_{2011\ 96} = 8.463.296 + 3.195.607 + 1.531.270 + 1.223.518 + 790.502 + 535.019 \\ + 260.346 + 20.483 = 16.020.041$$

Με παρόμοιο τρόπο θα υπολογίσουμε τις σωρευτικές πληρωθείσες ζημιές και για τα υπόλοιπα έτη ατυχήματος. Άρα, θα λάβουμε τον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 2.4: Τρίγωνο σωρευτικών πληρωθεισών ζημιών

Έτος Ατυχήματος (Accident Year)	Έτος Εξέλιξης (Development Year)							
	12	24	36	48	60	72	84	96
2011	8.463.296	11.658.903	13.190.173	14.413.691	15.204.193	15.739.212	15.999.558	16.020.041
2012	7.731.158	10.930.346	12.489.289	13.624.092	14.370.746	14.871.642	15.082.392	
2013	8.096.346	11.315.178	12.959.219	14.071.916	14.870.226	15.408.623		
2014	7.672.794	11.058.174	12.446.619	13.551.937	14.362.088			
2015	9.355.712	13.266.654	14.964.925	16.144.420				
2016	9.678.429	13.548.653	15.149.892					
2017	9.236.218	13.177.565						
2018	9.740.789							

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τους συντελεστές εξέλιξης με βάση τον τύπο που δόθηκε στο Βήμα 2. Άρα για το έτος ατυχήματος 2011 οι συντελεστές εξέλιξης θα είναι οι εξής:

$$f_{2011,12-24} = \frac{11.658.903}{8.463.296} = 1{,}378$$

$$f_{2011,24-36} = \frac{13.190.173}{11.658.903} = 1{,}131$$

$$f_{2011,36-48} = \frac{14.413.691}{13.190.173} = 1{,}093$$

$$f_{2011,48-60} = \frac{15.204.193}{14.413.691} = 1{,}055$$

$$f_{2011,60-72} = \frac{15.739.212}{15.204.193} = 1{,}035$$

$$f_{2011,72-84} = \frac{15.999.558}{15.739.212} = 1{,}017$$

$$f_{2011,84-96} = \frac{16.020.041}{15.999.558} = 1{,}001$$

Με παρόμοιο τρόπο θα υπολογίσουμε τους συντελεστές εξέλιξης και για τα υπόλοιπα έτη ατυχήματος. Οπότε, προκύπτει ο εξής πίνακας:

Πίνακας 2.5: Τρίγωνο συντελεστών εξέλιξης

Έτος Ατυχήματος (Accident Year)	Έτος Εξέλιξης (Development Year)						
	12 - 24	24 - 36	36 - 48	48 - 60	60 - 72	72 - 84	84 - 96
2011	1,378	1,131	1,093	1,055	1,035	1,017	1,001
2012	1,414	1,143	1,091	1,055	1,035	1,014	
2013	1,398	1,145	1,086	1,057	1,036		
2014	1,441	1,126	1,089	1,060			
2015	1,418	1,128	1,079				
2016	1,400	1,118					
2017	1,427						

Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο των συντελεστών εξέλιξης έχει μία σειρά και στήλη λιγότερη από το αρχικό τρίγωνο εξέλιξης.

Το επόμενο μας βήμα αφορά στον υπολογισμό των μέσων όρων των συντελεστών. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα υπολογίσουμε τον αριθμητικό, τον γεωμετρικό και τον σταθμισμένο μέσο όρο.

Για τον αριθμητικό μέσο όρο χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 2.5 θα έχουμε:

Για το έτος εξέλιξης 12-24: $\frac{1,378 + 1,414 + 1,398 + 1,441 + 1,418 + 1,400 + 1,427}{7} = 1,411$

Για το έτος εξέλιξης 24-36: $\frac{1,131 + 1,143 + 1,145 + 1,126 + 1,128 + 1,118}{6} = 1,132$

Για το έτος εξέλιξης 36-48: $\frac{1,093 + 1,091 + 1,086 + 1,089 + 1,079}{5} = 1,087$

Για το έτος εξέλιξης 48-60: $\frac{1,055 + 1,055 + 1,057 + 1,060}{4} = 1,057$

Για το έτος εξέλιξης 60-72: $\frac{1,035 + 1,035 + 1,036}{3} = 1,035$

Για το έτος εξέλιξης 72-84: $\frac{1,017 + 1,014}{2} = 1,015$

Για το έτος εξέλιξης 84-96: $1,001$

Για τον γεωμετρικό μέσο όρο χρησιμοποιώντας και πάλι τον Πίνακα 2.5 θα έχουμε:

Για το έτος εξέλιξης 12-24: $\sqrt[7]{1,378 \times 1,414 \times 1,398 \times 1,441 \times 1,418 \times 1,400 \times 1,427} = 1,411$

Για το έτος εξέλιξης 24-36: $\sqrt[6]{1,131 \times 1,143 \times 1,145 \times 1,126 \times 1,128 \times 1,118} = 1,132$

Για το έτος εξέλιξης 36-48: $\sqrt[5]{1,093 \times 1,091 \times 1,086 \times 1,089 \times 1,079} = 1,087$

Για το έτος εξέλιξης 48-60: $\sqrt[4]{1,055 \times 1,055 \times 1,057 \times 1,060} = 1,057$

Για το έτος εξέλιξης 60-72: $\sqrt[3]{1,035 \times 1,035 \times 1,036} = 1,035$

Για το έτος εξέλιξης 72-84: $\sqrt[2]{1,017 \times 1,014} = 1,015$

Για το έτος εξέλιξης 84-96: $1,001$

Και για τον σταθμισμένο μέσο όρο χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 2.4 θα έχουμε:

Για το έτος εξέλιξης 12-24:

$$\frac{11.658.903 + 10.930.346 + 11.315.178 + 11.058.174 + 13.266.654 + 13.548.653 + 13.177.565}{8.463.296 + 7.731.158 + 8.096.346 + 7.672.794 + 9.355.712 + 9.678.429 + 9.236.218} = 1,410$$

Για το έτος εξέλιξης 24-36:

$$\frac{13.190.173 + 12.489.289 + 12.959.219 + 12.446.619 + 14.964.925 + 15.149.892}{11.658.903 + 10.930.346 + 11.315.178 + 11.058.174 + 13.266.654 + 13.548.653} = 1{,}131$$

Για το έτος εξέλιξης 36-48: $\frac{14.413.691 + 13.624.092 + 14.071.916 + 13.551.937 + 16.144.420}{13.190.173 + 12.489.289 + 12.959.219 + 12.446.619 + 14.964.925} = 1{,}087$

Για το έτος εξέλιξης 48-60: $\frac{15.204.193 + 14.370.746 + 14.870.226 + 14.362.088}{14.413.691 + 13.624.092 + 14.071.916 + 13.551.937} = 1{,}057$

Για το έτος εξέλιξης 60-72: $\frac{15.739.212 + 14.871.642 + 15.408.623}{15.204.193 + 14.370.746 + 14.870.226} = 1{,}035$

Για το έτος εξέλιξης 72-84: $\frac{15.999.558 + 15.082.392}{15.739.212 + 14.871.642} = 1{,}015$

Για το έτος εξέλιξης 84-96: $\frac{16.020.041}{15.999.558} = 1{,}001$

Συγκεντρώνοντας τα παραπάνω αποτελέσματα θα λάβουμε τον παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα για τους μέσους όρους των συντελεστών:

Πίνακας 2.6: Μέσοι όροι των συντελεστών εξέλιξης

	Έτος Εξέλιξης (Development Year)						
	12 - 24	**24 - 36**	**36 - 48**	**48 - 60**	**60 - 72**	**72 - 84**	**84 - 96**
Αριθμητικός Μ.Ο.	1,411	1,132	1,088	1,057	1,035	1,016	1,001
Σταθμισμένος Μ.Ο.	1,410	1,131	1,087	1,057	1,035	1,015	1,001
Γεωμετρικός Μ.Ο.	1,411	1,132	1,088	1,057	1,035	1,015	1,001

Έπειτα από την εξέταση όλων των συντελεστών εξέλιξης παρατηρούμε ότι για κάθε περίοδο εξέλιξης όλοι οι συντελεστές είναι αρκετά συνεπείς για όλα τα έτη ατυχήματος που υπολογίστηκαν, επομένως θα μπορούσαμε να επιλέξουμε οποιονδήποτε από τους μέσους όρους που υπολογίστηκαν. Στο παράδειγμα μας θα επιλέξουμε ως καταλληλότερο τον σταθμισμένο μέσο όρο.

Παρατηρούμε τόσο από τον επιλεγμένο συντελεστή εξέλιξης (σταθμισμένο μέσο όρο) όσο και από το τρίγωνο που περιέχει τους συντελεστές ότι δεν υπάρχει περαιτέρω εξέλιξη των ζημιών μετά τους 96 μήνες καθώς και στις δύο περιπτώσεις το αποτέλεσμα στο τελευταίο έτος εξέλιξης ισούται με 1,001. Επομένως οι ζημιές έχουν σχεδόν σταματήσει να εξελίσσονται και γι αυτό τον λόγο η ουρά εξέλιξης θα είναι ίση με 1,000.

Στη συνέχεια, με την βοήθεια του επιλεγμένου συντελεστή και της ουράς εξέλιξης θα υπολογίσουμε τον σωρευτικό συντελεστή εξέλιξης με τον τρόπο που έχουμε αναλύσει στο Βήμα 6. Επομένως, θα έχουμε:

CDF για το έτος εξέλιξης 12-24 = 1,410 × 1,131 × 1,087 × 1,057 × 1,035 × 1,015 × 1,001 × 1,000 = 1,927
CDF για το έτος εξέλιξης 24-36 = 1,131 × 1,087 × 1,057 × 1,035 × 1,015 × 1,001 × 1,000 = 1,366
CDF για το έτος εξέλιξης 36-48 = 1,087 × 1,057 × 1,035 × 1,015 × 1,001 × 1,000 = 1,208
CDF για το έτος εξέλιξης 48-60 = 1,057 × 1,035 × 1,015 × 1,001 × 1,000 = 1,112
CDF για το έτος εξέλιξης 60-72 = 1,035 × 1,015 × 1,001 × 1,000 = 1,052
CDF για το έτος εξέλιξης 72-84 = 1,015 × 1,001 × 1,000 = 1,016
CDF για το έτος εξέλιξης 84-96 = 1,001 ×1,000 = 1,001
CDF για το έτος εξέλιξης 96-Ult = 1,000

Για την εκτίμηση του τελικού κόστους των ζημιών θα πολλαπλασιάσουμε τους σωρευτικούς συντελεστές εξέλιξης που υπολογίσαμε παραπάνω με τα σωρευτικά ποσά της τελευταίας διαγωνίου του τριγώνου του Πίνακα 2.4, δηλαδή με τις ζημιές που έχουν συσσωρευτεί κατά την ημερομηνία αποτίμησης στις 31/12/2018. Άρα θα έχουμε:

$\widehat{U}_{2011} = C_{2011\ 96}$ × CDF για το έτος εξέλιξης 96-Ult = 16.020.041 × 1,000 = 16.020.041
$\widehat{U}_{2012} = C_{2012\ 84}$ × CDF για το έτος εξέλιξης 84-96 = 15.082.392 × 1,001 = 15.097.474
$\widehat{U}_{2013} = C_{2013\ 72}$ × CDF για το έτος εξέλιξης 72-84 = 15.408.623 × 1,016 = 15.655.161
$\widehat{U}_{2014} = C_{2014\ 60}$ × CDF για το έτος εξέλιξης 60-72 = 14.362.088 × 1,052 = 15.108.917
$\widehat{U}_{2015} = C_{2015\ 48}$ × CDF για το έτος εξέλιξης 48-60 = 16.144.420 × 1,112 = 17.952.595
$\widehat{U}_{2016} = C_{2016\ 36}$ × CDF για το έτος εξέλιξης 36-48 = 15.149.892 × 1,208 = 18.301.070
$\widehat{U}_{2017} = C_{2017\ 24}$ × CDF για το έτος εξέλιξης 24-36 = 13.177.565 × 1,366 = 18.000.554
$\widehat{U}_{2018} = C_{2018\ 12}$ × CDF για το έτος εξέλιξης 12-24 = 9.740.789 × 1,927 = 18.770.500

Τέλος θα αφαιρέσουμε από τις τελικές ζημιές που βρήκαμε τις πληρωθείσες ζημιές της τελευταίας διαγωνίου και θα βρούμε το εκτιμώμενο απόθεμα για το κάθε έτος ατυχήματος. Δηλαδή:

$\widehat{R}_{2011} = \widehat{U}_{2011} - C_{2011\ 96}$ = 16.020.041 – 16.020.041 = 0
$\widehat{R}_{2012} = \widehat{U}_{2012} - C_{2012\ 84}$ = 15.097.474 – 15.082.392 = 15.082
$\widehat{R}_{2013} = \widehat{U}_{2013} - C_{2013\ 72}$ = 15.655.161 – 15.408.623 = 246.538
$\widehat{R}_{2014} = \widehat{U}_{2014} - C_{2014\ 60}$ = 15.108.917 – 14.362.088 = 746.829

$\widehat{R}_{2015} = \widehat{U}_{2015} - C_{2015\ 48} = 17.952.595 – 16.144.420 = 1.808.175$

$\widehat{R}_{2016} = \widehat{U}_{2016} - C_{2016\ 36} = 18.301.070 – 15.149.892 = 3.151.178$

$\widehat{R}_{2017} = \widehat{U}_{2017} - C_{2017\ 24} = 18.000.554 – 13.177.565 = 4.822.989$

$\widehat{R}_{2018} = \widehat{U}_{2018} - C_{2018\ 12} = 18.770.500 – 9.740.789 = 9.029.711$

Παρακάτω παραθέτουμε συγκεντρωτικό πίνακα με τα αποτελέσματα που βρήκαμε:

Πίνακας 2.7: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

Έτος Ατυχήματος (Accident Year)	Πληρωθείσες Ζημιές 31/12/2018	CDF	Εκτιμώμενες Τελικές Ζημιές	Απόθεμα Ζημιών
2011	16.020.041	1,000	16.020.041	0
2012	15.082.392	1,001	15.097.474	15.082
2013	15.408.623	1,016	15.655.161	246.538
2014	14.362.088	1,052	15.108.917	746.829
2015	16.144.420	1,112	17.952.595	1.808.175
2016	15.149.892	1,208	18.301.070	3.151.178
2017	13.177.565	1,366	18.000.554	4.822.989
2018	9.740.789	1,927	18.770.500	9.029.711

Από τα ανωτέρω αποτελέσματα, αθροίζοντας το απόθεμα για όλα τα έτη ατυχήματος προκύπτει ότι η συγκεκριμένη ασφαλιστική εταιρεία για τις υλικές ζημιές στον κλάδο αυτοκινήτου θα πρέπει να κρατήσει σύμφωνα με τη μέθοδο Chain Ladder συνολικό απόθεμα 19.820.502 ευρώ.

2.3.3 Σχόλια για τη μέθοδο Chain Ladder

Η μέθοδος Chain Ladder όπως έχουμε αναφέρει μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο στο τρίγωνο των επισυμβασών όσο και στο τρίγωνο των πληρωθεισών ζημιών. Αν και χρησιμοποιούν διαφορετικά δεδομένα και οι δύο προσεγγίσεις, έχουν κοινό στόχο που είναι η βέλτιστη εκτίμηση του τελικού κόστους των ζημιών σε μια χρονική στιγμή t ή εναλλακτικά η βέλτιστη εκτίμηση του συνολικού αποθέματος που πρέπει να διατηρείται τη χρονική στιγμή t για ζημιές που έχουν συμβεί μέχρι τότε, είτε αυτές έχουν αναγγελθεί είτε όχι. Η επιλογή της μεθόδου εξαρτάται από τη φύση του κλάδου που μελετάται, από την πολιτική αποθεματοποίησης της εταιρείας κτλ. Είναι χαρακτηριστικό ότι στην πράξη αρκετές φορές σε κάποιους κλάδους η εκτίμηση των τελικών ζημιών που βασίζεται στην Chain Ladder Paid είναι ποσοτικά μεγαλύτερη από αυτή της Chain Ladder Incurred, παρά το γεγονός ότι η δεύτερη βασίζεται σε ζημιές ποσοτικά μεγαλύτερες της πρώτης.

Όταν χρησιμοποιείται η Chain Ladder Incurred υπάρχει η έμμεση υπόθεση ότι δεν υπήρξαν σημαντικές αλλαγές στην επάρκεια των εκκρεμών ζημιών κατά τη διάρκεια της περιόδου προέλευσης της ζημιάς. Ενώ όταν χρησιμοποιείται η Chain Ladder Paid υπάρχει η έμμεση υπόθεση ότι δεν υπήρξαν σημαντικές αλλαγές κατά τη διάρκεια της περιόδου προέλευσης της ζημιάς στην ταχύτητα κλεισίματος και πληρωμής των ζημιών. Συνεπώς η μέθοδος Chain Ladder μπορεί να εφαρμοστεί κατάλληλα σε ένα σχετικά σταθερό περιβάλλον, όταν δηλαδή δεν υπάρχουν σημαντικές οργανωτικές και εξωτερικές περιβαλλοντικές αλλαγές όπως είναι για παράδειγμα:

- Αλλαγή φιλοσοφίας της εταιρείας αναφορικά με το διακανονισμό των απαιτήσεων.
- Αλλαγή πολιτικής στις πληρωμές.
- Αύξηση του πληθωρισμού.
- Εμφάνιση μίας ή περισσοτέρων μεγάλων απαιτήσεων σε ένα συγκεκριμένο έτος ή σε διαφορετικά έτη.
- Εμφάνιση καταστροφικών γεγονότων.
- Αλλαγή πρακτικής των δικαστηρίων, δηλαδή ταχύτερη ή βραδύτερη έκδοση αποφάσεων που αφορούν τις απαιτήσεις.

Πολλές φορές, οι αναλογιστές προκειμένου να αυξήσουν την σταθερότητα της μεθόδου αφαιρούν τον μικρότερο και τον μεγαλύτερο συντελεστή εξέλιξης για κάθε στήλη. Επίσης μερικές φορές μπορούν να χρησιμοποιήσουν βάρη στους συντελεστές εξέλιξης των τελευταίων ετών ή να κάνουν χρήση αρμονικού ή γεωμετρικού μέσου για να μειώσουν την επίδραση των ακραίων τιμών. Όποια τεχνική και αν χρησιμοποιηθεί από τις παραπάνω θα πρέπει να είναι καλά τεκμηριωμένη από τον εκάστοτε αναλογιστή.

Γενικά η μέθοδος Chain Ladder είναι κατάλληλη για κλάδους ασφάλισης υψηλής συχνότητας και χαμηλής σφοδρότητας με σταθερή και σχετικά έγκαιρη αναφορά των ζημιών, ιδίως όταν οι ζημιές κατανέμονται ομοιόμορφα κατά τη διάρκεια του έτους ατυχήματος, δηλαδή όταν ο όγκος των ζημιών δεν μεταβάλλεται σημαντικά από το ένα έτος στο άλλο.

2.4 Μέθοδος Δείκτη Ζημιών (Loss Ratio Method)

Η επόμενη μέθοδος που θα εξετάσουμε αφορά αυτή του Δείκτη Ζημιών. Η μέθοδος του Δείκτη Ζημιών αποτελεί βασικό συστατικό πολλών άλλων μεθόδων, συμπεριλαμβανομένης και της μεθόδου Bornhuetter-Ferguson που θα δούμε στη συνέχεια.

Στη μέθοδο αυτή κάνουμε εκτίμηση για τον Δείκτη Ζημιών και από εκεί εκτιμούμε το τελικό κόστος ζημιών. Η βασική παραδοχή της συγκεκριμένης μεθόδου είναι ότι ο αναλογιστής μπορεί να εκτιμήσει καλύτερα τις συνολικές μη-πληρωθείσες ζημιές με βάση μια εκ των προτέρων εκτίμηση παρά από την ιστορική εμπειρία των ζημιών που έχει παρατηρηθεί μέχρι σήμερα. Σε ορισμένες περιπτώσεις, η εμπειρία των ζημιών που έχει αναφερθεί μέχρι σήμερα μπορεί να παρέχει λίγες πληροφορίες σχετικά με τις τελικές ζημιές, ειδικά σε σύγκριση με την εκ των προτέρων εκτίμηση.

Σημαντικό ρόλο παρουσιάζει και η ιστορικότητα του δείκτη ζημιών κατά την εκτίμηση. Αν κυμαίνεται γύρω από ένα σταθερό ποσοστό κατά τα τελευταία χρόνια τότε αυτό μπορεί να οδηγήσει σε πιο ακριβή αποτελέσματα, χωρίς αυτό να είναι βέβαιο, αφού ο δείκτης μπορεί μελλοντικά να μεταβληθεί από γεγονότα που οφείλονται κυρίως σε οικονομικές επιρροές και σε αλλαγές που λαμβάνουν χώρα στην εταιρεία.

Η μέθοδος του Δείκτη Ζημιών χρησιμοποιείται συχνά:

- Σε νέους κλάδους ασφάλισης τα πρώτα χρόνια που δεν υπάρχουν αρκετά δεδομένα.
- Σε μικρούς κλάδους.
- Όταν λειτουργικές ή περιβαλλοντικές αλλαγές καθιστούν τα πρόσφατα ιστορικά δεδομένα σε κάποιο κλάδο ακατάλληλα για την πρόβλεψη της μελλοντικής εξέλιξης των ζημιών.

2.4.1 Περιγραφή διαδικασίας εκτίμησης

Η μέθοδος του Δείκτη Ζημιών αποτελείται από τρία βασικά βήματα τα οποία είναι τα εξής:

- **<u>Βήμα 1^ο</u>: *Συλλογή δεδομένων των ζημιών σε ένα τρίγωνο εξέλιξης.***

  Το πρώτο βήμα της μεθόδου του Δείκτη Ζημιών είναι αντίστοιχο με το πρώτο βήμα της μεθόδου Chain Ladder. Εισάγουμε τις ζημιές (πληρωθείσες ή επισυμβάσες) σε ένα τρίγωνο εξέλιξης και δημιουργούμε το τρίγωνο των σωρευτικών ζημιών.

- **<u>Βήμα 2^ο</u>: *Υπολογισμός (Εκτιμώμενου) Τελικού Κόστους Ζημιών.***

  Στο επόμενο βήμα για κάθε έτος ατυχήματος του τριγώνου εξέλιξης ζημιών, εκτιμούμε τον δείκτη ζημιών του έτους αυτού λαμβάνοντας υπόψη όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες που αφορούν τις πληρωθείσες ζημιές καθώς και τα δεδομένα που έχουν χρησιμοποιηθεί κατά την τιμολόγηση του ασφαλίστρου. Άρα βάση της μεθόδου του Δείκτη Ζημιών πολλαπλασιάζουμε τον δείκτη ζημιών με το δεδουλευμένο ασφάλιστρο υπολογίζοντας έτσι τις τελικές ζημιές για το εκάστοτε έτος ατυχήματος. Άρα, έχουμε:

$$Τελικές\ Ζημιές = Δείκτης\ Ζημιών \times Δεδουλευμένο\ Ασφάλιστρο.$$

- **<u>Βήμα 3^ο</u>: *Υπολογισμός Αποθέματος Ζημιών.***

  Τέλος, προκειμένου να υπολογίσουμε το απόθεμα θα χρειαστεί να αφαιρέσουμε από τις τελικές ζημιές που υπολογίσαμε στο δεύτερο βήμα τα ποσά που βρίσκονται στην τελευταία διαγώνιο του τριγώνου των σωρευτικών ζημιών. Οπότε προκύπτει ο εξής τύπος:

$$Απόθεμα\ Ζημιών = Τελικές\ Ζημιές - Ζημιές\ (πληρωθείσες\ ή\ επισυμβάσες)\ μέχρι\ σήμερα.$$

2.4.2 Αριθμητικό παράδειγμα

Στηριζόμενοι στα δεδομένα και τους υπολογισμούς που χρησιμοποιήσαμε στο αριθμητικό παράδειγμα της μεθόδου Chain Ladder για την εύρεση του αποθέματος, θα υπολογίσουμε το απόθεμα βάση της μεθόδου του Δείκτη Ζημιών.

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται τα δεδουλευμένα ασφάλιστρα για κάθε έτος ατυχήματος ενώ ο εκ των προτέρων δείκτης ζημιών είναι ίδιος για όλα τα έτη και ίσος με 43%.

Πίνακας 2.8: Δεδουλευμένο ασφάλιστρο ανά έτος ατυχήματος

Έτος Ατυχήματος (Accident Year)	Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο
2011	37.255.910
2012	37.959.819
2013	40.937.712
2014	38.103.648
2015	42.817.968
2016	42.918.280
2017	44.156.877
2018	43.637.469

Προτού ξεκινήσουμε την διαδικασία των υπολογισμών για την εύρεση του αποθέματος να επισημάνουμε ότι ο δείκτης ζημιών έχει ληφθεί ως εκείνος που σημειώθηκε για το πλήρως ανεπτυγμένο πρώτο έτος ατυχήματος. Αυτό έγινε καθαρά λόγω έλλειψης άλλων πληροφοριών. Με άλλα λόγια, το ποσοστό του 43% που υποθέτουμε υπολογίστηκε διαιρώντας τις τελικές ζημιές που πραγματοποιήθηκαν για το έτος ατυχήματος 2011 (δηλαδή 16.020.041) με το δεδουλευμένο ασφάλιστρο για το ίδιο έτος (δηλαδή 37.255.910). Εάν γνωρίζαμε ότι η εμπειρία των ζημιών ήταν πιθανό να είναι διαφορετική για τα άλλα έτη ατυχήματος, θα χρησιμοποιούσαμε διαφορετικά ποσοστά για τα άλλα έτη.

Έχοντας υπολογίσει αρχικά το τρίγωνο των σωρευτικών πληρωθεισών ζημιών προχωράμε στον υπολογισμό των τελικών ζημιών πολλαπλασιάζοντας τα δεδουλευμένα ασφάλιστρα ανά έτος ατυχήματος με τον δείκτη ζημιών. Άρα, θα έχουμε:

$\widehat{U}_{2011}$ = (Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο)$_{2011}$ × LR = 37.255.910 × 0,43 = 16.020.041

$\widehat{U}_{2012}$ = (Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο)$_{2012}$ × LR = 37.959.819 × 0,43 = 16.322.722

$\widehat{U}_{2013}$ = (Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο)$_{2013}$ × LR = 40.937.712 × 0,43 = 17.603.216

$\widehat{U}_{2014}$ = (Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο)$_{2014}$ × LR = 38.103.648 × 0,43 = 16.384.568

$\widehat{U}_{2015}$ = (Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο)$_{2015}$ × LR = 42.817.968 × 0,43 = 18.411.726

$\widehat{U}_{2016}$ = (Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο)$_{2016}$ × LR = 42.918.280 × 0,43 = 18.454.860

$\widehat{U}_{2017}$ = (Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο)$_{2017}$ × LR = 44.156.877 × 0,43 = 18.987.457

$\widehat{U}_{2018}$ = (Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο)$_{2018}$ × LR = 43.637.469 × 0,43 = 18.764.111

Τέλος για τον υπολογισμό του αποθέματος ανά έτος ατυχήματος θα αφαιρέσουμε από τις τελικές ζημιές τις σωρευτικές πληρωθείσες ζημιές με ημερομηνία αναφοράς 31/12/2018 (τελευταία διαγώνιος του τριγώνου). Επομένως θα έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

$\widehat{R}_{2011} = \widehat{U}_{2011} - C_{2011\ 96} = 16.020.041 – 16.020.041 = 0$

$\widehat{R}_{2012} = \widehat{U}_{2012} - C_{2012\ 84} = 16.322.722 – 15.082.392 = 1.240.330$

$\widehat{R}_{2013} = \widehat{U}_{2013} - C_{2013\ 72} = 17.603.216 – 15.408.623 = 2.194.593$

$\widehat{R}_{2014} = \widehat{U}_{2014} - C_{2014\ 60} = 16.384.568 – 14.362.088 = 2.022.480$

$\widehat{R}_{2015} = \widehat{U}_{2015} - C_{2015\ 48} = 18.411.726 – 16.144.420 = 2.267.306$

$\widehat{R}_{2016} = \widehat{U}_{2016} - C_{2016\ 36} = 18.454.860 – 15.149.892 = 3.304.968$

$\widehat{R}_{2017} = \widehat{U}_{2017} - C_{2017\ 24} = 18.987.457 – 13.177.565 = 5.809.892$

$\widehat{R}_{2018} = \widehat{U}_{2018} - C_{2018\ 12} = 18.764.111 – 9.740.789 = 9.023.322$

Παρακάτω παραθέτουμε συγκεντρωτικό πίνακα με τα αποτελέσματα που βρήκαμε:

Πίνακας 2.9: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

Έτος Ατυχήματος (Accident Year)	Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο	Πληρωθείσες Ζημιές 31/12/2018	Εκτιμώμενες Τελικές Ζημιές	Εκτιμώμενο Απόθεμα Ζημιών
2011	37.255.910	16.020.041	16.020.041	0
2012	37.959.819	15.082.392	16.322.722	1.240.330
2013	40.937.712	15.408.623	17.603.216	2.194.593
2014	38.103.648	14.362.088	16.384.568	2.022.480
2015	42.817.968	16.144.420	18.411.726	2.267.306
2016	42.918.280	15.149.892	18.454.860	3.304.968
2017	44.156.877	13.177.565	18.987.457	5.809.892
2018	43.637.469	9.740.789	18.764.111	9.023.322

Από τα ανωτέρω αποτελέσματα, αθροίζοντας το απόθεμα για όλα τα έτη ατυχήματος προκύπτει ότι η συγκεκριμένη ασφαλιστική εταιρεία για τις υλικές ζημιές στον κλάδο αυτοκινήτου θα πρέπει να κρατήσει σύμφωνα με τη μέθοδο του Δείκτη Ζημιών συνολικό απόθεμα 25.862.891 ευρώ.

2.4.3 Σχόλια για τη μέθοδο του Δείκτη Ζημιών

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η μέθοδος του Δείκτη Ζημιών χρησιμοποιείται συχνά όταν μια ασφαλιστική εταιρεία εισέρχεται σε έναν νέο κλάδο ασφάλισης. Τα πρώτα έτη όπου η ιστορική εμπειρία των ζημιών δεν επαρκεί για ένα νέο κλάδο μιας ασφαλιστικής εταιρείας ή για μια νέα ασφαλιστική εταιρεία, ο αναλογιστής μπορεί να είναι σε θέση να στραφεί σε πρότυπα αναφοράς (benchmarks) του ασφαλιστικού κλάδου για τους δείκτες ζημιών προκειμένου να εκτιμήσει τα αποθέματα.

Δεδομένου ότι οι πραγματικές ζημιές δεν υπεισέρχονται στους υπολογισμούς, η μέθοδος του Δείκτη Ζημιών έχει το πλεονέκτημα ότι διατηρεί τη σταθερότητα με την πάροδο του χρόνου. Η εκτίμηση του τελικού κόστους των ζημιών δεν αλλάζει εκτός εάν αλλάξουν οι παραδοχές για τον δείκτη ζημιών. Ενώ λοιπόν υπάρχει ένα πλεονέκτημα στη σταθερότητα των προβλέψεων, υπάρχει ένα μειονέκτημα στην έλλειψη ανταπόκρισης στην πρόσφατη εμπειρία. Επειδή, η μέθοδος αγνοεί την πραγματική εμπειρία των ζημιών, όπως έχει αναφερθεί, η μέθοδος δεν ανταποκρίνεται όταν η πραγματική εμπειρία των ζημιών διαφέρει από τις αρχικές προσδοκίες.

Ωστόσο, υπάρχουν φορές που ο αναλογιστής θα προσαρμόσει κατά την κρίση του τους δείκτες ζημιών με βάση την ιστορική εμπειρία, λόγω της πεποίθησης ότι είτε η τιμολόγηση είτε η ανάληψη κινδύνων είτε και τα δύο αλλάζουν. Σε μια τέτοια περίπτωση, ο αναλογιστής μπορεί να είναι σε θέση να προσαρμόσει την εκ των προτέρων εκτίμηση πριν οι αλλαγές εκδηλωθούν πλήρως στα δεδομένα. Σε αυτή την περίπτωση, η μέθοδος του Δείκτη Ζημιών θα μπορούσε να αποδειχθεί πιο ευέλικτη από τις μεθόδους που εξαρτώνται από τα δεδομένα.

2.5 Μέθοδος Bornhuetter-Ferguson

Η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson αποτελεί ένα συνδυασμό των μεθόδων Chain Ladder και Δείκτη Ζημιών, πρόκειται ουσιαστικά για μια μέθοδο που σταθμίζει (με βάρη) τις δύο αυτές μεθόδους. Το πρόβλημα στην Chain Ladder είναι ότι καθώς προχωράμε στο κάτω δεξί άκρο του τριγώνου η αβεβαιότητα μεγαλώνει. Όταν το τελευταίο έτος συμβάντος όπου έχουμε μόνο μία δεδομένη τιμή και διαδοχικά προβάλλουμε τα έτη εξέλιξης, όσο πιο πολύ προχωράμε τόσο αυξάνεται η ευαισθησία της μεθόδου. Στη μέθοδο του Δείκτη Ζημιών, η εκτίμηση των μη-πληρωθεισών ζημιών ισούται με τη διαφορά μεταξύ μιας προκαθορισμένης εκτίμησης των ζημιών και των πραγματικών πληρωμών. Αυτό έχει το πλεονέκτημα της σταθερότητας, αλλά αγνοεί εντελώς τα πραγματικά αποτελέσματα όπως αυτά αναφέρονται.

Η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson συνδυάζει τις δύο μεθόδους χωρίζοντας τις τελικές ζημιές σε δύο συνιστώσες: τις πραγματικές (επισυμβάσες ή πληρωθείσες) ζημιές και τις αναμενόμενες (μη επισυμβάσες ή μη πληρωθείσες) ζημιές. Καθώς η εμπειρία ωριμάζει, δίνεται μεγαλύτερη βαρύτητα στις πραγματικές ζημιές και οι αναμενόμενες ζημιές γίνονται σταδιακά λιγότερο σημαντικές.

Η βασική παραδοχή της μεθόδου Bornhuetter-Ferguson είναι ότι οι ζημιές (μη επισυμβάσες ή μη πληρωθείσες) θα εξελιχθούν με βάση τις αναμενόμενες ζημιές. Με άλλα λόγια, οι ζημιές που έχουν αναφερθεί μέχρι σήμερα δεν περιέχουν καμία πληροφοριακή αξία όσον αφορά το ποσό των ζημιών που δεν έχουν ακόμη αναγγελθεί, άρα υποθέτει ότι η εμπειρία του παρελθόντος δεν είναι πλήρως αντιπροσωπευτική του μέλλοντος. Αυτό διαφέρει από τη μέθοδο Chain Ladder, όπου η κύρια υπόθεση είναι ότι οι ζημιές θα εξελιχθούν με βάση τις ζημιές που έχουν πληρωθεί μέχρι σήμερα.

Οι ακόλουθοι δύο τύποι αντιπροσωπεύουν τη μέθοδο Bornhuetter-Ferguson, αντίστοιχα:

$$Τελικές\ Ζημιές = πραγματικές\ Επισυμβάσες\ ζημιές + αναμενόμενες\ μη\text{-}Επισυμβάσες\ ζημιές.$$
$$Τελικές\ Ζημιές = πραγματικές\ Πληρωθείσες\ ζημιές + αναμενόμενες\ μη\text{-}Πληρωθείσες\ ζημιές.$$

Δεδομένου ότι οι πραγματικές (επισυμβάσες ή πληρωθείσες) ζημιές είναι και οι δύο γνωστές ποσότητες, η πρόκληση της μεθόδου Bornhuetter-Ferguson είναι να υπολογιστούν οι αναμενόμενες (μη επισυμβάσες ή μη πληρωθείσες ζημιές).

2.5.1 Περιγραφή διαδικασίας εκτίμησης

Η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson αποτελείται από πέντε βασικά βήματα τα οποία παρουσιάζονται παρακάτω:

- **Βήμα 1^o**: ***Συλλογή δεδομένων των ζημιών σε ένα τρίγωνο εξέλιξης.***
  Παρόμοια με την μέθοδο της Chain Ladder έτσι και στη μέθοδο Bornhuetter-Ferguson εισάγουμε τις ζημιές (πληρωθείσες ή επισυμβάσες) σε ένα τρίγωνο ζημιών για κάθε έτος ατυχήματος και ανά έτος εξέλιξης και δημιουργούμε το τρίγωνο των σωρευτικών ζημιών.

- **Βήμα 2^o**: ***Υπολογισμός των συντελεστών εξέλιξης και των μέσων όρων τους.***
  Για τον υπολογισμό των συντελεστών εξέλιξης καθώς και των μέσων όρων τους αρκεί να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία που είδαμε μέσα από τα βήματα 2 και 3 της μεθόδου Chain Ladder.

- **Βήμα 3^o**: ***Επιλογή συντελεστών και ουράς εξέλιξης καθώς και υπολογισμός των σωρευτικών συντελεστών εξέλιξης.***
  Όπως και στο βήμα 2 έτσι και εδώ τόσο για την επιλογή των συντελεστών και της ουράς εξέλιξης όσο και για τον υπολογισμό των σωρευτικών συντελεστών εξέλιξης θα

ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία που έχει περιγραφεί στη μέθοδο Chain Ladder στα βήματα 4, 5 και 6.

- **<u>Βήμα 4^{ο}</u>: *Υπολογισμός (Εκτιμώμενου) Τελικού Κόστους Ζημιών.***
  Όπως αναφέραμε και στην αρχή της παραγράφου η μέθοδος Bornhuetter – Ferguson είναι μια μέθοδος που αποτελεί συνδυασμό των μεθόδων Chain Ladder και Δείκτη Ζημιών. Προκειμένου να υπολογίσουμε τις τελικές ζημιές της συγκεκριμένης μεθόδου για κάθε έτος ατυχήματος θα πρέπει να σταθμίσουμε τις μεθόδους Chain Ladder και Δείκτη Ζημιών χρησιμοποιώντας ως βάρη τους σωρευτικούς συντελεστές εξέλιξης κάθε περιόδου. Έτσι θα έχουμε τον παρακάτω τύπο:

$$\text{Τελικές Ζημιές (BF)} = \frac{1}{CDF} \times \text{Τελικές Ζημιές (CL)} + \left(1 - \frac{1}{CDF}\right) \times \text{Τελικές Ζημιές (ΔΖ)}.$$

- **<u>Βήμα 5^{ο}</u>: *Υπολογισμός Αποθέματος Ζημιών.***
  Τέλος για τον υπολογισμό του αποθέματος θα πρέπει να αφαιρέσουμε από τις τελικές ζημιές τις ζημιές της τελευταίας διαγωνίου του τριγώνου (είτε αυτές είναι πληρωθείσες είτε επισυμβάσες). Επομένως προκύπτει ο παρακάτω τύπος:

$$\text{Απόθεμα Ζημιών} = \text{Τελικές Ζημιές - Ζημιές (πληρωθείσες ή επισυμβάσες) μέχρι σήμερα}.$$

2.5.2 Αριθμητικό Παράδειγμα

Βασιζόμενοι στα αριθμητικά παραδείγματα της μεθόδου Chain Ladder και του Δείκτη Ζημιών θα υπολογίσουμε το απόθεμα της μεθόδου Bornhuetter-Ferguson.

Αρχικά, έχοντας υπολογίσει τον σωρευτικό συντελεστή εξέλιξης από τη μέθοδο Chain Ladder προχωράμε στην εύρεση της ποσότητας $1 - \frac{1}{CDF}$ η οποία θα μας δώσει το ποσοστό των ζημιών που δεν έχουν εξελιχθεί ακόμα για το εκάστοτε έτος ατυχήματος με ημερομηνία αποτίμησης 31/12/2018. Έτσι, θα έχουμε:

Για το έτος ατυχήματος 2011 = $1 - \frac{1}{\text{CDF}} = 1 - \frac{1}{1{,}000}$ = 0 ή 0%

Για το έτος ατυχήματος 2012 = $1 - \frac{1}{\text{CDF}} = 1 - \frac{1}{1{,}001}$ = 0,001 ή 0,1%

Για το έτος ατυχήματος 2013 = $1 - \frac{1}{\text{CDF}} = 1 - \frac{1}{1{,}016}$ = 0,016 ή 1,6%

Για το έτος ατυχήματος 2014 = $1 - \frac{1}{\text{CDF}} = 1 - \frac{1}{1{,}052}$ = 0,049 ή 4,9%

Για το έτος ατυχήματος 2015 = $1 - \frac{1}{\text{CDF}} = 1 - \frac{1}{1{,}112}$ = 0,101 ή 10,1%

Για το έτος ατυχήματος 2016 = $1 - \frac{1}{\text{CDF}} = 1 - \frac{1}{1{,}208}$ = 0,172 ή 17,2%

Για το έτος ατυχήματος 2017 = $1 - \frac{1}{\text{CDF}} = 1 - \frac{1}{1{,}366}$ = 0,268 ή 26,8%

Για το έτος ατυχήματος 2018 = $1 - \frac{1}{\text{CDF}} = 1 - \frac{1}{1{,}927}$ = 0,481 ή 48,1%

Ο υπολογισμός του τελικού κόστους ζημιών για τις μεθόδους Chain Ladder και Δείκτη Ζημιών έχει ήδη πραγματοποιηθεί στα αριθμητικά παραδείγματα που είδαμε παραπάνω. Οπότε, για τον υπολογισμό του τελικού κόστους ζημιών για κάθε έτος ατυχήματος θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του βήματος 4, λαμβάνοντας έτσι τα εξής ποσά:

$$\widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{BF})_{2011} = \frac{1}{\mathrm{CDF}} \times \widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{CL})_{2011} + \left(1 - \frac{1}{\mathrm{CDF}}\right) \times \widehat{\mathrm{U}}(\Delta\mathrm{Z})_{2011} =$$
$$= \frac{1}{1{,}000} \times 16.020.041 + \left(1 - \frac{1}{1{,}000}\right) \times 16.020.041 = 16.020.041$$

$$\widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{BF})_{2012} = \frac{1}{\mathrm{CDF}} \times \widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{CL})_{2012} + \left(1 - \frac{1}{\mathrm{CDF}}\right) \times \widehat{\mathrm{U}}(\Delta\mathrm{Z})_{2012} =$$
$$= \frac{1}{1{,}001} \times 15.097.474 + \left(1 - \frac{1}{1{,}001}\right) \times 16.322.722 = 15.098.698$$

$$\widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{BF})_{2013} = \frac{1}{\mathrm{CDF}} \times \widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{CL})_{2013} + \left(1 - \frac{1}{\mathrm{CDF}}\right) \times \widehat{\mathrm{U}}(\Delta\mathrm{Z})_{2013} =$$
$$= \frac{1}{1{,}016} \times 15.655.161 + \left(1 - \frac{1}{1{,}016}\right) \times 17.603.216 = 15.685.839$$

$$\widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{BF})_{2014} = \frac{1}{\mathrm{CDF}} \times \widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{CL})_{2014} + \left(1 - \frac{1}{\mathrm{CDF}}\right) \times \widehat{\mathrm{U}}(\Delta\mathrm{Z})_{2014} =$$
$$= \frac{1}{1{,}052} \times 15.108.917 + \left(1 - \frac{1}{1{,}052}\right) \times 16.384.568 = 15.171.972$$

$$\widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{BF})_{2015} = \frac{1}{\mathrm{CDF}} \times \widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{CL})_{2015} + \left(1 - \frac{1}{\mathrm{CDF}}\right) \times \widehat{\mathrm{U}}(\Delta\mathrm{Z})_{2015} =$$
$$= \frac{1}{1{,}112} \times 17.952.595 + \left(1 - \frac{1}{1{,}112}\right) \times 18.411.726 = 17.998.838$$

$$\widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{BF})_{2016} = \frac{1}{\mathrm{CDF}} \times \widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{CL})_{2016} + \left(1 - \frac{1}{\mathrm{CDF}}\right) \times \widehat{\mathrm{U}}(\Delta\mathrm{Z})_{2016} =$$
$$= \frac{1}{1{,}208} \times 18.301.070 + \left(1 - \frac{1}{1{,}208}\right) \times 18.454.860 = 18.327.550$$

$$\widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{BF})_{2017} = \frac{1}{\mathrm{CDF}} \times \widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{CL})_{2017} + \left(1 - \frac{1}{\mathrm{CDF}}\right) \times \widehat{\mathrm{U}}(\Delta\mathrm{Z})_{2017} =$$

$$= \frac{1}{1{,}366} \times 18.000.554 + \left(1 - \frac{1}{1{,}366}\right) \times 18.987.457 = 18.264.980$$

$$\widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{BF})_{2018} = \frac{1}{\mathrm{CDF}} \times \widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{CL})_{2018} + \left(1 - \frac{1}{\mathrm{CDF}}\right) \times \widehat{\mathrm{U}}(\Delta\mathrm{Z})_{2018} =$$

$$= \frac{1}{1{,}927} \times 18.770.500 + \left(1 - \frac{1}{1{,}927}\right) \times 18.764.111 = 18.767.427$$

Τέλος για τον υπολογισμό του αποθέματος ανά έτος ατυχήματος θα αφαιρέσουμε από τις τελικές ζημιές τις σωρευτικές πληρωθείσες ζημιές με ημερομηνία αναφοράς 31/12/2018 (τελευταία διαγώνιος του τριγώνου). Επομένως θα έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

$\widehat{\mathrm{R}}_{2011} = \widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{BF})_{2011}$ - $\mathrm{C}_{2011\ 96}$ = 16.020.041 – 16.020.041 = 0
$\widehat{\mathrm{R}}_{2012} = \widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{BF})_{2012}$ - $\mathrm{C}_{2012\ 84}$ = 15.098.698 – 15.082.392 = 16.306
$\widehat{\mathrm{R}}_{2013} = \widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{BF})_{2013}$ - $\mathrm{C}_{2013\ 72}$ = 15.685.839 – 15.408.623 = 277.216
$\widehat{\mathrm{R}}_{2014} = \widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{BF})_{2014}$ - $\mathrm{C}_{2014\ 60}$ = 15.171.972 – 14.362.088 = 809.884
$\widehat{\mathrm{R}}_{2015} = \widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{BF})_{2015}$ - $\mathrm{C}_{2015\ 48}$ = 17.998.838 – 16.144.420 = 1.854.418
$\widehat{\mathrm{R}}_{2016} = \widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{BF})_{2016}$ - $\mathrm{C}_{2016\ 36}$ = 18.327.550 – 15.149.892 = 3.177.658
$\widehat{\mathrm{R}}_{2017} = \widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{BF})_{2017}$ - $\mathrm{C}_{2017\ 24}$ = 18.264.980 – 13.177.565 = 5.087.415
$\widehat{\mathrm{R}}_{2018} = \widehat{\mathrm{U}}(\mathrm{BF})_{2018}$ - $\mathrm{C}_{2018\ 12}$ = 18.767.427 – 9.740.789 = 9.026.638

Παρακάτω παραθέτουμε συγκεντρωτικό πίνακα με τα αποτελέσματα που βρήκαμε:

Πίνακας 2.10: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

Έτος Ατυχήματος (Accident Year)	1/CDF	Εκτιμώμενες Τελικές Ζημιές (Chain Ladder)	1-(1/CDF)	Εκτιμώμενες Τελικές Ζημιές (Loss Ratio)	Εκτιμώμενες Τελικές Ζημιές (BF)	Πληρωθείσες Ζημιές 31/12/2018	Εκτιμώμενο Απόθεμα Ζημιών
2011	1,000	16.020.041	0,000	16.020.041	16.020.041	16.020.041	0
2012	0,999	15.097.474	0,001	16.322.722	15.098.698	15.082.392	16.306
2013	0,984	15.655.161	0,016	17.603.216	15.685.839	15.408.623	277.216
2014	0,951	15.108.917	0,049	16.384.568	15.171.972	14.362.088	809.884
2015	0,899	17.952.595	0,101	18.411.726	17.998.838	16.144.420	1.854.418
2016	0,828	18.301.070	0,172	18.454.860	18.327.550	15.149.892	3.177.658
2017	0,732	18.000.554	0,268	18.987.457	18.264.980	13.177.565	5.087.415
2018	0,519	18.770.500	0,481	18.764.111	18.767.427	9.740.789	9.026.638

Από τα ανωτέρω αποτελέσματα, αθροίζοντας το απόθεμα για όλα τα έτη ατυχήματος προκύπτει ότι η συγκεκριμένη ασφαλιστική εταιρεία για τις υλικές ζημιές στον κλάδο αυτοκινήτου θα πρέπει να κρατήσει σύμφωνα με τη μέθοδο Bornhuetter-Ferguson συνολικό απόθεμα 20.249.536 ευρώ.

2.5.3 Σχόλια για τη μέθοδο Bornhuetter-Ferguson

Η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson πλεονεκτεί έναντι της μεθόδου Chain Ladder διότι θεωρείται περισσότερο ισορροπημένη και επιτρέπει τη χρήση δεδομένων και από άλλες πηγές πέραν των ιστορικών στοιχείων. Η χρήση όμως αυτών των δεδομένων από εξωτερικούς παράγοντες αποτελεί συγχρόνως και μειονέκτημα της.

Επιπλέον, από τον τύπο για τον υπολογισμό του τελικού κόστους ζημιών (βήμα 4) μπορούμε να εξάγουμε το εξής συμπέρασμα:

- Αν το έτος ατυχήματος είναι πρόσφατο ο σωρευτικός συντελεστής εξέλιξης είναι μεγάλος. Αυτό συνεπάγεται ότι ο λόγος $\frac{1}{CDF}$ είναι μικρός και άρα δίνουμε μεγαλύτερο βάρος στην μέθοδο του Δείκτη Ζημιών και μικρότερο σε αυτή της Chain Ladder.
- Ενώ αν το έτος ατυχήματος είναι παλιό ο σωρευτικός συντελεστής εξέλιξης είναι μικρός. Αυτό συνεπάγεται ότι ο λόγος $\frac{1}{CDF}$ είναι μεγάλος και άρα δίνουμε μικρότερο βάρος στην μέθοδο του Δείκτη Ζημιών και μεγαλύτερο σε αυτή της Chain Ladder.

Συνοψίζοντας, αν έχει πληρωθεί μεγάλο μέρος των ζημιών όπως για παράδειγμα στο πάνω τμήμα ενός τριγώνου, τότε δίνουμε μεγαλύτερη έμφαση στην Chain Ladder, ενώ αντίθετα στο κάτω μέρος του τριγώνου, που δεν έχουμε αρκετά δεδομένα και πληροφορίες για τις ζημιές δίνουμε μεγαλύτερη έμφαση στην μέθοδο του Δείκτη Ζημιών.

Τέλος, η συγκεκριμένη μέθοδος είναι κατάλληλη για περιπτώσεις όπου τα δεδομένα είναι ανεπαρκή ή αναξιόπιστα ή και τα δύο. Για παράδειγμα, όταν μία ασφαλιστική εταιρεία έχει εισέλθει πρόσφατα σε έναν νέο κλάδο ή σε μια νέα περιοχή και δεν υπάρχει ακόμη αξιόπιστος όγκος ιστορικής εμπειρίας εξέλιξης των ζημιών, ένας αναλογιστής μπορεί να χρησιμοποιήσει τη μέθοδο Bornhuetter-Ferguson. Σε τέτοιες περιπτώσεις, ο αναλογιστής θα πρέπει πιθανότατα να βασιστεί σε πρότυπα αναφοράς, είτε από παρόμοιους κλάδους στην ίδια ασφαλιστική είτε από την εμπειρία του ασφαλιστικού κλάδου.

2.6 Μοντέλο του Mack

Η μέθοδος Chain Ladder είναι η πιο διαδεδομένη μέθοδος για την εκτίμηση του ποσού των τελικών ζημιών και κατ’ επέκταση για την εκτίμηση του εκτιμώμενου αποθέματος. Ο κύριος λόγος γι' αυτό είναι ότι σε μερικά τρίγωνα αναπαριστάται η διαχρονική εξέλιξη των ζημιών για τα παλαιότερα έτη σε σχετικά απλουστευμένη μορφή. Επίσης, δεν υπάρχει κάποια υπόθεση για την κατανομή της εξέλιξης των ζημιών (distribution-free). Από την άλλη πλευρά, είναι γνωστό ότι οι εκτιμήσεις των τελικών ζημιών και συνεπώς των εκτιμώμενων αποθεμάτων με τη μέθοδο Chain Ladder για τα πιο πρόσφατα υπό εξέταση έτη ατυχημάτων είναι ευαίσθητες στις διακυμάνσεις των παρατηρούμενων δεδομένων. Για παράδειγμα μπορεί μία ευνοϊκή ή δυσμενής εξέλιξη στα ιστορικά δεδομένα να μεταβάλει σημαντικά την εκτίμηση του τελικού κόστους για τα πιο πρόσφατα έτη. Ως εκ τούτου, θα ήταν πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε το τυπικό σφάλμα των εκτιμήσεων του τελικού κόστους που προκύπτουν με την μέθοδο Chain Ladder, ως ένα μέτρο της αβεβαιότητας που εμπεριέχεται στα δεδομένα.

Η μέθοδος υπολογισμού βασίζεται σε μία σχετικά απλή μαθηματική σχέση για το τυπικό σφάλμα των εκτιμήσεων του τελικού κόστους ανά έτος ατυχήματος και στο σύνολο των ετών. Το καθοριστικό βήμα για την ανάπτυξη αυτής της σχέσης έγινε από ένα paper του Schnieper (1991) από το οποίο χρησιμοποιήθηκαν επίσης και οι εξής παραδοχές για τον καθορισμό των ακόλουθων αποτελεσμάτων:

I. Το μοντέλο που παρουσιάζεται έχει προσαρμοστεί στην περίπτωση της μεθόδου Chain Ladder.
II. Μία εκτίμηση της παραμέτρου της διακύμανσης της διαδικασίας συμπεριλαμβάνεται επιπλέον στο τυπικό σφάλμα της εκτίμησης του τελικού κόστους.
III. Οι συντελεστές εξέλιξης είναι αμερόληπτοι και ασυσχέτιστοι μεταξύ τους και κατ' επέκταση οι εκτιμήσεις των αποθεμάτων αμερόληπτες.
IV. Εκτός από το τυπικό σφάλμα για κάθε έτος ατυχήματος, δίνεται επίσης ένας τύπος για το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης για το σύνολο του τελικού κόστους (για όλα τα έτη ατυχήματος), ο οποίος λαμβάνει υπόψη τη συσχέτιση μεταξύ των εκτιμήσεων του τελικού κόστους για τα έτη ατυχήματος χωριστά.

Έστω C_{ik} το ποσό των σωρευτικών πληρωθεισών ή επισυμβασών ζημιών για το έτος ατυχήματος $i,\ 1 \le i \le I$ και το έτος εξέλιξης $k,\ 1 \le k \le I$. Στόχος είναι να εκτιμήσουμε το τελικό κόστος του ποσού C_{iI} και το απόθεμα:

$$R_i = C_{iI} - C_{i,I+1-i}.$$

για κάθε έτος ατυχήματος $i = 2, \dots, I$, όπου I το τελευταίο έτος ατυχήματος και εξέλιξης.

2.6.1 Υποθέσεις μεθόδου

I. Η βασική υπόθεση της Chain Ladder είναι ότι υπάρχουν συντελεστές εξέλιξης $f_1, \dots, f_{I-1} > 0$ τέτοιοι ώστε:

$$E\left(C_{i,k+1} \middle| C_{i1}, \dots, C_{ik}\right) = C_{ik} f_k \,, \quad 1 \leq i \leq I, 1 \leq k \leq I - 1.$$

Η μέθοδος Chain Ladder περιλαμβάνει την εκτίμηση των συντελεστών εξέλιξης ως:

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{j=1}^{I-k} C_{j,k+1}}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}}\,, \quad 1 \leq k \leq I - 1.$$

Ενώ η εκτίμηση του τελικού κόστους προκύπτει ως:

$$\hat{C}_{iI} = C_{i,I+1-i} \hat{f}_{I+1-i} \cdots \hat{f}_{I-1},$$

ή ισοδύναμα η εκτίμηση των αποθεμάτων ως:

$$\hat{R}_i = C_{i,I+1-i} (\hat{f}_{I+1-i} \cdots \hat{f}_{I-1} - 1).$$

II. Επειδή η μέθοδος Chain Ladder δεν λαμβάνει υπόψη τις εξαρτήσεις μεταξύ των ετών ατυχήματος, γίνεται η υπόθεση ότι οι ζημιές διαφορετικών ετών ατυχήματος είναι ανεξάρτητες, δηλαδή

$$\{C_{i1}, \dots, C_{iI}\}, \{C_{j1}, \dots, C_{jI}\}, \quad i \neq j, \text{ είναι ανεξάρτητες.}$$

Στην πράξη, η ανεξαρτησία μεταξύ των ετών ατυχήματος μπορεί να παραβιαστεί, από την στιγμή που σε ορισμένες περιπτώσεις επηρεάζεται όλο το ημερολογιακό έτος που αφορά πολλά έτη ατυχήματος. Για παράδειγμα οι αλλαγές στην αποθεματοποίηση και στη διαχείριση αποζημιώσεων ή η ύπαρξη μεγάλων ζημιών.

Τα ακόλουθα θεωρήματα καθιστούν σαφές ότι οι υποθέσεις I. και II. είναι πράγματι οι έμμεσες παραδοχές της μεθόδου Chain Ladder.

<u>Θεώρημα 1</u>

Έστω $D = \{C_{ik} | i + k \leq I + 1\}$ το σύνολο των δεδομένων που έχουν παρατηρηθεί μέχρι στιγμής. Υπό τις υποθέσεις I. και II. έχουμε:

$$E(C_{iI}|D) = C_{i,I+1-i} f_{I+1-i} \cdots f_{I-1}.$$

Το συγκεκριμένο θεώρημα δείχνει ότι ο εκτιμητής $\hat{C}_{iI}$ έχει την ίδια μορφή με την $E(C_{iI}|D)$ το οποίο είναι η καλύτερη πρόβλεψη του C_{iI} με βάση τις παρατηρήσεις D.

<u>Θεώρημα 2</u>

Σύμφωνα με τις υποθέσεις I. και II. οι εκτιμητές $\hat{f}_k$, $1 \leq k \leq I - 1$ είναι αμερόληπτοι και ασυσχέτιστοι.

Η ιδιότητα της μη συσχέτισης των $\hat{f}_k$'s προκαλεί έκπληξη, διότι οι διαδοχικοί εκτιμώμενοι συντελεστές εξέλιξης βασίζονται από τα ίδια δεδομένα $C_{1k} + \cdots + C_{I-k,k}$.

Η απόδειξη περί μη συσχέτισης των $\hat{f}_k$'s επεκτείνεται και στο γινόμενο των διαδοχικών $\hat{f}_k$. Δηλαδή έχουμε:

$$E(\hat{f}_{I+1-i} \cdots \hat{f}_{I-1}) = f_{I+1-i} \cdots f_{I-1},$$

το οποίο δείχνει ότι η εκτίμηση $\hat{C}_{iI} = C_{i,I+1-i} \hat{f}_{I+1-i} \cdots \hat{f}_{I-1}$ είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής του $E(C_{iI}|D) = C_{i,I+1-i} f_{I+1-i} \cdots f_{I-1}$ όπου $D = \{C_{ik} | i + k \leq I + 1\}$, το παρατηρούμενο σετ των δεδομένων. Κατά τον ίδιο τρόπο, ο εκτιμητής αποθεμάτων $\hat{R}_i = \hat{C}_{iI} - \hat{C}_{i,I+1-i}$ είναι η αμερόληπτη εκτίμηση του πραγματικού αποθέματος $R_i = C_{iI} - C_{i,I+1-i}$.

<u>Υπολογισμός του μέσου τετραγωνικού σφάλματος και του τυπικού σφάλματος</u>

Το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (ΜΤΣ) της εκτίμησης του τελικού κόστους $\hat{C}_{iI}$ ορίζεται να είναι ως:

$$mse(\hat{C}_{iI}) = E[(\hat{C}_{iI} - C_{iI})^2 | D].$$

όπου $D = \{C_{ik} | i + k \le I + 1\}$ είναι το σύνολο όλων των δεδομένων που έχουν παρατηρηθεί μέχρι στιγμής. Να σημειωθεί ότι χρησιμοποιείται η δεσμευμένη 2η ροπή, και όχι η αδέσμευτη έτσι ώστε να συμπεριλάβουμε όλα τα δεδομένα.

Επιπλέον,

$$mse(\hat{R}_i) = E\left[\left(\hat{R}_i - R_i\right)^2 \middle| D\right] = E\left[\left(\hat{C}_{iI} - C_{iI}\right)^2 \middle| D\right] = mse(\hat{C}_{iI}).$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε περαιτέρω το ΜΤΣ της εκτίμησης των αποθεμάτων χρειαζόμαστε μια μαθηματική σχέση για τη διακύμανση ζημιών C_{ik}.

III. Η διακύμανση των ζημιών C_{ik} μπορεί να οριστεί μέσα από την μαθηματική σχέση

$$Var\left(C_{i,k+1} \middle| C_{i1}, \dots, C_{ik}\right) = C_{ik}\sigma_k^2, \quad 1 \le i \le I, \ \ 1 \le k \le I - 1.$$

όπου σ_k^2 άγνωστη παράμετρος, $1 \le k \le I - 1$.

Η άγνωστη παράμετρος σ_k^2 θα προσεγγίζεται από τον αμερόληπτο εκτιμητή του, $\hat{\sigma}_k^2$

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{I-k-1} \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} \left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} - \hat{f}_k\right)^2, \quad 1 \le k \le I - 2.$$

Για το τελευταίο έτος εξέλιξης υπάρχει μόνο μία τιμή και συνεπώς δεν μπορεί να εξαχθεί η αντίστοιχη διακύμανση. Επίσης δεν δύναται ο υπολογισμός για το προτελευταίο έτος εξέλιξης σ_{I-1}^2. Αν $\hat{f}_{I-1} = 1$ και υπάρχει αβεβαιότητα ότι οι ζημιές δεν εξελίσσονται μετά τα $I - 1$ έτη τότε $\sigma_{I-1} = 0$. Προσεγγίζεται από την σχέση:

$$\hat{\sigma}_{I-1}^2 = min\left(\frac{\hat{\sigma}_{I-2}^4}{\hat{\sigma}_{I-3}^2}, min(\hat{\sigma}_{I-3}^2, \hat{\sigma}_{I-2}^2)\right).$$

<u>Θεώρημα 3</u>

Με βάση τις υποθέσεις Ι.,ΙΙ. και ΙΙΙ. το ΜΤΣ $mse(\hat{R}_i)$ μπορεί να εκτιμηθεί ως:

$$\widehat{mse(\hat{R}_i)} = \hat{C}_{iI}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2}\left(\frac{1}{\hat{C}_{ik}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}}\right).$$

Όπου

$\hat{C}_{iI}^2$: Το τετράγωνο της εκτίμησης του τελικού κόστους για κάθε έτος ατυχήματος.

$\frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2}$: Ο λόγος της διακύμανσης προς το τετράγωνο του εκτιμώμενου συντελεστή εξέλιξης όπως έχουν υπολογιστεί από τη μεθοδολογία.

$\frac{1}{\hat{C}_{ik}}$: Η εκτίμηση του κόστους για κάθε έτος ατυχήματος όπως προκύπτει από τη διαχρονική εξέλιξη και τους συντελεστές εξέλιξης.

$\frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}}$: Αναπαριστά έναν πίνακα γραμμή $(I - 1 * 1)$. Αναπαριστά το άθροισμα κάθε έτους εξέλιξης δίχως να συμπεριλαμβάνει την τελευταία διαγώνιο.

$\hat{C}_{ik} = C_{i,I+1-i}\hat{f}_{I+1-i} \dots \hat{f}_{k-1},\ \ k > I + 1 - i$: Οι εκτιμώμενες τιμές των μελλοντικών C_{ik} και $\hat{C}_{i,I+1-i} = C_{i,I+1-i}$.

2.6.2 Αριθμητικό Παράδειγμα

Έχοντας υπολογίσει στη μέθοδο Chain Ladder τις τελικές ζημιές θα βρούμε χρησιμοποιώντας το μοντέλο του Mack το μέσο τετραγωνικό σφάλμα και την τυπική απόκλιση αυτών καθώς και την μεταβλητότητα των αποθεμάτων τους.

Αρχικά θα υπολογίσουμε τον αμερόληπτο εκτιμητή της διακύμανσης $\hat{\sigma}_k^2$ για το κάθε έτος εξέλιξης μέσω του τύπου:

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{I - k - 1}\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} - \hat{f}_k\right)^2,\ \ 1 \le k \le I - 2.$$

όπου

I: τελευταίο έτος ατυχήματος και εξέλιξης

k: έτος εξέλιξης

i: έτος ατυχήματος

Σύμφωνα με τον περιορισμό που υπάρχει στον παραπάνω τύπο, το k θα πάρει τιμές από το 1 έως το 6 $(I - 2 = 8 - 2 = 6)$. Επομένως ο τύπος θα διαμορφωθεί ως εξής:

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{8-k-1}\sum_{i=1}^{8-k} C_{ik}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} - \hat{f}_k\right)^2, \quad 1 \le k \le 6.$$

Ξεκινώντας την διαδικασία υπολογισμού της διακύμανσης για το κάθε έτος εξέλιξης, θα υπολογίσουμε αρχικά την αριθμητική παράσταση που βρίσκεται μέσα στο άθροισμα του αριθμητή με την βοήθεια του τριγώνου των σωρευτικών πληρωθεισών ζημιών (βλ. Πίνακα 2.4) και του επιλεγμένου συντελεστή εξέλιξης (σταθμισμένο μέσο όρο) που υπολογίσαμε στο αριθμητικό παράδειγμα της μεθόδου Chain Ladder. Έτσι:

Για το 1^{o} έτος εξέλιξης ($k = 1$) θα έχουμε:

$$\mathrm{C_{ik}}\left(\frac{\mathrm{C_{i,k+1}}}{\mathrm{C_{ik}}} - \hat{\mathrm{f}}_\mathrm{k}\right)^2 = \mathrm{C_{11}}\left(\frac{\mathrm{C_{12}}}{\mathrm{C_{11}}} - \hat{\mathrm{f}}_1\right)^2 = 8.463.296 \times \left(\frac{11.658.903}{8.463.296} - 1{,}410\right)^2 = 8.666$$

$$\mathrm{C_{ik}}\left(\frac{\mathrm{C_{i,k+1}}}{\mathrm{C_{ik}}} - \hat{\mathrm{f}}_\mathrm{k}\right)^2 = \mathrm{C_{21}}\left(\frac{\mathrm{C_{22}}}{\mathrm{C_{21}}} - \hat{\mathrm{f}}_1\right)^2 = 7.731.158 \times \left(\frac{10.930.346}{7.731.158} - 1{,}410\right)^2 = 124$$

$$\mathrm{C_{ik}}\left(\frac{\mathrm{C_{i,k+1}}}{\mathrm{C_{ik}}} - \hat{\mathrm{f}}_\mathrm{k}\right)^2 = \mathrm{C_{31}}\left(\frac{\mathrm{C_{32}}}{\mathrm{C_{31}}} - \hat{\mathrm{f}}_1\right)^2 = 8.096.346 \times \left(\frac{11.315.178}{8.096.346} - 1{,}410\right)^2 = 1.166$$

$$\mathrm{C_{ik}}\left(\frac{\mathrm{C_{i,k+1}}}{\mathrm{C_{ik}}} - \hat{\mathrm{f}}_\mathrm{k}\right)^2 = \mathrm{C_{41}}\left(\frac{\mathrm{C_{42}}}{\mathrm{C_{41}}} - \hat{\mathrm{f}}_1\right)^2 = 7.672.794 \times \left(\frac{11.058.174}{7.672.794} - 1{,}410\right)^2 = 7.374$$

$$\mathrm{C_{ik}}\left(\frac{\mathrm{C_{i,k+1}}}{\mathrm{C_{ik}}} - \hat{\mathrm{f}}_\mathrm{k}\right)^2 = \mathrm{C_{51}}\left(\frac{\mathrm{C_{52}}}{\mathrm{C_{51}}} - \hat{\mathrm{f}}_1\right)^2 = 9.355.712 \times \left(\frac{13.266.654}{9.355.712} - 1{,}410\right)^2 = 599$$

$$\mathrm{C_{ik}}\left(\frac{\mathrm{C_{i,k+1}}}{\mathrm{C_{ik}}} - \hat{\mathrm{f}}_\mathrm{k}\right)^2 = \mathrm{C_{61}}\left(\frac{\mathrm{C_{62}}}{\mathrm{C_{61}}} - \hat{\mathrm{f}}_1\right)^2 = 9.678.429 \times \left(\frac{13.548.653}{9.678.429} - 1{,}410\right)^2 = 968$$

$$\mathrm{C_{ik}}\left(\frac{\mathrm{C_{i,k+1}}}{\mathrm{C_{ik}}} - \hat{\mathrm{f}}_\mathrm{k}\right)^2 = \mathrm{C_{71}}\left(\frac{\mathrm{C_{72}}}{\mathrm{C_{71}}} - \hat{\mathrm{f}}_1\right)^2 = 9.236.218 \times \left(\frac{13.177.565}{9.236.218} - 1{,}410\right)^2 = 2.669$$

Υπολογίζουμε με τον ίδιο τρόπο και για τα υπόλοιπα έτη εξέλιξης τις τιμές που βρίσκονται εντός του αθροίσματος στον αριθμητή. Άρα, θα λάβουμε το παρακάτω τρίγωνο.

Πίνακας 2.11: Τρίγωνο αποκλίσεων δεικτών εξέλιξης

Έτος Ατυχήματος	Έτος Εξέλιξης (Development Year)					
(Accident Year)	12	24	36	48	60	72
2011	8.666	0	475	58	0	63
2012	124	1.574	200	54	0	15
2013	1.166	2.218	13	0	15	
2014	7.374	276	50	122		
2015	599	119	958			
2016	968	2.290				
2017	2.669					

Αθροίζοντας για το κάθε έτος εξέλιξης όλα τα έτη ατυχήματος λαμβάνουμε τελικά τον αριθμητή της αριθμητικής παράστασης.

Προχωρώντας στον υπολογισμό του παρονομαστή θα έχουμε τις παρακάτω τιμές:

Για το 1ο έτος εξέλιξης ($k = 1$): $8 - k - 1 = 8 - 1 - 1 = 6$
Για το 2ο έτος εξέλιξης ($k = 2$): $8 - k - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$
Για το 3ο έτος εξέλιξης ($k = 3$): $8 - k - 1 = 8 - 3 - 1 = 4$
Για το 4ο έτος εξέλιξης ($k = 4$): $8 - k - 1 = 8 - 4 - 1 = 3$
Για το 5ο έτος εξέλιξης ($k = 5$): $8 - k - 1 = 8 - 5 - 1 = 2$
Για το 6ο έτος εξέλιξης ($k = 6$): $8 - k - 1 = 8 - 6 - 1 = 1$

Οπότε στον παρακάτω πίνακα παραθέτουμε για το κάθε έτος εξέλιξης την εκτιμώμενη διακύμανση.

Πίνακας 2.12: Πίνακας διακύμανσης

	Έτος Εξέλιξης (Development Year)					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Αριθμητής	21.565	6.477	1.695	234	15	78
Παρονομαστής	6	5	4	3	2	1
σ^2	3.594	1.295	424	78	7	78

Παρατηρούμε ότι ενώ στο τρίγωνο των σωρευτικών πληρωμών είχαμε οχτώ έτη εξέλιξης στο παραπάνω τρίγωνο έχουμε έξι. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι πέραν του περιορισμού που υπάρχει στον τύπο της διακύμανσης, το τρίγωνο των σωρευτικών ζημιών έχει μόνο μία τιμή στο τελευταίο έτος εξέλιξης ($k = 8$). Συνεπώς δεν μπορεί να εξαχθεί η αντίστοιχη διακύμανση για το συγκεκριμένο έτος εξέλιξης. Επιπλέον δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί και ο υπολογισμός της διακύμανσης για το προτελευταίο έτος εξέλιξης ($k = 7$), αν ο συντελεστής εξέλιξης του προτελευταίου έτους είναι ίσος με την μονάδα ($\hat{f}_{I-1} = \hat{f}_7 = 1$). Στο παράδειγμα μας το $\hat{f}_7$ δεν ισούται με 1 οπότε ο αμερόληπτος εκτιμητής για το έτος εξέλιξης $k = 7$ προσεγγίζεται από την σχέση:

$$\hat{\sigma}^2_{I-1} = \min\left(\frac{\hat{\sigma}^4_{I-2}}{\hat{\sigma}^2_{I-3}}, \min\left(\hat{\sigma}^2_{I-3}, \hat{\sigma}^2_{I-2}\right)\right) \overset{I=8}{\Longrightarrow} \hat{\sigma}^2_7 = \min\left(\frac{(\hat{\sigma}^2_6)^2}{\hat{\sigma}^2_5}, \min\left(\hat{\sigma}^2_5, \hat{\sigma}^2_6\right)\right) = \min\left(\frac{78^2}{7}, \min(7{,}78)\right)$$

$$= \min\left(\frac{78^2}{7}, 7\right) = 7$$

Άρα στον παραπάνω πίνακα θα προσθέσουμε μία επιπλέον στήλη με την διακύμανση του 7^{ου} έτους εξέλιξης. Οπότε, θα έχουμε:

Πίνακας 2.13: Πίνακας διακύμανσης

	Έτος Εξέλιξης (Development Year)						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Αριθμητής	21.565	6.477	1.695	234	15	78	0
Παρονομαστής	6	5	4	3	2	1	0
σ^2	3.594	1.295	424	78	7	78	7

Στη συνέχεια προκειμένου να υπολογίσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα των τελικών ζημιών θα πρέπει να εκτιμήσουμε την εξέλιξη των ζημιών για τα έτη ατυχήματος στο τρίγωνο των σωρευτικών πληρωθεισών ζημιών. Με τη βοήθεια λοιπόν του επιλεγμένου συντελεστή εξέλιξης (σταθμισμένος μέσος όρος) θα έχουμε:

$$\hat{C}_{2013\ 84} = C_{2013\ 72} \times \hat{f}_{72-84} = 15.408.623 \times 1{,}015 = 15.693.752$$

$$\hat{C}_{2014\ 72} = C_{2014\ 60} \times \hat{f}_{60-72} = 14.362.088 \times 1{,}035 = 14.864.761$$

$$\hat{C}_{2014\ 84} = C_{2014\ 60} \times \hat{f}_{60-72} \times \hat{f}_{72-84} = 14.362.088 \times 1{,}035 \times 1{,}015 = 15.087.732$$

$$\hat{C}_{2015\ 60} = C_{2015\ 48} \times \hat{f}_{48-60} = 16.144.420 \times 1{,}057 = 17.064.652$$

$$\hat{C}_{2015\ 72} = C_{2015\ 48} \times \hat{f}_{48-60} \times \hat{f}_{60-72} = 16.144.420 \times 1{,}057 \times 1{,}035 = 17.661.915$$

$$\hat{C}_{2015\ 84} = C_{2015\ 48} \times \hat{f}_{48-60} \times \hat{f}_{60-72} \times \hat{f}_{72-84} = 16.144.420 \times 1{,}057 \times 1{,}035 \times 1{,}015$$
$$= 17.926.843$$

Με τον ίδιο τρόπο θα υπολογίσουμε την εξέλιξη των ζημιών για τα έτη ατυχήματος 2016, 2017 και 2018. Παραθέτουμε παρακάτω τον πίνακα όπως θα διαμορφωθεί έπειτα από τον υπολογισμό της εξέλιξης των ζημιών.

Πίνακας 2.14: Τρίγωνο εξέλιξης ζημιών

Έτος Ατυχήματος	Έτος Εξέλιξης (Development Year)						
(Accident Year)	12	24	36	48	60	72	84
2011	8.463.296	11.658.903	13.190.173	14.413.691	15.204.193	15.739.212	15.999.558
2012	7.731.158	10.930.346	12.489.289	13.624.092	14.370.746	14.871.642	15.082.392
2013	8.096.346	11.315.178	12.959.219	14.071.916	14.870.226	15.408.623	15.639.752
2014	7.672.794	11.058.174	12.446.619	13.551.937	14.362.088	14.864.761	15.087.732
2015	9.355.712	13.266.654	14.964.925	16.144.420	17.064.652	17.661.915	17.926.843
2016	9.678.429	13.548.653	15.149.892	16.467.933	17.406.605	18.015.836	18.286.073
2017	9.236.218	13.177.565	14.903.826	16.200.459	17.123.885	17.723.221	17.989.069
2018	9.740.789	13.734.512	15.533.734	16.885.168	17.847.623	18.472.290	18.749.374

Όπως έχουμε αναφέρει και στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου η πάνω αριστερή γωνία του τριγώνου αντιπροσωπεύει γνωστές παρελθούσες πληρωμές ενώ η κάτω δεξιά γωνία του τριγώνου άγνωστες μελλοντικές πληρωμές. Επομένως, η κάτω δεξιά γωνία του τριγώνου των πληρωθεισών ζημιών που εκτιμήσαμε μας λέει πως θα εξελιχθούν οι πληρωμές μας στο μέλλον.

Ο υπολογισμός του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος θα πραγματοποιηθεί μέσω του παρακάτω τύπου:

$$mse\widehat{(R_\iota)} = \hat{C}_{\iota I}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_\kappa^2}{\hat{f}_k^2}\left(\frac{1}{\hat{C}_{ik}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}}\right).$$

Ενώ για τον υπολογισμό του τυπικού σφάλματος για το κάθε έτος ατυχήματος θα βρούμε την τετραγωνική ρίζα του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος. Τέλος για την εύρεση του συντελεστή μεταβλητότητας θα διαιρέσουμε το τυπικό σφάλμα προς το απόθεμα ζημιών για κάθε έτος εξέλιξης. Παραθέτουμε παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα με τα αποτελέσματα.

Πίνακας 2.15: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

Έτος Ατυχήματος (Accident Year)	Πληρωθείσες Ζημιές	CDF	Εκτιμώμενες Τελικές Ζημιές	Απόθεμα Ζημιών	ΜΤΣ	Τυπικό Σφάλμα	Συντελεστής Μεταβλητότητα
2011	16.020.041	1,000	16.020.041	0	-	-	-
2012	15.082.392	1,001	15.097.474	15.082	217.850.254	14.760	98%
2013	15.408.623	1,016	15.655.161	246.538	2.036.386.728	45.126	18%
2014	14.362.088	1,052	15.108.917	746.829	2.087.638.503	45.691	6%
2015	16.144.420	1,112	17.952.595	1.808.175	4.437.128.155	66.612	4%
2016	15.149.892	1,208	18.301.070	3.151.178	14.297.178.492	119.571	4%
2017	13.177.565	1,366	18.000.554	4.822.989	43.481.457.575	208.522	4%
2018	9.740.789	1,927	18.770.500	9.029.711	121.671.821.149	348.815	4%

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι όσο πιο μεγάλος είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας τόσο πιο ευμετάβλητα θα είναι τα αποθέματα που έχουμε εκτιμήσει.

2.6.3 Σχόλια για το μοντέλο του Mack

Το μοντέλο του Mack περιέχει μια σειρά από πλεονεκτήματα, ένα από αυτά είναι ότι λαμβάνει υπόψη τη διακύμανση των ζημιών και προσπαθεί να την αντιμετωπίσει με κατάλληλο τρόπο, καθιστώντας την κατάλληλη για περιπτώσεις όπου η διακύμανση είναι σημαντική. Επιπρόσθετα, είναι ευέλικτο αφού μπορεί να προσαρμοστεί σε διάφορες καταστάσεις και τύπους δεδομένων. Τέλος με την κατάλληλη εφαρμογή και επεξεργασία των δεδομένων μπορεί να παρέχει ακριβείς εκτιμήσεις της διακύμανσης των αποθεμάτων.

Ωστόσο το συγκεκριμένο μοντέλο για να παράγει ακριβή αποτελέσματα απαιτεί έναν επαρκή αριθμό παρατηρήσεων και καλή ποιότητα των δεδομένων. Επομένως σε περιπτώσεις όπου υπάρχει έλλειψη ή κακή ποιότητα δεδομένων, η ακρίβεια των εκτιμήσεων μπορεί να μειωθεί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Επίδραση των Ακραίων Τιμών στην Αποθεματοποίηση Ζημιών

3.1 Εισαγωγή

Το κλασικό πρόβλημα της αποθεματοποίησης ζημιών αφορά την εκτίμηση των υφιστάμενων (μη πληρωθεισών και/ή μη επισυμβασών) ζημιών, με βάση προηγούμενα ιστορικά δεδομένα. Οι παραδοσιακές μέθοδοι αποθεματοποίησης, που χρησιμοποιούνται ευρέως στην πράξη, εφαρμόζονται σε δεδομένα τα οποία κατηγοριοποιούνται συνήθως σε τρίμηνα ή έτη, και τα οποία όπως έχουμε αναφέρει και στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάζονται σε τρίγωνα.

Οι παράμετροι βασίζονται συνήθως σε λίγα δεδομένα με αποτέλεσμα κάτι τέτοιο να καθιστά τις μεθόδους αυτές εξαιρετικά ευάλωτες στην παρουσία ακραίων τιμών με αποτέλεσμα να μειώνει την προσαρμοστική ικανότητα των μοντέλων πρόβλεψης. Ωστόσο, η δυνατότητα ποσοτικοποίησης της συγκεκριμένης επίδρασης κάθε παρατήρησης σε ορισμένα στατιστικά στοιχεία ενδιαφέροντος παρέχει περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη φύση των δεδομένων όπως επίσης και με τις ίδιες τις μεθόδους. Κάτι τέτοιο έχει ιδιαίτερη σημασία κατά την εφαρμογή και την προσαρμογή των μοντέλων.

Με βάση μελέτη που πραγματοποίησε η ερευνητική ομάδα του Avanzi (Avanzi et al, 2022) και πάνω στην οποία θα βασιστεί η συγγραφή του τρέχοντος κεφαλαίου, παρουσιάζεται μια μαθηματικά εφαρμόσιμη προσέγγιση για την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι αλλαγές σε κάθε προσαυξητική ζημιά σε ένα τρίγωνο ζημιών θα επηρεάσουν ορισμένα στατιστικά στοιχεία ενδιαφέροντος. Η βαθύτερη κατανόηση του τρόπου με τον οποίο τα ακραία στοιχεία μπορεί να επηρεάσουν τα αποτελέσματα ενός μοντέλου και η ύπαρξη στατιστικά ορθών διαδικασιών για τον εντοπισμό και την αντιμετώπιση μη φυσιολογικών παρατηρήσεων θα βελτιώσει την ανθεκτικότητα των μεθόδων αποθεματοποίησης και τελικά θα οδηγήσει σε πιο αξιόπιστες αποφάσεις.

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα διερευνήσουμε τον αντίκτυπο που έχουν οι προσαυξητικές παρατηρήσεις στις εκτιμήσεις αποθεμάτων, στη μεταβλητότητα τους και στα ποσοστημόρια τους. Ειδικότερα θα δούμε εξισώσεις κλειστής μορφής για την πρώτη παράγωγο αυτών των στατιστικών στοιχείων ενδιαφέροντος σύμφωνα με το μοντέλο του Mack, το οποίο αναδεικνύει πολλές ιδιότητες αυτής της τεχνικής, συμπεριλαμβανομένων των περιοχών ενός τριγώνου ζημιών όπου οι ακραίες τιμές είναι πιθανό να έχουν τη μεγαλύτερη επίδραση στα αποτελέσματα και ως εκ τούτου όπου οι παρατηρήσεις θα πρέπει να εξετάζονται προσεκτικά. Επιπλέον θα συγκρίνουμε την επίδραση των προσαυξητικών παρατηρήσεων στα αποθέματα σύμφωνα με το μοντέλο του Mack και την μέθοδο του Bornhuetter-Ferguson.

Οι τεχνικές αυτές μπορούν να εφαρμοστούν στην πράξη για τον εντοπισμό περιοχών ενός τριγώνου ζημιών στις οποίες τα αποθέματα είναι ιδιαίτερα ευαίσθητα και, ως εκ τούτου, όπου οι ακραίες τιμές, εάν υπάρχουν, μπορεί να έχουν σημαντικό αντίκτυπο στα αποτελέσματα. Αυτές οι συναρτήσεις επίδρασης μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για τη σύγκριση των ευαισθησιών των αποθεμάτων βάσει διαφορετικών τεχνικών. Η επίδραση που έχουν οι προσαυξητικές παρατηρήσεις σε διαφορετικά τρίγωνα ζημιών μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας αυτές τις συναρτήσεις επίδρασης και να γίνουν συγκρίσεις μεταξύ των περιοχών ευαισθησίας και των ιδιοτήτων αυτών των διαφορετικών τριγώνων. Μέσω μιας τέτοιας συγκριτικής μελέτης, μπορεί να αρχίσουν να αναδύονται τάσεις, διευκολύνοντας τον εντοπισμό αφύσικων παρατηρήσεων ή ακόμη και ολόκληρων συνόλων δεδομένων με αφύσικες ιδιότητες.

3.2 Η χρήση επιδραστικών συναρτήσεων στη μελέτη ευαισθησίας των αποθεμάτων

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι επιδραστικές συναρτήσεις για προβλήματα στατιστικού ενδιαφέροντος υπό τις υποθέσεις του μοντέλου του Mack. Μια επιδραστική συνάρτηση είναι ικανή να επισημάνει την ευαισθησία σε ένα στατιστικό ενδιαφέροντος για μία συγκεκριμένη παρατήρηση όπως επίσης και να εντοπίσει σε κάποιες περιπτώσεις το περιθώριο συνεισφοράς αυτής της παρατήρησης στην τελική τιμή αυτού του στατιστικού.

Αυτό επιτυγχάνεται με την χρήση της πρώτης παραγώγου η οποία αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για την επιδραστική συνάρτηση στο στατιστικό σε σχέση με την δοθείσα παρατήρηση. Καθώς ενδιαφερόμαστε για την επίδραση της προσαυξητικής ζημιάς X_{kj} στο στατιστικό ενδιαφέροντος T, τότε η επιδραστική συνάρτηση είναι:

$$IF_{kj}(T) = \frac{\partial T}{\partial X_{kj}} \cdot$$

Το στατιστικό T δύναται να αναπαριστά αποθέματα, το μέσο τετραγωνικό σφάλμα των εκτιμώμενων αποθεμάτων ή ποσοστημόρια. Αν το στατιστικό ενδιαφέροντος T χαρακτηρίζεται από ομοιογένεια αναφορικά με τις προσαυξητικές ζημιές X_{kj} τότε:

$$T = \sum_{(k+j \leq I-1)} \frac{\partial T}{\partial X_{kj}} X_{kj}.$$

Περαιτέρω μας ενδιαφέρει η διερεύνηση (εφόσον υφίσταται ομοιογένεια πρώτης τάξης για το στατιστικό T) στην περίπτωση φραγμάτων της ποσότητας $IF_{kj}(T) \cdot X_{kj}$. Η μελέτη φραγμάτων θα μας επιτρέψει να μελετήσουμε κατά πόσο μια ακραία τιμή X_{kj} μπορεί να έχει περιορισμένη επίδραση στο στατιστικό T, κάτι τέτοιο θα αποτελέσει ένδειξη ανθεκτικών εκτιμητών. Υπό την ένδειξη ύπαρξης φραγμάτων δύναται να μελετήσουμε τη μέγιστη τιμή της ποσότητας $IF_{kj}(T) \cdot X_{kj}$.

Στο παρακάτω τρίγωνο (βλ. Avanzi et al., 2024) απεικονίζονται οι πραγματικές ζημιές από μία Βέλγικη ασφαλιστική εταιρεία γενικών ασφαλίσεων οι οποίες με την χρήση ενός παραδείγματος θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε τις επιδραστικές συναρτήσεις.

Πίνακας 3.1: Προσαυξητικές ζημιές

i/j	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	135.338.126	90.806.681	68.666.715	55.736.215	46.967.279	35.463.367	30.477.244	24.838.121	18.238.489	14.695.083
2	125.222.434	89.639.978	70.697.962	58.649.114	46.314.227	41.369.299	34.394.512	26.554.172	24.602.209	
3	136.001.521	91.672.958	78.246.269	62.305.193	49.115.673	36.631.598	30.210.729	29.882.359		
4	135.277.744	103.604.885	78.303.084	61.812.683	48.720.135	39.271.861	32.029.697			
5	143.540.778	109.316.613	79.092.473	65.603.900	51.226.270	44.408.236				
6	132.095.863	88.862.933	69.269.383	57.109.637	48.818.781					
7	127.299.710	92.979.311	61.379.607	50.317.305						
8	120.660.241	89.469.673	71.570.718							
9	134.132.283	87.016.365								
10	131.918.566									

Πηγή: Verdonck et al. (2009)

Εφαρμόζοντας το μοντέλο του Mack σε αυτό το σετ δεδομένων υπολογίζουμε ότι τα αποθέματα για το έτος ατυχήματος 8 είναι 226.403.952 ενώ η ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (τυπικό σφάλμα) του συγκεκριμένου έτους ατυχήματος είναι 9.448.925. Αντίστοιχα τα συνολικά αποθέματα είναι 1.463.388.942 ενώ η ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος των συνολικών αποθεμάτων είναι 45.480.914 (βλ. Παράρτημα για την επιβεβαίωση των παραπάνω αποτελεσμάτων).

3.3 Επιδραστικές συναρτήσεις στις κεντρικές εκτιμήσεις[2]

Παρουσιάζουμε κάτωθι τις επιδραστικές συναρτήσεις για μεμονωμένα έτη ατυχήματος καθώς και για τα συνολικά αποθέματα για το μοντέλο του Mack και για την μέθοδο Bornhuetter-Ferguson.

3.3.1 Μεμονωμένα έτη ατυχήματος

a. Μοντέλο του Mack

Η επιδραστική συνάρτηση για τα αποθέματα $\hat{R}_i$ του μεμονωμένου έτους ατυχήματος i δίνεται από τη σχέση (στην προκείμενη περίπτωση το στατιστικό T είναι το απόθεμα)

$$IF_{kj}(\hat{R}_i) = \frac{\partial \hat{R}_i}{\partial X_{kj}}$$
$$= \begin{cases} 0, & k > i \\ \dfrac{\hat{R}_i}{C_{i,I-i+1}}, & k = i \\ \hat{C}_{iI} \displaystyle\sum_{\{p \in D | p \geq k\}} \left(\left(\frac{1}{\sum_{q=1}^{p} C_{q,I-p+1}} \right) 1_{\{j \leq I-p+1\}} - \left(\frac{1}{\sum_{q=1}^{p} C_{q,I-p}} \right) 1_{\{j \leq I-p\}} \right), & k \leq i-1 \end{cases} \quad \mathbf{(3.1)}$$

όπου $D = \{1, \dots, i-1\}$.

Στην περίπτωση όπου $k = i$, η επιδραστική συνάρτηση μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω σε μία συνάρτηση εκτιμώμενων μόνο μελλοντικών συντελεστών εξέλιξης.

---

[2] Οι κεντρικές εκτιμήσεις αφορούν εκτιμήσεις οι οποίες απεικονίζουν μια αναμενόμενη τιμή στο εύρος των λογικά πιθανών αποτελεσμάτων. (Πηγή: Actuarial Standards of Practice No. 43, Property/Casualty Unpaid Claim Estimates (Doc. No. 159))

Κάτι τέτοιο μας επιτρέπει να κατανοήσουμε καλύτερα την επίδραση των προσαυξητικών ζημιών. Συγκεκριμένα μας επιτρέπει να κατανοήσουμε πως αυτές οι ζημιές θα επηρεάσουν τους συντελεστές εξέλιξης εάν απεικονιστούν στον αριθμητή ή/και στον παρονομαστή της εξίσωσης $\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{ij}}$. Επομένως, ισχύει η εξίσωση:

$$IF_{kj}(\hat{R}_i) = \frac{\hat{R}_i}{C_{i,I-i+1}} = \frac{C_{i,I-i+1}\left(\prod_{s=I-i+1}^{I-1} \hat{f}_s - 1\right)}{C_{i,I-i+1}} = \prod_{s=I-i+1}^{I-1} \hat{f}_s - 1. \quad \mathbf{(3.2)}$$

Ιδιαίτερο σημείο αποτελεί η επιδραστική συνάρτηση για το απόθεμα $\hat{R}_i$, η εκτίμηση του οποίου εξαρτάται από τη θέση της προσαυξητικής ζημιάς στο τρίγωνο ζημιών και αυτό είναι ιδιαιτέρως εμφανές στην περίπτωση όπου $k \leq i - 1$. Για την συγκεκριμένη περίπτωση η εξίσωση συμπεριλαμβάνει ένα άθροισμα το οποίο εξαρτάται από την τιμή του έτους ατυχήματος k καθώς και από δύο δείκτριες συναρτήσεις που βασίζονται στην περίοδο εξέλιξης j.

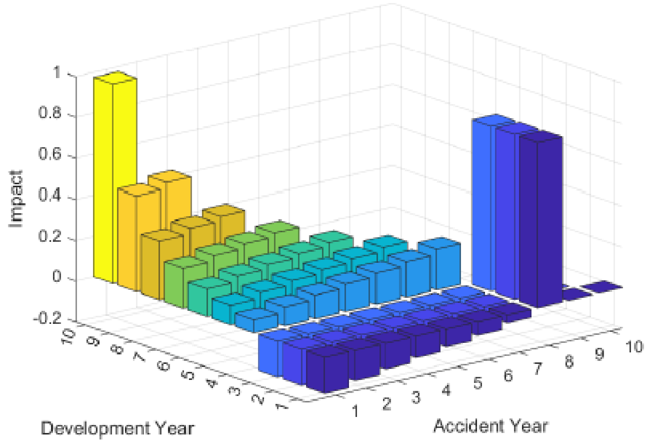
Στο παρακάτω τρίγωνο (βλ. Avanzi et al., 2024) απεικονίζεται η επίδραση που έχει κάθε προσαυξητική ζημιά στα αποθέματα του έτους ατυχήματος 8.

Πίνακας 3.1:$IF_{kj}(\hat{R}_8)$

i/j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-0,1762	-0,1762	-0,1762	0,0649	0,0955	0,1346	0,1961	0,2899	0,4679	0,9748
2	-0,1479	-0,1479	-0,1479	0,0932	0,1238	0,1628	0,2244	0,3182	0,4962	
3	-0,1262	-0,1262	-0,1262	0,1149	0,1455	0,1845	0,2461	0,3398		
4	-0,1067	-0,1067	-0,1067	0,1344	0,1650	0,2040	0,2656			
5	-0,0878	-0,0878	-0,0878	0,1533	0,1839	0,2229				
6	-0,0667	-0,0667	-0,0667	0,1744	0,2050					
7	-0,0394	-0,0394	-0,0394	0,2017						
8	0,8037	0,8037	0,8037							
9	0	0								
10	0									

Επίσης παρατίθεται παρακάτω και γραφική αναπαράσταση (βλ. Avanzi et al., 2024) των επιδράσεων των προσαυξητικών ζημιών στα αποθέματα του έτους ατυχήματος 8.

Γράφημα 1:$IF_{kj}(\hat{R}_8)$



Συνδέοντας τον παραπάνω πίνακα με την εξίσωση (3.1) διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Η 1η περίπτωση όπου $k > i$ απεικονίζεται κάτω από το έτος ατυχήματος 8 όπου οι προσαυξητικές ζημιές για έτη ατυχήματος μεγαλύτερα από το έτος που μας ενδιαφέρει (στη συγκεκριμένη περίπτωση το έτος ατυχήματος 8) δεν έχουν επίδραση στα αποθέματα μας.
- Η γραμμή των στηλών με ίσο ύψος για το έτος ατυχήματος 8 αντιστοιχεί στην 2η περίπτωση της εξίσωσης (3.1), όπου οι προσαυξητικές ζημιές έχουν ίση και θετική επίδραση στην εκτίμηση των αποθεμάτων.
- Τέλος η 3η και τελευταία περίπτωση όπου $k \leq i - 1$ αφορά το πάνω αριστερό τμήμα του τριγώνου (δηλαδή μεταξύ του έτους ατυχήματος 7 και του έτους εξέλιξης 3), το οποίο απεικονίζει μια περιοχή όπου όλες οι προσαυξητικές ζημιές έχουν αρνητική επίδραση στα αποθέματα η οποία τείνει ωστόσο να μηδενισθεί όσο πλησιάζει το 8ο έτος ατυχήματος.

Πιο συγκεκριμένα,

Αν $k \leq i - 1$ και $j \leq I - i + 1$ τότε $IF_{kj}(\hat{R}_i) \leq 0$.

Αν $k \leq i - 1$ και $j > I - i + 1$ τότε $IF_{kj}(\hat{R}_i) > 0$ αν

$$\sum_{\{p\in D | p\geq k \cap p<I-j+1\}} \left(\left(\frac{1}{\sum_{q=1}^{p} C_{q,I-p+1}} \right) - \left(\frac{1}{\sum_{q=1}^{p} C_{q,I-p}} \right) \right) < \left(\frac{1}{\sum_{q=1}^{I-j+1} C_{qj}} \right).$$

Αυτή η ανισότητα μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από το αρχικό τρίγωνο ζημιών ενώ διαπιστώθηκε ότι στις περισσότερες περιπτώσεις που εξετάστηκε ισχύει. Από το γράφημα 1 μπορούμε να διαπιστώσουμε πότε ισχύει αυτή η ανισότητα καθώς βλέπουμε ότι για $j > I - i + 1 = 3$, όλες οι επιδράσεις είναι θετικές και αυξάνονται σε σχέση με το έτος εξέλιξης.

Ιδιαίτερη παρατήρηση αποτελεί ότι για οποιαδήποτε επιλογή περιόδου εξέλιξης j η επίδραση αυξάνει με το έτος ατυχήματος k σε όλο το τρίγωνο ζημιών. Εστιάζοντας στις διαγωνίους του τριγώνου και συγκεκριμένα όταν $j > I - i + 1$, για την πιο πρόσφατη διαγώνιο (δηλαδή $k + j = I + 1$) θα έχουμε ότι:

$$IF_{kj}(\hat{R}_i) > IF_{k+1,j-1}(\hat{R}_i) \Leftrightarrow \sum_{q=1}^{k} X_{qj} < C_{k+1,j-1}.$$

Η παραπάνω ανισότητα μας λέει ότι η επίδραση θα αυξάνεται καθώς φτάνουμε στην πιο πρόσφατη διαγώνιο (από το έτος ατυχήματος $k + 1$ και το έτος εξέλιξης $j - 1$ στο έτος ατυχήματος k και το έτος εξέλιξης j), εάν το άθροισμα των προσαυξητικών ζημιών στη στήλη j είναι μικρότερο από τις σωρευτικές ζημιές για το έτος εξέλιξης $j - 1$ και το έτος ατυχήματος $k + 1$.

Είναι πιθανό ότι αυτό θα ισχύει σε περιπτώσεις όπου οι προσαυξητικές ζημιές σε μεταγενέστερες περιόδους εξέλιξης είναι συνήθως μικρότερες από εκείνες σε προηγούμενες περιόδους και, ως εκ τούτου, τα ποσά των στηλών σε αυτά τα έτη εξέλιξης αναμένεται να είναι μικρότερα από τις σωρευτικές ζημιές για το επόμενο έτος ατυχήματος. Επιπρόσθετα, εάν υπάρχει αυτό το φθίνον μοτίβο εξέλιξης, είναι πιο πιθανό η ανισότητα αυτή να ισχύει σε μεταγενέστερες περιόδους εξέλιξης από ότι σε προγενέστερες.

Για τις άλλες διαγωνίους ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$IF_{kj}(\hat{R}_i) > IF_{k+1,j-1}(\hat{R}_i) \Leftrightarrow \frac{1}{\sum_{q=1}^{k} C_{q,I-k+1}} - \frac{1}{\sum_{q=1}^{k} C_{q,I-k}} > \frac{1}{\sum_{q=1}^{k+l} C_{q,I-k+1-l}} - \frac{1}{\sum_{q=1}^{k+l-1} C_{q,I-k+1-l}}.$$

όπου l αντιπροσωπεύει την διαγώνιο που αξιολογείται ($l = 2$ η δεύτερη πιο πρόσφατη διαγώνιος κλπ.).

Αξίζει να σημειώσουμε ότι στα περισσότερα παραδείγματα που εξετάσαμε αυτές οι ανισότητες ισχύουν, ως αποτέλεσμα αυτού βλέπουμε την επίδραση να αυξάνεται για τις προσαυξητικές ζημιές καθώς κινούμαστε στην πάνω δεξιά γωνία του τριγώνου ζημιών.

Η τελευταία ιδιότητα που προκύπτει είναι ότι για σταθερό έτος ατυχήματος k, η ποσότητα $IF_{kj}(\hat{R}_i)$ αυξάνει με το j, για $j \geq I - i + 1$.

b. Μέθοδος Bornhuetter-Ferguson

Η συνάρτηση επίδρασης της μεθόδου BF για μεμονωμένα έτη ατυχήματος δίνεται από τη σχέση:

$$IF_{kj}\left(\hat{R}_i^{BF}\right) = \begin{cases} 0, & k \geq i \\ \hat{\mu}_i \dfrac{\sum_{\{p \in D | p \geq k\}} \left(\left(\dfrac{1}{\sum_{q=1}^{p} C_{q,I-p+1}} \right) 1_{\{j \leq I-p+1\}} - \left(\dfrac{1}{\sum_{q=1}^{p} C_{q,I-p}} \right) 1_{\{j \leq I-p\}} \right)}{\hat{f}_{I-i+1} \cdots \hat{f}_{I-1}}, & k < i \end{cases} \qquad \textbf{(3.3)}$$

Το γράφημα που ακολουθεί στη συνέχεια απεικονίζει την επιδραστική συνάρτηση για τα αποθέματα του έτους ατυχήματος 8 της μεθόδου Bornhuetter-Ferguson υπό την υπόθεση ότι $\hat{\mu}_i = \hat{C}_{iI}$ (όπου $\hat{\mu}_i$ είναι η προηγούμενη εκτίμηση των τελικών αποθεμάτων για το έτος ατυχήματος i). Τα αποτελέσματα της συνάρτησης επίδρασης βάσει της μεθόδου Bornhuetter-Ferguson διαφέρουν από τα αντίστοιχα βάσει της μεθόδου Chain Ladder κατά δύο σημαντικούς τρόπους.

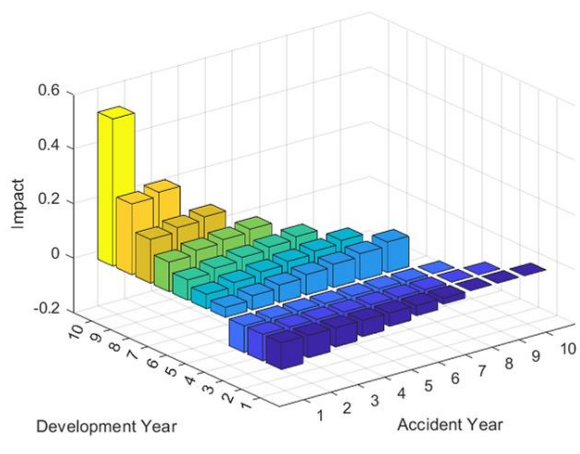
1. Αρχικά, στη μέθοδο BF οι προσαυξητικές ζημιές κατά το ίδιο έτος ατυχήματος με το υπό εξέταση αποθεματικό δεν επιδρούν στο εν λόγω αποθεματικό, σε αντίθεση με τη μέθοδο Chain-Ladder όπου το επηρεάζουν. Αυτό απεικονίζεται στο γράφημα μας από τις μηδενικές τιμές κάθε έτους ατυχήματος μεγαλύτερου ή ίσου του 8ου.

2. Κατά δεύτερον, στην περίπτωση όπου $k < i$, βάσει της μεθόδου Chain-Ladder, ο εκτιμητής $\hat{\mu}_i$ αντικαθίστανται με $\hat{C}_{iI}$ ενώ ο παρονομαστής $\hat{f}_{I-i+1} \dots \hat{f}_{I-1}$ αφαιρείται. Έτσι, αν η προηγούμενη εκτίμηση των τελικών ζημιών $\hat{\mu}_i$ είναι μικρότερη ή αρκετά κοντά στην εκτίμηση των τελικών ζημιών $\hat{C}_{iI}$ της μεθόδου Chain Ladder τότε η επίδραση των προσαυξητικών ζημιών σύμφωνα με τη μέθοδο Bornhuetter-Ferguson είναι μικρότερη από την αντίστοιχη επίδραση βάσει της μεθόδου Chain Ladder καθώς διαιρείται με τον συντελεστή $\hat{f}_{I-i+1} \dots \hat{f}_{I-1}$.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι αυτός ο ισχυρισμός εξαρτάται από την διαφορά μεταξύ $\hat{\mu}_i$ και $\hat{C}_{iI}$ ιδίως επειδή η ποσότητα $\hat{f}_{I-i+1} \dots \hat{f}_{I-1}$ μπορεί να είναι ελάχιστα μεγαλύτερη από 1 σε κάποιες περιπτώσεις. Επιπλέον, η ποσότητα $\hat{f}_{I-i+1} \dots \hat{f}_{I-1}$ θα αυξάνεται με το έτος ατυχήματος i έτσι ώστε η σχετική διαφορά μεταξύ των επιδράσεων υπό τις μεθόδους Bornhuetter-Ferguson και Chain Ladder να αυξάνεται με i.

Στο παρακάτω γράφημα (βλ. Avanzi et al., 2024) απεικονίζεται η επίδραση στα αποθέματα του 8^{ου} έτους ατυχήματος από το μοντέλο αυτό. Τα αποτελέσματα είναι από ποιοτικής άποψης ίδια με τα αποτελέσματα του προηγούμενου μοντέλου που αναλύσαμε στην προηγούμενη περίπτωση, με τη διαφορά ότι για το 8^{ο} έτος ατυχήματος και για τα 3 πρώτα έτη εξέλιξης, η επίδραση είναι μηδέν.

Γράφημα 2:$IF_{kj}(\hat{R}_8^{BF})$



3.3.2 Συνολικά αποθέματα

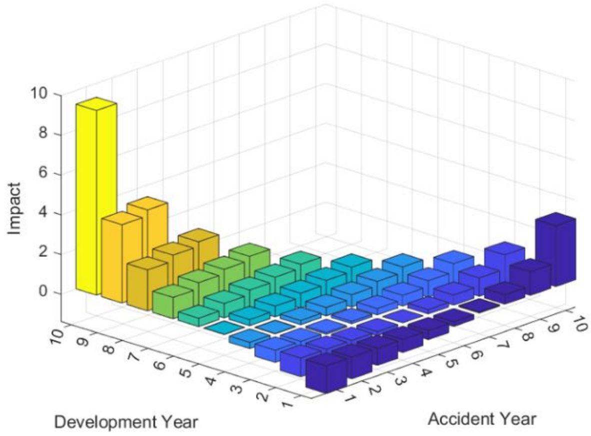
α. Μοντέλο του Mack

Όπως έχουμε αναφέρει η εκτίμηση των συνολικών αποθεμάτων δίνεται από την σχέση $\hat{R} = \sum_{i=1}^{I} \hat{R}_i$, έτσι η επιδραστική συνάρτηση για τα συνολικά αποθέματα είναι:

$$IF_{kj}(\hat{R}) = \frac{\partial}{\partial X_{kj}} \sum_{i=1}^{I} \hat{R}_i = \sum_{i=1}^{I} IF_{kj}\left(\hat{R}_i\right).$$

Με την βοήθεια του κάτωθι γραφήματος (βλ. Avanzi et al., 2024) θα απεικονίσουμε τις κύριες ιδιότητες της επιδραστικής συνάρτησης.

Γράφημα 3:$IF_{kj}(\hat{R})$



Από το γράφημα βλέπουμε ότι η παρατήρηση στην πάνω αριστερή γωνία ενός τριγώνου ζημιών ($X_{1,1}$) έχει αρνητική επίδραση στα αποθέματα για κάθε έτος ατυχήματος σε κάθε περίπτωση. Το συγκεκριμένο σημείο όπως φαίνεται και από το γράφημα έχει την μεγαλύτερη αρνητική επίδραση στα συνολικά εκτιμώμενα αποθέματα.

Σημαντικές είναι επίσης οι επιδράσεις προς τα τελευταία έτη εξέλιξης, τα οποία ωστόσο είναι θετικά. Είναι σημαντικό ότι αυτή η θετική επίδραση συνήθως αυξάνεται για κάθε έτος ατυχήματος καθώς κινούμαστε προς την παρατήρηση που βρίσκεται στην πάνω δεξιά γωνία του τριγώνου και ως εκ τούτου αυτή η παρατήρηση ($X_{1,I}$) θα έχει πιθανότατα μεγάλη θετική επίδραση. Στο γράφημα μας παρατηρούμε ότι αυτή η παρατήρηση ($X_{1,10}$) έχει τη μεγαλύτερη επίδραση στα συνολικά αποθέματα. Το αυξανόμενο μοτίβο προς την πάνω δεξιά γωνία μπορεί να γίνει κατανοητό παρατηρώντας ότι η επιδραστική συνάρτηση για κάθε έτος ατυχήματος αυξάνει με το j για το ίδιο k όταν $j \geq I - i + 1$.

Το αποτέλεσμα για την παρατήρηση $X_{1,I}$ μπορεί να γίνει περισσότερο κατανοητό σημειώνοντας ότι κάθε θετική αύξηση αυτής της παρατήρησης οδηγεί σε μεγαλύτερη εκτίμηση του f_{I-1} χωρίς την μείωση ενός άλλου εκτιμώμενου συντελεστή εξέλιξης. Ως εκ τούτου, οι τελικές εκτιμήσεις των αποθεμάτων θα αυξηθούν καθώς αυτός ο συντελεστής εξέλιξης χρησιμοποιείται για την πρόβλεψη των τελικών σωρευτικών ζημιών για κάθε άλλο έτος ατυχήματος.

Στη συνέχεια η επίδραση που έχει η παρατήρηση που βρίσκεται στην κάτω αριστερή γωνία του τριγώνου ($X_{I,1}$) η οποία είναι και η μόνη διαθέσιμη παρατήρηση για το τελευταίο έτος ατυχήματος, στα τελικά αποθέματα δίνεται από την εξίσωση (3.2). Είναι σημαντικό ότι η τιμή αυτή είναι μεγαλύτερη όταν εξετάζονται παρατηρήσεις στην πρώτη στήλη καθώς πολλαπλασιάζονται περισσότεροι συντελεστές εξέλιξης από ότι όταν $j > 1$. Επιπλέον, στα άλλα έτη ατυχήματος, οι παρατηρήσεις θα επηρεάσουν τους εκτιμώμενους συντελεστές εξέλιξης $\hat{f}_s$, έτσι ώστε ο ένας συντελεστής εξέλιξης θα αυξηθεί και ο άλλος θα μειωθεί καθώς οι παρατηρήσεις μεταβάλλονται. Αυτό ισχύει εκτός από την πρώτη στήλη όπου η επίδραση θα είναι αισθητή μόνο για $\hat{f}_1$ και θα είναι αρνητική, και για την τελευταία στήλη όπου μόνο η ποσότητα $\hat{f}_{I-1}$ θα επηρεαστεί και η επίδραση θα είναι θετική.

Για την πρώτη στήλη των παρατηρήσεων, η επίδραση θα είναι αρνητική ή μηδενική για κάθε έτος ατυχήματος εκτός από την περίπτωση όπου $k = i$. Βλέπουμε ότι οι παρατηρήσεις γύρω από την παρατήρηση $\hat{X}_{1,1}$ συχνά έχουν αρνητική επίδραση καθώς περικλείονται στο σύνολο $k \leq i - 1$ και $j \leq I - i + 1$, όπου η επίδραση τους είναι αρνητική για μεγαλύτερο αριθμό ετών ατυχήματος σε σχέση με άλλες παρατηρήσεις.

Ένα επιπρόσθετο ενδιαφέρον αποτέλεσμα είναι ότι για σταθερό k η επίδραση αυξάνεται με το j και για σταθερό j η επίδραση αυξάνεται με το k σε όλο το τρίγωνο. Η επίδραση επίσης αυξάνεται καθώς κινούμαστε κατά μήκος των διαγωνίων προς την πάνω δεξιά γωνία για όλα τα $j \geq 4$. Τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να γίνουν κατανοητά παρατηρώντας παρόμοιες ιδιότητες στην επιδραστική συνάρτηση για τα επιμέρους αποθεματικά του έτους ατυχήματος.

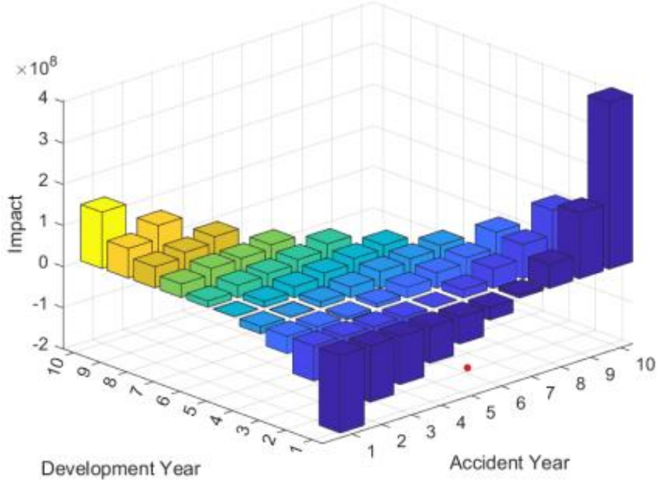
Να σημειώσουμε ότι οι τιμές των εκτιμήσεων $IF_{kj}(\hat{R})$ και $IF_{kj}(\hat{R}_i)$ είναι ανεξάρτητες των X_{kj} για $k + j = I + 1$ (δηλαδή, η τελευταία διαγώνιος του τριγώνου).

Τέλος, οι εκτιμήσεις $\hat{R}_i$ και $\hat{R}$ είναι ομοιογενείς τάξης πρώτης έτσι ώστε:

$$\hat{R}_i = \sum_{k+j \leq I+1} IF_{kj}\left(\hat{R}_i\right) \cdot X_{kj} \qquad \text{και} \qquad \hat{R} = \sum_{k+j \leq I+1} IF_{kj}\left(\hat{R}\right) \cdot X_{kj}.$$

Αυτό μας επιτρέπει να βρούμε το περιθώριο συνεισφοράς κάθε προσαυξητικής ζημιάς στα αποθεματικά που δίνεται από την $IF_{kj}(\hat{R}) \cdot X_{kj}$. Στο κάτωθι γράφημα (βλ. Avanzi et al., 2024) βλέπουμε αυτό το περιθώριο συνεισφοράς στα συνολικά αποθέματα, ενώ παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα είναι κάπως διαφορετικό από ότι όταν εξετάζεται η $IF_{kj}(\hat{R})$.

Γράφημα 4: $IF_{kj}(\hat{R}) \cdot X_{kj}$



Από το γράφημα βλέπουμε πως το μέγεθος της ίδιας της προσαυξητικής ζημιάς μπορεί να επηρεάσει την συνεισφορά της στα αποθεματικά. Ειδικότερα, το μέγεθος των προσαυξητικών ζημιών μειώνεται σημαντικά σε μεταγενέστερες περιόδους εξέλιξης. Επομένως η συγκεκριμένη ανάλυση μας επιτρέπει να εντοπίσουμε παρατηρήσεις με επιρροή εντός ενός τριγώνου ζημιών.

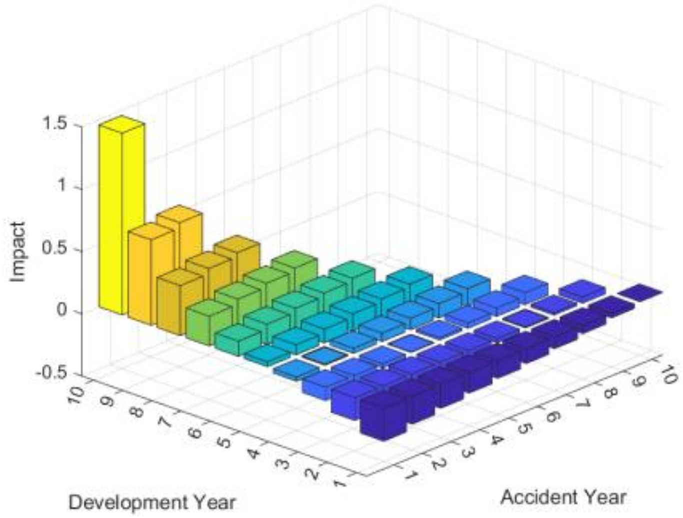
b. Μέθοδος Bornhuetter-Ferguson

Η επιδραστική συνάρτηση για τα συνολικά αποθέματα της μεθόδου Bornhuetter-Ferguson δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$IF_{kj}(\hat{R}^{BF}) = \sum_{i=1}^{I} IF_{kj}\left(\hat{R}_i^{BF}\right).$$

Η συνάρτηση επίδρασης βάσει της υπόθεσης $\hat{\mu}_i = \hat{C}_{iI}$ για όλα τα i απεικονίζεται στο παρακάτω γράφημα (βλ. Avanzi et al., 2024).

Γράφημα 5:$IF_{kj}(\hat{R}^{BF})$



Χρησιμοποιώντας αυτή την μέθοδο η σημαντική επίδραση του $X_{I,1}$ εξαλείφεται πλήρως. Επιπλέον, όλες οι επιδράσεις έχουν μειωθεί σε σύγκριση με το γράφημα 3, συγκεκριμένα οι επιδράσεις για τα μεταγενέστερα έτη ατυχήματος σε πρώιμες περιόδους εξέλιξης έχουν μειωθεί σημαντικά. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο παρονομαστής της εξίσωσης (3.3) για $k < i$ είναι μεγαλύτερος για τις πρώιμες περιόδους εξέλιξης και η επίπτωση του X_{kj} στο $\hat{R}_i$ είναι μηδενική για το μεγαλύτερο μέρος των ετών ατυχήματος i καθώς αυξάνουμε το k.

Επομένως όπως παρατηρούμε στο παραπάνω γράφημα, παρόμοια ποιοτική συμπεριφορά με το μοντέλο του Mack εμφανίζει και το τρέχων. Η μέγιστη θετική επίδραση είναι στο 1ο έτος ατυχήματος και 10ο έτος εξέλιξης αλλά υπολείπεται του μεγέθους αυτής το 10° έτος ατυχήματος και 1° έτος εξέλιξης. Η μέγιστη αρνητική επίδραση είναι στο 1° έτος ατυχήματος και εξέλιξης.

3.4 Επίδραση στο μέσο τετραγωνικό σφάλμα στο μοντέλο του Mack

α. *Μεμονωμένα έτη ατυχήματος*

Στην περίπτωση που εξετάζουμε την επιδραστική συνάρτηση για την συγκεκριμένη στατιστική ενδιαφέροντος έχουμε θεωρήσει τους όρους σ_j και f_j ως γνωστές σταθερές, έτσι ώστε να υπολογίσουμε την ευαισθησία του μέσου τετραγωνικού σφάλματος στις προσαυξητικές ζημιές αντί για την ευαισθησία της εκτίμησης του όρου αυτού. Προκειμένου να προσεγγίσουμε αυτή την συνάρτηση μπορούμε στη συνέχεια να εισάγουμε τις εκτιμώμενες τιμές των σ_j και f_j. Η επιδραστική συνάρτηση δίνεται από τον τύπο:

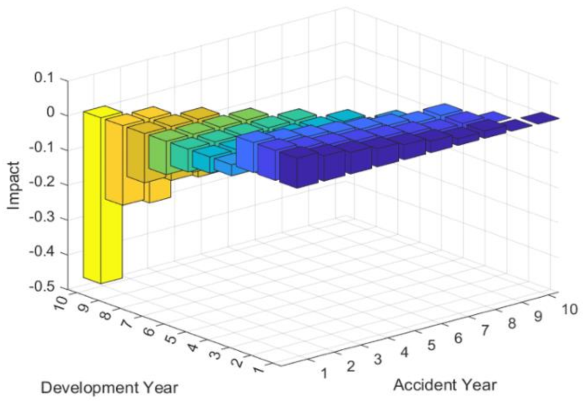
$$IF_{kj}mse\left(\left(\hat{R}_i\right)\right) = \begin{cases} 0, & k > i \\ \displaystyle\sum_{j=I-i+1}^{I-1}\left(f_{I-i+1}\dots f_{I-1}\sigma_j^2 f_{j+1}^2\dots f_{I-1}^2\right) + 2C_{i,I-i+1}\left(\hat{f}_{I-i+1}\dots\hat{f}_{I-1}\right)^2 \sum_{s=I-i+1}^{I-1}\frac{\hat{\sigma}_s^2/\hat{f}_s^2}{\sum_{i=1}^{I-s}C_{is}} & \\ \displaystyle -2C_{i,I-i+1}\left(\hat{f}_{I-i+1}\dots\hat{f}_{I-1}\right)\sqrt{\sum_{s=I-i+1}^{I-1}\frac{\hat{\sigma}_s^2/\hat{f}_s^2}{\sum_{i=1}^{I-s}C_{is}}}, & k = i \\ \displaystyle \hat{C}_{iI}\sum_{p\in D|p\geq k}\left(\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{p}C_{i,I-p+1}}\right)1_{\{j\leq I-p+1\}} - \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{p}C_{i,I-p+1}}\right)1_{\{j\leq I-p\}}\right), & k < i \end{cases}$$

Η επίδραση που έχει κάθε προσαυξητική ζημιά στη ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος των αποθεμάτων για το έτος ατυχήματος 8 δίνεται στο παρακάτω τρίγωνο ενώ παρατίθεται και γραφική αναπαράσταση (βλ. Avanzi et al., 2024).

Πίνακας 3.2:$IF_{kj}(\sqrt{mse(\hat{R}_8)})$

i/j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0863	0,0863	0,0863	-0,0318	-0,0468	-0,0659	-0,0960	-0,1419	-0,2291	-0,4773
2	0,0724	0,0724	0,0724	-0,0456	-0,0606	-0,0797	-0,1099	-0,1558	-0,2429	
3	0,0618	0,0618	0,0618	-0,0562	-0,0712	-0,0903	-0,1205	-0,1664		
4	0,0522	0,0522	0,0522	-0,0658	-0,0808	-0,0999	-0,1300			
5	0,0430	0,0430	0,0430	-0,0751	-0,0900	-0,1092				
6	0,0327	0,0327	0,0327	-0,0854	-0,1004					
7	0,0193	0,0193	0,0193	-0,0988						
8	0,0208	0,0208	0,0208							
9	0	0								
10	0									

Γράφημα 6:$IF_{kj}(\sqrt{mse(\hat{R}_8)})$



Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, για $k = i$ η επίδραση είναι πάντα θετική και ίση, και ανεξάρτητη του j. Αυτό απεικονίζεται στο γράφημα 6 από την γραμμή θετικών στηλών ίσου ύψους για το έτος ατυχήματος 8. Επιπρόσθετα, βλέπουμε ότι το πρόσημο της επίδρασης είναι το αντίθετο από εκείνο της $IF_{kj}(\hat{R}_8)$ (εκτός από την περίπτωση όπου $k = 8$). Αξίζει να σημειωθεί ότι η επίδραση αυξάνεται σε μέγεθος στην πάνω δεξιά γωνία (βλ. Πίνακας 3.2) ωστόσο οι επιδράσεις αυτές είναι αρνητικές.

Για $k \leq i-1$ η ποσότητα $-2C_{i,I-i+1}(\hat{f}_{I-i+1}\ldots\hat{f}_{I-1})\sqrt{\sum_{s=I-i+1}^{I-1}\frac{\hat{\sigma}_s^2/\hat{f}_s^2}{\sum_{i=1}^{I-s}C_{is}}}$ είναι πάντα αρνητική και ανεξάρτητη των k και j. Επιπρόσθετα, ο όρος $\hat{C}_{iI}\sum_{p\in D|p\geq k}\left(\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{p}C_{i,I-p+1}}\right)1_{\{j\leq I-p+1\}}-\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{p}C_{i,I-p+1}}\right)1_{\{j\leq I-p\}}\right)$ είναι ίσος με $IF_{kj}(\hat{R}_i)$. Ως εκ τούτου, η ποσότητα $IF_{kj}mse\left((\hat{R}_i)\right)$ θα έχει το αντίθετο πρόσημο της ποσότητας $IF_{kj}(\hat{R}_i)$ σε όλο το τρίγωνο για $k \leq i-1$. Το θετικό πρόσημο της εκτίμησης $IF_{kj}mse\left((\hat{R}_i)\right)$ για $j \leq I-i+1$ αλλάζει σε αρνητικό για $j = I-i+2$

όταν $k = i - 1$. Τέλος, για $k \leq i - 1$ και $j \leq I - i + 1$ η επίδραση θα είναι θετική όπως φαίνεται και από το παραπάνω γράφημα για $k \leq 7$ και $j \leq 3$.

Παρόμοιες τάσεις όσον αφορά το μέγεθος παρατηρούνται για το $IF_{kj}mse\left(\left(\hat{R}_i\right)\right)$ όπως περιγράφτηκε παραπάνω για το $IF_{kj}\left(\hat{R}_i\right)$. Για παράδειγμα καθώς κινούμαστε προς την επάνω δεξιά γωνία του τριγώνου των ζημιών, τείνουμε να δούμε την επίδραση να γίνεται όλο και πιο αρνητική (εν αντιθέσει με την όλο και πιο θετική για το $IF_{k,j}\left(\hat{R}_i\right)$).

b. *Εκτίμηση του συνολικού Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος*

Ξέρουμε ότι με βάση το μοντέλο του Mack η εκτίμηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος για το σύνολο των αποθεμάτων δίνεται από τον τύπο:

$$mse\left(\hat{R}\right) = \sum_{i=2}^{I} \left\{ \left(s.e.\left(\hat{R}_i\right)\right)^2 + \hat{C}_{iI} \left(\sum_{q=i+1}^{I} \hat{C}_{qI} \right) \left(\sum_{r=I-i+1}^{I-1} \frac{2\sigma_r^2 / \hat{f}_r^2}{\sum_{n=1}^{I-r} C_{nr}} \right) \right\}.$$

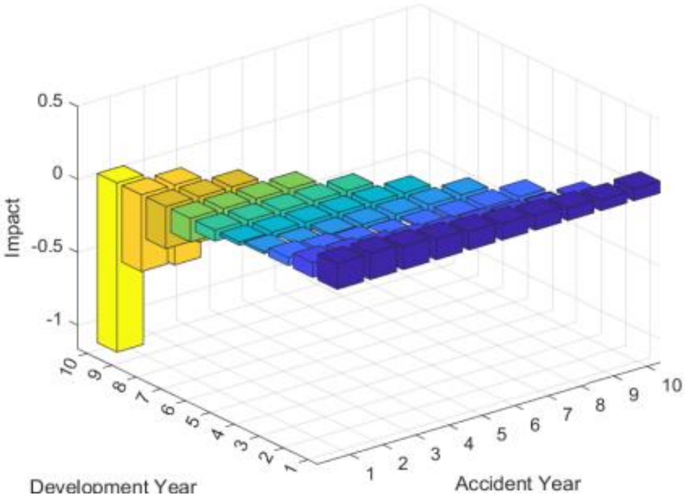
Στην περίπτωση αυτή, θεωρούμε όπως και στην περίπτωση των μεμονωμένων ετών ατυχήματος τις άγνωστες τιμές σ_r ως σταθερές και όχι ως εκτιμήσεις. Αυτό μας επιτρέπει και πάλι να επικεντρωθούμε στην επίδραση που έχουν οι προσαυξητικές ζημιές στο μέσο τετραγωνικό σφάλμα και όχι στην εκτίμηση του. Η επιδραστική συνάρτηση είναι:

$$
\begin{aligned}
&IF_{kj}\left(mse(\hat{R})\right) \\
&\quad = \sum_{i=2}^{I} \left\{ IF_{kj}\left(mse(\hat{R}_i)\right) \right. \\
&\quad + \hat{C}_{iI}\left(\sum_{q=i+1}^{I}\hat{C}_{qI}\right)\sum_{r=I-i+1}^{I-1}\frac{-2\sigma_r^2\sum_{n=1}^{I-r}\hat{f}_r^2 C_{nr}\left(\frac{\partial lnC_{nr}}{\partial X_{kj}}+\frac{2\partial ln\hat{f}_r}{\partial X_{kj}}\right)}{\left(\sum_{n=1}^{I-r}\hat{f}_r^2\,C_{nr}\right)^2} \\
&\quad + \left(\sum_{r=I-i+1}^{I-1}\frac{2\sigma_r^2/\hat{f}_r^2}{(\sum_{n=1}^{I-r}C_{nr})^2}\left(\hat{C}_{iI}\left(\sum_{q=i+1}^{I}\left(IF_{kj}(\hat{R}_q)+\frac{\partial C_{q,I-q+1}}{\partial X_{kj}}\right)\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left. + \left(\sum_{q=i+1}^{I}C_{qI}\right)\left(IF_{kj}(\hat{R}_i)+\frac{\partial C_{i,I-i+1}}{\partial X_{kj}}\right)\right)\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η διαμόρφωση της επιδραστικής συνάρτησης εξακολουθεί να περιέχει όρους παραγώγων που είναι εύκολα υπολογίσιμοι.

Στο παρακάτω γράφημα (βλ. Avanzi et al., 2024) απεικονίζεται η επίδραση των προσαυξητικών ζημιών στην εκτίμηση της ρίζας του μέσου τετραγωνικού σφάλματος των συνολικών αποθεμάτων.

Γράφημα 7:$IF_{kj}(\sqrt{mse(\hat{R})})$



Το κυρίαρχο αποτέλεσμα για τις επιδράσεις αυτές είναι ότι στο πρώτο έτος εξέλιξης όλες είναι θετικές και κατόπιν κρατώντας το δείκτη k σταθερό, μειώνονται ως προς j τείνοντας στην τιμή 0 και, συνεχίζοντας με αυτό το μοτίβο γίνονται όλο και πιο αρνητικές προς την επάνω δεξιά γωνία.

3.5 Η επίδραση των λογαριθμοκανονικών ποσοστημορίων

Στην συγκεκριμένη παράγραφο θα εξετάσουμε την επιδραστική συνάρτηση για τα συνολικά αποθέματα υπό την υπόθεση ότι αυτά κατανέμονται λογαριθμοκανονικά.

Η λογαριθμοκανονική κατανομή με παραμέτρους μ και σ^2, δηλαδή η $LNormal(\mu, \sigma^2)$ προκύπτει από την κανονική δηλαδή την $Normal(\mu, \sigma^2)$ κατά τον κάτωθι τρόπο:

Αν η τυχαία μεταβλητή $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$ τότε η $Y = \exp(X) \sim LNormal(\mu, \sigma^2)$ με σ.π.π., $f_Y(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(lny-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), y > 0$, συνάρτηση κατανομής $F_Y(y) = \Phi\left(\frac{lny-\mu}{\sigma}\right)$ όπου Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της $Normal(0,1)$, με μέση τιμή $E(Y) = exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2})$ και διασπορά $V(Y) = exp(2\mu + 2\sigma^2) - exp(2\mu + \sigma^2)$.

Υπό τις υποθέσεις ότι τα συνολικά αποθέματα έχουν μέση τιμή $E(R) = \hat{R} = exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2})$ και διασπορά $Var(R) = mse(\hat{R}) = exp(2\mu + 2\sigma^2) - exp(2\mu + \sigma^2)$, έτσι ώστε, $R \sim LNormal(\mu, \sigma^2)$.

Το ποσοστημόριο q της λογαριθμοκανονικής $Y = \exp(X) \sim LNormal(\mu, \sigma^2)$ προσδιορίζεται ως κάτωθι:

$$F_X^{-1}(q) = \exp\big(\mu + \sigma\Phi^{-1}(q)\big).$$

Η επιδραστική συνάρτηση των λογαριθμοκανονικών ποσοστημορίων δίνεται από τον τύπο:

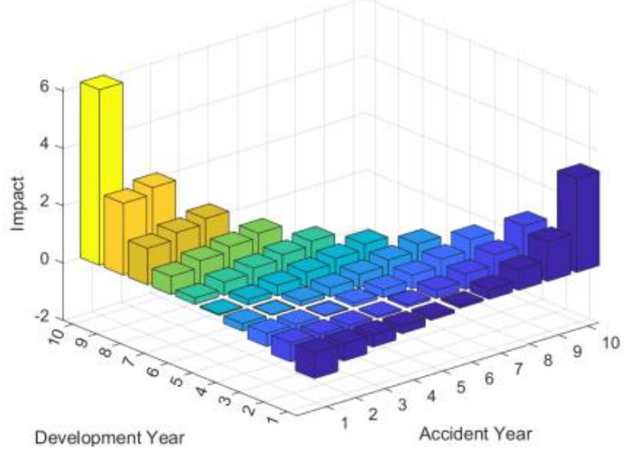
$$IF_{kj}\left(F_R^{-1}(q)\right) = \left(\frac{2 \cdot IF_{kj}(\hat{R}) \cdot \hat{R} - IF_{kj}\left(mse(\hat{R})\right)}{2\left(mse(\hat{R}) + \hat{R}^2\right)} + \frac{\Phi^{-1}(q)\left(IF_{kj}\left(mse(\hat{R})\right) \cdot \hat{R} - 2mse(\hat{R}) \cdot IF_{kj}(\hat{R})\right)}{2 \cdot \hat{R}\left(mse(\hat{R}) + \hat{R}^2\right)\sqrt{ln\left(1 + \frac{mse\hat{R}}{\hat{R}^2}\right)}} \right) \cdot exp\left(ln\hat{R} - \frac{1}{2} ln\left(1 + \frac{mse(\hat{R})}{\hat{R}^2}\right) + \sqrt{ln\left(1 + \frac{mse(\hat{R})}{\hat{R}^2}\right)}\Phi^{-1}(q) \right) \cdot$$

Η επίδραση που έχει κάθε προσαυξητική ζημιά στο 99,5% του ποσοστημορίου των συνολικών αποθεμάτων υπό την υπόθεση ότι αυτά κατανέμονται λογαριθμοκανονικά δίνεται στο παρακάτω τρίγωνο και γράφημα (βλ. Avanzi et al., 2024).

Πίνακας 3.3:$IF_{kj}(F_R^{-1}(0{,}995))$

i/j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-0,8366	-0,6309	-0,4455	-0,2543	-0,0435	0,2220	0,6332	1,2749	2,5060	6,1290
2	-0,6009	-0,3952	-0,2098	-0,0186	0,1922	0,4576	0,8689	1,5106	2,7417	
3	-0,4235	-0,2179	-0,0325	0,1587	0,3695	0,6350	1,0462	1,6880		
4	-0,2677	-0,0620	0,1234	0,3146	0,5254	0,7908	1,2021			
5	-0,1088	0,0968	0,2823	0,4734	0,6842	0,9497				
6	0,0786	0,2842	0,4696	0,6608	0,8716					
7	0,3274	0,5330	0,7185	0,9096						
8	0,7020	0,9077	1,0931							
9	1,3842	1,5898								
10	3,2803									

Γράφημα 8:$IF_{kj}(F_R^{-1}(0{,}995))$



Παρατηρούμε στο επιδραστικό τρίγωνο του Πίνακα 3.3 ότι τα τρία γωνιακά σημεία $X_{1,1}$, $X_{1,10}$ και $X_{10,1}$ έχουν σημαντικές επιδράσεις στο 99,5% του ποσοστημορίου των αποθεμάτων. Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό διαισθητικά με την έννοια ότι εάν μια προσαυξητική ζημιά έχει μια δεδομένη επίδραση στα αποθέματα, τότε μπορούμε να περιμένουμε να δούμε μια παρόμοια επίδραση στα αντίστοιχα ποσοστημόρια.

3.6 Συμπεράσματα

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι επιδραστικές συναρτήσεις αποτυπώνουν τον βαθμό στον οποίο το στατιστικό στοιχείο ενδιαφέροντος θα αλλάξει δεδομένης της μεταβολής σε μια συγκεκριμένη προσαυξητική ζημιά. Επιπλέον, είδαμε ότι συχνά υπάρχει ένα μικρό σύνολο παρατηρήσεων στο οποίο αυτά τα στατιστικά στοιχεία είναι ιδιαίτερα ευαίσθητα. Αυτό αναδεικνύει την έλλειψη ανθεκτικότητας, καθώς οι αποκλίσεις σε ορισμένες παρατηρήσεις μπορεί να καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό τα αποτελέσματα. Τέλος, ένα σημαντικό χαρακτηριστικό αυτών των συναρτήσεων είναι ότι εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τις πολυάριθμες άλλες παρατηρήσεις εντός ενός τριγώνου ζημιών, γεγονός που αναδεικνύει την αλληλεξάρτηση της εξέλιξης των ζημιών και κάθε προσαυξητικής παρατήρησης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 1: Τρίγωνο σωρευτικών ζημιών

Έτος Ατυχήματος (Accident Year)	Έτος Εξέλιξης (Development Year)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	135.338.126	226.144.807	294.811.522	350.547.737	397.515.016	432.978.383	463.455.627	488.293.748	506.532.237	521.227.320
2	125.222.434	214.862.412	285.560.374	344.209.488	390.523.715	431.893.014	466.287.526	492.841.698	517.443.907	
3	136.001.521	227.674.479	305.920.748	368.225.941	417.341.614	453.973.212	484.183.941	514.066.300		
4	135.277.744	238.882.629	317.185.713	378.998.396	427.718.531	466.990.392	499.020.089			
5	143.540.778	252.857.391	331.949.864	397.553.764	448.780.034	493.188.270				
6	132.095.863	220.958.796	290.228.179	347.337.816	396.156.597					
7	127.299.710	220.279.021	281.658.628	331.975.933						
8	120.660.241	210.129.914	281.700.632							
9	134.132.283	221.148.648								
10	131.918.566									

Πίνακας 2: Τρίγωνο συντελεστών εξέλιξης

Έτος Ατυχήματος (Accident Year)	Έτος Εξέλιξης (Development Year)								
	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10
1	1,671	1,304	1,189	1,134	1,089	1,070	1,054	1,037	1,029
2	1,716	1,329	1,205	1,135	1,106	1,080	1,057	1,050	
3	1,674	1,344	1,204	1,133	1,088	1,067	1,062		
4	1,766	1,328	1,195	1,129	1,092	1,069			
5	1,762	1,313	1,198	1,129	1,099				
6	1,673	1,313	1,197	1,141					
7	1,730	1,279	1,179						
8	1,742	1,341							
9	1,649								

Πίνακας 3: Μέσος όρος συντελεστών εξέλιξης και CDF

	Έτος Εξέλιξης (Development Year)								
	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10
Σταθμισμένος Μ.Ο.	1,709	1,319	1,195	1,133	1,095	1,071	1,057	1,044	1,029
CDF	4,065	2,378	1,804	1,509	1,332	1,217	1,136	1,074	1,029

Πίνακας 4: Τρίγωνο αποκλίσεων δεικτών εξέλιξης

Έτος Ατυχήματος (Accident Year)	Έτος Εξέλιξης (Development Year)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	195.523	50.571	11.447	248	11.950	269	7.007	19.460	0
2	5.919	23.436	29.097	686	49.316	30.901	133	19.280	
3	165.769	143.226	21.463	22	19.995	9.734	8.686		
4	437.933	20.194	53	7.989	3.544	3.134			
5	397.159	8.505	1.823	7.307	8.136				
6	173.632	5.747	641	19.073					
7	58.441	351.561	78.006						
8	127.684	101.774							
9	486.671								

Πίνακας 5: Πίνακας διακύμανσης

	Έτος Εξέλιξης (Development Year)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Αριθμητής	2.048.731	705.015	142.531	35.326	92.940	44.039	15.825	38.741	0
Παρονομαστής	8	7	6	5	4	3	2	1	0
σ^2	256.091	100.716	23.755	7.065	23.235	14.680	7.913	38.741	7.913

Πίνακας 6: Τρίγωνο εξέλιξης ζημιών

Έτος Ατυχήματος (Accident Year)	Έτος Εξέλιξης (Development Year)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	135.338.126	226.144.807	294.811.522	350.547.737	397.515.016	432.978.383	463.455.627	488.293.748	506.532.237
2	125.222.434	214.862.412	285.560.374	344.209.488	390.523.715	431.893.014	466.287.526	492.841.698	517.443.907
3	136.001.521	227.674.479	305.920.748	368.225.941	417.341.614	453.973.212	484.183.941	514.066.300	536.512.700
4	135.277.744	238.882.629	317.185.713	378.998.396	427.718.531	466.990.392	499.020.089	527.704.513	550.746.418
5	143.540.778	252.857.391	331.949.864	397.553.764	448.780.034	493.188.270	528.292.430	558.659.472	583.053.007
6	132.095.863	220.958.796	290.228.179	347.337.816	396.156.597	433.670.805	464.538.630	491.241.008	512.690.756
7	127.299.710	220.279.021	281.658.628	331.975.933	376.175.524	411.797.616	441.108.551	466.464.133	486.832.013
8	120.660.241	210.129.914	281.700.632	336.713.480	381.543.832	417.674.279	447.403.503	473.120.928	493.779.473
9	134.132.283	221.148.648	291.605.398	348.552.531	394.959.146	432.359.961	463.134.483	489.756.148	511.141.060
10	131.918.566	225.444.969	297.270.503	355.323.965	402.632.135	440.759.547	472.131.935	499.270.787	521.071.150

Πίνακας 7: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

Έτος Ατυχήματος (Accident Year)	Πληρωθείσες Ζημιές	CDF	Εκτιμώμενες Τελικές	Απόθεμα Ζημιών	ΜΤΣ	Τυπικό Σφάλμα	Συντελεστής Μεταβλητότητας
1	521.227.320	1,000	521.227.320	0	-	-	
2	517.443.907	1,029	532.455.550	15.011.643	8.276.766.562.357	2.876.937	19%
3	514.066.300	1,074	552.077.551	38.011.251	40.877.894.111.179	6.393.582	17%
4	499.020.089	1,136	566.724.205	67.704.116	48.547.019.556.203	6.967.569	10%
5	493.188.270	1,217	599.968.045	106.779.775	64.428.123.849.179	8.026.713	8%
6	396.156.597	1,332	527.564.505	131.407.908	70.454.065.659.082	8.393.692	6%
7	331.975.933	1,509	500.955.570	168.979.637	70.725.312.606.589	8.409.834	5%
8	281.700.632	1,804	508.104.584	226.403.952	89.282.179.520.800	9.448.925	4%
9	221.148.648	2,378	525.969.850	304.821.202	174.507.977.497.033	13.210.147	4%
10	131.918.566	4,065	536.188.024	404.269.458	390.816.539.349.435	19.769.080	5%
				1.463.388.942		**45.480.914**	

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική Βιβλιογραφία

[1] Ζυμπίδης, Α. (2008). *Αναλογιστικά Μαθηματικά Γενικών Ασφαλίσεων*. Αθήνα: Εκδόσεις ΟΠΑ

[2] Οδηγία 2009/138/ΕΚ του Ευρωπαϊκού Κοινοβουλίου και του Συμβουλίου, της 25ης Νοεμβρίου 2009, σχετικά με την ανάληψη και την άσκηση δραστηριοτήτων ασφάλισης και αντασφάλισης (Φερεγγυότητα ΙΙ), 261-265

[3] Πιτσέλης, Γ. (2020). *Μαθηματικά των Γενικών Ασφαλίσεων*. Αθήνα: Εκδόσεις Παπαζήση

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

[1] Avanzi, B., Lavender, M., Taylor, G., & Wong, B. (2024). On the impact of outliers in loss reserving. *European Actuarial Journal*. 14, 257-296

[2] Bornhuetter, R. L., & Ferguson, R. E. (1972). The Actuary and IBNR. *PCAS LIX*, 181-195

[3] Brown, R. L., & Gottlieb, L. R. (2007). *Introduction to Ratemaking and Loss Reserving for property and casualty insurance*. 3rd ed. Connecticut: Actex Publications

[4] Friedland, J. (2010). *Estimating Unpaid Claims using Basic Techniques*. Casualty Actuarial Society

[5] Hardy, M. R. (2022). *Outstanding Claims Reserves*. Ontario: Education Committee of the Society of Actuaries

[6] Lecture Notes Hellenic Actuarial Society

[7] Lecture Notes Institute and Faculty of Actuaries (IFoA)

[8] Mack, T. (1993). Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates. *ASTIN Bulletin*, 23 (2), 213-225

[9] Werner, G., Modlin, C., & Willis Towers Watson (2016). *Basic Ratemaking*. 5th ed. Casualty Actuarial Society

[10] Wuthrich, M. V. (2023). *Non-life insurance: Mathematics & Statistics*. Zurich: Department of Mathematics ETH Zurich