ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ **ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ**

ΑΚΡΙΒΕΙΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΑΚΕΤΟΥ ACTUAR ΣΤΟ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΚΑΙ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ.

Αλέξανδρος Π. Ανδρούτσος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων*

Πειραιάς
Νοέμβριος 2024

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ **ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ**

ΑΚΡΙΒΕΙΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΑΚΕΤΟΥ ACTUAR ΣΤΟ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΚΑΙ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Αλέξανδρος Π. Ανδρούτσος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων*

Πειραιάς
Νοέμβριος 2024

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη Συνέλευση του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή της, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

1. Κωνσταντίνος Πολίτης, Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
2. Γεώργιος Ψαράκος, Αναπληρωτής Καθηγητής
3. Βασίλειος Σεβρούγλου, Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

EXACT CALCULATIONS AND APPROXIMATIONS IN THE COLLECTIVE RISK MODEL AND CREDIBILITY THEORY USING THE ACTUAR PACKAGE

By

Alexandros P. Androutsos

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece
November 2024

Στους γονείς μου

Τάκη και Μάιρα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες σε όλους εκείνους που με βοήθησαν και με στήριξαν κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Καταρχάς, ευχαριστώ τον επιβλέποντα Καθηγητή μου,κ. Κωνσταντίνο Πολίτη, για την πολύτιμη καθοδήγηση, την υπομονή και την υποστήριξή του σε κάθε στάδιο της διαδικασίας. Οι συμβουλές και οι προτάσεις του ήταν καθοριστικές για την ολοκλήρωση της εργασίας. Ευχαριστώ θερμά τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Απόστολο Μποζίκα για την πολύτιμη συμβολή του στο κομμάτι της θεωρία αξιοπιστίας χαρτοφυλακίου και ιδιαίτερα στους κώδικες του κεφαλαίου 6.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές και τους συνεργάτες μου στο τμήμα, καθώς και τους συμφοιτητές μου για τις εποικοδομητικές συζητήσεις και την ανταλλαγή ιδεών.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου, στην κοπέλα μου, Μιράντα, και στους φίλους μου για την αγάπη και την υποστήριξή τους. Χωρίς εσάς, αυτό το ταξίδι θα ήταν πολύ πιο δύσκολο.

Τέλος, θα ήθελα να αφιερώσω αυτή τη δουλειά στις γιαγιάδες μου που τις αγαπώ πολύ.

Σας ευχαριστώ όλους!

Περίληψη

Η διπλωματική εργασία αυτή ασχολείται με θεμελιώδη και εξειδικευμένα ζητήματα της αναλογιστικής επιστήμης και της διαχείρισης κινδύνων, δίνοντας έμφαση τόσο στη θεωρητική ανάλυση όσο και στις πρακτικές εφαρμογές με τη χρήση του πακέτου actuar στην R. Η εργασία εξετάζει με λεπτομέρεια τη θεωρία συλλογικού κινδύνου, τη θεωρία χρεοκοπίας, την αξιοπιστία χαρτοφυλακίου και την υλοποίηση αυτών των θεωριών σε πραγματικά σενάρια κινδύνου για ασφαλιστικές εταιρείες.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας, αναπτύσσεται η θεωρία του συλλογικού κινδύνου, η οποία αποτελεί βασικό εργαλείο στην αναλογιστική επιστήμη για την κατανόηση και την πρόβλεψη των πιθανών ζημιών που μπορεί να αντιμετωπίσει ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλιστικών συμβολαίων. Εδώ, αναλύονται βασικές μαθηματικές έννοιες όπως οι ροπογεννήτριες συναρτήσεις, οι πιθανογεννήτριες και οι μετασχηματισμοί Laplace, οι οποίες επιτρέπουν τον υπολογισμό της κατανομής της συνολικής ζημιάς. Επιπλέον, εξετάζονται τα μοντέλα των κατανομών μικτού τύπου και οι σχέσεις που συνδέουν τις γεννήτριες συναρτήσεις με τη διασπορά των κινδύνων, δίνοντας σημαντικές πληροφορίες για τον υπολογισμό των συνολικών ζημιών ενός χαρτοφυλακίου.

Στο επόμενο κεφάλαιο, η εργασία εστιάζει στη θεωρία χρεοκοπίας, η οποία εξετάζει τη διαχείριση του κινδύνου που προκύπτει από τη δυναμική σχέση μεταξύ αποθεματικών και απαιτήσεων. Αναλύεται το κλασικό μοντέλο Cramér-Lundberg, ένα από τα θεμελιώδη μοντέλα που χρησιμοποιούνται στην αναλογιστική επιστήμη, το οποίο εξετάζει τη στοχαστική πορεία του πλεονάσματος μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Οι μαθηματικές εκφράσεις και οι ανισότητες που σχετίζονται με την πιθανότητα χρεοκοπίας αναλύονται διεξοδικά, και εξετάζεται πώς η διαχείριση κινδύνου μπορεί να μειώσει την πιθανότητα οικονομικής αποτυχίας της εταιρείας. Επιπλέον, γίνεται αναφορά σε στρατηγικές αντασφάλισης, όπως η αναλογική αντασφάλιση και η αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας, που επιτρέπουν την κατανομή του κινδύνου και τη σταθεροποίηση του χαρτοφυλακίου.

Ακολουθεί το κεφάλαιο για τη θεωρία αξιοπιστίας χαρτοφυλακίου, όπου παρουσιάζονται τεχνικές και μοντέλα που επιτρέπουν την ακριβέστερη εκτίμηση των ασφαλίστρων. Αναλύονται τα μοντέλα Bühlmann και Bühlmann-Straub, τα οποία αποτελούν σημεία αναφοράς στην αναλογιστική επιστήμη και αποσκοπούν στη βελτιστοποίηση των ασφαλίστρων λαμβάνοντας υπόψη τόσο την ατομική εμπειρία των ασφαλισμένων όσο και τα συλλογικά δεδομένα του χαρτοφυλακίου. Η θεωρία αξιοπιστίας δίνει λύσεις στο πρόβλημα της εκτίμησης του ασφαλίστρου σε καταστάσεις αβεβαιότητας, εξισορροπώντας τα ατομικά δεδομένα των ασφαλισμένων με τη συνολική εμπειρία του χαρτοφυλακίου.

Το τελευταίο μέρος της διπλωματικής εργασίας αφιερώνεται στις εφαρμογές στην R, χρησιμοποιώντας το πακέτο actuar, το οποίο είναι ειδικά σχεδιασμένο για αναλογιστικούς και στατιστικούς υπολογισμούς στον τομέα της διαχείρισης κινδύνων. Στις εφαρμογές αυτές, παρουσιάζονται παραδείγματα και μεθοδολογίες για τον υπολογισμό κατανομών, τη διακριτοποίηση συναρτήσεων και την εκτίμηση της συνολικής ζημίας, προσφέροντας στους αναλογιστές τη δυνατότητα να προσομοιώνουν και να αναλύουν σενάρια ζημιών και χρεοκοπίας. Χρησιμοποιώντας τις εντολές και τα εργαλεία του πακέτου actuar, η εργασία δείχνει πώς μπορούν να δημιουργηθούν και να προσαρμοστούν μοντέλα που βοηθούν στον ακριβή υπολογισμό και στη βελτίωση της διαχείρισης των κινδύνων.

Συνολικά, η διπλωματική εργασία αυτή παρέχει μια ολοκληρωμένη εικόνα της αναλογιστικής επιστήμης και των τεχνικών διαχείρισης κινδύνων, εστιάζοντας στις θεωρητικές προσεγγίσεις και στις πρακτικές εφαρμογές που είναι κρίσιμες για τη σταθερότητα και τη βιωσιμότητα των ασφαλιστικών εταιρειών. Οι μέθοδοι που παρουσιάζονται αποσκοπούν στην επίτευξη ακριβών προβλέψεων και στη βελτίωση της χρηματοοικονομικής διαχείρισης των ασφαλιστικών χαρτοφυλακίων, καθιστώντας την εργασία αυτή ένα χρήσιμο εργαλείο τόσο για επαγγελματίες αναλογιστές όσο και για μελετητές της αναλογιστικής

επιστήμης.

Abstract

This thesis deals with fundamental and specialized issues in actuarial science and risk management, emphasizing both theoretical analysis and practical applications using the actuar package in R. The work examines in detail the theory of collective risk, ruin theory, portfolio credibility, and the implementation of these theories in real-world risk scenarios for insurance companies.

In the first part of the thesis, the theory of collective risk is developed, which is a fundamental tool in actuarial science for understanding and predicting the potential losses that an insurance portfolio may face. Here, key mathematical concepts such as moment-generating functions, probability-generating functions, and Laplace transforms are analyzed, which allow for the calculation of the distribution of total losses. Furthermore, mixed-type distribution models and the relationships that connect generating functions with risk dispersion are examined, providing significant insights into calculating the total losses of a portfolio.

The next chapter focuses on ruin theory, which examines the risk management arising from the dynamic relationship between reserves and claims. The classic Cramér-Lundberg model, one of the fundamental models used in actuarial science, is analyzed, which explores the stochastic process of an insurance company's surplus. Mathematical expressions and inequalities related to the probability of ruin are thoroughly examined, and how risk management can reduce the likelihood of the company's financial failure is explored. Additionally, there is a reference to reinsurance strategies, such as proportional reinsurance and excess of loss reinsurance, which allow for risk distribution and portfolio stabilization.

Following is the chapter on portfolio credibility theory, where techniques and models are presented that allow for more accurate premium estimation. The Bühlmann and Bühlmann-Straub models, which are benchmarks in actuarial science aimed at optimizing premiums by considering both the individual experience of insured individuals and the collective data of the portfolio, are analyzed. Credibility theory provides solutions to the problem of premium estimation in uncertain situations, balancing the individual data of the insured with the overall experience of the portfolio.

The final part of the thesis is dedicated to applications in R, using the actuar package, which is specifically designed for actuarial and statistical calculations in the field of risk management. In these applications, examples and methodologies are presented for calculating distributions, discretizing functions, and estimating total losses, offering actuaries the ability to simulate and analyze loss and ruin scenarios. Using the commands and tools of the actuar package, the thesis demonstrates how models can be created and adapted to assist in accurate calculations and improve risk management.

Overall, this thesis provides a comprehensive overview of actuarial science and risk management techniques, focusing on both theoretical approaches and practical applications that are critical for the stability and sustainability of insurance companies. The methods presented aim to achieve precise forecasting and enhance the financial management of insurance portfolios, making this work a valuable resource for both professional actuaries and researchers in the field of actuarial science.

Πίνακας περιεχομένων

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1°

Το συλλογικό πρότυπο στην αναλογιστική επιστήμη

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται το συλλογικό πρότυπο στην αναλογιστική επιστήμη, εστιάζοντας στις γεννήτριες συναρτήσεις για τυχαίες μεταβλητές. Αρχικά, δίνονται οι ορισμοί των ροπογεννητριών συναρτήσεων τυχαίων μεταβλητών, του μετασχηματισμού Laplace, καθώς και των πιθανογεννητριών συναρτήσεων. Στη συνέχεια, αναπτύσσεται το μοντέλο συλλογικού κινδύνου με κύρια έμφαση στην κατανομή της τυχαίας μεταβλητής των συνολικών ζημιών. Ιδιαίτερη προσοχή δίνεται σε κατανομές μικτού τύπου με μάζα πιθανότητας στο μηδέν.

Ο όρος συλλογικό πρότυπο αναφέρεται σε ένα μοντέλο ή πρότυπο το οποίο βασίζεται σε συλλογική εμπειρία ή γνώση. Η αναλογιστική επιστήμη είναι ένας τομέας που μελετά και αναλύει κινδύνους στον ασφαλιστικό τομέα, χρησιμοποιώντας μαθηματικά μοντέλα. Το συλλογικό πρότυπο στην αναλογιστική επιστήμη είναι η ανάπτυξη αναλογιστικών μοντέλων μέσα απο μία συλλογική προσέγγιση για την διαχείριση κινδύνων.

1.1. Γεννήτριες συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών

Στην ενότητα αυτή θα γίνει αναφορά στις γεννήτριες συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες χρησιμοποιούνται στην Θεωρία Κινδύνων. Υπάρχουν τρεις κατηγορίες γεννητριών που χρησιμοποιούνται και είναι οι ροπογεννήτριες συναρτήσεις, οι πιθανογεννήτριες και ο μετασχηματισμός Laplace. Με τις γεννήτριες συναρτήσεις μπορεί να γίνει υπολογισμός βασικών περιγραφικών μέτρων (π.χ. μέση τιμή, διασπορά, ασυμμετρία κλπ) καθώς επίσης και εύρεση ακριβών, αναδρομικών και ασυμπτωτικών τύπων για τις κατανομές των τυχαίων μεταβλητών.

1.1.1. *Ροπογεννήτριες συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών (moment generating function)*

Ορισμός 1.1: Έστω Χ μια τυχαία μεταβλητή για την οποία υπάρχει η $E(e^{tx})$ για κάθε t ανήκει σε ένα διάστημα της μορφής (-δ,δ), δ>0. Τότε η συνάρτηση

$$M_x(t) = E(e^{tx}), |t| < \delta$$

θα λέγεται ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής Χ.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό θα ισχύει πάντοτε ότι Μ(0)=1.

Αν η τυχαία μεταβλητή είναι διακριτή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x)$, η ροπογεννήτρια της X θα δίνεται απο τον τύπο

$$M(t) = \sum_{x \in R_x} e^{tx} f(x), |t| < \delta,$$

Ενώ, αν είναι συναχής με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$, θα δίνεται απο τον τύπο

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

Ιδιότητες

1. Αν $Y = \alpha X + \beta$, τότε ισχύει ότι
$$\mu_Y(t) = e^{\beta t} M_X(\alpha t)$$
2. Αν οι τ.μ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, τότε ισχύει ότι:
$$M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \ldots M_{X_n}(t)$$
Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.
3. Αν οι τ.μ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες (έστω με μια τ.μ X), τότε ισχύει ότι :
$$M_{S_n}(t) = (M_x(t))^n.$$
4. Αν για δύο τ.μ. $X \; και \; Y$ είναι $M_\chi(t) = M_Y(t) \; για \; κάθε \; t$, τότε ισχύει ότι:
$$X \overset{d}{=} Y$$

Όπου το σύμβολο $\overset{d}{=}$ σημαίνει ισότητα ως προς την κατανομή, δηλαδή οι τ.μ. X και Y είναι ισόνομες. (Χατζηκωνσταντινίδης 2022)

1.1.2. *Μετασχηματισμοί Laplace*

Ο μετασχηματισμός Laplace έχει ένα αρκετά ενδιαφέρον ιστορικό. Πρόκειται για ένα χρήσιμο εργαλείο για συνεχείς και μικτού τύπου τ.μ.

Ορισμός 1.2 Έστω $h(x)$ μια συνάρτηση που ορίζεται για $x > 0$. Ο μετασχηματισμός Laplace της $h(x)$ συμβολίζεται LT (Laplace Transform) και ορίζεται ως:

$$\hat{h}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} h(x)dx, s > 0 \; (s = \alpha + \beta i, \alpha > 0)$$

1.1.3. *Πιθανογεννήτριες Συνάρτησεις*

Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση χρησιμοποιείται μόνο για διακριτές τ.μ.

Ορισμός 1.3 Έστω η μη-αρνητική διακριτή τ.μ $X \in \{0,1,\ldots\}$ με συνάρτηση πιθανότητας $f_x(x) = P_r(X = x)$.Τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. X ορίζεται ως

$$P_x(u) = E[u^x] = \sum_x u^x P_r(X = x).$$

Συνοψίζοντας προκύπτει ότι:

- $M_X(t) = E[e^{tx}]$
- $L_X(s) = E[e^{-Sx}]$
- $P_X(u) = E[u^x]$

Παρακάτω παρουσιάζονται δύο συνοπτικοί πίνακες για διακριτές και συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, με τους τύπους για πιθανογεννήτρια συνάρτηση και ροπογεννήτρια συνάρτηση.

ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ τ. μ

ΚΑΤΑΝΟΜΗ	ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘ. $f_x(x) = P_r(X = x)$	ΠΙΘΑΝΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑ $P_x(u)$	ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑ $M_X(u)$
Εκφυλισμένη στο σημείο a	$f_x(a) = 1$	u^a	e^{at}
Εκφυλισμένη στο σημείο 0	$f_x(0) = 1$	1	1
$Bernoulli(p)$	$f_x(x) = p^x q^{1-x}$, $x = 0,1$	$q + pu$	$q + pe^t$
Διωνυμική $B(m,p)$	$f_x(x) = \binom{m}{x} p^x q^{m-x}$, $x = 0,1,\ldots,m$	$(q + pu)^m$	$(q + pe^t)^m$
$Poisson\ P(\lambda)$	$f_x(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ $x = 0,1,\ldots$	$e^{\lambda(u-1)}$	$e^{\lambda(e^t-1)}$
Γεωμετρική $G_0(p)$	$f_x(x) = pq^x$ $x = 0,1,2,\ldots$	$\frac{p}{1-qu}$	$\frac{pe^t}{1-qe^t}$
Γεωμετρική $G_1(p)$	$f_x(x) = pq^{x-1}$ $x = 1,2,\ldots$	$\frac{pu}{1-qu}$	$\frac{p}{1-qe^t}$
Αρνητική Διωνυμική $NB(r,p)$	$f_x(x) = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x$, $x = 0,1,\ldots$	$\left(\frac{p}{1-qu}\right)^r$	$\left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r$
Αρνητική Διωνυμική $NB_1(r,p)$	$f_x(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$ $x = r, r+1,\ldots$	$\left(\frac{pu}{1-qu}\right)^r$	$\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$
Λογαριθμική $LS(p)$	$f_x(x) = \frac{q^x}{-x\ln p}$ $x = 1,2,\ldots$	$\frac{\ln(1-qu)}{\ln p}$	$\frac{\ln(1-qe^t)}{\ln p}$

Πίνακας 1 : Διακριτές τ.μ.

ΣΥΝΕΧΕΙΣ τ.μ.

ΚΑΤΑΝΟΜΗ	ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚ.ΠΙΘ. $f_x(x)$	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE $\hat{f}_x(s)$	ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑ $M_X(t)$
$Ομοιόμορφη\ U(a,b)$	$f_x(x) = \frac{1}{b-a}$ $a \leq x \leq b$	$\frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s(b-a)}, s \neq 0$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{t(b-a)}, t \neq 0$
$Εκθετική\ EXP(\lambda),$ $\lambda > 0$	$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x},$ $x > 0$	$\frac{\lambda}{\lambda + s}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}, t < \lambda$
$Γάμμα G(a,\lambda)$ $a, \lambda > 0$	$f_x(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(\alpha)} x^{a-1} e^{-\lambda x},$ $x > 0$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^a$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^a$
$Erlang Erl(n,\lambda)$ $n = 1,2,\dots$ $\lambda > 0$	$f_x(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x},$ $x, \lambda \geq 0$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^n$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$
$Κανονική\ N(\mu, \sigma^2)$	$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-\mu s + \frac{\mu^2 s^2}{2}}$	$e^{-\mu t + \frac{\mu^2 t^2}{2}}$

Πίνακας 2 : Συνεχείς τ.μ.

Παράδειγμα 1.1

Οι μη αρνητικές ακέραιες τ.μ. X_i, είναι αμοιβαία ανεξάρτητες και έχουν συνάρτηση πιθανότητας $f_{x_i} = P_r(X = x), i = 1,2,3$ που δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$f_{x_1}(x)$	$f_{x_2}(x)$	$f_{x_3}(x)$
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{5}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{5}$
3	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

Θα γίνει υπολογισμός της συνάρτησης πιθανότητας της τ.μ. $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$.

Επειδή η $X_1 \in \{0,2\}, X_2 \in \{1,2,3\}, X_3 \in \{0,1,2,3\}$, τότε είναι σαφές ότι η $S_3 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

Οι πιθανογεννήτριες συναρτήσεις των Xi θα είναι οι εξής:

- $P_{X_1}(u) = \sum_x f_{x_1}(x)u^x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}(1+u^2)$
- $P_{X_2}(u) = \sum_x f_{x_2}(x)u^x = \frac{1}{4}u + \frac{2}{4}u^2 + \frac{1}{4}u^3 = \frac{1}{4}(u+u^2+u^3)$
- $P_{X_3}(u) = \sum_x f_{x_3}(x)u^x = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}u + \frac{1}{5}u^2 + \frac{1}{5}u^3 = \frac{1}{5}(2+u+u^2+u^3)$

Τότε η $P_{S_3}(u) = \prod_1^3 Xi = \frac{1}{2}(1+u^2)\cdot\frac{1}{4}(u+u^2+u^3)\cdot\frac{1}{5}(2+u+u^2+u^3) =$

$$\rightarrow P_{S_3}(u) = \frac{1}{40}(2u + 5u^2 + 7u^3 + 9u^4 + 8u^5 + 5u^6 + 3u^7 + u^8$$

Η $S_3 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, τότε

$$P_{S_3}(u) = \sum_{\chi=1}^{8} f_{S_3}(x)u^x,\ f_{S_3}(x) = P_r(S_3 = X)$$

$$\rightarrow P_{S_3}(u) = f_{S_3}(1)u + f_{S_3}(2)u^2 + \ldots + f_{S_3}(8)u^8$$

Άρα η συνάρτηση πιθανότητας της S_3 είναι:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_{S_3}(x)$	$\frac{2}{40}$	$\frac{5}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{8}{40}$	$\frac{5}{40}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{40}$

1.2. Συνελίξεις Συναρτήσεων

Στο μοντέλο ατομικού κινδύνου μας ενδιαφέρει η κατανομή του συνολικού **S** των απαιτήσεων σε ασφαλιστικά συμβόλαια με

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Όπου $X_i, i = 1,2,\ldots,n$, υποδηλώνει την πληρωμή για το i συμβόλαιο. Οι κίνδυνοι που αναλαμβάνει ο Xi είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Εάν αυτή η υπόθεση παραβιαστεί για κάποιους κινδύνους, για παράδειγμα σε περίπτωση ασφαλιστηρίων συμβολαίων πυρκαγιάς σε διαφορετικούς ορόφους του ίδιου κτιρίου,τότε αυτοί οι κίνδυνοι θα μπορούσαν να συνδυαστούν σε έναν όρο. (Kaas et al, 2008)

Ορισμός 1.4 Έστω οι συναρτήσεις $f\ και\ g$. Τότε η συνέλιξη των $f\ και\ g$ είναι μια νέα συνάρτηση, έστω h, που συμβολίζεται με $h = f * g$ και ορίζεται ως εξής:

1. Αν f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται στο $[0,\infty)$ τότε

$$h(x) = (f\cdot g)(x) = \int_0^x f(y)g(x-y)dy$$

2. Αν f, g είναι συναρτήσεις που ορίζονται στο σύνολο $\{0,1,\dots\}$, τότε

$$h(x) = (f \cdot g)(x) = \sum_{y=0}^{x} f(y)g(x-y)$$

Ισχύει ότι $\mathrm{f} * \mathrm{g} = \mathrm{g} * \mathrm{f}$ (Χατζηκωνσταντινίδης 2022)

Ιδιότητα

Αν $h(x) = (f \cdot g)(x)$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της $h(x)$, είναι ίσος με

$$\hat{\mathrm{h}}(\mathrm{s}) = \hat{\mathrm{f}}(\mathrm{s})\hat{\mathrm{g}}(\mathrm{s})$$

Όπου

$$\hat{h}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} h(x)dx$$

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-sx} g(x)dx$$

1.3. Μοντέλο Συλλογικού Κινδύνου

Θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων με

- N το πλήθος κινδύνων (ζημιών,αποζημιώσεων,απαιτήσεων).
- X_i το ύψος $i -$ ατομικής ζημιάς.
- S οι συνολικές ζημιές του χαρτοφυλακίου.

Οι τ.μ N και X είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Οι $X_i, i \geq 1$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.

Εάν $N = 0 \Longrightarrow S = 0$

$$S = \begin{cases} 0\ , & N = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} X_i\ , & N = 1,2,3,.. \end{cases}$$

1.3.1. *Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής των συνολικών ζημιών*

Στο συλλογικό μοντέλο για την περιγραφή της συνολικής ζημιάς του χαρτοφυλλακίου, πρέπει να είναι γνωστή η κατανομή της τ.μ S, δηλαδή η κατανομή των συνολικών απαιτήσεων. Επειδή η τ.μ X μπορεί να είναι είτε συνεχής είτε διακριτή, το γεγονός αυτό δισχεραίνει την εύρεση της κατανομής της τ.μ S, καθώς μπορεί να πάρει τις εξής μορφές:

- Αν η X είναι διακριτή τ.μ, τότε και η τ.μ S είναι διακριτή ως άθροισμα διακριτών τ.μ.
- Αν η X είναι συνεχής τ.μ, τοτε:
    a) Αν P_r(N=0)=0, δηλαδή η $N \in \{1,2,3,\dots\}$, τότε η τ.μ S είναι συνεχής διότι πρόκειται για άθροισμα συνεχών τ.μ.
    b) P_r(N=0)>0, τότε η τ.μ S θα είναι μικτού τύπου τ.μ. Έχει μάζα πιθανότητας στο μηδέν, την $P_r(S=0)=P_r(N=0)$ και είναι συνεχής στο $(0,\infty)$.

Παρακάτω ακολουθεί θεώρημα στο οποίο θα δοθούν τύποι υπολογισμού για την συνάρτηση κατανομής, την συνάρτηση δεξιάς ουράς και της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. S με των συνελίξεων χωρίς να γνωρίζουμε την κατανομή των $N \, και \, X$.

Θεώρημα 1.1 Για $x \geq 0$, ισχύει ότι

a. $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \, F^{*n}(x) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \, F^{*n}(x),$
   $\mu\varepsilon \; p_n = P(N=n), n = 0,1,2, \dots$

b. $\bar{G}(x) = 1 - G(X) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \, \overline{F^{*n}}(x)$

c. Αν η X είναι ακέραια τ.μ, τότε για $x = 0$, είναι

$$P(S=0) = g(0) = \begin{cases} p_0 \;, f(0) = 0 \\ P_N(f(0)), f(0) \neq 0 \end{cases}$$

d. Αν η X είναι συνεχής τ.μ και $P(N=0) = p_0 = 0$, τότε

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \, f^{*n}(x).$$

e. Αν η X είναι συνεχής τ.μ και $P(N=0) = p_0 > 0$,τότε

$$g(x) = \begin{cases} p_0, \quad x = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} p_n \, f^{*n}(x), x \neq 0 \end{cases}$$

1.3.1.1. Κατανομές μικτού τύπου με μάζα πιθανότητας στο μηδέν.

Έστω η τ.μ. $X \geq 0$ η οποία έχει μάζα πιθανότητας στο μηδέν, δηλαδή είναι διακριτή στο σημείο μηδέν, και είναι συνεχής για θετικές τιμές, δηλαδή είναι συνεχής στο διάστημα $(0,\infty)$.

Δηλαδή η $X \in \{0\} \cup (0,\infty)$

Ο τύπος της S προκύπτει με βάση τα παρακάτω:

- Αν η τ.μ. X είναι συνεχής, τότε

1. Αν η τ.μ. N έχει μάζα πιθανότητας στο σημείο μηδέν, δηλαδή αν $P(N = 0) = p_0 > 0$, τότε:
$$P(S = 0) = g(0) = p_0$$
2. Αν η τ.μ. N δεν έχει μάζα πιθανότητας στο σημείο μηδέν, δηλαδή αν είναι $P(N = 0) = 0$, τότε:
$$\mathrm{g}(0) = 0$$

- Αν η τ.μ. X είναι θετική, δηλαδή $f(0) = P(X = 0) = 0$, τότε:

1. Αν η τ.μ. N έχει μάζα πιθανότητας στο σημείο μηδέν, δηλαδή αν $P(N = 0) = p_0 > 0$, τότε:
$$g(0) = p_0$$
2. Αν η τ.μ. N δεν έχει μάζα πιθανότητας στο σημείο μηδέν, δηλαδή αν είναι $P(N = 0) = 0$, τότε:
$$g(0) = 0$$

- Αν η τ.μ. X είναι μη-αρνητική ακέραια, δηλαδή $f(0) = P(X = 0) > 0$, τότε:
$$g(0) = P_N(f(0)) = M_N(\ln f(0)).$$

Στη συνέχεια ακολουθεί ένα παράδειγμα όπου θα υπολογιστεί η κατανομή της S με δύο διαφορετικούς τρόπους.

Παράδειγμα 1.2

Αν η $N \sim G_1(p), 0 < p < 1$ και $X \sim Exp(\lambda)$, να βρεθεί η κατανομή της S.

<u>1ος τρόπος</u>

Είναι $P_n = P_r(N = n) = pq^{n-1}, n = 1,2,3, \ldots$

Άρα η $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N, N \geq 1$. Άρα η S είναι συνεχής τ.μ. στο διάστημα $(0, \infty)$.

Επειδή η $X \sim Exp(\lambda)$ και όπως είναι γνωστό, σε άθροισμα εκθετικών κατανομών προκύπτει η κατανομή Erlang, έπεται ότι

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_N \sim Erl(n, \lambda)$$

Οπότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του αθροίσματος είναι

$$f^{*n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

Τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της S είναι

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n f^{*n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}$$

$$= p\lambda e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} = p\lambda e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

επειδή $1 \leq n < \infty \Rightarrow 0 \leq n-1 < \infty$

θέτοντας $k = n-1 \Rightarrow 0 \leq k < \infty$

άρα προκύπτει ότι

$$q(x) = p\lambda e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q\lambda x)^k}{(k)!}$$

γνωρίζοντας ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}$$

προκύπτει ότι

$$q(x) = p\lambda e^{-\lambda x} e^{q\lambda x} = p\lambda e^{-p\lambda x}$$

άρα η τυχαία μεταβλητή

$$S \sim Exp(p\lambda)$$

<u>2ος τρόπος</u>

Στον 2ο τρόπο επίλυσης του συγκεκριμένου παραδείγματος θα γίνει χρήση γεννητριών συναρτήσεων για τον υπολογισμό της κατανομής της τ.μ. S.

Είναι

$$M_S(t) = P_N[M_x(t)]$$

Και

$$P_N(u) = \frac{pu}{1-qu} \Rightarrow P_N[M_x(t)] = \frac{pM_x(t)}{1-qM_x(t)}$$

Επειδή η $X \sim Exp(\lambda)$, έπεται ότι η ροπογεννήτρια συνάρτησή της θα είναι

$$M_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

Αντικαθιστώντας στην $M_S(t) = P_N[M_x(t)]$, παίρνουμε

$$M_S(t) = \frac{p\frac{\lambda}{\lambda-t}}{1-q\frac{\lambda}{\lambda-t}} = \frac{p\lambda}{\lambda - t - q\lambda} = \frac{p\lambda}{(1-q)\lambda - t} = \frac{p\lambda}{p\lambda - t}$$

Είναι προφανές ότι πρόκειται για την ροπογεννήτρια συνάρτηση της εκθετικής κατανομής με παράμετρο ρλ.

άρα

$$S \sim Exp(p\lambda)$$

1.3.2. *Μέση τιμή και Διακύμανση της S.*

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής και της διακύμανσης της S υπάρχουν τρείς διαφορετικές μέθοδοι.

- Η πρώτη μέθοδος βασίζεται στο θεώρημα της διπλής μέσης τιμής όπου ισχύει το εξής :

$$E(S) = [E(S|N)]$$

όπου προκύπτει ότι
$E(S) = E(N)E(X)$,
και

$$Var(S) = E[Var(S|N)] + Var[E(S|N)]$$

όπου προκύπτει ότι

$$Var(S) = E(N)Var(X) + E^2(X)Var(N)$$

λόγω ανεξαρτησίας και επειδή οι X_ι είναι ισόνομες μεταξύ τους.

- Η δεύτερη μέθοδος είναι μέσω των γεννητριών συναρτήσεων της τ.μ. S, όπου

$$M_s(t) = M_N[\ln M_x(t)]$$
$$M_s(t) = P_N[M_x(t)]$$
$$P_s(u) = P_N[P_x(u)]$$
$$\hat{g}(s) = P_N[\hat{f}(s)]$$

Παράδειγμα 1.3

Το πλήθος των κινδύνων $N\sim P(\lambda), \lambda = 2$ και το ύψος της ατομικής ζημιάς $X\sim G_o(p)$.

Δίνεται ότι

$$E(S|S > 0) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{2}{3}}}$$

Να υπολογισθούν
A) E(S), Var(S)
B) η Var(S|S>0)

<u>**Λύση**</u>

A) Επειδή η $X\sim G_o(p) \Longrightarrow X \in \{0,1,2,\dots\}, \acute{\alpha}\rho\alpha\ \kappa\alpha\iota\ S \in \{0,1,2,\dots\}$.

Είναι

$$E(S|S>0) = \sum_{x=1}^{\infty} xP_r(S=x|S>0) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{P_r(S=x, S>0)}{P_r(S>0)} = \sum_{x=1}^{\infty} x\frac{P_r(S=x)}{P_r(S>0)}$$
$$= \frac{1}{P_r(S>0)} \sum_{x=1}^{\infty} xP_r(S=x)$$

Άρα

$$E(S|S>0) = \frac{E(S)}{P_r(S>0)}$$

Είναι
$E(N) = Var(N) = \lambda = 2$
$E(X) = \frac{q}{p}, Var(X) = \frac{q}{p^2}, q = 1-p$

Άρα

$$E(S) = E(N)E(X) = \frac{2q}{p}$$

Επίσης $P_r(S>0) = 1 - P_r(S \leq 0) = 1 - P_N[f(0)]$
$P_N(u) = e^{-\lambda(1-u)}$

Άρα $P_r(S>0) = 1 - e^{-2(1-f(0))}$=1-$e^{-2q}$
Τότε παίρνουμε

$$E(S|S>0) = \frac{\frac{2q}{p}}{1-e^{-2q}}$$

απο υπόθεση γνωρίζουμε ότι

$$E(S|S>0) = \frac{1}{1-e^{-\frac{2}{3}}}$$

συγκρίνοντας τους τύπους, προκύπτει ότι : $q = \frac{1}{3}, p = \frac{2}{3}$
Επομένως $E(X) = \frac{1}{2}$, Var(X)=$\frac{3}{4}$

άρα

$$E(S) = E(N)E(X) = 1 \; και \; Var(S) = E(N)Var(X) + Var(N)E^2(X) = 2$$

B)
Είναι

$$Var(S|S>0) = E(S^2|S>0) - E^2(S|S>0) = E(S^2|S>0) - (\tfrac{E(S)}{P_r(S>0)})^2$$

υπολογισμός της

$$E(S^2|S>0) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \, P_r(S=x) = \frac{E(S^2)}{P_r(S>0)}$$

άρα,

$$Var(S|S>0) = \frac{E(S^2)}{P_r(S>0)} - (\frac{E(S)}{P_r(S>0)})^2$$

Είναι $E(S^2) = Var(S) + E^2(S) = E(N)Var(X) + Var(N)E^2(X) + E^2(N)E^2(X)$

$$= \lambda[Var(X) + E^2(X)] + \lambda^2 E^2(X) = \frac{\lambda q}{p^2}(1 + q + \lambda q)$$

και επειδή $P_r(S > 0)$=1-e^{-2q} παίρνουμε

$$Var(S|S > 0) = \frac{\frac{\lambda q}{p^2}(1 + q + \lambda q)}{1 - e^{-2q}} - \frac{4}{(1 - e^{-\lambda q})^2}$$

είναι λ=2,$p = \frac{2}{3}$,$q = \frac{1}{3}$

$$Var(S|S > 0) = 2.16$$

1.4. Η κλάση κατανομών $\mathcal{R}(a, b, 0)$

Η κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων δεν είναι πάντα εύκολο να υπολογισθεί. Υπάρχει όμως ένας αναδρομικός τύπος υπολογισμού της κατανομής αυτης, όταν οι τιμές στα ατομικά μεγέθη είναι ακέραιες και μη-αρνητικές. Για να χρησιμοποιηθεί ο συγκεκριμένος τύπος πρέπει η κατανομή του πλήθους να ανήκει στην ειδική κατηγορία διακριτών κατανομών $\mathcal{R}(a, b, 0)$.

Ορισμός 1.5 Η διακριτή τ.μ. $N \in \mathcal{R}(a, b, 0)$ αν η $P_n = P_r(N = n)$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση πρώτης τάξης

$$P_n = (a + \frac{b}{n})P_{n-1}, n = 1,2,3, \ldots$$

όπου a,b είναι κατάλληλες σταθερές και $P_n = 0, για\ κάθε\ n < 0$.

Θεώρημα 1.1

Έστω $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N, N \geq 1$ ($με\ S = 0\ αν\ N = 0$. Αν η X είναι μη-αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή, δηλαδή $X \in \{0,1,2, \ldots\}$ με συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$ και η τυχαία μεταβλητή $N \in \mathcal{R}(a, b, 0)$, τότε η $g(x) = P(S = x)$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \frac{1}{1 - af(0)} \sum_{y=1}^{x} (a + \frac{by}{x}) f(y) g(x - y), x = 1,2,3, \ldots$$

με $g(0) = P_N(f(0))$.

Οι διακριτές κατανομές που ανήκουν στην $\mathcal{R}(a, b, 0)$ είναι οι εξής:

Κατανομή	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{p_0}$
$Poisson\ P(\lambda)$	0	λ	$e^{-\lambda}$

Κατανομή	a	b	p_0
Διωνυμική $B(m,p)$	$-\frac{p}{q}$	$\frac{(m+1)p}{q}$	q^m
$Bernoulli(p)$	$-\frac{p}{q}$	$\frac{2p}{q}$	q
Αρνητική Διωνυμική $NB(r,p)$	q	$(r-1)q$	p^r
Γεωμετρική $G_0(p)$	q	0	p

Παράδειγμα 1.4

Το πλήθος των κινδύνων Ν ενός χαρτοφυλακίου έχει την σύνθετη κατανομή Poisson με παράμετρο λ και οι συνολικές ζημιές S έχουν συνάρτηση πιθανότητας $g(x) = P(S = x)$ που ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$xg(x) = 0{,}24g(x-1) + mg(x-2) + 0{,}64g(x-3), x = 1,2,3,\ldots$$

με $g(0) = e^{-\lambda}$ *και* $g(x) = 0$ *για κάθε* $x < 0$. Οι αναμενόμενες συνολικές ζημιές είναι ίσες με 1 ν.μ.

a) Να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός ζημιών του χαρτοφυλακίου και η $P(S = 0)$.

b) Να δοθεί ένας ανδρομικός τύπος υπολογισμού της συνάρτησης κατανομής $G(x) = P(S \leq x)$.

a) Έστω Χ= το ύψος ατομικής ζημιάς, τότε $X \in 1,2,3, \ldots.$

Τότε :

$$g(x) = \frac{\lambda}{x}\sum_{y=1}^{x} yf(y)g(x-y)$$

$$= \frac{\lambda}{x}\sum_{y=1}^{x}\{f(1)g(1) + 2f(2)g(x-2) + 3f(3)g(x-3)\}$$

Συγκρίνοντας τις δύο αναδρομικές σχέσεις προκύπτει ότι

$$\lambda f(1) = 0{,}24$$

$$2\lambda f(2) = m$$

$$3\lambda f(3) = 0{,}64$$

Είδαμε ότι $X = 1,2,3.$ *και* $E(S) = 1.$

Και $E(S) = \lambda E(X) = \lambda \sum_{x=1}^{3} xf(x) = \lambda f(1) + 2\lambda f(2) + 3\lambda f(3) = 0{,}24 + m + 0{,}64$

Άρα προκύπτει ότι $m = 0{,}12.$

Επίσης

$$f(1)+f(2)+f(3)=1 \Rightarrow \frac{0,24}{\lambda}+\frac{0,12}{2\lambda}+\frac{0,63}{3\lambda}=1$$

$$Άρα\ \lambda = 0,513$$

Και

$$P(S=0)=g(0)=e^{-\lambda}=e^{-0,513}$$

b) Είναι

$$yg(y)=0,24g(y-1)+0,12g(y-2)+0,64g(y-3), y=1,2,3,\ldots$$

Για να βρούμε την αναδρομική σχέση για την $G(x)=\sum_{y=0}^{x} g(y)$ παίρνουμε

$$\sum_{y=1}^{x} yg(y)=0,24\sum_{y=1}^{x} g(y-1)+0,12\sum_{y=1}^{x} g(y-2)+0,64\sum_{y=1}^{x} g(y-3)$$

$$=0,24\sum_{y=0}^{x-1} g(y)+0,12\sum_{y=0}^{x-2} g(y)+0,64\sum_{y=0}^{x-3} g(y)$$

$$[1\le y\le x \Rightarrow 0\le y-1\le x-1\ θέτοντας\ z=y-1 \Rightarrow 0\le z\le x-1]$$

Άρα παίρνουμε

$$\sum_{y=1}^{x} yg(y)=0,24G(x-1)+0,12G(x-2)+0,64G(x-3), \qquad (\mathbf{1.1})$$

Επίσης

$\sum_{y=1}^{x} yg(y)=\sum_{y=1}^{x} y[G(y)-G(y-1)]=\sum_{y=1}^{x} yG(y)-\sum_{y=1}^{x} yG(y-1)=$
$\sum_{y=1}^{x-1} yG(y)+xG(x)-\sum_{y=0}^{x-1}(y+1)G(y)=xG(x)+\sum_{y=1}^{x-1}[y-(y+1)]G(y)-$
$G(0)=xG(x)-\sum_{y=1}^{x-1} G(y)-G(0)=xG(x)-\sum_{y=0}^{x-1} G(y)$

Τότε η σχέση (1.1) γράφεται

$$xG(x)-\sum_{y=0}^{x-1} G(y)=0,24G(x-1)+0,12G(x-2)+0,64G(x-3)$$

$$\sum_{y=0}^{x-1} G(y)=\sum_{y=1}^{x} G(x-y)$$

Άρα παίρνουμε

$$xG(x)=\sum_{y=1}^{x} G(x-y)+0,24G(x-1)+0,12G(x-2)+0,64G(x-3)$$

$$\Rightarrow xG(x)=1,24G(x-1)+1,12G(x-2)+1,64G(x-3)+\sum_{y=4}^{x} G(x-y),$$

$$x\ge 1$$

$$όπου\ G(0)=g(0).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

Θεωρία Κινδύνων

Το κεφάλαιο πραγματεύεται τη θεωρία του κινδύνου και τις εφαρμογές της στην αναλογιστική επιστήμη, με έμφαση στην ανάλυση των ασφαλιστικών κινδύνων και στη διαχείριση πιθανότητας χρεοκοπίας των ασφαλιστικών εταιρειών. Ξεκινώντας από την ιστορική εξέλιξη της θεωρίας, παρουσιάζονται θεμελιώδη μοντέλα, όπως το κλασικό μοντέλο κινδύνου Cramér-Lundberg και η έννοια του συλλογικού και ατομικού κινδύνου. Αυτά τα μοντέλα βοηθούν στην εκτίμηση της πιθανότητας χρεοκοπίας, δηλαδή της αδυναμίας μιας ασφαλιστικής εταιρείας να ανταποκριθεί στις οικονομικές της υποχρεώσεις, υπολογίζοντας τις κατανομές ζημιών και το αρχικό αποθεματικό της.

Επιπλέον, το κεφάλαιο αναλύει την έννοια της αντασφάλισης ως μέθοδο μείωσης της οικονομικής έκθεσης στον κίνδυνο. Εξετάζονται οι τύποι αντασφάλισης (αναλογική και υπερβάλλοντος ζημίας) που επιτρέπουν την κατανομή κινδύνου μεταξύ ασφαλιστικών και αντασφαλιστικών εταιρειών, διασφαλίζοντας τη βιωσιμότητα των ασφαλιστικών χαρτοφυλακίων. Συνολικά, το κεφάλαιο παρουσιάζει εργαλεία και μαθηματικά μοντέλα για την πρόληψη και διαχείριση ασφαλιστικών κινδύνων, κρίσιμα για την οικονομική σταθερότητα των ασφαλιστικών εταιρειών.

2.1. Θεωρία κινδύνων

Η θεωρία του συλλογικού κινδύνου εμφανίστηκε για πρώτη φορά το 1903. Σε αυτήν ο Filip Lundberg προτείνει ένα κλασσικό μοντέλο για τον ασφαλιστικό κίνδυνο. Ουσιαστικά, τίθενται οι βάσεις για την αναλογιστική θεωρία του κινδύνου όπως είναι γνωστή μέχρι σήμερα. Πρόκειται μάλιστα και για την πρώτη μελέτη στην οποία διακρίνεται η παρουσία της διαδικασίας Poisson.

Έχοντας ως δεδομένα τα παραπάνω στοιχεία η σκανδιναβική σχολή της αναλογιστικής επιστήμης ενσωμάτωσε αυτές τις ιδέες στη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών συμβάλλοντας στη θεμελίωση του πως έχει διαμορφωθεί σήμερα ο συγκεκριμένος κλάδος στο τομέα των γενικών ασφαλίσεων αλλά και στο τρόπο που έχει αναπτυχθεί η θεωρία των πιθανοτήτων και των στοχαστικών διαδικασιών στην κατεύθυνση της θεωρίας των κινδύνων (Billingsley, 1995).

Η θεωρία κινδύνου αποτελεί βασικό εργαλείο στην αναλογιστική επιστήμη, ασχολούμενη με τη μαθηματική μοντελοποίηση της αβεβαιότητας και την ανάλυση των πιθανών απωλειών από διάφορους κινδύνους. Οι αναλογιστές χρησιμοποιούν αυτή τη θεωρία για να υπολογίζουν την πιθανότητα μελλοντικών γεγονότων και να αξιολογούν τον χρηματοοικονομικό αντίκτυπό τους σε ατομικό και οργανωτικό επίπεδο.

Ο κύριος στόχος της θεωρίας κινδύνου είναι να βοηθήσει άτομα και οργανισμούς να λαμβάνουν τεκμηριωμένες αποφάσεις και να διαχειρίζονται αποτελεσματικά τον κίνδυνο. Με την κατανόηση της πιθανότητας μελλοντικών γεγονότων και των δυνητικών επιπτώσεών τους, οι αναλογιστές μπορούν να αναπτύξουν στρατηγικές για την ελαχιστοποίηση του κινδύνου και την προστασία από οικονομικές ζημίες.

Η θεωρία κινδύνου διακρίνεται σε δύο βασικά πρότυπα: το ατομικό και το συλλογικό. Το ατομικό πρότυπο εστιάζει στην κλασική μοντελοποίηση του κινδύνου, ενώ το συλλογικό πρότυπο επικεντρώνεται στη θεωρία χαρτοφυλακίου, ιδιαίτερα σε θέματα χρεοκοπίας και αξιοπιστίας. Αυτό το κεφάλαιο αναλύει τη θεωρία κινδύνου, παρουσιάζοντας τις βασικές έννοιες και τεχνικές, και ολοκληρώνει με την παρουσίαση απλών κατανομών, με και χωρίς τροποποίηση στο σημείο μηδέν.

2.2. Μοντέλου ατομικού κινδύνου

Στο μοντέλο του ατομικού κινδύνου δίνεται έμφαση στην κατανομή των συνολικών απαιτήσεων S των ασφαλιστηρίων συμβολαίων όπου,

$$S = X_1 + X_2 + \dots X_n$$

Με $X_i, i = 1,2,\dots,n,$ το ύψος της ατομικής ζημιάς. Οι κίνδυνοι που αντιπροσωπεύει η X_i είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Εάν αυτή η υπόθεση παραβιαστεί για κάποιους κινδύνους, για παράδειγμα σε περίπτωση ασφαλιστηρίων συμβολαίων πυρκαγιάς σε διαφορετικούς ορόφους του ίδιου κτιρίου,τότε αυτοί οι κίνδυνοι θα μπορούσαν να συνδυαστούν σε έναν όρο. (Kaas et al, 2008)

2.2.1. Θεωρία Χρεοκοπίας

Η θεωρία χρεοκοπίας που αναφέρεται στην αναλογιστική επιστήμη επικεντρώνεται στην ανάλυση και ποσοτικοποίηση του κινδύνου οικονομικής καταστροφής που διατρέχει μία ασφαλιστική εταιρία. Συγκεκριμένα οι ασφαλιστικές εταιρίες διαθέτουν ασφαλιστικά χαρτοφυλάκια τα οποία διατρέχουν κίνδυνο χρεοκοπίας απο αβέβαια γεγονότα. Η συγκεκριμένη θεωρία αναλύει πληροφορίες σχετικά με την πιθανότητα που έχει ένα χαρτοφυλάκιο να εξαντλήσει τους χρηματοοικονομικούς του πόρους και να μην μπορεί να ανταπεξέλθει στις υποχρεώσεις προς τους ασφαλισμένους και να οδηγηθεί σε χρεοκοπία. Σε αυτό το κεφάλαιο, εστιάζουμε στα θεμέλια της θεωρίας χρεοκοπίας χαρτοφυλακίου, αναλύοντας βασικές έννοιες και μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται.

2.2.2. *Ιστορική εξέλιξη*

Η θεωρία χρεοκοπίας ξεκίνησε να μελετάται τον 17^{ο} αιώνα όπου οι πρώτοι μαθηματικοί και μελετητές άρχισαν να εξερευνούν τις έννοιες της πιθανότητας και του κινδύνου. Οι θεμελιώδεις αρχές της θεωρία χρεοκοπίας δημιουργήθηκαν απο τους Gerolamo Cardano, Blaise Pascal και Jacob Bernoulli σε σχέση με τα τυχερά παιχνίδια μελετώντας το πρόβλημα καταστροφής ενός παίκτη (gambler’s ruin problem). Η έννοια της χρεοκοπίας κέρδισε περαιτέρω προσοχή τον 18ο και 19ο αιώνα καθώς οι μαθηματικοί άρχισαν να εξερευνούν τις εφαρμογές της στην ασφάλιση. Στα μέσα του 18ου αιώνα, ο Γάλλος μαθηματικός Abraham de Moivre εισήγαγε την έννοια της πιθανότητας χρεοκοπίας στο πλαίσιο των προσόδων και της ασφάλισης ζωής. Το έργο του παρείχε πληροφορίες για τους οικονομικούς κινδύνους που αντιμετωπίζουν οι ασφαλιστικές εταιρείες και την πιθανότητα χρεοκοπίας. Η ανάπτυξη της θεωρίας χρεοκοπίας αναπτύχθηκε περισσότερο τον 20ο αιώνα με την συμμετοχή αξιόλογων μαθηματικών και στατιστικών. Πριν από Cramér, υπήρχε το έργο του Lundberg (1903).

Ο Harald Cramér, ένας Σουηδός μαθηματικός, έκανε σημαντικές προόδους στη θεωρία χρεοκοπίας τη δεκαετία του 1920 και του 1930. Ο Cramér εισήγαγε την έννοια της πιθανότητας χρεοκοπίας σε ένα μοντέλο συλλογικού κινδύνου και ανέπτυξε προσεγγίσεις και όρια για πιθανότητες καταστροφής.

2.2.3. *Σημασία της θεωρίας χρεοκοπίας στην Ασφάλιση*

Η θεωρία χρεοκοπίας είναι ένας απο τους πιο σημαντικούς παράγοντες στην ασφάλιση καθώς βοηθάει στην διαχείριση του ασφαλιστικού κινδύνου. Με την ποσοτικοποίηση της πιθανότητας χρεοκοπίας που γίνεται απο τους αναλογιστές, οι ασφαλιστές μπορούν να έχουν μια μεγαλύτερη ασφάλεια όσον αφορά την αξιολόγηση της χρηματοοικονομικής σταθερότητας των ασφαλιστικών χαρτοφυλακίων. Άρα μπορούν να τιμολογούν με μεγαλύτερη ακρίβεια τα προιόντα και να δημιουργούν καλύτερες στρατηγικές αναφορικά με τα χαρτοφυλάκια που διαχειρίζονται.

2.2.4. *Εισαγωγή στη θεωρία χρεοκοπίας*

Όπως έχει αναφερθεί στη θεωρία κινδύνου υπάρχει το συλλογικό και το ατομικό πρότυπο. Στο συλλογικό πρότυπο χρησιμοποιείται η τ.μ. $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, η οποία ακολουθεί μια σύνθετη κατανομή και περιγράφει τις συνολικές απαιτήσεις που δημιουργεί ένα χαρτοφυλάκιο προς ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα, όπως είναι οι ασφαλιστικές εταιρίες. Οι μεταβλητές X_i συμβολίζουν τις απαιτήσεις και θεωρούνται ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ., η μεταβλητή N συμβολίζει τον αριθμό των απαιτήσεων σε ενα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα που θέλει να μελετήσει ο αναλογιστής. Οι αναλογιστές θέλουν να μελετήσουν στη θεωρία χρεοκοπίας τις συνολικές αποζημιώσεις που προκύπτουν σε ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο ασφαλίσεων και πώς αυτές κινούνται στην διάρκεια του χρόνου. Άρα θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια στοχαστική ανέλιξη για να μπορέσει να περιγράψει το πλήθος των συνολικών αποζημιώσεων που θα προκύψουν. Η στοχαστική ανέλιξη που χρησιμοποιείται είναι $\{S(t) : t \geq 0\}$. Το ίδιο γίνεται και με την μεταβλητή N. Συγκεκριμένα δημιουργείται και εκεί η ανάγκη για μια στοχαστική ανέλιξη με την μορφή $\{N(t): t \geq 0\}$, όπου με την συγκεκριμένη ανέλιξη γίνεται η καταμέτρηση των απαιτήσεων προς την ασφαλιστική εταιρία κατα την διάρκεια του χρόνου.

Η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος $\{S(t) : t \geq 0\}$ ορίζεται ως εξής:

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} Xi, & αν\ N(t) \geq 1 \\ 0, & αν\ N(t) = 0 \end{cases}$$

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία θα γίνει η υπόθεση ότι η ανέλιξη $\{N(t)\}$ είναι ανέλιξη Poisson. Άρα η $\{S(t) : t \geq 0\}$ ακολουθεί μια σύνθετη ανέλιξη Poisson.

Έστω η συνάρτηση $P(t)$ όπου δηλώνει τα συνολικά ασφάλιστρα που δέχεται μια ασφαλιστική εταιρία σε κάποιο χρονικό διάστημα $[0, t]$. Η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι γραμμική. Έστω c το ασφάλιστρο που λαμβάνει η εταιρία στην μονάδα του χρόνου, το οποίο το καθορίζει ο εκάστοτε ασφαλιστής. Το εισπρακτέο ασφάλιστρο απο την εταιρία στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα $[0, t]$ θα είναι ct. Όπως είναι λογικό, κάθε ασφαλιστική εταιρία πρέπει να έχει ενα ποσό ως αποθεματικό, έστω u, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί σε περίπτωση που προκύψει ανάγκη για μεγάλη αποζημίωση, ειδικά στην αρχή λειτουργίας του χαρτοφυλακίου.

Ορισμός 2.1

Η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος $\{U(t): t \geq 0\}$, ορίζεται για κάθε $t \geq 0$ απο την σχέση

$$U(t) = u + P(t) - S(t)$$

με,

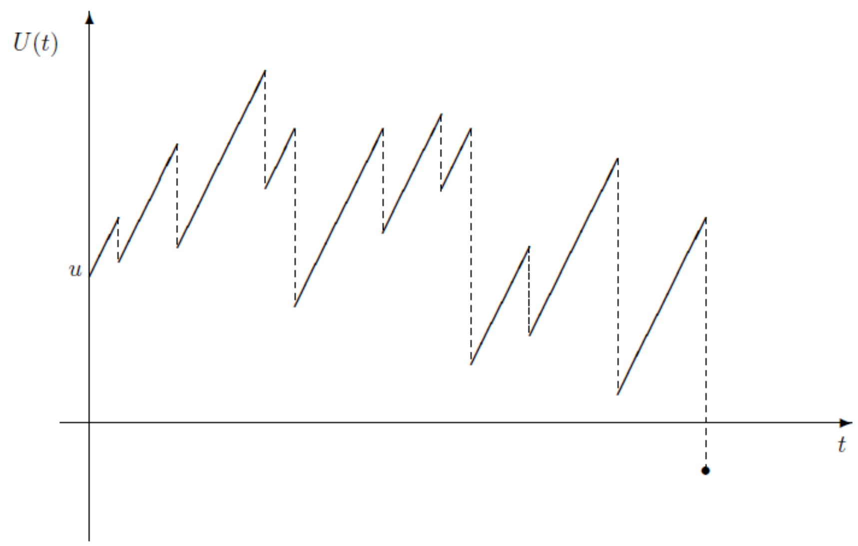
- u : αρχικό αποθεματικό
- $P(t)$: συνολικό ασφάλιστρο στο $[0, t]$
- $S(t)$: σύνθετη ανέλιξη συνολικών απαιτήσεων στο $[0, t]$.

Συνεπώς το $U(t)$ είναι το αποθεματικό ή συνολικό πλεόνασμα την χρονική στιγμή t και $U(0) = u$ είναι το αρχικό αποθεματικό.

Για να ισχύει το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου πρέπει να πληρούνται οι εξής υποθέσεις:

1. $P(t)$ να είναι γραμμική συνάρτηση
2. X_i ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. και ανεξάρτητες απο τον αριθμό αποζημιώσεων
3. Η $\{N(t): t \geq 0\}$ να είναι μια ανέλιξη Poisson, έτσι ώστε η ανέλιξη $\{S(t) : t \geq 0\}$ να είναι μία σύνθετη ανέλιξη Poisson. (Πολίτης 2022)

Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει την ανέλιξη του πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο.



Εικόνα 1: Ανέλιξη πλεονάσματος

(Πηγή: Πολίτης 2022)

2.3. Πιθανότητα χρεοκοπίας

Στον ασφαλιστικό τομέα, η πιθανότητα χρεοκοπίας αναφέρεται στην πιθανότητα μια ασφαλιστική εταιρεία να καταστεί αφερέγγυα και να μην είναι σε θέση να ανταποκριθεί στις οικονομικές της υποχρεώσεις προς τους ασφαλισμένους. Η πιθανότητα χρεοκοπίας επηρεάζεται από διάφορους παράγοντες, όπως το μέγεθος και η σύνθεση του χαρτοφυλακίου της εταιρείας, το επίπεδο κινδύνου στα ασφαλισμένα γεγονότα, η επάρκεια των αποθεματικών της εταιρείας και η ισχύς των πρακτικών αναδοχής και διαχείρισης κινδύνου.Οι ασφαλιστές υποχρεούνται από το νόμο να διατηρούν επαρκή αποθεματικά για την κάλυψη των αναμενόμενων ζημιών, άλλα απροσδόκητα γεγονότα όπως φυσικές καταστροφές, πανδημίες ή οικονομική ύφεση μπορεί να έχουν σημαντικό αντίκτυπο στην οικονομική θέση ενός ασφαλιστή.Για να αξιολογήσουν την πιθανότητα χρεοκοπίας, οι ασφαλιστικές εταιρείες χρησιμοποιούν πολύπλοκα μαθηματικά μοντέλα που λαμβάνουν υπόψη διάφορους παράγοντες κινδύνου και σενάρια.

Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου έχουμε

$$P(t) = ct \rightarrow c = P(t)/t$$

Άρα το c είναι η ένταση του ασφαλίστρου

Συνεχίζοντας τίθενται οι συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται στο κλασικό μοντέλο

- λ είναι η ένταση της ανέλιξης Poisson
- F κατανομή των αποζημιώσεων που περιγράφεται παραπάνω, με f να συμβολίζει την πυκνότητα
- $To\ \mu_k$ δηλώνει την ροπή k-τάξης της F γύρω απο το μηδέν, δηλαδή

$$\mu_k = \int_0^{\propto} x^k dF(x)$$

Είναι σημαντικό να αναφερθεί πως όσο ισχύει η σχέση $c > \lambda\mu_1$, δηλαδή όσο η ένταση του ασφαλίστρου είναι μεγαλύτερη από το μέσο ρυθμό αποζημιώσεων στη μονάδα του χρόνου, τότε τα έσοδα του χαρτοφυλακίου είναι μεγαλύτερα απο τα έξοδα την συγκεκριμένη χρονική περίπτωση.

Ορισμός 3

Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u ορίζεται απο την τη σχέση

$$\psi(U) = P[U(t) < 0\ για\ κάποιο\ t \geq 0 | U(0) = u].$$

(Πολίτης 2022)

Ορισμός 4

Στην θεωρία χρεοκοπίας και συγκεκριμένα στο κλασικό μοντέλο ορίζεται το περιθώριο ασφαλείας θ (premium loading factor) ή συντελεστής ασφαλείας θ απο τη σχέση

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1$$

Το περιθώριο ασφάλειας είναι ένα επιπλέον ποσό που προστίθεται στο υπολογισμένο ασφάλιστρο που περιέχει την κάλυψη διαφόρων εξόδων. Λαμβάνει υπόψη τις αβεβαιότητες και τους κινδύνους που συνδέονται με την ασφάλιση και συμβάλει στη διατήρηση της οικονομικής σταθερότητας.

2.4. Το κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο και συντελεστής προσαρμογής

Το κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο, γνωστό και ως μοντέλο χρεοκοπίας Cramér-Lundberg, αναπτύχθηκε από τους μαθηματικούς Harald Cramér και Filip Lundberg και αποτελεί ένα από τα βασικά μοντέλα στη θεωρία της χρεοκοπίας. Το συγκεκριμένο μοντέλο μελετά τη συμπεριφορά του πλεονάσματος μιας ασφαλιστικής εταιρείας στο διηνεκές όταν οι απαιτήσεις από αποζημιώσεις έχουν τη μορφή ενός αναλλοίωτου και ανεξάρτητου διαδοχικού διαδικαστικού σχήματος Poisson.

Ορισμός 5

Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας συμβολίζεται με $\delta(u)$ και ορίζεται απο την σχέση

$$\delta(u) = 1 - \psi(u)$$

Για την συνάρτηση $\delta(u)$ ισχύουν τα εξής:

- $\delta(u)$ είναι αύξουσα και συνεχής
- $\lim_{u\to\infty} \delta(u) = 1$

Στη συνέχεια ακολουθούν δύο σχέσεις που ικανοποιεί η συνάρτηση $\delta(u)$ στο κλασικό μοντέλο.

Πρόταση 1. Στο κλασικό μοντέλο μια εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση $\delta(u)$ είναι η παρακάτω

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)f(x)dx.$$

(Πολίτης 2022)

Πρόταση 2. Στο κλασικό μοντέλο, μία ακόμη εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση $\delta(u)$ είναι η παρακάτω

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\bar{F}(x)dx, \quad (3.5.1)$$

Όπου $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ και είναι η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων. (Πολίτης 2022)

Με βάση την παραπάνω πρόταση μπορεί να υπολογιστεί η πιθανότητα μη χρεοκοπίας, όταν το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν, $\delta(0)$. Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας όταν το αποθεματικό είναι μηδέν αναφέρεται στην πιθανότητα να διατηρηθεί η οικονομική ευστάθεια μιας επιχείρησης ή μιας ασφαλιστικής εταιρείας, ακόμα και αν το αποθεματικό έχει εξαντληθεί και έχει φτάσει στο μηδέν. Συγκεκριμένα, εξετάζει την πιθανότητα το πλεόνασμα της επιχείρησης να παραμένει θετικό, παρά το γεγονός ότι η εταιρία δεν χρησιμοποιεί αρχικό αποθεματικό για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο.

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας μη χρεοκοπίας με μηδέν αρχικό αποθεματικό χρησιμοποιείται η παραπάνω εξίσωση και συγκεκριμένα με χρήση ορίων προκύπτει το παρακάτω:

$$1 = \lim_{u\to\infty} \delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\,\bar{F}(x)dx$$

Παρατηρούμε τα εξής:

- $\lim_{u\to\infty} \delta(u-x) = 1$
- $\lim_{u\to\infty} \int_0^u \bar{F}(x)dx = \int_0^\infty \bar{F}(x)dx = \mu_1$

Άρα μεταφέροντας το όριο μέσα στο ολοκλήρωμα προκύπτει:

$$1 = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \lim_{u\to\infty} \delta(u-x)\bar{F}(x)dx$$

$$\Leftrightarrow 1 = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(x)dx$$

$$\Leftrightarrow 1 = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\mu_1$$

$$\Leftrightarrow \delta(0) = 1 - \frac{\lambda}{c}\mu_1$$

Γνωρίζοντας ότι το περιθώριο ασφάλειας περιγράφεται απο την παρακάτω σχέση

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1$$

τότε εύκολα προκύπτει ότι

$$1 + \theta = \frac{c}{\lambda\mu_1}$$

συνεπώς

$$\delta(0) = 1 - \frac{1}{1+\theta} = \frac{\theta}{1+\theta}$$

άρα η πιθανότητα χρεοκοπίας με μηδέν αρχικό αποθεματικό εκφράζεται ως

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$$

2.5. Συνθήκη (εξίσωση) του Lundberg

Η εξίσωση Lundberg αποτελεί βασικό πυλώνα της θεωρίας της χρεοκοπίας στην αναλογιστική επιστήμη. Η εξίσωση αυτή πήρε το όνομά της από τον διακεκριμένο μαθηματικό Erik Lundberg και προσφέρει ένα ισχυρό μαθηματικό πλαίσιο για την ανάλυση και την ποσοτικοποίηση της πιθανότητας αφερεγγυότητας ή πτώχευσης σε σενάρια όπου απρόβλεπτα γεγονότα θέτουν σε κίνδυνο την οικονομική σταθερότητα ενός χαρτοφυλακίου μίας ασφαλιστικής εταιρίας. Εκφράζεται ως

$$1 + (1+\theta)\mu_1 r = M_X(r) \tag{3.6.1.}$$

όπου $M_X(r)$ η ροπογεννήτρια των ατομικών ζημιών.

2.5.1. *Ανισότητα Lundberg*

Έστω μια σύνθετη διαδικασία Poisson με αρχικό κεφάλαιο $u.$ Έχοντας απαιτήσεις που φθάνουν σύμφωνα με την διαδικασία Poisson με ροπογεννήτρια $m_X(t)$ και συντελεστή προσαρμογής R όπου ικανοποιεί την σχέση 3.6.1 προκύπτει η ακόλουθη ανισότητα, που καλείται ανισότητα του Lundberg

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \; για \; κάθε \; u \geq 0.$$

(Kaas et al, 2008)

Η ανισότητα Lundberg δίνει ένα ανώτερο όριο στην πιθανότητα χρεοκοπίας σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο. Το ποσοστό αυτό εκφράζει τη ροή εισοδήματος σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο όπου τις περισσότερες φορές πηγή εσόδων αποτελούν τα ασφάλιστρα.

2.6. Χρεοκοπία με την πρώτη αποζημίωση

Η πιθανότητα χρεοκοπίας με την πρώτη αποζημίωση συμβολίζεται με $\psi_1(u)$, όπου u είναι το αρχικό αποθεματικό της ασφαλιστικής εταιρίας. Η συγκεκριμένη πιθανότητα βοηθάει τους αναλογιστές στο να δημιουργήσουν ένα κάτω φράγμα όσον αφορά την συνολική πιθανότητα χρεοκοπίας καθώς $\psi_1(u) \leq \psi(u)$ και να μπορέσουν να καταλάβουν πόσο γρήγορα μπορει να επέλθει μια χρεοκοπία στο χαρτοφυλάκιο. Επιπρόσθετα, ειδικά στη σημερινή εποχή που βίωσε η κοινωνία την πανδημία του Covid-19, το οποίο ήταν ένα σπάνιο γεγονός για να συμβεί, δημιούργησε μεγάλη αβεβαιότητα στην αγορά με αποτέλεσμα να ενεργοποιηθούν νέοι κίνδυνοι. Άρα είναι αναγκαίο να εξετάζονται και γεγονότα που είναι σπάνια να συμβούν, ώστε να προβλέπεται η συνολική ζημιά που θα προκαλέσουν. Την συνολική ζημιά οι αναλογιστές την μελετούν με μία κατανομή που συμβολίζουν F και ουσιαστικά αναφέρεται σε χρεοκοπία απο ένα ζημιογόνο γεγονός.

Στο κλασικό πρότυπο, η παράμετρος λ συμβολίζει την ένταση της ανέλιξης Poisson περιγράφοντας τις αφίξεις των απαιτήσεων και η παράμετρος c συμβολίζει την ένταση του ασφαλίστρου.

Πρόταση 3

Η πιθανότητα χρεοκοπίας με την πρώτη αποζημίωση $\psi_1(u)$ έχει τον εξής τύπο

$$\psi_1(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}[1 - F(u+ct)]dt,$$

Με Fσυμβολίζεται η συνάρτηση κατανομής για το μέγεθος μιας αποζημίωσης.

Απόδειξη

Έστω $T_1 = t$ ο χρόνος μέχρι να έρθει η πρώτη απαίτηση. Άρα η πιθανότητα χρεοκοπίας τη δεδομένη χρονική στιγμή είναι $\leq\ u + ct$. Γίνεται δέσμευση ως προς το χρόνο άφιξης της πρώτης απαίτησης και γίνεται χρήση του νόμου ολικής πιθανότητας για συνεχείς τ.μ.

Έστω τώρα A_u το ενδεχόμενο να συμβεί χρεοκοπία με την πρώτη αποζημίωση, με αρχικό πλεόνασμα u. Τότε ο νόμος ολικής πιθανότητας δίνει

$$P(A_u) = \int_0^{\infty} P(A_u | T_1 = t) \lambda e^{-\lambda t} dt,$$

Και η δεσμευμένη πιθανότητα ισούται με

$$P(X_1 > u + ct) = 1 - F(u + ct).$$

Το ζητούμενο έπεται απο το νόμο ολικής πιθανότητας, όπως αναφέρεται παραπάνω. (Πολίτης 2022)

2.7. Αντασφάλιση και θεωρία χρεοκοπίας

Η αντασφάλιση αποτελεί μία μέθοδο που χρησιμοποιούν οι ασφαλιστικές εταιρίες για να μπορούν να διαχειρίζονται καλύτερα τους κινδύνους τους, δηλαδή με κάποιο ασφαλιστήριο συμβόλαιο που υπογράφουν με μία αντασφαλιστική εταιρία, μεταφέρουν μέρος του κινδύνου στην αντασφαλιστική εταιρία. Σκοπός της αντασφάλισης δηλαδή είναι να βοηθήσει τις ασφαλιστικές εταιρίες να διαχειριστούν την έκθεση στον κίνδυνο και να βελτιώσουν την χρηματοοικονομική τους σταθερότητα και να διασφαλίσουν την ικανότητά τους να μπορούν να ανταπεξέλθουν στις υποχρεώσεις που θα προκύψουν από τα συμβόλαια που υπογράφουν με τους πελάτες τους. Η αντασφάλιση μπορεί να κατηγοριοποιηθεί σε διαφορετικούς τύπους με βάση το επίπεδο του μεταφερόμενου κινδύνου και τη συμφωνία μεταξύ της εκχωρούσας εταιρείας και του αντασφαλιστή. Οι κυριότερες μορφές αντασφάλισης που χρησιμοποιούν οι ασφαλιστικές εταιρίες είναι η αναλογική αντασφάλιση και αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας (excess loss).

Στις περιπτώσεις που υπάρχει αντασφάλιση, η ανέλιξη πλεονάσματος αλλάζει συμβολισμό και γίνεται $\{U^*(t): t \geq 0\}$. Συνεπώς υπάρχει και διαφοροποίηση στον τύπο του πλεονάσματος.

$$U^*(t) = u + c^* t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i^*\,, t \geq 0$$

- c^*το ασφάλιστρο που θα εισπράξει η ασφαλιστική εταιρία έχοντας αφαιρέσει το ασφάλιστρο που θα αποδωθεί στην αντασφαλιστική εταιρία.
- X_i^* είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. Δηλώνουν το ποσό απαίτησης που καλείται να πληρώσει η ασφαλιστική εταιρία.

Ο συντελεστής προσαρμογής που ορίσθηκε και στο κλασικό μοντέλο, τώρα συμβολίζεται με R^*. Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει βέβαιη χρεοκοπία, γίνεται η παρακάτω υπόθεση

$$c^* > \lambda E(X_i^*).$$

Όπου

$$E\left[e^{rX_i^*}\right] = 1 + \frac{c^* r}{\lambda}.$$

Όπως είναι φανερό οι τύποι είναι όμοιοι με το κλασικό μοντέλο χωρίς αντασφάλιση και προφανώς το μόνο που αλλάζει είναι ο συμβολισμός με τον αστερίσκο, που ουσιαστικά περιέχει το ποσό που αναλογεί στην αντασφαλιστική εταιρία. Δηλαδή μια ασφαλιστική εταιρία χρησιμοποιώντας την αντασφάλιση, μειώνει το κέρδος της αλλά κερδίζει χρηματοοικονομική ασφάλεια σε περίπτωση κινδύνων. Άρα είναι φανερό πως με αυτη τη μέθοδο προκύπτει ανάλογο κέρδος για την αντασφαλιστική εταιρία. Το ανεμενόμενο κέρδος της αντασφαλιστικής εταιρίας συμβολίζεται με ξ και καλείται περιθώριο αντασφάλισης ($\xi \geq \theta$).

(αντασφάλιστρο ανά χρονική μονάδα) $= \; (1 + \xi)$ *(αναμενόμενα έξοδα ανά χρονική μονάδα αντασφαλιστή)*

Τα έξοδα που καλείται να καλύψει η αντασφαλιστική εταιρία είναι $\lambda E[X - I(X)]$, όπου $I(X)$ είναι το μέγεθος της απαίτησης που φτάνει στην ασφαλιστική εταιρία.

Όπως είναι λογικό και με βάση τα παραπάνω η αντασφαλιστική εταιρία είναι στην ουσία μια ασφαλιστική εταιρία, προσφέροντας αντασφαλιστικά προϊόντα με ανάλογα ασφάλιστρα.Ορίζοντας με c_Rτην αντίστοιχη ένταση του αντασφαλίστρου, προκύπτει ότι

$$c_R = (1 + \xi)\lambda E[X - I(X)].$$

(Πολίτης 2022)

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι δύο μορφές αντασφάλισης που αναφέρθηκαν παραπάνω.

2.7.1. *Αναλογική Αντασφάλιση*

Στην αναλογική αντασφάλιση συμφωνείται μεταξύ της ασφαλιστικής εταιρίας και της αντασφαλιστικής εταιρίας ένα συγκεκριμένο ποσοστό κινδύνου που θα αναλάβει η αντασφαλιστική εταιρία. Από αυτό το ποσοστό προκύπτει και το ανάλογο αντασφάλιστρο το οποίο εξαρτάται απο το επίπεδο κινδύνου που καλείται να αναλάβει η αντασφαλιστική εταιρία.

Στην αναλογική αντασφάλιση όπου $I(X) = aX$, το καθαρό ασφάλιστρο, το οποίο προκύπτει απο το ολικό αφαιρώντας το αντασφάλιστρο δίνεται απο την παρακάτω σχέση

$$c^* = [1 + \theta - (1 + \xi)(1 - \alpha)]\lambda \mu_1.$$

Παράδειγμα 2.1 Έστω ασφαλίστρια εταιρία, η οποία χρησιμοποιεί μέθοδο αναλογικής αντασφάλισης με $I(X) = \alpha X, 0 < \alpha < 1$. Να υπολογισθεί ο συντελεστής προσαρμογής R^*, έχοντας ως δεδομένο ότι ο συντελεστής προσαρμογής χωρίς αντασφάλιση είναι R.

Λύση

Όπως έχει ορισθεί παραπάνω, ο συντελεστής προσαρμογής R προκύπτει απο την λύση της εξίσωσης

$$1 + (1 + \theta)\mu_1 r = M_x(r)$$

Απο την εκφώνηση σαν δεδομένο ισχύει ότι

$$I(X) = \alpha X$$

Θα γίνει χρήση δύο εξισώσεων που ορίσθηκαν παραπάνω

$E\left[e^{rX_i^*}\right] = 1 + \frac{c^* r}{\lambda}$. (i)

$c^* = [1 + \theta - (1 + \xi)(1 - \alpha)]\lambda\mu_1$ (ii)

Απο την (ii) αντικαθιστώντας στην (i) προκύπτει ότι

$$E\left[e^{rX_i^*}\right] = 1 + \frac{[1 + \theta - (1 + \xi)(1 - \alpha)]\lambda\mu_1 r}{\lambda}$$

$$E\left[e^{rX_i^*}\right] = 1 + [1 + \theta - (1 + \xi)(1 - \alpha)]r\mu_1$$

Άρα ο συντελεστής R^* προκύπτει απο την θετική λύση της εξίσωσης

$$M_{\alpha X}(r) = 1 + [1 + \theta - (1 + \xi)(1 - \alpha)]r\mu_1$$

$$M_{\alpha X}(r) = M_X(\alpha r)$$

$$M_X(\alpha r) = 1 + [1 + \theta - (1 + \xi)(1 - \alpha)]r\mu_1$$

Για $\xi = \theta$ που είναι η πιο κοινή συνθήκη στην αναλογική αντασφάλιση προκύπτει

$$M_X(\alpha r) = 1 + (1 + \theta)\mu_1(\alpha r)$$

Είναι φανερό ότι $\alpha R^* = R$, άρα

$$R^* = \frac{R}{\alpha}.$$

(Πολίτης 2022)

2.7.2. Αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας

Στην συγκεκριμένη μορφή αντασφάλισης, ο αντασφαλιστής θα καταβάλει κάποιο ποσό αν η ζημιά υπερβεί ένα συγκεκριμένο όριο (σημείο υπέρβασης) για τον ασφαλισμένο κίνδυνο. Υποθέτοντας ότι η ασφαλιστική εταιρία πραγματοποιεί αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας με επίπεδο υπερβάλλοντος ζημίας m, τότε η ασφαλιστική εταιρία καλείται να καταβάλει για κίνδυνο X

$$I(X) = \begin{cases} X, & X \leq m \\ m, & X > m \end{cases}$$

Το καθαρό ασφάλιστρο, αν τα μεγέθη των αποζημιώσεων είναι εκθετικά κατανεμένα με μέση τιμή 1 προκύπτει από τον παρακάτω τύπο

$$c^* = c - c_R = (1+\theta)\lambda - (1+\xi)\lambda \int_m^\infty (x-m)e^{-x}\,dx =$$

$$(1+\theta)\lambda - (1+\xi)\lambda(\int_m^\infty xe^{-x}\,dx - \int_m^\infty me^{-x}\,dx) =$$

$$(1+\theta)\lambda - (1+\xi)\lambda(me^{-m} + e^{-m} - me^{-m}).$$

Συνεπώς προκύπτει ότι το καθαρό ασφάλιστρο είναι

$$c^* = \lambda(1+\theta-(1+\xi)e^{-m}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^o

Το πακέτο actuar στη θεωρία κινδύνων

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, θα παρουσιαστεί μία εισαγωγή στη χρήση του πακέτου actuar για την προσαρμογή κατανομών και δεδομένων στο πλαίσιο της θεωρίας κινδύνων. Ειδικότερα, θα αναλυθούν οι διαδικασίες υπολογισμού της συνάρτησης κατανομής και της συνάρτησης πιθανότητας. Αρχικά, θα οριστούν οι αποκομμένες και τροποποιημένες κατανομές στο σημείο 0, παρέχοντας παραδείγματα από τη θεωρία κινδύνων που αφορούν τις κλάσεις κατανομών R(a,b,0). Στη συνέχεια, θα εξεταστεί η συνάρτηση discretise, η οποία χρησιμοποιείται για τη διακριτοποίηση τυχαίων μεταβλητών, καθώς και το μοντέλο συλλογικού κινδύνου. Κλείνοντας, θα παρουσιαστεί η συνάρτηση aggregateDist, η οποία αποτελεί βασικό εργαλείο στην R για τον υπολογισμό της συνάρτησης κατανομής της συνολικής ζημίας, αναλύοντας τη χρήση και την εφαρμογή της στην ανάλυση κινδύνων.

3.1. Το πακέτο actuar

Η R είναι μια γλώσσα προγραμματισμού με προγραμματιστικό περιβάλλον κατάλληλο για υπολογισμούς στατιστικής φύσεως και οπτικοποίησης δεδομένων. Υποστηρίζει άψογα όλα τα βήματα στη διαδικασία της στατιστικής ανάλυσης δεδομένων, τα οποία μπορούν να υλοποιηθούν με ακρίβεια και σε γρήγορη ταχύτητα. Στο περιβάλλον της R υπάρχει μεγάλη ποικιλία απο πακέτα τα οποία χρησιμοποιούνται για διάφορες στατιστικές αναλύσεις δίνοντας στον χρήστη αυτό που χρειάζεται.

Το πακέτο actuar είναι ένα απο τα πολλά πακέτα που υπάρχουν στην R και το χρησιμοποιούν κυρίως στον χώρο του αναλογισμού και της διαχείρισης κινδύνων. Το όνομα του το πήρε απο την λέξη actuarial. Με το εν λόγω πακέτο ο αναλογιστής μπορεί εύκολα και γρήγορα να κάνει υπολογισμούς με απόλυτη αξιοπιστία, καθώς μπορεί να κάνει μοντελοποίηση σε ζημιοκατανομές, θεωρία κινδύνου και θεωρία αξιοπιστίας.

3.2. Εύρεση συνάρτησης κατανομής και συνάρτησης πιθανότητας

Μέσω της R είναι εύκολο για τον χρήστη να βρεί της συνάρτηση πιθανότητας μέσω της συνάρτησης κατανομής αλλά και το αντίστροφο. Οι εντολές που χρησιμοποιούνται θα φανούν στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 3.1

Έστω η συνάρτηση πιθανότητας

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} 0.1 & x = 1 \\ 0.2 & x = 2 \\ 0.1 & x = 3 \\ 0.1 & x = 4 \\ 0.2 & x = 5 \\ 0.3 & x = 6 \end{cases}$$

και η συνάρτηση κατανομής

$$\mathrm{F(x)} = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.1 & 1 \leq x < 2 \\ 0.3 & 2 \leq x < 3 \\ 0.4 & 3 \leq x < 4 \\ 0.5 & 4 \leq x < 5 \\ 0.7 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

Ο κώδικας που θα χρησιμοποιηθεί είναι ο εξής

```
f<-c(0.1,0.2,0.1,0.1,0.2,0.3)

f

[1] 0.1 0.2 0.1 0.1 0.2 0.3

F<-diffinv(f)

F

[1] 0.0 0.1 0.3 0.4 0.5 0.7 1.0

f.other<-diff(F)

f.other

[1] 0.1 0.2 0.1 0.1 0.2 0.3
```

(Αντζουλάκος 2021)

3.3. Αποκομμένες και τροποποιημένες στο σημείο 0 κατανομές

Έστω μια διακριτή τ.μ. X με συνάρτηση πιθανότητας

$$\mathrm{p_k = P(X = k),\ k = 0,1,2,}$$

Τότε η αντίστοιχη αποκομμένη κατανομή στο σημείο 0 ή zero-truncated, συμβολίζεται με $\mathrm{X}^{(T)}$, έχει συνάρτηση πιθανότητας που δίνεται απο τη σχέση

$$p_k^T = P(X^{(T)} = k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ c^{(T)} p_k = \dfrac{1}{1 - p_0} p_k & k = 1,2,\ldots \end{cases}$$

Η αντίστοιχη τροποποιημένη κατανομή στο σημείο 0 ή zero-modified, συμβολίζεται με $X^{(M)}$, έχει συνάρτηση πιθανότητας που ικανοποιεί την σχέση

$$p_k^{(M)} = P(X^{(T)} = k) = \begin{cases} p_0^{(M)}, & k = 0 \\ c^{(M)} p_k = \dfrac{1 - p_0^{(M)}}{1 - p_0} p_k & k = 1,2,\ldots \end{cases}$$

(Αντζουλάκος 2021)

3.4. Θεωρία Κινδύνου

Η θεωρία κινδύνου αναφέρεται στην μέτρηση του κινδύνου που γίνεται με υπολογισμούς ακριβείας στο συλλογικό πρότυπο. Κύριο μέλημα όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 2 είναι η εύρεση της κατανομής των συνολικών ζημιών. Στην R με το πακέτο actuar μπορεί να υπολογιστεί η συγκεκριμένη κατανομή για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

(Χατζηκωνσταντινίδης 2021)

3.4.1. *Κλάση κατανομών R(a,b,0)*

Παράδειγμα 3.2

Να οριστεί η συνάρτηση pmfn που να υπολογίζει την συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής που ανήκει στην κλάση R(0.4,0.8,0) με $p_0 = 0.6^3$.

Ο κώδικας για την συγκεκριμένη συνάρτηση είναι ο εξής

```
p<-0.6
q<-0.4
r<-3
p0<-p^r
a<-q
b<-(r-1)*q
pmfn<-function(n) {
 if (n==0) return(p0)
 return((a+b/n)*pmfn(n-1))
}
```

(Αντζουλάκος 2021)

3.4.2. *Η συνάρτηση discretise*

Στο συλλογικό μοντέλο η κατανομή των συνολικών απαιτήσεων εξαρτάται απο την κατανομή του ύψους της ατομικής ζημιάς που μπορεί να είναι είτε συνεχής είτε διακριτή τυχαία μεταβλητή. Στην περίπτωση που είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, πρέπει να γίνει διακριτοποίηση. Στο πακέτο actuar η διακριτοποίηση γίνεται με την εντολή discretise και ουσιαστικά χωρίζει το πεδίο τιμών μιας συνεχούς τ.μ. σε πολύ μικρά ίσα τμήματα. Η διακριτοποίηση στην R με το πακέτο actuar γίνεται με τέσσερις τρόπους.

- **Ανώτερη (upper) διακριτοποίηση της $\mathbf{F(x)}$.**
  Στη συγκεκριμένη μέθοδο στο διάστημα [a,b], η τ.μ. Υ παίρνει τιμές στο σύνολο $R_{[a,b]} = a, a + h, a + 2h, \dots, a + (k - 1)h, όπου\ h = (b - a)/k,$ δηλαδή
  b = a + kh.
  Ο γενικός τύπος υπολογισμού πιθανότητας είναι
  $$g_y = P(Y = y) = F_x(y + h) - F_x(y), y = a, a + h, \dots, a + (k - 1)h.$$
- **Κατώτερη (lower) διακριτοποίηση της $\mathbf{F(x)}$.**
  Στην συγκεκριμένη μέθοδο στο διάστημα [a,b], η τ.μ. Υ παίρνει τιμές στο σύνολο $R_{[a,b]} = a, a + h, a + 2h, \dots, b, όπου h = (b - a)k,$δηλαδή

b = a + kh.

Ο γενικός τύπος υπολογισμού πιθανότητας είναι

$$g_y = P(Y = y) = \begin{cases} F_x(a), & y = a \\ F_x(y) - F_x(y-h) & y = a+, a+2h, \dots, b \end{cases}$$

- **Στρογγυλοποίηση (rounding) της F(x).**
  Στη συγκεκριμένη μέθοδο στο διάστημα [a,b], η τ.μ. Υ παίρνει τιμές στο σύνολο $R_{[a,b]} = a, a+h, a+2h, \dots, a+(k-1)h, όπου h = (b-a)/k$, δηλαδή

  b = a + kh.

  Ο γενικός τύπος υπολογισμού πιθανότητας είναι

  $$g_y = P(Y = y) = \begin{cases} F_x(a + h/2), & y = a \\ F_x(y + h/2) - F_x(y - h/2) & y = a+, a+2h, \dots, a+(k-1)h \end{cases}$$

- **Αμερόληπτη (unbiased) διακριτοποίηση της F(x).**
  Στην συγκεκριμένη μέθοδο στο διάστημα [a,b], η τ.μ. Υ παίρνει τιμές στο σύνολο $R_{[a,b]} = \{a, a+h, a+2h, \dots, b\}, όπου\ h = (b-a)k, δηλαδή$ b = a + kh.

  Ο γενικός τύπος υπολογισμού πιθανότητας είναι

  $$g_y = P(Y = y) = \begin{cases} \dfrac{E(X \wedge a) - E(X \wedge a + h)}{h} + 1 - F(a), & y = a \\ \dfrac{2E(X \wedge y) - E(X \wedge y - h) - E(X \wedge y + h)}{h}, & a < y < b, \\ \dfrac{E(X \wedge b) - E(X \wedge b - h)}{h} - 1 + F(b), & y = b \end{cases}$$

  $όπου\ X \wedge u = min(X, u)$

(Αντζουλάκος 2021)

Η εντολή που πρέπει να τρέξει ο χρήστης στο περιβάλλον της R είναι η εξής

```
discretise(cdf, from, to, step = 1,
          method = c("upper", "lower", "rounding", "unbiased"),
          lev, by = step, xlim = NULL)
```

Παράδειγμα 3.3 Να γίνει διακριτοποίηση μιας κατανομής Γάμμα(5,2) με όλες τις μεθόδους διακριτοποίησης στο διάστημα (0,5) με βήμα 0,5.

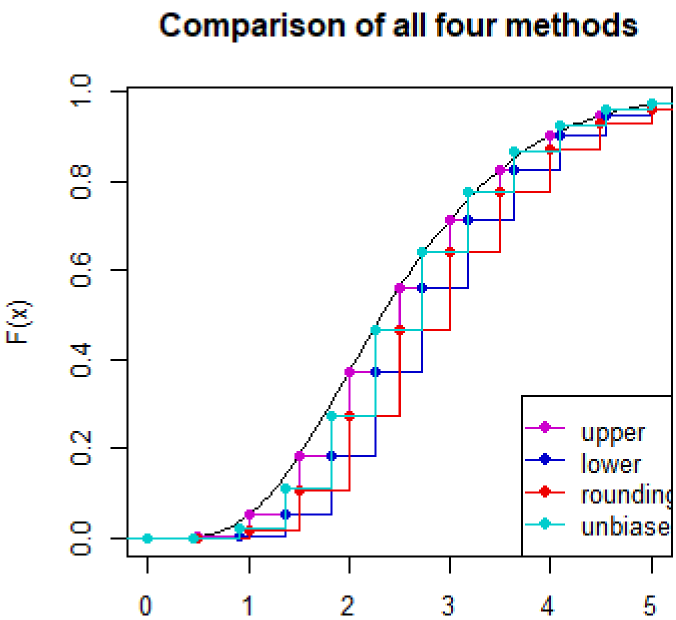
```
library(actuar)

a<-0; b<-5; h<-0.5

f1<-discretise(pgamma(x,5,2),method="upper",from=a,to=b,step=h)

f2<-discretise(pgamma(x,5,2),method="lower",from=a,to=b,step=h)

f3<-discretise(pgamma(x,5,2),method="rounding",from=a,to=b,step=h)

f4<-discretise(pgamma(x,5,2),method="unbiased",from=a,to=b,step=h,lev=levgamma(x,5,2))

m<-cbind(f1[1:5],f2[1:5],f3[1:5],f4[1:5])

colnames(m)<-c("Upper","Lower","Rounding","Unbiased")

round(m,digits=5)
```

	Upper	**Lower**	**Rounding**	**Unbiased**
[1,]	**0.00366**	**0.00000**	**0.00017**	**0.00069**
[2,]	**0.04899**	**0.00366**	**0.01840**	**0.02111**
[3,]	**0.13208**	**0.04899**	**0.09025**	**0.09033**
[4,]	**0.18643**	**0.13208**	**0.16573**	**0.16355**
[5,]	**0.18834**	**0.18643**	**0.19334**	**0.19135**

Στο παρακάτω παράδειγμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση και των τεσσάρων μεθόδων διακριτοποίησης σε ένα διάγραμμα στο διάστημα (0,5).

```
# Φόρτωση βιβλιοθήκης

library(actuar)

# Παράμετροι

a <- 0

b <- 5

h <- 0.5  # Ορισμός του βήματος

# Δημιουργία των συναρτήσεων διακριτοποίησης

f1 <- discretise(pgamma(x, 5, 2), method = "upper", from = a, to = b, step = h)

f2 <- discretise(pgamma(x, 5, 2), method = "lower", from = a, to = b, step = h)

f3 <- discretise(pgamma(x, 5, 2), method = "rounding", from = a, to = b, step = h)

f4 <- discretise(pgamma(x, 5, 2), method = "unbiased", from = a, to = b, step = h, lev = levgamma(x,
5, 2))

# Reset plot margins in case of "figure margins too large" error

par(mar = c(5, 5, 4, 2))

# Σχεδίαση της καμπύλης της pgamma

curve(pgamma(x, 5, 2), from = 0, to = 5, col = "black", ylab = "F(x)",

    main = "Comparison of all four methods")
```

```
# Προσθήκη των διακριτοποιημένων συναρτήσεων
plot(stepfun(seq(0, b, length.out = length(f1) + 1), c(0, diffinv(f1))),
   pch = 19, add = TRUE, col = "magenta3")
plot(stepfun(seq(0, b, length.out = length(f2) + 1), c(0, diffinv(f2))),
   pch = 19, add = TRUE, col = "blue3")
plot(stepfun(seq(0, b, length.out = length(f3) + 1), c(0, diffinv(f3))),
   pch = 19, add = TRUE, col = "red2")
plot(stepfun(seq(0, b, length.out = length(f4) + 1), c(0, diffinv(f4))),
   pch = 19, add = TRUE, col = "cyan3")
# Προσθήκη υπομνήματος
legend("bottomright", legend = c("upper", "lower", "rounding", "unbiased"),
    col = c("magenta3", "blue3", "red2", "cyan3"), lty = 1, pch = 19, text.col = "black")
```



(Ντεργιαντέ 2018)

3.4.3. *Μοντέλο συλλογικού κινδύνου*

Στο μοντέλο συλλογικού κινδύνου το ύψος των συνολικών ζημιών είναι η τ.μ S με τύπο

$$S = \begin{cases} 0, & N = 0 \\ X_1 + X_2 + \ldots + X_N & N = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Όπου οι τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_N$ είναι τα μεγέθη ατομικής ζημιάς και η τ.μ. Ν δηλώνει το συνολικό πλήθος ζημιών.

Ισχύουν όλοι οι τύποι που έχουν αναφερθεί στο κεφάλαιο 2 για το συλλογικό μοντέλο.

Το κύριο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι αναλογιστές είναι η εύρεση της κατανομής της τ.μ. S.

- **Σύνθετη κατανομή Poisson.**
  Στην περίπτωση όπου η τ.μ. Ν ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ, δελαδή $N \sim P(\lambda)$, τότε η κατανομή των συνολικών ζημιών, S, ακολουθεί την σύνθετη κατανομή Poisson και η συνάρτηση πιθανότητας της S δίνεται απο τον εξής αναδρομικό τύπο
  $$g(x) = P(S = x) = \frac{\lambda}{x} \sum_{y=1}^{x} y f(y) g(x - y), x = 1,2,3,\ldots$$
  με αρχική συνθήκη $g(0) = P_N(f(0)) = e^{\lambda(f(0)-1)}$.

  Ο συγκεκριμένος αναδρομικός τύπος ονομάζεται τύπος του Panjer. Θα γίνει τώρα χρήση του τύπου στην R με την βοήθεια του πακέτου actuar.

```
Panjer.Poisson <- function (f, lambda)
{ if (sum(f)>1||any(f<0)) stop("f parameter not a density")
```
#Έλεγχος αν το διάνυσμα f έχει συνιστώσες που αθροίζουν σε αριθμό #μεγαλύτερο του 1 ή αν κάποια συνιστώσα είναι αρνητική.
```
 if (lambda * sum(f) > 727) stop("Underflow")
```
#Αν το λ είναι μεγαλύτερο απο 727 τότε υπάρχει πρόβλημα υποχείλισης
```
 g <- exp(-lambda * sum(f))
```
#Καταχώρηση του g(0)
```
 r <- length(f)
 x <- 0
 repeat { x <- x+1
  m <- min(x, r)
  last <- (lambda/x)*sum(1:m*head(f,m)*rev(tail(g,m)))
```
#Στο αντικείμενο last εκχωρείται η τιμή g(x) για την τρέχουσα τιμή του x στην

#εκάστοτε επανάληψη.
```
  g <- c(g,last)
```
#Στο αντικείμενο g εκχωρείται η τιμή (g(0),g(1),...,g(x)).
```
  cumul <- sum(g)
```
#Το αντικείμενο cumul συσσωρεύει το άθροισμα των g.
```
  if (cumul > 0.99999999) break
 }
return(g) }
```

(Αντζουλάκος 2021)

Στη συνέχεια ακολουθεί ένα αριθμητικό παράδειγμα με χρήση της συνάρτησης Panjer.Poisson, για να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων.

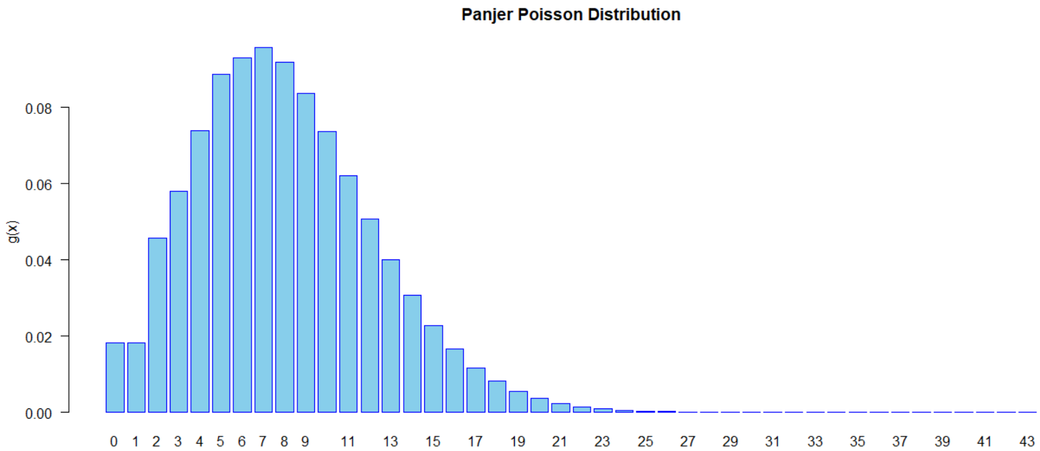
Παράδειγμα 3.4 Αν το πλήθος των απαιτήσεων N σε ένα έτος έχει την κατανομή Poisson με παράμετρο λ=4 και το μέγεθος της ατομικής ζημιάς X έχει την ακόλουθη συνάρτηση πιθανότητας

$$f(k) = P(X = k) = \begin{cases} 0.25, & k = 1 \\ 0.5, & k = 2 \\ 0.25, & k = 3 \end{cases}$$

Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας g(x) των ετήσιων συνολικών αποζημιώσεων S.

Αρχικά θα χρησιμοποιηθεί ο κώδικας της συνάρτησης Panjer.Poisson και στην συνέχεια εκχωρούμε στο διάνυσμα y τη ζητούμενη συνάρτηση πιθανότητας.

```
  > Panjer.Poisson <- function (f, lambda)
  + { if (sum(f)>1||any(f<0)) stop("f parameter not a density")
  +  if (lambda * sum(f) > 727) stop("Underflow")
  +  g <- exp(-lambda * sum(f))
  +  r <- length(f)
  +  x <- 0
  +  repeat { x <- x+1
  +      m <- min(x, r)
  +      last <- (lambda/x)*sum(1:m*head(f,m)*rev(tail(g,m)))
  +      g <- c(g,last)
  +      cumul <- sum(g)
  +      if (cumul > 0.99999999) break
  +  }
  + return(g) }
  > y<-Panjer.Poisson(c(0.25,0.5,0.25),) #y=g(x)
  > x<-0:(length(y)-1)
  >  m<-cbind(x,y)
  >  rownames(m)<-rep("",nrow(m))
  >  colnames(m)<-c("x","g(x)")
  >  round(m,digits=10)
>  barplot(height = y, names.arg = x, col = "skyblue",
>        xlab = "x", ylab = "g(x)", main = "Panjer Poisson Distribution",
>        border = "blue", las = 1)
```



Εικόνα 2: Αποτελέσματα παραδείγματος Panjer Poisson

Η κατανομή Panjer Poisson, η οποία υπολογίστηκε με τις παραμέτρους c(0.25,0.5,0.25) και λ=4, παράγει την κατανομή πιθανότητας που απεικονίζεται στο παραπάνω διάγραμμα. Το διάγραμμα παρουσιάζει μια κατανομή σχεδόν συμμετρική, με τη μέγιστη πιθανότητα να εντοπίζεται στις τιμές μεταξύ 6 και 8. Οι τιμές της $g(x)$ παρουσιάζονται αναλυτικά στο κεφάλαιο παραρτημα στο τέλος της εργασίας.

3.5. Συνάρτηση aggregateDist

Η συνάρτηση aggregateDist ανήκει στο πακέτο actuar και περιέχει πέντε διαφορετικές μεθοδολογίες για τον υπολογισμό της κατανομή του ύψους των συνολικών ζημιών για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Η συνάρτηση aggregateDist, ανεξάρτητα από ποια μέθοδο θα επιλεχθεί, δίνει πάντα ως αποτέλεσμα την συνάρτηση κατανομής της S. Η εντολή που χρησιμοποιείται στην R είναι

```
aggregateDist(method = c("recursive",
"convolution","normal","npower", "simulation"),
model.freq = NULL, model.sev = NULL, p0 = NULL,x.scale = 1,
convolve = 0, moments, nb.simul, ...,
 tol = 1e-06, maxit = 500, echo = FALSE)
```

Οι πέντε μέθοδοι είναι οι εξής:

1. **Exact calculation via convolution (method=”convolution”)**
   Όταν τα μεγέθη των αποζημιώσεων περιγράφονται απο μία διακριτή τ.μ. X με σ.κ. $F(x)$ και συνάρτηση πιθανότητας f(x) εφαρμόζεται η μέθοδος convolution, οπου χρησιμοποιεί την συνάρτηση convolve, δηλαδή της συνάρτηση των συνελίξεων. Στο όρισμα model.freq καταχωρούμε το διάνυσμα των πιθανοτήτων της τ.μ. N και στο όρισμα model.sev καταχωρούμε το διάνυσμα των πιθανοτήτων της τ.μ. X. Η συνάρτηση aggregateDist δίνει την σ.κ. της S με χρήση του τύπου
   $$G(x) = P(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x), x = 1,2,3,\ldots$$
2. **Recursive μέθοδος**
   Η συγκεκριμένη μέθοδος εφαρμόζεται όταν τα μεγέθη των αποζημιώσεων προέρχονται απο μια διακριτή τ.μ. X με σ.π. f(x) και η τ.μ. N ανήκει στην κλάση $\mathcal{R}(a,b,1)$ ή $\mathcal{R}(a,b,0)$. Τότε η συνάρτηση πιθανότητας των συνολικών απαιτήσεων υπολογίζεται με χρήση του αναδρομικού τύπου
   $$g(x) = P(S = x) = \frac{[p_1 - (a+b)p_0]f(x) + \sum_{k=1}^{x}\left(q + \frac{bk}{x}\right)f(k)g(x-k)}{1 - af(0)},$$
   $$x = 1,2,3,\ldots$$
   $\mu\varepsilon\ \alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}\ \sigma\upsilon\nu\theta\acute{\eta}\kappa\eta\ g(0) = P_N(f(0))$.
   Όταν πρόκειται για την κλάση $\mathcal{R}(a,b,0)$ υπάρχει μια διαφοροποίηση στον αναδρομικό τύπο και παίρνει την μορφή
   $$g(x) = P(S = x) = \frac{\sum_{k=1}^{x}(q + \frac{bk}{x})f(k)g(x-k)}{1 - af(0)}, x = 1,2,3,\ldots$$

αφού $p_1 - (a+b)p_0 = 0$

Στο όρισμα model.freq δίνουμε την κατανομή της τ.μ. N και στο model.sev δίνουμε το διάνυσμα των πιθανοτήτων της τ.μ. X.

3. **Normal Approximation I**
   Η συγκεκριμένη μέθοδος που στον κώδικα ειναι method=”normal” βασίζεται στο Κ.Ο.Θ. και δίνει ως αποτέλεσμα την πιθανότητα
   $$G(x) = P(S \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x-\mu_s}{\sigma_s}\right).$$
4. **Normal Approximation II**
   Η συγκεκριμένη μέθοδος στον κώδικα έχει την εντολή method=”npower”. Δίνει ως αποτέλεσμα την πιθανότητα
   $$G(x) = P(S \leq x) \approx \Phi\left(-\frac{3}{\gamma_s} + \sqrt{\frac{9}{\gamma_s^2} + 1 + \frac{6(x-\mu_s)}{\gamma_s - \sigma_s}}\right).$$
   Όπου γ_s είναι ο συντελεστής ασυμμετρίας της τ.μ. S και δίνεται απο τον τύπο
   $$\gamma_s = \frac{E[(S-\mu_s)^3]}{\sigma_s^3}$$
5. **Simulation Method**
   Η συγκεκριμένη μέθοδος στον κώδικα έχει την εντολή method=”simulation”. Με αυτή τη μέθοδο γίνεται προσομοίωση ενός τυχαίου δείγματος από την S και στη συνέχεια βρίσκεται η εμπειρική συνάρτηση κατανομής της S. (Αντζουλάκος 2021)

Παράδειγμα 3.5
Θεωρούμε το μοντέλο συλλογικού κινδύνου

$$S = \begin{cases} 0, & N = 0 \\ X_1 + X_2 + \ldots + X_N & N = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Όπου το πλήθος των απαιτήσεων N σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p=1/3, δηλαδή
$$p_k = P(N = k) = p(1-p)^{k-1}, k = 0,1,2,\ldots$$

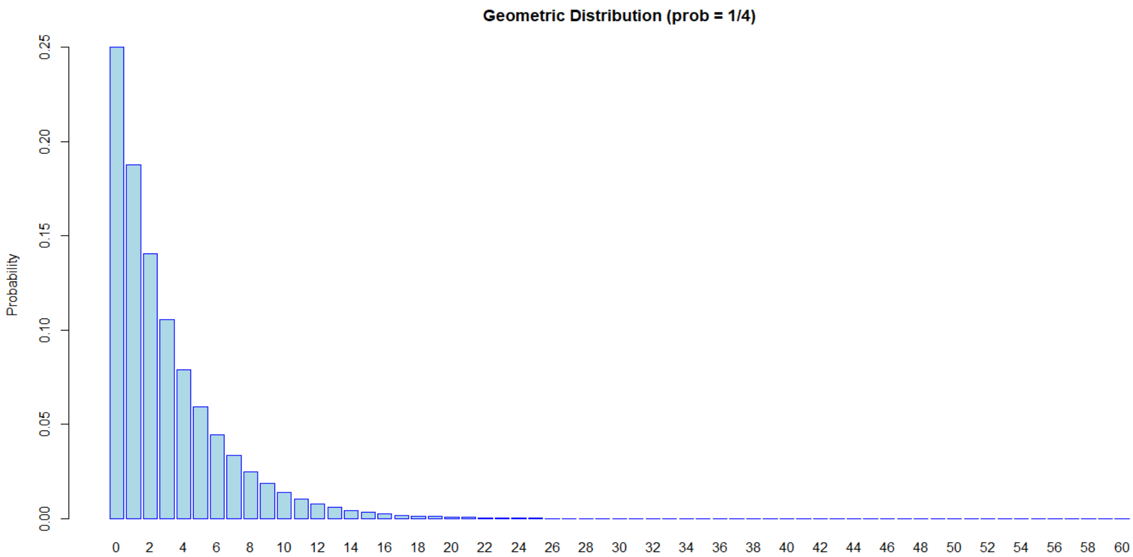
Και η κατανομή του μεγέθους X των αποζημιώσεων ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο θ=1/4, δηλαδή
$$f(x) = P(X = x) = \theta(1-\theta)^{x-1}, x = 0,1,2,\ldots$$
Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση aggregateDist να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής G(x), και η συνάρτηση πιθανότητας g(x), της τ.μ. S για $x = 0,1,\ldots,20$, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους

- Convolution
- Recursive
- Simulation

Για τη μέθοδο simulation θα χρησιμοποιήσουμε το όρισμα nb.simul=1000000.

Αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε την library actuar για να χρησιμοποιήσουμε την aggregateDist συνάρτηση. Στη συνέχεια θα κάνουμε το διάγραμμα για την Γεωμετρική Κατανομή με βάση τις μεταβλητές που μας δίνει η ασκήση για να δούμε ποια όρια θα χρησιμοποιήσουμε. Θα υπολογίσουμε το όριο της Γεωμετρικής για να κατασκευάσουμε τα διανύσματα πιθανοτήτων που θα χρησιμοποιήσουμε στις μεθόδους Convolution, Recursive και Simulation.

```
# Load library

library(actuar)

# Define parameters

a <- 0

b <- 60

u <- 1/4

# Calculate the geometric probabilities for values from a to b

x_values <- a:b

probabilities <- dgeom(x_values, prob = u)


# Create the bar plot

barplot(probabilities, names.arg = x_values, xlab = "x", ylab = "Probability",

    main = "Geometric Distribution (prob = 1/4)", col = "lightblue", border = "blue")
```



Εικόνα 3: Γράφημα γεωμετρικής κατανομής

Υπολογισμός της f_x *και της* f_N .

```
p1<-0.999999
p=1/4
lim<-floor(qgeom(p1,prob=p))
lim
[1] 45
fX<-dgeom(0:58,prob=u)
sum(fX)
```

ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΟΤΙ Η fX ΑΘΡΟΙΖΕΙ ΣΤΟ 1 ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ 0 ΕΩΣ 58

```
fN<-dgeom(0:lim,prob=p)
fN
sum(fN)
[1] 1
```

Μέθοδος Convolution

```
Gs<-aggregateDist("convolution",model.freq=fN,model.sev=fX)
gs<-diff(Gs)
```

Μέθοδος Recursive

```
h<-1

Gs.rec<-aggregateDist("recursive",model.freq="geometric",prob=p,model.sev=fX,x.scale=h)

gs.rec<-diff(Gs.rec)
```

Μέθοδος Simulation

```
mfreq<-expression(data=rgeom(prob=p))
msev<-expression(data=rgeom(prob=u))
Gs.simul<-aggregateDist("simulation",nb.simul=1000000,mfreq,msev)
gs.simul<-diff(Gs.simul)
```

Υπολογισμός του G(x) και g(x) και δημιουργία των ζητούμενων πινάκων.

```
c<-20; h1<-1

x<-seq(0,c,h1)
mat.Gs<-cbind(x,Gs(x),Gs.rec(x),Gs.simul(x))
rownames(mat.Gs)<-rep("", nrow(mat.Gs))
colnames(mat.Gs)<-c("x","G(x)_Convolution","G(x)_Recursive","G(x)_Simulation")
round(mat.Gs,digits=6)


d<-(c/h1+1)
mat.gs<-cbind(x,gs[1:d],gs.rec[1:d],gs.simul[1:d])
rownames(mat.gs)<-rep("", nrow(mat.gs))
colnames(mat.gs)<-c("x","g(x)_Convolution","g(x)_Recursive","g(x)_Simulation")
round(mat.gs,digits=6)
```

Στην συνέχεια θα δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού της κατανομής όπου χρειάζεται να γίνει διακριτοποίηση της τ.μ. X.

Παράδειγμα 3.6
Θεωρούμε το μοντέλο συλλογικού κινδύνου

$$S = \begin{cases} 0, & N = 0 \\ X_1 + X_2 + \ldots + X_N & N = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Όπου,

1. Το πλήθος των απαιτήσεων N σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους p=0.6 και n=3.
2. Η κατανομή του μεγέθους X των αποζημιώσεων ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,50).

Να γίνει διακριτοποίηση της κατανομής του μεγέθους X των αποζημιώσεων χρησιμοποιώντας την μέθοδο “unbiased” στο διάστημα (0,50) με βήμα h=0.001. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση aggregateDist να υπολογιστεί η κατανομή G(x) της τ.μ. S χρησιμοποιώντας τις μεθόδους Convolution, Recursive και Simulation. Ειδικότερα για την μέθοδο recursive να χρησιμοποιηθεί το όρισμα maxit=1000000.

Η διακριτοποίηση της Ομοιόμορφης Κατανομής με την μέθοδο unbiased δίνεται απο τον παρακάτω αλγόριθμο

```
h<-0.001
fU<-discretize(punif(x,min=0,max=50),from=0,to=50
,step=h,method="unbiased",lev=levunif(x,min=0,max=50))
length(fU)
[1] 50001
sum(fU)
[1] 1
```

Κατασκευή της διωνυμικής κατανομής

```
n<-3
p<-0.6
p1<-0.99
lim<-floor(qbinom(p1,prob=p,size=n))
lim
[1] 3
fN<-dbinom(0:lim,size=n,prob=p)
fN
[1] 0.064 0.288 0.432 0.216
```

Μέθοδος Convolution

```
Gs<-aggregateDist("convolution",model.freq=fN,model.sev=fX)
```

Μέθοδος Recursive

```
h<-1
Gs.rec<-aggregateDist("recursive",model.freq="geometric",prob=p,model.sev=fX,x.scale=h)
```

Μέθοδος Simulation

```
mfreq<-expression(data=rgeom(prob=p))
msev<-expression(data=rgeom(prob=u))
Gs.simul<-aggregateDist("simulation",nb.simul=1000000,mfreq,msev)
```

Δημιουργία πίνακα για διεξαγωγή των αποτελεσμάτων

```
c<-20;h1<-1
x<-seq(0,c,h1)
mat.Gs<-cbind(x,Gs(x),Gs.rec(x),Gs.simul(x))
rownames(mat.Gs)<-rep("", nrow(mat.Gs))
colnames(mat.Gs)<-c("x","G(x)_Convolution","G(x)_Recursive","G(x)_Simulation")
round(mat.Gs,digits=6)
```

Για τον παραπάνω πίνακα παρακαλώ ανατρέξτε στο Παράρτημα.

Παράδειγμα (Loss Models: From Data to Decisions (2012, 4th Edition, page 162))

Έστω ένα μοντέλο συλλογικού κινδύνου με τα εξής χαρακτηριστικά

a. Το πλήθος των απαιτήσεων σε μια συγκεκριμένη χρονική περιόδο ακολουθεί την τροποποιημένη στο 0 διωνυμική κατανομή με $p_0^M = 0.4, q = 0.7\ και\ n = 3$.
b. Τα μεγέθη των αποζημιώσεων είναι 0, 50 και 150 νομισματικές μονάδες με πιθανότητες 0.3,0.5 και 0.2 αντίστοιχα.

Να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής της S με τις μεθόδους

- “Convolution”
- “Recursive”

Για ευκολία στις πράξεις κάνουμε μια αλλαγή στις νομισματικές μονάδες και θέτουμε 0=0, 1=50 και 3=150

Μέθοδος Convolution

Για την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. N θα χρησιμοποιηθεί ο ακόλουθος πίνακας

ΚΑΤΑΝΟΜΗ	p_0	p_1	a	b
ZM Binomial	$p_0^{(M)}$	$(1-p_0^{(M)})\dfrac{npq^{n-1}}{1-q^n}$	$-\dfrac{p}{q}$	$\dfrac{(n+1)p}{q}$

Υπολογισμός συνάρτησης πιθανότητας της N

```
 q<-0.7 ; p<-1-q; n=3
 a<- -p/q;
b<-(n+1)*p/q
 p0<-0.4
 p1<-(1-p0)*(n*p*q^(n-1))/(1-q^n)
 pmfZMbinom<-function(n) {
+   if(n==0) return(p0)
+   if(n==1) return(p1)
+   return((a+b/n)*pmfZMbinom(n-1))
+ }
 fN<-sapply(0:n,pmfZMbinom); fN
[1] 0.40000000 0.40273973 0.17260274 0.02465753
```

Η συνάρτηση πιθανότητας είναι

$$f(0) = 0.3, f(1) = 0.5, f(2) = 0, f(3) = 0.2.$$

Συνάρτηση πιθανότητας της X

```
fX<-c(0.3,0.5,0,0.2)
```

Υπολογίζουμε τώρα στην R τη συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής της S (Gs,gs). Για τον υπολογισμό τους θα χρησιμοποιηθεί το actuar καθώς χρειαζόμαστε την συνάρτηση aggregateDist.

```
library(actuar)

Gsc<-aggregateDist("convolution", model.freq=fN,model.sev=fX)

knots(Gsc)

[1] 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

gsc<-diff(Gsc)

x<-knots(Gsc)

mat<-cbind(x,gsc,Gsc(x))

rownames(mat)<-rep("",nrow(mat))

colnames(mat)<-c("x","g(x)","G(x)")

round(mat,digits=6)
```

```
x    g(x)    G(x)
 0 0.537022 0.537022
 1 0.256479 0.793501
 2 0.048699 0.842200
 3 0.105674 0.947874
 4 0.038959 0.986833
 5 0.003699 0.990532
 6 0.007792 0.998323
 7 0.001479 0.999803
 8 0.000000 0.999803
 9 0.000197 1.000000
```

Στη συνέχεια θα γίνει μία περαιτέρο διερεύνηση για την μέση τιμή της συνάρτησης κατανομής και θα δοθεί γραφική παράσταση για τις σωστές νομισματικές μονάδες.

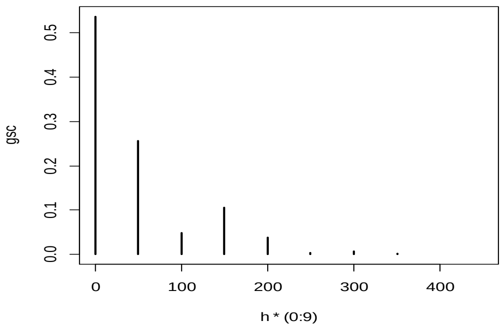
Μέση τιμή

```
mean(Gsc)

[1] 0.9041096
```

Μέση τιμή στις σωστές νομισματικές μονάδες

```
h<-50
h*mean(Gsc)
[1] 45.20548
```

Γραφική παράσταση της P(S=s) στις σωστές νομισματικές μονάδες



Μέθοδος Recursive

```
Gsr<-aggregateDist("recursive",model.freq = "zero-modified binomial",
+size=3,prob=0.3,p0=0.4,model.sev=fX)
gsr<-diff(Gsr)
 x<-knots(Gsr)
 x
 [1] 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
mat<-(cbind(x,gsr,Gsr(x)))
rownames(mat)<-rep("",nrow(mat))
colnames(mat)<-c("x","g(x)","G(x)")
round(mat,digits=6)
x    g(x)    G(x)
 0 0.537022 0.537022
 1 0.256479 0.793501
 2 0.048699 0.842200
 3 0.105674 0.947874
 4 0.038959 0.986833
 5 0.003699 0.990532
 6 0.007792 0.998323
 7 0.001479 0.999803
 8 0.000000 0.999803
 9 0.000197 1.000000
```

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^o

Θεωρία Αξιοπιστίας Χαρτοφυλακίου

Στον ασφαλιστικό κλάδο παίζει σημαντικό ρόλο η δυνατότητα πρόβλεψης και αξιολόγησης της πιθανότητας μελλοντικών γεγονότων, όπως οι αποζημιώσεις που καλείται να καταβάλει μια ασφαλιστική εταιρία. Με αυτο τον τρόπο καταφέρνει να τιμολογεί τα κατάλληλα ασφάλιστρα και να δημιουργεί ικανοποιητικά αποθεματικά. Η θεωρία αξιοπιστίας χαρτοφυλακίου είναι ένας κλάδος της αναλογιστικής επιστήμης που κύριος στόχος της είναι η ακρίβεια της εκτίμησης των κινδύνων και η πρόβλεψη των ζημιών στις ασφαλίσεις. Σύμφωνα με την αναλογιστική πρακτική δημιουργούνται μοντέλα βασισμένα σε απώλειες μιας ιστορικής περιόδου. Αυτό μπορεί να σημαίνει πως μία ασφαλιστική εταιρεία θα προβεί στην εξέταση παρελθουσών απωλειών, οι οποίες έχουν προκληθεί από μία συγκεκριμένη ομάδα ασφαλισμένων, ώστε να μπορέσει να εκτιμήσει το ύψος του κόστους ασφάλισης παρόμοιας ομάδας στο μέλλον. (Bühlmann & Gisler, 2006)

Όταν μία ασφαλιστική εταιρεία υπολογίζει το ύψος του ασφαλίστρου που θα χρεώσει, κατανέμει τους κατόχους ασφαλιστηρίων συμβολαίων σε ομάδες. Σε μια ασφαλιστική εταιρεία που ασχολείται με τα ασφάλιστρα των αυτοκινήτων μια κατανομή των οδηγών μπορεί να δημιουργηθεί με βάση την ηλικία, το φύλο και τον τύπο αυτοκινήτου.

Έστω η περίπτωση ενός νέου άνδρα που οδηγεί ένα γρήγορο αυτοκίνητο, πρόκειται για ομάδα υψηλού κινδύνου. Από την άλλη πλευρά μια ηλικιωμένη γυναίκα οδηγός είναι χαμηλού κινδύνου. Σε αυτές τις περιπτώσεις υπάρχουν δύο προϋποθέσεις για την κατανομή. Το πρώτο στοιχείο είναι πως οι κίνδυνοι σε κάθε ομάδα είναι αρκετά όμοιοι ενώ το δεύτερο πως το μέγεθος κάθε ομάδας είναι επαρκές για τη διενέργεια στατιστικής ανάλυσης των απαιτήσεων της ιστορικής περιόδου ώστε να τιμολογηθεί το ασφάλιστρο.

Οδηγούμενοι σε ένα τέτοιο συμβιβασμό αντιλαμβανόμαστε πως καμία από τις δύο ομάδες δεν έχει πανομοιότυπους κινδύνους. Επομένως, το πρόβλημα έγκειται στην αναζήτηση ενός τρόπου συνδυασμού της ομαδικής εμπειρίας με την αντίστοιχη του ατομικού κινδύνου έχοντας ως στόχο τη βέλτιστη τιμολόγηση (Bühlmann & Gisler, 2006).

Αυτό που προσπαθεί να κάνει η θεωρία αξιοπιστίας είναι να προσφέρει λύση στο πρόβλημα συνδυάζοντας αυτές τις δύο συνισταμένες με βάση εκτίμησης την ανάπτυξη προτύπων.Ο σκοπός είναι ο καταρτισμός ενός συστήματος αξιολόγησης της ιστορικής περιόδου για τον προσδιορισμό του ασφαλίστρου του επόμενου έτους, λαμβάνοντας υπόψιν όχι μόνο την ατομική εμπειρία κάθε συνισταμένης του χαρτοφυλακίου αλλά και τη συλλογική εμπειρία του συνόλου του χαρτοφυλακίου.

Υπάρχουν δύο βασικές μέθοδοι. Η μία μέθοδος αφορά την επιβολή ενός κοινού ασφαλίστρου το οποίο υπολογίζεται από το συνολικό αριθμητικό μέσο των απαιτήσεων του χαρτοφυλακίου, σε κάθε ομάδα του. Αυτό μπορεί να συμβεί στη περίπτωση που ένα χαρτοφυλάκιο χαρακτηρίζεται ως ομογενές. Δηλαδή κάθε συνισταμένη ομάδα του χαρτοφυλακίου διέπεται από συναφή χαρακτηριστικά κινδύνου και οι μέσες παρατηρούμενες αξιώσεις τους δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερη διακύμανση. Στη περίπτωση που το χαρτοφυλάκιο είναι ετερογενές δεν θεωρείται συνετή η χρέωση του ασφαλίστρου κατ' αυτόν τον τρόπο. Επειδή τις περισσότερες φορές λαμβάνεται υπόψιν η ετερογένεια στο χαρτοφυλάκιο η δεύτερη μέθοδος είναι κάθε ομάδα να επιβαρυνθεί με διαφορετικό ασφάλιστρο, το οποίο θα υπολογίζεται αποκλειστικά και μόνο από την μέση τιμή των αξιώσεων που εγείρει. Πρέπει να ληφθεί υπόψιν ότι σε μια τέτοια περίπτωση ετερογένειας χρειάζεται εξαιρετικά μεγάλη ιστορική εμπειρία απαιτήσεων για κάθε ομάδα.

Το κεφάλαιο πραγματεύεται τη θεωρία αξιοπιστίας χαρτοφυλακίου στην αναλογιστική επιστήμη, η οποία αποσκοπεί στην ακριβή εκτίμηση των ασφαλιστικών κινδύνων και των μελλοντικών ζημιών. Παρουσιάζονται μέθοδοι για την κατηγοριοποίηση ασφαλισμένων σε ομάδες κινδύνου, καθώς και το μοντέλο αξιοπιστίας των Bühlmann και Bühlmann-Straub, που συνδυάζουν την ατομική εμπειρία των ασφαλισμένων με τη συλλογική εμπειρία του χαρτοφυλακίου. Μέσω αυτών των μοντέλων, οι ασφαλιστικές εταιρείες βελτιώνουν την εκτίμηση του ασφαλίστρου και τη χρηματοοικονομική σταθερότητα του χαρτοφυλακίου τους.

4.1. Χαρτοφυλάκιο

Τα χαρτοφυλάκια χαρακτηρίζονται κατά κύριο λόγο ως ετερογενή, δηλαδή πρόκειται για ασφαλιστήρια συμβόλαια με παρόμοιες ιδιότητες, αλλά με διαφορετικές κατανομές και αναμενόμενες τιμές ζημιών. Η ετερογένεια του χαρτοφυλακίου δημιουργείται από χαρακτηριστικά που είναι δύσκολο να παρατηρηθούν.

Σε κάθε χαρτοφυλάκιο πρέπει να γίνει προσαρμογή της κατάλληλης κατανομής για να μπορέσει να μελετηθεί. Στις μικρές υποομάδες λόγω έλειψης εμπειρίας ζημιών, είναι αρκετά δύσκολη η επιλογή κατανομής. Στόχος πάντα είναι η δημιουργία ομογενών ομάδων (κλάσεις).

Ας ορίσουμε τώρα κάποιες μεταβλητές που θα χρησιμοποιήσουμε στους υπολογισμούς μας

- Θ παράμετρος κινδύνου
- X μέγεθος ζημιάς

Η παράμετρος Θ είναι αναγκαία για την μοντελοποίηση της ετερογένειας σε ένα χαρτοφυλάκιο. Αφού δοθεί η τιμή της παραμέτρου Θ , συνεχίζουμε θεωρώντας την δεσμευμένη κατανομή της τ.μ. X. Η διασπορά του κινδύνου εκφράζεται ως εξής:

1. Η διασπορά της δεσμευμένης μέσης τιμής $V[E(X|\Theta)]$
2. Η αναμενόμενη τιμή της ενδο-διασποράς $E[V(X|\Theta)]$

Θεωρούμε ένα ετερογενές χαρτοφυλάκιο ασφαλίσεων το οποίο το χωρίζουμε σε ομάδες ομογενών κινδύνων. Κάθε ομάδα, για την οποία υπάρχει εμπειρία εξέλιξης ζημιών για μια χρονική περίοδο $i = 1,2,...,n$ είναι το γνωστό ασφαλιστήριο συμβόλαιο.

Κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο $j = 1,2,...,n$ έχει και την αντίστοιχη παράμετρο κινδύνου Θ_j. Αν συνδυάσουμε την παράμετρο Θ για κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο σε κάθε χρονική στιγμή, προκύπτει η παράμετρος Θ_{ij}, όπου περιγράφει τα χαρακτηριστικά κινδύνου για κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο.

Επειδή οι παράμετροι κινδύνου συνήθως είναι άγνωστες ή δεν μπορούν να παρατηρηθούν, θα χρησιμοποιούνται ως τυχαίες μεταβλητές. Σε αυτό το σημείο είναι αναγκαία η ένταξη μιας συνάρτησης κατανομής αφού πρόκειται για τυχαίες μεταβλητές, η οποία ονομάζεται δομική συνάρτηση (structure function) και συμβολίζεται με $U(\theta)$. Με την ένταξη της παραπάνω κατανομής δημιουργήθηκε μια ισονομία, καθώς όλες οι παράμετροι κινδύνου ακολουθούν την ίδια κατανομή. Η μόνη διαφορά είναι ότι οι τιμές θ_j των Θ_j, αν και μη παρατηρούμενες, διαφέρουν σε κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο.

Η $U(\theta)$ είναι δύσκολο να προσδιοριστεί. Στις διαδικασίες αξιοπιστίας βέβαια αυτό δεν αποτελεί μειονέκτημα. Οι διαδικασίες στις οποίες δεν απαιτείται η κατανομή κινδύνου, ονομάζονται διαδικασίες απαλλαγμένες κατανομών (distribution free).

Ο γενικός τύπος αξιοπιστίας (credibility) είναι ο εξής

$$C = ZA + (1 - Z)B, \qquad 0 < Z < 1$$

Όπου,

- Α : ποσό ασφαλίστρου που αντιστοιχεί στην ατομική εξέλιξη ζημιών,
- Β : ποσό ασφαλίστρου που αντιστοιχεί στην συνολική εξέλιξη ζημιών,
- Ζ : συντελεστής αξιοπιστίας και εκφράζει την αξιοπιστία της ατομικής εξέλιξης Α.

Υπαρχεί και εναλλακτικός τύπος για την αξιοπιστία ο οποίος έχει την εξής μορφή

$$C = ZR + (1 - Z)H, \qquad 0 < Z < 1,$$

Όπου,

- R : μέση τιμή της τρέχουσας παρατήρησης,
- H : εκ των προτέρων μέση τιμή.

Ορισμός του συντελεστή αξιοπιστίας Z

$$Z = \frac{n}{n+k} = \frac{n}{n + \frac{E[V(X|\Theta)]}{V[E(X|\Theta)]}},$$

- n: ο αριθμός των μονάδων έκθεσης (παρατηρήσεων) στο συγκεκριμένο σύνολο δεδομένων (δεδομένα ανά οντότητα).
- k: είναι μια σταθερά που αντιπροσωπεύει τη βαρύτητα που δίνεται στα γενικά δεδομένα ή στα μέσα δεδομένα.

Εδώ η $E[V(X|\Theta)]$ είναι η μέση τιμή της διασποράς διαδικασίας και η $V[E(X|\Theta)]$ είναι η διασπορά της υποθετικής μέσης τιμής. (Πιτσέλης, 2020)

4.2. Συνάρτηση Απώλειας

Στο πλαίσιο της θεωρίας αξιοπιστίας, μια συνάρτηση απώλειας χρησιμοποιείται για να ποσοτικοποιήσει την απόκλιση μεταξύ της πραγματικής εμπειρίας ενός ασφαλιστή και της αναμενόμενης εμπειρίας βάσει στατιστικής ανάλυσης. Η θεωρία αξιοπιστίας χρησιμοποιείται στην ασφάλιση για να καθοριστεί πόσο βάρος πρέπει να δοθεί στην εμπειρία ενός ατόμου (πραγματικά δεδομένα) έναντι της εμπειρίας μιας μεγαλύτερης ομάδας αναφοράς (αναμενόμενα δεδομένα) κατά την εκτίμηση των παραμέτρων κινδύνου και τον καθορισμό των ασφαλίστρων. Η συνάρτηση απώλειας σε αυτό το πλαίσιο βοηθά στη μέτρηση της "απώλειας" ή του σφάλματος μεταξύ των δύο συνόλων δεδομένων.

Συμβολισμός συνάρτησης απώλειας : $L(\theta, \delta)$.

- Συνάρτηση Απώλειας Τετραγωνικού Σφάλματος (Squared Error Loss Function):

$$L(\theta, \delta) = (\theta - \delta)^2$$

- Γραμμική Συνάρτηση Απώλειας (Linear Loss Function)

$$L(\theta, \delta) = \begin{cases} \alpha(\theta - \delta), \hat{\theta} < \theta \\ \alpha(\theta - \delta), \hat{\theta} > \theta \end{cases}$$

- Συνάρτηση Απώλειας 0-1 (0-1 Loss Function)

$$L(\theta, \delta) = \begin{cases} 1, \hat{\theta} \neq \theta \\ 0, \hat{\theta} = \theta \end{cases}$$

(Πιτσέλης, 2020)

4.3. Μοντέλο Bühlmann

Το μοντέλο αξιοπιστίας Bühlmann είναι μια στατιστική τεχνική που χρησιμοποιείται στην αναλογιστική επιστήμη. Πήρε το όνομά του από τον δημιουργό του, Hans Bühlmann, έναν Ελβετό μαθηματικό και αναλογιστή. Το μοντέλο χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του επιπέδου κινδύνου ενός ατόμου ή μιας μικρής ομάδας συνδυάζοντας τη δική τους εμπειρία (ατομικά δεδομένα) με μια μεγαλύτερη ομάδα δεδομένων από μια ομάδα αναφοράς. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο όταν δεν υπάρχουν αρκετά διαθέσιμα δεδομένα για την ακριβή εκτίμηση του κινδύνου με βάση μόνο την εμπειρία ενός ατόμου.

4.3.1. *Το ισορροπημένο μοντέλο Bühlmann*

Το ισορροπημένο μοντέλο Bühlmann συνδυάζει την εμπειρία του αντισυμβαλλόμενου καθώς και την συλλογική εμπειρία μιας ομάδας αναφοράς για να μπορέσουν να εκτιμηθούν οι παράμετροι κινδύνου.

Το μοντέλο του Bühlmann που θα παρουσιαστεί για αρχή στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία θα αφορά ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο και στη συνέχεια θα παρουσιαστεί το μοντέλο για περισσότερα ασφαλιστήρια συμβόλαια. Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $X_{jt}, j = 1,2, \dots J$, όπου το j εκφράζει ασφαλιστήριο συμβόλαιο και t εκφράζει τον χρόνο , ανεξάρτητες και ισόνομες που ακολουθούν κατανομή $N(m_j, s^2)$ με όχι απαραίτητα ίδια μέση τιμή.

Εάν η μηδενική υπόθεση πως όλες οι μέσες τιμές είναι ίσες δεν ισχύει, αυτό σημαίνει πως υπάρχει μεγαλύτερη διασπορά τιμών κοντά στον μέσο $\bar{X}$. Θεωρούμε το άθροισμα τετραγώνων

$$SSB = \sum_{j=1}^{J} T\,(\bar{X}_j - \bar{X})^2$$

Με T συμβολίζεται ο αριθμός των παρατηρήσεων.

Εάν ισχύει η μηδενική υπόθεση ότι οι μέσες τιμές είναι ίσες, τότε το άθροισμα τετραγώνων SSB έχει μέση τιμή $(J-1)s^2$. Στην προκειμένη περίπτωση το s^2 είναι άγνωστο και πρέπει να εκτιμηθεί. Για αυτό το λόγο θεωρούμε την εκτίμηση που προκύπτει απο τον παρακάτω τύπο

$$\mathrm{SSW} = \sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{jt} - \bar{X}j\right)^2$$

Για να οριστεί το μοντέλο του Bühlmann (1967) με M το πλήθος ασφαλιστηρίων συμβολαίων (ή ομάδων ομογενών κινδύνων) χρησιμοποιείται ένας πίνακας τυχαίων μεταβλητών:

Θ_1	Θ_2	Θ_3	$\dots$	Θ_M
Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}		Y_{1M}
Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}		Y_{2M}
Y_{31}	Y_{31}	Y_{33}		Y_{3M}
$\dots$				$\dots$
Y_{n1}	Y_{n2}	Y_{n3}	$\dots$	Y_{nM}

Στην περίπτωση που γίνεται μελέτη του μοντέλου για ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο, τότε απο τον παραπάνω πίνακα γίνεται χρήση της πρώτης στήλης που αφορά ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο.

Θ
X_1
X_2
X_3
$\dots$
X_n

Η τυχαία μεταβλητή Θ αποτελεί έναν άγνωστο πραγματικό αριθμό. Οι τυχαίες μεταβλητές $X_i, i = 1,2,\dots,n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταξύ τους όταν είναι δεσμευμένες ως προς την τυχαία μεταβλητή Θ.

Έστω θ μία πραγματική τιμή της τ.μ. Θ. Θεωρώντας πολλές πραγματικές τιμές $\theta_i, i = 1,2,3,\dots$ της τ.μ. Θ, προκύπτουν τα δεσμευμένα διανύσματα

$$(X_1, \ldots, X_n | \Theta = \theta_i)$$

Παρακάτω παρατίθενται κάποιοι βασικοί συμβολισμοί

- $\mu(\Theta) = E(X_i|\Theta)$
- $\mu = \mathrm{E}[\mu(\Theta)]$
- $\sigma^2(\Theta) = V(X_i|\Theta)$
- $s^2 = E[\sigma^2(\Theta)]$
- $\alpha = V[\mu(\Theta)]$
- $Z = \frac{\alpha n}{s^2 + \alpha n}$, βάρος αξιοπιστίας ασφαλιστηρίου συμβολαίου.

(Πιτσέλης, 2020)

Στην συγκεκριμένη περίπτωση όπου υπάρχει ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο και δοθέντος ότι $\Theta = \theta$, τα μεγέθη ζημιών είναι ανεξάρτητα από έτος σε έτος και επίσης οι δεσμευμένες ροπές των X_i *και* X_i, είναι ίδιες. Άρα για $i = 1,2, \ldots, n$ προκύπτει ότι

- $\mu = E(X_i)$,
- $Cov(X_i, X_r) = a + \delta_{ir} s^2$,
- $Cov(X_i, \bar{X}) = Cov(\bar{X}, \bar{X}) = a + \frac{s^2}{n} = \frac{a}{Z}$
- $Cov(X_i, \mu(\Theta)) = \alpha$

Όπου δ_{ir} είναι το σύμβολο Kronecker.

Υποθέσεις Μοντέλου Bühlmann για το μοντέλο με πολλά ασφαλιστήρια συμβόλαια

1. Τα ασφαλιστήρια συμβόλαια είναι ανεξάρτητα και ισόνομα μεταξύ τους καθώς και οι Θ_j μεταβλητές,
2. Δοθέντος Θ_j, οι τυχαίες μεταβλητές X_{ij}, είναι υπό δέσμευση ανεξάρτητες και ισόνομες,
3. $E(X_{ij}|\Theta_j)$=μ(Θ_j), για κάθε $j = 1, \ldots, K$ και $i = 1, \ldots, n$,
4. $Cov(X_{rj}, X_{rj}|\Theta_j) = \delta_{ir}\sigma^2(\Theta_j), i, r = 1,2, \ldots, n$, όπου δ_{ir} το σύμβολο Kronenker

$$\delta_{ir} = \begin{cases} 1, & i = r, \\ 0, & i \neq r. \end{cases}$$

Στο μοντέλο του Bühlmann ορίζεται ένας εκτιμητής αξιοπιστίας ο οποίος μπορεί να είναι ομογενής και μη ομογενής. Συμβολίζεται με $\mu(\Theta)^{Cred}$. Ο εκτιμητής βοηθάει στην εκτίμηση του ποσού που θα πληρωθεί στην επόμενη χρονική περίοδο.

Θεώρημα 4.3.1 Υποθέτοντας ότι $X_1, \ldots, X_n$ περιγράφουν την εμπειρία ζημιών για τις αντίστοιχες περιόδους $i = 1,2, \ldots, n$ και είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με την Θ, τότε ο βέλτιστος γραμμικός μη ομογενής εκτιμητής αξιοπιστίας περιγράφεται απο τη σχέση

$$\mu(\Theta)^{Cred} = Z\bar{X} + (1 - Z)\mu.$$

(Πιτσέλης, 2020)

4.3.2. *Σχέσεις Συνδιασπορών και Μέσες Τιμές*

Παρακάτω παρουσιάζονται οι σχέσεις που συνδέουν μέσες τιμές και συνδιασπορές.

Θεώρημα 4.3.2

1. $E(X_{ij}) = E(\bar{X}_{.j}) = E(\bar{X}_{..}) = \mathrm{E}[\mu(\Theta'_j)] = \mu$,
2. $Cov(X_{ij}, X_{rj}) = \delta_{ir} s^2 + \alpha$,
3. $Cov(X_{ij}, \bar{X}_{.j}) = Cov(\bar{X}_{.j}, \bar{X}_{..}) = \frac{s^2}{n} + \alpha$,
4. $Cov(X_{ij}, \bar{X}_{..}) = Cov(\bar{X}_{..}, \bar{X}_{..}) = \frac{(\frac{s^2}{n}+\alpha)}{K}$,
5. $Cov(X_{ij}, \mu(\Theta_j)) = Cov(\bar{X}_{.j}, \mu(\Theta_j)) = \alpha$,
6. $Cov(\bar{\bar{X}}_{..}, \mu(\Theta_j)) = \frac{\alpha}{K}$.

(Πιτσέλης, 2020)

4.3.3. *Αμερόληπτοι Εκτιμητές Παραμέτρων*

Παρακάτω παρουσιάζονται οι αμερόληπτοι εκτιμητές των παραμέτρων μ, s^2 *και* α.

1. $\hat{\mu} = \bar{X}_{..}$,
2. $s^2 = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} \hat{s}_j^2$,

Όπου $\hat{s}_j^2 = \frac{1}{(T-1)}\sum_{t=1}^{T}(X_{jt} - \bar{X}_{.t})^2$, $\hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{1}{(J-1)}\sum_{t=1}^{T}(\bar{X}_{j.} - \bar{X})^2 - \frac{1}{T}\hat{s}^2$.

(Kaas et al. 2008)

Παράδειγμα 4.1

Έστω ένα χαρτοφυλάκιο που περιέχει αποζημιώσεις για εργατικά ατυχήματα για τρείς ομάδες εργαζομένων, δηλαδή τρία ασφαλιστήρια συμβόλαια. Ο παρακάτω πίνακας περιγράφει σε εκ. Ευρώ τα ποσά των ζημιών για τα πρώτα 4 έτη ασφάλισης. Με την βοήθεια του μοντέλου Bühlmann θα γίνει εκτίμηση του ποσού ζημιών στη διάρκεια του 5ου έτους ασφάλισης για τα τρία ασφαλιστήρια συμβόλαια.

Θ_1	Θ_2	Θ_3
$X_{11} = 2.3$	$X_{12} = 2.5$	$X_{13} = 4.2$
$X_{21} = 2.7$	$X_{22} = 3.0$	$X_{23} = 4.8$
$X_{31} = 3.0$	$X_{32} = 3.2$	$X_{33} = 5.2$
$X_{41} = 4.0$	$X_{42} = 3.8$	$X_{43} = 6.0$

Λύση

Αρχικά γίνεται ο υπολογισμός των παρακάτω που θα χρησιμοποιηθούν στην πορεία.

$\sum_{i=1}^{4} X_{i1} = 12$, $\sum_{i=1}^{4} X_{i2} = 12.5$, $\sum_{i=1}^{4} X_{i3} = 20.2$

$\bar{X}_{.1} = \frac{12}{4} = 3$, $\bar{X}_{.2} = \frac{12.5}{4} = 3.125$, $\bar{X}_{.3} = \frac{20.2}{4} = 5.05$

Στη συνέχεια γίνεται υπολογισμός της μέσης τιμής μ

$$\mu = \bar{X}_{..} = \frac{1}{3}\sum_{j-1}^{3} \bar{X}_{.j} = \frac{3 + 3.125 + 5.05}{3} = 3.7916$$

Στη συνέχεια γίνεται υπολογισμός των $\hat{s}_j^2$

$$\hat{s}_1^2 = \frac{1}{(4-1)}[(2.3-3)^2 + (2.7-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2] = \frac{1.58}{3} = 0.5266$$

$$\hat{s}_2^2 = \frac{1}{(4-1)}[(2.5-3.125)^2 + (3-3.125)^2 + (3.2-3.125)^2 + (3.8-3.125)^2] = 0.2889$$

$$\hat{s}_3^2 = \frac{1}{(4-1)}[(4.2-5.05)^2 + (4.8-5.05)^2 + (5.2-5.05)^2 + (6-5.05)^2] = 0.57$$

Άρα

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} \hat{s}_j^2 = \frac{1}{3}(0.5266 + 0.2889 + 0.57) = 0.46183$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{K-1}\sum_{j=1}^{K}\left(\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..}\right)^2 - \frac{1}{n}\hat{s}^2$$

$$= \frac{1}{3-1}[(3-3.7916)^2 + (3.125-3.7916)^2 + (5.05-3.7916)^2] - \frac{1}{4}0.46183 = 1.21175$$

$$\hat{Z} = \frac{n\hat{\alpha}}{n\hat{\alpha} + \hat{s}^2} = 0.913$$

Επομένως οι βέλτιστοι εκτιμητές αξιοπιστίας για τα 3 ασφαλιστήρια συμβόλαια είναι:

$$X_1^{Cred} = \bar{X}_{.1}\hat{Z} + (1-\hat{Z})\bar{X}_{..} = 3.0688$$

$$X_2^{Cred} = \bar{X}_{.2}\hat{Z} + (1-\hat{Z})\bar{X}_{..} = 3.1829$$

$$X_3^{Cred} = \bar{X}_{.3}\hat{Z} + (1-\hat{Z})\bar{X}_{..} = 4.94045$$

(Πιτσέλης, 2020)

4.4. Μοντέλο Bühlmann – Straub (1970)

Το μοντέλο Bühlmann-Straub, αναπτύχθηκε από τους Hans Bühlmann και Alois Gisler Straub, και αποτελεί θεμελιώδη έννοια στην αναλογιστική επιστήμη. Χρησιμοποιείται για να αντιμετωπίσει την πρόκληση των ασφαλιστικών εταιρειών να εξισορροπούν και να αξιοποιούν τα ατομικά δεδομένα των ασφαλισμένων με τη συλλογική εμπειρία του χαρτοφυλακίου για ακριβείς προβλέψεις μελλοντικών κινδύνων και απαιτήσεων.

Οι ασφαλιστικές εταιρείες συλλέγουν ατομικά δεδομένα, όπως ιστορικό αποζημιώσεων και άλλους παράγοντες κινδύνου. Ωστόσο, αυτά τα δεδομένα μπορεί να είναι περιορισμένα ή αναξιόπιστα για κάποιους ασφαλισμένους, ειδικά όσους έχουν περιορισμένη ασφαλιστική εμπειρία. Αντίθετα, τα συλλογικά δεδομένα από όλο το χαρτοφυλάκιο προσφέρουν σταθερή και αξιόπιστη πληροφόρηση.

Το μοντέλο Bühlmann-Straub συνδυάζει αυτές τις δύο πηγές μέσω του "συντελεστή αξιοπιστίας" (Z), ο οποίος καθορίζει τη σχετική βαρύτητα των ατομικών έναντι των συλλογικών δεδομένων στην εκτίμηση του κινδύνου ενός ατόμου.

4.4.1. *Υποθέσεις και συμβολισμοί Μοντέλου*

1. Πρόκειται για ανεξάρτητα και ισόνομα ασφαλιστήρια συμβόλαια καθώς και για ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές Θ_j,
2. Δοθέντος Θ_j, οι τυχαίες μεταβλητές X_{jt} είναι υπο δέσμευση ανεξάρτητες και ισόνομες,
3. $E(X_{jt}|\Theta_j) = \mu(\Theta_j)$,για κάθε $j = 1,\ldots,J$ και $t = 1,\ldots T_j$,
4. $Cov(X_{rt,}X_{jt}|\Theta_j) = \delta_{jt}\frac{1}{w_{jt}}\sigma^2(\Theta_j), j,r = 1,2,\ldots J$, w_{ij} γνωστά βάρη και δ_{jt} το σύμβολο του Kroneker

Συμβολισμοί:

- $X_{wj} = \sum_{i=1}^{n}\frac{w_{ij}}{w_{.j}}X_{ij}$,
- $X_{ww} = \sum_{j=1}^{K}\frac{w_{.j}}{w_{..}}X_{wj}$,
- $X_{wz} = \sum_{j=1}^{K}\frac{Z_j}{z_.}X_{wj}$,
- $z_. = \sum_{j=1}^{K}Z_j$,
- $w_{.j} = \sum_{i=1}^{n}w_{ij}$,
- $w_{..} = \sum_{j=1}^{K}w_{.j}$.

(Ντέκας, 2018)

4.4.2. *Σχέσεις μεταξύ μέσων τιμών και συνδιασπορών*

Παρακάτω παρουσιάζονται οι σχέσεις μεταξύ μέσης τιμής και συνδιασποράς που ισχύουν στο μοντέλο Bühlmann-Straub.

- $E(X_{ij}) = E(X_{wj}) = E(X_{ww}) = E(X_{wz}) = E[\mu(\Theta_j)] = \mu$,
- $Cov(X_{ij}, X_{rj}) = \delta_{ir}\frac{1}{w_{ij}}s^2 + \alpha$, α η συνδιασπορά μεταξύ ασφαλίστρων ατομικού κινδύνου,
- $Cov(X_{ij}, X_{wj}) = Cov(X_{wj}, X_{wj}) = \frac{s^2}{w_{.j}} + \alpha$,
- $Cov(X_{ij}, X_{wz}) = Cov((X_{wj}, X_{wz}) = Cov(X_{wz}, X_{wz}) = \frac{\alpha}{z}$,
- $Cov(X_{wj}, X_{ww}) = \frac{s^2}{w_{..}} + \alpha(\frac{w_{.j}}{w_{..}})$,

- $\mathrm{Cov}(X_{ww}, X_{ww}) = \frac{s^2}{w_{..}} + \alpha \sum_{j=1}^{K} \left(\frac{w_{.j}}{w_{..}}\right)^2,$
- $Cov(X_{ij'}, \mu(\Theta_j)) = \alpha\delta_{jj'}.$

(Πιτσέλης, 2020)

4.4.3. *Αμερόληπτοι εκτιμητές των μ , s^2 και α*

1. $\hat{\mu} = X_{WW} = \sum_{j=1}^{K} \frac{w_{.j}}{w_{..}} X_{wj}$
2. $z_{.} = \sum_{j=1}^{K} Z_j$
3. $\hat{s}^2 = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{K} \hat{s}_j^2$, $\hat{s}_j^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} w_{ij} (X_{ij} - X_{wj})^2.$

Παράδειγμα 4.2

Έστω ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται απο 2 ασφαλιστήρια συμβόλαια που αφορούν αποζημίωση εργατικών ατυχημάτων. Το συνολικό ποσό ζωμιών (σε εκ. Ευρώ) που αφορά τις πρώτες τέσσερις περιόδους ασφάλισης παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα. Με τη βοήθεια του μοντέλου Bühlmann – Straub θα γίνει εκτίμηση του ποσού των ζημιών κατά τη διάρκεια του 5ου έτους ασφάλισης για τα 2 ασφαλιστήρια συμβόλαια.

Θ_1	Θ_2
$X_{11} = 1.3 , w_{11} = 2$	$X_{12} = 0.4 , w_{12} = 4$
$X_{21} = 2.2 , w_{21} = 1$	$X_{22} = 0.6 , w_{22} = 3$
$X_{31} = 1.0 , w_{31} = 2$	$X_{32} = 0.8 , w_{32} = 1$
$X_{41} = 1.4 , w_{41} = 1$	$X_{42} = 1.2 , w_{42} = 1$

Αρχικά θα γίνει υπολογισμός για τα βάρη κάθε ασφαλιστηρίου συμβολαίου καθώς και τα συνολικά βάρη, οπότε

$$w_{.1} = 2 + 1 + 2 + 1 = 6$$

$$w_{.2} = 4 + 3 + 1 + 1 = 9$$

$$w_{..} = 9 + 6 = 15$$

Στη συνέχεια γίνεται υπολογισμός των σταθμισμένων μέσων καθώς και του ολικού μέσου, οπότε

$$X_{w1} = \frac{(1.3)(2) + (2.2)(1) + (1.0)(2) + (1.4)(1)}{6} = 1.37$$

$$X_{w2} = \frac{(0.4)(4) + (0.6)(3) + (0.8)(1) + (1.2)(1)}{9} = 0.6$$

Και

$$\hat{\mu} = X_{ww} = \frac{(6)(1.37) + (9)(0.6)}{15} = 0.851$$

Ενδοδιασπορές και μέση τιμή διασπορών

$$\hat{s}_1^2 = \frac{1}{(4-1)} \sum_{i=1}^{n} w_{i1}(X_{i1} - X_{w1})^2$$

$$= \frac{2(1.3 - 1.37)^2 + 1(2.2 - 1.37)^2 + 2(1.0 - 1.37)^2 + 1(1.4 - 1.37)^2}{4-1}$$

$$= 0.32446667$$

$$\hat{s}_2^2 = \frac{1}{(4-1)} \sum_{i=1}^{n} w_{i2}(X_{i2} - X_{w2})^2$$

$$= \frac{4(0.4 - 0.6)^2 + 3(0.6 - 0.6)^2 + 1(0.8 - 0.6)^2 + 1(1.2 - 0.6)^2}{4-1} = 0.18666667$$

Και

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K} \hat{s}_j^2 = \frac{\hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2}{2} = 0.25556667$$

Υπολογισμός διασποράς μέσων,

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{w_{..}}{w_{..}^2 - \sum_{j=1}^{2} w_{.j}^2}\right)\left[\sum_{j=1}^{2} w_{.j}\left(X_{wj} - X_{ww}\right)^2 - (2-1)\hat{s}^2\right]$$

$$= \frac{15}{15^2 - (6^2 + 9^2)}[6(1.37 - 0.851)^2 + 9(0.6 - 0.851)^2 - 0.255] = 0.26775$$

Υπολογισμός συντελεστών αξιοπιστίας,

$$\hat{Z}_1 = \frac{\hat{\alpha} w_{.1}}{\hat{\alpha} w_{.1} + \hat{s}^2} = \frac{(0.26775)(6)}{(0.26775)(6) + 0.255} = 0.8630137$$

$$\hat{Z}_2 = \frac{\hat{\alpha} w_{.2}}{\hat{\alpha} w_{.2} + \hat{s}^2} = \frac{(0.26775)(9)}{(0.26775)(9) + 0.255} = 0.90430622$$

Υπολογισμός προβλέψεων αξιοπιστίας,

$$X_1^{Cred} = \hat{Z}_1 X_{w1} + (1 - \hat{Z}_1) X_{ww} = 1.2988$$

$$X_2^{Cred} = \hat{Z}_2 X_{w2} + (1 - \hat{Z}_2) X_{ww} = 0.6239.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

Εφαρμογές στην R βασισμένες στην θεωρία χρεοκοπίας.

Αυτό το κεφάλαιο περιγράφει τα εργαλεία που χρησιμοποιεί ο αναλογιστής στην R στην θεωρία χρεοκοπίας. Στο περιβάλλον της R έχουν αναπτυχθεί εξειδικευμένα πακέτα που διευκολύνουν τις αναλογιστικές αναλύσεις, προσφέροντας μια πλούσια εργαλειοθήκη για επαγγελματίες και ερευνητές.

Η θεωρία κινδύνου αφορά τεχνικές μοντελοποίησης και μέτρησης του κινδύνου σε ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλιστικών συμβάσεων. Μια προσέγγιση είναι η μοντελοποίηση της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων σε μια σταθερή χρονική περίοδο με το κλασικό συλλογικό μοντέλο. Μια άλλη προσέγγιση εξετάζει την εξέλιξη του πλεονάσματος της ασφαλιστικής εταιρείας (ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου) καθώς το πλεόνασμα αυτό εξελίσσεται στο χρόνο. Στη θεωρία χρεοκοπίας, το βασικό μέγεθος είναι η πιθανότητα το πλεόνασμα να γίνει αρνητικό, δηλαδή η χρεοκοπία ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου.

5.1. Βασικά στοιχεία της θεωρίας χρεοκοπίας στην R

Σε αυτή την υποενότητα, θα παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο βασικές ποσότητες με ενδιαφέρον στη θεωρία χρεοκοπίας μπορούν να υπολογιστούν μέσω της γλώσσας προγραμματισμού R, αποδεικνύοντας ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι ακριβή και αξιόπιστα.

Πιο συγκεκριμένα στο παρακάτω παράδειγμα θα δείξουμε πώς μπορεί να υπολογισθεί ο συντελεστής προσαρμογής R μέσω της γλώσσας προγραμματισμού R.

Παράδειγμα 5.1

Έστω το περιθώριο ασφαλείας

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1 \qquad (6.1),$$

όπως έχει ορισθεί και παραπάνω, και έστω ο συντελεστής προσαρμογής για αποζημιώσεις που ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο β,

$$R = \frac{\theta\beta}{1+\theta}, \qquad (6.2)$$

Ας υποθέσουμε ότι στο παράδειγμα μας, ισχύουν οι παρακάτω τιμές

- $\beta = 2$
- $c = 4$
- λ=6

Εφόσον οι αποζημειώσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο $\beta = 2$, τότε η μέση τιμή είναι $\mu_1 = \frac{1}{2}$.

Από την (6.1) έχουμε

$$\theta = \frac{4}{\frac{6}{2}} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta = \frac{1}{3}$$

αντικαθιστώντας στην (6.2) έχουμε

$$R = \frac{\frac{1}{3}2}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 0.5$$

Τώρα το ίδιο παράδειγμα θα δείξουμε πώς υπολογίζεται στην R.

```
library(actuar)

adjCoef(mgf.claim=mgfexp(x,2),mgf.wait=mgfexp(x,6),premium.rate=4,upper=1)

[1] 0.5
```

Παράδειγμα 5.2

Υπολογισμός πιθανότητας χρεοκοπίας στην R με το πακέτο actuar.

Έστω

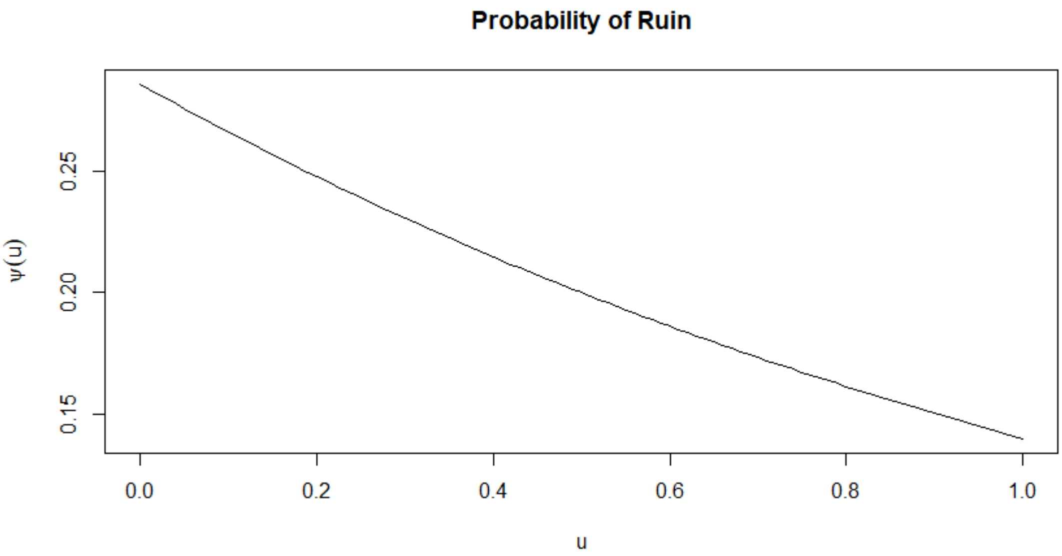
- η παράμετρος της εκθετικής κατανομής $\beta = 1$
- η ένταση των αποζημιώσεων $\lambda = 2$
- και η ένταση ασφαλίστρου $c = 7$

ο τύπος υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru}$$

Στην R η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας τον παρακάτω κώδικα

```
library(actuar)

psi<-ruin(claims="e",par.claims = list(rate=1),premium.rate = 7,wait="e",par.wait = list(rate=2))


plot(psi)
```



5.2. Αντασφάλιση και συντελεστής προσαρμογής

Η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι κατάλληλη και σε μοντέλα αντασφάλισης ζημιών, είτε αναλογική είτε excess-of-loss.

Στην περίπτωση αναλογικής αντασφάλισης, η ασφαλιστική εταιρία πληρώνει ένα ποσοστό α για κάθε ζημιά και το υπόλοιπο ποσό το καταβάλλει η αντασφαλιστική εταιρία. Όταν το α είναι σταθερό, ο συντελεστής προσαρμογής είναι η λύση της παρακάτω εξίσωσης

$$h(t) = E\left[e^{t\alpha C - tc(\alpha)W}\right] = 1$$

Στην περίπτωση της excess-of-loss αντασφάλισης, η ασφαλιστική εταιρία πληρώνει για κάθε απαίτηση μέχρι ένα όριο L. Όταν το L είναι σταθερό, ο συντελεστής προσαρμογής είναι η λύση της παρακάτω εξίσωσης

$$h(t) = E\left[e^{t\min(C,L) - tc(L)W}\right] = 1$$

Με την συνάρτηση adjCoef μπορεί να υπολογιστεί στην R ο συντελεστής προσαρμογής για ένα μοντέλο με αντασφάλιση.

Παράδειγμα 5.3 Έστω μία περίπτωση αναλογικής αντασφάλισης με 30% επιβάρυνση στην ασφαλιστική εταιρία. Θα υπολογισθεί ο συντελεστής προσαρμογής ως συνάρτηση του $\alpha \in [0,1]$.

```
library(actuar)

mgfx <- function(x, y) mgfexp(x * y)

p <- function(x) 2.8 * x - 0.2

rho <- adjCoef(mgfx, mgfexp(x, 2), premium = p,upper = 1, reins = "prop",from = 0, to = 1)

rho(c(0.75, 0.8, 0.9, 1))
```

(Dutang et al, 2008)

5.3. Παράδειγματα υπολογισμού πιθανότητας χρεοκοπίας

Για να κατανοήσουμε την ασφάλεια του χαρτοφυλακίου μιας ασφαλιστικής εταιρείας, μπορούμε να εξετάσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας με βάση συγκεκριμένο περιθώριο ασφαλείας. Στο παράδειγμα που ακολουθεί, θα δείξουμε πώς, με ένα δεδομένο περιθώριο ασφαλείας, το χαρτοφυλάκιο της εταιρείας μπορεί να έχει αρκετά μεγάλη πιθανότητα χρεοκοπίας, όταν το αρχικό αποθεματικό δεν είναι μεγάλο.

Παράδειγμα 5.4

Έστω ότι έχουμε τα εξής δεδομένα:

1. Οι αποζημιώσεις X_i ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο $\beta = 1$. Δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X_i είναι:
$$f_{X_i} = \beta e^{-\beta x}, \qquad x \geq 0, \qquad \mu\varepsilon\ \beta = 1$$
2. Η ένταση των αποζημιώσεων ακολουθεί μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 1$ ανά μονάδα χρόνου. Δηλαδή, ο ρυθμός των αποζημιώσεων $N(t)$ σε χρόνο t έχει την κατανομή
$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, \qquad n = 0,1,2,\ldots\ \mu\varepsilon\ \lambda = 1$$
3. Το ασφάλιστρο εισπράττεται με σταθερό ρυθμό $c = 2$ ανά μονάδα χρόνου
4. Το αρχικό κεφάλαιο της ασφαλιστικής εταιρίας είναι $u = 0.5$

Λύση

$$\theta = \frac{c\beta}{\lambda} - 1 = \frac{2*1}{1} - 1 = 1$$

$$R = \frac{\theta\beta}{1+\theta} = \frac{1*1}{1+1} = 0.5$$

υπολογισμός πιθανότητας χρεοκοπίας

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru} = \frac{1}{1+1} e^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} e^{-0.25} = 0.39$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι αρκετά μεγάλη, κάτι που υποδεικνύει ότι με το συγκεκριμένο περιθώριο ασφάλειας, το χαρτοφυλάκιο έχει αρκετά μεγάλη πιθανότητα χρεοκοπίας, καθώς το αρχικό αποθεματικό είναι αρκετά μικρό.

Κώδικας

```
Library(actuar)

# Ορισμός των παραμέτρων

beta <- 1    # Παράμετρος της εκθετικής κατανομής για τις αποζημιώσεις

lambda <- 1  # Ρυθμός της διαδικασίας Poisson για τις αποζημιώσεις

c <- 2       # Σταθερός ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων

u <- 0.5       # Αρχικό κεφάλαιο


# Υπολογισμός του θ

theta <- (c * beta / lambda) - 1


# Υπολογισμός του R

R <- theta*beta/(1+theta)


# Υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας

psi <- (1 / (1 + theta)) * exp(-R * u)


# Εκτύπωση του αποτελέσματος

print(psi)

[1] 0.3894004
```

Παράδειγμα 5.5

Έστω ότι έχουμε τα εξής δεδομένα:

1. Οι αποζημιώσεις X_i ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο $\beta = 1$. Δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X_i είναι:
$$f_{X_i} = \beta e^{-\beta x}, \qquad x \geq 0, \qquad \mu\varepsilon\ \beta = 1$$
2. Η ένταση των αποζημιώσεων ακολουθεί μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 1$ ανά μονάδα χρόνου. Δηλαδή, ο ρυθμός των αποζημιώσεων $N(t)$ σε χρόνο t έχει την κατανομή
$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, \qquad n = 0,1,2, \dots\ \mu\varepsilon\ \lambda = 1$$
3. Το ασφάλιστρο εισπράττεται με σταθερό ρυθμό $c = 2$ ανά μονάδα χρόνου
4. Το αρχικό κεφάλαιο της ασφαλιστικής εταιρίας είναι $u = 10$

Λύση

$$\theta = \frac{c\beta}{\lambda} - 1 = \frac{2 * 1}{1} - 1 = 1$$

$$R = \frac{\theta\beta}{1+\theta} = \frac{1 * 1}{1+1} = 0.5$$

υπολογισμός πιθανότητας χρεοκοπίας

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru} = \frac{1}{1+1} e^{-5} = \frac{1}{2} e^{-5} = 0.00337$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι αρκετά μικρή, κάτι που υποδεικνύει ότι με το συγκεκριμένο περιθώριο ασφάλειας, το χαρτοφυλάκιο έχει αρκετή ασφάλεια.

Κώδικας

```
# Ορισμός των παραμέτρων
beta <- 1   # Παράμετρος της εκθετικής κατανομής για τις αποζημιώσεις
lambda <- 1  # Ρυθμός της διαδικασίας Poisson για τις αποζημιώσεις
c <- 2      # Σταθερός ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων
u <- 10     # Αρχικό κεφάλαιο

# Υπολογισμός του θ
theta <- (c * beta / lambda) - 1
theta

# Υπολογισμός του R
R <- theta*beta/(1+theta)
R

# Υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας
psi <- 1 / (1 + theta) * exp(-R * u)

# Εκτύπωση του αποτελέσματος
print(psi)
[1] 0.003368973
```

5.4. Παραδείγματα μίξης εκθετικών κατανομών

Η μίξη εκθετικών κατανομών αποτελεί ένα είδος μίξης κατανομών που προκύπτει από ένα γραμμικό συνδυασμό δύο ή περισσότερων εκθετικών κατανομών. Κάθε εκθετική κατανομή χαρακτηρίζεται από την παράμετρο της μέσης τιμής.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i f_i(x)$$

όπου w_i τα βάρη τα οποία αθροίζουν στην μονάδα.

Για μίξη δύο εκθετικών κατανομών, η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογιστεί από τον ακόλουθο τύπο.

Έστω ότι έχουμε δύο εκθετικές κατανομές με παραμέτρους r_1, r_2 και C_1, C_2 τα βάρη. Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας για μείξη εκθετικών είναι:

$$\psi(u) = C_1 e^{-r_1 u} + C_2 e^{-r_2 u}$$

Παράδειγμα 5.6

Ας εξετάσουμε την περίπτωση που οι αποζημιώσεις ακολουθούν μια μείξη εκθετικών κατανομών. Συγκεκριμένα, έστω η πυκνότητα των αποζημιώσεων

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{-3x} + \frac{7}{2}e^{-7x}, \qquad x \geq 0$$

εδώ η κατανομή είναι μείξη εκθετικών με παραμέτρους 3,7 και βάρη $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}$.

Ας υποθέσουμε ότι

$$\theta = \frac{2}{5}$$

Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$.

Λύση

Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

$$\psi(u) = C_1 e^{-r_1 u} + C_2 e^{-r_2 u}$$

Η μέση τιμή και η ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων είναι αντιστοίχως

$$\mu_1 = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} + \frac{1}{2} * \frac{1}{7} = \frac{5}{21}$$

$$M_X(r) = \frac{1}{2} * \frac{3}{3-r} + \frac{1}{2} * \frac{7}{7-r}$$

Συνεπώς απο την εξίσως Lundberg προκύπτει ότι

$$1 + \left(1 + \frac{2}{5}\right)\frac{5}{21}r = \frac{1}{2}\frac{3}{3-r} + \frac{1}{2}\frac{7}{7-r}$$

Με απαλοιφή παρονομαστών προκύπτει η εξίσωση τρίτου βαθμού

$$2r^3 - 14r^2 + 12r = 0$$

Η λύση $r = 0$ απορρίπτεται, οι άλλες δύο λύσεις είναι

$$r_1 = 1, r_2 = 6$$

εκ των οποίων η δεύτερη πάλι απορρίπτεται

Για το υπολογισμό των C_1, C_2 θα πρέπει να λύσουμε το παρακάτω σύστημα

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{1+\theta} = \frac{5}{7}$$

$$r_1 C_1 + r_2 C_2 = \frac{\theta}{(1+\theta)^2 \mu_1} = \frac{6}{7}$$

$$\psi(u) = \frac{24}{35} e^{-u} + \frac{1}{35} e^{-6u}, \quad u \geq 0.$$

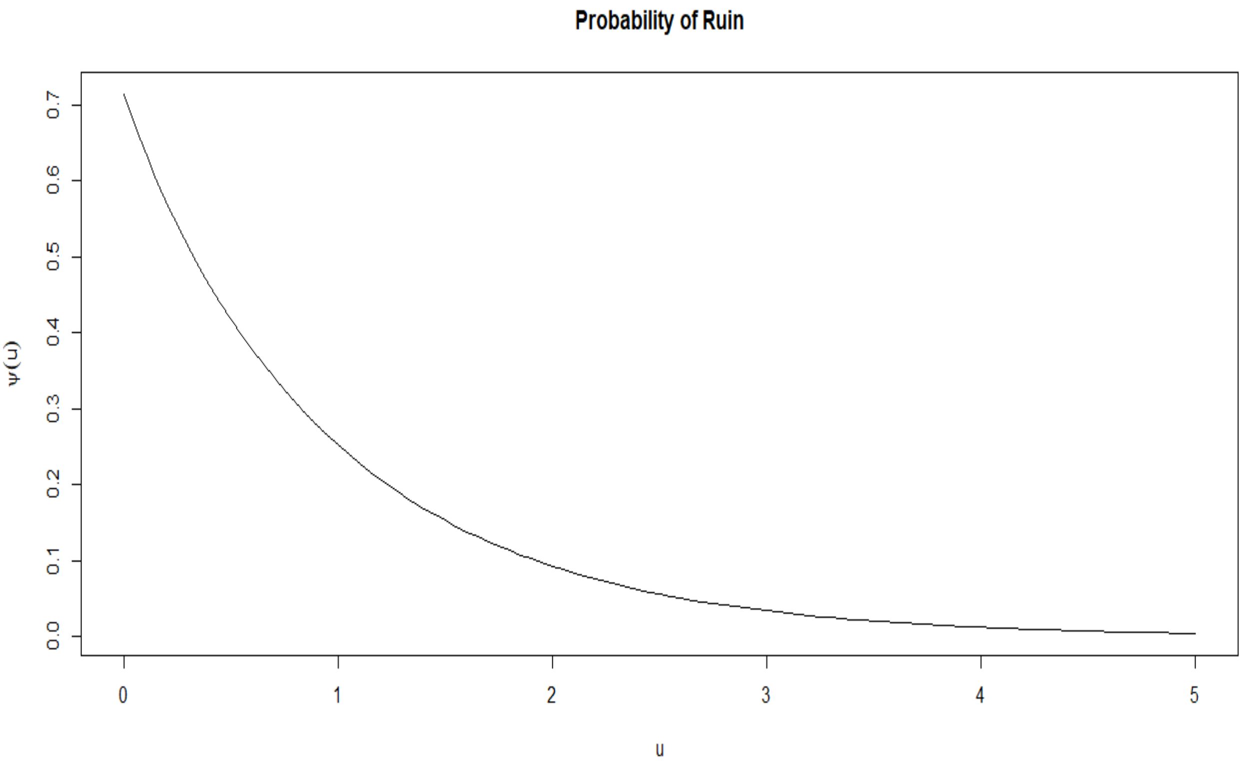
Έστω $u = 1$, τότε

$$\psi(u) = 0.2522$$

Κώδικας

Στον παρακάτω κώδικα βλέπουμε την προσέγγιση με τη χρήση της συνάρτησης ruin του πακέτου actuar.

```
library(actuar)

psi2exp=ruin(claims = "e", par.claims = list(rate = c(3, 7), weights = 0.5), wait = "e", par.wait = list(rate = 3))

psi2exp(1)

[1] 0.252331

plot(psi2exp,xlim=c(0,5))
```



Παράδειγμα 5.7

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα εξετάσουμε την περίπτωση που οι αποζημιώσεις ακολουθούν μια μείξη τεσσάρων εκθετικών κατανομών. Η λύση θα γίνει μέσω του πακέτου actuar της R καθώς η αριθμητική επίλυση με χαρτί και μολύβι απαιτεί πάρα πολλές πράξεις.

Θεωρούμε ότι η μίξη εκθετικών κατανομών έχει παραμέτρους 1, 3, 4, 6 και βάρη $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$, επομένως η αντίστοιχη πυκνότητα έχει τη μορφή

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{4} + \frac{3e^{-3x}}{4} + e^{-4x} + \frac{6e^{-6x}}{4}, \qquad x \geq 0.$$

Η μέση τιμή των αποζημιώσεων ισούται με

$$\mu = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{48}.$$

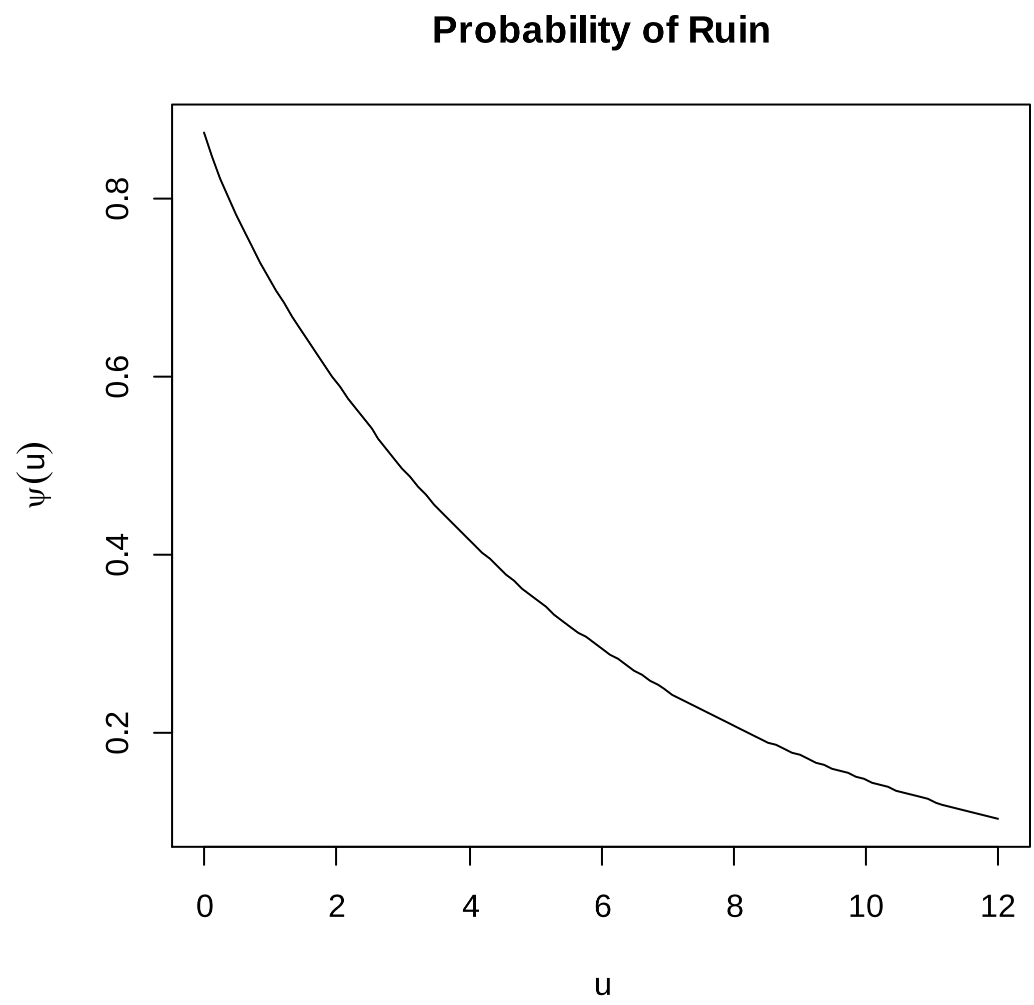
Υποθέτουμε ότι η ένταση του ασφαλίστρου είναι $c = 1$, ενώ η ένταση της ανέλιξης Poisson για τις αφίξεις των απαιτήσεων είναι $\lambda = 2$. Κατά συνέπεια, το περιθώριο ασφαλείας είναι ίσο με

$$\theta = \frac{c}{\lambda \mu} - 1 = \frac{1}{6}.$$

Ο παρακάτω κώδικας στην R υπολογίζει την πιθανότητα χρεοκοπίας στο συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο, ενώ στη συνέχεια δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης ψ(u).

.

```
library(actuar)

psi4exp=ruin(claims="e", par.claims=list(rate=c(1,3,4,6),weights=c(0.25,0.25,0.25)),
wait="e", par.wait=list(rate=2))

plot(psi4exp,xlim=c(0,12))
```



5.5. Υπολογισμός της κατανομής του συνολικού ποσού απαίτησης

Η συνάρτηση aggregateDist λειτουργεί ως μία μοναδική συνάρτηση για διάφορες μεθόδους που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό ή την προσέγγιση της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας (CDF) της τυχαίας μεταβλητής του συνολικού ποσού απαιτήσεων S. Η συγκεκριμένη συνάρτηση έχει περιγραφεί και ορισθεί ξανά στο κεφάλαιο 4.

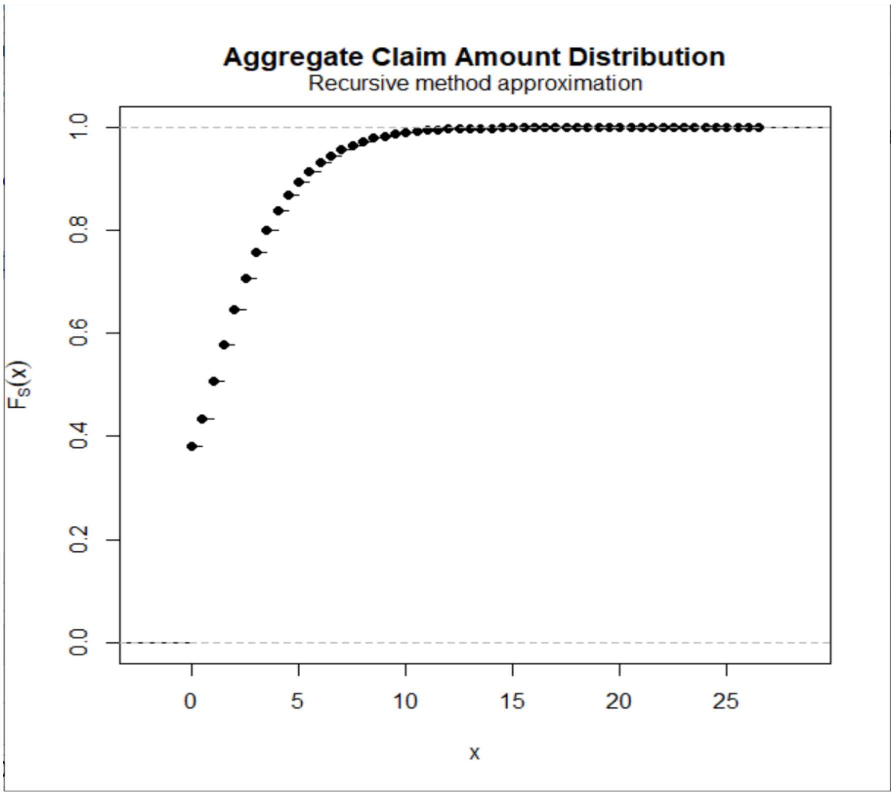
Ένα σημαντικό επιχείρημα που αξίζει να αναφερθεί είναι η παράμετρος x.scale, η οποία χρησιμοποιείται για να καθορίσει τη νομισματική μονάδα της κατανομής σφοδρότητας (severity distribution) . Αυτό επιτρέπει στον χρήστη να μην ανησυχεί για τη μετατροπή των τιμών υποστήριξης σε πραγματικά ποσά που απαιτείται από τις αναδρομικές μεθόδους και τις μεθόδους συνέλιξης. Η αναδρομική μέθοδος μπορεί να αποτύχει όταν ο αναμενόμενος αριθμός απαιτήσεων είναι τόσο μεγάλος ώστε η πιθανότητα $f_S(0)$ είναι αριθμητικά ίση με το μηδέν. Μια προτεινόμενη λύση είναι η διαίρεση της κατάλληλης παραμέτρου της συχνότητας κατανομής με 2^n, με n τέτοιο ώστε $f_S(0) > 0$, για να ξεκινήσουν οι αναδρομές. Στη συνέχεια, υπολογίζεται η κατανομή του συνολικού ποσού αξίωσης χρησιμοποιώντας την αναδρομική μέθοδο και στη συνέχεια συνελίζεται η προκύπτουσα κατανομή n φορές με τον εαυτό της για να προκύψει η τελική κατανομή. Η συνάρτηση aggregateDist υποστηρίζει αυτήν τη διαδικασία μέσω του ορίσματος convolve.

Ένα συνηθισμένο πρόβλημα με την αναδρομική μέθοδο είναι η αποτυχία να ληφθεί μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής που να φτάνει (κοντά στο) 1. Αυτό συνήθως οφείλεται σε πολύ χονδροειδή διακριτοποίηση της κατανομής σφοδρότητας. Θα πρέπει να φροντίσει κανείς να χρησιμοποιήσει ένα αρκετά μικρό βήμα διακριτοποίησης και να διακριτοποιεί την κατανομή βαρύτητας στη δεξιά ουρά.

Η συνάρτηση aggregateDist επιστρέφει ένα αντικείμενο της κλάσης "aggregateDist", το οποίο κληρονομεί από την κλάση "function". Έτσι, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει το αντικείμενο ως συνάρτηση για να υπολογίσει την τιμή του $F_S(x)$ σε οποιοδήποτε x. (Dutang, et al 2008)

Για να δώσουμε ένα παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το ακόλουθο μοντέλο: η κατανομή του S είναι μια σύνθετη Poisson με παράμετρο λ=1 και κατανομή σφοδρότητας για τις αποζημιώσεις την κατανομή $Gamma(2,1)$. Για να προσεγγίσουμε την συνάρτηση κατανομής $F_S(x)$, πρώτα διακριτοποιούμε την κατανομή γάμμα στο διάστημα (0,22) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο unbiased με βήμα 0,5. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε την αναδρομική μέθοδο μέσω του aggregateDist για τον υπολογισμό της $F_S(x)$.

```
> library(actuar)

> fx <- discretize(pgamma(x, 2, 1), method = "unbiased",from = 0, to = 22, step = 0.5,lev = levgamma(x, 2, 1))

> Fs <- aggregateDist("recursive", model.freq = "poisson",model.sev = fx, lambda = 1,x.scale = 0.5)

> summary(Fs)

Aggregate Claim Amount Empirical CDF:

   Min.    1st Qu.   Median    Mean   3rd Qu.

 0.000000   0.000000  1.000000  1.999973  3.000000

   Max.

26.500000

knots(Fs)

 [1]  0.0  0.5  1.0  1.5  2.0  2.5  3.0  3.5  4.0  4.5  5.0  5.5  6.0  6.5  7.0  7.5  8.0  8.5  9.0
9.5 10.0 10.5 11.0

[24] 11.5 12.0 12.5 13.0 13.5 14.0 14.5 15.0 15.5 16.0 16.5 17.0 17.5 18.0 18.5 19.0
19.5 20.0 20.5 21.0 21.5 22.0 22.5

[47] 23.0 23.5 24.0 24.5 25.0 25.5 26.0 26.5
```



Υπολογισμός μέσης τιμής και quantiles προσεγγιστικής κατανομής

```
> mean(Fs)
[1] 1.999973
> quantile(Fs)
 25%  50%  75%  90%  95%  97.5%  99%  99.5%
 0.0    1.0    3.0   5.5    7.0    8.5     10.5   11.5
>
> quantile(Fs, 0.999)
99.9%
 14.5
```

Εδώ η πραγματική μέση τιμή είναι $E(S) = E(N) * E(X) = 2$. Άρα παρατηρούμε ότι με την προσέγγιση που χρησιμοποιείται είμαστε παρα πολύ κοντά στα αποτελέσματα. (Dutang, et al, 2008)

Στο κεφάλαιο 2, στο Παράδειγμα 2.1 έχουμε δείξει η κατανομής της S (συνολικές ζημιές χαρτοφυλακίου) ακολουθεί $Exp(p\lambda)$ όταν

- το πλήθος κινδύνων (ζημιών, αποζημιώσεων, απαιτήσεων $N{\sim}Geo(p)$
- το ύψος i ατομικής ζημιάς $X_i{\sim}Exp(\lambda)$

Παράδειγμα 5.8

Θεωρούμε το μοντέλο συλλογικού κινδύνου

$$S = \begin{cases} 0, & N = 0 \\ X_1 + X_2 + \ldots + X_N & N = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Όπου το πλήθος των απαιτήσεων N σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p=1/3, δηλαδή

$$p_k = P(N = k) = p(1-p)^{k-1}, k = 0,1,2,\ldots$$

και η κατανομή του μεγέθους X των αποζημιώσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ=2, δηλαδή

$$f(x) = P(X = x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Λύση

Η επίλυση του συγκεκριμένου παραδείγματος θα γίνει χρήση γεννητριών συναρτήσεων για τον υπολογισμό της κατανομής της τ.μ. S.

Είναι

$$M_S(t) = P_N[M_x(t)]$$

Και

$$P_N(u) = \frac{pu}{1-qu} \Rightarrow P_N[M_x(t)] = \frac{pM_x(t)}{1-qM_x(t)}$$

Επειδή η $X \sim Exp(\lambda)$, έπεται ότι η ροπογεννήτρια συνάρτησή της θα είναι

$$M_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

Αντικαθιστώντας στην $M_S(t) = P_N[M_x(t)]$, παίρνουμε

$$M_S(t) = \frac{p\frac{\lambda}{\lambda - t}}{1 - q\frac{\lambda}{\lambda - t}} = \frac{p\lambda}{\lambda - t - q\lambda} = \frac{p\lambda}{(1-q)\lambda - t} = \frac{p\lambda}{p\lambda - t}$$

Είναι προφανές ότι πρόκειται για την ροπογεννήτρια συνάρτηση της εκθετικής κατανομής με παράμετρο pλ.

Συνεπώς

$$S \sim Exp(2/3)$$

<u>Επίλυση στην R</u>

Θα γίνει διακριτοποίηση της κατανομής του μεγέθους X των αποζημιώσεων χρησιμοποιώντας την μέθοδο “unbiased” στο διάστημα (0,50) με βήμα h=0.001. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση aggregateDist θα υπολογιστεί η κατανομή G(x) της τ.μ. S χρησιμοποιώντας τις μεθόδους Convolution και Recursive.

```
library(actuar)

# Step 1: Define parameters

lambda <- 2  # Rate for exponential severity distribution

h <- 0.05   # Step size for discretization

#Step 2: discretise EXP

fx<-discretise(pexp(x,2),from = 0,to = 25,step = h,method = "unbiased",lev =
levexp(x,rate=1,order=1))

#Step 3: GEOM

p<-1/3

p1<-0.9999

lim<-qgeom(p1,prob=p)

fN<-dgeom(0:lim,prob=p)

sum(fN)
```

Μέθοδος Convolution

```
Gs<-aggregateDist("convolution",model.freq=fN,model.sev=fx)
```

Μέθοδος Recursive

```
h<-1

Gs.rec<-
aggregateDist("recursive",model.freq="geometric",prob=p,model.sev=fx,x.scale=h)
```

Δημιουργία Πίνακα για διεξαγωγή των αποτελεσμάτων τα οποία μπορείτε να βρείτε στο παράρτημα της εργασίας.

```
c<-20;h1<-1

x<-seq(0,c,h1)

mat.Gs<-cbind(x,Gs(x),Gs.rec(x))

rownames(mat.Gs)<-rep("", nrow(mat.Gs))

colnames(mat.Gs)<-c("x","G(x)_Convolution","G(x)_Recursive")

round(mat.Gs,digits=6)
```

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $6^{Ο}$

Εφαρμογές στην R για την θεωρία αξιοπιστίας χαρτοφυλακίου

Στην ασφαλιστική πρακτική, υπάρχει συχνά η ανάγκη να καθοριστεί ένα ασφάλιστρο για μια ομάδα συμβολαίων, όπου υπάρχει περιορισμένη εμπειρία απαιτήσεων για την ίδια την ομάδα, αλλά πολύ περισσότερα δεδομένα για μια μεγαλύτερη, σχετική ομάδα συμβολαίων. Το ζητούμενο είναι η δημιουργία ενός συστήματος αξιολόγησης που θα λαμβάνει υπόψη τόσο τα ατομικά δεδομένα της ομάδας όσο και τη συνολική εμπειρία.

Μπορούν να ακολουθηθούν δύο προσεγγίσεις:

Η πρώτη είναι να χρεωθεί το ίδιο ασφάλιστρο σε όλους, το οποίο βασίζεται στον συνολικό μέσο όρο των δεδομένων. Αυτή η προσέγγιση είναι λογική αν το χαρτοφυλάκιο είναι ομοιογενές, με όλες τις κατηγορίες κινδύνου να έχουν τις ίδιες μέσες απαιτήσεις. Η δεύτερη προσέγγιση είναι να χρεωθεί η ομάδα j με τον δικό της μέσο όρο απαιτήσεων $\bar{X}_j$, κάτι που είναι κατάλληλο όταν το χαρτοφυλάκιο είναι ετερογενές και η κάθε ομάδα έχει επαρκή δεδομένα. Ως ενδιάμεση λύση, το ασφάλιστρο μπορεί να υπολογιστεί ως ένας σταθμισμένος μέσος όρος των δύο αυτών ακραίων προσεγγίσεων:

$$z_j\bar{X}_j + (1 - z_j)\bar{X}$$

Ο συντελεστής z_j ονομάζεται "συντελεστής αξιοπιστίας" και εκφράζει την αξιοπιστία της εμπειρίας της ομάδας j σε σχέση με το συνολικό χαρτοφυλάκιο. Αυτός ο τρόπος υπολογισμού του ασφαλίστρου είναι κατάλληλος όταν το χαρτοφυλάκιο δεν είναι ούτε απόλυτα ομοιογενές ούτε απόλυτα ετερογενές.

Για να υπολογιστεί ο συντελεστής z_j, υπάρχουν δύο μέθοδοι:

- **Η θεωρία αξιοπιστίας περιορισμένων διακυμάνσεων**, όπου μια ομάδα λαμβάνει πλήρη αξιοπιστία όταν η εμπειρία της είναι επαρκής.
- **Η θεωρία αξιοπιστίας μέγιστης ακρίβειας**, όπου οι συντελεστές υπολογίζονται μέσω ενός Bayesian μοντέλου και εξαρτώνται από τη διακύμανση των δεδομένων.

6.1. Επίλυση εφαρμογών στην R

Εφαρμογή 6.1

Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται η επίλυση του παραδείγματος4.1, το οποίο αναφέρεται σε αποζημιώσεις για εργατικά ατυχήματα για τρεις ομάδες εργαζομένων για τα πρώτα 4 έτη ασφάλισης. Χρησιμοποιώντας το μοντέλο του Bühlmann, γίνεται εκτίμηση του ποσού των ζημιών κατά τη διάρκεια του 5ου έτους ασφάλισης για τα τρία ασφαλιστήρια συμβόλαια. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα επιλυθεί το ίδιο παράδειγμα με την βοήθεια της R. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει σε εκ. Ευρώ τα ποσά των ζημιών για τα πρώτα 4 έτη ασφάλισης.

Θ_1	Θ_2	Θ_3
$X_{11} = 2.3$	$X_{12} = 2.5$	$X_{13} = 4.2$
$X_{21} = 2.7$	$X_{22} = 3.0$	$X_{23} = 4.8$
$X_{31} = 3.0$	$X_{32} = 3.2$	$X_{33} = 5.2$
$X_{41} = 4.0$	$X_{42} = 3.8$	$X_{43} = 6.0$

Κώδικας

```
# Data
X1 <- c(2.3, 2.7, 3.0, 4.0)
X2 <- c(2.5, 3.0, 3.2, 3.8)
X3 <- c(4.2, 4.8, 5.2, 6.0)
# Individual Mean
M1 <- mean(X1)
M2 <- mean(X2)
M3 <- mean(X3)
M <- cbind(M1, M2, M3)
M0<-(M1+M2+M3)/3
# Individual variances
S1<-(1/(4-1))*sum((X1- M1)^2)
S2<-(1/(4-1))*sum((X2- M2)^2)
S3<-(1/(4-1))*sum((X3- M3)^2)
# Mean of variance
S<-(S1+S2+S3)/3
# Variance of premiums
a<-(1/(3-1))*sum((M-M0)^2)-S/4
# Credibility factor
Z=(a*4)/(a*4+S)
# Credibility estimator
Xcred1<-Z*M1+(1-Z)*M0
Xcred2<-Z*M2+(1-Z)*M0
Xcred3<-Z*M3+(1-Z)*M0
# The results
a; Z; Xcred1; Xcred2; Xcred3
# [1] 1.205139
# [1] 0.9125519
# [1] 3.0634
# [1] 3.177469
# [1] 4.934131
```

Εφαρμογή 6.2

Στο παράδειγμα 4.2 του κεφαλαίου 4, χρησιμοποιώντας το μοντέλο Bühlmann-Straub, πραγματοποιήθηκε η εκτίμηση του ποσού των ζημιών κατά τη διάρκεια του 5ου έτους ασφάλισης για δύο ασφαλιστήρια συμβόλαια. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα επιλυθεί το ίδιο παράδειγμα με την βοήθεια της R. Το συνολικό ποσό ζημιών (σε εκ. Ευρώ) που αφορά τις πρώτες τέσσερις περιόδους ασφάλισης παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα. (Kaas et al, 2008)

Θ_1	Θ_2
$X_{11} = 1.3\,, w_{11} = 2$	$X_{12} = 0.4\,, w_{12} = 4$
$X_{21} = 2.2\,, w_{21} = 1$	$X_{22} = 0.6\,, w_{22} = 3$
$X_{31} = 1.0\,, w_{31} = 2$	$X_{32} = 0.8\,, w_{32} = 1$
$X_{41} = 1.4\,, w_{41} = 1$	$X_{42} = 1.2\,, w_{42} = 1$

Κώδικας

```
# Data and Weights

X1<-c(1.3,2.2,1.0,1.4)

X2<- c(0.4,0.6,0.8,1.2)

W1<-c(2,1,2,1)

W2<- c(4,3,1,1)

w1<-6

w2<-9

w12<- as.vector(cbind(w1,w2))

w<-w1+w2

# Means (individual estimator)

XW1 <-as.numeric((t(X1)%*%W1) /w1)

XW2 <- as.numeric((t(X2)%*%W2)/ w2)

XW  <- as.numeric( cbind(XW1,XW2))

XWW <-as.numeric(( XW1* w1+ XW2* w2)/w)

# Individual variances

S1 <-(1/(4-1))*sum(W1*(X1-XW1)^2)

S2 <-(1/(4-1))*sum(W2*(X2-XW2)^2)

# Mean of variance

S<-(S1+S2)/2

# Variance of premiums

a <-w/(w^2-(w1^2+w2^2))*(w1*(XW1-XWW)^2+w2*(XW2-XWW)^2-(2-1)*S)

a <- ifelse(a>0,a,0) #if a<0, then a=0

# Credibility factor

Z1<-(a*w1)/(a*w1+S)

Z2<-(a*w2)/(a*w2+S)

# Credibility estimator

Crw1<-Z1*XW1+(1-Z1)*XWW

Crw2<-Z2*XW2+(1-Z2)*XWW

# The results

a; Z1; Z2; Crw1; Crw2

# [1] 0.2583951

# [1] 0.8584906

# [1] 0.9009901

# [1] 1.301572

# [1] 0.630363
```

Εφαρμογή 6.3

Μια ασφαλιστική εταιρεία προσπαθεί να εκτιμήσει τις μελλοντικές ζημίες ενός ασφαλιστήριου συμβολαίου αυτοκινήτου για έναν πελάτη με βάση το ιστορικό του και τα δεδομένα του κλάδου.

Για να εκτιμήσουμε τις μελλοντικές ζημίες του ασφαλιστήριου συμβολαίου αυτοκινήτου με βάση το ιστορικό του πελάτη και τα δεδομένα του κλάδου, θα χρησιμοποιήσουμε τις εξής πληροφορίες:

1. **Ιστορικό ζημιών πελάτη**: 500€, 700€, 600€ τα τελευταία τρία χρόνια.
2. **Μέσος όρος ζημιών του κλάδου**: 1000€ ετησίως με διακύμανση 400€.

Βήματα λύσης:

1. **Μέσος όρος ζημιών πελάτη**: Ο μέσος όρος των ζημιών του πελάτη για τα τελευταία τρία χρόνια υπολογίζεται ως εξής:

Μέσος όρος πελάτης

$$\frac{1800}{3} = 600€$$

2. **Σύγκριση με τον μέσο όρο του κλάδου**: Ο μέσος όρος ζημιών του πελάτη (600€) είναι χαμηλότερος από τον μέσο όρο του κλάδου (1000€), που σημαίνει ότι ο πελάτης έχει ιστορικά μικρότερες ζημιές από το συνηθισμένο στον κλάδο.
3. **Διακύμανση ζημιών**: Η διακύμανση των ζημιών του κλάδου είναι 400€. Η διακύμανση μας δίνει μια εικόνα του πόσο ποικίλλουν οι ζημιές στον κλάδο, και άρα μπορεί να υποδηλώνει ότι σε κάποιες περιπτώσεις οι ζημιές μπορεί να είναι μεγαλύτερες ή μικρότερες από τον μέσο όρο.

Εκτίμηση μελλοντικών ζημιών:

Το μοντέλο Bühlmann υπολογίζει τη **βαρύτητα** k, που είναι ένας παράγοντας σταθμίσεων, ως:

$$k = \frac{u}{a}$$

Ωστόσο, επειδή η τιμή του α (η διακύμανση μεταξύ των διαφορετικών ομάδων κινδύνου, χρησιμοποιούμε αυτήν την τιμή, εφόσον δεν έχουμε περισσότερες πληροφορίες), μπορούμε να υποθέσουμε ότι το **α** είναι η διακύμανση μεταξύ των ασφαλιστικών κινδύνων, για παράδειγμα, ότι ισούται με 400. Άρα:

$$k = \frac{400}{400} = 1$$

Υπολογισμός της εκτίμησης με το μοντέλο Bühlmann

Το μοντέλο εκτιμά τη μελλοντική ζημία Z με τον εξής σταθμισμένο μέσο όρο:

Z=[n/(n+k)]·(μέσος όρος)+[k/(n+k)]· (μέσος όρος κλάδου)

Όπου n = 3 ο αριθμός των παρατηρήσεων

$$Z = 0.75 * 600 + 0.25 * 1000 = 700$$

Η εκτιμώμενη μελλοντική ζημία για τον πελάτη με βάση το μοντέλο Bühlmann είναι **700€**. Αυτός ο υπολογισμός λαμβάνει υπόψη τόσο το ιστορικό ζημιών του πελάτη (600€) όσο και τον μέσο όρο του κλάδου (1000€), δίνοντας μεγαλύτερη βαρύτητα στα ατομικά δεδομένα του πελάτη, αλλά λαμβάνοντας υπόψη και τα συλλογικά δεδομένα του κλάδου.

Κώδικας

```
x_1 = c(500, 700, 600)  # ιστορικό ζημιών πελάτη

mu_1 = 1000  # μέσος όρος ζημιών του κλάδου

v_1 = 400  # διακύμανση εντός του κλάδου

# Βήμα 1: Υπολογισμός της μέσης ζημίας του πελάτη

mean_x_1 = sum(x_1) / length(x_1)

# Βήμα 2: Υπολογισμός της βαρύτητας k (υποθέτουμε ότι η alpha = v)

alpha_1 = v_1

k_1 = v_1 / alpha_1

# Βήμα 3: Υπολογισμός της εκτίμησης με το μοντέλο Bühlmann-Straub

n_1 = length(x_1)

n = 3

z1_1=(n* mean_x_1)/(n+k_1); z1_1

z2_1=(k_1*mu_1)/(n+k_1); z2_1

# Εκτύπωση του αποτελέσματος

z1_1+z2_1
```

Αποτελέσματα

700

Εφαρμογή 6.4

Μια ασφαλιστική εταιρεία προσπαθεί να υπολογίσει τις μελλοντικές ζημίες ενός ασφαλιστήριου συμβολαίου κατοικίας για έναν πελάτη που έχει ιστορικό μερικών ετών.

Πληροφορίες για τον πελάτη:

Ιστορικό ζημιών τα τελευταία 4 χρόνια: 1200€, 800€, 900€, 1100€

ο Μέσος όρος ζημιών του κλάδου: 950€ ετησίως με διακύμανση 350€

Για να εφαρμόσουμε το **μοντέλο Bühlmann** στην περίπτωση του ασφαλιστηρίου συμβολαίου κατοικίας, θα χρησιμοποιήσουμε τα νέα δεδομένα του πελάτη και του κλάδου.

Μέσος όρος ζημιάς πελάτη

$$\frac{1200 + 800 + 900 + 1100}{4} = 1000€$$

Μέσος όρος πελάτης

$$\frac{500 + 700 + 600}{3} = 600€$$

Υποθέτουμε ότι η διακύμανση **α** είναι περίπου ίση με την ενδοομαδική διακύμανση, α=350. Άρα:

$$k = \frac{350}{350}$$

Υπολογισμός της εκτίμησης με το μοντέλο Bühlmann

Το μοντέλο εκτιμά τη μελλοντική ζημία Ζ με τον εξής σταθμισμένο μέσο όρο:

Z=[n/(n+k)]·(μέσος όρος)¯+[k/(n+k)]· (μέσος όρος κλάδου)

Όπου n = 4 ο αριθμός των παρατηρήσεων

$$Z = 0.8 * 1000 + 0.2 * 950 = 990$$

Η εκτιμώμενη μελλοντική ζημία για τον πελάτη με βάση το μοντέλο Bühlmann-Straub είναι **990€**. Το αποτέλεσμα αυτό συνδυάζει την ατομική εμπειρία του πελάτη (1000€) με τον μέσο όρο του κλάδου (950€), λαμβάνοντας υπόψη τόσο το ιστορικό του πελάτη όσο και τα δεδομένα του κλάδου.

Κώδικας

```
# Δεδομένα
x = c(1200, 800, 900, 1100)  # ιστορικό ζημιών πελάτη
mu = 950  # μέσος όρος ζημιών του κλάδου
v = 350  # διακύμανση εντός του κλάδου
# Βήμα 1: Υπολογισμός της μέσης ζημίας του πελάτη
mean_x = sum(x) / length(x)
# Βήμα 2: Υπολογισμός της βαρύτητας k (υποθέτουμε ότι η alpha = v)
alpha = v
k = v / alpha
# Βήμα 3: Υπολογισμός της εκτίμησης με το μοντέλο Bühlmann-Straub
mean_x
n=4
z1=(n* mean_x)/(n+k); z1
z2=(k*mu)/(n+k); z2
# Εκτύπωση του αποτελέσματος
z1+z2
```

Αποτελέσματα

990

6.2. Επίλυση εφαρμογής με το μοντέλο Hachemeister

Εφαρμογή 6.5

Το σύνολο δεδομένων του Hachemeister (1975) αποτελείται από τις μέσες αξίες αποζημίωσης για ατυχήματα σωματικών βλαβών ιδιωτικών επιβατών και τον αντίστοιχο αριθμό απαιτήσεων για πέντε πολιτείες των Η.Π.Α. κατά τη διάρκεια 12 τριμήνων, από τον Ιούλιο του 1970 έως τον Ιούνιο του 1973. Το σύνολο δεδομένων περιλαμβάνεται στη μορφή ενός πίνακα με 5 γραμμές και 25 στήλες. Η πρώτη στήλη περιέχει τον δείκτη της πολιτείας, οι στήλες 2-13 περιέχουν τις μέσες αξίες αποζημιώσεων και οι στήλες 14-25 περιέχουν τους αριθμούς των απαιτήσεων.

state	ratio.1	ratio.2	ratio.3	ratio.4	ratio.5	ratio.6	ratio.7	
1.0	1738.0	1642.0	1794.0	2051.0	2079.0	2234.0	2032.0	
2.0	1364.0	1408.0	1579.0	1444.0	1342.0	1675.0	1470.0	
3.0	1759.0	1685.0	1479.0	1763.0	1674.0	2103.0	1502.0	
4.0	1223.0	1146.0	1010.0	1257.0	1426.0	1532.0	1953.0	
5.0	1456.0	1499.0	1609.0	1741.0	1482.0	1572.0	1606.0	

ratio.8	ratio.9	ratio.10	ratio.11	ratio.12	weight.1	weight.2	weight.3	
2115.0	2115.0	2262.0	2267.0	2517.0	7861.0	9251.0	8706.0	
1448.0	1464.0	1831.0	1612.0	1471.0	1622.0	1742.0	1523.0	
1622.0	1828.0	2155.0	2233.0	2059.0	1147.0	1357.0	1329.0	
1123.0	1343.0	1243.0	1762.0	1306.0	407.0	396.0	348.0	
1735.0	1607.0	1573.0	1613.0	1690.0	2902.0	3172.0	3046.0	

weight.4	weight.5	weight.6	weight.7	weight.8	weight.9	weight.10	weight.11	weight.12
8575.0	7917.0	8263.0	9456.0	8003.0	7365.0	7832.0	7849.0	9077.0
1515.0	1622.0	1602.0	1964.0	1515.0	1527.0	1748.0	1654.0	1861.0
1204.0	998.0	1077.0	1277.0	1218.0	896.0	1003.0	1108.0	1121.0
341.0	315.0	328.0	352.0	331.0	287.0	384.0	321.0	342.0

3068.0	2693.0	2910.0	3275.0	2697.0	2663.0	3017.0	3242.0	3425.0

Κώδικας

```
library(actuar)

X <- cbind(cohort = c(1, 2, 1, 2, 2), hachemeister)

fit <- cm(~cohort + cohort:state, data = X,

        ratios = ratio.1:ratio.12,

        weights = weight.1:weight.12,

        method = "iterative")

predict(fit)

# $cohort

# [1] 1948.997 1543.495

#

# $state

# [1] 2048.324 1523.800 1874.625 1496.563 1585.169

summary(fit)

# Call:

#   cm(formula = ~cohort + cohort:state, data = X, ratios = ratio.1:ratio.12,

#     weights = weight.1:weight.12, method = "iterative")

#

# Structure Parameters Estimators

#

# Collective premium: 1746.246

#

# Between cohort variance: 88981.29

# Within cohort/Between state variance: 10951.91

# Within state variance: 139120026

#

# Detailed premiums

#

# Level: cohort

# cohort Indiv. mean Weight   Cred. factor Cred. premium

# 1     1966.734    1.406965 0.9195573    1948.997

# 2     1527.864    1.596421 0.9284205    1543.495

#

# Level: state

# cohort state Indiv. mean Weight Cred. factor Cred. premium

# 1     1     2060.921    100155 0.8874441    2048.324

# 2     2     1511.224     19895 0.6103170    1523.800

# 1     3     1805.843     13735 0.5195210    1874.625

# 2     4     1352.976      4152 0.2463391    1496.563

# 2     5     1599.829     36110 0.7397648    1585.169
```

6.3. Pareto και Bühlmann

Εφαρμογή 6.6

Το πρόβλημα αφορά την εκτίμηση κινδύνων σε ασφαλιστικά και χρηματοοικονομικά πλαίσια χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικά μοντέλα: το **μοντέλο Pareto** και το **μοντέλο Bühlmann**.

Στόχοι του προβλήματος:

1. **Πιθανότητα υπέρβασης (probability of exceedance):** Ποια είναι η πιθανότητα μια απώλεια να ξεπεράσει ένα καθορισμένο όριο (π.χ., 2000 μονάδες);
2. **Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk - VaR):** Υπολογισμός της μέγιστης αναμενόμενης απώλειας με δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης (π.χ. 95%).
3. **Εφαρμογή του μοντέλου Bühlmann:** Το μοντέλο Bühlmann είναι ένα **μοντέλο αξιοπιστίας** που χρησιμοποιείται ευρέως στην εκτίμηση ασφαλιστικών αποθεμάτων. Προσαρμόζει τα αναμενόμενα αποτελέσματα κάθε ασφαλιστικής ομάδας (π.χ., πολιτείες ή περιοχές), λαμβάνοντας υπόψη τόσο την παρατηρηθείσα εμπειρία όσο και τις διαφορές μεταξύ των ομάδων.

Περιγραφή του προβλήματος:

Έχουμε δεδομένα από πέντε πολιτείες των ΗΠΑ, όπου καταγράφονται:

- Μέσες αξίες αποζημίωσης για σωματικές βλάβες από ατυχήματα σε ιδιωτικά οχήματα.
- Αριθμός απαιτήσεων για αποζημίωση, κατανεμημένα ανά πολιτεία και ανά τρίμηνο για 12 τρίμηνα.

Χρησιμοποιώντας το **μοντέλο Pareto**, υπολογίζουμε:

- Την πιθανότητα να ξεπεράσουν οι αποζημιώσεις ένα κατώφλι (π.χ. 2000 μονάδες).
- Την Αξία σε Κίνδυνο (VaR), για να υπολογίσουμε την αναμενόμενη απώλεια για δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε το **μοντέλο** για να προσαρμόσουμε την εκτίμηση των απωλειών, λαμβάνοντας υπόψη τις διακυμάνσεις μεταξύ των πέντε πολιτειών. Το Bühlmann βασίζεται σε ένα συνδυασμό του συνολικού μέσου όρου των απαιτήσεων και της εμπειρίας κάθε πολιτείας, επιτρέποντας μια πιο αξιόπιστη εκτίμηση του κινδύνου. Το αποτέλεσμα είναι μια βελτιστοποιημένη εκτίμηση της απώλειας, η οποία ισορροπεί μεταξύ της γενικής εμπειρίας και των ειδικών χαρακτηριστικών κάθε πολιτείας.

Συνδυασμός των μοντέλων:

- Το μοντέλο Pareto παρέχει την πιθανότητα και τις ακραίες τιμές κινδύνου, ενώ το Bühlmann βελτιώνει την ακρίβεια των εκτιμήσεων σε επίπεδο πολιτείας, λαμβάνοντας υπόψη τις διαφορές μεταξύ των ομάδων.

Εδώ είναι ο κώδικας στην R για να λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τόσο το μοντέλο Pareto όσο και το μοντέλο Bühlmann:

Κώδικας

Μοντέλο Pareto

```
# a) Παράμετροι για τη κατανομή Pareto
shape <- 2
scale <- 1000

# Υπολογισμός της αναμενόμενης απώλειας
expected_loss <- scale * shape / (shape - 1)

# Κατώφλι για την πιθανότητα υπέρβασης
threshold <- 2000

# Υπολογισμός πιθανότητας υπέρβασης
library(actuar)
probability_exceedance <- 1 - ppareto(threshold, shape = shape, scale = scale)
probability_exceedance

# Υπολογισμός Αξίας σε Κίνδυνο (VaR) για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%
confidence_level <- 0.95
VaR <- VGAM::qpareto(confidence_level, shape = shape, scale = scale)
VaR
# [1] 4472.136
```

Μοντέλο Bühlmann

Για το μοντέλο Bühlmann θα χρειαστούμε δεδομένα για πολλαπλές ομάδες (π.χ. πολιτείες) και τους παρατηρούμενους αριθμούς απαιτήσεων και μέσες αποζημιώσεις. Ο κώδικας στην R μπορεί να έχει την εξής μορφή:

```
# b) Παράμετροι δεδομένων για το Bühlmann
claims <- c(100, 120, 90, 110, 105)  # Απαιτήσεις για 5 πολιτείες
average_claims <- c(5000, 4500, 5500, 4800, 4900)  # Μέσες αποζημιώσεις για 5 πολιτείες
n <- length(claims)

# Υπολογισμός συνολικών απαιτήσεων και μέσων αποζημιώσεων
total_claims <- sum(claims)
total_avg_claim <- sum(claims * average_claims) / total_claims

# Υπολογισμός παραμέτρων για το Bühlmann-Straub
variance_within <- sum((average_claims - total_avg_claim)^2) / n
variance_between <- sum((claims - mean(claims))^2) / (n - 1)

# Βαθμός αξιοπιστίας Z
z <- variance_between / (variance_within + variance_between)

# Προσαρμοσμένες εκτιμήσεις
adjusted_claims <- z * average_claims + (1 - z) * total_avg_claim
adjusted_claims
# [1] 4909.629 4909.047 4910.211 4909.396 4909.513
```

Αποτελέσματα

```
4909.629 4909.047 4910.211 4909.396 4909.513
```

- Στο **μοντέλο Pareto**, χρησιμοποιούμε την πιθανότητα υπέρβασης και την Αξία σε Κίνδυνο (VaR) για να εκτιμήσουμε την πιθανότητα μεγάλων απωλειών.
- Στο **μοντέλο Bühlmann**, υπολογίζουμε προσαρμοσμένες εκτιμήσεις για τις απώλειες κάθε πολιτείας, λαμβάνοντας υπόψη τις διαφορές στις απαιτήσεις μεταξύ των πολιτειών και τη συνολική εμπειρία.

(McNeil et al., 2005)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Παράδειγμα 3.4

x	g(x)
0	0.0183156389
1	0.0183156389
2	0.0457890972
3	0.0579995231
4	0.0740257072
5	0.0886782183
6	0.0931299361
7	0.0957028472
8	0.0917821558
9	0.0837759281
10	0.0738013093
11	0.0622046808
12	0.0507281419
13	0.0400731379
14	0.0306856963
15	0.0228775116
16	0.0166149819
17	0.0117754186
18	0.0081593267
19	0.0055318919
20	0.0036747727
21	0.0023943010
22	0.0015313213
23	0.0009622975
24	0.0005946036
25	0.0003615103
26	0.0002164160
27	0.0001276396
28	0.0000742084
29	0.0000425522
30	0.0000240768
31	0.0000134487
32	0.0000074191
33	0.0000040438
34	0.0000021784
35	0.0000011603
36	0.0000006113
37	0.0000003186
38	0.0000001643
39	0.0000000839
40	0.0000000424
41	0.0000000212
42	0.0000000105
43	0.0000000052

Παράδειγμα 3.6

x	G(x)_Convolution	G(x)_Recursive	G(x)_Simulation
0	0.400000	0.400000	0.399628
1	0.460000	0.460000	0.459394
2	0.514000	0.514000	0.513416
3	0.562600	0.562600	0.562208
4	0.606340	0.606340	0.606342
5	0.645706	0.645706	0.645441
6	0.681135	0.681135	0.680811
7	0.713022	0.713022	0.712663
8	0.741720	0.741720	0.741327
9	0.767548	0.767548	0.767176
10	0.790793	0.790793	0.790454
11	0.811714	0.811714	0.811505
12	0.830542	0.830542	0.830278
13	0.847488	0.847488	0.847235
14	0.862739	0.862739	0.862405
15	0.876465	0.876465	0.876237
16	0.888819	0.888819	0.888553
17	0.899937	0.899937	0.899594
18	0.909943	0.909943	0.909578
19	0.918949	0.918949	0.918827
20	0.927054	0.927054	0.926887

x	g(x)_Convolution	g(x)_Recursive	g(x)_Simulation
0	0.400000	0.400000	0.399628
1	0.060000	0.060000	0.059766
2	0.054000	0.054000	0.054022
3	0.048600	0.048600	0.048792
4	0.043740	0.043740	0.044134
5	0.039366	0.039366	0.039099
6	0.035429	0.035429	0.035370
7	0.031886	0.031886	0.031852
8	0.028698	0.028698	0.028664
9	0.025828	0.025828	0.025849
10	0.023245	0.023245	0.023278
11	0.020921	0.020921	0.021051
12	0.018829	0.018829	0.018773
13	0.016946	0.016946	0.016957
14	0.015251	0.015251	0.015170
15	0.013726	0.013726	0.013832
16	0.012353	0.012353	0.012316
17	0.011118	0.011118	0.011041
18	0.010006	0.010006	0.009984
19	0.009006	0.009006	0.009249
20	0.008105	0.008105	0.008060

Παράδειγμα 4.4.2

x	G(x)_Convolution	G(x)_Recursive	G(x)_Simulation
0	0.064003	0.064003	0.063963
10	0.130532	0.130532	0.130452
20	0.216069	0.216069	0.215817
30	0.322342	0.322342	0.322558
40	0.451079	0.451079	0.451657
50	0.604005	0.604005	0.604318
60	0.707109	0.707109	0.707409
70	0.798116	0.798116	0.798501
80	0.873571	0.873571	0.873976
90	0.930018	0.930018	0.930130
100	0.964001	0.964001	0.964167
110	0.981569	0.981569	0.981732
120	0.992224	0.992224	0.992385
130	0.997696	0.997696	0.997730
140	0.999712	0.999712	0.999683
150	1.000000	1.000000	1.000000

Παράδειγμα 5.8

x	G(x)_Convolution	G(x)_Recursive
0	0.338889	0.338889
1	0.349815	0.349815
2	0.360561	0.360561
3	0.371130	0.371130
4	0.381524	0.381524
5	0.391746	0.391746
6	0.401799	0.401799
7	0.411686	0.411686
8	0.421409	0.421409
9	0.430972	0.430972
10	0.440377	0.440377
11	0.449626	0.449626
12	0.458723	0.458723
13	0.467669	0.467669
14	0.476467	0.476467
15	0.485120	0.485120
16	0.493630	0.493630
17	0.501999	0.501999
18	0.510230	0.510230
19	0.518325	0.518325
20	0.526286	0.526286

Βιβλιογραφία

Ελληνική

Αντζουλάκος, Δ. (2021). Σημειώσεις Π.Μ.Σ. Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνου, Γλώσσα Προγραμματισμού R με εφαρμογές στον αναλογισμό .

Πιτσέλης, Γ. (2020). Μαθηματικά των Γενικών Ασφαλίσεων.Αθήνα Παπαζήση

Πολίτης, Κ. (2022). Σημειώσεις Π.Μ.Σ. Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνου, Θεωρία Κινδύνου ΙΙ.

Χατζηκωνσταντινίδης, Ε. (2021). Σημειώσεις Π.Μ.Σ. Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνου, Θεωρία Κινδύνου Ι.

Ξένη

Billingsley, P. (1995). Probability and Measure. Wiley-India.

Bühlmann, H., & Gisler, A. (2005). A Course in Credibility Theory and its Applications. Springer.

Dutang, C., Goulet, V., & Pigeon, M. (2008). Risk and Ruin Theory Features of Actuar. Wiley.

Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., & Denuit, M. (2008). Modern Actuarial Risk Theory Using R. Springer.

McNeil, A., Rüdiger, F., & Embrechts, P. (2005). Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools. Princeton University Press.

Διπλωματικές Εργασίες

Ντεργιαντέ, Δ. (2018). Ακριβείς και προσεγγιστικοί υπολογισμοί για ποσότητες με ενδιαφέρον στη θεωρία κινδύνου με χρήση του πακέτου actuar.