ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Ηλεκτρονική Μάθηση.»

Ακαδημαϊκό έτος 2023-2024

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του Βουτσίνου Αντώνιου (Α.Μ ΜΗΜ2307)

Σχεδίαση και Ανάπτυξη Διαδικτυακού Μαθήματος για την ταχύρρυθμη Ανάπτυξη Αλγεβρικών Μεθόδων και Εννοιών για μαθητές της Β' Γυμνασίου

Design and Development of an Online Course for Accelerated Learning of Algebraic Methods and Concepts for 2nd grade High School students

<u>Επιβλέπων:</u>

Δημήτριος Σάμψων

Πειραιάς, Σεπτέμβριος 2024

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ ΑΥΘΕΝΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

ΒΕΒΑΙΩΣΗ ΕΚΠΟΝΗΣΗΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Αυτή η Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία υποβάλλεται ως μερική εκπλήρωση των απαιτήσεων του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην «Ηλεκτρονική Μάθηση» του Τμήματος Ψηφιακών Συστημάτων του Πανεπιστημίου Πειραιώς.

Δηλώνω υπεύθυνα ότι η συγκεκριμένη Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία έχει συγγραφεί από εμένα προσωπικά και δεν έχει υποβληθεί ούτε έχει αξιολογηθεί στο πλαίσιο κάποιου άλλου μεταπτυχιακού ή προπτυχιακού τίτλου σπουδών, στην Ελλάδα ή στο εξωτερικό.

Η εργασία αυτή έχοντας εκπονηθεί από εμένα, αντιπροσωπεύει τις προσωπικές μου απόψεις επί του θέματος. Οι πηγές στις οποίες ανέτρεξα για την εκπόνηση της συγκεκριμένης διπλωματικής αναφέρονται στο σύνολό τους, δίνοντας πλήρεις αναφορές στους συγγραφείς, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το Διαδίκτυο.

Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του πτυχίου μου. Σε κάθε περίπτωση, αναληθούς ή ανακριβούς δηλώσεως, υπόκειμαι στις συνέπειες που προβλέπονται τις διατάξεις που προβλέπει η Ελληνική και Κοινοτική Νομοθεσία περί πνευματικής ιδιοκτησίας.

Ο ΔΗΛΩΝ

Ονοματεπώνυμο:

Βουτσίνος Αντώνιος

Αριθμός Μητρώου:

ΜΗΜ2307

Υπογραφή:

Στην Ελένη, για την υπομονή και την στήριξή
της αυτόν τον δύσκολο χρόνο.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΙΚΟΝΩΝ/ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ/ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Με την παρούσα διπλωματική εργασία επιχειρείται η σχεδίαση και ανάπτυξη ενός Μαζικού Ανοιχτού Διαδικτυακού Μαθήματος (MOOC) με θέμα την Άλγεβρα που διδάσκονται οι μαθητές της Β’ Γυμνασίου. Στόχο έχει την προετοιμασία των εκπαιδευόμενων για την επιτυχή πορεία τους στις προαγωγικές εξετάσεις του Ιουνίου ή τις επαναληπτικές εξετάσεις του Σεπτεμβρίου.

Πριν την σχεδίαση του μαθήματος παρουσιάζονται τα ευρήματα από την διαδικτυακή έρευνα που πραγματοποιήθηκε για την ανεύρεση αντίστοιχων ηλεκτρονικών μαθημάτων. Τα ηλεκτρονικά μαθήματα, οκτώ στον αριθμό, παρουσιάζονται και σχολιάζονται οι μαθησιακοί στόχοι που θέτουν, οι στρατηγικές που ακολουθούν καθώς και ο σκοπός τους.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η αναλυτική σχεδίαση του μαθήματος. Περιγράφονται οι μαθησιακοί στόχοι που θέτονται, οι τρόποι αξιολόγησης, οι προαπαιτούμενες γνώσεις και η χρονική διάρκεια. Παράλληλα παρατίθεται αναλυτικό σχεδιάγραμμα ροής του μαθήματος και αναλυτικός πίνακας ο οποίος περιγράφει την δομή του μαθήματος, την κάθε δραστηριότητα με ακρίβεια καθώς και τα διδακτικά μέσα που χρησιμοποιούνται. Η πλήρης μορφή του ηλεκτρονικού μαθήματος βρίσκεται στο Παράρτημα της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Ταυτόχρονα σε ξεχωριστό κεφάλαιο παρουσιάζεται η υλοποίηση του μαθήματος μέσα από την πλατφόρμα edunext.com. Στο κεφάλαιο αυτό αναλύεται και αιτιολογείται η χρήση των εργαλείων παρουσίασης και αξιολόγησης των παρεχόμενων γνώσεων. Με αυτό τον τρόπο αναδεικνύεται η φιλοσοφία του MOOC και η πρακτική εφαρμογή της θεωρίας πάνω στην οποία σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε.

Επίσης, έχει δημιουργηθεί και συμπληρωθεί ειδική ρουμπρίκα αξιολόγησης για το ηλεκτρονικό μάθημα. Οι απαντήσεις τις ρουμπρίκας σχολιάζονται και συζητούνται ώστε να αναδειχθούν ξεκάθαρα τα δυνατά και αδύνατα σημεία του μαθήματος καθώς και οι ελλείψεις. Τέλος εξάγονται συμπεράσματα με βάση την αξιολόγηση στην οποία υποβλήθηκε το διαδικτυακό μάθημα και προτείνονται βελτιώσεις βασισμένες στα αδύνατα σημεία και τις ελλείψεις του.

Λέξεις κλειδιά:

- MOOC

- Μαθησιακά αποτελέσματα
- Άλγεβρα Β’ Γυμνασίου
- Αξιολόγηση
- Διαδραστικός

ΠΕΡΙΛΗΨΗ (Αγγλικά)

The present thesis aims to design and develop a Massive Open Online Course (MOOC) on Algebra, aimed at 2cod grade of Hight School students. Its goal is to prepare students for their successful performance in the June's final exams or the September's retake exams.

Before the course design, the findings from an online research conducted to identify similar electronic courses are presented. Eight electronic courses are showcased. The educational goals they set, the strategies they follow, as well as their objectives are discussed.

Next, the detailed course design is presented. The learning objectives are outlined, along with the assessment methods, the prerequisite knowledge, and the course duration. Additionally, a detailed flowchart of the course is provided, as well as a comprehensive table describing the course structure, each activity in detail, and the teaching materials used. The complete version of the electronic course is included in the Appendix of this thesis.

At the same time, a separate chapter presents the implementation of the course through the edunext.com platform. This chapter analyzes and justifies the use of presentation and assessment tools for the knowledge provided. In this way, the philosophy of the MOOC is highlighted, along with the practical application of the theory on which it was designed and implemented.

Moreover, a specialized evaluation rubric for the electronic course has been created and completed. The rubric responses are commented on and discussed to clearly highlight the strengths and weaknesses of the course, as well as any deficiencies. Finally, conclusions are drawn based on the evaluation the online course underwent, and improvements are proposed, focusing on its weaknesses and shortcomings.

Keywords

- MOOC
- Learning goals
- Algebra of the 2cod grade of Hight School
- Evaluation
- Interactive

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Σκοπός

Σκοπός της παρούσας Μεταπτυχιακής Διπλωματικής Εργασίας είναι η σχεδίαση και υλοποίηση ενός Μαζικού Ανοιχτού Διαδικτυακού Μαθήματος (MOOC). Το MOOC έχει στόχο την ταχεία εκγύμναση και προετοιμασία των εκπαιδευόμενων στην ύλη της Άλγεβρας της Β’ Γυμνασίου ώστε να ανταποκριθούν επιτυχώς στις προαγωγικές εξετάσεις.

1.2 Αναγκαιότητα

Η ανάπτυξη των δεξιοτήτων των μαθητών στην άλγεβρα της Β' Γυμνασίου είναι ζωτικής σημασίας για τη μαθηματική τους κατάρτιση και την ανάπτυξη λογικής σκέψης. Η άλγεβρα δεν αποτελεί μόνο τη βάση για τα προχωρημένα μαθηματικά που θα διδαχθούν στο μέλλον, αλλά και εργαλείο για την ανάπτυξη της λογικής σκέψης και της κριτικής ανάλυσης. Οι μαθητές που κατανοούν την άλγεβρα μαθαίνουν να προσεγγίζουν συστηματικά τα προβλήματα, να αναλύουν δεδομένα και να κάνουν αφηρημένες συνδέσεις (Blanton et al., 2018).

Στην Β’ Γυμνασίου γίνεται το πέρασμα από την λογική σκέψη της αριθμητικής στην λογική σκέψη της άλγεβρας. Ο κόσμος των μαθηματικών όπως τον έχει χτίσει μέχρι τότε περιστρέφεται γύρω από συγκεκριμένους αριθμούς. Στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης που εισάγεται ο μαθητής της Β’ Γυμνασίου προτεραιότητα έχει η μοντελοποίηση των προβλημάτων με τη χρήση μεταβλητών οι οποίες συμβολίζουν οποιοδήποτε αριθμό και όχι έναν συγκεκριμένο. Με αυτό τον τρόπο οικοδομούνται μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων και αλγόριθμοι. Οι έννοιες των εξισώσεων, των συναρτήσεων, της τετραγωνικής ρίζας και η ύπαρξη των πραγματικών αριθμών που διδάσκονται στη Β' Γυμνασίου, είναι απαραίτητες για την κατανόηση άλλων κλάδων, όπως η φυσική, η χημεία, η πληροφορική και η οικονομία (Hole & Kjærnsli, 2016).

Η ικανότητα να επιλύουν εξισώσεις και να κατανοούν αλγεβρικές συναρτήσεις προετοιμάζει τους μαθητές για τις προκλήσεις του σύγχρονου επιστημονικού και τεχνολογικού κόσμου (Blanton et al., 2018). Επιπλέον, η ανάπτυξη αλγεβρικών δεξιοτήτων ενισχύει την προβληματοκεντρική σκέψη και τη δημιουργικότητα, καθώς οι μαθητές καλούνται να αναπτύξουν στρατηγικές για την αντιμετώπιση περίπλοκων προβλημάτων. Μέσω της άλγεβρας, μαθαίνουν να δομούν τις σκέψεις τους και να εφαρμόζουν διαφορετικές μεθοδολογίες, κάτι που ενισχύει τη συγκρότηση λογικής σκέψης και τη δυνατότητα οικοδόμησης συλλογισμών και επιχειρημάτων τα οποία ακολουθούν τη δομή αίτιο-αποτέλεσμα (Hole & Kjærnsli, 2016).

Μπαίνοντας σε αυτό τον νέο τομέα των μαθηματικών, ο μαθητής έχει ανάγκη την οικοδόμηση σταθερών θεμελίων τα οποία θα τον συντροφεύουν σε όλη του τη ζωή. Οι εξετάσεις είναι η ευκαιρία που δίνεται στον μαθητή για την κεφαλαιοποίηση αυτών των γνώσεων. Συνεπώς, η συγκροτημένη προετοιμασία για αυτές είναι πολύ σημαντική (Blanton et al., 2018).

1.3 Γιατί MOOC

Η αξιοποίηση Μαζικών Ανοικτών Διαδικτυακών Μαθημάτων (MOOC) για την προετοιμασία μαθητών Β' Γυμνασίου στην άλγεβρα είναι ιδιαίτερα πρόσφορη εκπαιδευτική μέθοδος λόγω πολλών πλεονεκτημάτων. Πρώτον, προσφέρει ευελιξία στους μαθητές, που μπορούν να μελετούν στον δικό τους ρυθμό και να το προσαρμόζουν στις ανάγκες τους (Buhl et al., 2023; Siemens, 2013). Τα MOOC προσφέρουν πλούσιο και διαδραστικό περιεχόμενο μέσω διάφορων εφαρμογών όπως το Geogebra και το Mathway, βοηθώντας τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα δύσκολες έννοιες με οπτικά εργαλεία (Κουτσάκας & Μανωλόπουλος, 2020). Επιπλέον, η ενσωμάτωση διαδραστικών ασκήσεων, όπως ασκήσεις πολλαπλής επιλογής ή ασκήσεις τύπου ORA, και τεστ προσφέρει άμεση ανατροφοδότηση, βοηθώντας στη σταδιακή βελτίωση των γνώσεων τους (García-Peñalvo & Rojas, 2018).

Τα MOOC δεν παύουν να έχουν όμως και προκλήσεις. Η αυτοπειθαρχία είναι κρίσιμη, καθώς η ασύγχρονη φύση των MOOC απαιτεί από τους μαθητές να οργανώνονται αποτελεσματικά (Hew & Cheung, 2014). Επίσης, απαιτείται πρόσβαση σε τεχνολογικά μέσα και σταθερό διαδίκτυο, κάτι που δεν είναι πάντα δεδομένο (Khalil & Ebner, 2016). Επιπλέον, η απουσία προσωπικής αλληλεπίδρασης με τους διδάσκοντες μπορεί να αποτελέσει πρόκληση για ορισμένους μαθητές που χρειάζονται πιο άμεση υποστήριξη (Siemens, 2013).

Συνοψίζοντας, η χρήση MOOC για την προετοιμασία των μαθητών στην άλγεβρα αποτελεί μια αποδοτική μέθοδο, καθώς συνδυάζει ευελιξία, διαδραστικότητα και προσαρμοστικότητα στις ανάγκες των μαθητών, ενώ οι προκλήσεις μπορούν να αντιμετωπιστούν με κατάλληλη καθοδήγηση και υποστήριξη (Buhl et al., 2023; García-Peñalvo & Rojas, 2018).

1.4 Γιατί μικρό-μάθηση

Η επιλογή της μικρό-μάθησης (microlearning) για τη σχεδίαση ενός τέτοιου διαδικτυακού μαθήματος είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική. Η μικρό-μάθηση αφορά τη διάσπαση της ύλης σε μικρές, διαχειρίσιμες ενότητες, που εστιάζουν σε συγκεκριμένες έννοιες ή δεξιότητες. Αυτό είναι εξαιρετικά χρήσιμο για τους μαθητές αυτής της ηλικίας, καθώς επιτρέπει την ευκολότερη αφομοίωση των μαθηματικών εννοιών και την εξάσκηση σε βήματα (Mohammed et al., 2018; Hug & Friesen, 2007).

Πρώτον, η μικρό-μάθηση ενισχύει τη συγκέντρωση και μειώνει την υπερφόρτωση πληροφορίας, κάτι που είναι κρίσιμο σε ένα γνωστικό αντικείμενο όπως η άλγεβρα. Οι μαθητές μπορούν να επικεντρωθούν σε ένα θέμα κάθε φορά, να το κατανοήσουν βαθύτερα και στη συνέχεια να προχωρήσουν στην επόμενη ενότητα, διασφαλίζοντας σταδιακή πρόοδο (Giurgiu, 2017; Pappas, 2015). Επίσης, η μικρό-μάθηση διευκολύνει τη διαρκή επανάληψη, βοηθώντας τους μαθητές να ενισχύσουν τη μακροχρόνια μνήμη τους (Shail, 2019).

Δεύτερον, το μοντέλο της μικρό-μάθησης είναι ιδιαίτερα ευέλικτο. Οι μαθητές μπορούν να ενσωματώσουν τη μελέτη τους στο καθημερινό τους πρόγραμμα, αφιερώνοντας μικρές χρονικές περιόδους ανάλογα με τη διαθεσιμότητά τους. Αυτό το χαρακτηριστικό είναι πολύτιμο, ειδικά για μαθητές που προετοιμάζονται για τις προαγωγικές εξετάσεις και χρειάζονται αποτελεσματική διαχείριση του χρόνου τους (Hug, 2010; Mohammed et al., 2018).

Τέλος, η μικρό-μάθηση συνδέεται με τη διαδραστικότητα και την άμεση ανατροφοδότηση. Σε ένα MOOC με μικρό-μαθήματα, οι μαθητές μπορούν να αλληλεπιδρούν με ασκήσεις, κουίζ και διαδραστικά εργαλεία μετά από κάθε ενότητα, λαμβάνοντας άμεσα σχόλια για την πρόοδό τους. Αυτή η συνεχής αλληλεπίδραση ενισχύει τη συμμετοχή και τη δέσμευσή τους (Frisnoiry et al., 2022; Hug, 2010).

1.5 Συνεισφορά της Εργασίας

Με την παρούσα εργασία επιχειρείται η σχεδίαση και υλοποίηση ενός MOOC το οποίο θα προσπαθήσει να συνδέσει την παραδοσιακή διδασκαλία των μαθηματικών με τις δυνατότητες που μας δίνουν οι σύγχρονες τεχνολογίες στην εκπαιδευτική βαθμίδα του γυμνασίου.

Στην ελληνική εκπαιδευτική κοινότητα δεν είναι διαδομένη η εκπαίδευση με την χρήση τεχνολογιών. Η ασύγχρονη εκπαίδευση κατά κύριο λόγο χρησιμοποιείται σε μεγαλύτερες εκπαιδευτικές βαθμίδες. Όμως οι μαθητές γυμνασίου είναι αρκετά εξοικειωμένοι με την χρήση ηλεκτρονικών και ψηφιακών μέσων. Συνεπώς η συμμετοχή τους σε ένα διαδικτυακό μάθημα τύπου MOOC θα είναι για αυτούς κάτι οικείο και εύκολο το οποίο θα επανανοηματοδοτήσει την εκπαιδευτική διαδικασία. Ενώ παράλληλα με τις διαδραστικές μεθόδους που χρησιμοποιεί θα τους δοθεί και μια διαφορετική οπτική στο μάθημα των μαθηματικών.

Παράλληλα καλλιεργείται η κουλτούρα της δια βίου μάθησης από τα μαθητικά χρόνια. Στο σύγχρονο εργασιακό περιβάλλον η συνεχής κατάρτιση, ενίσχυση και συμπλήρωση των γνώσεων και δεξιοτήτων των εργαζομένων είναι περισσότερο από αναγκαία προκειμένου να συμβαδίσει ο εργαζόμενος με την τεχνολογική και επιστημονική πρόοδο. Τα MOOC αποτελούν εργαλεία δια βίου μάθησης. Ο μαθητής μέσα από την εξοικείωση του με αυτά, γίνεται κομμάτι της προσπάθειας για την δια βίου εκπαίδευση και κατάρτιση που είναι αναγκαία στο σήμερα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΕΠΙΣΚΟΠΙΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΣΤΟΝ ΤΟΜΕΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται κάποια από τα ευρήματα διαδικτυακής έρευνας γύρω από τα MOOC που δημιουργούνται στον τομέα των Μαθηματικών. Τα ευρήματα είναι πολύ ενδιαφέροντα καθώς παρατηρήθηκε μεγάλη γκάμα τέτοιων e-courses.

Η εκπαιδευτική κοινότητα στην Ελλάδα ήρθε σε επαφή με μορφές εκπαίδευσης με την χρήση ψηφιακών μέσων κατά την περίοδο του COVID. Μέχρι τότε η απόλυτη κυριαρχία της παραδοσιακής μορφής διδασκαλίας ήταν αδιαμφισβήτητη. Τα μαθηματικά, ως κορμός των θετικών και οικονομικών μαθημάτων, δεν νοούταν να διδαχθούν μέσα από ηλεκτρονικό υπολογιστή. Λίγοι πειραματίστηκαν με μεθόδους διδασκαλίας που εμπεριείχαν χρήση ψηφιακών μέσων εν γένει.

Συνεπώς η πληθώρα MOOC που σχετίζονται με τα μαθηματικά είναι εντυπωσιακή για έναν εκπαιδευτικό, ο οποίος έχει γαλουχηθεί με την άποψη ότι «τα μαθηματικά θέλουν μολύβι και χαρτί», όπως συχνά λέει ένας συνάδελφος ο οποίος βλέπει με σκεπτικισμό ακόμη και την εγκατάσταση και χρήση των ψηφιακών πινάκων στις σχολικές αίθουσες.

Μέσα από την αναζήτηση, MOOC τα οποία να απευθύνονται, για τα ελληνικά δεδομένα, σε μαθητές γυμνασίου και λυκείου βρέθηκαν πάρα πολλά τα οποία μάλιστα καταπιάνονταν και με παρόμοια κομμάτια ύλης. Άρα ένας υποψήφιος μαθητής έχει την δυνατότητα να επιλέξει ανάμεσα σε μια πληθώρα μαθημάτων αυτό που ταιριάζει στις απαιτήσεις που έχει. Ενώ ένα άλλο εντυπωσιακό σημείο είναι τα MOOC που αναφέρονται σε υποψήφιους ή νυν φοιτητές οι οποίοι χρειάζονται ένα ταχύρρυθμο μάθημα ώστε να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις των πανεπιστημιακών μαθηματικών. Πρόκλησή για τέτοιου επιπέδου e-courses δεν είναι μόνο η τεχνική παρουσίαση και ο σχεδιασμός κατάλληλων ασκήσεων, αλλά και η σχεδίαση του μαθήματος που από την φύση του είναι ιδιαιτέρως απαιτητικό ώστε να γίνει πλήρως κατανοητό χωρίς την ζωντανή υποστήριξη από καθηγητή.

Παρακάτω περιγράφονται και σχολιάζονται κάποια από τα MOOC που αλιεύτηκαν.

2.1 Ηλεκτρονικό μάθημα Introduction to Geometry

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ 1ΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ	
Τίτλος Μαθήματος	Introduction to Geometry

Σύντομη Περιγραφή	Το μάθημα καλύπτει βασικές έννοιες της γεωμετρίας, όπως μέτρηση γωνιών, ιδιότητες τριγώνων και πολυγώνων, υπολογισμό εμβαδών και όγκων, και το πυθαγόρειο θεώρημα.
Σε ποιους Απευθύνεται	Μαθητές που θέλουν να ενισχύσουν τις γνώσεις τους στη γεωμετρία.
Μαθησιακά Αποτελέσματα	Οι μαθητές να μπορούν να: • μετρούν γωνίες και να καθορίζουν πότε οι γωνίες είναι κυρτές • αποδεικνύουν και να εφαρμόζουν ιδιότητες τριγώνων, τετραγώνων και άλλων πολυγώνων • υπολογίζουν εμβαδά πολυγώνων, κύκλων, ελλείψεων και άλλων πολύπλοκων σχημάτων • αποδεικνύουν και να εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο θεώρημα • γνωρίζουν πως σχετίζονται τμήματα ευθειών και γωνίες σε κύκλους • υπολογίζουν όγκο και εμβαδόν σε τρισδιάστατο σώμα
Κατηγορία Μαθήματος	Διαδικτυακό
Πλατφόρμα Διάθεσης (για τα Διαδικτυακά Μαθήματα)	EdX
URL Μαθήματος	https://www.edx.org/learn/geometry/schoolyourself-introduction-to-

	geometry?utm_source=affiliate&utm_medium=My%20Mooc%20%2F%20Edflex&utm_campaign=Courses%20Ad_&utm_content=PRODUCT_CATALOG&irgwc=1
Προϋποθέσεις Επιτυχούς Ολοκλήρωσης	Ολοκλήρωση όλων των ενοτήτων και επιτυχία στις τελικές δοκιμασίες.
Είδος Πιστοποιητικού που Προσφέρει	Πιστοποιητικό με χρέωση.
Διάρκεια Μαθήματος	14 Εβδομάδες
Εκτιμώμενος Φόρτος Εργασίας για την Ολοκλήρωση του Μαθήματος	4 έως 6 ώρες ανά εβδομάδα. Συνολικά 70 ώρες κατά μέσο όρο.
Γλώσσα	Αγγλικά
Προαπαιτούμενα	Βασικές γνώσεις άλγεβρας όπως επίλυση εξίσωσης μιας μεταβλητής
Εκπαιδευτικός Οργανισμός	SchoolYourself
Εκπαιδευτής	Zach Wissner-Gross, John Lee, Vivek Venkatachalam, Kenny Peng, Michael Fountaine, Stephen Face
Οτιδήποτε άλλο χρήσιμο	Το μάθημα είναι αυτορυθμιζόμενο και προσφέρει δωρεάν πρόσβαση με χρέωση για πιστοποίηση.

Σχόλιο: Καλύπτεται ένα ευρύ φάσμα των βασικών γνώσεων γεωμετρίας και παρέχει πολύτιμες γνώσεις για ένα μαθητή γυμνασίου. Οι στόχοι του μαθήματος περιλαμβάνουν την ενίσχυση της κατανόησης βασικών γεωμετρικών εννοιών και τη βελτίωση της μαθηματικής σκέψης και λογικής, αναπτύσσοντας δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων που είναι κρίσιμες για την πορεία των μαθητών στο γυμνάσιο. Αυτές οι στρατηγικές συμβάλλουν στη δημιουργία μιας στέρεας μαθηματικής βάσης, προετοιμάζοντας τους μαθητές για πιο περίπλοκα θέματα στη μετέπειτα εκπαίδευσή τους.

2.2 Ηλεκτρονικό μάθημα College Algebra and Problem Solving

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ 2ΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ	
Τίτλος Μαθήματος	College Algebra and Problem Solving
Σύντομη Περιγραφή	Το μάθημα καλύπτει τις βασικές αρχές της άλγεβρας και προετοιμάζει τον εκπαιδευόμενο για μελλοντικά μαθήματα ανάλυσης.
Σε ποιους Απευθύνεται	Σε φοιτητές που επιθυμούν να αναπτύξουν τις αλγεβρικές τους δεξιότητες και να προετοιμαστούν για μαθήματα ανάλυσης.
Μαθησιακά Αποτελέσματα	Οι μαθητές να μπορούν: • Να εφαρμόζουν τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης για να λύσουν μια σειρά προβλημάτων. • Να αναγνωρίζουν συναρτήσεις, πεδία ορισμού, τιμές, σημεία τομής γραφικών παραστάσεων και άλλες κρίσιμες αλγεβρικές έννοιες. • Να αποκτήσουν δεξιότητες που απαιτούνται για την επιτυχία σε μελλοντικά μαθήματα στην μαθηματική ανάλυση.
Κατηγορία Μαθήματος	Διαδικτυακό

Πλατφόρμα Διάθεσης (για τα Διαδικτυακά Μαθήματα)	edX
URL Μαθήματος	https://www.edx.org/learn/math/arizona-state-university-college-algebra-and-problem-solving
Προϋποθέσεις Επιτυχούς Ολοκλήρωσης	Ολοκλήρωση όλων των θεμάτων και επιτυχία στις αξιολογήσεις και την τελική εξέταση.
Είδος Πιστοποιητικού που Προσφέρει	Πιστοποιητικό Ολοκλήρωσης με χρέωση ($49 USD) ή πιστωτικές μονάδες οι οποίες θα μεταφερθούν στο πτυχίο ($600 USD).
Διάρκεια Μαθήματος	15 εβδομάδες
Εκτιμώμενος Φόρτος Εργασίας για την Ολοκλήρωση του Μαθήματος	8-9 ώρες διάβασμα ανά εβδομάδα. Συνολικά 120-135 ώρες
Γλώσσα	Αγγλικά
Προαπαιτούμενα	Δεν έχει προαπαιτούμενα
Εκπαιδευτικός Οργανισμός	Arizona State University
Εκπαιδευτής	**Adrian Sannier** (Chief Academic Technology Officer for EdPlus at Arizona State University) **Sue McClure** (Lecturer, School of Mathematical and Statistical Sciences at Arizona State University)
Οτιδήποτε άλλο χρήσιμο	Χρησιμοποιείται το εκπαιδευτικό σύστημα ALEKS (Assessment And Learning In Knowledge Spaces). Το ALEKS είναι ένα προσαρμοστικό εκπαιδευτικό σύστημα που

	χρησιμοποιείται για τη διδασκαλία και την αξιολόγηση των μαθηματικών. Χρησιμοποιεί έναν ειδικό αλγόριθμο για να προσαρμόζεται στις ατομικές ανάγκες του μαθητή, εντοπίζοντας τα επίπεδα γνώσης και τα κενά στις γνώσεις του. Βοηθά τους μαθητές να μάθουν με τον δικό τους ρυθμό, προσφέροντας στοχευμένη πρακτική και ανατροφοδότηση.

Σχόλιο: Σε αυτό το μάθημα τα σημεία προσοχής είναι τα κομμάτια της ύλης των μαθηματικών με τα οποία καταπιάνεται καθώς και το εκπαιδευτικό μοντέλο που χρησιμοποιεί.

Το μάθημα αυτό εμβαθύνει στις συναρτήσεις και εστιάζει στην επίλυση προβλημάτων. Οι στόχοι του μαθήματος είναι να προετοιμάσει τους μαθητές για μαθήματα όπως η ανάλυση, μέσω της κατανόησης θεμάτων όπως γραμμικές και τετραγωνικές συναρτήσεις, λογαριθμικές εξισώσεις και πολυωνυμικές συναρτήσεις. Δίνει έτσι εφόδια που χρειάζονται σε έναν μαθητή λυκείου για την εισαγωγή του στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, ενώ ταυτόχρονα είναι και ένα εφόδιο για την εκεί ακαδημαϊκή του πορεία.

Για να πετύχει αυτόν τον σκοπό χρησιμοποιεί το σύστημα μάθησης ALEKS. Το σύστημα μάθησης ALEKS (Assessment and Learning in Knowledge Spaces) είναι μια διαδικτυακή πλατφόρμα εκμάθησης που βασίζεται σε τεχνητή νοημοσύνη. Στόχος της είναι να προσφέρει μια εξατομικευμένη εκπαιδευτική εμπειρία, εντοπίζοντας τις αδυναμίες και τις ανάγκες του μαθητή. Χρησιμοποιώντας έναν αρχικό διαγνωστικό έλεγχο, το ALEKS προσαρμόζεται στο επίπεδο γνώσης του μαθητή, προσφέροντας στοχευμένες ασκήσεις και καθοδηγώντας την εκμάθηση σε ατομικό ρυθμό. Η πλατφόρμα διασφαλίζει την αφομοίωση της ύλης, αφού απαιτεί από τον μαθητή να κατακτήσει κάθε ενότητα πριν προχωρήσει στην επόμενη. Το μοντέλο ALEKS ενισχύει τη βαθιά κατανόηση και την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων. (Harati, 2021)

2.3 Ηλεκτρονικό Μάθημα Álgebra básica

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ 3ΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ	
Τίτλος Μαθήματος	Álgebra básica
Σύντομη Περιγραφή	Το μάθημα καλύπτει βασικές εφαρμογές της άλγεβρας και ποιο συγκεκριμένα την επίλυση εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού, την παραγοντοποίηση και τα πολυώνυμα
Σε ποιους Απευθύνεται	Μαθητές γυμνασίου και λυκείου
Μαθησιακά Αποτελέσματα	Οι μαθητές να μπορούν: • Να επιλύσουν μια εξίσωση 1ου ή 2ου βαθμού • Να παραγοντοποιήσουν ένα πολυώνυμο
Κατηγορία Μαθήματος	Διαδικτυακό
Πλατφόρμα Διάθεσης (για τα Διαδικτυακά Μαθήματα)	Coursera
URL Μαθήματος	https://www.coursera.org/learn/algebra-basica#about
Προϋποθέσεις Επιτυχούς Ολοκλήρωσης	Ολοκλήρωση όλων των ενοτήτων και επιτυχία στις αξιολογήσεις.
Είδος Πιστοποιητικού που Προσφέρει	Παρέχει πιστοποιητικό με δυνατότητα κοινοποίησης του σε πλατφόρμες όπως το LinkedIn.

Διάρκεια Μαθήματος	22 ώρες
Εκτιμώμενος Φόρτος Εργασίας για την Ολοκλήρωση του Μαθήματος	Δεν αναφέρει
Γλώσσα	Ισπανικά
Προαπαιτούμενα	Δεν χρειάζονται
Εκπαιδευτικός Οργανισμός	Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)
Εκπαιδευτής	Carlos Hernandez Elena de Oteyza Emma Lam
Οτιδήποτε άλλο χρήσιμο	

Σχόλιο: Πρόκειται για ένα μάθημα το οποίο καταπιάνεται με κλασικά ζητήματα που ταλανίζουν τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Χρήσιμο τόσο σε μαθητές γυμνασίου όσο και μαθητές λυκείου. Το επέλεξα γιατί πραγματεύεται κάποιους από τους ποιο σημαντικούς στόχους που θέτουν οι εκπαιδευτικοί στο μάθημα των μαθηματικών, όπως η ικανότητα επίλυσης εξισώσεων και η παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου.

2.4 Ηλεκτρονικό Μάθημα Precalculus: The Mathematics of Numbers, Functions and Equations

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ 4ΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ	
Τίτλος Μαθήματος	Precalculus: The Mathematics of Numbers, Functions and Equations
Σύντομη Περιγραφή	Το μάθημα αυτό προσφέρει εισαγωγή στα βασικά μαθηματικά που απαιτούνται για την κατανόηση της μαθηματικής ανάλυσης. Περιλαμβάνει θέματα όπως αριθμούς,

	συναρτήσεις, άλγεβρα, εξισώσεις και ανισότητες.
Σε ποιους Απευθύνεται	Μαθητές που θέλουν να ενισχύσουν τις γνώσεις τους ώστε να μπορέσουν να εισαχθούν στην μαθηματική ανάλυση.
Μαθησιακά Αποτελέσματα	Οι μαθητές να μπορούν να: • Γνωρίζουν την βασική αριθμητική, συμπεριλαμβανομένων της απόλυτης τιμής και των ριζών • Αναγνωρίζουν την τυπική σημειογραφία για τα σύνολα και τις πράξεις συνόλων • Κατανοούν τα στοιχεία της μαθηματικής σκέψης και των αποδείξεων • Κατατάσσουν τους τύπους συναρτήσεων και τα γραφήματά τους • Βρίσκουν ρίζες, να παραγοντοποιούν και διαιρούν πολυώνυμα • Λύνουν εξισώσεις και ανισότητες
Κατηγορία Μαθήματος	Διαδικτυακό
Πλατφόρμα Διάθεσης (για τα Διαδικτυακά Μαθήματα)	FutureLearn
URL Μαθήματος	https://www.futurelearn.com/courses/precalculus

Προϋποθέσεις Επιτυχούς Ολοκλήρωσης	Ολοκλήρωση όλων των ενοτήτων και επιτυχία στις αξιολογήσεις.
Είδος Πιστοποιητικού που Προσφέρει	Ψηφιακό Πιστοποιητικό Ολοκλήρωσης από το FutureLearn.
Διάρκεια Μαθήματος	5 εβδομάδες
Εκτιμώμενος Φόρτος Εργασίας για την Ολοκλήρωση του Μαθήματος	6 ώρες την εβδομάδα, συνολικά 30 ώρες
Γλώσσα	Αγγλικά
Προαπαιτούμενα	Βασικές γνώσεις άλγεβρας.
Εκπαιδευτικός Οργανισμός	University of Padova
Εκπαιδευτής	Francis Clarke Carlo Mariconda Alberto Tonolo Valentina Franceschi Francesco Mattiello
Οτιδήποτε άλλο χρήσιμο	

Σχόλιο: Το μάθημα στοχεύει να προετοιμάσει τους μαθητές για πιο προχωρημένες σπουδές στα μαθηματικά. Για τα ελληνικά δεδομένα θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι ένα δυνατό μάθημα για μαθητές που επιθυμούν να συμμετάσχουν στις πανελλαδικές εξετάσεις και επιδιώκουν ένα φρεσκάρισμα των γνώσεων τους. Εστιάζει σε βασικά θέματα όπως αριθμοί, συναρτήσεις και εξισώσεις. Αυτό το μάθημα διδάσκει ουσιώδεις έννοιες που είναι απαραίτητες για την κατανόηση της ανάλυσης και της άλγεβρας.

2.5 Ηλεκτρονικό Μάθημα Applications of Calculus

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ 5ΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ	
Τίτλος Μαθήματος	Applications of Calculus
Σύντομη Περιγραφή	Το μάθημα αυτό εξετάζει τις πρακτικές εφαρμογές του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού σε διάφορους τομείς όπως η φυσική, η βιολογία, η οικονομία και η μηχανική.
Σε ποιους Απευθύνεται	Μαθητές και φοιτητές που επιθυμούν να κατανοήσουν τις εφαρμογές του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού και πώς αυτές χρησιμοποιούνται σε πραγματικά προβλήματα. Είναι ιδιαίτερα κατάλληλο για μαθητές που ασχολούνται με το STEM και θέλουν να ενισχύσουν την κατανόησή τους σε έννοιες του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, προετοιμαζόμενοι για περαιτέρω σπουδές στο πανεπιστήμιο.
Μαθησιακά Αποτελέσματα	Οι μαθητές να μπορούν να: • Αναγνωρίζουν εξισώσεις και γραφήματα που έχουν όρια, καθώς και τον τύπο του ορίου και το πού υπάρχουν αυτά τα όρια. • Λύνουν εξισώσεις που περιλαμβάνουν παραγώγους.

	- Υπολογίζουν το εμβαδόν που περικλείεται από την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και τον άξονα χ΄χ χρησιμοποιώντας ολοκληρώματα. - Μοντελοποιούν προβλήματα του πραγματικού κόσμου που αφορούν ρυθμούς μεταβολής χρησιμοποιώντας τον διαφορικό λογισμό. - Μελετούν γραφήματα για να προσδιορίζουν εφαπτόμενες γραφικών παραστάσεων και ρυθμούς μεταβολής. - Λύνουν εξισώσεις που περιλαμβάνουν ολοκληρώματα. - Λύνουν εξισώσεις που περιλαμβάνουν όρια.
Κατηγορία Μαθήματος	Διαδικτυακό
Πλατφόρμα Διάθεσης (για τα Διαδικτυακά Μαθήματα)	FutureLearn
URL Μαθήματος	https://www.futurelearn.com/courses/applications-of-calculus
Προϋποθέσεις Επιτυχούς Ολοκλήρωσης	Ολοκλήρωση όλων των ενοτήτων και επιτυχία στις αξιολογήσεις.
Είδος Πιστοποιητικού που Προσφέρει	Ψηφιακό Πιστοποιητικό Ολοκλήρωσης από το FutureLearn.
Διάρκεια Μαθήματος	4 εβδομάδες

Εκτιμώμενος Φόρτος Εργασίας για την Ολοκλήρωση του Μαθήματος	3 ώρες την εβδομάδα, συνολικά 12 ώρες
Γλώσσα	Αγγλικά
Προαπαιτούμενα	Βασικές γνώσεις άλγεβρας.
Εκπαιδευτικός Οργανισμός	BoxPlay
Εκπαιδευτής	Η ομάδα της BoxPlay
Οτιδήποτε άλλο χρήσιμο	

Σχόλιο: Το συγκεκριμένο ηλεκτρονικό μάθημα είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον επειδή δίνει χρώμα στην άχρωμη μέχρι τώρα μαθηματική γνώση του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού μέσα από τις διάφορες εφαρμογές. Ο μαθητής στην Ελλάδα έχει συνηθίσει να αποκτά την συγκεκριμένη γνώση χωρίς να γνωρίζει την χρησιμότητά της και με μοναδικό στόχο την αξιοποίηση της για τις πανελλαδικές εξετάσεις. Οι μαθητές στο ελληνικό σχολείο αδυνατούν να αντιληφθούν τα μαθηματικά ως ένα εργαλείο στα χέρια των επιστημόνων το οποίο μοντελοποιεί την γνώση. Αυτή η σύνδεση επιτυγχάνεται εν μέρει στο πανεπιστήμιο. Αξίζει λοιπόν να δώσουμε μια προσοχή στο παρόν e-course γιατί επιχειρεί αυτή την σύνδεση επιστήμης- μαθηματικών στην λυκειακή βαθμίδα.

2.6 Ηλεκτρονικό μάθημα ImperialX: A-level Mathematics for Year 12 - Course 1: Algebraic Methods, Graphs and Applied Mathematics Methods

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ 6ΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ	
Τίτλος Μαθήματος	ImperialX: A-level Mathematics for Year 12 - Course 1: Algebraic Methods, Graphs and Applied Mathematics Methods

Σύντομη Περιγραφή	Το μάθημα αυτό ως στόχο την ανάπτυξη των απαιτούμενων δεξιοτήτων των φοιτητών του Imperial College London ώστε να επιτύχουν στις εξετάσεις του A- Level Maths. Ο εκπαιδευόμενος θα εξερευνήσει τα σημαντικότερα κεφάλαια για την βαθύτερη κατανόηση της διδακτέας ύλης και των τεχνικών με τις οποίες ήρθε σε επαφή κατά την διάρκεια του μαθήματος.
Σε ποιους Απευθύνεται	Μαθητές που θέλουν να ενισχύσουν τις γνώσεις τους ή να προετοιμαστούν κατάλληλα ώστε επιτύχουν στις εξετάσεις του μαθήματος.
Μαθησιακά Αποτελέσματα	Οι μαθητές να μπορούν να: • Βελτιώσουν την ευχέρεια και την ακρίβεια στη χρήση των νόμων των δεικτών και των ριζών σε διάφορους υπολογισμούς. • Μάθουν πώς να λύνουν τα είδη των ανισοτήτων που συνάντησαν στο επίπεδο A και διάφορους τρόπους για να τις αναπαραστήσουν. • Ανακαλύψουν πώς να διαιρούν οποιοδήποτε πολυώνυμο είτε με γραμμικό είτε με τετραγωνικό πολυώνυμο. • Μάθουν για τις πληροφορίες που βρίσκονται στις διάφορες μορφές της καρτεσιανής εξίσωσης ενός κύκλου και να χρησιμοποιούν αυτές για να

	λύσουν προβλήματα αναλυτικής γεωμετρίας. • Ερευνούν τους κύριους μετασχηματισμούς γραφημάτων: μετάθεση, μεγέθυνση και αντανάκλαση, και να χρησιμοποιούν αυτούς τους μετασχηματισμούς για να σχεδιάσουν νέα γραφήματα. • Κατανοήσουν τις φόρμουλες σταθερής επιτάχυνσης μέσω της απεικόνισης σε γραφήματα ταξιδιού, ταχύτητας, απόστασης και μετατόπισης σε σχέση με το χρόνο. • Εξερευνούν τις στατιστικές μεθόδους δειγματοληψίας και να αναγνωρίζουν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της κάθε μιας. • Μάθουν πώς να ερμηνεύουν δεδομένα που παρουσιάζονται σε διάφορες μορφές, συμπεριλαμβανομένων των διαγραμμάτων κουτιών, των καμπυλών αθροιστικής συχνότητας, των ιστογραμμάτων και των γραφημάτων στηλών.
Κατηγορία Μαθήματος	Διαδικτυακό
Πλατφόρμα Διάθεσης (για τα Διαδικτυακά Μαθήματα)	edX
URL Μαθήματος	https://www.edx.org/learn/math/imperial-college-london-a-level-mathematics-for-year-

	12-course-1-algebraic-methods-graphs-and-applied-mathematics-methods?index=product&queryID=1d347c0603cbedca468b73ff3b10c50b&position=6&results_level=second-level-results&term=Math&objectID=course-37a24f56-f624-41f2-859f-fda43f451e54&campaign=A-level+Mathematics+for+Year+12+-+Course+1%3A+Algebraic+Methods%2C+Graphs+and+Applied+Mathematics+Methods&source=edX&product_category=course&placement_url=https%3A%2F%2Fwww.edx.org%2Fsearch
Προϋποθέσεις Επιτυχούς Ολοκλήρωσης	Ολοκλήρωση όλων των ενοτήτων και επιτυχία στις αξιολογήσεις.
Είδος Πιστοποιητικού που Προσφέρει	Δεν αναφέρει
Διάρκεια Μαθήματος	7 εβδομάδες
Εκτιμώμενος Φόρτος Εργασίας για την Ολοκλήρωση του Μαθήματος	2 με 4 ώρες την εβδομάδα, συνολικά 14 με 28 ώρες.
Γλώσσα	Αγγλικά
Προαπαιτούμενα	Δεν έχει
Εκπαιδευτικός Οργανισμός	ImperialX
Εκπαιδευτής	Philip Ramsden Phil Chaffe

Οτιδήποτε άλλο χρήσιμο	Ως προς την διδακτέα ύλη, το μάθημα A-Level Maths σχετίζεται με πτυχία που βρίσκονται στο επιστημονικό πεδίο του STEM.

Σχόλιο: Το συγκεκριμένο μάθημα επιλέχθηκε διότι αναφέρεται αποκλειστικά σε προετοιμασία για εξετάσεις. Οι στόχοι και η ανάπτυξη του μαθήματος είναι αυστηρά συνδεδεμένη με την διδακτέα ύλη του μαθήματος και έχουν ως στόχο την επιτυχία του μαθητή στις εξετάσεις, εστιάζοντας στα κομβικά σημεία του μαθήματος, κάνοντας μια συγκροτημένη επανάληψη παράλληλα.

2.7 Ηλεκτρονικό Μάθημα UTAustinX: Discovery Precalculus: A Creative and Connected Approach

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ 7ΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ	
Τίτλος Μαθήματος	UTAustinX: Discovery Precalculus: A Creative and Connected Approach
Σύντομη Περιγραφή	Το μάθημα αυτό έχει ως στόχο την εμβάθυνση και εξέλιξη των γνώσεων των μαθητών στις συναρτήσεις, της γραφικές παραστάσεις και τις εξισώσεις, καθώς ο μαθητής μεταβαίνει από το λύκειο στο πανεπιστήμιο. Δίνεται έμφαση στην κατανόηση μαθηματικών ορισμών και την ανάπτυξη λογικών επιχειρημάτων.
Σε ποιους Απευθύνεται	Μαθητές που θέλουν να ενισχύσουν τις γνώσεις τους και να προετοιμαστούν κατάλληλα ώστε ανταπεξέλθουν στις

	απαιτήσεις των μαθηματικών σε πανεπιστημιακό επίπεδο.
Μαθησιακά Αποτελέσματα	Οι μαθητές να μπορούν να: • Κάνουν εικασίες, να κατασκευάζουν λογικά επιχειρήματα και να δικαιολογούν τη συλλογιστική τους. • Κατανοούν την έννοια της συνάρτησης στα μαθηματικά, τα χαρακτηριστικά και οι ιδιότητες των συναρτήσεων, και τον ρυθμό μεταβολής των συναρτήσεων. • Μοντελοποιούν κοινές σχέσεις και συναρτήσεις όπως γραμμικές, δύναμης, εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις χρησιμοποιώντας στατιστική παλινδρόμηση και μεθόδους μητρώων. • Εξερευνούν την άλγεβρα και τη γεωμετρίας και την σύνδεση μεταξύ των δύο στην αναλυτική γεωμετρία. • Γνωρίζουν ιδιότητες και εφαρμογές των εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων συμπεριλαμβανομένης της εκθετικής ανάπτυξης και φθοράς και της λογιστικής συνάρτησης. • Γνωρίζουν την ανάπτυξη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και ταυτοτήτων μαζί με τις εφαρμογές της τριγωνομετρίας. • Γνωρίζουν τα όρια και τον ρυθμό μεταβολής των συναρτήσεων ως

	προπομπό του Διαφορικού Λογισμού. • Εξοικειωθούν με άλλα συστήματα συντεταγμένων – μια διερεύνηση της παραμετροποίησης του επιπέδου και του πολικού συστήματος συντεταγμένων μαζί με την εξερεύνηση και χρήση των διανυσμάτων. • Κατανοήσουν τις ακολουθίες και τις σειρές, συμπεριλαμβανομένης της μεθόδου της επαγωγής. • Κατανοήσουν την βασική πιθανότητα και συνδυαστική που χρησιμοποιούνται σε μια διερεύνηση και ανάπτυξη του Διωνυμικού Θεωρήματος και των συνδέσεών του με το Τρίγωνο του Πασκάλ.
Κατηγορία Μαθήματος	Διαδικτυακό
Πλατφόρμα Διάθεσης (για τα Διαδικτυακά Μαθήματα)	edX
URL Μαθήματος	https://www.edx.org/learn/pre-calculus/the-university-of-texas-at-austin-discovery-precalculus-a-creative-and-connected-approach?index=product&queryID=b9c7570ef3c0f3908dfecd64039b79bc&position=10&results_level=second-level-results&term=Math&objectID=course-e21976ef-688f-4b94-9262-06ebf7451037&campaign=Discovery+Precalcu

	lus%3A+A+Creative+and+Connected+Approach&source=edX&product_category=course&placement_url=https%3A%2F%2Fwww.edx.org%2Fsearch
Προϋποθέσεις Επιτυχούς Ολοκλήρωσης	Ολοκλήρωση όλων των ενοτήτων και επιτυχία στις αξιολογήσεις.
Είδος Πιστοποιητικού που Προσφέρει	Δεν αναφέρει
Διάρκεια Μαθήματος	15 εβδομάδες
Εκτιμώμενος Φόρτος Εργασίας για την Ολοκλήρωση του Μαθήματος	10 ώρες την εβδομάδα, συνολικά 150 ώρες.
Γλώσσα	Αγγλικά
Προαπαιτούμενα	Πολύ καλή γνώση Άλγεβρας κολεγιακού επιπέδου
Εκπαιδευτικός Οργανισμός	UTAustinX
Εκπαιδευτής	Mark L. Daniels Karen E. Smid Jeremiah W. Lucas
Οτιδήποτε άλλο χρήσιμο	

Σχόλιο: Το μάθημα καταπιάνεται με κομμάτια των μαθηματικών από τα οποία ελάχιστα διδάσκονται στο ελληνικό σχολείο. Συνήθως με αυτά ασχολούνται ως φοιτητές οι Έλληνες. Συνεπώς είναι ένα e-course πολύ διαφορετικό από τα άλλα. Αναφέρεται σε μια διαφορετική βαθμίδα εκπαίδευσης, την τριτοβάθμια για τα ελληνικά δεδομένα, και καταπιάνεται με θεμελιώδεις έννοιες των μαθηματικών, πολύ χρήσιμες για τους φοιτητές. Αν είναι και ποιοτικά βαθύ τότε βάζει ισχυρά θεμέλια στον εκπαιδευόμενο και τον κάνει ικανό να ανταποκριθεί στις προκλήσεις των μαθηματικών του ελληνικού πανεπιστημίου. Εδώ να πούμε ότι καλύπτεται πολύ μεγάλο φάσμα των μαθηματικών, από εισαγωγή στην στατιστική και την συνδυαστική μέχρι την άλγεβρα και την ανάλυση. Συνεπώς μπορούμε να εκφράσουμε ένα ερώτημα για την συνοχή αυτού του μαθήματος ως προς την σύνδεση των επιμέρους ενοτήτων του. Δεν παύει όμως να μας ιντριγκάρει με την διαφορετικότητά του και την θεματολογία του.

2.8 Ηλεκτρονικό Μάθημα Β' Γυμνασίου

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ 8ΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ	
Τίτλος Μαθήματος	Β' Γυμνασίου
Σύντομη Περιγραφή	Το μάθημα καταπιάνεται με τα μαθηματικά που διδάσκονται στην Β' Γυμνασίου. Περιλαμβάνει 6 ενότητες με θεωρία και ασκήσεις από όλη την ύλη Παράλληλα ο εκπαιδευόμενος αξιολογείται με test στο τέλος κάποιων ενοτήτων.
Σε ποιους Απευθύνεται	Μαθητές της Β' Γυμνασίου
Μαθησιακά Αποτελέσματα	Δεν αναφέρει μαθησιακά αποτελέσματα
Κατηγορία Μαθήματος	Διαδικτυακό
Πλατφόρμα Διάθεσης (για τα Διαδικτυακά Μαθήματα)	Khan Academy
URL Μαθήματος	https://el.khanacademy.org/math/cc-eighth-grade-math
Προϋποθέσεις Επιτυχούς Ολοκλήρωσης	Ολοκλήρωση όλων των ενοτήτων και επιτυχία στις αξιολογήσεις όπου αυτές υπάρχουν.

Είδος Πιστοποιητικού που Προσφέρει	Δεν αναφέρει
Διάρκεια Μαθήματος	Δεν αναφέρει. Είναι μάθημα το οποίο ο εκπαιδευόμενος έχει την δυνατότητα να το προσαρμόσει στον δικό του ρυθμό.
Εκτιμώμενος Φόρτος Εργασίας για την Ολοκλήρωση του Μαθήματος	Δεν αναφέρει
Γλώσσα	Ελληνικά
Προαπαιτούμενα	Δεν χρειάζονται
Εκπαιδευτικός Οργανισμός	Khan Academy
Εκπαιδευτής	Η ομάδα του Khan Academy
Οτιδήποτε άλλο χρήσιμο	

Σχόλιο: το συγκεκριμένο μάθημα επιλέχθηκε για την ομοιότητα που εμφανίζει με το μάθημα που δημιουργείται στην παρούσα Εργασία. Το μάθημα αυτό καλύπτει παρόμοια ύλη με αυτή που διδάσκεται στο ελληνικό σχολείο. Υπάρχουν αρκετές ομοιότητες αλλά και κάποιες διαφορές. Για παράδειγμα στην Β' Γυμνασίου δεν διδάσκονται τα γραμμικά συστήματα στον τομέα της άλγεβρας, ενώ ο τομέας της γεωμετρίας είναι πλουσιότερος στο ελληνικό σχολείο όπου πέρα από το Πυθαγόρειο θεώρημα, διδάσκεται η τριγωνομετρία, η εύρεση εμβαδού, η μέτρηση κύκλου και ζητήματα στερεομετρίας. Η ύλη αναπτύσσεται με διαφορετική δομή από αυτή του σχολικού βιβλίου. Η δομή της ύλης έχει ροή και προσφέρει μια ολοκληρωμένη ματιά στον εκπαιδευόμενο, καλλιεργώντας του σφαιρική αντίληψη ειδικά στην Ενότητα 1 Αριθμοί και Πράξεις. Το μάθημα προσφέρεται για την προετοιμασία των μαθητών ενόψει των εξετάσεων. Παράλληλα χρησιμοποιεί αρκετά διαδραστικά μέσα, για μεγαλύτερη αλληλεπίδραση του εκπαιδευόμενου με τις διδασκόμενες έννοιες.

2.9 Συμπεράσματα

Κατά την έρευνα που έγινε, παρατηρήθηκε μεγάλο πλήθος ηλεκτρονικών μαθημάτων στον τομέα των Μαθηματικών. Τα παραπάνω μαθήματα ξεχώρισαν ανάμεσά τους για τους μαθησιακούς στόχους που έθεταν, το αντικείμενο που μελετούσαν, τον σκοπό τους, τις στρατηγικές που ακολουθούν και την δομή οργάνωσης της παρεχόμενης γνώσης. Εστιάζουν σε μαθητές τόσο του γυμνασίου και του λυκείου, όσο και της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, καλύπτοντας βασικές και προχωρημένες μαθηματικές έννοιες. Τα μαθήματα αυτά αξιοποιούν διαδραστικές πλατφόρμες όπως η EdX, η Coursera, το FutureLearn και το Khan Academy, προσφέροντας δομημένη μάθηση με πιστοποιητικά ολοκλήρωσης και επαναληπτικά test.

Η αξιοποίηση της άλγεβρας σε τέτοιες πλατφόρμες δείχνει την ανάγκη για την ύπαρξη διαδραστικών μαθημάτων που παρέχουν πρακτικές εφαρμογές, κάτι που δεν περιορίζεται μόνο στην κατανόηση της θεωρίας αλλά επεκτείνεται και στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων. Το μοντέλο μάθησης που προωθούν τα ηλεκτρονικά μαθήματα αυτά προσανατολίζεται στη σφαιρική εκμάθηση των μαθηματικών εννοιών, δίνοντας έμφαση στην κατανόηση της ύλης και όχι απλά στην αποστήθιση (Blanton et al., 2018). Μέσα από διαφορετικές προσεγγίσεις αναδεικνύεται η αναγκαιότητα της εισόδου της διδασκαλίας των μαθηματικών στον ψηφιακό κόσμο. Παράλληλα αποδεικνύεται ότι οι σύγχρονες τεχνολογίες είναι σύμμαχος και όχι τροχοπέδη στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης σε παιδιά και ενήλικους (Hole & Kjærnsli, 2016).

Από τα παραπάνω, γίνεται φανερή η ανάγκη για τη σχεδίαση και υλοποίηση ενός MOOC με θέμα την Άλγεβρα της Β' Γυμνασίου. Οι μαθητές σε αυτή τη φάση της εκπαίδευσης βρίσκονται σε ένα κρίσιμο σημείο, καθώς η άλγεβρα είναι ένα από τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που θα χρειαστούν σε προχωρημένα μαθήματα τόσο στα μαθηματικά όσο και σε άλλες επιστήμες. Ένα καλά οργανωμένο MOOC μπορεί να καλύψει την ανάγκη τους για εμπεριστατωμένη γνώση, αξιοποιώντας διαδραστικές ασκήσεις, βίντεο, και επαναληπτικά test.

Ειδικά μετά το 8^{ο} Ηλεκτρονικό Μάθημα, η υλοποίηση ενός τέτοιου μαθήματος είναι απαραίτητη καθώς μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να γεφυρώσουν πιθανά κενά στη γνώση τους, προσφέροντας μια πρόσβαση σε δομημένο εκπαιδευτικό υλικό που ενσωματώνει καινοτόμες μεθόδους μάθησης. Τέλος, δεδομένου ότι η άλγεβρα αποτελεί τη βάση για ανώτερα μαθηματικά, η δημιουργία ενός MOOC μπορεί να συμβάλει στην ενίσχυση των ακαδημαϊκών επιδόσεων και την προετοιμασία των μαθητών για τις επόμενες τάξεις (Hole & Kjærnsli, 2016). Στα επόμενα κεφάλαια παρουσιάζεται η σχεδίαση και υλοποίηση ενός MOOC στον τομέα των μαθηματικών της Β' Γυμνασίου με σκοπό την προετοιμασία των μαθητών για την συμμετοχή τους σε προαγωγικές εξετάσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΣΧΕΣΙΑΣΗ ΤΟΥ ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Η εκπαίδευση είναι ένας από τους βασικούς πυλώνες της ανάπτυξης τόσο σε προσωπικό όσο και σε επαγγελματικό επίπεδο. Στον σύγχρονο κόσμο, η τεχνολογία έχει ανοίξει νέους δρόμους και ευκαιρίες για την απόκτηση γνώσεων και δεξιοτήτων, με τα Μαζικά Ανοικτά Διαδικτυακά Μαθήματα (MOOC) να αποτελούν μια από τις πιο καινοτόμες και δημοφιλείς μεθόδους (Buhl et al., 2023; García-Peñalvo & Rojas, 2018). Τα MOOC προσφέρουν σημαντικά πλεονεκτήματα και έχουν τη δυνατότητα να ξεπεράσουν πολλές από τις προκλήσεις που αντιμετωπίζουν οι παραδοσιακές μορφές εκπαίδευσης (Hew & Cheung, 2014).

Πλεονεκτήματα των MOOC:

1. Προσβασιμότητα και Ευελιξία: Τα MOOC είναι διαθέσιμα σε οποιονδήποτε με πρόσβαση στο διαδίκτυο, ανεξαρτήτως γεωγραφικής θέσης, οικονομικής κατάστασης ή μορφωτικού επιπέδου. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές μπορούν να έχουν πρόσβαση σε κορυφαία εκπαιδευτικά υλικά και διδασκαλίες από τα καλύτερα πανεπιστήμια και εκπαιδευτικά ιδρύματα παγκοσμίως (Siemens, 2013). Επιπλέον, τα MOOC προσφέρουν ευελιξία στο ωράριο, επιτρέποντας στους μαθητές να προσαρμόζουν τη μάθηση στις προσωπικές και επαγγελματικές τους υποχρεώσεις (Khalil & Ebner, 2016).
2. Ποικιλία Θεμάτων και Ειδικοτήτων: Τα MOOC καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα θεμάτων και ειδικοτήτων, από τις φυσικές επιστήμες και την τεχνολογία μέχρι τις ανθρωπιστικές και τις κοινωνικές επιστήμες (Buhl et al., 2023). Αυτή η ποικιλία επιτρέπει στους μαθητές να επιλέξουν τα μαθήματα που ταιριάζουν καλύτερα στις ανάγκες και τα ενδιαφέροντά τους, ενισχύοντας την προσωπική και επαγγελματική τους ανάπτυξη (García-Peñalvo & Rojas, 2018).
3. Επικαιροποίηση Γνώσεων και Δεξιοτήτων: Οι ταχύτατες αλλαγές στον επαγγελματικό κόσμο απαιτούν συνεχή επικαιροποίηση των γνώσεων και δεξιοτήτων. Τα MOOC επιτρέπουν στους επαγγελματίες να παραμένουν ενημερωμένοι με τις τελευταίες εξελίξεις στον τομέα τους, αποκτώντας νέες γνώσεις και δεξιότητες που είναι απαραίτητες για την επαγγελματική τους επιτυχία (Hew & Cheung, 2014).
4. Οικονομική Αποδοτικότητα: Σε πολλές περιπτώσεις, τα MOOC προσφέρονται δωρεάν ή με χαμηλό κόστος, καθιστώντας την εκπαίδευση πιο προσιτή σε όλους

(Siemens, 2013). Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό για άτομα που δεν μπορούν να επωμιστούν τα υψηλά κόστη της παραδοσιακής εκπαίδευσης, όπως τα δίδακτρα πανεπιστημίων ή τα κόστη μετακίνησης και διαβίωσης (Khalil & Ebner, 2016).

Παρά τα πλεονεκτήματα, τα MOOC αντιμετωπίζουν και ορισμένες προκλήσεις που πρέπει να ληφθούν υπόψη για την πλήρη αξιοποίησή τους:

1. Έλλειψη Προσωπικής Επαφής: Η απουσία άμεσης επικοινωνίας με καθηγητές και συμμαθητές μπορεί να είναι ένα σημαντικό μειονέκτημα για μερικούς μαθητές (García-Peñalvo & Rojas, 2018). Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος, οι πλατφόρμες MOOC έχουν αναπτύξει διάφορα εργαλεία, όπως φόρουμ συζητήσεων, ομαδικές εργασίες και ζωντανές συνεδρίες, που προωθούν την αλληλεπίδραση και τη συνεργασία μεταξύ των συμμετεχόντων (Hew & Cheung, 2014).
2. Αυτοπειθαρχία και Αυτοδιαχείριση: Η επιτυχής ολοκλήρωση των MOOC απαιτεί υψηλό επίπεδο αυτοπειθαρχίας και αυτοδιαχείρισης, καθώς οι μαθητές πρέπει να οργανώσουν το χρόνο τους και να διατηρήσουν την αφοσίωσή τους στο μάθημα χωρίς την καθοδήγηση και την επίβλεψη ενός καθηγητή (Siemens, 2013). Για την ενίσχυση αυτών των δεξιοτήτων, πολλές πλατφόρμες προσφέρουν εργαλεία διαχείρισης χρόνου και υπενθυμίσεις προόδου (Khalil & Ebner, 2016).
3. Ποιότητα και Αναγνώριση: Η ποιότητα των MOOC μπορεί να ποικίλλει σημαντικά, και η αναγνώριση των πιστοποιητικών που παρέχουν δεν είναι πάντοτε εγγυημένη (García-Peñalvo & Rojas, 2018). Είναι σημαντικό οι μαθητές να επιλέγουν μαθήματα από αξιόπιστες πλατφόρμες και ιδρύματα και να αξιοποιούν τα προσφερόμενα πιστοποιητικά και διαπιστεύσεις που είναι αναγνωρισμένα από τους εργοδότες και τα εκπαιδευτικά ιδρύματα (Hew & Cheung, 2014).
4. Ψηφιακός Αποκλεισμός: Ορισμένα άτομα μπορεί να μην έχουν πρόσβαση στις απαραίτητες τεχνολογικές υποδομές, όπως γρήγορο διαδίκτυο ή κατάλληλες συσκευές. Η αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος απαιτεί παγκόσμια συνεργασία και επενδύσεις σε υποδομές για την εξασφάλιση ισότιμης πρόσβασης στην ψηφιακή εκπαίδευση (Khalil & Ebner, 2016).

Με δεδομένα αυτά, η υλοποίηση ενός MOOC στη σχολική βαθμίδα της Β’ Γυμνασίου μπορεί να αποφέρει πολλά οφέλη.

Από την μία, η συνεχής υποβάθμιση του δημόσιου σχολείου μέσα από την υποστελέχωση των μονάδων, τα αναχρονιστικά σχολικά εγχειρίδια τα οποία δεν ικανοποιούν τις απαιτήσεις των μαθημάτων και το συνεχές κόψιμο κονδυλίων που αφορούν την εκπαίδευση, μεταφέρει την μαθησιακή διαδικασία εκτός των σχολικών ωρών. Από την άλλη, μέσα στην οικονομική κρίση, οι οικονομικές δυνατότητες της οικογένειας να παρέχει μια συγκροτημένη βοήθεια και υποστήριξη στην μαθησιακή δραστηριότητα του παιδιού έχουν υποστεί μεγάλες μειώσεις. Ο γονέας εργάζεται περισσότερες ώρες για να ενισχύσει το οικογενειακό εισόδημα με αποτέλεσμα να μην μπορεί να είναι παρών στο διάβασμα του παιδιού. Σε αυτό πλέον συμβάλει και διαφορά των ωραρίων μεταξύ σχολείου και ιδιωτικού τομέα, το οχτάωρο 9-5 έχει επικρατήσει έναντι του παραδοσιακού 7-3 που συμβάδιζε με το σχολικό ωράριο. Η γιγάντωση της ιδιωτικής εκπαίδευσης, είτε φροντιστηριακής είτε με την μορφή κέντρων μελέτης είναι μια πραγματικότητα.

Σε αυτήν την πραγματικότητα ο μεγαλύτερος όγκος μαθητών, αυτός των χαμηλών κοινωνικών στρωμάτων, πετιέται εκτός της μαθησιακής δραστηριότητας αφού για οικονομικούς λόγους δεν μπορεί να συμβαδίσει. Τα MOOC απαντούν στην ανάγκη αυτών των μαθητών.

Στην βαθμίδα της Β' Γυμνασίου, όπου χρειάζεται να μην αφήνουν μαθησιακά κενά οι μαθητές, η επιλογή ενός δωρεάν διαδικτυακού μαθήματος το οποίο το προσαρμόζει ο μαθητής στις ανάγκες του και στο ρυθμό του είναι μια ρεαλιστική επιλογή. Οι μαθητές σε αυτή την ηλικία είναι πλήρως εξοικειωμένοι με την τεχνολογία και όλοι σχεδόν διαθέτουν ένα ηλεκτρονικό μέσο με το οποίο μπορούν να πάρουν μέρος σε ένα τέτοιο e-course.

Το μόνο τροχοπέδη σε αυτή την διαδικασία είναι η δυνατότητα πρόσβασης του μαθητή στο διαδίκτυο, είτε λόγω γεωγραφικών περιορισμών είτε λόγω οικονομικών. Σε κάθε περίπτωση όμως οι δυνατότητες υπέρβασης των προβλημάτων αυτών μας δίνουν την ευκαιρία να σταθούμε μπροστά στις δυνατότητες της εκπαιδευτικής τεχνολογίας. Μας δίνουν επίσης την ευκαιρία να αναρωτηθούμε για το δικαίωμα στην γνώση και την δωρεάν διανομή της με την βοήθεια της τεχνολογίας.

Εκπαιδευτικός Σχεδιασμός MOOC

3.1 Γενικές Πληροφορίες MOOC

https://mathalgebra.edunext.io/courses/course-v1:mathalgebra+c1+2025_T1/about

3.1.1 Τίτλος MOOC

Μια σύντομη ματιά στην Άλγεβρα της Β' Γυμνασίου: Επανάληψη στη Θεωρία και τις Ασκήσεις

3.1.2 Δημιουργός MOOC

Βουτσίνος Αντώνης

3.1.3 Συνοπτική Περιγραφή MOOC

Το μάθημα «Μια σύντομη ματιά στην Άλγεβρα της Β' Γυμνασίου: Επανάληψη στη Θεωρία και τις Ασκήσεις» αναφέρεται σε μαθητές της Β' Γυμνασίου. Βασικός στόχος του μαθήματος είναι η γρήγορη και πληρέστερη επανάληψη της διδακτέας και εξεταστέας ύλης της Άλγεβρας της Β' Γυμνασίου ενόψει των εξετάσεων του Ιουνίου και του Σεπτεμβρίου. Ο μαθητής παρακολουθώντας το μάθημα θα έχει την δυνατότητα να ανασύρει διδαγμένες έννοιες, να εμβαθύνει σε αυτές και να καλύψει γνωστικά κενά. Στο παρόν μάθημα ο μαθητής θα συναντήσει αναλυτικά γραμμένη και παρουσιασμένη την θεωρία, με την χρήση διαδραστικών μέσων, των τεσσάρων κομβικών κεφαλαίων, στην οποία θα κληθεί να αξιολογήσει τις γνώσεις του μέσα από ειδικά διαμορφωμένες ερωτήσεις και ασκήσεις. Ταυτόχρονα θα αξιολογηθεί και για την χρήση της σε απλές εφαρμογές και ασκήσεις. Όλες οι ασκήσεις και ερωτήσεις θα συνοδεύονται από την κατάλληλη ανατροφοδότηση ώστε ο μαθητής να καταφέρει να μάθει μέσα από τα λάθη του.

3.1.4 Διάρκεια MOOC

Το πρόγραμμα διαρκεί 18 ώρες και μπορεί να ολοκληρωθεί σε 6-8 ημέρες.

Εκτιμώμενος φόρτος εργασίας για το σπίτι είναι 10 ώρες συνολικά (3 ώρες για κάθε διδακτική ενότητα και μια ώρα αφιερωμένη στην επανάληψη πριν την τελική εξέταση)

3.2 Μαθησιακά αποτελέσματα (ΜΑ) MOOC

Ο/Η εκπαιδευόμενος/η μετά την παρακολούθηση του MOOC θα είναι ικανός/η να:

ΜΑ1[Apply]: Εκτελεί πράξεις με ρητούς αριθμούς και να εφαρμόζει τις ιδιότητές τους

Το **ΜΑ1** αναλύεται σε επιμέρους ΜΑ, ως εξής:

- **ΜΑ1.1:** Εφαρμόσει τις ιδιότητές τους.
- **ΜΑ1.2:** Εκτελέσει πράξεις με ρητούς αριθμούς.

- **ΜΑ1.3:** Εφαρμόσει τις ιδιότητες των δυνάμεων και να υπολογίσει αριθμητικές παραστάσεις

ΜΑ2 [Apply]: Λύσει εξισώσεις 1ου Βαθμού και προβλήματα

Το **ΜΑ2** αναλύεται σε επιμέρους ΜΑ, ως εξής:

- **ΜΑ2.1:** Υπολογίζει αλγεβρικές παραστάσεις και να εφαρμόζει την επιμεριστική ιδιότητα
- **ΜΑ2.2:** Λύνει εξισώσεις 1ου βαθμού
- **ΜΑ2.3:** Μοντελοποιεί προβλήματα πρακτικής αριθμητικής και γεωμετρίας σε εξισώσεις 1ου βαθμού

ΜΑ3 [Understand]: υπολογίζει τετραγωνικές ρίζες και να εκτελεί πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

Το **ΜΑ3** αναλύεται σε επιμέρους ΜΑ, ως εξής:

- **ΜΑ3.1:** Υπολογίζει τετραγωνικές ρίζες
- **ΜΑ3.2:** Ξεχωρίζει τους άρρητους από τους ρητούς αριθμούς
- **ΜΑ3.3:** Επιλύει προβλήματα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών

ΜΑ4 [Understand/Apply/Create]: Αναγνωρίζει μια συνάρτηση, να εφαρμόζει τις ιδιότητες τριών βασικών συναρτήσεων καθώς και να τις σχεδιάζει σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Το **ΜΑ4** αναλύεται σε επιμέρους ΜΑ, ως εξής:

- **ΜΑ4.1:** Κατανοεί τι ονομάζουμε συνάρτηση
- **ΜΑ4.2:** Εντοπίζει σημεία σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων
- **ΜΑ4.3:** Εφαρμόζει τις ιδιότητες των βασικών συναρτήσεων y=ax,y=ax+β,y=a/x, και να μπορεί να τις σχεδιάζει.

Τα μαθησιακά αποτελέσματα διατυπώθηκαν λαμβάνοντας υπόψη:

- Την διδακτέα ύλη, όπως αυτή περιγράφεται από το Υπουργείο Παιδείας. (Κλίμακα (n.d))
- Τις οδηγίες του Υπουργείου Παιδείας για την διδασκαλία των μαθηματικών στην Β’ Γυμνασίου. (Κλίμακα (n.d))

- Τον τρόπο διδασκαλίας του μαθήματος στο σχολείο (ο καταμερισμός της ύλης από τους εκπαιδευτικούς, που δίνεται μεγαλύτερη προσοχή, η συνήθης ύλη εξετάσεων)
- Τις βασικές γνώσεις τις οποίες χρειάζεται να κατέχει ο μαθητής με το πέρας της Β' Γυμνασίου.

3.3 Αξιολόγηση micro-MOOC

ΕργΑξιολ1: [Αυτό-αξιολόγηση με τη χρήση εργασίας ανοικτής απάντησης – Open Response Assessment (ORA). Στο τέλος κάθε μικρό- Μαθήματος, υπάρχει πάντα μία τέτοια εργασία ανοικτής απάντησης]. Ο/Η εκπαιδευόμενος/η λύνει ασκήσεις που του έχουν δοθεί και ανεβάζει τις απαντήσεις του στην εφαρμογή, είτε σε μορφή εικόνας είτε σε μορφή pdf. Ο εκπαιδευτής τις διορθώνει και τις βαθμολογεί βάση ρουμπρίκας αξιολόγησης που έχει καταρτιστεί. Στο τέλος κοινοποιείται ο βαθμός στο εκπαιδευόμενο.

ΕργΑξιολ2: [αυτό-αξιολόγηση] Για την αυτό-αξιολόγηση έχουν επιλεγεί mini-quiz διαφόρων τύπων, όπως Numerical Input, Text Input, Multiple Choice Questions (MCQs)

ΕργΑξιολ3: [Τελική Αξιολόγηση] Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής (Multiple Choice Questions, MCQs) και ερωτήσεις Numerical Input που βασίζονται σε συνδυαστικές πρακτικές δραστηριότητες. Συγκεκριμένα οι ερωτήσεις δομούνται σε τρία συνδυαστικά θέματα, ένα θεωρίας και δυο ασκήσεων, από όλη την διδακτέα ύλη. Έτσι αξιολογούνται η κατανόηση και οι δεξιότητες των εκπαιδευομένων, επιτρέποντας τους να εφαρμόσουν τις γνώσεις που έχουν αποκτήσει σε όλη την διάρκεια του μαθήματος - Αξιολογεί (τελικά) όλα τα ΜΑ του MOOC.

3.4 Προ απαιτούμενες Ικανότητες Εκπαιδευομένων

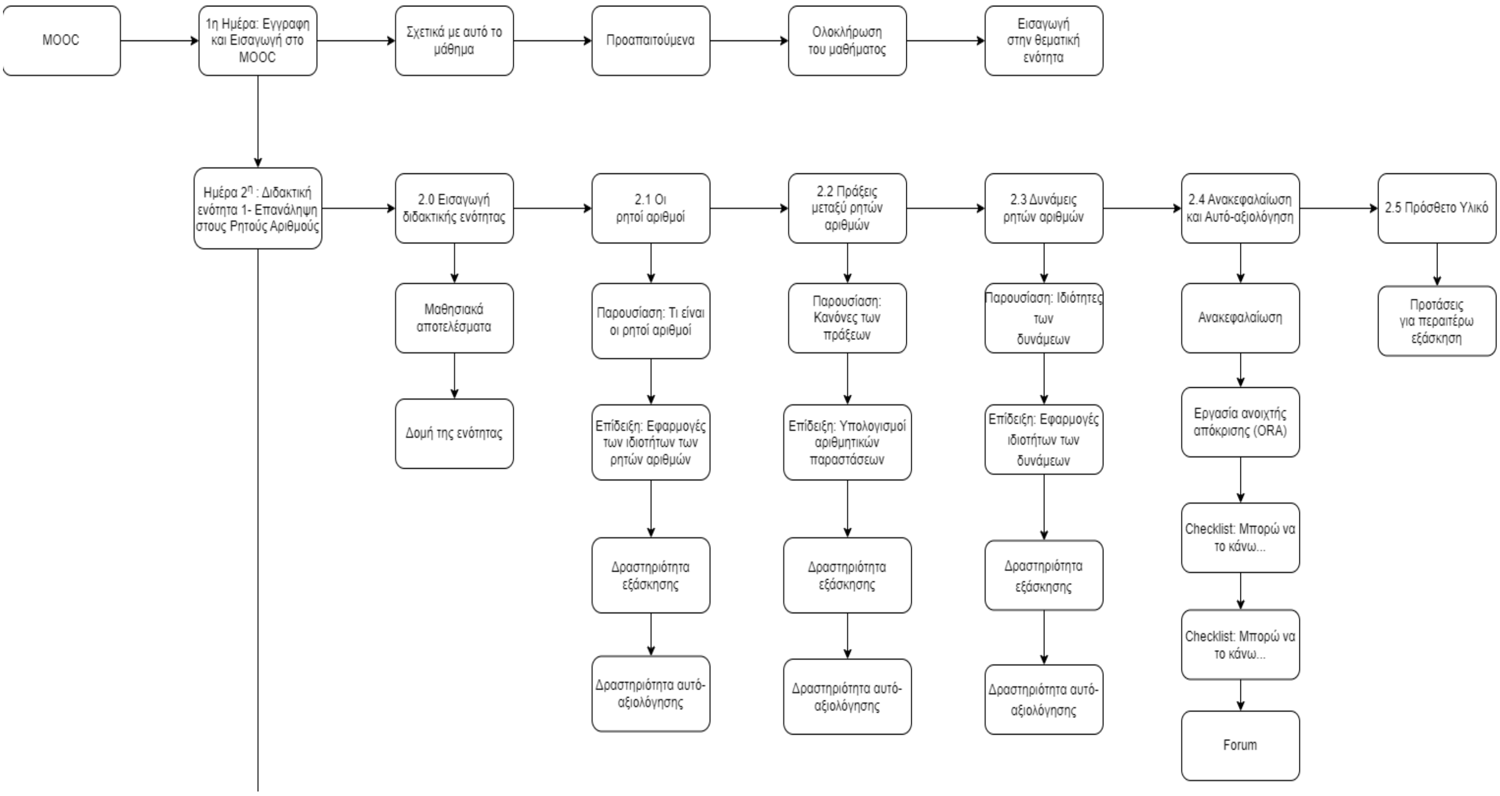
Το MOOC αφορά την Άλγεβρα που διδάσκεται στην Β' Γυμνασίου, ο/η εκπαιδευόμενος/η θα πρέπει να είναι ήδη ικανός/η να:

Κατέχει τις βασικές γνώσεις μαθηματικών με τις οποίες ασχολήθηκε κατά την διάρκεια του Δημοτικού και στην Α' Γυμνασίου. Ποιο αναλυτικά ο/η εκπαιδευόμενος/η να είναι ικανός να:

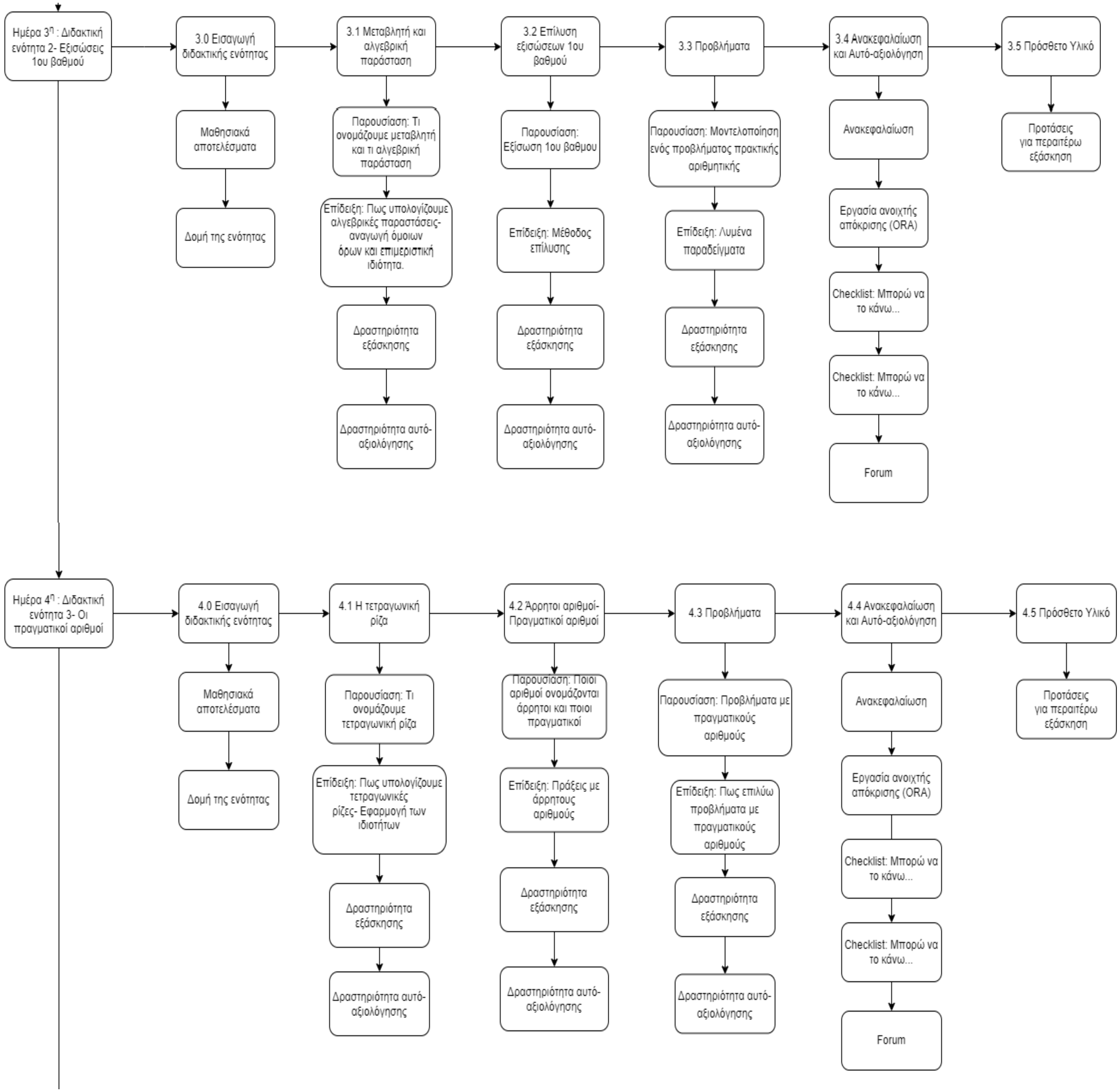
- Εκτελεί πράξεις κάθετα και οριζόντια με φυσικούς αριθμούς.
- Εκτελεί πράξεις σε αριθμητική παράσταση σύμφωνα με την προτεραιότητα των πράξεων.

- Βρίσκει το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο και τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη δύο ή περισσοτέρων φυσικών αριθμών.
- Συγκρίνει δυο κλάσματα.
- Εκτελεί πράξεις με κλάσματα.
- Κάνει ένα κλάσμα ανάγωγο.
- Λύνει προβλήματα πρακτικής αριθμητικής.

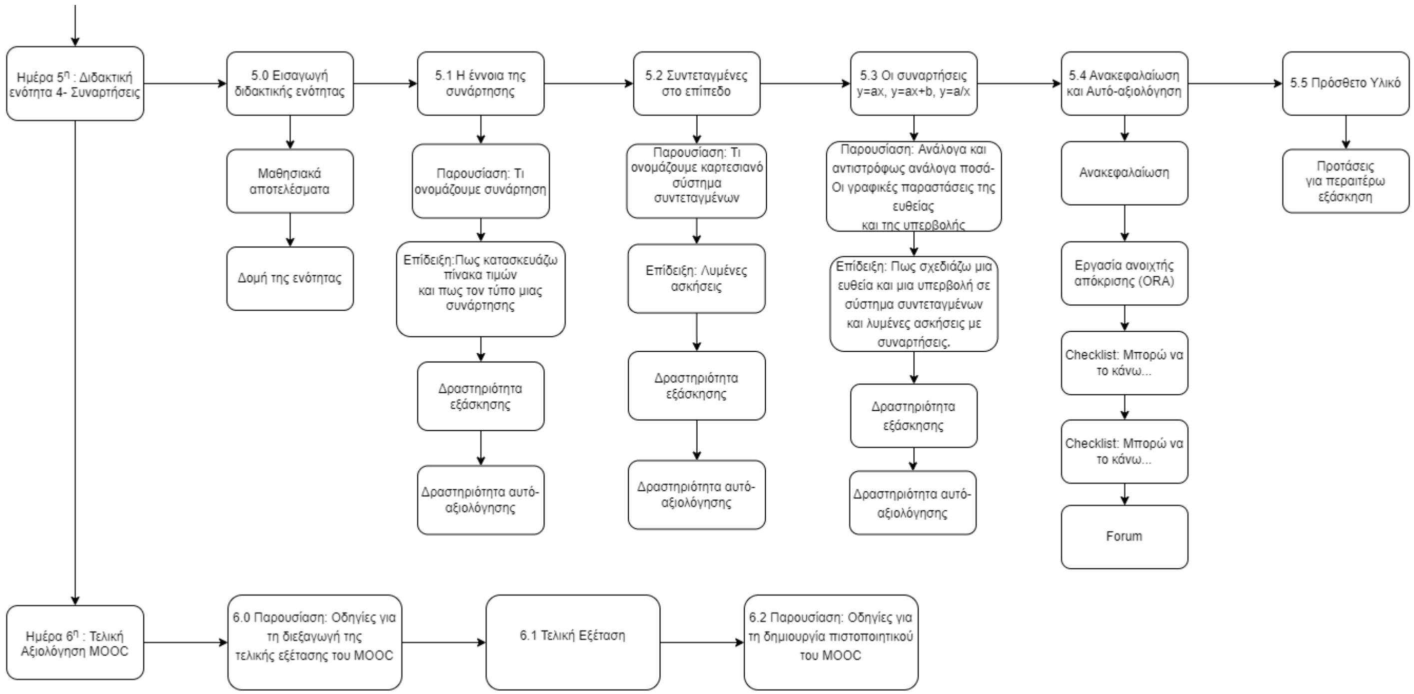
3.5 Γραφική αναπαράσταση εκπαιδευτικού σχεδιασμού MOOC



Εικόνα 1: Γραφική αναπαράσταση μαθήματος- Ημέρες 1η και 2η



Εικόνα 2: Γραφική αναπαράσταση μαθήματος- Ημέρες 3η, 4η



Εικόνα 3: Γραφική αναπαράσταση μαθήματος- Ημέρες $5^{η}$, $6^{η}$

3.6 Περιγραφή εκπαιδευτικού σχεδιασμού του MOOC

Ο παρακάτω πίνακας βασίστηκε στη δομή και το περιεχόμενο του πίνακα που δόθηκε ως Υποδειγματική λύση για την Εργασία 4, του μαθήματος «ΨΣ- ΗΜ- 721 Εκπαιδευτική Τεχνολογία», του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Ηλεκτρονική Μάθηση». (Μουγιάκου, 2024)

ID Δραστηριότητας	Περιγραφή Εκπαιδευτικής Δραστηριότητας	Ψηφιακές Τεχνολογίες	Εκτίμηση Ενδεικτικής Χρονικής Διάρκειας Εκπαιδευτικής Δραστηριότητας (σε λεπτά)	Σύνδεση με Μαθησιακά Αποτελέσματα
Ημέρα 1η: Εγγραφή και Εισαγωγή στο MOOC				
1.1	Σχετικά με αυτό το μάθημα			
1.1.1	**[Παρουσίαση]** Καλωσόρισμα Welcome video https://youtu.be/1OWOWhK8j8c Ένα μικρό video καλωσορίσματος φτιαγμένο στο Vidnoz διάρκειας 1:14 λεπτών	video	2	
1.1.2	**[Παρουσίαση]** Εισαγωγή- Σκοπός	Υπερκείμενο	2	

	Σύντομο κείμενο στο οποίο περιγράφεται ο σκοπός του MOOC και παρουσιάζεται σύντομα η φιλοσοφία του μαθήματος.			
1.1.3	**[Παρουσίαση]** Μαθησιακά Αποτελέσματα Παρουσιάζονται αναλυτικά τα μαθησιακά αποτελέσματα του MOOC ταξινομιμένα κατά Bloom. Κάθε μαθησιακό αποτέλεσμα αναλύεται σε τρία απλούστερα τα οποία παρουσιάζονται στον μαθητή.	Υπερκείμενο	5	
1.1.4	**[Παρουσίαση]** Δομή του MOOC Κείμενο που παρουσιάζει αναλυτικά της διδακτικές ενότητες του MOOC (micro- Μαθήματα) και την δομή κάθε ενότητας.	Υπερκείμενο	4	
1.1.5	**[Παρουσίαση]** Άδειες χρήσης Κείμενο που παρουσιάζει την άδεια χρήσης του μαθήματος και τους όρους του δημιουργού	Υπερκείμενο και εικόνα	4	
1.1.6	**[Παρουσίαση]** Συντελεστές του MOOC Παρουσίαση του δημιουργού του MOOC.	Υπερκείμενο	2	
1.2	Προαπαιτούμενα			
	[Παρουσίαση] Προαπαιτούμενες γνώσεις και δεξιότητες Σύντομο κείμενο που παρουσιάζει τις απαραίτητες γνώσεις μαθηματικών για την παρακολούθηση του συγκεκριμένου διαδικτυακού μαθήματος.	Υπερκείμενο	4	

1.2.2	**[Παρουσίαση]** Απαιτούμενες Υποδομές	Υπερκείμενο	1	
1.3	Ολοκλήρωση του μαθήματος			
1.3.1	**[Παρουσίαση]** Απαραίτητες ενέργειες Κείμενο που παρουσιάζει αναλυτικά τις προϋποθέσεις για την ολοκλήρωση του μαθήματος από τον εκπαιδευόμενο- μαθητή.	Υπερκείμενο	3	
1.3.2	**[Παρουσίαση]** Εργασίες αυτό-αξιολόγησης Σύντομο κείμενο το οποίο παρουσιάζει την εργασία ανοιχτής απόκρισης.	Υπερκείμενο	3	
1.3.3	**[Παρουσίαση]** Συμμετοχή στο forum Κείμενο που παρουσιάζει αναλυτικά τον τρόπο διεξαγωγής των συζητήσεων στο forum και των κανόνων λειτουργείας.	Υπερκείμενο και link	5	
1.3.4	**[Παρουσίαση]** Τελική εξέταση Κείμενο που παρουσιάζει τον τρόπο διεξαγωγής της τελικής εξέτασης και οδηγίες.	Υπερκείμενο	3	
1.3.5	**[Παρουσίαση]** Παραλαβή πιστοποιητικού Σύντομο κείμενο που περιγράφει πως εκδίδεται το πιστοποιητικό.	Υπερκείμενο	1	
1.4	Εισαγωγή στην θεματική ενότητα			
1.4.1	**[Παρουσίαση]** Τι ξέρω ήδη;	Υπερκείμενο, Poll, Forum	6	

	Ερωτηματολόγιο το οποίο διερευνά τις γνώσεις των εκπαιδευόμενων- μαθητών και forum συζήτησης στο οποίο οι εκπαιδευόμενοι μαθητές γράφουν την προσωπική τους εμπειρία από το σχολικό μάθημα.			
1.4.2	**[Παρουσίαση]** Παράδειγμα εφαρμογής και Άποψη του Ειδικού Κείμενο που παρουσιάζει μια εφαρμογή των μαθηματικών και προβολή video που έχουν ετοιμάσει μαθητές για την χρησιμότητα των μαθηματικών στην καθημερινότητα. https://www.youtube.com/watch?v=A7SA0apcqSk	Υπερκείμενο και video	5	
1.4.3	**[Παρουσίαση]** Δραστηριότητα Γνωριμίας Δραστηριότητα γνωριμίας των εκπαιδευόμενων- μαθητών μέσω της εφαρμογής padlet. https://padlet.com/boutsinosantwnis/padlet-8182dnpusrepdxhc	Υπερκείμενο και padlet	10	
Ημέρα 2η : Διδακτική ενότητα 1- Επανάληψη στους Ρητούς Αριθμούς				
2.0	Εισαγωγή διδακτικής ενότητας			
2.0.1	**[Παρουσίαση]+[Poll]** Μαθησιακά αποτελέσματα Παρουσίαση των επιδιωκόμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων του micro- Μαθήματος	Υπερκείμενο και Poll	7	

	και συμπλήρωση ενός σύντομου poll αυτό-αξιολόγησης του εκπαιδευόμενου για την διερεύνηση των γνώσεων του πιο συγκεκριμένα πάνω στο MA1.			
2.0.2	**[Παρουσίαση]** Δομή της ενότητας Σύντομη παρουσίαση της διάρθρωσης του micro-μαθήματος	Υπερκείμενο	3	
2.1	Οι ρητοί αριθμοί			
2.1.1	**[Παρουσίαση]** Τι είναι οι ρητοί αριθμοί Παρουσίαση των βασικών εννοιών και σημείων προσοχής στη θεωρία γύρω από τους ρητούς αριθμούς.	Υπερκείμενο και εικόνες	15	**MA1.1:** Μπορώ να εφαρμόσω τις ιδιότητές των ρητών αριθμών.
2.1.2	**[Επίδειξη]** Εφαρμογές ιδιοτήτων των ρητών αριθμών Παρουσίαση βασικών ασκήσεων και εφαρμογών της προαναφερθείσας θεωρίας.	Υπερκείμενο και εικόνα	15	
2.1.3	**[Εξάσκηση]** Δραστηριότητα εξάσκησης Πέντε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με αναλυτικές απαντήσεις ως ανατροφοδότηση.	Υπερκείμενο και MCQ with feedback	15	
2.1.4	**[Αυτό-αξιολόγηση]** Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης Πέντε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.	Υπερκείμενο και MCQ	15	
2.2	Πράξεις μεταξύ ρητών αριθμών			
2.2.1	**[Παρουσίαση]** Κανόνες των πράξεων	Υπερκείμενο	15	

	Παρουσίαση των βασικών κανόνων για την διεξαγωγή πράξεων στους ρητούς αριθμούς			**MA1.2:** Μπορώ να εκτελέσω πράξεις με ρητούς αριθμούς.
2.2.2	**[Επίδειξη]** Υπολογισμοί αριθμητικών παραστάσεων Επίδειξη λύσης απλών πράξεων και υπολογισμού αριθμητικών παραστάσεων	Υπερκείμενο, video και εικόνες	15	
2.2.3	**[Εξάσκηση]** Δραστηριότητα εξάσκησης Ζητείται από τους εκπαιδευόμενους να υπολογίσουν πέντε αριθμητικές παραστάσεις και να δώσουν το αριθμητικό αποτέλεσμα. Στους εκπαιδευόμενους δίνεται αναλυτική ανατροφοδότηση με την μορφή αναλυτικής επίλυσης.	Υπερκείμενο και Numerical input with feedback	15	
2.2.4	**[Αυτό-αξιολόγηση]** Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης Πέντε αριθμητικές παραστάσεις τις οποίες ζητείτε να υπολογίσουν οι εκπαιδευόμενοι.	Υπερκείμενο και Numerical input	15	
2.3	Δυνάμεις ρητών αριθμών			
2.3.1	**[Παρουσίαση]** Ιδιότητες των δυνάμεων Παρουσίαση τις έννοιας της δύναμης στους ρητούς αριθμούς και των βασικών ιδιοτήτων των δυνάμεων.	Υπερκείμενο και video	15	**MA1.3:** Μπορώ να εφαρμόσω τις ιδιότητες των δυνάμεων και να υπολογίσω αριθμητικές παραστάσεις
2.3.2	**[Επίδειξη]** Εφαρμογές ιδιοτήτων των δυνάμεων Λυμένες ασκήσεις πάνω στις ιδιότητες των δυνάμεων	Υπερκείμενο	15	
2.3.3	**[Εξάσκηση]** Δραστηριότητα εξάσκησης	Υπερκείμενο και MCQ with feedback	15	

	Πέντε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με αναλυτικές απαντήσεις ως ανατροφοδότηση.			
2.3.4	**[Αυτό-αξιολόγηση]** Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης Πέντε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.	Υπερκείμενο και MCQ	15	
2.4	Ανακεφαλαίωση και Αυτό-αξιολόγηση			
2.4.1	**[Παρουσίαση]** Ανακεφαλαίωση Συνοπτική παρουσίαση των σημαντικών σημείων θεωρίας με την μορφή bullet	Υπερκείμενο	5	MA1
2.4.2	**[Open Response Assessment]** Εργασία ανοιχτής απόκρισης Επίλυση τεσσάρων αριθμητικών παραστάσεων και διόρθωση της εργασίας από τον εκπαιδευτή.	Υπερκείμενο	30	MA1
2.4.3	**[Αυτό-αξιολόγηση]** Checklist: Μπορώ να το κάνω… Poll αυτό-αξιολόγησης των εκπαιδευόμενων.	Υπερκείμενο και Poll	5	MA1
2.4.4	**[Discussion Forum]** Συζήτηση στο Forum Οι εκπαιδευόμενοι συζητούν μεταξύ τους απαντώντας σε τρεις ερωτήσεις σχετικές με την διδακτική ενότητα.	Forum	10	
2.5	Πρόσθετο Υλικό			
2.5.1	**[Εξάσκηση]** Προτάσεις για περαιτέρω εξάσκηση	Υπερκείμενο		MA1

	Δίνονται δύο θέματα ασκήσεων πρότυπων με υποδείξεις και τελικές απαντήσεις.			
Ημέρα 3η: Διδακτική ενότητα 2- Εξισώσεις 1ου βαθμού				
3.0	Εισαγωγή διδακτικής ενότητας			
3.0.1	**[Παρουσίαση]+[Poll]** Μαθησιακά αποτελέσματα Παρουσίαση των επιδιωκόμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων του micro- Μαθήματος και συμπλήρωση ενός σύντομου poll αυτό-αξιολόγησης του εκπαιδευόμενου για την διερεύνηση των γνώσεων του πιο συγκεκριμένα πάνω στο MA2.	Υπερκείμενο και Poll	7	
3.0.2	**[Παρουσίαση]** Δομή της ενότητας Σύντομη παρουσίαση της διάρθρωσης του micro-μαθήματος	Υπερκείμενο	3	
3.1	Μεταβλητή και αλγεβρική παράσταση			
3.1.1	**[Παρουσίαση]** Τι ονομάζουμε μεταβλητή και τι αλγεβρική παράσταση; Παρουσίαση των όρων της μεταβλητής και της αλγεβρικής παράστασης. Παρουσίαση του τρόπου διεξαγωγής πράξεων μεταξύ μεταβλητών μέσα από το ακόλουθο video https://www.youtube.com/watch?v=HwuN7aLuNKU	Υπερκείμενο και video	15	**MA2.1:** Μπορώ να υπολογίζω αλγεβρικές παραστάσεις και να εφαρμόζω την επιμεριστική ιδιότητα

3.1.2	**[Επίδειξη]** Πως υπολογίζουμε αλγεβρικές παραστάσεις- αναγωγή όμοιων όρων και επιμεριστική ιδιότητα. Επίδειξη της χρήση της αναγωγής όμοιων όρων και της επιμεριστικής ιδιότητας για τον υπολογισμό αλγεβρικών παραστάσεων μέσα από απλές εφαρμογές και του παρακάτω video https://www.youtube.com/watch?v=BqFi7m0S650	Υπερκείμενο και video	15	
3.1.3	**[Εξάσκηση]** Δραστηριότητα εξάσκησης Πέντε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με αναλυτικές απαντήσεις ως ανατροφοδότηση.	Υπερκείμενο και MCQ with feedback	15	
3.1.4	**[Αυτό-αξιολόγηση]** Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης Πέντε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.	Υπερκείμενο και MCQ with hints	15	
3.2	Επίλυση Εξισώσεων 1^{ου} βαθμού			
3.2.1	**[Παρουσίαση]** Εξίσωση 1^{ου} βαθμού Παρουσίαση της βασικής θεωρίας γύρω από την εξίσωση 1^{ου} βαθμού	Υπερκείμενο και εικόνα	15	**MA2.2:** Μπορώ να λύνω εξισώσεις 1ου βαθμού
3.2.2	**[Επίδειξη]** Μέθοδος επίλυσης Επίδειξη του βασικού αλγόριθμου επίλυσης εξισώσεων 1^{ου} βαθμού και επίδειξη λύσης ασκήσεων μέσα από τα video	Υπερκείμενο και video	15	

	https://www.youtube.com/watch?v=NYI-4DZG2kE https://www.youtube.com/watch?v=WXONVaSfKfM			
3.2.3	**[Εξάσκηση]** Δραστηριότητα εξάσκησης Ζητείται από τους εκπαιδευόμενους να λύσουν πέντε εξισώσεις και να δώσουν το αριθμητικό αποτέλεσμα. Στους εκπαιδευόμενους δίνεται αναλυτική ανατροφοδότηση με την μορφή αναλυτικής επίλυσης.	Noumerical input + text input with feedback	15	
3.2.4	**[Αυτό-αξιολόγηση]** Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης Πέντε εξισώσεις τις οποίες ζητείται να λύσουν οι εκπαιδευόμενοι.	Noumerical input + text input with hints	15	
3.3	Προβλήματα			
3.3.1	**[Παρουσίαση]** Μοντελοποίηση ενός προβλήματος πρακτικής αριθμητικής Παρουσίαση των βημάτων επίλυσης προβλημάτων με την χρήση εξισώσεων και παρακολούθηση ενός απλού παραδείγματος από video https://www.youtube.com/watch?v=XwuvC7N4TVE	Υπερκείμενο και video	15	**MA2.3:** Μπορώ να μοντελοποιώ προβλήματα πρακτικής αριθμητικής και γεωμετρίας σε εξισώσεις 1ου βαθμού
3.3.2	**[Επίδειξη]** Λυμένα παραδείγματα Παρακολούθηση video με την επίλυση προβλημάτων https://www.youtube.com/watch?v=CnpWionURjM και επίλυση μιας γεωμετρικής άσκησης.	Υπερκείμενο και video	15	

3.3.3	**[Εξάσκηση]** Δραστηριότητα εξάσκησης Τρεις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής (προβλήματα) με αναλυτικές απαντήσεις ως ανατροφοδότηση.	Υπερκείμενο και MCQ with feedback	15	
3.3.4	**[Αυτό-αξιολόγηση]** Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης Τρεις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής (προβλήματα) με αναλυτικές απαντήσεις ως ανατροφοδότηση.	Υπερκείμενο και MCQ with feedback	15	
3.4	Ανακεφαλαίωση και Αυτό- αξιολόγηση διδακτικής ενότητας			
3.4.1	**[Παρουσίαση]** Ανακεφαλαίωση Συνοπτική παρουσίαση των σημαντικών σημείων θεωρίας με την μορφή bullet	Υπερκείμενο	5	ΜΑ2
3.4.2	**[Open Response Assessment]** Εργασία ανοιχτής απόκρισης Δίνεται φύλλο εργασίας για το επιλύσουν οι εκπαιδευόμενοι με θέματα εξετάσεων όπως αυτά ζητούνται στις τελικές εξετάσεις. Την εργασία θα την διορθώσει ο εκπαιδευτής.	Υπερκείμενο	30	ΜΑ2
3.4.3	**[Αυτό-αξιολόγηση]** Checklist: Μπορώ να το κάνω… Poll αυτό-αξιολόγησης των εκπαιδευόμενων με βαθμολογία των ικανοτήτων τους από το 1 έως το 5.	Υπερκείμενο και Poll	5	ΜΑ2
3.4.4	**[Discussion Forum]** Συζήτηση στο Forum	Forum	10	ΜΑ2

	Δίνεται ένα πρόβλημα αυξημένης δυσκολίας το οποίο καλούνται να το λύσουν συνεργατικά οι εκπαιδευόμενοι στο forum.			
3.5	Πρόσθετο Υλικό			
3.5.1	**[Εξάσκηση]** Προτάσεις για περαιτέρω εξάσκηση Δίνονται δύο θέματα ασκήσεων πρότυπων για περαιτέρω εξάσκηση.	Υπερκείμενο		ΜΑ2
Ημέρα 4η: Διδακτική ενότητα 3- Πραγματικοί Αριθμοί				
4.0	Εισαγωγή διδακτικής ενότητας			
4.0.1	**[Παρουσίαση]+[Poll]** Μαθησιακά αποτελέσματα Παρουσίαση των επιδιωκόμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων του micro- Μαθήματος και συμπλήρωση ενός σύντομου poll αυτό-αξιολόγησης του εκπαιδευόμενου για την διερεύνηση των γνώσεων του πιο συγκεκριμένα πάνω στο ΜΑ3.	Υπερκείμενο και Poll	7	
4.0.2	**[Παρουσίαση]** Δομή της ενότητας Σύντομη παρουσίαση της διάρθρωσης του micro-μαθήματος	Υπερκείμενο	3	
4.1	Η τετραγωνική ρίζα			
4.1.1	**[Παρουσίαση]** Τί ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα Παρουσίαση του ορισμού και των βασικών τετραγωνικών ριζών	Υπερκείμενο	15	**ΜΑ3.1:** Μπορώ να υπολογίζω

4.1.2	**[Επίδειξη]** Πως υπολογίζουμε τετραγωνικές ρίζες-Εφαρμογή των ιδιοτήτων Επίδειξη του τρόπου υπολογισμού ριζών με την χρήση των ιδιοτήτων και λυμένα παραδείγματα https://www.youtube.com/watch?v=Xhvq-PO48wE https://www.youtube.com/watch?v=YmhQflKCIU0	Υπερκείμενο και video	15	τετραγωνικές ρίζες
4.1.3	**[Εξάσκηση]** Δραστηριότητα εξάσκησης Πέντε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με αναλυτικές απαντήσεις ως ανατροφοδότηση.	Υπερκείμενο και MCQ with feedback	15	
4.1.4	**[Αυτό-αξιολόγηση]** Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης Πέντε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.	Υπερκείμενο και MCQ with hints	15	
4.2	Άρρητοι αριθμοί- Πραγματικοί αριθμοί			
4.2.1	**[Παρουσίαση]** Ποιοι αριθμοί ονομάζονται άρρητοι και ποιοι πραγματικοί Παρουσίαση των άρρητων αριθμών μέσω video: https://www.youtube.com/watch?v=gQKO3TF28gw Παρουσίαση των πραγματικών αριθμών μέσω video: https://www.youtube.com/watch?v=gyTpQoQh9GE	Υπερκείμενο και video	15	**MA3.2:** Μπορώ να ξεχωρίζω τους άρρητους από τους ρητούς αριθμούς
4.2.2	**[Επίδειξη]** Πράξεις με άρρητους αριθμούς	Υπερκείμενο	15	

	Επίδειξη πράξεων με άρρητους αριθμούς			
4.2.3	**[Εξάσκηση]** Δραστηριότητα εξάσκησης Πέντε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με αναλυτικές απαντήσεις ως ανατροφοδότηση.	Υπερκείμενο και MCQ with feedback	15	
4.2.4	**[Αυτό-αξιολόγηση]** Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης Πέντε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.	Υπερκείμενο και MCQ with hints	15	
4.3	Προβλήματα			
4.3.1	**[Παρουσίαση]** Προβλήματα με πραγματικούς αριθμούς Παρουσίαση του τρόπου επίλυσης των προβλημάτων και χρήσιμων μαθηματικών εργαλείων.	Υπερκείμενο	15	**ΜΑ3.3:** Μπορώ να επιλύω προβλήματα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών
4.3.2	**[Επίδειξη]** Πως επιλύω προβλήματα με πραγματικούς αριθμούς Παρακολούθηση video με επίλυση προβλημάτων του σχολικού βιβλίου. https://www.youtube.com/watch?v=PjY2q1cEJDQ	Υπερκείμενο και video	15	
4.3.3	**[Εξάσκηση]** Δραστηριότητα εξάσκησης Δύο ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής (προβλήματα) με αναλυτικές απαντήσεις ως ανατροφοδότηση.	Υπερκείμενο και MCQ with feedback	15	
4.3.4	**[Αυτό-αξιολόγηση]** Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης	Υπερκείμενο και MCQ with feedback	15	

	Μια ερώτηση πολλαπλής επιλογής (πρόβλημα) με αναλυτικές απαντήσεις ως ανατροφοδότηση.			
4.4	Ανακεφαλαίωση και Αυτό- αξιολόγηση διδακτικής ενότητας			
4.4.1	**[Παρουσίαση]** Ανακεφαλαίωση Συνοπτική παρουσίαση των σημαντικών σημείων θεωρίας με την μορφή bullet	Υπερκείμενο	5	MA3
4.4.2	**[Open Response Assessment]** Εργασία ανοιχτής απόκρισης Δίνεται φύλλο εργασίας για το επιλύσουν οι εκπαιδευόμενοι με θέματα εξετάσεων όπως αυτά ζητούνται στις τελικές εξετάσεις. Την εργασία θα την διορθώσει ο εκπαιδευτής.	Υπερκείμενο	30	MA3
	[Αυτό-αξιολόγηση] Checklist: Μπορώ να το κάνω… Poll αυτό-αξιολόγησης των εκπαιδευόμενων με βαθμολογία των ικανοτήτων τους από το 1 έως το 5.	Υπερκείμενο και Poll	5	MA3
	[Discussion Forum] Συζήτηση στο Forum Δίνεται ένα πρόβλημα αυξημένης δυσκολίας το οποίο καλούνται να το λύσουν συνεργατικά οι εκπαιδευόμενοι στο forum.	Forum	10	MA3
4.5	Πρόσθετο Υλικό			
4.5.1	**[Εξάσκηση]** Προτάσεις για περαιτέρω εξάσκηση	Υπερκείμενο		MA3

	Δίνονται δύο θέματα ασκήσεων πρότυπων για περαιτέρω εξάσκηση.			
Ημέρα $5^{η}$: Διδακτική ενότητα 4- Συναρτήσεις				
5.0	Εισαγωγή διδακτικής ενότητας			
5.0.1	**[Παρουσίαση]+[Poll]** Μαθησιακά αποτελέσματα Παρουσίαση των επιδιωκόμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων του micro- Μαθήματος και συμπλήρωση ενός σύντομου poll αυτό-αξιολόγησης του εκπαιδευόμενου για την διερεύνηση των γνώσεων του πιο συγκεκριμένα πάνω στο ΜΑ4.	Υπερκείμενο και Poll	7	
5.0.2	**[Παρουσίαση]** Δομή της ενότητας Σύντομη παρουσίαση της διάρθρωσης του micro-μαθήματος	Υπερκείμενο	3	
5.1	Η έννοια της συνάρτησης			
5.1.1	**[Παρουσίαση]** Τί ονομάζουμε συνάρτηση Παρουσίαση του ορισμού μέσω video https://www.youtube.com/watch?v=t7CyfI1tPuo	Υπερκείμενο και video	15	**ΜΑ4.1:** Μπορώ να κατανοώ τι ονομάζουμε συνάρτηση
5.1.2	**[Επίδειξη]** Πως κατασκευάζω πίνακα τιμών και πως τον τύπο μιας συνάρτησης Επίδειξη κατασκευής πίνακα τιμών και τύπου συνάρτησης μέσω video	Υπερκείμενο και video	15	

	Πίνακας τιμών: https://www.youtube.com/watch?v=1wVgBmKlN2k Τύπος συνάρτησης: https://www.youtube.com/watch?v=G7MyltQZDaA			
5.1.3	**[Εξάσκηση]** Δραστηριότητα εξάσκησης Ζητείται από τους εκπαιδευόμενους να λύσουν δύο ασκήσεις απαντώντας σε ερωτήσεις. Στους εκπαιδευόμενους δίνεται αναλυτική ανατροφοδότηση με την μορφή αναλυτικής επίλυσης.	Numerical input with feedback and MCQ with feedback	15	
5.1.4	**[Αυτό-αξιολόγηση]** Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης Ζητείται από τους εκπαιδευόμενους να λύσουν δύο ασκήσεις απαντώντας σε ερωτήσεις.	Numerical input + MCQ with hint		
5.2	Συντεταγμένες στο επίπεδο			
5.2.1	**[Παρουσίαση]** Τι ονομάζουμε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Παρουσίαση μέσω video των σημαντικών σημείων της θεωρίας γύρω από το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων https://www.youtube.com/watch?v=0zANeJBQayo και την τοποθέτηση σημείων στο επίπεδο https://www.youtube.com/watch?v=_L-N4AWpkbk	Υπερκείμενο και video	15	**ΜΑ4.2:** Μπορώ να εντοπίζω σημεία σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένω ν

5.2.2	**[Επίδειξη]** Λυμένες ασκήσεις Μέσα από τέσσερα video παρουσιάζονται μέθοδοι επίλυσης των βασικών ασκήσεων σε αυτό το σημείο της ύλης https://www.youtube.com/watch?v=DhBq4q3sDds https://www.youtube.com/watch?v=nzaLPtmZS9g https://www.youtube.com/watch?v=lzkTqwCQ9DE https://www.youtube.com/watch?v=YwsSkUDmnNM	Υπερκείμενο και video	15	
5.2.3	**[Εξάσκηση]** Δραστηριότητα εξάσκησης Έντεκα ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με αναλυτικές απαντήσεις ως ανατροφοδότηση χωρισμένες σε δυο διαφορετικές ασκήσεις.	Υπερκείμενο και MCQ with feedback	15	
5.2.4	**[Αυτό-αξιολόγηση]** Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης Άσκηση τοποθέτησης σε σύστημα συντεταγμένων σημείων. Δίνεται και η λύση της άσκησης. Για την λύση της άσκηση χρησιμοποιείται η εφαρμογή geogebra.	Υπερκείμενο, iFrame για το geogebra, εικόνα	15	
5.3	Οι συναρτήσεις $y = ax, y = ax + \beta, y = \frac{a}{x}$			
5.3.1	**[Παρουσίαση]** Ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά- Οι γραφικές παραστάσεις της ευθείας και της υπερβολής	Υπερκείμενο και εικόνες	15	**ΜΑ4.3:** Μπορώ να εφαρμόζω τις

	Αναλυτική περιγραφή των σημαντικών σημείων της θεωρίας και ανάλογα σχήματα.			ιδιότητες των βασικών συναρτήσεων y=ax,y=ax+β,y= a/x, και να μπορώ να τις σχεδιάζω.
5.3.2	**[Επίδειξη]** Πως σχεδιάζω μια ευθεία και μια υπερβολή σε σύστημα συντεταγμένων και λυμένες ασκήσεις με συναρτήσεις. Επίδειξη των βασικών σχεδιαστικών ασκήσεων μέσω video https://www.youtube.com/watch?v=6pzBclHLE5g&t=1s https://www.youtube.com/watch?v=REJPIgFwT7M https://www.youtube.com/watch?v=69fw6FA41QQ	Υπερκείμενο και video	15	
5.3.3	**[Εξάσκηση]** Δραστηριότητα εξάσκησης Η δραστηριότητα αυτή περιέχει τρεις ασκήσεις με διάρθρωση θεμάτων εξετάσεων στα οποία ο εκπαιδευόμενος καλείται να απαντήσει σε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και να σχεδιάσει στο geogebra classic. Στον εκπαιδευόμενο δίνονται αναλυτικές λύσεις.	Υπερκείμενο, MCQ with feedback, iFrame του geogebra classic, εικόνα	15	
5.3.4	**[Αυτό-αξιολόγηση]** Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης Η δραστηριότητα αυτή περιέχει τρεις ασκήσεις με διάρθρωση θεμάτων εξετάσεων στα οποία ο εκπαιδευόμενος καλείται να απαντήσει σε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και να σχεδιάσει στο geogebra classic. Στον εκπαιδευόμενο δίνεται η λύση για την σχεδιαστική ερώτηση.	Υπερκείμενο, MCQ, iFrame του geogebra classic, εικόνα	15	

5.4	Ανακεφαλαίωση και αυτό-αξιολόγηση διδακτικής ενότητας			
5.4.1	**[Παρουσίαση]** Ανακεφαλαίωση Συνοπτική παρουσίαση των σημαντικών σημείων θεωρίας με την μορφή bullet	Υπερκείμενο	5	ΜΑ4
5.4.2	**[Open Response Assessment]** Εργασία ανοιχτής απόκρισης Δίνεται φύλλο εργασίας για να το επιλύσουν οι εκπαιδευόμενοι με θέματα εξετάσεων όπως αυτά ζητούνται στις τελικές εξετάσεις. Την εργασία θα την διορθώσει ο εκπαιδευτής.	Υπερκείμενο	30	ΜΑ4
5.4.3	**[Αυτό-αξιολόγηση]** Checklist: Μπορώ να το κάνω… Poll αυτό-αξιολόγησης των εκπαιδευόμενων με βαθμολογία των ικανοτήτων τους από το 1 έως το 5.	Υπερκείμενο και Poll	5	ΜΑ4
5.4.4	**[Discussion Forum]** Συζήτηση στο Forum Δίνεται ένα πρόβλημα αυξημένης δυσκολίας το οποίο καλούνται να το λύσουν συνεργατικά οι εκπαιδευόμενοι στο forum.	Forum	10	ΜΑ4
5.5	Πρόσθετο Υλικό			
5.5.1	**[Παρουσίαση]** Προτάσεις για περαιτέρω εξάσκηση Δίνονται video με αναλυτική περιγραφή και εξήγηση της θεωρίας. https://www.youtube.com/watch?v=TTCWZnPg4FQ	Υπερκείμενο και video	15	ΜΑ4

	https://www.youtube.com/watch?v=55cW0LHDh8U https://www.youtube.com/watch?v=qst-fzNTTRo https://www.youtube.com/watch?v=GW7Y92il6Pc https://www.youtube.com/watch?v=aRhdLe__aww https://www.youtube.com/watch?v=j6ehpNf9TDU https://www.youtube.com/watch?v=ONH88yV20j4			
Ημέρα 6η: Τελική Αξιολόγηση MOOC				
6.0	**[Παρουσίαση]** Οδηγίες για τη διεξαγωγή της τελικής εξέτασης του MOOC Κείμενο που παρουσιάζει τον τρόπο διεξαγωγής της τελικής εξέτασης και τους όρους κατάκτησης του πιστοποιητικού.	Υπερκείμενο	2	
6.1	**[Εξέταση]** Τελική Εξέταση Τρία θέματα (ένα θεωρίας και δύο ασκήσεων) εφ' όλης της ύλης με διάρθρωση παρόμοια με αυτή των θεμάτων των εξετάσεων.	Υπερκείμενο, MCQ, Numerical input	57	MA1, MA2, MA3, MA4
6.2	**[Παρουσίαση]** Οδηγίες για τη δημιουργία πιστοποιητικού του MOOC Σύντομο κείμενο που καθοδηγεί τον εκπαιδευόμενο για την έκδοση του πιστοποιητικού. Περιλαμβάνει και χιουμοριστικό gif	Υπερκείμενο και gif	1	

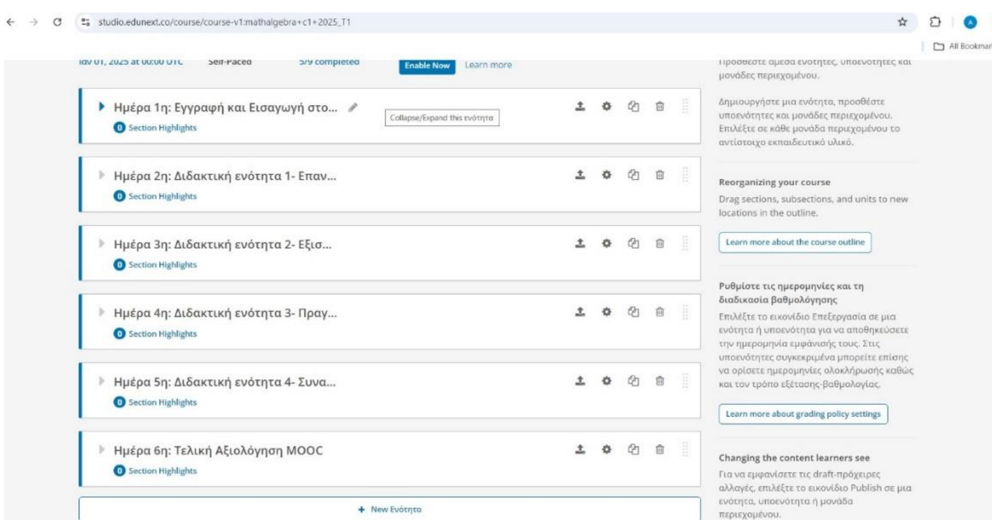
	https://tenor.com/el/view/congrats-congrats-gif-nrg-energi-task-gif-25488451			

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Το MOOC υλοποιήθηκε στην πλατφόρμα https://www.edunext.co/ για να ανέβει στην πλατφόρμα Open edX.

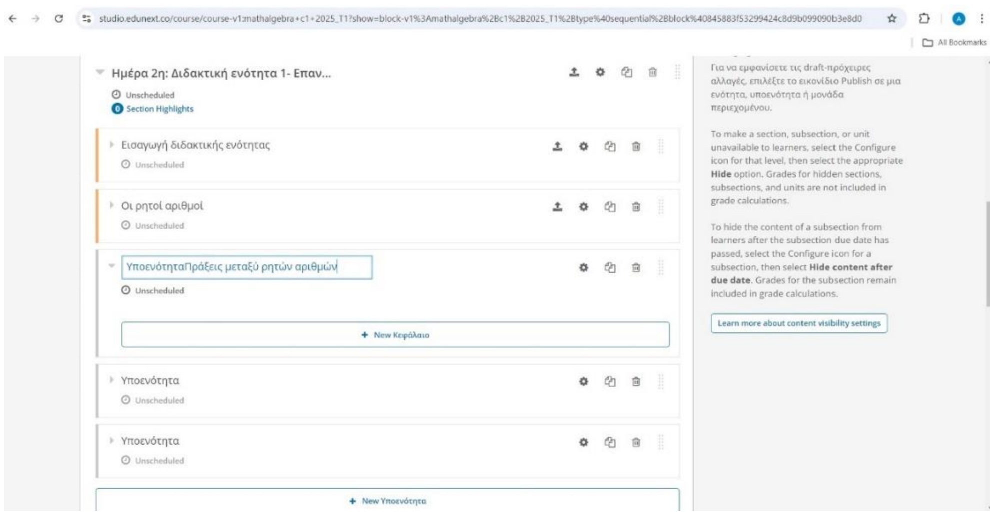
4.1 Η διάρθρωση του MOOC

Το MOOC χωρίζεται σε έξι ενότητες. Σε κάθε ενότητα αντιστοιχεί μια μέρα μαθήματος ή εργασίας. Την πρώτη μέρα πραγματοποιείται η εγγραφή και μια πρώτη επαφή με το αντικείμενο του MOOC. Ο εκπαιδευόμενος καλείται να παρακολουθήσει εισαγωγικά video και να συμμετάσχει σε ομαδικές δραστηριότητες γνωριμίας με άλλους εκπαιδευόμενους. Ταυτόχρονα μέσω ενός Poll έχει μια πρώτη επαφή με το γνωστικό αντικείμενο. Στις τέσσερεις απόμενες δραστηριότητες αντιστοιχεί και ένας μαθησιακός στόχος από αυτούς που διαμορφώθηκαν στο Κεφάλαιο 3. Η τελευταία αφορά την τελική αξιολόγηση του MOOC και την έκδοση του πιστοποιητικού.



Εικόνα 4: Διάρθρωση του μαθήματος σε ενότητες

Η κάθε μια από τις ενδιάμεσες ενότητες χωρίζεται σε έξι υποενότητες. Η πρώτη είναι εισαγωγική ενώ οι τρεις επόμενες υποενότητες πραγματεύονται έναν από τους υποστόχους που τίθενται. Στην τέταρτη υποενότητα ο εκπαιδευόμενος κάνει επανάληψη των γνώσεων που απέκτησε στην διδακτική ενότητα, αυτό- ελέγχει τις γνώσεις του και συμμετέχει σε ομαδικές συνομιλίες στο Forum γύρω από ζητήματα που προκύπτουν από την διδασκαλία της κάθε διδακτικής ενότητας. Η τελευταία περιλαμβάνει πρόσθετο υλικό.



Εικόνα 5: Διάρθρωση ενότητας σε υποενότητες

Στη συνέχεια η κάθε υποενότητα χωρίζεται σε κεφάλαια. Το κάθε κεφάλαιο αντιστοιχεί και σε μια διαφορετική δραστηριότητα την οποία πρέπει να ολοκληρώσει ο εκπαιδευόμενος προκειμένου να ολοκληρώσει με επιτυχία το MOOC. Για την κάθε υποενότητα επιλέχθηκε το σχήμα δραστηριότητα παρουσίασης, επίδειξης, εξάσκησης και τέλος αυτό-αξιολόγησης.

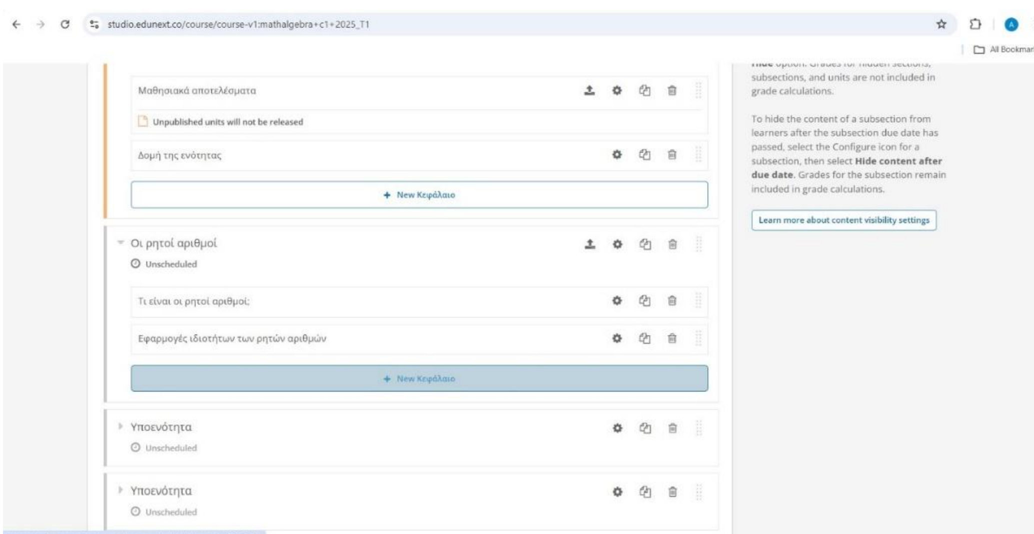
Η χρήση του σχήματος δραστηριότητες παρουσίασης, επίδειξης, εξάσκησης και αυτό-αξιολόγησης σε ένα MOOC όπως αυτό με θέμα την άλγεβρα της Β' Γυμνασίου είναι εξαιρετικά αποτελεσματική για την επίτευξη των μαθησιακών στόχων. Πρώτον, η δραστηριότητα παρουσίασης επιτρέπει στους μαθητές να εξοικειωθούν με τις νέες έννοιες. Στη μικρό-μάθηση, η ύλη παρουσιάζεται σε μικρά, διαχειρίσιμα τμήματα, μειώνοντας την υπερφόρτωση πληροφορίας και διευκολύνοντας την κατανόηση του μαθητή (Hug, 2010; Giurgiu, 2017).

Η δραστηριότητα επίδειξης προσφέρει παραδείγματα εφαρμογής των εννοιών που έχουν διδαχθεί, διευκρινίζοντας πώς οι μαθηματικοί τύποι εφαρμόζονται σε πραγματικές συνθήκες ή προβλήματα. Αυτό το στάδιο ενισχύει τη σύνδεση μεταξύ θεωρίας και πρακτικής, καθιστώντας τη μάθηση πιο απτή και κατανοητή (Shail, 2019; Hug & Friesen, 2007).

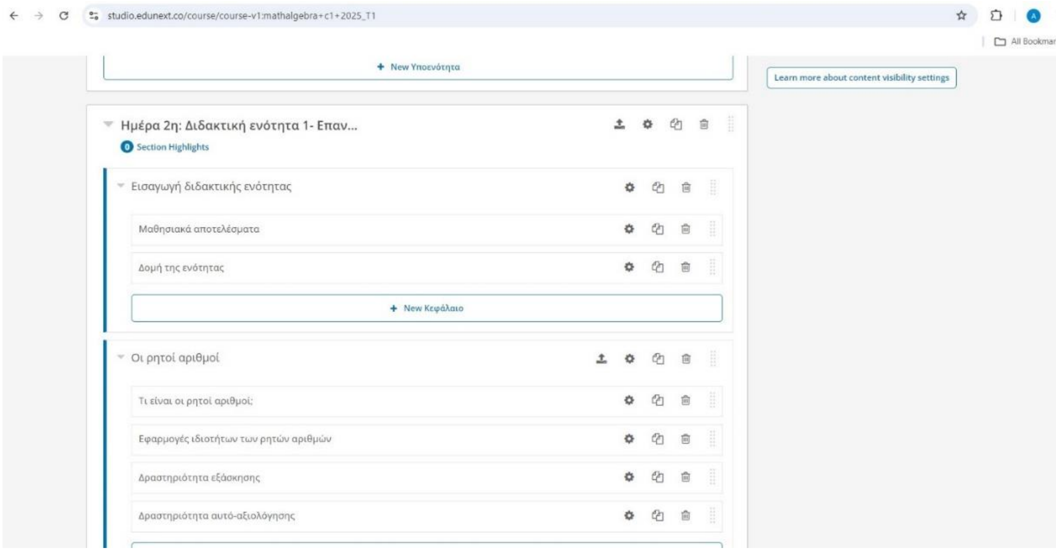
Η δραστηριότητα εξάσκησης είναι καθοριστική για τη μάθηση των μαθητών, καθώς τους επιτρέπει να εφαρμόσουν τις νέες γνώσεις σε προβλήματα που καλούνται να λύσουν. Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές αποκτούν αυτοπεποίθηση και ενισχύουν τις δεξιότητές τους μέσω συνεχούς πρακτικής, κάτι που αποτελεί κρίσιμο στοιχείο της μικρό-μάθησης (Pappas, 2015; Frisnoiry et al., 2022).

Τέλος, η δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης μέσω κουίζ επιτρέπει στους μαθητές να αναστοχαστούν την πρόοδό τους και να εντοπίσουν αδυναμίες. Παρέχει άμεση ανατροφοδότηση, η οποία είναι αναγκαία για την ενίσχυση της μνήμης και τη σταδιακή βελτίωση των επιδόσεών τους (Boaler, 2021; Hew et al., 2019).

Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζεται η καλύτερη αφομοίωση των μαθηματικών εννοιών. Παράλληλα, ενισχύεται η ικανότητα αυτενέργειας των μαθητών και η συνεχής βελτίωση της απόδοσής τους (Ebben & Murphy, 2014).



Εικόνα 6: Διάρθρωση υποενότητας σε κεφάλαια- δραστηριότητες



Εικόνα 7: Διάρθρωση υποενότητας σε δραστηριότητες

4.2 Δραστηριότητες

Στις τεχνικές παρουσίασης και επίδειξης του διδακτικού υλικού χρησιμοποιήθηκαν τα εργαλεία:

- Κείμενο
- video

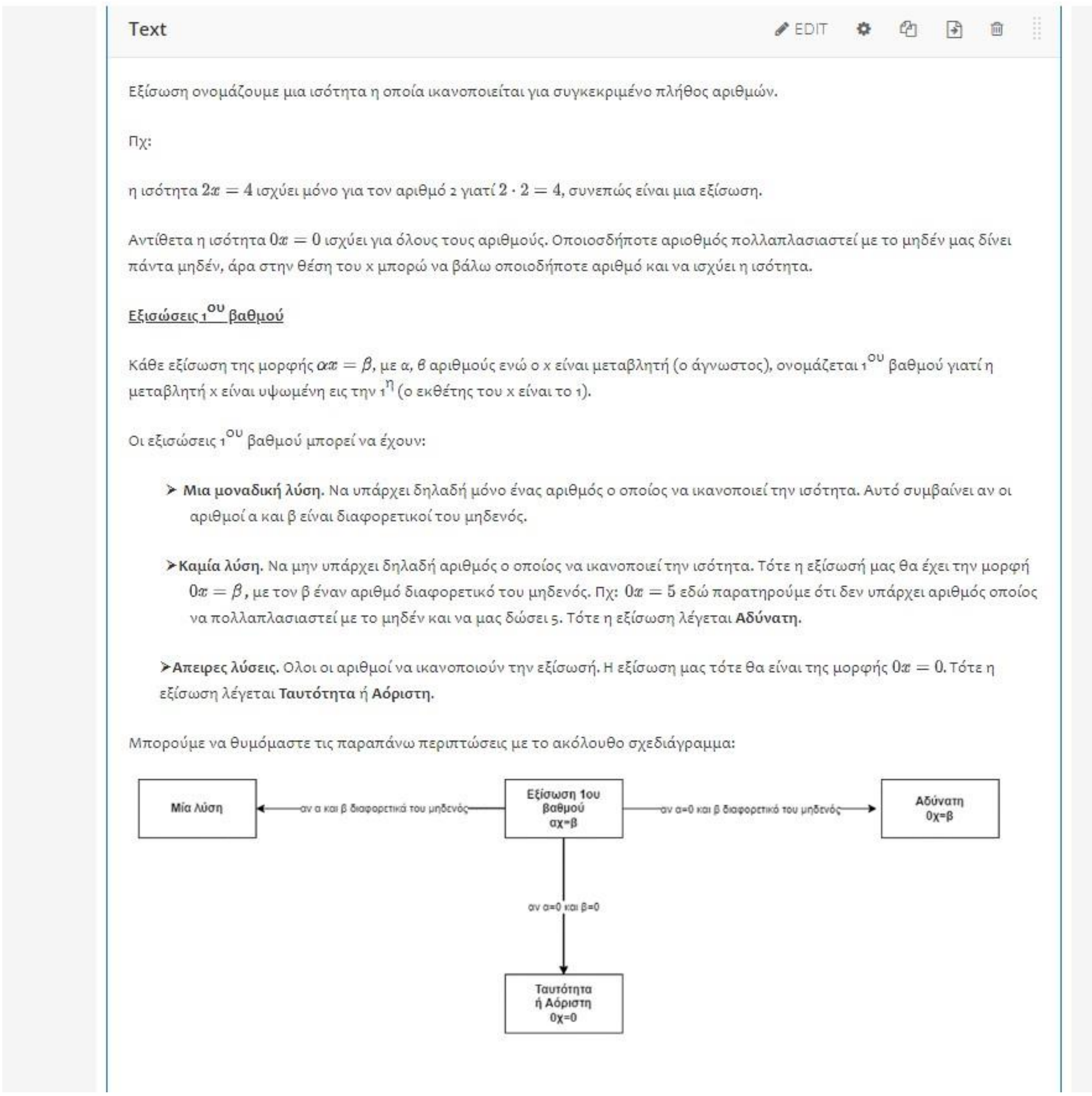
Αντίστοιχα για την αξιολόγηση της κατανόησης του παρεχόμενου διδακτικού υλικού χρησιμοποιήθηκαν τα εργαλεία:

- Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής
- Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με ανατροφοδότηση ή υπόδειξη
- Εισαγωγή αριθμού
- Εισαγωγή αριθμού με ανατροφοδότηση ή υπόδειξη
- Εισαγωγή κειμένου
- Εισαγωγή κειμένου με ανατροφοδότηση ή υπόδειξη
- Ερώτηση ανοιχτής απόκρισης (ORA)

Παράλληλα στο MOOC υπάρχουν δραστηριότητες συζήτησης στο Forum και συμπλήρωσης Poll.

4.2.1 Κείμενο

Σε όλες τις δραστηριότητες, είτε για να παρουσιαστούν κομμάτια της ύλης, είτε για επίδειξη ασκήσεων και παρουσίαση μεθοδολογίας, είτε για να παρουσιαστούν στον εκπαιδευόμενο οδηγίες χρησιμοποιήθηκε το εργαλείο Text.



Text

EDIT

Εξίσωση ονομάζουμε μια ισότητα η οποία ικανοποιείται για συγκεκριμένο πλήθος αριθμών.

Πχ:

η ισότητα $2x = 4$ ισχύει μόνο για τον αριθμό 2 γιατί $2 \cdot 2 = 4$, συνεπώς είναι μια εξίσωση.

Αντίθετα η ισότητα $0x = 0$ ισχύει για όλους τους αριθμούς. Οποιοσδήποτε αριοθμός πολλαπλασιαστεί με το μηδέν μας δίνει πάντα μηδέν, άρα στην θέση του x μπορώ να βάλω οποιοδήποτε αριθμό και να ισχύει η ισότητα.

Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού

Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x = \beta$, με α, β αριθμούς ενώ ο x είναι μεταβλητή (ο άγνωστος), ονομάζεται 1^{ου} βαθμού γιατί η μεταβλητή x είναι υψωμένη εις την 1^{η} (ο εκθέτης του x είναι το 1).

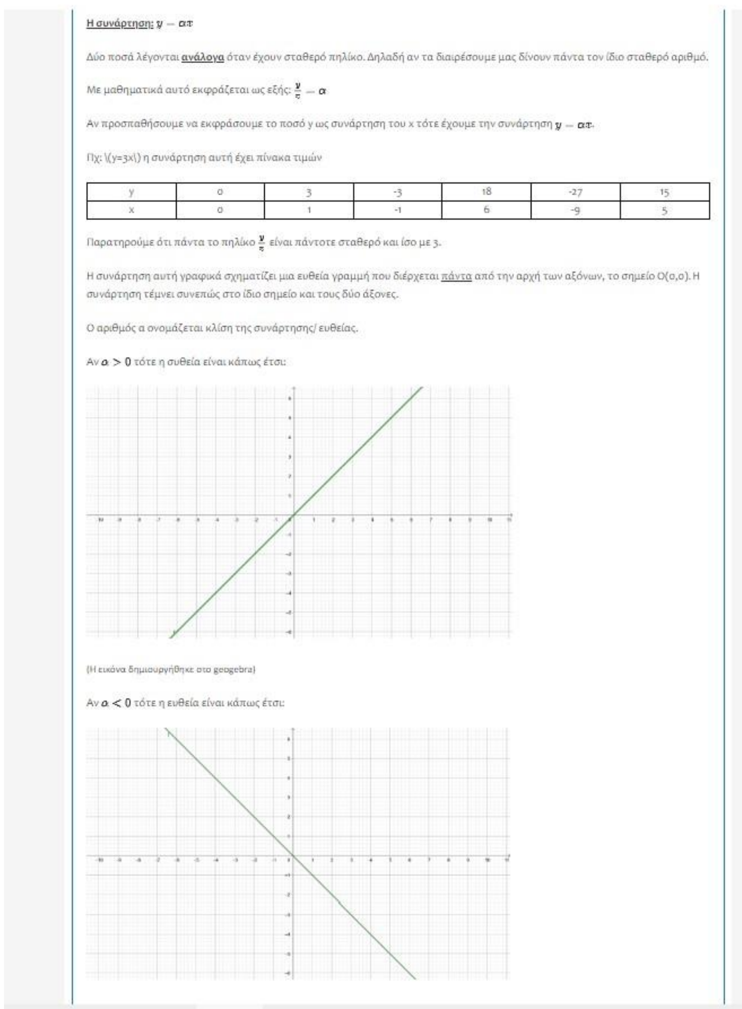
Οι εξισώσεις 1^{ου} βαθμού μπορεί να έχουν:

- **Μια μοναδική λύση.** Να υπάρχει δηλαδή μόνο ένας αριθμός ο οποίος να ικανοποιεί την ισότητα. Αυτό συμβαίνει αν οι αριθμοί α και β είναι διαφορετικοί του μηδενός.
- **Καμία λύση.** Να μην υπάρχει δηλαδή αριθμός ο οποίος να ικανοποιεί την ισότητα. Τότε η εξίσωσή μας θα έχει την μορφή $0x = \beta$, με τον β έναν αριθμό διαφορετικό του μηδενός. Πχ: $0x = 5$ εδώ παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει αριθμός οποίος να πολλαπλασιαστεί με το μηδέν και να μας δώσει 5. Τότε η εξίσωση λέγεται **Αδύνατη.**
- **Απειρες λύσεις.** Ολοι οι αριθμοί να ικανοποιούν την εξίσωσή. Η εξίσωση μας τότε θα είναι της μορφής $0x = 0$. Τότε η εξίσωση λέγεται **Ταυτότητα** ή **Αόριστη.**

Μπορούμε να θυμόμαστε τις παραπάνω περιπτώσεις με το ακόλουθο σχεδιάγραμμα:

Εικόνα 8: 1ο Παράδειγμα παρουσίασης της θεωρίας μέσω σημειώσεων

Με το συγκεκριμένο εργαλείο κατασκευάστηκαν αναλυτικές σημειώσεις επί της θεωρίας στις δραστηριότητες παρουσίασης. Στις σημειώσεις η θεωρία αναλύεται και εκλαϊκεύεται, ως ένα βαθμό, ώστε να έχει απλή και κατανοητή μορφή. Παράλληλα οργανώνεται σε κόμβους και επισημαίνονται τα σημεία που χρήζουν ιδιαίτερη προσοχή. Με αυτό τον τρόπο ο εκπαιδευόμενος χρησιμοποιώντας μνημονικές τεχνικές μπορεί να μάθει πιο ανώδυνα την θεωρία και να την σχηματοποιήσει σε διαγράμματα. Εδώ, όμως, να επισημάνουμε ένα αρνητικό, η ανεξέλεγκτη διακίνηση σημειώσεων στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση έχει υποκαταστήσει τα σχολικά εγχειρίδια σε τέτοιο βαθμό, ώστε οι μαθητές να μην μπορούν να διαβάσουν ένα βιβλίο και να επισημάνουν οι ίδιοι τα κομβικά σημεία της θεωρίας ή να αναζητήσουν τη γνώση μέσα σε αυτά.



Η συνάρτηση: $y = \alpha x$

Δύο ποσά λέγονται **ανάλογα** όταν έχουν σταθερό πηλίκο. Δηλαδή αν τα διαιρέσουμε μας δίνουν πάντα τον ίδιο σταθερό αριθμό.

Με μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως εξής: $\frac{y}{x} = \alpha$

Αν προσπαθήσουμε να εκφράσουμε το ποσό y ως συνάρτηση του x τότε έχουμε την συνάρτηση $y = \alpha x$.

Πχ: \(y=3x\) η συνάρτηση αυτή έχει πίνακα τιμών

y	0	3	-3	18	-27	15
x	0	1	-1	6	-9	5

Παρατηρούμε ότι πάντα το πηλίκο $\frac{y}{x}$ είναι πάντοτε σταθερό και ίσο με 3.

Η συνάρτηση αυτή γραφικά σχηματίζει μια ευθεία γραμμή που διέρχεται πάντα από την αρχή των αξόνων, το σημείο O(0,0). Η συνάρτηση τέμνει συνεπώς στο ίδιο σημείο και τους δύο άξονες.

Ο αριθμός α ονομάζεται κλίση της συνάρτησης/ ευθείας.

Αν $\alpha > 0$ τότε η συθεία είναι κάπως έτσι:

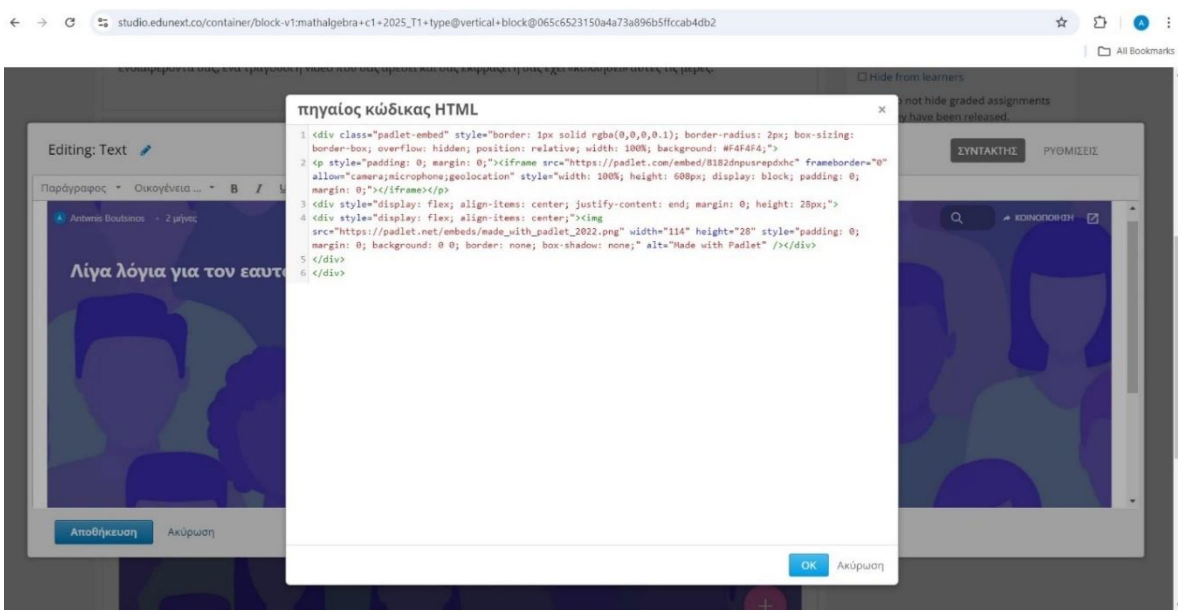
(Η εικόνα δημιουργήθηκε στο geogebra)

Αν $\alpha < 0$ τότε η ευθεία είναι κάπως έτσι:

Εικόνα 9: 2ο Παράδειγμα παρουσίασης της θεωρίας μέσω σημειώσεων

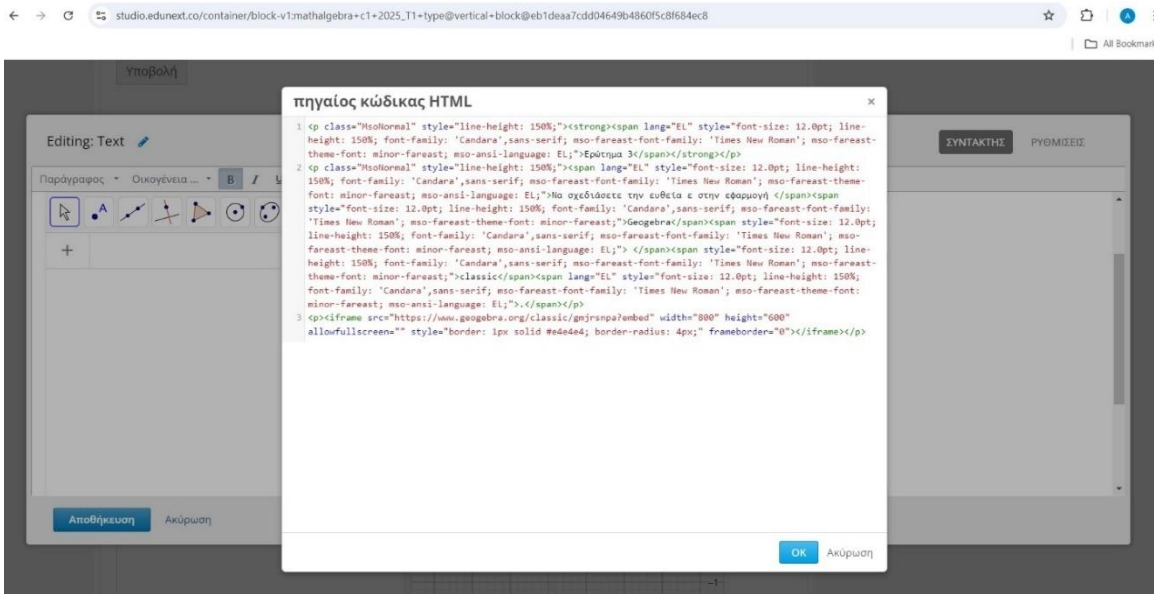
Ταυτόχρονα το εργαλείο Text, μας έδωσε την δυνατότητα να προσθέσουμε στη ροή του MOOC εφαρμογές όπως το padlet και το Geogebra classic. Οι εφαρμογές αυτές ενσωματώθηκαν σε δραστηριότητες του MOOC μέσω κώδικα HTML. Με τη χρήση τέτοιων εφαρμογών το MOOC γίνεται περισσότερο διαδραστικό.

Με το εργαλείο padlet δίνεται στους μαθητές να καταλάβουν ότι δεν είναι μόνοι στον δύσκολο και σκληρό κόσμο των μαθηματικών. Δημιουργείται η ατμόσφαιρα μιας εικονικής τάξης μέλη της οποίας είναι όλοι οι εκπαιδευόμενοι οι οποίοι μοιράζονται τα ίδια προβλήματα και έρχονται αντιμέτωποι με τις ίδιες προκλήσεις. Έτσι αίρονται οι περιορισμοί που θέτει η απομακρυσμένη και ασύγχρονη εκπαίδευση του MOOC.



Εικόνα 10: Ενσωμάτωση του εργαλείου Padlet

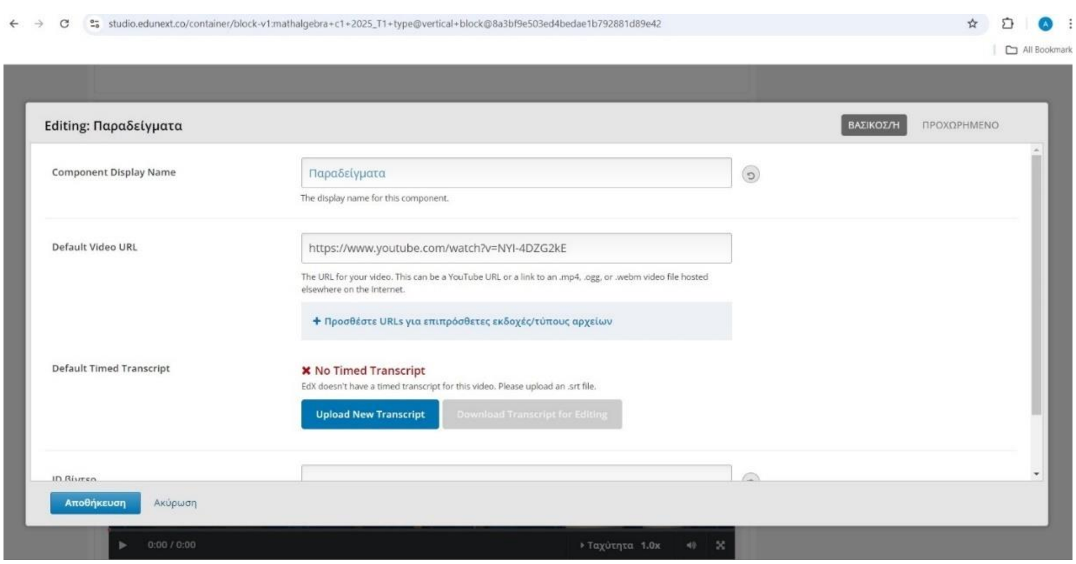
Το Geogebra classic, από την άλλη, παρουσιάζει μια ενδιαφέρουσα οπτική των μαθηματικών. Οι μαθητές βγαίνουν έξω από τα καλούπια και τις αγκυλώσεις που θέτουν τα μαθηματικά στο χαρτί και μαθαίνουν ότι μπορούν να οπτικοποιούν τις μαθηματικές έννοιες και να πειραματιστούν με αυτές, ενισχύοντας έτσι την αυτενέργειά τους.



Εικόνα 11: Ενσωμάτωση του εργαλείου Geogebra classic

4.2.2 Εισαγωγή video

Για την καλύτερη και πιο διαδραστική παρουσίαση της ύλης ή επίδειξη βασικών ασκήσεων επιλέχθηκε η χρήση video. Τα video αντλήθηκαν όλα από την εφαρμογή youtube ενώ το video καλωσορίσματος δημιουργήθηκε με τεχνολογία AI στο vidnoz.

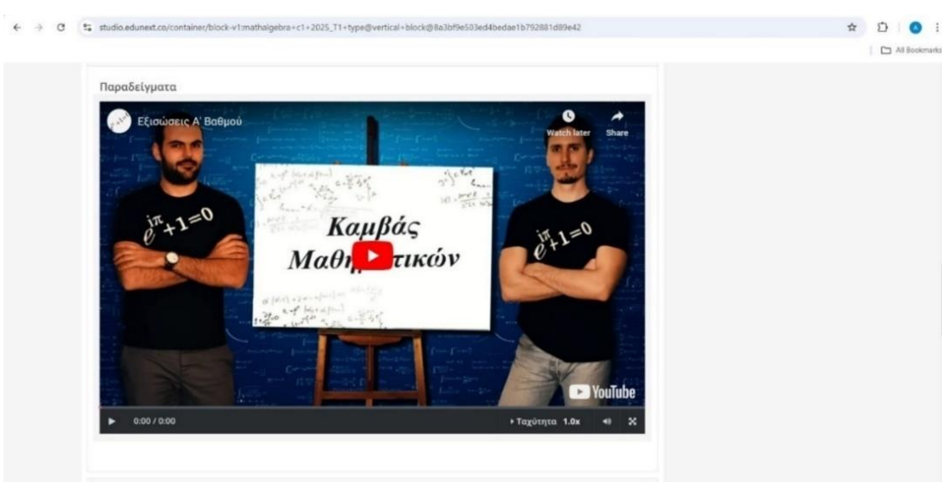


Εικόνα 12: Ρυθμίσεις εισαγωγής video

Το βίντεο αποτελεί ένα πολυαισθητηριακό εργαλείο που ενισχύει τη μάθηση, επιτρέποντας στους μαθητές να συνδυάσουν οπτική και ακουστική πληροφόρηση (Guo et al., 2014; Hew et al., 2019). Ειδικά στην άλγεβρα, όπου οι μαθηματικές έννοιες είναι αφηρημένες και πολλές φορές δύσκολες στην κατανόηση, τα βίντεο μπορούν να κάνουν τις πληροφορίες πιο απτές και κατανοητές (Boaler, 2021).

Κατά τη διάρκεια του μαθήματος, τα βίντεο χρησιμοποιήθηκαν για να δείξουν στους μαθητές πώς να λύνουν βήμα-βήμα συγκεκριμένα προβλήματα, να αναλύσουν δύσκολες εξισώσεις και να απεικονίσουν αφηρημένες έννοιες με όσο πιο απλό τρόπο γίνεται (Bates, 2015). Οι μαθητές, βλέποντας την επίλυση σε πραγματικό χρόνο, έχουν τη δυνατότητα να επαναλάβουν το βίντεο όποτε χρειάζεται, να σταματήσουν και να επανεξετάσουν δύσκολα σημεία, κάτι που ενισχύει την αυτονομία τους στη μάθηση (Guo et al., 2014). Επιπλέον, τα βίντεο είναι μια μορφή άμεσης ανατροφοδότησης, η οποία είναι κρίσιμη για την αξιολόγηση της προόδου των μαθητών και τους επιτρέπει να εμβαθύνουν στη μάθηση (Boaler, 2021; Hew et al., 2019).

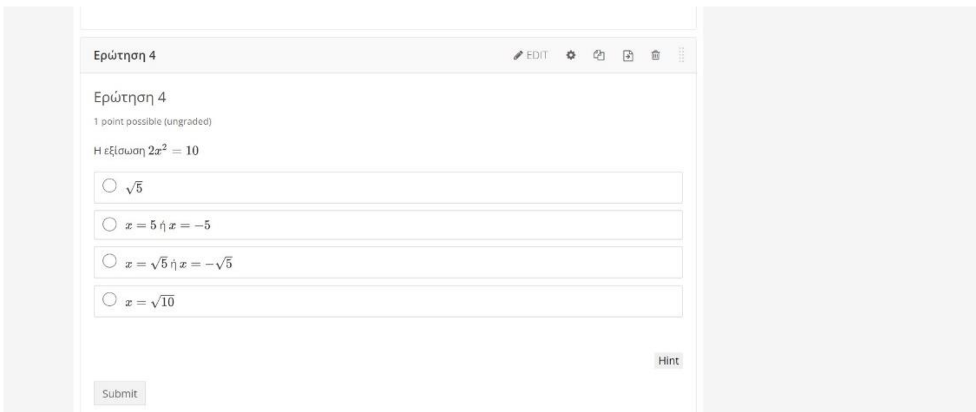
Τέλος, το βίντεο δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να μάθουν με τον δικό τους ρυθμό και να επαναλαμβάνουν την ύλη, κάτι που είναι σύμφωνο με τη στρατηγική της μικρό-μάθησης (Ebben & Murphy, 2014). Έτσι, οι μαθητές μπορούν να παρακολουθήσουν βίντεο που εστιάζουν σε συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες και να αφομοιώσουν την πληροφορία πιο αποτελεσματικά (Guo et al., 2014; Bates, 2015).



Εικόνα 13: Παράδειγμα εμφάνισης video

4.2.3 Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

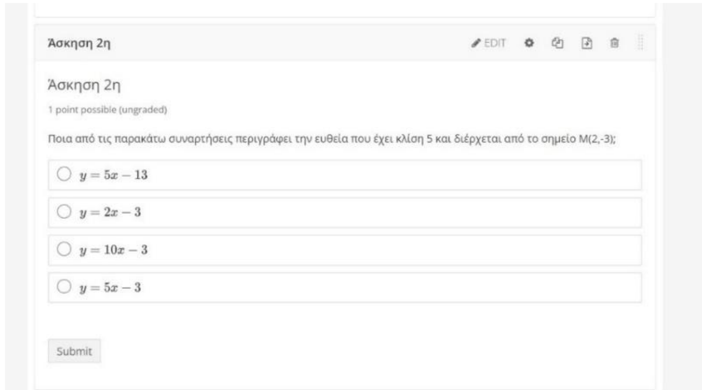
Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής χρησιμοποιήθηκαν στις δραστηριότητες εξάσκησης, αυτό-αξιολόγησης και στην τελική εξέταση. Στις δραστηριότητες εξάσκησης οι ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής περιλάμβαναν πλήρη ανατροφοδότηση. Στις ερωτήσεις αυτό-αξιολόγησης σε αρκετές περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκαν υποδείξεις. Ενώ στην τελική εξέταση χρησιμοποιήθηκαν ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής χωρίς υποδείξεις και ανατροφοδότηση.



Εικόνα 14: 1ο Παράδειγμα ερώτησης πολλαπλής επιλογής

Οι ερωτήσεις αυτού του τύπου επιτρέπουν την άμεση ανατροφοδότηση στους μαθητές, κάτι που είναι ζωτικής σημασίας στη διαδικτυακή μάθηση. Μέσα από αυτές, οι μαθητές μπορούν να λάβουν άμεσα αποτελέσματα σχετικά με το κατά πόσο έχουν κατανοήσει τις έννοιες που διδάχθηκαν. Αυτό επιτρέπει τη γρήγορη διόρθωση λαθών και την ενίσχυση της κατανόησης (Butler, 2018; Hew et al., 2019).

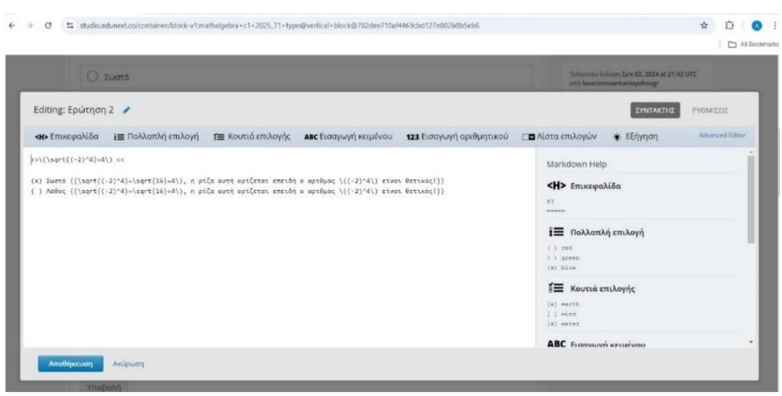
Επιπλέον, οι ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής διευκολύνουν τη διαφοροποίηση της αξιολόγησης. Σε ένα μάθημα άλγεβρας, είναι δυνατόν να αξιολογηθούν διαφορετικά επίπεδα γνώσεων και δεξιοτήτων, από την απλή απομνημόνευση βασικών τύπων μέχρι την κατανόηση και εφαρμογή τους σε πιο σύνθετα προβλήματα. Έτσι, οι ερωτήσεις σχεδιάστηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να αξιολογούν την αναλυτική ικανότητα των μαθητών, προσφέροντάς τους προκλήσεις που απαιτούν κριτική σκέψη και λογική επεξεργασία (Haladyna & Rodriguez, 2013; Nicol, 2007).



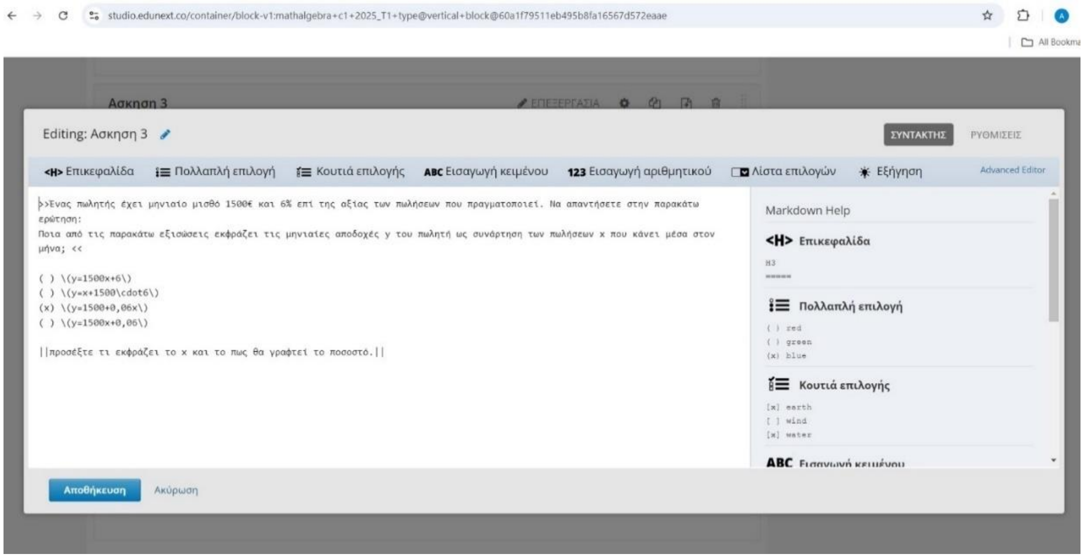
Εικόνα 15: 2ο Παράδειγμα ερώτησης πολλαπλής επιλογής

Μια ακόμη σημαντική λειτουργία των ερωτήσεων πολλαπλής επιλογής είναι η ενίσχυση της ενεργής μάθησης. Οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν τη σωστή απάντηση από πολλές επιλογές, κάτι που τους ενθαρρύνει να αναλογιστούν και να συγκρίνουν διαφορετικές προσεγγίσεις για την επίλυση του προβλήματος (Boud, 2010; Butler, 2018). Αυτό ενισχύει τη μνήμη και την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, όπως οι εξισώσεις και οι συναρτήσεις.

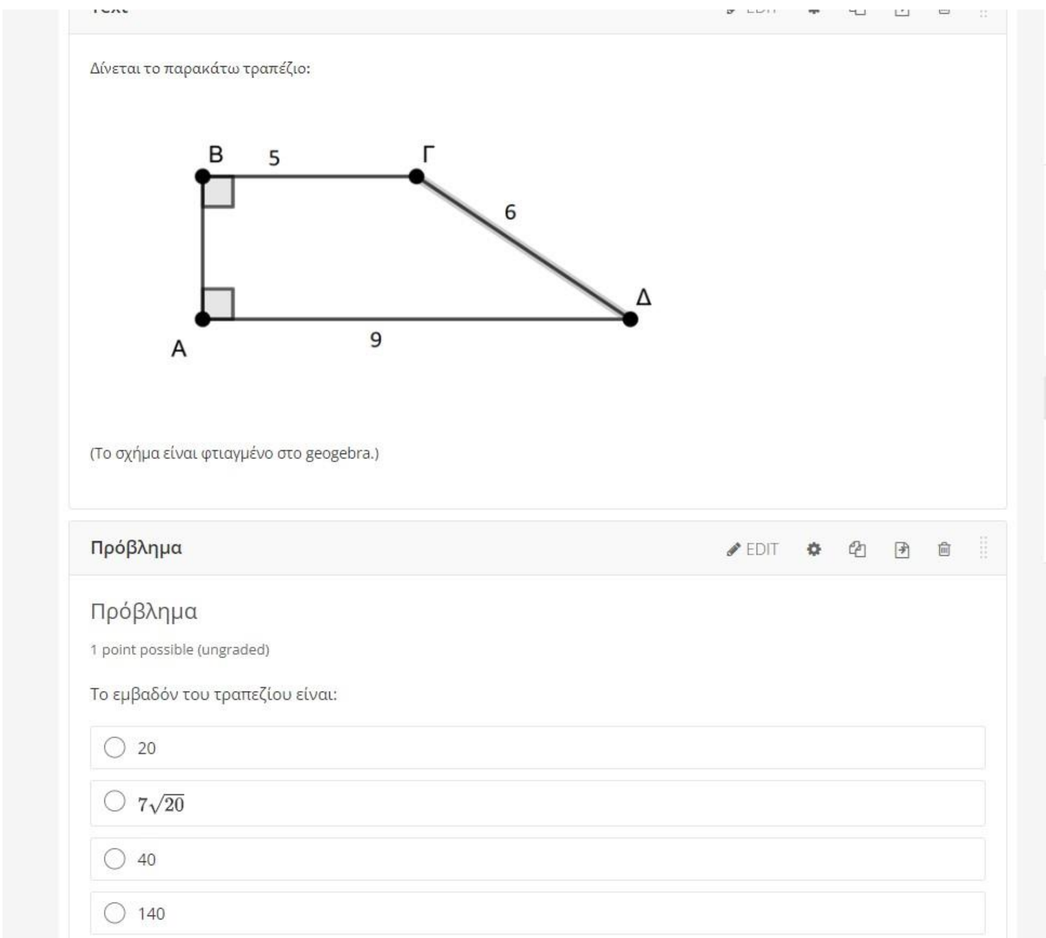
Τέλος, οι ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με την ενσωμάτωσή τους στα διάφορα στάδια του MOOC λειτουργούν ως εργαλείο αυτό-αξιολόγησης. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να μετρήσουν, με αυτές, την πρόοδό τους και να αναγνωρίσουν τα σημεία στα οποία χρειάζονται περισσότερη εξάσκηση (Luo et al., 2014; Daradoumis et al., 2013).



Εικόνα 16: Δομή ερώτησης πολλαπλής επιλογής με ανατροφοδότηση



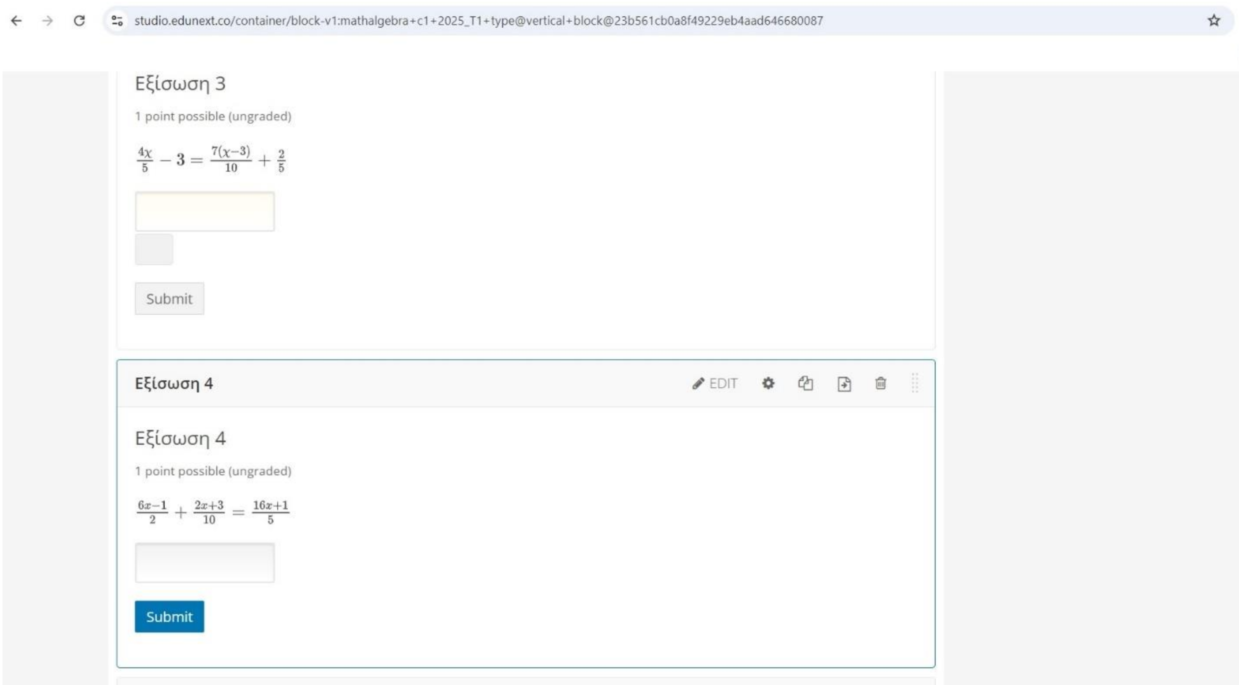
Εικόνα 17: Δομή ερώτησης πολλαπλής επιλογής με υπόδειξη



Εικόνα 18: 3ο Παράδειγμα ερώτησης πολλαπλής επιλογής

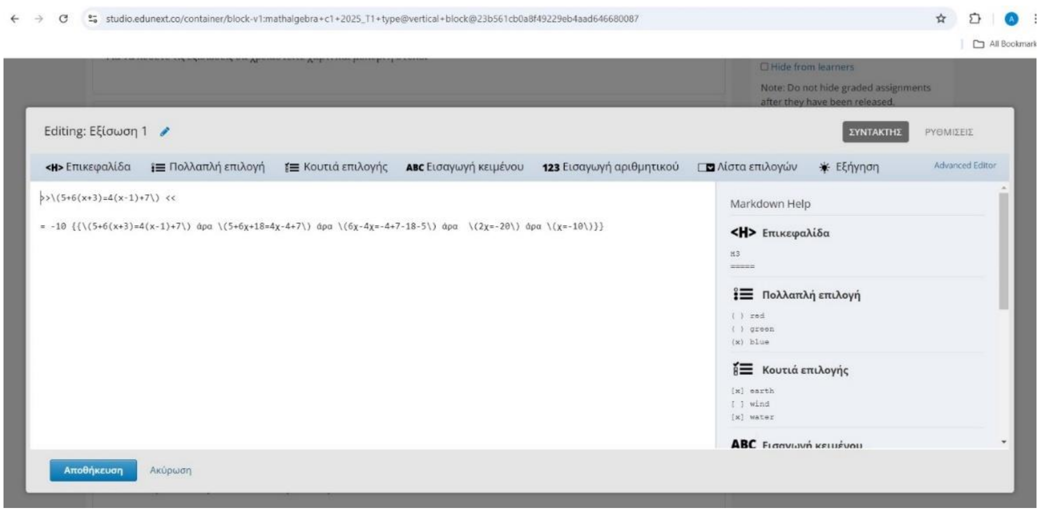
4.2.4 Εισαγωγή αριθμού (Numerical Input)

Σε δραστηριότητες εξάσκησης, αυτό-αξιολόγησης και στην τελική εξέταση χρησιμοποιήθηκε το εργαλείο «εισαγωγή αριθμού (Numerical Input)». Ο εκπαιδευόμενος καλούνταν να λύσει την άσκηση και στη συνέχεια να εισάγει τον αριθμό που βρήκε.

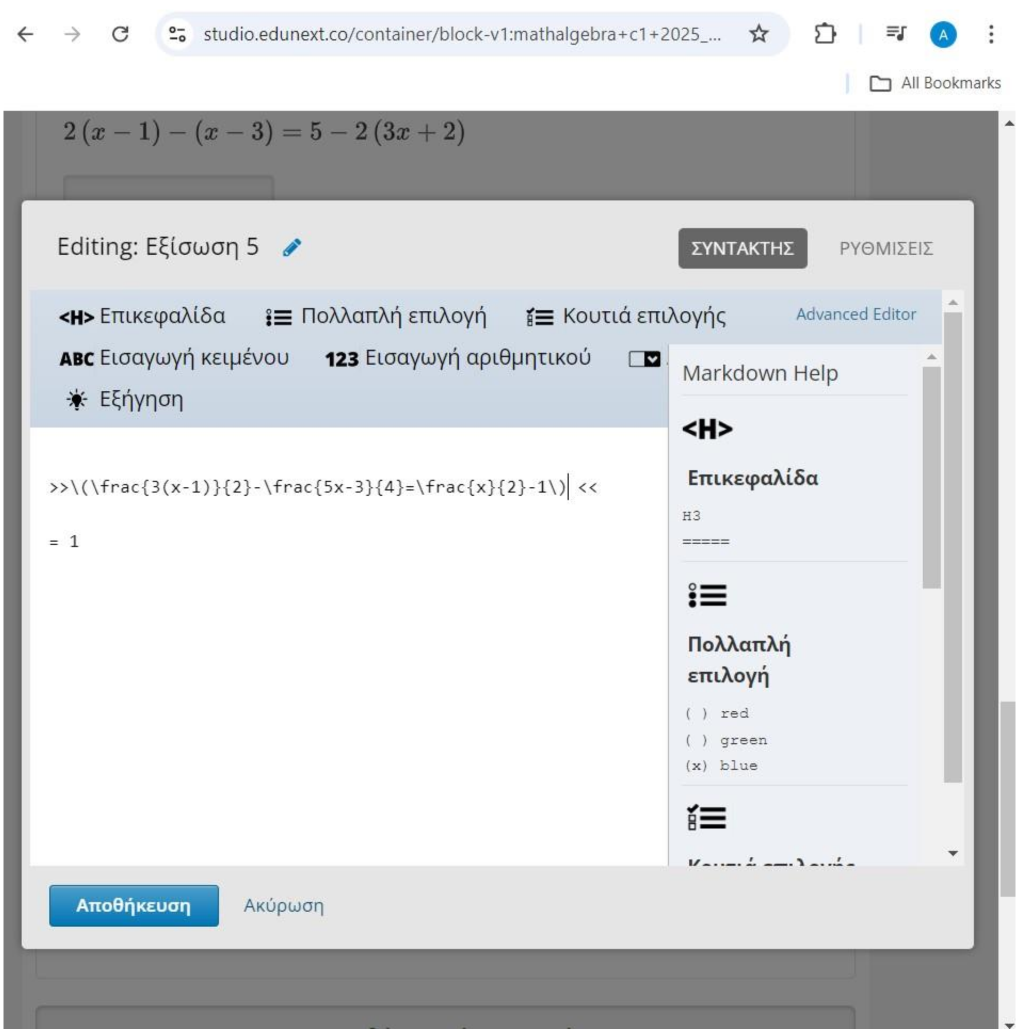


Εικόνα 19: Παραδείγματα ερωτήσεων εισαγωγής αριθμού

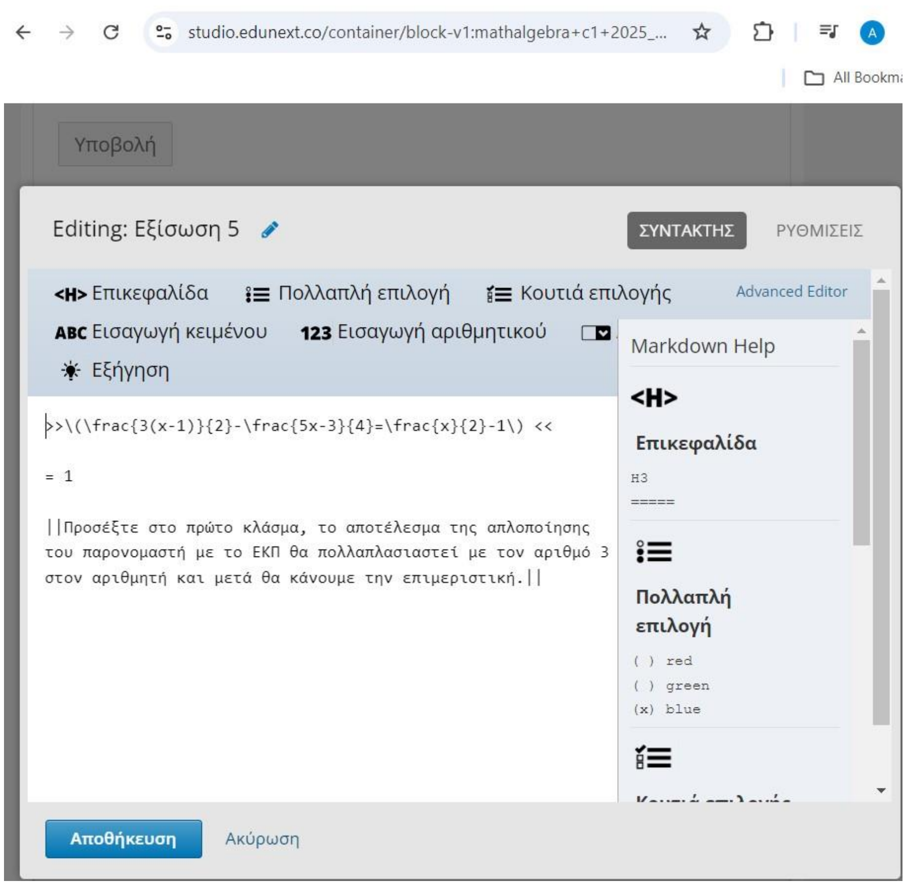
Με την χρήση τέτοιων ερωτήσεων έγινε προσπάθεια το MOOC να έρθει πιο κοντά στην μορφή των ασκήσεων που ζητείται στο σχολείο. Ένα MOOC το οποίο προετοιμάζει μαθητές για τις σχολικές εξετάσεις χρειάζεται να γεφυρώνει την απόσταση που χωρίζει το σχολείο από το ηλεκτρονικό μάθημα. Έτσι λύνοντας ο εκπαιδευόμενος στο χαρτί του την άσκηση μπορεί να επιβεβαιώσει ή να ελέγξει την αριθμητική λύση στο εργαλείο, παίρνοντας παράλληλα άμεσα την κατάλληλη ανατροφοδότηση για την απάντησή του.



Εικόνα 10: Δομή ερώτησης εισαγωγής αριθμού στην οποία παρέχεται ανατροφοδότηση



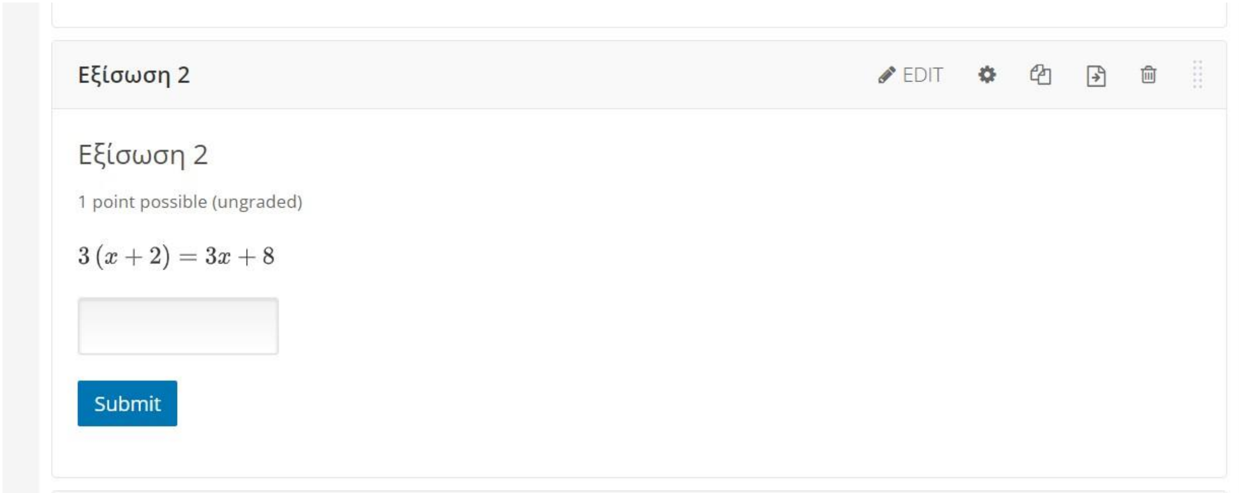
Εικόνα 21: Δομή ερώτησης εισαγωγής αριθμού



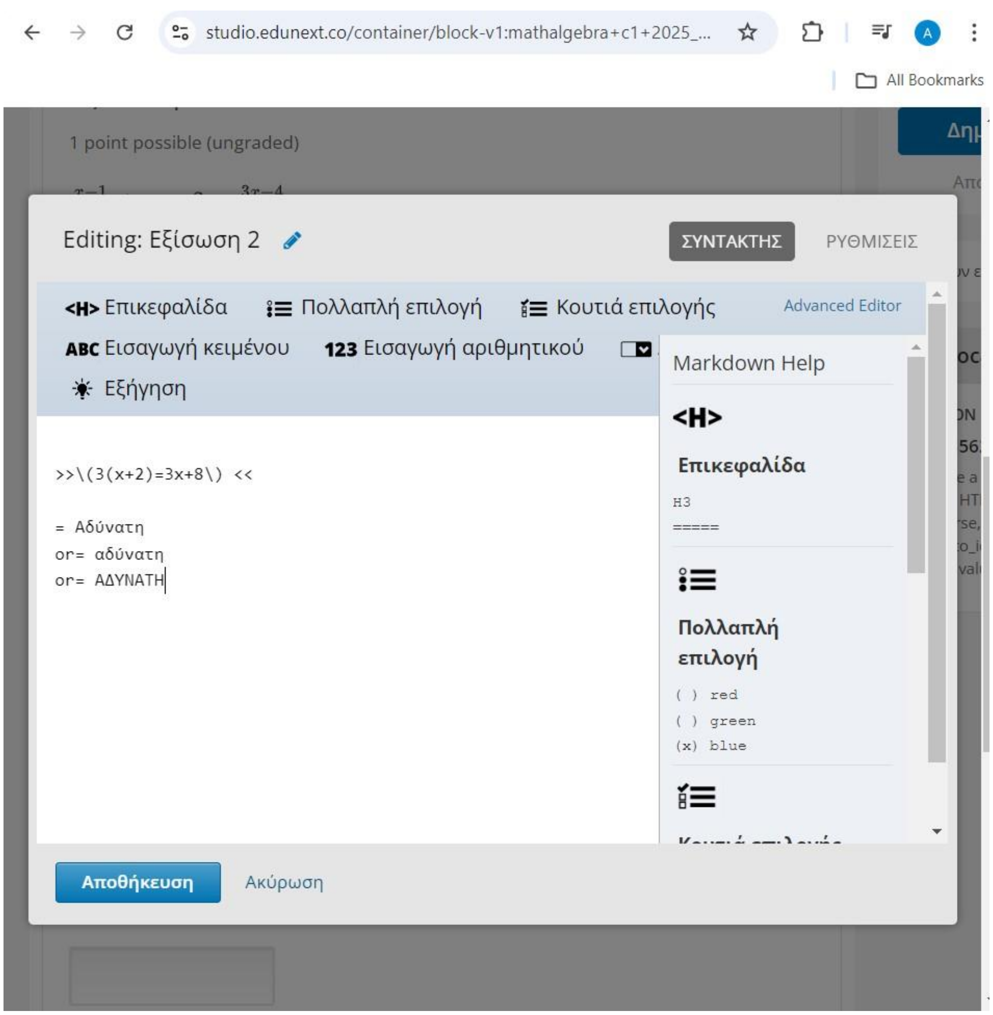
Εικόνα 22: Δομή ερώτησης εισαγωγής αριθμού με χρήση υπόδειξης

4.2.5 Εισαγωγή Κειμένου (Text Input)

Ερωτήσεις που δέχονται κείμενο ως απάντηση χρησιμοποιήθηκαν στην ενότητα των εξισώσεων. Οι ασκήσεις που χρειάστηκε να δομηθούν έτσι ήταν εξισώσεις οι οποίες ήταν είτε αδύνατες είτε αόριστες, συνεπώς δεν υπήρχε κάποιος αριθμός ως λύση της εξίσωσης ώστε να χρησιμοποιηθεί το εργαλείο «εισαγωγή αριθμού (Numerical Input)». Το σκεπτικό πίσω από την επιλογή του συγκεκριμένου εργαλείου είναι όμοιο με το σκεπτικό του προηγούμενου εργαλείου, απλά προσαρμοσμένο σε συγκεκριμένου τύπου ασκήσεις, τις εξισώσεις.



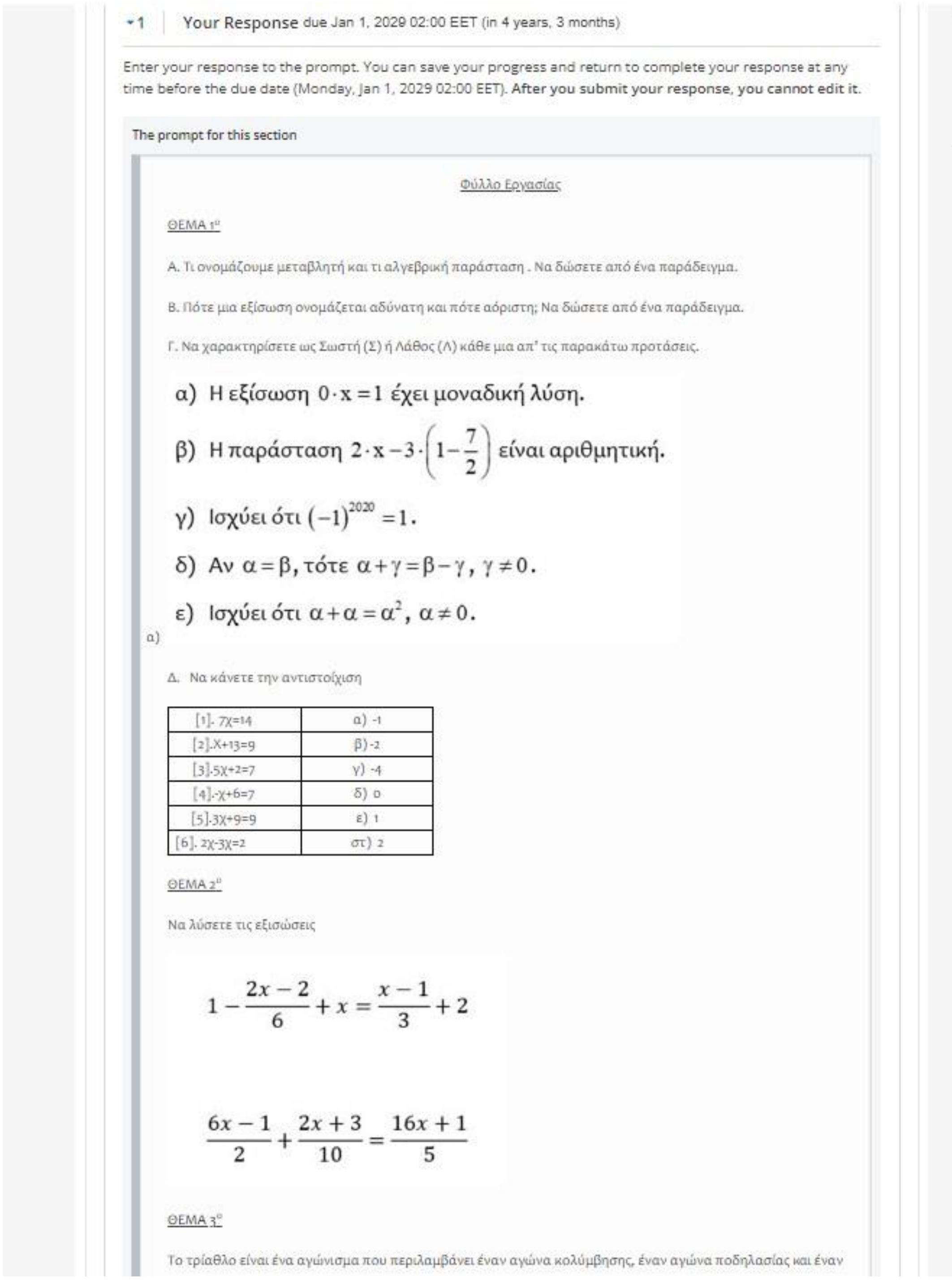
Εικόνα 23: Παράδειγμα ερώτησης εισαγωγής κειμένου



Εικόνα 24: Δομή ερώτησης εισαγωγής κειμένου

4.2.6 Ερώτηση ανοιχτής απόκρισης (ORA)

Όπως αναφέραμε και στο Κεφάλαιο 3, στο τέλος κάθε διδακτικής ενότητας υπάρχει μια δραστηριότητα ανοιχτής απόκρισης τύπου ORA.



1 Your Response due Jan 1, 2029 02:00 EET (in 4 years, 3 months)

Enter your response to the prompt. You can save your progress and return to complete your response at any time before the due date (Monday, Jan 1, 2029 02:00 EET). **After you submit your response, you cannot edit it.**

The prompt for this section

Φύλλο Εργασίας

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Τι ονομάζουμε μεταβλητή και τι αλγεβρική παράσταση . Να δώσετε από ένα παράδειγμα.

Β. Πότε μια εξίσωση ονομάζεται αδύνατη και πότε αόριστη; Να δώσετε από ένα παράδειγμα.

Γ. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) κάθε μια απ' τις παρακάτω προτάσεις.

α) Η εξίσωση $0 \cdot x = 1$ έχει μοναδική λύση.

β) Η παράσταση $2 \cdot x - 3 \cdot \left(1 - \frac{7}{2}\right)$ είναι αριθμητική.

γ) Ισχύει ότι $(-1)^{2020} = 1$.

δ) Αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha + \gamma = \beta - \gamma$, $\gamma \neq 0$.

ε) Ισχύει ότι $\alpha + \alpha = \alpha^2$, $\alpha \neq 0$.

α)

Δ. Να κάνετε την αντιστοίχιση

[1]. 7χ=14	α) -1
[2].Χ+13=9	β) -2
[3].5χ+2=7	γ) -4
[4].-χ+6=7	δ) 0
[5].3χ+9=9	ε) 1
[6]. 2χ-3χ=2	στ) 2

ΘΕΜΑ 2ο

Να λύσετε τις εξισώσεις

$$1 - \frac{2x-2}{6} + x = \frac{x-1}{3} + 2$$

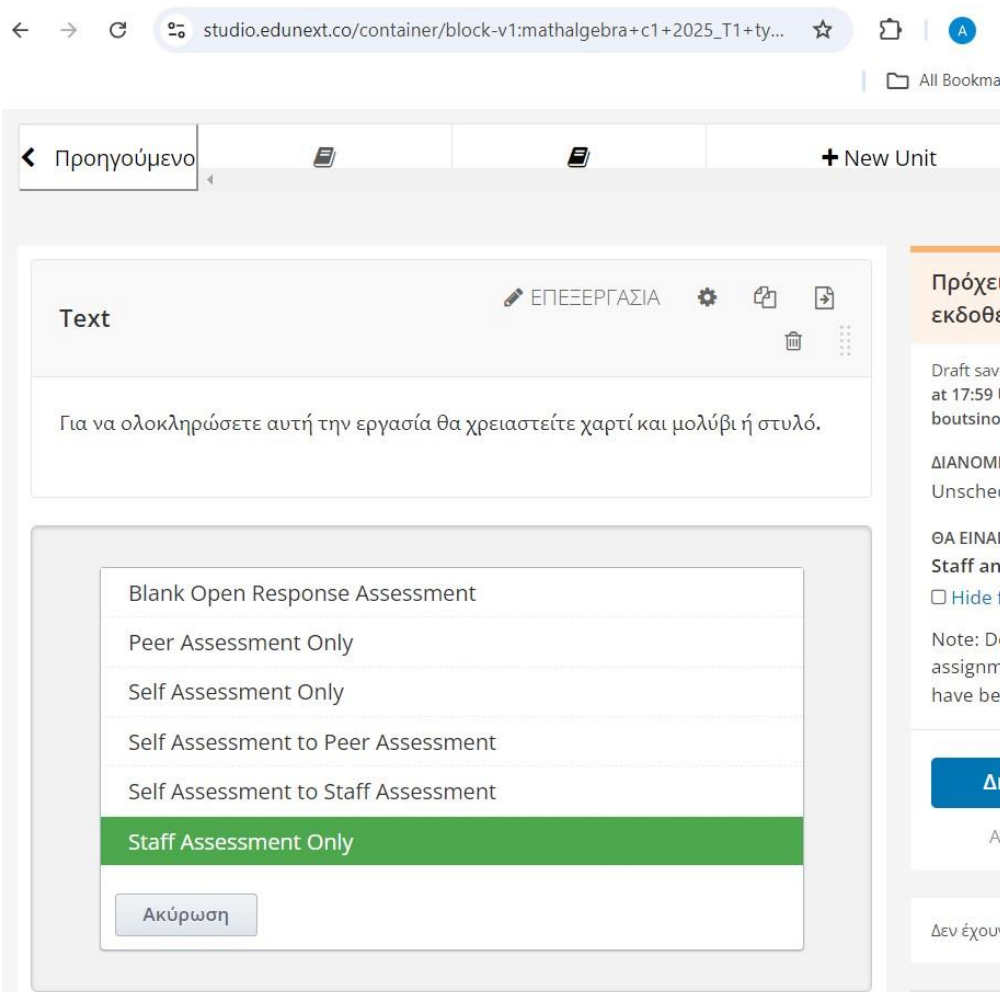
$$\frac{6x-1}{2} + \frac{2x+3}{10} = \frac{16x+1}{5}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Το τρίαθλο είναι ένα αγώνισμα που περιλαμβάνει έναν αγώνα κολύμβησης, έναν αγώνα ποδηλασίας και έναν

Εικόνα 25: Εκφώνηση δραστηριότητας τύπου ORA

Οι εργασίες ανοιχτής απόκρισης (ORA) προσφέρουν σημαντικά οφέλη τόσο για τους μαθητές όσο και για την εκπαιδευτική διαδικασία συνολικά. Πρώτον, ενισχύουν την κριτική σκέψη και την εφαρμογή γνώσεων. Σε αντίθεση με τις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, οι μαθητές καλούνται να δημιουργήσουν πλήρεις απαντήσεις και να εξηγήσουν τη λογική πίσω από τις λύσεις τους. Αυτό βοηθάει στην καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, όπως οι εξισώσεις και οι ανισότητες, καθώς τους ζητείται να αναπτύξουν τον συλλογισμό τους (Boud, 2010; Garrison et al., 2000).

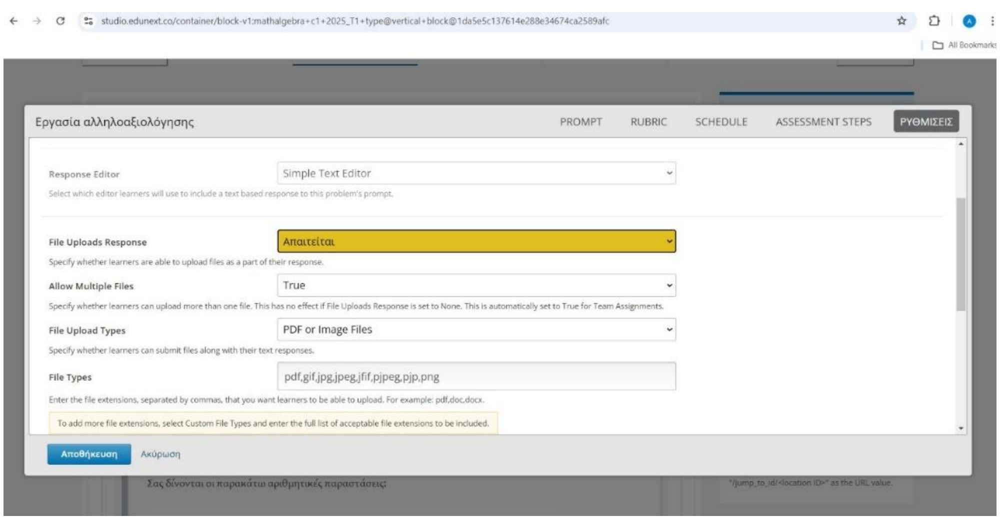


Εικόνα 26: Ορισμός δραστηριότητας τύπου ORA

Επιπλέον, οι εργασίες ανοιχτής απόκρισης προωθούν την αυτονομία και την υπευθυνότητα των μαθητών. Καθώς οι μαθητές πρέπει να επεξεργαστούν και να εξηγήσουν την εργασία τους, μαθαίνουν να ελέγχουν τις σκέψεις τους και να οργανώνουν το περιεχόμενο που παρέχουν (Gupta & Gupta, 2019). Παράλληλα, τους δίνεται η ευκαιρία να επιδείξουν δημιουργικές λύσεις σε προβλήματα, γεγονός που ενθαρρύνει την καινοτόμο σκέψη (Daradoumis et al., 2013).

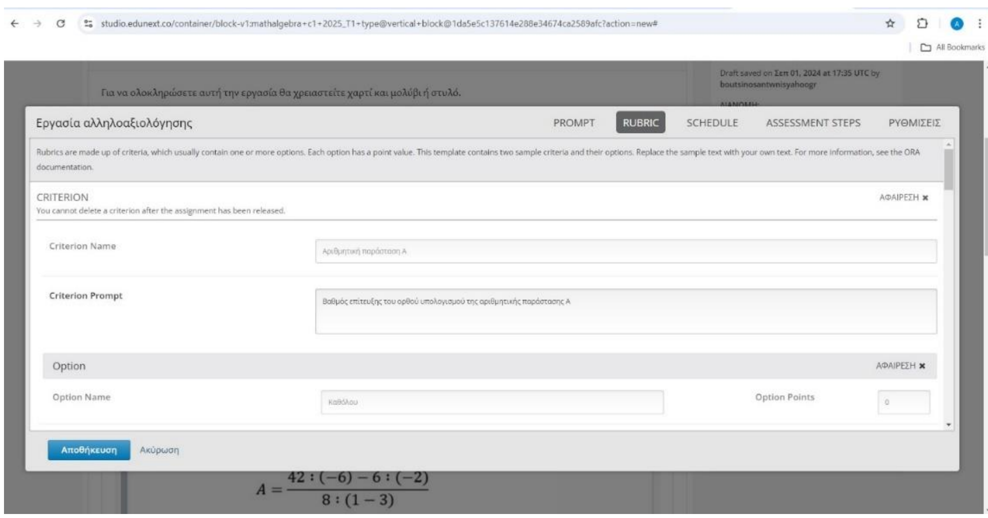
Ένα ακόμα όφελος είναι η προώθηση της συνεργασίας μέσω της αξιολόγησης από ομότιμους (peer review). Οι μαθητές μπορούν να δουν διαφορετικές προσεγγίσεις στα μαθηματικά προβλήματα και να μάθουν από τα λάθη και τις επιτυχίες των συμμαθητών τους, κάτι που ενισχύει την αλληλεπίδραση και την κοινότητα μάθησης στο MOOC (Luo et al., 2014; Nandi et al., 2012).

Τέλος, οι ORA παρέχουν στους καθηγητές πιο ποιοτική ανατροφοδότηση σχετικά με το επίπεδο κατανόησης των μαθητών, καθώς μπορούν να αναλύσουν τις λογικές διαδικασίες που ακολουθούνται στις απαντήσεις. Αυτό βοηθά στην καλύτερη προσαρμογή του υλικού στις ανάγκες των μαθητών (Pilli & Admiraal, 2016).



Εικόνα 27: Ρυθμίσεις δραστηριότητας τύπου ORA

Παρά όλα αυτά, η εργασία ORA σχεδιάστηκε ώστε να διορθώνεται από τον ίδιο τον εκπαιδευτή, σύμφωνα με ρουμπρίκες αξιολόγησης που δημιουργήθηκαν για αυτόν τον σκοπό. Ο εκπαιδευόμενος έχει την δυνατότητα να λύσει την άσκηση στο χαρτί του και στην συνέχεια να την ανεβάσει στο εργαλείο, σε μορφή pdf ή εικόνας, ώστε να την λάβει ο εκπαιδευτής. Με αυτό τον τρόπο παρέχεται ακριβής ανατροφοδότηση στον εκπαιδευόμενο, πολύ χρήσιμη για την τελειοποίηση του γραπτού του ενόψει των εξετάσεων. Η ηλικιακή ομάδα στην οποία απευθύνεται το MOOC εμφανίζει συχνά τάσης υπερτίμησης των μαθησιακών τους αποτελεσμάτων ειδικά στα γραπτά. Συνεπώς στην ταχεία προετοιμασία γύρω από γραπτούς διαγωνισμούς και εξετάσεις είναι επιθυμητή η ακριβής διόρθωση και η άμεση εστίαση του εκπαιδευόμενου στα λάθη ώστε να τα διορθώσει όσο πιο γρήγορα γίνεται. Ενώ, παράλληλα, να μην αφήσει σκοτεινά σημεία και αμφιβολίες που ενδέχεται να αφήσει η αυτό-αξιολόγηση της εργασίας του ή αξιολόγηση από τους συμμαθητές του. Τέτοιες μέθοδοι αξιολόγησης θα επιλέγονταν σε ένα MOOC με διαφορετικό σκοπό από την ταχεία προετοιμασία μαθητών για εξετάσεις.



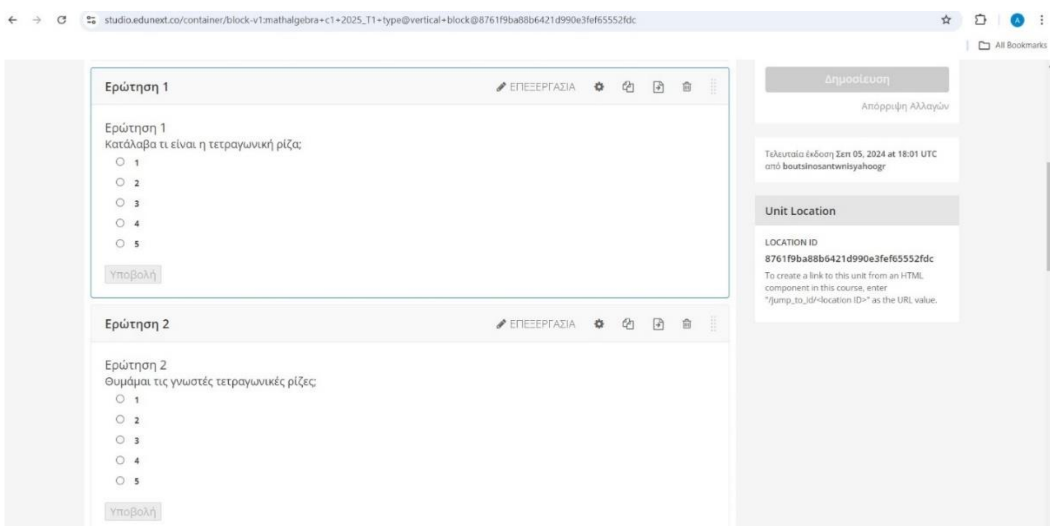
Εικόνα 28: Δημιουργία Ρουμπρίκας αξιολόγησης εργασίας τύπου ORA

4.2.7 Poll

Για την ευκολότερη και πιο οργανωμένη αυτό-αξιολόγηση των εκπαιδευόμενων, υπάρχουν μέσα στο MOOC polls. Poll υπάρχουν σε κάθε δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης «Checklist: Μπορώ να το κάνω…». Παράλληλα, στην εισαγωγή της κάθε ενότητας, όπως και στην εισαγωγή του MOOC, υπάρχει poll το οποίο διερευνά τις αρχικές γνώσεις των μαθητών, δίνοντας στον εκπαιδευτή πληροφορίες για το μαθησιακό επίπεδο των εκπαιδευόμενων, αλλά και στον εκπαιδευόμενο μια πρώτη γεύση για το τι θα αντιμετωπίσει στη συνέχεια (Gupta & Gupta, 2019; Luo et al., 2014).

Η ενσωμάτωση των Poll συμβάλλει σημαντικά στην ενίσχυση της μάθησης και της εμπλοκής των μαθητών. Τα Poll επιτρέπουν στους μαθητές να απαντούν άμεσα σε σύντομες ερωτήσεις, δημιουργώντας μια αίσθηση αλληλεπίδρασης με το μάθημα (Boud, 2010).

Πρώτον, τα Polls βοηθούν στην ενεργή συμμετοχή των μαθητών. Μέσω αυτών, οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν σε ερωτήσεις που σχετίζονται με το υλικό της άλγεβρας, όπως η λύση εξισώσεων ή η αναγνώριση αλγεβρικών τύπων. Αυτό τους κρατά αφοσιωμένους στο περιεχόμενο και τους δίνει την ευκαιρία να αξιολογήσουν τις γνώσεις τους σε πραγματικό χρόνο (Nandi et al., 2012). Τα Polls βοηθούν στη δημιουργία μιας πιο διαδραστικής και προσαρμοστικής μαθησιακής εμπειρίας (Daradoumis et al., 2013).



Εικόνα 29: Παράδειγμα Poll

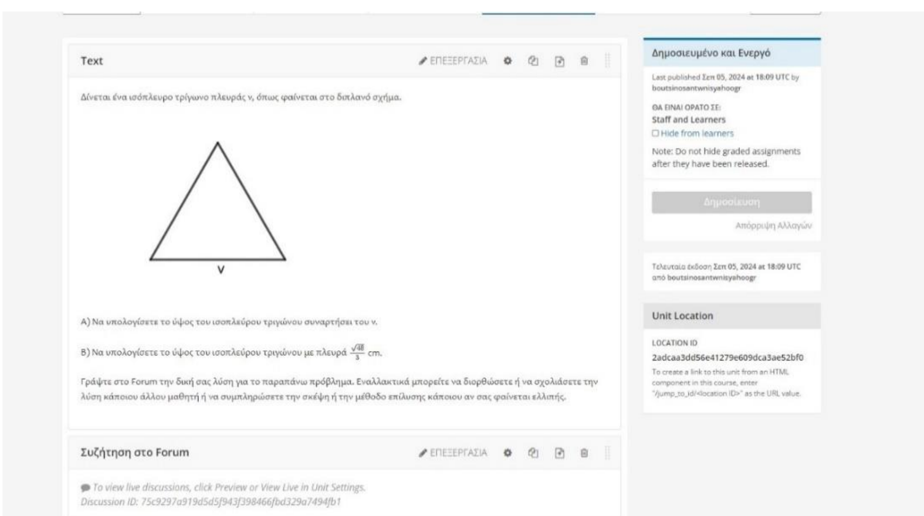
Από την άλλη, τα Polls βοηθούν και τους διδάσκοντες να εντοπίσουν κοινά λάθη ή παρανοήσεις των μαθητών ή ελλείψεις στο σχεδιασμό του μαθήματος. Με αυτόν τον τρόπο, ο εκπαιδευτής μπορεί να προχωρήσει σε απαραίτητες διορθώσεις και βελτιώσεις, ώστε το μάθημα να γίνεται αρτιότερο (Garrison et al., 2000). Συνεπώς, από την πλευρά του εκπαιδευτή, τα Polls αποτελούν μια πλούσια πηγή πληροφοριών χρήσιμων για την αξιολόγηση του MOOC (Pilli & Admiraal, 2016).

4.2.8 Forum

Σε κάθε ενότητα υπάρχει μια δραστηριότητα στο forum. Η δραστηριότητα αυτή στις αρχικές ενότητες έχει περισσότερο την έννοια ο εκπαιδευόμενος να νιώσει ότι δεν είναι μόνος, ότι είναι κομμάτι μιας κοινότητας- τάξης όπως και στο σχολείο και ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζει δεν είναι μόνο δικές αλλά υπάρχουν και άλλοι εκεί έξω που αντιμετωπίζουν παρόμοια προβλήματα. Όμως στις διδακτικές ενότητες 2, 3 και 4 οι δραστηριότητες στο forum γυρίζουν γύρω από ένα πρόβλημα που καλούνται οι μαθητές να λύσουν από κοινού.

Η λογική με την οποία χρησιμοποιήθηκε η δραστηριότητα Forum σε κάθε ενότητα είναι ότι προσφέρει έναν χώρο αλληλεπίδρασης όπου οι μαθητές μπορούν να συζητούν και να λύνουν απορίες, ενισχύοντας έτσι τη συνεργατική μάθηση (Garrison et al., 2000; Nandi et al., 2012). Μέσω της ανταλλαγής απόψεων, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να εξηγήσουν και να αναπτύξουν τις σκέψεις τους, κάτι που οδηγεί σε βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (Luo et al., 2014).

Επιπλέον, το forum δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να εξασκήσουν την κριτική σκέψη και να αναπτύξουν δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων. Όταν οι μαθητές συμμετέχουν σε συζητήσεις, τους ζητείται συχνά να εξηγήσουν τους μαθηματικούς συλλογισμούς τους, γεγονός που ενισχύει την κατανόηση και την εφαρμογή της θεωρίας στην πράξη (Daradoumis et al., 2013). Αυτό βοηθά ιδιαίτερα σε προβλήματα που λύνονται με την χρήση εξισώσεων και συναρτήσεων, όπου οι μαθητές μπορούν να συζητήσουν διάφορες μεθόδους επίλυσης.



Εικόνα 30: Παράδειγμα εκφώνησης άσκησης που τίθεται προς συζήτηση στο Forum

Το forum προσφέρει επίσης άμεση ανατροφοδότηση από άλλους μαθητές και τους εκπαιδευτές. Αυτή η ανατροφοδότηση επιτρέπει στους μαθητές να διορθώσουν τα λάθη τους σε πραγματικό χρόνο και να μάθουν από τις αλληλεπιδράσεις με τους συμμαθητές τους (Luo et al., 2014; Pilli & Admiraal, 2016). Η συνεργασία αυτή προάγει την κατανόηση και τη διατήρηση της γνώσης, δημιουργώντας μια κοινότητα μάθησης που λειτουργεί υποστηρικτικά για όλους (Garrison et al., 2000).

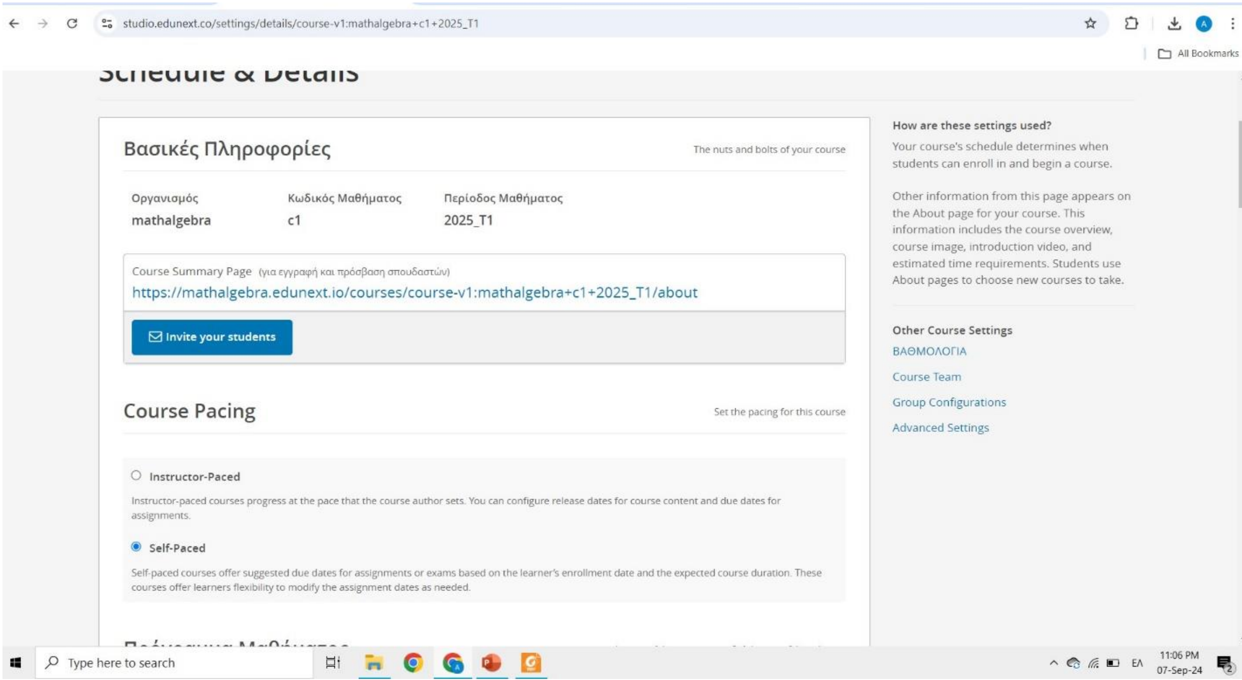
Τέλος, το forum συμβάλλει στην ενίσχυση της εμπλοκής των μαθητών με το μάθημα, επιτρέποντάς τους να συμμετέχουν ενεργά και να διατηρούν επαφή με το περιεχόμενο σε τακτική βάση, γεγονός που βελτιώνει τη συνολική μαθησιακή εμπειρία σε ένα MOOC (Gupta & Gupta, 2019; Jordan, 2015).

4.3 Ρυθμίσεις λειτουργίας του MOOC

4.3.1 Ρυθμίσεις αρχικής σελίδας

Για την εξυπηρέτηση των σκοπών του MOOC, ρυθμίστηκε στην επιλογή "self-paced". Η επιλογή προσφέρει πολλαπλά οφέλη τόσο για τους μαθητές όσο και για τους εκπαιδευτικούς. Πρώτον, παρέχει ευελιξία στους μαθητές να μελετούν στον δικό τους ρυθμό, κάτι που είναι εξαιρετικά χρήσιμο για άτομα με διαφορετικές μαθησιακές ανάγκες (Gupta & Gupta, 2019). Οι μαθητές μπορούν να προσαρμόσουν τον χρόνο τους, να επαναλάβουν δύσκολες ενότητες και να μελετήσουν σε στιγμές που είναι πιο παραγωγικοί, γεγονός που βελτιώνει τη συνολική τους κατανόηση και την απόδοση (Nandi, Hamilton, & Harland, 2012).

Επιπλέον, τα self-paced MOOCs είναι ιδανικά για την προσωποποιημένη μάθηση, καθώς επιτρέπουν στους μαθητές να επικεντρωθούν σε θέματα που τους ενδιαφέρουν περισσότερο ή τους προκαλούν μεγαλύτερη δυσκολία, χωρίς την πίεση μιας προθεσμίας (Daradoumis et al., 2013). Αυτό βελτιώνει τη μάθηση μέσω της δυνατότητας ατομικής προσαρμογής των μαθησιακών στόχων και της ανεξάρτητης μελέτης (Gupta & Gupta, 2019).



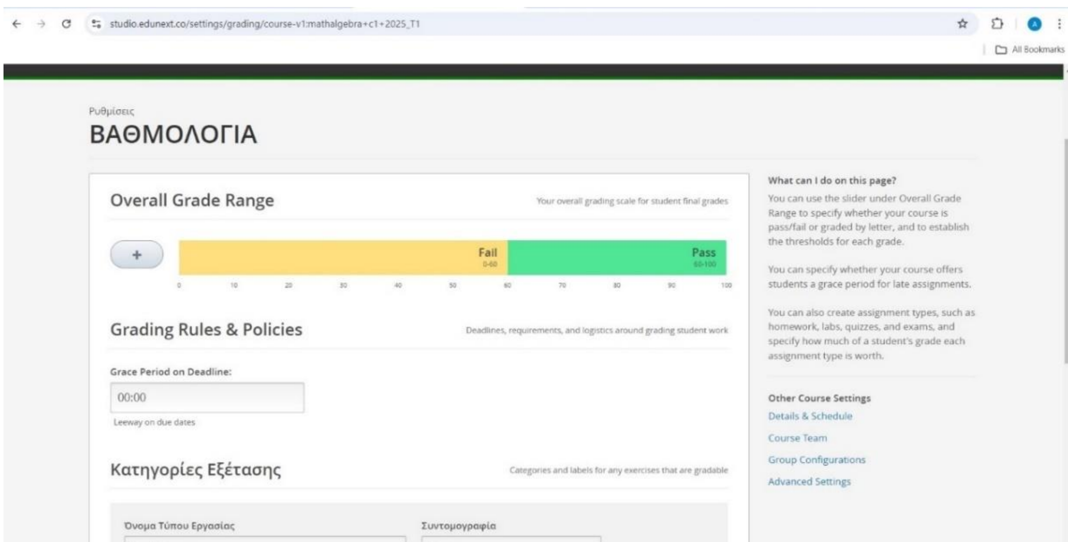
Εικόνα 31: Ρύθμιση λειτουργείας MOOC

Η αυτορρυθμιζόμενη φύση αυτών των MOOCs προσφέρει επίσης τη δυνατότητα στους μαθητές να αναστοχάζονται τη μάθηση τους και να αναπτύσσουν δεξιότητες αυτοπειθαρχίας και διαχείρισης χρόνου, που είναι χρήσιμες τόσο στην εκπαίδευση όσο και στην καθημερινή ζωή (Garrison, Anderson, & Archer, 2000). Επιπλέον, επειδή δεν υπάρχουν αυστηρές προθεσμίες, η επιλογή αυτή μειώνει το άγχος που μπορεί να δημιουργηθεί σε ένα πιο πιεστικό περιβάλλον μάθησης όπως αυτό που δημιουργείται πριν από εξετάσεις (Jordan, 2015).

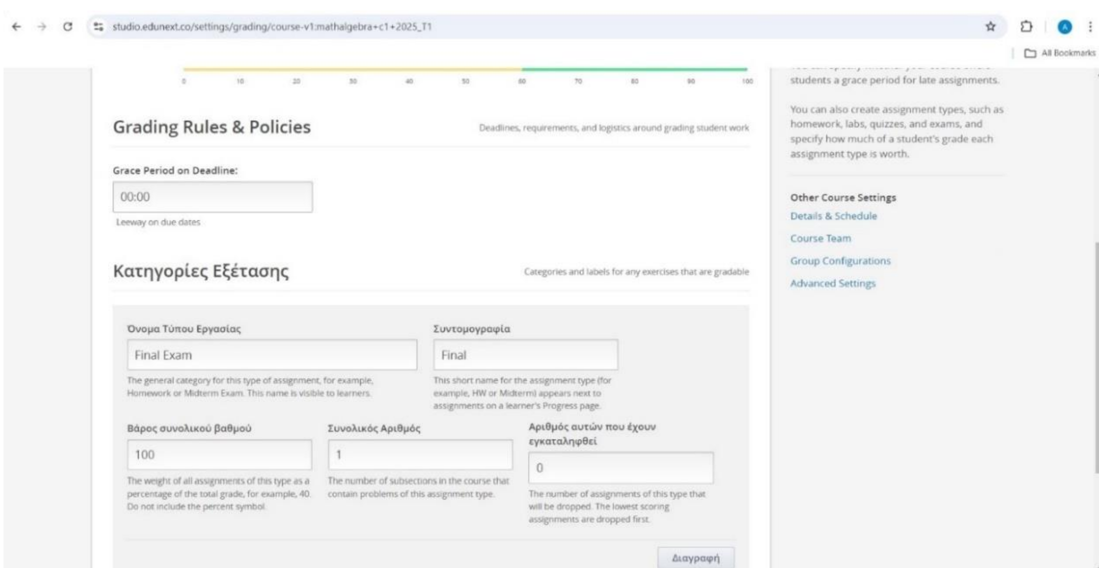
Συνοψίζοντας, η επιλογή self-paced ενισχύει τη μαθησιακή εμπειρία σε ένα MOOC, καθιστώντας το προσβάσιμο, ευέλικτο και προσαρμοσμένο στις ατομικές ανάγκες των μαθητών (Halawa, Greene, & Mitchell, 2014).

4.3.2 Ρυθμίσεις βαθμολογίας

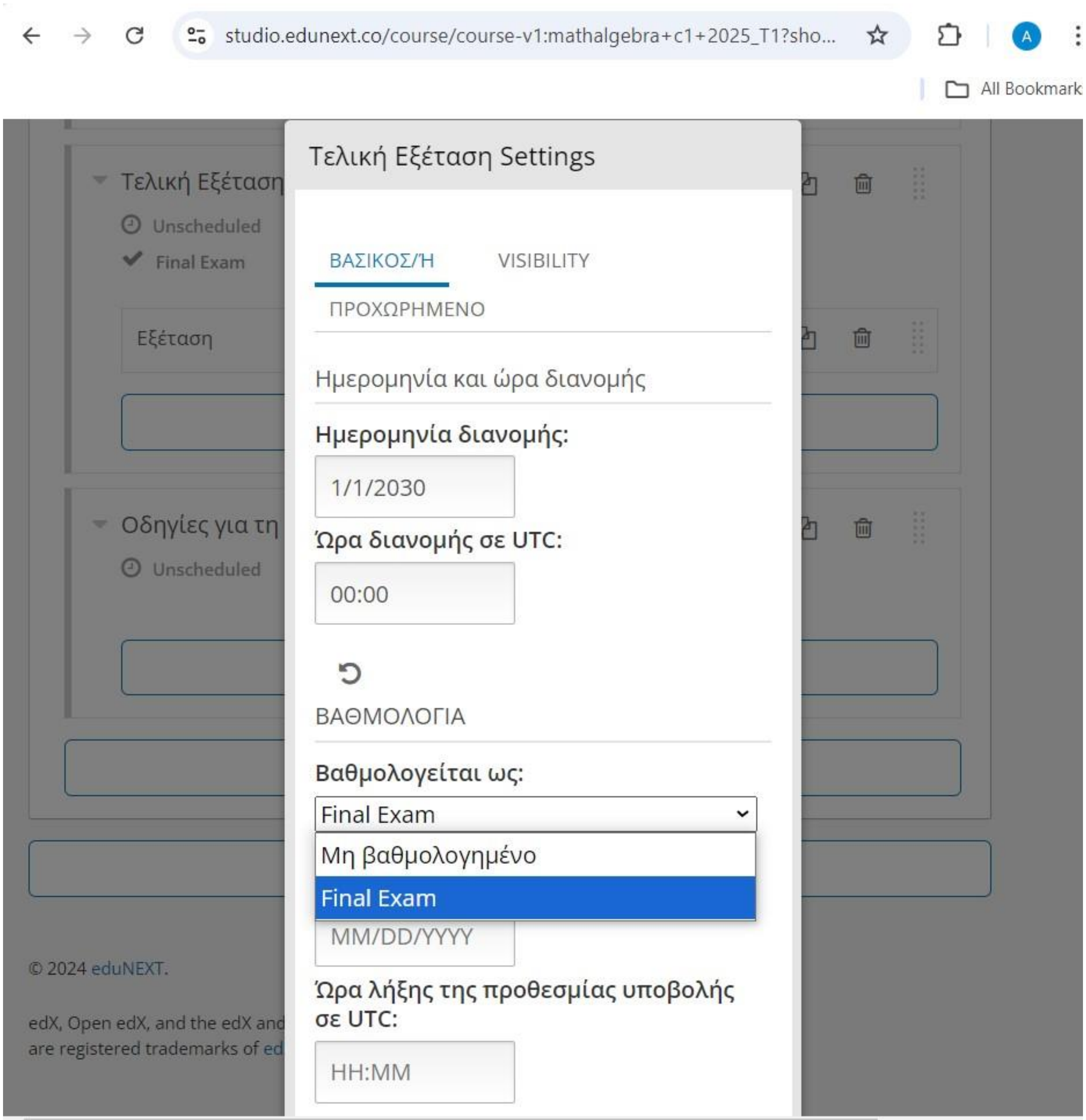
Όπως αναφέρεται και στο κεφάλαιο 3, για το πιστοποιητικό του MOOC, ο βαθμός μόνο της τελικής εξέτασης καθορίζει την παροχή του. Στόχος της τελικής εξέτασης του MOOC ήταν να διαμορφώσει ένα διαγώνισμα προσομοίωσης των προαγωγικών εξετάσεων του σχολείου, χρονικής διάρκειας εξήντα λεπτών. Σε αυτό το διαγώνισμα τα θέματα όλα είναι συνδυαστικά από όλη την ύλη ώστε να προσομοιάζουν στα θέματα που ζητούνται από τους εκπαιδευτικούς του σχολείου. Με βάση αυτή την σκέψη δεν προσμετρούνται στην βαθμολογία οι διάφορες δραστηριότητες αξιολόγησης που υπήρχαν στις διδακτικές ενότητες. Η βαθμολογία ορίστηκε στο 60%, μεγαλύτερο ποσοστό από αυτό που ορίζεται στο σχολείο, ώστε ο εκπαιδευόμενος να αναγκάζεται να καταβάλει μεγαλύτερη προσπάθεια στην εξάσκηση για να έχει ένα πιο σίγουρο αποτέλεσμα στις προαγωγικές εξετάσεις.



Εικόνα 32: Ρύθμιση κατώτατου προαγωγικού βαθμού



Εικόνα 33: Ρύθμιση τύπου δραστηριότητας που βαθμολογείται



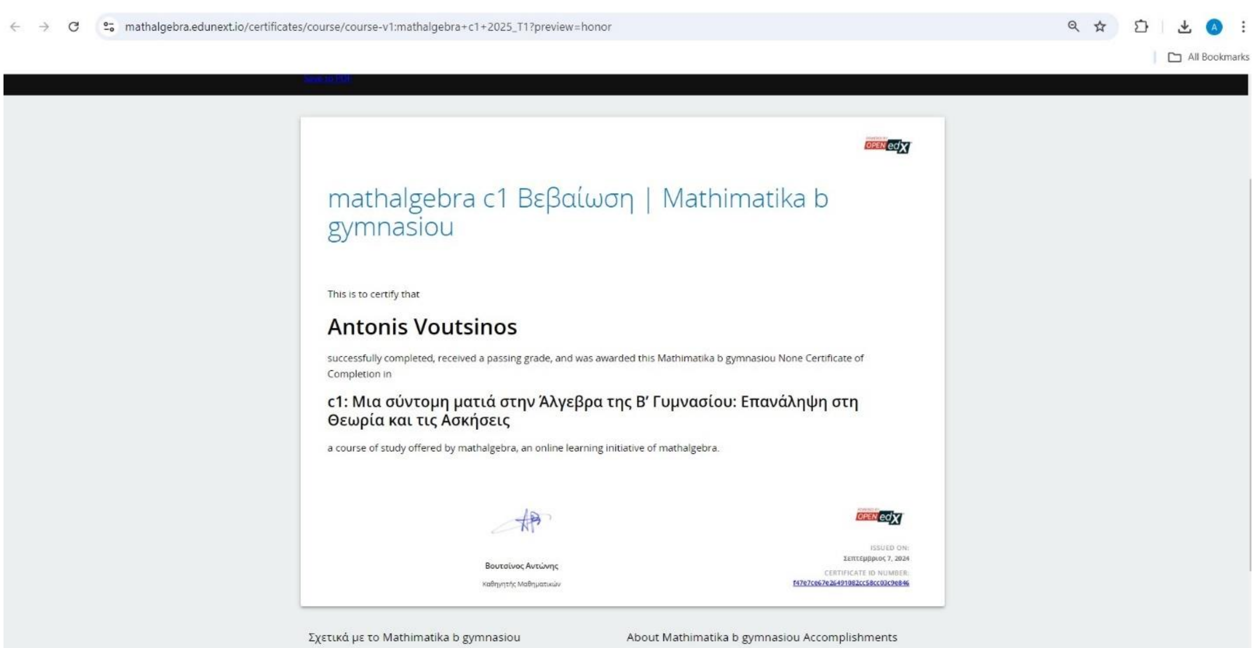
Εικόνα 34: Ρύθμιση δραστηριότητας που βαθμολογείται

4.3.3 Ρυθμίσεις πιστοποιητικού

Το MOOC παρέχει πιστοποιητικό- βεβαίωση συμμετοχής στους εκπαιδευόμενους που το ολοκληρώνουν με επιτυχία.

Η παροχή πιστοποιητικού στους αποφοίτους ενός MOOC έχει σημαντική επίδραση σε διάφορους τομείς και συμβάλλει στην αξία και την αποδοχή του μαθήματος. Πρώτον, ένα πιστοποιητικό λειτουργεί ως κίνητρο για τους μαθητές να ολοκληρώσουν το μάθημα. Για τους εκπαιδευόμενους είναι ένας απτός στόχος που επιδιώκουν να επιτύχουν, όπως ένα επίσημο πιστοποιητικό ολοκλήρωσης. Συνεπώς είναι πιο πιθανό να δεσμευτούν και να ολοκληρώσουν τα διάφορα στάδια του μαθήματος (Gupta & Gupta, 2019).

Επιπλέον, τα πιστοποιητικά ενισχύουν την εμπιστοσύνη και την αυτοεκτίμηση των μαθητών. Η επίσημη αναγνώριση της ολοκλήρωσης ενός μαθήματος παρέχει μια αίσθηση επίτευξης και προσωπικής προόδου, κάτι που μπορεί να οδηγήσει σε μεγαλύτερη εμπιστοσύνη στις ικανότητές τους και στην τόνωση του ηθικού τους (Boud, 2010; Nandi, Hamilton, & Harland, 2012).



Εικόνα 35: Το παρεχόμενο πιστοποιητικό

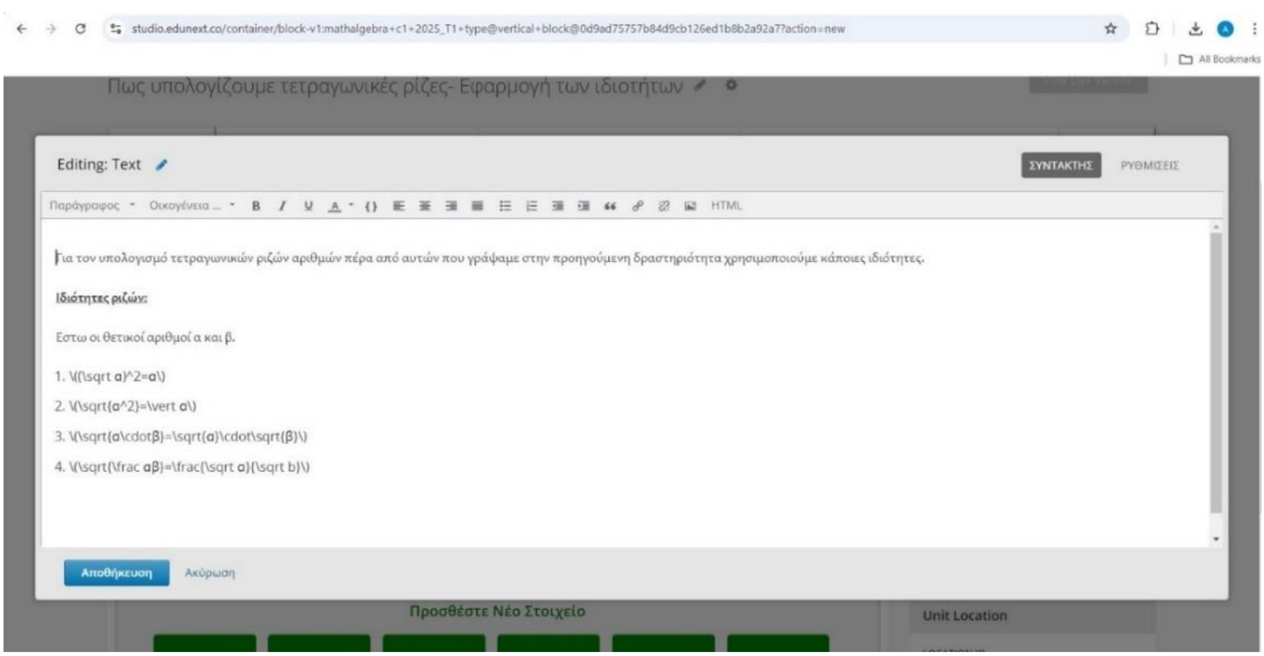
4.4 Χρήση του MathJax

4.4.1 Τι είναι το MathJax

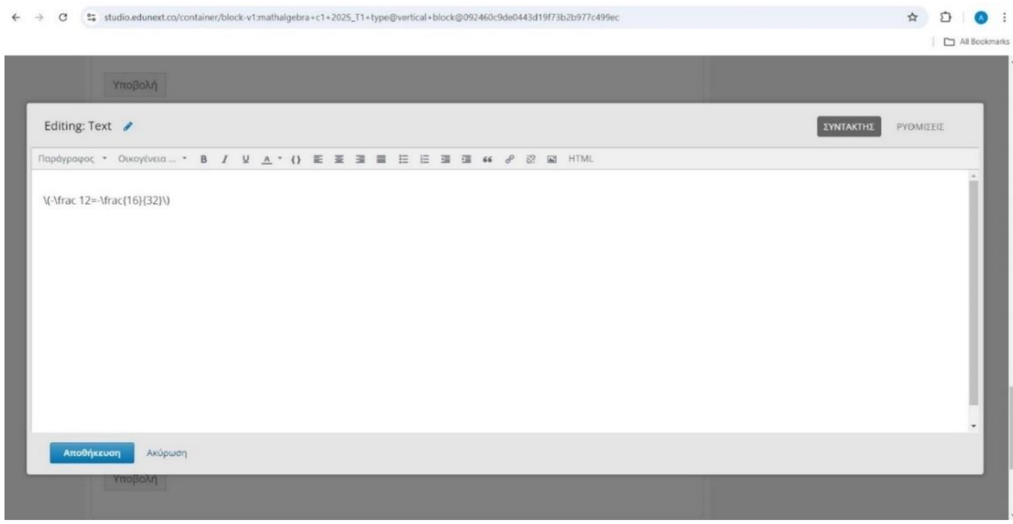
Μια από τις μεγαλύτερες προκλήσεις που συνάντησα κατά την ενσωμάτωση του υλικού που είχα δημιουργήσει στην πλατφόρμα edunext ήταν η αποτύπωση μαθηματικών συμβόλων και παραστάσεων.

Για την υπέρβαση αυτής της πρόκλησης χρησιμοποίησα το MathJax.

Το MathJax είναι ένα εργαλείο που έχει αναδειχθεί ως απαραίτητο για την εμφάνιση και την παρουσίαση μαθηματικών τύπων σε διαδικτυακά περιβάλλοντα (Cervone, 2012). Με την αυξανόμενη χρήση του διαδικτύου στην εκπαίδευση, την έρευνα και τις επιστήμες, η ανάγκη για ένα σύστημα που θα επιτρέπει τη σωστή απόδοση μαθηματικών συμβόλων σε ιστοσελίδες είναι πιο επιτακτική από ποτέ. Το MathJax σχεδιάστηκε για να καλύψει αυτή την ανάγκη, παρέχοντας μια ολοκληρωμένη λύση για την παρουσίαση μαθηματικών εκφράσεων με υψηλή ποιότητα και συμβατότητα σε όλους τους browser (Dongarra & Fox, 2014).



Εικόνα 36: Εντολές εμφάνισης άρρητων παραστάσεων σε MathJax



Εικόνα 37: Εντολή εμφάνισης ρητών παραστάσεων σε MathJax

Το MathJax είναι μια βιβλιοθήκη JavaScript που επιτρέπει την ενσωμάτωση μαθηματικών τύπων και συμβόλων σε ιστοσελίδες, με τρόπο που διασφαλίζει τη σωστή εμφάνιση ανεξαρτήτως της συσκευής ή του browser που χρησιμοποιείται. Υποστηρίζει τόσο τη γλώσσα σήμανσης LaTeX, η οποία είναι ευρέως χρησιμοποιούμενη στην ακαδημαϊκή κοινότητα, όσο και το MathML, ένα πρότυπο για την αναπαράσταση μαθηματικών τύπων με τη χρήση γλώσσας σήμανσης (Larson & Hostetler, 2016).

Χρησιμοποιώντας το MathJax, οι τύποι δεν χρειάζεται να μετατραπούν σε εικόνες (όπως γινόταν παλαιότερα), αλλά αποδίδονται δυναμικά ως κείμενο, εξασφαλίζοντας ότι οι τύποι είναι προσβάσιμοι από άτομα με ειδικές ανάγκες, αναζητήσιμοι και εύκολα επεξεργάσιμοι (Alpert & Bergen, 2013).

Η χρήση του MathJax είναι ευρύτατα διαδεδομένη σε διάφορα πεδία όπου η παρουσίαση μαθηματικών τύπων είναι απαραίτητη. Στην ακαδημαϊκή κοινότητα, για παράδειγμα, το MathJax χρησιμοποιείται σε πλατφόρμες όπως το Overleaf, το οποίο επιτρέπει τη συγγραφή επιστημονικών εργασιών σε LaTeX. Παράλληλα, ιστοσελίδες όπως η Wikipedia, τα διαδικτυακά φόρουμ μαθηματικών και φυσικών επιστημών, καθώς και εκπαιδευτικές πλατφόρμες χρησιμοποιούν το MathJax για την απόδοση μαθηματικών τύπων (Cervone, 2016).

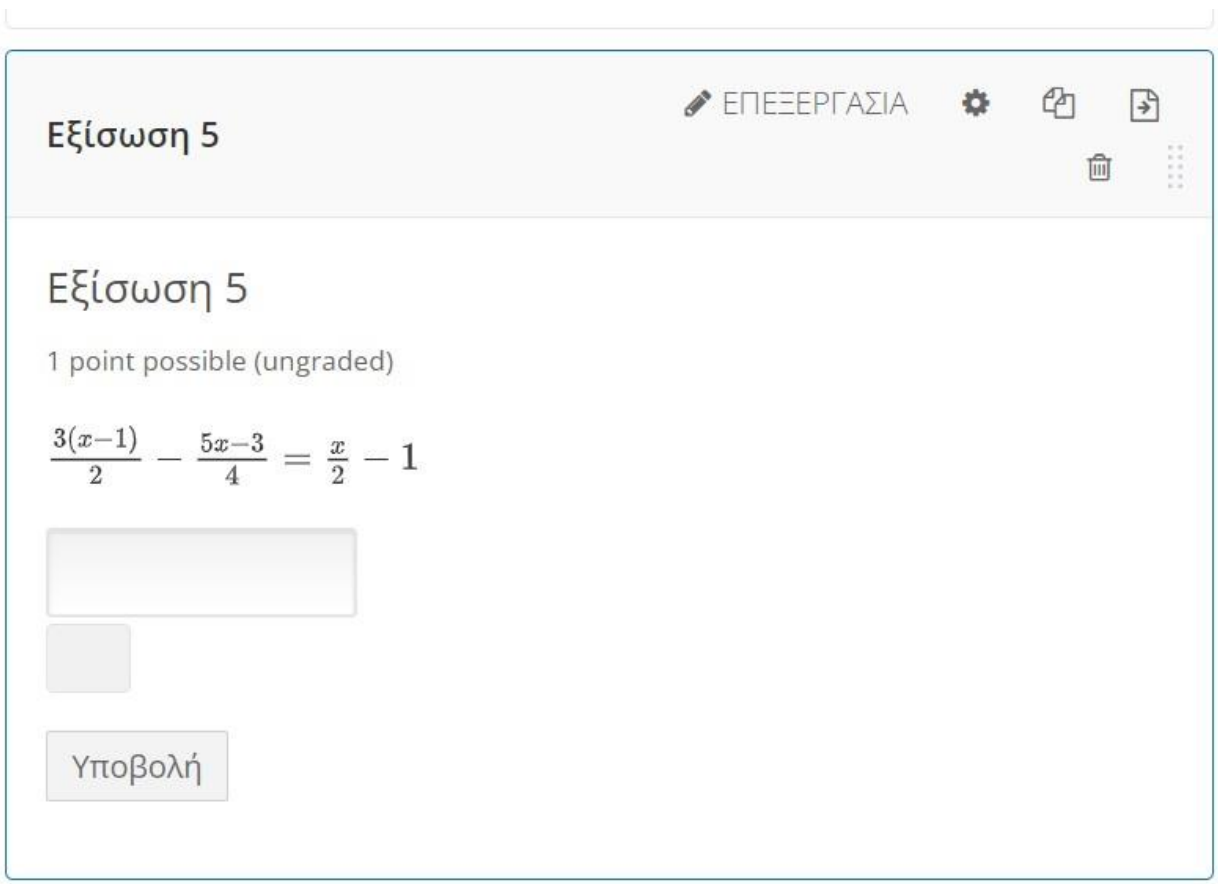
Η βασική χρησιμότητα του MathJax έγκειται στο ότι παρέχει μια ευέλικτη και προσαρμόσιμη λύση για την εμφάνιση μαθηματικών τύπων, χωρίς να απαιτείται η εγκατάσταση εξειδικευμένου λογισμικού από την πλευρά του χρήστη.

4.4.2 Παράδειγμα εφαρμογής

Για παράδειγμα σε εισαγωγή αριθμητικού η εντολή:

`\(\frac{3(x-1)}{2}-\frac{5x-3}{4}=\frac{x}{2}-1\)`

Εμφάνιζε την μαθηματική εξίσωση όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 38: Παράδειγμα εφαρμογής MathJax

4.4.3 Προσαρμογή και Ευελιξία

Το MathJax προσφέρει επίσης πολλές δυνατότητες προσαρμογής και παραμετροποίησης (Cervone, 2016). Οι χρήστες μπορούν να ρυθμίσουν το πώς εμφανίζονται οι τύποι, τη γραμματοσειρά, τον τρόπο με τον οποίο φορτώνεται η βιβλιοθήκη, καθώς και να ενσωματώσουν την απόδοση τύπων σε δυναμικό περιεχόμενο. Επίσης, το MathJax είναι φιλικό προς τους αναγνώστες με ειδικές ανάγκες, καθώς παρέχει υποστήριξη για screen readers, επιτρέποντας την αναγνωσιμότητα των μαθηματικών τύπων από άτομα με προβλήματα όρασης (Alpert & Bergen, 2013).

Σε σύγκριση με άλλα εργαλεία όπως το KaTeX, το MathJax προσφέρει μεγαλύτερη ευελιξία και καλύτερη υποστήριξη για πολύπλοκες μαθηματικές εκφράσεις. Ενώ το KaTeX είναι ταχύτερο στην απόδοση τύπων, το MathJax υποστηρίζει ευρύτερη γκάμα χαρακτηριστικών, όπως το MathML, και έχει ισχυρότερη υποστήριξη για πιο σύνθετους τύπους και συμβολισμούς (Dongarra & Fox, 2014; Larson & Hostetler, 2016).

4.5 Οδηγίες παρακολούθησης του MOOC στο edunext.co

Για την επισκόπηση ή παρακολούθηση της υλοποίησης του MOOC στην πλατφόρμα https://www.edunext.co/, ο ενδιαφερόμενος μπορεί να συνδεθεί στην πλατφόρμα με τους ακόλουθους κωδικούς:

Email: guest.mde777@gmail.com

Password: Guest777!

Στην συνέχεια από τον ηλεκτρονικό σύνδεσμο του μαθήματος έχει την δυνατότητα να παρακολουθήσει και να περιηγηθεί στο MOOC όπως αυτό υλοποιήθηκε.

Ο ηλεκτρονικός σύνδεσμος του MOOC:

https://mathalgebra.edunext.io/courses/course-v1:mathalgebra+c1+2025_T1/about

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥ ΔΙΑΔΙΚΤΥΙΑΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Η αξιολόγηση ενός διαδικτυακού μαθήματος MOOC αποτελεί ένα κρίσιμο εργαλείο για τη βελτίωση της ποιότητας της εκπαίδευσης και τη διασφάλιση ότι οι μαθησιακοί στόχοι επιτυγχάνονται αποτελεσματικά (Kizilcec & Schneider, 2015). Μέσω της αξιολόγησης, αναλύεται η αποτελεσματικότητα του περιεχομένου, η ποιότητα των μεθόδων διδασκαλίας και οι τρόποι με τους οποίους οι εκπαιδευόμενοι αλληλεπιδρούν με το υλικό. Για μαθήματα που απευθύνονται σε μαθητές, όπως αυτά για ηλικίες 13-14 ετών, η αξιολόγηση εξασφαλίζει ότι το μάθημα είναι κατάλληλο για το γνωστικό επίπεδο και τις ανάγκες της συγκεκριμένης ηλικιακής ομάδας (Aleman de la Garza, 2020).

Στη διαδικασία της αξιολόγησης του διαδικτυακού μαθήματος, πέρα από τους μαθησιακούς στόχους, εξετάζουμε το σύνολο του περιεχομένου του μαθήματος (Bozkurt & Stracke, 2022). Ζητήματα αναζητούνται στην παρουσίαση και τη δομή του διδακτικού υλικού ώστε αυτό να αποδίδεται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Επιπλέον, στις μεθόδους αξιολόγησης του εκπαιδευόμενου, όπως κουίζ, εργασίες και διαδραστικές δραστηριότητες, επιδιώκεται ο διαρκής έλεγχος του κατά πόσο οι μαθητές έχουν κατακτήσει τις γνώσεις που διδάσκονται (Ghiardelli, 2016). Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζει η χρήση ψηφιακών μέσων, όπως διαδραστικά εργαλεία, πολυμέσα και ευχάριστες διαδικτυακές πλατφόρμες, η οποία ενισχύει τη μαθησιακή εμπειρία και βελτιώνει την προσβασιμότητα του περιεχομένου (Shao & Chen, 2021).

Η αξιολόγηση επιτρέπει τον εντοπισμό πιθανών αδυναμιών στη δομή του μαθήματος, βοηθώντας τους εκπαιδευτικούς να προσαρμόσουν το περιεχόμενο και τις τεχνικές τους. Επίσης, ενθαρρύνει τη συνεχή βελτίωση των MOOC, καθιστώντας τα πιο προσαρμοσμένα στις ανάγκες των μαθητών και συμβάλλοντας στην ανάπτυξη μιας αποτελεσματικής και αποδοτικής μαθησιακής εμπειρίας. Συνολικά, η αξιολόγηση εξασφαλίζει ότι τα διαδικτυακά μαθήματα παραμένουν ποιοτικά, διαδραστικά και προσανατολισμένα στην επίτευξη των μαθησιακών στόχων.

5.1 Ρουμπρίκα αξιολόγησης μαθήματος

Για την αξιολόγηση του διαδικτυακού μαθήματος θα χρησιμοποιηθεί η παρακάτω ρουμπρίκα αξιολόγησης. Οι ερωτήσεις της ρουμπρίκας αξιολόγησης χωρίζονται σε τέσσερεις θεματικές ενότητες:

- Μαθησιακά αποτελέσματα,
- Παρουσίαση και δομή του περιεχομένου του μαθήματος,
- Μέθοδοι αξιολόγησης του εκπαιδευόμενου και
- Γενικά ερωτήματα για το σύνολο του MOOC.

Συνολικά η ρουμπρίκα αποτελείται από τριάντα ερωτήσεις. Η κάθε ερώτηση βαθμολογείται από το 1 μέχρι το 5, όπου το 1 αντιστοιχεί στο «καθόλου» και το 5 στο «απόλυτα».

ΡΟΥΜΠΡΙΚΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ						
	Ερωτήσεις	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Μαθησιακά αποτελέσματα	**1. Τα μαθησιακά αποτελέσματα του μαθήματος είναι σαφώς διατυπωμένα;**					
	2. Τα μαθησιακά αποτελέσματα του μαθήματος ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις τις διδακτέας ύλης όπως αυτή παρουσιάζεται στο διαδικτυακό μάθημα;					

	3. Τα μαθησιακά αποτελέσματα του μαθήματος καλύπτουν το σύνολο της διδακτέας ύλης όπως αυτή συνηθίζεται να διδάσκεται από τους εκπαιδευτικούς στο σχολείο;					
	4. Τα μαθησιακά αποτελέσματα του μαθήματος καλύπτουν την διδακτέα ύλη όπως αυτή ορίζεται από το Υπουργείο Παιδείας;					
	5. Τα μαθησιακά αποτελέσματα ικανοποιούν τον σκοπό του διαδικτυακού μαθήματος;					
	6. Σε ποιο βαθμό ο εκπαιδευόμενος μπορεί να επιτύχει					

	τους μαθησιακούς στόχους που θέτονται;					
Παρουσίαση και δομή του περιεχομένου του μαθήματος	**7. Η γλώσσα και το λεξιλόγιο που χρησιμοποιήθηκε ήταν κατάλληλο και αντιληπτό για του εκπαιδευόμενους;**					
	8. Η δομή της κάθε ενότητας βοηθά στην επίτευξη των μαθησιακών αποτελεσμάτων που τέθηκαν;					
	9. Οι πληροφορίες παρουσιάζονται με κατάλληλο τρόπο ώστε να είναι εύκολα αντιληπτές από τον εκπαιδευόμενο;					
	10. Το περιεχόμενο του μαθήματος είναι κατάλληλα οργανωμένο;					
	11. Παρουσιάζονται μεθοδολογίες					

	επίλυσης ασκήσεων με εύληπτή γλώσσα και σαφώς διακριτά βήματα;					
	12. Η παρουσίαση των πληροφοριών γίνεται με φιλικό προς τον εκπαιδευόμενο τρόπο;					
	13. Χρησιμοποιούνται διαδραστικά ψηφιακά μέσα ώστε το μάθημα να γίνει φιλικότερο στον εκπαιδευόμενο;					
	14. Σε ποιο βαθμό ενθαρρύνεται ο εκπαιδευόμενος να συμμετέχει στις δραστηριότητες;					
	15. Πόσο καλή είναι η ποιότητα των πολυμέσων (video, εικόνες, διαγράμματα) που χρησιμοποιήθηκαν;					

	16. Υπάρχουν ψηφιακά εργαλεία (πχ forum, εικονικές τάξεις, ζωντανές συζητήσεις) ενισχυτικά στην μαθησιακή εμπειρία;					
	17. Η πλατφόρμα που χρησιμοποιείται είναι εύκολη στην χρήση της από τον εκπαιδευόμενο;					
Μέθοδοι αξιολόγησης του εκπαιδευόμενου	**18. Χρησιμοποιούνται διαφορετικές τεχνικές αξιολόγησης;**					
	19. Οι εκφωνήσεις είναι γραμμένες με τρόπο εύληπτο;					
	20. Οι ερωτήσεις αξιολόγησης καλύπτουν το σύνολο της διδακτέας ύλης;					
	21. Οι ερωτήσεις αξιολόγησης ανταποκρίνονται					

	στις απαιτήσεις των εκπαιδευτικών του σχολείου;					
	22. Υπάρχει κατάλληλη ανατροφοδότηση για την βελτίωση του μαθητή;					
	23. Οι υποδείξεις που δίνονται είναι σαφείς και χρήσιμες για τον εκπαιδευόμενο;					
	24. Η ποσότητα των παρεχόμενων ασκήσεων αξιολόγησης είναι αρκετή για την επίτευξη του στόχου του μαθήματος;					
	25. Στην τελική εξέταση τα ερωτήματα είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας;					
	26. Στην τελική αξιολόγηση τα θέματα ανταποκρίνονται					

	στις απαιτήσεις των προαγωγικών εξετάσεων του σχολείου;					
Γενικά ερωτήματα για το σύνολο του MOOC	**27. Το περιεχόμενο του μαθήματος επιτρέπει στους μαθητές να προχωρούν σταδιακά;**					
	28. Η δομή του μαθήματος είναι ευέλικτη ώστε να την προσαρμόσουν στον ρυθμό τους;					
	29. Το μάθημα προσαρμόζεται στις ανάγκες και το επίπεδο των μαθητών;					
	30. Ποιος είναι ο βαθμός ικανοποίησης που έχουμε από την δημιουργία του παρόντος διαδικτυακού μαθήματος;					

5.2 Συμπλήρωση Ρουμπρίκας Αξιολόγησης και σχολιασμός

5.2.1 Συμπλήρωση Ρουμπρίκας

ΡΟΥΜΠΡΙΚΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ						
	Ερωτήσεις	1	2	3	4	5
Μαθησιακά αποτελέσματα	**1. Τα μαθησιακά αποτελέσματα του μαθήματος είναι σαφώς διατυπωμένα;**			**X**		
	2. Τα μαθησιακά αποτελέσματα του μαθήματος ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις τις διδακτέας ύλης όπως αυτή παρουσιάζεται στο διαδικτυακό μάθημα;				**X**	
	3. Τα μαθησιακά αποτελέσματα του μαθήματος καλύπτουν το σύνολο της διδακτέας ύλης όπως αυτή συνηθίζεται να διδάσκεται από				**X**	

	τους εκπαιδευτικούς στο σχολείο;					
	4. Τα μαθησιακά αποτελέσματα του μαθήματος καλύπτουν την διδακτέα ύλη όπως αυτή ορίζεται από το Υπουργείο Παιδείας;			Χ		
	5. Τα μαθησιακά αποτελέσματα ικανοποιούν τον σκοπό του διαδικτυακού μαθήματος;					Χ
	6. Σε ποιο βαθμό ο εκπαιδευόμενος μπορεί να επιτύχει τους μαθησιακούς στόχους που θέτονται;				Χ	
Παρουσίαση και δομή του περιεχομένου του μαθήματος	7. Η γλώσσα και το λεξιλόγιο που χρησιμοποιήθηκε ήταν κατάλληλο και αντιληπτό για				Χ	

	του εκπαιδευόμενους;					
	8. Η δομή της κάθε ενότητας βοηθά στην επίτευξη των μαθησιακών αποτελεσμάτων που τέθηκαν;				X	
	9. Οι πληροφορίες παρουσιάζονται με κατάλληλο τρόπο ώστε να είναι εύκολα αντιληπτές από τον εκπαιδευόμενο;				X	
	10. Το περιεχόμενο του μαθήματος είναι κατάλληλα οργανωμένο;				X	
	11. Παρουσιάζονται μεθοδολογίες επίλυσης ασκήσεων με εύληπτή γλώσσα και σαφώς διακριτά βήματα;				X	
	12. Η παρουσίαση των πληροφοριών γίνεται με φιλικό			X		

	προς τον εκπαιδευόμενο τρόπο;					
	13. Χρησιμοποιούνται διαδραστικά ψηφιακά μέσα ώστε το μάθημα να γίνει φιλικότερο στον εκπαιδευόμενο;			X		
	14. Σε ποιο βαθμό ενθαρρύνεται ο εκπαιδευόμενος να συμμετέχει στις δραστηριότητες;				X	
	15. Πόσο καλή είναι η ποιότητα των πολυμέσων (video, εικόνες, διαγράμματα) που χρησιμοποιήθηκαν;				X	
	16. Υπάρχουν ψηφιακά εργαλεία (πχ forum, εικονικές τάξεις, ζωντανές συζητήσεις) ενισχυτικά στην				X	

	μαθησιακή εμπειρία;					
	17. Η πλατφόρμα που χρησιμοποιείται είναι εύκολη στην χρήση της από τον εκπαιδευόμενο;					X
Μέθοδοι αξιολόγησης του εκπαιδευόμενου	18. Χρησιμοποιούνται διαφορετικές τεχνικές αξιολόγησης;			X		
	19. Οι εκφωνήσεις είναι γραμμένες με τρόπο εύληπτο;				X	
	20. Οι ερωτήσεις αξιολόγησης καλύπτουν το σύνολο της διδακτέας ύλης;					X
	21. Οι ερωτήσεις αξιολόγησης ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις των εκπαιδευτικών του σχολείου;				X	
	22. Υπάρχει κατάλληλη ανατροφοδότηση για την βελτίωση του μαθητή;				X	

	23. Οι υποδείξεις που δίνονται είναι σαφείς και χρήσιμες για τον εκπαιδευόμενο;					X
	24. Η ποσότητα των παρεχόμενων ασκήσεων αξιολόγησης είναι αρκετή για την επίτευξη του στόχου του μαθήματος;				X	
	25. Στην τελική αξιολόγηση τα ερωτήματα είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας;				X	
	26. Στην τελική αξιολόγηση τα θέματα ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις των προαγωγικών εξετάσεων του σχολείου;				X	
Γενικά ερωτήματα για	27. Το περιεχόμενο του μαθήματος επιτρέπει στους				X	

το σύνολο του MOOC	**μαθητές να προχωρούν σταδιακά;**					
	28. Η δομή του μαθήματος είναι ευέλικτη ώστε να την προσαρμόσουν στον ρυθμό τους;					**Χ**
	29. Το μάθημα προσαρμόζεται στις ανάγκες και το επίπεδο των μαθητών;			**Χ**		
	30. Ποιος είναι ο βαθμός ικανοποίησης που έχουμε από την δημιουργία του παρόντος διαδικτυακού μαθήματος;			**Χ**		

5.2.2 Σχολιασμός και αιτιολόγηση απαντήσεων

Ερώτηση 1:

Η διατύπωση των μαθησιακών αποτελεσμάτων δεν είναι όσο σαφής θα μπορούσε να είναι. Βασική αιτία είναι η δυσκολία αποτύπωσης των έντονων εμπειρικών στοιχείων και κανόνων που έχουν καλλιεργηθεί μέσα από τον τρόπο που δομείται στην Ελλάδα η εκπαιδευτική δραστηριότητα. Η γενίκευση και η συμπύκνωση της εμπειρίας σε μαθησιακό στόχο ήταν μια απαιτητική διαδικασία.

Ερώτηση 2:

Τα μαθησιακά αποτελέσματα ανταποκρίνονται στην ύλη την οποία διδάσκεται ο εκπαιδευόμενος σε αυτό το διαδικτυακό μάθημα. Πάντοτε υπάρχει το περιθώριο βελτίωσης για αυτό δεν βαθμολογήθηκε με 5.

Ερώτηση 3:

Οι στόχοι του μαθήματος ανταποκρίνονται στην διδακτέα ύλη όπως αυτή διδάσκεται στο σχολείο. Έγινε προσπάθεια κατά την συγγραφή τους ώστε να ανταποκρίνονται ακριβώς στις απαιτήσεις που έχει ο μέσος καθηγητής μαθηματικών στο σχολείο. Κατά την συγγραφή των στόχων λήφθηκαν υπόψη οι αντικειμενικές δυσκολίες με τις οποίες έρχεται αντιμέτωπος ο καθηγητής του σχολείου (μεγάλος αριθμός μαθητών μέσα στην τάξη, προσλήψεις αναπληρωτών, μη διδαγμένα κεφάλαια στην ύλη της Α' Γυμνασίου τα οποία πρέπει να καλυφθούν, καταλήψεις, έκτακτες καιρικές συνθήκες, εκδρομές, κτλ), τα κομμάτια της ύλης τα οποία θεωρεί σημαντικά και μπορεί να αναπτύξει πλήρως καθώς και την ζητούμενη εξεταστέα ύλη.

Ερώτηση 4:

Η ύλη που πρέπει να καλύψει ο εκπαιδευτικός στην άλγεβρα της Β' Γυμνασίου με βάση το σχετικό ΦΕΚ του Υπουργείου Παιδείας είναι:

- Κεφάλαιο 7- οι ενότητες 7.7, 7.8, 7.9, Μέρος Α, σχολικό βιβλίο Α' Γυμνασίου (δεν αποτελεί μέρος της εξεταστέας ύλης για τις προαγωγικές εξετάσεις)
- Κεφάλαιο 1- Εξισώσεις Ανισώσεις, Μέρος Α, σχολικό βιβλίο Β' Γυμνασίου
- Κεφάλαιο 2- Πραγματικοί Αριθμοί, Μέρος Α, σχολικό βιβλίο Β' Γυμνασίου
- Κεφάλαιο 3- Συναρτήσεις, Μέρος Α, σχολικό βιβλίο Β' Γυμνασίου
- Κεφάλαιο 4- Στατιστική, Μέρος Α, σχολικό βιβλίο Β' Γυμνασίου

Λόγω όμως των αντικειμενικών δυσκολιών που παρουσιάζονται κατά την διάρκεια της σχολικής χρονιάς, όσοι εκπαιδευτικοί καταφέρουν να φτάσουν στο κεφάλαιο 4-Στατιστική δεν το ζητάνε στις εξετάσεις γιατί τα υπόλοιπα κεφάλαια του Μέρους Α παρουσιάζουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον και χρησιμότητα στις επόμενες τάξεις. Συνεπώς δεν συμπεριλήφθηκε και στον παρών διαδικτυακό μάθημα ως ξεχωριστή διδακτική ενότητα με την σκέψη. Στην θέση του επιλέχθηκε να μπει μια συνολικότερη επανάληψη στο κεφάλαιο 7 του Μέρους Α του σχολικού βιβλίου της Α Γυμνασίου, το οποίο παρόλο που δεν εντάσσεται στην εξεταστέα ύλη αποτελεί την βάση για κάθε μαθητή της Β' Γυμνασίου αφού διδάσκει τις βασικές πράξεις μεταξύ των ρητών αριθμών. Επιτελεί, επιπλέον, και καλύτερα τον στόχο του MOOC που είναι η επανάληψη και προετοιμασία των μαθητών για τις προαγωγικές εξετάσεις.

Ερώτηση 5:

Το MOOC σχεδιάστηκε με άξονα τα μαθησιακά αποτελέσματα έτσι όπως αυτά διατυπώθηκαν στο Κεφάλαιο 3 συνεπώς ανταποκρίνονται σε αυτά.

Ερώτηση 6:

Ένας μαθητής ο οποίος θα παρακολουθήσει με συνέπεια και εργατικότητα το παρών MOOC, συμμετέχοντας με προθυμία σε όλες της δραστηριότητες, λύνοντας με προσοχή τις δραστηριότητες εξάσκησης, αυτό-αξιολόγησης, ανοιχτής απόκρισης (ORA) καθώς και τις ασκήσεις στο Πρόσθετο Υλικό θα είναι επαρκώς προετοιμασμένος για τις τελικές εξετάσεις τόσο του MOOC όσο και του σχολείου.

Ερώτηση 7:

Το λεξιλόγιο και η γλώσσα είναι η τυπική γλώσσα με την οποία διατυπώνονται τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο. Επιλέχθηκαν προσεκτικά λέξεις και φράσεις οι οποίες θα εκλαϊκεύσουν τις δύσκολες μαθηματικές ορολογίες και μεθόδους. Ομοίως επιλέχθηκαν και τα video με βασικό κριτήριο την ευκολότερη και πιο απλούστερη εξήγηση των ζητημάτων που πραγματεύονται. Δυσκολία ίσως αντιμετωπίσουν μαθητές οι οποίοι δεν έχουν μεγάλη ευχέρεια με την ελληνική γλώσσα.

Ερώτηση 8:

Η δομή των ενοτήτων και υποενοτήτων βοηθά στην μαθησιακή διαδικασία αφού ακολουθεί το μοντέλο παρουσία των πληροφοριών, επίδειξη λυμένων εφαρμογών-παραδειγμάτων με χρήση μεθοδολογιών, ατομική εξάσκηση με ανατροφοδότηση, αυτοέλεγχος των αποκτηθέντων γνώσεων και τέλος συνολική επανάληψη μέσω εργασίας ανοιχτής απόκρισης σε όλη την ενότητα. Αυτή η μέθοδος διασφαλίζει την συχνή επανάληψη των νέο-αποκτηθέντων γνώσεων ώστε να κατακτηθούν από τον εκπαιδευόμενο με μεγαλύτερη επιτυχία.

Ερώτηση 9:

Για την παρουσίαση των πληροφοριών χρησιμοποιούνται τόσο το παραδοσιακό κείμενο όσο και video. Εδώ χρειάζεται να επισημανθεί ότι δεν χρησιμοποιούνται και άλλα είδη πολυμέσων.

Ερώτηση 10:

Το περιεχόμενο του μαθήματος είναι οργανωμένο αρκετά καλά μέσα από τον χωρισμό του σε ενότητες και υποενότητες με παρόμοιο τρόπο με αυτόν του σχολικού βιβλίου. Ένα μικρό προβληματάκι παρουσιάζεται στην διδακτική ενότητα 4- Συναρτήσεις όπου στην τελευταία υποενότητα ο εκπαιδευόμενος δέχεται μεγάλο όγκο πληροφοριών πολύ συμπυκνωμένων.

Ερώτηση 11:

Σε όλες τις διδακτικές ενότητες παρουσιάζονται με αναλυτικό τρόπο μεθοδολογικά βήματα επίλυσης ασκήσεων. Σίγουρα σε ορισμένα σημεία χρειάζεται να δοθεί μεγαλύτερη έκταση.

Ερώτηση 12:

Το MOOC αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα σε αυτό τον τομέα. Σε κάθε ενότητα στις δραστηριότητες παρουσίασης και επίδειξης χρησιμοποιούνται video τα οποία κάνουν την παρουσίαση και επίδειξη ελκυστικότερη στον εκπαιδευόμενο. Όμως παρατηρήθηκε απουσία εικόνων και άλλων πολυμέσων τα οποία να δίνουν χρώμα αλλά και οπτική επαφή με την πληροφορία.

Ερώτηση 13:

Σε όλο το MOOC τα διαδραστικά μέσα δεν είναι αρκετά. Πέρα από τις διδραστικές ερωτήσεις στις δραστηριότητες εξάσκησης και αυτό-αξιολόγησης, περιορίζονται στο τέλος κάθε ενότητες με την μορφή forum ενώ μόνο στην διδακτική ενότητα 4- Συναρτήσεις υπάρχουν εφαρμογές που εντάσσονται στις δραστηριότητες. Βέβαια αυτό επηρεάζεται και από το αντικείμενο με το οποίο καταπιάνεται κάθε ενότητα.

Ερώτηση 14:

Στον εκπαιδευόμενο επιδρά το κίνητρο της προετοιμασίας για τις εξετάσεις ώστε να συμμετάσχει στις δραστηριότητες. Παράλληλα όμως οι δραστηριότητες με τον τρόπο που είναι στημένες και τις διάφορες μορφές που έχουν τον ενθαρρύνουν να πάρει μέρος.

Ερώτηση 15:

Η ποιότητα των πολυμέσων που χρησιμοποιήθηκαν στο MOOC είναι πολύ καλή. Τα video και οι εικόνες που χρησιμοποιούνται έχουν καλή ανάλυση και χαρακτηριστικά, φτιαγμένες σε αξιόπιστες και ποιοτικές εφαρμογές.

Ερώτηση 16:

Στο τέλος κάθε διδακτικής ενότητας υπάρχει forum στο οποίο συμμετέχουν οι εκπαιδευόμενοι. Το forum ενισχύει την αίσθηση εκπαιδευτικής κοινότητας και τάξης την οποία επιδιώκει να καλλιεργήσει για τους εκπαιδευόμενους το MOOC, ώστε να αισθάνονται κομμάτι ενός συνόλου. Σε αυτό βοηθά και η χρήση του padlet στην εισαγωγή.

Ερώτηση 17:

Η πλατφόρμα είναι ιδιαίτερα εύκολη στην χρήση από έναν εκπαιδευόμενο στην ηλικιακή ομάδα, 13 έως 14 ετών, στην οποία αναφέρετε το MOOC.

Ερώτηση 18:

Στο MOOC χρησιμοποιούνται τεχνικές αξιολόγησης ανοιχτής απόκρισης, πολλαπλής επιλογής και εισαγωγής αριθμητικού. Προφανώς θα μπορούσε με την κατάλληλη γνώση του edunext, της πλατφόρμας στην οποία υλοποιήθηκε το MOOC, να δημιουργηθούν και άλλες τεχνικές αξιολόγησης πιο διαφοροποιημένες και έξω από τις αναμενόμενες.

Ερώτηση 19:

Οι εκφωνήσεις είναι γραμμένες με τρόπο ο οποίος προσομοιάζει την φρασεολογία των ασκήσεων που ζητούνται στο σχολείο, με την οποία ο εκπαιδευόμενος είναι εξοικειωμένος. Πρόβλημα ίσως αντιμετωπίσουν μαθητές οι οποίοι δεν χειρίζονται με πολύ μεγάλη ευχέρεια την ελληνική γλώσσα.

Ερώτηση 20:

Οι ερωτήσεις στις δραστηριότητες εξάσκησης και αξιολόγησης καλύπτουν όλο το φάσμα της διδακτέας ύλης του MOOC.

Ερώτηση 21:

Οι ερωτήσεις σχεδιάστηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να προσομοιάζουν τις ερωτήσεις στα θέματα των εκπαιδευτικών του σχολείου. Προφανώς υπάρχουν διαφορές λόγω του είδους των ερωτήσεων. Κατά την σχεδίαση του MOOC προέκυψε η πρόκληση αναδιατύπωσης και μεταφοράς ερωτήσεων ανοιχτής απόκρισης και προβλημάτων που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά στο σχολείο, σε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και εισαγωγής αριθμητικού. Συνεπώς εδώ παρατηρούνται μικρές διαφοροποιήσεις.

Ερώτηση 22:

Στις δραστηριότητες εξάσκησης επιλέχθηκε να υπάρχει αναλυτική επίλυση της άσκησης ως ανατροφοδότηση του εκπαιδευόμενου που αποσκοπεί στην αυτό-βελτίωση του. Στις δραστηριότητες αυτό-αξιολόγησης ανατροφοδότηση υπάρχει μόνο σε ασκήσεις που ζητείται από τον εκπαιδευόμενο να επιλύσει ένα πρόβλημα. Στις ερωτήσεις τύπου ORA ανατροφοδότηση δίνεται μέσα από τον διορθωτή εκπαιδευτικό.

Ερώτηση 23:

Σε ερωτήσεις στις οποίες δίνονται υποδείξεις, αυτές είναι πάντα σαφείς και έχουν σημεία αναφοράς κομμάτια των πληροφοριών που διατυπώθηκαν στις δραστηριότητες επίδειξης και παρουσίασης.

Ερώτηση 24:

Με βάση την αρχή των παλιών μαθηματικών ότι ποτέ δεν είναι αρκετές οι ασκήσεις, η ερώτηση βαθμολογήθηκε με 4. Όμως μιλώντας πάντα ρεαλιστικά ο όγκος των ασκήσεων που ζητείται να λυθούν στις διάφορες δραστηριότητες που περιλαμβάνουν ασκήσεις είναι αρκετές για την επίτευξη των στόχων του μαθήματος.

Ερώτηση 25:

Τα θέματα στην τελική αξιολόγηση του MOOC έχει γίνει προσπάθεια ώστε να είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας. Για αυτό το λόγο επιλέχθηκαν ερωτήματα θεωρίας στο θέμα 1ο και ερώτημα συνδυαστικό από τα κεφάλαια των εξισώσεων και των συναρτήσεων στο θέμα 3ο.

Ερώτηση 26:

Τα θέματα έχουν στόχο προσομοίωσης στις εξετάσεις του σχολείου συνεπώς ανταποκρίνονται σε μεγάλο βαθμό στα θέματα που ζητούνται εκεί.

Ερώτηση 27:

Το περιεχόμενο επιτρέπει την σταδιακή εκμάθηση από τον εκπαιδευόμενο καθώς είναι χωρισμένο σε ενότητες και υποενότητες ώστε ο εκπαιδευόμενος να προχωράει με σταθερό ρυθμό και να κάνει ένα βήμα την φορά στην διδακτέα ύλη.

Ερώτηση 28:

Το MOOC δεν έχει χρονικό περιορισμό στην ολοκλήρωσή του συνεπώς είναι αρκετά ευέλικτο ώστε ο εκπαιδευόμενος να το προσαρμόσουν στις ανάγκες τους.

Ερώτηση 29:

Το μάθημα έχει ασκήσεις διαφορετικών επιπέδων όμως δεν έχει τόσο μεγάλο εύρος ώστε να καλύπτει όλα τα επίπεδα μαθητών.

Ερώτημα 30:

Αν συνοψίσουμε όλες τις παραπάνω απαντήσεις μπορούμε να πούμε ότι είμαστε ικανοποιημένοι από το MOOC σε πολύ μεγάλο βαθμό. Όμως στον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων όπως και στον τομέα των μαθησιακών αποτελεσμάτων επιδέχεται βελτιώσεις. Άρα η βαθμολογία του είναι μέτρια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΒΕΛΤΙΩΣΗ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο πραγματοποιήθηκε μια αναλυτική αξιολόγηση του διαδικτυακού μαθήματος. Με την χρήση του εργαλείου της αξιολόγησης αναδείχθηκαν διάφορες παθογένειες του μαθήματος, ελλείψεις και παραβλέψεις που έγιναν κατά την σχεδίαση και υλοποίησή του αλλά και τα δυνατά του σημεία.

6.1 Κριτική-συμπεράσματα

Η αξιολόγηση του MOOC όπως παρουσιάζεται στο προηγούμενο κεφάλαιο περιλαμβάνει διάφορες πτυχές που συνδέονται με τα μαθησιακά αποτελέσματα, τη δομή και την παρουσίαση του μαθήματος, τις μεθόδους αξιολόγησης των μαθητών, καθώς και τη χρήση ψηφιακών εργαλείων και πολυμέσων. Από την αναλυτική διαδικασία αξιολόγησης, εξάγονται σημαντικά συμπεράσματα για τη συνολική ποιότητα και αποτελεσματικότητα του μαθήματος.

6.1.1 Μαθησιακά Αποτελέσματα

Έμφαση δίνεται στη σαφήνεια των μαθησιακών στόχων. Αναφέρεται ότι οι στόχοι θα μπορούσαν να είναι διατυπωμένοι με μεγαλύτερη σαφήνεια. Παρόλα αυτά οι μαθησιακοί στόχοι ανταποκρίνονται στην ύλη του διαδικτυακού μαθήματος και καλύπτουν επαρκώς τις απαιτήσεις τόσο της σχολικής διδακτέας ύλης όσο και του Υπουργείου Παιδείας σε μεγάλο βαθμό. Ωστόσο, επισημαίνεται ότι υπάρχει περιθώριο βελτίωσης, προκειμένου να επαναπροσδιοριστούν τα σημεία στα οποία κυριαρχεί ο εμπειρισμός της εκπαιδευτικής δραστηριότητας.

Οι στόχοι σχεδιάστηκαν με γνώμονα τις απαιτήσεις των προαγωγικών εξετάσεων, με σκοπό την καλύτερη προετοιμασία των μαθητών για τις εξετάσεις, γεγονός που ενισχύει τη χρησιμότητα του μαθήματος. Ειδικά για τις μαθησιακές ενότητες της Β' Γυμνασίου, η ύλη οργανώθηκε ώστε να δίνει έμφαση στα βασικά θέματα της άλγεβρας, χωρίς όμως να συμπεριλαμβάνει θέματα που δεν συνηθίζεται να εξετάζονται στις προαγωγικές εξετάσεις. Αυτό δημιουργεί μια τυχαιότητα στο διαδικτυακό μάθημα και προκαλεί αναξιοπιστία ως προς την ικανοποίηση του σκοπού που εξυπηρετεί.

6.1.2 Παρουσίαση και Δομή του Περιεχομένου

Η παρουσίαση του περιεχομένου αξιολογείται θετικά, καθώς η γλώσσα που χρησιμοποιείται είναι κατανοητή και προσιτή για τους μαθητές της συγκεκριμένης ηλικιακής ομάδας. Η δομή των μαθημάτων ακολουθεί ένα σταθερό πρότυπο, όπου οι πληροφορίες παρουσιάζονται, αναλύονται μέσω παραδειγμάτων, και στη συνέχεια οι μαθητές καλούνται να συμμετάσχουν σε δραστηριότητες εξάσκησης με ανατροφοδότηση. Ωστόσο, εντοπίζεται μια αδυναμία στη χρήση εικόνων και πολυμέσων, όπου παρόλο που τα βίντεο είναι επαρκή, απουσιάζουν άλλες μορφές πολυμέσων που θα μπορούσαν να κάνουν το μάθημα πιο ελκυστικό και διαδραστικό. Η δομή του μαθήματος επιτρέπει την προοδευτική εκμάθηση, αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως στην Διδακτική Ενότητα 4-Συναρτήσεις, παρατηρείται υπερβολική συμπύκνωση πληροφοριών.

6.1.3 Μέθοδοι Αξιολόγησης

Οι μέθοδοι αξιολόγησης του μαθητή περιλαμβάνουν διάφορες τεχνικές, όπως ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, ερωτήσεις ανοιχτής απόκρισης και ασκήσεις εισαγωγής αριθμητικού. Η ποικιλία των ασκήσεων είναι αρκετά ικανοποιητική, καλύπτοντας όλο το φάσμα της διδακτέας ύλης. Παράλληλα, οι εκφωνήσεις των ερωτήσεων είναι γραμμένες με τρόπο που προσομοιάζει τη σχολική φρασεολογία, καθιστώντας τις οικείες για τους μαθητές. Παρ' όλα αυτά, σε κάποιες περιπτώσεις η χρήση πιο διαφοροποιημένων τεχνικών αξιολόγησης θα μπορούσε να βελτιώσει τη μαθησιακή εμπειρία. Η ανατροφοδότηση προς τους μαθητές είναι επαρκής στις δραστηριότητες εξάσκησης, ενώ οι ασκήσεις αυτό-αξιολόγησης παρέχουν χρήσιμες υποδείξεις.

6.1.4 Χρήση Ψηφιακών Μέσων

Η χρήση των ψηφιακών μέσων στο MOOC θεωρείται βασική για την επιτυχία της μαθησιακής διαδικασίας. Παρόλο που τα βίντεο είναι ποιοτικά και βοηθούν στην παρουσίαση των πληροφοριών, η έλλειψη άλλων πολυμέσων και διαδραστικών στοιχείων μειώνει την ελκυστικότητα του μαθήματος. Η ύπαρξη forum στο τέλος κάθε ενότητας και οι διαδραστικές εφαρμογές ενισχύουν την αίσθηση της εκπαιδευτικής κοινότητας. Όμως υπάρχει περιθώριο για την ενσωμάτωση περισσότερων ψηφιακών εργαλείων που θα μπορούσαν να ενισχύσουν την αλληλεπίδραση και τη συμμετοχή των μαθητών. Η πλατφόρμα του μαθήματος κρίνεται ιδιαίτερα εύχρηστη για μαθητές της ηλικιακής ομάδας 13-14 ετών, επιτρέποντας την εύκολη πλοήγηση και συμμετοχή τους στις δραστηριότητες.

6.1.5 Συμπεράσματα

Συνολικά, το MOOC παρέχει μια καλά οργανωμένη και μεθοδικά σχεδιασμένη μαθησιακή εμπειρία, η οποία είναι επαρκώς προσαρμοσμένη στις ανάγκες των μαθητών. Το μάθημα είναι σαφές ως προς τις προθέσεις του και γίνεται προσπάθεια ικανοποίησης των μαθησιακών στόχων που θέτει. Οι μέθοδοι αξιολόγησης είναι ποικίλες και δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να αξιολογήσουν την πρόοδό τους με αρκετές διαφορετικές προσεγγίσεις. Ωστόσο, υπάρχει περιθώριο βελτίωσης τόσο στη διατύπωση των μαθησιακών στόχων όσο και στη χρήση πολυμέσων, καθώς και στη διαφοροποίηση των εργαλείων αξιολόγησης.

Η αξιολόγηση του μαθήματος αποδεικνύει ότι το MOOC είναι κατάλληλο για μαθητές Γυμνασίου και παρέχει ουσιαστική υποστήριξη στη μαθησιακή τους πορεία. Με κάποιες βελτιώσεις, ιδιαίτερα στην αύξηση της διαδραστικότητας και στη χρήση πολυμέσων, το μάθημα μπορεί να γίνει ακόμα πιο αποτελεσματικό και ελκυστικό, ενισχύοντας περαιτέρω τη μαθησιακή εμπειρία των μαθητών και την προετοιμασία τους για τις σχολικές εξετάσεις.

6.2 Προτάσεις για μελλοντική βελτίωση

Βάσει της παραπάνω κριτικής που προκύπτει από την αξιολόγηση του MOOC και των συμπερασμάτων που εξάγονται από αυτή, υπάρχουν αρκετές προτάσεις για μελλοντική βελτίωση του μαθήματος οι οποίες θα βοηθήσουν στην ενίσχυση της μαθησιακής εμπειρίας και της αποτελεσματικότητάς του.

6.2.1 Βελτίωση της Σαφήνειας των Μαθησιακών Στόχων

Παρόλο που οι μαθησιακοί στόχοι ανταποκρίνονται στη διδακτέα ύλη, η διατύπωσή τους θα μπορούσε να γίνει πιο σαφής και προσιτή για τους εκπαιδευόμενους. Προτείνεται οι στόχοι να είναι πιο αναλυτικοί και εξειδικευμένοι. Σε αυτό θα βοηθούσε η διάρθρωσή τους σε περισσότερα κομμάτια και η χρήση καταλληλότερων λέξεων και φράσεων.

6.2.2 Αναβάθμιση της Χρήσης Πολυμέσων

Στο MOOC παρατηρείται μειωμένη χρήση πολυμέσων όπως εικόνες και διαγράμματα τα οποία κάνουν το μάθημα πιο προσφιλές στον μαθητή. Τα μεγάλα ψυχρά κείμενα στις δραστηριότητες παρουσίασης και επίδειξης μπορούν να εμπλουτιστούν με εικόνες και gif ώστε να δημιουργούν ένα χαρούμενο περιβάλλον αλλά και διαγράμματα τα οποία να οπτικοποιούν την παρουσιαζόμενη γνώση για καλύτερη απομνημόνευση.

6.2.3 Περισσότερα Διαδραστικά Εργαλεία

Η ενσωμάτωση περισσότερων διαδραστικών εργαλείων είναι αναγκαία για την αύξηση της αλληλεπίδρασης των μαθητών με το περιεχόμενο. Στο MOOC θα μπορούσαν να ενσωματωθούν διαδραστικές εφαρμογές, πέρα από το geogebra που χρησιμοποιήθηκε, όπως το Mathway και το Desmos καθώς και η ενσωμάτωση webinars. Τα webinars είναι διαδικτυακά σεμινάρια, παρουσιάσεις ή διαλέξεις στις οποίες συνήθως οι συμμετέχοντες έχουν την δυνατότητα διαδραστικής παρακολούθησης. Τα webinars μπορούν να ενσωματωθούν σε πλατφόρμες MOOC, όπως το OpenEdX. (Ma, 2018)

6.2.4 Διαφοροποίηση των Μεθόδων Αξιολόγησης

Στο MOOC υπάρχουν διάφορες τεχνικές αξιολόγησης όπως πολλαπλής επιλογής, ερωτήσεις εισαγωγής αριθμητικού και ερωτήσεις τύπου ORA. Για να γίνει όμως το μάθημα πιο διαδραστικό και φιλικότερο στον εκπαιδευόμενο θα μπορούσαν να εισαχθούν ακόμα περισσότερες τεχνικές ώστε να καλυφθούν οι διαφορετικές ανάγκες των μαθητών. Προτείνεται η χρήση ερωτήσεων αντιστοίχισης, ερωτήσεων εισαγωγής μαθηματικών σχέσεων, drop down problems και άλλων. Με την καλύτερη γνώση της πλατφόρμας υλοποίησης επιτυγχάνεται ο εμπλουτισμός του MOOC με διαφορές τεχνικές ενώ ταυτόχρονα χρειάζεται και η αρτιότερη σχεδίαση του μαθήματος ώστε να δίνεται η δυνατότητα ενσωμάτωσης περισσότερων.

6.2.5 Προσαρμογή στις Ανάγκες Διαφορετικών Μαθητών

Το μάθημα περιλαμβάνει ασκήσεις διαφορετικών επιπέδων, δεν καλύπτει πλήρως, όμως, τις ανάγκες μαθητών με διαφορετικές ικανότητες ή μαθητών που χρειάζονται ειδική αγωγή και εκπαίδευση. Προτείνεται ο εμπλουτισμός των προαιρετικών ασκήσεων στις υποενότητες «Πρόσθετο Υλικό» για πιο προχωρημένους μαθητές ή για μαθητές που χρειάζονται περισσότερο χρόνο εξάσκησης ώστε να καλύπτουν το φάσμα των επιδόσεων. Ταυτόχρονα χρειάζεται ο εμπλουτισμός με περισσότερες ασκήσεις αρχάριου επιπέδου ώστε να βοηθιούνται μαθητές που έχουν υπερβολικά πολλά κενά. Μια καλύτερη προσαρμογή στις ανάγκες διαφορετικών επιπέδων μαθητών θα ενισχύσει την εξατομίκευση της μαθησιακής εμπειρίας.

6.2.6 Ενίσχυση της Ανατροφοδότησης προς τους Μαθητές

Η ανατροφοδότηση που προσφέρεται στους μαθητές είναι σημαντική, αλλά προσφέρεται μόνο στις δραστηριότητες εξάσκησης. Προτείνεται η παροχή αναλυτικής ανατροφοδότησης και στις εργασίες αυτό-αξιολόγησης και ORA, με λεπτομέρειες για τα λάθη που έγιναν και προτάσεις για βελτίωση. Επίσης, η παροχή υποδείξεων να επεκταθεί σε όλες της δραστηριότητες αυτό-αξιολόγησης.

6.2.7 Βελτίωση της Εμπειρίας Πλοήγησης στην Πλατφόρμα

Η πλατφόρμα θεωρείται εύχρηστη, ειδικά για μαθητές ηλικίας 13-14 ετών. Σε πολλά σημεία όμως έχει προβλήματα προσβασιμότητας, ειδικά σε εικόνες που προστέθηκαν. Παράλληλα δεν υπάρχουν αναλυτικές οδηγίες για την χρήση των εφαρμογών που ενσωματώθηκαν όπως το padlet και το geogebra classic με τις οποίες πολλοί μαθητές να μην είναι εξοικειωμένοι. Προτείνεται βελτίωση της προσβασιμότητας του MOOC και η ενσωμάτωση οπτικών και αναλυτικών οδηγών χρήσης εφαρμογών που χρησιμοποιούνται ώστε να βοηθηθούν οι εκπαιδευόμενοι και μην χάνουν τον χρόνο τους εξερευνώντας εφαρμογές.

6.2.8. *Ενίσχυση της Δομής του Περιεχομένου*

Η δομή του μαθήματος είναι γενικά καλά οργανωμένη, αλλά υπάρχει περιθώριο βελτίωσης στη διαχείριση του περιεχομένου, ιδιαίτερα σε ορισμένες ενότητες που παρουσιάζουν υπερβολικό όγκο πληροφοριών. Στην τελευταία υποενότητα της Διδακτικής Ενότητας 4-Συναρτήσεις, παρατηρείται ότι οι πληροφορίες είναι υπερβολικά συμπυκνωμένες. Προτείνεται η αναδιαμόρφωση αυτής της ενότητας με καλύτερη κατανομή των πληροφοριών σε περισσότερες υποενότητες ή με την παροχή επιπλέον επεξηγήσεων και υλικού. Αυτό συνεπάγεται την αύξηση των ωρών διδασκαλίας του MOOC όμως θα προσφέρει καλύτερη διδακτική εμπειρία. Επιπλέον προκειμένου το MOOC να συμβαδίζει με της οδηγίες του Υπουργείου Παιδείας προτείνεται η προσθήκη μιας πέμπτης διδακτικής ενότητας η οποία θα καταπιάνεται με το Κεφάλαιο 4- Στατιστική του σχολικού βιβλίου της Β' Γυμνασίου. Τέλος για την καλύτερη προσαρμογή του μαθήματος στις ανάγκες του κάθε μαθητή προτείνεται η αλλαγή στις ρυθμίσεις του MOOC ώστε να επιλέγει ο μαθητής πακέτο παρακολούθησης που θα χωρίζεται σε αρχάριων και προχωρημένων. Το πακέτο των προχωρημένων θα προσπερνάει κάποιες υποενότητες τις οποίες θα διδάσκονται οι αρχάριοι.

Με αυτές τις προτάσεις, το MOOC μπορεί να γίνει ακόμα πιο αποτελεσματικό, ενισχύοντας τη μαθησιακή εμπειρία, προσαρμοσμένο στις ανάγκες των μαθητών με σύγχρονες, διαδραστικές και εξατομικευμένες μεθόδους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Aleman de la Garza, L. (2020). Quality criteria in MOOCs: Comparative and proposed indicators. *PLOS ONE*, 15(10), 1-18. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0239685

Alpert, J., & Bergen, B. (2013). Making math accessible: Using MathJax to display mathematics on the web. *Journal of Web Engineering*, 12(1-2), 45-58. https://doi.org/10.5555/2428644.2428650

Askisopolis. (n. d.) Μαθηματικές ασκήσεις και εκπαιδευτικό υλικό. https://www.askisopolis.gr/

Bates, A. W. (2015). *Teaching in a digital age: Guidelines for designing teaching and learning*. BCcampus.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (n. d.) Μαθηματικά Β' Γυμνασίου. Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Blanton, M. L., et al. (2018). Algebraic thinking in the elementary and middle grades: The impact of early algebra instruction. *Journal of Research in Mathematics Education*, 49(3), 236-278.

Boaler, J. (2021). Changing Students’ Minds and Achievement in Mathematics: The Impact of a Free Online Student Course. *Frontiers in Education*. https://doi.org/10.3389/feduc.2021.678616

Bozkurt, A., & Stracke, C. M. (2022). Instructional quality and learning design of MOOCs. *Educational Technology & Society*, 25(1), 88-99. https://doi.org/10.1109/ETSO.2022.3259487

Boud, D. (2010). Assessment 2020: Seven propositions for assessment reform in higher education. *Australian Learning and Teaching Council*.

Buhl, M., Andreasen, L. B., & Pushpanadham, K. (2023). Learning potentials and educational challenges of massive open online courses (MOOCs) in lifelong learning. *International Review of Education*, 69(1), 37-61. https://doi.org/10.1007/s11159-023-10054-8

Butler, A. C. (2018). Multiple-choice testing in education: Are the best practices for assessment also good for learning? *Journal of Applied Research in Memory and Cognition*, 7(3), 323-331. https://doi.org/10.1016/j.jarmac.2018.07.002

Cervone, D. (2012). MathJax: A platform for mathematics on the web. *Notices of the AMS*, 59(2), 312-316.

Cervone, D. P. (2016). The MathJax project: A collaborative approach to mathematics on the web. *TUGboat*, 37(1), 21-25.

Chen, G., Davis, D., Hauff, C., & Houben, G. J. (2020). Learning transfer: Does it take place in MOOCs? *ACM Transactions on Computer-Human Interaction (TOCHI)*, 27(1), 1-28. https://doi.org/10.1145/3364998

Daradoumis, T., Bassi, R., Xhafa, F., & Caballé, S. (2013). A review on massive e-learning (MOOC) design, delivery and assessment. *Proceedings - 2013 International Conference on P2P, Parallel, Grid, Cloud and Internet Computing*, 208-213. https://doi.org/10.1109/3PGCIC.2013.37

Dongarra, J., & Fox, G. C. (2014). Innovations in web-based mathematical notation with MathJax. *Journal of Computational Science Education*, 5(2), 37-46. https://doi.org/10.22369/issn.2153-4136/5/2/4

Ebben, M., & Murphy, J. S. (2014). Unpacking MOOC scholarly discourse: A review of nascent MOOC scholarship. *Learning, Media and Technology*, 39(3), 328-345. https://doi.org/10.1080/17439884.2013.878352

Falmagne, J.-C., Albert, D., Doble, C. W., Eppstein, D., & Hu, X. (2013). *ALEKS: A Web-based intelligent tutoring system*. Springer.

Frisnoiry, S., Surya, E., Siregar, T., Elfitra, E., & Frimaulia, S. (2022). Microlearning in Mathematics Learning. In *Proceedings of the 4th International Conference on Innovation in Education, Science and Culture, ICIESC 2022*. EAI. https://doi.org/10.4108/eai.11-10-2022.2325513

García-Peñalvo, F. J., & Rojas, C. (2018). MOOCs: Advantages and disadvantages for education. *Journal of Information Technology Education: Research*, 17, 217-238. https://doi.org/10.28945/4118

Garrison, D. R., Anderson, T., & Archer, W. (2000). Critical inquiry in a text-based environment: Computer conferencing in higher education. *The Internet and Higher Education*, 2(2-3), 87-105. https://doi.org/10.1016/S1096-7516(00)00016-6

Ghiardelli, E. (2016). Enhancing the quality of MOOCs: A framework for systematic evaluation. *Journal of Educational Research and Development*, 34(2), 67-80. https://doi.org/10.1504/JERD.2016.109574

Giurgiu, L. (2017). Microlearning an evolving educational technology. *Scientific Bulletin*, 22(1), 18-23. https://doi.org/10.1515/tmmb-2017-0003

Guo, P. J., Kim, J., & Rubin, R. (2014). How video production affects student engagement: An empirical study of MOOC videos. *Proceedings of the first ACM conference on Learning@ scale conference*. https://doi.org/10.1145/2556325.2566239

Gupta, A., & Gupta, A. (2019). Self-paced MOOCs: Benefits, challenges and key factors for success. *International Journal of Information and Learning Technology*, 36(3), 230-245. https://doi.org/10.1108/IJILT-11-2018-0127

Haladyna, T. M., & Rodriguez, M. C. (2013). *Developing and validating test items*. Routledge.

Halawa, S., Greene, D., & Mitchell, J. (2014). Dropout prediction in MOOCs using learner activity features. *eLearning Papers*, 37, 42-53.

Harati, H., Sujo-Montes, L., Tu, C.-H., Armfield, S. J. W., & Yen, C.-J. (2021). Assessment and Learning in Knowledge Spaces (ALEKS) adaptive system impact on students' perception and self-regulated learning skills. *Education Sciences*, 11(10), 603. https://doi.org/10.3390/educsci11100603

Hew, K. F., & Cheung, W. S. (2014). Students' and instructors' use of massive open online courses (MOOCs): Motivations and challenges. *Educational Research Review*, 12, 45-58. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2014.05.001

Hew, K. F., Lan, M., Tang, Y., Jia, C., & Lo, C. (2019). Examining learning engagement in MOOCs: A self-determination theoretical perspective using mixed method. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*. https://doi.org/10.1186/s41239-019-0179-2

Hole, A., & Kjærnsli, M. (2016). Teaching algebra and its challenges: A comparative analysis of educational practices. *International Journal of Education Development*, 45, 13-24.

Hug, T. (2010). Microlearning: A new pedagogical challenge. *Journal of Educational Technology Systems*, 38(2), 161-171. https://doi.org/10.2190/ET.38.2.g

Hug, T., & Friesen, N. (2007). Outline of a microlearning agenda. *Proceedings of the Third International Microlearning Conference*, 35-51.

Jordan, K. (2015). Massive open online course completion rates revisited: Assessment, length and attrition. *International Review of Research in Open and Distributed Learning*, 16(3), 341-358.

Khalil, H., & Ebner, M. (2016). MOOCs completion rates and possible methods to improve retention—A literature review. *Computers & Education*, 98, 157-168. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2016.03.016

Kizilcec, R. F., & Schneider, E. (2015). Motivation as a lens to understand online learners: Toward data-driven design with the OLEI scale. *ACM Transactions on Computer-Human Interaction (TOCHI)*, 22(2), 1-24. https://doi.org/10.1145/2699735

Κλίμακα. (n.d.). Οδηγίες διδασκαλίας για τα Μαθηματικά Β' Γυμνασίου. https://edu.klimaka.gr/mathimata/gymnasiou/3033-odhgies-mathimatika-b-gymnasiou

Κουτσάκας, Α., & Μανωλόπουλος, Γ. (2020). A computer programming hybrid MOOC for Greek secondary education. *Smart Learning Environments*, 7(1), 1-14. https://doi.org/10.1186/s40561-020-00120-1

Larson, D., & Hostetler, R. (2016). Advances in web-based math rendering with MathJax. *Mathematical Structures in Computer Science*, 26(7), 1203-1212. https://doi.org/10.1017/S0960129516000354

Luo, H., Robinson, A. C., & Park, J. Y. (2014). Peer grading in a MOOC: Reliability, validity, and perceived effects. *Journal of Asynchronous Learning Networks*, 18(2), 1-14.

Ma, Y., & Lee, C. (2018). Positive and negative impacts of MOOCs and Webinars in times of educational change. *Journal of Educational Technology and Society*, 21(2), 45-59.

Mohammed, A., Wakil, K., & Nawroly, R. (2018). The effectiveness of microlearning to improve students' learning ability. *International Journal of Educational Research Review*, 3(3), 32-38. https://doi.org/10.24331/ijere.453818

Μουγιάκου, Σ. (2024). ΨΣ-ΗΜ-721 Εργασία-4 Υποδειγματική Λύση ΣΜ.

Μπάρλας, Τ. Χ. (2016). Μαθηματικά Β' Γυμνασίου όλων των επιπέδων. Εκδόσεις Μπάρλας, 22-190, 355-358.

Nandi, D., Hamilton, M., & Harland, J. (2012). Evaluating the quality of interaction in asynchronous discussion forums in fully online courses. *Distance Education*, 33(1), 5-30. https://doi.org/10.1080/01587919.2012.667957

Nicol, D. (2007). E-assessment by design: Using multiple-choice tests to good effect. *Journal of Further and Higher Education*, 31(1), 53-64.

Pappas, C. (2015). The science behind microlearning: How microlearning impacts cognitive load. *E-Learning Industry*. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.1201.0401

Pilli, O., & Admiraal, W. (2016). A taxonomy of massive open online courses. *Contemporary Educational Technology*, 7(3), 223-240.

Shao, P., & Chen, Y. (2021). Understanding the impact of quality elements on MOOCs continuance intention. *Education and Information Technologies*, 26, 1453-1471. https://doi.org/10.1007/s10639-021-10453-3

Shail, M. S. (2019). Using microlearning on mobile applications to increase knowledge retention and work performance: A review of literature. *CUREJ: College Undergraduate Research Electronic Journal*.

Siemens, G. (2013). Massive open online courses: Innovation in education? *Open Learning: The Journal of Open, Distance and e-Learning*, 28(1), 1-4. https://doi.org/10.1080/02680388.2013.786391

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Ημέρα 1η: Εγγραφή και Εισαγωγή στο MOOC

1.1 Σχετικά με αυτό το μάθημα

1.1.1 Καλωσόρισμα

https://youtu.be/1OWOWhK8j8c

1.1.2 Εισαγωγή- Σκοπός

Θα παρακολουθήσετε το μάθημα «Μια σύντομη ματιά στην Άλγεβρα της Β' Γυμνασίου: Επανάληψη στη Θεωρία και τις Ασκήσεις». Το μάθημα αυτό έχει ως στόχο να κάνετε μια γρήγορη επανάληψη στην εξεταστέα ύλη της Άλγεβρας της Β' Γυμνασίου (Μέρος Α του σχολικού βιβλίου). Θα κάνετε μια ολοκληρωμένη επανάληψη στα κύρια σημεία της θεωρίας του μαθήματος και θα κληθείτε να την εφαρμόσετε σε ασκήσεις. Παράλληλα θα λύσετε ασκήσεις για εξάσκηση και θα κληθείτε να τεστάρετε τις γνώσεις που αποκομίσατε στο τέλος του μαθήματος.

1.1.3 Μαθησιακά Αποτελέσματα

Ο/Η εκπαιδευόμενος/η μετά την παρακολούθηση του MOOC θα είναι ικανός/η να:

ΜΑ1[Apply]: Εκτελεί πράξεις με ρητούς αριθμούς και να εφαρμόζει τις ιδιότητές τους

Το **ΜΑ1** αναλύεται σε επιμέρους ΜΑ, ως εξής:

- **ΜΑ1.1:** Εφαρμόσει τις ιδιότητές τους.
- **ΜΑ1.2:** Εκτελέσει πράξεις με ρητούς αριθμούς.
- **ΜΑ1.3:** Εφαρμόσει τις ιδιότητες των δυνάμεων και να υπολογίσει αριθμητικές παραστάσεις

ΜΑ2 [Apply]: Λύσει εξισώσεις 1ου Βαθμού και προβλήματα

Το **ΜΑ2** αναλύεται σε επιμέρους ΜΑ, ως εξής:

- **ΜΑ2.1:** Υπολογίζει αλγεβρικές παραστάσεις και να εφαρμόζει την επιμεριστική ιδιότητα
- **ΜΑ2.2:** Λύνει εξισώσεις 1ου βαθμού
- **ΜΑ2.3:** Μοντελοποιεί προβλήματα πρακτικής αριθμητικής και γεωμετρίας σε εξισώσεις 1ου βαθμού

ΜΑ3 [Understand]: υπολογίζει τετραγωνικές ρίζες και να εκτελεί πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

Το **ΜΑ3** αναλύεται σε επιμέρους ΜΑ, ως εξής:

- **ΜΑ3.1:** Υπολογίζει τετραγωνικές ρίζες
- **ΜΑ3.2:** Ξεχωρίζει τους άρρητους από τους ρητούς αριθμούς
- **ΜΑ3.3:** Επιλύει προβλήματα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών

ΜΑ4 [Understand/Apply/Create]: Αναγνωρίζει μια συνάρτηση, να εφαρμόζει τις ιδιότητες τριών βασικών συναρτήσεων καθώς και να τις σχεδιάζει σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Το **ΜΑ4** αναλύεται σε επιμέρους ΜΑ, ως εξής:

- **ΜΑ4.1:** Κατανοεί τι ονομάζουμε συνάρτηση
- **ΜΑ4.2:** Εντοπίζει σημεία σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων
- **ΜΑ4.3:** Εφαρμόζει τις ιδιότητες των βασικών συναρτήσεων y=ax,y=ax+β,y=a/x, και να μπορεί να τις σχεδιάζει.

1.1.4 Δομή του MOOC

Το μάθημα είναι συνολικής διάρκειας 18 ωρών και μπορεί να ολοκληρωθεί σε 6 έως 8 ημέρες.

Εκτιμώμενος φόρτος εργασίας για το σπίτι είναι 10 ώρες συνολικά (3 ώρες για κάθε διδακτική ενότητα και μια ώρα αφιερωμένη στην επανάληψη πριν την τελική εξέταση)

Το μάθημα αποτελείται από:

- Εισαγωγή
- Διδακτική Ενότητα 1: Επανάληψη στους Ρητούς Αριθμούς
- Διδακτική Ενότητα 2: Εξισώσεις $1^{ου}$ Βαθμού
- Διδακτική Ενότητα 3: Οι Πραγματικοί Αριθμοί
- Διδακτική Ενότητα 4: Συναρτήσεις
- Αξιολόγηση του μαθήματος

Κάθε διδακτική Ενότητα περιλαμβάνει

- Εισαγωγή (10 λεπτά)
- 3 υποενότητες διάρκειας μιας ώρας η κάθε μια. Η κάθε υποενότητα αποτελείτε από:
    - Δραστηριότητα παρουσίασης (15 λεπτά)
    - Δραστηριότητα επίδειξης (15 λεπτά)
    - Δραστηριότητα εξάσκησης (15 λεπτά)
    - Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης (15 λεπτά)
- Ανακεφαλαίωση που θα περιλαμβάνει (50 λεπτά):
    - Σύνοψη ενότητας (5 λεπτά)
    - Εργασία Εφαρμογής Open Response Assignment (30 λεπτά)
    - Λίστα Ελέγχου (Checklist) επίτευξης μαθησιακών αποτελεσμάτων (5 λεπτά)
    - Forum Συζήτησης (10 λεπτά)

(Μουγιάκου, 2024)

1.1.5 Άδεια χρήσης

Το μάθημα αυτό διατίθεται με άδεια χρήσης:

Αναφορά Δημιουργού - Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές

CC BY-SA 4.0 DEED

Μπορείτε να:

- Μοιραστείτε — αντιγράψετε και αναδιανέμετε το υλικό με κάθε μέσο και τρόπο για κάθε σκοπό, ακόμα και εμπορικό.
- Προσαρμόστε — αναμείξτε, τροποποιήστε και δημιουργήστε πάνω στο υλικό για κάθε σκοπό, ακόμα και εμπορικό.
- Ο αδειοδότης δεν μπορεί να ανακαλέσει αυτές τις ελευθερίες όσο εσείς ακολουθείτε τους όρους της άδειας.

Υπό τους ακόλουθους όρους:

- Αναφορά Δημιουργού — Θα πρέπει να καταχωρίσετε αναφορά στο δημιουργό με σύνδεσμο της άδειας, και με αναφορά αν έχουν γίνει αλλαγές. Μπορείτε να το κάνετε αυτό με οποιονδήποτε εύλογο τρόπο, αλλά όχι με τρόπο που να υπονοεί ότι ο δημιουργός αποδέχεται το έργο σας ή τη χρήση που εσείς κάνετε.
- Παρόμοια Διανομή — Αν αναμείξετε, τροποποιήσετε, ή δημιουργήσετε πάνω στο υλικό, πρέπει να διανείμετε τις δικές σας συνεισφορές υπό την ίδια άδεια όπως και το πρωτότυπο. Δεν υπάρχουν πρόσθετοι περιορισμοί — Δε μπορείτε να εφαρμόσετε νομικούς όρους ή τεχνολογικά μέτρα που να περιορίζουν νομικά τους άλλους από το να κάνουν ο,τιδήποτε επιτρέπει η άδεια.

(Μουγιάκου, 2024)

1.1.6 Συντελεστές του MOOC

Βουτσίνος Αντώνης

Είμαι απόφοιτος του τμήματος Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Αυτήν την περίοδο φοιτώ στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών του Πανεπιστημίου Πειραιά «Ηλεκτρονική Μάθηση». Εργάζομαι ως καθηγητής Μαθηματικών σε δομές Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ενώ τα τελευταία χρόνια και ως Αναπληρωτής Καθηγητής σε δομές της Δημόσιας Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Παράλληλα έχω επιμορφωθεί από το 10^{o} Ετήσιο Επιμορφωτικό Σεμινάριο Κατάρτισης στην Ειδική Αγωγή και Εκπαίδευση Ατόμων με Αναπηρία ή με Ειδικές Εκπαιδευτικές

Ανάγκες, το οποίο διοργανώνει η Β' Παιδιατρική Κλινική του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

1.2 **Προαπαιτούμενα**

1.2.1 Προαπαιτούμενες Γνώσεις και Δεξιότητες

Το MOOC αφορά την Άλγεβρα που διδάσκεται στην Β' Γυμνασίου, ο/η εκπαιδευόμενος/η θα πρέπει να είναι ήδη ικανός/η να:

Κατέχει τις βασικές γνώσεις μαθηματικών με τις οποίες ασχολήθηκε κατά την διάρκεια του Δημοτικού και στην Α' Γυμνασίου. Ποιο αναλυτικά ο/η εκπαιδευόμενος/η να είναι ικανός να:

- Εκτελεί πράξεις κάθετα και οριζόντια με φυσικούς αριθμούς.
- Εκτελεί πράξεις σε αριθμητική παράσταση σύμφωνα με την προτεραιότητα των πράξεων.
- Βρίσκει το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο και τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη δύο ή περισσοτέρων φυσικών αριθμών.
- Συγκρίνει δυο κλάσματα.
- Εκτελεί πράξεις με κλάσματα.
- Κάνει ένα κλάσμα ανάγωγο.
- Λύνει προβλήματα πρακτικής αριθμητικής.

1.2.2 Απαιτούμενες Υποδομές

Για την συμμετοχή στο MOOC απαιτούνται:

- Πρόσβαση στο διαδίκτυο
- Ύπαρξη ηλεκτρονικού υπολογιστή
- Χαρτί και στυλό ή μολύβι

1.3 Ολοκλήρωση του μαθήματος

1.3.1 Απαραίτητες ενέργειες

Για να ολοκληρώσετε το μάθημα αυτό θα πρέπει:

- Να παρακολουθήσετε το εκπαιδευτικό υλικό των διδακτικών ενοτήτων 1 έως 4
- Να υλοποιήσετε τις δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στις διδακτικές ενότητες 1 έως 4 και ποιο συγκεκριμένα να ολοκληρώσετε:
- Τις δραστηριότητες εξάσκησης
- Τις δραστηριότητες αυτό-αξιολόγησης
- Να υλοποιήσετε τις εργασίες ανοιχτής απόκρισης (open response assignment)
- Να συμμετάσχετε στο Forum υποβάλλοντας σε όλα τουλάχιστον μια απάντηση ή σχόλιο σε μια ανάρτηση
- Να απαντήσετε στα ερωτηματολόγια αυτό-αξιολόγησης στην αρχή κάθε διδακτικής ενότητας
- Να πετύχετε βαθμό μεγαλύτερο του 60% στο τελικό quiz Αξιολόγησης του μαθήματος

1) **Μπορείτε να παρακολουθείτε την πρόοδο σας οποιαδήποτε στιγμή από το tab Progress (Πρόοδος)** (Μουγιάκου, 2024)

1.3.2 Εργασίες αυτό-αξιολόγησης

Η αξιολόγηση ανοικτής απόκρισης (εν συντομία ORA) είναι ένας τύπος αξιολόγησης που σας επιτρέπει να υποβάλλετε:

- γραπτά δοκίμια
- συνημμένα αρχεία, όπως PDF ή εικόνα (διαβάστε περισσότερα: https://support.edx.org/hc/en-us/articles/360000202148-Submit-a-file-with-your-ORA-response)
- συνδέσμους προς εργασίες εκτός του edX.org (όπως ένα εργαστηριακό τετράδιο)

Όταν υποβάλετε μια απάντηση σε μια ORA, η υποβολή σας μπορεί να εξεταστεί και να βαθμολογηθεί από:

- τον εαυτό σας.
- τους συμμαθητές σας στο μάθημα
- τους διδάσκοντες σας.

2) Για τις ανάγκες του συγκεκριμένου μαθήματος, έχει επιλεγεί στο τέλος κάθε διδακτικής ενότητας, να υπάρχει μια εργασία αξιολόγησης ανοικτής απόκρισης η οποία θα βαθμολογηθεί από τον διδάσκοντα του MOOC. Συνολικά υπάρχουν 4 τέτοιες εργασίες, όσες και οι διδακτικές ενότητες. (Μουγιάκου, 2024)

1.3.3 Συμμετοχή στο forum

Σε κάθε ενότητα υπάρχει forum συζήτησης στο οποίο μπορείτε να μοιραστείτε τις απόψεις σχετικά με το αντικείμενο της ενότητας, όπως και να ρωτήσετε απορίες σχετικά με τις εργασίες.

Υπάρχουν επίσης κάποια θέματα συζήτησης που έχουν ξεκινήσει οι εκπαιδευτές σας, στα οποία καλείστε να υποβάλετε τουλάχιστον μία απάντηση καθώς και να σχολιάσετε τουλάχιστον μία ανάρτηση.

(Μουγιάκου, 2024)

Κανόνες Λειτουργείας του Forum

Ας ρίξουμε πρώτα μια ματιά στους κανόνες του παιχνιδιού που θα εφαρμοστούν στο μάθημα. Προκειμένου να προωθηθούν ευχάριστες, φιλικές συζητήσεις που είναι πλούσιες σε περιεχόμενο και διευκολύνουν τη μάθηση και τη διαχείριση της γνώσης μεταξύ των συμμετεχόντων:

3) **Μείνετε στο θέμα:** Τα μηνύματα που ξεφεύγουν από το θέμα δυσκολεύουν τους άλλους συμμετέχοντες να βρουν τις πληροφορίες που χρειάζονται. Βρείτε το καταλληλότερο φόρουμ για το θέμα που θέλετε να μοιραστείτε και μην το

δημοσιεύετε πάνω από μία φορά. Εάν θέλετε να αλλάξετε το θέμα, ξεκινήστε μια νέα δημοσίευση.

4) **Να δείχνετε σεβασμό:** αν διαφωνείτε με μια δημοσίευση, δείξτε την άποψή σας με σεβασμό και αποφύγετε κάθε προσωπική επίθεση.

5) **Χρησιμοποιήστε τη δύναμη της ψήφου σας:** ψηφίστε τις καλύτερες αναρτήσεις και απαντήσεις χρησιμοποιώντας τα εργαλεία που παρέχει η πλατφόρμα. Επίσης, αν δείτε ότι μια δημοσίευση παραβιάζει τους κανόνες, αναφέρετέ την πατώντας το εικονίδιο της σημαίας. Με αυτόν τον τρόπο, μας βοηθάτε να διατηρήσουμε έναν χώρο συζήτησης στον οποίο όλοι αισθάνονται άνετα.

6) **Να είστε σαφείς:** γράψτε τις ιδέες σας με πληρότητα, προσπαθώντας να κάνετε όλους να καταλάβουν τι θέλετε να πείτε. Χρησιμοποιήστε το χιούμορ και τον σαρκασμό με μεγάλη σύνεση, στη γραπτή γλώσσα συχνά παρερμηνεύονται.

7) **Δώστε το πλαίσιο των ερωτήσεών σας:** όταν κάνετε ερωτήσεις, δώστε όσες περισσότερες πληροφορίες μπορείτε για την πλαισίωσή τους, π.χ. θέματα που έχετε διαβάσει, ιδέες που είχατε στο παρελθόν για το θέμα, απόψεις που έχετε εξετάσει κ.λπ. Αυτό θα βοηθήσει τους συναδέλφους σας που έχουν παρόμοιες ερωτήσεις και τους συντονιστές να σας δώσουν την ακριβέστερη δυνατή απάντηση.

8) **Κάντε αναφορές:** Όταν παρουσιάζετε ιδέες, λόγια ή σκέψεις άλλων ανθρώπων, να κάνετε την κατάλληλη αναφορά.

9) **Μη χρησιμοποιείτε το φόρουμ για προσωπικούς σκοπούς:** τα φόρουμ μαθημάτων δεν είναι εργαλεία για την προώθηση των προϊόντων ή των υπηρεσιών σας. Αν δείτε κάποιον να το χρησιμοποιεί για αυτούς τους σκοπούς, αναφέρετε το πατώντας το εικονίδιο της σημαίας.

10) **Προσκαλέστε να συμμετάσχουν στη συζήτηση:** στο τέλος μιας δημοσίευσης, ζητήστε από τους συμμετέχοντες να σας πουν τη γνώμη τους, προσκαλέστε τους να συμμετάσχουν στη συζήτηση. Κάτι σαν "Θα ήθελα πολύ να μάθω τι σκέφτεστε εσείς γι' αυτό" είναι ένας καλός τρόπος για να το κάνετε.

Πηγή: https://courses.edx.org/asset-v1:IDBx+IDB20.1x+1T2021+type@asset+block@Discussion_forum_guide_CCE_2021.pdf

Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη χρήση του forum μπορείτε να βρείτε στον ακόλουθο σύνδεσμο: https://support.edx.org/hc/en-us/articles/360002095553-How-do-I-add-a-post-in-the- discussion-forum

(Μουγιάκου, 2024)

1.3.4 Τελική εξέταση

Ο τελικός βαθμός σας στο μάθημα προκύπτει από το quiz τελικής εξέτασης. Για να θεωρηθεί επιτυχής η εξέταση θα πρέπει να συγκεντρώσετε βαθμολογία > 60%.

Το Quiz αποτελείται από 3 θέματα συνδυαστικά από όλες τις διδακτικές ενότητες και περιλαμβάνουν:

- Πολλαπλή Επιλογή με μία σωστή απάντηση,
- Ερωτήσεις συμπλήρωσης αριθμού και
- Ερωτήσεις Σωστού/Λάθους.

Δεν υπάρχει περιορισμός χρόνου.

Θα έχετε δύο προσπάθειες να απαντήσετε σε όλες τις ερωτήσεις του κουίζ.

Μόλις κάνετε κλικ στο κουμπί "Έλεγχος", θα καταχωρηθεί ως πρώτη προσπάθεια. Αν είναι λάθος, δοκιμάστε ξανά και κάντε κλικ στο κουμπί "Τελικός έλεγχος".

Θα χρειαστούν περίπου 60 λεπτά από το χρόνο σας για να ολοκληρώσετε αυτό το κουίζ, αλλά αξίζει αφού σας δίνει μια τελική εκτίμηση για την ποιότητα της επανάληψης την οποία κάνατε και σας επισημαίνει τις ελλείψεις και τις αδυναμίες σας.

1.3.5 Παραλαβή πιστοποιητικού

Όταν ολοκληρώσετε με επιτυχία το μάθημα, τότε από την καρτέλα Progress μπορείτε να κατεβάσετε το πιστοποιητικό σας.

1.4 Εισαγωγή στην θεματική ενότητα

1.4.1 Τι ξέρω ήδη;

Αυτό το σύντομο ερωτηματολόγιο θα ελέγξει το επίπεδο σας στα μαθηματικά της Β' Γυμνασίου, ώστε να διασφαλιστεί ότι ο κύκλος των μαθημάτων που θα παρακολουθήσετε θα σας είναι χρήσιμος και βοηθητικός. Δεν υπάρχουν σωστές και λάθος απαντήσεις, επιλέξτε αυτό που θυμάστε ή που θεωρείτε ότι είναι σωστό.

1) Ο αριθμός $(-2)^3$ είναι αρνητικός αριθμός.

- Σωστό
- Λάθος

2) Το αποτέλεσμα της αριθμιτικής παράστασης $(-10)^4 - 10^4$ είναι:

- 0
- 10.000
- 20.000
- -10.000
- -20.000

3) Ο αριθμός -3 είναι λύση της εξίσωσης $4x = -12$.

- Σωστό
- Λάθος

4) Το αποτέλεσμα της τετραγωνικής ρίζας $\sqrt{-16}$ είναι:

- 4
- -4
- Δεν ορίζεται αυτή η ρίζα

5) Το σημείο Α(2,3) ικανοποιεί την συνάρτηση:

- $y = 3x$
- $y = x - 1$

- $y = \frac{3}{x}$

Συζήτηση στο Forum

Μοιραστείτε με τους συμμαθητές την άποψή σας για την Άλγεβρα της Β’ Γυμνασίου. Που δυσκολευτήκατε; Τι σας φάνηκε ποιο εύκολο; Τι μισήσατε; Τι από όλα όσα μάθατε φέτος θυμάστε καλύτερα;

1.4.2 Παράδειγμα εφαρμογής και Άποψη του Ειδικού

Και που μου χρειάζονται τώρα αυτά;;;

Να ένα ερώτημα που το έχουμε όλοι σκεφτεί καθώς ως μαθητές διαβάζαμε μαθηματικά και ζοριζόμασταν πάνω από μία άσκηση.

Τα μαθηματικά όμως είναι παντού στην καθημερινή μας ζωή, κριμένα μέσα σε μηχανήματα, συνήθειες και ευκολίες που χρησιμοποιούμε συνέχεια.

Δείτε το παρακάτω video που ετοίμασαν οι μαθητές του 3ου Γυμνασίου Κέρκυρας για την αξία των Μαθηματικών και προβληματιστείτε.

https://www.youtube.com/watch?v=A7SA0apcqSk

Τώρα στα δικά μας, στην Β’ Γυμνασίου μπαίνουμε στα μαθηματικά του Γυμνασίου. Στον τομέα της άλγεβρας ξεφεύγουμε πλέον από την αριθμητική του δημοτικού. Με δειλά βήματα μπαίνουμε στον κόσμο της άλγεβρας και στον τρόπο σκέψης της. Πλέον δεν μας αρκεί να λύνουμε απλώς ένα πρόβλημα. Επιδιώκουμε να το κάνουμε με τον πιο γρήγορο και εύκολο τρόπο. Προσπαθούμε να οργανώσουμε μια μέθοδο ή αλλιώς μοντέλο το οποίο θα λύνει όλα τα παρόμοια με αυτό προβλήματα. Τέλος αναζητούμε αριθμούς που μας οδηγούν να ξεπεράσουμε τα στενά όρια του κόσμου γύρω, δίνοντας την ευκαιρία να αντιληφθούμε ότι δεν είναι όλα γύρω μας όπως φαίνονται.

Ελάτε μαζί μας στο ταξίδι της Άλγεβρας της Β’ Γυμνασίου και ετοιμαστείτε να αντιμετωπίσετε τις προκλήσεις που θέτει.

1.4.3 Δραστηριότητα Γνωριμίας

Ήρθε η ώρα να γνωριστούμε λίγο καλύτερα. Γράψτε λίγα λόγια για τον εαυτό σας στην εφαρμογή padlet που βρίσκεται παρακάτω. Με διπλό κλικ ή πατώντας τον σταυρό (+) που βρίσκεται κάτω δεξιά προσθέστε λίγα λόγια για τον εαυτό σας, τα ενδιαφέροντά σας, ένα τραγούδι ή video που σας αρέσει και σας εκφράζει ή σας έχει «κολλήσει» αυτές τις μέρες.

https://padlet.com/boutsinosantwnis/padlet-8182dnpusrepdxhc

Ημέρα $2^{η}$: Διδακτική ενότητα 1- Επανάληψη στους Ρητούς Αριθμούς (4 ώρες)

2.0 Εισαγωγή διδακτικής ενότητας

2.0.1 Μαθησιακά αποτελέσματα

Μετά την παρακολούθηση αυτής της διδακτικής ενότητας θα είσαι ικανός/η να:

ΜΑ1[Apply]: Εκτελείς πράξεις με ρητούς αριθμούς και να εφαρμόζεις τις ιδιότητές τους

Πιο συγκεκριμένα θα μπορείς να:

- Εφαρμόσεις τις ιδιότητές τους.
- Εκτελέσεις πράξεις με ρητούς αριθμούς.
- Εφαρμόσεις τις ιδιότητες των δυνάμεων και να υπολογίσεις αριθμητικές παραστάσεις

Συμπλήρωσε το παρακάτω ερωτηματολόγιο το οποίο ελέγχει τι θυμάσαι από το κεφάλαιο αυτό. Θυμίζουμε ότι εδώ δεν υπάρχουν σωστές ή λάθος απαντήσεις. Επέλεξε την απάντηση που θεωρείς σωστότερη.

1) Το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης $A = -(6-9) - (-2+12)$ είναι:

- 7
- -25
- -12
- Τίποτα από τα παραπάνω

2) Ισχύει ότι $-\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-\alpha}{-\beta}$

- Σωστό
- Λάθος

3) Δίνονται οι αριθμοί -11 και -7. Τι από τα παρακάτω ισχύει για αυτούς τους αριθμούς;

- $-11 > -7$
- $-11 < -7$
- Τίποτα από τα παραπάνω

4) Η αριθμητική παράσταση $(-2)^3 \cdot (-2)^2$ δίνει αποτέλεσμα -32.

- Σωστό
- Λάθος

2.0.2 Δομή της ενότητας

Η Διδακτική Ενότητα είναι διάρκειας 4 ωρών και περιλαμβάνει:

- Εισαγωγή
- Υποενότητα 1 - Οι ρητοί αριθμοί
- Υποενότητα 2 - Πράξεις μεταξύ ρητών αριθμών
- Υποενότητα 3 - Δυνάμεις ρητών αριθμών
- Ανακεφαλαίωση και Αυτό-αξιολόγηση, που περιλαμβάνει:
    - ✓ Σύνοψη της ενότητας
    - ✓ Εργασία εφαρμογής με τη μορφή Ερώτησης Ανοικτής Απόκρισης

- ✓ Αυτό-αξιολόγηση σε μορφή ερωτηματολογίου όπου οι εκπαιδευόμενοι επιλέγουν ποιο/ποια από τα μαθησιακά αποτελέσματα της ενότητας έχουν κατακτήσει.
- ✓ Forum συζήτησης

Οι 3 υποενότητες είναι διάρκειας 1 ώρας η κάθε μία. Η κάθε υποενότητα αποτελείται από:

- Δραστηριότητα παρουσίασης (15')
- Δραστηριότητα επίδειξης (15')
- Δραστηριότητα εξάσκησης (15')
- Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης (15')

2.1 Οι ρητοί αριθμοί

2.1.1 Τι είναι οι ρητοί αριθμοί;

Αν προσπαθήσουμε να μετρήσουμε το ύψος ενός βουνού τότε χρησιμοποιούμε ως σημείο αναφοράς την επιφάνεια της θάλασσας.

Αν τώρα θελήσουμε να μετρήσουμε το βάθος της θάλασσας πάλι χρησιμοποιούμε ως σημείο αναφοράς την επιφάνεια της θάλασσας.

Αν προσπαθήσουμε βάλουμε αυτές της δυο μετρήσεις σε μια κλίμακα τότε σίγουρα το κοινό σημείο αναφοράς η επιφάνεια της θάλασσας θα βρίσκεται στην μέση του νοητού άξονα που θα σχηματίσουμε. Αναγκαστικά θα χρειαστεί να διαχωρίσουμε τις δυο μετρήσεις (το βάθος της θάλασσας με το ύψος του βουνού) για να μπορέσουμε να διακρίνουμε αυτές τις δυο μετρήσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο «+» όταν μετράμε το ύψος του βουνού αφού είμαστε «πάνω» από την επιφάνεια της θάλασσας, και το σύμβολο «-» για το βάθος της θάλασσας αφού είναι κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.

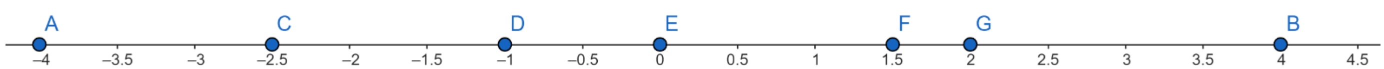
Με αυτόν τον τρόπο ορίζουμε δυο νέα είδη αριθμών τους θετικούς και τους αρνητικούς.

- **Θετικοί** είναι οι αριθμοί που έχουν μπροστά το σύμβολο +.
- **Αρνητικοί** λέγονται αυτοί που έχουν μπροστά το σύμβολο -.

- **Ο αριθμός 0 (μηδέν) δεν θεωρείται ούτε θετικός ούτε αρνητικός.**
- Τα σύμβολα + και – λέγονται στα μαθηματικά **πρόσημα**.
- Δύο ή περισσότεροι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο μπροστά λέγονται **ομόσημοι**.
- Ενώ δυο ή περισσότεροι αριθμοί που έχουν μπροστά τους διαφορετικά πρόσημα λέγονται **ετερόσημοι.**

Σύγκριση ρητών αριθμών

Οι ρητοί αριθμοί θυμίζουμε ότι μπορούν να παρασταθούν με την χρήση μιας ευθείας γραμμής στην οποία θεωρούμε σημεία τα οποία αντιπροσωπεύουν τους αριθμούς, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα



(Η εικόνα δημιουργήθηκε στο geogebra)

Ο αριθμός μηδέν βρίσκεται πάντα στο κέντρο της γραμμής των ρητών αριθμών. **Μεγαλύτεροι είναι οι αριθμοί που βρίσκονται δεξιότερα**.

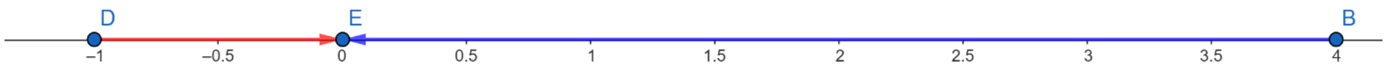
Για παράδειγμα:

- ✓ ο αριθμός μηδέν είναι μεγαλύτερος από όλους τους αρνητικούς ενώ είναι μικρότερος από όλους τους θετικούς.
- ✓ Κάθε αρνητικός είναι μικρότερος οποιουδήποτε θετικού.
- ✓ Ο αριθμός -4 είναι μικρότερος του -2,5 ενώ ο 2 είναι μεγαλύτερος του 1,5.

Απόλυτη τιμή

Κάθε ρητός αριθμός αριθμός έχει απόλυτη τιμή. **Η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού είναι η απόστασή του από το σημείο μηδέν.**

Για παράδειγμα η απόλυτη τιμή του αριθμού -1 είναι ίση με 1 γιατί σύμφωνα με την παραπάνω εικόνα το ευθύγραμμο τμήμα DE είναι η απόσταση του -1 από το μηδέν και έχει μήκος ίσο με 1. Αντίστοιχα η απόλυτη τιμή του 4 είναι ίση με 4.



(Η εικόνα δημιουργήθηκε στο geogebra)

Η απόλυτη τιμή ενός οποιοδήποτε αριθμού α συμβολίζεται $|\boldsymbol{\alpha}|$ και **είναι πάντα ένας θετικός αριθμός.**

Αντίθετοι λέγονται δυο αριθμοί που έχουν ίδια απόλυτη τιμή αλλά διαφορετικό πρόσημο.

Π.χ.: ο 3 και ο -3

2.1.2 Εφαρμογές ιδιοτήτων των ρητών αριθμών

Ας δούμε κάποια παραδείγματα τώρα εφαρμογών των βασικών ιδιοτήτων που αναφέραμε παραπάνω.

1η εφαρμογή

Να συγκρίνεται τους αριθμούς:

α) 2 και -1 β) -6 και -3 γ) $\frac{8}{3}$ $και$ $\frac{15}{3}$ δ) $\frac{7}{4}$ $και$ $\frac{7}{5}$ ε) $-\frac{11}{8}$ $και$ $-\frac{11}{9}$ στ) $-\frac{3}{5}$ $και$ $-\frac{2}{3}$

λύση:

α) $2 > -1$

γιατί ο 2 είναι θετικός ενώ ο -1 αρνητικός και γνωρίζουμε ότι κάθε θετικός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό.

β) $-6 < -3$

γιατί ο -3 είναι δεξιότερα του -6. Αλλιώς μπορούμε να σκεφτούμε ποιος αριθμός είναι πιο κοντά στο μηδέν. Στους αρνητικούς ο κοντινότερος στο μηδέν αριθμός πάνω στην ευθεία των αριθμών είναι ο μεγαλύτερος. Στους θετικούς ισχύει το ανάποδο, ο κοντινότερος στο μηδέν αριθμός είναι ο μικρότερος.

γ) $\frac{8}{3} < \frac{15}{3}$

γιατί οι δυο αριθμοί είναι κλάσματα με ίδιο παρονομαστή άρα μεγαλύτερος είναι αυτός με τον μεγαλύτερο αριθμητή.

δ) $\frac{7}{4} > \frac{7}{5}$

γιατί ως κλάσματα με ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι το κλάσμα με τον μικρότερο παρονομαστή.

ε) $-\frac{11}{9} > -\frac{11}{8}$

εδώ έχουμε συνδυασμό των μέχρι τώρα γνώσεων μας. Το κλάσμα $\frac{11}{8}$ είναι μεγαλύτερο από το κλάσμα $\frac{11}{9}$. Άρα το κλάσμα $-\frac{11}{9}$ είναι πιο κοντά στο μηδέν από ότι το κλάσμα $-\frac{11}{8}$.

στ) για να κάνουμε την σύγκριση εδώ χρειάζεται να κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα γιατί παρατηρούμε ότι δεν έχουν ούτε ίδιο παρονομαστή ούτε ίδιο αριθμητή. Για να γίνουν δυο κλάσματα ομώνυμα, θυμίζουμε ότι χρειάζεται να βρούμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 3 και 5 που είναι παρονομαστές.

ΕΚΠ(3,5)=15

Άρα κάνοντας καπελάκια παίρνουμε $-\frac{3}{5} = -\frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = -\frac{9}{15}$ και $-\frac{2}{3} = -\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = -\frac{10}{15}$

Άρα έχουμε $-\frac{9}{15} > -\frac{10}{15}$ αφού το πρώτο κλάσμα είναι πιο κοντά στο μηδέν.

- ❖ Συμπερασματικά χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή όταν συγκρίνουμε δυο αρνητικούς αριθμούς. Για αυτό πρέπει να θυμόμαστε ένα κανόνα, **στους αρνητικούς αριθμούς ο μικρότερος κατά απόλυτη τιμή αριθμός είναι ο μεγαλύτερος**. Για παράδειγμα ο -1 είναι μεγαλύτερος του -2 γιατί $|-1| = 1 < 2 = |-2|$.

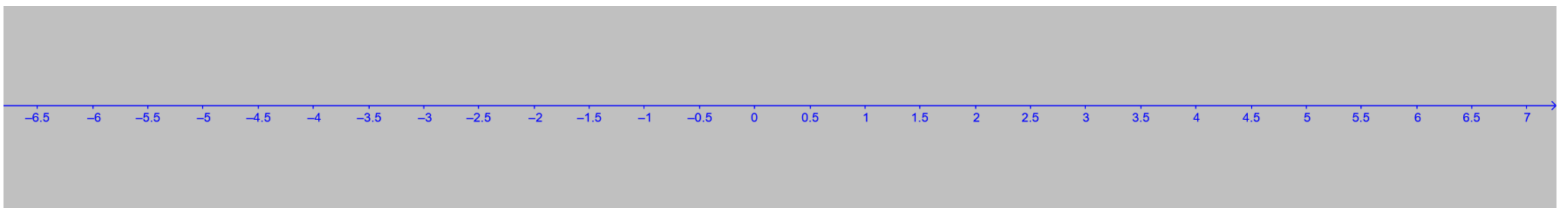
2η εφαρμογή

Να βρείτε την απόλυτη τιμή των παρακάτω αριθμών:

α) 3 β) -5 γ) -2,5 δ) $-\frac{2}{3}$

λύση:

για την λύση της άσκησης αρκεί με την βοήθεια της ευθείας των αριθμών να σκεφτούμε την απόσταση κάθε αριθμού από το μηδέν.



(Η εικόνα δημιουργήθηκε στο geogebra)

α) $|3| = 3$ β) $|-5| = 5$ γ) $|-2{,}5| = 2{,}5$ δ) $\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$

- **Συμπέρασμα:** μπορούμε να εφαρμόσουμε τον εξής κανόνα: Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός, ενώ ενός αρνητικού είναι ο αντίθετός του, δηλαδή ο αριθμός που έχουμε αλλά με το πρόσημο + αντί για το -.

2.1.3 Δραστηριότητα εξάσκησης

Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

(Μπορεί να χρειαστεί να κάνετε κάποιες πράξεις για να απαντήσετε, να έχετε μαζί σας χαρτί και μολύβι ή στυλό).

1) -5 < 1

Χαρακτηρίστε την παραπάνω παράσταση με σωστό ή λάθος

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α

Αιτιολόγηση: ο -5 ως αρνητικός είναι μικρότερος από οποιοδήποτε θετικό

2) $-\frac{11}{5} > -\frac{10}{3}$

Χαρακτηρίστε την παραπάνω παράσταση με σωστό ή λάθος

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α

Αιτιολόγηση: ΕΚΠ(3, 5)= 15 τότε $-\frac{11}{5} = -\frac{33}{15}$ ενώ $-\frac{10}{3} = -\frac{50}{15}, επειδή\ \frac{33}{15} < \frac{50}{15}\ τότε -\frac{33}{15} > -\frac{50}{15}, άρα -\frac{11}{5} > -\frac{10}{3}$

3) $\frac{11}{12} < \frac{11}{23}$

Χαρακτηρίστε την παραπάνω παράσταση με σωστό ή λάθος

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: β

Αιτιολόγηση: τα κλάσματα είναι θετικοί αριθμοί, το κλάσματα έχουν ίδιο αριθμητή άρα μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει μικρότερο παρονομαστή

4) $-|2| > \ |-2|$

Χαρακτηρίστε την παραπάνω παράσταση με σωστό ή λάθος

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: β

Αιτιολόγηση: $|-2| = 2, |2| = 2\ άρα - |2| = -2$

5) $-|-3| > \ -|3|$

Χαρακτηρίστε την παραπάνω παράσταση με σωστό ή λάθος

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: β

Αιτιολόγηση: $|3| = 3, |-3| = 3 \; άρα - |3| = -3 \; και - |-3| = -3$

2.1.4 Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης

Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

(Μπορεί να χρειαστεί να κάνετε κάποιες πράξεις για να απαντήσετε, να έχετε μαζί σας χαρτί και μολύβι ή στυλό).

1) -5 > -13

Χαρακτηρίστε την παραπάνω παράσταση με σωστό ή λάθος

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α

2) -2023 > 0

Χαρακτηρίστε την παραπάνω παράσταση με σωστό ή λάθος

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: β

3) $-\frac{4}{7} > -\frac{3}{4}$

Χαρακτηρίστε την παραπάνω παράσταση με σωστό ή λάθος

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α

4) $-|-3| < |-7|$

Χαρακτηρίστε την παραπάνω παράσταση με σωστό ή λάθος

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α

5) $-\frac{1}{2} = -\frac{16}{32}$

Χαρακτηρίστε την παραπάνω παράσταση με σωστό ή λάθος

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α

2.2 Πράξεις μεταξύ ρητών αριθμών

2.2.1 Κανόνες των πράξεων

Στο Δημοτικό μάθαμε ότι μεταξύ αριθμών γίνονται τέσσερεις πράξεις, πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση. Εδώ στο γυμνάσιο θα παρατηρήσουμε ότι ουσιαστικά οι πράξεις έχουν μεταξύ τους πολλές ομοιότητες, συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι οι πράξεις είναι δύο και όχι τέσσερεις, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός.

Πάμε να δούμε πως γίνονται οι πράξεις μεταξύ ρητών αριθμών και ποιοι κανόνες τις διέπουν.

Για να βρούμε αποτέλεσμα σε πράξη μεταξύ δυο ρητών αριθμών πρέπει να βρούμε:

1) Το πρόσημο του αποτελέσματος
2) Τον αριθμό σε απόλυτη τιμή

TIP: σε ένα φύλλο χαρτί γράψτε τους κανόνες που θα αναφέρουμε παρακάτω ώστε να τους έχετε σαν «σκονάκι» συνέχεια μπροστά σας ως βοήθεια στις ασκήσεις.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ- ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Θα μιλήσουμε μαζί για την πρόσθεση και την αφαίρεση γιατί θα δούμε ότι ουσιαστικά είναι η ίδια πράξη. Θα χωρίσουμε την πράξη αυτή σε δυο κατηγορίες ανάλογα με το είδος των αριθμών που έχουμε να προσθέσουμε.

1η Κατηγορία: Ομόσημοι αριθμοί

Κανόνας: Διατηρούμε το κοινό πρόσημο και προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές των αριθμών.

Πχ: (+5)+(+2)=+7

(-3)+(-4)=-7

Δεν είναι απαραίτητο να βάζουμε παρενθέσεις κατά την διεξαγωγή των πράξεων. Αρκεί να θεωρούμε ότι το πρόσημου του αριθμού ταυτίζεται με το σύμβολο που χωρίζει τους δυο αριθμούς.

Πχ: 4+5=+9 (το πρόσημο του 4 είναι + και το πρόσημο του 5 το είναι το + γιατί αυτό ενώνει τους δύο αριθμούς)

-6-7=-13 (το πρόσημο του 13 είναι – γιατί αυτό το σύμβολο ενώνει τους δύο αριθμούς

2η Κατηγορία: Ετερόσημοι αριθμοί

Κανόνας:

- Για το πρόσημο: Το πρόσημο του αποτελέσματος είναι το πρόσημο του μεγαλύτερου σε απόλυτη τιμή αριθμού.
- Για το νούμερο: αφαιρώ τις δύο απόλυτες τιμές.

Πχ: -3+5=+2 γιατί ο 5>3 άρα το τελικό πρόσημο είναι + και μετά κάνω 5-3=2. Άρα αποτέλεσμα +2

-7+5=-2 γιατί ο 7>5 άρα το αποτέλεσμα έχει πρόσημο – και μετά κάνω 7-5=2. Άρα το αποτέλεσμα είναι -2

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ- ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Στον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση έχουμε τον ίδιο κανόνα για την εύρεση του πρόσημου του αποτελέσματος ακολουθούμε τον παρακάτω κανόνα.

Κανόνας: το γινόμενο ή το πηλίκο δυο ομόσημων αριθμών έχει πρόσημο θετικό (+). Το γινόμενο ή το πηλίκο δυο ετερόσημων αριθμών έχει αρνητικό πρόσημο (-).

Ο παραπάνω κανόνας συνοψίζεται στον πίνακα:

· ή :	**+**	**-**
+	**+**	**-**
-	**-**	**+**

Στην συνέχεια υπολογίζουμε το γινόμενο ή το πηλίκο των απολύτων τιμών των αριθμών.

Πχ: $-3 \cdot (+5) = -15$,

$(-7) \cdot (-8) = +56$,

$\left(-\frac{3}{4}\right) : \left(+\frac{6}{5}\right) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = -\frac{15}{24} = -\frac{5}{8}$.

2.2.2 Υπολογισμοί αριθμητικών παραστάσεων

Παρακολουθήστε το παρακάτω βίντεο και δείτε απλές εφαρμογές πράξεων μεταξύ ρητών αριθμών.

https://www.youtube.com/watch?v=vrL032LZ370

Τώρα αν έχουμε πράξεις με παραπάνω από δυο αριθμούς συγκροτείτε μια αριθμητική παράσταση. Για τον υπολογισμό της ακολουθούμε την εξής προτεραιότητα πράξεων:

1. Δυνάμεις
2. Πολλαπλασιασμοί/ Διαιρέσεις
3. Προσθέσεις/ Αφαιρέσεις

Σε περιπτώσεις όπου στην αριθμητική παράσταση υπάρχουν παρενθέσεις ή αγκύλες τότε κάνουμε με την ίδια προτεραιότητα τις πράξεις μέσα στις αγκύλες και τις παρενθέσεις.

TIP: στην πρόσθεση και την αφαίρεση προσπαθώ να ομαδοποιήσω όλους τους θετικούς και όλους τους αρνητικούς αριθμούς μαζί. Βρίσκω το άθροισμα όλων των θετικών αριθμών της παράστασης και όλων των αρνητικών και στο τέλος προσθέτω τα δυο αθροίσματα μεταξύ τους

Πως ανοίγω παρενθέσεις;

<u>*Κανόνας:*</u>

- Όταν πριν την παρένθεση υπάρχει το πρόσημο + τότε διώχνω την παρένθεση και ξαναγράφω τους αριθμούς που έχει μέσα όπως είναι.
- Όταν πριν την παρένθεση υπάρχει το πρόσημο – τότε διώχνω την παρένθεση και ξαναγράφω τους αριθμούς αλλάζοντας κάθε φορά το πρόσημο κάθε αριθμού.

Με αυτό τον τρόπο κάνουμε όπως λέμε <u>*απαλοιφή παρενθέσεων*</u>, προκειμένου να έχουμε μια όσο γίνεται πιο απλή παράσταση.

Παράδειγμα:

Να υπολογίσετε την παρακάτω αριθμητική παράσταση:

$$\mathrm{B}=\left(\frac{-3}{4}:\frac{9}{-16}\right)\cdot\frac{-3}{-2}-\left(-\frac{2}{3}+2\right):\left(-\frac{1}{3}\right)-\left[-(-4)\right]$$

(Askisopolis, n.d.)

Λύση:

$$\mathrm{B}=\left(\frac{-3}{4}:\frac{9}{-16}\right)\cdot\frac{-3}{-2}-\left(-\frac{2}{3}+2\right):\left(-\frac{1}{3}\right)-\left[-(-4)\right]$$

$$\mathrm{B}=\left(\frac{-3}{4}\cdot\frac{-16}{9}\right)\cdot\left(+\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{2}{3}+\frac{\overset{3}{2}}{1}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)-(+4)$$

$$\mathrm{B}=\left(\frac{+\cancel{3}^{1}\cdot\cancel{16}^{4}}{{}^{1}\cancel{4}\cdot\cancel{9}^{3}}\right)\left(+\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{2}{3}+\frac{6}{3}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)-(+4)$$

$$\mathrm{B}=\frac{4}{3}\left(+\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{1}\right)-(+4)=\frac{\cancel{4}^{2}\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}^{1}}+\frac{4\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot1}-4=2+\cancel{4}-\cancel{4}=2$$

(Askisopolis, n.d.)

2.2.3 Δραστηριότητα εξάσκησης

Γράψτε στο κάθε κουτάκι το αποτέλεσμα της κάθε αριθμητικής παράστασης:

Προσοχή χρειάζεται να έχετε μπροστά σας χαρτί και μολύβι ή στυλό προκειμένου να κάνετε τις απαραίτητες πράξεις. Στο κουτάκι θα βάλετε μόνο το αποτέλεσμα.

1) $A = -36 : (-3 - 6)$ (Μπάρλας, 2016)

Εισάγεται το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης Α

Σωστή απάντηση: 4

Αιτιολόγηση: $A = -36 : (-3 - 6) = -36 : (-9) = +4$

2) $B = (-5 \cdot 6 - 12) : (3 - 10)$ (Μπάρλας, 2016)

Εισάγεται το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης Β

Σωστή απάντηση: 6

Αιτιολόγηση: $B = (-5 \cdot 6 - 12) : (3 - 10) = (-30 - 12) : (-7) = (-42) : (-7) = 6$

3) $\Gamma = [3 \cdot (-6) - 8 \cdot (-2)] \cdot [3 + 4 \cdot (-3)]$ (Μπάρλας, 2016)

Εισάγεται το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης Γ

Σωστή απάντηση: 18

Αιτιολόγηση: $\Gamma = [3 \cdot (-6) - 8 \cdot (-2)] \cdot [3 + 4 \cdot (-3)] = (-18 + 16) \cdot (3 - 12) = (-2) \cdot (-9) = 18$

4) $\Delta = (-6 + 2) \cdot \left[8 - 12 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)\right]$ (Μπάρλας, 2016)

Εισάγεται το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης Δ

Σωστή απάντηση: -36

Αιτιολόγηση: $\Delta = (-6 + 2) \cdot \left[8 - 12 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)\right]$

$$\Delta = (-4) \cdot \left[8 - 12 \cdot \left(\frac{3}{12} - \frac{4}{12}\right)\right]$$

$$\Delta = -4 \cdot \left[8 - 12 \cdot \left(-\frac{1}{12}\right)\right]$$

$$\Delta = -4 \cdot (8 + 1)$$

$$\Delta = -4 \cdot 9$$

$$\Delta = -36$$

5) $E = \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{15}{16}\right)$ (Μπάρλας, 2016)

Εισάγεται το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης Ε

Σωστή απάντηση: 1/7

Αιτιολόγηση: $E = \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{15}{16}\right) = \left(\frac{9}{12} - \frac{10}{12}\right) : \left(\frac{8}{16} - \frac{15}{16}\right) = -\frac{1}{12} : \left(-\frac{7}{12}\right) = +\frac{1}{12} \cdot \frac{12}{7} = \frac{12}{12 \cdot 7} = \frac{1}{7}$

2.2.4 Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης

Γράψτε στο κάθε κουτάκι το αποτέλεσμα της κάθε αριθμητικής παράστασης:

Προσοχή χρειάζεται να έχετε μπροστά σας χαρτί και μολύβι ή στυλό προκειμένου να κάνετε τις απαραίτητες πράξεις. Στο κουτάκι θα βάλετε μόνο το αποτέλεσμα.

1) $A = \left(-\frac{8}{5} - \frac{6}{5}\right) : \frac{7}{5}$ (Μπάρλας, 2016)

Εισάγεται το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης Α

Σωστή απάντηση: -2

2) $B = [2 \cdot (-7) + 4 \cdot (-4)] : (20 - 5)$ (Μπάρλας, 2016)

Εισάγεται το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης Β

Σωστή απάντηση: 2

3) $\Gamma = 10 : [36 : (-4) - 24 : 2 + (-2) \cdot (-8)]$ (Μπάρλας, 2016)

Εισάγεται το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης Γ

Σωστή απάντηση: -2

4) $\Delta = [12 + 3 \cdot (-5 - 4)] \cdot [-5 \cdot (-4) - 3 \cdot 8]$ (Μπάρλας, 2016)

Εισάγεται το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης Δ

Σωστή απάντηση: 60

2.3 Δυνάμεις ρητών αριθμών

2.3.1 Ιδιότητες των δυνάμεων

Ας θυμηθούμε τι είναι δύναμη…

Στην Α' Γυμνασίου είχαμε πει ότι δύναμη με βάση τον αριθμό α και εκθέτη τον αριθμό κ είναι το γινόμενο του αριθμού α με τον εαυτό του κ φορές.

Δηλαδή:

$$\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$$

Άρα $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

Τι γίνεται όμως αν η βάση της δύναμης δηλαδή ο αριθμός α είναι αρνητικός; Τότε ισχύει ο παρακάτω κανόνας:

Κανόνας:

- Αν η βάση είναι αρνητικός αριθμός και ο εκθέτης είναι περιττός αριθμός (ή αλλιώς μονός) τότε το αποτέλεσμα της δύναμης είναι αρνητικός αριθμός.
- Αν η βάση είναι αρνητικός αριθμός και ο εκθέτης είναι άρτιος αριθμός (ή αλλιώς ζυγός) τότε το αποτέλεσμα της δύναμης είναι θετικός αριθμός.

Πχ: $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$ και $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

Προσοχή: αν η βάση είναι θετικός τότε το αποτέλεσμα της δύναμης είναι πάντα θετικός αριθμός ανεξαρτήτως του εκθέτη!

Για να υπολογίζουμε όμως πιο εύκολα δυνάμεις και ιδιαίτερα αυτές που έχουν μεγάλους εκθέτες ή να κάνουμε πράξεις με δυνάμεις, έχουμε διατυπώσει κάποιες ιδιότητες των δυνάμεων.

Δείτε το παρακάτω video και καταγράψτε στο τετράδιό σας τις ιδιότητες των δυνάμεων με την μορφή τύπων για να τις χρησιμοποιήσετε στις ασκήσεις ως «σκονάκι».

https://www.youtube.com/watch?v=igFldKi6xPk

2.3.2 Εφαρμογές ιδιοτήτων των δυνάμεων

Συνοπτικά οι ιδιότητες των δυνάμεων είναι αυτές:

1. $\alpha^0 = 1$
2. $\alpha^1 = \alpha$
3. $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$,
4. $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$,
5. $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\cdot\nu}$,
6. $(\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$,
7. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$,
8. $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$,
9. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$

Ας δούμε κάποιες εφαρμογές των ιδιοτήτων σε ασκήσεις

Εφαρμογή:

Να γράψετε ως μια δύναμη τις παρακάτω παραστάσεις:

(Μπάρλας, 2016)

α) $(-2)^4 \cdot 2^2$

β) $\frac{2^{13}\cdot 2^7}{(-2)^{10}}$

γ) $\frac{7^5\cdot\left((-7)^2\right)^3}{(7^3)^3}$

δ) $\frac{(-24)^3}{6^3}$

ε) $\frac{13^{-7}\cdot 13^8}{13^3}$

Λύση:

α) $(-2)^4 \cdot 2^2 = 2^4 \cdot 2^2 = 2^{4+2} = 2^6$

επιδιώκουμε να δημιουργούμε δυνάμεις με ίδια βάση, επειδή το -2 έχει άρτιο εκθέτη τότε μπορούμε να διώξουμε το -.

β) $\frac{2^{13} \cdot 2^7}{(-2)^{10}} = \frac{2^{13+7}}{2^{10}} = \frac{2^{20}}{2^{10}} = 2^{20-10} = 2^{10}$

γ) $\frac{7^5 \cdot \left((-7)^2\right)^3}{(7^3)^3} = \frac{7^5 \cdot ((7)^2)^3}{7^{3 \cdot 3}} = \frac{7^5 \cdot 7^{2 \cdot 3}}{7^9} = \frac{7^5 \cdot 7^6}{7^9} = \frac{7^{5+6}}{7^9} = \frac{7^{11}}{7^9} = 7^{11-9} = 7^2$

δ) $\frac{(-24)^3}{6^3} = \left(\frac{-24}{6}\right)^3 = (-4)^3 = -4^3$

εδώ δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε εκθέτες με ίδια βάση, παρατηρούμε όμως ότι έχουν ίδιο εκθέτη οπότε χρησιμοποιώ την ιδιότητα 7

ε) $\frac{13^{-7} \cdot 13^8}{13^3} = \frac{13^{-7+8}}{13^3} = \frac{13^1}{13^3} = 13^{1-3} = 13^{-2} = \frac{1}{13^2}$

εδώ χρησιμοποιούμε την ιδιότητα 3 και προσθέτουμε τους εκθέτες στον αριθμητή, παρά τον αρνητικό εκθέτη, για να δημιουργήσουμε μια δύναμη στον αριθμητή

2.3.3 Δραστηριότητα εξάσκησης

Για κάθε μια από τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις να επιλέξετε το αποτέλεσμα τους:

1) $A = \frac{5^5 \cdot 6^5}{15^5}$ (Μπάρλας, 2016)

Επιλέξτε το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης Α

α) 5^2
β) 2^5
γ) 15^5
δ) 3^5

Σωστή απάντηση: β

Αιτιολόγηση: $\frac{5^5 \cdot 6^5}{15^5} = \frac{(5 \cdot 6)^5}{15^5} = \frac{30^5}{15^5} = \left(\frac{30}{15}\right)^5 = 2^5$

2) $B = \frac{(-7)^9 \cdot (-7)^5}{7^{12}}$ (Μπάρλας, 2016)

Επιλέξτε το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης Β

α) 7^2
β) $(-7)^2$
γ) 7^{26}
δ) $(-7)^{26}$

Σωστή απάντηση: α

Αιτιολόγηση: $\frac{(-7)^9 \cdot (-7)^5}{7^{12}} = \frac{(-7)^{9+5}}{7^{12}} = \frac{(-7)^{14}}{7^{12}} = \frac{7^{14}}{7^{12}} = 7^{24-12} = 7^2$

3) $\Gamma = \frac{5^4 \cdot \left((-5)^3\right)^2}{(-5)^8}$ (Μπάρλας, 2016)

Επιλέξτε το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης Γ

α) 5^1
β) -5
γ) 5^6
δ) 5^2

Σωστή απάντηση: δ

Αιτιολόγηση: $\frac{5^4 \cdot \left((-5)^3\right)^2}{(-5)^8} = \frac{5^4 \cdot (-5)^{3 \cdot 2}}{5^8} = \frac{5^4 \cdot 5^6}{5^8} = \frac{5^{4+6}}{5^8} = \frac{5^{10}}{5^8} = 5^{10-8} = 5^2$

4) $\Delta = (7^{-5})^3 \cdot (7^{-2})^{-7}$ (Μπάρλας, 2016)

Επιλέξτε το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης Δ

α) 7
β) 7^{29}
γ) $\frac{1}{7}$
δ) 7^{-2}

Σωστή απάντηση: γ

Αιτιολόγηση: $(7^{-5})^3 \cdot (7^{-2})^{-7} = 7^{-5\cdot 3} \cdot 7^{-2\cdot(-7)} = 7^{-15} \cdot 7^{14} = 7^{-15+14} = 7^{-1} = \frac{1}{7^1} = \frac{1}{7}$

2.3.4 Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης

Για κάθε μια από τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις να επιλέξετε το αποτέλεσμα τους:

1) $A = \frac{\left(2^{-3}\right)^5 \cdot 2^{20}}{(2^3)^3}$ (Μπάρλας, 2016)

Επιλέξτε το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης Α

α) 2^4
β) 2^{-4}
γ) 2^{16}
δ) -2^4

Σωστή απάντηση: β

2) $B = \frac{2^7 \cdot 2^5}{2^{16}}$ (Μπάρλας, 2016)

Επιλέξτε το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης Β

α) 2^4
β) 2^{28}
γ) $\frac{1}{2^4}$
δ) -2^4

Σωστή απάντηση: γ

3) $\Gamma = \frac{4^4 \cdot 9^4}{6^4 \cdot 2^4}$ (Μπάρλας, 2016)

Επιλέξτε το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης Γ

α) 81
β) 4^3
γ) 16^4
δ) 18^4

Σωστή απάντηση: α

2.4 Ανακεφαλαίωση και Αυτό-αξιολόγηση

2.4.1 Ανακεφαλαίωση

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετήσαμε συνοπτικά τους ρητούς αριθμούς.

Θυμηθήκαμε από προηγούμενες τάξεις:

- ✓ τους θετικούς και αρνητικούς αριθμούς,
- ✓ την έννοια της απόλυτης τιμής,
- ✓ την διαδικασία σύγκρισης δυο ρητών αριθμών,
- ✓ τις πράξεις μεταξύ ρητών,
- ✓ την προτεραιότητα πράξεων.

Παράλληλα μάθαμε:

- ✓ για τις δυνάμεις των ρητών αριθμών,
- ✓ τις ιδιότητές των δυνάμεων.

2.4.2 Εργασία ανοιχτής απόκρισης

Για να ολοκληρώσετε αυτή την εργασία θα χρειαστείτε χαρτί και μολύβι ή στυλό.

Σας δίνονται οι παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = \frac{42 : (-6) - 6 : (-2)}{8 : (1 - 3)}$$

$$B = \left[8 : \left(-\frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{16}{24}\right)\right] : \left[4 : \left(-\frac{2}{7}\right)\right]$$

$$\Gamma = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 2^{-3} - \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$$

$$\Delta = \frac{((-3)^7)^{-2} \cdot 9^{-2}}{27^3}$$

Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις στο χαρτί σας. Στην συνέχεια να φωτογραφίσετε το χαρτί με τις απαντήσεις σας και να επισυνάψετε την φωτογραφία στο πεδίο των απαντήσεων.

Ρουμπρίκα αξιολόγησης εργασίας από τον διδάσκοντα.

Κριτήρια				
Αριθμητική Παράσταση Α: Βαθμός επίτευξης του ορθού υπολογισμού της αριθμητικής παράστασης Α	Καθόλου: 0 βαθμοί	Ελάχιστα: 1 βαθμός	Ικανοποιητικά: 3 βαθμοί	Τέλεια: 5 βαθμοί
Αριθμητική Παράσταση Β: Βαθμός επίτευξης του ορθού υπολογισμού της αριθμητικής παράστασης Β	Καθόλου: 0 βαθμοί	Ελάχιστα: 1 βαθμός	Ικανοποιητικά: 3 βαθμοί	Τέλεια: 5 βαθμοί
Αριθμητική Παράσταση Γ: Βαθμός επίτευξης του ορθού υπολογισμού της αριθμητικής παράστασης Γ	Καθόλου: 0 βαθμοί	Ελάχιστα: 1 βαθμός	Ικανοποιητικά: 3 βαθμοί	Τέλεια: 5 βαθμοί

Αριθμητική Παράσταση Δ: Βαθμός επίτευξης του ορθού υπολογισμού της αριθμητικής παράστασης Δ	Καθόλου: 0 βαθμοί	Ελάχιστα: 1 βαθμός	Ικανοποιητικά: 3 βαθμοί	Τέλεια: 5 βαθμοί

2.4.3 Checklist: Μπορώ να το κάνω…

Απαντήστε στο παρακάτω ερωτηματολόγιο προκειμένου να αξιολογήσετε τις ικανότητές σας:

1) Μπορώ να συγκρίνω δυο ρητούς αριθμούς;

α) Ναι
β) Με δυσκολία
γ) Όχι

2) Μπορώ να προσθέσω δυο ομόσημους αριθμούς;

α) Ναι
β) Με δυσκολία
γ) Όχι

3) Μπορώ να προσθέσω δύο ετερόσημους αριθμούς;

α) Ναι
β) Με δυσκολία
γ) Όχι

4) Μπορώ να πολλαπλασιάσω ή να διαιρέσω δυο ρητούς αριθμούς;

α) Ναι

β) Με δυσκολία
γ) Όχι

5) Μπορώ να υπολογίσω μια αριθμητική παράσταση τηρώντας την προτεραιότητα των πράξεων;

α) Ναι
β) Με δυσκολία
γ) Όχι

6) Μπορώ να εφαρμόσω τις ιδιότητες των δυνάμεων για να υπολογίσω μια αριθμητική παράσταση;

α) Ναι
β) Με δυσκολία
γ) Όχι

2.4.4 Συζήτηση στο Forum

Γράψτε την άποψή σας στο Forum ή σχολιάστε ένα post κάποιου άλλου μαθητή απαντώντας στις παρακάτω ερωτήσεις:

Τι σας δυσκόλεψε περισσότερο σε αυτή την διδακτική ενότητα;

Τα θυμόσασταν όλα από τις προηγούμενες τάξεις;

Που θεωρείτε ότι χρησιμεύουν οι ιδιότητες των δυνάμεων και αξίζει να τις μαθαίνουμε; Μπορείτε να αναφέρετε κάποια άλλη επιστήμη ή ένα παράδειγμα που σκέφτεστε ή ξέρετε.

2.5 Πρόσθετο Υλικό

2.5.1 Προτάσεις για περαιτέρω εξάσκηση

Στο τετράδιό σας κάντε τις παρακάτω ασκήσεις. Στο τέλος κάθε ασκήσεις σας δίνονται τα αποτελέσματα των ασκήσεων ώστε να κάνετε αυτό-έλεγχο.

ΘΕΜΑ 1ο

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

1. $A = \frac{(-2)^4 + 3 \cdot 5^2 - (-1)^{200}}{2^5 - 2}$
2. $B = \frac{5^3}{25} - \frac{(-2)^7}{4^3} + \frac{9^2}{3^3}$
3. $\Gamma = 5 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^7 - 2^{-1} \cdot 10^4$
4. $\Delta = \left[\frac{(-1)^4 + 3^3}{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + 2}\right]^{-8}$

(Απαντήσεις: $A = 3, B = 10, \Gamma = -4000, \Delta = 256$ ή 2^8)

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u>

Α. Να υπολογιστεί η παράσταση Α για $\chi = -2$

$$A = \chi(1-\chi)^{-\chi} - 2\chi^{2+\chi} + (\chi+1)^{1-2\chi} + \chi^0$$

Β. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$B = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 2 - 2^4 + (-4)^3 : 2^3 + [1 - 2 \cdot (-1)^{2021}]$$

(Υπόδειξη για την Α: να αντικαταστήσετε όπου χ το -2.)

(Απαντήσεις: $A = -20, B = -13$)

Ημέρα 3η: Διδακτική ενότητα 2- Εξισώσεις 1ου βαθμού

3.0 Εισαγωγή διδακτικής ενότητας

3.0.1 Μαθησιακά αποτελέσματα

Μετά την παρακολούθηση αυτής της διδακτικής ενότητας θα είσαι ικανός/η να:

ΜΑ2 [Apply]: Λύσεις εξισώσεις 1ου Βαθμού και προβλήματα

Πιο συγκεκριμένα θα μπορείς να:

- Υπολογίζεις αλγεβρικές παραστάσεις και να εφαρμόζεις την επιμεριστική ιδιότητα
- Λύνεις εξισώσεις 1ου βαθμού
- Μοντελοποιείς προβλήματα πρακτικής αριθμητικής και γεωμετρίας σε εξισώσεις 1ου βαθμού

Συμπλήρωσε το παρακάτω ερωτηματολόγιο το οποίο ελέγχει τι θυμάσαι από το κεφάλαιο αυτό. Θυμίζουμε ότι εδώ δεν υπάρχουν σωστές ή λάθος απαντήσεις. Επέλεξε την απάντηση που θεωρείς σωστότερη.

1) Η αλγεβρική παράσταση $A = 3x - 5y + 2(x + 2y)$ απλοποιείται και γράφεται $A = 5x - y$.

α) Σωστό
β) Λάθος

2) Η εξίσωση $3x = \frac{x-5}{2}$ έχει λύση τον αριθμό:

α) 1
β) -1
γ) 2
δ) 0

3.0.2 Δομή της ενότητας

Η Διδακτική Ενότητα είναι διάρκειας 4 ωρών και περιλαμβάνει:

- Εισαγωγή
- Υποενότητα 1 – Μεταβλητή και αλγεβρική παράσταση
- Υποενότητα 2 – Επίλυση Εξίσωσης 1ου βαθμού
- Υποενότητα 3 - Προβλήματα
- Ανακεφαλαίωση και Αυτό-αξιολόγηση, που περιλαμβάνει:
  - ✓ Σύνοψη της ενότητας
  - ✓ Εργασία εφαρμογής με τη μορφή Ερώτησης Ανοικτής Απόκρισης
  - ✓ Αυτό-αξιολόγηση σε μορφή ερωτηματολογίου όπου οι εκπαιδευόμενοι επιλέγουν ποιο/ποια από τα μαθησιακά αποτελέσματα της ενότητας έχουν κατακτήσει.
  - ✓ Forum συζήτησης

Οι 3 υποενότητες είναι διάρκειας 1 ώρας η κάθε μία. Η κάθε υποενότητα αποτελείται από:

- Δραστηριότητα παρουσίασης (15’)
- Δραστηριότητα επίδειξης (15’)

- Δραστηριότητα εξάσκησης (15’)
- Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης (15’)

3.1 Μεταβλητή και αλγεβρική παράσταση

3.1.1 Τι ονομάζουμε μεταβλητή και τι αλγεβρική παράσταση;

Με τον όρο **μεταβλητή** ονομάζουμε ένα γράμμα του ελληνικού ή λατινικού αλφαβήτου που παριστάνει ένα οποιοδήποτε αριθμό.

Τα πιο συνηθισμένα γράμματα είναι το x και y από το λατινικό και το α, β, γ από το ελληνικό.

Γνωρίζουμε ότι μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς ονομάζεται αριθμητική παράσταση.

Τώρα τις παραστάσεις που περιέχουν πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές θα τις ονομάζουμε **αλγεβρικές παραστάσεις**.

Πχ: $A = 3\chi - 2\chi$

Προσοχή: όταν πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με μια μεταβλητή ή δυο μεταβλητές μεταξύ τους, το σύμβολο της πράξης του πολλαπλασιασμού μπορεί να παραλειφθεί.

Συνεπώς στην παραπάνω αλγεβρική παράσταση το 3χ είναι το γινόμενο του 3 επί την μεταβλητή χ. Ομοίως και το 2χ.

Αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει όταν πολλαπλασιάζουμε δυο αριθμούς. Τότε υποχρεωτικά γράφουμε το σύμβολο της πράξης.

Οι αλγεβρικές παραστάσεις δεν έχουν υποχρεωτικά σταθερή αριθμητική τιμή. Μπορούμε να τις απλοποιήσουμε αλλά δεν γνωρίζουμε το ακριβές τους αριθμητικό αποτέλεσμα. Μπορούμε να βρούμε αριθμητικά αποτελέσματα μόνο αν αντικαταστήσουμε στις μεταβλητές κάποιον αριθμό.

Παρακολουθείστε το παρακάτω video και δείτε πως μπορούμε να κάνουμε πράξεις, σε μια αλγεβρική παράσταση, μεταξύ μεταβλητών.

https://www.youtube.com/watch?v=HwuN7aLuNKU

3.1.2 Πως υπολογίζουμε αλγεβρικές παραστάσεις- αναγωγή όμοιων όρων και επιμεριστική ιδιότητα.

Σε σύνθετες αλγεβρικές παραστάσεις πολλών μεταβλητών, για να τις απλοποιήσουμε έχουμε δυο βασικά εργαλεία:

- Την αναγωγή όμοιων όρων και
- Την επιμεριστική ιδιότητα

Αναγωγή όμοιων όρων

Σε μια αλγεβρική παράσταση οι «όροι» της χωρίζονται με τα σύμβολα + ή –, δηλαδή με την πράξη της πρόσθεσης.

Πχ: για να απλοποιήσω την παράσταση $A = 3x - 5y + 4x + 6y$ δεν μπορώ να προσθέσω τους όρους που περιέχουν την μεταβλητή x με τους όρους που περιέχουν την μεταβλητή y γιατί οι δυο μεταβλητές αντιπροσωπεύουν διαφορετικές ποσότητες.

Αυτό που κάνω είναι να υπολογίσω ξεχωριστά το άθροισμα όλων των όρων που περιέχουν την μεταβλητή x και αντίστοιχα το άθροισμα των όρων της μεταβλητής y.

Άρα έχω:

$$A = 3x - 5y + 4x + 6y$$

$$A = (3 + 4)x + (-5 + 6)y$$

$$A = 7x + 1y$$

$$A = 7x + y$$

Επιμεριστική Ιδιότητα

Στους αριθμούς ισχύει η παρακάτω ιδιότητα:

«Αν α, β, γ είναι αριθμοί τότε $\boldsymbol{\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma}$»

Με δικά μας λόγια μπορούμε να πούμε ότι αν ο α πολλαπλασιάζεται με το άθροισμα των β και γ, τότε αν πολλαπλασιάσω τον α με τον β και τον α με τον γ και προσθέσω τα γινόμενα, θα έχω βρει το ίδιο αποτέλεσμα.

Άρα αν κάποιος αριθμός ή μεταβλητή πολλαπλασιάζεται με ένα άθροισμα μέσα σε παρένθεση τότε μπορώ να πολλαπλασιάσω κάθε όρο της παρένθεσης με τον αριθμό ή την μεταβλητή που βρίσκεται έξω από αυτήν.

Πχ: $3(x+2)=3x+3\cdot 2=3x+6$ (ο αριθμός 3 πολλαπλασιάζεται και με τον χ και με τον 2)

$4(x-9)=4x-4\cdot 9=4x-36$ (προσέχω να κάνω σωστά τον πολλαπλασιασμό τον πρόσημων, ο -9 είναι αρνητικός ενώ ο 4 θετικός, άρα υπολογίζω εξαρχής το τελικό πρόσημο)

$-2(x-3)=-2x-2\cdot(-3)=-2x+6$ (δεν με επηρεάζει το πρόσημο του αριθμού έξω από την παρένθεση)

$x(y-3)=xy-3x$ (όπως κάνουμε με αριθμούς έτσι κάνουμε επιμεριστική και με μεταβλητές)

Δείτε το παρακάτω video και παρακολουθείστε πως απλοποιεί αλγεβρικές παραστάσεις με αυτά τα δύο εργαλεία.

https://www.youtube.com/watch?v=BqFi7m0S650

3.1.3 Δραστηριότητα εξάσκησης

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση σε κάθε μια από της παρακάτω ερωτήσεις. Να έχετε χαρτί και μολύβι ή στυλό προκειμένου να κάνετε τις απαραίτητες πράξεις.

1) Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $3(2x+5y)$. Η παράσταση απλοποιείτε ως εξής:

α) $6x+5y$
β) $21xy$
γ) $6x+15y$
δ) $11x+y$

Σωστή απάντηση: γ (Μπάρλας, 2016)

Αιτιολόγηση: $3(2x+5y)=3\cdot 2x+3\cdot 5y=6x+15y$

2) Η παράσταση $A=1-5\alpha+\beta+3\alpha-2\beta-4$ αν απλοποιηθεί γίνεται $A=-2\alpha-\beta-3$.

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α   (Μπάρλας, 2016)

Αιτιολόγηση: $A = 1 - 5\alpha + \beta + 3\alpha - 2\beta - 4 = -5\alpha + 3\alpha + \beta - 2\beta + 1 - 4 = -2\alpha - \beta - 3$

3) Η παράσταση $A = 3(2x - y) - 2(5x - 3) + y$ αν απλοποιηθεί γίνεται $A = -4x + 2y + 6$

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: β   (Μπάρλας, 2016)

Αιτιολόγηση: $A = 3(2x - y) - 2(5x - 3) + y = 6x - 3y - 10x + 6 + y = -4x - 2y + 6$

4) Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $A = 1 - 3(2x - y) - (4x - y + 3)$. Αν απλοποιηθεί η Α τότε έχουμε την παράσταση $A = -10x + 4y - 2$.

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α   (Μπάρλας, 2016)

Αιτιολόγηση: $A = 1 - 3(2x - y) - (4x - y + 3) = 1 - 6x + 3y - 4x + y - 3 = -10x + 4y - 2$

5) Για την αλγεβρική παράσταση της προηγούμενης ερώτησης, η αριθμητική τιμή που παίρνει για $x = -5, y = -2$ είναι:

α) 40
β) 60
γ) 52
δ) 48

Σωστή απάντηση: α   (Μπάρλας, 2016)

Αιτιολόγηση: $A = -10x + 4y - 2 = -10 \cdot (-5) + 4 \cdot (-2) - 2 = 50 - 8 - 2 = 40$

3.1.4 Δραστηριότητα αυτό- αξιολόγησης

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση σε κάθε μια από της παρακάτω ερωτήσεις. Να έχετε χαρτί και μολύβι ή στυλό προκειμένου να κάνετε τις απαραίτητες πράξεις.

1) Η παράσταση $A = 1 + (2x - 3y) - (5x - y + 3)$ όταν απλοποιηθεί γίνεται $A = -3x - 2y + 2$.

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: β (Μπάρλας, 2016)

2) Η παράσταση $A = 1 - 3(-4x + 5) - (-2x + 1)$ όταν απλοποιηθεί γίνεται $A = 14x - 15$.

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α (Μπάρλας, 2016)

3) Δίνεται η παράσταση $A = 4(3x - 2y) - 3(3x - 4y) - (y - 1)$. Η αριθμητική τιμή της για $x = 5, y = -3$ είναι:

α) 8
β) -7
γ) 7
δ) 6

Σωστή απάντηση: γ (Μπάρλας, 2016)

Hint: να απλοποιήσετε πρώτα την παράσταση

3.2 Επίλυση Εξισώσεων 1ου βαθμού

3.2.1 Εξίσωση 1ου βαθμού

Εξίσωση ονομάζουμε μια ισότητα η οποία ικανοποιείται για συγκεκριμένο πλήθος αριθμών.

Πχ:

η ισότητα $2x = 4$ ισχύει μόνο για τον αριθμό 2 γιατί $2 \cdot 2 = 4$, συνεπώς είναι μια εξίσωση.

Αντίθετα η ισότητα $0 \cdot x = 0$ ισχύει για όλους τους αριθμούς. Οποιοσδήποτε αριοθμός πολλαπλασιαστεί με το μηδέν μας δίνει πάντα μηδέν, άρα στην θέση του x μπορώ να βάλω οποιοδήποτε αριθμό και να ισχύει η ισότητα.

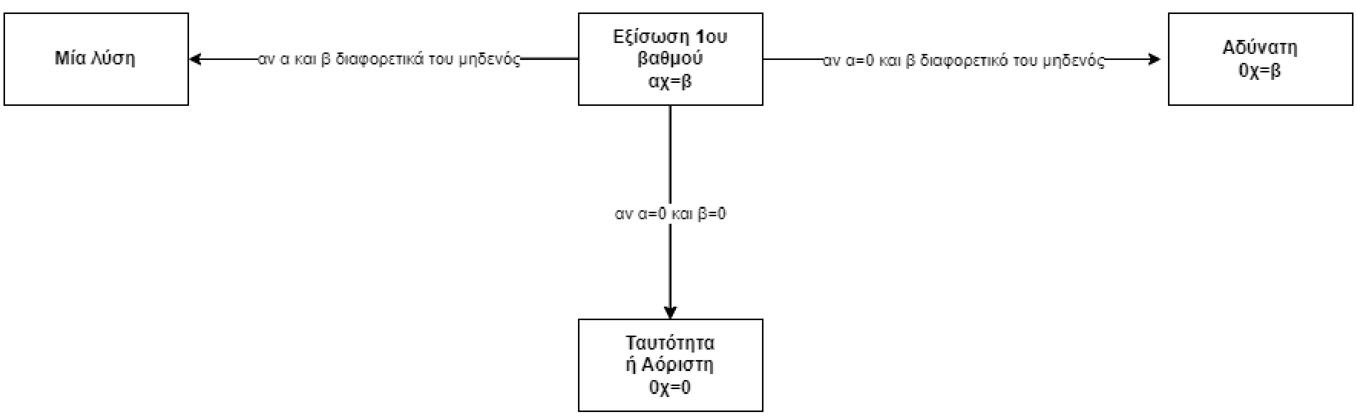
Εξισώσεις 1ου βαθμού

Κάθε εξίσωση της μορφής $\boldsymbol{\alpha x = \beta}$, με α, β αριθμούς ενώ ο x είναι μεταβλητή (ο άγνωστος), ονομάζεται 1ου βαθμού γιατί η μεταβλητή x είναι υψωμένη εις την 1η (ο εκθέτης του x είναι το 1).

Οι εξισώσεις 1ου βαθμού μπορεί να έχουν:

- **Μια μοναδική λύση**. Να υπάρχει δηλαδή μόνο ένας αριθμός ο οποίος να ικανοποιεί την ισότητα. Αυτό συμβαίνει αν οι αριθμοί α και β είναι διαφορετικοί του μηδενός.
- **Καμία λύση**. Να μην υπάρχει δηλαδή αριθμός ο οποίος να ικανοποιεί την ισότητα. Τότε η εξίσωσή μας θα έχει την μορφή $\boldsymbol{0x = \beta}$**,** με τον β έναν αριθμό διαφορετικό του μηδενός. Πχ: $0x = 5$ εδώ παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει αριθμός οποίος να πολλαπλασιαστεί με το μηδέν και να μας δώσει 5. Τότε η εξίσωση λέγεται **Αδύνατη**.
- **Άπειρες λύσεις**. Όλοι οι αριθμοί να ικανοποιούν την εξίσωσή. Η εξίσωση μας τότε θα είναι της μορφής $\boldsymbol{0x = 0}$**.** Τότε η εξίσωση λέγεται **Ταυτότητα** ή **Αόριστη**.

Μπορούμε να θυμόμαστε τις παραπάνω περιπτώσεις με το ακόλουθο σχεδιάγραμμα:



(Η εικόνα δημιουργήθηκε στο draw.io)

3.2.2 Μέθοδος επίλυσης

Έστω τώρα ότι θέλουμε να λύσουμε μια εξίσωση 1ου βαθμού.

Για την επίλυσή της υπάρχουν συγκεκριμένα βήματα τα οποία ακολουθούμε.

Παραδείγματος χάρη μας ζητείται να λύσουμε την εξίσωση:

$$5x + 7 - 2x - 4 = x - 3 - 3x + 3$$

1° βήμα: Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

Ως γνωστούς χαρακτηρίζουμε τους όρους της εξίσωσης που είναι αριθμοί.

Ως αγνώστους χαρακτηρίζουμε τους όρους που περιέχουν την μεταβλητή μας, όποια και να είναι αυτή x, y, z ή ω.

Στην εξίσωσή μας επισημαίνουμε με κόκκινο τους άγνωστους όρους και με πράσινο τους γνωστούς και έχω:

$$5x + 7 - 2x - 4 = x - 3 - 3x + 3$$

Εσείς αντί για χρώματα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε υπογράμμιση κάτω από τους άγνωστους και καμιά υπογράμμιση κάτω από τους γνωστούς.

Προσέξτε ότι σημειώσαμε και τα πρόσημα των όρων.

Τώρα μαζεύουμε συνήθως από το αριστερό μέλος τους αγνώστους και από το δεξί μέλος τους γνωστούς. Μπορεί να το κάνουμε και ανάποδα χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα της εξίσωσης.

Προσοχή: Κάθε φορά που ένας όρος αλλάζει μέλος τότε ο όρος αλλάζει και πρόσημο!!!

Άρα στην εξίσωσή μας έχουμε πλέον:

$$5x - 2x - x + 3x = -7 + 4 - 3 + 3$$

2° Βήμα: κάνουμε τις αναγωγές ομοίων όρων

Συνεπώς έχουμε:

$$5x = -3$$

3° Βήμα: Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου

Ας παρατηρήσουμε λίγο τον άγνωστό μας. Πολλές φορές μπροστά από την μεταβλητή θα έχουμε έναν αριθμό. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται συντελεστής του αγνώστου.

Στο παράδειγμά μας είναι ο αριθμός 5.

$$5x = -3$$

Για να βρούμε τον άγνωστό διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον συντελεστή του αγνώστου.

$$\frac{5x}{5} = \frac{-3}{5}$$

Με αυτόν τον τρόπο ο άγνωστός μένει με συντελεστή την μονάδα και άρα βρήκαμε το αποτέλεσμα το οποίο διαμορφώνεται:

$$x = -\frac{3}{5}$$

Παρακολουθείστε το παρακάτω video για να δείτε αναλυτικά περισσότερα παραδείγματα.

https://www.youtube.com/watch?v=NYI-4DZG2kE

Επίλυση εξίσωσης με απαλοιφή παρονομαστών:

Πολλές φορές συναντάμε εξισώσεις η οποίες είναι πιο σύνθετες. Έχουν παρενθέσεις- αγκύλες ή ακόμα και κλάσματα.

Ο στόχο μας είναι πάντα να της φέρουμε στην κατάλληλη μορφή ώστε να ακολουθήσουμε μετά την μεθοδολογία που περιγράψαμε παραπάνω.

- Αν η εξίσωσή μας έχει παρενθέσεις τότε εφαρμόζουμε την ***επιμεριστική ιδιότητα*** για να της ανοίξουμε.
- Αν η εξίσωσή μας έχει κλάσματα τότε κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών βρίσκοντας το **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** των παρονομαστών και πολλαπλασιάζοντας με αυτό *κάθε* όρο της εξίσωσης.

Παρακολουθείστε το παρακάτω video και δείτε αναλυτικά τον τρόπο με τον οποίο κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και στην συνέχεια παρενθέσεων.

https://www.youtube.com/watch?v=WXONVaSfKfM

3.2.3 Δραστηριότητα εξάσκησης

Να γράψετε στα κουτάκια την λύση κάθε εξίσωσης.

Για να λύσετε τις εξισώσεις θα χρειαστείτε χαρτί και μολύβι ή στυλό.

1) $5 + 6(x + 3) = 4(x - 1) + 7$ (Μπάρλας, 2016)

Σωστή απάντηση: -10

Αιτιολόγηση: $5 + 6(x + 3) = 4(x - 1) + 7$

$$5 + 6\chi + 18 = 4\chi - 4 + 7$$

$$6\chi - 4\chi = -4 + 7 - 18 - 5$$

$$2\chi = -20$$

$$\chi = -10$$

2) $10x + 4(-3x + 1) - 1 = 2x - (4x + 1)$ (Μπάρλας, 2016)

Σωστή απάντηση: Αδύνατη

Αιτιολόγηση: $10x + 4(-3x + 1) - 1 = 2x - (4x + 1)$

$$10\chi - 12\chi + 4 - 1 = 2\chi - 4\chi - 1$$

$$10\chi - 12\chi - 2\chi + 4\chi = -1 - 4 + 1$$

$$0\chi = -4 \;\; \boldsymbol{ΑΔΥΝΑΤΗ}$$

3) $\frac{4\chi}{5} - 3 = \frac{7(\chi-3)}{10} + \frac{2}{5}$ (Μπάρλας, 2016)

Σωστή απάντηση: 13

Αιτιολόγηση: $\frac{4\chi}{5} - 3 = \frac{7(\chi-3)}{10} + \frac{2}{5}$

$$10\frac{4\chi}{5} - 10 \cdot 3 = 10\frac{7(\chi - 3)}{10} + 10\frac{2}{5}$$

$$2(4\chi) - 30 = 7(\chi - 3) + 4$$

$$8\chi - 30 = 7\chi - 21 + 4$$

$$8\chi - 7\chi = -21 + 4 + 30$$

$$\chi = 13$$

4) $\frac{6x-1}{2} + \frac{2x+3}{10} = \frac{16x+1}{5}$ (Μπάρλας, 2016)

Σωστή απάντηση: Αδύνατη

Αιτιολόγηση: $\frac{6x-1}{2}+\frac{2x+3}{10}=\frac{16x+1}{5}$

$$10\frac{6x-1}{2}+10\frac{2x+3}{10}=10\frac{16x+1}{5}$$

$$5(6\chi-1)+1(2\chi+3)=2(16\chi+1)$$

$$30\chi-5+2\chi+3=32\chi+2$$

$$30\chi+2\chi-32\chi=2-3+5$$

$$0\chi=4\ ΑΔΥΝΑΤΗ$$

5) $\frac{x+5}{2}+2=\frac{2(x+7)+1}{10}-9$ (Μπάρλας, 2016)

Σωστή απάντηση: -40

Αιτιολόγηση: $\frac{x+5}{2}+2=\frac{2(x+7)+1}{10}-9$

$$10\frac{x+5}{2}+10\cdot 2=10\frac{2(x+7)+1}{10}-10\cdot 9$$

$$5(\chi+5)+20=1[2(\chi+7)+1]-90$$

$$5\chi+25+20=2\chi+14+1-90$$

$$5\chi-2\chi=14+1-90-25-20$$

$$3\chi=-120$$

$$\chi=-40$$

3.2.4 Δραστηριότητα αυτό- αξιολόγησης

Να γράψετε στα κουτάκια την λύση κάθε εξίσωσης.

Για να λύσετε τις εξισώσεις θα χρειαστείτε χαρτί και μολύβι ή στυλό.

1) $\frac{x-1}{2}+x=3-\frac{3x-4}{4}$ (Μπάρλας, 2016)

Σωστή απάντηση: 2

2) $3(x+2)=3x+8$ (Μπάρλας, 2016)

Σωστή απάντηση: αδύνατη

3) $2x-2(3x-1)=2(1-2x)$ (Μπάρλας, 2016)

Σωστή απάντηση: Ταυτότητα ή αόριστη

4) $2(x-1)-(x-3)=5-2(3x+2)$ (Μπάρλας, 2016)

Σωστή απάντηση: 0

5) $\frac{3(x-1)}{2}-\frac{5x-3}{4}=\frac{x}{2}-1$ (Μπάρλας, 2016)

Σωστή απάντηση: 1

Hint: Προσέξτε στο πρώτο κλάσμα, το αποτέλεσμα της απλοποίησης του παρονομαστή με το ΕΚΠ θα πολλαπλασιαστεί με τον αριθμό 3 στον αριθμητή και μετά θα κάνουμε την επιμεριστική.

3.3 Προβλήματα

3.3.1 Μοντελοποίηση ενός προβλήματος πρακτικής αριθμητικής

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να λύσουμε ένα πρόβλημα πρακτικής αριθμητικής.

Στο δημοτικό τα προβλήματα αυτά τα λύναμε προσπαθώντας να οργανώσουμε την σκέψη σε στάδια, όπου σε κάθε στάδιο θα αντιστοιχούσε και μια πράξη την οποία και εκτελούσαμε. Με αυτό τον τρόπο φτάναμε στην λύση του προβλήματος.

Βασικό μειονέκτημα αυτού του τρόπου είναι ότι υπάρχει μια δυσκολία στον χωρισμό των σταδίων όταν το πρόβλημα είναι σύνθετο. Επίσης οι διαδοχικές πράξεις, πολλές φορές μπορεί να είναι και αρκετά δύσκολες, είναι ιδιαίτερα χρονοβόρες και κουραστικές.

Με την χρήση αλγεβρικών μεθόδων μπορούμε πιο εύκολα να επιλύσουμε ένα πρόβλημα τέτοιο αρκούμενοι στην δημιουργία μιας εξίσωσης.

Η διαδικασία κατασκευής μιας τέτοιας εξίσωσης ονομάζεται μοντελοποίηση του προβλήματος.

1^o **Βήμα** είναι ο ορισμός του αγνώστου. Στο πρόβλημα πρέπει να ορίσουμε εμείς ποια από τις ζητούμενες ποσότητες θα συμβολίζει ο άγνωστος αριθμός x. η επιλογή είναι δική μας και δεν επηρεάζει συνήθως την λύση του προβλήματος.

2^o **Βήμα** είναι η κωδικοποίηση- μετάφραση των δεδομένων σε αλγεβρικές σχέσεις που εμπεριέχουν τον άγνωστο x.

3^o **Βήμα** είναι η δημιουργία της εξίσωσης. Για την δημιουργία της εξίσωσης χρειαζόμαστε δυο ποσότητες οι οποίες να είναι ίσες. Άρα χρειάζεται να διαβάσουμε προσεκτικά τα δεδομένα και να διακρίνουμε ποιες ποσότητες είναι ίσες. Αφού της διακρίνουμε εξισώνουμε τις αλγεβρικές παραστάσεις που έχουμε βρει ότι αντιστοιχούν σε αυτές τις δυο ποσότητες στο 2^o βήμα.

4^o **Βήμα** είναι η επίλυση της εξίσωσης και εύρεση του αγνώστου.

- Δεν ξεχνάμε ποτέ να γράφουμε απάντηση στο τέλος του προβλήματος παρουσιάζοντας τα ευρήματά μας και απαντώντας σε όλα τα ερωτήματα που μας τέθηκαν.

Παρακολουθείστε ένα απλό παράδειγμα κατασκευής μιας εξίσωσης σε ένα απλό πρόβλημα:

https://www.youtube.com/watch?v=XwuvC7N4TVE

3.3.2 Λυμένα παραδείγματα

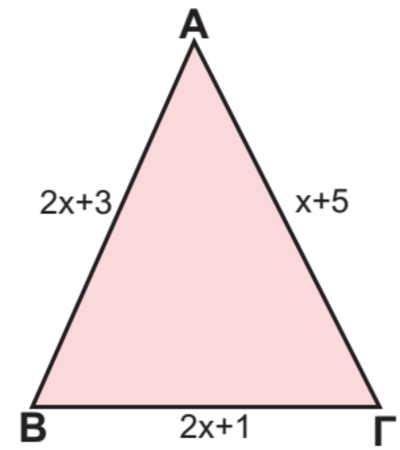
Τα προβλήματα που μπορούν να μας τεθούν μπορεί να είναι οποιαδήποτε φύσης, από απλά καθημερινά μέχρι προβλήματα που θα χρειαστεί να αξιοποιήσετε της μαθηματικές γνώσεις.

Παρακολουθείστε το παρακάτω video και δείτε κάποιες κατηγορίες προβλημάτων.

https://www.youtube.com/watch?v=CnpWionURjM

Ας δούμε τώρα και μια άσκηση του σχολικού βιβλίου ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα:

Δίνεται το παρακάτω τρίγωνο:



Εικόνα από σχολικό βιβλίο Μαθηματικών Β' Γυμνασίου

Α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε το τρίγωνο να είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΒΓ. Ποιο θα είναι το μήκος κάθε πλευράς σε αυτή την περίπτωση;

Β) Να βρείτε την τιμή του x ώστε το τρίγωνο να είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΑΒ. Ποιο θα είναι το μήκος κάθε πλευράς σε αυτή την περίπτωση;

Γ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του x ώστε το τρίγωνο να είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΑΓ. (Βλάμος κ. ά., n.d)

Λύση:

Θυμίζουμε ότι ένα τρίγωνο λέγετε ισοσκελές όταν έχει δυο πλευρές ίσες. Η άνιση πλευρά λέγεται βάση του ισοσκελούς. Προφανώς δεν είναι απαραίτητο η βάση να είναι πάντα οπτικά κάτω στο σχήμα.

Επίσης εδώ δεν χρειάζεται να προσδιορίσουμε ποια ποσότητα εκφράζει ο άγνωστος γιατί μας την δίνει η εκφώνηση μέσω του σχήματος. Χρειάζεται μόνο να δημιουργήσουμε την εξίσωση.

Α) αν έχει βάση την ΒΓ τότε οι ίσες πλευρές θα είναι η ΑΒ και η ΑΓ.

Άρα $AB = A\Gamma$

$$2x + 3 = x + 5$$
$$2x - x = 5 - 3$$

$$x = 2$$

Άρα χ=2 και $AB = 2x + 3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7,$

$$A\Gamma = x + 5 = 2 + 5 = 7,$$

$$B\Gamma = 2x + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

Β) αν βάση του ισοσκελούς είναι η ΑΒ τότε οι ίσες πλευρές θα είναι οι ΑΓ και ΒΓ.

Άρα $ΑΓ = ΒΓ$

$$x + 5 = 2x + 1$$

$$x - 2x = 1 - 5$$

$$-x = -4$$

$$\frac{-x}{-1} = \frac{-4}{-1}$$

$$x = 4$$

Άρα για $x = 4$ η ΑΒ είναι βάση του ισοσκελούς, τότε $ΑΒ = 2x + 3 = 2 \cdot 4 + 3 = 11,$

$$ΑΓ = x + 5 = 4 + 5 = 9, ΒΓ = 2x + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$$

Γ) Ας υποθέσουμε ότι η ΑΓ είναι βάση του ισοσκελούς τότε ίσες θα είναι οι ΑΒ και ΒΓ

Άρα $ΑΒ = ΒΓ$

$$2x + 3 = 2x + 1$$

$$2x - 2x = 1 - 3$$

$$0x = -2 \ Αδύνατη$$

Άρα δεν υπάρχει κάποιος αριθμός x ώστε ΑΒ=ΒΓ, συνεπώς δεν υπάρχει αριθμός x ώστε η ΑΓ να είναι βάση του ισοσκελούς.

3.3.3 Δραστηριότητα εξάσκησης

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση στις παρακάτω ερωτήσεις. Να έχετε μαζί σας χαρτί και μολύβι ή στυλό για να λύσετε τις εξισώσεις που προκύπτουν.

1) Να βρείτε ένα αριθμό που το τριπλάσιο του, αν το αυξήσουμε κατά 6, δίνει τον αριθμό ελαττωμένο κατά 3. (Μπάρλας, 2016)

α) 0
β) -1
γ) $-\frac{9}{2}$

δ) $\frac{3}{2}$

Σωστή απάντηση: γ

Αιτιολόγηση: έστω x ο ζητούμενος αριθμός.

Ο τριπλάσιος του x είναι 3x.

Ο τριπλάσιος αυξημένος κατά 6 είναι 3x+6.

Ο x ελαττωμένος κατά 3 είναι: x-3.

Άρα έχω $3x + 6 = x - 3$

$$3x - x = -3 - 6$$

$$2x = -9$$

$$x = -\frac{9}{2}$$

Ο ζητούμενος αριθμός είναι ο $-\frac{9}{2}$.

2) Δώδεκα μικρά λεωφορεία των 8 και 14 ατόμων μεταφέρουν συνολικά 126 επιβάτες. Πόσα λεωφορεία είναι των 8 και πόσα των 14 ατόμων ; (Μπάρλας, 2016)

α) 6 των 8 ατόμων και 6 των 14 ατόμων
β) 4 των 8 ατόμων και 8 των 14 ατόμων
γ) 8 των 8 ατόμων και 6 των 14 ατόμων
δ) 3 των 8 ατόμων και 9 των 14 ατόμων

Σωστή απάντηση: δ

Αιτιολόγηση: έστω x ο αριθμός των λεωφορείων με χωρητικότητα 8 ατόμων.

Άρα τα λεωφορεία με χωρητικότητα των 14 ατόμων θα είναι 12-x

Ο αριθμός ατόμων που μπαίνουν στα 8αρια λεωφορεία είναι 8x

Ο αριθμός ατόμων που μπαίνουν στα 14αρια λεωφορεία είναι 14(12-x)

Άρα $8x + 14(12 - x) = 126$

$$8x + 144 - 14x = 126$$

$$8x - 14x = 126 - 144$$

$$-6x = -18$$

$$x = 3$$

Άρα τα 8αρια λεωφορεία είναι 3 και τα 14αρια λεωφορεία είναι 12-3=9

3) Τρεις φίλοι μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό. Ο πρώτος πήρε το $\frac{1}{4}$ του ποσού, ο δεύτερος το $\frac{1}{3}$ του ποσού και ο τρίτος το $\frac{1}{3}$ και 100€ ακόμα. Να βρείτε πόσα χρήματα πήρε ο καθένας. (Βλάμος κ. ά., n.d.)

α) 1^{ος}: 300€, 2^{ος}: 400€, 3^{ος}: 500€
β) 1^{ος}: 300€, 2^{ος}: 500€, 3^{ος}: 400€
γ) 1^{ος}: 500€, 2^{ος}: 600€, 3^{ος}: 100€
δ) 1^{ος}: 300€, 2^{ος}: 400€, 3^{ος}: 400€

Σωστή απάντηση: α

Αιτιολόγηση: έστω x το ποσό που μοιράστηκε.

Ο 1^{ος} πήρε: $\frac{1}{4}x$

Ο 2^{ος} πήρε: $\frac{1}{3}x$

Ο 3^{ος} πήρε: $\frac{1}{3}x + 100$

Άρα:

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x + 100 = x$$

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + 100 = x$$

$$12 \cdot \frac{x}{4} + 12 \cdot \frac{x}{3} + 12 \cdot \frac{x}{3} + 12 \cdot 100 = 12x$$

$$3x + 4x + 4x + 1200 = 12x$$

$$1200 = 12x - 4x - 4x - 3x$$

$$1200 = 12x - 11x$$

$$1200 = x$$

Το αρχικό ποσό ήταν 1200€

Άρα ο 1ος πήρε $\frac{1}{4}x = \frac{1}{4} \cdot 1200 = 300$

Ο 2ος πήρε $\frac{1}{3}x = \frac{1}{3} \cdot 1200 = 400$

Ο 3ος πήρε $\frac{1}{3}x + 100 = \frac{1}{3} \cdot 1200 + 100 = 500$

3.3.4 Δραστηριότητα αυτό- αξιολόγησης

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση στις παρακάτω ερωτήσεις. Να έχετε μαζί σας χαρτί και μολύβι ή στυλό για να λύσετε τις εξισώσεις που προκύπτουν.

1) Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\hat{B}$ είναι τα $\frac{2}{3}$ της γωνίας $\hat{A}$ και η γωνία $\hat{\Gamma}$ το μισό της γωνίας $\hat{B}$. Είναι το τρίγωνο ορθογώνιο; (Μπάρλας, 2016)

α) Ναι
β) Όχι
γ) Δεν σχηματίζεται τρίγωνο με τέτοιες γωνίες.

Σωστή απάντηση: α

Αιτιολόγηση: έστω x οι μοίρες της γωνίας $\hat{A}$.

Τότε $\hat{B} = \frac{2}{3} \cdot \hat{A} = \frac{2}{3}x$ και $\hat{\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot \hat{B} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}x$

Το ΑΒΓ είναι τρίγωνο συνεπώς το άθροισμα των γωνιών του είναι ίσο με 180°.

Άρα:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180$$

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x = 180$$

$$3x + 3 \cdot \frac{2}{3}x + 3 \cdot \frac{1}{3}x = 3 \cdot 180$$

$$3x + 2x + x = 540$$

$$6x = 540$$

$$x = \frac{540}{6}$$

$$x = 90$$

Άρα η γωνία $\hat{A} = 90^o$, συνεπώς το τρίγωνο ορθογώνιο.

2) Ένας μαθητής είναι 14 ετών και ένας καθηγητής είναι 31 ετών. Μετά από πόσα χρόνια η ηλικία του καθηγητή θα είναι διπλάσια του από την ηλικία του μαθητή; (Μπάρλας, 2016)

α) 10
β) 7
γ) 3
δ) 6

Σωστή απάντηση: γ

Αιτιολόγηση: έστω x τα ζητούμενα χρόνια.

Σε x χρόνια ο καθηγητής θα είναι 31+x

Σε x χρόνια ο μαθητής θα είναι 14+x

Σε x χρόνια η ηλικία του καθηγητή θα είναι διπλάσια από την ηλικία του μαθητή, άρα:

$$31 + x = 2(14 + x)$$

$$31 + x = 28 + 2x$$

$$31 - 28 = 2x - x$$

$$3 = x$$

Άρα σε 3 χρόνια.

3) Δέκα μικρά λεωφορεία των 12 και 16 ατόμων μεταφέρουν συνολικά 136 επιβάτες. Πόσα είναι τα λεωφορεία των 12 και πόσα των 16 ατόμων; (Μπάρλας, 2016)

α) 4 των 12 ατόμων και 6 των 16 ατόμων
β) 6 των 12 ατόμων και 4 των 16 ατόμων
γ) 5 των 12 ατόμων και 5 των 16 ατόμων
δ) 7 των 12 ατόμων και 4 των 16 ατόμων

Σωστή απάντηση: β

Αιτιολόγηση: έστω x τα λεωφορεία των 12 ατόμων.

Τότε τα λεωφορεία των 16 ατόμων θα είναι 10-x.

Τα 12άρια λεωφορεία μεταφέρουν 12x επιβάτες

Τα 16άρια λεωφορεία μεταφέρουν 16(10-x)

Άρα:

$$12x + 16(10 - x) = 136$$

$$12x + 160 - 16x = 136$$

$$12x - 16x = 136 - 160$$

$$-4x = -24$$

$$x = 6$$

Τα 12άρια λεωφορεία είναι 6 και τα 16άρια είναι 10-6=4.

3.4 Ανακεφαλαίωση και Αυτό- αξιολόγηση διδακτικής ενότητας

3.4.1 Ανακεφαλαίωση

Σε αυτήν την διδακτική ενότητα μάθαμε:

- ✓ Τι ονομάζουμε μεταβλητή.
- ✓ Τι είναι οι αλγεβρικές παραστάσεις.
- ✓ Να κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων σε μια αλγεβρική παράσταση.

- ✓ Να εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.
- ✓ Να λύνουμε μια εξίσωση 1ου βαθμού.
- ✓ Να λύνουμε, με την χρήση εξισώσεων, προβλήματα.

3.4.2 Εργασία ανοιχτής απόκρισης

Για να ολοκληρώσετε αυτή την εργασία θα χρειαστείτε χαρτί και μολύβι ή στυλό.

Σας δίνονται το Φύλλο Εργασίας:

Φύλλο Εργασίας

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Τι ονομάζουμε μεταβλητή και τι αλγεβρική παράσταση . Να δώσετε από ένα παράδειγμα.

Β. Πότε μια εξίσωση ονομάζεται αδύνατη και πότε αόριστη; Να δώσετε από ένα παράδειγμα.

Γ. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) κάθε μια απ’ τις παρακάτω προτάσεις.

α) Η εξίσωση $0\cdot x=1$ έχει μοναδική λύση.

β) Η παράσταση $2\cdot x-3\cdot\left(1-\frac{7}{2}\right)$ είναι αριθμητική.

γ) Ισχύει ότι $(-1)^{2020}=1$.

δ) Αν $\alpha=\beta$, τότε $\alpha+\gamma=\beta-\gamma$, $\gamma\neq 0$.

ε) Ισχύει ότι $\alpha+\alpha=\alpha^2$, $\alpha\neq 0$.

Δ. Να κάνετε την αντιστοίχιση

[1]. 7χ=14	α) -1
[2].Χ+13=9	β) -2
[3].5χ+2=7	γ) -4
[4].-χ+6=7	δ) 0
[5].3χ+9=9	ε) 1
[6]. 2χ-3χ=2	στ) 2

ΘΕΜΑ 2ο

Να λύσετε τις εξισώσεις

$$1-\frac{2x-2}{6}+x=\frac{x-1}{3}+2$$

$$\frac{6x-1}{2}+\frac{2x+3}{10}=\frac{16x+1}{5}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Το τρίαθλο είναι ένα αγώνισμα που περιλαμβάνει έναν αγώνα κολύμβησης, έναν αγώνα ποδηλασίας και έναν αγώνα δρόμου. Η συνολική απόσταση που διανύει ένας αθλητής και στα τρία αγωνίσματα είναι 51,5 km. Ο αγώνας δρόμου γίνεται σε μία απόσταση που είναι κατά 8,5 km μεγαλύτερη από την απόσταση στην οποία γίνεται ο αγώνας κολύμβησης. Ο αγώνας της ποδηλασίας γίνεται σε τετραπλάσια απόσταση απ' αυτήν του αγώνα δρόμου.

α) Υποθέτοντας ότι το ευθύγραμμο τμήμα x παριστάνει την απόσταση στην οποία γίνεται ο αγώνας δρόμου, να αντιγράψετε και να συμπληρώσετε το σχήμα με τις πληροφορίες της εκφώνησης.

β) Ποια απόσταση διανύει ένας αθλητής σε κάθε αγώνισμα; (Βλάμος κ. ά., n.d.)

(Η εικόνα είναι από το σχολικό βιβλίο Μαθηματικών Β' Γυμνασίου)

Τέλος φύλλου εργασίας

Να λύσετε όλα τα θέματα που υπάρχουν στο φύλλο εργασίας στο χαρτί σας. Στην συνέχεια να φωτογραφίσετε το χαρτί με τις απαντήσεις σας και να επισυνάψετε την φωτογραφία στο πεδίο των απαντήσεων.

Ρουμπρίκα αξιολόγησης εργασίας από τον διδάσκοντα.

Κριτήρια				
ΘΕΜΑ Α: Σε ποιο βαθμό επιλύθηκε το θέμα Α	Καθόλου: 0 βαθμοί	Ελάχιστα: 1 βαθμός	Ικανοποιητικά: 3 βαθμοί	Τέλεια: 5 βαθμοί
ΘΕΜΑ Β: Σε ποιο βαθμό επιλύθηκε το θέμα Β	Καθόλου: 0 βαθμοί	Ελάχιστα: 1 βαθμός	Ικανοποιητικά: 3 βαθμοί	Τέλεια: 5 βαθμοί
ΘΕΜΑ Γ: Σε ποιο βαθμό επιλύθηκε το θέμα Γ	Καθόλου: 0 βαθμοί	Ελάχιστα: 1 βαθμός	Ικανοποιητικά: 3 βαθμοί	Τέλεια: 5 βαθμοί

3.4.3 Checklist: Μπορώ να κάνω…

Να αξιολογήσετε τις ικανότητες που αποκτήσατε σε αυτή την διδακτική ενότητα απαντώντας στο ακόλουθο ερωτηματολόγιο.

Ο αριθμός 1 αντιστοιχεί στο «καθόλου ή ελάχιστα» ενώ ο 5 στο «απόλυτα».

Δεν υπάρχουν σωστές ή λάθος απαντήσεις. Να γράψετε την αλήθεια.

1) Μπορώ να εφαρμόσω την αναγωγή όμοιων όρων σε μια αλγεβρική παράσταση;

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

2) Μπορώ να εφαρμόσω την επιμεριστική ιδιότητα σε μια αλγεβρική παράσταση;

- 1

- 2
- 3
- 4
- 5

3) Μπορώ να λύσω μια απλή εξίσωση 1ου βαθμού;

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

4) Μπορώ να κάνω απαλοιφή παρενθέσεων σε μια εξίσωση 1ου βαθμού;

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

5) Μπορώ να κάνω απαλοιφή παρονομαστών σε μια εξίσωση 1ου βαθμού;

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

6) Μπορώ να κατασκευάσω μια εξίσωση από τα δεδομένα ενός προβλήματος με στόχο να το λύσω;

- 1
- 2
- 3

- 4
- 5

3.4.4 Forum

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα:

«Η Εύα έγραψε 15 και 19 σε δυο διαγωνίσματα Ιστορίας.

Α) τι βαθμό πρέπει να γράψει στο τρίτο διαγώνισμα ώστε να έχει μέσο όρο διαγωνισμάτων 17;

Β) μπορεί ο μέσος όρος να είναι 19;»

Γράψτε στο Forum την δική σας λύση για το παραπάνω πρόβλημα. Εναλλακτικά μπορείτε να διορθώσετε ή να σχολιάσετε την λύση κάποιου άλλου μαθητή ή να συμπληρώσετε την σκέψη ή την μέθοδο επίλυσης κάποιου αν σας φαίνεται ελλιπής.

3.5 Πρόσθετο Υλικό

3.5.1 Προτάσεις για επιπλέον εκπαίδευση

Α) Να λυθούν οι εξισώσεις: (Μπάρλας, 2016)

1. $1-[x-3(2x-1)]=7x$
2. $\frac{2x-3}{5}-\frac{x-2}{2}=-x$
3. $1-\frac{x-2}{3}=x-\frac{3x-2}{6}$
4. $x-\frac{4x+1}{6}=\frac{x-1}{3}$
5. $\frac{4x-1}{2}-\frac{4x-5}{4}=x+\frac{3}{4}$

Β) Δίνεται η εξίσωση $\frac{5x-1}{2}-1=x-\frac{11-x}{4}$. (Μπάρλας, 2016)

1. Να λύσετε την εξίσωση.
2. Αν $x=-1$ τότε να βρείτε το α στην εξίσωση $\frac{2x+a}{3}-x=a-1$.

Ημέρα 4η: Διδακτική ενότητα 3- Πραγματικοί Αριθμοί

4.0 Εισαγωγή διδακτικής ενότητας

4.0.1 Μαθησιακά αποτελέσματα

Μετά την παρακολούθηση αυτής της διδακτικής ενότητας θα είσαι ικανός/η να:

ΜΑ3 [Understand]: υπολογίζεις τετραγωνικές ρίζες και να εκτελείς πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

Πιο συγκεκριμένα θα μπορείς να:

- Υπολογίζεις τετραγωνικές ρίζες
- Ξεχωρίζεις τους άρρητους από τους ρητούς αριθμούς
- Επιλύεις προβλήματα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών

Συμπλήρωσε το παρακάτω ερωτηματολόγιο το οποίο ελέγχει τι θυμάσαι από το κεφάλαιο αυτό. Θυμίζουμε ότι εδώ δεν υπάρχουν σωστές ή λάθος απαντήσεις. Επέλεξε την απάντηση που θεωρείς σωστότερη.

1) Η τετραγωνική ρίζα του 4 είναι το 2 γιατί $2^2 = 4$.

- Σωστό
- Λάθος
- Δεν γνωρίζω

2) Μπορώ να υπολογίσω την τετραγωνική ρίζα $\sqrt{-2}$.

- Σωστό
- Λάθος
- Δεν γνωρίζω

3) Ο αριθμός $\sqrt{15}$ είναι άρρητος

- Σωστό
- Λάθος
- Δεν γνωρίζω

4) Ο αριθμός $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι πραγματικός αριθμός.

- Σωστό
- Λάθος
- Δεν γνωρίζω

4.0.2 Δομή ενότητας

Η Διδακτική Ενότητα είναι διάρκειας 4 ωρών και περιλαμβάνει:

- Εισαγωγή
- Υποενότητα 1 – Η τετραγωνική ρίζα
- Υποενότητα 2 – Άρρητοι αριθμοί- Πραγματικοί αριθμοί
- Υποενότητα 3 - Προβλήματα
- Ανακεφαλαίωση και Αυτό-αξιολόγηση, που περιλαμβάνει:
  - ✓ Σύνοψη της ενότητας
  - ✓ Εργασία εφαρμογής με τη μορφή Ερώτησης Ανοικτής Απόκρισης
  - ✓ Αυτό-αξιολόγηση σε μορφή ερωτηματολογίου όπου οι εκπαιδευόμενοι επιλέγουν ποιο/ποια από τα μαθησιακά αποτελέσματα της ενότητας έχουν κατακτήσει.
  - ✓ Forum συζήτησης

Οι 3 υποενότητες είναι διάρκειας 1 ώρας η κάθε μία. Η κάθε υποενότητα αποτελείται από:

- Δραστηριότητα παρουσίασης (15’)
- Δραστηριότητα επίδειξης (15’)
- Δραστηριότητα εξάσκησης (15’)
- Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης (15’)

4.1 Η τετραγωνική ρίζα

4.1.1 Τί ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα

Σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α ονομάζεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψώνεται στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α.

Συμβολίζεται $\sqrt{\alpha}$.

Δηλαδή $\sqrt{4} = 2$ γιατί $2^2 = 4$.

Προσοχή τετραγωνικές ρίζες έχουν *μόνο* οι θετικοί αριθμοί και ο μηδέν. Δεν ορίζεται η τετραγωνική ρίζα ενός αρνητικού αριθμού. Αυτό συμβαίνει γιατί το τετράγωνο κανενός αριθμού δεν είναι αρνητικός αριθμός. Συνεπώς *απαγορεύεται* κάτω από την τετραγωνική ρίζα να βάζω αρνητικούς αριθμούς!!!

Επίσης οι τετραγωνικές ρίζες δίνουν *πάντα* θετικό αριθμό!

Γνωστές τετραγωνικές ρίζες που πρέπει να ξέρετε:

$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt{169} = 13$
$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{196} = 14$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{225} = 15$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{256} = 16$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{289} = 17$
$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{324} = 18$
$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{361} = 19$
$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{400} = 20$
$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{441} = 21$
$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{484} = 22$
$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{529} = 23$
$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{576} = 24$
$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt{625} = 25$

Καλό είναι να γράψετε σε ένα χαρτί τις παραπάνω ρίζες και να το καρφιτσώσετε στο γραφείο σας, προκειμένου να τις έχετε συγκεντρωμένες και να χρησιμοποιείτε το χαρτί βοηθητικά μέχρι να τις μάθετε.

4.1.2 Πως υπολογίζουμε τετραγωνικές ρίζες- Εφαρμογή των ιδιοτήτων

Για τον υπολογισμό τετραγωνικών ριζών αριθμών πέρα από αυτών που γράψαμε στην προηγούμενη δραστηριότητα χρησιμοποιούμε κάποιες ιδιότητες.

Ιδιότητες ριζών:

Έστω οι θετικοί αριθμοί α και β.

1. $\sqrt{\alpha}^2 = \alpha$
2. $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
3. $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$
4. $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$

Προσοχή: Δεν ισχύουν παρόμοιες ιδιότητες στην πρόσθεση και την αφαίρεση ριζών. Δηλαδή $\sqrt{\alpha + \beta} \neq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ και $\sqrt{\alpha - \beta} \neq \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$

Πχ: να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες $\sqrt{3600}$, $\sqrt{1225}$, $\sqrt{0{,}64}$, $\sqrt{0{,}04}$, $\sqrt{\frac{9}{25}}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$.

Το κόλπο εδώ είναι να σπάσουμε τον αριθμό που έχουμε σε γινόμενο ή πηλίκο/ κλάσμα δυο ή παραπάνω αριθμών με γνωστές ρίζες.

$$\sqrt{3600} = \sqrt{36 \cdot 100} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{100} = 6 \cdot 10 = 60$$

$$\sqrt{1225} = \sqrt{25 \cdot 49} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{49} = 5 \cdot 7 = 35$$

$$\sqrt{0{,}64} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{100}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\sqrt{0{,}04} = \sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{100}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

Τι γίνεται όμως αν έχουμε να υπολογίζουμε μια παράσταση πιο σύνθετη όπως αυτή $\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{9}}}}$;

Δείτε το παρακάτω video για να μάθετε πως.

https://www.youtube.com/watch?v=Xhvq-PO48wE

Για να εξασκηθείτε παραπάνω στον υπολογισμό παρόμοιων παραστάσεων παρακολουθείστε το παρακάτω video. Κατά την διάρκεια του video, στο χαρτί σας να λύσετε τις παραστάσεις που λύνονται στο video και να ελέγξετε στην συνέχεια τα αποτελέσματα σας.

https://www.youtube.com/watch?v=YmhQflKCIU0

4.1.3 Δραστηριότητα εξάσκησης

Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Για την εργασία θα χρειαστείτε χαρτί και μολύβι ή στυλό.

1) $\sqrt{324} = 16$

α) Σωστό

β) Λάθος

Σωστή απάντηση: β

Αιτιολόγηση: από τον πίνακα ξέρουμε ότι $\sqrt{324} = 18$

2) $\sqrt{(-2)^4} = 4$

α) Σωστό

β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α

Αιτιολόγηση: $\sqrt{(-2)^4} = \sqrt{16} = 4$, η ρίζα αυτή ορίζεται επειδή ο αριθμός $(-2)^4$ είναι θετικός!

3) Η ρίζα $\sqrt{2,25}$ είναι ίση με

α) 15

β) 0,15

γ) 1,5

δ) 0,015

Σωστή απάντηση: γ (Μπάρλας, 2016)

Αιτιολόγηση: $\sqrt{2,25} = \sqrt{\frac{225}{100}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{100}} = \frac{15}{10} = 1,5$

4) Η παράσταση $\sqrt{0,25} + \sqrt{1,21} + \sqrt{12100}$ δίνει αποτέλεσμα

α) 111,6

β) 11,16

γ) 1,116

δ) 1116

Σωστή απάντηση: α (Μπάρλας, 2016)

Αιτιολόγηση: $\sqrt{0,25} + \sqrt{1,21} + \sqrt{12100} = \sqrt{\frac{25}{100}} + \sqrt{\frac{121}{100}} + \sqrt{121 \cdot 100} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} + \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{100}} + \sqrt{121} \cdot \sqrt{100} = \frac{5}{10} + \frac{11}{10} + 11 \cdot 10 = \frac{16}{10} + 110 = 1,6 + 110 = 111,6$

5) Η παράσταση $\sqrt{5 - \sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{9}}}$ δίνει αποτέλεσμα

α) 3

β) 4

γ) 2

δ) 1

Σωστή απάντηση: δ (Μπάρλας, 2016)

Αιτιολόγηση: $\sqrt{5 - \sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{9}}} = \sqrt{5 - \sqrt{10 + 2 \cdot 3}} = \sqrt{5 - \sqrt{10 + 6}} = \sqrt{5 - \sqrt{16}} = \sqrt{5 - 4} = \sqrt{1} = 1$

4.1.4 Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης

Να γράψετε στο κουτάκι το αποτέλεσμα κάθε παράστασης. Για την εργασία θα χρειαστείτε χαρτί και μολύβι ή στυλό.

1) $A = \sqrt{36} - 2 \cdot \sqrt{16} - 3 \cdot \sqrt{81}$ (Μπάρλας, 2016)

Σωστή απάντηση: -29

Hint: Χρησιμοποιείστε τον πίνακα με τις γνωστές ρίζες.

2) $B = \sqrt{121} - \sqrt{169} + 2 \cdot \sqrt{144}$ (Μπάρλας, 2016)

Σωστή απάντηση: 22

Hint: Χρησιμοποιείστε τον πίνακα με τις γνωστές ρίζες.

3) $\Gamma = \sqrt{70 - \sqrt{31 + \sqrt{25}}}$ (Μπάρλας, 2016)

Σωστή απάντηση: 8

Hint: δείτε τα video στην δραστηριότητα «Πως υπολογίζουμε τετραγωνικές ρίζες- Εφαρμογή των ιδιοτήτων».

4) $\Delta = \sqrt{9 \cdot \sqrt{8 \cdot \sqrt{4}}}$ (Μπάρλας, 2016)

Σωστή απάντηση: 6

Hint: δείτε τα video στην δραστηριότητα «Πως υπολογίζουμε τετραγωνικές ρίζες- Εφαρμογή των ιδιοτήτων».

5) $E = 9 \cdot \sqrt{\frac{289}{324}} - \sqrt{196}$ (Μπάρλας, 2016)

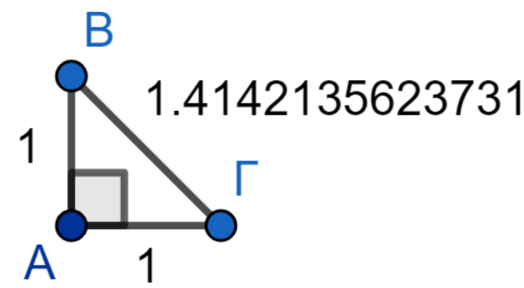
Σωστή απάντηση: -5,5

Hint: εφαρμόστε πρώτα τις ιδιότητες των ριζών ώστε να υπολογίσετε τις ρίζες. Το αποτέλεσμα που θα βρείτε γράψτε το στο κουτάκι ως δεκαδικό αριθμό.

4.2 Άρρητοι αριθμοί- Πραγματικοί αριθμοί

4.2.1 Ποιοι αριθμοί ονομάζονται άρρητοι και ποιοι πραγματικοί

Αν κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με κάθετες πλευρές ίσες με 1, όπως στο διπλανό σχήμα, τότε μετρώντας την υποτείνουσα παρατηρούμε ότι βρίσκουμε έναν αριθμό του οποίου τα πρώτα ψηφία είναι 1,414….



Δημιουργήθηκε με το geogebra.

Αν παράλληλα εφαρμόσουμε και το πυθαγόρειο θεώρημα τότε έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$$

$$B\Gamma^2 = 1 + 1$$

$$B\Gamma^2 = 2$$

$$B\Gamma = \sqrt{2}$$

Όπου η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι άγνωστη σε εμάς και μάλιστα ισούται με τον αριθμό που βρήκαμε μετά από την μέτρηση.

Δείτε το video που ακολουθεί και ανακαλύψτε τους άρρητους αριθμούς.

https://www.youtube.com/watch?v=gQKO3TF28gw

Συγκεντρώνοντας τους ρητούς αριθμούς και τους άρρητους μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα νέο σύνολο, τους πραγματικούς αριθμούς.

Δείτε το παρακάτω video και μάθετε περισσότερα για τους πραγματικούς αριθμούς.

https://www.youtube.com/watch?v=gyTpQoQh9GE

4.2.2 Πράξεις με άρρητους αριθμούς

Με τους άρρητους αριθμούς μπορούμε να κάνουμε ακριβώς τις ίδιες πράξεις με αυτές που κάνουμε στους ρητούς.

Δείτε τις παρακάτω λυμένες ασκήσεις.

1) Να γράψετε τις παρακάτω ρίζες μεταξύ δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών:

α) $\sqrt{7}$
β) $\sqrt{17}$
γ) $\sqrt{130}$

Κόλπο: παρατηρώ ποια γνωστά τετράγωνα είναι γύρω από τον αριθμό που έχω κάτω από την ρίζα.

α) Ισχύει $4 < 7 < 9$ άρα $\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$ και άρα $2 < \sqrt{7} < 3$
β) Ισχύει $16 < 17 < 25$ άρα $\sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25}$ και άρα $4 < \sqrt{17} < 5$
γ) Ισχύει $121 < 130 < 144$ άρα $\sqrt{121} < \sqrt{130} < \sqrt{144}$ και άρα $11 < \sqrt{130} < 12$

2) Να κάνετε τις πράξεις: (Μπάρλας, 2016)

α) $9\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$
β) $5\sqrt{7} + 3\sqrt{2} + \sqrt{7} - \sqrt{2}$

Μέθοδος: απαριθμούμε πόσες ρίζες του συγκεκριμένου είδους έχουμε.

α) $9\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = (9-2)\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$
β) $5\sqrt{7} + 3\sqrt{2} + \sqrt{7} - \sqrt{2} = 5\sqrt{7} + \sqrt{7} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 6\sqrt{7} + 2\sqrt{2}$ δεν μπορούμε να κάνουμε κάποια άλλη πράξη διότι δεν γνωρίζουμε με ακρίβεια τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και $\sqrt{7}$.

3) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις: (Μπάρλας, 2016)

α) $x^2 = 15$
β) $3 + 2x^2 = 5x^2 - 12$

Προσοχή: δεν ξεχνάμε ποτέ ότι οι αντίθετοι αριθμοί έχουν ίδια τετράγωνα. Συνεπώς λύση μιας εξίσωσης της μορφής $x^2 = a^2$ είναι $x = a$ ή $x = -a$.

α) $x^2 = 15$

$$x = \sqrt{15} \text{ ή } x = -\sqrt{15}$$

β) $3+2x^2=5x^2-12$ (χωρίζω γνωστούς από αγνώστους και λύνω σαν εξίσωση 1ου βαθμού)

$$3+12=5x^2-2x^2$$

$$15=3x^2$$

$$\frac{3x^2}{3}=\frac{15}{3}$$

$$x^2=5$$

$$x=\sqrt{5} \text{ ή } x=-\sqrt{5}$$

4.2.3 Δραστηριότητα εξάσκησης

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση σε κάθε μια από τις παρακάτω ερωτήσεις. Για αυτή την εργασία θα χρειαστείτε χαρτί και μολύβι ή στυλό.

1) Ο αριθμός $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι ρητός.

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: β

Αιτιολόγηση: ο $\frac{\sqrt{3}}{2}$ έχει παρονομαστή ακέραιο αλλά αριθμητή άρρητο συνεπώς δεν είναι κλάσμα με αριθμητή και παρονομαστή ακέραιο για να είναι ρητός.

2) Ο αριθμός $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$ είναι ρητός.

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α

Αιτιολόγηση: $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{5}^2}{2^2}=\frac{5}{4}$ που είναι ρητός αφού έχει αριθμητή και παρονομαστή ακέραιο.

3) Ο αριθμός $\sqrt{\frac{25}{144}}$ είναι ρητός.

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α

Αιτιολόγηση: $\sqrt{\frac{25}{144}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{144}} = \frac{5}{12}$ που είναι ρητός

4) Η εξίσωση $2x^2 = 10$ έχει λύση: (Μπάρλας, 2016)

α) $x = \sqrt{5}$
β) $x = 5$ ή $x = -5$
γ) $x = \sqrt{5}$ ή $x = -\sqrt{5}$
δ) $x = \sqrt{10}$

Σωστή απάντηση: γ

Αιτιολόγηση: $2x^2 = 10$

$$x^2 = \frac{10}{2}$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{5} \text{ ή } x = -\sqrt{5}$$

5) Το αποτέλεσμα της πράξης $7\sqrt{3} + 5\sqrt{7}$ είναι $12\sqrt{10}$.

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: β

Αιτιολόγηση: δεν μπορούμε να προσθέσουμε διαφορετικές ρίζες μεταξύ τους, συνεπώς αυτή η πράξη δεν μπορεί να απλοποιηθεί περεταίρω.

4.2.4 Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση σε κάθε μια από τις παρακάτω ερωτήσεις. Για αυτή την εργασία θα χρειαστείτε χαρτί και μολύβι ή στυλό.

1) Δίνονται οι αριθμοί $-2, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}$ για τους οποίους ισχύει: (Μπάρλας, 2016)

α) $-2 < -\sqrt{2} < -\sqrt{3}$
β) $-2 < -\sqrt{3} < -\sqrt{2}$
γ) $-\sqrt{2} < -\sqrt{3} < -2$
δ) Τίποτα από τα παραπάνω

Σωστή απάντηση: β

2) ο αριθμός $\sqrt{\sqrt{16}}$ είναι άρρητος.

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: β

3) Ο αριθμός $-\sqrt{\frac{12}{3}}$ είναι άρρητος.

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: β

4) Το αποτέλεσμα της εξίσωσης $\frac{x^2}{3} = 2$ είναι $x = \sqrt{6}$.

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: β

5) Η εξίσωση $x^2 = -5$ δεν έχει καμιά λύση.

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α

4.3 Προβλήματα

4.3.1 Προβλήματα με πραγματικούς αριθμούς

Η επίλυση ενός προβλήματος με πραγματικούς αριθμούς δεν διαφέρει σε τίποτα από προβλήματα που λύναμε με ρητούς αριθμούς στην προηγούμενη ενότητα.

Τι χρειάζεται να κάνουμε:

- Να αναγνωρίσουμε τα δεδομένα του προβλήματος και τα ζητούμενα. Στην περίπτωση που μας δίνεται σχήμα να είμαστε ιδιαίτερα παρατηρητικοί ώστε να επισημάνουμε γρήγορα τα δεδομένα που κρύβονται στο σχήμα ώστε να τα χρησιμοποιήσουμε.
- Να ανασύρουμε γνώσεις προηγούμενων τάξεων και να τις συνδυάσουμε με φετινές ώστε να έχουμε μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για το πρόβλημα.
- Να μην φοβηθούμε την εμπλοκή της γεωμετρίας που ξέρουμε για την επίλυση. Η άλγεβρα και η γεωμετρία είναι ξεχωριστοί κλάδοι των μαθηματικών αλλά όχι ξένοι μεταξύ τους.
- Να κατασκευάσουμε μια απλή εξίσωση για την γρήγορη και ευκολότερη επίλυση του προβλήματός μας.

Χρήσιμα μαθηματικά εργαλεία:

- Εξισώσεις
- Πυθαγόρειο θεώρημα
- Εμβαδά γνωστών σχημάτων
- Τριγωνομετρία
- Γεωμετρικές έννοιες γύρω από τα τρίγωνα (ισοσκελές, ισόπλευρο τρίγωνο- ύψος)

4.3.2 Πως επιλύω προβλήματα με πραγματικούς αριθμούς

Δείτε το παρακάτω video και πάρτε μια γεύση για προβλήματα του σχολικού βιβλίου που θα συναντήσουμε σε αυτό το μάθημα.

Για την καλύτερη παρακολούθηση του video χρήσιμο θα ήταν να έχετε μαζί σας το σχολικό βιβλίο ανοιχτό στην ενότητα 2.3 του Μέρους Α, ώστε να βλέπετε τις εκφωνήσεις.

https://www.youtube.com/watch?v=PjY2q1cEJDQ

4.3.3 Δραστηριότητα εξάσκησης

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση για τα παρακάτω προβλήματα.

Για την εργασία αυτή θα χρειαστείτε χαρτί και μολύβι ή στυλό.

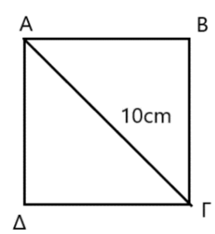
1) Η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι 10cm. Η πλευρά του τετραγώνου θα είναι:

α) $\sqrt{50}$
β) 50
γ) $-\sqrt{50}$
δ) $\sqrt{50}$ ή $-\sqrt{50}$

Σωστή απάντηση: α (Μπάρλας, 2016)

Αιτιολόγηση: έστω x η πλευρά του τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα δίπλα.

Τότε από πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχω



$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$$

$$10^2 = x^2 + x^2$$

$$100 = 2x^2$$

$$x^2 = \frac{100}{2}$$

(Το σχήμα είναι φτιαγμένο στο geogebra.)

$$x^2 = 50$$

$$x = \sqrt{50} \text{ ή } x = -\sqrt{50}$$

Η λύση $x = -\sqrt{50}$ απορίπτεται γιατί το x είναι μήκος ευθυγράμμου τμήματος και άρα θετικός αριθμός. Δεκτή η λύση $x = \sqrt{50}$.

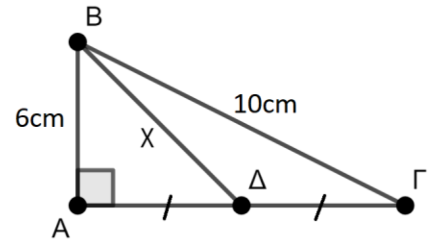
2) Στο παραπάνω σχήμα το μήκος x είναι:

α) 8

β) 52

γ) $\sqrt{52}$ ή $-\sqrt{52}$

δ) $\sqrt{52}$



(Το σχήμα είναι φτιαγμένο στο geogebra)

Σωστή απάντηση: δ (Μπάρλας, 2016)

Αιτιολόγηση: από πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$$ΑΓ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2$$

$$ΑΓ^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$$ΑΓ = \sqrt{64}$$

$$ΑΓ = 8$$

Αφού ΑΔ=ΔΓ τότε ΑΔ=ΔΓ=4

Από πυθαγόρειο στο ΑΒΔ έχουμε

$$ΒΔ^2 = ΑΔ^2 + ΑΒ^2$$

$$x^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$$

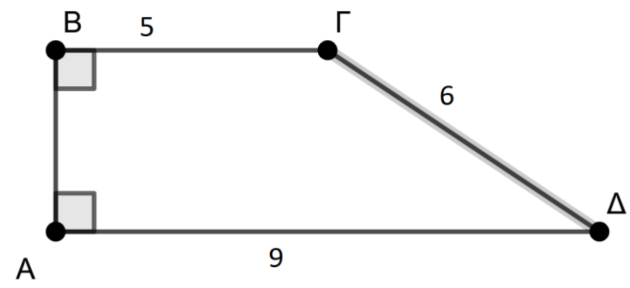
$$x^2 = 52$$

$$x = \sqrt{52} \text{ ή } x = -\sqrt{52}$$

Η λύση $x = -\sqrt{52}$ απορίπτεται γιατί το x είναι μήκος ευθυγράμμου τμήματος και άρα θετικός αριθμός. Δεκτή η λύση $x = \sqrt{52}$.

4.3.4 Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης

Δίνεται το παρακάτω τραπέζιο:



(Το σχήμα είναι φτιαγμένο στο geogebra.)

Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι:

α) 20

β) $7\sqrt{20}$

γ) 40

δ) 140

Σωστή απάντηση: β (Μπάρλας, 2016)

Αιτιολόγηση: το τραπέζιο είναι ορθογώνιο τραπέζιο άρα η πλευρά ΑΒ είναι ύψος του τραπεζίου, για να την υπολογίσω φέρνω το ύψος ΓΕ και το σχήμα μου γίνεται όπως φαίνεται δίπλα.

Το ΑΕΓΒ είναι ορθογώνιο άρα η ΑΕ=5 και η ΕΔ=4 αφού ΑΔ=9.

Από πυθαγόρειο θεώρημα στο ΕΓΔ έχω:

$$E\Gamma^2 = \Gamma\Delta^2 - E\Delta^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$$

$$E\Gamma = \sqrt{20}$$

Άρα και $AB = \sqrt{20}$

Το εμβαδόν τραπεζίου είναι:

$$E = \frac{(B\Gamma + A\Delta) \cdot AB}{2} = \frac{(5+9) \cdot \sqrt{20}}{2} = \frac{14\sqrt{20}}{2} = 7\sqrt{20}$$

4.4 Ανακεφαλαίωση και αυτό-αξιολόγηση διδακτικής ενότητας

4.4.1 Ανακεφαλαίωση

Σε αυτή την διδακτική ενότητα είδαμε:

- ✓ Τι είναι η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού.
- ✓ Ποιες είναι οι γνωστές τετραγωνικές ρίζες.

- ✓ Τις ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας και πως εφαρμόζονται για τον υπολογισμό τετραγωνικών ριζών και αριθμητικών παραστάσεων.
- ✓ Ποιους αριθμούς ονομάζουμε άρρητους.
- ✓ Πως κάνουμε πράξεις με τους άρρητους αριθμούς.
- ✓ Ποιους αριθμούς ονομάζονται πραγματικοί αριθμοί.
- ✓ Παραδείγματα προβλημάτων στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

4.4.2 Εργασία Ανοιχτής Απόκρισης

Για να ολοκληρώσετε αυτή την εργασία θα χρειαστείτε χαρτί και μολύβι ή στυλό.

Σας δίνεται το Φύλλο Εργασίας:

<u>Φύλλο Εργασίας</u>

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Τετραγωνική ρίζα ενός ___________ αριθμού α, λέγεται ο _____________ αριθμός, ο οποίος όταν υψωθεί _______________ δίνει τον αριθμό ___ .

β) Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με ______ .

γ) Ισχύει $\sqrt{1}$=___ και $\sqrt{0}$= ___ .

δ) Οι ___________ αριθμοί δεν έχουν τετραγωνική ρίζα, διότι το τετράγωνο ενός αριθμού δεν μπορεί να είναι ποτέ ____________ αριθμός.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ):

α) $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$ β) $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

γ) $\sqrt{25} = -5$ δ) $\sqrt{1 + \sqrt{9}} = 4$

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

Α. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{\sqrt{81}}$ β) $\sqrt{43+\sqrt{36}}$ γ) $\sqrt{\sqrt{16}-\sqrt{9}}$

δ) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}}$ ε) $\sqrt{2\sqrt{4}}$

Β. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

Α=$\sqrt{4-\sqrt{7+\sqrt{4}}}+\sqrt{4\sqrt{4\sqrt{16}}}$

Β= $\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{9}}}}-\sqrt{4\sqrt{14+\sqrt{4}}}$

Τέλος Φύλλου Εργασίας

Να λύσετε όλα τα θέματα που υπάρχουν στο φύλλο εργασίας στο χαρτί σας. Στην συνέχεια να φωτογραφίσετε το χαρτί με τις απαντήσεις σας και να επισυνάψετε την φωτογραφία στο πεδίο των απαντήσεων.

Ρουμπρίκα αξιολόγησης εργασίας από τον διδάσκοντα.

Κριτήρια				
ΘΕΜΑ 1^{ο} : Βαθμός επίλυσης θέματος 1^{ου}	Καθόλου: 0 βαθμοί	Ελάχιστα: 2 βαθμός	Ικανοποιητικά: 6 βαθμοί	Τέλεια: 10 βαθμοί
ΘΕΜΑ 2^{ο} : Βαθμός επίλυσης θέματος 2^{ου}	Καθόλου: 0 βαθμοί	Ελάχιστα: 2 βαθμός	Ικανοποιητικά: 6 βαθμοί	Τέλεια: 10 βαθμοί

4.4.3 Checklist: Μπορώ να το κάνω…

Να αξιολογήσετε τις ικανότητες που αποκτήσατε σε αυτή την διδακτική ενότητα απαντώντας στο ακόλουθο ερωτηματολόγιο.

Ο αριθμός 1 αντιστοιχεί στο «καθόλου ή ελάχιστα» ενώ ο 5 στο «απόλυτα».

Δεν υπάρχουν σωστές ή λάθος απαντήσεις. Να γράψετε την αλήθεια.

1) Κατάλαβα τι είναι η τετραγωνική ρίζα;

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

2) Θυμάμαι τις γνωστές τετραγωνικές ρίζες;

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

3) Μπορώ να χρησιμοποιήσω τις ιδιότητες των ριζών για να υπολογίσω μια ρίζα ή μια παράσταση;

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

4) Κατάλαβα ποιους αριθμούς ονομάζουμε άρρητους;

- 1

- 2
- 3
- 4
- 5

5) Κατάλαβα ποιοι αριθμοί ονομάζονται πραγματικοί;

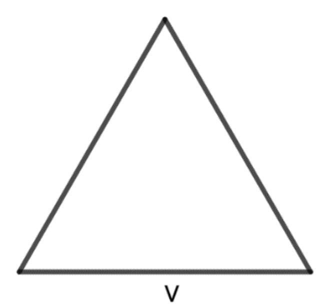
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

6) Μπορώ να χρησιμοποιήσω άρρητους αριθμούς σε βασικές πράξεις;

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

4.4.4 Forum

Δίνεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς *ν*, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Α) Να υπολογίσετε το ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου συναρτήσει του *ν*.

Β) Να υπολογίσετε το ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου με πλευρά $\frac{\sqrt{48}}{3}$cm.

Γράψτε στο Forum την δική σας λύση για το παραπάνω πρόβλημα. Εναλλακτικά μπορείτε να διορθώσετε ή να σχολιάσετε την λύση κάποιου άλλου μαθητή ή να συμπληρώσετε την σκέψη ή την μέθοδο επίλυσης κάποιου αν σας φαίνεται ελλιπής.

4.5 Πρόσθετο Υλικό

4.5.1 Προτάσεις για Επιπλέον Εκπαίδευση

ΘΕΜΑ

Α. Να υπολογίσετε τις παρακάτω ρίζες:

α) $\sqrt{\sqrt{64}+1}$ β) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{9}}}}$ γ) $\sqrt{\sqrt{81}-\sqrt{25}}$

δ) $\sqrt{\sqrt{36}+\sqrt{64}+\sqrt{4}}$ ε)$\sqrt{\sqrt{100}-\sqrt{36}}$

Β. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

Α= $\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{9}}}}+\sqrt{2\sqrt{4}}$

Β= $\sqrt{4\sqrt{14+\sqrt{4}}}-\sqrt{4-\sqrt{7+\sqrt{4}}}$

Ημέρα 5η: Διδακτική ενότητα 4- Συναρτήσεις

5.0 Εισαγωγή διδακτικής ενότητας

5.0.1 Μαθησιακά αποτελέσματα

Μετά την παρακολούθηση αυτής της διδακτικής ενότητας θα είσαι ικανός/η να:

ΜΑ4 [Understand/Apply/Create]: Αναγνωρίζεις μια συνάρτηση, να εφαρμόζεις τις ιδιότητες τριών βασικών συναρτήσεων καθώς και να τις σχεδιάζεις σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Πιο συγκεκριμένα θα μπορείς να:

- Κατανοείς τι ονομάζουμε συνάρτηση
- Εντοπίζεις σημεία σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων
- Εφαρμόζεις τις ιδιότητες των βασικών συναρτήσεων y=ax,y=ax+β,y=a/x, και να μπορείς να τις σχεδιάζεις.

Συμπλήρωσε το παρακάτω ερωτηματολόγιο το οποίο ελέγχει τι θυμάσαι από το κεφάλαιο αυτό. Θυμίζουμε ότι εδώ δεν υπάρχουν σωστές ή λάθος απαντήσεις. Επέλεξε την απάντηση που θεωρείς σωστότερη.

1) Η συνάρτηση $y = 3x$ διέρχεται από το σημείο Ο(0,0).

- Σωστό
- Λάθος
- Δεν γνωρίζω

2) Η συνάρτηση $y = 2x - 7$ έχει γραφική παράσταση μια ευθεία γραμμή.

- Σωστό
- Λάθος
- Δεν γνωρίζω

3) Το σημείο Α(0,2) είναι σημείο του άξονα χ'χ.

- Σωστό
- Λάθος
- Δεν γνωρίζω

4) Η συνάρτηση $y = \frac{4}{x}$ τέμνει τον άξονα χ'χ.

- Σωστό
- Λάθος
- Δεν γνωρίζω

5) Δυο ποσά λέγονται ανάλογα όταν καθώς αυξάνεται το ένα, αυξάνεται με τον ίδιο ρυθμό και το άλλο.

- Σωστό
- Λάθος
- Δεν γνωρίζω

5.0.2 Δομή ενότητας

Η Διδακτική Ενότητα είναι διάρκειας 4 ωρών και περιλαμβάνει:

- Εισαγωγή
- Υποενότητα 1 – Η έννοια της συνάρτησης
- Υποενότητα 2 – Συντεταγμένες στο επίπεδο
- Υποενότητα 3 – Οι συναρτήσεις $y = ax, y = ax + \beta, y = \frac{a}{x}$
- Ανακεφαλαίωση και Αυτό-αξιολόγηση, που περιλαμβάνει:
  - ✓ Σύνοψη της ενότητας
  - ✓ Εργασία εφαρμογής με τη μορφή Ερώτησης Ανοικτής Απόκρισης
  - ✓ Αυτό-αξιολόγηση σε μορφή ερωτηματολογίου όπου οι εκπαιδευόμενοι επιλέγουν ποιο/ποια από τα μαθησιακά αποτελέσματα της ενότητας έχουν κατακτήσει.
  - ✓ Forum συζήτησης

Οι 3 υποενότητες είναι διάρκειας 1 ώρας η κάθε μία. Η κάθε υποενότητα αποτελείται από:

- Δραστηριότητα παρουσίασης (15’)
- Δραστηριότητα επίδειξης (15’)
- Δραστηριότητα εξάσκησης (15’)
- Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης (15’)

5.1 Η έννοια της συνάρτησης

5.1.1 Τι ονομάζουμε συνάρτηση

Ας δούμε το παρακάτω video και να θυμηθούμε τι ονομάζουμε συνάρτηση.

https://www.youtube.com/watch?v=t7CyfI1tPuo

Για να ανακεφαλαιώσουμε, συνάρτηση ονομάζουμε, σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο, την σχέση που αντιστοιχίζει κάθε τιμή της μεταβλητής x με μια μόνο τιμή της μεταβλητής y.

Η σχέση που συνδέει της δυο μεταβλητές x και y είναι μια εξίσωση. Την εξίσωση αυτή την γράφουμε, όπως λέμε, λυμένη ως προς y, πχ $y = x + 1$.

Στην θέση της μεταβλητής x μπορούμε να αντικαταστήσουμε αριθμούς και παίρνουμε τις τιμές της συνάρτησης που είναι οι αριθμοί που μας δίνει το y για την συγκεκριμένη τιμή του x. Έτσι μπορούμε να φτιάξουμε πίνακες με τις τιμές της συνάρτησης που χρειαζόμαστε.

Τέλος όπως ξέρετε μπορούμε να απεικονίσουμε τις συναρτήσεις και γραφικά σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων μπορούν να έχουν διάφορα σχήματα και από αυτές μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την συνάρτηση που έχουμε.

5.1.2 Πως κατασκευάζω πίνακα τιμών και πως τον τύπο μιας συνάρτησης

Οι συναρτήσεις έχουν δημιουργηθεί προκειμένου να μπορούμε να μοντελοποιούμε προβλήματα τα οποία θέλουμε να μελετάμε καθώς οι τιμές των δεδομένων τους μεταβάλλονται. Για αυτό το λόγο προσπαθούμε να εκφράσουμε τα προβλήματα μέσα από μια εξίσωση, τον τύπο της συνάρτησης, με την οποία συνδέουμε τις δυο μεταβλητές x και y. Δείτε ένα παράδειγμα κατασκευής τύπου από δοσμένο πρόβλημα.

https://www.youtube.com/watch?v=G7MyltQZDaA

Όταν έχουμε μια συνάρτηση αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να μπορούμε να βρούμε την τιμή του x ή του y αν γνωρίζουμε κάποιον από τους δύο αριθμούς αυτούς. Για να το πετύχουμε αυτό κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών των μεταβλητών x και y. Παρακολουθείστε το παρακάτω video που μας δείχνει τον τρόπο που κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών αν γνωρίζουμε τον τύπο και αν γνωρίζουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

https://www.youtube.com/watch?v=1wVgBmKlN2k

5.1.3 Δραστηριότητα εξάσκησης

Για να την εργασία αυτή θα χρειαστείτε χαρτί και μολύβι ή στυλό.

Άσκηση 1η: Δίνεται η συνάρτηση $y = 2x - 3$. Για την συνάρτηση αυτή να απαντήσετε τις παρακάτω ερωτήσεις: (Μπάρλας, 2016)

1) Αν x=5, να γράψετε στο κουτάκι την τιμή του y.

Σωστή απάντηση: 7

Αιτιολόγηση: για x=5 έχουμε $y = 2 \cdot 5 - 3 = 10 - 3 = 7$

2) Αν y=3, να γράψετε στο κουτάκι την τιμή του x.

Σωστή απάντηση: 3

Αιτιολόγηση: για y=3 έχουμε $3 = 2x - 3$

$$3 + 3 = 2x$$

$$6 = 2x$$

$$x = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

3) Αν y=-7, να γράψετε στο κουτάκι την τιμή του x.

Σωστή απάντηση: -2

Αιτιολόγηση: για y=-7 έχουμε $-7 = 2x - 3$

$$-7 + 3 = 2x$$

$$-4 = 2x$$

$$x = \frac{-4}{2}$$

$$x = -2$$

Άσκηση 2η: Ένας ελαιοπαραγωγός έχει υπολογίσει ότι από κάθε κιλό ελιάς που πηγαίνει στο ελαιοτριβείο παίρνει 0,25 κιλά λάδι. Με βάση αυτό το πρόβλημα να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις: (Μπάρλας, 2016)

1) Ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις εκφράζει την ποσότητα y σε κιλά του λαδιού που παίρνει ο ελαιοπαραγωγός για την ποσότητα x σε κιλά ελιών;

α) $y = 0{,}25x$
β) $y = \frac{x}{0{,}25}$
γ) $y = x + 0{,}25$

δ) $y = x - 0{,}25$

Σωστή απάντηση: α

Αιτιολόγηση: το 1 κιλό ελιές δίνει 0,25 κιλά λάδι

Τα x κιλά ελιές δίνουν y κιλά λάδι

Αν το εκφράσουμε αυτό σε λόγους έχουμε $\frac{1}{x} = \frac{0{,}25}{y}$ κάνοντας χιαστί πολλαπλασιασμό παίρνουμε: $y = 0{,}25x$

2) Ποια από τις παρακάτω τιμές αντιστοιχεί στην ποσότητα ελιών που χρειάζεται ο παραγωγός για να παράξει 175 κιλά λάδι;

α) 800
β) 700
γ) 43,75
δ) 650

Σωστή απάντηση: β

Αιτιολόγηση: για y=175 έχουμε $175 = 0{,}25x$

$$x = \frac{175}{0{,}25}$$

$$x = 700$$

5.1.4 Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης

Για να την εργασία αυτή θα χρειαστείτε χαρτί και μολύβι ή στυλό.

Άσκηση 1^{η}: Δίνεται η συνάρτηση $y = (a - 1)x + 3$. Να γράψετε στο κουτάκι από κάτω την τιμή του α αν για x=2 είναι το y=11. (Μπάρλας, 2016)

Σωστή απάντηση: 5

Hint: αντικαταστείτε όπου x και y τις τιμές που δίνονται και λύστε την εξίσωση με άγνωστο το α.

Άσκηση 2η: Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{3x-1}{2}$. Για την συνάρτηση αυτή να απαντήσετε τις παρακάτω ερωτήσεις: (Μπάρλας, 2016)

1) Αν x=-1 να γράψετε στο κουτάκι από κάτω την τιμή του y.

Σωστή απάντηση: -2

Hint: Αντικαταστήστε στον τύπο της συνάρτησης την τιμή του x.

2) Αν y=4, να γράψετε στο κουτάκι από κάτω την τιμή του x.

Σωστή απάντηση: 3

Hint: Αντικαταστήστε στον τύπο της συνάρτησης την τιμή του y.

Άσκηση 3η: Ένας πωλητής έχει μηνιαίο μισθό 1500€ και 6% επί της αξίας των πωλήσεων που πραγματοποιεί. Να απαντήσετε στην παρακάτω ερώτηση: (Μπάρλας, 2016)

Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις εκφράζει τις μηνιαίες αποδοχές y του πωλητή ως συνάρτηση των πωλήσεων x που κάνει μέσα στον μήνα;

α) $y = 1500x + 6$
β) $y = x + 1500 \cdot 6$
γ) $y = 1500 + 0{,}06x$
δ) $y = 1500x + 0{,}06$

Σωστή απάντηση: γ

Hint: προσέξτε τι εκφράζει το x και το πως θα γραφτεί το ποσοστό.

5.2 Συντεταγμένες στο επίπεδο

5.2.1 Τι ονομάζουμε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Ας δούμε το παρακάτω video και να θυμηθούμε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

https://www.youtube.com/watch?v=0zANeJBQayo

Σημεία προσοχής:

- Κάθε σημείο στο επίπεδο περιγράφεται από δύο αριθμούς. Ο πρώτος ονομάζεται τετμημένη και αντιστοιχεί στον άξονα χ'χ, ενώ ο δεύτερος λέγεται τεταγμένη και αντιστοιχεί στον άξονα y'y.
- Το ζεύγος (x,y) ονομάζονται συντεταγμένες του σημείου.
- Για να βρούμε τους αριθμούς x και y φέρνουμε κάθετες από το σημείο προς τους άξονες.
- Οι άξονες μας πρέπει να έχουν ίδια βαθμονόμηση. Συνεπώς όταν χαράζουμε άξονες προσέχουμε να κρατάμε και στους δυο άξονες την ίδια απόσταση μεταξύ των αριθμών.

Σημεία μπορώ να βρω σε οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου όπως είδαμε στο προηγούμενο video. Άρα μπορώ να βρω και πάνω στους άξονες. Δείτε το παρακάτω video για να δείτε τον τρόπο.

https://www.youtube.com/watch?v=_L-N4AWpkbk

5.2.2 Λυμένες ασκήσεις

Ας δούμε τώρα λυμένα παραδείγματα. Για τις επόμενες ασκήσεις να έχετε μαζί σας τα σχολικά βιβλία ανοιγμένα στην σελίδα 66.

Δείτε στο video την επίλυση της άσκησης 1 της σελίδας 66

https://www.youtube.com/watch?v=DhBq4q3sDds

Δείτε στο video την επίλυση της άσκησης 2 της σελίδας 66

https://www.youtube.com/watch?v=nzaLPtmZS9g

Δείτε στο video την επίλυση της άσκησης 8 της σελίδας 66

https://www.youtube.com/watch?v=lzkTqwCQ9DE

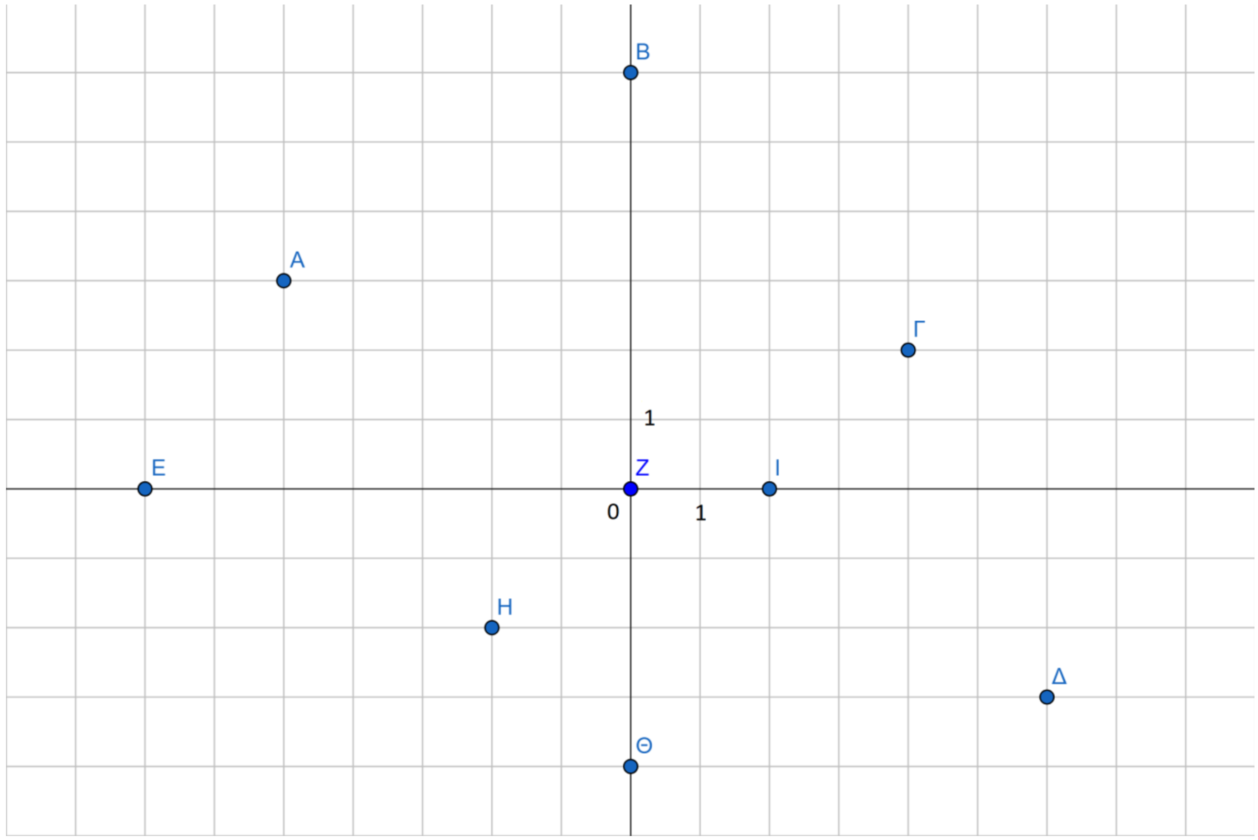
Δείτε στο video την επίλυση της άσκησης 10 της σελίδας 66

https://www.youtube.com/watch?v=YwsSkUDmnNM

5.2.3 Δραστηριότητα εξάσκησης

Για να την εργασία αυτή θα χρειαστείτε χαρτί και μολύβι ή στυλό.

Άσκηση 1η: Δίνεται το παρακάτω σχήμα στο οποίο πάνω υπάρχουν τοποθετημένα τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Η, Θ και Ι. Να επιλέξετε στις παρακάτω ερωτήσεις την σωστή απάντηση.



(Εικόνα δημιουργημένη στο geogebra)

1) Οι συντεταγμένες του σημείου Α είναι:

α) (-5,3)

β) (3, -5)

γ) (5,3)

δ) (-5,-3)

Σωστή απάντηση: α

Αιτιολόγηση: το σύστημα είναι ορθοκανονικό συνεπώς κάθε τετραγωνάκι ισούται με μια μονάδα σε κάθε άξονα το Α είναι 5 μονάδες αριστερά του μηδενός, άρα -5 το x, και 3 μονάδες πάνω, άρα 3 το y.

2) Οι συντεταγμένες το σημείου Β είναι (0,6).

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α

Αιτιολόγηση: Το Β βρίσκεται στον y’y άρα το χ είναι 0 και βρίσκεται 6 μονάδες πάνω άρα το y είναι 6.

3) Οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι:

α) (2,4)
β) (3,4)
γ) (4,2)
δ) (-4,-2)

Σωστή απάντηση: γ

Αιτιολόγηση: το Γ βρίσκεται 4 μονάδες δεξιά του μηδενός και 2 πάνω άρα (4,2).

4) Οι συντεταγμένες του Δ είναι (6, -3).

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α

Αιτιολόγηση: Το Δ βρίσκεται 6 μονάδες δεξιά του μηδενός και 3 κάτω άρα y=-3

5) Το σημείο Ε έχει τετμημένη το μηδέν.

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: β

Αιτιολόγηση: Η τετμημένη είναι το χ. Το Ε βρίσκεται πάνω στον χ’χ άρα δεν γίνεται να έχει χ=0.

6) Το σημείο Η έχει αρνητική τετμημένη και αρνητική τεταγμένη.

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α

Αιτιολόγηση: Το σημείο Η είναι στο 3^{o} τεταρτημόριο όπου το x και το y είναι αρνητικοί αριθμοί.

7) Οι συντεταγμένες του σημείου Θ είναι:

α) (4,0)
β) -4
γ) (0,4)
δ) (0,-4)

Σωστή απάντηση: δ

Αιτιολόγηση: Το Θ βρίσκεται στον y'y άρα έχει x=0 και επειδή βρίσκεται 4 μονάδες κάτω του μηδενός έχει y=-4.

8) Οι συντεταγμένες του Ζ είναι (0,0).

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α

Αιτιολόγηση: Το Ζ είναι πάνω στην αρχή των αξόνων.

9) Οι συντεταγμένες του σημείου Ι είναι:

α) (0,2)
β) (2,0)
γ) (1,0)
δ) (-2,0)

Σωστή απάντηση: β

Αιτιολόγηση: Το Ι είναι σημείο του χ'χ άρα y=0 και βρίσκεται 2 μονάδες δεξιά του μηδενός άρα x=2.

Άσκηση $2^{η}$: Δίνεται το σημείο $A(3x-5,1+2x)$. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις: (Μπάρλας, 2016)

1) Πόσο είναι το x ώστε το Α να βρίσκεται στον χ’χ;

α) -1

β) $\frac{1}{2}$

γ) $-\frac{1}{2}$

δ) 0

Σωστή απάντηση: γ

Αιτιολόγηση: Για να είναι το Α στον χ’χ πρέπει η τεταγμένη του να είναι ίση με το μηδέν. Άρα: $1+2x=0$

$$2x=-1$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

2) Πόσο είναι το x ώστε το Α να βρίσκετε πάνω στον y’y;

α) $-\frac{1}{2}$

β) $\frac{5}{3}$

γ) 2

δ) 0

Σωστή απάντηση: β

Αιτιολόγηση: Για να είναι το Α πάνω στον y’y πρέπει η τετμημένη του να είναι ίση με το μηδέν. Άρα: $3x-5=0$

$$3x=5$$

$$x=\frac{5}{3}$$

5.2.4 Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης

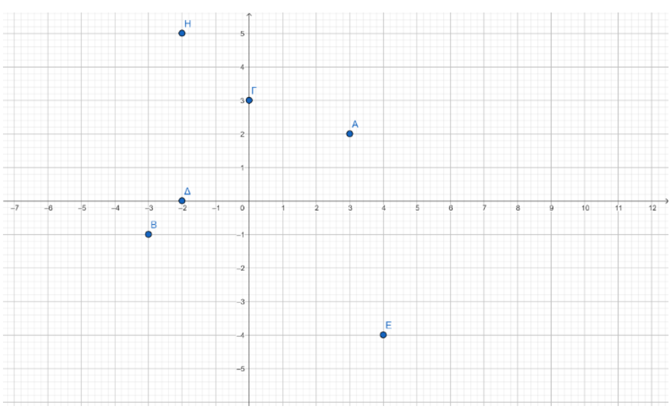
Για αυτή την εργασία θα χρησιμοποιήσουμε την εφαρμογή Geogebra. Χρησιμοποιώντας το σύστημα αξόνων που εμφανίζεται παρακάτω τοποθετείστε τα σημεία που σας δίνονται παρακάτω στο σύστημα αξόνων.

Για την τοποθέτηση ακολουθείστε τις ακόλουθες οδηγίες. Επιλέξτε από την γραμμή εργαλείων που εμφανίζεται πάνω δεξιά την επιλογή "Point" και τέλος κάνοντας απλώς δεξί κλικ στο σημείο που θέλετε εμφανίζεται το σημείο.

Τα σημεία είναι: Α(3,2), Β(-3,-1), Γ(0,3), Δ(-2,0), Ε(-4,4) και Η(-2,5)

https://www.geogebra.org/classic/

Η σωστή απάντηση είναι:



(Η εικόνα δημιουργήθηκε στο geogebra)

5.3 Οι συναρτήσεις $y = ax, y = ax + \beta, y = \frac{a}{x}$

5.3.1 Ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά- Οι γραφικές παραστάσεις της ευθείας και της υπερβολής

Η συνάρτηση $y = ax$

Δύο ποσά λέγονται **ανάλογα** όταν έχουν σταθερό πηλίκο. Δηλαδή αν τα διαιρέσουμε μας δίνουν πάντα τον ίδιο σταθερό αριθμό.

Με μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως εξής: $\frac{y}{x} = a$

Αν προσπαθήσουμε να εκφράσουμε το ποσό y ως συνάρτηση του x τότε έχουμε την συνάρτηση $y = \alpha x$.

Πχ: $y = 3x$ η συνάρτηση αυτή έχει πίνακα τιμών

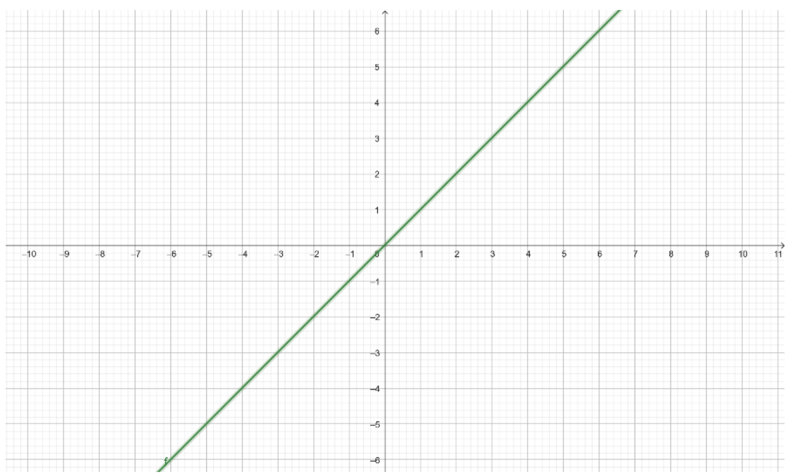
y	0	3	-3	18	-27	15
x	0	1	-1	6	-9	5

Παρατηρούμε ότι πάντα το πηλίκο $\frac{y}{x}$ είναι πάντοτε σταθερό και ίσο με 3.

Η συνάρτηση αυτή γραφικά σχηματίζει μια ευθεία γραμμή που διέρχεται πάντα από την αρχή των αξόνων, το σημείο Ο(0,0). Η συνάρτηση τέμνει συνεπώς στο ίδιο σημείο και τους δύο άξονες.

Ο αριθμός α ονομάζεται κλίση της συνάρτησης/ ευθείας.

Αν $\alpha > 0$ τότε η συθεία είναι κάπως έτσι:



(Η εικόνα δημιουργήθηκε στο geogebra)

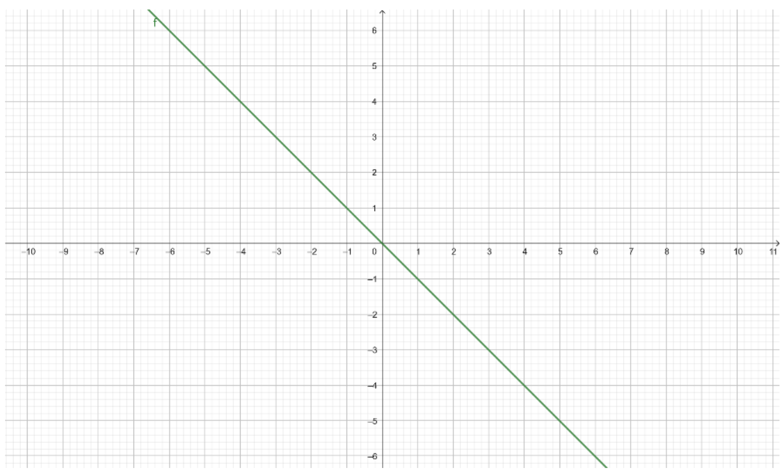
Αν $\alpha < 0$ τότε η ευθεία είναι κάπως έτσι:

Η συνάρτηση $\boldsymbol{y = \alpha x + \beta}$

Η συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$ παριστάνει και αυτή μια ευθεία γραφικά. Προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της συνάρτησης $y = \alpha x$ προς τα πάνω ή προς τα κάτω κατά β μονάδες.

Άρα είναι μια ευθεία παράλληλη στην ευθεία $y = \alpha x$.

Γενικά ισχύει ότι όσες ευθείες έχουν την ίδια κλίση, το ίδιο α δηλαδή, είναι μεταξύ τους παράλληλες.



(Η εικόνα δημιουργήθηκε στο geogebra)

Πχ: οι ευθείες $y = 2x - 1, y = 2x + 3, y = 2x$ είναι μεταξύ τους παράλληλες γιατί έχουν α=2. Ενώ οι ευθείες $y = 3x + 2, y = 4x - 3$ δεν έχουν ίδια κλίση άρα δεν είναι παράλληλες.

Αυτή η συνάρτηση δεν διέρχεται από το σημείο Ο(0,0).

Αντίθετα διέρχεται πάντα από το σημείο Β(0,β) το οποίο είναι και το σημείο τομής της με τον άξονα y'y.

Ένα σημείο, είναι σημείο της συνάρτησης αν οι συντεταγμένες του σημείου αυτού επαληθεύουν την εξίσωση της συνάρτησης.

Δηλαδή το σημείο Α(2,1) είναι σημείο της $y = x - 1$ γιατί αν αντικαταστήσω όπου χ το 2 και όπου y το 1 στην εξίσωση θα έχω $1 = 2 - 1$ που ισχύει. Αντίθετα το Β(3,1) δεν είναι σημείο της συνάρτησης αφού μετά την αντικατάσταση θα έχω $1 = 3 - 1$ το οποίο δεν ισχύει.

Μέθοδος εύρεσης σημείων τομής ευθείας με τους άξονες:

Έστω η ευθεία $y = 2x - 2$

- Για τον χ'χ: βάζουμε στην μεταβλητή y την τιμή μηδέν και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει με άγνωστο το x.
  Δηλαδή για y=0 έχουμε $0 = 2x - 2$
  $$2x = 2$$
  $$x = 1$$
  Άρα η $y = 2x - 2$ τέμνει τον χ'χ στο σημείο Α(1,0)
- Για τον y'y: βάζουμε όπου x την τιμή μηδέν και βρίσκουμε το y που προκύπτει.
  Δηλαδή για x=0 έχουμε $y = 2 \cdot 0 - 2$
  $$y = -2$$
  Άρα η $y = 2x - 2$ τέμνει τον y'y στο σημείο Β(0,-2).

Η συνάρτηση $\boldsymbol{y = \frac{a}{x}}$

Δυο ποσά λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα** όταν το γινόμενό τους παραμένει σταθερό.

Με μαθηματικά αυτό γράφεται $y \cdot x = a$.

Πχ: $y \cdot x = 12$

y	12	-3	2	24	$\frac{2}{3}$
x	1	-4	6	$\frac{1}{2}$	18

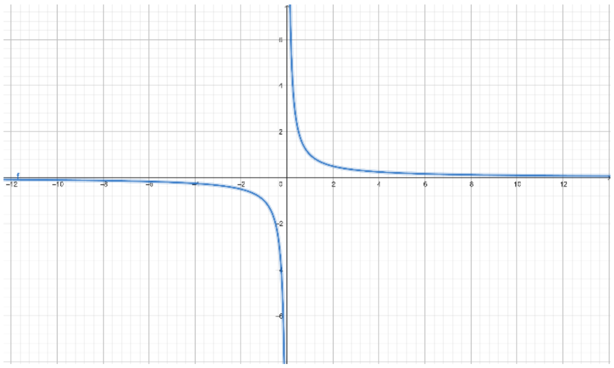
Παρατηρούμε ότι όλα τα ζεύγη (x,y) μας δίνουν αν πολλαπλασιαστούν τον ίδιο αριθμό, το 12.

Αν λύσουμε την εξίσωση $y \cdot x = a$ ως προς y τότε έχουμε $y = \frac{a}{x}$.

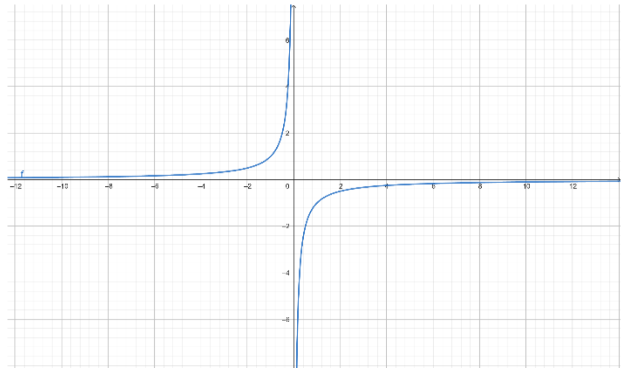
Η συνάρτηση που προκύπτει από αυτή την εξίσωση γραφικά είναι μια καμπύλη γραμμή που ονομάζεται **υπερβολή**.

Η υπερβολή δεν τέμνει ποτέ τους άξονες χ'χ και y'y όσο και αν τους πλησιάσει. Επίσης δεν διέρχεται ποτέ από την αρχή των αξόνων.

Μάλιστα η υπερβολή έχει δυο κλάδους σε δύο διαφορετικά τεταρτημόρια όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



(Η εικόνα δημιουργήθηκε στο geogebra)



(Η εικόνα δημιουργήθηκε στο geogebra)

Στην αριστερή εικόνα προκύπτει η υπερβολή με κλάδους στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο επειδή ο αριθμός α είναι θετικός. Ενώ στην εικόνα δεξιά η υπερβολή έχει κλάδους στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο επειδή το α είναι αρνητικός αριθμός.

5.3.2 Πως σχεδιάζω μια ευθεία και μια υπερβολή σε σύστημα συντεταγμένων και λυμένες ασκήσεις με συναρτήσεις.

Παρακολουθείστε τα παρακάτω video και δείτε τον τρόπο με τον οποίο σχεδιάζω σε ένα σύστημα αξόνων μια ευθεία και μια υπερβολή.

https://www.youtube.com/watch?v=6pzBclHLE5g&t=1s

https://www.youtube.com/watch?v=REJPIgFwT7M

Και τώρα παρακολουθείστε την επίλυση μιας άσκησης σε αυτό το κομμάτι της ύλης.

https://www.youtube.com/watch?v=69fw6FA41QQ

5.3.3 Δραστηριότητα εξάσκησης

Για την δραστηριότητα αυτή θα χρειαστείτε χαρτί και μολύβι ή στυλό.

Άσκηση 1η: Δίνεται η ευθεία $y = \frac{2}{3}x - 2$.

1) Σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα χ'χ είναι το Α(-2,0). (Μπάρλας, 2016)

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: β

Αιτιολόγηση: για y=0 έχουμε

$$0 = \frac{2}{3}x - 2$$

$$2 = \frac{2}{3}x$$

$$2 = \frac{2x}{3}$$

$$2 \cdot 3 = 2x$$

$$6 = 2x$$

$$x = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

Άρα είναι το Α(3,0)

2) Το σημείο τομής της ευθείας με τον y'y είναι το Β(0,-2). (Μπάρλας, 2016)

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α

Αιτιολόγηση: για x=0 έχουμε

$$y = \frac{2}{3} \cdot 0 - 2 = -2$$

Άρα είναι το Β(0,-2)

3) Η κλίση της ευθείας είναι -2. (Μπάρλας, 2016)

α) Σωστό

β) Λάθος

Σωστή απάντηση: β

Αιτιολόγηση: η κλίση της ευθείας είναι πάντα ο αριθμός που πολλαπλασιάζεται με την μεταβλητή x όταν η ευθεία είναι γραμμένη στην μορφή $y = ax + \beta$. Άρα εδώ είναι το $\frac{2}{3}$.

4) Αν η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(\lambda - 1, 2\lambda - 3)$ τότε η τιμή του λ είναι ίση με: (Μπάρλας, 2016)

α) $\frac{1}{2}$
β) 1
γ) $\frac{1}{4}$
δ) 0

Σωστή απάντηση: γ

Αιτιολόγηση: το Α ανήκει στην ευθεία άρα επαληθεύει την εξίσωση. Αντικαθιστώ όπου x το λ-1 και όπου y το 2λ-3.

$$2\lambda - 3 = \frac{2}{3}(\lambda - 1) - 2$$

$$6\lambda - 9 = 2(\lambda - 1) - 6$$

$$6\lambda - 9 = 2\lambda - 2 - 6$$

$$6\lambda - 2\lambda = 9 - 2 - 6$$

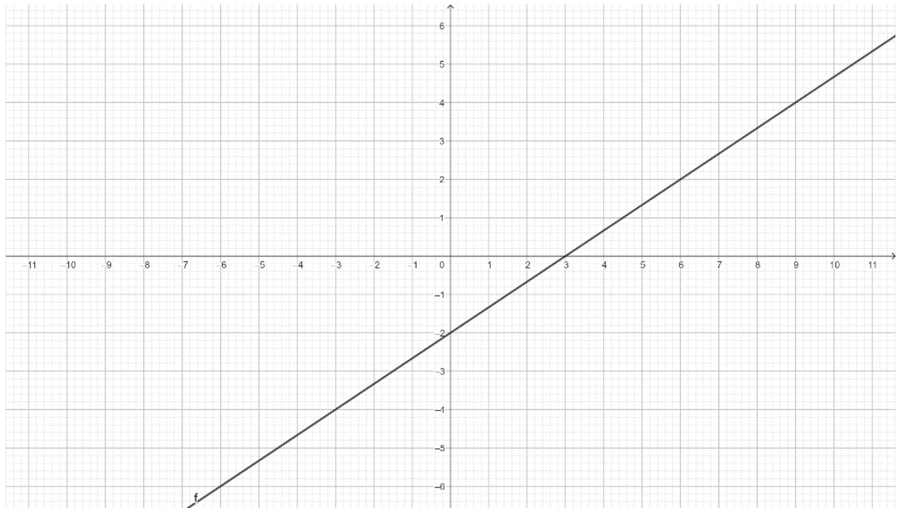
$$4\lambda = 1$$

$$\lambda = \frac{1}{4}$$

5) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = \frac{2}{3}x - 2$ στην εφαρμογή Geogebra classic. (Μπάρλας, 2016)

https://www.geogebra.org/classic/

Σωστή απάντηση:



(Η εικόνα δημιουργήθηκε στο geogebra)

Αιτιολόγηση: τοποθετούμε στο επίπεδο τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες. Ενώνουμε τα σημεία με μια ευθεία γραμμή και προεκτείνουμε.

Άσκηση 2η: Δίνεται μια ευθεία ε παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y = -x$, η οποία τέμνει τον άξονα χ'χ στο σημείο με τετμημένη 2. (Μπάρλας, 2016)

1) Με ποια από τις παρακάτω τιμές είναι ίση η κλίση της ευθείας ε; (Μπάρλας, 2016)

α) 2
β) -1
γ) 1
δ) 0

Σωστή απάντηση: β

Αιτιολόγηση: η ευθεία ε είναι παράλληλη στην ευθεία ζ, άρα έχουν ίδια κλίση. Η κλίση της ευθείας ζ είναι -1, άρα -1 είναι και της ευθείας ε.

2) Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις παριστάνει την ευθεία ε; (Μπάρλας, 2016)

α) $y = -x + 2$
β) $y = -x - 2$
γ) $y = x + 3$
δ) $y = -x$

Σωστή απάντηση: α

Αιτιολόγηση: η ευθεία ε θα είναι της μορφής $y = ax + \beta$. Αφού έχει κλίση -1 τότε είναι της μορφής $y = -x + \beta$.

Η ε τέμνει τον χ'χ στο σημείο με τετμημένη 2 άρα στο σημείο Α(2,0) το οποίο επαληθεύει την εξίσωση. Άρα έχουμε $y = -x + \beta$

$$0 = -2 + \beta$$

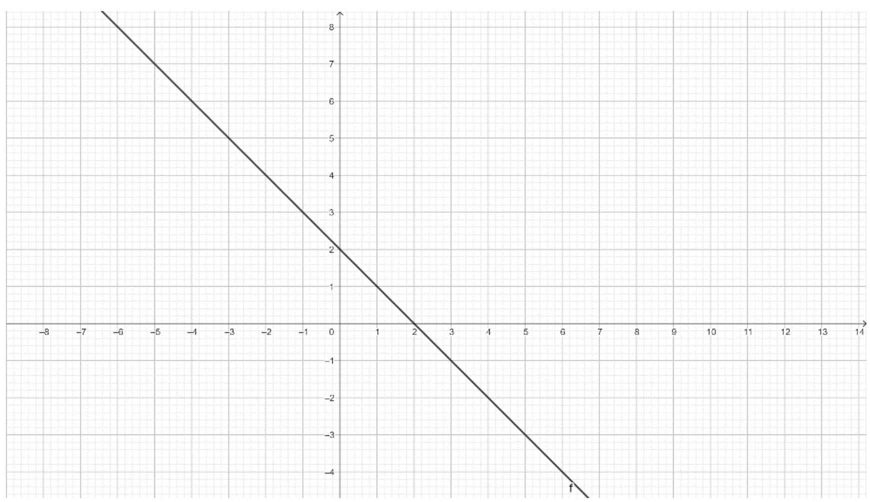
$$2 = \beta$$

Άρα η ευθεία είναι η $y = -x + 2$.

3) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε στην εφαρμογή Geogebra classic. (Μπάρλας, 2016)

https://www.geogebra.org/classic/

Σωστή απάντηση:



(Η εικόνα δημιουργήθηκε στο geogebra)

Αιτιολόγηση: βρίσκουμε δυο σημεία από τα οποία διέρχεται η ευθεία μας. Για ευκολία θα βρω τα σημεία τομής με τους άξονες.

Για x=0, $y = -0 + 2 = 2$ άρα Β(0,2)

Για y=0, $0 = -x + 2 \implies x = 2$ άρα Α(2,0)

Τοποθετούμε στο επίπεδο τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες. Ενώνουμε τα σημεία με μια ευθεία γραμμή και προεκτείνουμε.

Άσκηση 3η: Τα ποσά x και y στον παρακάτω πίνακα τιμών είναι αντιστρόφως ανάλογα.

x	3	6	8	12
y	α	4	β	γ

(Μπάρλας, 2016)

1) Οι άγνωστοι αριθμοί α, β και γ είναι ίσοι με: (Μπάρλας, 2016)

α) α=3, β=8, γ=12

β) α=2, β=6, γ=9

γ) α=8, β=3, γ=2

δ) α=2, β=3, γ=8

Σωστή απάντηση: γ

Αιτιολόγηση: τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα άρα έχουν σταθερό γινόμενο.

Αφού $6 \cdot 4 = 24$ τότ $x \cdot y = 24$ε. Άρα προκύπτει ότι α=8, β=3, γ=2

2) Ποιας από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ο πίνακας τιμών που μας δημιουργείται μετά την αντικατάσταση α=8, β=3 και γ=2; (Μπάρλας, 2016)

α) $y = 24x$

β) $y = \frac{24}{x}$

γ) $y = \frac{x}{24}$

δ) $24y = x$

Σωστή απάντηση: β

Αιτιολόγηση: $x \cdot y = 24$

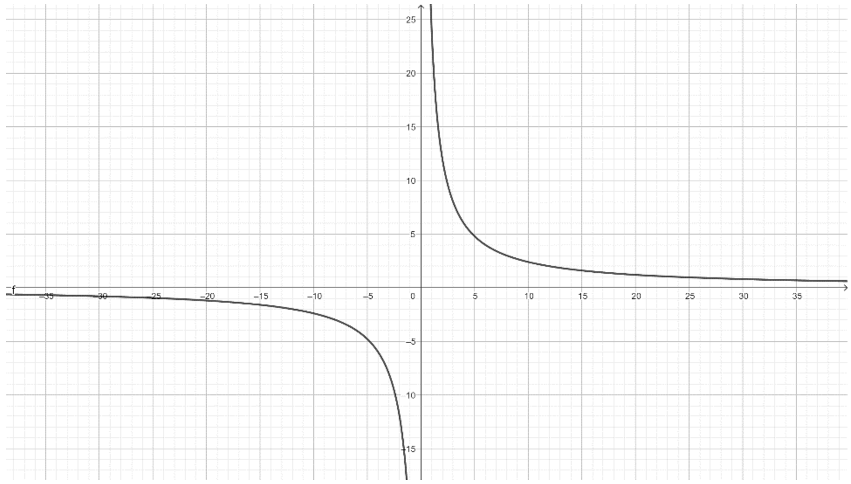
$$\frac{x \cdot y}{x} = \frac{24}{x}$$

$$y = \frac{24}{x}$$

3) Να σχεδιάσετε την υπερβολή $y = \frac{24}{x}$ στην εφαρμογή Geogebra classic. (Μπάρλας, 2016)

https://www.geogebra.org/classic/

Σωστή απάντηση:



(Η εικόνα δημιουργήθηκε στο geogebra)

Αιτιολόγηση: δημιουργούμε έναν πίνακα τιμών και για αρνητικές τιμές. Μπορούμε ενδεικτικά να βάλουμε όπου x τις τιμές -3, -8, -6, -12 και παίρνουμε τις τιμές του y: -8, -3, -4, -2 αντίστοιχα. Βρίσκουμε τα σημεία που προκύπτουν στο επίπεδο και με την χρήση της πένας διαγράφουμε την καμπύλη που προκύπτει. Προσέχουμε να μην ακουμπήσει ποτέ τους άξονες.

5.3.4 Δραστηριότητα αυτό-αξιολόγησης

Για την δραστηριότητα αυτή θα χρειαστείτε χαρτί και μολύβι ή στυλό.

Άσκηση $1^{η}$: Ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις περιγράφει την ευθεία με κλίση -5 η οποία τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο με τεταγμένη 2; (Μπάρλας, 2016)

α) $y = 2x - 5$
β) $y = -3x - 3$
γ) $y = -5x + 2$
δ) $y = -5x - 2$

Σωστή απάντηση: γ

Άσκηση $2^{η}$: Ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις περιγράφει την ευθεία που έχει κλίση 5 και διέρχεται από το σημείο Μ(2,-3); (Μπάρλας, 2016)

α) $y = 5x - 13$
β) $y = 2x - 3$
γ) $y = 10x - 3$

δ) $y = 5x - 3$

Σωστή απάντηση: α

Άσκηση 3^{η}: Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = (2\lambda + 1)x + 3\mu - 2$. (Μπάρλας, 2016)

1) Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y = -5x + 7$ τότε η τιμή του λ είναι ίση με:

α) 3
β) -3
γ) 2
δ) 0

Σωστή απάντηση: β

2) Αν ο αριθμός λ είναι όσο τον βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα και η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Α(-1, -6) τότε η τιμή του μ είναι ίση με: (Μπάρλας, 2016)

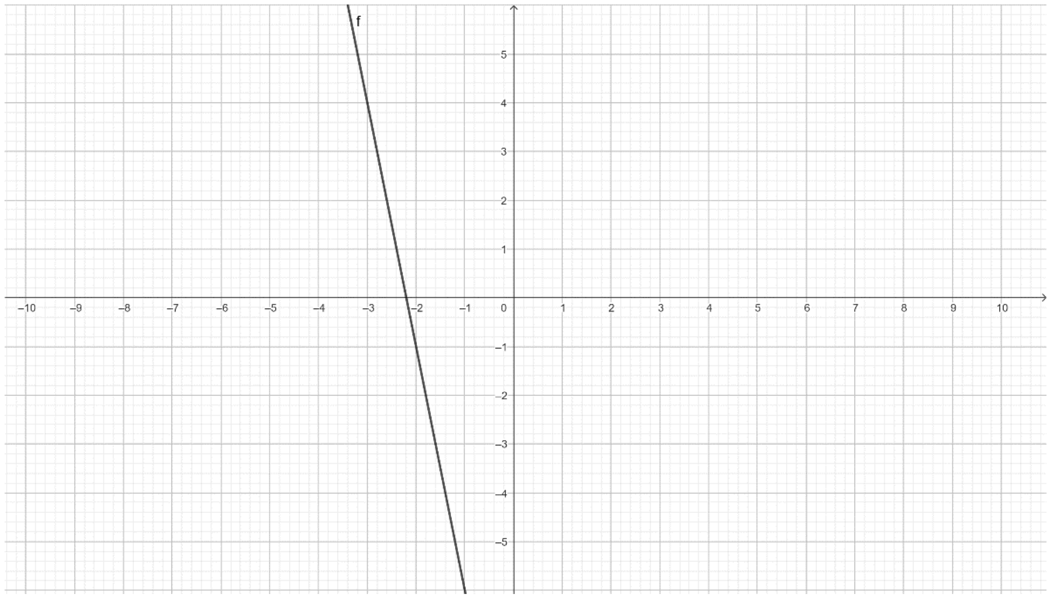
α) -3
β) 2
γ) $-\frac{1}{3}$
δ) 0

Σωστή απάντηση: α

3) Για τις τιμές του λ και μ που βρήκατε στα προηγούμενα ερωτήματα να σχεδιάσετε την ευθεία που προκύπτει στην εφαρμογή Geogebra classic. (Μπάρλας, 2016)

https://www.geogebra.org/classic/

Σωστή απάντηση:



(Η εικόνα δημιουργήθηκε στο geogebra)

5.4 Ανακεφαλαίωση και αυτό-αξιολόγηση διδακτικής ενότητας

5.4.1 Ανακεφαλαίωση

Σε αυτή την διδακτική ενότητα μάθαμε:

- ✓ Τι ονομάζουμε συνάρτηση.
- ✓ Να συμπληρώνουμε έναν πίνακα τιμών για μια συνάρτηση.
- ✓ Αν ξέρουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου να το τοποθετούμε στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.
- ✓ Να προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.
- ✓ Τι ονομάζουμε ανάλογα και τι αντιστρόφως ανάλογα ποσά.
- ✓ Τις ιδιότητες τις συνάρτησης $y = ax$.
- ✓ Τις ιδιότητες της συνάρτησης $y = ax + \beta$.
- ✓ Τις ιδιότητες της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$.
- ✓ Να σχεδιάζουμε τις συναρτήσεις $y = ax$, $y = ax + \beta$ και $y = \frac{a}{x}$ σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

5.4.2 Εργασία Ανοιχτής Απόκρισης

Για να ολοκληρώσετε αυτή την εργασία θα χρειαστείτε χαρτί και μολύβι ή στυλό.

Σας δίνονται το Φύλλο Εργασίας:

Φύλλο Εργασίας

ΘΕΜΑ 1^{O}

Α. Τι ονομάζουμε συνάρτηση;

Β. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ).

α) Ανάλογα είναι τα ποσά, που όταν μεγαλώνει το ένα, μεγαλώνει και το άλλο, πχ: ηλικία-ύψος

β) Σε ένα σύστημα συντεταγμένων, ο οριζόντιος άξονας είναι ο y'y.

γ) Η συνάρτηση y=ax εκφράζει μια σχέση αντιστρόφως ανάλογων ποσών.

δ) Η γραφική παράσταση της y=ax+β, διέρχεται από το σημείο (a,0).

ΘΕΜΑ 2^{O} (Μπάρλας, 2016)

Δίνεται η συνάρτηση y=2x-3.

Α. Να συμπληρωθεί ο πίνακας τιμών:

x	-2	-1	0			
y				-1	1	3

Β. Να εξετάσετε αν τα σημεία Α(3,3) και Β(-2,5) ανήκουν στην ευθεία που αναπαριστά η συνάρτηση y=2x-3.

Γ. Να σχεδιαστεί η ευθεία y=2x-3.

ΘΕΜΑ 3^{O} (Μπάρλας, 2016)

Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{2\lambda - 1}{x}$.

Α. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο Α(-3, 2) τότε να δείξετε ότι το $\lambda = -\frac{5}{2}$.

Β. Να σχεδιάσετε σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

ΘΕΜΑ 4$^{\text{ο}}$ (Μπάρλας, 2016)

Δίνεται η ευθεία $y = (a-1)x + 3$ που διέρχεται από το σημείο $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

Α. Να δείξετε ότι το $\alpha = \frac{1}{4}$ και να βρείτε ποια είναι η κλίση της ευθείας.

Β. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες και να την σχεδιάσετε σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Τέλος Φύλλου Εργασίας

Να λύσετε όλα τα θέματα που υπάρχουν στο φύλλο εργασίας στο χαρτί σας. Στην συνέχεια να φωτογραφίσετε το χαρτί με τις απαντήσεις σας και να επισυνάψετε την φωτογραφία στο πεδίο των απαντήσεων.

Ρουμπρίκα αξιολόγησης εργασίας από τον διδάσκοντα.

Κριτήρια				
ΘΕΜΑ 1$^{\text{ο}}$: Σε ποιο βαθμό επιλύθηκε το θέμα 1$^{\text{ο}}$;	Καθόλου: 0 βαθμοί	Ελάχιστα: 1 βαθμός	Ικανοποιητικά: 3 βαθμοί	Τέλεια: 5 βαθμοί
ΘΕΜΑ 2$^{\text{ο}}$: Σε ποιο βαθμό επιλύθηκε το θέμα 2$^{\text{ο}}$;	Καθόλου: 0 βαθμοί	Ελάχιστα: 1 βαθμός	Ικανοποιητικά: 3 βαθμοί	Τέλεια: 5 βαθμοί
ΘΕΜΑ 3$^{\text{ο}}$:	Καθόλου: 0 βαθμοί	Ελάχιστα: 1 βαθμός	Ικανοποιητικά: 3 βαθμοί	Τέλεια: 5 βαθμοί

Σε ποιο βαθμό επιλύθηκε το θέμα 3ο;				
ΘΕΜΑ 4ο: Σε ποιο βαθμό επιλύθηκε το θέμα 4ο;	Καθόλου: 0 βαθμοί	Ελάχιστα: 1 βαθμός	Ικανοποιητικά: 3 βαθμοί	Τέλεια: 5 βαθμοί

5.4.3 Checklist Μπορώ να κάνω…

Να αξιολογήσετε τις ικανότητες που αποκτήσατε σε αυτή την διδακτική ενότητα απαντώντας στο ακόλουθο ερωτηματολόγιο.

Ο αριθμός 1 αντιστοιχεί στο «καθόλου ή ελάχιστα» ενώ ο 5 στο «απόλυτα».

Δεν υπάρχουν σωστές ή λάθος απαντήσεις. Να γράψετε την αλήθεια.

1) Μπορώ να συμπληρώσω έναν πίνακα τιμών μιας συνάρτησης αν μου δίνεται ο τύπος της.

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

2) Μπορώ να βρω τις συντεταγμένες ενός σημείου σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

3) Μπορώ να τοποθετήσω ένα σημείο πάνω σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων αν γνωρίζω τις συντεταγμένες του σημείου.

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

4) Μπορώ να ξεχωρίσω από τον τύπο της συνάρτησης το σχήμα που θα έχει η γραφική της παράσταση.

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

5) Μπορώ να σχεδιάσω την γραφική παράσταση της ευθείας $y = ax$.

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

6) Μπορώ να σχεδιάσω την γραφική παράσταση της ευθείας $y = ax + \beta$.

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

7) Μπορώ να σχεδιάσω την γραφική παράσταση της υπερβολής $y = \frac{a}{x}$.

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

8) Μπορώ να ελέγξω αν ένα σημείο ανήκει στην γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

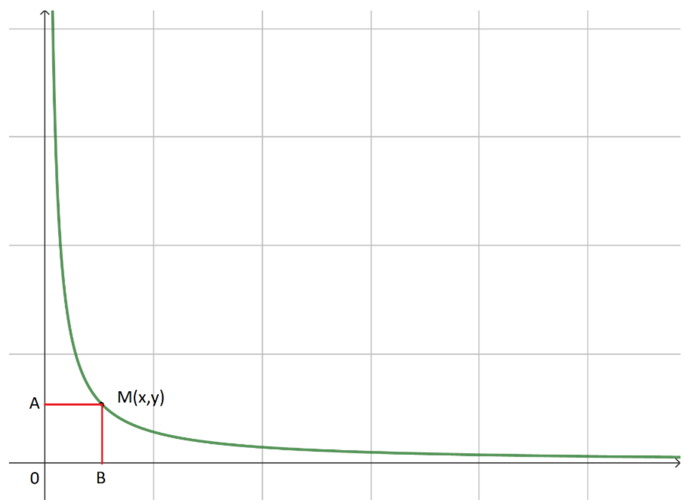
5.4.4 Forum

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε έναν κλάδο της υπερβολής $y = \frac{7}{x}$ και το ορθογώνιο ΜΑΟΒ.

α) Να βρείτε την περίμετρο του ορθογωνίου ΜΑΟΒ ως συνάρτηση του x.

β) Να βρείτε την περίμετρο του ΜΑΟΒ αν το Μ έχει τετμημένη ίση με 14.

(Μπάρλας, 2016)



(Η εικόνα δημιουργήθηκε στο geogebra)

Γράψτε στο Forum την δική σας λύση για το παραπάνω πρόβλημα. Εναλλακτικά μπορείτε να διορθώσετε ή να σχολιάσετε την λύση κάποιου άλλου μαθητή ή να συμπληρώσετε την σκέψη ή την μέθοδο επίλυσης κάποιου αν σας φαίνεται ελλιπής.

5.5 Πρόσθετο Υλικό

5.5.1 Προτάσεις για πρόσθετη εξάσκηση

Παρακολουθείστε τα παρακάτω video για περισσότερη εμβάθυνση στη θεωρία των συναρτήσεων.

https://www.youtube.com/watch?v=TTCWZnPg4FQ

https://www.youtube.com/watch?v=55cW0LHDh8U

https://www.youtube.com/watch?v=qst-fzNTTR0

https://www.youtube.com/watch?v=GW7Y92il6Pc

https://www.youtube.com/watch?v=aRhdLe__aww

https://www.youtube.com/watch?v=j6ehpNf9TDU

https://www.youtube.com/watch?v=ONH88yV20j4

Ημέρα 6η: Τελική Αξιολόγηση MOOC

6.0 Οδηγίες για τη διεξαγωγή της τελικής εξέτασης του MOOC

Ο τελικός βαθμός σας στο μάθημα προκύπτει από το quiz τελικής εξέτασης. Για να θεωρηθεί επιτυχής η εξέταση θα πρέπει να συγκεντρώσετε βαθμολογία > 60%.

Το Quiz αποτελείται από 3 θέματα συνδυαστικά από όλες τις διδακτικές ενότητες και περιλαμβάνουν:

- Πολλαπλή Επιλογή με μία σωστή απάντηση,
- Ερωτήσεις συμπλήρωσης αριθμού και
- Ερωτήσεις Σωστού/Λάθους.

Δεν υπάρχει περιορισμός χρόνου.

Θα έχετε δύο προσπάθειες να απαντήσετε σε όλες τις ερωτήσεις του κουίζ.

Μόλις κάνετε κλικ στο κουμπί "Έλεγχος", θα καταχωρηθεί ως πρώτη προσπάθεια. Αν είναι λάθος, δοκιμάστε ξανά και κάντε κλικ στο κουμπί "Τελικός έλεγχος".

Θα χρειαστείτε περίπου 60 λεπτά από το χρόνο σας για να ολοκληρώσετε αυτό το κουίζ, αλλά αξίζει αφού μπορεί να οδηγήσει στο πιστοποιητικό σας.

6.1 Τελική Εξέταση

Για την εργασία αυτή θα χρειαστείτε χαρτί και μολύβι ή στυλό.

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

1) Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α ονομάζουμε:

α) Τον αριθμό στον οποίο υψώνεται ο α.
β) Τον θετικό αριθμό ο οποίος υψώνεται στο τετράγωνο και μας δίνει α.
γ) Το τετράγωνο του αριθμού α.
δ) Το μισό του α.

Σωστή απάντηση: β

2) Μια εξίσωση 1^{ου} βαθμού μπορεί να έχει μία λύση, άπειρες λύσεις ή να μην έχει λύση.

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α

3) Συνάρτηση ονομάζουμε την σχέση που αντιστοιχίζει μια τιμή της μεταβλητής x με μια τιμή της μεταβλητής y.

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: β

4) Ο αριθμός $\sqrt{324}$ είναι άρρητος αριθμός.

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: β

5) Αλγεβρική παράσταση ονομάζουμε την παράσταση που περιλαμβάνει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές.

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α

6) Δίνεται η εξίσωση $x - (2x + 3) = 1 - 3x$. Παρακάτω δίνεται η λύση της εξίσωσης όπως την έλυσε ένας μαθητής.

$x - (2x + 3) = 1 - 3x$ ($1^{η}$ γραμμή)

$x - 2x - 3 = 1 - 3x$ ($2^{η}$ γραμμή)

$x - 2x - 3x = -3 + 1$ ($3^{η}$ γραμμή)

$-4x = -2$ ($4^{η}$ γραμμή)

$x = \frac{-2}{-4}$ ($5^{η}$ γραμμή)

$x = \frac{1}{2}$ ($6^{η}$ γραμμή)

Ο καθηγητής όμως του είπε ότι βρήκε λάθος αποτέλεσμα. Σε ποια γραμμή έκανε λάθος;

α) $2^{η}$
β) $3^{η}$
γ) $4^{η}$
δ) $5^{η}$
ε) $6^{η}$

Σωστή απάντηση: β

7) Δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά περιγράφονται από την συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$.

α) Σωστό
β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α

ΘΕΜΑ 2^{ο} (Μπάρλας, 2016)

1) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x-2}{5}-\frac{1-5x}{15}=\frac{x+1}{3}-1$$

Η λύση της εξίσωσης είναι:

α) 1
β) 2
γ) -1
δ) -2

Σωστή απάντηση: γ

2) Αν α=-1 είναι η λύση της εξίσωσης που βρήκατε στην ερώτηση 1 τότε να υπολογίσετε την αριθμητική παράσταση $A=\sqrt{3\alpha^2-\sqrt{7+\alpha\sqrt{\alpha+10}}}$ και να γράψετε στο κουτάκι που ακολουθεί το αριθμητικό αποτέλεσμα.

Σωστή απάντηση: 1

ΘΕΜΑ 3^{ο} (Μπάρλας, 2016)

Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $y=(2a+5)x-2$.

1) Αν η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, η τιμή του α είναι:

α) 2
β) 0
γ) -1
δ) 4

Σωστή απάντηση: γ

Για α=-1 να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα.

2) Η ευθεία τέμνει τον άξονα χ’χ στο σημείο $\Gamma\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

α) Σωστό

β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α

3) Η ευθεία τέμνει τον άξονα y’y στο σημείο $B(0, -2)$.

α) Σωστό

β) Λάθος

Σωστή απάντηση: α

4) Να βρείτε την τιμή του μ και να την γράψετε στο κουτάκι που ακολουθεί ώστε η ευθεία ε να είναι παράλληλη με την ευθεία $\zeta: y = (3\mu + 15)x$.

Σωστή απάντηση: -4

6.2 Οδηγίες για τη δημιουργία πιστοποιητικού του MOOC

Συγχαρητήρια!!!

Ολοκληρώσατε επιτυχώς το μάθημα!!!

https://tenor.com/el/view/congrats-congrats-gif-nrg-energi-task-gif-25488451

Τώρα μπορείτε να κατεβάσετε από την καρτέλα Progress το πιστοποιητικό σας.