

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής



Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΕΚΤΟΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ
ΕΛΕΓΧΟΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ: ΟΙ
ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΟΙ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Γεωργία Τριάντη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2024

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Ευαγγελάρας Χαράλαμπος (Αναπληρωτής Καθηγητής) (Επιβλέπων)
- Πολίτης Κωνσταντίνος (Αναπληρωτής Καθηγητής)
- Τριανταφύλλου Ιωάννης (Επίκουρος Καθηγητής)

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS
School of Finance and Statistics



Department of Statistics and Insurance Science

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**OFF-LINE STATISTICAL QUALITY
CONTROL: COMBINED ARRAYS**

By

Georgia Trianti

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of
the requirements for the degree of Master of Science in
Applied Statistics

Piraeus, Greece
September 2024

Στην οικογένεια μου

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος «Εφαρμοσμένη Στατιστική» για τις γνώσεις που μου μετέδωσαν καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, και ιδιαιτέρως τον κ. Χαράλαμπο Ευαγγελάρα ο οποίος με καθοδήγησε στην εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας. Οι γνώσεις που μου προσέφερε και η ανταπόκριση του σε ό,τι και αν χρειάστηκα ήταν πολύ σημαντικές για την ομαλή πορεία της διπλωματικής αυτής εργασίας και δημιούργησαν ένα ευχάριστο κλίμα συνεργασίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου για την συνεχής στήριξη τους.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή, στόχος μας είναι να εξετάσουμε την αποτελεσματικότητα των συνδυασμένων σχηματισμών ως έναν εξελιγμένο τρόπο διεξαγωγής πειραμάτων. Στη στατιστική, σημαντικό ρόλο έχουν οι παραγοντικοί σχεδιασμοί. Μας δίνουν τη δυνατότητα να ελέγξουμε τις επιδράσεις πολλών παραγόντων ταυτόχρονα αλλά και αλληλεπιδράσεων τους δίνοντας μας επίσης τη δυνατότητα να μειώσουμε το πλήθος των πειραματικών δοκιμών με τους κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς. Οι σχεδιασμοί αυτοί είναι συνήθως ορθογώνιοι και έτσι οι επιδράσεις που θέλουμε να εκτιμήσουμε μπορούν να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Ο Taguchi θεωρείται αυτός που ανέδειξε τη χρήση των ορθογώνιων σχηματισμών και κατάφερε να μειώσει τη μεταβλητότητα σε ένα πείραμα, βελτιώνοντας την ποιότητα. Είναι γνωστό πως χρησιμοποιούσε δύο σχεδιασμούς για την ανάλυση του. Δηλαδή έναν εσωτερικής διάταξης και έναν εξωτερικής. Στην προσπάθεια μείωσης των σχεδιασμών για την εξοικονόμηση πόρων και χρόνου, άρχισε να χρησιμοποιείται ένας διασταυρούμενος σχεδιασμός (*Crossed Array*). Με τη βοήθεια της μεθόδου των αποκριτικών επιφανειών και την ανάλυση παλινδρόμησης γίνεται εκτίμηση των επιδράσεων. Παρόλα αυτά το πλήθος των εκτελέσεων είναι μεγάλο και έτσι καταλήγει να είναι δαπανηρό π.χ. για τις βιομηχανίες.

Η ανάγκη μείωσης του κόστους οδήγησε σε ανάγκη μείωσης των πειραματικών δοκιμών χωρίς να επηρεαστεί όμως η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων. Αρκετοί είναι εκείνοι οι οποίοι πρότειναν να γίνεται χρήση συνδυασμένων σχηματισμών. Οι σχεδιασμοί αυτοί έχουν λιγότερες εκτελέσεις από τους διασταυρούμενους σχεδιασμούς καθώς είναι σαν ένα υποσύνολό τους. Είναι κυρίως μη ισόμορφοι ορθογώνιοι σχεδιασμοί και μας δίνουν τη δυνατότητα να επιλέξουμε τον κατάλληλο αναλόγως το τι επιδράσεις θέλουμε να εκτιμήσουμε. Βάσει του κριτηρίου αποδοτικότητας $D - Efficiency$ γίνεται η επιλογή των βέλτιστων σχεδιασμών από τους χιλιάδες διαθέσιμους αναλόγως το πλήθος των παραγόντων και των πειραματικών δοκιμών. Έτσι επιτυγχάνεται οικονομία χρόνου και ελάττωση του κόστους εκτέλεσης του πειράματος, με τον πειραματιστή να μπορεί να λάβει αξιόπιστες αποφάσεις.

Abstract

In this paper, our aim is to examine the effectiveness of combined arrays as an advanced method for conducting experiments. In statistics, factorial designs play a significant role, as they enable us to simultaneously assess the effects of multiple factors and their interactions, thereby allowing us to reduce the number of experimental trials using fractional factorial designs. These designs are typically orthogonal, ensuring that the effects we seek to estimate remain independent of one another.

Taguchi is recognized for promoting the use of orthogonal arrays, which successfully reduced variability in experiments, thereby improving quality. He is known for employing two types of designs in his analysis: an inner array and an outer array. In an effort to reduce the number of designs to save resources and time, a crossed array design began to be used. By employing response surface methodology and regression analysis, the effects can be estimated. However, the number of runs required remains high, making the process costly, particularly for industries.

The need to reduce costs led to the requirement to decrease the number of experimental runs without compromising the reliability of the results. Many have suggested the use of combined arrays, which require fewer runs than crossed arrays as they are essentially a subset of the latter. These are primarily non-isomorphic orthogonal designs, allowing the selection of an appropriate design depending on the effects that need to be estimated. The optimal designs are chosen based on the D-Efficiency criterion from thousands of available options, depending on the number of factors and experimental trials. This approach achieves time efficiency and reduces the cost of conducting experiments, enabling the experimenter to make reliable decisions.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή		
1.1	Ανάλυση Παλινδρόμησης και Ανάλυση Διακύμανσης	1
1.2	Παραγοντικοί Σχεδιασμοί με 2 επίπεδα	3
1.3	Κλασματικοί Παραγοντικοί Σχεδιασμοί με 2 επίπεδα	5
1.4	Ορθογώνιοι Σχηματισμοί	6
1.5	Διακριτική Ικανότητα R	7
1.5.1	Plackett – Burman Σχεδιασμοί	8
1.5.2	Απλοί (<i>Regular</i>) – Σύνθετοι (<i>Non Regular</i>) Ορθογώνιοι Σχεδιασμοί	9
1.6	Σύνοψη	10
2. Μεθοδολογία Taguchi		
2.1	Εύρωστος Παραμετρικός Σχεδιασμός – Εκτός Σειράς Έλεγχος Ποιότητας	11
2.2	Μεθοδολογία Taguchi	12
2.2.1	Παράδειγμα	15
2.3	Διασταυρούμενοι Σχεδιασμοί (<i>Crossed Arrays</i>)	20
2.3.1	Μέθοδος Αποκριτικών Επιφανειών (<i>Response Surface Approach</i>)	21
2.3.2	Παράδειγμα	24
2.4	Ορθογώνιες Αντιθέσεις (για τη μοντελοποίηση επιδράσεων από παράγοντες με περισσότερα από 2 επίπεδα)	27
2.4.1	Παράδειγμα παραγόντων με περισσότερα από 2 επίπεδα	28
2.5	Σύνοψη	31
3. Combined Arrays – Συνδυασμένοι Σχηματισμοί		
3.1	Συνδυασμένοι Σχηματισμοί	33
3.2	Μη ισόμορφοι Ορθογώνιοι Πίνακες	35
3.3	Κριτήριο Αποδοτικότητας D - Efficiency	36
3.4	Παράδειγμα υπολογισμού αποδοτικότητας σχεδιασμού	37
3.5	Σύνοψη	41

4. Εφαρμογές	
4.1 Μελέτη Σχεδιασμών με 3 Παράγοντες	42
4.1.1 2 Παράγοντες Ελέγχου και 1 Παράγοντας Θορύβου	42
4.1.2 1 Παράγοντας Ελέγχου και 2 Παράγοντες Θορύβου	47
4.2 Μελέτη Σχεδιασμών με 4 Παράγοντες	50
4.2.1 1 Παράγοντας Ελέγχου και 3 Παράγοντες Θορύβου	50
4.2.2 3 Παράγοντες Ελέγχου και 1 Παράγοντας Θορύβου	56
4.2.3 2 Παράγοντες Ελέγχου και 2 Παράγοντες Θορύβου	59
4.3 Μελέτη Σχεδιασμών με 5 Παράγοντες	64
4.3.1 2 Παράγοντες Ελέγχου και 3 Παράγοντας Θορύβου	64
4.3.2 3 Παράγοντες Ελέγχου και 2 Παράγοντας Θορύβου	69
4.4 Μελέτη Σχεδιασμών με 6 Παράγοντες	73
4.5 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα - Σύνοψη	78
Περίληψη	viii
Abstract	x
Βιβλιογραφία	80

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 1

Εισαγωγή

1.1 Ανάλυση Παλινδρόμησης και Ανάλυση Διακύμανσης

Η Στατιστική θεωρείται ένα μεγάλο εργαλείο για κάθε επιστήμονα και ιδιαιτέρως στην προκειμένη περίπτωση για κάθε πειραματιστή. Γενικά, ο πειραματισμός είναι μία διαδικασία η οποία διενεργείται ώστε να γίνει έλεγχος του κατά πόσο κάποιος παράγοντας επηρεάζει μία διεργασία την οποία θέλουμε να εξετάσουμε. Είναι προφανές πως μία διεργασία μπορεί να επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες και προφανώς μερικοί από αυτούς θα έχουν σημαντική επίδραση στο κομμάτι που ελέγχουμε σε αντίθεση με κάποιους άλλους μηδαμινής επίδρασης. Ως επίδραση ορίζεται η παρατηρούμενη μεταβολή της μεταβλητής απόκρισης, καθώς μεταβάλλονται οι θεραπείες, δηλαδή ο κάθε συνδυασμός επιπέδων των παραγόντων που εξετάζονται σε ένα πείραμα. Υπάρχουν παράγοντες οι οποίοι δεν είναι εύκολο να μελετηθούν και γι' αυτό ονομάζονται παράγοντες «θορύβου». Σκοπός του πειραματιστή είναι να μελετήσει τουλάχιστον τους υπόλοιπους παράγοντες ώστε να μειώσει ταυτόχρονα και την επίδραση των παραγόντων «θορύβου». Λαμβάνοντας ο κάθε παράγοντας διάφορες προμελετημένες τιμές, δίνεται η δυνατότητα στον πειραματιστή να εντοπίσει την επίδραση του κάθε παράγοντα προς μελέτη. Οι τιμές αυτές αποκαλούνται επίπεδα. Ακόμη, οι παράγοντες διακρίνονται σε ποσοτικούς και ποιοτικούς. Για παράδειγμα, ως ποσοτικός παράγοντας μπορεί να θεωρηθεί η θερμοκρασία και γενικά οποιοσδήποτε παράγοντας για τον οποίο τα επίπεδα επιλέγονται με βάση το εύρος τιμών που μας αφορά να μελετήσουμε. Ως ποιοτικός παράγοντας μπορεί να θεωρηθεί το φύλο ενός ατόμου ή γενικά παράγοντες για τους οποίους τα επίπεδα αντιπροσωπεύουν όλες τις δυνατές καταστάσεις που μας ενδιαφέρουν ή ένα τυχαίο δείγμα καταστάσεων.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τον κάθε πειραματικό σχεδιασμό αναλύονται με μεθόδους στατιστικής ανάλυσης και έτσι εξάγονται τα συμπεράσματα και οι προτάσεις που μπορεί να κάνει ο πειραματιστής. Για να είναι όσο πιο έγκυρα τα συμπεράσματα αυτά βάσει των αποτελεσμάτων, θα πρέπει να έχει προηγηθεί κατανόηση του προβλήματος υπό μελέτη

ώστε να επιλέξουμε τη σωστή μεταβλητή απόκρισης της οποίας το αποτέλεσμα μετριούνται στο πείραμα αλλά και τους κατάλληλους παράγοντες με τα αντίστοιχα επίπεδα που θεωρούμε ότι έχουν επιρροή.

Γενικά, ένας παραγοντικός σχεδιασμός δίνει τη δυνατότητα να βρεθεί ένας βέλτιστος συνδυασμός των επιπέδων των παραγόντων που βελτιστοποιεί την απόκριση, δηλαδή η βέλτιστη θεραπεία, μειώνοντας το πειραματικό σφάλμα, δηλαδή την μεταβλητότητα της μεταβλητής απόκρισης η οποία δεν είναι δυνατό να αποδοθεί σε αλλαγή θεραπείας. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, υπάρχουν στατιστικά εργαλεία τα οποία είναι ικανά να μας βοηθήσουν στην ανάλυση και την εξαγωγή αποτελεσμάτων του πειράματος. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στο κομμάτι αυτό είναι κυρίως η πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση και η ανάλυση διακύμανσης.

Να αναφέρουμε πως στους πειραματικούς σχεδιασμούς γίνεται συνήθως έλεγχος αρκετών ή και πολλών παραγόντων. Εάν θεωρήσουμε ότι έχουμε να μελετήσουμε 2 παράγοντες, τον Π1 και τον Π2, αντίστοιχα θα περιλαμβάνουν π_1 και π_2 πλήθος επιπέδων, οι συνδυασμοί των οποίων δημιουργούν $\pi_1\pi_2$ θεραπείες στο σύνολο. Γενικά είναι δυνατό να έχουμε n επαναλήψεις και κάθε επανάληψη να περιλαμβάνει όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των επιπέδων των παραγόντων. Η ερώτηση την οποία καλείται ο πειραματιστής να απαντήσει είναι τι επίδραση έχουν οι παράγοντες προς εξέταση στην μεταβλητή απόκρισης. Οι επιδράσεις διακρίνονται σε δύο κατηγορίες, σε κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις. Κύρια επίδραση είναι αυτή που έχει ένας παράγοντας στην μεταβλητή απόκρισης όταν αλλάζει επίπεδο και δεν λαμβάνεται υπόψιν κανένας άλλος παράγοντας. Αλληλεπίδραση είναι η από κοινού επίδραση που έχουν στην μεταβλητή απόκρισης οι παράγοντες οι οποίοι βρίσκονται ο καθένας σε διαφορετικό επίπεδο.

Με την πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση μπορούμε να προσδιορίσουμε τη σχέση της εξαρτημένης μεταβλητής απόκρισης με τις ανεξάρτητες μεταβλητές που ορίζονται από τις επιδράσεις των παραγόντων, να προβλέψουμε ή να εκτιμήσουμε την μέση απόκριση για οποιεσδήποτε τιμές των παραγόντων ανάμεσα στα επίπεδα τα οποία εξετάζουμε. Θεωρείται ιδιαίτερα βοηθητικό και χρήσιμο στον πειραματικό σχεδιασμό καθώς είναι σύνηθες πολλοί παράγοντες να επηρεάζουν την απόκριση ή να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και έτσι να συνεισφέρουν στα τελικά συμπεράσματα που εξάγονται.

Για την επιλογή των βέλτιστων επιπέδων των παραγόντων χρησιμοποιούμε την ανάλυση διασποράς και έπειτα κάνουμε πολλαπλές συγκρίσεις. Πριν αναλύσουμε όμως την διαδικασία

της ανάλυσης διασποράς, θα αναφερθούμε στο πως εκτελούνται οι πολλαπλές συγκρίσεις όσον αφορά τον έλεγχο των αλληλεπιδράσεων. Αν οι αλληλεπιδράσεις δεν θεωρούνται σημαντικές, διενεργούμε την διαδικασία ξεχωριστά για κάθε παράγοντα και βάσει της ανάλυσης επιλέγουμε το καλύτερο επίπεδο για τον καθένα. Αν κάποιες αλληλεπιδράσεις είναι σημαντικές, τότε ακολουθείται μία πιο σύνθετη διαδικασία όπου σταθεροποιούμε κάποιους παράγοντες σε συγκεκριμένα επίπεδα και κάνουμε πολλαπλές συγκρίσεις στους άλλους. Εν τέλει επιλέγουμε το καλύτερο επίπεδο λαμβάνοντας υπόψιν όλες τις συγκρίσεις που έγιναν.

Με τη βοήθεια της Ανάλυσης της Διακύμανσης (*ANOVA, Analysis of Variance*), μας δίνεται η δυνατότητα να ελέγξουμε τη σημαντικότητα και τη σημασία των παραγόντων και των αλληλεπιδράσεων τους στο κάθε πειραματικό σχεδιασμό. Δηλαδή, γίνεται ανάλυση των κύριων επιδράσεων κάθε παράγοντα αλλά και των αλληλεπιδράσεων μεταξύ τους. Με την ανάλυση αυτή διασπάται η συνολική διακύμανση που εντοπίζεται στα δεδομένα σε συνιστώσες που σχετίζονται με τις παραγοντικές επιδράσεις και το πειραματικό σφάλμα. Συγκρίνοντας τη διακύμανση που εξηγείται από το μοντέλο με την διακύμανση που παραμένει ανεξήγητη, η Ανάλυση Διακύμανσης μέσω F-test μπορεί να προσδιορίσει αν οι επιδράσεις που παρατηρήθηκαν είναι στατιστικά σημαντικές. Διευκρινίζοντας παραπάνω, η ανάλυση πραγματοποιείται μέσω της σύγκρισης των μέσων τετραγώνων των παραγόντων διά το αντίστοιχο του σφάλματος, και ο λόγος αυτός ακολουθεί την κατανομή F, με τους κατάλληλους βαθμούς ελευθερίας για τον αριθμητή και τον παρονομαστή.

1.2 Παραγοντικοί Σχεδιασμοί με 2 επίπεδα

Οι παραγοντικοί σχεδιασμοί είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι ειδικότερα σε πειράματα που περιλαμβάνουν πολλούς παράγοντες και αποτελούν βάση της πειραματικής μεθοδολογίας. Επιτρέπουν στον πειραματιστή να ερευνήσει τις επιδράσεις πολλών παραγόντων ταυτόχρονα, και όχι μόνο τις κύριες επιδράσεις, αλλά και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ αυτών. Έμφαση θα δώσουμε στην κατηγορία των σχεδιασμών αυτών οι οποίοι αποτελούνται από k παράγοντες και σκοπός μας είναι να εξετάσουμε μόνο δύο επίπεδα για τον καθένα. Τα επίπεδα αυτά, όπως έχει αναφερθεί, μπορεί να είναι είτε ποσοτικά (π.χ. δύο τιμές της πίεσης) είτε ποιοτικά (π.χ. δύο μηχανές). Ο συμβολισμός των δύο αυτών επιπέδων είναι αρκετά απλός. Την χαμηλή στάθμη, δηλαδή το χαμηλό επίπεδο, το συμβολίζουμε ως «-» ή «-1» και την υψηλή στάθμη, δηλαδή το υψηλό επίπεδο, ως «+» ή «+1». Μία πλήρης επανάληψη ενός σχεδιασμού, για

παράδειγμα με 4 παράγοντες, αποτελείται από $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$ παρατηρήσεις και είναι ένας 2^4 παραγοντικός σχεδιασμός.

Ένα από τα πλεονεκτήματα των παραγοντικών σχεδιασμών είναι πως έχουν αποδειχθεί πολύ αποδοτικά καθώς επιτρέπουν τη διερεύνηση πολλών παραγόντων χωρίς να χρειάζεται μεγάλο πλήθος δοκιμών. Ακόμη, βασική γνώση είναι πως παρέχουν ένα ξεκάθαρο πλαίσιο για τον εντοπισμό αλληλεπιδράσεων μεταξύ των παραγόντων, δηλαδή το πώς η επίδραση ενός παράγοντα διαφοροποιείται στα επίπεδα ενός άλλου παράγοντα. Ως αποτέλεσμα το πείραμα γίνεται πιο κατανοητό και οι αποφάσεις του πειραματιστή βελτιστοποιούνται.

Πέρα από το θεωρητικό κομμάτι μας ενδιαφέρει και η πρόβλεψη της απόκρισης ή της μέσης απόκρισης για οποιεσδήποτε τιμές των παραγόντων ανάμεσα στα δύο επίπεδα τους. Για την περίπτωση αυτή, το μοντέλο παλινδρόμησης το οποίο κατασκευάζεται με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και τη διαδικασία της πολλαπλής παλινδρόμησης, για παράδειγμα για τρεις παράγοντες, είναι το εξής:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times A + \beta_2 \times B + \beta_3 \times \Gamma + \beta_4 \times AB + \beta_5 \times A\Gamma + \beta_6 \times B\Gamma + \beta_7 \times AB\Gamma + \varepsilon$$

όπου,

- Y είναι η μεταβλητή απόκρισης
- β_i είναι οι παράμετροι του μοντέλου για $i = 1, \dots, 7$
- οι όροι A, B, Γ με τιμές $+1$ ή -1 αφορούν τις κύριες επιδράσεις των παραγόντων και είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους
- οι όροι $AB, A\Gamma, B\Gamma, AB\Gamma$ αφορούν τις αλληλεπιδράσεις των παραγόντων
- ε είναι το τυχαίο σφάλμα για το οποίο ισχύει $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$

Γενικά, στην μελέτη των k παραγόντων σε δύο επίπεδα, το μοντέλο παλινδρόμησης θα είναι της ίδιας μορφής απλώς θα περιέχει k κύριες επιδράσεις, $\binom{k}{2}$ αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων, $\binom{k}{3}$ αλληλεπιδράσεις τριών παραγόντων και ούτω καθεξής μέχρι να φτάσει στη μία αλληλεπίδραση k παραγόντων. Συνολικά θα καταλήξουμε να έχουμε $2^k - 1$ επιδράσεις, η εκτίμηση των οποίων βρίσκεται μέσω του μοντέλου παλινδρόμησης. Πιο συγκεκριμένα, η εκτίμηση της κάθε επίδρασης ισούται με το διπλάσιο της εκτίμησης της αντίστοιχης παραμέτρου στο μοντέλο.

Στην περίπτωση που οι παράγοντες προς διερεύνηση είναι αρκετοί και οι πόροι για την εξαγωγή του πειράματος είναι περιορισμένοι γίνεται επιτακτική η ανάγκη μείωσης των

επαναλήψεων του πειράματος. Όταν έχουμε μία επανάληψη του πειράματος ενός 2^k παραγοντικού σχεδιασμού ονομάζεται μη – επαναλαμβανόμενος πλήρης παραγοντικός σχεδιασμός. Το πρόβλημα στην περίπτωση αυτή είναι πως δεν είναι εφικτή η εκτίμηση του σφάλματος όταν εκτιμάμε όλες τις παραγοντικές επιδράσεις με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να πραγματοποιήσουμε ελέγχους για την σημαντικότητα των επιδράσεων. Μία λύση του προβλήματος αυτού είναι να θεωρήσουμε πως κάποιες αλληλεπιδράσεις υψηλής τάξης δεν είναι σημαντικές και να εκτιμήσουμε ένα ψευδοσφάλμα συνδυάζοντας τα αθροίσματα τετραγώνων υψηλής τάξης αλληλεπιδράσεων, δηλαδή τα μέσα τετράγωνα αυτών. Υπάρχουν τρεις βασικές αρχές για τις παραγοντικές επιδράσεις. Η Ιεραρχία, σύμφωνα με την οποία επιδράσεις χαμηλής τάξης είναι πιο πιθανό να είναι σημαντικές από αυτές υψηλής τάξης. Η Σποραδικότητα, σύμφωνα με την οποία ο αριθμός των σημαντικών επιδράσεων σε ένα παραγοντικό πείραμα είναι μικρός. Και τέλος, η Κληρονομικότητα, σύμφωνα με την οποία για να είναι μία αλληλεπίδραση σημαντική πρέπει όλοι οι «γονείς» της ή τουλάχιστον ένας να είναι σημαντικοί. Βάσει των αρχών αυτών, οι αλληλεπιδράσεις υψηλής τάξης δεν θα είναι πιθανότατα σημαντικές. Μία δεύτερη λύση είναι μέσω αναπαράστασης των επιδράσεων μέσω του διαγράμματος κανονικής πιθανότητας ή αλλιώς Daniel's Plot. Σύμφωνα με το διάγραμμα αυτό, οι επιδράσεις οι οποίες είναι αμελητέες έχουν την τάση να πέφτουν πάνω σε μία ευθεία γραμμή στο γράφημα. Αντιθέτως, οι επιδράσεις που είναι απομακρυσμένες από την ευθεία είναι σημαντικές.

1.3 Κλασματικοί Παραγοντικοί Σχεδιασμοί με 2 επίπεδα

Οι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί χρησιμοποιούνται όταν αυξάνεται το πλήθος των παραγόντων σε έναν πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό 2^k και ως αποτέλεσμα αυξάνεται και το πλήθος των πειραματικών δοκιμών που απαιτούνται. Έτσι, αντί να εκτελούνται όλοι οι συνδυασμοί μεταξύ των παραγόντων, επιλέγεται ένα υποσύνολο αυτών χωρίς να μειώνεται η εγκυρότητα των αποτελεσμάτων όσον αφορά τις κύριες επιδράσεις και τις αλληλεπιδράσεις. Για παράδειγμα, στην περίπτωση μελέτης 7 παραγόντων χρειαζόμαστε $2^7 = 128$ εκτελέσεις. Από τους 127 βαθμούς ελευθερίας, μόνο οι 7 αντιστοιχούν στις κύριες επιδράσεις και μόνο 21 στις αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων. Οι 99 βαθμοί ελευθερίας που απομένουν αντιστοιχούν στις αλληλεπιδράσεις τριών, τεσσάρων και περισσότερων παραγόντων, όπου πολλές από αυτές είναι πολύ πιθανό να μην είναι σημαντικές.

Από τα κύρια και σημαντικότερα πλεονεκτήματα των κλασματικών σχεδιασμών είναι η οικονομία όταν δεν υπάρχουν αρκετοί πόροι και η αποδοτικότητα που τους χαρακτηρίζει. Συμβολίζονται ως 2^{k-p} , όπου p είναι το πλήθος των γεννητόρων του σχεδιασμού. Πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στην επιλογή του υποσυνόλου των εκτελέσεων του πειράματος καθώς υπάρχει περίπτωση σύγχυσης, για παράδειγμα, κύριων επιδράσεων με αλληλεπιδράσεις τριών παραγόντων. Χρήσιμο θεωρείται το κριτήριο της διακριτικής ικανότητας ώστε να επιλεγθεί το πιο κατάλληλο κλάσμα.

1.4 Ορθογώνιοι Σχηματισμοί

Οι ορθογώνιοι σχηματισμοί αναδείχθηκαν ιδιαίτερα μέσω των εφαρμογών του Taguchi. Αρχικά, είχαν χρησιμοποιηθεί από τον Rao το 1947, ο οποίος είναι υπεύθυνος για την θεωρία των ορθογώνιων σχηματισμών. Συμβολίζονται συνήθως ως $OA(n,q,s,t)$, όπου n είναι οι εκτελέσεις του πειράματος (γραμμές), q είναι ο αριθμός των παραγόντων (στήλες), s είναι ο αριθμός των επιπέδων του κάθε παράγοντα και t η ισχύς (δύναμη) του πειραματικού σχεδιασμού. Είναι ένας πίνακας $n \times q$ του οποίου κάθε ζευγάρι στηλών έχει την ιδιότητα να εμφανίζει κάθε διατεταγμένο ζευγάρι στοιχείων ίσο αριθμό φορές. Ονομάζονται και συμμετρικοί ορθογώνιοι σχηματισμοί καθώς κάθε στήλη περιέχει τον ίδιο αριθμό επιπέδων s . Θεωρούνται ισορροπημένοι σχεδιασμοί καθώς σε κάθε στήλη του σχηματισμού θα εμφανίζεται ίσος αριθμός $+1$ και -1 (π.χ. για δύο επίπεδα). Επίσης, μπορούν να θεωρηθούν και ισόμορφοι εάν παρατηρηθεί πως ανάμεσα σε δύο ορθογώνιους σχεδιασμούς, ο ένας προκύπτει από τον άλλο με μεταθέσεις γραμμών, στηλών ή και συμβόλων των επιπέδων σε κάθε στήλη.

Στην κατηγορία των ορθογώνιων σχηματισμών ανήκουν οι πλήρεις και οι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί με 2 ή και 3 επίπεδα. Σε έναν πειραματικό σχεδιασμό μας ενδιαφέρει να μπορούμε να κατασκευάσουμε σχεδιασμούς οικονομικούς οι οποίοι να μπορούν να εξάγουν αξιόπιστα συμπεράσματα. Η ανάγκη αυτή δημιουργήθηκε διότι δεν υπάρχουν πάντα οι πόροι για να αναλυθεί ένας πλήρης παραγοντικός σχεδιασμός ακόμη και όταν επρόκειτο για 2 επίπεδα. Οι εκτελέσεις που χρειάζονται είναι δύναμη του 2 και μόνο για 8 παράγοντες χρειαζόμαστε 256 εκτελέσεις. Συνεπώς, οι ορθογώνιοι σχηματισμοί θεωρούνται μία πολύ καλή λύση και το μόνο που προαπαιτούν είναι το πλήθος των εκτελέσεων να είναι πολλαπλάσιο του 4. Μπορούν να προκύψουν από την σωστή επιλογή γραμμών ενός πλήρους 2^4 παραγοντικού σχεδιασμού, εξετάζοντας την απαίτηση ο πίνακας πληροφορίας ενός γραμμικού μοντέλου που

προκύπτει από το σχεδιασμό και περιλαμβάνει μόνο τις κύριες επιδράσεις να είναι διαγώνιος. Έτσι, οι εκτιμήσεις των κύριων επιδράσεων θα είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους. Επιπλέον, μπορούμε να εκτιμήσουμε εκτός από κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις επιλέγοντας τον κατάλληλο ορθογώνιο σχεδιασμό, με την ίδια λογική του διαγώνιου πίνακα πληροφορίας ενός μοντέλου προς εκτίμηση. Πρέπει όμως και εδώ να προσέξουμε τι διακριτική ικανότητα (R) έχει ο εκάστοτε σχεδιασμός.

1.5 Διακριτική Ικανότητα R

Κάθε κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός χαρακτηρίζεται από τις αρχικές ορίζουσες σχέσεις του (που προκύπτουν από τους γεννήτρες του), έστω p. Με τον τρόπο αυτό εντοπίζουμε τις επιδράσεις που συγχέονται μεταξύ τους, οι οποίες ονομάζονται ταυτόσημες. Το κριτήριο της διακριτικής ικανότητας μας βοηθάει ώστε να γνωρίζουμε εξ' αρχής από τις ορίζουσες σχέσεις ποιες κύριες επιδράσεις ή αλληλεπιδράσεις θα είναι ταυτόσημες. Γενικά, είναι γνωστό πως ένας σχεδιασμός έχει διακριτική ικανότητα $R = t + 1$, αν καμία επίδραση q παραγόντων δεν είναι ταυτόσημη με άλλη επίδραση που περιέχει λιγότερους από $R - q$ παράγοντες. Η διακριτική ικανότητα μπορεί εύκολα να βρεθεί από το μήκος της ορίζουσας με τα λιγότερα γράμματα.

Να αναφέρουμε στο σημείο αυτό πως ένας εύκολος τρόπος εύρεσης της διακριτικής ικανότητας ενός σχεδιασμού είναι τα J – Χαρακτηριστικά τα οποία εισήχθησαν από τους Deng and Tang το 1999. Συμβολίζονται ως J_m και δείχνουν το μέγεθος της συσχέτισης μεταξύ των επιδράσεων των παραγόντων, με τον δείκτη m να υποδεικνύει τις αλληλεπιδράσεις (π.χ. για $m = 1$ υπονοούνται οι κύριες επιδράσεις, για $m = 2$ υπονοούνται οι αλληλεπιδράσεις 1^{ης} τάξης, κλπ). Ιδανική τιμή των J – Χαρακτηριστικών είναι το 0. Εάν η τιμή βρεθεί ίση με το πλήθος των γραμμών του σχεδιασμού, τότε θα έχουμε βρει και μία ορίζουσα του σχεδιασμού. Για παράδειγμα, σε έναν σχεδιασμό με 8 γραμμές, αν $m = 3$, $S = \{A, B, C\}$ και $A*B*C = 8$, καταλαβαίνουμε πως $I = ABC$. Ο τύπος εύρεσης των J - χαρακτηριστικών είναι:

$$J_m(S) = \sum_{i=1}^n d_{ij_1} \cdot d_{ij_2} \cdot \dots \cdot d_{ij_m},$$

όπου n είναι το πλήθος των γραμμών του σχεδιασμού, $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ είναι ένα σύνολο k στηλών ενός $n \times k$ σχεδιασμού και S είναι ένα υποσύνολο $\{d_{j_1}, d_{j_2}, \dots, d_{j_m}\}$ από m στήλες του D και για όλα τα $m = 1, 2, \dots, k$.

Πρέπει να τονιστεί πως είναι επιθυμητό ο σχεδιασμός μας να έχει όσο το δυνατόν υψηλή διακριτική ικανότητα είναι εφικτό, ώστε να καταφέρουμε να έχουμε μοναδική ερμηνεία για τις περισσότερες αλληλεπιδράσεις που χρειάζονται για το εκάστοτε πρόβλημα. Είναι πιο σύνηθες να χρησιμοποιούνται σχεδιασμοί με διακριτική ικανότητα III ή IV ή και με μεγαλύτερη. Παρακάτω ενδεικτικά θα παρουσιαστούν οι σχεδιασμοί με $R = 3$ και 4:

Σχεδιασμοί διακριτικής ικανότητας III: Καμία κύρια επίδραση δεν είναι ταυτόσημη με κάποια άλλη επίδραση αλλά οι κύριες επιδράσεις είναι ταυτόσημες με αλληλεπιδράσεις 1^{ns} τάξης.

Σχεδιασμοί διακριτικής ικανότητας IV: Καμία κύρια επίδραση δεν είναι ταυτόσημη με κάποια άλλη κύρια επίδραση ή με αλληλεπιδράσεις 1^{ns} τάξης, αλλά αλληλεπιδράσεις 1^{ns} τάξης είναι ταυτόσημες με αλληλεπιδράσεις επίσης 1^{ns} τάξης.

1.5.1 Plackett – Burman Σχεδιασμοί

Οι Plackett – Burman Σχεδιασμοί ανήκουν στην οικογένεια των σχεδιασμών Hadamard, οι οποίοι είναι μη ισόμορφοι ορθογώνιοι σχεδιασμοί όταν προβάλλονται σε μικρότερους σχεδιασμούς. Για κάθε $n \times n$ πίνακα Hadamard ισχύει η σχέση $H_n^T H_n = H_n H_n^T = nI_n$. Προκύπτει ο ορθογώνιος σχηματισμός της μορφής $OA(n, n-1, 2, 2)$ αφαιρώντας την μοναδιαία στήλη του $n \times n$ πίνακα.

Οι πιο γνωστοί ορθογώνιοι σχεδιασμοί 2 επιπέδων είναι αυτοί οι οποίοι έχουν ισχύ ίση με 2 ($t = 2$), ονομάζονται Plackett-Burman σχεδιασμοί και ανήκουν στην κατηγορία των ορθογώνιων σχηματισμών $OA(n, n-1, 2, 2)$. Αναπτύχθηκαν για πρώτη φορά το 1946 από τους R.L. Plackett και J.P. Burman με σκοπό να βοηθήσουν στην βελτίωση επιλογής κατάλληλων αποφάσεων σε μία διαδικασία στατιστικού ποιοτικού ελέγχου. Αποτελούνται από $n-1$ στήλες (που θα αντιστοιχηθούν παράγοντες κατά την εφαρμογή τους) δύο επιπέδων και n γραμμές (εκτελέσεις). Μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να μελετηθούν πάνω από 7 παράγοντες για $n = 4k$, όπου $k = 1, 2, \dots, v$, δηλαδή για 8, 12, 16 κτλ εκτελέσεις είναι εφικτό να εκτιμηθούν 7, 11, 15 κτλ παράγοντες. Επίσης, χρειάζονται λιγότερες εκτελέσεις απ'ότι χρειάζονται οι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί. Για παράδειγμα, για την ανάλυση 11 παραγόντων ένας κλασματικός σχεδιασμός χρειάζεται 16 εκτελέσεις ενώ ο Plackett-Burman σχεδιασμός 12. Συνήθως είναι σχεδιασμοί με διακριτική ικανότητα ίση με 3.

Για να γίνει η κατασκευή ενός σχεδιασμού Plackett-Burman, επιλέγεται ένα συγκεκριμένο διάνυσμα – γεννήτορας και τοποθετείται στην πρώτη γραμμή, αναλόγως με το πλήθος των εκτελέσεων που θέλουμε να έχουμε. Κάποια από τα διανύσματα είναι τα εξής:

$$n = 8 \quad + + + - + - -$$

$$n = 12 \quad + + - + + + - - - + -$$

$$n = 16 \quad + + + + - + - + + - - + - - -$$

$$n = 20 \quad + + - - + + + + - + - + - - - - + + -$$

Στη συνέχεια, δημιουργούνται ακόμη $n-2$ γραμμές με κυκλικές μεταθέσεις του διανύσματος και προσθέτουμε μία τελευταία γραμμή με όλα τα στοιχεία να είναι ίσα με -1. Για παράδειγμα, ο σχεδιασμός Plackett – Burman με $n = 12$ εκτελέσεις φαίνεται στον πίνακα 1.5.1.

+	+	-	+	+	-	-	+	-
-	+	+	+	+	-	-	-	+
+	-	+	+	-	+	+	-	-
-	+	-	+	+	-	+	+	-
-	-	+	-	+	+	+	+	-
-	-	-	+	-	+	+	-	+
+	-	-	-	+	-	+	+	+
+	+	-	-	-	+	-	+	+
+	+	+	-	-	-	+	-	+
-	+	+	+	-	-	-	+	+
+	-	+	+	+	-	-	-	+
-	-	-	-	-	-	-	-	-

Πίνακας 1.5.1

1.5.2 Απλοί (*Regular*) – Σύνθετοι (*Nonregular*) Ορθογώνιοι Σχεδιασμοί

Οι ορθογώνιοι σχηματισμοί χωρίζονται επίσης σε δύο κατηγορίες, στους απλούς (*regular*) και στους σύνθετους (*non-regular*) σχεδιασμούς. Οι απλοί σχεδιασμοί υφίστανται για αριθμό εκτελέσεων που να μπορεί να γραφτεί ως δύναμη του 2 και είναι γνωστό πως είτε οι επιδράσεις θα είναι ορθογώνιες είτε θα συγγέονται απολύτως μεταξύ τους, δηλαδή θα είναι ταυτόσημες. Έτσι θα παρατηρηθεί είτε καθόλου είτε πλήρης σύγχυση μεταξύ των επιδράσεων (και στην ερμηνεία των εκτιμήσεων).

Οι σύνθετοι σχεδιασμοί υφίστανται για αριθμό εκτελέσεων πολλαπλάσιο του 4. Οι επιδράσεις τους είτε θα είναι ορθογώνιες είτε θα συγγέονται μερικώς είτε απολύτως. Για

παράδειγμα, μπορεί να γίνει η επιλογή τεσσάρων στηλών από έναν σχεδιασμό Plackett – Burman 15 στηλών, ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκτιμηθούν οι επιδράσεις 4 παραγόντων με τη χρήση ενός σύνθετου OA(16, 4, 2, 2). Εδώ, οι εκτιμήσεις των κύριων επιδράσεων είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους αλλά δεν ισχύει το ίδιο για τις κύριες επιδράσεις με τις αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων ($R = t + 1 = 3$).

1.6 Σύνοψη

Οι παραγοντικοί σχεδιασμοί 2 επιπέδων χρησιμοποιούνται σε πειράματα για την αξιολόγηση επιδράσεων πολλών παραγόντων ταυτόχρονα και μέσω μοντέλων παλινδρόμησης επιτρέπουν την εκτίμηση των κύριων επιδράσεων αλλά και αλληλεπιδράσεων εντοπίζοντας τις πιο σημαντικές. Οι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί είναι πιο αποδοτικοί καθώς το πείραμα εκτελείται σε ένα υποσύνολο των συνδυασμών των παραγόντων, μειώνοντας έτσι τον χρόνο και το κόστος αλλά διατηρώντας την πληροφορία. Ακόμη πιο αποδοτικοί σχεδιασμοί είναι οι ορθογώνιοι οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο αρχικό στάδιο ενός πειράματος έχοντας ως στόχο την εύρεση και απομόνωση των παραγόντων που έχουν σημαντική επίδραση σε μία εξαρτημένη μεταβλητή και διατηρώντας τις εκτιμήσεις ανεξάρτητες μεταξύ τους. Στα επόμενα κεφάλαια γίνεται χρήση των σχεδιασμών αυτών και έτσι αναδεικνύονται οι ιδιότητες τους.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 2

Μεθοδολογία Taguchi

2.1 Εύρωστος Παραμετρικός σχεδιασμός – Εκτός Σειράς Έλεγχος Ποιότητας

Η νοοτροπία του Εύρωστου Παραμετρικού Σχεδιασμού (*Robust Parameter Design*) έγινε ευρέως γνωστή από τον ηλεκτρολόγο μηχανικό Genichi Taguchi την δεκαετία του '80, ο οποίος γεννήθηκε στην Ιαπωνία το 1924. Θεωρείται ο πατέρας του Εύρωστου Παραμετρικού Σχεδιασμού αλλά και του Εκτός Σειράς Ελέγχου Ποιότητας (*Off-line quality control*). Η συνεισφορά του στην βελτίωση της ποιότητας των βιομηχανικών προϊόντων μέσω καινοτόμων μεθόδων στατιστικής είναι αδιαμφισβήτητη.

Ο Εκτός Σειράς Έλεγχος Ποιότητας επικεντρώνεται στη ρύθμιση της ποιότητας αλλά και του κόστους ενός προϊόντος στα αρχικά του στάδια, δηλαδή στο στάδιο σχεδιασμού του προϊόντος αλλά και της διαδικασίας που θα πρέπει να ακολουθήσει ώστε στην πορεία να μην υπάρξουν χρονοβόρα και με υψηλό κόστος προβλήματα και να βελτιωθεί η αξιοπιστία της κατασκευής του προϊόντος. Έτσι, ακόμη και στη φάση όπου το προϊόν είναι πλέον ρυθμισμένο και έτοιμο για on-line παρακολούθηση (*Statistical Process Control-SPC*) κατά τη διάρκεια της παραγωγής, το κόστος θα είναι μειωμένο καθώς λιγότερα προϊόντα θα βρεθούν εκτός στατιστικού ελέγχου ποιότητας, δηλαδή λιγότερα προϊόντα θα είναι εκτός ορίων προδιαγραφών λόγω βιομηχανικών ατελειών. Σημαντικό ρόλο σε αυτό λαμβάνει και η ανεκτικότητα των ορίων προδιαγραφών, δηλαδή όσο πιο στενά είναι τα όρια τόσο πιο πιθανό είναι να αυξηθεί το κατασκευαστικό κόστος αλλά και όσο πιο πλατιά είναι παρατηρείται αύξηση στην διακύμανση των χαρακτηριστικών του προϊόντος με αποτέλεσμα να επηρεάζεται το κόστος διάρκειας ζωής του προϊόντος. Ο Εύρωστος Παραμετρικός Σχεδιασμός ανήκει στην κατηγορία του Εκτός Σειράς Ελέγχου Ποιότητας.

Αρχικά, ο Taguchi είχε την φιλοσοφία πως όσο η τιμή ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού απομακρύνεται από την «τιμή στόχο», τότε από τη στιγμή που το προϊόν βγει στην αγορά, δημιουργείται μία απώλεια για την κοινωνία ακόμη και όταν η τιμή αυτή βρίσκεται εντός των ορίων προδιαγραφών της, λόγω της «φτωχής» ποιότητας του. Πιο συγκεκριμένα,

ποσοτικοποιείται η απώλεια που δημιουργείται λόγω της απόκλισης της απόκρισης (Y) από την αναμενόμενη τιμή στόχο (t). Σύμφωνα με τον Taguchi η συνάρτηση απώλειας είναι τετραγωνική και δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$L = k(Y-t)^2$$

όπου, k είναι μία σταθερά. Εάν η τιμή στόχος επιτευχθεί η τιμή της συνάρτησης γίνεται ίση με το 0.

Ο στόχος του Εύρωστου Παραμετρικού Σχεδιασμού είναι να μειώσει όσο το δυνατόν περισσότερο την διακύμανση που είναι σύνηθες να υφίσταται στις βιομηχανικές διαδικασίες και στην κατασκευή των προϊόντων θέτοντας ταυτόχρονα τις επιδράσεις των παραγόντων σε κατάλληλα επίπεδα για την βελτιστοποίηση ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού. Οι παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν την παραγωγική διαδικασία και ελέγχονται πειραματικά χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: στους παράγοντες ελέγχου και στους παράγοντες θορύβου. Οι παράγοντες θορύβου είναι εκείνοι ο οποίοι είναι δύσκολο να ελεγχθούν είτε σε πειραματική κατάσταση είτε σε πλήρη λειτουργία από τον χρήστη. Διακρίνονται σε εξωτερικούς, εσωτερικούς και σε από μονάδα σε μονάδα παραγωγής παράγοντες θορύβου (διαφοροποιήσεις στις ρυθμίσεις μηχανημάτων). Για παράδειγμα, καταστάσεις δύσκολα ελέγξιμες όπως η υγρασία, η σκόνη, η θερμοκρασία αλλά και η συμπεριφορά του χρήστη στο προϊόν είναι εξωτερικοί παράγοντες και καταστάσεις ελέγξιμες όπως είναι οι κατασκευαστικές ατέλειες και η φθορά του προϊόντος κατά την αποθήκευση είναι εσωτερικοί παράγοντες. Από την άλλη, οι παράγοντες ελέγχου είναι εύκολο να ελεγχθούν και στην πειραματική διαδικασία αλλά και σε κατάσταση πλήρους λειτουργίας και κάποιες φορές δεν κοστίζουν υπερβολικά. Διακρίνονται σε παράγοντες ελέγχου του θορύβου, του στόχου και του κόστους. Οι παράγοντες ελέγχου του θορύβου επηρεάζουν την διακύμανση της μεταβλητής απόκρισης, οι παράγοντες ελέγχου του στόχου επηρεάζουν την μέση τιμή της μεταβλητής και οι παράγοντες ελέγχου του κόστους δεν επηρεάζουν την μεταβλητή και μπορούν να τεθούν σε οποιοδήποτε επίπεδο (συνήθως στο πιο οικονομικό). Γενικά, αυτό που επιδιώκει ο εύρωστος παραμετρικός σχεδιασμός είναι να γίνει η βέλτιστη ρύθμιση των παραγόντων ελέγχου σε επίπεδα τέτοια ώστε να μειωθεί όσο το δυνατόν γίνεται η επίδραση των παραγόντων θορύβου στην μεταβλητή απόκριση που μελετάται.

2.2 Μεθοδολογία Taguchi

Ο Taguchi προτείνει να γίνει η χρήση ενός πειραματικού σχεδιασμού ο οποίος ονομάζεται σχεδιασμός εσωτερικής – εξωτερικής διάταξης (*inner – outer array*) (Πίνακας 2.2). Στην εσωτερική διάταξη αντιστοιχούνται οι παράγοντες ελέγχου ενώ στην εξωτερική διάταξη οι παράγοντες θορύβου. Συνήθως οι σχεδιασμοί αυτοί είναι ορθογώνιοι σχηματισμοί. Κατά την εκτέλεση του σχεδιασμού αυτού προτείνεται από τον Taguchi να γίνει η χρήση κάποιων μέτρων επίδοσης. Θα πρέπει να υπολογιστεί ο μέσος όρος των αποκρίσεων κάθε συνδυασμού επιπέδων της εσωτερικής διάταξης ώστε να εντοπιστούν οι παράγοντες ελέγχου του στόχου. Στη συνέχεια, για τον εντοπισμό των παραγόντων ελέγχου του θορύβου προτείνονται τρία διαφορετικά μέτρα θορύβου αναλόγως με τον επιθυμητό στόχο του πειράματος τα οποία είναι γνωστά ως *signal-to-noise ratios (SNR)* και είναι τα εξής αναλόγως με το στόχο που θέλουμε να επιτύχουμε:

Η απόκριση να είναι όσο τον δυνατόν μικρότερη: $SNR = -10 \log_{10} \left[\frac{1}{n} \sum y^2 \right]$

Η απόκριση να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερη: $SNR = -10 \log_{10} \left[\frac{1}{n} \sum \frac{1}{y^2} \right]$

Η απόκριση να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά σε μία συγκεκριμένη τιμή:

$$SNR = 10 \log_{10} (\bar{y} / s)^2, \text{ όπου } \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} \text{ και } s = \frac{\sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}}{n-1}$$

Μετά την επιλογή των κατάλληλων μέτρων επίδοσης διενεργείται ανάλυση διακύμανσης ώστε να βρεθούν οι παράγοντες ελέγχου που επηρεάζουν την μέση τιμή και τη διασπορά ξεχωριστά για τα δύο μέτρα επίδοσης. Το πιο σύνηθες είναι να συγχέονται οι παράγοντες ελέγχου του θορύβου με τους παράγοντες ελέγχου του στόχου. Σε αυτή την περίπτωση ψάχνουμε να βρούμε αν υπάρχει σχέση μεταξύ της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης των τιμών κάθε δοκιμής της εσωτερικής διάταξης ($\sigma = \text{km}^\beta$). Με την προσαρμογή ενός απλού γραμμικού μοντέλου

$$\log_{10}(s_i) = a + \beta \log_{10}(\bar{y}_i) + \varepsilon_i$$

και την εύρεση της τιμής του β μέσω της παλινδρόμησης, θα χρησιμοποιηθεί το εξής μέτρο επίδοσης ως το πιο κατάλληλο:

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\bar{y}^\beta}{s} \right)^2$$

Με τον τρόπο αυτό θα αποφευχθεί η σύγχυση μεταξύ των παραγόντων θορύβου και στόχου.

Επίσης, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και τα διαγράμματα του μέσου του κάθε παράγοντα ώστε να βοηθήσουν στην εύρεση των κατάλληλων ρυθμίσεων των επιπέδων των παραγόντων αλλά και το διάγραμμα του Daniel (*Daniel's plot*) ή αλλιώς διάγραμμα κανονικής πιθανότητας (*normal probability plot*) για την εύρεση στατιστικά σημαντικών παραγόντων ή αλληλεπιδράσεων.

Εσωτερική Διάταξη (L ₉ Inner Array)		Εξωτερική Διάταξη (L ₄ Noise Array)			E	0	0	1	1
					F	0	1	0	1
					G	0	1	1	0
Εκτελέσεις	A	B	C	D					
1	0	0	0	0	y ₁₁	y ₁₂	y ₁₃	y ₁₄	
2	0	1	1	1	y ₂₁	y ₂₂	y ₂₃	y ₂₄	
3	0	2	2	2	y ₃₁	y ₃₂	y ₃₃	y ₃₄	
4	1	0	1	2	y ₄₁	y ₄₂	y ₄₃	y ₄₄	
5	1	1	2	0	y ₅₁	y ₅₂	y ₅₃	y ₅₄	
6	1	2	0	1	y ₆₁	y ₆₂	y ₆₃	y ₆₄	
7	2	0	2	1	y ₇₁	y ₇₂	y ₇₃	y ₇₄	
8	2	1	0	2	y ₈₁	y ₈₂	y ₈₃	y ₈₄	
9	2	2	1	0	y ₉₁	y ₉₂	y ₉₃	y ₉₄	

Πίνακας 2.2 Παράδειγμα Εσωτερικής – Εξωτερικής Διάταξης Taguchi με 4 παράγοντες ελέγχου τριών επιπέδων και 3 παράγοντες θορύβου δύο επιπέδων

Παρόλο που πράγματι η μεθοδολογία Taguchi βοήθησε σε μεγάλο βαθμό τους μηχανικούς και τις βιομηχανίες στην εύρεση βέλτιστης ρύθμισης των επιπέδων των προϊόντων και των μηχανών, παρατηρήθηκε πως χρήζει βελτίωσης. Συνήθως απαιτείται μεγάλος αριθμός εκτελέσεων του πειράματος καθώς πραγματοποιείται για κάθε συνδυασμό επιπέδων μεταξύ εσωτερικής και εξωτερικής διάταξης. Πιο συγκεκριμένα, εάν υποθέσουμε πως έχουμε n παράγοντες ελέγχου στην εσωτερική διάταξη και m παράγοντες θορύβου στην εξωτερική διάταξη, στο σύνολο θα έχουμε $N = 2^n 2^m$ εκτελέσεις, όπου πολλές φορές είναι αρκετά κοστοβόρο. Επίσης, οι βαθμοί ελευθερίας χρησιμοποιούνται κυρίως για την εκτίμηση των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των παραγόντων ελέγχου και θορύβου και δεν δίνεται εύκολα η

δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση άλλων αλληλεπιδράσεων, όπως είναι οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ παραγόντων ελέγχου, ή να παραλειφθούν εάν δεν θεωρούνται σημαντικοί. Βέβαια, οι πιο σημαντικές επιδράσεις στον εύρωστο παραμετρικό σχεδιασμό τείνουν να είναι αυτές μεταξύ παραγόντων ελέγχου και θορύβου ώστε με τη ρύθμιση του επιπέδου του παράγοντα ελέγχου να μειώνεται η μεταβολή της μεταβλητής απόκρισης σε κάθε επίπεδο του παράγοντα θορύβου. Όμως, εάν υπάρχει η γνώση πως και κάποια άλλη αλληλεπίδραση μπορεί να είναι σημαντική, είναι δύσκολη η εκτίμηση της. Γι' αυτό και θα ήταν προτιμότερο να δίνουμε βάση στην κατανόηση της διαδικασίας παρά στην ενασχόληση μας απλώς με την βελτιστοποίηση των επιπέδων των επιδράσεων, ώστε να είμαστε σε θέση να αντιληφθούμε οτιδήποτε προκύψει στην πορεία χωρίς να χαθεί μέρος της πληροφορίας.

2.2.1 Παράδειγμα

Παρακάτω, θα παρουσιαστεί ένα σύντομο αριθμητικό παράδειγμα βάσει της μεθοδολογίας Taguchi. Δεν θα δώσουμε βάση στην εξωτερική διάταξη καθώς συχνά δεν υπάρχει επειδή είναι δύσκολο να ελεγχθούν οι παράγοντες θορύβου σε συγκεκριμένα επίπεδα κατά τον πειραματισμό. Έχουμε κάνει από 4 μετρήσεις για κάθε δοκιμή της εσωτερικής διάταξης. Σκοπός του πειραματιστή είναι να θέσει τους παράγοντες σε σωστά επίπεδα ώστε η τιμή να είναι όσο μεγαλύτερη του 4 γίνεται.

Στην εσωτερική διάταξη έχουμε 4 παράγοντες ($k=4$) και 8 θεραπείες ($n=8$), και συνεπώς έναν $2^{k-p} = 2^{4-p} = 8$. Επομένως, προκύπτει το $p = 1$ και άρα έχουμε τον κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό 2^{4-1} . Ο βασικός σχεδιασμός είναι οι στήλες A,B,C και η οριζουσα σχέση του είναι η $D = ABC$ ($I = ABCD$).

Εσωτερική Διάταξη	Εξωτερική Διάταξη				E	0	0	1	1
					F	0	1	0	1
Εκτελέσεις	A	B	C	D	Απόκριση				
1	0	0	0	0	2.5	3.5	4.5	4.4	
2	1	0	0	1	2.6	3.7	4.6	4.7	
3	0	1	0	1	2.7	4.6	4.8	4.6	
4	1	1	0	0	2.8	3.5	4.7	4.9	

5	0	0	1	1	2.4	2.7	4.9	4.5
6	1	0	1	0	2.6	2.8	4.5	4.8
7	0	1	1	0	2.8	3.4	4.8	4.7
8	1	1	1	1	2.9	5.6	5	5

Πίνακας 2.2.1

Όπως έχουμε αναφέρει, το μέτρο επίδοσης στόχου είναι ο μέσος όρος των τιμών της απόκρισης σε καθεμία από τις 8 θεραπείες. Για το μέτρο θορύβου, δεδομένου ότι θέλουμε να μεγιστοποιηθεί η τιμή, θα χρησιμοποιήσουμε το εξής μέτρο θορύβου το οποίο προτείνει ο Taguchi:

$$SNR = -10 \cdot \log_{10}[(1/n) \cdot \Sigma y^{-2}]$$

Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω:

Επαναλήψεις	N	Μέτρο Στόχου (Mean)	Μέτρο Θορύβου
1	4	3.725	10.671861
2	4	3.900	11.058178
3	4	4.175	11.625774
4	4	3.975	11.306182
5	4	3.625	9.980313
6	4	3.675	10.358989
7	4	3.925	11.210069
8	4	4.625	12.388358

Τρέχουμε την ανάλυση διακύμανσης με τους τέσσερις παράγοντες ως προς το μέτρο στόχου:

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	1	0.0657	0.0657	1.312	0.3351
B	1	0.3938	0.3938	7.864	0.0676
C	1	0.0007	0.0007	0.014	0.9132
D	1	0.1313	0.1313	2.622	0.2038
Residuals	3	0.1502	0.0501		

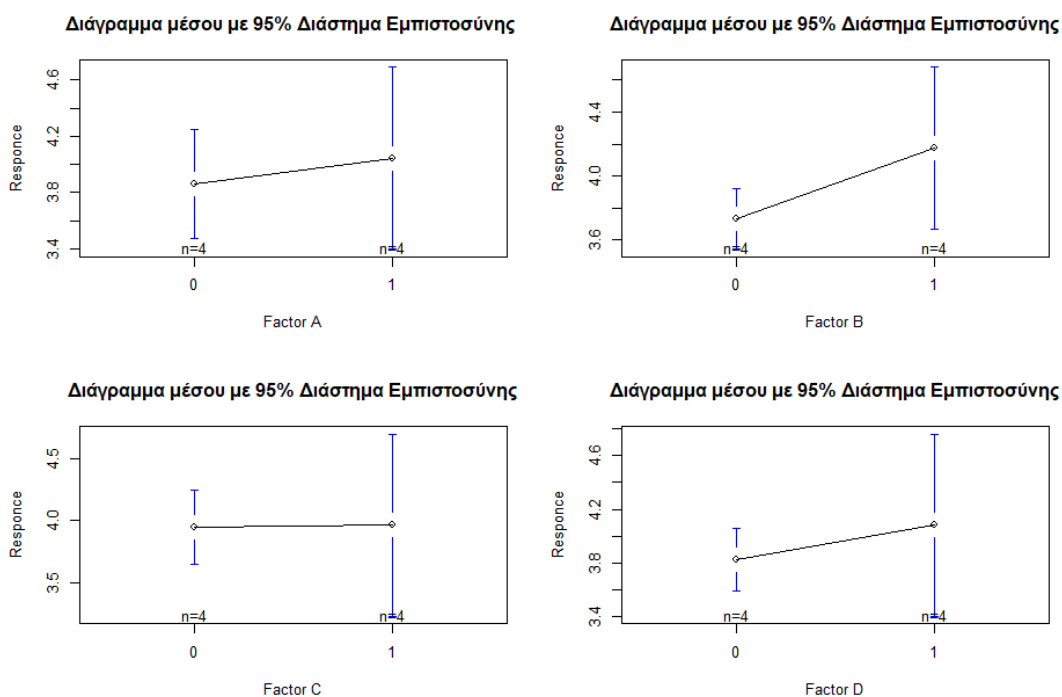
Τρέχουμε την ανάλυση διακύμανσης με τους έξι παράγοντες ως προς το μέτρο θορύβου κατά Taguchi:

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	1	0.3295	0.3295	1.224	0.3493
B	1	2.4876	2.4876	9.239	0.0559
C	1	0.0656	0.0656	0.244	0.6555
D	1	0.2833	0.2833	1.052	0.3805

Residuals	3	0.8077	0.2692		
------------------	---	--------	--------	--	--

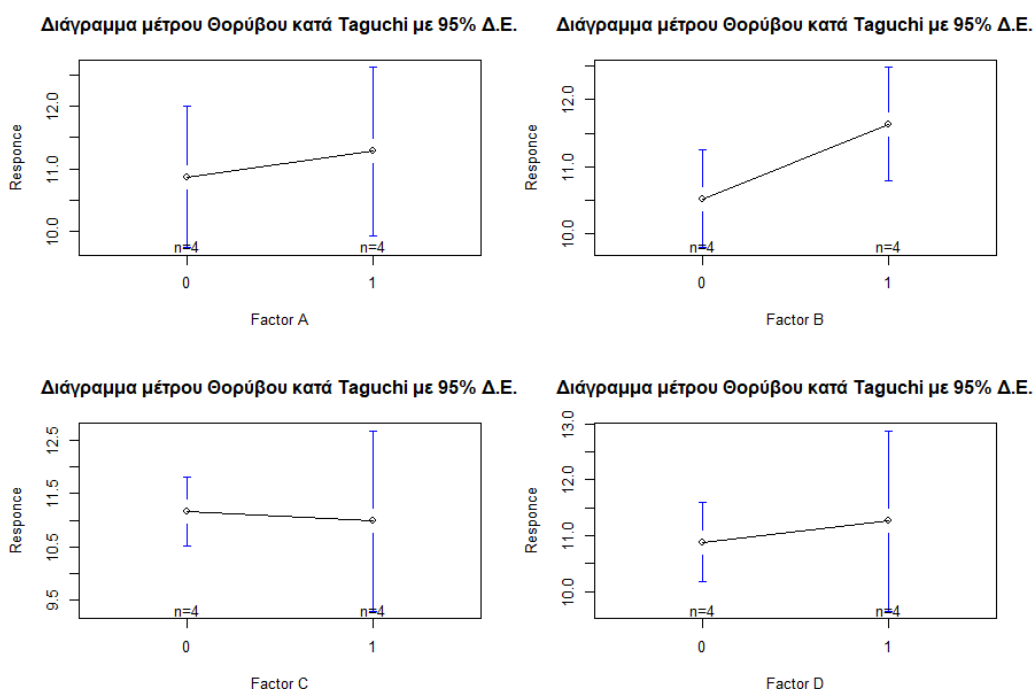
Παρατηρούμε ότι ο στατιστικά σημαντικός παράγοντας ελέγχου του στόχου και ελέγχου του θορύβου κατά Taguchi είναι από κοινού ο B, καθώς το p-value του και στις δύο αναλύσεις είναι μικρότερο του επιπέδου σημαντικότητας 10%. Οι παράγοντες A, C, D θεωρούνται ως παράγοντες ελέγχου του κόστους.

Παρακάτω φαίνονται γραφικά οι μέσες τιμές ανά επίπεδο παράγοντα για το Μέτρο Στόχου:



Παρατηρούμε πως για τον στατιστικά σημαντικό παράγοντα B, η βέλτιστη στάθμη είναι η (1). Για τους υπόλοιπους παράγοντες επιλέγουμε εκείνο το επίπεδο που έχει και το μικρότερο κόστος εφαρμογής.

Παρομοίως δίνονται οι μέσες τιμές ανά επίπεδο παράγοντα για το Μέτρο Θορύβου κατά Taguchi και παρατηρούμε πως καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα:



Η ταύτιση των αποτελεσμάτων για το Μέτρο Στόχου και το Μέτρο Θορύβου κατά Taguchi φαίνεται ξεκάθαρα αν συγκρίνουμε τα διαγράμματα των σχετικών παραγοντικών επιδράσεων. Η ομοιότητα αυτή μεταξύ των αποτελεσμάτων συμβαίνει διότι το Μέτρο Θορύβου που πρότεινε ο Taguchi εξαρτάται πολύ από τον μέσο των αποκρίσεων και μπορεί να οδηγήσει σε σύγχυση, δηλαδή να προκαλέσει μεροληψία του μέσου στην ανάλυση για τον καθορισμό των παραγόντων ελέγχου θορύβου, πράγμα το οποίο συμβαίνει και εδώ. Οπότε, θα προχωρήσουμε με τον παρακάτω τρόπο. Θα βρούμε αρχικά τους λογαρίθμους των μέσων τιμών και των τυπικών αποκλίσεων (με βάση το 10) (Πίνακας 2.2.1β)

Επανάληψεις	Log_mean = log ₁₀ (Mean)	SD = sd(response)	Log_s = log ₁₀ (SD)	MΘ = 10*log ₁₀ (1/sd ²)
1	0.5711263	0.9322911	-0.0304484688	0.60896938
2	0.5910646	0.9763879	-0.0103776108	0.20755222
3	0.6206565	0.9878428	-0.0053121755	0.10624351
4	0.5993371	0.9979145	-0.0009066704	0.01813341
5	0.5593080	1.2579746	0.0996718593	-1.99343719
6	0.5652573	1.1354148	0.0551545338	-1.10309068
7	0.5938397	0.9844626	-0.0068007657	0.13601531
8	0.6651117	1.1842719	0.0734514350	-1.46902870

Πίνακας 2.2.1β

Στη συνέχεια τρέχουμε την απλή παλινδρόμηση:

$$\log_{10}SD = \beta_0 + \beta_1 * \log_{10}Mean + \varepsilon$$

Τα αποτελέσματα είναι τα εξής:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-0.01129	0.33378	-0.034	0.974
log_mean	0.05555	0.55949	0.099	0.924

Παρατηρούμε πως δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική γραμμική σχέση μεταξύ διακύμανσης και μέσης τιμής σε επίπεδο σημαντικότητας 10% εφόσον $p\text{-value} = 0.924 > 0.1$. Έτσι θα χρησιμοποιήσουμε ένα καταλληλότερο μέτρο επίδοσης θορύβου το οποίο είναι το:

$$M\Theta = 10 * \log_{10} \left(\frac{\bar{y}b_1}{sd} \right)^2$$

Θέτουμε $\beta_1=0$ (λόγω έλλειψης γραμμικής σχέσης), και έχουμε:

$$M\Theta = 10 * \log_{10}(1/sd^2) = -20 * \log_{10}sd$$

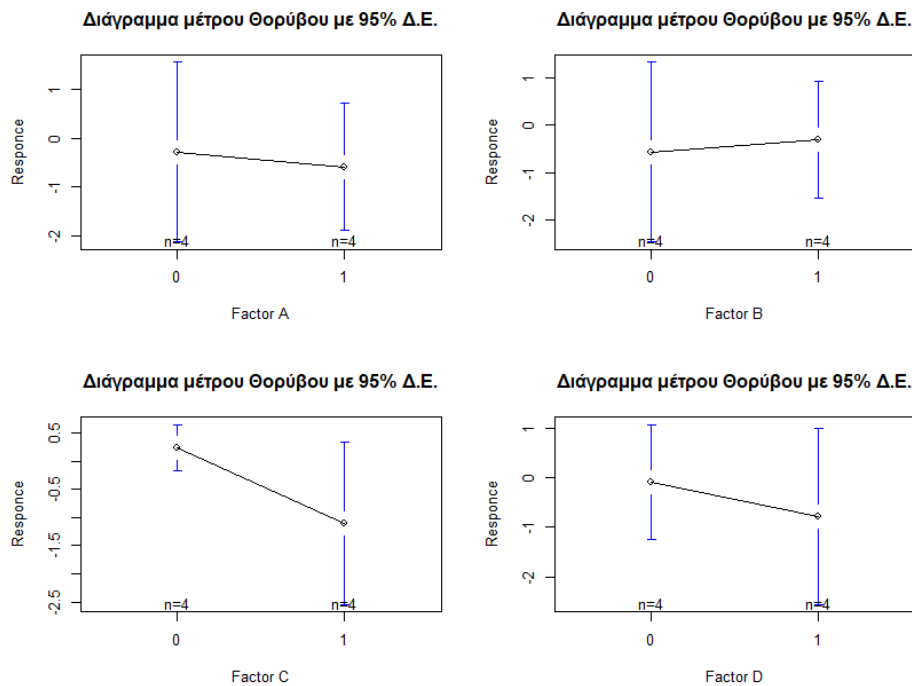
Υπολογίζουμε στη συνέχεια τις τιμές του νέου μέτρου θορύβου οι οποίες έχουν παρουσιαστεί στον παραπάνω Πίνακα 2.2.1β.

Έπειτα, τρέχουμε την ανάλυση διακύμανσης επί του νέου μέτρου θορύβου για να δούμε ποιι παράγοντες το επηρεάζουν. Τα αποτελέσματα είναι τα εξής:

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	1	0.181	0.181	0.401	0.5714
B	1	0.143	0.143	0.318	0.6124
C	1	3.605	3.605	7.980	0.0665
D	1	0.986	0.986	2.183	0.2361
Residuals	3	1.355	0.452		

Παρατηρούμε πως ο παράγοντας C είναι στατιστικά σημαντικός σε επίπεδο σημαντικότητας 10%. Επομένως, ως παράγοντας ελέγχου του στόχου θεωρείται ο παράγοντας B, ως παράγοντας ελέγχου του θορύβου θεωρείται ο C και ως παράγοντες ελέγχου του κόστους θα είναι οι παράγοντες A, D.

Δίνονται επίσης οι μέσες τιμές ανά επίπεδο παράγοντα για το νέο Μέτρο Θορύβου:



Έτσι, για τον παράγοντα Β θα επιλεγθεί το επίπεδο (1), για τον παράγοντα C το επίπεδο (0) και για τους παράγοντες Α, D θα επιλεγθούν τα οικονομικότερα επίπεδα.

2.3 Διασταυρούμενοι Σχεδιασμοί (*Crossed Arrays*)

Είναι γνωστό πως ο Taguchi χρησιμοποιούσε ορθογώνιους σχηματισμούς και στην εσωτερική και στην εξωτερική διάταξη. Θα θεωρήσουμε τον σύνηθες συμβολισμό C για τους παράγοντες ελέγχου στην εσωτερική διάταξη και N για τους παράγοντες θορύβου στην εξωτερική διάταξη. Η ονομασία «Crossed Arrays» απευθύνεται στην «διασταύρωση» των θεραπειών των παραγόντων της εσωτερικής διάταξης με τα επίπεδα των παραγόντων στην εξωτερική διάταξη μέσω του καρτεσιανού γινομένου. Δημιουργούν δηλαδή έναν σχεδιασμό ο οποίος εμφανίζει μαζί τους παράγοντες ελέγχου και θορύβου και έτσι αποφεύγεται η χρήση δύο ορθογώνιων σχεδιασμών όπως προτείνεται εξαρχής από τον Taguchi.

Ο σχεδιασμός αυτός βέβαια παρουσιάζει κάποιες αδυναμίες. Συνήθως αποτελείται από μεγάλο αριθμό εκτελέσεων του πειράματος ώστε να μελετηθούν όλοι οι συνδυασμοί επιπέδων των παραγόντων, με αποτέλεσμα να δημιουργείται μία υψηλού κόστους διαδικασία την οποία, για παράδειγμα οι βιομηχανίες, είναι δύσκολο έως και απαγορευτικό να ακολουθήσουν. Επίσης, ένα σύνηθες σενάριο είναι τα επίπεδα των παραγόντων της εσωτερικής διάταξης να

είναι τρία με διακριτική ικανότητα III, και τα επίπεδα των παραγόντων της εξωτερικής διάταξης να είναι δύο. Έτσι, δίνεται η δυνατότητα εκτίμησης των γραμμικών και τετραγωνικών επιδράσεων των παραγόντων ελέγχου αλλά όχι μεταξύ των αλληλεπιδράσεων τους με αποτέλεσμα ίσως να χαθεί ένα μέρος της πληροφορίας των παραγόντων ελέγχου που πιθανώς να ήταν χρήσιμο για την περαιτέρω κατανόηση του πειράματος. Θα ήταν εφικτό να γίνει η εκτίμηση τους εάν η διακριτική ικανότητα είναι ίση με V ή και παραπάνω. Παρόλα αυτά, με τον σχεδιασμό αυτό μας δίνεται εύκολα η δυνατότητα να εκτιμήσουμε τις κύριες επιδράσεις των παραγόντων ελέγχου και θορύβου αλλά και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ αυτών, γεγονός που είναι πολύ σημαντικό για τον εύρωστο παραμετρικό σχεδιασμό. Εάν καταλήξουμε στο συμπέρασμα πως δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ τους, τότε θέτουμε σε κατάλληλα επίπεδα τις επιδράσεις των παραγόντων ελέγχου και έτσι μειώνεται η μεταβλητότητα που δημιουργείται στην μεταβλητή απόκρισης.

Πρέπει να τονιστεί ακόμη πως, η σημαντικότητα αξιολόγησης των επιδράσεων στον εύρωστο παραμετρικό σχεδιασμό διαφέρει από αυτήν των κλασματικών παραγοντικών σχεδιασμών. Πλέον δεν ακολουθείται ιεραρχική σειρά στη σημαντικότητα των επιδράσεων βάσει της τάξης κάθε επίδρασης / αλληλεπίδρασης (όσο πιο μικρή η τάξη τόσο πιο σημαντική η επίδραση) αλλά ακολουθείται η παρακάτω σειρά:

- i) Κύριες επιδράσεις των παραγόντων ελέγχου, των παραγόντων θορύβου και αλληλεπιδράσεις μεταξύ παραγόντων ελέγχου και θορύβου
- ii) Αλληλεπιδράσεις (1^{ης} τάξης) μεταξύ παραγόντων ελέγχου αλλά και 2^{ης} τάξης αλληλεπιδράσεις μεταξύ δύο παραγόντων ελέγχου και ενός παράγοντα θορύβου
- iii) Αλληλεπιδράσεις (1^{ης} τάξης) μεταξύ παραγόντων θορύβου
- iv) Αλληλεπιδράσεις μεγαλύτερων τάξεων

2.3.1 Μέθοδος Αποκριτικών Επιφανειών (*Response Surface Approach*)

Για την εφαρμογή, θεωρούμε ότι οι παράγοντες ελέγχου έχουν σταθερές επιδράσεις, ενώ οι παράγοντες θορύβου είναι τυχαίοι. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε πως μας ενδιαφέρουν τρεις παράγοντες ελέγχου, ένας παράγοντας θορύβου και οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ αυτών. Το μοντέλο απεικόνισης τους θα είναι το εξής:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 + \beta_3 C_3 + \beta_4 N_1 + \beta_5 C_1 N_1 + \beta_6 C_2 N_1 + \beta_7 C_3 N_1 + \varepsilon$$

Όπου $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ και $N_1 \sim N(0, \sigma^2_{N_1})$ με ε και N_1 ανεξάρτητες. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις τα μοντέλα πρόβλεψης της μέσης τιμής και της διασποράς είναι τα εξής:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 + \beta_3 C_3$$

$$\text{Var}(Y) = (\beta_4 + \beta_5 C_1 + \beta_6 C_2 + \beta_7 C_3) V(N_1) + V(\varepsilon) = (\beta_4 + \beta_5 C_1 + \beta_6 C_2 + \beta_7 C_3) \sigma^2_{N_1} + \sigma^2$$

Αξίζει να σημειωθεί πως και το μοντέλο της μέσης τιμής και το μοντέλο της διασποράς αποτελούνται μόνο από παράγοντες ελέγχου και έτσι, και μέσω του τρόπου αυτού, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως αυτό που πρέπει να επιτύχουμε είναι να ρυθμίσουμε τα επίπεδα των παραγόντων ελέγχου σε τιμές τέτοιες ώστε να ελαχιστοποιείται η διακύμανση που προκαλείται από τους παράγοντες θορύβου και ταυτόχρονα να φέρουμε την μέση τιμή της απόκρισης όσο πιο κοντά στην τιμή στόχο που έχουμε θέσει.

Ας υποθέσουμε λοιπόν πως έχουμε έναν 2^5 πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό με 3 παράγοντες ελέγχου και 2 παράγοντες θορύβου με 2 επίπεδα ο καθένας.

C₁	C₂	C₃	N₁	N₂	y_i
1	1	1	1	1	y ₁₁
1	1	1	1	-1	y ₁₂
1	1	1	-1	1	y ₁₃
1	1	1	-1	-1	y ₁₄
1	1	-1	1	1	y ₂₁
1	1	-1	1	-1	y ₂₂
1	1	-1	-1	1	y ₂₃
1	1	-1	-1	-1	y ₂₄
1	-1	1	1	1	y ₃₁
1	-1	1	1	-1	y ₃₂
1	-1	1	-1	1	y ₃₃
1	-1	1	-1	-1	y ₃₄
1	-1	-1	1	1	y ₄₁
1	-1	-1	1	-1	y ₄₂
1	-1	-1	-1	1	y ₄₃
1	-1	-1	-1	-1	y ₄₄

-1	1	1	1	1	y51
-1	1	1	1	-1	y52
-1	1	1	-1	1	y53
-1	1	1	-1	-1	y54
-1	1	-1	1	1	y61
-1	1	-1	1	-1	y62
-1	1	-1	-1	1	y63
-1	1	-1	-1	-1	y64
-1	-1	1	1	1	y71
-1	-1	1	1	-1	y72
-1	-1	1	-1	1	y73
-1	-1	1	-1	-1	y74
-1	-1	-1	1	1	y81
-1	-1	-1	1	-1	y82
-1	-1	-1	-1	1	y83
-1	-1	-1	-1	-1	y84

Πίνακας 2.3.1

Εδώ, το μοντέλο παλινδρόμησης περιλαμβάνει τους εξής όρους:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^3 \beta_i C_i + \sum_{j=1}^2 \gamma_j N_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \delta_{ij} C_i N_j + \varepsilon$$

Εάν προσθέσουμε στον πίνακα τις στήλες που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό των στηλών του βασικού 2^5 σχεδιασμού ώστε να δημιουργηθούν οι 6 αλληλεπιδράσεις που αναφέρονται και στο τύπο του μοντέλου (C_1N_1 , C_1N_2 , C_2N_1 , C_2N_2 , C_3N_1 , C_3N_2), προκύπτει ένας πίνακας με 11 στήλες (χωρίς την μοναδιαία στήλη). Επομένως, είναι γνωστό πως εφόσον έχουμε έναν σχεδιασμό με 11 στήλες και 32 γραμμές και ο βασικός μας σχεδιασμός αποτελείται από 5 στήλες, οι οριζουσες σχέσεις που χρειάζεται να εντοπίσουμε είναι 6. Το αποτέλεσμα προέκυψε από: $2^k - p = 2^{11} - p = 32 = 2^5$, $11 - p = 5$, άρα $p = 6$, όπου k οι στήλες του σχεδιασμού και p το πλήθος των οριζουσών σχέσεων του σχεδιασμού. Οι οριζουσες είναι οι $I = C_1 * N_1 * C_1N_1$, $I = C_1 * N_2 * C_1N_2$, $I = C_2 * N_1 * C_2N_1$, $I = C_2 * N_2 * C_2N_2$, $I = C_3 * N_1 * C_3N_1$, $I = C_3 * N_2 * C_3N_2$. Συνολικά οι οριζουσες είναι $2^p - 1 = 2^6 - 1 = 63$ (προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας

τις 6 αρχικές ορίζουσες). Επειδή όμως ο σχεδιασμός είναι ορθογώνιος σχηματισμός και επειδή κάθε στήλη έχει ίσο αριθμό +1 και -1, γνωρίζουμε ότι δεν μπορεί οι κύριες επιδράσεις να συγγέονται μεταξύ τους, αλλά ούτε και με τη στήλη I. Συνεπώς, δεν γίνεται να υπάρχει ορίζουσα σχέση σε αυτόν το σχεδιασμό με ένα ή με δύο γράμματα. Έτσι, η διακριτική ικανότητα του σχεδιασμού είναι ίση με III, και δεν θα υπάρχει σύγχυση των αλληλεπιδράσεων με τις κύριες επιδράσεις.

Στη συνέχεια, εάν κριθούν, για παράδειγμα, και οι τρεις παράγοντες ελέγχου σημαντικοί για το μοντέλο, η επόμενη λογική κίνηση του πειραματιστή είναι να θελήσει να ελέγξει και τις αλληλεπιδράσεις 1^{ης} τάξης μεταξύ των παραγόντων ελέγχου εφόσον υπάρχουν διαθέσιμοι βαθμοί ελευθερίας (συνολικά οι βαθμοί ελευθερίας $n-1 = 31$). Είναι εφικτό να εκτιμήσουμε τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των παραγόντων ελέγχου καθώς δεν συγγέονται μεταξύ τους, λόγω διακριτικής ικανότητας III. Σε περίπτωση που η διακριτική ικανότητα είναι ίση με IV, οι αλληλεπιδράσεις συγγέονται μεταξύ τους και πιθανόν να μην είναι εφικτό να εκτιμηθούν όλες όσες μας ενδιαφέρουν. Εάν η διακριτική ικανότητα είναι ίση με V, οι αλληλεπιδράσεις θα συγγέονται με αλληλεπιδράσεις τριών παραγόντων, οπότε είναι εφικτό να εκτιμηθούν οι αλληλεπιδράσεις 1^{ης} τάξης που μας ενδιαφέρουν.

Επομένως, το μοντέλο παλινδρόμησης (για τον Πίνακα 2.3.1) είναι πιθανό να περιλαμβάνει και αλληλεπιδράσεις μεταξύ των παραγόντων ελέγχου ένα θελήσει ο πειραματιστής να τις εκτιμήσει. Η μορφή του μοντέλου τότε θα είναι η εξής:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^3 \beta_i C_i + \sum_{j=1}^2 \gamma_j N_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \delta_{ij} C_i N_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{i=1}^3 k_{ii} C_i C_i + \varepsilon$$

Βέβαια, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, είναι πιθανό να προστεθούν στο μοντέλο παλινδρόμησης και άλλοι όροι όσο υπάρχουν διαθέσιμοι βαθμοί ελευθερίας, όπως αλληλεπιδράσεις 2^{ης} τάξης δύο παραγόντων ελέγχου και ενός θορύβου ή ακόμη και αλληλεπιδράσεις μεταξύ παραγόντων θορύβου ή αλληλεπιδράσεις μεγαλύτερης τάξης. Οι όροι όμως αυτοί δεν είναι τόσο σημαντικοί όσο είναι οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ παραγόντων ελέγχου και θορύβου.

2.3.2 Παράδειγμα

Σε συνέχεια του παραπάνω αριθμητικού παραδείγματος (Ενότητα 2.2.1), θα γίνει η ανάλυση του βάσει της μεθοδολογίας των αποκριτικών επιφανειών. Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας με

όλους τους συνδυασμούς εσωτερικής και εξωτερική διάταξης μαζί με την τιμή της απόκρισης τους, όπως αναφέρονται στο Πίνακα 2.2.1. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της παλινδρόμησης και πιο συγκεκριμένα τα αποτελέσματα θα εξαχθούν με τη βοήθεια της stepwise regression μέσω του υπολογιστικού προγράμματος R. Οι συνολικοί όροι της παλινδρόμησης είναι 15 και ο γενικός τύπος δίνεται παρακάτω:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^4 \beta C_i + \sum_{j=1}^2 \gamma_j N_j + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 \delta_{ij} C_i N_j + \varepsilon$$

A	B	C	D	E	F	Y_i
0	0	0	0	0	0	2.5
0	0	0	0	0	1	3.5
0	0	0	0	1	0	4.5
0	0	0	0	1	1	4.4
1	0	0	1	0	0	2.6
1	0	0	1	0	1	3.7
1	0	0	1	1	0	4.6
1	0	0	1	1	1	4.7
0	1	0	1	0	0	2.7
0	1	0	1	0	1	4.6
0	1	0	1	1	0	4.8
0	1	0	1	1	1	4.6
1	1	0	0	0	0	2.8
1	1	0	0	0	1	3.5
1	1	0	0	1	0	4.7
1	1	0	0	1	1	4.9
0	0	1	1	0	0	2.4
0	0	1	1	0	1	2.7
0	0	1	1	1	0	4.9
0	0	1	1	1	1	4.5
1	0	1	0	0	0	2.6

1	0	1	0	0	1	2.8
1	0	1	0	1	0	4.5
1	0	1	0	1	1	4.8
0	1	1	0	0	0	2.8
0	1	1	0	0	1	3.4
0	1	1	0	1	0	4.8
0	1	1	0	1	1	4.7
1	1	1	1	0	0	2.9
1	1	1	1	0	1	5.6
1	1	1	1	1	0	5
1	1	1	1	1	1	5

Πίνακας 2.3.2

Το αποτέλεσμα και το τελικό μοντέλο που προέκυψε από την παλινδρόμηση καθώς και η εκτίμηση του μέσου και της διασποράς είναι αντιστοίχως:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr (> t)
(Intercept)	2.4625	0.2230	11.041	2.6e-11
B	0.6875	0.2575	2.669	0.01292
D	0.2563	0.1821	1.407	0.17124
E	1.7625	0.2575	6.844	2.9e-07
F	0.5187	0.1821	2.849	0.00847
B:E	-0.4875	0.3642	-1.338	0.19233

$$Y = 2.4625 + 0.6875B + 0.2563D + 1.7625E + 0.5187F - 0.4875B:E + \varepsilon$$

$$E(Y) = 2.4625 + 0.6875B + 0.2563D$$

$$VAR(Y) = (1.7625 - 0.4875B)^2 VAR(E) + (0.5187)^2 VAR(F) + V(\varepsilon)$$

Παρατηρούμε πως ο παράγοντας B είναι παράγοντας ελέγχου του θορύβου καθώς φαίνεται να αλληλεπιδρά με τον παράγοντα E. Ο παράγοντας D φαίνεται να είναι παράγοντας ελέγχου του στόχου. Επομένως, οι υπόλοιποι παράγοντες (A, C) θα είναι παράγοντες ελέγχου του κόστους και το επίπεδο που θα επιλεγεί θα είναι το οικονομικότερο για το πείραμα.

Συγκριτικά με την προσέγγιση του Taguchi, η μέθοδος των αποκριτικών επιφανειών είναι πιο αναλυτική και καταλαβαίνουμε ευκολότερα το πως κάποιος παράγοντας ελέγχου αλληλεπιδρά με κάποιον παράγοντα θορύβου ώστε να θέσουμε στο κατάλληλο επίπεδο τον

παράγοντα ελέγχου έτσι ώστε να μειωθεί η διακύμανση της μεταβλητής απόκρισης. Είναι πολύ σημαντικό που με τον τρόπο αυτό γνωρίζουμε ακριβώς ποιος παράγοντας θορύβου επηρεάζει τη μεταβλητότητα της απόκρισης.

2.4 Ορθογώνιες Αντιθέσεις (για τη μοντελοποίηση επιδράσεων από παράγοντες με περισσότερα από 2 επίπεδα)

Στη Στατιστική κάθε αντίθεση είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των μεταβλητών στον οποίο οι συντελεστές του αθροίζουν στο 0. Δηλαδή, $\sum_{i=1}^k c_i Y_i$ με $\sum_{i=1}^k c_i = 0$, όπου k είναι το πλήθος των επιπέδων ενός παράγοντα. Εάν επιπλέον ισχύει πως το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων συντελεστών δύο αντιθέσεων ισούται με 0, τότε οι αντιθέσεις καλούνται ορθογώνιες. Δηλαδή, αν $C_1 = \sum_{i=1}^k c_i Y_i$ και $C_2 = \sum_{i=1}^k d_i Y_i$ με το άθροισμα των συντελεστών τους ξεχωριστά να είναι ίσο με 0, τότε θα είναι ορθογώνιες αν ισχύει $\sum_{i=1}^k c_i d_i = 0$. Ονομάζονται επίσης και βωβές μεταβλητές καθώς με την κατάλληλη επιλογή τους μπορεί να εξαχθεί κάποιο χρήσιμο συμπέρασμα.

Η επίδραση της κάθε αντίθεσης θα έχει από 1 βαθμό ελευθερίας καθώς διασπά τους βαθμούς ελευθερίας κάποιας επίδρασης του πειράματος. Πιο συγκεκριμένα, εάν ένας παράγοντας μελετάται σε k επίπεδα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα σύνολο το οποίο θα αποτελείται από το πολύ $k-1$ αντιθέσεις οι οποίες ανά δύο να είναι ορθογώνιες μεταξύ τους για να φτιάξουμε τις βωβές μεταβλητές και με αυτόν τον τρόπο να διασπαστεί και το άθροισμα τετραγώνων των εκτελέσεων (θεραπειών) του πειράματος σε $k-1$ ανεξάρτητα αθροίσματα τετραγώνων. Για παράδειγμα, εάν έχουμε έναν παράγοντα με 4 επίπεδα ($k = 4$) και το ζητούμενο είναι να ελέγξουμε αν το πρώτο επίπεδο του παράγοντα διαφέρει από το τρίτο επίπεδο, φτιάχνουμε τον γραμμικό συνδυασμό $a_1 + 0 \cdot a_2 + (-1) \cdot a_3 + 0 \cdot a_4 = 0$, και συνεπάγεται ως $a_1 = a_3$. Εδώ μας δίνεται η δυνατότητα να φτιάξουμε έως και 3 αντιθέσεις.

Οι ορθογώνιες αντιθέσεις μπορούν να φανούν χρήσιμες στους σχεδιασμούς των διασταυρούμενων σχηματισμών καθώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν για περισσότερους από έναν παράγοντες με ίδιο πλήθος παρατηρήσεων σε κάθε συνδυασμό επιπέδων των παραγόντων. Δηλαδή, εάν έχουμε έναν παράγοντα με k επίπεδα και έναν δεύτερο παράγοντα με m επίπεδα, μπορούμε να δημιουργήσουμε $k-1$ βωβές μεταβλητές για τον πρώτο παράγοντα και $m-1$ βωβές μεταβλητές για τον δεύτερο παράγοντα. Πολλαπλασιάζοντας κάθε βωβή μεταβλητή του ενός παράγοντα με την βωβή μεταβλητή του άλλου, δημιουργούνται και οι

αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους ώστε να μελετηθούν και αυτές στη συνέχεια της ανάλυσης των αποτελεσμάτων μέσω της ανάλυσης παλινδρόμησης. Τέλος, κάποια κλασικά σύνολα ορθογώνιων αντιθέσεων που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια είναι η γραμμική ορθογώνια αντίθεση, η τετραγωνική και η κυβική.

2.4.1 Παράδειγμα παραγόντων με περισσότερα από 2 επίπεδα

Στους διασταυρούμενους σχεδιασμούς είναι πιθανό (κυρίως) οι παράγοντες ελέγχου να έχουν όχι μόνο 2 επίπεδα αλλά 3 και περισσότερα. Ως πιο σύνηθες είναι να έχουν από 3 επίπεδα και γι' αυτό τον λόγο πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί στην εύρεση των παραγόντων που επηρεάζουν την απόκριση του μοντέλου του σχεδιασμού καθώς είναι πολύ πιθανό να εμφανιστεί καμπυλότητα (*curvature*) στις επιδράσεις. Για να εξετάσουμε το ενδεχόμενο αυτό χρησιμοποιούμε ορθογώνιους σχεδιασμούς και ορθογώνιες αντιθέσεις οι οποίες, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, διασπών τους βαθμούς ελευθερίας της κάθε επίδρασης στις γραμμικές, τετραγωνικές, κυβικές αντιθέσεις ή και ακόμα μεγαλύτερης τάξης αναλόγως με το ζητούμενο που θέλουμε να ελέγξουμε.

Ας υποθέσουμε πως έχουμε να διαχειριστούμε έναν σχεδιασμό Taguchi με εσωτερική και εξωτερική διάταξη, και θέλουμε να τον μετατρέψουμε σε έναν μόνο ορθογώνιο σχεδιασμό. Από τον Πίνακα 2.2, θα παρουσιαστούν αναλυτικά όλοι οι συνδυασμοί των επιπέδων εσωτερικής με εξωτερική διάταξη και θα προκύψει ο παρακάτω σχεδιασμός με $9 \cdot 4 = 36$ εκτελέσεις:

A	B	C	D	E	F	G	y_i
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	y_{11}
-1	-1	-1	-1	-1	1	1	y_{12}
-1	-1	-1	-1	1	-1	1	y_{13}
-1	-1	-1	-1	1	1	-1	y_{14}
-1	0	0	0	-1	-1	-1	y_{21}
-1	0	0	0	-1	1	1	y_{22}
-1	0	0	0	1	-1	1	y_{23}
-1	0	0	0	1	1	-1	y_{24}
-1	1	1	1	-1	-1	-1	y_{31}

-1	1	1	1	-1	1	1	y ₃₂
-1	1	1	1	1	-1	1	y ₃₃
-1	1	1	1	1	1	-1	y ₃₄
0	-1	0	1	-1	-1	-1	y ₄₁
0	-1	0	1	-1	1	1	y ₄₂
0	-1	0	1	1	-1	1	y ₄₃
0	-1	0	1	1	1	-1	y ₄₄
0	0	1	-1	-1	-1	-1	y ₅₁
0	0	1	-1	-1	1	1	y ₅₂
0	0	1	-1	1	-1	1	y ₅₃
0	0	1	-1	1	1	-1	y ₅₄
0	1	-1	0	-1	-1	-1	y ₆₁
0	1	-1	0	-1	1	1	y ₆₂
0	1	-1	0	1	-1	1	y ₆₃
0	1	-1	0	1	1	-1	y ₆₄
1	-1	1	0	-1	-1	-1	y ₇₁
1	-1	1	0	-1	1	1	y ₇₂
1	-1	1	0	1	-1	1	y ₇₃
1	-1	1	0	1	1	-1	y ₇₄
1	0	-1	1	-1	-1	-1	y ₈₁
1	0	-1	1	-1	1	1	y ₈₂
1	0	-1	1	1	-1	1	y ₈₃
1	0	-1	1	1	1	-1	y ₈₄
1	1	0	-1	-1	-1	-1	y ₉₁
1	1	0	-1	-1	1	1	y ₉₂
1	1	0	-1	1	-1	1	y ₉₃
1	1	0	-1	1	1	-1	y ₉₄

Πίνακας 2.4.1 Παράδειγμα *crossed array* με 3 επιπέδων παράγοντες ελέγχου και 2 επιπέδων παράγοντες θορύβου

Εφόσον έχουμε 4 παράγοντες με 3 επίπεδα ο καθένας, μπορούμε να διασπάσουμε τους βαθμούς ελευθερίας κάθε επίδρασης σε δύο το πολύ ορθογώνιες αντιθέσεις ($k - 1 = 3 - 1 = 2$) με έναν βαθμό ελευθερίας η καθεμία. Αποφασίζουμε να ερευνήσουμε εάν η απόκριση

εμπλέκεται γραμμικά με κάποιες από τις επιδράσεις είτε τετραγωνικά. Θα μπορούσαμε αντί για τετραγωνικά να διαλέγαμε να ερευνήσουμε για παράδειγμα τις κυβικές ορθογώνιες αντιθέσεις ή και μεγαλύτερης τάξης. Οι ορθογώνιες αντιθέσεις παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

	Χαμηλό επίπεδο	Μεσαίο επίπεδο	Υψηλό επίπεδο
Γραμμικές	-1	0	1
Τετραγωνικές	1	-2	1

Πίνακας 2.4.2 Ορθογώνιες Αντιθέσεις

Οι υποθέσεις που θα ελεγχθούν βάσει του Πίνακα 2.4.2 είναι πρώτον, εάν το χαμηλό επίπεδο φαίνεται να διαφέρει από το υψηλό επίπεδο και δεύτερον, εάν το άθροισμα του χαμηλού και υψηλού επιπέδου δεν παρουσιάζει διαφορά με την διπλάσια επίδραση του μεσαίου επιπέδου. Οι έλεγχοι αυτοί θα πραγματοποιηθούν και για τους 4 παράγοντες. Αντιστοίχως, οι αντιθέσεις μπορούν να γραφούν ως εξής (όπου a συμβολίζεται η επίδραση) :

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_3, H_1: \text{αλλιώς}$$

$$H_0: \alpha_1 + \alpha_3 = 2 \cdot \alpha_2, H_1: \text{αλλιώς}$$

Ο σχεδιασμός ο οποίος θα προκύψει χρησιμοποιώντας τις ορθογώνιες αντιθέσεις φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

A _{linear}	A _{quad}	B _{linear}	B _{quad}	C _{linear}	C _{quad}	D _{linear}	D _{quad}	E	F	G	y _i
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	y ₁₁
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	y ₁₂
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	y ₁₃
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	y ₁₄
-1	1	0	-2	0	-2	0	-2	-1	-1	-1	y ₂₁
-1	1	0	-2	0	-2	0	-2	-1	1	1	y ₂₂
-1	1	0	-2	0	-2	0	-2	1	-1	1	y ₂₃
-1	1	0	-2	0	-2	0	-2	1	1	-1	y ₂₄
-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	y ₃₁
-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1	y ₃₂
-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	y ₃₃
-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	y ₃₄
0	-2	-1	1	0	-2	1	1	-1	-1	-1	y ₄₁

0	-2	-1	1	0	-2	1	1	-1	1	1	y ₄₂
0	-2	-1	1	0	-2	1	1	1	-1	1	y ₄₃
0	-2	-1	1	0	-2	1	1	1	1	-1	y ₄₄
0	-2	0	-2	1	1	-1	1	-1	-1	-1	y ₅₁
0	-2	0	-2	1	1	-1	1	-1	1	1	y ₅₂
0	-2	0	-2	1	1	-1	1	1	-1	1	y ₅₃
0	-2	0	-2	1	1	-1	1	1	1	-1	y ₅₄
0	-2	1	1	-1	1	0	-2	-1	-1	-1	y ₆₁
0	-2	1	1	-1	1	0	-2	-1	1	1	y ₆₂
0	-2	1	1	-1	1	0	-2	1	-1	1	y ₆₃
0	-2	1	1	-1	1	0	-2	1	1	-1	y ₆₄
1	1	-1	1	1	1	0	-2	-1	-1	-1	y ₇₁
1	1	-1	1	1	1	0	-2	-1	1	1	y ₇₂
1	1	-1	1	1	1	0	-2	1	-1	1	y ₇₃
1	1	-1	1	1	1	0	-2	1	1	-1	y ₇₄
1	1	0	-2	-1	1	1	1	-1	-1	-1	y ₈₁
1	1	0	-2	-1	1	1	1	-1	1	1	y ₈₂
1	1	0	-2	-1	1	1	1	1	1	-1	y ₈₃
1	1	0	-2	-1	1	1	1	1	1	-1	y ₈₄
1	1	1	1	0	-2	-1	1	-1	-1	-1	y ₉₁
1	1	1	1	0	-2	-1	1	-1	1	1	y ₉₂
1	1	1	1	0	-2	-1	1	1	-1	1	y ₉₃
1	1	1	1	0	-2	-1	1	1	1	-1	y ₉₄

Πίνακας 2.4.3 Σχεδιασμός με τις ορθογώνιες αντιθέσεις

Εδώ, το μοντέλο παλινδρόμησης αποτελείται από 36 παραμέτρους και έχει τη μορφή:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^8 \beta_i C_i + \sum_{j=1}^3 \gamma_j N_j + \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} C_i N_j + \varepsilon,$$

όπου C θεωρούμε τους παράγοντες ελέγχου και N τους παράγοντες θορύβου (E,F,G).

2.5 Σύνοψη

Στον Εύρωστο Παραμετρικό Σχεδιασμό, είναι αρκετοί εκείνοι οι οποίοι θεωρούν πως πέρα από την εύρεση των βέλτιστων επιπέδων των παραγόντων του πειράματος, είναι πιο σημαντική

η κατανόηση του προβλήματος ώστε να επέλθει η κατανόηση των μεταβλητών που έχουν αντίκτυπο στην μέση τιμή αλλά και εκείνων των μεταβλητών που έχουν αντίκτυπο στη διασπορά του κάθε μοντέλου. Όπως αναφέραμε, μέσω των διασταυρούμενων σχεδιασμών, η βελτιστοποίηση και η εύρεση των παραγόντων που επηρεάζουν την μεταβλητή απόκρισης είναι βασικός στόχος. Λόγω κάποιων μειονεκτημάτων που παρουσιάζουν οι συγκεκριμένοι σχεδιασμοί, έχει προταθεί από πολλούς επιστήμονες να γίνεται η χρήση των συνδυασμένων σχηματισμών (*combined arrays*). Φαίνεται πως είναι μικρότεροι σχεδιασμοί από αυτούς του Taguchi και επιτρέπουν την εκτίμηση περισσότερων επιδράσεων που μας ενδιαφέρουν, καθώς δίνεται η δυνατότητα επιλογής των επιδράσεων προς εκτίμηση χωρίς να αυξάνονται αναγκαστικά οι εκτελέσεις του πειράματος ή χρησιμοποιώντας και μεγαλύτερη διακριτική ικανότητα.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3

Combined Arrays – Συνδυασμένοι Σχηματισμοί

3.1 Συνδυασμένοι Μετασχηματισμοί

Καθώς το σημαντικότερο μειονέκτημα των crossed arrays είναι το μεγάλο συνήθως πλήθος των εκτελέσεων του πειραματικού σχεδιασμού, επιτακτική είναι η ανάγκη να μειωθεί το πλήθος αυτό χωρίς όμως να επηρεαστεί αρνητικά η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων ενός σχεδιασμού. Έχει προταθεί από πολλούς να γίνεται η χρήση ενός μόνο σχεδιασμού που να περιλαμβάνει μαζί παράγοντες ελέγχου και θορύβου αλλά και τις αλληλεπιδράσεις αυτών (ή και άλλων αλληλεπιδράσεων αν χρειαστεί). Οι σχεδιασμοί αυτοί ονομάζονται συνδυασμένοι μετασχηματισμοί ή αλλιώς *combined arrays* και μπορούν να χρησιμοποιηθούν με πολύ λιγότερες εκτελέσεις. Είναι πολύ σημαντικό ακόμη να αναφερθεί πως προσφέρουν ευελιξία στην εκτίμηση των επιδράσεων των παραγόντων και των αλληλεπιδράσεων τους με αποτέλεσμα να δίνεται η δυνατότητα στον πειραματιστή να επιλέξει τον κατάλληλο πειραματικό σχεδιασμό ανάλογα με τους παράγοντες και τις αλληλεπιδράσεις αυτών που θέλει να εκτιμήσει χωρίς έτσι να χρειάζεται να εκτιμηθούν οι αλληλεπιδράσεις όλων των συνδυασμών. Ακόμη, είναι σημαντικό να αναφερθεί πως η προσέγγιση με τη μορφή συνδυασμένων μετασχηματισμών είναι και υπολογιστικά πιο οικονομική εφόσον το πείραμα έχει λιγότερες εκτελέσεις (είναι κλασματικό συγκριτικά με τους διασταυρούμενους σχεδιασμούς). Με λίγα λόγια, η χρήση των συνδυασμένων μετασχηματισμών απλοποιεί τη διαδικασία του πειράματος με αποτέλεσμα να εξοικονομεί χρόνο και πόρους, εφόσον διεξάγεται μόνο ένα πείραμα με όλα τα απαραίτητα δεδομένα μαζί και όχι ξεχωριστά, δηλαδή ένα με τους παράγοντες ελέγχου και ένα με τους παράγοντες θορύβου.

Ένα από τα σημαντικότερα ζητήματα στους συνδυασμένους μετασχηματισμούς είναι να γίνει η σωστή ανάθεση των παραγόντων στις στήλες του εκάστοτε σχεδιασμού για διάφορους σημαντικούς λόγους. Αρχικά, με τον τρόπο αυτό γίνεται αποφυγή της σύγχυσης της επίδρασης

ενός παράγοντα με κάποια αλληλεπίδραση ή με την επίδραση ενός άλλου παράγοντα. Μία ανάθεση η οποία δεν είναι βέλτιστη για το κάθε πείραμα μπορεί να οδηγήσει σημαντικές κύριες επιδράσεις ή αλληλεπιδράσεις να συγχέονται μεταξύ τους και έτσι να καθιστά αδύνατη την εύρεση του ποιος παράγοντας ευθύνεται και επιδρά στην εξαρτημένη μεταβλητή. Για παράδειγμα, εάν ο πειραματιστής πρέπει να δώσει βάση σε μία συγκεκριμένη επίδραση, θα πραγματοποιήσει ανάθεση των παραγόντων τέτοια ώστε να μην συγχέεται με καμία άλλη. Επίσης, διασφαλίζεται ότι θα γίνει η εξαγωγή του πειράματος με έναν σχεδιασμό ο οποίος μπορεί να διακρίνει κυρίως τις κύριες επιδράσεις με τις αλληλεπιδράσεις 1^{ης} τάξης. Ακόμη, η ισχύς του σχεδιασμού θα μεγιστοποιηθεί και έτσι ο πειραματιστής θα είναι σε θέση να ανιχνεύσει βάσει του πειράματος αυτού, ακόμη και τις πιο ευαίσθητες επιδράσεις που ίσως με κάποιον άλλον σχεδιασμό να μην ήταν εφικτό. Τέλος, μειώνονται οι πόροι που δαπανώνται διότι με τον τρόπο αυτό ελαχιστοποιείται το πλήθος των εκτελέσεων του πειράματος που απαιτούνται ώστε να επιτευχθεί κάποιο επιθυμητό επίπεδο ανάλυσης. Έτσι, επιτυγχάνεται η μέγιστη αποδοτικότητα του κάθε σχεδιασμού βάσει των πόρων που είναι διαθέσιμοι στο εκάστοτε πείραμα. Εμείς θα εστιάσουμε σε κάποιες συγκεκριμένες περιπτώσεις. Θα ασχοληθούμε με 3, 4, 5 και 6 παράγοντες συνολικά και θα γίνει ανάλυση με τη βοήθεια του στατιστικού πακέτου της R, για εύρεση των βέλτιστων σχεδιασμών σε οκτώ περιπτώσεις. Πιο αναλυτικά παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Παράγοντες Ελέγχου	Παράγοντες Θορύβου	Παράγοντες Ελέγχου × Παράγοντες Θορύβου	Βαθμοί Ελευθερίας	Πλήθος Παραγόντων
2	1	2	6	3
1	2	2	6	3
1	3	3	8	4
3	1	3	8	4
2	2	4	9	4
2	3	6	12	5
3	2	6	12	5
3	3	9	16	6

Πίνακας 3.1

3.2 Μη ισόμορφοι Ορθογώνιοι Πίνακες

Οι πίνακες οι οποίοι χρησιμοποιούνται συνήθως στους συνδυασμένους σχηματισμούς είναι ορθογώνιοι σχηματισμοί, συνήθως σύνθετοι. Αυτό συμβαίνει καθώς στους πειραματικούς σχεδιασμούς μας ενδιαφέρει η επίδραση ενός παράγοντα να μπορεί να εκτιμηθεί ανεξάρτητα των άλλων, δηλαδή ο σχεδιασμός να έχει την ιδιότητα της ορθογωνιότητας, αλλά και να είναι ένας οικονομικό σχεδιασμός. Εφόσον ο σχεδιασμός είναι ορθογώνιος, αυτό μπορεί να επιτευχθεί και έτσι ενισχύεται η αξιοπιστία και η ερμηνεία των αποτελεσμάτων με το λιγότερο κόστος.

Εκμεταλλευόμαστε μόνο τους μη ισόμορφους σχεδιασμούς για κάθε πλήθος γραμμών και στηλών, αφού οι μη ισόμορφοι σχεδιασμοί δεν μπορούν να μετασχηματιστούν ο ένας στον άλλον μέσω δικών μας ενεργειών, όπως είναι η αναδιάταξη γραμμών ή στηλών. Οι διατάξεις αυτές είναι πολύ σημαντικές ώστε να διασφαλιστεί ότι κάθε πειραματικός σχεδιασμός αντιπροσωπεύει μια μοναδική δομή, προσφέροντας διαφορετικά πιθανά αποτελέσματα και νέες γνώσεις. Σε έναν ορθογώνιο σχεδιασμό κάθε στήλη αντιστοιχίζεται σε έναν παράγοντα με όσα επίπεδα έχει, και η διάταξη του κατασκευάζεται με τρόπο τέτοιο ώστε κάθε συνδυασμός επιπέδων σε δύο στήλες να εμφανίζεται με ίση συχνότητα, και έτσι μπορεί να γίνει ανεξάρτητη μελέτη των επιδράσεων των παραγόντων που εμπλέκονται στο πείραμα.

Η ταξινόμηση και το πλήθος των μη ισόμορφων ορθογώνιων σχεδιασμών είναι αρκετά δύσκολη και υπάρχουν ερευνητές οι οποίοι ασχολούνται με το κομμάτι αυτό. Για μικρούς σχεδιασμούς με λίγους παράγοντες με λίγα επίπεδα και όχι πολλές εκτελέσεις του πειράματος, το πλήθος των σχεδιασμών μπορεί πιο εύκολα να εντοπιστεί και να αποτυπωθούν οι πιθανοί πίνακες. Καθώς όμως αυξάνεται το πλήθος των εκτελέσεων του πειραματικού σχεδιασμού ή και το πλήθος των παραγόντων, γίνεται όλο και πιο περίπλοκη η εύρεση όλων των μοναδικών αυτών σχεδιασμών. Χρειάζονται εξειδικευμένοι τρόποι ώστε να γίνει η εύρεση των σχεδιασμών αυτών, για παράδειγμα μέσω αλγορίθμων, ώστε να βρεθούν όλοι οι πιθανοί μη ισόμορφοι σχεδιασμοί διασφαλίζοντας πως πράγματι δεν θα βρεθεί κάποιος σχεδιασμός να είναι ισόμορφος με κάποιον άλλον.

Παρακάτω θα παρουσιαστεί το πλήθος των μη ισόμορφων ορθογώνιων σχεδιασμών για πλήθος εκτελέσεων 12, 16, 20, 24, ..., 64 και για πλήθος παραγόντων 3, 4, 5 και 6 όπως έχει αποτυπωθεί έως τώρα στην βιβλιογραφία:

Πλήθος Παραγόντων				
Πλήθος Εκτελέσεων	3	4	5	6
12	2	1	2	2
16	3	5	11	27
20	3	3	11	75
24	4	10	63	1350
28	4	7	127	17826
32	5	19	491	266632
36	5	15	1242	
40	6	32	3919	
44	6	28		
48	7	54		
52	7	48		
56	8	84		
60	8	79		
64	9	128		

Πίνακας 3.2

Αξίζει να αναφερθεί πως οι μη ισόμορφοι ορθογώνιοι σχεδιασμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πολλές εφαρμογές σε διάφορους τομείς της ζωής μας. Για παράδειγμα σε βιομηχανίες, στη βιολογία σε διάφορα υψίστης σημασίας πειράματα κλπ. Γι' αυτό και είναι πολύ σημαντικό να γίνει σωστή επιλογή κατάλληλου σχεδιασμού ώστε τα αποτελέσματα και οι αποφάσεις που θα κληθεί ο πειραματιστής να λάβει να είναι όσο το δυνατόν πιο αξιόπιστα. Έτσι θα βελτιστοποιηθεί η αποτελεσματικότητα και θα είναι πιο στοχευμένη η εξερεύνηση των επιδράσεων διαφόρων αλληλεπιδράσεων των παραγόντων.

3.3 Κριτήριο Αποδοτικότητας D - Efficiency

Το κριτήριο D – Efficiency (ή D – Αποδοτικότητα) θεωρείται πολύ σημαντικό εργαλείο για την επιλογή βέλτιστων πειραματικών σχεδιασμών. Βάσει της ορίζουσας του πίνακα W

(κανονικοποιημένος πίνακας πληροφορίας X) υπολογίζει την αποδοτικότητα εκτίμησης των παραμέτρων ενός μοντέλου και έτσι μας υποδεικνύει ποιο μοντέλο μας παρέχει την περισσότερη πληροφορία από αυτά που αξιολογούνται ή και ποιος σχεδιασμός (αν υπάρχουν αρκετοί μη ισόμορφοι) μας προσφέρει αυτή την πληροφορία.. Στην επιλογή λοιπόν των βέλτιστων μοντέλων θα χρησιμοποιηθεί το κριτήριο αυτό, το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$D_{\text{eff}} = |W^T W|^{\frac{1}{p+1}},$$

όπου $W = [w_0, w_1, \dots, w_p] = [1/\|1\|, x_1/\|x_1\|, \dots, x_p/\|x_p\|]$, 1 είναι η διάνυσμα στήλη με όλες τις μονάδες και x_i είναι οι διάνυσμα στήλες της i th επίδρασης του πίνακα ενός γραμμικού μοντέλου με p επιδράσεις, $X = [1, x_1, x_2, \dots, x_p]$. Στην περίπτωση μας, ο τύπος του μοντέλου παλινδρόμησης θα είναι ο εξής:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i X_i + \varepsilon,$$

Ακόμη, οι στήλες του πίνακα W είναι κανονικοποιημένες. Οι τιμές που μπορεί να λάβει το D_{eff} είναι από 0 έως και 1. Εάν οι στήλες του πίνακα W είναι ορθογώνιες τότε το D_{eff} θα είναι ίσο με 1. Ένα μοντέλο θεωρείται ότι μπορεί να εκτιμηθεί όταν οι τιμή του κριτηρίου είναι μεγαλύτερη του μηδενός. Βέβαια, οι υψηλότερες τιμές D -efficiency υποδεικνύουν σχεδιασμούς που αποδίδουν πιο ακριβείς και αξιόπιστες εκτιμήσεις των παραμέτρων. Αυτό οδηγεί σε πιο ακριβή και αξιόπιστα συμπεράσματα από το πείραμα. Όσο πιο κοντά στο 1 είναι η τιμή αυτή τόσο το καλύτερο, καθώς μικρές τιμές του κριτηρίου αυτού μπορεί να οδηγήσουν σε πολυσυγγραμμικότητα μεταξύ των παραγόντων και να δημιουργηθεί σύγχυση στην κατανόηση και ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Δεν θεωρείται κατάλληλο το κριτήριο το οποίο βασίζεται στην διακριτική ικανότητα του σχεδιασμού καθώς δεν ισχύει εδώ η ιεραρχική σειρά των επιδράσεων. Αυτό συμβαίνει διότι οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ παραγόντων ελέγχου και θορύβου είναι πιο σημαντικές από αυτές μεταξύ των παραγόντων ελέγχου ή μεταξύ των παραγόντων θορύβου και δεν μπορούμε να τις θεωρήσουμε παρόμοιας σημαντικότητας.

3.4 Παράδειγμα υπολογισμού αποδοτικότητας σχεδιασμού

Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, στο σημείο αυτό θα παρουσιαστεί αρχικά ένα παράδειγμα του τρόπου υπολογισμού του μέτρου αποδοτικότητας D – Efficiency ενός

σύνθετου ορθογώνιου σχεδιασμού. Ας υποθέσουμε πως έχουμε 5 παράγοντες εκ των οποίων οι 2 είναι παράγοντες ελέγχου και οι υπόλοιποι 3 είναι παράγοντες θορύβου. Θα ασχοληθούμε με τον παρακάτω πίνακα σχεδιασμού D, ο οποίος αποτελείται από 28 εκτελέσεις:

N1	N2	N3	C1	C2
1	1	1	1	1
1	1	1	1	-1
1	1	1	-1	1
1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	-1
1	-1	1	1	-1
1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	1	-1
1	-1	-1	-1	1
-1	1	1	1	-1
-1	1	1	-1	1
-1	1	1	-1	-1
-1	1	-1	1	1
-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	-1	1
-1	-1	1	1	1
-1	-1	1	1	-1
-1	-1	1	-1	1
-1	-1	1	-1	-1
-1	-1	-1	1	1
-1	-1	-1	1	-1
-1	-1	-1	-1	1
-1	-1	-1	-1	-1

Προσθέτοντας τις αλληλεπιδράσεις 1^{ης} τάξης μεταξύ παραγόντων ελέγχου και θορύβου προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μοντέλου X μαζί με την μοναδιαία στήλη:

	N1	N2	N3	C1	C2	C1N1	C1N2	C1N3	C2N1	C2N2	C2N3
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1
1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1
1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1

Το μοντέλο παλινδρόμησης θα έχει τη μορφή:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^2 \beta_i C_i + \sum_{j=1}^3 \gamma_j N_j + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} C_i N_j + \varepsilon,$$

Σύμφωνα με τον τύπο υπολογισμού του D – Efficiency, χρειάζεται να υπολογιστεί ο πίνακας W. Θα υπολογίσουμε το μέτρο κάθε στήλης και θα διαιρέσουμε με αυτό το κάθε στοιχείο του πίνακα. Καθώς ο πίνακας μας αποτελείται από μονάδες, θα παρουσιαστεί ο υπολογισμός μόνο της 1^{ης} στήλης. Έπειτα θα υπολογιστεί και ο αντίστροφος πίνακας του W, W^T.

$$\|1\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{28} 1^2} = \sqrt{28} = 5,291503$$

Πίνακας W:

	N1	N2	N3	C1	C2	C1N1	C1N2	C1N3	C2N1	C2N2	C2N3
0,189	0,189	0,189	0,189	0,189	0,189	0,189	0,189	0,189	0,189	0,189	0,189
0,189	0,189	0,189	0,189	0,189	-0,189	0,189	0,189	0,189	-0,189	-0,189	-0,189
0,189	0,189	0,189	0,189	-0,189	0,189	-0,189	-0,189	-0,189	0,189	0,189	0,189
0,189	0,189	0,189	0,189	-0,189	-0,189	-0,189	-0,189	-0,189	-0,189	-0,189	-0,189
0,189	0,189	0,189	-0,189	0,189	-0,189	0,189	0,189	-0,189	-0,189	-0,189	0,189

0,189	0,189	0,189	-0,189	-0,189	0,189	-0,189	-0,189	0,189	0,189	0,189	-0,189
0,189	0,189	0,189	-0,189	-0,189	-0,189	-0,189	-0,189	0,189	-0,189	-0,189	0,189
0,189	0,189	-0,189	0,189	0,189	-0,189	0,189	-0,189	0,189	-0,189	0,189	-0,189
0,189	0,189	-0,189	0,189	-0,189	0,189	-0,189	0,189	-0,189	0,189	-0,189	0,189
0,189	0,189	-0,189	0,189	-0,189	-0,189	-0,189	0,189	-0,189	-0,189	0,189	-0,189
0,189	0,189	-0,189	-0,189	0,189	0,189	0,189	-0,189	-0,189	0,189	-0,189	-0,189
0,189	0,189	-0,189	-0,189	0,189	-0,189	0,189	-0,189	-0,189	-0,189	0,189	0,189
0,189	0,189	-0,189	-0,189	-0,189	0,189	-0,189	0,189	0,189	0,189	-0,189	-0,189
0,189	-0,189	0,189	0,189	0,189	-0,189	-0,189	0,189	0,189	0,189	-0,189	-0,189
0,189	-0,189	0,189	0,189	-0,189	0,189	0,189	-0,189	-0,189	-0,189	0,189	0,189
0,189	-0,189	0,189	0,189	-0,189	-0,189	0,189	-0,189	-0,189	0,189	-0,189	-0,189
0,189	-0,189	0,189	-0,189	0,189	0,189	-0,189	0,189	-0,189	-0,189	0,189	-0,189
0,189	-0,189	0,189	-0,189	0,189	-0,189	-0,189	0,189	-0,189	0,189	-0,189	0,189
0,189	-0,189	0,189	-0,189	-0,189	0,189	0,189	-0,189	0,189	-0,189	0,189	-0,189
0,189	-0,189	-0,189	0,189	0,189	0,189	-0,189	-0,189	0,189	-0,189	-0,189	0,189
0,189	-0,189	-0,189	0,189	0,189	0,189	-0,189	-0,189	0,189	-0,189	-0,189	0,189
0,189	-0,189	-0,189	0,189	0,189	0,189	-0,189	-0,189	0,189	-0,189	-0,189	0,189
0,189	-0,189	-0,189	0,189	-0,189	0,189	0,189	-0,189	-0,189	-0,189	0,189	0,189
0,189	-0,189	-0,189	-0,189	-0,189	-0,189	0,189	0,189	0,189	0,189	0,189	0,189
0,189	-0,189	-0,189	-0,189	-0,189	-0,189	0,189	0,189	0,189	0,189	0,189	0,189

Στη συνέχεια, από τον πολλαπλασιασμό των πινάκων W^T και W προκύπτει ο παρακάτω πίνακας (με στρογγυλοποίηση στο 0 καθώς ο αριθμός είναι πολύ μικρός):

1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	- 0,00	- 0,00	- 0,00	- 0,00	- 0,00	- 0,00
0,00	1,00	0,00	0,00	- 0,00	- 0,00	0,00	- 0,14	- 0,14	0,00	- 0,14	- 0,14
0,00	0,00	1,00	0,00	- 0,00	- 0,00	- 0,14	0,00	- 0,14	- 0,14	0,00	- 0,14
0,00	0,00	0,00	1,00	- 0,00	- 0,00	- 0,14	- 0,14	0,00	- 0,14	- 0,14	0,00
0,00	- 0,00	- 0,00	- 0,00	1,00	- 0,00	0,00	0,00	0,00	- 0,14	- 0,14	- 0,14
0,00	- 0,00	- 0,00	- 0,00	- 0,00	1,00	- 0,14	- 0,14	- 0,14	0,00	0,00	0,00
- 0,00	0,00	- 0,14	- 0,14	0,00	- 0,14	1,00	0,00	0,00	- 0,00	0,14	0,14
- 0,00	- 0,14	0,00	- 0,14	0,00	- 0,14	0,00	1,00	0,00	0,14	- 0,00	0,14
- 0,00	- 0,14	- 0,14	0,00	0,00	- 0,14	0,00	0,00	1,00	0,14	0,14	- 0,00
- 0,00	0,00	- 0,14	- 0,14	- 0,14	0,00	- 0,00	0,14	0,14	1,00	0,00	0,00
- 0,00	- 0,14	0,00	- 0,14	- 0,14	0,00	0,14	- 0,00	0,14	0,00	1,00	0,00
- 0,00	- 0,14	- 0,14	0,00	- 0,14	0,00	0,14	0,14	- 0,00	0,00	0,00	1,00

Η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με 0,603216 και είναι διαφορετική του μηδενός, οπότε μπορούμε να συνεχίσουμε στον υπολογισμό του μέτρου αποδοτικότητας, το οποίο θα είναι ίσο

με $(0,603216)^{(1/p+1)} = 0,958752$, όπου $p = 11$, όσες είναι και οι στήλες με τους παράγοντες και τις αλληλεπιδράσεις αυτών, συν την μοναδιαία στήλη. Η τιμή αυτή είναι πολύ κοντά στην τιμή 1, και έτσι ο σχεδιασμός αυτός θεωρείται ως μία πολύ καλή επιλογή για την ανάλυση των δεδομένων και την εξαγωγή αξιόπιστων αποτελεσμάτων.

3.5 Σύνοψη

Οι σχεδιασμοί που χρησιμοποιούνται συνήθως ώστε να μεγιστοποιηθεί η εκτίμηση των παραγόντων είναι οι ορθογώνιοι απλοί κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί μόνο για πλήθος εκτελέσεων που είναι δύναμη του 2, δηλαδή 2^{q-p} . Όμως οι σχεδιασμοί αυτοί δεν είναι καθόλου οικονομικοί. Για τον λόγο αυτό έχει προταθεί να χρησιμοποιούνται οι ορθογώνιοι σύνθετοι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί, οι οποίοι αναφέρθηκαν στο 1^ο κεφάλαιο, και είναι διαθέσιμοι για πλήθος εκτελέσεων το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 4. Οι σύνθετοι σχεδιασμοί είναι ιδιαίτερα βολικοί όταν πρέπει να αντιμετωπιστούν μεγάλοι αριθμοί παραγόντων ή όταν οι πόροι είναι περιορισμένοι καθώς μπορούν να παρέχουν σημαντικές πληροφορίες με λιγότερες πειραματικές δοκιμές.

Καθώς οι διαθέσιμοι πίνακες προς έλεγχο είναι πάρα πολλοί, για να ελεγχθούν ένας ένας, γίνεται η χρήση προγραμμάτων όπως είναι η R, ώστε αναλόγως το πλήθος των παραγόντων και των εκτελέσεων να ελεγχθούν με ακρίβεια όλοι οι διαθέσιμοι πιθανοί πίνακες. Επομένως, με τον τρόπο αυτό καταλήξαμε στην εύρεση των βέλτιστων σχεδιασμών. Εξετάστηκαν όλοι οι σύνθετοι διαθέσιμοι μη ισόμορφοι ορθογώνιοι σχεδιασμοί για τα πλήθη εκτελέσεων 12, 16, 20, 24 και 28 και για τις περιπτώσεις να έχουμε 3, 4, 5 ή 6 παράγοντες ως προς διερεύνηση. Βρήκαμε την D – Efficiency τιμή τους και στο επόμενο κεφάλαιο θα παρουσιαστούν κάποιες από τις καλύτερες επιλογές σχεδιασμών για κάθε περίπτωση.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 4

Εφαρμογές

4.1 Μελέτη Σχεδιασμών με 3 παράγοντες

Στην περίπτωση που το πείραμα που θέλει να διεξάγει ο πειραματιστής αποτελείται από 3 παράγοντες, υπάρχουν δύο διαφορετικές περιπτώσεις του πλήθους των παραγόντων ελέγχου και θορύβου και είναι οι εξής:

- α) 2 παράγοντες ελέγχου και 1 παράγοντας θορύβου
- β) 1 παράγοντας ελέγχου και 2 παράγοντες θορύβου

4.1.1 2 παράγοντες ελέγχου και 1 παράγοντας θορύβου

Όταν ένας πειραματικός σχεδιασμός αποτελείται από 3 παράγοντες με δύο επίπεδα, και συγκεκριμένα 2 παράγοντες ελέγχου και 1 παράγοντα θορύβου, οι μη ισόμορφοι ορθογώνιοι σχεδιασμοί που προκύπτουν ανά πλήθος εκτελέσεων (n) είναι αρκετοί. Έχει βρεθεί πως υπάρχουν 2 πίνακες για $n = 12$, 3 πίνακες για $n = 16$, 3 πίνακες για $n = 20$, 4 πίνακες για $n = 24$ και 4 πίνακες για $n = 28$. Όταν γίνει ανάθεση των στηλών σε παράγοντες ελέγχου και θορύβου στον κάθε μη ισόμορφο σχεδιασμό από τους συνολικά 16 πίνακες, προκύπτουν 48 διαφορετικές αναθέσεις, 6 για $n=12$, 9 για $n=16$, 9 για $n=20$, 12 για $n=24$ και 12 για $n=28$, καθώς υπάρχουν τρεις μοναδικοί τρόποι ανάθεσης των παραγόντων στις στήλες. Δηλαδή, αν υποθέσουμε πως C_1, C_2 είναι οι παράγοντες ελέγχου και N_1 ο παράγοντας θορύβου, οι αναθέσεις στις στήλες θα είναι οι εξής: $[C_1, C_2, N_1]$, $[C_1, N_1, C_2]$, $[N_1, C_1, C_2]$.

Το μοντέλο που μας ενδιαφέρει στον εύρωστο παραμετρικό σχεδιασμό απαιτεί την εκτίμηση 6 παραμέτρων και απεικονίζεται ως εξής:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^2 \beta_i C_i + \beta_3 N + \sum_{i=1}^2 \gamma_i C_i N + \varepsilon$$

Βάσει του κριτηρίου D – Efficiency και έχοντας υπολογίσει την αποδοτικότητα για όλα τα **48** μοντέλα που προκύπτουν από τους διαθέσιμους σχεδιασμούς, θα παρουσιαστούν οι βέλτιστοι σχεδιασμοί για το συγκεκριμένο μοντέλο καθώς και η τιμή του μέτρου αποδοτικότητας για κάθε διαφορετικό πλήθος εκτελέσεων. Στο παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα φαίνεται το πλήθος των εκτελέσεων του πειράματος και η αποδοτικότητα του καθενός.

Πλήθος εκτελέσεων του πειράματος	Αποδοτικότητα
12	0.9614997
16	1
20	0.9864848
24	1
28	0.9931505

Πίνακας 4.1.1

Στη συνέχεια, για **n = 12** πειραματικές δοκιμές, ο βέλτιστος σχεδιασμός απεικονίζεται παρακάτω:

	1	1	1
	1	1	1
	1	1	-1
	1	-1	1
	1	-1	-1
D =	1	-1	-1
	-1	1	1
	-1	1	-1
	-1	1	-1
	-1	-1	1
	-1	-1	1
	-1	-1	-1

Για παράδειγμα, εφόσον δεν έχει σημασία σε ποιες στήλες θα ανατεθούν οι παράγοντες βάσει αποτελεσμάτων, ένας πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε και το D – Efficiency είναι ο:

	C1	C2	N	C1N	C2N
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	1	-1
X =	1	1	-1	-1	1
	1	1	-1	-1	1
	1	-1	1	1	1
	1	-1	1	-1	-1
	1	-1	1	1	-1
	1	-1	-1	1	-1
	1	-1	-1	1	-1
	1	-1	-1	-1	1

Για **n = 16** δοκιμές, ο βέλτιστος σχεδιασμός που προέκυψε είναι ο εξής:

	1	1	1
	1	1	1
	1	1	-1
	1	1	-1
	1	-1	1
	1	-1	1
	1	-1	-1
D =	1	-1	-1
	-1	1	1
	-1	1	1
	-1	1	-1
	-1	1	-1
	-1	-1	1
	-1	-1	1
	-1	-1	-1
	-1	-1	-1

Ο πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε και το D – Efficiency είναι ο:

		C1	C2	N	C1N	C2N
	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	-1	1	1	-1
	1	1	-1	1	1	-1
X =	1	1	-1	-1	-1	1
	1	1	-1	-1	-1	1
	1	-1	1	1	-1	1
	1	-1	1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	1	-1
	1	-1	1	-1	1	-1
	1	-1	-1	1	-1	-1
	1	-1	-1	1	-1	-1
	1	-1	-1	-1	1	1
	1	-1	-1	-1	1	1

Για **n = 20** πειραματικές δοκιμές, προέκυψε ως βέλτιστος ο παρακάτω σχεδιασμός:

	1	1	1
	1	1	1
	1	1	1
	1	1	-1
	1	1	-1
	1	-1	1
	1	-1	1
	1	-1	-1
D =	1	-1	-1
	-1	1	1
	-1	1	1
	-1	1	-1
	-1	1	-1
	-1	1	-1
	-1	-1	1
	-1	-1	1
	-1	-1	1
	-1	-1	-1
	-1	-1	-1

Ο πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε και το D – Efficiency είναι ο:

	C1	C2	N	C1N	C2N
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1	-1
1	1	1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	1	-1
1	1	-1	1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	1
1	-1	1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	-1	1	1

Παρομοίως, για **n = 24** πειραματικές δοκιμές προέκυψε ως βέλτιστος ο παρακάτω σχεδιασμός:

	-1	-1	-1
	-1	-1	-1
	-1	-1	-1
	-1	-1	1
	-1	-1	1
	-1	-1	1
	-1	1	-1
	-1	1	-1
	-1	1	1
	-1	1	1
D =	-1	1	1
	1	-1	-1
	1	-1	-1
	1	-1	-1
	1	-1	1
	1	-1	1
	1	-1	1
	1	1	-1
	1	1	-1
	1	1	1
	1	1	1
	1	1	1

Ο πίνακας μοντέλου είναι ο εξής:

	C1	C2	N	C1N	C2N	
X =	1	-1	-1	-1	1	1
	1	-1	-1	-1	1	1
	1	-1	-1	-1	1	1
	1	-1	-1	1	-1	-1
	1	-1	-1	1	-1	-1
	1	-1	1	-1	1	-1
	1	-1	1	-1	1	-1
	1	-1	1	1	-1	-1
	1	-1	1	1	-1	1
	1	-1	1	1	-1	1
	1	1	-1	-1	-1	1
	1	1	-1	-1	-1	1
	1	1	-1	-1	-1	1
	1	1	-1	1	1	-1
	1	1	-1	1	1	-1
	1	1	-1	1	1	-1
	1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1

Για **n = 28** πειραματικές δοκιμές, ο βέλτιστος σχεδιασμός είναι ο εξής:

D =	-1	-1	-1
	-1	-1	-1
	-1	-1	-1
	-1	-1	-1
	-1	-1	1
	-1	-1	1
	-1	-1	1
	-1	1	-1
	-1	1	-1
	-1	1	-1
	-1	1	1
	-1	1	1
	-1	1	1
	1	-1	-1
	1	-1	-1
	1	-1	-1
	1	-1	1
	1	-1	1
	1	-1	1
	1	-1	1
	1	1	-1
	1	1	-1
	1	1	-1
	1	1	-1
	1	1	1
	1	1	1
	1	1	1

Ο πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε και το D – Efficiency είναι ο:

	N	C1	C2	C1N	C2N
1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	1
1	1	-1	1	-1	1
1	1	-1	1	-1	1
1	1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	1	-1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

4.1.2 1 παράγοντας ελέγχου και 2 παράγοντες θορύβου

Στην περίπτωση όπου από τους 3 παράγοντες, ο 1 είναι παράγοντας ελέγχου και οι 2 είναι παράγοντες θορύβου, τα παραπάνω αποτελέσματα όσον αφορά την αποδοτικότητα και τους βέλτιστους σχεδιασμούς είναι ίδια. Το μόνο που αλλάζει είναι η ονομασία των στηλών στο κάθε μοντέλο. Θα παρουσιαστούν συνοπτικά τα αποτελέσματα παρακάτω όπως και το μοντέλο παλινδρόμησης.

Πλήθος εκτελέσεων του πειράματος	Αποδοτικότητα
12	0.9614997
16	1
20	0.9864848
24	1
28	0.9931505

Πίνακας 4.1.2

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^2 \beta_i N_i + \beta_3 C + \sum_{i=1}^2 \gamma_i N_i C + \varepsilon$$

Για **n = 12** εκτελέσεις, ο πίνακας σχεδιασμού και ο πίνακας μοντέλου είναι αντιστοίχως:

						N1	N2	C	CN1	CN2
	1	1	1		1	1	1	1	1	1
	1	1	1		1	1	1	1	1	1
	1	1	-1		1	1	1	-1	-1	-1
	1	-1	1		1	1	-1	1	1	-1
	1	-1	-1		1	1	-1	-1	-1	1
D =	1	-1	-1	X =	1	1	-1	-1	-1	1
	-1	1	1		1	-1	1	1	-1	1
	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1
	-1	-1	1		1	-1	-1	1	-1	-1
	-1	-1	1		1	-1	-1	1	-1	-1
	-1	-1	-1		1	-1	-1	-1	1	1

Για **n = 16** εκτελέσεις, ο πίνακας σχεδιασμού και ο πίνακας μοντέλου είναι αντιστοίχως:

						N1	N2	C	N1C	N2C
	1	1	1		1	1	1	1	1	1
	1	1	1		1	1	1	1	1	1
	1	1	-1		1	1	1	1	1	1
	1	1	-1		1	1	1	-1	-1	-1
	1	-1	1		1	1	1	-1	-1	-1
	1	-1	1		1	1	-1	1	1	-1
	1	-1	-1		1	1	-1	-1	-1	1
D =	1	-1	-1	X =	1	1	-1	-1	-1	1
	-1	1	1		1	-1	1	1	-1	1
	-1	1	1		1	-1	1	1	-1	1
	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1
	-1	-1	1		1	-1	-1	1	-1	-1
	-1	-1	1		1	-1	-1	1	-1	-1
	-1	-1	1		1	-1	-1	-1	1	1
	-1	-1	-1		1	-1	-1	-1	1	1
	-1	-1	-1		1	-1	-1	-1	1	1

Για **n = 20** εκτελέσεις, ο πίνακας σχεδιασμού και ο πίνακας μοντέλου είναι αντιστοίχως:

	1	1	1			N1	N2	C	CN1	CN2
	1	1	1		1	1	1	1	1	1
	1	1	1		1	1	1	1	1	1
	1	1	-1		1	1	1	1	1	1
	1	1	-1		1	1	1	-1	-1	-1
	1	-1	1		1	1	1	-1	-1	-1
	1	-1	1		1	1	-1	1	1	-1
	1	-1	-1		1	1	-1	1	1	-1
D =	1	-1	-1	X =	1	1	-1	-1	-1	1
	-1	1	1		1	-1	1	1	-1	1
	-1	1	1		1	-1	1	1	-1	1
	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1
	-1	-1	1		1	-1	-1	1	-1	-1
	-1	-1	1		1	-1	-1	1	-1	-1
	-1	-1	1		1	-1	-1	1	-1	-1
	-1	-1	-1		1	-1	-1	-1	1	1
	-1	-1	-1		1	-1	-1	-1	1	1

Για **n = 24** εκτελέσεις, ο πίνακας σχεδιασμού και ο πίνακας μοντέλου είναι αντιστοίχως:

	-1	-1	-1			N1	N2	C	CN1	CN2
	-1	-1	-1		1	-1	-1	-1	1	1
	-1	-1	-1		1	-1	-1	-1	1	1
	-1	-1	1		1	-1	-1	-1	1	1
	-1	-1	1		1	-1	-1	1	-1	-1
	-1	1	-1		1	-1	-1	1	-1	-1
	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1
D =	-1	1	1	X =	1	-1	1	1	-1	1
	1	-1	-1		1	-1	1	1	-1	1
	1	-1	-1		1	1	-1	-1	-1	1
	1	-1	-1		1	1	-1	-1	-1	1
	1	-1	1		1	1	-1	-1	-1	1
	1	-1	1		1	1	-1	1	1	-1
	1	-1	1		1	1	-1	1	1	-1
	1	1	-1		1	1	-1	1	1	-1
	1	1	-1		1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	-1		1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	1		1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	1		1	1	1	1	1	1
	1	1	1		1	1	1	1	1	1
	1	1	1		1	1	1	1	1	1

Για **n = 28** εκτελέσεις, ο πίνακας σχεδιασμού και ο πίνακας μοντέλου είναι αντιστοίχως:

	-1	-1	-1		N1	N2	C	CN1	CN2	
	-1	-1	-1		1	-1	-1	-1	1	1
	-1	-1	-1		1	-1	-1	-1	1	1
	-1	-1	-1		1	-1	-1	-1	1	1
	-1	-1	1		1	-1	-1	-1	1	1
	-1	-1	1		1	-1	-1	1	-1	-1
	-1	-1	1		1	-1	-1	1	-1	-1
	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1
	-1	1	1		1	-1	1	-1	1	-1
	-1	1	1		1	-1	1	-1	1	-1
D =	-1	1	1		1	-1	1	-1	1	-1
	1	-1	-1	X =	1	-1	1	1	-1	1
	1	-1	-1		1	1	-1	-1	-1	1
	1	-1	-1		1	1	-1	-1	-1	1
	1	-1	1		1	1	-1	-1	-1	1
	1	-1	1		1	1	-1	1	1	-1
	1	-1	1		1	1	-1	1	1	-1
	1	-1	1		1	1	-1	1	1	-1
	1	-1	1		1	1	-1	1	1	-1
	1	1	-1		1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	-1		1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	-1		1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	-1		1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	1		1	1	1	1	1	1
	1	1	1		1	1	1	1	1	1
	1	1	1		1	1	1	1	1	1

4.2 Μελέτη Σχεδιασμών με 4 παράγοντες

Στην περίπτωση που το πείραμα που θέλει να εκτελέσει ο πειραματιστής αποτελείται από 4 παράγοντες, υπάρχουν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις του πλήθους των παραγόντων ελέγχου και θορύβου και είναι οι εξής:

- α) 1 παράγοντας ελέγχου και 3 παράγοντες θορύβου
- β) 3 παράγοντες ελέγχου και 1 παράγοντας θορύβου
- γ) 2 παράγοντες ελέγχου και 2 παράγοντες θορύβου

4.2.1 1 Παράγοντας Ελέγχου και 3 Παράγοντες Θορύβου

Όσον αφορά την περίπτωση να έχουμε 1 παράγοντα ελέγχου και 3 παράγοντες θορύβου, οι μη ισόμορφοι ορθογώνιοι σχεδιασμοί που έχουν βρεθεί είναι: για $n = 12$ έχουμε 1 πίνακα, για $n = 16$ έχουμε 5 πίνακες, για $n = 20$ έχουμε 3 πίνακες, για $n = 24$ έχουμε 10 πίνακες και για $n = 28$ έχουμε 7 πίνακες. Όταν γίνει ανάθεση των στηλών σε παράγοντες ελέγχου και θορύβου στον κάθε μη ισόμορφο σχεδιασμό, προκύπτουν 104 διαφορετικές αναθέσεις, 4 για $n=12$, 20

για $n=16$, 12 για $n=20$, 40 για $n=24$ και 28 για $n=28$, καθώς υπάρχουν τέσσερις μοναδικοί τρόποι ανάθεσης των παραγόντων στις στήλες. Δηλαδή, αν υποθέσουμε πως C1 είναι ο παράγοντας ελέγχου και N1, N2, N3 οι παράγοντες θορύβου, οι αναθέσεις στις στήλες θα είναι οι εξής: [C1, N1, N2, N3], [N1, C1, N2, N3], [N1, N2, C1, N3], [N1, N2, N3, C1].

Το μοντέλο που μας ενδιαφέρει στον εύρωστο παραμετρικό σχεδιασμό απαιτεί την εκτίμηση 8 παραμέτρων και απεικονίζεται ως εξής:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 C + \sum_{j=1}^3 \gamma_j N_j + \sum_{j=1}^3 \delta_j N_j C + \varepsilon$$

Βάσει του κριτηρίου D – Efficiency και έχοντας υπολογίσει την αποδοτικότητα για όλα τα **104** μοντέλα που προκύπτουν από τους διαθέσιμους σχεδιασμούς, θα παρουσιαστούν οι βέλτιστοι σχεδιασμοί για το συγκεκριμένο μοντέλο καθώς και η τιμή του μέτρου αποδοτικότητας για κάθε διαφορετικό πλήθος εκτελέσεων. Στο παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα φαίνονται το πλήθος των εκτελέσεων του πειράματος και η αποδοτικότητα του καθενός.

Πλήθος εκτελέσεων του πειράματος	Αποδοτικότητα
12	0.9022
16	1
20	0.9685069
24	1
28	0.9843246

Πίνακας 4.2.1

Για **n = 12** ο βέλτιστος σχεδιασμός είναι ο παρακάτω:

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{matrix} \end{matrix}$$

Ο πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε και το D – Efficiency είναι ο:

	N1	N2	N3	C	CN1	CN2	CN3
X =	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	-1	-1	-1	1
	1	1	-1	1	-1	1	-1
	1	1	-1	-1	1	-1	-1
	1	1	-1	-1	-1	1	1
	1	-1	1	1	1	-1	-1
	1	-1	1	-1	1	1	-1
	1	-1	1	-1	1	-1	1
	1	-1	-1	1	-1	-1	1
	1	-1	-1	1	-1	1	-1
	1	-1	-1	1	-1	-1	-1

Για **n = 16** ο βέλτιστος σχεδιασμός βρέθηκε να είναι ο:

D =	1	1	1	1
	1	1	1	1
	1	1	1	-1
	1	1	1	-1
	1	-1	-1	1
	1	-1	-1	1
	1	-1	-1	-1
	1	-1	-1	-1
	-1	1	-1	1
	-1	1	-1	1
	-1	1	-1	-1
	-1	1	-1	-1
	-1	-1	1	1
	-1	-1	1	1
	-1	-1	1	-1
	-1	-1	1	-1

Για την περίπτωση αυτή, η κατάλληλη ανάθεση των παραγόντων είναι αυτή που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα και από το μοντέλο αυτό υπολογίστηκε και το μέτρο αποδοτικότητας:

	N1	N2	N3	C	CN1	CN2	CN3
X =	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	-1	-1	1	1	-1
	1	1	-1	-1	1	1	-1
	1	1	-1	-1	-1	-1	1
	1	1	-1	-1	-1	1	1
	1	-1	1	-1	1	1	-1
	1	-1	1	-1	1	1	-1
	1	-1	1	-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	1	-1	1
	1	-1	-1	1	-1	-1	1
	1	-1	-1	1	-1	-1	1
	1	-1	-1	1	-1	1	-1
	1	-1	-1	1	1	1	-1

Για **n = 20**, ως βέλτιστος βρέθηκε ο παρακάτω σχεδιασμός:

	1	1	1	1
	1	1	1	1
	1	1	1	1
	1	1	1	-1
	1	1	-1	-1
	1	-1	1	-1
	1	-1	-1	1
	1	-1	-1	1
D =	1	-1	-1	-1
	-1	1	1	-1
	-1	1	-1	1
	-1	1	-1	1
	-1	1	-1	-1
	-1	1	-1	-1
	-1	-1	1	1
	-1	-1	1	1
	-1	-1	1	-1
	-1	-1	1	-1
	-1	-1	-1	1

Ο πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε και το D – Efficiency είναι ο:

		N1	N2	N3	C	CN1	CN2	CN3
	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
X =	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1

Για **n = 24**, ως βέλτιστος βρέθηκε ο παρακάτω σχεδιασμός:

	1	1	1	1
	1	1	1	1
	1	1	1	1
	1	1	1	-1
	1	1	1	-1
	1	1	1	-1
	1	-1	-1	1
	1	-1	-1	1
	1	-1	-1	-1
D =	1	-1	-1	-1
	-1	1	-1	1
	-1	1	-1	1
	-1	1	-1	1
	-1	1	-1	-1
	-1	1	-1	-1
	-1	1	-1	-1
	-1	-1	1	1
	-1	-1	1	1
	-1	-1	1	1
	-1	-1	1	-1
	-1	-1	1	-1
	-1	-1	1	-1

Ο πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε και το D – Efficiency είναι ο:

	N1	N2	N3	C	CN1	CN2	CN3
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
X =	1	1	-1	-1	-1	1	1
	1	-1	1	-1	1	-1	-1
	1	-1	1	-1	1	-1	-1
	1	-1	1	-1	1	-1	-1
	1	-1	1	-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	1	-1	1
	1	-1	-1	1	1	-1	-1
	1	-1	-1	1	1	-1	-1
	1	-1	-1	1	1	1	-1
	1	-1	-1	1	1	1	-1

Παρομοίως, για **n = 28**, ως βέλτιστος βρέθηκε ο παρακάτω σχεδιασμός:

	1	1	1	1
	1	1	1	1
	1	1	1	1
	1	1	1	1
	1	1	1	-1
	1	1	1	-1
	1	1	-1	-1
	1	-1	1	-1
	1	-1	-1	1
	1	-1	-1	1
	1	-1	-1	-1
	1	-1	-1	-1
D =	-1	1	1	-1
	-1	1	-1	1
	-1	1	-1	1
	-1	1	-1	1
	-1	1	-1	-1
	-1	1	-1	-1
	-1	1	-1	-1
	-1	-1	1	1
	-1	-1	1	1
	-1	-1	1	1
	-1	-1	1	-1
	-1	-1	1	-1
	-1	-1	1	-1
	-1	-1	-1	1

Ο πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε και το D – Efficiency είναι ο:

	N1	N2	N3	C	CN1	CN2	CN3
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	1	-1	-1	-1	-1
	1	1	-1	1	-1	1	-1
	1	1	-1	-1	1	-1	-1
	1	1	-1	-1	1	1	-1
	1	1	-1	-1	1	1	-1
	1	1	-1	-1	-1	-1	1
	1	1	-1	-1	-1	-1	1
X =	1	1	-1	-1	-1	-1	1
	1	-1	1	1	-1	1	-1
	1	-1	1	-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	1	-1	1
	1	-1	-1	1	1	-1	-1
	1	-1	-1	1	1	1	-1
	1	-1	-1	1	1	1	-1
	1	-1	-1	1	-1	1	-1
	1	-1	-1	1	-1	-1	-1

4.2.2 3 Παράγοντες Ελέγχου και 1 Παράγοντας Θορύβου

Στην περίπτωση όπου από τους 4 παράγοντες, ο 1 είναι παράγοντας θορύβου και οι 3 είναι παράγοντες ελέγχου, τα παραπάνω αποτελέσματα όσον αφορά την αποδοτικότητα των σχεδιασμών δεν αλλάζουν. Το μόνο που αλλάζει είναι και εδώ η ονομασία των στηλών. Θα παρουσιαστούν συνοπτικά τα αποτελέσματα παρακάτω.

Πλήθος εκτελέσεων του πειράματος	Αποδοτικότητα
12	0.9022
16	1
20	0.9685069
24	1
28	0.9843246

Πίνακας 4.2.2

Το μοντέλο παλινδρόμησης το οποίο χρησιμοποιήθηκε ώστε να υπολογιστεί η αποδοτικότητα σε κάθε μοντέλο που προέκυψε βάσει σχεδιασμών είναι το εξής:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 N + \sum_{i=1}^3 \gamma_i C_i + \sum_{i=1}^3 \delta_i C_i N + \varepsilon$$

Για **n = 12** εκτελέσεις, ο πίνακας σχεδιασμού και ο πίνακας μοντέλου είναι αντιστοίχως:

	1	1	1	1		C1	C2	C3	N	C1N	C2N	C3N
	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1
	1	1	-1	-1		1	1	1	1	1	1	1
	1	-1	1	-1		1	1	-1	-1	-1	-1	1
	1	-1	-1	1		1	1	-1	-1	-1	1	-1
D =	1	-1	-1	-1	X =	1	1	-1	-1	-1	1	-1
	-1	1	1	-1		1	-1	1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1	1		1	-1	1	-1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1		1	-1	1	-1	1	-1	1
	-1	-1	1	1		1	-1	-1	1	1	-1	1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	-1	1	1	-1
	-1	-1	-1	1		1	-1	-1	1	-1	-1	-1

Για **n = 16** εκτελέσεις, ο πίνακας σχεδιασμού και ο πίνακας μοντέλου είναι αντιστοίχως:

	1	1	1	1			C1	C2	C3	N	C1N	C2N	C3N
	1	1	1	1			1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	-1			1	1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	1	-1			1	1	1	1	-1	-1	-1
	1	-1	-1	1			1	1	-1	-1	1	1	-1
	1	-1	-1	1			1	1	-1	-1	1	1	-1
D =	1	-1	-1	-1		X =	1	1	-1	-1	-1	-1	1
	-1	1	-1	1			1	-1	1	-1	1	1	-1
	-1	1	-1	1			1	-1	1	-1	1	1	-1
	-1	1	-1	-1			1	-1	1	-1	1	-1	1
	-1	1	-1	-1			1	-1	-1	1	1	-1	1
	-1	-1	1	1			1	-1	-1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	1			1	-1	-1	1	1	1	-1
	-1	-1	1	-1			1	-1	-1	1	1	1	-1
	-1	-1	1	-1			1	-1	-1	1	1	1	-1

Για **n = 20** εκτελέσεις, ο πίνακας σχεδιασμού και ο πίνακας μοντέλου είναι αντιστοίχως:

	1	1	1	1			C1	C2	C3	N	C1N	C2N	C3N
	1	1	1	1			1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1			1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	-1			1	1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	-1	-1			1	1	1	-1	-1	-1	1
	1	-1	1	-1			1	1	-1	1	-1	-1	-1
	1	-1	-1	1			1	1	-1	-1	1	1	-1
	1	-1	-1	-1			1	1	-1	-1	-1	1	1
D =	1	-1	-1	-1		X =	1	1	-1	-1	-1	-1	1
	-1	1	1	-1			1	-1	1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1	1			1	-1	1	-1	-1	1	-1
	-1	1	-1	1			1	-1	1	-1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1			1	-1	1	-1	1	-1	1
	-1	1	-1	-1			1	-1	1	-1	1	-1	1
	-1	-1	1	1			1	-1	-1	1	1	-1	1
	-1	-1	1	1			1	-1	-1	1	1	-1	1
	-1	-1	1	-1			1	-1	-1	1	-1	1	-1
	-1	-1	1	-1			1	-1	-1	1	-1	1	-1
	-1	-1	-1	1			1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Για **n = 24** εκτελέσεις, ο πίνακας σχεδιασμού και ο πίνακας μοντέλου είναι αντιστοίχως:

	1	1	1	1			C1	C2	C3	N	C1N	C2N	C3N
	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	-1		1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	-1		1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
	1	1	1	-1		1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
	1	-1	-1	1		1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
	1	-1	-1	1		1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
	1	-1	-1	-1		1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
	1	-1	-1	-1		1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
D =	1	-1	-1	-1		1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
	-1	1	-1	1		1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
	-1	1	-1	1		1	-1	1	1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1	1		1	-1	1	1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1		1	-1	1	1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1		1	-1	1	1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1		1	-1	1	1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1		1	-1	1	1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1		1	-1	1	1	1	-1	1	-1
	-1	-1	1	1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1

Για **n = 28** εκτελέσεις, ο πίνακας σχεδιασμού και ο πίνακας μοντέλου είναι αντιστοίχως:

	1	1	1	1			C1	C2	C3	N	C1N	C2N	C3N
	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	-1		1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
	1	1	1	-1		1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
	1	1	-1	-1		1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
	1	-1	-1	1		1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
	1	-1	-1	1		1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
	1	-1	-1	1		1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
	1	-1	-1	-1		1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
D =	1	-1	-1	-1		1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
	-1	1	1	-1		1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
	-1	1	-1	1		1	-1	1	1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1	1		1	-1	1	1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1		1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1		1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1		1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1		1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1		1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1
	-1	-1	1	1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	1		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
	-1	-1	1	-1		1	-1	-1	1	-1	1	1	-1

4.2.3 2 Παράγοντες Ελέγχου και 2 Παράγοντες Θορύβου

Στην περίπτωση στην οποία από τους 4 παράγοντες οι 2 είναι παράγοντες ελέγχου και οι υπόλοιποι 2 παράγοντες θορύβου, έχουν βρεθεί συνολικά 26 σχεδιασμοί (το πλήθος εδώ δεν αλλάζει). Όταν γίνει ανάθεση των στηλών σε παράγοντες ελέγχου και θορύβου στον κάθε μη ισόμορφο σχεδιασμό, προκύπτουν 156 διαφορετικές αναθέσεις, 6 για n=12, 30 για n=16, 18 για n=20, 60 για n=24 και 42 για n=28, καθώς υπάρχουν έξι μοναδικοί τρόποι ανάθεσης των παραγόντων στις στήλες. Δηλαδή, αν υποθέσουμε πως C1, C2 είναι οι παράγοντες ελέγχου και N1, N2 οι παράγοντες θορύβου, οι αναθέσεις στις στήλες θα είναι οι εξής: [C1, C2, N1, N2], [C1, N1, C2, N2], [C1, N1, N2, C2], [N1, C1, C2, N2], [N1, C1, N2, C2], [N1, N2, C1, C2].

Το μοντέλο που μας ενδιαφέρει στον εύρωστο παραμετρικό σχεδιασμό απαιτεί την εκτίμηση 9 παραμέτρων και απεικονίζεται ως εξής:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^2 \beta_i C_i + \sum_{j=1}^2 \gamma_j N_j + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \delta_{ij} C_i N_j + \varepsilon$$

Βάσει του κριτηρίου D – Efficiency και έχοντας υπολογίσει την αποδοτικότητα για όλα τα **156** μοντέλα που προκύπτουν από τους διαθέσιμους σχεδιασμούς, θα παρουσιαστούν οι βέλτιστοι σχεδιασμοί για το συγκεκριμένο μοντέλο καθώς και η τιμή του μέτρου αποδοτικότητας για κάθε διαφορετικό πλήθος εκτελέσεων. Στο παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα φαίνονται το πλήθος των εκτελέσεων του πειράματος και η αποδοτικότητα του καθενός.

Πλήθος εκτελέσεων του πειράματος	Αποδοτικότητα
12	0.851012
16	1
20	0.9519935
24	0.9741656
28	0.9766191

Πίνακας 4.2.3

Για **n = 12** ο βέλτιστος σχεδιασμός είναι ο παρακάτω:

	1	1	1	1
	1	1	1	1
	1	1	-1	-1
	1	-1	1	-1
	1	-1	-1	1
D =	1	-1	-1	-1
	-1	1	1	-1
	-1	1	-1	1
	-1	1	-1	-1
	-1	-1	1	1
	-1	-1	1	-1
	-1	-1	-1	1

Ο πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε και το D – Efficiency είναι ο:

	C1	C2	N1	N2	C1N1	C1N2	C2N1	C2N2
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
X =	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
	1	-1	1	1	-1	1	1	-1
	1	-1	1	-1	1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1
	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1

Για **n = 16** ο βέλτιστος σχεδιασμός είναι ο παρακάτω:

	1	1	1	1
	1	1	1	-1
	1	1	-1	1
	1	1	-1	-1
	1	-1	1	1
	1	-1	1	-1
	1	-1	-1	1
D =	1	-1	-1	-1
	-1	1	1	1
	-1	1	1	-1
	-1	1	-1	1
	-1	1	-1	-1
	-1	-1	1	1
	-1	-1	1	-1
	-1	-1	-1	1
	-1	-1	-1	-1

Ο πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε και το D – Efficiency είναι ο:

	C1	C2	N1	N2	C1N1	C1N2	C2N1	C2N2
X =	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	-1	1	-1	1	-1
	1	1	-1	1	-1	1	-1	1
	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
	1	1	-1	1	1	1	-1	-1
	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1
	1	1	-1	-1	1	1	1	-1
	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
	1	-1	1	1	1	-1	-1	1
	1	-1	1	1	-1	1	1	-1
	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1
	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1
	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1
	1	-1	-1	-1	1	1	1	1

Για **n = 20** ο βέλτιστος σχεδιασμός είναι ο παρακάτω:

	1	1	1	1
	1	1	1	1
	1	1	1	-1
	1	1	-1	1
	1	1	-1	-1
	1	-1	1	1
	1	-1	1	-1
	1	-1	-1	1
D =	1	-1	-1	-1
	-1	1	1	1
	-1	1	1	-1
	-1	1	-1	1
	-1	1	-1	-1
	-1	1	-1	-1
	-1	-1	1	1
	-1	-1	1	-1
	-1	-1	1	-1
	-1	-1	-1	1
	-1	-1	-1	1

Ο πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε και το D – Efficiency είναι ο:

	C1	C2	N1	N2	C1N1	C1N2	C2N1	C2N2
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
X =	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1

Για **n = 24** ο βέλτιστος σχεδιασμός είναι ο παρακάτω:

	1	1	1	1
	1	1	1	1
	1	1	1	-1
	1	1	1	-1
	1	1	-1	1
	1	1	-1	-1
	1	-1	1	1
	1	-1	1	-1
	1	-1	-1	1
	1	-1	-1	1
	1	-1	-1	-1
D =	1	-1	-1	-1
	-1	1	1	1
	-1	1	1	-1
	-1	1	-1	1
	-1	1	-1	-1
	-1	1	-1	-1
	-1	-1	1	1
	-1	-1	1	1
	-1	-1	1	-1
	-1	-1	1	-1
	-1	-1	-1	1
	-1	-1	-1	-1

Ο πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε και το D – Efficiency είναι ο:

	C1	C2	N1	N2	C1N1	C1N2	C2N1	C2N2
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1

Για **n = 28** ο βέλτιστος σχεδιασμός είναι ο παρακάτω:

	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	-1
	1	1	1	-1	1
	1	1	1	-1	-1
	1	1	1	-1	-1
	1	1	-1	1	1
	1	1	-1	1	-1
	1	1	-1	1	-1
	1	1	-1	-1	1
	1	1	-1	-1	1
D =	1	1	-1	-1	-1
	1	-1	1	1	1
	1	-1	1	1	-1
	1	-1	1	1	-1
	1	-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	-1
	1	-1	1	-1	-1
	1	-1	-1	1	1
	1	-1	-1	1	1
	1	-1	-1	1	-1
	1	-1	-1	1	-1
	1	-1	-1	-1	1
	1	-1	-1	-1	1
	1	-1	-1	-1	-1

Ο πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε και το D – Efficiency είναι ο:

	C1	C2	N1	N2	C1N1	C1N2	C2N1	C2N2
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1

4.3 Μελέτη Σχεδιασμών με 5 παράγοντες

Εάν το πείραμα αποτελείται από 5 παράγοντες, υπάρχουν δύο διαφορετικές περιπτώσεις του πλήθους των παραγόντων ελέγχου και θορύβου, δηλαδή να έχουμε είτε 2 παράγοντες ελέγχου και 3 παράγοντες θορύβου είτε 3 παράγοντες ελέγχου και 2 παράγοντες θορύβου.

4.3.1 2 Παράγοντες Ελέγχου και 3 Παράγοντας Θορύβου

Όσον αφορά την πρώτη περίπτωση, οι μη ισόμορφοι ορθογώνιοι σχεδιασμοί που έχουν εντοπιστεί είναι: για $n = 12$ έχουμε 2 πίνακες, για $n = 16$ έχουμε 11 πίνακες, για $n = 20$ έχουμε 11 πίνακες, για $n = 24$ έχουμε 63 πίνακες και για $n = 28$ έχουμε 127 πίνακες. Όταν γίνει ανάθεση των στηλών σε παράγοντες ελέγχου και θορύβου στον κάθε μη ισόμορφο σχεδιασμό, προκύπτουν 2140 διαφορετικές αναθέσεις, 20 για $n=12$, 110 για $n=16$, 110 για $n=20$, 630 για $n=24$ και 1270 για $n=28$, καθώς υπάρχουν δέκα μοναδικοί τρόποι ανάθεσης των παραγόντων στις στήλες. Δηλαδή, αν υποθέσουμε πως C1, C2 είναι οι παράγοντες ελέγχου και N1, N2, N3 οι παράγοντες θορύβου, οι αναθέσεις στις στήλες θα είναι οι εξής: [C1, C2, N1, N2, N3], [C1, N1, C2, N2, N3], [C1, N1, N2, C2, N3], [C1, N1, N2, N3, C2], [N1, C1, C2, N2, N3], [N1, C1,

N2, C2, N3], [N1, C1, N2, N3, C2], [N1, N2, C1, C2, N3], [N1, N2, C1, N3, C2], [N1, N2, N3, C1, C2].

Το μοντέλο που μας ενδιαφέρει στον εύρωστο παραμετρικό σχεδιασμό απαιτεί την εκτίμηση 12 παραμέτρων και απεικονίζεται ως εξής:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^2 \beta_i C_i + \sum_{j=1}^3 \gamma_j N_j + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} C_i N_j + \varepsilon$$

Όπως προηγουμένως, βάσει του κριτηρίου D – Efficiency και έχοντας υπολογίσει την αποδοτικότητα για όλα τα **2140** μοντέλα που προκύπτουν από τους διαθέσιμους σχεδιασμούς, βρέθηκαν τα παρακάτω αποτελέσματα:

Πλήθος εκτελέσεων του πειράματος	Αποδοτικότητα
12	-
16	1
20	0.9058701
24	0.9614997
28	0.9587515

Πίνακας 4.3.1

Στην περίπτωση όπου $n = 12$, η μέγιστη αποδοτικότητα που μας έφερε το κριτήριο D – Efficiency βάσει των μοντέλων αξιολόγησης βρέθηκε να είναι 0.0410809, τιμή η οποία δεν αξίζει προφανώς να συζητηθεί. Άρα δεν είναι καθόλου καλή επιλογή ένας σχεδιασμός με 12 εκτελέσεις.

Για **n = 16** ο βέλτιστος σχεδιασμός είναι ο παρακάτω:

	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	-1
	1	1	1	-1	1
	1	1	1	-1	-1
	1	-1	-1	1	1
	1	-1	-1	1	-1
	1	-1	-1	-1	1
D =	1	-1	-1	-1	-1
	-1	1	-1	1	1
	-1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1	1
	-1	1	-1	-1	-1
	-1	-1	1	1	1
	-1	-1	1	1	-1
	-1	-1	1	-1	1
	-1	-1	1	-1	-1

Ο πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε και το D – Efficiency είναι ο:

	N1	N2	N3	C1	C2	C1N1	C1N2	C1N3	C2N1	C2N2	C2N3
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1
1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1
X=	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1
1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1

Για n = 20 ο βέλτιστος σχεδιασμός είναι ο παρακάτω:

	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	-1
	1	1	1	-1	-1
	1	1	-1	1	-1
	1	1	-1	-1	1
	1	-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	-1
	1	-1	-1	1	1
D =	1	-1	-1	-1	1
	-1	1	1	-1	1
	-1	1	1	-1	-1
	-1	1	-1	1	1
	-1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	1	1
	-1	-1	1	1	1
	-1	-1	1	1	-1
	-1	-1	-1	-1	-1
	-1	-1	-1	-1	-1

Ο πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε και το D – Efficiency είναι ο:

	C1	N1	N2	N3	C2	C1N1	C1N2	C1N3	C2N1	C2N2	C2N3
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
X=	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1

Για **n = 24** ο βέλτιστος σχεδιασμός είναι ο παρακάτω:

	1	1	1	1	-1
	1	1	1	1	-1
	1	1	1	-1	1
	1	1	1	-1	-1
	1	1	-1	1	1
	1	1	-1	1	-1
	1	-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	1
	1	-1	-1	1	1
	1	-1	-1	1	-1
D =	1	-1	-1	-1	-1
	-1	1	1	-1	1
	-1	1	1	-1	-1
	-1	1	-1	1	1
	-1	1	-1	1	1
	-1	1	-1	-1	1
	-1	1	-1	-1	-1
	-1	-1	1	1	1
	-1	-1	1	1	1
	-1	-1	1	1	-1
	-1	-1	1	1	-1
	-1	-1	-1	-1	-1
	-1	-1	-1	-1	-1

Ο πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε και το D – Efficiency είναι ο:

	N1	C1	C2	N2	N3	C1N1	C1N2	C1N3	C2N1	C2N2	C2N3
1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1
1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1
1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1
1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
X=	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1
	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1
	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1
	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1
	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1
	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1
	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1
	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1
	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1

Για **n = 28** ο βέλτιστος σχεδιασμός είναι ο παρακάτω:

	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	-1
	1	1	1	-1	1
	1	1	1	-1	-1
	1	1	-1	1	-1
	1	1	-1	-1	1
	1	1	-1	-1	-1
	1	-1	1	1	-1
	1	-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	-1
	1	-1	-1	1	1
	1	-1	-1	1	1
D =	1	-1	-1	1	-1
	1	-1	-1	-1	1
	-1	1	1	1	-1
	-1	1	1	-1	1
	-1	1	1	-1	-1
	-1	1	-1	1	1
	-1	1	-1	1	1
	-1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	1	1
	-1	-1	1	1	1
	-1	-1	1	1	-1
	-1	-1	1	-1	1
	-1	-1	-1	-1	-1
	-1	-1	-1	-1	-1
	-1	-1	-1	-1	-1

Ο πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε και το D – Efficiency είναι ο:

	N1	N2	N3	C1	C2	C1N1	C1N2	C1N3	C2N1	C2N2	C2N3
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1
1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1

4.3.2 3 Παράγοντες Ελέγχου και 2 Παράγοντας Θορύβου

Στην περίπτωση που έχουμε 5 παράγοντες αλλά 3 από αυτούς είναι παράγοντες ελέγχου και 2 παράγοντες θορύβου, τα αποτελέσματα είναι ίδια και το μόνο που αλλάζει είναι η ονομασία των στηλών. Θα παρουσιαστούν παρακάτω συνοπτικά.

Πλήθος εκτελέσεων του πειράματος	Αποδοτικότητα
12	-
16	1
20	0.9058701
24	0.9614997
28	0.9587515

Πίνακας 4.3.2

Το μοντέλο που μας ενδιαφέρει εδώ είναι το εξής:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^3 \beta_i C_i + \sum_{j=1}^2 \gamma_j N_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \delta_{ij} C_i N_j + \varepsilon$$

Για **n = 16** εκτελέσεις, ο πίνακας σχεδιασμού και ο πίνακας μοντέλου είναι αντιστοίχως:

	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	-1
	1	1	1	-1	1
	1	1	1	-1	-1
	1	-1	-1	1	1
	1	-1	-1	1	-1
	1	-1	-1	-1	1
D =	1	-1	-1	-1	-1
	-1	1	-1	1	1
	-1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1	1
	-1	1	-1	-1	-1
	-1	-1	1	1	1
	-1	-1	1	1	-1
	-1	-1	1	-1	1
	-1	-1	1	-1	-1

	C1	C2	C3	N1	N2	C1N1	C1N2	C2N1	C2N2	C3N1	C3N2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1
1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1
1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1

Για **n = 20** εκτελέσεις, ο πίνακας σχεδιασμού και ο πίνακας μοντέλου είναι αντιστοίχως:

	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	-1
	1	1	1	-1	-1
	1	1	-1	1	-1
	1	1	-1	-1	1
	1	-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	-1
	1	-1	-1	1	1
	1	-1	-1	1	-1
D =	1	-1	-1	-1	1
	-1	1	1	-1	1
	-1	1	1	-1	-1
	-1	1	-1	1	1
	-1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	1	1
	-1	-1	1	1	1
	-1	-1	1	1	-1
	-1	-1	-1	-1	-1
	-1	-1	-1	-1	-1

	N1	C1	C2	C3	N2	C1N1	C1N2	C2N1	C2N2	C3N1	C3N2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1
1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
X=	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1

Για **n = 24** εκτελέσεις, ο πίνακας σχεδιασμού και ο πίνακας μοντέλου είναι αντιστοίχως:

	1	1	1	1	-1
	1	1	1	1	-1
	1	1	1	-1	1
	1	1	1	-1	-1
	1	1	-1	1	1
	1	1	-1	1	-1
	1	-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	1
	1	-1	-1	1	1
	1	-1	-1	1	-1
D =	1	-1	-1	-1	1
	1	-1	-1	-1	-1
	-1	1	1	-1	1
	-1	1	1	-1	-1
	-1	1	-1	1	1
	-1	1	-1	1	1
	-1	1	-1	-1	1
	-1	1	-1	-1	-1
	-1	-1	1	1	1
	-1	-1	1	1	1
	-1	-1	1	1	-1
	-1	-1	1	1	-1
	-1	-1	-1	-1	-1
	-1	-1	-1	-1	-1

	C1	C2	C3	N1	N2	C1N1	C1N2	C2N1	C2N2	C3N1	C3N2	
X=	1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1
	1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1
	1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1
	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1
	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1
	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1
	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1
	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1
	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1
	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1
	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1
	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1

Για **n = 28** εκτελέσεις, ο πίνακας σχεδιασμού και ο πίνακας μοντέλου είναι αντιστοίχως:

	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	-1
	1	1	1	-1	1
	1	1	1	-1	-1
	1	1	-1	1	-1
	1	1	-1	-1	1
	1	1	-1	-1	-1
	1	-1	1	1	-1
	1	-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	-1
	1	-1	-1	1	1
D =	1	-1	-1	1	-1
	1	-1	-1	-1	1
	-1	1	1	1	-1
	-1	1	1	-1	1
	-1	1	1	-1	-1
	-1	1	-1	1	1
	-1	1	-1	1	1
	-1	1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1	1
	-1	-1	1	1	1
	-1	-1	1	1	1
	-1	-1	1	1	-1
	-1	-1	1	-1	1
	-1	-1	-1	-1	-1
	-1	-1	-1	-1	-1
	-1	-1	-1	-1	-1

	C1	C2	C3	N1	N2	C1N1	C1N2	C2N1	C2N2	C3N1	C3N2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1
1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
X=	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1
1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1
1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1

4.4 Μελέτη Σχεδιασμών με 6 παράγοντες

Τέλος, εάν ο πειραματικός σχεδιασμός αποτελείται από 6 παράγοντες, θα εξετάσουμε την περίπτωση 3 να είναι παράγοντες ελέγχου και 3 να είναι παράγοντες θορύβου. Οι μη ισόμορφοι ορθογώνιοι σχεδιασμοί που έχουν εντοπιστεί, για $n = 16, 20, 24, 28$ είναι: για $n = 16$ έχουμε 27 πίνακες, για $n = 20$ έχουμε 75 πίνακες, για $n = 24$ έχουμε 1350 πίνακες και για $n = 28$ έχουμε 17826 πίνακες. Όταν γίνει ανάθεση των στηλών σε παράγοντες ελέγχου και θορύβου στον κάθε μη ισόμορφο σχεδιασμό, προκύπτουν 385560 διαφορετικές αναθέσεις, 540 για $n=16$, 1500 για $n=20$, 27000 για $n=24$ και 356520 για $n=28$, καθώς υπάρχουν είκοσι μοναδικοί τρόποι ανάθεσης των παραγόντων στις στήλες. Δηλαδή, αν υποθέσουμε πως C1, C2, C3 είναι οι παράγοντες ελέγχου και N1, N2, N3 οι παράγοντες θορύβου, οι αναθέσεις στις στήλες θα είναι οι εξής: [C1, C2, C3, N1, N2, N3], [C1,C2, N1, C3, N2, N3], [C1, C2, N1, N2, C3, N3], [C1, C2, N1, N2, N3, C3], [C1, N1, C2, C3, N2, N3], [C1, N1, C2, N2, C3, N3], [C1, N1, C2, N2, N3, C3], [C1, N1, N2, C2, C3, N3], [C1, N1, N2, C2, N3, C3], [C1, N1, N2, N3, C2, C3], [N1, C1, C2, C3, N2, N3], [N1, C1, C2, N2, C3, N3], [N1, C1, C2, N2, N3, C3], [N1, C1, N2, C2,

C3, N3], [N1, C1, N2, C2, N3, C3], [N1, C1, N2, N3, C2, C3], [N1, N2, C1, C2, C3, N3], [N1, N2, C1, C2, N3, C3], [N1, N2, C1, N3, C2, C3], [N1, N2, N3, C1, C2, C3].

Το μοντέλο που μας ενδιαφέρει στον εύρωστο παραμετρικό σχεδιασμό απαιτεί την εκτίμηση 16 παραμέτρων και απεικονίζεται ως εξής:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^3 \beta_i C_i + \sum_{j=1}^3 \gamma_j N_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} C_i N_j + \varepsilon$$

Όπως προηγουμένως, βάσει του κριτηρίου D – Efficiency και έχοντας υπολογίσει την αποδοτικότητα για όλα τα **385560** μοντέλα που προκύπτουν από τους διαθέσιμους σχεδιασμούς, βρέθηκαν τα παρακάτω αποτελέσματα:

Πλήθος εκτελέσεων του πειράματος	Αποδοτικότητα
16	1
20	0.8341816
24	0.9352337
28	0.9340421

Πίνακας 4.4

Για **n = 16** ο βέλτιστος σχεδιασμός είναι ο παρακάτω:

	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	-1	-1
	1	1	1	-1	1	-1
	1	1	1	-1	-1	1
	1	-1	-1	1	1	1
	1	-1	-1	1	-1	-1
	1	-1	-1	-1	1	-1
D =	1	-1	-1	-1	-1	1
	-1	1	-1	1	1	1
	-1	1	-1	1	-1	-1
	-1	1	-1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1	-1	1
	-1	-1	1	1	1	1
	-1	-1	1	1	-1	-1
	-1	-1	1	-1	1	-1
	-1	-1	1	-1	-1	1

Ο πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε η αποδοτικότητα είναι ο εξής:

	C1	C2	C3	N1	N2	N3	C1N1	C1N2	C1N3	C2N1	C2N2	C2N3	C3N1	C3N2	C3N3	
X=	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1
	1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1
	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1
	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1
	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1
	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1

Για $n = 20$ ο βέλτιστος σχεδιασμός είναι ο παρακάτω:

D=	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	-1	-1
	1	1	1	-1	1	-1
	1	1	-1	-1	-1	1
	1	-1	1	-1	-1	1
	1	-1	-1	1	1	-1
	1	-1	-1	-1	1	-1
	1	-1	-1	-1	-1	1
	-1	1	1	-1	-1	-1
	-1	1	-1	1	1	1
	-1	1	-1	1	-1	-1
	-1	1	-1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1	-1	1
	-1	-1	1	1	-1	1
	-1	-1	1	1	-1	-1
	-1	-1	1	-1	1	1
	-1	-1	1	-1	1	-1
	-1	-1	-1	1	1	1

Ο πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε η αποδοτικότητα είναι ο εξής:

	C1	C2	C3	N1	N2	N3	C1N1	C1N2	C1N3	C2N1	C2N2	C2N3	C3N1	C3N2	C3N3
X=	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1
	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1
	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1
	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1
	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1
	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1
	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1
	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1
	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Για $n = 24$ ο βέλτιστος σχεδιασμός είναι ο παρακάτω:

D =	1	1	1	1	1	-1
	1	1	1	1	-1	1
	1	1	1	-1	1	1
	1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	-1	1	1	1
	1	1	-1	1	-1	-1
	1	-1	1	1	1	1
	1	-1	1	-1	1	-1
	1	-1	-1	1	-1	-1
	1	-1	-1	-1	1	-1
	1	-1	-1	-1	-1	1
	-1	1	1	1	1	1
	-1	1	1	-1	-1	-1
	-1	1	-1	1	-1	-1
	-1	1	-1	-1	1	1
	-1	1	-1	-1	1	-1
	-1	1	-1	-1	-1	1
	-1	-1	1	1	-1	1
	-1	-1	1	1	-1	-1
	-1	-1	1	-1	1	-1
	-1	-1	1	-1	-1	1
	-1	-1	-1	1	1	1
	-1	-1	-1	1	1	-1

Ο πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε η αποδοτικότητα είναι ο εξής:

	C1	C2	C3	N1	N2	N3	C1N1	C1N2	C1N3	C2N1	C2N2	C2N3	C3N1	C3N2	C3N3
1	1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1
1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1
1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1
1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1
1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1
1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1

Για $n = 28$ ο βέλτιστος σχεδιασμός είναι ο παρακάτω:

-1	-1	-1	-1	-1	1
-1	-1	-1	-1	1	-1
-1	-1	-1	1	-1	-1
-1	-1	-1	1	1	1
-1	-1	-1	1	1	1
-1	-1	-1	1	1	1
-1	-1	1	-1	-1	-1
-1	1	1	-1	-1	1
-1	1	1	-1	1	-1
-1	1	1	-1	1	1
-1	1	1	1	-1	-1
-1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	1	-1	1
1	-1	1	1	-1	1
1	-1	1	1	1	-1
1	-1	1	1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	1
1	1	-1	1	1	-1
1	1	1	1	1	1

Ο πίνακας μοντέλου βάσει του οποίου υπολογίστηκε η αποδοτικότητα είναι ο εξής:

	C1	C2	C3	N1	N2	N3	C1N1	C1N2	C1N3	C2N1	C2N2	C2N3	C3N1	C3N2	C3N3
1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1
1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1
1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1
1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1
1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

4.5 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα - Σύνοψη

Παρακάτω θα γίνει σύνοψη όλων των προηγούμενων αποτελεσμάτων βάσει της αποδοτικότητας των σχεδιασμών όσον αφορά το πλήθος παραγόντων και εκτελέσεων τους. Εναλλακτικό πεδίο τιμών του κριτηρίου D – Efficiency (εκτός του [0,1]) θα είναι το [0%, 100%] ώστε να εκφραστεί η αποδοτικότητα με ποσοστό.

Πλήθος Εκτελέσεων	D - Efficiency				
	3	4	5	6	6
	2 Π.Ε. και 1 Π.Θ. ή 1 Π.Ε. και 2 Π.Θ.	1 Π.Ε. και 3 Π.Θ. ή 3 Π.Ε. και 1 Π.Θ.	2 Π.Ε. και 2 Π.Θ.	2 Π.Ε. και 3 Π.Θ. ή 3 Π.Ε. και 2 Π.Θ.	3 Π.Ε. και 3 Π.Θ.
12	96.14%	90.22%	85.10%	-	-
16	100%	100%	100%	100%	100%
20	98.64%	96.85%	95.19%	90.58%	83.41%
24	100%	100%	97.41%	96.14%	93.52%
28	99.31%	98.43%	97.66%	95.87%	93.40%

Πίνακας 4.6

Τα παραπάνω αποτελέσματα να αναφέρουμε συμπερασματικά πως προέκυψαν από τον έλεγχο συνολικά 388008 πινάκων μοντέλου. Πιο αναλυτικά, ελέγχθηκαν 48 πίνακες για κάθε

περίπτωση για τους 3 παράγοντες, 104 πίνακες για τις δύο από τις τρεις περιπτώσεις για τους 4 παράγοντες, 156 πίνακες για τους 4 παράγοντες όταν έχουμε 2 παράγοντες ελέγχου και 2 παράγοντες θορύβου, 2140 πίνακες για κάθε περίπτωση για τους 5 παράγοντες και 385560 για 6 παράγοντες (αναλυτικότερα έχουν παρουσιαστεί σε κάθε υποενότητα του κεφαλαίου αυτού).

Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, μπορούμε να θεωρήσουμε πως η αποδοτικότητα βάσει του κριτηρίου D – Efficiency στο σύνολο των σχεδιασμών είναι υψηλή. Ο πειραματιστής μπορεί να διαλέξει τον καλύτερο σχεδιασμό βάσει του πλήθους των παραγόντων που θέλει να εξετάσει, έχοντας δύο επίπεδα ο καθένας, αλλά και βάσει του πλήθους των εκτελέσεων του πειράματος αναλόγως των πόρων που έχει στη διάθεση του και τις απαιτήσεις που καλείται να καλύψει. Για 12, 20, 24 και 28 πειραματικές δοκιμές, παρατηρείται πως όσο αυξάνεται ο αριθμός των παραγόντων τόσο μειώνεται η αποδοτικότητα του σχεδιασμού. Με 16 πειραματικές δοκιμές, η αποδοτικότητα φαίνεται να μην αλλάζει και να μένει η μέγιστη δυνατή.

Επομένως, η μετάβαση από τη μεθοδολογία Taguchi στους συνδυασμένους σχηματισμούς είναι σίγουρα ένα πολύ μεγάλο βήμα εξέλιξης στον τρόπο διεξαγωγής πειραμάτων. Ενώ η αρχική προσέγγιση του Taguchi επικεντρώθηκε σε δύο ξεχωριστούς ορθογώνιους σχεδιασμούς για την διαχείριση των παραγόντων ελέγχου και θορύβου και κατάφερε συστηματικά να μειώνει την μεταβλητότητα του πειράματος, η ανάπτυξή τους σε έναν μόνο σχεδιασμό και μετέπειτα σε έναν συνδυασμένο σχηματισμό έφερε μία πιο αποδοτική προσέγγιση. Μειώθηκε η πολυπλοκότητα και αυξήθηκε η αποδοτικότητα των πειραμάτων οδηγώντας σε πιο οικονομικές και αξιόπιστες αποφάσεις και εν τέλει βελτιώσεις διαδικασιών επιλέγοντας την κατάλληλη ρύθμιση των στατιστικά σημαντικών παραγόντων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

- Ευαγγελάρας, Χ. & Κούτρας, Μ. (2018) Ανάλυση Παλινδρόμησης: Θεωρία και εφαρμογές. Εκδόσεις Τσότρα.
- Ευαγγελάρας, Χ. (2005) Ορθογώνιοι σχηματισμοί και προβολικές ιδιότητες. Διδακτορική διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Ευαγγελάρας, Χ. Σημειώσεις από το μάθημα «Πειραματικοί Σχεδιασμοί» του μεταπτυχιακού «Εφαρμοσμένη Στατιστική», Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης.

Ξένη

- Aggrawal, M. L., & Kaul, R. (1999). Combined array approach for optimal designs. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 28, 2655-2670.
- Angelopoulos, P., & Koukouvinos, C. (2008). Some robust parameter designs from orthogonal arrays. *Journal of Applied Statistics*, 35:12, 1399-1408.
- Basso, L., Winterbottom, A., & Wynn, H. P. A review of the 'Taguchi methods' for off-line quality control. <https://doi.org/10.1002/qre.4680020203>.
- Ben-Gal, I. E., & Dror, S. Taguchi Method for Off-Line Quality Control.
- Box, G. (1988). Signal-to-noise ratios, performance criteria, and transformations. *Technometrics*, 30:1, 1-17.
- Evangelaras, H., Koukouvinos, C., & Koutras, M. V. (2011). Advances in robust parameter design: From Taguchi's inner-outer arrays to combined arrays. In *Encyclopedia of Statistical Sciences* (eds S. Kotz, C.B. Read, N. Balakrishnan, B. Vidakovic, & N.L. Johnson).
- Evangelaras, H., Kolaiti, E., & Koukouvinos, C. (2006). Robust parameter design: Optimization of combined array approach with orthogonal arrays. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 136(10), 3698-3709.

- Evangelaras, H., Koukouvinos, C., & Lappas, E. (2007). Further contributions to nonisomorphic two-level orthogonal arrays. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137(6), 2080-2086.
- Evangelaras, H., & Koukouvinos, C. (2004). Combined arrays with minimum number of runs and maximum estimation efficiency. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 33:7, 1621-1628.
- Grize, Y. L. (1995). A review of robust process design approaches. *Journal of Chemometrics*, 9, 239-262. <https://doi.org/10.1002/cem.1180090402>.
- Hunter, J. S. (1985). Statistical design applied to product design. *Journal of Quality Technology*.
- Kacker, R. N. (1985). Off-line quality control, parameter design, and the Taguchi method. *Journal of Quality Technology*, 17:4, 176-188.
- Kim, Y. G. A response surface approach to data analysis in robust parameter design (vt.edu).
- Kunert, J., Auer, C., Erdbrügge, M., & Ewers, R. (2007). An experiment to compare Taguchi's product array and the combined array. *Journal of Quality Technology*, 39:1, 17-34.
- Lucas, J. M. (1994). How to achieve a robust process using response surface methodology. *Journal of Quality Technology*, 26:4, 248-260.
- Myers, R. H. (1991). Response surface methodology in quality improvement. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 20:2, 457-476.
- Myers, R. H., Montgomery, D. C., Vining, G. G., Borror, C. M., & Kowalski, S. M. (2004). Response surface methodology: A retrospective and literature survey. *Journal of Quality Technology*, 36:1, 53-77.
- Nair, V. N., Abraham, B., MacKay, J., Box, G., Kacker, R. N., Lorenzen, T. J., Lucas, J. M., Myers, R. H., Vining, G. G., Nelder, J. A., Phadke, M. S., Sacks, J., Welch, W. J., Shoemaker, A. C., Tsui, K. L., Taguchi, S., & Wu, C. F. J. (1992). Taguchi's parameter design: A panel discussion. *Technometrics*, 34:2, 127-161.
- Shoemaker, A. C., Tsui, K. L., & Wu, C. F. J. (1991). Economical experimentation methods for robust designs. *Technometrics*, 33:4, 415-427.

- Shoemaker, A. C., & Tsui, K. L. (1993). Response model analysis for robust design experiments. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 22:4, 1037-1064.
- Taguchi, S., & Wu, C. F. J., Zhu, Y. (2003). Optimal selection of single arrays for parameter design experiments. *Statistica Sinica*, 13(4), 1179-1199. <http://www.jstor.org/stable/24307167>.
- Tsui, K. L. (1992). An overview of Taguchi method and newly developed statistical methods for robust design. *IIE Transactions*, 24:5, 44-57.
- Tsui, K. L. (1996). A critical look at Taguchi's modelling approach for robust design. *Journal of Applied Statistics*, 23:1, 81-96.
- Welch, W. J., Yu, T. K., Kang, S. M., & Sacks, J. (1990). Computer experiments for quality control by parameter design. *Journal of Quality Technology*, 22:1, 15-22.
- Wu, C. F. J., & Zhu, Y. (2003). Optimal selection of single arrays for parameter design experiments. *Statistica Sinica*, 13(4), 1179-1199. <http://www.jstor.org/stable/24307167>.