**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**

**Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής**

**Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ**

# Το Log-Lindley μοντέλο παλινδρόμησης με εφαρμογές στην ασφάλιση.

Δευτεραίος Γεώργιος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Πειραιάς

Οκτώβριος 2024

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη Συνέλευση του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθμ. …….. συνεδρίασή της, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Επίκ. Καθηγητής Ξένος Παναγιώτης

- Αναπλ. Καθηγητής Πολίτης Κωνσταντίνος

- Αναπλ. Καθηγητής Ψαρράκος Γεώργιος (Επιβλέπων)

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**

**School of Finance and Statistics**

**Department of Statistics and Insurance Science**


**POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT.**

# The Log-Lindley regression model with application in insurance


Defteraios Georgios


MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus

October 2024

*Στην οικογένεια μου.*

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω ευχαριστίες από καρδίας στην μάνα μου, η οποία με στήριξε με κάθε τρόπο κατά την διάρκεια των σπουδών μου. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή, κ. Γεώργιο Ψαρράκο, για την καθοδήγηση του κατά την εκπόνηση της παρούσας εργασίας, καθώς και την υποστήριξη που μου προσέφερε στα πλαίσια των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τους καθηγητές, κ. Κωνσταντίνο Πολίτη και κ. Παναγιώτη Ξένο, που δέχτηκαν να είναι μέλη της τριμελούς επιτροπής αξιολόγησης της διπλωματικής μου εργασίας, καθώς επίσης και όλους τους διδάσκοντες του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης για τις γνώσεις που μου προσέφεραν.

## Περίληψη

Στην ακόλουθη διπλωματική εργασία παρουσιάζεται η κατανομή Log-Lindley, η οποία προκύπτει από το σχετικό μετασχηματισμό της γενικευμένης Lindley που προτάθηκε από τους Zakerzadeh και Dolati (2010). Έναυσμα για την εκπονηθείσα εργασία αποτέλεσε το γεγονός ότι η προαναφερθείσα κατανομή αποτελεί μια εναλλακτική της κατανομής Βήτα φέροντας το πλεονέκτημά διατύπωσης της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της απουσία κάποιας ειδικής συνάρτησης. Η εργασία απαρτίζεται από τρία μέρη. Στο πρώτο μελετήθηκαν κάποιες βασικές ιδιότητες της κατανομής Log-Lindley. Σε μεταγενέστερο χρόνο ακολουθεί το δεύτερο μέρος, στο οποίο παρουσιάστηκαν βασικές έννοιες στοχαστικών διατάξεων με σκοπό την στοχαστική διάταξη δύο τυχαίων μεταβλητών που προέρχονται από την προς εξέταση κατανομή καθώς, και την στοχαστική διάταξη μεμιγμένων τυχαίων μεταβλητών με μικτικές κατανομές τις αντίστοιχες Log-Lindley. Τέλος, στο τρίτο μέρος εξετάσθηκε αν η προσαρμογή ενός μοντέλου παλινδρόμησης Log-Lindley μπορεί να αποτελέσει ικανοποιητική εναλλακτική της παλινδρόμησης Βήτα.

## Abstract

In the following thesis we present the Log-Lindley distribution which is derived from the relative transformation of the generalized Lindley proposed by Zakerzadeh and Dolati (2010). The impetus for the paper was the fact that the aforementioned distribution is an alternative to the Beta distribution by carrying the advantage of formulating the probability density function of the absence of a special function. The paper consists of three parts. In the first one some basic properties of the Log-Lindley distribution were studied. At a later stage, the second part follows, in which basic concepts of stochastic ordering were introduced in order to stochastically order two random variables derived from the distribution under consideration as well as, the stochastic ordering of two mixed random variables with mixing distributions the corresponding Log-Lindley distributions. Finally, the third part examined whether fitting a Log-Lindley regression model can be a satisfactory alternative to Beta regression.

# Περιεχόμενα

# Κεφάλαιο 1

## Η κατανομή Log-Lindley

### 1.1 Εισαγωγή

Στην θεωρία των πιθανοτήτων και την στατιστική είναι ιδιαίτερα ωφέλιμη η εύρεση εναλλακτικών της κατανομής Βήτα. Μάλιστα δε, σε παρελθοντικές ερευνητικές εργασίες προτάθηκαν κατανομές, οι οποίες μπορούν να αποτελέσουν τέτοιες εναλλακτικές. Συγκεκριμένα ο Grassia το 1977 πρότεινε ένα μετασχηματισμό της κατανομής Gamma, ο Mc Donald το 1984 πρότεινε τις γενικευμένες Βήτα με μία και δύο παραμέτρους (G1B,G2B), οι Chen και Novick, επίσης το 1984, τις γενικευμένες Βήτα με τρείς και τέσσερεις παραμέτρους (G3B,G4B), οι Armero και Bayarri ,το 1994, την γκαουσιανή υπερ-γεωμετρική κατανομή και τέλος, ο Jones, το 2009, την κατανομή Kumaraswamy. Από της προαναφερθείσες κατανομές μόνο η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Kumaraswamy μπορεί να διατυπωθεί απουσία κάποιας ειδικής συνάρτησης, ενώ οι υπόλοιπες μειονεκτούν όσο αναφορά το πλήθος των παραμέτρων. Έτσι λοιπόν, θα προτείνουμε μια νέα κατανομή, την Log-Lindley, της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δεν περιέχει κάποια ειδική συνάρτηση και φέρει μόλις δύο παραμέτρους. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα παρατεθούν ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες για την κατανομή Log-Lindley.

### 1.2 Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η συνάρτηση κατανομής και οι ροπές της κατανομής Log-Lindley

Το 2010 οι Zakerzadeh και Dolati μελέτησαν την γενικευμένη κατανομή Lindley, της όποιας η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά ως εξής:

$$f(x;\sigma,\alpha)=\frac{\sigma^2}{\alpha+\sigma}(1+\alpha x)e^{-\sigma x}, x>0, \alpha\geq 0, \sigma>0.$$

Με τον κατάλληλο μετασχηματισμό προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Log-Lindley.

**Πρόταση 1.2.1.** Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Log-Lindley είναι:

$$f(x;\sigma,\lambda)=\frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}(\lambda-\log x)x^{\sigma-1}, 0<x<1, \sigma>0, \lambda\geq 0. \quad (1.1)$$

Απόδειξη.

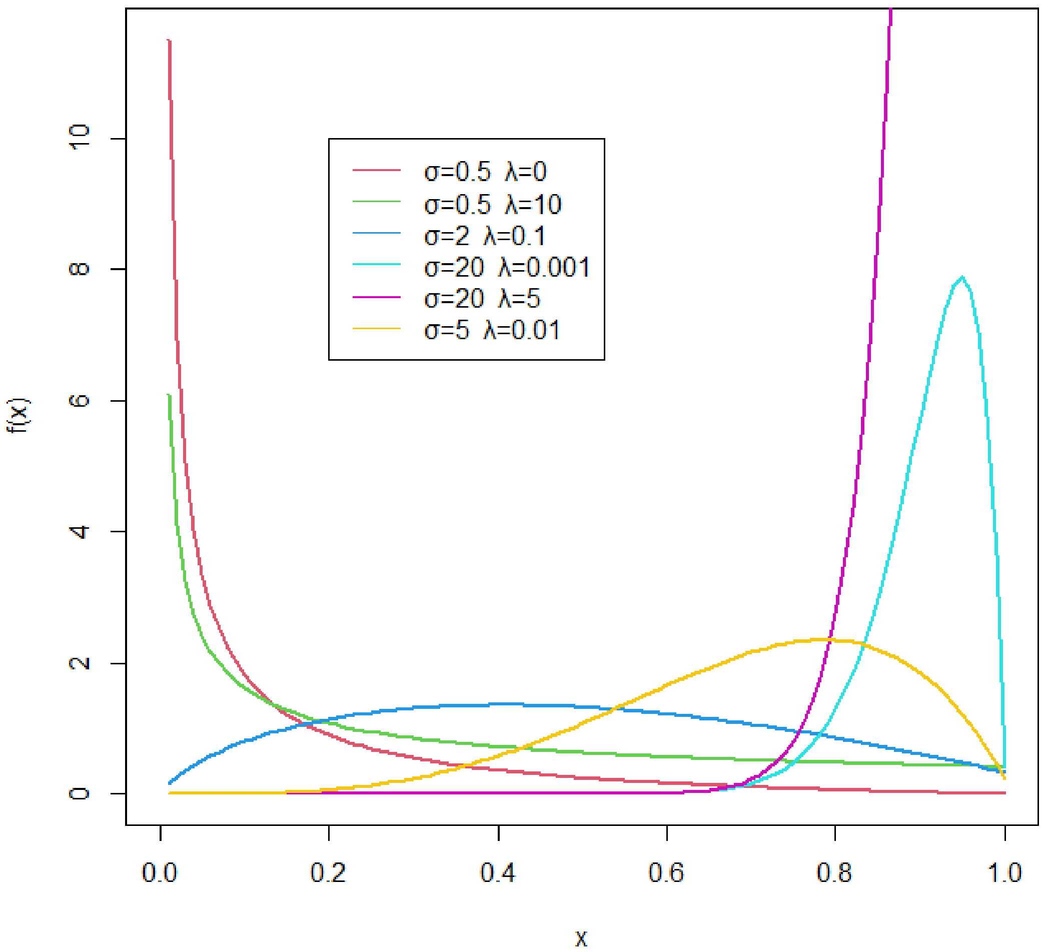
Εφαρμόζοντας τον κατάλληλο μετασχηματισμό έχουμε:

$$y=e^{-x}\Rightarrow x=-\log\, y$$

$$\left|\frac{dx}{dy}\right|=\frac{1}{y}$$

$$f_y(y) = fx(-\log y)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{\sigma^2}{\alpha\left(1+\frac{1}{a}\sigma\right)}\left[\alpha\left(\frac{1}{a}-\log y\right)\right]y^{\sigma-1} \quad . \qquad (1.2)$$

θέτοντας $\lambda = \frac{1}{a}$ στην (1.2) προκύπτει η (1.1) . ■




Σχήμα 1. Η σ.π.π της κατανομής Log-Lindley για διάφορες τιμές των σ και λ.

**Πρόταση 1.2.2.** Η συνάρτηση κατανομής της κατανομής Log-Lindley είναι:

$$\mathrm{F}(x;\sigma,\lambda) = \frac{x^{\sigma}[1+\sigma(\lambda-\log x)]}{1+\lambda\sigma}, \;\; 0 \le x \le 1, \lambda{\ge}0, \sigma{>}0. \quad (1.3)$$

Απόδειξη.

Έχουμε ότι:

$$\mathrm{F}(x;\sigma,\lambda) = \int_0^x f(t;\sigma,\lambda)\,\mathrm{dt}$$

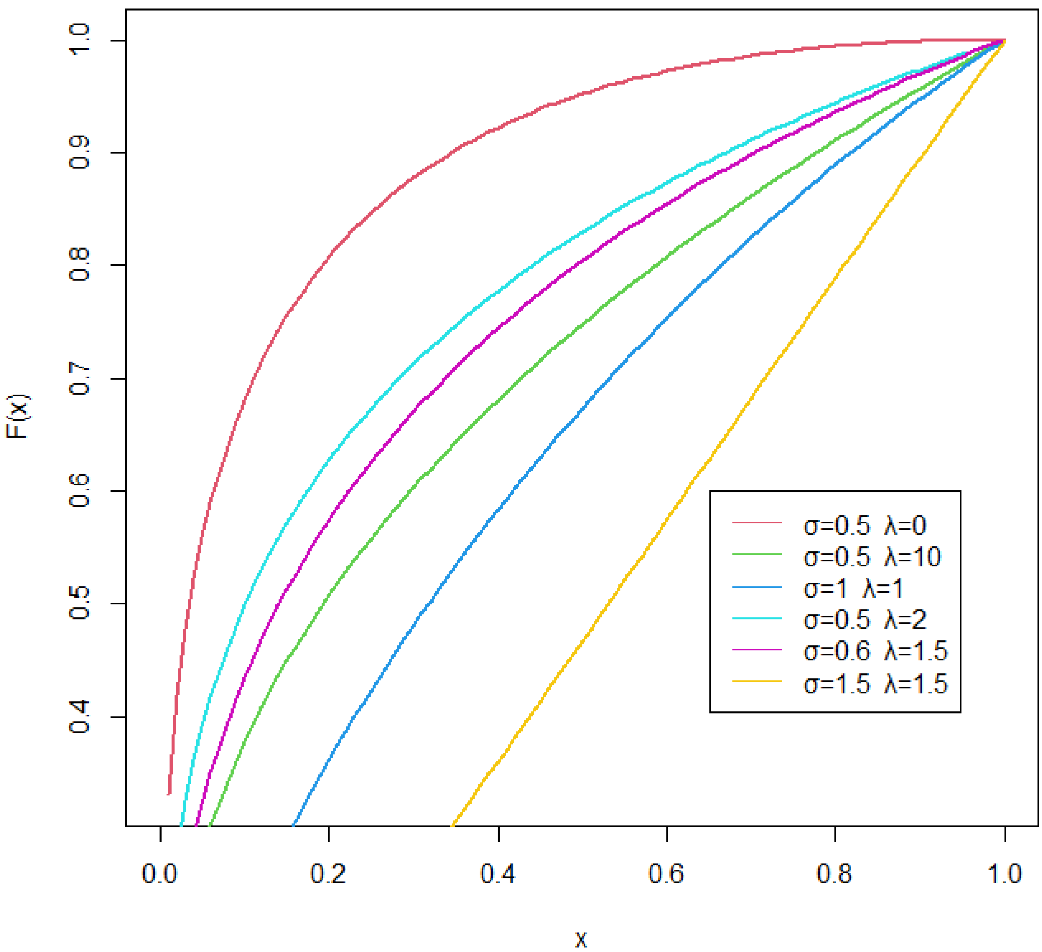
$$= \int_0^x \frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}(\lambda - \mathrm{log}t)t^{\sigma-1}\mathrm{dt}$$

$$= \frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}\int_0^x \lambda\, t^{\sigma-1} - \mathrm{log}t\; t^{\sigma-1}\mathrm{dt}$$

$$= \frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}\left[\frac{\lambda}{\sigma}\int_0^x (t^\sigma)'\,dt - \frac{1}{\sigma}\int_0^x \mathrm{log}t\;(t^\sigma)'\;\mathrm{dt}\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}\left\{\frac{\lambda\, x^\sigma}{\sigma} - \frac{1}{\sigma}[\mathrm{log}t\; t^\sigma] + \frac{x^\sigma}{\sigma^2}\right\}$$

$$= \frac{x^\sigma[1+\lambda(\sigma - \mathrm{logx})]}{1+\lambda\sigma}. \quad \blacksquare$$




Σχήμα 2. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της κατανομής Log-Lindley για διάφορες τιμές των σ και λ.

**Πρόταση 1.2.3.** Η κ-οστή ροπή της κατανομής Log-Lindley μπορεί να υπολογισθεί μέσω της κάτωθι συνάρτησης.

$$E(X^k) = \frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}\frac{1+\lambda(\kappa+\sigma)}{(\kappa+\sigma)^2}, \kappa = 0,1,2,\ldots$$

Απόδειξη.

Έχουμε ότι:

$$E(X^k) = \int_0^1 x^k f(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 x^k \frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}\,(\lambda - \log x)\, x^{\sigma-1} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}\,(\lambda - \log x) x^{\kappa+\sigma-1} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}\,(\lambda - \log x) x^{\kappa+\sigma-1}$$

$$= \frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}\frac{1+\lambda(\kappa+\sigma)}{(\kappa+\sigma)^2}\,. \blacksquare$$

## 1.3 Η συνάρτηση κινδύνου της κατανομής Log-Lindley

Η συνάρτηση κινδύνου (hazard rate function) είναι ιδιαίτερη χρήσιμη σε διάφορους επιστημονικούς τομείς, όπως η μηχανική, η στατιστική και ο αναλογισμός. Στον αναλογισμό, συνήθως συναντάται στα μαθηματικά ασφαλίσεων ζωής (mathematics of life contingencies) με την ονομασία force of mortality.

**Ορισμός 1.3.1**. Έστω Τ μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με σύνολο τιμών, $R_T(0, \infty)$, που εκφράζει τον χρόνο εμφάνισης ενός ζημιογόνου ενδεχομένου. Η συνάρτηση κινδύνου της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής Τ εκφράζει την στιγμιαία πιθανότητα εμφάνισης ενός ζημιογόνου ενδεχομένου στον χρόνο t ,δοθέντος ότι αυτό δεν συνέβη μέχρι την χρονική στιγμή t. Συμβολίζεται με $r(t)$ και μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά ως εξής:

$$r(t) = \lim_{\delta\tau\to 0} \frac{Pr(t\leq T\leq t+\delta\tau | T\geq t)}{\delta\tau} = \frac{f(t)}{1-F(t)},\ t\geq 0. \quad (1.4)$$

**Πρόταση 1.3.1.** Η συνάρτηση κινδύνου της κατανομής Log-Lindley είναι:

$$r(t;\sigma,\lambda) = \frac{\sigma^2(\lambda - logt)}{t[\sigma logt - (1+\lambda\sigma)(1-t^{-\sigma})]}$$

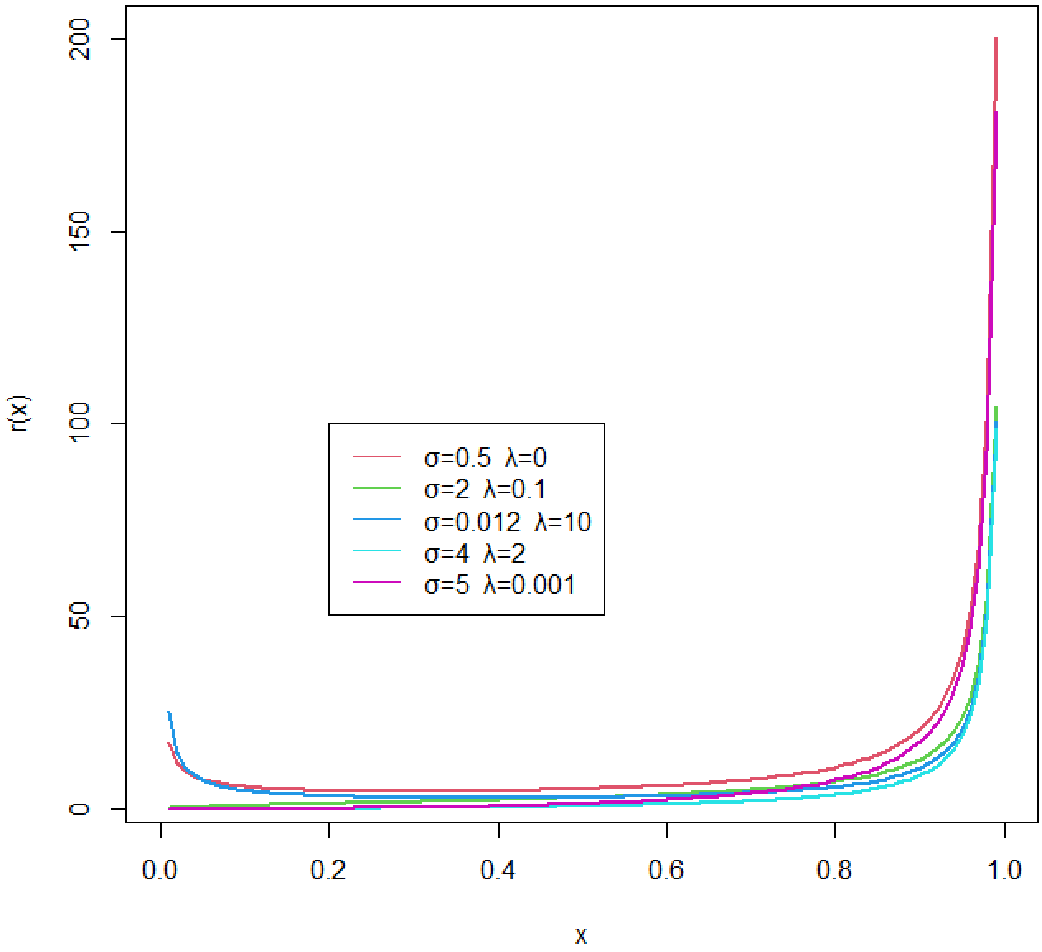
Απόδειξη.

Από τις σχέσεις (1.1) ,(1.3) και (1.4) προκύπτει ότι:

$$r(t;\sigma,\lambda) = \frac{f(t;\sigma,\lambda)}{1-\mathrm{F}(t;\sigma,\lambda)}$$

$$=\frac{\frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}(\lambda-\log t)t^{\sigma-1}}{1-\frac{t^{\sigma}[1+\sigma(\lambda-\log t)]}{1+\lambda\sigma}}$$

$$=\frac{\sigma^2(\lambda-logt)}{t[\sigma logt-(1+\lambda\sigma)(1-t^{-\sigma})]}. \quad \blacksquare$$




Σχήμα 2. Η συνάρτηση κινδύνου κατανομής της κατανομής Log-Lindley για διάφορες τιμές των σ και λ.

## 1.4 Εκτίμηση παραμέτρων με την μέθοδο των ροπών

Η μέθοδος των ροπών, είναι, ίσως, η πιο απλοϊκή μέθοδος εκτίμησης παραμέτρων και, ιστορικά, από τις παλαιότερες αφού χρονολογείται από την εποχή του Άγγλου στατιστικού Carl Pearson στα τέλη του 1800.

Ακολουθεί ο ορισμός των εκτιμητών της μεθόδου των ροπών (Ηλιόπουλος, 2006)

**Ορισμός 1.4.1.** Έστω $\underset{\sim}{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ τυχαίο δείγμα από κάποια κατανομή $g_\theta$, $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_\kappa)\in\Theta\subseteq\mathbb{R}^\kappa,\kappa\geq 1$. Έστω ακόμη ότι οι κ πρώτες ροπές $\mu_1(\theta),\ldots,\mu_\kappa(\theta)$ υπάρχουν (και είναι πεπερασμένες) για κάθε $\theta\in\Theta$. Θεωρούμε το σύστημα των κ εξισώσεων

$$\mu_1(\theta)=\bar{x}_1=\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},$$
$$\vdots$$
$$\mu_\kappa(\theta)=\bar{x}_\kappa=\frac{\sum_{i=1}^n {x_i}^\kappa}{n}.$$

Η λύση του συστήματος $\tilde{\theta}=\tilde{\theta}(\underset{\sim}{X})=\left(\tilde{\theta}_1(\underset{\sim}{X}),\ldots,\tilde{\theta}_\kappa(\underset{\sim}{X})\right)$ ονομάζεται εκτιμητής της μεθόδου των ροπών (ΕΜΡ) του θ.

**Πρόταση 1.4.1.** Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων της κατανομής Log-Lindley, που έπονται της μεθόδου των ροπών, δίνονται από τους κάτωθι τύπους:

$$\hat{\lambda}=\frac{\bar{x}_2(\sigma+2)^2-\bar{x}_1(\sigma+1)^2}{\bar{x}_1(\sigma+1)^2(\sigma+2)-\bar{x}_2(\sigma+2)^2(\sigma+1)},\qquad(1.5)$$

$$\hat{\sigma}=\frac{2(\bar{x}_2-\bar{x}_1)\pm\sqrt{2(\bar{x}_1-2\bar{x}_2+\bar{x}_1\bar{x}_2)}}{2\bar{x}_1-\bar{x}_2-1}.\qquad(1.6)$$

Απόδειξη.

Εξισώνουμε τις δειγματικές ροπές με τις θεωρητικές ροπές.

$$\bar{x}_1=\frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}\frac{1+\lambda(\sigma+1)}{(\sigma+1)^2},\quad(1.7)$$

$$\bar{x}_2=\frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}\frac{1+\lambda(\sigma+2)}{(\sigma+2)^2}.\quad(1.8)$$

Λύνοντας την (1.7) και την (1.8) ως προς $\frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}$ και εξισώνοντας τις προκύπτει η (1.5).

Εν συνεχεία αντικαθιστώντας την (1.5) στην (1.7) προκύπτει η (1.6). ■

Με την εξέταση του τύπου εκτίμησης της παραμέτρου σ παρατηρείται ότι ο αυτός δεν ορίζεται αν, $(2\bar{x}_1-4\bar{x}_2-2\bar{x}_1\bar{x}_2)<0$. Προς διαπίστωση λοιπόν της συχνότητας του παραπάνω προβλήματος θα παραχθούν 10000 τυχαία δείγματα διαφορετικού μεγέθους με συγκεκριμένες παραμέτρους από την κατανομή Log-Lindley. Για την παραγωγή των τυχαίων δειγμάτων επιλέχθηκε η μέθοδος της αντιστροφής (inversion method), η οποία υλοποιήθηκε με την χρήση αριθμητικών μεθόδων. Εναλλακτικά για την προσομοίωση τυχαίων δειγμάτων θα μπορούσε να επιλεχθεί η μέθοδος της αποδοχής-απόρριψης, όμως αποφεύχθηκε η χρήση της, καθώς σε αρκετές περιπτώσεις δεν παρήγαγε ποιοτικά δείγματα, με γνώμονα τον έλεγχο καλής προσαρμογής (good of fitness test).

Πίνακας 1
*Ποσοστό τυχαίων δειγμάτων για τα οποία δεν μπορεί να υπολογισθεί ο εκτιμητής με την μέθοδο των ροπών*

| $N=10^4$ | σ=1,λ=2 | σ=2,λ=1 | σ=2,λ=2 | σ=5,λ=1 | σ=3,λ=1 |
|---|---|---|---|---|---|
| *n=100* | 30.29% | 23.81% | 38.18% | 37.94% | 31.34% |
| *n=200* | 24.58% | 17.26% | 34.76% | 35.01% | 26.03% |
| *n=250* | 22,29% | 15.52% | 33.85% | 34.20% | 23.72% |
| *n=300* | 20.53% | 13.09% | 32.36% | 33.29% | 22.78% |

Από τα περιεχόμενα του ανωτέρω πίνακα παρατηρείται ότι σε αρκετές περιπτώσεις η εκτίμηση παραμέτρων με την μέθοδο των ροπών δεν είναι εφικτή λόγω του προαναφερθέντος προβλήματος και ως εκ τούτου δεν συνιστάται η χρήση της.

## 1.5 Εκτίμηση παραμέτρων με την μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας

Κατά την μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας, οι εκτιμητές των παραμέτρων υπολογίζονται από την επίλυση ενός συστήματος, οπού οι εξισώσεις που το απαρτίζουν προκύπτουν από την μερική παραγώγιση του λογάριθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας ως προς τις παραμέτρους (εξισώσεις πιθανοφάνειας).

**Πρόταση 1.5.1.** Οι εξισώσεις πιθανοφάνειας της κατανομής Log-Lindley, δίνονται από τους κάτωθι τύπους:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma} = \frac{2n}{\sigma} - \frac{n\lambda}{1+\lambda\sigma} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \log \mathrm{x_i} = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = -\frac{n\sigma}{1+\lambda\sigma} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda - \log x_i} = 0. \quad (1.9)$$

Απόδειξη.

Ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας της κατανομής Log-Lindley δίνεται από τον τύπο:

$$\ell(\sigma,\lambda) = 2n\log\sigma - n\log(1+\lambda\sigma) + \sum_{i=1}^{n} \log(\lambda - \log x_i) + (\sigma-1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i\,.$$

Παραγωγίζοντας μερικώς ως προς σ και λ τον λογάριθμο της συνάρτησης πιθανοφάνειας προκύπτουν οι σχέσεις (1.8) και (1.9) .

Βέβαια η αναλυτική λύση του ανωτέρω συστήματος είναι ιδιαίτερα περίπλοκη. Συνεπώς δεν μπορούν να προσδιοριστούν οι ακριβής τύποι εκτίμησης των παραμέτρων, αλλά και να δοθεί απόδειξη μεγιστοποίησης του λογαρίθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας από αυτούς.

Ως εκ τούτου με την παραγωγή 10000 τυχαίων δειγμάτων διάφορων μεγεθών και τον υπολογισμό της μεροληψίας (bias) και του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MSE) των εκτιμήσεων, θα ληφθούν ενδείξεις για την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων. Επειδή το προς επίλυση σύστημα έχει πολλαπλές ρίζες ενδέχεται να μην εξαχθούν ακριβή αποτελέσματα μέσω της χρήσης αλγορίθμων που εφαρμόζουν αριθμητικές μεθόδους. Το πρόβλημα επίλυσης του συστήματος λοιπόν, μπορεί να αναχθεί στο παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς:

$$max \quad \ell(\sigma,\lambda)$$

$$\upsilon.\sigma. \quad \sigma > 0$$

$$\lambda \geq 0\,.$$

Το παραπάνω θα επιλυθεί με την χρήση του αλγόριθμου βελτιστοποίησης Nelder-Mead (Wheeler & Kochenderfer, 2019) που εμπεριέχεται στο πακέτο *nloptr* της R . Σημείο εκκίνησης του προαναφερθέντος αλγορίθμου ως προς τις παραμέτρους (initial point) θα καθοριστεί το ζεύγος τιμών ($IP_\sigma = 1, IP_\lambda = 1$)

Πίνακας 2

*Μεροληψία και μέσο τετραγωνικό σφάλμα για τις εκτιμήσεις των παραμέτρων τυχαίων δειγμάτων από την κατανομή Log-Lindley*

| | $\bar{\sigma}$ | Bias($\hat{\sigma}$) | MSE($\hat{\sigma}$) | $\bar{\lambda}$ | Bias($\hat{\lambda}$) | MSE($\hat{\lambda}$) | $\bar{\sigma}$ | Bias($\hat{\sigma}$) | MSE($\hat{\sigma}$) | $\bar{\lambda}$ | Bias($\hat{\lambda}$) | MSE($\hat{\lambda}$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | σ=1 | | | λ=1 | | | σ=5 | | | λ=2 | | |
| n=100 | 1.01326 | 0.01326 | 0.02186 | 6.25818 | 5.25818 | 1531.121 | 5.56827 | 0.56827 | 1.13781 | 59.94843 | 57.94843 | 20878.99 |
| n=150 | 1.00964 | 0.00964 | 0.01507 | 2.90251 | 1.90251 | 303.8051 | 5.43624 | 0.43624 | 0.87983 | 51.15128 | 49.15128 | 13487.68 |
| n=200 | 1.0088 | 0.0088 | 0.01115 | 1.91192 | 0.91192 | 232.3921 | 5.36768 | 0.36768 | 0.7085 | 43.95471 | 41.95471 | 9088.642 |
| | σ=2 | | λ=2 | | | σ=2 | | | λ=5 | | | |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n=100 | 2.10724 | 0.10724 | 0.16226 | 46.66205 | 44.66205 | 17835.79 | 2.23834 | 0.23834 | 0.18799 | 66.38305 | 61.38305 | 25544.5 |
| n=150 | 2.06556 | 0.06556 | 0.12449 | 36.62108 | 34.62108 | 9547.257 | 2.18644 | 0.18644 | 0.14111 | 55.58786 | 50.58786 | 15633.62 |
| n=200 | 2.04471 | 0.04471 | 0.10205 | 29.51206 | 27.51206 | 5566.981 | 2.15611 | 0.15611 | 0.11426 | 47.34765 | 42.34765 | 10672.89 |

Με την εξέταση του παραπάνω επισυναπτόμενου πίνακα παρατηρείται ότι, τα αποτελέσματα δεν είναι καθόλου ικανοποιητικά, ειδικότερα αυτά που αφορούν την παράμετρο λ. Το γεγονός αυτό ενδέχεται να οφείλεται στην επιλογή μη κατάλληλου σημείου εκκίνησης του αλγορίθμου βελτιστοποίησης, το οποίο σε πολλές περιπτώσεις επηρεάζει σημαντικά το τελικό αποτέλεσμα (Kochenderfer & Wheeler, 2019). Συγκεκριμένα οι παράμετροι σ, λ της προς εξέταση κατανομής παίρνουν γνησίως θετικές και μη αρνητικές τιμές αντίστοιχα και έτσι καθιστάτε δύσκολη η επιλογή του κατάλληλου σημείου εκκίνησης.

## 1.6 Η επαναπαραμετροποιημένη κατανομή Log-Lindley.

Προς επίλυση του προβλήματος που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα θα πραγματοποιηθεί επαναπαραμετροποίηση της κατανομή Log-Lindley με σκοπό τον καθορισμό ενός καταλληλότερου σημείου εκκίνησης, μέσω του οποίου ενδέχεται να προκύψουν πιο ικανοποιητικά αποτελέσματα.

**Πρόταση 1.6.1.** Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της επαναπαραμετροποιημένης Log-Lindley είναι:

$$f(x;\sigma,\pi) = \sigma\, x^{\sigma-1}\,[\pi - \,\sigma\,(1-\pi)\,log x], 0 < x < 1, \sigma > 0, 0 \le \pi \le 1. \quad (1.10)$$

Απόδειξη.

Η κατανομή Lindley που προτάθηκε από τους Zakerzadeh και Dollati το 2010 και αναφέρθηκε σε προγενέστερο χρόνο αποτελεί διακριτή μίξη μιας εκθετικής και μιας Erlang κατανομής. Ως εκ τούτου η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά και ως εξής:

$$f(x;\sigma,\alpha) = \frac{\sigma}{\alpha+\sigma}\sigma e^{-\sigma x} + \frac{\alpha}{\alpha+\sigma}\sigma^2 x e^{-\sigma x}$$

$$= \frac{\sigma}{\alpha+\sigma}\sigma e^{-\sigma x} + (1 - \frac{\alpha}{\alpha+\sigma})\,\sigma^2 \chi e^{-\sigma x}. \quad (1.11)$$

Θέτοντας $\pi = \frac{\sigma}{\alpha+\sigma}$ στην (1.11) προκύπτει ότι:

$$f(x;\sigma,\pi) = \pi\sigma e^{-\sigma x} + (1-\pi)\sigma^2 x e^{-\sigma x}$$

$$= \sigma e^{-\sigma x}[\pi \,+\, (1-\pi)\,\sigma\, x], x > 0, \sigma > 0, 0 \le \pi \le 1$$

Με τον κατάλληλο μετασχηματισμό προκύπτει η (1.10) .

Συγκεκριμένα:

$y = e^{-x} \Rightarrow x = -\log\ y$`

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{y}$$

$$f_y(y) = fx(-\log y)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

$$= \sigma\, y^{\sigma-1}\,[\pi - \sigma\,(1-\pi)\,logy], 0 < y < 1, \sigma > 0, 0 \le \pi \le 1. \blacksquare$$

Η παράμετρος π της επαναπαραμετροποιημένης Log-Lindley παίρνει τιμές μεταξύ του μηδενός και του ένα, γεγονός που επιτρέπει τον καθορισμό ενός καταλληλότερου σημείου εκκίνησης ως προς την προαναφερθείσα παράμετρο.

Εν συνεχεία θα παρατεθούν κάποιες βασικές ιδιότητες της επαναπαραμετροποιημένης Log-Lindley, με σκοπό τον καθορισμό ενός καταλληλότερου σημείου εκκίνησης και ως προς την παράμετρο σ και την εκ νέου εκτίμηση των παραμέτρων.

**Πρόταση 1.6.1.** Η συνάρτηση κατανομής της επαναπαραμετροποιημένης Log-Lindley είναι:

$$F(x;\sigma,\pi) = x^{\sigma}\,[1 - \sigma\,(1-\pi)logx], 0 < x < 1, \sigma > 0, 0 \le \pi \le 1.$$

**Πρόταση 1.6.2.** Η ροπή κ-οστής τάξης της επαναπαραμετροποιημένης Log-Lindley μπορεί να υπολογισθεί με την κάτωθι μαθηματικά συνάρτηση:

$$E(X^k) = \frac{\sigma(\sigma+\kappa\pi)}{(\kappa+\sigma)^2}, \kappa = 0,1,2,\ldots, \sigma > 0, 0 \le \pi \le 1.$$

**Πρόταση 1.6.3.** Οι εκτιμητές με την μέθοδο των ροπών για την παράμετρο σ της επαναπαραμετροποιημένης Log-Lindley είναι οι κάτωθι:

$$\hat{\sigma} = \frac{\pi - 2\bar{x}_1 \pm \sqrt{\pi^2 + 4\bar{x}_1 - 4\pi\bar{x}_1}}{2(\bar{x}_1 - 1)}. \quad (1.12)$$

**Πρόταση 1.6.4.** Ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας για την επαναπαραμετροποιημένη Log-Lindley είναι:

$$\ell(\sigma,\pi) = n\log\sigma + \sum_{i=1}^{n} \log[\pi - \sigma(1-\pi)\log x_i]$$
$$+ (\sigma - 1)\sum_{i=1}^{n} \log x_i .$$

## 1.7 Εκτίμηση παραμέτρων με την μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας για την επαναπαραμετροποιημένη Log-Lindley

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως,η παράμετρος π της επαναπαραμετροποιημένης Log-Lindley παίρνει τιμές μεταξύ του μηδενός και του ένα. Ως εκ τούτου, το πρόβλημα βελτιστοποίησης που απαιτείται να λυθεί για την εκτίμηση των παραμέτρων επαναδιατυπώνεται ως εξής:

$$\max \quad \ell(\sigma,\pi)$$

$$\upsilon.\sigma. \quad \sigma > 0$$

$$0 \leq \pi$$

$$1 \geq \pi.$$

Συνεπώς, σημείο εκκίνησης του αλγορίθμου Nelder-Mead ως προς την παράμετρο π θα τεθεί το ημιάθροισμα των σημείων που ορίζουν το διάστημα μέσα στο οποίο παίρνει τιμές η προαναφερθείσα παράμετρος ($IP_\pi = 0.5$).

Αναφορικά με την παράμετρο σ, σημείο εκκίνησης του αλγορίθμου ως προς αυτήν, θα τεθεί το ημιάθροισμα των εκτιμητών της εν λόγω παραμέτρου που έπονται της μέθοδού των ροπών για π=0 και π=1. Συγκεκριμένα,από την σχέση (1.12) προκύπτει ότι:

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{x}_1 + \sqrt{\bar{x}_1}}{1 - \bar{x}_1},$$

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{\bar{x}_1}{1 - \bar{x}_1}.$$

Επομένως,

$$IP_\sigma = \frac{\hat{\sigma}_0 + \hat{\sigma}_1}{2} = \frac{2\bar{x}_1 + \sqrt{\bar{x}_1}}{1 - \bar{x}_1}.$$

Πίνακας 3

*Μεροληψία και μέσο τετραγωνικό σφάλμα για τις εκτιμήσεις των παραμέτρων τυχαίων δειγμάτων από την επαναπαραμετροποιημένη κατανομή Log-Lindley*

| | $\bar{\sigma}$ | Bias($\hat{\sigma}$) | MSE($\hat{\sigma}$) | $\bar{\pi}$ | Bias($\hat{\pi}$) | MSE($\hat{\pi}$) | $\bar{\sigma}$ | Bias($\hat{\sigma}$) | MSE($\hat{\sigma}$) | $\bar{\pi}$ | Bias($\hat{\pi}$) | MSE($\hat{\pi}$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | σ=5 | | | π=0.2 | | | σ=5 | | | π=0.4 | | |
| n=100 | 5.03315 | 0.03315 | 0.25785 | 0.19957 | -.0004 | 0.01642 | 5.01636 | 0.01636 | 0.46462 | 0.4033 | 0.0033 | 0.03264 |
| n=150 | 5.01717 | 0.01717 | 0.17381 | 0.2003 | 0.003 | 0.01106 | 5.00411 | 0.00411 | 0.29743 | 0.40358 | 0.00358 | 0.02096 |
| n=200 | 5.00954 | 0.00954 | 0.1294 | 0.20115 | 0.00115 | 0.00823 | 5.01225 | 0.01225 | 0.22059 | 0.40215 | 0.00215 | 0.01571 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | σ=5 | | | π=0.6 | | | σ=5 | | | π=0.8 | |
| n=100 | 5.03722 | 0.03722 | 0.77492 | 0.60206 | 0.00206 | 0.04718 | 5.24418 | 0.24418 | 1.07363 | 0.75292 | -0.0470 | 0.04651 |
| n=150 | 4.99283 | -0.0072 | 0.56754 | 0.60823 | 0.00823 | 0.03632 | 5.16905 | 0.16905 | 0.80752 | 0.76886 | -0.0311 | 0.03709 |
| n=200 | 4.98339 | -0.0166 | 0.43868 | 0.60934 | 0.00934 | 0.02864 | 5.08895 | 0.08895 | 0.65788 | 0.78465 | -0.0153 | 0.03168 |
| | σ=3 | | | π= 0.4 | | | σ=2 | | | π=0.3 | |
| n=100 | 3.0168 | 0.01681 | 0.17047 | 0.40374 | 0.00374 | 0.03351 | 2.0099 | 0.00989 | 0.05535 | 0.3031 | 0.0031 | 0.02463 |
| n=150 | 3.0055 | 0.00545 | 0.10714 | 0.40387 | 0.00387 | 0.02144 | 2.0065 | 0.00652 | 0.03494 | 0.30131 | 0.00131 | 0.01541 |
| n=200 | 3.0046 | 0.00463 | 0.07871 | 0.40195 | 0.00195 | 0.01518 | 2.0044 | 0.00438 | 0.0261 | 0.30067 | 0.00067 | 0.01112 |
| | σ=1 | | | π=0.2 | | | σ=1 | | | π=0.1 | |
| n=100 | 1.01100 | 0.01100 | 0.00992 | 0.19700 | -0.003 | 0.0159 | 1.00938 | 0.00938 | 0.0074 | 0.10176 | 0.00176 | 0.00877 |
| n=150 | 1.00899 | 0.00899 | 0.00639 | 0.1972 | 0.0028 | 0.0105 | 1.00798 | 0.00798 | 0.005 | 0.10000 | 3e-05 | 0.00621 |
| n=200 | 1.00862 | 0.00862 | 0.00488 | 0.1962 | -0.0038 | 0.00769 | 1.00735 | 0.00735 | 0.00378 | 0.09837 | -.00163 | 0.00471 |

Στην περίπτωση της επαναπαραμετροποιημένης Log-Lindley που ήταν εφικτή η επιλογή ενός καταλληλότερου σημείου εκκίνησης για τον αλγόριθμο Nelder-Mead τα αποτελέσματα που εξάχθηκαν είναι αρκετά ικανοποιητικά,για τα περισσότερα ζεύγη τιμών, καθώς οι τιμές των bias και MSE είναι αρκετά χαμηλές. Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι για το ζεύγος τιμών (σ=5,π=0.8) και για τιμές των παραμέτρων, οι οποίες βρίσκονται πολύ κοντά (σ=0.8 & π=0.6,σ=0.4 & π=0.5…) ο αλγόριθμος δεν δίνει εξίσου ικανοποιητικά αποτελέσματα. Το παραπάνω πιθανότατα να οφείλεται στην μορφή του λογαρίθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας.

Δυνητικά η εκτίμηση των παραμέτρων της επαναπαραμετροποιημένης Log-Lindley θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί με την μέθοδο των ροπών. Βέβαια και σε αυτήν την περίπτωση προκύπτει το ίδιο πρόβλημα που παρουσιάστηκε στη Ενότητα 1.4.

## 1.8 Η εντροπία του Shannon για την κατανομή Log-Lindley.

Η έννοια της εντροπίας της πληροφορίας (εντροπία του Shannon) αναπτύχθηκε πρωτίστως από τον Shannon το 1947. Αποτελεί ένα μέτρο που χρησιμοποιείται για την περιγραφή της αβεβαιότητας των τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής που προέρχεται από μία προς εξέταση κατανομή. Μεγάλη εντροπία μιας τυχαίας μταβλητής συνεπάγεται μεγάλη αβεβαιότητα αναφορικά με τις τιμές της.

Ακολουθεί ο ορισμός της εντροπίας του Shannon που δόθηκε από τους Cover και Thomas (2005).

**Ορισμός 1.8.1.** Η εντροπία του Shannon για μια συνεχή τυχαία μεταβλητή $X$ (Differential entropy) με στήριγμα S υπολογίζεται μέσω του κάτωθι μαθηματικού τύπου:

$$H(X) = -\int_S f(x;\sigma,\lambda)\, log[f(x;\sigma,\lambda)]\, \mathrm{dx}. \quad (1.13)$$

**Πρόταση 1.8.1.** Η εντροπία του Shannon για την κατανομή Log-Lindley μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά ως εξής:

$$H(X) = -\frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}\left\{2\log\sigma - \log(1+\lambda\sigma) - \frac{2+\lambda\sigma}{\sigma(1+\lambda\sigma)} - \frac{1}{1+\lambda\sigma}[1+\log\lambda(1+\sigma\lambda) - e^{\lambda\sigma}E_i(\sigma\lambda)]\right\},$$
(1.14)

όπου $E_i(\lambda)$ =-$\int_\lambda^\infty \frac{e^{-z}}{z}dz$ η συνάρτηση εκθετικής ολοκλήρωσης.

Απόδειξη.

Αρχικά θα δείξουμε ότι ισχύουν οι κάτωθι σχέσεις:

$$E(logX) = -\frac{2+\lambda\sigma}{\sigma(1+\lambda\sigma)}, \quad (1.15)$$

$$E\big(log(\lambda - logX)\big) = -\frac{1}{1+\lambda\sigma}[1+\log\lambda(1+\sigma\lambda) - e^{\lambda\sigma}E_i(\sigma\lambda)], \quad (1.16)$$

Έχουμε:

$$E(\log X) = \int_0^1 \log x(\lambda - \log x)\, x^{\sigma-1}\frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}dx$$

$$\mathrm{y} = \log\, x \Rightarrow x = e^y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dy = \frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow E(\log \mathrm{X}) = \int_{-\infty}^0 y(\lambda - y)e^{y\sigma}\frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}dy$$

$$= \frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}\left(\int_{-\infty}^0 y\,\lambda\, e^{y\sigma}\,dy - \int_{-\infty}^0 y^2e^{y\sigma}dy\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}\left(\frac{\lambda}{\sigma}\int_{-\infty}^0 y\ (e^{y\sigma})'dy - \frac{1}{\sigma}\int_{-\infty}^0 y^2(e^{y\sigma})'dy\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}\left\{\frac{\lambda}{\sigma}\left[ye^{y\sigma}|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 e^{y\sigma}dy\right] - \frac{1}{\sigma}\left[y^2e^{y\sigma}|_{-\infty}^0 - 2\int_{-\infty}^0 y^2e^{y\sigma}dy\right]\right\}$$

$$= \frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}\left(-\frac{\lambda}{\sigma}\int_{-\infty}^0 e^{y\sigma}dy + \frac{2}{\sigma}\int_{-\infty}^0 ye^{y\sigma}dy\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}\left\{-\frac{\lambda}{\sigma^2}+\frac{2}{\sigma^2}\left[ye^{y\sigma}|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0} e^{y\sigma}dy\right]\right\}$$

$$= \frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}\left(-\frac{\lambda}{\sigma^2}-\frac{2}{\sigma^3}\right)$$

$$= -\frac{2+\lambda\sigma}{\sigma(1+\lambda\sigma)}$$

$$E[\log(\lambda-\log X)] = \int_0^1 \log(\lambda-\log x)\frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}(\lambda-\log\ x)x^{\sigma-1}dx$$

$$\mathrm{z} = \lambda-\log x \Rightarrow \log x = \lambda-\mathrm{z} \Rightarrow x = e^{\lambda-\mathrm{z}}$$

$$\frac{d\mathrm{z}}{dx} = -\frac{1}{x} \Rightarrow d\mathrm{z} = -\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow E[\log(\lambda-\log X)] = -\int_\lambda^\infty \frac{\sigma^2}{1+\lambda\sigma}\mathrm{z}\ \log z\, e^{\lambda\sigma}e^{-\sigma z}dz$$

$$= -\frac{\sigma^2 e^{\lambda\sigma}}{1+\lambda\sigma}\int_\lambda^\infty \mathrm{z}\log z\, e^{-\sigma z}dz$$

$$= \frac{\sigma e^{\lambda\sigma}}{1+\lambda\sigma}\int_\lambda^\infty \mathrm{z}\log z\,(e^{-\sigma z})'dz$$

$$= \frac{\sigma e^{\lambda\sigma}}{1+\lambda\sigma}\left(z\log z\, e^{-\sigma z}|_\lambda^\infty-\int_\lambda^\infty \log z\, e^{-\sigma z}dz-\int_\lambda^\infty e^{-\sigma z}dz\right)$$

$$= \frac{\sigma e^{\lambda\sigma}}{1+\lambda\sigma}\left\{-\lambda\log\lambda\, e^{-\sigma\lambda}-\frac{1}{\sigma}e^{-\sigma\lambda}+\frac{1}{\sigma}\left[\log z\, e^{-\sigma z}|^\infty-\int_\lambda^\infty \frac{e^{-\sigma z}}{\mathrm{z}}\mathrm{dz}\right]\right\}$$

$$= \frac{\sigma e^{\lambda\sigma}}{1+\lambda\sigma}\left(-\lambda\log\lambda\, e^{-\sigma\lambda}-\frac{1}{\sigma}e^{-\sigma\lambda}-\frac{1}{\sigma}\log\lambda\, e^{-\sigma\lambda}-\frac{1}{\sigma}\int_\lambda^\infty \frac{e^{-\sigma z}}{\mathrm{z}}dz\right)$$

$$= \frac{1}{1+\lambda\sigma}\left(-\sigma\lambda\log\lambda-1-\log\lambda-e^{\lambda\sigma}\int_\lambda^\infty \frac{e^{-\sigma z}}{z}\mathrm{dz}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\lambda\sigma}\left[-1-\log\lambda(1+\sigma\lambda)+e^{\lambda\sigma}E_i(\sigma\lambda)\right]$$

$$= -\frac{1}{1+\lambda\sigma}\left[1+\log\lambda(1+\sigma\lambda)-e^{\lambda\sigma}E_i(\sigma\lambda)\right]$$

Αναλύοντας την σχέση (1.13) και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.15) και (1.16) προκύπτει η (1.14). ∎

# Κεφάλαιο 2

# Στοχαστικές διατάξεις και η κατανομή Log-Lindley

## 2.1 Εισαγωγή

Στο εν λόγω κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε βασικές έννοιες στοχαστικών διατάξεων με σκοπό την μελέτη ως προς την στοχαστική διάταξη δύο Log-Lindley τυχαίων μεταβλητών. Επιπροσθέτως θα μελετηθεί η στοχαστική διάταξη δύο τυχαίων μεταβλητών που προέρχονται από μεμιγμένες κατανομές με μικτικές Log-Lindley κατανομές. Βέβαια το παραπάνω δεν μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας τις προαναφερθείσες βασικές έννοιες στοχαστικών διατάξεων, διότι οι σχετικές περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας δεν έχουν κλειστή μορφή. Ως εκ τούτου θα γίνει χρήση προσομοίωσης και αποτελεσμάτων που αφορούν TP2 τυχαίες μεταβλητές για να εξαχθεί κάποιο συμπέρασμα.

## 2.2 Συνήθης στοχαστική διάταξη (usual stochastic order)

Στην αναλογιστική επιστήμη μέσω της συνήθους στοχαστικής διάταξης ή διάταξης πρώτης στοχαστικής κυριαρχίας επιτυγχάνεται η σύγκριση δύο τυχαίων μεταβλητών ως προς την επικινδυνότητα τους. Κριτήριο της προαναφερθείσας σύγκρισης αποτελεί η πιθανότητα εμφάνισης μεγάλων τιμών. Προς κατανόηση των παραπάνω, θεωρώντας δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y που αντιπροσωπεύουν τις συνολικές απαιτήσεις ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου A και B αντίστοιχα, εφόσον η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη από την Y, έπεται ότι το χαρτοφυλάκιο A εμφανίζει μεγάλες απαιτήσεις με μικρότερη πιθανότητα από το χαρτοφυλάκιο B.

Οι Ορισμοί και τα Θεωρήματα που ακολουθούν δόθηκαν από τους Shaked & Shanthikumar (2007).

**Ορισμός 2.2.1.** Η τυχαία μεταβλητή $X$ καλείται μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή $Y$ ,ως προς την συνήθη στοχαστική, διάταξη και συμβολίζεται με $X \leq_{st} Y$, αν και μόνο αν ισχύει μια από τις κάτωθι ισοδύναμες σχέσεις :

$$F_X(t) \geq F_Y(t), \forall\, t > 0$$

$$\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t), \forall\, t > 0$$

Ο παραπάνω ορισμός διατυπώνεται ισοδύναμα κάτωθι.

**Ορισμός 2.2.2.** Η τυχαία μεταβλητή είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή μεταβλητή $Y$, ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη, εάν για κάθε αύξουσα συνάρτηση Φ ισχύει ότι :

$$E[\Phi(X)] \leq E[\Phi(Y)] \quad (2.1) ,$$

εάν και εφόσον οι παραπάνω μέσες τιμές είναι πεπερασμένες.

Θέτωντας $\Phi(X) = X$ και $\Phi(Y) = Y\ \sigma\tau\eta\nu$ (2.1) εξάγεται το κάτωθι πόρισμα.

**Πόρισμα 2.2.1.** Αν η τυχαία μεταβλητή $X$ είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή $Y$, ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη, τότε ισχύει ότι:

$$E(X) \leq E(Y),$$

εάν και εφόσον οι παραπάνω ροπές πρώτης τάξεως είναι πεπερασμένες.

**Θεώρημα 2.2.2.** Αν $X \leq_{\text{st}} Y$ και $E(X) = E(Y)$, τότε οι $X$ και $Y$ είναι ισόνομες τυχαίες μεταβλητές .

Απόδειξη.

Για την μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $X$ ισχύει:

$$E(X) = \int_0^\infty \bar{F}_X(t)\,dt - \int_{-\infty}^0 F_X(t)\,dt \quad (2.2)$$

Για την μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής Y ισχύει:

$$E(Y) = \int_0^\infty \bar{F}_Y(t)\,dt - \int_{-\infty}^0 F_Y(t)\,dt \quad (2.3)$$

Από υπόθεση $E(Y) = E(X) \Rightarrow E(Y) - E(X) = 0 \Rightarrow (2.3) - (2.2) = 0$

$\Rightarrow \int_0^\infty \bar{F}_Y(t)\,dt - \int_{-\infty}^0 F_Y(t)\,dt - \int_0^\infty \bar{F}_x(t)\,dt + \int_{-\infty}^0 F_x(t)\,dt = 0$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^\infty F_X(t) - F_Y(t)\,dt = 0$

Επομένως $F_X(t) = F_Y(t)$. ∎

**Θεώρημα 2.2.3.** Έστω $X_1,X_2,\ldots,X_n$ και $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \leq_{\text{st}} Y_i$ ∀ i=1,2,…,n,τότε για κάθε αύξουσα συνάρτηση $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq_{\text{st}} \Phi(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

**Θεώρημα 2.2.4.** Έστω $X_1,X_2,\ldots,X_n$ και $Y_1,Y_2,\ldots, Y_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \leq_{\text{st}} Y_i$ ∀ i=1,2,…,n τότε ισχύει ότι:

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq_{\text{st}} \sum_{i=1}^n Y_i$$

**Θεώρημα 2.2.5.** Έστω $X_1,X_2,\ldots,X_n$ και $Y_1,Y_2,\ldots, Y_n$ μη αρνητικές ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \leq_{\text{st}} Y_i$ ∀ i=1,2,…,n και N,M δύο μη αρνητικές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές με N ανεξάρτητη από $X_i$ ∀ i=1,2,…,n , M ανεξάρτητη από $Y_i$ ∀ i=1,2,…,n τότε ισχύει ότι:

$$\sum_{i=1}^N X_i \leq_{\text{st}} \sum_{i=1}^M Y_i$$

**Θεώρημα 2.2.6.** Έστω X,Y και Θ τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε X|Θ=θ $\leq_{\text{st}}$ Y|Θ= θ, τότε X $\leq_{\text{st}}$ Y. Δηλαδή αν η τυχαία μεταβλητή X δοθείσης της τυχαίας μεταβλητής Θ είναι μικρότερη, ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη, από την τυχαία μεταβλητή Y δοθείσης της τυχαίας μεταβλητής Θ, τότε η τυχαία μεταβλητή X θα είναι μικρότερη ,ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη, από την τυχαία μεταβλητή Y.

## 2.3 Διάταξη συνάρτησης κινδύνου (hazard rate order)

Η σύγκριση δύο τυχαίων μεταβλητών ως προς την επικινδυνότητα τους επιτυγχάνεται και μέσω της διάταξης συνάρτησης κινδύνου (hazard rate order), η οποία είναι ισχυρότερη από την συνήθη στοχαστική διάταξη και κριτήριο της αποτελεί η σύγκριση των συναρτήσεων κινδύνου (hazard rate functions), δηλαδή η σύγκριση του ρυθμού έλευσης ζημιογόνων γεγονότων. Θεωρώντας δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y που αντιπροσωπεύουν τις συνολικές απαιτήσεις ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου A και B αντίστοιχα, εφόσον η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη ως προς την διάταξη συνάρτησης κινδύνου από την Y, έπεται ότι το χαρτοφυλάκιο A εμφανίζει μεγάλες απαιτήσεις με μικρότερη πιθανότητα από το χαρτοφυλάκιο B, καθώς ο ρυθμός εμφάνισης απαιτήσεων για το χαρτοφυλάκιο A είναι μικρότερος από τον αντίστοιχο ρυθμό του χαρτοφυλακίου B.

Οι Ορισμοί και τα Θεωρήματα που ακολουθούν δόθηκαν από τους Shaked & Shanthikumar (2007).

**Ορισμός 2.3.1.** Η τυχαία μεταβλητή X καλείται μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y, ως προς την διάταξη συνάρτησης κινδύνου, και συμβολίζεται με $X \leq_{hr} Y$ αν ισχύει ότι:

$$\varphi(t)=\frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)},$$

γνησίως αύξουσα ως προς t.

**Πρόταση 2.3.1.** Η τυχαία μεταβλητή X καλείται μικρότερη μεταβλητή Y ως προς την διάταξη συνάρτησης κινδύνου και συμβολίζεται με $X \leq_{hr} Y$ αν ισχύει ότι:

$$r_X(t) \geq r_Y(t), \forall\, t > 0$$

Απόδειξη.

Αφού $X \leq_{hr} Y$ θα ισχύει $\frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)}$ γνησίως αύξουσα ως προς t.

Συνεπώς έχουμε:

$$log\left(\frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)}\right) = log\bar{F}_Y(t) - log\bar{F}_X(t) \quad (2.4)$$

,γνησίως αύξουσα ως προς t.

Παραγωγίζοντας την (2.4)ως προς t προκύπτει ότι:

$$\frac{d}{dt}(log\bar{F}_Y(t) - log\bar{F}_X(t)) = r_Y(t) - r_X(t) > 0$$

$$\Rightarrow r_X(t) \geq r_Y(t), , \forall\, t > 0 . \blacksquare$$

**Ορισμός 2.3.2.** Η τυχαία μεταβλητή X καλείται μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y, ως προς την διάταξη συνάρτησης κινδύνου, και συμβολίζεται με X $\leq_{hr}$ Y αν και μόνο αν ισχύει ότι:

$$\bar{F}_X(x)\bar{F}_Y(y) \geq \bar{F}_x(y)\bar{F}_Y(x), \forall\, x \leq y$$

**Θεώρημα 2.3.1.** Έστω X,Y τυχαίες μεταβλητές με X$\leq_{hr}$ Y , τότε για κάθε αύξουσα συνάρτηση Φ θα ισχύει ότι:

$$\Phi(X) \leq \leq_{hr} \Phi(Y)$$

**Ορισμός 2.3.3.** Η τυχαία μεταβλητή X (ή η κατανομή της) καλείται Increasing Failure Rate (IFR), αν ο λογάριθμος της συνάρτησης δεξιάς ουράς της είναι μια κοίλη συνάρτηση.

**Θεώρημα 2.3.2.** Έστω $X_1$,$X_2$,...,$X_n$ και $Y_1$,$Y_2$,..., $Y_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \leq_{st} Y_i \forall$ i=1,2,...,n και $X_i$, $Y_i$ ∀ i=1,2,...,n είναι IFR, τότε θα ισχύει ότι :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leq_{hr} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

**Θεώρημα 2.3.3.** Έστω $X_1$,$X_2$,...,$X_n$ μη αρνητικές ανεξάρτητες IFR τυχαίες μεταβλητές ∀ i=1,2,...,n και N,M δύο θετικές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές με N ανεξάρτητη από $X_i$ ∀ i=1,2,...,n , M ανεξάρτητη από $X_i$ ∀ i=1,2,...,n και N$\leq_{hr}$ M ,τότε θα ισχύει ότι:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \leq_{hr} \sum_{i=1}^{M} X_i$$

**Θεώρημα 2.3.4.** Έστω X,Y τυχαίες μεταβλητές με X$\leq_{hr}$Y και Z μια IFR τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη των X , Y ,τότε θα ισχύει ότι :

$$X+Z \leq_{hr} Y+Z$$

**Θεώρημα 2.3.5.** Έστω X,Y και Θ τυχαίες μεταβλητές ,τέτοιες ώστε X|Θ=θ $\leq_{hr}$ Y|Θ=θ', τότε ισχύει X$\leq_{hr}$Y. Δηλαδή αν η τυχαία μεταβλητή X δοθείσης της τυχαίας μεταβλητής Θ είναι μικρότερη, ως προς την διάταξη συνάρτησης κινδύνου, από την τυχαία μεταβλητή Y δοθείσης της τυχαίας μεταβλητής Θ, τότε η τυχαία μεταβλητή X θα είναι μικρότερη , ως προς την διάταξη συνάρτησης κινδύνου, από την τυχαία μεταβλητή Y.

## 2.4 Διάταξη λόγου πιθανοφάνειας

Οι διατάξεις λόγου πιθανοφάνειας είναι ιδιαίτερα σημαντικές στην θεωρία των στοχαστικών διατάξεων καθώς αποτελούν την πιο ισχυρή μορφή στοχαστικής διάταξης. Εφόσον μελετηθούν δύο τυχαίες μεταβλητές ως προς την διάταξη λόγου πιθανοφάνειας δύο τυχαίες μπορούν να συναχθούν συμπεράσματα αναφορικά και με τις δύο προαναφερθείσες μορφές διάταξης, τα οποία θα παρουσιαστούν αναλυτικά σε μεταγενέστερο χρόνο. Κριτήριο των στοχαστικών διατάξεων λόγου πιθανοφάνειας αποτελεί η σύγκριση των πυκνοτήτων των προς εξέταση μεταβλητών, η οποία επιτυγχάνεται με την μελέτη της μονοτονίας του λόγου των πυκνοτήτων. Εξετάζοντας, λοιπόν την μονοτονία του παραπάνω λόγου μπορούμε να συμπεράνουμε αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μια μεταβλητής αυξάνεται ή μειώνεται συγκριτικά με την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της άλλης.

Οι Ορισμοί και τα Θεωρήματα που ακολουθούν δόθηκαν από τους Shaked & Shanthikumar (2007).

**Ορισμός 2.4.1.** Η τυχαία μεταβλητή Χ καλείται μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Υ, ως προς την διάταξη λόγου πιθανοφάνειας, και συμβολίζεται με $X \leq_{lr} Y$ αν ισχύει ότι:

$$\varphi(t)=\frac{f_Y(t)}{f_X(t)} \ ,$$

γνησίως αύξουσα ως προς t

Ισοδύναμα μπορεί να δοθεί ο κάτωθι ορισμός.

**Ορισμός 2.4.2.** Η τυχαία μεταβλητή Χ καλείται μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Υ ως προς την διάταξη λόγου πιθανοφάνειας και συμβολίζεται με $X \leq_{lr} Y$ αν και μόνο αν ισχύει ότι :

$$f_X(x)f_Y(y) \geq f_X(y)f_Y(x), \ \forall \ x \leq y$$

**Θεώρημα 2.4.1.** Αν X,Y τυχαίες μεταβλητές με $X \leq_{lr} Y$, τότε για κάθε αύξουσα συνάρτηση Φ ισχύει ότι:

$$\Phi(X) \leq_{lr} \Phi(Y)$$

**Θεώρημα 2.4.2.** Έστω $X_1,X_2,\ldots,X_n$ και $Y_1,Y_2,\ldots, Y_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \leq_{lr} Y_i \ \forall$ i=1,2,…,n με τον λογάριθμο της κάθε συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας ή συνάρτησης πιθανότητας των παραπάνω τυχαίων μεταβλητών είναι μια κοίλη συνάρτηση τότε ισχύει ότι:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leq_{lr} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

**Θεώρημα 2.4.3**. Έστω $X_1,X_2,\ldots,X_n$ μη αρνητικές ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με τον λογάριθμο της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας κάθε τυχαίας μεταβλητής να είναι μια κοίλη συνάρτηση και Ν,Μ δύο μη θετικές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές με Ν ανεξάρτητη από $X_i \ \forall$ i=1,2,…,n , M ανεξάρτητη από $X_i \ \forall$ i=1,2,…,n και $N \leq_{lr} M$ τότε ισχύει ότι:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \leq_{lr} \sum_{i=1}^{M} X_i$$

**Θεώρημα 2.4.4.** Έστω X,Y και Θ τυχαίες μεταβλητές ,τέτοιες ώστε $X|\Theta=\theta \leq_{lr} Y|\Theta=\theta'$, τότε ισχύει $X \leq_{hr} Y$. Δηλαδή αν η τυχαία μεταβλητή Χ δοθείσης της τυχαίας μεταβλητής Θ είναι μικρότερη, ως προς την διάταξη λόγου πιθανοφάνειας, από την τυχαία μεταβλητή Υ δοθείσης της τυχαίας μεταβλητής Θ, τότε η τυχαία μεταβλητή Χ θα είναι μικρότερη , ως προς την διάταξη λόγου πιθανοφάνειας,, από την τυχαία μεταβλητή Υ.

## 2.5 Σχέσεις μεταξύ των στοχαστικών διατάξεων

Οι στοχαστικές διατάξεις συνδέονται ιεραρχικά, με τη διάταξη λόγου πιθανοφάνειας να είναι η ισχυρότερη. Αυτή η διάταξη συνεπάγεται την ικανοποίηση και των άλλων μορφών διάταξης, όπως η διάταξη συνάρτησης κινδύνου και η συνήθης στοχαστική διάταξη. Συνεπώς, αν δύο τυχαίες μεταβλητές πληρούν τη διάταξη λόγου πιθανοφάνειας, τότε πληρούν και τις άλλες, λιγότερο αυστηρές, στοχαστικές διατάξεις.

Τα Θεωρήματα που ακολουθούν δόθηκαν από τους Shaked & Shanthikumar (2007).

**Θεώρημα 2.5.1.** Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y, ως προς την διάταξη λόγου πιθανοφανειών , τότε η τυχαία μεταβλητή X θα είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς την διάταξη βαθμίδας κινδύνου. Δηλαδή αν X,Y δύο τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $X \leq_{lr} Y$ τότε $X \leq_{hr} Y$. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε .

Απόδειξη.

Από τον Ορισμό 2.4.2 , $X \leq_{lr} Y$ αν και μόνο αν ισχύει ότι:

$$f_X(x) f_Y(y) \geq f_X(y) fy(x), \forall\, x \leq y$$

$$\Rightarrow \int_x^y \int_y^\infty f_X(t)\, f_Y(z)\, dz\, dt \;\geq \int_y^\infty \int_x^y f_X\,(z)\, f_Y(t)\, dz\, dt, \forall\, x \leq y$$

$$\Rightarrow \int_x^\infty f_X(t) dt \int_y^\infty f_Y\,(z) dz \geq \int_x^\infty f_Y(t)\; dt \int_y^\infty f_X(z)\, dz, \forall\, x \leq y$$

$$\Rightarrow \bar{F}_X(x)\, \bar{F}_Y(y) \;\geq\; \bar{F}_X(y) \bar{F}_Y(x), \forall\, x \leq y$$

Συνεπώς από τον ορισμό 2.3.2 έπεται ότι:

$$X \leq_{lr} Y \Rightarrow X \leq_{hr} Y. \blacksquare$$

**Θεώρημα 2.5.2**. Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y, ως προς την διάταξη βαθμίδας κινδύνου , τότε η τυχαία μεταβλητή X θα είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη. Δηλαδή αν X,Y δύο τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $X \leq_{hr} Y$, τότε $X \leq_{st} Y$. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.

Απόδειξη.

Από τον ορισμό 2.3.2 , $X \leq_{hr} Y$ αν και μόνο αν ισχύει ότι:

$$\bar{F}_x(x)\, \bar{F}_Y(y) \;\geq\; \bar{F}_x(y) \bar{F}_Y(x), \forall\, x \leq y$$

Θέτοντας στην παραπάνω σχέση όπου x=-∞ προκύπτει ότι:

$$\bar{F}_Y(y) \;\geq\; \bar{F}_x(y)$$

Συνεπώς από τον Ορισμό 2.2.1 έπεται ότι:

$$X \leq_{lr} Y \Rightarrow X \leq_{st} Y. \blacksquare$$

**Θεώρημα 2.5.3.** Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ,ως προς την διάταξη λόγου πιθανοφανειών , τότε η τυχαία μεταβλητή X θα είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη. Δηλαδή αν X,Y δύο τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $X \leq_{lr} Y$,τότε $X \leq_{st} Y$. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.

Απόδειξη.

Από τα Θεωρήματα 2.5.1 και 2.5.2 προκύπτει το ζητούμενο. ■

## 2.6 Στοχαστική διάταξη δύο Log-Lindley τυχαίων μεταβλητών

Στην συγκεκριμένη ενότητα θα χρησιμοποιηθούν τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν σε προγενέστερο, έτσι ώστε να πραγματοποιηθεί στοχαστική διάταξη δύο τυχαίων μεταβλητών που προέρχονται από την κατανομή Log-Lindley.

**Θεώρημα 2.6.1.** Έστω $X_1$ και $X_2$ δύο τυχαίες μεταβλητές που προέρχονται από την κατανομή Log-Lindley με $f(x;\sigma_1,\lambda_1)$ και $f(x;\sigma_2,\lambda_2)$ τις αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας. Αν $\lambda_1 \leq \lambda_2$ και $\sigma_1 \leq \sigma_2$, τότε $X_1 \leq_{lr} X_2$.

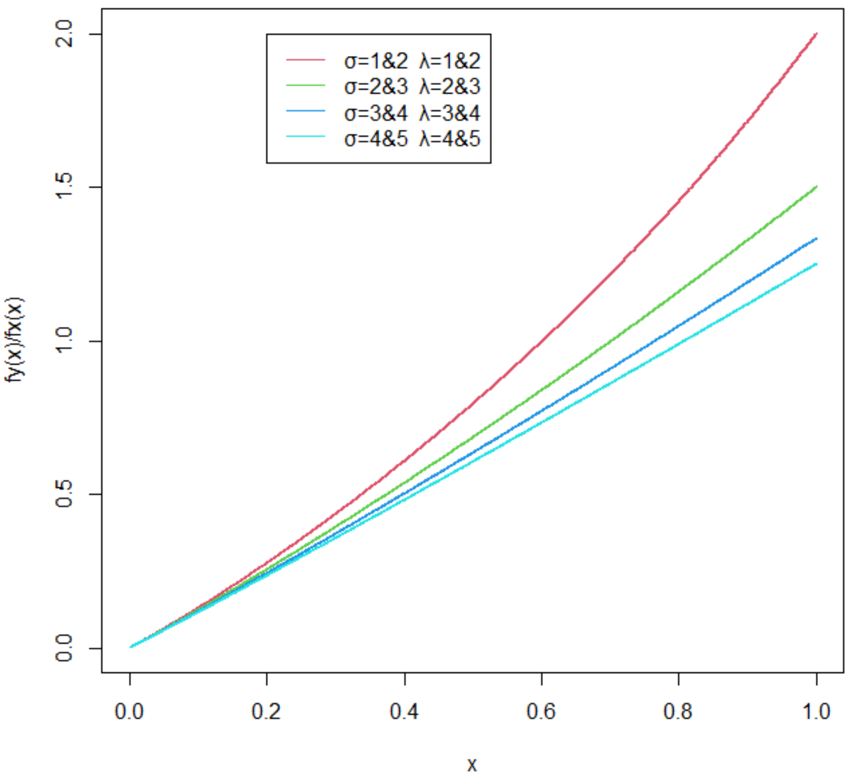
Απόδειξη.

$$h(x) = \frac{f(x;\sigma_2,\lambda_2)}{f(x;\sigma_1,\lambda_1)} = \frac{{\sigma_2}^2(\lambda_2 - logx)(1+\lambda_1\sigma_1)}{{\sigma_1}^2(\lambda_1 - logx)(1+\lambda_2\sigma_2)}\, x^{\sigma_2-\sigma_1}$$

$$h'(x) = \frac{{\sigma_2}^2(1+\lambda_1\sigma_1)}{{\sigma_1}^2(1+\lambda_2\sigma_2)}\left[\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(\lambda_1-logx)^2} + (\sigma_2-\sigma_1)\frac{(\lambda_2-logx)}{(\lambda_1-logx)}\right] x^{\sigma_2-\sigma_1-1}$$

Εφόσον $\lambda_1 \leq \lambda_2$ και $\sigma_1 \leq \sigma_2$, $h'(x) \geq 0\ \forall\ x \in (0,1)$

Συνεπώς από το Θεώρημα 2.5.1 έπεται ότι $X_1 \leq_{lr} X_2$. ■

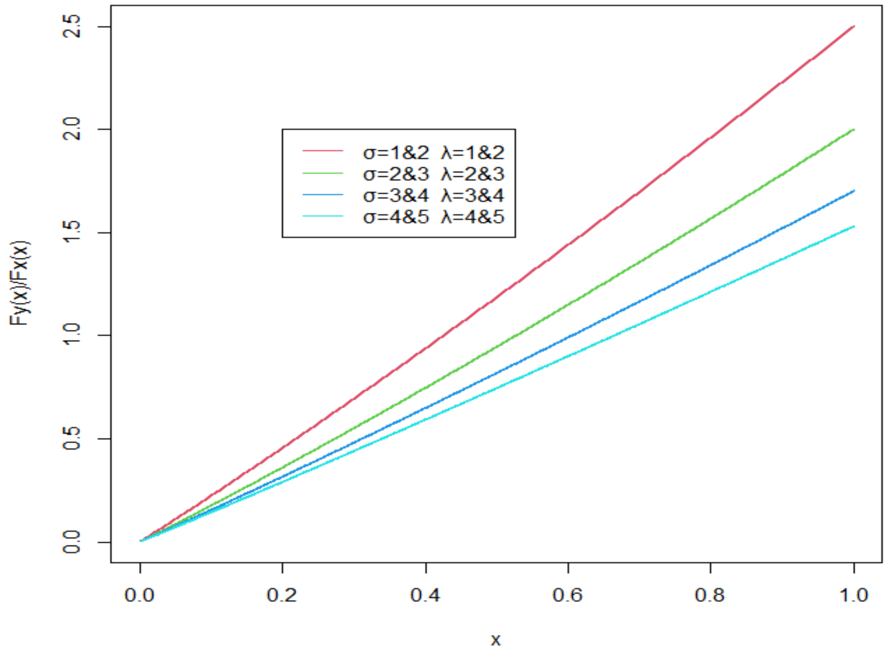



Σχήμα 4. *Ο λόγος των πυκνοτήτων για διάφορες τιμές των σ και λ*

**Θεώρημα 2.6.2.** Έστω $X_1$ και $X_2$ δύο τυχαίες μεταβλητές που προέρχονται από την κατανομή Log-Lindley με $f(x;\sigma_1,\lambda_1)$ και $f(x;\sigma_2,\lambda_2)$ τις αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας. Αν $\lambda_1 \leq \lambda_2$ και $\sigma_1 \leq \sigma_2$, τότε $X_1 \leq_{\mathrm{hr}} X_2$ (M. Shaked & J. G. Shanthikumar , 2007).

Απόδειξη.

Από τον συνδυασμό των Θεωρημάτων 2.6.1 και 2.5.2 έπεται το ζητούμενο. ∎

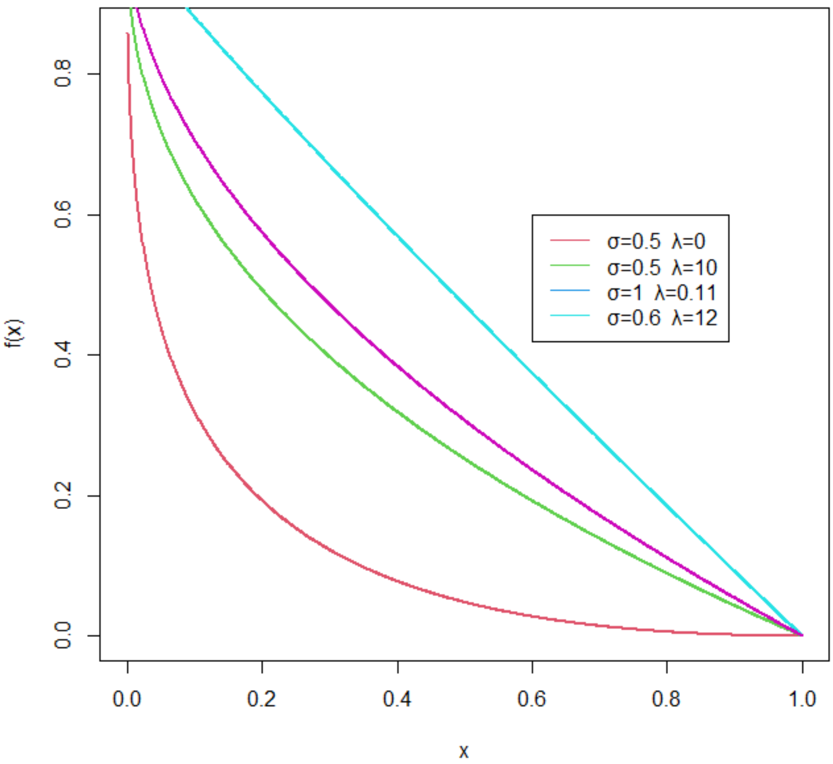



Σχήμα 5. *Ο λόγος των συναρτήσεων κατανομής για διάφορες τιμές των σ και λ*

**Θεώρημα 2.6.3.** Έστω $X_1$ και $X_2$ δύο τυχαίες μεταβλητές που προέρχονται από την κατανομή Log-Lindley με $f(x;\sigma_1,\lambda_1)$ και $f(x;\sigma_2,\lambda_2)$ τις αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας. Αν $\lambda_1 \leq \lambda_2$ και $\sigma_1 \leq \sigma_2$, τότε $X_1 \leq_{\mathrm{st}} X_2$.

Απόδειξη.

Από τον συνδυασμό των Θεωρημάτων 2.6.2 και 2.5.3 έπεται το ζητούμενο. ∎




Σχήμα 6. Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της κατανομής Log-Lindley για διάφορες τιμές των σ και λ

## 2.7 Στοχαστική διάταξη τυχαίων μεταβλητών που προέρχονται από μεμιγμένες κατανομές με μικτική συνάρτηση κατανομής την Log-Lindley

Εν συνεχεία θα μελετηθεί η στοχαστική διάταξη τυχαίων μεταβλητών που προέρχονται από μεμιγμένες κατανομές με μικτική συνάρτηση κατανομής την Log-Lindley. Συγκεκριμένα θα μελετηθούν ως προς την στοχαστική διάταξη τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν τη μεμιγμένη διωνυμική και της μεμιγμένη εκθετική κατανομής, με μικτική συνάρτηση κατανομής την Log-Lindley. Η μορφή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της Log-Lindley δεν οδηγεί σε κατανομές με κλειστούς τύπους, έτσι ώστε να χρησιμοποιηθούν τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Συνεπώς προς επίτευξη των παραπάνω θα χρησιμοποιηθούν αποτελέσματα που αφορούν totally positive of order 2 (TP2 ) τυχαίες μεταβλητές.

Δίνεται ο Ορισμός μια μεμιγμένης κατανομής ( Κουτσόπουλος, 1999).

**Ορισμός 2.7.1.** Αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής Χ δίνεται από την κάτωθι σχέση :

$$f_X(x) = \int f_{X|\Theta}(x \mid \theta) dF_{\Theta}(\theta),$$

τότε η κατανομή της καλείται μεμιγμένη με μικτική συνάρτηση κατανομής $F_{\Theta}(\theta)$.

**Θεώρημα 2.7.1.** Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι μεμιγμένη με μικτική τυχαία μεταβλητή Θ, τότε ισχύει ότι:

$$E(X) = E[E(X|\Theta)]$$

Δίνεται ο Ορισμός μιας TP2 τυχαίας μεταβλητής (Denuit et al., 2005).

**Ορισμός 2.7.2.** Έστω $X_\Theta$ τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (συνάρτηση πιθανότητας) $g_\Theta$, η οποία εκφράζεται μέσω μιας παραμέτρου ή ενός συνόλου παραμέτρων θ. Τότε η $X_\Theta$ καλείται TP2 (totally positive of order 2) αν ισχύει η κάτωθι σχέση :

$$g_{\theta 1}(x_1)g_{\theta 2}(x_2) \geq g_{\theta 1}(x_2)g_{\theta 2}(x_1), \forall\, x_1 \leq x_2, \theta_1 \leq \theta_2.$$

**Πόρισμα 2.7.1.** Αν μια τυχαία μεταβλητή $X_\Theta$ είναι TP2 τότε ισχύει ότι:

$$X_{\theta_1} \leq_{\mathrm{lr}} X_{\theta_2}, \forall\, , \theta_1 \leq \theta_2.$$

Απόδειξη.

Από τον Ορισμό 2.7.2 προκύπτει το ζητούμενο. ■

**Πόρισμα 2.7.2.** Μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την διωνυμική κατανομή είναι TP2.

Απόδειξη.

Από τον Ορισμό 2.7.2 προκύπτει το ζητούμενο. ■

**Πόρισμα 2.7.3** Μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$ είναι TP2 .

Από τον Ορισμό 2.7.2 προκύπτει το ζητούμενο. ■

Το θεώρημα μέσω του οποίου θα μελετηθεί η στοχαστική διάταξη των προαναφερθέντων μεμιγμένων κατανομών με μικτική συνάρτηση κατανομής την Log-Lindley διατυπώθηκε από τους Shaked & Shanthikumar (2007) και παρατίθεται παρακάτω.

**Θεώρημα 2.7.2.** Έστω $\Theta_1$, $\Theta_2$ δύο τυχαίες μεταβλητές με κοινό στήριγμα S και συναρτήσεις κατανομής $F_1$, $F_2$ αντίστοιχα. Έστω ενός μια τυχαία μεταβλητή $X_\theta$ ενός οποίας η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή συνάρτηση πιθανότητας $g_\theta$ διατυπώνεται μέσω ενός παραμέτρου ή ενός συνόλου παραμέτρων θ. Θεωρούμε ακόμα δύο τυχαίες μεταβλητές $Y_1$, $Y_2$ των οποίων η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά ως εξής :

$$h_i(y) = \int_S g_\theta(y)\ dF_i\,(\theta)\ , y \in R\ , i = 1{,}2.$$

Αν $X_{\theta_1} \leq_{\mathrm{lr}} X_{\theta_2}, \forall\, \theta_1 \leq \theta_2$ και $\Theta_1 \leq_{\mathrm{lr}} \Theta_2$ τότε θα ισχύει $Y_1 \leq_{\mathrm{lr}} Y_2$.

**Πόρισμα 2.7.4.** Έστω $\Theta_1$, $\Theta_2$ δύο τυχαίες μεταβλητές με κοινό στήριγμα X και συναρτήσεις κατανομής $F_1$, $F_2$ αντίστοιχα. Έστω επίσης μια τυχαία μεταβλητή

$X_\theta$ της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή συνάρτηση πιθανότητας $g_\theta$ διατυπώνεται μέσω μίας παραμέτρου ή ενός συνόλου παραμέτρων θ. Θεωρούμε ακόμα δύο τυχαίες μεταβλητές $Y_1$, $Y_2$ των οποίων η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά ως εξής :

$$h_i(y) = \int_X g_\theta(y)\ dF_i(\theta)\ , y \in R\ , i = 1{,}2.$$

Αν $X_{\theta_1} \leq_{\text{lr}} X_{\theta_2}, \forall\, \theta_1 \leq \theta_2$ και $\Theta_1 \leq_{\text{lr}} \Theta_2$ τότε θα ισχύει $Y_1 \leq_{hr} Y_2$ και $Y_1 \leq_{st} Y_2$.

Απόδειξη.

Με τον συνδιασμό των Θεωρημάτων 2.5.1, 2.5.3 και 2.7.1 προκύπτει το ζητούμενο. ∎

Με το παρακάτω Θεώρημα επιτυγχάνεται η μελέτη ως προς την στοχαστική διάταξη τυχαίων μεταβλητών που προέρχονται από την μεμιγμένη διωνυμική με μικτική την Log-Lindley.

**Θεώρημα 2.7.3.** Έστω $\Theta_1$, $\Theta_2$ δύο τυχαίες μεταβλητές που προέρχονται από την κατανομή Log-Lindley με παραμέτρους $\sigma_1$, $\lambda_1$ και $\sigma_2$, $\lambda_2$ αντίστοιχα. Έστω επίσης $Y_1$, $Y_2$ δύο τυχαίες μεταβλητές των οποίων η συνάρτηση πιθανότητας μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά ως εξής:

$$f_{Y_i}(x) = \int_0^1 \binom{n}{x}\ \theta^x (1-\theta)^{n-x} \frac{{\sigma_i}^2}{1+\lambda_i \sigma_i} (\lambda_i - \log\theta)\ \theta^{\sigma_i - 1}\ d\theta, i = 1{,}2.$$

Αν $\lambda_1 \leq \lambda_2$ και $\sigma_1 \leq \sigma_2$ τότε θα ισχύει $Y_1 \leq_{\text{lr}} Y_2 \Rightarrow Y_1 \leq_{hr} Y_2 \Rightarrow Y_1 \leq_{\text{st}} Y_2$.

Απόδειξη.

Για μια τυχαία μεταβλητή $X_\Theta$ που ακολουθεί την διωνυμική κατανομή ισχύει ότι :

$$X_{\theta_1} \leq_{\text{lr}} X_{\theta_2}, \forall\, , \theta_1 \leq \theta_2,$$

αφού είναι TP2.

Ακόμα έχει δειχθεί ότι, αν $X_1$ και $X_2$ δύο τυχαίες μεταβλητές που προέρχονται από την κατανομή Log-Lindley με $f(x;\sigma_1,\lambda_1)$ και $f(x;\sigma_2,\lambda_2)$ τις αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας και $\lambda_1 \leq \lambda_2$ , $\sigma_1 \leq \sigma_2$, τότε $X_1 \leq_{\text{lr}} X_2$ .

Συνεπώς από το Θεώρημα 2.7.1 και το πόρισμα 2.7.4 προκύπτει το ζητούμενο. ∎

Το αποτέλεσμα που αφορά την συνήθη στοχαστική διάταξη ($Y_1 \leq_{\text{st}} Y_2$) αποδεικνύεται παρακάτω.

Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\Pr(Y_1 > y) = \int_0^1 I_\theta(x+1, n-x)\ \frac{{\sigma_1}^2}{1+\lambda_1\sigma_1}\ (\lambda_1 - \log\theta)\ \theta^{\sigma_1 - 1}\ d\theta = E[I_{\Theta_1}(x+1, n-x)\ ],$$

$$\Pr(Y_2 > y) = \int_0^1 I_\theta(x+1, n-x)\ \frac{{\sigma_2}^2}{1+\lambda_2\sigma_2}\ (\lambda_2 - \log\theta)\ \theta^{\sigma_2 - 1}\ d\theta = E[I_{\Theta_1}(x+1, n-x)\ ],$$

όπου $E[I_\Theta(x+1, n-x)\ ]$ η συνάρτηση δεξιάς ουράς την διωνυμικής κατανομής , η οποία υπολογίζεται μέσω της regularized incomplete beta function.

Για να είναι μικρότερη η $Y_1$ από την $Y_2$ ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη θα πρέπει να ισχύει βάση του Ορισμού 2.2.1 η κάτωθι σχέση:

$$\bar{F}_{Y_1}(y) \leq \bar{F}_{Y_2}(y), \forall\, \text{y} > 0$$

$$\Rightarrow E[I_{\Theta_1}(x+1,n-x)\,] \le E[I_{\Theta_2}(x+1,n-x)]$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει, καθώς $\Theta_1 \le_{\text{lr}} \Theta_2 \Rightarrow \Theta_1 \le_{hr} \Theta_2 \Rightarrow \Theta_1 \le_{\text{st}} \Theta_2$. Συγκεκριμένα από τον Ορισμό 2.2.2 η $\Theta_1$ είναι μικρότερη από την $\Theta_2$, ως προς την σύνηθη στοχαστική διάταξη, εάν για κάθε αύξουσα συνάρτηση Φ ισχύει ότι:

$$E[\Phi(\Theta_1)] \le E[\Phi(\Theta_2)]$$

Για την συνάρτηση δεξιάς ουράς της διωνυμικής κατανομής έχουμε:

$$I_\theta(x+1,n-x) \propto \int_0^\theta t^x\,(1-t)^{n-x-1}\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta} I_\theta(x+1,n-x) = \theta^x\,(1-\theta)^{n-x-1}$$

Αφού $\frac{d}{d\theta} I_\theta(x+1,n-x) > 0$, $\forall\ \theta \in (0,1)$ διαπιστώνεται η ισχύς της προαναφερθείσας σχέσης. ∎

Με το παρακάτω Θεώρημα επιτυγχάνεται η μελέτη ως προς την στοχαστική διάταξη τυχαίων μεταβλητών που προέρχονται από την μεμιγμένη εκθετική με μικτική την Log-Lindley.

**Θεώρημα 2.7.4.** Έστω $\Theta_1$, $\Theta_2$ δύο τυχαίες μεταβλητές που προέρχονται από την κατανομή Log-Lindley με παραμέτρους $\sigma_1$, $\lambda_1$ και $\sigma_2$, $\lambda_2$ αντίστοιχα. Έστω επίσης $Y_1$, $Y_2$ δύο τυχαίες μεταβλητές των οποίων η συνάρτηση πιθανότητας μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά ως εξής:

$$f_{Y_i}(x) = \int_0^1 \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \frac{{\sigma_i}^2}{1+\lambda_i\sigma_i} (\lambda_i - \log\theta)\,\theta^{\sigma_i - 1}\,d\theta, i = 1,2.$$

Αν $\lambda_1 \le \lambda_2$ και $\sigma_1 \le \sigma_2$ τότε θα ισχύει $Y_1 \le_{\text{lr}} Y_2 \Rightarrow Y_1 \le_{hr} Y_2 \Rightarrow Y_1 \le_{\text{st}} Y_2$.

Απόδειξη.

Για μια τυχαία μεταβλητή $X_\Theta$ που ακολουθεί την εκθετική κατανομή ισχύει ότι :

$$X_{\theta_1} \le_{\text{lr}} X_{\theta_2}, \forall\,, \theta_1 \le \theta_2,$$

,αφού είναι TP2.

Ακόμα έχει δειχθεί ότι, αν $X_1$ και $X_2$ δύο τυχαίες μεταβλητές που προέρχονται από την κατανομή Log-Lindley με $f(x;\sigma_1,\lambda_1)$ και $f(x;\sigma_2,\lambda_2)$ τις αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας και $\lambda_1 \le \lambda_2$ , $\sigma_1 \le \sigma_2$, τότε $X_1 \le_{\text{lr}} X_2$ .

Συνεπώς από το Θεώρημα 2.7.1 και το πόρισμα 2.7.4 προκύπτει το ζητούμενο. ∎

Το αποτέλεσμα που αφορά την συνήθη στοχαστική διάταξη ($Y_1 \le_{\text{st}} Y_2$) αποδεικνύεται παρακάτω.

Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\Pr(Y_1 > y) = \int_0^1 e^{-\frac{x}{\theta}}\ \frac{{\sigma_1}^2}{1+\lambda_1\sigma_1}\,(\lambda_1 - \log\theta)\,\theta^{\sigma_1-1}\,d\theta = E(e^{-\frac{x}{\Theta_1}}\ ),$$

$$\Pr(Y_2 > y) = \int_0^1 e^{-\frac{x}{\theta}}\ \frac{{\sigma_2}^2}{1+\lambda_2\sigma_2}\,(\lambda_2 - \log\theta)\,\theta^{\sigma_2-1}\,d\theta = E(e^{-\frac{x}{\Theta_2}}\ ).$$

Για να είναι μικρότερη η $Y_1$ από την $Y_2$ ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη θα πρέπει να ισχύει βάση του Ορισμού 2.2.1 η κάτωθι σχέση:

$\bar{F}_{Y_1}(y) \leq \bar{F}_{Y_2}(y), \forall\, y > 0$

$$\Rightarrow E(e^{-\frac{x}{\Theta_1}}) \leq E(e^{-\frac{x}{\Theta_2}})$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει, καθώς $\Theta_1 \leq_{\mathrm{lr}} \Theta_2 \Rightarrow \Theta_1 \leq_{hr} \Theta_2 \Rightarrow \Theta_1 \leq_{\mathrm{st}} \Theta_2$. Συγκεκριμένα από τον Ορισμό 2.2.2 η $\Theta_1$ είναι μικρότερη από την $\Theta_2$, ως προς την σύνηθη στοχαστική διάταξη, εάν για κάθε αύξουσα συνάρτηση Φ ισχύει ότι:

$$E[\Phi(\Theta_1)] \leq E[\Phi(\Theta_2)]$$

Αφού $\Phi(\theta)' > 0$ διαπιστώνεται η ισχύς της προαναφερθείσας σχέσης. ▪

## 2.8 Στοχαστική διάταξη τυχαίων μεταβλητών που προέρχονται από μεμιγμένες κατανομές με μικτική συνάρτηση κατανομής την Log-Lindley μέσω προσομοίωσης.

Γενικότερα η μελέτη των μεμιγμένων τυχαίων μεταβλητών ως προς την στοχαστική διάταξη μπορεί να πραγματοποιηθεί και με την παραγωγή τυχαίων δειγμάτων μεγάλου μεγέθους. Στην παρούσα ενότητα θα μελετηθούν τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την μεμιγμένη εκθετική με μικτικές κατανομές τις αντίστοιχες Log-Lindley,με προσομοίωση τυχαίων δειγμάτων μεγέθους N=10000, έτσι ώστε να διαπιστωθεί η ισχύς των αποτελεσμάτων που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Ενδείξεις για την ποιότητα των παραγόμενων τυχαίων δειγμάτων λήφθηκαν με τη χρήση του Θεωρήματος 2.7.1 . Επίσης, η επιλογή της διωνυμικής κατανομής ως μικτικής αποφεύχθηκε, καθώς η διαδικασία παραγωγής τυχαίων δειγμάτων γίνεται ιδιαίτερα περίπλοκη. Η μελέτη ως προς την στοχαστική διάταξη των προαναφερθέντων τυχαίων μεταβλητών θα υλοποιηθεί με γνώμονα το κάτωθι Θεώρημα των Shaked & Shanthikumar( 2007)

**Θεώρημα 2.8.1.** Η τυχαία μεταβλητή X καλείται μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς την διάταξη λόγου πιθανοφάνειας και συμβολίζεται με $X \leq_{\mathrm{lr}} Y$ αν και μόνο αν ισχύει ότι :

$$\Pr(X \in A)\Pr(Y \in B) \geq \Pr(X \in B)\Pr(Y \in A)$$

για όλα τα μετρήσιμα σύνολα A,B τέτοια ώστε A≤B.

Απόδειξη.

Από τον Ορισμό 2.4.2 $X \leq_{\mathrm{lr}} Y$ αν και μόνο αν ισχύει ότι:

$$f_X(x) f_Y(y) \geq f_X(y) f_Y(x), \forall\, x \leq y$$

$$\Rightarrow \int_A \int_B f_X(x) f_Y(y)\, dy\, dx \geq \int_A \int_B f_X(y) f_Y(x)\, dy\, dx$$

$$\Rightarrow \int_A f_X(x) \int_B f_Y(y)\, dy\, dx \geq \int_A f_Y(x) \int_B f_X(y)\, dy\, dx$$

$$\Rightarrow \Pr(X \in A)\Pr(Y \in B) \geq \Pr(X \in B)\Pr(Y \in A) \ ▪.$$

| Πίνακας 4<br>*Μέσες τιμές μεμιγμένων εκθετικών κατανομών με μικτικές τις αντίστοιχες Log-Lindley και δειγματικοί μέσοι των δειγμάτων που παρήχθησαν.* | | |
|---|---|---|
| | E(X) | $\bar{X}$ |
| Log-Lindley(1,1) | 0.375 | 0.3685816 |
| Log-Lindley(2,2) | 0.6222222 | 0.6229951 |
| Log-Lindley(2,5) | 0.6464646 | 0.6472669 |
| Log-Lindley(4,1) | 0.768 | 0.7602889 |
| Log-Lindley(4,3) | 0.7876923 | 0.785048 |
| Log-Lindley(10,3) | 0.906425 | 0.8980883 |
| Log-Lindley(20,10) | 0.9521553 | 0.9435312 |

Από την εξέταση του ανωτέρω επισυναπτόμενου πίνακα λαμβάνονται ενδείξεις για την εγκυρότητα των τυχαίων δειγμάτων που παρήχθησαν. Συγκεκριμένα, οι μέσες τιμές που υπολογίσθηκανε με την χρήση του Θεωρήματος 2.7.1 βρίσκονται πολύ κοντά στους δειγματικούς μέσους. Ως εκ τούτου, θα προχωρήσουμε στην μελέτη, ως προς την στοχαστική διάταξη, μεμιγμένων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών με μικτικές τις αντίστοιχες Log-Lindley, ως ανωτέρω προεξετέθει.

| Πίνακας 5<br>Μελέτη ως προς την στοχαστική διάταξη μεμειγμένων εκθετικών με μικτικές τις Log-Lindley(2,2),Log-Lindley(1,1) | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | $\Pr(X\ E\ A)\Pr(Y\ E\ B)$ | $\Pr(X\ E\ B)\Pr(Y\ E\ A)$ |
| [0,0.5] | [0.5,1] | 0.1582686 | 0.0906048 |
| [0.5,1] | [1,1.5] | 0.0150852 | 0.0146655 |
| [1,1.5] | [1.5,2] | 0.0032222 | 0.0029300 |
| [2,2.5] | [2.5,3] | 0.0001890 | 0.0001778 |

| Πίνακας 6<br>Μελέτη ως προς την στοχαστική διάταξη μεμειγμένων εκθετικών με μικτικές τις Log-Lindley(4,3),Log-Lindley(2,2) | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | $\Pr(X\ E\ A)\Pr(Y\ E\ B)$ | $\Pr(X\ E\ B)\Pr(Y\ E\ A)$ |
| [0,0.5] | [0.5,1] | 0.1435738 | 0.1071935 |
| [0.5,1] | [1,1.5] | 0.0268537 | 0.0239042 |
| [1,1.5] | [1.5,2] | 0.0060631 | 0.0059000 |
| [2,2.5] | [2.5,3] | 0.0005013 | 0.0004603 |

| Πίνακας 7<br>Μελέτη ως προς την στοχαστική διάταξη μεμειγμένων εκθετικών με μικτικές τις Log-Lindley(10,3),Log-Lindley(4,1) | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | $\Pr(X \to A)\Pr(Y \to B)$ | $\Pr(X \to B)\Pr(Y \to A)$ |
| [0,0.5] | [0.5,1] | 0.1228103 | 0.1043541 |
| [0.5,1] | [1,1.5] | 0.0339213 | 0.0304575 |
| [1,1.5] | [1.5,2] | 0.0094899 | 0.0092537 |
| [2,2.5] | [2.5,3] | 0.0010067 | 0.0009053 |

| Πίνακας 8<br>Μελέτη ως προς την στοχαστική διάταξη μεμειγμένων εκθετικών με μικτικές τις Log-Lindley(20,10),Log-Lindley(2,5) | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | $\Pr(X \to A)\Pr(Y \to B)$ | $\Pr(X \to B)\Pr(Y \to A)$ |
| [0,0.5] | [0.5,1] | 0.13900210 | 0.0919815 |
| [0.5,1] | [1,1.5] | 0.0319533 | 0.0245745 |
| [1,1.5] | [1.5,2] | 0.0081888 | 0.0074676 |
| [2,2.5] | [2.5,3] | 0.0007657 | 0.0007047 |

| Πίνακας 9<br>Μελέτη ως προς την στοχαστική διάταξη μεμειγμένων εκθετικών με μικτικές τις Log-Lindley(20,10),Log-Lindley(1,1) | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | $\Pr(X \to A)\Pr(Y \to B)$ | $\Pr(X \to B)\Pr(Y \to A)$ |
| [0,0.5] | [0.5,1] | 0.18778295 | 0.0636324 |
| [0.5,1] | [1,1.5] | 0.01938456 | 0.01318335 |
| [1,1.5] | [1.5,2] | 0.00439266 | 0.00341497 |
| [2,2.5] | [2.5,3] | 0.00030380 | 0.00027144 |

Από τους παραπάνω πίνακες παρατηρείται ότι η ανισότητα του Ορισμού 2.8.1 ισχύει για τα επιλεχθέντα διαστήματα. Συνεπώς με βάση την προσομοίωση, συμπεραίνεται ότι μια μεμειγμένη εκθετική με μικτική την Log-Lindley($\sigma_2, \lambda_2$) είναι μεγαλύτερη ως προς την διάταξη λόγου πιθανοφάνειας από μια μεμειγμένη εκθετική με μικτική την Log-Lindley($\sigma_1$,$\lambda_1$) αν $\lambda_1 \leq \lambda_2$ και $\sigma_1 \leq \sigma_2$, όπως ήταν αναμενόμενο από το Θεώρημα 2.7.3 . Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι σε κάποιες περιπτώσεις το λογισμικό δεν επιβεβαιώνει την ανισότητα για κάποια διαστήματα . Το γεγονός αυτό πιθανότατα να οφείλεται στον μικρό αριθμό παρατηρήσεων εντός των προαναφερθέντων διαστημάτων και στο μέγεθος δείγματος. Συγκεκριμένα το λογισμικό MATLAB που χρησιμοποιήθηκε αδυνατούσε να παράξει δείγματα μεγάλου μεγέθους και δείγματα για συγκεκριμένες παραμέτρους των μικτικών. Με χρήση λοιπόν πιο αποδοτικών λογισμικών και ισχυρότερων υπολογιστικών συστημάτων θεωρούμε ότι μπορούν να εξαχθούν να εξαχθούν πιο ακριβή αποτελέσματα.

Εναλλακτικά η μελέτη ως προς την στοχαστική διάταξη μεμιγμένων τυχαίων μεταβλητών μέσω προσομοίωσης μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω των κάτωθι Θεωρήματος και του κάτωθι Ορισμού που δόθηκαν από τους Shaked & Shanthikumar (2007).

**Θεώρημα 2.8.2.** Η τυχαία μεταβλητή X καλείται μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς την διάταξη λόγου πιθανοφάνειας και συμβολίζεται με $X \leq_{lr} Y$ αν και μόνο αν ισχύει ότι :

$$[X|a \leq X \leq b\,] \leq_{st} [Y|a \leq Y \leq b]\,,\ \forall\, a \leq b\,. \quad (2.6)$$

Απόδειξη.

Υποθέτωντας ότι η (2.6) ισχύει $\forall\, u \in [a, b], a \leq b$ έχουμε:

$$\frac{\Pr(u \leq X \leq b)}{\Pr(a \leq X \leq b)} \leq \frac{\Pr(u \leq Y \leq b)}{\Pr(a \leq Y \leq b)}$$

$$\Rightarrow \frac{\Pr(a \leq X < u)}{\Pr(a \leq X \leq b)} \geq \frac{\Pr(a \leq Y < u)}{\Pr(a \leq Y \leq b)},$$

$$\Rightarrow \frac{\Pr(a \leq X < u)}{\Pr(u \leq X \leq b)} \geq \frac{\Pr(a \leq Y < u)}{\Pr(u \leq Y \leq b)},$$

$$\Rightarrow \frac{\Pr(a \leq X < u)}{\Pr(a \leq Y < u)} \geq \frac{\Pr(u \leq X \leq b)}{\Pr(u \leq Y \leq b)}.$$

Για $u < b \leq v$ έχουμε:

$$\Rightarrow \frac{\Pr(u \leq X < b)}{\Pr(u \leq Y < b)} \geq \frac{\Pr(b \leq X \leq v)}{\Pr(b \leq Y \leq v)}$$

$$\Rightarrow \frac{\Pr(a \leq X < u)}{\Pr(a \leq Y < u)} \geq \frac{\Pr(b \leq X \leq v)}{\Pr(b \leq Y \leq v)}, \qquad \forall\, a < u \leq b \leq v$$

Αν X,Y συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και $a \to u$, $b \to v$ προκύπτει ότι:

$$f_x(u) f_Y(v) \geq f_x(v) f y(u), \forall\, u \leq v \quad \blacksquare$$

**Ορισμός 2.8.2.** Η τυχαία μεταβλητή X καλείται μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς την σύνηθη στοχαστική διάταξη και συμβολίζεται με $X \leq_{st} Y$ αν και μόνο αν ισχύει ότι :

$$\Pr(X \in U) \leq \Pr(Y \in U), U \subseteq (-\infty, \infty).$$

# Κεφάλαιο 3

# Το μοντέλο παλινδρόμησης Log-Lindley

## 3.1 Εισαγωγή

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα εξετασθεί, αν η προσαρμογή ενός μοντέλου παλινδρόμησης Log-Lindley, μπορεί να αποτελέσει εναλλακτική της παλινδρόμησης Βήτα, όπως έχει προταθεί σε παρελθοντικό χρόνο από τους Jodra et al. (2016) και τους Gomez-Deniz et al. (2014) . Έναυσμα για το συγκεκριμένο εγχείρημα αποτελεί η διερεύνηση ενός εξίσου ικανοποιητικού μοντέλου με μεταβλητή απόκρισης που παίρνει τιμές στο (0,1).Προς υλοποίηση του παραπάνω, αρχικά, θα πραγματοποιηθεί εκ νέου καθορισμός των παραμέτρων της προς εξέταση κατανομής, έτσι ώστε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της να διατυπωθεί μέσω της μέσης τιμής αυτής (μέση τιμή της μεταβλητής απόκρισης). Στην συνέχεια θα υπολογισθεί λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας του μοντέλου παλινδρόμησης Log-Lindley, ο οποίος και θα μεγιστοποιηθεί για την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου. Με την χρήση διάφορων κριτηρίων (Akaike Information Criterion, Bayesian Information Criterion,μέγιστη πιθανοφάνεια) θα συγκριθούν τα μοντέλα παλινδρόμησης Βήτα και Log-Lindley, τα οποία θα προσαρμοσθούν σε πέντε διαφορετικές βάσεις δεδομένων.

## 3.2 Η εκ νέου επαναπαραμετροποιημένη κατανομή Log-Lindley.

Στην ανάπτυξη μοντέλων παλινδρόμησης συνηθίζεται και είναι ωφέλιμο να μοντελοποιείται η μέση τιμή της μεταβλητής απόκρισης. Ως εκ τούτου, θα επαναπαραμετροποιηθεί η κατανομή Log-Lindley, έτσι ώστε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της να εμπεριέχει την μέση τιμή της.

**Πρόταση 3.2.1**. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκ νέου επαναπαραμετροποιημένης Log-Lindley είναι:

$$f(x;\theta,\pi) = \sigma(\theta,\pi)\, x^{\sigma(\theta,\pi)-1}[\pi - \sigma(\theta,\pi)\,(1-\pi)\, logx], 0 < x < 1, 0 < \theta < 1, 0 \leq \pi \leq 1, \quad (3.1)$$

όπου $\sigma(\theta,\pi) = \frac{-\pi+\sqrt{\pi^2+4\theta(1-\pi)}}{2-\pi-\sqrt{\pi^2+4\theta(1-\pi)}}$. (3.2)

Απόδειξη.

Εξισώνοντας την μέση τιμή της Log-Lindley που επαναπαραμετροποιήθηκε σε προγενέστερο χρόνο με θ προκύπτει ότι:

$$(1-\pi)\,\alpha^2 + \pi\alpha - \theta = 0, \qquad (3.3)$$

$$\text{όπου } \alpha = \frac{\sigma}{\sigma+1} \qquad (3.4)$$

Η μοναδική θετική λύση της σχέσης (3.3) είναι:

$$\alpha = \frac{-\pi+\sqrt{\pi^2+4\theta(1-\pi)}}{2(1-\pi)} \qquad (3.5)$$

Από την σχέση (3.4) έπεται ότι:

$$\sigma = \frac{\alpha}{1-\alpha} \qquad (3.6)$$

Έπειτα από τον συνδυασμό των σχέσεων (3.5) και (3.6) προκύπτει η (3.2).

Αντικαθιστώντας την σχέση (3.2) στην (1.10) προκύπτει η (3.1). ■

## 3.3 Το μοντέλο παλινδρόμησης Log-Lindley και τα κριτήρια επιλογής του βέλτιστου μοντέλου

Το μοντέλο παλινδρόμησης Log-Lindley είναι το εξής:

$$g(\theta_i) = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j \; X_{ji},$$

όπου $g(\theta_i) = \log\left(\frac{\theta_i}{1+\theta_i}\right)$

Ως συνάρτηση σύνδεσης (link function) θα ορισθεί η logit, καθώς χρησιμοποιήθηκε από τους Jodra et al. (2014) και τους Gomez-Deniz et al. (2014) για το ίδιο εγχείρημα.

Ο προς μεγιστοποίηση λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας του μοντέλου παλινδρόμησης Log-Lindley είναι ο εξής:

$$\ell(\beta,\pi) = \sum_{i=1}^{n} \log[\sigma(\theta_i,\pi)] + \sum_{i=1}^{n} \log[\pi - \sigma(\theta_i,\pi)(1-\pi)\log x_i] + \sum_{i=1}^{n}[\sigma(\theta_i,\pi) - 1] \log x_i \,.$$

Για την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου απαιτείται η επίλυση του κάτωθι προβλήματος βελτιστοποίησης:

$$max \quad \ell(\beta,\lambda)$$

$$\upsilon.\sigma. \quad 0 \leq \pi$$

$$1 \geq \pi.$$

Το παραπάνω πρόβλημα σε αυτήν την περίπτωση θα λυθεί με την χρήση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης Praxis, ο οποίος περιέχεται στο πακέτο *nloptr* της R.

Ακολουθούν οι ορισμοί των κριτηρίων, με τα οποία θα γίνει η επιλογή του βέλτιστου μοντέλου σε κάθε περίπτωση (Zucchini,2000).

**Ορισμός 3.3.1.** Για ένα μοντέλο με κ παραμέτρους (συμπεριλαμβανομένου του σταθερού όρου), το Akaike Information Criterion ($AIC$) ορίζεται ως εξής:

$$AIC = 2\,\kappa - 2\ell,$$

όπου $\ell$ ο λογάριθμος της μέγιστης πιθανοφάνειας του εν λόγω μοντέλου.

**Ορισμός 3.3.2.** Για ένα μοντέλο με κ παραμέτρους (συμπεριλαμβανομένου του σταθερού όρου), το , Bayesian Information Criterion ($BIC$) ορίζεται ως εξής:

$$BIC = logn\,\text{κ} - 2\ell,$$

όπου $n$ ο αριθμός των παρατηρήσεων και $\ell$ ο λογάριθμος της μέγιστης πιθανοφάνειας του εν λόγω μοντέλου.

Ως βέλτιστο επιλέγετε το μοντέλο με τις μικρότερες τιμές των παραπάνω κριτηρίων, καθώς και με την μικρότερη τιμή του αρνητικού λογάριθμου της μέγιστης πιθανοφάνειας.

## 3.4 Προσαρμογή των μοντέλων σε δεδομένα

Στην συγκεκριμένη ενότητα θα προσαρμοσθούν τα 2 προς εξέταση μοντέλα με μεταβλητή απόκρισης y και 1-y σε διαφορετικά δεδομένα και το βέλτιστο από αυτά θα επιλεγεί με γνώμονα τα προαναφερθέντα κριτήρια. Συγκεκριμένα, θα γίνει σύντομη περιγραφή της κάθε βάσης δεδομένων συνοδευόμενη από τις εκτιμήσεις των παραμέτρων, τις τιμές των κριτηρίων AIC, BIC και του αρνητικού λογάριθμου της μεγίστης πιθανοφάνειας για το εκάστοτε μοντέλο. Ανάλογη μεθοδολογία έχει εφαρμοσθεί σε ερευνητικές εργασίες που αφορούσαν την σύγκριση μοντέλων από τους Rakmawan et. al (2024) και Smithson et al. (2006) . Από το σύνολο των βάσεων δεδομένων που επιλέχθηκαν η πρώτη έχει χρησιμοποιηθεί από τους Jodra et al. (2016) και τους Gomez-Deniz et al. (2014) για τον ίδιο σκοπό και περιέχεται στο πακέτο PLreg της R, ενώ οι υπόλοιπες περιέχονται σε έκδοση του πακέτου betareg της R (Zeileis et al.,2016) και έχουν χρησιμοποιηθεί από τους Smithson et al. (2006) για την σύγκριση της παλινδρόμησης Βήτα με άλλα μοντέλα. Οι αλγόριθμοι που σχεδιάστηκαν για την εκτίμηση των συντελεστών των μοντέλων παλινδρόμησης Log-Lindley βρίσκονται στο παράρτημα της παρούσας εργασίας.

Η πρώτη βάση δεδομένων αποτυπώνει τις απαντήσεις 73 Risk managers μεγάλων εταιριών στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής σε ένα ερωτηματολόγιο που τους χορηγήθηκε από τους Schmit et al. (1990). Σκοπός της μελέτης ήταν να εξεταστεί η σχέση της αποτελεσματικότητας του κόστους με την φιλοσοφία διοίκησης της εταιρίας και άλλα χαρακτηριστικά αυτής.

Πίνακας 10

*Οι περιεχόμενες στην βάση δεδομένων μεταβλητές*

| | |
|---|---|
| FIRMCOST | Μεταβλητή απόκρισης. Αποτελεί ένα μέτρο της αποτελεσματικότητας κόστους διαχείρισης κινδύνων της εταιρίας το οποίο παίρνει τιμές στο (0,1). |
| ASSUME | Ποσό παρακράτησης ανά συμβάν ως ποσοστό των συνολικών περιουσιακών στοιχείων. |
| CAP | Εάν η εταιρία ασφαλίζεται μέσω θυγατρικής της εταιρίας. |

| | |
|---|---|
| SIZELOG | Λογάριθμος των συνολικών περιουσιακών στοιχείων. |
| INDCOST | Αποτελεί ένα μέτρο κινδύνου που αφορά την βιομηχανία στην οποία δραστηριοποιείται η εταιρία. |
| CENTRAL | Αποτελεί ένα μέτρο που εκφράζει πόσο σημαντικές θεωρούνται από τον manager οι αποφάσεις των υφιστάμενων του. |
| SOPH | Αποτελεί ένα μέτρο που εκφράζει πόσο σημαντική θεωρείται από τον manager η χρήση αναλυτικών εργαλείων. |

Πίνακας 11

*Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων και οι τιμές των κριτηρίων για τα προσαρμοσθέντα μοντέλα με μεταβλητή απόκρισης y*

| | Beta | Log-Lindley |
|---|---|---|
| Intercept | 1.887958 | 1.666782 |
| ASSUME | -0.012137 | -0.007285 |
| CAP(YES) | 0.177975 | 0.080976 |
| SIZELOG | -0.511453 | -0.426556 |
| INDCOST | 1.236254 | 0.950462 |
| CENTRAL | -0.012161 | -0.023488 |
| SOPH | -0.003721 | 0.000663 |
| π | - | 0.01459824 |
| | | |
| $-\ell$ | -87.72 | -83.77 |
| AIC | -159.446 | -151.5431 |
| BIC | -141.1223 | -133.2194 |

Με την εξέταση του παραπάνω πίνακα παρατηρείται ότι οι τιμές των στατιστικών μέτρων μέσω των οποίων επιτυγχάνεται η σύγκριση των παραπάνω μοντέλων είναι μικρότερες για την παλινδρόμηση Βήτα. Ως εκ τούτου, στην προκειμένη περίπτωση θα επιλεγεί ως βέλτιστο το μοντέλο παλινδρόμησης Βήτα

Πίνακας 12

*Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων και οι τιμές των κριτηρίων για τα προσαρμοσθέντα μοντέλα με μεταβλητή απόκρισης 1-y*

| | Beta | Log-Lindley |
|---|---|---|
| Intercept | -1.887958 | -2.62059 |
| ASSUME | 0.012137 | 0.031895 |
| CAP(YES) | -0.177975 | -0.747947 |
| SIZELOG | 0.511453 | 0.691472 |
| INDCOST | -1.236254 | -3.731153 |
| CENTRAL | 0.012161 | 0.005157 |
| SOPH | 0.003721 | 0.034893 |
| π | - | 1 |
| | | |
| $-\ell$ | -87.72 | -96.79 |
| AIC | -159.446 | -177.5936 |
| BIC | -141.1223 | -159.27 |

Ίδια εικόνα δεν λαμβάνεται για τα ίδια δεδομένα με μεταβλητή απόκρισης 1-y, καθώς με γνώμονα τις τιμές των ίδιων στατιστικών μέτρων το μοντέλο Log-Lindley παρουσιάζει καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα.

Τα δεδομένα του δεύτερου dataset συλλέχθηκαν από τους Pammer et al. (2004) και αφορούν την ικανότητα ανάγνωσης 44 δυσλεκτικών και μη παιδιών. Οι μεταβλητές που περιέχονται στην εν λόγω βάση δεδομένων παρουσιάζονται στον κάτωθι επισυναπτόμενο πίνακα.

| Πίνακας 13<br><br>*Οι περιεχόμενες στην βάση δεδομένων μεταβλητές* | |
|---|---|
| ACCURACY | Μεταβλητή απόκρισης. Σκορ ικανότητας ανάγνωσης με τιμές στο (0,1). |
| DYSLEXIA | Εάν το προς εξέταση παιδί έχει διαγνωστεί με δυσλεξία. |
| IQ | Δείκτης νοημοσύνης του προς εξέταση παιδιού. |

| Πίνακας 14<br><br>*Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων και οι τιμές των κριτηρίων για τα προσαρμοσθέντα μοντέλα με μεταβλητή απόκρισης y* | | |
|---|---|---|
| | Beta | Log-Lindley |
| Intercept | 2.4112 | 2.078846 |
| DYSLEXIA(YES) | 0.1243 | 0.384738 |
| IQ | -1.9318 | -1.212342 |
| π | - | 0.9730332 |
| | | |
| $-\ell$ | -49.95 | -36.97 |
| AIC | -91.90104 | -65.93211 |
| BIC | -84.76428 | -58.79535 |

Με γνώμονα τα κριτήρια AIC,BIC και την αρνητική τιμή του μεγιστοποιημένου λογάριθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας το μοντέλο παλινδρόμησης Βήτα παρουσιάζει ικανοποιητικότερη προσαρμογή στα δεδομένα.

| Πίνακας 15<br><br>*Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων και οι τιμές των κριτηρίων για τα προσαρμοσθέντα μοντέλα με μεταβλητή απόκρισης 1-y* | | |
|---|---|---|
| | Beta | Log-Lindley |
| Intercept | -2.4112 | -1.732438 |

| | | |
|---|---|---|
| DYSLEXIA(YES) | -0.1243 | -0.1140569 |
| IQ | 1.9318 | 1.496441 |
| π | - | 2.106906e-05 |
| | | |
| $-\ell$ | -49.95 | -41.33 |
| AIC | -91.90104 | -74.67184 |
| BIC | -84.76428 | -67.53509 |

Παρόμοια εικόνα με παραπάνω λαμβάνεται και για τα μοντέλα με μεταβλητή απόκρισης 1-y. Βέβαια σε αυτήν την περίπτωση η διαφορά μεταξύ των τιμών των μέτρων σύγκρισης είναι μικρότερη σε σχέση με προηγουμένως.

Η τρίτη βάση δεδομένων αντλήθηκε από το σύγγραμμα των Griffiths et al. (1993) και αφορά τα δαπανηθέντα ποσά σε τρόφιμα 38 νοικοκυριών σε μια μεγάλη πόλη των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής. Οι μεταβλητές που περιέχονται στο συγκεκριμένο dataset καθώς και η περιγραφή τους παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 16

*Οι περιεχόμενες στην βάση δεδομένων μεταβλητές*

| | |
|---|---|
| PROPORTION | Μεταβλητή απόκρισης. Ποσοστό του εισοδήματος ενός νοικοκυριού που δαπανάται σε τρόφιμα. |
| INCOME | Εισόδημα του νοικοκυριού |
| PERSONS | Άτομα που διαμένουν στο νοικοκυριό. |
| FOOD | Ποσό που δαπανάται από το νοικοκυριό σε τρόφιμα. |

Πίνακας 17

*Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων και οι τιμές των κριτηρίων για τα προσαρμοσθέντα μοντέλα με μεταβλητή απόκρισης y*

| | Beta | Log-Lindley |
|---|---|---|
| Intercept | -0.622548 | -0.2499974 |
| INCOME | -0.012299 | -0.009250522 |

| | | |
|---|---|---|
| PERSONS | 0.118462 | 0.07469079 |
| π | - | 2.775558e-17 |
| | | |
| $-\ell$ | -45.33 | -15.68 |
| AIC | -82.66702 | -23.36593 |
| BIC | -76.11667 | -16.81559 |

Η αρνητική τιμή του μεγιστοποιημένου λογάριθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας καθώς και οι τιμές των κριτηρίων AIC,BIC είναι αρκετά μικρότερες για το μοντέλο παλινδρόμησης Βήτα. Συνεπώς και σε αυτήν την περίπτωση επιλέγεται το μοντέλο παλινδρόμησης Βήτα έναντι του μοντέλου παλινδρόμησης Log-Lindley.

Πίνακας 18

*Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων και οι τιμές των κριτηρίων για τα προσαρμοσθέντα μοντέλα με μεταβλητή απόκρισης 1-y*

| | Beta | Log-Lindley |
|---|---|---|
| Intercept | 0.622548 | 0.4779122 |
| INCOME | 0.012299 | 0.01382237 |
| PERSONS | - 0.118462 | -0.08917657 |
| π | - | 0 |
| | | |
| $-\ell$ | -45.33 | -29.03 |
| AIC | -82.66702 | -50.06223 |
| BIC | -76.11667 | -43.51188 |

Για μεταβλητή απόκρισης 1-y την ικανοποιητικότερη προσαρμογή στα δεδομένα παρουσιάζει ακόμα μια φορά η παλινδρόμηση Βήτα, με μικρότερη όμως διαφορά των τιμών των κριτηρίων σύγκρισης.

Τα δεδομένα του τέταρτου dataset συλλέχθηκαν από τον Deady το 2004 και αφορούσαν 104 προσομοιωμένους (mock) ενόρκους οι οποίοι ήταν πρωτοετείς φοιτητές στην Αυστραλία. Σκοπός της μελέτης ήταν διερεύνηση της σχέσης του βαθμού βεβαιότητας των ενόρκων για την απόφαση τους με την ύπαρξη ή μη αντικρουόμενων αποδεικτικών στοιχείων και του πλήθους των επιλογών της ετυμηγορίας. Οι μεταβλητές που περιέχονται στο συγκεκριμένο dataset καθώς και η περιγραφή τους παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 19

*Οι περιεχόμενες στην βάση δεδομένων μεταβλητές*

| | |
|---|---|
| CONFIDENCE | Μεταβλητή απόκρισης. Βαθμός βεβαιότητας του ενόρκου για την απόφαση του ο οποίος παίρνει τιμές στο (0,1). |
| VERDICT | Πλήθος επιλογών της ετυμηγορίας του ενόρκου (Αθώος-Ένοχος, Αθώος-Ένοχος-Έλλειψη αποδεικτικών στοιχείων) |
| CONFLICT | Ύπαρξη ή μη αντικρουόμενων αποδεικτικών στοιχείων. |

Πίνακας 20

*Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων και οι τιμές των κριτηρίων για τα προσαρμοσθέντα μοντέλα με μεταβλητή απόκρισης y.*

| | Beta | Log-Lindley |
|---|---|---|
| Intercept | 1.0273 | 0.9725035 |
| VERDICT(GUILTY OR NOT GUILTY) | -0.1542 | 0.140515 |
| CONFLICT(YES) | -0.1990 | -0.4390091 |
| π | - | 0.9999579 |
| | | |
| $-\ell$ | -29.05 | -28.95 |
| AIC | -50.10725 | -49.9015 |
| BIC | -39.52968 | -39.32393 |

Για μεταβλητή απόκρισης y το μοντέλο παλινδρόμησης Βήτα παρουσιάζει καλύτερη προσαρμογή. Βέβαια οι τιμές των κριτηρίων μέσω των οποίων πραγματοποιήθηκε ή σύγκριση βρίσκονται πάρα πολύ κοντά

| Πίνακας 21<br><br>*Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων και οι τιμές των κριτηρίων για τα προσαρμοσθέντα μοντέλα με μεταβλητή απόκρισης 1-y.* | | |
|---|---|---|
| | Beta | Log-Lindley |
| Intercept | -1.0273 | -1.066321 |
| VERDICT(GUILTY OR NOT GUILTY) | 0.1542 | 0.3146563 |
| CONFLICT(YES) | 0.1990 | 0.04758001 |
| π | - | 0.08236364 |
| | | |
| $-\ell$ | -29.05 | -32.93 |
| AIC | -50.10725 | -57.85627 |
| BIC | -39.52968 | -47.27871 |

Στην ίδια βάση δεδομένων για μεταβλητή απόκρισης 1-y το μοντέλο παλινδρόμησης Log-Lindley παρουσιάζει ικανοποιητικότερη προσαρμογή.

Η πέμπτη βάση δεδομένων αντλήθηκε από την επιστημονική εργασία των Smithson et al. (2006) και αφορά το άγχος και το stress υγειών γυναικών. Συγκεκριμένα περιέχει τα συνολικά σκορ άγχους και stress 166 υγειών γυναικών στο Townsville της Αυστραλίας.

| Πίνακας 22<br><br>*Οι περιεχόμενες στην βάση δεδομένων μεταβλητές.* | |
|---|---|
| ANXIETY | Μεταβλητή απόκρισης. Σκορ συνολικού άγχους με τιμές στο (0,1). |
| STRESS | Σκορ συνολικού stress στο (0,1). |

| Πίνακας 23<br><br>*Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων και οι τιμές των κριτηρίων για τα προσαρμοσθέντα μοντέλα με μεταβλητή απόκρισης y.* | | |
|---|---|---|
| | Beta | Log-Lindley |
| Intercept | -3.4790 | -2.405538 |
| STRESS | 3.7496 | 2.348421 |
| π | - | 9.448656e-05 |
| | | |
| $-\ell$ | -283 | -248.14 |
| AIC | -560.0133 | -490.2775 |
| BIC | -550.6774 | -480.9416 |

Με γνώμονα τα κριτήρια AIC,BIC και την αρνητική τιμή του μεγιστοποιημένου λογάριθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας το μοντέλο παλινδρόμησης Βήτα παρουσιάζει ικανοποιητικότερη προσαρμογή στα δεδομένα.

| Πίνακας 24<br><br>*Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων και οι τιμές των κριτηρίων για τα προσαρμοσθέντα μοντέλα με μεταβλητή απόκρισης 1-y.* | | |
|---|---|---|
| | Beta | Log-Lindley |
| Intercept | 3.4790 | 3.987959 |
| STRESS | -3.7496 | -4.733335 |
| π | - | 0.9290309 |
| | | |
| $-\ell$ | -283 | -303.23 |
| AIC | -560.0133 | -600.4523 |
| BIC | -550.6774 | -591.1163 |

Παρόμοια εικόνα δεν λαμβάνεται για τα ίδια δεδομένα με μεταβλητή απόκρισης 1-y, καθώς με γνώμονα τις τιμές των ίδιων στατιστικών μέτρων το μοντέλο Log-Lindley παρουσιάζει καλύτερη προσαρμογή.

Συνοπτικά, σε κάποιες από τις βάσεις δεδομένων που εξετάσθηκαν, και με γνώμονα τα κριτήρια σύγκρισης, το μοντέλο παλινδρόμησης Log-Lindley μπορεί να αποτελέσει ικανοποιητική εναλλακτική της παλινδρόμησης Βήτα, ειδικότερα με μεταβλητή απόκρισης 1-y. Βέβαια η προσαρμογή ενός μοντέλου παλινδρόμησης Log-Lindley παρουσιάζει κάποια μειονεκτήματα. Συγκεκριμένα, ο έλεγχος του Wald για τη στατιστική σημαντικότητα των παραμέτρων που απαρτίζουν το μοντέλο δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί, καθώς η ασυμπτωτική κατανομή των εκτιμητών των παραμέτρων δεν είναι κανονική, αλλά μια μίξη περικομμένων (truncated) κανονικών κατανομών Jodra et al. (2014). Επίσης, η εκτίμηση των παραμέτρων για το εν λόγω μοντέλο έχει αρκετά μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος σε σχέση με την εκτίμηση των παραμέτρων για το μοντέλο παλινδρόμησης Βήτα, αφού ο αριθμός βημάτων (iterations) που εκτελεί ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης είναι σημαντικά μεγαλύτερος.

# Συμπεράσματα

Η κατανομή Log-Lindley αποτελεί μια εναλλακτική της κατανομής Βήτα φέροντας τα πλεονεκτήματα ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της διατυπώνεται χωρίς τη χρήση κάποιας ειδικής συνάρτησης και η συνάρτηση κατανομής της έχει κλειστό τύπο. Ωστόσο, παρουσιάζονται κάποια προβλήματα αναφορικά με την εκτίμηση των παραμέτρων. Συγκεκριμένα, σε αρκετές περιπτώσεις δεν είναι δυνατή η εκτίμηση των παραμέτρων με την μέθοδο των ροπών και δεν δύναται να δοθούν ενδείξεις για την εγκυρότητα των εκτιμητών μεγίστης πιθανοφάνειας λόγω της μορφής της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της προς εξέτασης κατανομής. Το πρόβλημα που αφορά τους εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας αντιμετωπίζεται με την κατάλληλη επαναπαραμετροποίηση της κατανομής από την οποία προκύπτουν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Ακόμα η κατανομή που μελετήθηκε μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μικτική συνάρτηση κατανομής και να μελετηθεί η στοχαστική διάταξη μεμιγμένων κατανομών με μικτική την Log-Lindley. Το παραπάνω μπορεί να επιτευχθεί μέσω θεωρημάτων που αφορούν TP2 κατανομές και μέσω προσομοίωσης, χρησιμοποιώντας ισχυρά υπολογιστικά συστήματα. Τέλος, σε κάποιες περιπτώσεις όπου η μεταβλητή απόκρισης λαμβάνει τιμές στο (0,1) μπορεί να προσαρμοσθεί ένα μοντέλο παλινδρόμησης Log-Lindley, έναντι ενός μοντέλου παλινδρόμησης Βήτα, με εξίσου ικανοποιητική προσαρμογή. Βέβαια η δυσκολία διενέργειας στατιστικών ελέγχων για τους συντελεστές του μοντέλου αποτελούν ένα σοβαρό μειονέκτημα.

# Βιβλιογραφία

## Ελληνική

Ηλιόπουλος, Γ. (Χ.Χ.). *Βασικές μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων: Με σημείο και με διάστημα*, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης, Αθήνα.

Κουτσόπουλος, Κ. Ι. (1999). *Αναλογιστικά Μαθηματικά Μέρος 1 - Θεωρία Κινδύνων*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

## Ξένη

Armero, C., & Bayarri, M. J. (1994). Prior assessments for prediction in queues, *Journal of the Royal Statistical Society Series D: The Statistician*, ***43*(1)**, 139-153.

Chen, J. J., & Novick, M. R. (1984). Bayesian analysis for binomial models with generalized beta prior distributions, *Journal of Educational Statistics*, ***9*(2),** 163-175.

Cover, T. M., & Thomas, J. A. (2005). *Elements of information theory*, John Wiley & Sons, England.

Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., & Kaas, R. (2005). *Actuarial theory for dependent risks: Measures, orders and models*, John Wiley & Sons, England.

Gómez-Déniz, E., Sordo, M. A., & Calderín-Ojeda, E. (2014). The Log–Lindley distribution as an alternative to the beta regression model with applications in insurance, *Insurance: mathematics and Economics*, ***54***, 49-57.

Grassia, A. (1977). On a family of distributions with argument between 0 and 1 obtained by transformation of the gamma and derived compound distributions, *Australian Journal of Statistics*, ***19*(2)**, 108-114.

Jodrá, P., & Jiménez-Gamero, M. D. (2016). A note on the Log-Lindley distribution, *Insurance: Mathematics and Economics*, ***71***, 189-194.

Jones, M. C. (2009). Kumaraswamy's distribution: A beta-type distribution with some tractability advantages, *Statistical methodology*, ***6*(1)**, 70-81.

Kochenderfer, M. J., & Wheeler, T. A. (2019). *Algorithms for optimization*, The MIT Press Cambridge, MA.

McDonald, J. B. (2008). Some generalized functions for the size distribution of income. In *Modeling income distributions and Lorenz curves* (pp. 37-55). New York, NY: Springer New York.

Rakhmawan, S. A., Mahmood, T., Abbas, N., & Riaz, M. (2024). Unifying mortality forecasting model: an investigation of the COM–Poisson distribution in the GAS model for improved projections, *Lifetime Data Analysis*, 1-27.

Shaked, M., & Shanthikumar, J. G. (2007). *Stochastic orders*, Springer, New York.

Smithson, M., & Verkuilen, J. (2006). A better lemon squeezer? Maximum-likelihood regression with beta-distributed dependent variables, *Psychological methods*, ***11*****(1),** 54.

Zeileis, A., Cribari-Neto, F., Gruen, B., Kosmidis, I., Simas, A. B., Rocha, A. V., & Zeileis, M. A. (2016). Package betareg, *R package*, ***3*****(2).**

Zucchini, W. (2000). An introduction to model selection, *Journal of mathematical psychology*, ***44*****(1)**, 41-61.

# Παράρτημα.

Παρατίθενται οι αλγόριθμοι που σχεδιάστηκαν και χρησιμοποιήθηκαν στο περιβάλλον της γλώσσας R και του λογισμικού MATLAB.

**1.2**

```
ll<-function(x,s,l){

s<-((s^2)/(1+(l*s)))*(l-log(x))*(x^(s-1))

return(s)

}


x<-seq(0,1,0.01)


y1<-sapply(x,ll,s=0.5,l=0)

y2<-sapply(x,ll,s=0.5,l=10)

y3<-sapply(x,ll,s=2,l=0.1)

y4<-sapply(x,ll,s=20,l=0.001)

y5<-sapply(x,ll,s=20,l=5)

y6<-sapply(x,ll,s=5,l=0.01)


plot(x,y1,type="l",col=2,lwd=2,ylab="f(x)")

lines(x,y2,type="l",col=3,lwd=2)

lines(x,y3,type="l",col=4,lwd=2)

lines(x,y4,type="l",col=5,lwd=2)
```

```
lines(x,y5,type="l",col=6,lwd=2)
lines(x,y6,type="l",col=7,lwd=2)
legend(0.2,10,legend=
c("σ=0.5  λ=0","σ=0.5  λ=10","σ=2
λ=0.1","σ=20  λ=0.001",
"σ=20  λ=5","σ=5  λ=0.01"),
col=c(2,3,4,5,6,7),
lty=c(1,1,1,1,1,1,1))
```

```
cdf<-function(x,s,l){
return((1+(s*(l-log(x))))*(x^s)*(1/(1+l*s)))
}
x<-seq(0,1,0.01)
cy1<-sapply(x,cdf,s=0.5,l=0)
cy2<-sapply(x,cdf,s=0.5,l=10)
cy3<-sapply(x,cdf,s=1,l=1)
cy4<-sapply(x,cdf,s=0.5,l=2)
cy5<-sapply(x,cdf,s=0.6,l=1.5)
cy6<-sapply(x,cdf,s=1.5,l=1.5)


plot(x,cy1,type="l",col=2,lwd=2,ylab="F(x)")
lines(x,cy2,type="l",col=3,lwd=2)
lines(x,cy3,type="l",col=4,lwd=2)
lines(x,cy4,type="l",col=5,lwd=2)
lines(x,cy5,type="l",col=6,lwd=2)
lines(x,cy6,type="l",col=7,lwd=2)
legend(0.65,0.6,legend=c("σ=0.5  λ=0",
```

```
"σ=0.5  λ=10","σ=1  λ=1","σ=0.5  λ=2",
"σ=0.6  λ=1.5","σ=1.5  λ=1.5"),
col=c(2,3,4,5,6,7),lty=c(1,1,1,1,1,1,1))
```

**1.3**

```
hazard<-function(x,s,l){
return(((s^2)*(l-log(x)))/ (x*((s*log(x))-

((1+(l*s))*(1-(x^(-s)))))))
}
x<-seq(0,1,0.01)



h1<-sapply(x,hazard,s=0.5,l=0)
h2<-sapply(x,hazard,s=2,l=0.1)
h3<-sapply(x,hazard,s=0.012,l=10)
h4<-sapply(x,hazard,s=4,l=2)
h5<-sapply(x,hazard,s=5,l=0.001)

plot(x,h1,type="l",col=2,lwd=2,ylab="r(x)")
lines(x,h2,type="l",col=3,lwd=2)
lines(x,h3,type="l",col=4,lwd=2)
lines(x,h4,type="l",col=5,lwd=2)
lines(x,h5,type="l",col=6,lwd=2)
```

```
legend(0.2,100,legend=c("σ=0.5     λ=0","σ=2     λ=0.1","σ=0.012
λ=10","σ=4                                              λ=2","σ=5
λ=0.001"),col=c(2,3,4,5,6,7),lty=c(1,1,1,1,1,1,1))
```

**1.4**

```
inversion<-function(s,l,nsimul){

simulation<-rep(0,times=nsimul)

i<-1

      while(i<=nsimul){


u<-runif(1,min=0,max=1)


equation<-function(x){

(((x^s)/(1+(l*s)))*(1+(s*(l-log(x)))))-u

}

      if(equation(0.0001)*equation(0.99999)>0){

next}


solution <- tryCatch(

      uniroot(equation,interval =c(0.0001, 0.99999)),

      error = function(e) NULL

    )


      if(!is.null(solution)){

      simulation[i]<-solution$root

      i<-i +1

    }
```

```
}

return(simulation)



}



mmesp<-function(sample){

return(                     (2*((mean(sample^2)-mean(sample)))+
sqrt((2*mean(sample))-
(4*mean(sample^2))+(2*mean(sample)*mean(sample^2))))

/((2*mean(sample))-mean(sample^2)-1))

}



mmesm<-function(sample){

return(                     (2*((mean(sample^2)-mean(sample)))-
sqrt((2*mean(sample))-
(4*mean(sample^2))+(2*mean(sample)*mean(sample^2))))

/((2*mean(sample))-mean(sample^2)-1))

}



mmel<-function(sample,s){



return(((mean(sample^2)*((s+2)^2))- (mean(sample)*((s+1)^2)))/

((mean(sample)*(s+2)*((s+1)^2))-
(mean(sample^2)*(s+1)*((s+2)^2))))



}



##LogLindley(1,2)



##n=100

set.seed(123)
```

```
j<-0
     for(i in 1:10000){


sample<-inversion(1,2,100)
m1<-mmesp(sample)
m2<-mmesm(sample)


     if ((m1 <= 0 || is.nan(m1)) || (m2<= 0 || is.nan(m2))){
  j<-1+j}


}
j
j/10000


##n=200
set.seed(1234)
j<-0
     for(i in 1:10000){


sample<-inversion(1,2,200)
m1<-mmesp(sample)
m2<-mmesm(sample)


     if ((m1 <= 0 || is.nan(m1)) || (m2<= 0 || is.nan(m2))){
  j<-1+j}


}
j
j/10000
```

```
##n=250
set.seed(12345)
j<-0
     for(i in 1:10000){

sample<-inversion(1,2,250)
m1<-mmesp(sample)
m2<-mmesm(sample)

     if ((m1 <= 0 || is.nan(m1)) || (m2<= 0 || is.nan(m2))){
  j<-1+j}

}
j
j/10000

##n=300
set.seed(123456)
j<-0
     for(i in 1:10000){

sample<-inversion(1,2,300)
m1<-mmesp(sample)
m2<-mmesm(sample)

     if ((m1 <= 0 || is.nan(m1)) || (m2<= 0 || is.nan(m2))){
  j<-1+j}
```

```
}
j
j/10000

##LogLindley(2,1)

##n=100
set.seed(234)
j<-0
     for(i in 1:10000){

sample<-inversion(2,1,100)
m1<-mmesp(sample)
m2<-mmesm(sample)

     if ((m1 <= 0 || is.nan(m1)) || (m2<= 0 || is.nan(m2))){
  j<-1+j}

}
j
j/10000

##n=200
set.seed(2345)
j<-0
     for(i in 1:10000){

sample<-inversion(2,1,200)
m1<-mmesp(sample)
```

```
m2<-mmesm(sample)

      if ((m1 <= 0 || is.nan(m1)) || (m2<= 0 || is.nan(m2))){
  j<-1+j
}

}
j
j/10000

##n=250
set.seed(23456)
j<-0
for(i in 1:10000){

sample<-inversion(2,1,250)
m1<-mmesp(sample)
m2<-mmesm(sample)

      if ((m1 <= 0 || is.nan(m1)) || (m2<= 0 || is.nan(m2))){
  j<-1+j
}

}
j
j/10000

##n=300
set.seed(234567)
```

```
j<-0
for(i in 1:10000){


sample<-inversion(2,1,300)
m1<-mmesp(sample)
m2<-mmesm(sample)


     if ((m1 <= 0 || is.nan(m1)) || (m2<= 0 || is.nan(m2))){
  j<-1+j
}


}
j
j/10000


##LogLindley(2,2)


##n=100
set.seed(345)
j<-0
     for(i in 1:10000){


sample<-inversion(2,2,100)
m1<-mmesp(sample)
m2<-mmesm(sample)


     if ((m1 <= 0 || is.nan(m1)) || (m2<= 0 || is.nan(m2))){
  j<-1+j}
```

```
}
j
j/10000

##n=200
set.seed(3456)
j<-0
for(i in 1:10000){

sample<-inversion(2,2,200)
m1<-mmesp(sample)
m2<-mmesm(sample)

      if ((m1 <= 0 || is.nan(m1)) || (m2<= 0 || is.nan(m2))) {
  j<-1+j}

}
j
j/10000

##n=250
set.seed(34567)
j<-0
for(i in 1:10000){

sample<-inversion(2,2,250)
m1<-mmesp(sample)
m2<-mmesm(sample)

```

```
     if ((m1 <= 0 || is.nan(m1)) || (m2<= 0 || is.nan(m2))){
  j<-1+j}

}
j
j/10000

##n=300
set.seed(345678)
j<-0
for(i in 1:10000){

sample<-inversion(2,2,300)
m1<-mmesp(sample)
m2<-mmesm(sample)

     if ((m1 <= 0 || is.nan(m1)) || (m2<= 0 || is.nan(m2))){
  j<-1+j}

}
j
j/10000

##LogLindley(5,1)

##n=100
set.seed(456)
j<-0
     for(i in 1:10000){
```

```
sample<-inversion(5,1,100)
m1<-mmesp(sample)
m2<-mmesm(sample)

     if ((m1 <= 0 || is.nan(m1)) || (m2<= 0 || is.nan(m2))){
  j<-1+j}

}
j
j/10000

##n=200
set.seed(4567)
j<-0
     for(i in 1:10000){

sample<-inversion(5,1,200)
m1<-mmesp(sample)
m2<-mmesm(sample)

     if ((m1 <= 0 || is.nan(m1)) || (m2<= 0 || is.nan(m2))){
  j<-1+j}

}
j
j/10000

##n=250
```

```
set.seed(45678)
j<-0
     for(i in 1:10000){

sample<-inversion(5,1,250)
m1<-mmesp(sample)
m2<-mmesm(sample)

     if ((m1 <= 0 || is.nan(m1)) || (m2<= 0 || is.nan(m2))){
  j<-1+j}

}
j
j/10000

##n=300
set.seed(456789)
j<-0
     for(i in 1:10000){

sample<-inversion(5,1,300)
m1<-mmesp(sample)
m2<-mmesm(sample)

     if ((m1 <= 0 || is.nan(m1)) || (m2<= 0 || is.nan(m2))){
  j<-1+j}

}
j
```

```
j/10000


##LogLindley(3,1)


##n=100
set.seed(567)
j<-0
     for(i in 1:10000){


sample<-inversion(3,1,100)
m1<-mmesp(sample)
m2<-mmesm(sample)


     if ((m1 <= 0 || is.nan(m1)) || (m2<= 0 || is.nan(m2))){
  j<-1+j}


}
j
j/10000


##n=200
set.seed(5678)
j<-0
     for(i in 1:10000){


sample<-inversion(3,1,200)
m1<-mmesp(sample)
m2<-mmesm(sample)
```

```
if ((m1 <= 0 || is.nan(m1)) || (m2<= 0 || is.nan(m2))){
  j<-1+j}


}
j
j/10000


##n=250
set.seed(56789)
j<-0
     for(i in 1:10000){


sample<-inversion(3,1,250)
m1<-mmesp(sample)
m2<-mmesm(sample)


     if ((m1 <= 0 || is.nan(m1)) || (m2<= 0 || is.nan(m2))){
  j<-1+j}


}
j
j/10000


##n=300
set.seed(5678910)
j<-0
     for(i in 1:10000){


sample<-inversion(3,1,300)
```

```
m1<-mmesp(sample)

m2<-mmesm(sample)


      if ((m1 <= 0 || is.nan(m1)) || (m2<= 0 || is.nan(m2))){

  j<-1+j}


}

j

j/10000
```

**1.5**

```
##Packages

install.packages("nloptr")

library(nloptr)

obj<-function(params,sample) {

s<-params[1]

l<-params[2]

loglik<-(2*length(sample)*log(s))+    ((s-1)*sum(log(sample)))+
sum(log(l - log(sample)))- (length(sample)*log((1+(l*s))))

return(-loglik)

}


##Constraints

LB<-c(0.0001,0)

UB<-c(Inf,Inf)

##Log-Lindley(s=1,l=1)

##n=100

set.seed(1243)

sigmas<-rep(0,times=10000)

lambdas<-rep(0,times=10000)
```

```
for(i in 1:10000){
sample<-inversion(1,1,100)
initialguess<-c(s=1,l=1)
result <- nloptr(
x0 = initialguess,
eval_f=function(x) obj(x, sample),
lb=LB,
ub=UB,
opts=list(
algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",
xtol_rel=1.0e-16,
ftol_rel=1.0e-16
)
)
sigmas[i]<-result$solution[1]
lambdas[i]<-result$solution[2]
}
round(mean(sigmas),digits=5)
round(mean(lambdas),digits=5)
round(mean(sigmas)-1,digits=5)
round(mean(lambdas)-1,digits=5)
round(var(sigmas),digits=5)
round(var(lambdas),digits=5)

##n=150
set.seed(1234)
sigmas<-rep(0,times=10000)
lambdas<-rep(0,times=10000)
for(i in 1:10000){
```

```
sample<-inversion(1,1,150)
initialguess<-c(s=1,l=1)
result <- nloptr(
x0 = initialguess,
eval_f=function(x) obj(x, sample),
lb=LB,
ub=UB,
opts=list(
algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",
xtol_rel=1.0e-16,
ftol_rel=1.0e-16
)
)
sigmas[i]<-result$solution[1]
lambdas[i]<-result$solution[2]
}
round(mean(sigmas),digits=5)
round(mean(lambdas),digits=5)
round(mean(sigmas)-1,digits=5)
round(mean(lambdas)-1,digits=5)
round(var(sigmas),digits=5)
round(var(lambdas),digits=5)

##n=200
set.seed(1234)
sigmas<-rep(0,times=10000)
lambdas<-rep(0,times=10000)
for(i in 1:10000){
sample<-inversion(1,1,200)
```

```
initialguess<-c(s=1,l=1)
result <- nloptr(
x0 = initialguess,
eval_f=function(x) obj(x, sample),
lb=LB,
ub=UB,
opts=list(
algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",
xtol_rel=1.0e-16,
ftol_rel=1.0e-16
)
)
sigmas[i]<-result$solution[1]
lambdas[i]<-result$solution[2]
}
round(mean(sigmas),digits=5)
round(mean(lambdas),digits=5)
round(mean(sigmas)-1,digits=5)
round(mean(lambdas)-1,digits=5)
round(var(sigmas),digits=5)
round(var(lambdas),digits=5)
##Log-Lindley(s=5,l=2)
##n=100
set.seed(1243)
sigmas<-rep(0,times=10000)
lambdas<-rep(0,times=10000)
for(i in 1:10000){
sample<-inversion(5,2,100)
initialguess<-c(s=1,l=1)
```

```
result <- nloptr(
x0 = initialguess,
eval_f=function(x) obj(x, sample),
lb=LB,
ub=UB,
opts=list(
algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",
xtol_rel=1.0e-16,
ftol_rel=1.0e-16
)
)
sigmas[i]<-result$solution[1]
lambdas[i]<-result$solution[2]
}
round(mean(sigmas),digits=5)
round(mean(lambdas),digits=5)
round(mean(sigmas)-5,digits=5)
round(mean(lambdas)-2,digits=5)
round(var(sigmas),digits=5)
round(var(lambdas),digits=5)

##n=150
set.seed(1234)
sigmas<-rep(0,times=10000)
lambdas<-rep(0,times=10000)
for(i in 1:10000){
sample<-inversion(5,2,150)
initialguess<-c(s=1,l=1)
result <- nloptr(
```

```
x0 = initialguess,
eval_f=function(x) obj(x, sample),
lb=LB,
ub=UB,
opts=list(
algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",
xtol_rel=1.0e-16,
ftol_rel=1.0e-16
)
)
sigmas[i]<-result$solution[1]
lambdas[i]<-result$solution[2]
}
round(mean(sigmas),digits=5)
round(mean(lambdas),digits=5)
round(mean(sigmas)-5,digits=5)
round(mean(lambdas)-2,digits=5)
round(var(sigmas),digits=5)
round(var(lambdas),digits=5)

##n=200
set.seed(1234)
sigmas<-rep(0,times=10000)
lambdas<-rep(0,times=10000)
for(i in 1:10000){
sample<-inversion(5,2,200)
initialguess<-c(s=1,l=1)
result <- nloptr(
x0 = initialguess,
```

```
eval_f=function(x) obj(x, sample),
lb=LB,
ub=UB,
opts=list(
algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",
xtol_rel=1.0e-16,
ftol_rel=1.0e-16
)
)
sigmas[i]<-result$solution[1]
lambdas[i]<-result$solution[2]
}
round(mean(sigmas),digits=5)
round(mean(lambdas),digits=5)
round(mean(sigmas)-5,digits=5)
round(mean(lambdas)-2,digits=5)
round(var(sigmas),digits=5)
round(var(lambdas),digits=5)

##Log-Lindley(s=2,l=2)
##n=100
set.seed(1243)
sigmas<-rep(0,times=10000)
lambdas<-rep(0,times=10000)
for(i in 1:10000){
sample<-inversion(2,2,100)
initialguess<-c(s=1,l=1)
result <- nloptr(
x0 = initialguess,
```

```
eval_f=function(x) obj(x, sample),
lb=LB,
ub=UB,
opts=list(
algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",
xtol_rel=1.0e-16,
ftol_rel=1.0e-16
)
)
sigmas[i]<-result$solution[1]
lambdas[i]<-result$solution[2]
}
round(mean(sigmas),digits=5)
round(mean(lambdas),digits=5)
round(mean(sigmas)-2,digits=5)
round(mean(lambdas)-2,digits=5)
round(var(sigmas),digits=5)
round(var(lambdas),digits=5)

##n=150
set.seed(1234)
sigmas<-rep(0,times=10000)
lambdas<-rep(0,times=10000)
for(i in 1:10000){
sample<-inversion(2,2,150)
initialguess<-c(s=1,l=1)
result <- nloptr(
x0 = initialguess,
eval_f=function(x) obj(x, sample),
```

```
lb=LB,
ub=UB,
opts=list(
algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",
xtol_rel=1.0e-16,
ftol_rel=1.0e-16
)
)
sigmas[i]<-result$solution[1]
lambdas[i]<-result$solution[2]
}
round(mean(sigmas),digits=5)
round(mean(lambdas),digits=5)
round(mean(sigmas)-2,digits=5)
round(mean(lambdas)-2,digits=5)
round(var(sigmas),digits=5)
round(var(lambdas),digits=5)

##n=200
set.seed(1234)
sigmas<-rep(0,times=10000)
lambdas<-rep(0,times=10000)
for(i in 1:10000){
sample<-inversion(2,2,200)
initialguess<-c(s=1,l=1)
result <- nloptr(
x0 = initialguess,
eval_f=function(x) obj(x, sample),
lb=LB,
```

```
ub=UB,
opts=list(
algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",
xtol_rel=1.0e-16,
ftol_rel=1.0e-16
)
)
sigmas[i]<-result$solution[1]
lambdas[i]<-result$solution[2]
}
round(mean(sigmas),digits=5)
round(mean(lambdas),digits=5)
round(mean(sigmas)-2,digits=5)
round(mean(lambdas)-2,digits=5)
round(var(sigmas),digits=5)
round(var(lambdas),digits=5)

##Log-Lindley(s=2,l=5)
##n=100
set.seed(1243)
sigmas<-rep(0,times=10000)
lambdas<-rep(0,times=10000)
for(i in 1:10000){
sample<-inversion(2,5,100)
initialguess<-c(s=1,l=1)
result <- nloptr(
x0 = initialguess,
eval_f=function(x) obj(x, sample),
lb=LB,
```

```
ub=UB,
opts=list(
algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",
xtol_rel=1.0e-16,
ftol_rel=1.0e-16
)
)
sigmas[i]<-result$solution[1]
lambdas[i]<-result$solution[2]
}
round(mean(sigmas),digits=5)
round(mean(lambdas),digits=5)
round(mean(sigmas)-2,digits=5)
round(mean(lambdas)-5,digits=5)
round(var(sigmas),digits=5)
round(var(lambdas),digits=5)

##n=150
set.seed(1234)
sigmas<-rep(0,times=10000)
lambdas<-rep(0,times=10000)
for(i in 1:10000){
sample<-inversion(2,5,150)
initialguess<-c(s=1,l=1)
result <- nloptr(
x0 = initialguess,
eval_f=function(x) obj(x, sample),
lb=LB,
ub=UB,
```

```
opts=list(
algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",
xtol_rel=1.0e-16,
ftol_rel=1.0e-16
)
)
sigmas[i]<-result$solution[1]
lambdas[i]<-result$solution[2]
}
round(mean(sigmas),digits=5)
round(mean(lambdas),digits=5)
round(mean(sigmas)-2,digits=5)
round(mean(lambdas)-5,digits=5)
round(var(sigmas),digits=5)
round(var(lambdas),digits=5)

##n=200
set.seed(1234)
sigmas<-rep(0,times=10000)
lambdas<-rep(0,times=10000)
for(i in 1:10000){
sample<-inversion(2,5,200)
initialguess<-c(s=1,l=1)
result <- nloptr(
x0 = initialguess,
eval_f=function(x) obj(x, sample),
lb=LB,
ub=UB,
opts=list(
```

```
algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",
xtol_rel=1.0e-16,
ftol_rel=1.0e-16
)
)
sigmas[i]<-result$solution[1]
lambdas[i]<-result$solution[2]
}
round(mean(sigmas),digits=5)
round(mean(lambdas),digits=5)
round(mean(sigmas)-2,digits=5)
round(mean(lambdas)-5,digits=5)
round(var(sigmas),digits=5)
round(var(lambdas),digits=5)
```

**1.7**

```
##Packages
install.packages("nloptr")
library(nloptr)


##Functions
inversion1<-function(s,p,nsimul){
simulation<-rep(0,times=nsimul)
i<-1
```

```
while(i<=nsimul){

u<-runif(1,min=0,max=1)

equation<-function(x){

((1+(s*(p-1)*log(x)))*(x^s))-u

}

if(equation(0.0001)*equation(0.99999)>0){

next}

solution <- tryCatch(

uniroot(equation, interval = c(0.0001, 0.99999)),

error = function(e) NULL

    )

if (!is.null(solution)) {

simulation[i] <- solution$root

i <- i + 1}

}

return(simulation)

}

obj<-function(params,sample) {

s<-params[1]

p<-params[2]

loglik<-(length(sample)*log(s))+      ((s-1)*sum(log(sample)))+
(sum(log(p+s*(p-1)*log(sample))))

return(-loglik)

}


##Constraints

LB<-c(0.0001,0)

UB<-c(Inf,1)
```

```
##Log-Lindley(s=5,p=0.2)

##n=100

set.seed(1243)

sigmas<-rep(0,times=10000)

pis<-rep(0,times=10000)

for(i in 1:10000){

sample<-inversion1(5,0.2,100)

ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(

x0 = initialguess,

eval_f=function(x) obj(x, sample),

lb=LB,

ub=UB,

opts=list(

algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",

xtol_rel=1.0e-16,

ftol_rel=1.0e-16

)

)

sigmas[i]<-result$solution[1]

pis[i]<-result$solution[2]

}

round(mean(sigmas),digits=5)

round(mean(pis),digits=5)

round(mean(sigmas)-5,digits=5)

round(mean(pis)-0.2,digits=5)

round(var(sigmas),digits=5)
```

```
round(var(pis),digits=5)

ig

##n=150

set.seed(1234)

sigmas<-rep(0,times=10000)

pis<-rep(0,times=10000)


for(i in 1:10000){

sample<-inversion1(5,0.2,150)

ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(

x0 = initialguess,

eval_f=function(x) obj(x, sample),

lb=LB,

ub=UB,

opts=list(

algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",

xtol_rel=1.0e-16,

ftol_rel=1.0e-16

)

)

sigmas[i]<-result$solution[1]

pis[i]<-result$solution[2]

}

round(mean(sigmas),digits=5)

round(mean(pis),digits=5)

round(mean(sigmas)-5,digits=5)
```

```
round(mean(pis)-0.2,digits=5)

round(var(sigmas),digits=5)

round(var(pis),digits=5)


##n=200

set.seed(12345)

sigmas<-rep(0,times=10000)

pis<-rep(0,times=10000)

for(i in 1:10000){

sample<-inversion1(5,0.2,200)

ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(

x0 = initialguess,

eval_f=function(x) obj(x, sample),

lb=LB,

ub=UB,

opts=list(

algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",

xtol_rel=1.0e-16,

ftol_rel=1.0e-16

)

)

sigmas[i]<-result$solution[1]

pis[i]<-result$solution[2]

}
```

```
round(mean(sigmas),digits=5)

round(mean(pis),digits=5)

round(mean(sigmas)-5,digits=5)

round(mean(pis)-0.2,digits=5)

round(var(sigmas),digits=5)

round(var(pis),digits=5)


##Log-Lindley(s=5,p=0.4)

##n=100

set.seed(123456)

sigmas<-rep(0,times=10000)

pis<-rep(0,times=10000)

for(i in 1:10000){

sample<-inversion1(5,0.4,100)

ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(

x0 = initialguess,

eval_f=function(x) obj(x, sample),

lb=LB,

ub=UB,

opts=list(

algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",

xtol_rel=1.0e-16,

ftol_rel=1.0e-16

)

)
```

```
sigmas[i]<-result$solution[1]

pis[i]<-result$solution[2]

}

round(mean(sigmas),digits=5)

round(mean(pis),digits=5)

round(mean(sigmas)-5,digits=5)

round(mean(pis)-0.4,digits=5)

round(var(sigmas),digits=5)

round(var(pis),digits=5)


##n=150

set.seed(1234567)

sigmas<-rep(0,times=10000)

pis<-rep(0,times=10000)

for(i in 1:10000){

sample<-inversion1(5,0.4,150)

ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(

x0 = initialguess,

eval_f=function(x) obj(x, sample),

lb=LB,

ub=UB,

opts=list(

algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",

xtol_rel=1.0e-16,

ftol_rel=1.0e-16

)
```

```
)
sigmas[i]<-result$solution[1]
pis[i]<-result$solution[2]
}


round(mean(sigmas),digits=5)
round(mean(pis),digits=5)
round(mean(sigmas)-5,digits=5)
round(mean(pis)-0.4,digits=5)
round(var(sigmas),digits=5)
round(var(pis),digits=5)






##n=200
set.seed(12345678)
sigmas<-rep(0,times=10000)
pis<-rep(0,times=10000)
for(i in 1:10000){
sample<-inversion1(5,0.4,200)
ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))
initialguess<-c(s=ig,p=0.5)
result <- nloptr(
x0 = initialguess,
eval_f=function(x) obj(x, sample),
lb=LB,
ub=UB,
```

```
opts=list(
algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",
xtol_rel=1.0e-16,
ftol_rel=1.0e-16
)
)
sigmas[i]<-result$solution[1]
pis[i]<-result$solution[2]
}

round(mean(sigmas),digits=5)
round(mean(pis),digits=5)
round(mean(sigmas)-5,digits=5)
round(mean(pis)-0.4,digits=5)
round(var(sigmas),digits=5)
round(var(pis),digits=5)




##Log-Lindley(s=5,p=0.6)
##n=100
set.seed(123456789)
sigmas<-rep(0,times=10000)
pis<-rep(0,times=10000)
for(i in 1:10000){
sample<-inversion1(5,0.6,100)
ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))
```

```
initialguess<-c(s=ig,p=0.5)
result <- nloptr(
x0 = initialguess,
eval_f=function(x) obj(x, sample),
lb=LB,
ub=UB,
opts=list(
algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",
xtol_rel=1.0e-16,
ftol_rel=1.0e-16
)
)
sigmas[i]<-result$solution[1]
pis[i]<-result$solution[2]
}

round(mean(sigmas),digits=5)
round(mean(pis),digits=5)
round(mean(sigmas)-5,digits=5)
round(mean(pis)-0.6,digits=5)
round(var(sigmas),digits=5)
round(var(pis),digits=5)

##n=150
set.seed(234)
sigmas<-rep(0,times=10000)
pis<-rep(0,times=10000)
for(i in 1:10000){
sample<-inversion1(5,0.6,150)
```

```
ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(

x0 = initialguess,

eval_f=function(x) obj(x, sample),

lb=LB,

ub=UB,

opts=list(

algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",

xtol_rel=1.0e-16,

ftol_rel=1.0e-16

)

)

sigmas[i]<-result$solution[1]

pis[i]<-result$solution[2]

}


round(mean(sigmas),digits=5)

round(mean(pis),digits=5)

round(mean(sigmas)-5,digits=5)

round(mean(pis)-0.6,digits=5)

round(var(sigmas),digits=5)

round(var(pis),digits=5)


##n=200

set.seed(2345)

sigmas<-rep(0,times=10000)

pis<-rep(0,times=10000)
```

```
for(i in 1:10000){

sample<-inversion1(5,0.6,200)

ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(

x0 = initialguess,

eval_f=function(x) obj(x, sample),

lb=LB,

ub=UB,

opts=list(

algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",

xtol_rel=1.0e-16,

ftol_rel=1.0e-16

)

)

sigmas[i]<-result$solution[1]

pis[i]<-result$solution[2]

}


round(mean(sigmas),digits=5)

round(mean(pis),digits=5)

round(mean(sigmas)-5,digits=5)

round(mean(pis)-0.6,digits=5)

round(var(sigmas),digits=5)

round(var(pis),digits=5)


##Log-Lindley(s=5,p=0.8)

##n=100
```

```
set.seed(23456)

sigmas<-rep(0,times=10000)

pis<-rep(0,times=10000)

for(i in 1:10000){

sample<-inversion1(5,0.8,100)

ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(

x0 = initialguess,

eval_f=function(x) obj(x, sample),

lb=LB,

ub=UB,

opts=list(

algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",

xtol_rel=1.0e-16,

ftol_rel=1.0e-16

)

)

sigmas[i]<-result$solution[1]

pis[i]<-result$solution[2]

}


round(mean(sigmas),digits=5)

round(mean(pis),digits=5)

round(mean(sigmas)-5,digits=5)

round(mean(pis)-0.8,digits=5)

round(var(sigmas),digits=5)

round(var(pis),digits=5)
```

```
##n=150

set.seed(234567)

sigmas<-rep(0,times=10000)

pis<-rep(0,times=10000)

for(i in 1:10000){

sample<-inversion1(5,0.8,150)

ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(

x0 = initialguess,

eval_f=function(x) obj(x, sample),

lb=LB,

ub=UB,

opts=list(

algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",

xtol_rel=1.0e-16,

ftol_rel=1.0e-16

)

)

sigmas[i]<-result$solution[1]

pis[i]<-result$solution[2]

}


round(mean(sigmas),digits=5)

round(mean(pis),digits=5)

round(mean(sigmas)-5,digits=5)

round(mean(pis)-0.8,digits=5)
```

```
round(var(sigmas),digits=5)

round(var(pis),digits=5)


##n=200

set.seed(2345678)

sigmas<-rep(0,times=10000)

pis<-rep(0,times=10000)

for(i in 1:10000){

sample<-inversion1(5,0.8,200)

ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(

x0 = initialguess,

eval_f=function(x) obj(x, sample),

lb=LB,

ub=UB,

opts=list(

algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",

xtol_rel=1.0e-16,

ftol_rel=1.0e-16

)

)

sigmas[i]<-result$solution[1]

pis[i]<-result$solution[2]

}


round(mean(sigmas),digits=5)

round(mean(pis),digits=5)
```

```
round(mean(sigmas)-5,digits=5)

round(mean(pis)-0.8,digits=5)

round(var(sigmas),digits=5)

round(var(pis),digits=5)


##Log-Lindley(s=3,p=0.4)

##n=100

set.seed(2342556)

sigmas<-rep(0,times=10000)

pis<-rep(0,times=10000)

for(i in 1:10000){

sample<-inversion1(3,0.4,100)

ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(

x0 = initialguess,

eval_f=function(x) obj(x, sample),

lb=LB,

ub=UB,

opts=list(

algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",

xtol_rel=1.0e-16,

ftol_rel=1.0e-16,

maxeval=1000000

)

)

sigmas[i]<-result$solution[1]

pis[i]<-result$solution[2]
```

```
}


round(mean(sigmas),digits=5)

round(mean(pis),digits=5)

round(mean(sigmas)-3,digits=5)

round(mean(pis)-0.4,digits=5)

round(var(sigmas),digits=5)

round(var(pis),digits=5)


##n=150

set.seed(2134567)

sigmas<-rep(0,times=10000)

pis<-rep(0,times=10000)

for(i in 1:10000){

sample<-inversion1(3,0.4,150)

ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(

x0 = initialguess,

eval_f=function(x) obj(x, sample),

lb=LB,

ub=UB,

opts=list(

algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",

xtol_rel=1.0e-16,

ftol_rel=1.0e-16

)

)
```

```
sigmas[i]<-result$solution[1]

pis[i]<-result$solution[2]

}




round(mean(sigmas),digits=5)

round(mean(pis),digits=5)

round(mean(sigmas)-3,digits=5)

round(mean(pis)-0.4,digits=5)

round(var(sigmas),digits=5)

round(var(pis),digits=5)


##n=200

set.seed(23452678)

sigmas<-rep(0,times=10000)

pis<-rep(0,times=10000)

for(i in 1:10000){

sample<-inversion1(3,0.4,200)

ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(

x0 = initialguess,

eval_f=function(x) obj(x, sample),

lb=LB,

ub=UB,

opts=list(

algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",

xtol_rel=1.0e-16,
```

```
ftol_rel=1.0e-16
)
)
sigmas[i]<-result$solution[1]
pis[i]<-result$solution[2]
}
round(mean(sigmas),digits=5)
round(mean(pis),digits=5)
round(mean(sigmas)-3,digits=5)
round(mean(pis)-0.4,digits=5)
round(var(sigmas),digits=5)
round(var(pis),digits=5)


##Log-Lindley(s=2,p=0.3)
##n=100
set.seed(234256)
sigmas<-rep(0,times=10000)
pis<-rep(0,times=10000)
for(i in 1:10000){
sample<-inversion1(2,0.3,100)
ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))
initialguess<-c(s=ig,p=0.5)
result <- nloptr(
x0 = initialguess,
eval_f=function(x) obj(x, sample),
lb=LB,
ub=UB,
opts=list(
```

```
algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",

xtol_rel=1.0e-16,

ftol_rel=1.0e-16,

maxeval=1000000

)

)

sigmas[i]<-result$solution[1]

pis[i]<-result$solution[2]

}


round(mean(sigmas),digits=5)

round(mean(pis),digits=5)

round(mean(sigmas)-2,digits=5)

round(mean(pis)-0.3,digits=5)

round(var(sigmas),digits=5)

round(var(pis),digits=5)


##n=150

set.seed(2134567)

sigmas<-rep(0,times=10000)

pis<-rep(0,times=10000)

for(i in 1:10000){

sample<-inversion1(2,0.3,150)

ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(

x0 = initialguess,

eval_f=function(x) obj(x, sample),
```

```
lb=LB,

ub=UB,

opts=list(

algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",

xtol_rel=1.0e-16,

ftol_rel=1.0e-16

)

)

sigmas[i]<-result$solution[1]

pis[i]<-result$solution[2]

}


round(mean(sigmas),digits=5)

round(mean(pis),digits=5)

round(mean(sigmas)-2,digits=5)

round(mean(pis)-0.3,digits=5)

round(var(sigmas),digits=5)

round(var(pis),digits=5)


##n=200

set.seed(23452678)

sigmas<-rep(0,times=10000)

pis<-rep(0,times=10000)

for(i in 1:10000){

sample<-inversion1(2,0.3,200)

ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(
```

```
x0 = initialguess,
eval_f=function(x) obj(x, sample),
lb=LB,
ub=UB,
opts=list(
algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",
xtol_rel=1.0e-16,
ftol_rel=1.0e-16
)
)
sigmas[i]<-result$solution[1]
pis[i]<-result$solution[2]
}

round(mean(sigmas),digits=5)
round(mean(pis),digits=5)
round(mean(sigmas)-2,digits=5)
round(mean(pis)-0.3,digits=5)
round(var(sigmas),digits=5)
round(var(pis),digits=5)



##Log-Lindley(s=1,p=0.2)
##n=100
set.seed(2341536)
sigmas<-rep(0,times=10000)
pis<-rep(0,times=10000)
for(i in 1:10000){
sample<-inversion1(1,0.2,100)
```

```
ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(

x0 = initialguess,

eval_f=function(x) obj(x, sample),

lb=LB,

ub=UB,

opts=list(

algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",

xtol_rel=1.0e-16,

ftol_rel=1.0e-16

)

)

sigmas[i]<-result$solution[1]

pis[i]<-result$solution[2]


}


round(mean(sigmas),digits=5)

round(mean(pis),digits=5)

round(mean(sigmas)-1,digits=5)

round(mean(pis)-0.2,digits=5)

round(var(sigmas),digits=5)

round(var(pis),digits=5)



##n=150

set.seed(2345167)
```

```
sigmas<-rep(0,times=10000)

pis<-rep(0,times=10000)

for(i in 1:10000){

sample<-inversion1(1,0.2,150)

ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(

x0 = initialguess,

eval_f=function(x) obj(x, sample),

lb=LB,

ub=UB,

opts=list(

algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",

xtol_rel=1.0e-16,

ftol_rel=1.0e-16

)

)

sigmas[i]<-result$solution[1]

pis[i]<-result$solution[2]

}


round(mean(sigmas),digits=5)

round(mean(pis),digits=5)

round(mean(sigmas)-1,digits=5)

round(mean(pis)-0.2,digits=5)

round(var(sigmas),digits=5)

round(var(pis),digits=5)
```

```
##n=200

set.seed(23452678)

sigmas<-rep(0,times=10000)

pis<-rep(0,times=10000)

for(i in 1:10000){

sample<-inversion1(1,0.2,200)

ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(

x0 = initialguess,

eval_f=function(x) obj(x, sample),

lb=LB,

ub=UB,

opts=list(

algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",

xtol_rel=1.0e-16,

ftol_rel=1.0e-16

)

)

sigmas[i]<-result$solution[1]

pis[i]<-result$solution[2]

}




round(mean(sigmas),digits=5)

round(mean(pis),digits=5)

round(mean(sigmas)-1,digits=5)
```

```
round(mean(pis)-0.2,digits=5)

round(var(sigmas),digits=5)

round(var(pis),digits=5)




##Log-Lindley(s=1,l=0.1)

##n=100

set.seed(234256)

sigmas<-rep(0,times=10000)

pis<-rep(0,times=10000)

for(i in 1:10000){

sample<-inversion1(1,0.1,100)

ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(

x0 = initialguess,

eval_f=function(x) obj(x, sample),

lb=LB,

ub=UB,

opts=list(

algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",

xtol_rel=1.0e-16,

ftol_rel=1.0e-16,

maxeval=1000000

)

)

sigmas[i]<-result$solution[1]

pis[i]<-result$solution[2]
```

```
}


round(mean(sigmas),digits=5)

round(mean(pis),digits=5)

round(mean(sigmas)-1,digits=5)

round(mean(pis)-0.1,digits=5)

round(var(sigmas),digits=5)

round(var(pis),digits=5)




##n=150

set.seed(2134567)

sigmas<-rep(0,times=10000)

pis<-rep(0,times=10000)

for(i in 1:10000){

sample<-inversion1(1,0.1,150)

ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(

x0 = initialguess,

eval_f=function(x) obj(x, sample),

lb=LB,

ub=UB,

opts=list(

algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",

xtol_rel=1.0e-16,

ftol_rel=1.0e-16
```

```
)

)

sigmas[i]<-result$solution[1]

pis[i]<-result$solution[2]

}


round(mean(sigmas),digits=5)

round(mean(pis),digits=5)

round(mean(sigmas)-1,digits=5)

round(mean(pis),digits=5)-0.1

round(var(sigmas),digits=5)

round(var(pis),digits=5)


##n=200

set.seed(23452678)

sigmas<-rep(0,times=10000)

pis<-rep(0,times=10000)

for(i in 1:10000){

sample<-inversion1(1,0.1,200)

ig<-(2*mean(sample)+sqrt(mean(sample)))*((1-mean(sample))^(-
1))

initialguess<-c(s=ig,p=0.5)

result <- nloptr(

x0 = initialguess,

eval_f=function(x) obj(x, sample),

lb=LB,

ub=UB,

opts=list(

algorithm ="NLOPT_LN_NELDERMEAD",
```

```
xtol_rel=1.0e-16,

ftol_rel=1.0e-16

)

)

sigmas[i]<-result$solution[1]

pis[i]<-result$solution[2]

}


round(mean(sigmas),digits=5)

round(mean(pis),digits=5)

round(mean(sigmas)-1,digits=5)

round(mean(pis)-0.1,digits=5)

round(var(sigmas),digits=5)

round(var(pis),digits=5)
```

**2.6**

```
llr<-function(x,s1,l1,s2,l2){

return( (x^(s2-s1))* ((l2-log(x))/(l1-log(x))))


}




x<-seq(0,1,0.001)

cy1<-sapply(x,llr,1,1,2,2)

cy2<-sapply(x,llr,2,2,3,3)

cy3<-sapply(x,llr,3,3,4,4)

cy4<-sapply(x,llr,4,4,5,5)


plot(x,cy1,type="l",col=2,lwd=2,ylab="fy(x)/fx(x)")
```

```
lines(x,cy2,type="l",col=3,lwd=2)

lines(x,cy3,type="l",col=4,lwd=2)

lines(x,cy4,type="l",col=5,lwd=2)

legend(0.2,2,legend=c("σ=1&2     λ=1&2","σ=2&3     λ=2&3","σ=3&4
λ=3&4","σ=4&5  λ=4&5"),col=c(2,3,4,5),lty=c(1,1,1,1))



cdfr<-function(x,s1,l1,s2,l2){

return(      (x^(s2-s1))*      ((1+(s2*(l2-log(x))))/(1+(s1*(l1-
log(x))))))



}




x<-seq(0,1,0.001)

cy1<-sapply(x,cdfr,1,1,2,2)

cy2<-sapply(x,cdfr,2,2,3,3)

cy3<-sapply(x,cdfr,3,3,4,4)

cy4<-sapply(x,cdfr,4,4,5,5)



plot(x,cy1,type="l",col=2,lwd=2,ylab="Fy(x)/Fx(x)")

lines(x,cy2,type="l",col=3,lwd=2)

lines(x,cy3,type="l",col=4,lwd=2)

lines(x,cy4,type="l",col=5,lwd=2)

legend(0.2,2,legend=c("σ=1&2     λ=1&2","σ=2&3     λ=2&3","σ=3&4
λ=3&4","σ=4&5  λ=4&5"),col=c(2,3,4,5),lty=c(1,1,1,1))

x<-seq(0,1,0.01)

y1<-sapply(x,sf,s=0.5,l=0)

y2<-sapply(x,sf,s=0.5,l=10)

y4<-sapply(x,sf,s=1,l=11)

y5<-sapply(x,sf,s=0.6,l=12)
```

```
plot(x,y1,type="l",col=2,lwd=2,ylab="f(x)")

lines(x,y2,type="l",col=3,lwd=2)

lines(x,y4,type="l",col=5,lwd=2)

lines(x,y5,type="l",col=6,lwd=2)


legend(0.6,0.6,legend=

c("σ=0.5  λ=0","σ=0.5  λ=10","σ=1  λ=0.11",

"σ=0.6  λ=12"),

col=c(2,3,4,5),lty=c(1,1,1,1))
```

**2.8**

```
N = 10000;

s=;

p=;


samples = zeros(N, 1);



cdf_function=@(x)integral2(@(p,t)(1./p).*exp(t./p).*(s^2/1+l*s
).*(1-log(p)).*p^(s-1),(,   0,   1,   0,   x,   'AbsTol',   1e-5,
'RelTol', 1e-5);



for i = 1:N


    U = rand();
```

```
    equation_to_solve = @(x) cdf_function(x) - U;


    try


        x_sample = fzero(equation_to_solve, [0, 20]);

        if ~isnan(x_sample) && x_sample >= 0

            samples(i) = x_sample;

        else

            i = i - 1;

        end

    catch ME

        fprintf('Error finding root: %s\n', ME.message)

        i = i - 1;

    end

end



writematrix(samples, 'random_n.csv');





##s=2&1 l=2&1


data <- read.csv("random_7.csv", header = FALSE)

data1 <- read.csv("random_4.csv", header = FALSE)

head(data1,100)

mixed1<-data$V1

mixed2<-data1$V1
```

```
length(mixed1)
length(mixed2)
ellindley<-function(s,l){
return( ((s^2)/(1+(l*s)))*((1+l+(l*s))/((1+s)^2)) )
}
mixeds<-function(A,B,C,D){


##Pr(YEA)
s1<-0
for(i in 1:length(mixed1)){
if(mixed1[i]>A & mixed1[i]<B){
s1<-s1+1}
}

PrYEA<-s1/length(mixed1)


##Pr(YEB)
s2<-0
for(i in 1:length(mixed1)){
if(mixed1[i]>C & mixed1[i]<D){
s2<-s2+1
}
}

PrYEB<-s2/length(mixed1)
```

```
##Pr(XEA)

s3<-0

for(i in 1:length(mixed2)){

if(mixed2[i]>A & mixed2[i]<B){

s3<-s3+1

}

}

PrXEA<-s3/length(mixed2)


##Pr(XEB)

s4<-0

for(i in 1:length(mixed2)){

if(mixed2[i]>C & mixed2[i]<D){

s4<-s4+1

}

}

PrXEB<-s4/length(mixed2)



fi<-PrXEA*PrYEB

se<-PrYEA*PrXEB


if(fi>=se){

res<-1}


else{res<-0}

return(c(fi,se,res))

}

hist(mixed1)
```

```
hist(mixed2)


mixeds(0,0.5,0.5,1)

mixeds(0.5,1,1,1.5)

mixeds(1,1.5,1.5,2)

mixeds(2,2.5,2.5,3)

mean(mixed1)

mean(mixed2)


ellindley(2,2)

ellindley(1,1)

##s=4&2 l=2&2


data <- read.csv("random_9.csv", header = FALSE)

data1 <- read.csv("random_7.csv", header = FALSE)

head(data1,100)

mixed1<-data$V1

mixed2<-data1$V1


length(mixed1)

length(mixed2)

hist(mixed1)

hist(mixed2)


mixeds(0,0.5,0.5,1)

mixeds(0.5,1,1,1.5)

mixeds(1,1.5,1.5,2)

mixeds(2,2.5,2.5,3)

mean(mixed1)
```

```
mean(mixed2)


ellindley(4,3)
##s=10&4 l=3&1


data <- read.csv("random_5.csv", header = FALSE)
data1 <- read.csv("random_2.csv", header = FALSE)
head(data1,100)
mixed1<-data$V1[1:10000]
mixed2<-data1$V1


length(mixed1)
length(mixed2)
mixeds(0,0.5,0.5,1)
mixeds(0.5,1,1,1.5)
mixeds(1,1.5,1.5,2)
mixeds(2,2.5,2.5,3)
mean(mixed1)
mean(mixed2)


ellindley(10,3)
ellindley(4,1)
##s=20&2 l=10&5


data <- read.csv("random_6.csv", header = FALSE)
data1 <- read.csv("random_3.csv", header = FALSE)
head(data1,100)
mixed1<-data$V1
mixed2<-data1$V1
```

```
length(mixed1)
length(mixed2)
mixeds(0,0.5,0.5,1)
mixeds(0.5,1,1,1.5)
mixeds(1,1.5,1.5,2)
mixeds(2,2.5,2.5,3)

mean(mixed1)
mean(mixed2)

ellindley(20,10)
ellindley(2,5)
##s=20&1 l=10&1

data <- read.csv("random_6.csv", header = FALSE)
data1 <- read.csv("random_4.csv", header = FALSE)
head(data1,100)
mixed1<-data$V1
mixed2<-data1$V1

length(mixed1)
length(mixed2)
mixeds(0,0.5,0.5,1)
mixeds(0.5,1,1,1.5)
mixeds(1,1.5,1.5,2)
mixeds(2,2.5,2.5,3)
```

```
mean(mixed1)

mean(mixed2)



ellindley(20,10)

ellindley(1,1)
```

**3.5**

```
##paper's data set for response y

install.packages("PLreg")

library(PLreg)

data(data="Firm",package="PLreg")

library(betareg)



data<-
data.frame(response=Firm$firmcost,predictor1=Firm$assume,predi
ctor2=Firm$cap,

predictor3=Firm$sizelog,predictor4=Firm$indcost,predictor5=Fir
m$central,

predictor6=Firm$soph)

data



model<-
betareg(response~predictor1+predictor2+predictor3+predictor4+p
redictor5+predictor6,data =data)

summary(model)

AIC(model)

BIC(model)



log_likelihood<-function(params) {



p<-params[1]
```

```
b0<-params[2]

b1<-params[3]

b2<-params[4]

b3<-params[5]

b4<-params[6]

b5<-params[7]

b6<-params[8]



loglik1<-0



     for (i in 1:length(data$response)) {

th<-
exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$pre
dictor3[i]+b4*data$predictor4[i]+b5*data$predictor5[i]+b6*data
$predictor6[i])/

(1+exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$
predictor3[i]+b4*data$predictor4[i]+b5*data$predictor5[i]+b6*d
ata$predictor6[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik1<-loglik1+log(sigma)

}



loglik2<-0



     for (i in 1:length(data$response)) {

th<-
exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$pre
dictor3[i]+b4*data$predictor4[i]+b5*data$predictor5[i]+b6*data
$predictor6[i])/

(1+exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$
predictor3[i]+b4*data$predictor4[i]+b5*data$predictor5[i]+b6*d
ata$predictor6[i]))
```

```
sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))

loglik2<-loglik2+((sigma-1)*log(data$response[i]))

}



loglik3<-0



      for (i in 1:length(data$response)) {

th<-exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$predictor3[i]+b4*data$predictor4[i]+b5*data$predictor5[i]+b6*data$predictor6[i])/

(1+exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$predictor3[i]+b4*data$predictor4[i]+b5*data$predictor5[i]+b6*data$predictor6[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))

loglik3<-loglik3+log(p-((1-p)*sigma*log(data$response[i])))

}



return(-loglik1-loglik2-loglik3)

}



library(nloptr)



init_params <- c(0.5,0,0,0,0,0,0,0)



lb <- c(0,-Inf,-Inf,-Inf,-Inf,-Inf,-Inf,-Inf)

ub <- c(1,Inf,Inf,Inf,Inf,Inf,Inf,Inf)



opts  <-  list("algorithm"="NLOPT_LN_PRAXIS",  "xtol_rel"=1.0e-6,"maxeval"=10000)
```

```
result <- nloptr(x0 = init_params, eval_f = log_likelihood, lb
= lb, ub = ub, opts = opts)

print(result)



loglikll<-(-result$objective)

n_params<-length(result$solution)

n_obs<-nrow(data)



aic1<-2*n_params-(2*loglikll)

bic1<-log(n_obs)*n_params- (2*loglikll)



aic1

bic1





##paper's data set for response 1-y

install.packages("PLreg")

library(PLreg)

data(data="Firm",package="PLreg")



data<-data.frame(response=(1-
Firm$firmcost),predictor1=Firm$assume,predictor2=Firm$cap,

predictor3=Firm$sizelog,predictor4=Firm$indcost,predictor5=Fir
m$central,

predictor6=Firm$soph)



model<-
betareg(response~predictor1+predictor2+predictor3+predictor4+p
redictor5+predictor6,data =data)

summary(model)
```

```
AIC(model)

BIC(model)


log_likelihood<-function(params) {


p<-params[1]

b0<-params[2]

b1<-params[3]

b2<-params[4]

b3<-params[5]

b4<-params[6]

b5<-params[7]

b6<-params[8]


loglik1<-0


     for (i in 1:length(data$response)) {

th<-
exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$pre
dictor3[i]+b4*data$predictor4[i]+b5*data$predictor5[i]+b6*data
$predictor6[i])/

(1+exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$
predictor3[i]+b4*data$predictor4[i]+b5*data$predictor5[i]+b6*d
ata$predictor6[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik1<-loglik1+log(sigma)

}


loglik2<-0
```

```
      for (i in 1:length(data$response)) {

th<-
exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$pre
dictor3[i]+b4*data$predictor4[i]+b5*data$predictor5[i]+b6*data
$predictor6[i])/

(1+exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$
predictor3[i]+b4*data$predictor4[i]+b5*data$predictor5[i]+b6*d
ata$predictor6[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik2<-loglik2+((sigma-1)*log(data$response[i]))

}



loglik3<-0



      for (i in 1:length(data$response)) {

th<-
exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$pre
dictor3[i]+b4*data$predictor4[i]+b5*data$predictor5[i]+b6*data
$predictor6[i])/

(1+exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$
predictor3[i]+b4*data$predictor4[i]+b5*data$predictor5[i]+b6*d
ata$predictor6[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik3<-loglik3+log(p-((1-p)*sigma*log(data$response[i])))

}



return(-loglik1-loglik2-loglik3)

}



library(nloptr)



init_params <- c(0.5,0,0,0,0,0,0,0)
```

```
lb <- c(0,-Inf,-Inf,-Inf,-Inf,-Inf,-Inf,-Inf)
ub <- c(1,Inf,Inf,Inf,Inf,Inf,Inf,Inf)

opts <- list("algorithm"="NLOPT_LN_PRAXIS", "xtol_rel"=1.0e-10,"maxeval"=10000)

result <- nloptr(x0 = init_params, eval_f = log_likelihood, lb = lb, ub = ub, opts = opts)
print(result)

logliklI<-(-result$objective)
n_params<-length(result$solution)
n_obs<-nrow(data)

aic1<-2*n_params-(2*logliklI)
bic1<-log(n_obs)*n_params- (2*logliklI)

aic1
bic1

##2nd dataset for response y
data(data="ReadingSkills",package="betareg")
dys<-rep(0,times=44)
for(i in 1:44){
if(ReadingSkills$dyslexia[i]=="yes"){
dys[i]=1}
if(ReadingSkills$dyslexia[i]=="no"){
dys[i]=0}
}
```

```
data<-
data.frame(response=ReadingSkills$accuracy,predictor1=ReadingS
kills$iq,predictor2=dys,predictor3=ReadingSkills$accuracy1)

data




model<-betareg(response~predictor1+predictor2+predictor3,data
=data)

summary(model)

AIC(model)

BIC(model)




log_likelihood<-function(params) {


p<-params[1]

b0<-params[2]

b1<-params[3]

b2<-params[4]

b3<-params[5]


loglik1<-0


     for (i in 1:length(data$response)) {

th<-
exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$pre
dictor3[i])/(1            +            exp(b0            +
b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$predictor3
[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik1<-loglik1+log(sigma)
```

```
}



loglik2<-0



      for (i in 1:length(data$response)) {

th<-
exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$pre
dictor3[i])/(1              +              exp(b0              +
b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$predictor3
[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik2<-loglik2+((sigma-1)*log(data$response[i]))

}



loglik3<-0



      for (i in 1:length(data$response)) {

th<-
exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$pre
dictor3[i])/(1              +              exp(b0              +
b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$predictor3
[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik3<-loglik3+log(p-((1-p)*sigma*log(data$response[i])))

}



return(-loglik1-loglik2-loglik3)

}



library(nloptr)
```

```
init_params <- c(0.5,0,0,0,0)


lb <- c(0,-Inf,-Inf,-Inf,-Inf)

ub <- c(1, Inf,Inf,Inf,Inf)


opts  <-  list("algorithm"="NLOPT_LN_PRAXIS",  "xtol_rel"=1.0e-10,"maxeval"=1000)


result <- nloptr(x0 = init_params, eval_f = log_likelihood, lb = lb, ub = ub, opts = opts)

print(result)


loglikll<-(-result$objective)

n_params<-length(result$solution)

n_obs<-nrow(data)


aic1<-2*n_params-(2*loglikll)

bic1<-log(n_obs)*n_params- (2*loglikll)


aic1

bic1



##2nd dataset for response 1-y

data(data="ReadingSkills",package="betareg")

dys<-rep(0,times=44)

for(i in 1:44){

if(ReadingSkills$dyslexia[i]=="yes"){

dys[i]=1}

if(ReadingSkills$dyslexia[i]=="no"){
```

```
dys[i]=0}

}

data<-
data.frame(response=ReadingSkills$accuracy,predictor1=ReadingS
kills$iq,predictor2=dys,predictor3=ReadingSkills$accuracy1)

data




model<-betareg(response~predictor1+predictor2+predictor3,data
=data)

summary(model)

AIC(model)

BIC(model)




log_likelihood<-function(params) {


p<-params[1]

b0<-params[2]

b1<-params[3]

b2<-params[4]

b3<-params[5]


loglik1<-0


      for (i in 1:length(data$response)) {

th<-
exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$pre
dictor3[i])/(1              +              exp(b0              +
b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$predictor3
[i]))
```

```
sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik1<-loglik1+log(sigma)

}



loglik2<-0



      for (i in 1:length(data$response)) {

th<-
exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$pre
dictor3[i])/(1              +              exp(b0              +
b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$predictor3
[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik2<-loglik2+((sigma-1)*log(data$response[i]))

}



loglik3<-0



      for (i in 1:length(data$response)) {

th<-
exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$pre
dictor3[i])/(1              +              exp(b0              +
b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]+b3*data$predictor3
[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik3<-loglik3+log(p-((1-p)*sigma*log(data$response[i])))

}



return(-loglik1-loglik2-loglik3)

}
```

```
library(nloptr)


init_params <- c(0.5,0,0,0,0)


lb <- c(0,-Inf,-Inf,-Inf,-Inf)

ub <- c(1, Inf,Inf,Inf,Inf)


opts  <-  list("algorithm"="NLOPT_LN_PRAXIS",  "xtol_rel"=1.0e-
10,"maxeval"=1000)


result <- nloptr(x0 = init_params, eval_f = log_likelihood, lb
= lb, ub = ub, opts = opts)

print(result)


loglikll<-(-result$objective)

n_params<-length(result$solution)

n_obs<-nrow(data)


aic1<-2*n_params-(2*loglikll)

bic1<-log(n_obs)*n_params- (2*loglikll)


aic1

bic1


##3rd dataset for response y

data(data="FoodExpenditure",package="betareg")

FoodExpenditure

data<-
data.frame(response=FoodExpenditure$food/FoodExpenditure$incom
e,predictor1=FoodExpenditure$income,predictor2=FoodExpenditure
$persons)
```

```
data

model<-betareg(response ~ predictor1+predictor2,data =data)

summary(model)

AIC(model)

BIC(model)



log_likelihood<-function(params) {


p<-params[1]

b0<-params[2]

b1<-params[3]

b2<-params[4]


loglik1<-0


     for (i in 1:length(data$response)) {

th<-exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i])/(1    +
exp(b0 + b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik1<-loglik1+log(sigma)

}


loglik2<-0


     for (i in 1:length(data$response)) {

th<-exp(b0 + b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i])/(1 +
exp(b0 + b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]))
```

```
sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))

loglik2<-loglik2+((sigma-1)*log(data$response[i]))

}



loglik3<-0



      for (i in 1:length(data$response)) {

th<-exp(b0 + b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i])/(1 + exp(b0 + b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))

loglik3<-loglik3+log(p-((1-p)*sigma*log(data$response[i])))

}



return(-loglik1-loglik2-loglik3)

}



library(nloptr)



init_params <- c(0.5,0,0,0)



lb <- c(0,-Inf,-Inf,-Inf)

ub <- c(1, Inf,Inf,Inf)



opts <- list("algorithm"="NLOPT_LN_PRAXIS", "xtol_rel"=1.0e-10,"maxeval"=1000)



result <- nloptr(x0 = init_params, eval_f = log_likelihood, lb = lb, ub = ub, opts = opts)

print(result)
```

```
aic1<-2*n_params-(2*logliklll)

bic1<-log(n_obs)*n_params- (2*logliklll)


aic1

bic1


##3rd dataset for response 1-y

data(data="FoodExpenditure",package="betareg")

FoodExpenditure

data<-data.frame(response=(1-
(FoodExpenditure$food/FoodExpenditure$income)),predictor1=Food
Expenditure$income,predictor2=FoodExpenditure$persons)

data

model<-betareg(response ~ predictor1+predictor2,data =data)

summary(model)

AIC(model)

BIC(model)



log_likelihood<-function(params) {


p<-params[1]

b0<-params[2]

b1<-params[3]

b2<-params[4]


loglik1<-0


     for (i in 1:length(data$response)) {
```

```
th<-exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i])/(1    +
exp(b0 + b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik1<-loglik1+log(sigma)

}



loglik2<-0



     for (i in 1:length(data$response)) {

th<-exp(b0 + b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i])/(1 +
exp(b0 + b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik2<-loglik2+((sigma-1)*log(data$response[i]))

}



loglik3<-0



     for (i in 1:length(data$response)) {

th<-exp(b0 + b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i])/(1 +
exp(b0 + b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik3<-loglik3+log(p-((1-p)*sigma*log(data$response[i])))

}



return(-loglik1-loglik2-loglik3)

}



library(nloptr)
```

```
init_params <- c(0.5,0,0,0)


lb <- c(0,-Inf,-Inf,-Inf)

ub <- c(1, Inf,Inf,Inf)


opts  <-  list("algorithm"="NLOPT_LN_PRAXIS",  "xtol_rel"=1.0e-10,"maxeval"=1000)


result <- nloptr(x0 = init_params, eval_f = log_likelihood, lb = lb, ub = ub, opts = opts)

print(result)


aic1<-2*n_params-(2*loglikll)

bic1<-log(n_obs)*n_params- (2*loglikll)


aic1

bic1




##4th dataset for response y


data("MockJurors",package="betareg")

MockJurors


verd<-rep(0,times=104)

 for(i in 1:104){

if(MockJurors$verdict[i]== "two-option"){

verd[i]<-1

}
```

```
if(MockJurors$verdict[i]== "three-option"){

verd[i]<-0

}

}



con<-rep(0,times=104)

for(i in 1:104){

if(MockJurors$conflict[i]== "yes"){

con[i]<-1

}

if(MockJurors$conflict[i]== "no"){

con[i]<-0

}

}



data<-
data.frame(response=MockJurors$confidence,predictor1=verd,pred
ictor2=con)

data

model<-betareg(response ~ predictor1+predictor2,data =data)

summary(model)

AIC(model)

BIC(model)



log_likelihood<-function(params) {



p<-params[1]

b0<-params[2]

b1<-params[3]

b2<-params[4]
```

```
loglik1<-0

      for (i in 1:length(data$response)) {

th<-exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i])/(1    +
exp(b0 + b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik1<-loglik1+log(sigma)

}

loglik2<-0

      for (i in 1:length(data$response)) {

th<-exp(b0 + b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i])/(1 +
exp(b0 + b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik2<-loglik2+((sigma-1)*log(data$response[i]))

}

loglik3<-0

      for (i in 1:length(data$response)) {

th<-exp(b0 + b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i])/(1 +
exp(b0 + b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik3<-loglik3+log(p-((1-p)*sigma*log(data$response[i])))

}
```

```
return(-loglik1-loglik2-loglik3)

}



library(nloptr)



init_params <- c(0.5,0,0,0)



lb <- c(0,-Inf,-Inf,-Inf)

ub <- c(1, Inf,Inf,Inf)



opts  <-  list("algorithm"="NLOPT_LN_PRAXIS",  "xtol_rel"=1.0e-
10,"maxeval"=1000)



result <- nloptr(x0 = init_params, eval_f = log_likelihood, lb
= lb, ub = ub, opts = opts)

print(result)

logliklll<-(-result$objective)

n_params<-length(result$solution)

n_obs<-nrow(data)

aic1<-2*n_params-(2*logliklll)

bic1<-log(n_obs)*n_params- (2*logliklll)



aic1

bic1



##4th dataset for response 1-y



data("MockJurors",package="betareg")

MockJurors
```

```
verd<-rep(0,times=104)

 for(i in 1:104){

if(MockJurors$verdict[i]== "two-option"){

verd[i]<-1

}

if(MockJurors$verdict[i]== "three-option"){

verd[i]<-0

}

}



con<-rep(0,times=104)

for(i in 1:104){

if(MockJurors$conflict[i]== "yes"){

con[i]<-1

}

if(MockJurors$conflict[i]== "no"){

con[i]<-0

}

}



data<-data.frame(response=(1-
MockJurors$confidence),predictor1=verd,predictor2=con)

data

model<-betareg(response ~ predictor1+predictor2,data =data)

summary(model)

AIC(model)

BIC(model)



log_likelihood<-function(params) {
```

```
p<-params[1]

b0<-params[2]

b1<-params[3]

b2<-params[4]


loglik1<-0


     for (i in 1:length(data$response)) {

th<-exp(b0+b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i])/(1 +
exp(b0 + b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik1<-loglik1+log(sigma)

}


loglik2<-0


     for (i in 1:length(data$response)) {

th<-exp(b0 + b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i])/(1 +
exp(b0 + b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik2<-loglik2+((sigma-1)*log(data$response[i]))

}


loglik3<-0


     for (i in 1:length(data$response)) {

th<-exp(b0 + b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i])/(1 +
exp(b0 + b1*data$predictor1[i]+b2*data$predictor2[i]))
```

```
sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik3<-loglik3+log(p-((1-p)*sigma*log(data$response[i])))

}



return(-loglik1-loglik2-loglik3)

}



library(nloptr)



init_params <- c(0.5,0,0,0)



lb <- c(0,-Inf,-Inf,-Inf)

ub <- c(1, Inf,Inf,Inf)



opts  <-  list("algorithm"="NLOPT_LN_PRAXIS",  "xtol_rel"=1.0e-
10,"maxeval"=1000)



result <- nloptr(x0 = init_params, eval_f = log_likelihood, lb
= lb, ub = ub, opts = opts)

print(result)

logliklll<-(-result$objective)

n_params<-length(result$solution)

n_obs<-nrow(data)

aic1<-2*n_params-(2*logliklll)

bic1<-log(n_obs)*n_params- (2*logliklll)



aic1

bic1
```

```
##5th dataset for response y


data("StressAnxiety",package="betareg")

StressAnxiety


library(betareg)

data<-
data.frame(response=StressAnxiety$anxiety,predictor1=StressAnx
iety$stress)

data

model<-betareg(response ~ predictor1,data =data)

summary(model)

AIC(model)

BIC(model)


log_likelihood<-function(params) {


p<-params[1]

b0<-params[2]

b1<-params[3]


loglik1<-0


     for (i in 1:length(data$response)) {

th<-exp(b0+b1*data$predictor1[i])/(1      +      exp(b0      +
b1*data$predictor1[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik1<-loglik1+log(sigma)

}
```

```
loglik2<-0

     for (i in 1:length(data$response)) {

th<-exp(b0+b1*data$predictor1[i])/(1      +      exp(b0      +
b1*data$predictor1[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik2<-loglik2+((sigma-1)*log(data$response[i]))

}

loglik3<-0

     for (i in 1:length(data$response)) {

th<-exp(b0+b1*data$predictor1[i])/(1      +      exp(b0      +
b1*data$predictor1[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))

loglik3<-loglik3+log(p-((1-p)*sigma*log(data$response[i])))

}

return(-loglik1-loglik2-loglik3)

}

library(nloptr)

init_params <- c(0.5,0,0)

lb <- c(0,-Inf,-Inf)
```

```
ub <- c(1, Inf,Inf)


opts  <-  list("algorithm"="NLOPT_LN_PRAXIS",  "xtol_rel"=1.0e-
10,"maxeval"=1000)


result <- nloptr(x0 = init_params, eval_f = log_likelihood, lb
= lb, ub = ub, opts = opts)

print(result)


loglikll<-(-result$objective)

n_params<-length(result$solution)

n_obs<-nrow(data)

aic1<-2*n_params-(2*loglikll)

bic1<-log(n_obs)*n_params- (2*loglikll)


aic1

bic1


##5th dataset for response 1-y


data("StressAnxiety",package="betareg")

StressAnxiety


library(betareg)

data<-data.frame(response=(1-
StressAnxiety$anxiety),predictor1=StressAnxiety$stress)

data

model<-betareg(response ~ predictor1,data =data)

summary(model)

AIC(model)
```

```
BIC(model)

log_likelihood<-function(params) {

p<-params[1]
b0<-params[2]
b1<-params[3]

loglik1<-0

     for (i in 1:length(data$response)) {
th<-exp(b0+b1*data$predictor1[i])/(1      +      exp(b0      +
b1*data$predictor1[i]))
sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))
loglik1<-loglik1+log(sigma)
}

loglik2<-0

     for (i in 1:length(data$response)) {

th<-exp(b0+b1*data$predictor1[i])/(1      +      exp(b0      +
b1*data$predictor1[i]))
sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-
p)))
loglik2<-loglik2+((sigma-1)*log(data$response[i]))
}

loglik3<-0
```

```
for (i in 1:length(data$response)) {

th<-exp(b0+b1*data$predictor1[i])/(1 + exp(b0 + b1*data$predictor1[i]))

sigma<-(-p+sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))/(2-p-sqrt((p^2)+4*th*(1-p)))

loglik3<-loglik3+log(p-((1-p)*sigma*log(data$response[i])))

}


return(-loglik1-loglik2-loglik3)

}


library(nloptr)


init_params <- c(0.5,0,0)


lb <- c(0,-Inf,-Inf)

ub <- c(1, Inf,Inf)


opts <- list("algorithm"="NLOPT_LN_PRAXIS", "xtol_rel"=1.0e-10,"maxeval"=1000)


result <- nloptr(x0 = init_params, eval_f = log_likelihood, lb = lb, ub = ub, opts = opts)

print(result)


logliklI<-(-result$objective)

n_params<-length(result$solution)

n_obs<-nrow(data)

aic1<-2*n_params-(2*logliklI)
```

```
bic1<-log(n_obs)*n_params- (2*loglikll)


aic1

bic1
```