

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**  
**Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής**



**Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ  
ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ**

**ΜΕΛΕΤΗ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ  
ΑΠΟ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΤΥΠΟΥ ΦΑΣΗΣ ΤΗΣ  
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΓΙΑ  
ΑΠΟΖΗΜΙΩΣΕΙΣ ΜΕ ΒΑΡΙΑ ΟΥΡΑ**

**Αθανάσιος Π. Ξηρός**

**Διπλωματική Εργασία**

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική Επιστήμη και  
Διαχείριση Κινδύνων*

Πειραιάς,  
Σεπτέμβριος 2024



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**  
**Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής**



**Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ  
ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ**

**ΜΕΛΕΤΗ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ  
ΑΠΟ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΤΥΠΟΥ ΦΑΣΗΣ ΤΗΣ  
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΓΙΑ  
ΑΠΟΖΗΜΙΩΣΕΙΣ ΜΕ ΒΑΡΙΑ ΟΥΡΑ**

**Αθανάσιος Π. Ξηρός**

**Διπλωματική Εργασία**

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική Επιστήμη και  
Διαχείριση Κινδύνων*

Πειραιάς,  
Σεπτέμβριος 2024

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη Συνέλευση του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .... συνεδρίασή της, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτής Καθηγητής Γ. Ψαρράκος (Επιβλέπων)
- Καθηγητής Ευστ. Χατζηκωνσταντινίδης
- Αναπληρωτής Καθηγητής Κ. Πολίτης

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**  
**School of Finance and Statistics**



**Department of Statistics and Insurance Science**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN  
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT**

**ON THE ACCURACY OF  
PHASE-TYPE  
APPROXIMATIONS OF RUIN  
PROBABILITY FOR HEAVY-  
TAILED DISTRIBUTION  
CLAIMS**

By

**Athanasios P. Xiros**

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance  
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of  
the requirements for the degree of Master of Science in  
Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece  
September 2024



*Στην οικογένεια  
μου και στους  
φίλους μου.*





## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες και την ιδιαίτερη εκτίμηση μου, προς τον καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς και επιβλέποντα στην διπλωματική μου εργασία κ. Γεώργιο Ψαρράκο, για την καθοδήγησή του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας αυτής καθώς και την καθοριστική συμβολή του στην ολοκλήρωσή της.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τους καθηγητές κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη και κ. Κωνσταντίνο Πολίτη που δέχτηκαν να είναι μέλη της τριμελούς επιτροπής αξιολόγησης της μεταπτυχιακής μου εργασίας, καθώς επίσης και όλους τους διδάσκοντες του μεταπτυχιακού προγράμματος για τις γνώσεις που μας προσέφεραν.

Τέλος, δεν θα μπορούσα να παραλείψω τις ευχαριστίες μου, αλλά και την ευγνωμοσύνη μου, προς τους γονείς μου για την υποστήριξη, την υπομονή και την βοήθειά τους σε αυτό το μεγάλο ταξίδι των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών μου σπουδών.



# Περίληψη

Ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας σε στοχαστικά μοντέλα της θεωρίας χρεοκοπίας είναι ένα σημαντικό πρόβλημα. Σε περιπτώσεις όπου η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί μία κατανομή με βαριά ουρά, ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι πολύ δύσκολος ή αδύνατος.

Ο στόχος της εργασίας αυτής είναι η προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας, χρησιμοποιώντας τις κατανομές τύπου φάσεων. Πιο συγκεκριμένα, θεωρώντας ότι η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί μία κατανομή με βαριά ουρά, θα κατασκευαστεί μία προσέγγιση της κατανομής αυτής από μία κατανομή τύπου φάσεων, και στη συνέχεια θα γίνει μια προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας. Επιπλέον, μέσα από αριθμητικά παραδείγματα, θα μελετηθεί για διάφορες τιμές του αρχικού αποθεματικού ο αριθμός των φάσεων που χρειάζονται, έτσι ώστε η προσέγγιση να αρκετά καλή.

Αναλυτικότερα, στο πρώτο κεφάλαιο θα πραγματοποιηθεί μια περιληπτική παρουσίαση των Μαρκοβιανών αλυσίδων σε συνεχή χρόνο. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις κατανομές τύπου φάσεων συνεχούς χρόνου, παρουσιάζοντας διάφορα παραδείγματα και εφαρμογές αυτών.

Προχωρώντας στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας ασχολούμαστε με τη θεωρία χρεοκοπίας. Πιο συγκεκριμένα μελετάμε τις κατανομές τύπου φάσεων για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας κατά τις οποίες παρατηρούμε ότι κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις μπορούν να υπολογίσουν με ακρίβεια την πιθανότητα χρεοκοπίας. Επιπλέον, γίνεται αναφορά στις κατανομές με βαριά ουρά καθώς και σε μια πολύ ειδική περίπτωση της κατανομής Pareto κατά την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε τον ακριβή τύπο της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας θα μελετήσουμε την προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο της. Το πρόβλημα εστιάζεται σε κατανομές απαιτήσεων με πολύ βαριά ουρά και συγκρίνονται τρεις μέθοδοι, της φασματικής προσέγγισης, της heavy traffic και της heavy tail.



# Abstract

The calculation of ruin probability in stochastic models of ruin theory is a significant issue. In cases where the distribution of claims follows a heavy-tailed distribution, the calculation of ruin probability is very difficult or impossible.

The aim of this work is to approximate the ruin probability using phase-type distributions. Specifically, if the distribution of claims follows a heavy-tailed distribution, an approximation of this distribution will be constructed from a phase-type distribution, and then an approximation of the ruin probability will be made. Furthermore, through numerical examples, we will study for various initial reserve values the number of phases needed for the approximation to be sufficiently good.

More specifically, the first chapter will provide a brief overview of continuous-time Markov chains. We will then study continuous-time phase-type distributions, presenting various examples and applications.

Moving on to the second chapter of the thesis, we deal with ruin theory. More specifically, we study phase-type distributions for the classic model of ruin theory, under which we observe that under certain conditions, ruin probability can be accurately calculated. Additionally, reference is made to heavy-tailed distributions as well as to a very specific case of the Pareto distribution, where the exact ruin probability can be calculated.

In the third and final chapter of the thesis, we will study the approximation of ruin probability in the compound Poisson model. The problem focuses on distributions of claims with heavy tails, and three methods are compared: spectral approximation, heavy traffic, and heavy tail.



# Περιεχόμενα

<b>Κατάλογος Πινάκων.....</b>	<b>xv</b>
<b>Κατάλογος Σχημάτων.....</b>	<b>xvi</b>
<b>Κεφάλαιο 1: Κατανομές τύπου φάσεων.....</b>	<b>1</b>
1.1 Εισαγωγή.....	1
1.1.1 Επισκόπηση βασικών εννοιών από τις στοχαστικές διαδικασίες.....	1
1.2 Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου.....	2
1.2.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες.....	2
1.2.2 Γεννήτορας πίνακας, εμφυτευμένη διαδικασία, εξισώσεις Chapman-Kolmogorov...	3
1.2.3 Ιδιότητες γεννήτορα πίνακα, στάσιμη κατανομή και απορροφητικές Μαρκοβιανές αλυσίδες.....	5
1.2.4 Εφαρμογές.....	7
1.3 Κατανομές τύπου φάσεων συνεχούς χρόνου.....	11
1.3.1 Ανάλυση κατανομών τύπου φάσεων .....	12
1.3.2 Πρότυπα συνεχών κατανομών τύπου φάσεων .....	13
1.4 Αριθμητικό παράδειγμα συνεχούς κατανομής τύπου φάσεων .....	19
<b>Κεφάλαιο 2: Θεωρία χρεοκοπίας και κατανομές τύπου φάσεων.....</b>	<b>22</b>
2.1 Εισαγωγή.....	22
2.2 Η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος και το κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας.....	22
2.2.1 Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας.....	23
2.2.2 Μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο.....	25
2.2.3 Οι εξισώσεις του Lundberg και δύο θεμελιώδη αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας.....	29
2.2.4 Εφαρμογές.....	31
2.3 Κατανομές φάσεως τύπου στη θεωρία χρεοκοπίας.....	33
2.3.1 Εφαρμογές.....	35
2.4 Κατανομές με βαριά ουρά στη θεωρία χρεοκοπίας.....	40

2.4.1	Επισκόπηση εννοιών για τις κατανομές βαριάς ουράς.....	40
2.4.2	Εφαρμογές.....	42
2.5	Προσέγγιση της κατανομής Pareto από μείξη εκθετικών κατανομών.....	47
2.5.1	Μέθοδος ροπών.....	47
2.5.2	Αριθμητικό παράδειγμα προσέγγισης της κατανομής Pareto με μείξη εκθετικών κατανομών με την μέθοδο των ροπών.....	48
<b>Κεφάλαιο 3: Η μέθοδος της φασματικής ανάλυσης για την προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας.....</b>		<b>52</b>
3.1	Εισαγωγή.....	52
3.2	Προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας με φασματική ανάλυση.....	55
3.3	Προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας με προσεγγίσεις Heavy-Traffic (HT) και Heavy-Tail (HTa).....	57
3.4	Κατανομές και μέθοδοι σύγκρισης.....	58
3.5	Αριθμητικά αποτελέσματα.....	59
3.5.1	Η επίδραση του πλήθους των φάσεων στην πιθανότητα χρεοκοπίας.....	59
3.5.2	Η επίδραση του μέσου μεγέθους απαίτησης στην πιθανότητα χρεοκοπίας.....	60
3.5.3	Η σύγκριση της μεθόδου SA με την HT στην προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας για φάσμα τιμών της παραμέτρου $\rho$ .....	62
3.5.4	Η σύγκριση της μεθόδου spectral approximation (SA) με την Heavy-Traffic (HT) και Heavy-Tail (HTa) στην προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας για φάσμα τιμών της παραμέτρου $\rho$ .....	63
3.5.5	Συγκεντρωτικά αποτελέσματα και συμπεράσματα.....	66
<b>Παράρτημα.....</b>		<b>67</b>
<b>Βιβλιογραφία.....</b>		<b>72</b>



# Κατάλογος Πινάκων

<b>Πίνακας 1.1.</b> Συνάρτηση πυκνότητας και συνάρτηση κατανομής της $X \sim PH^{(3)}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{D}_0)$ .....	20
<b>Πίνακας 1.2.</b> Ροπές της $X \sim PH^{(3)}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{D}_0)$ .....	21
<b>Πίνακας 2.1.</b> Αποτελέσματα του τύπου πιθανότητας χρεοκοπίας για αρχικό αποθεματικό $u = 0, 1, \dots, 10$ .....	38
<b>Πίνακας 2.2.</b> Παραδείγματα κατανομών με βαριά ουρά.....	41
<b>Πίνακας 2.3.</b> Αποτελέσματα πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi(u)$ για την περίπτωση της μονοπαραμετρικής Pareto με συνάρτηση κατανομής $F(x) = 1 - (1 + x)^{-2}$ , $x > 0$ .....	47
<b>Πίνακας 2.4.</b> Τιμές των πρώτων έξι ροπών της κατανομής Pareto και της μείξης εκθετικών κατανομών.....	50
<b>Πίνακας 3.1.</b> Φασματική προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας για διάφορους αριθμούς φάσεων, για κατανομή των αποζημιώσεων είναι Weibull( $c = 0.5$ , $\alpha = 3$ ). Οι τιμές στις παρενθέσεις αντιστοιχούν στο απόλυτο σφάλμα της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας από τις αντίστοιχες προσεγγίσεις.....	60
<b>Πίνακας 3.2.</b> Φασματική προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας για διάφορους αριθμούς φάσεων, για κατανομή των αποζημιώσεων είναι Pareto ( $\alpha = 4$ , $\beta = 3$ ). Οι τιμές στις παρενθέσεις αντιστοιχούν στο απόλυτο σφάλμα της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας από τις αντίστοιχες προσεγγίσεις.....	60

# Κατάλογος Σχημάτων

<b>ΣΧΗΜΑ 1-1</b> Διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων διαδικασίας Poisson.....	7
<b>ΣΧΗΜΑ 1-2</b> Διαγραμματική περιγραφή διαδικασίας Poisson.....	8
<b>ΣΧΗΜΑ 1-3</b> Διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων Μαρκοβιανής αλυσίδα συνεχούς χρόνου δυο καταστάσεων.....	9
<b>ΣΧΗΜΑ 1-4</b> Διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων διαδικασίας γεννήσεως θανάτου.....	10
<b>ΣΧΗΜΑ 1-5</b> Μαρκοβιανή αναπαράσταση της εκθετικής κατανομής με παράμετρο ρυθμού $\lambda$ .....	14
<b>ΣΧΗΜΑ 1-6</b> Μαρκοβιανή αναπαράσταση της Erlang κατανομής $E(n, \lambda)$ .....	15
<b>ΣΧΗΜΑ 1-7</b> Μαρκοβιανή αναπαράσταση της hypoexponential κατανομής.....	17
<b>ΣΧΗΜΑ 1-8</b> Μαρκοβιανή αναπαράσταση της hyperexponential κατανομής.....	18
<b>ΣΧΗΜΑ 1-9</b> Γραφική αναπαράσταση της Coxian κατανομής.....	19
<b>ΣΧΗΜΑ 1-10</b> Γραφική αναπαράσταση της γενικευμένης Coxian κατανομής.....	19
<b>ΣΧΗΜΑ 1-11</b> Διάγραμμα μετάβασης των καταστάσεων της κατανομής $PH^{(3)}(\pi, D_0)$ .....	20
<b>ΣΧΗΜΑ 1-12</b> Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $X$ .....	21
<b>ΣΧΗΜΑ 1-13</b> Συνάρτηση κατανομής της $X$ .....	21
<b>ΣΧΗΜΑ 2-1</b> Η ανέλιξη του πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο.....	24
<b>ΣΧΗΜΑ 2-2</b> Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας.....	26
<b>ΣΧΗΜΑ 2-3</b> Γραφική παράσταση της πιθανότητας μη χρεοκοπίας.....	26
<b>ΣΧΗΜΑ 2-4</b> Ο χρόνος χρεοκοπίας, το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο.....	27
<b>ΣΧΗΜΑ 2-5</b> Γραφική αναπαράσταση της μέγιστης σωρευτικής απώλειας στη διαδικασία του Πλεονάσματος.....	28
<b>ΣΧΗΜΑ 2-6</b> Διάγραμμα σύγκρισης των γραφικών παραστάσεων της ανέλιξης πλεονάσματος και της ανέλιξη πλεονάσματος των αποζημιώσεων.....	34
<b>ΣΧΗΜΑ 2-7</b> Πιθανότητα χρεοκοπίας για μείξη εκθετικών κατανομών στο κλασικό μοντέλο...	39
<b>ΣΧΗΜΑ 2-8</b> Γραφική παράσταση των συναρτήσεων πυκνότητας των δύο κατανομών στο διάστημα $x \in [0, 1.5]$ . Με μπλε χρώμα αναπαρίσταται η καμπύλη της μείξη εκθετικών κατανομών ενώ με ροζ η καμπύλη της Pareto.....	49
<b>ΣΧΗΜΑ 2-9</b> Γραφική παράσταση των πιθανοτήτων χρεοκοπίας των δύο κατανομών στο διάστημα $u \in [0, 4]$ . Με μπλε χρώμα αναπαρίσταται η καμπύλη της μείξη εκθετικών κατανομών ενώ με ροζ η καμπύλη της προσέγγισης της κατανομής Pareto.....	51
<b>ΣΧΗΜΑ 3-1</b> Δείγμα διαδρομής της στοχαστικής ανέλιξης $\{R(t): t \geq 0\}$ .....	55
<b>ΣΧΗΜΑ 3-2</b> Διάγραμμα της πιθανότητας χρεοκοπίας όπου $\rho = 0.7$ για κατανομή αποζημιώσεων Abate-Whitt με παράμετρο $\mu = 2$ .....	59
<b>ΣΧΗΜΑ 3-3</b> Συνάρτηση σφάλματος της φασματικής προσέγγισης με σταθερό φράγμα $\delta = 0.02$ , για κατανομή αποζημιώσεων Abate-Whitt με παράμετρο $\mu = 2$ .....	61
<b>ΣΧΗΜΑ 3-4</b> Συνάρτηση σφάλματος της φασματικής προσέγγισης με σταθερό φράγμα $\delta = 0.02$ , για κατανομή αποζημιώσεων Weibull(0.5, 3).....	61

<b>ΣΧΗΜΑ 3-5</b> Συνάρτηση σφάλματος της φασματικής προσέγγισης με σταθερό φράγμα $\delta = 0.02$ , για κατανομή αποζημιώσεων Pareto(4, 3).....	62
<b>ΣΧΗΜΑ 3-6</b> Φασματική προσέγγιση (SA) για σταθερό φράγμα $\delta = 0.02$ , όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν κατανομή των Abate-Whitt με παράμετρο $\mu = 2$ .....	63
<b>ΣΧΗΜΑ 3-7</b> Φασματική προσέγγιση (SA) για σταθερό φράγμα $\delta = 0.02$ , όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν κατανομή Weibull(0.5, 3).....	64
<b>ΣΧΗΜΑ 3-8</b> Φασματική προσέγγιση (SA) για σταθερό φράγμα $\delta = 0.02$ , όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν κατανομή Pareto(4, 3).....	65

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Κατανομές τύπου φάσεων

### 1.1 Εισαγωγή

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο πριν αναφερθούμε αναλυτικά στους ορισμούς και στις ιδιότητες των κατανομών τύπου φάσεων θα γίνει μια λεπτομερής ανάλυση των ιδιοτήτων των μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου μιας και συνδέονται άμεσα με τις κατανομές φάσεως τύπου. Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση των μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου θα δώσουμε πρώτα τον ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας (ή στοχαστικής ανέλιξης). Για την συγγραφή του συγκεκριμένου κεφαλαίου χρησιμοποιήθηκε βιβλιογραφία από τους Buchholz et al. (2014), Kulkarni (2010), Asmussen & Albrecher (2010).

#### 1.1.1 Επισκόπηση βασικών εννοιών από τις στοχαστικές διαδικασίες

Μια **στοχαστική διαδικασία** (ή στοχαστική ανέλιξη) είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών (τ.μ.)  $\{X(t)\}_{t \in T}$  όπου  $T$  ένα σύνολο, πάνω σε ένα κοινό χώρο πιθανότητας  $(\Omega, F, P)$ . Το σύνολο των δυνατών τιμών των τ.μ.  $X(t)$ , με  $t \in T$  συμβολίζεται με  $S$  ονομάζεται **χώρος καταστάσεων** και το σύνολο  $T$  ονομάζεται **παραμετρικός χώρος**.

Συνήθως το  $t$  συμβολίζει χρόνο. Αν ο χρόνος αυτός παίρνει διακριτές τιμές για παράδειγμα  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ , μιλάμε για μια **στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου**  $\{X(t)\}_{t \in T}$  η οποία συνήθως συμβολίζεται με  $\{X_n\}_{n \geq 0}$ , όπου ο δείκτης  $n$  παίρνει μη αρνητικές ακέραιες τιμές. Διαφορετικά, αν το  $T$  είναι μη αριθμήσιμο σύνολο, για παράδειγμα  $T = [0, \infty)$  τότε σε αυτή την περίπτωση μιλάμε για μια **στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου**  $\{X(t)\}_{t \in T}$  η οποία συχνά γράφεται ως  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  ή πιο απλά  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ .

Μια άλλη διάκριση των στοχαστικών διαδικασιών είναι ανάλογα με το πλήθος των τιμών που αφορούν το πλήθος των τιμών του  $X(t)$ . Εάν ο χώρος καταστάσεων  $S$  είναι αριθμήσιμο σύνολο, για παράδειγμα όταν  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$  τότε έχουμε **στοχαστική διαδικασία με διακριτές τιμές**  $\{X(t)\}_{t \in T}$  η οποία συχνά καλείται και ως *αλυσίδα*. Διαφορετικά, όταν το  $S$  είναι μη αριθμήσιμο σύνολο, για παράδειγμα  $S = (-\infty, +\infty)$  τότε έχουμε **στοχαστική διαδικασία με συνεχείς τιμές**  $\{X(t)\}_{t \in T}$  η οποία καλείται *στοχαστική διαδικασία πραγματικής αξίας* (*real-valued stochastic process*).

Μια στοχαστική διαδικασία καλείται **Μαρκοβιανή διαδικασία** (Μαρκοβιανή ανέλιξη) εάν αυτή ικανοποιεί την σχέση:

$$\begin{aligned} P(X(t_{n+1}) \leq x | X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n) \\ = P(X(t_{n+1}) \leq x | X(t_n) \leq x_n), \\ \forall t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} \in T, \quad \forall x_0, x_1, \dots, x_n, x \in S. \end{aligned}$$

Μια Μαρκοβιανή διαδικασία με αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων ονομάζεται **Μαρκοβιανή αλυσίδα**. Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες χωρίζονται σε διακριτού και συνεχούς χρόνου. Στη συγκεκριμένη εργασία θα ασχοληθούμε κυρίως με τις Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου και θα αναφερθούμε σε κάποιες βασικές τους ιδιότητες.

## 1.2 Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου

### 1.2.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

#### Ορισμός 1.1

Μια στοχαστική διαδικασία  $\{X(t)\}_{t \in T}$  με διακριτό χώρο καταστάσεων  $S$  ονομάζεται **Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου**, εάν αυτή χαρακτηρίζεται από την Μαρκοβιανή ιδιότητα:

$$\begin{aligned} P(X(t_{k+1}) = x_{k+1} | X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, \dots, X(t_k) = x_k) \\ = P(X(t_{k+1}) = x_{k+1} | X(t_k) = x_k), \\ \forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} \in T, \quad \forall x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1} \in S. \end{aligned}$$

Μια Μαρκοβιανή διαδικασία ονομάζεται **χρονικά ομογενής** εάν για κάθε  $0 \leq u \leq t$  και για κάθε  $i, j \in S$  ισχύει,

$$P(X(t+u) = j | X(u) = i) = P(X(t) = j | X(0) = i) = p_{ij}(t).$$

Οι πιθανότητες  $p_{ij}(t) = P(X(t+u) = j | X(u) = i)$  λέγονται **πιθανότητες μετάβασης** από την  $i$  στην  $j$  κατάσταση σε χρόνο  $t$ , την στιγμή  $u$ . Για το υπόλοιπο της εργασίας θα απευθυνόμαστε πάντα σε ομογενείς Μαρκοβιανές αλυσίδες.

Οι τιμές των πιθανοτήτων μετάβασης ορίζουν ένα πίνακα γνωστό ως **πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης** ο οποίος συμβολίζεται ως  $\mathbf{P}(t) = (p_{ij}(t))$ . Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων ο πίνακας αυτός είναι στοχαστικός και ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- $p_{ij}(t) \geq 0$
- $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) = 1, \quad i \in S, \quad t \geq 0.$

Συνήθως ορίζουμε τον πίνακα  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ .

Για κάθε Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου αποδεικνύεται ότι οι πιθανότητες  $p_{ii}(t), p_{ij}(t)$  με  $i, j \in S$  ικανοποιούν τα παρακάτω όρια καθώς το  $t \rightarrow 0$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = q_{ij} \text{ για } i \neq j \text{ και } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-p_{ii}(t)}{t} = -q_i. \text{ Πράγματι,}$$

- Αφού  $p_{ii}(0) = 1$ ,  $p_{ij}(0) = 0$  τα όρια είναι οι παράγωγοι στο 0, δηλαδή  $\frac{d}{dt}p_{ij}(t)\Big|_{t=0} = q_{ij}$  &  $\frac{d}{dt}p_{ii}(t)\Big|_{t=0} = -q_i$ .
- Τα όρια υποδηλώνουν πως για “μικρό”  $h$ , ισχύει  $p_{ij}(h) = q_{ij}h + o(h)$ ,  $p_{ii}(h) = 1 - q_i h + o(h)$  δεδομένου ότι ισχύει  $\frac{o(h)}{h} \rightarrow 0$  όταν το  $h \rightarrow 0$ .
- Σημειώνεται πως το  $q_{ij}$  συμβολίζει τον **ρυθμό μετάβασης** από την  $i$  στην  $j$  κατάσταση ενώ το  $q_i$  συμβολίζει τον **ρυθμό εξόδου** από την κατάσταση  $i$ .

Στην συνέχεια θα ορίσουμε την τ.μ.  $T_i$  η οποία παριστάνει τον **χρόνο παραμονής** της  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  στην κατάσταση  $i \in S$ . Με λίγα λόγια η τ.μ.  $T_i$  είναι ο συνολικός χρόνος που απαιτείται μέχρι την μετάβαση από την  $i$  σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση  $j \in S$ .

Αποδεικνύεται εύκολα πως ο χρόνος παραμονής  $T_i$  προέρχεται από την εκθετική κατανομή. Πράγματι παρατηρούμε ότι,

$$\begin{aligned} P(T_i > t + h | T_i > t) &= P(X(t + h) = i | X(t) = i) = p_{ii}(h) \\ &= 1 - q_i h + o(h). \end{aligned}$$

Άρα η εν λόγω πιθανότητα είναι ανεξάρτητη του  $t$ . Οπότε, η  $T_i$  έχει την αμνήμονη ιδιότητα και επομένως  $T_i \sim \text{Exp}(q_i)$ .

## 1.2.2 Γεννήτορας πίνακας, εμφυτευμένη διαδικασία, εξισώσεις Chapman-Kolmogorov

### Ορισμός 1.2

Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου καθορίζεται πλήρως από τον πίνακα  $Q$  διάστασης  $n \times n$  και με συνιστώσες,

$$Q = (q_{ij})_{i,j \in S} = \begin{cases} -q_i, & \text{αν } i = j \\ q_{ij}, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Ο πίνακας  $Q$  ονομάζεται “**απειρωστός**” γεννήτορας πίνακας ή **πίνακας ρυθμών μετάβασης**. Προφανώς,

$$\text{➤ } q_i \geq 0 \text{ \& } q_{ij} \geq 0$$

$$\text{➤ } -q_i + \sum_{i \neq j} q_{ij} = 0,$$

δηλαδή το άθροισμα των στοιχείων των γραμμών του πίνακα είναι ίσο με το 0.

Η **εμφυτευμένη διαδικασία**  $\{X_r\}_{r \in N_0}$ , είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $P$ . Η  $\{X_r\}_{r \in N_0}$  συμπεριφέρεται σαν μια

Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με την διαφορά ότι οι μεταβάσεις συμβαίνουν μετά από χρονικό διάστημα  $T_i \sim \text{Exp}(q_i)$ , σε αντίθεση με τις Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου, που οι μεταβάσεις συμβαίνουν μετά από “συγκεκριμένα” (fixed) διαστήματα. Ισχύει για τα στοιχεία  $p_{ij} = P(X(r+1) = j | X(r) = i)$  που μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του  $Q$ :

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{-q_i}, & \text{για } j \neq i, & q_i > 0 \\ 0, & \text{για } j = i, & q_i = 0. \end{cases}$$

Επίσης ισχύει,

$$p_{ii} = \begin{cases} 0, & q_i > 0 \\ 1, & q_i = 0. \end{cases}$$

Οι πιθανότητες μετάβασης της εμφυτευμένης διαδικασίας παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον και θα αναφερθούμε αναλυτικά σε αυτές καθώς και στα διάφορα είδη καταστάσεων στην επόμενη ενότητα.

Οι εξισώσεις **Chapman-Kolmogorov** για κάθε  $u, t \geq 0$  είναι της μορφής,  $p_{ij}(t+u) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t)p_{kj}(u)$ .

Πράγματι,

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+u) &= P(X(t+u) = j | X(0) = i) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X(t+u) = j | X(t) = k, X(0) = i) P(X(t) = k | X(0) = i) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X(t+u) = j | X(t) = k) p_{ik}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{kj}(u) p_{ik}(t). \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την εξίσωση Chapman-Kolmogorov αν θέσουμε το  $u$  ίσο με “μικρό”  $h$  τότε προκύπτει,

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t)p_{kj}(h) = p_{ij}(t)p_{jj}(h) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t)p_{kj}(h)$$

$$\Leftrightarrow p_{ij}(t+h) = p_{ij}(t)(1 - q_j h) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t)q_{kj}h + o(h)$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = -q_j p_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t)q_{kj} + \frac{o(h)}{h}.$$

Για  $h \rightarrow 0^+$  και για  $i, j \in S$ , οι πιθανότητες μετάβασης  $p_{ij}(t)$  της Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου ικανοποιούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων των διαφόρων:

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} p_{ik}(t)q_{kj} - q_j p_{ij}(t).$$

Σε όρους πινάκων η παραπάνω σχέση γράφεται,  $\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$ , με αρχική συνθήκη  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ . Το αριστερό μέρος της εξίσωσης  $\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$ , ονομάζεται **προδρομική εξίσωση Kolmogorov** ενώ η εξίσωση  $\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$ , καλείται **οπισθοδρομική εξίσωση Kolmogorov**. Επίσης, οι πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης μπορούν να εκφραστούν υπό τους όρους του γεννήτορα πίνακα,

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Q}^n \frac{t^n}{n!}.$$

Οι καταστάσεις  $i$  και  $j$  μπορούν να επικοινωνούν μεταξύ τους εάν το  $i$  είναι προσβάσιμο από το  $j$  και αντίστροφα. Έστω  $C$  ένα υποσύνολο του χώρου καταστάσεων  $S$ . Εάν όλες οι καταστάσεις στο σύνολο  $C$  επικοινωνούν, το ονομάζουμε **σύνολο επικοινωνίας**. Εάν η μετάβαση δεν είναι εφικτή από οποιαδήποτε κατάσταση στο  $C$  προς οποιαδήποτε κατάσταση εκτός  $C$ , τότε το  $C$  σχηματίζει κλειστό σύνολο.

Ένα υποσύνολο  $C$  του χώρου καταστάσεων  $S$  λέγεται ότι είναι **κλειστό** αν  $p_{ij} = 0$  για κάθε  $i \in C$ ,  $j \notin C$ . Εάν το  $C$  βρίσκεται σε μια ενιαία κατάσταση, ας πούμε  $i$ , τότε το  $i$  λέμε ότι είναι μια **απορροφητική κατάσταση** (absorbing state) με  $p_{ii} = 1$ .

Ένα κλειστό σύνολο  $C$  όπου όλα τα μέλη επικοινωνούν είναι ένα **κλειστό σύνολο επικοινωνίας**. Μία διαδικασία δεν μπορεί ποτέ να φύγει από ένα κλειστό σύνολο αφού εισέλθει σε αυτό. Οι ακόλουθες 2 ταξινόμησεις υποδεικνύουν εάν και πότε μια διαδικασία επιστρέφει σε μια κατάσταση μετά την έξοδό της από αυτήν.

Μια κατάσταση  $i \in S$  είναι μια **μεταβατική κατάσταση** (transient state), εάν υπάρχει πιθανότητα επιστροφής στο  $i$  μετά την έξοδο είναι λιγότερο από 1. Μια κατάσταση  $i \in S$  είναι μια **επαναληπτική κατάσταση** (recurrent state), εάν υπάρχει πιθανότητα επιστροφής στο  $i$  μετά την έξοδο είναι ίση με 1. Οι επαναληπτικές καταστάσεις χωρίζονται σε δυο κατηγορίες σύμφωνα με το μέσο χρόνο επιστροφής στην κατάσταση  $i$ . Εάν ο χρόνος αυτός είναι πεπερασμένος μιλάμε για **θετικά επαναλαμβανόμενες** καταστάσεις, διαφορετικά μιλάμε για **μηδενικά επαναλαμβανόμενες** καταστάσεις. Επιπλέον, όλες οι καταστάσεις που ανήκουν σε ένα κλειστό σύνολο επικοινωνίας είναι πάντα θετικά επαναλαμβανόμενες.

### 1.2.3 Ιδιότητες γεννήτορα πίνακα, στάσιμη κατανομή και απορροφητικές Μαρκοβιανές αλυσίδες

Έστω  $\{X(t)\}_{t \in T}$  Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με πίνακα μετάβασης  $\mathbf{P}(t)$  και χώρο καταστάσεων  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Μια συνάρτηση πιθανότητας  $\pi$  στο  $S$ ,



δηλαδή ένα διάνυσμα  $\boldsymbol{\pi} = (p_i(0))_{i \in S}$ , όπου  $p_i(t) \in [0,1]$  και  $\sum_{i \in S} p_i(t) = 1$  ονομάζεται **στάσιμη κατανομή** για την  $\{X(t)\}_{t \in T}$ , εάν ισχύει η σχέση  $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}(t)$  για κάθε  $t \geq 0$ .

Η συνάρτηση πιθανότητας  $\boldsymbol{\pi} = (p_i(0))_{i \in S}$  καλείται **οριακή κατανομή** αν,

$$p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = j | X(0) = i), \quad \forall i, j \in S \text{ με } \sum_{j \in S} p_j(t) = 1.$$

Ουσιαστικά το διάνυσμα  $\boldsymbol{\pi} = (p_i(0))_{i \in S}$  είναι το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων της Μαρκοβιανής αλυσίδας μας.

Με βάση τα παραπάνω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου εάν έχει εμφυτευμένη διαδικασία θετικά επαναλαμβανομένη, τότε υπάρχει μια μοναδική στάσιμη κατανομή που δίνεται από την λύση των στάσιμων εξισώσεων,

$$\boldsymbol{\pi} \mathbf{Q} = 0 \text{ και } \sum_{i \in S} p_i = 1.$$

Εάν κάθε κατάσταση μέσα σε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι είτε απορροφητική είτε μεταβατική, τότε λεμέ πως έχουμε μια **απορροφητική Μαρκοβιανή αλυσίδα**. Ας υποθέσουμε πως ο χώρος καταστάσεων  $S$  μιας συνεχούς χρόνου Μαρκοβιανής διαδικασίας  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  είναι αριθμήσιμο και περιέχει ένα σύνολο μεταβατικών καταστάσεων  $S_T = \{1, 2, \dots, n\}$  καθώς και μια απλή απορροφητική κατάσταση  $\{n+1\}$ . Στη συνέχεια κατατάσσουμε τις καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου έτσι ώστε να εμφανίζονται πρώτα οι  $n$  μεταβατικές καταστάσεις και ο απειρωστός γεννήτορας πίνακας  $\mathbf{Q}$  γράφεται υπό την εξής μορφή:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_0 & \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}.$$

Συνδυάζοντας όλες τις μεταβατικές καταστάσεις μεταξύ τους σχηματίζεται ο υποπίνακας  $\mathbf{D}_0$  διάστασης  $n \times n$  ο οποίος περιγράφει μόνο τις μεταβάσεις μεταξύ των μεταβατικών καταστάσεων. Το επάνω δεξιά “στοιχείο”  $\mathbf{d}_1$  είναι ένα διάνυσμα διάστασης  $n \times 1$  το οποίο περιέχει τους ρυθμούς μετάβασης από τις μεταβατικές καταστάσεις στην απορροφητική κατάσταση. Τα στοιχεία του  $\mathbf{0}$  διανύσματος γραμμή είναι μηδενικά καθώς δεν υπάρχει καμία μετάβαση από την απορροφητική κατάσταση στις μεταβατικές καταστάσεις. Το τελευταίο στοιχείο του γεννήτορα πίνακα  $\mathbf{Q}$  είναι το 0 το οποίο απευθύνεται στο ρυθμό μετάβασης εκτός της απορροφητικής κατάστασης.

Εφόσον οι καταστάσεις είναι μεταβατικές τότε για τον πίνακα  $\mathbf{D}_0$  ισχύει η σχέση  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) < n+1) = 0$ , πράγμα το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η απορρόφηση γίνεται με πιθανότητα ίση με ένα. Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο πίνακας  $(-\mathbf{D}_0)^{-1}$  ο οποίος μας δίνει τον αναμενόμενο συνολικό χρόνο που ξοδεύτηκε στην κατάσταση  $j$  δεδομένου ότι η αρχική μας κατάσταση είναι η  $i$ .

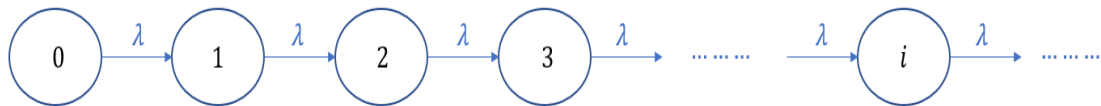
## 1.2.4 Εφαρμογές

### Εφαρμογή 1: Διαδικασία Poisson

Μια απαριθμήτρια διαδικασία Poisson  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  με ρυθμό  $\lambda > 0$ , είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Οι μεταβλητές  $T_i$  με  $i \in S$ , στην κατάσταση  $i - 1$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταβλητές που παριστάνουν τους χρόνους αναμονής, οι οποίες ακολουθούν εκθετική κατανομή με ρυθμό  $\lambda$ . Επίσης, στην συγκεκριμένη αλυσίδα αντιστοιχεί μια εμφυτευμένη αλυσίδα  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  διακριτού χρόνου με  $X_n = n$ . Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα ενδεικτικό σχήμα που απεικονίζει τις μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων.

#### ΣΧΗΜΑ 1-1

Διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων διαδικασίας Poisson



Οι ρυθμοί μετάβασης των καταστάσεων έχουν τις εξής τιμές,  $q_{ii} = -q_i = -\lambda$  και  $q_{ij} = \lambda$ , για  $i \neq j$ . Ο αντίστοιχος γεννήτορας πίνακας της διαδικασίας είναι ο παρακάτω,

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε μια τ.μ. της ανέλιξης Poisson την  $Y_n$  η οποία παριστάνει τον **χρόνο άφιξης** του  $n$  -γεγονότος. Ισχύει η σχέση,

$$Y_n = \sum_{i=1}^n T_i, i \geq 1.$$

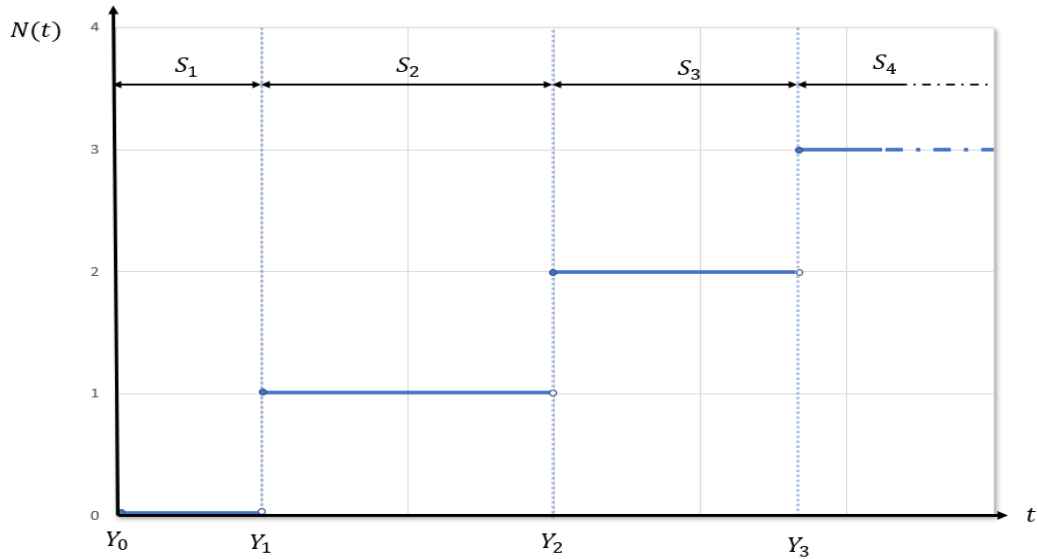
Η μεταβλητή αυτή ακολουθεί Erlang κατανομή με παραμέτρους  $n$  και  $\lambda$  με συνάρτηση πυκνότητας,

$$f_{Y_n}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}, & x \geq 0. \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Εξ' ορισμού θεωρούμε πως το  $Y_0 = 0$ . Ενδεικτικά δίνεται το παρακάτω σχήμα.

## ΣΧΗΜΑ 1-2

Διαγραμματική περιγραφή διαδικασίας Poisson



Όσον αφορά των υπολογισμό των πιθανοτήτων μετάβασης, οι λύσεις προκύπτουν από την διαφορική εξίσωση  $\frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) = \mathbf{Q} \mathbf{P}(t)$  από την οποία προκύπτει η σχέση,

$$p'_{ij}(t) = -\lambda p_{ij}(t) + \lambda p_{i+1,j}(t), \quad \forall i, j \in S.$$

Ύστερα από αναδρομική επίλυση των παραπάνω διαφορικών εξισώσεων σχηματίζονται οι εξής λύσεις:

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, & j \geq i \\ 0, & j < i. \end{cases}$$

### Εφαρμογή 2: Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου δυο καταστάσεων

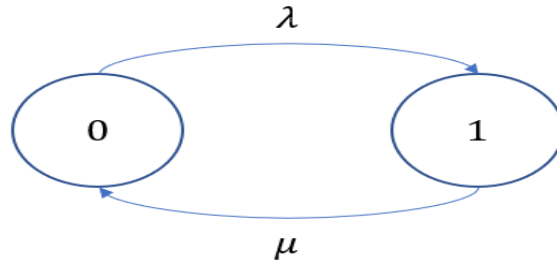
Δίνεται μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου  $\{X(t)\}_{t \in T}$  με χώρο καταστάσεων  $S = \{0,1\}$ . Επιπλέον δίνονται οι ρυθμοί μετάβασης  $q_{01} = \lambda$  και  $q_{10} = \mu$ . Γνωρίζοντας τους ρυθμούς μετάβασης μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τους ρυθμούς “εξόδου” από οποιαδήποτε κατάσταση:

$$q_0 = \sum_{j \in S} q_{0j} = q_{01} = \lambda \text{ και } q_1 = \sum_{j \in S} q_{1j} = q_{10} = \mu.$$

Ακολουθεί ενδεικτικό σχήμα της εν λόγω Μαρκοβιανής αλυσίδας,

### ΣΧΗΜΑ 1-3

Διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων Μαρκοβιανής αλυσίδα συνεχούς χρόνου δυο καταστάσεων



Ο αντίστοιχος γεννήτορας πίνακας της διαδικασίας είναι ο παρακάτω,

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

Σκοπός μας είναι ο υπολογισμός των πιθανοτήτων μετάβασης μέσω των προδρομικών εξισώσεων Kolmogorov. Ισχύουν οι σχέσεις,

$$p_{00}(t) + p_{01}(t) = 1 \text{ και } p_{10}(t) + p_{11}(t) = 1.$$

Επιπλέον, αν  $\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = p'_{ij}(t)$  τότε προκύπτει το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων,

$$\begin{aligned} p'_{00}(t) &= -\lambda p_{00}(t) + \mu p_{01}(t), & p_{00}(0) &= 1 \\ p'_{01}(t) &= -\mu p_{01}(t) + \lambda p_{00}(t), & p_{01}(0) &= 0 \\ p'_{10}(t) &= -\lambda p_{10}(t) + \mu p_{11}(t), & p_{10}(0) &= 0 \\ p'_{11}(t) &= -\mu p_{11}(t) + \lambda p_{10}(t), & p_{11}(0) &= 1 \end{aligned}$$

του οποίου οι λύσεις μας δίνουν τον παρακάτω πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} (1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} (1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix}.$$

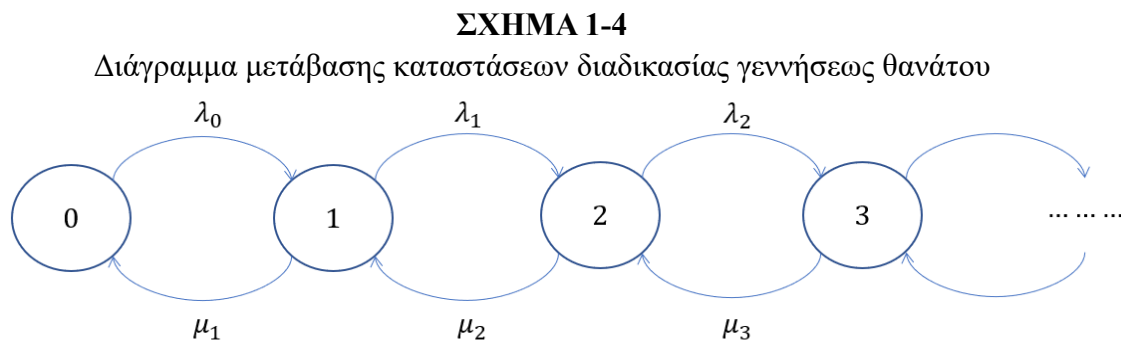
Παρατηρούμε ότι οι πιθανότητες μετάβασης συγκλίνουν εκθετικά καθώς το  $t \rightarrow \infty$ . Οι στάσιμες πιθανότητες υπάρχουν και είναι ανεξάρτητες της αρχικής κατάστασης και αυτό μας το δείχνει η παρακάτω σχέση,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{pmatrix}.$$

### Εφαρμογή 3: Διαδικασίες γεννήσεως θανάτου

Μια διαδικασία γεννήσεως θανάτου είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου  $\{X(t)\}_{t \in T}$  με χώρο καταστάσεων  $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  κατά την οποία κάθε μετάβαση κατάστασης η οποία αυξάνεται κατά μία, δηλαδή για παράδειγμα η μετάβαση από την  $i$  στην  $i + 1$  κατάσταση ονομάζεται “γέννηση” διαφορετικά όταν μειώνεται κατά μία κατάσταση ονομάζεται “θάνατος”.

Όταν το σύστημα μας βρίσκεται σε μια κατάσταση  $i$ , τότε η “γέννηση” συμβαίνει με ρυθμό  $\lambda_i$ ,  $\forall i \geq 0$  ενώ ο “θάνατος” συμβαίνει με ρυθμό  $\mu_i$ ,  $\forall i \geq 0$ . Ενδεικτικό είναι το επόμενο σχήμα:



Ο γεννήτορας πίνακας της διαδικασίας γεννήσεως θανάτου διαμορφώνεται ως εξής:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

η επίλυση της εξίσωσης  $\pi Q = \mathbf{0}$  μας δίνει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων,

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$$

$$(\lambda_i + \mu_i) p_i = \lambda_{i-1} p_{i-1} + \mu_{i+1} p_{i+1}, \quad \forall i \geq 1.$$

Στην περίπτωση που η διαδικασία μας είναι θετικά επαναλαμβανόμενη τότε το παραπάνω σύστημα παρουσιάζει μια και μοναδική λύση η οποία ονομάζεται **στάσιμη κατανομή ή οριακή κατανομή ή κατανομή equilibrium**. Στη συνέχεια ορίζουμε τα παρακάτω αθροίσματα,

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}, \quad S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \lambda_k \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_i + 1} \right)^{-1}.$$

Με βάση τα αποτελέσματα των 2 αυτών αθροισμάτων προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα για τη διαδικασία γεννήσεως θανάτου:

- Θα είναι θετικά επαναληπτική αν και μόνο αν το  $S_1 < \infty$  και  $S_2 = \infty$ .
- Θα είναι μηδενικά επαναληπτική αν και μόνο αν  $S_1 = \infty$  και  $S_2 = \infty$ .
- Θα είναι μεταβατική αν και μόνο αν  $S_1 = \infty$  και  $S_2 < \infty$ .

### 1.3 Κατανομές τύπου φάσεως συνεχούς χρόνου

Μια κατανομή φάσεως τύπου ορίζεται ως η κατανομή της διάρκειας ζωής  $X$ , δηλαδή του χρόνου που απαιτείται για την είσοδο σε μια κατάσταση απορρόφησης από το σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων  $S_T$  μιας απορροφητικής συνεχούς χρόνου Μαρκοβιανής διαδικασίας  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ . Ο χώρος των πεπερασμένων καταστάσεων  $S$  περιέχει το σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων  $S_T = \{1, \dots, n\}$  και το σύνολο των απορροφητικών καταστάσεων  $S_A = \{n+1\}$ . Οι μεταβατικές καταστάσεις καλούνται *φάσεις*. Μια κατανομή φάσεως τύπου με  $n$  μεταβατικές καταστάσεις θα λέμε ότι είναι *τάξεως  $n$* . Επιπλέον η Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  έχει αρχικό διάνυσμα πιθανότητας  $[\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}(n+1)]$  και απειρωστό γεννήτορα πίνακα  $\boldsymbol{Q}$ , τους τύπους των οποίων έχουμε δώσει στην υποενότητα 1.2.3. Κατά κύριο λόγο, το  $\boldsymbol{\pi}$  είναι ένα διάνυσμα γραμμή μεγέθους  $n$ , το  $\boldsymbol{\pi}(n+1)$  είναι το αρχικό διάνυσμα πιθανότητας για την απορροφητική κατάσταση  $n+1$ . Σημειώνεται, λόγω της ιδιότητας του γεννήτορα πίνακα  $\boldsymbol{Q}$  όπου το άθροισμα των στοιχείων των γραμμών του ισούται με το μηδέν, προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\boldsymbol{D}_0 \mathbf{1} + \boldsymbol{d}_1 = \mathbf{0},$$

όπου  $\mathbf{1}$ , είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στήλη  $n \times 1$  διάστασης, αντίστοιχα ισχύει το ίδιο και για το διάνυσμα  $\mathbf{0}$ . Με βάση τα παραπάνω ισχύουν τα εξής:

$$\boldsymbol{D}_0(i, i) \leq 0, \boldsymbol{D}_0(i, j) \geq 0 \text{ για } i \neq j, \boldsymbol{d}_1(i) \geq 0 \text{ και } \sum_{j \in S_T} \boldsymbol{D}_0(i, j) \leq 0.$$

Η μαρκοβιανή διαδικασία αρχίζει από κάποια τυχαία κατάσταση  $S = S_T \cup S_A$ . Επιπλέον όπως αναφέραμε νωρίτερα το διάνυσμα  $\boldsymbol{\pi} = [\pi(1), \dots, \pi(n)]$  περιγράφει τις αρχικές πιθανότητες για τις μεταβατικές καταστάσεις και η τιμή  $\pi(n+1)$  δίνει την πιθανότητα για άμεση εκκίνηση στην μεταβατική κατάσταση, η οποία καλείται σημειακή μάζα στο μηδέν. Επομένως ισχύει η σχέση  $\boldsymbol{\pi} \mathbf{1} + \pi(n+1) = 1$ . Στις περισσότερες περιπτώσεις το  $\pi(n+1) = 0$  και δεν υπάρχει εκκίνηση της διαδικασίας στην απορροφητική κατάσταση  $n+1$ . Άρα για το υπόλοιπο της εργασίας θα θεωρούμε ότι  $\boldsymbol{\pi} \mathbf{1} = 1$  πράγμα το οποίο σημαίνει πως η τ.μ.  $X$  θα είναι αυστηρά θετική. Αφού έχουμε μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου ο χρόνος παραμονής κάθε φάσης  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$  κατανέμεται εκθετικά με παράμετρο  $-\boldsymbol{D}_0(i, i)$  και συνάρτηση κατανομής  $P(T_i \leq t) = 1 - e^{-q_i t}$ ,  $t \geq 0$ . Για τα διαγώνια στοιχεία του υποπίνακα  $\boldsymbol{D}_0$  ισχύει ο τύπος:

$$D_0(i, i) = - \left( \sum_{j \neq i} D_0(i, j) + d_1(i) \right).$$

Το διάνυσμα  $\mathbf{d}_1$  ουσιαστικά αναπαριστά τον ρυθμό εξόδου, δηλαδή το  $\mathbf{d}_1(i)$  περιγράφει την ένταση στην κατάσταση  $i$  για την έξοδο από το  $S_T$  και την μετάβαση στην κατάσταση απορρόφησης  $n + 1$ .

Σύμφωνα με τα παραπάνω θα λέμε πως η τ.μ.  $X$ , περιγράφει τον χρόνο απορρόφησης ακολουθεί κατανομή φάσεως τύπου με αναπαράσταση  $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{D}_0)$  και συμβολίζεται ως  $PH^{(n)}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{D}_0)$ .

### 1.3.1 Ανάλυση κατανομών φάσεως τύπου

Στην παράγραφο αυτή θα αναλύσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες. Στο παρακάτω θεώρημα δίνεται η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των συνεχών κατανομών φάσεως τύπου.

#### Θεώρημα 1.1

Έστω η τ.μ.  $X \sim PH^{(n)}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{D}_0)$ . Η συνάρτηση κατανομής δίνεται από τον τύπο,

$$F(x) = 1 - \boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{D}_0 x}, \quad x \geq 0$$

και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,

$$f(x) = \boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{D}_0 x} \mathbf{d}_1, \quad x \geq 0.$$

Ο εκθετικός πίνακας  $e^{\mathbf{Q}}$  ορίζεται από τον τύπο,

$$e^{\mathbf{Q}} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \mathbf{Q}^k.$$

**Απόδειξη:**

Έστω ότι έχουμε μια Μαρκοβιανή διαδικασία  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  και έναν απειροστό γεννήτορα πίνακα  $\mathbf{Q}$ . Τα στοιχεία του πίνακα μετάβασης  $\mathbf{P}_t$  δίνονται από τον τύπο  $\mathbf{P}_t = P(X(t) = j | X(0) = i)$ , δηλαδή της πιθανότητας να βρισκόμαστε στην φάση  $j$  την χρονική στιγμή  $t$ , δοθέντος ότι η αρχική μας φάση είναι η  $i$ . Αυτές οι πιθανότητες δίνονται από την ισότητα  $\mathbf{P}_t = e^{\mathbf{Q}t}$  όπου,

$$e^{\mathbf{Q}t} = \begin{pmatrix} e^{\mathbf{D}_0 t} & \mathbf{1} - e^{\mathbf{D}_0 t} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

Για την κατανομή του χρόνου μέχρι την απορρόφηση προκύπτει ότι,

$$\begin{aligned}
F(t) &= P(X(t) = n + 1) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n+1} P(X(0) = i)P(X(t) = n + 1 | X(0) = i) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n+1} \boldsymbol{\pi}(i) \mathbf{P}_t(i, n + 1) \\
&= \boldsymbol{\pi} \mathbf{1} - e^{\mathbf{D}_0 t} \mathbf{1} \\
&= 1 - \boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{D}_0 t} \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Εάν παραγωγίσουμε την σχέση αυτή θα πάρουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $F'(t) = -\boldsymbol{\pi} \frac{d}{dt} \mathbf{P}_t \mathbf{1} = -\boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{D}_0 t} \mathbf{D}_0 \mathbf{1} = \boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{D}_0 t} \mathbf{d}_1$ , όπου  $\mathbf{d}_1 = -\mathbf{D}_0 \mathbf{1}$ .

Ο αναμενόμενος συνολικός χρόνος που δαπανήθηκε στην φάση  $j$  πριν την απορρόφηση, δεδομένου ότι η αρχική φάση είναι η  $i$  και ισούται με  $-\mathbf{D}_0^{-1}$ . Η ροπή  $r$  τάξης,  $\mu_r$ , της κατανομής φάσεως τύπου δίνεται από τον τύπο,

$$\mu_r = E(X^r) = r! \boldsymbol{\pi} (-\mathbf{D}_0^{-1})^r \mathbf{1}.$$

Ο ρυθμός των παρατηρούμενων γεγονότων (event rate) δίνεται από τον τύπο,

$$\lambda = \frac{1}{E(X)} = \frac{1}{\boldsymbol{\pi} (-\mathbf{D}_0^{-1}) \mathbf{1}}.$$

Ο τύπος για τον συντελεστή μεταβλητότητας υψωμένο στο τετράγωνο είναι ο εξής,

$$C^2 = \frac{E(X^2)}{(E(X))^2} - 1 = \frac{2\boldsymbol{\pi} (-\mathbf{D}_0^{-1})^2 \mathbf{1}}{(\boldsymbol{\pi} (-\mathbf{D}_0^{-1}) \mathbf{1})^2} - 1.$$

### 1.3.2 Πρότυπα συνεχών κατανομών φάσεως τύπου

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε ορισμένα παραδείγματα συνεχών κατανομών φάσεως τύπου τα οποία θα μας οδηγήσουν σε γνωστές συνεχείς κατανομές.

- **Εκθετική κατανομή**

Η εκθετική κατανομή αποτελεί την πιο απλή περίπτωση κατανομής φάσεως τύπου με μια και μόνο μεταβατική κατάσταση και χαρακτηρίζεται από τον από την παράμετρο ρυθμού  $\lambda$ . Με βάση το γεγονός αυτό το  $\boldsymbol{\pi} = (1)$ , με την μόνη επίσκεψη

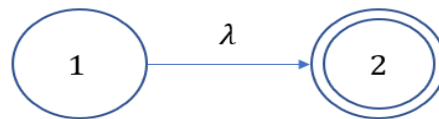


στην μεταβατική κατάσταση να γίνεται πριν την απορρόφηση. Ο αντίστοιχος γεννήτορας πίνακας περιλαμβάνει τα διανύσματα  $\mathbf{D}_0 = (-\lambda)$  και το διάνυσμα εξόδου  $\mathbf{d}_1 = (\lambda)$ . Επομένως ο τελικός γεννήτορας πίνακας διαμορφώνεται ως εξής,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### ΣΧΗΜΑ 1-5

Μαρκοβιανή αναπαράσταση της εκθετικής κατανομής με παράμετρο ρυθμού  $\lambda$ .



Η εκθετική κατανομή έχει πυκνότητα,

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

και η συνάρτηση κατανομής δίνεται από τον τύπο,

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Επιπλέον να τονίσουμε πως είναι η μόνη συνεχής κατανομή στην οποία ισχύει η αμνήμονος ιδιότητα,

$$P(X > t + s | X > t) = P(X > s), \quad \forall t, s \geq 0.$$

Η μέση τιμή θα είναι  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$  και η διασπορά δίνεται από τον τύπο  $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ .

- **Erlang κατανομή**

Η κατανομή Erlang ουσιαστικά αναπαρίσταται ως το άθροισμα  $n$  εκθετικών φάσεων με την ίδια ένταση  $\lambda$ . Θεωρούμε  $n$  αμοιβαία ανεξάρτητες, εκθετικά κατανομημένες τ.μ.  $X_i$  με παράμετρο  $\lambda > 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Εάν ορίσουμε την τ.μ.  $Y$  ως  $Y = \sum_{1 \leq i \leq n} X_i$ , τότε θα ακολουθεί κατανομή Erlang η οποία συμβολίζεται  $E(n, \lambda)$  και η συνάρτησης πυκνότητας δίνεται από τον τύπο,

$$f(y) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\lambda y}, \quad y \geq 0.$$

Η συνάρτηση κατανομής δίνεται από τον τύπο,

$$F(y) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda y)^i}{i!} e^{-\lambda y}, \quad y \geq 0.$$

Η ροπή τάξεως  $r$  μιας τ.μ.  $Y$  που ακολουθεί κατανομή Erlang δίνεται από τον τύπο,

$$E(Y^r) = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!} \frac{1}{\lambda^r}.$$

Επιπλέον, η μέση τιμή της  $Y$  θα είναι  $E(Y) = \frac{n}{\lambda}$  και η διασπορά δίνεται από τον τύπο  $Var(Y) = \frac{n}{\lambda^2}$ .

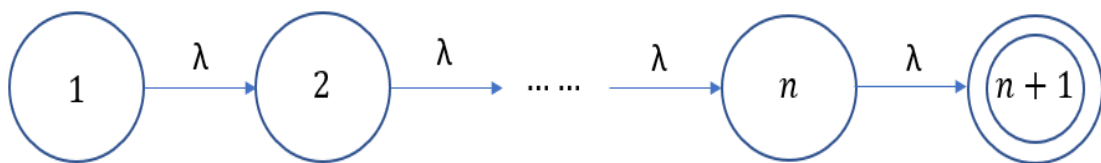
Η Μαρκοβιανή διαδικασία στην περίπτωση μας περιγράφεται από τον απειροστό γεννήτορα πίνακα ο οποίος αποτελείται από τον υποπίνακα,

$$D_0 = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

το διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων  $\boldsymbol{\pi} = (1, 0, \dots, 0)$  καθώς και το μηδενικό διάνυσμα και το στοιχείο μηδέν.

### ΣΧΗΜΑ 1-6

Μαρκοβιανή αναπαράσταση της Erlang κατανομής  $E(n, \lambda)$ .



Η Μαρκοβιανή διαδικασία πρέπει να ξεκινήσει στη φάση ένα και να διασχίσει τις διαδοχικές καταστάσεις μέχρι να φτάσει στην κατάσταση απορρόφησης  $n + 1$ . Έτσι, ο χρόνος απορρόφησης που περιγράφεται από την μεταβλητή  $Y$  είναι το άθροισμα όλων των χρόνων παραμονής οι οποίοι κατανέμονται εκθετικά με παράμετρο  $\lambda$ . Η κατανομή Erlang έχει συντελεστή μεταβλητότητας υψωμένο στο τετράγωνο  $C^2 = n^{-1}$  ο οποίος είναι μικρότερος της μονάδας για  $n > 1$ . Οι κατανομές με συντελεστή διακύμανσης μεγαλύτερο της μονάδας μπορούν να μοντελοποιηθούν ως πεπερασμένες μίξεις εκθετικών κατανομών.

Η κατανομή Erlang με μέση τιμή  $m$  έχει διακύμανση  $\frac{m^2}{n}$  η οποία για  $n \rightarrow \infty$  τείνει να είναι ντετερμινιστική. Στην περίπτωση αυτή ο συντελεστής μεταβλητότητας

υψωμένος στο τετράγωνο βρίσκεται κοντά στο μηδέν και εκφράζει τη διακύμανση της τ.μ. σε σχέση με την μέση τιμή του. Με βάση αυτό συμπεραίνουμε πως η κατανομή Erlang μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσεγγίσει γνωστές συνεχείς κατανομές.

- **Hypoexponential κατανομή**

Η hypoexponential κατανομή αποτελεί μια γενίκευση της Erlang κατανομής. Θεωρούμε ένα σύνολο εκθετικών κατανομών  $F_i(\cdot)$  με

$$F_i(x) = 1 - e^{-\lambda(i)x}, \quad x \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

και οι παράμετροι ρυθμού  $\lambda(1), \dots, \lambda(n)$  δεν ταυτίζονται απαραίτητα. Κατά συνέπεια έχουμε,

$$f_i(x) = \lambda(i)e^{-\lambda(i)x}, \quad x \geq 0.$$

Η hypoexponential κατανομή χαρακτηρίζεται από το πλήθος  $n$  και το σύνολο των παραμέτρων  $\lambda(i)$ . Η συνάρτηση πυκνότητας δεν είναι από τον τύπο,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \left( \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{\lambda(j)}{\lambda(j) - \lambda(i)} \right) f_i(x), \quad x \geq 0, \quad \lambda(i) \neq \lambda(j), \quad \forall i \neq j.$$

Η μέση τιμή και η διασπορά μιας τ.μ. που ακολουθεί υπό-εκθετική κατανομή θα είναι αντίστοιχα  $E(X) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda(i)}$  και  $Var(X) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda(i)^2}$ . Στην περίπτωση που όλοι οι παράμετροι  $\lambda(i)$  είναι ίσοι μεταξύ τους, προκύπτει η Erlang κατανομή αφού προκύπτει συνέλιξη  $n$  όμοιων εκθετικών κατανομών.

Η Μαρκοβιανή διαδικασία στην περίπτωση μας περιγράφεται από τον απειροστό γεννήτορα πίνακα ο οποίος αποτελείται από τον υποπίνακα,

$$D_0 = \begin{pmatrix} -\lambda(1) & \lambda(1) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda(2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda(n-1) & \lambda(n-1) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda(n) \end{pmatrix}$$

το διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων  $\boldsymbol{\pi} = (1, 0, \dots, 0)$  καθώς και το μηδενικό διάνυσμα και το στοιχείο μηδέν.

### ΣΧΗΜΑ 1-7

Μαρκοβιανή αναπαράσταση της hyperexponential κατανομής.



- **Hyperexponential κατανομή**

Η hyperexponential κατανομή είναι μια κυρτή μείξη  $n$  εκθετικών κατανομών. Η συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από τον τύπο,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \pi(i)\lambda(i)e^{-\lambda(i)x}, \quad x \geq 0,$$

όπου  $\pi(i) > 0$  για όλες τις φάσεις  $i$  και  $\sum_{i=1}^n \pi(i) = 1$ . Η συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ.  $X$  που ακολουθεί hyperexponential κατανομή δίνεται από τον τύπο,

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \pi(i)(1 - e^{-\lambda(i)x}), \quad x \geq 0.$$

Η πρώτη ροπή θα είναι  $E(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\pi(i)}{\lambda(i)}$  και η διακύμανση θα δίνεται από τον τύπο,

$$Var(X) = 2 \sum_{i=1}^n \frac{\pi(i)}{\lambda(i)^2} - \left( \sum_{i=1}^n \frac{\pi(i)}{\lambda(i)} \right)^2.$$

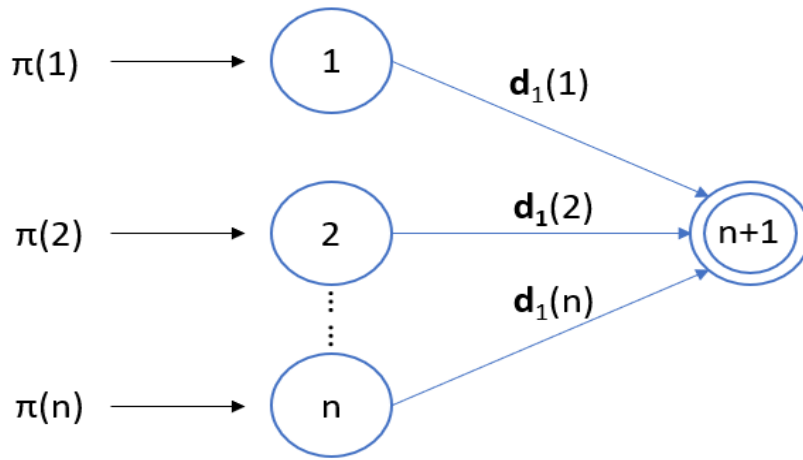
Ο πίνακας εντάσεων της hyperexponential κατανομής θα είναι της μορφής,

$$D_0 = \begin{pmatrix} -\lambda(1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda(2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda(n-1) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda(n) \end{pmatrix}$$

και το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων θα είναι  $\boldsymbol{\pi} = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$ .

### ΣΧΗΜΑ 1-8

Μαρκοβιανή αναπαράσταση της hyperexponential κατανομής.



Σύμφωνα με τα παραπάνω διαπιστώνουμε πως η μαρκοβιανή διαδικασία μπορεί να ξεκινήσει σε οποιαδήποτε φάση και από αυτό προκύπτει πως ο συντελεστής μεταβλητότητας υψωμένος στο τετράγωνο είναι μεγαλύτερος ή ίσος του ένα για την περίπτωση που το  $n = 1$ .

$$C^2 = \frac{E(Y^2)}{(E(Y))^2} - 1 = 2 \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\pi(i)}{\lambda(i)^2}}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\pi(i)}{\lambda(i)}\right)^2} - 1.$$

- **Coxian και γενικευμένες Coxian κατανομές**

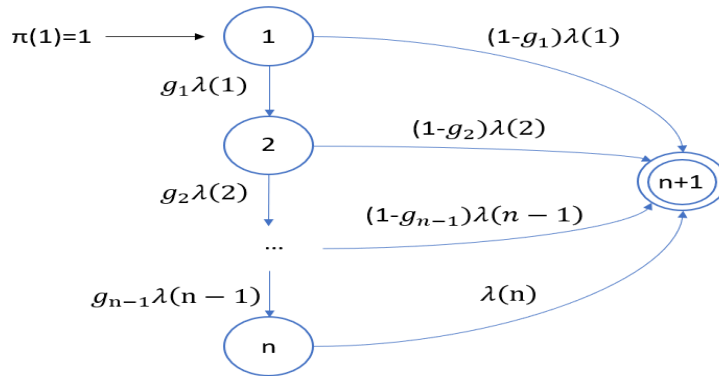
Οι Coxian κατανομές μπορούν να θεωρηθούν μια μείξη hyperexponential και hyperexponential κατανομών. Το αρχικό διάνυσμα της κατανομής είναι το  $\boldsymbol{\pi} = (1, 0, \dots, 0)$ . Αφού ξεκινήσει η διαδικασία από τη φάση ένα στη συνέχεια διασχίζει  $n$  διαδοχικές φάσεις με πιθανόν διαφορετικές παραμέτρους ρυθμού  $\lambda(i)$ . Από την φάση  $i$  η μετάβαση στην επόμενη φάση  $i + 1$  συμβαίνει με πιθανότητα  $g_i$  ή η κατάσταση απορρόφησης επιτυγχάνεται με συμπληρωματική πιθανότητα  $1 - g_i$ .

Ο πίνακας αναπαράστασης της Coxian κατανομής που προκύπτει είναι ο εξής,

$$D_0 = \begin{pmatrix} -\lambda(1)g_1\lambda(1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda(2)g_2\lambda(2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda(n-1)g_{n-1}\lambda(n-1) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda(n) \end{pmatrix}$$

### ΣΧΗΜΑ 1-9

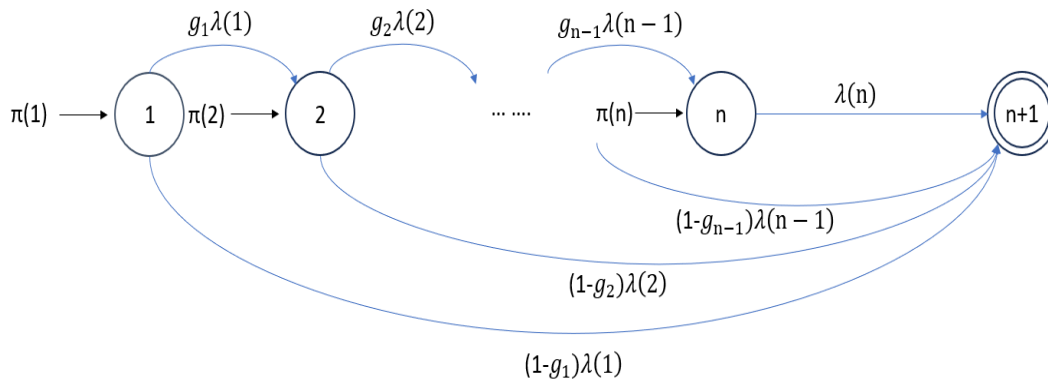
Γραφική αναπαράσταση της Coxian κατανομής.



Όσον αφορά τη γενικευμένη Coxian κατανομή, προκύπτει εάν επεκτείνουμε την κατανομή Coxian με ένα τυχαίο αρχικό διάνυσμα  $\boldsymbol{\pi}$ , έτσι ώστε κάθε κατάσταση να μπορεί να είναι μια κατάσταση εισόδου.

### ΣΧΗΜΑ 1-10

Γραφική αναπαράσταση της γενικευμένης Coxian κατανομής.



## 1.4 Αριθμητικό παράδειγμα συνεχούς κατανομής φάσεως τύπου

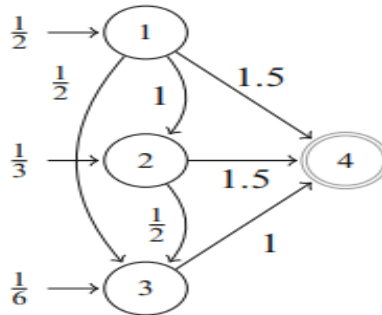
Έστω τ.μ.  $X$  ακολουθεί μια συνεχή κατανομή φάσεως τύπου διάστασης 3, δηλαδή  $X \sim PH^{(3)}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{D}_0)$ , με αναπαράσταση

$$\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right), \quad \mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0.5 \\ 0 & -2 & 0.5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

οπότε προκύπτει το  $\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

### ΣΧΗΜΑ 1-11

Διάγραμμα μετάβασης των καταστάσεων της κατανομής  $PH^{(3)}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{D}_0)$ .



Από το Θεώρημα 1.1 η συνάρτηση κατανομής καθώς και η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ.  $X$  μπορεί να βρεθεί από τους τύπους  $F(x) = 1 - \boldsymbol{\pi}e^{\mathbf{D}_0x}$ ,  $x \geq 0$  και  $f(x) = \boldsymbol{\pi}e^{\mathbf{D}_0x}\mathbf{d}_1$ ,  $x \geq 0$ .

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση rphtype και dphtype του πακέτου actuar της γλώσσας προγραμματισμού R βρίσκουμε τις ακόλουθες τιμές των παραπάνω συναρτήσεων.

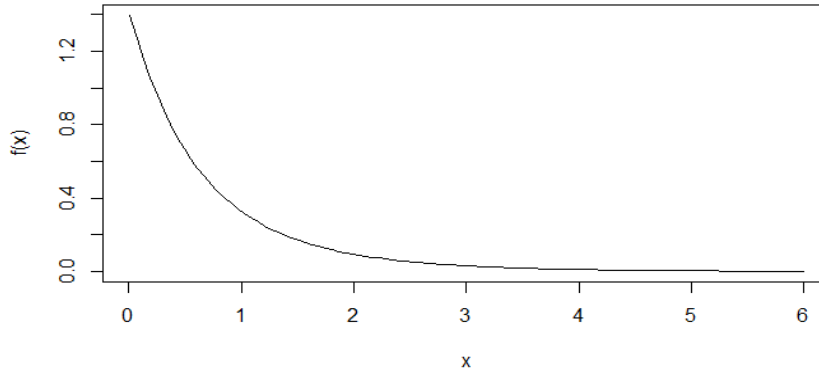
**Πίνακας 1.1.** Συνάρτηση πυκνότητας και συνάρτηση κατανομής της  $X \sim PH^{(3)}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{D}_0)$ .

$x$	$f(x)$	$F(x)$
0.5	0.660	0.493
1	0.327	0.729
1.5	0.172	0.849
2	0.094	0.913
2.5	0.053	0.949
3	0.031	0.970
3.5	0.018	0.982
4	0.011	0.989
4.5	0.006	0.993
5	0.004	0.996
5.5	0.002	0.997
6	0.001	0.998

Ενδεικτικά είναι τα ακόλουθα σχήματα.

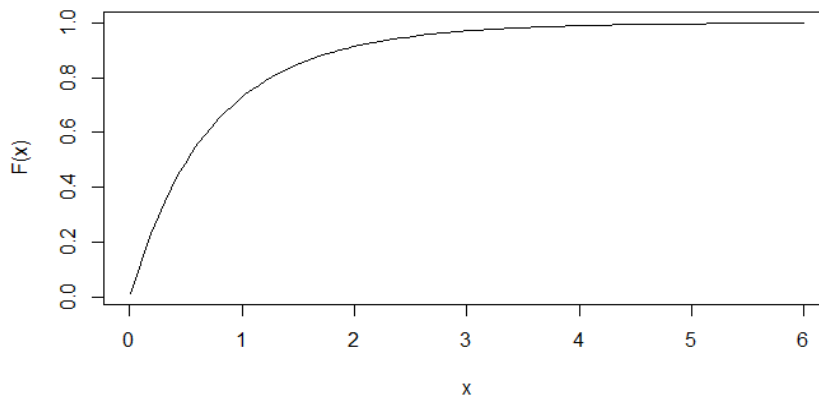
### ΣΧΗΜΑ 1-12

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $X$ .



### ΣΧΗΜΑ 1-13

Συνάρτηση κατανομής της  $X$ .



Οι ροπές  $r$  τάξης της  $X$  προκύπτουν από το Θεώρημα 1.1. Ενδεικτικός είναι ο ακόλουθος πίνακας.

**Πίνακας 1.2.** Ροπές της  $X \sim PH^{(3)}(\pi, D_0)$ .

$r$	1	2	3	4	5
$\mu_r = E(X^r)$	0.792	1.375	3.812	14.625	71.562



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## Θεωρία χρεοκοπίας και κατανομές τύπου φάσεων

### 2.1 Εισαγωγή

Ένα από τα κυρίαρχα ζητήματα στις επιχειρήσεις, εμπορικές, ασφαλιστικές, επενδυτικές κτλ. είναι η βιωσιμότητα σε μεγάλο χρονικό διάστημα, δηλαδή στο διηνεκές. Υπάρχουν ασφαλώς πολλοί παράγοντες που μπορούν να παρατείνουν το καταστροφικό γεγονός αυτό της χρεοκοπίας, όπως για παράδειγμα ένα μεγάλο αποθεματικό κεφάλαιο, αλλά δεν μπορεί η χρεοκοπία να αποφευχθεί αν η διαχείριση δεν είναι ορθή ή τα έσοδα είναι συνεχώς λιγότερα από τα έξοδα. Στόχοι των εταιρειών είναι είτε η ελαχιστοποίηση της πιθανότητας χρεοκοπίας ή ισοδυνάμως η μετάθεση αυτής ακόμη περισσότερο στο διηνεκές χρόνο.

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο καθώς και για το υπόλοιπο της παρούσας εργασίας θα ασχοληθούμε με το κλασικό μοντέλο σε άπειρο χρόνο λειτουργίας, ένα μοντέλο το οποίο έχει μελετηθεί περισσότερο σε σχέση με άλλα μοντέλα σε πεπερασμένο ή διακριτό χρόνο. Ένα από τα πιο σημαντικά ζητήματα της θεωρίας χρεοκοπίας είναι ο ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας  $\psi(u)$ , ο οποίος είναι γνωστός μόνο σε συγκεκριμένες απλές περιπτώσεις όταν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι κατανομή με ελαφριά ουρά. Στην περίπτωση που οι αποζημιώσεις μας ακολουθούν κατανομή με βαριά ουρά η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογιστεί κατά κύριο λόγο με προσεγγιστικές μεθόδους, με εξαίρεση κάποιων περιπτώσεων όπως αναγράφεται στην εργασία του Ramsay (2003) όπου και θα δούμε στη συνέχεια του κεφαλαίου. Για την συγγραφή του συγκεκριμένου κεφαλαίου χρησιμοποιήθηκε βιβλιογραφία από τους Πολίτης (2012), Asmussen & Albrecher (2010), Ramsay (2003), Gerber et al. (1987), Asmussen & Biswanger (1997) και Κωνσταντινίδης (2011).

### 2.2 Η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος και το κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας

Στο συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνων χρησιμοποιούμε μία τ.μ.  $S = \sum_{i=1}^N X_i$ , η οποία έχει μια σύνθετη κατανομή που απευθύνεται στο πλήθος των αποζημιώσεων που προέρχονται από ένα χαρτοφυλάκιο. Η τ.μ  $N$  είναι μια διακριτή μεταβλητή που στο συλλογικό πρότυπο συμβολίζει το πλήθος των απαιτήσεων που φτάνουν σε ένα προκαθορισμένο χρονικό διάστημα.

Συγκεκριμένα στη θεωρία χρεοκοπίας εξετάζουμε τις συνολικές αποζημιώσεις που φτάνουν σε ένα χαρτοφυλάκιο όπως αυτές εξελίσσονται στο χρόνο. Επομένως, είναι

λογικό να χρησιμοποιήσουμε μια στοχαστική διαδικασία,  $\{S(t): t \geq 0\}$  που να συμβολίζει το συνολικό μέγεθος των αποζημιώσεων. Αντίστοιχα, η τ.μ.  $N$  θα αντικατασταθεί από μία στοχαστική διαδικασία  $\{N(t): t \geq 0\}$  η οποία καταγράφει το συνολικό πλήθος των αποζημιώσεων που καταφθάνουν σε μια εταιρεία.

Επομένως, η στοχαστική διαδικασία  $\{S(t): t \geq 0\}$  είναι μία **σύνθετη** ανέλιξη που ορίζεται από την σχέση,

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & N(t) \geq 1 \\ 0, & N(t) = 0. \end{cases}$$

Το σημαντικότερο παράδειγμα μιας τέτοιας ανέλιξης, είναι αυτή στην οποία η  $\{N(t): t \geq 0\}$  είναι μία ανέλιξη Poisson, οπότε τότε λέμε ότι η  $\{S(t): t \geq 0\}$  ακολουθεί μία **σύνθετη ανέλιξη Poisson**.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την **στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος** η οποία συμβολίζεται ως  $\{U(t): t \geq 0\}$  και για κάθε  $t \geq 0$  δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$U(t) = u + P(t) - S(t),$$

όπου η ποσότητα  $u$  συμβολίζει το αρχικό αποθεματικό,  $P(t)$  είναι τα συνολικά ασφάλιστρα που λαμβάνει η εταιρεία στο διάστημα  $[0, t]$  και  $S(t)$  είναι η σύνθετη ανέλιξη των συνολικών αποζημιώσεων που αναφέραμε παραπάνω.

### 2.2.1 Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας

Προκειμένου να ισχύει το **κλασικό μοντέλο** της θεωρίας κινδύνων θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις:

- Η ποσότητα  $P(t)$  θα είναι μια γραμμική συνάρτηση της μορφής  $P(t) = ct$ ,  $c > 0$  και η μεταβλητή  $c$  ονομάζεται **ένταση του ασφάλιστρου** καθώς εκφράζει το ασφάλιστρο που πληρώνεται στη μονάδα του χρόνου.
- Οι μεταβλητές  $X_i$ , οι οποίες συμβολίζουν το μέγεθος των αποζημιώσεων θα πρέπει να είναι ανεξάρτητες και ισόνομες καθώς και να είναι ανεξάρτητες από τον αριθμό των αποζημιώσεων σε ένα διάστημα  $N(t)$ .
- Η απαριθμητρία ανέλιξη  $\{N(t): t \geq 0\}$  πρέπει να είναι μία ανέλιξη Poisson, ώστε η  $\{S(t): t \geq 0\}$  να ακολουθεί μία σύνθετη ανέλιξη Poisson. Η ένταση της συμβολίζεται με την μεταβλητή  $\lambda$ .

Για την περίπτωση που μελετάμε οι αποζημιώσεις μας, δηλαδή οι τ.μ.  $X_i$  είναι συνεχείς. Έστω ότι η  $F$  δηλώνει την κατανομή των αποζημιώσεων, ισχύει η σχέση,

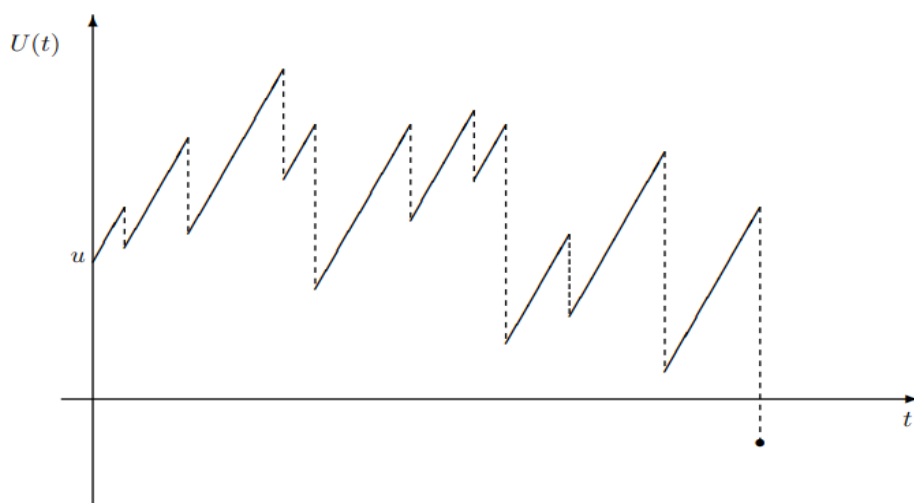
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(y) dy.$$

Από εδώ καταλήγουμε στη σχέση που μας δίνει την  $k$ -τάξης ροπή της  $F$  γύρω από το μηδέν,

$$\mu_k = \int_0^{\infty} x^k dF(x) = \int_0^{\infty} x^k f(x) dx.$$

### ΣΧΗΜΑ 2-1

Η ανέλιξη του πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο (βλέπε Πολίτης (2012)).



Μία από τις βασικότερες υποθέσεις που κάνουμε προκειμένου να ισχύει το κλασικό μοντέλο είναι η **συνθήκη του καθαρού κέρδους**, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$c > \lambda\mu_1.$$

Παρατηρούμε πως το δεξί μέλος της ανισότητας συμβολίζει το μέσο ρυθμό των αποζημιώσεων ανά τη μονάδα του χρόνου επί την μέση αποζημίωση. Δηλαδή με λίγα λόγια η συνθήκη μας δηλώνει πως τα έσοδα θα πρέπει να είναι περισσότερα από τον μέσο όρο των εξόδων του χαρτοφυλακίου της εταιρείας στη μονάδα του χρόνου.

Μια άλλη έννοια της θεωρίας χρεοκοπίας που παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον είναι το **περιθώριο ασφαλείας**  $\theta$  το οποίο δίνεται από τη σχέση,

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1.$$

Με βάση τη συνθήκη καθαρού κέρδους καταλαβαίνουμε πώς το περιθώριο ασφαλείας αποτελεί μια θετική ποσότητα. Ουσιαστικά ο συντελεστής αυτός εκφράζει κατά μέσο όρο πόσο μεγαλύτερα είναι τα έσοδα της εταιρείας από τα έξοδά της. Προκειμένου το χαρτοφυλάκιο μιας εταιρείας να είναι ανταγωνιστικό θα πρέπει ο συντελεστής αυτός να παίρνει τιμές μεταξύ του μηδέν και ένα. Στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου

το περιθώριο ασφαλείας μπορεί να καθοριστεί με ακρίβεια από τον ασφαλιστή καθώς η μέση τιμή της κατανομής των αποζημιώσεων θεωρείται γνωστή.

## 2.2.2 Μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο

Σκοπός της ενότητας αυτής είναι να μελετήσουμε και αναλύσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας μιας έννοιας που έχει προβληματίσει ανά τα χρόνια την επιστημονική κοινότητα καθώς τις περισσότερες φορές ο ακριβής υπολογισμός της δεν είναι εφικτός. Στη συνέχεια θα ορίσουμε τον χρόνο καθώς και την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Η **πιθανότητα χρεοκοπίας**  $\psi(u)$  με αρχικό αποθεματικό  $u$  δίνεται από τη σχέση,

$$\psi(u) = P[U(t) < 0 \text{ για κάποιο } t \geq 0 | U(0) = u].$$

Μερικά από τα σημαντικά συμπεράσματα που προκύπτουν είναι τα εξής:

- Στην περίπτωση που δεν ισχύει η συνθήκη του καθαρού κέρδους τότε θα έχουμε σίγουρη χρεοκοπία δηλαδή ισχύει  $\psi(u) = 1, \forall u \geq 0$ .
- Η πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi$  είναι φθίνουσα συνάρτηση του αρχικού αποθεματικού  $u$ . Δηλαδή ισχύει  $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$ .
- Όσο μεγαλώνει το περιθώριο ασφαλείας σε ένα μοντέλο τόσο περισσότερο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Εξίσου σημαντική έννοια είναι και η **πιθανότητα της μη χρεοκοπίας**  $\delta(u)$ , η οποία ορίζεται ως,

$$\delta(u) = 1 - \psi(u) = P[U(t) > 0, \forall t \geq 0 | U(0) = u].$$

Στην συνέχεια μέσω μιας σειράς σημαντικών εξισώσεων όπως αναγράφεται στο βιβλίο του Κ. Πολίτη (2012) αποδεικνύεται πως η πιθανότητας μη χρεοκοπίας  $\delta(u)$ , για αρχικό αποθεματικό  $u = 0$  είναι ίση με,

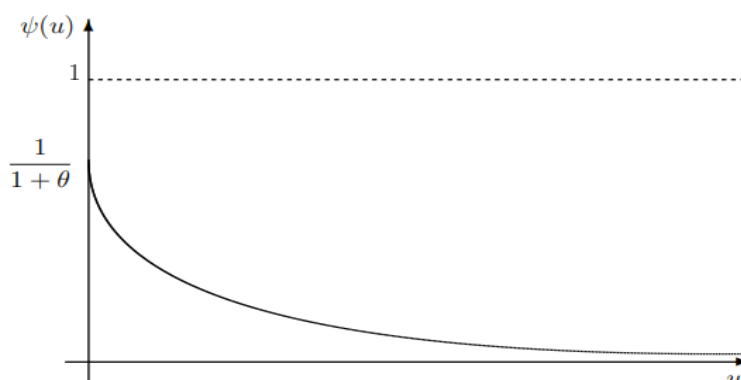
$$1 = \delta(0) + \frac{\lambda \mu_1}{c} \Rightarrow \delta(0) = 1 - \frac{1}{1 + \theta} = \frac{\theta}{1 + \theta}.$$

Κατά συνέπεια η αντίστοιχη πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$  είναι η εξής,

$$\delta(0) = 1 - \psi(0) \Rightarrow \psi(0) = \frac{1}{1 + \theta}.$$

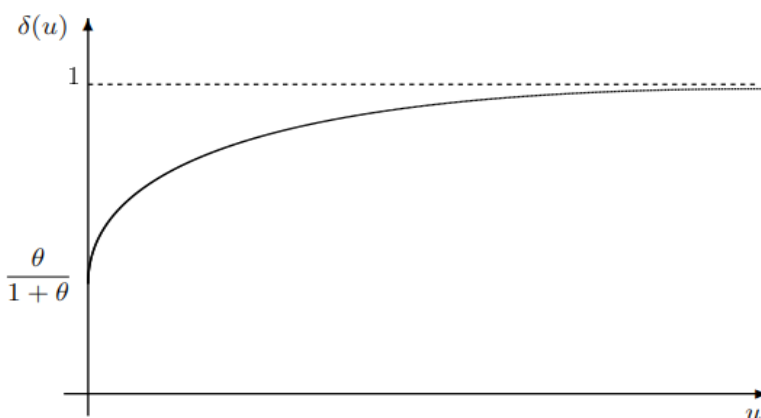
### ΣΧΗΜΑ 2-2

Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας (βλέπε Πολίτης (2012)).



### ΣΧΗΜΑ 2-3

Γραφική παράσταση της πιθανότητας μη χρεοκοπίας (βλέπε Πολίτης (2012)).



Η επόμενη έννοια στην οποία θα κάνουμε αναφορά είναι ο **χρόνος της χρεοκοπίας** δηλαδή της χρονικής στιγμής που το πλεόνασμα γίνεται για πρώτη φορά αρνητικό. Μαθηματικά ο χρόνος της χρεοκοπίας ορίζεται από τη σχέση,

$$T = \begin{cases} \inf \{t: U(t) < 0\} \\ \infty, \text{ αν } U(t) > 0, \forall t. \end{cases}$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό διαπιστώνουμε πως ο χρόνος χρεοκοπίας είναι μια ελλειμματική τ.μ. διότι μπορεί να πάρει την τιμή άπειρο με θετική πιθανότητα, δηλαδή  $P(T < \infty) < 1$  ή  $P(T = \infty) > 0$ . Αυτό προκύπτει εξαιτίας της συνθήκης καθαρού κέρδους. Μια άλλη σχέση που ισχύει είναι η εξής,

$$P(T = \infty) = P(U(t) > 0) = 1 - \psi(u) = \delta(u).$$

Παρατηρούμε πως η κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας  $T$  εξαρτάται άμεσα από την τιμή του αρχικού αποθεματικού  $u$ . Επομένως ένας εναλλακτικός συμβολισμός του χρόνου χρεοκοπίας είναι ο εξής,

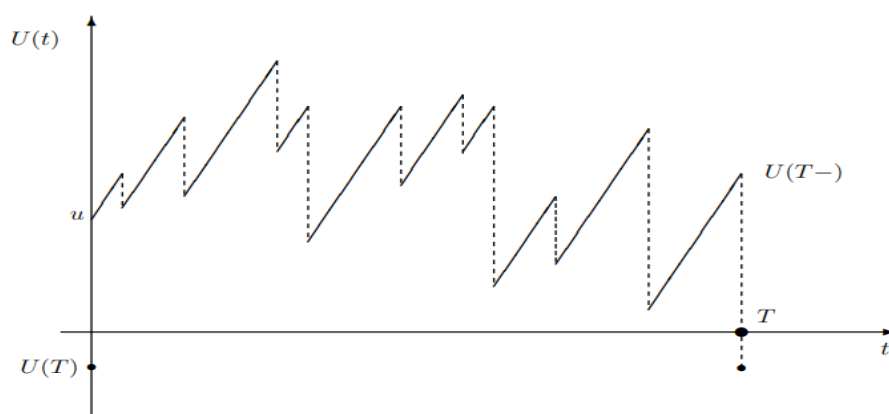
$$T_u = \inf\{t: U(t) < 0 | U(0) = u\}.$$

Επιπλέον, με  $U(T)$  θα συμβολίσουμε την τ.μ. που δηλώνει το **έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας**, δηλαδή δηλώνει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν τη χρονική στιγμή  $t = T$ . Αντίστοιχα, με  $U(T-)$  συμβολίζουμε την τ.μ. που δηλώνει το **πλεόνασμα λίγο πριν τη χρεοκοπία** η οποία δίνεται από τον τύπο,

$$U(T-) = \lim_{t \rightarrow T^-} U(t).$$

#### ΣΧΗΜΑ 2-4

Ο χρόνος χρεοκοπίας, το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο (βλέπε Πολίτης (2012)).



Στην συνέχεια θα ορίσουμε μια πεπερασμένη ακολουθία τ.μ.  $L_i, i = 1,2,3, \dots$  οι οποίες συνδέονται με την ανέλιξη του πλεονάσματος. Οι μεταβλητές αυτές ονομάζονται **κλιμακωτά ύψη** και αντικατοπτρίζουν τη σταδιακή πτώση του πλεονάσματος από την από την τιμή του αρχικού αποθεματικού έως και τη στιγμή της χρεοκοπίας, ή στην περίπτωση που δεν συμβεί χρεοκοπία έως την ελάχιστη στιγμή που παίρνει η ανέλιξη  $\{U(t): t \geq 0\}$ . Στη συνέχεια είναι σημαντικό να προσδιορίσουμε μια άλλη διακριτή τ.μ. το **πλήθος των κλιμακωτών υψών**, η οποία συμβολίζεται με  $K$  και ακολουθεί γεωμετρική κατανομή, καθώς παίρνει ακέραιες και μη αρνητικές τιμές. Εάν θεωρήσουμε την πτώση κάτω από το αρχικό αποθεματικό (η οποία ισούται με  $\psi(0)$ ) ως **αποτυχία** τότε η μεταβλητή  $K$  μετρά το πλήθος των αποτυχιών μέχρι την πρώτη επιτυχία και η κατανομή της δίνεται από τη σχέση,

$$P(K = k) = ((\psi(0))^k \delta(0), \quad k = 0,1,2,3, \dots$$

$$\Leftrightarrow P(K = k) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \frac{\theta}{1+\theta}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Για το κλασικό μοντέλο είναι εξίσου σημαντικό να ορίσουμε τη σύνθετη τ.μ.

$$L = \begin{cases} L_1 + L_2 + \dots + L_K = \sum_{i=1}^K L_i, & i = 1, 2, 3, \dots, K \\ 0, & K = 0 \end{cases}$$

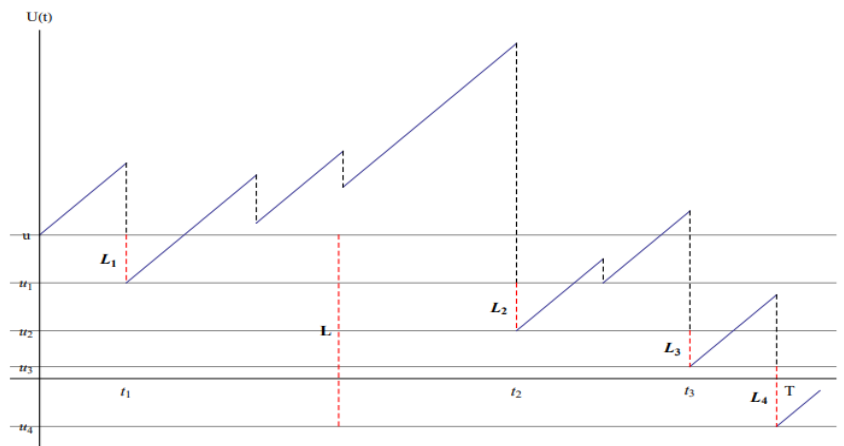
η οποία καλείται μέγιστη σωρευτική απώλεια και παριστάνει τη συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό  $u$ . Παρατηρείται πως η κατανομή της  $L$  είναι μικτή και συγκεκριμένα είναι σύνθετη γεωμετρική. Η τ.μ.  $L$  συνδέεται άμεσα με την πιθανότητα χρεοκοπίας καθώς για αρχικό αποθεματικό  $u > 0$ , ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις,

- $\psi(u) = P(L > u)$
- $\delta(u) = P(L \leq u)$
- $\delta(0) = P(K = 0) = P(L = 0)$

Ενδεικτικό είναι το ακόλουθο σχήμα.

### ΣΧΗΜΑ 2-5

Γραφική αναπαράσταση της μέγιστης σωρευτικής απώλειας στη διαδικασία του πλεονάσματος (βλέπε Πολίτης (2012)).



### 2.2.3 Οι εξισώσεις του Lundberg και δύο θεμελιώδη αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας

Ορίζουμε ως **συντελεστή προσαρμογής** την σταθερά  $R$  η οποία αποτελεί την μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης,

$$M_X(r) = 1 + (1 + \theta)\mu_1 r,$$

όπου  $M(r)$  είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής των αποζημιώσεων. Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται εξίσωση του συντελεστή προσαρμογής ή **εξίσωση του Lundberg**.

Στην συνέχεια θα δώσουμε δύο σχέσεις που ισχύουν για την ροπογεννήτρια συνάρτηση  $M(r)$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} M_X(r) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} M_X(r) = \infty.$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις αυτές διαπιστώνουμε ότι συντελεστής προσαρμογής δεν υπάρχει στις περιπτώσεις που η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής των αποζημιώσεων  $M_X(r)$  για  $r > 0$  απειρίζεται. Μια ισοδύναμη σχέση της εξίσωσης του συντελεστή προσαρμογής είναι η παρακάτω,

$$-\frac{1}{R} + \frac{1}{R} M_X(R) = \frac{c}{\lambda},$$

η οποία ύστερα από πράξεις έρχεται στην μορφή,

$$\lambda + cR = \lambda M_X(R).$$

Έστω ότι οι αποζημιώσεις έχουν πυκνότητα  $f$  τότε ισχύει,

$$\lambda + cR = \lambda \int_0^{\infty} e^{Rx} f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \lambda + cR > \lambda \int_0^{\infty} \left(1 + Rx + \frac{1}{2} R^2 x^2\right) f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \lambda + cR = \lambda \left[ \int_0^{\infty} f(x) dx + \int_0^{\infty} Rxf(x) dx + \int_0^{\infty} R^2 x^2 f(x) dx \right]$$

$$\Leftrightarrow \lambda + cR = \lambda \left(1 + R\mu_1 + \frac{1}{2} R^2 \mu_2\right).$$

Από τις παραπάνω πράξεις προκύπτει η σχέση,

$$2(c - \lambda\mu_1)R > \lambda R^2 \mu_2$$

την οποία αν την λύσουμε ως προς  $R$  θα δημιουργηθεί ένα **άνω φράγμα για το συντελεστή προσαρμογής** το οποίο είναι,



$$R < \frac{2(c - \lambda\mu_1)}{\lambda\mu_2}.$$

Ένα ισοδύναμο άνω φράγμα προκύπτει εάν αντικαταστήσουμε  $c = (1 + \theta)\lambda\mu_1$  και αυτό δίνεται από τη σχέση,

$$R < \frac{2\theta\mu_1}{\mu_2}.$$

Στην περίπτωση ο συντελεστής προσαρμογής υπάρχει αλλά δεν μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια, για μικρές τιμές του  $R$  το άνω φράγμα αυτό μας δίνει μια ικανοποιητική προσέγγιση.

Ο συντελεστής προσαρμογής  $R$  αποτελεί μια σημαντική ποσότητα για τη θεωρία χρεοκοπίας. Για την περίπτωση που δεν υπάρχει ο ακριβής τύπος της πιθανότητας χρεοκοπίας  $\psi(u)$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δυο τύπους με ιδιαίτερη σημασία τόσο στο κλασικό μοντέλο αλλά και σε διάφορα άλλα μοντέλα της θεωρίας κινδύνων.

- **Η ανισότητα του Lundberg**

Στο κλασικό υπόδειγμα η πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$ , ικανοποιεί τη σχέση

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}, \quad \forall u \geq 0.$$

Για δεδομένη τιμή του  $R$ , όσο μεγαλώνει το αρχικό αποθεματικό τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας ενώ για δεδομένη τιμή του αρχικού αποθεματικού, όσο μεγαλώνει το  $R$  τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας.

- **Ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg**

Ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg, παρέχει μία προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασικό πρότυπο όταν το αρχικό αποθεματικό  $u$  παίρνει πολύ μεγάλες τιμές. Σύμφωνα με αυτόν τον τύπο, υπό την προϋπόθεση ότι

$$\int_0^{\infty} x e^{Rx} \bar{F}(x) dx < \infty$$

η πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$  ικανοποιεί την ακόλουθη ασυμπτωτική σχέση

$$\psi(u) \sim C e^{-Ru}, \quad u \rightarrow \infty,$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} = C,$$

όπου  $C$  μία θετική σταθερά που δίνεται από τον τύπο

$$C = \frac{\theta \mu_1}{R \int_0^{\infty} x e^{Rx} \bar{F}(x) dx}.$$

## 2.2.4 Εφαρμογές

### Εφαρμογή 1: Εύρεση συντελεστή προσαρμογής με κατανομή αποζημιώσεων Erlang

Έστω ότι η  $X \sim \text{Erlang}(2, \beta)$ , δηλαδή

$$f(x) = \beta^2 x e^{-\beta x}, \quad \beta > 0, \quad x \geq 0.$$

Η ροπογεννήτρια της  $X$  είναι

$$M_X(r) = \frac{\beta^2}{(\beta - r)^2}, \quad r < \beta.$$

Η εξίσωση για το συντελεστή προσαρμογής γίνεται

$$\frac{\beta^2}{(\beta - r)^2} = 1 + (1 + \theta)r\mu$$

ή ισοδύναμα

$$\beta^2 = (\beta - r)^2(1 + (1 + \theta)r\mu).$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί μία εξίσωση τρίτου βαθμού ως προς το  $r$ , κατά την επίλυση της οποίας απορρίπτουμε τη μηδενική ρίζα οπότε καταλήγουμε σε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού.

$$r^2(1 + \theta)\mu - r(2\beta(1 + \theta)\mu - 1) - (2\beta + (1 + \theta)\mu\beta^2) = 0,$$

η οποία έχει 2 ρίζες:

$$r_1 = \frac{2\beta\mu(1 + \theta) - 1 - \sqrt{1 + 4\beta\mu(1 + 2\beta\mu + \theta + 4\beta\mu\theta + 2\beta\mu\theta^2)}}{2\mu(1 + \theta)}$$

και

$$r_2 = \frac{2\beta\mu(1 + \theta) - 1 + \sqrt{1 + 4\beta\mu(1 + 2\beta\mu + \theta + 4\beta\mu\theta + 2\beta\mu\theta^2)}}{2\mu(1 + \theta)}$$

εκ των οποίων η μικρότερη αποτελεί τον συντελεστή προσαρμογής.

## Εφαρμογή 2: Συντελεστής προσαρμογής για σταθερές αποζημιώσεις

Έστω ότι οι αποζημιώσεις παίρνουν μόνο την τιμή, έστω  $X_i = 10$  με πιθανότητα ένα. Η εξίσωση για το συντελεστή προσαρμογής δίνεται από τον τύπο,

$$M_{X_i}(r) = 1 + (1 + \theta)r\mu$$

παίρνει τη μορφή

$$e^{10r} = 1 + 10(1 + \theta)r.$$

Αυτή είναι μία μη γραμμική εξίσωση ως προς  $r$  η οποία δε μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Παρατηρούμε δηλαδή ότι αν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι εκφυλισμένη, ο συντελεστής προσαρμογής δε μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια. Ωστόσο για  $\mu_1 = \mu = 10$  και  $\mu_2 = 100$ , το άνω φράγμα για τον συντελεστή προσαρμογής είναι,

$$R < \frac{2\theta\mu}{\mu_2} \Leftrightarrow R < \frac{20\theta}{100} = \frac{\theta}{5}.$$

## Εφαρμογή 3: Πιθανότητα χρεοκοπίας για μείξη εκθετικών κατανομών

Ας υποθέσουμε πώς η κατανομή που ακολουθούν οι αποζημιώσεις είναι μια μείξη εκθετικών κατανομών. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα δίνετε από τον τύπο,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \pi_i b_i e^{-b_i x}, \quad x \geq 0,$$

όπου τα  $b_i$  είναι οι παράμετροι των εκθετικών κατανομών και για τα  $\pi_i$  ισχύει η σχέση  $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$  για  $\pi_i \geq 0$ . Για την συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχει ακριβής τύπος της πιθανότητας χρεοκοπίας (Gerber et al. (1987)),

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^n C_k e^{-r_k u}, \quad u \geq 0.$$

Όπου  $r_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης του Lundberg και

$$C_k = \sum_{j=1}^n \frac{C_{jk}}{b_j}, \quad C_{jk} = \frac{\frac{\pi_j}{b_j - r_k}}{\sum_{m=1}^n \frac{\pi_m}{(b_m - r_k)^2}}.$$

Έστω για παράδειγμα η τ.μ.  $X$  των αποζημιώσεων είναι μια μείξη δυο εκθετικών κατανομών και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$f(x) = \frac{1}{2}3e^{-3x} + \frac{1}{2}7e^{-7x}, \quad x \geq 0,$$

με  $(\pi_1, \pi_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  και  $(b_1, b_2) = (3, 7)$ . Η μέση τιμή είναι,

$$\mu = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{5}{21}$$

και η ροπογεννήτρια μας θα είναι η εξής,

$$M_X(r) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{3-r}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{7}{7-r}\right).$$

Για περιθώριο ασφαλείας  $\theta = 2/5$  η εξίσωση του Lundberg διαμορφώνεται ως εξής,

$$M_X(r) = 1 + (1 + \theta)r \Rightarrow 1 + \left(1 + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{21}\right)r = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{3-r}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{7}{7-r}\right),$$

όπου μετά από πράξεις προκύπτει η εξίσωση 3<sup>ου</sup> βαθμού,

$$2r^3 + 14r^2 + 12r = 0.$$

Η μία ρίζα είναι το μηδέν η οποία απορρίπτεται και οι άλλες δύο ρίζες είναι  $r_1 = 1$  και  $r_2 = 6$ . Οι τιμές των μεταβλητών  $C_1$  και  $C_2$  προκύπτουν ύστερα από αντικατάσταση των δεδομένων μας στους τύπους που δόθηκαν πιο πάνω στην εφαρμογή και είναι οι εξής,

$$C_1 = \frac{24}{35}, \quad C_2 = \frac{1}{35}.$$

Επομένως ο ακριβής τύπος της πιθανότητας χρεοκοπίας για το συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα είναι,

$$\psi(u) = \frac{24}{35}e^{-u} + \frac{1}{35}e^{-6u}, \quad u \geq 0.$$

### 2.3 Κατανομές τύπου φάσεων στη θεωρία χρεοκοπίας

Στην τρέχουσα ενότητα θα παρουσιάσουμε τον ακριβή υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας στην περίπτωση που η κατανομή των αποζημιώσεων είναι μια κατανομή τύπου φάσεων. Πριν προχωρήσουμε θα ορίσουμε την **ανέλιξη**

**πλεονάσματος των αποζημιώσεων** (*claim surplus process* ή *aggregate loss process*)  $\{R(t): t \geq 0\}$ . Ο τύπος της της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος των αποζημιώσεων είναι,

$$R(t) = u - U(t).$$

Ο τύπος της στοχαστικής ανέλιξης του πλεονάσματος για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων είναι,

$$U(t) = u + ct - S(t).$$

Επομένως ο τύπος της στοχαστικής διαδικασίας  $\{R(t): t \geq 0\}$  για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων γράφεται ως εξής,

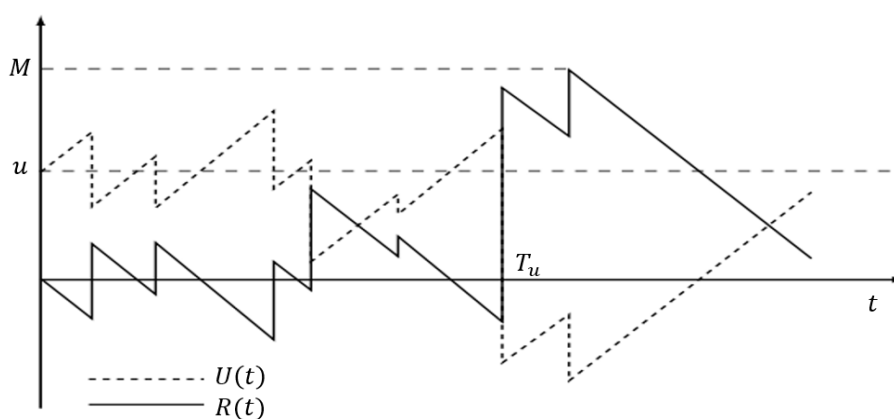
$$R(t) = S(t) - ct.$$

Στο παρακάτω θεώρημα η ποσότητα  $G_+(\cdot) = P(R(T_0) \in \cdot, T_0 < \infty)$  εκφράζει την κατανομή των κλιμακωτών υψών με για χρόνο χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό  $u$  ίσο με το μηδέν  $T_0$  και η μεταβλητή  $M$  ορίζεται ως  $M = \sup_{t \geq 0} R(t)$ . Επιπλέον, έστω zero-modified κατανομή  $X^{(M)}$  για μια διακριτή τ.μ  $X$  με συνάρτηση πιθανότητας  $p_k = P(X^{(M)} = k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  τότε ισχύει η σχέση,

$$p_k^{(M)} = P(X^{(M)} = k) = \begin{cases} p_0^{(M)}, & k = 0 \\ \frac{(1 - p_0^{(M)})p_0}{1 - p_0}, & k \geq 1. \end{cases}$$

### ΣΧΗΜΑ 2-6

Διάγραμμα σύγκρισης των γραφικών παραστάσεων της ανέλιξης πλεονάσματος και της ανέλιξη πλεονάσματος των αποζημιώσεων (βλέπε Asmussen & Albrecher (2010)).



## Θεώρημα 2.1

Έστω ότι ισχύει το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων με  $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$  και η τ.μ. των αποζημιώσεων ακολουθεί μια κατανομή τύπου φάσεων με αναπαράσταση  $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{D}_0)$ , δηλαδή  $X \sim \text{PH}^{(m)}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{D}_0)$ . Τότε,

a)  $G_+$  είναι μια ελλειμματική (defective) κατανομή τύπου φάσεων με αναπαράσταση  $(\boldsymbol{\pi}_+, \mathbf{D}_0)$ , όπου  $\boldsymbol{\pi}_+ = -\lambda \boldsymbol{\pi} \mathbf{D}_0^{-1}$  και  $M$  είναι μια zero-modified κατανομή τύπου φάσεων με αναπαράσταση  $(\boldsymbol{\pi}_+, \mathbf{D}_0 + \mathbf{d}_1 \boldsymbol{\pi}_+)$ .

b) η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από το τύπο,

$$\psi(u) = \boldsymbol{\pi}_+ e^{(\mathbf{D}_0 + \mathbf{d}_1 \boldsymbol{\pi}_+) u} \mathbf{1}.$$

## Απόδειξη

Η απόδειξη του θεωρήματος δίνεται αναλυτικά στο βιβλίο των (Asmussen & Albrecher (2010, σελίδες 264-265)).

■

## 2.3.1 Εφαρμογές

### Εφαρμογή 1: Κλασικό μοντέλο και μείξη εκθετικών αποζημιώσεων

Για την συγκριμένη εφαρμογή θα βασιστούμε στην 3<sup>η</sup> Εφαρμογή της Παραγράφου 2.2 προσαρμόζοντας την στα πλαίσια των κατανομών τύπου φάσεων. Ο τύπος της συνάρτησης πυκνότητας της τ.μ. που περιγράφει το ύψος των αποζημιώσεων είναι,

$$f(x) = \frac{1}{2} 3e^{-3x} + \frac{1}{2} 7e^{-7x}, \quad x \geq 0.$$

Συγκεκριμένα οι αποζημιώσεις μας ακολουθούν μια hyperexponential κατανομή δηλαδή η τ.μ.  $X$  ακολουθεί μια κατανομή τύπου φάσεων 2<sup>ης</sup> τάξης με αναπαράσταση  $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{D}_0)$ ,  $X \sim \text{PH}^{(2)}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{D}_0)$ , όπου

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1 \ \pi_2) = \left( \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right), \quad \mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Για περιθώριο ασφαλείας  $\theta = 2/5$  και  $c = 1$  εφόσον είμαστε στο κλασικό μοντέλο προκύπτει ότι το  $\lambda = 3$ . Από το Θεώρημα 2.1 έχουμε ακριβή τύπο της πιθανότητας χρεοκοπίας πρώτα όμως θα υπολογίσουμε για διευκόλυνση μεμονωμένα κάποιες ποσότητες του τύπου.

Αρχικά ισχύει,

$$\boldsymbol{\pi}_+ = -\lambda \boldsymbol{\pi} \mathbf{D}_0^{-1} = -3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$$

και

$$\mathbf{D}_0 + \mathbf{d}_1 \boldsymbol{\pi}_+ = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{9}{14} \\ \frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}.$$

### Παρατήρηση 2.1

Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό του του τύπου της πιθανότητας χρεοκοπίας θα αναφερθούμε σύντομα σε μια μικρή εφαρμογή (Asmussen & Albrecher (2010)) κατά την οποία θα διαγωνιοποιήσουμε τον πίνακα  $\mathbf{D}_0 + \mathbf{d}_1 \boldsymbol{\pi}_+$  με ένα διαφορετικό τρόπο από αυτόν που έχουμε συνηθίσει στην γραμμική άλγεβρα. Για διευκόλυνση μας θα συμβολίσουμε τον πίνακα  $\mathbf{D}_0 + \mathbf{d}_1 \boldsymbol{\pi}_+ = \mathbf{Q}$ .

Έστω ότι μας δίνεται ο πίνακας  $2 \times 2$ ,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix},$$

τότε οι ιδιοτιμές  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  του πίνακα στις περισσότερες περιπτώσεις ανήκουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών όταν ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος Perron-Frobenius, διότι η ιδιοτιμή  $\lambda_2 = \text{trace}(\mathbf{Q})$ . Από τη γραμμική άλγεβρα η ποσότητα  $\text{trace}(\mathbf{Q})$  ονομάζεται **ίχνος** ενός τετραγωνικού πίνακα  $\mathbf{Q}$  το οποίο είναι ίσο με το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του πίνακα.

Πιο αναλυτικά ο υπολογισμός των ιδιοδιανυσμάτων δίνεται από τους τύπους,

$$\lambda_1 = \frac{q_{11} + q_{22} + \sqrt{D}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{q_{11} + q_{22} - \sqrt{D}}{2},$$

όπου

$$D = (q_{11} - q_{22})^2 + 4q_{12}q_{21}.$$

Θεωρούμε την παράμετρο  $\boldsymbol{\pi}$  ( $= \mathbf{v}_1$ ) όπου  $\mathbf{v}_1$  είναι το αριστερό ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής  $\lambda_1$  και  $\mathbf{k}$  ( $= \mathbf{h}_1$ ) το δεξί ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχα.

Τότε ισχύει,

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1 \quad \pi_2) = a(q_{21} \quad \lambda_1 - q_{11}), \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} q_{12} \\ \lambda_1 - q_{11} \end{pmatrix},$$

όπου  $a, b$  θεωρούμε οποιεσδήποτε παραμέτρους που ικανοποιούν την σχέση

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{k} = 1 \Rightarrow ab(q_{12}q_{21} + (\lambda_1 - q_{11})^2) = 1.$$

Μπορούμε με την ίδια διαδικασία να υπολογίσουμε τα  $\mathbf{v}_2$  και  $\mathbf{h}_2$  αντικαθιστώντας το  $\lambda_1$  με το  $\lambda_2$ . Παρόλα αυτά μπορούμε να τα υπολογίσουμε ευκολότερα μέσω των τύπων,

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{h}_2 = 0, \quad \mathbf{v}_2\mathbf{k} = 1$$

από τους οποίους προκύπτει,

$$\mathbf{v}_2 = (k_2 \quad -k_1), \quad \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} \pi_2 \\ -\pi_1 \end{pmatrix}.$$

Επιπλέον δίνεται,

$$e^{\mathbf{Q}t} = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \pi_1 k_1 & \pi_2 k_1 \\ \pi_1 k_2 & \pi_2 k_2 \end{pmatrix} + e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \pi_2 k_2 & -\pi_2 k_1 \\ -\pi_1 k_2 & \pi_1 k_1 \end{pmatrix}.$$

■

Σε συνέχεια της εφαρμογής και σύμφωνα με την παραπάνω σημείωση προκύπτει,

$$D = \left(-\frac{3}{2} + \frac{11}{2}\right)^2 + 4 \frac{9}{14} \frac{7}{2} = 25,$$

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{11}{2} + 5}{2} = -1, \quad \lambda_2 = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{11}{2} - 5}{2} = -6,$$

$$ab \left( \frac{9}{14} \frac{7}{2} + \left(-1 + \frac{3}{2}\right)^2 \right) = 1 = \frac{5}{2} ab,$$

$$\boldsymbol{\pi} = a \left( \frac{7}{2} \quad -1 + \frac{3}{2} \right) = a \left( \frac{7}{2} \quad \frac{1}{2} \right), \quad \mathbf{k} = b \begin{pmatrix} \frac{9}{14} \\ -1 + \frac{3}{2} \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} \frac{9}{14} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Επομένως προκύπτει ο πίνακας,

$$\begin{pmatrix} \pi_1 k_1 & \pi_2 k_1 \\ \pi_1 k_2 & \pi_2 k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{9}{70} \\ \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$



Άρα,

$$e^{Qu} = e^{(D_0+d_1\pi_+)u} = e^{-u} \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{9}{70} \\ \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} + e^{-6u} \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{9}{70} \\ -\frac{7}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}.$$

Ο τελικός τύπος της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι,

$$\psi(u) = \pi_+ e^{(D_0+d_1\pi_+)u} \mathbf{1}$$

$$\Rightarrow \psi(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{14} \end{pmatrix} \left( e^{-u} \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{9}{70} \\ \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} + e^{-6u} \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{9}{70} \\ -\frac{7}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \psi(u) = \frac{24}{35} e^{-u} + \frac{1}{35} e^{-6u}, \quad u \geq 0.$$

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας θα χρησιμοποιήσουμε μέσω της R την συνάρτηση `ruin` του πακέτου `actuar` που υπολογίζει απευθείας την πιθανότητα χρεοκοπίας.

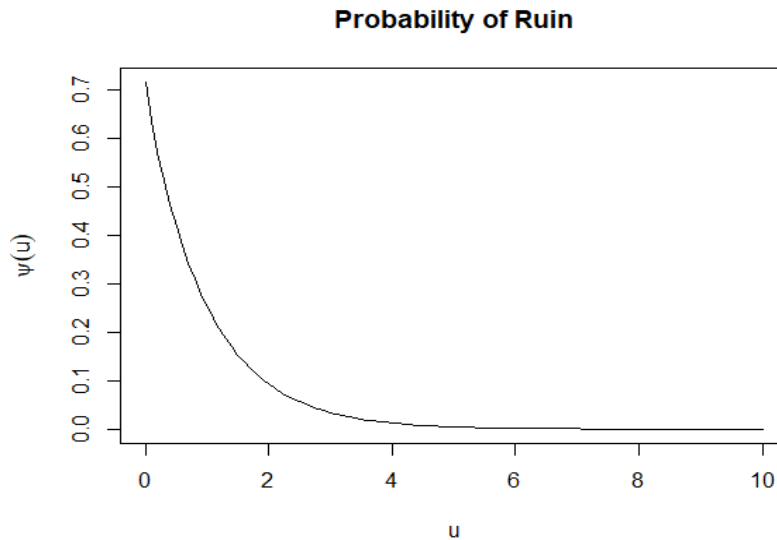
Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα πινακάκι αποτελεσμάτων της πιθανότητας χρεοκοπίας καθώς και τη γραφική της παράσταση.

**Πίνακας 2.1.** Αποτελέσματα του τύπου πιθανότητας χρεοκοπίας για αρχικό αποθεματικό  $u = 0,1,2, \dots, 10$ .

$u$	$\psi(u)$
0	0.71428
1	0.25233
2	0.09280
3	0.03413
4	0.01256
5	0.00462
6	0.001699
7	0.000652
8	0.000230
9	0.000084
10	0.000031

## ΣΧΗΜΑ 2-7

Πιθανότητα χρεοκοπίας για μείξη εκθετικών κατανομών στο κλασικό μοντέλο.



### Εφαρμογή 2: Πιθανότητα χρεοκοπίας με προσομοίωση

Στην παρούσα εφαρμογή θα υπολογίσουμε μέσω της R την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω προσομοίωσης. Θεωρούμε το κλασικό μοντέλο όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι αναμονής ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda = 1$ . Έστω η τ.μ.  $X \sim Erlang(3, 5/4)$  εκφράζει το ύψος των αποζημιώσεων. Υποθέτουμε ότι το αρχικό αποθεματικό μας είναι  $u = 6$  και το περιθώριο ασφαλείας είναι  $\theta = 0.3$ . Η ακριβής τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας  $\psi(6) = 0.33016$  ενώ με προσομοίωση βρέθηκε ίση με  $\psi(6) = 0.3269816$ . Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας και στις δύο περιπτώσεις είναι ο ακόλουθος,

```
> ### κλασικό μοντέλο θεωρίας κινδύνου ###
>
> # x ~ Erl(shape=3, scale=0.8)
>
> lam <- 1 # N(t)~Poisson(lam*t)
> shape <- 3
> scale <- 0.8 # x ~ Erl(shape=3, scale=0.8)
> mean <- shape * scale # Υπολογισμός μέσης τιμής
> theta <- 0.3 # Περιθώριο ασφαλείας
> c <- (1 + theta) * lam * mean # Ένταση ασφαλιστρου
> u <- 6 # Αρχικό αποθεματικό
> nSim <- 100000 # Πλήθος προσομοιώσεων
> n <- 2000 # πλήθος απαιτήσεων
>
> ### Πιθανότητα χρεοκοπίας με προσομοίωση
> N <- 0
> for (k in 1:nSim){
+   wi <- rexp(n, rate=lam)
+   Ti <- cumsum(wi)
+   Xi <- rgamma(n, shape=3, scale=0.8)
+   Si <- cumsum(Xi)
+   Ui <- u + Ti * c - Si
```

```

+ ruin <- !all(Ui >= 0)
+ if (ruin) N <- N + 1
+ }
> prob.ruin <- N / nSim
> print(prob.ruin)
[1] 0.33016
>
> ### Ακριβής υπολογισμός πιθανότητας χρεοκοπίας
> library(actuar)
> psi <-ruin(claims = "Erlang", par.claims = list(shape=3, scale=0.8
), wait = "exponential", par.wait = list(rate = 1), pre=c)
> psi(u)
[1] 0.3269816

```

## 2.4 Κατανομές με βαριά ουρά στη θεωρία χρεοκοπίας

Ένα από τα πιο γνωστά προβλήματα της θεωρίας κινδύνων είναι ο μη ακριβής υπολογισμός του τύπου της πιθανότητας χρεοκοπίας  $\psi(u)$ . Πολλές από τις προσεγγιστικές μεθόδους για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο όπως είναι οι Beekman-Bowers, De Vylder και Tijms δεν είναι ικανοποιητικές όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν κατανομή βαριάς ουράς. Αρχικά θα δώσουμε τον ορισμό αυτών των κατανομών καθώς και έναν προσεγγιστικό τύπο υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας για τέτοιες περιπτώσεις. Στο τέλος της παραγράφου αυτής θα αναλύσουμε μια συγκεκριμένη κατηγορία της κατανομής Pareto κατά την οποία σύμφωνα με τον Ramsay (2003) υπάρχει ακριβής τύπος της πιθανότητας χρεοκοπίας καθώς και ένα παράδειγμα προσέγγισης μια κατανομής Pareto από μια μείξη εκθετικών κατανομών με την μέθοδο των ροπών.

### 2.4.1 Επισκόπηση εννοιών για τις κατανομές βαριάς ουράς

Σύμφωνα με τον Κωνσταντινίδη (2011), μια κατανομή  $F(x)$  ανήκει στην **κλάση των κατανομών με βαριές ουρές**  $K$ , και γράφουμε  $\bar{F} \in K$ , αν ισχύει,

$$\int_0^{\infty} e^{sx} dF(x) = \infty, \quad \forall s > 0.$$

Επίσης είναι χρήσιμο να χαρακτηρίσουμε τις κατανομές των μεγάλων αποζημιώσεων με τη βοήθεια της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της ουράς της κατανομής  $\bar{F}(x)$ , για  $x \rightarrow \infty$ . Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα πίνακα με μερικές γνωστές κατανομές που ανήκουν στην κλάση των κατανομών με βαριά ουρά.

**Πίνακας 2.2.** Παραδείγματα κατανομών με βαριά ουρά

Κατανομή	Συνάρτηση πυκνότητας	Παράμετροι
<i>Pareto</i>	$f(x) = \frac{ab^a}{(b+x)^{a+1}}$	$a > 0, \quad b > 0$
<i>LogNormal</i>	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mu \in R, \quad \sigma > 0$
<i>Burr</i>	$f(x) = ka \frac{x^{k-1}}{(1+x^k)^{a+1}}$	$a > 0, \quad k > 0$
<i>Weibull</i>	$f(x) = \tau\gamma x^{\gamma-1} e^{-\tau x^\gamma}$	$\tau > 0, \quad 0 < \gamma < 1$
<i>LogGamma</i>	$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$	$x > 1, \quad \alpha, \beta > 0$

Η ουρά της βαριάς κατανομής  $F(x)$  ανήκει στην κλάση των υποεκθετικών ουρών, και γράφουμε, αν  $\forall n \geq 2$  ισχύει η ακόλουθη συνθήκη

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(A_n > x)}{P(M_n > x)} = 1$$

με

$$A_n = \sum_{i=1}^n Z_i, \quad M_n = \max(Z_i), \quad i = 1 \dots n$$

και η ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ.  $Z_1, \dots, Z_n$  με κατανομή  $F(x)$ .

Σύμφωνα πάντα με τον Κωνσταντινίδη (2011), η σύγκριση μεταξύ του αθροίσματος  $A_n$  και του μεγίστου  $M_n$  των ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ.  $Z_1, \dots, Z_n$  που μπορούμε να τις δούμε ως αποζημιώσεις, είναι καθοριστική για την εκτίμηση των ακραίων τιμών.

Οι κατανομές με βαριά ουρά δεν έχουν ροπογεννήτρια συνάρτηση με αποτέλεσμα να μην ορίζεται ο συντελεστής προσαρμογής  $R$ . Αυτό ισχύει για τις υποεκθετικές κατανομές αποζημιώσεων, δηλαδή δεν μπορεί να εφαρμοσθεί η εξίσωση Lundberg ή ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg. Το αποτέλεσμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ασυμπτωτικό (Πολίτης, 2012) και είναι γνωστό ως ο τύπος των Embrechts-Veraverbeke.

## Πρόταση 2.1

Έστω ότι στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων η κατανομή  $F$  των αποζημιώσεων ανήκει στην κλάση των υποεκθετικών κατανομών και έστω  $\rho = (1 + \theta)^{-1}$ , έτσι ώστε το  $\rho$  να ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας για αρχικό αποθεματικό  $u = 0$ . Θεωρούμε την συνάρτηση κατανομής  $H$  κλιμακωτών υψών για την οποία ισχύει ο τύπος,  $H(x) = \frac{1}{E(X)} \int_0^x \bar{F}(y) dy$ . Τότε οι παρακάτω τρεις συνθήκες είναι ισοδύναμες:

- a) η συνάρτηση κατανομής των κλιμακωτών υψών  $H$  ανήκει στην κλάση των υποεκθετικών κατανομών
- b) το  $1 - \psi$  ανήκει στην κλάση των υποεκθετικών κατανομών
- c)  $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\bar{H}(u)} = \frac{\rho}{1-\rho}$ .

Εφόσον ισχύουν οι συνθήκες αυτές και αντικαταστήσουμε το  $\varphi$  στην τρίτη συνθήκη, τότε προκύπτει η παρακάτω σχέση,

$$\psi(u) \sim \frac{1}{\theta} \bar{H}(u), \quad u \rightarrow \infty.$$

## Απόδειξη

Δείτε (Κ. Πολίτης (2012), σελ. 351).

■

Κατά την μελέτη της ακρίβειας προσέγγισης του τύπου Embrechts-Veraverbeke σύμφωνα με τους Asmussen και Binswanger (1997) μετά τη χρήση μεθόδων προσομοίωσης προκύπτει ένας εξίσου σημαντικός προσεγγιστικός τύπος της πιθανότητας χρεοκοπίας,

$$\psi(u) \approx e^{-u\theta \frac{2E(X)}{[E(X)]^2 + Var(X)}}.$$

## 2.4.2 Εφαρμογές

### Εφαρμογή 1: Προσέγγιση του τύπου της πιθανότητας χρεοκοπίας για την περίπτωση της διπαραμετρικής κατανομής Pareto και της Weibull

Για την συγκεκριμένη εφαρμογή θα στηριχτούμε κατά κύριο λόγο στον προσεγγιστικό τύπο Embrechts-Veraverbeke.

- **Κατανομή Pareto**

Έστω ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν την κατανομή  $\text{Pareto}(\alpha, \lambda)$  με συνάρτηση πυκνότητας,

$$f(x) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}, \quad \alpha > 1, \quad x > 0, \quad \lambda > 0,$$

με συνάρτηση κατανομής,

$$F(x) = 1 - \left( \frac{\lambda}{x + \lambda} \right)^\alpha, \quad x \geq 0.$$

και μέση τιμή,

$$E(X) = \frac{\lambda}{\alpha - 1}.$$

Είναι γνωστό πως η ροπογεννήτρια της συγκεκριμένης κατανομής δεν υπάρχει επομένως δεν μπορεί να υπολογισθεί ούτε ο συντελεστής προσαρμογής στην  $R$ . Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την συνάρτηση κατανομής της ουράς των κλιμακωτών υψών  $\bar{H}(u)$ .

$$\begin{aligned} \bar{H}(u) &= \frac{1}{E(X)} \int_u^\infty \bar{F}(y) dy \\ &= \frac{1}{\frac{\lambda}{\alpha - 1}} \int_u^\infty \left( \frac{\lambda}{y + \lambda} \right)^\alpha dy \\ &= \int_u^\infty \frac{(\alpha - 1) \lambda^{\alpha-1}}{(y + \lambda)^\alpha} dy \\ &= \frac{\lambda^{\alpha-1}}{(u + \lambda)^{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

Επομένως, τα κλιμακωτά ύψη ακολουθούν την κατανομή  $\text{Pareto}(\alpha - 1, \lambda)$ .

Συνεπώς ο τύπος Embrechts-Veraverbeke για την περίπτωση μας είναι,

$$\psi(u) \sim \frac{1}{\theta} \frac{\lambda^{\alpha-1}}{(u + \lambda)^{\alpha-1}},$$

όπου  $\theta$  είναι το περιθώριο ασφαλείας και  $u$  το αρχικό αποθεματικό.

Η παραπάνω προσέγγιση είναι ικανοποιητική σε ότι αφορά τα εξής, όσο μεγαλύτερο περιθώριο ασφάλειας ή το αρχικό αποθεματικό  $u$  τόσο μικρότερη η πιθανότητα χρεοκοπίας. Η μόνη διαφοροποίηση είναι για αρχικό αποθεματικό  $u = 0$ , καθώς ενώ γνωρίζουμε ότι  $\psi(0) = 1/(1 + \theta)$ , εδώ η πιθανότητα χρεοκοπίας για μηδενικό αποθεματικό προσεγγίζεται από το  $1/\theta$ .

- **Κατανομή Weibull**

Μια άλλη περίπτωση κατανομής που δεν έχει ροπογεννήτρια συνάρτηση και ως εκ τούτου δεν μπορεί να υπολογισθεί ο συντελεστής προσαρμογής  $R$  από την εξίσωση του Lundberg είναι η Weibull( $\tau, \gamma$ ).

Η συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από τον τύπο,

$$f(x) = \tau \gamma x^{\gamma-1} e^{-\tau x^\gamma}, \quad \tau > 0, \quad 0 < \gamma < 1, \quad x > 0$$

και η συνάρτηση κατανομής είναι η,

$$F(x) = 1 - e^{-\tau x^\gamma}, \quad x \geq 0$$

και μέση τιμή

$$E(X) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)}{\tau^{1/\gamma}}.$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την συνάρτηση κατανομής της ουράς των κλιμακωτών υψών  $\bar{H}(u)$ .

$$\begin{aligned} \bar{H}(u) &= \frac{1}{E(X)} \int_u^\infty \bar{F}(x) dx \\ &= \frac{1}{E(X)} \int_u^\infty e^{-\tau x^\gamma} dx. \end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό θέτουμε,

$$x^\gamma = y \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \frac{dy}{dx} = \gamma x^{\gamma-1} = \gamma y^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{dy}{\gamma y^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
 \bar{H}(u) &= \frac{1}{E(X)} \int_{u^\gamma}^{\infty} \frac{e^{-\tau y}}{\gamma y^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} dy \\
 &= \frac{1}{E(X)} \int_{u^\gamma}^{\infty} \frac{1}{\gamma} y^{\frac{1}{\gamma}-1} e^{-\tau y} dy \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\tau^{\frac{1}{\gamma}} E(X)} \int_{u^\gamma}^{\infty} \frac{1}{\gamma} y^{\frac{1}{\gamma}-1} \frac{e^{-\tau y} \tau^{\frac{1}{\gamma}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)} dy \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\tau^{\frac{1}{\gamma}} E(X)} \int_{u^\gamma}^{\infty} f_1(y) dy \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\tau^{\frac{1}{\gamma}} E(X)} \bar{F}_1(u^\gamma),
 \end{aligned}$$

όπου,  $f_1$  και  $F_1$  είναι η συνάρτηση πυκνότητας και η συνάρτηση κατανομής της Γάμμα κατανομής με παραμέτρους  $1/\gamma$  και  $\tau$ .

Συνεπώς ο τύπος Embrechts-Veraverbeke για την περίπτωση μας είναι,

$$\psi(u) \sim \frac{1}{\theta} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\tau^{\frac{1}{\gamma}} E(X)} \bar{F}_1(u^\gamma).$$

## Εφαρμογή 2: Ακριβής υπολογισμός του τύπου της πιθανότητας χρεοκοπίας για συγκεκριμένες συνθήκες της κατανομής Pareto για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου

Η εφαρμογή αυτή βασίζεται κατά κύριο λόγο στην εργασία Ramsay (2003) κατά τον οποίο ο τύπος της πιθανότητας χρεοκοπίας  $\psi(u)$  είναι ακριβής για μια συγκεκριμένη περίπτωση της μονοπαραμετρικής κατανομής Pareto. Η μελέτη έχει γίνει στα πλαίσια του κλασικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα θεωρήσουμε μια μονοπαραμετρική κατανομή Pareto η οποία βασίζεται στο θετικό τμήμα του πραγματικού άξονα με μέση τιμή  $E(X) = 1$ . Η συνάρτηση κατανομής για την περίπτωση που εξετάζουμε δίνεται από τον τύπο,



$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{m}\right)^{-(m+1)}, \quad x > 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Ο τύπος της πιθανότητας χρεοκοπίας  $\psi(u)$  για την εν λόγω περίπτωση συμφώνα με τον Ramsay είναι,

$$\psi(u) = \int_0^\infty \frac{\theta x^{m-1} e^{-(1+\frac{u}{m})x}}{(m-1)! [(\theta + x e^{-x} Ei_m(x))^2 + \left(\pi e^{-x} \left(\frac{x^m}{(m-1)!}\right)\right)^2]} dx,$$

για  $x > 0, m = 1, 2, \dots$ ,

όπου  $Ei_m(x)$  είναι η γενίκευση του εκθετικού ολοκληρώματος  $Ei(x)$   $m$  τάξης με τύπο,

$$Ei_m(x) = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \left[ \gamma + \ln x - \sum_{r=1}^{m-1} \frac{1}{r} \right] + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{(r-m+1)r!}$$

για  $x > 0, r \neq m-1$ .

Επιπλέον όπου  $\gamma$  είναι η σταθερά Euler-Mascheroni η οποία είναι ίση με  $\gamma \approx 0.57721$ .

Για την περίπτωση  $m = 1$  προκύπτει,

- συνάρτηση πυκνότητας  $F(x) = 1 - (1+x)^{-2}, x > 0$
- εκθετικό ολοκλήρωμα  $Ei_1(x)$  1ης τάξης,

$$Ei_1(x) = \gamma + \ln x + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{rr!}$$

- πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$ ,

$$\psi(u) = \int_0^\infty \frac{\theta e^{-(1+u)x}}{[(\theta + x e^{-x} Ei_1(x))^2 + (\pi e^{-x} x)^2]} dx.$$

Στη συνέχεια θα δώσουμε πίνακα αποτελεσμάτων της πιθανότητας χρεοκοπίας για διάφορες τιμές του περιθωρίου ασφαλείας  $\theta$ . Στο παράρτημα υπάρχει ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας.

**Πίνακας 2.3.** Αποτελέσματα πιθανότητας χρεοκοπίας  $\psi(u)$  για την περίπτωση της μονοπαραμετρικής Pareto με συνάρτηση κατανομής  $F(x) = 1 - (1 + x)^{-2}$ ,  $x > 0$ .

$u$	$\theta = 0.10$	$\theta = 0.25$	$\theta = 0.50$	$\theta = 0.75$	$\theta = 1.00$
10	0.627128	0.372677	0.206646	0.138242	0.102523
20	0.498142	0.245261	0.119274	0.075908	0.055049
30	0.411437	0.178338	0.081426	0.051056	0.036887
40	0.347893	0.137559	0.060856	0.038038	0.027509
50	0.299155	0.110519	0.048164	0.030142	0.021847
60	0.260645	0.091524	0.039649	0.024884	0.018080
70	0.229551	0.077594	0.033588	0.021150	0.015402
80	0.204018	0.067029	0.029075	0.018369	0.013404
90	0.182761	0.058794	0.025596	0.016222	0.011859

## 2.5 Προσέγγιση της κατανομής Pareto από μείξη εκθετικών κατανομών

Στόχος της συγκεκριμένης παραγράφου είναι η προσέγγιση της κατανομής Pareto από μια μείξη εκθετικών κατανομών. Η κύρια μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε για να προσεγγίσουμε την κατανομή Pareto είναι η μέθοδος των ροπών και προκειμένου να δούμε κατά πόσο είναι καλή η προσέγγισή μας θα χρησιμοποιήσουμε διάφορα κριτήρια όπως το να συγκρίνουμε μεταξύ τους τις ροπές.

### 2.5.1 Μέθοδος ροπών

Σύμφωνα με τη μέθοδο των ροπών θεωρούμε ότι 2 κατανομές προκειμένου να είναι προσεγγιστικά ίσες θα πρέπει αντίστοιχα να είναι ίσες και οι ροπές τους.

Για την περίπτωση μας θα θεωρήσουμε ότι οι αποζημιώσεις μας ακολουθούν μια συνεχή τ.μ.  $Y$  η οποία ακολουθεί την διπαραμετρική κατανομή Pareto,  $Y \sim \text{Pareto}(a, \lambda)$ , με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,

$$f(y) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda + y)^{\alpha+1}}, \quad \alpha > 0, \quad \lambda > 0, \quad y > 0$$

και τύπο για τον υπολογισμό των ροπών κ-τάξης,

$$E(Y^k) = \frac{\lambda^k k!}{(a-1)(a-2) \dots (a-k)}, \quad \alpha > k.$$

Η συνθήκη  $\alpha > k$  επιβάλλεται για να εξασφαλιστεί ότι ο παρονομαστής της εξίσωσης δεν γίνεται μηδέν ή αρνητικός. Όταν αυτό συμβαίνει, η ροπή δεν μπορεί να οριστεί μαθηματικά.

Έστω ότι η τ.μ.  $X$  ακολουθεί μια μείξη 2 εκθετικών κατανομών, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,

$$f(x) = a_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + a_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 x},$$

Όπου  $a_1$  και  $a_2$  είναι τα βάρη της μείξης των δύο εκθετικών κατανομών με παραμέτρους  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  αντίστοιχα. Στη συνέχεια θα δώσουμε δύο σημαντικές ιδιότητες για τις ροπές και για την ροπογεννήτρια συνάρτηση της μείξης των εκθετικών κατανομών.

$$a) E(X^r) = a_1 E(X_1^r) + a_2 E(X_2^r) + \dots + a_k E(X_k^r), \quad r = 1, 2, \dots$$

$$b) M_X(t) = a_1 M_{X_1}(t) + \dots + a_k M_{X_k}(t),$$

για  $t < \min\{\lambda_i\}$ ,  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Στην περίπτωση που η μείξη εκθετικών κατανομών μας είναι γνωστή θα χρειαστούμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων μέσα από το οποίο θα υπολογίσουμε τις άγνωστες παραμέτρους της κατανομής Pareto. Αυτό προκύπτει εάν εξισώσουμε τις ροπές της κατανομής Pareto με τις αντίστοιχες ροπές της εκθετικής κατανομής κι έτσι θα καταλήξουμε σε ένα σύστημα εξισώσεων.

$$E(Y) = E(X) \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\alpha - 1} = \frac{\alpha_1}{\lambda_1} + \frac{1 - \alpha_1}{\lambda_2},$$

$$E(Y^2) = E(X^2) \Leftrightarrow \frac{2\lambda^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} = \frac{2\alpha_1}{\lambda_1^2} + \frac{2(1 - \alpha_1)}{\lambda_2^2}.$$

### 2.5.2 Αριθμητικό παράδειγμα προσέγγισης της κατανομής Pareto με μείξη εκθετικών κατανομών με την μέθοδο των ροπών

Στόχος μας είναι να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Pareto από μια μείξη εκθετικών κατανομών. Θα πάρουμε ως δεδομένο την μείξη εκθετικών κατανομών που χρησιμοποιήσαμε στην εφαρμογή 2 της παραγράφου 2.2 με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,

$$f(x) = \frac{1}{2} 3e^{-3x} + \frac{1}{2} 7e^{-7x}, \quad x \geq 0.$$

Επιπλέον η συγκεκριμένη κατανομή όπως είχαμε αναφέρει στην παράγραφο 2.3.1 αποτελεί μια hyperexponential κατανομή, δηλαδή μια κατανομή τύπου φάσεων 2<sup>ης</sup> τάξης. Θεωρούμε ότι η συνεχείς τ.μ.  $X_1 \sim \text{Exp}(3)$  και η  $X_2 \sim \text{Exp}(7)$  με βάρη  $\frac{1}{2}$  και  $\frac{1}{2}$  αντίστοιχα. Θα υπολογίσουμε τις τρεις πρώτες ροπές,

$$E(X) = \frac{\alpha_1}{\lambda_1} + \frac{1 - \alpha_1}{\lambda_2} = \frac{5}{21}$$

$$E(X^2) = \frac{2\alpha_1}{\lambda_1^2} + \frac{2(1 - \alpha_1)}{\lambda_2^2} = \frac{58}{441}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη μέθοδο των ροπών και επιλύουμε το σύστημα των 2 εξισώσεων με τη βοήθεια του υπολογιστικού εργαλείου Mathematica προκειμένου να βρούμε τις παραμέτρους της κατανομής Pareto.

$$E(Y) = E(X) \Rightarrow \frac{\lambda}{\alpha - 1} = \frac{5}{21},$$

$$E(Y^2) = E(X^2) \Rightarrow \frac{2\lambda^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} = \frac{58}{441}.$$

Για την εύρεση των παραμέτρων θα χρησιμοποιήσουμε την εντολή NSolve από την οποία προκύπτει,

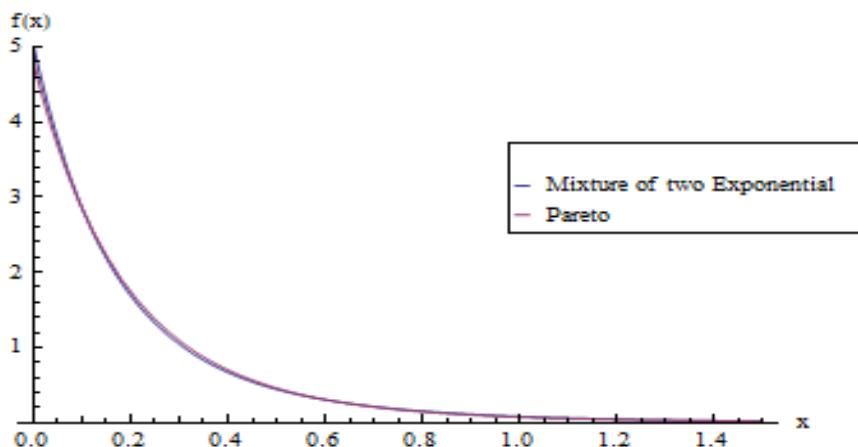
$$\lambda \rightarrow 1.72619, \quad \alpha \rightarrow 8.25$$

επομένως η συνάρτηση πυκνότητας της Pareto είναι,

$$f(y) \approx \frac{745.524}{(1.726 + y)^{9.25}}.$$

### ΣΧΗΜΑ 2-8

Γραφική παράσταση των συναρτήσεων πυκνότητας των δύο κατανομών στο διάστημα  $x \in [0, 1.5]$ . Με μπλε χρώμα αναπαρίσταται η καμπύλη της μείξη εκθετικών κατανομών ενώ με ροζ η καμπύλη της Pareto.



Στο διάγραμμα παρατηρείται πως οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας και των δυο κατανομών φθίνει με γρήγορο ρυθμό στο διάστημα  $x \in [0, 0.4]$ . Στο διάστημα  $x \in [0.4, 1.2]$  οι συναρτήσεις εξακολουθούν να φθίνουν με αργό πλέον ρυθμό τείνοντας στο μηδέν ενώ στο διάστημα  $x \in [1.2, 1.5]$  αγγίζει το μηδέν. Παρατηρούμε από το διάγραμμα πως πρόκειται για μια σχετικά καλή προσέγγιση.

**Πίνακας 2.4.** Τιμές των πρώτων έξι ροπών της κατανομής Pareto και της μείξης εκθετικών κατανομών

Πλήθος ροπών	Μείξη εκθετικών	Pareto
1 <sup>η</sup>	0.238095	0.238299
2 <sup>η</sup>	0.131519	0.131617
3 <sup>η</sup>	0.119857	0.129812
4 <sup>η</sup>	0.153146	0.210877
5 <sup>η</sup>	0.250483	0.559959
6 <sup>η</sup>	0.496887	2.577306

Παρατηρούμε πώς τα αποτελέσματα των ροπών των 2 κατανομών μας είναι σχετικά ίδια μέχρι και την τρίτη ροπή. Όσον αφορά την τέταρτη ροπή παρατηρούμε πως υπάρχει μια πολύ μικρή απόκλιση η οποία συνεχίζει και μεγαλώνει αρκετά κατά τον υπολογισμό της έκτης ροπής. Επομένως μέσω της αξιολόγησης των ροπών παρατηρούμε πως η διπαραμετρική μας κατανομή Pareto προσεγγίζεται αρκετά καλά από την μείξη εκθετικών κατανομών σε αντίθεση με τον υπολογισμό της πέμπτης και της έκτης ροπής η προσέγγισή μας δεν μας δίνει καλά αποτελέσματα.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας των δύο κατανομών. Για την πιθανότητα χρεοκοπίας της μείξης των εκθετικών κατανομών έχουμε ήδη βρει τον τύπο στην Εφαρμογή 3 της παραγράφου 2.2.4 και ο τύπος είναι,

$$\psi(u) = \frac{24}{35} e^{-u} + \frac{1}{35} e^{-6u}, \quad u \geq 0.$$

Για την περίπτωση της διπαραμετρικής Pareto η προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας θα υπολογισθεί από τον τύπο των Asmussen και Binswanger (1997),

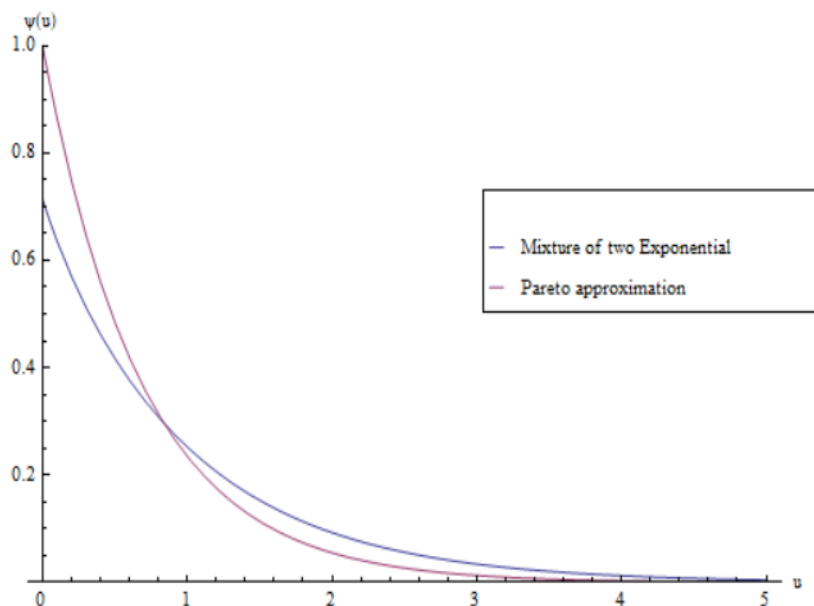
$$\psi(u) \approx e^{-u\theta \frac{2E(X)}{E(X)^2 + \text{Var}(X)}}, \quad u \geq 0,$$

ο οποίος για περιθώριο ασφαλείας  $\theta = \frac{2}{5}$  και  $E(X) = 0.2383$ ,  $\text{Var}(X) = 0.07483$  παίρνει τη μορφή,

$$\psi(u) \approx e^{-1.4484u}, \quad u \geq 0.$$

### ΣΧΗΜΑ 2-9

Γραφική παράσταση των πιθανοτήτων χρεοκοπίας των δύο κατανομών στο διάστημα  $u \in [0, 4]$ . Με μπλε χρώμα αναπαρίσταται η καμπύλη της μείζης εκθετικών κατανομών ενώ με ροζ η καμπύλη της προσέγγισης της κατανομής Pareto.



Βλέποντας το διάγραμμα παρατηρούμε πως για την προσέγγιση της κατανομής Pareto το  $\psi(0) = 1$  πράγμα το οποίο σημαίνει πως θα έχουμε σίγουρη χρεοκοπία για αρχικό αποθεματικό  $u = 0$ . Συνήθως, οι κατανομές με ελαφριά ουρά φθίνουν πιο γρήγορα προς το μηδέν από ό,τι οι κατανομές με βαριά ουρά. Παρατηρώντας το σχήμα η προσέγγιση της κατανομής Pareto στη συγκεκριμένη περίπτωση φθίνει πιο γρήγορα στο μηδέν από την μείζης εκθετικών κατανομών, κάτι που μας κάνει εντύπωση καθώς γνωρίζουμε πως οι κατανομές ελαφριάς ουράς φθίνουν πιο γρήγορα στο μηδέν από τις κατανομές βαριάς ουράς.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## Η μέθοδος της φασματικής ανάλυσης για την προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας

### 3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα βασιστούμε στην μελέτη της Vatamidou και των συνεργατών της κατά την οποία μελετούν την προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο της. Το πρόβλημα εστιάζεται σε κατανομές απαιτήσεων με πολύ βαριά ουρά και συγκρίνονται τρεις μέθοδοι, της φασματικής προσέγγισης, της heavy traffic και της heavy tail.

Στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας οι ατομικές οικονομικές απαιτήσεις (στο εξής απαιτήσεις) λαμβάνουν χώρα με ρυθμό παράμετρο  $\lambda > 0$  της κατανομής Poisson ανά μονάδα χρόνου. Σε γενίκευση του χρόνου  $t > 0$  από τη στιγμή παρατήρησης ή έναρξης καταγραφής των απαιτήσεων, οι αναμενόμενες απαιτήσεις είναι κατανομής ομογενούς ανεξίτητος Poisson παραμέτρου  $\lambda t$ . Ως κατανομή του μεγέθους των απαιτήσεων σε πολλά έως τώρα μοντέλα έχει χρησιμοποιηθεί η εκθετική, η οποία όμως αδυνατεί να προσομοιώσει μεγάλα μεγέθη ζημιών τα οποία αντιθέτως προσομοιώνονται με κατανομές βαρύτερης ουράς σε σχέση με την εκθετική. Από την άλλη, οι κατανομές βαριάς ουράς αυτές αυξάνουν την πολυπλοκότητα υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας. Η μεθοδολογική προσέγγιση των Pollaczek-Khincine συνεισφέρει στο παραπάνω πρόβλημα της εκτίμησης της πιθανότητας χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας για απαιτήσεις από κατανομές βαριάς ουράς, με ρυθμό αφίξεων την κατανομή Poisson ή ισοδυνάμως μεσοδιαστήματα διαδοχικών αφίξεων την εκθετική κατανομή. Στην απλή περίπτωση της εκθετικής κατανομής ως αυτή των ατομικών απαιτήσεων, δεν συναντάμε ή με πολύ μικρή πιθανότητα συναντάμε το πρόβλημα της υπέρθεσης λόγω του ότι η εκθετική κατανομή δεν ανήκει σε αυτές με βαριά ουρά. Αντιθέτως, η διαδικασία της υπέρθεσης είναι συνήθης για κατανομές βαριάς ουράς. Παρότι προτείνεται ο μετασχηματισμός Laplace του μεγέθους απαιτήσεων από κατανομές βαριάς ουράς, συναντάμε μεγάλη δυσκολία στην εξαγωγή κλειστού αναλυτικού τύπου. Χαρακτηριστική περίπτωση η διπαραμετρική κατανομή Pareto ή Weibull που είτε δεν έχουν ροπογεννήτρια συνάρτηση (για τη μεν Pareto ισχύει για κάθε ζεύγος παραμέτρων της) ή έχουν υπό περιορισμό παραμέτρων (για τη δε Weibull ισχύει με παραμέτρους  $c > 0$  και  $\gamma > 1$ ).

Πράγματι, η ροπογεννήτρια συνάρτηση μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής  $X$  ορίζεται ως εξής:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

όπου  $f(x)$  η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.).

Η σ.π.π. της κατανομής Pareto με παραμέτρους  $\alpha > 0$  και  $\delta > 0$  είναι

$$f(x) = \frac{\alpha\delta^\alpha}{(x+\delta)^{\alpha+1}}, \quad x > 0$$

και αντικαθιστώντας στη συνάρτηση ροπογεννήτριας

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{\alpha\delta^\alpha}{(x+\delta)^{\alpha+1}} dx = \int_0^\infty g(x) dx, \quad g(x) \rightarrow \infty \text{ καθώς } x \rightarrow \infty.$$

Συνεπώς, δεν ορίζεται η ροπογεννήτρια συνάρτηση για την κατανομή Pareto.

Η σ.π.π. της κατανομής Weibull με παραμέτρους  $c > 0$  και  $\gamma > 0$  είναι

$$f(x) = c\gamma x^{\gamma-1} e^{-cx^\gamma}, \quad x > 0$$

και αντικαθιστώντας στη συνάρτηση ροπογεννήτριας

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} c\gamma x^{\gamma-1} dx = \int_0^\infty e^{tx-cx^\gamma} c\gamma x^{\gamma-1} dx = \int_0^\infty g(x) dx, \quad g(x) \rightarrow \infty, \text{ καθώς } x \rightarrow \infty \text{ αν } \gamma < 1.$$

Διαφορετικά, αν  $\gamma \geq 1$  τότε η κατανομή Weibull δεν είναι βαρύτερης ουράς από την εκθετική με παράμετρο  $\gamma$  συνεπώς, εφόσον υπάρχει η ροπογεννήτρια συνάρτηση της εκθετικής κατανομής ( $M_X(t) = \frac{\gamma}{\gamma-t}$ ,  $\gamma > t$ ), θα υπάρχει και της Weibull.

Ακολουθεί η απόδειξη της βαρύτερης ουράς της εκθετικής παραμέτρου  $\gamma > 1$  με σ.π.π.  $h_X(x) = \gamma e^{-\gamma x}$ ,  $x > 0$ , έναντι της Weibull με παραμέτρους  $c > 0$  και  $\gamma > 1$ :

$$\frac{h(x)}{f(x)} = \frac{\gamma e^{-\gamma x}}{c\gamma x^{\gamma-1} e^{-cx^\gamma}} = \frac{e^{-cx^\gamma - \gamma x}}{cx^{\gamma-1}} \rightarrow \infty,$$

καθώς  $x \rightarrow \infty$  διότι στον αριθμητή η εκθετική συνάρτηση με θετικό πολυώνυμο (για πολύ μεγάλες τιμές του  $x$ ,  $cx^\gamma \gg \gamma x$ ) συγκλίνει πιο γρήγορα στο άπειρο σε σχέση με το πολυώνυμο στον παρονομαστή ( $cx^\gamma - \gamma x \gg x^{\gamma-1}$ ).

Ο μετασχηματισμός Laplace  $F(s)$  συνάρτησης  $f(x)$ ,  $\hat{f}(s) = L(f(x))$  ορίζεται ως εξής:

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-sx} f(x) dx = M(-s)$$

Οπότε γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η μη ύπαρξη ροπογεννήτριας συνάρτησης είναι αλληλένδετη με τη μη ύπαρξη μετασχηματισμού Laplace. Στην περίπτωση αυτή διενεργείται προσέγγιση η οποία κατατάσσεται σε δύο κατηγορίες:



- i) ως προς το μέσο μέγεθος απαιτήσεων στη μονάδα χρόνου:
- a. με προσέγγιση HT (Heavy Traffic; HT) από τους Kalashnikov (1997) και Kingman (1962) όταν κατά μέσο όρους οι εισφορές υπερβαίνουν ελάχιστα τις απαιτήσεις. Αν και απαιτούνται πεπερασμένες ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης, ακόμα και αν ικανοποιούνται αυτές οι συνθήκες η προσέγγιση HT δεν λειτουργεί ικανοποιητικά για κατανομές πολύ βαριάς ουράς.
  - b. με προσέγγιση LT (Light Traffic; LT) από τους Asmussen (1992), Bloomfield & Cox (1972), Daley & Rolski (1984, 1991), όταν κατά μέσο όρο οι εισφορές είναι κατά πολύ μεγαλύτερες από τις απαιτήσεις. Η περίπτωση αυτή είναι μη συνήθης και κατατάσσει την προσέγγιση LT λιγότερο εύχρηστη σε σχέση με την HT.
- ii) ως προς τα χαρακτηριστικά της κατανομής του μεγέθους των απαιτήσεων. Χρησιμοποιείται η προσέγγιση του Edgeworth με δυναμοσειρές σε συνδυασμό με το κεντρικό οριακό θεώρημα. Ασυμπτωτικές προσεγγίσεις παρουσιάζονται από την ομάδα των Blanchet και Zwart (2010) εφόσον οι ροπές της κατανομής απαιτήσεων είναι υπολογιστικά εφικτές χωρίς κατά ανάγκη η κατανομή να είναι γνωστή. Θα μπορούσαμε, σαφώς, να βασισθούμε στις προσεγγίσεις των De Vylder (1978) ή των Beeckman-Bower (1969), αλλά για κατανομές με βαριά ουρά ροπές μεγάλης τάξης δεν ορίζονται. Κλασικό παράδειγμα η κατανομή Pareto της οποίας υπολογίζονται αναλυτικά μόνο οι ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης, οπότε η εφαρμογή της μεθόδου De Vylder για παράδειγμα που βασίζεται στις ροπές μέχρι και τρίτης τάξης είναι ανέφικτη.

Για τις περιπτώσεις κατανομών με ροπές που δεν ορίζονται ( $E(X^k) \rightarrow \infty$ ) προτείνεται η μέθοδος TAM (Transform Approximation Method). Η μέθοδος αυτή έχει την κεντρική της ιδέα στον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace του μεγέθους των απαιτήσεων και όχι στον προσδιορισμό της καθ' αυτού κατανομής των απαιτήσεων. Μειονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ότι προβάλλει καλή προσαρμογή μόνο στην ουρά της πιθανότητας χρεοκοπίας όταν το μέσο μέγεθος απαιτήσεων στη μονάδα του χρόνου είναι σχεδόν 1 νομισματική μονάδα (ν.μ). Το ίδιο μειονέκτημα εμφανίζεται στην περίπτωση όπου οι ουρές των κατανομών των απαιτήσεων είναι υποεκθετικές. Η ουρά της κατανομής  $H(u)$  λέμε ότι ανήκει στην κλάση των υποεκθετικών αν (Κωνσταντινίδης, 2011):

$$\frac{\bar{H}^{*n}(u)}{\bar{H}(u)} \rightarrow n \text{ για } u \rightarrow \infty$$

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται η προσέγγιση heavy tail (Heavy Tail; HTa, Bahr, 1975; Borovkov & Foss, 1992; Embrechts & Veraverbeke, 1982; Pakes 1975).

Όπως είδαμε παραπάνω ο μετασχηματισμός Laplace και η ροπογεννήτρια συνάρτηση είτε υπάρχουν αμφότερες είτε όχι. Για τις κατανομές πολύ βαριάς ουράς ισχύει το δεύτερο. Η αντιμετώπιση που προτείνεται στηρίζεται στη χρήση κατανομών τύπου φάσεων (Feldmann και Whitt, 1998; Lucantoni, Choudhary και Whitt, 1994;

Neuts, 1989) με πλεονέκτημα την κλειστή μορφή του μετασχηματισμού Laplace για το μέγεθος απαίτησης με μεγάλη ακρίβεια, αλλά με μειονέκτημα την δυσκολία προσδιορισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Στο τελευταίο πρόβλημα στρέφεται η ερευνητική ομάδα των Vatamidou, Adan, Vlasiou και Zwart (2014). Συνοπτικά, ασχολούνται με απαιτήσεις από κατανομές πολύ βαριάς ουράς και προσεγγίζουν με hyperexponential κατανομή, της οποίας ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει σε κλειστή αναλυτική μορφή, την υπερβάλλουσα κατανομή μεγέθους των απαιτήσεων και κατόπιν την πιθανότητα χρεοκοπίας με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Η προσέγγιση αυτή ονομάστηκε φασματική (Spectral Approximation; SA) γίνεται με προκαθορισμένη ακρίβεια και κατόπιν εκτιμάται η hyperexponential κατανομή. Η φασματική ανάλυση έχει ευρεία εφαρμογή στην ανάλυση σημάτων και σύγκριση αυτών. Πιο αναλυτικά, όταν επιθυμούμε να συγκρίνουμε σήματα μεταξύ τους στο πεδίο του χρόνου, τα μετασχηματίζουμε με Laplace στο  $s$ -πεδίο.

Η μέθοδος SA συγκρίνεται με τις μεθόδους HT και HTa χρησιμοποιώντας τις κατανομές Pareto, Weibull και μακράς ουράς των Abate & Whitt (1999).

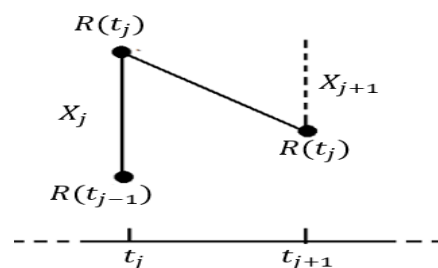
### 3.2 Προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας με φασματική ανάλυση

Η ανέλιξη πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας σε συνεχή χρόνο  $t > 0$  είναι  $U(t)$  και υπολογίζεται σε σχέση με το απόθεμα  $U(0) = u$  τη χρονική στιγμή  $t = 0$  για απαιτήσεις ανεξάρτητες και ισοκατανομημένες μεγέθους  $X_1, X_2, \dots$  που καταφθάνουν με ρυθμό αφίξεων  $N(t)$  που ακολουθεί την κατανομή ομογενούς ανέλιξης Poisson με παράμετρο  $\lambda t$ ,

$$U(t) = u + t - S(t),$$

όπου  $\lambda > 0$  είναι ο ρυθμός συμβάντων στη μονάδα του χρόνου. Επίσης θεωρούμε ότι ο ρυθμός εισφορών στη μονάδα χρόνου είναι 1 νομισματική μονάδα. Η μεταβλητή  $R(t) = u - U(t)$  είναι η συνολική ζημιά τη χρονική στιγμή  $t$  (αν  $R(t) < 0$  τότε η απόλυτη τιμή της είναι κέρδος) και πρόκειται κατανομή σύνθετη Poisson με παραμέτρους  $\lambda > 0$  και την κατανομή των απαιτήσεων. Τα γραφικά χαρακτηριστικά της μεταβλητής αποτελούνται από θετικά άλματα τη χρονική στιγμή της απαίτησης  $X_j$ , έστω  $t_j$  ώστε  $R(t_j) = R(t_{j-1}) + X_j$  και γραμμική φθίνουσα ανέλιξη με κλίση 1 μέχρι τη χρονική στιγμή  $t_{j+1}$  της επόμενης απαίτησης  $X_{j+1}$ :

**ΣΧΗΜΑ 3-1**  
Δείγμα διαδρομής της στοχαστικής  
ανέλιξης  $\{R(t): t \geq 0\}$ .



Η διαδικασία αυτή γεννά κλιμακωτά ύψη τα οποία αθροιστικά είναι η μέγιστη σωρευτική απώλεια  $L$ . Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ακριβώς η πιθανότητα η μέγιστη σωρευτική απώλεια να υπερβεί το απόθεμα:  $\psi(u) = P(L > u)$ .

Η πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με το μαθηματικό τύπο των Pollaczek-Khinchine:

$$\psi(u) = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \bar{H}_0^{*n}(u)$$

όπου  $\rho < 1$  είναι το μέσο μέγεθος απαίτησης ανά μονάδα χρόνου, \* είναι το σύμβολο της συνέλιξης (n- βαθμού στον τύπο μας) και  $H_0(u)$  είναι η σ.κ κλιμακωτών υψών,

$$\bar{H}_0^{*n} = 1 - H_0^{*n}, \quad H_0(u) = \frac{1}{E(U)} \int_0^u \bar{H}(t) dt.$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της παραπάνω μετατρέπει την μορφή του αθροίσματος σε κλειστού τύπου συνάρτηση στο s-πεδίο, και σε ότι αφορά τη μέγιστη σωρευτική απώλεια είναι σε αναλυτική μορφή κλειστού τύπου:

$$E(e^{-sL}) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho \hat{H}_0(s)}$$

όπου  $\hat{H}_0(s)$  είναι ο μετασχηματισμός Laplace της  $H_0(u)$  στο s-πεδίο τιμών. Πρόκειται για κατανομή phase-type. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace υπολογίζει την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Η προσέγγιση της  $H_0$  με γνωστή κατανομή (σε σχέση με την ακριβή κατανομή  $\tilde{H}_0$ ) οδηγεί σε προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας  $\psi(u)$  με απόλυτο σφάλμα ως προς την ακριβή τιμή της  $\tilde{\psi}(u)$ :

$$|\psi(u) - \tilde{\psi}(u)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \{(1 - \rho) \rho^n |H_0^{*n}(u) - \tilde{H}_0^{*n}(u)|\}$$

ή

$$|\psi(u) - \tilde{\psi}(u)| \leq \varepsilon \frac{\rho}{1 - \rho}$$

όπου  $\varepsilon$  είναι το μέγιστο απόλυτο σφάλμα της μέγιστης σωρευτικής απώλειας  $L$  σε σχέση με την ακριβή της τιμή  $\tilde{L}$ :  $|L - \tilde{L}| \leq \varepsilon$ .

Αναλύσαμε σε παραπάνω παραγράφους τη δυσκολία μελέτης της πιθανότητας χρεοκοπίας για κατανομές όπως η Pareto (για κάθε ζεύγος παραμέτρων) και η Weibull (για περιπτώσεις παραμέτρων) λόγω μη ύπαρξης της συνάρτησης πιθανογεννήτριας, αποτέλεσμα της βαριάς ουράς. Οι κατανομές αυτές είναι *πλήρως μονότονες*, εφόσον

$$(-1)^n f^{(n)}(u) \geq 0, \quad \forall u > 0, \quad n \geq 1$$

και μπορούν να προσεγγισθούν από hyperexponential κατανομές σύμφωνα με το θεώρημα του Feller (1971): Μια σ.π.π. ανήκει σε πλήρως μονότονη κατανομή αν και μόνο αν είναι μείζη εκθετικών σ.π.π.:

$$f(u) = \int_0^\infty ye^{-yu} dG(y), \quad u \geq 0$$

όπου  $G$  είναι θετικά ορισμένη συνάρτηση κατανομής, την οποία ορίζουν ως φασματική συνάρτηση κατανομής (spectral cdf). Με βάση την φασματική προσέγγιση, η ουρά της κατανομής είναι

$$\bar{F}(u) = \int_0^\infty e^{-yu} dG(y), \quad u \geq 0$$

Προκύπτει δε ότι αν η κατανομή είναι πλήρως μονότονη, τότε και το μέγεθος υπερβάλλουσας ζημιάς είναι κατανομή πλήρως μονότονη:

$$\bar{H}(u) = \int_0^\infty e^{-yu} dG(y), \quad u \geq 0$$

Ο μετασχηματισμός Laplace δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε μια πλήρως μονότονη συνάρτηση κατανομής.

### 3.3 Προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας με προσεγγίσεις Heavy-Traffic (HT) και Heavy-Tail (HTa)

Για την περίπτωση κατανομών πολύ βαριάς ουράς με πεπερασμένη ροπή δεύτερης τάξης και για την περίπτωση όπου  $\rho \rightarrow 1$ , οπότε και  $L \rightarrow \text{Exp}\left(\frac{1}{E(L)}\right)$  έχουμε την προσέγγιση του Kalashnikov (1997):

$$\psi(u) \approx \psi_{HT}(u) := e^{-u/E(L)}$$

όπου  $L$  είναι η μέγιστη σωρευτική απώλεια και  $E(L) = \frac{\rho E(U^2)}{2(1-\rho)E(U)}$ .

Για την περίπτωση των υποεκθετικών κατανομών όπως η Weibull, Pareto, λογαριθμοκανονική και άλλες κατανομές πολύ βαριάς ουράς,

$$\psi(u) \approx \psi_{HTa}(u) := \frac{\rho}{1-\rho} \bar{H}_0(u), \quad u \rightarrow \infty.$$

Η παραπάνω συνθήκη υποδηλώνει την επικράτηση της μεθόδου HTa έναντι της HT για πολύ μεγάλες τιμές  $u$ .

### 3.4 Κατανομές και μέθοδοι σύγκρισης

Η σ.π.π. της κατανομής των Abate και Whitt  $h(u)$  με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}^{-1}$  της  $\hat{h}(u) = \mathcal{L}(h(u)) = 1 - \frac{u}{(\mu + \sqrt{u})(1 + \sqrt{u})}$ , μέσης τιμής  $\mu^{-1}$  και ροπές κ-τάξεως οι οποίες τείνουν στο άπειρο. Η σ.π.π παρουσιάζεται από τους Abate και Whitt (1999), κατά τους οποίους αποδεικνύεται πως για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με ρυθμό άφιξης γεγονότων  $\lambda$  και μέσο μέγεθος απαίτησης  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$  ο τύπος της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι ακριβής και είναι ο εξής:

$$\psi(u) = P(L > u) = \frac{\rho}{v_1 - v_2} (v_1 \zeta(v_2^2 u) - v_2 \zeta(v_1^2 u)),$$

όπου 
$$\zeta(u) \equiv \frac{e^{u/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{u}}^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad v_{1,2} = \frac{1+\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^2 - (1-\rho)\mu}.$$

Η ύπαρξη της παραπάνω σχέσης μας δίνουν την δυνατότητα να συγκρίνουμε την φασματική προσέγγιση με τον ακριβή τύπο της πιθανότητας χρεοκοπίας και όχι με το αποτέλεσμα κάποιας προσομοίωσης.

Η ουρά της σ.κ των απαιτήσεων δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{H}(u) = \left(\frac{1}{1-\mu}\right) (\zeta(u) - \mu \zeta(\mu^2 u)).$$

Ύστερα από κάποιους απλούς υπολογισμούς καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση  $\zeta(u)$  είναι μια απολύτως μονότονη συνάρτηση ως μείξη εκθετικών κατανομών. Επομένως η σ.κ  $\bar{H}(u)$  θα είναι απολύτως μονότονη συνάρτηση.

Λόγω της μη πεπερασμένης ροπής δεύτερης τάξης, η μέθοδος HT δεν είναι εφαρμόσιμη. Συνεπώς συγκρίνουν τη μέθοδο SA με τη μέθοδο HTa.

Για την περίπτωση της Weibull με ουρά συνάρτηση κατανομής  $\bar{H}(u) = e^{-\left(\frac{u}{a}\right)^c}$  για  $c = 0.5$  και πεπερασμένη ροπή δεύτερης τάξης  $E(H^2) = 24a^2$  δύναται να αναπαρίσταται με μείξη εκθετικών με  $dG(y) = \frac{\alpha e^{-\alpha^4 y}}{2\sqrt{\pi} y^3} dy$ . Συγκρίνεται η μέθοδος SA με τη μέθοδο HT.

Για την περίπτωση της Pareto με παραμέτρους  $\alpha > 0$  και  $\beta > 0$  με σ.π.π  $h(u) = \frac{\alpha\beta}{(1+\beta u)^{\alpha+1}}, u > 0$ , κατανομή πλήρως μονότονη, και ουρά

$$\bar{H}(u) = (1 + \beta u)^{-\alpha} = \int_0^{\infty} e^{-yu} e^{-\frac{y}{\beta}} \left(\frac{y^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)}\right) dy.$$

Εφόσον η ροπή  $n$ -τάξης υπάρχει όταν  $\alpha > n$ , η προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας για την περίπτωση της κατανομής Pareto υφίσταται για  $\alpha > 3$ . Συγκρίνεται η μέθοδος SA με τις μεθόδους HT και HTa. Συνοπτικά επιλέγονται οι κατανομές Abate-Whitt( $\mu = 2$ ), Weibull( $c = 0.5, \alpha = 3$ ) και Pareto( $\alpha = 4, \beta = 3$ ).

### 3.5 Αριθμητικά αποτελέσματα

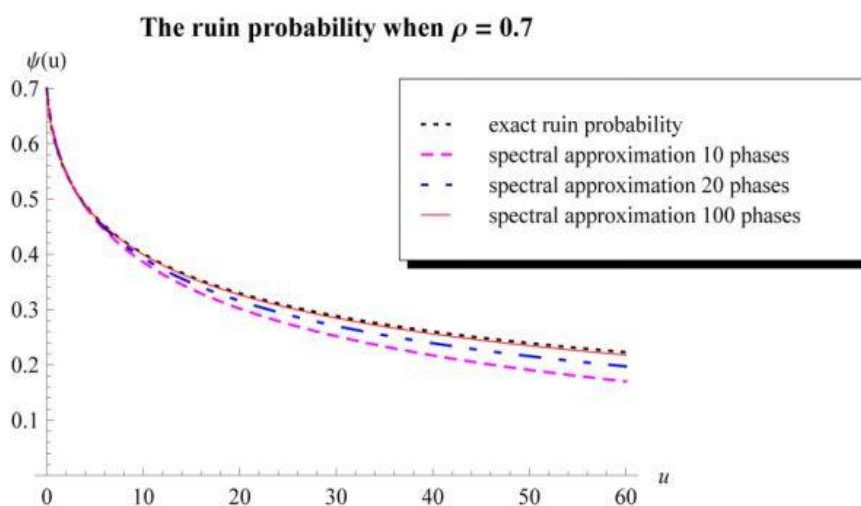
Στην συγκεκριμένη ενότητα θα σχολιάσουμε και θα αναλύσουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα της μελέτης της Vatamidou και των συνεργατών της για τις κατανομές Abate-Whitt ( $\mu = 2$ ), Weibull ( $c = 0.5$ ,  $\alpha = 3$ ) και Pareto ( $\alpha = 4$ ,  $\beta = 3$ ).

#### 3.5.1 Η επίδραση του πλήθους των φάσεων στην πιθανότητα χρεοκοπίας.

Θεωρούμε την κατανομή των Abate-Whitt με παράμετρο  $\mu = 2$ . Η ακριβής πιθανότητα χρεοκοπίας προσεγγίζεται καλύτερα όσο αυξάνεται το πλήθος των φάσεων με τη μέθοδο SA. Το αποτέλεσμα αυτό δεν διαφοροποιείται ποιοτικά για διαφορετικές τιμές  $\rho$  (στο κάτωθι διάγραμμα έχει επιλεγεί η τιμή 0.7). Τέλος, παρατηρούμε ότι η μεταβολή του πλήθους φάσεων έχει μικρότερη επίδραση για μικρότερο απόθεμα  $u$ .

#### ΣΧΗΜΑ 3-2

Διάγραμμα της πιθανότητας χρεοκοπίας όπου  $\rho = 0.7$  για κατανομή αποζημιώσεων Abate-Whitt με παράμετρο  $\mu = 2$ . Με μαύρη διακεκομμένη γραμμή απεικονίζεται ο ακριβής τύπος της πιθανότητας χρεοκοπίας  $\psi(u)$ , με μωβ γραμμή απεικονίζεται η φασματική προσέγγιση της  $\psi(u)$  για 10 φάσεις, με μπλε γραμμή απεικονίζεται η φασματική προσέγγιση της  $\psi(u)$  για 20 φάσεις και με πορτοκαλί γραμμή απεικονίζεται η φασματική προσέγγιση της  $\psi(u)$  για 100 φάσεις.  
(βλέπε Vatamidou et al. (2014))



Για την περίπτωση των Weibull ( $c = 0.5$ ,  $\alpha = 3$ ) και Pareto ( $\alpha = 4$ ,  $\beta = 3$ ) έγινε σύγκριση του ακριβούς τύπου της πιθανότητας χρεοκοπίας με τους αντίστοιχους προσεγγιστικούς τύπους της μεθόδου SA για διαφορά πλήθη φάσεων. Ακολουθούν δυο πίνακες στους οποίους αναγράφονται τα αποτελέσματα της έρευνας για την περίπτωση των κατανομών Weibull και Pareto. Τα αποτελέσματα αυτά, όπως και στην περίπτωση της Abate και Whitt, δεν διαφοροποιούνται ποιοτικά για διαφορετικές τιμές  $\rho$  (στους κάτωθι πίνακες έχει επιλεγεί η τιμή 0.7).

**Πίνακας 3.1.** Φασματική προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας για διάφορους αριθμούς φάσεων, για κατανομή των αποζημιώσεων είναι Weibull( $c = 0.5$ ,  $\alpha = 3$ ). Οι τιμές στις παρενθέσεις αντιστοιχούν στο απόλυτο σφάλμα της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας από τις αντίστοιχες προσεγγίσεις. (βλέπε Vatamidou et al. (2014)).

$u$	Ακριβής πιθανότητα χρεοκοπίας	SA 10 φάσεων	SA 20 φάσεων	SA 100 φάσεων
0	0.70000	0.70000 (0.00000)	0.70000 (0.00000)	0.70000 (0.00000)
5	0.60745	0.61023 (0.00279)	0.60823 (0.00079)	0.60754 (0.00009)
10	0.54574	0.54696 (0.00122)	0.54569 (0.00005)	0.54527 (0.00047)
15	0.49580	0.49558 (0.00022)	0.49502 (0.00078)	0.49485 (0.00095)
20	0.45312	0.45172 (0.00139)	0.45181 (0.00130)	0.45189 (0.00122)
25	0.41603	0.41334 (0.00269)	0.41405 (0.00198)	0.41436 (0.00167)

**Πίνακας 3.2.** Φασματική προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας για διάφορους αριθμούς φάσεων, για κατανομή των αποζημιώσεων είναι Pareto ( $\alpha = 4$ ,  $\beta = 3$ ). Οι τιμές στις παρενθέσεις αντιστοιχούν στο απόλυτο σφάλμα της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας από τις αντίστοιχες προσεγγίσεις. (βλέπε Vatamidou et al. (2014)).

$u$	Ακριβής πιθανότητα χρεοκοπίας	SA 10 φάσεων	SA 20 φάσεων	SA 100 φάσεων
0.00	0.70000	0.70000 (0.00000)	0.70000 (0.00000)	0.70000 (0.00000)
0.10	0.54805	0.55012 (0.00207)	0.55008 (0.00203)	0.55005 (0.00200)
0.55	0.23572	0.22698 (0.00873)	0.23218 (0.00353)	0.23435 (0.00137)
1.00	0.11499	0.10194 (0.01305)	0.10851 (0.00648)	0.11146 (0.00352)
1.45	0.05983	0.04695 (0.01287)	0.05265 (0.00718)	0.05545 (0.00437)
1.90	0.03215	0.02187 (0.01028)	0.02609 (0.00606)	0.02838 (0.00377)

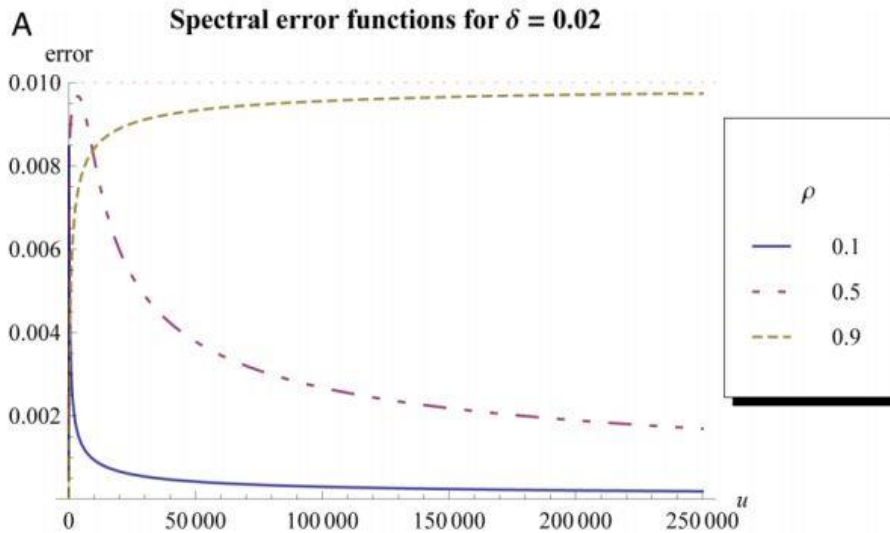
Συνολικά και στις τρεις περιπτώσεις που μελετήσαμε παρατηρούμε πως όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των φάσεων τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση του ακριβή τύπου της πιθανότητας χρεοκοπίας  $\psi(u)$ .

### 3.5.2 Η επίδραση του μέσου μεγέθους απαιτήσης στην πιθανότητα χρεοκοπίας

Για την κατανομή των Abate-Whitt με παράμετρο  $\mu = 2$ , η προσέγγιση της μεθόδου SA είναι καλύτερη για μικρότερο μέσο μέγεθος απαιτήσεων  $\rho$  και συνολικά είναι μικρότερη του ήμισυ της ποσότητας  $\delta$ :  $\varepsilon = \delta (1 - \rho) / \rho$ , όπου  $\varepsilon$  είναι το μέγιστο σφάλμα ακρίβειας της κατανομής μεγέθους απαιτήσεων. Παρατηρούμε επίσης ότι όταν το μέσο μέγεθος απαιτήσεων  $\rho$  προσεγγίζει τη μονάδα, τότε ασυμπτωτικά για αυξανόμενο απόθεμα  $u$  το σφάλμα τείνει στην προαναφερθείσα τιμή  $\delta/2$ .

### ΣΧΗΜΑ 3-3

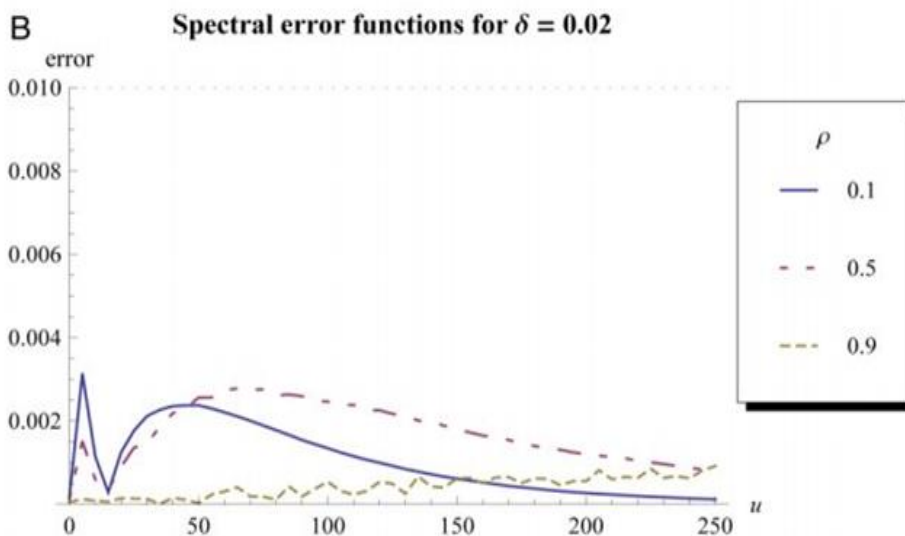
Συνάρτηση σφάλματος της φασματικής προσέγγισης με σταθερό φράγμα  $\delta = 0.02$ , για κατανομή αποζημιώσεων Abate-Whitt με παράμετρο  $\mu = 2$ . (βλέπε Vatamidou et al. (2014))



Για την κατανομή Weibull(0.5, 3), το σφάλμα της μεθόδου SA μειώνεται σε σχέση με την κατανομή Abate-Whitt, είναι δε μικρότερο από 0.004 χωρίς να εμφανίζει κάποιο ιδιαίτερο μοτίβο σε σχέση με την παράμετρο  $\rho$ , παρά μόνο ότι μειώνεται όσο αυξάνει το απόθεμα  $u$  για μικρότερες τιμές της παραμέτρου  $\rho$ .

### ΣΧΗΜΑ 3-4

Συνάρτηση σφάλματος της φασματικής προσέγγισης με σταθερό φράγμα  $\delta = 0.02$ , για κατανομή αποζημιώσεων Weibull(0.5, 3). (βλέπε Vatamidou et al. (2014)) .

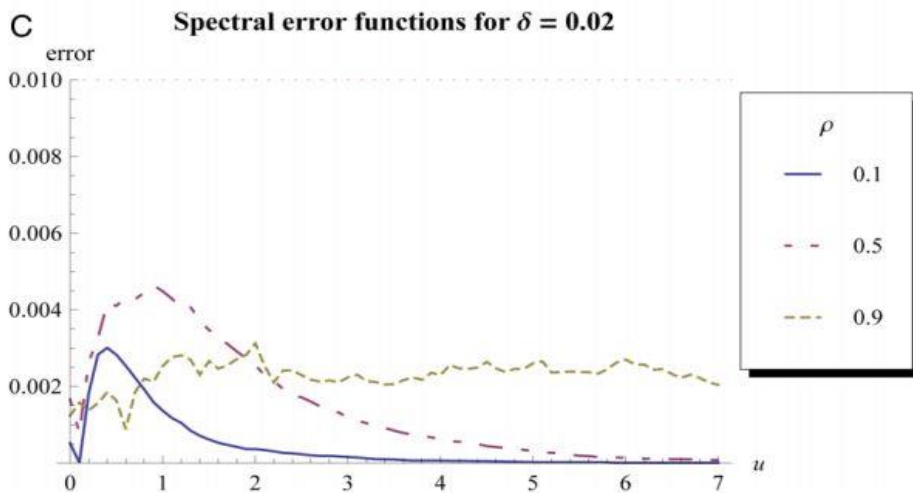




Για την κατανομή Pareto(4, 3), επίσης το σφάλμα μειώνεται αρκετά σε σχέση με την κατανομή Abate-Whitt στο 1/4 περίπου σύμφωνα με το κάτωθι γράφημα.

### ΣΧΗΜΑ 3-5

Συνάρτηση σφάλματος της φασματικής προσέγγισης με σταθερό φράγμα  $\delta = 0.02$ , για κατανομή αποζημιώσεων Pareto(4, 3). (βλέπε Vatamidou et al. (2014)).

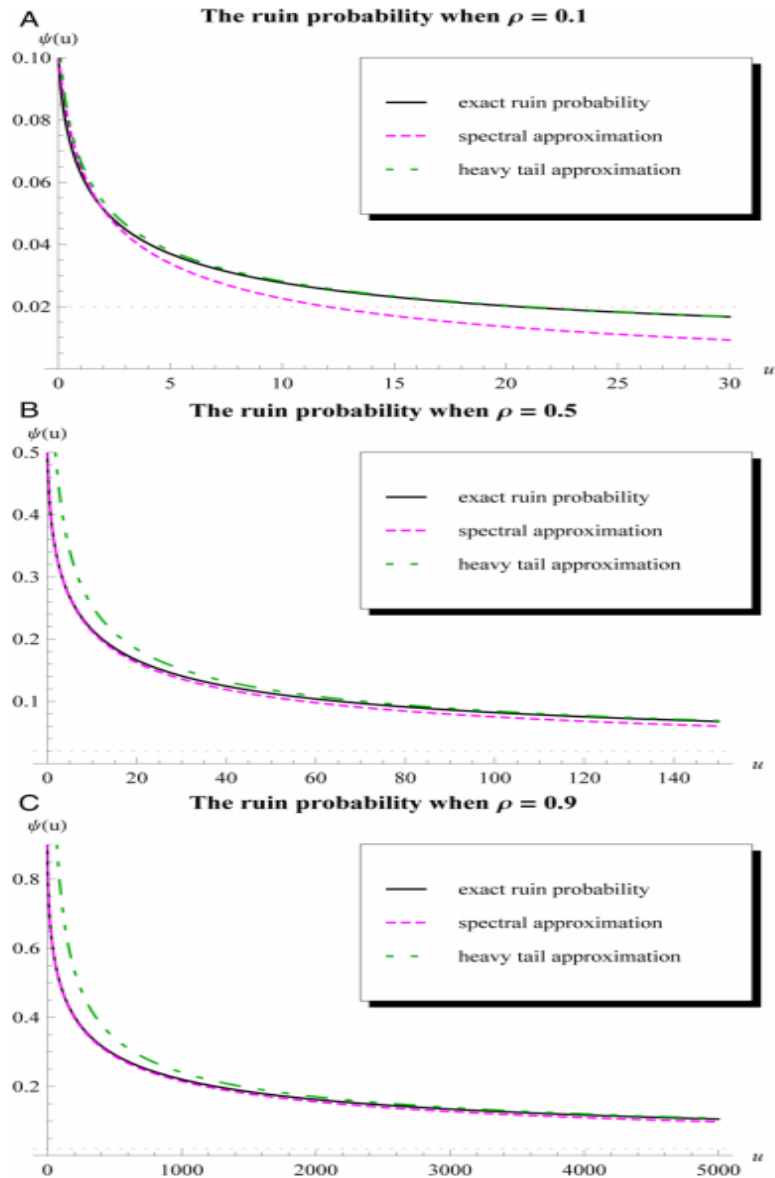


### 3.5.3 Η σύγκριση της μεθόδου SA με την HTa στην προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας για φάσμα τιμών της παραμέτρου $\rho$ .

Παρατηρούμε ασυμπτωτικά (γραφήματα 3-6B, 3-6C) ως προς το απόθεμα ότι οι μέθοδοι μεταξύ τους δεν διαφέρουν σημαντικά και προσεγγίζουν πολύ καλά την πιθανότητα χρεοκοπίας για τιμές της παραμέτρου  $\rho \geq 0.5$ . Μεγαλύτερη απόκλιση εμφανίζει η μέθοδος HTa για μικρότερες τιμές του αποθέματος  $u < 15$  (B) και  $u < 1500$  (C). Για μικρότερες τιμές της παραμέτρου  $\rho$  (3-6A) η μέθοδος HT δίνει καλύτερη προσέγγιση συμπτωτικά ως προς το απόθεμα  $u$  σε σχέση με τη μέθοδο SA και αμφότερες προσεγγίζουν πολύ καλά την πιθανότητα χρεοκοπίας για μικρότερες τιμές του αποθέματος  $u < 4$ . Οι παραπάνω προσομοιώσεις εξήχθησαν με την κατανομή των Abate-Whitt με παράμετρο  $\mu = 2$ .

### ΣΧΗΜΑ 3-6

Φασματική προσέγγιση (SA) για σταθερό φράγμα  $\delta = 0.02$ , όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν κατανομή των Abate-Whitt με παράμετρο  $\mu = 2$ . (βλέπε Vatamidou et al. (2014)).



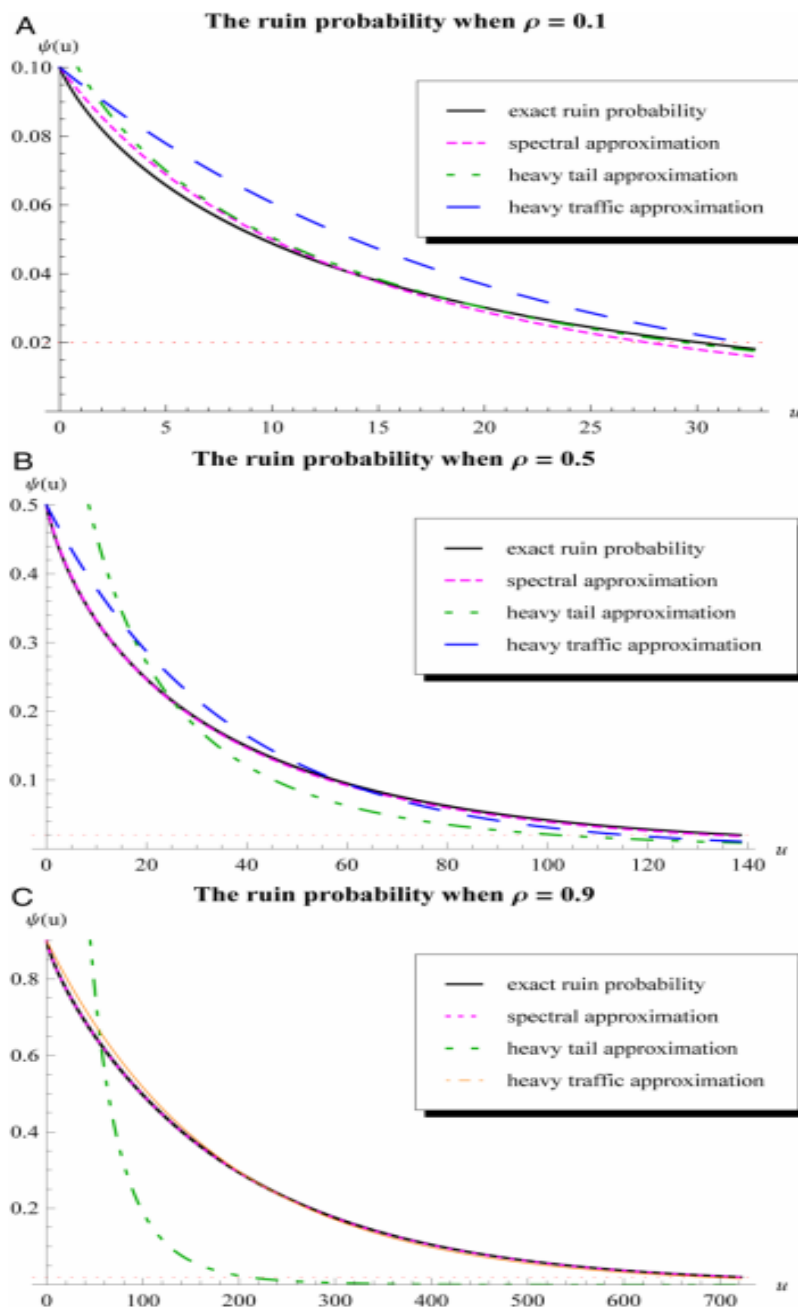
#### 3.5.4 Η σύγκριση της μεθόδου SA με την HT και HTa στην προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας για φάσμα τιμών της παραμέτρου $\rho$ .

Παρατηρούμε ότι οι μέθοδοι αποκλίνουν από την ακριβή τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας σε σχέση με την τιμή της παραμέτρου  $\rho$ . Για μικρή τιμή της παραμέτρου  $\rho = 0.1$  (3-7A) αποκλίνει περισσότερο η μέθοδος HT, και μάλιστα υπερεκτιμά την πιθανότητα χρεοκοπίας. Για  $\rho = 0.5$  (3-7B) μεγαλύτερες αποκλίσεις δίνουν οι μέθοδοι HT και HTa ενώ η SA προσεγγίζει πάρα πολύ την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας (όπως και για  $\rho = 0.1$ ). Για  $\rho = 0.9$  (3-7C), μεγάλη απόκλιση δίνει η

μέθοδος ΗΤα ενώ οι υπόλοιπες προσεγγίζουν πολύ καλά την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας. Χαρακτηριστικό δε ότι η μέθοδος ΗΤ μηδενίζει σχεδόν την πιθανότητα χρεοκοπίας για απόθεμα μεγαλύτερο από περίπου 300 νομισματικές μονάδες. Οι παρακάτω προσομοιώσεις έγιναν με την κατανομή της Weibull(0.5, 3).

### ΣΧΗΜΑ 3-7

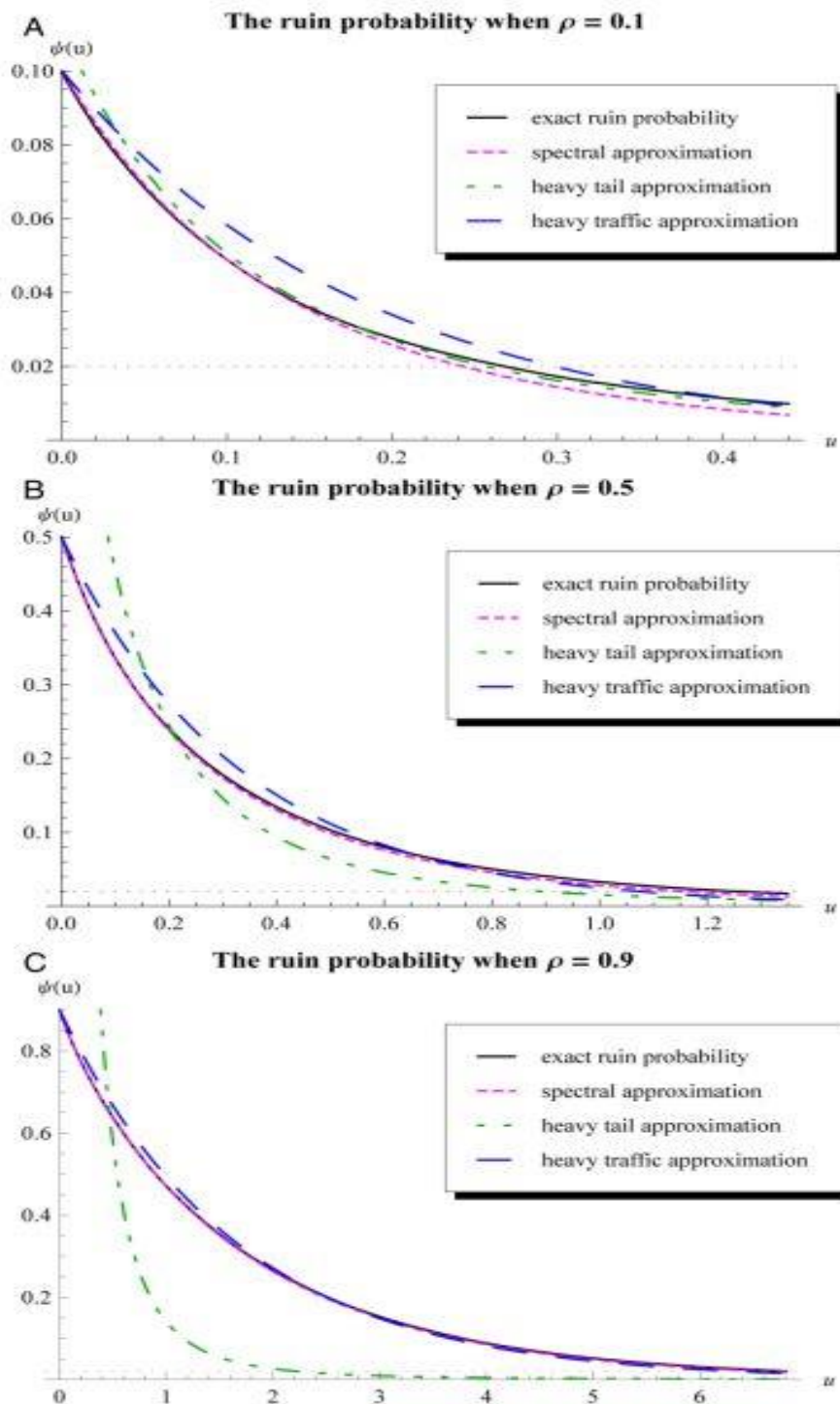
Φασματική προσέγγιση (SA) για σταθερό φράγμα  $\delta = 0.02$ , όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν κατανομή Weibull(0.5, 3). (βλέπε Vatamidou et al. (2014)).



Τα παραπάνω αποτελέσματα δεν διαφοροποιούνται σημαντικά αν αντί της Weibull χρησιμοποιηθεί η κατανομή της Pareto(4, 3). Παρακάτω παραθέτουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα προσομοιώσεων που έγιναν με την κατανομή Pareto(4, 3).

### ΣΧΗΜΑ 3-8

Φασματική προσέγγιση (SA) για σταθερό φράγμα  $\delta = 0.02$ , όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν κατανομή Pareto(4, 3). (βλέπε Vatamidou et al. (2014)).



### 3.5.5 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα και συμπεράσματα

Καλύτερη δείχνει να είναι η προσέγγιση της μεθόδου SA για μεγαλύτερο πλήθος φάσεων hyperexponential κατανομής. Συγκριτικά με τη μέθοδο HT, το αποτέλεσμα εξαρτάται από την κατανομή. Για την περίπτωση της κατανομής Weibull η μέθοδος SA δίνει καλύτερα αποτελέσματα έναντι της HT. Για την περίπτωση της κατανομής Pareto η μέθοδος SA δίνει καλύτερα αποτελέσματα έναντι της HT για μεγαλύτερο αριθμό φάσεων από 20 δοθέντος ότι το μέσο μέγεθος απαιτήσεων  $\rho$  είναι μεγαλύτερο από 0.90.

Για μικρές τιμές αποθέματος  $u$  η μέθοδος SA – παρότι υπερεκτιμά την πιθανότητα χρεοκοπίας - δίνει καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με την HTα και μάλιστα πολύ καλύτερα όταν το μέσο απαιτήσεων  $\rho \rightarrow 1$ . Αντιθέτως, η μέθοδος HTα δίνει ελαφρώς καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τη μέθοδο SA για μεγάλες τιμές αποθέματος  $u$ . Η μέθοδος SA στην περίπτωση αυτή υποεκτιμά την πιθανότητα χρεοκοπίας. Για όλες τις τιμές  $u$  η μέθοδος HT εμφανίζεται να δίνει τα χειρότερα αποτελέσματα σε σχέση με τις άλλες δύο. Για μικρές τιμές αποθέματος υπερεκτιμά περισσότερο την πιθανότητα χρεοκοπίας, ενώ για μικρές τιμές αποθέματος υποεκτιμά επίσης περισσότερο την πιθανότητα χρεοκοπίας. Για πολύ μεγάλες τιμές αποθέματος η μέθοδος HTα υπερέχει σημαντικά των άλλων δύο, οι οποίες δε εμφανίζουν σχεδόν τα ίδια αποτελέσματα.

Ολοκληρώνοντας, αν και το πρόβλημα είναι πολυπαραμετρικό με τη συνύπαρξη παραμέτρων όπως το αρχικό απόθεμα, η μέση τιμή απαιτήσεων, ο ρυθμός αφίξεων των απαιτήσεων κλπ, η Vatamidou και συνεργάτες παρείχαν ενδείξεις για την καλή προσαρμογή της μεθόδου SA. Οποσδήποτε το αποτέλεσμα αυτό ελέγχεται για διαφορετικές κατανομές βαριάς ουράς οι οποίες δεν εξετάστηκαν στην παρούσα μελέτη.

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στο παράρτημα παραθέτουμε όλους τους κώδικες σε γλώσσα προγραμματισμού R καθώς και του λογισμικού Mathematica που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία, εκτός από αυτούς που παρουσιάζονται στο κυρίως κείμενο.

- **Κώδικας για την Παράγραφο 1.4**

```
library(actuar)

pi<- matrix(c(1/2, 1/3, 1/6), nrow=1); pi

D0<- matrix(c(-3,0,0,1,-2,0,0.5,0.5,-1),nrow=3);D0

d1<- matrix(c(1.5,1.5,-1), nrow=3);d1

s <- seq(0.5,6,0.5)

dens1 <-dphtype(s,pi,D0); dens1

curve(dphtype(x, pi, D0), from = 0.01, to = 6, ylab="f(x)")

m <- mphtype(1, pi, D0) # expected value

dist1 <-pphtype(s,pi,D0); dist1

curve(pphtype(x, pi, D0), from = 0.01, to = 6, ylab="F(x)")

library(expm)

e <- c(1,1,1)

momentsPhase <- function(r) {

  return(((1)^r)*factorial(r)*pi%*(solve(D0)^r)%*e)

}

momentsPhaseN <- Vectorize(momentsPhase)

m <- momentsPhaseN(1:6)

round(m,digits=4)

mphtype(1, pi, D0) # expected value

mphtype(2, pi, D0)

mphtype(3, pi, D0)

mphtype(4, pi, D0)
```

- Κώδικας για την Εφαρμογή 1 της Παραγράφου 2.3.1

```

library(actuar)

a <- c(1/2,3/14)

T <- matrix(c(-3/2, 7/2, 9/14, -11/2), nrow=2)

u <- 0:10

(prob.ruin <- 1-pphype(u,a,T))

psi <- ruin(claims = "exponential", par.claims = list(rate = c(3, 7), w = c(1/2,1/2)), wait
= "exponential", par.wait = list(rate = 3), pre = 1)

psi(u)

plot(psi, xlim=c(0,10))

```

- Κώδικας για την Εφαρμογή 2 της Παραγράφου 2.4.2

```

###Πιθανότητα χρεοκοπίας Ramsay για  $\theta=0.1$ ###

Clear[u]
theta=0.1
gammaEuler=0.57721

Ei[x_] := gammaEuler + Log[x] + Sum[(x^r)/(r*r!), {r, 1, Infinity}]
Ei[x]

psi[u_] := Integrate[theta*Exp[-x*(1+u)]/(((theta+x*Exp[-x]*Ei[x])^2)+(Pi*Exp[-
x]*x)^2)), {x,0,Infinity}]
N[psi[10]]
N[psi[20]]
N[psi[30]]
N[psi[40]]
N[psi[50]]
N[psi[60]]
N[psi[70]]
N[psi[80]]
N[psi[90]]

```

###Πιθανότητα χρεοκοπίας Ramsay για  $\theta=0.25$ ###

Clear[u]

theta=0.25

gammaEuler=0.57721

Ei[x\_]:=gammaEuler+Log[x]+Sum[(x^r)/(r\*r!),{r, 1, Infinity}]

Ei[x]

psi[u\_]:=Integrate[theta\*Exp[-x\*(1+u)]/(((theta+x\*Exp[-x]\*Ei[x])^2)+((Pi\*Exp[-x]\*x)^2)), {x,0,Infinity}]

N[psi[10]]

N[psi[20]]

N[psi[30]]

N[psi[40]]

N[psi[50]]

N[psi[60]]

N[psi[70]]

N[psi[80]]

N[psi[90]]

###Πιθανότητα χρεοκοπίας Ramsay για  $\theta=0.5$ ###

Clear[u]

theta=0.5

gammaEuler=0.57721

Ei[x\_]:=gammaEuler+Log[x]+Sum[(x^r)/(r\*r!),{r, 1, Infinity}]

Ei[x]

psi[u\_]:=Integrate[theta\*Exp[-x\*(1+u)]/(((theta+x\*Exp[-x]\*Ei[x])^2)+((Pi\*Exp[-x]\*x)^2)), {x,0,Infinity}]

N[psi[10]]

N[psi[20]]

N[psi[30]]

N[psi[40]]

N[psi[50]]

N[psi[60]]

N[psi[70]]

N[psi[80]]

N[psi[90]]

###Πιθανότητα χρεοκοπίας Ramsay για  $\theta=0.75$ ###

Clear[u]

theta=0.75

gammaEuler=0.57721



```

Ei[x_]:=gammaEuler+Log[x]+Sum[(x^r)/(r*r!),{r, 1, Infinity}]
Ei[x]

psi[u_]:=Integrate[theta*Exp[-x*(1+u)]/(((theta+x*Exp[-x]*Ei[x])^2)+(Pi*Exp[-x]*x^2)), {x,0,Infinity}]
N[psi[10]]
N[psi[20]]
N[psi[30]]
N[psi[40]]
N[psi[50]]
N[psi[60]]
N[psi[70]]
N[psi[80]]
N[psi[90]]

###Πιθανότητα χρεοκοπίας Ramsay για θ=1###

Clear[u]
theta=1
gammaEuler=0.57721

Ei[x_]:=gammaEuler+Log[x]+Sum[(x^r)/(r*r!),{r, 1, Infinity}]
Ei[x]

psi[u_]:=Integrate[theta*Exp[-x*(1+u)]/(((theta+x*Exp[-x]*Ei[x])^2)+(Pi*Exp[-x]*x^2)), {x,0,Infinity}]
N[psi[10]]
N[psi[20]]
N[psi[30]]
N[psi[40]]
N[psi[50]]
N[psi[60]]
N[psi[70]]
N[psi[80]]
N[psi[90]]

```

- Κώδικας για την Παράγραφο 2.5.2

```

f1[x_]:= (3/2)*Exp[-3*x]+(7/2)*Exp[-7*x]
m11=Integrate[x*f1[x],{x,0,Infinity}]/N
m12=Integrate[(x^2)*f1[x],{x,0,Infinity}]/N
m13=Integrate[(x^3)*f1[x],{x,0,Infinity}]/N
m14=Integrate[(x^4)*f1[x],{x,0,Infinity}]/N
m15=Integrate[(x^5)*f1[x],{x,0,Infinity}]/N
m16=Integrate[(x^6)*f1[x],{x,0,Infinity}]/N

```

```
NSolve[{(5/21)=(lamda/(a-1)), (58/441)=(2*(lamda^2))/((a-1)*(a-2)) },{lamda,a},
Reals]
```

```
f2[x_] := 8.258*((1.726)^8.25)/((x + 1.726)^(8.25 + 1))
```

```
m21=Integrate[x*f2[x],{x,0,Infinity}]/N
```

```
m22=Integrate[(x^2)*f2[x],{x,0,Infinity}]/N
```

```
m23=Integrate[(x^3)*f2[x],{x,0,Infinity}]/N
```

```
m24=Integrate[(x^4)*f2[x],{x,0,Infinity}]/N
```

```
m25=Integrate[(x^5)*f2[x],{x,0,Infinity}]/N
```

```
m26=Integrate[(x^6)*f2[x],{x,0,Infinity}]/N
```

```
Needs["PlotLegends`"]
```

```
myplot1=Plot[{f1[x],f2[x]},{x,0,1.5},PlotRange-
```

```
>{0,5},AxesLabel@{"x","f(x)",PlotLegend@{"Mixture of two Exponential","Pareto
approximation"},LegendLabel@"",LegendPosition@{0.1,0},LegendTextSpace@10,Leg
endLabelSpace@1,LegendBackground@GrayLevel[1],LegendShadow@None,Backgro
und@None]
```

```
psi1[u_] := (24/35)*Exp[-u] + (1/35)*Exp[-6*u]
```

```
psi2[u_] := Exp[-u*(2/5)*2*m21/((m22-(m21^2))+(m21^2))]
```

```
myplot2 =
```

```
Plot[{psi1[u], psi2[u]}, {u, 0, 5}, PlotRange -> {0, 1},
```

```
AxesLabel -> {"u", "ψ(u)"},
```

```
PlotLegend -> {"Mixture of two Exponential", "Pareto"},
```

```
LegendLabel -> "", LegendPosition -> {0.1, 0},
```

```
LegendTextSpace -> 10, LegendLabelSpace -> 1,
```

```
LegendBackground -> GrayLevel[1], LegendShadow -> None,
```

```
Background -> None]
```

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

## Ελληνική

1. Δημητρίου Ι. , *Πανεπιστημιακές Σημειώσεις στο μάθημα Στοχαστικές διαδικασίες*, ΠΠΣ Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών.
2. Κωνσταντινίδης, Δ. (2011). *Θεωρία συλλογικού κινδύνου*. Εκδόσεις Συμμετρία.
3. Πολίτης, Κ. (2012). *Εισαγωγή στην θεωρία συλλογικού κινδύνου*. Εκδόσεις Σταμούλη Α.Ε, 169-260

## Ξένα

1. Asmussen, S. (1992). *Light traffic equivalence in single-server queues*. Annals of Applied Probability **2** (3), 555-574.
2. Asmussen, S. & Albrecher, H. (2010), *Ruin probabilities 2<sup>nd</sup> ed*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
3. Asmussen, S. & Binswanger, K. (1997). Simulation of ruin probabilities for subexponential claims. Astin Bulletin **27** (2), 297-318
4. Beekman, J.A. (1969). *A ruin function approximation*. Transactions of the Society of Actuaries **21**, 41-48.
5. Bladt, M. & Nielsen, B. F. (2017). *Matrix-Exponential Distributions in Applied Probability*. Springer Science & Business Media LLC.
6. Blanchet, J. & Zwart, B. (2010). *Asymptotic expansions of defective renewal equations with applications to perturbed risk models and processor sharing queues*. Journal of Applied Probability **9**, 832-840.
7. Bloomfield, P. & Cox, D.R. (1972). *A low traffic approximation for queues*. Journal of Applied Probability **9**, 832-840.
8. Borovkov, A. & Foss, S.(1992). *Stochastically recursive sequences*. Siberian Advances in Mathematics **2**(1), 16-81. Brown, M. (1990).
9. Buchholz, P., Kriege, J. & Felko, I. (2014). *Input Modeling with Phase-Type Distributions and Markov Models*, 1st ed., Springer, New York, 1-21
10. Daley, D.J. & Rolski, T. (1984). A light traffic approximation for a single-server queue. Mathematical Methods of Operations Research **9** (4), 624-628.
11. Daley, D.J. & Rolski, T. (1991). Light traffic approximations in queues. Mathematical Operations Research **16** (1), 57-71.

12. De Vylder, F. (1978). A practical solution to the problem of ultimate ruin probability. *Scandinavian Actuarial Journal* (2), 114-119.
13. Embrechts, P. & Veraverbeke, N. (1982). Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. *Insurance: Mathematics and Economics* **1** (1), 55-72.
14. Feldmann, A. & Whitt, W. (1998). Fitting mixtures of exponentials to long-tail distributions to analyze network performance models. *Performance Evaluation* **31** (3-4), 245-279.
15. Gerber, H. U., Goovaerts, M. J. & Kaas, R. (1987). *On the probability and severity of ruin*. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA* , **17** , (2), 151 – 155
16. Kalashnikov, V & Tsitsiashvili, G. (1999). Tails of waiting times and their bounds. *Queueing Systems: Theory and Applications* **32** (1-3), 257-283.
17. Kingman, J.F.C. (1962). On queues in heavy traffic . *Journal of the Royal Statistical Society: Series B* **24**, 383-392.
18. Kulkarni, V. G. (2011). *Introduction to Modeling and Analysis of Stochastic Systems 2<sup>nd</sup> ed.*, Springer, New York.
19. Lucantoni, D.M., Choudhury, G.L. & Whitt, W. (1994). *The transient BMAP/G/1 queue*. *Communications in Statistics. Stochastic Models* **10** (1), 145-182.
20. Neuts, M.F. (1989). *Structured stochastic matrices of M/G/1 type and their applications*. *Probability: Pure and Applied*, vol. 55, New York: Marcel Dekker Inc.
21. Pakes, A.G.( 1975). *On the tails of waiting-time distributions*. *Journals of Applied Probability* **12** (3), 555-564.
22. Ramsay, C. M. (2003). *A solution to the ruin problem for Pareto distributions*. *Insurance: Mathematics & Economics*, 109-116
23. Vatamidou, E. , Adan, I.J.B.F. ,Vlasiou, M. & Zwart, B. (2014). *On the accuracy of phase-type approximations of heavy-tailed risk models*. *Scandinavian Actuarial Journal*, **6**, 510-534
24. Von Bahr, B. (1975). *Asymptotic ruin probabilities when exponential moments do not exist*. *Scandinavian Actuarial Journal* 1975 (1), 6-10.