

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Αναλογιστικά μέτρα κινδύνων και φαινόμενα ελαστικότητας σε
κατανομές απώλειας

Πολυξένη Βλιώρα

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Υποβλήθηκε στο

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
του Πανεπιστημίου Πειραιώς

Πειραιάς

Οκτώβριος 2024

UNIVERSITY OF PIRAEUS



DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE

SCIENCE

Actuarial risk measures and elasticity phenomena in loss
distributions

Polyxeni Vliora

PhD Thesis

Submitted to

Department of Statistics and Insurance Science

of the University of Piraeus

Piraeus

October 2024

Στους γονείς μου Βαγγέλη και Σοφία!

Περίληψη

Η διατριβή αυτή εστιάζει το ενδιαφέρον της στην κατασκευή αναλογιστικών μέτρων κινδύνου, που βασίζονται στις θεωρίες της στρεβλής και της σταθμισμένης προσδοκίας. Τα νέα προτεινόμενα μέτρα βρίσκουν εφαρμογή στην κατασκευή ασφαλιστρών και αναλογιστικών δεικτών. Διερευνούμε φαινόμενα ελαστικότητας, όπως για παράδειγμα μικρές διαταραχές στην κατανομή των αποζημιώσεων που επηρεάζουν τα μέτρα κινδύνου. Εφαρμόζουμε τη θεωρία διαταραχής σε διάφορες κατηγορίες στρεβλών συναρτήσεων, με σκοπό να μελετήσουμε τα μέτρα κινδύνου και να προτείνουμε νέους δείκτες μέτρησης της δεξιάς ουράς. Επιπλέον, εξετάζουμε φαινόμενα ελαστικότητας σε σταθμισμένα ασφάλιστρα, εισάγοντας μια θετική παράμετρο που έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία ενός ενδιάμεσου ασφάλιστρου, το οποίο βοηθάει τον αναλογιστή στην επιλογή μεταξύ δύο γνωστών αρχών ασφαλιστρών.

Abstract

This thesis focuses on the construction of proportional hazard measures, based on skewness and weighted expectation theories. The new proposed measures will be applied to the construction of principles of insurance and proportional indices. Elasticity phenomena will be explored, for example how small changes (perturbations) in the distribution of compensation affect risk measures. By applying the perturbation theory to various categories of skewed functions, risk measures will be studied and new metrics will be proposed. We will explore elasticity phenomena for weighted premiums, by introducing a positive parameter which will create a new premium as a medium, to help the actuary in choosing between two premiums.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω την ειλικρινή μου εγκαρδιότητα στον Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, κ. Ψαρράκο Γεώργιο, για την ανεκτίμητη βοήθεια και καθοδήγηση που μου παρείχε καθ' όλη τη περίοδο της εκπόνησης της διδακτορικής μου διατριβής. Η εξαιρετική υποστήριξή του, η εμπειρική γνώση του αντικειμένου και η συνεχής ενθάρρυνση υπήρξαν καθοριστικοί παράγοντες για την πληρότητα της ερευνητικής μου εργασίας. Επιπλέον, αισθάνομαι μεγάλη ευγνωμοσύνη προς τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, κ. Πολίτη Κωνσταντίνο και κ. Ξανθόπουλο Στέλιο, για την πολύτιμη συμβολή τους και την αντικειμενική τους κρίση, η οποία υπήρξε αναγκαία για τη βελτίωση και την τελική μορφή της διατριβής μου.

Τέλος, δεν μπορώ να παραλείψω να ευχαριστήσω θερμά την οικογένειά μου και τον σύζυγό μου για την αμέριστη στήριξη, την κατανόηση και την υπομονή που μου προσέφεραν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου. Η αφοσίωση και η αγάπη τους υπήρξαν πηγή ενδυνάμωσης και ενθάρρυνσης για εμένα, καθιστώντας δυνατή την ολοκλήρωση αυτής της απαιτητικής διαδρομής.

Κατάλογος Πινάκων

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Οι τιμές του δείκτη $d_{0.5}(X; x_p)$ της κατανομής $Ga(a, 1)$ στο Παράδειγμα 2.3, για διάφορες τιμές των a και p | 32 |
| 2.2 | Οι τιμές του δείκτη $v_{0.5}(X; x_p)$ της κατανομής $Ga(a, 1)$ στο Παράδειγμα 2.3, για διάφορες τιμές των a και p | 32 |
| 2.3 | Οι τιμές του δείκτη $d_{0.75}(X; x_p)$ της κατανομής $Ga(a, 1)$ στο Παράδειγμα 2.3, για διάφορες τιμές των a και p | 33 |
| 2.4 | Οι τιμές του δείκτη $v_{0.75}(X; x_p)$ της κατανομής $Ga(a, 1)$ στο Παράδειγμα 2.3, για διάφορες τιμές των a και p | 33 |
| 2.5 | Οι τιμές του δείκτη $d_{0.5}(X; x_p)$ των Pareto, Λογαριθμοκανονική (LN), Εκθετική-αντίστροφη Γκαουσιανή (E-IG), αντίστροφη Γκαουσιανή (IG), Γάμμα (Gamma) και Εκθετική (Exp) κατανομών στο Παράδειγμα 2.4, για διάφορες τιμές του p | 35 |
| 2.6 | Οι τιμές του δείκτη $v_{0.5}(X; x_p)$ των κατανομών Pareto, Λογαριθμοκανονική (LN), Εκθετική-αντίστροφη Γκαουσιανή (E-IG), αντίστροφη Γκαουσιανή (IG), Γάμμα (Gamma) και Εκθετική (Exp) στο Παράδειγμα 2.4, για διάφορες τιμές του p | 35 |
| 2.7 | Οι τιμές του δείκτη $d_{0.75}(X; x_p)$ των Pareto, Λογαριθμοκανονική (LN), Εκθετική-αντίστροφη Γκαουσιανή (E-IG), αντίστροφη Γκαουσιανή (IG), Γάμμα (Gamma) και Εκθετική (Exp) κατανομών στο Παράδειγμα 2.4, για διάφορες τιμές του p | 36 |
| 2.8 | Οι τιμές του δείκτη $v_{0.75}(X; x_p)$ των κατανομών Pareto, Λογαριθμοκανονική (LN), Εκθετική-αντίστροφη Γκαουσιανή (E-IG), αντίστροφη Γκαουσιανή (IG), Γάμμα (Gamma) και Εκθετική (Exp) στο Παράδειγμα 2.4, για διάφορες τιμές του p | 36 |
| 2.9 | Οι τιμές των δεικτών $d_{0.5}(X; x_p)$ (στήλες 2 και 3) και $v_{0.5}(X; x_p)$ (στήλες 4 και 5) των κατανομών Pareto και Λογαριθμοκανονική (LN) στο Παράδειγμα 2.5, για διάφορες τιμές του p | 37 |
| 3.1 | Συγκριτικά αποτελέσματα των σχημάτων 3.1, 3.2, 3.3 και 3.4 για $b = 1, 2, 3, 4$ | 60 |
| 3.2 | Οι τιμές του $\Pi_{a,b}(X)$ της κατανομής $Pa(4, 6)$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$ | 61 |
| 3.3 | Οι τιμές του $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ της κατανομής $Pa(4, 6)$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$ | 61 |

| | | |
|------|---|----|
| 3.4 | Οι τιμές του $\Pi_{a,b}(X)$ της κατανομής $Exp(\frac{1}{2})$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$ | 61 |
| 3.5 | Οι τιμές του $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ της κατανομής $Exp(\frac{1}{2})$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$ | 62 |
| 3.6 | Οι τιμές του $\Pi_{a,b}(X)$ της κατανομής $Ga(2, 1)$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$ | 62 |
| 3.7 | Οι τιμές του $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ της κατανομής $Ga(2, 1)$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$ | 62 |
| 3.8 | Οι τιμές του $\Pi_{a,b}(X)$ της κατανομής $Ga(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$ | 62 |
| 3.9 | Οι τιμές του $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ της κατανομής $Ga(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$ | 63 |
| 3.10 | Οι τιμές του $\Pi_{a,b}(X)$ της κατανομής $Wei(\frac{\pi}{16}, 2)$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$ | 63 |
| 3.11 | Οι τιμές του $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ της κατανομής $Wei(\frac{\pi}{16}, 2)$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$ | 63 |
| 3.12 | Οι τιμές του $\Pi_{a,b}(X)$ της κατανομής $Wei(1, 0.5)$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$ | 63 |
| 3.13 | Οι τιμές του $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ της κατανομής $Wei(1, 0.5)$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$ | 64 |
| 3.14 | Ποσά ζημιών από τυφώνα που ξεπερνούν τα 5 εκατομμύρια δολάρια (σε 1.000 δευτ.). | 66 |
| 3.15 | Οι εμπειρικές εκτιμήσεις των $\mathcal{E}_{a,b}(\hat{F}_n)$ μαζί με υπολογισμένα κατά προσέγγιση 95% διαστήματα εμπιστοσύνης χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.35) για $a = 1.75, 2, 3$ και $b = 1, 1.75, 2, 3, 4, 5$ | 67 |

Κατάλογος Σχημάτων

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Σχέσεις μεταξύ κατανομών γήρανσης. | 7 |
| 1.2 | Σχέσεις μεταξύ στοχαστικών διατάξεων. | 8 |
| 1.3 | Η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ (αριστερό σχήμα) και η ένταση κινδύνου $\lambda(x)$ (δεξί σχήμα) της κατανομής Pareto με παραμέτρους $a = 4, 3, 2$ και $b = 1, 2, 3$ | 9 |
| 1.4 | Η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ (αριστερό σχήμα) και η ένταση κινδύνου $\lambda(x)$ (δεξί σχήμα) της Λογαριθμοκανονικής κατανομής με παραμέτρους $\mu = \ln 2, \ln 3, \ln 4$ και $\sigma = 0.5$ | 10 |
| 1.5 | Η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ (αριστερό σχήμα) και η ένταση κινδύνου $\lambda(x)$ (δεξί σχήμα) της κατανομής Weibull με παραμέτρους $b = 1, 2, 3$ και $k = 0.4$ | 10 |
| 1.6 | Η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ (αριστερό σχήμα) και η ένταση κινδύνου $\lambda(x)$ (δεξί σχήμα) της κατανομής Weibull με παραμέτρους $b = 1, 2, 3$ και $k = 4$ | 10 |
| 1.7 | Η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ (αριστερό σχήμα) και η ένταση κινδύνου $\lambda(x)$ (δεξί σχήμα) της Γάμμα κατανομής με παραμέτρους $a = 2, 3, 4$ και $b = 1, 2, 3$ | 11 |
| 1.8 | Η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ (αριστερό σχήμα) και η ένταση κινδύνου $\lambda(x)$ (δεξί σχήμα) της Γάμμα κατανομής με παραμέτρους $a = 0.2, 0.3, 0.4$ και $b = 1, 2, 3$ | 11 |
| 1.9 | Η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ (αριστερό σχήμα) και η ένταση κινδύνου $\lambda(x)$ (δεξί σχήμα) της Εκθετικής κατανομής με παραμέτρους $\lambda = 0.5, 1, 1.5$ | 12 |
| 1.10 | Η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ (αριστερό σχήμα) και η ένταση κινδύνου $\lambda(x)$ (δεξί σχήμα) της αντίστροφης Γκαουσιανής κατανομής με παραμέτρους $\mu = 1$ και $\lambda = 0.3, 1, 3$ | 12 |
| 1.11 | Η συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής Pareto. | 14 |
| 1.12 | Η συνάρτηση επιβίωσης της Εκθετικής κατανομής. | 14 |
| 1.13 | Το ηλίκο των δύο συναρτήσεων επιβίωσης. | 14 |
| 1.14 | Η συνάρτηση επιβίωσης της Λογαριθμοκανονικής κατανομής. | 15 |
| 1.15 | Η συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής Weibull. | 15 |
| 1.16 | Το ηλίκο των δύο συναρτήσεων επιβίωσης. | 15 |

| | | |
|-----|---|----|
| 3.1 | Οι συναρτήσεις $\Pi_{a,b}(X)$ (μπλε γραμμή), $\Pi_{a,b}(Y)$ (πράσινη γραμμή) και $\Pi_{a,b}(Z)$ (πορτοκαλί γραμμή) για $0.5 \leq a \leq 5$ και $b = 1$ (αριστερό σχήμα), $b = 2$ (δεξί σχήμα). . . | 59 |
| 3.2 | Οι συναρτήσεις $\Pi_{a,b}(X)$ (μπλε γραμμή), $\Pi_{a,b}(Y)$ (πράσινη γραμμή) και $\Pi_{a,b}(Z)$ (πορτοκαλί γραμμή) για $0.5 \leq a \leq 5$ και $b = 3$ (αριστερό σχήμα), $b = 4$ (δεξί σχήμα). . . | 59 |
| 3.3 | Οι συναρτήσεις $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ (μπλε γραμμή), $\mathcal{E}_{a,b}(Y)$ (πράσινη γραμμή) και $\mathcal{E}_{a,b}(Z)$ (πορτοκαλί γραμμή) για $0.5 \leq a \leq 5$ και $b = 1$ (αριστερό σχήμα), $b = 2$ (δεξί σχήμα). . . | 59 |
| 3.4 | Οι συναρτήσεις $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ (μπλε γραμμή), $\mathcal{E}_{a,b}(Y)$ (πράσινη γραμμή) και $\mathcal{E}_{a,b}(Z)$ (πορτοκαλί γραμμή) για $0.5 \leq a \leq 5$ και $b = 3$ (αριστερό σχήμα), $b = 4$ (δεξί σχήμα). . . | 59 |
| 4.1 | Το ασφάλιστρο Kamps $\Pi_\lambda(X) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi_\lambda(X, \theta)$ (μπλε διακεκομμένη γραμμή), το ευέλικτο ασφάλιστρο Kamps $\Pi_\lambda(X, \theta)$ για $\theta = 0.1, 0.5, 1$ (συνεχείς γραμμές με $\Pi_\lambda(X, 0.1) \geq \Pi_\lambda(X, 0.5) \geq \Pi_\lambda(X, 1)$), το καθαρό ασφάλιστρο $\mathbb{E}(X)$ (η καφέ διακεκομμένη οριζόντια γραμμή και ισούται με 0.5) και το πηλίκο $\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X})/\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})$ (η μοβ διακεκομμένη γραμμή) του $X \sim Exp(2)$ δίνεται από το Παράδειγμα 4.4 για $0 < \lambda \leq 5$ | 84 |
| 4.2 | Το ασφάλιστρο Kamps $\Pi_\lambda(X) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi_\lambda(X, \theta)$ (η μπλε διακεκομμένη γραμμή), το ευέλικτο ασφάλιστρο Kamps $\Pi_\lambda(X, \theta)$ για $\theta = 0.1, 0.5, 1$ (συνεχείς γραμμές με $\Pi_\lambda(X, 0.1) \geq \Pi_\lambda(X, 0.5) \geq \Pi_\lambda(X, 1)$), το καθαρό ασφάλιστρο $\mathbb{E}(X)$ (είναι η καφέ διακεκομμένη οριζόντια γραμμή και είναι ίση με 0.5) και το πηλίκο $\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X})/\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})$ (η μοβ διακεκομμένη γραμμή) του $X \sim Par(3, 1)$ δίνεται από το Παράδειγμα 4.5 για $0 < \lambda \leq 5$ | 85 |
| 4.3 | Το ασφάλιστρο CTE $\mathbb{E}(X X > x_p) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi_{x_p}(X, \theta)$ (η αυξανόμενη γραμμική διακεκομμένη γραμμή που ξεκινά από 0.5), το ευέλικτο ασφάλιστρο CTE $\Pi_{x_p}(X, \theta)$ για $\theta = 0.1, 0.5, 1$ (συνεχείς γραμμές με $\Pi_{x_p}(X, 0.1) \geq \Pi_{x_p}(X, 0.5) \geq \Pi_{x_p}(X, 1)$), το καθαρό ασφάλιστρο $\mathbb{E}(X)$ (με διακεκομμένη οριζόντια γραμμή και ισούται με 0.5) και το $VaR x_p$ (η γραμμική αυξανόμενη διακεκομμένη γραμμή που ξεκινά από 0) του $X \sim Exp(2)$ δίνεται από το Παράδειγμα 4.6 για $0 < x_p \leq 5$ | 88 |
| 4.4 | Το ασφάλιστρο CTE $\mathbb{E}(X X > x_p) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi_{x_p}(X, \theta)$ (η μπλε διακεκομμένη ευθεία γραμμή ξεκινάει από το 0.5), το ευέλικτο ασφάλιστρο CTE $\Pi_{x_p}(X, \theta)$ για $\theta = 0.1, 0.5, 1$ (συνεχείς γραμμές με $\Pi_{x_p}(X, 0.1) \geq \Pi_{x_p}(X, 0.5) \geq \Pi_{x_p}(X, 1)$), το καθαρό ασφάλιστρο $\mathbb{E}(X)$ (η καφέ διακεκομμένη οριζόντια γραμμή και ισούται με 0.5) και το $VaR x_p$ (η μοβ διακεκομμένη γραμμή ξεκινάει από το 0) του κινδύνου $X \sim Par(3, 1)$ δίνεται από το Παράδειγμα 4.7 για $0 < x_p \leq 5$ | 89 |

Περιεχόμενα

| | |
|---|-----------|
| Περίληψη | i |
| Abstract | ii |
| Ευχαριστίες | iii |
| 1 Εισαγωγή | 1 |
| 1.1 Σκοπός και αναλυτική δομή της διατριβής | 1 |
| 1.2 Βασικές έννοιες | 4 |
| 1.3 Ένταση κινδύνου | 4 |
| 1.4 Κατανομές γήρανσης | 5 |
| 1.5 Εντροπία | 8 |
| 1.5.1 Αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία | 8 |
| 1.5.2 Δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία | 8 |
| 1.6 Κατανομές απώλειας | 9 |
| 1.7 Μέτρα κινδύνου | 16 |
| 1.7.1 Συνεπές μέτρο κινδύνου | 16 |
| 1.8 Αρχές υπολογισμού ασφαλιστρού - Βασικές έννοιες | 16 |
| 1.9 Στρεβλό μέτρο κινδύνου | 17 |
| 1.9.1 Αξιώματα της στρεβλής προσδοκίας | 18 |
| 1.10 Αξία σε κίνδυνο | 18 |
| 1.11 Αξία στον κίνδυνο ουράς | 19 |
| 1.11.1 Ιδιότητες | 19 |
| 1.11.2 Προσδοκία ουράς υπό συνθήκη | 20 |
| 2 Ανάλυση ευαισθησίας και μέτρα μεταβλητότητας της συνάρτησης επιβίωσης για τον αναλογιστικό δείκτη του Wang | 21 |
| 2.1 Εισαγωγή | 21 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.2 | Ανάλυση ευαισθησίας με βάση τη διαταραχή του αναλογικού μοντέλου κινδύνων . . . | 23 |
| 2.3 | Κύρια αποτελέσματα | 26 |
| 2.4 | Αριθμητικά παραδείγματα | 31 |
| 2.5 | Τελικές παρατηρήσεις | 38 |
| 3 | Μια οικογένεια μέτρων μεταβλητότητας που βασίζεται στην αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία και σε στρεβλές συναρτήσεις | 39 |
| 3.1 | Εισαγωγή | 39 |
| 3.2 | Κύρια αποτελέσματα | 42 |
| 3.2.1 | Ιδιότητες | 42 |
| 3.2.2 | Αναπαραστάσεις και σχέσεις με άλλα μέτρα | 44 |
| 3.2.3 | Μετασχηματισμός αποκατάστασης και ταυτότητα συνδιακύμανσης τύπου Stein | 47 |
| 3.2.4 | Φράγματα για την $E_h(X)$ κάτω από την υπόθεση κατανομών γήρανσης . . . | 50 |
| 3.2.5 | Μη πλήρης στρεβλή Βήτα συνάρτηση | 52 |
| 3.2.6 | Μια εφαρμογή στον υπολογισμό ασφαλιστρών | 53 |
| 3.3 | Αριθμητικά παραδείγματα | 55 |
| 3.4 | Εμπειρική εκτίμηση βασισμένη στη CRE μη πλήρη στρεβλή Βήτα συνάρτηση | 64 |
| 3.5 | Τελικές παρατηρήσεις | 68 |
| 4 | Ευελιξία και μεγιστοποίηση των σταθμισμένων στρεβλών ασφαλιστρών | 69 |
| 4.1 | Εισαγωγή | 69 |
| 4.2 | Ευελιξία σταθμισμένων ασφαλιστρών με βάση την κατασκευή της μείξης | 72 |
| 4.2.1 | Μερικές γενικευμένες και εκτεταμένες ιδιότητες | 76 |
| 4.3 | Μεγιστοποίηση των σταθμισμένων ασφαλιστρών | 80 |
| 4.3.1 | Ευέλικο ασφαλιστρο Kamps | 80 |
| 4.3.2 | Ευέλικτη προσδοκία ουράς υπό συνθήκη | 85 |
| 4.4 | Τελικές παρατηρήσεις | 91 |
| | Βιβλιογραφία | 91 |

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Σκοπός και αναλυτική δομή της διατριβής

Η διατριβή αυτή επικεντρώνεται στην ανάπτυξη και εφαρμογή νέων αναλογιστικών μέτρων κινδύνου, τα οποία βασίζονται στις θεωρίες της στρεβλής και της σταθμισμένης προσδοκίας. Τα προτεινόμενα μέτρα σχεδιάζονται για να βελτιώσουν την ακρίβεια και την αποτελεσματικότητα στην κατασκευή ασφαλιστρών και αναλογιστικών δεικτών, δίνοντας μια νέα οπτική στη διαχείριση κινδύνων.

Ένα κεντρικό στοιχείο της διατριβής είναι η διερεύνηση φαινομένων ελαστικότητας, όπως οι μικρές διαταραχές στην κατανομή των αποζημιώσεων, και πώς αυτές οι διαταραχές επηρεάζουν τα μέτρα κινδύνων. Εφαρμόζοντας τη θεωρία της διαταραχής σε διάφορες επιλογές στρεβλών συναρτήσεων, αναλύουμε τη συμπεριφορά των μέτρων κινδύνου και προτείνουμε νέους δείκτες για τη μέτρηση της δεξιάς ουράς των κατανομών απώλειας. Αυτοί οι νέοι δείκτες επιτρέπουν την καλύτερη κατανόηση και εκτίμηση των κινδύνων που συνδέονται με τις ασφαλίσεις. Επιπλέον, τα μέτρα επιτρέπουν στους αναλογιστές να ελέγχουν την αποστροφή στον κίνδυνο και να προσαρμόζουν τις στρατηγικές τους ανάλογα. Για παράδειγμα, τα μέτρα μεταβλητότητας που προτείνονται έχουν το πλεονέκτημα να προσαρμόζονται στη στρεβλή συνάρτηση, προσφέροντας μια πιο ευέλικτη και ακριβής εκτίμηση των κινδύνων. Πραγματοποιώντας μια συγκεκριμένη μορφή διαταραχής στην ένταση κινδύνου προκύπτει η αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία. Η εντροπία αυτή αποτέλεσε ένα χρήσιμο εργαλείο στην κατασκευή δεικτών μέτρησης δεξιάς ουράς και την κατασκευή μέτρων μεταβλητότητας. Στην αναλογιστική επιστήμη η εντροπία χρησιμοποιήθηκε στους πίνακες ζωής από τον Leser (1955), καθώς και στις ράντες ζωής από τους Haberman et al. (2011).

Μια άλλη μορφή ελαστικότητας που εξετάσαμε είναι η δημιουργία ενός ενδιάμεσου ασφαλιστρου μεταξύ δύο γνωστών ασφαλιστρών, έχοντας ως κίνητρο την εργασία των Goovaerts et al. (2001). Στην προσέγγισή μας χρησιμοποιούμε μία θετική παράμετρο η οποία επιτρέπει στον αναλογιστή να έχει μεγαλύτερη ευελιξία ως προς το κέρδος. Το ενδιάμεσο ασφαλιστρο βοηθά στην κάλυψη

των ασφαλιστικών συμβολαίων με τρόπο που να είναι αποδεκτό και από τους δύο συμβαλλόμενους, προσφέροντας μια πιο ισορροπημένη και δίκαιη λύση.

Ο κίνδυνος ως έννοια παίρνει πολλές μορφές στην καθημερινή μας ζωή. Σύμφωνα με το λεξικό του κ. Μπαμπινιώτη (2010)¹, η λέξη είναι πιθανόν να προέρχεται ετυμολογικά από το αρχαίο ελληνικό ρήμα «κίω» (= κινούμαι, φεύγω) και το ελληνιστικό «κίνδαξ» (=ευκίνητος). Η έννοια του κινδύνου συνδέεται με το ενδεχόμενο απώλειας και προκύπτει λόγω της αβεβαιότητας σχετικά με ένα αποτέλεσμα. Στην παρούσα διατριβή, ο κίνδυνος αφορά τη μεταβλητότητα των αποτελεσμάτων σε σχέση με την αναμενόμενη τιμή. Ο αναλογισμός χρησιμοποιείται σε πολλούς τομείς όπου η αξιολόγηση του κινδύνου είναι κρίσιμη για τη λήψη μιας σωστής απόφασης. Αυτό επιτυγχάνεται μελετώντας μαθηματικές μεθόδους για την εκτίμηση διάφορων κινδύνων.

Στη συνέχεια περιγράφουμε το περιεχόμενο του κάθε κεφαλαίου. Στο υπόλοιπο του πρώτου κεφαλαίου παραθέτουμε μια αναλυτική περιγραφή της διατριβής, έννοιες, ορισμούς και ιδιότητες που είναι χρήσιμες για τη διατριβή αυτή. Κάποιες από αυτές είναι το μέτρο κινδύνου με τις αντίστοιχες ιδιότητές του, ο ορισμός του σταθμισμένου ασφαλιστρού, η αξία σε κίνδυνο καθώς και η αξία σε κίνδυνο της ουράς. Χρησιμοποιούμε επίσης μη παραμετρικές κλάσεις κατανομών για να μπορέσουμε να αποδείξουμε κάποια θεωρήματα και παραθέτουμε αριθμητικά αποτελέσματα που τα επαληθεύουν. Στην τελευταία υποενότητα δίνουμε όλες τις κατανομές απώλειας που θα χρησιμοποιήσουμε στην διατριβή ώστε να μπορούμε να τις εφαρμόζουμε άμεσα αλλάζοντας μόνο τις τιμές που λαμβάνουν οι παράμετροί τους.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εφαρμόζουμε τη θεωρία της διαταραχής χρησιμοποιώντας στρεβλές συναρτήσεις, για να μελετήσουμε νέα μέτρα κινδύνου και να προτείνουμε νέους δείκτες μέτρησης δεξιάς ουράς των απαιτήσεων. Επίσης, παρουσιάζουμε έναν νέο εντροπικό δείκτη, με την εφαρμογή της ανάλυσης ευαισθησίας στα μέτρα κινδύνου, με στόχο να καταλήξουμε στο πιο σημαντικό συμπέρασμα, το οποίο είναι η κατάταξη των κινδύνων με βάση τη δεξιά ουρά της κατανομής τους. Η κατάταξη των ασφαλιστικών κινδύνων σε σχέση με τη δεξιά ουρά τους είναι ένα πρόβλημα που παρουσιάζει πολλές δυσκολίες. Για τον λόγο αυτό, επεκτείνουμε τον αναλογιστικό δείκτη που εισήγαγε ο Wang (1998), στην πρώτη δημοσιευθείσα εργασία μας Psarrakos και Vliora (2021). Προτείνουμε έναν δείκτη ευαισθησίας με τη βοήθεια της ανάλυσης διαταραχής του Leser (1955), σε ένα μοντέλο αναλογικών κινδύνων. Στη συνέχεια συγκρίνουμε τους δύο παραπάνω δείκτες και παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της κατάταξης και κάποια άλλα παραδείγματα με τη βοήθεια γραφικών παραστάσεων.

Επιπλέον, χρησιμοποιούμε μέτρα μεταβλητότητας που υπολογίζουν τη δεξιά ουρά, ρυθμίζοντας τον κίνδυνο για τιμές μεγαλύτερες από την αξία σε κίνδυνο (*Value at Risk* ή VaR) και μελετάμε

¹Μπαμπινιώτης, Γ. (2010). Ετυμολογικό Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας. Αθήνα: Κέντρο Λεξικολογίας, 675.

λεπτομερώς πώς η αξία σε κίνδυνο επηρεάζει τον αναλογιστικό δείκτη και τον δείκτη ευαισθησίας. Ένα από τα θεωρητικά αποτελέσματα που θα δούμε στο κεφάλαιο αυτό είναι ότι το νέο μέτρο μπορεί να εκφραστεί με βάση την αναμενόμενη τιμή ενός μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Διάφορα αποτελέσματα χαρακτηρισμού των κατανομών, ιδιότητες (συμπεριλαμβανομένων των σχέσεων μεταξύ τους), όπως επίσης και αποτελέσματα διάταξης τα έχουμε μελετήσει λεπτομερώς. Τέλος, εξετάσαμε τα αποτελέσματά μας για κατανομές απώλειας με διάφορες παραμέτρους και τα απεικονίσαμε σε γραφικές παραστάσεις. Αυτές οι παραστάσεις επιβεβαίωσαν τη θεωρητική μας κατανόηση σχετικά με την κατάταξη των κατανομών με βαριές ουρές. Συγκεκριμένα, δείξαμε πώς τα προτεινόμενα μέτρα κινδύνου επηρεάζονται από μικρές αλλαγές στις παραμέτρους της κατανομής. Με αυτόν τον τρόπο, ενισχύσαμε την αξιοπιστία των μεθόδων μας και προσφέραμε χρήσιμες αποδείξεις για την αξιολόγηση των ασφαλιστικών κινδύνων. Οι γραφικές παραστάσεις κατέστησαν σαφές το πώς οι διαφορετικοί δείκτες επηρεάζονται από τις διαταραχές στις κατανομές, προσφέροντας ένα πρακτικό εργαλείο για την ανάλυση και σύγκριση των κινδύνων.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε το δεύτερο δημοσιευμένο άρθρο των Psarrakos, Toomaj και Vliora (2024), στο οποίο προτείνουμε μια νέα οικογένεια μέτρων μεταβλητότητας. Δηλαδή, ορίζουμε μια σταθμισμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία η οποία ακολουθεί μια ανάλυση ευαισθησίας των στρεβλών μέτρων κινδύνου. Τα μέτρα μεταβλητότητας είναι σημαντικά εργαλεία για τη δημιουργία αρχών ασφαλιστρών και αποστροφής στον κίνδυνο. Παράγουμε μια μεγαλύτερη κλάση των μέτρων μεταβλητότητας που βασίζονται στη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία (*Cumulative Residual Entropy* ή *CRE*), επιλέγοντας κατάλληλη στρεβλή συνάρτηση. Επιπλέον, δείχνουμε ότι το νέο μέτρο μπορεί να εκφραστεί με βάση την αναμενόμενη τιμή ενός σταθμισμένου μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Διάφορες ιδιότητες, συμπεριλαμβανομένων των αναπαραστάσεων και των σχέσεων τους με άλλα μέτρα, φράγματα και αποτελέσματα διάταξης έχουν μελετηθεί και αποδεικνύεται ότι η διάταξη διασποράς συνεπάγεται τη διάταξη του εξεταζόμενου μέτρου. Τέλος, διερευνούμε τα αποτελέσματά μας για την μη πλήρη στρεβλή συνάρτηση Βήτα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε την τρίτη δημοσιευμένη εργασία, στην οποία εξετάζουμε την ευελιξία στα σταθμισμένα ασφάλιστρα, εισάγοντας μια θετική παράμετρο που βοηθά στη δημιουργία ενός ενδιάμεσου ασφάλιστρου για τον λήπτη της απόφασης. Προτείνουμε και διερευνούμε ένα νέο γενικευμένο ασφάλιστρο, το οποίο εξαρτάται από σταθμισμένες συναρτήσεις. Αυτή η προσέγγιση βασίζεται σε έναν κανόνα τιμολόγησης που προσαρμόζει το ασφάλιστρο ανάλογα με τον ασφαλιστικό κίνδυνο. Τέλος, ολοκληρώνουμε τη μελέτη μας με την ευέλικτη τροποποίηση του ασφάλιστρου διακύμανσης, όπως προτάθηκε από τους Goovaerts et al. (2001). Εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία μας σε διάφορα γνωστά ασφάλιστρα, εξετάζοντας τις θεωρητικές τους ιδιότητες και αποδεικνύοντας ότι η συνάρτηση ασφάλιστρου ως προς την θετική παράμετρο επιβάρυνσης (loading

parameter) είναι μη μονότονη και μονοκόρυφη. Με αυτόν τον τρόπο, καταφέρνουμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση των σταθμισμένων ασφαλιστρών, παρέχοντας ένα χρήσιμο εργαλείο για την πρόταση εφικτών ασφαλιστικών συμβολαίων (*feasible insurance contracts*).

1.2 Βασικές έννοιες

Στη συγκεκριμένη ενότητα θα ασχοληθούμε με βασικές έννοιες που αναφέρουμε στην παρούσα διατριβή. Οι έννοιες που θα δοθούν στη συνέχεια αφορούν όλες έναν κίνδυνο ή μία τυχαία μεταβλητή X , η οποία είναι απολύτως συνεχής και μη αρνητική.

Έστω X τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί σε έναν χώρο πιθανοτήτων. Η συνάρτηση $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, για $x \geq 0$ καλείται αθροιστική συνάρτηση κατανομής. Θεωρούμε ότι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι μία συνεχής και αύξουσα συνάρτηση του x , η οποία παίρνει τις οριακές τιμές

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F(\infty) = 1.$$

Η συνάρτηση $f(x)$ λέγεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X και ορίζεται με τη βοήθεια της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής ως:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x), \quad x > 0.$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

$$f(x) \geq 0, \quad x \geq 0 \quad \text{και} \quad \int_0^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Η συνάρτηση $\bar{F}(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$, για $x \geq 0$ καλείται συνάρτηση επιβίωσης ή δεξιά ουρά κατανομής. Η συνάρτηση επιβίωσης είναι μία συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση ως προς το x , η οποία παίρνει οριακές τιμές

$$\lim_{x \rightarrow 0} \bar{F}(x) = \bar{F}(0) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x) = \bar{F}(\infty) = 0.$$

1.3 Ένταση κινδύνου

Θεωρούμε την πιθανότητα

$$\mathbb{P}(X \in [x, x + \Delta x) | X > x) = \frac{\mathbb{P}(x \leq X < x + \Delta x)}{\mathbb{P}(X > x)} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\bar{F}(x)},$$

όπου $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. Στη συνέχεια, διαιρώντας με Δx και παίρνοντας το $\Delta x \rightarrow 0$ προκύπτει ο λόγος

$$\frac{\mathbb{P}(X \in [x, x + \Delta x) | X > x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dF(x)}{dx} \frac{1}{\bar{F}(x)} = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}, \quad x \geq 0$$

όπου $f(x) = -\bar{F}'(x)$, $x \geq 0$.

Ορισμός 1.1. Η ένταση κινδύνου ή βαθμίδα αποτυχίας (*hazard function* ή *failure rate*) ορίζεται ως:

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)},$$

για όλα τα $x \geq 0$ ώστε η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x) > 0$. Η ένταση κινδύνου για συνεχή κατανομή ικανοποιεί τις δύο παρακάτω ιδιότητες

$$\lambda(x) \geq 0, \quad \text{για κάθε } x \geq 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \lambda(x) dx = \infty.$$

Η ένταση κινδύνου χαρακτηρίζει την κατανομή γιατί η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ μπορεί να γραφτεί με την παρακάτω σχέση

$$\bar{F}(x) = e^{-\Lambda(x)} = e^{-\int_0^x \lambda(y) dy},$$

όπου $\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(y) dy$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κινδύνου (*cumulative hazard function*), η οποία είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς x , και ικανοποιεί τις ιδιότητες $\Lambda(0) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} \Lambda(x) = \infty$.

Ορισμός 1.2. Η μέση τιμή της $X - x | X > x$, ονομάζεται μέση υπερβάλλουσα συνάρτηση απώλειας ή μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής (*MRL*), και ορίζεται

$$m(x) = \mathbb{E}(X - x | X > x) = \frac{\int_x^{\infty} \bar{F}(u) du}{\bar{F}(x)}, \quad x \geq 0. \quad (1.1)$$

Θεωρούμε ότι η μέση τιμή του συγκεκριμένου μέτρου πρέπει είναι πεπερασμένη και να ικανοποιεί τις δύο παρακάτω ιδιότητες

$$m(x) \geq 0, \quad m'(x) \geq -1$$

για κάθε $x \geq 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{1}{m(u)} du = \infty.$$

1.4 Κατανομές γήρανσης

Σύμφωνα με τους Barlow και Proschan (1975), κάποιες από τις κατανομές γήρανσης είναι:

- (i) IFR (DFR): αύξουσα ένταση κινδύνου (φθίνουσα ένταση κινδύνου).
- (ii) IFRA (DFRA): αύξουσα ένταση κινδύνου κατά μέσο όρο (φθίνουσα ένταση κινδύνου κατά μέσο όρο).
- (iii) NBU (NWU): καλύτερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο (χειρότερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο).

(iv) NBUE (NWUE): καλύτερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο κατά μέση τιμή (χειρότερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο κατά μέση τιμή).

(v) DMRL (IMRL): φθίνουσα συνάρτηση υπολειπόμενου χρόνου ζωής (αύξουσα συνάρτηση υπολειπόμενου χρόνου ζωής).

Σύμφωνα με τον Glaser (1980), προκειμένου να περιγράψουμε την επιβίωση οι τέσσερις βασικές μορφές της έντασης κινδύνου σε σχέση με τα είδη μονοτονίας της μπορεί να είναι αύξουσα, φθίνουσα, λεκανοειδής και ανάποδη λεκανοειδής μορφή.

Ορισμός 1.3. Μια τυχαία μεταβλητή X είναι IFR (DFR) όταν για κάθε $x, t \geq 0$ η συνάρτηση $\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(x)}$ είναι φθίνουσα (αύξουσα) ως προς x . Επίσης, αν η τυχαία μεταβλητή X είναι απολύτως συνεχής, τότε η X είναι IFR (DFR) όταν η ένταση κινδύνου $\lambda(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) ως προς x .

Παρατήρηση 1.1. Όταν η τυχαία μεταβλητή X είναι απολύτως συνεχής τότε η μονοτονία του πηλίκου $\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(x)}$ ως προς x δίνει την αντίθετη μονοτονία στο $\lambda(x)$. Πράγματι, έστω ότι η συνάρτηση $\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(x)}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς x . Τότε,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(x)} \right)' \leq 0 &\Rightarrow \frac{-f(x+t)\bar{F}(x) + \bar{F}(x+t)f(x)}{(\bar{F}(x))^2} \leq 0 \\ \bar{F}(x+t)f(x) \leq f(x+t)\bar{F}(x) &\Rightarrow \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} \leq \frac{f(x+t)}{\bar{F}(x+t)} \\ \lambda(x) \leq \lambda(x+t) &\Rightarrow \lambda(x) \nearrow x. \end{aligned}$$

Ορισμός 1.4. Μια τυχαία μεταβλητή X ή μια κατανομή F είναι IFRA (DFRA) αν ο λόγος

$$\frac{\Lambda(x)}{x} = \frac{-\int_0^x \lambda(y) dy}{x} = \frac{-\ln \bar{F}(x)}{x}$$

είναι αύξουσα (ή φθίνουσα) ως προς το x .

Η κλάση IFR (DFR) περιέχεται στην κλάση IFRA (DFRA).

Ορισμός 1.5. Μια τυχαία μεταβλητή X ή μια κατανομή κατανομή F είναι DMRL (IMRL) όταν ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής $m(x)$ είναι φθίνουσα (αύξουσα).

Από τον Ορισμό 1.2 και τη σχέση (1.1) προκύπτει ότι η κλάση IFR (DFR) περιέχεται στην κλάση DMRL (IMRL).

Ορισμός 1.6. Μια τυχαία μεταβλητή X ή μια κατανομή κατανομή F είναι NBU (NWU) όταν για κάθε $x, t \geq 0$ ισχύει

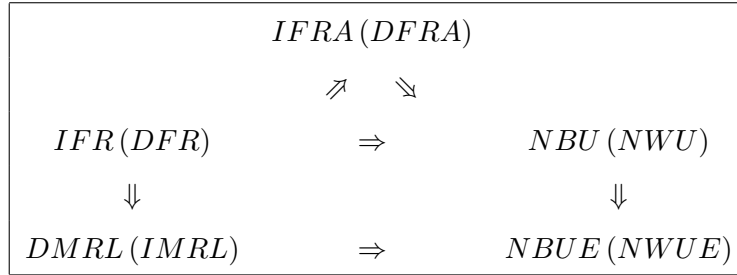
$$\bar{F}(x+t) \leq (\geq) \bar{F}(x)\bar{F}(t).$$

Η κλάση IFR (DFR) περιέχεται από την κλάση NBU (NWU). Επιπλέον, η κλάση IFRA (DFRA) περιέχεται στην κλάση NBU (NWU).

Ορισμός 1.7. Μια τυχαία μεταβλητή X ή μια κατανομή F είναι NBUE (NWUE) όταν για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$m(x) \leq (\geq) \mathbb{E}(X).$$

Η κλάση NBUE (NWUE) είναι ευρύτερη από την κλάση NBU (NWU). Το παρακάτω σχήμα μας δείχνει τη σχέση μεταξύ των κατανομών γήρανσης που χρησιμοποιούμε στη διατριβή αυτή:



Σχήμα 1.1: Σχέσεις μεταξύ κατανομών γήρανσης.

Σύμφωνα με το βιβλίο των Denuit et al. (2005) δίνουμε κάποιες βασικές διατάξεις που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτή τη διατριβή. Στους παρακάτω ορισμούς θεωρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$, συνάρτηση κατανομής $F(x)$, συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ και η Y έχει συνάρτηση πυκνότητας $g(x)$, συνάρτηση κατανομής $G(x)$, συνάρτηση επιβίωσης $\bar{G}(x)$.

Ορισμός 1.8. Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς τη διάταξη πιθανοφάνειας και συμβολίζουμε $X \leq_{lr} Y$, αν η $x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι αύξουσα.

Ορισμός 1.9. Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς την διάταξη έντασης κινδύνου και συμβολίζεται $X \leq_{hr} Y$, αν ισχύει $\lambda(x) \geq \lambda(y)$ για όλα τα x, y . Αυτό σημαίνει ότι η $x \rightarrow \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}(x)}$ είναι αύξουσα.

Ορισμός 1.10. Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς τη συνήθη στοχαστική διάταξη και συμβολίζουμε $X \leq_{st} Y$, αν ισχύει $F(x) \geq G(x)$ για όλα τα x , ή ισοδύναμα, αν $\bar{F}(x) \leq \bar{G}(x)$ για όλα τα x , όπου $\bar{F}(x)$, $\bar{G}(x)$ είναι οι συναρτήσεις επιβίωσης των κινδύνων X, Y αντίστοιχα.

Ορισμός 1.11. Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς τη διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και συμβολίζεται $X \leq_{mrl} Y$, αν ισχύει $m(x) \leq m(y)$ για όλα τα x, y .

Ορισμός 1.12. Θεωρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y έχουν πεπερασμένη την μέση τιμή τους. Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y στην αύξουσα κυρτή

(αύξουσα κοίλη) διάταξη και συμβολίζεται $X \leq_{icx} Y$, αν $\mathbb{E}(\phi(X)) \leq \mathbb{E}(\phi(Y))$ για κάθε αύξουσα κυρτή (αύξουσα κοίλη) συνάρτηση ϕ τέτοια ώστε να υπάρχει η μέση τιμή.

Ορισμός 1.13. Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y , στη διάταξη διασποράς (*dispersive*) και συμβολίζεται $X \leq_{disp} Y$, αν $F^{-1}(q) - F^{-1}(p) \leq G^{-1}(q) - G^{-1}(p)$ για όλα τα $0 < p < q < 1$.

Περισσότερες πληροφορίες για διατάξεις υπάρχουν στο βιβλίο των Müller και Stoyan (2002, Κεφάλαιο 1). Στον επόμενο πίνακα βλέπουμε τις σχέσεις των προαναφερόμενων διατάξεων:

$$\begin{array}{ccccccc} X \leq_{lr} Y & \Rightarrow & X \leq_{hr} Y & \Rightarrow & X \leq_{st} Y & \Leftarrow & X \leq_{disp} Y \\ & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\ & & X \leq_{mrl} Y & & X \leq_{icx} Y & & \end{array}$$

Σχήμα 1.2: Σχέσεις μεταξύ στοχαστικών διατάξεων.

1.5 Εντροπία

Ο Shannon (1948) όρισε ένα μέτρο αβεβαιότητας, το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$\mathcal{S}(X) = - \int_0^{\infty} f(x) \ln f(x) dx,$$

για τη συνεχή τυχαία μεταβλητή X , όπου $\ln(\cdot)$ είναι ο φυσικός λογάριθμος.

1.5.1 Αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

Σημαντικό μέρος της διατριβής επικεντρώνεται στην αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία (βλέπε Κεφάλαια 2 και 3), η οποία κάνει χρήση της συνάρτησης επιβίωσης αντί για τη συνάρτηση πυκνότητας.

Για κάθε μη αρνητικό κίνδυνο X , ορίζεται η αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

$$\mathcal{E}(X) = - \int_0^{\infty} \bar{F}(x) \ln \bar{F}(x) dx.$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε, Rao et al. (2004) και Rao (2005). Αυτή η σχέση μας παρέχει έναν διαφορετικό τρόπο να αντιληφθούμε την εντροπία, λαμβάνοντας υπόψη τη συνάρτηση επιβίωσης και τη σχετική αβεβαιότητα σε έναν κίνδυνο X .

1.5.2 Δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

Ο Ebrahimi (1996) εισήγαγε την έννοια της δυναμικής εντροπίας του Shannon και παρουσίασε διάφορες ιδιότητές της. Για κάθε μη αρνητικό κίνδυνο X , ορίζεται η δυναμική εντροπία του Shannon

$$\mathcal{S}(X; x) = - \int_x^{\infty} \frac{f(y)}{\bar{F}(x)} \ln \frac{f(y)}{\bar{F}(x)} dy.$$

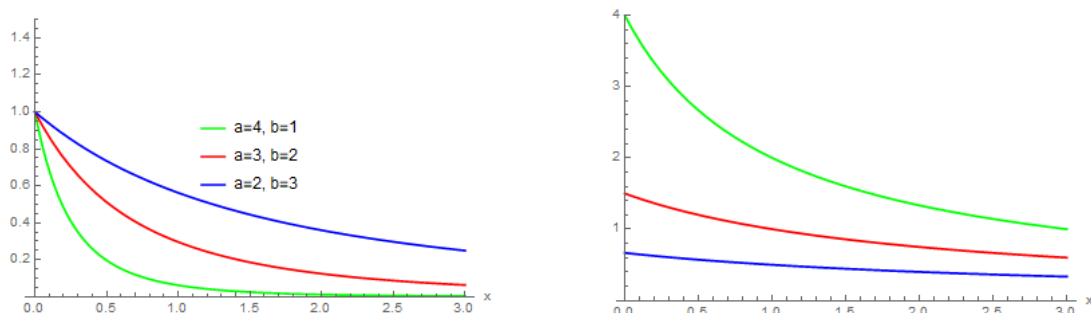
Ακολούθως πολλοί ερευνητές ασχολήθηκαν με τη δυναμική εντροπία, ανάμεσά τους και οι Asadi και Zohrevant. Το 2006 όρισαν τη δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία (Dynamic Cumulative Residual Entropy ή DCRE), η οποία θα εξαρτάται από το $x \geq 0$ και ορίζεται από τη σχέση

$$\mathcal{E}(X; x) = - \int_x^\infty \frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)} \ln \frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)} dy. \quad (1.2)$$

1.6 Κατανομές απώλειας

(i) Έστω X τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί μία κατανομή Pareto με παραμέτρους $a > 1$ και $b > 0$, συμβολίζουμε με $X \sim Pa(a, b)$. Τότε

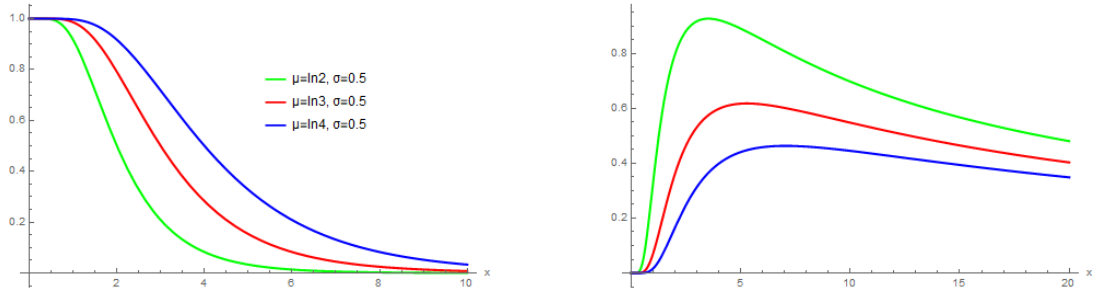
- Συνάρτηση πυκνότητας $f(x) = \frac{ab^a}{(x+b)^{a+1}}$, $x > 0$.
- Συνάρτηση κατανομής $F(x) = 1 - \left(\frac{b}{x+b}\right)^a$.
- Συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x) = \left(\frac{b}{x+b}\right)^a$ και μέση τιμή $\mathbb{E}(X) = \frac{b}{a-1}$.



Σχήμα 1.3: Η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ (αριστερό σχήμα) και η ένταση κινδύνου $\lambda(x)$ (δεξί σχήμα) της κατανομής Pareto με παραμέτρους $a = 4, 3, 2$ και $b = 1, 2, 3$.

(ii) Έστω X τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί μία Λογαριθμοκανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu \in (-\infty, +\infty)$ και $\sigma > 0$, συμβολίζουμε με $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$. Τότε

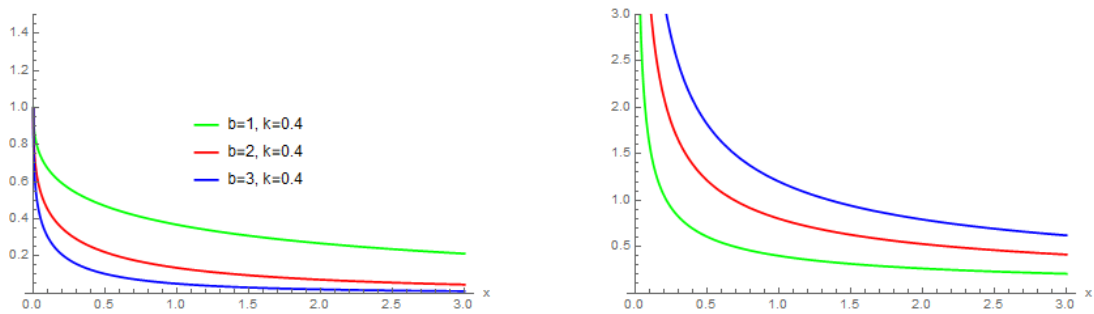
- Συνάρτηση πυκνότητας $f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$.
- Συνάρτηση κατανομής $F(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)$.
- Συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)$ και μέση τιμή $\mathbb{E}(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$.



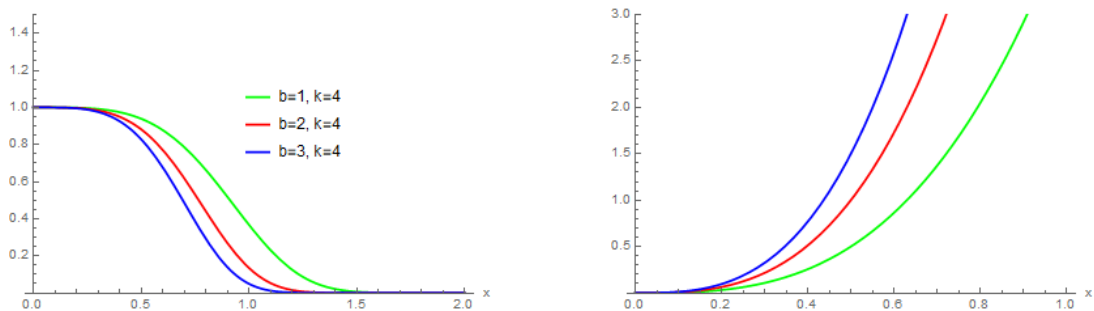
Σχήμα 1.4: Η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ (αριστερό σχήμα) και η ένταση κινδύνου $\lambda(x)$ (δεξί σχήμα) της Λογαριθμοκανονικής κατανομής με παραμέτρους $\mu = \ln 2, \ln 3, \ln 4$ και $\sigma = 0.5$.

(iii) Έστω X τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί μία κατανομή Weibull με παραμέτρους με $b > 0$ και $k > 0$, συμβολίζουμε με $X \sim Wei(k, b)$. Τότε

- Συνάρτηση πυκνότητας $f(x) = kbx^{k-1}e^{-bx^k}$.
- Συνάρτηση κατανομής $F(x) = 1 - e^{-bx^k}$.
- Συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x) = e^{-bx^k}$ και μέση τιμή $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\beta^{1/k}}\Gamma(1 + \frac{1}{k})$.



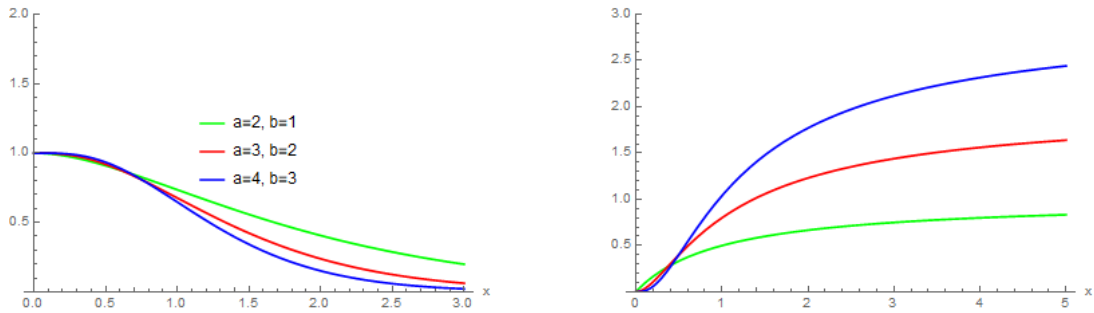
Σχήμα 1.5: Η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ (αριστερό σχήμα) και η ένταση κινδύνου $\lambda(x)$ (δεξί σχήμα) της κατανομής Weibull με παραμέτρους $b = 1, 2, 3$ και $k = 0.4$.



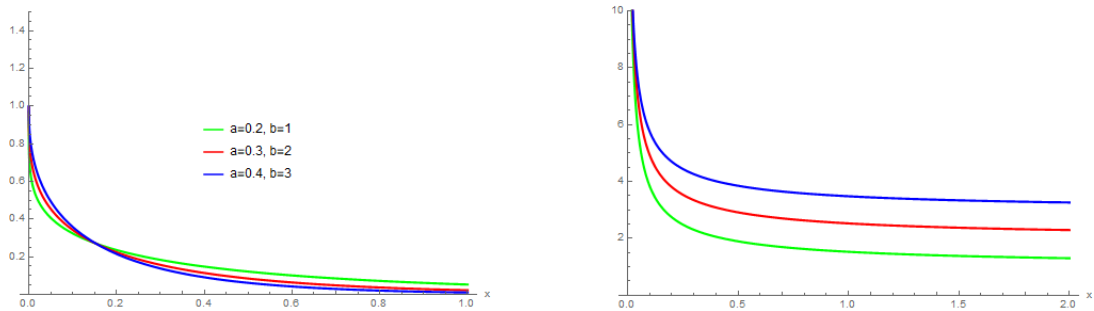
Σχήμα 1.6: Η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ (αριστερό σχήμα) και η ένταση κινδύνου $\lambda(x)$ (δεξί σχήμα) της κατανομής Weibull με παραμέτρους $b = 1, 2, 3$ και $k = 4$.

(iv) Έστω X τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί μία κατανομή Γάμμα με παραμέτρους με $a > 0$ και $b > 0$, συμβολίζουμε με $X \sim Ga(a, b)$. Τότε

- Συνάρτηση πυκνότητας $f(x) = \frac{b^a x^{a-1} e^{-bx}}{\Gamma(a)}$.
- Συνάρτηση κατανομής $F(x) = \frac{\Gamma(a, bx)}{\Gamma(a)}$.
- Συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x) = 1 - \frac{\Gamma(a, bx)}{\Gamma(a)}$ και μέση τιμή $\mathbb{E}(X) = \frac{a}{b}$.



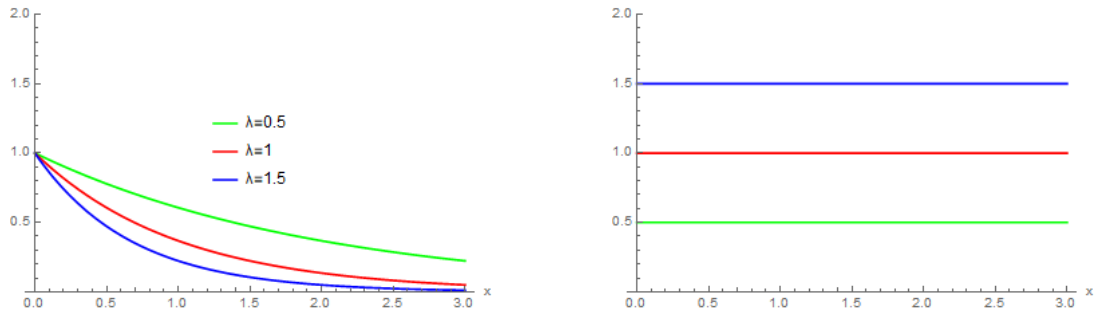
Σχήμα 1.7: Η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ (αριστερό σχήμα) και η ένταση κινδύνου $\lambda(x)$ (δεξί σχήμα) της Γάμμα κατανομής με παραμέτρους $a = 2, 3, 4$ και $b = 1, 2, 3$.



Σχήμα 1.8: Η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ (αριστερό σχήμα) και η ένταση κινδύνου $\lambda(x)$ (δεξί σχήμα) της Γάμμα κατανομής με παραμέτρους $a = 0.2, 0.3, 0.4$ και $b = 1, 2, 3$.

(v) Έστω X τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί μία Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$, και συμβολίζ. $X \sim Exp(\lambda)$ έχουμε

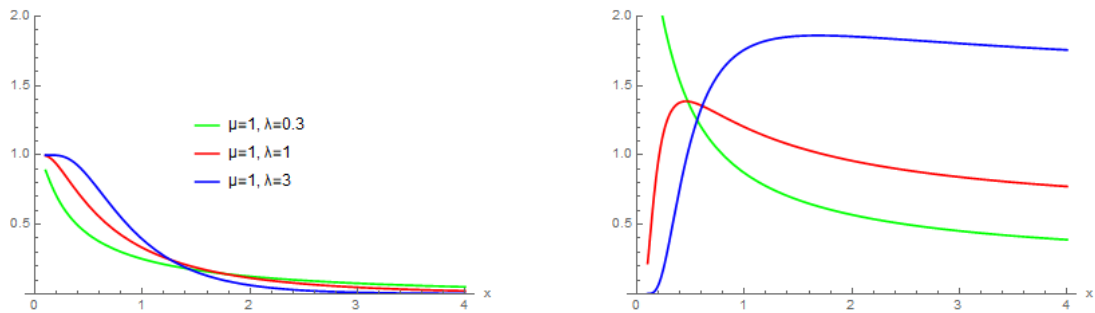
- Συνάρτηση πυκνότητας $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
- Συνάρτηση κατανομής $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.
- Συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$ και μέση τιμή $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.



Σχήμα 1.9: Η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ (αριστερό σχήμα) και η ένταση κινδύνου $\lambda(x)$ (δεξί σχήμα) της Εκθετικής κατανομής με παραμέτρους $\lambda = 0.5, 1, 1.5$.

(vi) Έστω X τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί μία αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή με παραμέτρους $\mu > 0$ και $\lambda > 0$, συμβολίζ. $X \sim IG(\mu, \lambda)$ έχουμε

- Συνάρτηση πυκνότητας $f(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp\left(\frac{-\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right)$.
- Συνάρτηση κατανομής $F(x) = \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu} - 1\right)\right) + e^{\frac{2\lambda}{\mu}} \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu} + 1\right)\right)$.
- Συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ και μέση τιμή $\mathbb{E}(X) = \mu$.



Σχήμα 1.10: Η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ (αριστερό σχήμα) και η ένταση κινδύνου $\lambda(x)$ (δεξί σχήμα) της αντίστροφης Γκαουσιανής κατανομής με παραμέτρους $\mu = 1$ και $\lambda = 0.3, 1, 3$.

Για περισσότερες πληροφορίες, παραπέμπουμε στην εργασία των Chhikara και Folks (2014).

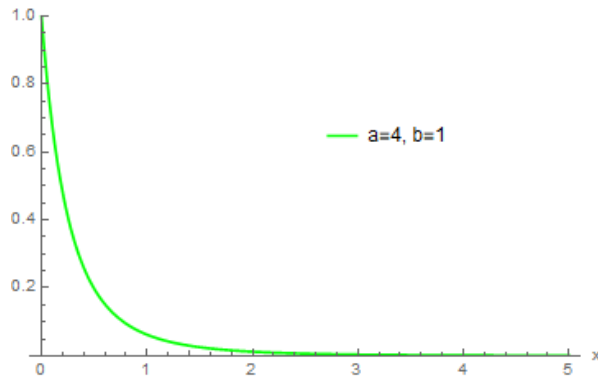
Οι κατανομές απώλειας που δίνονται παρακάτω μας δείχνουν ότι όταν ο λόγος των συναρτήσεων επιβίωσης αποκλίνει στο άπειρο, τότε η κατανομή του αριθμητή θα έχει πιο βαριά ουρά από την κατανομή του παρονομαστή, ενώ όταν ο λόγος συγκλίνει στο μηδέν το αντίστροφο. Σύμφωνα με τον Rojo (1992) αν το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_X(x)}{f_Y(x)}$ υπάρχει, τότε είναι ίσο με το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_X(x)}{\bar{F}_Y(x)}$. Έστω οι κίνδυνοι X, Y με συναρτήσεις κατανομής F_X, F_Y και συνάρτησεις επιβίωσης \bar{F}_X, \bar{F}_Y αντίστοιχα.

Όταν το όριο αποκλίνει, η κατανομή του αριθμητή συγκλίνει πιο γρήγορα στο ∞ . Εφαρμόζοντας τον κανόνα De l' Hospital έχουμε:

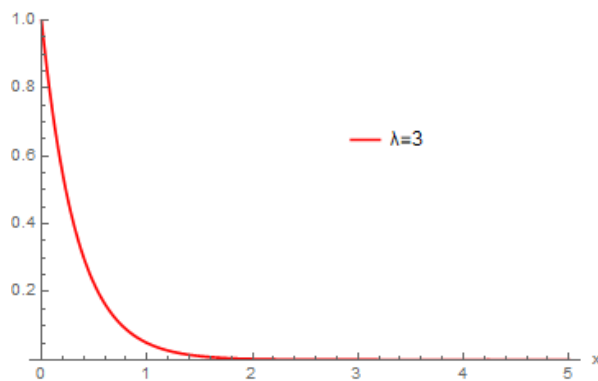
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_X(x)}{\bar{F}_Y(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_X(x)}{f_Y(x)} = c$$

- (i) Αν $c = 0$, τότε η $\bar{F}_X(x)$ έχει πιο λεπτή ουρά από την $\bar{F}_Y(x)$.
- (ii) Αν $0 < c < \infty$, τότε οι $\bar{F}_X(x)$ και $\bar{F}_Y(x)$ έχουν ομοιοβαρείς ουρές.
- (iii) Αν $c = \infty$, τότε η $\bar{F}_X(x)$ έχει πιο βαριά ουρά από την $\bar{F}_Y(x)$.

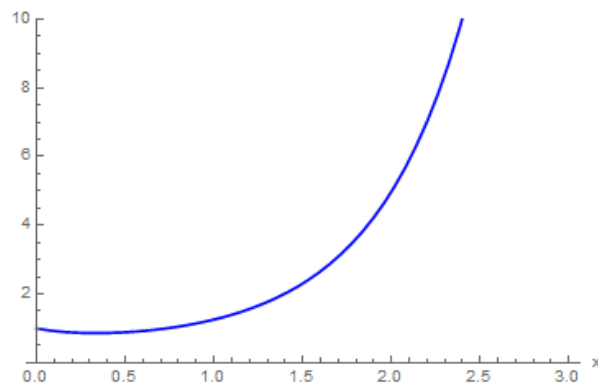
Παράδειγμα 1.1. (i) Έστω οι κατανομές Pareto με παραμέτρους $a = 4$ και $b = 1$ και η Εκθετική κατανομή με $\lambda = 3$. Το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_{PAR}(x)}{\bar{F}_{EXP}(x)} = \infty$. Επομένως η Pareto έχει πιο βαριά ουρά από την Εκθετική κατανομή.



Σχήμα 1.11: Η συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής Pareto.

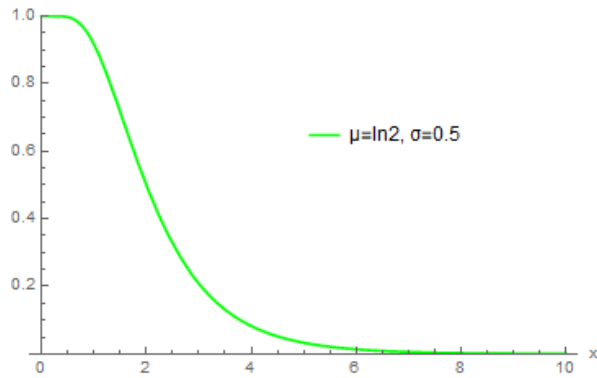


Σχήμα 1.12: Η συνάρτηση επιβίωσης της Εκθετικής κατανομής.

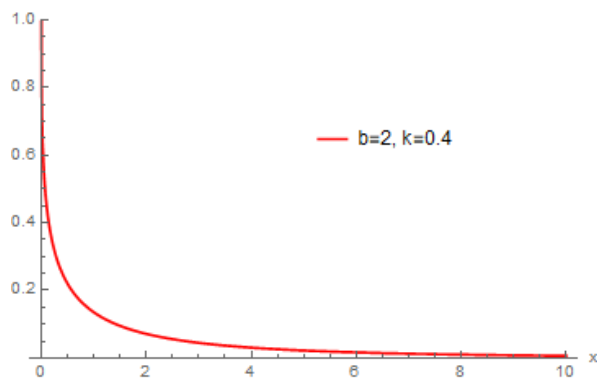


Σχήμα 1.13: Το πηλίκο των δύο συναρτήσεων επιβίωσης.

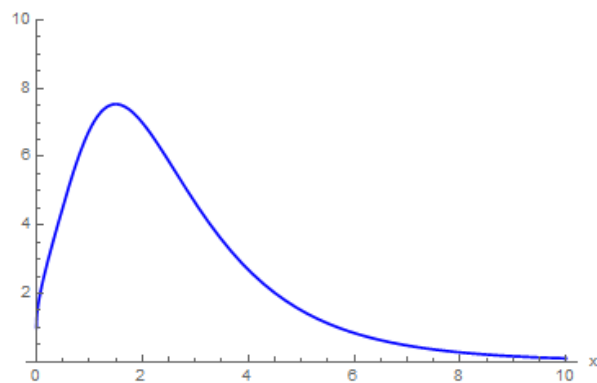
(ii) Έστω οι κατανομές Λογαριθμοκανονική με παραμέτρους $\mu = \ln 2$ και $\sigma = 0.5$ και η Weibull με παραμέτρους $b = 2$ και $k = 0.4$. Το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{LN}(x)}{f_{WEI}(x)} = \infty$. Επομένως η Λογαριθμοκανονική είναι πιο βαριά ουρά από την κατανομή Weibull.



Σχήμα 1.14: Η συνάρτηση επιβίωσης της Λογαριθμοκανονικής κατανομής.



Σχήμα 1.15: Η συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής Weibull.



Σχήμα 1.16: Το πηλίκο των δύο συναρτήσεων επιβίωσης.

1.7 Μέτρα κινδύνου

Το μέτρο κινδύνου εκφράζει μία μέθοδο ποσοτικοποίησης ενός κινδύνου. Στην αναλογιστική επιστήμη υπάρχουν διάφορα μέτρα υπολογισμού ενός κινδύνου, όπως για παράδειγμα η αξία σε κίνδυνο (*Value at Risk* ή *VaR*) και η αξία σε κίνδυνο της ουράς (*Tail Value at Risk* ή *TVaR*).

Ορισμός 1.14. Έστω \mathcal{X} είναι ένα σύνολο κινδύνων. Τότε το μέτρο κινδύνου ορίζεται ως το συναρτησοειδές $D : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty)$ και συμβολίζεται με $D(X)$.

1.7.1 Συνεπές μέτρο κινδύνου

Έστω X, Y δύο τυχαίες μεταβλητές ή κίνδυνοι και $c > 0$ μια θετική παράμετρος. Για να είναι ένα μέτρο συνεπές θα πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Συμμετρία μετάθεσης: $D(X + c) = D(X) + c$.

(ii) Θετική Ομοιογένεια: $D(cX) = cD(X)$.

(iii) Μονοτονία: Αν $X \leq Y$ τότε $D(X) \leq D(Y)$.

(iv) Υποπροσθετικότητα: $D(X + Y) \leq D(X) + D(Y)$.

Ορισμός 1.15. Ένα μέτρο κινδύνου καλείται συνεπές αν ικανοποιεί τις τέσσερις παραπάνω ιδιότητες. Κάποιες πρόσθετες επιθυμητές ιδιότητες που μπορεί να φέρει ένα μέτρο κινδύνου είναι:

(i) Αντικειμενικότητα: $X \stackrel{d}{=} Y \Rightarrow D(X) = D(Y)$, όπου $\stackrel{d}{=}$ συμβολίζει ότι οι τυχαίες μεταβλητές είναι ισόνομες, δηλαδή ακολουθούν την ίδια κατανομή.

(ii) Επαναληψιμότητα: Για κάθε X, Y ισχύει $D(X) = D(D(X|Y))$.

(iii) Σταθερότητα: Για κάθε σταθερά c ισχύει $D(c) = c$.

(iv) Μη αρνητικό περιθώριο ασφαλείας: Για κάθε τυχαία μεταβλητή X ισχύει $D(X) \geq \mathbb{E}(X)$.

(v) Μη υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας: Για κάθε τυχαία μεταβλητή X ισχύει $D(X) \leq \max(X) = F_X^{-1}(1)$.

1.8 Αρχές υπολογισμού ασφαλιστρου - Βασικές έννοιες

Τα ασφαλιστρά αποτελούν τα πρώτα μέτρα κινδύνου στον κλάδο της αναλογιστικής επιστήμης. Συγκεκριμένα, αποτελούνται από δύο κύρια μέρη, το καθαρό ασφαλιστρά και την επιβάρυνσή του. Μπορούμε να προσδιορίσουμε το καθαρό ασφαλιστρά ως τη μέση τιμή $\mathbb{E}(X)$ του ποσού σε κίνδυνο X , ενώ την επιβάρυνση μπορούμε να την υπολογίσουμε με περισσότερους τρόπους.

Για τον συμβολισμό της αρχής υπολογισμού του ασφαλιστρού θα χρησιμοποιήσουμε το συναρτησοειδές $\Pi(X)$, συμβολίζεται με $\Pi : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty)$ και \mathcal{X} ο κίνδυνος που ανήκει στο σύνολο κινδύνων. Σύμφωνα με το βιβλίο των Denuit et al. (2005), παραθέτουμε μερικές αρχές υπολογισμού των ασφαλιστρών:

(i) Αρχή της αναμενόμενης τιμής: $\Pi(X) = \mathbb{E}(X)$.

(ii) Αρχή της μαθηματικής ελπίδας: $\Pi(X) = (1 + \lambda) \mathbb{E}(X)$ για $\lambda > 0$.

(iii) Αρχή της διασποράς: $\Pi(X) = \mathbb{E}(X) + \lambda \mathbb{V}(X)$ για $\lambda > 0$.

(iv) Αρχή της τυπικής απόκλισης: $\Pi(X) = \mathbb{E}(X) + \lambda \sqrt{\mathbb{V}(X)}$ για $\lambda > 0$.

(v) Αρχή της εκθετική αρχής: $\Pi(X) = \frac{1}{\lambda} \ln(\mathbb{E}(e^{\lambda X}))$ για $\lambda > 0$.

(vi) Αρχή του ασφαλιστρού Esscher: $\Pi(X) = \mathbb{E}(X e^{\lambda X}) / \mathbb{E}(e^{\lambda X})$ για $\lambda > 0$.

(vii) Αρχή του ασφαλιστρού Kamps: $\Pi(X) = \mathbb{E}(X (1 - e^{-\lambda X})) / \mathbb{E}(1 - e^{-\lambda X})$ για $\lambda > 0$.

Οι Goovaerts et al. (1984) έχουν ασχοληθεί εκτενώς με τις παραπάνω αρχές.

Ορισμός 1.16. Το ασφαλιστρο $\Pi(X)$ είναι επιβαρυμένο αν και μόνο αν $\Pi(X) \geq \mathbb{E}(X)$, όπου η διαφορά $\Pi(X) - \mathbb{E}(X)$ εκφράζει την επιβάρυνση. Επομένως, στη διατριβή το loading parameter μεταφράζεται ως παράμετρος επιβάρυνσης.

1.9 Στρεβλό μέτρο κινδύνου

Υποθέτουμε ότι κάτω από το μέτρο πιθανότητας \mathbb{P} , η τυχαία μεταβλητή X , με αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x)$ και συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$. Μπορούμε να μετασχηματίσουμε μια κατανομή είτε μέσω της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής είτε μέσω της συνάρτησης επιβίωσης. Η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής X μπορεί να γραφτεί

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx.$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε μια συνάρτηση στρέβλωσης και μια στρεβλή συνάρτηση επιβίωσης. Μία συνάρτηση $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ καλείται στρέβλη συνάρτηση αν

i) $h(0) = 0$ και $h(1) = 1$.

ii) h είναι αύξουσα συνάρτηση.

Για μία τυχαία μεταβλητή X και έναν μη γραμμικό μετασχηματισμό της συνάρτησης κατανομής, η συνάρτηση στρέβλωσης δίνεται από τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.17. Το στρεβλό μέτρο κινδύνου $\Pi_h(X)$ για έναν κίνδυνο X με συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ και μια στρεβλή συνάρτηση, η οποία ορίζεται από τον παρακάτω τύπο

$$\Pi_h(X) = \int_0^\infty h(\bar{F}(x)) dx = \mathbb{E}(X h'(\bar{F}(X))). \quad (1.3)$$

Οι Hardy και Wirch (2001) απέδειξαν ότι το στρεβλό μέτρο είναι συνεπές αν και μόνο αν η συνάρτηση h είναι κοίλη. Στην περίπτωση αυτή ισχύει $\Pi_h(X) \geq \mathbb{E}(X)$. Με την χρήση της στρεβλής συνάρτησης h , ο αναλογιστής μπορεί να ελέγξει το κέρδος σε σχέση με τη μέση τιμή. Ικανοποιείται η ιδιότητα της μη αρνητικής επιβάρυνσης και η διαφορά τους $\Pi(X) - \mathbb{E}(X) > 0$ είναι το επιθυμητό κέρδος.

Επιπλέον, εισάγοντας τη στρεβλή συνάρτηση h ο αναλογιστής που λαμβάνει τις αποφάσεις έχει την επιλογή να επιλέξει έναν κίνδυνο Y αντί για έναν κίνδυνο X , αν και μόνον αν ισχύει $\Pi_h(X) \leq \Pi_h(Y)$.

1.9.1 Αξιώματα της στρεβλής προσδοκίας

Ο Yaari (1987) πρότεινε την εναλλακτική θεωρία της λήψης αποφάσεων κάτω από συνθήκες κινδύνου. Στην εργασία του χρησιμοποίησε την έννοια της στρεβλής συνάρτησης και χαρακτήρισε τον κίνδυνο με τη βοήθεια της στρεβλής συνάρτησης, η οποία εφαρμόζεται σε συναρτήσεις κατανομής.

1.10 Αξία σε κίνδυνο

Το ποσοστημόριο αποτελεί τη μεγαλύτερη ζημιά που μπορεί να συμβεί σε ένα χαρτοφυλάκιο για έναν κίνδυνο X σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, με πιθανότητα p , με $p \in (0, 1)$. Έστω $F_X^{-1}(p)$ η αντίστροφη συνάρτηση της αθροιστικής συνάρτησης F_X , η οποία ορίζεται:

$$F_X^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq p\}.$$

Αν η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, η αξία σε κίνδυνο ικανοποιεί την εξίσωση

$$\mathbb{P}(X \leq VaR_p(X)) = p \Rightarrow F_X(VaR_p(X)) = p \Rightarrow VaR_p(X) = F_X^{-1}(p)$$

το οποίο είναι το p -ποσοστημόριο της κατανομής της X .

Ορισμός 1.18. Η αξία σε κίνδυνο ενός κινδύνου X σε ένα επίπεδο σημαντικότητας $p \in (0, 1)$ είναι ίση με

$$VaR_p(X) = x_p = \inf\{x \in [0, \infty) \mid F_X(x) \geq p\},$$

όπου $F_X : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ η συνάρτηση κατανομής του κινδύνου X .

1.11 Αξία στον κίνδυνο ουράς

Η αξία σε κίνδυνο δεν μας δίνει καμία πληροφορία για το πάχος της ουράς της συνάρτησης κατανομής για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου p . Ένα άλλο μέτρο με ενδιαφέρον είναι η αξία σε κίνδυνο ουράς, η οποία αξιολογεί καλύτερα τους μεγάλους κινδύνους. Η βαριά ουρά μάς δίνει μεγάλη πιθανότητα σε μεγάλες τιμές ζημίας, το οποίο παίζει σημαντικό ρόλο για να γνωρίζουμε πώς επηρεάζεται η συνολική απώλεια σε ακραίες τιμές της ζημίας.

Ορισμός 1.19. Η X είναι μία ζημία και p είναι το επίπεδο πιθανότητας τότε η αξία σε κίνδυνο ουράς είναι η μέση τιμή των κινδύνων από την αξία σε κίνδυνο και πάνω, συμβολίζουμε $TVaR_p(X)$ όπου $x_p = F^{-1}(p)$ και ορίζεται:

$$TVaR_p(X) = \frac{1}{\bar{F}(x_p)} \int_{x_p}^{\infty} x f(x) dx, \quad 0 < p < 1.$$

Το μέτρο $TVaR_p(X)$ εκφράζει τον «αριθμητικό μέσο όρο» των VaR ενός κινδύνου X , για τιμές του X μεγαλύτερες του p .

1.11.1 Ιδιότητες

(i) Το μέτρο $TVaR$ δεν έχει «υπερβολικό» περιθώριο ασφαλείας.

Επειδή η αξία σε κίνδυνο ικανοποιεί την ιδιότητα να μην έχει υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας, αυτή η ιδιότητα θα ικανοποιείται και για το μέτρο $TVaR$, τέτοιο ώστε

$$TVaR_p(X) \leq \frac{1}{\bar{F}(x_p)} \int_p^1 \max(X) dy = \max(X).$$

(ii) Το μέτρο $TVaR$ δεν προκαλεί αδικαιολόγητο περιθώριο ασφαλείας.

Η ιδιότητα αυτή ισχύει λόγω των αντίστοιχων ιδιοτήτων της αξίας σε κίνδυνο VaR , έτσι

$$TVaR_p(c) = \frac{1}{\bar{F}(x_p)} \int_p^1 c dy = c.$$

(iii) Το $TVaR$ έχει μη αρνητικό περιθώριο ασφάλειας.

Ισχύει $TVaR_p(X) \geq \mathbb{E}(X)$, για κάθε επίπεδο πιθανότητας p .

(iv) Το $TVaR$ είναι μεταθετικό, θετικά ομογενές, συμμοτονικό προσθετικό και μονότονο.

Οι ιδιότητες αυτές συνεπάγονται άμεσα από τις ιδιότητες που ικανοποιεί η αξία σε κίνδυνο.

Για παράδειγμα, η Μεταθετικότητα του μέτρου VaR συνεπάγεται για κάθε σταθερά c ,

$$\begin{aligned} TVaR_p(X + c) &= \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR_y(X + c) dy \\ &= \frac{1}{1-p} \int_p^1 (VaR_y(X) + c) dy \\ &= TVaR_p(X) + c. \end{aligned}$$

(v) Το μέτρο $TVaR$ είναι υποπροσθετικό.

Δηλαδή, έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y τότε $TVaR_p(X+Y) \leq TVaR_p(X)+TVaR_p(Y)$.

Σημειώνουμε ότι η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει για την αξία σε κίνδυνο.

1.11.2 Προσδοκία ουράς υπό συνθήκη

Στην παράγραφο αυτή δίνουμε ορισμούς της προσδοκίας ουράς υπό συνθήκη και τη σύνδεση της με την υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο. Επειδή η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής, τα μέτρα $TVaR$ και CTE στη διατριβή αυτή είναι ισοδύναμα.

Ορισμός 1.20. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι μία τυχαία μεταβλητή και p είναι το επίπεδο πιθανότητας. Τότε η προσδοκία ουράς υπο συνθήκη είναι η μέση τιμή των κινδύνων από την αξία σε κίνδυνο και πάνω και ορίζεται ως η δεσμευμένη μέση τιμή

$$CTE_p(X) = \mathbb{E}(X | X > x_p) = \frac{1}{\bar{F}(x_p)} \int_{x_p}^{\infty} x f(x) dx,$$

με $VaR_p(X) = x_p = F^{-1}(p)$.

Πρόταση 1.1. Αν X συνεχής τυχαία μεταβλητή τότε η προσδοκία ουράς υπο συνθήκη σε επίπεδο πιθανότητας p δίνεται από τις ισοδύναμες ισότητες

$$CTE_p(X) = \frac{1}{1-p} \int_{VaR_p(X)}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR_t(X) dt, \quad p \in (0, 1).$$

Ένα άλλο γνωστό μέτρο στην αναλογιστική επιστήμη είναι το $CTVaR$ και ορίζεται ως

$$\begin{aligned} CVaR_p(X) &= \mathbb{E}(X - F^{-1}(x) | X > F^{-1}(p)) \\ &= \int_{F^{-1}(p)}^{\infty} \frac{(x - F^{-1}(x)) f(x)}{\bar{F}(F^{-1}(p))} dx \\ &= \int_{F^{-1}(p)}^{\infty} \frac{x f(x)}{\bar{F}(F^{-1}(p))} dx - \int_{F^{-1}(p)}^{\infty} \frac{F^{-1}(x)}{\bar{F}(F^{-1}(p))} dx \\ &= CTE_p(X) - VaR_p(X). \end{aligned}$$

Το μέτρο $CVaR$ συνδέεται με τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m(x)$ και εκφράζεται από τη σχέση

$$CVaR_p(X) = m(VaR_p(X)).$$

Κεφάλαιο 2

Ανάλυση ευαισθησίας και μέτρα μεταβλητότητας της συνάρτησης επιβίωσης για τον αναλογιστικό δείκτη του Wang

2.1 Εισαγωγή

Η μέτρηση του πάχους της δεξιάς ουράς των κατανομών απώλειας είναι ένα πρόβλημα που έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές και έχει δημιουργήσει μεγάλο ενδιαφέρον τις τελευταίες δεκαετίες. Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε έναν δείκτη ευαισθησίας, χρησιμοποιώντας ένα εντροπικό μέτρο μέτρησης της δεξιάς ουράς. Συγκρίνουμε τον νέο δείκτη με τον δείκτη μέτρησης της δεξιάς ουράς μιας κατανομής απώλειας που εισήγαγε ο Wang (1998), και στη συνέχεια κατασκευάζουμε μία μορφή εξάρτησης των δεικτών αυτών από την αξία σε κίνδυνο. Η εξάρτηση αυτή δημιουργείται από τη δέσμευση ότι οι τιμές του κινδύνου είναι μεγαλύτερες από την αξία σε κίνδυνο. Περιγράφουμε τη διαδικασία με την οποία αυτοί οι δείκτες έχουν παραχθεί και τους συγκρίνουμε μεταξύ τους ούτως ώστε να αποτυπώσουμε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά τους. Οι προτεινόμενοι δείκτες δίνουν χρήσιμες πληροφορίες για το πάχος της δεξιάς ουράς μιας κατανομής απώλειας.

Ο κίνδυνος της δεξιάς ουράς αναφέρεται στον κίνδυνο που συσχετίζεται με τη δεξιά ουρά μιας κατανομής. Ο κίνδυνος αυτός αφορά τις απαιτήσεις που υπερβαίνουν σημαντικά τη μέση τιμή της κατανομής και εκφράζει τον κίνδυνο που συνδέεται με σοβαρές ζημιές ή καταστροφικά συμβάντα.

Θεωρούμε έναν κίνδυνο X , ο οποίος είναι μια απολύτως συνεχής, μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$, αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x)$, συνάρτηση

επιβίωσης (ή ουρά) $\bar{F}(x)$, μέση τιμή $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \bar{F}(x) dx < \infty$ και αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία $\mathcal{E}(X) = -\int_0^\infty \bar{F}(x) \ln \bar{F}(x) dx < \infty$ (βλέπε Rao et al. (2004)). Επιπλέον, για όλα τα x τέτοια ώστε $\bar{F}(x) > 0$, έστω ότι $\lambda(x) = f(x)/\bar{F}(x)$ είναι η ένταση κινδύνου (ή ένταση θνησιμότητας) βλ. Ορισμό 1.1, $m(x) = \mathbb{E}(X - x | X > x)$ είναι η μέση υπερβάλλουσα συνάρτηση (ή μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής) βλέπε Ορισμός 1.2 και $\mathcal{E}(X; x) = \mathbb{E}(m(X) | X > x)$ είναι η δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία (βλέπε σχέση (1.2)). Τις συναρτήσεις $m(x)$ και $\mathcal{E}(X; x)$ μπορούμε να τις εκφράσουμε εναλλακτικά ως

$$m(x) = \int_x^\infty \frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)} dy$$

και

$$\mathcal{E}(X; x) = -\int_x^\infty \frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)} \ln \frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)} dy,$$

αντίστοιχα. Για $r > 0$, έστω επίσης X_r , μία τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}_r(x) = (\bar{F}(x))^r$, ένταση κινδύνου $\lambda_r(x) = r \lambda(x)$, ροπή $\mathbb{E}(X_r) = \int_0^\infty (\bar{F}(x))^r dx < \infty$, αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία $\mathcal{E}(X_r) = -r \int_0^\infty (\bar{F}(x))^r \ln \bar{F}(x) dx < \infty$, μέσο υπολειπόμενο χρόνος ζωής

$$m_r(x) = \int_x^\infty \left(\frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)} \right)^r dy,$$

και δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

$$\mathcal{E}(X_r; x) = -r \int_x^\infty \left(\frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)} \right)^r \ln \frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)} dy.$$

Είναι προφανές ότι, για $r = 1$, έχουμε $X \stackrel{d}{=} X_1$, όπου $\stackrel{d}{=}$ σημαίνει ότι οι κίνδυνοι X και X_1 έχουν την ίδια κατανομή.

Ένα ευρέως γνωστό μέτρο μεταβλητότητας που χρησιμοποιεί το αναλογικό μοντέλο κινδύνων είναι

$$D_r(X) = \int_0^\infty (\bar{F}(x))^r dx - \int_0^\infty \bar{F}(x) dx, \quad 0 < r < 1.$$

Ο Wang (1998) εισήγαγε και μελέτησε έναν αναλογιστικό δείκτη για τη μέτρηση της δεξιάς ουράς ενός κινδύνου X , ο οποίος ορίζεται

$$d_{0.5}(X) = \frac{\int_0^\infty (\bar{F}(x))^{0.5} dx - \mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(X)}, \quad (2.1)$$

για $r = 0.5$. Οι Zitikis και Jones (2003) μελέτησαν μια άμεση γενίκευση του δείκτη της σχέσης (2.1) η οποία δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$d_r(X) = \frac{\int_0^\infty (\bar{F}(x))^r dx - \mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(X)}, \quad 0 < r < 1. \quad (2.2)$$

Η μελέτη του δείκτη $d_r(X)$ ξεκίνησε αρχικά από την παρατήρηση των Zitikis και Jones (2003) ότι δεν φαίνεται να υπάρχει κάποιος συγκεκριμένος λόγος, η παράμετρος να είναι $r = 0.5$, αντί για

$r \in (0, 1)$. Ένα άλλο κίνητρο είναι το παράδειγμα των Wei και Yatracos (2004), στο οποίο ο δείκτης που δίνεται στη σχέση (2.1) δεν δίνει πάντα ικανοποιητικά αποτελέσματα. Προτείνουμε μια εκδοχή του δείκτη (2.2), ο οποίος ορίζεται ως

$$d_r(X; x_p) = \frac{m_r(x_p) - m(x_p)}{m(x_p)}, \quad (2.3)$$

όπου x_p η αξία στο κίνδυνο (βλ. Ορισμό 1.18). Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα μέτρα κινδύνου της ουράς, βλέπε Wang (1995), Wei και Yatracos (2004), Cai και Li (2005), Denuit et al. (2005), Landsman και Valdez (2005), Furman και Landsman (2006), και Furman et al. (2017).

Χρησιμοποιώντας μια ανάλυση διαταραχής στο αναλογικό μοντέλο κινδύνων $(\bar{F}(x))^{(1+\delta)r}$, όπου $\delta \rightarrow 0$, δίνουμε έναν δείκτη ευαισθησίας εφαρμόζοντας μια διαταραχή στην ουρά, ο οποίος ορίζεται ως

$$v_r(X; x_p) = \frac{\mathcal{E}(X_r; x_p)}{m_r(x_p)}. \quad (2.4)$$

Μελετάμε τους δείκτες $d_r(X; x_p)$ και $v_r(X; x_p)$ για τις παραμέτρους $r \in (0, 1)$ και $p \in (0, 1)$. Για $p \rightarrow 0$ θεωρούμε ότι $d_r(X; 0) = \lim_{p \rightarrow 0} d_r(X; x_p) = d_r(X)$ και $v_r(X; 0) = \lim_{p \rightarrow 0} v_r(X; x_p) = v_r(X)$. Είναι αξιοσημείωτο ότι όταν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί μια κατανομή Pareto ή μια Εκθετική κατανομή, οι δείκτες $d_r(X; x_p)$ και $v_r(X; x_p)$ είναι ανεξάρτητοι από το x_p για οποιοδήποτε $p \in (0, 1)$, ενώ θα είναι ίσοι μεταξύ τους για $r = 0.5$.

Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου δίνουμε μία ανάλυση ευαισθησίας με βάση τη διαταραχή του αναλογικού μοντέλου κινδύνων και λαμβάνουμε τα κύρια θεωρητικά αποτελέσματα για τους δείκτες $d_r(X; x_p)$ και $v_r(X; x_p)$. Στη συνέχεια, παρέχουμε αριθμητικά παραδείγματα, τα οποία επαληθεύουν τα θεωρητικά αποτελέσματα. Αυτό το κεφάλαιο βασίζεται στην εργασία των Psarrakos και Vliora (2021).

2.2 Ανάλυση ευαισθησίας με βάση τη διαταραχή του αναλογικού μοντέλου κινδύνων

Χρησιμοποιώντας το αναλογικό μοντέλο της έντασης κινδύνου (βλ. Ορισμό 1.1) πραγματοποιούμε την ευαισθησία στους δείκτες. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε την ένταση κινδύνου $\lambda_{r,\delta}(x) = (1 + \delta)r \lambda(x)$. Τότε η ουρά ισούται με

$$\bar{F}_{r,\delta}(x) = (\bar{F}(x))^{(1+\delta)r}, \quad x \geq 0.$$

Εφαρμόζοντας το ανάπτυγμα Taylor για την ουρά $\bar{F}_{r,\delta}(x)$ ως συνάρτηση της παραμέτρου δ σε μία περιοχή γύρω από το $\delta = 0$, παίρνουμε την προσέγγιση

$$\begin{aligned}\bar{F}_{r,\delta}(x) &\simeq \bar{F}_\delta(x)|_{\delta=0} + \left. \frac{d\bar{F}_\delta(x)}{d\delta} \right|_{\delta=0} \frac{\delta}{1!} \\ &= (\bar{F}_\delta(x))^r + r (\bar{F}(x))^r \ln(\bar{F}(x)) \delta.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (2.5) ως προς τη μεταβλητή x έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \bar{F}_{r,\delta}(x) dx &\approx \int_0^\infty (\bar{F}_\delta(x))^r dx + \int_0^\infty r (\bar{F}(x))^r \ln(\bar{F}(x)) \delta dx \\ \int_0^\infty (\bar{F}(x))^{r(1+\delta)} dx - \int_0^\infty (\bar{F}_\delta(x))^r dx &\approx \int_0^\infty r (\bar{F}(x))^r \ln(\bar{F}(x)) \delta dx \\ \frac{\int_0^\infty (\bar{F}(x))^{r(1+\delta)} dx - \int_0^\infty (\bar{F}_\delta(x))^r dx}{\int_0^\infty (\bar{F}(x))^r dx} &\approx \frac{\int_0^\infty r (\bar{F}(x))^r \ln(\bar{F}(x)) \delta dx}{\int_0^\infty (\bar{F}(x))^r dx} \\ \frac{\int_0^\infty (\bar{F}(x))^{(1+\delta)r} dx - \mathbb{E}(X_r)}{\mathbb{E}(X_r)} &\approx -v_r(X) \delta,\end{aligned}\quad (2.6)$$

όπου

$$v_r(X) = \frac{\mathcal{E}(X_r)}{\mathbb{E}(X_r)} = \frac{-r \int_0^\infty (\bar{F}(x))^r \ln \bar{F}(x) \delta x}{\int_0^\infty (\bar{F}(x))^r dx}.$$

Να σημειωθεί ότι για $r = 1$, ο Leser (1955) χρησιμοποίησε την παραπάνω προσέγγιση για να μετρήσει την ελαστικότητα του προσδόκιμου ζωής (βλέπε ακόμα Keyfitz (1977)). Για περισσότερες λεπτομέρειες για την αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία βλ. Ορισμό 1.5.1.

Ακολουθεί μια ανάλογη προσέγγιση χρησιμοποιώντας τη δεσμευμένη τυχαία μεταβλητή $X - x_p | X > x_p$ (αντί για τη X), με συνάρτηση επιβίωσης

$$\mathbb{P}(X - x_p > x | X > x_p) = \frac{\bar{F}(x + x_p)}{\bar{F}(x_p)}$$

για όλα τα x_p τέτοια ώστε $\bar{F}(x_p) > 0$. Υπενθυμίζουμε ότι για $p \in (0, 1)$, η μέση υπερβάλλουσα συνάρτηση απώλειας (ή μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής) του X_r στο x_p , όπου $x_p = F^{-1}(p)$ είναι

$$m_r(x_p) = \mathbb{E}(X_r - x_p | X_r > x_p) = \int_{x_p}^\infty \left(\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x_p)} \right)^r dx.$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα της προσέγγισης (2.6), έχουμε

$$\frac{\int_{x_p}^\infty \left(\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x_p)} \right)^{r(1+\delta)} dx - m_r(x_p)}{m_r(x_p)} \approx -v_r(X; x_p) \delta,\quad (2.7)$$

όπου $v_r(X; x_p)$ δίνεται από τη σχέση (2.4).

Παρατήρηση 2.1. (i) Στη συνέχεια του κεφαλαίου θεωρούμε ότι οι δείκτες $d_r(X; x_p)$ και $v_r(X; x_p)$ είναι πεπερασμένοι. Μία συνθήκη για να είναι οι δύο δείκτες πεπερασμένοι είναι η $\mathcal{E}(X_r) < \infty$. Αυτό προκύπτει από τις παρακάτω σχέσεις, για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε Psarrakos και Vliora (2021):

$$\mathbb{E}(X_r) = \int_0^{x_p} (\bar{F}(x))^r dx + (\bar{F}(x_p))^r m_r(x_p).\quad (2.8)$$

και

$$\mathcal{E}(X_r) = -r \int_0^{x_p} (\bar{F}(x))^r \ln \bar{F}(x) dx + (\bar{F}(x_p))^r \mathcal{E}(X_r; x_p) - r (\bar{F}(x_p))^r m_r(x_p) \ln \bar{F}(x_p). \quad (2.9)$$

Από τη σχέση (2.9), η εντροπία $\mathcal{E}(X_r) < \infty$ αν και μόνο αν $\mathcal{E}(X_r; x_p) < \infty$ και $m_r(x_p) < \infty$. Επιπλέον, από τη σχέση (2.8), η μέση τιμή $\mathbb{E}(X_r) < \infty$ αν και μόνο αν ο μέσος υπολοιπόμενος χρόνος ζωής $m_r(x_p) < \infty$. Καταλήγοντας, στην υπόθεση ότι η $\mathcal{E}(X_r) < \infty$ για $0 < r < 1$, συμπεραίνουμε ότι οι δύο δείκτες $d_r(X; x_p)$ και $v_r(X; x_p)$ είναι πεπερασμένοι.

(ii) Ο μέσος υπολοιπόμενος χρόνος ζωής σχετίζεται με την υπό συνθήκη τιμή σε κίνδυνο (CVaR), (βλ. Κεφάλαιο 1). Επιπλέον, ορισμένες άλλες εφαρμογές της αθροιστικής υπολοιπόμενης εντροπίας στην Αναλογιστική επιστήμη μπορούν να βρεθούν στα άρθρα των *Haberman et al. (2011)* και *Sordo et al. (2016)*. Πρόσφατα, οι *Psarrakos και Sordo (2019)* πρότειναν και μελέτησαν μια οικογένεια μέτρων κινδύνου με βάση τη μέση υπερβάλλουσα συνάρτηση και την αθροιστική υπολοιπόμενη εντροπία.

Για $0 < r < 1$ και $0 < p < 1$ τότε

$$\begin{aligned} D_r(X; x_p) &= \int_{x_p}^{\infty} \left(\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x_p)} \right)^r dx - \int_0^{\infty} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x_p)} dx \\ &= m_r(x_p) - m(x_p) \end{aligned}$$

είναι το μέτρο κινδύνου που σχετίζεται με τον δείκτη $d_r(X; x_p)$ στη σχέση (2.3).

Στη συνέχεια, δίνουμε ένα παράδειγμα στο οποίο για έναν δεδομένο κίνδυνο X , οι δείκτες $d_r(X; x_p)$ και $v_r(X; x_p)$ δεν επηρεάζονται από την αξία σε κίνδυνο για διαφορετικές τιμές του επιπέδου πιθανότητας p .

Παράδειγμα 2.1. Για $0 < r < 1$, $ar > 1$ και $k > 0$, έστω $X \sim Pa(a, k)$ μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Pareto κατανομή με παραμέτρους a, k και συνάρτηση επιβίωσης

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{k}{x+k} \right)^a, \quad x \geq 0$$

και ένταση κινδύνου $\lambda(x) = a/(x+k)$. Τότε η συνάρτηση επιβίωσης της X_r είναι $\bar{F}_r(x) = \left(\frac{ak}{x+k} \right)^{ar}$ με ένταση θνησιμότητας $\lambda_r(x) = ar/(x+k)$, δηλαδή $X_r \sim Pa(ar, k)$, όπου X_r ακολουθεί επίσης μια Pareto με παραμέτρους ar και k . Επιπλέον,

$$D_r(X; x_p) = \frac{a(1-r)(x_p+k)}{(a-1)(ar-1)}, \quad m(x_p) = \frac{x_p+k}{a-1}, \quad d_r(X; x_p) = \frac{a(1-r)}{ar-1}$$

και

$$\mathcal{E}(X_r; x_p) = \frac{ar(x_p+k)}{(ar-1)^2}, \quad m_r(x_p) = \frac{x_p+k}{ar-1}, \quad v_r(X; x_p) = \frac{ar}{ar-1}.$$

Επίσης έχουμε

$$D_r(X; x_p) = \frac{ar - 1}{a - 1} \frac{1 - r}{r} \mathcal{E}(X_r; x_p).$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε $d_r(X; x_p) \leq v_r(X; x_p)$ εάν $0.5 \leq r < 1$, ενώ παίρνουμε ότι $d_r(X; x_p) \geq v_r(X; x_p)$ αν $0 < r \leq 0.5$. Σημειώνουμε ότι, στην ειδική περίπτωση όπου $r = 0.5$, έχουμε $d_{0.5}(X; x_p) = v_{0.5}(X; x_p) = a/(a - 2)$.

Παράδειγμα 2.2. Για $0 < r < 1$ και $b > 0$, έστω $X \sim \text{Exp}(b)$ μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Εκθετική κατανομή με παράμετρο b συνάρτηση επιβίωσης

$$\bar{F}(x) = e^{-bx}, \quad x \geq 0,$$

και ένταση κινδύνου $\lambda(x) = b$. Είναι προφανές ότι η συνάρτηση επιβίωσης της X_r είναι $\bar{F}_r(x) = e^{-brx}$ με ένταση θνησιμότητας $\lambda(x) = br$, δηλαδή $X_r \sim \text{Exp}(br)$ όπου X_r ακολουθεί επίσης Εκθετική κατανομή με παράμετρο br . Επιπλέον,

$$D_r(X; x_p) = \frac{1 - r}{br}, \quad m(x_p) = \frac{1}{b}, \quad d_r(X; x_p) = \frac{1 - r}{r}$$

και

$$\mathcal{E}(X_r; x_p) = \frac{1}{br}, \quad m_r(x_p) = \frac{1}{br}, \quad v_r(X; x_p) = 1.$$

Επίσης έχουμε

$$D_r(X; x_p) = (1 - r)\mathcal{E}(X_r; x_p).$$

Επιπρόσθετα, παίρνουμε ότι $d_r(X; x_p) \leq v_r(X; x_p)$ αν $0.5 \leq r < 1$, ενώ παίρνουμε ότι $d_r(X; x_p) \geq v_r(X; x_p)$ αν $0 < r \leq 0.5$. Για $r = 0.5$, παίρνουμε $d_{0.5}(X; x_p) = v_{0.5}(X; x_p) = 1$.

2.3 Κύρια αποτελέσματα

Μεταξύ των κατανομών απώλειας, οι δείκτες $d_r(X; x_p)$ και $v_r(X; x_p)$ για τις κατανομές $\text{Pa}(a, k)$ και $\text{Exp}(b)$ (βλέπε Παραδείγματα 2.1 και 2.2) είναι ανεξάρτητοι του x_p (ή του p). Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να μετρήσουμε τη δεξιά ουρά ενός κινδύνου για ένα επίπεδο πιθανότητας $p \geq p_0$, όπου $p_0 \in (0, 1)$. Ειδικότερα, για $r \in (0, 1)$, $p \in (0, 1)$ και $a > r^{-1}$ μπορεί κανείς να εξετάσει εάν η τιμή των δεικτών $d_r(X; x_p)$ και $v_r(X; x_p)$ ανήκουν ή όχι στα διαστήματα

$$\left[\frac{1 - r}{r}, \frac{a(1 - r)}{ar - 1} \right] \quad \text{και} \quad \left[1, \frac{ar}{ar - 1} \right], \quad (2.10)$$

αντίστοιχα. Αξίζει να αναφέρουμε ότι, για $r = 0.5$, τα δύο παραπάνω διαστήματα συμπίπτουν.

Στη συνέχεια, παρέχουμε αποτελέσματα χαρακτηρισμού για τους δείκτες $d_r(X; x_p)$ και $v_r(X; x_p)$ στην περίπτωση της Pareto ή Εκθετικής κατανομής. Πριν από αυτό παρουσιάζουμε ένα βοηθητικό λήμμα που δίνεται από τους Jain et al. (1989).

Λήμμα 2.1. Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή στο διάστημα $[0, \infty)$ με μέση τιμή μ και μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m(x)$. Τότε $m(x) = (1 + \xi x)\mu$, $\xi \geq 0$, αν και μόνο αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί μια Pareto ή Εκθετική κατανομή σύμφωνα με το $\xi > 0$ ή $\xi = 0$.

Θεώρημα 2.1. Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\mathbb{E}(X) = \mu$ και μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m(x)$. Έστω επίσης $0 < p < 1$, $0 < r < 1$ τέτοιο ώστε $\mathcal{E}(X_r) < \infty$ και c μία θετική σταθερά. Τότε:

(i) $d_r(X; x_p) = cr^{-1}(1-r)$ αν και μόνο αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί μια Pareto ή Εκθετική κατανομή σύμφωνα με το $c > 1$ ή $c = 1$,

(ii) $v_r(X; x_p) = c$ αν και μόνο αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί μια Pareto ή Εκθετική κατανομή σύμφωνα με το $c > 1$ ή $c = 1$.

Απόδειξη. (i) (\Rightarrow) Έστω

$$d_r(X; x_p) = \frac{m_r(x_p) - m(x_p)}{m(x_p)} = c \frac{1-r}{r},$$

ή ισοδύναμα,

$$m_r(x_p) = \left(c \frac{1-r}{r} + 1 \right) m(x_p). \quad (2.11)$$

Παραγωγίζοντας ως προς το x_p και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (βλέπε Lai και Xie (2006, Κεφάλαιο 4))

$$\frac{d}{dx_p} m(x_p) = \lambda(x_p) m(x_p) - 1 \quad (2.12)$$

και

$$\frac{d}{dx_p} m_r(x_p) = r \lambda(x_p) m_r(x_p) - 1, \quad (2.13)$$

παίρνουμε

$$r \lambda(x_p) m_r(x_p) - 1 = \left(c \frac{1-r}{r} + 1 \right) (\lambda(x_p) m(x_p) - 1).$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.11), έπειτα από μερικούς υπολογισμούς, η τελευταία σχέση μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} \lambda_r(x_p) m_r(x_p) - 1 &= \left(c \frac{1-r}{r} + 1 \right) (\lambda(x_p) m(x_p) - 1) \\ r \lambda(x_p) \left(c \frac{1-r}{r} + 1 \right) m(x_p) - 1 &= \left(c \frac{1-r}{r} + 1 \right) \lambda(x_p) m(x_p) - \left(c \frac{1-r}{r} + 1 \right) \\ \lambda(x_p) m(x_p) \left(c \frac{1-r}{r} + 1 \right) (r-1) &= -c \frac{1-r}{r} \\ \lambda(x_p) m(x_p) &= \frac{-c(1-r)}{\left(c \frac{1-r}{r} + 1 \right) (r-1)} \\ \lambda(x_p) m(x_p) &= \frac{c}{c(1-r) + r}, \end{aligned}$$

και η σχέση (2.12) μαζί με την προηγούμενη σχέση μάς δίνει

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_p} m(x_p) &= \lambda(x_p)m(x_p) - 1 \\ &= \frac{c}{c(1-r)+r} - \frac{c(1-r)+r}{c(1-r)+r} \\ &= \frac{(c-1)r}{c(1-r)+r}. \end{aligned}$$

Με αυτόν τον τρόπο, έχοντας ως δεδομένο ότι $m(0) = \mathbb{E}(X)$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$m(x_p) = \frac{(c-1)r}{c(1-r)+r} x_p + \mathbb{E}(X).$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.1, η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί μια Pareto ή μια Εκθετική κατανομή σύμφωνα με το $c > 1$ ή $c = 1$.

(\Leftarrow) Το αποτέλεσμα αποδεικνύεται με απλούς υπολογισμούς (βλέπε το Παράδειγμα 2.1).

(ii) Το αποτέλεσμα αποδεικνύεται άμεσα με τη βοήθεια του Θεωρήματος 4.9 των Asadi and Zohrevand (2007). \square

Στη συνέχεια παράγουμε έναν τύπο για την πρώτη παράγωγο των δεικτών $d_r(X; x_p)$ και $v_r(X; x_p)$ ως προς το x_p .

Θεώρημα 2.2. Έστω η τυχαία μεταβλητή X , $0 < p < 1$ και $0 < r < 1$ τέτοια ώστε $\mathcal{E}(X_r) < \infty$.

Τότε:

$$\frac{d}{dx_p} d_r(X; x_p) = \left(\frac{1}{m(x_p)} - (1-r)\lambda(x_p) \right) d_r(X; x_p) - (1-r)\lambda(x_p) \quad (2.14)$$

και

$$\frac{d}{dx_p} v_r(X; x_p) = \frac{v_r(X; x_p)}{m_r(x_p)} - r\lambda(x_p). \quad (2.15)$$

Απόδειξη. Από τις σχέσεις (2.12) και (2.13), έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_p} d_r(X; x_p) &= \frac{(r\lambda(x_p)m_r(x_p) - \lambda(x_p)m_r(x_p))m(x_p) - (m_r(x_p) - m(x_p))(\lambda(x_p)m(x_p) - 1)}{(m(x_p))^2} \\ &= \frac{m_r(x_p) - m(x_p)}{(m(x_p))^2} - (1-r)\lambda(x_p) \frac{m_r(x_p)}{m(x_p)} \\ &= \frac{d_r(X; x_p)}{m(x_p)} - (1-r)\lambda(x_p)(d_r(X; x_p) + 1) \\ &= \left(\frac{1}{m(x_p)} - (1-r)\lambda(x_p) \right) d_r(X; x_p) - (1-r)\lambda(x_p), \end{aligned}$$

που συμπληρώνει την απόδειξη της σχέσης (2.14). Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την πρώτη παράγωγο της $\mathcal{E}(X_r; x_p)$ ως προς x_p (βλέπε Asadi and Zohrevand (2007)) έχουμε

$$\frac{d}{dx_p} \mathcal{E}(X_r; x_p) = r\lambda(x_p)(\mathcal{E}(X_r; x_p) - m_r(x_p)),$$

και με τη σχέση (2.13), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_p} v_r(X; x_p) &= \frac{(r \lambda(x_p)(\mathcal{E}(X_r; x_p) - m_r(x_p))) m_r(x_p) - \mathcal{E}(X_r; x_p)(r \lambda(x_p) m_r(x_p) - 1)}{(m_r(x_p))^2} \\ &= \frac{\mathcal{E}(X_r; x_p)}{(m_r(x_p))^2} - r \lambda(x_p) \\ &= \frac{v_r(X; x_p)}{m_r(x_p)} - r \lambda(x_p), \end{aligned}$$

που συμπληρώνει την απόδειξη της σχέσης (2.15). \square

Από τη σχέση (2.3) παρατηρούμε ότι η μονοτονία του δείκτη $d_r(X; x_p)$ σε σχέση με το x_p είναι ίδια με τη μονοτονία της αναλογίας $m_r(x_p)/m(x_p)$. Επιπλέον, αν το ηλικίο $m_r(x_p)/m(x_p)$ είναι αύξουσα ως προς x_p , τότε η τυχαία μεταβλητή X_r , θα λέμε ότι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής αυξάνεται ταχύτερα από την τυχαία μεταβλητή X (βλ. Finkelstein (2006)). Με παρόμοιο τρόπο, αν το ηλικίο $m_r(x_p)/m(x_p)$ είναι φθίνουσα, τότε η τυχαία μεταβλητή X , θα λέμε ότι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής αυξάνεται ταχύτερα από την τυχαία μεταβλητή X_r . Ακολούθως, λαμβάνουμε μια ιδιότητα μονοτονίας για τους δείκτες $d_r(X; x_p)$ και $v_r(X; x_p)$. Δεδομένου ότι τα αποτελέσματα του επόμενου πορίσματος προκύπτουν άμεσα από τη μονοτονία του ηλικίου $m_r(x_p)/m(x_p)$ και του Θεωρήματος 2.2, ολοκληρώνουμε την απόδειξη.

Πόρισμα 2.1. *Η X είναι μία τυχαία μεταβλητή, $0 < p < 1$ και $0 < r < 1$ τέτοια ώστε $\mathcal{E}(X_r) < \infty$. Τότε:*

(i) $d_r(X; x_p)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) στο x_p αν και μόνο αν

$$d_r(X; x_p) \geq (\leq) (1-r)\lambda(x_p)m_r(x_p).$$

(ii) $v_r(X; x_p)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) στο x_p αν και μόνο αν

$$v_r(X; x_p) \geq (\leq) r\lambda(x_p)m_r(x_p).$$

Παρατήρηση 2.2. (i) Για μια εκθετική ή μια Pareto κατανομή, τα φράγματα που δίνονται στο Πόρισμα 2.1 είναι ακριβή (βλέπε επίσης το Παράδειγμα 2.1). Υπενθυμίζουμε ότι μια Εκθετική κατανομή έχει σταθερή ένταση κινδύνου και μια κατανομή Pareto έχει φθίνουσα ένταση κινδύνου.

(ii) Για $r = 0.5$, τα άνω (κάτω) φράγματα των δεικτών $d_{0.5}(X; x_p)$ και $v_{0.5}(X; x_p)$ σύμφωνα με το Πόρισμα 2.1 είναι ίσα μεταξύ τους.

Στην ακόλουθη πρόταση, κάνουμε σύγκριση μεταξύ των μέτρων $D_r(X; x_p)$ και $\mathcal{E}(X_r; x_p)$.

Πρόταση 2.1. *Έστω η τυχαία μεταβλητή X , $0 < p < 1$ και $0 < r < 1$ τέτοια ώστε $\mathcal{E}(X_r) < \infty$. Τότε,*

$$D_r(X; x_p) \leq \frac{1-r}{r} \mathcal{E}(X_r; x_p). \quad (2.16)$$

Απόδειξη. Για $0 \leq t < 1$, θεωρούμε την λογαριθμική ανισότητα $t \leq -\ln(1-t)$. Θέτοντας για $t = 1 - (\bar{F}(x_p + y)/\bar{F}(x_p))^{1-r}$, όπου $x_p, y \geq 0$, η παραπάνω ανισότητα γίνεται

$$1 - \left(\frac{\bar{F}(x_p + y)}{\bar{F}(x_p)} \right)^{1-r} \leq -(1-r) \ln \frac{\bar{F}(x_p + y)}{\bar{F}(x_p)}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με το πηλίκο $(\bar{F}(x_p + y)/\bar{F}(x_p))^r$, λαμβάνουμε

$$\left(\frac{\bar{F}(x_p + y)}{\bar{F}(x_p)} \right)^r - \frac{\bar{F}(x_p + y)}{\bar{F}(x_p)} \leq -(1-r) \left(\frac{\bar{F}(x_p + y)}{\bar{F}(x_p)} \right)^r \ln \frac{\bar{F}(x_p + y)}{\bar{F}(x_p)}.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς y στο διάστημα $[0, \infty)$, έχουμε

$$m_r(x_p) - m(x_p) \leq \frac{1-r}{r} \mathcal{E}(X_r; x_p),$$

και προκύπτει το αποτέλεσμα. \square

Παρατήρηση 2.3. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.3), η σχέση (2.16) μπορεί να γραφτεί εναλλακτικά ως

$$\frac{d_r(X; x_p)}{d_r(X; x_p) + 1} \leq \frac{1-r}{r} v_r(X; x_p).$$

Θεώρημα 2.3. Έστω η τυχαία μεταβλητή X με $0 < p < 1$ και $0 < r < 1$ τέτοια ώστε $\mathcal{E}(X_r)$. Αν η τυχαία μεταβλητή έχει φθίνουσα (αύξουσα) ένταση κινδύνου, τότε (i) $v_r(X; x_p) \geq (\leq) 1$, και (ii) $d_r(X; x_p) \geq (\leq) (1-r)/r$.

Απόδειξη. (i) Η υπόθεση ότι η ένταση κινδύνου $\lambda(x_p)$ είναι φθίνουσα (ή αύξουσα) ως προς x_p μας δίνει ότι $\lambda_r(x_p) = r\lambda(x_p)$ είναι φθίνουσα (ή αύξουσα) ως προς x_p και $m_r(x_p)$ είναι αύξουσα (ή φθίνουσα) ως προς x_p (βλ. Ορισμό 1.9 και Ορισμό 1.11 αντίστοιχα). Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1 των Asadi and Zohrevand (2007) ισχύει

$$\mathcal{E}(X_r; x_p) \geq (\leq) m_r(x_p), \quad (2.17)$$

και αυτό συμπληρώνει την απόδειξη του (i).

(ii) Έστω $0 < \alpha < 1$ τέτοιο ώστε $\mathcal{E}(X_\alpha) < \infty$. Τότε, για $r \in [\alpha, 1)$ και $x \in [x_p, \infty)$, έχουμε

$$\left| \frac{d}{dr} \left(\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x_p)} \right)^r \right| = - \left(\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x_p)} \right)^r \ln \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x_p)} \leq - \left(\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x_p)} \right)^\alpha \ln \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x_p)}.$$

Δεδομένου ότι $\mathcal{E}(X_\alpha; x_p) < \infty$ (βλέπε επίσης τη σχέση (2.9)), παραγωγίζοντας ως προς το ολοκλήρωμα (βλ. Apostol (1974)) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} m_r(x_p) &= \frac{d}{dr} \int_{x_p}^{\infty} \left(\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x_p)} \right)^r dx \\ &= \int_{x_p}^{\infty} \left(\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x_p)} \right)^r \ln \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x_p)} dx \\ &= -\frac{1}{r} \mathcal{E}(X_r; x_p) < 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$\tilde{D}_r(X; x_p) = D_r(X; x_p) - (1 - r)m_r(x_p) = r m_r(x_p) - m(x_p).$$

Αν υποθέσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει φθίνουσα (ή αύξουσα) ένταση κινδύνου, από τις σχέσεις (2.17) και (2.18), παίρνουμε

$$\frac{d}{dr} \tilde{D}_r(X; x_p) = m_r(x_p) - \mathcal{E}(X_r; x_p) \leq (\geq) 0.$$

Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\lim_{r \rightarrow 1} \tilde{D}_r(X; x_p) = 0$, έχουμε

$$\tilde{D}_r(X; x_p) \geq (\leq) 0,$$

ή ισοδύναμα

$$D_r(X; x_p) \geq (\leq) \frac{1-r}{r} m(x_p).$$

□

2.4 Αριθμητικά παραδείγματα

Στην προτελευταία ενότητα υπολογίζουμε τις τιμές των δεικτών $d_r(X; x_p)$ και $v_r(X; x_p)$ ενός κινδύνου X για διάφορες κατανομές που δίνονται στις εργασίες των Wang (1998) και Wei και Yatracos (2004). Θυμίζουμε ότι η αξία σε κίνδυνο ισούται με $x_p = VaR(X; p) = F^{-1}(p)$ και είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς το p (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. Ορισμό 1.18). Για απλότητα, υπολογίζουμε στους παρακάτω πίνακες τις τιμές των δεικτών για διαφορετικές τιμές του p .

Παράδειγμα 2.3. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί μια κατανομή Γάμμα με παραμέτρους a και 1, δηλαδή $X \sim Ga(a, 1)$, με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x}, \quad x > 0,$$

όπου $a > 0$. Στον Πίνακα 2.1, παρατηρούμε ότι για $a > 1$, δηλαδή στην περίπτωση όπου η ένταση κινδύνου είναι αύξουσα, οι τιμές του δείκτη $d_{0.5}(X; x_p)$ αυξάνονται καθώς αυξάνεται το p και είναι μικρότερες από την μονάδα (για $a = 1$ παίρνουμε την περίπτωση της Εκθετικής κατανομής). Επιπλέον, για $a < 1$, δηλαδή στην περίπτωση όπου η ένταση κινδύνου είναι φθίνουσα, οι τιμές του δείκτη $d_{0.5}(X; x_p)$ μειώνονται καθώς το p μειώνεται και είναι μεγαλύτερες από τη μονάδα, βλέπε Θεώρημα 2.3. Παρατηρούμε επίσης ότι για ένα σταθερό p οι τιμές του δείκτη $d_{0.5}(X; x_p)$ αυξάνονται καθώς η παράμετρος a μικραίνει. Μια ανάλογη συμπεριφορά εμφανίζεται στον Πίνακα 2.2 για τις τιμές του δείκτη $v_{0.5}(X; x_p)$. Στους Πίνακες 2.3 και 2.4 παρέχουμε τις τιμές των δεικτών $d_{0.75}(X; x_p)$ και $v_{0.75}(X; x_p)$ αντίστοιχα.

| p | $a = 5$ | $a = 3$ | $a = 2$ | $a = 1$ | $a = 1/2$ | $a = 1/3$ | $a = 1/5$ |
|------|---------|---------|---------|---------|-----------|-----------|-----------|
| 0.00 | 0.38122 | 0.51447 | 0.65568 | 1.00000 | 1.53148 | 1.96277 | 2.67234 |
| 0.01 | 0.50402 | 0.59344 | 0.69940 | 1.00000 | 1.51903 | 1.94792 | 2.65394 |
| 0.05 | 0.58032 | 0.65783 | 0.74705 | 1.00000 | 1.47301 | 1.88824 | 2.57936 |
| 0.10 | 0.62847 | 0.69930 | 0.77894 | 1.00000 | 1.42281 | 1.81434 | 2.48397 |
| 0.15 | 0.66230 | 0.72848 | 0.80155 | 1.00000 | 1.37920 | 1.74285 | 2.38625 |
| 0.25 | 0.71202 | 0.77121 | 0.83466 | 1.00000 | 1.30710 | 1.61096 | 2.18593 |
| 0.50 | 0.79613 | 0.84244 | 0.88917 | 1.00000 | 1.18239 | 1.35495 | 1.70430 |
| 0.75 | 0.86159 | 0.89633 | 0.92927 | 1.00000 | 1.09940 | 1.18155 | 1.33315 |
| 0.90 | 0.90384 | 0.93003 | 0.95356 | 1.00000 | 1.05689 | 1.09801 | 1.16445 |
| 0.95 | 0.92276 | 0.94474 | 0.96390 | 1.00000 | 1.04104 | 1.06861 | 1.10993 |
| 0.99 | 0.94848 | 0.96425 | 0.97728 | 1.00000 | 1.02286 | 1.03650 | 1.05465 |

Πίνακας 2.1: Οι τιμές του δείκτη $d_{0.5}(X; x_p)$ της κατανομής $Ga(a, 1)$ στο Παράδειγμα 2.3, για διάφορες τιμές των a και p .

| p | $a = 5$ | $a = 3$ | $a = 2$ | $a = 1$ | $a = 1/2$ | $a = 1/3$ | $a = 1/5$ |
|------|---------|---------|---------|---------|-----------|-----------|-----------|
| 0.00 | 0.49934 | 0.63092 | 0.75365 | 1.00000 | 1.28563 | 1.46619 | 1.70327 |
| 0.01 | 0.60747 | 0.69264 | 0.78388 | 1.00000 | 1.28068 | 1.46116 | 1.69825 |
| 0.05 | 0.66940 | 0.74100 | 0.81664 | 1.00000 | 1.26192 | 1.44067 | 1.67762 |
| 0.10 | 0.70732 | 0.77161 | 0.83853 | 1.00000 | 1.24053 | 1.41450 | 1.65060 |
| 0.15 | 0.73359 | 0.79300 | 0.85408 | 1.00000 | 1.22111 | 1.38816 | 1.62211 |
| 0.25 | 0.77181 | 0.82420 | 0.87694 | 1.00000 | 1.18710 | 1.33643 | 1.56066 |
| 0.50 | 0.83595 | 0.87631 | 0.91510 | 1.00000 | 1.12157 | 1.22065 | 1.38822 |
| 0.75 | 0.88615 | 0.91636 | 0.94398 | 1.00000 | 1.07182 | 1.12593 | 1.21588 |
| 0.90 | 0.91914 | 0.94207 | 0.96209 | 1.00000 | 1.04358 | 1.07324 | 1.11830 |
| 0.95 | 0.92276 | 0.95355 | 0.97002 | 1.00000 | 1.03237 | 1.05311 | 1.08279 |
| 0.99 | 0.95508 | 0.96916 | 0.98058 | 1.00000 | 1.01886 | 1.02977 | 1.04387 |

Πίνακας 2.2: Οι τιμές του δείκτη $v_{0.5}(X; x_p)$ της κατανομής $Ga(a, 1)$ στο Παράδειγμα 2.3, για διάφορες τιμές των a και p .

| p | $a = 5$ | $a = 3$ | $a = 2$ | $a = 1$ | $a = 1/2$ | $a = 1/3$ | $a = 1/5$ |
|------|---------|---------|---------|---------|-----------|-----------|-----------|
| 0.00 | 0.13727 | 0.18175 | 0.22741 | 0.33333 | 0.48434 | 0.59776 | 0.77009 |
| 0.01 | 0.18119 | 0.20941 | 0.24240 | 0.33333 | 0.48069 | 0.59376 | 0.76565 |
| 0.05 | 0.20768 | 0.23134 | 0.25832 | 0.33333 | 0.46722 | 0.57756 | 0.74754 |
| 0.10 | 0.22394 | 0.24510 | 0.26872 | 0.33333 | 0.45256 | 0.55734 | 0.72410 |
| 0.15 | 0.23513 | 0.25460 | 0.27597 | 0.33333 | 0.43986 | 0.53766 | 0.69977 |
| 0.25 | 0.25121 | 0.26822 | 0.28638 | 0.33333 | 0.41894 | 0.50114 | 0.64893 |
| 0.50 | 0.27735 | 0.29009 | 0.30293 | 0.33333 | 0.38315 | 0.42983 | 0.52238 |
| 0.75 | 0.29666 | 0.30585 | 0.31457 | 0.33333 | 0.35980 | 0.38172 | 0.42211 |
| 0.90 | 0.30856 | 0.31529 | 0.32134 | 0.33333 | 0.34812 | 0.35889 | 0.37638 |
| 0.95 | 0.31373 | 0.31929 | 0.32415 | 0.33333 | 0.34386 | 0.35099 | 0.36175 |
| 0.99 | 0.32057 | 0.32446 | 0.32769 | 0.33333 | 0.33906 | 0.34251 | 0.34713 |

Πίνακας 2.3: Οι τιμές του δείκτη $d_{0.75}(X; x_p)$ της κατανομής $Ga(a, 1)$ στο Παράδειγμα 2.3, για διάφορες τιμές των a και p .

| p | $a = 5$ | $a = 3$ | $a = 2$ | $a = 1$ | $a = 1/2$ | $a = 1/3$ | $a = 1/5$ |
|------|---------|---------|---------|---------|-----------|-----------|-----------|
| 0.00 | 0.45996 | 0.59315 | 0.72286 | 1.00000 | 1.34876 | 1.58283 | 1.90323 |
| 0.01 | 0.58525 | 0.66833 | 0.76160 | 1.00000 | 1.34137 | 1.57529 | 1.89569 |
| 0.05 | 0.65819 | 0.72690 | 0.80263 | 1.00000 | 1.31372 | 1.54461 | 1.86476 |
| 0.10 | 0.70240 | 0.76338 | 0.82941 | 1.00000 | 1.28298 | 1.50573 | 1.82424 |
| 0.15 | 0.73264 | 0.78849 | 0.84810 | 1.00000 | 1.25578 | 1.46714 | 1.78157 |
| 0.25 | 0.77593 | 0.82444 | 0.87497 | 1.00000 | 1.20977 | 1.39326 | 1.69009 |
| 0.50 | 0.84612 | 0.88226 | 0.91799 | 1.00000 | 1.12708 | 1.23904 | 1.44433 |
| 0.75 | 0.89815 | 0.92424 | 0.94864 | 1.00000 | 1.06990 | 1.12572 | 1.22426 |
| 0.90 | 0.93053 | 0.94969 | 0.96674 | 1.00000 | 1.04004 | 1.06851 | 1.11368 |
| 0.95 | 0.94470 | 0.96059 | 0.97433 | 1.00000 | 1.02884 | 1.04802 | 1.07647 |
| 0.99 | 0.96363 | 0.97482 | 0.98403 | 1.00000 | 1.01599 | 1.02549 | 1.03810 |

Πίνακας 2.4: Οι τιμές του δείκτη $v_{0.75}(X; x_p)$ της κατανομής $Ga(a, 1)$ στο Παράδειγμα 2.3, για διάφορες τιμές των a και p .

Παράδειγμα 2.4. Θεωρούμε τις ακόλουθες κατανομές απώλειας σύμφωνα με το παράδειγμα στο άρθρο του Wang (1998):

(i) $X \sim Pa(3, 2)$ είναι μια κατανομή Pareto με συνάρτηση επιβίωσης

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{2}{x+2} \right)^3, \quad x \geq 0.$$

(ii) $X \sim LN(-\ln 2, \sqrt{\ln 4})$ είναι μια Λογαριθμοκανονική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln 4}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x + \ln 2}{\sqrt{\ln 4}} \right)^2 \right\}, \quad x > 0.$$

(iii) $X \sim E-IG((3 + \sqrt{5})/2, 2 + \sqrt{5})$ είναι μια Εκθετική-αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή με συνάρτηση επιβίωσης

$$\bar{F}(x) = \exp\left\{ \frac{3 + \sqrt{5}}{4 + 2\sqrt{5}} (1 - \sqrt{1 + 2(2 + \sqrt{5})x}) \right\}, \quad x \geq 0.$$

(iv) $X \sim IG(1, 3)$ είναι μια αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = (6\pi x^3)^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{(x-1)^2}{6x} \right\}, \quad x > 0.$$

(v) $X \sim Ga(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ είναι μια Γάμμα κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3}\Gamma(1/3)} x^{-2/3} e^{-\frac{1}{3}x}, \quad x > 0.$$

Οι προαναφερόμενες κατανομές έχουν την ίδια μέση τιμή ίση με 1 και την ίδια διακύμανση ίση με 3. Επιπλέον, θεωρούμε την Εκθετική κατανομή, που συμβολίζεται με $X \sim \text{Exp}(1)$ με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = e^{-x}, \quad x > 0.$$

Στους Πίνακες 2.5 και 2.6 δίνουμε τις τιμές των δεικτών $d_{0.5}(X; x_p)$ και $v_{0.5}(X; x_p)$ για διάφορες τιμές του p . Υπενθυμίζοντας ότι $d_{0.5}(X) = d_{0.5}(X; 0) = \lim_{p \rightarrow 0} d_{0.5}(X; x_p)$ είναι ο δείκτης του Wang (1998) και $v_{0.5}(X) = v_{0.5}(X; 0) = \lim_{p \rightarrow 0} v_{0.5}(X; x_p)$ είναι ο δείκτης ευαισθησίας, παρατηρούμε ότι για αυτές τις παραμετρικές κατανομές η κατάταξη είναι σε συμφωνία με τις γνώσεις που έχουμε για το πάχος της ουράς για οποιοδήποτε επίπεδο πιθανότητας p . Ειδικότερα, για όλα τα p , οι τιμές των δύο δεικτών ανήκουν στο διάστημα $[1, 3]$, βλέπε τη σχέση (2.10) για $r = 0.5$ και $a = 3$. Στους Πίνακες 2.7 και 2.8 είναι προφανές ότι η τιμή του r επηρεάζει τη συμπεριφορά των δύο δεικτών. Πράγματι, για $r = 0.75$, από τον Πίνακα 2.7 βλέπουμε ότι για $p \geq 0.75$, οι τιμές του δείκτη $d_{0.75}(X; x_p)$ ανήκουν στο διάστημα $[\frac{1}{3}, \frac{3}{5}]$, βλέπε τη σχέση (2.10) για $r = 0.75$ και $a = 3$. Παρόμοια συμπεριφορά παρουσιάζεται για τον δείκτη ευαισθησίας $v_{0.75}(X)$, βλέπε Πίνακα 2.8.

| p | Pareto | LN | E-IG | IG | Gamma | Exp |
|------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.00 | 3.00000 | 2.60487 | 2.23607 | 2.17427 | 1.96277 | 1.00000 |
| 0.01 | 3.00000 | 2.67305 | 2.22844 | 2.26284 | 1.94792 | 1.00000 |
| 0.05 | 3.00000 | 2.70663 | 2.19809 | 2.26533 | 1.88824 | 1.00000 |
| 0.10 | 3.00000 | 2.71225 | 2.16050 | 2.24009 | 1.81434 | 1.00000 |
| 0.15 | 3.00000 | 2.70622 | 2.12325 | 2.20591 | 1.74285 | 1.00000 |
| 0.25 | 3.00000 | 2.67855 | 2.04947 | 2.12510 | 1.61096 | 1.00000 |
| 0.50 | 3.00000 | 2.56366 | 1.86536 | 1.88291 | 1.35495 | 1.00000 |
| 0.75 | 3.00000 | 2.38842 | 1.66571 | 1.58690 | 1.18155 | 1.00000 |
| 0.90 | 3.00000 | 2.21392 | 1.51012 | 1.35915 | 1.09801 | 1.00000 |
| 0.95 | 3.00000 | 2.11288 | 1.43349 | 1.25832 | 1.06861 | 1.00000 |
| 0.99 | 3.00000 | 1.94198 | 1.32138 | 1.13599 | 1.03650 | 1.00000 |

Πίνακας 2.5: Οι τιμές του δείκτη $d_{0.5}(X; x_p)$ των Pareto, Λογαριθμοκανονική (LN), Εκθετική-αντίστροφη Γκαουσιανή (E-IG), αντίστροφη Γκαουσιανή (IG), Γάμμα (Gamma) και Εκθετική (Exp) κατανομών στο Παράδειγμα 2.4, για διάφορες τιμές του p .

| p | Pareto | LN | E-IG | IG | Gamma | Exp |
|------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.00 | 3.00000 | 2.24584 | 1.76393 | 1.68129 | 1.46619 | 1.00000 |
| 0.01 | 3.00000 | 2.26109 | 1.76101 | 1.70105 | 1.46116 | 1.00000 |
| 0.05 | 3.00000 | 2.26545 | 1.74925 | 1.69646 | 1.44067 | 1.00000 |
| 0.10 | 3.00000 | 2.26226 | 1.73438 | 1.68388 | 1.41450 | 1.00000 |
| 0.15 | 3.00000 | 2.25616 | 1.71928 | 1.66885 | 1.38816 | 1.00000 |
| 0.25 | 3.00000 | 2.23956 | 1.68830 | 1.63453 | 1.33643 | 1.00000 |
| 0.50 | 3.00000 | 2.18100 | 1.60401 | 1.52835 | 1.22065 | 1.00000 |
| 0.75 | 3.00000 | 2.09012 | 1.49946 | 1.38284 | 1.12593 | 1.00000 |
| 0.90 | 3.00000 | 1.99192 | 1.40645 | 1.25405 | 1.07324 | 1.00000 |
| 0.95 | 3.00000 | 1.93074 | 1.35627 | 1.19082 | 1.05311 | 1.00000 |
| 0.99 | 3.00000 | 1.81907 | 1.27689 | 1.10734 | 1.02977 | 1.00000 |

Πίνακας 2.6: Οι τιμές του δείκτη $v_{0.5}(X; x_p)$ των κατανομών Pareto, Λογαριθμοκανονική (LN), Εκθετική-αντίστροφη Γκαουσιανή (E-IG), αντίστροφη Γκαουσιανή (IG), Γάμμα (Gamma) και Εκθετική (Exp) στο Παράδειγμα 2.4, για διάφορες τιμές του p .

| p | Pareto | LN | E-IG | IG | Gamma | Exp |
|------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.00 | 0.60000 | 0.60501 | 0.60802 | 0.60380 | 0.59776 | 0.33333 |
| 0.01 | 0.60000 | 0.62105 | 0.60632 | 0.62886 | 0.59376 | 0.33333 |
| 0.05 | 0.60000 | 0.62980 | 0.59958 | 0.63148 | 0.57756 | 0.33333 |
| 0.10 | 0.60000 | 0.63242 | 0.59122 | 0.62697 | 0.55734 | 0.33333 |
| 0.15 | 0.60000 | 0.63244 | 0.58294 | 0.62003 | 0.53766 | 0.33333 |
| 0.25 | 0.60000 | 0.62907 | 0.56655 | 0.60272 | 0.50114 | 0.33333 |
| 0.50 | 0.60000 | 0.61139 | 0.52564 | 0.54831 | 0.42983 | 0.33333 |
| 0.75 | 0.60000 | 0.58285 | 0.48127 | 0.47870 | 0.38172 | 0.33333 |
| 0.90 | 0.60000 | 0.55397 | 0.44670 | 0.42310 | 0.35889 | 0.33333 |
| 0.95 | 0.60000 | 0.53711 | 0.42966 | 0.39797 | 0.35099 | 0.33333 |
| 0.99 | 0.60000 | 0.50836 | 0.40475 | 0.36715 | 0.34251 | 0.33333 |

Πίνακας 2.7: Οι τιμές του δείκτη $d_{0.75}(X; x_p)$ των Pareto, Λογαριθμοκανονική (LN), Εκθετική-αντίστροφη Γκαουσιανή (E-IG), αντίστροφη Γκαουσιανή (IG), Γάμμα (Gamma) και Εκθετική (Exp) κατανομών στο Παράδειγμα 2.4, για διάφορες τιμές του p .

| p | Pareto | LN | E-IG | IG | Gamma | Exp |
|------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.00 | 1.80000 | 1.77353 | 1.68328 | 1.67137 | 1.58283 | 1.00000 |
| 0.01 | 1.80000 | 1.80231 | 1.67978 | 1.71327 | 1.57529 | 1.00000 |
| 0.05 | 1.80000 | 1.81677 | 1.66578 | 1.71475 | 1.54461 | 1.00000 |
| 0.10 | 1.80000 | 1.81979 | 1.64828 | 1.70339 | 1.50573 | 1.00000 |
| 0.15 | 1.80000 | 1.81804 | 1.63075 | 1.68774 | 1.46714 | 1.00000 |
| 0.25 | 1.80000 | 1.80816 | 1.59549 | 1.64997 | 1.39326 | 1.00000 |
| 0.50 | 1.80000 | 1.76453 | 1.50419 | 1.53065 | 1.23904 | 1.00000 |
| 0.75 | 1.80000 | 1.69501 | 1.39948 | 1.37117 | 1.12572 | 1.00000 |
| 0.90 | 1.80000 | 1.62281 | 1.31343 | 1.23653 | 1.06851 | 1.00000 |
| 0.95 | 1.80000 | 1.57961 | 1.26952 | 1.17316 | 1.04802 | 1.00000 |
| 0.99 | 1.80000 | 1.50403 | 1.20336 | 1.09294 | 1.02549 | 1.00000 |

Πίνακας 2.8: Οι τιμές του δείκτη $v_{0.75}(X; x_p)$ των κατανομών Pareto, Λογαριθμοκανονική (LN), Εκθετική-αντίστροφη Γκαουσιανή (E-IG), αντίστροφη Γκαουσιανή (IG), Γάμμα (Gamma) και Εκθετική (Exp) στο Παράδειγμα 2.4, για διάφορες τιμές του p .

Παράδειγμα 2.5. Θεωρούμε μια κατανομή Pareto με παραμέτρους $a = 38/9$ και $k = 29/9$, και μια Λογαριθμοκανονική κατανομή με παραμέτρους $\alpha = -(\ln 2.9)/2$ και $\beta = \sqrt{\ln 2.9}$ (βλέπε επίσης το Παράδειγμα 4.2). Αυτές οι κατανομές έχουν την ίδια μέση τιμή ίση με 1 και την ίδια διακύμανση ίση με 1.9. Για αυτές τις κατανομές, οι Wei και Yatscos (2004) παρατήρησαν ότι ο δείκτης $d_{0.5}(X)$ δίνει διαφορετική κατάταξη ως προς το πάχος της ουράς. Στον Πίνακα 2.9 παρέχουμε τις τιμές των δεικτών $d_{0.5}(X; x_p)$ (στήλες 2 και 3) και $v_{0.5}(X; x_p)$ (στήλες 4 και 5) των κατανομών Pareto και Λογαριθμοκανονική (LN) για διάφορες τιμές του p . Παρατηρούμε ότι η σωστή κατάταξη ως προς το πάχος της ουράς μεταξύ Pareto (όπου οι δύο δείκτες είναι ίσοι με 1.9 για οποιοδήποτε επίπεδο πιθανότητας p) και Λογαριθμοκανονικής κατανομής προκύπτει για ορισμένα $p \geq p_0$, όπου $p_0 \in (0, 1)$.

| p | Pareto | LN | Pareto | LN |
|------|---------|---------|---------|---------|
| 0.00 | 1.90000 | 1.91234 | 1.90000 | 1.85685 |
| 0.01 | 1.90000 | 2.00439 | 1.90000 | 1.88633 |
| 0.05 | 1.90000 | 2.05849 | 1.90000 | 1.90155 |
| 0.10 | 1.90000 | 2.08314 | 1.90000 | 1.90674 |
| 0.15 | 1.90000 | 2.09418 | 1.90000 | 1.90751 |
| 0.25 | 1.90000 | 2.09846 | 1.90000 | 1.90304 |
| 0.50 | 1.90000 | 2.06147 | 1.90000 | 1.87327 |
| 0.75 | 1.90000 | 1.97518 | 1.90000 | 1.81742 |
| 0.90 | 1.90000 | 1.87659 | 1.90000 | 1.75290 |
| 0.95 | 1.90000 | 1.81583 | 1.90000 | 1.71154 |
| 0.99 | 1.90000 | 1.70804 | 1.90000 | 1.63444 |

Πίνακας 2.9: Οι τιμές των δεικτών $d_{0.5}(X; x_p)$ (στήλες 2 και 3) και $v_{0.5}(X; x_p)$ (στήλες 4 και 5) των κατανομών Pareto και Λογαριθμοκανονική (LN) στο Παράδειγμα 2.5, για διάφορες τιμές του p .

2.5 Τελικές παρατηρήσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε τα αποτελέσματα του πρώτου δημοσιευμένου μας άρθρου, στο διεθνές περιοδικό *Insurance: Mathematics and Economics* 98, 147-152 με τίτλο «Sensitivity analysis and tail variability for Wang's actuarial index». Πιο συγκεκριμένα, η εντροπία χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση τους πάχους της ουράς διάφορων γνωστών κατανομών απώλειας. Το εντροπικό μέτρο δημιουργήθηκε κάνοντας μία ανάλυση ευαισθησίας (πραγματοποιώντας μικρές διαταραχές) στο αναλογικό μοντέλο κινδύνων. Επεκτείναμε τον δείκτη υπολογισμού μέτρησης δεξιάς ουράς του Wang (1998), και τον συγκρίναμε με τον εντροπικό μας δείκτη. Στη συνέχεια, δεσμεύσαμε τους δύο δείκτες για τιμές μεγαλύτερες από την αξία σε κίνδυνο. Αποδείξαμε ότι το νέο μέτρο μπορεί να εκφραστεί με βάση την προσδοκία του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Διάφορα αποτελέσματα χαρακτηρισμού των κατανομών, ιδιότητες, συμπεριλαμβανομένων των σχέσεων μεταξύ τους όπως επίσης και αποτελέσματα διάταξης τα οποία μελετήθηκαν λεπτομερώς. Τέλος, διερευνήσαμε τα αποτελέσματά μας για διάφορες κατανομές απώλειας και τα αναπαραστήσαμε σε γραφικές παραστάσεις επιβεβαιώνοντας ότι οι κατανομές απώλειας κατατάσσονται από την πιο βαριά στην πιο ελαφριά ουρά.

Κεφάλαιο 3

Μια οικογένεια μέτρων μεταβλητότητας που βασίζεται στην αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία και σε στρεβλές συναρτήσεις

3.1 Εισαγωγή

Τα μέτρα μεταβλητότητας αποτελούν σημαντικά εργαλεία για την κατασκευή ασφαλίστρου, ενώ ταυτόχρονα συμβάλλουν σημαντικά στην αποστροφή του κινδύνου. Προτείνουμε μια οικογένεια μέτρων κινδύνου που βασίζονται σε μια στρεβλή σταθμισμένη αθροιστική υπολειμματική εντροπία, η οποία δημιουργήθηκε πραγματοποιώντας μικρές διαταραχές στο αναλογικό μοντέλο κινδύνων. Για την οικογένεια αυτή, παραθέτουμε ιδιότητες, συνδέσεις με άλλα μέτρα, φράγματα, αναπαράσταση συνδιακύμανσης και μερικές χρήσιμες ερμηνείες. Παράλληλα, μελετάμε μια εφαρμογή με ασφαλίστρα που δημιουργούνται από τη γενικευμένη μη πλήρη Βήτα με θετικές παραμέτρους και δίνουμε μια εμπειρική εκτίμηση. Παρουσιάζουμε συνακολούθως αριθμητικά αποτελέσματα που βασίζονται σε κατανομές απώλειας και γραφικές απεικονίσεις.

Τα μέτρα κινδύνου που συνδέονται με τη στρεβλή θεωρία προσδοκιών αποτελούν σημαντική κατηγορία και έχουν καθοριστικό ρόλο στην κατασκευή αρχών ασφαλίστρου και αποστροφής κινδύνου, βλέπε Denuit et al. (2005), Yaari (1987), Wang (1996, 2000), Wang et al. (1997), Wirch και Hardy (1999), Tsanakas (2004), Sordo (2008). Επιπλέον, η αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία (CRE) είναι μία σημαντική ποσότητα για τη μελέτη πινάκων ζωής, του κόστους των προσόδων και των αρχών ασφαλίστρων, βλέπε Leser (1955), Haberman et al. (2011), Sordo et al. (2016),

Psarrakos and Sordo (2019), Hu and Chen (2020), Psarrakos και Vliora (2021) και Sun et al. (2022).

Εισάγουμε και μελετάμε μια οικογένεια μέτρων μεταβλητότητας που βασίζονται στη στρεβλή συνάρτηση και τη CRE, συμβολίζουμε με h-CRE (όπου h είναι η στρεβλή συνάρτηση). Η οικογένεια h-CRE έχει τα ακόλουθα πλεονεκτήματα: (i) περιλαμβάνει μία ή περισσότερες παραμέτρους στη στρεβλή συνάρτηση, η οποία βοηθάει τον αναλογιστή να ελέγχει τον βαθμό αποστροφής του κινδύνου και (ii) δίνει διαφορετικά βάρη σε διαφορετικά μέρη της κατανομής των δεδομένων κατά τη μέτρηση της μεταβλητότητας, ενώ τα τρέχοντα μέτρα μεταβλητότητας (π.χ. *CRE*) εφαρμόζονται σε ομοιόμορφα βάρη. Η προτεινόμενη οικογένεια h-CRE προέρχεται από την ανάλυση διαταραχών σε μέτρα κινδύνου, τα οποία βασίζονται στη θεωρία των στρεβλών προσδοκιών. Αξίζει να αναφερθεί ότι τα μέτρα κινδύνου που βασίζονται στη θεωρία των στρεβλών προσδοκιών καθώς και στην οικογένεια μέτρων μεταβλητότητας h-CRE περιλαμβάνονται σε μια μεγάλη οικογένεια μέτρων κινδύνου που εισήγαγαν οι Jones και Zitikis (2007). Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό αναλύουμε το μέτρο h-CRE στην περίπτωση που η συνάρτηση h είναι μια μη πλήρης στρεβλή Βήτα (περισσότερες λεπτομέρειες δίνονται στην εργασία των Wirch και Hardy (2001)) δίνοντας, συνάμα, μια εφαρμογή στα ασφάλιστρα.

Ειδικότερα, με κίνητρο την εργασία των Sordo et al. (2016), μελετάμε μια οικογένεια ασφαλιστρών που βασίζονται σε μείξεις αξίας σε κίνδυνο ουράς (TVaRs), όπου τα βάρη στη μείξη αντικατοπτρίζουν τη στάση του ασφαλιστή απέναντι στον κίνδυνο. Η προσέγγισή μας επικεντρώνεται σε κατανομές που δημιουργούνται από τη συνάρτηση Βήτα (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε τις εργασίες των Jones (2004), Zografos και Balakrishnan (2009) και Eeckhoudt και Laeven (2022)) και παρέχουν μεγάλη ευελιξία στη μοντελοποίηση δεδομένων στην πράξη.

Έστω μια τυχαία μεταβλητή X που είναι απολύτως συνεχής, μη αρνητική με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$, αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x)$, συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(x)$ και η μέση τιμή $0 < \mathbb{E}(X) < \infty$. Έστω επίσης $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ είναι μια στρεβλή συνάρτηση και συγκεκριμένα, h είναι μια αύξουσα συνάρτηση με $h(0) = 0$ και $h(1) = 1$. Επίσης θεωρούμε ότι η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Τότε, το στρεβλό μέτρο κινδύνων $\Pi_h(X) = \int_0^\infty h(\bar{F}(x)) dx$, βλέπε Κεφάλαιο 1 τη σχέση (1.17).

Μια μεγάλη οικογένεια μέτρων κινδύνου μπορεί να εκφραστεί ως (βλέπε Jones και Zitikis (2003), Jones και Zitikis (2007) και Furman et al. (2017)),

$$\mathcal{R}(X) = \int_0^1 F^{-1}(u) d\phi(u), \quad (3.1)$$

όπου $F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}$, η $u \in (0, 1)$ είναι η αξία σε κίνδυνο και $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για $u \in (0, 1)$ είναι μια συνάρτηση που επιλέγεται από τον αναλογιστή ανάλογα με το υπό εξέταση πρόβλημα. Το ολοκλήρωμα στο δεξί μέρος της σχέσης (3.1) σχετίζεται με το ολοκλήρωμα Choquet

(βλ. Choquet (1954)). Συγκεκριμένα, ένα στρεβλό μέτρο κινδύνου $\Pi_h(X)$ προκύπτει από τη σχέση (3.1), επιλέγοντας $d\phi(u) = h'(1-u)du \geq 0$.

Ένα από τα πιο γνωστά παραδείγματα στρεβλής συνάρτησης είναι ο μετασχηματισμός αναλογικού κινδύνου (PHT), που ορίζεται από τη συνάρτηση $h_r(u) = u^r$, $0 < u < 1$, όπου $r > 0$ είναι η «στρεβλή» παράμετρος. Σε αυτή την περίπτωση, το στρεβλό μέτρο κινδύνου, που συμβολίζεται με $\Pi_r(X) = \int_0^\infty (\bar{F}(x))^r dx$ αντικαθιστώντας τη στρεβλή συνάρτηση στη σχέση (1.17). Είναι προφανές ότι η συνάρτηση $h_r(u)$ είναι (i) κοίλη για $0 < r < 1$, (ii) κυρτή για $r > 1$ και (iii) γραμμική για $r = 1$ (ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο). Για περισσότερες λεπτομέρειες, βλέπε Κεφάλαιο 2.2.

Πρόσφατα, οι Hu και Chen (2020) εισήγαγαν και μελέτησαν μία οικογένεια συνεπών μέτρων μεταβλητότητας με συμμοτονική προσθετικότητα, η οποία βασίζεται στη μετρική L_r μιας πιθανότητας κατανομής και της στρεβλής της, βλέπε επίσης Lopez-Diaz et al. (2012) και Yang et al. (2014). Η L_r αναφέρεται στην κατηγορία μετρικών L_p , όπου r είναι ένας ακέραιος αριθμός που αντιπροσωπεύει την τάξη της μετρικής. Συνήθως οι μετρικές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της απόστασης μεταξύ δύο σημείων σε έναν χώρο. Μια ειδική περίπτωση σε μια τέτοια οικογένεια ενός κινδύνου X είναι η εντροπία

$$\mathcal{E}(X) = - \int_0^\infty \bar{F}(x) \ln \bar{F}(x) dx,$$

(βλ. Κεφάλαιο 1, υποενότητα 1.5). Είναι ένα μέτρο μεταβλητότητας (Sordo et al. (2016)) και δίνεται από την ακόλουθη ανάλυση διαταραχής. Για μια παράμετρο $\delta \rightarrow 0$, θεωρούμε το αναλογικό μοντέλο κινδύνων $\lambda_\delta(x) = (1 + \delta)\lambda(x)$ το οποίο γράφεται ισοδύναμα $\bar{F}_\delta(x) = (\bar{F}(x))^{1+\delta}$. Προτείνουμε και μελετάμε την οικογένεια μέτρου μεταβλητότητας h-CRE που δίνεται από την επόμενη σχέση

$$\mathcal{E}_h(X) = - \int_0^\infty h'(\bar{F}(x)) \bar{F}(x) \ln \bar{F}(x) dx. \quad (3.2)$$

Η κατασκευή της οικογένειας ακολουθεί μία ανάλυση ευαισθησίας σε μία στρεβλή ουρά $\bar{F}_h(x) = h(\bar{F}(x))$. Συγκεκριμένα, ορίζεται $\Pi_h(X) = \int_0^\infty h(\bar{F}(x)) dx$, τότε χρησιμοποιώντας την ανάλυση διαταραχής για $\delta \rightarrow 0$, προκύπτει ότι

$$\Pi_{h,\delta}(X) - \Pi_h(X) \approx -\mathcal{E}_h(X) \delta. \quad (3.3)$$

Η συνάρτηση $\mathcal{E}_h(X)$ είναι μια σταθμισμένη υπολειπόμενη εντροπία με στάθμιση $h'(\bar{F}(x))$, όπου $\mathbb{E}(h'(\bar{F}(x))) = 1$. Για $h(u) = u$, $0 \leq u \leq 1$, παίρνουμε CRE του κινδύνου X . Η συνάρτηση $h'(\bar{F}(x))$ μας δίνει πλεονεκτήματα, τα οποία περιγράψαμε στην αρχή του κεφαλαίου αυτού. Υπενθυμίζουμε ότι η στρεβλή συνάρτηση h έχει μία ή περισσότερες παραμέτρους που ελέγχουν τον βαθμό αποστροφής του κινδύνου και δίνει διαφορετικά βάρη σε διαφορετικά σημεία της κατανομής δεδομένων κατά τη μέτρηση της μεταβλητότητας. Εστιάζοντας στη στρεβλή Βήτα συνάρτηση, μελετάμε

μια οικογένεια αρχής των ασφαλιστρών. Επιπλέον δίνουμε αναλυτικές εκφράσεις για ορισμένες κατανομές ζημιών και παρέχουμε συνδέσεις μεταξύ των $\mathcal{E}_h(X)$ και $\Pi_h(X)$. Με κίνητρο τις εργασίες του Wang (1998) και των Jones και Zitikis (2003), διερευνούμε πώς οι τιμές των $\mathcal{E}_h(X)$ και $\Pi_h(X)$ επηρεάζονται από την ουρά της κατανομής απώλειας και παρέχουμε μια εμπειρική εκτίμηση για τη h-CRE.

Στην Παράγραφο 3.2 που ακολουθεί παρουσιάζουμε ορισμένες ιδιότητες της $\mathcal{E}_h(X)$. Δίνουμε σχέσεις με άλλα μέτρα, μία αναπαράσταση η οποία εφαρμόζεται στα γενικευμένα σταθμισμένα ασφαλιστρα. Επιπρόσθετα, παρέχουμε μία ερμηνεία χρησιμοποιώντας την έννοια του μετασχηματισμού αποκατάστασης (relevation transform). Δίνουμε κάποια φράγματα για την $\mathcal{E}_h(X)$ κάτω από την υπόθεση ότι η κατανομή του κινδύνου X ανήκει σε μία κατανομή γήρανσης, σε σύγκριση επίσης με το στρεβλό μέτρο κινδύνου $\Pi_h(X)$. Χρησιμοποιώντας τη στρεβλή συνάρτηση Βήτα, στην Παράγραφο 3.3, παρέχουμε ορισμένες σαφείς εκφράσεις και αριθμητικά παραδείγματα υπολογισμού των ασφαλιστρών $\mathbb{E}_h(X)$ και $\Pi_h(X)$ για ορισμένες κατανομές απώλειας. Επιπλέον, στην Παράγραφο 3.4, παίρνουμε μια εμπειρική εκτίμηση της μη πλήρους στρεβλής Βήτα που βασίζεται στην υπολειπόμενη αθροιστική εντροπία (CRE). Τέλος, στην Παράγραφο 3.5 δίνουμε τις συμπερασματικές παρατηρήσεις.

3.2 Κύρια αποτελέσματα

Σε αυτή την ενότητα μελετάμε ορισμένες ιδιότητες για την οικογένεια h-CRE, αναπαραστάσεις, σχέσεις με άλλα μέτρα, τη σύνδεσή της με τον μετασχηματισμό αποκατάστασης, μια ταυτότητα συνδιακύμανσης τύπου Stein και, τέλος, διερευνούμε ορισμένα φράγματα με τη βοήθεια κατανομών γήρανσης.

3.2.1 Ιδιότητες

Στην ακόλουθη πρόταση, παραθέτουμε τις ιδιότητες αντικειμενικότητας, σταθερότητας, προσθετικότητας ως προς μια σταθερά και θετικής ομοιογένειας (βλέπε Υποενότητα 1.7.1).

Πρόταση 3.1. Έστω μία τυχαία μεταβλητή X . Τότε, η $\mathcal{E}_h(X)$ ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) Αντικειμενικότητα: Αν $X \stackrel{d}{=} Y$, τότε $\mathcal{E}_h(X) = \mathcal{E}_h(Y)$.
- (ii) Σταθερότητα: $\mathcal{E}_h(c) = 0$ για οποιαδήποτε εκφυλισμένη τυχαία μεταβλητή στο c .
- (iii) Προσθετικότητα ως προς σταθερά: $\mathcal{E}_h(X + c) = \mathcal{E}_h(X)$ για κάθε σταθερά c .
- (iv) Θετική Ομοιογένεια: $\mathcal{E}_h(cX) = c\mathcal{E}_h(X)$ για όλα τα $c \geq 0$.

Απόδειξη. Τα μέρη (i) και (ii) προκύπτουν άμεσα, οπότε παραλείπουμε την απόδειξη. Επιπλέον, σημειώνοντας ότι $\mathbb{P}(X + c \leq x) = F(x - c)$, $x \geq c$, και $\mathbb{P}(cX \leq x) = F(x/c)$, $x \geq 0$, προκύπτουν

τα αποτελέσματα των μερών (iii) και (iv). □

Οι ιδιότητες (i) – (iv) που χρησιμοποιούνται στην Πρόταση 3.1 υποδεικνύουν ότι η συνάρτηση $\mathcal{E}_h(X)$ είναι ένα μέτρο μεταβλητότητας. Μια χρήσιμη ιδιότητα των μέτρων μεταβλητότητας είναι η διάταξη διασποράς (dispersive order). Έστω X και Y είναι δύο τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής, F και G , αντίστοιχα. Θυμίζουμε ότι η X είναι μικρότερη από τη Y στη διάταξη διασποράς, συμβολίζουμε $X \leq_{disp} Y$ (βλέπε Ορισμός 1.13), αν

$$G^{-1}(p) - F^{-1}(p), \quad \text{είναι αύξουσα στο διάστημα } p \in (0, 1),$$

όπου F^{-1} και G^{-1} είναι αντίστροφες συναρτήσεις των F και G , αντίστοιχα, βλέπε Bickel και Lehmann (1979) και Shaked και Shanthikumar (2007). Στο ακόλουθο αποτέλεσμα, δείχνουμε ότι οι περισσότερες τυχαίες μεταβλητές διασποράς παράγουν μεγαλύτερη h-CRE.

Πρόταση 3.2. Έστω X και Y είναι δύο κίνδυνοι με συνάρτηση κατανομής $F(x)$ και $G(x)$, αντίστοιχα. Έαν $X \leq_{disp} Y$, τότε $\mathcal{E}_h(X) \leq \mathcal{E}_h(Y)$.

Απόδειξη. Με αλλαγή μεταβλητής $u = F(x)$ στη σχέση (3.2), προκύπτει ότι

$$\mathcal{E}_h(X) = - \int_0^1 h'(1-u)(1-u) \ln(1-u) dF^{-1}(u). \quad (3.4)$$

Δεδομένου ότι, από υπόθεση, $X \leq_{disp} Y$, έχουμε

$$d(G^{-1}(u) - F^{-1}(u)) \geq 0,$$

και συνεπάγεται ότι

$$\mathcal{E}_h(Y) - \mathcal{E}_h(X) = - \int_0^1 h'(1-u)(1-u) \ln(1-u) d(G^{-1}(u) - F^{-1}(u)) \geq 0,$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Στο επόμενο θεώρημα δίνουμε επαρκείς συνθήκες έτσι ώστε το $\mathcal{E}_h(X)$ να ικανοποιεί τις ιδιότητες της υποπροσθετικότητας και της συμμονοτονικής προσθετικότητας.

Θεώρημα 3.1. Έστω οι τυχαίες μεταβλητές X και Y με συναρτήσεις επιβίωσης $\bar{F}(x)$ και $\bar{G}(x)$, αντίστοιχα. Έστω επίσης η συνάρτηση

$$\phi(u) = h'(1-u)(1-u) \ln(1-u), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad (3.5)$$

όπου $\phi(0) = \phi(1) = 0$. Αν η $\phi(u)$ είναι μια κυρτή συνάρτηση στο $[0,1]$, τότε το $\mathcal{E}_h(X)$ ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

i) Υποπροσθετικότητα: $\mathcal{E}_h(X + Y) \leq \mathcal{E}_h(X) + \mathcal{E}_h(Y)$ για όλους τους κινδύνους X, Y .

ii) Συμμοτοτική προσθετικότητα: $\mathcal{E}_h(X + Y) = \mathcal{E}_h(X) + \mathcal{E}_h(Y)$ αν X και Y είναι συμμοτοτικοί, δηλαδή υπάρχουν δύο αύξουσες συναρτήσεις g_1 και g_2 τέτοιες ώστε $X = g_1(Z)$ και $Y = g_2(Z)$ σχεδόν βέβαια.

Απόδειξη. Από τη σχέση (3.4) ακολουθεί ότι

$$\mathcal{E}_h(X) = \int_0^1 F^{-1}(u) d\phi(u), \quad (3.6)$$

όπου η $\phi(u)$ δίνεται από τη σχέση (3.5). Το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 3.1 των Furman et al. (2017). \square

Παρατήρηση 3.1. (i) Σύμφωνα με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1, η συνάρτηση $\mathcal{E}_h(X)$ είναι ένα συνεπές μέτρο μεταβλητότητας (βλ. Ορισμό 1.15) με συμμοτοτική προσθετικότητα, βλ. Furman et al. (2017), Hu και Chen (2020).

(ii) Για $h(u) = u$, $0 \leq u \leq 1$, η συνάρτηση $\phi(u) = (1 - u) \ln(1 - u)$ είναι κυρτή στο διάστημα $[0, 1]$, αυτή η περίπτωση συμπίπτει με τα αποτελέσματα που αναφέρονται στους Hu και Chen (2020). Ένα άλλο παράδειγμα είναι να επιλέξουμε τη συνάρτηση $h(u) = \sqrt{u}$, $0 \leq u \leq 1$. Τότε $\phi(u) = \frac{\sqrt{1-u}}{2} \ln(1 - u)$ είναι κυρτή στο διάστημα $[0, 1]$.

3.2.2 Αναπαραστάσεις και σχέσεις με άλλα μέτρα

Είναι αξιοσημείωτο ότι διάφορα μέτρα κινδύνου που βασίζονται σε συναρτήσεις επιβίωσης μπορούν να εκφραστούν ως η προσδοκία μιας δεδομένης συνάρτησης της τυχαίας μεταβλητής. Για παράδειγμα, η αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία εκφράζεται ως η προσδοκία του υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Από αυτή την άποψη, δίνουμε ένα παρόμοιο αποτέλεσμα για το h-CRE, εκφράζοντάς την ως την προσδοκία μιας σταθμισμένης μέσης υπολειπόμενης ζωής που αναφέρεται στη συνέχεια. Ας εξετάσουμε την τυχαία μεταβλητή ως υπολειπόμενη διάρκεια ζωής $X - x | X > x$, με συνάρτηση επιβίωσης

$$\bar{F}_t(x) = \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}, \quad x, t \geq 0.$$

Τότε, ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής ορίζεται ως

$$m(x) = \mathbb{E}(X - x | X > x) = \frac{1}{\bar{F}(x)} \int_x^\infty \bar{F}(y) dy, \quad x \geq 0.$$

Για μία στρεβλή συνάρτηση h , επίσης θεωρούμε μία συνάρτηση

$$\psi_h(x) = \int_0^x h'(\bar{F}(y)) dy, \quad x \geq 0. \quad (3.7)$$

Για $x = F^{-1}(u)$, $u \in (0, 1)$, η συνάρτηση $\psi_h(F^{-1}(u))$ είναι ένας γενικευμένος μετασχηματισμός (total time on test ή gttt). Εάν $\int_{-\infty}^{F^{-1}(p)} \bar{F}(x) dx \leq \int_{-\infty}^{F^{-1}(p)} \bar{G}(x) dx$, $p \in (0, 1)$ τότε $X \leq_{ttt} Y$,

βλέπε την εργασία Li και Shaked (2007) για περισσότερες λεπτομέρειες και εφαρμογές στην αναλογιστική επιστήμη και στην ασφάλιση. Επίσης θεωρούμε μία γενίκευση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής

$$m_h(x) = \mathbb{E}(\psi_h(X) - \psi_h(x) | X > x) = \frac{1}{\bar{F}(x)} \int_x^\infty h'(\bar{F}(y)) \bar{F}(y) dy, \quad (3.8)$$

υπό την προϋπόθεση ότι

$$m_h(0) = \mathbb{E}(\psi_h(X)) = \int_0^\infty h'(\bar{F}(x)) \bar{F}(x) dx < \infty, \quad (3.9)$$

βλέπε Toomaj και Di Crescenzo (2020) για περισσότερες λεπτομέρειες. Σημειώνουμε ότι η δεύτερη ισότητα στη σχέση (3.8) προκύπτει εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Στο ακόλουθο αποτέλεσμα αποδεικνύουμε ότι η $\mathcal{E}_h(X)$ ισούται με την προσδοκία του $\mathbb{E}(m_h(X))$. Θυμίζουμε ότι $-\ln \bar{F}(x) = \int_0^x \lambda(y) dy$, $x \geq 0$, όπου $\lambda(x) = f(x)/\bar{F}(x)$ είναι η ένταση κινδύνου.

Θεώρημα 3.2. Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με $\mathbb{E}(m_h(X)) < \infty$. Τότε

$$\mathcal{E}_h(X) = \mathbb{E}(m_h(X)). \quad (3.10)$$

Απόδειξη. Από τη σχέση (3.3), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h(X) &= \int_0^\infty h'(\bar{F}(x)) \bar{F}(x) \int_0^x \lambda(y) dy dx \\ &= \int_0^\infty \frac{f(y)}{\bar{F}(y)} \int_y^\infty h'(\bar{F}(x)) \bar{F}(x) dx dy \\ &= \mathbb{E}(m_h(X)), \end{aligned}$$

και έτσι προκύπτει η σχέση (3.2). □

Στο επόμενο θεώρημα, παρέχουμε μια έκφραση για την $\mathcal{E}_h(X)$ χρησιμοποιώντας τη διαφορά διακυμάνσεων των τυχαίων μεταβλητών $\psi_h(X)$ και $m_h(X)$.

Θεώρημα 3.3. Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με διακύμανση $\mathbb{V}(X)$ και $\mathbb{E}((m_h(X))^2) < \infty$. Τότε

$$\mathcal{E}_h(X) = (\mathbb{V}(\psi_h(X)) - \mathbb{V}(m_h(X)))^{1/2} \quad (3.11)$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3 των Toomaj and Di Crescenzo (2020), έχουμε

$$\mathbb{V}(\psi_h(X)) = \mathbb{E}((m_h(X))^2). \quad (3.12)$$

Στη συνέχεια, από τη γνωστή ταυτότητα

$$\mathbb{V}(m_h(X)) = \mathbb{E}((m_h(X))^2) - (\mathbb{E}(m_h(X)))^2$$

και τις σχέσεις (3.10) και (3.12), προκύπτει το αποτέλεσμα του θεωρήματος. □

Η έκφραση που δίνεται στη σχέση (3.11) μας επιτρέπει την κατασκευή ενός άνω φράγματος για την $\mathcal{E}_h(X)$.

Πόρισμα 3.1. Έστω X είναι μία τυχαία μεταβλητή με $\mathbb{E}((m_h(X))^2) < \infty$. Τότε:

$$\mathcal{E}_h(X) \leq (\mathbb{V}(\psi_h(X)))^{1/2}.$$

Στο παρακάτω θεώρημα δίνουμε περαιτέρω φράγματα για τη h-CRE.

Θεώρημα 3.4. Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με CRE $\mathcal{E}(X)$ και η h-CRE $\mathcal{E}_h(X)$. Τότε ισχύει ότι:

(i) Αν η στρεβλή συνάρτηση $h(x)$ είναι αύξουσα και κοίλη, τότε $\mathcal{E}_h(X) \geq \psi_h(\mathcal{E}(X))$.

(ii) Αν η στρεβλή συνάρτηση $h(x)$ είναι αύξουσα και κυρτή, τότε $\mathcal{E}_h(X) \leq \psi_h(\mathcal{E}(X))$.

Απόδειξη. (i) Έστω η $h(x)$ είναι μια αύξουσα και κοίλη συνάρτηση. Τότε, από τη σχέση (3.7), προκύπτει ότι $\psi_h(x)$ είναι μια αύξουσα και κυρτή συνάρτηση στο διάστημα $[0, \infty)$, με $\psi_h(0) = 0$. Χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα όπως στην απόδειξη του Λήμματος 2 των Toomaj και Di Crescenzo (2020), έχουμε $m_h(x) \geq \psi_h(m(x))$. Έτσι, ανακαλώντας τη σχέση (3.10), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h(X) &= \int_0^\infty m_h(x) f(x) dx \\ &\geq \int_0^\infty \psi_h(m(x)) f(x) dx \\ &\geq \psi_h\left(\int_0^\infty m(x) f(x) dx\right) = \psi_h(\mathcal{E}(X)), \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα Jensen, αφού ψ_h είναι μία κυρτή συνάρτηση.

(ii) Αν $h(x)$ είναι μια αύξουσα και κυρτή συνάρτηση, η απόδειξη είναι παρόμοια αντιστρέφοντας τις ανισότητες. □

Από το Θεώρημα 10 των Rao et al. (2004), ένα γενικό άνω φράγμα της CRE είναι

$$\mathcal{E}(X) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{2\mathbb{E}(X)},$$

υπό την προϋπόθεση ότι $\mathbb{E}(X^2) < \infty$. Στη συνέχεια, επεκτείνουμε αυτό το όριο για τη h-CRE.

Θεώρημα 3.5. Έστω X είναι μία τυχαία μεταβλητή με $\mathbb{E}((\psi_h(X))^2) < \infty$. Τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{E}_h(X) \leq \frac{\mathbb{E}((\psi_h(X))^2)}{2\mathbb{E}(\psi_h(X))}.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η $\psi_h(X)$ έχει συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}_{\psi_h}(x) = P(\psi_h(X) > x)$ τέτοια ώστε $\mathbb{E}((\psi_h(X))^2) < \infty$. Από την ανισότητα λογαριθμικού αθροίσματος (log-sum inequality), για

ένα θετικό πραγματικό αριθμό λ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \bar{F}_{\psi_h}(x) \ln \frac{\bar{F}_{\psi_h}(x)}{e^{-x/\lambda}} dx &\geq \int_0^\infty \bar{F}_{\psi_h}(x) dx \ln \frac{\int_0^\infty \bar{F}_{\psi_h}(x) dx}{\int_0^\infty e^{-x/\lambda} dx} \\ &= \mathbb{E}(\psi_h(X)) \ln (\mathbb{E}(\psi_h(X))/\lambda). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Εφόσον η $\psi_h(x)$ είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση ως προς το x , τότε θέτοντας $u = \psi_h^{-1}(x)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h(X) &= - \int_0^\infty \bar{F}_{\psi_h}(x) \ln \bar{F}_{\psi_h}(x) dx = - \int_0^\infty \bar{F}(\psi_h^{-1}(x)) \ln \bar{F}(\psi_h^{-1}(x)) dx, \\ &= - \int_0^\infty h'(\bar{F}(u)) \bar{F}(u) \ln \bar{F}(u) du. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Σημειώνοντας ότι

$$\int_0^\infty x \bar{F}_{\psi_h}(x) dx = \mathbb{E}((\psi_h(X))^2)/2,$$

επεκτείνουμε την αριστερή πλευρά της σχέσης (3.13) και αντικαθιστώντας τη σχέση (3.14) παίρνουμε

$$\mathcal{E}_h(X) \leq \mathbb{E}((\psi_h(X))^2)/(2\lambda) - \mathbb{E}(\psi_h(X)) \ln (\mathbb{E}(\psi_h(X))/\lambda). \quad (3.15)$$

Το ελάχιστο της δεξιάς πλευράς της σχέσης (3.15) επιτυγχάνεται όταν $\lambda = \mathbb{E}((\psi_h(X))^2)/(2\mathbb{E}(\psi_h(X)))$.

Αντικαθιστώντας την τιμή του λ στη σχέση (3.15) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h(X) &\leq \mathbb{E}(\psi_h(X)) - \mathbb{E}(\psi_h(X)) \ln \frac{2(\mathbb{E}(\psi_h(X)))^2}{\mathbb{E}((\psi_h(X))^2)} \\ &\leq \mathbb{E}(\psi_h(X)) + \mathbb{E}(\psi_h(X)) \left(\frac{\mathbb{E}((\psi_h(X))^2)}{2(\mathbb{E}(\psi_h(X)))^2} - 1 \right) \\ &= \frac{\mathbb{E}((\psi_h(X))^2)}{2\mathbb{E}(\psi_h(X))}, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από τη ανίσωση $-\ln x \leq 1/x - 1$. Έτσι, προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα. \square

3.2.3 Μετασχηματισμός αποκατάστασης και ταυτότητα συνδιακύμανσης τύπου Stein

Στο κεφάλαιο αυτό παρέχουμε μια ερμηνεία για τη $\mathcal{E}_h(X)$ χρησιμοποιώντας την έννοια του μετασχηματισμού αποκατάστασης (relevation transform), βλέπε Krakowski (1973), Baxter (1982), Karpodistria και Psarrakos (2012), και Psarrakos και Navarro (2013). Ένα στοιχείο (ένας άνθρωπος, μία μηχανή) από μια ομάδα με συνάρτηση επιβίωσης \bar{F} αντικαθιστάται στον χρόνο της αποτυχίας του, η ηλικία του θα είναι x , από μία άλλη συνάρτηση επιβίωσης \bar{G} με την ίδια ηλικία. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται αποκατάσταση (relevation). Η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F} \# \bar{G}$ ακολουθώντας τον μετασχηματισμό αποκατάστασης δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$\bar{F} \# \bar{G}(x) = \bar{F}(x) + \int_0^x f(t) \frac{\bar{G}(x)}{\bar{G}(t)} dt.$$

Έδω η $f(x)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της X και το σύμβολο $\#$ αντιπροσωπεύει τον μετασχηματισμό αποκατάστασης των F και G . Συγκεκριμένα, αν $F = G$ και $\bar{F}_2 = \bar{F} \# \bar{F}(x)$ δηλώνει τη συνάρτηση επιβίωσης του χρόνου στη δεύτερη αποτυχία X_2 , τότε

$$\bar{F}_2(x) = \bar{F} \# \bar{F}(x) = \bar{F}(x)(1 + \Lambda(x)), \quad x \geq 0,$$

όπου $\Lambda(x) = -\ln \bar{F}(x)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κινδύνου. Σε αυτή την περίπτωση, ανακαλώντας τη σχέση (3.7), η h-CRE μπορεί να γραφτεί ως

$$\mathcal{E}_h(X) = \mathbb{E}(\psi_h(X_2) - \psi_h(X)) = - \int_0^\infty h'(\bar{F}(x)) \bar{F}(x) \ln \bar{F}(x) dx.$$

Στο επόμενο θεώρημα, δίνουμε μια έκφραση για την h-CRE κάνοντας χρήση της συνδιακύμανσης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών $\psi_h(X)$ και $\Lambda(X)$.

Θεώρημα 3.6. Για τον κινδυνό X με $0 < \mathcal{E}(X) < \infty$, έχουμε

$$\mathcal{E}_h(X) = \text{Cov}(\psi_h(X), \Lambda(X)) = \mathbb{E}(h'(\bar{F}(\tilde{X}))) \mathcal{E}(X), \quad (3.16)$$

όπου \tilde{X} είναι μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$\tilde{f}(x) = \frac{\bar{F}(x) \Lambda(x)}{\mathcal{E}(X)} = \frac{\bar{F}_2(x) - \bar{F}(x)}{\mathcal{E}(X)}, \quad x > 0.$$

Απόδειξη. Επειδή $\mathbb{E}(\Lambda(X)) = 1$ (βλέπε Baxter (1982)), έχουμε

$$\text{Cov}(\psi_h(X), \Lambda(X)) = \mathbb{E}(\psi_h(X) \Lambda(X)) - \mathbb{E}(\psi_h(X)).$$

Θυμίζουμε ότι $\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(u) du$, χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες και το Θεώρημα 3.2, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\psi_h(X) \Lambda(X)) &= \int_0^\infty \psi_h(x) \Lambda(x) f(x) dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^x \lambda(u) \psi_h(x) f(x) du dx \\ &= \int_0^\infty \int_u^\infty \lambda(u) \psi_h(x) f(x) dx du \\ &= \mathbb{E}(\psi_h(X)) + \int_0^\infty \lambda(u) \int_u^\infty h'(\bar{F}(x)) \bar{F}(x) dx du \\ &= \mathbb{E}(\psi_h(X)) + \mathbb{E}(m_h(X)) \\ &= \mathbb{E}(\psi_h(X)) + \mathcal{E}_h(X) \end{aligned}$$

και η απόδειξη της πρώτης ισότητας στη σχέση (3.16) ολοκληρώνεται. Επιπλέον, έχουμε

$$\mathbb{E}(h'(\bar{F}(\tilde{X}))) = \int_0^\infty h'(\bar{F}(x)) \tilde{f}(x) dx = \frac{\int_0^\infty h'(\bar{F}(x)) \bar{F}(x) \Lambda(x) dx}{\mathcal{E}(X)} = \frac{\mathcal{E}_h(X)}{\mathcal{E}(X)},$$

που συμπληρώνει την απόδειξη. □

Παράδειγμα 3.1. Για $a > 0$, έστω $h(x) = x^a$, $0 \leq x \leq 1$. Ας υποθέσουμε επίσης ότι $X \sim \text{Exp}(\xi)$, $\xi > 0$, με συνάρτηση επιβίωσης

$$\bar{F}(x) = e^{-\xi x}, \quad x \geq 0.$$

Τότε, έχουμε $X_2 \sim \text{Ga}(2, \xi)$, με συνάρτηση επιβίωσης

$$\bar{F}_2(x) = e^{-\xi x}(1 + \xi x), \quad x \geq 0.$$

Επιπλέον, είναι $\mathcal{E}_h(X) = (a\xi)^{-1}$, $\mathcal{E}(X) = \xi^{-1}$ και

$$\mathbb{E}(g'(\bar{F}(\tilde{X}))) = a \mathbb{E}((\bar{F}(\tilde{X}))^{a-1}) = a \mathbb{E}(e^{-\xi(a-1)\tilde{X}}) = a \left(\frac{\xi}{\xi + \xi(a-1)} \right)^2 = \frac{1}{a},$$

και έτσι επαληθεύεται η σχέση (3.16).

Παρατήρηση 3.2. (i) Τα Θεωρήματα 3.2, 3.3 και 3.7 δίνουν τρεις εκφράσεις για την $\mathbb{E}_h(X)$. Αυτά τα αποτελέσματα μπορούν να εφαρμοστούν στις γενικευμένες αρχές σταθμισμένου ασφαλιστήριου που εισήγαγαν οι Furman και Zitikis (2008). Συγκεκριμένα, έστω $w(x)$ μια αύξουσα σταθμισμένη συνάρτηση με $\mathbb{E}(w(X)) = 1$, και η $v(x)$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση έτσι ώστε $\mathbb{E}(w(X)v(X)) \geq \mathbb{E}(X)$. Στη συνέχεια, η γενικευμένη αρχή σταθμισμένου ασφαλιστήριου μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι

$$T_{w,v}(X) = \mathbb{E}(w(X)v(X)) = \mathbb{E}(v(X)) + \text{Cov}(w(X), v(X)). \quad (3.17)$$

Έστω επίσης ότι η συνάρτηση h είναι μια κοίλη στρεβλή συνάρτηση που επιλέγεται από τον αναλογιστή έτσι ώστε $\mathbb{E}(w(X)\psi_h(X)) \geq \mathbb{E}(X)$. Υπενθυμίζοντας τη σχέση (3.8), ας θεωρήσουμε επίσης τη συνάρτηση $k(t) = \mathbb{E}(\psi_h(X)|X > t) = \psi_h(t) + m_h(t)$. Στη συνέχεια, παίρνοντας την πρώτη ροπή της τυχαίας μεταβλητής $k(X)$ με $T_{1,h}(X)$, και χρησιμοποιώντας τη σχέση (14), έχουμε

$$T_{1,h}(X) := \mathbb{E}(k(X)) = \mathbb{E}(\psi_h(X)) + \mathcal{E}_h(X). \quad (3.18)$$

Εφαρμόζοντας τα Θεωρήματα 2.4 και 2.7, δύο εναλλακτικές αναπαραστάσεις για την $T_{1,h}(X)$ είναι (αντίστοιχα) οι ακόλουθες:

$$T_{1,h}(X) = \mathbb{E}(\psi_h(X)) + (\mathbb{V}(\psi_h(X)) - \mathbb{V}(m_h(X)))^{1/2} \quad (3.19)$$

και

$$T_{1,h}(X) = \mathbb{E}(\psi_h(X)) + \text{Cov}(\psi_h(X), \Lambda(X)) = \mathbb{E}(\psi_h(X)) + \mathbb{E}(h'(\bar{F}(\tilde{X}))\mathcal{E}(X)). \quad (3.20)$$

Από τη σχέση (3.19) παρατηρούμε ότι $T_{1,h}(X) \leq \mathbb{E}(\psi_h(X)) + (\mathbb{V}(\psi_h(X)))^{1/2}$, όπου $\mathbb{E}(\psi_h(X)) + (\mathbb{V}(\psi_h(X)))^{1/2}$ είναι μια γενίκευση της αρχής της τυπικής απόκλισης. Επιπλέον, από τη σχέση

(3.20) είναι προφανές ότι είναι ένα γενικευμένο σταθμισμένο ασφάλιστρο της σχέσης (3.17), όπου $w(x) = \Lambda(x) = -\ln \bar{F}(x)$ και $v(x) = \psi_h(x)$. Η δεύτερη ισότητα στη σχέση (3.20) δείχνει ότι η επιβάρυνση $T_{1,h}(X) - \mathbb{E}(\psi_h(X))$ είναι ανάλογη της CRE με τον παράγοντα $\mathbb{E}(h'(\bar{F}(\tilde{X})))$. Εν όψει της σχέσης (3.18), είναι προφανές ότι για $h(x) = x$ παίρνουμε $T_{1,h}(X) = \mathbb{E}(X) + \mathcal{E}(X)$, βλέπε την εργασία των Sordo et al. (2016).

(ii) Για $h(x) = x$ από τη σχέση (3.16), έχουμε $\mathcal{E}(X) = \text{Cov}(X, \Lambda(X))$, ως εκ τούτου, από τη σχέση (3.16) ακολουθεί ότι $\text{Cov}(\psi_h(X), \Lambda(X)) = \mathbb{E}(h'(\bar{F}(\tilde{X})) \text{Cov}(X, \Lambda(X)))$. Αυτή είναι μια ταυτότητα συνδιακύμανσης τύπου Stein και είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τη μελέτη των σταθμισμένων ασφαλιστρών, βλέπε για περισσότερες λεπτομέρειες την εργασία του Psarrakos (2022) και παραπομπές σε αυτό.

3.2.4 Φράγματα για την $\mathcal{E}_h(X)$ κάτω από την υπόθεση κατανομών γήρανσης

Σε αυτή την υποενότητα παραθέτουμε κάποια φράγματα για την $\mathcal{E}_h(X)$, όταν η κατανομή του κινδύνου X ακολουθεί μια κατανομή που ικανοποιεί μια ιδιότητα γήρανσης (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε Κεφάλαιο 1, υποενότητα 1.4).

Το επόμενο θεώρημα δίνει ένα άνω (ή κάτω) φράγμα για το h-CRE των στατιστικών μοντέλων που ανήκουν στη διάταξη των κατανομών IFRA (DFRA).

Θεώρημα 3.7. Αν X είναι IFRA (DFRA), τότε $\mathcal{E}_h(X) \leq (\geq) \Pi_h(X)$.

Απόδειξη. Έστω X είναι IFRA (DFRA). Τότε, από τον Ορισμό ;; (ii), προκύπτει ότι

$$-\bar{F}(x) \ln \bar{F}(x) \leq (\geq) x f(x), \quad x > 0.$$

Σημειώνοντας ότι $h'(\bar{F}(x)) > 0$, $x > 0$, έχουμε

$$\mathcal{E}_h(X) \leq (\geq) \mathbb{E}(X h'(\bar{F}(X))),$$

και από τη σχέση (1.17) ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Από το παραπάνω θεώρημα μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι όταν το X είναι IFRA η εντροπία $\mathcal{E}_h(X)$ είναι μικρότερη ή ίση με το στρεβλό μέτρο κινδύνου $\Pi_h(X)$. Επίσης, όταν η τυχαία μεταβλητή X είναι DFRA, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η εντροπία $\mathcal{E}_h(X)$ είναι μεγαλύτερη ή ίση από το στρεβλό μέτρο κινδύνου $\Pi_h(X)$. Στη συνέχεια βελτιώνουμε τα φράγματα για τη $\mathcal{E}_h(X)$ στο Θεώρημα 3.7, προσθέτοντας την υπόθεση ότι η στρεβλή συνάρτηση h είναι κυρτή (ή κοίλη).

Θεώρημα 3.8. (i) Αν X είναι DFRA και h είναι κυρτή, τότε

$$\mathcal{E}_h(X) \geq \frac{(\Pi_h(X))^2}{\mathbb{E}(X)}.$$

(ii) Αν X είναι IFRA και h είναι κοίλη, τότε

$$\mathcal{E}_h(X) \leq \frac{(\Pi_h(X))^2}{\mathbb{E}(X)}.$$

Απόδειξη. (i) Εφόσον η εντροπία $\mathcal{E}_h(X) \geq 0$ και υπενθυμίζοντας ότι μια στρεβλή, κυρτή συνάρτηση συνεπάγεται $\Pi_h(X) \leq \mathbb{E}(X)$, έχουμε την ανίσωση

$$\frac{\mathcal{E}_h(X)}{\mathbb{E}(X)} \leq \frac{\mathcal{E}_h(X)}{\Pi_h(X)}.$$

Επιπλέον, από την υπόθεση ότι X είναι DFRA, από το Θεώρημα 3.7 παίρνουμε

$$\frac{\Pi_h(X)}{\mathbb{E}(X)} \leq \frac{\mathcal{E}_h(X)}{\mathbb{E}(X)}$$

και ακολουθεί το αποτέλεσμα.

(ii) Αντίστοιχα, η απόδειξη για την περίπτωση όπου η h είναι μία κοίλη συνάρτηση και η τυχαία μεταβλητή X είναι IFRA, ισχύει $\Pi_h(X) \geq \mathbb{E}(X)$. Παίρνουμε την παρακάτω ανισωτική σχέση

$$\frac{\mathcal{E}_h(X)}{\mathbb{E}(X)} \geq \frac{\mathcal{E}_h(X)}{\Pi_h(X)}.$$

Επιπλέον, από την υπόθεση ότι X είναι IFRA, το Θεώρημα 3.7 μας δίνει

$$\frac{\Pi_h(X)}{\mathbb{E}(X)} \geq \frac{\mathcal{E}_h(X)}{\mathbb{E}(X)}$$

και η απόδειξή μας ολοκληρώνεται. □

Κλείνουμε αυτή την υποενότητα δίνοντας περαιτέρω ορισμένα φράγματα για την εντροπία $\mathcal{E}_h(X)$.

Θεώρημα 3.9. (i) Αν X είναι NBU και η h είναι κυρτή, τότε

$$\mathcal{E}_h(X) \leq \min\{\mathbb{E}(\psi_h(X)), \mathbb{E}(X)\}.$$

(ii) Αν X είναι NWU και η h είναι κοίλη, τότε

$$\mathcal{E}_h(X) \geq \max\{\mathbb{E}(\psi_h(X)), \mathbb{E}(X)\}.$$

Απόδειξη. Απλώς αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα στο (i). Το αποτέλεσμα στο (ii) αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. Έστω X είναι NBU και η h να είναι κυρτή. Τότε, από τη σχέση (3.8), έχουμε

$$\begin{aligned} m_h(t) &= \int_0^\infty h'(\bar{F}(x+t)) \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)} dx \\ &\leq \int_0^\infty h'(\bar{F}(x+t)) \bar{F}(x) dx \\ &\leq \int_0^\infty h'(\bar{F}(t)) \bar{F}(x) dx = h'(\bar{F}(t)) \mathbb{E}(X), \end{aligned} \tag{3.21}$$

όπου η πρώτη ανισότητα προκύπτει σημειώνοντας ότι X είναι NBU. Από $\mathbb{E}(h'(\bar{F}(X))) = 1$, παίρνοντας την προσδοκία και από τις δύο πλευρές (3.21), παίρνουμε

$$\mathcal{E}_h(X) \leq \mathbb{E}(X).$$

Επιπλέον, όταν η $h'(x)$ είναι αύξουσα, έχουμε

$$\begin{aligned} m_h(t) &\leq \int_0^\infty h'(\bar{F}(x+t)) \bar{F}(x) dx \\ &\leq \int_0^\infty h'(\bar{F}(x)) \bar{F}(x) dx \\ &= \mathbb{E}(\psi_h(X)), \end{aligned} \quad (3.22)$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την (3.9). Από το Θεώρημα 3.2 και τις σχέσεις (3.21) και (3.22), προκύπτει το αποτέλεσμα. \square

Θεώρημα 3.10. (i) Αν X είναι NBUE και η h είναι κυρτή, τότε $\mathcal{E}_h(X) \leq \mathbb{E}(X)$.

(ii) Αν X είναι NWUE και h είναι κοίλη, τότε $\mathcal{E}_h(X) \geq \mathbb{E}(X)$.

Απόδειξη. Απλώς αποδεικνύουμε την υπόθεση (i). Η υπόθεση (ii) είναι παρόμοια. Έστω X είναι NBUE και η h είναι κυρτή. Τότε, από τη σχέση (3.8) και σημειώνουμε ότι $\mathbb{E}(h'(\bar{F}(X))) = 1$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} m_h(t) &= \int_t^\infty h'(\bar{F}(x)) \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} dx \\ &\leq \int_t^\infty h'(\bar{F}(t)) \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} dx \\ &\leq h'(\bar{F}(t)) \mathbb{E}(X), \end{aligned}$$

και από το Θεώρημα 3.2 η απόδειξη ολοκληρώνεται. \square

Ως ειδική περίπτωση, αν επιλέξουμε η $h(x) = x$, τότε η $h(x)$ είναι και κυρτή και κοίλη. Έτσι, αν X είναι DFRA, τότε $\mathcal{E}(X) \geq \mathbb{E}(X)$. Από την άλλη πλευρά, αν X είναι IFRA, τότε $\mathcal{E}(X) \leq \mathbb{E}(X)$, βλέπε Asadi και Zohrevand (2007).

3.2.5 Μη πλήρης στρεβλή Βήτα συνάρτηση

Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου μελετάμε ιδιότητες της $h - CRE$, στην περίπτωση όπου η h είναι μια στρεβλή συνάρτηση για τη μη πλήρη Βήτα. Ειδικότερα, για δύο θετικές πραγματικές παραμέτρους a και b , θεωρούμε μία οικογένεια στρεβλών συναρτήσεων (βλέπε Wirch και Hardy (2001))

$$h_{a,b}(u) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^u t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad (3.23)$$

όπου $B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ είναι η Βήτα συνάρτηση. Ακόμα, η συνάρτηση Γάμμα ισούται με $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$. Είναι προφανές ότι $h_{a,b}(0) = 0$ και $h_{a,b}(1) = 1$. Η παραπάνω μη πλήρης Βήτα αποτελεί μια ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού στο αναλογικό μοντέλο κινδύνου (βλέπε Κεφάλαιο 2). Η συνάρτηση $h_{a,b}(u)$ είναι κοίλη αν και μόνο αν $0 < a < 1 \leq b$, και κυρτή αν και μόνο αν $0 < b < 1 \leq a$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.17) και (3.3), έχουμε

$$\Pi_{a,b}(X) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^\infty x (\bar{F}(x))^{a-1} (F(x))^{b-1} f(x) dx, \quad (3.24)$$

και

$$\mathcal{E}_{a,b}(X) = -\frac{1}{B(a,b)} \int_0^\infty (\bar{F}(x))^a (F(x))^{b-1} \ln \bar{F}(x) dx. \quad (3.25)$$

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ δεν είναι συνεπές για όλα τα a και b για τη συνάρτηση

$$\phi_{a,b}(u) = \frac{(1-u)^a u^{b-1}}{B(a,b)} \ln(1-u), \quad 0 \leq u \leq 1,$$

η οποία δεν είναι κυρτή για όλα τα $a > 0$ και $b > 0$ (βλέπε το Θεώρημα 3.1 και την Παρατήρηση 3.1).

3.2.6 Μια εφαρμογή στον υπολογισμό ασφαλίσεων

Σε αυτή την υποενότητα δίνουμε μία εφαρμογή για το μέτρο h-CRE στις αρχές υπολογισμού ασφαλίσεων. Ειδικότερα, παρακινούμενοι από την εργασία των Sordo et al. (2016), επεκτείνουμε τα αποτελέσματα που δίνονται σε αυτή την εργασία, ορίζοντας μια οικογένεια αρχών ασφαλίσεων που βασίζονται σε γενικευμένες Βήτα κατανομές. Υπενθυμίζουμε ότι οι κατανομές που παράγονται από τις γενικευμένες Βήτα κατανομές μελετήθηκαν ως επέκταση κατανομών διατεταγμένων παρατηρήσεων (order statistics) με ανεξάρτητα και ισόνομα κατανομημένα δείγματα (*i.i.d.*) από τους Jones (2004), όπως επίσης και στην εργασία των Zografos και Balakrishnan (2009), οι οποίες παρέχουν μεγάλη ευελιξία στη μοντελοποίηση δεδομένων. Στον επόμενο ορισμό προτείνουμε μια οικογένεια αρχών ασφαλίσεων, η οποία συμβολίζεται $T_{a,b}(X)$, όπου οι επιλογές των a και b αντικατοπτρίζουν τον βαθμό αποστροφής κινδύνου του ασφαλιστή.

Ορισμός 3.1. Για δύο θετικές, πραγματικές παραμέτρους a, b ορίζουμε μια οικογένεια αρχών ασφαλίσεων σύμφωνα με τον κίνδυνο X , με την παρακάτω σχέση

$$T_{a,b}(X) = \mathbb{E}(X) + \mathcal{E}_{a,b}(X),$$

όπου $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ είναι η επιβάρυνση κινδύνου για το ασφάλιστρο, το οποίο αναφέρεται στη σχέση (3.25).

Έστω η $X_{a,b}$ είναι μία συνεχής, μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{a,b}(x) = \frac{1}{B(a,b)} (F(x))^{a-1} (\bar{F}(x))^{b-1} f(x), \quad x > 0. \quad (3.26)$$

Στη συνέχεια, μια εναλλακτική αναπαράσταση για την $T_{a,b}(X)$ είναι (η δεύτερη ισότητα της σχέσης (3.27) προκύπτει αντικαθιστώντας όπου x το $F^{-1}(p)$)

$$T_{a,b}(X) = \int_0^\infty \mathbb{E}(X|X > x) f_{a,b}(x) dx = \int_0^1 TVAR_p(X) dh_{a,b}(p), \quad (3.27)$$

όπου $TVAR_p(X)$ είναι η ουρά με τιμή κινδύνου στο επίπεδο p του X , η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$TVAR_p(X) = \frac{1}{1-p} \int_p^1 F^{-1}(u) du, \quad p \in (0, 1).$$

Από τη σχέση (3.27) παρατηρούμε ότι η $T_{a,b}(X)$ μπορεί να ερμηνευθεί γεωμετρικά ως η «σταθμισμένη περιοχή» με την έννοια ότι στο ολοκλήρωμα της σχέσης (3.27) το διαφορικό είναι $dh_{a,b}(p)$ αντί για το dp κάτω από την καμπύλη $T_{a,b}(X)$, όπου η στρεβλή συνάρτηση $h_{a,b}(p)$ αντικατοπτρίζει τη συμπεριφορά του ασφαλιστή ως προς τον κίνδυνο. Στη συνέχεια, ακολουθώντας τη μεθοδολογία που υπάρχει στην εργασία των Sordo et al. (2016) για την $X_{a,b}$, θεωρούμε έναν κίνδυνο Y που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) Η υπό συνθήκη κατανομή του $(Y|X_{a,b} = x)$ εξαρτάται μόνο από την ουρά της X .
- (ii) Η αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}(Y|X_{a,b} = x) \geq x$ για όλα τα x .
- (iii) $(Y|X_{a,b} = x_1) \leq_{st} (Y|X_{a,b} = x_2)$ για $x_1 < x_2$.
- (iv) Αν η X έχει ελαφριά ουρά, τότε η συνάρτηση $\mathbb{E}(Y|X_{a,b} = x) - x$ αυξάνεται καθώς το x αυξάνεται. Ειδικότερα, η ιδιότητα (ii) διασφαλίζει ότι

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty \mathbb{E}(Y|X_{a,b} = x) f_{a,b}(x) dx \geq \mathbb{E}(X_{a,b}).$$

Στο επόμενο λήμμα, παρέχουμε μια τυχαία μεταβλητή που ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii), (iii) και (iv), όμως η απόδειξή του παραλείπεται επειδή είναι όμοια με την απόδειξη του Λήμματος 7 των Sordo et al. (2016).

Λήμμα 3.1. Έστω X είναι μία τυχαία μεταβλητή με ουρά $\bar{F}(x)$. Έστω ακόμα η τυχαία μεταβλητή $Y_{X_{a,b}}$ που ικανοποιεί αυτή τη στοχαστική ισότητα

$$(Y_{X_{a,b}}|X_{a,b} = x) \stackrel{d}{=} (X|X > x) \quad x > 0, \quad (3.28)$$

είναι μία κατανομή η οποία ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες (i), (ii) και (iii). Επιπλέον, αν η F είναι μια λογαριθμο-κυρτή συνάρτηση, τότε η τυχαία μεταβλητή $Y_{X_{a,b}}$ επίσης ικανοποιεί την ιδιότητα (iv). Με βάση την τυχαία μεταβλητή $Y_{X_{a,b}}$ μια εναλλακτική αναπαράσταση της $T_{a,b}(X)$ είναι

$$T_{a,b}(X) = \mathbb{E}(Y_{X_{a,b}}) \quad (3.29)$$

για $a, b > 0$. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι η σχέση (3.29) είναι ένα στρεβλό ασφάλιστρο.

Θεώρημα 3.11. Η συνάρτηση $T_{a,b}(X)$ που δίνεται στη σχέση (3.29) είναι ένα στρεβλό ασφάλιστρο με κοίλη στρεβλή συνάρτηση

$$\bar{h}_{a,b}(y) = 1 - \frac{1}{B(a,b)} \int_t^1 \int_p^1 (1-u)^{a-1} u^{b-2} du dp, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.30)$$

για όλα τα $a, b > 0$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.26) και (3.28), έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{F}_{Y_{X_{a,b}}}(x) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(Y_{X_{a,b}} > x | X_{a,b} = y) f_{a,b}(y) dy \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x | X > y) f_{a,b}(y) dy \\ &= \int_0^x \mathbb{P}(X > x | X > y) f_{a,b}(y) dy + \int_x^\infty f_{a,b}(y) dy \\ &= \frac{\bar{F}(x)}{B(a,b)} \int_0^x (F(y))^{a-1} (\bar{F}(y))^{b-2} f(y) dy + \frac{1}{B(a,b)} \int_x^\infty (F(y))^{a-1} (\bar{F}(y))^{b-1} f(y) dy. \end{aligned}$$

Θέτουμε $t = F(y)$ έτσι ώστε να γράψουμε $\bar{F}_{Y_{X_{a,b}}}(x) = \bar{h}_{a,b}(\bar{F}(x))$, για όλα τα $x \geq 0$, όπου

$$\bar{h}_{a,b}(t) = \frac{t}{B(a,b)} \int_t^1 (1-u)^{a-1} u^{b-2} du + \frac{1}{B(a,b)} \int_0^t (1-u)^{a-1} u^{b-1} du, \quad (3.31)$$

για όλα τα $a, b > 0$. Επειδή

$$\frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 (1-u)^{a-1} u^{b-1} du = 1,$$

βλέπουμε ότι ο δεύτερος όρος στη δεξιά πλευρά της σχέσης (3.31) είναι

$$\frac{1}{B(a,b)} \int_0^t (1-u)^{a-1} u^{b-1} du = 1 - \frac{1}{B(a,b)} \int_t^1 (1-u)^{a-1} u^{b-1} du.$$

Έτσι, έχουμε

$$\bar{h}_{a,b}(t) = 1 - \frac{1}{B(a,b)} \int_t^1 (1-u)^{a-1} u^{b-2} \left(\int_t^u dp \right) du,$$

και αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης, παίρνουμε τη σχέση (3.30). Από

$$\bar{h}'_{a,b}(t) = \frac{1}{B(a,b)} \int_t^1 (1-u)^{a-1} u^{b-2} du,$$

μπορούμε να δούμε ότι η $\bar{h}_{a,b}(t)$ είναι μια αύξουσα και κοίλη συνάρτηση. Επιπλέον, είναι εύκολο να δούμε ότι $\bar{h}_{a,b}(0) = 0$ και $\bar{h}_{a,b}(1) = 1$ για όλα τα $a, b > 0$. Συνεπώς, $\bar{h}_{a,b}(t)$, είναι μία κοίλη στρεβλή συνάρτηση. \square

3.3 Αριθμητικά παραδείγματα

Από τις σχέσεις (3.24) και (3.25) βλέπουμε ότι για δεδομένη κατανομή απώλειας δεν είναι εύκολο να έχουμε μια αναλυτική έκφραση για τα $\Pi_{a,b}(X)$ και $\mathcal{E}_{a,b}(X)$, αντίστοιχα. Ωστόσο, πριν από τα

αριθμητικά μας αποτελέσματα, παρουσιάζουμε μερικά παραδείγματα που εκφράζουν τις δύο συναρτήσεις και τις μεταξύ τους συνδέσεις. Στις εκφράσεις μας, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση δίγαμμα $\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$, όπου $\Gamma(x) = \int_x^\infty t^{x-1} e^{-t} dx$ είναι η συνάρτηση Γάμμα. Παρέχουμε επίσης απλούστερες εκφράσεις στην περίπτωση που $b = 1$.

Παράδειγμα 3.2. Για όλα τα $a, b > 0$, έστω $X \sim U(0, \omega)$, $\omega > 0$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = 1/\omega$, $x \in (0, \omega)$. Έπειτα από μερικούς υπολογισμούς, έχουμε ότι

$$\Pi_{a,b}(X) = \omega \frac{b}{a+b}$$

και

$$\mathcal{E}_{a,b}(X) = \omega \frac{a}{a+b} (\Psi(a+b+1) - \Psi(a+1)).$$

Επιπλέον, για $b = 1$, παίρνουμε ότι

$$\Pi_{a,1}(X) = \omega \frac{1}{a+1} \quad \text{και} \quad \mathcal{E}_{a,1}(X) = \omega \frac{a}{(a+b)^2}.$$

Έστω επίσης $Y \sim U(0, \delta)$, όπου $0 < \omega < \delta$. Τότε, θα έχουμε $X \leq_{disp} Y$ (μπορείτε να δείτε επίσης στον Πίνακα 1.1 των Müller και Stoyan (2002)) και $\mathcal{E}_{a,b}(X) \leq \mathcal{E}_{a,b}(Y)$, που επαληθεύουν την Πρόταση 3.2.

Παράδειγμα 3.3. Για $a, b > 0$ έστω $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$. Μετά από μερικούς υπολογισμούς (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε Nadarajah και Kotz (2006)), έχουμε

$$\Pi_{a,b}(X) = \mathcal{E}_{a,b}(X) = \frac{\Psi(a+b) - \Psi(a)}{\lambda}.$$

Επίσης, για $b = 1$, παίρνουμε

$$\Pi_{a,1}(X) = \mathcal{E}_{a,1}(X) = \frac{1}{a} \mathbb{E}(X) = \frac{1}{a\lambda}.$$

Έστω επίσης $Y \sim Exp(b)$, όπου $0 < b < \lambda$. Τότε, θα έχουμε $X \leq_{disp} Y$ (μπορείτε να δείτε επίσης στον Πίνακα 1.1 των Müller και Stoyan (2002)) και $\mathcal{E}_{a,b}(X) \leq \mathcal{E}_{a,b}(Y)$, που επαληθεύουν την Πρόταση 3.2.

Παράδειγμα 3.4. Για $a, b > 0$ έστω $X \sim Pa(\xi, \kappa)$, $\xi > 1$, $a\xi > 1$ και $\kappa > 0$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \frac{\xi \kappa^\xi}{(x+\kappa)^{\xi+1}}$, $x > 0$. Μετά από μερικούς υπολογισμούς, έχουμε

$$\Pi_{a,b}(X) = \kappa \left(\frac{B(a - \frac{1}{\xi}, b)}{B(a, b)} - 1 \right)$$

και

$$\mathcal{E}_{a,b}(X) = \frac{\kappa B(a - \frac{1}{\xi}, b) (\Psi(a + b - \frac{1}{\xi}) - \Psi(a - \frac{1}{\xi}))}{\xi B(a, b)}.$$

Επίσης, για $b = 1$, έχουμε

$$\Pi_{a,1}(X) = \frac{\kappa}{a\xi - 1} = \frac{\xi - 1}{a\xi - 1} \mathbb{E}(X) \text{ και } \mathcal{E}_{h_{a,1}}(X) = \frac{a\xi\kappa}{(a\xi - 1)^2} = \frac{a\xi}{a\xi - 1} \Pi_{a,1}(X).$$

Παράδειγμα 3.5. Για $a, b > 0$ έστω $X \sim Wei(\lambda, \rho)$, $\lambda, \rho > 0$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \lambda \rho x^{\rho-1} e^{-\lambda x^\rho}$, $x > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση είναι περίπλοκο να αποτυπωθεί με ακρίβεια η αναλυτική έκφραση των συναρτήσεων $\Pi_{a,b}(X)$ και $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ για κάθε $a, b > 0$. Ωστόσο, εύκολα προκύπτει ότι

$$\mathcal{E}_{a,b}(X) = \frac{1}{\rho} \Pi_{a,b}(X),$$

συγκεκριμένα η $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ είναι ανάλογη με $\Pi_{a,b}(X)$ από τον παράγοντα $1/\rho$, όπου ρ είναι η παράμετρος σχήματος της κατανομής Weibull. Παρατηρούμε ότι $\mathcal{E}_{a,b}(X) > \Pi_{a,b}(X)$ για $0 < \rho < 1$, $\mathcal{E}_{a,b}(X) < \Pi_{h_{a,b}}(X)$ για $\rho > 1$ και $\mathcal{E}_{a,b}(X) = \Pi_{a,b}(X)$ για $\rho = 1$ (εκθετική συνάρτηση). Θυμίζοντας τη σχέση (3.3), κάτω από την ανάλυση διαταραχής της $\Pi_{a,b}(X)$ που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 1, για παράδειγμα η κατανομή Weibull ($0 < \rho < 1$) είναι μια βαριά ουρά σε σχέση με τη κατανομή Weibull ($\rho > 1$) η οποία είναι μια πιο ελαφριά ουρά. Επιπλέον, για $b = 1$, μετά από μερικούς υπολογισμούς, έχουμε

$$\Pi_{a,1}(X) = \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{\rho})}{(a\lambda)^{1/\rho}} = \frac{1}{a^{1/\rho}} \mathbb{E}(X) \text{ και } \mathcal{E}_{a,1}(X) = \frac{1}{\rho} \Pi_{a,1}(X),$$

βλέπε επίσης Baratpour (2010).

Παρατήρηση 3.3. Οι κατανομές $U(0, \omega)$ και $Wei(\lambda, \rho)$ για $\rho > 1$ είναι IFR, ενώ η κατανομή $Pa(\xi, \kappa)$ και η κατανομή $Wei(\lambda, \rho)$ για $0 < \rho < 1$ είναι DFR. Επιπλέον, η κατανομή $Exp(\lambda)$ είναι IFR και DFR (συγκεκριμένα, η ένταση κινδύνου είναι ίση με την παράμετρο λ). Υπενθυμίζοντας ότι η κλάση των κατανομών IFR είναι υποσύνολο της κλάσης IFRA και η κλάση DFR είναι υποσύνολο της DFRA, μπορεί κανείς να επαληθεύσει άμεσα τα Θεωρήματα 3.7 και 3.8.

Παράδειγμα 3.6. Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές απώλειας:

1. $X \sim U(0, 4)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = 1/4, x \in (0, 4)$.

2. $Y \sim \text{Exp}(0.5)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = 0.5 e^{-0.5x}, x > 0$.

3. $Z \sim Pa(4, 6)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \frac{4 \times 6^4}{(x+6)^5}, x > 0$,

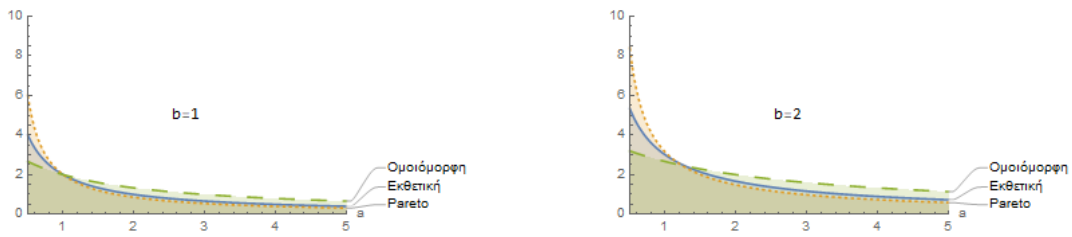
όπου $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z) = 2$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις από τα Παραδείγματα 3.1, 3.2 και 3.3, μπορεί κάποιος να αποδείξει εύκολα τη διαφορετική συμπεριφορά του μέτρου $\Pi_{a,b}(\cdot)$ συγκρίνοντας τις τιμές $0 < a < 1 = b$ και για $0 < 1 = b < a$, για παράδειγμα,

$$\Pi_{0.5,1}(X) = 2.667, \Pi_{0.5,1}(Y) = 4 \quad \text{και} \quad \Pi_{0.5,1}(Z) = 6$$

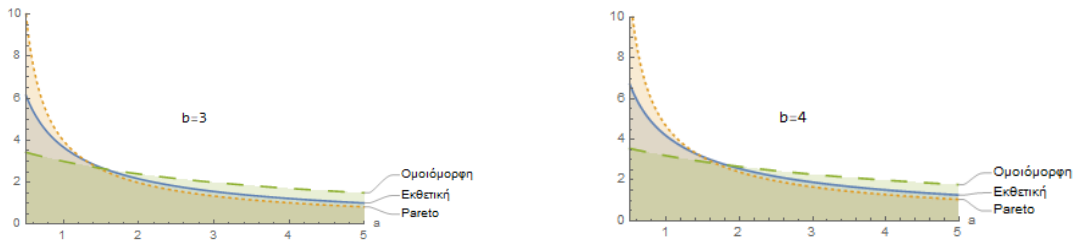
ενώ

$$\Pi_{2,1}(X) = 1.333, \Pi_{2,1}(Y) = 1 \quad \text{και} \quad \Pi_{2,1}(Z) = 0.857.$$

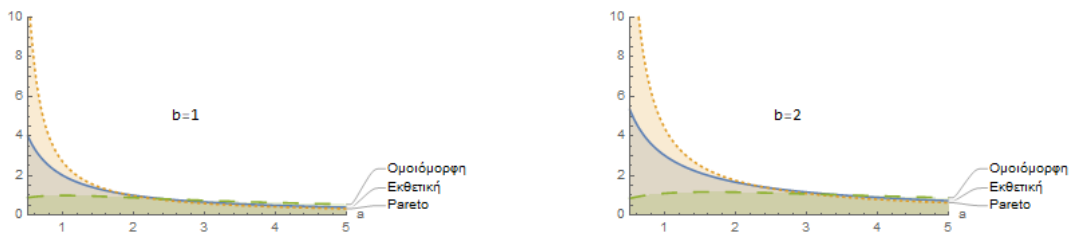
Στα σχήματα 3.1 και 3.2, παρατηρούμε ότι για $b = 1, 2, 3, 4$ ισχύει ότι $\Pi_{a,b}(X) \leq \Pi_{a,b}(Y) \leq \Pi_{a,b}(Z)$, όταν το $a \in [0.5, a_b^{\Pi}]$. Ειδικότερα, (βλέπε στον Πίνακα 1), παίρνουμε $a_1^{\Pi} = 1, a_2^{\Pi} = 1.15906, a_3^{\Pi} = 1.30591$ και $a_4^{\Pi} = 1.44622$. Αντίστοιχα, στα σχήματα 3.3 και 3.4, παρατηρούμε ότι για $b = 1, 2, 3, 4$ ισχύει ότι $\mathcal{E}_{a,b}(X) \leq \mathcal{E}_{a,b}(Y) \leq \mathcal{E}_{a,b}(Z)$ όταν το $a \in [0.5, a_b^{\mathcal{E}}]$.



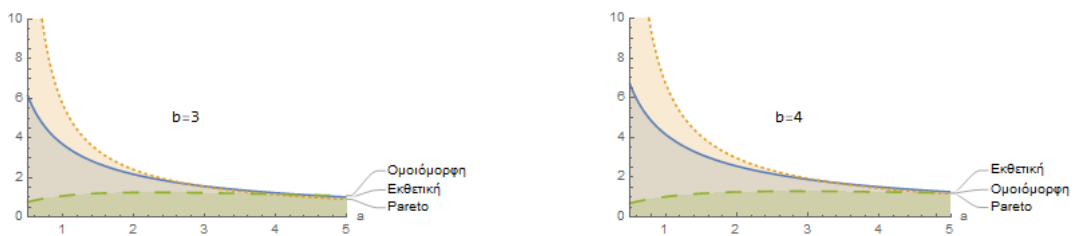
Σχήμα 3.1: Οι συναρτήσεις $\Pi_{a,b}(X)$ (μπλε γραμμή), $\Pi_{a,b}(Y)$ (πράσινη γραμμή) και $\Pi_{a,b}(Z)$ (πορτοκαλί γραμμή) για $0.5 \leq a \leq 5$ και $b = 1$ (αριστερό σχήμα), $b = 2$ (δεξί σχήμα).



Σχήμα 3.2: Οι συναρτήσεις $\Pi_{a,b}(X)$ (μπλε γραμμή), $\Pi_{a,b}(Y)$ (πράσινη γραμμή) και $\Pi_{a,b}(Z)$ (πορτοκαλί γραμμή) για $0.5 \leq a \leq 5$ και $b = 3$ (αριστερό σχήμα), $b = 4$ (δεξί σχήμα).



Σχήμα 3.3: Οι συναρτήσεις $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ (μπλε γραμμή), $\mathcal{E}_{a,b}(Y)$ (πράσινη γραμμή) και $\mathcal{E}_{a,b}(Z)$ (πορτοκαλί γραμμή) για $0.5 \leq a \leq 5$ και $b = 1$ (αριστερό σχήμα), $b = 2$ (δεξί σχήμα).



Σχήμα 3.4: Οι συναρτήσεις $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ (μπλε γραμμή), $\mathcal{E}_{a,b}(Y)$ (πράσινη γραμμή) και $\mathcal{E}_{a,b}(Z)$ (πορτοκαλί γραμμή) για $0.5 \leq a \leq 5$ και $b = 3$ (αριστερό σχήμα), $b = 4$ (δεξί σχήμα).

Από τον Πίνακα 3.1, παίρνουμε $a_1^\xi = 1.86603$, $a_2^\xi = 2.35505$, $a_3^\xi = 2.83250$ και $a_4^\xi = 3.30464$. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι ισχύει η ανίσωση $a_b^\Pi < a_b^\xi$.

| | | | | | |
|----------------------------------|-----|------------------|--|-----|------------------|
| $\Pi_{a,1}(X) \leq \Pi_{a,1}(Y)$ | για | $a \leq 1.00000$ | $\mathcal{E}_{a,1}(X) \leq \mathcal{E}_{a,1}(Y)$ | για | $a \leq 2.41421$ |
| $\Pi_{a,1}(X) \leq \Pi_{a,1}(Z)$ | για | $a \leq 1.00000$ | $\mathcal{E}_{a,1}(X) \leq \mathcal{E}_{a,1}(Z)$ | για | $a \leq 2.22474$ |
| $\Pi_{a,1}(Y) \leq \Pi_{a,1}(Z)$ | για | $a \leq 1.00000$ | $\mathcal{E}_{a,1}(Y) \leq \mathcal{E}_{a,1}(Z)$ | για | $a \leq 1.86603$ |
| $\Pi_{a,2}(X) \leq \Pi_{a,2}(Y)$ | για | $a \leq 1.28078$ | $\mathcal{E}_{a,2}(X) \leq \mathcal{E}_{a,2}(Y)$ | για | $a \leq 3.42334$ |
| $\Pi_{a,2}(X) \leq \Pi_{a,2}(Z)$ | για | $a \leq 1.23318$ | $\mathcal{E}_{a,2}(X) \leq \mathcal{E}_{a,2}(Z)$ | για | $a \leq 3.06855$ |
| $\Pi_{a,2}(Y) \leq \Pi_{a,2}(Z)$ | για | $a \leq 1.15906$ | $\mathcal{E}_{a,2}(Y) \leq \mathcal{E}_{a,2}(Z)$ | για | $a \leq 2.35505$ |
| $\Pi_{a,3}(X) \leq \Pi_{a,3}(Y)$ | για | $a \leq 1.55091$ | $\mathcal{E}_{a,3}(X) \leq \mathcal{E}_{a,3}(Y)$ | για | $a \leq 4.42805$ |
| $\Pi_{a,3}(X) \leq \Pi_{a,3}(Z)$ | για | $a \leq 1.45647$ | $\mathcal{E}_{a,3}(X) \leq \mathcal{E}_{a,3}(Z)$ | για | $a \leq 3.91002$ |
| $\Pi_{a,3}(Y) \leq \Pi_{a,3}(Z)$ | για | $a \leq 1.30591$ | $\mathcal{E}_{a,3}(Y) \leq \mathcal{E}_{a,3}(Z)$ | για | $a \leq 2.83250$ |
| $\Pi_{a,4}(X) \leq \Pi_{a,4}(Y)$ | για | $a \leq 1.81585$ | $\mathcal{E}_{a,4}(X) \leq \mathcal{E}_{a,4}(Y)$ | για | $a \leq 5.43093$ |
| $\Pi_{a,4}(X) \leq \Pi_{a,4}(Z)$ | για | $a \leq 1.67481$ | $\mathcal{E}_{a,4}(X) \leq \mathcal{E}_{a,4}(Z)$ | για | $a \leq 4.75056$ |
| $\Pi_{a,4}(Y) \leq \Pi_{a,4}(Z)$ | για | $a \leq 1.44622$ | $\mathcal{E}_{a,4}(Y) \leq \mathcal{E}_{a,4}(Z)$ | για | $a \leq 3.30464$ |

Πίνακας 3.1: Συγκριτικά αποτελέσματα των σχημάτων 3.1, 3.2, 3.3 και 3.4 για $b = 1, 2, 3, 4$.

Παράδειγμα 3.7. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το $\Pi_{a,b}(X)$ και $\mathcal{E}_{a,b}(X)$, όπου X ακολουθεί μία από τις παρακάτω κατανομές:

1. $X \sim Pa(4, 6)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \frac{4 \times 6^4}{(x+6)^5}$, $x > 0$.
2. $X \sim Exp(0.5)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = 0.5 e^{-0.5x}$, $x > 0$.
3. $X \sim Ga(2, 1)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = x e^{-x}$, $x > 0$.
4. $X \sim Ga(0.5, 0.25)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-0.5} e^{-0.25x}$, $x > 0$.
5. $X \sim Wei(\pi/16, 2)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \frac{\pi}{8} x e^{-(\pi/16)x^2}$, $x > 0$.
6. $X \sim Wei(1, 0.5)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = 0.5 x^{-0.5} e^{-x^{0.5}}$, $x > 0$.

Σημειώνουμε ότι όλες οι προαναφερόμενες κατανομές έχουν $\mathbb{E}(X) = 2$. Οι κατανομές $Ga(2, 1)$ και $Wei(\pi/16, 2)$ είναι *IFR*, ενώ οι $Pa(4, 6)$, $Ga(0.5, 0.25)$ και $Wei(1, 0.5)$ είναι *DFR*. Επιπλέον, η κατανομή $Exp(0.5)$ είναι ταυτόχρονα *IFR* και *DFR* (ειδικότερα, η ένταση κινδύνου είναι ίση με την παράμετρο 0.5). Στους Πίνακες 3.2-3.13 παίρνουμε τις τιμές των $\Pi_{a,b}(X)$ και $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ χρησιμοποιώντας τη στρεβλή συνάρτηση $h_{a,b}(u)$ στη σχέση (3.23), για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$. Θυμίζουμε ότι η κλάση *IFR* είναι ένα υποσύνολο της κλάσης *IFRA*, και η κλάση *DFR* είναι υποσύνολο της κλάσης *DFRA*. Επιπλέον, επαληθεύουμε το αποτέλεσμα των Θεωρημάτων 3.7 και 3.8. Επιπλέον, για μια σταθερή τιμή της παραμέτρου b παρατηρούμε ότι τα μέτρα $\Pi_{a,b}(X)$ και $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ μειώνονται καθώς η παράμετρος a αυξάνεται, ενώ για την παράμετρο a τα δύο μέτρα αυξάνονται καθώς η παράμετρος b αυξάνεται. Ως εκ τούτου, η επιλογή των a και b αντιπροσωπεύει την αποστροφή στον

κινδύνο. Μελετώντας, στην επόμενη ενότητα, μια εμπειρική εκτίμηση για το $\mathcal{E}_{a,b}(X)$, μια καλή επιλογή για τις παραμέτρους της στρεβλής Βήτα είναι $(a > 3/2, b \geq 1)$. Επιπλέον, μπορεί κανείς να επιλέξει αυτές τις παραμέτρους λαμβάνοντας υπόψη την ουρά του κινδύνου. Για παράδειγμα, για τις επιλογές $(a = 2, b > 1.27021)$, $(a = 3, b > 3.35383)$, $(a = 4, b > 5.48322)$, $(a > 1.86603, b = 1)$, $(a > 2.35505, b = 2)$, $(a > 2.8325, b = 3)$ και $(a > 3.30464, b = 4)$, η h -CRE της κατανομής $Pa(4, 6)$ είναι μεγαλύτερη από τη h -CRE της Εκθετικής κατανομής με παράμετρο $\frac{1}{2}$.

| $\Pi_{a,b}(X)$ | $b = 0.5$ | $b = 0.75$ | $b = 1$ | $b = 2$ | $b = 3$ |
|----------------|-----------|------------|---------|---------|---------|
| $a = 0.50$ | 4.0155 | 5.1245 | 6.0000 | 8.4000 | 10.0000 |
| $a = 0.75$ | 1.8662 | 2.4853 | 3.0000 | 4.5000 | 5.5500 |
| $a = 1$ | 1.1888 | 1.6249 | 2.0000 | 3.1429 | 3.9740 |
| $a = 2$ | 0.4700 | 0.6718 | 0.8571 | 1.4805 | 1.9792 |
| $a = 3$ | 0.2902 | 0.4216 | 0.5455 | 0.9818 | 1.3493 |

Πίνακας 3.2: Οι τιμές του $\Pi_{a,b}(X)$ της κατανομής $Pa(4, 6)$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$.

| $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ | $b = 0.50$ | $b = 0.75$ | $b = 1$ | $b = 2$ | $b = 3$ |
|------------------------|------------|------------|---------|---------|---------|
| $a = 0.50$ | 7.8662 | 10.1517 | 12.0000 | 17.2800 | 20.9778 |
| $a = 0.75$ | 2.7262 | 3.6827 | 4.5000 | 7.0000 | 8.8550 |
| $a = 1$ | 1.5427 | 2.1395 | 2.6667 | 4.3537 | 5.6563 |
| $a = 2$ | 0.5258 | 0.7601 | 0.9796 | 1.7487 | 2.3972 |
| $a = 3$ | 0.3115 | 0.4564 | 0.5950 | 1.1002 | 1.5449 |

Πίνακας 3.3: Οι τιμές του $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ της κατανομής $Pa(4, 6)$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$.

| $\Pi_{a,b}(X)$ | $b = 0.5$ | $b = 0.75$ | $b = 1$ | $b = 2$ | $b = 3$ |
|----------------|-----------|------------|---------|---------|---------|
| $a = 0.50$ | 2.7726 | 3.4721 | 4.0000 | 5.3333 | 6.1333 |
| $a = 0.75$ | 1.7168 | 2.2447 | 2.6667 | 3.8095 | 4.5368 |
| $a = 1$ | 1.2274 | 1.6494 | 2.0000 | 3.0000 | 3.6667 |
| $a = 2$ | 0.5608 | 0.7922 | 1.0000 | 1.6667 | 2.1667 |
| $a = 3$ | 0.3608 | 0.5195 | 0.6667 | 1.1667 | 1.5667 |

Πίνακας 3.4: Οι τιμές του $\Pi_{a,b}(X)$ της κατανομής $Exp(\frac{1}{2})$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$.

| $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ | $b = 0.5$ | $b = 0.75$ | $b = 1$ | $b = 2$ | $b = 3$ |
|------------------------|-----------|------------|---------|---------|---------|
| $a = 0.50$ | 2.7726 | 3.4721 | 4.0000 | 5.3333 | 6.1333 |
| $a = 0.75$ | 1.7168 | 2.2447 | 2.6667 | 3.8095 | 4.5368 |
| $a = 1$ | 1.2274 | 1.6494 | 2.0000 | 3.0000 | 3.6667 |
| $a = 2$ | 0.5608 | 0.7922 | 1.0000 | 1.6667 | 2.1667 |
| $a = 3$ | 0.3608 | 0.5195 | 0.6667 | 1.1667 | 1.5667 |

Πίνακας 3.5: Οι τιμές του $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ της κατανομής $Exp(\frac{1}{2})$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$.

| $\Pi_{a,b}(X)$ | $b = 0.5$ | $b = 0.75$ | $b = 1$ | $b = 2$ | $b = 3$ |
|----------------|-----------|------------|---------|---------|---------|
| $a = 0.50$ | 2.4126 | 2.9347 | 3.3114 | 4.2104 | 4.7227 |
| $a = 0.75$ | 1.6998 | 2.1302 | 2.4548 | 3.2721 | 3.7592 |
| $a = 1$ | 1.3441 | 1.7133 | 2.0000 | 2.7500 | 3.2130 |
| $a = 2$ | 0.8008 | 1.0479 | 1.2500 | 1.8241 | 2.2104 |
| $a = 3$ | 0.6081 | 0.8017 | 0.9630 | 1.4378 | 1.7718 |

Πίνακας 3.6: Οι τιμές του $\Pi_{a,b}(X)$ της κατανομής $Ga(2, 1)$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$.

| $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ | $b = 0.5$ | $b = 0.75$ | $b = 1$ | $b = 2$ | $b = 3$ |
|------------------------|-----------|------------|---------|---------|---------|
| $a = 0.50$ | 1.7849 | 2.1944 | 2.4956 | 3.2335 | 3.6649 |
| $a = 0.75$ | 1.1991 | 1.5239 | 1.7745 | 2.4257 | 2.8260 |
| $a = 1$ | 0.9173 | 1.1881 | 1.4037 | 1.9880 | 2.3614 |
| $a = 2$ | 0.5080 | 0.6770 | 0.8193 | 1.2412 | 1.5376 |
| $a = 3$ | 0.3719 | 0.4992 | 0.6084 | 0.9449 | 1.1928 |

Πίνακας 3.7: Οι τιμές του $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ της κατανομής $Ga(2, 1)$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$.

| $\Pi_{a,b}(X)$ | $b = 0.5$ | $b = 0.75$ | $b = 1$ | $b = 2$ | $b = 3$ |
|----------------|-----------|------------|---------|---------|---------|
| $a = 0.50$ | 3.3847 | 4.3252 | 5.0630 | 7.0353 | 8.2883 |
| $a = 0.75$ | 1.8039 | 2.4360 | 2.9687 | 4.5282 | 5.5997 |
| $a = 1$ | 1.1367 | 1.5944 | 2.0000 | 3.2732 | 4.2053 |
| $a = 2$ | 0.3581 | 0.5435 | 0.7268 | 1.4091 | 2.0000 |
| $a = 3$ | 0.1778 | 0.2796 | 0.3856 | 0.8182 | 1.2319 |

Πίνακας 3.8: Οι τιμές του $\Pi_{a,b}(X)$ της κατανομής $Ga(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$.

| $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ | $b = 0.5$ | $b = 0.75$ | $b = 1$ | $b = 2$ | $b = 3$ |
|------------------------|-----------|------------|---------|---------|---------|
| $a = 0.50$ | 4.3877 | 5.5820 | 6.5091 | 8.9412 | 10.4510 |
| $a = 0.75$ | 2.4621 | 3.3038 | 4.0041 | 6.0067 | 7.3445 |
| $a = 1$ | 1.6119 | 2.2435 | 2.7953 | 4.4824 | 5.6787 |
| $a = 2$ | 0.5564 | 0.8362 | 1.1082 | 2.0897 | 2.9076 |
| $a = 3$ | 0.2902 | 0.4519 | 0.6175 | 1.2718 | 1.8730 |

Πίνακας 3.9: Οι τιμές του $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ της κατανομής $Ga(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$.

| $\Pi_{a,b}(X)$ | $b = 0.5$ | $b = 0.75$ | $b = 1$ | $b = 2$ | $b = 3$ |
|----------------|-----------|------------|---------|---------|---------|
| $a = 0.50$ | 2.1554 | 2.5558 | 2.8284 | 3.4261 | 3.7364 |
| $a = 0.75$ | 1.6835 | 2.0494 | 2.3094 | 2.9076 | 3.2303 |
| $a = 1$ | 1.4185 | 1.7544 | 2.0000 | 2.5858 | 2.9121 |
| $a = 2$ | 0.9548 | 1.2139 | 1.4142 | 1.9332 | 2.2477 |
| $a = 3$ | 0.7652 | 0.9827 | 1.1547 | 1.6188 | 1.9136 |

Πίνακας 3.10: Οι τιμές του $\Pi_{a,b}(X)$ της κατανομής $Wei(\frac{\pi}{16}, 2)$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$.

| $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ | $b = 0.5$ | $b = 0.75$ | $b = 1$ | $b = 2$ | $b = 3$ |
|------------------------|-----------|------------|---------|---------|---------|
| $a = 0.50$ | 1.0777 | 1.2779 | 1.4142 | 1.7131 | 1.8682 |
| $a = 0.75$ | 0.8417 | 1.0247 | 1.1547 | 1.4538 | 1.6151 |
| $a = 1$ | 0.7092 | 0.8772 | 1.0000 | 1.2929 | 1.4560 |
| $a = 2$ | 0.4774 | 0.6070 | 0.7071 | 0.9666 | 1.1238 |
| $a = 3$ | 0.3826 | 0.4913 | 0.5774 | 0.8094 | 0.9568 |

Πίνακας 3.11: Οι τιμές του $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ της κατανομής $Wei(\frac{\pi}{16}, 2)$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$.

| $\Pi_{a,b}(X)$ | $b = 0.5$ | $b = 0.75$ | $b = 1$ | $b = 2$ | $b = 3$ |
|----------------|-----------|------------|---------|---------|---------|
| $a = 0.50$ | 5.2117 | 6.7514 | 8.0000 | 11.5556 | 14.0089 |
| $a = 0.75$ | 2.0814 | 2.8668 | 3.5556 | 5.7324 | 7.3822 |
| $a = 1$ | 1.0868 | 1.5609 | 2.0000 | 3.5000 | 4.7222 |
| $a = 2$ | 0.2332 | 0.3643 | 0.5000 | 1.0556 | 1.5972 |
| $a = 3$ | 0.0971 | 0.1571 | 0.2222 | 0.5139 | 0.8272 |

Πίνακας 3.12: Οι τιμές του $\Pi_{a,b}(X)$ της κατανομής $Wei(1, 0.5)$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$.

| $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ | $b = 0.5$ | $b = 0.75$ | $b = 1$ | $b = 2$ | $b = 3$ |
|------------------------|-----------|------------|---------|---------|---------|
| $a = 0.50$ | 10.4234 | 13.5027 | 16.0000 | 23.1111 | 28.0178 |
| $a = 0.75$ | 4.1628 | 5.7335 | 7.1111 | 11.4649 | 14.7643 |
| $a = 1$ | 2.1735 | 3.1219 | 4.0000 | 7.0000 | 9.4444 |
| $a = 2$ | 0.4664 | 0.7285 | 1.0000 | 2.1111 | 3.1944 |
| $a = 3$ | 0.1942 | 0.3141 | 0.4444 | 1.0278 | 1.6544 |

Πίνακας 3.13: Οι τιμές του $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ της κατανομής $Wei(1, 0.5)$ για $a, b = 0.5, 0.75, 1, 2, 3$.

3.4 Εμπειρική εκτίμηση βασισμένη στη CRE μη πλήρη στρεβλή Βήτα συνάρτηση

Στην παράγραφο αυτή μελετάμε ένα τρόπο εκτίμησης της $\mathcal{E}_{a,b}$ που δίνεται στη σχέση (3.25) χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία των Jones και Zitikis (2003). Οι Jones και Zitikis (2003) εφάρμοσαν τη μεθοδολογία του L-statistics στον δείκτη του Wang που είδαμε στο Κεφάλαιο 2 και εμείς το εφαρμόζουμε για την εντροπία. Γί αυτό τον σκοπό, έστω X_1, X_2, \dots, X_n απολύτως συνεχείς μη αρνητικές ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες (*i.i.d.*) τυχαίες μεταβλητές, και έστω $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ οι διατεταγμένες παρατηρήσεις (order statistics) του τυχαίου δείγματος. Συμβολίζουμε τη συνάρτηση εμπειρικής κατανομής που αντιστοιχεί στη $F(x)$ του δείγματος με

$$\widehat{F}_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n} \mathbf{1}_{[x_{(i)}, x_{(i+1)}]}(x), \quad x \geq 0,$$

όπου $\mathbf{1}_A(x) = 1$ για $x \in A$, είναι μια δείκτρια συνάρτηση. Ένας άλλος χρήσιμος μη παραμετρικός εκτιμητής καθορίζεται παρακάτω. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η εμπειρική μη πλήρης στρεβλή Βήτα που βασίζεται στη CRE μπορεί επίσης να γραφτεί ως συνάρτηση L που δίνεται από

$$\mathcal{E}_{a,b}(F) = \int_0^\infty x J_{a,b}(F(x)) dF(x), \quad (3.32)$$

όπου

$$J_{a,b}(u) = \frac{(1-u)^{a-1} u^{b-1}}{B(a,b)} (-a \ln(1-u) + (b-1)(1-u)u^{-1} \ln(1-u) - 1), \quad 0 < u < 1.$$

Τώρα, αντικαθιστώντας την F στη σχέση (3.32) με την \widehat{F}_n , μπορεί να δοθεί ένας εκτιμητής της $\mathcal{E}_{a,b}(F)$ από το παρακάτω $L - Statistics$:

$$\mathcal{E}_{a,b}(\widehat{F}_n) = \int_0^\infty x J_{a,b}(\widehat{F}_n(x)) d\widehat{F}_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i(a,b) X_{(i)}, \quad (3.33)$$

όπου $c_i(a,b) = \frac{1}{n} J_{a,b}\left(\frac{i}{n}\right)$ για όλα τα $a, b > 0$. Το επόμενο θεώρημα δίνει την ασυμπτωτική κανονικότητα του εκτιμητή (3.33). Αρχικά, χρειαζόμαστε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 3.2. Για όλα τα $b \geq 1$ και $a \geq 0$, έχουμε

$$|J_{a,b}(u)| \leq \frac{a(1-u)^{a-2}u^{b-1}}{B(a,b)}, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Απόδειξη. Όταν $b \geq 1$, ισχύει για όλα τα $a \geq 0$ ότι

$$(a - (b - 1)(1 - u)u^{-1}) \leq a, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} |J_{a,b}(u)| &= \left| \frac{(1-u)^{a-1}u^{b-1}}{B(a,b)} (-a \ln(1-u) + (b-1)(1-u)u^{-1} \ln(1-u) - 1) \right| \\ &= \left| \frac{(1-u)^{a-1}u^{b-1}}{B(a,b)} (-\ln(1-u)(a - (b-1)(1-u)u^{-1}) - 1) \right| \\ &\leq \frac{(1-u)^{a-1}u^{b-1}}{B(a,b)} | -a \ln(1-u) - 1 | \\ &\leq \frac{(1-u)^{a-1}u^{b-1}}{B(a,b)} (-a \ln(1-u) + 1) \\ &\leq \frac{a(1-u)^{a-2}u^{b-1}}{B(a,b)}, \quad 0 \leq u \leq 1. \end{aligned}$$

Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από τη γνωστή ταυτότητα $|c - d| \leq |c| + |d|$ για όλα τα $c, d > 0$, ενώ η τελευταία ανισότητα προκύπτει σημειώνοντας ότι $-\ln(1-x) \leq \frac{1}{1-x} - 1$, $0 \leq x \leq 1$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Θεώρημα 3.12. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n είναι απολύτως συνεχείς μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές *i.i.d.* με τη δεύτερη πεπερασμένη ροπή $\mathbb{E}(X_i^2) < \infty$. Τότε, η ασυμπτωτική κατανομή του $\sqrt{n}(\mathcal{E}_{a,b}(\widehat{F}_n) - \mathcal{E}_{a,b}(F))$ είναι κανονική με μέση τιμή μηδέν και πεπερασμένη διακύμανση $\sigma^2(F, J_{a,b}) > 0$, όπου

$$\sigma^2(F, J_{a,b}) = \int_0^\infty \int_0^\infty (F(\min(x, y)) - F(x)F(y)) J_{a,b}(x) J_{a,b}(y) dx dy, \quad (3.34)$$

για όλα τα $a > \frac{3}{2}$ και $b \geq 1$.

Απόδειξη. Η απόδειξη λαμβάνεται από το Θεώρημα 3.2 των Jones και Zitikis (2003) και το Λήμμα 3.2 παίρνοντας $\alpha = b \geq 1 > 1/2$, $\beta = a > 1 + 1/2$, και $c = \frac{a}{B(a,b)} < \infty$. \square

Από τους Jones και Zitikis (2003) ένας συνεπής εκτιμητής της σχέσης (3.34) είναι

$$\widehat{\sigma}^2(F, J_{a,b}) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\min\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - \frac{i}{n} \frac{j}{n} \right) J_{a,b}\left(\frac{i}{n}\right) J_{a,b}\left(\frac{j}{n}\right) (X_{(i+1)} - X_{(i)})(X_{(j+1)} - X_{(j)}).$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.12, το κατά προσέγγιση διάστημα εμπιστοσύνης για $\mathcal{E}_{a,b}(F)$ μπορεί να κατασκευαστεί ως

$$\mathcal{E}_{a,b}(\widehat{F}_n) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}^2(F, J_{a,b})}{n}}, \quad (3.35)$$

για κάθε $a > \frac{3}{2}$ και $b \geq 1$.

Παράδειγμα 3.8. Εξετάζουμε το σύνολο (παρουσιάζεται από τους Klugman et al. (1998), βλέπε επίσης Jones και Zitikis (2003)) 35 τυφώνων με ποσά ζημιών, που σημειώθηκαν μεταξύ των ετών 1949 και 1980 και προέκυψαν σε ζημιές που ξεπερνούν τα 5.000.000 δολάρια. Οι αριθμοί που εμφανίζονται στον Πίνακα 3.14 είναι τα ποσά που υπερβαίνουν τα 5 εκατομμύρια σε μονάδες των 1.000 δολαρίων. Με βάση τα δεδομένα του παρακάτω Πίνακα έχουμε τις εξής εκτιμήσεις:

Πίνακας 3.14: Ποσά ζημιών από τυφώνα που ξεπερνούν τα 5 εκατομμύρια δολάρια (σε 1.000 δευτ.).

| | | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-----------|
| 1,766 | 2,123 | 5,562 | 9,474 | 10,351 | 11,983 | 13,383 |
| 14,030 | 20,304 | 24,112 | 25,146 | 28,727 | 35,596 | 36,409 |
| 42,905 | 44,397 | 47,600 | 54,917 | 58,123 | 72,809 | 97,942 |
| 98,217 | 118,680 | 135,136 | 187,013 | 193,446 | 222,338 | 324,511 |
| 356,200 | 416,680 | 508,586 | 540,778 | 745,389 | 858,881 | 1,633,000 |

Οι εμπειρικές εκτιμήσεις της μη πλήρους στρεβλής Βήτα που βασίζεται στο CRE , για διάφορες τιμές των a και b , χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.33). Οι εκτιμήσεις, μαζί με κατά προσέγγιση 95% κάτω διάστημα εμπιστοσύνης (LCL) και άνω διάστημα εμπιστοσύνης (UCL) που υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.35) με $\sigma^2(F, J_{a,b})$ αντικαταστάθηκε από $\hat{\sigma}^2(F, J_{a,b})$ στη (3.4), φαίνονται στον Πίνακα 3.15.

| a | b | $\mathcal{E}_{a,b}(\widehat{F}_n)$ | Κάτω άκρο 95% | Άνω άκρο 95% |
|------|------|------------------------------------|---------------|--------------|
| 1.75 | 1 | 113,356 | 30,482 | 196,230 |
| 1.75 | 1.75 | 192,411 | 46,392 | 338,430 |
| 1.75 | 2 | 216,560 | 50,174 | 382,946 |
| 1.75 | 3 | 300,800 | 56,230 | 545,370 |
| 1.75 | 4 | 365,729 | 46,703 | 684,755 |
| 1.75 | 5 | 413,541 | 22,283 | 804,800 |
| 2 | 1 | 93,721 | 26,255 | 161,188 |
| 2 | 1.75 | 165,615 | 43,874 | 287,356 |
| 2 | 2 | 188,633 | 49,189 | 328,077 |
| 2 | 3 | 273,188 | 65,559 | 408,818 |
| 2 | 4 | 343,939 | 71,051 | 616,827 |
| 2 | 5 | 400,877 | 63,629 | 738,125 |
| 3 | 1 | 46,266 | 11,212 | 81,319 |
| 3 | 1.75 | 88,898 | 19,476 | 158,320 |
| 3 | 2 | 104,079 | 22,673 | 185,484 |
| 3 | 3 | 167,062 | 38,300 | 295,825 |
| 3 | 4 | 230,064 | 57,578 | 402,549 |
| 3 | 5 | 289,814 | 77,955 | 501,674 |

Πίνακας 3.15: Οι εμπειρικές εκτιμήσεις των $\mathcal{E}_{a,b}(\widehat{F}_n)$ μαζί με υπολογισμένα κατά προσέγγιση 95% διαστήματα εμπιστοσύνης χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.35) για $a = 1.75, 2, 3$ και $b = 1, 1.75, 2, 3, 4, 5$.

Για να συγκρίνουμε αυτά τα αποτελέσματα με το μέτρο $\mathcal{E}_{a,b}(X)$ στη σχέση (3.25), μπορούμε να επιλέξουμε το μέτρο σε σχέση με άλλα παραμετρικά μοντέλα απώλειας. Αξίζει να αναφέρουμε ότι οι Jones και Zitikis (2003) μελετώντας αυτή τη σύγκριση $\Pi_{a,1}(X) - \mathbb{E}(X)$ με $0.5 < a < 1$, για το μέτρο κινδύνων, συμπέραναν ότι αν ο στόχος μας είναι η εκτίμηση ενός μέτρου κινδύνων μπορεί να μας οδηγήσει σε ένα διαφορετικό μοντέλο. Η σύγκριση στην περίπτωσή μας είναι πιο περίπλοκη, αφού έχουμε δύο παραμέτρους a και b και σκοπεύουμε να την εξετάσουμε σε μελλοντική εργασία.

3.5 Τελικές παρατηρήσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο, ορίσαμε μια νέα οικογένεια μέτρων μεταβλητότητας βασισμένη στη στρεβλή υπολειπόμενη εντροπία, η οποία προέκυψε από την ανάλυση ευαισθησίας των στρεβλών μέτρων. Η εντροπία αυτή δημιουργεί μια ευρεία κατηγορία μέτρων μεταβλητότητας που βασίζονται στη συνάρτηση επιβίωσης, επιλέγοντας κατάλληλες στρεβλές συναρτήσεις. Επιπλέον, αποδείξαμε ότι η συγκεκριμένη οικογένεια μπορεί να εκφραστεί μέσω της αναμενόμενης τιμής ενός σταθμισμένου μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Μελετήσαμε λεπτομερώς διάφορες ιδιότητες, συμπεριλαμβανομένων των αναπαραστάσεων και των σχέσεών τους με άλλα μέτρα, των φραγμάτων και των αποτελεσμάτων διάταξης. Αποδείχθηκε ότι η διάταξη διασποράς ισχύει για το εξεταζόμενο μέτρο. Επιπλέον, προσφέραμε μια ερμηνεία για το μέτρο $\mathcal{E}_h(X)$ χρησιμοποιώντας την έννοια του μετασχηματισμού αποκατάστασης. Τέλος, διερευνήσαμε τα αποτελέσματά μας για τη μη πλήρη συνάρτηση Βήτα και παραθέσαμε αριθμητικά παραδείγματα που επαληθεύουν τα θεωρητικά αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 4

Ευελιξία και μεγιστοποίηση των σταθμισμένων στρεβλών ασφαλίστρων

4.1 Εισαγωγή

Μία αρχή ασφαλίστρου είναι ένας κανόνας τιμολόγησης που προσαρμόζει τον ασφαλιστικό κίνδυνο σε σχέση με το ασφάλιστρο, καθώς επίσης θεωρείται η βάση της αναλογιστικής ασφάλισης. Έστω ότι $X \geq 0$ είναι μια συνεχής, μη αρνητική τυχαία μεταβλητή επίσης γνωστή ως ένας ασφαλιστικός κίνδυνος στην αναλογιστική βιβλιογραφία. Έστω \mathcal{X} είναι ένα σύνολο κινδύνων, τότε η αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου (ή για λόγους απλότητας το ασφάλιστρο) είναι το συναρτησοειδές $\Pi : \mathcal{X} \rightarrow (0, \infty)$. Θυμίζουμε ότι το ασφάλιστρο συμβολίζεται με $\Pi(X)$ (βλέπε Κεφάλαιο 1.8), το οποίο εκφράζει το ποσό που χρεώνει ένας αναλογιστής για την κάλυψη του κινδύνου X . Επιπλέον, υποθέτουμε ότι για κάθε ασφάλιστρο ισχύει η ιδιότητα του μη αρνητικού περιθωρίου ασφαλείας, δηλαδή ικανοποιεί την ανισότητα $\Pi(X) \geq \mathbb{E}(X)$, όπου $\mathbb{E}(X)$ είναι η μέση τιμή του κινδύνου X (η μέση τιμή $\mathbb{E}(X)$ είναι επίσης γνωστή στην αναλογιστική βιβλιογραφία ως το καθαρό ασφάλιστρο).

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τις αρχές ασφαλίστρου βλέπε στις εργασίες των Goovaerts et al. (1984) και Dickson (2005). Μια μεγάλη κλάση ασφαλίστρων με τη ιδιότητα μη αρνητικού περιθωρίου ασφαλείας είναι τα σταθμισμένα ασφάλιστρα, τα οποία δίνονται από τη σχέση $\Pi_w(X) = E(Xw(X))/E(w(X))$, όπου w είναι μια αύξουσα συνάρτηση, βλέπε Furman και Zitikis (2008). Για διάφορες επιλογές της συνάρτησης w , καταλήγουμε σε γνωστά ασφάλιστρα, όπως το καθαρό ασφάλιστρο, το τροποποιημένο ασφάλιστρο διακύμανσης, το ασφάλιστρο Esscher και το ασφάλιστρο Kamps (βλέπε Κεφάλαιο 4.2). Επιπλέον, η προσδοκία ουράς υπό συνθήκη, ένα δημοφιλές μέτρο κινδύνου στην αναλογιστική και χρηματοοικονομική, είναι μέρος της κλάσης των

σταθμισμένων ασφαλιστρών (βλέπε Υποενότητα 4.3.2).

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγουμε μια κλάση ασφαλιστρών χρησιμοποιώντας μια θετική παράμετρο η οποία δημιουργεί ευελιξία ώστε ο αναλογιστής να μπορέσει να ελέγξει τον βαθμό της αποστροφής κινδύνου. Το κίνητρό μας προέρχεται από την εργασία των Goovaerts et al. (2001), θεωρούμε τη στάθμιση $w(x; \theta) = w(x) + \theta$ για τη θετική πραγματική παράμετρο θ . Αυτή η παράμετρος δίνει μεγαλύτερη ευελιξία σε ένα ασφάλιστρο και βρίσκεται μεταξύ του καθαρού ασφαλιστρου $\mathbb{E}(X)$ και του σταθμισμένου ασφαλιστρου $\Pi_w(X)$. Η παράμετρος θ μας επιτρέπει επίσης να δώσουμε ορισμένες γενικευμένες/εχτεταμένες ιδιότητες για ορισμένα ασφάλιστρα με ανάλογο τρόπο όπως το Ελβετικό ασφάλιστρο (βλέπε τους Goovaerts et al. (1984)). Επιπλέον, σε ορισμένες περιπτώσεις, η χρήση της ευελιξίας για τα σταθμισμένα ασφάλιστρα μας δίνει μονοκόρυφα ασφάλιστρα ως προς την παράμετρο, που περιλαμβάνεται στη σταθμισμένη συνάρτηση και μπορεί να εφαρμοστεί για ένα εφικτό συμβόλαιο. Εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας στο ασφάλιστρο Kampfs και στη προσδοκία ουράς υπό συνθήκη διερευνώντας δύο μονοκόρυφα ασφάλιστρα, δίνοντας επίσης ορισμένες μαθηματικές ιδιότητες.

Υποθέτουμε ότι κάθε εφικτό συμβόλαιο ικανοποιεί την ανισωτική σχέση $\mathbb{E}(X) \leq \Pi(X) \leq \tilde{\Pi}(X)$, στην οποία η συνάρτηση $\tilde{\Pi}(X)$ αποτυπώνει τη μέγιστη αμοιβή του ασφαλιστρου, για την οποία ο αγοραστής είναι διατεθειμένος να πληρώσει, για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε Embrechts (2000), Dickson (2005) και Asimit et al. (2017). Θεωρούμε ότι $\Pi(X) = \Pi_\alpha(X)$, όπου $\alpha > 0$ η παράμετρος επιβάρυνσης (loading parameter). Στην περίπτωση που η συνάρτηση $\Pi_\alpha(X)$ είναι αύξουσα ως προς α τότε μπορεί να προκύψει ένα εφικτό συμβόλαιο όταν $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Pi_\alpha(X) = \mathbb{E}(X)$ και $\tilde{\Pi}(X) = \Pi_{\tilde{\alpha}}(X)$ με $0 < \alpha < \tilde{\alpha}$. Η μονοτονία ως προς α της συνάρτησης $\Pi_\alpha(X)$ είναι γνωστή ως loading monotonicity και έχει μελετηθεί στην εργασία των Sendov et al. (2011). Στη δική μας μεθοδολογία, κατασκευάζουμε μη μονότονα, μονοκόρυφα ασφάλιστρα ως προς την παράμετρο α . Συγκεκριμένα, εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας στο ασφάλιστρο $\Pi_\alpha(X)$, το οποίο είναι αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $(0, \tilde{\alpha})$ και φθίνουσα στο διάστημα $(\tilde{\alpha}, \infty)$, με $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Pi_\alpha(X) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \Pi_\alpha(X) = \mathbb{E}(X)$. Ένα πλεονέκτημα της μεθοδολογίας μας είναι ότι για $\alpha = \tilde{\alpha}$ μεγιστοποιείται το ασφάλιστρο $\Pi_\alpha(X)$, δηλαδή, $\max_{\alpha > 0} \Pi_\alpha(X) = \Pi_{\tilde{\alpha}}(X) < \infty$.

Το ασφάλιστρο που πρότεινουν οι Goovaerts et al. (2001) δίνεται από τη σχέση

$$\Pi^{GDK}(X, \theta) = \mathbb{E}(X) + \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{E}(X) + \theta} \quad (4.1)$$

όπου $\theta > 0$ είναι μία παράμετρος ευελιξίας. Μία ισοδύναμη μορφή της σχέσης (4.1) είναι,

$$\begin{aligned}\Pi^{GDK}(X, \theta) &= \mathbb{E}(X) + \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{E}(X) + \theta} \\ &= \frac{\mathbb{E}(X)(\mathbb{E}(X) + \theta) + \mathbb{V}(X)}{\mathbb{E}(X) + \theta} \\ &= \frac{\mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(X) + \theta} \left(\mathbb{E}(X) + \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{E}(X)} \right) + \frac{\theta}{\mathbb{E}(X) + \theta} \mathbb{E}(X),\end{aligned}$$

η οποία είναι μία μείξη του τροποποιημένου ασφαλιστρού της διακύμανσης και του καθαρού ασφαλιστρού, με βάρη $\mathbb{E}(X)/(\mathbb{E}(X) + \theta)$ και $\theta/(\mathbb{E}(X) + \theta)$ αντίστοιχα. Επιπλέον, το ασφαλιστρού $\Pi^{GDK}(X, \theta)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς την παράμετρο θ , με οριακές τιμές

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi^{GDK}(X, \theta) = \mathbb{E}(X) + \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{E}(X)} \quad \text{και} \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} \Pi^{GDK}(X, \theta) = \mathbb{E}(X).$$

Επομένως, για κάθε θ ισχύει

$$\mathbb{E}(X) \leq \Pi^{GDK}(X, \theta) \leq \mathbb{E}(X) + \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{E}(X)},$$

δηλαδή το ασφαλιστρού $\Pi^{GDK}(X, \theta)$ παίρνει τιμές μεταξύ του καθαρού ασφαλιστρού και του τροποποιημένου ασφαλιστρού της διακύμανσης.

Αρχικά, χρησιμοποιώντας την παράμετρο ευελιξίας θ , εισάγουμε και μελετάμε την κλάση ευέλικτων σταθμισμένων ασφαλιστρού

$$\Pi_w(X, \theta) = \frac{\mathbb{E}(X w(X)) + \theta \mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(w(X)) + \theta},$$

όπου w είναι μια αύξουσα σταθμισμένη συνάρτηση. Η παράμετρος θ είναι μια παράμετρος μείξης που δίνει ευελιξία στο ασφαλιστρού $\Pi_w(X, \theta)$. Πιο συγκεκριμένα, $\Pi_w(X, \theta)$ είναι φθίνουσα ως προς θ , $\mathbb{E}(X) \leq \Pi_w(X, \theta) \leq \Pi_w(X)$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi_w(X, \theta) = \Pi_w(X)$ και $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \Pi_w(X, \theta) = \mathbb{E}(X)$. Το ασφαλιστρού $\Pi^{GDK}(X, \theta)$ προέρχεται από τη σχέση του ευέλικτου σταθμισμένου ασφαλιστρού όταν η σταθμισμένη συνάρτηση είναι $w(x) = x$, δηλαδή το ασφαλιστρού $\Pi^{GDK}(X, \theta)$ συμπίπτει με το ευέλικτο τροποποιημένο ασφαλιστρού διακύμανσης. Για μια θετική παράμετρο c , με σταθμισμένη συνάρτηση $w(x) = c$, το ασφαλιστρού ισούται με $\Pi_w(X, \theta) = \mathbb{E}(X)$. Η αναπαράσταση του ευέλικτου σταθμισμένου ασφαλιστρού είναι ουσιαστικά μια μείξη ενός σταθμισμένου ασφαλιστρού και του καθαρού ασφαλιστρού, όπου τα βάρη της μείξης εξαρτώνται από την παράμετρο ευελιξίας θ . Ως εκ τούτου, το $\Pi^{GDK}(X, \theta)$ συμπίπτει με την αρχή του ευέλικτου τροποποιημένου ασφαλιστρού. Παρουσιάζουμε επίσης το ευέλικτο ασφαλιστρού Esscher, το ευέλικτο ασφαλιστρού Kamps και την ευέλικτη προσδοκία ουράς υπό συνθήκη.

Κατά δεύτερον, για την παράμετρο a , η οποία περιέχεται στη σταθμισμένη συνάρτηση $w(x)$, για κάθε $\theta > 0$, αναζητούμε ένα μονοκόρυφο, μη μονότονο ευέλικτο σταθμισμένο ασφαλιστρού ως προς την παράμετρο a . Για παράδειγμα, όταν έχουμε τη συνάρτηση $w(x) = w_a(x)$, αναζητούμε

ένα μοναδικό μέγιστο $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\theta)$ στο διάστημα $(0, \infty)$ (η παράμετρος $\tilde{\alpha}$ εξαρτάται από την θ) και ικανοποιεί τη σχέση $\max_{\alpha > 0} \Pi_{\alpha}(X, \theta) = \Pi_{\tilde{\alpha}}(X)$. Ως εκ τούτου, για ένα εφικτό συμβόλαιο, έχουμε $\Pi(X) = \Pi_{\alpha}(X, \theta)$ και $\tilde{\Pi}(X) = \Pi_{\tilde{\alpha}}(X)$. Χρησιμοποιώντας αυτόν τον μηχανισμό, λαμβάνουμε δύο μη μονοτονικά, μονοκόρυφα ασφάλιστρα, το ευέλικτο ασφάλιστρο Kamps και την ευέλικτη δεσμευμένη προσδοκία ουράς.

4.2 Ευελιξία σταθμισμένων ασφαλίσεων με βάση την κατασκευή της μείξης

Θεωρούμε έναν ασφαλιστικό κίνδυνο X , ο οποίος είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή, με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$, αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, συνάρτηση επιβίωσης (ή ουρά) $\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X > x)$, και μέση τιμή $\mathbb{E}(X) < \infty$. Έστω ότι η σταθμισμένη συνάρτηση $w(x)$ ικανοποιεί τη συνθήκη $\mathbb{E}(w(X)) < \infty$, τότε η σταθμισμένη τυχαία μεταβλητή X_w , με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_w(x) = \frac{w(x)}{\mathbb{E}(w(X))} f(x), \quad x > 0, \quad (4.2)$$

βλέπε Patil και Rao (1977, 1978), Gupta και Kirmani (1990), Bartoszewicz (2009). Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση $w(x)$ είναι αύξουσα ως προς x , οι Furman και Zitikis (2008) μελέτησαν την κλάση σταθμισμένων ασφαλίσεων,

$$\Pi_w(X) = \mathbb{E}(X_w) = \frac{\mathbb{E}(X w(X))}{\mathbb{E}(w(X))} = \mathbb{E}(X) + \frac{1}{\mathbb{E}(w(X))} Cov(X, w(X)), \quad (4.3)$$

βλέπε επίσης Heilmann (1989) και Kamps (1998). Για διάφορες επιλογές της συνάρτησης w , καταλήγουμε σε γνωστά ασφάλιστρα, για παράδειγμα,

(i) για $w(x) = c$ (όπου c είναι μια θετική παράμετρος), λαμβάνουμε το καθαρό ασφάλιστρο $\Pi^N(X) = \mathbb{E}(X)$,

(ii) για $w(x) = x$, λαμβάνουμε το τροποποιημένο ασφάλιστρο διακύμανσης

$$\Pi^{MV}(X) = \mathbb{E}(X) + \frac{V(X)}{\mathbb{E}(X)},$$

(iii) για $w(x) = e^{\lambda x}$ (όπου $\lambda > 0$ είναι μια θετική παράμετρος), λαμβάνουμε το ασφάλιστρο Esscher (βλέπε Bühlmann (1980))

$$\Pi_{\lambda}^E(X) = \frac{\mathbb{E}(X e^{\lambda X})}{\mathbb{E}(e^{\lambda X})},$$

(iv) για $w(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ (όπου $\lambda > 0$ είναι μια θετική παράμετρος), παίρνουμε το ασφάλιστρο Kamps

$$\Pi_{\lambda}^K(X) = \frac{\mathbb{E}(X(1 - e^{-\lambda X}))}{\mathbb{E}(1 - e^{-\lambda X})}.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την παράμετρο $\theta > 0$, θεωρούμε τη συνάρτηση βάρους $w(x, \theta) = w(x) + \theta$ για $x \geq 0$. Έστω $X_{w, \theta}$ ο σταθμισμένος κίνδυνος με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_w(x, \theta) = \frac{w(x, \theta)}{\mathbb{E}(w(X, \theta))} f(x) = \frac{w(x) + \theta}{\mathbb{E}(w(X)) + \theta} f(x), \quad x > 0. \quad (4.4)$$

Θυμίζοντας τη σχέση (4.2), μια ισοδύναμη αναπαράσταση της $f_w(x, \theta)$ είναι

$$f_w(x, \theta) = \frac{\mathbb{E}(w(X))}{\mathbb{E}(w(X)) + \theta} f_w(x) + \frac{\theta}{\mathbb{E}(w(X)) + \theta} f(x). \quad (4.5)$$

Όταν η συνάρτηση $w(x)$ είναι αύξουσα, συνεπάγεται ότι $f_w(x, \theta)/f(x)$ είναι αύξουσα ως προς x , ενώ $f_w(x, \theta)/f_w(x)$ είναι φθίνουσα ως προς x . Ως εκ τούτου, παίρνουμε $X \leq_{lr} X_{w, \theta} \leq_{lr} X_w$, όπου \leq_{lr} είναι στοχαστική διάταξη στον λόγο πιθανοφάνειας (βλέπε Ορισμός 1.8). Ως αποτέλεσμα, παίρνουμε $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(X_{w, \theta}) \leq \mathbb{E}(X_w)$, ή ισοδύναμα,

$$\mathbb{E}(X) \leq \frac{\mathbb{E}(X w(X)) + \theta \mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(w(X)) + \theta} \leq \frac{\mathbb{E}(X w(X))}{\mathbb{E}(w(X))}. \quad (4.6)$$

Στη συνέχεια, μελετάμε την κλάση ευέλικτων σταθμισμένων ασφαλιστρών

$$\Pi_w(X, \theta) = \mathbb{E}(X_{w, \theta}) = \frac{\mathbb{E}(X w(X)) + \theta \mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(w(X)) + \theta}. \quad (4.7)$$

Μερικά ασφάλιστρα της οικογένειας ευέλικτων σταθμισμένων ασφαλιστρών στη σχέση (4.7) είναι τα ακόλουθα:

(i) Για $w(x) = c > 0$, παίρνουμε το καθαρό ασφάλιστρο $\Pi^N(X) = \mathbb{E}(X)$.

(ii) Για $w(x) = x$, λαμβάνουμε το ευέλικτο τροποποιημένο ασφάλιστρο διακύμανσης (βλέπε επίσης τη σχέση (4.1))

$$\Pi^{FMV}(X, \theta) = \frac{\mathbb{E}(X^2) + \theta \mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(X) + \theta} = \mathbb{E}(X) + \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{E}(X) + \theta} = \Pi^{GDK}(X, \theta),$$

δηλαδή, το ευέλικτο τροποποιημένο ασφάλιστρο της διακύμανσης είναι το ασφάλιστρο που πρότειναν οι Goovaerts et al. (2001).

(iii) Για $w(x) = e^{\lambda x}$ ($\lambda > 0$), έχουμε το ευέλικτο ασφάλιστρο Esscher

$$\Pi_{\lambda}^{FE}(X) = \frac{\mathbb{E}(X e^{\lambda X}) + \theta \mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(e^{\lambda X}) + \theta}. \quad (4.8)$$

(iv) Για $w(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ($\lambda > 0$), παίρνουμε το ευέλικτο ασφάλιστρο Kamps

$$\Pi_{\lambda}^{FK}(X) = \frac{\mathbb{E}(X (1 - e^{-\lambda X})) + \theta \mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(1 - e^{-\lambda X}) + \theta}. \quad (4.9)$$

Παρατήρηση 4.1. Ο ορισμός της συνάρτησης πυκνότητας στη σχέση (4.4) είναι μια γενικευμένη κατανομή Lindley. Ειδικότερα, αν $\theta = 1$, $w(x) = w_1(x) = x$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$ ($\lambda > 0$), και $\mathbb{E}(X) = \lambda^{-1}$, παίρνουμε τη συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής Lindley (βλέπε Lindley (1958))

$$f_{w_1}(x, 1) = \frac{\lambda^2(x+1)e^{-\lambda x}}{\lambda+1}, \quad x > 0.$$

Η κατανομή Lindley είναι μια μείξη εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ και μιας κατανομής Γάμμα με παραμέτρους 2 και λ , δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$f_{w_1}(x, 1) = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \lambda e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda + 1} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Στην ακόλουθη πρόταση, δίνουμε ένα άνω και κάτω φράγμα για το ασφάλιστρο $\Pi_w(X, \theta)$, υπολογίζουμε ασυμπτωτικά αποτελέσματα, την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο ως προς την παράμετρο θ .

Πρόταση 4.1. Το ασφάλιστρο $\Pi_w(X, \theta)$ ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i)

$$\mathbb{E}(X) \leq \Pi_w(X, \theta) \leq \Pi_w(X).$$

(ii)

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi_w(X, \theta) = \Pi_w(X) \quad \text{και} \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} \Pi_w(X, \theta) = \mathbb{E}(X).$$

(iii)

$$\frac{d}{d\theta} \Pi_w(X, \theta) = -\frac{\text{Cov}(X, w(X))}{(\mathbb{E}(w(X)) + \theta)^2} \leq 0.$$

(iv)

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \Pi_w(X, \theta) = 2 \frac{\text{Cov}(X, w(X))}{(\mathbb{E}(w(X)) + \theta)^3} \geq 0.$$

Απόδειξη. Τα αποτελέσματα (i) – (iv) επαληθεύονται άμεσα. □

Στη συνέχεια μελετάμε τα παραδείγματα των Furman και Zitikis (2008) με σκοπό να παρουσιάσουμε την ευελιξία σταθμισμένων ασφαλιστρων, όταν η σταθμισμένη συνάρτηση $w(x)$ ισούται με $w_c(x) := x^c$ για κάποια σταθερά $c \in (0, 1]$.

Παράδειγμα 4.1. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί μια κατανομή Γάμμα με παραμέτρους $a > 0$ και $b > 0$, συμβολίζουμε με $X \sim Ga(a, b)$ ή $F \sim Ga(a, b)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}, \quad x > 0,$$

όπου $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$ είναι μια Γάμμα συνάρτηση. Τότε, λαμβάνουμε

$$\mathbb{E}(X^c) = \frac{\Gamma(a+c)}{b^c \Gamma(a)}$$

και, από τη σχέση (4.5), έχουμε

$$F_{w_c}(x, \theta) \sim \frac{\mathbb{E}(X^c)}{\mathbb{E}(X^c) + \theta} Ga(a+c, b) + \frac{\theta}{\mathbb{E}(X^c) + \theta} Ga(a, b).$$

Μετά από μερικούς υπολογισμούς, παίρνουμε

$$\Pi_{w_c}(X, \theta) = \frac{\Gamma(a+c+1) + \theta ab^c \Gamma(a)}{b(\Gamma(a+c) + \theta b^c \Gamma(a))}.$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi_{w_c}(X, \theta) = \frac{a+c}{b} = \Pi_{w_c}(X)$$

και

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \Pi_{w_c}(X, \theta) = \frac{a}{b} = \mathbb{E}(X).$$

Παράδειγμα 4.2. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί μια Λογαριθμοκανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 0$, συμβολίζουμε με $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ ή $F \sim LN(\mu, \sigma^2)$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x) - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad x > 0.$$

Τότε, παίρνουμε

$$\mathbb{E}(X^c) = \exp\left\{c\mu + \frac{c^2\sigma^2}{2}\right\}$$

και, από τη σχέση (4.5), έχουμε

$$F_{w_c}(x, \theta) \sim \frac{\mathbb{E}(X^c)}{\mathbb{E}(X^c) + \theta} \text{LogN}(\mu + c\sigma^2, \sigma^2) + \frac{\theta}{\mathbb{E}(X^c) + \theta} \text{LogN}(\mu, \sigma^2).$$

Ύστερα από μερικούς υπολογισμούς, λαμβάνουμε

$$\Pi_{w_c}(X, \theta) = \frac{\exp\left\{(c+1)\mu + \frac{(c+1)^2\sigma^2}{2}\right\} + \theta \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}}{\exp\left\{c\mu + \frac{c^2\sigma^2}{2}\right\} + \theta}.$$

Επιπλέον,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi_{w_c}(X, \theta) = \exp\left\{\mu + \left(c + \frac{1}{2}\right)\sigma^2\right\} = \Pi_{w_c}(X)$$

και

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \Pi_{w_c}(X, \theta) = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\} = \mathbb{E}(X).$$

Παράδειγμα 4.3. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί μια κατανομή Pareto τύπου I με παραμέτρους $a > c+1$ και $b > 0$, συμβολίζουμε με $X \sim \text{Par}(a, b)$ ή $F \sim \text{Par}(a, b)$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{ab^a}{x^{a+1}}, \quad x > b.$$

Τότε, παίρνουμε

$$\mathbb{E}(X^c) = \frac{b^c a}{a-c}$$

και, από τη σχέση (4.5), παίρνουμε

$$F_{w_c}(x, \theta) \sim \frac{\mathbb{E}(X^c)}{\mathbb{E}(X^c) + \theta} \text{Par}(a-c, b) + \frac{\theta}{\mathbb{E}(X^c) + \theta} \text{Par}(a, b).$$

Μετά από μερικούς υπολογισμούς, παίρνουμε

$$\Pi_{w_c}(X, \theta) = \frac{ba(a-c)(b^c(a-1) + \theta(a-c-1))}{(b^c a + \theta(a-c))(a-1)(a-c-1)}.$$

Επιπλέον,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi_{w_c}(X, \theta) = \frac{b(a-c)}{a-c-1} = \Pi_{w_c}(X)$$

και

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \Pi_{w_c}(X, \theta) = \frac{ba}{a-1} = \mathbb{E}(X).$$

4.2.1 Μερικές γενικευμένες και εκτεταμένες ιδιότητες

Το ασφάλιστρο ικανοποιεί τις ιδιότητες της θετικής ομοιογένειας, της μεταβλητότητας και της προσθετικότητας. Για μια αρχή υπολογισμού ασφάλιστρου, υπενθυμίζουμε τις ιδιότητες της θετικής ομοιογένειας, της μεταβλητότητας και της προσθετικότητας (βλέπε Goovaerts et al. (1984)):

(i) $\Pi(aX) = a\Pi(X)$, όπου $a > 0$ (θετική ομοιογένεια)

(ii) $\Pi(X+b) = \Pi(X) + b$, όπου $b > 0$ (μεταθετικότητα)

(iii) $\Pi(X+Y) = \Pi(X) + \Pi(Y)$, όπου X και Y είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους (προσθετικότητα).

Προκειμένου να διερευνήσουμε ανάλογες ιδιότητες για τα ασφάλιστρα $\Pi^{FMV}(X, \theta)$, $\Pi_\lambda^{FE}(X, \theta)$ και $\Pi_\lambda^{FK}(X, \theta)$, παρέχουμε τους ακόλουθους ορισμούς γενικεύοντας/επεκτείνοντας τις αναφερόμενες ιδιότητες. Το κίνητρό μας προέρχεται από ορισμένες γενικευμένες ιδιότητες του Ελβετικού ασφάλιστρου (Swiss premium), βλέπε Goovaerts et al. (1984).

Ορισμός 4.1. Το ευέλικτο σταθμισμένο ασφάλιστρο που δίνεται στη σχέση (4.7), λέμε ότι ικανοποιεί

(i) τη γενικευμένη θετική ομοιογένεια αν

$$\Pi_w(aX, \theta) = a\Pi_w(X, \theta_1),$$

όπου $a > 0$ και $\theta_1 = \theta_1(\theta) > 0$ με $\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta_1 = 0$.

(ii) τη γενικευμένη μεταθετικότητα αν

$$\Pi_w(X+b, \theta) = \Pi_w(X, \theta_1) + b,$$

όπου $b > 0$ και $\theta_1 = \theta_1(\theta) > 0$ με $\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta_1 = 0$.

(iii) τη γενικευμένη προσθετικότητα αν

$$\Pi_w(X+Y, \theta) = \Pi_w(X, \theta_1) + \Pi_w(Y, \theta_2),$$

όπου οι κίνδυνοι X και Y είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους, $\theta_1 = \theta_1(\theta) > 0$ και $\theta_2 = \theta_2(\theta) > 0$ με $\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta_1 = \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta_2 = 0$.

Ορισμός 4.2. Το ευέλικτο σταθμισμένο ασφάλιστρο που δίνεται στη σχέση (4.7), λέμε ότι ικανοποιεί:

(i) την εκτεταμένη θετική ομοιογένεια αν

$$\Pi_w(aX, \theta) = a \Pi_w(X, \theta_1),$$

όπου $a > 0$ και $\theta_1 = \theta_1(\theta) \mu\epsilon \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta_1 > 0$.

(ii) την εκτεταμένη μεταθετικότητα αν

$$\Pi_w(X + b, \theta) = \Pi_w(X, \theta_1) + b,$$

όπου $b > 0$ και $\theta_1 = \theta_1(\theta) \mu\epsilon \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta_1 > 0$.

(iii) την εκτεταμένη προσθετικότητα αν

$$\Pi_w(X + Y, \theta) = \Pi_w(X, \theta_1) + \Pi_w(Y, \theta_2),$$

όπου οι κίνδυνοι X και Y είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους, $\theta_1 = \theta_1(\theta)$ και $\theta_2 = \theta_2(\theta) \mu\epsilon \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta_1 > 0$ και $\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta_2 > 0$.

Όταν η αρχή του ευέλκτου σταθμισμένου ασφαλιστρού ικανοποιεί μια γενικευμένη ιδιότητα, τότε δεν ικανοποιεί την αντίστοιχη εκτεταμένη ιδιότητα και το αντίστροφο. Στη συνέχεια, μελετάμε τις παραπάνω ιδιότητες για τα $\Pi^{FMV}(X, \theta)$, $\Pi_\lambda^{FE}(X, \theta)$ και $\Pi_\lambda^{FK}(X, \theta)$.

Πρόταση 4.2. Το ασφάλιστρο $\Pi^{FMV}(X)$ που δίνεται στη σχέση (4.1) ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\Pi^{FMV}(aX, \theta) = a \Pi^{FMV}(X, \theta/a)$, όπου $a > 0$.

(ii) $\Pi^{FMV}(X + b, \theta) = \Pi^{FMV}(X, \theta + b) + b$, όπου $b > 0$.

(iii) $\Pi^{FMV}(X + Y, \theta) = \Pi^{FMV}(X, \theta + \mathbb{E}(Y)) + \Pi^{FMV}(Y, \theta + \mathbb{E}(X))$, όπου οι κίνδυνοι X και Y είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους.

Απόδειξη. (i) Για $a > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \Pi^{FMV}(aX, \theta) &= \mathbb{E}(aX) + \frac{\mathbb{V}(aX)}{\mathbb{E}(aX) + \theta} \\ &= a \left(\mathbb{E}(X) + \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{E}(X) + \theta/a} \right) \\ &= a \Pi^{FMV}(X, \theta/a). \end{aligned}$$

(ii) Για $b > 0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Pi^{FMV}(X + b, \theta) &= \mathbb{E}(X + b) + \frac{\mathbb{V}(X + b)}{\mathbb{E}(X + b) + \theta} \\ &= \mathbb{E}(X) + b + \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{E}(X) + b + \theta} \\ &= \Pi^{FMV}(X, \theta + b) + b. \end{aligned}$$

(iii) Έστω οι κίνδυνοι X και Y , οι οποίοι είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Τότε

$$\begin{aligned}\Pi^{FMV}(X+Y, \theta) &= \mathbb{E}(X+Y) + \frac{\mathbb{V}(X+Y)}{\mathbb{E}(X+Y) + \theta} \\ &= \left(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) + \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) + \theta} + \frac{\mathbb{V}(Y)}{\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) + \theta} \right) \\ &= \Pi^{FMV}(X, \theta + \mathbb{E}(Y)) + \Pi^{FMV}(Y, \theta + \mathbb{E}(X)).\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 4.2. Από την Πρόταση 4.2, προκύπτει ότι το $\Pi^{FMV}(X, \theta)$ ικανοποιεί την γενικευμένη θετική ομοιογένεια (για $\theta_1 = \theta/a$), την εκτεταμένη μεταθετικότητα (για $\theta_1 = \theta + b$) και την εκτεταμένη προσθετικότητα (για $\theta_1 = \theta + \mathbb{E}(Y)$ και $\theta_2 = \theta + \mathbb{E}(X)$).

Πρόταση 4.3. Το ασφάλιστρο $\Pi_\lambda^{FE}(X, \theta)$ που δίνεται στη σχέση (4.8) ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\Pi_\lambda^{FE}(aX, \theta) = a \Pi_{a\lambda}^{FE}(X, \theta)$, όπου $a > 0$.

(ii) $\Pi_\lambda^{FE}(X + b, \theta) = \Pi_\lambda^{FE}(X, \theta/e^{\lambda b}) + b$, όπου $b > 0$.

(iii) $\Pi_\lambda^{FE}(X + Y, \theta) = \Pi_\lambda^{FE}(X, \theta/\mathbb{E}(e^{\lambda Y})) + \Pi_\lambda^{FE}(Y, \theta/\mathbb{E}(e^{\lambda X}))$, όπου X και Y είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους.

Απόδειξη. (i) Για $a > 0$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\Pi_\lambda^{FE}(aX, \theta) &= \frac{\mathbb{E}(aX e^{\lambda aX}) + \theta \mathbb{E}(aX)}{\mathbb{E}(e^{\lambda aX}) + \theta} \\ &= a \frac{\mathbb{E}(X e^{\lambda aX}) + \theta \mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(e^{\lambda aX}) + \theta} \\ &= a \Pi_{a\lambda}^{FE}(X, \theta).\end{aligned}$$

(ii) Για $b > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\Pi_\lambda^{FE}(X + b, \theta) &= \frac{\mathbb{E}((X + b) e^{\lambda(X+b)}) + \theta \mathbb{E}(X + b)}{\mathbb{E}(e^{\lambda(X+b)}) + \theta} \\ &= \frac{\mathbb{E}(X e^{\lambda X}) e^{\lambda b} + b \mathbb{E}(e^{\lambda X}) e^{\lambda b} + \theta \mathbb{E}(X) + \theta b}{\mathbb{E}(e^{\lambda X}) e^{\lambda b} + \theta} \\ &= \frac{\mathbb{E}(X e^{\lambda X}) + b \mathbb{E}(e^{\lambda X}) + (\theta \mathbb{E}(X)/e^{\lambda b}) + (\theta b/e^{\lambda b})}{\mathbb{E}(e^{\lambda X}) + (\theta/e^{\lambda b})} \\ &= \Pi_\lambda^{FE}(X, \theta/e^{\lambda b}) + b.\end{aligned}$$

(iii) Έστω οι κίνδυνοι X και Y είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Τότε

$$\begin{aligned}
\Pi_{\lambda}^{FE}(X + Y, \theta) &= \frac{\mathbb{E}((X + Y) e^{\lambda(X+Y)}) + \theta \mathbb{E}(X + Y)}{\mathbb{E}(e^{\lambda(X+Y)}) + \theta} \\
&= \frac{\mathbb{E}(X e^{\lambda X}) \mathbb{E}(e^{\lambda Y}) + \mathbb{E}(e^{\lambda X}) \mathbb{E}(Y e^{\lambda Y}) + \theta \mathbb{E}(X) + \theta \mathbb{E}(Y)}{\mathbb{E}(e^{\lambda X}) \mathbb{E}(e^{\lambda Y}) + \theta} \\
&= \frac{\mathbb{E}(X e^{\lambda X}) \mathbb{E}(e^{\lambda Y}) + \theta \mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(e^{\lambda X}) \mathbb{E}(e^{\lambda Y}) + \theta} + \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda X}) \mathbb{E}(Y e^{\lambda Y}) + \theta \mathbb{E}(Y)}{\mathbb{E}(e^{\lambda X}) \mathbb{E}(e^{\lambda Y}) + \theta} \\
&= \frac{\mathbb{E}(X e^{\lambda X}) + (\theta \mathbb{E}(X) / \mathbb{E}(e^{\lambda Y}))}{\mathbb{E}(e^{\lambda X}) + (\theta / \mathbb{E}(e^{\lambda Y}))} + \frac{\mathbb{E}(Y e^{\lambda Y}) + (\theta \mathbb{E}(Y) / \mathbb{E}(e^{\lambda X}))}{\mathbb{E}(e^{\lambda Y}) + (\theta / \mathbb{E}(e^{\lambda X}))} \\
&= \Pi_{\lambda}^{FE}(X, \theta / \mathbb{E}(e^{\lambda Y})) + \Pi_{\lambda}^{FE}(Y, \theta / \mathbb{E}(e^{\lambda X})).
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 4.3. Από την Πρόταση 4.3, έπεται ότι το $\Pi^{FE}(X, \theta)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες γενικευμένη μεταθετικότητα (για $\theta_1 = \theta / e^{\lambda b}$) και γενικευμένη προσθετικότητα (για $\theta_1 = \theta / \mathbb{E}(e^{\lambda Y})$ και $\theta_2 = \theta / \mathbb{E}(e^{\lambda X})$), ενώ δεν ικανοποιεί τη γενικευμένη / εκτεταμένη θετική ομοιογένεια.

Πρόταση 4.4. Το ασφάλιστρο $\Pi_{\lambda}^{FK}(X, \theta)$ που δίνεται στη σχέση (4.9) ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\Pi_{\lambda}^{FK}(aX, \theta) = a \Pi_{a\lambda}^{FK}(X, \theta)$, όπου $a > 0$.

(ii) $\Pi_{\lambda}^{FK}(X + b, \theta) = \Pi_{\lambda}^{FK}(X, e^{\lambda b}(1 + \theta) - 1) + b$, όπου $b > 0$.

(iii) $\Pi_{\lambda}^{FK}(X + Y, \theta) = \Pi_{\lambda}^{FK}(X, \theta_1) + \Pi_{\lambda}^{FK}(Y, \theta_2)$, όπου οι κίνδυνοι X και Y είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους,

$$\theta_1 = \frac{1 + \theta - \mathbb{E}(e^{-\lambda Y})}{\mathbb{E}(e^{-\lambda Y})} \quad \text{και} \quad \theta_2 = \frac{1 + \theta - \mathbb{E}(e^{-\lambda X})}{\mathbb{E}(e^{-\lambda X})}.$$

Απόδειξη. Προφανώς μία εναλλακτική αναπαράσταση του ασφαλίστρου $\Pi_{\lambda}^{FK}(X, \theta)$ στη σχέση (4.9) είναι

$$\Pi_{\lambda}^{FK}(X, \theta) = \frac{(1 + \theta) \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X e^{-\lambda X})}{1 + \theta - \mathbb{E}(e^{-\lambda X})}. \quad (4.10)$$

Για λόγους απλότητας, στην απόδειξη της πρότασης, χρησιμοποιούμε τη σχέση (4.10).

(i) Για $a > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\Pi_{\lambda}^{FK}(aX, \theta) &= \frac{(1 + \theta) \mathbb{E}(aX) - \mathbb{E}(aX e^{-\lambda aX})}{1 + \theta - \mathbb{E}(e^{-\lambda aX})} \\
&= a \frac{(1 + \theta) \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X e^{-\lambda aX})}{1 + \theta - \mathbb{E}(e^{-\lambda aX})} \\
&= a \Pi_{a\lambda}^{FK}(X, \theta).
\end{aligned}$$

(ii) Για $b > 0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\Pi_{\lambda}^{FK}(X + b, \theta) &= \frac{(1 + \theta) \mathbb{E}(X + b) - \mathbb{E}[(X + b) e^{-\lambda(X+b)}]}{1 + \theta - \mathbb{E}[e^{-\lambda(X+b)}]} \\
&= \frac{(1 + \theta) \mathbb{E}(X) + (1 + \theta) b - e^{-\lambda b} \mathbb{E}(X e^{-\lambda X}) - b e^{-\lambda b} \mathbb{E}(e^{-\lambda X})}{1 + \theta - e^{-\lambda b} \mathbb{E}(e^{-\lambda X})} \\
&= \frac{(1 + \theta) \mathbb{E}(X) - e^{-\lambda b} \mathbb{E}(X e^{-\lambda X})}{1 + \theta - e^{-\lambda b} \mathbb{E}(e^{-\lambda X})} + b \\
&= \Pi_{\lambda}^{FK}(X, e^{\lambda b}(1 + \theta) - 1) + b.
\end{aligned}$$

(iii) Έστω οι κίνδυνοι X και Y είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Τότε

$$\begin{aligned}
\Pi_{\lambda}^{FK}(X + Y, \theta) &= \frac{(1 + \theta) \mathbb{E}(X + Y) - \mathbb{E}[(X + Y) e^{-\lambda(X+Y)}]}{1 + \theta - \mathbb{E}[e^{-\lambda(X+Y)}]} \\
&= \frac{(1 + \theta) \mathbb{E}(X) + (1 + \theta) \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X e^{-\lambda X}) \mathbb{E}(e^{-\lambda Y}) - \mathbb{E}(e^{-\lambda X}) \mathbb{E}(Y e^{-\lambda Y})}{1 + \theta - \mathbb{E}(e^{-\lambda X}) \mathbb{E}(e^{-\lambda Y})} \\
&= \frac{(1 + \theta) \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X e^{-\lambda X}) \mathbb{E}(e^{-\lambda Y})}{1 + \theta - \mathbb{E}(e^{-\lambda X}) \mathbb{E}(e^{-\lambda Y})} + \frac{(1 + \theta) \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(e^{-\lambda X}) \mathbb{E}(Y e^{-\lambda Y})}{1 + \theta - \mathbb{E}(e^{-\lambda X}) \mathbb{E}(e^{-\lambda Y})} \\
&= \frac{(1 + \theta_1) \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X e^{-\lambda X})}{1 + \theta_1 - \mathbb{E}(e^{-\lambda X})} + \frac{(1 + \theta_2) \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y e^{-\lambda Y})}{1 + \theta_2 - \mathbb{E}(e^{-\lambda Y})} \\
&= \Pi_{\lambda}^{FK}(X, \theta_1) + \Pi_{\lambda}^{FK}(Y, \theta_2),
\end{aligned}$$

όπου θ_1 και θ_2 δίνονται στην εκφώνηση της πρότασης. \square

Παρατήρηση 4.4. Από την Πρόταση 4.4 έπεται ότι το ασφάλιστρο $\Pi^{FK}(X, \theta)$ ικανοποιεί την εκτεταμένη μεταθετικότητα (για $\theta_1 = e^{\lambda b}(1 + \theta) - 1$) και την εκτεταμένη προσθετικότητα (για θ_1, θ_2 δίνεται εν μέρει από τη σχέση (iii) της Πρότασης 4.4), ενώ δεν ικανοποιεί τη γενικευμένη / εκτεταμένη θετική ομοιογένεια.

4.3 Μεγιστοποίηση των σταθμισμένων ασφαλίσεων

Σε αυτή την ενότητα μελετάμε τη μεγιστοποίηση του ευέλικτου ασφαλίστρου Kamps και της ευέλικτης δεσμευμένης προσδοκίας ουράς.

4.3.1 Ευέλικτο ασφάλιστρο Kamps

Θεωρούμε το ευέλικτο ασφάλιστρο Kamps (βλέπε τη σχέση (4.9)). Για λόγους ευκολίας, σε αυτή την ενότητα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\Pi_{\lambda}(X, \theta)$ (όπου $\lambda > 0$) αντί για $\Pi_{\lambda}^{FK}(X, \theta)$. Παρατηρούμε ότι το ασφάλιστρο $\Pi_{\lambda}(X, \theta)$ είναι μια επέκταση του ασφαλίστρου Kamps, όπου

$$\Pi_{\lambda}(X) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi_{\lambda}(X, \theta) = \frac{\mathbb{E}(X(1 - e^{-\lambda X}))}{\mathbb{E}(1 - e^{-\lambda X})}.$$

Ωστόσο, μια σημαντική διαφορά μεταξύ του ασφαλίστρου Kamps (για $\theta \rightarrow 0$) και του $\Pi_{\lambda}(X, \theta)$ (για $\theta > 0$) είναι η ακόλουθη. Το ασφάλιστρο Kamps (βλέπε Kamps (1998)) είναι φθίνουσα ως

προς λ , ενώ το ευέλκτο ασφαλίστρο Kamps είναι μη μονότονο ως προς λ . Επιπλέον,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Pi_\lambda(X) = \mathbb{E}(X) + \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{E}(X)} \quad \text{και} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Pi_\lambda(X) = \mathbb{E}(X),$$

ενώ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Pi_\lambda(X, \theta) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Pi_\lambda(X, \theta) = \mathbb{E}(X). \quad (4.11)$$

Στο ακόλουθο λήμμα, παρέχουμε ένα αποτέλεσμα για την πρώτη παράγωγο του ασφαλίστρου $\Pi_\lambda(X, \theta)$ ως προς την παράμετρο λ .

Λήμμα 4.1. *Η πρώτη παράγωγος του ασφαλίστρου $\Pi_\lambda(X, \theta)$ ως προς την παράμετρο λ είναι*

$$\frac{d}{d\lambda} \Pi_\lambda(X, \theta) = \frac{1}{\mathbb{E}(1 - e^{-\lambda X}) + \theta} (\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X}) - \Pi_\lambda(X, \theta) \mathbb{E}(X e^{-\lambda X})).$$

Απόδειξη. Από τη σχέση (4.9), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \Pi_\lambda(X, \theta) &= \frac{\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X}) (\mathbb{E}(1 - e^{-\lambda X}) + \theta) - (\mathbb{E}(X(1 - e^{-\lambda X})) + \theta \mathbb{E}(X)) \mathbb{E}(X e^{-\lambda X})}{(\mathbb{E}(1 - e^{-\lambda X}) + \theta)^2} \\ &= \frac{\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X})}{\mathbb{E}(1 - e^{-\lambda X}) + \theta} - \Pi_\lambda(X, \theta) \frac{\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})}{\mathbb{E}(1 - e^{-\lambda X}) + \theta}. \end{aligned}$$

□

Λήμμα 4.2. *Το πηλίκο $\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X})/\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})$, είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς λ και*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X})}{\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})} = 0.$$

Απόδειξη. Έστω X_{ζ_λ} , είναι μια σταθμισμένη τυχαία μεταβλητή του X , όπου $\zeta_\lambda(x) = x e^{-\lambda x}$. Τότε:

$$\mathbb{E}(X_{\zeta_\lambda}) = \frac{\mathbb{E}(X \zeta_\lambda(X))}{\mathbb{E}(\zeta_\lambda(X))} \quad \text{και} \quad \mathbb{E}(X_{\zeta_\lambda}^2) = \frac{\mathbb{E}(X^2 \zeta_\lambda(X))}{\mathbb{E}(\zeta_\lambda(X))}.$$

Με την παραγωγή του λόγου $\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X})/\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})$ ως προς την παράμετρο λ , έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \frac{\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X})}{\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})} &= -\frac{\mathbb{E}(X^3 e^{-\lambda X})}{\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})} + \left(\frac{\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X})}{\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})} \right)^2 \\ &= -\mathbb{E}(X_{\zeta_\lambda}^2) + (\mathbb{E}(X_{\zeta_\lambda}))^2 = -\mathbb{V}(X_{\zeta_\lambda}) < 0. \end{aligned}$$

Επομένως ο λόγος $\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X})/\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς το λ . Επιπλέον, από την απόδειξη του Θεωρήματος 2 των Yang και Tian (2019), προκύπτει ότι για $\lambda \rightarrow \infty$ ο λόγος $\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X})/\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})$ τείνει στο μηδέν. □

Παρατήρηση 4.5. Μια εναλλακτική απόδειξη ότι ο λόγος $\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X})/\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς λ , προκύπτει χρησιμοποιώντας έναν κανόνα μονοτονίας για τον λόγο των δύο μετασχηματισμών Laplace και το Λήμμα 4 των Yang και Tian (2017).

Λήμμα 4.3. Για σταθερό $\theta > 0$, η εξίσωση (ως προς λ)

$$\Pi_\lambda(X, \theta) = \frac{\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X})}{\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})}, \quad (4.12)$$

έχει μοναδική λύση $\tilde{\lambda}$ η οποία μεγιστοποιεί τη συνάρτηση $\lambda \rightarrow \Pi_\lambda(X, \theta)$, δηλαδή,

$$\max_{\lambda > 0} \Pi_\lambda(X, \theta) = \Pi_{\tilde{\lambda}}(X, \theta) = \frac{\mathbb{E}(X^2 e^{-\tilde{\lambda} X})}{\mathbb{E}(X e^{-\tilde{\lambda} X})}.$$

Απόδειξη. Θυμίζοντας ότι $\Pi_\lambda(X, \theta) \geq \mathbb{E}(X)$ και την (4.11), προκύπτει ότι η συνάρτηση $\lambda \rightarrow \Pi_\lambda(X, \theta)$ παρουσιάζει τουλάχιστον ένα τοπικό μέγιστο. Συμβολίζουμε αυτό το σημείο με $\tilde{\lambda}$. Επιπλέον, έχουμε

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X})}{\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})} = \frac{\mathbb{E}(X^2)}{\mathbb{E}(X)} > \mathbb{E}(X)$$

και από το Λήμμα 4.2,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X})}{\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})} = 0 < \mathbb{E}(X).$$

Ως εκ τούτου, σύμφωνα με τη σχέση (4.11), υπάρχει τουλάχιστον μια λύση $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_1 > 0$ για την εξίσωση που δίνεται στη σχέση (4.12). Πιο συγκεκριμένα, από το Λήμμα 4.1, η συνάρτηση $\lambda \rightarrow \Pi_\lambda(X, \theta)$ παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $\tilde{\lambda}_1 > 0$.

Στη συνέχεια της απόδειξης, θα δείξουμε ότι αυτή η λύση είναι μοναδική. Έστω ότι $\tilde{\lambda}_1$ δεν είναι μοναδική λύση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η $\tilde{\lambda}_1$ είναι η μικρότερη λύση. Τότε, σύμφωνα με τη σχέση (4.11), θα έχουμε τουλάχιστον τρεις λύσεις $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ τέτοιες ώστε $\tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2 < \tilde{\lambda}_3$, όπου η συνάρτηση $\lambda \rightarrow \Pi_\lambda(X, \theta)$ παρουσιάζει δύο τοπικά μέγιστα στα σημεία $\tilde{\lambda}_1$ και $\tilde{\lambda}_3$, και ένα τοπικό ελάχιστο στο σημείο $\tilde{\lambda}_2$. Έτσι, $\Pi_{\tilde{\lambda}_2}(X, \theta) < \Pi_{\tilde{\lambda}_3}(X, \theta)$, ή ισοδύναμα,

$$\frac{\mathbb{E}(X^2 e^{-\tilde{\lambda}_2 X})}{\mathbb{E}(X e^{-\tilde{\lambda}_2 X})} < \frac{\mathbb{E}(X^2 e^{-\tilde{\lambda}_3 X})}{\mathbb{E}(X e^{-\tilde{\lambda}_3 X})},$$

που έρχεται σε αντίθεση με το Λήμμα 4.2. □

Θεώρημα 4.1. Ένα άνω και κάτω φράγμα του ασφαλιστρού $\Pi_\lambda(X, \theta)$ είναι

$$\mathbb{E}(X) \leq \Pi_\lambda(X, \theta) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2 e^{-\tilde{\lambda} X})}{\mathbb{E}(X e^{-\tilde{\lambda} X})},$$

όπου $\tilde{\lambda}$ είναι μια μοναδική θετική λύση της εξίσωσης $\Pi_\lambda(X, \theta) = \mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X})/\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})$ (ως προς λ).

Απόδειξη. Για $w(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, από τη σχέση (4.6), προκύπτει το κάτω φράγμα. Το άνω φράγμα προκύπτει από το Λήμμα 4.3. □

Παράδειγμα 4.4. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί μια Εκθετική κατανομή με παράμετρο $b > 0$, δηλαδή $X \sim \text{Exp}(b)$ ή $F \sim \text{Exp}(b)$, και η συνάρτηση πυκνότητας είναι

$$f(x) = b e^{-bx}, \quad x \geq 0.$$

Τότε, έχουμε

$$\mathbb{E}(X e^{-\lambda X}) = \frac{b}{(b + \lambda)^2} \quad \text{και} \quad \mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X}) = \frac{2b}{(b + \lambda)^3},$$

και ως εκ τούτου,

$$\frac{\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X})}{\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})} = \frac{2}{b + \lambda}.$$

Επιπλέον, από τη σχέση (4.9), παίρνουμε

$$\Pi_\lambda(X, \theta) = \frac{2b\lambda + \lambda^2 + \theta b^2 + 2\theta b\lambda + \theta\lambda^2}{b(b + \lambda)(\lambda + \theta(b + \lambda))}.$$

Από τη λύση της εξίσωσης (4.12) ως προς την παράμετρο λ , συμπεραίνουμε ότι η λύση είναι

$$\tilde{\lambda} = b \sqrt{\frac{\theta}{1 + \theta}} < b.$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι

$$\frac{d\tilde{\lambda}}{d\theta} = \frac{b}{2(1 + \theta)^2} \sqrt{\frac{1 + \theta}{\theta}} > 0,$$

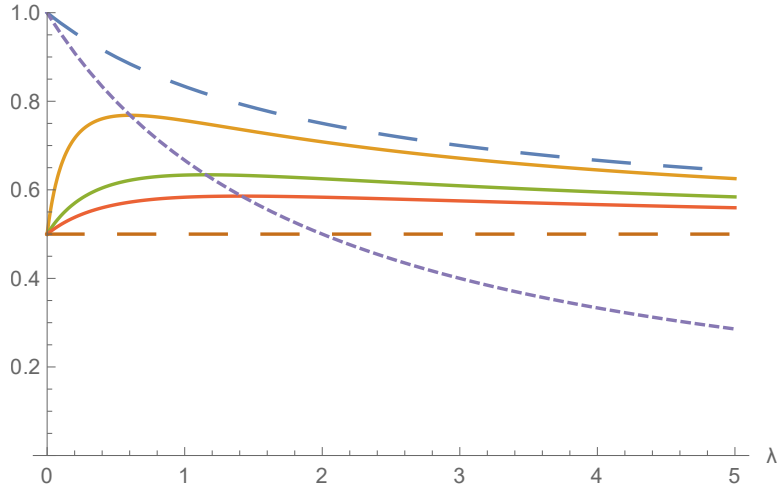
που σημαίνει ότι όσο το θ αυξάνεται, το $\tilde{\lambda}$ αυξάνεται. Για $b = 2$, στο Σχήμα 4.1, παρέχουμε το ασφάλιστρο Kamps $\Pi_\lambda(X) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi_\lambda(X, \theta)$ (η υψηλότερη διακεκομμένη γραμμή), το ευέλικτο ασφάλιστρο Kamps $\Pi_\lambda(X, \theta)$ για $\theta = 0.1, 0.5, 1$ (συνεχείς γραμμές με $\Pi_\lambda(X, 0.1) \geq \Pi_\lambda(X, 0.5) \geq \Pi_\lambda(X, 1)$), το καθαρό ασφάλιστρο $\mathbb{E}(X) = 0.5$ (με διακεκομμένη οριζόντια γραμμή) και ο λόγος $\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X})/\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})$ (διακεκομμένη γραμμή) της Εκθετικής κατανομής για $0 < \lambda \leq 5$. Παρατηρούμε ότι για διάφορες τιμές του $\theta = 0.1, 0.5, 1$, το σημείο τομής μεταξύ των $\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X})/\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})$ και $\Pi_\lambda(X, \theta)$, είναι μοναδικό και ισούται με $\tilde{\lambda} = 0.60302$ για $\theta = 0.1$, $\tilde{\lambda} = 1.15470$ για $\theta = 0.5$ και $\tilde{\lambda} = 1.41421$ για $\theta = 1$. Για σταθερό $\theta > 0$ λαμβάνουμε ότι $\max_{\lambda > 0} \Pi_\lambda(X, \theta) = \Pi_{\tilde{\lambda}}(X, \theta) = \frac{\mathbb{E}(X^2 e^{-\tilde{\lambda} X})}{\mathbb{E}(X e^{-\tilde{\lambda} X})}$, βλέπε το Λήμμα 4.3. Για παράδειγμα, αν $\theta = 0.1$, τότε παίρνουμε $\tilde{\lambda} = 0.60302$,

$$\frac{\mathbb{E}(X^2 e^{-\tilde{\lambda} X})}{\mathbb{E}(X e^{-\tilde{\lambda} X})} = 0.76834$$

και το Θεώρημα 4.1 μας δίνει

$$0.5 \leq \Pi_\lambda(X, 0.1) \leq 0.76834.$$

Υπενθυμίζοντας την έννοια του κατάλληλου συμβολαίου (βλέπε Κεφάλαιο 4.1), εάν η τιμή 0.76834 αναπαριστά το μέγιστο ποσό του ασφαλιστρού που ο αγοραστής θα δεχόταν να πληρώσει, τότε το ασφάλιστρο $\Pi_\lambda(X, 0.1)$ θα μπορούσε να είναι ένα κατάλληλο ασφάλιστρο για έναν ασφαλιστή.



Σχήμα 4.1: Το ασφάλιστρο Kamps $\Pi_\lambda(X) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi_\lambda(X, \theta)$ (μπλε διακεκομμένη γραμμή), το ευέλικτο ασφάλιστρο Kamps $\Pi_\lambda(X, \theta)$ για $\theta = 0.1, 0.5, 1$ (συνεχείς γραμμές με $\Pi_\lambda(X, 0.1) \geq \Pi_\lambda(X, 0.5) \geq \Pi_\lambda(X, 1)$), το καθαρό ασφάλιστρο $\mathbb{E}(X)$ (η καφέ διακεκομμένη οριζόντια γραμμή και ισούται με 0.5) και το πηλίκο $\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X})/\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})$ (η μοβ διακεκομμένη γραμμή) του $X \sim Exp(2)$ δίνεται από το Παράδειγμα 4.4 για $0 < \lambda \leq 5$.

Παράδειγμα 4.5. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί μια κατανομή Pareto τύπου II με παραμέτρους $a > 1$ και $k > 0$, δηλαδή $X \sim Pa(a, k)$ ή $F \sim Pa(a, k)$, και η συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{ak^a}{(x+k)^{a+1}}, \quad x \geq 0.$$

Τότε, από τους Nadarajah και Kotz (2006), ο μετασχηματισμός Laplace του κινδύνου X είναι

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda X}) = ak^a \lambda^a e^{\lambda k} \Gamma(-a, \lambda k)$$

όπου $\Gamma(s, x) = \int_x^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$ είναι η μη πλήρης συνάρτηση γάμμα. Χρησιμοποιώντας παρόμοιους ισχυρισμούς, μετά από μερικούς υπολογισμούς, αποδεικνύουμε ότι

$$\mathbb{E}(X e^{-\lambda X}) = ak^a \lambda^{a-1} e^{\lambda k} (\Gamma(-a+1, \lambda k) - \lambda k \Gamma(-a, \lambda k)),$$

$$\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X}) = ak^a \lambda^{a-2} e^{\lambda k} (\Gamma(-a+2, \lambda k) - 2\lambda k \Gamma(-a+1, \lambda k) + \lambda^2 k^2 \Gamma(-a, \lambda k)),$$

και

$$\frac{\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X})}{\mathbb{E}(X e^{-\lambda X})} = \frac{\Gamma(-a+2, \lambda k) - 2\lambda k \Gamma(-a+1, \lambda k) + \lambda^2 k^2 \Gamma(-a, \lambda k)}{\lambda (\Gamma(-a+1, \lambda k) - \lambda k \Gamma(-a, \lambda k))}.$$

Επιπλέον, από τη σχέση (4.9) παίρνουμε

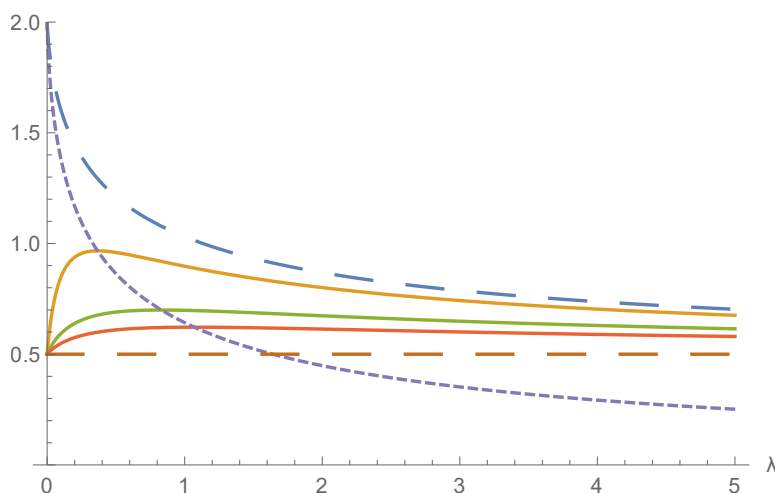
$$\Pi_\lambda(X, \theta) = \frac{(1+\theta) \frac{k}{a-1} - ak^a \lambda^{a-1} e^{\lambda k} (\Gamma(-a+1, \lambda k) - \lambda k \Gamma(-a, \lambda k))}{1+\theta - ak^a \lambda^a e^{\lambda k} \Gamma(-a, \lambda k)}.$$

Για $a = 3$ και $k = 1$, στο Σχήμα 4.2, παρέχουμε το ασφάλιστρο Kamps $\Pi_\lambda(X) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi_\lambda(X, \theta)$ (η υψηλότερη διακεκομμένη γραμμή), το ευέλκτο ασφάλιστρο Kamps $\Pi_\lambda(X, \theta)$ για $\theta = 0.1, 0.5, 1$ (συνεχείς γραμμές με $\Pi_\lambda(X, 0.1) \geq \Pi_\lambda(X, 0.5) \geq \Pi_\lambda(X, 1)$), το καθαρό ασφάλιστρο $\mathbb{E}(X) = 0.5$ (με διακεκομμένη οριζόντια γραμμή) και τον λόγο $\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X}) / \mathbb{E}(X e^{-\lambda X})$ (διακεκομμένη γραμμή) της Εκθετικής κατανομής για $0 < \lambda \leq 5$. Οι παρατηρήσεις είναι παρόμοιες με το Παράδειγμα 4.4. Παρατηρούμε ότι για $\theta = 0.1$, η λύση είναι $\tilde{\lambda} = 0.367$,

$$\frac{\mathbb{E}(X^2 e^{-\tilde{\lambda} X})}{\mathbb{E}(X e^{-\tilde{\lambda} X})} = 0.966906$$

και

$$0.5 \leq \Pi_\lambda(X, 0.1) \leq 0.966906.$$



Σχήμα 4.2: Το ασφάλιστρο Kamps $\Pi_\lambda(X) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi_\lambda(X, \theta)$ (η μπλε διακεκομμένη γραμμή), το ευέλκτο ασφάλιστρο Kamps $\Pi_\lambda(X, \theta)$ για $\theta = 0.1, 0.5, 1$ (συνεχείς γραμμές με $\Pi_\lambda(X, 0.1) \geq \Pi_\lambda(X, 0.5) \geq \Pi_\lambda(X, 1)$), το καθαρό ασφάλιστρο $\mathbb{E}(X)$ (είναι η καφέ διακεκομμένη οριζόντια γραμμή και είναι ίση με 0.5) και το πηλίκο $\mathbb{E}(X^2 e^{-\lambda X}) / \mathbb{E}(X e^{-\lambda X})$ (η μοβ διακεκομμένη γραμμή) του $X \sim Par(3, 1)$ δίνεται από το Παράδειγμα 4.5 για $0 < \lambda \leq 5$.

4.3.2 Ευέλκκτη προσδοκία ουράς υπό συνθήκη

Για $p \in (0, 1)$, η προσδοκία ουράς υπό συνθήκη (CTE) του X , συμβολίζουμε $CTE_p(X) = \mathbb{E}(X | X > x_p)$, όπου $x_p = F^{-1}(p)$ είναι η αξία σε κίνδυνο, βλέπε Ενότητα 1.11. Πιο συγκεκριμένα, για

$$w(x) = \mathbf{1}\{x > x_p\} = \begin{cases} 1, & \text{αν } X > x_p \\ 0, & \text{αλλιως} \end{cases},$$

από τη σχέση (4.3), λαμβάνουμε το ασφάλιστρο CTE (για απλότητα, στη συνέχεια της ενότητας, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\Pi_{x_p}(X)$ αντί για $\Pi_{x_p}^{CTE}(X, \theta)$), που είναι

$$\Pi_{x_p}(X) = \mathbb{E}(X | X > x_p).$$

Θυμίζουμε ότι, για ένα ενδεχόμενο S , η δείκτρια συνάρτηση $\mathbf{1}\{S\}$ είναι ίση με 1 αν το ενδεχόμενο S είναι αληθές και 0 σε αντίθετη περίπτωση. Από τη σχέση (4.7), το ασφάλιστρο $FCTE$ είναι (για λόγους απλότητας χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\Pi_{x_p}(X, \theta)$ αντί για $\Pi_{x_p}^{FCTE}(X, \theta)$)

$$\Pi_{x_p}(X, \theta) = \frac{\bar{F}(x_p) \mathbb{E}(X | X > x_p) + \theta \mathbb{E}(X)}{\bar{F}(x_p) + \theta}. \quad (4.13)$$

Είναι προφανές ότι η CTE προκύπτει από την FCTE για $\theta \rightarrow 0$, δηλαδή $\lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi_{x_p}(X, \theta) = \mathbb{E}(X | X > x_p)$. Παρ' όλα αυτά, μια σημαντική διαφορά μεταξύ των CTE και FCTE για $\theta > 0$ είναι η ακόλουθη. Για κάθε $\theta > 0$, το $\Pi_{x_p}(X, \theta)$ είναι μη μονότονο ως προς το x_p και

$$\lim_{x_p \rightarrow 0} \Pi_{x_p}(X, \theta) = \lim_{x_p \rightarrow \infty} \Pi_{x_p}(X, \theta) = \mathbb{E}(X), \quad (4.14)$$

ενώ το $\mathbb{E}(X | X > x_p)$ είναι αύξουσα στο x_p και $\lim_{x_p \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X | X > x_p) = \infty$. Στο επόμενο λήμμα δίνουμε ένα αποτέλεσμα για την πρώτη παράγωγο του ασφαλίστρου $\Pi_{x_p}(X, \theta)$ προς το x_p .

Λήμμα 4.4. *Η πρώτη παράγωγος του $\Pi_{x_p}(X, \theta)$ ως προς x_p είναι*

$$\frac{d}{dx_p} \Pi_{x_p}(X, \theta) = \frac{f(x_p)}{\bar{F}(x_p) + \theta} (\Pi_{x_p}(X, \theta) - x_p).$$

Απόδειξη. Από τη σχέση (4.13), έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_p} \Pi_{x_p}(X, \theta) &= \frac{-x_p f(x_p) (\bar{F}(x_p) + \theta) + (\int_{x_p}^{\infty} x f(x) dx + \theta \mathbb{E}(X)) f(x_p)}{(\bar{F}(x_p) + \theta)^2} \\ &= \frac{-x_p f(x_p)}{\bar{F}(x_p) + \theta} + \frac{\Pi_{x_p}(X, \theta) f(x_p)}{\bar{F}(x_p) + \theta} \\ &= \frac{f(x_p)}{\bar{F}(x_p) + \theta} (\Pi_{x_p}(X, \theta) - x_p). \end{aligned}$$

□

Λήμμα 4.5. *Για σταθερό $\theta > 0$, η εξίσωση (ως προς x_p)*

$$\Pi_{x_p}(X, \theta) = x_p \quad (4.15)$$

έχει μοναδική λύση $x_{\bar{p}}$, η οποία μεγιστοποιεί τη συνάρτηση $x_p \rightarrow \Pi_{x_p}(X, \theta)$, δηλαδή

$$\max_{x_p > 0} \Pi_{x_p}(X, \theta) = \Pi_{x_{\bar{p}}}(X, \theta) = x_{\bar{p}}.$$

Απόδειξη. Θυμίζοντας ότι $\Pi_{x_p}(X, \theta) \geq \mathbb{E}(X)$ και τη σχέση (4.14), προκύπτει ότι για μία σταθερή παράμετρο $\theta > 0$, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $x_{\bar{p}}$ τέτοιο ώστε $\max_{x_p > 0} \Pi_{x_p}(X, \theta) = \Pi_{x_{\bar{p}}}(X, \theta)$. Επειδή

$$\lim_{x_p \rightarrow 0} x_p = 0 < \mathbb{E}(X) \quad \text{και} \quad \lim_{x_p \rightarrow \infty} x_p = \infty > \mathbb{E}(X),$$

και από τη σχέση (4.14), υπάρχει τουλάχιστον μια λύση $x_{\bar{p}} = x_{\bar{p}_1} > 0$, για την οποία η εξίσωση που δίνεται στη σχέση (4.15). Πιο συγκεκριμένα, από το Λήμμα 4.4, η συνάρτηση $x_p \rightarrow \Pi_{x_p}(X, \theta)$ παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x_{\bar{p}_1}$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι αυτή η λύση είναι μοναδική. Ας θεωρήσουμε ότι $x_{\bar{p}_1}$ δεν είναι μοναδική λύση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το $x_{\bar{p}_1}$ είναι η μικρότερη λύση. Επομένως, έχοντας υπόψιν τα ασυμπτωτικά αποτελέσματα στην (4.14), υπάρχουν τρεις τουλάχιστον λύσεις $x_{\bar{p}_1}, x_{\bar{p}_2}, x_{\bar{p}_3}$ τέτοιες ώστε $x_{\bar{p}_1} < x_{\bar{p}_2} < x_{\bar{p}_3}$, όπου η συνάρτηση $x_p \rightarrow \Pi_{x_p}(X, \theta)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στα σημεία $x_{\bar{p}_1}$ και $x_{\bar{p}_3}$ και, τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x_{\bar{p}_2}$. Ως εκ τούτου, $\Pi_{x_{\bar{p}_1}}(X, \theta) > \Pi_{x_{\bar{p}_2}}(X, \theta)$ ή ισοδύναμα, $x_{\bar{p}_1} > x_{\bar{p}_2}$, το οποίο είναι άτοπο. \square

Θεώρημα 4.2. Ένα άνω-κάτω φράγμα του ασφάλιστρου $\Pi_{x_p}(X, \theta)$ είναι

$$\mathbb{E}(X) \leq \Pi_{x_p}(X, \theta) \leq x_{\bar{p}},$$

όπου $x_{\bar{p}} = F^{-1}(\bar{p})$ είναι μία θετική λύση της εξίσωσης $\Pi_{x_p}(X, \theta) = x_p$ (ως προς x_p).

Απόδειξη. Για $w(x) = \mathbf{1}\{x > x_p\}$, από τη σχέση (4.6), προκύπτει το κάτω φράγμα. Το άνω φράγμα προκύπτει από το Λήμμα 4.5. \square

Παράδειγμα 4.6. Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή $X \sim \text{Exp}(b)$, βλ. Παράδειγμα 4.4. Τότε,

$$\mathbb{E}(X | X > x_p) = x_p + \frac{1}{b} \quad \text{και} \quad \Pi_{x_p}(X, \theta) = \frac{e^{-bx_p} (x_p + \frac{1}{b}) + \frac{\theta}{b}}{e^{-bx_p} + \theta}.$$

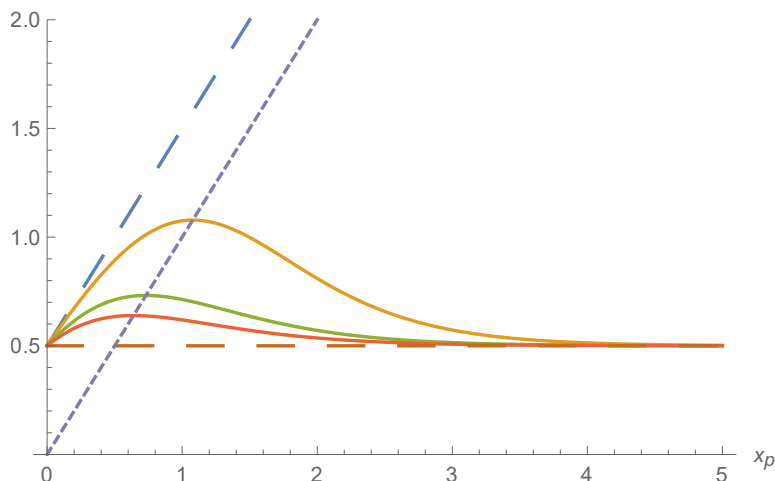
Επιπλέον, μετά από μερικούς υπολογισμούς, η εξίσωση $\Pi_{x_p}(X, \theta) = x_p$ είναι ισοδύναμη με

$$e^{-bx_p} - \theta b x_p + \theta = 0. \quad (4.16)$$

Για κάθε $\theta > 0$, η λύση $x_{\bar{p}}$ της σχέσης (4.16) προκύπτει με τη χρήση αριθμητικών μεθόδων. Για $b = 2$, στο Σχήμα 4.3, δίνουμε το ασφάλιστρο $CTE \mathbb{E}(X | X > x_p) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi_{x_p}(X, \theta)$ (η αυξανόμενη γραμμική διακεκομμένη γραμμή που ξεκινά από 0.5), το ευέλικτο ασφάλιστρο $CTE \Pi_{x_p}(X, \theta)$ για $\theta = 0.1, 0.5, 1$ (συνεχείς γραμμές με $\Pi_{x_p}(X, 0.1) \geq \Pi_{x_p}(X, 0.5) \geq \Pi_{x_p}(X, 1)$), το καθαρό ασφάλιστρο $\mathbb{E}(X)$ (η διακεκομμένη οριζόντια γραμμή και ισούται με 0.5) και το $VaR x_p$ (η γραμμική αυξανόμενη διακεκομμένη γραμμή που ξεκινά από 0) της Εκθετικής κατανομής για $0 < x_p \leq 5$. Παρατηρούμε ότι για διάφορες τιμές της παραμέτρου $\theta > 0$, το σημείο τομής μεταξύ των x_p και $\Pi_{x_p}(X, \theta)$, $\theta = 0.1, 0.5, 1$ είναι μοναδική και ισούται με $x_{\bar{p}} = 1.07843$ για $\theta = 0.1$,

$x_{\bar{p}} = 0.731528$ για $\theta = 0.5$ και $x_{\bar{p}} = 0.639232$ για $\theta = 1$. Για την παράμετρο $\theta > 0$, παίρνουμε ότι $\max_{x_p > 0} \Pi_{x_p}(X, \theta) = x_{\bar{p}}$, βλέπε το Λήμμα 4.5. Για παράδειγμα, αν $\theta = 0.1$ η λύση ισούται $x_{\bar{p}} = 1.07843$ και από το Θεώρημα 4.2 καταλήγουμε

$$0.5 \leq \Pi_{x_p}(X, 0.1) \leq 1.07843.$$



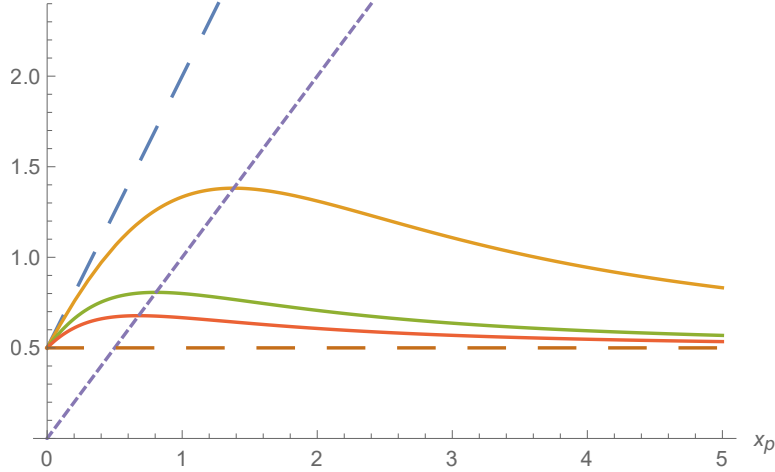
Σχήμα 4.3: Το ασφάλιστρο $CTE \mathbb{E}(X | X > x_p) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi_{x_p}(X, \theta)$ (η αυξανόμενη γραμμική διακεκομμένη γραμμή που ξεκινά από 0.5), το ευέλικτο ασφάλιστρο $CTE \Pi_{x_p}(X, \theta)$ για $\theta = 0.1, 0.5, 1$ (συνεχείς γραμμές με $\Pi_{x_p}(X, 0.1) \geq \Pi_{x_p}(X, 0.5) \geq \Pi_{x_p}(X, 1)$), το καθαρό ασφάλιστρο $\mathbb{E}(X)$ (με διακεκομμένη οριζόντια γραμμή και ισούται με 0.5) και το $VaR x_p$ (η γραμμική αυξανόμενη διακεκομμένη γραμμή που ξεκινά από 0) του $X \sim Exp(2)$ δίνεται από το Παράδειγμα 4.6 για $0 < x_p \leq 5$.

Παράδειγμα 4.7. Έστω η τυχαία μεταβλητή $X \sim Pa(a, k)$, βλέπε το Παράδειγμα 4.5. Τότε,

$$\mathbb{E}(X | X > x_p) = \frac{a x_p + k}{a - 1} \quad \text{και} \quad \Pi_{x_p}(X, \theta) = \frac{\frac{k^a}{(x_p+k)^a} \frac{a x_p + k}{a - 1} + \frac{\theta k}{a - 1}}{\frac{k^a}{(x_p+k)^a} + \theta}.$$

Από το Λήμμα 4.5, για κάθε $\theta > 0$, η λύση $x_{\bar{p}}$ της εξίσωσης $\Pi_{x_p}(X, \theta) = x_p$ είναι μοναδική. Για $a = 3$ και $k = 1$, στο Σχήμα 4.4, δίνουμε το ασφάλιστρο $CTE \mathbb{E}(X | X > x_p) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi_{x_p}(X, \theta)$ (μια μπλε αύξουσα ευθεία με παχιές παύλες που ξεκινάει από 0.5), το ευέλικτο ασφάλιστρο $CTE \Pi_{x_p}(X, \theta)$ για $\theta = 0.1, 0.5, 1$ (συνεχείς γραμμές με $\Pi_{x_p}(X, 0.1) \geq \Pi_{x_p}(X, 0.5) \geq \Pi_{x_p}(X, 1)$), το καθαρό ασφάλιστρο $\mathbb{E}(X)$ (με διακεκομμένη οριζόντια γραμμή και ισούται με 0.5) και το $VaR x_p$ (η γραμμική αυξανόμενη διακεκομμένη γραμμή που ξεκινά από 0) της Εκθετικής κατανομής για $0 < x_p \leq 5$. Οι παρατηρήσεις είναι παρόμοιες με το Παράδειγμα 4.6. Παρατηρούμε ότι για $\theta = 0.1$, έχουμε $x_{\bar{p}} = 1.38155$ και από το Θεώρημα 4.2 καταλήγουμε

$$0.5 \leq \Pi_{x_p}(X, 0.1) \leq 1.38155.$$



Σχήμα 4.4: Το ασφάλιστρο $CTE \mathbb{E}(X | X > x_p) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \Pi_{x_p}(X, \theta)$ (η μπλε διακεκομμένη ευθεία γραμμή ξεκινάει από το 0.5), το ευέλικτο ασφάλιστρο $CTE \Pi_{x_p}(X, \theta)$ για $\theta = 0.1, 0.5, 1$ (συνεχείς γραμμές με $\Pi_{x_p}(X, 0.1) \geq \Pi_{x_p}(X, 0.5) \geq \Pi_{x_p}(X, 1)$), το καθαρό ασφάλιστρο $\mathbb{E}(X)$ (η καφέ διακεκομμένη οριζόντια γραμμή και ισούται με 0.5) και το $VaR x_p$ (η μοβ διακεκομμένη γραμμή ξεκινάει από το 0) του κινδύνου $X \sim Par(3, 1)$ δίνεται από το Παράδειγμα 4.7 για $0 < x_p \leq 5$.

Μελετήσαμε ορισμένες γενικευμένες ιδιότητες της θετικής ομοιογένειας, της μεταβλητότητας και της προσθετικότητας για το ευέλικτο τροποποιημένο ασφάλιστρο διακύμανσης, το ευέλικτο ασφάλιστρο Esscher και το ευέλικτο ασφάλιστρο Kampos. Στο υπόλοιπο κομμάτι του κεφαλαίου παραθέτουμε ορισμένες ιδιότητες της ευέλικτης προσδοκίας ουράς υπό συνθήκη (FCTE) βασιζόμενοι στις ιδιότητες της προσδοκίας ουράς υπό συνθήκη. Θυμίζουμε ότι το CTE είναι ένα συνεπές μέτρο κινδύνου (βλέπε Denuit et al. (2005)), για παράδειγμα, ικανοποιεί τις ιδιότητες:

- (i) $CTE_p(aX) = aCTE_p(X)$, όπου $a > 0$ (θετική ομοιογένεια).
- (ii) $CTE_p(X + b) = CTE_p(X) + b$, όπου $b > 0$ (μεταθετικότητα).
- (iii) $CTE_p(X + Y) \leq CTE_p(X) + CTE_p(Y)$ για όλα τα X και Y (υποπροσθετικότητα).
- (iv) $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1 \Rightarrow CTE_p(X) \leq CTE_p(Y)$ για όλα τα X και Y (μονοτονία).

Στην ακόλουθη πρόταση, προκύπτει ότι η FCTE είναι επίσης ένα συνεπές μέτρο κινδύνου. Στα ακόλουθα αποτελέσματα, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $FCTE_p(X, \theta)$ για το ασφάλιστρο $\Pi_{x_p}(X, \theta)$ στη σχέση (4.13), δηλαδή για κάθε $0 < p < 1$ και $\theta > 0$, ορίζουμε

$$FCTE_p(X, \theta) = \frac{(1-p)CTE_p(X) + \theta \mathbb{E}(X)}{1-p+\theta},$$

που ικανοποιεί τα ασυμπτωτικά αποτελέσματα

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} FCTE_p(X, \theta) = CTE_p(X)$$

και

$$\lim_{p \rightarrow 0} FCTE_p(X, \theta) = \lim_{p \rightarrow 1} FCTE_p(X, \theta) = \mathbb{E}(X).$$

Πρόταση 4.5. Για κάθε $\theta > 0$, το μέτρο $FCTE_p(X, \theta)$ δίνεται από τη σχέση (4.13), και είναι ένα συνεπές μέτρο κινδύνου.

Απόδειξη. (i) Για $a > 0$, είναι

$$\begin{aligned} FCTE_p(aX, \theta) &= \frac{(1-p) CTE_p(aX) + \theta \mathbb{E}(aX)}{1-p+\theta} \\ &= \frac{(1-p) a CTE_p(X) + \theta a \mathbb{E}(X)}{1-p+\theta} \\ &= a FCTE_p(X, \theta). \end{aligned}$$

(ii) Για $b > 0$, είναι

$$\begin{aligned} FCTE_p(X+b, \theta) &= \frac{(1-p) CTE_p(X+b) + \theta \mathbb{E}(X+b)}{1-p+\theta} \\ &= \frac{(1-p) (CTE_p(X) + b) + \theta (\mathbb{E}(X) + b)}{1-p+\theta} \\ &= FCTE_p(X, \theta) + b. \end{aligned}$$

(iii) Για όλα τα X και Y , έχουμε

$$\begin{aligned} FCTE_p(X+Y, \theta) &= \frac{(1-p) CTE_p(X+Y) + \theta \mathbb{E}(X+Y)}{1-p+\theta} \\ &\leq \frac{(1-p) (CTE_p(X) + CTE_p(Y)) + \theta (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))}{1-p+\theta} \\ &= FCTE_p(X, \theta) + FCTE_p(Y, \theta). \end{aligned}$$

(iv) Έστω $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$. Τότε, για όλα τα X και Y , παίρνουμε

$$\begin{aligned} FCTE_p(X, \theta) &= \frac{(1-p) CTE_p(X) + \theta \mathbb{E}(X)}{1-p+\theta} \\ &\leq \frac{(1-p) CTE_p(Y) + \theta \mathbb{E}(Y)}{1-p+\theta} \\ &= FCTE_p(Y, \theta). \end{aligned}$$

□

4.4 Τελικές παρατηρήσεις

Στο τελευταίο κεφάλαιο εισάγαμε ένα νέο γενικευμένο σταθμισμένο ασφάλιστρο, το οποίο προκύπτει από τη μέση μίας μείξης κατανομών. Κατασκευάσαμε ένα ασφάλιστρο που εξαρτάται από μια συνάρτηση βάρους και μια θετική παράμετρο θ . Κατά την ανάλυσή του, παρατηρήσαμε παρόμοια συμπεριφορά με αυτή των Goovaerts et al. (2001). Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση χρησιμότητας ενός κινδύνου X , προέκυψαν δύο γνωστά ασφάλιστρα: (i) το ασφάλιστρο του Esscher και (ii) το ασφάλιστρο διακύμανσης. Πιο συγκεκριμένα, το σταθμισμένο ασφάλιστρο που προέκυψε έχει παρόμοια συμπεριφορά με το ασφάλιστρο των Goovaerts et al. (2001), και με κατάλληλες τιμές της παραμέτρου θ , καταλήξαμε σε γνωστά ασφάλιστρα. Επίσης, δείξαμε ότι το νέο ασφάλιστρο μπορεί να εκφραστεί ως γενικευμένη κατανομή Lindley. Μελετήσαμε λεπτομερώς διάφορα αποτελέσματα χαρακτηρισμού των κατανομών και τις ιδιότητές τους, συμπεριλαμβανομένων των σχέσεων με τη Γάμμα κατανομή και αποτελέσματα διάταξης. Τέλος, διερευνήσαμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν για διάφορες κατανομές απώλειας, ενισχύοντας την ανάλυσή μας με την απεικόνισή τους σε γραφικές παραστάσεις.

Βιβλιογραφία

- [1] Apostol, T.M. (1974). *Mathematical Analysis*, 2nd ed., Addison-Wesley.
- [2] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. and Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance* 9, 203–228.
- [3] Asadi, M. and Zohrevand, Y. (2007). On the dynamic cumulative residual entropy. *Journal of Statistical Planning and Inference* 137, 1931–1941.
- [4] Asimit, A.V., Bignozzi, V., Cheung, K.C., Hu, J. and Kim, E.-S. (2017). Robust and Pareto optimality of insurance contracts. *European Journal of Operational Research* 262(2), 720–732.
- [5] Baratpour, S. (2010). Characterizations based on cumulative residual entropy of first order statistics. *Communications in Statistics - Theory and Methods* 39, 3645–3651.
- [6] Barlow, R.E. and Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life testing*. New York: Holt, Rinehart, and Winston.
- [7] Bartoszewicz, J. (2009). On a representation of weighted distributions. *Statistics and Probability Letters* 79, 1690–1694.
- [8] Baxter L.A. (1982). Reliability applications of the relevation transform. *Naval Research Logistics Quarterly* 29, 323–330.
- [9] Bickel, P.J. and Lehmann, E.L. (1979). Descriptive statistics for nonparametric models IV. Spread. In: Jureckova (Ed.), *Contributions to Statistics*. Reidel, Dordrecht.
- [10] Bühlmann, H. (1980). An economic premium principle. *ASTIN Bulletin* 11, 52–60.
- [11] Cai, J. and Li, H., (2005). Conditional tail expectations for multivariate phase type distributions. *Journal of Applied Probability* 42, 810–825.
- [12] Choo, W. and de Jong, P. (2009). Loss reserving using loss aversion functions. *Insurance: Mathematics and Economics* 45, 271–277.

- [13] Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. and Kaas, R. (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*. Chichester, West Sussex: John Wiley and Sons Ltd.
- [14] Dickson, D.C. (2005). *Insurance risk and ruin*. Cambridge University Press.
- [15] Ebrahimi, N. (1996). How to measure uncertainty about residual lifetime, *Sankhyā A*, 58, 48-57.
- [16] Eeckhoudt, L. and Laeven, R. (2021). Dual moments and risk attitudes. *Operations Research* 70, 1330–1341.
- [17] Embrechts, P. (2000). Actuarial versus financial pricing of insurance. *The Journal of Risk Finance* 1(4), 17–26.
- [18] Finkelstein, M. (2006). On relative ordering of mean residual lifetime functions. *Statistics and Probability Letters* 76, 939–944.
- [19] Furman, E., and Landsman, Z. (2006). Tail variance premium with applications for elliptical portfolio of risks. *ASTIN Bulletin* 36 (2), 433–462.
- [20] Furman, E. and Zitikis, R. (2008). Weighted premium calculation principles. *Insurance: Mathematics and Economics* 42, 459–465.
- [21] Furman, E., Wang, R. and Zitikis, R. (2017). Gini-type measures of risk and variability: Gini shortfall, capital allocation and heavy-tailed risks. *Journal of Banking and Finance*, 83, 70–84.
- [22] Goovaerts, M.J., De Vylder, F. and Haezendonck, J. (1984). *Insurance Premiums: Theory and Applications*. North-Holland Publishing Co, Amsterdam.
- [23] Goovaerts, M.J., Dhaene, J., Kaas, R. (2001). Risk measures, measures for insolvency risk and economical capital Aallocation. *Tijdschrift voor Economie en Management* 46, 545–559.
- [24] Gupta, R.C. and Kirmani, S.N.U.A. (1990). The role of weighted distributions in stochastic modelling. *Communications in Statistics-Theory and Methods* 19, 3147–3162.
- [25] Haberman, S., Khalaf-Allahb, M. and Verrall, R. (2011). Entropy, longevity, and the cost of annuities. *Insurance: Mathematics and Economics* 48, 197–204.
- [26] Heilmann, W. R. (1989). Decision theoretic foundations of credibility theory. *Insurance: Mathematics and Economics* 8, 77–95.

- [27] Hu, T., and Chen, O. (2020). On a family of coherent measures of variability. *Insurance: Mathematics and Economics* 95, 173–182.
- [28] Jain, K., Singh, H. and Bagai, I. (1989). Relation for reliability measures of weighted distributions. *Communication in Statistics - Theory and Methods* 18(12), 4393–4412.
- [29] Jones, B.L. and Zitikis, R. (2003). Empirical estimation of risk measures and related quantities. *North American Actuarial Journal* 7(4), 44–54.
- [30] Jones, B.L. and Zitikis, R. (2007). Risk measures, distortion parameters, and their empirical estimation. *Insurance: Mathematics and Economics* 41, 279–297.
- [31] Jones, M.C. (2004). Families of distributions arising from distributions of order statistics, *TEST* 13, 1-43.
- [32] Kamps, U. (1998). On a class of premium principles including the Esscher premium. *Scandinavian Actuarial Journal* 1, 75–80.
- [33] Kapodistria, S. and Psarrakos, G. (2012). Some extensions of the residual lifetime and its connection to the cumulative residual entropy. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* 26, 129–146.
- [34] Keyfitz, N. (1977). *Applied Mathematical Demography*. New York: Wiley.
- [35] Klugman, S.A., Panjer, H., and Willmot, G.E. (1998). *Loss Models: From Data to Decisions*. John Wiley & Sons, New York.
- [36] Krakowski, M. (1973). The relevation transform and a generalization of the Gamma distribution function. *Revue Francaise d'Automatique, Informatique et Recherche Operationnelle* 7, Ser. V-2, 107–120.
- [37] Lai, C. D. and Xie, M. (2006). *Stochastic Aging and Dependence for Reliability*. New York:Springer-Verlag.
- [38] Landsman, Z. and Valdez, E. (2005). Tail conditional expectation for exponential dispersion models. *ASTIN Bulletin* 35 (1), 189–209.
- [39] Leser, C.E.V. (1955). Variations in mortality and life-expectation. *Population Studies* 9, 67–71.
- [40] Li, X. and Shaked, M. (2007). A general family of univariate stochastic orders. *Journal of Statistical Planning and Inference* 137, 3601–3610.

- [41] Lindley, D.V. (1958). Fiducial distributions and Bayes' theorem. *Journal of the Royal Society, series B*, 20 (1958), 102–107.
- [42] López-Díaz, M., Sordo, M.A. and Suárez-Llorens, A. (2012). On the L_p -metric between a probability distribution and its distortion. *Insurance: Mathematics and Economics* 51, 257–264.
- [43] Müller, A. and Stoyan, D. (2002). *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. Chichester, John Wiley and Sons.
- [44] Nadarajah, S. and Kotz, S. (2006). The beta exponential distribution. *Reliability Engineering and System Safety* 91, 689-697.
- [45] Nadarajah, S. and Kotz, S. (2006). On the Laplace transform of the Pareto distribution. *Queueing Systems* 54, 243–244.
- [46] Psarrakos, G. (2022). How a probabilistic analogue of the mean value theorem yields Stein-type covariance identities. *Journal of Applied Probability* 55, 350–365.
- [47] Psarrakos, G. and Navarro, J. (2013). Generalized cumulative residual entropy and record values. *Metrika* 76, 623–640.
- [48] Psarrakos, G. and Sordo, M.A. (2019). On a family of risk measures based on proportional hazards models and tail probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics* 86, 232–240.
- [49] Psarrakos, G. and Vliora, P. (2021). Sensitivity analysis and tail variability for Wang's actuarial index. *Insurance: Mathematics and Economics* 98, 147–152.
- [50] Psarrakos, G., Toomaj, A. and Vliora, P. (2024). A family of variability measures based on the cumulative residual entropy and distortion functions *Insurance: Mathematics and Economics* 114, 212-222.
- [51] Psarrakos, G. and Vliora, P. (2024). On the flexibility and loading maximization for weighted premiums. *Applied Mathematics and Computation* 481, 128944.
- [52] Patil, G.P. and Rao, C.R. (1977). The weighted distributions: A survey and their applications. In *Applications of statistics* (ed. P.R.Krishnaiah), 383–405. North Holland Publ. Co.Amsterdam.
- [53] Patil, G.P. and Rao, C.R. (1978). Weighted distributions and size biased sampling with applications to wild-life populations and human families. *Biometrika* 34, 179–189.

- [54] Rao, M., Chen, Y., Vemuri, B., and Fei, W. (2004). Cumulative residual entropy: a new measure of information. *IEEE Transactions on Information Theory* 50(6), 1220–1228.
- [55] Rao, M. (2005). More on a new concept of entropy and information. *Journal of Theoretical Probability* 18, 967–981.
- [56] Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (2007). *Stochastic orders*. Springer-Verlag: New York.
- [57] Shannon, C. E. (1948). *A Mathematical Theory of Communication*. The Bell System Technical Journal, 27, 379–423, 623–656.
- [58] Sendov, H., Wang, Y., Zitikis, R. (2011). Log-supermodularity of weight functions, ordering weighted losses, and the loading monotonicity of weighted premiums. *Insurance: Mathematics and Economics* 48, 257-264.
- [59] Sordo, M.A. (2008). Characterizations of classes of risk measures by dispersive orders. *Insurance: Mathematics and Economics* 42, 1028–1034.
- [60] Sordo, A.M. , Castaño-Martínez, A. and Pigueiras, G. (2016). A family of premium principles based on mixtures of TVaRs. *Insurance: Mathematics and Economics* 70, 397–405.
- [61] Stein, C. (1981). Estimation of the Mean of a multivariate normal distribution. *The Annals of Statistics* 9, 1135–1151.
- [62] Sun, H., Chen, Y. and Hu, T. (2022). Statistical inference for tail-based cumulative residual entropy. *Insurance: Mathematics and Economics* 103, 66–95.
- [63] Toomaj, A. and Di Crescenzo, A. (2020). Connections between weighted generalized cumulative residual entropy and variance. *Mathematics* 8(7), 1072.
- [64] Tsanakas, A. (2004). Dynamic capital allocation with distortion risk measures. *Insurance: Mathematics and Economics* 35, 223–243.
- [65] Van Heerwaarden, A.E. and Kaas, R. (1992). The Dutch premium principle. *Insurance: Mathematics and Economics* 11, 129–133.
- [66] Wang, S.S. (1995). Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms. *Insurance: Mathematics and Economics* 17, 43–54.
- [67] Wang, S.S. (1996). Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin* 26, 71–92.

- [68] Wang, S.S. (1998). An actuarial index of the right-tail risk. *North American Actuarial Journal* 2, 88–101.
- [69] Wang, S.S., Young, V.R. and Panjer, H.H. (1997). Axiomatic characterization of insurance prices. *Insurance: Mathematics and Economics* 21, 173–183.
- [70] Wang, S.S. (2000). A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks. *Journal of Risk and Insurance* 67, 15–36.
- [71] Wei, W. and Yatracos, Y. (2004). A stop-loss risk index. *Insurance: Mathematics and Economics* 34, 241–250.
- [72] Wirth, J.L. and Hardy, M.R. (1999). A synthesis of risk measures for capital adequacy. *Insurance: Mathematics and Economics* 25, 337–347.
- [73] Wirth, J. and Hardy M.R. (2001). Distortion risk measures: coherence and stochastic dominance. Working paper. <http://pascal.iseg.utl.pt/ccemapre/ime2002/>
- [74] Yaari, M. (1987). The dual theory of choice under risk. *Econometrica* 55, 95–115.
- [75] Yang, J., Zhuang, W. and Hu, T. (2014). L_p -metric under the location-independent risk ordering of random variables. *Insurance: Mathematics and Economics* 59, 321–324.
- [76] Yang, Z.-H. and Tian J.-F. (2017). Monotonicity and inequalities for the gamma function. *Journal of Inequalities and Applications*, 317 (2017).
- [77] Yang, Z.-H. and Tian J.-F. (2019). Monotonicity rules for the ratio of two Laplace transforms with applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 470, 821–845.
- [78] Zografos, K. and Balakrishnan N. (2009). On families of beta and generalized gamma generated distributions and associated inference. *Statistical Methodology* 6, 344–362.