ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Πτυχιακή Εργασία

Τίτλος Πτυχιακής Εργασίας	(Ελληνικά) Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου συνάρτησης (Αγγλικά) Geometric interpretation of the derivative of a function
Ονοματεπώνυμο Φοιτητή	ΔΗΜΙΤΡΟΒ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ
Πατρώνυμο	ΠΑΒΕΛ
Αριθμός Μητρώου	Π19223
Επιβλέπων	ΤΣΑΚΩΝΑΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ, Εργαστηριακό Διδακτικό Προσωπικό (Ε.ΔΙ.Π)Τμήματος

Ημερομηνία Παράδοσης Ιούλιος 2024

Copyright ©

Ως συγγραφέας της παρούσας εργασίας δηλώνω πως η παρούσα εργασία δεν αποτελεί προϊόν λογοκλοπής και δεν περιέχει υλικό από μη αναφερόμενες πηγές.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Τσάκωνας Παναγιώτης, μέλος του εργαστηριακού διδακτικού προσωπικού του τμήματος πληροφορικής του πανεπιστημίου Πειραιώς, για την καθοδήγηση που μου προσέφερε και το χρόνο που διέθεσε δίνοντάς μου χρήσιμές συμβουλές και οδηγίες για την ολοκλήρωση της πτυχιακής μου εργασίας. Στο ίδιο πλαίσιο ευγνωμοσύνης, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του Τμήματος Πληροφορικής για τη συμβολή τους στην επιστημονική και τεχνολογική μου συγκρότηση στα χρόνια της φοίτησής μου στο Τμήμα.

Περίληψη

Η εργασία περιλαμβάνει τη θεωρία σχετικά με την έννοια της παραγώγου καθώς και οπτικοποίηση σχετικά με την παράγωγο. Ειδικότερα περιλαμβάνει την οπτικοποίηση του προβλήματος της εφαπτομένης και της παραγώγου. Επιπλέον δίνεται μία ερώτηση κατανόησης ώστε ο μαθητής να μπορέσει μέσα από τη πράξη να κατανοήσει καλύτερα τη θεωρία. Στόχος της παρούσας εργασίας είναι να κατανοήσει ο μαθητές τις έννοιες της παραγώγου μέσα από μία διαδικτυακή προσέγγιση.

Λέξεις Κλειδιά: Παράγωγος, οπτικοποίηση, έννοια της παραγώγου, γεωμετρική ερμηνεία, εφαπτομένη

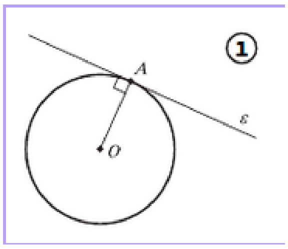
Abstract

The paper includes theory on the concept of derivative as well as visualization on derivative. In particular it includes visualization of the problem of tangent and derivative. In addition, a comprehension question is given so that the student can better understand the theory through practice. The aim of this paper is to help students understand the concepts of the derivative through a web-based approach.

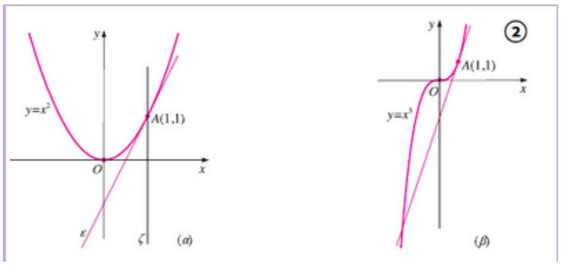
Key Words: Derivative, visualization, concept of derivative, geometric interpretation, tangent

Πίνακας Περιεχομένων

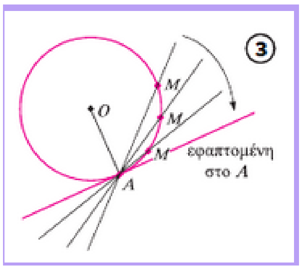
Κατάλογος Εικόνων



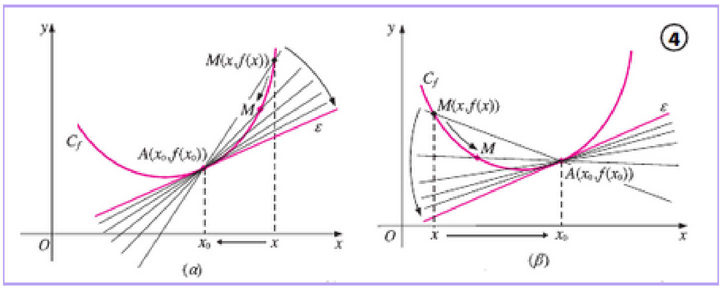
Το σχήμα 1 παρουσιάζει την εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο Α.



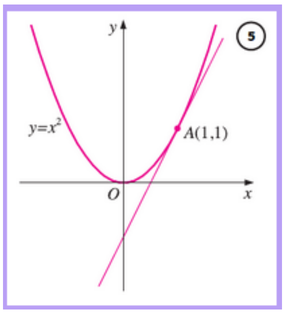
Το σχήμα 2 παρουσιάζει δύο διαφορετικές συναρτήσεις με τις εφαπτόμενές τους.



Το σχήμα 3 παρουσιάζει την εφαπτομένη σε άλλα σημεία του κύκλου.

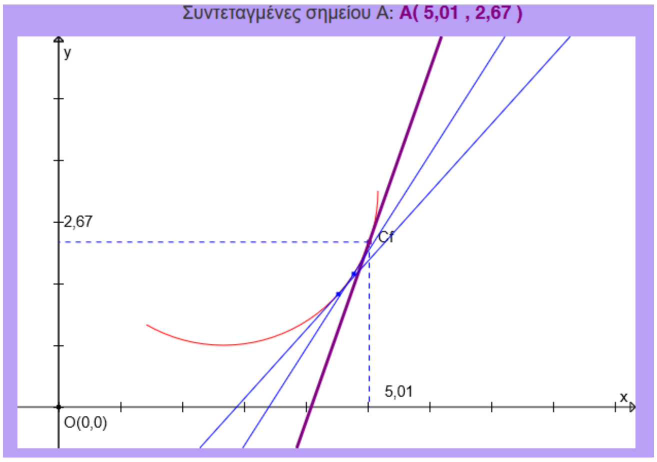


Το σχήμα 4 παρουσιάζει δύο διαφορετικές εκδοχές μίας συνάρτησης και ενός σημείου της γραφικής παράστασης.

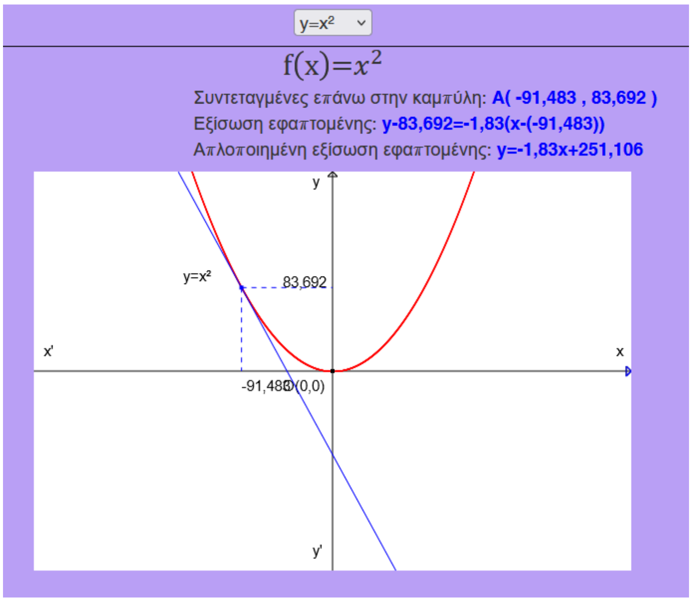


Το σχήμα 5 παρουσιάζει την εξίσωση της εφαπτομένης σε ένα σημείο.

Κατάλογος Διαγραμμάτων



Διάγραμμα οπτικοποίησης του προβλήματος της εφαπτομένης.



Διάγραμμα οπτικοποίησης παραγώγου.

Εισαγωγή

Η πτυχιακή αυτή εργασία παρουσιάζει τη γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου συνάρτησης με θεωρία, διαγράμματα και ερωτήσεις. Στόχος της εργασίας είναι οι μαθητές να μπορέσουν να κατανοήσουν πλήρως τη γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου.

Η πτυχιακή εργασία περιλαμβάνει:

- Τη βασική θεωρία σχετικά με την έννοια της παραγώγου και τον ορισμό της.
- Την οπτικοποίηση του προβλήματος της εφαπτομένης με ανάλυση της οπτικοποίησης.
- Οπτικοποίηση της παραγώγου βασικών συναρτήσεων.
- Ερώτηση κατανόησης σχετικά με την παράγωγο.

1. Γεωμετρική Ερμηνεία της Παραγώγου συνάρτησης

1.1 Η έννοια της παραγώγου

1.1.1 Το πρόβλημα της εφαπτομένης

Αρχικά παρουσιάζεται η εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο, η οποία είναι η ευθεία η οποία έχει ένα κοινό σημείο με το κύκλο. Όμως, ο ορισμός αυτός της εφαπτομένης δεν μπορεί να γενικευτεί για οποιαδήποτε καμπύλη, διότι μπορεί σε ένα σημείο μία συνάρτηση να έχει τουλάχιστον δύο εφαπτόμενες.

Συνεπώς, καταλήγουμε σε έναν γενικευμένο ορισμό. Δηλαδή, θεωρούμε ένα σημείο Μ του κύκλου. Τα σημεία Α, Μ ορίζουν μία τέμνουσα του κύκλου, την ευθεία ΑΜ. Καθώς, το σημείο Μ, κινούμενο πάνω στο κύκλο, πλησιάζει στο Α, η τέμνουσα ΑΜ φαίνεται να έχει ως «οριακή διεύθυνση» την εφαπτομένη του κύκλου στο Α.

Επιπλέον, ορίζεται έστω μια συνάρτηση f και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής παράστασης (καμπύλη έστω C_f). Αν πάρουμε ένα ακόμη σημείο $M(x,f(x))$, $x \neq x_0$, της γραφικής παράστασης της f και την ευθεία ΑΜ που ορίζουν τα σημεία Α και Μ, παρατηρούμε ότι: Καθώς το x τείνει στο x_0 με $x>x_0$, η τέμνουσα ΑΜ φαίνεται να παίρνει μία οριακή διεύθυνση ε. Την ίδια οριακή διεύθυνση φαίνεται να παίρνει η ΑΜ και όταν το x τείνει στο x_0 με $x<x_0$. Την ίδια οριακή διεύθυνση της ΑΜ μπορούσαμε να την ονομάσουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Α. Επειδή η κλίση της τέμνουσας ΑΜ είναι ίση με $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ είναι λογικό να αναμένουμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ θα έχει κλίση το: $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$.

1.2 Ορισμός της παραγώγου

Ο ορισμός της παραγώγου δίνεται με βάση τη μέθοδο που αναφέρεται παραπάνω. Ειδικότερα, έστω f μία συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Συνεπώς, καταλήγουμε στην εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $y-f(x_0)=\lambda(x-x_0)$, όπου $\lambda=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$.

1.3 Οπτικοποίηση του Προβλήματος της εφαπτομένης

Παρουσιάζεται η οπτικοποίηση του προβλήματος της εφαπτομένης με τη βοήθεια του κέρσορα όπου εμφανίζονται οι ευθείας για τα σημεία $M(x,f(x))$ και η εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$. Τα χρώματα των ευθειών είναι διαφορετικά ώστε να διακρίνεται η διαφορά μεταξύ των ευθειών στο σημείο Μ και της εφαπτομένης στο σημείο Α.

1.4 Οπτικοποίηση παραγώγου

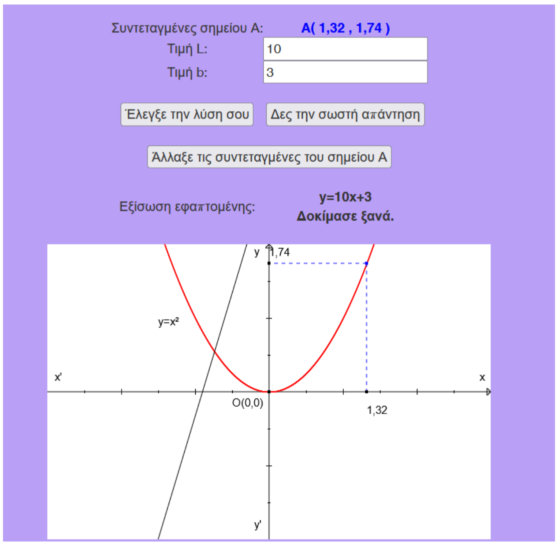
Ο χρήστης έχει την ευκολία και σε αυτή την οπτικοποίηση να χρησιμοποιήσει ένα εργαλείο για συγκριμένες συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις που εμφανίζονται είναι η $f(x)=e^x$, $f(x)=ημx$, $f(x)= x^2$.

2. Ερώτηση Κατανόησης

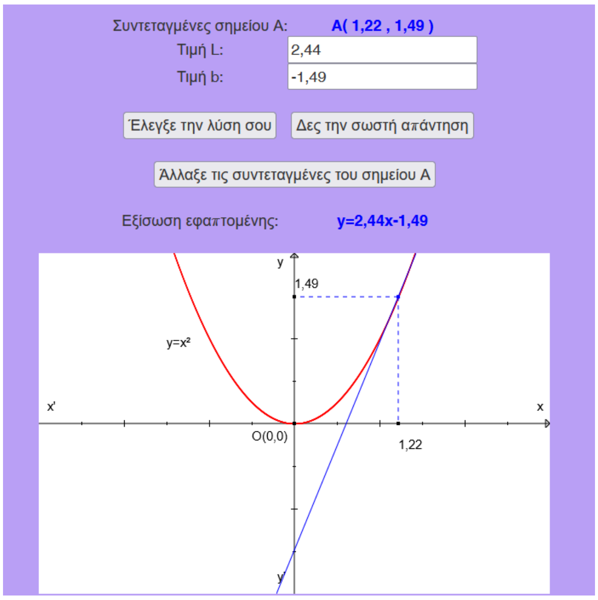
Δίνεται ένα παράδειγμα μίας συνάρτησης και η παράγωγός της. Επιπλέον, δίνονται ορισμένοι τύποι όπου περιέχουν δύο μεταβλητές την L και τη b βάση των οποίων εμφανίζεται το σχήμα της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση η οποία δίνεται. Ο χρήστης πρέπει να υπολογίσει αυτές τις μεταβλητές και να τις γράψει στο πεδίο που του δίνεται σύμφωνα με τις συντεταγμένες ενός σημείου Α οι οποίες δίνονται. Εάν ο χρήστης έχει δώσει σωστή απάντηση θα εμφανιστεί το κατάλληλο μήνυμα και η ευθεία θα πάρει το μπλε χρώμα. Εάν είναι λάθος, η ευθεία δεν θα αλλάξει χρώμα.

Για παράδειγμα:

- Μία λάθος απάντηση:



- Μία σωστή απάντηση:



Συμπεράσματα

Ο μαθητής μπορεί να δει τη θεωρία αρχικά και εφόσον έχει κατανοήσει πλήρως τη θεωρία του δίνεται η δυνατότητα να πειραματιστεί μέσα από την ερώτηση κατανόησης. Στόχος της ιστοσελίδας είναι ο μαθητής να μάθει μέσα από μία πιο δραστήρια μάθηση, καθώς η εκμάθηση γίνεται μέσω οθόνης κι όχι μέσω βιβλίου. Η οθόνη είναι πιο κοντά σε έναν μαθητή του σήμερα, καθώς είναι εξοικειωμένος σε αυτό. Βασικό αρνητικό αυτής της εκμάθησης είναι ότι ο μαθητής ακόμα και η μάθησή του γίνεται μέσα από την οθόνη που αυτό έχει συνέπεια τόσο στη σωματική όσο και στη ψυχική του υγεία. Η εκμάθηση με τη βοήθεια ηλεκτρονικών μέσων μπορεί να αναπτυχθεί σε όλους τους τομείς της εκπαίδευσης αλλά και να εξελιχθεί η υπάρχουσα με σκοπό οι μαθητές να θέλουν να μορφωθούν πιο εύκολα.

Πίνακας Ορολογίας

- lim: Δείχνει το όριο μίας συνάρτησης. Η έννοια του ορίου χρησιμοποιείται για να περιγραφεί η συμπεριφορά μίας συνάρτησης καθώς το όρισμά της πλησιάζει κάποιο σημείο ή καθώς μεγαλώνει ή μικραίνει απεριόριστα.

Πίνακας συντμήσεων-αρτικόλεξων-ακρονυμίων

- Σχ.: σχήμα
- βλ.: βλέπε

Βιβλιογραφία

- **Βιβλία:**
  Σχολικό Βιβλίο Γ' Γενικού Λυκείου, Θετικής και Οικονομικής Κατεύθυνσης

Παράρτημα

Παρακάτω παρουσιάζεται ο κώδικας που έχει χρησιμοποιηθεί για την ιστοσελίδα

HTML

```
<!DOCTYPE html>

<html>

  <head>

    <title>Η Παράγωγος</title>

    <link rel="stylesheet"
href="https://maxcdn.bootstrapcdn.com/bootstrap/3.4.1/css/bootstrap.min.css">

    <script type="text/javascript" src="visualisation_plot.js"></script>

  </head>

  <body style="background-color: #b99ff5;text-align:center;font-size:18px;" onload="initialize();">
```

```html
<h1>Γεωμετρική Ερμηνεία της Παραγώγου συνάρτησης</h1><br>

<div style="border:2px solid black;">

<div style="border:1px solid black;" id="derivation_essence_button"><h4>Εάν θέλεις να μάθεις περισσότερα για την έννοια της παραγώγου πάτησε το κουμπί.</h4><button onclick="show_theory('derivation_essence');">Η έννοια της παραγώγου</button><br><br></div>

<div style="border:1px solid black;" id="derivation_essence" hidden>

  <h3>Η έννοια της παραγώγου</h3>

  <p>

    <b>Πρόβλημα εφαπτομένης</b><br>

  <table style="margin-left: auto;margin-right: auto;"><tr>

    <td style="width:500px;">Είναι γνωστό από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι

    εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο του,έστω Α,

    ονομάζουμε την ευθεία η οποία έχει με τον κύκλο ένα

    μόνο κοινό σημείο, το Α (Σχ. 1).<br> Ο ορισμός αυτός δεν μπορεί

    να γενικευτεί για οποιαδήποτε καμπύλη, επειδή, για παράδειγμα, η παραβολή <math style="font-size:22px;"><msup><mi>x</mi><mn>2</mn></msup></math> θα είχε στο σημείο Α(1,

    1) δύο εφαπτόμενες (τις ε και ζ, βλ. Σχ. 2α),<br> ενώ η y = <math style="font-size:22px;"><msup><mi>x</mi><mn>3</mn></msup></math> δεν θα

    είχε στο σημείο Α(1,1) καμία εφαπτομένη (Σχ. 2β).</td><td>   <figure><img src="images/circle.png" alt="Εφαπτομένη Κύκλου" width="180"><figcaption>Σχ. 1</figcaption></figure></td></tr>

    <tr><td colspan="2"><br><figure><img src="images/paraboloid.png" alt="Εφαπτομένη καμπύλης" width="400"><figcaption>Σχ. 2</figcaption></figure></td></tr>

  </table>

  </p>

  <p><br>

    <table style="margin-left: auto;margin-right: auto;">

      <tr><td style="width: 500px;">Επομένως, πρέπει να αναζητήσουμε έναν άλλον

        ορισμό της εφαπτομένης του κύκλου, ο οποίος να

        μπορεί να γενικευτεί για όλες τις καμπύλες.<br>

        Θεωρούμε, λοιπόν, ένα άλλο σημείο Μ του κύκλου

        (Σχ. 3). Τα σημεία Α, Μ ορίζουν μια τέμνουσα του
```

κύκλου, την ευθεία ΑΜ. Καθώς το σημείο Μ, κινούμενο πάνω στον κύκλο, πλησιάζει στο Α, η τέμνουσα ΑΜ φαίνεται να έχει ως “οριακή διεύθυνση” την

εφαπτομένη του κύκλου στο Α.

Τη διαπίστωση αυτή θα δούμε, τώρα, πως μπορούμε να

την αξιοποιήσουμε για να ορίσουμε την εφαπτομένη

της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης σε ένα

σημείο της.</td><td>   <figure><img src="images/tangent_circle.png" alt="Εφαρμογή εφαπτομένης σε κύκλο" width="180"><figcaption>Σχ. 3</figcaption></figure></td></tr>

<tr><td colspan="2">
<figure><img src="images/tangent_paraboloid.png" alt="Εφαπτομένη εφαπτομένης σε καμπύλη" width="450"><figcaption>Σχ. 4</figcaption></figure></td></tr>

</table>

</p>

<p>

Έστω f μια συνάρτηση και Α(x₀,f(x₀)) ένα σημείο της γραφικής παράστασης (καμπύλη έστω C_f).

Αν πάρουμε ένα ακόμη σημείο Μ(x,f(x)), x≠x₀, της γραφικής παράστασης της f και την ευθεία ΑΜ που ορίζουν τα σημεία Α και Μ, παρατηρούμε ότι:

Καθώς το x τείνει στο x₀ με x>x₀, η τέμνουσα ΑΜ φαίνεται να παίρνει μία οριακή διεύθυνση ε (Σχ. 4α).

Την ίδια οριακή διεύθυνση φαίνεται να παίρνει η ΑΜ και όταν το x τείνει στο x₀ με x< x₀ (Σχ. 4β).

Την οριακή διεύθυνση της ΑΜ μπορούσαμε να την ονομάσουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Α.

Επειδή η κλίση της τέμνουσας ΑΜ είναι ίση με <math style="font-size:22px;"><mfrac><mtext>f(x)-f(x₀)</mtext><mtext>x-x₀</mtext></mfrac></math>,

είναι λογικό να αναμένουμε ότι η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο Α(x₀,f(x₀)) θα έχει κλίση το:

 <math style="font-size:22px;"><msub><mi>lim</mi><mn>x → x₀</mn></msub><mo>(</mo><mfrac><mtext>f(x)-f(x₀)</mtext><mtext>x-x₀</mtext></mfrac><mo>)</mo></math>

</p>

</div>

<div style="border:1px solid black;" id="derivation_lemma_button"><h4>Εάν θέλεις να μάθεις περισσότερα για τον ορισμό της παραγώγου πάτησε το κουμπί.</h4><button onclick="show_theory('derivation_lemma');">Ορισμός της παραγώγου</button>

</div>

```
      <div style="border:1px solid black;" id="derivation_lemma" hidden>
        <h3>Ορισμός της παραγώγου</h3>
        <p>
          Με βάση την μέθοδο που παρουσιάστηκε παραπάνω δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.<br><br>
          <img src="images/tangent_lemma.png" alt="Ορισμός εφαπτομένης"><br><br>
          <table style="margin-left: auto;margin-right: auto;"><tr><td style="width:550px;">Επομένως
η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Α(x<sub>0</sub>,f(x<sub>0</sub>)) είναι <br>
            <math style="font-size:22px;"> y-f(<msub><mi>x</mi><mn>0</mn></msub>)= λ(x-
<msub><mi>x</mi><mn>0</mn></msub>)</math>,
            <br>όπου <math style="font-size:22px;"> λ=<msub><mi>lim</mi><mn>x &#8594;
x<sub>0</sub></mn></msub><mo>(</mo><mfrac><mtext>f(x)-
f(x<sub>0</sub>)</mtext><mtext>x-x<sub>0</sub></mtext></mfrac><mo>)</mo></math><br>
            Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση <math style="font-
size:22px;">f(x)=<msup><mi>x</mi><mn>2</mn></msup></math> και το σημείο Α(1,1).<br>
            Επειδή <math style="font-size:22px;"><msub><mi>lim</mi><mn>x &#8594;
1</mn></msub><mo>(</mo><mfrac><mtext>f(x)-f(1)</mtext><mtext>x-
1</mtext></mfrac><mo>)</mo>
            =<msub><mi>lim</mi><mn>x &#8594;
1</mn></msub><mo>(</mo><mfrac><mrow><msup><mi>x</mi><mn>2</mn></msup>-
1</mrow><mtext>x-1</mtext></mfrac><mo>)</mo>
            =<msub><mi>lim</mi><mn>x &#8594; 1</mn></msub><mo>(</mo>x+1<mo>)</mo>
            =2</math>,<br>
            ορίζεται εφαπτομένη της C<sub>f</sub> στο σημείο της Α(1,1).<br>
            Η εφαπτομένη αυτή έχει συντελεστή διεύθυνσης λ=2 και εξίσωση <br>
            <math style="font-size:22px;">y-1=2(x-1)</math>
          </td><td><figure><img src="images/x_sq_tangent.png" alt="εφαπτομένη της x τετράγωνο"
width="200"><figcaption>Σχ. 5</figcaption></figure></td></tr></table>
        </p>
      </div>
    </div>
    <div style="border:1px solid black;">
      <h3>Οπτικοποίηση του Προβλήματος της εφαπτομένης</h3>
      <p>Το ακόλουθο εργαλείο οπτικοποιεί το παράδειγμα από το <a
onclick="show_theory('derivation_essence');">σχήμα (Σχ. 4).</a><br>
        Πατώντας <b>κλικ</b> πάνω στο σχήμα εμφανίζονται σε <b style="color:blue;">μπλέ</b> οι
ευθείες για τα σημεία <b style="color:blue;">M(x,f(x))</b>.<br>
```

```
Η εφαπτομένη στο σημείο <b style="color:purple">A(x<sub>0</sub>,f(x<sub>0</sub>))</b>
εμφανίζεται σε <b style="color:purple">μωβ</b> χρώμα.<br>

</p>

<p style="text-align:left;margin-left:35%">

Συντεταγμένες σημείου A: <b style="color:purple" id="example_a_point"></b></p>

<canvas id="example_canvas" onmousemove="example_hover(event)"
onclick="show_example(event)" width="600px" height="400px" style="background-color:
white;"></canvas><br><br>

</div>

<div style="border:2px solid black;">

<h3>Οπτικοποίηση παραγώγου</h3>

<p>Το ακόλουθο εργαλείο οπτικοποίει την συνάρτηση απο το <a
onclick="show_theory('derivation_lemma');">παραπάνω σχήμα (Σχ. 5).</a><br>

Με την μετακίνηση του ποντικιού πάνω στο σχήμα μεταβάλλεται το σημείο <b
style="color:blue;">A</b> και η εφαπτομένη της.<br>

Εάν θες να δείς την οπτικοποίηση μιας άλλης συνάρτησης,επέλεξε την από το μενού.<br><br>

<select id="function_selection" onchange="change_example();">

<option id="e_x_v" value="e_x_v">y=e^x</option>

<option id="sinx_v" value="sinx_v">y=ημx</option>

<option id="x_sq_v" value="x_sq_v" hidden>y=x^2</option>

</select>

</p>


<div style="border:1px solid black;" id="x_sq">

<math style="font-
size:30px;">f<mo>(</mo>x<mo>)</mo>=<msup><mi>x</mi><mn>2</mn></msup></math>

<p style="text-align:left;margin-left:35%">

Συντεταγμένες επάνω στην καμπύλη: <b id="a_point" style="color:blue" ></b><br>

Εξίσωση εφαπτομένης: <b id="a_line" style="color:blue" ></b><br>

Απλοποιημένη εξίσωση εφαπτομένης: <b id="a_line_simplified" style="color:blue;"></b>

</p>

<canvas onmousemove="tangent_line(event)" id="visualisation_canvas" width="600px"
height="400px" style="background-color: white;"></canvas><br><br>

</div>
```

```
<div style="border:1px solid black;" id="e_x">

  <math style="font-size:30px;">f<mo>(</mo>x<mo>)</mo>=<msup><mi>e</mi><mn>x</mn></msup></math>

  <p style="text-align:left;margin-left:35%">

    Συντεταγμένες επάνω στην καμπύλη: <b id="a_point_e" style="color:blue" ></b><br>

    Εξίσωση εφαπτομένης: <b id="a_line_e" style="color:blue" ></b><br>

    Απλοποιημένη εξίσωση εφαπτομένης: <b id="a_line_simplified_e" style="color:blue;"></b>

  </p>

  <canvas onmousemove="tangent_line_e(event)" id="visualisation_canvas_e" width="600px" height="400px" style="background-color: white;"></canvas><br><br>

</div>

<div style="border:1px solid black;" id="sinx">

  <math style="font-size:30px;">f<mo>(</mo>x<mo>)</mo>=ημx</math>

  <p style="text-align:left;margin-left:35%">

    Συντεταγμένες επάνω στην καμπύλη: <b id="a_point_sin" style="color:blue" ></b><br>

    Εξίσωση εφαπτομένης: <b id="a_line_sin" style="color:blue" ></b><br>

    Απλοποιημένη εξίσωση εφαπτομένης: <b id="a_line_simplified_sin" style="color:blue;"></b>

  </p>

  <canvas onmousemove="tangent_line_sin(event)" id="visualisation_canvas_sin" width="600px" height="400px" style="background-color: white;"></canvas><br><br>

</div>

<div style="border:2px solid black;">

  <h3>Ερώτηση Κατανόησης</h3>

  <p>Στο παρακάτω παράδειγμα παρουσιάζεται η συνάρτηση <math style="font-size: 22px;">f<mo>(</mo>x<mo>)</mo>=<msup><mi>x</mi><mn>2</mn></msup></math><br>

    Η παράγωγος της συνάρτησης είναι η <math style="font-size: 22px;">f'<mo>(</mo>x<mo>)</mo>=2x</math><br>

    Με βάση τους παρακάτω τύπους υπολόγισε το <b>L</b> και το <b>b</b> για να εμφανιστεί στο σχήμα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης.<br>

    Γράψε στο πεδίο την απάντηση σου ή άσε το πεδίο κενό εάν η απάντηση σου είναι 0.<br>

    Εάν η εφαπτομένη είναι σωστή θα εμφανιστεί κατάλληλο μήνυμα και η ευθεία θα γίνει <b style="color:blue;">μπλέ</b>.<br>

    Σε διαφορετική περίπτωση η ευθεία δεν θα αλλάξει χρώμα.
```

```
            </p>

            <p>

               Έχω ότι για σημείο
<math>A<mo>(</mo>x<sub>0</sub>,y<sub>0</sub><mo>)</mo></math> η εξίσωση εφαπτομένης
είναι η εξής:<br>

               <math style="font-size: 22px;">y-
y<sub>0</sub>=f'<mo>(</mo>x<sub>0</sub><mo>)<mo>(</mo>x-
x<sub>0</sub><mo>)</mo> &#8658; 

                  y=f'<mo>(</mo>x<sub>0</sub><mo>)x-
f'<mo>(</mo>x<sub>0</sub><mo>)x<sub>0</sub>+y<sub>0</sub>

               </math><br>

               Επομένως έχω ότι L=f'<mo>(</mo>x<sub>0</sub><mo>) και b=-
f'<mo>(</mo>x<sub>0</sub><mo>)x<sub>0</sub>+y<sub>0</sub>

            </p><br>

            <table style="margin-left: auto;margin-right: auto;">

               <tr><td>Συντεταγμένες σημείου A:</td><td><b id="a_point_test"
style="color:blue;"></b></td></tr>

               <tr><td>Τιμή L:</td><td><input id="L"></td></tr>

               <tr><td>Τιμή b:</td><td><input id="b"></td></tr>

               <tr><td><br><button onclick="check_solution();">Έλεγξε την λύση
σου</button></td><td><br><button onclick="show_correct_answer();">Δες την σωστή
απάντηση</button></td></tr>

               <tr><td colspan="2"><br><button onclick="reload_test();">Άλλαξε τις συντεταγμένες του
σημείου A</button></td></tr>

               <tr><td><br>Εξίσωση εφαπτομένης:</td><td><br><b
id="test_tangent_line"></b></td></tr>

            </table><br>

            <canvas id="test_canvas" width="600px" height="400px" style="background-color: white;">
</canvas><br><br>

         </div>

      </div>

      <label id="x_position_test" hidden></label><br>

      <label id="y_position_test" hidden></label><br>

      <br><br><br><br><br><br><br><br>

   </body>

</html>
```

Javascript

```
function initialize(){
  load_visualisation_canvas();
  load_test_canvas();
  load_visualisation_canvas_e();
  load_visualisation_canvas_sin();
  load_example_canvas();
  document.getElementById("e_x").hidden=true;
  document.getElementById("sinx").hidden=true;
  document.getElementById("function_selection").value="x_sq_v";

}

function load_example_canvas(){
  var canvas=document.getElementById("example_canvas");
  var context=canvas.getContext('2d');
  context.strokeStyle = 'black';
  context.fillStyle = 'black';
  context.setLineDash([ ]);
  context.clearRect(0, 0, canvas.width, canvas.height);
  //DRAWING AXES
  context.beginPath();
  context.moveTo(40,0);
  context.lineTo(40,600);
  context.stroke();
  context.moveTo(0,360);
  context.lineTo(600,360);
  context.stroke();
  context.closePath();
  context.fillRect(38,358,4,4);
  context.font = "15px Arial";
```

```
context.fillText("O(0,0)",45,380);

//DRAWING ARROWS

context.beginPath();

context.moveTo(40,0);

context.lineTo(45,5);

context.moveTo(45,5);

context.lineTo(35,5);

context.moveTo(35,5);

context.lineTo(40,0);

context.stroke();

context.moveTo(600,360);

context.lineTo(595,365);

context.moveTo(595,365);

context.lineTo(595,355);

context.moveTo(595,355);

context.lineTo(600,360);

context.stroke();

context.closePath();

context.fillText("y",45,20);

context.fillText("x",585,355);

context.strokeStyle="red";

context.beginPath();

context.arc(200,150,150,0,2*Math.PI/3);

context.stroke();

context.closePath();

context.fillText("Cf",350,200)

//AXES RECTS

for(i=40;i<600;i+=60){

   context.fillRect(i,355,1,10);

}

for(i=360;i>0;i-=60){
```

```
    context.fillRect(35,i,10,1)
  }
}

function example_hover(event){
  var canvas = document.getElementById('example_canvas');
  var rect = canvas.getBoundingClientRect();
  var context = canvas.getContext('2d');
  x = event.clientX - rect.left;
  if(x>125 && x <=350){
    load_example_canvas();
    y=Math.sqrt(150*150-(x-200)*(x-200))+150;
    context.fillStyle="blue";
    context.strokeStyle="blue";
    context.setLineDash([5,5]);
    context.fillRect(x-2,y-2,4,4)
    context.beginPath();
    context.moveTo(x,y);
    context.lineTo(x,360);
    context.stroke();
    context.moveTo(x,y);
    context.lineTo(40,y);
    context.stroke();
    context.closePath();
    context.fillStyle="black";
    //CALCULATING X Y
    xi=(x-40)/(600-40);
    xi=xi*9.3;
    xi=Math.round(xi*100)/100;
    yi=(360-y)/360;
    yi=yi*6;
```

```
    yi=Math.round(yi*100)/100;

    context.fillText(yi.toString().replace(".",","),45,y-15);

    context.fillText(xi.toString().replace(".",","),x+15,350);

    document.getElementById("example_a_point").innerHTML="A( "+xi.toString().replace(".",",")+" ,
"+yi.toString().replace(".",",")+" )";

  }

}


function show_example(event){

  var canvas = document.getElementById('example_canvas');

  var rect = canvas.getBoundingClientRect();

  var context = canvas.getContext('2d');

  x = event.clientX - rect.left;

  if(x>125 && x <=350){

    y=Math.sqrt(150*150-(x-200)*(x-200))+150;

    xm15=x-15;

    xm30=x-30;

    xp15=x+15;

    xp30=x+30;

    xp45=x+45;

    draw_tangent(x,true,context);

    if(xm15>125){

      draw_tangent(xm15,false,context);

    }

    if(xm30>125){

      draw_tangent(xm30,false,context);

    }

    if(xp15<350){

      draw_tangent(xp15,false,context);

    }

    if(xp30<350){

      draw_tangent(xp30,false,context);
```

```
    }
    if(xp45<350){
      draw_tangent(xp45,false,context);
    }
  }
}

function draw_tangent(x,isPurple,context){
  y=Math.sqrt(150*150-(x-200)*(x-200))+150;
  context.setLineDash([]);
  if(isPurple){
    context.lineWidth=3;
    context.strokeStyle="purple";
    context.fillStyle="purple";
  }else{
    context.strokeStyle="blue";
    context.fillStyle="blue";
  }
  context.fillRect(x-2,y-2,4,4);
  L=(y-150)/(x-200);
  L=-1/L;
  up=x-y/L;
  down=(400-y)/L+x;
  context.beginPath();
  context.moveTo(x,y);
  context.lineTo(up,0);
  context.moveTo(x,y);
  context.lineTo(down,400);
  context.stroke();
  context.closePath();
  context.lineWidth=1;
```

```
}

function change_example(){
   var s=document.getElementById("function_selection").value;
   document.getElementById("x_sq").hidden=true;
   document.getElementById("e_x").hidden=true;
   document.getElementById("sinx").hidden=true;
   document.getElementById("x_sq_v").hidden=false;
   document.getElementById("e_x_v").hidden=false;
   document.getElementById("sinx_v").hidden=false;
   if(s.toString()=="e_x_v"){
      document.getElementById("e_x").hidden=false;
      document.getElementById("e_x_v").hidden=true;
      load_visualisation_canvas_e();
   }else if(s.toString()=="sinx_v"){
      document.getElementById("sinx").hidden=false;
      document.getElementById("sinx_v").hidden=true;
      load_visualisation_canvas_sin();
   }else{
      document.getElementById("x_sq").hidden=false;
      document.getElementById("x_sq_v").hidden=true;
      load_visualisation_canvas();
   }
}

function show_theory(id){
   document.getElementById(id).hidden=false;
   document.getElementById(id+"_button").hidden=true;
}
```

```
function load_visualisation_canvas() {
  var canvas = document.getElementById('visualisation_canvas');
  var context = canvas.getContext('2d');
  context.strokeStyle = 'black';
  context.fillStyle = 'black';
  context.clearRect(0, 0, canvas.width, canvas.height);
  context.beginPath();
  context.moveTo(300, 0);
  context.lineTo(300, 400);
  context.moveTo(0, 200);
  context.lineTo(600, 200);
  context.stroke();
  context.closePath();
  context.fillStyle = 'red';
  context.beginPath();
  for (var i = -300; i < 300; i += 0.05) {
    context.fillRect(i + 300, -1 * (x_squared(i)) + 200, 1, 1);
  }
  context.closePath();
  context.strokeStyle = 'black';
  context.fillStyle = 'black';
  context.font = "15px Arial";
  context.fillText("y", 280, 15);
  context.fillText("y'", 280, 385)
  context.fillText("x", 585, 185);
  context.fillText("x'", 10, 185);
  context.beginPath();
  context.moveTo(300, 0);
  context.lineTo(305, 5);
  context.moveTo(305, 5);
  context.lineTo(295, 5);
```

```
    context.moveTo(295, 5);
    context.lineTo(300, 0);
    context.stroke();
    context.closePath();
    context.beginPath();
    context.strokeStyle = 'black';
    context.fillStyle = 'black';
    context.moveTo(600, 200);
    context.lineTo(595, 195);
    context.moveTo(595, 195);
    context.lineTo(595, 205);
    context.moveTo(595, 205);
    context.lineTo(600, 200);
    context.stroke();
    context.closePath();
    context.fillText("O(0,0)", 250, 220)
    context.fillRect(298, 198, 4, 4);
    context.fillText("y=x²", 150, 110);
}

function tangent_line(e) {
    var canvas = document.getElementById('visualisation_canvas');
    var rect = canvas.getBoundingClientRect();
    var context = canvas.getContext('2d');
    x0 = e.clientX - rect.left - 300;
    y0 = x_squared(x0);
    if (y0 < 200) {
        load_visualisation_canvas();
        L = x_squared_derivation(x0);
        x0 = x0 + 300;
        y0 = -1 * y0 + 200;
```

```
up = y0 / L + x0;
down = (y0 - 400) / L + x0;
context.strokeStyle = 'blue';
context.fillStyle = 'blue';
context.moveTo(x0, y0);
context.lineTo(up, 0);
context.moveTo(x0, y0);
context.lineTo(down, 400);
context.fillRect(x0 - 2, y0 - 2, 4, 4);
context.stroke();
context.closePath();
context.beginPath();
context.setLineDash([5, 5]);
context.moveTo(x0, y0);
context.lineTo(x0, 200);
context.moveTo(x0, y0);
context.lineTo(300, y0);
context.stroke();
context.closePath();
context.setLineDash([]);
context.fillStyle = 'black';
context.strokeStyle = 'black';
x0 = x0 - 300;
y0 = -1 * (y0 - 200)
x0 = Math.round(x0 * 1000) / 1000
y0 = Math.round(y0 * 1000) / 1000;
L = Math.round(L * 1000) / 1000;
document.getElementById("a_point").innerHTML = "A( " + x0.toString().replace(".", ",") + " , " + y0.toString().replace(".", ",") + " )";
context.fillText(x0.toString().replace(".", ","), x0 + 300, 220);
context.fillText(y0.toString().replace(".", ","), 250, -1 * y0 + 200);
if (x0 < 0) {
```

```
        document.getElementById("a_line").innerHTML = "y-" + y0.toString().replace(".", ",") + "=" + L.toString().replace(".", ",") + "(x-(" + x0.toString().replace(".", ",") + "))";
      } else {
        document.getElementById("a_line").innerHTML = "y-" + y0.toString().replace(".", ",") + "=" + L.toString().replace(".", ",") + "(x-" + x0.toString().replace(".", ",") + ")";
      }
      var b = L * x0 + y0;
      b = Math.round(b * 1000) / 1000;
      document.getElementById("a_line_simplified").innerHTML = "y=" + L.toString().replace(".", ",") + "x+" + b.toString().replace(".", ",");
  }
}


function x_squared(x) {
  //the /100 is used to make the plot more visible
  return x * x / 100;
}

function x_squared_derivation(x) {
  return x / 50;
}

function load_visualisation_canvas_e() {
  var canvas = document.getElementById('visualisation_canvas_e');
  var context = canvas.getContext('2d');
  context.strokeStyle = 'black';
  context.fillStyle = 'black';
  context.clearRect(0, 0, canvas.width, canvas.height);
  context.beginPath();
  context.moveTo(300, 0);
  context.lineTo(300, 400);
  context.moveTo(0, 200);
```

```
context.lineTo(600, 200);
context.stroke();
context.closePath();
context.font = "15px Arial";
context.beginPath();
context.strokeStyle = 'black';
context.fillStyle = 'black';
context.beginPath();
context.moveTo(300, 0);
context.lineTo(305, 5);
context.moveTo(305, 5);
context.lineTo(295, 5);
context.moveTo(295, 5);
context.lineTo(300, 0);
context.stroke();
context.closePath();
context.moveTo(600, 200);
context.lineTo(595, 195);
context.moveTo(595, 195);
context.lineTo(595, 205);
context.moveTo(595, 205);
context.lineTo(600, 200);
context.stroke();
context.closePath();
context.fillText("O(0,0)", 250, 220)
context.fillRect(298, 198, 4, 4);
context.beginPath();
context.fillStyle = "red";
for (i = -350; i < 350; i += 0.05) {
  context.fillRect(i + 300, -1 * e_function(i) + 180, 2, 2);
}
```

```
  context.fillStyle = "black";
  context.fillRect(298, 178, 4, 4);
  context.fillText("1", 305, 170);
  context.fillText("y", 280, 15);
  context.fillText("y'", 280, 385)
  context.fillText("x", 585, 185);
  context.fillText("x'", 10, 185);
  context.fillText("y=e^x",200,170)
}

function tangent_line_e(event) {
  var canvas = document.getElementById('visualisation_canvas_e');
  var rect = canvas.getBoundingClientRect();
  var context = canvas.getContext('2d');
  x0 = event.clientX - rect.left - 300;
  y0 = e_function(x0);
  if (y0 < 180) {
    load_visualisation_canvas_e();
    L = y0;
    x0 = x0 + 300;
    y0 = -1 * y0 + 180;
    context.fillStyle = "blue";
    context.strokeStyle = "blue";
    context.fillRect(x0 - 2, y0 - 2, 4, 4);
    context.setLineDash([5, 5]);
    context.beginPath();
    context.moveTo(x0, y0);
    context.lineTo(x0, 200);
    context.moveTo(x0, y0);
    context.lineTo(300, y0);
    context.stroke();
```

```
    context.closePath();
    context.setLineDash([]);
    x0 = Math.round(x0 * 1000) / 1000
    y0 = Math.round(y0 * 1000) / 1000;
    L = Math.round(L * 1000) / 1000;
    context.fillStyle = "black";
    context.fillText((Math.round(((x0 - 300) * 1000)) / 1000).toString().replace(".", ","), x0, 220);
    context.fillText((-1 * Math.round(((y0 - 180) * 1000)) / 1000).toString().replace(".", ","), 250, y0);
    up = y0 / ((e_function(x0 - 300) * Math.log(1.1)) / 5) + x0;
    down = (y0 - 400) / ((e_function(x0 - 300) * Math.log(1.1)) / 5) + x0;
    context.beginPath();
    context.moveTo(x0, y0);
    context.lineTo(up, 0);
    context.moveTo(x0, y0);
    context.lineTo(down, 400);
    context.stroke();
    context.closePath();
    context.strokeStyle = "black";
    x0 = x0 - 300;
    y0 = -1 * (y0 - 180);
    y0 = Math.round(y0 * 1000) / 1000;
    x0 = Math.round(x0 * 1000) / 1000;
    document.getElementById("a_point_e").innerHTML = "A( " + x0.toString().replace(".", ",") + " , " +
y0.toString().replace(".", ",") + " )";
    if (x0 < 0) {
      document.getElementById("a_line_e").innerHTML = "y-" + y0.toString().replace(".", ",") + "=" +
L.toString().replace(".", ",") + "(x-(" + x0.toString().replace(".", ",") + "))";
    } else {
      document.getElementById("a_line_e").innerHTML = "y-" + y0.toString().replace(".", ",") + "=" +
L.toString().replace(".", ",") + "(x-" + x0.toString().replace(".", ",") + ")";
    }
    b = L * x0 + y0;
    b = Math.round(b * 1000) / 1000;
```

```
    if(b>0){
      document.getElementById("a_line_simplified_e").innerHTML = "y=" + L.toString().replace(".", ",")
+ "x+" + b.toString().replace(".", ",");
    }else{
      document.getElementById("a_line_simplified_e").innerHTML = "y=" + L.toString().replace(".", ",")
+ "x" + b.toString().replace(".", ",");
    }
  }
}


function e_function(x) {
  //also used as derivation
  return Math.pow(1.1, (x / 5));
}



function load_visualisation_canvas_sin(){
  var canvas = document.getElementById('visualisation_canvas_sin');
  var context = canvas.getContext('2d');
  context.strokeStyle = 'black';
  context.setLineDash([]);
  context.fillStyle = 'black';
  context.clearRect(0, 0, canvas.width, canvas.height);
  context.beginPath();
  context.moveTo(300, 0);
  context.lineTo(300, 400);
  context.moveTo(0, 200);
  context.lineTo(600, 200);
  context.stroke();
  context.closePath();
  context.font = "15px Arial";
  context.beginPath();
```

```
context.strokeStyle = 'black';

context.fillStyle = 'black';

context.beginPath();

context.moveTo(300, 0);

context.lineTo(305, 5);

context.moveTo(305, 5);

context.lineTo(295, 5);

context.moveTo(295, 5);

context.lineTo(300, 0);

context.stroke();

context.closePath();

context.moveTo(600, 200);

context.lineTo(595, 195);

context.moveTo(595, 195);

context.lineTo(595, 205);

context.moveTo(595, 205);

context.lineTo(600, 200);

context.stroke();

context.closePath();

context.fillStyle = "black";

context.fillText("y", 280, 15);

context.fillText("y'", 280, 385)

context.fillText("x", 585, 185);

context.fillText("x'", 10, 185);

context.fillText("y=ημx",90,110);

//p/2,0

point=389;

context.fillRect(point-2,198,4,4);

context.fillText("π/2",point-10,215);

context.beginPath();

context.strokeStyle='black';
```

```
context.setLineDash([5,5]);

context.moveTo(point,200);

context.lineTo(point,200- 130*( Math.sin(( Math.PI/180 ) * (point+70))));

context.stroke();

context.closePath();

//3p/2

point=570;

context.fillRect(point-2,198,4,4);

context.fillText("3π/2",point-35,215);

context.beginPath();

context.moveTo(point,200);

context.lineTo(point,200- 130*( Math.sin(( Math.PI/180 ) * (point+70))));

context.stroke();

context.closePath();

//-p/2,0

point=209;

context.fillRect(point-2,198,4,4);

context.fillText("-π/2",point-35,215);

context.beginPath();

context.moveTo(point,200);

context.lineTo(point,200- 130*( Math.sin(( Math.PI/180 ) * (point+70))));

context.stroke();

context.closePath();

//-3p/2,0

point=30;

context.fillRect(point-2,198,4,4);

context.fillText("-3π/2",point-15,215);

context.beginPath();

context.moveTo(point,200);

context.lineTo(point,200- 130*( Math.sin(( Math.PI/180 ) * (point+70))));

context.stroke();
```

```
context.closePath();

//+1,0

point=200- 130*( Math.sin(( Math.PI/180 ) * (385+70)));

context.fillRect(298,point-2,4,4);

context.fillText("1",285,point-5);

context.beginPath();

context.moveTo(0,point)

context.lineTo(600,point);

context.stroke();

context.closePath();

//-1,0

point=200- 130*( Math.sin(( Math.PI/180 ) * (567+70)));

context.fillRect(298,point-2,4,4);

context.fillText("-1",285,point+15);

context.beginPath();

context.moveTo(0,point)

context.lineTo(600,point);

context.stroke();

context.closePath();

context.strokeStyle="red";

context.setLineDash([]);

context.lineWidth=2;

context.beginPath();

for (var angle = -20; angle <600; angle+=1){

  var y =200- 130*( Math.sin(( Math.PI/180 ) * (angle+70)))

  var x=10 + angle;

  context.lineJoin = 'round';

  context.lineTo(x,y);

  }

context.stroke();

context.closePath();
```

```
  //-p,0
  context.fillRect(118,198,4,4);
  context.fillText("-π",105,215);
  //0,0
  context.fillText("O(0,0)", 250, 220)
  context.fillRect(298, 198, 4, 4);
  //p,0
  context.fillRect(478,198,4,4);
  context.fillText("π",470,215);
}



function tangent_line_sin(event) {
  var canvas = document.getElementById('visualisation_canvas_sin');
  var rect = canvas.getBoundingClientRect();
  var context = canvas.getContext('2d');
  var x = event.clientX - rect.left;
  if (x >= 30 && x <= 570) {
    load_visualisation_canvas_sin();
    var y = 200 - 130 * (Math.sin((Math.PI / 180) * (x + 60)));
    context.fillStyle="blue";
    context.strokeStyle = "blue";
    context.fillRect(x - 3, y - 3, 6, 6);
    top_y = 200 - 130 * (Math.sin((Math.PI / 180) * (385 + 70)));
    bottom_y = 200 - 130 * (Math.sin((Math.PI / 180) * (567 + 70)));
    x_n = (Math.PI*3*(x - 30)) / (570 - 30)-(3*Math.PI)/2;
    x_n = Math.round(x_n * 100) / 100;
    y_n = (2 * (y - top_y)) / (bottom_y - top_y) - 1;
    y_n = -y_n;
    y_n = Math.round(y_n * 100) / 100;
```

```
if (y_n > 1) {
  y_n = 1;
}
if (y_n < -1) {
  y_n = -1;
}
context.setLineDash([5,5]);
context.beginPath();
context.moveTo(x,y);
context.lineTo(x,200);
context.stroke();
context.moveTo(x,y);
context.lineTo(300,y);
context.stroke();
context.closePath();
context.setLineDash([]);
context.fillText(x_n,x,185);
context.fillText(y_n,310,y-10);
document.getElementById("a_point_sin").innerHTML = "A( " + x_n + " , " + y_n + " )";
if(x_n>-Math.PI/2 && x_n < Math.PI/2){
  L=130*(Math.PI/180)*Math.cos(Math.sin(( Math.PI/180 ) * (x+70)));
}else{
  L=-130*(Math.PI/180)*Math.cos(Math.sin(( Math.PI/180 ) * (x+70)));
}
if (y_n <0.95 && y_n >-0.95) {
  up = y / L + x;
  down = (y - 400) / L + x;
  context.beginPath();
  context.moveTo(x, y);
  context.lineTo(up, 0);
  context.stroke();
```

```
    context.moveTo(x, y);
    context.lineTo(down, 400);
    context.stroke();
    context.closePath();
    L=Math.round(L*100)/100;
    y0=y_n
    if(y_n<0){
      y0="("+y_n+")";
    }
    x0=x_n;
    if(x_n<0){
      x0="("+x_n+")";
    }
    document.getElementById("a_line_sin").innerHTML ="y-"+y0+"="+L+"(x-"+x0+")";
    b=y_n-L*x_n;
    b=Math.round(b*100)/100;
    if(b>0){
      document.getElementById("a_line_simplified_sin").innerHTML="y="+L+"x+"+b;
    }else{
      document.getElementById("a_line_simplified_sin").innerHTML="y="+L+"x"+b;
    }
  }else{
    L=Math.cos(x_n);
    up = y / L + x;
    down = (y - 400) / L + x;
    context.beginPath();
    context.moveTo(x, y);
    context.lineTo(up, 0);
    context.stroke();
    context.moveTo(x, y);
    context.lineTo(down, 400);
```

```
      context.stroke();
      context.closePath();
      L=Math.round(L*100)/100;
      y0=y_n
      if (y_n != 1 && y_n != -1) {
        if (y_n < 0) {
          y0 = "(" + y_n + ")";
        }
        x0 = x_n;
        if (x_n < 0) {
          x0 = "(" + x_n + ")";
        }
        document.getElementById("a_line_sin").innerHTML = "y-" + y0 + "=" + L + "(x-" + x0 + ")";
        b = y_n - L * x_n;
        b = Math.round(b * 100) / 100;
        if (b > 0) {
          document.getElementById("a_line_simplified_sin").innerHTML = "y=" + L + "x+" + b;
        } else {
          document.getElementById("a_line_simplified_sin").innerHTML = "y=" + L + "x" + b;
        }
      }else{
        if (y_n < 0) {
          y0 = "(" + y_n + ")";
        }
        document.getElementById("a_line_sin").innerHTML = "y-" + y0 + "=0";
        document.getElementById("a_line_simplified_sin").innerHTML = "y="+y_n;
      }
    }
  }
}
```

```
function sin(x){
   return Math.sin(x);
}

function sin_derivation(x){
   return Math.cos(x);
}

function load_test_canvas(){
   var canvas = document.getElementById('test_canvas');
   var context = canvas.getContext('2d');
   context.strokeStyle = 'black';
   context.fillStyle = 'black';
   context.clearRect(0, 0, canvas.width, canvas.height);
   context.beginPath();
   context.moveTo(300, 0);
   context.lineTo(300, 400);
   context.moveTo(0, 200);
   context.lineTo(600, 200);
   context.stroke();
   context.closePath();
   context.fillStyle = 'red';
   context.beginPath();
   for (var i = -300; i < 300; i += 0.05) {
      context.fillRect(i + 300, -1 * (x_squared(i)) + 200, 1, 1);
   }
   context.closePath();
   context.strokeStyle = 'black';
```

```
context.fillStyle = 'black';

context.font = "15px Arial";

context.fillText("y", 280, 15);

context.fillText("y'", 280, 385)

context.fillText("x", 585, 185);

context.fillText("x'", 10, 185);

context.beginPath();

context.moveTo(300, 0);

context.lineTo(305, 5);

context.moveTo(305, 5);

context.lineTo(295, 5);

context.moveTo(295, 5);

context.lineTo(300, 0);

context.stroke();

context.closePath();

context.beginPath();

context.strokeStyle = 'black';

context.fillStyle = 'black';

context.moveTo(600, 200);

context.lineTo(595, 195);

context.moveTo(595, 195);

context.lineTo(595, 205);

context.moveTo(595, 205);

context.lineTo(600, 200);

context.stroke();

context.closePath();

context.fillText("O(0,0)", 250, 220)

context.fillRect(298, 198, 4, 4);

context.fillText("y=x²", 150, 110);

//lines of y axis

context.fillRect(296,100,8,1);
```

```
context.fillRect(296,300,8,1);
context.fillRect(298,250,4,1);
context.fillRect(298,350,4,1);
context.fillRect(298,50,4,1);
context.fillRect(298,150,4,1);
//lines of x axis
context.fillRect(200,196,1,8);
context.fillRect(400,196,1,8);
context.fillRect(100,196,1,8);
context.fillRect(500,196,1,8);
context.fillRect(250,198,1,4);
context.fillRect(450,198,1,4);
context.fillRect(150,198,1,4);
context.fillRect(550,198,1,4);
context.fillRect(350,198,1,4);
context.fillRect(50,198,1,4);
y=600;
while(y>195){
  x=Math.floor(Math.random()*600);
  x=x-300;
  y=x_squared(x);
}
x_disp=x/100;
y_disp=y/100;
x_disp=Math.round(x_disp*100)/100;
y_disp=Math.round(y_disp*100)/100;
context.fillStyle="blue";
context.fillRect(x+300-2,-y+200-2,4,4);
document.getElementById("x_position_test").innerHTML=x;
document.getElementById("y_position_test").innerHTML=y;
document.getElementById("a_point_test").innerHTML="A( "+x_disp.toString().replace(".",",")+" , "+y_disp.toString().replace(".",",")+" )";
```

```
    context.setLineDash([5,5]);
    context.strokeStyle="blue";
    context.beginPath()
    context.moveTo(x+300,-y+200);
    context.lineTo(x+300,200);
    context.moveTo(x+300,-y+200);
    context.lineTo(300,-y+200);
    context.stroke();
    context.closePath();
    context.fillStyle="black";
    context.fillText(x_disp.toString().replace(".",","),x+300,230);
    context.fillRect(x+298,198,4,4);
    context.fillText(y_disp.toString().replace(".",","),300,-y+190);
    context.fillRect(298,-y+198,4,4);
    context.setLineDash([]);
}


function reload_test(){
    load_test_canvas();
    document.getElementById("L").value="";
    document.getElementById("b").value="";
    document.getElementById("test_tangent_line").innerHTML="";
    document.getElementById("test_tangent_line").style.color="black";
}


function show_correct_answer(){
    var x=document.getElementById("x_position_test").innerHTML*1;
    var y=document.getElementById("y_position_test").innerHTML*1;
    var canvas = document.getElementById('test_canvas');
```

```
  var context = canvas.getContext('2d');
  L=x_squared_derivation(x);
  x=x+300;
  y=-y+200;
  up=x+y/L;
  down=x+(y-400)/L;
  context.setLineDash([]);
  context.strokeStyle="blue";
  context.beginPath();
  context.moveTo(x,y);
  context.lineTo(up,0);
  context.moveTo(x,y);
  context.lineTo(down,400);
  context.stroke();
  context.closePath();
  x=x-300;
  y=-(y-200);
  x=x/100;
  y=y/100;
  L=2*x;
  b=y-x*L;
  L=Math.round(L*100)/100;
  b=Math.round(b*100)/100;
  if(L!=0){
    if(b<0){
document.getElementById("test_tangent_line").innerHTML="y="+L.toString().replace(".",",")+"x"+b.toString().replace(".",",");
    }else if(b>0){
document.getElementById("test_tangent_line").innerHTML="y="+L.toString().replace(".",",")+"x+"+b.toString().replace(".",",");
    }else{
```

```
        document.getElementById("test_tangent_line").innerHTML="y="+L.toString().replace(".",",")+"x";
      }
    }else{
      document.getElementById("test_tangent_line").innerHTML="y="+b.toString().replace(".",",");
    }
    document.getElementById("L").value=L.toString().replace(".",",");
    document.getElementById("b").value=b.toString().replace(".",",");
    document.getElementById("test_tangent_line").style.color="blue";
}


function check_solution(){
    if(document.getElementById("L").value==""){
      L=0;
    }else{
      L=document.getElementById("L").value.toString().replace(",",".");
      if(isNaN(L)){
        alert("Δώσε μία αριθμητική τιμή για το L.")
      }else{
        L=L*1;
      }
    }
    if(document.getElementById("b").value==""){
      b=0;
    }else{
      b=document.getElementById("b").value.toString().replace(",",".");
      if(isNaN(b)){
        alert("Δώσε μία αριθμητική τιμή για το b.")
      }else{
        b=b*1;
      }
```

```
  }
  var x=document.getElementById("x_position_test").innerHTML*1;
  var y=document.getElementById("y_position_test").innerHTML*1;
  x=x/100;
  y=y/100;
  L_correct=2*x;
  b_correct=y-x*L;
  b=Math.round(b*100)/100;
  b_correct=Math.round(b_correct*100)/100;
  L=Math.round(L*100)/100;
  L_correct=Math.round(L_correct*100)/100;
  if(b_correct==b && L_correct==L){
    show_correct_answer();
  }else{
    if(L!=0){
      if(b<0){
document.getElementById("test_tangent_line").innerHTML="y="+L.toString().replace(".",",")+"x"+b.toS
tring().replace(".",",");
      }else if(b>0){
document.getElementById("test_tangent_line").innerHTML="y="+L.toString().replace(".",",")+"x+"+b.to
String().replace(".",",");
      }else{
document.getElementById("test_tangent_line").innerHTML="y="+L.toString().replace(".",",")+"x";
      }
    }else{
      document.getElementById("test_tangent_line").innerHTML="y="+b.toString().replace(".",",");
    }


document.getElementById("test_tangent_line").innerHTML=document.getElementById("test_tange
nt_line").innerHTML+"<br>Δοκίμασε ξανά.";
```

```
      left=200-(b-L)*100;

      right=200-(b+L)*100;

      middle=200-b*100;

      var canvas = document.getElementById('test_canvas');

      var context = canvas.getContext('2d');

      context.strokeStyle="black";

      context.beginPath();

      context.moveTo(0,left);

      context.lineTo(300,middle);

      context.moveTo(300,middle);

      context.lineTo(600,right);

      context.stroke();

      context.closePath();


    }

  }
```