Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο   Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΠΑΡΟΧΕΣ ΣΥΝΤΑΞΗΣ ΑΠΟ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΕΣ ΕΤΑΙΡΕΙΕΣ ΜΕ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΟΥ ΥΠΟΚΕΙΝΤΟ ΣΕ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ ΤΥΠΟΥ ΚΙΝΗΣΗΣ BROWN

Χριστίνα Γ. Νάκη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων*

Πειραιάς,
Μάρτιος 2024

Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΠΑΡΟΧΕΣ ΣΥΝΤΑΞΗΣ ΑΠΟ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΕΣ ΕΤΑΙΡΕΙΕΣ ΜΕ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΟΥ ΥΠΟΚΕΙΝΤΟ ΣΕ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ ΤΥΠΟΥ ΚΙΝΗΣΗΣ BROWN

Χριστίνα Γ. Νάκη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων*

Πειραιάς,
Μάρτιος 2024

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη Συνέλευση του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθμ. …….. συνεδρίασή της, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- κος Σεβρόγλου Βασίλειος (Επιβλέπων), Καθηγητής
- κος Πολίτης Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής
- κος Τζαβέλας Γεώργιος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS
School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

STOCHASTIC PENSION FUNDING FROM FIRMS WITH RISKY ASSETS UNDER BROWNIAN UNCERTAINTY

By
Christina G. Naki

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece
March 2024

Στην οικογένεια μου,

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων» του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, της Σχολής Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής, του Πανεπιστημίου Πειραιώς.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα κο Βασίλειο Σεβρόγλου, Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύτιμη καθοδήγησή του καθώς και την εμπιστοσύνη και εκτίμηση που μου έδειξε, στο σύνολο της διπλωματικής μου εργασίας.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, κο Κωνσταντίνο Πολίτη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς και τον κο Γεώργιο Τζαβελά, Αναπληρωτή Καθηγητή του ιδίου Τμήματος, για τις χρήσιμες υποδείξεις και τις εύστοχες παρατηρήσεις τους.

Δεν θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω τους γονείς μου Μαρία και Γεώργιο και τα αγαπημένα μου αδέρφια Καλλιόπη και Κωνσταντίνο καθώς και την γιαγιά μου Ευαγγελία για την διαχρονική συμπαράστασή τους και την υλική και ηθική στήριξη των επιλογών μου. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω και τους φίλους που κατά την διάρκεια των ακαδημαϊκών μου χρόνων στάθηκαν δίπλα μου και με βοήθησαν να αντεπεξέλθω σε όλες τις δυσκολίες.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή, θα μελετηθούν και θα παρουσιαστούν διάφοροι τύποι συνταξιοδοτικών σχημάτων σχετικά με την κατανομή του κινδύνου. Πιο δημοφιλή εξ αυτών, είναι τα συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένων παροχών (Defined Benefit - DBP) και τα καθορισμένων εισφορών (Defined Contribution - DCP). Ένας τρόπος μέσω του οποίου μπορεί να γίνει η αποτίμηση και σύγκρισή μεταξύ τους είναι η χρήση της κίνησης Brown, ενός μαθηματικού μοντέλου το οποίο χρησιμοποιείται στα χρηματοοικονομικά για την ανάλυση και τον σχεδιασμό οικονομικών μοντέλων και, στην περίπτωσή μας, συνταξιοδοτικών προγραμμάτων. Στην παρούσα εργασία, θα γίνει ανάλυση στα δύο συνταξιοδοτικά σχήματα (καθορισμένων εισφορών και καθορισμένων παροχών) προκειμένου να διαπιστωθεί πώς μπορεί να οριστεί και να καθοριστεί το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο. Η ανάλυσή τους θα βασιστεί σε δύο εργασίες που επιχειρούν βαθύτερες μαθηματικές προσεγγίσεις και θα συμπληρώσει την παρουσίαση των ειδών συνταξιοδοτικών προγραμμάτων και της ανάλυσης των στοχαστικών διαδικασιών και σχετικών μαθηματικών εννοιών που θα προηγηθεί στα πρώτα θεωρητικά κεφάλαια της εργασίας. Τέλος, θα παρουσιαστούν κάποιες χρήσιμες παρατηρήσεις και συμπεράσματα της μεθόδου.

Abstract

In this paper, different types of risk sharing pension schemes will be studied and presented. The most popular of these are the defined benefit (DBP) and defined contribution (DCP) pension schemes. The method through which they can be valued and compared is the use of Brownian motion, a mathematical model used in finance to analyze and design economic models and, in our case, pension plans. In this paper, the two pension schemes (defined contribution and defined benefit) will be analyzed in order to see how the optimal portfolio can be defined and determined. Their analysis will be based on two papers that attempt deeper mathematical approaches and will complement the presentation of the types of pension plans and the analysis of stochastic processes and related mathematical concepts that will precede the first theoretical chapters of the paper. Finally, some useful observations and conclusions of the method will be presented.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Σχημάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Οι συνταξιοδοτικές παροχές διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στη διασφάλιση της οικονομικής ασφάλειας κατά τη διάρκεια της συνταξιοδότησης και η διαχείριση αυτών των παροχών περιλαμβάνει πολύπλοκα ζητήματα. Η στοχαστική συνταξιοδοτική χρηματοδότηση, η οποία λαμβάνει υπόψη αβέβαιους παράγοντες, έχει αναδειχθεί σε σημαντικό πεδίο έρευνας στον τομέα του συνταξιοδοτικού προγραμματισμού. Οι ασφαλιστικές εταιρείες διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην παροχή συνταξιοδοτικών παροχών, στη διαχείριση του κινδύνου και στη διασφάλιση της οικονομικής σταθερότητας των συνταξιοδοτικών συστημάτων.

Δύο βασικές επιλογές υπάρχουν στις δομές των συνταξιοδοτικών σχημάτων σχετικά με την κατανομή του κινδύνου. Στο πλαίσιο ενός σχήματος καθορισμένης συνεισφοράς (Defined Contribution (DCP)), το άτομο φέρει τον κίνδυνο που απορρέει από τη διαχείριση κεφαλαίων. Αντίθετα, σε ένα πρόγραμμα καθορισμένων παροχών (Defined Benefit (DBP)), όπου οι παροχές συνδέονται συνήθως με τον τελικό μισθό, τον χρηματοοικονομικό κίνδυνο αναλαμβάνει ο χορηγός. Η κατανόηση της δυναμικής των στοχαστικών διαδικασιών, ιδιαίτερα της κίνησης Brown, είναι απαραίτητη για την ανάλυση των αβεβαιοτήτων που σχετίζονται με τα συνταξιοδοτικά συστήματα. Υπάρχει η άποψη ότι η διαχείριση των συγκεντρωτικών συνταξιοδοτικών ταμείων με στοχαστικά επιτόκια περιλαμβάνει βέλτιστες τεχνικές κατανομής περιουσιακών στοιχείων για την ελαχιστοποίηση των αποκλίσεων της μη χρηματοδοτούμενης αναλογιστικής υποχρέωσης από το μηδέν σε έναν πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα. Πρωταρχικός στόχος αυτής της εργασίας είναι να διεξαγάγει μια θεωρητική ανάλυση των συνταξιοδοτικών πλάνων καθορισμένων παροχών, των στοχαστικών διαδικασιών (με έμφαση στην κίνηση Brown) και των επιπτώσεών τους στις στοχαστικές συνταξιοδοτικές παροχές που παρέχονται από ασφαλιστικές εταιρείες.

Εξετάζοντας τις εργασίες, «Βέλτιστη κατανομή περιουσιακών στοιχείων για αθροιστικά ταμεία καθορισμένων παροχών συνταξιοδοτικών ταμείων με στοχαστικά επιτόκια» [15] και «Μέση διακύμανση χαρτοφυλακίου και εισφορών στη στοχαστική χρηματοδότηση συντάξεων» [16], στοχεύουμε να αποκτήσουμε γνώσεις για τη βέλτιστη διαχείριση των συνταξιοδοτικών ταμείων σε συνθήκες αβεβαιότητας.

Το εύρος αυτής της έρευνας επεκτείνεται στη διερεύνηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ ασφαλιστικών εταιρειών, στοχαστικών διαδικασιών και συνταξιοδοτικών παροχών. Αναλύοντας τις επιλεγμένες εργασίες, στοχεύουμε να συνεισφέρουμε στο υπάρχον σύνολο γνώσεων σχετικά με τη στοχαστική συνταξιοδοτική χρηματοδότηση και να παρέχουμε πληροφορίες για τη βέλτιστη κατανομή περιουσιακών στοιχείων και τις στρατηγικές διαχείρισης κινδύνου για συνταξιοδοτικά πλάνα καθορισμένων παροχών.

Διερευνώντας τα θεωρητικά θεμέλια και αναλύοντας τις συγκεκριμένες εργασίες, αυτή η μελέτη στοχεύει να ρίξει φως στην πολυπλοκότητα της στοχαστικής χρηματοδότησης των συντάξεων και να παρέχει πληροφορίες για τις βέλτιστες στρατηγικές στη διαχείριση των συνταξιοδοτικών συστημάτων ενόψει της αβεβαιότητας. Τα ευρήματα αυτής της έρευνας έχουν τη δυνατότητα να ενημερώσουν τους υπεύθυνους χάραξης πολιτικής, τις ασφαλιστικές εταιρείες και τα άτομα που σχεδιάζουν να συνταξιοδοτηθούν, συμβάλλοντας τελικά στην ανάπτυξη ισχυρών και αποτελεσματικών συνταξιοδοτικών συστημάτων.

Η παρούσα εργασία είναι οργανωμένη σε τρία κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο, αναλύουμε και εξετάζουμε τα δύο είδη συνταξιοδοτικών σχημάτων, καθορισμένων παροχών(DBP) και καθορισμένων εισφορών (DCP). Επίσης δίνουμε το υπόβαθρο και τα κίνητρα για τη μελέτη της στοχαστικής συνταξιοδοτικής χρηματοδότησης και τον ρόλο των ασφαλιστικών εταιρειών στο πλαίσιο των συνταξιοδοτικών παροχών. Το δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζει μια εκτενή ανασκόπηση των θεωρητικών θεμελίων, που περιλαμβάνει μια ανάλυση των συνταξιοδοτικών συστημάτων, τη θεωρία πιθανοτήτων και μια εις βάθος εξερεύνηση της κίνησης Brown και των εφαρμογών της στη χρηματοοικονομική μοντελοποίηση. Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο, εξετάζουμε την περίπτωση ενός συγκεντρωτικού καθορισμένου συνταξιοδοτικού σχήματος, αναλύοντας διεξοδικά τις μεθοδολογίες και τα ευρήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Συνταξιοδοτικά Σχήματα - Βασικοί Ορισμοί και Έννοιες

Τα συνταξιοδοτικά σχήματα διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην παροχή οικονομικής ασφάλειας για τα άτομα κατά τα έτη συνταξιοδότησης τους. Προκειμένου να κατανοήσουμε τους διαφορετικούς τύπους συνταξιοδοτικών σχημάτων και τη δυναμική τους, είναι απαραίτητο να κατανοήσουμε την πολυπλοκότητα αυτών των συστημάτων.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλύσουμε τα συνταξιοδοτικά σχήματα, ξεκινώντας με την εξέταση των χαρακτηριστικών και των σχετικών κινδύνων των συνταξιοδοτικών πλάνων καθορισμένων παροχών (Defined Benefit Plans-DBP), παρέχοντας μια ολοκληρωμένη κατανόηση του σχεδιασμού τους, των μηχανισμών χρηματοδότησης, της αναλογιστικής αποτίμησης, της διαχείρισης πλεονάσματος και ελλείμματος, της κανονιστικής συμμόρφωσης και της επικοινωνίας. Επιπλέον, διερευνάται η συμμετοχή των ασφαλιστικών εταιρειών στη διαχείριση των επενδυτικών και χρηματοδοτικών κινδύνων των συνταξιοδοτικών σχημάτων της DBP και η συμβολή τους στη σταθερότητα των συνταξιοδοτικών παροχών. Στη συνέχεια, το κεφάλαιο εστιάζει στα συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένης εισφοράς (Defined Contribution Plans - DCP), συζητώντας τη δομή, τα οφέλη και τους κινδύνους τους, καθώς και τις βασικές πτυχές που επηρεάζουν τη συμμετοχή, τα επίπεδα εισφορών, τις παροχές συνταξιοδότησης και τη συνολική οικονομική ασφάλεια. Επιπλέον, εξετάζει τη συμμετοχή των ασφαλιστικών εταιρειών στην παροχή λύσεων εισοδήματος συνταξιοδότησης, όπως προϊόντα προσόδων, σε συμμετέχοντες σε συνταξιοδοτικά προγράμματα DCP. Μέσα από μια ολοκληρωμένη διερεύνηση αυτών των θεμάτων, το κεφάλαιο θέτει τις βάσεις για την κατανόηση πολυπλοκότητας των συνταξιοδοτικών συστημάτων και των συνεπειών τους στο πλαίσιο των στοχαστικών συνταξιοδοτικών παροχών [6].

2.1 Εισαγωγή Συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένων παροχών (Defined Benefit Plans-DBP)

Τα συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένων παροχών (DBP) είναι καθοριστικής σημασίας για την παροχή ασφάλειας εισοδήματος συνταξιοδότησης στους εργαζομένους. Αυτά τα σχήματα προσφέρουν ένα σταθερό όφελος με βάση παράγοντες όπως ο μισθός, τα χρόνια υπηρεσίας και η ηλικία [4]. Για να κατανοήσουμε την ολοκληρωμένη αναπαράσταση ενός συνταξιοδοτικού πλάνου DBP, πρέπει να ληφθούν υπόψη αρκετές βασικές πτυχές, όπως ο σχεδιασμός του πλάνου, οι μηχανισμοί χρηματοδότησης, η αναλογιστική αποτίμηση, η διαχείριση του πλεονάσματος και του ελλείμματος, η κανονιστική συμμόρφωση και η επικοινωνία.

Ο σχεδιασμός και η δομή του πλάνου είναι θεμελιώδη στοιχεία ενός συνταξιοδοτικού πλάνου DBP [5]. Ο τύπος παροχών, που καθορίζει το συνταξιοδοτικό εισόδημα, λαμβάνει υπόψη παράγοντες όπως ο μισθός και τα έτη υπηρεσίας. Είναι σημαντικό να εξεταστεί πώς αυτοί οι παράγοντες επηρεάζουν τον υπολογισμό των παροχών για να διασφαλιστεί η δικαιοσύνη και η επάρκεια για τους συμμετέχοντες στο πρόγραμμα. Επιπλέον, η ενσωμάτωση της αβεβαιότητας και της διαχείρισης κινδύνου στο σχεδιασμό του σχήματος είναι αρκετά σημαντική για τη μακροπρόθεσμη βιωσιμότητά του. Η χρήση μοντέλων που λαμβάνουν υπόψη τους στοχαστικούς παράγοντες μπορεί να βοηθήσει στην αξιολόγηση και τη διαχείριση των κινδύνων αποτελεσματικά.

Οι μηχανισμοί χρηματοδότησης διαδραματίζουν σπουδαίο ρόλο στα συνταξιοδοτικά σχήματα DBP. Οι εργοδοτικές εισφορές προσδιορίζονται μέσω αναλογιστικών υπολογισμών, λαμβάνοντας υπόψη τις προβλεπόμενες υποχρεώσεις, τα ποσοστά θνησιμότητας και τις αποδόσεις επένδυσης. Οι εργοδότες έχουν ευθύνη για τη διασφάλιση επαρκών επιπέδων χρηματοδότησης και την εκπλήρωση των κανονιστικών απαιτήσεων. Η εξισορρόπηση της οικονομικής βιωσιμότητας και της οικονομικής προσιτότητας αποτελεί πρόκληση για τον καθορισμό των κατάλληλων επιπέδων συνεισφοράς. Οι συνεισφορές των εργαζομένων συμβάλλουν επίσης στο σχέδιο χρηματοδότησης και βοηθούν στην κατανομή του κόστους μεταξύ εργοδοτών και εργαζομένων. Είναι σημαντικό να ληφθεί υπόψη ο αντίκτυπος των συνεισφορών των εργαζομένων στην αποζημίωση των εργαζομένων και στη βιωσιμότητα του σχήματος.

Η επενδυτική στρατηγική που χρησιμοποιεί το συνταξιοδοτικό πρόγραμμα είναι κρίσιμη για τη μακροπρόθεσμη απόδοσή του. Η προσεκτική διαχείριση περιουσιακών στοιχείων-παθητικού είναι απαραίτητη για να διασφαλιστεί η ικανότητα του πλάνου να εκπληρώσει τις υποχρεώσεις του. Η επιλογή των κατάλληλων σχημάτων επένδυσης, όπως μετοχές, ομόλογα και εναλλακτικά περιουσιακά στοιχεία, απαιτεί προσεκτική εξέταση των χαρακτηριστικών κινδύνου και απόδοσης. Ο στόχος είναι να επιτευχθεί μια ισορροπία μεταξύ της δημιουργίας αποδόσεων για τη χρηματοδότηση των υποχρεώσεων του σχήματος με ταυτόχρονη διαχείριση των επενδυτικών κινδύνων [12].

Η αναλογιστική αποτίμηση παίζει κρίσιμο ρόλο στην αξιολόγηση της οικονομικής υγείας ενός συνταξιοδοτικού σχήματος DBP. Οι τακτικές αποτιμήσεις, που διενεργούνται από ειδικευμένους αναλογιστές, παρέχουν πληροφορίες για την κατάσταση χρηματοδότησης του σχήματος και βοηθούν στον εντοπισμό πιθανών ελλείψεων χρηματοδότησης. Οι αναλογιστές λαμβάνουν υπόψη παράγοντες όπως δημογραφικές παραδοχές, επενδυτικές επιδόσεις και ρυθμιστικές απαιτήσεις για την εκτίμηση των μελλοντικών υποχρεώσεων και των αναγκών χρηματοδότησης του πλάνου [17].

Οι στρατηγικές διαχείρισης του πλεονάσματος και του ελλείμματος είναι απαραίτητες για τη διατήρηση της οικονομικής σταθερότητας ενός συνταξιοδοτικού σχήματος DBP. Τα πλεονάσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη βελτίωση των παροχών του σχήματος ή τη χρηματοδότηση μελλοντικών υποχρεώσεων. Τα ελλείμματα, από την άλλη πλευρά, απαιτούν προσεκτική διαχείριση μέσω στρατηγικών όπως η προσαρμογή των επιπέδων εισφορών, η κατανομή των επενδύσεων ή η μείωση των παροχών.

Η κανονιστική συμμόρφωση είναι μια κρίσιμη πτυχή των συνταξιοδοτικών πλάνων DBP. Οι κυβερνήσεις και οι ρυθμιστικοί φορείς θέτουν κατευθυντήριες γραμμές και απαιτήσεις για την προστασία των συμμετεχόντων στα σχήματα και για τη διασφάλιση της σωστής διακυβέρνησης και λειτουργίας των συνταξιοδοτικών σχημάτων. Η συμμόρφωση με αυτούς τους κανονισμούς βοηθά στη διατήρηση της ακεραιότητας του πλάνου και προστατεύει τα συμφέροντα των δικαιούχων. Η αποτελεσματική επικοινωνία είναι ζωτικής σημασίας για τη διασφάλιση ότι οι συμμετέχοντες στο σχήμα κατανοούν τα οφέλη, τα δικαιώματα και τις ευθύνες τους. Η σαφής και διαφανής επικοινωνία βοηθά στην οικοδόμηση εμπιστοσύνης και δέσμευσης μεταξύ των εργαζομένων, προωθώντας την ενεργό συμμετοχή τους στο σχήμα. Η παροχή προσβάσιμων πληροφοριών, εκπαιδευτικών πόρων και εξατομικευμένης υποστήριξης μπορεί να ενισχύσει την ετοιμότητα και την ικανοποίηση για τη συνταξιοδότηση [4].

Συνοπτικά, η κατανόηση των διαφόρων συνιστωσών ενός συνταξιοδοτικού σχήματος DBP, συμπεριλαμβανομένου του σχεδιασμού του πλάνου, των μηχανισμών χρηματοδότησης, της αναλογιστικής αποτίμησης, της διαχείρισης του πλεονάσματος και του ελλείμματος, της κανονιστικής συμμόρφωσης και της επικοινωνίας, είναι απαραίτητη για τη διασφάλιση της μακροπρόθεσμης βιωσιμότητας του σχήματος και την παροχή ασφάλειας του συνταξιοδοτικού εισοδήματος. Λαμβάνοντας υπόψη αυτούς τους παράγοντες και εφαρμόζοντας κατάλληλες στρατηγικές, οι εργοδότες μπορούν να διαχειριστούν τους κινδύνους και τις προκλήσεις που σχετίζονται με τα συνταξιοδοτικά σχήματα της DBP, ωφελώντας τελικά τόσο τους συμμετέχοντες στο πρόγραμμα όσο και τον οργανισμό.

2.1.1 Ο ρόλος των ασφαλιστικών εταιρειών στη διαχείριση των επενδυτικών και χρηματοδοτικών κινδύνων των συνταξιοδοτικών σχημάτων της DBP.

Οι ασφαλιστικές εταιρείες διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στην παροχή λύσεων εισοδήματος συνταξιοδότησης για συμμετέχοντες σε συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένων παροχών (DBP). Τα πλάνα DBP είναι γνωστά για την ικανότητα τους να προσφέρουν ένα σταθερό όφελος με βάση παράγοντες όπως ο μισθός, τα έτη υπηρεσίας και η ηλικία, εξασφαλίζοντας ασφάλεια εισοδήματος από τη συνταξιοδότηση [9].

Τα συνταξιοδοτικά πλάνα της DBP συχνά αναζητούν την τεχνογνωσία των ασφαλιστικών εταιρειών για τη διαχείριση επενδυτικών κινδύνων που σχετίζονται με τα περιουσιακά στοιχεία του σχήματος. Οι ασφαλιστικές εταιρείες ειδικεύονται στις στρατηγικές διαχείρισης περιουσιακών στοιχείων-παθητικού (ALM), οι οποίες περιλαμβάνουν την ευθυγράμμιση του επενδυτικού χαρτοφυλακίου του σχήματος με τις μακροπρόθεσμες υποχρεώσεις του. Αναλύοντας παράγοντες όπως τα δημογραφικά στοιχεία του πλάνου, οι προβλεπόμενες πληρωμές παροχών και οι αναμενόμενες αποδόσεις σε διάφορες κατηγορίες περιουσιακών στοιχείων, οι ασφαλιστικές εταιρείες μπορούν να βοηθήσουν τα συνταξιοδοτικά πλάνα να δημιουργήσουν επενδυτικές στρατηγικές που εξισορροπούν τη δημιουργία αποδόσεων με τη διαχείριση επενδυτικών κινδύνων. Αυτή η συμμετοχή διασφαλίζει ότι τα συνταξιοδοτικά σχήματα της DBP διατηρούν τα απαραίτητα περιουσιακά στοιχεία για την εκπλήρωση των υποχρεώσεων τους και την παροχή σταθερών συνταξιοδοτικών παροχών.

Επιπλέον, οι ασφαλιστικές εταιρείες συμβάλλουν στη σταθερότητα των συνταξιοδοτικών παροχών βοηθώντας με μηχανισμούς χρηματοδότησης των συνταξιοδοτικών σχημάτων της DBP. Οι αναλογιστικοί υπολογισμοί, λαμβάνοντας υπόψη παράγοντες όπως οι προβλεπόμενες υποχρεώσεις, τα ποσοστά θνησιμότητας και οι αποδόσεις των επενδύσεων, καθορίζουν τις συνεισφορές των εργοδοτών στο πρόγραμμα. Οι ασφαλιστικές εταιρείες συνεργάζονται με χορηγούς συνταξιοδοτικών πλάνων για να αξιολογήσουν την επάρκεια των επιπέδων χρηματοδότησης και να βοηθήσουν στην κάλυψη των κανονιστικών απαιτήσεων. Βοηθούν στον καθορισμό των κατάλληλων επιπέδων συνεισφοράς που εξισορροπούν την οικονομική βιωσιμότητα του σχήματος με την οικονομική προσιτότητα για τον ανάδοχο εργοδότη. Οι ασφαλιστικές εταιρείες παρέχουν επίσης πληροφορίες για τον αντίκτυπο των εισφορών των εργαζομένων στη συνολική χρηματοδότηση του σχήματος και τη μακροπρόθεσμη βιωσιμότητα του.

Εκτός από τις επενδύσεις και τη χρηματοδότηση, οι ασφαλιστικές εταιρείες συμβάλλουν στη σταθερότητα των συνταξιοδοτικών παροχών της DBP μέσω στρατηγικών διαχείρισης του πλεονάσματος και του ελλείμματος. Τα πλεονάσματα, όταν υπάρχουν, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ενίσχυση των παροχών του σχήματος ή τη χρηματοδότηση μελλοντικών υποχρεώσεων. Οι ασφαλιστικές εταιρείες συμβουλεύουν τους χορηγούς συνταξιοδοτικών οχημάτων σχετικά με στρατηγικές διαχείρισης των ελλειμμάτων, οι οποίες μπορεί να περιλαμβάνουν προσαρμογή των επιπέδων εισφορών, κατανομή επενδύσεων ή μειώσεις παροχών. Με την ενεργή διαχείριση των πλεονασμάτων και των ελλειμμάτων, οι ασφαλιστικές εταιρείες συμβάλλουν στη διατήρηση της οικονομικής σταθερότητας των συνταξιοδοτικών σχημάτων της DBP και διασφαλίζουν την αδιάλειπτη παροχή συνταξιοδοτικών παροχών.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι ασφαλιστικές εταιρείες βοηθούν επίσης με αγορές προσόδων στο πλαίσιο των συνταξιοδοτικών σχημάτων της DBP. Όταν ένα πρόγραμμα DBP τερματίζεται ή ένας συμμετέχων στο πρόγραμμα αποφασίζει να μεταφέρει το συνταξιοδοτικό του επίδομα σε ατομικό λογαριασμό συνταξιοδότησης, οι ασφαλιστικές εταιρείες προσφέρουν προϊόντα προσόδων ως μέσο μετατροπής των συσσωρευμένων συνταξιοδοτικών περιουσιακών στοιχείων σε μια ροή πληρωμών εγγυημένου εισοδήματος. Αυτά τα προϊόντα προσόδων παρέχουν στους συνταξιούχους σταθερό εισόδημα καθ' όλη τη διάρκεια των συνταξιοδοτικών τους ετών και προστατεύουν από τον κίνδυνο μακροζωίας.

Συμπερασματικά, γίνεται προφανές ότι οι ασφαλιστικές εταιρείες διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην παροχή λύσεων για το εισόδημα συνταξιοδότησης στα συνταξιοδοτικά σχήματα DBP. Η εμπλοκή τους επεκτείνεται στη διαχείριση επενδυτικών κινδύνων, στην εφαρμογή στρατηγικών διαχείρισης πλεονασμάτων και ελλείμματος και στη διευκόλυνση αγορών προσόδων. Μέσω αυτών των εισφορών, οι ασφαλιστικές εταιρείες συμβάλλουν στη σταθερότητα και την ασφάλεια των συνταξιοδοτικών παροχών, διασφαλίζοντας τελικά τη μακροπρόθεσμη οικονομική ευημερία των συμμετεχόντων στο πρόγραμμα DBP [3].

2.2 Συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένων εισφορών (Defined Contribution Plans -DCP).

Τα συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένων εισφορών είναι συνταξιοδοτικά αποταμιευτικά προγράμματα όπου καθορίζονται οι εισφορές που καταβάλλονται τόσο από τον εργοδότη όσο και από τον εργαζόμενο, αλλά η τελική πληρωμή ή το όφελος κατά τη συνταξιοδότηση δεν είναι προκαθορισμένη. Στα συνταξιοδοτικά σχήματα DCP, οι εισφορές που καταβάλλονται από τον εργαζόμενο ή/και τον εργοδότη καθορίζονται ή καθορίζονται εκ των προτέρων ως ποσοστό του μισθού του εργαζομένου. Αυτές οι εισφορές στη συνέχεια επενδύονται σε διάφορα περιουσιακά στοιχεία, όπως μετοχές, ομόλογα και αμοιβαία κεφάλαια, με στόχο την ανάπτυξη του αμοιβαίου κεφαλαίου με την πάροδο του χρόνου. Τα τελικά οφέλη που λαμβάνει ο εργαζόμενος σε ένα συνταξιοδοτικό πρόγραμμα DCP δεν είναι εγγυημένα ή προκαθορισμένα. Αντίθετα, εξαρτώνται από τις επενδυτικές αποδόσεις που αποκτήθηκαν από τις εισφορές που πραγματοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια των ετών. Οι συσσωρευμένες εισφορές, σε συνδυασμό με τις αποδόσεις επένδυσης, καθορίζουν την τελική συνταξιοδοτική αποταμίευση. Ως αποτέλεσμα, ο κίνδυνος και η ευθύνη της απόδοσης της επένδυσης βαρύνουν τον μεμονωμένο εργαζόμενο και όχι τον εργοδότη ή το συνταξιοδοτικό ταμείο.

Τα συνταξιοδοτικά σχήματα DCP έχουν πολλά πλεονεκτήματα σε σχέση με τα συνταξιοδοτικά σχήματα DBP. Ένα πλεονέκτημα των συνταξιοδοτικών σχημάτων DCP είναι ότι οι εργαζόμενοι έχουν περισσότερο έλεγχο και ευελιξία στις επενδύσεις τους. Μπορούν συχνά να επιλέξουν πώς οι συνεισφορές τους επενδύονται μεταξύ των διαφορετικών επιλογών που προσφέρει το πρόγραμμα, επιτρέποντας τους να προσαρμόσουν την επενδυτική τους στρατηγική στους στόχους ανοχής κινδύνου και συνταξιοδότησης. Τα συνταξιοδοτικά πλάνα DCP προσφέρουν επίσης διαφάνεια και φορητότητα. Τα άτομα μπορούν εύκολα να παρακολουθούν την αύξηση των συνταξιοδοτικών τους αποταμιεύσεων μέσω τακτικών δηλώσεων και διαδικτυακής πρόσβασης. Σε περίπτωση αλλαγής θέσης εργασίας ή καριέρας, οι εργαζόμενοι μπορούν συνήθως να μεταφέρουν τα συσσωρευμένα κεφάλαια τους από ένα πρόγραμμα DCP που χρηματοδοτείται από τον εργοδότη σε άλλο ή να τα μεταφέρουν σε ατομικό λογαριασμό συνταξιοδότησης (IRA). Αυτή η φορητότητα επιτρέπει μεγαλύτερη κινητικότητα και ενοποίηση των συνταξιοδοτικών αποταμιεύσεων. Επιπλέον, τα συνταξιοδοτικά σχήματα DCP μπορούν να παρακινήσουν τους εργαζόμενους να αποταμιεύσουν περισσότερα για τη συνταξιοδότηση. Καθώς οι συνεισφορές που γίνονται σε ένα σχήμα DCP επηρεάζουν άμεσα τις συνταξιοδοτικές αποταμιεύσεις, τα άτομα παρακινούνται να συνεισφέρουν περισσότερο στο μέλλον τους. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε υψηλότερο συνολικό ποσοστό αποταμίευσης και ένα δυνητικά μεγαλύτερο όγκο συνταξιοδότησης [11]. Τα συνταξιοδοτικά σχήματα DCP προσφέρουν επίσης πιθανά φορολογικά πλεονεκτήματα. Οι εισφορές που πραγματοποιούν οι εργαζόμενοι σε ένα πρόγραμμα DCP συχνά εκπίπτουν φορολογικά, πράγμα που σημαίνει ότι μπορούν να μειώσουν το φορολογητέο εισόδημα κατά το έτος εισφοράς. Επιπλέον, η αύξηση των επενδύσεων εντός του σχήματος αναβάλλεται φορολογικά, επιτρέποντας στα άτομα να επωφεληθούν δυνητικά από τις σύνθετες αποδόσεις με την πάροδο του χρόνου.

Ωστόσο, τα συνταξιοδοτικά σχήματα DCP συνοδεύονται επίσης από ορισμένους κινδύνους και προκλήσεις. Η αστάθεια της αγοράς είναι ένας σημαντικός κίνδυνος, καθώς η απόδοση των επενδύσεων μπορεί να παρουσιάζει διακυμάνσεις, οδηγώντας δυνητικά σε μείωση της αξίας των συνταξιοδοτικών αποταμιεύσεων κατά τη διάρκεια της οικονομικής ύφεσης ή της αγοράς. Αυτό εκθέτει τα άτομα σε κινδύνους αγοράς και την πιθανότητα να έχουν χαμηλότερο συνταξιοδοτικό εισόδημα από το αναμενόμενο. Ένας άλλος κίνδυνος είναι αυτός της μακροζωίας, ο οποίος αναφέρεται στην αβεβαιότητα σχετικά με το πόσο καιρό θα ζήσει ένα άτομο και τη διάρκεια που χρειάζεται να διαρκέσουν οι συνταξιοδοτικές αποταμιεύσεις του. Τα άτομα με συνταξιοδοτικά σχήματα DCP πρέπει να διαχειρίζονται προσεκτικά τις αναλήψεις τους για να διασφαλίσουν ότι οι αποταμιεύσεις τους θα είναι επαρκείς κατά τη διάρκεια των ετών συνταξιοδότησής τους. Έτσι, ο χρηματοοικονομικός γραμματισμός και η κατανόηση των επενδυτικών αρχών είναι αναγκαίος για τους εργαζόμενους με σκοπό να διαχειρίζονται αποτελεσματικά τα συνταξιοδοτικά τους σχήματα DCP. Η έλλειψη οικονομικής εκπαίδευσης και ευαισθητοποίησης μπορεί να οδηγήσει σε μη βέλτιστες επενδυτικές επιλογές και χαμηλότερες αποταμιεύσεις συνταξιοδότησης.

Το νομικό και ρυθμιστικό πλαίσιο που περιβάλλει τα συνταξιοδοτικά σχήματα DCP ποικίλλει ανάλογα με τη δικαιοδοσία και μπορεί να επηρεάσει το σχεδιασμό και τη λειτουργία τους. Οι δομές φορολογικών κινήτρων, για παράδειγμα, διαμορφώνουν τα ποσοστά συμμετοχής και τα επίπεδα εισφορών στα σχήματα DCP, επηρεάζοντας τις αποφάσεις αποταμίευσης συνταξιοδοτικών ατόμων.

Τα συνταξιοδοτικά σχήματα DCP προσφέρουν πολλά βασικά χαρακτηριστικά που συμβάλλουν στην αποτελεσματικότητά τους βοηθώντας τους υπαλλήλους να αποταμιεύουν για τη συνταξιοδότηση. Αυτά τα χαρακτηριστικά μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε διαφορετικές πτυχές που επηρεάζουν τη συμμετοχή, τα επίπεδα εισφορών, τις παροχές συνταξιοδότησης και τη συνολική οικονομική ασφάλεια. Ένα χαρακτηριστικό των συνταξιοδοτικών πλάνων DCP είναι η συμπερίληψη των αντίστοιχων εργοδοτικών εισφορών. Αυτή η δυνατότητα χρησιμεύει ως ισχυρό κίνητρο για τους υπαλλήλους να αποταμιεύουν για τη συνταξιοδότηση. Σύγχρονοι μελετητές τονίζουν τη σημασία των εργοδοτών για την παρακίνηση των εργαζομένων να συνεισφέρουν στις συνταξιοδοτικές αποταμιεύσεις τους. Αντιστοιχίζοντας ένα μέρος των εισφορών των εργαζομένων, οι εργοδότες ενθαρρύνουν τους εργαζόμενους να αποταμιεύουν περισσότερα, αυξάνοντας έτσι τα συνταξιοδοτικά τους ταμεία.

Μια άλλη αξιοσημείωτη πτυχή των συνταξιοδοτικών σχημάτων DCP είναι η αυτόματη εγγραφή, η οποία ενθαρρύνει τους εργαζόμενους να συμμετέχουν στο πρόγραμμα. Η αυτόματη εγγραφή έχει δείξει θετικά αποτελέσματα στη συμμετοχή στο πρόγραμμα και στα επίπεδα εισφορών. Οι εργαζόμενοι εγγράφονται από προεπιλογή, εκτός εάν επιλέξουν να εξαιρεθούν, καθιστώντας ευκολότερο για τα άτομα να αρχίσουν να αποταμιεύουν για τη συνταξιοδότηση. Αυτό το χαρακτηριστικό προάγει την οικονομική ετοιμότητα διασφαλίζοντας ότι οι εργαζόμενοι συμμετέχουν ενεργά στη συνταξιοδοτική αποταμίευση από την αρχή της απασχόλησής τους.

Τα φορολογικά κίνητρα διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση των αποφάσεων των ατόμων σχετικά με τις εισφορές, την αύξηση των επενδύσεων και τις αποσύρσεις από συνταξιοδοτικά σχήματα DCP. Σύγχρονοι μελετητές τονίζουν τον αντίκτυπο των φορολογικών παραμέτρων στις αποφάσεις για συνταξιοδοτικές αποταμιεύσεις. Η φορολογική δομή των σχημάτων DCP συχνά περιλαμβάνει εισφορές που εκπίπτουν από φόρους, αύξηση των επενδύσεων με αναβολή φόρου και πιθανά φορολογικά πλεονεκτήματα κατά την απόσυρση. Αυτά τα φορολογικά οφέλη παρέχουν στα άτομα κίνητρα για να συνεισφέρουν περισσότερο στη συνταξιοδότησή τους αποταμιεύσεις, καθώς μπορούν δυνητικά να μειώσουν το φορολογητέο εισόδημά τους κατά τη διάρκεια των εργασιακών τους ετών και να απολαύσουν φορολογικά πλεονεκτήματα κατά τη συνταξιοδότηση [12].

Η διαθεσιμότητα επιλογών απόσυρσης επηρεάζει σημαντικά το συνταξιοδοτικό εισόδημα και την οικονομική ασφάλεια στα συνταξιοδοτικά σχήματα DCP. Είναι μεγάλη η σημασία των σχεδιαστικών ζητημάτων, όπως η διαθεσιμότητα προσόδων και οι διάφορες επιλογές απόσυρσης. Οι πρόσοδοι μπορούν να παρέχουν μια σταθερή ροή εισοδήματος κατά τη διάρκεια της συνταξιοδότησης, διασφαλίζοντας μια σταθερή πηγή κεφαλαίων. Επιπλέον, η ύπαρξη πολλαπλών επιλογών ανάληψης επιτρέπει στα άτομα να προσαρμόσουν τη στρατηγική εισοδήματος συνταξιοδότησης σύμφωνα με τις συγκεκριμένες ανάγκες και προτιμήσεις τους.

Τα συνταξιοδοτικά πλάνα DCP συχνά επιβάλλουν όρια εισφορών, τα οποία καλύπτουν το μέγιστο ποσό που μπορούν να συνεισφέρουν τα άτομα ετησίως. Πρόσφατες μελέτες υπογραμμίζουν τη σημασία της κατανόησης αυτών των ορίων και τον αντίκτυπο τους στις συνταξιοδοτικές αποταμιεύσεις. Τα όρια εισφορών καθορίζονται συνήθως από τις ρυθμιστικές αρχές και αποσκοπούν στη διασφάλιση της δικαιοσύνης, στην πρόληψη υπερβολικών φορολογικών πλεονεκτημάτων και στη διατήρηση της συνολικής ακεραιότητας του συνταξιοδοτικού συστήματος.

Συνοπτικά οι διαφορές μεταξύ των δύο σχημάτων αντικατοπτρίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

Χαρακτηριστικά	Συνταξιοδοτικά Σχήματα DCP	Συνταξιοδοτικά Σχήματα DBP
Χρηματοοικονομική εκπαίδευση και γραμματισμός	Ο χρηματοοικονομικός γραμματισμός διαδραματίζει κρίσιμο ρόλο στη διαχείριση των επενδύσεων [7]	Εξάρτηση από διαχειριστές σχήματος για επενδυτικές αποφάσεις [18]
Προβλεψιμότητα εισοδήματος συνταξιοδότησης	Το συνταξιοδοτικό εισόδημα μπορεί να ποικίλλει ανάλογα με την απόδοση της επένδυσης [16]	Εγγυημένο συνταξιοδοτικό εισόδημα με βάση έναν τύπο [11]
Προσαρμογές εισφορών και παροχών	Οι εισφορές μπορούν να προσαρμοστούν από τους εργαζόμενους με βάση τις οικονομικές συνθήκες [22]	Οι εισφορές και τα οφέλη που καθορίζονται από τον τύπο του σχήματος [22]
Επίπτωση της αστάθειας της αγοράς	Οι εργαζόμενοι μπορεί να φέρουν τον αντίκτυπο της αστάθειας της αγοράς στις αποδόσεις των επενδύσεων [18]	Ο εργοδότης φέρει τον αντίκτυπο της αστάθειας της αγοράς στις αποδόσεις των επενδύσεων [15]
Έλεγχος εργαζομένων και ευελιξία επενδύσεων	Οι εργαζόμενοι έχουν περισσότερο έλεγχο και ευελιξία	Επενδυτικές αποφάσεις που διαχειρίζονται οι διαχειριστές

	στις επενδύσεις [9]	του σχήματος [14]
Συνεισφορέςεργοδοτών	Οι συνεισφορές που αντιστοιχούν στον εργοδότη δίνουν κίνητρα στους εργαζόμενους [11]	Ο εργοδότης φέρει κινδύνους επένδυσης και μακροζωίας [18]
Εισόδημα συνταξιοδότησης	Το συνταξιοδοτικό εισόδημα εξαρτάται από τις εισφορές και την απόδοση των επενδύσεων [4]	Το συνταξιοδοτικό εισόδημα βασίζεται σε τύπο και ιστορικό μισθών [18]
Κίνδυνος και Ευθύνη	Οι εργαζόμενοι αναλαμβάνουν κινδύνους επένδυσης και μακροζωίας [8]	Ο εργοδότης φέρει κινδύνους επένδυσης και μακροζωίας [18]
Απαιτήσεις κατοχύρωσης	Οι διαφορετικές περίοδοι κατοχύρωσης καθορίζουν το δικαίωμα σε εργοδοτικές εισφορές [13]	Οι επιλέξιμοι εργαζόμενοι έχουν δικαίωμα σε παροχές με βάση τη διάρκεια υπηρεσίας [12]
Φορητότητα και κινητικότητα	Φορητό, που επιτρέπει στους εργαζόμενους να παίρνουν τα συσσωρευμένα κεφάλαια τους όταν αλλάζουν δουλειά [18]	Λιγότερο φορητό, καθώς τα οφέλη συνδέονται με συγκεκριμένη απασχόληση [8]

Πίνακας 2.1 Διαφορές μεταξύ των δύο συνταξιοδοτικών σχημάτων

[4] [7][8][9][11][13][14][15][18][22]

2.2.1 Συμμετοχή ασφαλιστικών εταιρειών στην παροχή λύσεων εισοδήματος συνταξιοδότησης σε συμμετέχοντες στο συνταξιοδοτικό πρόγραμμα DCP.

Οι ασφαλιστικές εταιρείες διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην παροχή λύσεων συνταξιοδοτικού εισοδήματος, ιδίως μέσω της προσφοράς προϊόντων προσόδων, σε συμμετέχοντες σε συνταξιοδοτικά πλάνα καθορισμένων εισφορών (DCP). Αυτή η ενότητα διερευνά τη συμμετοχή των ασφαλιστικών εταιρειών στην παροχή αυτών των λύσεων και τα οφέλη που αποφέρουν στους συμμετέχοντες στο σχήμα DCP, αντλώντας πληροφορίες από τις παρεχόμενες πηγές.

Ένας βασικός τομέας συμμετοχής των ασφαλιστικών εταιρειών είναι η παροχή προϊόντων προσόδων ως λύση εισοδήματος συνταξιοδότησης στα συνταξιοδοτικά πλάνα DCP. Τα σχήματα DCP συνήθως συσσωρεύουν εισφορές που καταβάλλονται από εργαζομένους και εργοδότες, οι οποίες στη συνέχεια επενδύονται μέχρι τη συνταξιοδότηση. Κατά τη συνταξιοδότηση, οι συμμετέχοντες στο πρόγραμμα DCP αντιμετωπίζουν την πρόκληση να μετατρέψουν τις συσσωρευμένες αποταμιεύσεις τους σε μια βιώσιμη ροή εισοδήματος καθ' όλη τη διάρκεια των ετών συνταξιοδότησης τους. Οι ασφαλιστικές εταιρείες προσφέρουν προσόδους, τα οποία είναι χρηματοοικονομικά προϊόντα που έχουν σχεδιαστεί για να παρέχουν μια εγγυημένη ροή εισοδήματος για μια καθορισμένη περίοδο ή τη διάρκεια ζωής του προσόδου.

Οι ασφαλιστικές εταιρείες προσφέρουν τεχνογνωσία στην αναλογιστική επιστήμη, τη διαχείριση κινδύνου και την πρόβλεψη μακροζωίας στο σχεδιασμό και την τιμολόγηση των προϊόντων προσόδων. Αξιολογούν παράγοντες όπως η ηλικία, το φύλο και το προσδόκιμο ζωής του συμμετέχοντος για να καθορίσουν την κατάλληλη δομή τιμολόγησης και πληρωμής των προσόδων. Συγκεντρώνοντας τους κινδύνους μακροζωίας πολλών ατόμων, οι ασφαλιστικές εταιρείες μπορούν να παρέχουν στους συμμετέχοντες μια αξιόπιστη και σταθερή ροή εισοδήματος που συμβάλλει στον μετριασμό του κινδύνου επιβίωσης των αποταμιεύσεών τους.

Επιπλέον, οι ασφαλιστικές εταιρείες προσφέρουν διάφορους τύπους προσόδων για να καλύψουν τις διαφορετικές ανάγκες και προτιμήσεις των συμμετεχόντων στο σχήμα DCP. Για παράδειγμα, παρέχουν σταθερές προσόδους, οι οποίες προσφέρουν ένα προκαθορισμένο ποσό πληρωμής καθ' όλη τη διάρκεια της περιόδου προσόδου. Αυτά παρέχουν μια αίσθηση σταθερότητας και προβλέψιμο εισόδημα για τους συνταξιούχους. Από την άλλη πλευρά, οι ασφαλιστικές εταιρείες προσφέρουν επίσης μεταβλητές προσόδους, όπου οι πληρωμές εισοδήματος κυμαίνονται με βάση την απόδοση των υποκείμενων επενδυτικών επιλογών. Οι μεταβλητές προσόδους επιτρέπουν στους συμμετέχοντες να επωφεληθούν δυνητικά από την ανάπτυξη της αγοράς παρέχοντας ταυτόχρονα κάποιο επίπεδο εγγύησης εισοδήματος.

Επιπλέον, οι ασφαλιστικές εταιρείες παρέχουν πολύτιμη υποστήριξη και εκπαίδευση στους συμμετέχοντες στο πρόγραμμα DCP σχετικά με τον προγραμματισμό του συνταξιοδοτικού εισοδήματος και τις επιλογές προσόδου. Βοηθούν τους συμμετέχοντες να κατανοήσουν τα χαρακτηριστικά, τα οφέλη και τους πιθανούς κινδύνους που σχετίζονται με διαφορετικά προϊόντα προσόδων [13]. Προσφέροντας εξατομικευμένη καθοδήγηση και εργαλεία, οι ασφαλιστικές εταιρείες βοηθούν ακόμη τους συμμετέχοντες στη λήψη τεκμηριωμένων αποφάσεων που ευθυγραμμίζονται με τους στόχους συνταξιοδότησης και τις οικονομικές τους συνθήκες.

Η συμμετοχή των ασφαλιστικών εταιρειών στην παροχή λύσεων εισοδήματος συνταξιοδότησης μέσω προϊόντων προσόδων αποφέρει πολλά οφέλη στους συμμετέχοντες στο πρόγραμμα DCP. Πρώτον, οι πρόσοδοι προσφέρουν μια αξιόπιστη πηγή εισοδήματος, παρέχοντας στους συμμετέχοντες οικονομική ασφάλεια και ηρεμία κατά τη διάρκεια των ετών συνταξιοδότησης τους. Οι συμμετέχοντες μπορούν να έχουν εμπιστοσύνη στην εγγυημένη πληρωμή που παρέχεται από τις προσόδους, η οποία τους βοηθά να προγραμματίσουν τα έξοδα τους και να διατηρήσουν ένα επιθυμητό βιοτικό επίπεδο.

Δεύτερον, οι πρόσοδοι βοηθούν τους συμμετέχοντες να διαχειρίζονται τους κινδύνους μακροζωίας διασφαλίζοντας ότι δεν θα ξεπεράσουν τις αποταμιεύσεις τους. Οι ασφαλιστικές εταιρείες συγκεντρώνουν και διαχειρίζονται τους κινδύνους που σχετίζονται με τους συμμετέχοντες που ζουν περισσότερο από το αναμενόμενο, παρέχοντας μια βιώσιμη ροή εισοδήματος ακόμη και σε περίπτωση παρατεταμένου προσδόκιμου ζωής. Αυτή η προστασία της μακροζωίας είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς τα άτομα αντιμετωπίζουν αυξανόμενη αβεβαιότητα σχετικά με τη διάρκεια της συνταξιοδότησης λόγω βελτιώσεων στην υγειονομική περίθαλψη και στο προσδόκιμο ζωής.

Τέλος, η εμπλοκή των ασφαλιστικών εταιρειών στην παροχή προϊόντων προσόδων φέρνει τεχνογνωσία και εξειδικευμένη γνώση στη διαδικασία σχεδιασμού του συνταξιοδοτικού εισοδήματος. Οι συμμετέχοντες μπορούν να επωφεληθούν από τους αναλογιστικούς υπολογισμούς, τις στρατηγικές διαχείρισης κινδύνου και την επενδυτική τεχνογνωσία που χρησιμοποιούν οι ασφαλιστικές εταιρείες. Οι ασφαλιστικές εταιρείες βοηθούν τους συμμετέχοντες στην καθοδήγηση του προγραμματισμού του συνταξιοδοτικού εισοδήματος, διασφαλίζοντας ότι λαμβάνουν τεκμηριωμένες αποφάσεις που ευθυγραμμίζονται με τις ατομικές ανάγκες και τις ιδιαιτερότητες τους.

Συμπερασματικά, οι ασφαλιστικές εταιρείες διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην παροχή λύσεων εισοδήματος συνταξιοδότησης, κυρίως μέσω προϊόντων προσόδων, σε συμμετέχοντες σε συνταξιοδοτικά προγράμματα καθορισμένων εισφορών (DCP). Η εξειδίκευση τους στην αναλογιστική επιστήμη, τη διαχείριση κινδύνου και την πρόβλεψη μακροζωίας τους επιτρέπει να σχεδιάζουν και να τιμολογούν προσόδους που παρέχουν μια αξιόπιστη και σταθερή ροή εισοδήματος για τους συνταξιούχους. Οι ασφαλιστικές εταιρείες προσφέρουν επίσης εκπαίδευση και καθοδήγηση για να βοηθήσουν τους συμμετέχοντες να λαμβάνουν τεκμηριωμένες αποφάσεις σχετικά με τις επιλογές εισοδήματος συνταξιοδότησης. Μέσω της συμμετοχής τους, οι ασφαλιστικές εταιρείες συμβάλλουν στην οικονομική ασφάλεια, την προστασία της μακροζωίας και τη συνολική ετοιμότητα συνταξιοδότησης των συμμετεχόντων στο πρόγραμμα DCP.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Στοχαστικές Διαδικασίες – Βασικές Μαθηματικές Έννοιες

Αυτό το κεφάλαιο παρέχει μια διεξοδική εξέταση των θεμελιωδών εννοιών στη θεωρία πιθανοτήτων και των εφαρμογών τους σε διάφορους τομείς, ιδιαίτερα στο πλαίσιο των συνταξιοδοτικών συστημάτων. Ξεκινά με την αποσαφήνιση των βασικών αρχών της θεωρίας πιθανοτήτων, καλύπτοντας βασικές έννοιες όπως γεγονότα, πιθανότητες και οι επόμενες ενότητες εμβαθύνουν στη σημασία των τυχαίων μεταβλητών, των κατανομών πιθανοτήτων και του ρόλου τους στις στατιστικές, τα οικονομικά και την αξιολόγηση κινδύνου, δίνοντας έμφαση στη συνάφειά τους στην ανάλυση των κινδύνων που σχετίζονται με τα προγράμματα καθορισμένων παροχών και καθορισμένων εισφορών. Ο ρόλος των στοχαστικών διεργασιών, ειδικά της κίνησης Brown, στη μοντελοποίηση δυναμικών συστημάτων που επηρεάζονται από την τυχαιότητα. Υπογραμμίζει τις βασικές ιδιότητες της κίνησης Brown, τις εφαρμογές της στη χρηματοοικονομική μοντελοποίηση και τον κρίσιμο ρόλο που παίζει στην τιμολόγηση παραγώγων, τη βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου και τη διαχείριση κινδύνου.Τοκεφάλαιο εξετάζει τους περιορισμούς της κίνησης Brown και την ανάγκη για πιο προηγμένες τεχνικές μοντελοποίησης για την αντιμετώπιση πολύπλοκων φαινομένων της αγοράς. Προσφέροντας πληροφορίες για τις θεμελιώδεις έννοιες και τις εφαρμογές της θεωρίας πιθανοτήτων και της κίνησης Brown, αυτό το κεφάλαιο στοχεύει να παρέχει στους αναγνώστες μια ολοκληρωμένη κατανόηση της σημασίας τους στη σύγχρονη χρηματοοικονομική μοντελοποίηση και ανάλυση επενδύσεων [5].

3.1 Βασικές αρχές της θεωρίας πιθανοτήτων

Η θεωρία πιθανοτήτων χρησιμεύει ως θεμελιώδες πλαίσιο για την κατανόηση της δυναμικής και των αβεβαιοτήτων που ενυπάρχουν στα συνταξιοδοτικά συστήματα. Αυτή η ενότητα διερευνά τις θεμελιώδεις έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων και τη σχέση τους με τα συνταξιοδοτικά συστήματα.

3.1.1 Έννοιες της πιθανότητας

Η θεωρία πιθανοτήτων είναι ένας θεμελιώδης κλάδος των μαθηματικών που παρέχει ένα πλαίσιο για τον ποσοτικό προσδιορισμό και την ανάλυση της αβεβαιότητας. Χρησιμοποιείται ευρέως σε διάφορους τομείς, συμπεριλαμβανομένων των στατιστικών, της φυσικής, της οικονομίας και της μηχανικής μάθησης. Αυτή η επισκόπηση θα εμβαθύνει στις έννοιες της πιθανότητας, αντλώντας από μια σειρά επιστημονικών πηγών.

Στον πυρήνα της, η θεωρία πιθανοτήτων ασχολείται με τη μελέτη τυχαίων φαινομένων και τις πιθανότητές τους. Μία από τις βασικές έννοιες στη θεωρία πιθανοτήτων είναι η έννοια του γεγονότος. Ένα συμβάν είναι ένα αποτέλεσμα ή μια συλλογή αποτελεσμάτων ενός τυχαίου πειράματος. Σύγχρονοι μελετητές τονίζουν ότι τα γεγονότα είναι υποσύνολα ενός δείγματος χώρου, ο οποίος περιλαμβάνει όλα τα πιθανά αποτελέσματα ενός πειράματος.

Η πιθανότητα ενός γεγονότος ποσοτικοποιεί την πιθανότητα να συμβεί αυτό το γεγονός. Αντιπροσωπεύεται ως πραγματικός αριθμός μεταξύ 0 και 1, όπου το 0 υποδηλώνει αδυναμία και το 1 αντιπροσωπεύει βεβαιότητα. Πρόσφατη έρευνα υπογραμμίζει ότι η πιθανότητα μπορεί να ερμηνευτεί με πολλούς τρόπους, συμπεριλαμβανομένων των κλασικών, συχνών και υποκειμενικών ερμηνειών.

Η κλασική ερμηνεία, που συχνά αναφέρεται ως «αρχή της ισοπιθανότητας», υποθέτει ότι όλα τα αποτελέσματα ενός πειράματος είναι εξίσου πιθανά. Για παράδειγμα, όταν γυρίζετε ένα ωραίο κέρμα, η πιθανότητα να αποκτήσετε ένα κεφάλι ή μια ουρά είναι 0,5. Αυτή η ερμηνεία χρησιμοποιείται συνήθως σε απλά πειράματα με εξίσου πιθανά αποτελέσματα.

Η συχνή ερμηνεία εστιάζει στη μακροπρόθεσμη σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός γεγονότος. Σύμφωνα με αυτή την ερμηνεία, η πιθανότητα ενός γεγονότος εκτιμάται παρατηρώντας την εμφάνισή του σε μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του πειράματος. Σύγχρονοι μελετητές προτείνουν ότι αυτή η ερμηνεία παρέχει μια βάση για στατιστικά συμπεράσματα και έλεγχο υποθέσεων.

Η υποκειμενική ερμηνεία, από την άλλη πλευρά, θεωρεί την πιθανότητα ως μέτρο της πεποίθησης ενός ατόμου ή του βαθμού αβεβαιότητας. Λαμβάνει υπόψη τις υποκειμενικές εκτιμήσεις της πιθανότητας ενός γεγονότος με βάση τις διαθέσιμες πληροφορίες και τις προσωπικές κρίσεις. Πρόσφατη έρευνα διερευνά τα φιλοσοφικά θεμέλια της θεωρίας πιθανοτήτων, εμβαθύνοντας στην υποκειμενική ερμηνεία και τις επιπτώσεις της.

Η θεωρία πιθανοτήτων περιλαμβάνει επίσης διάφορες μαθηματικές πράξεις και κανόνες. Για παράδειγμα, η ένωση και τομή γεγονότων είναι θεμελιώδεις πράξεις που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων συνδυασμένων γεγονότων. Αυτές οι πράξεις διέπονται από μαθηματικές αρχές όπως ο κανόνας πρόσθεσης για συμβάντα που αποκλείονται αμοιβαία και ο κανόνας πολλαπλασιασμού για ανεξάρτητα γεγονότα. Σύγχρονοι μελετητές παρέχουν ολοκληρωμένη κάλυψη αυτών των μαθηματικών εννοιών και κανόνων.

Επιπλέον, οι κατανομές πιθανοτήτων διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στη θεωρία πιθανοτήτων. Μια κατανομή πιθανότητας περιγράφει την πιθανότητα διαφορετικών αποτελεσμάτων ή τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής. Οι κοινές κατανομές πιθανοτήτων περιλαμβάνουν την κανονική κατανομή, τη διωνυμική κατανομή και την κατανομή Poisson. Πρόσφατη μελέτη υπογραμμίζει περιγραφικές στατιστικές και δοκιμές κανονικότητας, ρίχνοντας φως στις ιδιότητες και τις εφαρμογές διαφορετικών κατανομών.

Επιπλέον, οι σύγχρονες εξελίξεις στη θεωρία πιθανοτήτων έχουν οδηγήσει στην εμφάνιση πιθανοτικών τεχνικών μοντελοποίησης και συμπερασμάτων. Σύγχρονοι μελετητές διερευνούν τη χρήση κανονικοποιητικών ροών, μια κατηγορία μοντέλων, για πιθανοτική μοντελοποίηση και συμπέρασμα. Αυτές οι τεχνικές στοχεύουννα καταγράψουν πολύπλοκες κατανομές πιθανοτήτων και να επιτρέψουν αποτελεσματικά συμπεράσματα και πρόβλεψη σε εργασίες μηχανικής μάθησης.

Συμπερασματικά, η θεωρία πιθανοτήτων παρέχει ένα θεμελιώδες πλαίσιο για την κατανόηση και τον ποσοτικό προσδιορισμό της αβεβαιότητας. Οι έννοιες της πιθανότητας, συμπεριλαμβανομένων των γεγονότων, των πιθανοτήτων και των κατανομών πιθανοτήτων, αποτελούν τη βάση αυτής της θεωρίας. Ενσωματώνοντας διάφορες ερμηνείες και μαθηματικές πράξεις, η θεωρία πιθανοτήτων επιτρέπει την ανάλυση και την πρόβλεψη τυχαίων φαινομένων σε διάφορα πεδία μελέτης [8].

Σ-άλγεβρες

Για να ορίσουμε μαθηματικά την έννοια του γεγονότος, ή της συλλογής γεγονότων, θα πρέπει να εισάγουμε την έννοια της σ-άλγεβρας.

Ορισμός 3.1 Έστω **Ω** *ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Μία οικογένεια υποσυνόλων του δειγματικού χώρου Ω με τις εξής ιδιότητες:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$

(iii)Αν $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$, τότε $F' \in \Omega$

(iv) $Αν A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}, τότε\ A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Λέγεται σ-πεδίο ή σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ *επάνω στο σύνολο* Ω.

Από τον πιο πάνω ορισμό μπορούμε εύκολα να συνάγουμε την παρακάτω ιδιότητα: Αν $\mathcal{F}$ είναι μία σ-άλγεβρα και $A_i \in \mathcal{F}$, τότε

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'\right)' \in \mathcal{F}.$$

Παράδειγμα 3.1

Έστω

$$\Omega = \{2,6,7\}.$$

Τότε η

$$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{2\}, \{6,7\}\},$$

είναι μία σ-άλγεβρα αφού μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ικανοποιεί τις συνθήκες του παραπάνω ορισμού.

Παράδειγμα 3.2

Έστω

$\Omega = \{1,2,3,4\}$

Τότε η

$\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,3,4\}\}$

δεν είναι μία σ-άλγεβρα γιατί περιέχει τα υποσύνολα $\{1\}$ και $\{2\}$ αλλά όχι το $\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\}$.

Η

$\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$

είναι μία σ-άλγεβρα. Είναι μικρότερη από τη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα υποσύνολα του Ω.

Οι σ-άλγεβρες συνήθως χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν δομές πληροφορίας. Τα στοιχεία του συνόλου Ω μπορούν να θεωρηθούν σαν οι πιθανές καταστάσεις του κόσμου ή τα πιθανά αποτελέσματα ενός πειράματος. Μία σ-άλγεβρα, η οποία εξ ορισμού είναι ένα σύνολο των υποσυνόλων του Ω είναι κατά κάποιο τρόπο το σύνολο όλων των πιθανών ερωτήσεων που μπορεί κάποιος να θέσει για την κατάσταση του κόσμου ή για το πείραμα αυτό. Στη θεωρία πιθανοτήτων πολλές φορές τα υποσύνολα του Ω ονομάζονται γεγονότα.

Ορισμός 3.2 *Η ελάχιστη σ-άλγεβρα που ορίζεται από ένα υποσύνολο A, είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει το σύνολο A. Η άλγεβρα αυτή συνήθως συμβολίζεται $\sigma(A)$.*

Παράδειγμα 3.3 Έστω A_1 ,A_2 και A_3 υποσύνολα του Ω τέτοια ώστε

$A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \; και \; A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$

Η σ-άλγεβρα

$\{\emptyset, A_1, A_2, A_3, A_1 \cup A_2, A_2 \cup A_3, A_1 \cup A_3, \Omega\}$

είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα $\sigma(A)$ η οποία περιέχει το $A = \{A_1, A_2, A_3\}$.

Ορισμός 3.4 *Η μικρότερη σ-άλγεβρα η οποία περιέχεται σε κάθε σ-άλγεβρα είναι η τετριμμένη ή εκφυλισμένη σ-άλγεβρα $\sigma = \{\emptyset, \Omega\}$.*

Ορισμός 3.5 *Η άλγεβρα **Borel,** την οποία συμβολίζουμε σαν $\mathcal{B}$, είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει την κλάση $\mathcal{C}$ όλων των διαστημάτων της μορφής $(-\infty, x)$, τα οποία μπορεί να θεωρηθούν ως υποσύνολα της πραγματικής ευθείας. Τα στοιχεία του $\mathcal{B}$ ονομάζονται σύνολα Borel.*

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η $\mathcal{B}$ ισούται με την κλάση ισοδυναμίας όλων των διαστημάτων της μορφής (a, b). Επίσης συμπεριλαμβάνει όλα τα υποσύνολα που περιέχουν μόνο ένα σημείο (singletons)$\{x\}$ και μετρήσιμες ενώσεις τέτοιων υποσυνόλων (π.χ. το υποσύνολο $\{0,1,2, \ldots\}$ είναι ένα σύνολο Borel). Έτσι το $\mathcal{B}$ περιέχει δηλαδή όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με τα οποία θα ασχοληθούμε.

Οι έννοιες της άλγεβρας Borel και των συνόλων Borel γενικεύονται και σε υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, δηλαδή όταν $\Omega = \mathbb{R}^d$. Λέμε ότι ένα παραλληλόγραμμο του $\mathbb{R}^d$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ της μορφής

$$(\alpha, b] = \{x \epsilon \mathbb{R}^d : \alpha_i < x_i < b_i, i = 1,2,\ldots,d\}$$

όπου $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$ *και* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_d) \in \mathbb{R}^d$.

Ορισμός 3.6 *Η σ-άλγεβρα Borel$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα η οποία περιέχει όλα τα παραλληλόγραμμα της μορφής $(\alpha, b]$ ή με άλλα λόγια τη σ-άλγεβρα που παράγεται από τα παραλληλόγραμμα.*

Κατά αναλογία με τα προηγούμενα η $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ περιέχει πρακτικά όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ που θα μας απασχολήσουν.

Πολλές φορές θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε τις άλγεβρες Borel που παράγονται από ορισμένα διαστήματα του $\mathbb{R}$ ή γενικότερα του $\mathbb{R}^d$. Αν $d = 1$ και θεωρήσουμε το διάστημα $[a, b] \epsilon \mathbb{R}$ τότε η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα διαστήματα που ανήκουν στον $[a, b]$ θα συμβολίζεται με $\mathcal{B}([a, b])$. Η γενίκευση για οποιοδήποτε d είναι προφανής.

Μετρήσιμος Χώρος

Θα ορίσουμε τώρα την έννοια του μετρήσιμου χώρου.

Ορισμός 3.7 *Έστω ένα σύνολο Ω και μία σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ που αποτελείται από υποσύνολα του Ω. Το ζεύγος (Ω, $\mathscr{F}$) καλείται μετρήσιμος χώρος (measurable space).*

Παράδειγμα 3.4

(i) Ας θεωρήσουμε το σύνολο $\Omega = \{1,2,3\}$ και τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset, \{2\}, \{1,3\}\}$. Το ζεύγος $(\Omega, \mathcal{F}_1)$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος.

(ii) Ας θεωρήσουμε και πάλι το σύνολο Ω όπως και παραπάνω αλλά ας πάρουμε τώρα τη σ-άλγεβρα $F_2 = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2,3\}\}$. Το ζεύγος (Ω, F_2) είναι επίσης ένας μετρήσιμος χώρος.

Παράδειγμα 3.5

(i) ζεύγος $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος.

(ii) Το ζεύγος $\left(\mathbb{R}^{d}, \mathscr{B}\left(\mathbb{R}^{d}\right)\right)$είναι επίσης ένας μετρήσιμος χώρος.

Μέτρο πιθανότητας

Σε αυτή την υποενότητα θα ασχοληθούμε με το πόσο εύκολα μπορεί να συμβεί ένα γεγονός. Το εύκολα σχετίζεται με έναν αριθμό ο οποίος θα αντιστοιχεί με κάποιο γεγονός που όπως είδαμε μέχρι τώρα στην μαθηματική γλώσσα μεταφράζεται σε κάποιο σύνολο που ανήκει σε μία κατάλληλα επιλεγμένη σ-άλγεβρα. Πρέπει λοιπόν να εισάγουμε την έννοια συναρτήσεων που παίρνουν ένα σύνολο και το αντιστοιχούν σε κάποιο αριθμό. Τέτοιες συναρτήσεις ονομάζονται **μέτρα**. Στην θεωρία πιθανοτήτων θα χρειαστεί να εισάγουμε μία ειδική περίπτωση μέτρου, το **μέτρο πιθανότητας**.

Ορισμός 3.8 Ένα μέτρο πιθανότητας P επάνω σε ένα μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathscr{F})$ είναι μία απεικόνιση $P : \mathscr{F} \to [0,1]$ με τις ιδιότητες

(i) $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$

(ii) Αν $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$ και τα $\{A_i\}$ είναι ανά δύο ξένα, τότε

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Αν παραλείψουμε τη συνθήκη $P(\Omega) = 1$ τότε λέμε ότι η P είναι ένα μέτρο και όχι ένα ***μέτρο πιθανότητας****.*

Από τον παραπάνω ορισμό είναι σαφές ότι ένα μέτρο είναι μία απεικόνιση ενός συνόλου σε έναν πραγματικό αριθμό. Κατά κάποιο τρόπο εκφράζει το μέγεθος ενός συνόλου.

Παράδειγμα 3.6

Ένα παράδειγμα τυχαίου πειράματος είναι η ρίψη κέρματος. Ας υποθέσουμε ότι ρίχνουμε ένα νόμισμα και θέλουμε να μελετήσουμε το αποτέλεσμα. Χώρος δειγμάτων: $\Omega = \{\text{Κορώνα}, \text{Γράμματα}\}$.Μέτρο πιθανότητας: $P(\text{Κορώνα}) = P(\text{Γράμματα}) = \frac{1}{2}$.Επειδή τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα και ισχύει ο κλασσικός ορισμός της πιθανότητας η πιθανότητα ή η σχετική συχνότητα για κάθε ενδεχόμενο είναι η ίδια και θα ισούται με $\frac{1}{2}$. Πιο συγκεκριμένα εφαρμόζοντας τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας

$P(A_n) = \frac{N(A_n)}{N(\Omega)}$,όπου $N(A_n)$ είναι ο αριθμός των στοιχείων του ενδεχομένου A_n και $N(\Omega)$ είναι ο αριθμός των στοιχείων του ενδεχομένου Ω, υπολογίζουμε την πιθανότητα για καθένα από τα δύο ενδεχόμενα.

Ενδεχόμενα:$A = \{\text{Κορώνα}\},\ \ B = \{\text{Γράμματα}\}$,

Πιθανότητες:$P(A) = P(\text{Κορώνα}) = \frac{1}{2}$, $\qquad P(B) = P(\text{Γράμματα}) = \frac{1}{2}$.

Η πιθανότητα εμφάνισης κεφαλιού ή γραμμάτων είναι ίση. Τα ενδεχόμενα Α και Β είναι αντιτιθέμενα. Η πιθανότητα του ενός ενδεχομένου ισούται με $1 - P(\text{άλλο ενδεχόμενο})$. Παραδείγματα: (α) Μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να εμφανιστούν 2 κεφάλια σε 2 ρίψεις. (β) Μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να εμφανιστούν 3 κεφάλια σε 3 ρίψεις. (γ) Μπορούμε να μελετήσουμε την κατανομή πιθανότητας για 10 ρίψεις. Αυτό είναι ένα απλό παράδειγμα τυχαίου πειράματος. Μπορούμε να ορίσουμε πιο σύνθετα ενδεχόμενα και να υπολογίσουμε τις πιθανότητές τους.

Τυχαίες μεταβλητές

Οι τυχαίες μεταβλητές και οι κατανομές πιθανοτήτων είναι θεμελιώδεις έννοιες στη θεωρία πιθανοτήτων που παίζουν κρίσιμο ρόλο σε διάφορους τομείς, συμπεριλαμβανομένων των στατιστικών, της μηχανικής μάθησης, των οικονομικών και της κβαντικής φυσικής. Μια τυχαία μεταβλητή είναι μια μεταβλητή της οποίας το αποτέλεσμα καθορίζεται τυχαία και η κατανομή πιθανοτήτων της περιγράφει την πιθανότητα να συμβούν διαφορετικά αποτελέσματα. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα διερευνήσουμε αυτές τις έννοιες λεπτομερώς, αντλώντας από μια σειρά πηγών για να παρέχουμε μια ολοκληρωμένη επισκόπηση [16].

Η θεωρία πιθανοτήτων, όπως περιγράφεται από σύγχρονους μελετητές παρέχει ένα μαθηματικό πλαίσιο για τη μελέτη της αβεβαιότητας και της τυχαιότητας. Μας επιτρέπει να μοντελοποιούμε και να αναλύουμε πολύπλοκα συστήματα όπου τα αποτελέσματα είναι αβέβαια. Στη θεωρία πιθανοτήτων, υπάρχουν αρκετές ερμηνείες της πιθανότητας που προσφέρουν διαφορετικές προοπτικές για τη φύση και την έννοια της αβεβαιότητας:

1. Η κλασική ερμηνεία της πιθανότητας, γνωστή και ως ερμηνεία «εξίσου πιθανών αποτελεσμάτων», εφαρμόζεται σε καταστάσεις όπου όλα τα πιθανά αποτελέσματα είναι εξίσου πιθανά. Για παράδειγμα, όταν γυρίζετε ένα δίκαιο νόμισμα, η κλασική ερμηνεία εκχωρεί μια πιθανότητα 0,5 σε κάθε αποτέλεσμα (κεφαλές ή ουρές). Αυτή η ερμηνεία χρησιμοποιείται συχνά σε εισαγωγικά μαθήματα πιθανοτήτων για την απεικόνιση βασικών εννοιών.

2. Η συχνή ερμηνεία (FrequentistInterpretation): ορίζει την πιθανότητα με όρους μακροχρόνιων σχετικών συχνοτήτων. Σύμφωνα με αυτή την ερμηνεία, η πιθανότητα ενός συμβάντος καθορίζεται από το ποσοστό των φορών που συμβαίνει το συμβάν σε

επαναλαμβανόμενες, πανομοιότυπες δοκιμές. Για παράδειγμα, αν ρίξουμε πολλές φορές ένα ωραίο κέρμα, η συχνή ερμηνεία υποδηλώνει ότι η πιθανότητα να πάρουμε κεφάλια μπορεί να εκτιμηθεί από την αναλογία του αριθμού των φορών που εμφανίζονται τα κεφάλια προς τον συνολικό αριθμό των ρίψεων.

3. Η υποκειμενική ή Μπεϋζιανή ερμηνεία βλέπει την πιθανότητα ως ένα μέτρο του βαθμού πεποίθησης ή υποκειμενικής εμπιστοσύνης ενός ατόμου για την εμφάνιση ενός γεγονότος. Σε αυτή την ερμηνεία, οι πιθανότητες μπορούν να εκχωρηθούν με βάση την προηγούμενη γνώση, την εμπειρία και τις διαθέσιμες πληροφορίες ενός ατόμου. Καθώς λαμβάνονται νέα στοιχεία, οι πιθανότητες μπορούν να ενημερωθούν χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Bayes για να αντικατοπτρίζουν τις ενημερωμένες πεποιθήσεις.

4. Η λογική ή επιστημονική ερμηνεία της πιθανότητας επικεντρώνεται στη σχέση μεταξύ των πιθανοτήτων και του ορθολογικού συλλογισμού. Αντιμετωπίζει την πιθανότητα ως μέτρο του βαθμού ορθολογικής πεποίθησης ή αληθοφάνειας που αποδίδεται σε ένα γεγονός με βάση τα διαθέσιμα στοιχεία και τη λογική συλλογιστική. Αυτή η ερμηνεία συνδέεται στενά με επίσημα συστήματα λογικής και χρησιμοποιείται σε τομείς όπως η τεχνητή νοημοσύνη και τα έμπειρα συστήματα.

5. Η ερμηνεία τάσης θεωρεί την πιθανότητα ως μέτρο της εγγενούς τάσης ή διάθεσης ενός συστήματος ή αντικειμένου να παράγει ορισμένα αποτελέσματα. Υποδηλώνει ότι οι πιθανότητες αντικατοπτρίζουν τις υποκείμενες ιδιότητες του συστήματος ή του αντικειμένου που μελετάται. Αυτή η ερμηνεία είναι ιδιαίτερα σχετική στη φιλοσοφία της επιστήμης και στην αιτιώδη συναγωγή. [7]

Η έννοια των τυχαίων μεταβλητών, όπως ορίζεται από σύγχρονους μελετητές είναι κεντρική στη θεωρία πιθανοτήτων. Μια τυχαία μεταβλητή εκχωρεί μια αριθμητική τιμή σε κάθε πιθανό αποτέλεσμα μιας τυχαίας διαδικασίας. Μπορεί να είναι διακριτό, λαμβάνοντας ένα μετρήσιμο σύνολο τιμών ή συνεχές, λαμβάνοντας οποιαδήποτε τιμή εντός ενός εύρους. Οι στατιστικές ακραίων τιμών ασχολούνται με την ανάλυση των μεγαλύτερων ή μικρότερων τιμών που εμφανίζονται σε ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών. Σε πολλά σενάρια του πραγματικού κόσμου, όπως περιβαλλοντικά φαινόμενα, οικονομικά και φυσικές καταστροφές, είναι σημαντικό να μοντελοποιούνται με ακρίβεια και να υπολογίζονται οι πιθανότητες που σχετίζονται με ακραία γεγονότα. Η κατανόηση των κατανομών των ακραίων τιμών είναι απαραίτητη για την αξιολόγηση και τη διαχείριση κινδύνων σε διάφορους τομείς. Για παράδειγμα, στις περιβαλλοντικές επιστήμες, οι στατιστικές ακραίων τιμών βοηθούν στην εκτίμηση των πιθανοτήτων σπάνιων γεγονότων όπως ισχυρές καταιγίδες ή πλημμύρες. Στα χρηματοοικονομικά, η ανάλυση ακραίας αξίας βοηθά στον ποσοτικό προσδιορισμό της πιθανότητας ακραίων κινήσεων της αγοράς ή χρηματοοικονομικών κρίσεων. Χαρακτηρίζοντας με ακρίβεια τις ουρές της διανομής, οι υπεύθυνοι λήψης αποφάσεων μπορούν να εφαρμόσουν αποτελεσματικές στρατηγικές διαχείρισης κινδύνου και να λάβουν τεκμηριωμένες αποφάσεις.

Οι κατανομές πιθανοτήτων χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά των τυχαίων μεταβλητών. Διαφορετικοί τύποι κατανομών καταγράφουν διάφορα πιθανολογικά φαινόμενα. Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε τις ιδιότητες των κατανομών πιθανοτήτων, όπως οι ροπές, η λοξότητα και η κύρτωση, στη στατιστική ανάλυση. Αυτές οι ιδιότητες παρέχουν πολύτιμες πληροφορίες για τη συμπεριφορά και το σχήμα των διανομών, επιτρέπουν στους ερευνητές να μοντελοποιούν διάφορες οικονομικές και αναλογιστικές μεταβλητές, όπως οι αποδόσεις των επενδύσεων, τα ποσοστά θνησιμότητας και ο πληθωρισμός, που είναι απαραίτητες για την αξιολόγηση της σταθερότητας των συνταξιοδοτικών ταμείων και της διαχείρισης κινδύνου. Η γνώση της διαφορετικής κατανομής πιθανοτήτων οι κατανομές, συμπεριλαμβανομένων της διωνυμικής και της κανονικής κατανομής, μπορούν να βοηθήσουν στην εκτίμηση των πιθανοτήτων ορισμένων γεγονότων και στην ανάλυση των πιθανών αποτελεσμάτων σε σενάρια χρηματοδότησης συντάξεων.

Τα τελευταία χρόνια, η πιθανοτική μοντελοποίηση και τα συμπεράσματα έχουν φέρει επανάσταση από τις εξελίξεις στη μηχανική μάθηση και τον κβαντικό υπολογισμό. Για παράδειγμα, η εισαγωγή των κανονικοποιητικών ροών, μια κατηγορία μοντέλων για πιθανοτική μοντελοποίηση και εξαγωγή συμπερασμάτων, τα οποία επιτρέπουν την ευέλικτη και αποτελεσματική αναπαράσταση πολύπλοκων κατανομών πιθανοτήτων.

Η μελέτη των τυχαίων μεταβλητών και των κατανομών πιθανοτήτων εκτείνεται πέρα από τις παραδοσιακές στατιστικές στη γενική λήψη οικονομικών αποφάσεων, την κβαντική φυσική, τις προσομοιώσεις υπολογιστή κ.λπ. , οι τυχαίες μεταβλητές και οι κατανομές πιθανοτήτων διαδραματίζουν ζωτικό ρόλο στο πλαίσιο των συνταξιοδοτικών σχημάτων, παρέχοντας ένα πολύτιμο πλαίσιο για την κατανόηση και την ανάλυση διαφόρων πτυχών αυτών των οχημάτων αποταμίευσης συνταξιοδότησης. Για παράδειγμα, εξετάζοντας την ασάφεια της διανομής και αναλύοντας τα χαρακτηριστικά των κατανομών πιθανοτήτων, οι υπεύθυνοι για το σχεδιασμό συντάξεων μπορούν να αναπτύξουν ισχυρές επενδυτικές στρατηγικές, να διαχειριστούν αποτελεσματικά τον κίνδυνο και να βελτιστοποιήσουν τη μακροπρόθεσμη απόδοση των συνταξιοδοτικών ταμείων. Επιπλέον, οι τυχαίες μεταβλητές και οι κατανομές πιθανοτήτων αποδεικνύονται απαραίτητες για την αξιολόγηση του μεγέθους και της επενδυτικής απόδοσης των συνταξιοδοτικών σχημάτων. Σύγχρονοι μελετητές τονίζουν την ανάγκη κατανόησης των υποκείμενων χαρακτηριστικών των συνταξιοδοτικών σχημάτων καθορισμένων παροχών (DB) και καθορισμένων εισφορών (DCP). Χρησιμοποιώντας τυχαίες μεταβλητές, οι ερευνητές μπορούν να ποσοτικοποιήσουν το μέγεθος και την απόδοση των συνταξιοδοτικών σχημάτων και να αναλύσουν τις σχετικές πιθανότητες.

Στα συνταξιοδοτικά σχήματα DCP, οι τυχαίες μεταβλητές και οι κατανομές πιθανοτήτων είναι απαραίτητες για τη μοντελοποίηση της αβεβαιότητας των αποδόσεων των επενδύσεων και την αποτύπωση της αποστροφής των ατόμων για ζημίες. Αυτές οι έννοιες επιτρέπουν τον σχεδιασμό επενδυτικών στρατηγικών που ευθυγραμμίζονται με τις προτιμήσεις κινδύνου και τα κίνητρα των συμμετεχόντων στο σχήμα [18]. Επιπλέον, οι κατανομές πιθανοτήτων διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στην ανάλυση της επιστροφής των εισφορών στα συνταξιοδοτικά σχήματα DCP υπό ένα μοντέλο συγγενικού επιτοκίου. Χαρακτηρίζοντας την πιθανολογική φύση των επιτοκίων, οι ερευνητές αποκτούν γνώσεις για τον μηχανισμό επιστροφής χρημάτων και αξιολογούν τη σχετική απόδοση και τον κίνδυνο

Θα αναλύσουμε παρακάτω τις βασικές έννοιες που χρειάζονται στον ορισμό των τυχαίων μεταβλητών και των στοχαστικών διαδικασιών.

Ορισμός 3.9 *Έστω Ω κάποιο σύνολο. Η συνάρτηση $Y: \Omega \to \mathbb{R}^d$ αποκαλείται $\mathcal{F}$-μετρήσιμη αν*

$$Y^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega; Y(\omega) \in U\} \in \mathcal{F} \quad (2.1)$$

για κάθε ανοικτό σύνολο $U \in \mathbb{R}^d$.

Δηλαδή λέμε ότι η συνάρτηση Y είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη αν η αντίστροφη εικόνα ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}^d$, κάτω από τη συνάρτηση αυτή, ανήκει στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$. Για να απαντήσουμε λοιπόν την ερώτηση αν η συνάρτηση Y παίρνει τιμή στο U θα πρέπει να έχουμε στη διάθεσή μας την πληροφορία που περιέχεται στην $\mathcal{F}$.

Ορισμός 3.10 *Μία (πραγματική)* ***τυχαία μεταβλητή*** *είναι μία $\mathcal{F}$-μετρήσιμη συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}^d$, όπου $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι ένας χώρος πιθανοτήτων.*

Μπορούμε να θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή X σαν μία μεταβλητή που η τιμή της εξαρτάται από την έκβαση ενός τυχαίου πειράματος. Ο ορισμός αυτός μας λέει ότι για κάθε κατάσταση παίρνουμε ένα πραγματικό διάνυσμα $X \in \mathbb{R}^d$ (αν $d = 1$ παίρνουμε έναν αριθμό). Για να απαντήσουμε την ερώτηση τι τιμή μπορεί να πάρει η μεταβλητή X θα πρέπει να έχουμε την πληροφορία σχετικά με τις εκβάσεις του πειράματος που περιέχονται στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$.

Ορισμός 3.11 Ας θεωρήσουμε ένα χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Έστω $\omega \in \Omega$. Τότε η συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται κατά τρόπο ώστε

$$X(\omega) = I_A = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ \omega \in A \\ 0, & \alpha\nu\ \omega \notin A \end{cases} \quad (2.2)$$

*είναι μία τυχαία μεταβλητή αν το σύνολο $A \subset \Omega$ είναι ένα γεγονός $(A \in \mathcal{F})$. Η τυχαία αυτή μεταβλητή ονομάζεται **δείκτρια συνάρτηση** (indicatorfunction) του συνόλου Α.*

Παράδειγμα 3.7 Ένα παράδειγμα τυχαίας μεταβλητής είναι η ρίψη ζαριού. Ας υποθέσουμε ότι ρίχνουμε ένα ζάρι και θέλουμε να μελετήσουμε το αποτέλεσμα. Χώρος δειγμάτων: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,\}$.

Μέτρο πιθανότητας: $P(\omega) = \frac{1}{6}$ για κάθε $\omega \in \Omega$.

Τυχαία μεταβλητή X: $\Omega \to \mathbb{R}$, με $X(\omega) = \omega$.

Η τυχαία μεταβλητή X αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού και λαμβάνει 6 διακριτές τιμές (1, 2, 3, 4, 5, 6). Η πιθανότητα εμφάνισης κάθε αριθμού είναι 1/6. Μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή της X, την διακύμανση της X και να μελετήσουμε την κατανομή πιθανότητας της X. Η τυχαία μεταβλητή X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή, καθώς λαμβάνει πεπερασμένο αριθμό τιμών. Μπορούμε να ορίσουμε πιο σύνθετες τυχαίες μεταβλητές, π.χ. $X(\omega) = \omega^2$. Επίσης, μπορούμε να μελετήσουμε τυχαίες μεταβλητές που λαμβάνουν άπειρες τιμές (συνεχείς τυχαίες μεταβλητές).

Κατανομή μίας τυχαίας μεταβλητής

Κάθε τυχαία μεταβλητή X επάγει ένα μέτρο μ_X στο $\mathbb{R}^d$, το οποίο ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση

$\mu_X(B) = P(X^{-1}(B))$

για κάποιο σύνολο Borel$\mathcal{B}$ στο $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Το μέτρο αυτό αποκαλείται η κατανομή της X. Η κατασκευή αυτή φαίνεται στο Σχ. 2.1.

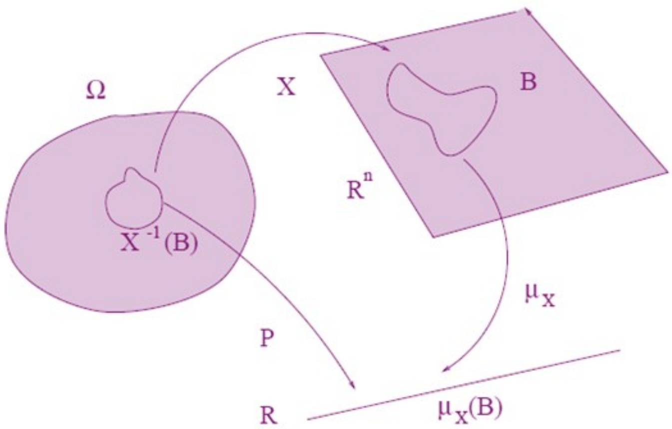
*Ορισμός 3.12 Τώρα ας θεωρήσουμε ότι $d = 1$ και $\mathcal{F} = \mathcal{B}$. Μπορούμε να ορίσουμε τη **συνάρτηση κατανομής** μίας τυχαίας μεταβλητής X, F_X σύμφωνα με τις σχέσεις*

$P(X \leq x) = F_X(x)$ (2.3)

$P(A < x \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Η συνάρτηση F_X καθορίζει το μέτρο πιθανότητας P. Η συνάρτηση F_X ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες

- Η F_X είναι αύξουσα.
- Η F_X είναι δεξιά συνεχής.
- Ισχύει $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ και $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.



Σχήμα 3.1: Η κατασκευή μέτρου μ_X. [6]

Ορισμός 3.13 *Αν η συνάρτηση F_X μπορεί να εκφραστεί σαν το ολοκλήρωμα Riemannμιάς μη αρνητικής συνάρτησης $f(x)$ της οποίας το ολοκλήρωμα επάνω σε όλο το $\mathbb{R}$ είναι ίσο με 1, τότε η συνάρτηση $f(x)$ αποκαλείται **πυκνότητα πιθανότητας**. Σε αυτή την περίπτωση*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')dx' \quad (2.4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ισχύει

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

για κάποιο $B \in \mathcal{B}$.

Ορισμός 3.14 Η συνάρτηση κατανομής μίας τυχαίας μεταβλητής X που είναι ομογενώς κατανεμημένη στο διάστημα $[0,1]$ είναι η συνάρτηση

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases} \qquad (2.5)$$

Για παραπάνω από μία τυχαίες μεταβλητές μπορούμε να ορίσουμε την ***από κοινού συνάρτηση κατανομής***.

Ορισμός 3.15 Έστω $X_1, \dots, X_d$ τυχαίες μεταβλητές σε κάποιο χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Η από κοινού συνάρτηση κατανομής $F(x_1, \dots, x_d)$ των τυχαίων αυτών μεταβλητών είναι μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$F(x_1, \dots, x_d) = P(X_1 \le x_1, \dots, X_d \le x_d)$$

Ισχύει ότι

$$\lim_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d \to \infty} F(x_1, \dots, x_d) = F_{X_i}(x_i)$$

όπου $F_{X_i}(x_i)$ είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X_i.

Ανεξαρτησία

Άλλη μία σημαντική έννοια της θεωρίας των πιθανοτήτων είναι και η έννοια της ανεξαρτησίας. Παρακάτω θα αναλύσουμε λεπτομερώς την έννοια αυτή.

Ορισμός 3.16 Έστω A, B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω. Τα A και B λέγονται ανεξάρτητα αν ισχύει $P(A \cap B) = P(AB) = P(A)P(B)$. Χρησιμοποιώντας τη διαίσθησή μας, λέμε ότι δύο γεγονότα είναι ανεξάρτητα αν το ένα δεν επηρεάζει το άλλο.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, αν για το ενδεχόμενο A ισχύει $P(A) = 0$ ή $P(A) = 1$, αυτό θα είναι ανεξάρτητο από κάθε άλλο ενδεχόμενο B του ίδιου δειγματικού χώρου.

Παράδειγμα 3.8 Ένα παράδειγμα ανεξάρτητων και εξαρτημένων ενδεχομένων είναι η Τράπουλα. Ας υποθέσουμε ότι τραβάμε 2 κάρτες από μια τράπουλα 52 φύλλων χωρίς να τις επαναφέρουμε. Τα ενδεχόμενα είναι:

A: Η πρώτη κάρτα είναι μπαστούνι.

B: Η δεύτερη κάρτα είναι 7.

C: Η δεύτερη κάρτα είναι μαύρη. Είναι τα ενδεχόμενα A, B, C ανεξάρτητα;

$A \cap B$: Η πιθανότητα να τραβήξουμε μπαστούνι στην πρώτη κάρτα δεν επηρεάζεται από το ποια κάρτα τραβήξαμε στην δεύτερη.

$A \cap C$: Η πιθανότητα να τραβήξουμε μπαστούνι στην πρώτη κάρτα επηρεάζεται από το αν η δεύτερη κάρτα είναι μαύρη.

$B \cap C$: Η πιθανότητα να τραβήξουμε 7 στην δεύτερη κάρτα επηρεάζεται από το ποια κάρτα τραβήξαμε στην πρώτη (δεν έχουμε επαναφορά).Έχουμε:

$A \cap B$: Η πιθανότητα να τραβήξουμε μπαστούνι και 7 είναι:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{13}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{1}{54}$.

Αυτό ισούται με $P(A \cap B)$, άρα τα A και B είναι ανεξάρτητα.

$A \cap C$: Η πιθανότητα να τραβήξουμε μπαστούνι και μαύρη κάρτα είναι:

$P(A) \cdot P(C) = \frac{13}{52} \cdot \frac{26}{51} = \frac{1}{39}$.

Αυτό δεν ισούται με $P(A \cap C)$, άρα τα A και C δεν είναι ανεξάρτητα.

$B \cap C$: Η πιθανότητα να τραβήξουμε 7 και μαύρη κάρτα εξαρτάται από το ποια κάρτα τραβήξαμε στην πρώτη.

Ορισμός 3.17 Έστω $A_1, A_2, \dots, A_\nu, \nu \geq 2$ ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω. Τα $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ λέγονται ανεξάρτητα, αν ισχύει η ισότητα

$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_\kappa}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_\kappa})$

για κάθε επιλογή κ (διαφορετικών) δεικτών $i_1, i_2, \dots, i_\kappa$ από το σύνολο $\{1, 2, \dots, \nu\}$ και για κάθε $\kappa = 2, 3, \dots, \nu$.

Από τον ορισμό φαίνεται ότι δεν είναι αρκετό για την ανεξαρτησία περισσότερων των δύο γεγονότων να έχουμε ανεξαρτησία ανά δύο για κάθε ζεύγος.

Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

*Ορισμός 3.19 Οι τυχαίες μεταβλητές $X_i, i \in I$ ονομάζονται **ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές** αν οι σ-άλγεβρες που παράγονται από τις τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες.*

Παράδειγμα 3.9 Ένα παράδειγμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών είναι η ρίψη κερμάτων. Ας υποθέσουμε ότι ρίχνουμε 2 διαφορετικά κέρματα, ένα κίτρινο και ένα κόκκινο. Ορίζουμε:

X_1: Η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα της ρίψης του κίτρινου κέρματος (1 αν είναι κορώνα, 0 αν είναι γράμματα).

X_2: Η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα της ρίψης του κόκκινου κέρματος (1 αν είναι κορώνα, 0 αν είναι γράμματα).

Είναι οι τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 ανεξάρτητες; Ναι, οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες. Η πιθανότητα εμφάνισης κορώνας ή γραμμάτων στο κίτρινο κέρμα δεν επηρεάζεται από το αποτέλεσμα της ρίψης του κόκκινου κέρματος. Στο παραπάνω παράδειγμα, αν η X_2 εξαρτώταν και από το αποτέλεσμα της ρίψης του κίτρινου κέρματος, οι X_1 και X_2 δεν θα ήταν ανεξάρτητες.

Παραδείγματα εξάρτησης:
(α) Ρίψη ζαριού: Ας υποθέσουμε ότι ρίχνουμε 2 ζάρια. Η πιθανότητα εμφάνισης ενός συγκεκριμένου αριθμού στο δεύτερο ζάρι εξαρτάται από το αποτέλεσμα του πρώτου ζαριού (π.χ. αν θέλουμε το άθροισμα να είναι 7).
(β) Επιλογή καρτών: Ας υποθέσουμε ότι τραβάμε 2 κάρτες από μια τράπουλα χωρίς να τις επαναφέρουμε. Η πιθανότητα να τραβήξουμε μια συγκεκριμένη κάρτα στο δεύτερο τράβηγμα εξαρτάται από το ποια κάρτα τραβήξαμε στο πρώτο τράβηγμα.

3.1.2 Τυχαίες μεταβλητές και κατανομές πιθανοτήτων: εφαρμογή στην αξιολόγηση κινδύνου ασφάλισης και συνταξιοδότησης.

Οι τυχαίες μεταβλητές και οι κατανομές πιθανοτήτων παίζουν σημαντικό ρόλο σε διάφορες πτυχές της διαχείρισης κινδύνων που σχετίζονται με την ασφάλιση και τις συντάξεις. Αυτό περιλαμβάνει συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένων παροχών (DBP) και καθορισμένων εισφορών (DCP), καθώς και μη χρηματοοικονομικά συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένων εισφορών. Χρησιμοποιώντας αυτές τις έννοιες, οι ερευνητές και οι υπεύθυνοι χάραξης πολιτικής μπορούν να αντιμετωπίσουν βασικά ζητήματα, να προσαρμόσουν τα συνταξιοδοτικά σχήματα και να βελτιστοποιήσουν τις επενδυτικές αποφάσεις, εξετάζοντας παράλληλα τους συμβιβασμούς κινδύνου και απόδοσης [19].

Μπορούμε να θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή X σαν μία μεταβλητή που η τιμή της εξαρτάται από την έκβαση ενός τυχαίου πειράματος. Ο ορισμός αυτός μας λέει ότι για κάθε κατάσταση παίρνουμε ένα πραγματικό διάνυσμα $X \in \mathbb{R}^d$ (αν $d = 1$ παίρνουμε έναν αριθμό). Για να απαντήσουμε την ερώτηση τι τιμή μπορεί να πάρει η μεταβλητή X θα πρέπει να έχουμε την πληροφορία σχετικά με τις εκβάσεις του πειράματος που περιέχονται στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$.

Τα συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένων παροχών (DBP) έχουν μελετηθεί εκτενώς όσον αφορά την αξιολόγηση κινδύνου και τις στρατηγικές αποφυγής κινδύνου [19]. Οι τυχαίες μεταβλητές και οι κατανομές πιθανοτήτων είναι ζωτικής σημασίας για τον προσδιορισμό του μεγέθους και της επενδυτικής απόδοσης αυτών των σχημάτων. Οι ερευνητές χρησιμοποιούν τυχαίες μεταβλητές για να ποσοτικοποιήσουν τις πιθανότητες που σχετίζονται με το μέγεθος και την απόδοση των συνταξιοδοτικών πλάνων DBP, επιτρέποντάς τους να αναλύσουν τους σχετικούς κινδύνους.

Από την άλλη πλευρά, τα συνταξιοδοτικά πλάνα καθορισμένων εισφορών (DCP) απαιτούν τη μοντελοποίηση της αβεβαιότητας των αποδόσεων των επενδύσεων και των προτιμήσεων κινδύνου των ατόμων. Σε αυτό το πλαίσιο, τυχαίες μεταβλητές και κατανομές πιθανοτήτων χρησιμοποιούνται για τον σχεδιασμό επενδυτικών στρατηγικών που ευθυγραμμίζονται με τις προτιμήσεις κινδύνου και τα κίνητρα των συμμετεχόντων στο σχήμα. Αυτές οι έννοιες είναι επίσης χρήσιμες για την ανάλυση της επιστροφής των εισφορών στα συνταξιοδοτικά σχήματα DCP, ιδιαίτερα σε ένα μοντέλο συγγενούς επιτοκίου, δίνοντας τη δυνατότητα στους ερευνητές να αξιολογήσουν την απόδοση και τον κίνδυνο.

Στον τομέα των μη χρηματοοικονομικών συνταξιοδοτικών συστημάτων καθορισμένων εισφορών, οι τυχαίες μεταβλητές και οι κατανομές πιθανοτήτων έχουν ευρύτερες εφαρμογές στην αντιμετώπιση ζητημάτων περιθωριοποίησης, πόλωσης και προκλήσεων της αγοράς εργασίας. Οι υπεύθυνοι χάραξης πολιτικής και οι ερευνητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν αυτές τις έννοιες για να αναλύσουν και να ποσοτικοποιήσουν αυτά τα ζητήματα, οδηγώντας στο σχεδιασμό πιο αποτελεσματικών και χωρίς αποκλεισμούς συνταξιοδοτικών συστημάτων. Λαμβάνοντας υπόψη την πιθανολογική κατανομή του εισοδήματος, τις ευκαιρίες απασχόλησης και τους δημογραφικούς παράγοντες, μπορούν να δημιουργήσουν συνταξιοδοτικά συστήματα που καλύπτουν καλύτερα τις ανάγκες διαφορετικών πληθυσμών.

Επιπλέον, οι τυχαίες μεταβλητές και οι κατανομές πιθανοτήτων διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στην προσαρμογή των βέλτιστων συνταξιοδοτικών σχημάτων καθορισμένων εισφορών για την κάλυψη των ατομικών αναγκών [10]. Λαμβάνοντας υπόψη την ετερογένεια των προτιμήσεων των συμμετεχόντων και την ανοχή κινδύνου, οι ερευνητές μπορούν να σχεδιάσουν εξατομικευμένες επενδυτικές στρατηγικές και σχήματα συνταξιοδοτικού εισοδήματος. Αυτά τα προσαρμοσμένα σχήματα ευθυγραμμίζονται με τις συγκεκριμένες περιστάσεις των ατόμων, παρέχοντάς τους κατάλληλες επιλογές για τις συνταξιοδοτικές αποταμιεύσεις τους.

Στη διαχείριση κινδύνου και τη διαχείριση στοιχείων ενεργητικού-παθητικού για συνταξιοδοτικά ταμεία, οι τυχαίες μεταβλητές και οι κατανομές πιθανοτήτων είναι ζωτικής σημασίας [19]. Βοηθούν στη μοντελοποίηση διαφόρων χρηματοοικονομικών και αναλογιστικών μεταβλητών, συμπεριλαμβανομένων των αποδόσεων των επενδύσεων, των ποσοστών θνησιμότητας, των ποσοστών πληθωρισμού και άλλων που είναι απαραίτητες για την αξιολόγηση της σταθερότητας των συνταξιοδοτικών ταμείων και τη διαχείριση των κινδύνων.

Ο ακριβής χαρακτηρισμός των ουρών των κατανομών πιθανοτήτων είναι ιδιαίτερα πολύτιμος για την εφαρμογή αποτελεσματικών στρατηγικών διαχείρισης κινδύνου και τη λήψη τεκμηριωμένων αποφάσεων. Οι κατανομές πιθανοτήτων παρέχουν πληροφορίες για τη συμπεριφορά και το σχήμα των διανομών, επιτρέποντας στους ερευνητές να μοντελοποιούν ακραία γεγονότα και να αξιολογούν την πιθανότητα σπάνιων περιστατικών, όπως οικονομικές κρίσεις, σοβαρές καταιγίδες ή πλημμύρες.

Συμπερασματικά, οι τυχαίες μεταβλητές και οι κατανομές πιθανοτήτων έχουν διαφορετικές εφαρμογές στην αξιολόγηση του κινδύνου ασφάλισης και συνταξιοδότησης. Αυτές οι έννοιες παρέχουν ένα θεμελιώδες πλαίσιο για τη μοντελοποίηση αβεβαιοτήτων, το σχεδιασμό επενδυτικών στρατηγικών, την αξιολόγηση της απόδοσης του σχήματος και την αντιμετώπιση των προκλήσεων στα συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένων παροχών και καθορισμένων εισφορών. Χρησιμοποιώντας αυτές τις έννοιες αποτελεσματικά, οι ερευνητές και οι υπεύθυνοι χάραξης πολιτικής μπορούν να λαμβάνουν τεκμηριωμένες αποφάσεις, να διαχειρίζονται τους κινδύνους και να βελτιστοποιούν τη μακροπρόθεσμη απόδοση των συνταξιοδοτικών ταμείων.

3.1.3 Τυχαίες μεταβλητές και κατανομές πιθανοτήτων: εφαρμογή στην αξιολόγηση κινδύνου ασφάλισης και συνταξιοδότησης.

Οι κατανομές πιθανοτήτων διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στη στατιστική ανάλυση, παρέχοντας ένα πλαίσιο για την κατανόηση της αβεβαιότητας και διευκολύνοντας τη λήψη τεκμηριωμένων αποφάσεων. Για την αποτελεσματική ανάλυση και ερμηνεία των κατανομών πιθανοτήτων, τα μέτρα κεντρικής τάσης και διασποράς είναι απαραίτητα. Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα συζητήσουμε δύο θεμελιώδη μέτρα: την αναμενόμενη τιμή και τη διακύμανση.

*Ορισμός 3.20 Έστω X μία διακριτή τυχαία μεταβλητή με σύνολο τιμών $R_x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ και συνάρτηση πιθανότητας f. Η **μέση τιμή** ή **αναμενομένη τιμή** της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται από τη σχέση*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(x = x_i) = \sum_{x \in R_X} xP(X = x) = \sum_{x \in R_X} xf(x) \quad (2.6)$$

*Μερικές φορές για τη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής χρησιμοποιούνται και οι όροι **μέσος** της X ή **μαθηματική ελπίδα της** X.*

Σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης τιμής, για την ύπαρξή της είναι απαραίτητη η απόλυτη σύγκλιση της σειράς $\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(x = x_i)$, δηλαδή θα πρέπει να υπάρχει το όριο $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(x = x_i)$ και να είναι πεπερασμένο. Στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή X έχει πεπερασμένο σύνολο τιμών, δηλαδή $R_x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ η προηγούμενη σειρά ανάγεται σε πεπερασμένο άθροισμα οπότε η μέση τιμή $E(X)$ ορίζεται πάντοτε.

Παράδειγμα 3.10 Ένα εστιατόριο διαθέτει 4 σερβιτόρους, οι οποίοι μπορούν να εξυπηρετήσουν τραπέζια με διαφορετική χωρητικότητα. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει την πιθανότητα εξυπηρέτησης τραπεζιών με 2, 4, 6 και 8 άτομα:

Αριθμόςδηλώσεων	**Πιθανότητα**
2	0.2
4	0.5
6	0.2
8	0.1

Θα υπολογιστεί ο μέσος αριθμός ατόμων που εξυπηρετούν οι σερβιτόροι σε ένα τραπέζι. Αν συμβολίσουμε με X την τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει τον αριθμό ατόμων σε ένα τραπέζι, η τυχαία μεταβλητή X θα έχει συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x), x \in R_X = \{2, 4, 6, 8\}$ η οποία θα δίνεται από τον πίνακα:

x	$f(x)$	$xf(x)$
2	0.20	0.40
4	0.50	2.0
6	0.20	1.20
8	0.10	0.80
Σύνολο	1.00	4.40

Επομένως,

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} xf(x)$$

$$= \sum_{x=2}^{5} xf(x) = 2 \cdot (0.20) + 4 \cdot (0.50) + 6 \cdot (0.20) + 8 \cdot (0.10) = 4.40.$$

3.36 Μέση τιμή συνεχούς τυχαίας μεταβλητής

*Ορισμός 3.21 Έστω X μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας f. Η **μέση τιμή** ή **αναμενομένη τιμή** της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται από τον τύπο*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει απόλυτα, δηλαδή $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$.

Υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις όπου η πληροφορία που παρέχεται από τη μέση τιμή μίας τυχαίας μεταβλητής δεν είναι αρκετή για να προσδιοριστεί ικανοποιητικά η πιθανοθεωρητική συμπεριφορά της τυχαίας μεταβλητής. Δημιουργείται συνεπώς η ανάγκη να εισαχθούν και κάποια άλλα ποσοτικά μέτρα, τα λεγόμενα **μέτρα διασποράς.** Ένα μέτρο διασποράς είναι η διακύμανση, η οποία έχει τη δυνατότητα να εκτιμάει τις δυνατές απομακρύνσεις (αποκλίσεις) τιμών της τυχαίας μεταβλητής γύρω από τη μέση τιμή $E(X)$.

Ορισμός 3.22 *Έστω* $\boldsymbol{X}$ *μία τυχαία μεταβλητή (διακριτή ή συνεχής) για την οποία υπάρχει η μέση τιμή* $E(X) = \mu$. *Η ποσότητα*

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X-\mu)^2] = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] \quad (2.7)$$

λέγεται ***διακύμανση*** *της τυχαίας μεταβλητής* X. *Η ποσότητα* $\sigma = \sqrt{V(X)}$ *ονομάζεται* ***τυπική απόκλιση*** *της τυχαίας μεταβλητής* $\boldsymbol{X}$ *και εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τη* $\boldsymbol{X}$.

Η διακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής X δίνεται επίσης από τον τύπο $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Λαμβάνοντας υπόψη τον Ορισμό 2.38,έχουμε διαδοχικά,

$$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = E[X^2 - 2XE(X) + E^2(X)]$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 \quad (3.8)$$

$$= E(X^2) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

3.1.4 Αναμενόμενη αξία - διακύμανση και προγραμματισμός συντάξεων ασφαλιστικών εταιρειών

Η αναμενόμενη τιμή αντιπροσωπεύει την κεντρική τάση μιας κατανομής πιθανοτήτων, υποδεικνύοντας το μακροπρόθεσμο μέσο αποτέλεσμα. Υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας κάθε πιθανό αποτέλεσμα με την αντίστοιχη πιθανότητα και αθροίζοντας τις. Η αναμενόμενη τιμή χρησιμοποιείται ευρέως σε διάφορους τομείς, όπως η εκτίμηση της χωροχρονικής συνάρτησης πυκνότητας προϊόντος και βελτιστοποίηση επενδυτικών στρατηγικών σε συνταξιοδοτικά συστήματα καθορισμένων εισφορών [20].
Η διακύμανση, από την άλλη πλευρά, μετρά τη διασπορά ή τη μεταβλητότητα σε μια κατανομή πιθανότητας. Προσδιορίζει ποσοτικά τη μέση τετραγωνική απόκλιση από την αναμενόμενη τιμή. Η διακύμανση λαμβάνει υπόψη τις επιμέρους διακυμάνσεις και τις συνδιακυμάνσεις τους όταν αναλύει τη διακύμανση ενός αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών. Η διακύμανση χρησιμοποιείται ευρέως από ερευνητές και επαγγελματίες σε διάφορους τομείς. Στη βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου, διαδραματίζει κρίσιμο ρόλο στην εξισορρόπηση του κινδύνου και της απόδοσης, βοηθώντας στον καθορισμό της βέλτιστης κατανομής των περιουσιακών στοιχείων σε ένα χαρτοφυλάκιο. Λαμβάνοντας υπόψη τη διακύμανση διαφορετικών περιουσιακών στοιχείων ή επενδύσεων, οι διαχειριστές χαρτοφυλακίου μπορούν να αξιολογήσουν τους πιθανούς κινδύνους που σχετίζονται με κάθε επιλογή και να λάβουν τεκμηριωμένες αποφάσεις για να επιτύχουν την επιθυμητή αντιστάθμιση κινδύνου-απόδοσης. Επιπλέον, η διακύμανση χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση της αξίας των πληροφοριών. Χρησιμοποιείται ως μέτρο για την αξιολόγηση των πιθανών οφελών από τη λήψη πρόσθετων πληροφοριών, μπορεί να βοηθήσει. Οι υπεύθυνοι λήψης αποφάσεων μπορούν να αξιολογήσουν την αξία της απόκτησης νέων δεδομένων ή τη διεξαγωγή περαιτέρω αναλύσεων ποσοτικοποιώντας τη διασπορά των πιθανών αποτελεσμάτων και λαμβάνοντας υπόψη τον αντίκτυπο των πληροφοριών στη μείωση της αβεβαιότητας .
Η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση έχουν ιδιότητες που βοηθούν στη στατιστική ανάλυση. Η ιδιότητα γραμμικότητας της αναμενόμενης τιμής επιτρέπει την εφαρμογή αθροισμάτων τυχαίων μεταβλητών. Η κατανόηση της σχέσης μεταξύ της αναμενόμενης αξίας και της διακύμανσης είναι ζωτικής σημασίας για την αξιολόγηση του κινδύνου και της ανταμοιβής, καθώς οι υψηλότερες αναμενόμενες τιμές υποδεικνύουν μεγαλύτερη πιθανότητα απόδοσης, ενώ οι υψηλότερες αποκλίσεις υποδηλώνουν υψηλότερο κίνδυνο [21].

Αυτά τα μέτρα βρίσκουν ευρεία εφαρμογή στη λήψη αποφάσεων σε συνθήκες αβεβαιότητας. Στα χρηματοοικονομικά, η βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου βασίζεται στην αναμενόμενη αξία και τη διακύμανση για την εξισορρόπηση του κινδύνου και της απόδοσης. Οι ασφαλιστικές εταιρείες χρησιμοποιούν αυτά τα μέτρα για να αξιολογήσουν τους κινδύνους και να καθορίσουν τα κατάλληλα ασφάλιστρα. Τα γενικευμένα γραμμικά μοντέλα, τα οποία ενσωματώνουν την αναμενόμενη τιμή και τη διακύμανση, είναι σημαντικά σε διάφορους τομείς, όπως η υγειονομική περίθαλψη και οι κοινωνικές επιστήμες.

Ωστόσο, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση προϋποθέτουν συγκεκριμένες ιδιότητες κατανομής, όπως η κανονικότητα και η ανεξαρτησία, που μπορεί να μην ισχύουν πάντα σε σενάρια πραγματικού κόσμου. Σε τέτοιες περιπτώσεις, εναλλακτικά μέτρα όπως οι υψηλότερες ροπές (π.χ. λοξότητα και κύρτωση) μπορούν να παρέχουν πρόσθετες πληροφορίες για τα χαρακτηριστικά διανομής. Είναι κρίσιμο να προσαρμοστεί η επιλογή των μέτρων στα ειδικά χαρακτηριστικά της κατανομής πιθανοτήτων υπό ανάλυση.

Συνολικά πρέπει να ειπωθεί ότι, η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση χρησιμεύουν ως θεμελιώδη μέτρα της κεντρικής τάσης και της διασποράς στις κατανομές πιθανοτήτων. Ο υπολογισμός και η ερμηνεία τους επιτρέπουν την ποσοτική κατανόηση των αβεβαιοτήτων και υποστηρίζουν την τεκμηριωμένη λήψη αποφάσεων. Ενώ έχουν ευρείες εφαρμογές στη χρηματοδότηση, την ασφάλιση και τη λήψη αποφάσεων σε συνθήκες αβεβαιότητας, είναι σημαντικό να ληφθούν υπόψη οι περιορισμοί τους και να διερευνηθούν εναλλακτικά μέτρα, όταν χρειάζεται. Η πλήρης κατανόηση της αναμενόμενης τιμής και της διακύμανσης δίνει τη δυνατότητα στους ερευνητές και τους επαγγελματίες να κάνουν ενημερωμένες επιλογές και να αναλύουν αποτελεσματικά τις κατανομές πιθανοτήτων.

3.2 Επισκόπηση Στοχαστικών Διαδικασιών

Σε αυτή την ενότητα, θα εμβαθύνουμε στον κόσμο των στοχαστικών διαδικασιών, ένα ισχυρό μαθηματικό πλαίσιο για την κατανόηση και την ανάλυση δυναμικών συστημάτων που επηρεάζονται από τυχαίους παράγοντες. Παρέχοντας μια ολοκληρωμένη επισκόπηση των στοχαστικών διαδικασιών, στοχεύουμε να θέσουμε τα θεμέλια για μια βαθύτερη κατανόηση της κίνησης Brown και των εφαρμογών της στα οικονομικά και στα συνταξιοδοτικά.

3.2.1 Ορισμός και επισκόπηση στοχαστικών διαδικασιών

Οι στοχαστικές διαδικασίες παρέχουν ένα ισχυρό μαθηματικό πλαίσιο για τη μοντελοποίηση και την κατανόηση της δυναμικής των τυχαίων φαινομένων. Σύμφωνα με πρόσφατη έρευνα, μια στοχαστική διαδικασία είναι μια συλλογή από τυχαίες μεταβλητές που ευρετηριάζονται με βάση το χρόνο ή άλλες παραμέτρους. Χρησιμεύει ως μαθηματικό εργαλείο για τη μελέτη δυναμικών συστημάτων που επηρεάζονται από τυχαίους παράγοντες. Οι στοχαστικές διαδικασίες βρίσκουν εφαρμογές σε διάφορους τομείς, συμπεριλαμβανομένων των οικονομικών και χρηματοοικονομικών. Στα χρηματοοικονομικά και τα οικονομικά, οι στοχαστικές διαδικασίες διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στη μοντελοποίηση και την ανάλυση ενός ευρέος φάσματος μεταβλητών. Είναι ιδιαίτερα σημαντικά για την αποτύπωση της πιθανολογικής φύσης χρηματοοικονομικών μεταβλητών, όπως οι τιμές των μετοχών, τα επιτόκια, οι συναλλαγματικές ισοτιμίες και οι τιμές των εμπορευμάτων. Αυτές οι διαδικασίες επιτρέπουν σε ερευνητές και επαγγελματίες να εκτιμήσουν τους κινδύνους, να εκτιμήσουν τα χρηματοοικονομικά μέσα και να βελτιστοποιήσουν τις επενδυτικές στρατηγικές. Με την ενσωμάτωση της τυχαιότητας και της αβεβαιότητας, οι στοχαστικές διαδικασίες παρέχουν μια πιο ρεαλιστική αναπαράσταση των χρηματοπιστωτικών αγορών [22].

Οι στοχαστικές διαδικασίες προσφέρουν πολλά πλεονεκτήματα λόγω της ικανότητάς τους να χειρίζονται την τυχαιότητα και την αβεβαιότητα. Παρέχουν ένα ευέλικτο πλαίσιο για την ενσωμάτωση πιθανοτικών κατανομών και στατιστικών ιδιοτήτων, επιτρέποντας την ποσοτικοποίηση του κινδύνου, τη λήψη αποφάσεων σε συνθήκες αβεβαιότητας και την ανάπτυξη ισχυρών μοντέλων. Με τη μοντελοποίηση τυχαίων διακυμάνσεων και τη σύλληψη της εγγενούς μεταβλητότητας στα δεδομένα, οι στοχαστικές διαδικασίες επιτρέπουν μια πιο ολοκληρωμένη κατανόηση των πολύπλοκων συστημάτων.

Ένα βασικό πλεονέκτημα των στοχαστικών διαδικασιών είναι η δυνατότητα εφαρμογής τους στην αντιμετώπιση απρόβλεπτων παραγόντων που επηρεάζουν πολύπλοκα συστήματα. Τα πολύπλοκα συστήματα παρουσιάζουν συχνά μη γραμμική συμπεριφορά και επηρεάζονται από διάφορους εξωτερικούς παράγοντες, καθιστώντας τις ντετερμινιστικές προσεγγίσεις μοντελοποίησης ανεπαρκείς. Οι στοχαστικές διαδικασίες, από την άλλη πλευρά, επιτρέπουν την ενσωμάτωση τυχαίων μεταβλητών και τη μοντελοποίηση των αβεβαιοτήτων που σχετίζονται με αυτούς τους παράγοντες. Αυτή η προσέγγιση στοχαστικής μοντελοποίησης παρέχει μια πιο ρεαλιστική αναπαράσταση πολύπλοκων συστημάτων και διευκολύνει την ανάλυση της συμπεριφοράς του συστήματος κάτω από διαφορετικά σενάρια.

Επιπλέον, τα πλεονεκτήματα των στοχαστικών διαδικασιών εκτείνονται πέρα από την ικανότητά τους να χειρίζονται την τυχαιότητα και την αβεβαιότητα. Αυτά τα μοντέλα έχουν βρει ευρεία εφαρμογή σε διάφορους τομείς, συμπεριλαμβανομένων των οικονομικών, της χρηματοοικονομίας, της βιολογίας και της υδρολογίας, μεταξύ άλλων. Για παράδειγμα, στον τομέα της βιολογίας, έχουν χρησιμοποιηθεί στοχαστικές διαδικασίες για τη μοντελοποίηση της δυναμικής του πληθυσμού, των γενετικών παραλλαγών και των οικολογικών συστημάτων. Στα χρηματοοικονομικά και τα οικονομικά, οι στοχαστικές διαδικασίες έχουν χρησιμοποιηθεί εκτενώς για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης, τη βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου και τη μοντελοποίηση της δυναμικής της χρηματοοικονομικής αγοράς.

Στον τομέα της χρηματοοικονομικής συνταξιοδότησης και των συντάξεων, οι στοχαστικές διαδικασίες έχουν αποδειχθεί πολύτιμα εργαλεία για τη μοντελοποίηση και την ανάλυση διαφόρων πτυχών του συστήματος. Προσφέρουν ένα ευέλικτο πλαίσιο για την καταγραφή της τυχαιότητας και των αβεβαιοτήτων που σχετίζονται με τις χρηματοπιστωτικές αγορές, τα ποσοστά θνησιμότητας και άλλους σχετικούς παράγοντες. Μία από τις βασικές εφαρμογές των στοχαστικών διαδικασιών στη χρηματοδότηση συνταξιοδότησης είναι η μοντελοποίηση των αποδόσεων των επενδύσεων και των στρατηγικών κατανομής περιουσιακών στοιχείων. Τα συνταξιοδοτικά ταμεία συνήθως επενδύουν σε ένα διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο περιουσιακών στοιχείων, όπως μετοχές, ομόλογα και ακίνητα. Οι αποδόσεις αυτών των επενδύσεων υπόκεινται σε τυχαίες διακυμάνσεις και αβεβαιότητες. Οι στοχαστικές διαδικασίες, όπως η γεωμετρική κίνηση Brown ή τα μοντέλα διάχυσης άλματος, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσομοίωση της μελλοντικής διαδρομής των τιμών των περιουσιακών στοιχείων και τη δημιουργία ρεαλιστικών σεναρίων για τις αποδόσεις των επενδύσεων [23]. Αυτά τα μοντέλα επιτρέπουν στους διαχειριστές των συνταξιοδοτικών ταμείων να αξιολογούν το δυνητικό εύρος των επενδυτικών αποτελεσμάτων, να εκτιμούν την πιθανότητα εκπλήρωσης μελλοντικών υποχρεώσεων χρηματοδότησης και να λαμβάνουν τεκμηριωμένες αποφάσεις κατανομής περιουσιακών στοιχείων.

Στη θεωρία πιθανοτήτων, μια τυχαία μεταβλητή X είναι μια συνάρτηση που αποδίδει μια αριθμητική τιμή $X(\omega)$ σε κάθε αποτέλεσμα ω ενός τυχαίου πειράματος, στο πλαίσιο ενός χώρου πιθανοτήτων (Ω, F, P). Μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t(\omega), t \in T\}$ επεκτείνει αυτή την έννοια εισάγοντας μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών που ορίζονται σε έναν κοινό χώρο πιθανοτήτων (Ω, F, P), όπου η πραγματική μεταβλητή t χρησιμεύει ως παράμετρος. Συνεπώς, για κάθε αποτέλεσμα ω του τυχαίου πειράματος ορίζεται μια συνάρτηση $X_t(\omega)$. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι το ω ανήκει στον δειγματικό χώρο Ω.

Η φύση του συνόλου παραμέτρων T διακρίνει μεταξύ διαδικασιών συνεχούς χρόνου και διακριτού χρόνου. Εάν το T είναι ένα συνεχές σύνολο, η διαδικασία ονομάζεται διαδικασία συνεχούς χρόνου, ενώ εάν το T αποτελείται από ακέραιους αριθμούς, αναφέρεται ως διαδικασία διακριτού χρόνου. Επιπλέον, η διαδικασία $X_t(\omega)$χαρακτηρίζεται ως διακριτή εάν οι τιμές της είναι μετρήσιμες διαφορετικά, χαρακτηρίζεται ως συνεχής κατάσταση.

Ουσιαστικά, μια στοχαστική διαδικασία είναι μια συλλογή συναρτήσεων $\{X_t(\omega)\}$ όπου, για δεδομένο ω, η $X_t = X_t(\omega)$αντιπροσωπεύει μια συνάρτηση του χρόνου και για δεδομένο χρόνο t, η $X_t = X_t(\omega)$δηλώνει μια τυχαία μεταβλητή. Στην πράξη, το ω συχνά παραλείπεται και χρησιμοποιείται ο συμβολισμός X_t ή $X(t)$.

Οι περιορισμοί της θεωρίας των τυχαίων μεταβλητών στην αντιμετώπιση τυχαίων φαινομένων που εξελίσσονται με την πάροδο του χρόνου, όπως παρατηρούνται σε διάφορα φυσικά συστήματα, ωθούν στην ανάπτυξη της θεωρίας των στοχαστικών διαδικασιών. Για να υπάρξει μια διαισθητική κατανόηση, μπορεί κανείς να φανταστεί μια συλλογή σωματιδίων που παρακολουθούνται με την πάροδο του χρόνου. Εδώ, το t υποδηλώνει τον χρόνο, ο οποίος μπορεί να είναι συνεχής ή διακριτός, και το ω αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο σωματίδιο ή πείραμα. Μια συγκεκριμένη επιλογή ω ονομάζεται υλοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας, και η $X_t(\omega)$δηλώνει τη θέση του σωματιδίου ή το αποτέλεσμα του πειράματος τη χρονική στιγμή t. Αυτή η προοπτική μας επιτρέπει να συνδέσουμε κάθε ω με τη συνάρτηση $t \rightarrow X_t(\omega)$,που αντιπροσωπεύει μια απεικόνιση από το T στο$\mathbb{R}^d$.

Συνοπτικά, μια στοχαστική διαδικασία μπορεί να εννοηθεί ως ένα μέτρο πιθανότητας P μέσα σε έναν κατάλληλα ορισμένο χώρο μέτρων.

Μαθηματική Προσέγγιση Στοχαστικών Διαδικασιών

Με βάση τη θεωρία πιθανοτήτων γνωρίζουμε ότι μια τυχαία μεταβλητή X είναι μια συνάρτηση που καθορίζει έναν αριθμό $X(\omega)$, σε κάθε εξαγόμενο ω ενός τυχαίου πειράματος, που ορίζεται σε χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Ορισμός 3.23 *Μια* ***στοχαστική διαδικασία*** *(stochasticprocess)* $\{X_t(\omega), t \in T\}$*είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών ορισμένων σε κοινό χώρο πιθανοτήτων* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *με παράμετρο την πραγματική μεταβλητή* t *(χρόνος). Έτσι σε κάθε εξαγόμενο* ω *του τυχαίου πειράματος ορίζουμε μια συνάρτηση* $X_t(\omega)$*.Προφανώς* $\omega \in \Omega$*.*

Αν ορίσουμε το σύνολο T να είναι ο άξονας των πραγματικών τότε η διαδικασία λέγεται διαδικασία συνεχούς χρόνου. Αν το T είναι σύνολο ακεραίων τότε η διαδικασία λέγεται διακεκριμένου χρόνου.

Επιπλέον η διαδικασία $X_t(\omega)$ λέγεται διακεκριμένης κατάστασης αν οι τιμές της είναι μετρητέες (αριθμήσιμες). Άλλως λέγεται συνεχούς κατάστασης.

Επομένως, η στοχαστική διαδικασία συνίσταται από μια οικογένεια συναρτήσεων $X_t(\omega)$. Για δεδομένο ω, η $X_t = X_t(\omega)$ είναι συνάρτηση του χρόνου, ενώ για δεδομένο χρόνο t, η $X(\omega) = X_t(\omega)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή. Συνήθως παραλείπουμε το ω και γράφουμε X_t ή $X(t)$.

Η θεωρία τυχαίων μεταβλητών δεν παρέχει τα μέσα για την εξέταση φαινομένων που είναι τυχαία και εξελίσσονται στο χρόνο, όπως συμβαίνει σε πολλά φυσικά συστήματα. Αυτό είναι το κίνητρο για την ανάπτυξη της θεωρίας των στοχαστικών διαδικασιών.

Διαισθητική αντιμετώπιση: Ένας τρόπος να κατανοήσουμε διαισθητικά την έννοια της στοχαστικής διαδικασίας είναι να θεωρήσουμε μία συλλογή σωματιδίων τα οποία τα παρακολουθούμε στον χρόνο. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το t είναι ο «χρόνος», ο οποίος μπορεί να είναι είτε συνεχής είτε διακριτός και το ω αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο σωματίδιο ή πείραμα. Μία συγκεκριμένη επιλογή του ω θα ονομάζεται μία **πραγματοποίηση** της στοχαστικής διαδικασίας. Τότε $X_t(\omega)$ είναι η θέση του σωματιδίου ω την χρονική στιγμή t ή ισοδύναμα το αποτέλεσμα του πειράματος ω την χρονική στιγμή αυτή. Μπορούμε να ταυτίσουμε το κάθε ω με τη συνάρτηση $t \to X_t(\omega)$ που απεικονίζει $T \to \mathbb{R}^d$. Τότε η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ θα περιέχει τη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ που παράγεται από σύνολα της μορφής $\{\omega; \omega(t_1) \in F_1; \dots; \omega(t_k) \in F_k\} F_i \in \mathbb{R}^d$ σύνολα Borel.

Μία στοχαστική διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα μέτρο πιθανότητας P σε έναν κατάλληλα ορισμένο χώρο του μέτρου, δηλαδή

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

$\Updownarrow$

ΜΕΤΡΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Παράδειγμα 3.11 Ας υποθέσουμε ότι ρίχνουμε ένα ζάρι διαδοχικά και ορίζουμε:

ω_i: Το αποτέλεσμα της i-οστής ρίψης (αριθμός από 1 έως 6).

X_i: Η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στο κέρδος του παίκτη στην i-οστή ρίψη:

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{αν το αποτέλεσμα είναι } 6 \\ 0 & \text{αν το αποτέλεσμα είναι } 1, 2, 3, 4 \text{ ή } 5 \end{cases}$$

Η παραμετρισμένη συλλογή τυχαίων μεταβλητών $\{X_i\}, i \in \mathbb{N}$, αποτελεί μια στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο. Η τιμή της αντιπροσωπεύει τα κέρδη του παίκτη κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού. Εδώ η τυχαία μεταβλητή X_i λαμβάνει 2 διακριτές τιμές (0 και 1). Η στοχαστική διαδικασία εξαρτάται από την πιθανότητα εμφάνισης του 6 στο ζάρι. Μπορούμε να ορίσουμε διαφορετικά κέρδη για κάθε ρίψη, π.χ. $X_i = 2$αν το αποτέλεσμα είναι 6, $X_i = -1$αν το αποτέλεσμα είναι 1, κτλ. Η στοχαστική διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για παραδείγματα χρηματιστηριακών αγορών, παιχνιδιών τύχης, κτλ.

Μπορούμε να λάβουμε υπόψη 2 ζάρια, 3 ζάρια, κτλ. Επίσης, μπορούμε να ορίσουμε πιο σύνθετες τυχαίες μεταβλητές X_i, π.χ. $X_i = 1$ αν το αποτέλεσμα είναι 6 και $X_i = -1$ αν το άθροισμα των 2 τελευταίων ρίψεων είναι 7. Μπορούμε να μελετήσουμε μαθηματικές ιδιότητες της στοχαστικής διαδικασίας, όπως μέση τιμή, διακύμανση, αυτοσυνάρτηση, κτλ.

Παράδειγμα 3.12 Σαν ένα δεύτερο παράδειγμα στοχαστικής διαδικασίας σε συνεχή χρόνο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $t \in \mathbb{R}^+$ και για κάθε t ορίζουμε μία τυχαία μεταβλητή X_t η οποία έχει την κατανομή πιθανότητας

$$P(X_t \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy$$

Συνεπώς, η X_t είναι μια στοχαστική διαδικασία και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ η X_t είναι μία κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0 και διασπορά t.

Ορισμός 3.24 Με τον όρο στοχαστική διαφορική εξίσωση ονομάζουμε μια εξίσωση της μορφής

$$dX_t = \mu(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB$$

(2.9)

$$X_o = x_o,$$

με $\mu, \sigma : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *μετρήσιμες συναρτήσεις,* $x_o \in \mathbb{R}$, *και* B *(μονοδιάστατη) κίνηση Brown. 'Οταν* $\sigma \equiv 0$, *η (2.9) είναι η γενική μορφή της συνήθους διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης.*

Ορισμός 3.25 *Θεωρούμε τη διήθηση* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *που παράγεται από την κίνηση Brown. Δηλαδή* $\mathcal{F}_t := \sigma(\{Bs : s \in [0,t]\})$ *για κάθε* $t \geq 0$. *Λύση της (2.9) ονομάζουμε κάθε ανέλιξη* $(X_t)_{t\geq 0}$ *που*

- *έχει συνεχή μονοπάτια,*
- *είναι προσαρμοσμένη στην* $(F_t)_{t\geq 0}$,
- *για κάθε* $t > 0$, *με πιθανότητα 1, ισχύει*

$$\int_0^t |\mu(s,X_s)|\, ds < \infty, \int_0^t \sigma^2(s,X_s)\, ds < \infty$$

- *με πιθανότητα 1 ισχύει*

$$X_t = x_o + \int_0^t \mu(s,X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\, dB_s \text{ για κάθε } t > 0. \quad (2.10)$$

Θα σχολιάσουμε τώρα τη σημασία των συναρτήσεων μ, σ. Ας υποθέσουμε ότι είναι και οι δύο τους φραγμένες και συνεχείς συναρτήσεις. Με χρήση της (2.10), παίρνουμε

$$E(X_{t+h} - X_t|F_t) = \int_t^{t+h} E(\mu(s,X_s)|F_t)ds \approx h\mu(t,X_t),$$

δηλαδή η $\mu(t,x)$ δίνει το ρυθμό της μέσης μεταβολής της X τον χρόνο t δεδομένου του παρελθόντος F_t αν $X_t = x$. Για την ερμηνεία της σ, υπολογίζουμε

$$Var(X_{t+h} - X_t|F_t) = E(\{X_{t+h} - X_t - E(X_{t+h} - X_t|F_t)\}^2|F_t)$$

$$= E\left(\left\{\int_t^{t+h}\{\mu(s,X_s) - E(\mu(s,X_s)|F_t)\}ds + \int_t^{t+h}\sigma(s,X_s)dB_s\right\}^2 \middle| F_t\right)$$

$$= o(h) + E\left(\left\{\int_t^{t+h}\sigma(s,X_s)dB_s\right\}^2 \middle| F_t\right) = E\left(\int_t^{t+h}\sigma^2(s,X_s)ds \middle| F_t\right) + o(h)$$

$$= h\sigma^2(t,X_t).$$

Με $o(h)$ συμβολίζουμε μια συνάρτηση $g(h)$ που έχει την ιδιότητα $\lim_{h\to 0} g(h)/h = 0$. 'Αρα, ξέροντας ότι $X_t = x$, για μικρό h, η διασπορά της μεταβολής $X_{t+h} - X_t$ δεδομένου του παρελθόντος F_t είναι ανάλογη του h και η $\sigma^2(t,x)$ είναι η σταθερά αναλογίας.

3.2.2 Κίνηση Brown

Η έννοια της κίνησης Brown και οι ιδιότητες της

Η κίνηση Brown είναι μια θεμελιώδης στοχαστική διαδικασία που βρίσκει ευρείες εφαρμογές στα οικονομικά και σε άλλους κλάδους. Προερχόμενη από την παρατήρηση του Robert Brown για την ακανόνιστη κίνηση των κόκκων γύρης στο νερό το 1827, η κίνηση Brown αναπτύχθηκε περαιτέρω από τον Αϊνστάιν το 1905 για να εξηγήσει την τυχαία κίνηση των σωματιδίων που αιωρούνται σε ένα ρευστό. Έκτοτε, έχει γίνει ακρογωνιαίος λίθος στη μοντελοποίηση των χρηματοοικονομικών μεταβλητών λόγω της απλότητας και της συνάφειάς του με τη δυναμική του πραγματικού κόσμου.

Σύμφωνα με πρόσφατη έρευνα, η κίνηση Brown μπορεί να οριστεί ως μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου με σταθερές και ανεξάρτητες αυξήσεις. Διαθέτει αρκετές σημαντικές ιδιότητες που το καθιστούν κατάλληλο για οικονομική μοντελοποίηση. Πρώτον, παρουσιάζει συνεχείς διαδρομές δείγματος, που σημαίνει ότι είναι σχεδόν σίγουρα μια συνεχής συνάρτηση του χρόνου. Αυτή η ιδιότητα επιτρέπει τη μοντελοποίηση συνεχών και ομαλών διαδικασιών στις χρηματοπιστωτικές αγορές. Δεύτερον, η κίνηση Brown έχει σταθερές αυξήσεις, υποδεικνύοντας ότι οι στατιστικές ιδιότητες της διαδικασίας παραμένουν οι ίδιες με την πάροδο του χρόνου. Αυτό το χαρακτηριστικό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο κατά τη μοντελοποίηση χρηματοοικονομικών μεταβλητών που παρουσιάζουν σταθερότητα στα στατιστικά χαρακτηριστικά τους. Τέλος, η κίνηση Brown έχει ανεξάρτητες αυξήσεις, υπονοώντας ότι οι αυξήσεις της διαδικασίας σε μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα είναι στατιστικά ανεξάρτητες [24]. Αυτή η ιδιότητα επιτρέπει τη μοντελοποίηση τυχαίων και απρόβλεπτων διακυμάνσεων στις χρηματοοικονομικές μεταβλητές.

Οι εφαρμογές της κίνησης Brown στα χρηματοοικονομικά εκτείνονται πέρα από την τιμολόγηση των παραγώγων. Χρησιμοποιείται ευρέως στο χαρτοφυλάκιο βελτιστοποίησης, όπου οι επενδυτές στοχεύουν στη δημιουργία βέλτιστων χαρτοφυλακίων με βάση τους συμβιβασμούς κινδύνου-απόδοσης. Η κίνηση Brown χρησιμεύει ως βάση για τη μοντελοποίηση των τιμών των περιουσιακών στοιχείων και την εκτίμηση των μελλοντικών κινήσεών τους, επιτρέποντας στους επενδυτές να λαμβάνουν τεκμηριωμένες αποφάσεις σχετικά με την κατανομή περιουσιακών στοιχείων.

Η κίνηση Brown παρέχει ένα πολύτιμο εργαλείο για τη μοντελοποίηση των τιμών των περιουσιακών στοιχείων και την εκτίμηση των μελλοντικών κινήσεών τους. Με την ενσωμάτωση της κίνησης Brown στα χρηματοοικονομικά μοντέλα, οι ερευνητές και οι επαγγελματίες μπορούν να συλλάβουν τις τυχαίες και απρόβλεπτες διακυμάνσεις που παρατηρούνται στις πραγματικές χρηματοπιστωτικές αγορές [4]. Αυτό δίνει τη δυνατότητα στους επενδυτές να κατανοήσουν καλύτερα τη συμπεριφορά των χρηματοοικονομικών μέσων και να λαμβάνουν τεκμηριωμένες αποφάσεις.

Ενώ η κίνηση Brown έχει αποδειχθεί χρήσιμο εργαλείο μοντελοποίησης, είναι σημαντικό να αναγνωρίζονται οι περιορισμοί της και οι σχετικές υποθέσεις. Ένας από αυτούς τους περιορισμούς είναι ότι η κίνηση Brown υποθέτει σταθερή αστάθεια, που σημαίνει ότι ο ρυθμός με τον οποίο κυμαίνονται οι τιμές παραμένει σταθερός με την πάροδο του χρόνου. Ωστόσο, στις πραγματικές χρηματοπιστωτικές αγορές, η αστάθεια δεν είναι σταθερή και μπορεί να ποικίλλει σημαντικά. Αυτή η υπόθεση μπορεί να μην αποτυπώνει επαρκώς τις παρατηρούμενες αλλαγές στη μεταβλητότητα, ειδικά κατά τη διάρκεια περιόδων αναταράξεων της αγοράς ή οικονομικών κλυδωνισμών. Επιπλέον, η κίνηση Brown είναι μια συνεχής στοχαστική διαδικασία που προϋποθέτει ομαλές και συνεχείς κινήσεις τιμών. Δεν λαμβάνει υπόψη τα ακραία γεγονότα ή τα ξαφνικά άλματα των τιμών, που παρατηρούνται στις χρηματοπιστωτικές αγορές. Τέτοια γεγονότα, που συχνά αναφέρονται ως ασυνέχειες της αγοράς ή σοκ, μπορεί να έχουν σημαντικό αντίκτυπο στις τιμές των περιουσιακών στοιχείων και στη δυναμική του κινδύνου. Για την καταγραφή αυτών των φαινομένων, χρησιμοποιούνται συχνά πρόσθετες τεχνικές μοντελοποίησης, όπως μοντέλα άλματος-διάχυσης ή μοντέλα στοχαστικής μεταβλητότητας.

Επιπλέον, ενώ η κίνηση Brown παρέχει μια χρήσιμη βάση για τη χρηματοοικονομική μοντελοποίηση, μπορεί να μην καταγράφει όλες τις πολυπλοκότητες και τη συγκεκριμένη δυναμική διαφορετικών αγορών ή χρηματοοικονομικών μέσων. Για παράδειγμα, ορισμένα περιουσιακά στοιχεία μπορεί να παρουσιάζουν μη γραμμικά ή μη κανονικά χαρακτηριστικά που απαιτούν πιο προηγμένα μοντέλα. Οι ερευνητές έχουν αναπτύξει διάφορες επεκτάσεις και τροποποιήσεις στην κίνηση Brown για να αντιμετωπίσουν συγκεκριμένες δυναμικές της αγοράς, όπως μοντέλα στοχαστικής μεταβλητότητας, μοντέλα αλλαγής καθεστώτος ή μοντέλα με χρονική αλλαγή.

Τέλος, η κίνηση Brown, ως εργαλείο μοντελοποίησης, προϋποθέτει συνεχείς και χωρίς τριβές αγορές, οι οποίες μπορεί να μην αντικατοπτρίζουν πλήρως τις πραγματικές συνθήκες. Αυτή η υπόθεση συνεπάγεται ότι δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών, τριβές στην αγορά ή περιορισμοί στις συναλλαγές και ότι οι συμμετέχοντες στην αγορά μπορούν να αγοράσουν ή να πουλήσουν οποιαδήποτε ποσότητα ενός περιουσιακού στοιχείου ανά πάσα στιγμή χωρίς να

επηρεάσουν τις τιμές. Ωστόσο, οι πραγματικές χρηματοοικονομικές αγορές χαρακτηρίζονται από διάφορους παράγοντες που μπορούν να προκαλέσουν τριβή και αποκλίσεις από τις εξιδανικευμένες παραδοχές της κίνησης Brown. Στην πραγματικότητα, οι χρηματοπιστωτικές αγορές συνεπάγονται κόστη συναλλαγών, όπως προμήθειες μεσιτείας, περιθώρια προσφοράς-ζήτησης και κόστος επίπτωσης στην αγορά, που επηρεάζουν τις εμπορικές δραστηριότητες. Αυτά τα κόστη μπορούν να επηρεάσουν τη συμπεριφορά των συμμετεχόντων στην αγορά και την αποτελεσματικότητα των τιμών της αγοράς. Επιπλέον, ενδέχεται να υπάρχουν περιορισμοί στις ανοικτές πωλήσεις, τις απαιτήσεις περιθωρίου κέρδους και τους ρυθμιστικούς περιορισμούς που μπορούν να επηρεάσουν περαιτέρω τη δυναμική της αγοράς.
Επιπλέον, η ρευστότητα της αγοράς διαδραματίζει κρίσιμο ρόλο στον καθορισμό της ευκολίας με την οποία τα περιουσιακά στοιχεία μπορούν να αγοραστούν ή να πωληθούν χωρίς σημαντική επίδραση στην τιμή. Οι συνθήκες ρευστότητας μπορεί να ποικίλλουν, οδηγώντας σε διαφορετικούς όγκους συναλλαγών και διαφορές μεταξύ προσφοράς και ζήτησης, που μπορεί να επηρεάσουν τις παρατηρούμενες κινήσεις των τιμών. Η υπόθεση των αγορών χωρίς τριβές στα μοντέλα κίνησης Brown δεν λαμβάνει υπόψη αυτές τις διακυμάνσεις ρευστότητας και τον αντίκτυπό τους στις τιμές των περιουσιακών στοιχείων. Επιπλέον, η κίνηση Brownian υποθέτει ότι όλοι οι συμμετέχοντες στην αγορά έχουν πρόσβαση στις ίδιες πληροφορίες και ότι οι τιμές αντικατοπτρίζουν πλήρως και στιγμιαία όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες. Ωστόσο, στην πραγματικότητα, υπάρχει ασυμμετρία πληροφοριών, όπου ορισμένοι συμμετέχοντες στην αγορά μπορεί να διαθέτουν ανώτερες ή ιδιωτικές πληροφορίες που μπορούν να επηρεάσουν τις αποφάσεις συναλλαγών τους και να επηρεάσουν τις τιμές των περιουσιακών στοιχείων. Αυτή η ασυμμετρία πληροφοριών εισάγει περαιτέρω πολυπλοκότητες και αποκλίσεις από τις υποθέσεις των αγορών χωρίς τριβές στην κίνηση Brown. Αυτές οι αποκλίσεις από την υπόθεση των συνεχών και χωρίς τριβές αγορών υπογραμμίζουν την ανάγκη για πρόσθετα μοντέλα και τεχνικές που λαμβάνουν υπόψη τις τριβές της αγοράς και τις πραγματικές συνθήκες. Οι ερευνητές έχουν αναπτύξει διάφορα μοντέλα μικροδομών αγοράς και προσεγγίσεις για να ενσωματώσουν το κόστος συναλλαγών, τη ρευστότητα της αγοράς και την ασυμμετρία πληροφοριών σε χρηματοοικονομικά μοντέλα για να παρέχουν μια πιο ρεαλιστική αναπαράσταση της δυναμικής της αγοράς.

Ορισμός 3.26 Η κίνηση Brown είναι μία στοχαστική διαδικασία W_t *η οποία παίρνει τιμές στον* $\mathbb{R}$ *και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες*

i. *Αν,* $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ *οι τυχαίες μεταβλητές* $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους (ανεξάρτητες μεταβολές). Τα* $t_0, t_1, \dots, t_n$ *είναι μικρά ανεξάρτητα χρονικά διαστήματα στα οποία πραγματοποιείται η κίνηση.*

ii. *Αν* $s, t \geq 0$*, τότε*

$$P(\, W_{t_{s+t}} - W_{t_s} \in A\,) = \int_A \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right),$$

όπου A *κάποιο σύνολο Borel, δηλαδή οι μεταβολές της κίνησης Brown είναι κατανεμημένες με την κανονική κατανομή, με παραμέτρους* 0 *και* s.

iii. *Οι τροχιές της κίνησης Brown είναι συνεχείς με πιθανότητα 1, δηλαδή η* $t \to W_t$ *είναι συνεχής συνάρτηση του* t.

Οι τρεις αυτές ιδιότητες ορίζουν μία και μοναδική στοχαστική διαδικασία.

Από τις ιδιότητες της κίνησης Brown μπορούμε να συνάγουμε τις ιδιότητες του μέτρου μ που αυτή επάγει (μέτρο Wiener)

$$\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \int_{A_1} dx_1 \int_{A_2} dx_2 \dots \int_{A_n} dx_n \prod_{i=1}^{n} p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i)$$

όπου $x_0 = x$, $t_1 = 0$ και

$$p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{|y - x|^2}{2t}\right).$$

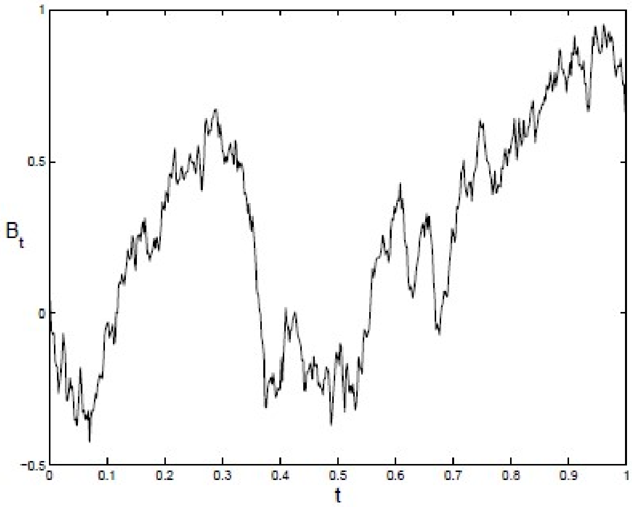
Η παραπάνω ποσότητα είναι κατά κάποιο τρόπο η πιθανότητα να βρίσκεται η στοχαστική διαδικασία τις χρονικές στιγμές t_i στα υποσύνολα $A_i \in W(\mathbb{R})$. Μπορούμε να σκεφτούμε τα υποσύνολα αυτά σαν διαστήματα του $\mathbb{R}$ οπότε και η παραπάνω ποσότητα είναι ουσιαστικά η πιθανότητα να βρίσκεται η κίνηση Brown τις χρονικές στιγμές t_i σε συγκεκριμένα διαστήματα του $\mathbb{R}$.

Η ποσότητα

$$\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = P(W_{t_1} \in A_1, W_{t_2} \in A_2, \dots, W_{t_n} \in A_n)$$

ονομάζεται πεπερασμένης διάστασης κατανομή και η γνώση της είναι πολύ σημαντική στο να κατασκευάσουμε το μέτρο μ.

Η κατανομή του W_t εξαρτάται από το αρχικό σημείο στο οποίο ξεκινάμε τη διαδικασία, δηλαδή το σημείο W_0. Αν $W_0 = x$ τότε η συνάρτηση κατανομής θα συμβολίζεται $P_x(W_t \in A)$ για κάποιο σύνολο $Borel A$. Η μέση τιμή ή η υπό συνθήκη μέση τιμή ως προς το μέτρο αυτό θα συμβολίζεται E_x ή $E_x[\cdot]$ αντιστοίχως.



Σχήμα 3.2 : Τροχιά της κίνησης Brown [7]

Παράδειγμα 3.13

Θα υπολογίσουμε τη διακύμανση για την διαφορά

$W(t) - W(s), \qquad 0 \leq s \leq t.$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί ως $W(t) - W(s) = W(s + (t - s)) - W(s)$, οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα: «*Αν* $s, t \geq 0$, *τότε* $P(W_{t_{s+t}} - W_{t_s} \in A) = \int_A \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)$, *όπου* A *κάποιο σύνολο* $Borel$, *δηλαδή οι μεταβολές της κίνησης Brown είναι κατανεμημένες με την κανονική κατανομή, με παραμέτρους* 0*και* s», προκύπτει ότι η διακύμανση είναι

$Var(s) = t - s.$

3.2.3 Ιδιότητες και βασικά χαρακτηριστικά της κίνησης Brown

Η κίνηση Brown είναι μια θεμελιώδης στοχαστική διαδικασία που έχει εφαρμοστεί ευρέως σε διάφορους τομείς, συμπεριλαμβανομένων των οικονομικών, της οικονομίας και της βιολογίας, μεταξύ άλλων. Παρουσιάζει πολλές βασικές ιδιότητες που το καθιστούν πολύτιμο εργαλείο στη χρηματοοικονομική μοντελοποίηση και ανάλυση. Μία από τις κύριες ιδιότητες της κίνησης Brown είναι οι συνεχείς διαδρομές δειγμάτων της. Αυτό σημαίνει ότι η διαδικασία είναι μια συνεχής συνάρτηση του χρόνου σχεδόν σίγουρα. Η έννοια των συνεχών μονοπατιών δείγματος υπονοεί ότι η τροχιά μιας κίνησης Brown είναι καθορισμένη και συνεχής για όλες τις χρονικές τιμές με πιθανότητα μία. Με άλλα λόγια, η κίνηση Brown παρουσιάζει μια ομαλή και αδιάλειπτη συμπεριφορά με την πάροδο του χρόνου. Αυτή η ιδιότητα επιτρέπει την αναπαράσταση της συνεχούς και σταδιακής φύσης των διακυμάνσεων σε διάφορα φαινόμενα. Αυτή η ιδιότητα έχει ιδιαίτερη σημασία στις χρηματοπιστωτικές αγορές, όπου οι συνεχείς και τυχαίες διακυμάνσεις των τιμών των περιουσιακών στοιχείων και άλλων χρηματοοικονομικών μεταβλητών πρέπει να μοντελοποιούνται με ακρίβεια. Οι συνεχείς διαδρομές δείγματος της κίνησης Brown επιτρέπουν την ανάπτυξη ρεαλιστικών μοντέλων που αντιπροσωπεύουν με ακρίβεια τη συμπεριφορά των οικονομικών μεταβλητών. Με τη μοντελοποίηση της ομαλής και συνεχούς φύσης των μεταβολών των τιμών, οι οικονομικοί αναλυτές και οι ερευνητές μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τη δυναμική των αγορών και να λάβουν τεκμηριωμένες αποφάσεις [25].

Μια άλλη κρίσιμη ιδιότητα της κίνησης Brown είναι οι στατικές της αυξήσεις, που σημαίνει ότι οι στατιστικές ιδιότητες της διαδικασίας παραμένουν οι ίδιες με την πάροδο του χρόνου. Στη χρηματοοικονομική μοντελοποίηση, αυτή η ιδιότητα παίζει σημαντικό ρόλο στη διασφάλιση της σταθερότητας των στατιστικών χαρακτηριστικών της διαδικασίας. Πολλές χρηματοοικονομικές μεταβλητές παρουσιάζουν σταθερότητα στις στατιστικές τους ιδιότητες, όπως ο μέσος όρος και η διακύμανση, σε ορισμένα χρονικά διαστήματα. Υποθέτοντας σταθερές αυξήσεις, η κίνηση Brown παρέχει ένα κατάλληλο πλαίσιο για τη μοντελοποίηση και την πρόβλεψη της συμπεριφοράς τέτοιων μεταβλητών. Η έννοια των στατικών προσαυξήσεων σημαίνει ότι η κατανομή των αυξήσεων της κίνησης Brown εξαρτάται μόνο από το μήκος του χρονικού διαστήματος και όχι από το σημείο εκκίνησης ή οποιεσδήποτε άλλες προηγούμενες τιμές. Αυτή η ιδιότητα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη χρηματοοικονομική μοντελοποίηση καθώς επιτρέπει την ανάλυση της διαδικασίας σε διαφορετικές χρονικές

περιόδους χωρίς να επηρεάζονται οι στατιστικές ιδιότητες. Παρέχει μια σταθερή βάση για τη μελέτη της συμπεριφοράς των χρηματοοικονομικών μεταβλητών με την πάροδο του χρόνου.
Επιπλέον, η κίνηση Brown έχει ανεξάρτητες αυξήσεις, που σημαίνει ότι οι αυξήσεις της διαδικασίας σε μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα είναι στατιστικά ανεξάρτητες. Αυτή η ιδιότητα είναι πολύ σημαντική για την καταγραφή των τυχαίων και απρόβλεπτων διακυμάνσεων που παρατηρούνται στις χρηματοπιστωτικές αγορές. Η ανεξαρτησία των αυξήσεων επιτρέπει τη μοντελοποίηση της εγγενούς αβεβαιότητας και αστάθειας στις χρηματοοικονομικές μεταβλητές, παρέχοντας μια ρεαλιστική αναπαράσταση της δυναμικής της αγοράς. Η ιδιότητα των ανεξάρτητων προσαυξήσεων επιτρέπει στους χρηματοοικονομικούς αναλυτές να συλλάβουν την τυχαιότητα και το απρόβλεπτο των κινήσεων των τιμών και άλλων χρηματοοικονομικών μεταβλητών. Επιτρέπει τη μοντελοποίηση διακριτών αλλαγών στα χρηματοοικονομικά μεγέθη χωρίς καμία επιρροή από προηγούμενες ή μελλοντικές προσαυξήσεις. Αυτή η ιδιότητα είναι ιδιαίτερα πολύτιμη στη διαχείριση κινδύνων και στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης, όπου η ικανότητα να αποτυπώνεται με ακρίβεια η τυχαιότητα και η αστάθεια των κινήσεων της αγοράς είναι ζωτικής σημασίας [23].

Στον τομέα των οικονομικών, η Brownian κίνηση έχει βρει εκτεταμένες εφαρμογές. Χρησιμεύει ως βάση για διάφορα εργαλεία στοχαστικού λογισμού, συμπεριλαμβανομένου του λήμματος του Ito, το οποίο είναι απαραίτητο για την ανάλυση χρηματοοικονομικών παραγώγων. Η κίνηση Brown έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως σε μοντέλα τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης, στρατηγικές βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου και μοντελοποίηση της δυναμικής των χρηματοπιστωτικών αγορών [25]. Παρέχει ένα ευέλικτο πλαίσιο για την αποτύπωση της συνεχούς και τυχαίας φύσης των τιμών των περιουσιακών στοιχείων και άλλων χρηματοοικονομικών μεταβλητών, επιτρέποντας τη λήψη τεκμηριωμένων αποφάσεων σε συνθήκες αβεβαιότητας.

Επιπλέον, οι εφαρμογές της κίνησης Brown εκτείνονται πέρα από τη χρηματοδότηση. Στη βιολογία, έχει χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση της δυναμικής του πληθυσμού, των γενετικών παραλλαγών και των οικολογικών συστημάτων. Αυτό καταδεικνύει την ευελιξία και την ευρεία χρησιμότητα της κίνησης Brown στην κατανόηση και πρόβλεψη σύνθετα συστήματα. Επίσης, η κίνηση Brown και τα σχετικά εργαλεία στοχαστικού λογισμού της έχουν επίσης βρει εφαρμογές στον προγραμματισμό συντάξεων και στις στρατηγικές επενδύσεων συνταξιοδότησης, οι οποίες θα συζητηθούν στο επόμενο κεφάλαιο.

Αριθμητική κίνηση Brown

Ορισμός 3.27 Έστω μια στοχαστική διαδικασία $\{Xt, t \geq 0\}$ *για την οποία ισχύει:*

$$X(t+h) - X(t) = \mu\, h + \sigma Y(t+h)\sqrt{h},$$

όπου

$Y(t)$: *είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί διωνυμική κατανομή,*

μh : *είναι η τάση ή διαφορετικά ο όρος ολίσθησης – μετατόπισης (drift term) και*

$\sigma\sqrt{h}$: *είναι η μεταβλητότητα (statisticalnoise).*

Θεωρούμε επίσης $T > 0$, *καθώς και μια διαμέριση του διαστήματος*$[0,T]$*σε* n *ίσα υποδιαστήματαμε*$h = \frac{T}{n}$. *Από τη διαμέριση θα πάρουμε*

$$X(T) - X(0) = [X(h) - X(0)] + [X(2h) - X(h)] + [X(3h) - X(2h)] + \cdots + [X(nh) - X((n-1)h)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [X(ih) - X((i-1)h)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\mu h + \sigma Y(ih)\sqrt{h})$$

και για $h = \frac{T}{n}$, *θα έχουμε ότι*

$$X(T) - X(0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\mu \frac{T}{n} + \sigma Y(ih) \sqrt{\frac{T}{n}} \right)$$

$$= \mu T \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} + \sigma\sqrt{T} \sum_{i=1}^{n} \frac{Y(ih)}{\sqrt{h}}.$$

Η ποσότητα $\sum_{i=1}^{n} \frac{Y(ih)}{\sqrt{h}}$*σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ) ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1 ή διαφορετικά η ποσότητα* $\sqrt{T}\sum_{i=1}^{n} \frac{Y(ih)}{\sqrt{h}}$ *ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση* T. *Οπότε*

$$X(T) - X(0) = \mu T + \sigma W(t),$$

με $W(t)$ την τυπική κίνηση Brown - σε μια τυπική κίνηση Brown η W ακολουθεί κανονική κατανομή και έχει μέση τιμή 0 και διακύμανση.
Η στοχαστική διαφορική μορφή της $X(T) - X(0) = \mu T + \sigma W(t)$ θα είναι

$dX(t) = \mu\, dt + \sigma\, dW(t).$

Ορισμός 3.28 *Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ που ικανοποιεί την προηγούμενη σχέση, ορίζεται ως* ***αριθμητική κίνηση Brown,*** *με μέση τιμή $E[X(t) - X(0)] = \mu\, t$ και διακύμανση $Var[X(t) - X(0)] = \sigma^2 t$. Αυτό σημαίνει ότι η $X(t) - X(0)$ ακολουθεί κανονική κατανομή με παραμέτρους μt και $\sigma^2 t$. Το μ είναι ο στιγμιαίος μέσος ανά μονάδα χρόνου και το σ^2 η στιγμιαία διακύμανση ανά μονάδα χρόνου.*

Διαδικασία Ornstein – Uhlenbeck

Η αξία ενός εμπορεύματος δεν είναι σταθερή- αντίθετα, τείνει να αυξομειώνεται προς διάφορες κατευθύνσεις, κυμαινόμενη πάντα γύρω από τη μέση τιμή. Κατά συνέπεια, η χρησιμοποίηση ενός μοντέλου αντιστροφής του μέσου όρου φαίνεται οικονομικά πιο λογική από τη χρησιμοποίηση του μοντέλου κίνησης Brown.

Αυτή η αντιστροφή μπορεί να ενσωματωθεί στην εξίσωση $dX(t) = \mu\, dt + \sigma\, dW(t)$ προσαρμόζοντας την παράμετρο μ. Έτσι, η τροποποιημένη εξίσωση γίνεται:
$dX(t) = \lambda(\mu - X(t))\, dt + \sigma\, dW(t)$

όπου το μ αντιπροσωπεύει τη μέση τιμή προς την οποία το $X(t)$ βαίνει (σημείο ισορροπίας), το σ δηλώνει τη μεταβλητότητα, το λ υποδηλώνει την ταχύτητα με την οποία το $X(t)$ επανέρχεται στο σημείο ισορροπίας και το $W(t)$ είναι η τυπική κίνηση Brown.

Η στοχαστική διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck προκύπτει από την επίλυση της προαναφερθείσας εξίσωσης, όπως περιγράφεται παρακάτω:
Θεωρήστε $Y(x) = X(t) - \mu$. Αυτό οδηγεί σε:
$d(Y(t) + \mu) = \lambda(\mu - Y(t) - \mu)dt + \sigma dW(t)$

$dY(t) = -\lambda Y(t)dt + \sigma dW(t)$

$dY(t) + \lambda Y(t)dt = \sigma dW(t)$

η οποία μπορεί να γραφτεί:

$d[e^{\lambda t}Y(t)] = e^{\lambda t}\sigma dW(t)$

Ολοκληρώνοντας από το 0 έως το t παίρνουμε το παρακάτω:

$$e^{\lambda t}Y(t) - Y(0) = \sigma \int_0^t e^{\lambda z} dW(z)$$

$$Y(t) = Y(0)e^{-\lambda t} + \sigma e^{-\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda z} dW(z)$$

$$Y(t) = Y(0)e^{-\lambda t} + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-z)} dW(z)$$

Αντικαθιστώντας με $Y(t) = X(t) - \mu$, έχουμε τελικά:

$$X(t) = X(0)e^{-\lambda t} + \mu(1 - e^{-\lambda t}) + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-z)} dW(z).$$

Γεωμετρική κίνηση Brown

Μια άλλη ειδική περίπτωση της κίνησης Brown είναι η γεωμετρική κίνηση, ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο στη στοχαστική χρηματοοικονομική που χρησιμεύει ως προσέγγιση για την εξέλιξη των τιμών των μετοχών σε συνεχή χρόνο. Στη συζήτηση που ακολουθεί, θα ορίσουμε τη γεωμετρική κίνηση Brown εξετάζοντας την εξέλιξη των τιμών των μετοχών σε συνεχή χρόνο.

Έστω ότι η $S(t)$ αντιπροσωπεύει την τιμή της σχετικής μετοχής τη χρονική στιγμή t. Για να εμβαθύνουμε στη μελέτη της $S(t)$, ένα αρχικό βήμα περιλαμβάνει τον χαρακτηρισμό της συμπεριφοράς της διαδικασίας $\{S(t), t \geq 0\}$ εντός ενός πολύ σύντομου χρονικού διαστήματος. Κατά συνέπεια, χωρίζουμε το χρονικό διάστημα $(0, \tau]$ σε n υποδιαστήματα, καθένα από τα οποία έχει πλάτος $\Delta t = \tau/n$ (όπου το Δt θεωρείται "μικρό"). Εντός του i-οστού χρονικού διαστήματος $(ti, ti + \Delta t] = ((i-1)\Delta t, i\Delta t]$, θεωρείται ότι η ποσοστιαία διακύμανση του S είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή. Η μέση τιμή και η διακύμανση αυτής της κατανομής είναι ανάλογες προς το Δt και είναι ανεξάρτητες από τη διαδικασία υποβάθρου. Στην ουσία, η ποσοστιαία διακύμανση μοντελοποιείται ως τυχαία μεταβλητή εντός κάθε υποδιαστήματος.

$$\frac{S(t_i + \Delta t) - S(t_i)}{S(t_i)} = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_i$$

όπου $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κανονική κατανομή με παραμέτρους 0 και $1 \sim N(0,1)$, δηλαδή $\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_i \sim N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t)$ για κάποιες σταθερές μ, σ^2. Οι τυχαίες μεταβλητές $\sqrt{\Delta t}Z_1$, $\sqrt{\Delta t}Z_2$,... $\sqrt{\Delta t}Z_n$ τώρα μπορούν να θεωρηθούν ως οι προσαυξήσεις μιας κίνησης Brown (γνωρίζουμε ότι οι προσαυξήσεις μιας κίνησης Brown είναι ανεξάρτητες κανονικές τυχαίες μεταβλητές) και επομένως μπορούμε να γράψουμε το εξής:

$$\frac{S(t_i + \Delta t) - S(t_i)}{S(t_i)} = \mu\Delta t + \sigma\big(W(t_i + \Delta t) - W(t_i)\big)$$

όπου $\{W(t), t \geq 0\}$ μία τυπική κίνηση Brown, και συνεπώς $W(t_i + \Delta t) - W(t_i) \sim N(0, \Delta t)$.

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί:

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = \mu\Delta t + \sigma\Delta W(t).$$

Εάν θεωρήσουμε ότι το $\Delta t \to 0$, τότε από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t),$$

ή ισοδύναμα,

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t).$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μία στοχαστική διαφορική εξίσωση (SDE) για τη διαδικασία S, χρησιμοποιείται για να δείξει την «δυναμική» της στοχαστικής διαδικασίας S καιη Sπου ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση ορίζεται ως Γεωμετρική Κίνηση Brown.

Από τη σχέση $\frac{S(t_i + \Delta t) - S(t_i)}{S(t_i)} = \mu\Delta t + \sigma\big(W(t_i + \Delta t) - W(t_i)\big)$, παρατηρούμε ότι:

$$S(t_i + \Delta t) - S(t_i) = \mu S(t_i)\Delta t + \sigma S(t_i)\big(W(t_i + \Delta t) - W(t_i)\big)$$

και αν αθροίσουμε κατά μέλη έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(S(t_i + \Delta t) - S(t_i)\right) = \mu \sum_{i=1}^{n-1} S(t_i)\Delta t + \sigma \sum_{i=1}^{n-1} S(t_i)\left(W(t_i + \Delta t) - W(t_i)\right).$$

Επιπλέον, καθώς το Δt πλησιάζει το 0, ισχύει η σχέση $S(t) - S(0) = \mu \int_0^T S(t)\,dt + \sigma \int_0^T S(t)\,dW(t)$, όπου τα εμφανιζόμενα ολοκληρώματα μπορούν φυσικά να οριστούν ως τα όρια των προαναφερθέντων αθροισμάτων. Αυτή η στοχαστική διαδικασία εκφράζεται συνήθως ως η στοχαστική διαφορική εξίσωση: $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$. Εδώ, η $\{W(t), t \geq 0\}$ αντιπροσωπεύει μια τυπική κίνηση Brown και η S, η οποία ικανοποιεί την προαναφερθείσα στοχαστική διαφορική εξίσωση,είναι μια συγκεκριμένη περίπτωση μιας διαδικασίας Itô.

Συνεπώς, η στοχαστική διαδικασία $S = \{S(t), t \geq 0\}$, που περιγράφει την εξέλιξη της τιμής μιας μετοχής, θα πρέπει να τηρεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$

ή, ισοδύναμα, η αντίστοιχη στοχαστική ολοκληρωτική εξίσωση. Έχει αποδειχθεί, χρησιμοποιώντας το λήμμα του Itô, ότι ο λογάριθμος της διαδικασίας S ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$d \ln S(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW(t),$$

Από τη σχέση αυτή, ολοκληρώνοντας από 0 έως t, προκύπτει ότι:

$$\ln S(t) - \ln S(0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW(t),$$

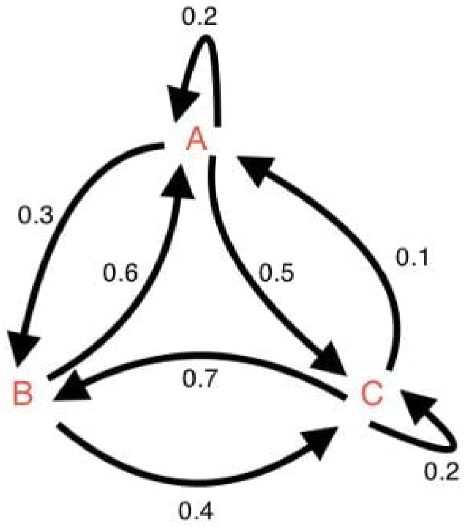
όπου, $\ln S(t) \sim N\left(\ln S(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$.

Ανάλυση Markov

Η ανάλυση Markov θα μπορούσε να είναι μια στρατηγική αξιολόγησης της εκτίμησης μιας μεταβλητής που βασίζεται αποκλειστικά στην τρέχουσα κατάστασή της, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι προηγούμενες ασκήσεις της. Αυτή η στρατηγική ξεκίνησε με το έργο του Ρώσου μαθηματικού Andrei Andreyevich Markov, ο οποίος τη συνέδεσε για να προβλέψει την ανάπτυξη σωματιδίων αερίου. Αυτή η στρατηγική χρησιμοποιείται συχνά για την πρόβλεψη συμπεριφοράς μέσα σε εκτεταμένες δέσμες, ιδιαίτερα σε εμπορικές εφαρμογές.

Η στρατηγική περιλαμβάνει τον καθορισμό της πιθανότητας μελλοντικής συμπεριφοράς μιας μεταβλητής από την τρέχουσα κατάστασή της. Μόλις αποφασιστούν αυτές οι πιθανότητες, μπορεί να αναπτυχθεί ένα δέντρο επιλογής για τον υπολογισμό της πιθανότητας ενός συγκεκριμένου αποτελέσματος. Η έρευνα Markov ουσιαστικά χρησιμοποιείται σε διαφορετικές εμπορικές συνθήκες, όπως η πρόβλεψη ανεπαρκών στοιχείων σε μια γραμμή συγκέντρωσης ή η πρόβλεψη τρομερών υποχρεώσεων στους εισπρακτέους λογαριασμούς μιας εταιρείας.

Η ανάλυση Markov, όταν κρίνεται βάσει της αξίας της, εκτιμάται για την αβίαστη και την ακρίβειά της στην εκτίμηση εκτός δείγματος. Τα βασικά μοντέλα, όπως αυτά που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση Markov, είναι συχνά διαδεδομένα σε πιο σύνθετα μοντέλα. Όπως και να έχει, η στρατηγική έχει περιορισμούς: δεν παρέχει μια ολοκληρωμένη απεικόνιση των περιστάσεων και είναι συχνά παράλογο να εφαρμοστεί ως γνήσια απόδειξη της θεμελιώδης περίστασης. Στο πίσω μέρος, η έρευνα Markov αντιμετωπίζει συγκριτικές προκλήσεις και είναι πολύ πιο κατάλληλη για την πρόβλεψη αθέτησης υποχρεώσεων παρά για τον καθορισμό της πιθανότητας NPL. (NPL=Non Performing Loans=τα δάνεια σε καθυστέρηση θεωρούνται τα δάνεια για τα οποία έχει καθυστερήσει η αποπληρωμή των τόκων ή του κεφαλαίου για χρονικό διάστημα πέραν των 90 ημερών ή βρίσκεται σε δικαστικές ενέργειες)



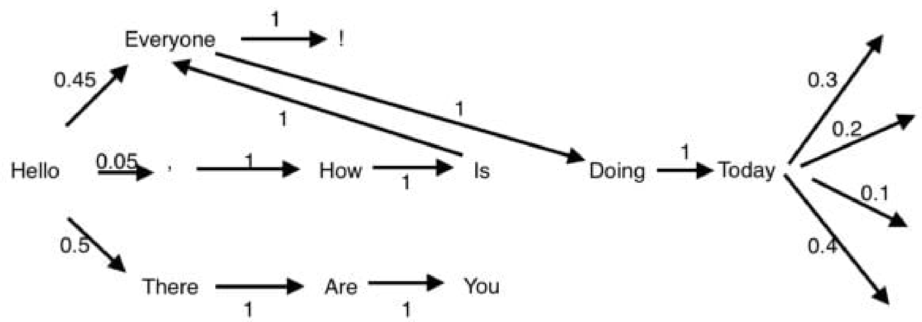
Σχήμα 3.3 Σχηματική απεικόνιση της ανάλυσης Markov τριών παραγόντων [19]

Ενώ η ανάλυση Markov χρειάζεται ενημερωτικούς ελέγχους, μπορεί να συνδεθεί με διαφορετικά στοιχεία του εμπορίου, όπως η πρόβλεψη της αφοσίωσης της επωνυμίας και η παρουσίαση των αποτελεσμάτων μεριδίων. Οι εξεταστές μετοχών μπορούν να χρησιμοποιήσουν την ανάλυση Markov για να αξιολογήσουν την πιθανότητα μια μετοχή να ξεπεράσει τη διαφήμιση σε μια καθημερινή βάση και να αναζητήσουν την επέκταση των πιθανών οφελών μέσω της χρήσης ή της πυραμίδας.

Στην επιστήμη της πληροφορίας, οι αλυσίδες Markov συνδέονται ευρέως, ιδιαίτερα στην επεξεργασία φυσικής γλώσσας (NLP). Οι επεκτατικές εταιρείες υψηλής τεχνολογίας όπως η Google, το LinkedIn και το Instagram χρησιμοποιούν αυτή τη διαδικασία για την προσδοκία περιεχομένου. Για παράδειγμα, κατά τη σύνταξη ενός e-mail, η Google προτείνει λέξεις και εκφράσεις για αυτόματη συμπλήρωση και επιπλέον το Instagram και το LinkedIn προτείνουν πιθανές απαντήσεις για μηνύματα. Τέτοιες απλές εφαρμογές περιλαμβάνουν πιο σύνθετα μοντέλα σε μεγάλης κλίμακας παραγωγή, αλλά εδώ θα διερευνήσουμε τις βασικές έννοιες χρησιμοποιώντας την πρόβλεψη περιεχομένου ως περίπτωση.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα εκτεταμένο σύνολο περιεχομένου για ένα δεδομένο θέμα. Κάθε περιεχόμενο σε αυτό το σώμα μπορεί να θεωρηθεί ως διάταξη λέξεων. Κάθε λέξη

αντιμετωπίζεται ως μια κατατμημένη κατάσταση και οι πιθανότητες κατανέμονται σε κινήσεις μεταξύ καταστάσεων με βάση συσχετισμούς λέξεων. Αυτό δημιουργεί ένα δίκτυο κίνησης που επιτρέπει την ανάπτυξη μεταξύ κρατών με σχετικές πιθανότητες. Το γράφημα από κάτω εμφανίζεται μια ξεμπερδεμένη οργάνωση με λίγο αριθμό λέξεων. Ωστόσο, σε μια εφαρμογή πραγματικού κόσμου, όπως η ανάλυση εκτεταμένων αθροισμάτων περιεχομένου όπως ακριβώς η διάταξη του Χάρι Πότερ, η οργάνωση θα ήταν περίπλοκη και τεράστια.
Για παράδειγμα, ξεκινώντας με τη λέξη «Γεια» μετά από τρεις νοητές λέξεις ή εικόνες: «Όλοι», «Εκεί» και «Άλλοι». Ο μόνος τρόπος για να υπολογιστούν αυτά τα πιθανά αποτελέσματα είναι να ληφθεί υπόψη η επανάληψη κάθε λέξης μέσα στο σώμα.



Σχήμα 3.4 Υπολογισμός πιθανών συνδυασμών λέξεων σε μια πρόταση [19]

Συνοψίζοντας, το κεφάλαιο αυτό κάλυψε θεμελιώδεις έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων, ορισμούς των στοχαστικών διαδικασιών, θεωρία μέτρου, κίνηση Brown, αριθμητική κίνηση Brown και γεωμετρική κίνηση Brown. Παρουσιάστηκαν εφαρμογές και παραδείγματα για να υπογραμμιστεί η σημασία αυτών των εννοιών και να βοηθηθούν οι αναγνώστες στην κατανόησή τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Βέλτιστη Διαχείριση Συγκεντρωτικών Προκαθορισμένων Συνταξιοδοτικών Σχημάτων σε Στοχαστικό Περιβάλλον

4.1 Εισαγωγή

Τα συνταξιοδοτικά ταμεία αποτελούν καθοριστικούς παράγοντες στις χρηματοπιστωτικές αγορές λόγω της σημαντικής επενδυτικής τους ικανότητας και του ρόλου τους στη στήριξη του βιοτικού επιπέδου των συνταξιούχων εργαζομένων. Η διαχείριση των συνταξιοδοτικών προγραμμάτων έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον με δύο κύριες εναλλακτικές λύσεις σχεδιασμού όσον αφορά την κατανομή του κινδύνου. Σε ένα πρόγραμμα καθορισμένων εισφορών (DCP), ο δικαιούχος φέρει τον κίνδυνο που συνδέεται με τη διαχείριση του ταμείου, ενώ σε ένα πρόγραμμα καθορισμένων παροχών (DBP), όπου οι παροχές συνδέονται συνήθως με τα επίπεδα του τελικού μισθού, ο χρηματοοικονομικός κίνδυνος βαρύνει την ανάδοχο οντότητα.

Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στην ανάλυση ενός συγκεντρωτικού τύπου συνταξιοδοτικού ταμείου DBP, ενός διαδεδομένου μοντέλου στα συστήματα απασχόλησης. Βασιζόμενη σε προηγούμενες εργασίες των Josa-Fombellida και Rincón-Zapatero, η παρούσα μελέτη αποσκοπεί στην ενίσχυση του ρεαλισμού του υποδείγματος με την εγκατάλειψη της παραδοχής ενός σταθερού επιτοκίου χωρίς κίνδυνο. Το υπόδειγμα εισάγει τρεις πηγές αβεβαιότητας: τις αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου, το στιγμιαίο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο και την εξέλιξη των παροχών με βάση τη μισθολογική συμπεριφορά και άλλα βασικά στοιχεία του συνταξιοδοτικού προγράμματος [20].

Διάφορες μελέτες έχουν ασχοληθεί με τη διαχείριση των ταμείων DCP με στοχαστικό επιτόκιο, αλλά υπάρχει ανάγκη επέκτασης της θεωρίας στα ταμεία DBP λόγω των εγγενών διαφορών μεταξύ των δύο. Ο στόχος του μετόχου σε ένα συνταξιοδοτικό ταμείο DCP είναι να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη χρησιμότητα από τη συσσώρευση του ταμείου. Το ποσοστό συνεισφοράς ορίζεται από τον μισθό. Ωστόσο σε ένα συνταξιοδοτικό ταμείο DBP η προσπάθεια απόσβεσης είναι μια μεταβλητή ελέγχου. Τα περιουσιακά στοιχεία του ταμείου θα μπορούσαν να αυξηθούν τεχνητά με υψηλές εισφορές. Προφανώς αυτό δεν φαίνεται λογικό, δεδομένου ότι τα οφέλη έχουν καθοριστεί εκ των προτέρων. Επομένως σε ένα πρόγραμμα DBP η ελαχιστοποίηση του κινδύνου είναι πιο σημαντική από τη μεγιστοποίηση του ενεργητικού, δεδομένης της σταθερής φύσης των παροχών.

Η εργασία καθιστά το ποσοστό εισφορών ενδογενές υιοθετώντας μια μέθοδο απόσβεσης με διασπορά, συνδέοντας τις εισφορές με τις μη χρηματοδοτούμενες υποχρεώσεις και απαιτώντας μεγαλύτερη προσπάθεια απόσβεσης όταν το σχέδιο είναι υποχρηματοδοτούμενο. Το συνταξιοδοτικό πρόγραμμα υποθέτει στοχαστικότητα, με τις παροχές να ακολουθούν μια γεωμετρική κίνηση Brown. Οι αναλυτικές λύσεις, που λαμβάνονται μέσω δυναμικού προγραμματισμού, αποκαλύπτουν βέλτιστες επενδυτικές στρατηγικές σε ομόλογα και επικίνδυνα περιουσιακά στοιχεία. Η εργασία διερευνά επίσης την αποτίμηση των υποχρεώσεων, λαμβάνοντας υπόψη ένα τυχαίο τεχνικό επιτόκιο και συσχετίσεις με μέσα της χρηματοπιστωτικής αγοράς.

Συνοπτικά, η εργασία ορίζει τα στοιχεία του συνταξιοδοτικού συστήματος, εισάγει ένα στοχαστικό επιτόκιο και διερευνά τη δομή της χρηματοπιστωτικής αγοράς. Παρέχει μια ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο αποτίμηση των υποχρεώσεων και προσφέρει πληροφορίες για τις βέλτιστες επενδυτικές στρατηγικές, καταλήγοντας με μια αριθμητική ανάλυση και πιθανές επεκτάσεις της μελέτης

4.2 Το συνταξιοδοτικό μοντέλο

Το υπό εξέταση συνταξιοδοτικό πρόγραμμα είναι ένα συγκεντρωτικό συνταξιοδοτικό ταμείο καθορισμένων παροχών (DBP), όπου οι παροχές προκαθορίζονται από τον διαχειριστή. Ο ανάδοχος του προγράμματος αποσύρει συνεχώς χρονικά μεταβαλλόμενα κεφάλαια με στόχο την παροχή συνταξιοδοτικών παροχών στους εργαζομένους. Αρκετές μεταβλητές αφορούν τη συνολική ομάδα συμμετεχόντων, επηρεάζοντας τη διαδικασία χρηματοδότησης. Τα βασικά στοιχεία και οι βασικές παραδοχές που διέπουν τη διαχρονική εξέλιξη του προγράμματος περιγράφονται παρακάτω:

T (Ορίζοντας σχεδιασμού): Η ημερομηνία που σηματοδοτεί το τέλος του συνταξιοδοτικού προγράμματος, όπου $0 < T < \infty$.

$F(t)$ (Ενεργητικό του ταμείου): Η αξία των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου τη χρονική στιγμή t.

$P(t)$ (Υποσχόμενες παροχές): Οι παροχές που έχουν υποσχεθεί στους συμμετέχοντες τη χρονική στιγμή t, οι οποίες συνδέονται με το μισθό τη στιγμή της συνταξιοδότησης.

$C(t)$ (Ποσοστό εισφορών): Το ποσοστό με το οποίο ο χορηγός συνεισφέρει στη διαδικασία χρηματοδότησης τη χρονική στιγμή t.

$AL(t)$ (Αναλογιστική υποχρέωση): Οι συνολικές υποχρεώσεις του χορηγού τη χρονική στιγμή t.

$NC(t)$ (Κανονικό κόστος): Το κόστος που σχετίζεται με τη χρηματοδότηση, υποθέτοντας ότι τα περιουσιακά στοιχεία του ταμείου αντιστοιχούν στις αναλογιστικές υποχρεώσεις και ότι δεν υπάρχουν αβεβαιότητες στο σχέδιο.

$UAL(t)$ (Μη χρηματοδοτούμενη αναλογιστική υποχρέωση): Η μη χρηματοδοτούμενη αναλογιστική υποχρέωση τη χρονική στιγμή t και είναι ίση με $AL(t) - F(t)$.

$M(x) \times 100\%$: Το ποσοστό της αναλογιστικής αξίας των μελλοντικών παροχών που συσσωρεύονται μέχρι την ηλικία x, όπου a είναι η κοινή ηλικία εισόδου και d είναι η κοινή ηλικία συνταξιοδότησης για όλους τους συμμετέχοντες. Η συνάρτηση M είναι μια διαφοροποιήσιμη συνάρτηση κατανομής με $M(a) = 0$, $M(d) = 1$.

$\delta(t)$ (Τεχνικός ρυθμός πραγματοποίησης): Ο συντελεστής που χρησιμοποιείται για την αποτίμηση των υποχρεώσεων του προγράμματος.

$r(t)$ (επιτόκιο αγοράς χωρίς κίνδυνο): Το επιτόκιο της χρηματοπιστωτικής αγοράς.

Η παρούσα μελέτη βασίζεται σε προηγούμενη εργασία των Josa-Fombellida και Rincón-Zapatero (2004), εισάγοντας μια πιο γενική υπόθεση θεωρώντας το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο r ως τυχαίο. Αυτό συνεπάγεται ότι το δ είναι επίσης τυχαίο και ότι και οι δύο διαδικασίες μοιράζονται την ίδια πηγή αβεβαιότητας. Το υπόδειγμα ενσωματώνει τρεις πηγές τυχαιότητας: παροχές, επιτόκιο και απόθεμα. Για να μοντελοποιηθεί αυτή η κατάσταση, ορίζεται ένας χώρος πιθανοτήτων (X, F, P), όπου F είναι μία πλήρης και ορθά συνεχής διήθηση που δημιουργείται από μια τρισδιάστατη τυπική κίνηση Brown$F = \sigma\{(w(u), w_B(u), w_S(u)) : 0 \le u \le t\}$ και P είναι ένα μέτρο πιθανότητας στο X. Το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο r και το τεχνικό ποσοστό πραγματοποίησης δ ικανοποιούν στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις που εξαρτώνται από την κίνηση Brown (w_B). Η τυχαιότητα των παροχών αποδίδεται σε μια άλλη κίνηση Brown(w_p).Δεδομένου ότι οι παροχές εξαρτώνται από την αύξηση του μισθού των υπαλλήλων, υποθέτουμε την ύπαρξη συσχετισμού $q_1 \in [-1,1]$μεταξύ των κινήσεων Brownw_p και w_B και $q_2 \in [-1,1]$ μεταξύ των κινήσεων Brownw_p και w_S όπου αυτό εξηγείται από τις επιπτώσεις των μισθών στον πληθωρισμό και τις επιπτώσεις του πληθωρισμού στις τιμές των περιουσιακών στοιχείων. Επομένως, θεωρώντας ότι τα r, δ είναι τυχαία έχουμε τις παρακάτω στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις:

$W_{p(t)} = \sqrt{1 - q_1{}^2 - q_2{}^2}\, w(t) + q_1 w_B(t) + q_2 w_S(t), \qquad 0 \leq t \leq T\ ,\ q_1{}^2 + q_2{}^2 \leq 1$

$dr(t) = \mu_r(t, r(t))\, dt + \eta_r(t, r(t))\, dW_B(t),$

$d\delta(t) = \mu_\delta(t, \delta(t))\, dt + \eta_\delta(t, \delta(t))\, dW_B(t),$ (4.1)

$dP(t) = \mu_P(t, P(t))\, dt + \eta_P(t, P(t))\, dW_P(t)$

για όλα τα $t \geq 0$ με $r(0) = r_o, P(0) = P_0$ που αντιπροσωπεύουν τις αρχικές αξίες των επιτοκίων και των οφελών. Ωστόσο είναι απαραίτητη η λύση μιας πιο συγκεκριμένης προδιαγραφής αυτών των διαδικασιών.

Στη συνέχεια επεκτείνουμε τους ορισμούς των αναλογιστικών συναρτήσεων από την περίπτωση του σταθερού ποσοστού αποτίμησης για ντετερμινιστικά οφέλη σε στοχαστικά οφέλη. Η στοχαστική αναλογιστική υποχρέωση και το στοχαστικό κανονικό κόστος καθορίζονται από τις παρακάτω εξισώσεις :

$$AL(t) = \mathbb{E}\left(\int_a^d e^{-\int_t^{t+d-x} \delta(s)\, ds} M(x) P(t + d - x) | F_t\right) dx,$$

$$NC(t) = \mathbb{E}\left(\int_a^d e^{-\int_t^{t+d-x} \delta(s)\, ds} M'(x) P(t + d - x) | F_t\right) dx.$$

Για κάθε $t \geq 0$, όπου $E(\cdot | F_t)$ αντιπροσωπεύει την υπό συνθήκη προσδοκία σε σχέση με τη διήθηση που σχετίζεται με την τυπική κίνηση Brown

$$\{(w(t), w_B(t), w_S(t))\}_{t>0}.$$

Επομένως, κατά τον υπολογισμό των αναλογιστικών συναρτήσεων τη χρονική στιγμή t, ο διαχειριστής βασίζεται στις διαθέσιμες πληροφορίες μέχρι εκείνη τη στιγμή, εκφρασμένες με όρους υπό συνθήκη μέση τιμή. Κατά συνέπεια,η$AL(t)$ αντιπροσωπεύει τη συνολική αναμενόμενη αξία των υποσχόμενων παροχών που συσσωρεύονται σύμφωνα με M, προεξοφλημένη με το επιτόκιο $\delta(t)$, που θεωρείται ότι είναι προσαρμοσμένο στη διήθηση. Παρόμοιες παρατηρήσεις ισχύουν για το κανονικό κόστος $NC(t)$ με συνάρτηση M'. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι παροχές των συνταξιούχων δεν είναι εμπορεύσιμα περιουσιακά στοιχεία, με αποτέλεσμα να υπάρχει εγγενής κίνδυνος που δεν μπορεί να αντισταθμιστεί, καθιστώντας την αγορά ατελή.

Όπως η P ακολουθεί μια διαδικασία διάχυσης, έτσι τηρεί την ιδιότητα Markov όπως αναλύεται σε πρόσφατη μελέτη, συνεπώς, η υπό όρους προσδοκία σε σχέση με τη διήθηση είναι ισοδύναμη με την υπό όρους προσδοκία όσον αφορά τις τρέχουσες τιμές των P τη χρονική στιγμή t. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι, κατά τη διαδικασία υπολογισμού των βέλτιστων τιμών του κεφαλαίου, θα αξιοποιηθούν πληροφορίες που προέρχονται από την εξέλιξη της τυχαίας πηγής. Εφαρμόζοντας βασικές ιδιότητες της υπό συνθήκη προσδοκίας, οι προηγούμενοι ορισμοί μπορούν να επαναδιατυπωθούν: [3]

$$AL(t) = \int_a^d E\left(e^{-\int_t^{t+d-x}\delta(s)\,ds}P(t+d-x)\middle|F_t\right)M(x)\,dx, \qquad (4.2)$$

$$NC(t) = \int_a^d E\left(e^{-\int_t^{t+d-x}\delta(s)\,ds}P(t+d-x)\middle|F_t\right)M'(x)\,dx. \qquad (4.3)$$

Τα οφέλη της P ικανοποιούν,

$$dP(t) = \mu P(t)\,dt + \eta P(t)\,dw_p(t), \qquad t \geq 0$$

όπου συμβολίζονται με P, τηρούν τη συνθήκη όπου μ είναι πραγματικός αριθμός και η είναι θετικός πραγματικός αριθμός. Η αρχική συνθήκη, $P(0) = P_0$ είναι μια τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει τις αρχικές υποχρεώσεις.

Η μελέτη υποθέτει ότι τα οφέλη P ακολουθούν μια γεωμετρική κίνηση Brown, ενσωματώνοντας εκθετική αύξηση ή μείωση κατά μέσο όρο με σταθερό εκθετικό ρυθμό. Στην ουσία, αυτό συνεπάγεται την υπόθεση ότι οι παροχές παρουσιάζουν μέση αύξηση ή μείωση με σταθερό εκθετικό ρυθμό. Η επακόλουθη συμπεριφορά των αναλογιστικών συναρτήσεων AL και NC διατυπώνονται στην επόμενη πρόταση. Για το σκοπό αυτό, ορίζονται οι ακόλουθες τυχαίες συναρτήσεις:

$$\psi_{AL}(t) = \int_a^d e^{\int_t^{t+d-x}(\mu-\delta(s))ds} M(x)dx$$

$$\psi_{NC}(t) = \int_a^d e^{\int_t^{t+d-x}(\mu-\delta(s))ds} M'(x)dx \qquad (4.5)$$

$$\xi_{AL}(t) = \int_a^d e^{\int_t^{t+d-x}(\mu-\delta(s))ds}\left(\mu - \delta(t+d-x)\right)M(x)dx - (\mu - d(t))\psi_{AL}(t)$$

Πρόταση 4.1 Σύμφωνα με την παραπάνω υπόθεση οι αναλογιστικές συναρτήσεις ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις$AL = \psi_{AL}P$ και $Nc = \psi_{NC}P$, και συνδέονται μέσω της εξίσωσης

$$\left(\mu+\frac{\xi_{AL}(t)}{\psi_{AL}(t)}\right)AL(t)+NC(t)-P(t)=0, \forall\, t\geq 0 \quad (4.6)$$

Επιπλέον η αναλογιστική υποχρέωση ικανοποιεί

$$dAL(t)=\left(\mu+\frac{\xi_{AL}(t)}{\psi_{AL}(t)}\right)AL(t)dt+\eta AL(t)dw_p(t), AL(0)=AL_0=\psi_{AL}(0)P_0 \quad (4.7)$$

Κατά συνέπεια, η AL συμπεριφέρεται ως γεωμετρική κίνηση Brown με τυχαία παρέκκλιση(drift). Οι διαδικασίες AL και P αποκλίνουν στον όρο ολίσθησης $(\xi_{AL}(t)/\psi_{AL}(t))AL$. Ειδικότερα, το $\psi_{AL}(t)$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η προεξοφλημένη αξία, με ρυθμό $\delta(s)-\mu$, ενός τίτλου που εκταμιεύει ένα ποσό σύμφωνα με το $M(x)$ συνεχώς εντός του διαστήματος $[t, t+d-a]$. Δεδομένου ότι η $\xi_{AL}(t)$αντιπροσωπεύει την παράγωγο της$\psi_{AL}(t)$, ο λόγος $\xi_{AL}(t)/\psi_{AL}(t)$ ενσωματώνει τον στοχαστικό ρυθμό αύξησης της προαναφερθείσας προεξοφλημένης αξίας. Ως εκ τούτου, η διολίσθηση της dAL, όπως παρουσιάζεται στην εξίσωση (4.7), λαμβάνει υπόψη όχι μόνο τη μέση αύξηση των υποχρεώσεων μ αλλά και τις τυχαίες διακυμάνσεις που απορρέουν από τη στοχαστική μεταβλητήδ.

Η επακόλουθη προσέγγιση περιλαμβάνει τη χρήση μιας μεθόδου διασποράς για την απόσβεση κεφαλαίων, όπως παρουσιάστηκε στην εισαγωγή. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι το ποσοστό συμπληρωματικών εισφορών (η διαφορά μεταξύ του ποσοστού εισφορών και του κανονικού κόστους) είναι ευθέως ανάλογο προς την μη χρηματοδοτούμενη αναλογιστική υποχρέωση, η οποία εκφράζεται ως εξής

$$C(t)=NC(t)+k\big(AL(t)-F(t)\big), \quad (4.8)$$

όπου k είναι μια σταθερά που καθορίζεται από τον εργοδότη και υποδηλώνει το ρυθμό με τον οποίο αποσβένεται το πλεόνασμα ή το έλλειμμα. Αν και η συμβατική αναλογιστική πρακτική τυπικά ορίζει το $1/k$ως ισοδύναμο με μια συνεχή προσαύξηση με απόσβεση σεmέτη, επιλέγουμε μια πιο ευέλικτη προσέγγιση στην επιλογή του k, αποκλίνοντας από τις συνήθεις αναλογιστικές συμβάσεις, όπως συζητείται από σύγχρονους μελετητές.

4.3 Χαρτοφυλάκιο της χρηματοπιστωτικής αγοράς

Σε αυτή την ενότητα, περιγράφουμε τη δομή της χρηματοπιστωτικής αγοράς στο υπόδειγμά μας. Η διαχείριση του κεφαλαίου από τον ανάδοχο του προγράμματος περιλαμβάνει ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από ένα περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο R, ένα ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου B και μια μετοχή S.

Υποθέτουμε ότι το στιγμιαίο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο $r(t)$ ακολουθεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dr(t) = a(\beta - r(t))dt + \sigma dw_B(t), r(0) = r_0 \qquad (4.9)$$

όπου a, b, και σ είναι αυστηρά θετικές σταθερές. Αυτή η διαδικασία, γνωστή ως διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck με μέση αναστροφή, εισήχθη από τον Vasicek (1977) για να μοντελοποιήσει τη συμπεριφορά των επιτοκίων.

Υποθέτουμε ότι η εξέλιξη της τιμής του περιουσιακού στοιχείου χωρίς κίνδυνο R είναι:

$$dR(t) = r(t)R(t)dt, R(0) = R_0, \qquad (4.10)$$

όπου η δυναμική του $r(t)$ δίνεται από την εξίσωση (3.9). Αυτό το περιουσιακό στοιχείο μπορεί να ερμηνευθεί ως τραπεζικός λογαριασμός που προσφέρει στιγμιαίο επιτόκιο $r(t)$ χωρίς κανένα σχετικό κίνδυνο.

Δεδομένου του $r(t)$, υποθέτουμε την ύπαρξη μιας αγοράς για ομόλογα μηδενικού κουπονιού με σταθερή διάρκεια $T_1 > T$. Σύμφωνα με τους Vasicek (1977) και Battocchio και Menoncin (2004), η τιμή τη χρονική στιγμή t ενός ομολόγου μηδενικού κουπονιού με διάρκεια T_1, όπου $t < T < T_1$, δίνεται από:

$$B(t, T_1) = e^{c(t,T_1) b(t,T_1) r(t)}, \text{ όπου}$$

$$b(t, T_1) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(T_1 - t)}\right),$$

$$c(t, T_1) = -R(\infty)(T_1 - t) + b(t, T_1)\left(R(\infty) - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\right) + \frac{\sigma^2}{4\alpha^3}\left(1 - e^{-2a(T_1 - t)}\right)$$

Και $$R(\infty) = \beta + \sigma\zeta\alpha - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}$$

όπου αντιπροσωπεύει την απόδοση ενός ομολόγου μηδενικού κουπονιού με άπειρη διάρκεια. Εδώ, η ζ είναι η σταθερή αγοραία τιμή του κινδύνου. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Itô, η διαδικασία της τιμής του ομολόγου ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dB(t, T_1) = B(t, T_1)\Big(\big(r(t) + \sigma\zeta b(t, T_1)\big)dt - \sigma b(t, T_1) dw_B(t)\Big)\ B(T_1, T_1) = 0 \qquad (4.11)$$

Τέλος, εισάγουμε ένα απόθεμα με δυναμική που διέπεται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dS(t) = S(t)\Big(\mu_S\big(r(t)\big)dt + \sigma_r dw_B(t) + \sigma_S dw_S(t)\Big), \quad S(0) = S_0 \qquad (4.12)$$

όπου σ_S, σ_r είναι θετικές σταθερές που καθορίζουν τη μεταβλητότητα των μετοχών. Η συνάρτηση μεταβλητότητας αναπαρίσταται ως εξής $\sqrt{\sigma_r{}^2 + \sigma_S{}^2}$ και η παράμετρος $\mu_s(r)$ είναι ο στιγμιαίος μέσος όρος έχοντας τη μορφή $\mu_s(r) = r + m_s$ με m_s μια σταθερά που αντιπροσωπεύει την αναμενόμενη υπερβάλλουσα απόδοση από την επένδυση στη μετοχή.

4.4 Ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο αποτίμηση των υποχρεώσεων

Η ακριβής εκτίμηση των υποχρεώσεων έχει ύψιστη σημασία για τον ανάδοχο. Στο πλαίσιο αυτό, διερευνούμε τη μεθοδολογία για την επίτευξη μιας δίκαιης αποτίμησης, αναγνωρίζοντας την εγγενή πρόκληση ότι οι υποσχεθείσες παροχές στους συμμετέχοντες δεν είναι εμπορεύσιμα περιουσιακά στοιχεία. Για να ξεπεράσουμε αυτόν τον περιορισμό, χρησιμοποιούμε μια προσέγγιση αποτίμησης που βασίζεται στην έννοια της ισορροπίας, όπως περιγράφεται σε έργα όπως του Κωνσταντινίδη [27]. Η ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο αποτίμηση των υποχρεώσεων παρέχει μια μονοσήμαντα καθορισμένη τιμή για το τεχνικό επιτόκιο προεξόφλησης, που συμβολίζεται ως δ. Η τιμή αυτή αποτελεί προσαρμογή του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου r, λαμβάνοντας υπόψη τις συνιστώσες της μετατόπισης και της διάχυσης τόσο των χρηματοπιστωτικών μέσων όσο και των παροχών, μαζί με τις διάφορες συσχετίσεις που υπάρχουν μεταξύ τους.

Για ένα άτομο ηλικίας x, έστω $Y^x(t,P)$ είναι το περιουσιακό στοιχείο που αποτιμάται τη χρονική στιγμή t, που περιλαμβάνει μια πληρωμή P νομισματικών μονάδων στην ηλικία συνταξιοδότησης d. Η διαδικασία P ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brown σύμφωνα με την υπόθεση που αναφέρθηκε. Εφόσον P είναι μη εμπορεύσιμη, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή χαρτοφυλακίου για την αντιστάθμιση του κινδύνου. Κατά συνέπεια, κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από Y^x, B, και S, που περιλαμβάνουν δύο εμπορεύσιμα περιουσιακά στοιχεία και τρεις ανεξάρτητες κινήσεις Brown. Για να επιτευχθεί ουδέτερη αποτίμηση κινδύνου, υποτίθεται ότι ο κίνδυνος που δεν συσχετίζεται με τα δύο ελεύθερα εμπορεύσιμα χρηματοπιστωτικά μέσα, δηλαδή τη μετοχή και το ομόλογο, δεν φέρει τιμή. Αξίζει να σημειωθεί ότι η αναλογιστική υποχρέωση του αμοιβαίου κεφαλαίου είναι

$$AL(t) = \int_a^d Y^x\big(t, P(t)\big) M(x)\, dx,$$

Μόλις προσδιοριστεί το Y^x και αφού ευθυγραμμιστεί αυτή η έκφραση της AL με αυτή που παρέχεται στο συνταξιοδοτικό μοντέλο, η τιμή της d καθορίζεται. Για να επιτευχθεί αυτό, θεωρήστε το περιουσιακό στοιχείο σε οποιαδήποτε ενδιάμεση χρονική στιγμή, $Y^x(t+\tau,P)$, για $0 \le \tau \le d-x$. Διαμορφώνοντας το χαρτοφυλάκιο $\Pi = Y^x + \pi_B B + \pi_s S$ με μία μονάδα περιουσιακού στοιχείου ,$Y^x\pi_B$ μονάδες του B, και π_s μονάδες του S, και εφαρμόζοντας τον τύπο του Itô, έχουμε:

$$d\Pi = dY^x + \pi_B dB + \pi_S dS$$

$$= \left(Y_p{}^x \mu P + \frac{1}{2} Y_{pp}{}^x \eta^2 P^2 + Y_\tau{}^x\right) dt + Y_p{}^x \eta P dw_p + \pi_B\big((r+\sigma\zeta b)Bdt - \sigma bBdw_B\big)$$
$$+ \pi_S(\mu_S(r)Sdt + \sigma_r Sdw_B + \sigma_S Sdw_S)$$

$$= \left(Y_p{}^x \mu P + \frac{1}{2} Y_{pp}{}^x \eta^2 P^2 + Y_\tau{}^x + \pi_B(r+\sigma\zeta b)B + \pi_S \mu_S(r)S\right) dt$$
$$+ Y_p{}^x \eta\sqrt{1-q_1{}^2-q_2{}^2} P dw + \left(Y_p{}^x \eta P q_1 - \pi_B \sigma bB + \pi_S \sigma_r S\right) dw_B$$
$$+ \left(Y_p{}^x \eta P q_2 + \pi_S \sigma_S S\right) dw_{S.}$$

Η πρώτη ισότητα οφείλεται στην ιδιότητα αυτοχρηματοδότησης των στρατηγικών π_B,π_s. Στις επακόλουθες ισότητες, χρησιμοποιούμε την υπόθεση (3.2),(3.3), (3.11) και (3.12).

Τώρα επιλέγουμε π_B και π_Sγια να εξαλειφθούν οι κίνδυνοι που συνδέονται με w_B και w_S, δηλαδή

$$\pi_B B = (Y_p{}^x \eta P q_1 + \pi_S \sigma_r S)/(\sigma b)$$

και

$$\pi_S S = -Y_p{}^x \eta P q_2/\sigma_S$$

Δεν λαμβάνουμε επίσης υπόψη τον ορθογώνιο προς αυτούς κίνδυνο, δηλαδή τον κίνδυνο που σχετίζεται με w δεν τιμολογείται. Η συνολική απόδοση της αντιστάθμισης του χαρτοφυλακίου πρέπει να είναι ίση με το επιτόκιο τη χρονική στιγμή $t+\tau, r(t+\tau)$.

Έτσι, λαμβάνουμε:

$$r(t+\tau)(Y^x + \pi_B B + \pi_S S) = Y^x{}_\tau + Y^x{}_p \mu P + \frac{1}{2} Y^x{}_{pp} \eta^2 P^2 + \pi_B(r+\sigma\zeta b)B + \pi_S \mu_s(r)S,$$

αυτό, με τις εκφράσεις για π_B και π_S που βρίσκονται παραπάνω και χρησιμοποιώντας $\mu_s(r) = r + m_S$, γίνεται η μερική διαφορική εξίσωση τιμολόγησης

$$r(t+\tau)Y^x = Y^x{}_\tau + \omega P Y^x{}_p + \tfrac{1}{2}\eta^2 P^2 Y^x{}_{pp} \quad (3.13)$$

Όπου με οριακές συνθήκες $Y^x(t+d-x,P) = P, Y^x(t+\tau,0) = 0$ και όπου

$$\omega = \mu + \zeta\eta q_1 - \frac{m_S + \zeta\sigma_r}{\sigma_S}\eta q_2.$$

Η λύση της εξίσωσης (3.13) είναι,

$$Y^*(t+d-x,P) = Pe^{-\int_{t+\tau}^{t+d-x}(r(s)-\omega)ds}$$

ως εκ τούτου:

$$Y^*(t,P) = Pe^{-\int_{t+\tau}^{t+d-x}(r(s)-\omega)ds}$$

Συνεπώς,

$$AL(t) = P(t)\psi_{AL}(t) = P(t)\int_a^d e^{\int_t^{t+d-x}(\mu-\delta(s))ds}M(x)dx.$$

Συγκρίνοντας και τις δύο τιμές του AL,το$\delta(t)$ πρέπει να επιλεγεί ίσο με $r(t)+\mu-\omega$ για να επιτευχθεί ουδέτερη αποτίμηση κινδύνου. Έτσι, σε όλη την εργασία, θα υποθέτουμε, κατά τρόπο παρόμοιο με προηγούμενες εργασίες των μελετητών, ότι το τεχνικό επιτόκιο συμπίπτει με το επιτόκιο απόδοσης του ομολόγου, τροποποιημένο ώστε να εξαλειφθούν οι πηγές αβεβαιότητας.

Επίσης υποθέτουμε ότι ο τεχνικός ρυθμός επικαιροποίησης επιλέγεται να είναι

$$\delta(t) = r(t) - \zeta\eta q_1 + \frac{m_S + \zeta\sigma_r}{\sigma_s}\eta q_2$$

Εκτός από την ουδέτερη αποτίμηση κινδύνου που παρέχει, αυτή η επιλογή τουδ μας επιτρέπει να επιλύσουμε ρητά το πρόβλημα στην επόμενη ενότητα.

4.5 Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο

Σε αυτή την ενότητα, εξετάζουμε πώς ο ανάδοχος μπορεί να καθορίσει με βέλτιστο τρόπο την κατανομή των περιουσιακών στοιχείων του αμοιβαίου κεφαλαίου που τοποθετούνται σε έναν λογαριασμό ταμιευτηρίου ή επενδύονται σε ένα ομόλογο και μια επικίνδυνη μετοχή. Ο χορηγός αντιμετωπίζει τρεις πηγές τυχαιότητας: μία από την εγγενή φύση των παροχών του συνταξιοδοτικού προγράμματος και οι άλλες δύο από μεταβλητές της χρηματοπιστωτικής αγοράς, συγκεκριμένα το στοχαστικό επιτόκιο και μια επικίνδυνη μετοχή.

Ο ανάδοχος του προγράμματος επενδύει το κεφάλαιο σε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από έναν αποταμιευτικό λογαριασμό R (δίνεται από την εξίσωση (3.10)), ένα ομόλογο μηδενικού κουπονιού B με διάρκεια $T_1 > T$ (δίνεται από την εξίσωση (3.11)), και ένα απόθεμα S με δυναμική που δίνεται από την εξίσωση (3.12). Τα ποσά που επενδύονται στο ομόλογο B και στο απόθεμα Sσυμβολίζονται με λ_B και λ_S, αντίστοιχα. Το υπόλοιπο ποσό

$(F-\lambda_B-\lambda_S)$ πηγαίνει στο λογαριασμό ταμιευτηρίου R. Επίσης επιτρέπεται ο δανεισμός και οι ανοικτές πωλήσεις. Μια αρνητική τιμή λ_B (αντίστοιχα λ_S) υποδηλώνει την πώληση μετοχών της B (αντίστοιχα της S) ενώ εάν $\lambda_B+\lambda_S$υπερβαίνει το F, ο ανάδοχος αναλαμβάνει χρέος για την αγορά μετοχών, δανειζόμενος χρήματα με επιτόκιο r.

Υποθέτουμε ότι $\{(\lambda_B(t),\lambda_S(t)):t\geq 0\}$ είναι μια μαρκοβιανή διαδικασία ελέγχου προσαρμοσμένη στη διήθηση $\{\mathcal{F}_t\}$,t≥0 και ικανοποιώντας

$$\mathbb{E}\int_0^T(\lambda_B{}^2(t)+\lambda_S{}^2(t))dt<\infty \tag{4.14}$$

Η δυναμική εξέλιξη του ταμείου στο πλαίσιο της επενδυτικής πολιτικής

(λ_B,λ_S) δίνεται από:

$$dF(t)=\lambda_B(t)\frac{dB(t)}{B(t)}+\lambda_S(t)\frac{dS(t)}{S(t)}+\big(F(t)-\lambda_B(t)-\lambda_S(t)\big)\frac{dR(t)}{R(t)}+\big(C(t)-P(t)\big)dt \tag{4.15}$$

Αντικαθιστώντας τις (3.10), (3.11) και (3.12) στην (3.15) και λαμβάνοντας υπόψη τις προτάσεις 3.8, έχουμε ότι :

$$\begin{aligned}dF(t)=\Bigg(&b(t)\sigma\zeta\lambda_B(t)+\lambda_S(t)\Big(\mu_S(r(t))-r(t)\Big)+(r(t)-k)F(t)\\&+\left(k+\mu+\frac{\xi_{AL}(t)}{\psi_{AL}(t)}-\delta(t)\right)AL(t)\Bigg)dt+\big(-b(t)\sigma\lambda_B(t)+\sigma_r\lambda_S(t)\big)dw_B(t)\\&+\sigma_S\lambda_S(t)dw_S(t),\end{aligned} \tag{4.16}$$

με αρχική συνθήκη $F(0)=F_0$. Σύμφωνα με την (3.7) και τη σχέση

$w_P=\sqrt{1-q_1{}^2-q_2{}^2}w+q_1w_B+q_2w_S$

ως προς $X=F-AL$. Η εξίσωση (3.16) είναι :

$dX(t)=(b(t)\sigma\zeta\lambda_B(t)+m_S\lambda_S(t)+(r(t)-k)X(t)+r(t)-\delta(t))AL(t))dt-$
$\eta\sqrt{1-q_1{}^2-q_2{}^2}AL(t)dw(t)-\big(b(t)\sigma\lambda_B(t)-\sigma_r\lambda_S(t)+\eta q_1AL(t)\big)dw_B(t)+(\sigma_S\lambda_S(t)-$
$\eta q_2AL(t)dw_s(t),$

(3.17)

Τώρα, στρεφόμενοι στις προτιμήσεις του ελεγκτή, υποθέτουμε ότι θέλει να ελαχιστοποιήσει τον τελικό κίνδυνο φερεγγυότητας. Έτσι η αντικειμενική συνάρτηση που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί στην κατηγορία των αποδεκτών ελέγχων $\mathcal{A}_{X_0,AL_0,r_0}$, δίνεται από

$$J((X_0, AL_0, r_0); (\lambda_B, \lambda_S)) = \mathbb{E}_{X_0, AL_0, r_0} X^2(T). \tag{4.18}$$

Εδώ το $\mathcal{A}_{X_0, AL_0, r_0}$ είναι το σύνολο των μετρήσιμων διαδικασιών $\{(\lambda_B(t), \lambda_S(t)): t \geq 0\}$ όπου (λ_B, λ_S) ικανοποιεί την (3.14) και όπου X, AL, r ικανοποιούν τις (3.17), (3.7), (3.10).Στο παραπάνω $\mathbb{E}_{X_0, AL_0, r_0}$, η μέση τιμή δηλώνει υπό όρους σε σχέση με τις αρχικές συνθήκες (X_0, AL_0, r_0).

Η προσέγγιση δυναμικού προγραμματισμού χρησιμοποιείται για την επίλυση του προβλήματος. Για να λειτουργήσει η διαδικασία, κάποιες ανεξάρτητες ιδιότητες της τιμής πρέπει να καθιερωθούν. Η συνάρτηση τιμής ορίζεται ως

$$\hat{V}(t, X, AL, r) = \min_{(\lambda_B, \lambda_S) \in \mathcal{A}_{X_0, AL_0, r_0}} \{J(t, (X, AL, r); (\lambda_B, \lambda_S)) \tag{4.19}$$

Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιείται η προσέγγιση του δυναμικού προγραμματισμού και η εξίσωση HJB συνδέει τη συνάρτηση αξίας με τους βέλτιστους ελέγχους ανατροφοδότησης. Οι βέλτιστες επενδύσεις παρέχονται από τα ακόλουθα:

$$\lambda_B{}^*(t, X, AL) = \frac{-a}{\sigma(1 - e^{-a(T_1 - t)})} \left(\left(\zeta - 2\frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right) + \frac{m_S \sigma_r + \zeta \sigma_r{}^2}{\sigma_S{}^2} \right) X + \left(q_1 - \frac{\sigma_r}{\sigma_s} q_2 \right) \eta AL \right) \tag{4.20}$$

$$\lambda_S{}^*(t, X, AL) = -\frac{m_S + \zeta \sigma_r}{\sigma_S{}^2} X + \frac{q_2}{\sigma_S} \eta AL. \tag{4.21}$$

Από την εξίσωση (3.20), οι βέλτιστες επενδύσεις δεν εξαρτώνται από τοr και η επένδυση στο ομόλογο είναι της μορφής

$$\lambda_B{}^*(t, X, AL) = \frac{1}{1 - e^{-a(T_1 - t)}} \left(\frac{-a\zeta}{\sigma} X + 2\left(1 - e^{-a(T-t)}\right) X - \frac{a}{\sigma \sigma_S{}^2} (m_S \sigma_r + \zeta \sigma^2{}_r) X - \frac{a\eta}{\sigma \sigma_s} (\sigma_S q_1 - \sigma_r q_2) AL \right)$$

Εξαιρώντας τον κοινό παράγοντα παρατηρούμε ότι είναι άθροισμα τεσσάρων όρων. Ο πρώτος συμπίπτει με τον κλασικό βέλτιστο όταν οι συντελεστές είναι ντετερμινιστικοί. Ο δεύτερος όρος είναι ανάλογος του X και εξαρτάται από τον προγραμματισμένο χρονικό ορίζοντα, που εξαφανίζεται στο τερματικό ημερομηνία $\boldsymbol{T}$.Ο τρίτος είναι ανάλογος με το χρέος, με συντελεστή που εξαρτάται από πολλά στοιχεία που καθορίζουν τις τιμές του ομολόγου και τη μετοχή. Ο τέταρτος είναι αρκετά διαφορετικός καθώς περιλαμβάνει τυχαία ευθύνη αντί για χρέος. Το άθροισμα είναι τώρα ανάλογο της αναλογιστικής υποχρέωσης AL, με συντελεστή που εξαρτάται από τις μεταβλητότητες των διεργασιών $AL, B\ \kappa\alpha\iota\ S$ και τις αντίστοιχες συσχετίσεις τους. Έτσι αυτός ο τελευταίος όρος νοιάζεται σχετικά με την τυχαία εξέλιξη των υποχρεώσεων. Στην πραγματικότητα μηδενίζεται όταν τα οφέλη είναι ντετερμινιστικά ή όταν ισχύει η σχέση :$q_1\sigma_s = q_2\sigma_r$, μεταξύ διακυμάνσεων και συνδιακυμάνσεων. Και στις δύο περιπτώσεις η βέλτιστη επένδυση στο ομόλογο είναι ανάλογη με τη μη χρηματοδοτούμενη υποχρέωση, $UAL = -X$.

Η βέλτιστη επένδυση στο απόθεμα που δίνεται από την (4.21) είναι απλούστερη. Είναι το άθροισμα δύο όρων, ο ένας ανάλογος του χρέους X και ο άλλος ανάλογος με την αναλογιστική υποχρέωση AL. Το τελευταίο είναι μηδέν, δηλαδή το $\lambda_S{}^*$ είναι ανάλογο με το χρέος X,εάν είτε τα οφέλη είναι ντετερμινιστικά είτε όταν δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ αποθεμάτων και παροχών.

Αντικαθιστώντας τα (4.20), (4.21),(4.17) προκύπτει ότι το βέλτιστο χρέος ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση :

$$\begin{aligned} dX(t) = &\left(-\zeta^2 - \frac{(m_S + \zeta\sigma_r)^2}{\sigma_S{}^2} + \frac{2}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha(T-t)}\right)\zeta\sigma + r(t) - k\right)X(t)dt \\ &- \eta\sqrt{1 - q_1{}^2 - q_2{}^2}AL(t)dw(t) + \left(\zeta - \frac{2}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha(T-t)}\right)\sigma\right)X(t)dw_B(t) \\ &- \frac{m_S + \zeta\sigma_r}{\sigma_S}X(t)dw_s(t) \end{aligned} \tag{4.22}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Συμπεράσματα

Εξετάσαμε τη διαχείριση μιας διαδικασίας χρηματοδότησης των συντάξεων στο πλαίσιο ενός συνταξιοδοτικού προγράμματος DBP, λαμβάνοντας υπόψη το μοντέλο Vasicek για τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια. Η αναλυτική λύση για την ελαχιστοποίηση του τελικού κινδύνου φερεγγυότητας επιτεύχθηκε όταν η διαδικασία παροχών ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brown, εξαρτώμενη από την κατάλληλη επιλογή του τεχνικού επιτοκίου. Τα στοιχεία του βέλτιστου χαρτοφυλακίου, που περιλαμβάνουν επενδύσεις σε ομόλογα, μετοχές και μετρητά, αποτελούνται από δύο μέρη. Το ένα μέρος είναι ανάλογο της μη χρηματοδοτούμενης αναλογιστικής υποχρέωσης, ενώ το άλλο συνδέεται με την αναλογιστική υποχρέωση, ανάλογα με τις παραμέτρους που διέπουν την τυχαιότητα των παροχών και τις συσχετίσεις τους με το επιτόκιο και τη μετοχή.

Παρά την παρουσία τριών πηγών τυχαιότητας, το χρέος υφίσταται μείωση μέσω μιας στρατηγικής ριψοκίνδυνων επενδύσεων κατά τα αρχικά έτη και μιας πιο συντηρητικής επενδυτικής προσέγγισης κατά τα μεταγενέστερα έτη της προγραμματισμένης περιόδου.

Καλύψαμε θεμελιώδεις έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων, ορισμούς των στοχαστικών διαδικασιών, θεωρία μέτρου, κίνηση Brown, αριθμητική κίνηση Brown και γεωμετρική κίνηση Brown. Παρουσιάστηκαν εφαρμογές και παραδείγματα για να υπογραμμιστεί η σημασία αυτών των εννοιών και να βοηθηθούν οι αναγνώστες στην κατανόησή τους.

Σε όλη την εργασία, υποθέσαμε, κατά τρόπο παρόμοιο με τους μελετητές, ότι το τεχνικό επιτόκιο συμπίπτει με το επιτόκιο απόδοσης του ομολόγου, τροποποιημένο ώστε να εξαλειφθούν οι πηγές αβεβαιότητας

Στην ενότητα του βέλτιστου χαρτοφυλακίου, εξετάζουμε πώς ο ανάδοχος μπορεί να καθορίσει βέλτιστα την κατανομή των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου σε έναν αποταμιευτικό λογαριασμό, ένα ομόλογο και μια επικίνδυνη μετοχή. Ο χορηγός αντιμετωπίζει τρεις πηγές τυχαιότητας: μία από την εγγενή φύση των παροχών του συνταξιοδοτικού προγράμματος και οι άλλες δύο από μεταβλητές της χρηματοπιστωτικής αγοράς, συγκεκριμένα το στοχαστικό επιτόκιο και μια επικίνδυνη μετοχή.

Η εργασία που αναλύσαμε επικεντρώνεται στην ανάλυση ενός συγκεντρωτικού τύπου συνταξιοδοτικού ταμείου DBP, ενός διαδεδομένου μοντέλου στα συστήματα απασχόλησης.

Βασιζόμενη σε προηγούμενες εργασίες των Josa-Fombellida και Rincón-Zapatero, η παρούσα μελέτη αποσκοπεί στην ενίσχυση του ρεαλισμού του υποδείγματος με την εγκατάλειψη της παραδοχής ενός σταθερού επιτοκίου χωρίς κίνδυνο. Το υπόδειγμα εισάγει τρεις πηγές αβεβαιότητας: τις αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου, το στιγμιαίο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο και την εξέλιξη των παροχών με βάση τη μισθολογική συμπεριφορά και άλλα βασικά στοιχεία του συνταξιοδοτικού προγράμματος.

Συνοπτικά, η εργασία ορίζει τα στοιχεία του συνταξιοδοτικού συστήματος, εισάγει ένα στοχαστικό επιτόκιο και διερευνά τη δομή της χρηματοπιστωτικής αγοράς. Παρέχει μια ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο αποτίμηση των υποχρεώσεων και προσφέρει πληροφορίες για τις βέλτιστες επενδυτικές στρατηγικές, καταλήγοντας με μια αριθμητική ανάλυση και πιθανές επεκτάσεις της μελέτης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξένη

1. Ahmed, M. A., &Wathik, I. M. (2022). The financial deficit of pension fund during covid-19 pandemic and the strategy of diversifying and accounting for invested assets according to international public sector accounting standards. World Economics and Finance Bulletin, 6, 29-39.
2. Aljethi, R. A., &Kılıçman, A. (2022). Financial Applications on Fractional Lévy Stochastic Processes. Fractal and Fractional, 6(5), 278.
3. Baltas, I., Dopierala, L., Kolodziejczyk, K., Szczepański, M., Weber, G. W., &Yannacopoulos, A. N. (2022). Optimal management of defined contribution pension funds under the effect of inflation, mortality and uncertainty. European Journal of Operational Research, 298(3), 1162-1174.
4. Bhattacharya, R., Waymire, E. C., Bhattacharya, R., &Waymire, E. C. (2021). What Is a Stochastic Process?. Random Walk, Brownian Motion, and Martingales, 1-16.
5. Chen, A., Hieber, P., & Klein, J. K. (2019). Tonuity: A novel individual-oriented retirement plan. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 49(1), 5-30.
6. Cui, Z., Kirkby, J. L., & Nguyen, D. (2019). A general framework for time-changed Markov processes and applications. European Journal of Operational Research, 273(2), 785-800.
7. Ebbinghaus, B. (2021). Inequalities and poverty risks in old age across Europe: The double-edged income effect of pension systems. Social Policy & Administration, 55(3), 440-455.
8. Ekum, M. I., Job, O., Taylor, J., Amalare, A., Khaleel, M. A., &Ogunsanya, A. S. (2021). Normal-Power Function Distribution with Logistic Quantile Function: Properties and Application. American Journal of Applied Mathematics and Statistics, 9(3), 90-101.
9. Gentile, R., & Galasso, C. (2020). Gaussian process regression for seismic fragility assessment of building portfolios. Structural Safety, 87, 101980.
10. Hassler, U. (2016). Stochastic processes and calculus. Springer Texts in Business and Economics ReDIF-Book.
11. Ibrahim, S. N. I., Misiran, M., &Laham, M. F. (2021). Geometric fractional Brownian motion model for commodity market simulation. Alexandria Engineering Journal, 60(1), 955-962.
12. James, E., &Vittas, D. (2016). The decumulation (payout) phase of defined contribution pillars: policy issues in the provision of annuities and other benefits. Available at SSRN 632534.
13. Jędrzychowska, A., Kwiecień, I., & Poprawska, E. (2020). The motherhood pension gap in a defined contribution pension scheme—the case of Poland. Sustainability, 12(11), 4425.

14. Jiang, R., & Guan, Y. (2018). Risk-Averse Two-Stage Stochastic Program with Distributional Ambiguity. Operations Research, 66(5). https://doi.org/10.1287/opre.2018.1729
15. Josa-Fombellida, R., &Rincón-Zapatero, J. P. (2010). Optimal asset allocation for aggregated defined benefit pension funds with stochastic interest rates(2009), European Journal of Operational Research,201
16. Josa-Fombellida, R., Rincón-Zapatero, J.P., 2008b. Mean–variance portfolio and contribution selection in stochastic pension funding. European Journal of Operational Research 187, 120–137
17. Kijima, M. (2016). Stochastic processes with applications to finance. CRC Press.
18. Klumpes, P., Acharyya, M., Kakar, G., &Sturgess, E. (2019). Climate risk reporting practices by UK insurance companies and pension schemes. British Actuarial Journal, 24, e30.
19. Konstantinidis, P. D. (1998). A model to optimize project resource allocation by construction of a balanced histogram. *European journal of operational research*, *104*(3), 559-571.
20. Martellini, L., Malhau, V., & Mulvey, J. (2019). Flexicure Retirement Solutions: A Part of the Answer to the Pension Crisis?. The Journal of Portfolio Management
21. Milz, S., & Modi, K. (2021). Quantum stochasticprocesses and quantum non-Markovianphenomena. PRX Quantum, 2(3), 030201.
22. Mudzimbabwe, W. (2019). A simple numerical solution for an optimal investment strategy for a DC pension plan in a jump diffusion model. Journal of Computational and Applied Mathematics, 360, 55-61.
23. Pitman, J., & Yor, M. (2018). A guide to Brownian motion and related stochastic processes. arXiv preprint arXiv:1802.09679.
24. Platanakis, E., & Urquhart, A. (2019). Portfolio management with cryptocurrencies: The role of estimation risk. EconomicsLetters, 177, 76-80.
25. Schilling, R. L. (2021). Brownian motion. In Brownian Motion. de Gruyter.
26. Schlafmann, K., Setty, O., &Vestman, R. (2020). Optimal defined contribution pension plans: One-size does not fit all. Pinhas Sapir Center for Development, Tel Aviv University.
27. Zhang, Z., Si, X., Hu, C., & Lei, Y. (2018). Degradation data analysis and remaining useful life estimation: A review on Wiener-process-based methods. European Journal of Operational Research, 271(3), 775-796.

Ελληνική

28. Σεβρόγλου Β. “Στοχαστικά και Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά”, Σημειώσεις, (2019)