



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Πτυχιακή Εργασία

Τίτλος Πτυχιακής Εργασίας	Ανάπτυξη Μαθησιακού Αντικειμένου για την μελέτη του ορισμένου ολοκληρώματος Developing a Learning Object for studying definite integrals
Όνοματεπώνυμο Φοιτητή	Μιχαήλ-Άγγελος Παπαγιάννης
Πατρώνυμο	Γεώργιος
Αριθμός Μητρώου	Π17093
Επιβλέπων	Παναγιώτης Τσάκωνας

Ημερομηνία Παράδοσης **Ιούλιος 2024**

Copyright

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν αποκλειστικά τον συγγραφέα και δεν αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Πανεπιστημίου Πειραιώς.

Ως συγγραφέας της παρούσας εργασίας δηλώνω πως η παρούσα εργασία δεν αποτελεί προϊόν λογοκλοπής και δεν περιέχει υλικό από μη αναφερόμενες πηγές.

Παρουσίαση Εργασίας

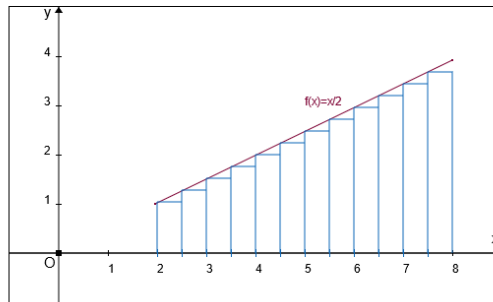
Σκοπός της εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός μαθησιακού αντικειμένου που οπτικοποιεί το ορισμένο ολοκλήρωμα. Για την ανάπτυξη αυτού του μαθησιακού αντικειμένου θα δημιουργήσουμε κάποια διαδραστικά εργαλεία τα οποία θα παρουσιάζουν μία έννοια που παρουσιάζεται στο βιβλίο των μαθηματικών κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου.

Το μαθησιακό αντικείμενο θα αναπτυχθεί σε μορφή ιστοσελίδας. Για την υλοποίηση του χρησιμοποιούνται τεχνολογίες που εκτελούνται στον browser του χρήστη χωρίς την χρήση διακομιστή (server). Για αυτό τον λόγο χρησιμοποιήσαμε τις τεχνολογίες HTML και Javascript για την ανάπτυξη της εφαρμογής.

Το σύνολο του κώδικα παρουσιάζεται στο github στο ακόλουθο repository.
<https://github.com/MichaelPapagiannis/olokliromata>

Εφαρμογή 1

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι όσο μικρότερη τιμή παίρνει το Δx , τόσο καλύτερη η προσέγγιση της τιμής του ολοκληρώματος.
Μετακίνησε την μπάρα κύλισης για δείς την διαφορά στον υπολογισμό της τιμής του ολοκληρώματος.



$$v=12, \quad \Delta x = \frac{\beta - \alpha}{v} = \frac{8-2}{12} = 0.5$$

$v \in [1, 30]$

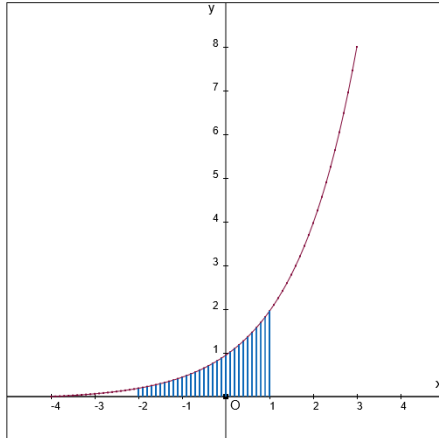
Γνωρίζουμε ότι $\int_2^8 \frac{x}{2} dx = 15$.

Η προσέγγιση που δίνει το άθροισμα που υπολογίζεται παραπάνω είναι η τιμή: **9.364**
ή αλλιώς το **58.21%** της τιμής του ορισμένου ολοκληρώματος.

Εφαρμογή 1: Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος

Εφαρμογή 2

Παρακάτω παρουσιάζεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x$, επέλεξε το α και το β για να δείς την τιμή του ολοκληρώματος.
 Ισχύει ότι η παράγουσα $F(x)$ της $f(x)$ είναι η συνάρτηση $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$.
 $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$.



Χρησιμοποίησε τις μπάρες κύλισης για να αλλάξεις τις τιμές για το α και το β .

Σε περίπτωση που το α είναι μεγαλύτερο από το β , ισχύει ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx, \beta < \alpha$$

Τιμή για το α : -2
 $\alpha \in [-4,3]$

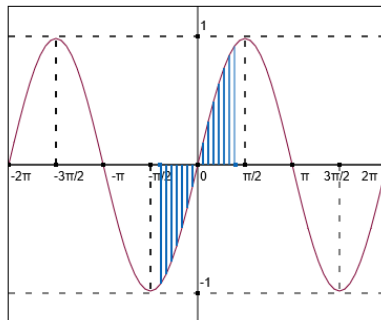
Τιμή για το β : 1
 $\beta \in [-4,3]$

$$\int_{-2}^1 2^x dx = G(1) - G(-2) = 2.89 - 0.36 = 2.53$$

Εφαρμογή 2: Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Εφαρμογή 3 (περιττή συνάρτηση)

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$.
 Ισχύει ότι $f(-x) = \eta\mu(-x) = -\eta\mu x = -f(x)$, άρα η $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιττή.
 Ισχύει ότι η παράγουσα $F(x)$ της $f(x)$ είναι η συνάρτηση $F(x) = -\sigma\upsilon\nu x$.
 $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$.



Μετακίνησε την μπάρα κύλισης για να αλλάξεις την τιμή του α .

Τιμή για το α : 0.4π
 $\alpha \in [-2\pi, 2\pi]$

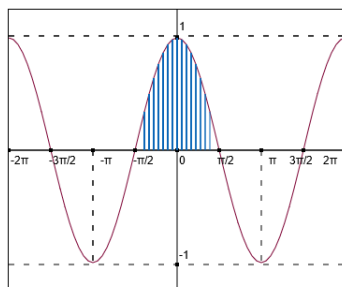
$$\int_{-0.4\pi}^{0.4\pi} \eta\mu x dx =$$

$$G(-0.4\pi) - G(0.4\pi) = -\sigma\upsilon\nu(-0.4\pi) - (-\sigma\upsilon\nu(0.4\pi)) = -0.31 - (-0.31) = 0$$

Εφαρμογή 3: Ολοκλήρωμα Περιττής Συνάρτησης

Εφαρμογή 4 (άρτια συνάρτηση)

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$.
 Ισχύει ότι $f(-x) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x = f(x)$, άρα η $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι άρτια.
 Ισχύει ότι η παράγουσα $F(x)$ της $f(x)$ είναι η συνάρτηση $F(x) = -\eta\mu x$.
 $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$.



Μετακίνησε την μπάρα κύλισης για να αλλάξεις την τιμή του α .

Τιμή για το α : 0.4π
 $\alpha \in [-2\pi, 2\pi]$

$$\int_{-0.4\pi}^{0.4\pi} \sigma\upsilon\nu x dx =$$

$$G(-0.4\pi) - G(0.4\pi) = -\eta\mu(-0.4\pi) - (-\eta\mu(0.4\pi)) = -0.95 - 0.95 = -1.9$$

$$2 \int_0^{0.4\pi} \sigma\upsilon\nu x dx =$$

$$2(G(0.4\pi) - G(0)) = 2(-\eta\mu(0.4\pi) - \eta\mu(0)) = 2(-0.95 - 0) = -1.9$$

Εφαρμογή 4: Ολοκλήρωμα άρτιας συνάρτησης

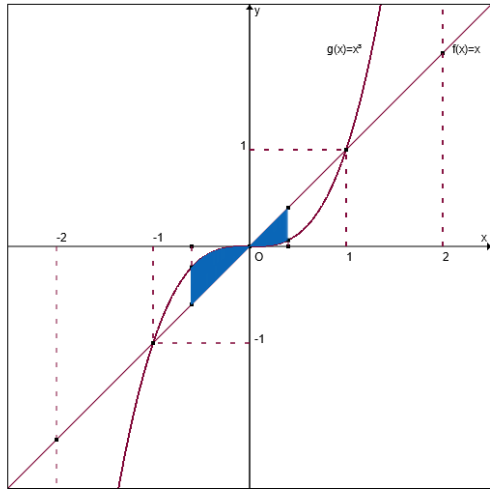
Εφαρμογή 5

Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ υπολογίζεται ως εξής

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x)-g(x))dx, \text{ για } f(x)-g(x) > 0 \text{ και } E(\Omega) = - \int_{\alpha}^{\beta} (f(x)-g(x))dx, \text{ για } f(x)-g(x) < 0$$

Επομένως στην γενική περίπτωση έχουμε ότι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)-g(x)|dx.$

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις $f(x)=x$ και $g(x)=x^3$. Έστω $h(x)=f(x)-g(x)$. Η παράγουσα της συνάρτησης αυτής είναι η $H(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + c, c \in \mathbb{R}$



Μετακίνησε τις μπάρες κύλισης για να μεταβάλλεις τις τιμές για το α και το β .
Σε περίπτωση που το α ή το β βρίσκεται έξω από τα σημεία τομής των f, g το εμβαδό θα υπολογίζεται με τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ αντίστοιχα.

Τιμή για το α : -0.6
 $\alpha \in [-2, 2]$

Τιμή για το β : 0.4
 $\beta \in [-2, 2]$

$$E(\Omega) = \int_{-0.6}^{0.4} |x-x^3|dx = 0.22 \text{ τμ}$$

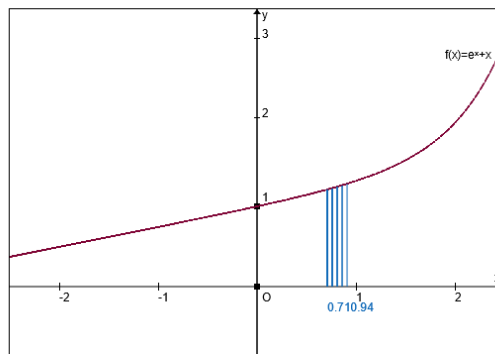
Εφαρμογή 5: Εμβαδό επιπέδου χωρίου

Εφαρμογή Αξιολόγησης

Παρακάτω παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^x+x$.

Η εφαρμογή δίνει τις τιμές α, β και ζητά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

[Προβολή Βοήθειας](#)



$$\int_{0.71}^{0.94} f(x)dx = \text{[input box]}$$

Συμπλήρωσε την τιμή που υπολόγισες με ακρίβεια έως δύο δεκαδικά ψηφία.

Εφαρμογή Αξιολόγησης: Υπολογισμός Ολοκληρώματος