ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

<<ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΣΤΟ ΚΛΑΣΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ>>

ΣΙΓΑΛΑΚΟΥ Κ. ΕΥΔΟΚΙΑ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων

Πειραιάς

Νοέμβριος, 2023

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτής Καθηγητής Πολίτης Κωνσταντίνος (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Ευαγγελάρας Χαράλαμπος
- Αναπληρωτής Καθηγητής Τζαβελάς Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

<< CONVEX PROPERTIES FOR THE PROBABILITY OF RUIN IN THE CLASSICAL MODEL OF RISK THEORY >>

SIGALAKOU K. EVDOKIA

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

November, 2023

Στουςγονείςμου,

Κυριάκο και Μαρία,

Και στο σύζυγό μου,

Στέφανο

Ευχαριστίες

Ιδιαίτερες ευχαριστίες για τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Κωνσταντίνο Πολίτη ο οποίος με στήριξε και με καθοδήγησε σε όλη την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας ενώ παράλληλα με βοήθησε να ασχοληθώ σε ερευνητικό επίπεδο με ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον κομμάτι της θεωρίας κινδύνων. Τον ευχαριστώ για την στήριξη και την υπομονή του διότι χωρίς την πολύτιμη συμβολή του δεν θα ήταν εφικτή η ολοκλήρωση της εργασίας. Επίσης ευχαριστώ τον υποψήφιο διδάκτορα κ. Λάζαρο Κανελόπουλο για την πολύτιμη βοήθειά του.

Καθώς επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τους καθηγητές της τριμελούς επιτροπής, κύριο Ευαγγελάρα και κύριο Τζαβελά για την σημαντική βοήθεια και την επίβλεψη τους. Θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τον συζυγό μου Στέφανο που είναι πάντα δίπλα μου και με υποστηρίζουν σε όλες μου τις επιλογές.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η αναλογιστική επιστήμη αποτελεί έναν κλάδο των εφαρμοσμένων και χρηματοοικονομικών μαθηματικών ο οποίος εφαρμόζει στατιστικές και μαθηματικές μεθόδους για να εκτιμήσει τον κίνδυνο της αβεβαιότητας σε μελλοντικά γεγονότα σε ασφαλιστικές, χρηματοοικονομικές επενδύσεις και σε άλλους κλάδους με σκοπό να τον ελαχιστοποιήσει. Η θεωρία χρεοκοπίας, που αποτελεί κλάδο της θεωρίας κινδύνων, μας περιγράφει τις ποσότητες για την πιθανότητα χρεοκοπίας και μελετάει την ανέλιξη του πλεονάσματος, δηλαδή τις μεταβολές στα έσοδα και τα έξοδα με την πάροδο του χρόνου για ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο. Παράλληλα ιδιαίτερα σημαντική είναι και η μοντελοποίηση των μεγεθών των αποζημιώσεων στο συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνων και η επιλογή των κατάλληλων κατανομών για την μοντελοποίηση τόσο των ατομικών μεγεθών αλλά και την περιγραφή των συνολικών ζημιών.

Σκοπός μας είναι η διάκριση και η μελέτη σχέσεων μεταξύ των δύο αυτών συναρτήσεων, αλλά και αν υπό την μείξη διατηρούνται κάποια χαρακτηριστικά τους, όπως η μονοτονία, η κυρτότητα και η συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας.

ABSTRACT

Actuarial science is the branch of financial mathematics that applies statistical and mathematical methods to estimate the risk of uncertainty in future events in insurance, financial investments and other industries with the aim of minimizing it. Ruin theory, which is a branch of risk theory, describes the quantities such as the probability of ruin and studies the evolution of surplus, i.e. the changes in income and expenses over time for an insurance portfolio. At the same time, the modeling of compensation amounts in the collective model of risk theory and the choice of appropriate distributions for modeling both the individual amounts and the description of total losses are also particularly important.

Our purpose is to distinguish and study relationships between these two functions, but also if some of their characteristics are preserved under the mixture, such as monotonicity, convexity and the behavior of the failure rate.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Ο αναλογισμός έγινε επίσημη μαθηματική επιστήμη στα τέλη του 17ου αιώνα λόγω της αυξημένης ζήτησης για μακροπρόθεσμη ασφαλιστική κάλυψη, όπως την Ασφάλεια Ζωής. Αυτή η μακροπρόθεσμη ασφαλιστική κάλυψη απαιτεί τη διάθεση χρημάτων, όπως επιδόματα θανάτου. Το γεγονός αυτό απαιτεί την εκτίμηση μελλοντικών ενδεχόμενων γεγονότων όπως τα ποσοστά θνησιμότητας κάθε ηλικίας, καθώς και μαθηματικές τεχνικές για την προεξόφλησης κεφαλαίων.

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μια εισαγωγή στη θεωρία πιθανοτήτων, στις στοχαστικές ανελίξεις στο συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνων και στην κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων. Περιγράφεται το κλασσικό πρότυπο και οι βασικές έννοιες που πρέπει να γνωρίζουμε για τη χρεοκοπία. Η θεωρία χρεοκοπίας μελετά σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο τα λειτουργικά έσοδα και έξοδα της εταιρείας σε σχέση με το χρόνο. Η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος και ο χρόνος είναι το βασικά για την μελέτη της χρεοκοπίας.

Στο Κεφάλαιο 3 ορίζουμε πότε είναι κυρτή μία συνάρτηση, τις ιδιότητες που χρειάζεται για να είναι μια συνάρτηση κυρτή και κάποιες βασικές γνωστές κυρτές συναρτήσεις.

Στο Κεφάλαιο 4 αναλύεται το θέμα της εργασίας όπου είναι οι ιδιότητες κυρτότητας για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Πιο συγκεκριμένα αναφέρουμε τις έννοιες της βαθμίδα αποτυχίας και του μέσου υπολοιπόμενου χρόνου ζωής και παρουσιάζουμε τα κύρια αποτελέσματα από το άρθρο "A note on the convexity of ruin probabilities" (Landriault et al. 2017).

Στο Κεφάλαιο 5 έχουν διεξαχθεί κάποια παραδείγματα με διάφορες κατανομές όπως η Εκθετική, η Γάμμα, μείξη Εκθετικών και μείξη Εκθετικής – Γαμμα και παρατηρούμε αν είναι κυρτή ή κοίλη η συνάρτηση που μας δίνει την πιθανότητα χρεοκοπίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Εισαγωγή στην Θεωρία Χρεοκοπίας και στο Κλασικό Πρότυπο

2.1 Στοχαστικές Ανελίξεις

Οι Στοχαστικές Ανελίξεις αποτελούν το αντικείμενο έρευνας ξεχωριστού κλάδου της Θεωρίας Πιθανοτήτων με στόχο τη συστηματική μελέτη των τυχαίων φαινομένων του φυσικού κόσμου και έχει πλήθος εφαρμογών σε πλήθος επιστημονικών πεδίων όπως π.χ. στην φυσική, στην βιολογία, την οικονομία. Οι στοχαστικές ανελίξεις είναι αναγκαίο να χρησιμοποιηθούν όταν οι μεταβλητές που μελετάμε μεταβάλλονται στο χρόνο.

Ορισμός 2.1.1. Μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_t\}_{t\in T}$, όπου T είναι ένα σύνολο, ονομάζεται **στοχαστική ανέλιξη**. Η παράμετρος tκαλείται δεικτοσύνολο και αναπαριστά τον χρόνο.

Αν το σύνολο T είναι αριθμήσιμο, π.χ. $T = \{0,1,2,\dots\}$, τότε η στοχαστική ανέλιξη είναι διακριτού χρόνου ενώ, αν Tείναι κάποιο διάστημα, π.χ. $[0, \infty]$, τότε λέμε ότι είναι συνεχούς χρόνου.

Απαριθμήτρια Στοχαστική Ανέλιξη

Στοχαστικές Ανελίξεις $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ καλούνται απαριθμήτριες στοχαστικές ανελίξεις, αν και μόνο αν, ικανοποιεί τα εξής:

- $N(t) > 0$ και $N(0) = 0$
- $N(t)$ διακριτή στοχαστική διαδικασία με διακριτές τιμές
- Αν $j \leq t$ τότε $N(j) \leq N(t)$ και η τυχαία μεταβλητή$N(t) - N(j)$, δηλώνει τον αριθμό των γεγονότων στο διάστημα $[j, t]$.

Μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη θα λέμε ότι έχει:

- **Ανεξάρτητες προσαυξήσεις** αν οι αριθμοί των συμβάντων σε ξένα χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές (π.χ. οι $N(t2) - N(t1)$, $N(s2) - N(s1)$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. αν $(t1, t2] \cap (s1, s2] = \emptyset$)
- **Ισόνομες (ή στάσιμες) προσαυξήσεις** αν ο αριθμός των συμβάντων σε ένα χρονικό διάστημα (t, t + x] ακολουθεί μια κατανομή η οποία εξαρτάται μόνο από το μήκος του διαστήματος, x. (π.χ. οι $N(t + x) - N(t), N(s + x) - N(s)$έχουν την ίδια κατανομή).

Η απλούστερη απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη είναι η ανέλιξη Poisson.

Ορισμός 2.1.2Μία απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ αποτελεί μία στοχαστική ανέλιξη Poisson αν έχει τις παρακάτω ιδιότητες :

1) $N(0) = 0$

2) Σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα h, μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός με πιθανότητα ανάλογη του πλάτους του διαστήματος. Δηλαδή,

$$P(N(t+h) = n + j|N(t) = n) = \begin{cases} \lambda h + o(h), j = 1 \\ 1 - \lambda h + o(h), \quad j = 0 \\ 0, \quad j \geq 2 \end{cases} \quad (2.1)$$

όπου το o(h) υποδηλώνει μια ποσότητα που συγκλίνει στο 0 πιο γρήγορα από το h όταν $h \to 0$ και λ είναι ο ρυθμός (rate) της ανέλιξης Poisson.

3) Ο αριθμός των συμβάντων σε ένα φραγμένο χρονικό διάστημα μετά τη χρονική στιγμή t είναι ανεξάρτητος του αριθμού των συμβάντων μέχρι εκείνη την χρονική στιγμή.

ΠαρατήρησηΗ ανέλιξη Poisson είναι απαριθμήτρια ανέλιξη $\{N(t)\}t \geq 0$ πάντα ικανοποιεί τη σχέση (2.1) και έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Ανανεωτικές Ανελίξεις

Ορισμός 2.1.3 Μια απαριθμήτρια ανέλιξη $\{N(t)\}t \geq 0$ στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι $T1, T2, \dots, Tn$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ισόνομες, ονομάζεται **ανανεωτική ανέλιξη**.

Η κατανομή των ενδιαμέσων χρόνων σε μία ανανεωτική ανέλιξη μπορεί να είναι Γάμμα, Γεωμετρική, Lognormal, Weibull, Pareto.

Μαθηματικά η N(t) ορίζεται από τη σχέση $N(t) = \max\{n: Yn \leq t\}$

Μια βασική σχέση για κάθε ανανεωτική ανέλιξη είναι η εξής. Για κάθε ακέραιο n και

t ≥0 ισχύει ,

$$N(t) \geq n \text{ όταν και μόνο όταν } Yn \leq t.$$

Ο αναμενόμενος αριθμός γεγονότων στο διάστημα [0,t] ορίζεται από την ανανεωτική συνάρτηση $m(t) = E[N(t)]$.

2.2 Συλλογικό Πρότυπο

Μελετώντας ένα χαρτοφυλάκιο μιας ασφαλιστικής εταιρείας το οποίο θα τεθεί άμεσα σε ισχύ εξετάζουμε τη λειτουργία του για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (π.χ. ένα έτος). Το βασικό ενδιαφέρον της ασφαλιστικής εταιρείας είναι το συνολικό ποσό των απαιτήσεων που θα καταβάλει οι οποίες προκύπτουν από τις συνολικές ζημίες των πελατών της και όχι στις εκάστοτε ζημιές που θα προκύψουν από τις απαιτήσεις του κάθε ασφαλισμένου μεμονωμένα. Για το συνολικό ποσό των αποζημιώσεων S, που καλείται να πληρώσει η εταιρεία, εξαρτάται από τα εξής:

- το πλήθος των απαιτήσεων που θα έχει η εταιρεία
- το μέγεθος των απαιτήσεων.

Έχει νόημα λοιπόν, να ορίσουμε τις τυχαίες μεταβλητές και τις υποθέσεις που θα χρησιμοποιήσουμε στο συλλογικό πρότυπο για το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα το οποίο εξετάζουμε. Πιο συγκεκριμένα έχουν ως εξής:

- Την διακριτή τυχαία μεταβλητή N η οποία παίρνει τιμές στο σύνολο {0,1,2,…} και αντιπροσωπεύει το συνολικό πλήθος των απαιτήσεων που φτάσουν στην ασφαλιστική εταιρεία το χρονικό διάστημα που εξετάζουμε.

- Τις τυχαίες μεταβλητές X_i ($X_1, X_2, \ldots$) οποίες είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ακολουθούν την ίδια κατανομή F η οποία μπορεί να είναι είτε συνεχής είτε διακριτή.

Η σύνθετη τυχαία μεταβλητή S, το μέγεθος της οποίας υποδηλώνει τις **συνολικές απαιτήσεις** της ασφαλιστικής εταιρείας ορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$S = \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i\,, & N = 1,2,\ldots \\ 0, & N = 0 \end{cases} \qquad (2.2)$$

2.2.1. Κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων S

Για το πλήθος των ατομικών απαιτήσεων N, έχουμε τη συνάρτηση πιθανότητας

$$p_n = \mathrm{P}(\mathrm{N} = \mathrm{n}), \mathrm{n} = 0,1,2,\ldots$$

ενώ, οι τυχαίες μεταβλητές που δηλώνουν το ύψος των ανεξάρτητων και ισόνομων ατομικών απαιτήσεων Xi, έχουν την κοινή συνάρτηση κατανομής F.

Οι συνολικές αποζημιώσεις S του χαρτοφυλακίου, έχουμε την ακόλουθη συνάρτηση κατανομής :

$$\mathrm{G(x)} = \mathrm{P(S \leq x)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\mathrm{n}}\, \mathrm{F}^{*\mathrm{n}}(\mathrm{x}), \mathrm{x} \geq 0.$$

Πρόταση 2.2.1.1. Για τη συνάρτηση κατανομής G(x) των συνολικών αποζημιώσεων ισχύει η σχέση

$$\mathrm{G(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)\, \mathrm{F}^{*\mathrm{n}}(\mathrm{x}), \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\mathrm{n}}\, \mathrm{F}^{*\mathrm{n}}(\mathrm{x}), \mathrm{x} \geq 0$$

Όπου, για $\mathrm{n} = 0$, η συνέλιξη $F^{*0}(\mathrm{x})$ ορίζεται ως εξής:

$$F^{*0}(\mathrm{x}) = 0 \text{ για } \mathrm{x} = 0, \text{ ενώ έχουμε } F^{*0}(x) = 1 \text{ για } \mathrm{x} \geq 0.$$

Απόδειξη

Το ενδεχόμενο $\{\mathrm{S} \leq \mathrm{x}\}$ εμφανίζεται όταν το πλήθος των αποζημιώσεων παίρνει την τιμή $\mathrm{N} = \mathrm{n}$ (για κάποιο $\mathrm{n} = 0,1,2,\ldots$) και το μέγεθος αυτών των αποζημιώσεων είναι το πολύ x. Επειδή τα ενδεχόμενα $\{\mathrm{N} = \mathrm{n}\}$ είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο, παίρνουμε ότι

$$\{\mathrm{S} \leq \mathrm{x}\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{S \leq x \;\kappa\alpha\iota\; N = n\}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι:

$$G(x) = P(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S \leq x \; και \; N = n)$$

Στην συνέχεια, από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε ότι:

$$P(S \leq x \text{ και } N = n) = P(S \leq x | N = n) P(N = n)$$

Για τη δεσμευμένη πιθανότητα στο δεξιό μέλος της τελευταίας σχέσης παρατηρούμε ότι για $n = 1,2, \dots,$

$$P(S \leq x | N = n) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x)\right) = F^{*n}(x)$$

Η σχέση αυτή αληθεύει επίσης και για $n = 0$ εφόσον στην περίπτωση αυτή ισχύει προφανώς $P(S \leq x | N = 0) = 1$ για κάθε $x \geq 0$, και το αποτέλεσμα της πρότασης προκύπτει από τις τρείς τελευταίες σχέσεις.

<u>Παράδειγμα 2.2.1.1</u>

Στο συλλογικό πρότυπο, θεωρούμε την περίπτωση που οι ατομικοί κίνδυνοι ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 4, ενώ η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής N είναι η εξής:

$$P(N = 0) = \frac{1}{6}, P(N = 1) = \frac{3}{6}, P(N = 2) = \frac{2}{6}$$

Ζητείται η εύρεση της συνάρτησης κατανομής του συνολικού κινδύνου S καθώς και των ακόλουθων πιθανοτήτων:

$$P(S \leq 4), P(1 < S \leq 3).$$

<u>Λύση</u>

Με βάση την Πρόταση 2.1.1.1 ισχύει ότι,

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) F^{*n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x), \quad x \geq 0$$

Βλέπουμε ότι το πλήθος των ζημιών δεν μπορεί να πάρει τιμή μεγαλύτερη ή ίση του 3. Επομένως θα είναι $p_n = 0$ για $n \geq 3$ και η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{2} p_n F^{*n}(x) = p_0 F^{*0}(x) + p_1 F^{*1}(x) + p_2 F^{*2}(x), \quad x \geq 0$$

όπου $F^{*0}(x) = 1$, $x \geq 0$ και οι πιθανότητες p_0, p_1 και p_2 είναι γνωστές.

Η συνάρτηση F(x) είναι συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο $\frac{1}{4}$ δηλαδή,

$$F(x) = 1 - e^{-x/4}, \qquad x \geq 0$$

Για την εύρεση της δεύτερης συνέλιξης $F^{*2}(x)$θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το άθροισμα ανεξάρτητων και ισόνομων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών ακολουθεί την κατανομή Erlang με παραμέτρους α και λ, όπου α είναι το πλήθος του αθροίσματος και λ είναι η παράμετρος της εκθετικής κατανομής. Η κατανομή Erlang είναι ειδική περίπτωση της κατανομής Gamma. Συνεπώς, η πυκνότητας που αντιστοιχεί στην κατανομή F^{*2} είναι:

$$f^{*2} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2 x e^{-x/4}}{\Gamma(2)} = \frac{x e^{-x/4}}{16}, \ x \geq 0$$

Αντίστοιχα η συνάρτηση κατανομής θα είναι η εξής:

$$F^{*2} = \int_0^x \frac{y e^{-\frac{y}{4}}}{16} dy$$

$$= \int_0^x \frac{1}{4} y \left(-e^{-\frac{y}{4}}\right)' dy$$

$$= [-\frac{1}{4} y e^{-y/4}]_0^x + \int_0^x \frac{1}{4} e^{-y/4} dy$$

$$= -\frac{1}{4} x e^{-x/4} + (1 - e^{-x/4})$$

$$= 1 - \frac{x+4}{4} e^{-x/4} \text{ για } x \geq 0$$

Για τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής S θα έχουμε:

$$G(x) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6}(1 - e^{-x/4}) + \frac{2}{6}(1 - \frac{x+4}{4} e^{-x/4}) = \frac{6}{6} - \left(\frac{x+10}{12}\right) e^{-x/4}$$

Προκύπτει ότι, η G είναι μια μεικτή κατανομή με μάζα πιθανότητας στο μηδέν ίση με:

$G(0) = P(S=0) = \frac{1}{6}$

και είναι συνεχής στο διάστημα $(0,\infty)$.

Για τη συνάρτηση κατανομής του συνολικού κινδύνου S, έχουμε τον ακόλουθο τύπο:

$$G(x) = P(S \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{6}, & x = 0 \\ \frac{6}{6} - \left(\frac{x+10}{12}\right) e^{-x/4}, & x > 0 \end{cases}$$

Οι ζητούμενες πιθανότητες προκύπτουν με αντικατάσταση και είναι ίσες με:

- $P(S \leq 4) = G(4) = \frac{6}{6} - \left(\frac{4+10}{12}\right) e^{-4/4} \cong 0{,}5708$

- $\mathrm{P}(1 < S \leq 3) = \mathrm{G}(3) - \mathrm{G}(1) = \left(1 - \left(\frac{3+10}{12}\right)e^{-3/4}\right) - \left(1 - \left(\frac{1+10}{12}\right)e^{-1/4}\right) \cong 0{,}20217$

<u>2.2.2 Η πιθανογεννήτρια της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων</u>

Για τον υπολογισμό της κατανομής των συνολικών απαιτήσεων S στον συλλογικό πρότυπο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η πιθανογεννήτρια συνάρτηση εφόσον, η κατανομή των ατομικών απαιτήσεων είναι διακριτή. Σε αυτή την περίπτωση και οι συνολικές απαιτήσεις θα παίρνουν ακέραιες και μη αρνητικές τιμές.

<u>Πρόταση 2.2.2.1.</u>Έστω S η τυχαία μεταβλητή που δηλώνει το μέγεθος των συνολικών απαιτήσεων στο συλλογικό πρότυπο. Θεωρούμε ότι οι ατομικές απαιτήσεις X_1, X_2, X_3,… , να ειναι δεικτης είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την ίδια κατανομή, ορισμένη στο σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων. Αν οι $P_X(t)$,$P_N(t)$και $P_S(t)$ δηλώνουν τις πιθανογεννήτριες συναρτήσεις των μεταβλητώνX_i, N και S στο πρότυπο αυτό αντίστοιχα, τότε οι γεννήτριες αυτές συναρτήσεις συνδέονται με τη σχέση:

$$P_S(\mathrm{t}) = P_N(P_X(t))$$

Απόδειξη

Γνωρίζοντας ότι ισχύουν τα εξής:

$$M_S(t) = M_N(lnM_X(t)$$

$$P_X(t) = M_X(lnt)$$

ο τύπος της πιθανογεννήτριας θα μας δώσει διαδοχικά:

$$P_S(t) = M_s(lnt) = M_s(lnM_X(lnt) = M_N(ln(P_X(t)) = P_N(e^{lnP_x(t)}) = P_N(P_X(t))$$

<u>2.2.3 Η σύνθετη κατανομή Poisson</u>

Στο συλλογικό πρότυπο, η συνηθέστερη υπόθεση είναι να χρησιμοποιείται η κατανομή Poisson για την τυχαία μεταβλητή N η οποία εκφράζει το πλήθος των ατομικών απαιτήσεων X_i . Θεωρούμε ότι N~Poi(λ) με παράμετρο $\lambda \geq 0$, με μέση τιμή $\mathrm{E(N)} = \lambda$ και διακύμανση $\mathrm{Var(N)} = \lambda$. Σε αυτή την περίπτωση η μεταβλητή S θα ακολουθεί τη σύνθετη κατανομή Poisson. Για την ροπή k-τάξης για τις ατομικές απαιτήσεις με κατανομή F, έχουμε ότι $\mu_{\mathrm{k}} = \mathrm{E}(X_i^k)$, έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε την πρώτη και δεύτερη ροπή για να βρούμε τη μέση τιμή και τη διακύμανση των συνολικών απαιτήσεων. Συγκεκριμένα για την μέση τιμή της S παίρνουμε ότι

$$\mathrm{E(S)} = \mathrm{E(N)E}(X_i) = \lambda\mu_1,$$

ενώ για την διακύμανση προκύπτει αντίστοιχα ότι

$$\mathrm{Var(S)} = \mathrm{E(N)}(\mu_2 - \mu_1^2) + \mu_1^2\,\mathrm{Var(N)} = \lambda\mu_2,$$

εφόσον ισχύει $\mathrm{E(N)} = \mathrm{Var(N)} = \lambda$.

Η δεύτερη ροπή της S γύρω από το μηδέν είναι

$$\mathrm{E}(S^2) = [E(S)]^2 + \mathrm{Var(S)} = (\lambda\mu_1)^2 + \lambda\mu_2$$

Η ροπογεννήτρια της σύνθετης Poisson έχει τύπο

$$M_S(t) = exp[\lambda(M_x(\tau) - 1].$$

2.3 Κλασικό πρότυπο στη θεωρία χρεοκοπίας

Το 1903 ο Σουηδός αναλογιστής Filip Lundberg έθεσε τα θεμέλια για την ανάπτυξη της μαθηματικής θεωρίας κινδύνου με τη δημοσίευση της διδακτορικής διατριβής του με τίτλο "Approximations of the probability functions/Reinsurance of Collective Risks". Το 1930, ο Harald Cramér, μαθηματικός και αναλογιστής, δημοσίευσε μια σειρά εργασιών βασιζόμενος στη διδακτορική διατριβή του Lundberg στις οποίες ενσωμάτωσε τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών. Έτσι έχουμε το πρώτο μοντέλο που περιγράφει την εξέλιξη του πλεονάσματος στο χρόνο και ονομάστηκε κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ή μοντέλο των Cramér- Lundberg. Βασικό χαρακτηριστικό του μοντέλου είναι η παραδοχή ότι το πλήθος των ζημιογόνων ενδεχομένων ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου περιγράφεται από τη στοχαστική διαδικασία Poisson. Το κλασικό πρότυπο εξετάζεται περισσότερο και αναφέρεται σε συνεχή χρόνο. Βασιζόμενοι στο κλασικό πρότυπο θα δούμε διάφορες ποσότητες οι οποίες είναι χρήσιμες για την εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας. Επιπλέον αναφέρεται ότι το πρότυπο θα μπορούσε να μελετηθεί και σε άλλες μορφές ανάλογα με το αν ο χρόνος είναι πεπερασμένος ή άπειρος, συνεχής ή διακριτός.

2.3.1. Ανέλιξη του πλεονάσματος

Ορισμός 2.3.1.1. Η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος $\{\mathrm{U(t)}: \mathrm{t} \geq 0\}$ ορίζεται για κάθε $\mathrm{t} \geq 0$ από την σχέση

$$\mathrm{U(t)} = \mathrm{u} + \mathrm{P(t)} - \mathrm{S(t)} = \mathrm{u} + \mathrm{ct} - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \text{ ,t} \geq 0$$

όπου u είναι το αποθεματικό της εταιρείας για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο, P(t) είναι το συνολικό ασφάλιστρο στο διάστημα [0,t], το και S(t) είναι η σύνθετη ανέλιξη για τις συνολικές αποζημιώσεις στο ίδιο διάστημα. Το U(t) ονομάζεται αποθεματικό ή πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t, ενώ το $\mathrm{U(0)} = \mathrm{u}$ λέγεται **αρχικό αποθεματικό**.

Οι ποσότητες U(t) και S(t) είναι τυχαίες μεταβλητές για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t. Επομένως έχει νόημα να εξετάσουμε γι' αυτές την μέση τιμή και την διακύμανσή τους.

Στη θεωρία χρεοκοπίας εξετάζουμε τις συνολικές αποζημιώσεις όπως αυτές εξελίσσονται στον χρόνο. Αρχικά, ορίζουμε ως $\mathrm{P(t)} = \mathrm{ct}$,τα συνολικά ασφάλιστρα ανά μονάδα χρόνου και ως c , την σταθερά που ονομάζουμε ένταση ασφαλίστρου.

Συνεπώς, η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{U(t)} = \mathrm{u} + \mathrm{ct} - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \text{ , t} \geq 0$$

2.3.2. Υποθέσεις του κλασικού προτύπου

Σχετικά με το κλασικό πρότυπο της θεωρίας χρεοκοπίας θα πρέπει να πληρούνται οι εξής υποθέσεις:

- P(t) = ct για κάποιο c> 0, δηλαδή η P(t) είναι μια γραμμική συνάρτηση
- οι μεταβλητές X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι ανεξάρτητες από το πλήθος των αποζημιώσεων N(t) , σε οποιοδήποτε διάστημα $[0, \mathrm{t}]$
- η ανέλιξη $\{\mathrm{N(t)}: \mathrm{t} \geq 0\}$ είναι μια ανέλιξη Poisson και κατά συνέπεια η ανέλιξη $\{\mathrm{S(t)}: \mathrm{t} \geq 0\}$ θα είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson.

Μια υπόθεση που κάνουμε στο κλασσικό μοντέλο είναι ότι $\mathrm{c} > \lambda\mu_1$η οποία είναι γνωστή ως συνθήκη του καθαρού κέρδους. Η σχέση αυτή εξασφαλίζει ότι τα έσοδα πρέπει να είναι περισσότερα από τα αναμενόμενα έξοδα τα οποία στη συγκεκριμένη σχέση προκύπτουν ως το γινόμενο της μέσης αποζημίωσης μ_1 με το μέσο ρυθμό των αποζημιώσεων λ.

Ορισμός 2.3.2.1. Η πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο με αρχικό αποθεματικό u ορίζεται από τη σχέση

$$\psi(\mathrm{u}) = \mathrm{P}[\mathrm{U(t)} < 0 \text{ για κάποιο } \mathrm{t} \geq 0 \mid \mathrm{U}(0) = \mathrm{u}]$$

Η συνάρτηση $\psi(\mathrm{u})$ ως συνάρτηση του αρχικού αποθεματικού είναι φθίνουσα. Ισχύει ότι $\lim_{u \to \infty} \psi(u) = 0$.

Ορισμός 2.3.2.2. Το περιθώριο ασφαλείας ή συντελεστής ασφαλείας θ στο κλασικό πρότυπο της θεωρίας χρεοκοπίας ορίζεται από τη σχέση

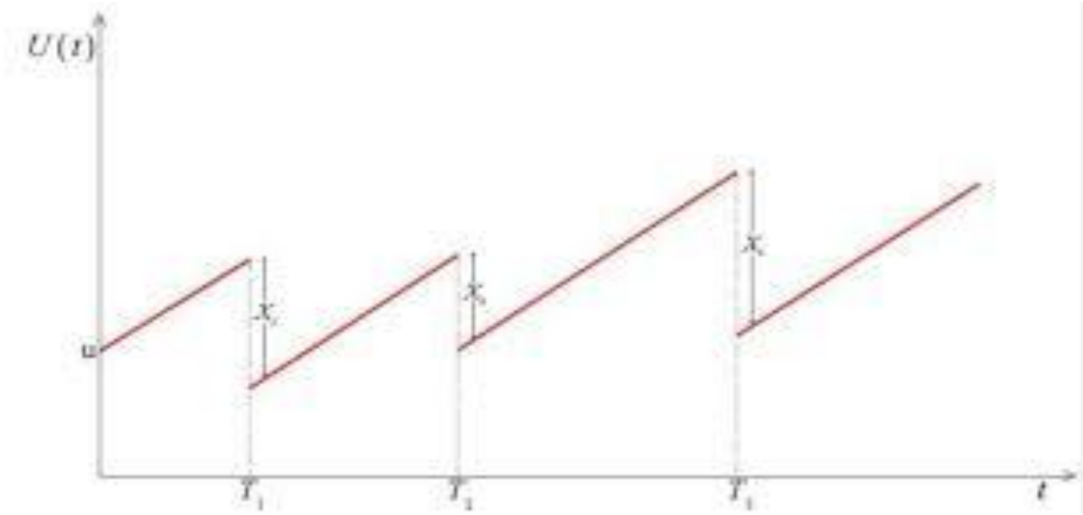
$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1$$

Η ποσότητα αυτή είναι πάντα θετική εφόσον ισχύει $\mathrm{c} > \lambda\mu_1$. Επίσης, για συγκεκριμένη τιμή του αρχικού αποθεματικού u, όσο μεγαλώνει το περιθώριο ασφαλείας, τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Εφόσον $\theta > 0$ αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη $\mathrm{c} > \lambda\mu_1$, αυτή αναφέρεται ως συνθήκη του καθαρού κέρδους.

Έχουμε ορίσει την πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο. Όμως κρίνεται πιο ρεαλιστικό να βρούμε αυτήν την πιθανότητα για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Σε αυτή την περίπτωση, η πιθανότητα χρεοκοπίας θα είναι μία αύξουσα συνάρτηση η οποία θα συμβολίζεται με $\psi(\mathrm{u}, \mathrm{t})$ και ορίζεται από τη σχέση

$$\psi(\mathrm{u,t}) = \mathrm{P}[\mathrm{U}(\tau) < 0 \; για\; κάποιο\; 0 < \tau \leq t]$$



Σχήμα 2.3.2.1 : Η ανέλιξη του πλεονάσματος (Πηγή: www.ScienceDirect.com)

2.3.3. Πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο και συντελεστής προσαρμογής

Θα ορίσουμε **την πιθανότητα μη χρεοκοπίας** του χαρτοφυλακίου η οποία θα είναι μια αύξουσα συνάρτηση η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$\delta(\mathrm{u}) = 1 - \psi(\mathrm{u}), \text{για } \mathrm{u} \geq 0$$

και για την οποία ισχύει ότι $\lim_{u \to \infty} \delta(u) = 1$

Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας είναι συνεχής από δεξιά και μπορεί να θεωρηθεί μία αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας $\delta(\mathrm{u})$ είναι μία μεικτή κατανομή η οποία έχει μάζα πιθανότητας στο μηδέν αφού $\delta(0) > 0$ για μηδενικό αρχικό αποθεματικό, ενώ είναι συνεχής στο διάστημα $(0, \infty)$.

Αναφέρουμε στη συνέχεια δύο αποτελέσματα για τη συνάρτηση $\delta(\mathrm{u})$.

Πρόταση 2.3.3.1. Στο κλασικό μοντέλο, η $\delta(\mathrm{u})$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\delta'(\mathrm{u}) = \frac{\lambda}{c}\delta(\mathrm{u}) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)f(x)\,\mathrm{dx}.$$

Πρόταση 2.3.3.2. Η συνάρτηση $\delta(\mathrm{u})$ η οποία μας δίνει την πιθανότητα μη χρεοκοπίας, ικανοποιεί την εξίσωση

$$\delta(\mathrm{u}) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\,\bar{F}(\mathrm{x})\mathrm{dx}, \mathrm{u} \geq 0$$

$$\text{όπου} \quad \bar{F}(x) = 1 - F(x),$$

είναι η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων.

Ως πόρισμα της Πρότασης 2.3.3.2. μπορουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα μη χρεοκοπίας όταν έχουμε μηδενικό αρχικό αποθεματικό u.

Παίρνοντας τα όρια για $\mathrm{u} \to \infty$ έχουμε ότι:

- $\lim_{u\to\infty} \delta(u) = 1$
- $\lim_{u\to\infty} \delta(u-x) = 1$και
- $\lim_{u\to\infty} \int_0^u \bar{F}(x)\,dx = \int_0^\infty \bar{F}(x)\,dx = \mu_1$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$\lim_{u\to\infty} \delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \lim_{u\to\infty} \int_0^u \delta(u-x)\bar{F}(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow 1 = \delta(0) + \frac{\lambda\mu_1}{c}$$

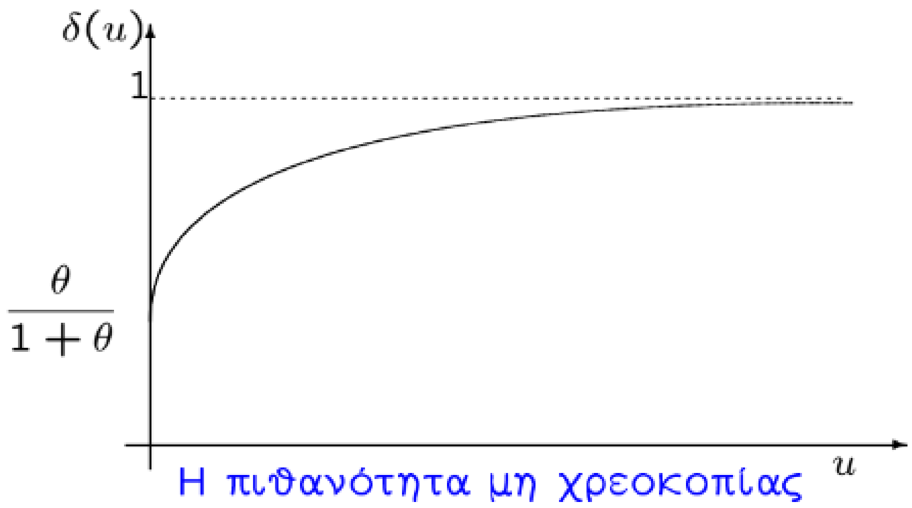
$$\Leftrightarrow \delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu_1}{c}$$

Για το περιθώριο ασφαλείας ισχύει

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1 \Leftrightarrow 1 + \theta = \frac{c}{\lambda\mu_1}$$

οπότε μπορούμε να εκφράσουμε το δ(0) συναρτήσει του θ

$$\delta(0) = 1 - \frac{1}{1+\theta} = \frac{\theta}{1+\theta}$$



Σχήμα 2.3.3.1 : Γραφική παρασταση τηςπιθανότητα μη χρεοκοπίας (Πηγή: Πολίτης 2021)

Συνεπώς, η πιθανότητα χρεοκοπίας με μηδέν αρχικό αποθεματικό είναι

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$$

Σχήμα 2.3.3.2. : Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας (Πηγή: Πολίτης 2021)

Ο συντελεστής προσαρμογής είναι η θετική σταθερά R που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\int_0^\infty e^{Rx} dH(x) = \frac{c}{\lambda\mu_1} = 1 + \theta$$

Ορίζουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής H(x) ως

$$\mathrm{H(x)} = \frac{1}{\mu_1}\int_0^x \bar{F}(\mathrm{y})\,\mathrm{dy}$$

Η σχέση από την Πρόταση 2.3.3.2. γίνεται

$$\delta(\mathrm{u}) = 1 - \frac{\lambda\mu_1}{c} + \frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u \delta(u-x)dH(x)$$

Ο συντελεστής προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης

$$\mathrm{M(r)} = 1 + (1 + \theta)\mu_1\mathrm{r} = 1 + \frac{cr}{\lambda}$$

Η εξίσωση αυτή δεν μπορεί να έχει αρνητικές ρίζες και έχει το πολύ μια θετική ρίζα. Ονομάζεται **εξίσωση Lundberg.**

Η ροπογεννήτρια M(r) είναι αύξουσα και κυρτή συνάρτηση , ενώ ισχύουν οι σχέσεις

$$\lim_{r\to\infty} M(r) = 1, \qquad \lim_{r\to\infty} M(r) = \infty$$

Ο συντελεστής προσαρμογής δεν υπάρχει στις περιπτώσεις που η ροπογεννήτρια M(r) απειρίζεται για κάθε r> 0. Αυτό ισχύει όταν η κατανομή των αποζημιώσεων έχει βαριά ουρά.

2.3.4. Άνω φράγμα για τον συντελεστή προσαρμογής

Σε κάποιες περιπτώσεις, ο συντελεστής προσαρμογής αν και υπάρχει, δεν μπορεί να βρεθεί αναλυτικά. Σε μια τέτοια περίπτωση, μας είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε ένα φράγμα για αυτόν το συντελεστή. Ένα τέτοιο (άνω) φράγμα παρουσιάζουμε στη συνέχεια.

Ο συντελεστής ικανοποιεί την σχέση

$$\lambda + cR = \lambda M(R)$$

Υποθέτοντας ότι οι αποζημιώσεις έχουν πυκνότητα f τότε παίρνουμε διαδοχικά

$$\lambda + cR = \lambda \int_0^\infty e^{Rx}\, f(x)dx$$

$$> \lambda \int_0^\infty (1 + Rx + \frac{1}{2}R^2\, x^2) f(x)dx$$

$$= \lambda\, [\int_0^\infty (f(x))dx + \int_0^\infty Rx\, f(x)dx + \int_0^\infty \frac{1}{2}R^2\, x^2 f(x)dx$$

$$= \lambda\, (1 + R\mu_1 + \frac{1}{2}R^2\, \mu_2)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$2(c - \lambda\mu_1)\, R > \lambda R^2\, \mu_2$$

Λύνοντας ως προς R, για το οποίο ξέρουμε πως παίρνει μόνο θετικές τιμές, έχουμε

$$R < \frac{2(c - \lambda\mu_1)}{\lambda\mu_2}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$c = (1 + \theta)\, \lambda\mu_1 .$$

Οπότε, ο συντελεστής προσαρμογής έχει ένα άνω φράγμα

$$R < \frac{2\theta\mu_1}{\mu_2}.$$

Ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από την

- ανισότητα του Lundberg

ενώ μια προσέγγιση για μεγάλες τιμές του αρχικού αποθεματικού u, για την συνάρτηση ψ(u) μας δίνει

- ο ασυμπτωτικός τύπος Cramer-Lundberg

Πρόταση 2.3.4.1. Η ανισότητα του Lundberg στο κλασικό υπόδειγμα με πιθανότητα χρεοκοπίας ψ(u) ικανοποιεί τη σχέση

$$\psi(u) \ \leq \ e^{-Ru}, \qquad \text{για κάθε } u \geq 0.$$

<u>Πρόταση 2.3.4.2.</u> (Ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg) Με την προϋπόθεση ότι

$$\int_0^\infty xe^{Rx}\,\bar{F}(x)dx < \infty,$$

η πιθανότητα χρεοκοπίας ψ(u) στο κλασικό πρότυπο ικανοποιεί τη σχέση

$$\psi(u)\ ) \sim Ce^{-Ru} \ \text{ καθώς } u \ \to \ \infty,$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} = C\ .$$

Η σταθερά C> 0 υπολογίζεται ως εξής:

$$C \ = \ \frac{\theta\mu_1}{R\int_0^\infty xe^{Rx\bar{F}(x)}dx}.$$

Η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg είναι μια πιο γενική εξίσωση της μορφής

$$cs \ + \ \lambda\hat{f}\ (s) \ - \ (\lambda \ + \ \delta) \ = \ 0.$$

Το $\delta \ \geq 0$ είναι η ένταση του επιτοκίου στην αγορά.

Όπου,

$$\hat{f}\ (s) = \int_0^\infty e^{-sy} f(y)dy,$$

ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, (Gerber & Shiu 1998). Ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}(s)$ μιας συνάρτησης $f(s)$ υπάρχει για όλες τις θετικές τιμές του s. Για $\delta > 0$ η εξίσωση έχει μια θετική ρίζα

$$\rho = \rho(\delta).$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, με την εξής διαδικασία:

$$\hat{\psi}\ (u) = \frac{\hat{\bar{H}}(s)}{1+\theta-\hat{f}(s)}$$

Όπου

$$\bar{H}\ (s) = 1\text{-}\ (\frac{1}{\mu_1})\int_0^s \bar{F}(y)dy,$$

και η συνάρτηση ορίζεται από τη σχέση

$$\hat{f}\ (s) = \frac{1}{\mu_1}\bar{F}(s).$$

<u>2.3.5 Κλιμακωτά ύψη</u>

Μια άλλη μετσβλητή η οποία παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον στην Θεωρία Κινδύνου είναι το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u. Η μεταβλητή αυτή συμβολίζεται ως $L_i(i \ = \ 1,2,\dots)$ και παίρνει θετικές τιμές. Οι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές L_i που εκφράζουν την σταδιακή πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό ονομάζονται **κλιμακωτά ύψη** (ladder heights). Το πλήθος των κλιμακωτών υψών είναι πεπερασμένο με πιθανότητα ένα οπότε ορίζουμε μια τυχαία μεταβλητή Κ που δηλώνει το πλήθος των κλιμακωτών υψών (Li) . Η τ.μ. Κ είναι διακριτή και ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή. Με κάθε νέα πτώση του πλεονάσματος ,η πιθανότητα να προκύψει ένα καινούργιο Li ισούται με την πιθανότητα ψ(0). Η μεταβλητή Κ μετρά τον αριθμό των αποτυχιών μέχρι την 1η επιτυχία και η συνάρτηση πιθανότητας της μεταβλητής Κ δίνεται από την εξής σχέση:

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{K} = \mathrm{k}) = [\psi(0)]^k \delta(0), \quad \mathrm{k} = 0,1,2,\ldots$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\Psi(0) = \frac{1}{(1+\theta)}$$

οπότε η σχέση γράφεται ισοδύναμα

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{K} = \mathrm{k}) = (\frac{1}{1+\theta})^k \frac{\theta}{1+\theta}, \quad \mathrm{k} = 0,1,2,\ldots$$

Οι μεταβλητές L_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. και το πλήθος τους Κ επίσης, οπότε μπορούμε να ορίσουμε την παρακάτω σύνθετη τ.μ.

Ορισμός 2.3.5.1. Στο κλασικό πρότυπο, θεωρούμε την σύνθετη τ.μ. L

$$\mathrm{L} = \begin{cases} L_1 + L_2 + \cdots + L_K = \sum_{i=1}^{K} L_i, & \alpha\nu\ K \geq 1 \\ 0, & \alpha\nu\ K = 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η L παριστάνει τη συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, η οποία ονομάζεται **μέγιστη σωρευτική απώλεια.**

Η μεταβλητή Κ ακολουθεί γεωμετρική κατανομή οπότε και η τ.μ. L θα ακολουθεί σύνθετη γεωμετρική.

Η πιθανότητα η L να πάρει τη τιμή μηδέν είναι

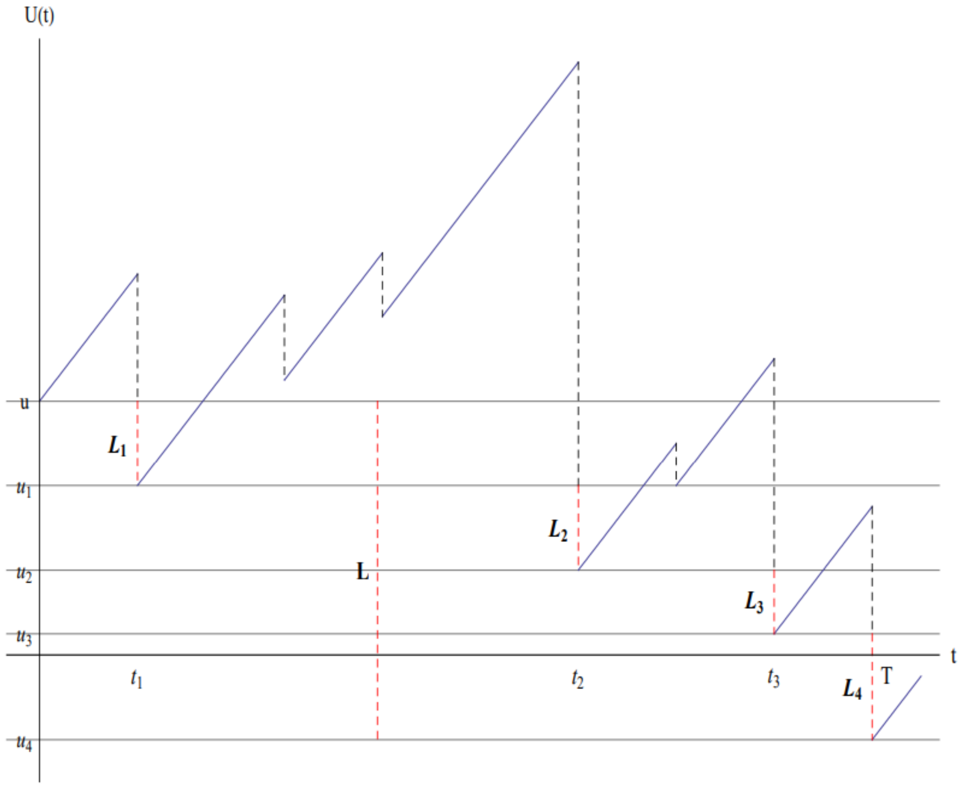
$$\mathrm{P}(\mathrm{L} = 0) = \mathrm{P}(\mathrm{K} = 0) = \delta(0).$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι u δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{P}(\mathrm{L} > u) = \psi(u),$$

οπότε ισχύει ότι

$$\mathrm{P}(\mathrm{L} \leq \mathrm{u}) = \delta(\mathrm{u}).$$



Σχήμα 2.3.5.1 : Κλιμακωτά ύψη και Μέγιστη Σωρευτική απώλεια. (Πηγή: Πολίτης 2021)

2.3.6. Πιθανότητα χρεοκοπίας για εκθετικές αποζημιώσεις

Ο ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι εφικτός μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις όπου μπορούμε στη σχέση που συνδέει την ροπογεννήτρια των κλιμακωτών υψών με τη ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων να διακρίνουμε κάποια γνωστή κατανομή όπως στην περίπτωση που η κατανομή F είναι εκθετική ή μείξη εκθετικών κατανομών.

Πρόταση 2.3.6.1. Στο κλασσικό πρότυπο, όταν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι η Εκθετική με παράμετρο β, η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\psi(u) = \psi(0)e^{-Ru}$$

Απόδειξη

Έστω ότι έχουμε μια εκθετική κατανομή με ροπογεννήτρια

$$M_x(r) = \frac{\beta}{\beta - r}, r < \beta$$

Ισχύει για την ροπογεννήτρια των κλιμακωτών υψών ότι,

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1+\theta-\frac{\beta}{\beta-r}}, \qquad r < \beta$$

Από την σχέση αυτή παίρνουμε,

$$M_L(\mathrm{r}) = \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{\theta}{1+\theta-\frac{\beta}{\beta-r}} - \frac{\theta}{1+\theta}$$

$$= \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{\theta(\beta-r)}{(1+\theta)(\beta-r)-\beta} - \frac{\theta}{1+\theta}\frac{(1+\theta)(\beta-r)-\beta}{(1+\theta)(\beta-r)-\beta}$$

$$= \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{(1+\theta)\theta(\beta-r)-\theta[(1+\theta)(\beta-r)-\beta]}{(1+\theta)[(1+\theta)(\beta-r)-\beta]}$$

Κάνοντας πράξεις, παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα για την ροπογεννήτρια της τ.μ. L,

$$M_L(\mathrm{r}) = \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{1}{1+\theta}\left[\frac{(1+\theta)\theta(\beta-r)-\theta[\beta+\theta\beta-r-r\theta-\beta]}{\beta+\beta\theta-r-r\theta-\beta}\right]$$

$$= \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{1}{1+\theta}\left[\frac{(1+\theta)(\theta\beta-\theta r)-\theta^2\beta+r\theta-r\theta^2}{\beta\theta-r(1+\theta)}\right]$$

και

$$M_L(\mathrm{r}) = \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{1}{1+\theta}\frac{\theta\beta}{\theta\beta-r(1+\theta)}$$

Επομένως, καταλήγουμε στον παρακάτω τύπο για την ροπογεννήτρια,

$$M_L(\mathrm{r}) = \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{1}{1+\theta}\frac{\frac{\theta\beta}{1+\theta}}{\frac{\theta\beta}{1+\theta}-r}$$

Η κατανομή L έχει ένα διακριτό κομμάτι στο μηδέν και ένα συνεχές τμήμα στο οποίο διακρίνουμε την ροπογεννήτρια της εκθετικής κατανομής με παράμετρο $\left(\frac{\theta\beta}{1+\theta}\right)$πολλαπλασιασμένη με τον όρο 1/(1+θ).

Η κατανομή της L έχει πυκνότητα στο (0,∞) και δίνεται από την σχέση

$$f_L(\mathrm{x}) = \frac{1}{1+\theta}\frac{\theta\beta}{1+\theta}e^{-\frac{\theta\beta}{1+\theta}\mathrm{x}} = \frac{1}{1+\theta}Re^{-Rx},$$

με συντελεστή προσαρμογής,

$$\mathrm{R} = \frac{\theta\beta}{1+\theta}.$$

Επομένως, καταλήγουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τον τύπο,

$$\psi(\mathrm{u}) = \mathrm{P}(\mathrm{L} > u) = \int_u^\infty f_L(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \frac{1}{1+\theta}e^{-Ru} = \psi(0)e^{-Ru}.$$

Παρατηρήσεις

• Η ανισότητα του Lundberg δίνει $\psi(\mathrm{u}) \leq e^{-Ru}$ ενώ για εκθετικές αποζημιώσεις ο τύπος είναι $\psi(\mathrm{u}) = \psi(0)e^{-Ru}$. Η προσέγγιση είναι καλύτερη όταν το $\psi(0)$ είναι κοντά στη μονάδα, δηλαδή όταν το θ παίρνει μικρές τιμές.

• Για κατανομές όπου υπάρχει το R, ισχύει ο ασυμπτωτικός τύπος $\psi(\mathrm{u}) \sim \mathrm{C}e^{-Ru}$, δηλαδή $\lim_{u\to\infty}\frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} = C$, όπου η σταθερά υπολογίζεται ως $\mathrm{C} = \frac{1}{1+\theta}$

<u>Μείξη εκθετικών</u>

Αν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μια κατανομή με πυκνότητα

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \beta_i e^{-\beta_\iota x}$$

με α_1 + α_2 + …. + α_k = 1, ,τότε έχουμε μια διακριτή μείξη εκθετικών κατανομών με παραμέτρους β_i και βάρη a_i.

<u>Πρόταση 2.3.6.2. </u>. Όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία μείξη εκθετικών κατανομών, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από την σχέση:

$$\psi(u) = C_1 e^{-ur_1} + C_2 e^{-ur_2} + \dots + C_k e^{-ur_k}$$

όπου r_1, r_2, …., r_kείναι οι λύσεις της εξίσωσης για τον συντελεστή προσαρμογής και C_1, C_2, …., C_kείναι θετικές σταθερές.

Επίσης, για τις παραμέτρους β_1, β_2, …., β_k της κατανομής των αποζημιώσεων και τις ρίζες r_1, r_2, …., r_k της εξίσωσης του Lundberg ισχύει η σχέση

$$0 < r_1 < \beta_{i1} < r_2 < \beta_{i2} < \dots < r_k < \beta_{ik}$$

που τα στοιχεία του συνόλου {β_1 ,...,β_k } είναι σε αύξουσα σειρά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Κυρτή συνάρτηση

3.1 Εισαγωγή

Μια **κυρτή συνάρτηση** είναι μια μαθηματική συνάρτηση που ικανοποιεί μια συγκεκριμένη ιδιότητα γνωστή ως κυρτότητα. Μια συνάρτηση είναι κυρτή εάν για οποιαδήποτε δύο σημεία στη γραφική της παράσταση, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα δύο σημεία βρίσκεται εξ ολοκλήρου πάνω από το γράφημα της συνάρτησης, δηλαδή η συνάρτηση καμπυλώνει προς τα πάνω.

Οι κυρτές συναρτήσεις παίζουν σημαντικό ρόλο σε πολλούς τομείς των μαθηματικών. Επιπλέον, έχουν πολλές σημαντικές ιδιότητες και χρησιμοποιούνται ευρέως στη βελτιστοποίηση, την οικονομία, τη στατιστική και άλλους τομείς. Για παράδειγμα, μια αυστηρά κυρτή συνάρτηση σε ένα ανοιχτό σύνολο δεν έχει περισσότερο από ένα ελάχιστο. Ακόμη και σε χώρους άπειρων διαστάσεων, κάτω από κατάλληλες πρόσθετες υποθέσεις, οι κυρτές συναρτήσεις συνεχίζουν να ικανοποιούν τέτοιες ιδιότητες. Στη θεωρία πιθανοτήτων , μια κυρτή συνάρτηση εφαρμόζεται στην αναμενόμενη τιμή μιας συνάρτησης τυχαίας μεταβλητής, περιορίζεται πάντα παραπάνω από την τιμή της κυρτής συνάρτησης για την αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής. Αυτό το αποτέλεσμα, γνωστό ως ανισότητα του Jensen , μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να συναχθούν ανισότητες όπως η αριθμητική-γεωμετρική μέση ανισότητα και η ανισότητα του Hölder. Τα παραπάνω δεδομένα έχουν παρθεί από τη Wikipedia.

Ορισμός 3.1.1. Έστω I είναι ένα κυρτό υποσύνολο ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου και η συνάρτηση $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$.

a) Η f ονομάζεται κυρτή αν και μόνο αν

$$f\,((1 - t)\, a + t\, b) \leq (1 - t)\, f\,(a) + t f\,(b)$$

για κάθε a, b , για κάθε διάστημα I και για κάθε t που ανήκει στο **R** με $0 < t < 1$.

Η γεωμετρική σημασία του ορισμού είναι η εξής:

η χορδή που έχει σαν άκρα τα σημεία $(a, f\,(a))$ και $(b, f\,(b))$ δεν είναι πουθενά κάτω από το γράφημα της f.

b) Η f λέγεται γνησίως κυρτή αν

$$f\,((1 - t)\, a + t\, b) < (1 - t)\, f\,(a) + t f\,(b)$$

για κάθε a, b που ανήκει στο I και για κάθε t που ανήκει στο **R** με $0 < t < 1$.

c) Η f $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ λέγεται κοίλη (αντίστοιχα, γνησίως κοίλη) αν η $-$ f είναι κυρτή (αντίστοιχα, γνησίως κυρτή).

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ένα λήμμα από την ενότητα 5 ‘’Κυρτές συναρτήσεις’’, του τμήματος Μαθηματικών του Απόστολου Γιαννόπουλου από την ιστοσελίδα opencourses.uoa.gr

Πρόταση 3.1.2. (Το λήμμα των τριών χορδών).

΄Εστω f : I → **R** κυρτή συνάρτηση. Αν y < x < z στο I, τότε

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \tag{3.1}$$

Απόδειξη

Αφού f η είναι κυρτή, τότε έχουμε:

$$f(x) \leq \frac{z-x}{z-y} f(y) + \frac{x-y}{z-y} f(z) \ . \tag{3.2}$$

Από αυτή την παραπάνω ανισότητα βλέπουμε ότι:

$$f(x) - f(y) \leq \frac{y-x}{z-y} f(y) + \frac{x-y}{z-y} f(z) = \frac{x-y}{z-y}[f(z) - f(y)],$$

το οποίο αποδεικνύει την αριστερή ανισότητα στην (3.1). Ξεκινώντας πάλι από την (3.2), γράφουμε ότι:

$$f(x) - f(z) \leq \frac{z-x}{z-y} f(y) + \frac{x-z}{z-y} f(z) = -\frac{z-x}{z-y}[f(z) - f(y)].$$

απ΄ όπου προκύπτει η δεξιά ανισότητα στην (3.1).

Πόρισμα 3.1.3. Εστω f : I → **R** κυρτή συνάρτηση. Αν y $< x < z < w$ στο I, τότε

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(w)-f(z)}{w-z}.$$

Στη συνέχεια, δίνουμε κάποια επιπλέον αποτελέσματα για κυρτές συναρτήσεις.

Θεώρημα 3.1.4. ΄Εστω f: (a, b) → **R** κυρτή συνάρτηση. Αν x ανήκει στο (a, b), τότε υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι

$$f'_{-}(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ και } f'_{+}(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Θεώρημα 3.1.5. ΄Εστω f : (a, b) → **R** κυρτή συνάρτηση. Οι πλευρικές παράγωγοι f'_{-} , f'_{+}είναι αύξουσες στο (a, b) τότε και $f'_{-} \leq f'_{+}$στο (a, b).

Θεώρημα 3.1.6. Κάθε κυρτή συνάρτηση f : (a, b) → **R** είναι συνεχής.

Απόδειξη

΄Εστω x ανήκει στο (a, b). Τότε, για μικρά h> 0 έχουμε$x + h, x - h$ ανήκουν (a, b) και

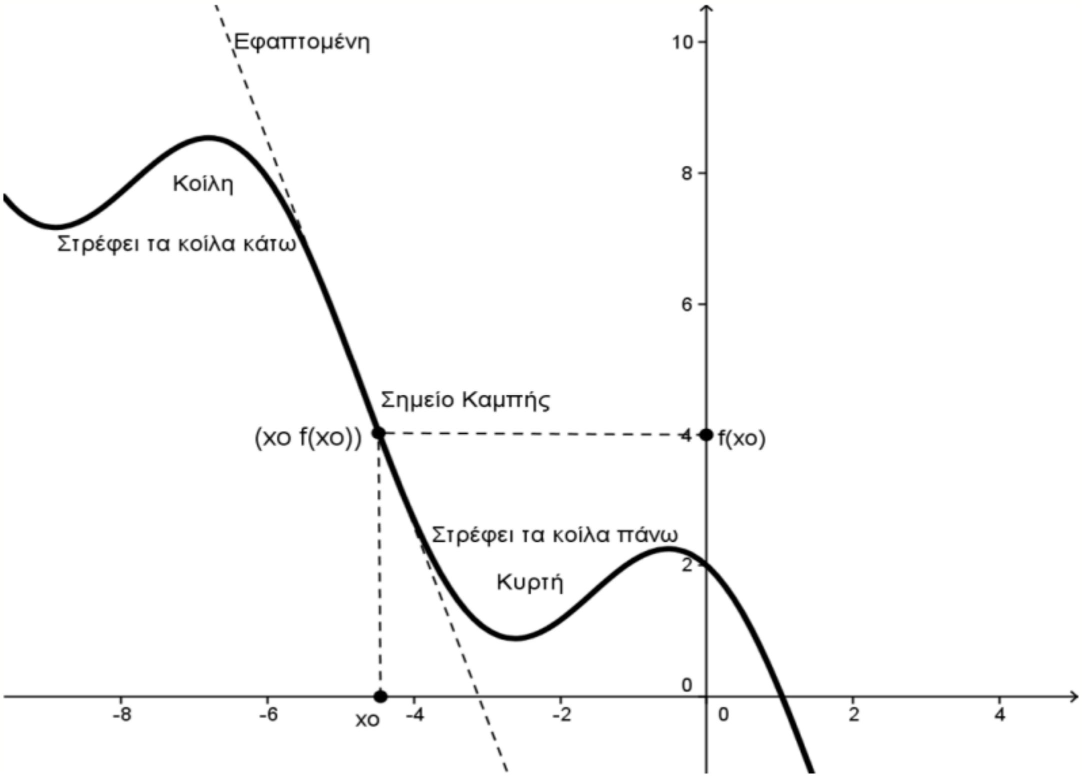
$$f(x+h) = f(x) + \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot h \to f(x) + f'_{+}(x) \cdot 0 = f(x),$$

όταν h→ 0^+ ενώ, τελείως ανάλογα,

$$f(x-h) = f(x) + \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \cdot (-h) \to f(x) + f'_{-}(x) \cdot 0 = f(x),$$

όταν h→ 0^-. Συνεπώς η f είναι συνεχής στο x.

<u>Ορισμός 3.1.7.</u>Σημεία καμπής μίας παραγωγίσιμης συνάρτησης f(x) ονομάζουμε τα σημεία του πεδίου ορισμού της εκατέρωθεν των οποίων αλλάζει μονοτονία η παράγωγος της και στα οποία η f(x) έχει εφαπτομένη.



Σχήμα 3.1.1. : Γραφική παράσταση κυρτής συνάρτησης (Πηγή: https://openclass.teiwm.gr/modules/document/file.php)

<u>Παρατήρηση 3.1.8.</u>Για να βρούμε τα διαστήματα καμπυλότητας της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f(x), βρίσκουμε το πρόσημο της $f''(x)$.

- Στα διαστήματα στα οποία $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), η f στρέφει τα κοίλα άνω (κάτω).
- Σημεία καμπής της f(x) είναι τα σημεία τοηυ πεδίου ορισμού της εκατέρωθεν των οποίων η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο και στα οποία η f(x) έχει εφαπτομένη.

<u>Πρόταση 3.1.9.</u> Αν η συνάρτηση f(x) είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f''(x_0) = 0 \text{ και } f'''(x_0) \neq 0$$

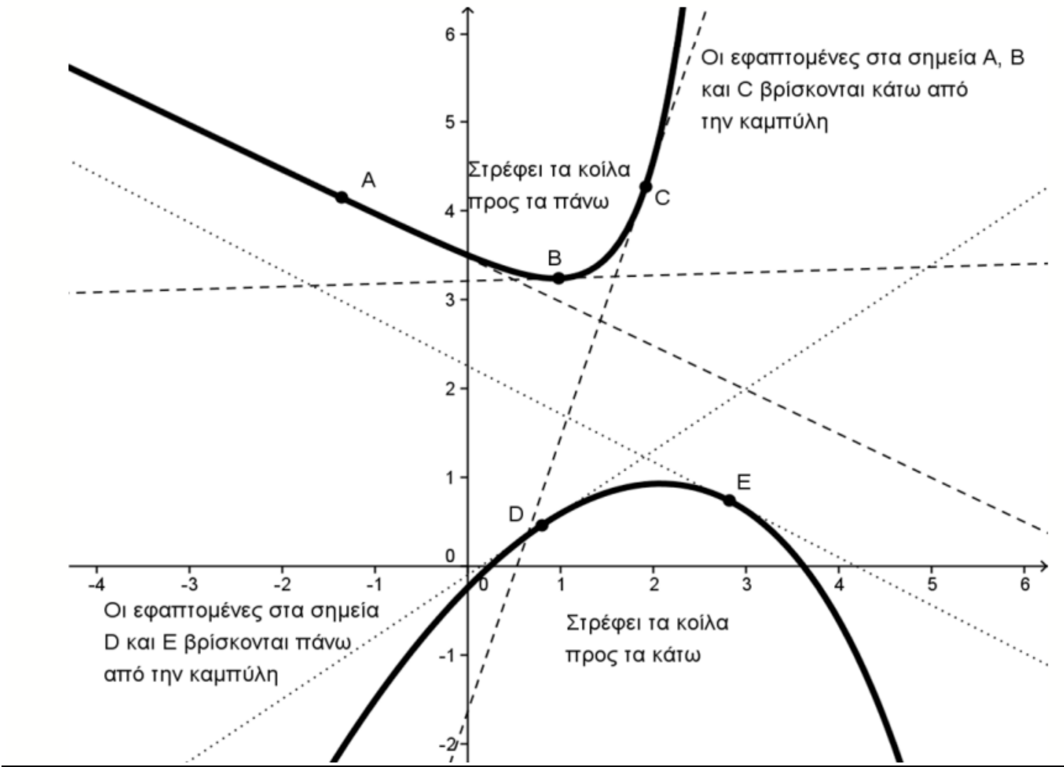
τότε η $f(x)$ έχει σημείο καμπής στο x_0.

<u>Θεώρημα 3.1.10.</u> Έστω $f : (a, b) \rightarrow R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

a. H f είναι κυρτή.
b. H f' είναι αύξουσα.

c. Για κάθε x, y που ανήκει στο (a, b) ισχύει η

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x).$$



Σχήμα 3.1.2. :Κυρτή και κοίλη συνάρτηση (Πηγή: https://openclass.teiwm.gr/modules/document/file.php)

3.2 Επαρκείς συνθήκες για κυρτότητα

Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση f(x) έχει μια πρώτη παράγωγο $f'(x)$ που υπάρχει μέσα σε ένα κλειστό διάστημα [a,b] και μία δεύτερη παράγωγο $f''(x)$ που υπάρχει μέσα σε ένα ανοιχτό διάστημα (a,b), οι ακόλουθες συνθήκες είναι επαρκείς για τον προσδιορισμό της κυρτότητας:

- Αν $f''(x) \geq 0$ για όλα τα x που σνήκουν στο διάστημα (a,b) τότε η συνάρτηση f(x) είναι κυρτή στο διάστημα [a,b].
- Αν $f''(x) \leq 0$ για όλα τα x που σνήκουν στο διάστημα (a,b) τότε η συνάρτηση f(x) είναι κοίλη στο διάστημα [a,b].

3.3 Ιδιότητες κυρτής συνάρτησης

Υποθέτοντας ότι όλες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς και ορίζονται στο διάστημα [a,b], παρουσιάζουμε μια λίστα με ιδιότητες κυρτών συναρτήσεων:

- Εάν οι συναρτήσεις f και g στρέφουν τα κοίλα προς τα κάτω (προς τα πάνω), τότε οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός $af + bg$ όπου a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, είναι επίσης κυρτός προς τα κάτω (προς τα πάνω).
- Εάν η συνάρτηση $u = g(x)$ είναι κυρτή προς τα κάτω, και η συνάρτηση $y = f(u)$ είναι κυρτή προς τα κάτω και μη φθίνουσα, τότε η σύνθετη συνάρτηση $y = f(g(x))$ είναι επίσης κυρτή προς τα κάτω.
- Εάν η συνάρτηση $u = g(x)$ είναι κυρτή προς τα πάνω, και η συνάρτηση $y = f(u)$ είναι κυρτή προς τα κάτω και μη αύξουσα, τότε η σύνθετη συνάρτηση $y = f(g(x))$ είναι επίσης κυρτή προς τα κάτω.
- Οποιοδήποτε τοπικό μέγιστο μιας κυρτής συνάρτησης προς τα πάνω που ορίζεται στο διάστημα [a,b] είναι επίσης το συνολικό μέγιστο σε αυτό το διάστημα.
- Οποιοδήποτε τοπικό ελάχιστο μιας κυρτής συνάρτησης προς τα κάτω που ορίζεται στο διάστημα [a,b] είναι επίσης το συνολικό ελάχιστο σε αυτό το διάστημα.

Οι παραπάνω ιδιότητες έχουν παρθεί από την ιστοσελίδα https://testbook.com/maths/convex-function

3.4 Λίστα κυρτών συναρτήσεων

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε ορισμένες από τις πιο βασικές κυρτές συναρτήσεις

- Εκθετική συνάρτηση: Μια συνάρτηση $f(x) = e^x$, είναι μια κυρτή συνάρτηση.
- Τετραγωνική συνάρτηση: Μια συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + c$, όπου το a είναι θετικό, είναι κυρτή συνάρτηση.
- Συνάρτηση απόλυτης τιμής: Μια συνάρτηση $f(x) = |x|$, είναι μια κυρτή συνάρτηση.

3.5 Παραδείγματα

1. Θα βρούμε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax + b$, (όπου a, b είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί) είναι κοίλη.

   Λύση

   Η δοθείσα συνάρτηση είναι $f(x) = x^3 + ax + b$

   Παίρνοντας την πρώτη παράγωγο έχουμε:

   $$f'(x) = 3x^2 + a$$

   Παίρνοντας την δεύτερη παράγωγο έχουμε:

   $$f''(x) = 6x$$

   Τώρα βλέπουμε ότι $f''(x) < 0$ για $x < 0$

   Ως εκ τούτου, η συνάρτηση είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0)$.

2. Για την συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}$ ζητάμε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω και τα σημεία καμπής της.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το **R** και παίρνοντας την πρώτη και δεύτερη παράγωγο έχουμε:

$$f'(x) = (xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

$$f''(x) = [(1-x)e^{-x}]' = -e^{-x} - e^{-x}(1-x) = e^{-x}(-1-1-x) = e^{-x}(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 1 - \mathrm{x} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = 1$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(x-2) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = 2.$$

Οπότε προκύπτει ο πίνακας μεταβολών της f

x	-∞ 1	2	+∞
$f'(x)$	+	-	-
$f''(x)$	-	-	+
$f(x)$	∩	∩	∪

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω , δηλαδή είναι κυρτή, στο διάστημα (2, +∞), ενώ στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα (-∞, 2). Συνεπώς καταλήγουμε η f έχει σημείο καμπής στο x = 2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Κυρτότητα και Πιθανότητα Χρεοκοπίας

4.1 Βαθμίδα αποτυχίας (Failurerate)

Η συνάρτηση της βαθμίδας αποτυχίας αποτελεί μια από τις βασικότερες ιδιότητες την οποία θα αναλύσουμε και θα μελετήσουμε με διεξοδικό τρόπο στην παρούσα διατριβή. Η συνάρτηση αυτή εμφανίζεται ιδιαίτερα στο κλάδο της αναλογιστικής επιστήμης και συγκεκριμένα στην ανάλυση επιβίωσης, όπου καλείται συνάρτηση κινδύνου ή βαθμίδα αποτυχίας καθώς επίσης και στα Συμβάντα Ζωής και Θανάτου (Ασφαλίσεις Ζωής), όπου καλείται ένταση θνησιμότητας ή force of mortality. Στα μοντέλα επιβίωσης (survival models) ένα πολύ σημαντικό ρόλο παίζει η τυχαία μεταβλητή X η οποία περιγράφει την διάρκεια ζωής ενός νεογέννητου ατόμου ($X \geq 0$) και είναι συνεχής διότι μετράει χρόνο ζωής. Επιπλέον παίρνει τιμές σε ένα κλειστό διάστημα $[0, \omega]$ όπου ω ορίζεται ως η μέγιστη ή οριακή ηλικία (ή χρονική στιγμή) μέχρι την οποία μπορεί να επιβιώσει ένα ανθρώπινο ον ή ένα μηχάνημα. Σε πολλές επιστήμες, οι συνεχείς αυτές τυχαίες μεταβλητές καλούνται χρόνοι ζωής (ή lifetimes) και χαρακτηρίζονται από την συνάρτηση κατανομής αλλά και από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς τους. Ωστόσο αρκετές φορές ο χρόνος ζωής μπορεί να διακοπεί με απροσδόκητο τρόπο λόγω μιας αποτυχίας, θανάτου ή οποιουδήποτε άλλου γεγονότος. Για αυτό το λόγο ιδιαίτερη σημασία έχει η συνάρτηση της βαθμίδας αποτυχίας η οποία σαν ποσότητα εκφράζει την πιθανότητα αποτυχίας σε ένα μικρό χρονικό διάστημα ύστερα από ένα σημείο εκκίνησης (γέννηση ή έναρξη λειτουργίας στο κλάδο της μηχανικής) έως τη χρονική στιγμή που δύναται να επιβιώσει ένα ανθρώπινο ον (ή ένα σύστημα). Στα συμβάντα ζωής και θανάτου ή ασφαλίσεις ζωής, όπου θεωρείται ως ένταση θνησιμότητας εκφράζει τον στιγμιαίο ρυθμό θανάτου. Ωστόσο, παρ' όλο που αρκετές φορές θεωρείται ως η πιθανότητα μια αποτυχία να εμφανιστεί σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t, δεδομένου ότι προηγουμένως δεν έχει υπάρξει άλλη αποτυχία, στην ουσία δεν αποτελεί πιθανότητα καθώς μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες από την μονάδα. Στο παρόν κεφάλαιο, θα δοθεί ο μαθηματικός τύπος που ορίζει την συνάρτηση της βαθμίδας αποτυχίας.

<u>Ορισμός 4.1.1:</u> Έστω συνεχής μεταβλητή X που μετρά χρόνο ζωής. Οπότε η X είναι μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με κατανομή F(x) και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x). Τότε, η βαθμίδα αποτυχίας, h(x), ορίζεται ως

$$h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = -\frac{d}{dx} ln\bar{F}(x),\ x \geq 0,$$

όπου η $\bar{F}(x)$καλείται δεξιά ουρά της κατανομής $F(x)$ ή, διαφορετικά, συνάρτηση επιβίωσης και ισχύει

$$\bar{F}(x) = \int_x^\infty f(y)dy = 1 - \int_0^x f(y)dy = 1 - F(x), x \geq 0.$$

Συνεπώς, η βαθμίδα αποτυχίας $h(x)dx$ εκφράζει την πιθανότητα αποτυχίας αντικειμένου ηλικίας x στο διάστημα $[x, x + dx]$ με $x \geq 0$ και $dx \to 0$. Μπορούμε να διαπιστώσουμε από τα παραπάνω ότι:

$$h(x) = \lim_{r\to 0}\frac{F(x+r)-F(x)}{r\bar{F}(x)} = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\left(1-\frac{\bar{F}(x+r)}{\bar{F}(x)}\right)$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}(1-\Pr(X > x+r|X > x)),\ \ x \geq 0.$$

Από την παραπάνω σχέση, παρατηρούμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας σχετίζεται με την δεξιά ουρά και, μάλιστα, προκύπτει πως μεγάλες τιμές της βαθμίδας αποτυχίας συνδέονται με παχιά δεξιά ουρά.

Άλλη μία ισχυρή απόδειξη για τη σύνδεση της βαθμίδας αποτυχίας με την κατανομή είναι η σχέση που δίδεται παρακάτω, η οποία αποδεικνύει πως η βαθμίδα αποτυχίας συνδέεται με την κατανομή της X.

$$h(x) = -\frac{d}{dx}ln\bar{F}(x) => \int_0^x h(y)dy = -ln\bar{F}(x) => \bar{F}(x) = e^{-\int_0^x h(y)dy},\ x\geq 0.$$

Έχει ενδιαφέρον να δούμε τη σχέση της μέσης τιμής με την βαθμίδα αποτυχίας, καθώς η μέση τιμή παρουσιάζει σημαντικές εφαρμογές στη Στατιστική. Ξεκινώντας από τον ορισμό της αναμενόμενης τιμής παίρνουμε ότι

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} -xd\big(1-F(x)\big) = -[x(1-F(x))]_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\big(1-F(x)\big)dx =>$$

$$E(X) = \int_0^{\infty}\bar{F}(x)dx = \int_0^{\infty}\frac{f(x)}{h(x)}dx = \int_0^{\infty}\frac{1}{h(x)}f(x)dx = E(\frac{1}{h(x)}),$$

με $\lim_{x\to 0} x\big(1-F(x)\big) = 0$ και $\lim_{x\to\infty} x\big(1-F(x)\big) = 0$, θεωρώντας ότι η μέση τιμή είναι πεπερασμένη.

Σύμφωνα με την τελευταία σχέση που αποδείξαμε, προκύπτει ότι όταν η βαθμίδα αποτυχίας $h(x)$ παίρνει ιδιαίτερα μικρές τιμές τότε η μέση τιμή της τ.μ. X παίρνει αντίστοιχα μεγάλες τιμές και αντιστρόφως. Αυτό το συμπέρασμα επιβεβαιώνει τη σχέση της βαθμίδας αποτυχίας και της δεξιάς ουράς η οποία είναι αρνητική. Σύμφωνα με τους Willmot & Lin (2001), η συνάρτηση κατανομής F(x) έχει φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας ή λέμε ότι είναι DFR (decreasing failure rate) εάν ο λόγος $\frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)}$είναι μια μη φθίνουσα συνάρτηση ως προς x και για σταθερό y ≥ 0 και με την προϋπόθεση ότι ο λογάριθμος log$\bar{F}(x)$ είναι κυρτή συνάρτηση. Αντιστοίχως, η συνάρτηση κατανομής F(x) έχει αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας ή λέμε ότι είναι IFR (increasing failure rate) εάν ο λόγος $\frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)}$είναι μια μη αύξουσα συνάρτηση ως προς x και για σταθερό y ≥ 0 και με την προϋπόυεση ότι ο λογάριθμος log$\bar{F}(x)$ είναι κοίλη συνάρτηση.

<u>Παρατήρηση:</u>Θα πρέπει να σημειωθεί πως δεν μπορεί να καλείται βαθμίδα αποτυχίας η οποιαδήποτε συνάρτηση. Για να θεωρηθεί μία συνάρτηση ως συνάρτηση βαθμίδας αποτυχίας, θα πρέπει να πληροί τις εξής προϋποθέσεις (Marshall & Olkin, 2007):

- $h(x) \geq 0, για\ κάθε\ x > 0$
- $\int_0^x h(t)dt < \infty, για\ κάποια\ x > 0$
- $\int_0^{\infty} h(t)dt = \infty$

- $\int_0^x h(t)dt = \infty, => h(z) = \infty, για\ κάθε\ z > x$

4.2 Μονοτονία βαθμίδων αποτυχίας

Η μελέτη της μονοτονίας της συνάρτησης της βαθμίδας αποτυχίας αποτελεί βασικό στοιχείο ανάλυσης για διάφορους τομείς όπως η ανάλυση επιβίωσης αλλά και η θεωρία αξιοπιστίας. Έχει επίσης ενδιαφέρον στη θεωρία κινδύνων που εξετάζουμε εδώ.

Η βαθμίδα αποτυχίας $h(x)$ χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση των κατανομών θετικών συνεχών τ.μ. που περιγράφουν τον χρόνο ζωής. Παράλληλα μας δείχνει τον στιγμιαίο ρυθμό θνησιμότητας στην μονάδα του χρόνου αλλά και την γήρανση σε έναν πληθυσμό. Για αυτό είναι σημαντικό να αναλύσουμε και να διακρίνουμε τις μορφές τις οποίες μπορεί να πάρει αυτή η συνάρτηση ανάλογα με την μονοτονία της σε διάφορα διαστήματα.

Είδαμε παραπάνω πώς ορίζονται οι κατανομές DFR και IFR. Ένας ισοδύναμος ορισμός είναι ο εξής:

<u>Ορισμός 4.2.1:</u> (Marshall & Olkin, 2007; Barlow & Proschan, 1996) Λέμε ότι μία τυχαία μεταβλητή έχει DFR (IFR) κατανομή, όταν καθώς περνά ο χρόνος, η βαθμίδα αποτυχίας μειώνεται (αυξάνεται).

Μια σημαντική ιδιότητα της βαθμίδας αποτυχίας είναι η (Willmot & Lin, 2001):

$$\frac{1}{h(\infty)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\bar{F}(x)}{f(x)} = \frac{1-F(x)}{f(x)} = \lim_{x \to \infty} -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Δύο βασικές μορφές της συνάρτησης της βαθμίδας αποτυχίας ως προς την μονοτονία της είναι οι εξής:

- Η βαθμίδα αποτυχίας $h(x)$είναι αύξουσα σε όλο το διάστημα $(0, \infty)$ και συνεπώς θα ισχύει για το διάστημα αυτό ότι $h'(x) > 0$. Τότε η συνάρτηση κατανομής F(x) του χρόνου ζωής λέμε ότι έχει αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας, ή ότι είναι IFR.

- Η βαθμίδα αποτυχίας $h(x)$είναι φθίνουσα σε όλο το διάστημα $(0, \infty)$ και συνεπώς θα ισχύει για το διάστημα αυτό ότι $h'(x) < 0$. Τότε η συνάρτηση κατανομής F(x) του χρόνου ζωής λέμε ότι έχει φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας, ή ότι είναι DFR.

4.3 Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής (Mean Residual Lifetime)

Μια άλλη εξίσου σημαντική μεταβλητή για την ανάλυση επιβίωσης και τις ασφαλίσεις ζωής είναι ο υπολειπόμενος ή μελλοντικός χρόνος ζωής. Η μεταβλητή αυτή μετράει την υπολειπόμενη διάρκεια ζωής που έχει ένα άτομο ή ένα σύστημα εφόσον έχει περάσει ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα από την γέννηση ή την κατασκευή. Θα μελετήσουμε, όμως, τη μέση τιμή αυτής της τυχαίας μεταβλητής και θα την ονομάσουμε μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής.

Ορισμός 4.3.1: Έστω X ο χρόνος ζωής ενός αντικειμένου, οπότε η X είναι μία μη αρνητική συνεχής τυχαία μεταβλητή. Τότε ορίζουμε ως $T_X(t)$ την μεταβλητή που εκφράζει την υπολειπόμενη ζωή με $t \geq 0$ και ισχύει

$$T_X(t) = X - t|X > t.$$

Η κατανομή της $T_X(t)$ ορίζεται ως

$$F_{T_X}(t) = Pr(T_X(x) \leq t) = 1 - Pr(T_X(x) > t) = 1 - Pr(X - x > t|X > t)$$
$$= 1 - \frac{\mathrm{Pr}\,(\mathrm{X} - \mathrm{x} > t, X > x)}{\mathrm{Pr}\,(\mathrm{X} > x)} = 1 - \frac{\mathrm{Pr}\,(\mathrm{X} > t + x)}{\mathrm{Pr}\,(\mathrm{X} > x)} = 1 - \frac{\overline{\mathrm{F}}(\mathrm{x+t})}{\overline{\mathrm{F}}(\mathrm{x})}, \mathrm{t} \geq 0.$$

Ορισμός 4.3.2: (Willmot & Lin, 2001) Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής ορίζεται ως

$$\mathrm{E}(T_X(x)) := m_X(x) = \int_x^\infty (t - x)\frac{d(\overline{\mathrm{F}}(\mathrm{t}))}{\overline{\mathrm{F}}(\mathrm{x})}$$
$$= \int_0^\infty Pr(T_X(x) > t)\, dt = \int_0^\infty \frac{\overline{\mathrm{F}}(\mathrm{x+t})}{\overline{\mathrm{F}}(\mathrm{x})} dt.$$

Στην συνέχεια, με βάση τους Willmot & Lin (2001) θα δούμε κάποιους βασικούς κανόνες για την μονοτονία του MRL αντίστοιχα

- Η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ ανήκει στην κλάση του αύξοντα μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής (IMRL) όταν το m(x) είναι μη φθίνουσα (αύξουσα) συνάρτηση ως προς x. Όπως αναφέραμε και παραπάνω η $F(x)$ανήκει στην κλάση της φθίνουσας βαθμίδας αποτυχίας (DFR) όταν ο λόγος $\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(x)}$ είναι μη φθίνουσα συνάρτηση ως προς x και για σταθερό $t > 0$. Συνεπώς μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η κλάση DFR συνεπάγεται κλάση IMRL. Άρα η κλάση DFR είναι ένα υποσύνολο της κλάσης IMRL.
- Αντίστοιχα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η κλάση IFR συνεπάγεται κλάση DMRL. Άρα η κλάση IFR είναι ένα υποσύνολο της κλάσης DMRL.

Η κλάση IMRL όπως αντίστοιχα και η κλάση DFR σύμφωνα με τον Bondesson (1983) διατηρούνται στις μείξεις κατανομών. Ωστόσο από την άλλη πλευρά όταν έχουμε μια κλάση IFR η οποία διατηρεί την ιδιότητα της στις συνελίξεις κατανομών, η κλάση DMRL αντίστοιχα δεν διατηρεί αυτή την ιδιότητα.

Ωστόσο, δεν καλείται συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής οποιαδήποτε μη αρνητική συνάρτηση $m(x) \geq 0$. Οφείλει να πληροί κάποιες προϋποθέσεις. Θα παρουσιάσουμε λοιπόν την ακόλουθη πρόταση σύμφωνα με την οποία γίνονται γνωστές κάποιες από τις βασικές προϋποθέσεις που θα πρέπει να έχει μια συνάρτηση m(x) ώστε να είναι συνάρτηση MRL.

Πρόταση 4.3.1: Μια συνάρτηση m(x) θα ονομάζεται συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής μιας μη αρνητικής και συνεχής τ.μ. T(x) (η οποία περιγράφει τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής ενός ατόμου ή ενός συστήματος εφόσον έχουν περάσει x έτη) εάν και μόνο αν ισχύουν τα κάτωθι (Guess & Proschan, 1985):

- Η m(x) να είναι συνεχής συνάρτηση
- $0 \leq \mathrm{m(x)} < \infty$ $για\ κάθε\ x \geq 0$
- $\mathrm{m}(0) > 0$
- $\mathrm{m(x)} + \mathrm{x}$ να είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς $\mathrm{x} \geq 0$
- να υπάρχει t_0, τέτοιο ώστε $\mathrm{m}(t_0^-) := \lim_{t\to t_0} m(t) = 0$ και $m(t)= 0$, $t \in [0, \infty)$ είτε
- αν δεν υπάρχει t_0 με την ιδιότητα $\mathrm{m}(t_0^-) = 0$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{dy}{m(y)}$ υπάρχει.

4.4.Σύνδεση βαθμίδας αποτυχίας και μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής

Στην ενότητα αυτή θα δούμε αναλυτικά ότι η βαθμίδας αποτυχίας και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής σχετίζονται. Όπως ήδη γνωρίζουμε η βαθμίδα αποτυχίας ή ένταση θνησιμότητας εκφράζει τον στιγμιαίο κίνδυνο αποτυχίας, ο οποίος αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου λόγω της «γήρανσης» ενός οργανισμού ή ενός συστήματος ενώ, ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής που απομένει σε ένα ανθρώπινο ον ή ένα σύστημα, μειώνεται καθ' όλη τη διάρκεια του χρόνου. Επομένως θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα δυο αυτά μεγέθη είναι αντιστρόφως ανάλογα μεταξύ τους. Άρα σχετικά με την μονοτονία των δύο συναρτήσεων θα ισχύει ότι όταν η βαθμίδα αποτυχίας είναι μια αύξουσα συνάρτηση του χρόνου τότε ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής θα είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου και αντιστρόφως.

Συγκεκριμένα, έστω Y μία τυχαία μεταβλητή με βαθμίδα αποτυχίας h(y) και μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής m(y). Τότε, θα ισχύει

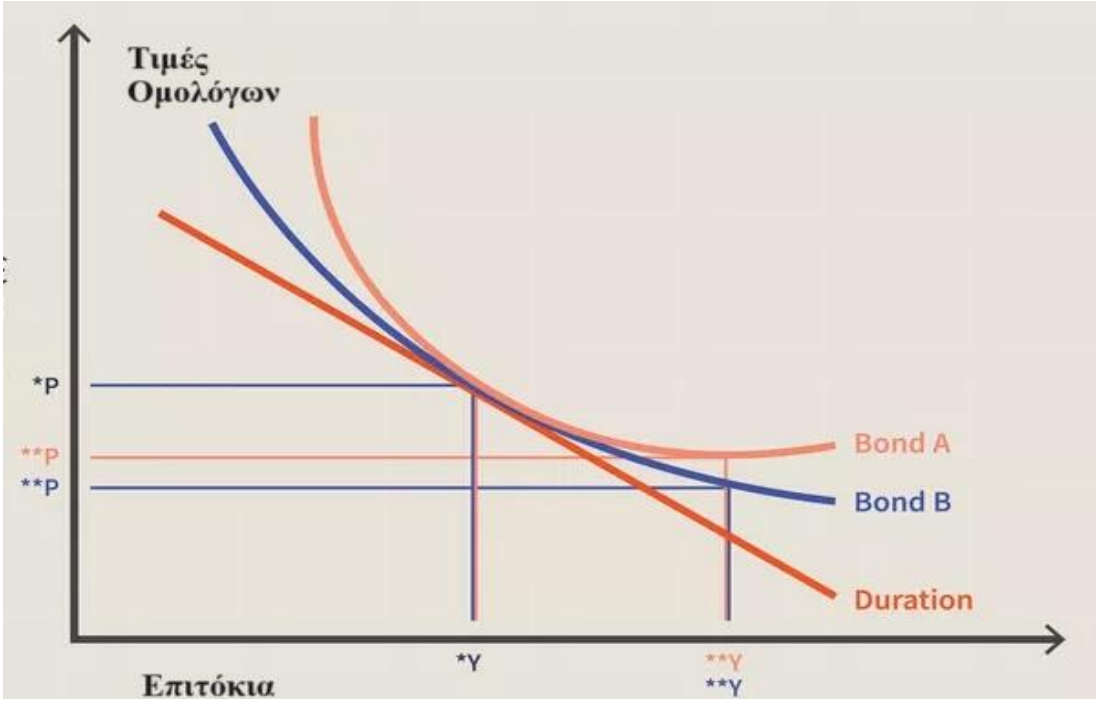
$$h(\infty) = \lim_{y\to\infty} \frac{E(Y)\overline{F_1(y)}}{\bar{F}(y)} = \lim_{y\to\infty} \frac{-\bar{F}(y)}{-f(y)} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{m(y)} = \frac{1}{m(\infty)}.$$

<u>Πρόταση 4.4.1:</u>Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μπορεί να υπολογιστεί συναρτήσει της βαθμίδας αποτυχίας από τη σχέση

$$m(x) = \int_0^\infty e^{-\int_x^{x+t} h(y)dy}\, dt, x \geq 0.$$

4.5. Η κυρτότητα των πιθανοτήτων χρεοκοπίας

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε το άρθρο "A note on the convexity of ruin probabilities" (Landriault et al. 2017) με σκοπό να αποσαφηνίσουμε την σπουδαιότητα της κυρτότητας. Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο η κυρτότητα συναρτήσεων παίζει σπουδαίο ρόλο σε πολλά πεδία των μαθηματικών. Για παράδειγμα, σε προβλήματα Βελτιστοποίησης όπου η γνήσια κυρτή συνάρτηση (strictly convex function) σε ανοιχτό σύνολο έχει το πολύ ένα ελάχιστο σημείο. Στα χρηματοοικονομικά η κυρτότητα απεικονίζει πώς η σταθμισμένη διάρκεια ομολόγου (duration) μεταβάλλεται όσο μεταβάλλονται τα επιτόκια (interest rates). Οι διαχειριστές χαρτοφυλακίων χρησιμοποιούν την κυρτότητα σαν εργαλείο με στόχο την καλύτερη διαχείριση στην έκθεση (exposure) των επιτοκίων των ομολόγων (βλέπε Σχήμα 1).



Σχήμα 4.5.1: Κυρτότητα στη τιμή των ομολόγων (Πηγή: www.ScienceDirect.com)

Στη θεωρία των Πιθανοτήτων, μια κυρτή συνάρτηση της μέσης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής είναι πάντα άνω φραγμένη από τη μέση τιμή της κυρτής συνάρτησης, το οποίο είναι γνωστό αποτέλεσμα στη βιβλιογραφία ως η ανισότητα του Jensen.

$$\varphi(\mathrm{E}(\mathrm{X})) \leq \mathrm{E}(\varphi(\mathrm{X})),$$

όπου φ μια κυρτή συνάρτηση και Χ μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) < +\infty.$$

Στη Θεωρία Χρεοκοπίας έχει ενδιαφέρον η εφαρμογή της έννοιας της κυρτότητας αφού η ελαχιστοποίηση της τιμής της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι από τα πιο σημαντικά ζητούμενα για τους Αναλογιστές. Υπό το πρίσμα του Ανανεωτικού (ή κλασικού) μοντέλου χρεοκοπίας, μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε ποιές ιδιότητες των τυχαίων μεταβλητών των αποζημιώσεων μεταφέρονται στη τυχαία μεταβλητή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας. Για παράδειγμα, ο Szekli (1986) απέδειξε ότι αν η τ.μ. Χ του ύψους των αποζημιώσεων ανήκει στην κλάση DFR τότε το ίδιο ισχύει και για την κατανομή ισορροπίας η οποία αντιστοιχεί στην κατανομή των κλιμακωτών υψών στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας. Ο Shanthikumar (1988) έδειξε ότι αν Χ το ύψος των αποζημιώσεων είναι DFR τότε αυτή μεταφέρεται στη μέγιστη σωρευτική απώλεια με $L \in$ DFR.

Έτσι, ένα ερώτημα που γεννιέται είναι αν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι κυρτή, τότε η συνάρτηση της μέγιστης σωρευτικής απώλειας είναι και αυτή κυρτή συνάρτηση; Στη βιβλιογραφία της Θεωρίας Χρεοκοπίας, δυστυχώς, δεν είναι τόσο διαδεδομένη η εφαρμογή της κυρτότητας στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας. Όμως στο πρόσφατο άρθρο τους οι Landriault et al. (2017) απαντάνε σε αυτό το κρίσιμο ερώτημα.

Συγκεκριμένα, στο Θεώρημα 2.1 του συγκεκριμένου άρθρου αποδεικνύουν ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας ψ(u) είναι κυρτή συνάρτηση στο διάστημα (0, +∞) αν ισχύει μία από τις παρακάτω δύο συνθήκες.

(1) Η κατανομή των αποζημιώσεων F(·) είναι IMRL,

(2) Για τη βαθμίδα αποτυχίας (failure rate) h(x) των αποζημιώσεων ισχύει

h(x) $\geq \frac{\lambda}{c}\tilde{f}_x(r)$για όλα τα x ≥ 0. Η $\tilde{f}_x(r)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της πυκνότητας $\mathrm{f_x(t)} = \frac{\mathrm{f(x+t)}}{\bar{\mathrm{F}}(\mathrm{x})}$για t ≥ 0.

<u>Παρατήρηση 4.5.1:</u> Η συνθήκη (2) του παραπάνω θεωρήματος είναι επαρκής αλλά όχι απαραίτητη για να είναι κυρτή μια συνάρτηση. Παρατηρείται παίρνοντας την σχέση (1.4) του ίδιου άρθρου ($\mathrm{q(x)} = -(1-\varphi)\{\alpha'(\mathrm{x}) + \varphi\alpha(0)\mathrm{f(x)}$όπου $0 < \varphi < 1$), η συνθήκη q(x) ≥ 0 είναι ισοδύναμη με

$$\frac{d}{dx} lnf(x) \leq -\varphi\, f(0) \tag{4.1}$$

<u>Παράδειγμα 4.5.1.</u>

Έχουμε μια κατανομή Pareto(3,2), όπου η συνάρτηση πυκνότητας ισούται με:

$$\mathrm{f(x)} = \frac{24}{(\mathrm{x}+2)^4}, \qquad \text{για } \mathrm{x} \geq 0,$$

Τότε η (4.1) είναι ισοδύναμη με x ≤ x_0 όπου φ=0.1

$$x_0 = \theta\ \{1 + \alpha(1-\varphi)\}\ /(\alpha\varphi) = 24.66$$

Αυτό σημαίνει ότι η q(x) είναι μη αρνητική για x ≤ x_0 αλλά αρνητικό για x >x_0. Χρησιμοποιώντας το ανανεωτικό επιχείρημα (renewal argument) για ελλειμματικές εξισώσεις προκύπτει ότι η $\bar{G}''(x) \geq 0$ για x ≤ x_0, αλλά επειδή η κατανομή Pareto είναι DFR, έπεται ότι $\bar{G}''(x) \geq 0$ για όλα τα x ≥ 0 σε αυτήν την περίπτωση.

<u>Παρατηρηση 4.5.2:</u> Ενώ η συνθήκη (1) απαιτεί το ποσοστό αστοχίας της F(·) να μην είναι αυξανόμενο, η συνθήκη (2) δεν επιβάλλει συνθήκες μονοτονίας στο ποσοστό αστοχίας.

<u>Παρατήρηση 4.5.3:</u> Η $\psi_\delta(\cdot)$ δεν μπορεί να είναι κυρτή σε ένα διάστημα της μορφής (0,x_0) εάν h(x) $< \frac{\lambda+\delta}{c}\tilde{f}_x(r)$ για $x \leq x_0$. Αυτό ισχύει για κάθε IFR κατανομή με $\mathrm{h}(0_+)$ $< \frac{\lambda+\delta}{c}\tilde{f}_x(r)$ όπως είναι για παράδειγμα η κατανομή Γάμμα με f(x) $=\gamma^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\gamma x}/\Gamma(\alpha)$με α > 1.

<u>Σχόλιο</u>

Για την κατανομή Γάμμα εάν $a \leq 1$ τότε ο λογάριθμος της f(x) είναι κυρτή συνάρτηση και η συνάρτηση κατανομής F(x) ανήκει στην κλάση DFR ενώ εάν $a \geq 1$ τότε ο λογάριθμος της f(x) είναι κοίλη συνάρτηση και η συνάρτηση κατανομής F(x) ανήκει στην κλάση IFR. (από Willmot & Lin, 2001)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Παραδείγματα

Στο παρών κεφάλαιο θα μελετήσουμε αριθμητικά αποτελέσματα για γνωστές IMRL κατανομές όπως οι Εκθετική κατανομή, μείξεις εκθετικών και η Γάμμα κατανομή αλλά και θα δώσουμε και παραδείγματα κατανομών που δεν ανήκουν σε αυτήν την κλάση. Θα διερευνήσουμε σχηματικά την κυρτότητα της πιθανότητας χρεοκοπίας και πώς αυτή μεταβάλλεται αναλόγως την (μη) κυρτότητα των κατανομών των αποζημιώσεων.

<u>Παραδειγμα 5.1.</u>

Υποθέτουμε ότι στο κλασικό μοντέλο οι αποζημιώσεις ακολουθούν μια εκθετική κατανομή με $a = \frac{1}{2}$, όπου η συνάρτηση πυκνότητας ισούται με:

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x},$$

και θεωρούμε ότι το περιθώριο ασφαλείας $\theta = 0.1$.

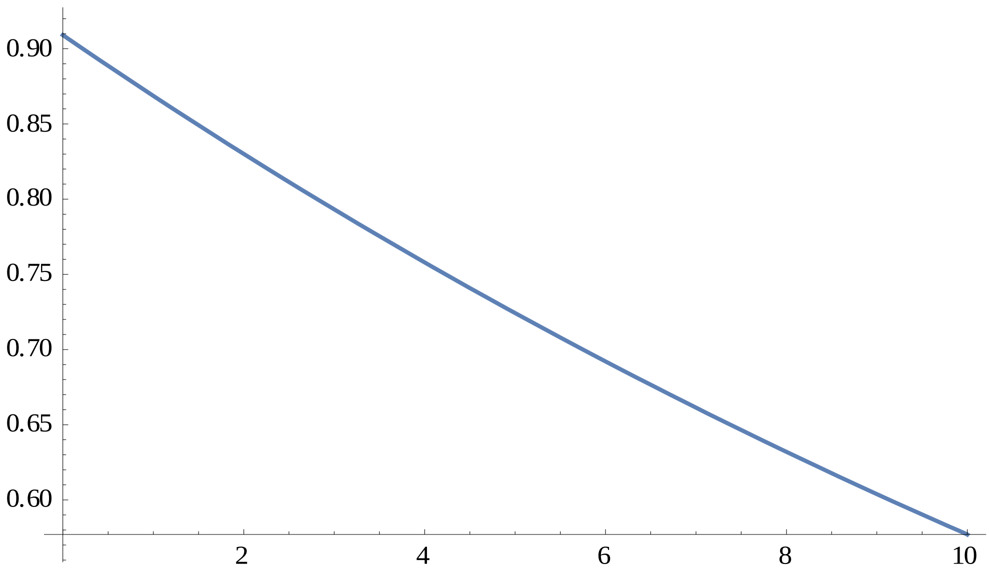
Ο μετασχηματισμός Laplace της $\psi_x(u)$ ισούται με

$$\psi_x(u) = \frac{1}{(\frac{1}{2}+s)(1.1-\frac{1}{2(\frac{1}{2}+s)})}.$$

Αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό Laplaceέχει υπολογιστεί η$\boldsymbol{\psi_x(u)}$μέσω Mathematica.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας $\boldsymbol{\psi_x(u)}$ είναι η εξής:

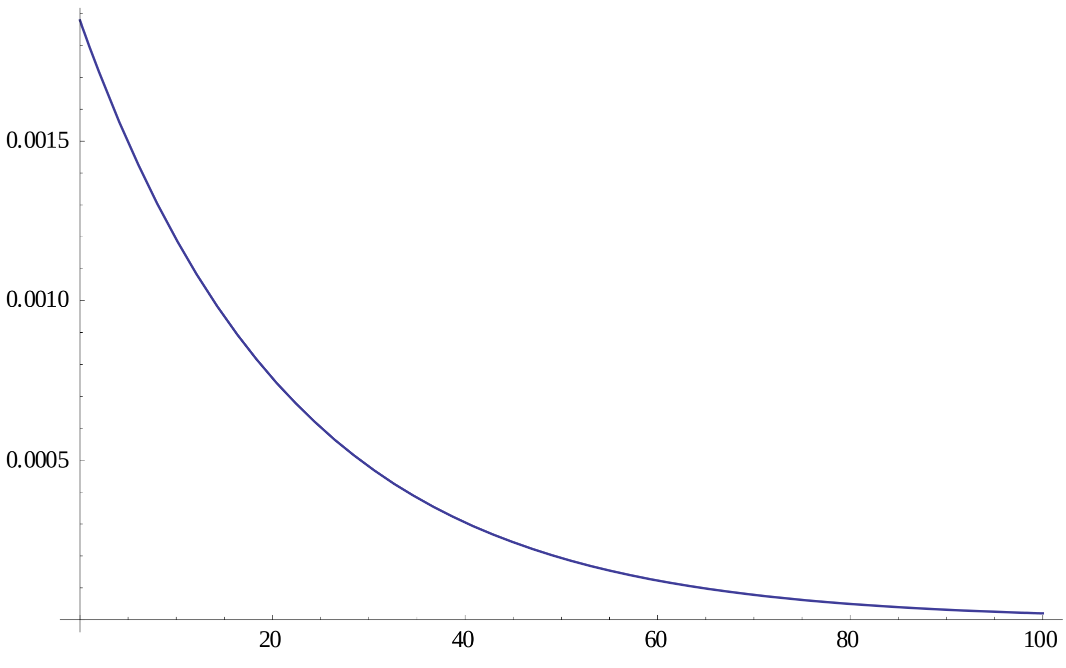
$$\psi_x(u) = \frac{10e^{-u/22}}{11}$$



Σχήμα 5.1.1.:Πιθανότητα χρεοκοπίας $\boldsymbol{\psi_x(u)}$

Η δεύτερη παράγωγος της $\psi_x(u)$ ισούται με

$$\psi''_x(u) = \frac{5e^{-u/22}}{2662}$$



Σχήμα 5.1.2.: Δεύτερη παράγωγος της πιθανότητας χρεοκοπίας $\boldsymbol{\psi_x(u)}$

Παρατηρούμε ότι ειναι θετική η δεύτερη παράγωγος ψ΄΄, άρα η $\psi_x(u)$είναι κυρτή συνάρτηση.

Παράδειγμα 5.2.

Έστω τώρα ότι η κατανομή των ατομικών ζημιών ακολουθεί μείξη εκθετικών με $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{1}{2}$, $b_1=3$, $b_1=7$, όπου η συνάρτηση πυκνότητας ισούται με

$$f(x)=\frac{3}{2}e^{-3x}+\frac{7}{2}e^{-7x}\ .$$

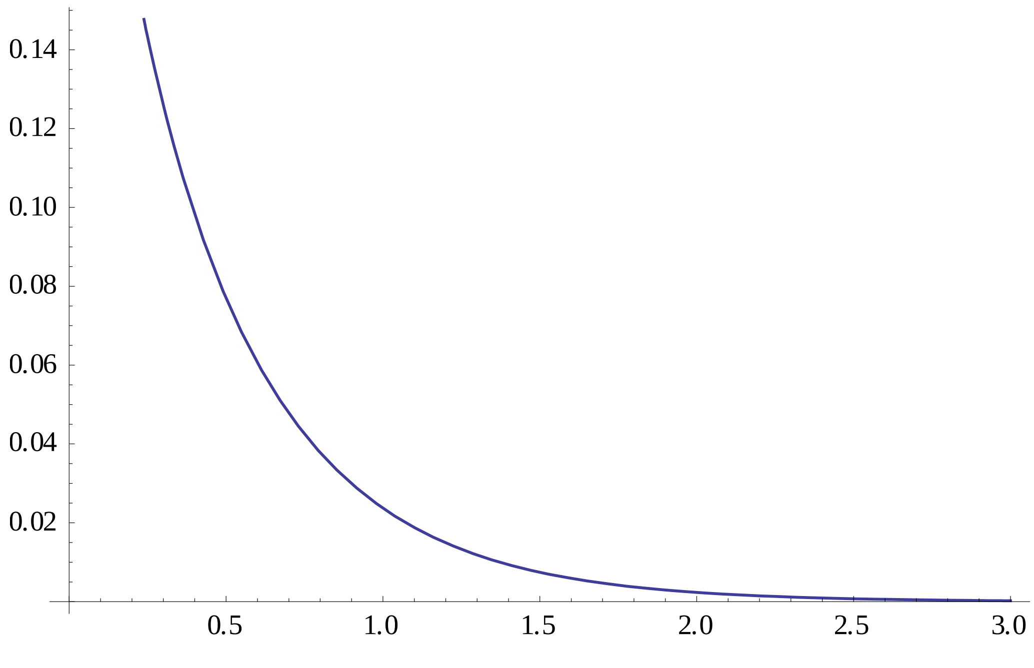
όπου θεωρούμε $\theta=\frac{5}{2}$

Ο μετασχηματισμός Laplace της $\psi_x(u)$ ισούται με

$$\psi_x(u)=\frac{\frac{7}{3+s}+\frac{3}{7+s}}{10(3.5-\frac{21}{5}(\frac{1}{2(3+s)}+\frac{1}{2(7+s)}))}.$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας $\boldsymbol{\psi_x(u)}$ είναι η εξής:

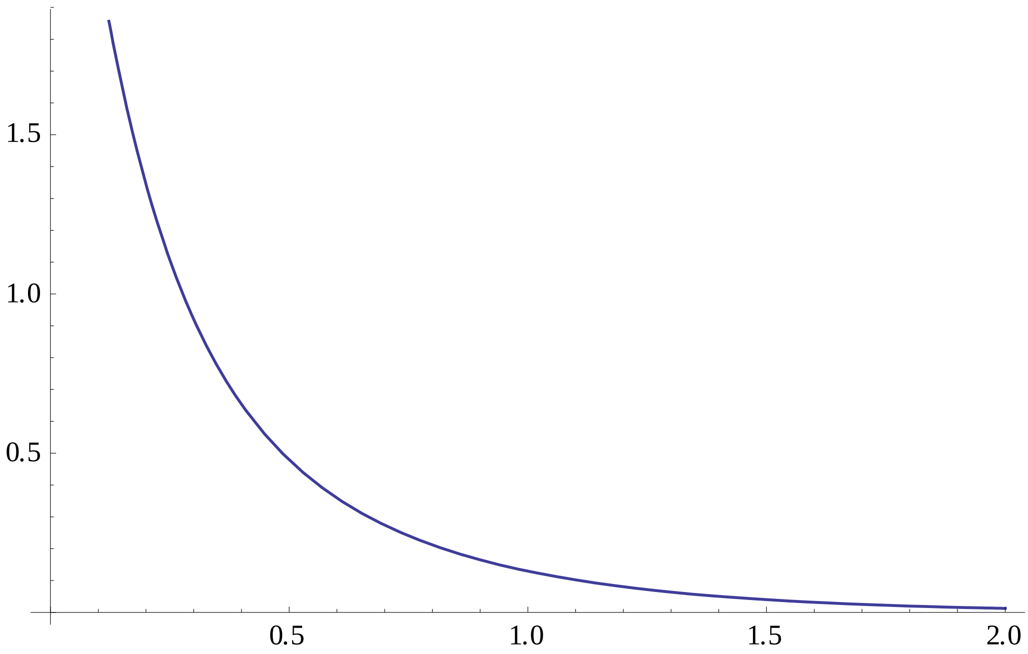
$$\psi_x(u)=\frac{1}{10}(0.4707e^{-6.488u}+2.386e^{-2.312u})$$



Σχήμα 5.2.1.:Πιθανότητα χρεοκοπίας $\boldsymbol{\psi_x(u)}$

Η δεύτερη παράγωγος της $\psi_x(u)$ ισούται με

$$\psi''_x(u)=\frac{1}{10}(19.816e^{-6.488u}+12.755e^{-2.312u})$$



Σχήμα 5.2.2.: Δεύτερη παράγωγος της πιθανότητας χρεοκοπίας $\boldsymbol{\psi_x(u)}$

Παρατηρούμε ότι είναι θετική η δεύτερη παράγωγος ψ'', άρα η $\psi_x(u)$είναι κυρτή συνάρτηση.

<u>Παράδειγμα 5.3.</u>

Έχουμε μια κατανομή Erlang με παραμέτρους $\alpha = \beta = 2$όπου η συνάρτηση πυκνότητας ισούται με

$$f(x) = \frac{(2^2 x e^{-2x})}{(2-1)!},$$

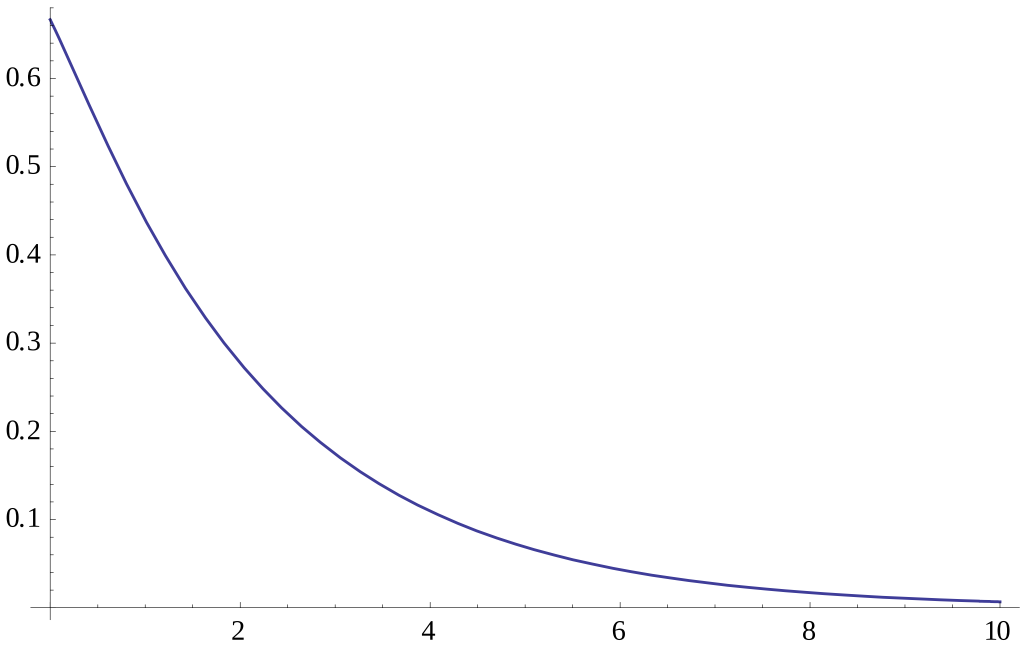
όπου θεωρούμε $\boldsymbol{\theta = \frac{1}{2}}$.

Ο μετασχηματισμός Laplace της $\psi_x(u)$ ισούται με

$$\psi_x(u) = \frac{\frac{1}{(2+s)^2} + \frac{1}{2+s}}{\frac{3}{2} - \frac{2}{(2+s)^2} - \frac{1}{2+s}}.$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας $\boldsymbol{\psi_x(u)}$ είναι η εξής:

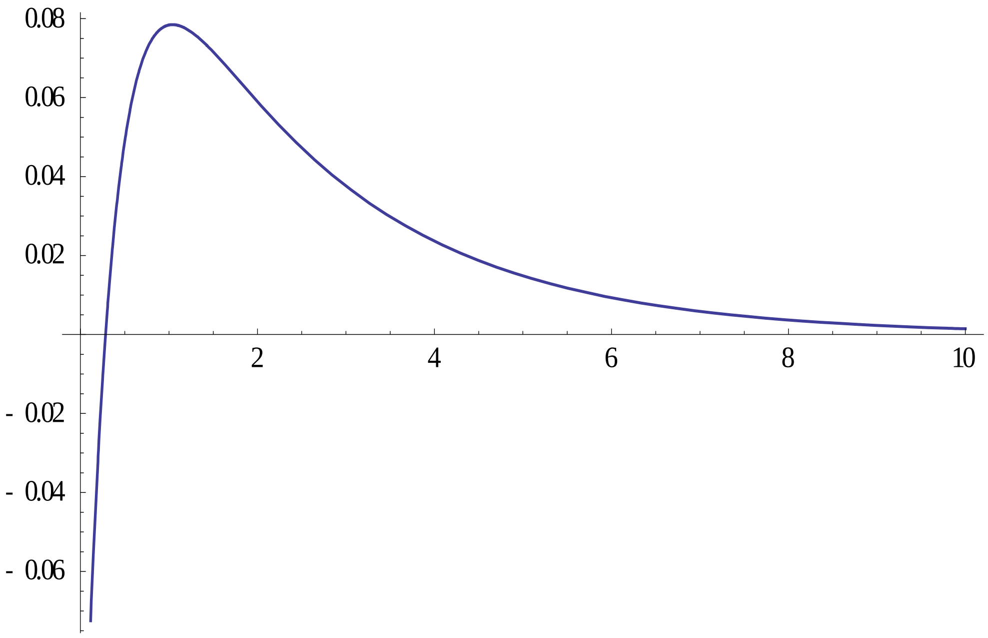
$$\psi_x(u) = \frac{-4e^{(-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3})u} + \sqrt{13}e^{(-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3})u} + 4e^{(-\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3})u} + \sqrt{13}e^{(-\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3})u}}{3\sqrt{13}}$$



Σχήμα 5.3.1.:Πιθανότητα χρεοκοπίας $\boldsymbol{\psi_x(u)}$

Η δεύτερη παράγωγος της $\psi_x(u)$ ισούται με

$$\psi''_x(u) = \frac{1}{3\sqrt{13}}\Big(-4\Big(-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3}\Big)^2 e^{\left(-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3}\right)u} + \sqrt{13}\Big(-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3}\Big)^2 e^{\left(-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3}\right)u} + 4\Big(-\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3}\Big)^2 e^{\left(-\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3}\right)u} + \sqrt{13}\Big(-\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3}\Big)^2 e^{\left(-\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3}\right)u}\Big)$$



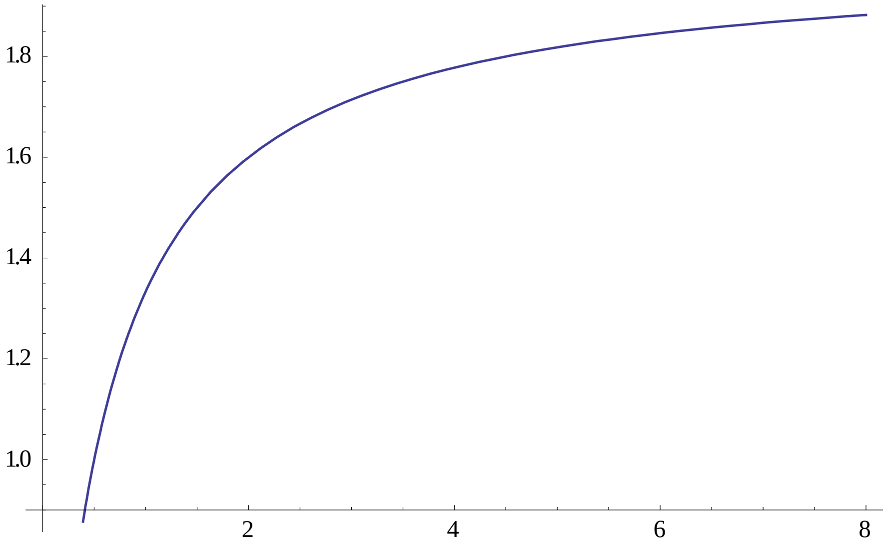
Σχήμα 5.3.2.: Δεύτερη παράγωγος της πιθανότητας χρεοκοπίας $\boldsymbol{\psi_x(u)}$

Είναι γνωστό ότι η κατανομή Γάμμα(α,β) για α > 1 δεν ανήκει στην κλάση IMRL. Όπως αναμέναμε, στο παράδειγμα μας που οι αποζημιώσεις ακολουθούν κατανομή

Γαμμα(2,2) δεν μας εξασφαλίζουν κυρτότητα για την αντίστοιχη πιθανότητα χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα, η δεύτερη παράγωγος της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi''(\mathrm{u})$ είναι αρνητική για $\mathrm{u} \in (0, 0.2831)$ και θετική για $\mathrm{u} \in (0.2831, +\infty)$.

Η βαθμίδα αποτυχίας δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{h(x)} = \frac{4e^{-2x}x}{1 - e^{-2x}(-1 + e^{2x} - 2x)}$$



Σχήμα 5.3.3.:Βαθμίδα αποτυχίας $h(\boldsymbol{x})$

<u>Παράδειγμα 5.4</u>

Έχουμε μία μείξη εκθετικής με γάμμα κατανομήμε παραμέτρους $\mathrm{a} = \frac{1}{2}$καιb $= 2$ όπου η συνάρτηση πυκνότητας ισούται με

$$f(x) = e^{-2x} + 2e^{-2x}x,$$

όπου θεωρούμε $\mathrm{c} = 1/2, \mathrm{l} = 1$ και $\theta = 1/3$,

Ο μετασχηματισμός Laplace της $\psi_x(u)$ ισούται με

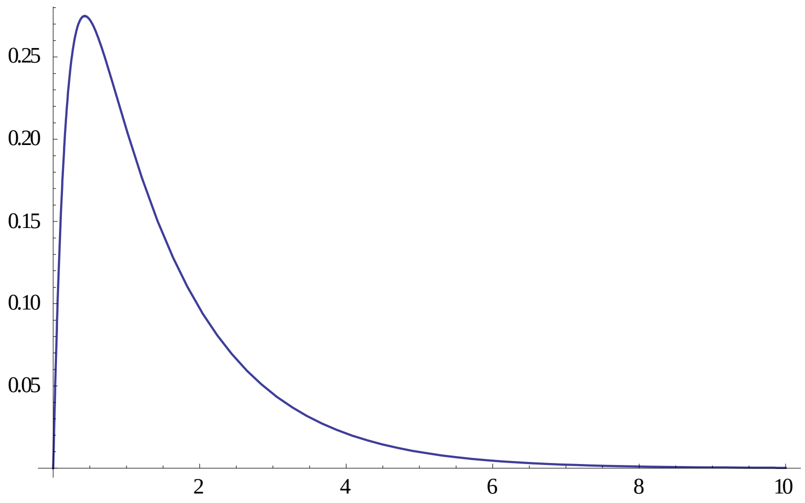
$$\psi_{\mathrm{x}}(\mathrm{u}) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{(2+s)^2} + \frac{1}{2+s}\right).$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας $\boldsymbol{\psi_x(u)}$ είναι η εξής:

$$\psi_x(u) = \frac{-7e^{(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})u} + 3\sqrt{5}e^{(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})u} + 7e^{(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})u} + 3\sqrt{5}e^{(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})u}}{8\sqrt{5}}$$

Η δεύτερη παράγωγος της $\psi_x(u)$ ισούται με

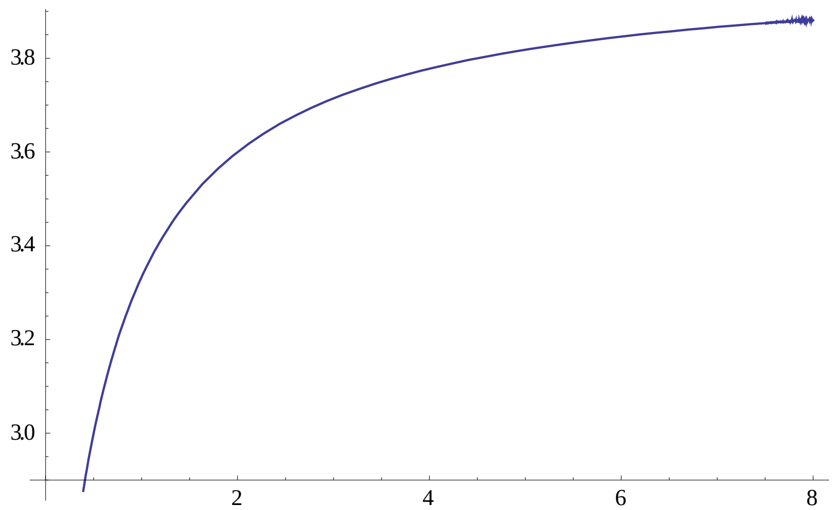
$$\psi''_x(u) = \frac{-7(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})^2 e^{(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})u} + 3\sqrt{5}(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})^2 e^{(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})u} + 7(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})^2 e^{(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})u} + 3\sqrt{5}(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})^2 e^{(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})u}}{8\sqrt{5}}$$



Σχήμα 5.4.1.: Δεύτερη παράγωγος της πιθανότητας χρεοκοπίας $\boldsymbol{\psi_x(u)}$

Η βαθμίδα αποτυχίας δίνεται από τη σχέση

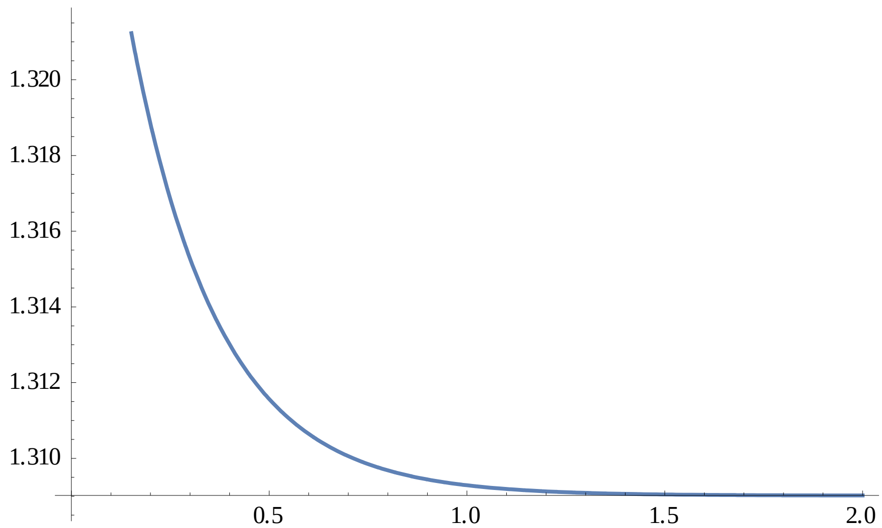
$$\mathrm{h(x)} = \frac{e^{2x}(e^{-2x}+2e^{-2x}x)}{1+x}.$$



Σχήμα 5.4.2.:Βαθμίδα αποτυχίας $h(\boldsymbol{x})$

Η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα άρα λέμε ότι είναι IFR.

Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζεται ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής



Σχήμα 5.4.3.: Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής

Συνεπώς, είναι DMRL όπως αναμενόταν λόγω της βαθμίδας αποτυχίας που είναι IFR.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Το παρόν τμήμα αφορά στις εντολές που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των διαγραμμάτων που παρατέθηκαν στο κεφάλαιο 5 της διατριβής. Όπως έχει αναφερθεί, χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό Wolfram Mathematica 8 (Mathematica).

<u>Παράδειγμα 5.1.</u>

$$a = 1/2;$$

f[x_]:=a*Exp[-a*x]
f[x]

$$\frac{e^{-x/2}}{2}$$

$$\mathrm{m1} = \mathrm{Integrate}[x * f[x], \{x, 0, \mathrm{Infinity}\}]$$

Fx[x_]:=Integrate[f[y],{y,0,x}]
Fx[x]

$$1 - e^{-x/2}$$

$$\mathrm{TailFx}[x] := 1 - \mathrm{Fx}[x]$$

$$\mathrm{TailFx}[x]$$

$$e^{-x/2}$$

$$\mathrm{fe[x\_]:} = \mathrm{TailFx}[x]/\mathrm{m1}$$

$$\mathrm{fe}[x]$$

$$\frac{e^{-x/2}}{2}$$

$$\mathrm{TailFe[x\_]:} = \mathrm{Integrate}[\mathrm{fe}[t], \{t, x, \mathrm{Infinity}\}]$$

TailFe[x]

$$e^{-x/2}$$

$$\mathrm{LTfe[s\_]:} = \mathrm{LaplaceTransform}[\mathrm{fe}[x], x, s]$$

$$\mathrm{LTfe}[s]$$

$$\frac{1}{2(\frac{1}{2} + s)}$$

LTtailFe[s_]:=LaplaceTransform[TailFe[x],x,s]
LTtailFe[s]

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + s}$$

$$\mathrm{theta} = 1/10;$$

$$\mathrm{psix0} = 1/(1 + \mathrm{theta})$$

$$\frac{10}{11}$$

LTpsix[s_]:=LTtailFe[s]/(1+theta-LTfe[s])
LTpsix[s]

$$\frac{\mathbf{1}}{\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{s}\right)\left(\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{10}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{s}\right)}\right)}$$

psix[u_]:=InverseLaplaceTransform[LTpsix[s],s,u]
psix[u]

$$\frac{10e^{-u/22}}{11}$$

$$\text{Plot}[\text{psix}[u],\{u,0,10\}]$$

$$D[\text{psix}[u],u]$$

$$-\frac{5}{121}e^{-\frac{u}{22}}$$

$$D[\text{D1psi}[u],u]$$

$$\frac{5e^{-u/22}}{2662}$$

$$\text{Plot}[\text{D2psi}[u],\{u,0,100\}]$$

Παράδειγμα 5.2.

```
f[x_]:=3/2*Exp[-3*x]+7/2*Exp[-7*x]
f[x]
```

$$\text{m1} = \text{Integrate}[x * f[x],\{x,0,\text{Infinity}\}]$$

```
Fx[x_]:=Integrate[f[y],{y,0,x}]
Fx[x]
```

$$1-\frac{e^{-7x}}{2}-\frac{e^{-3x}}{2}$$

```
TailFx[x_]:=1-Fx[x]
TailFx[x]
```

$$\frac{e^{-7x}}{2}+\frac{e^{-3x}}{2}$$

```
fe[x_]:=TailFx[x]/m1
fe[x]
```

$$\frac{21}{5}\left(\frac{e^{-7x}}{2}+\frac{e^{-3x}}{2}\right)$$

```
TailFe[x_]:=Integrate[fe[t],{t,x,Infinity}]
TailFe[x]
```

$$\frac{1}{10}e^{-7x}(3+7e^{4x})$$

```
LTfe[s_]:=LaplaceTransform[fe[x],x,s]
LTfe[s]
```

$$\frac{21}{5}\left(\frac{1}{2(3+s)}+\frac{1}{2(7+s)}\right)$$

```
LTtailFe[s_]:=LaplaceTransform[TailFe[x],x,s]
LTtailFe[s]
```

$$\frac{1}{10}\left(\frac{7}{3+s}+\frac{3}{7+s}\right)$$

$$\text{theta} = 5/2;$$

$$\text{psix0} = 1/(1+\text{theta})$$

$$\frac{2}{7}$$

```
LTpsix[s_]:=LTtailFe[s]/(1+theta-LTfe[s])
LTpsix[s]
```

$$\frac{\frac{7}{3+s}+\frac{3}{7+s}}{10\left(\frac{7}{2}-\frac{21}{5}\left(\frac{1}{2(3+s)}+\frac{1}{2(7+s)}\right)\right)}$$

```
psix[u_]:=InverseLaplaceTransform[LTpsix[s],s,u]
psix[u]
```

$$\frac{-7e^{(-\frac{22}{5}-\frac{\sqrt{109}}{5})u}+\sqrt{109}e^{(-\frac{22}{5}-\frac{\sqrt{109}}{5})u}+7e^{(-\frac{22}{5}+\frac{\sqrt{109}}{5})u}+\sqrt{109}e^{(-\frac{22}{5}+\frac{\sqrt{109}}{5})u}}{7\sqrt{109}}$$

$$\text{Plot}[\text{psix}[u],\{u,0,3\}]$$

$$D[\text{psix}[u],u]$$

$$\frac{1}{7\sqrt{109}}(-7(-\frac{22}{5}-\frac{\sqrt{109}}{5})e^{(-\frac{22}{5}-\frac{\sqrt{109}}{5})u}+\sqrt{109}(-\frac{22}{5}-\frac{\sqrt{109}}{5})e^{(-\frac{22}{5}-\frac{\sqrt{109}}{5})u}+7(-\frac{22}{5}+\frac{\sqrt{109}}{5})e^{(-\frac{22}{5}+\frac{\sqrt{109}}{5})u}+\sqrt{109}(-\frac{22}{5}+\frac{\sqrt{109}}{5})e^{(-\frac{22}{5}+\frac{\sqrt{109}}{5})u})$$

$$D[\text{D1psi}[u],u]$$

$$\frac{1}{7\sqrt{109}}(-7(-\frac{22}{5}-\frac{\sqrt{109}}{5})^2e^{(-\frac{22}{5}-\frac{\sqrt{109}}{5})u}+\sqrt{109}(-\frac{22}{5}-\frac{\sqrt{109}}{5})^2e^{(-\frac{22}{5}-\frac{\sqrt{109}}{5})u}+7(-\frac{22}{5}+\frac{\sqrt{109}}{5})^2e^{(-\frac{22}{5}+\frac{\sqrt{109}}{5})u}+\sqrt{109}(-\frac{22}{5}+\frac{\sqrt{109}}{5})^2e^{(-\frac{22}{5}+\frac{\sqrt{109}}{5})u})$$

$$\text{Plot}[\text{D2psi}[u],\{u,0,2\}]$$

<u>Παράδειγμα 5.3.</u>

$$f[\text{x\_}]:=((2\text{^}2)*x*\text{Exp}[-2*x])/((2-1)!)$$

$$f[x]$$

$$\text{m1}=\text{Integrate}[x*f[x],\{x,0,\text{Infinity}\}]$$

Fx[x_]:=Integrate[f[y],{y,0,x}]
Fx[x]

$$e^{-2x}(-1+e^{2x}-2x)$$

TailFx[x_]:=1-Fx[x]
TailFx[x]

$$1-e^{-2x}(-1+e^{2x}-2x)$$

h[x_]:=f[x]/TailFx[x]
h[x]

$$\frac{4e^{-2x}x}{1-e^{-2x}(-1+e^{2x}-2x)}$$

$$\text{Plot}[\frac{4e^{-2x}x}{1-e^{-2x}(-1+e^{2x}-2x)},\{x,0,10\}]$$

fe[x_]:=TailFx[x]/m1
fe[x]

$$1-e^{-2x}(-1+e^{2x}-2x)$$

TailFe[x_]:=Integrate[fe[t],{t,x,Infinity}]
TailFe[x]

$$e^{-2x}(1+x)$$

LTfe[s_]:=LaplaceTransform[fe[x],x,s]
LTfe[s]

$$\frac{2}{(2+s)^2}+\frac{1}{2+s}$$

LTtailFe[s_]:=LaplaceTransform[TailFe[x],x,s]
LTtailFe[s]

$$\frac{1}{(2+s)^2}+\frac{1}{2+s}$$

$$\text{theta}=1/2;$$

$$\text{psix0}=1/(1+\text{theta})$$

$2/3$

LTpsix[s_]:=LTtailFe[s]/(1+theta-LTfe[s])
LTpsix[s]

$$\frac{\frac{1}{(2+s)^2}+\frac{1}{2+s}}{\frac{3}{2}-\frac{2}{(2+s)^2}-\frac{1}{2+s}}$$

psix[u_]:=InverseLaplaceTransform[LTpsix[s],s,u]
psix[u]

$$\frac{-4e^{\left(-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3}\right)u}+\sqrt{13}e^{\left(-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3}\right)u}+4e^{\left(-\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3}\right)u}+\sqrt{13}e^{\left(-\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3}\right)u}}{3\sqrt{13}}$$

$\text{Plot}[\text{psix}[u],\{u,0,10\}]$

$D[\text{psix}[u],u]$

$$\frac{1}{3\sqrt{13}}(-4(-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3})e^{(-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3})u}+\sqrt{13}(-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3})e^{(-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3})u}+4(-\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3})e^{(-\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3})u}+\sqrt{13}(-\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3})e^{(-\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3})u})$$

$D[\text{D1psi}[u],u]$

$$\frac{1}{3\sqrt{13}}(-4(-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3})^2e^{(-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3})u}+\sqrt{13}(-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3})^2e^{(-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3})u}+4(-\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3})^2e^{(-\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3})u}+\sqrt{13}(-\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3})^2e^{(-\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3})u})$$

$\text{Plot}[\text{D2psi}[u],\{u,0,3\}]$

<u>Παράδειγμα 5.4.</u>

f[x_]:=1/2*2*Exp[-2*x]+(1-1/2)*2^2*x*Exp[-2*x]
f[x]

$$e^{-2x}+2e^{-2x}x$$

$\text{m1} = \text{Integrate}[x*f[x],\{x,0,\text{Infinity}\}]$

Fx[x_]:=Integrate[f[y],{y,0,x}]
Fx[x]

$$1-e^{-2x}(1+x)$$

TailFx[x_]:=1-Fx[x]
TailFx[x]

$$e^{-2x}(1+x)$$

h[x_]:=f[x]/TailFx[x]
h[x]

$$\frac{e^{2x}(e^{-2x}+2e^{-2x}x)}{1+x}$$

fe[x_]:=TailFx[x]/m1
fe[x]

$$\frac{4}{3}e^{-2x}(1+x)$$

TailFe[x_]:=Integrate[fe[t],{t,x,Infinity}]
TailFe[x]

$$\frac{1}{3}e^{-2x}(3+2x)$$

LTfe[s_]:=LaplaceTransform[fe[x],x,s]
LTfe[s]

$$\frac{4}{3}(\frac{1}{(2+s)^2}+\frac{1}{2+s})$$

$c = 1/2;$

$$l = 1;$$

$$\text{theta} = (c/(1 * \text{m1})) - 1$$

LTTailFe[s_]:=LaplaceTransform[TailFe[t],t,s]
LTTailFe[s]

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{(2+s)^2} + \frac{3}{2+s}\right)$$

LTpsix[s_]:=LTTailFe[s]/(1+theta-LTfe[s])
LTpsix[s]

$$\frac{\frac{2}{(2+s)^2} + \frac{3}{2+s}}{3\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{(2+s)^2} + \frac{1}{2+s}\right)\right)}$$

psi[u_]:=InverseLaplaceTransform[LTpsix[s],s,u]
psi[u]

$$\frac{-7e^{(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})u} + 3\sqrt{5}e^{(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})u} + 7e^{(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})u} + 3\sqrt{5}e^{(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})u}}{8\sqrt{5}}$$

derpsi[u_]:=D[psi[u],u]
derpsi[u]

$$\frac{-7(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})e^{(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})u} + 3\sqrt{5}(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})e^{(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})u} + 7(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})e^{(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})u} + 3\sqrt{5}(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})e^{(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})u}}{8\sqrt{5}}$$

der2psi[u_]:=D[derpsi[u],u]
der2psi[u]

$$\frac{-7(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})^2e^{(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})u} + 3\sqrt{5}(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})^2e^{(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})u} + 7(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})^2e^{(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})u} + 3\sqrt{5}(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})^2e^{(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})u}}{8\sqrt{5}}$$

$$\text{Plot}[\frac{-7(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})^2e^{(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})u} + 3\sqrt{5}(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})^2e^{(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})u} + 7(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})^2e^{(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})u} + 3\sqrt{5}(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})^2e^{(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})u}}{8\sqrt{5}}, \{u, 0, 10\}]$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική βιβλιογραφία

- Πολίτης Κ. Εισαγωγή στην θεωρία συλλογικού κινδύνου. Εκδόσεις Σταμούλη, 2017
- Πολίτης Κ. Πανεπιστημιακές σημειώσεις στο μάθημα «Θεωρία Κινδύνου ΙΙ» του ΠΜΣ Αναλογιστικής επιστήμης και Διαχείρισης Κινδύνων, 2021
- Δουλγεράκης Σ. Διπλωματική Εργασία «Προσεγγίσεις Τύπου Tijms στο Συλλογικό Πρότυπο της Θεωρίας Κινδύνων», ΠΜΣ Αναλογιστικής επιστήμης και Διαχείρισης Κινδύνων 2020
- Γραματικοπούλου Δ. Διπλωματική Εργασία «Σύγκριση Πιθανοτήτων Χρεοκοπίας με χρήση Στοχαστικών Διατάξεων», ΠΜΣ Αναλογιστικής επιστήμης και Διαχείρισης Κινδύνων 2021

Ξένη βιβλιογραφία

- David Landriault, Bin Li, Sooie-Hoe Loke, Gordon E. Willmot, Di Xuc «A note on the convexity of ruin probabilities», 2017
- Szekli, R. (1986) On the concavity of the waiting time distribution insome GI/G/I queues. Journal of Applied Probability 23, 555-561.
- Shanthikumar, J. G. (1988). DFR properties of first-passage times and its preservation under geometric compounding. Annals of Probability 33, 397-406.
- Marshall A. & Olkim, I. (2007) Life Distributions. Spinger Science and Business Media, LLC
- Willmot, G. E. & Lin, X. S. (2001) Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications. Springer Science and Business Media, LLC
- Bondesson L. (1983) On preservation of classes of life distributions under reliability operations: some complementary results. Naval Research Logistics Quarterly, Vol 30 (3), 443-447.

- Barlow, R. E. & Proschan, F. (1996) Mathematical Theory of Reliability. Wiley and Sons Inc.
- Guess, F. & Proschan, F. (1985) Mean Residual Life: Theory and Applications. North Carolina State University and Florida State University.

Ηλεκτρονικέςπηγές

- https://opencourses.uoa.gr/modules/document/file.php/MATH107/%CE%94%CE%B9%CE%B4%CE%B1%CE%BA%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8C%20%CE%A0%CE%B1%CE%BA%CE%AD%CF%84%CE%BF/%CE%A3%CE%B7%CE%BC%CE%B5%CE%B9%CF%8E%CF%83%CE%B5%CE%B9%CF%82/PDF/kyrth_analysh_enothta_05.pdf
- https://testbook.com/maths/convex-function
- https://en.wikipedia.org/wiki/Convex_function
- https://openclass.teiwm.gr/modules/document/file.php/AF111/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC_%CE%A7%CE%A1%CE%97%CE%9C_13.pdf