

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Εφαρμογές των Στοχαστικών  
Διατάξεων στη Θεωρία Συλλογικού  
Κινδύνου

Λάζαρος Κανελλόπουλος

Διδακτορική Διατριβή

Υποβλήθηκε στο  
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης  
του Πανεπιστημίου Πειραιώς

Πειραιάς  
Αύγουστος 2024

---

UNIVERSITY OF PIRAEUS



DEPARTMENT OF STATISTICS AND  
INSURANCE SCIENCE

**Applications of Stochastic Orders in  
Collective Risk Theory**

Lazaros Kanellopoulos

PhD Thesis

Submitted to  
Department of Statistics and Insurance Science  
of the University of Piraeus

Piraeus  
August 2024

---

Στη Μαρία, στη Σοφία και στον Κώστα

---

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα αναπληρωτή καθηγητή Κωνσταντίνο Πολίτη για την αμέριστη και διαρκή βοήθεια του. Οι συμβουλές, τα σχόλια και οι κατευθυντήριες γραμμές του διετέλεσαν καθοριστικό παράγοντα στη βελτίωση και ολοκλήρωση αυτής της διατριβής. Μου μετέδωσε σε μεγάλο βαθμό τα βασικά χαρακτηριστικά ενός καλού ερευνητή, τα οποία είναι η υπομονή, η δουλειά και η αυστηρότητα στη σκέψη. Πράγματα πολύ σημαντικά και στη διαμόρφωση του χαρακτήρα ενός ανθρώπου.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους γονείς μου Μαρία και Κώστα και τους θείους μου Σοφία και Κώστα που με στήριζαν με ποικίλους τρόπους καθ'όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος, είμαι υπερήφανος να αναφέρω ότι αυτή η διατριβή είχε την οικονομική στήριξη από το ίδρυμα κρατικών σπουδών (ΙΚΥ) και συγκεκριμένα:

Η υλοποίηση της διδακτορικής διατριβής συγχρηματοδοτήθηκε από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος "Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση", 2014-2020, στο πλαίσιο της Πράξης "Ενίσχυση του ανθρωπίνου δυναμικού μέσω της υλοποίησης διδακτορικής έρευνας Υποδράση 2: Πρόγραμμα χορήγησης υποτροφιών ΙΚΥ σε υποψήφιους διδάκτορες των ΑΕΙ της Ελλάδας.



Επιχειρησιακό Πρόγραμμα  
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού,  
Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



---

## Περίληψη

Οι στοχαστικές διατάξεις αφορούν τη σύγκριση τυχαίων μεταβλητών υπό κάποια στοχαστική έννοια. Σε πολλές περιπτώσεις μας ενδιαφέρει να συγκρίνουμε δύο μεταβλητές, για παράδειγμα στα Αναλογιστικά μαθηματικά (insurance mathematics) αν οι μεταβλητές αυτές παριστάνουν ατομικές ζημιές σε δύο χαρτοφυλάκια και μία μεταβλητή είναι μεγαλύτερη από την άλλη υπό κάποια έννοια, τότε το αντίστοιχο χαρτοφυλάκιο παρουσιάζει μεγαλύτερη επικινδυνότητα. Επίσης, οι στοχαστικές διατάξεις μας βοηθάνε στην εύρεση φραγμάτων τυχαίων μεταβλητών που ο υπολογισμός κάποιων συναρτήσεων τους (δεξιά ουρά, βαθμίδα αποτυχίας κ.α.) είναι πολύπλοκος. Η θεωρία των στοχαστικών διατάξεων έχει αποτελέσει ένα σημαντικό εργαλείο στη μελέτη στοχαστικών μοντέλων με εφαρμογές στη θεωρία των ουρών, στη θεωρία αξιοπιστίας, στα χρηματοοικονομικά και στη θεωρία του συλλογικού κινδύνου.

Στην παρούσα διατριβή, αρχικά μελετάμε τη θεωρία Χρεοκοπίας αναπτύσσοντας το κλασικό μοντέλο και το κλασικό μοντέλο εφοδιασμένο με διάχυση και δίνουμε κάποια παραδείγματα με γνωστές κατανομές για την καλύτερη κατανόηση.

Στο δεύτερο Κεφάλαιο παρουσιάζουμε γνωστές στοχαστικές διατάξεις της βιβλιογραφίας, όπως επίσης, περιγράφουμε την άμεση σύνδεσή τους με τις κλάσεις γήρανσης (ή κλάσεις αξιοπιστίας). Η κατηγοριοποίηση (σε κλάσεις) τυχαίων μεταβλητών συναρτήσει της μονοτονίας κάποιων χαρακτηριστικών συναρτήσεων τους (βαθμίδα αποτυχίας, συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου κ.α.) μας δίνει σημαντική πληροφορία για την ίδια την τυχαία μεταβλητή.

Στο τρίτο Κεφάλαιο δίνουμε κάποιες στοχαστικές διατάξεις και κλάσεις γήρανσης σχετιζόμενες με το μετασχηματισμό Laplace και εμπλουτίζουμε τη βιβλιογραφία ορίζοντας κάποιες νέες κλάσεις γήρανσης. Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε την κλειστότητα ως προς τις συνελίξεις της κλάσης  $NBU_{Lt}$ , όπως επίσης, δίνουμε κάποια αποτελέσματα για το λόγο των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace. Είναι γεγονός ότι πολλές φορές δεν διατηρείται η σύγκριση τυχαίων μεταβλητών σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού τους. Μια πιο ρεαλιστική οπτική, είναι η σύγκριση τυχαίων μεταβλητών υπό κάποια στοχαστική έννοια πάνω σε διάστημα. Στο τέταρτο Κεφάλαιο, περιγράφουμε γνωστά αποτελέσματα της βιβλιογραφίας των στοχαστικών διατάξεων πάνω σε διάστημα και ορίζουμε νέες στοχαστικές διατάξεις πάνω σε διάστημα σχετιζόμενες με το μετασχηματισμό Laplace εφαρμόζοντας αυτά τα αποτελέσματα στη θεωρία χρεοκοπίας.

Στο πέμπτο Κεφάλαιο εφαρμόζουμε τη θεωρία των στοχαστικών διατάξεων σε υποδείγματα της θεωρίας κινδύνων. Συγκεκριμένα, δίνουμε μια σύντομη επισκόπηση της βιβλιογραφίας και στη συνέχεια μελετάμε στοχαστικές διατάξεις και κλάσεις αξιοπιστίας που αφορούν ποσότητες σχετιζόμενες με τη χρεοκοπία (πιθανότητα χρεοκοπίας, κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, κ.α.) στο κλασικό μοντέλο και στο κλασικό μοντέλο εφοδιασμένο με διάχυση. Επίσης, μελετάμε υπό ποιες συνθήκες οι στοχαστικές διατάξεις μεταξύ των ζημιών διατηρούνται και για τις αντίστοιχες μέγιστες σωρευτικές απώλειες.

Τέλος, στο έκτο Κεφάλαιο περιγράφουμε τη σύνδεση των στοχαστικών διατάξεων με τις μετρικές πιθανοτήτων. Όσο και αν φαίνονται ξένα εργαλεία μεταξύ τους,

---

αποδεικνύεται ότι σχετίζονται άμεσα. Όπως και οι στοχαστικές διατάξεις, έτσι και οι μετρικές πιθανοτήτων μας βοηθάνε να αποκτήσουμε φράγματα και προσεγγίσεις για άγνωστες τυχαίες μεταβλητές. Εμείς παρουσιάζουμε γνωστές μετρικές πιθανοτήτων και περιγράφουμε τη σύνδεσή τους με τις στοχαστικές διατάξεις που μελετήσαμε στην παρούσα διατριβή. Μελετάμε το πρόβλημα ευστάθειας (problem of stability) για το κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας όσον αφορά την πιθανότητα χρεοκοπίας και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, δίνοντας επιπλέον κάποια αριθμητικά παραδείγματα.

---

## *Abstract*

Roughly speaking, stochastic orders are a powerful tool from probability theory that allows random variables to be compared. In several cases, we are interested in comparing two variables, for example, in Insurance Mathematics, if these random variables represent individual claims, then their comparison enables us to compare the risk associated with the two portfolios. Additionally, stochastic orders help in finding bounds or approximations for random variables that their characteristics (e.g. right-tail distribution, failure rate function, etc) are difficult to obtain analytically. The theory of stochastic orders has been proposed as a significant tool in studying stochastic models with applications in queueing theory, finance, reliability theory and collective risk theory.

In this thesis, we first study ruin theory by illustrating the classical model and classical model perturbed by diffusion, providing some examples with known distribution functions for better understanding.

In the second Chapter, we present some well known stochastic orders, as well as describe their direct connection with aging classes (or reliability classes). The classification of random variables based on the monotonicity of certain characteristic functions (failure rate, mean residual function, Laplace transform, etc) provides important information about them.

In the third Chapter, we present some stochastic orders and aging classes related to the Laplace transform. In particular, we enrich the literature by defining some new aging classes. We show that the  $NBU_{Lt}$  class is closed under convolution and we also obtain results for the ratio of derivatives of the Laplace transform between two distributions.

It is natural that the comparison of random variables does not always hold over their entire domain. We believe that a more realistic perspective is the comparison of random variables over an interval. In the fourth Chapter, we describe known results from the literature on stochastic orders over an interval and define some new stochastic orders over an interval related to the Laplace transform, applying these results to Ruin theory.

In the fifth Chapter, we apply the theory of stochastic orders to risk models. Specifically, we give a brief review of the literature and then provide new results about stochastic comparisons of ruin-related quantities, such as compound geometric random variables and the deficit at ruin, in the classical or the renewal model. We also give some comparison results for the classical risk process with diffusion.

Finally, in the sixth Chapter, we describe the connection between stochastic orders and probability metrics. Although seemingly unrelated, these concepts are directly connected. Probability metrics help us to obtain bounds and approximations for unknown random variables. We present some well known probability metrics and describe their connection to the stochastic orders studied in our thesis in previous chapters. We also study the problem of stability of the classical risk model regarding the probability of ruin and the deficit at the time of ruin, providing some numerical examples.



# Περιεχόμενα

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Θεωρία Χρεοκοπίας</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1      | Εισαγωγή . . . . .  | 1         |
| 1.2      | Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων . . . . .  | 2         |
| 1.2.1    | Μετασχηματισμός Laplace και συνελίζεις συναρτήσεων και κατανομών . . . . .                          | 4         |
| 1.2.2    | Ανανεωτικές εξισώσεις . . . . .   | 6         |
| 1.2.3    | Η λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης . . . . .   | 7         |
| 1.3      | Κλασικό Μοντέλο . . . . .   | 9         |
| 1.3.1    | Στοχαστική Ανέλιξη Πλεονάσματος . . . . .   | 9         |
| 1.3.2    | Υποθέσεις Κλασικού Μοντέλου . . . . .   | 10        |
| 1.3.3    | Συντελεστής προσαρμογής . . . . .   | 13        |
| 1.3.4    | Κλιμακωτά Ύψη . . . . .   | 13        |
| 1.4      | Εφαρμογές . . . . .   | 16        |
| 1.5      | Μελέτη του κλασικού μοντέλου εφοδιασμένο με διάχυση . . . . .                                       | 18        |
| <b>2</b> | <b>Στοχαστικές Διατάξεις</b>  | <b>23</b> |
| 2.1      | Εισαγωγή . . . . .  | 23        |
| 2.2      | Ποσοστιαία συνάρτηση . . . . .  | 23        |
| 2.3      | Βαθμίδα αποτυχίας . . . . .   | 24        |
| 2.4      | Υπολειπόμενος χρόνος ζωής . . . . .   | 27        |
| 2.5      | Στοχαστικές Διατάξεις τυχαίων μεταβλητών . . . . .  | 33        |
| <b>3</b> | <b>Στοχαστικές διατάξεις σχετιζόμενες με το μετασχηματισμό Laplace</b>                              | <b>41</b> |
| 3.1      | Εισαγωγή . . . . .  | 41        |
| 3.2      | Διατάξεις σχετιζόμενες με το μετασχηματισμό Laplace . . . . .                                       | 43        |
| 3.3      | Ιδιότητες κάποιων κλάσεων Γήρανσης . . . . .  | 53        |
| 3.4      | Ολοκληροστοχαστικές Διατάξεις . . . . .   | 71        |
| <b>4</b> | <b>Στοχαστικές διατάξεις σε διάστημα <math>[a, b]</math></b>  | <b>75</b> |
| 4.1      | Εισαγωγή . . . . .  | 75        |
| 4.2      | Ορισμοί . . . . .   | 75        |
| 4.2.1    | Φράγματα αξιοπιστίας για $DFR$ κατανομές . . . . .  | 77        |
| 4.3      | Στοχαστικές διατάξεις πάνω σε διάστημα $[a, b]$ σχετιζόμενες με το μετασχηματισμό Laplace . . . . . | 82        |
| <b>5</b> | <b>Εφαρμογές Στοχαστικών Διατάξεων σε υποδείγματα της</b>   |           |

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>θεωρίας κινδύνων</b>   | <b>91</b>  |
| 5.1 Εισαγωγή . . . . .  | 91         |
| 5.2 Ανανεωτικό μοντέλο- Έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας . . . . .                                     | 92         |
| 5.3 Στοχαστικές διατάξεις για την κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας . . . . .           | 96         |
| 5.4 Στοχαστικές διατάξεις για μια γενίκευση της συνάρτησης του ελλείμματος. . . . .                     | 107        |
| 5.5 Εφαρμογές στο Κλασικό Μοντέλο και στο Ανανεωτικό μοντέλο με Διάχυση . . . . .                       | 113        |
| 5.5.1 Ο μετασχηματισμός Laplace για μία σύνθετη γεωμετρική κατανομή . . . . .                           | 113        |
| 5.5.2 Κλασικό Μοντέλο με διάχυση . . . . .  | 116        |
| 5.6 Μοντέλο Sparre Andersen με διάχυση . . . . .  | 125        |
| <b>6 Ολοκληρωτικές μετρικές πιθανοτήτων</b>   | <b>129</b> |
| 6.1 Εισαγωγή . . . . .  | 129        |
| 6.2 Μετρικές πιθανοτήτων . . . . .  | 130        |
| 6.2.1 Ολοκληρωτικές μετρικές πιθανοτήτων και ολοκληρωτικές διατάξεις . . . . .                          | 130        |
| 6.3 Μετρικές σχετιζόμενες με το μετασχηματισμό Laplace . . . . .  | 135        |
| 6.4 Εφαρμογές μετρικών πιθανοτήτων για τυχαία αθροίσματα - Προσεγγίσεις στη θεωρία Χρεοκοπίας . . . . . | 137        |
| 6.4.1 Ιδιότητες συνέχειας στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας . . . . .                                      | 137        |
| 6.4.2 Συνέχεια για το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας. . . . .  | 143        |
| 6.5 Αριθμητικές εφαρμογές . . . . .   | 146        |
| <b>A' Κίνηση Brown</b>  | <b>149</b> |
| <b>B' Θεωρία σταθερού σημείου</b>   | <b>151</b> |

# Κατάλογος Σχημάτων

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 1.1 | Τα Κλιμακωτά Ύψη και η Μέγιστη Σωρευτική Απώλεια. . . . .   | 15  |
| 2.1 | Ποσοστιαία συνάρτηση $F^{-1}$ της συνάρτησης κατανομής $F$ για διάφορα επίπεδα πιθανότητας. . . . . | 24  |
| 3.1 | Σχέσεις μεταξύ στοχαστικών διατάξεων. . . . .   | 49  |
| 3.2 | Σημεία αλλαγής της διάταξης $\leq_{d-Lt-r}$ . . . . .   | 65  |
| 3.3 | Σημεία αλλαγής της διάταξης $\overline{F}, \overline{G}_1, \overline{G}_2$ . . . . .                | 72  |
| 4.1 | Βαθμίδα αποτυχίας της $X$ και της $Y \sim Exp(b)$ . . . . .   | 77  |
| 5.1 | $\leq_{Lt}$ διάταξη μεταξύ $Z_1$ (και $Z_{10}$ ) και $X_F$ . . . . .                                | 100 |
| 5.2 | $\leq_{mgf}$ διάταξη και $Z_1$ (και $Z_{10}$ ) και $X_F$ . . . . .                                  | 101 |
| 5.3 | Στοχαστικές συγκρίσεις των $X, Y$ και $Z$ . . . . .   | 120 |
| 5.4 | Μετασχηματισμοί Laplace των $\psi_{t,X}(u), \psi_{t,Y}(u)$ και $\psi_{t,Z}(u)$ . . . . .            | 121 |
| 5.5 | Μετασχηματισμοί Laplace των $X, Y$ και $Z$ . . . . .  | 124 |
| 5.6 | Μετασχηματισμοί Laplace και βαθμίδες αποτυχίας των $X$ και $Y$ . . . . .                            | 128 |

---

# Κατάλογος Πινάκων

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 2.1 | Βαθμίδα αποτυχίας - Μέσος Υπολειπόμενος χρόνος. . . . .   | 33  |
| 2.2 | Μονοτονία $r(t)$ και $m(t)$ . . . . .   | 33  |
| 3.1 | Ισχυρότητα των Κλάσεων Γήρανσης. . . . .  | 53  |
| 3.2 | Κλειστότητα Κλάσεων Γήρανσης. . . . .   | 55  |
| 3.3 | Αποτελέσματα στοχαστικών διατάξεων ως απόρροια των σημείων αλλαγής μονοτονίας. . . . .  | 61  |
| 3.4 | Οικογένειες ολοκληροστοχαστικών διατάξεων. . . . .  | 72  |
| 4.1 | Άνω φράγματα για $DFR$ κατανομές. . . . .   | 81  |
| 4.2 | Άνω φράγματα για $\psi(u)$ . . . . .  | 82  |
| 5.1 | Οι ρίζες $r_1, r_2$ και $r_3$ και οι συντελεστές $C_1, C_2$ και $C_3$ . . . . .   | 120 |
| 6.1 | Απόσταση πιθανοτήτων χρεοκοπίας για μείξη εκθετικών με μια εκθετική κατανομή με την ίδια μέση τιμή. . . . .                                       | 147 |
| 6.2 | $X^{(1)} \sim Erlang(3, 3)$ και $X^{(0)}$ με ουρά $\bar{F}_{X^{(0)}}(t) = \frac{1}{2}e^{-5t/4} + \frac{1}{2}e^{-5t/6}$ και $\theta = 4$ . . . . . | 148 |
| 6.3 | $X^{(1)}$ με ουρά $\bar{F}_{X^{(1)}}(t) = \frac{1}{2}e^{-5t/4} + \frac{1}{2}e^{-5t/6}$ με $X^{(0)} \sim Exp(1)$ και $\theta = 4$ . . . . .        | 148 |

---

# Εισαγωγή

Η θεωρία των στοχαστικών διατάξεων (stochastic orders) αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για τη μελέτη των στοχαστικών μοντέλων σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών όπως η Θεωρία Ουρών, η Θεωρία Αξιοπιστίας, τα χρηματοοικονομικά, τα αναλογιστικά μαθηματικά. Σε πολλές περιπτώσεις η μελέτη πολύπλοκων στοχαστικών μοντέλων μας οδηγεί να βρούμε μαθηματικά εργαλεία με σκοπό την εύρεση προσεγγίσεων και φραγμάτων. Στη βιβλιογραφία των στοχαστικών μοντέλων, η σύγκριση ποσοτήτων τέτοιων μοντέλων υπό κάποια στοχαστική έννοια αποτελεί ένα σημαντικό και ραγδαία αναπτυσσόμενο εργαλείο.

Ένας άλλος τρόπος μελέτης μιας ποσότητας ενός στοχαστικού μοντέλου είναι η κατηγοριοποίηση της σε κλάσεις γήρανσης (ή κλάσεις αξιοπιστίας). Συγκεκριμένα, κάποιες χαρακτηριστικές συναρτήσεις μιας τυχαίας μεταβλητής (πχ ο μετασχηματισμός Laplace) μας δίνουν σημαντικές πληροφορίες για την ίδια την τυχαία μεταβλητή. Επίσης, οι μετρικές πιθανοτήτων μας πληροφορούν πόσο 'κοντά' (υπό κάποια στοχαστική έννοια) είναι δύο τυχαίες μεταβλητές.

Στη διατριβή αυτή παρουσιάζουμε αρκετές στοχαστικές διατάξεις και κλάσεις αξιοπιστίας και περιγράφουμε τη σπουδαιότητα τους στη μελέτη του συλλογικού κινδύνου. Αφιερώνουμε ένα κεφάλαιο στη μελέτη στοχαστικών διατάξεων και κλάσεων αξιοπιστίας σχετιζόμενων με το μετασχηματισμό Laplace. Όπως θα δούμε στη διατριβή, ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένα σπουδαίο εργαλείο που χαρακτηρίζει τυχαίες μεταβλητές και η εφαρμογή του σε πολλά πεδία των θετικών επιστημών είναι ανεξάντλητη. Επικεντρωνόμαστε στη μελέτη του συλλογικού μοντέλου κινδύνου εφαρμόζοντας τα παραπάνω μαθηματικά εργαλεία εμπλουτίζοντας τη βιβλιογραφία της Θεωρίας Χρεοκοπίας.

# Κεφάλαιο 1

## Θεωρία Χρεοκοπίας

### 1.1 Εισαγωγή

Ένας ασφαλιστικός οργανισμός χαρακτηρίζεται φερέγγυος εάν διαθέτει πρόσθετα κεφάλαια (αποθεματικά) για την αντιμετώπιση απρόσμενων δυσάρεστων (οικονομικών) εξελίξεων που θα μπορούσαν να θέσουν σε κίνδυνο την εύρυθμη λειτουργία, ίσως ακόμη και την επιβίωσή του. Κάθε επιχείρηση απαιτείται να έχει την ικανότητα να καλύψει τις υποχρεώσεις της έναντι τρίτων (επιχειρηματικά ρίσκα) και κυρίως των ασφαλισμένων της (ασφαλιστικά ρίσκα). Στην ορολογία της ασφαλιστικής επιστήμης, τα εν λόγω αποθεματικά (δηλαδή η θετική διαφορά ανάμεσα στο ενεργητικό της ασφαλιστικής επιχείρησης και στην καλύτερη δυνατή αναλογιστική εκτίμηση των συνολικών υποχρεώσεων της) καλούνται πλεόνασμα (surplus).

Στόχος της Αναλογιστικής Επιστήμης είναι η εκτίμηση και η ανάλυση των κινδύνων, που μπορεί να αντιμετωπίσει μια ασφαλιστική εταιρεία. Τα τελευταία χρόνια, αυτός ο στόχος είναι (νομικά) αναπόσπαστο κομμάτι όχι μόνο των επιχειρήσεων στον τομέα της ασφάλισης αλλά και στον τομέα των χρηματοοικονομικών καθώς και επιχειρηματικών οργανισμών. Κεντρικό ρόλο στην Αναλογιστική Επιστήμη κατέχει η Θεωρία Κινδύνου, της οποίας ένα από τα βασικότερα προβλήματα αποτελεί ο προσδιορισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας, δηλαδή της πιθανότητας τα αποθεματικά να μην είναι επαρκή για την κάλυψη των συνολικών αποζημιώσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι μεγάλη ποικιλία μαθηματικών μεθόδων έχει χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη της Θεωρίας Κινδύνου (μεταξύ αυτών ροπογεννήτριες και μετασχηματισμοί Laplace, μετασχηματισμοί Fourier, μέθοδοι Wiener-Hopf, μιγαδική ανάλυση).

Η θεμελίωση της (μαθηματικής) Θεωρίας Κινδύνων προσδιορίζεται στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα, όταν ο Σουηδός Filip Lundberg (1903) δημοσίευσε τη διδακτορική του διατριβή Approximations of the Probability Function/Reinsurance of Collective Risks. Βασιζόμενος στη διατριβή του Lundberg, το 1929, ο επίσης Σουηδός Harald Cramér εισήγαγε με μια σειρά από εργασίες τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών στη Θεωρία Κινδύνου. Το βασικό μοντέλο που προέκυψε από τις παραπάνω συνεισφορές ονομάζεται κλασικό μοντέλο της θεωρίας των κινδύνων ή μοντέλο Cramér-Lundberg. Κύριο χαρακτηριστικό του μοντέλου αυτού είναι ότι ο αριθμός των ζημιών σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων περιγράφεται από την ανέλιξη Poisson. Η γενίκευση του μοντέλου αυτού έγινε το 1957 όταν

---

ο Νορβηγός Sparre Andersen παρουσίασε στο 15<sup>ο</sup> αναλογιστικό συνέδριο στη Νέα Υόρκη, την εργασία " On the collective theory of risk in case contagion between the claims ". Κύριο χαρακτηριστικό στο μοντέλο Sparre Andersen (ή ανανεωτικό μοντέλο) είναι ότι ο αριθμός των ζημιών περιγράφεται από μία ανανεωτική διαδικασία.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε και θα αναλύσουμε το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Χρεοκοπίας. Θα μοντελοποιήσουμε βήμα βήμα το πλεόνασμα μιας ασφαλιστικής εταιρείας υπό την Αναλογιστική οπτική. Θα ορίσουμε το χρόνο χρεοκοπίας, θα μελετήσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας και θα δώσουμε ακριβή τύπο υπολογισμού της υπό συνθήκες. Επίσης, θα περιγράψουμε το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, το οποίο μαζί με άλλες ποσότητες σχετιζόμενες με την πιθανότητα χρεοκοπίας θα μελετηθούν περαιτέρω στα επόμενα κεφάλαια υπό το πρίσμα της θεωρίας των Στοχαστικών Διατάξεων.

## 1.2 Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων

Ένα πρώτο βήμα για να μοντελοποιήσουμε το πλεόνασμα ενός ασφαλιστικού οργανισμού είναι ο προσδιορισμός του πλήθους των κινδύνων. Τόσο ο αριθμός των κινδύνων, όσο και το πλεόνασμα μεταβάλλονται στο χρόνο τυχαία. Για αυτό το λόγο η μοντελοποίηση αυτών των ποσοτήτων, προϋποθέτει τη μελέτη τους υπό το πρίσμα της θεωρίας των στοχαστικών διαδικασιών.

Ιδιαίτερα, μια στοχαστική διαδικασία είναι μια οικογένεια κατανομών. Μία από τις πιο σημαντικές οικογένειες στοχαστικών διαδικασιών, η οποία έχει ευρέως χρησιμοποιηθεί τόσο στη Θεωρία Ουρών όσο και στη Θεωρία Κινδύνου, είναι η οικογένεια των ανανεωτικών στοχαστικών διαδικασιών.

Έστω  $\{N(t) : t \geq 0\}$  μια στοχαστική διαδικασία η οποία παριστά τον αριθμό των κινδύνων στο χρονικό διάστημα  $[0, t]$ . Τότε η  $\{N(t) : t \geq 0\}$  ονομάζεται απαριθμήτρια και ορίζεται ως εξής.

**Ορισμός 1.2.1.** Μία στοχαστική διαδικασία  $\{N(t) : t \geq 0\}$  ονομάζεται απαριθμήτρια διαδικασία αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής με πιθανότητα 1

(i)  $N(t) \geq 0$ , με  $N(0) = 0$ ,

(ii)  $N(t)$  είναι διακριτή (δηλαδή παίρνει ακέραιες μη αρνητικές τιμές),

(iii) αν  $s \leq t$  τότε  $N(s) \leq N(t)$ .

Ο ορισμός μιας ανανεωτικής στοχαστικής διαδικασίας βασίζεται στους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των γεγονότων (ενδεχομένων) που απαριθμεί η  $\{N(t) : t \geq 0\}$ . Έστω, λοιπόν,  $T_1, T_2, T_3, \dots$  μια ακολουθία ανεξάρτητων μη αρνητικών και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών (τ.μ) με συνάρτηση κατανομής  $F_T(t)$ , συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f_T(t)$ , και μέση τιμή  $ET < +\infty$ . Η τ.μ.  $T_i$  καλείται ενδιάμεσος χρόνος άφιξης του  $i$ -γεγονότος. Οπότε, η ανανεωτική διαδικασία  $\{N(t) : t \geq 0\}$  ορίζεται ακολούθως

**Ορισμός 1.2.2.** Έστω  $T_1, T_2, T_3, \dots$  μια ακολουθία μη αρνητικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. . Η ακολουθία  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  με  $\sigma_0 = 0$  και  $\sigma_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$  ονομάζεται ακολουθία ανανεώσεων και παριστάνει το χρόνο εμφάνισης του  $n$ -στου γεγονότος. Τότε η απαριθμήτρια διαδικασία  $\{N(t) : t \geq 0\}$  με  $N(0) = 0$  δίνεται



---

από τη σχέση

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{(\sigma_n \leq t)},$$

η οποία παριστά τον αριθμό των ανανεώσεων στο χρονικό διάστημα  $[0, t]$  και ονομάζεται ανανεωτική στοχαστική διαδικασία.

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση  $\mathbf{1}_A$  είναι η δείκτρια συνάρτηση

$$\mathbf{1}_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A, \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

Από τον Ορισμό 1.2.1. βλέπουμε ότι για κάθε ανανεωτική ανέλιξη ισχύει ότι

$$N(t) = n \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \{\sigma_n \leq t < \sigma_{n+1}\}. \quad (1.2.1)$$

Η σχέση (1.2.1) (βλέπε Resnick , 2002) ερμηνεύεται ως εξής : το ενδεχόμενο  $\{N(t) = n\}$  σημαίνει ότι έχουν συμβεί ακριβώς  $n$  γεγονότα έως το χρόνο  $t$ . Από την άλλη, το ενδεχόμενο  $\{\sigma_n \leq t < \sigma_{n+1}\}$  σημαίνει ότι ο χρόνος αναμονής μέχρι να συμβούν το πολύ  $n$  γεγονότα (ανανεώσεις) είναι μικρότερος από  $t$ . Επειδή οι παραπάνω εκφράσεις αποτελούν δύο διαφορετικές εκδοχές του ίδιου ενδεχομένου, η (1.2.1) είναι αληθής. Στη συνέχεια δίνουμε δύο θεμελιώδη αποτελέσματα για την  $\{N(t) : t \geq 0\}$ .

**Θεώρημα 1.2.1.** Έστω  $\{N(t) : t \geq 0\}$  μια ανανεωτική στοχαστική ανέλιξη. Τότε με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{ET_1}.$$

Απόδειξη. Βλέπε Serfozo (2009), σελ. 104. ■

**Θεώρημα 1.2.2.** (Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα)

Έστω  $\{N(t) : t \geq 0\}$  μια ανανεωτική στοχαστική ανέλιξη. Τότε ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(N(t))}{t} = \frac{1}{ET_1}.$$

Απόδειξη. Rolski et al. (1999), σελ. 211. ■

Από τον Ορισμό 1.2.2 της ανανεωτικής διαδικασίας, προκύπτει η διαδικασία Poisson, η οποία είναι ειδική περίπτωση της οικογένειας των ανανεωτικών ανελίξεων, εάν υποθέσουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των γεγονότων ακολουθούν εκθετική κατανομή. Ακολουθώντας, δίνουμε τον χαρακτηρισμό μιας Poisson ανελίξης.

**Θεώρημα 1.2.3.** Έστω  $\{N(t) : t \geq 0\}$  μια ανανεωτική ανέλιξη με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης εκθετικά κατανομημένους με παράμετρο  $\lambda$ . Τότε η  $\{N(t) : t \geq 0\}$  είναι μια ομογενής διαδικασία Poisson με ένταση  $\lambda$ . Σε αυτή την περίπτωση οι ακόλουθες εκφράσεις είναι ισοδύναμες:

(i) η  $\{N(t) : t \geq 0\}$  έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσauξήσεις, και σε ένα απειροστά μικρό διάστημα  $[0, dt]$  ισχύει

$$Pr(N(dt) = 1) = \lambda dt + o(dt) \quad \text{και} \quad Pr(N(dt) = 0) = 1 - \lambda dt + o(dt),$$

(ii) η  $\{N(t) : t \geq 0\}$  έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσauξήσεις, και για κάθε  $t$ , η τ.μ.  $N(t)$  ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda t$ .

Απόδειξη. Βλέπε Πολίτης (2012), Πρόταση 3.2.2. ■

Υπενθυμίζουμε ότι μια ανέλιξη  $N(t)$  έχει

- 1) ανεξάρτητες προσauξήσεις όταν για κάθε  $n \geq 1$  και  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , οι τυχαίες μεταβλητές

$$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), N(t_3) - N(t_2), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}),$$

είναι ανεξάρτητες,

- 2) στάσιμες προσauξήσεις όταν για  $0 \leq s < t$  οι διαφορές

$$N(t) - N(t - s),$$

είναι ισόνομες για όλες τις τιμές του  $t$ .

### 1.2.1 Μετασχηματισμός Laplace και συνελίξεις συναρτήσεων και κατανομών

Οι συνελίξεις κατανομών και γενικότερα οι συνελίξεις συναρτήσεων μαζί με το μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes μιας τυχαίας μεταβλητής με κατανομή  $F$ , αποτελούν δύο από τα σημαντικότερα εργαλεία στη μελέτη της Θεωρίας Κινδύνων. Η μελέτη της συμπεριφοράς των συνελίξεων (π.χ. μονοτονία, φράγματα, ασυμπτωτική συμπεριφορά και κλειστότητα των κλάσεων γήρανσης) δεν είναι πάντα εφικτή και αποτελέσματα υπάρχουν μόνο κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες.

Στην πορεία αυτής της διατριβής θα χρησιμοποιήσουμε ευρέως αυτά τα εργαλεία με σκοπό τη μελέτη γνωστών αποτελεσμάτων αλλά και προτείνοντας νέα τόσο στη βιβλιογραφία του αναλογισμού όσο και της Θεωρίας Αξιοπιστίας.

Αρχικά θα δώσουμε τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace-Stieltjes  $\mathcal{L}$  μιας μη-αρνητικής τυχαίας μεταβλητής  $X$  με συνάρτηση κατανομής  $F$  και δεξιά ουρά  $\bar{F} = 1 - F$ .

**Ορισμός 1.2.3.** Ορίζουμε

$$\mathcal{L}_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x), \quad \mathcal{L}_X^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \bar{F}(x) dx, \quad s \geq 0, \quad (1.2.2)$$

να είναι ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της  $F$  και ο μετασχηματισμός Laplace της δεξιάς ουράς  $\bar{F}$ , αντίστοιχα.

Στην περίπτωση που η  $F$  είναι συνεχής συνάρτηση κατανομής με πυκνότητα  $f$ , ή γενικότερα αν η  $f$  είναι μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο διάστημα  $[0, \infty)$ , τότε ο μετασχηματισμός Laplace της  $f$  συμβολίζεται με

$$\mathcal{L}[f]_s = \hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx, \quad s \geq 0.$$

Ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes ορίζεται πάντα και είναι πεπερασμένος για κάθε μη αρνητική τιμή  $s$ . Αυτό ισχύει, εφόσον για  $s \geq 0$ , έχουμε  $e^{-sx} \leq 1$ , συνεπώς

$$\mathcal{L}_X(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x) \leq \int_0^{\infty} 1 dF(x) = 1.$$

Η τελευταία σχέση δείχνει επίσης ότι το πεδίο τιμών του μετασχηματισμού Laplace-Stieltjes βρίσκεται πάντα στο διάστημα  $[0, 1]$ .

Ο μετασχηματισμός Laplace αποτελεί το βασικότερο εργαλείο που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτή τη διατριβή με στόχο τη μελέτη αποτελεσμάτων τόσο στη θεωρία των Στοχαστικών Διατάξεων όσο και στη Θεωρία Χρεοκοπίας.

Ακόμη, θα χρειαστούμε την παράγωγο του μετασχηματισμού Laplace για το υπόλοιπο της διατριβής. Ένας επιφυλακτικός αναγνώστης θα έβλεπε με σκεπτικισμό την ισχύ της σχέσης

$$\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} g(t, s) dt = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} [g(t, s)] dt,$$

όπου  $g(t, s) = e^{-st} f(t)$ , με  $f(t)$  συνάρτηση πυκνότητας μιας τυχαίας μεταβλητής. Για αυτό παραθέτουμε το θεώρημα ύπαρξης της παραγώγου του μετασχηματισμού Laplace χωρίς απόδειξη (βλέπε Guest (1991)).

**Θεώρημα 1.2.4.** Έστω ο μετασχηματισμός Laplace  $\mathcal{F} = \mathcal{L}[f]$ , όπου  $f$  να είναι μια κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση και υπάρχουν σταθερές  $M, T$ , έτσι ώστε  $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$  για όλα τα  $t > T$  στο  $(0, \infty)$ . Τότε η  $\mathcal{L}[f]$  είναι διαφορίσιμη για  $s > s_0$  και ισχύει

$$\mathcal{L}[tf(t)]_s = -\frac{d\mathcal{F}}{ds}, \quad s > s_0.$$

Άρα, από τη σχέση (1.2.2) και το Θεώρημα 1.2.4 παίρνουμε την παράγωγο του μετασχηματισμού Laplace

$$\mathcal{L}'_X(s) = -\int_0^{\infty} x e^{-sx} dF(x). \quad (1.2.3)$$

Ακόμη, αποδεικνύεται (βλέπε Feller, 1971, Κεφάλαιο XIII.4) ότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι μια πλήρως μονότονη συνάρτηση (completely monotone function), από όπου προκύπτει η ύπαρξη της  $n$ -οστής παραγώγου της.

Τέλος, η σχέση που συνδέει το μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes και το μετασχηματισμό Laplace της δεξιάς ουράς της για μια τυχαία μεταβλητή  $X$  (βλέπε Denuit, 2001) είναι η

$$\mathcal{L}_X^*(s) = \frac{1 - \mathcal{L}_X(s)}{s}, \quad s > 0. \quad (1.2.4)$$

Τώρα θα δώσουμε τον ορισμό των συνελίξεων δύο θετικών συναρτήσεων και στη συνέχεια θα ακολουθήσει μια πρόταση που θα συνοψίζει τις κυριότερες ιδιότητες συνελίξεων.

**Ορισμός 1.2.4.** Αν  $F$  και  $G$  είναι συναρτήσεις κατανομής στο διάστημα  $[0, \infty)$  τότε η συνέλιξή τους ορίζεται ως εξής:

$$(F * G)(x) = \int_0^x F(x-y)dG(y), \quad x \geq 0.$$

Γίνεται κατανοητό από τον παραπάνω ορισμό ότι η συνέλιξη δύο κατανομών αντιστοιχεί στην κατανομή του αθροίσματος δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών.

**Ορισμός 1.2.5.** Η συνέλιξη δύο Lebesgue μετρήσιμων και ολοκληρώσιμων συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στο  $[0, \infty)$  ορίζεται ως εξής:

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy, \quad x \geq 0.$$

Ακόμη, δίνουμε τη δεξιά ουρά της συνέλιξης δύο τ.μ.  $X$  και  $Y$ .

**Πρόταση 1.2.1.** Έστω δύο μη αρνητικές τ.μ.  $X_1$  και  $X_2$  με αντίστοιχες δεξιές ουρές  $\bar{F}_1(\cdot)$  και  $\bar{F}_2(\cdot)$ . Τότε, η δεξιά ουρά της του αθροίσματος τους δίνεται από τη σχέση

$$\bar{F}(x) = \int_0^\infty \bar{F}_1(x-u)dF_2(u), \quad x \geq 0. \quad (1.2.5)$$

(Βλ. Shaked και Shanthikumar 2007, σελ. 87 και Hu και Xie 2002).

Είναι χρήσιμο να αναφερθεί ότι οι δύο παραπάνω ορισμοί αναφέρονται σε δύο διαφορετικά είδη συνελίξεων. Χάριν απλότητας στο συμβολισμό, εμείς θα χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό, αλλά θα είναι σαφές ποίο είδος συνέλιξης θα χρησιμοποιούμε καθ'όλη την πορεία της διατριβής.

## 1.2.2 Ανανεωτικές εξισώσεις

Υπάρχουν διάφορα μαθηματικά εργαλεία όσον αφορά τη μελέτη του Μοντέλου Χρεοκοπίας υπό το πρίσμα διαφορετικών οπτικών. Κάποια από αυτά είναι οι τυχαίοι περίπατοι, η σύνθετη γεωμετρική κατανομή και οι ανανεωτικές εξισώσεις. Η γενική μορφή της ανανεωτικής εξίσωσης είναι η εξής

$$Z(x) = g(x) + \phi \int_0^x Z(x-y)dF(y), \quad x \geq 0, \quad (1.2.6)$$

όπου  $\phi$  είναι μία θετική σταθερά,  $F$  μία αθροιστική συνάρτηση κατανομής και  $g$  μία φραγμένη συνάρτηση. Οι ανανεωτικές εξισώσεις, αν υποθέσουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ , διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με την τιμή της σταθεράς  $\phi$ :

1. Αν η  $\phi < 1$ , η εξίσωση (1.2.6) ονομάζεται ελλειμματική (defective) ανανεωτική εξίσωση,
2. Αν η  $\phi = 1$ , η εξίσωση (1.2.6) ονομάζεται κανονική (proper) ανανεωτική εξίσωση,

3. Αν  $\phi > 1$ , η εξίσωση (1.2.6) ονομάζεται υπερβολική (excessive) ανανεωτική εξίσωση.

Οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις συναντώνται σε ευρεία κλίμακα στη Θεωρία των Κινδύνων. Οι κανονικές ανανεωτικές εξισώσεις βρίσκουν εφαρμογές στην Ανανεωτική θεωρία (βλ. Feller, 1971) και σε άλλους τομείς των Εφαρμοσμένων Πιθανοτήτων. Γενικά, τόσο στη Θεωρία των Κινδύνων όσο και στην Ανανεωτική θεωρία, η εφαρμογή των ανανεωτικών εξισώσεων έχει προσφέρει πολλά αποτελέσματα για τη μελέτη τους (ακριβής λύση ή υπό συνθήκες, φράγματα, προσεγγίσεις και ασυμπτωτικά αποτελέσματα).

### 1.2.3 Η λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης

Στο θεώρημα που ακολουθεί περιγράφεται η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.6) στην ελλειμματική περίπτωση ( $\phi < 1$ ).

**Θεώρημα 1.2.5.** Έστω  $F(u)$  συνάρτηση κατανομής με  $F(0) = 0$ ,  $\phi$  μια θετική σταθερά με  $\phi < 1$  και  $g(u)$  μια μη αρνητική, φραγμένη πραγματική συνάρτηση. Τότε η λύση της εξίσωσης (1.2.6) είναι

$$Z(x) = g(x) + \frac{1}{1 - \phi} \int_{0+}^x g(x - y) dH(y), \quad (1.2.7)$$

όπου

$$\bar{H}(x) = 1 - H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \phi) \phi^n \bar{F}^{*(n)}(x), \quad x \geq 0.$$

Απόδειξη. Βλέπε Willmot και Lin (2001), σελ. 152. ■

Η συνάρτηση  $H(x)$  είναι μια συνάρτηση κατανομής και καλείται σύνθετη γεωμετρική κατανομή (compound geometric distribution). Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η  $H(x)$  έχει μάζα πιθανότητας στο μηδέν με  $H(0) = 1 - \phi$  καθώς και ότι δεν εξαρτάται από τη συνάρτηση  $g(x)$  (Βλέπε Willmot και Lin 2001, σελ. 152). Στη θεωρία Πιθανοτήτων χρησιμοποιείται ευρέως η σύνθετη γεωμετρική κατανομή

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \phi) \phi^n F^{*(n)}(x), \quad x \geq 0,$$

και επομένως η λύση της εξίσωσης (1.2.6) δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$Z(x) = \frac{1}{1 - \phi} \int_{0-}^x g(x - y) dH(y).$$

Επίσης, θεωρούμε τη συνάρτηση  $Z(x, y)$ , η οποία ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (ως προς  $x$ , όταν το  $y$  είναι σταθερό)

$$Z(x, y) = \phi \int_0^x Z(x - t, y) dF(t) + g(x + y),$$

της οποίας η λύση είναι

$$Z(x, y) = \frac{1}{1 - \phi} \int_{0^-}^x g(x + y - t) dH(t).$$

(βλέπε Psarrakos 2010, Ενότητα 2)

**Πρόταση 1.2.2.** *Αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1.2.7 και επιπλέον η  $g(x)$  είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση τότε για τη λύση της εξίσωσης (1.2.6) θα ισχύει ότι*

$$Z(x) = \frac{1}{1 - \phi} g(x) - \frac{g(0)}{1 - \phi} \bar{H}(x) - \frac{1}{1 - \phi} \int_0^x \bar{H}(x - y) g'(y) dy.$$

Απόδειξη. Βλέπε Willmot και Lin (2001), σελ. 154. ■

Η ουρά της συνάρτησης κατανομής  $H(x)$  ικανοποιεί την παρακάτω ανανεωτική εξίσωση,

$$\bar{H}(x) = \phi \int_0^x \bar{F}(x - y) dH(y) + \phi \bar{F}(x), \quad x \geq 0. \quad (1.2.8)$$

Η (1.2.8) είναι μία έκφραση της (1.2.6) για  $g(x) = \phi \cdot \bar{F}(x)$ . Έτσι από τη σχέση (1.2.7) προκύπτει άμεσα, η ανανεωτική εξίσωση

$$\bar{H}(x) = \frac{\phi}{1 - \phi} \int_0^x \bar{F}(x - y) dH(y) + \phi \bar{F}(x), \quad x \geq 0.$$

(βλέπε Willmot και Lin, 2001, σελ. 156)

Έστω η ανανεωτική εξίσωση

$$Z(u) = \frac{1}{1 + \theta} \int_0^u Z(u - x) dG_1(x) + \frac{1}{1 + \theta} H_1(u), \quad u \geq 0, \quad (1.2.9)$$

όπου  $\theta > 0$ ,  $G_1(x)$  είναι μια συνάρτηση κατανομής με  $G_1(0) = 0$  και  $H_1(u)$  είναι μια συνεχής συνάρτηση για  $u \geq 0$ . Στο επόμενο θεώρημα παρουσιάζουμε τη λύση της εξίσωσης (1.2.9) που έδωσαν οι Lin και Willmot (1999, Θεώρημα 2.1) με τη βοήθεια μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

**Θεώρημα 1.2.6.** *Η λύση της εξίσωσης (1.2.9) δίνεται από την παρακάτω εξίσωση*

$$Z(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^u H_1(u - x) dK_1(x) + \frac{1}{1 + \theta} H_1(u),$$

ή ισοδύναμα,

$$Z(u) = -\frac{1}{\theta} \int_0^u \bar{K}_1(u - x) dH_1(x) - \frac{H_1(0)}{\theta} \bar{K}_1(u) + \frac{1}{\theta} H_1(u).$$

Επιπλέον αν η  $H_1(u)$  είναι παραγωγίσιμη τότε η  $Z(u)$  γράφεται στην παρακάτω μορφή

$$Z(u) = -\frac{1}{\theta} \int_0^u \bar{K}_1(u - x) H_1'(x) dx - \frac{H_1(0)}{\theta} \bar{K}_1(u) + \frac{1}{\theta} H_1(u),$$

---

όπου

$$\bar{K}_1(u) = \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n \bar{G}_1^{*(n)}(u).$$

Απόδειξη. Βλέπε Lin και Willmot (1999). ■

## 1.3 Κλασικό Μοντέλο

Το δεύτερο στάδιο για τη μοντελοποίηση του πλεονάσματος είναι η μελέτη του ύψους των κινδύνων (ζημιογόνων γεγονότων) και κατ' επέκταση των εξόδων. Στην ενότητα αυτή, θα περιγράψουμε τα βασικά χαρακτηριστικά του κλασικού μοντέλου ξεκινώντας από τον ορισμό της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος.

### 1.3.1 Στοχαστική Ανέλιξη Πλεονάσματος

Η έννοια της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος παίζει κεντρικό ρόλο στη μελέτη της θεωρίας Χρεοκοπίας. Χρησιμοποιείται για τη μελέτη ποσοτήτων, όπως χαρτοφυλάκια ασφαλιστικών εταιρειών ή χρηματοοικονομικών οργανισμών που έχουν τυχαίο μέγεθος και τυχαίο ρυθμό εμφάνισης γεγονότων (εξόδων).

Η θεωρία Χρεοκοπίας εξετάζει τις μεταβολές των εξόδων, αλλά και των εσόδων, που συνδέονται με ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο δυναμικά, δηλαδή καθώς τα έξοδα και τα έσοδα εξελίσσονται στο χρόνο. Συγκεκριμένα, αποτελεί μία γενίκευση του συλλογικού προτύπου της θεωρίας των Κινδύνων, το οποίο μελετά το συνολικό κίνδυνο (συνολικά έξοδα) που απορρέει από ένα χαρτοφυλάκιο σε προκαθορισμένο χρονικό διάστημα, π.χ., ένα ή δύο έτη.

Χάριν κατανόησης της ανέλιξης του πλεονάσματος θα περιγράψουμε το χαρτοφυλάκιο μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Είναι γνωστό ότι η ασφαλιστική εταιρεία αναλαμβάνει την κάλυψη κινδύνων έναντι προκαθορισμένων ασφαλιστρών που λαμβάνει από τον ασφαλισμένο. Κάθε ασφαλιστική εταιρεία επιβάλλεται να διαθέτει αποθεματικό  $u$  με το ξεκίνημα της λειτουργίας της (ελάχιστο μετοχικό κεφάλαιο, περιθώριο φερεγγυότητας κλπ). Θα μελετήσουμε το χαρτοφυλάκιο της στο συνεχές χρονικό διάστημα  $[0, t]$ , για κάθε  $t > 0$ . Θεωρούμε τη χρονική στιγμή που υπογράφεται το συμβόλαιο σαν σημείο αναφοράς από το οποίο αρχίζει να μετράει ο χρόνος. Τέλος, αν υποθέσουμε πως τα έσοδα από τα ασφάλιστρα που πληρώνει ο ασφαλισμένος έρχονται με συνεχή τρόπο και είναι συνολικά  $P(t)$  για το χρονικό διάστημα  $[0, t]$ , ενώ τα έξοδα που προκύπτουν είναι  $S(t)$  για το ίδιο χρονικό διάστημα, τότε κατά τη χρονική στιγμή  $t$ , η αξία του χαρτοφυλακίου της ασφαλιστικής εταιρείας είναι

$$U(t) = u + \mathcal{P}(t) - S(t). \quad (1.3.1)$$

Είναι σημαντικό να επισημάνουμε πως η ποσότητα  $S(t)$  και επομένως και η  $U(t)$  είναι τυχαίες μεταβλητές, για συγκεκριμένες τιμές του  $t$ , ενώ αν τις παρατηρήσουμε στη διάρκεια του χρόνου, η πρώτη μας δίνει τη στοχαστική ανέλιξη των εξόδων (aggregate claim process) και η δεύτερη τη στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος (surplus process).

Θεωρούμε μια απαριθμητρία στοχαστική ανέλιξη  $\{N(t) : t \geq 0\}$  η οποία εκφράζει

το πλήθος των ζημιωγόνων συμβάντων μέσα στο χρονικό διάστημα  $[0, t]$  και μια ακολουθία από τ.μ.  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$  που αντιστοιχούν στα ύψη των εξόδων που φτάνουν στην ασφαλιστική εταιρεία για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο μέχρι το χρόνο  $t$ . Οι τ.μ.  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ανεξάρτητες από τη  $\{N(t) : t \geq 0\}$ . Έχουν συνάρτηση κατανομής  $P(x) = Pr(Y \leq x)$  και σε περίπτωση που έχει πυκνότητα, θα τη συμβολίζουμε με  $p(x) = Pr(Y = x)$ . Τότε μπορούμε να γράψουμε τη στοχαστική ανέλιξη των εξόδων σαν μια σύνθετη στοχαστική ανέλιξη, όπως φαίνεται παρακάτω

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } N(t) = 0, \\ \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & \text{αν } N(t) \geq 1. \end{cases}$$

Τέλος, συνοψίζοντας έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 1.3.1.** Η  $\{U(t) : t \geq 0\}$  καλείται στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος, αν για κάθε  $t \geq 0$ , η τιμή του πλεονάσματος ορίζεται από την τυχαία μεταβλητή

$$U(t) = u + \mathcal{P}(t) - S(t),$$

όπου,

- $u$  = αρχικό αποθεματικό,
- $\mathcal{P}(t)$  = συνολικά ασφάλιστρα που λαμβάνει η εταιρεία στο χρονικό διάστημα  $[0, t]$  (έσοδα),
- $S(t)$  = συνολικές αποζημιώσεις που καλείται να καλύψει η εταιρεία στο χρονικό διάστημα  $[0, t]$  (έξοδα).

### 1.3.2 Υποθέσεις Κλασικού Μοντέλου

Στο Κλασικό Μοντέλο της θεωρίας Κινδύνων ή Μοντέλο Cramér-Lundberg ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις

- (i) Η  $\mathcal{P}(t)$  είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή

$$\mathcal{P}(t) = ct, \quad \text{για κάθε } t > 0,$$

όπου  $c$  είναι μια θετική σταθερά.

- (ii) Οι τυχαίες μεταβλητές  $X_i$ , που αντιστοιχούν στις αποζημιώσεις που πρέπει να καταβληθούν είναι θετικές, ανεξάρτητες και ισόνομες με κοινή συνάρτηση κατανομής  $P$ , με πυκνότητα  $p$  και  $i$  τάξης ροπή γύρω από το μηδέν,  $\mu_i =$

$$EX_i = \int_0^{\infty} x^i dP(x) \text{ με } \mu_1 \equiv \mu.$$

- (iii) Η απαριθμητρία στοχαστική ανέλιξη  $\{N(t) : t \geq 0\}$  είναι μία ανέλιξη Poisson με παράμετρο (ένταση)  $\lambda$ .

Μια αναλυτικότερη προσέγγιση του θέματος μπορεί να βρεθεί στα συγγράμματα των Rolski et al. (1999), Asmussen και Albrecher (2010) και Bowers et al. (1986).

Σε αυτό το σημείο, είναι χρήσιμο να ορίσουμε την κατανομή ισορροπίας μιας



κατανομής  $F$ . Συγκεκριμένα, αν ολοκληρώσουμε την ουρά των αποζημιώσεων  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$  και διαιρέσουμε με τη μέση τιμή  $\mu$ , τότε θα πάρουμε τη συνάρτηση κατανομής της τ.μ.  $X^e$

$$F_e(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy, \quad (1.3.2)$$

η οποία καλείται κατανομή ισορροπίας (equilibrium distribution) της  $F$ .

Από τον ορισμό της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος,  $U(t)$ , προκύπτει άμεσα ότι για να μην είναι βέβαιη η χρεοκοπία, η ένταση του ασφαλιστρού  $c$  δεν μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Στο κλασικό μοντέλο προκύπτει ο επόμενος ορισμός.

**Ορισμός 1.3.2.** Στο κλασικό μοντέλο η σταθερά

$$c = \frac{\mathcal{P}(t)}{t}, \quad (1.3.3)$$

που απεικονίζει το ασφαλιστρο που λαμβάνεται στη μονάδα του χρόνου, ονομάζεται ένταση του ασφαλιστρού.

Συγκεκριμένα, η βασική υπόθεση που κάνουμε στο χρονικό διάστημα  $[0, t]$ , αφορά το γεγονός ότι τα (αναμενόμενα) έσοδα του ασφαλιστή είναι μεγαλύτερα από τα (αναμενόμενα) έξοδα του, δηλαδή

$$E(ct) > E\left(\sum_{i=0}^{N(t)} X_i\right) \Leftrightarrow ct > \lambda \mu t$$

ή ισοδύναμα

$$c > \lambda \mu. \quad (1.3.4)$$

Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει ο ορισμός του περιθωρίου ασφαλείας.

**Ορισμός 1.3.3.** Η σταθερά

$$\theta = \frac{c}{\lambda \mu} - 1, \quad (1.3.5)$$

καλείται περιθώριο ασφαλείας (relative security loading) και εκφράζει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους του ασφαλιστή.

Συνηθίζεται το περιθώριο ασφαλείας να παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1 (ή διαφορετικά μεταξύ 0% και 100%). Ένα χαρτοφυλάκιο με  $\theta$  μεγαλύτερο του 100% θεωρείται μη ανταγωνιστικό. Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια του κεφαλαίου, η συνθήκη  $u = 0$  συνεπάγεται πιθανότητα χρεοκοπίας  $1/(1 + \theta)$ . Έτσι, αν περιορίσουμε τη πιθανότητα αυτή σε, π.χ., 0.01, τότε απαιτείται  $\theta = 99$  (ή 9900%), δηλαδή προκύπτει ένα εξωπραγματικό ασφαλιστρο εκατονταπλάσιο της αναμενόμενης τιμής του κινδύνου. Όμως, όσο μεγάλη τιμή και αν πάρει το αρχικό αποθεματικό,  $u$ , δεν επιτρέπεται  $\theta = 0$ , διότι σε αυτήν την περίπτωση η χρεοκοπία είναι βέβαιη (βλέπε Κουτσόπουλος, 1999).

Μια ποσότητα με αξιοσημείωτο ενδιαφέρον στη θεωρία των Κινδύνων είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα το πλεόνασμα  $U(t)$  να γίνει κάποια στιγμή αρνητικό. Πρωτού ορίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, θα δώσουμε τον ορισμό του χρόνου χρεοκοπίας, ο οποίος εκφράζεται συναρτήσει του αρχικού αποθεματικού  $U(0) = u$ . Έστω  $T_u$  η χρονική στιγμή, κατά την οποία για πρώτη φορά το πλεόνασμα  $U(t)$  γίνεται αρνητικό και επέρχεται χρεοκοπία.

**Ορισμός 1.3.4.** Ο χρόνος χρεοκοπίας  $T_u$  ορίζεται ως

$$T_u = \inf\{t : U(t) < 0 | U(0) = u\},$$

με  $T_u = \infty$  αν δεν συμβεί χρεοκοπία. Οπότε, η πιθανότητα χρεοκοπίας (σε άπειρο) χρόνο με αρχικό αποθεματικό  $u$  ορίζεται από τη σχέση

$$\psi(u) = Pr(T_u < \infty | U(0) = u), \quad u \geq 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$\psi(u) = Pr(U(t) < 0, \text{ για κάποιο } t > 0 | U(0) = u).$$

Αν δεν ισχύει η υπόθεση (1.3.4), τότε  $\psi(u) = 1$  για κάθε  $u \geq 0$ , δηλαδή η χρεοκοπία είναι βέβαιη, όσο μεγάλο και αν είναι το αρχικό αποθεματικό. Αν όμως ισχύει  $c > \lambda\mu$ , τότε  $\psi(u) < 1$ , για κάθε  $u \geq 0$ . Στη βιβλιογραφία ορίζεται η πιθανότητα χρεοκοπίας ανάλογα το χρονικό (άπειρο ή μη, συνεχή ή διακριτό) ορίζοντα που μελετάται το ενδεχόμενο αυτό. Στη διατριβή αυτή, ασχολούμαστε μόνο με τη μελέτη της  $\psi(u)$  σε άπειρο και συνεχή χρόνο.

**Ορισμός 1.3.5.** Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας σε συνεχή και άπειρο χρόνο, στο κλασικό μοντέλο, ορίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} \delta(u) &= Pr(U(t) \geq 0 \text{ για κάθε } t | U(0) = u) \\ &= Pr(u + \mathcal{P}(t) - S(t) \geq 0 \text{ για κάθε } t | U(0) = u) = 1 - \psi(u). \end{aligned}$$

**Παρατήρηση 1.3.1.** Όσον αφορά την πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$  και την πιθανότητα μη χρεοκοπίας  $\delta(u)$  έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

1. Η  $\psi(u)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς  $u$  αφού όσο αυξάνουμε το αρχικό αποθεματικό τόσο μικραίνει η πιθανότητα για χρεοκοπία. Από την άλλη πλευρά, η  $\delta(u)$  είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς  $u$ . Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0, \quad \text{και} \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) = 1.$$

2. Η  $\delta(u)$  μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση κατανομής όντας αύξουσα ως προς  $u$ , δεξιά συνεχής και ισχύει ότι  $\lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) = 1$ ,  $\lim_{u \rightarrow -\infty} \delta(u) = 0$ .
3. Η  $\delta(u)$  αντιστοιχεί σε μεικτή κατανομή, αφού
  - α)  $\delta(0) > 0$ ,
  - β)  $\delta(u)$  έχει πυκνότητα στο  $(0, \infty)$ , άρα είναι συνεχής στο  $(0, \infty)$ .

Για την πιθανότητα μη χρεοκοπίας δίνεται η επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 1.3.1.** Στο κλασικό μοντέλο σε συνεχή και άπειρο χρόνο, με  $u \geq 0$ , ισχύουν τα εξής

1.

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c} \delta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-x)p(x)dx, \quad (1.3.6)$$

2.

$$\delta(u) = \delta(0) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-x)\bar{P}(x)dx, \quad (1.3.7)$$

όπου  $\bar{P}(x) = 1 - P(x)$ , η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων  $X_i$ ,

3.

$$\delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{\theta}{1+\theta} \quad \text{και} \quad \psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{1}{1+\theta}. \quad (1.3.8)$$

Απόδειξη. Βλέπε Bowers et al. (1986) και Kaas et al. (2004). ■

### 1.3.3 Συντελεστής προσαρμογής

Ο συντελεστής προσαρμογής, ο οποίος ορίζεται  $R$ , δίνει πληροφορίες για τις ζημιές στο μοντέλο κινδύνου. Συγκεκριμένα, αν υπάρχει  $R > 0$  που ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_0^\infty e^{Ry} dF(y) = 1 + \theta, \quad (1.3.9)$$

τότε ο  $R$  καλείται συντελεστής προσαρμογής. Από τη σχέση (1.3.9) στο κλασικό μοντέλο, μετά από απλές πράξεις εύκολα συμπεραίνουμε ότι η σταθερά  $R$  είναι η λύση της εξίσωσης

$$\lambda M_X(r) - \lambda - cr = 0 \quad (1.3.10)$$

ως προς  $r$  και η θετική λύση της ονομάζεται συντελεστής προσαρμογής.

### 1.3.4 Κλιμακωτά Ύψη

Η πιθανότητα χρεοκοπίας παίζει κεντρικό ρόλο στον Αναλογισμό, όμως και άλλες ποσότητες, οι οποίες σχετίζονται με την πιθανότητα χρεοκοπίας, παρουσιάζουν ενδιαφέρον για τους αναλογιστές, όπως το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας. Ακολούθως, δίνουμε τρεις ορισμούς ποσοτήτων, οι οποίες σχετίζονται άμεσα με τη στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος.

**Ορισμός 1.3.6.** Η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν τη στιγμή της χρεοκοπίας  $t = T$  καλείται έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας και συμβολίζεται με  $U(T)$ . Συνήθως εξετάζουμε το έλλειμμα αυτό κατ' απόλυτη τιμή  $|U(T)|$ , το οποίο ερμηνευτικά δηλώνει την οξύτητα της χρεοκοπίας.

**Ορισμός 1.3.7.** Η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει το μέγεθος του πλεονάσματος πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας  $t = T$  καλείται πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και συμβολίζεται με  $U(T-)$  και δίνεται από τον τύπο  $U(T-) = \lim_{t \rightarrow T-} U(t)$ .

Ένας άλλος τρόπος μοντελοποίησης της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι αντί να προσμετράμε όλες τις αποζημιώσεις να συνυπολογίζουμε μόνο τις "αξιοσημείωτες" αποζημιώσεις. Συγκεκριμένα, μια άλλη σημαντική τυχαία μεταβλητή σχετιζόμενη με την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό  $u$ , και συμβολίζεται με  $L_1$ . Αν δεν υπάρξει πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό (με πιθανότητα  $\delta(0)$ ) τότε θέτουμε  $L_1 = 0$ .

Συγκεκριμένα, αν η πρώτη πτώση πλεονάσματος κάτω από το  $u$  έγινε τη χρονική στιγμή  $t_1$  με το πλεόνασμα να είναι ίσο με  $U(t_1) = u_1$ , τότε μπορούμε να ορίσουμε μια δεύτερη τυχαία μεταβλητή την  $L_2$  που μας δίνει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το προηγούμενο αποθεματικό  $u_1$ . Επομένως,

ακολουθώντας την ίδια διαδικασία δημιουργούμε μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές  $L_3, L_4, \dots, L_i$ , οι οποίες απεικονίζουν το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος, όταν για πρώτη φορά πέσει κάτω από το  $u_2, u_3, \dots, u_{i-1}$ , αντίστοιχα. Οι τ.μ.  $L_i$  για  $i = 1, 2, \dots$ , οι οποίες είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, ονομάζονται κλιμακωτά ύψη (ladder heights). Το πλήθος αυτών των τυχαίων μεταβλητών ακολουθεί γεωμετρική κατανομή όπως φαίνεται στο παρακάτω πόρισμα.

**Πόρισμα 1.3.1.** *Αν ισχύει η συνθήκη  $c > \lambda\mu$  στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας Κινδύνων, τότε το πλήθος των  $L_i$  που εμφανίζονται (έστω  $K$ ), είναι πεπερασμένο και μάλιστα ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας  $\delta(0)$ , δηλαδή  $K \sim \text{Geo}(\delta(0))$ , όπου*

$$\Pr(K = k) = [\psi(0)]^k \delta(0) \Rightarrow \Pr(K = k) = \left( \frac{1}{1 + \theta} \right)^k \frac{\theta}{1 + \theta}.$$

Απόδειξη. Βλέπε Bowers et al. (1986). ■

Τώρα είμαστε σε θέση να ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας, μια από τις πιο κεντρικές έννοιες στη θεωρία Χρεοκοπίας.

**Ορισμός 1.3.8.** *Ορίζουμε σαν μέγιστη σωρευτική απώλεια την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το σύνολο της πτώσης κάτω από το αρχικό αποθεματικό μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας ή μέχρι την ελάχιστη τιμή του πλεονάσματος, αν δε συμβεί χρεοκοπία. Τη συμβολίζουμε με  $L$  και ισούται με*

$$\begin{cases} L = L_1 + L_2 + \dots + L_K = \sum_{i=1}^K L_i, & \text{αν } K \geq 1 \\ 0, & \text{αν } K = 0. \end{cases}$$

**Παρατήρηση 1.3.2.** *Η τ.μ.  $L$  είναι σύνθετη γεωμετρική τυχαία μεταβλητή και έχει μεικτή κατανομή εφόσον έχει θετική μάζα στο σημείο 0 ενώ είναι συνεχής στο  $(0, \infty)$ . Συγκεκριμένα, ισχύει ότι  $\Pr(L = 0) = \Pr(K = 0) = \delta(0)$ .*

Η μέγιστη σωρευτική απώλεια συνδέεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε πως το ενδεχόμενο η τυχαία μεταβλητή  $L$ , να υπερβεί το αρχικό αποθεματικό είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο να έχουμε χρεοκοπία, δηλαδή

$$\Pr(L > u) = \psi(u), \quad (1.3.11)$$

ή ισοδύναμα,  $\delta(u) = 1 - \psi(u) = \Pr(L \leq u)$ .

**Λήμμα 1.3.1.** *Η τ.μ.  $L_1$  ορίζεται στο κλασικό μοντέλο στην περίπτωση που συμβεί πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό  $u$  και έχει τις παρακάτω ιδιότητες.*

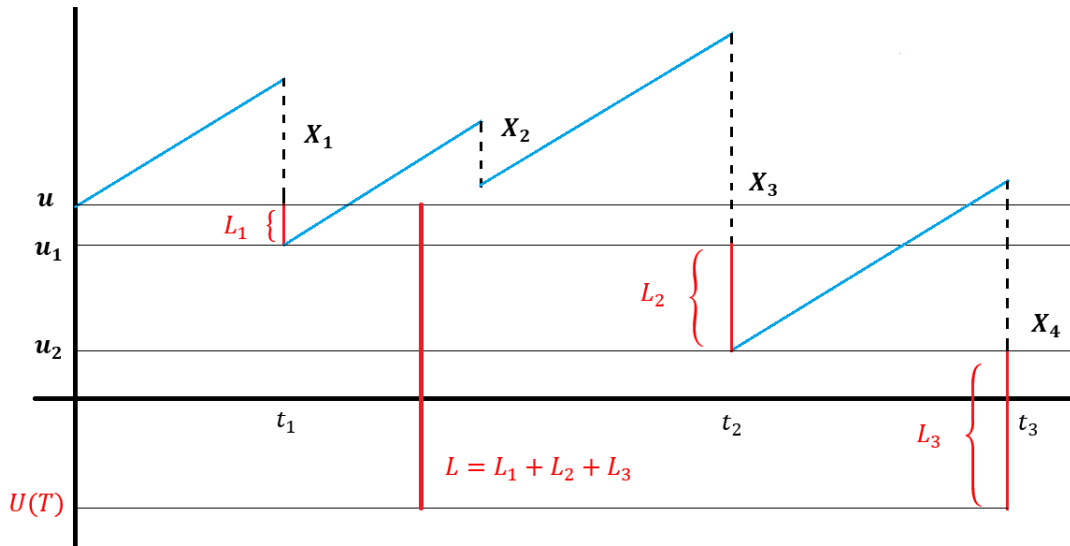
1. *Η συνάρτηση κατανομής της δίνεται από τη σχέση*

$$F_{L_1}(x) = \Pr(L_1 \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\mu} [1 - P(t)] dt = P_e(x).$$

2. *Η ροπογεννήτρια της είναι ίση με*

$$M_{L_1}(r) = \frac{1}{\mu} (M_Y(r) - 1),$$

όπου  $M_Y(r)$  η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ.  $Y$  των αποζημιώσεων.



Σχήμα 1.1: Τα Κλιμακωτά Ύψη και η Μέγιστη Σωρευτική Απώλεια.

3. Ιδιαίτερα, αν οι τυχαίες μεταβλητές  $U_i$  ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\beta$ , τότε και η τ.μ.  $L_1$  ακολουθεί εκθετική κατανομή με την ίδια παράμετρο.
4. Η  $r$  τάξης ροπή της (γύρω από το μηδέν) ισούται με  $EL_i^r = \frac{\mu_{r+1}}{(r+1)\mu}$ .

Απόδειξη. Βλέπε Bowers et al. (1986) και Kaas et al. (2004). ■

Όπως έχουμε αναφέρει η κατανομή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας, ακολουθεί σύνθετη γεωμετρική κατανομή, επομένως η ροπογεννήτρια της δίνεται από τη σχέση

$$M_L(r) = M_K(\ln(M_{L_i}(r))), \quad (1.3.12)$$

όπου,

$$M_K(r) = E(e^{rK}) = \frac{\delta(0)}{1 - \psi(0)e^r}, \quad (1.3.13)$$

και αφού  $K \sim Geo(\delta(0))$ , προκύπτει άμεσα με αντικατάσταση ότι

$$M_L(r) = \frac{\frac{\theta}{1+\theta}}{1 - \frac{1}{1+\theta}M_{L_i}(r)} = \frac{\theta}{(1+\theta) - M_{L_i}(r)}. \quad (1.3.14)$$

Έστω  $L$  η μέγιστη σωρευτική απώλεια στο κλασικό μοντέλο (βλέπε Ορισμό 1.3.8). Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι  $u$  είναι γνωστό ότι μπορεί να παρασταθεί (βλέπε Rolski et al., 1996) και με τη βοήθεια των κλιμακωτών υψών, ως δεξιά ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής

$$\psi(x) = Pr(L > x) = \bar{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \phi) \cdot \phi^n \bar{P}_e^{*n}(x), \quad x \geq 0, \quad (1.3.15)$$

όπου  $\phi = 1/(1 + \theta)$ . Έτσι κάθε ιδιότητα που αποδεικνύεται για την ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής μεταφέρεται και στην πιθανότητα χρεοκοπίας. Στη βιβλιογραφία η μοντελοποίηση της πιθανότητας χρεοκοπίας έχει συνδεθεί άμεσα με τη θεωρία των Τυχαίων Περιπάτων με τη συσχέτιση των κλιμακωτών υψών και των χρόνων διακοπής στο Στοχαστικό Λογισμό (βλέπε Rolski et al. 1998, Κεφάλαιο 6). Όπως, επίσης έχει περιγραφεί από τον Assmussen (1987) και Assmussen και Albrecher(2010) κ.α., η συσχέτιση της πιθανότητας χρεοκοπίας μέσω κλιμακωτών υψών και της θεωρίας Ουρών με το μοντέλο  $M|G|1$ , όπου σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη, οι πελάτες καταφθάνουν με μια διαδικασία Poisson( $\lambda$ ), ενώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης  $X_1, X_2, \dots$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Για περαιτέρω μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας βλέπε Dickson (2005), Grandell (1991) και Ross (1995).

Τέλος, ορίζουμε τη τ.μ.  $L^0 = L|L > 0$  η οποία παριστάνει τη μέγιστη σωρευτική απώλεια δεδομένου ότι είναι θετική. Η τ.μ.  $L^0$  (βλέπε Bhattacharjee et al., 2003 και Psarrakos, 2010) δίνεται από τη σχέση

$$G^0(x) = Pr(L^0 \leq x) = (1 - \phi) \sum_{n=1}^{\infty} \phi^n P_e^{*n}(x), \quad x \geq 0, \quad (1.3.16)$$

με  $\bar{G}^0 = \bar{G}(x)/\phi$ . Εύκολα παρατηρούμε ότι ισχύει η σχέση  $\bar{G}(x + y)/\bar{G}(x) = \bar{G}^0(x + y)/\bar{G}^0(x)$ . Με απλά λόγια, η  $L^0$  είναι το θετικό τμήμα της  $L$ , δεν έχει μάζα πιθανότητας στο μηδέν και μπορεί να έχει διαφορετικές ιδιότητες από την  $L$  όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια.

## 1.4 Εφαρμογές

Στην παρούσα ενότητα, θα εστιάσουμε τη μελέτη μας στην αναζήτηση ακριβούς υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας. Στις περισσότερες περιπτώσεις, ο υπολογισμός ενός αναλυτικού τύπου για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι δύσκολος έως και ακατόρθωτος. Εμείς θα παρουσιάσουμε δύο περιπτώσεις που τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν Συνδυασμό Εκθετικών κατανομών και συνδυασμό Γάμμα κατανομών, αντίστοιχα.

Αρχικά, θα δώσουμε τον ορισμό της μεμειγμένης κατανομής (ή μείξης κατανομών).  
**Ορισμός 1.4.1.** Η κατανομή  $F$  μιας τ.μ.  $X$  θα λέμε ότι είναι μία μείξη κατανομών (ή μία μεμειγμένη κατανομή) αν ικανοποιεί μία από τις δύο παρακάτω συνθήκες:

1. Η  $F$  γράφεται στη μορφή

$$F(x) = \sum_{i=1}^n A_i F_{X_i}(x), \quad (1.4.1)$$

για κάποιες τ.μ.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  έτσι ώστε η  $X_i$  έχει σ. κ.  $F_{X_i}(x)$ , και για θετικές σταθερές  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , οι οποίες αθροίζουν στη μονάδα  $\sum_{i=1}^n A_i = 1$ .

2. Η  $F$  γράφεται στη μορφή

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X|Y}(x|y)f_Y(y)dy, \quad (1.4.2)$$

για κάποια συνεχή μεταβλητή  $Y$  με συνάρτηση πυκνότητας  $f_Y(y)$ . Στην παραπάνω σχέση η  $F_{X|Y}(x|y)$  είναι η δεσμευμένη (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής  $X$  δοθέντος  $Y = y$ .

Μία κατανομή που ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη ονομάζεται μία διακριτή μείξη κατανομών, ενώ μία κατανομή που ικανοποιεί τη δεύτερη ονομάζεται μία συνεχής μείξη κατανομών. Εάν στον Ορισμό (1.4.1) θεωρήσουμε τις σταθερές  $A_1, \dots, A_n$  είτε θετικές είτε αρνητικές τότε ορίζεται ο συνδυασμός κατανομών. Για περαιτέρω ανάλυση για τις μείξεις κατανομών και το συνδυασμό κατανομών ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα βιβλία Πολίτης (2012) και Kaas et al. (2004).

Τώρα, είμαστε σε θέση για να δώσουμε τον ακριβή τύπο όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν συνδυασμό Εκθετικών κατανομών και συνδυασμό Γάμμα κατανομών (βλέπε Gerber et al., 1987).

1. **Συνδυασμός Εκθετικών κατανομών.** Έστω

$$p_j(x) = \beta_j e^{-\beta_j x}, \quad \beta_j > 0, j = 1, 2, \dots, n, \quad \text{και} \quad \sum_{j=1}^n A_j = 1.$$

Τότε, ο συνδυασμός των εκθετικών κατανομών είναι

$$p(x) = \sum_{j=1}^n A_j \cdot p_j(x) = \sum_{j=1}^n A_j \beta_j e^{-\beta_j x}. \quad (1.4.3)$$

Τότε, η πιθανότητα χρεοκοπίας για το συνδυασμό εκθετικών δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\psi(u) = \sum_{j=1}^n C_k e^{-r_k u},$$

όπου  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  και οι σταθερές  $C_k$  υπολογίζονται από τη σχέση  $C_k = \sum_{j=1}^n C_{jk} / \beta_j$  με

$$C_{jm} = \frac{A_j}{\frac{\beta_j - r_m}{(\beta_j - r_m)^2}},$$

και  $r_1, r_2, \dots, r_n$  οι ρίζες της παρακάτω εξίσωσης

$$\frac{\lambda}{c} \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{(\beta_j - r)^2} = 1, \quad (1.4.4)$$

ως προς  $r$ . Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (1.4.4), είναι ίδια με εκείνη που χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό του συντελεστή προσαρμογής  $R$ , συνεπώς η μικρότερη από αυτές τις ρίζες συμπίπτει με τον  $R$ .

2. **Συνδυασμός Γάμμα κατανομών.** Έστω για  $j = 1, 2, \dots, n$

$$p_j(x) = \beta_j^2 x e^{-\beta_j x}, \quad x > 0,$$

και ο συνδυασμός των Γάμμα κατανομών είναι

$$p(x) = \sum_{j=1}^n A_j \beta_j^2 x e^{-\beta_j x}, \quad x > 0, \quad \text{με} \quad A_1 + \dots + A_n = 1.$$

Τότε, η πιθανότητα χρεοκοπίας για το συνδυασμό των Γάμμα(2,  $\beta_j$ ), για  $j = 1, 2, \dots, n$ , υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{2n} C'_k e^{-r_k u},$$

όπου

$$C'_k = \sum_{j=1}^n \int_0^\infty C'_{jk}(y) e^{-\beta_j x} dy = \frac{\sum_{j=1}^n A_j \frac{\beta_j^{3-2r_k}}{(\beta_j - r_k)^2}}{\sum_{j=1}^n A_j \frac{3\beta_j - r_k}{(\beta_j - r_k)^2}}$$

και  $r_1, r_2, \dots, r_n$  οι ρίζες της παρακάτω εξίσωσης

$$1 - \frac{\lambda}{c} \sum_{j=1}^n A_j \frac{2\beta_j - r}{(\beta_j - r)^2} = 0.$$

Όμοια με την εκθετική περίπτωση, η μικρότερη από τις ρίζες αντιστοιχεί στο συντελεστή προσαρμογής. (βλέπε Gerber et al., 1987)

## 1.5 Μελέτη του κλασικού μοντέλου εφοδιασμένο με διάχυση

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε και θα μελετήσουμε το κλασικό μοντέλο εφοδιασμένο με διάχυση, το οποίο εισήχθη από τον Gerber (1970), προσθέτοντας στην ανέλιξη πλεονάσματος έναν παράγοντα τυχαιότητας, ο οποίος είναι μια κίνηση Brown. Στο Κεφάλαιο 5 θα περιγράψουμε το Κλασικό (και το Ανανεωτικό) μοντέλο με έναν γενικό διαχυτικό παράγοντα, όπου με τις κατάλληλες υποθέσεις προκύπτει το κλασικό μοντέλο με διάχυση Brown. Ερμηνευτικά η προσθήκη ενός διαχυτικού παράγοντα στο πλεόνασμα, οποίος ερμηνευτικά εξηγείται ως τυχαιότητα στα έσοδα ή στα έξοδα.

Η κίνηση Brown συχνά αναφέρεται και ως Wiener ανέλιξη και παίζει κεντρικό ρόλο στη μοντέρνα θεωρία των στοχαστικών ανελιξεων με πλειάδα εφαρμογών. Είναι



βασικό εργαλείο στην περιγραφή και στη μοντελοποίηση οικονομικών αγορών, στις προσεγγίσεις μοντέλων της θεωρίας των Ουρών Αναμονής όπως επίσης σε μοντέλα χρεοκοπίας εφοδιασμένα με έναν διαχυτικό παράγοντα (πρόσθετη τυχαιότητα). Στο Παράρτημα Α' δίνουμε τον ορισμό της Wiener ανέλιξης και σκιαγραφούμε περαιτέρω την κίνηση Brown με στόχο την καλύτερη κατανόηση του διαχυτικού παράγοντα (για περαιτέρω ανάλυση της κίνησης Brown παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα βιβλία των Χελιώτη 2020, Resnick 2002 και Grimmett και Stirzaker 2001).

Ορίζεται το κλασικό μοντέλο με διάχυση (βλέπε Dufresne και Gerber, 1991), όπου το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή  $t$  ισούται με

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=0}^{N(t)} X_i + \sigma W(t), \quad (1.5.1)$$

όπου  $\sigma > 0$  και η ανέλιξη Wiener  $\{W(t) : t \geq 0\}$ . Θεωρούμε επιπλέον ότι η ανέλιξη  $\{W(t) : t \geq 0\}$  είναι ανεξάρτητη από τη στοχαστική ανέλιξη  $\{S(t) : t \geq 0\}$ . Στο σημείο αυτό ορίζουμε τις θετικές σταθερές  $D = \sigma^2/2$  και  $\zeta = c/D$  που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Στο μοντέλο με διάχυση έχουν μελετηθεί οι παρακάτω πιθανότητες χρεοκοπίας (βλέπε Dufresne και Gerber, 1991).

1. Πιθανότητα χρεοκοπίας που οφείλεται σε ταλάντωση (oscillation)

$$\psi_d(u) = Pr(T < \infty, U(t) = 0 | U(0) = u).$$

2. Πιθανότητα χρεοκοπίας που οφείλεται σε απαίτηση (claim)

$$\psi_s(u) = Pr(T < \infty, U(t) < 0 | U(0) = u).$$

3. Πιθανότητα χρεοκοπίας που οφείλεται είτε σε ταλάντωση είτε σε απαίτηση

$$\psi_t(u) = Pr(T < \infty, U(t) \leq 0 | U(0) = u),$$

όπου ισχύει προφανώς ότι

$$\psi_t(u) = \psi_d(u) + \psi_s(u), \quad u \geq 0. \quad (1.5.2)$$

Αν συμβολίσουμε την πιθανότητα μη χρεοκοπίας εφοδιασμένη με διάχυση με  $\delta_t(u)$ , τότε ισχύει  $\delta_t(u) = 1 - \psi_t(u)$ . Για τη  $\delta_t(u)$  έχει αποδειχτεί (βλέπε Dufresne και Gerber, 1991) ότι ικανοποιεί την εξίσωση

$$\delta_t(u) = qH_1(u) + (1 - q) \int_0^u \delta(u - x)(h_1 * h_2)(x)dx,$$

όπου  $q = \frac{\theta}{1 + \theta}$ , ενώ  $h_1$  είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής

$$\bar{H}_1(u) = 1 - H_1(u) = e^{-\zeta u}, \quad (1.5.3)$$

και  $h_2$  η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής ισορροπίας της τυχαίας μεταβλητής του ύψους των ζημιών με δεξιά ουρά

$$\bar{H}_2(u) = 1 - H_2(u) = \bar{P}_e(u). \quad (1.5.4)$$

Στην περίπτωση που το αρχικό αποθεματικό είναι ίσο με μηδέν τότε ισχύουν  $\delta_t(0) = \psi_s(0) = 0$  και  $\psi_t(0) = \psi_d(0) = 1$ . Παρατηρούμε τη διαφορά της ολικής πιθανότητας χρεοκοπίας  $\psi_t$  και της  $\psi$  στο σημείο μηδέν. Η μέγιστη σωρευτική απώλεια χωρίς διάχυση έχει μάζα πιθανότητας στο μηδέν αλλά αν προσθέσουμε ένα διαχυτικό παράγοντα στην ανέλιξη πλεονάσματος τότε δεν έχει μάζα πιθανότητας στο μηδέν η τ.μ.  $L^*$ .

Στη συνέχεια δίνουμε ένα παράδειγμα (βλέπε Dufresne και Gerber , 1991) για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας με διάχυση,  $\psi_t(u)$ , όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν συνδυασμό εκθετικών κατανομών με παράμετρο  $\beta_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

**Παράδειγμα 1.5.1.** Θεωρούμε το συνδυασμό εκθετικών κατανομών όπως τον περιγράψαμε στη σχέση (1.4.3). Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας με διάχυση δίνεται από τον τύπο

$$\psi_t(u) = \sum_{k=1}^{n+1} C_k e^{-r_k u}, \quad u \geq 0,$$

όπου  $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$  είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\lambda \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\beta_i - r} + Dr = c,$$

και τα  $C_k$  υπολογίζονται μέσω της εξίσωσης

$$C_h = \prod_{i=1}^n \left( \frac{r_h - \beta_i}{\beta_i} \right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{n+1} \left( \frac{r_k}{r_h - r_k} \right), \quad h = 1, 2, \dots, n + 1.$$

Τέλος, για την πιθανότητα χρεοκοπίας που οφείλεται σε ταλάντωση ισχύει η εξίσωση

$$\psi_d(u) = \sum_{k=1}^{n+1} C_k^d e^{-r_k u}, \quad u \geq 0,$$

με

$$C_h^d = \prod_{i=1}^n (r_h - \beta_i) / \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n (r_h - r_k).$$

Στο υπόλοιπο της ενότητας, θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο με διάχυση υπό το πρίσμα των κλιμακωτών υψών, τα οποία έχουν αποδειχθεί (βλέπε Dufresne και Gerber 1991, Tsai 2009 και Tsai και Lu, 2010) ότι αποσυντίθενται σε κλιμακωτά ύψη όσον αφορά τη "συνεισφορά" τόσο της ταλάντωσης όσο και της αποζημίωσης.

Έστω τώρα,

$$\Gamma(y) = H_1 * P_e(y) = \int_0^y H_1(y-t) dP_e(t), \quad (1.5.5)$$

όπου  $P_e(y) = \int_0^y \bar{P}(t)dt/EY$ ,  $H_1(y) = 1 - e^{-(c/D)y}$ , και  $D = \sigma^2/2$ . Ο Tsai (2003) έδειξε για μια συνάρτηση  $K_1$  ότι ισχύει

$$\bar{K}_1(u) = \frac{1}{1+\theta} \psi_d(u) + \psi_s(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta} \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n \bar{\Gamma}^{*n}(u), \quad u \geq 0, \quad (1.5.6)$$

η οποία είναι ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής με παράμετρο  $1/\theta$  και  $\bar{K}_1(0) = 1/(1+\theta)$ . Επίσης, η  $\bar{K}_1(u)$  ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\bar{K}_1(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \bar{K}_1(u-x) d\Gamma(x) + \frac{1}{1+\theta} \bar{\Gamma}(u), \quad u \geq 0,$$

όπου  $\bar{\Gamma}(u)$  (βλέπε σχέση (1.5.5)). Τέλος, δείχνει ότι η (ολική) πιθανότητα χρεοκοπίας με διάχυση,  $\psi_t$ , είναι επίσης, ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής όπως φαίνεται στην ακόλουθη εξίσωση

$$\psi_t(u) = \overline{K_1 * H_1}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta} \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n \overline{\Gamma^{*n} * H_1}(u), \quad u \geq 0, \quad (1.5.7)$$

Η εξίσωση (1.5.7) μπορεί να ερμηνευθεί και από πιθανοθεωρητική οπτική. Συγκεκριμένα, θεωρούμε την ολική σωρευτική απώλεια τη χρονική στιγμή  $t$ ,

$$L^*(t) = u - U(t) = S(t) - ct - \sigma W(t),$$

και την ολική μέγιστη σωρευτική απώλεια,  $L^* = \max\{L^*(t) : t \geq 0\}$ . Έστω  $T_n$  να είναι η χρονική στιγμή του  $n$ -ου υψηλού ρεκόρ (record high) της ανέλιξης της σωρευτικής απώλειας  $\{L^*(t) : t \geq 0\}$ , η οποία πραγματοποιείται λόγω ζημιάς (θέτουμε  $T_0 = 0$ ). Ακόμη, ορίζουμε

$$\begin{aligned} L_{o,n} &= \max\{L^* : t < T_{n+1}\} - L^*(T_n) \\ &= U(T_n) - \min\{U(t) : t < T_{n+1}\}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} L_{c,n} &= L^*(T_n) - L^*(T_{n-1}) - L_{o,n-1} \\ &= U(T_{n-1}) - U(T_n) - L_{o,n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

να είναι οι ποσότητες μετά το  $(n+1)$ -οστό και  $n$ -οστό υψηλό ρεκόρ της ανέλιξης της σωρευτικής απώλειας  $\{L^*(t) : t \geq 0\}$  λόγω ταλάντωσης (oscillation) και ζημιάς (claim), αντίστοιχα. Η τ.μ.  $N$  παριστάνει τον αριθμό των υψηλών ρεκόρ της ανέλιξης  $\{L^*(t) : t \geq 0\}$  λόγω ζημιάς και έχει γεωμετρική συνάρτηση κατανομής με παράμετρο  $1/(1+\theta)$ . Παρατηρούμε ότι  $L_{c,n} > 0$  και  $L_{o,n} \geq 0$ . Τότε, η τ.μ.  $L^*$  μπορεί να διαχωριστεί (βλέπε Dufresne και Gerber (1991)) ως εξής

$$L^* = L_{o,0} + L_{c,1} + L_{o,1} + \dots + L_{c,N} + L_{o,N} = \sum_{n=1}^N (L_{o,n-1} + L_{c,n}) + L_{o,N},$$

με  $L^* = L_{o,0}$  αν  $N = 0$  (θέτουμε  $T_{N+1} = \infty$ ). Επιπλέον, οι τ.μ.  $L_{o,0}, L_{o,1}, L_{o,2}, \dots$  είναι ισόνομες με μια τ.μ.  $L_o$  με συνάρτηση κατανομής  $H_1$ , και οι τ.μ.  $L_{c,1}, L_{c,2}, L_{c,3}, \dots$  είναι ισόνομες με μια τ.μ.  $L_c$  με συνάρτηση κατανομής  $H_2$ . Επίσης, οι τ.μ.  $N, L_o, L_c$  είναι ανεξάρτητες. Τότε ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned} Pr(L^* > u) &= \sum_{n=0}^{\infty} Pr(L^* > u | N = n) Pr(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\theta}{1+\theta} \right) \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n \overline{H_1^{*(n+1)} * H_2^{*(n)}}(u) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\theta}{1+\theta} \right) \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n \overline{(H_1 * H_2)^{*(n)} * H_2}(u), \quad u \geq 0. \end{aligned}$$

Έτσι, η  $\psi_t(u)$  (βλέπε σχέση 1.5.7) μπορεί να παρασταθεί ως η ουρά της τ.μ.  $L^*$

$$\psi_t(u) = Pr(L^* > u),$$

με  $\psi_t(\infty) = 0$  (βλέπε επίσης (1.5.3) και (1.5.4) και Dufresne και Gerber, 1991). Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι οι συναρτήσεις κατανομής  $H_1$  και  $H_2$  των κλιμακωτών υψών όσον αφορά τον παράγοντα της διάχυσης και των αποζημιώσεων, αντίστοιχα, δεν έχουν αυτή τη μορφή (βλέπε (1.5.3) και (1.5.4)) στο πιο γενικό μοντέλο χρεοκοπίας με οποιονδήποτε διαχυτικό παράγοντα όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 5.5 (βλέπε Schmidli, 2001 και Huzak et al., 2004).

Παρόμοια, η  $\overline{K_1}(u)$  (βλέπε σχέση 1.5.6) μπορεί να παρασταθεί ως μια ουρά μιας τ.μ.  $\tilde{L}$  με  $\overline{K_1}(u) = Pr(\tilde{L} > u)$

$$\tilde{L} = L_{o,0} + L_{c,1} + \dots + L_{o,N-1} + L_{c,N} = \sum_{n=1}^N (L_{o,n-1} + L_{c,n}),$$

όπου  $\tilde{L} = 0$  αν  $N = 0$ . Παρατηρούμε ότι η τ.μ.  $\tilde{L}$  είναι άθροισμα δύο τυχαίων μεταβλητών,  $L^* = \tilde{L} + L_o$ . Συγκεκριμένα, η κατανομή της είναι μια συνέλιξη σύνθετης γεωμετρικής κατανομής (convolution compound geometric), δηλαδή η κατανομή της είναι συνέλιξη μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής και μιας άλλης συνάρτησης κατανομής. Στο κεφάλαιο 5.5 της διατριβής θα μελετήσουμε ενδελεχώς τις συνελίξεις σύνθετων γεωμετρικών κατανομών και θα δούμε εφαρμογές τους στο γενικευμένο μοντέλο χρεοκοπίας με διάχυση.

Τέλος, αξίζει να επισημάνουμε ότι αν απαλείψουμε τον παράγοντα της διάχυσης, με  $\sigma = 0$  (βλέπε 1.5.1), τότε όλες οι τ.μ.  $L_o$  εξαφανίζονται, το οποίο μας οδηγεί

στο γεγονός ότι και οι δύο τ.μ.  $L^*$  και  $\tilde{L}$  περιορίζονται στη τ.μ.  $L = \sum_{n=1}^N L_{c,n}$  (βλέπε σχέση 1.3.15).

# Κεφάλαιο 2

## Στοχαστικές Διατάξεις

### 2.1 Εισαγωγή

Οι στοχαστικές διατάξεις παρουσιάζουν ολοένα και μεγαλύτερο ενδιαφέρον για αρκετούς κλάδους των επιστημών όπως η θεωρία Αξιοπιστίας, ο Αναλογισμός και τα Χρηματοοικονομικά. Ο χρόνος ζωής ενός ανθρώπου (ή μιας μηχανής), το ύψος του κινδύνου μιας ασφαλιστικής εταιρείας ή η τιμή μιας μετοχής μπορούν να μοντελοποιηθούν μέσω τυχαίων μεταβλητών. Η χρησιμότητα των στοχαστικών διατάξεων πηγάζει από την ανάγκη μας να συγκρίνουμε (υπό κάποια στοχαστική έννοια) αυτές τις ποσότητες και τις αντίστοιχες τυχαίες μεταβλητές τους. Επίσης, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η κατηγοριοποίηση αυτών των τυχαίων μεταβλητών με την ένταξή τους σε οικογένειες (κλάσεις) κατανομών. Μία ενδιαφέρουσα οπτική της μελέτης της θεωρίας Αξιοπιστίας είναι ότι πολλές φορές τα εξαρτήματα των μηχανών ενός συστήματος δεν είναι πάντα ανεξάρτητα μεταξύ τους ή δεν υπάρχει μόνο μια επιλογή (π.χ. άλλες εταιρείες κατασκευής), οπότε έχει σημασία να μελετήσουμε και να συγκρίνουμε μέτρα αξιοπιστίας (reliability measures) του χρόνου ζωής αυτών των εξαρτημάτων και επιπλέον να τα συγκρίνουμε.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε αρκετές γνωστές στοχαστικές διατάξεις, μελετάμε ιδιότητές τους και συγκρίνουμε γνωστές κατανομές υπό κάποια στοχαστική έννοια. Ακόμη, παραθέτουμε γνωστές κλάσεις κατανομών (ή κλάσεις αξιοπιστίας) και ορίζουμε νέες εμπλουτίζοντας τη βιβλιογραφία. Οι κύριες αναφορές στη βιβλιογραφία, όσον αφορά τις στοχαστικές διατάξεις που ακολουθούν, είναι τα βιβλία Shaked και Shanthikumar (2007), Müller και Stoyan (2002), Denuit et al. (2005) και, όσον αφορά τις κλάσεις αξιοπιστίας, οι κύριες πηγές μας είναι οι Marshall και Olkin (2007) και Lai και Xie (2016).

### 2.2 Ποσοστιαία συνάρτηση

Υπάρχουν δύο τρόποι να ορίσουμε την ποσοστιαία συνάρτηση (quantile function) (βλέπε Denuit et al., Ορισμός 1.5.14, 2005). Δίνουμε και τις δύο εκφράσεις στον επόμενο ορισμό.

**Ορισμός 2.2.1.** Έστω μια τ.μ.  $X$  με συνάρτηση κατανομής  $F_X$ , ορίζουμε την

αντίστροφη συνάρτηση

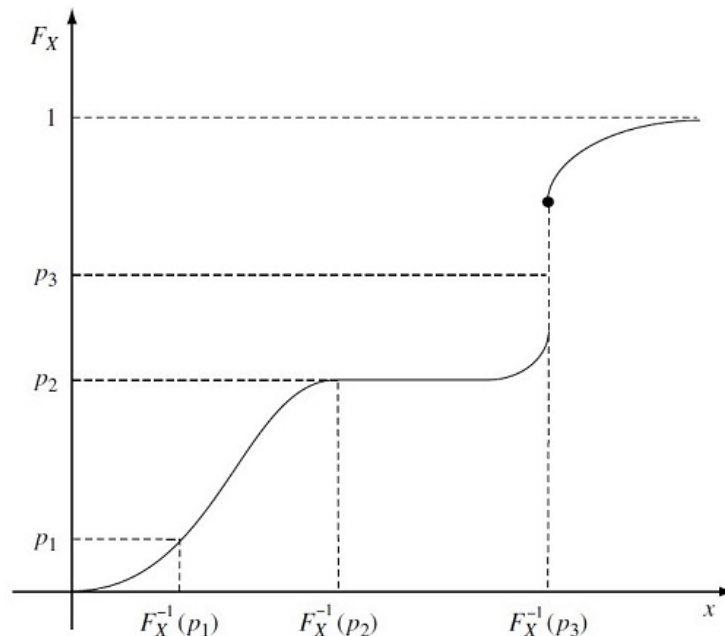
$$F_X^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\} = \sup\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) < p\},$$

όπου  $p \in [0, 1]$  και  $\inf \emptyset = +\infty$  και  $\sup \emptyset = -\infty$ . Η  $F_X^{-1}$  ονομάζεται ποσοστιαία συνάρτηση, είναι αύξουσα συνάρτηση και αριστερά συνεχής.

Ακόμη, δίνουμε ένα λήμμα από τους Denuit et al., (2005) χωρίς απόδειξη.

**Λήμμα 2.2.1.** Για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό  $x$  και ποσοστιαίο σημείο  $p$ , ισχύει ότι :

$$F_X^{-1}(p) \leq x \Leftrightarrow F_X(x) \geq p.$$



Σχήμα 2.1: Ποσοστιαία συνάρτηση  $F^{-1}$  της συνάρτησης κατανομής  $F$  για διάφορα επίπεδα πιθανότητας.

## 2.3 Βαθμίδα αποτυχίας

Η συνάρτηση επιβίωσης (ή δεξιά ουρά) μιας τυχαίας μεταβλητής είναι η  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ . Έστω η τ.μ.  $X$  να παριστάνει το χρόνο ζωής μιας μηχανής (ισοδύναμα το χρόνο μέχρι να χαλάσει για πρώτη φορά η μηχανή). Η τ.μ.  $X_t \equiv X - t | X > t$  είναι ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας μηχανής ηλικίας  $t > 0$ , με τη συνάρτηση

$$\bar{F}_{X_t}(x) = \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}, \quad x, t \geq 0, \quad (2.3.1)$$

να παριστάνει την ουρά της κατανομής του υπολειπόμενου χρόνου ζωής, δοθέντος ότι ο χρόνος ζωής είναι μεγαλύτερος του  $t$ .

Εάν η τ.μ.  $X$  έχει συνάρτηση πυκνότητας  $f$ , τότε η συνάρτηση πυκνότητας του υπολειπόμενου χρόνου ζωής  $X_t$  δίνεται από τη σχέση

$$f_{X_t}(x) = \frac{f(t+x)}{\bar{F}(t)}, \quad x, t \geq 0.$$

Ιδιαίτερα, η τιμή της πυκνότητας  $f_{X_t}(0)$  για  $x = 0$  καλείται συνάρτηση βαθμίδας αποτυχίας (failure rate ή hazard rate)

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, \quad (2.3.2)$$

για κάθε  $t$  τέτοιο ώστε  $\bar{F}(t) > 0$ . Διαισθητικά, δηλώνει πόσο πιθανό είναι μία μηχανή ηλικίας  $t$  να σταματήσει η λειτουργία της σε ένα μικρό χρονικό διάστημα αμέσως μετά τη χρονική στιγμή  $t$ . Για αυτό το λόγο, στη βιβλιογραφία των Ασφαλίσεων ζωής συναντάται και με τον όρο ένταση θνησιμότητας (mortality rate). Επίσης, μπορεί να παρασταθεί ως

$$r(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{Pr(t \leq X < t + \Delta | X \geq t)}{\Delta}.$$

Για μικρό  $\Delta$ , η συνάρτηση  $r(t)\Delta$  είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα μία μηχανή να σταματήσει η λειτουργία της στο διάστημα  $(t, t + \Delta]$  δοθέντος ότι λειτουργεί (δεν έχει χαλάσει) στο διάστημα  $(0, t]$  (βλέπε Lai και Xie (2016) και Gupta et al., 2010).

Εύκολα διαπιστώνεται ότι, αν υπάρχει η  $r(t)$ , τότε ισχύει η σχέση

$$-\log \bar{F}(t) = \int_0^t r(x) dx,$$

ή ισοδύναμα,

$$\bar{F}(t) = \exp\left(-\int_0^t r(x) dx\right). \quad (2.3.3)$$

Η σχέση (2.3.3) είναι ιδιαίτερα σημαντική διότι συνδέει τη συνάρτηση επιβίωσης μιας τυχαίας μεταβλητής με την αντίστοιχη συνάρτηση βαθμίδας αποτυχίας της. Ακόμη, έπεται άμεσα από τα προηγούμενα ότι

$$\bar{F}_{X_t}(t) = \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)} = \frac{e^{-\int_0^{t+x} r(y) dy}}{e^{-\int_0^t r(y) dy}} = e^{-\int_t^{t+x} r(y) dy}.$$

Επίσης, είναι γνωστό ότι για μη αρνητικές τ.μ.  $X$  ισχύει

$$E(X) = \int_0^\infty \bar{F}(y) dy. \quad (2.3.4)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.3.4) και (2.3.2), παίρνουμε

$$E(X) = \int_0^\infty \bar{F}(y) dy = \int_0^\infty \frac{f(y)}{r(y)} dy,$$

ώστε

$$E(X) = E \left[ \frac{1}{r(X)} \right]. \quad (2.3.5)$$

Η σχέση (2.3.5) είναι σύμφωνη με τη διαίσθησή μας, ότι μικρές τιμές της  $r(y)$  σχετίζονται με μεγάλες τιμές της τ.μ.  $X$ . Επιπρόσθετα, η (2.3.5) γενικεύει την εκθετική υπόθεση όταν η  $r(t)$  είναι σταθερή συνάρτηση.

Ακολουθώντας, ορίζουμε τις κλάσεις γήρανσης  $IFR$  (increasing failure rate) και  $DFR$  (decreasing failure rate) όπως δίνονται στους Willmot και Lin (2001).

**Ορισμός 2.3.1.** Μία τ.μ.  $X$  με συνάρτηση κατανομής  $F$  ανήκει στην οικογένεια  $IFR$  ( $DFR$ ), αν και μόνο αν η συνάρτηση

$$\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}, \quad (2.3.6)$$

είναι φθίνουσα ( αύξουσα ) ως προς  $t$  για δεδομένο  $x \geq 0$ .

Στη βιβλιογραφία του Αναλογισμού, πολλοί συγγραφείς ορίζουν τις κλάσεις  $IFR$  ( $DFR$ ), ανάλογα με τη λογαριθμική κυρτότητα της συνάρτησης επιβίωσης (βλέπε Shaked και Shanthikumar, 2007), και συγκεκριμένα από τη σχέση (2.3.2) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{r(y)} = \frac{\bar{F}(y)}{f(y)} = \int_y^\infty \frac{f(x)}{f(y)} dx = \int_0^\infty \frac{f(x+y)}{f(y)} dx. \quad (2.3.7)$$

Από τη σχέση (2.3.7) συμπεραίνουμε ότι αν η  $f(t)$  είναι log-convex (log-concave), τότε η  $r(t)$  είναι αύξουσα (φθίνουσα) ως προς  $t$ , το οποίο είναι ισοδύναμο διαισθητικά με το γεγονός ότι αν η κατανομή  $F(t)$  είναι  $DFR$  ( $IFR$ ) τότε έχει βαριά (λεπτή) ουρά (βλέπε Willmot και Lin, 2001, σελ.11). Για έναν ακόμη χαρακτηρισμό τις κλάσεις  $DFR$  ( $IFR$ ) βλέπε Marshall και Olkin (2007, σελ. 106).

**Παρατήρηση 2.3.1.** Η Εκθετική κατανομή  $F(t) = 1 - e^{-\beta t}, t \geq 0$  με συνάρτηση βαθμίδας  $r(t) = \beta, t \geq 0$  (σταθερή ως προς  $t$ ), ανήκει και στην οικογένεια  $DFR$  και στην οικογένεια  $IFR$ . Αυτό έρχεται σε συμφωνία με το γεγονός ότι η ουρά της εκθετικής κατανομής είναι "οδηγός" όσον αφορά το χαρακτηρισμό βαριά (ή λεπτή) ουρά μιας κατανομής.

**Παρατήρηση 2.3.2.** Οι μείξεις κατανομών (βλέπε Ορισμό 1.4.1), οι οποίες ανήκουν στην οικογένεια  $DFR$ , είναι επίσης  $DFR$ , και γεννούν κατανομές με πιο βαριά ουρά. Ενώ οι συνελίξεις κατανομών, οι οποίες είναι  $IFR$ , είναι επίσης  $IFR$ , και γεννούν κατανομές με πιο ελαφριά ουρά (βλέπε Willmot και Lin, 2001 και Marshall και Olkin 2007, Θεώρημα C.4.).

Παρόλα αυτά, η κλάση  $IFR$  δεν είναι κλειστή ως προς τη μείξη κατανομών. Μπορεί η μείξη δύο  $IFR$  κατανομών να έχει αποτέλεσμα μία  $DFR$  κατανομή. Συγκεκριμένα, οι Marshall και Olkin (2006, C.7.a Παράδειγμα) δίνουν το ακόλουθο αντιπαράδειγμα.

**Παράδειγμα 2.3.1.** Έστω δύο συναρτήσεις βαθμίδας αποτυχίας  $r_1(x) = 1 - e^{-bx}$  και  $r_2(x) = a + r_1(x)$  με  $a, b > 0$ . Αν  $a \leq b < a^2/4$ , και ιδιαίτερα αν  $a = b > 4$ , τότε η μείξη με ίσα βάρη για τις αντίστοιχες κατανομές  $F_1$  και  $F_2$



έχει γνησίως φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας  $r$ , παρόλο που  $r_1$  και  $r_2$  είναι γνησίως αύξουσες ως προς  $x$ .

**Παρατήρηση 2.3.3.** Γενικά, οι οικογένειες  $DFR$  και  $IFR$  είναι κατανομές απόλυτα συνεχείς, εκτός των περιπτώσεων να έχουν μάζα πιθανότητας στην αρχή του διαστήματος όσον αφορά τη  $DFR$  περίπτωση (βλέπε την κατανομή της τ.μ. της μέγιστης σωρευτικής απώλειας  $L$ ), ή να έχουν μάζα πιθανότητας στο δεξιό άκρο του στηρίγματος όσον αφορά την  $IFR$  περίπτωση. Θυμίζουμε ότι το σύνολο όλων των πιθανών αποτελεσμάτων (outcomes) για μια τ.μ.  $X$  ονομάζεται στήριγμα (support) (βλέπε Denuit et al., Ορισμός 1.5.10).

Συνοψίζοντας, οι συνελίζεις  $IFR$  κατανομών είναι πάντα  $IFR$ , ενώ οι μείζεις  $DFR$  είναι πάντα  $DFR$ .

## 2.4 Υπολειπόμενος χρόνος ζωής

Αναφέραμε νωρίτερα τη συνάρτηση επιβίωσης και τη συνάρτηση πυκνότητας του υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Δίνουμε τώρα, τον ορισμό της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής (mean residual lifetime, mrl).

**Ορισμός 2.4.1.** Η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής μιας μη αρνητικής τ.μ.  $X$  ορίζεται από τη σχέση

$$m(t) = E(X - t | X > t), \quad \text{για κάθε } t < t^*, \quad (2.4.1)$$

όπου  $t^* = \sup\{t : \bar{F}(t) > 0\}$ .

Μια συνάρτηση  $m$  είναι συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής (mrl function) μιας θετικής τ.μ. με απόλυτα συνεχή συνάρτηση κατανομής, αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

1.  $0 \leq m(t) < \infty$ , για κάθε  $t \geq 0$ .
2.  $m(0) > 0$ .
3. Η συνάρτηση  $m(\cdot)$  είναι συνεχής.
4. Η συνάρτηση  $m(t) + t$  είναι αύξουσα το  $[0, \infty)$ .
5. Όταν υπάρχει ένα  $t_0$  τέτοιο ώστε  $m(t_0) = 0$ , τότε  $m(t) = 0$  για όλα τα  $t \geq t_0$ . Διαφορετικά, αν δεν υπάρχει τέτοιο  $t_0$  τότε

$$\int_0^\infty \frac{1}{m(t)} dt = +\infty.$$

(βλέπε Shaked και Shanthikumar 2007).

Ένας τρόπος να κατηγοριοποιήσουμε τυχαίες μεταβλητές (και κατανομές) είναι από τη συμπεριφορά της μονοτονίας των χαρακτηριστικών τους συναρτήσεων (πχ βαθμίδα αποτυχίας) όπως είδαμε με τις κλάσεις  $DFR$  (ή  $IFR$ ). Πριν μελετήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, θα δώσουμε κάποια αποτελέσματα που σχετίζονται με τη  $m(t)$ . Με βάση τον Ορισμό 2.4.1 η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου δίνεται από τη σχέση

$$m(t) = E(X_t) = \frac{\int_t^\infty (y - t)f(y)dy}{\bar{F}(t)}, \quad t \geq 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$m(t) = \int_0^\infty Pr(X_t > y) dt = \int_0^\infty \frac{\bar{F}(t+y)}{\bar{F}(t)} dy. \quad (2.4.2)$$

Από τη σχέση (2.3.1), εύκολα μπορούμε να καταλήξουμε στη σχέση

$$m(t) = \frac{\int_t^\infty \bar{F}(y) dy}{\bar{F}(t)} = \frac{E(X)\bar{F}_e(t)}{\bar{F}(t)}. \quad (2.4.3)$$

Από τη σχέση (2.4.3), εύκολα παρατηρούμε ότι

$$m(0) = E(X),$$

με την προϋπόθεση ότι  $F(0) = 0$ , δηλαδή όταν η  $F$  δεν έχει μάζα στο σημείο μηδέν.

**Παράδειγμα 2.4.1.** Η κατανομή ισορροπίας του υπολειπόμενου χρόνου, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.3.1) και (2.4.3) (βλέπε Willmot και Lin 2001, σελ.22) υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\int_y^\infty Pr(X_t > x) dx}{m(t)} &= 1 - \frac{\int_y^\infty \bar{F}(x+t) dx}{m(t)\bar{F}(t)} \\ &= 1 - \frac{\int_{y+t}^\infty \bar{F}(x) dx}{E(X)\bar{F}_e(t)} \\ &= 1 - \frac{\bar{F}_e(y+t)}{\bar{F}_e(t)} \end{aligned}$$

όπου προκύπτει ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα. Η κατανομή ισορροπίας του υπολειπόμενου χρόνου ζωής είναι  $\frac{\bar{F}_e(y+t)}{\bar{F}_e(t)}$ , η οποία είναι ο υπολειπόμενος χρόνος της κατανομής ισορροπίας.

Από τον ορισμό της κατανομής ισορροπίας και τη σχέση (2.3.2), εύκολα παρατηρούμε ότι

$$-\frac{d \ln \bar{F}_e(t)}{dt} = \frac{\bar{F}(t)/E(X)}{\bar{F}_e(t)} = \frac{f_e(t)}{\bar{F}_e(t)} = \frac{1}{m(t)}, \quad (2.4.4)$$

δηλαδή, η συνάρτηση της βαθμίδας αποτυχίας της κατανομής ισορροπίας  $r_{X^e}(t)$  ισούται με  $1/m(t)$ .

Ακόμη, από τη σχέση (2.4.4) σε αντιστοιχία με τη σχέση (2.3.2), προκύπτει η σχέση

$$\bar{F}_e(t) = e^{-\int_0^t \frac{1}{m(x)} dx}, \quad t \geq 0. \quad (2.4.5)$$

Τώρα, ορίζουμε δύο ακόμα κλάσεις γήρανσης, οι οποίες χαρακτηρίζουν τη μονοτονία της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου.

**Ορισμός 2.4.2.** Μια τ.μ.  $X$  ανήκει στην οικογένεια  $IMRL(DMRL)$  αν η συνάρτηση

$$m(t) = \frac{\int_t^\infty \bar{F}(y)dy}{\bar{F}(t)}, \quad (2.4.6)$$

είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση ως προς  $t$ .

Από τη σχέση (2.4.4) και (2.4.6), εύκολα προκύπτει η ισοδυναμία

$$F(y) \in IMRL(DMRL) \Leftrightarrow F_e(y) \in DFR(IFR) \quad (2.4.7)$$

Οι Marshall και Olkin το 2007 (Πρόταση D.5., σελ. 172) δείχνουν ότι η μείξη από  $IMRL$  κλάσεις με πεπερασμένη μέση τιμή, είναι επίσης  $IMRL$ . Αντίθετα, η κλάση των  $DMRL$  κατανομών δεν είναι εν γένει κλειστή ως προς τις μείξεις.

Επίσης, αποδεικνύεται μια ακόμα σχέση που συνδέει τη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και της συνάρτησης βαθμίδας αποτυχίας (βλέπε Belzunce et al., 2007)

$$m'(t) = m(t)r(t) - 1, \quad (2.4.8)$$

όπως και η σχέση που συνδέει τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής με τη συνάρτηση επιβίωσης

$$\bar{F}(t) = \frac{\mu}{m(t)} \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{m(x)} dx\right), \quad t \geq 0. \quad (2.4.9)$$

(βλέπε Lai και Xie, 2016).

**Παρατήρηση 2.4.1.** Εάν η  $F$  είναι μία μείξη κατανομών, τότε και η κατανομή ισορροπίας είναι μία μείξη κατανομών. Το αποτέλεσμα αυτό μας βοηθάει να συμπεράνουμε ότι η  $IMRL$  κλάση είναι κλειστή ως προς τις μείξεις, όπως η οικογένεια  $DFR$ . Από την άλλη, όπως έχουμε αναφέρει η κλάση  $IFR$  είναι κλειστή ως προς τις συνελίξεις, σε αντίθεση με την κλάση  $DMRL$ , η οποία δεν είναι (βλέπε Willmot και Lin, 2001, σελ. 19-20).

**Παρατήρηση 2.4.2.** Αν η  $F$  έχει αύξουσα (φθίνουσα) βαθμίδα αποτυχίας, τότε

- η κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου ζωής  $F_t$  έχει επίσης αύξουσα (φθίνουσα) βαθμίδα αποτυχίας,
- η κατανομή ισορροπίας με συνάρτηση πυκνότητας  $f_e(x) = \bar{F}(x)/\mu, x \geq 0$ , έχει επίσης αύξουσα (φθίνουσα) βαθμίδα αποτυχίας (βλέπε Marshall και Olkin 2006, σελ. 106 και 118-119).

Επιπροσθέτως, κάποιες σχέσεις που αξίζει να αναφερθούν, είναι οι ακόλουθες: Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες για  $t \geq 0$ , παίρνουμε τη σχέση

$$\int_t^\infty x dF(x) = -x\bar{F}(x)|_t^\infty + \int_t^\infty \bar{F}(x) dx.$$

Γνωρίζοντας επιπλέον ότι  $\lim_{x \rightarrow \infty} x\bar{F}(x) = 0$ , αν  $E(X) < \infty$ , τότε προκύπτει

$$\int_t^\infty x dF(x) = t\bar{F}(t) + E(X)\bar{F}_e(t), \quad t \geq 0. \quad (2.4.10)$$

Από τις σχέσεις (2.4.3) και τη (2.4.10) προκύπτει η σχέση

$$\int_t^\infty x dF(x) = \bar{F}(t)(t + m(t)),$$

ή ισοδύναμα,

$$\bar{F}(t) = \frac{\int_t^\infty x dF(x)}{t + m(t)},$$

όπου αντικαθιστώντας στον αριθμητή το  $t$  με το μηδέν, έχουμε την ανισότητα,

$$\bar{F}(t) \leq \frac{E(X)}{t + m(t)}, \quad t \geq 0.$$

Παρόμοια, πάλι από τις σχέσεις (2.4.3) και (2.4.10)

$$\int_t^\infty x dF(x) = E(X)\bar{F}_e(t) \left\{ 1 + \frac{t}{m(t)} \right\}, \quad (2.4.11)$$

ή ισοδύναμα,

$$\bar{F}_e(t) = \frac{m(t) \int_t^\infty x dF(x)}{E(X)(t + m(t))}, \quad t \geq 0, \quad (2.4.12)$$

όπου, αντίστοιχα με προηγουμένως, αντικαθιστώντας στον αριθμητή το  $t$  με το μηδέν, έχουμε ως αποτέλεσμα μια επιπλέον ανισότητα για την κατανομή ισορροπίας

$$\bar{F}_e(t) \leq \frac{m(t)}{t + m(t)}, \quad t \geq 0. \quad (2.4.13)$$

(βλέπε Willmot και Lin 2001, Κεφάλαιο 2).

Τέλος, αν η  $F$  είναι απόλυτα συνεχής με βαθμίδα αποτυχίας  $r(t)$ , από τις σχέσεις (2.3.3) και τη σχέση (2.4.2), προκύπτει μια επιπλέον σχέση που συνδέει την  $m(t)$  και την  $r(t)$ , η οποία είναι η ακόλουθη

$$m(t) = \int_0^\infty e^{-\int_t^{t+y} r(x) dx} dy, \quad t \geq 0. \quad (2.4.14)$$

Δίνουμε ακόμα τρεις ορισμούς για κάποιες από τις πιο ενδιαφέρουσες κλάσεις γήρανσης (βλέπε Shaked και Shanthikumar, 2007), με τις οποίες θα ασχοληθούμε εκτενώς στην πορεία της διατριβής, εξάγοντας νέα αποτελέσματα. Επίσης, δίνουμε κάποια γνωστά αποτελέσματα αυτών των κλάσεων για την καλύτερη κατανόηση τους.

**Ορισμός 2.4.3.** Η τ.μ.  $X$  θα λέμε ότι είναι  $NBU(NWU)$  (*new better (worse) than used*) αν ισχύει η σχέση

$$\bar{F}(s)\bar{F}(t) \geq (\leq) \bar{F}(s+t), \quad \forall t \geq 0, \forall s \geq 0.$$

Στην πρόταση C.8 οι Marshall και Olkin (2006) απέδειξαν το εξής:

**Πρόταση 2.4.1.** Αν η  $F$  είναι  $NBU$  με συνάρτηση πυκνότητας, τότε η βαθμίδα αποτυχίας ικανοποιεί την παρακάτω ανισότητα

$$r(x) \geq r(0).$$

Η παραπάνω ανισότητα είναι αντίστροφη αν η  $F$  ανήκει στην κλάση  $NWU$ .

Η κλάση  $NBU$  είναι γνωστό (βλέπε Marshall και Olkin, Πρόταση C.11, σελ. 165) ότι είναι κλειστή ως προς τις συνελιξίες. Αντίθετα, η κλάση  $NWU$  δεν είναι κλειστή ως προς τις συνελιξίες αλλά ούτε και ως προς τις μείξεις. Όμως, οι Marshall και Olkin, Πρόταση C.13, σελ. 166 αποδεικνύουν κάτι ασθενέστερο.

**Πρόταση 2.4.2.** Αν η  $F$  είναι μείξη από  $NWU$  κατανομές, οι οποίες δεν τέμνονται ανά δύο (*no two of which cross*), τότε η  $F$  ανήκει στην κλάση  $NWU$ .

**Ορισμός 2.4.4.** Η τ.μ.  $X$  θα λέμε ότι είναι  $NBUE(NWUE)$  (*new better(worse) than used in expectation*) αν ισχύει η σχέση

$$\frac{\int_t^\infty \bar{F}(s)ds}{\bar{F}(t)} \leq (\geq) E(X), \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι αν  $F$  ανήκει στην κλάση  $NWUE(NBUE)$  τότε ισχύει  $EX^2 \geq (\leq) 2(EX)^2$ . Επιπλέον, αντίστοιχα με την κλάση  $NBU(NWU)$ , η κλάση  $NBUE$  είναι κλειστή ως προς τις συνελιξίες ενώ η κλάση  $NWUE$  είναι κλειστή ως προς τις μείξεις αν δεν τέμνεται καμία μεταξύ τους. Τέλος, δίνουμε ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα, το οποίο θα το επικαλεστούμε και στην πορεία της διατριβής.

**Πρόταση 2.4.3.** Αν η  $F$  είναι  $NBUE(NWUE)$  με μέσο  $EX$ , τότε ισχύει ότι

$$\int_t^\infty \frac{\bar{F}(x)}{EX} dx = \bar{F}_e(t) \leq e^{-t/EX}.$$

**Ορισμός 2.4.5.** Η τ.μ.  $X$  θα λέμε ότι είναι  $2 - NBU(2 - NWU)$  αν για την αντίστοιχη κατανομή ισορροπίας ισχύει ότι

$$\bar{F}_e(s)\bar{F}_e(t) \geq (\leq) \bar{F}_e(s+t), \quad \forall t \geq 0, \forall s \geq 0.$$

Από τα προηγούμενα, προκύπτει άμεσα ότι η  $F$  είναι  $IMRL(DMRL)$  είναι ισοδύναμο με την  $F_e$  να είναι  $DFR(IFR)$ , γεγονός το οποίο συνεπάγεται ότι η  $F_e$  είναι  $NWU(NBU)$ . Δηλαδή, μια κατανομή  $F$  ανήκει στην κλάση  $2 - NBU(2 - NWU)$  αν η  $F_e$  είναι  $NBU(NWU)$ .

Τα τελευταία χρόνια, ζέχωρα των μονότονων κλάσεων γήρανσης, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι μη-μονότονες κλάσεις γήρανσης. Για παράδειγμα, ένα βρέφος θεωρείται ότι παρουσιάζει αυξητική ένταση θνησιμότητας (βαθμίδα αποτυχίας) τον πρώτο χρόνο της ζωής του, σε αντίθεση με τη μειούμενη ένταση θνησιμότητας στα πρώτα χρόνια της ενηλικίωσης του. Το φαινόμενο αυτό, όπου η βαθμίδα αποτυχίας ξεκινάει με αυξητική (ή μειούμενη) τάση και μετά από κάποιο χρονικό σημείο φθίνει (αυξάνει), συναντάται και σε προϊόντα. Στα καινούργια

αμάξια συνηθίζεται να γίνεται επιπλέον έλεγχος πέραν των προβλεπόμενων ετήσιων ελέγχων, στους πρώτους 6 μήνες από την αγορά του, διότι η ένταση θνησιμότητας (βλάβης) του είναι αυξανόμενη στην αρχή (αν υπάρχει κάποιο ελαττωματικό στοιχείο λόγω κατασκευής θα εμφανιστεί άμεσα, διαφορετικά η φθορά των εξαρτημάτων θα παρουσιαστεί πιθανοθεωρητικά μετά το πέρας της εγγύησης των 2-4 χρόνων). Οι Barlow και Proschan (1981, σελ. 55) και αργότερα οι Lai και Xie (2006) όρισαν και μελέτησαν τη μονοτονία μιας λεκανοειδούς βαθμίδας αποτυχίας (bathtub shape). Συγκεκριμένα, δίνουν τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 2.4.6.** Έστω  $F$  συνάρτηση κατανομής με συνάρτηση βαθμίδας αποτυχίας  $r(t)$ , η οποία είναι συνεχής. Τότε η  $F$  είναι *BT* (bathtub shape) αν υπάρχει ένα  $t_0$  τέτοιο ώστε

- (i) η  $r(t)$  είναι φθίνουσα για  $t < t_0$ ,
- (ii) η  $r(t)$  είναι αύξουσα για  $t > t_0$ .

Η *ισοδύναμη*, αν  $r'(t) < 0$  για  $t < t_0$ ,  $r'(t_0) = 0$ , και  $r'(t) > 0$  για  $t > t_0$ .

Επίσης, οι Park (1985) και Mi (1995), ανάμεσα σε αρκετούς συγγραφείς, έδωσαν έναν διαφορετικό ορισμό της συνάρτησης Bathtub Shape βαθμίδας αποτυχίας με δύο σημεία αλλαγής (βλέπε Lai και Xie 2006, Ορισμός 3.4).

Αντίστοιχα, ορίζεται και η κλάση ανάποδης λεκανοειδούς βαθμίδας αποτυχίας *UBT* (Upside Bathtub Shape).

Επιπροσθέτως, ο Mi (1995) έδειξε ότι οι κλάσεις *IFR* και *DFR* μπορούν να θεωρηθούν υποκλάσεις της κλάσης *BT*. Αντίστοιχο αποτέλεσμα συναντάται για τη μη-μονότονη συνάρτηση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Οι Guess et al. (1986) δίνουν τον επόμενο ορισμό.

**Ορισμός 2.4.7.** Μια συνάρτηση κατανομής με πεπερασμένη μέση τιμή καλείται *IDMRL* αν υπάρχει ένα σημείο αλλαγής  $\tau$ ,  $0 < \tau < \infty$ , τέτοιο ώστε

$$m(s) \begin{cases} \leq m(t), & 0 \leq s \leq t < \tau, \\ \geq m(t), & \tau \leq s \leq t. \end{cases}$$

*Ισοδύναμη*,  $F \in IDMRL$  αν υπάρχει ένα  $0 < \tau < \infty$  τέτοιο ώστε η  $m(t)$  να είναι αύξουσα στο  $[0, \tau)$  και φθίνουσα στο  $[\tau, \infty)$ .

Παρατηρούμε ότι αν  $\tau \rightarrow 0$  τότε η *IDMRL* γίνεται *DMRL* και αν  $\tau \rightarrow \infty$  τότε η *IDMRL* γίνεται *IMRL*. Ως αποτέλεσμα, η κλάση *IDMRL* εμπεριέχει τις κλάσεις *IMRL* και *DMRL*.

Οι Lai και Xie (2006, Θεώρημα 4.2) προσδιορίζουν τη σχέση μεταξύ μη-μονότονης βαθμίδας αποτυχίας  $r(t)$  και μη-μονότονης συνάρτησης του υπολειπόμενου χρόνου ζωής  $m(t)$ . Συγκεκριμένα:

**Θεώρημα 2.4.1.** Έστω μια τ.μ.  $X$  με μέση τιμή  $EX < \infty$  και  $r(t)$  βαθμίδα αποτυχίας, η οποία είναι *BT*. Τότε

- (i)  $m(t)$  είναι φθίνουσα ως προς  $t$ , αν  $r(0) < 1/EX$ ,
- (ii)  $m(t)$  ανήκει στη κλάση *UBT*, αν  $r(0) > 1/EX$ .

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο προσδιορισμός θέσης των σημείων αλλαγής ως προς τη μονοτονία κάποιων χαρακτηριστικών συναρτήσεων μιας κατανομής όπως της βαθμίδας αποτυχίας και της συνάρτησης του υπολειπόμενου χρόνου. Η ύπαρξη, το πλήθος και η σειρά αυτών των σημείων παίζουν σημαντικό ρόλο στη μελέτη της θεωρίας Αξιοπιστίας και της θεωρίας των στοχαστικών διατάξεων.

| Κατανομές                  | $f(t)$  | $r(t)$   | $m(t)$  |
|----------------------------|---|--|---|
| $Exp(\beta)$               | $\beta$   | $1/\beta$  | $\beta$   |
| $Gamma(\alpha, \lambda)$   | $\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}$ | $\frac{1}{\int_0^\infty (1 + \frac{u}{t})^{\alpha-1} e^{-\lambda u} du}$ | $\frac{\lambda^{\alpha-1} t^\alpha e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha) \bar{F}(t)} + \frac{\alpha}{\lambda} - t$ |
| $Pareto(\alpha, \lambda)$  | $\frac{a\lambda^a}{(t + \lambda)^{a+1}}$                            | $\frac{\alpha}{\lambda + t}$   | $\frac{\lambda + t}{a - 1}$   |
| $Weibull(\alpha, \lambda)$ | $\alpha\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\alpha}$         | $\alpha\lambda(\lambda t)^{\alpha-1}$                                    |   |

Πίνακας 2.1: Βαθμίδα αποτυχίας - Μέσος Υπολειπόμενος χρόνος.

| Κατανομές                  | $IFR$           | $DFR$                     | $IMRL$                    | $DMRL$       |
|----------------------------|-----------------|---------------------------|---------------------------|--------------|
| $Exp(\beta)$               | $\beta > 0$     | $\beta > 0$               | $\beta > 0$               | $\beta > 0$  |
| $Gamma(\alpha, \lambda)$   | $a \geq 1$      | $0 < a \leq 1$            | $0 < a \leq 1$            | $a > 1$      |
| $Pareto(\alpha, \lambda)$  | -               | $\alpha > 0, \lambda > 0$ | $\alpha > 0, \lambda > 0$ | -            |
| $Weibull(\alpha, \lambda)$ | $\alpha \geq 1$ | $\alpha \leq 1$           | $\alpha < 1$              | $\alpha > 1$ |

Πίνακας 2.2: Μονοτονία  $r(t)$  και  $m(t)$ .

Συγκεκριμένα, οι Lai και Xie (Θεώρημα 4.3, 2006) έδειξαν ότι το σημείο αλλαγής στη μονοτονία της συνάρτησης του υπολειπόμενου χρόνου αν υπάρχει, πάντα προηγείται από το σημείο αλλαγής στη μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας.

**Θεώρημα 2.4.2.** Έστω μια συνεχής τ.μ.  $X$  με συνάρτηση κατανομής  $F$  η οποία ανήκει στην κλάση  $BT$  με σημείο αλλαγής  $t^*$  και έστω  $r(t)$  διαφορίσιμη. Αν  $r(0)E(X) > 1$ , τότε  $m(t) \in UBT$  με μοναδικό σημείο αλλαγής  $k^* \in (0, t^*]$  (ισοδύναμα  $k^* < t^*$ ).

Στους πίνακες που ακολουθούν δίνονται οι συναρτήσεις βαθμίδας αποτυχίας και οι συναρτήσεις του μέσου υπολειπόμενου χρόνου για γνωστές κατανομές, όπως επίσης περιγράφεται η μονοτονία των κλάσεων γήρανσης, όπως αυτές αναλύονται στους Lai και Xie (2006).

## 2.5 Στοχαστικές Διατάξεις τυχαίων μεταβλητών

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι συγκρίσεις (υπό κάποια στοχαστική έννοια) μεταξύ τυχαίων μεταβλητών τόσο στη θεωρία Αξιοπιστίας όσο και στη θεωρία των Πιθανοτήτων. Εάν θεωρήσουμε ότι οι τ.μ.  $X$  και  $Y$  παριστάνουν χρόνους ζωής μηχανών ή ύψη ζημιών, τότε η σύγκριση των συναρτήσεων επιβίωσης (ή δεξιών ουρών) τους καταδεικνύει ποιά μηχανή είναι 'πιο πιθανό' να χαλάσει νωρίτερα, ή αντίστοιχα ποιά ζημιά θα είναι πιο επικίνδυνη για το χαρτοφυλάκιό μας. Η πιο γνωστή στοχαστική διάταξη είναι η συνήθης στοχαστική διάταξη και δίνουμε τον ορισμό της

---

**Ορισμός 2.5.1.** Έστω δύο μη αρνητικές τ.μ.  $X$  και  $Y$  τέτοιες ώστε

$$\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t), \quad \text{για κάθε } t \in [0, \infty).$$

Τότε θα λέμε ότι η τ.μ.  $X$  είναι μικρότερη από την τ.μ.  $Y$  ως προς τη συνήθη στοχαστική διάταξη (usual stochastic order) και θα τη συμβολίζουμε  $X \leq_{st} Y$ .

Είναι προφανές από τον ορισμό και τη σχέση (2.3.4) ότι, αν  $X \leq_{st} Y$ , τότε ισχύει  $EX \leq EY$ .

Ένας σημαντικός χαρακτηρισμός της συνήθους στοχαστικής διάταξης δίνεται στο ακόλουθο θεώρημα (εδώ το σύμβολο  $=_{st}$  ορίζει την ισονομία μεταξύ τυχαίων μεταβλητών)

**Θεώρημα 2.5.1.** Έστω δύο τ.μ.  $X$  και  $Y$  ικανοποιούν τη  $X \leq_{st} Y$  αν και μόνο αν υπάρχουν δύο τ.μ.  $\hat{X}$  και  $\hat{Y}$ , ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας, τέτοιες ώστε

$$\hat{X} =_{st} X \quad \text{και} \quad \hat{Y} =_{st} Y$$

και

$$Pr(\hat{X} \leq \hat{Y}) = 1.$$

Απόδειξη. Βλέπε Shaked και Shanthikumar (2007, Θεώρημα 1.A.1.). ■

Η συνήθης στοχαστική διάταξη είναι κλειστή ως προς τις συνελίξεις, τις μείξεις, την κατά κατανομή σύγκλιση και τη σύνθεση κατανομών (βλέπε Shaked και Shanthikumar 2007, Θεώρημα 1.A.3 και Θεώρημα 1.A.4).

Η συνήθης στοχαστική διάταξη δίνει τον εξής χαρακτηρισμό και για τις ποσοστιαίες συναρτήσεις.

**Θεώρημα 2.5.2.** Έστω δύο τ.μ.  $X$  και  $Y$ , τότε

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow F_X^{-1}(p) \leq F_Y^{-1}(p), \quad \text{για κάθε } p \in (0, 1).$$

Στην προηγούμενη ενότητα περιγράψαμε τα σημεία αλλαγής της μονοτονίας κάποιων χαρακτηριστικών συναρτήσεων μιας κατανομής. Εξίσου ενδιαφέρον είναι ο ορισμός των σημείων αλλαγής του προσήμου μιας συνάρτησης.

**Ορισμός 2.5.2.** Ο αριθμός των αλλαγών προσήμου μιας συνάρτησης  $\phi$  στο  $\mathbb{R}$  ορίζεται από τη σχέση

$$S^-(\phi) = \sup\{S^-[\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_n)] : x_1 < x_2 < \dots < x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}, \quad (2.5.1)$$

όπου  $S^-[y_1, y_2, \dots, y_n]$  είναι ο αριθμός των αλλαγών προσήμου της ακολουθίας  $y_1, y_2, \dots, y_n$  (οι μηδενικοί όροι απαλείφονται). Δύο πραγματικές συναρτήσεις  $\phi_1, \phi_2$  λέγεται ότι έχουν  $k$  σημεία αλλαγής αν

$$S^-(\phi_1 - \phi_2) = k.$$

Στην πορεία του κεφαλαίου θα δούμε πολλά αποτελέσματα που χαρακτηρίζουν γνωστές στοχαστικές διατάξεις από τα σημεία αλλαγής συναρτήσεων πυκνότητας ή συναρτήσεων κατανομής. Προς το παρόν, δίνουμε ένα θεώρημα που χαρακτηρίζεται η συνήθη στοχαστική διάταξη από τον αριθμό των σημείων αλλαγής.



**Θεώρημα 2.5.3.** Έστω  $X$  και  $Y$  δύο τ.μ. με συναρτήσεις πυκνότητας  $f$  και  $g$ , αντίστοιχα. Αν

$$S^-(g - f) = 1 \quad \text{και η ακολουθία προσήμου της συνάρτησης } g - f \text{ είναι } -, +,$$

τότε  $X \leq_{st} Y$ .

Οι στοχαστικές διατάξεις μπορούν να μας δώσουν χαρακτηρισμούς για κλάσεις αξιοπιστίας, όπως οι κλάσεις NBU (NWU) που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα. Από τον Ορισμό 2.4.3 προκύπτει το επόμενο πόρισμα.

**Πόρισμα 2.5.1.** Η τ.μ.  $X$  είναι NBU(NWU) αν και μόνο αν,

$$X \geq_{st} (\leq_{st})[X - t|X > t], \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Εκτός από τη θεωρία Αξιοπιστίας, οι στοχαστικές διατάξεις χρησιμοποιούνται ευρύτατα στις ασφαλίσειες ζωής. Αν οι τ.μ.  $X, Y$  παριστάνουν τους χρόνους ζωής δύο ατόμων, η σχέση  $X \leq_{st} Y$  σημαίνει διαισθητικά ότι το δεύτερο άτομο είναι πιθανότερο να έχει μεγαλύτερη διάρκεια ζωής από το πρώτο. Αν όμως οι τ.μ.  $X, Y$  δηλώνουν το συνολικό χρόνο ζωής, τότε ο επόμενος ορισμός μας είναι περισσότερο χρήσιμος, εφόσον συγκρίνουμε δύο άτομα που έχουν φτάσει στην ίδια ηλικία  $t$ .

**Ορισμός 2.5.3.** Έστω δύο τ.μ.  $X, Y$  τέτοιες ώστε

$$[X|X > t] \leq_{st} [Y|Y > t], \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Τότε θα λέμε ότι η  $X$  προηγείται της  $Y$  ως προς τη βαθμίδα αποτυχίας, και θα γράφουμε  $X \leq_{hr} Y$ .

Με άλλα λόγια, αν οι τ.μ.  $X, Y$  παριστάνουν χρόνους ζωής, βλέπουμε ότι για δύο άτομα ηλικίας  $t$ , ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του πρώτου ατόμου είναι στοχαστικά μικρότερος από αυτόν του δεύτερου. Ορίσαμε με αυτό τον τρόπο, τη διάταξη ως προς τη βαθμίδα αποτυχίας για κατανομές, οι οποίες δεν είναι αναγκαίο να έχουν πυκνότητα.

Είναι εύκολο να αποδειχθούν οι παρακάτω ιδιότητες για τη διάταξη ως προς τη βαθμίδα αποτυχίας (Ορισμός 2.5.3)

1. Έστω η τ.μ.  $X$  με βαθμίδα αποτυχίας  $r_X(t)$ , και η τ.μ.  $Y$  με βαθμίδα αποτυχίας  $r_Y(t)$  τότε η τ.μ.  $X$  είναι μικρότερη της τ.μ.  $Y$  ως προς τη βαθμίδα αποτυχίας αν

$$X \leq_{hr} Y \Leftrightarrow r_X(t) \geq r_Y(t), \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}. \quad (2.5.2)$$

2. Έστω δύο τ.μ.  $X, Y$  τότε ισχύει:

$$X \leq_{hr} Y \Leftrightarrow \frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)} \text{ είναι αύξουσα ως προς } t. \quad (2.5.3)$$

3. Έστω δύο τ.μ.  $X, Y$  τότε ισχύει:

$$X \leq_{hr} Y \Leftrightarrow \bar{F}_X(x)\bar{F}_Y(y) \geq \bar{F}_X(y)\bar{F}_Y(x), \quad 0 \leq x \leq y. \quad (2.5.4)$$

4. Έστω δύο τ.μ.  $X, Y$  τότε ισχύει:

$$X \leq_{hr} Y \Leftrightarrow \frac{\overline{F}_X(t+s)}{\overline{F}_X(t)} \leq \frac{\overline{F}_Y(t+s)}{\overline{F}_Y(t)}, \quad \forall s, t \geq 0, \quad (2.5.5)$$

ή ισοδύναμα,

$$Pr(X - t > s | X > t) \leq Pr(Y - t > s | Y > t), \quad \forall s \geq 0, \forall t \geq 0. \quad (2.5.6)$$

Μια ακόμη ενδιαφέρουσα στοχαστική διάταξη η οποία είναι αρκετά ισχυρή είναι η ακόλουθη.

**Ορισμός 2.5.4.** Έστω  $X$  και  $Y$  συνεχείς (ή διακριτές) τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πυκνότητας (ή συναρτήσεις πιθανότητας)  $f$  και  $g$ , αντίστοιχα, τέτοιες ώστε

$$\frac{g(t)}{f(t)} \text{ αύξουσα ως προς } t \text{ στην ένωση των στηριγμάτων των } X \text{ και } Y,$$

ή ισοδύναμα,

$$f(x)g(y) \geq f(y)g(x), \quad \forall x \geq y. \quad (2.5.7)$$

Τότε θα λέμε ότι η  $X$  είναι μικρότερη από τη  $Y$  ως προς τη διάταξη της πιθανοφάνειας ( $X \leq_{lr} Y$ ).

Είναι γνωστό ότι η διάταξη ως προς τις πιθανοφάνειες είναι πιο ισχυρή από τη διάταξη ως προς τις βαθμίδες αποτυχίας και συγκεκριμένα ισχύει  $\leq_{lr} \Rightarrow \leq_{hr}$  (βλέπε Shaked και Shanthikumar 2007, Θεώρημα 1.C.1).

Στην ενότητα 2.4 ορίσαμε και μελετήσαμε τη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου. Συγκρίνοντας δύο τυχαίες μεταβλητές ως προς αυτή τη χαρακτηριστική συνάρτηση προκύπτει μια πολύ σημαντική στοχαστική διάταξη.

**Ορισμός 2.5.5.** Έστω δύο τ.μ.  $X$  και  $Y$  με  $mrl$  συναρτήσεις  $m$  και  $l$ , αντίστοιχα, τέτοιες ώστε

$$m(t) \leq l(t), \text{ για κάθε } t \geq 0. \quad (2.5.8)$$

Τότε θα λέμε ότι η  $X$  είναι μικρότερη από την  $Y$  ως προς τη διάταξη του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ( $X \leq_{mrl} Y$ ).

Ένας ισοδύναμος χαρακτηρισμός με την (2.5.8) είναι ότι  $X \leq_{mrl} Y$  αν και μόνο αν το πηλίκο

$$\frac{\int_t^\infty \overline{F}_Y(z) dz}{\int_t^\infty \overline{F}_X(z) dz},$$

είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς  $t$  για  $\{t : \int_t^\infty \overline{F}_X(z) dz > 0\}$ . Αξίζει να επισημάνουμε κάποιες σχέσεις μεταξύ των διατάξεων που έχουμε ορίσει. Συγκεκριμένα, η διάταξη ως προς το μέσο υπολειπόμενο χρόνο δεν συνεπάγεται πάντα τη συνήθη στοχαστική διάταξη. Το επόμενο αποτέλεσμα των Shaked και Shanthikumar (Θεώρημα 2.A.3., 2007) δίνει τις απαραίτητες συνθήκες για να ισχύει αυτή επαγωγή.

**Θεώρημα 2.5.4.** Έστω  $X$  και  $Y$  δύο μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με  $mrl$  συναρτήσεις  $m$  και  $l$ , αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι  $\frac{m(t)}{l(t)} \geq \frac{EX}{EY}, t \geq 0$ . Αν  $X \leq_{mrl} Y$  τότε  $X \leq_{st} Y$ .

Όμως η διάταξη ως προς τη βαθμίδα αποτυχίας είναι ισχυρότερη από τη διάταξη ως προς το μέσο υπολειπόμενο χρόνο και συγκεκριμένα ισχύει

$$X \leq_{hr} Y \Rightarrow X \leq_{mrl} Y.$$

Επιπρόσθετα, δίνουμε ακόμη μια διάταξη σχετιζόμενη με τη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου, την οποία θα την μελετήσουμε και στην πορεία της διατριβής.

**Ορισμός 2.5.6.** Έστω  $X$  και  $Y$  δύο μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με  $mrl$  συναρτήσεις  $m$  και  $l$ , αντίστοιχα. Αν ισχύει η ανισότητα

$$\left[ \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{m(z)} dz \right]^{-1} \leq \left[ \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{l(z)} dz \right]^{-1}, \quad x > 0. \quad (2.5.9)$$

Τότε θα λέμε ότι η  $X$  είναι μικρότερη από τη  $Y$  ως προς τη διάταξη του αρμονικού μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής ( $X \leq_{hmrl} Y$ ).

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ισχύει  $X \leq_{mrl} Y \Rightarrow X \leq_{hmrl} Y$ .

Μια ακόμα πολύ ενδιαφέρουσα στοχαστική διάταξη στον Αναλογισμό είναι η διάταξη ανακοπής ζημιάς (stop loss order) ή διάταξη αύξουσας κυρτότητας (increasing convex order).

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα αντασφαλιστικό σχήμα με αντασφάλιση ανακοπής ζημιάς (stop-loss reinsurance). Αν ο κίνδυνος (ζημιά) παριστάνεται με μία τ.μ.  $X$  και το ποσό ίδιας κράτησης (retention level) είναι  $t$ , τότε

1. Αν  $X \leq t$ , τότε το συνολικό ποσό αποζημίωσης πληρώνεται από την πρωτασφαλίστρια εταιρεία.
2. Αν  $X > t$ , τότε η πρωτασφαλίστρια εταιρεία θα καλύψει  $t$  χρηματικές μονάδες ως αποζημίωση, ενώ το επιπλέον ποσό,  $X - t$ , θα καλυφθεί από την αντασφαλίστρια εταιρεία.

Με βάση τα παραπάνω, το ποσό που θα πληρώσει η αντασφαλίστρια εταιρεία για τον κίνδυνο  $X$  δηλώνεται με την τυχαία μεταβλητή

$$(X - t)_+ = \max\{X - t, 0\}.$$

Η μέση τιμή αυτής της μεταβλητής συμβολίζεται με  $\pi_X(t)$  και ισούται με

$$\pi_X(t) = E[(X - t)_+] = \int_t^\infty \bar{F}_X(y) dy. \quad (2.5.10)$$

Η ποσότητα  $\pi_X$  ονομάζεται ασφάλιστρο ανακοπής ζημιάς (stop loss premium) για το ανωτέρω ασφαλιστικό σχήμα, όταν το ποσό ίδιας κράτησης είναι  $t$  (βλέπε Πολίτης, 2015).

Στη βιβλιογραφία της θεωρίας των Στοχαστικών Διατάξεων συνηθίζεται να χρησιμοποιούμε την ισοδύναμη διάταξη  $\leq_{icx}$  αντί  $\leq_{sl}$ , η οποία χρησιμοποιείται αποκλειστικά στον Αναλογισμό. Για αυτό το λόγο δίνουμε τον ορισμό όπως τον παραθέτουν οι Shaked και Shanthikumar (2007).

**Ορισμός 2.5.7.** Η τ.μ.  $X$  είναι μικρότερη από την τ.μ.  $Y$  σε αύξουσα κυρτή (κοίλη) διάταξη (*increasing convex (concave) order*) και γράφουμε

$$X \leq_{icx} (\leq_{icv}) Y,$$

αν ισχύει  $Ef(X) \leq Ef(Y)$ , για όλες τις αύξουσες κυρτές (κοίλες) συναρτήσεις  $f$ , ώστε οι μέσες τιμές να υπάρχουν.

Ένα ισοδύναμο αποτέλεσμα με τον Ορισμό 2.5.7, είναι ότι ισχύει  $X \leq_{icx} Y$ , αν και μόνο αν,

$$\int_x^\infty \bar{F}_X(u) du \leq \int_x^\infty \bar{F}_Y(u) du, \quad \text{για κάθε } x > 0, \quad (2.5.11)$$

και  $X \leq_{icv} Y$ , αν και μόνο αν,

$$\int_0^x F_X(u) du \geq \int_0^x F_Y(u) du, \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

(βλ. Definition 1.1., Li et al., 2015).

Από τη σχέση (2.5.11) και τον ορισμό του ασφαλιστρου ανακοπής ζημιάς προκύπτει ένα ισοδύναμο αποτέλεσμα με τον ορισμό της αύξουσας κυρτής διάταξης. Έστω δύο τ.μ.  $X, Y$  με ασφαλιστρου ανακοπής ζημιάς  $\pi_X(t)$  και  $\pi_Y(t)$ , αντίστοιχα. Αν ισχύει

$$\pi_X(t) \leq \pi_Y(t), \quad \text{για κάθε } t \geq 0,$$

θα λέμε ότι η τ.μ.  $X$  είναι μικρότερη ως προς τη διάταξη ανακοπής ζημιάς (stop loss order) από την τ.μ.  $Y$  και συμβολίζεται  $X \leq_{sl} Y$ .

Από τη σχέση (2.5.11) εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ισχύει  $X \leq_{st} Y \Rightarrow X \leq_{icx} Y$ . Επίσης, η διάταξη  $\leq_{icx}$  μας δίνει και διάταξη για τις αντίστοιχες μέσες τιμές,  $EX \leq EY$ . Επίσης, οι Shaked και Shanthikumar (Θεώρημα 4.A.26, 2007) αποδεικνύουν για δύο τυχαίες μεταβλητές (θετικές με πιθανότητα 1) με πεπερασμένες μέσες τιμές ότι ισχύει

$$X \leq_{mrl} (\leq_{hmrl}) Y \Rightarrow X \leq_{icx} Y.$$

Οι Shaked και Shanthikumar (2007) έδειξαν ότι αν η  $F$  είναι  $NBUE(NWUE)$  με πεπερασμένη μέση τιμή  $EX$ , τότε η  $F$  είναι μικρότερη (μεγαλύτερη) ως προς τη διάταξη  $\leq_{icx}$  από μια εκθετική κατανομή με παράμετρο  $1/EX$ . Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 2.4.3. Ως ένα άμεσο αποτέλεσμα δίνεται το επόμενο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 2.5.1.** Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$  με συναρτήσεις επιβίωσης  $\bar{F}_X = e^{-bt}$  και  $\bar{F}_Y(t) = q_1 e^{-b_1 t} + q_2 e^{-b_2 t}$ , αντίστοιχα, με  $EX = EY$  όπου  $q_1 + q_2 = 1$  και  $0 < q_1, q_2 < 1$ . Τότε ισχύει  $X \leq_{icx} Y$ . Αυτό ισχύει διότι η  $Y$  στην  $NWUE$  κλάση και είναι μικρότερη από μια εκθετική κατανομή ( $F_X$ ) με ίδια μέση τιμή (βλέπε Tsai, Πρόταση 6, 2006).

Δίνουμε ακόμα δύο στοχαστικές διατάξεις οι οποίες είναι γενικεύσεις των διατάξεων  $\leq_{icx}$  και  $\leq_{icv}$  και έχουν μελετηθεί ιδιαίτερα την τελευταία εικοσαετία.

**Ορισμός 2.5.8.** Έστω  $X$  και  $Y$  δύο θετικές τ.μ.. Θα λέμε ότι η  $X$  είναι μικρότερη από την  $Y$  ως προς  $s$ -αύξουσα κυρτή διάταξη ( $s$ -increasing convex order) ( $X \leq_{s-icx} Y$ ) αν

$$E(X - t)_+^{s-1} \leq E(Y - t)_+^{s-1} < +\infty, \quad \text{για όλα τα } t \geq 0. \quad (2.5.12)$$

Η  $X$  είναι μικρότερη από την  $Y$  ως προς  $s$ -αύξουσα κοίλη διάταξη ( $s$ -increasing concave order) ( $X \leq_{s-icv} Y$ ) αν

$$E(t - X)_+^{s-1} \leq E(t - Y)_+^{s-1}, \quad \text{για όλα τα } t \geq 0. \quad (2.5.13)$$

Αν ισχύει, επιπλέον, στη σχέση (2.5.12),  $EX^k = EY^k$  για  $k = 1, 2, \dots, s - 1$  τότε θα λέμε ότι η  $X$  είναι μικρότερη από την  $Y$  ως προς  $s$ -κυρτή διάταξη ( $s$ -convex order),  $X \leq_{s-cx} Y$ . Παρόμοια, αν, επιπλέον, ισχύει στη σχέση (2.5.13) για τις κεντρικές ροπές γύρω από το μηδέν  $EX^{s-1} < \infty, EY^{s-1} < \infty$  και  $EX^k = EY^k$  για  $k = 1, 2, \dots, s - 1$ , τότε θα λέμε ότι η  $X$  είναι μικρότερη από την  $Y$  ως προς  $s$ -κοίλη διάταξη ( $s$ -concave order),  $X \leq_{s-cx} Y$ .

Από τα παραπάνω, είναι άμεσο ότι ισχύει

$$X \leq_{s-cx} Y (X \leq_{s-cv} Y) \Rightarrow X \leq_{icx} Y (X \leq_{icv} Y)$$

Επιπρόσθετα, ισχύουν οι παρακάτω συσχετισμοί μεταξύ των στοχαστικών διατάξεων όπως φαίνεται στην επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 2.5.1.** Για δύο τ.μ.  $X, Y$  όπως στον ορισμό 2.5.8 ισχύουν τα ακόλουθα

$$X \leq_{s-cx} Y \Rightarrow \begin{cases} X \leq_{s-cv} Y, & s \text{ περιττός,} \\ Y \leq_{s-cv} X, & s \text{ άρτιος.} \end{cases}$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$X \leq_{s-icx} Y (X \leq_{icv} Y) \Rightarrow X \leq_{(s+1)-icx} Y (X \leq_{(s+1)-icv} Y)$$

Παρατηρούμε για  $s = 1$  και  $s = 2$  προκύπτουν οι γνωστές μας στοχαστικές διατάξεις, η συνήθης στοχαστική διάταξη και κυρτή (ή κοίλη) στοχαστική διάταξη. Επίσης, αποδεικνύεται ότι η διάταξη  $\leq_{s-icx}$  είναι κλειστή ως προς τη σύνθεση κατανομών (Shaked και Shanthikumar, Θεώρημα 4.5.59).

Ακόμη, αξίζει να αναφέρουμε τη διάταξη  $\leq_D$  (βλέπε Lefèvre και Utev (1998) και τη διάταξη  $\leq_{disp}$ , η οποία συσχετίζεται με τις ποσοστιαίες συναρτήσεις (βλέπε Ενότητα 2.2), και μελετάει τη μεταβλητότητα (variability) δύο τυχαίων μεταβλητών (βλέπε Belzunce et al., Ενότητα 2.6). Στη βιβλιογραφία υπάρχουν και άλλες στοχαστικές διατάξεις (για παράδειγμα excess wealth order, dilation order), οποίες συσχετίζονται με τις ποσοστιαίες συναρτήσεις αλλά σε αυτή τη διατριβή δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω.

Ορίσαμε νωρίτερα τον αριθμό των αλλαγών προσήμου μιας συνάρτησης (σχέση 2.5.1). Η σχέση μεταξύ στοχαστικών διατάξεων και του αριθμού των αλλαγών προσήμου της απόστασης μεταξύ συναρτήσεων κατανομής ή πυκνοτήτων έχει μελετηθεί από αρκετούς συγγραφείς. Δίνουμε τέσσερις σχετικές προτάσεις που έχουν αποδειχτεί την τελευταία εικοσαετία. Το πιο γνωστό αποτέλεσμα είναι το Karlin-Novikoff condition το οποίο μας δίνει τη  $\leq_{icx}$  διάταξη

---

**Πρόταση 2.5.2.** (Karlin και Novikoff, 1963) Έστω δύο τ.μ.  $X$  και  $Y$  τέτοιες ώστε  $EX \leq EY$ . Τότε ισχύει

$$S^-(F_X - F_Y) = 1 \Rightarrow X \leq_{icx} Y.$$

Μια γενίκευση αυτού του αποτελέσματος δίνεται στην επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 2.5.3.** (Denuit, Lefèvre και Shaked, 1998). Έστω  $X, Y$  δύο θετικές τ.μ. τέτοιες ώστε  $E(X^j - Y^j) = 0, j = 1, 2, \dots, s - 1$ . Αν ισχύει  $S^-(F_X - F_Y) = s - 1$  και το τελευταίο πρόσημο της διαφοράς  $F_X - F_Y$  είναι ένα  $+$ , τότε  $X \leq_{s-cx} Y$ .

Μια άλλη γενίκευση δίνεται όταν υπάρχουν παραπάνω από ένα σημεία αλλαγής προσήμου (crossing points) για τις διαφορές των συναρτήσεων κατανομής. Συγκεκριμένα, παραθέτουμε την παρακάτω πρόταση χωρίς απόδειξη.

**Πρόταση 2.5.4.** (Klar, 2002, Θεώρημα 3.1) Έστω  $X, Y$  δύο θετικές τ.μ. με σ.κ.  $F_X, F_Y$  αντίστοιχα. Επιπλέον, ισχύει  $EX^j = EY^j, j = 1, 2, \dots, n - 2$  και  $(-1)^{n-1}EX^{n-1} \geq (-1)^{n-1}EY^{n-1}$ . Τότε είναι ισοδύναμα τα παρακάτω:

(i)  $X \leq_{n-icv} Y,$

(ii)  $S(F_X - F_Y) \leq n - 1$  με  $F_X \geq F_Y$  πριν την πρώτη αλλαγή προσήμου.

Βλέπε, επίσης Shaked και Shanthikumar, Θεώρημα 4.A.63). Ο Hurliman (1998) γενίκευσε το Karlin-ovikoff crossing condition στην περίπτωση που υπάρχουν  $n$  σημεία αλλαγής (crossing points) μεταξύ των συναρτήσεων κατανομής δύο μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών, ενώ οι Belzunce et al. (2013) αποδεικνύουν το ίδιο αποτέλεσμα με διαφορετικό τρόπο. Η διαφορά έγκειται στο ότι το ζευγάρι των τυχαίων μεταβλητών έχει πεπερασμένες μέσες τιμές και δεν αποτελείται κατ' ανάγκη από μη αρνητικές τ.μ. .

**Πρόταση 2.5.5.** (Belzunce, et al. 2017, Θεώρημα 2.3) Έστω  $X$  και  $Y$  δύο τ.μ. με σ.κ.  $F_X$  και  $F_Y$ , αντίστοιχα, και πεπερασμένες μέσες τιμές. Θεωρούμε ότι  $S^-(F_Y - F_X) = n$ , με σημεία τομής (crossing points)  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Τότε,  $X \leq_{icx} Y$  αν και μόνο αν ισχύει ένα από τα ακόλουθα.

(i)  $n$  είναι άρτιος,  $n = 2m$ , η πρώτη αλλαγή προσήμου της διαφοράς  $F_Y - F_X$  συμβαίνει από  $-$  σε  $+$ , και ισχύουν οι ανισότητες

$$\pi_X(x_{2j-1}) \leq \pi_Y(x_{2j-1}), \quad \text{για όλα τα } j = 1, 2, \dots, m.$$

(ii)  $n$  είναι περιττός,  $n = 2m + 1$ , η πρώτη αλλαγή προσήμου της διαφοράς  $F_Y - F_X$  συμβαίνει από  $+$  σε  $-$ , και ισχύουν οι ανισότητες

$$EX \leq EY \quad \text{και} \quad \pi_X(x_{2j}) \leq \pi_Y(x_{2j}), \quad \text{για όλα τα } j = 1, 2, \dots, m.$$

# Κεφάλαιο 3

## Στοχαστικές διατάξεις σχετιζόμενες με το μετασχηματισμό Laplace

### 3.1 Εισαγωγή

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένα σημαντικό εργαλείο στον κλάδο των εφαρμοσμένων μαθηματικών με ενδιαφέρουσες εφαρμογές στις Ασφαλίσεις Ζωής, στα χρηματοοικονομικά και στη θεωρία Αξιοπιστίας. Στη συνέχεια σκιαγραφούμε τη σημαντικότητα αυτού μετασχηματισμού περιγράφοντας κάποια παραδείγματα.

1. Χρηματοοικονομικά (Finance): Ο Buser (1986) έδειξε ότι η κατανομή της χρηματικής ροής (cash flow) μπορεί να παρασταθεί από το μετασχηματισμό Laplace της ίδιας της κατανομής. Ιδιαίτερα, η παρούσα αξία (present value)  $PV$  της χρηματικής ροής  $C(t)$  για δεδομένο συντελεστή προεξόφλησης (rate of discount)  $r$  είναι

$$M(r) = \int_0^{\infty} e^{-rt} C(t) dt.$$

Η  $PV$  είναι ένα χρήσιμο εργαλείο σύγκρισης χρηματικών ποσοτήτων όπως τα έσοδα, τα ομόλογα, οι ράντες πληρωμών κ.α., οι οποίες γίνονται πληρωμές σε καθορισμένο χρόνο και μέγεθος (stipulated structured payment schedules). Γενικά, θεωρούμε το  $PV$  ως μια συνάρτηση του συντελεστή προεξόφλησης, αλλά όσον αφορά τη μεταβλητή  $r$  του μετασχηματισμού Laplace μπορεί να πάρει μιγαδική τιμή. Το πραγματικό μέρος του  $r$  δύναται να περιγραφεί ως συντελεστής προεξόφλησης, ενώ το φανταστικό μέρος ως μια συχνότητα. Εφαρμογές του μετασχηματισμού Laplace θεωρία των ασφαλίσεων (Insurance) υπό το πλαίσιο του  $PV$  συναντώνται σε αρκετά άρθρα της βιβλιογραφίας. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα άρθρα των Goovaerts και De Schepper (1997) και De Schepper et al. (1992). Εμείς επικεντρωνόμαστε μόνο στην ντετερμινιστική φύση του  $r$ .

2. Θεωρία Ωφελιμότητας (Utility): Η αξία του χρήματος μερικές φορές δεν αποτυπώνεται πλήρως με την χρηματική κλίμακα. Για παράδειγμα, άλλη

αξία έχουν τα 100 ευρώ για έναν εκατομμυριούχο και διαφορετική για έναν φτωχό. Έτσι, η αξία των  $x$  ευρώ για ένα άτομο ή μία εταιρεία είναι μια συνάρτηση  $u(x)$  και λέγεται συνάρτηση ωφελιμότητας (utility function) των  $x$ . Στη βιβλιογραφία έχει οριστεί η υπόθεση της αναμενόμενης ωφελιμότητας ως οδηγός για κάθε λήπτη αποφάσεων (decision maker) με συνάρτηση ωφελιμότητας  $u$ , όπου τα τυχαία μελλοντικά εισοδήματα μοντελοποιούνται από τις τ.μ.  $X$  και  $Y$ , ισοδύναμα  $Eu(X) \leq Eu(Y)$ , εφόσον οι αναμενόμενες τιμές υπάρχουν. Σε αυτό το πλαίσιο, η σύγκριση (διάταξη) μεταξύ δύο μετασχηματισμών Laplace παριστάνει την προτίμηση ενός λήπτη αποφάσεων με μια αρνητική εκθετική συνάρτηση ωφελιμότητας, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$u(x) = 1 - e^{-hx}, \quad h < 0. \quad (3.1.1)$$

Εδώ η μεταβλητή  $-h$  είναι το μέτρο Arrow-Pratt της απόλυτης αποστροφής κινδύνου (risk aversion) (βλέπε Goovaerts και Laeven, 2008). Έτσι, διάταξη ως προς το μετασχηματισμό Laplace, την οποία θα ορίσουμε αμέσως μετά,  $X \leq_{Lt} Y$  σημαίνει ότι το εισόδημα  $Y$  είναι προτιμότερο από το εισόδημα  $X$  από όλους τους λήπτες αποφάσεων με συνάρτηση ωφελιμότητας της μορφής (3.1.1), για κάθε σταθερά αποστροφής ρίσκου. Για περαιτέρω μελέτη αυτής της έρευνας προτείνουμε το άρθρο του Denuit (2001). Επίσης, οι Goovaerts et al. (2004) έδωσαν μερικές εφαρμογές της σύγκρισης των μετασχηματισμών Laplace στο πλαίσιο των μέτρων κινδύνου (risk measures).

3. Ασφαλίσεις Ζωής (Life Insurance): Η έννοια της  $PV$  διαδραματίζει κεντρικό ρόλο στην αναλογιστική επιστήμη. Κάθε μελλοντική πληρωμή της εταιρείας προς τους ασφαλισμένους ή προς τρίτους είναι αναγκαίο να προεξοφληθεί και υπολογιστεί η αξία στο παρόν. Έστω ( $x$ ) άτομο ηλικίας  $x$ , όπου  $x \geq 0$ . Ορίζουμε τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής του ( $x$ ) με μια συνεχή τ.μ.  $T_x$ , έχοντας υπόψιν ότι ο θάνατος του ( $x$ ) μπορεί να συμβεί σε οποιαδήποτε ηλικία μεγαλύτερη του  $x$ . Ιδιαίτερα, θεωρούμε το επιτόκιο σταθερό. Αυτό συναντάται για παράδειγμα, όταν τα ασφάλιστρα για ένα ασφαλιστικό συμβόλαιο επενδύονται σε μηδενικού ρίσκου ομόλογα. Η ισόβια ασφάλιση ζωής αποζημιώνει με 1 ευρώ τη στιγμή του θανάτου. Αφού η  $PV$  της μελλοντικής πληρωμής εξαρτάται από την ημερομηνία της πληρωμής, η παρούσα αξία της παροχής του συμβολαίου είναι μια συνάρτηση του χρόνου του θανάτου και με αυτόν τον τρόπο μοντελοποιείται ως μια τυχαία μεταβλητή. Για το δικό μας ( $x$ ), η  $PV$  της παροχής (benefit) του 1 ευρώ πληρώνεται τη στιγμή του θανάτου και παριστάνεται από μια τ.μ.  $Z$ . Αυτή η τ.μ. ορίζεται ως  $Z = e^{-\delta \cdot T_x}$ , όπου  $\delta$  είναι γνωστό ως συνεχής σύνθετο επιτόκιο (compounded rate of interest). Η αναμενόμενη παρούσα αξία (expected present value, EPV) της ισόβιας ασφάλισης ζωής με πληρωμή 1 ευρώ τη στιγμή του θανάτου είναι  $EE^{-\delta \cdot T_x} \equiv \bar{A}_x$  (whole life premium). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση πυκνότητας  $f_{T_x}(t)$  της τ.μ.  $T_x$ , τότε παίρνουμε

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta \cdot t} f_{T_x}(t) dt.$$

Στην περίπτωση που απαιτείται να συγκρίνουμε τις τυχαίες μεταβλητές του



υπολειπόμενου χρόνου δύο ατόμων ηλικίας  $(x)$  και  $(y)$ , έστω  $T_x$  και  $T_y$ , τότε η σύγκριση των μετασχηματισμών Laplace τους,  $Ee^{-tT_x} \geq Ee^{-tT_y}$ , παριστάνει το ασφάλιστρο της ισόβιας ασφάλισης ζωής σχετιζόμενο με την  $T_x$  να είναι προτιμότερο από αυτό της  $T_y$ .

Ακόμη, αν θεωρήσουμε μια συνεχή χρηματοοικονομική ράντα πληρωμών, η οποία πληρώνει 1 ευρώ κάθε χρόνο όσο το  $(x)$  βρίσκεται εν ζωή, τότε η  $EPV$  ορίζεται ως  $\bar{a}_x$ . Έστω τώρα, η τ.μ.  $Y$  της προαναφερθείσας ασφάλισης, τότε παίρνουμε ότι

$$EY = \bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta \cdot t} {}_t p_x dt,$$

όπου  ${}_t p_x$  είναι η πιθανότητα το  $(x)$  να ζήσει μέχρι την ηλικία  $x + t$ . Σε αυτό το πλαίσιο υπάρχουν εφαρμογές στα άρθρα των Alzaid et al. (1991) και Belzunce et al. (2007).

4. Θεωρία Αξιοπιστίας (reliability): Έστω μια μηχανή (ένα σύστημα) που έχει συνάρτηση επιβίωσης  $\bar{F}(t)$  και  $s$  ο συντελεστής προεξόφλησης. Αν η μηχανή παράγει μια παραγωγική μονάδα ανά λεπτό όσο βρίσκεται σε λειτουργία και η  $PV$  μιας μονάδας, η οποία παράγεται σε χρόνο  $t$  είναι  $1 \cdot e^{-st}$ , τότε η  $EPV$  του συνολικού αποτελέσματος παραγωγής της μηχανής είναι  $\int_0^{\infty} e^{-st} \bar{F}(t) dt$ , ο οποίος είναι ο μετασχηματισμός Laplace της  $\bar{F}(t)$ . Τέλος, μια άλλη απεικόνιση της ποσότητας  $\int_0^{\infty} e^{-st} \bar{F}(t) dt$  μπορεί να θεωρηθεί ως το  $EPV$  του συνολικού κόστους μιας μηχανής (βλέπε Shaked και Wong, 1997).

### 3.2 Διατάξεις σχετιζόμενες με το μετασχηματισμό Laplace

Στη βιβλιογραφία της θεωρίας Αξιοπιστίας και των Στοχαστικών διατάξεων έχουν προταθεί αρκετές στοχαστικές διατάξεις και κλάσεις κατανομών σχετιζόμενες με το μετασχηματισμό Laplace. Εμείς παραθέτουμε τις περισσότερες από αυτές, μελετάμε τις ιδιότητες τους και εμπλουτίζουμε τη βιβλιογραφία με νέα αποτελέσματα. Οι στοχαστικές διατάξεις σχετιζόμενες με το μετασχηματισμό Laplace αποτελούν το μεγαλύτερο και το πιο ενδιαφέρον κομμάτι αυτής της διατριβής.

Αρχικά, δίνουμε τον ορισμό της διάταξης ως προς το μετασχηματισμό Laplace.

**Ορισμός 3.2.1.** Αν για δύο μη αρνητικές τ.μ.  $X$  και  $Y$  ισχύει

$$E[\exp\{-sX\}] \geq E[\exp\{-sY\}], \quad \text{για κάθε } s \geq 0, \quad (3.2.1)$$

τότε θα λέμε ότι η τ.μ.  $X$  είναι μικρότερη ως προς τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace και θα γράφουμε  $X \leq_{Lt} Y$ .

Αξίζει να τονίσουμε ότι ο προηγούμενος ορισμός για τη διάταξη  $\leq_{Lt}$  είναι διαφορετικός από τον ορισμό που δίνουν οι Klefsjö (2003) και Denuit (2001), με τη διαφορά ότι υπάρχει αντίστροφη ανισότητα στη σχέση (3.2.1). Ακόμη, ένα

ισοδύναμο αποτέλεσμα με τον Ορισμό 3.2.1 είναι

$$X \leq_{Lt} Y \Leftrightarrow \int_0^{\infty} e^{-sy} \bar{F}_X(y) dy \leq \int_0^{\infty} e^{-sy} \bar{F}_Y(y) dy, \quad \text{για κάθε } s > 0. \quad (3.2.2)$$

Αν οι τ.μ.  $X$  και  $Y$  έχουν συναρτήσεις πυκνότητας  $f_X(x)$  και  $f_Y(x)$ , αντίστοιχα, τότε από τον Ορισμό 3.2.1 προκύπτει μια ακόμη ισοδύναμη σχέση

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f_X(x) dx \geq \int_0^{\infty} e^{-sx} f_Y(x) dx, \quad s > 0.$$

Επίσης, άλλες δύο διατάξεις, οι οποίες σχετίζονται με το μετασχηματισμό Laplace, είναι η διάταξη δύο τυχαίων μεταβλητών ως προς το λόγο των μετασχηματισμών Laplace και ως προς το λόγο των μετασχηματισμών Laplace των δεξιών ουρών τους, αντίστοιχα.

**Ορισμός 3.2.2.** Έστω δύο μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με μετασχηματισμούς Laplace-Stieltjes  $\mathcal{L}_X(s)$ ,  $\mathcal{L}_Y(s)$ , αντίστοιχα.

(i) Αν το πηλίκο

$$\frac{\mathcal{L}_Y(s)}{\mathcal{L}_X(s)}$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς  $s > 0$ , τότε θα λέμε ότι η τ.μ.  $X$  είναι μικρότερη ως προς τη διάταξη του λόγου των μετασχηματισμών Laplace από την τ.μ.  $Y$  και θα το συμβολίζουμε  $X \leq_{Lt-r} Y$ .

(ii) Αν το πηλίκο

$$\frac{1 - \mathcal{L}_Y(s)}{1 - \mathcal{L}_X(s)}$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς  $s > 0$ , τότε θα λέμε ότι η τ.μ.  $X$  είναι μικρότερη ως προς τη διάταξη του λόγου των μετασχηματισμών Laplace των δεξιών ουρών τους από την τ.μ.  $Y$  και θα το συμβολίζουμε  $X \leq_{r-Lt-r} Y$ .

Επίσης, ένας ισοδύναμος ορισμός με τον Ορισμό 3.2.2(ii), με τη βοήθεια της σχέσης (1.2.4) είναι ότι για δύο μη αρνητικές τ.μ.  $X, Y$  ισχύει η διάταξη  $X \leq_{r-Lt-r} Y$  αν και μόνο αν το πηλίκο

$$\frac{\mathcal{L}_Y^*(s)}{\mathcal{L}_X^*(s)} \quad (3.2.3)$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς  $s > 0$ .

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι ισχύει

$$X \leq_{Lt-r} Y \quad (\text{ή } X \leq_{r-Lt-r} Y) \Rightarrow X \leq_{Lt} Y.$$

Όπως επίσης, ισχύει

$$X \leq_{s-icu} Y \Rightarrow X \leq_{Lt} Y.$$

(βλέπε Shaked και Shanthikumar, Κεφάλαιο 5).

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις δύο προαναφερθείσες διατάξεις βλέπε Shaked και Wong (1997).

Οι Li et. al (2009) με αφορμή τους δύο Ορισμούς 3.2.2(i) και 3.2.2(ii) επέκτειναν τη θεωρία των στοχαστικών διατάξεων εισάγοντας μια νέα διάταξη, η οποία μελετάει τη μονοτονία του λόγου των παραγωγών των μετασχηματισμών Laplace.

**Ορισμός 3.2.3.** Έστω δύο μη αρνητικές τ.μ.  $X$  και  $Y$  με μετασχηματισμούς Laplace-Stieltjes  $\mathcal{L}_X(s)$  και  $\mathcal{L}_Y(s)$ , αντίστοιχα. Αν η  $\mathcal{L}'_Y(s)/\mathcal{L}'_X(s)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς  $s > 0$ , τότε θα λέμε ότι η τ.μ.  $X$  είναι μικρότερη από την τ.μ.  $Y$  ως προς τη διάταξη του λόγου των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace και θα γράφουμε  $X \leq_{d-Lt-r} Y$ .

Η διάταξη  $\leq_{d-Lt-r}$  είναι πιο ισχυρή από τις διατάξεις  $\leq_{Lt-r}$ ,  $\leq_{r-Lt-r}$  και τη  $\leq_{Lt}$  όπως αποδεικνύουν οι Li et. al (2009) στο Θεώρημα 3.2.. Επίσης, στο ίδιο άρθρο αποδεικνύουν ότι η διάταξη ως προς το λόγο πιθανοφανειών συνεπάγεται την  $\leq_{d-Lt-r}$ . Δηλαδή, ισχύουν τα παρακάτω

- $X \leq_{d-Lt-r} Y \Rightarrow X \leq_{Lt-r} Y$ ,
- $X \leq_{d-Lt-r} Y \Rightarrow X \leq_{r-Lt-r} Y$ ,
- $X \leq_{lr} Y \Rightarrow X \leq_{d-Lt-r} Y$ ,
- $X \leq_{hr} Y \not\Rightarrow X \leq_{d-Lt-r} Y$ .

Επιπρόσθετα, είναι γνωστό (βλέπε Denuit 2001, Property 2.4.) ότι

$$\mathcal{L}_{X^e}(s) = \frac{1 - \mathcal{L}_X(s)}{s \cdot EX}, \quad s > 0. \quad (3.2.4)$$

Από την τελευταία εξίσωση και τον Ορισμό 3.2.2(ii) συνεπάγεται άμεσα ότι

$$X \leq_{r-Lt-r} Y \stackrel{EX=EY}{\Leftrightarrow} X^e \leq_{Lt-r} Y^e. \quad (3.2.5)$$

Ως επακόλουθο της διάταξης  $\leq_{d-Lt-r}$ , αποδεικνύουμε την επόμενη πρόταση για δύο γεωμετρικές κατανομές.

**Πρόταση 3.2.1.** Έστω δύο τ.μ.  $X \sim \text{Geometric}(p_1)$  και  $Y \sim \text{Geometric}(p_2)$ . Τότε, ισχύει

$$X \leq_{d-Lt-r} Y \Leftrightarrow p_1 \geq p_2.$$

*Απόδειξη.* Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace μιας Γεωμετρικής κατανομής με πιθανότητα επιτυχίας  $p$  είναι

$$\mathcal{L}(s) = \frac{p}{1 - qe^{-s}}, \quad s > 0.$$

Επίσης, ο Ορισμός 3.2.3 της διάταξης  $\leq_{d-Lt-r}$  μας περιγράφει την ακόλουθη ισοδυναμία

$$X \leq_{d-Lt-r} Y \Leftrightarrow \frac{\mathcal{L}'_Y(s)}{\mathcal{L}'_X(s)}, \quad \searrow s > 0,$$

όπου  $\mathcal{L}'_X(s)$  και  $\mathcal{L}'_Y(s)$  οι παράγωγοι των μετασχηματισμών Laplace των τ.μ.  $X$  και  $Y$ , αντίστοιχα. Οπότε, στόχος μας είναι να ελέγξουμε τη μονοτονία του πηλίκου των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace των τ.μ.  $X$  και  $Y$ , οι οποίες ακολουθούν Γεωμετρικές κατανομές. Έτσι, με απλές πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{\mathcal{L}'_Y(s)}{\mathcal{L}'_X(s)} = \frac{q_2 p_2 (1 - q_1 e^{-s})^2}{q_1 p_1 (1 - q_2 e^{-s})^2}, \quad s > 0.$$

Η συνάρτηση στο δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης είναι φθίνουσα ως προς  $s$  αν και μόνο αν η παράγωγος της είναι αρνητική. Κάνοντας απλές πράξεις προκύπτει ότι είναι φθίνουσα ως προς  $s$  αν και μόνο αν

$$2p_2q_2(1-q_1e^{-s})q_1e^{-s} \cdot p_1q_1(1-q_2e^{-s})^2 - p_2q_2(1-q_1e^{-s})^2 \cdot 2p_1q_1(1-q_2e^{-s})q_2e^{-s} \leq 0.$$

και γνωρίζοντας ότι  $p_1, q_1, p_2, q_2, e^{-s} \geq 0$ , προκύπτει η ισοδύναμη σχέση

$$q_1 \cdot (1 - q_2e^{-s}) \leq q_2 \cdot (1 - q_1e^{-s}) \Leftrightarrow \\ q_1 \leq q_2,$$

ή ισοδύναμα  $p_1 \geq p_2$ . Άρα δείξαμε ότι το κλάσμα των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace είναι φθίνουσα συνάρτηση αν και μόνο αν  $p_1 \geq p_2$ . ■

Μία γενίκευση της διάταξης ως προς τη μονοτονία του λόγου των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace εισήχθη από τους Mulero et al. (2010), η οποία ελέγχει τη μονοτονία του λόγου των  $n$ -οστών παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace, όπως φαίνεται στον επόμενο ορισμό.

**Ορισμός 3.2.4.** Έστω δύο μη αρνητικές τ.μ.  $X$  και  $Y$  με μετασχηματισμούς  $\mathcal{L}_X(s)$  και  $\mathcal{L}_Y(s)$ , αντίστοιχα. Αν ο λόγος  $\mathcal{L}_Y^{(n)}(s)/\mathcal{L}_X^{(n)}(s)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς  $s > 0$ , τότε θα το συμβολίζουμε  $X \leq_{n-Lt-r} Y$  και θα λέμε ότι η τ.μ.  $X$  είναι μικρότερη από την τ.μ.  $Y$  ως προς τη διάταξη του λόγου των  $n$ -οστών παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace.

Ξεχωριστό ενδιαφέρον παρουσιάζει το ερώτημα ποιές διατάξεις τυχαίων μεταβλητών και υπό ποιές προϋποθέσεις μεταφέρονται στις αντίστοιχες κατανομές ισορροπίας. Οι Shaked και Shanthikumar (2007) περιγράφουν τις εξής σχέσεις

**Θεώρημα 3.2.1.**

- (i)  $X \leq_{hr} Y \Leftrightarrow X_e \leq_{lr} Y_e$ ,
- (ii)  $X \leq_{mrl} Y \Leftrightarrow X_e \leq_{hr} Y_e$ ,
- (iii)  $X \leq_{hmrl} Y \Leftrightarrow X_e \leq_{st} Y_e$ ,
- (iv)  $X \leq_{Lt} Y \stackrel{EX=EY}{\Leftrightarrow} X_e \geq_{Lt} Y_e$ .

Στο επόμενο παράδειγμα δείχνουμε ότι η διάταξη  $\leq_{d-Lt-r}$  δεν μεταφέρεται πάντα στις κατανομές ισορροπίας.

**Παράδειγμα 3.2.1.** Έστω μια τ.μ.  $X$  με συνάρτηση επιβίωσης  $\bar{F}_X(x) = (2e^{-x/2} + e^{-x/4})/3$  και  $Y \sim \text{Gamma}(2, 1/2)$ . Τότε, με τη βοήθεια του MATHEMATICA, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$\frac{\mathcal{L}'_Y(s)}{\mathcal{L}'_X(s)} = \frac{3 \cdot (1 + 4s)^2}{2 \cdot (1 + 2s) \cdot (1 + 2s) \cdot (3 + 5s)},$$

είναι φθίνουσα ως προς  $s$ . Όμως, ο λόγος των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace για τις αντίστοιχες κατανομές ισορροπίας

$$\frac{\mathcal{L}'_{Y_e}(s)}{\mathcal{L}'_{X_e}(s)} = \frac{(3 + 2s) \cdot (1 + 4s)^2}{(1 + 2s) \cdot (3 + 16s + 24s^2)},$$

είναι αύξουσα για  $s \in (0, 0.215]$  και φθίνουσα για  $s \in (0.215, \infty)$ .

Επίσης, παρόλο που η διάταξη  $\leq_{hr}$  δεν συνεπάγεται τη  $\leq_{d-Lt-r}$ , αποδεικνύουμε ένα ασθενέστερο αποτέλεσμα.

**Πρόταση 3.2.2.** Έστω  $X$  και  $Y$  δύο μη-αρνητικές συνεχείς τ.μ. με αντίστοιχες κατανομές ισορροπίας  $F_{X^e}$  και  $F_{Y^e}$ , αντίστοιχα. Επίσης, θεωρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές  $X^e$  και  $Y^e$  έχουν τις κατανομές  $F_{X^e}$  και  $F_{Y^e}$ , αντίστοιχα. Τότε

$$X \leq_{hr} Y \Rightarrow X^e \leq_{d-Lt-r} Y^e.$$

Απόδειξη. Είναι γνωστό (βλ. Shaked και Shanthikumar, 2007) ότι

$$X \leq_{hr} Y \Leftrightarrow X^e \leq_{lr} Y^e,$$

ενώ οι Li et al. (2009) έδειξαν ότι

$$X \leq_{lr} Y \Rightarrow X \leq_{d-Lt-r} Y.$$

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω αποτελέσματα καταλήγουμε στο ζητούμενο. ■

Οι Li et al. (2009) έδειξαν ότι η  $\leq_{d-Lt-r}$  δεν συνεπάγεται την  $\leq_{st}$ . Το επόμενο παράδειγμα καταδεικνύει ότι και η αντίστροφη συνεπαγωγή είναι λάθος, επίσης.

**Παράδειγμα 3.2.2.** Έστω μια τ.μ.  $X$  η οποία ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή  $2/3$ , και μια τ.μ.  $Y$  με συνάρτηση πυκνότητας

$$g(x) = e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-x/2}, \quad x \geq 0.$$

Είναι εύκολο, μετά από κάποιες πράξεις, να καταλήξουμε στη συμπεράσμα ότι  $X \leq_{st} Y$ . Όμως, η διάταξη ως προς το λόγο των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace δεν ικανοποιείται. Για την ακρίβεια, με τη βοήθεια του MATHEMATICA παρατηρούμε ότι το κλάσμα

$$\frac{\mathcal{L}'_Y(s)}{\mathcal{L}'_X(s)} = -\frac{2}{3} \left( \frac{2}{3} + s \right)^2 \cdot \left( -\frac{1}{4(\frac{1}{2} + s)^2} - \frac{1}{(2 + s)^2} \right),$$

δεν είναι γνησίως μονότονη η συνάρτησή τους. Ιδιαίτερα, ο λόγος μειώνεται για  $s < 5.27$ , ενώ αυξάνεται για  $s > 5.27$ .

Δίνουμε τώρα, τον ορισμό της διάταξης ως προς τη συνάρτηση της ροπογεννήτριας (βλέπε Klar και Müller, 2003).

**Ορισμός 3.2.5.** Έστω δύο μη αρνητικές τ.μ.  $X$  και  $Y$ , τέτοιες ώστε  $Ee^{s_0 Y} < +\infty$  για κάποιο  $s_0 > 0$ , και

$$Ee^{sX} \leq Ee^{sY}, \quad \text{για κάθε } s > 0.$$

Τότε θα λέμε ότι η τ.μ.  $X$  είναι μικρότερη από την τ.μ.  $Y$  ως προς τη διάταξη της συνάρτησης της ροπογεννήτριας και θα γράφουμε  $X \leq_{mgf} Y$ .

**Παρατήρηση 3.2.1.** Αν  $s > s_0$  το δεξιό μέλος της ανισότητας του Ορισμού 3.2.5 απειρίζεται, οπότε ισχύει και πάλι η ανισότητα.

Επιπλέον, ισοδύναμη συνθήκη με τον Ορισμό 3.2.5 είναι

$$X \leq_{mgf} Y \Leftrightarrow \int_0^{\infty} e^{sy} \bar{F}_X(y) dy \leq \int_0^{\infty} e^{sy} \bar{F}_Y(y) dy, \quad \text{για κάθε } s > 0.$$

Η στοχαστική σύγκριση μιας τ.μ.  $X$  και του αντίστοιχου υπολειπόμενου χρόνου της,  $X_t$ , παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στους κλάδους της θεωρίας Αξιοπιστίας, Αναλογισμού κ.α. Για παράδειγμα, αν η τ.μ.  $X$  παριστάνει το χρόνο ζωής μιας μηχανής, τότε η σύγκριση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής της με το χρόνο ζωής μιας καινούργιας μηχανής και οι αποφάσεις (μη) αντικατάστασής της είναι αντικείμενο μελέτης της θεωρίας Αξιοπιστίας με ποικίλες εφαρμογές όπως σε νοσοκομειακά μηχανήματα κ.α.

Οι Belzunce et. al (1999) μελέτησαν το μετασχηματισμό Laplace της δεξιάς ουράς του υπολειπόμενου χρόνου

$$L_{X_t}^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} \frac{\bar{F}_X(t+y)}{\bar{F}_X(t)} dy = \int_t^{\infty} \frac{e^{-sy} \bar{F}_X(y) dy}{e^{-st} \bar{F}_X(t)}, \quad s > 0. \quad (3.2.6)$$

Επίσης, εισήγαγαν τη διάταξη ως προς το μετασχηματισμό Laplace του υπολειπόμενου χρόνου μιας τυχαίας μεταβλητής.

**Ορισμός 3.2.6.** Έστω δύο μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$ . Θα λέμε ότι η τ.μ.  $X$  είναι μικρότερη ως προς τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace του υπολειπόμενου χρόνου από την τ.μ.  $Y$  αν

$$X_t \leq_{Lt} Y_t, \quad \text{για κάθε } t \in (0, l_X) \cap (0, l_Y),$$

όπου  $l_Z = \sup\{t : F_Z(t) < 1\}$  για  $Z = X, Y$ , και θα τη συμβολίζουμε  $X \leq_{Lt-rl} Y$ .

Ακόμη, στο ίδιο άρθρο απέδειξαν την παρακάτω πρόταση, η οποία μας δίνει ένα ισοδύναμο αποτέλεσμα με τον Ορισμό 3.2.6 .

**Πρόταση 3.2.3.** Έστω δύο μη αρνητικές τ.μ.  $X$  και  $Y$  τότε

$$X \leq_{Lt-rl} Y \Leftrightarrow \frac{\int_t^{\infty} e^{-sy} \bar{F}_X(y) dy}{\int_t^{\infty} e^{-sy} \bar{F}_Y(y) dy} \searrow t \in (0, l_X) \cap (0, l_Y), \quad \forall s > 0.$$

Επιπρόσθετα, οι Belzunce et. al (2004) απέδειξαν την ισοδυναμία μεταξύ της διάταξης ως προς τη βαθμίδα αποτυχίας ( $\leq_{hr}$ ) και της διάταξης ως προς το μετασχηματισμό Laplace του υπολειπόμενου χρόνου ( $\leq_{Lt-rl}$ ), και συγκεκριμένα απέδειξαν ότι

$$X \leq_{Lt-rl} Y \Leftrightarrow X \leq_{hr} Y. \quad (3.2.7)$$

Ακόμη, έδωσαν αντίστοιχους ορισμούς με τις κλάσεις γήρανσης  $DFR$  και  $IFR$  όπως φαίνεται στον επόμενο ορισμό.

**Ορισμός 3.2.7.** Μια τ.μ.  $X$  είναι  $DRL_{Lt}(IRL_{Lt})$  αν

$$X_t \geq_{Lt} (\leq_{Lt}) X_{t'}, \quad t < t', \quad t, t' \in (0, l_X).$$

Ως άμεσο αποτέλεσμα της σχέσης (3.2.7) έδειξαν, επιπλέον, ότι η κλάση αξιοπιστίας  $IFR(DFR)$  ταυτίζεται με την κλάση αξιοπιστίας  $DRL_{Lt}(IRL_{Lt})$ . Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ισχυρότητα των διατάξεων και ποιές διατάξεις μας οδηγούν σε άλλες διατάξεις. Στο Σχήμα 3.1 δίνονται οι σχέσεις μεταξύ των διατάξεων που έχουν παρουσιαστεί ως τώρα.

$$\begin{array}{ccccccc}
X \leq_{n-Lt-r} Y & & X \leq_{Lt-rl} Y & \Rightarrow & X \leq_{mrl} Y & \Rightarrow & X \leq_{hmrl} Y \\
\uparrow & & \Downarrow & & & & \downarrow \\
X \leq_{lr} Y & \Rightarrow & X \leq_{hr} Y & \Rightarrow & X \leq_{r-Lt-r} Y & & X \leq_{icx} Y \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
X \leq_{d-Lt-r} Y & & X \leq_{st} Y & \Rightarrow & X \leq_{icx} Y & \Rightarrow & EX \leq EY \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
X \leq_{Lt-r} Y & \Rightarrow & X \leq_{Lt} Y & \Leftarrow & X \leq_{icv} Y & & 
\end{array}$$

Σχήμα 3.1: Σχέσεις μεταξύ στοχαστικών διατάξεων.

Στη βιβλιογραφία έχουν ιδιαίτερα μελετηθεί οι στοχαστικές διατάξεις μεταξύ μιας τ.μ.  $X$  και του αντίστοιχου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της,  $X_t$ , και έχουν οριστεί, με τη βοήθεια αυτών των συγκρίσεων, αρκετές κλάσεις γήρανσης. Ακολουθώντας, δίνουμε κάποιους ορισμούς στοχαστικών διατάξεων μεταξύ μιας τ.μ.  $X$  και του υπολειπόμενου χρόνου της,  $X_t$  (βλέπε Belzunce et al., 2001).

**Ορισμός 3.2.8.** Έστω  $X$  μια μη αρνητική τ.μ. θα λέμε ότι

(i) η  $X$  είναι *NBU* (new better than used) αν

$$X_t \leq_{st} X, \quad \forall t \geq 0,$$

(ii) η  $X$  είναι *NBUC* (new better than used in convex order) αν

$$X_t \leq_{icx} X, \quad \forall t \geq 0,$$

(iii) η  $X$  είναι *NBU(2)* (new better than used in concave order) αν

$$X_t \leq_{icv} X, \quad \forall t \geq 0,$$

(iv) η  $X$  είναι *NBU<sub>Lt</sub>* (new better than used in the Laplace order) αν

$$X_t \leq_{Lt} X, \quad \forall t \geq 0.$$

(v) Η τ.μ.  $X$  είναι *NBUE(NWUE)*, αν και μόνο αν,

$$X \geq_{st} (\leq_{st}) [X_t - t | X_t > t], \quad \forall t \geq 0.$$

**Παρατήρηση 3.2.2.** Ο ορισμός για την κλάση *NBU* που δίνεται στο (i) είναι ισοδύναμος με τον Ορισμό 2.4.3, ενώ ο ορισμός στο (v) είναι ισοδύναμος με τον Ορισμό 2.4.4 .

Ένας επιπλέον ορισμός δίνεται από τον Li (2004), ο οποίος συγκρίνει την τ.μ.  $X$  με τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής  $X_t$  ως προς τη διάταξη της συνάρτησης της ροπογεννήτριας.

---

**Ορισμός 3.2.9.** Η τ.μ.  $X$  είναι  $NBU_{mgf}$  (new better than used in the moment-generating function order) αν

$$X_t \leq_{mgf} X, \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Ακόμη, όπως ορίζεται στους Willmot και Lin (2001), μια τ.μ.  $X$  ανήκει στη κλάση  $2 - NBU$ , αν η τ.μ. της κατανομής ισορροπίας της,  $X^e$ , ανήκει στη κλάση  $2 - NBU$ , και συγκεκριμένα

$$X_t^e \leq_{st} X^e, \quad \text{για κάθε } t \geq 0,$$

όπου  $X_t^e$  είναι η τ.μ. του υπολειπόμενου χρόνου της τ.μ.  $X^e$ . Με παρόμοιο σκεπτικό, εμείς ορίζουμε μια καινούργια κλάση, η οποία συγκρίνει το μετασχηματισμό Laplace της τ.μ.  $X^e$  και του υπολειπόμενου χρόνου της, όπως αναφέρουμε στην επόμενο ορισμό.

**Ορισμός 3.2.10.** Η τ.μ.  $X$  ανήκει στην κλάση  $2 - NBU_{Lt}$  αν

$$X_t^e \leq_{Lt} X^e, \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι είναι εμφανές ότι η κλάση  $NBU$  είναι υποκλάση της κλάσης  $NBU_{Lt}$  και της κλάσης  $NBU_{mgf}$ . Οι Willmot και Lin (2001) έδειξαν ότι η  $IMRL(DMRL)$  κλάση είναι υποκλάση της  $2 - NBU(2 - NWU)$ . Ως άμεσο αποτέλεσμα από τα προηγούμενα, συνεπάγεται ότι η  $IMRL(DMRL)$  είναι υποκλάση και της  $2 - NWU_{Lt}(2 - NBU_{Lt})$ . Επιπλέον, το επόμενο παράδειγμα καταδεικνύει ότι η  $NBU$  είναι γνήσια υποκλάση της  $NBU_{Lt}$ . Οπότε, ένα συμπέρασμα που εξάγεται είναι το γεγονός ότι η  $2 - NBU(2 - NWU)$  είναι γνήσια υποκλάση της νέας κλάσης  $2 - NBU_{Lt}(2 - NWU_{Lt})$  (βλέπε Franco et al, 2001, Παράδειγμα 2.7).

**Παράδειγμα 3.2.3.** Θεωρούμε την παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων επιβίωσης, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\bar{F}_{(a,b,c,r,s)}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, a), \\ r, & t \in [a, b), \\ s, & t \in [b, c), \\ 0, & t \in t \geq c, \end{cases}$$

όπου  $r, s \in (0, 1), r > s > r^2, 0 < a < b \leq 2a(r/(r+s))$  και  $2a \leq a+b$ . Τότε η  $F_{(a,b,c,r,s)}(t)$  δεν ανήκει στην κλάση  $NBU$ , διότι  $\bar{F}(a+a) = s > r^2 = \bar{F}_{(a,b,c,r,s)}(a) \cdot \bar{F}_{(a,b,c,r,s)}(a)$ . Όμως, εύκολα αποδεικνύεται ότι η  $\bar{F}_{(a,b,c,r,s)}(t)$  έχει την  $NBU_{Lt}$  ιδιότητα.

Ένα ενδιαφέρον παράδειγμα σε αντιστοιχία με το Παράδειγμα 2.5.1 είναι το ακόλουθο.

**Παράδειγμα 3.2.4.** Έστω  $X$  και  $Y$  δύο τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις επιβίωσης  $\bar{F}_X(t) = e^{-bt}$  και  $\bar{F}_Y(t) = ae^{-b_1 t} + (1-a)e^{-b_2 t}$ , αντίστοιχα, με  $EX = EY$  όπου  $0 < b_1, b_2$  και  $0 < a < 1$ . Τότε ισχύει  $X \geq_{Lt} Y$ . Αυτό εύκολα προκύπτει αφού όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο η τ.μ.  $Y$  είναι μια  $NWUE$  κατανομή με ίδια μέση τιμή με την τ.μ.  $X$  και συνεπάγεται ότι  $X \leq_{icx} Y$ , άρα  $-X \geq_{icv} -Y$



και άρα  $X \geq_{Lt} Y$ .

Είναι γνωστό ότι  $\mathcal{L}_X(s) = b/(b+s)$  και  $\mathcal{L}_Y(s) = ab_1/(b_1+s) + (1-a)b_2/(b_2+s)$ . Βάσει της υπόθεσης  $EX = EY$  ισχύει ότι  $1/b = a/b_1 + (1-a)/b_2$ . Επομένως, για να δείξουμε ότι  $X \geq_{Lt} Y$ , αρκεί να δείξουμε ότι  $\mathcal{L}_X(s) \leq \mathcal{L}_Y(s)$ , ή ισοδύναμα,

$$\frac{b}{b+s} \leq \frac{ab_1}{b_1+s} + \frac{(1-a)b_2}{b_2+s} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(b_1b_2)/(ab_2 + (1-a)b_1)}{(b_1b_2)/(ab_2 + (1-a)b_1) + s} \leq \frac{ab_1(b_2+s) + (1-a)b_2(b_1+s)}{(b_1+s)(b_2+s)} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{b_1b_2}{ab_2 + (1-a)b_1} &\leq \left( \frac{ab_1(b_2+s) + (1-a)b_2(b_1+s)}{(b_1+s)(b_2+s)} \right) \left( \frac{b_1b_2}{ab_2 + (1-a)b_1} + s \right) \\ &= \left( \frac{ab_1(b_2+s) + (1-a)b_2(b_1+s)}{(b_1+s)(b_2+s)} \right) \\ &\quad \times \left( \frac{b_1b_2 + s[ab_2 + (1-a)b_1]}{ab_2 + (1-a)b_1} \right). \end{aligned}$$

Γνωρίζοντας ότι  $b_1 + s > 0$  και  $b_2 + s > 0$  προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{b_1b_2}{ab_2 + (1-a)b_2b_1} &\leq [ab_1(b_2+s) + (1-a)b_2(b_1+s)] \\ &\quad \times \left( \frac{b_1b_2 + s[ab_2 + (1-a)b_1]}{ab_2 + (1-a)b_1} \right). \end{aligned}$$

Τώρα, το μόνο που απομένει είναι να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} b_1b_2 &\leq [ab_1(b_2+s) + (1-a)b_2(b_1+s)] \\ &\quad \times (b_1b_2 + s[ab_2 + (1-a)b_1]) \\ &= (b_1b_2 + as(b_1 - b_2))(b_1b_2 + s(b_2 + (1-a)b_1)). \end{aligned}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι  $b_1 \geq b_2$ . Τότε, το ζητούμενο έπεται άμεσα.

Το 1999 ο Bartoszewicz παρατηρεί ότι η συνάρτηση

$$\tilde{F}_X(s) = 1 - \mathcal{L}_X(s) = \int_0^\infty (1 - e^{-sx}) dF_X(x), \quad s > 0, \quad (3.2.8)$$

μπορεί να θεωρηθεί ως μείξη από εκθετικές κατανομές με μέσες τιμές  $1/x$ ,  $x > 0$ , και τη συνάρτηση κατανομής  $F_X$  μιας τ.μ.  $X$ . Ακόμη, η  $\tilde{F}_X$  έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$\tilde{f}_X(s) = \int_0^\infty xe^{-sx} dF_X(x), \quad s > 0. \quad (3.2.9)$$

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι η  $\tilde{F}_X$  είναι πάντα *DFR* ως μείξη *DFR* κατανομών. Από τις σχέσεις (1.2.3) και (3.2.9) ο Bartoszewicz (1999) συμπέρανε ότι

$$\tilde{f}_X(s) = -\mathcal{L}'_X(s), \quad (3.2.10)$$

και έδειξε τις παρακάτω ισοδυναμίες

$$X \leq_{Lt} Y \Leftrightarrow \tilde{F}_Y \leq_{st} \tilde{F}_X, \quad (3.2.11)$$

$$X \leq_{Lt-r} Y \Leftrightarrow \tilde{F}_Y \leq_{hr} \tilde{F}_X, \quad (3.2.12)$$

$$X \leq_{r-Lt-r} Y \Leftrightarrow \tilde{F}_Y \leq_{rh} \tilde{F}_X, \quad (3.2.13)$$

$$X \leq_{d-Lt-r} Y \Leftrightarrow \tilde{F}_Y \leq_{lr} \tilde{F}_X. \quad (3.2.14)$$

Η συνάρτηση κατανομής  $\tilde{F}_X$  μελετήθηκε από τους Bartoszewicz και Skolomiwska (2006), Bartoszewicz (2000) και Bartoszewicz (2002). Δίνουμε κάποια παραδείγματα τα οποία είναι γνωστά στη θεωρία Πιθανοτήτων.

**Παράδειγμα 3.2.5.** Έστω  $X \sim \text{Gamma}(a, b)$  με μετασχηματισμό *Laplace-Stieltjes*

$$\mathcal{L}_X(s) = \left( \frac{b}{b+s} \right)^a, \quad s > 0.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\tilde{F}(s) = 1 - \mathcal{L}_X(s) = 1 - \left( \frac{b}{b+s} \right)^a, \quad s > 0,$$

είναι η συνάρτηση κατανομής της τ.μ.  $\tilde{X} \sim \text{Pareto}(a, b)$  (*Lomax* κατανομή).

**Παράδειγμα 3.2.6.** Έστω  $X \sim N(\mu, 0)$  με  $EX = \mu$  και μετασχηματισμό *Laplace-Stieltjes*

$$\mathcal{L}_X(s) = e^{-s\mu}, \quad s > 0.$$

Είναι γνωστό ότι

$$\tilde{F}(s) = 1 - \mathcal{L}_X(s) = 1 - e^{-s\mu}, \quad s > 0,$$

είναι η συνάρτηση κατανομής της τ.μ.  $\tilde{X} \sim \text{Exp}(\mu)$ .

Τέλος, κλείνουμε αυτήν την ενότητα με έναν πίνακα όπου απεικονίζονται όλες οι κλάσεις γήρανσης που έχουν οριστεί στη διατριβή μας, αφού πρώτα αξίζει να δώσουμε δύο τελευταίους ορισμούς κλάσεων αξιοπιστίας, οι οποίες έχουν μελετηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία.

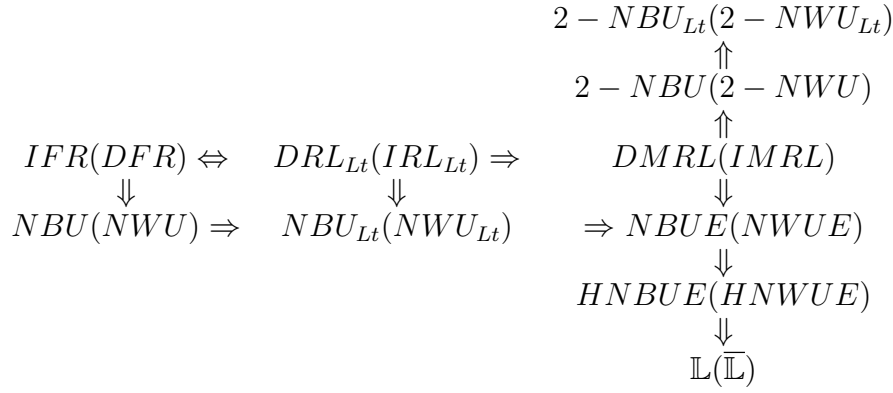
**Ορισμός 3.2.11.** Μια τ.μ. με μέση τιμή  $\mu_F$  είναι *HNBUE*(*HNWUE*) αν

$$\int_t^\infty \bar{F}_X(x) dx \leq (\geq) \mu_F \exp(-t/\mu_F), \quad t \geq 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{F}_{X,e}(t) \leq (\geq) \bar{B}(t), \quad t \geq 0,$$

όπου η κατανομή  $B$  είναι η  $\text{Exp}(1/\mu_F)$  με δεξιά ουρά  $\bar{B}(x) = \exp(-x/\mu_F)$ .



Πίνακας 3.1: Ισχυρότητα των Κλάσεων Γήρανσης.

(βλέπε Klefsjö (1982), Ορισμό 1).

**Ορισμός 3.2.12.** *Μια τ.μ.  $X$  ανήκει στη κλάση  $\mathbb{L}(\overline{\mathbb{L}})$  αν*

$$\int_0^\infty e^{-st} \overline{F}(t) dt \geq (\leq) \frac{\mu_F}{1 + s\mu_F}, \quad s \geq 0.$$

(βλ. Klefsjö, (1983), Ορισμό 1).

Τέλος, μπορεί να παρασταθεί σχηματικά η σχέση εγκλεισμού μεταξύ των προαναφερθέντων κλάσεων γήρανσης (αξιοπιστίας) όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.1.

### 3.3 Ιδιότητες κάποιων κλάσεων Γήρανσης

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ιδιότητες των κλάσεων αξιοπιστίας όσον αφορά την κλειστότητά τους ως προς τη συνέλιξη κατανομών, τη σύνθεση κατανομών, το σχηματισμό παράλληλων συστημάτων (parallel systems) κ.α. Είναι γνωστό ότι η κλάση  $NBU$  είναι κλειστή ως προς τη συνέλιξη (βλέπε Marshall και Olkin, 2006). Εμείς, εμπλουτίζουμε τη βιβλιογραφία, αποδεικνύοντας την κλειστότητά της κλάσης  $NBU_{Lt}$  ως προς τη συνέλιξη.

**Θεώρημα 3.3.1.** *Έστω  $X_1, X_2$  δύο ανεξάρτητες μη αρνητικές τ.μ. με συναρτήσεις κατανομής  $F_1$  και  $F_2$ , οι οποίες ανήκουν στην κλάση  $NBU_{Lt}$ . Τότε, η συνέλιξή τους είναι  $NBU_{Lt}$ .*

*Απόδειξη.* Αρχικά, αναφέρουμε ότι η δεξιά ουρά της συνέλιξης δύο κατανομών  $F_1$  και  $F_2$  είναι

$$\overline{F}(y) = \int_0^\infty \overline{F}_1(y - z) dF_2(z).$$

Με παρόμοια μεθοδολογία με τους Hu και Xie (2002), έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}(t+y) dy &= \int_0^\infty e^{-sy} \int_0^\infty \bar{F}_1(t+y-u) dF_2(u) dy \\
&= \int_0^\infty e^{-sy} \int_0^t \bar{F}_1(t+y-u) dF_2(u) dy \\
&\quad + \int_0^\infty e^{-sy} \int_t^\infty \bar{F}_1(t+y-u) dF_2(u) dy \\
&= \int_0^t \left[ \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_1(t+y-u) dy \right] dF_2(u) \\
&\quad + \int_0^\infty e^{-sy} \left[ \int_0^\infty \bar{F}_1(y-v) d_v F_2(v+t) \right] dy \\
&:= \Xi_1 + \Xi_2. \tag{3.3.1}
\end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος του δεύτερου μέλους της τελευταίας ισότητας, από την ιδιότητα  $NBU_{Lt}$  της  $F_1$  γίνεται

$$\begin{aligned}
\Xi_1 &\leq \int_0^t \left[ \bar{F}_1(t-u) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_1(y) dy \right] dF_2(u) \\
&= [\bar{F}(t) - \bar{F}_2(t)] \cdot \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_1(y) dy, \tag{3.3.2}
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας ότι

$$\begin{aligned}
\int_0^t \bar{F}_1(t-u) dF_2(u) &= \int_0^\infty \bar{F}_1(t-u) dF_2(u) - \int_t^\infty \bar{F}_1(t-u) dF_2(u) \\
&= \bar{F}(t) - \bar{F}_2(t).
\end{aligned}$$

Όσον αφορά το δεύτερο όρο, ολοκληρώνοντας κατά μέλη το εσωτερικό ολοκλήρωμα παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\Xi_2 &= \int_0^\infty e^{-sy} \left[ \int_0^\infty \bar{F}_1(y-v) d_v F_2(v+t) \right] dy \\
&= \int_0^\infty e^{-sy} \left[ \bar{F}_1(y) \bar{F}_2(t) + \int_0^\infty \bar{F}_2(v+t) d_v \bar{F}_1(y-v) \right] dy \\
&= \bar{F}_2(t) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_1(y) dy + \int_0^\infty e^{-sy} \left[ \int_0^\infty \bar{F}_2(v+t) d_v \bar{F}_1(y-v) \right] dy \\
&= \bar{F}_2(t) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_1(y) dy + \int_0^\infty e^{-sy} \left[ \int_0^y \bar{F}_2(v+t) d_v \bar{F}_1(y-v) \right] dy.
\end{aligned}$$

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης στον δεύτερο όρο του δεύτερου μέλους, και μετά από απλές πράξεις, καταλήγουμε

$$\begin{aligned}
\Xi_2 &= \bar{F}_2(t) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_1(y) dy + \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-sy} \bar{F}_2(t+y-u) dy dF_1(u) \\
&= \bar{F}_2(t) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_1(y) dy + \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+y)} \bar{F}_2(t+y) dy dF_1(u).
\end{aligned}$$

| Κατανομές               | Συνέλιξη | Μείξεις | Συνάρτηση Υπολειπόμενου Χρόνου |
|-------------------------|----------|---------|--------------------------------|
| <i>IFR</i>              | NAI      | OXI     | NAI                            |
| <i>NBU</i>              | NAI      | OXI     | OXI                            |
| <i>DMRL</i>             | OXI      | OXI     | NAI                            |
| <i>NBUE</i>             | NAI      | OXI     | OXI                            |
| <i>NBU<sub>Lt</sub></i> | NAI      | ;       | ;                              |
| <i>DFR</i>              | OXI      | NAI     | NAI                            |
| <i>NWU</i>              | OXI      | OXI     | OXI                            |
| <i>IMRL</i>             | OXI      | NAI     | NAI                            |
| <i>NWUE</i>             | OXI      | NAI     | OXI                            |

Πίνακας 3.2: Κλειστότητα Κλάσεων Γήρανσης.

Από το γεγονός ότι η  $F_2$  ανήκει, επίσης, στην κλάση  $NBU_{Lt}$ , έχουμε

$$\Xi_2 \leq \bar{F}_2(t) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_1(y) dy + \bar{F}_2(t) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_2(y) dy dF_1(u). \quad (3.3.3)$$

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{F}(t) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}(y) dy &= \bar{F}(t) \int_0^\infty e^{-sy} \int_0^\infty \bar{F}_2(y-u) dF_1(u) dy \\ &= \bar{F}(t) \left[ \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_1(y) dy + \int_0^\infty e^{-sy} \int_0^y \bar{F}_2(y-u) dF_1(u) dy \right] \\ &= \bar{F}(t) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_1(y) dy + \bar{F}(t) \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-sy} \bar{F}_2(y-u) dy dF_1(u) \\ &= \bar{F}(t) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_1(y) dy + \bar{F}(t) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+y)} \bar{F}_2(y) dy dF_1(u) \\ &= \bar{F}(t) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_1(y) dy + \bar{F}(t) \int_0^\infty e^{-su} \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_2(y) dy dF_1(u) \\ &= [\bar{F}(t) - \bar{F}_2(t)] \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_1(y) dy + \bar{F}_2(t) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_1(y) dy \\ &\quad + \bar{F}(t) \int_0^\infty e^{-su} \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_2(y) dy dF_1(u). \end{aligned}$$

Με βάση την (3.3.2), παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους είναι μεγαλύτερος ή ίσος από  $\Xi_1$ , ενώ το άθροισμα των υπολοίπων δύο όρων είναι μεγαλύτερο ή ίσο από  $\Xi_2$ , χρησιμοποιώντας την (3.3.3) και επιπλέον από το γεγονός ότι  $\bar{F}(t) \geq \bar{F}_2(t)$  για όλα τα  $t \in (0, +\infty)$ . Με βάση τη σχέση (3.3.1), καταλήγουμε στο ζητούμενο. ■

Στον Πίνακα 3.2 δίνουμε συγκεντρωτικά τις κλάσεις γήρανσης όσον αφορά την κλειστότητά τους ως προς τις συνέλιξεις και τις μείξεις (βλέπε Marshall και Olkin, 2006, σελ. 182).

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε σημεία αλλαγής ως προς τη μονοτονία χαρακτηριστικών συναρτήσεων μιας κατανομής (βαθμίδα αποτυχίας ή συνάρτηση

μέσου υπολειπόμενου χρόνου) και σημεία αλλαγής ως προς το πρόσημο των συναρτήσεων πυκνότητας (ή κατανομής) μιας τυχαίας μεταβλητής. Τα τελευταία χρόνια στον Αναλογισμό και τη θεωρία Αξιοπιστίας έχει γίνει αντικείμενο μελέτης η "αλλαγή" διάταξης μεταξύ δύο τ.μ. σε ένα σημείο  $t_0$ , και πώς αυτό μεταφέρεται σε ασθενέστερες διατάξεις.

Οι Metzger και Rüshendorf (1991) έδειξαν ότι για συνεχείς τ.μ.  $X$  και  $Y$  με συνάρτηση πυκνότητας  $f$  και  $g$ , αντίστοιχα, αν ισχύει ότι το πηλίκο  $h = g/f$  ξεκινάει ως φθίνουσα συνάρτηση και συνεχίζει αύξουσα, τότε η μονοτονία του έχει την ίδια συμπεριφορά με το πηλίκο των αντίστοιχων συναρτήσεων κατανομής,  $H = G/F$ .

Οι Belzunce et al. το (2013) έδειξαν ότι υπάρχει διάταξη ως προς το μέσο υπολειπόμενο χρόνο για δύο συνεχείς τ.μ.  $X$  και  $Y$ , χωρίς κατ' ανάγκη να υπάρχει διάταξη ως προς τη βαθμίδα αποτυχίας. Ειδικότερα, απέδειξαν το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 3.3.2.** Έστω δύο συνεχείς τ.μ.  $X$  και  $Y$  με συναρτήσεις επιβίωσης  $\bar{F}(t)$  και  $\bar{G}(t)$ , αντίστοιχα, οι οποίες έχουν πεπερασμένες μέσες τιμές τέτοιες ώστε  $EX \leq EY$ . Αν υπάρχει ένα  $x_0 \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε το πηλίκο  $\bar{H}(t) = \bar{G}(t)/\bar{F}(t)$  να είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς  $t$  για  $t \in (0, x_0]$  και αύξουσα συνάρτηση για  $t \in (x_0, \infty)$ , τότε  $X \leq_{mrl} Y$ .

Αντίστοιχα, εξέτασαν τη διάταξη ως προς το μέσο υπολειπόμενο χρόνο, ελέγχοντας τις βαθμίδες αποτυχίας, και συγκεκριμένα στο Θεώρημα 2.5 του ίδιου άρθρου, έδειξαν το εξής:

**Θεώρημα 3.3.3.** Έστω δύο συνεχείς τ.μ.  $X$  και  $Y$  με βαθμίδες αποτυχίας  $r(t)$  και  $s(t)$ , αντίστοιχα, οι οποίες έχουν πεπερασμένες μέσες τιμές τέτοιες ώστε  $EX \leq EY$ . Αν υπάρχει ένα  $x_0 \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε να ισχύει  $r(t) \leq s(t)$  για όλα τα  $t < x_0$  και  $r(t) \geq s(t)$  για όλα τα  $t \geq x_0$ , τέτοια ώστε  $\bar{F}(t), \bar{G}(t) > 0$ , τότε

$$X \leq_{mrl} Y.$$

Εμείς θα δείξουμε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα με το Θεώρημα 3.3.3 όσον αφορά τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι διατηρείται η διάταξη του μετασχηματισμού Laplace, χωρίς κατ' ανάγκη να διατηρείται η διάταξη ως προς το λόγο των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace των δύο τ.μ.  $X$  και  $Y$ .

**Θεώρημα 3.3.4.** Έστω δύο μη αρνητικές συνεχείς τ.μ.  $X$  και  $Y$ , οι οποίες έχουν πεπερασμένες μέσες τιμές, τέτοιες ώστε  $EX \leq EY$ . Αν υπάρχει  $s_0 \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε ο λόγος των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace  $\mathcal{L}'_Y(s)/\mathcal{L}'_X(s)$  να είναι αύξουσα συνάρτηση για  $s \leq s_0$  και φθίνουσα συνάρτηση για  $s \geq s_0$ , τότε ισχύει  $X \leq_{Lt} Y$ .

Απόδειξη. Για  $0 \leq x < y \leq s_0$ , ισχύει ότι

$$\frac{\mathcal{L}'_Y(x)}{\mathcal{L}'_X(x)} \leq \frac{\mathcal{L}'_Y(y)}{\mathcal{L}'_X(y)}.$$

Θέτοντας  $x = 0$  στην παραπάνω ανίσωση, προκύπτει

$$\frac{\mathcal{L}'_Y(0)}{\mathcal{L}'_X(0)} \leq \frac{\mathcal{L}'_Y(y)}{\mathcal{L}'_X(y)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{-EY}{-EX} \leq \frac{\mathcal{L}'_Y(y)}{\mathcal{L}'_X(y)}.$$

Από τη διάταξη των μέσων τιμών τους  $EX \leq EY$ , και το γεγονός ότι  $\mathcal{L}'_X(s) < 0$ , συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{L}'_X(y) \geq \mathcal{L}'_Y(y), \quad y \in (0, s_0].$$

Γνωρίζουμε από τη σχέση (3.2.10), ότι  $\tilde{f}_X(s) = -\mathcal{L}'_X(s)$  για κάθε  $s > 0$ , και έτσι η τελευταία ανισότητα γίνεται

$$\tilde{f}_X(y) \leq \tilde{f}_Y(y), \quad y \in (0, s_0]. \quad (3.3.4)$$

Τέλος, ολοκληρώνοντας για  $t \in (0, y)$  και τα δύο μέλη της ανίσωσης (3.3.4) συνεπάγεται ότι

$$\int_0^y \tilde{f}_X(t) dt \leq \int_0^y \tilde{f}_Y(t) dt,$$

ή ισοδύναμα,

$$\tilde{F}_X(y) \leq \tilde{F}_Y(y).$$

Οπότε, από τη σχέση (3.2.8), έχουμε ότι

$$1 - \mathcal{L}_X(y) \leq 1 - \mathcal{L}(y) \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{L}_X(y) \geq \mathcal{L}(y), \quad y \in (0, s_0].$$

Άρα, καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\int_0^\infty e^{-sx} \bar{F}(x) dx \leq \int_0^\infty e^{-sx} \bar{G}(x) dx,$$

για κάθε  $s \in (0, s_0]$ . Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι ισχύει η παραπάνω ανισότητα και για  $s \in (s_0, +\infty)$ .

Για  $s_0 \leq x < y$  ισχύει ότι

$$\frac{\mathcal{L}'_Y(x)}{\mathcal{L}'_X(x)} \geq \frac{\mathcal{L}'_Y(y)}{\mathcal{L}'_X(y)},$$

ή ισοδύναμα,

$$\mathcal{L}'_Y(x) \cdot \mathcal{L}'_X(y) \geq \mathcal{L}'_X(x) \cdot \mathcal{L}'_Y(y).$$

Από τη σχέση (3.2.10), έχουμε

$$\tilde{f}_Y(x) \cdot \tilde{f}_X(y) \geq \tilde{f}_X(x) \cdot \tilde{f}_Y(y). \quad (3.3.5)$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση  $\tilde{f}_X(s)/\tilde{f}_Y(s)$  είναι αύξουσα για κάθε  $s \in [s_0, \infty)$ . Με αποτέλεσμα να ισχύει

$$\int_{t=y}^{\infty} \int_{t'=x}^y \tilde{f}_X(t')\tilde{f}_Y(t)dt'dt \geq \int_{t=x}^y \int_{t'=y}^{\infty} \tilde{f}_X(t)\tilde{f}_Y(t')dt'dt, \quad x < y,$$

καταλήγοντας έτσι στην ανισότητα,

$$\int_x^{\infty} \tilde{f}_Y(t)dt \int_y^{\infty} \tilde{f}_X(t')dt' \geq \int_x^{\infty} \tilde{f}_X(t)dt \int_y^{\infty} \tilde{f}_Y(t')dt', \quad x < y,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την ανισότητα

$$\tilde{F}_Y(x)\tilde{F}_X(y) \geq \tilde{F}_X(x)\tilde{F}_Y(y), \quad s_0 \leq x < y. \quad (3.3.6)$$

Τέλος, από τη σχέση (3.2.8) και (3.3.6) προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}_Y(x)\mathcal{L}_X(y) \geq \mathcal{L}_X(x)\mathcal{L}_Y(y), \quad s_0 \leq x < y,$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{\mathcal{L}_Y(x)}{\mathcal{L}_X(x)} \geq \frac{\mathcal{L}_Y(y)}{\mathcal{L}_X(y)}, \quad s_0 \leq x < y, \quad (3.3.7)$$

(δηλαδή ο λόγος των μετασχηματισμών Laplace  $\mathcal{L}_Y(s)/\mathcal{L}_X(s)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση για  $s \in [s_0, \infty)$ ).

Για  $x = s_0$ , όπως δείξαμε στο πρώτο μέρος της απόδειξης ισχύει ότι  $\mathcal{L}_X(s_0) \geq \mathcal{L}_Y(s_0)$ . Οπότε, η σχέση (3.3.7) γίνεται

$$1 \geq \frac{\mathcal{L}_Y(s_0)}{\mathcal{L}_X(s_0)} \geq \frac{\mathcal{L}_Y(y)}{\mathcal{L}_X(y)}.$$

Καταλήγουμε με αυτόν τον τρόπο στο γεγονός ότι  $\mathcal{L}_X(y) \geq \mathcal{L}_Y(y), y \in (s_0, \infty)$ , ή ισοδύναμα

$$\int_0^{\infty} e^{-yt}\tilde{F}_X(t)dt \leq \int_0^{\infty} e^{-yt}\tilde{F}_Y(t)dt,$$

για  $y \in (s_0, +\infty)$ . Αποδείχθηκε συνεπώς το ζητούμενο  $X \leq_{Lt} Y$ .

■

Στο παράδειγμα που ακολουθεί εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα για μια μείξη δύο εκθετικών κατανομών και μιας Gamma κατανομής.

**Παράδειγμα 3.3.1.** Έστω μια τ.μ.  $X$  με σ.π.π.

$$f(x) = \frac{2}{3}e^{-x} + \frac{1}{12}e^{-x/4}, \quad x \geq 0,$$

έτσι ώστε να είναι μια μείξη εκθετικών με παραμέτρους 1 και 1/4 και αντίστοιχα βάρη 2/3 και 1/3. Επίσης, θεωρούμε την τ.μ.  $Y \sim \text{Gamma}(3, 4/3)$  με σ.π.π.

$$g(x) = \frac{32x^2}{27}e^{-4x/3}, \quad x \geq 0.$$



Τότε, υπάρχει διάταξη ως προς τις μέσες τιμές

$$EX = 2 \leq 9/4 = EY,$$

και το πηλίκο των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace

$$\frac{\mathcal{L}'_Y(s)}{\mathcal{L}'_X(s)} = \frac{288(1+s)^2(1+4s)^2}{(4+3s)^4(1+4s+6s^2)},$$

δεν είναι μονότονη συνάρτηση. Συγκεκριμένα, είναι αύξουσα για  $s \leq 0.28$  και στη συνέχεια φθίνει για  $s > 0.28$ . Ενώ, υπάρχει η διάταξη ως προς τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς Laplace

$$\mathcal{L}_X(s) = \frac{1}{(12(\frac{1}{4} + s))} + \frac{2}{3(1+s)} \geq \frac{1+3s}{1+5s+4s^2} = \mathcal{L}_Y(s), \quad s \geq 0.$$

Δηλαδή, ισχύει  $X \leq_{Lt} Y$ .

Στο Θεώρημα 3.3.4 αποδείξαμε ότι διατηρείται η διάταξη  $\leq_{Lt}$ , υπό κάποιες συνθήκες, χωρίς κατ' ανάγκη να ισχύει η διάταξη  $\leq_{d-Lt-r}$ . Στόχος μας είναι να δώσουμε ένα πιο γενικό αποτέλεσμα για τη διάταξη  $\leq_{Lt}$ . Για το σκοπό αυτό, θα δώσουμε κάποιους ορισμούς και ένα λήμμα, τα οποία θα χρειαστούν στην απόδειξη του επόμενου θεωρήματος.

Έστω  $-\infty \leq x_1 < x_2 \leq \infty$ . Αν  $f$  και  $g$  είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις στο διάστημα  $(x_1, x_2)$ , θέτουμε

$$\gamma(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Θεωρούμε, επίσης, ότι η συνάρτηση  $g$  και η παράγωγος της  $g'$  δεν παίρνουν την τιμή μηδέν. Ακόμη, ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\delta(x) := \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

και

$$\tilde{\delta}(x) := g^2(x) \cdot \frac{\gamma'(x)}{|g'(x)|}.$$

Κάποιος θα μπορούσε να παρατηρήσει ότι για  $x \in (x_1, x_2)$ , ισχύει ότι

$$\tilde{\delta}(x) = \frac{\eta(x)}{|g'(x)|}, \quad (3.3.8)$$

όπου  $\eta(x) = f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)$ .

Τώρα θα δώσουμε ένα λήμμα χωρίς απόδειξη. Για την απόδειξη καλούμε τον αναγνώστη να μελετήσει την Πρόταση 4.4 και την Πρόταση 4.5 του άρθρου των Pinelis (2006), και το Θεώρημα 3 του άρθρου των Anderson et al. (2006).

**Λήμμα 3.3.1.** Έστω  $0 \leq x_1 < x_2 \leq \infty$  και δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις  $f$  και  $g$ , οι οποίες ορίζονται στο διάστημα  $(x_1, x_2)$  με συνθήκες

$$\lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_2^-} g(x) = 0,$$

και

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} \tilde{\delta}(x) \leq (\geq) 0.$$

Αν η συνάρτηση  $\delta$  είναι αύξουσα (φθίνουσα) στο  $(0, x^*)$  και φθίνουσα (αύξουσα) στο  $(x^*, \infty)$  για κάποιο  $x^* \in (0, \infty)$ , τότε η συνάρτηση  $\gamma(x)$  είναι φθίνουσα (αύξουσα) για  $x \in (0, \infty)$ .

Τώρα, είμαστε σε θέση να δώσουμε το επόμενο αποτέλεσμα που γενικεύει το Θεώρημα 3.3.4 για τη διάταξη  $\leq_{n-Lt-r}$ , η οποία εισήχθη από τους Mulero et al. (2010). Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι αν ο λόγος  $\mathcal{L}_Y^{(n)}(s)/\mathcal{L}_X^{(n)}(s)$  αλλάζει μονοτονία ακριβώς μια φορά, τότε η συνάρτηση  $\mathcal{L}_Y^{(n-1)}(s)/\mathcal{L}_X^{(n-1)}(s)$  είναι γνησίως μονότονη.

**Θεώρημα 3.3.5.** Έστω δύο μη-αρνητικές τ.μ.  $X$  και  $Y$ , οι οποίες έχουν πεπερασμένες  $n$ -οστές ροπές γύρω από το μηδέν, τέτοιες ώστε

$$\frac{EY^{n-1}}{EX^{n-1}} \leq (\geq) \frac{EY^n}{EX^n}.$$

Αν υπάρχει ένα μοναδικό  $s^*$  τέτοιο ώστε ο λόγος των  $n$ -οστών παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace,  $\mathcal{L}_Y^{(n)}(s)/\mathcal{L}_X^{(n)}(s)$ , να είναι αύξουσα (φθίνουσα) για  $s \leq s^*$  και φθίνουσα (αύξουσα) για  $s > s^*$ , τότε η συνάρτηση

$$\frac{\mathcal{L}_Y^{(n-1)}(s)}{\mathcal{L}_X^{(n-1)}(s)}$$

είναι φθίνουσα (αύξουσα) για όλα τα  $s \geq 0$ .

Απόδειξη. Στο Λήμμα 3.3.1 θέτουμε  $f(s) = \mathcal{L}_Y^{(n-1)}(s)$  και  $g(s) = \mathcal{L}_X^{(n-1)}(s)$ . Τότε, έχουμε ότι και,

$$\gamma(s) = \frac{\mathcal{L}_Y^{(n-1)}(s)}{\mathcal{L}_X^{(n-1)}(s)} \quad \text{και} \quad \delta(s) = \frac{\mathcal{L}_Y^{(n)}(s)}{\mathcal{L}_X^{(n)}(s)}, \quad s > 0. \quad (3.3.9)$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι μια πλήρως μονότονη συνάρτηση (completely monotone function) (βλ. Feller, 1971), παρατηρούμε ότι η  $n$ -οστή παράγωγος του μετασχηματισμού Laplace είναι συνεχής και μονότονη συνάρτηση. Από την (3.3.8) παίρνουμε

$$\tilde{\delta}(s) = \frac{\mathcal{L}_Y^{(n)}(s) \cdot \mathcal{L}_X^{(n-1)}(s) - \mathcal{L}_X^{(n)}(s) \cdot \mathcal{L}_Y^{(n-1)}(s)}{\left| \mathcal{L}_X^{(n)}(s) \right|}, \quad s > 0.$$

Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες του Λήμματος 3.3.1 πληρούνται,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}_X^{(n)}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}_Y^{(n)}(s) = 0.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι η συνάρτηση  $\delta(s)$  στην (3.3.9) είναι αύξουσα για  $s \leq s^*$  και φθίνουσα για  $s > s^*$ . Από το Λήμμα 3.3.1 η συνθήκη  $\lim_{s \rightarrow 0^+} \tilde{\delta}(s) \leq 0$ , είναι μια ικανή συνθήκη που εξασφαλίζει το γεγονός ότι η  $\mathcal{L}_Y^{(n-1)}(s)/\mathcal{L}_X^{(n-1)}(s)$  είναι φθίνουσα για  $s \geq 0$ . Θεωρούμε, τώρα, για  $n = 2k$  για κάποιο  $k \in \mathbb{N}$ . Τότε, έχουμε ότι

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \tilde{\delta}(s) = \frac{EY^n \cdot (-EX^{n-1}) - EX^n \cdot (-EY^{n-1})}{EX^n},$$

το οποίο όριο είναι μικρότερο ή ίσο του μηδενός αφού έχουμε ως δεδομένο ότι

$$\frac{EY^{n-1}}{EX^{n-1}} \leq \frac{EY^n}{EX^n}. \quad (3.3.10)$$

Για  $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ , παίρνουμε ότι

$$\frac{-EY^n \cdot EX^{n-1} - EX^n \cdot EY^{n-1}}{|-EX^n|} \leq 0,$$

χρησιμοποιώντας την (3.3.10) και πάλι. Η περίπτωση όπου η συνάρτηση  $\delta(s)$  ξεκινάει αύξουσα και συνεχίζει φθίνουσα αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη. ■

Στο Πίνακα 3.3, βλέπουμε συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα των διατάξεων για κάθε περίπτωση σημείων αλλαγής στη μονοτονία.

| Διάταξη Μονοτονίας  | Συνθήκη Ροπών  | Διάταξη $X \leq_{??} Y$ | Πηγή                   |
|---|--|-------------------------|------------------------|
| $\frac{g(t)}{f(t)} \searrow \nearrow$                                     | $EX \leq EY$   | $\leq_{mrl}$            | Belzunce et al. (2013) |
| $\frac{\bar{G}(t)}{\bar{F}(t)} \searrow \nearrow$                         | $EX \leq EY$   | $\leq_{mrl}$            | Belzunce et al. (2013) |
| $\frac{\mathcal{L}'_Y(s)}{\mathcal{L}'_X(s)} \nearrow \searrow$           | $EX \leq EY$   | $\leq_{Lt}$             | Θεώρημα 3.3.4          |
| $\frac{\mathcal{L}_Y^{(n)}(s)}{\mathcal{L}_X^{(n)}(s)} \nearrow \searrow$ | $\frac{EX^n}{EY^n} \leq \frac{EX^{(n-1)}}{EY^{(n-1)}}$ | $\leq_{(n-1)-Lt-r}$     | Θεώρημα 3.3.5          |
| $\frac{\mathcal{L}'_Y(s)}{\mathcal{L}'_X(s)} \nearrow \searrow$           | $EX \leq EY$   | $\leq_{Lt-r}$           | Θεώρημα 3.3.5          |

Πίνακας 3.3: Αποτελέσματα στοχαστικών διατάξεων ως απόρροια των σημείων αλλαγής μονοτονίας.

Παρακινούμενοι από το προηγούμενο θεώρημα και σε συνδυασμό με το Θεώρημα 2.4.2, αποδεικνύουμε ότι το σημείο αλλαγής ως προς τη μονοτονία του λόγου των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace  $\mathcal{L}'_Y(s)/\mathcal{L}'_X(s)$  πάντα έπεται από το σημείο αλλαγής ως προς τη μονοτονία των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace των αντίστοιχων  $n$ -στών συνελίξεων τους  $\mathcal{L}'_{Y^{*(n)}}(s)/\mathcal{L}'_{X^{*(n)}}(s)$ . Αρχικά, αποδεικνύουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα για την καλύτερη κατανόηση της απόδειξης του επόμενου θεωρήματος.

Έστω  $X_1, X_2, \dots$  ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με κοινή κατανομή όπως της  $X$ , και έστω  $Y_1, Y_2, \dots$  ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με κοινή κατανομή όπως της  $Y$ , και ορίζουμε

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad T_n = \sum_{i=1}^n Y_i. \quad (3.3.11)$$

Έστω  $\mathcal{L}_X(s), \mathcal{L}_Y(s), \mathcal{L}_{S_n}(s), \mathcal{L}_{T_n}(s)$  οι μετασχηματισμοί Laplace των  $X, Y, S_n, T_n$ , αντίστοιχα. Τώρα, είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 3.3.6.** *Με βάση τον παραπάνω συμβολισμό, θεωρούμε ένα μοναδικό  $s_0 \in \mathbb{R}_+$  τέτοιο ώστε το πηλίκο των μετασχηματισμών Laplace,  $\mathcal{L}_Y(s)/\mathcal{L}_X(s)$ , είναι αύξουσα συνάρτηση για  $s \leq s_0$  και φθίνουσα για  $s > s_0$ . Τότε το πηλίκο των μετασχηματισμών Laplace*

$$\mathcal{L}_{T_n}(s)/\mathcal{L}_{S_n}(s)$$

*έχει την ίδια συμπεριφορά στη μονοτονία, έτσι ώστε να είναι αύξουσα συνάρτηση στο  $[0, s_0]$  και φθίνουσα στο  $(s_0, \infty)$ .*

*Απόδειξη.* Το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα, από το γεγονός ότι

$$\frac{\mathcal{L}_{T_n}(s)}{\mathcal{L}_{S_n}(s)} = \frac{(\mathcal{L}_Y(s))^n}{(\mathcal{L}_X(s))^n} = \left( \frac{\mathcal{L}_Y(s)}{\mathcal{L}_X(s)} \right)^n, \quad s \geq 0.$$

■

Ακολουθεί ένα παράδειγμα για δύο Gamma κατανομές.

**Παράδειγμα 3.3.2.** Έστω δύο τ.μ.  $X \sim \text{Gamma}(3, 3/2)$  και  $Y \sim \text{Gamma}(5, 8/3)$ . Παρατηρούμε ότι το πηλίκο των μετασχηματισμών Laplace τους είναι

$$\frac{\mathcal{L}_Y(s)}{\mathcal{L}_X(s)} = \frac{32768(3+2s)^3}{27(8+3s)^5},$$

είναι αύξουσα συνάρτηση για  $0 \leq s \leq 0.25$  και φθίνουσα για  $s > 0.25$ . Όσον αφορά τις τ.μ. των  $S_{10}$  και  $T_{10}$  (βλ. 3.3.11) το αντίστοιχο πηλίκο των μετασχηματισμών Laplace είναι

$$\frac{\mathcal{L}_{S_{10}}(s)}{\mathcal{L}_{T_{10}}(s)} = \frac{(1.42724 \cdot 10^{45}(3+2s)^{30})}{(205891132094649(8+3s)^{50})},$$

είναι μια συνάρτηση πάλι με την ίδια συμπεριφορά ως προς τη μονοτονία και με το ίδιο ολικό μέγιστο  $s = 0.25$ .

Η αίσθηση ενός προσεχτικού αναγνώστη θα μπορούσε να είναι ότι η μονοτονία της συνάρτησης  $\mathcal{L}'_Y(s)/\mathcal{L}'_X(s)$  συναρτάται με την μονοτονία του πηλίκου των

παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace των  $n$ -οστών συνελιζέων τους. Για του λόγου το αληθές, αποδεικνύουμε το παρακάτω θεώρημα

**Θεώρημα 3.3.7.** Έστω δύο μη αρνητικές συνεχείς τ.μ.  $X$  και  $Y$ , οι οποίες έχουν πεπερασμένες μέσες τιμές, τέτοιες ώστε  $EX=EY$ . Αν υπάρχει  $s_0 \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε ο λόγος των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace  $\mathcal{L}'_Y(s)/\mathcal{L}'_X(s)$  να είναι αύξουσα συνάρτηση για  $s \leq s_0$  και φθίνουσα συνάρτηση για  $s \geq s_0$ , τότε και ο λόγος των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace των αντίστοιχων  $n$ -οστών συνελιζέων τους

$$\mathcal{L}'_{T_n}(s)/\mathcal{L}'_{S_n}(s)$$

έχει παρόμοια μονοτονία με σημείο αλλαγής  $s^*$ , με  $s^* < s_0$  (βλέπε σχέση 3.3.11). Αρχικά, είναι αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα  $[0, s^*]$  και είναι φθίνουσα για  $s > s_0$ , έτσι ώστε η μονοτονία της να αλλάζει τουλάχιστον μια φορά.

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι, αφού  $\mathcal{L}_{S_n}(s) = (\mathcal{L}_X(s))^n$ , τότε προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}'_{S_n}(s) = n \cdot (\mathcal{L}_X(s))^{(n-1)} \cdot \mathcal{L}'_X(s), \quad s \geq 0. \quad (3.3.12)$$

Χάριν απλότητας στο συμβολισμό ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$k(s) = \frac{\mathcal{L}_Y(s)}{\mathcal{L}_X(s)}, \quad p(s) = \frac{\mathcal{L}'_Y(s)}{\mathcal{L}'_X(s)} \quad \text{και} \quad R(s) = \frac{\mathcal{L}'_{S_n}(s)}{\mathcal{L}'_{S_n}(s)}, \quad s \geq 0.$$

Από τα παραπάνω, προκύπτει άμεσα η σχέση

$$R(s) = p(s) \cdot k(s)^{n-1}, \quad s \geq 0.$$

Γνωρίζοντας ότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι πλήρως μονότονη συνάρτηση, προκύπτει ότι η  $R(s)$  έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξης. Επίσης, με βάση την υπόθεση μας η συνάρτηση  $p(s)$  έχει σημείο αλλαγής στο  $s_0$ , και συγκεκριμένα ισχύει

$$p'(s) \begin{cases} > 0, & \text{για } 0 \leq s < s_0, \\ = 0, & \text{για } s = s_0, \\ < 0, & \text{για } s > s_0. \end{cases} \quad (3.3.13)$$

Ακολουθώντας, μελετάμε τη μονοτονία της συνάρτησης  $R(s)$ . Η παράγωγος της  $R(s)$  ισούται με

$$R'(s) = p'(s) \cdot k(s)^{n-1} + p(s) \cdot (n-1) \cdot k(s)^{n-2} \cdot k'(s), \quad s \geq 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$R'(s) = [p'(s) \cdot k(s) + p(s) \cdot (n-1) \cdot k'(s)] \cdot k(s)^{n-2}, \quad s \geq 0, \quad (3.3.14)$$

όπου,

$$k'(s) = \frac{\mathcal{L}'_Y(s) \cdot \mathcal{L}_X(s) - \mathcal{L}'_X(s) \cdot \mathcal{L}_Y(s)}{[\mathcal{L}_X(s)]^2}, \quad s \geq 0, \quad (3.3.15)$$

και

$$p'(s) = \frac{\mathcal{L}''_Y(s) \cdot \mathcal{L}'_X(s) - \mathcal{L}''_X(s) \cdot \mathcal{L}'_Y(s)}{[\mathcal{L}'_X(s)]^2}, \quad s \geq 0. \quad (3.3.16)$$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις  $R(s)$  και  $R'(s)$  είναι συνεχείς. Για  $s \in (s_0, \infty)$ , ισχύει ότι

- (i) Για  $s \in (s_0, \infty)$ , έχουμε  $k'(s) < 0$  από τα δεδομένα και το Θεώρημα 3.3.5 για  $n = 1$ ,
- (ii)  $p'(s) < 0$  (υπόθεση-σχέση (3.3.13)),
- (iii)  $p(s) > 0$  και  $k(s) > 0$  (προφανές).

Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι  $R'(s) < 0$  για  $s \in (s_0, \infty)$ . Τώρα, θα μελετήσουμε το πρόσημο της ποσότητας  $R'(0)$ . Αν ισχύει  $R'(0) > 0$ , τότε υπάρχει ένα  $s^* \in (0, s_0)$  τέτοιο ώστε  $R'(s^*) = 0$ . Από τις (3.3.15) και (3.3.16) και γνωρίζοντας ότι ισχύει για τη  $n$ -στη παράγωγο του μετασχηματισμού Laplace (βλέπε Feller, 1971, σελ.439)

$$(-1)^n \frac{d^n \mathcal{L}(s)}{ds^n} \Big|_{s=0} = EX^n,$$

για  $s = 0$  προκύπτουν οι σχέσεις

$$k'(0) = EX - EY,$$

$$p'(0) = \frac{E(Y) \cdot E(X^2) - E(X) \cdot E(Y^2)}{[E(X)]^2}.$$

Αν επιπλέον, ισχύει  $EX = EY$ , τότε η (3.3.14) γίνεται

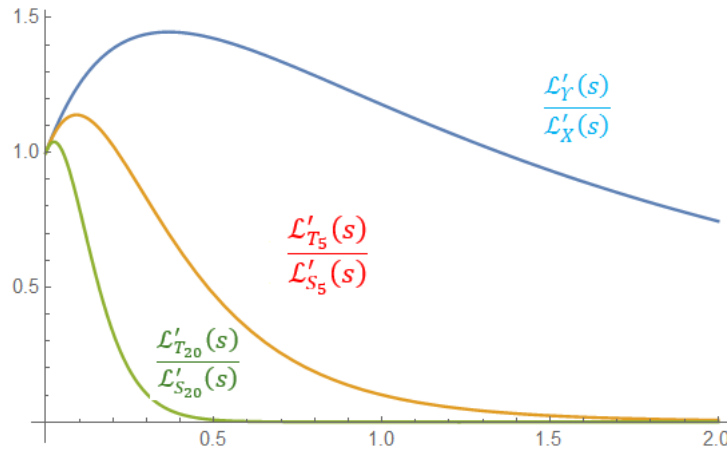
$$R'(0) = p'(0),$$

και λόγω της (3.3.13) συμπεραίνουμε ότι  $R'(0) > 0$ . Οπότε, λόγω συνέχειας καταλήγουμε ότι έχει τουλάχιστον ένα σημείο αλλαγής  $s^*$  τέτοιο ώστε  $s^* < s_0$ . ■

**Παρατήρηση 3.3.1.** Το αποτέλεσμα δηλώνει ότι το πηλίκο  $\mathcal{L}'_{T_n}(s)/\mathcal{L}'_{S_n}(s)$  αλλάζει μονοτονία τουλάχιστον μία φορά. Δεν γνωρίζουμε αν το σημείο αλλαγής όσον αφορά τη μονοτονία είναι μοναδικό στη γενική περίπτωση. Παρόλα αυτά, δίνουμε ένα παράδειγμα που επιβεβαιώνει το παραπάνω θεώρημα.

**Παράδειγμα 3.3.3.** Έστω μια τ.μ.  $X$  η οποία ακολουθεί μείξη εκθετικών με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{2}{3}e^{-x} + \frac{1}{12}e^{-x/4}, \quad x \geq 0,$$



Σχήμα 3.2: Σημεία αλλαγής της διάταξης  $\leq_{d-Lt-r}$ .

και μια τ.μ.  $Y \sim \text{Gamma}(3, 3/2)$ . Εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε ότι έχουν ίσες μέσες τιμές με  $EX = EY = 2$ . Επίσης, με τη βοήθεια του *Mathematica* υπολογίζουμε τους μετασχηματισμούς Laplace

$$\mathcal{L}_X(s) = \frac{1}{12(1/4 + s)} + \frac{2}{3(1 + s)}, \quad s \geq 0,$$

και

$$\mathcal{L}_Y(s) = \frac{27}{(3 + 2s)^3}, \quad s \geq 0.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ισχύει  $\mathcal{L}_X(s) \geq \mathcal{L}_Y(s)$  για κάθε  $s \geq 0$ . Άρα, για τις δύο τ.μ.  $X, Y$  ισχύει η διάταξη  $X \leq_{Lt} Y$ . Τώρα, υπολογίζοντας τις παραγώγους των μετασχηματισμών Laplace, παρατηρούμε ότι ο λόγος των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace,

$$\frac{\mathcal{L}'_Y(s)}{\mathcal{L}'_X(s)} = -\frac{162}{(3 + 2s)^4 \left( -\frac{1}{12(\frac{1}{4} + s)^2} - \frac{2}{3(1 + s)^2} \right)}$$

ξεκινάει ως αύξουσα συνάρτηση και συνεχίζει ως φθίνουσα συνάρτηση ως προς  $s$  με μέγιστο στο  $s_0 = 0.365$  (βλέπε Σχήμα 3.2).

Επιπλέον, αν υπολογίσουμε με τη βοήθεια του *Mathematica* το λόγο των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace των  $n$ -οστων συνελίξεων των τ.μ.  $X$  και  $Y$ , αντίστοιχα, για  $n = 5$ , προκύπτει ότι πάλι υπάρχει αντίστοιχη συμπεριφορά στη μονοτονία στο λόγο,  $\mathcal{L}'_{T_5}(s)/\mathcal{L}'_{S_5}(s)$ , με μέγιστο  $s^* = 0.286 < 0.365 = s_0$ . Τέλος, για  $n = 20$  προκύπτει ένα μέγιστο  $s^{**} = 0.114 < s^* < s_0$ .

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε τη σχέση μεταξύ των σημείων αλλαγής, όταν οι δύο τυχαίες μεταβλητές που συγκρίνουμε ως προς τη διάταξη  $\leq_{d-Lt-r}$  ακολουθούν Γάμμα κατανομή.

**Πρόταση 3.3.1.** Έστω δύο μη αρνητικές συνεχείς τυχαίες μεταβλητές  $X \sim \text{Gamma}(a_X, \lambda_X)$  και  $Y \sim \text{Gamma}(a_Y, \lambda_Y)$ . Αν ο λόγος των παραγώγων των

μετασχηματισμών Laplace  $\mathcal{L}'_Y(s)/\mathcal{L}'_X(s)$  είναι αύξουσα συνάρτηση για  $s < s_0$  και φθίνουσα συνάρτηση για  $s \geq s_0$ , και επιπλέον  $EX = EY$ , τότε και ο λόγος των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace των αντίστοιχων  $n$ -στων συνελίξεων τους  $\mathcal{L}'_{T_n}(s)/\mathcal{L}'_{S_n}(s)$  είναι αύξουσα συνάρτηση για  $s \in \left(0, \frac{s_0}{n}\right)$  και φθίνουσα για  $s \in \left(\frac{s_0}{n}, \infty\right)$ .

Απόδειξη. Για τις τ.μ.  $X \sim \text{Gamma}(a_X, \lambda_X)$  και  $Y \sim \text{Gamma}(a_Y, \lambda_Y)$  ισχύει

$$\mathcal{L}_X(s) = \left(\frac{\lambda_X}{\lambda_X + s}\right)^{a_X}, \quad \mathcal{L}_Y(s) = \left(\frac{\lambda_Y}{\lambda_Y + s}\right)^{a_Y}, \quad s > 0, \quad (3.3.17)$$

και οι παράγωγοι των μετασχηματισμών Laplace είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_X(s) &= -a_X \cdot \lambda_X^{a_X} \cdot \frac{1}{(\lambda_X + s)^{a_X+1}}, \\ \mathcal{L}'_Y(s) &= -a_Y \cdot \lambda_Y^{a_Y} \cdot \frac{1}{(\lambda_Y + s)^{a_Y+1}}. \end{aligned}$$

Οπότε, ο λόγος των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace είναι

$$\frac{\mathcal{L}'_Y(s)}{\mathcal{L}'_X(s)} = \frac{a_Y \cdot \lambda_Y^{a_Y}}{a_X \cdot \lambda_X^{a_X}} \cdot \frac{(\lambda_X + s)^{a_X+1}}{(\lambda_Y + s)^{a_Y+1}}, \quad s > 0. \quad (3.3.18)$$

Βάσει της υπόθεσης μας όσον αφορά τη μονοτονία της συνάρτησης  $\mathcal{L}'_Y(s)/\mathcal{L}'_X(s)$ , συνεπάγεται ότι έχει μέγιστο το σημείο  $s_0$ . Με άλλα λόγια, το  $s_0$  είναι ακρότατο και ισχύει ότι

$$\left(\frac{\mathcal{L}'_Y(s_0)}{\mathcal{L}'_X(s_0)}\right)' = 0.$$

Αρχικά, μελετάμε τη μονοτονία της συνάρτησης  $\mathcal{L}'_Y(s)/\mathcal{L}'_X(s)$ , οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (3.3.18), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathcal{L}'_Y(s)}{\mathcal{L}'_X(s)}\right)' &= \frac{a_Y \cdot \lambda_Y^{a_Y}}{a_X \cdot \lambda_X^{a_X}} \\ &\times \frac{(a_X + 1)(\lambda_X + s)^{a_X}(\lambda_Y + s)^{a_Y+1} - (a_Y + 1)(\lambda_Y + s)^{a_Y}(\lambda_X + s)^{a_X+1}}{[(\lambda_Y + s)^{a_Y+1}]^2}. \end{aligned}$$

Καθένα από τα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης ισούται με μηδέν αν και μόνο αν ο αριθμητής του δευτέρου κλάσματος στο δεξιό μέλος ισούται με μηδέν. Συγκεκριμένα, ισχύει η ισοδυναμία

$$\left(\frac{\mathcal{L}'_Y(s_0)}{\mathcal{L}'_X(s_0)}\right)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a_X + 1) \cdot (\lambda_X + s)^{a_X} \cdot (\lambda_Y + s)^{a_Y+1} = (a_Y + 1) \cdot (\lambda_Y + s)^{a_Y} \cdot (\lambda_X + s)^{a_X+1}.$$



Με απλές πράξεις καταλήγουμε στην ισότητα

$$(a_X + 1) \cdot (\lambda_Y + s_0) = (a_Y + 1) \cdot (\lambda_X + s_0),$$

ή ισοδύναμα,

$$a_X \lambda_Y + a_X s_0 + \lambda_Y + s_0 = a_Y \lambda_X + a_Y s_0 + \lambda_X + s_0.$$

Οπότε,

$$s_0 = \frac{a_Y \lambda_X - a_X \lambda_Y + \lambda_X - \lambda_Y}{a_X - a_Y}.$$

Όμως, με βάση την υπόθεση ότι  $EX = EY \Leftrightarrow \frac{a_X}{\lambda_X} = \frac{a_Y}{\lambda_Y}$ , καταλήγουμε ότι το μέγιστο σημείο της συνάρτησης  $\mathcal{L}'_Y(s)/\mathcal{L}'_X(s)$  είναι

$$s_0 = \frac{\lambda_X - \lambda_Y}{a_X - a_Y}. \quad (3.3.19)$$

Ελέγχουμε τώρα, τη μονοτονία του λόγου των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace,  $\mathcal{L}'_{T_n}(s)/\mathcal{L}'_{S_n}(s)$ . Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της  $n$ -οστής συνέλιξης ισούται με  $n$ -οστή δύναμη των μετασχηματισμών Laplace

$$\frac{\mathcal{L}'_{T_n}(s)}{\mathcal{L}'_{S_n}(s)} = \frac{n \cdot (\mathcal{L}_Y(s))^{n-1} \cdot \mathcal{L}'_Y(s)}{n \cdot (\mathcal{L}_X(s))^{n-1} \cdot \mathcal{L}'_X(s)}, \quad s > 0.$$

Άρα,

$$\frac{\mathcal{L}'_{T_n}(s)}{\mathcal{L}'_{S_n}(s)} = \frac{\mathcal{L}'_Y(s)}{\mathcal{L}'_X(s)} \cdot \left( \frac{\mathcal{L}_Y(s)}{\mathcal{L}_X(s)} \right)^{n-1}, \quad s > 0. \quad (3.3.20)$$

Μέσω των (3.3.17), (3.3.18) η (3.3.20) γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}'_{T_n}(s)}{\mathcal{L}'_{S_n}(s)} &= \frac{a_Y \cdot \lambda_Y^{a_Y}}{a_X \cdot \lambda_X^{a_X}} \cdot \frac{(\lambda_X + s)^{a_X+1}}{(\lambda_Y + s)^{a_Y+1}} \\ &\quad \times \left( \frac{\left( \frac{\lambda_Y}{\lambda_Y + s} \right)^{a_Y}}{\left( \frac{\lambda_X}{\lambda_X + s} \right)^{a_X}} \right)^{n-1} \\ &= \frac{a_Y \cdot \lambda_Y^{n \cdot a_Y}}{a_X \cdot \lambda_X^{n \cdot a_X}} \cdot \frac{(\lambda_X + s)^{n \cdot a_X + 1}}{(\lambda_Y + s)^{n \cdot a_Y + 1}}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

Το (πιθανό) ακρότατο  $s_n$  της συνάρτησης  $\mathcal{L}'_{Y^{*(n)}}(s)/\mathcal{L}'_{X^{*(n)}}(s)$ , είναι όταν

$$\left( \frac{\mathcal{L}'_{T_n}(s_n)}{\mathcal{L}'_{S_n}(s_n)} \right)' = 0.$$

Οπότε βρίσκουμε την παράγωγο της παραπάνω συνάρτησης, η οποία ισούται με

$$\left( \frac{\mathcal{L}'_{T_n}(s_n)}{\mathcal{L}'_{S_n}(s_n)} \right)' = \frac{a_Y \cdot \lambda_Y^{n \cdot a_Y}}{a_X \cdot \lambda_X^{n \cdot a_X}}$$

$$\times \frac{(na_X + 1)(\lambda_X + s_n)^{na_X}(\lambda_Y + s_n)^{na_Y+1} - (na_Y + 1)(\lambda_Y + s_n)^{na_Y}(\lambda_X + s_n)^{na_X+1}}{[(\lambda_Y + s_n)^{na_Y+1}]^2}.$$

Η τελευταία σχέση ισούται με μηδέν όταν ο αριθμητής του δεύτερου κλάσματος στο δεξιό μέλος ισούται με μηδέν, οπότε προκύπτει η σχέση

$$(n \cdot a_X + 1) \cdot (\lambda_X + s_n)^{n \cdot a_X} \cdot (\lambda_Y + s_n)^{n \cdot a_Y + 1} = (n \cdot a_Y + 1) \cdot (\lambda_Y + s_n)^{n \cdot a_Y} \cdot (\lambda_X + s_n)^{n \cdot a_X + 1}.$$

Με απλές πράξεις καταλήγουμε στην ισότητα

$$(n \cdot a_X + 1) \cdot (\lambda_Y + s_n) = (n \cdot a_Y + 1) \cdot (\lambda_X + s_n),$$

ή ισοδύναμα,

$$n \cdot a_X \cdot \lambda_Y + n \cdot a_X \cdot s_n + \lambda_Y + s_n = n \cdot a_Y \cdot \lambda_X + n \cdot a_Y \cdot s_n + \lambda_X + s_n.$$

Έτσι καταλήγουμε στη σχέση,

$$s_n = \frac{n \cdot a_Y \cdot \lambda_X - n \cdot a_X \cdot \lambda_Y + \lambda_X - \lambda_Y}{n \cdot (a_X - a_Y)}.$$

Τέλος, με βάση την υπόθεση των ίσων μέσων τιμών για τις τ.μ.  $X$  και  $Y$ ,  $a_X/\lambda_X = a_Y/\lambda_Y$ , και τη σχέση (3.3.19) καταλήγουμε στο ζητούμενο

$$s_n = \frac{s_0}{n}.$$

■

**Παράδειγμα 3.3.4.** Έστω δύο τ.μ.  $X \sim \text{Gamma}(2, 1)$  και  $Y \sim \text{Gamma}(3, 3/2)$ . Παρατηρούμε εύκολα ότι έχουν ίσες μέσες τιμές με  $EX = EY = 2$ . Ακόμη, υπολογίζουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των δύο τ.μ.  $X$  και  $Y$ , οι οποίες είναι οι συναρτήσεις

$$\mathcal{L}_X(s) = \frac{1}{(1+s)^2} \quad \text{και} \quad \mathcal{L}_Y(s) = \frac{27}{(3+2s)^3}, \quad s \geq 0.$$

Μετά από απλές πράξεις, και με τη βοήθεια του *Mathematica* διαπιστώνουμε ότι ισχύει η ανισότητα  $\mathcal{L}_X(s) \geq \mathcal{L}_Y(s)$  για κάθε  $s \geq 0$ , η οποία μας οδηγεί στη στοχαστική διάταξη των δύο τ.μ.  $X \leq_{Lt} Y$ . Επίσης, υπολογίζοντας τις παραγώγους των μετασχηματισμών Laplace, προκύπτει ότι ο λόγος

$$\frac{\mathcal{L}'_Y(s)}{\mathcal{L}'_X(s)} = \frac{81(1+s)^3}{(3+2s)^4}, \quad s \geq 0,$$

είναι αύξουσα συνάρτηση για  $s \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  και φθίνουσα συνάρτηση για  $s \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ . Τέλος, υπολογίζοντας το λόγο των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace των 30-ων συνελίξεων τους με

$$\mathcal{L}_{S_{30}} = \frac{1}{(1+s)^{60}} \quad \text{και} \quad \mathcal{L}_{T_{30}} = \frac{4178047632588158427784544256}{(3+2s)^{90}},$$

προκύπτει ότι η συνάρτηση

$$\frac{\mathcal{L}'_{T_{30}}(s)}{\mathcal{L}'_{S_{30}}(s)} = \frac{12534142897764475283353632768 \cdot (1+s)^{61}}{(3+2s)^{91}},$$

παρουσιάζει αντίστοιχα μέγιστο στο  $s^* = \frac{1}{60} = \frac{s_0}{30}$  όπως αναμέναμε.

Τώρα, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3 των Yang και Tian (2018) στη θεωρία των στοχαστικών διατάξεων και προκύπτει το επόμενο πόρισμα. Δείχνουμε ότι υπάρχει διάταξη ως προς το λόγο των μετασχηματισμών Laplace για δύο μη αρνητικές τ.μ.  $X$  και  $Y$ , χωρίς κατ' ανάγκη να υπάρχει διάταξη ως προς το λόγο πιθανοφαινεών.

**Πόρισμα 3.3.1.** Έστω δύο μη αρνητικές τ.μ.  $X$  και  $Y$  με συναρτήσεις πυκνότητας  $f$  και  $g$ , αντίστοιχα, και με μετασχηματισμούς Laplace-Stieltjes  $\mathcal{L}_X(s)$  και  $\mathcal{L}_Y(s)$ , αντίστοιχα. Αν υπάρχει  $t^* \in (0, +\infty)$  τέτοιο ώστε η συνάρτηση  $f/g$  να είναι αύξουσα στο  $(0, t^*)$  και φθίνουσα στο  $(t^*, +\infty)$  τότε το πηλίκο  $\mathcal{L}_X(s)/\mathcal{L}_Y(s)$  είναι φθίνουσα αν και μόνο αν ισχύει

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}'_X(s)}{\mathcal{L}'_Y(s)} \geq \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}_X(s)}{\mathcal{L}_Y(s)},$$

με

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}_X(x)}{\mathcal{L}_Y(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_X(x)}{\mathcal{L}_Y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Οι Belzunce et. al (1999) έδειξαν ότι η διάταξη ως προς το μετασχηματισμό Laplace του υπολειπόμενου χρόνου  $\leq_{Lt-rl}$  είναι ισχυρότερη από τη διάταξη ως προς το μετασχηματισμό Laplace  $\leq_{Lt}$ . Εμείς προτείνουμε μια συνθήκη τέτοια ώστε να ισχύει και το αντίστροφο  $\leq_{Lt-rl} \Leftarrow \leq_{Lt}$ .

**Πρόταση 3.3.2.** Έστω δύο μη αρνητικές τ.μ.  $X$  και  $Y$  με δεξιές ουρές  $\bar{F}_X(\cdot)$  και  $\bar{F}_Y(\cdot)$ , αντίστοιχα. Θεωρούμε ότι η τ.μ.  $X \in NBU_{Lt}$  και η τ.μ.  $Y \in NWU_{Lt}$ , τότε

$$X \leq_{Lt} Y \Rightarrow X \leq_{Lt-rl} Y.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η τ.μ.  $X$  είναι μικρότερη από τη τ.μ.  $Y$ , έτσι ώστε  $X \leq_{Lt} Y$ , τότε ισχύει

$$\mathcal{L}_X^*(s) \leq \mathcal{L}_Y^*(s), \quad s > 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$\int_0^\infty e^{-su} \bar{F}_X(u) du \leq \int_0^\infty e^{-su} \bar{F}_Y(u) du.$$

Γνωρίζοντας ότι  $X \in NBU_{Lt}$  και  $Y \in NWU_{Lt}$ , ισχύει ότι

$$\int_0^\infty e^{-su} \frac{\bar{F}_X(t+u)}{\bar{F}_X(t)} du \leq \int_0^\infty e^{-su} \bar{F}_X(u) du,$$

και

$$\int_0^{\infty} e^{-su} \frac{\overline{F}_Y(t+u)}{\overline{F}_Y(t)} du \geq \int_0^{\infty} e^{-su} \overline{F}_Y(u) du.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, καταλήγουμε στη σχέση

$$\int_0^{\infty} e^{-su} \frac{\overline{F}_X(t+u)}{\overline{F}_X(t)} du \leq \int_0^{\infty} e^{-su} \frac{\overline{F}_Y(t+u)}{\overline{F}_Y(t)} du,$$

ή ισοδύναμα  $X_t \leq_{Lt} Y_t$  δηλαδή  $X \leq_{Lt-rl} Y$ . ■

Όπως είδαμε, τα σημεία αλλαγής έχουν ποικίλες εφαρμογές στη θεωρία των Στοχαστικών Διατάξεων. Οι Mitra et al. (1995) δίνουν έναν σημαντικό ορισμό σχετιζόμενο με σημεία αλλαγής.

**Ορισμός 3.3.1.** Έστω δύο συναρτήσεις κατανομής  $F$  και  $G$  και για κάποιο  $t_0 \in [0, \infty)$  ισχύει

$$\overline{F}(t) \geq \overline{G}(t), \quad t \leq t_0,$$

$$\overline{F}(t) \leq \overline{G}(t), \quad t_0 \leq t.$$

όπου  $\overline{F} = 1 - F$ . Τότε θα λέμε ότι η  $\overline{F}$  διασχίζει την  $\overline{G}$  από πάνω.

Στο ίδιο άρθρο αποδεικνύουν ότι η  $F \in \mathbb{L}$  αν η  $\overline{F}$  διασχίζει την  $\exp(-t/\mu_F)$  από πάνω.

Οι Karlin και Novikoff (1963) δείχνουν ότι αν μια τ.μ.  $X$  είναι λιγότερο επικίνδυνη από την τ.μ.  $Y$  (ισοδύναμα η  $\overline{F}_X$  διασχίζει την  $\overline{F}_Y$  από πάνω, και επιπλέον, ισχύει ότι  $EX \leq EY$ ) τότε ισχύει  $X \leq_{icx} Y$ .

Με παρόμοια μεθοδολογία, εμείς αποδεικνύουμε την παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 3.3.3.** Αν για κάποιο  $c \in [0, \infty)$  ισχύει

$$\overline{F}(t) \geq \overline{G}(t), \quad t \leq c,$$

$$\overline{F}(t) \leq \overline{G}(t), \quad c \leq t.$$

και επιπλέον ισχύει  $EX \geq EY$  τότε  $X \geq_{Lt} Y$ .

Απόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} (\overline{F}(t) - \overline{G}(t)) dt \\ &= \int_0^c (e^{-st} - e^{-sc}) (\overline{F}(t) - \overline{G}(t)) dt + \int_0^{\infty} e^{-sc} (\overline{F}(t) - \overline{G}(t)) dt \\ &= \int_0^c (e^{-st} - e^{-sc}) (\overline{F}(t) - \overline{G}(t)) dt + \int_c^{\infty} (e^{-st} - e^{-sc}) (\overline{F}(t) - \overline{G}(t)) dt \\ &\quad + \int_0^{\infty} e^{-sc} (\overline{F}(t) - \overline{G}(t)) dt. \end{aligned}$$

Συνεπώς,  $\Delta(s) \geq 0$  για κάθε  $s > 0$  αφού

- η πρώτη ποσότητα είναι θετική αφού  $\bar{F}(t) \geq \bar{G}(t)$ , και  $e^{-st} - e^{-sc} \geq 0$  για  $t \in (0, c)$ .
- η δεύτερη ποσότητα είναι θετική αφού  $\bar{F}(t) \leq \bar{G}(t)$ , και  $e^{-st} - e^{-sc} \leq 0$  για  $t \in (c, \infty)$ .
- η τρίτη ποσότητα είναι θετική αφού  $EX \geq EY$ .

■

Η προηγούμενη πρόταση είναι μια υποπερίπτωση της Πρότασης 2.5.4, αλλά εμείς χρησιμοποιούμε διαφορετική απόδειξη. Επίσης, δίνουμε ένα παράδειγμα που εφαρμόζεται το παραπάνω αποτέλεσμα (βλέπε Klar 2002, Παράδειγμα 2.1). Ολοκληρώνοντας την ενότητα αυτή δίνουμε ένα παράδειγμα της Πρότασης 3.3.3.

**Παράδειγμα 3.3.5.** Έστω  $X$  θετική τ.μ. με δεξιά ουρά

$$\bar{F}(t) = \begin{cases} 1, & t \leq \frac{81}{100} \\ \frac{9361}{179361}, & \frac{81}{100} < t \leq 3 \\ (124/91)/t^3, & t > 3 \end{cases}$$

με  $EX = 1$ . Έστω  $Y_1$  μια μείξη δύο εκθετικών με παραμέτρους 3 και 1 και αντίστοιχα βάρη  $1/3$  και  $2/3$  και δεξιά ουρά  $\bar{G}_1(t)$ . Ακόμη, θεωρούμε τη τ.μ.  $Y_2 \sim \text{Exp}\left(\frac{10}{9}\right)$  με δεξιά ουρά  $\bar{G}_2(t)$ . Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$EX \geq EY_1 = 7/9 \quad \text{και} \quad EX \geq EY_2 = 9/10.$$

Επίσης, είναι εύκολο να δούμε ότι και οι δύο δεξιές ουρές ( $\bar{G}_1$  και  $\bar{G}_2$ ) έχουν δύο σημεία αλλαγής με την δεξιά ουρά  $\bar{F}$  με σειρά προσήμων

$$\bar{F} - \bar{G}_1 \quad (\text{ή} \quad \bar{G}_2) \quad +, -, +$$

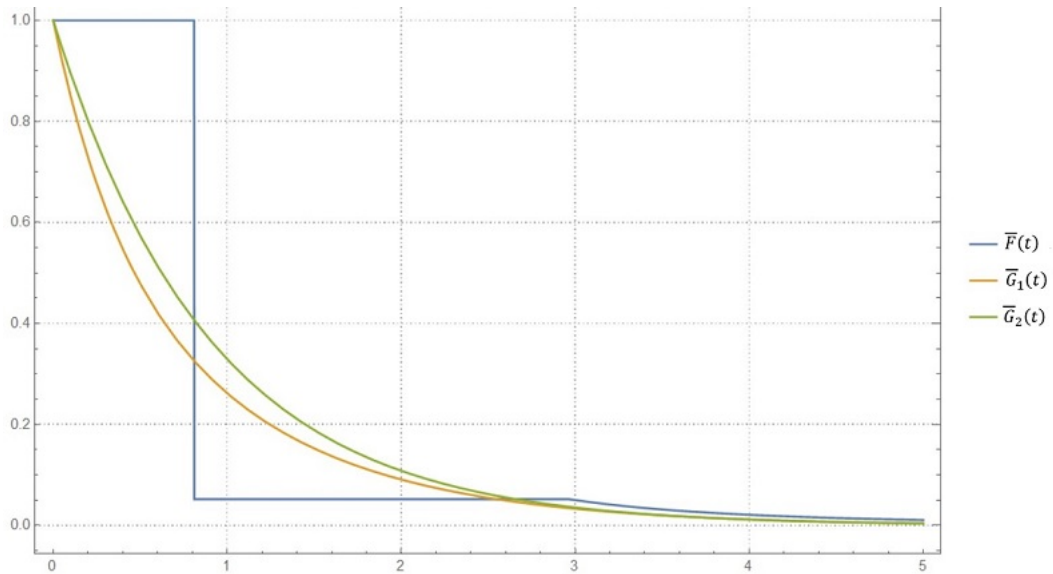
όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3, αν και εύκολα ελέγχεται ότι  $X \geq_{Lt} Y_1$  και  $X \geq_{Lt} Y_2$ .

## 3.4 Ολοκληροστοχαστικές Διατάξεις

Όπως είδαμε σε προηγούμενες ενότητες, πολλές στοχαστικές διατάξεις μπορούν να εκφραστούν σε μορφή ολοκληρωμάτων. Η σύγκριση ολοκληρωμάτων πηγάζει από κλάσεις μετρήσιμων συναρτήσεων, η οποία έχει με πολλές εφαρμογές στη θεωρία Ωφελιμότητας (Utility Theory) και στον Αναλογισμό. Οι ολοκληροστοχαστικές διατάξεις (integral stochastic orders) ορίζονται μέσω της σύγκρισης αναμενόμενης τιμής συναρτήσεων όπως φαίνεται στον επόμενο ορισμό.

**Ορισμός 3.4.1.** Έστω δύο τ.μ.  $X$  και  $Y$ . Η ολοκληροστοχαστική διάταξη  $\leq_*$ , η οποία αντιστοιχεί στην κλάση συναρτήσεων  $\mathcal{U}_*$ , ορίζεται ως

$$X \leq_* Y \Leftrightarrow Eg(X) \leq Eg(Y), \quad \text{για όλες τις } g \in \mathcal{U}_*, \quad (3.4.1)$$



Σχήμα 3.3: Σημεία αλλαγής της διάταξης  $\bar{F}, \bar{G}_1, \bar{G}_2$ .

| Διατάξεις    | Οικογένεια συναρτήσεων $\mathcal{U}_*$  |
|--------------|---|
| $\leq_{st}$  | $\mathcal{U}_* = \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}   \text{αύξουσα } g\}$           |
| $\leq_{icx}$ | $\mathcal{U}_* = \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}   \text{αύξουσα και κυρτή } g\}$ |
| $\leq_{icv}$ | $\mathcal{U}_* = \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}   \text{αύξουσα και κοίλη } g\}$ |
| $\leq_{Lt}$  | $\mathcal{U}_* = \{g : x \rightarrow -exp(-tx), t > 0\}$                                  |

Πίνακας 3.4: Οικογένειες ολοκληροστοχαστικών διατάξεων.

με δεδομένο ότι οι αναμενόμενες τιμές συναρτήσεων ορίζονται (βλέπε Denuit, 2001 και Denuit et al., 2005).

Οι Marshall (1991) και Müller (1997) παρουσιάζουν την οπτική των ολοκληροστοχαστικών διατάξεων, μελετάνε τις ιδιότητες τους και περιγράφουν πώς αυτές προκύπτουν ως αποτέλεσμα των κλάσεων συναρτήσεων  $\mathcal{U}_*$  (βλέπε Πίνακα 3.4). Στη βιβλιογραφία ποικίλες ιδιότητες δίνονται για κάθε μία περίπτωση ξεχωριστά.

Με στόχο την κατάλληλη εφαρμογή τους σε προβλήματα, οι διατάξεις πρέπει να ικανοποιούν τουλάχιστον κάποιες από τις επόμενες συνθήκες (βλέπε Denuit et al., 2005):

1. Αναλλοίωτη υπό μετατόπιση (shift invariance): Αν  $X \leq_* Y$  τότε  $X + c \leq_* Y + c$  για κάθε σταθερά  $c$ .
2. Αναλλοίωτη υπό αλλαγή κλίμακας (scale invariance): Αν  $X \leq_* Y$  τότε  $X \cdot c \leq_* Y \cdot c$  για κάθε θετική σταθερά  $c$ .

- 
3. Κλειστότητα ως προς τη συνέλιξη: Δοθέντων τ.μ.  $X, Y$  και  $Z$ , τέτοιες ώστε να είναι η  $Z$  ανεξάρτητη και με τις δύο τ.μ.  $X, Y$ , αν  $X \leq_* Y$  τότε  $X + Z \leq_* Y + Z$ .
  4. Κλειστότητα ως προς την ασθενή σύγκλιση (weak convergence): Αν  $X_n \leq_* Y_n$  για όλα τα  $n = 1, 2, \dots$  και  $X_n(Y_n)$  συγκλίνει ασθενώς στη τ.μ.  $X(Y)$  τότε  $X \leq_* Y$ .
  5. Κλειστότητα ως προς τη μείξη: Αν  $[X|Z = z] \leq_* [Y|Z = z]$  για όλα τα  $z$  του στηρίγματος της  $Z$ , τότε ισχύει και  $X \leq_* Y$ .

Αξίζει να τονιστεί ότι η συνθήκη της κλειστότητας ως προς τη μείξη ισχύει για κάθε ολοκληροστοχαστική διάταξη.

Τέλος, οι Denuit et al. (Property 9.2.3, 2005) δίνουν τη συνθήκη για την κλειστότητα ως προς τη σύνθεση, η οποία είναι ιδιαίτερα σημαντική και θα την χρησιμοποιήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

**Λήμμα 3.4.1.** Έστω  $X_1, X_2, X_3, \dots$  και  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$  δύο ακολουθίες ανεξάρτητων τ.μ. τέτοιες ώστε  $X_i \leq_* Y_i$  για κάθε  $i$ . Αν η  $\leq_*$  είναι κλειστή ως προς τη συνέλιξη τότε

1.  $\sum_{i=1}^n X_i \leq_* \sum_{i=1}^n Y_i$  για κάθε ακέραιο  $n$ ,
2.  $\sum_{i=1}^N X_i \leq_* \sum_{i=1}^N Y_i$  διατηρείται, όπου η ακέραια τ.μ.  $N$  είναι ανεξάρτητη από τις  $X_i$  και  $Y_i$ .

---



## Κεφάλαιο 4

# Στοχαστικές διατάξεις σε διάστημα $[a, b]$

### 4.1 Εισαγωγή

Η σύγκριση τυχαίων μεταβλητών ως προς κάποια στοχαστική έννοια ενίοτε δεν διατηρείται για όλο το διάστημα, κυρίως όσον αφορά κατανομές οι οποίες ανήκουν σε διαφορετικές παραμετρικές οικογένειες. Επίσης, όταν οι τ.μ. παριστάνουν χρόνους ζωής ή τιμές μιας μετοχής τότε πολλές φορές δεν είναι ρεαλιστικό να συγκρίνουμε αυτές τις ποσότητες (τυχαίες μεταβλητές) για οποιαδήποτε τιμή (σε όλο το στήριγμα). Αυτό μας οδηγεί στην ιδέα να χαλαρώσουμε κάποιες στοχαστικές διατάξεις μελετώντας τη σύγκριση μεταξύ τους πάνω σε διάστημα  $[a, b]$ , για κάποια  $a, b \geq 0$ .

### 4.2 Ορισμοί

Αρχικά, δίνουμε κάποιους ορισμούς στοχαστικών διατάξεων πάνω σε διάστημα όπως τις όρισαν οι Tsai και Lu (2010).

**Ορισμός 4.2.1.** Έστω  $X, Y$  δύο μη αρνητικές τ.μ. με σ.κ.  $F_X, F_Y$ , αντίστοιχα. Τότε η  $X$  θα λέγεται ότι είναι μικρότερη από την  $Y$  ως προς

1. τη συνήθη στοχαστική διάταξη πάνω στο  $[a, b]$  ( $X \leq_{st[a,b]} Y$ ) αν  $\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t)$  για  $a \leq t \leq b$ .
2. τη διάταξη βαθμίδα αποτυχίας πάνω στο  $[a, b]$  ( $X \leq_{hr[a,b]} Y$ ) αν  $r_X(t) \geq r_Y(t)$  για  $a \leq t \leq b$ .
3. τη διάταξη του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής πάνω στο  $[a, b]$  ( $X \leq_{mrl[a,b]} Y$ ) αν  $m_X(t) \leq m_Y(t)$  για  $a \leq t \leq b$ .
4. τη διάταξη αρμονικού μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής πάνω στο  $[a, b]$  ( $X \leq_{hmr[a,b]} Y$ ) αν  $\{(1/t) \int_0^t 1/m_X(z) dz\}^{-1} \leq \{(1/t) \int_0^t 1/m_Y(z) dz\}^{-1}$  για  $a \leq t \leq b$ .

Αξίζει να αναφέρουμε ότι αντίστοιχοι ορισμοί μπορούν να δοθούν στα διαστήματα

$[a, b)$ ,  $(a, b]$  και  $(a, b)$ .

Όπως είδαμε στην ενότητα 2.5, μας ενδιαφέρει η μελέτη των στοχαστικών διατάξεων ως προς την κλειστότητα τους (preservation results). Αντίστοιχα, σημειώνουμε ότι η διάταξη  $\leq_{st[a,b]}$  είναι κλειστή ως προς τη συνέλιξη και ως προς τη σύνθεση γεωμετρικής κατανομής υπό προϋποθέσεις (βλέπε Tsai και Lu, 2010). Επίσης, στο ίδιο άρθρο αποδεικνύονται κάποιες σχέσεις μεταξύ των διατάξεων όπως  $X \leq_{hmrl(0,s)} Y \Rightarrow X^e \leq_{st(0,s)} Y^e$ . Εμείς αποδεικνύουμε την παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 4.2.1.** Έστω  $X, Y$  δύο μη αρνητικές τ.μ. Τότε

$$X \leq_{hr[0,s^*]} Y \Rightarrow X \leq_{st[0,s^*]} Y.$$

*Απόδειξη.* Από την υπόθεση ισχύει ότι  $r_X(t) \geq r_Y(t), t \in (0, s^*)$ . Ολοκληρώνοντας ως προς  $t \in (0, s^*)$ , προκύπτει ότι

$$\int_0^t r_X(z) dz \geq \int_0^t r_Y(z) dz, \quad t \in (0, s^*),$$

έτσι ώστε

$$e^{-\int_0^t r_X(z) dz} \leq e^{-\int_0^t r_Y(z) dz}, \quad t \in (0, s^*),$$

ή ισοδύναμα,  $\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t)$  για  $t \in (0, s^*)$ . ■

**Παρατήρηση 4.2.1.** Αξίζει να επισημάνουμε ότι η τελευταία πρόταση δεν ισχύει για κάθε  $(a, b)$ . Εύκολα αποδεικνύεται για δύο μη αρνητικές τ.μ.  $X$  και  $Y$  ότι ισχύει η  $\leq_{hr[a,b]} \Rightarrow \leq_{st[a,b]}$  αν  $\bar{F}_X(a) = \bar{F}_Y(a)$  (για  $a = 0$  είναι προφανές ότι  $\bar{F}_X(0) = \bar{F}_Y(0)$ ). Στη γενική περίπτωση δείχνουμε ότι  $X \leq_{hr[a,b]} Y \not\Rightarrow X \leq_{st[a,b]} Y$ , όπως φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 4.2.1.** Έστω  $H$  μια τ.μ. με δεξιά ουρά

$$\bar{F}_H(t) = \frac{\left(\theta + \lambda + \theta \lambda \log\left(\frac{t}{x_0}\right)\right)}{\theta + \lambda} \left(\frac{t}{x_0}\right)^{-\theta}, \quad t \geq x_0 > 0, \quad (4.2.1)$$

και βαθμίδα αποτυχίας

$$r_H(t) = \frac{\theta}{t} \left(1 - \frac{\lambda}{\theta + \lambda + \theta \lambda \log\left(\frac{t}{x_0}\right)}\right), \quad t \geq x_0 > 0,$$

όπου  $\lambda \geq 0$  και  $\theta > 0$ . Η τ.μ.  $H$  καλείται *Pareto-loggamma* κατανομή και συμβολίζεται  $\mathcal{MPLG}(\theta, \lambda, x_0)$ . Η κατανομή *Pareto* (Τύπου I) με δεξιά ουρά  $\bar{F}_H(t) = (x_0/t)^\theta$  ορίζεται όταν  $\lambda = 0$  στην (4.3.4). Για περαιτέρω πληροφορίες βλέπε Bhati et al. (2019). Επιπλέον, θεωρούμε την τ.μ.  $Z$ , η οποία ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέσο 1. Για  $\theta = 2.5, \lambda = 1.5$  και  $x_0 = 1$  είναι εύκολο να διαπιστώσουμε (με τη βοήθεια του προγράμματος MATHEMATICA) ότι  $r_H(t) \geq r_Z(t)$  για  $t \in (1, 1.9)$  και επιπλέον  $\bar{F}_H(1) \neq \bar{F}_Z(1)$ . Όμως, παρατηρούμε ότι δεν ισχύει  $\bar{F}_H(t) \leq \bar{F}_Z(t)$  για  $t \in (1, 1.9)$ . Με άλλα λόγια βλέπουμε

$$H \leq_{hr[1,1.9]} Z \not\Rightarrow H \leq_{st[1,1.9]} Z.$$

### 4.2.1 Φράγματα αξιοπιστίας για $DFR$ κατανομές

Τα φράγματα ροπών (moment bounds) για την αξιοπιστία μιας συσκευής (ή ενός συστήματος) έχουν γίνει αντικείμενο μελέτης στη θεωρία Αξιοπιστίας. Εμείς (Κανελλοπουλος, 2023) προτείνουμε ένα άνω φράγμα για τη συνάρτηση επιβίωσης όταν η κατανομή ανήκει στην οικογένεια  $DFR$  με γνωστή μέση τιμή και εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα των στοχαστικών διατάξεων πάνω σε διάστημα όπως είδαμε στην Ενότητα 2.5. Στη βιβλιογραφία της θεωρίας αξιοπιστίας η αναζήτηση φραγμάτων συναντάται σε αρκετά βιβλία και άρθρα όπως Barlow και Proschan (1975), Sengupta (1994) και Sengupta και Das (2016). Έστω  $X$  μια μη αρνητική τ.μ. και  $Y$  εκθετική τ.μ. με  $EX = \mu$  και  $EY = 1/b$  όπου η σταθερά  $b$  θα οριστεί στην πορεία. Επίσης, θεωρούμε ότι η  $r_X(t)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς  $s \in [0, s^*]$  για κάποιο  $s^* > 0$ . Αν θεωρήσουμε την εξίσωση για δεδομένο  $s \in [0, s^*]$

$$\int_0^s (r_X(t) - r_Y(t)) dt = \int_0^s (r_X(t) - b) dt = 0$$

παίρνουμε ότι

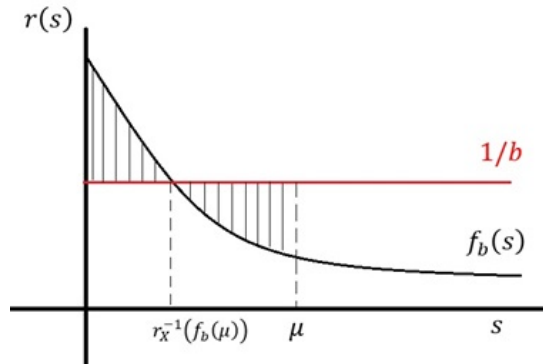
$$b = \frac{1}{s} \int_0^s r_X(t) dt \triangleq f_b(s), \quad s \in [0, s^*], \quad (4.2.2)$$

που συνεπάγεται  $\int_0^z [r_X(t) - r_Y(t)] dt = \int_0^z [r_X(t) - f_b(u)] dt \geq 0$  για κάποιο  $z \in [0, s]$ . Εύκολα αποδεικνύεται ότι η  $f_b(u)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς  $u$  και επίσης ισχύει  $X \leq_{hr[0, r_X^{-1}(f_b(s))]} Y$ , για  $s \in [0, s^*]$  με  $s^* > 0$ .

Τώρα, θεωρούμε την τ.μ.  $Y$  να είναι μια εκθετική με μέσο  $1/f_b(\mu)$ , όπου η  $f_b$  δίνεται από τη σχέση (4.2.2) (βλέπε Σχήμα 4.1). Τότε, έχουμε  $X \leq_{st(0, \mu)} Y$ , όπου  $Y \sim \text{Exp}(f_b(\mu))$ , ή ισοδύναμα

$$\bar{F}_X(t) \leq e^{-f_b(\mu)t} := U_{LK}(t), \quad t \in [0, \mu].$$

Με άλλα λόγια, εξάγουμε ένα άνω φράγμα για τη συνάρτηση επιβίωσης μιας τ.μ.



Σχήμα 4.1: Βαθμίδα αποτυχίας της  $X$  και της  $Y \sim \text{Exp}(b)$

$X$ , η οποία είναι  $DFR$ . Οι Sengupta και Das (2016) πρότειναν ένα φράγμα για τη

συνάρτηση επιβίωσης μιας τ.μ.  $X$ , όταν η  $X$  ανήκει στην *IMRL* (βλέπε, επίσης, Sengupta, 1994). Συγκεκριμένα, απέδειξαν ότι

$$\bar{F}(t) \leq U_S(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{\mu}}, & t \leq \mu, \\ \frac{\mu}{t}e^{-1}, & t > \mu. \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Στα επόμενα παραδείγματα, δείχνουμε ότι το φράγμα  $U_{LK}(t)$  είναι καλύτερο από το φράγμα  $U_S(t)$  όταν η τ.μ.  $X$  ακολουθεί Pareto, Weibull ή έχει κατανομή μια μείξη δύο εκθετικών κατανομών για  $t \leq \mu$ .

**Παράδειγμα 4.2.2.** Έστω  $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \lambda)$  με συνάρτηση επιβίωσης

$$\bar{F}_X(t) = \left( \frac{\lambda}{\lambda + t} \right)^\alpha, \quad t > 0, \alpha > 1.$$

Σε αυτήν την περίπτωση η συνάρτηση (4.2.2) δίνεται από τη σχέση

$$f_b(t) = \frac{\alpha}{t} \ln \left( \frac{\lambda + t}{\lambda} \right), \quad t \in [0, s^*].$$

Για  $t \leq \mu$ , η ανισότητα  $f_b(\mu) \geq \frac{1}{\mu}$  είναι ισοδύναμη με

$$\alpha \ln \left( 1 + \frac{\frac{\lambda}{\alpha-1}}{\lambda} \right) \geq 1 \Leftrightarrow \left( 1 + \frac{1}{\alpha-1} \right)^\alpha \geq e,$$

η οποία είναι αληθής για  $\alpha > 1$  (βλέπε *Dorrie, 1965, Κεφάλαιο 12*). Οπότε,  $U_{LK}(t) \leq U_S(t)$  για  $t \in [0, \mu]$ .

**Παράδειγμα 4.2.3.** Έστω η τ.μ.  $X \sim \text{Weibull}(\lambda, \alpha)$  με δεξιά ουρά

$$\bar{F}_X(t) = e^{-(\lambda t)^\alpha}, \quad t \geq 0, 0 < \alpha < 1, \lambda > 0.$$

Η τ.μ.  $X$  έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(t) = \alpha \lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\alpha},$$

με μέση τιμή

$$E(X) = \mu = \frac{1}{\lambda} \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right),$$

και βαθμίδα αποτυχίας

$$r_X(t) = \alpha \lambda^\alpha t^{\alpha-1}.$$

Είναι γνωστό ότι για  $\alpha < 1$  η τ.μ.  $X$  ανήκει στην κλάση  $DFR$ . Συνεπώς, με βάση τη σχέση (4.2.2), έχουμε ότι

$$f_b(u) = \frac{1}{u} \int_0^u r_X(t) dt = \frac{1}{u} \int_0^u \alpha \lambda^\alpha t^{\alpha-1} dt \Leftrightarrow$$

$$f_b(u) = \lambda^\alpha u^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1, \lambda \geq 0. \quad (4.2.4)$$

Άρα, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$f_b(\mu) \geq 1/\mu,$$

ή ισοδύναμα,

$$\lambda^\alpha \mu^{\alpha-1} \geq 1/\mu \Leftrightarrow$$

$$(\lambda\mu)^\alpha \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\left( \lambda \frac{1}{\lambda} \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) \right)^\alpha \geq 1. \quad (4.2.5)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{\alpha} > 2,$$

και επειδή η συνάρτηση  $\Gamma(x)$  μετά το σημείο  $x = 1$  είναι αύξουσα, ισχύει ότι  $\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha}) > \Gamma(2) = 1$ , καταλήγοντας έτσι στο ζητούμενο, δηλαδή  $U_{LK}(t) \leq U_S(t)$  για  $t \leq \mu$ .

**Παράδειγμα 4.2.4.** Έστω η τ.μ.  $X$  η οποία ακολουθεί μια μείξη δύο εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(t) = a_1 e^{-b_1 t} + a_2 e^{-b_2 t},$$

όπου  $a_1 + a_2 = 1$  και  $a_1, a_2 > 0$ . Η τ.μ.  $X$  έχει μέση τιμή

$$E(X) = \mu = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2}. \quad (4.2.6)$$

Επίσης, η βαθμίδα αποτυχίας της μείξης δύο εκθετικών κατανομών (βλ. Gupta et al., 2010) είναι

$$r_X(t) = \frac{a_1 b_1 e^{-b_1 t} + a_2 b_2 e^{-b_2 t}}{a_1 e^{-b_1 t} + a_2 e^{-b_2 t}}.$$

Γνωρίζουμε ότι η τ.μ.  $X$  ως μείξη δύο εκθετικών ανήκει στην κλάση  $DFR$ , οπότε από τη σχέση (4.2.2) προκύπτει ότι

$$f_b(u) = \frac{1}{u} \int_0^u \frac{a_1 b_1 e^{-b_1 t} + a_2 b_2 e^{-b_2 t}}{a_1 e^{-b_1 t} + a_2 e^{-b_2 t}} dt$$

$$= \frac{1}{u} \int_0^u - \frac{(a_1 e^{-b_1 t} + a_2 e^{-b_2 t})'}{a_1 e^{-b_1 t} + a_2 e^{-b_2 t}} dt$$

$$= \frac{1}{u} \left[ -\ln \left( \frac{a_1 e^{-b_1 u} + a_2 e^{-b_2 u}}{a_1 + a_2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{u} \ln \left( \frac{1}{a_1 e^{-b_1 u} + a_2 e^{-b_2 u}} \right).$$

Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι  $f_b(\mu) \geq 1/\mu$ , οπότε αντικαθιστώντας για  $u = \mu$  στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \ln \left( \frac{1}{a_1 e^{-b_1 \mu} + a_2 e^{-b_2 \mu}} \right) &\geq 1/\mu \Leftrightarrow \\ \ln \left( \frac{1}{a_1 e^{-b_1 \mu} + a_2 e^{-b_2 \mu}} \right) &\geq \ln e \Leftrightarrow \\ 1 &\geq e(a_1 e^{-b_1 \mu} + a_2 e^{-b_2 \mu}). \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Το δεξιό μέλος της ανίσωσης (4.2.7) γίνεται,

$$\begin{aligned} e(a_1 e^{-b_1 \mu} + a_2 e^{-b_2 \mu}) &= a_1 e^{1 - \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_2}} + a_2 e^{1 - \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1}} \\ &= a_1 e^{\frac{b_2(1-a_1) - a_2 b_1}{b_2}} + a_2 e^{\frac{b_1(1-a_2) - a_1 b_2}{b_1}} \\ &= a_1 e^{\frac{b_2 a_2 - a_2 b_1}{b_2}} + a_2 e^{\frac{b_1 a_1 - a_1 b_2}{b_1}} \\ &= a_1 e^{a_2 \frac{b_2 - b_1}{b_2}} + a_2 e^{a_1 \frac{b_1 - b_2}{b_1}}. \end{aligned}$$

Έτσι, καταλήγουμε στην ισοδύναμη ανίσωση

$$1 \geq a_1 e^{a_2 \frac{b_2 - b_1}{b_2}} + a_2 e^{a_1 \frac{b_1 - b_2}{b_1}}.$$

Στην τελευταία ανισότητα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι  $b_2 > b_1$ , οπότε έχουμε

$$a_1 e^{a_2 \frac{b_2 - b_1}{b_2}} + a_2 e^{a_1 \frac{b_1 - b_2}{b_1}} \leq a_1 e^{a_2} + a_2 \leq a_1 + a_2 = 1,$$

γνωρίζοντας ότι  $a_1 + a_2 = 1$ ,  $a_2 \frac{b_2 - b_1}{b_2} < a_2$  και  $a_1 \frac{b_1 - b_2}{b_1} < 0$ . Καταλήγοντας με αυτόν τον τρόπο στο ζητούμενο.

Ως συνέχεια των τελευταίων τριών παραδειγμάτων, εφαρμόζουμε αυτά τα αποτελέσματα με αριθμητικά παραδείγματα, τα οποία τα παρουσιάζουμε στον Πίνακα 4.1. Συγκεκριμένα, θεωρούμε τρεις περιπτώσεις όταν  $X \sim \text{Pareto}(4, 3)$ ,  $X \sim \text{Weibull}(2, 1/3)$  και  $X$  έχει συνάρτηση επιβίωσης  $\bar{F}(x) = (1/3)e^{-2x} + (2/3)e^{-x/5}$ , αντίστοιχα.

Η εύρεση φραγμάτων και η εφαρμογή τους στη θεωρία χρεοκοπίας και ιδιαίτερα για την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν οι αποζημιώσεις έχουν βαριά ουρά είναι αντικείμενο μελέτης πολλών ετών. Εμείς εφαρμόζουμε το φράγμα μας στο κλασικό μοντέλο και το συγκρίνουμε με γνωστά φράγματα της βιβλιογραφίας.

**Παράδειγμα 4.2.5.** Θεωρούμε ότι η κατανομή του ύψους των αποζημιώσεων στο κλασικό μοντέλο κινδύνου (βλέπε Κεφάλαιο 1) ακολουθεί την κατανομή Pareto με ουρά

$$\bar{P}(x) = \frac{1}{(1+x)^3}.$$

| $t$  | $\bar{F}(t)$ | $U_S(t)$ | $U_{LK}(t)$ |
|------|--------------|----------|-------------|
| 0.05 | 0.936        | 0.951    | 0.944       |
| 0.1  | 0.877        | 0.904    | 0.891       |
| 0.2  | 0.772        | 0.818    | 0.794       |
| 0.5  | 0.539        | 0.606    | 0.562       |
| 0.33 | 0.448        | 0.513    | 0.464       |
| 0.75 | 0.409        | 0.472    | 0.421       |
| 1    | 0.316        | 0.367    | 0.316       |

( $\alpha$ ) Pareto(4,3)

| $t$  | $\bar{F}(t)$ | $U_S(t)$ | $U_{LK}(t)$ |
|------|--------------|----------|-------------|
| 0.05 | 0.961        | 0.985    | 0.984       |
| 0.1  | 0.926        | 0.971    | 0.968       |
| 0.2  | 0.863        | 0.944    | 0.938       |
| 0.5  | 0.725        | 0.866    | 0.854       |
| 1    | 0.590        | 0.751    | 0.729       |
| 3.2  | 0.352        | 0.402    | 0.364       |
| 3.5  | 0.331        | 0.367    | 0.331       |

( $\beta$ ) Μείξη δύο εκθετικών

| $t$  | $\bar{F}(t)$ | $U_S(t)$ | $U_{LK}(t)$ |
|------|--------------|----------|-------------|
| 1/10 | 0.5572       | 0.9672   | 0.9412      |
| 1/5  | 0.4786       | 0.9355   | 0.8859      |
| 1/2  | 0.3678       | 0.8464   | 0.7387      |
| 1    | 0.2836       | 0.7165   | 0.5456      |
| 1.5  | 0.2363       | 0.6065   | 0.4031      |
| 2    | 0.2044       | 0.5134   | 0.2977      |
| 2.5  | 0.1808       | 0.4345   | 0.2199      |
| 2.9  | 0.1658       | 0.3803   | 0.1726      |
| 3    | 0.1624       | 0.3678   | 0.1624      |

( $\gamma$ ) Weibull(2, 1/3)

Πίνακας 4.1: Άνω φράγματα για  $DFR$  κατανομές.

| $u$  | $U_{LK}(u)$ | $U_{PP_1}(u)$ | $U_{PP_2}(u)$ | $U_{CP}(u)$ |
|------|-------------|---------------|---------------|-------------|
| 0.2  | 0.8865      | 0.8808        | 0.8806        | 0.8888      |
| 0.25 | 0.8809      | 0.8750        | 0.8747        | 0.8844      |
| 0.5  | 0.8536      | 0.8509        | 0.8493        | 0.8635      |
| 0.75 | 0.8271      | 0.8322        | 0.8283        | 0.8437      |
| 0.9  | 0.8116      | 0.8225        | 0.8170        | 0.8322      |
| 1    | 0.8014      | 0.8166        | 0.8099        | 0.8247      |

Πίνακας 4.2: Άνω φράγματα για  $\psi(u)$ .

Οπότε η μέση τιμή των αποζημιώσεων είναι  $EY = 1/2$ . Επίσης, θεωρούμε ότι το περιθώριο ασφαλείας είναι  $\theta = 1/10$ . Στον Πίνακα 4.2 συγκρίνουμε τη συμπεριφορά του φράγματος μας,  $U_{LK}(u)$ , για την πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$  σε σχέση με άλλα γνωστά φράγματα στη βιβλιογραφία. Συγκεκριμένα, το φράγμα  $U_{CP}$  είναι άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας που δίνεται από το Θεώρημα 4.5 των Chadjiconstantinidis και Politis (2005) ενώ τα φράγματα  $U_{PP_1}(u)$  και  $U_{PP_2}(u)$  δίνονται από το θεώρημα 4.1 των Psarrakos και Politis (2007) χρησιμοποιώντας  $U(u) = U_{CP}(u)$  ως αρχικό φράγμα. Παρατηρούμε ότι για όλες τις τιμές του  $u$ , το φράγμα μας συμπεριφέρεται καλύτερα από το φράγμα  $U_{CP}(u)$  και για κάποιες τιμές κοντά στη μέση τιμή, το  $U_{LK}(u)$  συμπεριφέρεται καλύτερα από τα  $U_{PP_1}(u)$  και  $U_{PP_2}(u)$ . Ένα από τα πλεονεκτήματα του φράγματος  $U_{LK}(u)$  σε σχέση με τα  $U_{PP_1}(u)$  και  $U_{PP_2}(u)$  είναι ότι δεν χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε κάποιο αρχικό φράγμα, το οποίο είναι απαραίτητο για αυτά τα φράγματα.

### 4.3 Στοχαστικές διατάξεις πάνω σε διάστημα $[a, b]$ σχετιζόμενες με το μετασχηματισμό Laplace

Όπως είδαμε στην Ενότητα 4.2, έχει ενδιαφέρον να μελετήσουμε στοχαστικές διατάξεις πάνω σε διάστημα. Σε αυτήν την ενότητα θα ορίσουμε νέες στοχαστικές διατάξεις πάνω σε διάστημα σχετιζόμενες με το μετασχηματισμό Laplace. Θα μελετήσουμε αυτές τις διατάξεις εξετάζοντας την κλειστότητά τους ως προς τη συνέλιξη και τη σύνθεση κατανομών και θα δώσουμε αριθμητικά παραδείγματα, τα οποία θα μας δώσουν ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Στην Ενότητα 3.1 αναφέραμε κάποιες ερμηνείες σε διαφόρους κλάδους του μετασχηματισμού Laplace. Συνήθως στα χρηματοοικονομικά αυτός ο μετασχηματισμός περιγράφεται ως μια συνάρτηση επιτοκίου (ή συντελεστή προεξόφλησης) οπότε οι τιμές που δύναται ρεαλιστικά να



πάρει δεν μπορεί να είναι σε όλο το διάστημα  $(0, \infty)$ . Για παράδειγμα, ένα επιτόκιο ενός ασφαλιστικού συμβολαίου δεν μπορεί να πάρει μεγάλες τιμές διότι έτσι θα είναι οικονομικά ασύμφορο για την εταιρεία. Επίσης, πολλές φορές τα επιτόκια ομολόγων ή ασφαλιστικών πακέτων έχουν ανώτατο πλαφόν, το οποίο ορίζεται από ελεγκτικούς μηχανισμούς. Για αυτό το λόγο έχει ενδιαφέρον η μελέτη των στοχαστικών διατάξεων σχετιζόμενων με το μετασχηματισμό Laplace πάνω σε διάστημα (βλέπε Kanellouropoulos, 2023). Στο επόμενο κεφάλαιο θα εφαρμοστούν κάποιες από αυτές τις στοχαστικές διατάξεις υπό το πλαίσιο του κλασικού μοντέλου χρεοκοπίας.

Αρχικά δίνουμε τέσσερις ορισμούς στοχαστικών διατάξεων σχετιζόμενων με το μετασχηματισμό Laplace μεταξύ δύο τ.μ.  $X$  και  $Y$ , οι οποίες θεωρούνται μη-αρνητικές και ανεξάρτητες.

**Ορισμός 4.3.1.** Έστω  $X$  και  $Y$  με συναρτήσεις πυκνότητας  $f_1$  και  $f_2$ , αντίστοιχα. Αν

$$\int_0^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt \geq \int_0^{\infty} f_2(t)e^{-st} dt, \quad s \in [a, b],$$

τότε η  $X$  θα λέμε ότι είναι μικρότερη ως προς τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace πάνω στο διάστημα  $[a, b]$  από τη  $Y$  ( $X \leq_{Lt[a,b]} Y$ ).

Οι δύο ακόλουθοι ορισμοί βασίζονται με το πηλίκο των μετασχηματισμών Laplace των  $X$  και  $Y$  πάνω στο διάστημα  $[a, b]$ .

**Ορισμός 4.3.2.** Έστω  $X$  και  $Y$  με μετασχηματισμούς Laplace  $\mathcal{L}_X$  και  $\mathcal{L}_Y$ , αντίστοιχα. Αν το πηλίκο

$$\frac{\mathcal{L}_Y(s)}{\mathcal{L}_X(s)} \quad \text{είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς } s \in [a, b],$$

τότε θα λέμε ότι η  $X$  είναι μικρότερη ως προς τη διάταξη του λόγου των μετασχηματισμών Laplace πάνω στο διάστημα  $[a, b]$  από τη  $Y$  ( $X \leq_{Lt-r[a,b]} Y$ ).

**Ορισμός 4.3.3.** Αν το πηλίκο

$$\frac{\mathcal{L}_Y^*(s)}{\mathcal{L}_X^*(s)} \quad \text{είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς } s \in [a, b],$$

τότε θα λέμε ότι η  $X$  είναι μικρότερη ως προς τη διάταξη του λόγου των μετασχηματισμών Laplace των δεξιών ουρών πάνω στο διάστημα  $[a, b]$  από τη  $Y$  ( $X \leq_{r-Lt-r[a,b]} Y$ ).

Οι διατάξεις σχετιζόμενες με το λόγο μετασχηματισμών Laplace, όπως ορίστηκαν στους προαναφερθέντες ορισμούς έχουν ποικίλες εφαρμογές σε στοχαστικά μοντέλα. Οι Shaked και Wong (1997) δίνουν μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή στο πλαίσιο της θεωρίας αξιοπιστίας. Με παρόμοιο σκεπτικό όπως των Li et al. (2009) που όρισαν τη διάταξη ως προς το λόγο των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace ορίζουμε μια νέα διάταξη πάνω στο διάστημα  $[a, b]$ .

**Ορισμός 4.3.4.** Έστω  $X$  και  $Y$  με παραγώγους των μετασχηματισμών Laplace  $\mathcal{L}'_X(s)$  και  $\mathcal{L}'_Y(s)$ , αντίστοιχα. Τότε η  $X$  θα λέμε ότι είναι μικρότερη ως προς το

λόγο των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace πάνω στο διάστημα  $[a, b]$  από τη  $Y$  ( $X \leq_{d-Lt-r[a,b]} Y$ ) αν το ηγλίκο

$$\frac{\mathcal{L}'_Y(s)}{\mathcal{L}'_X(s)},$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς  $s \in [a, b]$ .

Οι Tsai και Lu (2010) απέδειξαν ότι η διάταξη  $\leq_{st[0,b]}$  είναι κλειστή ως προς τη συνέλιξη. Εμείς αποδεικνύουμε στα επόμενα θεωρήματα ότι οι διατάξεις  $\leq_{Lt[a,b]}$  και  $\leq_{Lt-r[a,b]}$  είναι, επίσης, κλειστές ως προς τη συνέλιξη.

**Θεώρημα 4.3.1.** Έστω τέσσερις συνεχείς, μη-αρνητικές και ανεξάρτητες τ.μ.  $X_i$  και  $Y_i$  με συναρτήσεις πυκνότητας  $f_i$  και  $g_i$ ,  $i = 1, 2$ , αντίστοιχα. Αν  $X_1 \leq_{Lt[a,b]} Y_1$  και  $X_2 \leq_{Lt[a,b]} Y_2$  τότε

$$X_1 + X_2 \leq_{Lt[a,b]} Y_1 + Y_2.$$

Απόδειξη. Αρχικά, υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}_{X_1+X_2}(s)$ , της συνέλιξης των κατανομών  $F_1$  και  $F_2$  για  $s \in [a, b]$ . Είναι γνωστό (βλέπε Feller, σελ. 434, 1971) ότι ο μετασχηματισμός Laplace της συνέλιξης  $F_{X_1+X_2}$  δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{L}_{X_1+X_2}(s) = \mathcal{L}_{X_1}(s)\mathcal{L}_{X_2}(s), \quad s > 0. \quad (4.3.1)$$

Βάσει της υπόθεσης  $X_1 \leq_{Lt[a,b]} Y_1$  και  $X_2 \leq_{Lt[a,b]} Y_2$ , ή ισοδύναμα,

$$\int_0^\infty f_1(t)e^{-st} dt \geq \int_0^\infty g_1(t)e^{-st} dt, \quad s \in [a, b],$$

και

$$\int_0^\infty f_2(t)e^{-st} dt \geq \int_0^\infty g_2(t)e^{-st} dt, \quad s \in [a, b],$$

και την ισότητα (4.3.1), συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_1+X_2}(s) &= \int_0^\infty f_1(t)e^{-st} dt \int_0^\infty f_2(t)e^{-st} dt \\ &\geq \int_0^\infty g_1(t)e^{-st} dt \int_0^\infty g_2(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}_{Y_1+Y_2}(s), \quad s \in [a, b]. \end{aligned}$$

■

**Θεώρημα 4.3.2.** Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ανεξάρτητες, ισόνομες και μη-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές (αντ.  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ). Αν  $X_i \leq_{Lt-r[a,b]} Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  τότε

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq_{Lt-r[a,b]} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ. του αθροίσματος  $n$  ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ισούται με το γινόμενο των μεμονωμένων

μετασχηματισμών Laplace (βλέπε (4.3.1)). Αν, επιπλέον, αυτές είναι ισόνομα κατανομημένες τότε είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει

$$\mathcal{L}_{X_1+X_2+\dots+X_n}(s) = \prod_{i=1}^n \mathcal{L}_{X_i}(s), \quad s \in [a, b].$$

Τώρα, θεωρούμε ότι  $\mathcal{L}_{Y_i}(s)/\mathcal{L}_{X_i}(s)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση για  $s \in (a, b)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , το οποίο συνεπάγεται άμεσα

$$\frac{\mathcal{L}_{\sum_{i=1}^n Y_i}(s)}{\mathcal{L}_{\sum_{i=1}^n X_i}(s)}, \quad \searrow s \in (a, b), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

και το ζητούμενο έπεται. ■

Επίσης, είναι γνωστό ότι η διάταξη  $\leq_{Lt}$  είναι κλειστή ως προς τη σύνθεση κατανομών (βλέπε Alzaid et al., 1991) όπως και οι διατάξεις  $\leq_{Lt-r}$  και  $\leq_{r-Lt-r}$  (βλέπε Shaked and Wong, 1997). Με κίνητρο τα προαναφερθέντα αποτελέσματα, εμείς αποδεικνύουμε αντίστοιχες ιδιότητες των διατάξεων  $\leq_{Lt[0,s^*]}$ ,  $\leq_{Lt-r[0,s^*]}$  και  $\leq_{r-Lt-r[0,s^*]}$  με παρόμοια επιχειρήματα.

**Θεώρημα 4.3.3.** Έστω  $X_1, X_2, \dots$  και  $Y_1, Y_2, \dots$  δύο ακολουθίες μη-αρνητικών και ανεξάρτητων τ.μ. και έστω  $M$  και  $N$  ακέραιες θετικές τ.μ., οι οποίες είναι ανεξάρτητες από τις  $\{X_i\}$  και τις  $\{Y_i\}$ , αντίστοιχα. Θεωρούμε ότι υπάρχει μια μη-αρνητική τ.μ.  $Z$  τέτοια ώστε  $X_i \leq_{Lt[0,s^*]} Z \leq_{Lt[0,s^*]} Y_j$ , για όλα τα  $i$  και  $j$  και για κάποιο  $s^* > 0$ . Αν  $M \stackrel{d}{=} N$ , τότε

$$\sum_{j=1}^M X_j \leq_{Lt[0,s^*]} \sum_{j=1}^N Y_j.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για όλα  $0 < s < s^*$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E \left[ \exp \left( -s \sum_{j=1}^M X_j \right) \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} Pr(M = n) \prod_{j=1}^n E[\exp(-sX_j)] \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} Pr(M = n) (E(\exp\{-sZ\}))^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} Pr(M = n) \exp\{-n(-\log E(\exp\{-sZ\}))\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} Pr(N = n) \exp\{-n(-\log E(\exp\{-sZ\}))\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} Pr(N = n) (E(\exp\{-sZ\}))^n \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} Pr(N = n) \prod_{j=1}^n E(\exp\{-sY_j\}) = E \left( \exp\{-s \sum_{j=1}^N Y_j\} \right), \end{aligned}$$

όπου η πρώτη και η τελευταία ισότητα προκύπτουν από το γεγονός της ανεξαρτησίας μεταξύ  $M$  και  $N$  από τις  $\{X_i\}$  και τις  $\{Y_i\}$  ακολουθίες, η πρώτη και η τελευταία ανισότητα προκύπτουν από  $X_i \leq_{Lt[0,s^*]} Z \leq_{Lt[0,s^*]} Y_j$  για όλα τα  $i$  και  $j$ , και τέλος, η μεσαία ισότητα συνεπάγεται από  $M \stackrel{d}{=} N$ . Έτσι, καταλήγουμε άμεσα στο ζητούμενο. ■

Οι Tsai και Lu (2010) απέδειξαν ότι η διάταξη  $\leq_{st[0,s^*]}$  είναι κλειστή υπό τη γεωμετρική σύνθεση κατανομών, και συγκεκριμένα, στο ίδιο άρθρο εφάρμοσαν τα αποτελέσματα στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας Χρεοκοπίας. Στο επόμενο πόρισμα, το οποίο προκύπτει από το Θεώρημα 4.3.3, περιγράφουμε το γεγονός ότι η διάταξη  $\leq_{Lt[0,s^*]}$  είναι κλειστή ως προς τη σύνθεση κατανομών και στο επόμενο κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε αυτά τα αποτελέσματα στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας Χρεοκοπίας.

**Πόρισμα 4.3.1.** Έστω  $X_1, X_2, \dots$  και  $Y_1, Y_2, \dots$  δύο ακολουθίες από ανεξάρτητες, ισόνομες και μη-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε  $X_i \leq_{Lt[0,s^*]} Y_i, i = 1, 2, \dots$ . Ακόμη, θεωρούμε ότι  $M$  και  $N$  είναι ακέραιες θετικές τυχαίες μεταβλητές και ανεξάρτητες από τις  $\{X_i\}$  και τις  $\{Y_i\}$  ακολουθίες, αντίστοιχα, τέτοιες ώστε  $M \stackrel{d}{=} N$ . Τότε

$$\sum_{j=1}^M X_j \leq_{Lt[0,s^*]} \sum_{j=1}^N Y_j.$$

**Θεώρημα 4.3.4.** Έστω  $X_1, X_2, \dots$  ακολουθία ανεξάρτητων, ισόνομων και μη-αρνητικών τυχαίων μεταβλητών, και έστω  $N_1$  και  $N_2$  ακέραιες και θετικές τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες είναι ανεξάρτητες από τις  $X_i$ . Τότε

$$N_1 \leq_{Lt-r[0,p^*]} (\leq_{r-Lt-r[0,p^*]}) N_2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N_1} X_i \leq_{Lt-r[0,s^*]} (\leq_{r-Lt-r[0,s^*]}) \sum_{i=1}^{N_2} X_i,$$

όπου  $p^* = -\log(\mathcal{L}_X(s^*))$ .

Απόδειξη. Για  $j = 1, 2$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_1+X_2+\dots+X_{N_j}}(s) &= \sum_{i=1}^{\infty} Pr(N_j = i) \mathcal{L}_{X_1+X_2+\dots+X_i}(s) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} Pr(N_j = i) (\mathcal{L}_{X_1}(s))^i \\ &= \mathcal{L}_{N_j}(-\log \mathcal{L}_{X_1}(s)). \end{aligned}$$

Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από την υπόθεση. ■

Η διάταξη  $\leq_{d-Lt-r[a,b]}$  δεν είναι κλειστή ως προς τη συνέλιξη όπως βλέπουμε στο επόμενο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 4.3.1.** Έστω  $X_1, X_2, \dots$  μια ακολουθία ανεξάρτητων, ισόνομων και μη-αρνητικών τυχαίων μεταβλητών, οποίες ακολουθούν την ίδια κατανομή όπως η  $X$  και έστω  $Y_1, Y_2, \dots$  μια ακολουθία ανεξάρτητων, ισόνομων και μη-αρνητικών

τυχαίων μεταβλητών, οποίες ακολουθούν την ίδια κατανομή όπως η  $Y$  τέτοιες ώστε  $EX = EY$ . Οι Kanellopoulos and Politis (2024a) απέδειξαν το εξής αποτέλεσμα. Αν

$$\frac{\mathcal{L}'_Y(s)}{\mathcal{L}'_X(s)} \nearrow [0, s_0] \quad \text{και} \quad \searrow [s_0, \infty],$$

τότε

$$\frac{\mathcal{L}'_{T_n}(s)}{\mathcal{L}'_{S_n}(s)} \nearrow [0, s_C] \quad \text{και} \quad \searrow [s_C, \infty],$$

όπου  $s_C < s_0$  και τα αθροίσματα  $S_n, T_n$  ορίζονται από τις σχέσεις  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, T_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ .

Σε πολλές περιπτώσεις, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη των στοχαστικών διατάξεων όσον αφορά την κλειστότητα ως προς τη κατανομή ισορροπίας (βλέπε (1.3.2)). Ο Denuit (2001) έδειξε ότι η διάταξη του μετασχηματισμού Laplace μεταφέρεται (αντεστραμμένη) στις σχετιζόμενες κατανομές ισορροπίας. Εμείς αποδεικνύουμε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα για τη διάταξη  $\leq_{Lt[0, s^*]}$ .

**Πρόταση 4.3.1.** Έστω δύο μη-αρνητικές τ.μ.  $X$  και  $Y$  τέτοιες ώστε  $EX \geq EY$ . Τότε,

$$X \leq_{Lt[0, s^*]} Y \Leftrightarrow Y^e \leq_{Lt[0, s^*]} X^e.$$

Απόδειξη. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$\mathcal{L}_X(s) = 1 - s \cdot \int_0^\infty e^{-st} \bar{F}_X(t) dt, \quad 0 < s < s^*. \quad (4.3.2)$$

Ο Denuit (2001) έδειξε ότι

$$\mathcal{L}_{X^e}(s) = \frac{1 - \mathcal{L}_X(s)}{s \cdot EX}, \quad s \geq 0. \quad (4.3.3)$$

Από τις σχέσεις (4.3.2) και (4.3.3) το ζητούμενο έπεται άμεσα. ■

Οι Tsai και Lu (2010) έδειξαν ότι  $X \leq_{hmrl[0, s^*]} Y \Rightarrow X^e \leq_{st[0, s^*]} Y^e$  για  $s^* > 0$ . Οι Willmot και Lin (2001) απέδειξαν ότι  $r_{X^e}(t) = 1/m_X(t)$ , για  $t \geq 0$ . Με παρόμοιο σκεπτικό, εμείς παραθέτουμε άλλα δύο αποτελέσματα.

**Πρόταση 4.3.2.** Έστω  $X$  και  $Y$  δύο μη-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές. Τότε, ισχύει ότι

$$X \leq_{Lt-r[0, s^*]} Y \Rightarrow X \leq_{Lt[0, s^*]} Y.$$

Απόδειξη. Έστω  $X \leq_{Lt-r[0, s^*]} Y$ . Τότε το πηλίκο  $\mathcal{L}_Y(s)/\mathcal{L}_X(s)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς  $s \in [0, s^*]$ . Αν  $s_1 < s_2$ , για  $s_1, s_2 \in [0, s^*]$ , έχουμε

$$\frac{\mathcal{L}_Y(s_1)}{\mathcal{L}_X(s_1)} \geq \frac{\mathcal{L}_Y(s_2)}{\mathcal{L}_X(s_2)} \stackrel{s_1 \leq s_2}{\Rightarrow} 1 \geq \frac{\mathcal{L}_Y(s_2)}{\mathcal{L}_X(s_2)} \Rightarrow \mathcal{L}_X(s_2) \geq \mathcal{L}_Y(s_2).$$

Αφού το  $s_2 \in [0, s^*]$  το πήραμε αυθαίρετα, τότε καταλήγουμε στη διάταξη  $X \leq_{Lt[0, s^*]} Y$  όπως αναμέναμε. ■

**Πρόταση 4.3.3.** Έστω  $X$  και  $Y$  δύο μη-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές. Τότε

$$X \leq_{hr[0,s^*]} Y \Rightarrow X \leq_{st[0,s^*]} Y.$$

Απόδειξη. Με βάση την υπόθεση έχουμε ότι  $r_X(t) \geq r_Y(t)$ , για  $t \in (0, s^*)$ . Ολοκληρώνοντας ως προς  $t \in (0, s^*)$ , παίρνουμε ότι

$$\int_0^t r_X(z) dz \geq \int_0^t r_Y(z) dz, \quad t \in (0, s^*),$$

έτσι ώστε

$$e^{-\int_0^t r_X(z) dz} \leq e^{-\int_0^t r_Y(z) dz}, \quad t \in (0, s^*),$$

ή ισοδύναμα,  $\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t)$  για  $t \in (0, s^*)$ . ■

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η προηγούμενη πρόταση δεν διατηρείται πάντα για κάθε διάστημα  $[a, b]$ . Στο επόμενο παράδειγμα, δείχνουμε ότι  $X \leq_{hr[a,b]} Y \not\Rightarrow X \leq_{st[a,b]} Y$ .

**Παράδειγμα 4.3.2.** Έστω  $\mathcal{H}$  μια τ.μ. με δεξιά ουρά

$$\bar{F}_{\mathcal{H}}(t) = \frac{\left(\theta + \lambda + \theta \lambda \log\left(\frac{t}{x_0}\right)\right)}{\theta + \lambda} \left(\frac{t}{x_0}\right)^{-\theta}, \quad t \geq x_0 > 0, \quad (4.3.4)$$

και βαθμίδα αποτυχίας

$$r_{\mathcal{H}}(t) = \frac{\theta}{t} \left(1 - \frac{\lambda}{\theta + \lambda + \theta \lambda \log\left(\frac{t}{x_0}\right)}\right), \quad t \geq x_0 > 0,$$

όπου  $\lambda \geq 0$  και  $\theta > 0$ . Η τ.μ.  $\mathcal{H}$  λέγεται μείξη Pareto-loggamma και συμβολίζεται  $\mathcal{MPLG}(\theta, \lambda, x_0)$ . Η κατανομή Pareto (τύπου I) με ουρά  $\bar{F}_{\mathcal{H}}(t) = (x_0/t)^\theta$ ,  $t \geq x_0$  προκύπτει όταν  $\lambda = 0$  στη σχέση (4.3.4). Για περαιτέρω πληροφορίες, βλέπε Bhati et al. (2019). Επίσης, θεωρούμε μια τ.μ.  $Z$  που ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1. Για  $\theta = 2.5$ ,  $\lambda = 1.5$  και  $x_0 = 1$ , είναι εύκολο να διαπιστώσουμε (με τη βοήθεια του πακέτου MATHEMATICA) ότι  $r_{\mathcal{H}}(t) \geq r_Z(t)$  για  $t \in (1, 1.9)$ . Όμως, δεν είναι αληθές ότι  $\bar{F}_{\mathcal{H}}(t) \leq \bar{F}_Z(t)$  για  $t \in (1, 1.9)$ . Ισοδύναμα,

$$\mathcal{H} \leq_{hr[1,1.9]} Z \not\Rightarrow \mathcal{H} \leq_{st[1,1.9]} Z.$$

Ένα άλλο γνωστό αποτέλεσμα στη θεωρία των στοχαστικών διατάξεων είναι ότι η διάταξη  $\leq_{st}$  είναι πιο ισχυρή από την  $\leq_{Lt}$  (βλέπε Σχήμα 3.1). Όμως, αυτή η συνεπαγωγή δεν ισχύει για τις αντίστοιχες διατάξεις πάνω στο διάστημα  $(0, s^*)$  και συγκεκριμένα ισχύει ότι  $\leq_{st[a,b]} \not\Rightarrow \leq_{Lt[a,b]}$  όπως διαπιστώνουμε στο επόμενο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 4.3.3.** Έστω η τ.μ.  $X$  με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(t) = e^{-2t} + 2te^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

---

Επίσης, θεωρούμε την τ.μ.  $Y$  να ακολουθεί την κατανομή μια μείξη δύο εκθετικών κατανομών με παραμέτρους 3 και 1, με αντίστοιχα βάρη  $1/4$  και  $3/4$ , έτσι ώστε  $EX = 3/4 < 5/6 = EY$ . Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι

$$\bar{F}_X(t) \geq \bar{F}_Y(t), \quad 0 \leq t \leq 0.8316,$$

και,

$$\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t), \quad t > 0.8316.$$

Όμως, αν λύσουμε την εξίσωση  $\mathcal{L}_X(s) - \mathcal{L}_Y(s) = 0$ , θα δούμε ότι υπάρχει μοναδική λύση  $s_0 = 0.7321$ , τέτοια ώστε

$$\int_0^\infty e^{-st} \bar{F}_X(t) dt \leq \int_0^\infty e^{-st} \bar{F}_Y(t) dt, \quad 0 \leq s \leq 0.7321,$$

και,

$$\int_0^\infty e^{-st} \bar{F}_X(t) dt \geq \int_0^\infty e^{-st} \bar{F}_Y(t) dt, \quad s > 0.7321.$$

Άρα, προκύπτει ότι  $X \leq_{st[0,0.8316]} Y$ , αλλά από την άλλη ισχύει ότι  $X \leq_{Lt[0,0.7321]} Y$ .

---



# Κεφάλαιο 5

## Εφαρμογές Στοχαστικών Διατάξεων σε υποδείγματα της θεωρίας κινδύνων

### 5.1 Εισαγωγή

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετήσαμε στοχαστικές διατάξεις τυχαίων μεταβλητών και τις αντιστοιχήσαμε σε κλάσεις αξιοπιστίας. Όπως είδαμε, αυτή η μελέτη μας εφοδιάζει με περισσότερες πληροφορίες για τις τυχαίες μεταβλητές (πχ φράγματα). Στο τρίτο κεφάλαιο ορίσαμε στοχαστικές διατάξεις πάνω σε διάστημα και επεκτείναμε τη βιβλιογραφία δίνοντας νέα αποτελέσματα και ένα φράγμα για κατανομές με βαριά ουρά (heavy tailed distributions). Στο τέταρτο κεφάλαιο επικεντρωθήκαμε σε στοχαστικές διατάξεις και κλάσεις αξιοπιστίας σχετιζόμενες με το μετασχηματισμό Laplace, ο οποίος έχει ποικίλες εφαρμογές σε πολλά επιστημονικά πεδία (βλέπε Ενότητα 3.1), αλλά είναι και βασικό εργαλείο στη μελέτη της θεωρίας Χρεοκοπίας. Οι εφαρμογές της θεωρίας των στοχαστικών διαδικασιών και των κλάσεων αξιοπιστίας στην ανανεωτική θεωρία, στη θεωρία Ουρών και στη θεωρία Χρεοκοπίας παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον ολόένα και περισσότερο στη βιβλιογραφία. Εμείς θα επικεντρωθούμε στις εφαρμογές των στοχαστικών διατάξεων στη θεωρία Χρεοκοπίας στο Κλασικό και στο ανανεωτικό μοντέλο και θα σχηματίσουμε το ανανεωτικό μοντέλο εφοδιασμένο με διάχυση αλλά θα επικεντρωθούμε στο κλασικό μοντέλο με έναν διαχτυτικό παράγοντα.

Στην ανανεωτική θεωρία οι Belzunce et. al (2001) συγκρίνουν την κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής με την κατανομή του αντίστοιχου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, και μελετούν τη συμπεριφορά των κλάσεων γήρανσης όσον αφορά την κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου των ενδιάμεσων χρόνων ζωής. Ο Psarrakos (2009) μετέφερε τη μελέτη αυτή, σε ένα άλλο μαθηματικό πεδίο όπως η θεωρία Χρεοκοπίας, ερευνώντας τη συμπεριφορά των κλάσεων γήρανσης των τυχαίων μεταβλητών των κλιμακωτών υψών και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Εμείς επεκτείνουμε την έρευνα αυτή εμπλουτίζοντάς την με περισσότερες στοχαστικές διατάξεις όσον αφορά τη (στοχαστική) σύγκριση των τ.μ. των κλιμακωτών υψών και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Για παράδειγμα μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα υπό ποιές συνθήκες μια στοχαστική

διάταξη για τις τ.μ. που ακολουθούν τα ύψη ζημιών στο χαρτοφυλάκιο, μεταφέρεται σε διάταξη των αντίστοιχων μέγιστων σωρευτικών απωλειών και κατ' επέκταση σε διάταξη για τις πιθανότητες χρεοκοπίας. Όπως επίσης, υπό ποιές προϋποθέσεις μία στοχαστική διάταξη των κλιμακωτών υψών επηρεάζει τη σύγκριση των αντίστοιχων μέγιστων σωρευτικών απωλειών ή το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας των δύο χαρτοφυλακίων. Ο στόχος μας είναι, μέσω των εφαρμογών των στοχαστικών διατάξεων στη θεωρία Χρεοκοπίας, να εξάγουμε φράγματα για τη δεξιά ουρά, για το μετασχηματισμό Laplace της μέγιστης σωρευτικής απώλειας, του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας ή άλλων μέτρων χρεοκοπίας. Στόχος μας είναι να συγκρίνουμε ποσότητες όπως ζημιές διαφορετικών χαρτοφυλακίων με σκοπό να μελετήσουμε τις αντίστοιχες πιθανότητες χρεοκοπίας, αλλά και να εφαρμόσουμε τη θεωρία των στοχαστικών διατάξεων και των κλάσεων αξιοπιστίας και για άλλες ποσότητες σχετιζόμενες με τη χρεοκοπία. Η βιβλιογραφία είναι πλούσια και πολλοί συγγραφείς έχουν ασχοληθεί με την εφαρμογή των στοχαστικών διατάξεων στη θεωρία Χρεοκοπίας, κάποιιοι εκ των οποίων είναι Willmot (2002a), Cheng και Pai (2003), Willmot και Cai (2004), Tsai (2006), (2009), Psarrakos (2009), Psarrakos και Politis (2009), Psarrakos (2010), Tsai και Lu (2010), Li et. al (2015), Mitric και Trufin (2016), Escudero και Ortega (2008), Trufin et al. (2011), Lefèvre et al. (2017).

## 5.2 Ανανεωτικό μοντέλο- Έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας

Στο πρώτο κεφάλαιο μελετήσαμε την τ.μ.  $L$  της μέγιστης σωρευτικής απώλειας (βλέπε Ορισμό 1.3.8) στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας Χρεοκοπίας. Εκφράσαμε την τ.μ.  $L$  ως δεξιά ουρά γεωμετρικής κατανομής (βλέπε (1.3.15)) και δώσαμε τον ορισμό που συνδέει τα κλιμακωτά ύψη με τη μέγιστη σωρευτική απώλεια (βλέπε Ορισμό 1.3.8). Στο κεφάλαιο αυτό, θα περιγράψουμε το ανανεωτικό μοντέλο (ή μοντέλο Sparre Andersen) και θα δείξουμε ότι η τ.μ.  $L$  μπορεί να εκφραστεί ως δεξιά ουρά σύνθετης γεωμετρικής κατανομής και θα μελετήσουμε ιδιότητές της. Θα ασχοληθούμε με κάποιες από τις πιο σημαντικές στοχαστικές διατάξεις για τα κλιμακωτά ύψη και θα εξετάσουμε υπό ποιές συνθήκες αυτές μεταφέρονται στις αντίστοιχες μέγιστες σωρευτικές απώλειες.

Θεωρούμε τώρα το ανανεωτικό μοντέλο με στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος

$$U(t) = x + ct - S(t), \quad t \geq 0, \quad (5.2.1)$$

όπου  $x \geq 0$  είναι το αρχικό αποθεματικό,  $c > 0$  είναι η ένταση ασφαλιστρού και

$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$  ορίζεται η στοχαστική ανέλιξη συνολικών ζημιών μέχρι το χρόνο

$t$  με  $S(t) = 0$  αν  $N(t) = 0$ . Συγκεκριμένα,  $\{Y_1, Y_2, \dots\}$  είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων κατανομών μη αρνητικών τ.μ., οι οποίες εκφράζουν τα ατομικά ύψη ζημιών με συνάρτηση κατανομής  $P(x) = 1 - \bar{P}(x) = Pr(Y \leq x)$

και μέση τιμή  $EY = \int_0^{\infty} x dP(x)$ . Η άφιξη των ζημιών μοντελοποιείται από μια ανανεωτική απαριθμητρία ανέλιξη  $\{N(t) : t \geq 0\}$ , τέτοια ώστε  $N(t) = \max\{n \in$

$N : \{\Xi_1 + \Xi_2 + \dots + \Xi_n \leq t\}$ , όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των ζημιών  $\Xi_i$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανομημένες (δεν ακολουθούν Εκθετική κατανομή όπως στο Κλασικό Μοντέλο) με σ.κ.  $H(t) = 1 - \bar{H}(t) = Pr(\Xi \leq t)$ , ανεξάρτητες από τα ύψη των ζημιών. Αντίστοιχα με το κλασικό μοντέλο, η βασική υπόθεση του Ανανεωτικού μοντέλου είναι ότι  $cE\Xi > EY$ , προσφέροντας ένα περιθώριο ασφαλείας. Ιδιαίτερα, θεωρούμε ότι  $c = (1 + \theta)EY/E\Xi$ , όπου  $\theta > 0$  το περιθώριο ασφαλείας. Για αναλυτικότερη παρουσίαση του Ανανεωτικού Μοντέλου προτείνουμε τα συγγράματα Rolski et al. (1999), Asmussen και Albrecher (2010), και Willmot και Lin (2001).

Αν θεωρήσουμε  $T = \inf\{t : U(t) < 0\}$  το χρόνο χρεοκοπίας (αντίστοιχα με τον Ορισμό 1.3.4), τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται από τη σχέση

$$\psi(x) = Pr(T < \infty | U(0) = x).$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί την επόμενη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (ε.α.ε.)

$$\psi(x) = \phi \int_0^x \psi(x-t) dF(t) + \phi \bar{F}(x), \quad (5.2.2)$$

της οποίας η λύση είναι

$$\psi(x) = \frac{\phi}{1-\phi} \int_0^x \bar{F}(x-t) dG(t), \quad (5.2.3)$$

όπου  $\phi = \psi(0)$ ,  $G(x) = 1 - \psi(x)$  η πιθανότητα μη χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό  $x$  και  $\bar{F}(x)$  είναι η συνάρτηση κατανομής  $\bar{F}(x) = Pr(X_F \leq x)$  των κλιμακωτών υψών σχετιζόμενων με τη στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος. Γενικά, η εύρεση ακριβούς τύπου των ποσοτήτων  $\phi$  και  $F$  είναι δύσκολη υπόθεση. Μόνο σε λίγες περιπτώσεις για την  $P(x)$  ή/και την  $H(t)$  μπορούμε να εξάγουμε ακριβή έκφραση για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Παραδείγματος χάριν, όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή ή γενικότερα όταν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των ζημιών έχει μετασχηματισμό Laplace σε κλασματική μορφή (Li και Garrido, 2005).

Είναι γνωστό ότι η  $\psi(x)$  είναι δεξιά ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής σχετιζόμενης με την τ.μ.  $L = X_F^{(1)} + X_F^{(2)} + \dots + X_F^{(N)}$ , η οποία ικανοποιεί την

$$\bar{G}(x) = 1 - G(x) = (1 - \phi) \sum_{n=1}^{\infty} \phi^n \bar{F}^{*n}(x), \quad x \geq 0, \quad (5.2.4)$$

όπου  $\bar{F}^{*n}(x) = Pr(X_F^{(1)} + X_F^{(2)} + \dots + X_F^{(n)} > x)$  είναι η ουρά της  $n$ -οστής συνέλιξης της  $F$  με τον εαυτό της και  $0 < \phi < 1$ . Εδώ, ισχύει ότι η απαριθμητριά τ.μ.  $N$  είναι ανεξάρτητη των  $\{X_F^{(i)} : i \geq 1\}$ , με  $Pr(N = n) = (1 - \phi)\phi^n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  Παρατηρούμε ότι η  $G(x)$  έχει μάζα πιθανότητας στο μηδέν,  $G(0) = 1 - \phi$ . Έτσι, σε αντιστοιχία με την (1.3.15) για τη δεξιά ουρά της μέγιστης σωρευτικής απώλειας έχουμε τη (5.2.4) για το ανανεωτικό πρότυπο, όπου τα κλιμακωτά ύψη δεν έχουν, κατ' ανάγκη, συνάρτηση κατανομής την κατανομή ισορροπίας

των αποζημιώσεων. Η δεξιά ουρά  $\bar{G}(x)$  ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (βλέπε Willmot και Lin, σελ. 156, 2001)

$$\bar{G}(x) = \phi \bar{F}(x) + \phi \int_0^x \bar{G}(x-t) dF(t), \quad x \geq 0, \quad (5.2.5)$$

η οποία έχει λύση

$$\bar{G}(x) = \frac{\phi}{1-\phi} \int_{0^-}^x \bar{F}(x-t) dG(t), \quad (5.2.6)$$

όπου  $\phi = \psi(0)$ . Αν διαιρέσουμε τη σχέση (5.2.5) με το  $\phi$  και στα δύο μέλη, μπορούμε να καταλήξουμε στην παρακάτω σχέση

$$\frac{\bar{G}(x)}{\phi} = \int_0^x \bar{G}(x-t) dF(t) + \bar{F}(x) = \int_0^x \bar{F}(x-t) dG(t) + \bar{G}(x),$$

όπου η  $\bar{G}(x)/\phi$  (βλέπε 1.3.16) είναι η ουρά μιας συνέλιξης γεωμετρικών (geometric convolution). Διαφορετικά μπορεί να εκφραστεί και με τη μορφή  $1 - \bar{G}(x)/\phi = G * F(x)$ .

Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα μέτρα χρεοκοπίας είναι το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας  $|U(T)|$  (βλέπε Ορισμό 1.3.6). Οι Gerber et al. (1987) όρισαν τη συνάρτηση

$$G(u, y) = Pr(T < \infty, |U_T| \leq y | U(0) = u), \quad y \geq 0.$$

Η  $G(u, y)$  παριστάνει την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία με αρχικό αποθεματικό  $u$ , και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ  $y$ . Επίσης, ο Willmot (2002a) έδειξε ότι η  $G(u, y)$  ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$G(u, y) = \phi \int_0^x G(x-t, y) dF(t) + \phi (\bar{F}(x) - \bar{F}(x+y)). \quad (5.2.7)$$

Στο άρθρο του ο Willmot (2002a) γενίκευσε τη σχέση (5.2.5), ορίζοντας την  $\bar{G}(x, y)$  για  $x \geq 0$  και  $y \geq 0$ , η οποία είναι λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης

$$\bar{G}(x, y) = \phi \int_0^x \bar{G}(x-t, y) dF(t) + \phi \bar{F}(x+y). \quad (5.2.8)$$

Προφανώς, όταν  $y = 0$  στη (5.2.8) και όταν  $y \rightarrow \infty$  στη σχέση (5.2.7) εξάγεται ως λύση η (5.2.5), ισοδύναμα  $\bar{G}(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} \bar{G}(x, y) = \bar{G}(x, 0)$ . Η συνάρτηση  $\bar{G}(x, y)$  μπορεί να ερμηνευθεί ως η ελλειμματική δεξιά ουρά του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας,  $\bar{G}(x, y) = Pr(|U_T| > y, T < \infty | U(0) = x)$ . Επιπλέον, ο Willmot στο ίδιο άρθρο στην Πρόταση 2.1, απέδειξε ότι η λύση της  $\bar{G}(x, y)$  ικανοποιεί την εξίσωση

$$\bar{G}(x, y) = \frac{\phi}{1-\phi} \int_0^x \bar{F}(x+y-t) dG(t). \quad (5.2.9)$$

Επίσης, ορίζει τη κανονική (non-defective) δεξιά ουρά  $\bar{G}_x(y)$  της τ.μ.  $Z_x$

$$\bar{G}_x(y) = 1 - G_x(y) = \frac{\bar{G}(x, y)}{\bar{G}(x)}.$$

Η τ.μ.  $Z_x$  με συνάρτηση κατανομής  $G_x(y) = P(|U_T| \leq y | T < \infty)$ , η οποία μπορεί να ερμηνευθεί ως η κανονική (δεσμευμένη) συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Από τις σχέσεις (5.2.7) και (5.2.5) για  $u = 0$ , εξάγεται η σχέση

$$G_0(y) = F(y), \quad y \geq 0. \quad (5.2.10)$$

Δηλαδή, αν το αρχικό αποθεματικό είναι 0, το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι ακριβώς η πτώση που δημιουργείται από το πρώτο κλιμακωτό ύψος. Τέλος, ο Willmot (2002a) στο Θεώρημα 2.1., έδειξε ότι ο υπολειπόμενος χρόνος της κατανομής  $L$  της μέγιστης σωρευτικής απώλειας ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{\bar{G}(x+y)}{\bar{G}(x)} = Pr(L + Z_x > y), \quad y \geq 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{\bar{G}(x+y)}{\bar{G}(x)} = \bar{G}(y) + \int_0^y \bar{G}_x(y-t) dG(t). \quad (5.2.11)$$

Παρατηρούμε ότι η τ.μ. που δηλώνει τον υπολειπόμενο χρόνο  $L_t = L + Z_x$  είναι συνέλιξη των τ.μ. της μέγιστης σωρευτικής απώλειας και της τ.μ. του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Ξεχωριστό ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη του Συλλογικού Προτύπου της θεωρίας Χρεοκοπίας υπό το πρίσμα των κλάσεων γήρανσης και των στοχαστικών διατάξεων. Ένα από τα αντικείμενα μελέτης του αναλογιστή είναι να διατάσσει ζημιές και να προβλέπει προσεγγιστικά το πιο "ασφαλές" χαρτοφυλάκιο. Κεντρικό ερώτημα είναι πότε μια (στοχαστική) διάταξη μεταξύ των τ.μ. του ύψους των αποζημιώσεων, μεταφέρεται στις μέγιστες σωρευτικές απώλειες ή πώς επηρεάζει τη σύγκριση πιθανοτήτων χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου ή άλλων ποσοτήτων που σχετίζονται με τη μέγιστη σωρευτική απώλειά τους. Επίσης, όταν οι τ.μ. των κλιμακωτών υψών ανήκουν σε μία κλάση γήρανσης, το πώς αυτή μεταφέρεται στις μέγιστες σωρευτικές απώλειες.

Στη βιβλιογραφία της θεωρίας Χρεοκοπίας έχει αποδειχθεί πλειάδα αποτελεσμάτων υπό το πρίσμα των κλάσεων γήρανσης και παραθέτουμε μερικά από αυτά.

- Ο Szekli (1986) απέδειξε ότι αν η τ.μ.  $X$  του ύψους των αποζημιώσεων ανήκει στη κλάση  $DFR$  τότε το ίδιο ισχύει για την κατανομή ισορροπίας που αντιστοιχεί στην τ.μ.  $X^e$ .
- Ο Shanthikumar (1988) έδειξε ότι η κλάση  $DFR$  μεταφέρεται από τη τ.μ.  $X$  του ύψους των αποζημιώσεων στη τ.μ.  $L$  της μέγιστης σωρευτικής απώλειας.
- Ο Willmot (2002a) απέδειξε τη σχέση

$$\text{αν } X \in DFR(IFR) \Rightarrow \psi(x) \leq (\geq) \phi \bar{F}(x)^{1-\phi},$$

- Ο Szekli (1995) απέδειξε τη σχέση

$$F \in HNBUE(HNWUE) \Rightarrow G^0 \in HNBUE(HNWUE).$$

- Οι Bhattacharjee et. al (2003), αντίστοιχα, έδειξαν την ισοδυναμία

$$F \in \mathcal{L} \Leftrightarrow G^0 \in \mathcal{L}.$$

- Οι Psarrakos και Politis (2009) απέδειξαν ότι αν η  $F$  ανήκει στη κλάση  $IFR$  τότε  $F \leq_{hr} L$  (ισοδύναμα  $\psi(u)/\bar{F}(u)$  φθίνουσα συνάρτηση).
- Ο Willmot (2002a) έδειξε ότι αν  $F$  είναι  $NWU(NBU)$  τότε η  $G^0$  είναι επίσης  $NWU(NBU)$ .

Υπενθυμίζουμε ότι η  $G^0$  είναι η συνάρτηση κατανομής της μέγιστης σωρευτικής απώλειας δεδομένου ότι είναι θετική (βλέπε (1.3.16)).

Μια ακόμη σημαντική ιδιότητα για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι το επόμενο πόρισμα, όπως το απέδειξε ο Brown (1990).

**Πρόταση 5.2.1.** Η σύνθετη γεωμετρική κατανομή  $G(x)$  όπως ορίζεται από τη σχέση (5.2.4) ανήκει στην οικογένεια  $NWU$ .

Ο Psarrakos (2010) έδειξε ότι η  $G^0$  μπορεί να είναι και  $IFR$ , σε αντίθεση με την  $G$ , η οποία δεν μπορεί να είναι ποτέ  $IFR$ . Ακόμη, λόγω της σχέσης  $\bar{G}(x+y)/\bar{G}(x) = \bar{G}^0(x+y)/\bar{G}^0(x)$  η  $G^0$  είναι  $DFR$  αν και μόνο αν η  $G$  είναι  $DFR$ .

Ένα πολύ σημαντικό πόρισμα, το οποίο μας δίνει βελτιωμένα φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας, είναι το επόμενο (βλ. Willmot (2002a), Πόρισμα 2).

**Πόρισμα 5.2.1.** Αν η κατανομή των κλιμακωτών υψών  $F$  ανήκει στη κλάση  $NWU(NBU)$ , τότε ισχύει η σχέση

$$\psi(u+y) \geq (\leq) \frac{\psi(u)\psi(y)}{\phi}.$$

Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα μη χρεοκοπίας  $G(u)$  έχει μάζα πιθανότητας στο μηδέν, οπότε με βάση το λήμμα των Psarrakos και Politis (2009), δεν θα μπορούσε να ανήκει στην κλάση  $NBU$ . Στη συνέχεια αναφέρουμε το συγκεκριμένο λήμμα.

**Λήμμα 5.2.1.** Αν μία συνάρτηση κατανομής  $G$  ανήκει στη κλάση  $NBU$ , τότε  $G(0) = 0$ .

### 5.3 Στοχαστικές διατάξεις για την κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

Με βάση τους ορισμούς που δόθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, θεωρούμε τώρα, τις τ.μ.  $X_F, X_A$  και  $Z_x$  με συναρτήσεις κατανομής  $F, A$  και  $G_x$ , αντίστοιχα. Επίσης, θέτουμε  $\mu_F, \mu_A$  και  $\mu_{Z_x}$  να είναι οι μέσες τιμές των τ.μ.  $X_F, X_A$ , και  $Z_x$ , αντίστοιχα. Τέλος, θεωρούμε τις τ.μ.  $X_F^e, X_A^e$  και  $Z_x^e$  με συναρτήσεις κατανομής

$F_e, A_e$  και  $G_{e,x}$ , οι οποίες είναι οι κατανομές ισορροπίας των συναρτήσεων κατανομής  $F, A$  και  $G_x$ , αντίστοιχα.

Στο άρθρο τους οι Belzunce et. al (2001) διερεύνησαν τη συμπεριφορά και τις κλάσεις γήρανσης του υπολειπόμενου χρόνου της κατανομής των ενδιαμέσων χρόνων σε μία ανανεωτική διαδικασία. Με αφορμή το συγκεκριμένο άρθρο, ο Psarrakos (2009) μελέτησε κάποιες στοχαστικές διατάξεις για την τ.μ.  $Z_x$ . Στη συνέχεια οι Li et. al (2015) πρόσθεσαν στην ανάλυση αυτή κάποιες επιπλέον στοχαστικές διατάξεις. Εμείς εμπλουτίζουμε την έρευνα αυτή με τη στοχαστική διάταξη των μετασχηματισμών Laplace  $\leq_{Lt}$  και με τη διάταξη ως προς τη συνάρτηση της ροπογεννήτριας  $\leq_{mgf}$ . Επιπλέον, θα μελετήσουμε στοχαστικές διατάξεις για τη δεσμευμένη κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας,  $G_x$ , σε σχέση με τις κλάσεις γήρανσης της κατανομής  $F$  των κλιμακωτών υψών στο Ανανεωτικό μοντέλο. Στο Ανανεωτικό μοντέλο, μας ενδιαφέρει πότε και υπό ποιές προϋποθέσεις η τ.μ.  $Z_x$  είναι στοχαστικά μεγαλύτερη από την τ.μ. των αποζημιώσεων  $F$ .

Ο Willmot (2002a) στο Θεώρημα 2.1 απέδειξε ότι αν η τ.μ.  $X_F$  του ύψους των αποζημιώσεων ανήκει στη κλάση  $DFR$ , τότε και η τ.μ.  $Z_x$  ανήκει στη κλάση  $DFR$ .

Εμείς μελετάμε στη συνέχεια την κατανομή  $G_x$  όταν η κατανομή  $F$  ανήκει σε μία από τις κλάσεις  $NBU_{Lt}$ ,  $NBU_{mg}$  και  $2 - NBU_{Lt}$ .

**Πρόταση 5.3.1.** *Αν η συνάρτηση κατανομής  $F$  ανήκει στην κλάση  $NBU_{Lt}$  ( $NWU_{Lt}$ ) τότε*

$$Z_x \leq_{Lt} (\geq_{Lt}) X_F.$$

*Απόδειξη.* Αρχικά, παίρνουμε μετασχηματισμούς Laplace στη σχέση (5.2.9) και στη συνέχεια, με βάση την υπόθεση ότι η συνάρτηση κατανομής  $F$  ανήκει στην κλάση  $NBU_{Lt}$ , παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sy} \bar{G}(x, y) dy &= \int_0^\infty e^{-sy} \frac{\phi}{1-\phi} \int_0^x \bar{F}(x+y-t) dG(t) dy \\ &\leq \frac{\phi}{1-\phi} \int_0^x \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}(x-t) \bar{F}(y) dy dG(t) \\ &= \frac{\phi}{1-\phi} \int_0^x \bar{F}(x-t) dG(t) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}(y) dy. \end{aligned}$$

Διαιρώντας τα δύο μέλη στην τελευταία ανισότητα με τη συνάρτηση  $\bar{G}(x)$  της σχέσης (5.2.5) καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\int_0^\infty e^{-sy} \bar{G}_x(y) dy \leq \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}(y) dy.$$

Η περίπτωση της κλάσης  $NWU_{Lt}$  αποδεικνύεται με τις αντίστροφες ανισότητες, αντίστοιχα. ■

Στον Ορισμό 3.2.10 ορίσαμε μια νέα κλάση κατανομών, την  $2 - NBU_{Lt}$ . Στην επόμενη πρόταση μελετάμε την τ.μ.  $Z_x$  όταν η  $F$  ανήκει σε αυτή την κλάση.

**Πρόταση 5.3.2.** Αν η κατανομή  $F$  ανήκει στην κλάση  $2-NBU_{Lt}(2-NWU_{Lt})$  τότε

$$Z_x^e \leq_{Lt} (\geq_{Lt}) X_F^e.$$

Απόδειξη. Έστω  $f_e(x) = \bar{F}(x)/\mu_F$ ,  $x \geq 0$ , η συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής ισορροπίας  $F_e$ . Τότε, από τη σχέση (5.2.9) έχουμε ότι

$$\bar{G}(x, w) = \frac{\phi\mu_F}{1-\phi} \int_0^x f_e(x+w-t)dG(t).$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση για  $w \in [y, \infty)$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_y^\infty \bar{G}(x, w)dw &= \frac{\phi\mu_F}{1-\phi} \int_y^\infty \int_0^x f_e(x+w-t)dG(t)dw \\ &= \frac{\phi\mu_F}{1-\phi} \int_0^x \int_y^\infty f_e(x+w-t)dw dG(t) \\ &= \frac{\phi\mu_F}{1-\phi} \int_0^x \bar{F}_e(x+y-t)dG(t). \end{aligned}$$

Άρα, προκύπτει η σχέση

$$\int_y^\infty \bar{G}(x, w)dw = \frac{\phi\mu_F}{1-\phi} \int_0^x \bar{F}_e(x+y-t)dG(t). \quad (5.3.1)$$

Με βάση την υπόθεση ότι η κατανομή  $F$  ανήκει στην κλάση  $2-NBU_{Lt}$  και παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στην τελευταία ισότητα, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sy} \int_y^\infty \bar{G}(x, w)dw dy &= \frac{\phi\mu_F}{1-\phi} \int_0^\infty e^{-sy} \int_0^x \bar{F}_e(x+y-t)dG(t)dy \\ &= \frac{\phi\mu_F}{1-\phi} \int_0^x \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_e(x+y-t)dy dG(t) \\ &\leq \frac{\phi\mu_F}{1-\phi} \int_0^x \bar{F}_e(x-t) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_e(y)dy dG(t) \\ &= \frac{\phi\mu_F}{1-\phi} \int_0^x \bar{F}_e(x-t)dG(t) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_e(y)dy. \end{aligned}$$

Έτσι, με βάση τη σχέση (5.3.1) για  $y = 0$ , παίρνουμε

$$\int_0^\infty e^{-sy} \int_y^\infty \bar{G}(x, w)dw dy \leq \int_0^\infty \bar{G}(x, w)dw \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_e(y)dy.$$

Τέλος, διαιρώντας με  $\bar{G}(x)$  καταλήγουμε στο ζητούμενο

$$\int_0^\infty e^{-sy} \bar{G}_{e,x}(y)dy \leq \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_e(y)dy.$$

Η απόδειξη για την κλάση  $2-NWU_{Lt}$  είναι ανάλογη. ■



Εμπλουτίζουμε τα αποτελέσματα των στοχαστικών διατάξεων για την κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας  $G_x$  και ως προς τη διάταξη  $\leq_{mgf}$ .

**Πρόταση 5.3.3.** *Αν η συνάρτηση κατανομής  $F$  ανήκει στην κλάση  $NBU_{mgf}$  ( $NWU_{mgf}$ ) τότε*

$$Z_x \leq_{mgf} (\geq_{mgf}) X_F.$$

*Απόδειξη.* Αρχικά, πολλαπλασιάζουμε με  $e^{sy}$  και ολοκληρώνουμε στο  $(0, +\infty)$  τα δύο μέλη της σχέσης (5.2.9). Στη συνέχεια, με βάση την υπόθεση ότι η συνάρτηση κατανομής  $F$  ανήκει στην κλάση  $NBU_{mgf}$ , καταλήγουμε διαδοχικά στις σχέσεις

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{sy} \bar{G}(x, y) dy &= \int_0^\infty e^{sy} \frac{\phi}{1-\phi} \int_0^x \bar{F}(x+y-t) dG(t) dy \\ &= \frac{\phi}{1-\phi} \int_0^x \int_0^\infty e^{sy} \bar{F}(x+y-t) dy dG(t) \\ &\leq \frac{\phi}{1-\phi} \int_0^x \int_0^\infty e^{sy} \bar{F}(x-t) \bar{F}(y) dy dG(t) \\ &= \frac{\phi}{1-\phi} \int_0^x \bar{F}(x-t) dG(t) \int_0^\infty e^{sy} \bar{F}(y) dy. \end{aligned}$$

Διαιρώντας με  $\bar{G}(x)$  και τα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας, και με βάση τη σχέση (5.2.6), καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\int_0^\infty e^{sy} \bar{G}_x(y) dy \leq \int_0^\infty e^{sy} \bar{F}(y) dy.$$

Η περίπτωση της κλάσης  $NWU_{mgf}$  αποδεικνύεται με τις αντίστροφες ανισότητες, αντίστοιχα. ■

**Παράδειγμα 5.3.1.** *Υποθέτουμε ότι τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν μια μείξη δύο εκθετικών κατανομών με συνάρτηση επιβίωσης*

$$\bar{P}(y) = 0.2e^{-y} + 0.8e^{-3y}, \quad y \geq 0,$$

και η στοχαστική ανέλιξη δίνεται από τη σχέση (5.2.1), όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των ζημιών ακολουθούν μια  $Erlang(2)$  κατανομή με συνάρτηση επιβίωσης

$$\bar{H}(y) = (1+2y)e^{-2y}, \quad y \geq 0.$$

Για  $c = 0.5$ , έχουμε ότι

$$\bar{F}(y) = 0.489708e^{-y} + 0.510292e^{-3y}.$$

Επιπλέον, η ουρά του ελλείμματος είναι

$$\begin{aligned} \bar{G}_u(y) &= (0.252008e^{-2.02621u-3y} + 0.214063e^{-0.128305u-3y} - 0.229489e^{-2.02621u-y} \\ &\quad + 0.67677e^{-0.128305u-y}) / (0.890823e^{-0.128305u} + 0.022519e^{-2.02621u}) \end{aligned}$$

$$\bar{G}_u(y) = \frac{\bar{G}(u, y)}{\psi(u)},$$

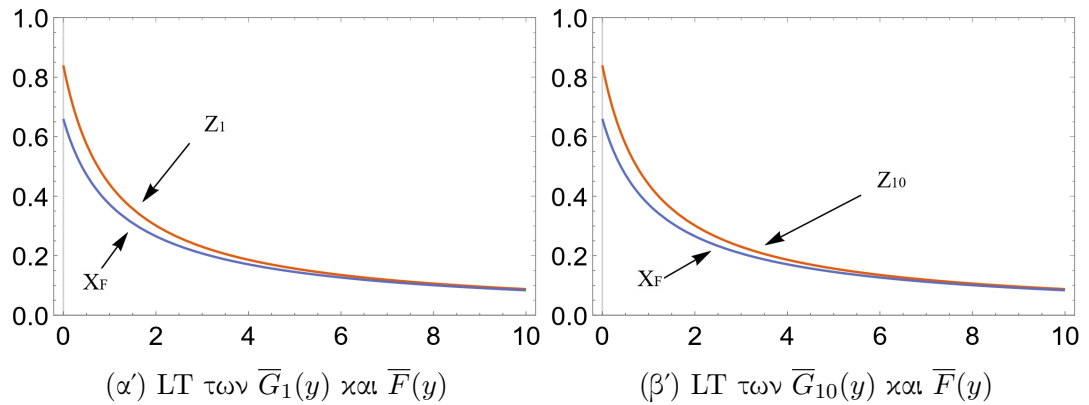
όπου

$$\bar{G}(u, y) = 0.252008e^{-2.02621u-3y} + 0.214063e^{-0.128305u-3y} - 0.229489e^{-2.02621u-y} + 0.67677e^{-0.128305u-y},$$

και

$$\psi(u) = 0.890823e^{-0.128305u} + 0.022519e^{-2.02621u}.$$

Για επιπλέον λεπτομέρειες βλέπε Παράδειγμα 7.1 στο άρθρο του Psarrakos (2021). Τα Σχήματα 5.1 - 5.2 απεικονίζουν τη συνάρτηση κατανομής της  $Z_x$  για  $x = 1$  και  $x = 10$ . Αυτά τα σχήματα δείχνουν τη σύγκριση μεταξύ των μετασχηματισμών Laplace και των ροπογεννητριών συναρτήσεων των  $Z_x$  και  $F$ , αντίστοιχα, για  $x = 1$  και  $x = 10$ . Σε κάθε περίπτωση, παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace (ή ροπογεννήτρια συνάρτηση) της  $Z_x$  κείται από πάνω από αυτόν της  $F$  για δεδομένο  $x$ , το οποίο μας επιβεβαιώνει ότι η  $Z_x$  είναι μεγαλύτερη από τη  $F$  ως προς τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace (ροπογεννήτριας συνάρτησης). Αυτό είναι ένα αποτέλεσμα που αναμέναμε, αφού η κατανομή  $F$  είναι  $NWU_{Lt}$  ως μείξη δύο εκθετικών (Βλέπε Πρόταση 5.3.1 και Πρόταση 5.3.3).

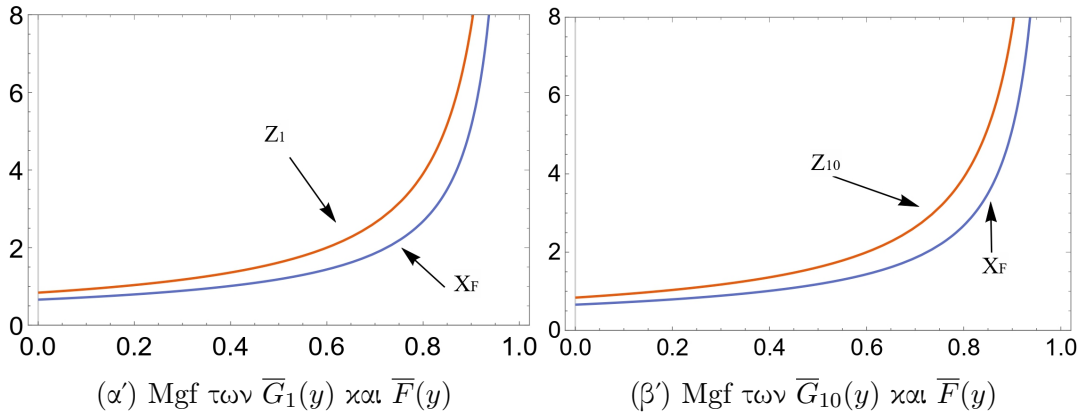


Σχήμα 5.1:  $\leq_{Lt}$  διάταξη μεταξύ  $Z_1$  (και  $Z_{10}$ ) και  $X_F$

Όπως αναφέραμε στην Πρόταση 5.2.1, η σύνθετη γεωμετρική κατανομή  $G(x)$  ανήκει στην κλάση  $NWU$ . Δέκα χρόνια μετά, ο Willmot (2002a) επεκτείνει το συγκεκριμένο αποτέλεσμα με μια επιπλέον συνθήκη για την  $F$  (βλέπε Πρόταση 5.2.1). Σαν άμεσο αποτέλεσμα έχουμε ότι η  $G(x)$  είναι  $NWU_{Lt}$ . Στο επόμενο θεώρημα δίνουμε ένα νέο αποτέλεσμα για την  $G(x)$  κάτω από μία ασθενέστερη συνθήκη για την  $F$ .

**Θεώρημα 5.3.1.** Αν η κατανομή  $F$  ανήκει στην κλάση  $NWU_{Lt}(NBU_{Lt})$ , τότε η δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής  $\bar{G}(x)$  για όλα τα  $x \geq 0$  και  $y \geq 0$ , ικανοποιεί η σχέση

$$\int_0^\infty e^{-sy} \frac{\bar{G}(x+y)}{\bar{G}(x)} dy \geq (\leq) \frac{1}{\phi} \int_0^\infty e^{-sy} \bar{G}(y) dy.$$



Σχήμα 5.2:  $\leq_{mgf}$  διάταξη και  $Z_1$  (και  $Z_{10}$ ) και  $X_F$ .

Απόδειξη. Αφού η  $F$  είναι  $NWU_{Lt}$  ( $NBU_{Lt}$ ) τότε από τον Ορισμό 3.2.8 και τη σχέση

$$\bar{F}_{x-t}(y) = \frac{\bar{F}(x-t+y)}{\bar{F}(x-t)}, \quad x \geq t,$$

παίρνουμε ότι

$$\int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_{x-t}(y) dy \geq (\leq) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}(y) dy. \quad (5.3.2)$$

Γνωρίζουμε ότι για τη δεξιά ουρά της κατανομής του ελλείμματος (βλέπε Willmot, Θεώρημα 2.1., 2002) ισχύει η σχέση

$$\bar{G}_x(y) = \frac{\int_0^x \bar{F}_{x-t}(y) \bar{F}(x-t) dG(t)}{\int_0^x \bar{F}(x-t) dG(t)}, \quad y \geq 0.$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στην τελευταία σχέση προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sy} \bar{G}_x(y) dy &= \frac{\int_0^\infty e^{-sy} \int_0^x \bar{F}_{x-t}(y) \bar{F}(x-t) dG(t) dy}{\int_0^x \bar{F}(x-t) dG(t)} \\ &= \frac{\int_0^x \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_{x-t}(y) \bar{F}(x-t) dy dG(t)}{\int_0^x \bar{F}(x-t) dG(t)}, \end{aligned}$$

και με βάση τη σχέση (5.3.2), καταλήγουμε διαδοχικά στις σχέσεις

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sy} \bar{G}_x(y) dy &\geq (\leq) \frac{\int_0^x \bar{F}(x-t) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}(y) dy dG(t)}{\int_0^x \bar{F}(x-t) dG(t)} \\ &= \frac{\int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}(y) dy \int_0^x \bar{F}(x-t) dG(t)}{\int_0^x \bar{F}(x-t) dG(t)} \\ &\geq (\leq) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}(y) dy. \end{aligned}$$

Δηλαδή, ισχύει ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{G}_x(y) dy \geq (\leq) \int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{F}(y) dy. \quad (5.3.3)$$

Η σχέση (5.3.3) είναι ισοδύναμη με  $Z_x \geq_{Lt} (\leq_{Lt}) X_F$ , όπως αναμέναμε και από την Πρόταση 5.3.1. Στη συνέχεια, στη σχέση (5.2.11) παίρνοντας, πάλι, μετασχηματισμούς Laplace βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-sy} \frac{\overline{G}(x+y)}{\overline{G}(x)} dy &= \int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{G}(y) dy + \int_0^{\infty} e^{-sy} \int_0^y \overline{G}_x(y-t) dG(t) dy \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{G}(y) dy + \int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{G}_x(y) dy \cdot E(e^{-sL}). \end{aligned}$$

Τέλος, αν στη σχέση (5.2.6) πάρουμε μετασχηματισμούς Laplace εξάγεται η σχέση

$$\int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{G}(y) dy = \frac{\phi}{1-\phi} \int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{F}(y) dy \cdot E(e^{-sL}). \quad (5.3.4)$$

Άρα, ο μετασχηματισμός Laplace του υπολειπόμενου χρόνου της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής  $G$  γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-sy} \frac{\overline{G}(x+y)}{\overline{G}(x)} dy &= \int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{G}(y) dy + \int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{G}_x(y) dy \cdot E(e^{-sL}) \\ &\geq (\leq) \int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{G}(y) dy + \int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{F}(y) dy \cdot E(e^{-sL}) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{G}(y) dy + \frac{1-\phi}{\phi} \int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{G}(y) dy, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει λόγω της σχέσης (5.3.3) και η τελευταία ισότητα λόγω της σχέσης (5.3.4). Δείξαμε, δηλαδή το ζητούμενο

$$\int_0^{\infty} e^{-sy} \frac{\overline{G}(x+y)}{\overline{G}(x)} dy \geq (\leq) \frac{\int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{G}(y) dy}{\phi}.$$

■

Οι Belzunce et al. (2001) απέδειξαν στο Θεώρημα 2.1. ότι αν η συνάρτηση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής ( $\gamma(t) = S_{N(t)} - t, t \geq 0$ ) σε μια ανανεωτική ανέλιξη είναι φθίνουσα ως προς το μετασχηματισμό Laplace, τότε η  $F \in NBU_{Lt}$ . Αντίστοιχο αποτέλεσμα αποδεικνύουμε στο επόμενο θεώρημα. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι αν η τ.μ.  $Z_x$  του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι φθίνουσα (αύξουσα) συνάρτηση ως προς το μετασχηματισμό Laplace τότε η κατανομή  $F \in NBU_{Lt}(NWU_{Lt})$ .

**Θεώρημα 5.3.2.** Αν  $Z_{x_1} \leq_{Lt} (\geq_{Lt}) Z_{x_2}$  για κάθε  $0 \leq x_1 \leq x_2$ , τότε η  $F \in NWU_{Lt}(NBU_{Lt})$ .

Απόδειξη. Αρχικά, αν διαιρέσουμε με  $\bar{G}(x)$  και τα δύο μέλη στη σχέση (5.2.8), για  $x, y \geq 0$ , προκύπτει η σχέση

$$\bar{G}_x(y) = \phi \int_0^x \frac{\bar{G}(x-t, y)}{\bar{G}(x)} dF(t) + \phi \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{G}(x)}.$$

Τώρα, παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στην τελευταία σχέση, συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sy} \bar{G}_x(y) dy &= \phi \int_0^\infty e^{-sy} \int_0^x \frac{\bar{G}(x-t, y)}{\bar{G}(x)} dF(t) dy + \phi \int_0^\infty e^{-sy} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{G}(x)} dy \\ &= \phi \int_0^\infty \int_0^x e^{-sy} \bar{G}_{x-t}(y) \frac{\bar{G}(x-t)}{\bar{G}(x)} dF(t) dy \\ &\quad + \phi \int_0^\infty e^{-sy} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{G}(x)} dy \\ &= \phi \int_0^x \int_0^\infty e^{-sy} \bar{G}_{x-t}(y) \frac{\bar{G}(x-t)}{\bar{G}(x)} dy dF(t) \\ &\quad + \phi \int_0^\infty e^{-sy} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{G}(x)} dy, \end{aligned}$$

όπου  $\bar{G}_{x-t}(y) = \bar{G}(x-t, y)/\bar{G}(x-t)$  η ουρά της δεσμευμένης κατανομής του ελλείμματος με αρχικό αποθεματικό  $x-t$ . Με βάση την υπόθεση ότι η  $\int_0^\infty e^{-sy} \bar{G}_x(y) dy$  είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς  $x$  (η κατανομή  $G_x(y)$  είναι αύξουσα ως προς τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace), προκύπτει η ανισότητα

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sy} \bar{G}_x(y) dy &\leq \phi \int_0^x \frac{\bar{G}(x-t)}{\bar{G}(x)} dF(t) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{G}_x(y) dy \\ &\quad + \phi \int_0^\infty e^{-sy} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{G}(x)} dy. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε έτσι, στην επόμενη σχέση

$$\left[ 1 - \phi \int_0^x \frac{\bar{G}(x-t)}{\bar{G}(x)} dF(t) \right] \int_0^\infty e^{-sy} \bar{G}_x(y) dy \leq \phi \int_0^\infty e^{-sy} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{G}(x)} dy. \quad (5.3.5)$$

Τώρα, αν στη σχέση (5.2.5) διαιρέσουμε με  $\bar{G}(x)$  και τα δύο μέλη για  $x, y \geq 0$ , προκύπτει η ποσότητα στην αγκύλη στη σχέση (5.3.5). Οπότε μετά από απλοποίηση, παίρνουμε την ανισότητα

$$\int_0^\infty e^{-sy} \bar{G}_x(y) dy \leq \int_0^\infty e^{-sy} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} dy.$$

Τέλος, για  $x, y \geq 0$ , έχουμε

$$\int_0^{\infty} e^{-sy} \bar{F}(y) dy = \int_0^{\infty} e^{-sy} \bar{G}_0(y) dy \leq \int_0^{\infty} e^{-sy} \bar{G}_x(y) dy \leq \int_0^{\infty} e^{-sy} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} dy.$$

Η ισότητα ισχύει λόγω της (5.2.10) και η πρώτη ανισότητα ισχύει διότι η τ.μ.  $Z_x$  είναι αύξουσα ως προς τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace.

Αποδείξαμε δηλαδή ότι η  $F \in NWU_{Lt}$ , καταλήγοντας έτσι στο ζητούμενο. Αντίστοιχα, αποδεικνύεται ότι αν  $Z_{x_1} \geq_{Lt} Z_{x_2}$ , τότε η  $F \in NBU_{Lt}$ . ■

Η μοντελοποίηση των δεδομένων (data) κατέχει κεντρικό ρόλο στον Αναλογισμό και γενικότερα στις ασφαλιστικές εταιρείες. Στα δεδομένα όσον αφορά τις συνολικές αποζημιώσεις συχνά παρουσιάζεται μεγάλος αριθμός μηδενικών τιμών. Πολλοί συγγραφείς στη βιβλιογραφία του Αναλογισμού θεωρούν ότι η τροποποιημένη στο σημείο μηδέν (zero-modified) κατανομή μπορεί να αποτελέσει κατάλληλο εργαλείο για την μοντελοποίηση αυτού του φαινομένου. Ο Willmot (2002a) δείχνει την  $NWU$  ιδιότητα της zero-modified σύνθετης γεωμετρικής κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις. Επίσης, ο Brown (1990, σελ. 1397) δίνει την  $NBU$  ιδιότητα μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής χωρίς μάζα στο σημείο μηδέν υπό κάποιες συνθήκες. Επίσης, ο Willmot (Πόρισμα 2.3, 2002a) αποδεικνύει την  $NWU$  ιδιότητά της. Εμείς εμπλουτίζουμε τη συγκεκριμένη έρευνα όσον αφορά τις κλάσεις  $NBU_{Lt}$  και  $NWU_{Lt}$ . Αξίζει να αναφερθεί ότι στην επόμενη απόδειξη, ακολουθούμε παρόμοια μεθοδολογία με τον Willmot(2002b). Πριν δώσουμε τη συγκεκριμένη πρόταση ας δώσουμε τον ορισμό της τροποποιημένης στο σημείο μηδέν zero-modified τ.μ.  $\mathcal{R}$ .

**Ορισμός 5.3.1.** Η  $\mathcal{R}$  καλείται τροποποιημένη στο σημείο μηδέν κατανομή αν έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$Pr(\mathcal{R} = x) = \begin{cases} p_0, & n = 0, \\ c \cdot p_n, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

όπου  $p_0$  είναι οποιοσδήποτε (αυθαίρετος) αριθμός με  $0 \leq p_0 < 1$  και  $c > 0$  είναι κατάλληλη σταθερά. Η  $\{p_n : n = 1, 2, \dots\}$  είναι συνάρτηση μάζας πιθανότητας.

**Πρόταση 5.3.4.** Έστω  $R(x) = 1 - \bar{R}(x)$  η δεξιά ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής

$$\bar{R}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p_0)(1 - \phi)\phi^{n-1} \bar{F}^{*(n)}(x), \quad x \geq 0, \quad (5.3.6)$$

όπου  $0 \leq p_0 < 1$ . Τότε, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

1.  $R(x)$  είναι  $NWU_{Lt}$  αν  $p_0 \geq 1 - \phi$ ,
2.  $R(x)$  είναι  $NWU_{Lt}$  αν η  $F(x)$  είναι  $NWU_{Lt}$ ,
3.  $R(x)$  είναι  $NBU_{Lt}$  αν  $p_0 = 0$  και η  $F(x)$  είναι  $NBU_{Lt}$ .

Απόδειξη. Είναι εμφανές από την (5.2.4) και την (5.3.6) ότι ισχύει

$$\phi \bar{R}(x) = (1 - p_0) \bar{G}(x).$$

Οπότε, από την (5.2.11) συνεπάγεται ότι

$$\frac{\bar{R}(x+y)}{\bar{R}(x)} = \frac{\phi}{1-p_0} \bar{R}(y) + \int_0^y \bar{G}_x(y-t) dG(t).$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της προηγούμενης σχέσης, προκύπτει ότι

$$\int_0^\infty e^{-sy} \frac{\bar{R}(x+y)}{\bar{R}(x)} dy = \frac{\phi}{1-p_0} \int_0^\infty e^{-sy} \bar{R}(y) dy + \int_0^\infty e^{-sy} \int_0^y \bar{G}_x(y-t) dG(t) dy. \quad (5.3.7)$$

Άρα από την (5.3.7) παίρνουμε άμεσα την ανίσωση

$$\int_0^\infty e^{-sy} \frac{\bar{R}(x+y)}{\bar{R}(x)} dy \geq \frac{\phi}{1-p_0} \int_0^\infty e^{-sy} \bar{R}(y) dy, \quad (5.3.8)$$

ως εκ τούτου η πρώτη ιδιότητα προκύπτει εύκολα από την τελευταία εξίσωση, αφού  $p_0 \geq 1 - \phi$  είναι ισοδύναμο με  $\phi/(1-p) \geq 1$ . Η απόδειξη της δεύτερης και τρίτης ιδιότητας, εξάγεται από το γεγονός ότι αν η  $F(x)$  είναι  $NWU_{Lt}(NBU_{Lt})$  τότε από το Θεώρημα 5.3.1 έχουμε ότι

$$\int_0^\infty e^{-sy} \frac{\bar{R}(x+y)}{\bar{R}(x)} dy \geq \frac{\int_0^\infty e^{-sy} \bar{R}(y) dy}{1-p_0}.$$

Συνεπώς, λόγω των σχέσεων  $1-p_0 \leq 1$  και  $p_0 = 0$  αποδεικνύονται οι ιδιότητες (2) και (3), αντίστοιχα. ■

Ακολούθως, δίνουμε ένα αποτέλεσμα για μία δεύτερης-τάξης ιδιότητα αξιοπιστίας (second-order reliability property) της συνάρτησης κατανομής  $G(x)$ . Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση κατανομής  $G_e(x)$  είναι, επίσης, συνέλιξη σύνθετης γεωμετρικής κατανομής,  $G_e(x) = G * F_e(x)$  (βλ. Brown, 1990, σελ. 1397). Οι δεύτερης (ή μεγαλύτερης) τάξης ιδιότητες αξιοπιστίας μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής και της κατανομής της ισορροπίας έχουν μελετηθεί εκτενώς από τον Willmot(2002b) (βλέπε επίσης Psarrakos, 2015). Επιπλέον, οι Willmot και Cai (2004) ασχολήθηκαν με ιδιότητες αξιοπιστίας δεύτερης τάξης μιας συνέλιξης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής στην Ενότητα 6. Στην επόμενη πρόταση, εξετάζουμε την  $2 - NWU_{Lt}$  ιδιότητα της  $R$ .

**Πρόταση 5.3.5.** Αν  $F \in 2 - NWU_{Lt}$  τότε  $R \in 2 - NWU_{Lt}$ .

*Απόδειξη.* Γνωρίζουμε ότι αν η συνάρτηση κατανομής  $F$  ανήκει στην κλάση  $2 - NWU_{Lt}$  τότε ισχύει

$$\int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_e(y+x-t) dy \geq \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_e(x-t) \bar{F}_e(y) dy, \quad x \geq t. \quad (5.3.9)$$

Ο Willmot (2002b) έδειξε ότι η συνάρτηση κατανομής ισορροπίας  $G_{e,x}(y) = 1 - \bar{G}_{e,x}(y)$  ικανοποιεί

$$\bar{G}_{e,x}(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{G}_x(z) dz}{\int_0^\infty \bar{G}_x(z) dz} = \frac{\int_0^x \bar{F}_e(y+x-t) dG(t)}{\int_0^x \bar{F}_e(x-t) dG(t)}.$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της προηγούμενης σχέσης, παίρνουμε ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{G}_{e,x}(y) dy = \frac{\int_0^{\infty} e^{-sy} \int_0^x \overline{F}_e(y+x-t) dG(t) dy}{\int_0^x \overline{F}_e(x-t) dG(t)}.$$

Με βάση το θεώρημα του Fubini αλλάζουμε τη θέση των ολοκληρωμάτων, και υπολογίζουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{G}_{e,x}(y) dy &= \frac{\int_0^x \int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{F}_e(y+x-t) dy dG(t)}{\int_0^x \overline{F}_e(x-t) dG(t)} \\ &\geq \frac{\int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{F}_e(y) dy \int_0^x \overline{F}_e(x-t) dG(t)}{\int_0^x \overline{F}_e(x-t) dG(t)}. \end{aligned}$$

Η παραπάνω ανισότητα προκύπτει από την (5.3.9), οπότε παίρνουμε ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{G}_{e,x}(y) dy \geq \int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{F}_e(y) dy. \quad (5.3.10)$$

Η ουρά της κατανομής ισορροπίας  $R_e$  δίνεται από τη σχέση

$$\overline{R}_e(y) = \frac{\int_y^{\infty} \overline{R}(x) dx}{\int_0^{\infty} \overline{R}(x) dx},$$

και ο Willmot (2002b) έδειξε ότι είναι συνέλιξη δύο κατανομών και για τη δεξιά ουρά της ισχύει

$$\overline{R}_e(y) = \overline{G}(y) + \int_0^y \overline{F}_e(y-t) dG(t). \quad (5.3.11)$$

Επίσης, στο ίδιο άρθρο ο Willmot απέδειξε ότι ο υπολειπόμενος χρόνος της  $R_e(y)$  ικανοποιεί την

$$\frac{\overline{R}_e(x+y)}{\overline{R}_e(x)} = \pi(x) \overline{R}_e(y) + (1 - \pi(x)) \overline{C}_x(y), \quad (5.3.12)$$

όπου η συνάρτηση κατανομής  $C_x(y) = 1 - \overline{C}_x(y)$  ικανοποιεί με τη σειρά της τη

$$\overline{C}_x(y) = \overline{G}(y) + \int_0^y \overline{G}_{e,x}(y-t) dG(t), \quad (5.3.13)$$

και  $\pi(x) = \overline{G}(x)/\overline{R}_e(x)$ . Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη στις σχέσεις (5.3.10) και (5.3.13), αντίστοιχα, παίρνουμε

$$\int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{R}_e(y) dy = \int_0^{\infty} e^{-sy} \overline{G}(y) dy + \int_0^{\infty} e^{-sy} \int_0^y \overline{F}_e(y-t) dG(t) dy,$$



και,

$$\int_0^{\infty} e^{-sy} \bar{C}_x(y) dy = \int_0^{\infty} e^{-sy} \bar{G}(y) dy + \int_0^{\infty} e^{-sy} \int_0^y \bar{G}_{e,x}(y-t) dG(t) dy.$$

Τέλος, από τις δύο τελευταίες σχέσεις και την (5.3.11) παίρνουμε

$$\int_0^{\infty} e^{-sy} \bar{C}_x(y) dy \geq \int_0^{\infty} e^{-sy} \bar{R}_e(y) dy,$$

όπου λαμβάνοντας υπόψιν τη (5.3.12) καταλήγουμε ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-sy} \frac{\bar{R}_e(x+y)}{\bar{R}_e(x)} dy \geq \int_0^{\infty} e^{-sy} \bar{R}_e(y) dy,$$

δηλαδή  $R \in 2 - NWU_{Lt}$ . ■

Παρατηρούμε ότι αν  $F \in 2 - NBU_{Lt}$ , αντιστρέφοντας τις ανισότητες προκύπτει ότι  $R \in 2 - NBU_{Lt}$ . Στην περίπτωση που η  $F \in NBU_{Lt}$ , η σ.κ.  $R$  ανήκει στην οικογένεια  $NBU_{Lt}$  για  $p_0 = 0$  (βλέπε Πρόταση 5.3.4). Αξίζει να σημειωθεί ότι η  $R$  δεν μπορεί να είναι  $NBU$  (ή  $NBU_{Lt}$ ) για  $0 < p_0 < 1$  αφού έχει μάζα πιθανότητας στο μηδέν και συγκεκριμένα  $R(0) = 1 - p_0$  το οποίο συνεπάγεται ότι  $R(0) > 0$  για  $0 < p_0 < 1$ .

## 5.4 Στοχαστικές διατάξεις για μια γενίκευση της συνάρτησης του ελλείμματος.

Οι Willmot και Cai (2004) γενίκευσαν την τ.μ.  $Z_x$ , εισάγοντας μία τ.μ.  $V_x$  με συνάρτηση κατανομής  $K_x$ . Στο άρθρο του ο Psarrakos (2009) μελέτησε τη συμπεριφορά της τ.μ.  $V_x$  όσον αφορά τις στοχαστικές διατάξεις, όταν οι συναρτήσεις  $A$  και  $F$  (ορίζονται αμέσως μετά) ανήκουν στις κλάσεις  $NBU$ ,  $2 - NBU$  και  $NBUC$ . Οι Li et. al (2015) εμπλούτισαν τη βιβλιογραφία μελετώντας τις κλάσεις  $NBU(2)$  (new better than used in concave order) και  $NRBUE$  (new renewal better than used in expectation). Εμείς θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά της κατανομής  $K_x$  όταν οι συναρτήσεις  $A$  και  $F$  ανήκουν στις κλάσεις  $NBU_{Lt}$ ,  $2 - NBU_{Lt}$  και  $NBU_{mgf}$ . Ακολουθούμε παρόμοια μεθοδολογία με την προηγούμενη ενότητα όπου αποδείξαμε κάποια αποτελέσματα για την τ.μ.  $Z_x$ . Αρχικά, θα παρουσιάσουμε και θα μελετήσουμε ιδιότητες μιας συνελίξης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής (compound geometric convolution distribution). Συνελίξεις αυτού του τύπου παίζουν σπουδαίο ρόλο στη θεωρία των Ουρών, στη θεωρία Αξιοπιστίας και στη θεωρία Χρεοκοπίας. Έχουν μελετηθεί από αρκετούς ερευνητές όπως οι Brown (1990) και οι Chiu και Yin (2004), οι οποίοι έδωσαν κάποια σημαντικά αποτελέσματα για αυτού του τύπου συνελίξεις. Στο πλαίσιο της θεωρίας Χρεοκοπίας, οι Willmot και Cai (2004), οι Li et al. (2015) και ο Psarrakos (2009) απέδειξαν κάποιες ιδιότητες αξιοπιστίας για τη συνάρτηση κατανομής  $W(x)$ , την οποία θα ορίσουμε αμέσως μετά. Επιπλέον, οι Dufresne και Gerber (1991) και ο Furrer (1998) έδειξαν ότι υπάρχει ακριβής τύπος για

την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο με διάχυση και είναι της μορφής της δεξιάς ουράς μιας συνέλιξης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής  $\bar{W}(x)$  (βλέπε επίσης Willmot, 2002b, Psarrakos, 2015 και Cai και Tang, 2004).

Έστω  $A(x)$  συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής, η οποία είναι ανεξάρτητη από την τ.μ.  $L$  στο  $[0, \infty)$  με  $A(0) = 0$ . Θεωρούμε την τ.μ.  $S_W$  με  $\bar{W}(x) = 1 - W(x)$  να είναι η δεξιά ουρά της συνέλιξης της  $G(x)$  με την  $A(x)$  στο  $[0, \infty)$

$$W(x) = (A * G)(x), \quad x \geq 0, \quad (5.4.1)$$

δηλαδή η τ.μ.  $S_W = L + X_A$  ακολουθεί συνέλιξη σύνθετης γεωμετρικής κατανομής για την οποία ισχύει

$$\bar{W}(x) = \int_x^\infty dA * G(t) = \bar{A}(x) + \int_0^x \bar{G}(x-t) dA(t) = \bar{G}(x) + \int_0^x \bar{A}(x-t) dG(t).$$

Η ουρά  $\bar{W}(x)$ , όπως έδειξαν οι Willmot και Cai (2004), ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\bar{W}(x) = \phi \bar{F}(x) + (1 - \phi) \bar{A}(x) + \phi \int_0^x \bar{W}(x-t) dF(t). \quad (5.4.2)$$

Επιπροσθέτως, στο ίδιο άρθρο εισήγαγαν τη συνάρτηση

$$\bar{K}(x, y) = \bar{A}(x+y) + \int_0^x \bar{G}(x-t, y) dA(t), \quad (5.4.3)$$

όπου η  $\bar{G}(x, y)$  ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της σχέσης (5.2.8). Ακόμη, οι Willmot και Cai (2004) έδωσαν τη λύση για την (5.4.3), η οποία είναι

$$\bar{K}(x, y) = \bar{A}(x+y) + \frac{\phi}{1-\phi} \int_0^x \bar{F}(x+y-t) dW(t), \quad (5.4.4)$$

όπως επίσης,

$$(1 - \phi) \bar{K}(x, y) = \bar{W}(x+y) - \phi \bar{W}(x) \bar{F}(y) - \phi \int_0^y \bar{W}(x+y-t) dF(t), \quad (5.4.5)$$

και όρισαν τη συνάρτηση

$$\bar{K}_x(y) = \frac{\bar{K}(x, y)}{\bar{W}(x)}.$$

Από τις σχέσεις (5.2.8) και (5.4.4), είναι προφανές ότι αν  $A(x) = F(x)$  τότε  $\bar{W}(x) = \bar{G}(x)/\phi$ ,  $\bar{K}(x, y) = \bar{G}(x, y)/\phi$  και επιπλέον

$$\bar{K}_x(y) = \bar{G}_x(y),$$

όπου  $G_x(y)$  η κανονική (proper) συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος  $Z_x$ , όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Έστω τ.μ.  $V_x$  με συνάρτηση κατανομής  $K_x$  και μέση τιμή  $\mu_{V_x}$ . Επίσης, θέτουμε την τ.μ.  $V_x^e$  με συνάρτηση κατανομής  $K_{e,x}$ , η οποία είναι η κατανομή ισορροπίας της συνάρτησης κατανομής  $K_x$ .

Στο υπόλοιπο της ενότητας, το ενδιαφέρον μας εστιάζεται στη διερεύνηση στοχαστικών διατάξεων και κλάσεων αξιοπιστίας σχετιζόμενες με την τ.μ.  $V_x$ .

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων μας, δίνουμε τη μέση τιμή του ελλείμματος, η οποία θα μας φανεί χρήσιμη στο υπόλοιπο της ενότητας.

Έστω δύο συναρτήσεις πυκνότητας  $f_e(x) = \bar{F}(x)/\mu_F$  και  $a_e(x) = \bar{A}(x)/\mu_A$ ,  $x \geq 0$ . Ολοκληρώνοντας τη σχέση (5.4.3) ως προς  $w \in [y, \infty)$ , και μετά από απλές πράξεις, προκύπτει η σχέση

$$\int_y^\infty \bar{K}(x, w)dw = \mu_A \bar{A}_e(x + y) + \frac{\phi \mu_F}{1 - \phi} \int_0^x \bar{F}_e(x + y - t)dW(t). \quad (5.4.6)$$

Ακόμη, αν στη σχέση (5.4.6) θέσουμε  $y = 0$  και διαιρέσουμε με  $\bar{W}(x)$  και τα δύο μέλη, θα προκύψει η μέση τιμή της τ.μ.  $V_x$

$$\mu_{V_x} = \frac{1}{\bar{W}(x)} \left( \mu_A \bar{A}_e(x) + \frac{\phi \mu_F}{1 - \phi} \int_0^x \bar{F}_e(x - t)dW(t) \right),$$

η οποία δίνεται συναρτήσει του αρχικού αποθεματικού  $x$ . Αν τώρα,  $A(x) = F(x)$  τότε η μέση τιμή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας (βλέπε Willmot, 2002a) ισούται με

$$\mu_{Z_x} = \int_0^x \frac{\psi(x + y)}{\psi(x)} dy - EL,$$

ή ισοδύναμα,

$$\mu_{Z_x} = \int_0^x \frac{\psi(x + y)}{\psi(x)} dy - \frac{\mu_{Y,2}}{2\theta \mu_Y},$$

όπου  $\mu_Y$  και  $\mu_{Y,2}$  είναι οι ροπές γύρω από το μηδέν των τ.μ.  $Y$  του ύψους των αποζημιώσεων.

Τώρα, θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά της κατανομής  $K_x$  όταν οι συναρτήσεις  $A$  και  $F$  ανήκουν στην κλάση  $NBU_{Lt}(NWU_{Lt})$ .

**Πρόταση 5.4.1.** Έστω  $X_A$  και  $X_F$  τ.μ. με συναρτήσεις κατανομής  $F$  και  $A$  ανήκουν στην κλάση  $NBU_{Lt}(NWU_{Lt})$  τότε

$$V_x \leq_{Lt} (\geq_{Lt}) \begin{cases} X_A, & \text{αν } X_F \leq_{Lt} (\geq_{Lt}) X_A, \\ X_F, & \text{αν } X_A \leq_{Lt} (\geq_{Lt}) X_F. \end{cases}$$

*Απόδειξη.* Αρχικά, παίρνουμε μετασχηματισμούς Laplace στη σχέση (5.4.4) και στη συνέχεια, με βάση την υπόθεση ότι οι συναρτήσεις κατανομής  $F$  και  $A$  ανήκουν

στην κλάση  $NBU_{Lt}$ , παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-sy} \bar{K}(x, y) dy &= \int_0^\infty e^{-sy} \bar{A}(x + y) dy \\
&+ \int_0^\infty e^{-sy} \frac{\phi}{1 - \phi} \int_0^x \bar{F}(x + y - t) dW(t) dy \\
&\leq \int_0^\infty e^{-sy} \bar{A}(x) \bar{A}(y) dy \\
&+ \frac{\phi}{1 - \phi} \int_0^x \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}(x - t) \bar{F}(y) dy dW(t) \\
&= \bar{A}(x) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{A}(y) dy \\
&+ \frac{\phi}{1 - \phi} \int_0^x \bar{F}(x - t) dW(t) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}(y) dy \\
&\leq \max \left\{ \int_0^\infty e^{-sy} \bar{A}(y) dy, \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}(y) dy \right\} \\
&\times \left[ \bar{A}(x) + \frac{\phi}{1 - \phi} \int_0^x \bar{F}(x - t) dW(t) \right].
\end{aligned}$$

Αν διαιρέσουμε με  $\bar{W}(x)$  και τα δύο μέλη της τελευταίας ανισότητας και βασιζόμενοι στο γεγονός ότι

$$\bar{W}(x) = \bar{A}(x) + \frac{\phi}{1 - \phi} \int_0^x \bar{F}(x - t) dW(t), \quad (5.4.7)$$

το οποίο προκύπτει από τη σχέση (5.4.1), τότε το αποτέλεσμα έπεται άμεσα. Η περίπτωση της κλάσης  $NWU_{Lt}$  αποδεικνύεται με αντίστροφες ανισότητες και για αυτό το λόγο παραλείπεται. ■

Αντίστοιχο αποτέλεσμα, αποδεικνύεται στην επόμενη πρόταση για τη διάταξη  $\leq_{mgf}$  με παρόμοια μεθοδολογία.

**Πρόταση 5.4.2.** *Αν οι συναρτήσεις κατανομής  $F$  και  $A$  ανήκουν στην κλάση  $NBU_{mg}(NWU_{mg})$  τότε*

$$V_x \leq_{mgf} (\geq_{mgf}) \begin{cases} X_A, & \alpha \nu \quad X_F \leq_{mgf} X_A, \\ X_F, & \alpha \nu \quad X_A \leq_{mgf} X_F. \end{cases}$$

*Απόδειξη.* Αρχικά, πολλαπλασιάζουμε με  $e^{sy}$  και ολοκληρώνουμε στο  $(0, +\infty)$  τα δύο μέλη της σχέσης (5.4.4) και στη συνέχεια, με βάση την υπόθεση ότι οι συναρτήσεις κατανομής  $F$  και  $A$  ανήκουν στην κλάση  $NBU_{mgf}$ , παίρνουμε

διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{sy} \bar{K}(x, y) dy &= \int_0^\infty e^{sy} \bar{A}(x + y) dy \\
&+ \int_0^\infty e^{sy} \frac{\phi}{1 - \phi} \int_0^x \bar{F}(x + y - t) dW(t) dy \\
&\leq \int_0^\infty e^{sy} \bar{A}(x) \bar{A}(y) dy \\
&+ \frac{\phi}{1 - \phi} \int_0^x \int_0^\infty e^{sy} \bar{F}(x - t) \bar{F}(y) dy dW(t) \\
&= \bar{A}(x) \int_0^\infty e^{sy} \bar{A}(y) dy \\
&+ \frac{\phi}{1 - \phi} \int_0^x \bar{F}(x - t) dW(t) \int_0^\infty e^{sy} \bar{F}(y) dy \\
&\leq \max\left\{ \int_0^\infty e^{sy} \bar{A}(y) dy, \int_0^\infty e^{sy} \bar{F}(y) dy \right\} \\
&\times \left[ \bar{A}(x) + \frac{\phi}{1 - \phi} \int_0^x \bar{F}(x - t) dW(t) \right].
\end{aligned}$$

Διαιρώντας την τελευταία ανισότητα με  $\bar{W}(x)$  και στα δύο μέλη και λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση (5.4.7), το αποτέλεσμα έπεται άμεσα. Η περίπτωση της κλάσης  $NWU_{mg}$ , αντίστοιχα. ■

Ένα ακόμη αποτέλεσμα για την τ.μ.  $V_x$  όταν οι συναρτήσεις κατανομής  $A$  και  $F$  είναι  $2 - NBU_{Lt}(2 - NWU_{Lt})$  είναι το ακόλουθο.

**Πρόταση 5.4.3.** *Αν οι συναρτήσεις κατανομής  $F$  και  $A$  ανήκουν στην κλάση  $2 - NBU_{Lt}(2 - NWU_{Lt})$  τότε*

$$V_x^e \leq_{Lt} (\geq_{Lt}) \begin{cases} X_A^e, & \text{αν } X_F^e \leq_{Lt} X_A^e, \\ X_F^e, & \text{αν } X_A^e \leq_{Lt} X_F^e. \end{cases}$$

*Απόδειξη.* Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στη σχέση (5.4.6), οδηγούμαστε στη σχέση

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-sy} \int_y^\infty \bar{K}(x, w) dw dy &= \mu_A \int_0^\infty e^{-sy} \bar{A}_e(x + y) dy \\
&+ \frac{\phi \mu_F}{1 - \phi} \int_0^\infty e^{-sy} \int_0^x \bar{F}_e(x + y - t) dW(t) dy.
\end{aligned}$$

Υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις κατανομής  $F$  και  $A$  ανήκουν στην κλάση  $2 -$

$NBU_{Lt}$  παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-sy} \int_y^\infty \bar{K}(x, w) dw dy &\leq \mu_A \int_0^\infty e^{-sy} \bar{A}_e(x) \bar{A}(y) dy \\
&+ \frac{\phi \mu_F}{1-\phi} \int_0^x \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_e(x-t) \bar{F}_e(y) dy dW(t) \\
&= \mu_A \bar{A}_e(x) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{A}_e(y) dy \\
&+ \frac{\phi \mu_F}{1-\phi} \int_0^x \bar{F}_e(x-t) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_e(y) dy dW(t) \\
&= \mu_A \bar{A}_e(x) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{A}_e(y) dy \\
&+ \frac{\phi \mu_F}{1-\phi} \int_0^x \bar{F}_e(x-t) dW(t) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_e(y) dy.
\end{aligned}$$

Οπότε, καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-sy} \int_y^\infty \bar{K}(x, w) dw dy &\leq \max \left\{ \int_0^\infty e^{-sy} \bar{A}_e(y) dy, \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_e(y) dy \right\} \\
&\times \left[ \mu_A \bar{A}_e(x) + \frac{\phi \mu_F}{1-\phi} \int_0^x \bar{F}_e(x-t) dW(t) \right].
\end{aligned}$$

Γνωρίζοντας ότι η σχέση (5.4.6) για  $y = 0$  γίνεται

$$\int_0^\infty \bar{K}(x, w) dw = \mu_A \bar{A}_e(x) + \frac{\phi \mu_F}{1-\phi} \int_0^x \bar{F}_e(x-t) dW(t),$$

καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-sy} \int_y^\infty \bar{K}(x, w) dw dy &\leq \max \left\{ \int_0^\infty e^{-sy} \bar{A}_e(y) dy, \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_e(y) dy \right\} \\
&\times \int_0^\infty \bar{K}(x, w) dw.
\end{aligned}$$

Τέλος, διαιρούμε την τελευταία ανισότητα με  $\bar{W}(x)$  και στα δύο μέλη, και προκύπτει ότι

$$\int_0^\infty e^{-sy} \bar{K}_x^e(y) dy \leq \max \left\{ \int_0^\infty e^{-sy} \bar{A}_e(y) dy, \int_0^\infty e^{-sy} \bar{F}_e(y) dy \right\},$$

ολοκληρώνοντας με αυτόν τον τρόπο την απόδειξη. ■

Ένα ακόμη αποτέλεσμα για την τ.μ.  $V_x$  είναι το γεγονός ότι είναι φθίνουσα (αύξουσα) συνάρτηση ως προς το μετασχηματισμό Laplace όταν η κατανομή  $W$  ανήκει στην κλάση αξιοπιστίας  $W \in IFR(DFR)$ , όπως αποδεικνύεται στο ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 5.4.1.** Αν η  $W \in IFR(DFR)$  τότε η  $V_{x_1} \leq_{Lt} (\geq_{Lt}) V_{x_2}$ , για  $x_1 \leq x_2$ .

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η κλάση γήρανσης  $IFR$  είναι ισοδύναμη με την  $DRL_{Lt}$  (βλέπε σχέση (3.2.7)). Οπότε, αν  $W \in DRL_{Lt}$  (decreasing residual live in the Laplace order) τότε ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία

$$W \in DRL_{Lt} \Leftrightarrow \int_0^\infty e^{-sy} \frac{\overline{W}(x+y)}{\overline{W}(x)} dy \geq \int_0^\infty e^{-sy} \frac{\overline{W}(x'+y)}{\overline{W}(x')} dy, \quad x < x'.$$

Διαιρούμε την ανισότητα (5.4.5) με  $\overline{W}(x)$  και παίρνουμε μετασχηματισμούς Laplace ως προς  $y$  και στα δύο μέλη, οπότε προκύπτει η σχέση

$$\begin{aligned} (1 - \phi) \int_0^\infty e^{-sy} \overline{K}_x(y) dy &= \int_0^\infty e^{-sy} \frac{\overline{W}(x+y)}{\overline{W}(x)} dy - \phi \int_0^\infty e^{-sy} \frac{\overline{W}(x+y)}{\overline{W}(x)} dy \hat{f}(s) \\ &\quad - \phi \int_0^\infty e^{-sy} \overline{F}(y) dy \\ &= \int_0^\infty e^{-sy} \frac{\overline{W}(x+y)}{\overline{W}(x)} dy (1 - \phi \hat{f}(s)) \\ &\quad - \phi \int_0^\infty e^{-sy} \overline{F}(y) dy, \end{aligned}$$

όπου  $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} dF(y)$ . Άρα, υποθέτοντας ότι η συνάρτηση

$$\int_0^\infty e^{-sy} \frac{\overline{W}(x+y)}{\overline{W}(x)} dy$$

είναι φθίνουσα ως προς  $x$ , έπεται ότι και η συνάρτηση  $\int_0^\infty e^{-sy} \overline{K}_x(y) dy$  είναι φθίνουσα ως προς  $x$ . Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στο ζητούμενο. ■

## 5.5 Εφαρμογές στο Κλασικό Μοντέλο και στο Ανανεωτικό μοντέλο με Διάχυση

### 5.5.1 Ο μετασχηματισμός Laplace για μία σύνθετη γεωμετρική κατανομή

Η εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας  $\psi(u)$  τις περισσότερες φορές είναι αρκετά πολύπλοκη υπόθεση. Δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος υπολογισμού της, εκτός των διακεκριμένων περιπτώσεων που τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν Phase type κατανομή (βλέπε Asmussen και Albrecher, 2010). Όμως, διαθέτουμε ένα σημαντικό εργαλείο για τη μελέτη της  $\psi(u)$ , το οποίο είναι ο μετασχηματισμός Laplace.

Όπως έχουμε αναφέρει, ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένα σπουδαίο εργαλείο για τη μελέτη των ελλειμματικών ανανεωτικών εξισώσεων τόσο στην Ανανεωτική θεωρία, όσο και στη Θεωρία Χρεοκοπίας (βλέπε Feller, 1971 και Willmot και Lin, 2001). Στην ενότητα αυτή υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace της  $L$  αξιοποιώντας το γεγονός ότι η τ.μ. της μέγιστης σωρευτικής απώλειας  $L$  μπορεί να παρασταθεί ως μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή με δεξιά ουρά  $\bar{G}(x) = Pr(L > x)$ . Εύκολα αποδεικνύεται (βλέπε Πολίτης, 2015) ότι οι μετασχηματισμοί Laplace της μέγιστης σωρευτικής απώλειας  $L$  και των κλιμακωτών υψών  $X_F$  συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\mathcal{L}_L(s) = \frac{1 - \phi}{1 - \phi \mathcal{L}_{X_F}(s)}, \quad s \geq 0. \quad (5.5.1)$$

Έτσι, η σχέση (5.5.1), με τη βοήθεια της σχέσης (1.2.4) και γνωρίζοντας ότι στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας η κατανομή των κλιμακωτών υψών ταυτίζεται με την κατανομή ισορροπίας της τ.μ. των αποζημιώσεων (δηλαδή  $X_F \equiv X^e$ ), μπορεί να γραφτεί

$$\mathcal{L}_L^*(s) = \frac{1 - \mathcal{L}_{X^e}(s)}{s[(1 + \theta) - \mathcal{L}_{X^e}(s)]}, \quad s \geq 0,$$

ή χάριν απλότητας στο συμβολισμό,

$$\hat{\psi}(s) = \frac{1 - \hat{f}_e(s)}{s[(1 + \theta) - \hat{f}_e(s)]}, \quad (5.5.2)$$

όπου  $\hat{f}_e \equiv \mathcal{L}_{X^e}$  και  $\hat{\psi} \equiv \mathcal{L}_L^*$ .

Στο κλασικό μοντέλο, αλλά και γενικότερα στο ανανεωτικό μοντέλο, μπορούμε να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της  $L$  και κατέπεκταση την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν ο μετασχηματισμός Laplace των κλιμακωτών υψών είναι ρητή συνάρτηση. Τέτοιες κατανομές είναι οι Εκθετικές, Erlang, Coxian, phase-type και μείξεις αυτών (βλέπε Li και Garrido, 2005 και Albrecher και Vatamidou, 2019).

Στην ακόλουθη πρόταση, εκμεταλλευόμαστε την κλειστότητα ως προς τη σύνθεση κατανομών της διάταξης ως προς το λόγο των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace και εφαρμόζουμε τις ιδιότητες της διάταξης  $\leq_{d-Lt-r}$  στο Κλασικό Πρότυπο. Ακολουθώντας, δίνουμε ένα παράδειγμα με γνωστές κατανομές.

**Πρόταση 5.5.1.** Έστω δύο χαρτοφυλάκια κινδύνου στο κλασικό μοντέλο. Θεωρούμε τις μη αρνητικές τ.μ.  $X$  και  $Y$ , οι οποίες παριστάνουν τα ύψη των αποζημιώσεων των δύο χαρτοφυλακίων, αντίστοιχα. Επίσης, θεωρούμε τις μη αρνητικές ακέραιες τ.μ.  $N_X$  και  $N_Y$ , οι οποίες με τη σειρά τους παριστάνουν τα πλήθη των κλιμακωτών υψών, αντίστοιχα. Αν για τα περιθώρια ασφαλείας  $\theta_X$  και  $\theta_Y$  ισχύει  $\theta_X \geq \theta_Y$ , τότε

$$X \leq_{hr} Y \Rightarrow L_X \leq_{d-Lt-r} L_Y.$$

όπου  $L_X$  και  $L_Y$  οι μέγιστες σωρευτικές απώλειες των δύο χαρτοφυλακίων.

*Απόδειξη.* Γνωρίζουμε ότι αν υπάρχει διάταξη ως προς τη βαθμίδα αποτυχίας για δύο μη αρνητικές τ.μ., τότε μεταφέρεται σε διάταξη ως προς το λόγο πιθανοφανειών



για τις αντίστοιχες κατανομές ισορροπίας τους (βλέπε Θεώρημα 3.2.1(i)), και συγκεκριμένα

$$X \leq_{hr} Y \Leftrightarrow X_e \leq_{lr} Y_e.$$

Όπως, έχουμε αναφέρει στο Κλασικό Μοντέλο η κατανομή ισορροπίας του ύψους των αποζημιώσεων ταυτίζεται με τα κλιμακωτά ύψη. Επίσης, οι Li et. al (2009) στο Θεώρημα 1.3 απέδειξαν ότι η διάταξη ως προς το λόγο πιθανοφανειών είναι ισχυρότερη της διάταξης ως προς το λόγο των παραγώγων των μετασχηματισμών Laplace και χαρακτηριστικά, ισχύει ότι

$$X_e \leq_{lr} Y_e \Rightarrow X_e \leq_{d-Lt-r} Y_e. \quad (5.5.3)$$

Βάσει της υπόθεσης  $\theta_X \geq \theta_Y$  και την Πρόταση 3.2.1, προκύπτει ότι

$$N_X \leq_{d-Lt-r} N_Y. \quad (5.5.4)$$

Τέλος, από τις σχέσεις (5.5.3) και (5.5.4) και επιπρόσθετα, από το γεγονός ότι η διάταξη  $\leq_{d-Lt-r}$  είναι κλειστή ως προς τη σύνθεση κατανομών (Li et al., Θεώρημα 3.5, 2009), καταλήγουμε στη διάταξη για τις μέγιστες σωρευτικές απώλειες

$$L_X \leq_{d-Lt-r} L_Y.$$

■

Επίσης, η στοχαστική διάταξη μεταξύ των μέγιστων σωρευτικών απωλειών ( $L_X \leq_{d-Lt-r} L_Y$ ), έχοντας υπόψη τη σχέση (1.2.4), είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι η

$$\frac{\hat{\psi}_Y(s) + \hat{\psi}'_Y(s) \cdot s}{\hat{\psi}_X(s) + \hat{\psi}'_X(s) \cdot s} \quad (5.5.5)$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς  $s > 0$ .

**Παράδειγμα 5.5.1.** Έστω δύο χαρτοφυλάκια κινδύνου στο κλασικό πρότυπο με τις τ.μ.  $X$  και  $Y$  να παριστάνουν τα ύψη των αποζημιώσεων των δύο χαρτοφυλακίων, αντίστοιχα. Θεωρούμε την  $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$  με βαθμίδα αποτυχίας  $r_Y(t) = \lambda$  και την τ.μ.  $X$  με βαθμίδα αποτυχίας  $r_X(t)$ . Επίσης, υποθέτουμε ότι υπάρχει διάταξη για τα αντίστοιχα περιθώρια ασφαλείας,  $\theta_X \geq \theta_Y$ .

Όταν τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή τότε είναι εύκολο να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace της  $\psi_Y(u)$ ,  $u \geq 0$ . Για την ακρίβεια, ισχύει ότι

$$\psi_Y(u) = \frac{1}{1 + \theta_Y} \cdot \exp \left\{ -\frac{\lambda \theta_Y}{1 + \theta_Y} u \right\}, \quad u \geq 0,$$

όπου παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας, προκύπτει η σχέση

$$\hat{\psi}_Y(s) = \frac{1}{1 + \theta_Y} \cdot \frac{1}{s + \frac{\lambda \theta_Y}{1 + \theta_Y}},$$

ή ισοδύναμα,

$$\hat{\psi}_Y(s) = \frac{1}{\lambda \theta_Y + s(1 + \theta_Y)}. \quad (5.5.6)$$

Έτσι, έχοντας υπόψιν ότι  $\leq_{d-Lt-r} \Rightarrow \leq_{Lt}$ , καταλήγουμε στη σχέση

$$r_X(t) \geq \lambda \Rightarrow \hat{\psi}_X(s) \leq \frac{1}{\lambda\theta_Y + s(1 + \theta_Y)}.$$

### 5.5.2 Κλασικό Μοντέλο με διάχυση

Στην Ενότητα 1.5 περιγράψαμε το κλασικό μοντέλο με διάχυση και υπολογίσαμε την πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi_t(u) = Pr(L^* > u)$  (βλέπε (1.5.7)) τονίζοντας ότι μπορεί να παρασταθεί ως ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Σε συνέχεια της Ενότητας 5.4 και της μελέτης της τ.μ.  $V_x$ , οι Willmot και Cai (2004) μελέτησαν το κλασικό μοντέλο με διάχυση ως μία εφαρμογή της δεξιάς ουράς  $\bar{W}(x)$ . Συγκεκριμένα, έστω  $A(x) = 1 - e^{-\frac{s}{b}x}$ ,  $F(x) = A * P_e(x)$  και  $\phi = \lambda EY/c$ , όπου η τ.μ.  $Y$  του ύψους των ζημιών στο κλασικό μοντέλο και  $A(x)$  κατανομή μιας θετικής τυχαίας μεταβλητής ανεξάρτητης της τ.μ.  $L$  (στη σχέση (1.5.7) έχουμε  $F$  αντί για  $\Gamma$  και  $A$  αντί  $H_1$ ). Τότε η δεξιά ουρά  $\bar{W}(x)$  παριστάνει την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο με διάχυση και ισχύει  $\bar{W}(x) = \psi_t(x)$ , ή ισοδύναμα

$$\bar{W}(x) = \bar{G}(x) + \int_0^x e^{-\frac{s}{b}(x-t)} dG(t). \quad (5.5.7)$$

Ξεχωριστό ενδιαφέρον παρουσιάζει η διάταξη χαρτοφυλακίων υπό κάποια στοχαστική έννοια στο κλασικό μοντέλο με διάχυση, όπως επίσης πότε μια κλάση γήρανσης κληρονομείται από τις τ.μ. των υψών των ζημιών στην τ.μ.  $L^*$ . Είδαμε στο Θεώρημα 5.4.1 ότι η  $W(x)$  μπορεί να είναι είτε  $DFR$  είτε  $IFR$ . Οι Willmot και Cai (2004) στα Πορίσματα 2.1 και 2.2 δείχνουν υπό ποιές συνθήκες η κατανομή  $W$  μπορεί να είναι  $NWU$  και  $NBU$ , αντίστοιχα. Όμως, η κατανομή  $W(x)$ , ως εφαρμογή του κλασικού μοντέλου με με διάχυση, αποδεικνύεται ότι η  $W(x)$  ανήκει στη κλάση  $NWU$  (βλέπε, Willmot και Cai, Θεώρημα 5.1, 2004). Αν επιπλέον, η τ.μ.  $Y$  των ζημιών ανήκει στη κλάση  $2 - NBU$  τότε η ισχύει η ανισότητα

$$\frac{\bar{W}(y+x)}{\bar{W}(y)} \leq \frac{1}{\phi} \bar{W}(x).$$

Τώρα, παρουσιάζουμε κάποια αποτελέσματα στη βιβλιογραφία της θεωρίας των στοχαστικών διατάξεων με εφαρμογές στο κλασικό μοντέλο με διάχυση:

- Το 2006 ο Tsai απέδειξε ότι αν για τα ύψη των ζημιών δύο χαρτοφυλακίων ισχύει  $X \leq_{icx} Y$  και  $EX = EY$ , τότε ισχύει  $\psi_{t,X}(u) \leq \psi_{t,Y}(u)$ ,  $u \geq 0$  και  $\psi_{d,X} \leq_{icx} \psi_{d,Y}$ .
- Επίσης, ο Tsai το 2009 απέδειξε ότι αν  $X \leq_{mrl} Y$  και επιπλέον ισχύουν οι ανισότητες  $c_X/D_X \geq c_Y/D_Y$  και  $\theta_X \geq \theta_Y$ , τότε

$$(i) \quad \tilde{L}_X \leq_{st} \tilde{L}_Y, \quad (\text{ισοδύναμα } \bar{K}_{1,X}(u) \leq \bar{K}_{1,Y}(u), \quad u \geq 0)$$

$$(ii) \quad L_X^* \leq_{st} L_Y^*, \quad (\text{ισοδύναμα } \psi_{t,X}(u) \leq \psi_{t,Y}(u), \quad u \geq 0).$$

- Το 2010 οι Tsai και Lu ορίζοντας δύο νέες διατάξεις  $\leq_{st[0,u]}$  και  $\leq_{hmrl[0,u]}$  (βλέπε Κεφάλαιο 4) απέδειξαν ότι αν  $X \leq_{hmrl[0,u]} Y$ ,  $c_X/D_X \geq c_Y/D_Y$  και  $\theta_X \geq \theta_Y$  τότε ισχύουν τα εξής

(i)

$$\tilde{L}_X \leq_{st[0,u^*]} \tilde{L}_Y \quad (\text{ισοδύναμα } \bar{K}_{1,X}(u) \leq \bar{K}_{1,Y}(u), \quad u \in [0, u^*]),$$

(ii)

$$L_X^* \leq_{st[0,u^*]} L_Y^* \quad (\text{ισοδύναμα } \psi_{t,X}(u) \leq \psi_{t,Y}(u), \quad u \in [0, u^*]),$$

(iii)

$$\psi_{d,X} \leq_{sl[0,u^*]} \psi_{d,Y}.$$

Αξίζει να επισημάνουμε το γεγονός ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi_t(x)$ , όπως βλέπουμε και από την σχέση (5.6.2), με αρχικό αποθεματικό  $x = 0$  είναι 1. Δηλαδή, η συνάρτηση κατανομής της μέγιστης σωρευτικής απώλειας με διάχυση δεν έχει μάζα πιθανότητας στο μηδέν. Οπότε, μπορεί να είναι είτε *DFR* είτε *IFR*.

Προς το παρόν, θα ασχοληθούμε για το κλασικό μοντέλο εφοδιασμένο με μια ανεξάρτητη Wiener στοχαστική ανάλυση. Σκοπεύουμε να συγκρίνουμε στοχαστικά τις μέγιστες σωρευτικές απώλειες εφοδιασμένες με διάχυση για δύο χαρτοφυλάκια. Οι Cheng και Pai το (2003) προτείνουν ένα θεώρημα στο οποίο καταλήγουν στη σύγκριση των πιθανοτήτων χρεοκοπίας υπό τη στοχαστική διάταξη της  $n$ -οστής ανακοπής ζημιάς ( $n$ -th stop loss transform). Ο Tsai (Θεώρημα 2, 2006) επεκτείνει αυτά τα αποτελέσματα διερευνώντας τις συνθήκες ώστε να υπάρχει  $n$ -οστή διάταξη ανακοπής ζημιάς για τις πιθανότητες χρεοκοπίας δύο διαφορετικών χαρτοφυλακίων στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας εφοδιασμένο με διάχυση, όπου συγκρίνονται διαφορετικά ύψη ζημιών αλλά με την ίδια μέση τιμή. Αρκετοί συγγραφείς έχουν μελετήσει στοχαστικές διατάξεις με εφαρμογές στη θεωρία Χρεοκοπίας, γενικά, αλλά παρατηρούμε ότι μόνο τα άρθρα των Tsai (2006, 2009) και Tsai και Lu 2010) μελετούν στοχαστικές διατάξεις στο πλαίσιο της στοχαστικής ανάλυσης πλεονάσματος με διάχυση.

Εμείς γενικεύουμε αυτήν την έρευνα, συγκρίνοντας δύο διαφορετικές στοχαστικές ανελίξεις πλεονάσματος με διάχυση, όπου συγκρίνουμε τις κατανομές ισορροπίας των τ.μ. των αποζημιώσεων, υπό κάποιες συνθήκες, παράγοντας συγκρίσεις με τις ίδιες στοχαστικές διατάξεις για τις αντίστοιχες στοχαστικές ανελίξεις πλεονάσματος με διάχυση.

Συγκεκριμένα, στο επόμενο θεώρημα δίνουμε ένα από τα κεντρικά αποτέλεσμα της διατριβής.

**Θεώρημα 5.5.1.** Έστω  $Y_1$  και  $Y_2$  τ.μ. των αποζημιώσεων δύο διαφορετικών χαρτοφυλακίων με ίσες μέσες τιμές  $EY_1 = EY_2$ . Θεωρούμε ότι  $Y_1^e \leq_{\varphi} Y_2^e$  για κάποια στοχαστική διάταξη  $\leq_{\varphi}$ , η οποία είναι κλειστή ως προς τη συνέλιξη (βλέπε Λήμμα 3.4.1). Οι  $Y_i^e, i = 1, 2$  είναι οι τ.μ. με σ.κ. ισορροπίας  $P_{e,i}(\cdot), i = 1, 2$ . Τότε, αν ισχύουν  $c_1 = c_2, D_1 = D_2$  και  $\lambda_1 = \lambda_2$ , ισχύει η διάταξη

$$L_1^* \leq_{\varphi} L_2^*.$$

Απόδειξη. Όπως αναφέραμε νωρίτερα, στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας με διάχυση, η πιθανότητα χρεοκοπίας, με αρχικό αποθεματικό  $x$  δίνεται από την  $\bar{W}(x) = \psi_t(x)$ . Οπότε, η συνάρτηση κατανομής της ολικής μέγιστης σωρευτικής απώλειας (5.6.3) μπορεί να παρασταθεί ως συνέλιξη σύνθετης γεωμετρικής κατανομής

$$L^* = \tilde{L} + X_A,$$

όπου  $\tilde{L}$  είναι η συνάρτηση κατανομής του τυχαίου αθροίσματος  $X_F^{(1)} + \dots + X_F^{(N)}$ , με  $X_F^{(i)} = Y^e + X_A$ , οι οποίες έχουν κοινή συνάρτηση κατανομής  $F(x) = A * P_e(x)$  και  $N$  τ.μ. γεωμετρικά κατανεμημένη με παράμετρο  $1 - \phi$ .

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη σε βήματα:

1. Από την υπόθεση παίρνουμε ότι

$$Y_1^e \leq_C Y_2^e.$$

2. Από την κλειστότητα ως προς τη συνέλιξη για τη διάταξη  $\leq_C$  και  $c_1 = c_2, D_1 = D_2$  παίρνουμε ότι

$$Y_1^e + X_A \leq_C Y_2^e + X_A.$$

Γνωρίζουμε ότι ισχύει  $X_F = Y^e + X_A$ , το οποίο μας οδηγεί σε διάταξη για τα κλιμακωτά ύψη της τ.μ.  $L^*$

$$X_F \leq_C Y_F.$$

3. Αφού  $\lambda_1 = \lambda_2, c_1 = c_2$  και  $EY_1 = EY_2$ , προκύπτει ότι  $\theta_1 = c_1/(\lambda_1 EY_1) - 1 = c_2/(\lambda_2 EY_2) - 1 = \theta_2$ . Άρα, με βάση την κλειστότητα ως προς τη συνέλιξη της διάταξης  $\leq_C$  (βλέπε 3.4.1) έχουμε ότι

$$\tilde{L}_1 \leq_C \tilde{L}_2.$$

4. Τέλος, από την κλειστότητα ως προς τη συνέλιξη για τη διάταξη  $\leq_C$  καταλήγουμε στο ζητούμενο

$$L_1^* = \tilde{L}_1 + X_A \leq_C \tilde{L}_2 + X_A = L_2^*.$$

■

Αξίζει να αναφερθεί ότι οι διατάξεις  $\leq_{Lt}, \leq_{d-Lt-r}, \leq_{Lt-r}$  και  $\leq_{mgf}$  ικανοποιούν την ιδιότητα της κλειστότητας ως προς τη συνέλιξη. Επίσης, αυτήν τη συνθήκη την ικανοποιούν αρκετές στοχαστικές διατάξεις όπως η  $\leq_{icx}$  αυξανόμενης κυρτής διάταξης και της  $n$ -ης stop loss διάταξης, οι οποίες είναι οι διατάξεις που χρησιμοποιεί ο Tsai (2006) για να αποδείξει το προηγούμενο αποτέλεσμα για τις δύο συγκεκριμένες διατάξεις.

Τώρα, εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα για τη διάταξη  $\leq_{Lt}$  όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείζη εκθετικών.

**Παράδειγμα 5.5.2.** (Εκθετική κατανομή με Μείξη δύο εκθετικών)  
 Θεωρούμε τις κατανομές των υψών των ζημιών με ουρές

$$\bar{P}(x) = \sum_{i=1}^n a_i b_i e^{-b_i x}, \quad x > 0. \quad (5.5.8)$$

Τότε, από το άρθρο των Dufresne και Gerber (1991), η (ολική) πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση

$$\psi_t(u) = \sum_{k=1}^{n+1} C_k e^{-r_k u}, \quad u \geq 0, \quad (5.5.9)$$

όπου  $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$  είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$\lambda \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i - r} + Dr = c, \quad (5.5.10)$$

και οι συντελεστές  $C_1, C_2, \dots, C_{n+1}$  ικανοποιούν τις σχέσεις

$$C_h = \prod_{i=1}^n \left( \frac{r_h - b_i}{b_i} \right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{n+1} \left( \frac{r_k}{r_h - r_k} \right), \quad h = 1, \dots, n+1. \quad (5.5.11)$$

Οπότε, μπορούμε να υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των  $\psi_t(u)$  από (5.5.9) ως

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \psi_t(x) dx = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{C_k}{r_k + s}, \quad s > 0. \quad (5.5.12)$$

Για την καλύτερη απεικόνιση των αποτελεσμάτων του προηγούμενου παραδείγματος θα δώσουμε το επόμενο αριθμητικό παράδειγμα.

Έστω οι τ.μ.  $X$  και  $Y$  να έχουν συναρτήσεις επιβίωσης  $\bar{P}_X(x) = (1/3)e^{-2x} + (2/3)e^{-x/2}$  και  $\bar{P}_Y(x) = (1/4)e^{-x} + (3/4)e^{-3x/5}$ , αντίστοιχα. Επίσης, θεωρούμε την τ.μ.  $Z$  η οποία έχει μια εκθετική κατανομή με παράμετρο  $2/3$ . Παρατηρούμε ότι έχουν ίσες μέσες τιμές  $EX = EY = EZ = 3/2$ . Επιπρόσθετα, υποθέτουμε ότι  $\theta = 0.2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.5, \lambda_3 = 1.7$  και  $D_1 = 0.5, D_2 = 0.3$  και  $D_3 = 0.2$ . Τότε,  $c_1 = \lambda_1 EX(1 + \theta) = 1.8, c_2 = \lambda_2 EY(1 + \theta) = 2.7$  και  $c_3 = \lambda_3 EZ(1 + \theta) = 3.06$ . Συνεπώς,  $c_1/D_1 \leq c_2/D_2 \leq c_3/D_3$ .

Τώρα, βάζουμε τιμές στις ρίζες  $r_1, r_2, r_3$  και τους συντελεστές  $C_1, C_2$  και  $C_3$  όπως φαίνονται στον Πίνακα 5.1. Αξίζει να σημειώσουμε ότι το άθροισμα των  $C_1, C_2$  και  $C_3$  ισούται με ένα. Επίσης, παίρνουμε τις καμπύλες των  $\bar{P}_X(t), \bar{P}_Y(t)$  και  $\bar{P}_Z(t)$ , όπως επίσης των μετασχηματισμών Laplace και των (ολικών) πιθανοτήτων χρεοκοπίας  $\psi_{t,X}(u), \psi_{t,Y}(u)$  και  $\psi_{t,Z}(u)$  στα Σχήματα 5.3 και 5.4.

Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 5.3 παρατηρούμε ότι υπάρχουν τρία σημεία αλλαγής (crossing points) στα  $x = 2.2737, x = 2.3443$  και  $x = 2.7170$ . Η διάταξη των

|   | $a_1$ | $a_2$ | $b_1$ | $b_2$ | $r_1$   | $r_2$  | $r_3$  | $C_1$  | $C_2$  | $C_3$  |
|---|-------|-------|-------|-------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|
| X | 1/3   | 2/3   | 2     | 1/2   | 4.2515  | 1.7687 | 0.0798 | 0.1151 | 0.0237 | 0.8612 |
| Y | 1/4   | 3/4   | 1     | 3/5   | 9.4313  | 0.9212 | 0.2475 | 0.3620 | 0.0172 | 0.6209 |
| Z | 1     | 0     | 2/3   | -     | 15.6775 | 0.2892 | -      | 0.4231 | 0.5769 | -      |

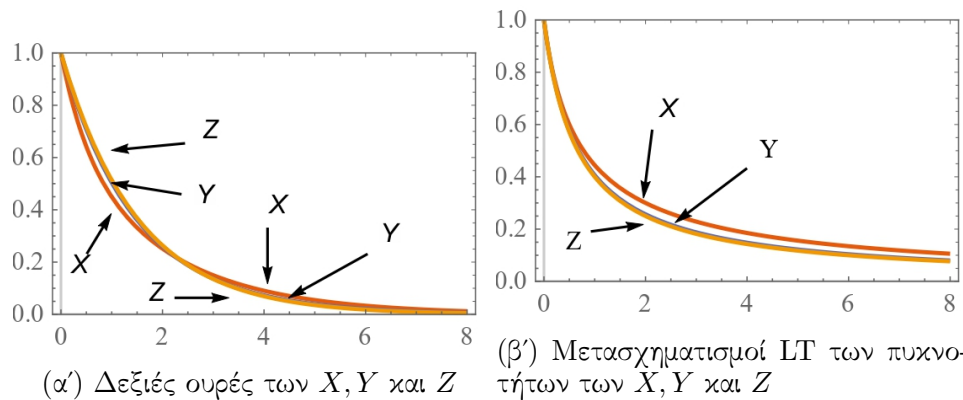
Πίνακας 5.1: Οι ρίζες  $r_1, r_2$  και  $r_3$  και οι συντελεστές  $C_1, C_2$  και  $C_3$ .

συναρτήσεων επιβίωσης, από πάνω προς τα κάτω, είναι αρχικά  $(Z, Y, X)$  ενώ για μεγάλες τιμές η διάταξη γίνεται  $(X, Y, Z)$ . Ως αποτέλεσμα η συνήθης στοχαστική διάταξη μεταξύ των ζημιών  $X, Y$  και  $Z$  δεν διατηρείται. Όμως, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1/2}{1/2+s} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2+s} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+s} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3/5}{3/5+s} \geq \frac{2/3}{2/3+s}, \quad s > 0,$$

ή ισοδύναμα  $X \leq_{Lt} Y \leq_{Lt} Z$  (βλέπε Σχήμα 5.3).

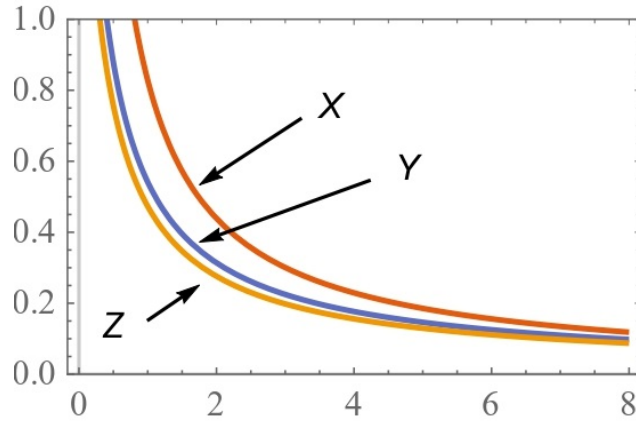
Τέλος, το Σχήμα 5.4 μας δείχνει τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace για τις  $\psi_{t,X}, \psi_{t,Y}$  και  $\psi_{t,Z}$ , όπου κάθε μία από αυτές τις ποσότητες υπολογίζεται μέσω της εξίσωσης (5.5.12) ενώ οι παράμετροι δίνονται παραπάνω.



Σχήμα 5.3: Στοχαστικές συγκρίσεις των  $X, Y$  και  $Z$ .

Όπως αναφέραμε, η στοχαστική διάταξη  $\leq_{Lt}$  καλύπτει τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 5.5.1. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την κλειστότητα της διάταξης του μετασχηματισμού Laplace ως προς το κλασικό μοντέλο με διάχυση με διαφορετικό τρόπο, αφού όμως πρώτα μελετήσουμε τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace μεταξύ δύο εκθετικών κατανομών και δύο γεωμετρικών, αντίστοιχα.

**Λήμμα 5.5.1.** Έστω  $X \sim \text{Exp}(\beta_X)$  και  $Y \sim \text{Exp}(\beta_Y)$ . Αν ισχύει  $\beta_X \geq \beta_Y$ , τότε  $X \leq_{Lt} Y$ .



Σχήμα 5.4: Μετασχηματισμοί Laplace των  $\psi_{t,X}(u)$ ,  $\psi_{t,Y}(u)$  και  $\psi_{t,Z}(u)$ .

*Απόδειξη.* Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace μιας εκθετικής κατανομής με παράμετρο  $\beta$  ισούται με

$$\mathcal{L}(s) = \frac{\beta}{\beta + s}, \quad s \geq 0.$$

Οπότε, με βάση την υπόθεση  $\beta_X \geq \beta_Y$  και μετά από απλές πράξεις, προκύπτει η ανισότητα

$$\mathcal{L}_X(s) = \frac{\beta_X}{\beta_X + s} \geq \frac{\beta_Y}{\beta_Y + s} = \mathcal{L}_Y(s), \quad s \geq 0$$

και καταλήγουμε έτσι στο ζητούμενο. ■

**Λήμμα 5.5.2.** Έστω  $X$  και  $Y$  ακολουθούν Γεωμετρικές κατανομές με παραμέτρους  $p_X$  και  $p_Y$ , αντίστοιχα. Αν ισχύει  $p_X \geq p_Y$  τότε  $X \leq_{Lt} Y$ , όπου  $p_X = 1 - q_X$ , και αντίστοιχα  $p_Y = 1 - q_Y$ .

*Απόδειξη.* Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace μιας γεωμετρικής κατανομής με παράμετρο  $p$  ισούται με

$$\mathcal{L}(s) = \frac{p}{1 - qe^{-s}}, \quad s \geq 0$$

και επιπλέον, ισχύει  $X \leq_{Lt} Y$  όταν

$$\mathcal{L}_X(s) \geq \mathcal{L}_Y(s), \quad s \geq 0.$$

Βάσει της υπόθεσης προκύπτει η ανισότητα

$$\frac{p_X}{1 - (1 - p_X)e^{-s}} \geq \frac{p_Y}{1 - (1 - p_Y)e^{-s}}, \quad s \geq 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$p_X - (1 - p_Y)p_X e^{-s} \geq p_Y - p_Y(1 - p_X)e^{-s}, \quad s \geq 0.$$

Μετά από απλές πράξεις καταλήγουμε ότι η τελευταία σχέση ισχύει αν και μόνο αν  $p_X \geq p_Y$ . ■

Το παραπάνω αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο με βάση την Πρόταση 3.2.1. Επίσης, ο Denuit (2001) απέδειξε το παρακάτω αποτέλεσμα για δύο μη αρνητικές τ.μ. με ίσες μέσες τιμές.

**Λήμμα 5.5.3.** Έστω  $X$  και  $Y$  δύο μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε  $EX = EY$ . Τότε ισχύει

$$X \leq_{Lt} Y \Leftrightarrow Y^e \leq_{Lt} X^e.$$

Δίνουμε ακόμη ένα λήμμα, το οποίο μας πληροφορεί ότι η διάταξη ως προς το μετασχηματισμό Laplace είναι κλειστή ως προς τη συνέλιξη.

**Λήμμα 5.5.4.** Έστω τέσσερις τ.μ.  $X_i$ ,  $i = 1, 2$ , και  $Y_i$ ,  $i = 1, 2$ , όπου  $X_1, X_2$  ανεξάρτητες και  $Y_1, Y_2$ , επίσης ανεξάρτητες. Θεωρούμε ότι ισχύει  $X_i \leq_{Lt} Y_i$ ,  $i = 1, 2$ . Τότε, παραμένει η διάταξη ως προς το μετασχηματισμό Laplace και για τις συνέλιξεις τους

$$X_1 + X_2 \leq_{Lt} Y_1 + Y_2.$$

*Απόδειξη.* Με βάση την υπόθεση και το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνέλιξης δύο τ.μ. είναι το γινόμενο των επιμέρους μετασχηματισμών Laplace, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}_{X_1+X_2}(s) = \mathcal{L}_{X_1}(s) \cdot \mathcal{L}_{X_2}(s) \geq \mathcal{L}_{Y_1}(s) \cdot \mathcal{L}_{Y_2}(s) = \mathcal{L}_{Y_1+Y_2}(s), \quad s \geq 0.$$

■

Τώρα είμαστε σε θέση να δώσουμε μια πρόταση, η οποία χαλαρώνει τις συνθήκες του Θεωρήματος 5.5.1 και μας δίνει διάταξη ως προς το μετασχηματισμό Laplace για τις μέγιστες σωρευτικές απώλειες με διάχυση.

**Πρόταση 5.5.2.** Έστω δύο τ.μ.  $X$  και  $Y$  οι οποίες παριστάνουν τα ύψη των ζημιών δύο διαφορετικών χαρτοφυλακίων στο κλασικό μοντέλο με διάχυση, με πεπερασμένες μέσες τιμές, τέτοιες ώστε  $EX = EY$ . Θεωρούμε τις τ.μ.  $N_X$  και  $N_Y$ , οι οποίες παριστάνουν τα πλήθη των αντίστοιχων κλιμακωτών υψών. Αν επιπλέον ισχύει ότι  $\theta_X \geq \theta_Y$  και  $c_X/D_X \geq c_Y/D_Y$ , τότε ισχύουν τα παρακάτω

$$X \geq_{Lt} Y \Rightarrow \begin{cases} \tilde{L}_X \leq_{Lt} \tilde{L}_Y & \left( \text{ισοδύναμα } \mathcal{L}_{K_{1,X}}^*(s) \geq \mathcal{L}_{K_{1,Y}}^*(s), \quad s \geq 0 \right) \\ L_X^* \leq_{Lt} L_Y^* & \left( \text{ισοδύναμα } \hat{\psi}_{t,X}(s) \leq \hat{\psi}_{t,Y}(s), \quad s \geq 0 \right) \\ \hat{\psi}_{d,X}(s) \leq \hat{\psi}_{d,Y}(s), & s \geq 0. \end{cases}$$

*Απόδειξη.* Με βάση την υπόθεση  $EX = EY$ , έχουμε ως αποτέλεσμα ότι η διάταξη ως προς το μετασχηματισμό Laplace για τα ύψη ζημιών μεταφέρεται (αντίστροφα) σε διάταξη για τα κλιμακωτά ύψη. Οπότε, με τη βοήθεια του Λήμματος 5.5.3, προκύπτει

$$X \geq_{Lt} Y \Leftrightarrow X^e \leq_{Lt} Y^e,$$

ή ισοδύναμα,

$$X \geq_{Lt} Y \Leftrightarrow L_{c,X} \leq_{Lt} L_{c,Y}.$$



Επίσης, από την ανισότητα  $c_X/D_X \geq c_Y/D_Y$  και το Λήμμα 5.5.1, παίρνουμε

$$\frac{c_X}{D_X} \geq \frac{c_Y}{D_Y} \Rightarrow \mathcal{L}_{H_X}(s) = \frac{c_X/D_X}{c_X/D_X + s} \geq \frac{c_Y/D_Y}{c_Y/D_Y + s} = \mathcal{L}_{H_Y}(s),$$

ή ισοδύναμα,  $L_{o,X} \leq_{Lt} L_{o,Y}$ .

Από τα παραπάνω με τη βοήθεια του Λήμματος 5.5.4 συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$L_{c,X} + L_{o,X} \leq_{Lt} L_{c,Y} + L_{o,Y}, \quad (5.5.13)$$

ή ισοδύναμα,

$$\mathcal{L}_{\Gamma_X}^*(s) \leq \mathcal{L}_{\Gamma_Y}^*(s), \quad s \geq 0.$$

Ακόμη, με δεδομένο ότι υπάρχει διάταξη για τα περιθώρια ασφαλείας  $\theta_X \geq \theta_Y$  συμπεραίνουμε χάρη στο Λήμμα 5.5.2 ότι

$$N_X \leq_{Lt} N_Y. \quad (5.5.14)$$

Τέλος, γνωρίζοντας ότι η διάταξη ως προς το μετασχηματισμό Laplace είναι κλειστή ως προς τη σύνθεση κατανομών (βλέπε Denuit, 2001) και από τις σχέσεις (5.5.13) και (5.5.14) προκύπτει ότι

$$\tilde{L}_X = \sum_{n=1}^{N_X} (L_{o,n-1,X} + L_{c,n,X}) \leq_{Lt} \sum_{n=1}^{N_Y} (L_{o,n-1,Y} + L_{c,n,Y}) = \tilde{L}_Y,$$

και

$$L_X^* = \tilde{L}_X + L_{o,X} \leq_{Lt} \tilde{L}_Y + L_{o,Y} = L_Y^*,$$

ή ισοδύναμα,

$$\mathcal{L}_{K_{1,X}}^*(s) \leq \mathcal{L}_{K_{1,Y}}^*(s), \quad s \geq 0,$$

και,

$$\hat{\psi}_{t,X}(s) \leq \hat{\psi}_{t,Y}(s), \quad s \geq 0.$$

Ακόμη, από τη σχέση

$$-\frac{d\psi_t(u)}{du} = \frac{c\theta}{D(1+\theta)}\psi_d(u),$$

(βλέπε Tsai, 2003, Tsai, Θεώρημα 3, 2006, και Tsai, Λήμμα 3, 2009) προκύπτει εύκολα ότι

$$\hat{\psi}_{d,X}(s) \leq \hat{\psi}_{d,Y}(s), \quad s \geq 0.$$

■

Ακολούθως, δίνουμε ένα παράδειγμα της διάταξης ως προς το μετασχηματισμό Laplace στο πλαίσιο του κλασικού μοντέλου χρεοκοπίας (Kanelloroulos και Politis, 2023a).

**Παράδειγμα 5.5.3.** Έστω  $X$  και  $Y$  δύο τυχαίες μεταβλητές με δεξιές ουρές  $\bar{F}_X(t) = \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-4t}$  και  $\bar{F}_Y(t) = 1/(1+t)^4$ , τέτοιες ώστε  $EX = EY = 1/3$ . Έστω  $Z$  ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο 3. Τότε, είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι ισχύει

$$\mathcal{L}_Z(s) \leq \mathcal{L}_X(s) \leq \mathcal{L}_Y(s), \quad s \geq 0.$$

Από Πρόταση 5.5.2 για  $\sigma = 0$  (βλέπε επίσης Kanelloropoulos και Politis, 2023a) αντίστροφη διάταξη για τους μετασχηματισμούς Laplace των αντίστοιχων μέγιστων σωρευτικών απωλειών

$$\mathcal{L}_{L_Z}(s) \geq \mathcal{L}_{L_X}(s) \geq \mathcal{L}_{L_Y}(s), \quad s \geq 0.$$

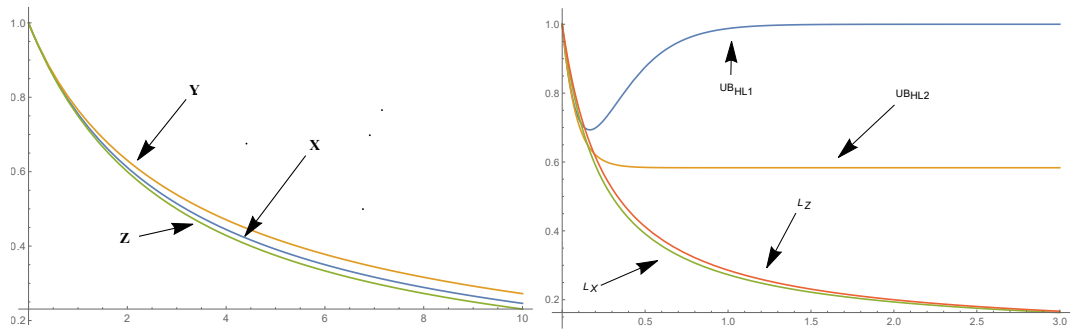
Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις  $\mathcal{L}_{L_X}(s)$  και  $\mathcal{L}_{L_Z}(s)$  μπορούν να ερμηνευθούν ως άνω φράγματα της  $\mathcal{L}_{L_Y}(s)$ . Έστω τώρα, μια μη αρνητική τ.μ.  $W_1$  με πεπερασμένη μέση τιμή  $EW_1^2 < \infty$ . Οι Hu και Lin (2001) πρότειναν ένα άνω φράγμα για το μετασχηματισμό Laplace  $L_{W_1}$  το οποίο ορίζεται:

$$UB_{HL1}(s) := 1 - s \cdot \mu_{W_1} \cdot \exp\{-s \cdot EW_1^2/2\mu_{W_1}\}, \quad s \geq 0.$$

Επιπλέον, οι Hu και Lin (2008) έδωσαν ένα ακόμη άνω φράγμα για τη συνάρτηση  $L_{W_1}(s)$ :

$$UB_{HL2}(s) := 1 - \frac{(EW_1)^2}{EW_1^2} + \frac{(EW_1)^2}{EW_1^2} \cdot \exp\{-s \cdot EW_1^2/\mu_{W_1}\}, \quad s \geq 0.$$

Στο Σχήμα 5.5(α') βλέπουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των πυκνοτήτων των τ.μ.  $X, Y$  και  $Z$ . Επίσης, στο Σχήμα 5.5(β') παρουσιάζονται οι μετασχηματισμοί Laplace των αντίστοιχων μέγιστων σωρευτικών απωλειών τους. Παρατηρούμε ότι αυτές οι συναρτήσεις είναι καλύτερα άνω φράγματα από τα  $UB_{HL1}$  και  $UB_{HL2}$  για  $s \in (0.2, \infty)$ .



(α') Μετασχηματισμοί Laplace των πυκνοτήτων των  $X, Y$  και  $Z$

(β') Μετασχηματισμοί Laplace των πυκνοτήτων των  $L_X, L_Z$  και  $UB_{HL}$

Σχήμα 5.5: Μετασχηματισμοί Laplace των  $X, Y$  και  $Z$ .

## 5.6 Μοντέλο Sparre Andersen με διάχυση

Στη βιβλιογραφία της θεωρίας Χρεοκοπίας έχουν προταθεί πολλές γενικεύσεις του ανανεωτικού (ή κλασικού) μοντέλου όπως η μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας με φράγματα (barriers) ή με μερίσματα (dividends). Μια άλλη ενδιαφέρουσα επέκταση του μοντέλου, είναι να συμπεριλάβουμε έναν διαχυτικό παράγοντα στο πλαίσιο υπολογισμού μιας επιπλέον τυχαιότητας όσον αφορά τις συνολικές ζημιές ή τα συνολικά κέρδη. Οπότε, επεκτείνοντας την έννοια της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος για το ανανεωτικό μοντέλο (βλέπε 5.2.1), ορίζουμε την ανέλιξη

$$U(t) = x + ct - S(t) + Z_\alpha(t), \quad t \geq 0, \quad (5.6.1)$$

όπου  $Z_\alpha(t)$  μια Lévy ανέλιξη με  $1 < \alpha \leq 2$ . Οι Huzak et al. (2004) απέδειξαν ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας σε γενικότερο μοντέλο (βλέπε 5.6.1) είναι μια δεξιά ουρά μιας συνέλιξης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής μπορεί να εκφραστεί ως

$$\psi_t(x) = Pr(L^* > x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \phi) \phi^n \overline{F^{*n} * A^{*(n+1)}}(x), \quad x \geq 0, \quad (5.6.2)$$

όπου  $F(x)$  εξαρτάται μόνο από την ανέλιξη  $S(t)$  και η  $A(x)$  μόνο από τα ασφάλιστρα  $c$  και την ανέλιξη  $Z_\alpha$  (βλέπε Huzak et al. 2004, Θεώρημα 3.1). Οπότε, όταν η  $S(t)$  είναι σύνθετη στοχαστική ανέλιξη Poisson με αριθμό ζημιών  $N(t)$  (βλέπε (1.3.1)) να είναι μια ομογενής στοχαστική ανέλιξη Poisson με παράμετρο  $\lambda > 0$ , τότε αναφερόμαστε στο κλασικό μοντέλο με διάχυση. Ανάλογα με την τιμή του  $\alpha$  η  $Z_\alpha$  είναι διαφορετικός διαχυτικός παράγοντας.

Συγκεκριμένα, για  $\alpha = 2$  έχουμε την κίνηση Brown με τον Gerber (1970) να εισάγει το κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας εφοδιασμένο με διάχυση

$$U(t) = x + ct - S(t) + \sigma B(t), \quad t \geq 0, \quad (5.6.3)$$

όπου η παράμετρος διασποράς (dispersion parameter)  $\sigma > 0$  και  $\{B(t) : t \geq 0\}$  είναι μια κανονική Wiener στοχαστική ανέλιξη, η οποία είναι ανεξάρτητη από τη σύνθετη στοχαστική ανέλιξη Poisson  $\{S(t) : t \geq 0\}$  και από τα ύψη των ζημιών με συνάρτηση κατανομής  $P(x)$ . Οι Dufresne και Gerber (1991) έδειξαν ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας με διάχυση,  $\psi_t(x)$  (βλέπε 5.6.2) όπου  $F(x) = P_e(x)$  και  $A(x) = 1 - e^{-(c/D)x}$ ,  $\phi = \lambda EY/c$  και  $D = \sigma^2$ .

Αργότερα, ο Furrer (1998) μελέτησε το κλασικό μοντέλο εφοδιασμένο με έναν διαχυτικό παράγοντα, ο οποίος είναι μια  $\alpha$ -stable Lévy process. Εξήγαγε ακριβή έκφραση της πιθανότητας χρεοκοπίας, η οποία μπορεί να παρασταθεί ως συνέλιξη σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Σε αυτήν την περίπτωση, η κατανομή  $A$  ακολουθεί την Mittag-Leffler κατανομή

$$1 - A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-cx^{a-1})^n}{\Gamma(1 + (a-1)n)}.$$

Ακόμη, προτείνουμε στον αναγνώστη να μελετήσει το άρθρο των Cai και Tang (2004), οι οποίοι παραθέτουν το συγκεκριμένο μοντέλο ως εφαρμογή στη θεωρία Χρεοκοπίας για τη μελέτη της μεγιστοποίησης αθροισμάτων max-sum equivalence

και την κλειστότητα ως προς τη συνέλιξη κατανομών με βαριά ουρά closure of heavy-tailed. Επίσης, οι Yang και Zhang (2001) έδειξαν ότι αν η  $S(t)$  είναι Γάμμα στοχαστική ανέλιξη τότε η δεξιά ουρά της πιθανότητας χρεοκοπίας μπορεί να εκφραστεί πάλι με τη μορφή της  $W(x)$ .

Στη διατριβή μας ασχολούμαστε μόνο με το κλασικό μοντέλο εφοδιασμένο με μια κίνηση Brown (βλέπε Παράρτημα Α') και δίνουμε αποτελέσματα για το πλεόνασμα της σχέσης (5.6.3).

Στη βιβλιογραφία της θεωρία Χρεοκοπίας, μας προκαλεί έκπληξη ότι λίγα άρθρα μελετάνε αποτελέσματα που αφορούν τη της διάταξης ως προς τη βαθμίδα αποτυχίας  $\leq_{hr}$ . Γενικά, η διάταξη ως προς τη βαθμίδα αποτυχίας δεν είναι κλειστή ως προς τη συνέλιξη, γεγονός το οποίο κάνει δύσχρηστη την εφαρμογή της στο ανανεωτικό (ή στο κλασικό) μοντέλο χρεοκοπίας. Στο επόμενο θεώρημα, δείχνουμε μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα  $\leq_{hr}$ , και συγκεκριμένα αποδεικνύουμε ότι αν διατηρείται η διάταξη  $\leq_{Lt}$  για τα κλιμακωτά ύψη του μοντέλου χρεοκοπίας (5.6.3), υπό κάποιες συνθήκες, παράγει διάταξη  $\leq_{hr}$  για τις αντίστοιχες μέγιστες σωρευτικές απώλειες εφοδιασμένες με διάχυση.

**Θεώρημα 5.6.1.** Έστω δύο χαρτοφυλάκια για το κλασικό μοντέλο με διάχυση τέτοια ώστε

- Οι κατανομές ισορροπίας των ζημιών του πρώτου χαρτοφυλακίου, οι οποίες είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με την τ.μ.  $X_F$ , και επιπλέον  $X_F \in NBU_{Lt}$ ,
- Οι κατανομές ισορροπίας των ζημιών του δεύτερου χαρτοφυλακίου, οι οποίες είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με την τ.μ.  $Y_F$ , και επιπλέον  $Y_F \in NWU_{Lt}$ .
- Για τα περιθώρια ασφαλείας ισχύει ότι  $\theta_X \geq \theta_Y$ .

Τότε,

$$L_X \leq_{Lt} L_Y \Rightarrow L_X^* \leq_{hr} L_Y^*.$$

Απόδειξη. Οι Willmot και Cai (2004) απέδειξαν ότι ο μετασχηματισμός Laplace του υπολειπόμενου χρόνου της  $S_W$  είναι

$$\int_0^\infty e^{-sy} \overline{W}_m(y) dy = \frac{1 - E(e^{-s \cdot L}) \cdot E(e^{-s \cdot V_m})}{s}, \quad (5.6.4)$$

όπου  $\overline{W}_m(y) = \overline{W}(m+y)/\overline{W}(m)$ .

Επίσης, από την υπόθεση ότι  $F(y) = P_e * A(y)$  ότι ισχύει

$$\overline{F}(x) = \overline{A}(x) + \int_0^x P_e(x-t) dA(t),$$

οπότε  $X_A \leq_{Lt} X_F$ . Έτσι, είναι εύκολο να δούμε ότι από το Θεώρημα (5.3.1) παίρνουμε ότι

$$X_F \in NBU_{Lt} \Rightarrow V_m^X \leq_{Lt} X_F,$$

$$Y_F \in NWU_{Lt} \Rightarrow V_m^Y \geq_{Lt} Y_F.$$

Επομένως, από τη μεταβατικότητα της διάταξης ως προς το μετασχηματισμό Laplace προκύπτει ότι

$$V_m^X \leq_{Lt} X_F \leq_{Lt} Y_F \leq_{Lt} V_m^Y,$$

ή ισοδύναμα για  $s \geq 0$ ,

$$E(e^{-s \cdot V_m^X}) \geq E(e^{-s \cdot V_m^Y}). \quad (5.6.5)$$

Είναι γνωστό από τη θεωρία ότι η διάταξη  $\leq_{Lt}$  είναι κλειστή ως προς τη σύνθεση (βλέπε Denuit, 2001). Οπότε, από την υπόθεση ότι  $X_F \leq_{Lt} Y_F$  και  $\theta_X \geq \theta_Y$ , παίρνουμε ότι

$$L_X \leq_{Lt} L_Y,$$

ή, ισοδύναμα για  $s \geq 0$ ,

$$E(e^{-s \cdot L_X}) \geq E(e^{-s \cdot L_Y}). \quad (5.6.6)$$

Άρα, από τις (5.6.4), (5.6.5) και (5.6.6), καταλήγουμε ότι

$$\int_0^\infty e^{-sy} \bar{W}_m^X(y) dy \leq \int_0^\infty e^{-sy} \bar{W}_m^Y(y) dy, \quad s \geq 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$S_W^X \leq_{Lt-rl} S_W^Y.$$

Τέλος, από τη σχέση (3.2.7) καταλήγουμε στο ζητούμενο

$$L_X^* \leq_{hr} L_Y^*.$$

■

Ως άμεσο αποτέλεσμα του προηγούμενου θεωρήματος για  $\sigma = 0$  παίρνουμε το παρακάτω πόρισμα.

**Πόρισμα 5.6.1.** Έστω  $X_F, Y_F$  τυχαίες μεταβλητές των κλιμακωτών υψών δύο χαρτοφυλακίων (βλέπε Θεώρημα 5.6.1), αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $X_F \in NBU_{Lt}$  και  $Y_F \in NWU_{Lt}$ . Αν  $\theta_X \geq \theta_Y$  τότε

$$X_F \leq_{Lt} Y_F \Rightarrow L_X \leq_{hr} L_Y.$$

Σε συνέχεια του προηγούμενου πορίσματος δίνουμε ένα παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση (Kanellopoulos και Politis, 2023a).

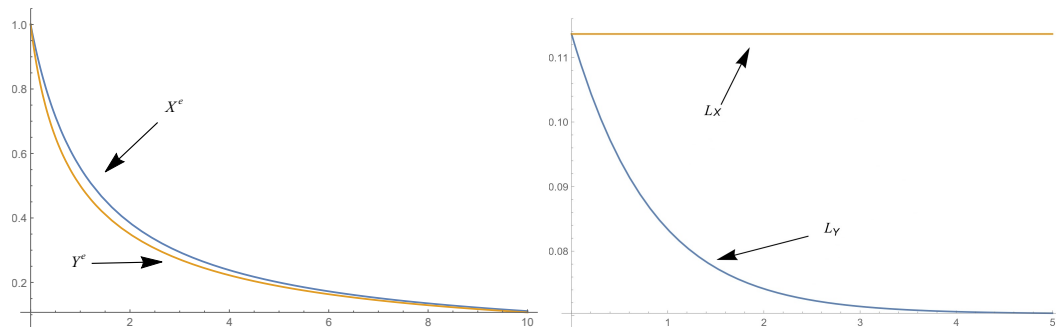
**Παράδειγμα 5.6.1.** Έστω  $X \sim Exp(5/4)$  και  $Y$  με δεξιά ουρά  $\bar{F}_Y(t) = (1/5)e^{-(1/2)t} + (4/5)e^{-2t}$ ,  $t \geq 0$  παριστάνουν οι ζημιές στο ανανεωτικό μοντέλο χρεοκοπίας, τέτοιες ώστε  $EX = EY = 4/5$ . Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε (με τη βοήθεια του πακέτου MATHEMATICA) ότι ισχύει

$$\mathcal{L}_X(s) = \frac{5/4}{5/4 + s} \leq \frac{1}{10(1/2 + s)} + \frac{8}{5(2 + s)} = \mathcal{L}_Y(s), \quad s \geq 0,$$

ή ισοδύναμα  $X \geq_{Lt} Y$ . Στο κλασικό μοντέλο γνωρίζουμε ότι ισχύει  $X \geq_{Lt} Y \Leftrightarrow X^e \leq_{Lt} Y^e$ . Επίσης, είναι γνωστό ότι η μείξη δύο εκθετικών κατανομών ανήκει στην κλάση  $NWU_{Lt}$  και μια εκθετική κατανομή ανήκει και στις δύο κλάσεις  $NWU_{Lt}$  και  $NBU_{Lt}$ . Τελικά, από το Πόρισμα 5.6.1 ισχύει ότι

$$r_{L_X}(t) = \frac{-\psi'_X(t)}{\psi'_X(t)} \geq \frac{-\psi'_Y(t)}{\psi'_Y(t)} = r_{L_Y}(t), \quad t \geq 0,$$

όπου  $\frac{-\psi'_X(t)}{\psi'_X(t)} = 0.1136$  και  $\frac{-\psi'_Y(t)}{\psi'_Y(t)} = \frac{0.0833e^{-1.2933t} + 0.1232e^{-0.0702t}}{0.0644e^{-1.2933t} + 1.7537e^{-0.0702t}}$ . Από το Σχήμα 5.6 παρατηρούμε ότι  $L_X \leq_{hr} Y$ , όπως αναμέναμε.



(α') Μετασχηματισμοί Laplace - Stieltjes (β') Βαθμίδα αποτυχίας των  $L_X, L_Z$  και των  $X^e$  και  $Y^e$   $UB_{HL}$

Σχήμα 5.6: Μετασχηματισμοί Laplace και βαθμίδες αποτυχίας των  $X$  και  $Y$ .

Στο επόμενο παράδειγμα δείχνουμε ότι η διάταξη  $\leq_{Lt[0,s]}$  είναι κλειστή ως προς τη γεωμετρική σύνθεση κατανομών.

**Παράδειγμα 5.6.2.** Έστω  $X$  και  $Y$  δύο τυχαίες μεταβλητές όπως στο Παράδειγμα 4.3.3 να παριστάνουν τα κλιμακωτά ύψη για δύο διαφορετικές ανελιξείς πλεονάσματος. Υποθέτουμε ότι το περιθώριο ασφαλείας είναι ίδιο και για τα δύο χαρτοφυλάκια,  $\theta = 0.1$ . Τότε, με τη βοήθεια του *MATHEMATICA*, παρατηρούμε ότι

$$\psi_X(u) \geq \psi_Y(u), \quad 0 \leq u \leq 1.5336,$$

και

$$\int_0^\infty e^{-st} \psi_X(t) dt \geq \int_0^\infty e^{-st} \psi_Y(t) dt, \quad 0 \leq s \leq 0.7321.$$

Με άλλα λόγια  $\leq_{Lt[0,s^*]}$  είναι κλειστή ως προς τη γεωμετρική σύνθεση κατανομών.

## Κεφάλαιο 6

# Ολοκληρωτικές μετρικές πιθανοτήτων

### 6.1 Εισαγωγή

Στα μαθηματικά των ασφαλίσεων (insurance mathematics) μελετάμε στοχαστικά μοντέλα ως προσεγγίσεις της πραγματικής (real) επιχειρηματικής δραστηριότητας μιας ασφαλιστικής επιχείρησης. Έτσι, οι ποσότητες μιας (ασφαλιστικής) επιχείρησης (πχ μελλοντικές ζημιές) μελετώνται ως τυχαίες μεταβλητές λόγω της αβεβαιότητάς τους. Η εύρεση ακριβούς τύπου της συνάρτησης πυκνότητας μιας τυχαίας μεταβλητής του στοχαστικού μοντέλου ή σχετιζόμενων συναρτήσεων με αυτήν την τυχαία μεταβλητή, πολλές φορές μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκο πρόβλημα. Ως εκ τούτου, στην προσπάθειά μας να ξεπεράσουμε αυτά τα εμπόδια, χρησιμοποιούμε εργαλεία και τεχνικές όπως ο υπολογισμός προσεγγίσεων και φραγμάτων. Τις τελευταίες δεκαετίες, οι μετρικές πιθανοτήτων (probability metrics) έχουν αναγνωριστεί ως ένα πολύ αποτελεσματικό εργαλείο προς την κατεύθυνση αυτή (βλέπε Rachev, 1991, Kalashnikov, 1997 και Rachev et al., 2013). Με απλά λόγια, οι μετρικές πιθανοτήτων μας πληροφορούν πόσο "κοντά" είναι οι σχετιζόμενες συναρτήσεις δύο τυχαίων μεταβλητών (για παράδειγμα συνάρτηση κατανομής ή ασφάλιστρα ανακοπής ζημιάς) και ας μην έχουμε ακριβή τύπο για τις συναρτήσεις αυτές.

Σε πρώτη εικόνα, οι μετρικές πιθανοτήτων και οι στοχαστικές διατάξεις φαίνονται ξένες μεταξύ τους, αλλά αποδεικνύεται ότι είναι δύο εργαλεία με στενή σχέση. Αρχικά, οι Lefèvre και Utev (1998) θεμελίωσαν αυτή τη σύνδεση μελετώντας τις κλάσεις των ολοκληροστοχαστικών διατάξεων (integral stochastic orderings) (βλέπε Κεφάλαιο 3.4) και των ολοκληρωτικών μετρικών πιθανοτήτων (integral probability metrics). Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη σύνδεση αυτή παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο Κεφάλαιο 9 του βιβλίου των Denuit et al. (2005). Ακόμη οι Denuit και Bellegem (2001) μελέτησαν τη σύνδεση των στοχαστικών διατάξεων και των μετρικών πιθανοτήτων προτείνοντας φράγματα για τις αποστάσεις μεταξύ τυχαίων ανθροισμάτων. Τέλος, οι Boutsikas και Vaggelatos (2002) εμπλουτίζουν τη βιβλιογραφία με νέα φράγματα για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, ενώ οι Denuit et al. (2002) προτείνουν φράγματα και προσεγγίσεις για αχέραιες τυχαίες μεταβλητές.

Εμείς ορίζουμε νέες μετρικές, σχετιζόμενες με το μετασχηματισμό Laplace, μελετάμε γνωστές μετρικές πιθανοτήτων με εφαρμογές στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας (βλέπε Κεφάλαιο 1) και σκιαγραφούμε τις βασικές μεθόδους προσεγγίσεων της θεωρίας ευστάθειας ενός στοχαστικού μοντέλου (stability theory) υπό το πλαίσιο της θεωρίας Χρεοκοπίας.

## 6.2 Μετρικές πιθανοτήτων

Οι μετρικές πιθανοτήτων μετρούν την απόσταση μεταξύ τυχαίων μεταβλητών και ορίζονται ως εξής:

**Ορισμός 6.2.1.** Μια συνάρτηση  $d$  που απεικονίζει ένα ζευγάρι από τ.μ.  $(X, Y)$  στο  $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  θα λέγεται μετρική πιθανοτήτων αν ικανοποιεί τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες: για όλες τις τ.μ.  $X, Y$  και  $Z$  οι οποίες ορίζονται στον ίδιο χώρο πιθανότητας, ισχύει ότι

$$i) Pr(X = Y) = 1 \Rightarrow d(X, Y) = 0,$$

$$ii) d(X, Y) = d(Y, X),$$

$$iii) d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y).$$

Εφόσον η  $d$  μπορεί να πάρει άπειρη τιμή, η ιδιότητα (iii) του Ορισμού 6.2.1 ερμηνεύεται ως εξής: μόνο ένας από τους δύο όρους του δεξιού μέλους της ανισότητας αρκεί να είναι άπειρο αν το αριστερό μέλος παίρνει άπειρη τιμή.

Μια χρήσιμη κλάση μετρικών είναι η κλάση των ιδανικών μετρικών (ideal metrics) οι οποίες ορίζονται ακολούθως.

**Ορισμός 6.2.2.** Μια μετρική  $d$  καλείται ιδανική μετρική τάξης  $r \in \mathbb{R}$  (ideal metric order  $r$ ) αν για κάθε τυχαίες μεταβλητές  $X, Y, Z$  και για κάθε μη-αρνητικό σταθερό  $c$  ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$i) \text{Κανονικότητα (Regularity): } d(X + Z, Y + Z) \leq d(X, Y),$$

$$ii) \text{Ομοιογένεια τάξης } r \text{ (homogeneity): } d(cX, cY) = |c|^r d(X, Y).$$

Αν η τιμή της  $d(X, Y)$  είναι μοναδικά ορισμένη από τις περιθώριες κατανομές των  $X$  και  $Y$ , τότε η μετρική πιθανοτήτων  $d$  θα καλείται απλή (simple metric). Σε αυτήν την περίπτωση, η τυχαία μεταβλητή  $Z$  θεωρείται ανεξάρτητη από τις  $X$  και  $Y$ . Επίσης, θα γράφουμε  $d(F_X, F_Y)$  αντί  $d(X, Y)$  (βλέπε Denuit et al., Ορισμός 9.3.1, 2005 και Rachev et al., Ορισμός 15.3.1, 2013).

### 6.2.1 Ολοκληρωτικές μετρικές πιθανοτήτων και ολοκληρωτικές διατάξεις

Από τα πιο σημαντικά παραδείγματα απλών μετρικών πιθανοτήτων είναι οι ολοκληρωτικές μετρικές πιθανοτήτων, οι οποίες ορίζονται ακολούθως.

**Ορισμός 6.2.3.** Μια ολοκληρωτική μετρική πιθανοτήτων ορίζεται από ένα ζευγάρι τ.μ.  $X$  και  $Y$  ως

$$d_*(X, Y) = \sup_{g \in \mathcal{U}_*} |Eg(X) - Eg(Y)|, \quad (6.2.1)$$

όπου  $\mathcal{U}_*$  είναι κάποιο σύνολο από μετρήσιμες συναρτήσεις  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .



Παρατηρούμε ότι υπάρχει άμεση σύνδεση μεταξύ των ολοκληροστοχαστικών διατάξεων (3.4.1) και των ολοκληρωτικών μετρικών πιθανοτήτων (6.2.1).

Οι περισσότερες μετρικές που μελετάμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι ολοκληρωτικού τύπου. Για παράδειγμα, υπάρχει η total-variation απόσταση παίρνοντας για  $\mathcal{U}_*$  να είναι η κλάση των δεικτριών συναρτήσεων  $\mathbf{1}_A$  από όλα τα (μετρήσιμα) υποσύνολα  $A$  των πραγματικών αριθμών και την Kolmogorov απόσταση παίρνοντας για  $\mathcal{U}_*$  την κλάση όλων των δεικτριών συναρτήσεων  $\mathbf{1}_{(t,\infty)}$ .

Όπως αναφέραμε νωρίτερα, στο άρθρο των Lefèvre και Utev (1998) οι ολοκληρωτικές στοχαστικές διατάξεις και ολοκληρωτικές μετρικές πιθανοτήτων έχουν άμεση σύνδεση. Αυτό το γεγονός μπορεί να μας δώσει ενδιαφέροντα αποτελέσματα, όπως την πρόταση που ακολουθεί.

Έστω μια ολοκληροστοχαστική διάταξη  $\leq_*$  η οποία παράγεται από την κλάση  $\mathcal{U}_*$  των μετρήσιμων συναρτήσεων (3.4.1). Υπάρχει η σχετιζόμενη μετρική  $d_*$  της σχέσης (6.2.1) με την αντίστοιχη διάταξη  $\leq_*$ . Έτσι, το επόμενο αποτέλεσμα έπεται άμεσα.

**Πρόταση 6.2.1.** Έστω μια μετρική  $d_*$  του τύπου (6.2.1) και η αντίστοιχη στοχαστική διάταξη  $\leq_*$  του τύπου (3.4.1). Δοθέντος ότι οι  $X, Y$  και  $Z$  είναι μη αρνητικές τ.μ. τέτοιες ώστε  $X \leq_* Y \leq_* Z$ , τότε έχουμε  $d_*(X, Y) \leq d_*(X, Z)$ .

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} d_*(X, Y) &= \sup_{g \in \mathcal{U}_*} |Eg(X) - Eg(Y)| \\ &\leq \sup_{g \in \mathcal{U}_*} |Eg(X) - Eg(Z)| = d_*(X, Z), \end{aligned}$$

όπου η ανισότητα προκύπτει από τη στοχαστική διάταξη μεταξύ των τ.μ.  $X, Y$  και  $Z$ , η οποία εξασφαλίζει ότι για κάθε  $g \in \mathcal{U}_*$ ,  $0 \leq Eg(Y) - Eg(X) \leq Eg(Z) - Eg(X)$ . ■

Ερμηνευτικά το προηγούμενο αποτέλεσμα μας δίνει μια δυϊκότητα μεταξύ των μετρικών (6.2.1) και των διατάξεων (3.4.1), η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στη συσχέτιση των δύο αυτών εργαλείων.

### Total Variation μετρική

Αρχικά δίνουμε τον ορισμό της πρώτης μετρικής πιθανοτήτων, με την οποία θα ασχοληθούμε σε αυτήν την ενότητα και ονομάζεται total variation μετρική.

**Ορισμός 6.2.4.** Η total variation μετρική μεταξύ δύο τ.μ.  $X$  και  $Y$ , συμβολίζεται με  $d_{TV}$ , και δίνεται από τη σχέση

$$d_{TV}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |dF_X(t) - dF_Y(t)|.$$

Ο Ορισμός 6.2.4 μας πληροφορεί ότι η  $d_{TV}$  είναι μια  $L_1$ -απόσταση μεταξύ πυκνοτήτων, στην περίπτωση που οι  $F_X, F_Y$  είναι απόλυτα συνεχείς.

---

## Kolmogorov μετρική

Μια από τις πιο γνωστές μετρικές είναι η Kolmogorov μετρική με εφαρμογές σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών. Στη βιβλιογραφία συναντάται και ως ομοιόμορφη μετρική (uniform metric).

**Ορισμός 6.2.5.** Η Kolmogorov μετρική, για δύο τ.μ.  $X$  και  $Y$ , συμβολίζεται με  $d_K$  και ισχύει ότι

$$d_K(X, Y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\bar{F}_X(t) - \bar{F}_Y(t)|.$$

Υπό το πρίσμα της Πρότασης (6.2.1) εύκολα προκύπτει ότι

$$X \leq_{st} Y \leq_{st} Z \Rightarrow d_K(X, Y) \leq d_K(X, Z).$$

Επίσης, ισχύει ότι

**Πόρισμα 6.2.1.** Έστω δύο τ.μ.  $X$  και  $Y$  τότε ισχύει ότι

$$d_K(X, Y) \leq d_{TV}(X, Y).$$

Απόδειξη. Βλέπε Denuit et al. (2005), Πρόταση 9.5.3. ■

Όπως είδαμε στα Κεφάλαια 2 και 3 τα σημεία αλλαγής (crossing points) συναρτήσεων κατανομής (ή πυκνοτήτων) χαρακτηρίζουν στοχαστικές διατάξεις μεταξύ των αντίστοιχων τυχαίων μεταβλητών. Οι Lefèvre και Utev το 1998 απέδειξαν για δύο τ.μ. ότι υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα σε αυτά τα σημεία αλλαγής και με τις μετρικές πιθανοτήτων. Συγκεκριμένα,

**Πόρισμα 6.2.2.** Αν  $X \leq_{st} Y$  και  $S^-(dF_X - dF_Y) \leq 1$ , τότε

$$d_{TV}(X, Y) = 2d_K(X, Y).$$

Η απόδειξη παραλείπεται και ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Denuit et al. (2005), Πρόταση 9.5.4.

## Wasserstein μετρική

Μια ακόμα μετρική, ευρέως διαδεδομένη στη θεωρία των μετρικών, είναι η Wasserstein μετρική (ή Kantorovich μετρική), η οποία ορίζεται ως εξής:

**Ορισμός 6.2.6.** Έστω δύο τ.μ.  $X$  και  $Y$ , η Wasserstein μετρική ορίζεται από τη σχέση

$$d_W(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{F}_X(t) - \bar{F}_Y(t)| dt.$$

Παρόλο που η  $d_W$  δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της Πρότασης 6.2.1, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ισχύει

$$X \leq_{st} Y \leq_{st} Z \Rightarrow d_W(X, Y) \leq d_W(X, Z),$$

εφόσον οι ανισότητες  $0 \leq \bar{F}_Y(t) - \bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Z(t) - \bar{F}_X(t)$  ικανοποιούνται για όλα τα  $t \in \mathbb{R}$ . Παρατηρούμε ότι εύκολα υπολογίζεται η  $d_W$  όταν υπάρχει η συνήθης στοχαστική διάταξη μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών, όπως φαίνεται και στο επόμενο πόρισμα.

**Πόρισμα 6.2.3.** Έστω δύο θετικές τ.μ.  $X$  και  $Y$ . Αν  $X \leq_{st} Y$  τότε ισχύει  $d_W(X, Y) = EY - EX$ .

Απόδειξη. Βλέπε Finkelstein, (Πρόταση 1, 2003) ■

Για δύο ακέραιες τ.μ.  $M$  και  $N$  ισχύει ότι

$$d_{TV}(N, M) \leq 2d_W(N, M),$$

ενώ για συνεχείς τ.μ.  $X$  και  $Y$ , οι αποστάσεις  $d_W(X, Y)$  και  $d_{TV}(X, Y)$  δεν είναι συγκρίσιμες πάντα (βλέπε Denuit et al. 2005, Πρόταση 9.6.5, (ii)).

### Μετρική ανακοπής ζημιάς

Στη βιβλιογραφία του Αναλογιστικών Μαθηματικών, πολλά μοντέλα συχνά συγκρίνονται υπολογίζοντας φράγματα για τις διαφορές μεταξύ πιθανοτήτων, και τις (ολοκληρωτικές) διαφορές μεταξύ των αντίστοιχων συναρτήσεων πυκνότητας ή συναρτήσεων κατανομών. Όμως, αυτές οι συγκρίσεις πολλές φορές δεν έχουν ιδιαίτερη πρακτική αξία για τον αναλογιστή, σε αντίθεση με τη μελέτη των αποτελεσμάτων όσον αφορά τη σύγκριση μεταξύ ασφαλιστρών και ιδιαίτερα των ασφαλιστρών ανακοπής ζημιάς (stop loss premiums). Ο λόγος είναι διότι οι μικρές διακυμάνσεις μεταξύ πιθανοτήτων πραγματοποίησης κάποιων γεγονότων σπάνια έχουν επιρροή στις τελικές αποφάσεις για τους αναλογιστές, όμως ο υπολογισμός και η σύγκριση ασφαλιστρών παίζουν ιδιαίτερο ρόλο στη λήψη αποφάσεων ενός ασφαλιστικού οργανισμού. Για περισσότερες πληροφορίες όσον αφορά τις εφαρμογές των μετρικών μεταξύ ασφαλιστρών ο αναγνώστης παραπέμπεται στον Kaas (1993). Επίσης, ο Gerber (1979) όρισε τη μετρική ανακοπής ζημιάς ως ακολούθως.

**Ορισμός 6.2.7.** Για δύο τ.μ.  $X$  και  $Y$ , η μετρική ανακοπής ζημιάς (stop-loss metric)  $d_{SL}$  ορίζεται από τη σχέση

$$d_{SL}(X, Y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\pi_X(t) - \pi_Y(t)|.$$

Υπενθυμίζουμε ότι η ποσότητα  $\pi_X(t)$  είναι το ασφάλιστρο ανακοπής ζημιάς (βλέπε σχέση 2.5.10).

Η στοχαστική διάταξη που αντιστοιχεί στη μετρική  $d_{SL}$  είναι η διάταξη ανακοπής ζημιάς  $\leq_{sl}$  και ισχύει ότι

$$X \leq_{sl} Y \leq_{sl} Z \Rightarrow d_{SL}(X, Y) \leq d_{SL}(X, Z).$$

Επιπλέον, παραθέτουμε τη σχέση που συνδέει τις μετρικές  $d_{SL}$  και  $d_W$  χωρίς απόδειξη.

**Πρόταση 6.2.2.** Έστω δύο τ.μ.  $X$  και  $Y$ , τότε ισχύει η ανισότητα

$$d_{SL}(X, Y) \leq d_W(X, Y).$$

Απόδειξη. Βλέπε Denuit et al. (2005), Πρόταση 9.7.2. ■

Δίνουμε δύο ακόμη μετρικές οι οποίες έχουν αρκετές εφαρμογές στη βιβλιογραφία.

**Ορισμός 6.2.8.** (Rachev και Rüschendorf, 1990). Η μετρική ανακοπής ζημιάς τάξης  $s$  (stop loss metrics of order  $s \in \mathbb{N}$ ) δίνεται από τη σχέση

$$d_s(X, Y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{s!} |E(X - t)_+^s - E(Y - t)_+^s|, \quad (6.2.2)$$

με  $E|X|^s, E|Y|^s < +\infty$ .

**Ορισμός 6.2.9.** (Zolotarev, 1983). Η Zolotarev μετρική  $\zeta_s, s \in \mathbb{N}$  δίνεται από τη σχέση

$$\zeta_s(X, Y) = \frac{1}{(s-1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} |E(X - t)_+^{s-1} - E(Y - t)_+^{s-1}| dt, \quad (6.2.3)$$

με  $E|X|^{s-1}, E|Y|^{s-1} < +\infty$ .

Από τα παραπάνω είναι εύκολο να δούμε ότι για  $s = 1$  ισχύει ότι  $d_1 \equiv d_{SL}$  και  $\zeta_1 \equiv d_W$ . Οι Boutsikas και Vagellatou (2002) μελετάνε τη σύνδεση μετρικών πιθανοτήτων και στοχαστικών διατάξεων συνδέοντας τις μετρικές  $\zeta_s$  και  $d_s$  με τη στοχαστική διάταξη  $\leq_{s-cx}$ . Στο συγκεκριμένο άρθρο αποδεικνύονται αρκετά ενδιαφέροντα αποτελέσματα προς την κατεύθυνση αυτής της σύνδεσης (βλέπε, επίσης Lefèvre και Utev, 1998).

### Ολοκληρωτική μετρική ανακοπή ζημιάς

Στο βιβλίο των Goovaerts et al. (1990) η ολοκληρωτική διαφορά των ασφαλιστρων ανακοπής ζημιάς χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί η απόσταση μεταξύ μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένες διασπορές. Η ολοκληρωτική μετρική ανακοπής ζημιάς (integrated stop-loss distance) εισήχθη από τους Kaas (1993) και Kaas, Van Heerwaarden και Goovaerts (1994), η οποία παρουσιάζεται στον επόμενο ορισμό.

**Ορισμός 6.2.10.** Δοθέντων δύο τ.μ.  $X$  και  $Y$  η ολοκληρωτική μετρική ανακοπής ζημιάς  $d_{ISL}$  δίνεται από τη σχέση

$$d_{ISL}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\pi_X(t) - \pi_Y(t)| dt.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει  $\zeta_2 \equiv \frac{1}{2}d_{ISL}$ , για την οποία ισχύουν τα προηγούμενα αποτελέσματα για  $s = 2$ .

Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε ότι σημαντικό κομμάτι της βιβλιογραφίας έχει επικεντρωθεί στην εφαρμογή μετρικών πιθανοτήτων όσον αφορά τη μελέτη της απόστασης μεταξύ τυχαίων αθροισμάτων, και ιδιαίτερα, μεταξύ δύο σύνθετων αθροισμάτων ισόνομων τ.μ. με στόχο μελλοντική έρευνα στο πλαίσιο της εφαρμογής τους για σύνθετες τ.μ. όπως η μέγιστη σωρευτική απώλεια στα μοντέλα συλλογικού κινδύνου. Ενδεικτικά, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο Denuit et al. (Κεφάλαιο 9, 2005) και Denuit και Bellegem (2001).

## 6.3 Μετρικές σχετιζόμενες με το μετασχηματισμό Laplace

Εμείς εμπλουτίζουμε τη βιβλιογραφία με κάποιες μετρικές πιθανοτήτων, οι οποίες σχετίζονται με το μετασχηματισμό Laplace. Έχοντας υπόψιν τη σχέση (3.2.8) για δύο τ.μ.  $\tilde{X}$  και  $\tilde{Y}$  με σ.κ.  $\tilde{F}$  και  $\tilde{G}$ , αντίστοιχα, οι μετρικές  $d_K$  και  $d_W$  υπολογίζονται

$$d_K(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \sup_{t>0} |\tilde{F}(t) - \tilde{G}(t)| \quad (6.3.1)$$

και

$$d_W(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \int_0^\infty |\tilde{F}(t) - \tilde{G}(t)| dt, \quad (6.3.2)$$

αντίστοιχα. Συνεπώς, ορίζουμε δύο μετρικές, έχοντας υπόψιν τις σχέσεις (3.2.8), (6.3.1) και (6.3.2), ως ακολούθως.

**Ορισμός 6.3.1.** Η ομοιόμορφη μετρική των μετασχηματισμών Laplace ορίζεται από τη σχέση

$$m_{\mathcal{L}}(X, Y) = \sup_{s>0} |\mathcal{L}_X(s) - \mathcal{L}_Y(s)|. \quad (6.3.3)$$

Επίσης, για μια τ.μ.  $Z$  ανεξάρτητη των  $X$  και  $Y$ , είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι ισχύουν οι τρεις ιδιότητες του Ορισμού 6.2.1 για τη μετρική  $m_{\mathcal{L}}$ . Είναι γνωστό ότι η Kolmogorov μετρική είναι 0-ιδανική μετρική και η  $d_W$  είναι 1-ιδανική μετρική (Denuit et al., 2005). Εμείς αποδεικνύουμε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα για τη μετρική  $m_{\mathcal{L}}$ .

**Πρόταση 6.3.1.** Η μετρική  $m_{\mathcal{L}}$  είναι  $r = -1$ -ιδανική μετρική.

Απόδειξη. 1. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{L}}(X + Z, Y + Z) &= \sup_{s>0} |\mathcal{L}_{X+Z}(s) - \mathcal{L}_{Y+Z}(s)| \\ &= \sup_{s>0} |\mathcal{L}_X(s) \cdot \mathcal{L}_Z(s) - \mathcal{L}_Y(s) \cdot \mathcal{L}_Z(s)| \\ &= \sup_{s>0} |\mathcal{L}_Z(s) \cdot (\mathcal{L}_X(s) - \mathcal{L}_Y(s))| \\ &\stackrel{\mathcal{L}_Z(s) \leq 1}{\leq} \sup_{s>0} |\mathcal{L}_X(s) - \mathcal{L}_Y(s)| = m_{\mathcal{L}}(X, Y). \end{aligned}$$

2. Για  $c > 0$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{L}}(cX, cY) &= \sup_{s>0} |\mathcal{L}_{cX}(s) - \mathcal{L}_{cY}(s)| \\ &= \sup_{s>0} \left| \frac{1}{c} \mathcal{L}_X(c \cdot s) - \frac{1}{c} \mathcal{L}_Y(c \cdot s) \right| \\ &\stackrel{k=c \cdot s}{=} \sup_{k>0} (1/c) \cdot |\mathcal{L}_X(k) - \mathcal{L}_Y(k)| = c^{-1} \cdot m_{\mathcal{L}}(X, Y). \end{aligned}$$

■

Τώρα, ορίζουμε μια ακόμη μετρική, η οποία λέγεται σταθμισμένη μετρική των μετασχηματισμών Laplace (weighted metric of Laplace transforms)

$$d_{\mathcal{L},r}(X, Y) := \sup_{s>0} |E(h_s(X) - h_s(Y))| \quad s > 0, \quad (6.3.4)$$

όπου  $h_s(x) := s^{-r} \exp(-sx)$ ,  $r \in \mathbb{R}$  (βλέπε Rachev et al., σελ. 357-358, 2013). Εμείς επικεντρωνόμαστε στην περίπτωση  $r = 1$  και χάριν απλότητας θα συμβολίζουμε με  $d_{\mathcal{L},1} := d_{\mathcal{L}}$ . Από την Πρόταση 6.2.1 (αντίστοιχα με τη μετρική  $d_K$ ) για  $r = 1$ , προκύπτει η συνεπαγωγή

$$X \leq_{Lt} Y \leq_{Lt} Z \Rightarrow d_{\mathcal{L}}(X, Y) \leq d_{\mathcal{L}}(X, Z).$$

Ακόμη, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(X, Y) &= \sup_{s>0} \left| \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} f(t) dt - \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} g(t) dt \right| \\ &= \sup_{s>0} \left| \frac{1}{s} \mathcal{L}_X(s) - \frac{1}{s} \mathcal{L}_Y(s) \right| \\ &= \sup_{s>0} |\mathcal{L}_X^*(s) - \mathcal{L}_Y^*(s)|, \end{aligned}$$

όπου  $\mathcal{L}_X^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{F}(t) dt$ . Έτσι, ισχύει ότι

$$\sup_{s>0} \int_0^{\infty} e^{-st} |\bar{F}(t) - \bar{G}(t)| dt \leq \int_0^{\infty} |\bar{F}(t) - \bar{G}(t)| dt,$$

ή ισοδύναμα

$$d_{\mathcal{L}}(X, Y) \leq d_K(X, Y).$$

**Παρατήρηση 6.3.1.** Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι

$$d_{\mathcal{L}}(X, Y) = \sup_{s>0} |\mathcal{L}_X^*(s) - \mathcal{L}_Y^*(s)|,$$

και από τη σχέση (1.2.4), παίρνουμε

$$d_{\mathcal{L}}(X, Y) = \frac{1}{s} \cdot m_{\mathcal{L}}(X, Y).$$

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η  $d_{\mathcal{L}}$  είναι σταθμισμένη μετρική (weighted  $m_{\mathcal{L}}$ -metric, βλέπε Rachev et al., σχέση 15.3.9 σελ. 346, 2013).

---

## 6.4 Εφαρμογές μετρικών πιθανοτήτων για τυχαία αθροίσματα - Προσεγγίσεις στη θεωρία Χρεοκοπίας

Είναι γνωστό ότι το χαρτοφυλάκιο στα μαθηματικά των ασφαλίσεων μπορεί να διαχωριστεί σε δεδομένα εισόδου (input elements-data), όπως τα μεγέθη ζημιών και οι χρόνοι εμφάνισης των ζημιών, και σε δεδομένα εξόδου (output elements) όπως οι συνολικές ζημιές ενός χαρτοφυλακίου. Στο πλαίσιο των μετρικών πιθανοτήτων εγείρεται το εξής ερώτημα: Αν τα δεδομένα εισόδου ενός μοντέλου  $A$  και ενός μοντέλου  $B$  είναι "κοντά" μεταξύ τους (υπό κάποια μετρική), τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε την απόκλιση (deviation) μεταξύ των αντίστοιχων δεδομένων εξόδου; Με απλά λόγια, η ευστάθεια (stability) ενός στοχαστικού μοντέλου έγκειται στο γεγονός ότι μικρές αποκλίσεις των δεδομένων εισόδου οδηγούν σε μικρές αποκλίσεις μεταξύ των δεδομένων εξόδου.

Σε πολλές περιπτώσεις, η ευστάθεια ενός στοχαστικού μοντέλου μπορεί να θεωρηθεί ως συνέχεια (continuity) των δεδομένων εξόδου ως προς τις παραμέτρους του μοντέλου (στο πλαίσιο κατάλληλης τοπολογίας). Ακόμη, ένα σχετιζόμενο πρόβλημα είναι η ευαισθησία (sensitivity) του μοντέλου, η οποία ελέγχει κατά πόσο η αλλαγή στο αποτέλεσμα του μοντέλου αποδίδεται σε "μικρές" αλλαγές των παραμέτρων εισόδου (input parameters).

Στο πλαίσιο των ασφαλιστικών μαθηματικών η ευστάθεια του στοχαστικού μοντέλου (stability problem) εισήχθη από τους Beirlant και Rachev (1987). Αργότερα, ο Kalashnikov (2000) και οι Enikeeva et al. (2001) εκτίμησαν την πιθανότητα χρεοκοπίας με τη μέθοδο της ισχυρής ευστάθειας (strong stability method). Επίσης, ο Politis (2006) πρότεινε προσεγγίσεις και φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας εφαρμόζοντας τη συναρτησιακή προσέγγιση (functional approach) υπό το πλαίσιο της συνέχειας (continuity) του κλασικού μοντέλου χρεοκοπίας (βλέπε επίσης, Pitts και Politis, 2008). Ακόμη, όσον αφορά την ευαισθησία του μοντέλου χρεοκοπίας παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο βιβλίο των Asmussen και Albrecher στα IV, Κεφάλαιο 9 και XV, Κεφάλαιο 7, όπως επίσης Politis, (Παράγραφος 6.2, 2006). Τέλος, στο βιβλίο των Rachev et al. 2013 στο Κεφάλαιο 17 μελετούνται η ευστάθεια και η συνέχεια στη θεωρία Κινδύνου, ενώ στο Κεφάλαιο 18 δίνονται αποτελέσματα όσον αφορά τις εφαρμογές στο Ατομικό και στο Συλλογικό πρότυπο της θεωρίας Κινδύνου.

### 6.4.1 Ιδιότητες συνέχειας στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας

Θεωρούμε ότι η ανέλιξη πλεονάσματος (1.3.1) στο κλασικό μοντέλο διέπεται από ένα διάνυσμα παραμέτρων  $\omega = (\lambda, c, F)$  ορίζοντας την ανέλιξη  $C_t(\omega)$  η οποία έχει πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(\omega|u)$  (χάριν απλότητας θα τη συμβολίζουμε με  $\psi(\omega)$ ). Αν  $\mathbb{W}$  είναι ο παραμετρικός χώρος του  $\omega$ , τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να εκφραστεί ως την απεικόνιση

$$\psi(\omega) : \mathbb{W} \rightarrow \Psi,$$

όπου  $\Psi$  ο συναρτησιακός χώρος των συναρτήσεων  $\psi(\cdot)$ . Θεωρούμε ότι οι  $\mathbb{W}$  και  $\Psi$  είναι μετρικοί χώροι εφοδιασμένοι με τις μετρικές  $\delta$  και  $v$  αντίστοιχα. Συνεπώς,

αναζητούμε ένα άλλο κατάλληλο διάνυσμα παραμέτρων  $\tilde{\omega} = (\tilde{\lambda}, \tilde{c}, \tilde{F})$  το οποίο διέπεται από την ανέλιξη

$$C_t(\tilde{\omega}) = u + \tilde{c}t - \sum_{i=1}^{N_t} \tilde{X}_i,$$

όπου  $\tilde{F}$  η συνάρτηση κατανομής των  $\tilde{X}_i$ , τέτοια ώστε να μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας,  $\psi_{\tilde{\omega}}$ . Τότε, η συνέχεια της πιθανότητας χρεοκοπίας  $\psi(\omega)$  στο  $\omega$  σημαίνει ότι

$$\text{Αν } \delta(\omega, \tilde{\omega}) \rightarrow 0, \text{ τότε } v(\psi(\omega), \psi(\tilde{\omega})) \rightarrow 0, \quad (6.4.1)$$

για  $\omega, \tilde{\omega} \in \mathbb{W}$ . Διαισθητικά, αυτό σημαίνει ότι για μικρές τιμές του  $\delta(\omega, \tilde{\omega})$ , η ποσότητα  $v(\psi(\omega), \psi(\tilde{\omega}))$  είναι κοντά στο μηδέν. Το ζητούμενο είναι να βρούμε μια ανισότητα όπως η ακόλουθη

$$v(\psi(\omega), \psi(\tilde{\omega})) \leq \tilde{K} \cdot \phi(\delta(\omega, \tilde{\omega})), \quad (6.4.2)$$

όπου  $\tilde{K} \in [0, \infty)$  ένας σταθερός αριθμός και καλείται σταθερά συνέχειας (continuity constant),  $\phi$  είναι μια μη-αρνητική συνάρτηση τέτοια ώστε  $\phi(0) = 0$  και  $\phi(s)$  συγκλίνει στο 0, όταν το  $s$  συγκλίνει στο 0. Τότε η (6.4.2) καλείται εκτιμητής συνέχειας (continuity estimate) και επιπλέον μας πληροφορεί όσον αφορά τη σύγκλιση του  $v(\psi(\omega), \psi(\tilde{\omega}))$  ως προς τη σύγκλιση της μετρικής  $\delta(\omega, \tilde{\omega})$ . Οι Gordienko και Vazquez-Ortega (2016) υπολογίζουν ένα άνω φράγμα (χρησιμοποιώντας τη Wasserstein μετρική  $d_W$ ) κάτω από τη συνθήκη ότι τα  $\lambda$  και  $F$  είναι γνωστά. Έχοντας κίνητρο το συγκεκριμένο άρθρο, εμείς υπολογίζουμε ένα νέο φράγμα για την ελλειμματική δεξιά ουρά του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας (βλέπε σχέση (5.2.8)) δίνοντας κάποια αριθμητικά παραδείγματα. Επιπλέον, χρησιμοποιούμε μια διαφορετική μετρική προτείνοντας ένα ακόμη φράγμα για τη πιθανότητα χρεοκοπίας.

Αρχικά, στις εφαρμογές, οι παράμετροι  $\lambda$  και  $F$  οι οποίες διέπονται από την ανέλιξη (1.3.1) είναι άγνωστοι. Οπότε, απαιτείται να προσεγγιστούν από τις παραμέτρους  $\tilde{\lambda}, \tilde{F}$ . Κάτω από αυτή τη συνθήκη, μπορούμε να θεωρήσουμε μια διαφορετική ανέλιξη πλεονάσματος που διέπεται από τις παραμέτρους  $\tilde{\lambda}$  και  $\tilde{F}$ , έτσι ώστε η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι  $\tilde{\psi}(u), u \geq 0$ . Ο στόχος μας, πλέον, είναι να συγκρίνουμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας  $\psi$  και  $\tilde{\psi}$  υπό το πρίσμα των μετρικών πιθανοτήτων

Έστω  $\mathcal{F}$  ορίζουμε το σύνολο των συναρτήσεων κατανομής  $F$  όλων των μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών.

Η συνάρτηση  $\mathbb{L}_\gamma : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ , για  $\gamma \geq 0$ ,

$$\mathbb{L}_\gamma(F, G) := \int_0^\infty (1+t)^\gamma |\overline{F}(t) - \overline{G}(t)| dt, \quad (6.4.3)$$

ορίζει μια μετρική της  $\mathcal{F}$ .



**Θεώρημα 6.4.1.** Έστω  $X$  τ.μ. του ύψους των ζημιών τέτοια ώστε  $EX^{(\gamma+1)} < +\infty$ . Τότε,

$$\int_0^\infty (1+t)^\gamma |\psi(t) - \tilde{\psi}(t)| dt \leq \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{c} M_\gamma^X} \times (1 + M_\gamma^L) \cdot \left( \mathbb{L}_{\gamma+1}(F, \tilde{F}) + \left| \frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{c} \right| \cdot M_{\gamma+1}^{\tilde{X}} \right), \quad (6.4.4)$$

όπου

$$M_\gamma^X = \int_0^\infty (1+t)^\gamma \bar{F}_X(t) dt,$$

με  $(\lambda/c)M_\gamma^X > 1$ .

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι για την πιθανότητα χρεοκοπίας ισχύει ότι

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \left( \int_u^\infty \bar{F}(t) dt + \int_0^u \psi(u-t) \bar{F}(t) dt \right), \quad (6.4.5)$$

όπου  $F$  η αθροιστική συνάρτηση κατανομής των ζημιών. Συνεπώς, αν αντικαταστήσουμε την  $\bar{F}$  με  $\tilde{\bar{F}}$  στην (6.4.5), παίρνουμε

$$\tilde{\psi}(u) = \frac{\tilde{\lambda}}{c} \left( \int_u^\infty \tilde{\bar{F}}(t) dt + \int_0^u \tilde{\psi}(u-t) \tilde{\bar{F}}(t) dt \right). \quad (6.4.6)$$

Έστω  $\mathcal{D}_\infty$  ο χώρος όλων των συναρτήσεων στο  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , οι οποίες είναι συνεχείς από δεξιά με όριο στα αριστερά (Cádlàg functions, βλέπε Pollard, 1984). Για κάθε συνάρτηση  $v \in \mathcal{D}_\infty$  ορίζουμε μια συνάρτηση  $v_\gamma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  με  $v_\gamma(x) = (1+x)^\gamma \cdot v(x)$ . Στο χώρο αυτό ορίζουμε τη νόρμα  $\|v\|_\gamma = \|v_\gamma\|_\infty$  με

$$v_\gamma(x, y) := \int_0^\infty (1+t)^\gamma |x(t) - y(t)| dt, \quad \gamma \geq 0, x(\cdot), y(\cdot) \in \mathcal{D}_\gamma.$$

Τότε ο χώρος  $(\mathcal{D}_\gamma, \|\cdot\|_\gamma)$  είναι χώρος Banach, δηλαδή είναι πλήρης μετρικός χώρος (βλέπε Grübel και Pitts, 1993).

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι για τους μετασχηματισμούς

$$Tx(u) = \frac{\lambda}{c} \left( \int_u^\infty \bar{F}(t) dt + \int_0^u x(u-t) \bar{F}(t) dt \right), \quad u \geq 0, \quad (6.4.7)$$

και

$$\tilde{T}x(u) = \frac{\tilde{\lambda}}{c} \left( \int_u^\infty \tilde{\bar{F}}(t) dt + \int_0^u x(u-t) \tilde{\bar{F}}(t) dt \right), \quad u \geq 0, \quad (6.4.8)$$

έχουμε  $T\mathcal{D}_\gamma \subset \mathcal{D}_\gamma$  και  $\tilde{T}\mathcal{D}_\gamma \subset \mathcal{D}_\gamma$ .

Επιπλέον, οι μετασχηματισμοί είναι contractive (βλέπε Παράρτημα Β') στο χώρο

$\mathcal{D}_\gamma$  με  $p = \lambda\mu/c$  και  $\tilde{p} = \tilde{\lambda}\tilde{\mu}/c$ , αντίστοιχα. Πράγματι, από (6.4.7), για κάθε  $x, y \in \mathcal{D}_\gamma$ ,

$$\begin{aligned} v_\gamma(Tx, Ty) &= \int_0^\infty (1+u)^\gamma \left| \frac{\lambda}{c} \left( \int_u^\infty \bar{F}(t)dt + \int_0^u x(u-t)\bar{F}(t)dt \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda}{c} \left( \int_u^\infty \bar{F}(t)dt + \int_0^u y(u-t)\bar{F}(t)dt \right) \right| du \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty (1+u)^\gamma \left| \int_0^u x(u-t)\bar{F}(t)dt - \int_0^u y(u-t)\bar{F}(t)dt \right| du \\ &\leq \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_0^u (1+u)^\gamma \bar{F}(t) |x(u-t) - y(u-t)| dt du \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_t^\infty (1+u)^\gamma \bar{F}(t) |x(u-t) - y(u-t)| du dt, \end{aligned}$$

αλλάζοντας τα όρια ολοκλήρωσης παίρνουμε την τελευταία ισότητα. Άρα, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} v_\gamma(Tx, Ty) &\leq \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_t^\infty (1+u)^\gamma \bar{F}(t) |x(u-t) - y(u-t)| du dt \\ &\stackrel{u=t+z}{=} \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_0^\infty \underbrace{(1+z+t)^\gamma \bar{F}(t)}_{\leq (1+z)^\gamma \cdot (1+t)^\gamma} |x(z) - y(z)| dz dt \\ &\leq \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty (1+t)^\gamma \bar{F}(t) \underbrace{\int_0^\infty (1+z)^\gamma |x(z) - y(z)| dz}_{=v_\gamma(x,y)} dt \\ &= v_\gamma(x, y) \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty (1+t)^\gamma \bar{F}(t) dt = v_\gamma(x, y) \cdot \frac{\lambda}{c} \cdot M_\gamma^X. \end{aligned}$$

Τώρα, ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} M_\gamma^X &= \int_0^\infty (1+t)^\gamma \bar{F}(t) dt = \int_0^\infty \bar{F}(t) \cdot \left( \frac{(1+t)^{\gamma+1}}{\gamma+1} \right)' dt \\ &= \left[ \bar{F}(t) \cdot \frac{(1+t)^{\gamma+1}}{\gamma+1} \right]_0^\infty + \int_0^\infty f(t) \frac{(1+t)^{\gamma+1}}{\gamma+1} dt \\ &= \frac{1}{\gamma+1} (-1 + E(X+1)^{\gamma+1}) = \frac{E(X+1)^{\gamma+1} - 1}{\gamma+1}. \end{aligned}$$

Ακόμη, είναι γνωστό ότι  $E(|X|^p) < \infty \Leftrightarrow E(|X-a|^p) < \infty$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$  και  $0 < p < \infty$ . Οπότε, η τ.μ.  $M_\gamma^X$  ορίζεται αν οι ροπές  $E(X^{\gamma+1})$  των υψών των ζημιών είναι πεπερασμένες για  $\gamma \geq 0$ . Σύμφωνα με τις (6.4.5), (6.4.6),  $\psi$  και  $\tilde{\psi}$  είναι μοναδικά σταθερά σημεία (fixed points) (βλέπε Παράρτημα Β') των  $T$  και  $\tilde{T}$ .

Δηλαδή,  $\psi = T\psi$  και  $\tilde{\psi} = \tilde{T}\tilde{\psi}$ . Τώρα,

$$\begin{aligned} v_\gamma(\psi, \tilde{\psi}) &= v_\gamma(T\psi, \tilde{T}\tilde{\psi}) \leq v_\gamma(T\psi, T\tilde{\psi}) + v_\gamma(T\tilde{\psi}, \tilde{T}\tilde{\psi}) \\ &\leq \frac{\lambda}{c} M_\gamma^X \cdot v_\gamma(\psi, \tilde{\psi}) + v_\gamma(T\tilde{\psi}, \tilde{T}\tilde{\psi}), \end{aligned}$$

ή

$$v_\gamma(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{c} M_\gamma^X} \cdot v_\gamma(T\tilde{\psi}, \tilde{T}\tilde{\psi}), \quad (6.4.9)$$

όπου  $M_\gamma^X = \int_0^\infty (1+t)^\gamma \bar{F}(t) dt = \frac{1}{\gamma+1} (E(X+1)^{\gamma+1} - 1)$ . Έχοντας υπόψιν (6.4.7) και (6.4.8), για κάθε  $\psi \in \mathcal{D}_\gamma$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} v_\gamma(T\psi, \tilde{T}\psi) &= \int_0^\infty (1+u)^\gamma \left| \frac{\lambda}{c} \left( \int_u^\infty \bar{F}(t) dt + \int_0^u \psi(u-t) \bar{F}(t) dt \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tilde{\lambda}}{c} \left( \int_u^\infty \bar{F}(t) dt + \int_0^u \psi(u-t) \bar{F}(t) dt \right) \right| du \end{aligned}$$

Προσθαφαιρούμε τον όρο  $\frac{\lambda}{c} \left( \int_u^\infty \bar{F}(t) dt + \int_0^u \psi(u-t) \bar{F}(t) dt \right)$  και παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} v_\gamma(T\psi, \tilde{T}\psi) &\leq \int_0^\infty (1+u)^\gamma \left| \frac{\lambda}{c} \left( \int_u^\infty \bar{F}(t) dt + \int_0^u \psi(u-t) \bar{F}(t) dt \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tilde{\lambda}}{c} \left( \int_u^\infty \bar{F}(t) dt + \int_0^u \psi(u-t) \bar{F}(t) dt \right) \right| du \\ &\quad + \int_0^\infty (1+u)^\gamma \left| \left( \frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{c} \right) \left( \int_u^\infty \bar{F}(t) dt + \int_0^u \psi(u-t) \bar{F}(t) dt \right) \right| du \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο  $I_1$  της τελευταίας ανισότητας, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty (1+u)^\gamma \left( \int_u^\infty |\bar{F}(t) - \bar{F}(t)| dt + \int_0^u \psi(u-t) |\bar{F}(t) - \bar{F}(t)| dt \right) du \\ &= \frac{\lambda}{c} \left[ \int_0^\infty \int_0^t (1+u)^\gamma |\bar{F}(t) - \bar{F}(t)| dudt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \int_t^\infty (1+u)^\gamma \psi(u-t) |\bar{F}(t) - \bar{F}(t)| dudt \right], \end{aligned}$$

όπου ο πρώτος όρος της τελευταίας ισότητας ισούται με

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left| \overline{F}(t) - \tilde{F}(t) \right| \int_0^t (1+u)^\gamma du dt &= \int_0^\infty \frac{(1+t)^{\gamma+1} - 1}{\gamma+1} \left| \overline{F}(t) - \tilde{F}(t) \right| dt \\ &\leq \frac{1}{\gamma+1} \int_0^\infty (1+t)^{\gamma+1} \left| \overline{F}(t) - \tilde{F}(t) \right| dt \\ &= \frac{1}{\gamma+1} \cdot \mathbb{L}_{\gamma+1}(F, \tilde{F}) \leq \mathbb{L}_{\gamma+1}(F, \tilde{F}) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_t^\infty (1+u)^\gamma \psi(u-t) \left| \overline{F}(t) - \tilde{F}(t) \right| du dt &= \int_0^\infty \left| \overline{F}(t) - \tilde{F}(t) \right| \\ &\quad \times \int_0^\infty \underbrace{(1+z+t)^\gamma}_{\leq (1+z)^\gamma \cdot (1+t)^\gamma} \psi(z) dz dt \\ &\leq \int_0^\infty (1+t)^\gamma \left| \overline{F}(t) - \tilde{F}(t) \right| dt \\ &\quad \times \int_0^\infty (1+z)^\gamma \psi(z) dz \\ &\leq \mathbb{L}_\gamma(F, \tilde{F}) \cdot M_\gamma^L \leq \mathbb{L}_{\gamma+1}(F, \tilde{F}) \cdot M_\gamma^L. \end{aligned}$$

Επομένως, ισχύει ότι

$$I_1 \leq \mathbb{L}_{\gamma+1}(F, \tilde{F}) \cdot (1 + M_\gamma^L). \quad (6.4.10)$$

Παρόμοια για τον όρο,  $I_2$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I_2 &= \left| \frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{c} \right| \left( \int_0^\infty \tilde{F}(t) \int_0^t (1+u)^\gamma du dt + \int_0^\infty \tilde{F}(t) \int_t^\infty (1+u)^\gamma \psi(u-t) du dt \right) \\ &= \left| \frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{c} \right| \left( \int_0^\infty \tilde{F}(t) \cdot \frac{(1+t)^{\gamma+1} - 1}{\gamma+1} dt + \int_0^\infty \tilde{F}(t) \int_0^\infty \underbrace{(1+z+t)^\gamma}_{\leq (1+z)^\gamma \cdot (1+t)^\gamma} \psi(z) dz dt \right) \\ &\leq \left| \frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{c} \right| \left( \int_0^\infty \tilde{F}(t) \cdot \frac{(1+t)^{\gamma+1}}{\gamma+1} dt + M_\gamma^L \cdot \int_0^\infty \tilde{F}(t) (1+t)^\gamma dt \right) \\ &\leq \left| \frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{c} \right| \left( \int_0^\infty \tilde{F}(t) (1+t)^{\gamma+1} dt + M_\gamma^L \cdot \int_0^\infty \tilde{F}(t) (1+t)^{\gamma+1} dt \right) \\ &\leq \left| \frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{c} \right| \left( M_{\gamma+1}^{\tilde{X}} + M_{\gamma+1}^{\tilde{X}} \cdot M_\gamma^L \right). \end{aligned}$$

Άρα,

$$I_2 \leq \left| \frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{c} \right| M_{\gamma+1}^{\tilde{X}} (1 + M_\gamma^L). \quad (6.4.11)$$

Από (6.4.9), (6.4.10) και (6.4.11) το ζητούμενο έπεται. ■

**Παρατήρηση 6.4.1.** 1. Για  $\gamma = 0$ , παίρνουμε ότι  $M_\gamma^X = EX$ ,  $M_\gamma^L = EL = EX^2/2\theta EX$ ,  $\mathbb{L}_\gamma(F, G) = \mathbb{K}(F, G)$  (Wasserstein μετρική) και

$$\int_0^\infty |\psi(t) - \tilde{\psi}(t)| dt \leq \frac{1}{1 - \frac{\lambda\mu}{c}} \cdot \left(1 + \frac{EX^2}{2\theta EX}\right) \cdot \left(\mathbb{K}(F, \tilde{F}) + \left|\frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{c}\right| \cdot E\tilde{X}\right).$$

2. Με απλές πράξεις μπορεί να βελτιωθεί το φράγμα του Θεωρήματος 6.4.1 παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} LK \text{ distance} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{c} M_\gamma^X} \cdot \left( \frac{\mathbb{L}_{\gamma+1}(F, \tilde{F})}{\gamma + 1} + \mathbb{L}_\gamma(F, \tilde{F}) \cdot M_\gamma^L \right. \\ \left. + \left| \frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{c} \right| \cdot M_{\gamma+1}^{\tilde{X}} \cdot (1 + M_\gamma^L) \right). \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

### 6.4.2 Συνέχεια για το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Στο επόμενο θεώρημα βρίσκουμε μια ανισότητα για την ελλειμματική δεξιά ουρά του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, υπό τους όρους συνέχειας, με αποτέλεσμα να εξάγουμε ένα ενδιαφέρον φράγμα για την  $\bar{G}(u, y)$ .

**Θεώρημα 6.4.2.** Έστω δύο διαφορετικά πλεονάσματα κινδύνου με ελλειμματικές δεξιές ουρές του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας  $\bar{G}(u, y)$  και  $\tilde{\bar{G}}(u, y)$ , αντίστοιχα (βλέπε Ενότητα 5.2). Τότε, η ομοιόμορφη μετρική (uniform metric) μας δίνει το παρακάτω φράγμα.

$$\sup_{u \geq 0} |\bar{G}(u, y) - \tilde{\bar{G}}(u, y)| \leq \frac{1}{c - \lambda\mu} \left[ \lambda Q_y(F, \tilde{F}) + |\lambda - \tilde{\lambda}| \tilde{\mu} \right], \quad (6.4.13)$$

όπου  $Q_y(F, \tilde{F}) = \int_y^\infty |\bar{F}(t) - \tilde{\bar{F}}(t)| dt$ .

*Απόδειξη.* Η ακόλουθη ολοκληρωτική εξίσωση της ελλειμματικής ουράς του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι γνωστή (βλέπε Willmot, 2002)

$$\bar{G}(u, y) = \frac{\lambda}{c} \left[ \int_0^u \bar{G}(u-t, y) \bar{F}(t) dt + \int_{u+y}^\infty \bar{F}(t) dt \right], \quad (6.4.14)$$

$$\tilde{\bar{G}}(u, y) = \frac{\tilde{\lambda}}{c} \left[ \int_0^u \tilde{\bar{G}}(u-t, y) \tilde{\bar{F}}(t) dt + \int_{u+y}^\infty \tilde{\bar{F}}(t) dt \right], \quad u \geq 0, y \geq 0. \quad (6.4.15)$$

Έστω  $\mathcal{X}$  ο χώρος που αποτελείται από όλες τις φραγμένες και συνεχείς συναρτήσεις στο  $\mathbb{R}^+$  με  $a : [0, \infty) \rightarrow [0, +\infty)$  εφοδιασμένος με την ομοιόμορφη μετρική  $v(a, b) := \sup_{t \geq 0} |a(t) - b(t)|$ . Επίσης, έστω η μεταβλητή  $z$ , την οποία τη

θεωρούμε σταθερή τέτοια ώστε η  $\bar{G}(x, z) = \Gamma_z(x)$  να είναι μια συνάρτηση του  $x$ . Τότε ο  $(\mathcal{X}, v)$  είναι πλήρης μετρικός χώρος (βλέπε Billingsley, 1999). Έχουμε ότι  $T^z \mathcal{X} \subset \mathcal{X}$  και  $\tilde{T}^z \mathcal{X} \subset \mathcal{X}$  για τους ακόλουθους μετασχηματισμούς

$$T^z a(u) = \frac{\lambda}{c} \left[ \int_{z+u}^{\infty} \bar{F}(t) dt + \int_0^u a(u-t) \bar{F}(t) dt \right], \quad (6.4.16)$$

και

$$\tilde{T}^z a(u) = \frac{\lambda}{c} \left[ \int_{z+u}^{\infty} \bar{\bar{F}}(t) dt + \int_0^u a(u-t) \bar{\bar{F}}(t) dt \right], \quad u \geq 0. \quad (6.4.17)$$

Επομένως, από (6.4.16), για κάθε  $a, b \in \mathcal{X}$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} v(T^z a, T^z b) &= \frac{\lambda}{c} \sup_{u \geq 0} \left| \int_0^u a(u-t) \bar{F}(t) dt - \int_0^u b(u-t) \bar{F}(t) dt \right| \\ &\leq \frac{\lambda}{c} \sup_{u \geq 0} \int_0^u \bar{F}(t) \sup_{s \in [0, u]} |a(s) - b(s)| dt \\ &\leq \frac{\lambda}{c} v(a, b) \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt = \frac{\lambda \mu}{c} v(a, b). \end{aligned}$$

Η ανισότητα

$$v(\tilde{T}^z a, \tilde{T}^z b) \leq \frac{\tilde{\lambda} \tilde{\mu}}{c} v(a, b), \quad (6.4.18)$$

παρόμοια επιβεβαιώνεται.

Σύμφωνα με τις (6.4.14) και (6.4.15),  $\Gamma_z(x)$  και  $\tilde{\Gamma}_z(x)$  είναι μοναδικά σταθερά σημεία (fixed points) των  $T^z$  και  $\tilde{T}^z$  (βλέπε Παράρτημα Β'). Δηλαδή,  $\Gamma_z = T^z \Gamma_z$  και  $\tilde{\Gamma}_z = \tilde{T}^z \tilde{\Gamma}_z$ . Οπότε,

$$\begin{aligned} v(\Gamma_z, \tilde{\Gamma}_z) &= v(T^z \Gamma_z, \tilde{T}^z \tilde{\Gamma}_z) \\ &\leq v(T^z \Gamma_z, T^z \tilde{\Gamma}_z) + v(T^z \Gamma_z, \tilde{T}^z \tilde{\Gamma}_z) \\ &\leq \frac{\lambda \mu}{c} \cdot v(\Gamma_z, \tilde{\Gamma}_z) + v(T^z \Gamma_z, \tilde{T}^z \tilde{\Gamma}_z), \end{aligned}$$

ή

$$v(\Gamma_z, \tilde{\Gamma}_z) = \frac{c}{c - \lambda \mu} v(T^z \tilde{\Gamma}_z, \tilde{T}^z \tilde{\Gamma}_z).$$

Με βάση τις (6.4.7) και (6.4.8) για κάθε  $a \in \mathcal{X}$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
v(T^z a, \tilde{T}^z a) &\leq \sup_{u \geq 0} \left| \int_{u+z}^{\infty} \bar{F}(t) dt + \int_0^u a(u-t) \bar{F}(t) dt \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda}{c} \int_{u+z}^{\infty} \bar{\tilde{F}}(t) dt + \int_0^u a(u-t) \bar{\tilde{F}}(t) dt \right| \\
&\quad + \sup_{u \geq 0} \left| \frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{c} \left( \int_{u+z}^{\infty} \bar{\tilde{F}}(t) dt + \int_0^u a(u-t) \bar{\tilde{F}}(t) dt \right) \right| \\
&\leq \frac{\lambda}{c} \int_z^{\infty} |\bar{F}(t) - \bar{\tilde{F}}(t)| dt + \left| \frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{c} \right| \int_0^{\infty} \bar{\tilde{F}}(t) dt \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_z^{\infty} |\bar{F}(t) - \bar{\tilde{F}}(t)| dt + \left| \frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{c} \right| \tilde{\mu}.
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τη τελευταία ανισότητα με την (6.4.18), παίρνουμε ότι

$$v(\bar{G}(x, y), \bar{\tilde{G}}(x, y)) \leq \frac{1}{c - \lambda\mu} \left[ \lambda Q_y(F, \tilde{F}) + |\lambda - \tilde{\lambda}| \tilde{\mu} \right],$$

όπου  $Q_y(F, \tilde{F}) = \int_y^{\infty} |\bar{F}(t) - \bar{\tilde{F}}(t)| dt$ . Παρόμοια αποδεικνύεται η ανισότητα (6.4.18) αν αντί της ποσότητας  $\frac{1}{c - \lambda\mu}$  χρησιμοποιήσουμε την ποσότητα  $\frac{1}{c - \tilde{\lambda}\tilde{\mu}}$ . ■

Μία από τις σπουδαιότερες εφαρμογές των μετρικών είναι ο έλεγχος σταθερότητας (stability) ενός στοχαστικού μοντέλου. Στη βιβλιογραφία έχει μελετηθεί ιδιαίτερα το μοντέλο χρεοκοπίας ως προς τη σταθερότητά του. Οι Vatamidou et al., Πρόταση 2, 2014) απέδειξαν ότι αν δύο κλιμακωτά ύψη στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας είναι "έψιλον-κοντά" τότε και οι αντίστοιχες πιθανότητες χρεοκοπίας είναι  $\delta$  κοντά όπου  $\delta = \epsilon\phi/(1 - \phi)$ . Με το ίδιο σκεπτικό, εμείς αποδεικνύουμε ότι αν είναι "έψιλον-κοντά" οι μετασχηματισμοί Laplace των κλιμακωτών υψών τότε και οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Laplace είναι  $\delta$  κοντά όπου  $\delta = \epsilon\phi/(1 - \phi)$ .

**Πρόταση 6.4.1.** Αν  $\sup_{s>0} |\mathcal{L}_X(s) - \mathcal{L}_{\tilde{X}}(s)| \leq \epsilon$ , τότε  $|\mathcal{L}_{S_n}(s) - \mathcal{L}_{T_n}(s)| \leq n \cdot \epsilon$ ,

όπου τα αθροίσματα ορίζονται από τις σχέσεις  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  και  $T_n = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_n$ .

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι

$$|x^n - y^n| = |x - y| \cdot |x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}| \quad (6.4.19)$$

Άρα, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{L}_{S_n}(s) - \mathcal{L}_{T_n}(s)| &= |\mathcal{L}_{\tilde{X}}^n(s) - \mathcal{L}_{\tilde{X}}^n(s)| \\
 &\stackrel{(6.4.19)}{=} \underbrace{|\mathcal{L}_X(s) - \mathcal{L}_{\tilde{X}}(s)|}_{\leq \epsilon} \cdot \underbrace{|\mathcal{L}_X^{n-1}(s) + \dots + \mathcal{L}_{\tilde{X}}^{n-1}(s)|}_{\leq 1 + \dots + 1} \\
 &\leq \epsilon \cdot n.
 \end{aligned}$$

**Πρόταση 6.4.2.** Αν  $\sup_{s>0} |\mathcal{L}_X(s) - \mathcal{L}_{\tilde{X}}(s)| \leq \epsilon$  τότε ένα φράγμα για το μετασχηματισμό Laplace της τ.μ. της μέγιστης σωρευτικής απώλειας  $M_X$ , είναι

$$|\mathcal{L}_{M_X}(s) - \mathcal{L}_{M_{\tilde{X}}}(s)| \leq \frac{\epsilon\phi}{1-\phi}.$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{L}_{M_X}(s) - \mathcal{L}_{M_{\tilde{X}}}(s)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} (1-\phi)\phi^n \mathcal{L}_X^n(s) - \sum_{n=0}^{\infty} (1-\phi)\phi^n \mathcal{L}_{\tilde{X}}^n(s) \right| \\
 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (1-\phi)\phi^n |\mathcal{L}_X^n(s) - \mathcal{L}_{\tilde{X}}^n(s)| \\
 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (1-\phi)\phi^n \epsilon n = \epsilon\phi(1-\phi) \sum_{n=1}^{\infty} n\phi^{n-1} = \frac{\phi\epsilon}{1-\phi}.
 \end{aligned}$$

## 6.5 Αριθμητικές εφαρμογές

Σε αυτή την ενότητα δίνουμε αριθμητικά παραδείγματα για τις προαναφερθείσες μετρικές "LKdistance" (βλέπε σχέση (6.4.12)) όσον αφορά την πιθανότητα χρεοκοπίας και την "KanPoldist" όσον αφορά το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, τα οποία τα συγκρίνουμε με γνωστά φράγματα (Politis, 2006) και με πραγματικές τιμές (Willmot και Lin, 1998), αντίστοιχα.

**Παράδειγμα 6.5.1.** Έστω  $X^{(1)}$  ακολουθεί μια μείξη δύο εκθετικών κατανομών με ουρά

$$\bar{F}_{X^{(1)}}(t) = \frac{1}{2}e^{-5t/4} + \frac{1}{2}e^{-5t/6}, \quad t > 0,$$

και  $X^{(0)} \sim \text{Exp}(1)$  τέτοια ώστε  $EX^{(1)} = EX^{(0)} = 1$  (βλέπε Politis, Παράδειγμα 7.2, 2006). Στον Πίνακα 6.1 συγκρίνουμε τα αποτελέσματα από τη μετρική "LKdistance" στη σχέση (6.4.12) και τις τιμές από την "KPdistance", οι οποίες υπολογίζονται από το Θεώρημα 5.3. του Politis (2006). Παρατηρούμε ότι η "KPdistance" είναι καλύτερη για  $c = 1$  αλλά το δικό μας φράγμα είναι πιο εύχρηστο, μπορούμε να αλλάξουμε το  $c$  ή το  $\lambda$  χωρίς επιπρόσθετη προσπάθεια ή επιπρόσθετο χρόνο για τον υπολογισμό του, σε αντίθεση με αυτό του Politis (2006).



|  | $c = 1$ | $c = 3$ | $c = 5$ |  | $c = 1$ | $c = 3$ | $c = 5$ |
|--|---------|---------|---------|--|---------|---------|---------|
| $\ \psi^{(1)} - \psi^{(0)}\ _{1,\gamma}$ | 0.2     | 0.0154  | 0.0080  | $\ \psi^{(1)} - \psi^{(0)}\ _{1,\gamma}$ | 0.4     | 0.0174  | 0.0089  |
| KPdistance                               | 0.642   | —       | —       | KPdistance                               | 1.2840  | —       | —       |
| LKdistance                               | 1.1484  | 0.1211  | 0.0999  | LKdistance                               | 3.3438  | 0.1271  | 0.1024  |

(α')  $\gamma = 0, \lambda = 5/6$

(β')  $\gamma = 0, \lambda = 10/11$

Πίνακας 6.1: Απόσταση πιθανοτήτων χρεοκοπίας για μείζη εκθετικών με μια εκθετική κατανομή με την ίδια μέση τιμή.

**Παράδειγμα 6.5.2.** Έστω δύο μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές  $X^{(0)}, X^{(1)}$  με συναρτήσεις κατανομής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας  $G^{(0)}(x, y)$  και  $G^{(1)}(x, y)$ , αντίστοιχα.

Στους πίνακες 6.2 – 6.4 υπολογίζουμε τις πραγματικές τιμές των μεταξύ τους αποστάσεων  $\left| \bar{G}^{(1)}(x, y) - \bar{G}^{(0)}(x, y) \right|$  (βλέπε Willmot και Lin, 1998) και το φράγμα της σχέσης (6.4.13) (το ορίζουμε ως "KanPolDist") για διάφορα ζευγάρια κατανομών των αντίστοιχων υψών ζημιάς  $X^{(0)}$  και  $X^{(1)}$ . Σε κάθε περίπτωση, χρησιμοποιούμε το ίδιο  $\lambda$ .

**Παρατήρηση 6.5.1.** Από τους πίνακες 6.2–6.4 παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει το αρχικό αποθεματικό  $u$  τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση. Για κάθε  $y$  έχουμε διαφορετικό φράγμα για διάφορες τιμές του  $u$ . Αυτό μας δίνει επισκοπικά καλύτερη εικόνα και είναι πιο εύχρηστο στην επιλογή της τ.μ.  $X$ , αφού η επιλογή μας γίνεται συναρτήσει του  $y$ , δηλαδή κατά πόσο έλλειμμα έχουμε τη στιγμή της χρεοκοπίας. Παρατηρούμε ότι για μεγαλύτερα  $y$  ή/και  $u$  το φράγμα μας φαίνεται να βελτιώνεται.

| $y$  | $u$  | $\bar{G}^{(1)}(x, y)$ | $\bar{G}^{(0)}(x, y)$ | $ \bar{G}^{(1)}(x, y) - \bar{G}^{(0)}(x, y) $ | KanPolDist |
|------|------|-----------------------|-----------------------|---|------------|
| 0.10 | 0.10 | 0.1637                | 0.1672                | 0.0035  | 0.0779     |
|      | 0.25 | 0.1398                | 0.1485                | 0.0087  |            |
|      | 0.50 | 0.1037                | 0.1220                | 0.0183  |            |
|      | 1.00 | 0.0523                | 0.0829                | 0.0306  |            |
|      | 2.00 | 0.0116                | 0.0388                | 0.0272  |            |
| 0.25 | 0.10 | 0.1347                | 0.1441                | 0.0094  | 0.0723     |
|      | 0.25 | 0.1125                | 0.1281                | 0.0156  |            |
|      | 0.50 | 0.0811                | 0.1055                | 0.0244  |            |
|      | 1.00 | 0.0396                | 0.0718                | 0.0322  |            |
|      | 2.00 | 0.0086                | 0.0338                | 0.0252  |            |
| 0.50 | 0.10 | 0.0926                | 0.1128                | 0.0202  | 0.0592     |
|      | 0.25 | 0.0750                | 0.1004                | 0.0254  |            |
|      | 0.50 | 0.0519                | 0.0828                | 0.0309  |            |
|      | 1.00 | 0.0242                | 0.0566                | 0.0324  |            |
|      | 2.00 | 0.0051                | 0.0268                | 0.0217  |            |
| 1.00 | 0.10 | 0.0379                | 0.0696                | 0.0317  | 0.0413     |
|      | 0.25 | 0.0293                | 0.0621                | 0.0328  |            |
|      | 0.50 | 0.0192                | 0.0514                | 0.0322  |            |
|      | 1.00 | 0.0084                | 0.0354                | 0.0270  |            |
|      | 2.00 | 0.0017                | 0.0169                | 0.0152  |            |
| 2.00 | 0.10 | 0.0045                | 0.0272                | 0.0227  | 0.0494     |
|      | 0.25 | 0.033                 | 0.0244                | 0.0211  |            |
|      | 0.50 | 0.0020                | 0.0203                | 0.0183  |            |
|      | 1.00 | 0.0008                | 0.0142                | 0.0134  |            |
|      | 2.00 | 0.0001                | 0.0069                | 0.0068  |            |

Πίνακας 6.2:  $X^{(1)} \sim Erlang(3, 3)$  και  $X^{(0)}$  με ουρά  $\bar{F}_{X^{(0)}}(t) = \frac{1}{2}e^{-5t/4} + \frac{1}{2}e^{-5t/6}$  και  $\theta = 4$ .

| $y$  | $u$  | $\bar{G}^{(1)}(x, y)$ | $\bar{G}^{(0)}(x, y)$ | $ \bar{G}^{(1)}(x, y) - \bar{G}^{(0)}(x, y) $ | KanPolDist |
|------|------|-----------------------|-----------------------|---|------------|
| 0.10 | 0.10 | 0.1672                | 0.1671                | 0.0001  | 0.0054     |
|      | 0.25 | 0.1485                | 0.1482                | 0.0003  |            |
|      | 0.50 | 0.1220                | 0.1213                | 0.0007  |            |
|      | 1.00 | 0.0829                | 0.0813                | 0.0016  |            |
|      | 2.00 | 0.0388                | 0.0365                | 0.0023  |            |
| 0.25 | 0.10 | 0.1441                | 0.1438                | 0.0003  | 0.0052     |
|      | 0.25 | 0.1281                | 0.1275                | 0.0006  |            |
|      | 0.50 | 0.1055                | 0.1044                | 0.0011  |            |
|      | 1.00 | 0.0718                | 0.0700                | 0.0018  |            |
|      | 2.00 | 0.0338                | 0.0314                | 0.0024  |            |
| 0.50 | 0.10 | 0.1128                | 0.1120                | 0.0008  | 0.0046     |
|      | 0.25 | 0.1004                | 0.0993                | 0.0011  |            |
|      | 0.50 | 0.0828                | 0.0813                | 0.0015  |            |
|      | 1.00 | 0.0566                | 0.0545                | 0.0021  |            |
|      | 2.00 | 0.0268                | 0.0245                | 0.0023  |            |
| 1.00 | 0.10 | 0.0696                | 0.0679                | 0.0017  | 0.0035     |
|      | 0.25 | 0.0621                | 0.0602                | 0.0019  |            |
|      | 0.50 | 0.0514                | 0.0493                | 0.0021  |            |
|      | 1.00 | 0.0354                | 0.0331                | 0.0023  |            |
|      | 2.00 | 0.0169                | 0.0149                | 0.0020  |            |
| 2.00 | 0.10 | 0.0272                | 0.0250                | 0.0022  | 0.0027     |
|      | 0.25 | 0.0244                | 0.0222                | 0.0022  |            |
|      | 0.50 | 0.0203                | 0.0181                | 0.0022  |            |
|      | 1.00 | 0.0142                | 0.0122                | 0.0020  |            |
|      | 2.00 | 0.0069                | 0.0055                | 0.0014  |            |

Πίνακας 6.3:  $X^{(1)}$  με ουρά  $\bar{F}_{X^{(1)}}(t) = \frac{1}{2}e^{-5t/4} + \frac{1}{2}e^{-5t/6}$  με  $X^{(0)} \sim Exp(1)$  και  $\theta = 4$ .

# Παράρτημα Α΄

## Κίνηση Brown

**Ορισμός Α΄.0.1.** Μια στοχαστική ανέλιξη  $\{B(t) : t \geq 0\}$  ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  και με τιμές στο  $\mathbb{R}$  λέγεται (μονοδιάστατη) **κίνηση Brown** αν ισχύουν τα εξής:

(i) Η ανέλιξη έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Δηλαδή για κάθε  $n \geq 1$  και  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , οι τυχαίες μεταβλητές

$$B(t_1), B(t_2) - B(t_1), B(t_3) - B(t_2), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$$

είναι ανεξάρτητες.

(ii) Για κάθε  $0 \leq s < t$ ,

$$B(t) - B(s) \sim N(0, t - s).$$

(iii) Με πιθανότητα 1, η συνάρτηση  $t \mapsto B(t)$  είναι συνεχής.

(Βλέπε Χελιώτης, 2020)

Μια κίνηση Brown για την οποία με πιθανότητα 1 ισχύει  $B(0) = x$  λέγεται κίνηση Brown που ξεκινάει από το  $x$ , ενώ όταν  $x = 0$  μια τέτοια ανέλιξη λέγεται **τυπική κίνηση Brown**.

Επισημαίνουμε ότι η κίνηση Brown συναντάται στη βιβλιογραφία και ως ανέλιξη Wiener.

**Παρατήρηση Α΄.0.1.** (Σημείο εκκίνησης της  $B$ ). Ο πιο πάνω ορισμός δεν θέτει κανένα περιορισμό στην αρχική τιμή  $B(0)$  της κίνησης. Έτσι, είναι δυνατόν η κίνηση να ξεκινάει από ένα συγκεκριμένο  $x \in \mathbb{R}$  ή, γενικότερα, να ξεκινάει τυχαία επιλέγοντας το αρχικό σημείο με βάση ένα μέτρο πιθανότητας  $\nu$  στο  $\mathbb{R}$  (δηλαδή το  $B(0)$  να είναι τυχαία μεταβλητή με κατανομή  $\nu$ ). Όλες αυτές οι κινήσεις Brown παράγονται από την τυπική κίνηση Brown ως εξής. Έστω  $B$  τυπική κίνηση Brown και  $X$  τυχαία μεταβλητή (στον ίδιο χώρο πιθανότητας) ανεξάρτητη της  $B$  και με κατανομή  $\nu$ . Τότε η ανέλιξη  $W$  με

$$W(t) := X + B(t)$$

για κάθε  $t \geq 0$  είναι κίνηση Brown με αρχική κατανομή  $\nu$ . Ιδιαίτερος, όταν το  $\nu$  δίνει όλη του τη μάζα σε ένα σημείο  $x \in \mathbb{R}$ , τότε έχουμε  $W(t) = x + B(t)$ , δηλαδή την κίνηση Brown που ξεκινάει από το  $x$ .

---

**Παρατήρηση Α'.0.2.** Αξίζει να παρουσιάσουμε και μια διαφορετική διατύπωση του ορισμού της ανέλιξης Wiener έτσι ώστε να κατανοήσουμε λίγο περισσότερο την μεταβλητότητα του πρόσθετου διαχτυτικού παράγοντα στο πλεόνασμα (τη μεταβλητή  $\sigma$  στη σχέση (1.5.1)).

Η ανέλιξη Wiener είναι μια Μαρκοβιανή ανέλιξη. Έστω  $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}(t) : t \geq 0\}$  μια διάχυση (ανέλιξη). Απαιτούμε (με πιθανότητα 1) η συνάρτηση  $t \mapsto \mathcal{D}(t)$  να είναι συνεχής. Επίσης, θεωρούμε τη μέση τιμή και τη διασπορά των προσαυξήσεων  $\mathcal{D}(t+h) - \mathcal{D}(t)$  για μικρά χρονικά διαστήματα  $(t, t+h)$ . Τότε υπάρχουν οι συναρτήσεις  $a(t, x), b(t, x)$  (βλέπε Grimmett και Stirzaker 2001, σελ. 519-520) τέτοιες ώστε:

$$Pr(|\mathcal{D}(t+h) - \mathcal{D}(t)| > \epsilon | \mathcal{D}(t) = x) = o(h), \quad \text{για κάθε } \epsilon > 0,$$

$$E(\mathcal{D}(t+h) - \mathcal{D}(t) | \mathcal{D}(t) = x) = a(t, x)h + o(h),$$

$$E([\mathcal{D}(t+h) - \mathcal{D}(t)]^2 | \mathcal{D}(t) = x) = b(t, x)h + o(h).$$

Οι συναρτήσεις  $a$  και  $b$  καλούνται τάση (drift ή *instantaneous mean*) και μεταβλητότητα (*instantaneous variance*) της  $\mathcal{D}$ , αντίστοιχα. (βλέπε Feller 1971, σελ. 332 – 335).

Για  $a(t, x) = 0$  και  $b(t, x) = \sigma^2$ , για κάποιο  $\sigma^2 > 0$  η ανέλιξη είναι Wiener, και για  $a(t, x) = m$  και  $b(t, x) = \sigma^2$  για κάποιο σταθερό  $\sigma^2 > 0$  καλείται Wiener ανέλιξη με τάση.

# Παράρτημα Β΄

## Θεωρία σταθερού σημείου

**Ορισμός Β΄.0.1.** Ένα σταθερό σημείο (*fixed point*) μιας συνάρτησης  $T : X \rightarrow X$  είναι ένα στοιχείο του  $X$ , το οποίο απεικονίζεται στον εαυτό του τέτοιο ώστε

$$Tx = x.$$

**Ορισμός Β΄.0.2.** Έστω  $(X, d)$  μετρικός χώρος. Μια απεικόνιση  $T : X \rightarrow X$  είναι *contraction* στον  $X$  αν υπάρχει μια θετική σταθερά  $a < 1$  τέτοια ώστε  $d(Tx, Ty) \leq a \cdot d(x, y)$  για όλα τα  $x, y \in X$ .

**Θεώρημα Β΄.0.1.** (*Banach's Fixed-Point Theorem*). Έστω  $(X, d)$  ένας πλήρης μετρικός χώρος και έστω  $T : X \rightarrow X$  να είναι *contraction* στον  $X$ . Τότε η απεικόνιση  $T$  έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο  $x^* \in X$ , και  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = x^*$  για κάθε  $x \in X$ , όπου  $T^n x = T(T^{n-1}x) = T(T(T^{n-2}x)) = \dots = T(T \dots (Tx))$  για  $n = 1, 2, \dots$

---

# Βιβλιογραφία

- [1] Alzaid, A., Kim, J.S., Proschan, F. (1991) Laplace ordering and its applications. *Journal of Applied Probability* **28**, 116-130.
- [2] Albrecher, H., Vatamidou, E. (2019) Ruin Probability Approximations in Sparre Andersen Models with Completely Monotone Claims. *Risks* **7**: 104.
- [3] Anderson, G., Vuorinen, M. (2006) Monotonicity rules in calculus.. *The American Mathematical Monthly*, **113**, 805–816.
- [4] Asmussen, S. (2003) *Applied Probabilities and Queues, Second Edition*. Springer, New York Inc.
- [5] Asmussen, S., Albrecher, H. (2010) *Ruin Probabilities, 2n Edition*. Advanced Statistical Science and Applied Probability, World Scientific.
- [6] Barlow, R. E. and Proschan, F. (1981) *Statistical Theory of Reliability and Life testing: Probability Models*. To Begin with, Silver Spring, MD, USA.
- [7] Bartoszewicz, J. (1999) Characterizations of stochastic orders based on ratios of Laplace Transforms. *Statistics and Probability Letters* **42**, 207-212.
- [8] Bartoszewicz, J. (2000) Stochastic orders based on Laplace transform and divisible distributions.. *Statistics and Probability Letters* **50**, 121-129.
- [9] Bartoszewicz, J. (2002) Mixture of exponential distributions and stochastic orders. *Statistics and Probability Letters* **57**, 23-31.
- [10] Belzunce, F., Gao, X., Hu, F., Pellerey, F. (2004) Characterizations of the hazard rate order and IFR aging notion. *Statistics and Probability Letters* **70**, 235-242.
- [11] Belzunce, F., Ortega, E., Ruiz, J. (1999) The Laplace order and ordering of residual lives. *Statistics and Probability Letters* **42**, 145-156.
- [12] Belzunce, F., Ortega, E.M., Ruiz, M.(2001). A note on Stochastic Comparison of Excess Lifetimes of Renewal Processes. *Journal of Applied Probability* **38**, 747-753.
- [13] Belzunce, F., Ortega, E.M., Ruiz, M. (2007). On non-monotonic ageing properties from the Laplace transform, with actuarial applications. *Insurance: Mathematics and Economics* **40**, 1-14.
- [14] Belzunce, F., Riquelme, C.M. (2017) On sufficient conditions for the comparison of some quantile based measures, *Communications in Statistics–Theory and Methods* **46** (13), 6512–6527.

- 
- [15] Belzunce, F., Riquelme, C.M., Ruiz, J.M. (2013) On sufficient conditions for mean residual life and related orders, *J. Computational Statistics and Data Analysis* **61**, 199-210.
- [16] Beirlant, J., Rachev, S.T. (1987) The problem of stability of insurance mathematics. *Insurance: Mathematics and Economics* **6**(3), 179-188.
- [17] Bhati, D., Calderin-Ojeda, E., Meenakshi, M. (2019). A new heavy tailed class of distributions which includes Pareto. *Risks* **7**(4), 99.
- [18] Bhattacharjee, M., C., Ravi, C., Vasudeva, R., Mohan, N. R. (2003) New order preserving properties of geometric compounds. *Statistics and Probability Letters* **64**, 113-120.
- [19] Billingsley, P. (1999) *Convergence of Probability Metrics*. John Wiley and Sons, INC.
- [20] Boutsikas, M., Vaggelatou, E. (2002) On the distance between convex-ordered random variables, with applications. *Advances in Applied Probability* **34**, 349-374.
- [21] Bowers, N. L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J. (1986) *Actuarial Mathematics*. Itasca (Illinois), The Society of Actuaries.
- [22] Brown, M. (1990) Error bounds for exponential approximations of geometric convolutions. *The Annals Probability* vol. **18**, 1388-1402.
- [23] Buser, Stephen A. (1986) Laplace transforms as present value rules: A note.. *The Journal of Finance* **41**: 243-247.
- [24] Cai, J., Tang, Q. (2004) On max-sum equivalence and convolution closure of heavy-tailed distributions and their applications. *Journal of Applied Probability* **41**, 117-130.
- [25] Chadjiconstantinidis, S., Politis, K. (2005). Non-exponential bounds for stop-loss premiums and ruin probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, 335-357.
- [26] Cheng, Y, Pai, J. S. (2003) On the nth stop loss transform order of ruin probability. *Insurance: Mathematics and Economics* **32**(1), 51-60.
- [27] Chiu, S.N., Yin, C. (2014) On the complete monotonicity of the compound geometric convolution with applications in risk theory. *Scandinavian Actuarial Journal* **2**, 116-124.
- [28] De Vylder, F., Goovaerts, M. (1984) Bounds for classical ruin probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics* **3**(2), 121-131.
- [29] Denuit, M. (2001) Laplace transform ordering of actuarial quantities. *Insurance: Mathematics and Economics* **29**, 83-102.
- [30] Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R. (2005) *Actuarial Theory for Dependent Risks*. J. Wiley and Sons, Ltd.
- [31] Denuit, M., Bellegem, S., V. (2001) On the stop-loss and total variation distances between random sums. *Statistics & Probability Letters* **53**, 153-165.
- [32] De Schepper, A., Goovaerts, M.J., Delbaen, F. (1992) The Laplace transform of annuities certain with exponential time distribution. *Insurance: Mathematics and Economics* **11**, 291-294.



- 
- [33] Dickson, D.C.M., Waters, H. R. (1992) The probability and severity of ruin in finite and infinite time. *Astin Bulletin* **22**(2), 177-190.
- [34] Dickson, D.C.M. (2005) *Insurance risk and ruin*. Cambridge University Press.
- [35] Dufresne, F., Gerber, H.U. (1991) Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics* **10**, 51-59.
- [36] Dörrie, H (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. Dover Publications, INC, New York.
- [37] Enikeeva, F., Kalashnikov, V., Rusaityte (2001) Continuity Estimates for Ruin Probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal* 2001; 1: 18-39.
- [38] Escudero, L.F., Ortega, E.M. (2008) Actuarial comparisons for aggregate claims with randomly right-truncated claims. *Insurance: Mathematics and Economics* **43** 255-262.
- [39] Feller, W. (1971) *An introduction to probability theory and its application, Vol. II*. Wiley , New York.
- [40] Finkelstein, M.S. (2003) On some measures and distances for positive random variables. *Applied Stochastic Models in Business and Industry* **19**, 133-146.
- [41] Fleming, W. (1977) *Functions of Several Variables*. Berlin-Heidelberg-New York. Springer-Verlag.
- [42] Furrer, H. (1998) Risk process perturbed by  $\alpha$ -stable Lévy motion. *Scandinavian Actuarial Journal* **1**, 59-74.
- [43] Franco, M., Ruiz, J.M., Ruiz, M.C. (2001) On closure of the IFR(2) and NBU(2) classes. *Journal of Applied Probability* **38**, 235-241.
- [44] Gerber, H.U. (1970) An extension of the renewal equation and its application in the collective theory of risk. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 205-210.
- [45] Gerber, H.U. (1979) *An introduction to Mathematical Risk Theory*. Huebner Foundation Monograph **8** S.S. Huebner Foundation, Philadelphia.
- [46] Gerber, H.U., Goovaerts, M.J., Kaas, R. (1987) On the probability and severity of ruin. *ASTIN Bulletin* Vol. **17**, 151-163.
- [47] Goovaerts, M.J., De Schepper, A. (1997) IBNR reserves under stochastic interest rates. *Insurance: Mathematics and Economics* **21**, 225-244.
- [48] Goovaerts, M.J., De Vylder, F. (1984) A stable recursive algorithm for evaluation of ultimate ruin probabilities. *ASTIN Bulletin* Vol. **14**, 53-59.
- [49] Goovaerts, M.J., Kaas, R., Laeven, R.J.A., Tang, O. (2004) A comonotonic image of independence for additive risk measures. *Insurance: Mathematics and Economics* **35**, 581-594.
- [50] Goovaerts, M.J., Kaas, R., Van Heerwaarden, A.E., Bauwelinckx, T. (1990) *Effective Actuarial Methods*. North Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo.
- [51] Gordienko, E., Vázquez-Ortega, P. (2016) Simple continuity inequalities for ruin probability in the classical risk model. *ASTIN Bulletin* **46**, 801-

- 
- [52] Grandell, J. (2010) *Aspects of Risk Theory*. Springer Series in Statistics.
- [53] Grimmett, G, Stirzaker, D. (2001) *Probability and Random Processes, 3rd Edition*. Oxford, University Press.
- [54] Grübel, R, Pitts, S. M. (1993) Nonparametric estimation in renewal theory I: the empirical renewal function. *Annals Statistics* **21**, 1431-1451.
- [55] Guess, F., Hollander, M., Proschan, F. (1986) Testing exponentiality versus a trend change point in mean residual life. *Annals Statistics* **14**, 1388-1398.
- [56] Guest, P.B. (1991) Laplace Transforms and an Introduction to Distributions. *Ellis Horwood Series in Mathematics and Its Applications*.
- [57] Gupta, A. K., Zeng, W.B., Wu, Y. (2010) *Probability and Statistical Models*. Springer Science+Business Media.
- [58] Hesselager, O., Wang, S., Willmot, G. (1997) Exponential and scale mixtures and equilibrium distributions. *Scandinavian Actuarial Journal* 125-142.
- [59] Hu, C.-Y., Lin, G. D. (2001) On the geometric compounding model with applications *Probability and Mathematical Statistics* **21**, 135–147.
- [60] Hu, C.-Y., Lin, G. D. (2008) Some inequalities for Laplace transforms *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **340**, 675–686.
- [61] Hu, T., Xie, H. (2002) Proofs of closure property of NBUC and NBU(2) under convolution *Journal of Applied Probability* **39**, 125–142.
- [62] Huzak, M., Perman, M., Šikić, H. Vondraček, Z. (2004) Ruin probabilities for general perturbed risk processes. *The Annals of Applied Probability* **14**(3), 1378–1397.
- [63] Hurlimann, W. (1998) On stop-loss and the distortion pricing principle. *ASTIN Bulletin* **28**, 119–134.
- [64] Jarrahiferiz, J., Borzadaran, G. M., Roknabadi, A. R. (2016) Properties of n-Laplace transform ratio order and  $\mathcal{L}^{(n)}$ -class of life distributions. *Statistical Journal*. Vol. 14 (3), 229–244.
- [65] Kaas, R. (1993) How to (and how not to) compute stop-loss premiums in practice. *Insurance: Mathematics and Economics* **13**, 241–254.
- [66] Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M. (2004) *Modern Actuarial Risk Theory*. Kluwer Academic Publishers.
- [67] Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M. (2009) *Modern Actuarial Risk Theory: using R*. Kluwer Academic Publishers.
- [68] Kanellopoulos, L. (2023) Some Stochastic Orders over an Interval with Applications. *Risks* **11**(9), 161.
- [69] Kanellopoulos, L., Politis, K. (2024a) Some results for stochastic orders and aging properties related to the Laplace transform. *Journal of Statistical Planning and Inference* **234**, Accepted 30 May 2024.
- [70] Kanellopoulos, L. , Politis, K. (2024b) Stochastic orders and reliability properties for the deficit at ruin and bounds for the Laplace transform of a compound geometric distribution. *Submitted for publication*.

- 
- [71] Kanellopoulos, L. , Politis, K. (2024c) Some stochastic orders and reliability properties for the compound geometric distributions, their convolutions and other ruin-related quantities. *Submitted for publication*.
- [72] Karlin, S., Novikoff, A. (1963) Generalized convex inequalities. *Pacific Journal of Mathematics* **13**, 1251–1279.
- [73] Klar, B. (2002) A note on the  $\mathcal{L}$ -class of life distributions. *Journal of Applied Probability* **39**(1), 11-19.
- [74] Klar, B., Müller, A. (2003) Characterizations of classes of distributions generalizing the NBUE class. *Journal of Applied Probability* **40**, 20-32.
- [75] Klefsjö, B. (1982) The HNBUE and HNWUE classes of life distributions. *Naval Res. Logist. Quart.* **29**, 331-344.
- [76] Klefsjö, B. (1983) A useful aging property based on the Laplace transform. *Journal of Applied Probability* **20**, 615-626.
- [77] Lai, C.D., Xie, M. (2006) *Stochastic Ageing and Dependence for Reliability*. Springer Science+Business Media, Inc.
- [78] Landriault, D., Li, B., Loke, S.H., Willmot, G.E., Xu, D. (2017) A Note on the Convexity of Ruin Probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics* **74**, 1-6.
- [79] Lefèvre, C., Trufin, J., Zuyderhorff (2017) Some comparison results for finite-time ruin probabilities in the classical risk model. *Insurance: Mathematics and Economics* **77**, 143-149.
- [80] Lefèvre, C., Utev, S. (1998) On Order-Preserving Properties of Probability Metrics. *Journal of Theoretical Probability* **11**(4), 907-920.
- [81] Li, X. (2004). Some Properties of ageing notions based on the moment-generating-function order. *Journal of Applied Probability* **41**, 927-934.
- [82] Li, S., Garrido, J. (2005) On a general class of renewal process: Analysis of the Gerber-Shiu function. *Adv. Appl. Probab* **37**, 836–856.
- [83] Li, X., Kocher, S. (2001) Some new results involving the NBU(2) class of life distributions. *Journal of Applied Probability* **38**, 242-247.
- [84] Li, X., Ling, X., Li, P. (2009) A new stochastic order based upon Laplace transform with applications. *Journal of Statistical Planning and Inference* **139**, 2624-2630.
- [85] Li, C., Fang, R., Li, X. (2015) Some Aging Properties involved with compound geometric distributions. *The Indian Journal of Statistics* Vol. **77** (2), 337-350.
- [86] Marshall, A., W. (1991) Multivariate stochastic orderings and generating cones of functions. *Stochastic orders and decisions under risks, IMS Lecture notes, Monograph series* **19**. Institute of Mathematical Statistics, 231-247.
- [87] Marshall, A. W., Olkin, I. (2007) *Life distributions*. Springer Series in Statistics, New York.
- [88] Metzger, C., Rüşendorf, L. (1991) Conditional Variability ordering of distributions. *Annals of operation research* **32**, 127-140.
- [89] Mi, J. (1995) Bathtub failure rate and upside-down mean residual life .

- 
- IEEE Transactions on Reliability*, Vol **44** (3), 388-391.
- [90] Mitra, M., Basu, S.K., Bhattacharjee, M.C. (1995) Characterizing the exponential law under Laplace order domination. *Calcutta Statistical Bulletin* Vol 45., 179-180.
- [91] Mitric, I.R., Trufin, J. (2016) On a risk measure inspired from the ruin probability and the expected deficit at ruin. *Scandinavian Actuarial Journal* 2016: 932-951.
- [92] Müller, A. (1997) Stochastic orderings generated by integrals: A unified study. *Advances in Applied Probability* **29**, 414-428.
- [93] Mullero, J., Pellerey, F., Rodriguez-Griñolo, R. (2010). Negative ageing and stochastic comparisons of residual life times in multivariate frailty models. *Journal of Statistical Planning and Inference* **140**, 1594-1600.
- [94] Müller, A., Stoyan, D. (2002) *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. Wiley series in probability and statistics.
- [95] Park, K. S. (1985) Effect of burn-in on mean residual life. *IEEE Transactions on Reliability* R-34 (5), 522-523.
- [96] Pinelis, I. (2005) On L'Hospital-type rules for monotonicity. *J. Inequal. Pure Appl. Math.* **7**(2), Art. 40.
- [97] Pinelis, I. (2006) On L'Hospital-type rules for monotonicity. *J. Inequal. Pure Appl. Math.* **7**, no. 2, Article 40, 19 pages; available online at <https://emis.de/journals/JIPAM/article657.html>.
- [98] Pitts, S.M., Politis, K. (2008) Approximations for the moments of ruin time in the compound Poisson model. *Insurance: Mathematics and Economics* **42**, 668-679.
- [99] Politis, K. (2006) A functional approach for ruin probabilities. *Stochastic Models* **22**, 509-536.
- [100] Pollard, D. (1984) *Convergence of Stochastic Processes*. Springer, New York .
- [101] Psarrakos, G. (2009) A note on convolutions of compound geometric distributions. *Statistics and Probability Letters* **79**, 1231-1237.
- [102] Psarrakos, G., Politis, K. (2008). Tail bounds for the joint distribution of the surplus prior to and at ruin. *Insurance: Mathematics and Economics* **42**, 163-176.
- [103] Psarrakos, G., Politis, K. (2009). Monotonicity properties and the deficit at ruin in the Sparre Andersen model. *Scandinavian Actuarial Journal* **2**, 104-118.
- [104] Psarrakos, G. (2010) On the DFR property of the compound geometric distributions with applications in risk theory. *Insurance: Mathematics and Economics* **47**, 428-433.
- [105] Psarrakos, G. (2015) On the Integrated Tail of the Deficit in the Renewal Risk Model. *Methodology and computing in applied probability* **17**, 497–513.
- [106] Psarrakos, G. (2022) Relations between integrated tails and moments based on the deficit at ruin in the renewal risk model. *Communication in*

- 
- Statistics ? Theory and Methods* **51**, 7631–7651.
- [107] Rachev, S.T. (1991) *Probability Metrics and the Stability of Stochastic Models*. Wiley, Chichester.
  - [108] Rachev, S.T., Klebanov, L.B., Stoyanov, S.V., Fabozzi, F.J. (2013) *The Methods of Distances in the Theory of Probability and Statistics*. Springer.
  - [109] Resnick, S. I. (2002) *Adventures in Stochastic Processes, 3rd Printing*. Birkhäuser.
  - [110] Rolski, T., Schmidli, H. Schmidt, V., Teugels, J. (1999) *Stochastic processes for insurance and finance*. Chichester, UK: Wiley
  - [111] Ross, S.M. (1995) Stochastic processes, Second Edition. *Wiley series in probability and mathematical statistics*.
  - [112] Sengupta, D. (1994) Another look at the moment bounds on reliability. *Journal of Applied Probability* **31**, 777-787.
  - [113] Sengupta, D., Das, S. (2016) Sharp bounds on DMRL and IMRL classes of life distributions with specified mean. *Statistics and Probability Letters* **119**, 101-107.
  - [114] Serfozo, R. (2009) *Basics of Applied Stochastic Processes*. Springer.
  - [115] Shaked, M., and Shanthikumar, J.G. (2007) Stochastic Orders.. *Springer Series in Statistics* .
  - [116] Shaked, M., Wong, T. (1997) Stochastic orders based on ratios of Laplace transforms. *Journal of Applied Probability* **34**, 404–419.
  - [117] Shanthikumar, J. G. (1988) DFR properties of first-passage times and its preservation under geometric compounding. *Annals of Probability* **33**, 397-406.
  - [118] Sheldon Lin, X., Willmot, G. (1999) Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory. *Insurance: Mathematics and Economics* **25**, 63-84.
  - [119] Szekli, R. (1986) On the concavity of the waiting time distribution in some GI/G/I queues. *Journal of Applied Probability* **23**, 555-561.
  - [120] Szekli, R. (1995) Stochastic Ordering and Dependence in Applied Probability . *Lecture notes in Statistics, Vol. 97, Springer, Berlin*.
  - [121] Trufin, J., Albrecher, H., Denuit, M. (2011) Properties of a Risk Measure Derived from Ruin Theory. *The Geneva Risk and Insurance Review* **36**, , 174-188.
  - [122] Tsai, C. C. L. (2003) On the expectations of the present values of the time of ruin perturbed by diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics* **32**, 413-429.
  - [123] Tsai, C. C. L. (2006) On the stop loss transform and order for the surplus perturbed by diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics* **39**(1), 151-170.
  - [124] Tsai, C. C. L. (2009). On the ordering of ruin probabilities for the surplus process perturbed by diffusion. *Scandinavian Actuarial Journal* **3**, 187-204.
  - [125] Tsai, C. C. L., Lu, Y. (2010). An effective method for constructing bounds

- 
- for ruin probabilities for the surplus process perturbed by diffusion. *Scandinavian Actuarial Journal* **3**, 200-220.
- [126] Vatamidou, E., Adan, I., Vlasiou, M., Zwart, B. (2014) On the accuracy of phase-type approximations of heavy-tailed risk models, *Scandinavian Actuarial Journal* 2014(6).
- [127] Willmot, G.E. (2002a) Compound geometric residual lifetime distributions and the deficit at ruin. *Insurance: Mathematics and Economics* **30**, 421-438.
- [128] Willmot, G.E. (2002b) On higher-order properties of compound geometric distributions. *Journal of Applied Probability* **39**, 324-340.
- [129] Willmot, G.E. and Cai, J. (2004) On applications of residual lifetimes of compound geometric convolutions. *Journal of Applied Probability* **41**, 802-815.
- [130] Willmot, G.E. and Lin, X.S. (2001) *Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications*. Springer, New York.
- [131] Willmot, G. E., Sheldon Lin, X. (1998) Exact and approximate properties of the distribution of surplus before and after ruin. *Insurance: Mathematics and Economics* (23).
- [132] Yang, Z.H., Tian, J.F. (2018) The monotonicity rules for the ratio of two Laplace transforms with applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* Vol. 470 (2), 821-845.
- [133] Yang, H., Zhang, L. (2001) Spectrally negative Lévy processes with applications in risk theory. *Advances in Applied Probability* **33**, 281-291.
- [134] Κουτσόπουλος, Κ. (1990) *Αναλογιστικά Μαθηματικά, Θεωρία των Κινδύνων*. Εκδόσεις Συμμετρία..
- [135] Πολίτης, Κ. (2012) *Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου*. Εκδόσεις Σταμούλης.
- [136] Πολίτης, Κ. (2015) *Σημειώσεις Θεωρία Κινδύνου II, ΠΜΣ Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης*. Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- [137] Χελιώτης, Δ. , 2η Έκδοση (2020) *Εισαγωγή στον Στοχαστικό Λογισμό*. Εκδόσεις Κάλλιπος.
- [138] Χελιώτης, Δ. , 2η Έκδοση (2020) *Ένα δεύτερο μάθημα στις πιθανότητες*. Εκδόσεις Κάλλιπος.