ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΜΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΑΝΤΙΣΥΜΒΑΛΛΟΜΕΝΟΥ

ΘΕΟΔΟΣΙΟΣ Α. ΣΥΜΕΩΝΟΓΛΟΥ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και τη Διαχείριση Κινδύνων.

Πειραιάς,
Ιούλιος 2024

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη Συνέλευση του Τμήματος στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστήμιου Πειραιώς, στην υπ’ αριθμόν .... συνεδρίασή της, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Τα μέλη της επιτροπής ήταν:

- Μιχαήλ Μπούτσικας, Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Δημήτριος Αντζουλάκος, Αναπληρωτής Καθηγητής
- Μάρκος Κούτρας, Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS

DEPARTMENT OF STATISTICS

AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

MODELING COUNTERPARTY CREDIT RISK

THEODOSIOS. A. SIMEONOGLOY

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus,

July 2024

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους εκείνους που συνέβαλαν, λίγο έως πολύ, σε όλη αυτή πορεία των πέντε εξαμήνων του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών. Πρώτον θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, η οποία πάντα με στήριζε και ήταν αρωγός στις προσπάθειες που κατέβαλα όλα τα χρόνια των σπουδών μου, τόσο σε προπτυχιακό όσο και σε μεταπτυχιακό επίπεδο. Δεύτερον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, τον κύριο Μιχαήλ Μπούτσικα, ο οποίος με τίμησε με την επιλογή του για την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, καθώς και για την αμέριστη βοήθεια που μου προσέφερε σε όλη τη διάρκεια αυτής. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς, όλους τους καθηγητές και συμφοιτητές με τους οποίους συνεργάστηκα σε όλη τη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος. Ιδιαίτερα δε, να ευχαριστήσω με αλφαβητική σειρά τους συμφοιτητές μου: Γεωργία Ράμμου και Νικόλαο Καραμπάτση για την αμέριστη βοήθεια, ηθική και πρακτική, που μου προσέφεραν.

Περίληψη

Στη παρούσα διπλωματική εργασία, αρχικά γίνεται μια αναφορά στα πιστωτικά παράγωγα κάνοντας εισαγωγικά μια ιστορική αναδρομή και εν συνεχεία αναλύονται τα προϊόντα ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου. Μια σύμβαση ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου (CDS) συνάπτεται μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, τον αγοραστή και τον πωλητή προστασίας. Ο αγοραστής προστασίας καταβάλει ασφάλιστρα στον πωλητή προστασίας ώστε να εισπράξει αποζημίωση από αυτόν στην περίπτωση όπου πραγματοποιηθεί πιστωτικό γεγονός που σχετίζεται με μια συγκεκριμένη οντότητα αναφοράς. Σε αυτήν την σύμβαση ο αγοραστής προστασίας διατρέχει τον επιπλέον κίνδυνο (κυρίως σε εξωχρηματιστηριακές συμφωνίες) να χρεοκοπήσει ο αντισυμβαλλόμενος (ο πωλητής προστασίας) και κατά συνέπεια να μην είναι σε θέση να αποζημιώσει τον αγοραστή προστασίας.

Εν συνεχεία θα παρουσιάσουμε το αντίστοιχο ρυθμιστικό πλαίσιο καθώς επίσης και διάφορα μοντέλα μέτρησης και εκτίμησης του κινδύνου του αντισυμβαλλόμενου παραθέτοντας πληθώρα παραδειγμάτων καθώς επίσης και τρόπους για τον υπολογισμό του.

Τέλος, παραθέτουμε δύο παραδείγματα και με την βοήθεια της γλώσσας προγραμματισμού R εκτιμούμε τον πιστωτικό κίνδυνο του αντισυμβαλλομένου μέσω προσομοίωσης, σχολιάζοντας τα αποτελέσματα που λάβαμε.

Abstract

In this diploma thesis, we first make a brief presentation to credit derivatives by initially making a historical review and then by analyzing credit default swap products. A credit default swap agreement (CDS) is a contract between two counterparties, the buyer and the protection seller. The buyer of protection pays premiums to the seller of protection in order to collect compensation from him in the case that a credit event related to a reference entity occurs. In this contract the protection buyer runs the additional risk (mainly for over-the-counter deals) that the counterparty (the protection seller) may also default and consequently be unable to compensate the protection buyer.

Next, we present the respective regulatory framework as well as various models for measuring and assessing the counterparty's risk, reviewing a variety of examples as well as ways to measure and calculate the respective risk.

Finally, we numerically investigate two specific examples with the help of R software package where we estimate the counterparty credit risk via Monte Carlo simulation techniques, commenting on the results obtained.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1, Εισαγωγή στα πιστωτικά παράγωγα

1.1 Ιστορική Αναδρομή

Μία σημαντική κατηγορία χρηματοοικονομικών προϊόντων τα οποία εμφανίστηκαν στα τέλη της δεκαετίας του 1990 είναι τα πιστωτικά παράγωγα (credit-derivatives) , τα οποία είναι συμβόλαια όπου η πληρωμή εξαρτάται από την πιστοληπτική ικανότητα μιας ή περισσοτέρων εταιρειών ή κρατικών οντοτήτων. Από το 2007, η αγορά πιστωτικών παραγώγων είχε προχωρήσει σε σημαντική αντιστάθμιση του συνολικού πιστωτικού κινδύνου στην αγορά. Συγκεκριμένα οι τράπεζες την εποχή εκείνη έκαναν εκτεταμένη χρήση πιστωτικών παραγώγων για να μετατοπίσουν τον πιστωτικό κίνδυνο σε άλλα μέρη του χρηματοπιστωτικού συστήματος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η Lehman Brothers η οποία έκανε εκτεταμένη χρήση πιστωτικών παραγώγων και σε συνδυασμό με την χρήση δανείων οδηγήθηκε τον Σεπτέμβριο του 2008 σε χρεωκοπία.

<u>Πιστωτικά Παράγωγα Προϊόντα</u>

Με τον όρο παράγωγα εννοούμε προϊόντα των οποίων η υποκείμενη αξία είναι συνδεδεμένη με ένα άλλο περιουσιακό στοιχείο, όπως μία μετοχή. Τα πιστωτικά παράγωγα προϊόντα (credit derivatives) αποτελούν μια ιδιαίτερη κατηγορία χρηματοοικονομικών εργαλείων και είναι σχεδιασμένα ώστε όχι μόνο να απομονώνουν συγκεκριμένες όψεις του πιστωτικού κινδύνου, αλλά και να βοηθούν στη μεταφορά του μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων.

Ως παράγωγα προϊόντα, η αξία τους προέρχεται («παράγεται») από την αξία του υποκείμενου τους τίτλου και ως πιστωτικά προϊόντα η αξία τους καθορίζεται από τον πιστωτικό κίνδυνο όπου εμπεριέχεται στον υποκείμενο τίτλο. Υποκείμενος τίτλος για τα πιστωτικά παράγωγα μπορεί να είναι οποιαδήποτε μορφή χρέους (π.χ δάνεια). Τα πιστωτικά παράγωγα επιτρέπουν την διαχείριση του πιστωτικού κινδύνου (με παρόμοιο τρόπο όπως στον κίνδυνο αγοράς) συνάπτοντας συμβάσεις πιστωτικών παραγώγων με σκοπό να μειώσουν ή να εξαλείψουν την έκθεση σε πιστωτικό κίνδυνο, παρέχοντας μια προστασία έναντι απωλειών που προκύπτουν από συγκεκριμένα πιστωτικά γεγονότα (credit events). Με τον όρο αυτόν θεωρούμε οποιοδήποτε γεγονός θα προκαλέσει την ενεργοποίηση της καταβολής της αποζημίωσης της σύμβασης και συνεπώς ο πωλητής προστασίας θα αναγκαστεί να πληρώσει το συμφωνημένο ποσό της αποζημίωσης. Σε μια σύμβαση πιστωτικών παραγώγων υπάρχουν δυο αντισυμβαλλόμενα μέρη:

- Ο αγοραστής προστασίας (protection buyer)
- Ο πωλητής προστασίας (protection seller)

Ο σκοπός του αγοραστή προστασίας είναι να μειώσει τον πιστωτικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου του, καταβάλλοντας περιοδικές πληρωμές στον πωλητή προκειμένου να αποζημιωθεί σε περίπτωση ενός πιστωτικού γεγονότος. Από την άλλη μεριά ο πωλητής προστασίας επιδιώκει την έκθεση σε μια συγκεκριμένη αγορά ή προϊόν και ταυτόχρονα ζητά υψηλότερες αποδόσεις εξαιτίας της έκθεσής του σε πιστωτικό κίνδυνο.

Επιπλέον σημαντικό είναι να αναφέρουμε ότι τα πιστωτικά παράγωγα προϊόντα κατηγοριοποιούνται σε

- Απλά ή μιας οντότητας (single-name)
- Πολλαπλών οντοτήτων (multi-name)

Τα πιο δημοφιλή και αυτά που θα ασχοληθούμε σε αυτήν την εργασία είναι τα παράγωγα επί μιας οντότητας ή αλλιώς single-name Credit Default Swaps.

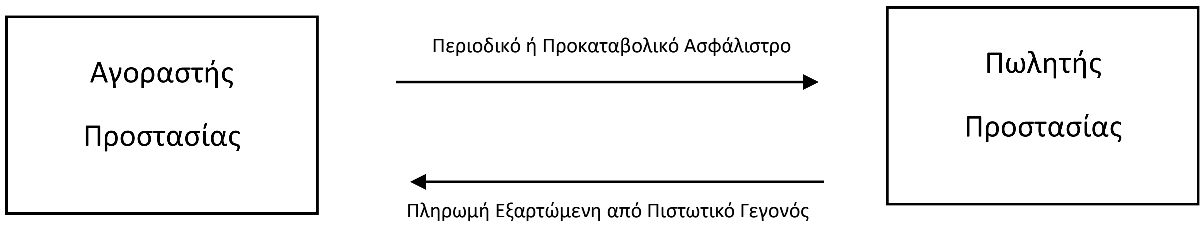
1.2 Credit Default Swaps

Ένα από τα σημαντικότερα χρηματοοικονομικά εργαλεία το οποίο απέκτησε μεγαλύτερη σημασία από το 2000 είναι οι συμφωνίες ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου (CDS). Η χρησιμότητα τους έγκειται στο γεγονός ότι μπορούν να αντισταθμίσουν τον πιστωτικό κίνδυνο με όμοιο τρόπο όπως στον κίνδυνο αγοράς.

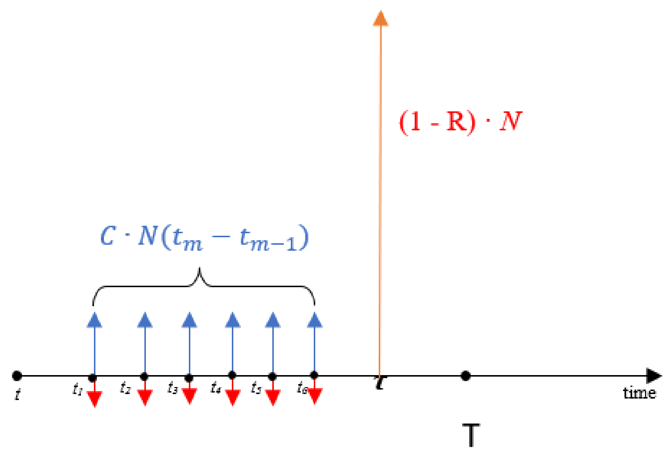
Πρόκειται για εξωχρηματιστηριακές (OTC) συμβάσεις οι οποίες προσφέρουν κάλυψη και ασφάλεια στον αγοραστή σε περίπτωση όπου συμβεί ένα πιστωτικό γεγονός (Credit Event) από μία οντότητα αναφοράς (Reference Entity). Αξίζει να τονίσουμε ότι δεν πρέπει να τα συγχέουμε με τα κλασσικά ασφαλιστήρια συμβόλαια παρ’ όλο που παρέχουν ασφάλεια. Αυτό συμβαίνει διότι για την αγορά ενός CDS ο επενδυτής δεν είναι απαραίτητο να κατέχει κάποιον τίτλο για τον οποίο ασφαλίζεται. Γενικά το CDS αναφέρεται σε ένα ομόλογο ή ένα δάνειο της οντότητας αναφοράς (πχ Εταιρεία ή Πιστωτικό Ίδρυμα). Επιπλέον σημαντικό είναι να αναφέρουμε ότι η οντότητα αναφοράς δεν συμμετέχει στην συμφωνία μεταξύ των συμβαλλόμενων (Counterparties). Σε τέτοιου είδους συμφωνίες ο αγοραστής προστασίας (Protection Buyer) πραγματοποιεί μια σειρά πληρωμών στον πωλητή προστασίας (Protection Seller) μέχρι τη λήξη του συμβολαίου ή μέχρι να συμβεί ένα πιστωτικό γεγονός. Αντίθετα ο πωλητής προστασίας αναλαμβάνει την υποχρέωση της πληρωμής των προσυμφωνημένου ποσού ή αλλιώς της ονομαστικής αξίας των ομολόγων στην περίπτωση όπου η οντότητα αναφοράς αθετήσει τις δανειακές της υποχρεώσεις.

Οι πληρωμές που καταβάλει ο αγοραστής προστασίας στον πωλητή προστασίας μπορεί να γίνονται κάθε μήνα κάθε, τρείς μήνες, κάθε έξι μήνες ή κάθε χρόνο και υπάρχει η δυνατότητα να δίνονται προκαταβολικά. Οι πληρωμές αυτές ονομάζονται ασφάλιστρα (premiums) και ανά έτος καταβάλλονται ως ασφάλιστρα ένα ποσοστό του ονομαστικού ποσού της κάλυψης το οποίο καλείται πιστωτικό περιθώριο (spread). Το πιστωτικό περιθώριο μετράται σε μονάδες βάσης (Basis Points), συγκεκριμένα 100 μονάδες βάσης αντιστοιχούν σε ποσοστό 1%. Επιπλέον η διάρκεια ενός CDS μπορεί να 1,2,3,5,7,10 χρόνια.

Μαζί με την διάρκεια και την ονομαστική αξία του συμβολαίου οι αντισυμβαλλόμενοι διαπραγματεύονται επίσης και τον τρόπο διακανονισμού ο οποίος ο γίνεται είτε με παράδοση του ομολόγου είτε με μετρητά, είτε με δημοπρασία. Στην περίπτωση διακανονισμού σε μετρητά υπάρχει χρηματική ανταλλαγή από τον πωλητή προστασίας στον αγοραστή προστασίας.



Στην Περίπτωση φυσικού διακανονισμού, ο αγοραστής προστασίας παραδίδει ένα ομόλογο στον πωλητή προστασίας και λαμβάνει το πλασματικό ποσό κεφαλαίου. Ο φυσικός διακανονισμός είναι δυνατός μόνο εάν η οντότητα αναφοράς είναι ομόλογο ή αν το πιστωτικό γεγονός σχετίζεται με την αθέτηση του ομόλογου. Ο φυσικός διακανονισμός επικρατούσε την περίοδο του 1990 ενώ οι περισσότεροι διακανονισμοί σήμερα είναι σε μετρητά. Παρακάτω θα παραθέσουμε ένα σχήμα για να γίνει πιο ξεκάθαρη η λειτουργεία ενός CDS.



Το παραπάνω σχήμα εστιάζει στον τρόπο λειτουργίας μιας απλής σύμβασης ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου επί μιας οντότητας αναφοράς. Θα πρέπει να γίνει σαφές ότι η σύμβαση ορίζεται από:

1. Την οντότητα αναφοράς (Reference Entity)
2. το ονομαστικό ποσό κάλυψης N (Notional Principal)
3. Την ωρίμανση ή την διάρκεια T (Maturity or Tenor)
4. Την συχνότητα πληρωμών (Payment Frequency)
5. Το Ποσοστό ανάκτησης R (Recovery Rate)
6. Ο ρυθμός καταβολής ασφαλίστρων ή πιστωτικό περιθώριο C (Coupon Rate, spread)

Έτσι ο αγοραστής προστασίας θα πληρώνει μία σταθερή πληρωμή (Fixed Payment) ίση με $CN(t_m - t_{m-1})$, από την ημερομηνία έναρξης του συμβολαίου κατά τους χρόνους $t_1, t_2, \ldots$ έως την ημερομηνία λήξης του (Maturity Date T) ή μέχρι την χρονική στιγμή αθέτησης τ (Default Time τ) αν $\tau < T$.

Επιπλέον το ετήσιο σκέλος ασφαλίστρων (Annual Premium Leg) θα ισούται με $C \cdot N$.

Παρακάτω θα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις ανάλογα με την ύπαρξη ή μη ύπαρξη ενός πιστωτικού γεγονότος:

1. Στην περίπτωση όπου δεν συμβεί κάποιο πιστωτικό γεγονός ο αγοραστής προστασίας θα πληρώσει συνολικά ποσό το οποίο δίνεται από τον εξής τύπο: $C \cdot N \cdot (T - t)$ (μη αποπληθωρισμένο).

2. Τώρα στην περίπτωση ύπαρξης ενός πιστωτικού γεγονότος το οποίο σημειώνεται πριν από την λήξη του συμβολαίου ο πωλητής προστασίας θα αποζημιώσει τον αγοραστή προστασίας με ένα ποσό το οποίο προκύπτει από τον εξής τύπο: $(1 - R) \cdot N$

Ήρθε η στιγμή να δώσουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα για καλύτερα κατανόηση.

Θεωρούμε ένα CDS το οποίο έχει ονομαστικό ποσό κάλυψης 20 εκ.€, ημερομηνία λήξης 5 χρόνια καθώς και περιοδικές πληρωμές κάθε τρίμηνο. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την ύπαρξη ενός πιστωτικού γεγονότος και η εταιρεία (οντότητα αναφοράς) έρχεται σε χρεοκοπία. Υποθέτουμε ότι το ποσοστό ανάκτησης έχει οριστεί στο 30% και το πιστωτικό περιθώριο ισούται με 4%.

Αναλύοντας το παραπάνω σχήμα αντιλαμβανόμαστε ότι θα έχουμε περιοδικές πληρωμές ανά τρίμηνο.

Κάθε τρίμηνο αν η οντότητα αναφοράς δεν αθετήσει τις υποχρεώσεις της τότε ο αγοραστής προστασίας θα πληρώνει στον πωλητή προστασίας ένα ασφάλιστρο ύψους:

$$4\% \cdot 20\text{εκ} \cdot 0{,}25 = 200.000€.$$

Έτσι ο αγοραστής προστασίας κατά τη διάρκεια των 5 ετών θα πληρώσει συνολικά :

$$C \cdot N \cdot (T - t) = 4\% \cdot 20εκ \cdot 5 = 4\ εκ.€$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η εταιρεία αθετεί τις υποχρεώσεις της δύο έτη και πέντε μήνες μετά την ημερομηνία έναρξης του CDS. Σε αυτήν την περίπτωση ο αγοραστής προστασίας θα πληρώσει 200.000 € επί 9 κατά τη διάρκεια των εννέα τριμήνων και θα λάβει ασφάλιστρο από τον πωλητή προστασίας την χρονική στιγμή της χρεοκοπίας της τάξης:

$$(1 - R) \cdot N = (1 - 30\%) \cdot 20\ εκ. = 14\ εκ.€$$

1.3 Αγοραία Αξία ενός CDS (Mark to Market Value of a CDS)

Για να υπολογίσουμε την αγοραία αξία ενός CDS (MtM value of a CDS) θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω τύπο ο οποίος είναι όμοιος με αυτών της τιμολόγησης των ομολόγων λαμβάνοντας υπόψιν ότι το ασφάλιστρο δεν καταβάλλεται μετά την χρονική στιγμή τ της αθέτησης των υποχρεώσεων. Επομένως η στοχαστική προεξοφλητική αξία του σκέλους των ασφαλίστρων[1] είναι ως εξής:

$$SV_t(PL) = \sum_{t_m \geq t} C \cdot N \cdot (t_m - t_{m-1}) \cdot 1\,\{\tau > t_m\} \cdot e^{-\int_t^{t_m} r(s)ds}$$

Χρησιμοποιώντας τις τυπικές παραδοχές ότι ο χρόνος αθέτησης είναι ανεξάρτητος από τα επιτόκια και το ποσοστό ανάκτησης συμπεραίνουμε ότι η Παρούσα Αξία του σκέλους των ασφαλίστρων διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} PV_t\,(PL) &= E\left[\sum_{t_m \geq t} C \cdot N \cdot \Delta t_m \cdot 1\{\tau > t_m\} \cdot e^{-\int_t^{t_m} r(s)ds} | \mathcal{F}_t\right] \\ &= \sum_{t_m \geq t} C \cdot N \cdot \Delta t_m \cdot E[1\{\tau > t_m\} | \mathcal{F}_t] \cdot E\left[e^{-\int_t^{t_m} r(s)ds} | \mathcal{F}_t\right] \\ &= C \cdot N \cdot \sum_{t_m \geq t} \Delta t_m\ \ S_t(t_m)\, B_t(t_m) \end{aligned}$$

όπου η $S_t(x)$ είναι η συνάρτηση επιβίωσης του χρόνου αθέτησης τ και $B_t(x)$ ο συντελεστής παρούσας αξίας την χρονική στιγμή x, δεδομένου ότι βρισκόμαστε στο χρόνο t.

Κάνοντας τώρα την υπόθεση ότι η αποζημίωση καταβάλλεται την προκαθορισμένη χρονική στιγμή τ της αθέτησης των υποχρεώσεων έπεται ότι η στοχαστική προεξοφλητική αξία του σκέλους της αποζημίωσης είναι ως εξής:

$$SV_t\,(DL) = (1 - R) \cdot N \cdot 1\{\tau \leq T\} \cdot e^{-\int_t^{\tau} r(s)\,ds}$$

Κατά συνέπεια η παρούσα αξία διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} PV_t(DL) &= E\left[(1 - R) \cdot N \cdot 1\{\tau \leq T\} \cdot e^{-\int_t^{\tau} r(s)ds} | \mathcal{F}_t\right] \\ &= (1 - R) \cdot N \cdot E[1\{\tau \leq T\} \cdot B_t\,(\tau) | \mathcal{F}_t] \\ &= (1 - R) \cdot N \int_t^T B_t(u) \cdot f_t(u)\, du \end{aligned}$$

Όπου η $f_t(u)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας η οποία σχετίζεται με την συνάρτηση επιβίωσης $S_t\,(u)$.

[1] Για να κάνουμε πιο απλό τον τύπο δεν θα συμπεριλάβουμε το δεδουλευμένο ασφάλιστρο

Αντιλαμβανόμαστε ότι η αγοραία αξία του CDS[2] προκύπτει από την διαφορά της παρούσας αξίας του σκέλους των ασφαλίστρων με την παρούσα αξία του σκέλους της αποζημίωσης.

Έχουμε λοιπόν:

$$
\begin{aligned}
P_t(T) &= PV_t(DL) - PV_t(PL) = \\
&= (1-R)N\int_t^T B_t(u)f_t(u)\,du - C\cdot N\sum_{t_m\geq t}\Delta t_m S_t(t_m)\cdot B_t(t_m) \\
&= N\left((1-R)\int_t^T B_t(u)\cdot f_t(u)\,du - C\cdot RPV_{01}\right)
\end{aligned}
$$

όπου $RPV_{01} = \sum_{t_m\geq t}\Delta t_m \cdot S_t\,(t_m)\cdot B_t(t_m)$ το οποίο ονομάζεται risky present value επί 1 μονάδας βάσης.

1.4 Πιστωτικό περιθώριο (Spread)

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως τα ασφάλιστρα που καταβάλει ο αγοραστής προστασίας στον πωλητή προστασίας σχετίζονται αντιστρόφως με την τιμή του CDS.

Κατά την ημερομηνία έναρξης, η παρούσα αξία του σκέλους των ασφαλίστρων ισούται με την παρούσα αξία του σκέλους της αποζημίωσης (default leg) επομένως το CDS spread αντιστοιχεί στο επιτόκιο του τοκομεριδίου έτσι ώστε: ${P_t}^{buyer} = 0$ και επομένως η τιμή του Spread διαμορφώνεται ως εξής:

$$
s = \frac{(1-R)\int_t^T B_t(u)\cdot f_t(u)du}{\sum_{t_m\geq t}\Delta t_m\, S_t(t_m)\, B_t(t_m)}
$$

Όπου το s είναι στην πραγματικότητα spread C ώστε η αρχική αξία του CDS να είναι μηδέν. Διακρίνουμε τώρα μερικές περιπτώσεις ώστε να περιγράψουμε πως διαφοροποιείτε η τιμή του Spread.

---

[2] Η P_t είναι η αξία του CDS για τον αγοραστή προστασίας. Έχουμε λοιπόν: $P_t^{buyer}\,(T) = P_t(T)$ και $P_t^{Seller}\,(T) = -P_t(T)$

- Στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει ο κίνδυνος αθέτησης η συνάρτηση επιβίωσης ισούται με ένα ($S_t(u) = 1$) τότε διαμορφώνοντας τον παραπάνω τύπο της τιμής του spread καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $S = 0$.
- Στην περίπτωση όπου το ποσοστό ανάκτησης ισούται με 100% τότε και πάλι η τιμή του spread θα ισούται με μηδέν.
- Στην περίπτωση όπου το σκέλος πριμοδότησης καταβάλλεται συνεχώς, η τιμή του spread διαμορφώνεται ως εξής:

$$s = \frac{(1-R)\int_t^T B_t(u) \cdot f_t(u)\, du}{\int_t^T B_t(u) S_t(u) du}$$

- Εάν τα επιτόκια είναι μηδενικά και οι χρόνοι αθέτησης είναι εκθετικοί με παραμέτρους:

$S_t(u) = \ e^{-\lambda\,(u-t)}$ και $f_t(u) = \lambda e^{-\lambda(u-t)}$

Θα συμπεράνουμε ότι:

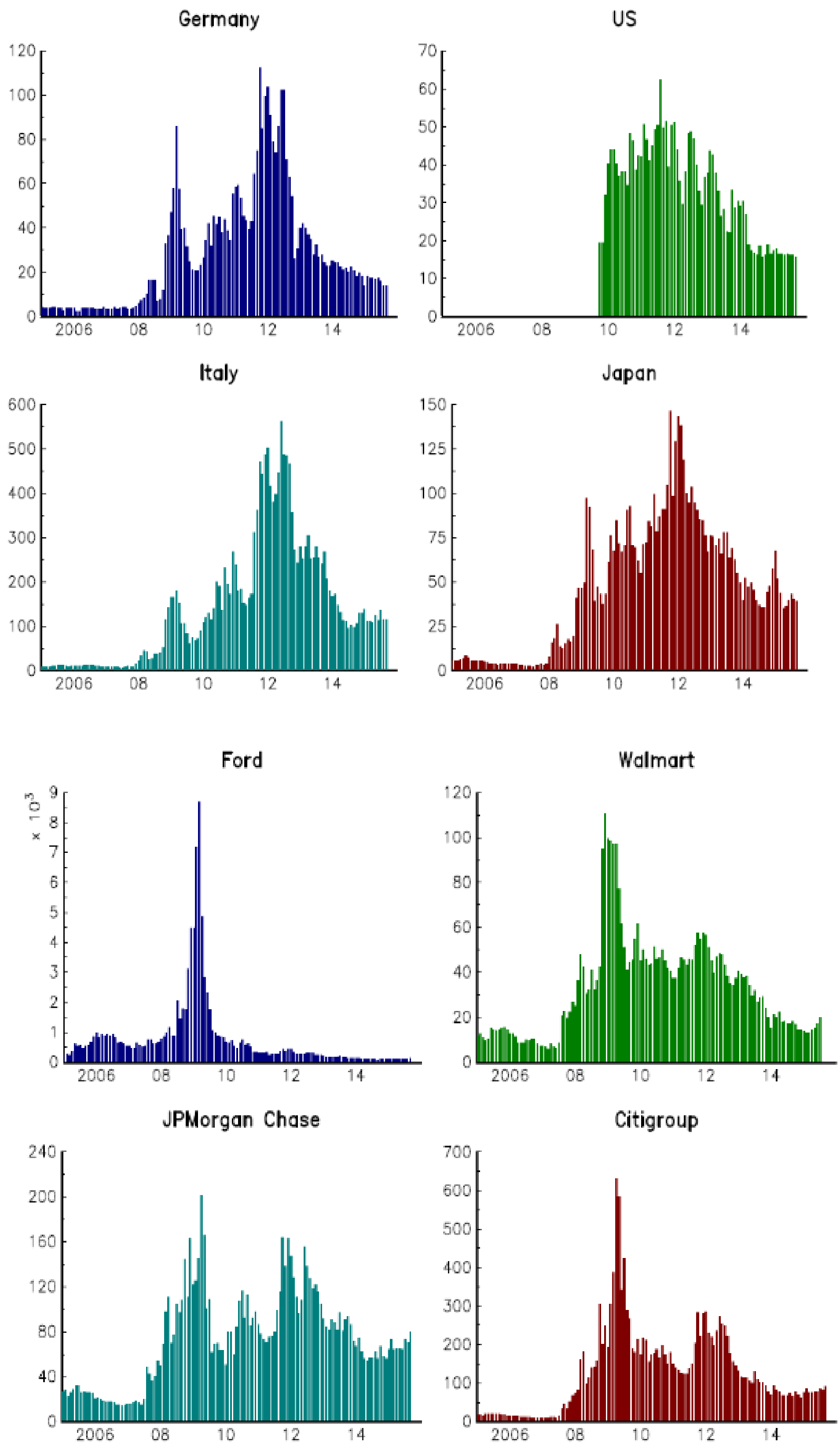
$$s = \frac{(1-R) \cdot \lambda \cdot \int_t^T e^{-\lambda(u-t)} du}{\int_t^T e^{-\lambda(u-t)}\, du} = (1-R) \cdot \lambda$$

- Εάν το λ είναι σχετικά μικρό η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:
  $s \approx (I - R) \cdot PD$ [3], όπου PD είναι η πιθανότητα αθέτησης ενός έτους.

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως “Πιστωτικό Τρίγωνο”, διότι είναι μία σχέση τριών μεταβλητών όπου η γνώση οποιονδήποτε δυο είναι επαρκής για τον υπολογισμό της τρίτης. Αξίζει να αναφέρουμε ότι το spread του CDS είναι περίπου ίσο με τη ζημιά ενός έτους και παρέχει τις ίδιες πληροφορίες με την συνάρτηση επιβίωσης καθώς είναι μία αυξανόμενη συνάρτηση της πιθανότητας αθέτησης.

Στα παρακάτω σχήματα θα παρουσιάσουμε την εξέλιξη ορισμένων spreads CDS επί κρατικών καθώς και εταιρικών οντοτήτων για πενταετή διάρκεια (σε μονάδες βάσης).

[3] $PD = \Pr\{\tau \le t+1\,|\tau > t\} = 1 - S_t\,(t+1) = 1 - e^{-\lambda} \ \cong \lambda$



Πηγή: Handbook of Financial Risk Management, Thierry Roncalli

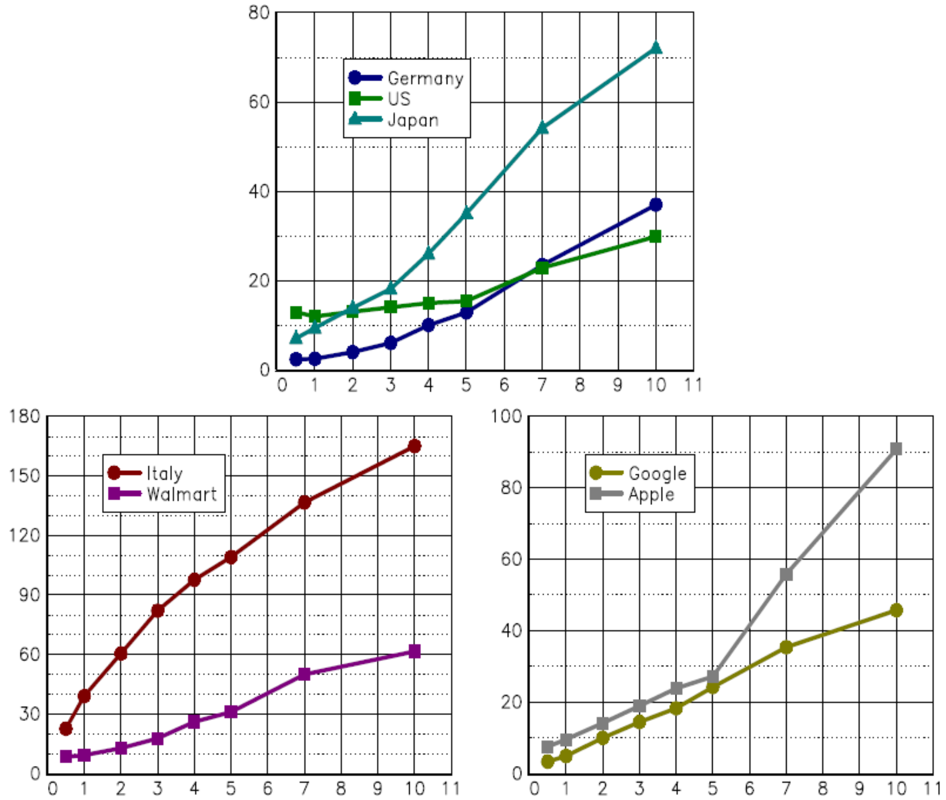
Στις παραπάνω εικόνες παρατηρούμε την αύξηση των Credit Spreads μετά την χρηματοπιστωτική αναταραχή το 2008 και την χρεοκοπία της Lehman Brothers ακόμα στην πρώτη εικόνα βλέπουμε την ευαισθησία των γερμανικών και ιταλικών spreads σε σχέση με την κρίση της Ευρωζώνης καθώς και την διαφορά επιπέδου μεταξύ των διάφορων χωρών. Είναι προφανές στην πρώτη εικόνα ότι το spread είναι παγκοσμίως χαμηλότερο για τις ΗΠΑ συγκριτικά με την Γερμανία και την Ιαπωνία. Αναφορικά τώρα με την δεύτερη εικόνα παρατηρούμε ότι το spread ορισμένων εταιρικών οντοτήτων μπορεί να είναι χαμηλότερο από το spread ανεπτυγμένων χωρών. Αυτή είναι η περίπτωση Walmart της οποίας το spread είναι χαμηλότερο από 20 μονάδες βάσεις από το 2014. Επιπλέον στο σχήμα όπου αναπαριστά την περίπτωση της Ford το 2009 παρατηρούμε ότι η εξάπλωση του CDS εκρήγνυται όταν μία εταιρεία (ή μία χώρα) αντιμετωπίζει μεγάλες δυσκολίες.

Μένοντας ακόμα στο δεύτερο σχήμα παρατηρούμε ότι τα CDS Spread της Citigroup είναι μεγαλύτερα από τις JP Morgan το οποίο μας δείχνει ότι ο κίνδυνος αθέτησης της Citigroup είναι μεγαλύτερος από αυτόν της JP Spread μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την σύγκριση του κινδύνου αθέτησης δυο οντοτήτων στον ίδιο τομέα.

1.5 Καμπύλη των Credit Spreads (CDS spread Curve)

Το CDS spread αλλάζει με την πάροδο του χρόνου, αλλά εξαρτάται από τη λήξη ή τη διάρκεια. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε μία δομή credit spreads για μία δεδομένη ημερομηνία t. Η δομή αυτή είναι γνωστή ως καμπύλη των credit spreads και αναφέρεται ως $s_t(T)$ όπου T είναι ο χρόνος λήξης.

Παρακάτω παραθέτουμε ένα σχήμα για την καλύτερη κατανόηση της καμπύλης των Credit Spreads



Πηγή: Handbook of Financial Risk Management, Thierry Roncalli

Στην παραπάνω εικόνα βλέπουμε για τις διαφορετικές αυτές οντότητες την πιστωτική καμπύλη μία δεδομένη χρονική στιγμή (17 Σεπτεμβρίου 2015). Παρατηρούμε λοιπόν ότι spread του CDS αυξάνεται με την χρονική διάρκεια κάλυψης. Αυτή είναι η πιο συνηθισμένη περίπτωση για οντότητες επενδυτικής βαθμίδας (IG) των οποίων ο βραχυπρόθεσμος κίνδυνος αθέτησης είναι χαμηλός, ενώ απεναντίας ο μακροπρόθεσμος κίνδυνος αθέτησης είναι υψηλότερος. Πιο συγκεκριμένα ο πιστωτικός κίνδυνος της Γερμανίας είναι χαμηλότερος από τον πιστωτικό κίνδυνο των ΗΠΑ εάν η ωρίμανση είναι μικρότερη από Πέντε έτη, αλλά είναι υψηλότερος μακροπρόθεσμα. Αυτό το συμπέρασμα αποτυπώνεται και στο σχήμα παρατηρώντας μία διαφορά 4 μονάδες βάσης μεταξύ της Google και της Apple κατά μέσο όρο όταν ο χρόνος μέχρι τη λήξη είναι μικρότερος από πέντε χρόνια καθώς επίσης και στην περίπτωση των 10 Years CDS παρατηρούμε ότι το spread της Apple διαμορφώνεται στις 90.8 μονάδες βάσεις ενώ για την Google μόνο στις 45.75 μονάδες βάσεις.

1.6 Χρήση των CDS για αντιστάθμιση του Πιστωτικού Κινδύνου

Η κύρια χρησιμότητα των CDS είναι αυτή της αντιστάθμισης του πιστωτικού κινδύνου των εταιρικών ομολόγων από τις τράπεζες και τις ασφαλιστικές εταιρείες.

Αρχικά υποθέτουμε ότι ο κάτοχος του ομολόγου θα αγοράσει μία προστασία χρησιμοποιώντας ένα CDS του οποίου οι ημερομηνίες καθορισμού του σκέλους ασφαλίστρων θα είναι ίδιες με αυτές του τοκομεριδίου του ομολόγου και εν συνέχεια υποθέτουμε ότι το πιστωτικό γεγονός είναι η αθέτηση του ομολόγου καθώς και το ότι το ονομαστικό ποσό κάλυψης του CDS ισούται με το πλασματικό κεφάλαιο του ομολόγου. Ο κάτοχος λοιπόν του ομολόγου λαμβάνει τοκομερίδιο C_{t_m} και καταβάλει στον πωλητή προστασίας ασφάλιστρο $s \cdot N$. Άρα η καθαρή ταμιακή ροή του ομολόγου θα ισούται με:

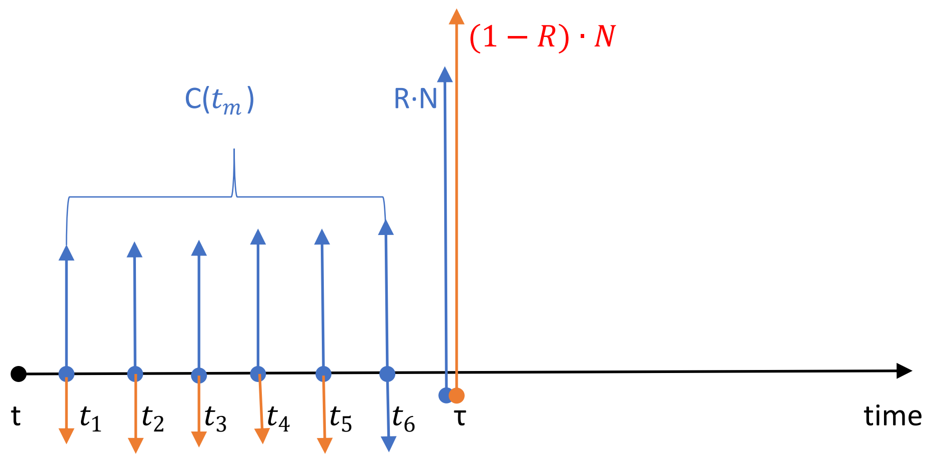
$$C_{t_m} - s \cdot N.$$

Στην περίπτωση τώρα της αθέτησης των υποχρεώσεων θα συμβούν τα εξής:

- Η αξία του Ομολόγου θα ισούται με $R \cdot N$
- Ο πωλητής προστασίας πληρώνει στον κάτοχο του ομολόγου το προεπιλεγμένο σκέλος το οποίο ισούται με: $(1 - R) \cdot N$
- Οι καθαρές ταμειακές ροές θα είναι ίσες με: $R \cdot N + (1 - R) \cdot N = N$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι στην περίπτωση αθέτησης των υποχρεώσεων έχουμε πλήρη αντιστάθμιση του Πιστωτικού κινδύνου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι η ετήσια απόδοση R_p αυτού του αντισταθμισμένου χαρτοφυλακίου είναι η διαφορά μεταξύ της απόδοσης έως τη λήξη y του ομολόγου και του ετήσιου κόστους προστασίας, s. Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω προκύπτει ο ακόλουθος τύπος: $R_p = y - s$.

Για την καλύτερη κατανόηση της αντιστάθμισης του πιστωτικού κινδύνου με την χρήση CDS παραθέτουμε το ακόλουθο σχήμα.



Οι τράπεζες, οι χρηματιστηριακές καθώς και οι ασφαλιστικές εταιρείες προτιμούν την χρήση των CDS ως μέσο αντιστάθμισης του Πιστωτικού κινδύνου καθώς επίσης και της χρησιμότητας των CDS ως χρηματοοικονομικά μέσα για την έκφραση του πιστωτικού κινδύνου. Γι’ αυτόν ακριβώς το λόγο έχουμε την περίπτωση της «μακράς πίστωσης» η οποία αναφέρεται στην θέση του πωλητή προστασίας που εκτίθεται στον Πιστωτικό κίνδυνο καθώς και της «βραχυπρόθεσμης Πίστωσης» η οποία αναφέρεται στην θέση του αγοραστή προστασίας που πούλησε τον Πιστωτικό κίνδυνο. Για την καλύτερη κατανόηση της αποτίμησης αυτών των θέσεων στην αγορά, εξετάζουμε την αρχική θέση κατά την ημερομηνία έναρξης t της σύμβασης των CDS. Στην περίπτωση αυτή το spread CDS $s_t(T)$ επαληθεύει ότι η ονομαστική αξία του CDS είναι ίση με μηδέν.

Εισάγοντας τώρα τον συμβολισμό $P_{t,t'}(T)$ ο οποίος ορίζει την αποτίμηση στην αγορά μιας θέσης CDS της οποίας η ημερομηνία έναρξης είναι t, η ημερομηνία αποτίμησης είναι t' και η ημερομηνία λήξης είναι T. Θα έχουμε:

$$P_{t,t}^{seller}(T) = P_{t,t}^{buyer}(T) = 0.$$

Έτσι κατά την ημερομηνία $t' > t$, η αγοραία αξία του CDS θα είναι:

$$P_{t,t'}^{buyer}(T) = N\left[(1-R)\int_{t'}^{T} B_{t'}(u) f_{t'}(u)du - s_t(T)RPV_{01}\right]$$

Ενώ η τιμή των CDS spread ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$P_{t',t'}^{buyer}(T) = N\left[(1-R)\int_{t'}^{T} B_{t'}(u) f_{t'}(u)du - s_{t'}(T)RPV_{01}\right] = 0$$

Θα οδηγηθούμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι το P&L του αγοραστή προστασίας θα είναι:

$$\Pi^{buyer} = P_{t,t'}^{buyer}(T) - P_{t,t}^{buyer}(T) = P_{t,t'}^{buyer}(T)$$

Γνωρίζοντας όμως ότι: $P_{t',t'}^{buyer}(T) = 0$ συμπεραίνουμε ότι:

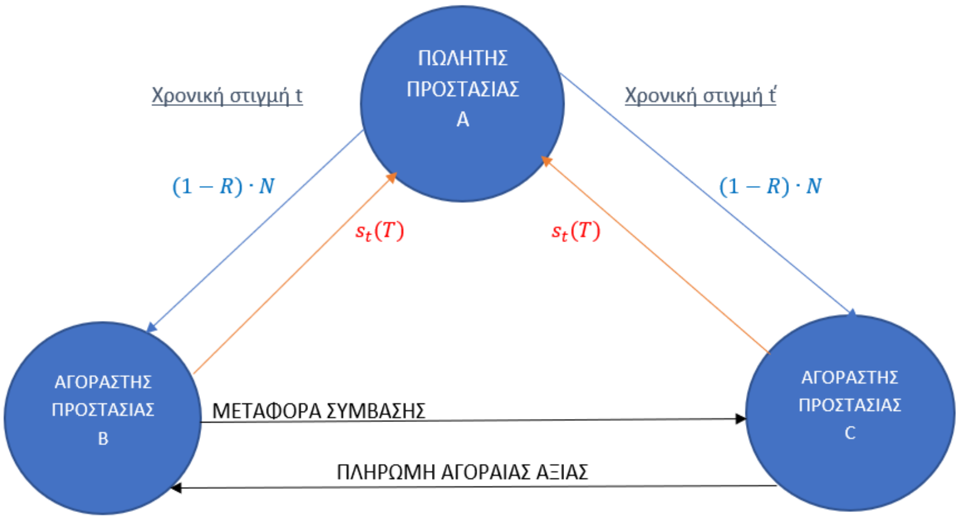
$$\begin{aligned}
&\Pi^{buyer} = P_{t,t'}^{buyer}(T) - P_{t',t'}^{buyer}(T)\\
&= N\left[(1-R)\int_{t'}^{T} B_{t'}(u) f_{t'}(u)du - s_t(T)\, RPV_{01}\right]\\
&-N\left[(1-R)\int_{t'}^{T} B_{t'}(u) f_{t'}(u)du - s_{t'}(T)\, RPV_{01}\right]\\
&= N[s_{t'}(T) - s_t(T)]\, RPV_{01}
\end{aligned}$$

Στην παραπάνω λοιπόν εξίσωση υπογραμμίζεται ο ρόλος του RPV_{01} κατά τον υπολογισμό του P&L (Profit and Loss) της θέσης του CDS.

Για το λόγο ότι : $\Pi^{seller} = -\Pi^{buyer}$ διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. *Αν* $s_{t'}(T) > s_t(T)$, τότε ο αγοραστής προστασίας θα αποκομίσει κέρδος. Αυτό συμβαίνει επειδή αυτό το βραχυπρόθεσμο πιστωτικό άνοιγμα έχει επωφεληθεί από την αύξηση του κινδύνου αθέτησης. Σε αυτήν την περίπτωση ο αγοραστής προστασίας έχει τρείς επιλογές:
   - Θα μπορούσε να κλείσει την θέση του στο CDS εάν ο πωλητής προστασίας συμφωνήσει. Αυτό σημαίνει ότι ο τελευταίος πληρώνει την αγοραία αξία $P_{t,t'}^{buyer}(T)$ στον αγοραστή προστασίας.
   - Θα μπορούσε να αντισταθμίσει την αγοραία αξία με την πώληση του CDS επί της ίδιας οντότητας αναφοράς καθώς και στην ίδια ληκτότητα. Στην περίπτωση αυτή συνεχίζει να πληρώνει το spread $s_t(T)$ όμως τώρα λαμβάνει ασφάλιστρο του οποίου το spread είναι ίσο με $s_{t'}(T)$.

- Θα μπορούσε να αναθέσει εκ νέου τη σύμβαση CDS σε άλλον αντισυμβαλλόμενο ό-πως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Στην συνέχεια ο νέος αντισυμβαλλόμενος (ο αγοραστής προστασίας C σύμφωνα με το σχήμα μας) θα καταβάλει το πιστωτικό περιθώριο ($s_t(T)$) στον πωλητή προστασίας. Ωστόσο το πιστωτικό περιθώριο την χρονική στιγμή t' είναι $s_{t'}(T)$ το οποίο είναι υψηλότερο από το $s_t(T)$. Επομένως ο νέος αντισυμβαλλόμενος πληρώνει επίσης την αγοραία αξία $P_{t,t'}^{buyer}(T)$ στον αρχικό αγοραστή προστα-σίας.

2. Αν $s_{t'}(T) < s_t(T)$, τότε ο πωλητής προστασίας θα έχει κέρδος , επειδή ο κίνδυνος αθέτησης υποχρέωσης της οντότητας αναφοράς έχει μειωθεί. Σε αυτή την περίπτωση θα μπορούσε να λάβει τις αντίθετες από τις 1,2,3 παραπάνω θέσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2, Πιστωτικός Κίνδυνος Αντισυμβαλλόμενου

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τον Πιστωτικό Κίνδυνο του αντισυμβαλλομένου (Counterparty Credit Risk ή αλλιώς CCR) και θα παρουσιάσουμε τον υπολογισμό του. Ο πιστωτικός κίνδυνος του αντισυμβαλλόμενου (CCR) έχει ταυτιστεί κυρίως με την πτώχευση της Lehman Brothers, η οποία και ανέδειξε τον κίνδυνο αγοράς του CCR. Εν συνεχεία θα αναφέρουμε την προσαρμογή της πιστωτικής αποτίμησης (Credit Valuation adjustment ή αλλιώς CVA) που παρουσιάζει αρκετά κοινά με τον CCR.

Ο Πιστωτικός Κίνδυνος του Αντισυμβαλλόμενου (CCR) είναι μια μορφή πιστωτικού κινδύνου όπου ο υποκείμενος πιστωτικός κίνδυνος δεν δημιουργείται άμεσα από το αντίκτυπο μιας χρηματοοικονομικής συναλλαγής. Ωστόσο μπορεί να μειώσει το P&L του χαρτοφυλακίου και να δημιουργήσει ζημιά ακόμα και αν επιτευχθεί ο επιχειρηματικός στόχος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτού είναι η συναλλαγή του CDS. Στην περίπτωση αυτή είδαμε προηγουμένως ότι ο αγοραστής προστασίας αντισταθμίζεται έναντι του πιστωτικού κινδύνου αν η οντότητα αναφοράς χρεοκοπήσει. Αυτό ισχύει εν μέρει επειδή ο αγοραστής προστασίας αντιμετωπίζει τον κίνδυνο ο πωλητής προστασίας να αθετήσει τις υποχρεώσεις του. Έτσι λοιπόν σε αυτό το παράδειγμα βλέπουμε ότι το συνολικό P&L αυτής της χρηματοοικονομικής συναλλαγής είναι το P&L της θέσης της συναλλαγής μείον την πιθανή ζημιά λόγω του διακανονισμού της συναλλαγής.

2.1: Πιστωτικός Κίνδυνος του Αντισυμβαλλόμενου

Ο πιστωτικός κίνδυνος του αντισυμβαλλόμενου στις συναλλαγές της αγοράς είναι ο κίνδυνος να χρεοκοπήσει ο αντισυμβαλλόμενος πριν από τον τελικό διακανονισμό των ταμειακών ροών της συναλλαγής. Για παράδειγμα εάν η τράπεζα αγοράσει προστασία CDS σε μία εταιρία και ο πωλητής προστασίας των CDS χρεοκοπήσει πριν από την λήξη της σύμβασης η τράπεζα δεν θα μπορούσε να αντισταθμίσει τον κίνδυνο της χρεοκοπίας της εταιρίας.

Ένα άλλο παράδειγμα του κινδύνου του αντισυμβαλλόμενου είναι ο κίνδυνος του διακανονισμού (settlement risk). Πράγματι την ίδια ημέρα διακανονίζονται λίγες συναλλαγές, επίσης η διαφορά μεταξύ της ημερομηνίας παράδοσης και ημερομηνία πληρωμής κυμαίνεται από μία έως πέντε εργάσιμες ημέρες. Από εκεί και έπειτα υπάρχει ο πιστωτικός κίνδυνος του αντισυμβαλλόμενου εάν ένας αντισυμβαλλόμενος χρεοκοπήσει όταν η ημερομηνία πληρωμής δεν σχετίζεται με την ημερομηνία παράδοσης.

Με παρόμοιο τρόπο όταν η αγοραία αξία (MtM) μιας εξωχρηματιστηριακής σύμβασης είναι θετική, η τράπεζα υφίσταται ζημιά εάν ο αντισυμβαλλόμενος χρεοκοπήσει. Για να μειώσει λοιπόν αυτόν τον κίνδυνο η τράπεζα μπορεί να συνάψει διμερείς συμφωνίες συμψηφισμού (bilateral netting agreements). Αξίζει να τονίσουμε ότι αυτός κίνδυνος μπορεί να εξαφανιστεί όταν η τράπεζα χρησιμοποιήσει ανταλλαγή, διότι ο πιστωτικός κίνδυνος του αντισυμβαλλόμενου μεταφέρεται σε ένα κέντρο όπου γίνονται οι εκκαθαρίσεις (clearing house), το οποίο εγγυάται τις αναμενόμενες ταμειακές ροές. Σύμφωνα με την BCBS (Basel Committee on Banking Supervision) η οποία μετρά τον κίνδυνο του αντισυμβαλλόμενου χρησιμοποιώντας το κόστος αντικατάστασης (replacement cost) ενός εξωχρηματιστηριακού (OTC) παραγώγου. Παραθέτοντας λοιπόν το παρακάτω παράδειγμα θα εξηγήσουμε με ποιον τρόπο μετριέται ο CCR σύμφωνα με την BCBS.

<u>Παράδειγμα 2.1.1</u>

Αρχικά έχουμε δύο τράπεζες Α και Β οι οποίες έχουν συνάψει μία εξωχρηματιστηριακή (OTC) σύμβαση Γ. Υποθέτουμε τώρα ότι η τράπεζα Β θα αθετήσει τις υποχρεώσεις της πριν από την λήξη της σύμβασης Γ. Έτσι οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η τράπεζα Α θα αντιμετωπίσει τις εξής δύο περιπτώσεις.

<u>Περίπτωση1^{η}</u>

Η τρέχουσα αξία της σύμβασης Γ να είναι αρνητική. Αν συμβεί αυτό τότε η τράπεζα Α θα κλείσει την θέση της και θα καταβάλει στην Τράπεζα Β την αγοραία αξία της σύμβασης. Από την άλλη για να αντικαταστήσει την σύμβαση Γ, η Τράπεζα Α μπορεί να συνάψει μία σύμβαση Γ’ με κάποιον άλλο αντισυμβαλλόμενο Γ’ στην προκειμένη περίπτωση. Αυτό έχει σαν συνέπεια η Τράπεζα Α να λάβει την αγοραία αξία της σύμβασης Γ’ και έτσι η απώλεια της τράπεζας να είναι μηδενική.

<u>Περίπτωση 2η</u>

Η τρέχουσα αξία της σύμβασης Γ να είναι θετική. Στην περίπτωση αυτή η Τράπεζα Α κλείνει την θέση της αλλά δεν λαμβάνει τίποτα από την Τράπεζα Β. Τώρα για να αντικαταστήσει την σύμβαση Γ, η τράπεζα Α μπορεί να συνάψει μία παρόμοια σύμβαση Γ’ με κάποιον άλλο αντισυμβαλλόμενο Γ. Αυτό έχει σαν συνέπεια η Τράπεζα Α να καταβάλει την αγοραία αξία της σύμβασης Γ’ στον αντισυμβαλλόμενο Γ και αυτό έχει ως αποτέλεσμα η απώλεια της τράπεζας να είναι ίση με την αγοραία αξία.

2.2: Η έκθεση στον κίνδυνο σε περίπτωση αθέτησης των υποχρεώσεων (Exposure At Default ή αλλιώς EAD)

Γενικά η έκθεση στον κίνδυνο σε περίπτωση αθέτησης των υποχρεώσεων (EAD) είναι το ποσό της ζημιάς που μπορεί να αντιμετωπίσει ένα Χρηματοπιστωτικό Ίδρυμα λόγω αθέτησης των υποχρεώσεων. Δεδομένου ότι η αθέτηση της υποχρέωσης επέρχεται σε άγνωστη μελλοντική ημερομηνία, η ζημιά αυτή εξαρτάται από το ποσό στο οποίο το Χρηματοπιστωτικό Ίδρυμα ήταν εκτεθειμένο στον δανειολήπτη την στιγμή της αθέτησης.

2.3: Υπολογισμός του EAD για εξωχρηματιστηριακά (OTC) συμβόλαια.

Έστω τώρα η αγοραία αξία (MtM) ενός εξωχρηματιστηριακού (OTC contract) την χρονική στιγμή t. Το EAD στην περίπτωση αυτή ορίζεται:

$$EAD = \max\left(\mathrm{MtM}(t), 0\right)$$

Στην περίπτωση που έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο εξωχρηματιστηριακών παραγώγων (OTC derivatives) με την ίδια οντότητα αντισυμβαλλόμενου τότε το EAD θα είναι το άθροισμα των θετικών αγοραίων αξιών. Δηλαδή:

$$EAD = \sum_{I=1}^{n} \max\left(\mathrm{MtM}_i(t), 0\right)$$

Αυτός είναι και ο κύριος λόγος για τον οποίο η τράπεζα ενδιαφέρεται να συνάψει μία καθολική συμφωνία συμψηφισμού (global netting agreement) το οποίο προφανώς είναι εξαιρετικά περίπλοκο και σπάνιο να καταφέρουν δύο αντισυμβαλλόμενοι να υπογράψουν μια τέτοια συμφωνία. Τις περισσότερες φορές υπάρχουν αρκετές συμφωνίες συμψηφισμού σε διαφορετικά είδη συναλλαγών (π.χ. Μετοχές, Ομόλογα κ.λπ.).

Στην περίπτωση αυτή το EAD υπολογίζεται ως εξής:

$$EAD = \sum_{k} \max\left(\sum_{i \in N_k} \mathrm{MtM}_i(\mathrm{t}), 0\right) + \sum_{i \notin \cup N_k} \max\left(\mathrm{MtM}_i(t), 0\right)$$

Όπου N_kαντιστοιχεί στην k-οστή συμφωνία συμψηφισμού και ορίζει ένα σύνολο συμψηφισμού (netting set)

Παράδειγμα 2.3.1

Έστω ότι έχουμε δύο τράπεζες Α&Β οι οποίες έχουν διαπραγματευτεί 5 εξωχρηματιστηριακά προϊόντα των οποίων οι αγοραίες αξίες (MtM values) δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
C1	3	4	0	3	0	5	-8	10
C2	5	5	-3	6	-2	8	-9	7
C3	-2	6	-5	-2	-4	-3	0	-8
C4	-1	-3	-6	-5	-6	-5	10	3
C5	-1	-4	-7	-8	-3	-7	-4	-3

Αρχικά θα υπολογίσουμε την έκθεση του αντισυμβαλλόμενου της Τράπεζας Α χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο τύπο (υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει συμφωνία συμψηφισμού)

$$EAD = \sum_{i=1}^{n} \max\,(\mathrm{MtM}_i(\mathrm{t}), 0)$$

- Για $t = 1$:

  $EAD = \max\{3{,}0\} + \max\{5{,}0\} + \max\{-2{,}0\} + \max\{-1{,}0\} + \max\{-1{,}0\} = 8$
- Για $t = 2$:

  $EAD = \max\{4{,}0\} + \max\{5{,}0\} + \max\{6{,}0\} + \max\{-3{,}0\} + \max\{-4{,}0\} = 15$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει καθολική (και για τα 5 OTC προϊόντα) συμφωνία συμψηφισμού (global netting agreement). Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$EAD = \max\left(\sum_{i \in \{1,2,\ldots,5\}} \mathrm{MtM}_i(\mathrm{t}), 0\right)$$

- Για t=1: EAD = max(3+5-2-1-1,0) = 4
- Για t=2: EAD = max(5+5+6-3-4,0) = 8

Υποθέτουμε τώρα ότι οι τράπεζες A και B πραγματοποιούν δύο συμφωνίες συμψηφισμού: Μία για μετοχικές εξωχρηματιστηριακές συμβάσεις (equity OTC contracts: C1 & C2) και μία για συμβάσεις εξωχρηματιστηριακών κεφαλαίων σταθερού εισοδήματος (fixed income OTC contracts: C3 & C4)

Στην περίπτωση αυτή το

$$EAD = \sum_{k} \max\left(\sum_{i \in N_k} \mathrm{MtM}_i(\mathrm{t}), 0\right) + \sum_{i \notin \cup N_k} \max\,(\mathrm{MtM}_i(\mathrm{t}), 0)$$

- Για t=1: $EAD = \max(3 + 5{,}0) + \max(-2 - 1{,}0) + \max(-1{,}0) = 8 + 0 + 0 = 8$
- Για t=2: $EAD = \max(4 + 5{,}0) + \max(6 - 3{,}0) + \max(-4{,}0) = 9 + 0 = 12$
- Για t=3: $EAD = \max(0 - 3{,}0) + \max(-5 - 6{,}0) + \max(-7{,}0) = 0 + 0 + 0 = 0$
- Για t=4: $EAD = \max(3 + 6{,}0) + \max(-2 - 5{,}0) + \max(-8{,}0) = 9 + 0 + 0 = 9$

- Για t=5: $EAD \ = \max(0-2{,}0) + \max(-4-6{,}0) + \max(-3{,}0) = 0 + 0 \ + \ 0 = 0$
- Για t=6: $EAD = \max(5+8{,}0) + \max(-3-5{,}0) + \max(-7{,}0) = 13 \ \ 0 + 0 = 13$
- Για t=7: $EAD = \max(-8-9{,}0) + \max(0+10{,}0) + \max(-4{,}0) = 0 + 10 + 0 = 10$
- Για t=8: $EAD = \max(10+7{,}0) + \max(-8-3{,}0) + \max(-3{,}0) = 17 + 0 + 0 = 17$

<u>Η έκθεση του αντισυμβαλλόμενου της Τράπεζας Α</u>

t	1	2	3	4	5	6	7	8
Χωρίς Συμψηφισμό	8	15	0	9	0	13	10	20
Καθολική Συμφωνία Συμψηφισμού	4	8	0	0	0	0	0	9
Μερικός Συμψηφισμός	8	12	0	9	0	13	10	17

<u>Η έκθεση του αντισυμβαλλόμενου της Τράπεζας Β</u>

t	1	2	3	4	5	6	7	8
Χωρίς Συμψηφισμό	4	7	21	15	15	15	21	11
Καθολική Συμφωνία Συμψηφισμού	0	0	21	6	15	2	11	0
Μερικός Συμψηφισμός	4	4	21	15	15	15	21	8

2.4: Υπολογισμός του EAD για δικαιώματα αγοράς (call-option)

Έστω (MtM) η αγοραία αξία ενός δικαιώματος αγοράς (call-option) η οποία ικανοποιεί τον παρακάτω τύπο στον χρόνο t:

$$\mathrm{MtM(t)} = n_C\,(C_t - C_0)$$

όπου

n_c : Είναι ο αριθμός των δικαιωμάτων αγοράς και

C_t : Είναι η αξία των δικαιωμάτων αγοράς

Το EAD λοιπόν δίνεται από τον τύπο: $EAD(t) = \max(\mathrm{MtM(t)},0)$.

Για καλύτερη κατανόηση των παραπάνω εννοιών ας δώσουμε το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα: Θεωρούμε ότι μια Τράπεζα αγοράζει 1000 ATM δικαιώματα προαίρεσης (call options) τα οποία έχουν ληκτότητα ένα χρόνο. Βασιζόμενοι σε ιστορικά δεδομένα θεωρούμε ότι το interest rate = 5% και το volatility = 40%.

Αρχικά παίρνουμε τις ημερήσιες τιμές κλεισίματος δύο μετοχών (Coca Cola & Microsoft) και με την βοήθεια του τύπου τιμολόγησης Black-Scholes θα έχουμε:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Adjusted Closure Coca Cola	Standard Deviation Coca Cola	Strike Prices Coca Cola (ATM)	Risk Free Rate	Time Till Expiry	e Coca Cola	d1 Coca Cola	d2 Coca Cola	N(d1)	N(d2)	Call Option Coca Cola C	MtM(t) Coca Cola	EAD(t) Coca Cola
2	297,56	40%	297,56	5%	0,996	2,718	0,325	-0,074	0,627	0,470	53,513	-10,62	0,00
3	289,91	40%	289,91	5%	0,992	2,718	0,325	-0,074	0,627	0,471	52,024	-1509,52	0,00
4	282,36	40%	282,36	5%	0,988	2,718	0,325	-0,073	0,627	0,471	50,559	-2984,19	0,00
5	289,76	40%	289,76	5%	0,984	2,718	0,324	-0,072	0,627	0,471	51,771	-1783,61	0,00
6	296,73	40%	296,73	5%	0,980	2,718	0,324	-0,072	0,627	0,471	52,900	-666,11	0,00
7	301,03	40%	301,03	5%	0,976	2,718	0,324	-0,071	0,627	0,472	53,548	-29,12	0,00
8	303,97	40%	303,97	5%	0,972	2,718	0,324	-0,070	0,627	0,472	53,951	362,96	362,96
9	309,20	40%	309,20	5%	0,968	2,718	0,324	-0,070	0,627	0,472	54,757	1157,24	1157,24
10	305,59	40%	305,59	5%	0,964	2,718	0,324	-0,069	0,627	0,472	53,997	387,62	387,62
11	302,64	40%	302,64	5%	0,960	2,718	0,324	-0,068	0,627	0,473	53,356	-262,94	0,00
12	295,16	40%	295,16	5%	0,956	2,718	0,323	-0,068	0,627	0,473	51,920	-1706,27	0,00
13	288,98	40%	288,98	5%	0,952	2,718	0,323	-0,067	0,627	0,473	50,718	-2915,70	0,00
14	281,76	40%	281,76	5%	0,948	2,718	0,323	-0,066	0,627	0,474	49,339	-4301,62	0,00
15	282,57	40%	282,57	5%	0,944	2,718	0,323	-0,066	0,627	0,474	49,368	-4282,43	0,00
16	278,52	40%	278,52	5%	0,940	2,718	0,323	-0,065	0,627	0,474	48,549	-5108,76	0,00
17	271,74	40%	271,74	5%	0,937	2,718	0,323	-0,064	0,627	0,474	47,258	-6405,01	0,00
18	257,54	40%	257,54	5%	0,933	2,718	0,323	-0,064	0,626	0,475	44,685	-8978,62	0,00
19	254,96	40%	254,96	5%	0,929	2,718	0,322	-0,063	0,626	0,475	44,135	-9535,74	0,00
20	254,40	40%	254,40	5%	0,925	2,718	0,322	-0,062	0,626	0,475	43,935	-9743,24	0,00
21	256,90	40%	256,90	5%	0,921	2,718	0,322	-0,062	0,626	0,475	44,263	-9425,26	0,00
22	256,66	40%	256,66	5%	0,917	2,718	0,322	-0,061	0,626	0,476	44,118	-9578,66	0,00
23	263,31	40%	263,31	5%	0,913	2,718	0,322	-0,060	0,626	0,476	45,154	-8555,61	0,00
24	262,75	40%	262,75	5%	0,909	2,718	0,322	-0,060	0,626	0,476	44,951	-8766,45	0,00

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα και με την βοήθεια των συναρτήσεων του excel υπολογίσαμε τις τιμές των call options για την Coca Cola (πρώτη γραμμή/κίτρινη επισήμανση) και εν συνεχεία την έκθεση σε κίνδυνο χρησιμοποιώντας τους παρακάτω τύπους του excel:

$$\mathrm{d}_1 = \mathrm{LOG(A2/C2) + (D2 + (POWER(B2;2))/2 * E2)/(B2 * SQRT(E2))}$$

$$\mathrm{d}_2 = \mathrm{LOG(A2/C2) + (D2 - (POWER(B2;2))/2 * E2)/(B2 * SQRT(E2))}$$

$$\mathrm{N(d_1) = NORM.S.DIST(G2;TRUE)}$$

$$\mathrm{N(d_2) = NORM.S.DIST(H2;TRUE)}$$

$$\mathrm{C = (A2 * I2) - (C2 * POWER(F2;(-D2 * E2)) * J2)}$$

$$\mathrm{M_tM = 1000 * (K2 * EXP(-D2 * O2/252) - \$K\$2)}$$

$$\mathrm{EAD(t) = MAX(L2;0)}$$

Ομοίως υπολογίζουμε και τις τιμές των call options για την Microsoft και εν συνεχεία την έκθεση σε κίνδυνο. Στην συνέχεια παραθέτουμε έναν συνοπτικό πίνακα αποτελεσμάτων των δύο αυτών μετοχών για τις πρώτες δώδεκα ημέρες.

	Coca Cola				**Microsoft**			
	S(t)	**C(t)**	**MtM(t)**	**e(t)**	**S(t)**	**C(t)**	**MtM(t)**	**e(t)**
1DAY	\$297,56	\$53,513	-10,62	0	\$236,48	\$42,529	-8,437	0
2DAYS	\$289,91	\$52,024	-1509,52	0	\$232,34	\$41,693	-851,72	0
3DAYS	\$282,36	\$50,559	-2984,19	0	\$235,46	\$42,161	-392,42	0
4DAYS	\$289,76	\$51,771	-1783,6	0	\$237,58	\$42,448	-114,45	0
5DAYS	\$296,73	\$52,900	-666,11	0	\$235,99	\$42,071	-499,16	0
6DAYS	\$301,03	\$53,548	-29,12	0	\$230,35	\$40,975	-16602,2	0
7DAYS	\$303,97	\$53,951	362,96	362,96	\$230,72	\$40,950	-1635,36	0
8DAYS	\$309,20	\$54,757	1157,24	1157,2	\$237,04	\$41,978	-616,92	0
9DAYS	\$305,59	\$53,997	387,62	387,62	\$237,71	\$42,003	-600,61	0
10DAYS	\$302,64	\$53,356	-262,94	0	\$234,81	\$41,397	-1213,17	0
11DAYS	\$295,16	\$51,920	-1706,27	0	\$235,75	\$41,470	-1149,37	0
12DAYS	\$288,98	\$50,718	-2915,70	0	\$237,13	\$41,618	-1009,48	0

Αναλύοντας τώρα τα σενάρια των δύο μετοχών του πίνακα που παραθέσαμε προκύπτουν οι εξής παρατηρήσεις:

1. Για την μετοχή της Coca Cola: Παρατηρούμε λοιπόν ότι μέχρι και την έκτη η-μέρα η έκθεση του αντισυμβαλλόμενου είναι μηδέν. Αυτό συμβαίνει επειδή η αγοραία αξία είναι αρνητική. Αντίστοιχα την $7^{η}$,$8^{η}$,$9^{η}$ ημέρα η έκθεση του αντισυμβαλλόμενου είναι θετική διότι και η αγοραία αξία είναι θετική.
2. Για την μετοχή της Microsoft: Παρατηρούμε ότι η αγοραία αξία είναι μονίμως αρνητική επομένως η έκθεση του αντισυμβαλλόμενου είναι συνεχώς μηδε-νική.

2.5: Μέτρηση της Έκθεσης του αντισυμβαλλόμενου

Αρχικά αξίζει να αναφέρουμε ότι η έκθεση του αντισυμβαλλόμενου είναι επίσης γνω-στή και ως πιθανή μελλοντική έκθεση (Potential Future Exposure ή αλλιώς PFE). Η έννοια του PFE προκύπτει από την ανάγκη να χαρακτηρίσουμε ποια θα είναι η αγο-ραία αξία κάποια στιγμή στο μέλλον. Επιπλέον το PFE καθορίζει μια πιθανή έκθεση σε ένα δοσμένο διάστημα εμπιστοσύνης με βάση το χειρότερο σενάριο.

Προτού λοιπόν αρχίσουμε να αναλύουμε τις μεθόδους υπολογισμού της έκθεσης του αντισυμβαλλόμενου θέτουμε τα εξής ερωτήματα:

Τι συμβαίνει όταν η τρέχουσα ημερομηνία (t_0) δεν είναι ίδια με την αρχική ημερομη-νία (0) και πως διαφοροποιείται ο τρόπος υπολογισμού της έκθεσης του αντισυμβαλ-λόμενου;

Ας πάρουμε όμως τα πράγματα από την αρχή. Παρατηρώντας την αγοραία αξία με-ταξύ δύο ημερομηνιών προκύπτει ότι :

$$\mathrm{MtM}(0,t) = \mathrm{MtM}(0,t_0) + \mathrm{MtM}(t_0,t),$$

όπου: 0 θεωρούμε την αρχική ημερομηνία της συναλλαγής, t_0 την τρέχουσα ημερο-μηνία της συναλλαγής και t την μελλοντική ημερομηνία της συναλλαγής. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η αγοραία αξία στο χρόνο t έχει δύο συνιστώσες:

1. Η πρώτη συνιστώσα περιγράφει την αγοραία αξία $\mathrm{MtM}(0, t_0)$, όπου η $\mathrm{MtM}(0, t_0)$ εξαρτάται από την προηγούμενη υποκείμενη τιμή (underlying price)
2. Η δεύτερη συνιστώσα περιγράφει την μελλοντική αγοραία αξία $\mathrm{MtM}(t_0, t)$, όπου η $\mathrm{MtM}(t_0, t)$ εξαρτάται από την μελλοντική υποκείμενη τιμή (underlying price)

Η έκθεση λοιπόν του αντισυμβαλλόμενου την χρονική στιγμή **t** θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$e(t) = \max(\mathrm{MtM}(0, t), 0)$$

Στην περίπτωση όπου η τρέχουσα ημερομηνία t_0 δεν είναι ίδια με την αρχική ημερομηνία 0 τότε η έκθεση του αντισυμβαλλόμενου μπορεί να χωριστεί σε δύο μέρη.

Ισχύει ότι :

$$\begin{aligned} e(t) &= \max(\mathrm{MtM}(0, t_0) + \mathrm{MtM}(t_0, t), 0) \\ &= \max(\mathrm{MtM}(0, t_0), 0) \\ &\quad + \big(\max(\mathrm{MtM}(0, t_0) + \mathrm{MtM}(t_0, t), 0) - \max(\mathrm{MtM}(0, t_0), 0)\big) \end{aligned}$$

Το πρώτο λοιπόν μέρος το ονομάζουμε τρέχουσα έκθεση (CE, current exposure) και είναι πάντα θετική. Έχουμε λοιπόν ότι

$$CE(t_0) = \max(\mathrm{MtM}(0, t_0), 0)$$

Το δεύτερο μέρος το ονομάζουμε πιστωτική κύμανση (credit variation) και ορίζεται από την χρονική στιγμή t_0 έως t. Παρατηρούμε λοιπόν ότι όσο η τρέχουσα αγοραία αξία (current MtM value) είναι αρνητική τόσο η πιστωτική κύμανση μπορεί να είναι θετική. Επιπλέον η πιστωτική κύμανση μπορεί να είναι αρνητική εάν η μελλοντική αγοραία αξία (future MtM value) είναι και αυτή αρνητική. Ορίζοντας τώρα την αθροιστική συνάρτηση κατανομής του δυνητικού μελλοντικού ανοίγματος e(t) ως $F_{[0,t]}$, η μέγιστη δυνητική έκθεση PE(peak exposure) σε επίπεδο εμπιστοσύνης a θα είναι το a −ποσοστιαίο σημείο της κατανομής της έκθεσης του αντισυμβαλλόμενου και δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$PE_{\alpha}(t) = F^{-1}_{[0,t]}(a) = \inf\{x: \Pr\{e(t) \leq x\} \geq a\}$$

Ακόμα, η μέγιστη τιμή της PE η οποία αναφέρεται και ως μέγιστη δυνητική μελλοντική έκθεση (maximum potential future exposure ή αλλιώς MPFE) δίνεται από τον τύπο:

$$MPE_a(0,t) = sup_s\ PE_a(0,s)$$

Ήρθε η στιγμή τώρα να εισάγουμε τέσσερις ακόμα έννοιες οι οποίες χρησιμοποιούνται ως μέτρα κινδύνου αντισυμβαλλομένου:

- η *αναμενόμενη έκθεση* (expected exposure ή αλλιώς EE)
- η *αναμενόμενη θετική έκθεση* (expected positive exposure ή EPE)
- η *αποτελεσματική αναμενόμενη έκθεση* (effective expected exposure ή EEE)
- καθώς και η *αποτελεσματική αναμενόμενη θετική έκθεση* (effective expected positive exposure ή EEPE)

- Η αναμενόμενη έκθεση ορίζεται ως η μέση τιμή της κατανομής της έκθεσης του αντισυμβαλλόμενου σε μία μελλοντική ημερομηνία t και δίνεται από τον τύπο :

$$EE(t) = E[e(t)] = \int_0^{\infty} x\, dF_{[0,t]}(x)$$

- Η αναμενόμενη θετική έκθεση (EPE) είναι ο σταθμισμένος μέσος επί του διαστήματος [0,t] της αναμενόμενης έκθεσης και ορίζεται από τον εξής τύπο:

$$EPE(0,t) = E[\frac{1}{t}\int_0^t e(s)ds] = \frac{1}{t}\int_0^t EE(s)ds$$

- Η αποτελεσματική αναμενόμενη έκθεση (EEE) η οποία είναι η μέγιστη αναμενόμενη έκθεση που προκύπτει κατά την μελλοντική ημερομηνία t ή οποιαδήποτε προηγούμενη ημερομηνία και δίνεται από τον τύπο :

$$EEE(t) = sup_{s\leq t}\mathrm{EE(s)} = max(EEE(t^{-}), EE(t))$$

- Τέλος έχουμε την αποτελεσματική αναμενόμενη θετική έκθεση (EEPE), η οποία είναι ο σταθμισμένος μέσος επί του διαστήματος $[0,t]$ της αποτελεσματικής αναμενόμενής έκθεσης, και δίνεται από τον εξής τύπο :

$$EEPE(0,t) = \frac{1}{t}\int_0^t EEE\ (s)\ ds$$

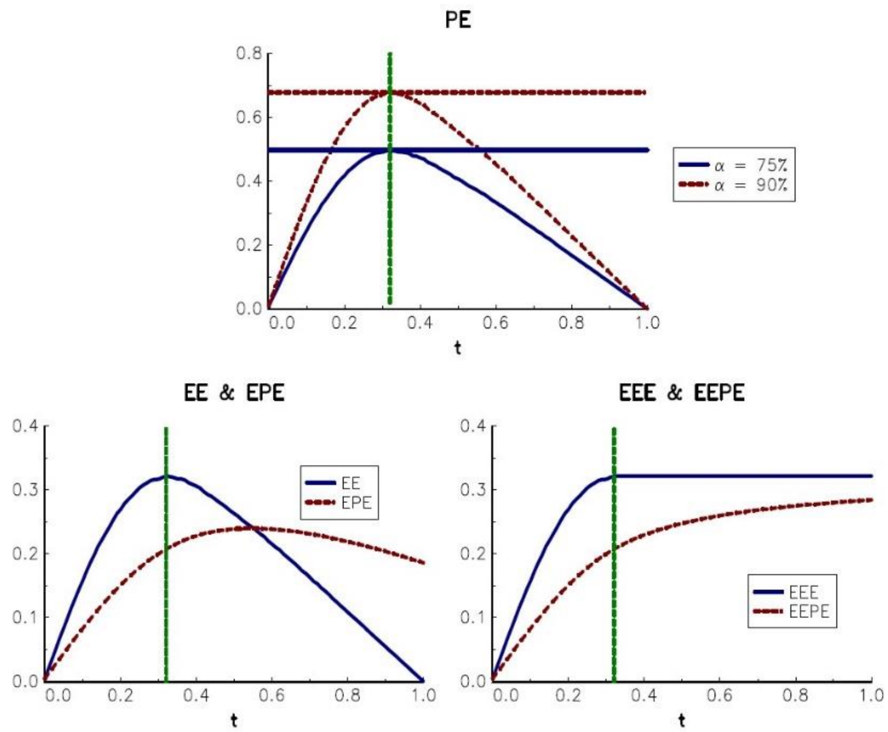
Πολύ σημαντικό είναι να αναφέρουμε ότι υπάρχουν δύο αντίθετες επιδράσεις οι οποίες καθορίζουν την έκθεση του αντισυμβαλλόμενου:

1. Η επίδραση της εξάπλωσης/διάχυσης των παραγόντων κινδύνου (the diffusion effect of Risk Factors) θα αυξήσουν την έκθεση του αντισυμβαλλόμενου με την πάροδο του χρόνου, επειδή η αβεβαιότητα είναι μεγαλύτερη στο μέλλον και μπορεί να δημιουργήσει πολύ μεγαλύτερες πιθανές μελλοντικές εκθέσεις σε κίνδυνο (PFE's) σε σύγκριση με την τρέχουσα έκθεση.
2. Η επίδραση της απόσβεσης (the amortization effect) η οποία μειώνει την έκθεση του αντισυμβαλλόμενου με την πάροδο του χρόνου επειδή μειώνει και τις υπόλοιπες ταμειακές ροές (cash flows) οι οποίες είναι εκτεθειμένες σε αθέτηση υποχρεώσεων.

Για την καλύτερη κατανόηση αυτών των δύο αντίθετων επιδράσεων που μόλις αναφέραμε θα εξετάσουμε την συμπεριφορά ενός συμβολαίου ανταλλαγής επιτοκίων (Interest Rate swap) με την επίδραση της απόσβεσης.

Παραθέτουμε λοιπόν το παρακάτω σχήμα:

<u>Εικόνα 2.1:</u>



<u>Πηγή:</u> Handbook of Financial Risk Management, Thierry Roncalli

Αρχικά παρατηρούμε ότι η μέγιστη έκθεση (Peak Exposure) αυξάνεται λόγω της επίδρασης της διάχυσης (diffusion effect) και θα φτάσει στο μέγιστο συγκεκριμένα στο ένα τρίτο του υπολειπόμενου χρόνου λήξης και στην συνέχεια μειώνεται λόγω της

επίδρασης της απόσβεσης (amortization effect). Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο ισούται με μηδέν κατά την ημερομηνία λήξης, όταν το IRS αποσβένεται πλήρως.

2.6: Εποπτικό κεφάλαιο (Regulatory Capital) αναφορικά με το CCR

Ο πρώτος εποπτικός κανόνας για τον πιστωτικό κίνδυνο εμφανίστηκε στην Βασιλεία το 1988 η οποία εισήγαγε την έννοια της τρέχουσας έκθεσης (current exposure method) που βασίζεται στο κόστος αντικατάστασης (replacement cost) και σε ένα συγκεκριμένο πρόσθετο (add-on) το οποίο αντικατοπτρίζει την πιθανή μελλοντική έκθεση. Σε μία τροποποίηση της Βασιλείας, το 1995 η μέθοδος της τρέχουσας έκθεσης (CEM) επικαιροποιήθηκε με έναν βελτιωμένο πίνακα πρόσθετου (add-on matrix) και την δυνατότητα συμψηφισμού πρόσθετων σε περίπτωση διμερών συμφωνιών συμψηφισμού. Τον Ιούλιο του 2005 με την Βασιλεία ΙΙ ο εποπτικός κανόνας για τον πιστωτικό κίνδυνο του αντισυμβαλλόμενου επέτρεψε στις τράπεζες να χρησιμοποιήσουν ένα εσωτερικό μοντέλο για την μέτρηση της έκθεσης (Basel Committee, 2005b).

Επομένως τρεις μέθοδοι ήταν διαθέσιμες στις τράπεζες για την μέτρηση της έκθεσης:

1. Η *μέθοδος εσωτερικών μοντέλων* με βάση τα μοντέλα προσομοίωσης έκθεσης της ίδιας της τράπεζας (Internal models method)
2. Η *τυποποιημένη μέθοδος* (standardized method)
3. Η *τρέχουσα μέθοδος έκθεσης* (Current Exposure Method)

Επιπλέον, ο πιστωτικός κίνδυνος του αντισυμβαλλόμενου κατά την Βασιλεία ΙΙ υποχρεώνει τις τράπεζες να υπολογίζουν το εποπτικό κεφάλαιο (regulatory capital) με χρονικό ορίζοντα ενός έτους. Ο εποπτικός κανόνας για την έκθεση του αντισυμβαλλόμενου σε περίπτωση αθέτησης των υποχρεώσεων εξαρτάται επίσης και από τον παράγοντα a. Ο παράγοντας a είναι αυτός που αποτυπώνει τις επιδράσεις που δεν καλύπτονται από το μοντέλο έκθεσης και μπορεί να υπόκειται σε κανονιστικές ρυθμίσεις. Σημαντικό είναι επίσης να αναφέρουμε ότι το Μάρτιο του 2014, η επιτροπή της Βασιλείας αποφάσισε να αντικαταστήσει τις προσεγγίσεις των μη-εσωτερικών μεθόδων (non-internal model approach : CEM & SM) με μια πιο ευαίσθητη μέθοδο η οποία ονομάζεται τυποποιημένη προσέγγιση ή αλλιώς Standard Approach Counterparty Credit Risk (SA – CCR) την οποία θα αναλύσουμε στην συνέχεια.

Κάθε προσέγγιση ορίζει τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται η έκθεση στον κίνδυνο σε περίπτωση αθέτησης των υποχρεώσεων (EAD). Έτσι οι τράπεζες χρησιμοποιούν την κατάλληλη προσέγγιση (SA ή IRB [4]) προκειμένου να μετρήσουν την κεφαλαιακή απαίτηση.

Στην προσέγγιση SA, η κεφαλαιακή επιβάρυνση ισούται με :

$$k = 8\% \cdot EAD \cdot RW$$

[4]IRB (Internal ratings – bases approach) Η προσέγγιση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως εξωτερικό μοντέλο κινδύνου με εσωτερικές και εξωτερικές παραμέτρους κινδύνου. Η βασική παράμετρος είναι η πιθανότητα αθέτησης των περιουσιακών στοιχείων η οποία συνάγεται από το εσωτερικό μοντέλο πιστοληπτικής αξιολόγησης της τράπεζας.

όπου RW (risk weight) είναι ο συντελεστής στάθμισης κινδύνου του αντισυμβαλλόμενου. Στην προσέγγιση IRB η κεφαλαιακή επιβάρυνση ισούται με :

$$k = EAD \cdot LGD \cdot \left(\Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho(PD)} \cdot \Phi^{-1}(0.999)}{\sqrt{1-\rho(PD)}} \right) - PD \right) \cdot \varphi(M)$$

όπου LGD και PD [5] είναι η ζημιά σε περίπτωση αθέτησης των υποχρεώσεων και η πιθανότητα αθέτησης αντίστοιχα, που ισχύουν για τον αντισυμβαλλόμενο.

2.7: Μέθοδος Εσωτερικού Μοντέλου (Internal model method)

Στη μέθοδο του εσωτερικού μοντέλου, η έκθεση σε περίπτωση αθέτησης των υποχρεώσεων ορίζεται ως το γινόμενο ενός συντελεστή a με την πραγματική θετική έκθεση. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$EAD = a \cdot EEPE(0,1)$$

Επιπλέον η Επιτροπή της Βασιλείας έχει ορίσει τον παράγοντα a = 1.4 . Η ληκτότητα M που χρησιμοποιείται στον τύπο του IRB είναι ίση με ένα έτος στην περίπτωση όπου η εναπομένουσα ληκτότητα είναι μικρότερη ή ίση του ενός έτους. Διαφορετικά

$$M = \min\left(1, \ \frac{\sum_{k=1} \mathbb{1}\{t_k > 1\} \cdot EE(t_k) \cdot \Delta t_k \cdot B_0(t_k)}{\sum_{k=1} \mathbb{1}\{t_k \leq 1\} \cdot EEE(t_k) \cdot \Delta t_k \cdot B_0(t_k)}, 5\right)$$

Αξίζει να αναφέρουμε όμως ότι κάτω από ορισμένες συνθήκες η τράπεζα μπορεί να χρησιμοποιήσει τις δικές της εκτιμήσεις για το a. Έστω τώρα το LEE η ισοδύναμη έκθεση του δανείου έτσι ώστε

$$k \cdot (LEE \cdot LGD \cdot \mathbb{1}\{\tau \leq T\}) = k(EAD(\tau) \cdot LGD \cdot \mathbb{1}\{\tau \leq T\})$$

Η ισοδύναμη έκθεση δανείου είναι η ντετερμινιστική έκθεση σε περίπτωση αθέτησης υποχρεώσεων το οποίο δίνει το ίδιο κεφάλαιο με την τυχαία έκθεση σε περίπτωση

[5] Το ρ(PD) δίνεται από τον ακόλουθο τύπο : $\rho(\mathrm{PD}) = 15\% \cdot (\frac{1-e^{-50PD}}{1-e^{-50}}) + 30\% \cdot (\frac{1-(1-e^{-50PD})}{1-e^{-50}})$

αθέτησης των υποχρεώσεων EAD(r). Έτσι λοιπόν οι τράπεζες για να εκτιμήσουν τον παράγοντα a χρησιμοποιούν ένα μοντέλο πιστωτικού κινδύνου και σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ότι :

$$a = \frac{LEE}{EPE}$$

2.8: Μη εσωτερικές μέθοδοι (Non-Internal model methods, CEM & SM)

Σύμφωνα με την τρέχουσα μέθοδο έκθεσης (CEM) η έκθεση στον κίνδυνο σε περίπτωση αθέτησης υποχρεώσεων δίνεται από τον τύπο :

$$EAD = CE(0) + A$$

Όπου CE(0) είναι η τρέχουσα έκθεση και A είναι η πρόσθετη αξία (add-on value). Σύμφωνα με τις απόψεις της επιτροπής της Βασιλείας II το CE(0) αντιπροσωπεύει το κόστος αντικατάστασης, ενώ η πρόσθετη τιμή A αντιπροσωπεύει την πιθανή μελλοντική έκθεση της σύμβασης. Αξίζει να αναφέρουμε ότι για μία μεμονωμένη εξωχρηματιστηριακή συναλλαγή (single OTC transaction) το A ορίζεται ως το γινόμενο του ονομαστικού ποσού και ενός πρόσθετου παράγοντα που δίδεται στον παρακάτω πίνακα[6]

Residual Maturity	Fixed Income	FX and Gold	Equity	Precious Metals	Other Commodities
0-1Y	0.0%	1.0%	8.0%	7.0%	10.0%
1Y-5Y	0.5%	5.0%	8.0%	7.0%	12.0%
5Y+	1.5%	7.5%	10.0%	8.0%	15.0%

Στην περίπτωση όπου έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο εξωχρηματιστηριακών συναλλαγών με συμφωνίες συμψηφισμού τότε η έκθεση σε κίνδυνο σε περίπτωση αθέτησης των

[6] Ο παρακάτω πίνακας περιέχει δεδομένα (add-on factors) από την Basel (III)

υποχρεώσεων ορίζεται ως το άθροισμα της τρέχουσας καθαρής έκθεσης συν μια πρόσθετη καθαρή αξία A_N η οποία ορίζεται ως εξής:

$$AN = (0.4 + 0.6 \cdot NGR) \cdot AG$$

Όπου

$AG = \sum_{i=1}^{n} A_i$ είναι το ακαθάριστο πρόσθετο (gross add-on),

A_i είναι το πρόσθετο της i – συναλλαγής

n είναι ο αριθμός των συμβολαίων και

NGR (net to gross) είναι ο λόγος μεταξύ των τρεχόντων και ακαθάριστων εκθέσεων.

Παράδειγμα 2.1. Θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο τεσσάρων εξωχρηματιστηριακών παραγώγων τα οποία διαπραγματεύονται με τον ίδιο αντισυμβαλλόμενο. Θεωρούμε επίσης δύο συμφωνίες συμψηφισμού. Μία αναφορικά με παράγωγα σταθερού εισοδήματος και μία με παράγωγα μετοχών

Συμβόλαιο	**Γ1**	**Γ2**	**Γ3**	**Γ4**
Κατηγορία Περιουσιακών Στοιχείων (Asset class)	Σταθερού Εισοδήματος (Fixed Income)	Σταθερού Εισοδήματος (Fixed Income)	Μετοχή (Equity)	Μετοχή (Equity)
Ονομαστικό Ποσό σε $ εκ (Notional)	100	40	20	10
Ληκτότητα (Maturity)	2Y	6Y	6M	18M
Αγοραία Αξία σε $ εκ (MtM)	3	-2	2	-1

Στην περίπτωση όπου δεν έχουμε συμφωνία συμψηφισμού έχουμε:

Συμβόλαιο	**Γ1**	**Γ2**	**Γ3**	**Γ4**	**Άθροισμα**
CE(0) σε $ εκ	3	0	2	0	5
Add-on (%)	0,5	1,5	8	8	-
A σε $ εκ	0,5	0,6	1,6	0,8	3,5

Επομένως η έκθεση σε κίνδυνο σε περίπτωση αθέτησης των υποχρεώσεων θα είναι:

$$EAD \; = CE + A,$$

άρα

$$EAD = 5 + 3{,}5 = \$\ 8{,}5\ \varepsilon\kappa.$$

Τώρα στην περίπτωση όπου λάβουμε υπόψιν τις δύο συμφωνίες συμψηφισμού το EAD διαφοροποιείται και όπως είπαμε και προηγουμένως θα είναι το άθροισμα της τρέχουσας καθαρής έκθεσης συν την πρόσθετη καθαρή αξία A_N

Έχουμε λοιπόν ότι :

$$CE\ (0) \; = \max(3 - 2{,}0) + \max(2 - 1{,}0) = \$\ 2\ \varepsilon\kappa$$

Ακόμα,

$$NGR = \frac{\text{τρέχουσα καθαρή έκθεση (current net exposure)}}{\text{ακαθάριστη έκθεση (gross exposure)}} = \frac{CE(0)}{CE} = \frac{2}{5} \; = 0{,}4 \\ = 40\%$$

και

$$AG = \sum_{i=1}^{4} A_i = 0{,}5 + 0{,}6 + 1{,}6 + 0{,}8 = 3{,}5$$

άρα

$$AN = (0{,}4 + 0{,}6 \times NGR) \cdot AG = (0{,}4 + 0{,}6 \times 0{,}4) \cdot 3{,}5 = \$\ 2{,}24\ \varepsilon\kappa$$

Επομένως το

$$EAD = CE\ (0) + AN = 2 + 2{,}24 = \$\ 4{,}24\ \varepsilon\kappa$$

2.10: Τυποποιημένη Προσέγγιση του πιστωτικού Κινδύνου του Αντισυμβαλλόμενου (SA – CCR)

Η τυποποιημένη μέθοδος SA – CCR εγκρίθηκε από την επιτροπή της Βασιλείας (BASEL III) τον Μάρτιο του 2014 προκειμένου να αντικαταστήσει τις μη-εσωτερικές μεθόδους (non-internal methods) από τον Ιανουάριο του 2017. Το σημαντικότερο κίνητρο της επιτροπής της Βασιλείας ήταν να προτείνει μία πιο ευαίσθητη μέθοδο η οποία να μπορεί να εφαρμοστεί εύκολα. Συγκεκριμένα η έκθεση στον κίνδυνο σε περίπτωση αθέτησης των υποχρεώσεων υπολογίζεται ως εξής:

$$EAD = a\ \cdot (RC + PFE)$$

Όπου ο παράγοντας a = 1,4 , RC (replacement cost) είναι το κόστος αντικατάστασης (ή η τρέχουσα έκθεση) και το PFE (Potential Future Exposure) είναι η δυνητική μελλοντική έκθεση. Το πρόσθετο PFE (PFE add-on) δίνεται από την εξής σχέση:

$$PFE\ = \gamma \sum_{q=1}^{5} A^{(Cq)}$$

Όπου το $A^{(Cq)}$ είναι το πρόσθετο της κατηγορίας των περιουσιακών στοιχείων Cq (IR, FX, Credit, Equity, Commodity) και γ είναι ο πολλαπλασιαστής ο οποίος δίνεται από την σχέση:

$$\gamma = \min\left(1,\ \ 0.05\ + 0.95 \cdot \exp\left(\frac{MtM}{1.90\ \sum_{q=1}^{5} A^{(Cq)}}\right)\right)$$

όπου MtM είναι η αγοραία αξία των συναλλαγών των παραγωγών μείον την αξία περικοπής της αποτίμησης των καθαρών εξασφαλίσεων που διακρατούνται (net collateral held). Επιπλέον παρατηρούμε ότι το γ είναι ίσο με τη μονάδα όταν η MtM είναι θετική και $\gamma \in [5\%, 1]$ όταν η MtM είναι αρνητική. Σε γενικές γραμμές ο ρόλος του πολλαπλασιαστή γ είναι να μειώσει το PFE στην περίπτωση όπου έχουμε $MtM < 0$.

2.11: Υπολογισμός πρόσθετης αξίας(add-on value)

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε και θα αναλύσουμε τα βήματα για τον υπολογισμό του add-on.

1. Αρχικά θα προσδιορίσουμε τους παράγοντες κινδύνου της κάθε συναλλαγής προκειμένου να την ταξινομήσουμε σε μία ή περισσότερες κατηγορίες περιουσιακών στοιχείων (asset classes)
2. Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε το προσαρμοσμένο ονομαστικό ποσό d_i (the adjusted notional amount) του οποίου ο υπολογισμός διαφοροποιείται ανάλογα με την κατηγορία περιουσιακών στοιχείων. Συγκεκριμένα :

   i. Για μετοχές και παράγωγα εμπορευμάτων (for equity & commodity derivatives) το adjusted notional amount ορίζεται ως το γινόμενο της τρέχουσας τιμής ενός στοιχείου καθώς και τον αριθμό των στοιχείων

   ii. Για τα παράγωγα συναλλάγματος (foreign-exchange derivatives) το ονομαστικό ποσό του ξένου νομίσματος μετατρέπεται σε εγχώριο νόμισμα

   iii. Για τα επιτόκια και τα πιστωτικά παράγωγα (for interest rates & credit derivatives) το adjusted notional amount καθορίζεται ως το γινόμενο του ονομαστικού ποσού της κάθε συναλλαγής και της εποπτικής σταθμισμένης διάρκειας (supervisory duration) το οποίο δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$SDi = 20(e^{-0{,}05 \cdot S_i} - e^{-0{,}05 \cdot E_i})$$

Όπου S_i και E_i είναι οι ημερομηνίες έναρξης και λήξης της χρονικής περιόδου που αναφέρεται από το παραγόμενο προϊόν [7].

[7] Αναφέρεται κυρίως για τα πιστωτικά παράγωγα (credit derivatives) και τα επιτόκια (interest rates)

3. Έπειτα θα υπολογίσουμε τον συντελεστή ληκτότητας MF_i ο οποίος αντιπροσωπεύει τον κατάλληλο χρονικό ορίζοντα και χωρίζεται σε συναλλαγές χωρίς περιθώριο (unmargined transactions) όπου $MFi = \sqrt{\min(M_i, 1)}$ και σε συναλλαγές με περιθώριο (margined transactions) όπου $MFi = \frac{3}{2}\sqrt{M_i^*}$
   i. όπου M_i είναι η εναπομένουσα ληκτότητα της κάθε συναλλαγής (αν είναι μικρότερη από δέκα ημέρες τότε λαμβάνεται ότι είναι ίση με δέκα ημέρες) και
   ii. M_i^* είναι η κατάλληλη περίοδος κινδύνου του περιθωρίου (margin period of Risk ή αλλιώς MPOR)
4. Εν συνεχεία εφαρμόζουμε έναν εποπτικό συντελεστή $Δ_i$ (Supervisory delta adjustment) σε κάθε συναλλαγή [8] και έναν εποπτικό παράγοντα SF (supervisory factor) σε κάθε σύνολο αντιστάθμισης j (hedging set j) προκειμένου να λάβουμε υπόψιν την μεταβλητότητα. Επομένως το add-on μιας i-συναλλαγής θα δίνεται από:

$$A_i = SF_j(\Delta_i \cdot d_i \cdot MF_i)$$

5. Τέλος, θα εφαρμόσουμε μια μέθοδο συνάθροισης για τον υπολογισμό του add-on $\boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{Cq})}$ της κατηγορίας των περιουσιακών στοιχείων C_q θεωρώντας ότι λαμβάνονται υπόψιν οι συσχετίσεις μεταξύ των συνόλων αντιστάθμισης και στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε τους τύπους οι οποίοι καθορίζουν τις τιμές των προσθέτων (add-on values). Συγκεκριμένα έχουμε:
   - Για παράγωγα επιτοκίων (interest rate derivatives) το add-on ισούται με:

$$A^{IR} = \sum_j SF_j \sqrt{\sum_{k=1}^{3}\sum_{k'=1}^{3} \rho_{k,k'} \cdot D_{j,k} \cdot D_{j,k'}}$$

[8] Όταν έχουμε μία θέση short τότε το $Δ_i$ = -1 και όταν έχουμε μια θέση long τότε το $Δ_i$ = +1

Όπου οι συμβολισμοί j και k αναφέρονται στο νόμισμα j καθώς και στο κλιμάκιο ληκτότητας (maturity bucket [9]) k και το $D_{j,k}$ είναι το αποτελεσματικό ονομαστικό ποσό (effective notional) το οποίο υπολογίζεται ως:

$$\mathrm{D_{j,k}} = \sum\nolimits_{\mathrm{i}\in(\mathrm{j,k})} \Delta_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{d_i} \cdot \mathrm{MF_i}$$

- Για παράγωγα συναλλάγματος (foreign exchange) το add-on ισούται με :

$$A^{(FX)} = \sum\nolimits_{i} SF_j = \left| \sum\nolimits_{i\in j} \Delta_i \cdot d_i \cdot MF_i \right|$$

Όπου το σύνολο αντιστάθμισης j αναφέρεται στο ζεύγος νομισμάτων j

- Για πιστωτικά παράγωγα και παράγωγα μετοχών (credit and equity derivatives) χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$A^{(credit/equity)} = \sqrt{\left(\sum_k \rho_k . \ A_k\right)^2 + \sum_k (1 - \rho_k^2) \cdot A_k^2}$$

Όπου A_k = SF_k $\cdot \sum_{i\in k} \Delta_i \cdot d_i \cdot MF_i$.

- Τέλος, στην περίπτωση των παραγώγων εμπορευμάτων (commodity derivatives) έχουμε:

$$A^{(commodity)} = \sum_j \sqrt{\left(\rho_j \sum_k A_j, k\right)^2 + \left(1 - \rho_j{}^2\right) \cdot \sum_k A_{j,k}^2}$$

Όπου $A_{j,k}$= $SF_{j,k} \cdot \sum_{i\in(j,k)} \Delta_i \cdot d_i \cdot MF_i$ και j αναπαριστά το σύνολο αντιστάθμισης (hedging set)

[9] Τα κλιμάκια ληκτότητας (maturity buckets) είναι :

(1): για μικρότερο από ένα έτος

(2): μεταξύ ενός και πέντε ετών

(3): για πάνω από πέντε έτη

2.12: Σύνολα Αντιστάθμισης (hedging set)

Ένα σύνολο αντιστάθμισης είναι μια ομάδα θέσεων κινδύνου (group of risk position) και καθορίζεται από συναλλαγές μέσα σε ένα ενιαίο σύνολο συμψηφισμού (within a single netting set) για το οποίο μόνο το υπόλοιπο τους έχει σημασία για τον προσδιορισμό του EAD. Για το λόγο αυτό διαφοροποιούνται σε :

i. Παράγωγα επιτοκίων (interest rate derivatives) , όπου τα σύνολα αντιστάθμισης αντιστοιχούν σε όλα τα παράγωγα στο ίδιο όμως νόμισμα.
ii. Πιστωτικά παράγωγα και παράγωγα μετοχών όπου υπάρχει ένα ενιαίο σύνολο αντιστάθμισης.
iii. Παράγωγα εμπορευμάτων όπου υπάρχουν τέσσερα σύνολα αντιστάθμισης τα οποία είναι :
    a. Ενέργεια (ηλεκτρισμός, ορυκτά έλαια)
    b. Μέταλλα
    c. Γεωργικού τύπου
    d. Διάφορα
iv. Για ανταλλαγές νομισμάτων (foreign exchange) τα σύνολα αντιστάθμισης αποτελούνται από όλα τα ζεύγη νομισμάτων

Παράδειγμα 2.2

Στον παρακάτω πίνακα έχουμε ένα σύνολο συμψηφισμού το οποίο αποτελείται από τέσσερα παράγωγα επιτοκίων (interest rate derivatives)

Trade	Instrument	Currency	Maturity	Swap	Notional	MtM
1	IRS	USD	9M	Payer	4	0,10
2	IRS	USD	4Y	Receiver	20	-0,20
3	IRS	USD	10Y	Payer	20	0,70
4	Swaption IOY	USD	1Y	Receiver	5	0,50

Επιπλέον δίνονται κάποια στοιχεία των εποπτικών παραμέτρων supervisory parameters) της μεθόδου SA-CCR

Asset Class		**SF_i**	**ρ_k**			**Σ_i**
Interest Rate	0 – 1Y	0,50%	100%			9M
	1Y – 5Y	0,50%	70%	100%		4Y
	$5Y^+$	0,50%	30%	70%	100%	10Y

Πηγή: Thierry Roncalli, Handbook of Financial Risk Management (Παράδειγμα 47)

Το παραπάνω σύνολο συμψηφισμού αποτελείται από ένα μόνο σύνολο αντιστάθμισης επειδή τα υποκείμενα περιουσιακά στοιχεία αυτών των παραγώγων είναι επιτόκια σε USD.

Κάνοντας λοιπόν υπολογισμούς θα προκύψει ο παρακάτω πίνακας.

i	**k**	**Si**	**Ei**	**SDi**	**Δi**	**di**	**MFi**	**Di**
1	1	0,00	0,75	0,74	1,00	2,94	0,87	2,55
2	2	0,00	4,00	3,63	-1,00	72,51	1,00	-72,51
3	3	0,00	10,00	7,87	1,00	157,39	1,00	157,39
4	3	1,00	11,00	7,49	-0,27	37,43	1,00	-10,08

Όπου k είναι το χρονικό περιθώριο (time bucket) και Si , Ei η ημερομηνία έναρξης και λήξης αντίστοιχα. Εξηγώντας τώρα πως προέκυψε ο παραπάνω πίνακας έχουμε:

Αρχικά υπολογίζουμε το supervisory duration έτσι έχουμε:

$$SD_1 = 20\ (e^{-0,05 \cdot 0} - e^{-0,05 \cdot 0,75}) = 20\ (1 - e^{-0,0375}) = 0,74$$

$$SD_2 = 20\ (e^{-0,05 \cdot 0} - e^{-0,05 \cdot 4}) = 20\ (1 - e^{-0,2}) = 3,63$$

$$SD_3 = 20\,(e^{-0,05\cdot 0} - e^{-0,05\cdot 4}) = 20\,(1 - e^{-0,2}) = 3,63$$

$$SD_4 = 20\,(e^{-0,05\cdot 1} - e^{-0,05\cdot 10}) = 20\,(e^{-0,05} - e^{-0,5}) = 7,49$$

Για το Δ_i σύμφωνα με τον τύπο των black-Scholes Δ_i = -1 για θέση short και Δ_i = +1 για θέση long. Επιπλέον για το Δ_i το Swaption έχει τιμή εξάσκησης και είναι ίση με 6% και 5% επομένως θα έχουμε :

$$\Delta_4 = -\varphi\left(-\frac{\log\left(\frac{6\%}{5\%}\right)}{0,5\cdot\sqrt{1}} + \frac{1}{2}\cdot 0,5\cdot\sqrt{1}\right) = -0,27$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε το προσαρμοσμένο ονομαστικό ποσό (the adjusted notional amount) d_i , όπου d_i = notional · SD_i , άρα $d_1 = 4\cdot\ 0,74 = 2,96$

$$d_2 = 20\cdot 3,63 = 72,51$$
$$d_3 = 20\cdot 7,87 = 157,39$$
$$d_4 = 5\cdot 7,49 = 37,43$$

Έπειτα θα υπολογίσουμε το αποτελεσματικό ονομαστικό ποσό (effective notional),

$$D_1 = \Delta_1\cdot d_1\cdot MF_1 = 1\cdot 2,94\cdot 0,87 = 2,55$$

$$D_2 = \Delta_2\cdot d_2\cdot MF_2 = -1\cdot 72,51\cdot 1 = -72,51$$

$$D_3 = \Delta_3\cdot d_3\cdot MF_3 = 1\cdot 157,39\cdot 1 = 157,39$$

$$D_4 = \Delta_4\cdot d_4\cdot MF_4 = -0.27\cdot 37,43\cdot 1 = -10,08$$

Εν συνεχεία θα υπολογίσουμε το add-on για τα παράγωγα επιτοκίων, συνεπώς έχουμε :

$$\mathrm{A}^{(\mathrm{IR})} = \sum_j SF_j\sqrt{\sum_{k=1}^{3}\sum_{k'=1}^{3}\rho_{k,k'}\cdot D_{j,k}\cdot D_{j,k'}} = 0.50\%\sqrt{11976,1} = 0,55$$

διότι το διπλό άθροισμα μέσα στην ρίζα είναι ίσο με

$$\begin{aligned}11976,1 = {}& 2,55^2 - 2\cdot 70\%\cdot 2,55\cdot 72,51 + 72,51^2\\ & -2\cdot 70\%\cdot 71,51\cdot 147,30 + 147,30^2 + 2\cdot 30\%\cdot 2,55\cdot 147,30\end{aligned}$$

Τέλος θα υπολογίσουμε το exposure at default:

$$EAD = 1{,}4\ (RC + PFE)$$

Όπου RC όπως έχουμε πει και προηγουμένως είναι η τρέχουσα έκθεση (current exposure). Έτσι λοιπόν

$$RC = \max(\mathrm{MtM}(t), 0) = \max(0{,}1 - 0{,}2 + 0{,}7 + 0{,}5\ , 0) = 1{,}1$$

Το PFE δίνεται:

$$PFE = \gamma \cdot \sum_{q=1}^{5} A^{(Cq)}$$

Όπου ο πολλαπλασιαστής γ = 1 διότι η MtM του συνόλου του συμψηφισμού είναι θετική. Άρα

$$EAD = 1{,}4\ (1{,}1 + 1 \cdot 0{,}55) = 2{,}31$$

2.13: Προσαρμογή της Πιστωτικής Αποτίμησης (Credit Valuation Adjustment)

Η προσαρμογή πιστωτικής αξίας (CVA) είναι η προσαρμογή στην δίκαιη αξία των χρηματοοικονομικών παραγώγων ώστε να ληφθεί υπόψιν ο πιστωτικός κίνδυνος του αντισυμβαλλόμενου. Με άλλα λόγια το CVA θεωρείται η αγοραία τιμή του Counterparty Credit Risk. Το χρηματοπιστωτικό σύστημα χρησιμοποιούσε το CVA από τις αρχές του 1990, παρόλα αυτά ο όρος έγινε ιδιαίτερα γνωστός μετά την Παγκόσμια Χρηματοπιστωτική κρίση του 2008. Πράγματι, κατά την διάρκεια της παγκόσμιας χρηματοπιστωτικής κρίσης, οι τράπεζες υπέστησαν σημαντικές απώλειες πιστωτικού κινδύνου του αντισυμβαλλόμενου στα χαρτοφυλάκια των εξωχρηματιστηριακών παραγώγων τους. Σύμφωνα με την BCBS το 2010, περίπου τα δύο τρίτα αυτών των ζημιών προήλθαν από μείωση του CVA σε χρηματοοικονομικά παράγωγα προϊόντα και μόνο το ένα τρίτο οφειλόταν σε αθέτηση υποχρεώσεων του αντισυμβαλλόμενου. Επιπλέον κατά την χρονική περίοδο 2007-2009 οι απώλειες του CVA ήταν πέντε φορές μεγαλύτερες από τις απώλειες του CCR για τις τράπεζες του Ηνωμένου Βασιλείου.

Η BCBS (2010) συμπεριέλαβε την κεφαλαιακή επιβάρυνση CVA στο πλαίσιο της Βασιλείας 3 (Basel III) , ενώ οι προσαρμογές που σχετίζονται με τις πιστώσεις εισήχθησαν στα λογιστικά πρότυπα (IFRS 13).

2.14: Διαφορά μεταξύ CCR και CVA

Για να κατανοήσουμε την προσαρμογή της πιστωτικής αξίας, είναι σημαντικό να διαχωρίσουμε τις έννοιες του CVA και του CCR. Το CCR είναι ο πιστωτικός κίνδυνος εξωχρηματιστηριακών παραγώγων που σχετίζονται με την αθέτηση πληρωμών του αντισυμβαλλόμενου, ενώ το CVA είναι ο κίνδυνος αγοράς των εξωχρηματιστηριακών παραγώγων που σχετίζονται με την μεταβολή της πιστωτικής διαβάθμισης των δύο αντισυμβαλλόμενων. Συνεπώς το CCR εμφανίζεται την χρονική στιγμή της χρεοκοπίας ενώ το CVA επηρεάζει την αγοραία αξία των εξωχρηματιστηριακών παραγώγων πριν από την στιγμή της χρεοκοπίας. Στο σημείο αυτό ας δούμε ένα παράδειγμα με δύο τράπεζες Α και Β και ένα εξωχρηματιστηριακό συμβόλαιο Γ.

Έχουμε λοιπόν ότι, το κέρδος – ζημιά (P&L) της τράπεζας Α θα είναι :

$$P\&L_{A|B} = \mathrm{MtM} - CVA_B$$

Όπου το MtM θα είναι η δίκαιη αγοραία αξία (risk free Mark-to-Market value) του εξωχρηματιστηριακού συμβολαίου Γ και το CVA_B θα είναι η προσαρμογή της πιστωτικής αξίας (CVA) σε σχέση με την τράπεζα Β.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι η τράπεζα Α συναλλάσσεται με την τράπεζα Γ τότε θα προκύψει ότι :

$$P\&L_{A|\Gamma} = \mathrm{MtM} - \mathrm{CVA}_{\Gamma}$$

Τώρα στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει CCR έχουμε ότι $P\&L_{A|B} = P\&L_{A|\Gamma} = \mathrm{MtM}$

Στην περίπτωση που λάβουμε υπόψιν τον πιστωτικό κίνδυνο του αντισυμβαλλόμενου τότε τα P&L’s της ίδιας σύμβασης θα είναι διαφορετικά για το λόγο του ότι η τράπεζα Α δεν αντιμετωπίζει τον ίδιο κίνδυνο, έτσι προκύπτει ότι :

$$P\&L_{A|B} \neq P\&L_{A|\Gamma}$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να τονίσουμε ότι εάν η τράπεζα Α επιθυμεί να εξαλείψει τις εκθέσεις σε κίνδυνο που προκύπτουν πρέπει να λάβει υπόψιν ότι η σύμβαση Γ με τον αντισυμβαλλόμενο Β έχει μεγαλύτερη αξία από την σύμβαση Γ με τον αντισυμβαλλόμενο Γ εάν ο πιστωτικός κίνδυνος του Β είναι μικρότερος από τον πιστωτικό κίνδυνο του Γ.

2.15: CVA, DVA και διμερές CVA

Προηγουμένως ορίσαμε το CVA ως τον κίνδυνο αγοράς ο οποίος σχετίζεται με τον πιστωτικό κίνδυνο του αντισυμβαλλόμενου και σύμφωνα με την EBA (2015$^{\alpha}$) αναπαριστά τη σημερινή βέλτιστη εκτίμηση της πιθανής ζημιάς αναφορικά με τα εξωχρηματιστηριακά παράγωγα λόγω αθέτησης υποχρεώσεων του αντισυμβαλλόμενου. Όμοια μπορούμε να ορίσουμε τώρα την προσαρμογή της χρεωστικής αξίας (Debit Value Adjustment ή αλλιώς DVA) ως την προσαρμογή που σχετίζεται με πίστωση αποτυπώνοντας τον πιστωτικό κίνδυνο της ίδιας οντότητας. Στην περίπτωση αυτή το δυνητικό κέρδος ενός εξωχρηματιστηριακού παραγώγου (OTC derivative) λόγω αθέτησης των υποχρεώσεων της ίδιας οντότητας θα αναπαρίσταται από το DVA. Έτσι με βάση το παράδειγμα που αναλύσαμε προηγουμένως το κέρδος/ζημιά (P&L) θα είναι :

$$\Pi_{A|B} = P\&L_{A|B} = MtM + \underbrace{DVA_A - CVA_B}_{\text{Bilateral } CVA}$$

Αναλύοντας τους όρους CVA και DVA που περιγράψαμε προηγουμένως προκύπτουν οι παρακάτω περιπτώσεις:

1. Στην περίπτωση όπου ο πιστωτικός κίνδυνος της τράπεζας Α είναι μικρότερος από τον πιστωτικό κίνδυνο της τράπεζας Β, δηλαδή $\mathrm{DVA_A} < \mathrm{CVA_B}$, τότε το διμερές CVA της τράπεζας Α είναι αρνητικό και μειώνει την αξία του χαρτοφυλακίου της τράπεζας Α.

2. Στην περίπτωση όπου ο πιστωτικός κίνδυνος της τράπεζας Α είναι υψηλότερος από τον πιστωτικό κίνδυνο της τράπεζας Β δηλαδή: $\mathrm{DVA_A} > \mathrm{CVA_B}$, τότε το διμερές CVA της τράπεζας Α είναι θετικό και επομένως αυξάνεται η αξία του χαρτοφυλακίου της τράπεζας Α.
3. Στην περίπτωση όπου ο πιστωτικός κίνδυνος της τράπεζας Α είναι ισοδύναμος με τον πιστωτικό κίνδυνο της τράπεζας Β τότε το διμερές CVA ισούται με μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι $CVA_A = DVA_A$ και $DVA_B = CVA_B$ έτσι το κέρδος/ζημιά της τράπεζας Β θα είναι :

$$\Pi_{B|A} = -\, MtM + DVA_B - CVA_A = -\mathrm{MtM} + CVA_B - DVA_A = -\Pi_{A|B}$$

2.16: Σχέσεις CVA και DVA

Η προσαρμογή της πιστωτικής αξίας είναι η προεξοφλημένη αναμενόμενη αξία της πιθανής ζημιάς η οποία είναι ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο και δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{CVA} = E^Q\left[\mathbb{1}\,\{\tau_B \leq T\} \cdot e^{-\int_0^{\tau_B} r_t dt} \cdot L\right]$$

Όπου:

T: είναι η λήξη του εξωχρηματιστηριακού παραγώγου

τ_B: είναι ο χρόνος αθέτησης της υποχρέωσης της τράπεζας Β

L: είναι η ζημιά του αντισυμβαλλόμενου η οποία δίνεται από τον τύπο

$L = (1 - R_B)\, e^{+}(\tau_B)$Όπου

$$e^{+}(t) = \max(\mathrm{MtM}(t), 0)$$

Δεδομένου ότι η χρονική στιγμή αθέτησης των υποχρεώσεων και ο συντελεστής προεξόφλησης θεωρούνται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές αλλά και το ποσοστό ανάκτησης είναι σταθερό έχουμε ότι:

$$CVA = (1 - R_B) \int_0^T B_0\,(t) \cdot EpE(t) \cdot dF_B(t)$$

Όπου EpE(t) είναι η ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο αναμενόμενη θετική έκθεση και δίνεται από τον τύπο:

$$EpE(t) \; = \; E^{Q} \; [\, e^{+}(t)],$$

καθώς και F_B είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής του τυχαίου χρόνου αθέτησης τ_B. Γνωρίζοντας τώρα ότι η συνάρτηση επιβίωσης S_B(t) είναι ίση με 1-F_B(t) έχουμε ότι:

$$CVA = (1 - R_B) \cdot \int_0^T -B_0\,(t) \cdot EpE(t) \cdot dS_B(t)$$

Χρησιμοποιώντας τις ίδιες παραδοχές έχουμε ότι η προσαρμογή της χρεωστικής α-ξίας θα δίνεται από:

$$DVA = (1 - R_A) \cdot \int_0^T -B_0\,(t) \cdot EnE(t) \cdot dS_A(t),$$

όπου EnE(t) είναι η ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο αναμενόμενη αρνητική έκθεση:

$$EnE(t) = E^{Q} \; [\, e^{-}(t)]$$

Πρακτικά υπολογίζουμε το CVA καθώς και το DVA προσεγγίζοντας το παρακάτω ο-λοκλήρωμα χρησιμοποιώντας το άθροισμα:

$$CVA = (1 - R_B) \cdot \sum_{t_i \leq T} B_0(t_i) \cdot EpE(t_i) \cdot \big(S_B(t_{i-1}) - S_B(t_i)\big)$$

Ακόμα έχουμε ότι:

$$DVA = (1 - R_A) \cdot \sum_{t_i \leq T} B_0(t_i) \cdot EpE(t_i) \cdot \big(S_A(t_{i-1}) - S_A(t_i)\big)$$

Όπου $\{t_i\}$ είναι μια διαμέριση του διαστήματος $[0, T]$

Παρατηρούμε επίσης ότι η προσέγγιση του $dS_B(t)$ είναι ίση με την πιθανότητα αθέ-τησης της τράπεζας Β μεταξύ δύο διαδοχικών ημερομηνιών διαπραγμάτευσης.

$$S_B(t_{i-1}) - S_B(t_i) = P_r\{t_{i-1} < \tau_B \leq t_i\} = PD_B(t_{i-1}, t_i)$$

Ωστόσο υπάρχει μια θεμελιώδης διαφορά μεταξύ του CCR και του CVA. Το CCR αποτελεί τον πιστωτικό κίνδυνο του αντισυμβαλλόμενου ο οποίος προκύπτει όταν ο αντισυμβαλλόμενος αθετήσει τις υποχρεώσεις του και υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το ιστορικό μέτρο πιθανότητας P. Αντίθετα το CVA το οποίο είναι η προσαρμογή της πιστωτικής αποτίμησης προκύπτει από την αγοραία τιμή του CCR και υπολογίζεται βάσει του ουδέτερου ως προς τον κίνδυνο μέτρου πιθανότητας Q. Επομένως η πιθανότητα αθέτησης της τράπεζας B $PD_B(t_{i-1}, t_i)$ είναι μια ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο πιθανότητα.

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι το πιστωτικό περιθώριο s (του CDS) σχετίζεται με την παράμετρο λ.

Έχουμε λοιπόν: $s_B(t) = (1 - R_B) \cdot \lambda_B(t)$, επομένως προκύπτει ότι:

$$S_B(t) = \exp(-\lambda_B(t) \cdot t) = \exp\left(-\frac{s_B(t) \cdot t}{1 - R_B}\right)$$

Άρα η ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο πιθανότητα αθέτησης της τράπεζας B ισούται με:

$$PD_B(t_{i-1}, t_i) = \exp\left(-\frac{s_B(t_{i-1}) \cdot t_{i-1}}{1 - R_B}\right) - \exp\left(-\frac{s_B(t_i) \cdot t_i}{1 - R_B}\right)$$

2.17: Εποπτικό κεφάλαιο αναφορικά με το CVA

Η κεφαλαιακή απαίτηση για τον κίνδυνο του CVA εισήχθη από την επιτροπή της Βασιλείας τον Δεκέμβριο του 2010, έπειτα από την παγκόσμια χρηματοπιστωτική κρίση. Την χρονική στιγμή εκείνη οι τράπεζες είχαν την επιλογή ανάμεσα σε δύο προσεγγίσεις την προηγμένη μέθοδο (AM – CVA) και την τυποποιημένη μέθοδο (SM-CVA).

Ωστόσο η επιτροπή της Βασιλείας άλλαξε εντελώς το πλαίσιο του CVA τον Δεκέμβριο του 2017 με δύο νέες προσεγγίσεις (BA – CVA και SA – CVA) οι οποίες θα αντικαταστήσουν τις υπάρχουσες έχοντας ισχύ από τον Ιανουάριο του 2022. Αυτή είναι η πρώτη φορά όπου η επιτροπή της Βασιλείας ανέτρεψε εντελώς την οδηγία της μέσα στο ίδιο πλαίσιο της Βασιλείας ΙΙΙ. Στην παράγραφο αυτή αρχικά θα αναλύσουμε τις δύο προυπάρχουσες μεθόδους και στην συνέχεια τις δύο νέες.

2.18: Η Προηγμένη Μέθοδος CVA (AM-CVA)

Σε αυτήν την μέθοδο προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα μέσω του μέσου αθροίσματος Riemann. Έχουμε λοιπόν :

$$CVA = LGD_B \cdot \sum_{t_i \leq T} \frac{E\rho E(t_i - 1) \cdot B_0(t_{i-1}) + B_0(t_i) \cdot E\rho E(t_i)}{2} \cdot PDB(t_{i-1}, t_i),$$

όπου LGD = 1 – R_B η οποία είναι ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο απώλεια δεδομένης της αθέτησης των υποχρεώσεων του αντισυμβαλλόμενου Β. Επιπλέον ο όρος $PD_B(t_{i-1}, t_i)$ είναι η ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο πιθανότητα αθέτησης μεταξύ των χρονικών στιγμών t_{i-1} και t_i με

$$PD_B(t_{i-1}, t_i) = \max\left(exp\left(-\frac{S(t_{i-1})}{LGD_B} \cdot t_{i-1}\right) - exp\left(-\frac{S(t_i)}{LGD_B} \cdot t_i\right), 0\right)$$

Δεδομένου ότι PD_B $(t_{i-1}, t_i) \geq 0$ η κεφαλαιακή απαίτηση ισούται με:

$$k = 3 \cdot (CVA + SCVA),$$

όπου το CVA υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την τελευταία περίοδο ενός έτους και το SCVA βασίζεται σε μια περίοδο ακραίων καταστάσεων διάρκειας ενός έτους των πιστωτικών περιθωρίων.

2.19: Η τυποποιημένη μέθοδος (SM-CVA)

Στην τυποποιημένη μέθοδο η κεφαλαιακή απαίτηση ισούται με :

$$K = 2{,}33 \cdot \sqrt{h} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sum_i W_i \cdot \Omega_i - W_{index}^* \cdot \Omega_{index}^*\right)^2 + \frac{3}{4}\sum_i W_i^2\, \Omega_i^2}$$

Όπου:

$$\Omega_\mathrm{i} = \mathrm{M_i} \cdot \mathrm{EAD_i} \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-0.05\mathrm{M_i}}}{0.05 \cdot \mathrm{M_i}} - \mathrm{M_i^*} \cdot \mathrm{H_i^*} \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-0.05\mathrm{M_i^*}}}{0.05 \cdot \mathrm{M_i^*}}$$

και

$$\Omega_\mathrm{index}^* = \mathrm{M_{index}^*} \cdot \mathrm{H_{index}^*} \cdot \frac{1-\mathrm{e}^{-0.05\mathrm{M_{index}^*}}}{0{,}05 \cdot \mathrm{M_{index}^*}}$$

Στον παραπάνω τύπο:

- h: είναι ο χρονικός ορίζοντας διάρκειας ενός έτους
- W_i: είναι το βάρος i-οστού αντισυμβαλλόμενου με βάση την αξιολόγησή του
- M_i είναι η πραγματική ληκτότητα του i-οστού συνόλου συμψηφισμού
- EAD_i: είναι η έκθεση στον κίνδυνο σε περίπτωση αθέτησης των υποχρεώσεων του i-οστού συμψηφιστικού συνόλου
- M_i^*: είναι ο συντελεστής προσαρμογής ληκτότητας για την αντιστάθμιση απλού CDS (single name CDS)
- H_i^*: είναι η αντιστάθμιση ονομαστικού ποσού της αντιστάθμισης απλού CDS(single name CDS)
- W_{index}^*: είναι το βάρος της αντιστάθμισης του δείκτη CDS (index CDS)
- M_{index}^*: είναι ο συντελεστής προσαρμογής ληκτότητας για την αντιστάθμιση του δείκτη CDS (index CDS)
- H_{index}^*: είναι η αντιστάθμιση του ονομαστικού ποσού του δείκτη αντιστάθμισης CDS.

2.20: Βασική προσέγγιση (BA-CVA)

Σύμφωνα με την βασική προσέγγιση, η κεφαλαιακή απαίτηση είναι ίση με:

$$K = \beta \cdot k^{reduced} + (1-\beta) \cdot k^{hege}$$

Όπου:

- k^{reduced} : είναι η κεφαλαιακή απαίτηση χωρίς αντιστάθμιση κινδύνου
- k^{hedge} : είναι η κεφαλαιακή απαίτηση με αντιστάθμιση κινδύνου

Αναλυτικότερα: Στην περίπτωση της κεφαλαιακής απαίτησης χωρίς αντιστάθμιση κινδύνου (k^{reduced}) έχουμε ότι:

$$k^{reduced} = \sqrt{\left(\rho \cdot \sum_j SCVA_j\right)^2 + (1-\rho^2) \sum_j SCVA_j^2}$$

Όπου ρ=50% και το $SCVA_j$ είναι η κεφαλαιακή απαίτηση CVA για τον j-οστό αντισυμβαλλόμενο η οποία δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\mathrm{SCVA_j} = \frac{1}{\mathrm{a}} \mathrm{RW_j} \cdot \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{DF_k} \cdot \mathrm{EAD_k} \cdot \mathrm{M_k}$$

Όπου:

- a=1,4
- RW_j : είναι ο συντελεστής στάθμισης του κινδύνου για τον j αντισυμβαλλόμενο
- k : είναι το σύνολο συμψηφισμού
- DF_k : είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας
- EAD_k : είναι ο πιστωτικός κίνδυνος του αντισυμβαλλόμενου την χρονική στιγμή αθέτησης των υποχρεώσεων
- M_k : είναι η πραγματική ληκτότητα

Επιπλέον στην περίπτωση αυτή ($\text{k}^{\text{reduced}}$) αξίζει να κάνουμε δύο παρατηρήσεις

1. Η βασική προσέγγιση (BA-CVA) υπολογίζεται ορίζοντας τον συντελεστή β στο 100%

2. Στην περίπτωση όπου μια τράπεζα χρησιμοποιήσει την μέθοδο του εσωτερικού μοντέλου για τον υπολογισμό του EAD ο προεξοφλητικός παράγοντας $DF_k = 1$ Διαφορετικά ο προεξοφλητικός παράγοντας υπολογίζεται ως εξής:

$$\mathrm{DF_k} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-0{,}05\mathrm{M_k}}}{0{,}05 \cdot \mathrm{M_k}}$$

Επίσης στην περίπτωση της κεφαλαιακής απαίτησης με αντιστάθμιση κινδύνου(k^{hedge}) η βασική προσέγγιση CVA (BA-CVA) αναγνωρίζει τις επιλεγμένες συναλλαγές αντιστάθμισης, οι οποίες χρησιμοποιούνται για τον μετριασμό του πιστωτικού περιθωρίου (credit spread) και αντιστοιχούν σε συναλλαγές με single-name CDS καθώς και index CDS. Έτσι:

$$k^{hedge} = \sqrt{k_1 + k_2 + k_3}$$

όπου :

$$\mathrm{k_1} = \left(\rho \cdot \sum_{\mathrm{j}} \left(\mathrm{SCVA_j} - \mathrm{SNH_j}\right) - \mathrm{IH}\right)^2$$

$$\mathrm{k_2} = (1 - \rho^2) \cdot \sum_{\mathrm{j}} \left(\mathrm{SCVA_j} - \mathrm{SNH_j}\right)^2$$

$$\mathrm{k_3} = \sum_{\mathrm{j}} \mathrm{HMA_j}$$

με SNH_j : Να ορίζεται ως η μείωση του CVA για τον j αντισυμβαλλόμενο λόγω της αντιστάθμισης από single – name CDS και υπολογίζεται από τον τύπο :

$$\mathrm{SNH_j} = \textstyle\sum_{\mathrm{h \in j}} \rho_{\mathrm{h,j}} \left(\mathrm{RW}_h \cdot \mathrm{DF_h} \cdot \mathrm{N_h} \cdot \mathrm{M_h}\right)$$

Όπου

N: αντιπροσωπεύει το ονομαστικό ποσό,

h: αντιπροσωπεύει την συναλλαγή με single – name CDS και το

$\rho_{h,j}$: ορίζεται ως ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ του πιστωτικού περιθωρίου του αντισυμβαλλόμενου καθώς και του πιστωτικού περιθωρίου του CDS και λαμβάνει τις παρακάτω τιμές:

1) Αν το CDS h αναφέρεται απευθείας στον αντισυμβαλλόμενο j τότε το CDS λαμβάνει τιμή 100%
2) Αν το CDS h έχει έννομη σχέση με τον αντισυμβαλλόμενο j τότε το CDS λαμβάνει τιμή 80%
3) Αν το CDS h και ο αντισυμβαλλόμενος j ανήκουν στην ίδια περιοχή και στον ίδιο τομέα τότε το CDS λαμβάνει τιμή 50%

Επιπλέον, το IH ορίζεται ως η συνολική μείωση του CVA λόγω της αντιστάθμισης από index CDS και το οποίο δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$\text{IH} = \sum_{h'} RW_{h'} \cdot DF_{h'} \cdot N_{h'} \cdot M_{h'}$$

Αξίζει να τονίσουμε ότι οι παράμετροι στον παραπάνω τύπο είναι για συναλλαγές με index CDS. Ακόμη, ο συντελεστής στάθμισης του κινδύνου δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{RW_{h'}} = 0{,}7 \cdot \sum_{\mathrm{j \in h'}} \mathrm{W_j} \cdot \mathrm{RW_j}$$

Με W_j να αποτελεί την «βάρος» του αντισυμβαλλόμενου τομέα j για συναλλαγές με index CDS. Και τέλος:

$$\mathrm{HMA_j} = \sum_{\mathrm{h \in j}} \left(1 - \rho_{\mathrm{h,j}}^2\right) \cdot (\mathrm{RW_h} \cdot \mathrm{DF_h} \cdot \mathrm{N_h} \cdot \mathrm{M_h})^2$$

<u>Παράδειγμα2.3</u>

Θεωρούμε ότι μια τράπεζα έχει τρεις χρηματοοικονομικούς αντισυμβαλλόμενους A, B, C οι οποίοι βαθμολογούνται αντίστοιχα με LG, IG και HY. Επιπλέον υπάρχουν τέσσερεις εξωχρηματιστηριακές συναλλαγές οι οποίες περιγράφονται στον παρακάτω πίνακα:

Συναλλαγή k	**1**	**2**	**3**	**4**
Αντισυμβαλλόμενος	A	A	B	C

EAD_k	80	40	60	20
M_k	1	1	1	0,5

Επίσης δίνεται το RW_j το οποίο εξαρτάται από την πιστωτική ποιότητα του αντισυμβαλλόμενου. Δίνεται λοιπόν: $RW_A = 5\%$, $RW_B = 5\%$, $RW_C = 12\%$.

Προκειμένου να μειώσει τον πιστωτικό κίνδυνο του αντισυμβαλλόμενου η τράπεζα, αγοράζει μία προστασία CDS για τον αντισυμβαλλόμενο Α για ποσό 75 εκ. € επιπλέον μια προστασία CDS για τον αντισυμβαλλόμενο Β για ποσό 20 εκ. € και ένα χρηματοοικονομικό ποσό CDX για 10 εκ. €. Η ληκτότητα των αντισταθμίσεων αντιστοιχεί ακριβώς στην λήξη των συναλλαγών. Ωστόσο, η προστασία CDS στον αντισυμβαλλόμενο Β είναι έμμεση διότι το υποκείμενο όνομα του δεν είναι το Β αλλά το Β' που είναι η μητρική εταιρεία του Β.

Σε πρώτη φάση θα υπολογίσουμε τους προεξοφλητικούς παράγοντες των τεσσάρων συναλλαγών.

$$DF_1 = \frac{1-e^{-0,05 M_1}}{0,05 \cdot M_1} = \frac{1-e^{-0,05 \cdot 1}}{0,05 \cdot 1} = 0,9754 = DF_2 = DF_3$$

Αντίστοιχα $DF_4 = 0,9876$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε την CVA κεφαλαιακή απαίτηση για κάθε αντισυμβαλλόμενο.

Έχουμε λοιπόν:

$$SCVA_A = \frac{1}{a} \cdot RW_A \cdot [(DF_1 \cdot EAD_1 \cdot M_1) + (DF_2 \cdot EAD_2 \cdot M_2)] =$$

$$= \frac{1}{1,4} \cdot 5\% \cdot [(0,9754 \cdot 80 \cdot 1) + (0,9754 \cdot 40 \cdot 1)] = 4,18$$

$$SCVA_B = \frac{1}{a} \cdot RW_B \cdot [(DF_3 \cdot EAD_3 \cdot M_3)] =$$

$$= \frac{1}{1,4} \cdot 5\% \cdot (0,9754 \cdot 60 \cdot 1) = 2,09$$

$$SCVA_C = \frac{1}{a} \cdot RW_C \cdot [(DF_4 \cdot EAD_4 \cdot M_4)] =$$

$$= \frac{1}{1,4} \cdot 12\% \cdot (0,9876 \cdot 20 \cdot 0,5) = 0,847$$

Έτσι το $\sum_j SCVA_J$ = 7,117. Συνεπώς το $\sum_j SCVA_j^2$ = 50,652. Επομένως η κεφαλαιακή απαίτηση χωρίς αντιστάθμιση είναι ίση με :

$$k^{reduced} = \sqrt{\left(\rho \cdot \sum_j (SCVA_j)\right)^2 + (1-\rho^2) \sum_j SCVA_j^2} =$$

$$= \sqrt{(0,5 \cdot 7,117)^2 + (1-0,5^2) \cdot 50,652} = 21,933$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους:

$$SNH_A = 5\% \cdot 100\% \cdot 0,9754 \cdot 75 \cdot 1 = 3,658$$

$$SNH_B = 5\% \cdot 80\% \cdot 0,9754 \cdot 20 \cdot 1 = 0,78032$$

Τώρα δεδομένου ότι η προστασία CDS βρίσκεται στο B’ και όχι στο B υπάρχει κίνδυνος απόκλισης αντιστάθμισης:

$$HMA_B = 0,05^2 \cdot (1-0,8^2) \cdot (0,9754 \cdot 20 \cdot 1) = 0,018$$

Έπειτα θα υπολογίσουμε την προστασία του CDX έχουμε λοιπόν:

IH = 0,7 · 12% · 0,975 · 10 · 1 = 0,819

$$k_1 = \left(\rho \cdot \sum_j \left(SCVA_j - SNH_j\right) - IH\right)^2 =$$

$$= [0,5 \cdot ((4,18-3,658) + (2,09-0,78032) + (0,847)) - 0,819]^2 = 0,271$$

$$k_2 = (1-\rho^2) \cdot \sum_j \left(SCVA_j - SNH_j\right)^2 = 2,028$$

$$k_3 = \sum_j HMA_j = 0,018$$

Οπότε

$$K^{hedge} = \sqrt{k_1 + k_2 + k_3} = 1,522$$

Τέλος υπολογίζουμε την κεφαλαιακή απαίτηση:

$$K = \beta \cdot k^{reduced} + (1-\beta) \cdot k^{hedge} = (0{,}25 \cdot 21{,}933) + (0{,}75 \cdot 1{,}522) = 6{,}625$$

2.21: Τυποποιημένη προσέγγιση (SA-CVA)

Η τυποποιημένη προσέγγιση για το CVA (SA-CVA) βασίζεται στους κινδύνους των Delta και Vega επομένως η κεφαλαιακή απαίτηση υπολογίζεται από τον τύπο:

$$K = k^{Delta} + k^{Vega}$$

Αναλυτικότερα για τον υπολογισμό της κεφαλαιακής απαίτησης θα εξετάσουμε δύο χαρτοφυλάκια, το χαρτοφυλάκιο CVA και το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης κινδύνου.

Για κάθε κίνδυνο Delta και Vega θα υπολογίσουμε την σταθμισμένη ευαισθησία CVA για κάθε έναν από τους παράγοντες κινδύνου F_j . Έχουμε λοιπόν:

$$\mathrm{WS}_j^{\mathrm{CVA}} = \mathrm{S}_j^{\mathrm{CVA}} \cdot \mathrm{RW}_j$$

$$\mathrm{WS}_j^{\mathrm{hedge}} = \mathrm{S}_j^{\mathrm{hedge}} \cdot \mathrm{RW}_j$$

Όπου S_j και RW_j είναι η καθαρή ευαισθησία του CVA ή του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης σε σχέση με τον παράγοντα κινδύνου και τον συντελεστή στάθμισης κινδύνου F_j. Έπειτα αθροίζουμε την σταθμισμένη ευαισθησία με σκοπό να λάβουμε ένα καθαρό ποσό. Έτσι:

$$WS_j = WS_j^{CVA} + WS_j^{hedge}$$

Εν συνεχεία υπολογίζουμε την κεφαλαιακή απαίτηση για το κλιμάκιο κινδύνου (risk-bucket) B_κ ως εξής:

$$\mathrm{k}_{\mathrm{B_k}} = \sqrt{\sum_j \mathrm{WS}_j^2 + \left(\sum_{j' \neq j} \rho_{j,j'} \cdot \mathrm{WS}_j \cdot \mathrm{WS}_{j'}\right) + 1\% \sum_j (\mathrm{WS}_j^{\mathrm{hedge}})^2}$$

Τέλος αθροίζουμε τα διαφορετικά κλιμάκια (buckets) για μια δεδομένη κατηγορία κινδύνου. Έχουμε λοιπόν:

$$\mathrm{k}^{\mathrm{Delta/Vega}} = \mathrm{m}_{\mathrm{CVA}} \sqrt{\sum_{\mathrm{k}} \mathrm{k}_{\mathrm{B_k}}^2 + \sum_{\mathrm{k}' \neq \mathrm{k}} \gamma_{\mathrm{k,k}'} \cdot \mathrm{k}_{\mathrm{B_k}} \cdot \mathrm{k}_{\mathrm{B_{k'}}}}$$

Όπου ο πολλαπλασιαστής $m_{CVA} = 1{,}25$

S_j : είναι οι ευαισθησίες των παραγόντων κινδύνου

RW_j : είναι οι συντελεστές στάθμισης των παραγόντων κινδύνου

$\rho_{j,j'}$: είναι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των παραγόντων κινδύνου και του κλιμακίου (bucket)

$\gamma_{\kappa,\kappa'}$: είναι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των κατηγοριών κινδύνου (risk buckets)

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογές με την χρήση γλώσσας προγραμματισμού R

<u>**Παράδειγμα 1:**</u> Αρχικά στο πρώτο παράδειγμα θα υπολογίσουμε τον κίνδυνο του αντισυμβαλλόμενου (EAD) μέσω της διαδικασίας της προσομοίωσης για δικαιώματα αγοράς (call-options) χρησιμοποιώντας τον τύπο των Black-Scholes. Ο συγκεκριμένος τύπος χρησιμοποιεί την S_t (την τιμή του υποκείμενου αγαθού, π.χ. συγκεκριμένης μετοχής) η οποία είναι μια τυχαία μεταβλητή. Σύμφωνα λοιπόν με το μοντέλο των Black-Scholes η S_t ακολουθεί μια λογαριθμοκανονική κατανομή την οποία θα προσπαθήσουμε να την προσομοιώσουμε τρέχοντας αρκετά σενάρια με παραμέτρους οι οποίες έχουν εκτιμηθεί από ιστορικά δεδομένα. Θα υπολογίσουμε λοιπόν τις πιθανές τιμές που μπορεί να έχει αυτή η μετοχή και εν συνεχεία για καθένα από αυτά τα σενάρια θα υπολογίσουμε την αγοραία αξία (MtM) καθώς και τον κίνδυνο του αντισυμβαλλόμενου (EAD).

Έτσι λοιπόν θα θέσουμε τιμές στις παραμέτρους που έχουμε:

- $r = 0.05$ (το ετήσιο επιτόκιο αναφοράς της αγοράς ή ουδέτερου κινδύνου)
- $T = 1$ (είναι ο χρόνος μέχρι την λήξη, ο οποίος μετράται σε έτη)
- $\sigma = 0.5$ (η μεταβλητότητα της τιμής του υποκείμενου αγαθού)
- $K_0 = 100$ (η τιμή εξάσκησης του υποκείμενου αγαθού)
- $S_0 = 100$ (η αρχική τιμή του υποκείμενου αγαθού)
- $\mu = r - \sigma^2/2$ (η τάση της τιμής του υποκείμενου αγαθού ως προς μέτρο ουδέτερου κινδύνου).
- $t_0 = 0.5$ χρόνος που έχει παρέλθει μετά την σύναψη του δικαιώματος

Αρχικά επιλέγουμε να παραγάγουμε δέκα τυχαίες τιμές ($n = 10$) για συγκεκριμένο χρόνο $t_0 = 0.5$ και στην συνέχεια θα σχολιάσουμε τα αποτελέσματα.

Θέτοντας $t_0 = 0.5$ (δηλαδή έξι μήνες) υπολογίζουμε για αυτούς τους έξι μήνες δέκα τυχαίες (χρηματιστηριακές) τιμές της μετοχής. Η τιμή μιας μετοχής σύμφωνα με το μοντέλο Black-Scholes ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brown, από το οποίο προκύπτει ότι μετά από χρόνο t η S_t θα ισούται με την S_0 (η αρχική της τιμή) επί μια κατάλληλη λογαριθμοκανονική κατανομή, συγκεκριμένα,

$$S_t = S_0 e^{t_0\mu+\sigma\sqrt{t_0}Z}, \qquad Z\sim N(0,1)$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τις τιμές των δικαιωμάτων αγοράς στο χρόνο t_0 (C: call options) από τον γνωστό τύπο των Black and Scholes,

$$C_t(S_t) = e^{-r(T-t)}E((S_T-K)_+|S_t) = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi\big(d_1-\sigma\sqrt{T-t}\big)$$

όπου $d_1 = \frac{r(T-t)+\frac{\sigma^2(T-t)}{2}-\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$, καθώς επίσης την παρούσα αξία του κέρδους από την αγορά (στο χρόνο 0) ενός δικαιώματος αγοράς,

$$MtM(t_0) = e^{-rt_0}C_{t_0}\big(S_{t_0}\big) - C_0(S_0),$$

την έκθεση σε κίνδυνο στην περίπτωση αθέτησης των υποχρεώσεων (EAD),

$$EAD(t_0) = \max\{MtM(t_0),0\}$$

την μέγιστη δυνητική έκθεση (PE)

$$PE(t_0) = F^{-1}_{EAD(t_0)}(a) = \inf\{x: P(EAD(t_0)\le x)\ge a\}$$

καθώς και την αναμενόμενη έκθεση (EE),

$$EE(t_0) = E(EAD(t_0)) = E(\max\{MtM(t_0),0\})$$

με την βοήθεια της γλώσσας προγραμματισμού R:

```
r=0.05; T=1; sigma=0.5; K=100; S0=100; mu=r-sigma^2/2;
C=function(t,S)
{
d1=(r*(T-t)+sigma^2*(T-t)/2-log(K/S))/(sigma*(T-t)^0.5);
C=S*pnorm(d1,0,1)-K*exp(-r*(T-t))*pnorm(d1-sigma*(T-
t)^0.5,0,1);C
}

set.seed(1)
t0=0.5;n=10;
Z=rnorm(n,0,1);
St=S0*exp(t0*mu+t0^0.5*sigma*Z);St
C(t0,St)
MtM=exp(-r*t0)*C(t0,St)-C(0,S0);MtM
EAD=pmax(MtM,0);EAD
```

Από την παραπάνω διαδικασία παραγωγής 10 τυχαίων σεναρίων για την τιμή S_{t_0} κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα:

S_{t_0}	$C_{t_0}(S_{t_0})$	$MtM(t_0)$	$EAD(t_0)$
77,18347	4,633046	-17,273949	0
102,78073	16,830948	-5,377214	0
71,68137	3,10063	-18,768529	0

169,30251	72,918162	49,325202	49,325202
108,22028	20,392681	-1,90342	0
72,06661	3,195462	-18,676039	0
114,43447	24,797666	2,392805	2,392805
125,04922	33,020145	10,412271	10,412271
118,06551	27,519266	5,047209	5,047209
86,46149	8,10722	-13,885552	0

Αναφορικά με τον παραπάνω πίνακα των αποτελεσμάτων στις περιπτώσεις (κίτρινη επισήμανση) όπου η αγοραία αξία παίρνει θετική τιμή αντίστοιχα και ο κίνδυνος του αντισυμβαλλόμενου παίρνει θετική τιμή. Στις περιπτώσεις όπου η αγοραία αξία παίρνει αρνητικές τιμές τότε ο κίνδυνος του αντισυμβαλλόμενου ισούται με μηδέν. Η αναμενόμενη έκθεση είναι η μέση τιμή της έκθεσης σε κίνδυνο στην περίπτωση αθέτησης των υποχρεώσεων (mean(EAD)) και τέλος η μέγιστη δυνητική έκθεση θα είναι το ποσοστημόριο της έκθεσης σε κίνδυνο σε περίπτωση αθέτησης των υποχρεώσεων με διάστημα εμπιστοσύνης 95% (quantile(EAD,0.95)). Αυτές οι δύο ποσότητες εκτιμώνται στην συνέχεια, από $n = 10^5$ επαναλήψεις της παραπάνω διαδικασίας.

Συγκεκριμένα, στην συνέχεια στο ίδιο παράδειγμα παράγουμε $n = 100000$ τυχαία σενάρια και για όλους τους χρόνους t_0 από 0.05 έως 0.95 με βήμα 0.05 μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας με την χρήση της εντολής ‘for’ και για καθέναν από αυτούς τους χρόνους εκτιμάται η μέγιστη δυνητική έκθεση (PE) καθώς και η αναμενόμενη έκθεση (EE).

```
n=10^5;
EE=c();PE=c();set.seed(1);Z=rnorm(n,0,1);
tt=seq(0.05,0.95,0.05)
for(t0 in tt)
{
St=S0*exp(t0*mu+t0^0.5*sigma*Z);
MtM=exp(-r*t0)*C(t0,St)-C(0,S0)
EAD=pmax(MtM,0)
print(c(t0,mean(EAD),quantile(EAD,0.95)[[1]]))
EE=c(EE,mean(EAD))
PE=c(PE,quantile(EAD,0.95)[[1]])
}
```

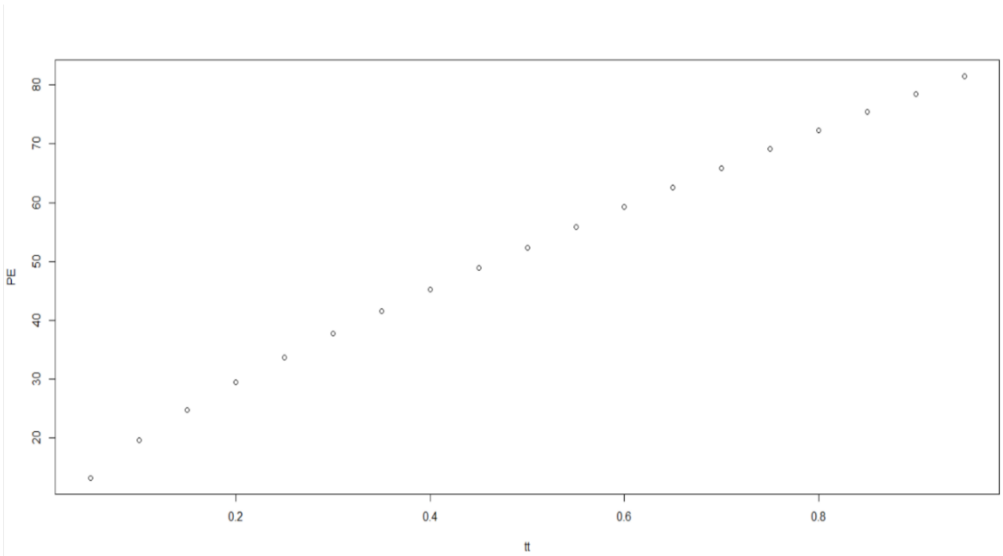
Κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα με τις εκτιμήσεις από την προσομοίωση :

t	$EAD(t)$	$EE(t)$
0,05	2,847951	13,224212
0,10	4,037093	19,567631
0,15	4,956457	24,784880
0,20	5,737753	29,425708
0,25	6,432114	33,704666
0,30	7,066152	37,732986
0,35	7,655908	41,577678
0,40	8,211522	45,283097
0,45	8,740269	48,880479
0,50	9,24798	52,39265
0,55	9,738943	55,836447
0,60	10,21666	59,22393
0,65	10,68454	62,56275
0,70	11,14575	65,85613
0,75	11,60333	69,10246
0,80	12,06102	72,29553
0,85	12,52286	75,42622
0,90	12,99394	78,48724
0,95	13,48039	81,47793

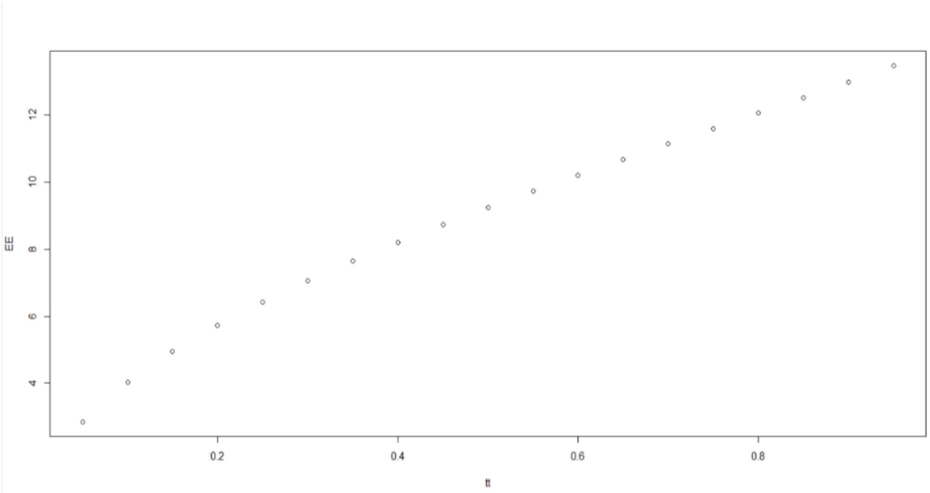
Τέλος θα αναπαραστήσουμε τις γραφικές παραστάσεις της εκτίμησης της μέγιστης δυνητικής έκθεσης (PE) καθώς και της εκτίμησης της αναμενόμενης έκθεσης (EE) μέσω της εντολής plot.

```
plot(tt,EE)
plot(tt,PE)
```

Στο παρακάτω σχήμα αποτυπώνεται γραφικά ο τρόπος με τον οποίο αυξάνεται η μέγιστη δυνητική έκθεση (PE) σε σχέση με τον χρόνο (tt).



Τέλος στο παρακάτω σχήμα αποτυπώνεται γραφικά ο τρόπος με τον οποίο αυξάνεται η αναμενόμενη έκθεση (EE) σε σχέση με τον χρόνο (tt).



<u>Παράδειγμα 2):</u> Στο παράδειγμα αυτό στόχος μας είναι να υπολογίσουμε μέσω της διαδικασίας της προσομοίωσης την προσαρμογή της πιστωτικής αξίας (CVA),

$$\mathrm{CVA} = E[\mathbb{1}\{\tau \leq T\} \cdot \max\{MtM(\tau), 0\}]$$

που εκφράζει την προεξοφλημένη αναμενόμενη αξία της πιθανής ζημιάς. Σκοπός του παραδείγματος αυτού είναι να παράγουμε τυχαία τον χρόνο, τ, στον οποίο θα γίνει η αθέτηση της υποχρέωσης (σε αντίθεση με το προηγούμενο παράδειγμα όπου ο χρόνος αθέτησης ήταν συγκεκριμένος). Έτσι λοιπόν ο χρόνος μέχρι την στιγμή αθέτησης θα είναι τυχαίος και υποθέτουμε ότι ακολουθεί την κατανομή Weibull με δοθείσες παραμέτρους a, b.

Έτσι λοιπόν θα θέσουμε τιμές στις παραμέτρους που έχουμε:

- $r = 0.05$ (το ετήσιο επιτόκιο αναφοράς της αγοράς ή ουδέτερου κινδύνου)
- $T = 1$ (είναι ο χρόνος μέχρι την λήξη, ο οποίος μετράται σε έτη)
- $\sigma = 0.5$ (η μεταβλητότητα της τιμής του υποκείμενου αγαθού)
- $K_0 = 100$ (η τιμή εξάσκησης του υποκείμενου αγαθού)
- $S_0 = 100$ (η αρχική τιμή του υποκείμενου αγαθού)
- $\mu = r - \sigma^2/2$ (η τάση της τιμής του υποκείμενου αγαθού ως προς μέτρο ουδέτερου κινδύνου).

Αρχικά θα τρέξουμε δέκα επαναλήψεις παράγοντας τυχαία τον χρόνο αθέτησης, τ, όπως προαναφέραμε. Σε εκείνο τον τυχαίο χρόνο παράγουμε την τιμή, S_τ που θα έχει το υποκείμενο αγαθό. Έπειτα, υπολογίζουμε τον κίνδυνο του αντισυμβαλλόμενου, ο οποίος είναι ίσος με $\max\{MtM, 0\}$ αν ο χρόνος τ είναι πριν τον χρόνο λήξης T, και 0 διαφορετικά. Στην συνέχεια την κάθε τιμή που βρίσκουμε για τον κίνδυνο του αντισυμβαλλόμενου την τοποθετούμε στην i-θέση μιας λίστας η οποία περιέχει τις τιμές κινδύνου του αντισυμβαλλόμενου που έχουν παραχθεί σε τυχαίους χρόνους. Επιπλέον, με παρόμοια λογική φτιάξαμε: μια λίστα η οποία περιέχει τους χρόνους αθέτησης, τις αγοραίες αξίες καθώς και τις τιμές των υποκείμενων αγαθών τους στους αντίστοιχους τυχαίους χρόνους. Τέλος παίρνουμε την μέση τιμή από τα δέκα στοιχεία της λίστας η οποία περιέχει τις τιμές κινδύνου του αντισυμβαλλόμενου και λαμβάνουμε μια αδρή εκτίμηση (από μόλις 10 επαναλήψεις) για την προσαρμογή της πιστωτικής αξίας (CVA).

Στο παρακάτω σχήμα θα παραθέσουμε επίσης την πυκνότητα της κατανομής της Weibull σε σχέση με τον χρόνο αφού την έχουμε παράγει μέσω της εντολής plot.

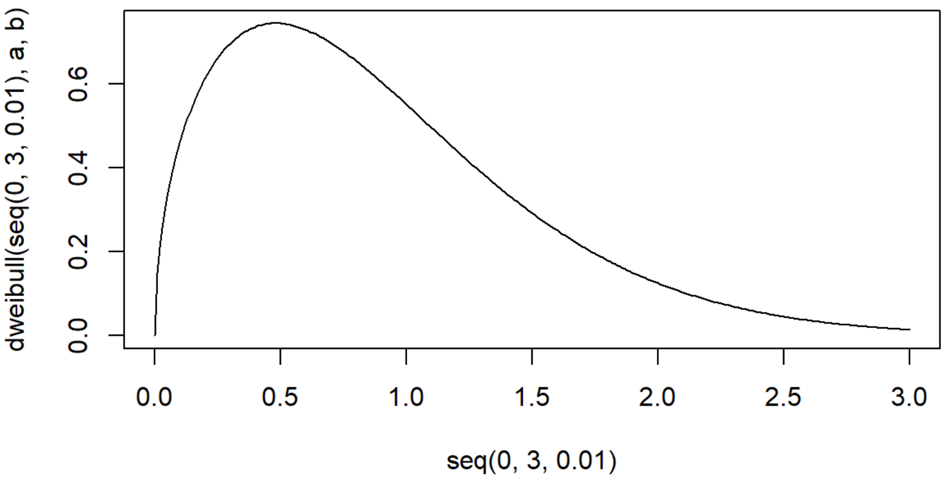
Ο αντίστοιχος κώδικας R για όλα τα παραπάνω είναι:

```
r=0.05; T=1; sigma=0.5; K=100; S0=100; mu=r-sigma^2/2;
C=function(t,S)
{
d1=(r*(T-t)+sigma^2*(T-t)/2-log(K/S))/(sigma*(T-t)^0.5);
C=S*pnorm(d1,0,1)-K*exp(-r*(T-t))*pnorm(d1-sigma*(T-
t)^0.5,0,1);C
}

a=1.5;b=1;n=10;set.seed(1)
plot(seq(0,3,0.01),dweibull(seq(0,3,0.01),a,b),type="l")

ee=rep(0,n);taulist=rep(0,n);slist=rep(0,n);
for(i in 1:n)
{
  tau=rweibull(1,a,b)
  St=S0*exp(tau*mu+tau^0.5*sigma*rnorm(1,0,1));
    if(tau<T)
    {MtM=exp(-r*tau)*C(tau,St)-C(0,S0);EAD=max(MtM,0);e=EAD}
    else{e=0}
  ee[i]=e;taulist[i]=tau;slist[i]=St;
 }
taulist
slist
ee
CVA=mean(ee);CVA
```

Αρχικά λαμβάνουμε ένα γράφημα με την μορφή της σ.π.π. του χρόνου μέχρι την α-θέτηση:



και μέσω του παραπάνω κώδικα κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα

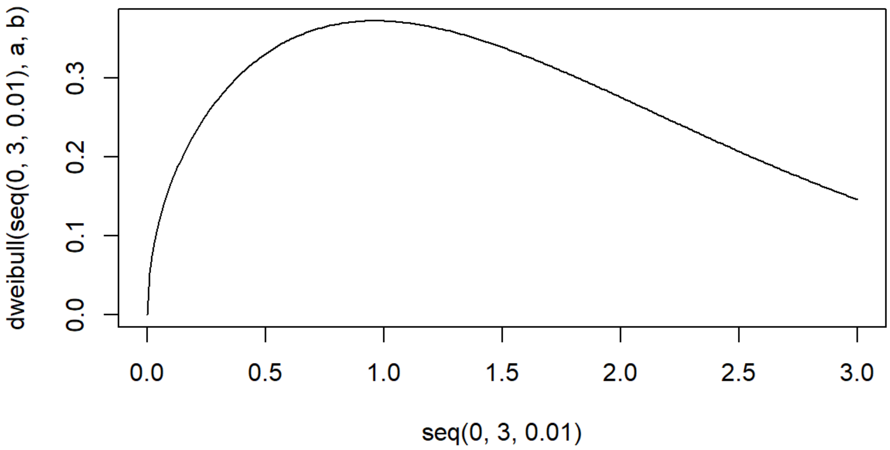
τ	S_τ	$EAD(\tau)$
1 ,2070332	76 ,35813	0 ,000000
0 ,2100698	81 ,28135	0 ,000000
0 ,1479607	107 ,10615	2 ,707329
1 ,9790368	48 ,40641	0 ,000000
0 ,5203793	86 ,47367	0 ,000000
0 ,7866902	121 ,69460	2 ,537906
0 ,9782085	135 ,56055	12 ,174245
1 ,3396169	113 ,33009	0 ,000000
1 ,2031299	77 ,95909	0 ,000000
0 ,9740439	161 ,94142	37 ,327944

όπου

$$EAD(\tau) = \mathbb{1}_{[\tau<T]}\max\{MtM(\tau),0\} = \mathbb{1}_{[\tau<T]}\max\{e^{-r\tau}C_\tau(S_\tau) - C_0(S_0), 0\}$$

Η μέση τιμή της EAD από τις 10 παραπάνω επαναλήψεις εκτιμάται 5.47472. Προκειμένου να πάρουμε μια καλύτερη εκτίμηση του CVA (μέσης τιμής του EAD) θα επαναλάβουμε τα παραπάνω για $n = 10^6$ τυχαίες επαναλήψεις. Σε αυτή την περίπτωση εκτιμούμε ότι το CVA είναι ίσο με 5.83 ενώ το ποσοστό των επαναλήψεων που βρέθηκε θετική ζημία ($EAD(\tau)$) εκτιμάται ότι είναι 21.9% (λαμβάνεται μέσω της εντολής **`mean(ee>0)`**)

Παρατηρούμε ότι δίνοντας μεγαλύτερη τιμή στην παράμετρο b της Weibull μεγαλώνει και ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την αθέτηση. Συνεπώς θα έχω περισσότερες μηδενικές τιμές. Θα έχουμε την ακόλουθη γραφική παράσταση της πυκνότητας της κατανομής Weibull σε σχέση με τον χρόνο ($b = 2$):



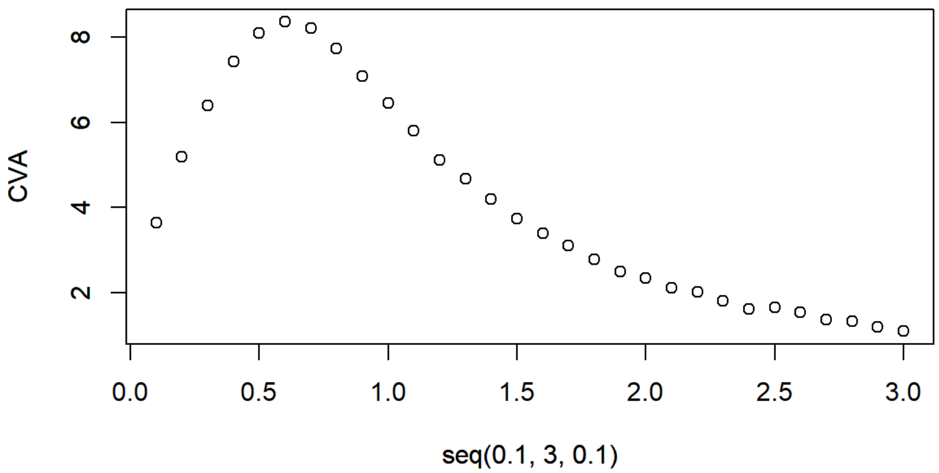
Στην συνέχεια στο ίδιο παράδειγμα παράγουμε $n = 10^5$ τυχαία σενάρια και αλλάζουμε τις τιμές στις παραμέτρους της κατανομής της Weibull a, b με σκοπό να παρατηρήσουμε πως αλλάζει τιμές το CVA. Πιο συγκεκριμένα μέσω της συνάρτησης 'for' θα δώσουμε διάφορες τιμές στην παράμετρο b της Weibull από 0.1 έως 3 με βήμα 0.1. Τέλος δίνοντας την τιμή $a = 2$ της παραμέτρου της Weibull και για όλες τις διαφορετικές τιμές του b θα δημιουργήσουμε ένα γράφημα του CVA ως προς το b.

Ο αντίστοιχος κώδικας R είναι:

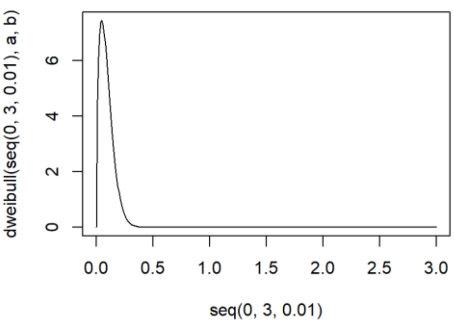
```
a=2;n=10^5;CVA=c();
for(b in seq(0.1,3,0.1))
{
  ee=rep(0,n);
  for(i in 1:n)
  {
    tau=rweibull(1,a,b)
    e=0;
    if(tau<T)
    {
      St=S0*exp(tau*mu+tau^0.5*sigma*rnorm(1,0,1));
      MtM=exp(-r*tau)*C(tau,St)-C(0,S0)
      e=max(MtM,0);
    }
    ee[i]=e
```

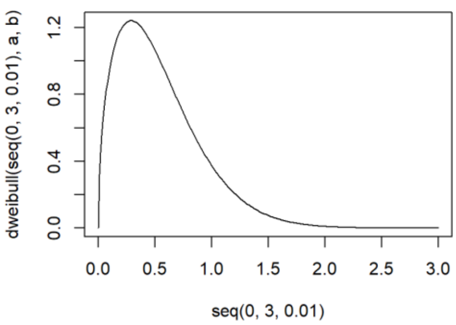
```
  }
  CVA=c(CVA,mean(ee))
}
plot(seq(0.1,3,0.1),CVA)
```

Επομένως το γράφημα του γράφημα του CVA ως προς το b θα είναι:



Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του b, ο χρόνος τ θα είναι μικρός (μικρότερος του T), οπότε, αν και η αθέτηση του αντισυμβαλλομένου γίνεται πριν τον χρόνο λήξης, η ζημία θα είναι σχετικά μικρή. Αντίθετα, αν το τ είναι σχετικά μεγάλο, τότε τις περισσότερες φορές η αθέτηση του αντισυμβαλλομένου γίνεται μετά την λήξη του δικαιώματος και επομένως τις περισσότερες φορές η ζημία είναι 0. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η μεγαλύτερη τιμή του CVA εκτιμάται ότι είναι για $b \approx 0.6$ όπου ο χρόνος τ έχει την ακόλουθη σ.π.π. (βλ. δεξιό σχήμα). Για $b = 0.1$ η αντίστοιχη σ.π.π. δίνεται στο αριστερό σχήμα.





ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Basel Committee on Banking Supervision (2014b):*The Standardized Approach for Measuring Counterparty Credit Risk Exposures March 2014*
- Basel Committee on Banking Supervision (2015c):*Review of the Credit Valuation Adjustment Risk Framework Consultative Document, July 2015*
- Basel Committee on Banking Supervision (2016d): *Interest Rate Risk in the Banking Book, April 2016*
- Bessis J (2015): *Risk Management in Banking (fourth edition).* Wiley
- Canabarro E and Duffie D (2003), *Measuring and Marking Counterparty Risk , Chapter 9 Tilman, L : Asset/Liability Management for Financial Institutions*, Institutional Investor Books
- Canabarro E, Picoult E, Wilde T (2003) *Analysing Counterparty Risk, Risk Magazine , 16(9), pp 117-122*
- Chan N.H and Wong H.Y (2013) *Handbook of Financial Risk Management: Simulations and Case studies*. Wiley
- Guegan D, Hasssani B.K (2019) *Risk Management: From Quantitative Measures to Management Decisions.* Springer
- Hull J.C (2003) *Options, Futures and other Derivatives (ninth edition).* Pearson
- Roncalli T (2020) *Handbook of Financial Risk Management*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series
- Saunders A, Cornett M.M (2003): *Financial Institutions Management: A Risk Management Approach.* McGraw-Hill/Irwin
- Skoglund J and Chen W (2015) *Applications in Market, Credit, Asset and Liability Management and Firmwide Risk*. Wiley Finance