Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο   Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

ΑΠΟΔΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΩΝ ΣΕ ΟΜΑΔΕΣ (BLOCKS)

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς
Νοέμβριος 2023

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

ΑΠΟΔΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΩΝ ΣΕ ΟΜΑΔΕΣ (BLOCKS)

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς
Νοέμβριος 2023

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS

EFFICIENT BLOCKING OF FACTORIAL DESIGNS

By

DIMITRIOU ANASTASIOS

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
November 2023

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Χ. Ευαγγελάρας Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Κ. Πολίτης Αναπληρωτής Καθηγητής
- Γ. Τζαβελάς Αναπληρωτής Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

Στους γονείς μου

Χρήστο και Ντίνα

Ευχαριστίες

Αφιερώνεται η παρούσα εργασία σε όσους ανθρώπους με υποστήριξαν, με καθοδήγησαν και συνέβαλαν για την απόκτηση του συγκεκριμένου μεταπτυχιακού τίτλου σπουδών.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετάμε παραγοντικούς σχεδιασμούς με δύο επίπεδα, που συναντώνται σε αρκετά πειράματα όπως στην βιομηχανία. Στο πρώτο κεφάλαιο αναλύουμε πλήρης παραγοντικούς σχεδιασμούς και συγκεκριμένα τον πλήρη 2^k παραγοντικό σχεδιασμό, καθώς και τους κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς $1/2^k$. Κύριο στόχο της εργασίας αποτελούν οι ορθογώνιοι σχηματισμοί δύο επιπέδων και κάποιες «καλές» ιδιότητες που έχουν. Στο δεύτερο κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε την τεχνική της ομαδοποίησης (blocking), με σκοπό την βέλτιστη απόδοση του σχεδιασμού. Η τεχνική αυτή αποτελεί έναν τρόπο να ξεπεραστεί το συχνό πρόβλημα μη ομογενών συνθηκών που εμφανίζεται κατά τις διάφορες εκτελέσεις του πειράματος. Στην βιβλιογραφία συναντάμε αρκετές αναφορές για τεχνικές βελτιστοποίησης ομαδοποιημένων παραγοντικών σχεδιασμών και ορθογώνιων σχηματισμών, όπως από τους Sun, Cheng and Wu, Das και άλλους.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό κριτήριο της D-αποδοτικότητας για να μετρήσουμε την αποτελεσματικότητα των ομαδοποιημένων σχεδιασμών, στους οποίους οι επιδράσεις των ομαδοποιημένων παραγόντων είναι ασυσχέτιστες με τις κύριες επιδράσεις. Επιπλέον με το κριτήριο αυτό οι παράμετροι του γραμμικού μοντέλου παλινδρόμησης που αποτελούνται από τον μέσο όρο, τον παράγοντα block, τις κύριες επιδράσεις, και τις αλληλεπιδράσεις $2^{ης}$ τάξης, υπολογίζονται με την μεγαλύτερη δυνατή αποτελεσματικότητα.

Τέλος στο τέταρτο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε σχεδιασμούς με 4, 5 και 6 στήλες και θα επιλέξουμε ως βέλτιστη επιλογή ομαδοποίησης την στήλη-ες που εμφανίζει την μεγαλύτερη τιμή του παραπάνω κριτηρίου.

Abstract

In the present paper we study factorial designs with two levels, which are found in several experiments as well as in industry. In the first chapter we analyse full factorial designs and specifically the full 2^k factorial design, as well as the fractional $1/2^k$ factorial designs. The main objective of the work is the orthogonal arrays of two levels and some "good" properties they have. In the second chapter we will apply the technique of blocking, with the aim of optimal performance of the design. This technique is a way to overcome the frequent problem of inhomogeneous conditions that occurs during the various runs of the experiment. In the literature we find several references to optimization techniques of blocked factorial designs and orthogonal formations, such as by Sun, Cheng and Wu, Das and others.

In the third chapter we will use the well-known criterion of D-efficiency to measure the efficiency of blocked designs, in which the effects of the blocked factors are uncorrelated with the main effects. In addition, with this criterion the parameters of the linear regression model consisting of the mean, the block factor, the main effects, and the 2nd order interactions, are calculated with the greatest possible efficiency.

Finally, in the fourth chapter we will present designs with 4, 5 and 6 columns and we will choose as the optimal grouping option the column that shows the highest value of the above criterion.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Ο όρος «πείραμα» ο οποίος είναι γνωστός εδώ και αρκετούς αιώνες, χρησιμοποιείται για την παρατήρηση και την προσπάθεια ερμηνείας όλων των φυσικών συμβάντων. Ο Box (1974) είχε πει ότι τα πειράματα είναι ένα παράθυρο μέσα από το οποίο παρατηρούμε την φύση. Στις μέρες μας η αναγκαιότητα του πειράματος παρατηρείται σε αρκετούς τομείς όπως στον αγροτικό τομέα, την βιομηχανία και την φαρμακευτική. Είναι πλέον γνωστό ότι η εισαγωγή ενός φαρμάκου για χρήση στο εμπόριο επιτυγχάνεται ύστερα από τις φάσεις των κλινικών δοκιμών, στις οποίες οι επιστήμονες λαμβάνουν επαρκή στοιχεία για την αποτελεσματικότητα μιας θεραπείας. Ακόμα πολλές εταιρείες επενδύουν στον στατιστικό έλεγχο ποιότητας των προϊόντων τους, διεξάγοντας στατιστικούς ελέγχους με σκοπό την παρατήρηση των συνθηκών που επηρεάζουν περισσότερο την καλύτερη ποιότητα των προϊόντων. Σε κάθε περίπτωση τα πειράματα βασίζονται σε επαναλαμβανόμενες διαδικασίες όπου αποτελούνται από μία ή περισσότερες εκτελέσεις-δοκιμές, στις οποίες γίνονται εσκεμμένες και προμελετημένες αλλαγές στις τιμές των μεταβλητών που λαμβάνουν μέρος στο πείραμα με σκοπό να παρατηρηθούν και να αναγνωριστούν οι πιθανές αιτίες που επιφέρουν αλλαγές στις τιμές της μεταβλητής που εξετάζεται. Ωστόσο κατά την εκτέλεση ενός πειράματος απαιτείται ένα επαρκές πειραματικό υλικό και ένα σύνολο πειραματικών μονάδων για την διεξαγωγή συμπερασμάτων. Για παράδειγμα πειραματικές μονάδες πειραμάτων στον αγροτικό τομέα θεωρούνται τα αγροτεμάχια ή τα φυτά και στον βιομηχανικό τομέα τα μηχανήματα τα προϊόντα ή τα υλικά της παραγωγής. Ένα μεγάλο μέρος της μεθοδολογίας για τον σχεδιασμό πειραμάτων που χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα, την συναντάμε από τον Ronald Fisher στα βιβλία «*The arrangement of field experiments*» (1926) και «*The Design of experiments*» (1935). Παρακάτω θα ασχοληθούμε με πειράματα όπου το αποτέλεσμα προς ανάλυση (μεταβλητή απόκρισης) επηρεάζεται από μεταβλητές (παράγοντες) με δύο επίπεδα η καθεμία.

1.1 Οι 2^k πλήρεις παραγοντικοί σχεδιασμοί

Σε κάθε πείραμα ορίζουμε ως παράγοντα το είδος των συνθηκών εκείνων, που επεμβαίνουν στην διαμόρφωση των τιμών της υπό εξέτασης μεταβλητής, ενώ ως επίπεδο το πλήθος των επεμβάσεων που περιέχει κάθε παράγοντας. Τα επίπεδα κάθε παράγοντα μπορεί να είναι κατηγορικά ή συνεχή και επίσης μπορεί να είναι προκαθορισμένα (Fixed Effects) ή τυχαία

(Random Effects). Υπάρχουν πειράματα που περιλαμβάνουν αρκετούς παράγοντες, στα οποία μελετάται η κοινή επίδραση των παραγόντων στην μεταβλητή απόκρισης. Κάθε συνδυασμός των επιπέδων των παραγόντων ονομάζεται θεραπεία (treatment). Ο αριθμός των θεραπειών αυξάνεται εκθετικά καθώς μεγαλώνει ο αριθμός των παραγόντων ή των επιπέδων τους. Για παράδειγμα αν σε ένα πείραμα μελετάμε 3 μεταβλητές με 3 επίπεδα η κάθε μία, ο αριθμός των θεραπειών είναι $3^3 = 27$. Αν όμως εξετάζουμε 4 μεταβλητές με 4 επίπεδα η κάθε μία, τότε ο αριθμός των θεραπειών αυξάνεται σε $4^4 = 256$. Σε τέτοιου είδους πειράματα χρησιμοποιούνται ευρέως οι πλήρης παραγοντικοί σχεδιασμοί καθώς είναι ιδιαίτερα αποδοτικοί. Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα τους είναι ότι :

- Εντοπίζουν τις αλληλεπιδράσεις που δημιουργούνται μεταξύ των παραγόντων και μας βοηθούν να καταλήξουμε σε συμπεράσματα για τις επιπτώσεις που προκαλούν
- Δημιουργούν ένα εμπειρικό μοντέλο για τους παράγοντες που επηρεάζουν την μεταβλητή απόκρισης
- Οι υπολογισμοί κατά την επεξεργασία των δεδομένων είναι σχετικά απλοί.

(Montgomery, 2001)

Ως κύρια επίδραση ενός παράγοντα ορίζουμε την αλλαγή που γίνεται στην μεταβλητή απόκρισης από την αλλαγή στα επίπεδα του παράγοντα, οι οποίοι είναι πρωταρχικής σημασίας για το πείραμα και ως αλληλεπίδραση ορίζουμε την μέση διαφορά της επίδρασης του παράγοντα A στο υψηλό επίπεδο και του παράγοντα B στο χαμηλό επίπεδο. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα 1, όπου ο παράγοντας A είναι η θερμοκρασία με 2 επίπεδα (A_1 και A_2) και ο παράγοντας B η πίεση με 2 επίπεδα (B_1 και B_2).

	B_1	B_2
A_1	25	30
A_2	35	50

Πίνακας 1 : Παραγοντικό πείραμα με 2 παράγοντες και 2 επίπεδα

Η κύρια επίδραση κάθε παράγοντα συμβολίζεται με A ή B και θεωρείται ως η διαφορά των μέσων αποκρίσεων που αντιστοιχεί στα δυο επίπεδα του. Δηλαδή έχουμε:

$$A = \frac{35+50}{2} - \frac{25+30}{2} = 15$$
$$B = \frac{30+50}{2} - \frac{25+35}{2} = 10$$

το οποίο σημαίνει ότι η αύξηση του παράγοντα A από το επίπεδο 1 στο 2, προκαλεί μία μέση αύξηση 15 μονάδων στην μεταβλητή απόκρισης, ενώ η αύξηση του παράγοντα B από το επίπεδο 1 στο 2, μία μέση αύξηση 10 μονάδων αντίστοιχα.

Η πιο σημαντική περίπτωση είναι όταν έχουμε k παράγοντες σε 2 επίπεδα ο καθένας. Το υψηλό επίπεδο συνηθίζεται να συμβολίζεται με +1 ενώ το χαμηλό με -1. Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και ο συμβολισμός 1 και 0 για τα δύο επίπεδα αντίστοιχα. Τα επίπεδα μπορεί να είναι δυο ποσοτικές τιμές (πχ θερμοκρασία , πίεση) ή ποιοτικές τιμές (πχ δυο μηχανές, δυο χειριστές). Σε σχέση με τους συμβολισμούς και τους υπολογισμούς των παραγοντικών πειραμάτων είναι απλούστεροι λόγω της ύπαρξης μόνο δυο επιπέδων. Μια πλήρης επανάληψη του σχεδιασμού απαιτεί $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^k$ παρατηρήσεις και ονομάζεται 2^k πλήρης παραγοντικός σχεδιασμός. Ακόμα και για ένα μέτριο πλήθος k παραγόντων , ο συνολικός συνδυασμός των παραγόντων είναι μεγάλος. Για παράδειγμα αν k=5 τότε ο σχεδιασμός 2^5 έχει 32 συνδυασμούς, αν k=6 ο 2^6 σχεδιασμός έχει 64 συνδυασμούς κτλ. Επειδή τα μέσα αντιμετώπισης είναι συνήθως περιορισμένα και απαιτούν πολλές φορές μια μόνο επανάληψη, ο πειραματιστής θα πρέπει να μειώσει τις επαναλήψεις παραλείποντας μερικούς από τους αρχικούς παράγοντες.

Μια μόνο επανάληψη ενός πλήρους 2^k παραγοντικού σχεδιασμού ονομάζεται μη επαναλαμβανόμενος (unreplicated) παραγοντικός σχεδιασμός. Στην περίπτωση αυτή ωστόσο δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε το σφάλμα. Στα αρχικά στάδια μιας μελέτης με πολλούς παράγοντες, οι πλήρης 2^k παραγοντικοί σχεδιασμοί είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι γιατί παρέχουν τον μικρότερο αριθμό επαναλήψεων, ώστε οι k παράγοντες να εξεταστούν σε έναν πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό. Στους σχεδιασμούς αυτούς υποθέτουμε ότι:

- Οι παράγοντες είναι σταθεροί, δηλαδή οι μεταβλητές που επηρεάζουν την τιμή της υπό εξέτασης μεταβλητής δεν αλλάζουν και διατηρούν τις ίδιες τιμές κατά την διάρκεια του πειράματος.
- Οι σχεδιασμοί είναι πλήρως τυχαιοποιημένοι
- Ικανοποιούνται οι συνήθεις παραδοχές της κανονικότητας, ομοσκεδαστικότητας και της ανεξαρτησίας.

Στα περισσότερα πειράματα υποθέτουμε ότι η απόκριση η οποία συμβολίζεται με y είναι γραμμική όσο αναφορά το εύρος των επιπέδων του παράγοντα που έχουν επιλεγεί (2 επίπεδα). Ωστόσο σε μερικές περιπτώσεις η υπόθεση αυτή παραβιάζεται.

Στα παραγοντικά πειράματα ο τρόπος σχεδίασης είναι σχετικά απλός και ορίζει ουσιαστικά τις θέσεις του κάθε παράγοντα στο πείραμα. Στην σειρά των πειραμάτων από 1 έως 2^k ορίζουμε οριζόντια τους k παράγοντες. Στην τελευταία στήλη η οποία αντιστοιχεί στον k παράγοντα θέτουμε τα μισά πειράματα 2^k /2 στην χαμηλή στάθμη (–) και τα άλλα μισά στην υψηλή (+). Στην προηγούμενη στήλη που αντιστοιχεί στον k-1 παράγοντα, θέτουμε το ¼ των πειραμάτων στην χαμηλή στάθμη, το άλλο ¼ στην υψηλή και ου το καθεξής.

1.1.1 Το 2^2 Παραγοντικό

Στο 2^2 παραγοντικό έχουμε δυο παράγοντες A και B, οι οποίοι εξετάζονται σε 2 επίπεδα (στάθμες) ο καθένας, υψηλό και χαμηλό και κάποιον αριθμό n επαναλήψεων που αποφασίζουμε για κάθε συνδυασμό των επιπέδων των παραγόντων αυτών. Κάθε επανάληψη του πειράματος περιέχει όλους τους συνδυασμούς των τεσσάρων αυτών θεραπειών. Ο συμβολισμός στον σχεδιασμό αυτό, ο οποίος γενικεύεται και για τους 2^k πλήρης παραγοντικούς σχεδιασμούς είναι ο εξής:

«a» :Παριστάνει τον συνδυασμό αγωγής του παράγοντα A στο υψηλό επίπεδο (στάθμη) και του B στο χαμηλό

«b» :Παριστάνει τον συνδυασμό αγωγής του παράγοντα A στο χαμηλό επίπεδο (στάθμη) και του B στο υψηλό

«ab» :Παριστάνει και τους 2 παράγοντες στο υψηλό επίπεδο

«1» :Παριστάνει και τους 2 παράγοντες στο χαμηλό επίπεδο

Οι παραπάνω συμβολισμοί παριστάνουν το σύνολο των n μετρήσεων που παίρνουμε για κάθε θεραπεία.

Όπως περιγράψαμε παραπάνω στην στήλη του τελευταίου παράγοντα B θέτουμε τα μισά πειράματα (4:2=2) με το πρόσημο (-) και τα άλλα μισά με το πρόσημο (+) και στην προηγούμενη στήλη του παράγοντα A το ¼ (4:4=1) με το πρόσημο (-) και (+) αντίστοιχα και έτσι παίρνουμε τις θεραπείες 1, a, b, ab με την συγκεκριμένη σειρά όπως φαίνεται παρακάτω στον Πίνακα 2, η οποία καλείται τυπική διάταξη των θεραπειών.

ΘΕΡΑΠΕΙΑ				
A	B	A	B	ΣΥΝΟΛΟ
χαμηλή	χαμηλή	-	-	(1)
υψηλή	χαμηλή	+	-	a
χαμηλή	υψηλή	-	+	b
υψηλή	υψηλή	+	+	ab

Πίνακας 2: Τυπική Διάταξη Θεραπειών στο 2^2 παραγοντικό

Πολλαπλασιάζοντας τα πρόσημα των στηλών A και B προκύπτει η στήλη με τα πρόσημα της αλληλεπίδρασης όπως φαίνεται παρακάτω στον πίνακα 3.

ΘΕΡΑΠΕΙΑ					
A	B	A	B	AB	ΣΥΝΟΛΟ
χαμηλή	χαμηλή	-	-	+	(1)
υψηλή	χαμηλή	+	-	-	a
χαμηλή	υψηλή	-	+	-	b
υψηλή	υψηλή	+	+	+	ab

Πίνακας 3: Τυπική Διάταξη Θεραπειών στο 2^2 παραγοντικό με αλληλεπίδραση

Έτσι από τους παραπάνω πίνακες μπορούμε να δημιουργήσουμε τον πίνακα αλγεβρικών προσήμων του σχεδιασμού όπως φαίνεται παρακάτω.

A	B	AB	ΣΥΝΟΛΟ
-	-	+	(1)
+	-	-	a
-	+	-	b
+	+	+	ab

Πίνακας 4 : Πίνακας αλγεβρικών πρόσημων του 2^2 παραγοντικού σχεδιασμού

Αντίστοιχα ο πίνακας αλγεβρικών πρόσημών ενός 2^k πλήρους παραγοντικού σχεδιασμού έχει 2^k γραμμές και k στήλες που προκύπτουν από τις k στήλες του σχεδιασμού, τις οποίες πολλαπλασιάζοντας τα αντίστοιχα πρόσημα ανά δύο, δημιουργούμε τις στήλες με τα πρόσημα των αλληλεπιδράσεων 2ης τάξης. Στην συνέχεια πολλαπλασιάζοντας τις αλληλεπιδράσεις 2ης τάξης με τα αντίστοιχα πρόσημα από κάθε μία από τις k στήλες σχηματίζουμε τις στήλες με τα πρόσημα των αλληλεπιδράσεων 3ης τάξης και ου το καθεξής.

Ο υπολογισμός των κύριων επιδράσεων και της αλληλεπίδρασης μπορεί να γίνει επίσης χρησιμοποιώντας τον παραπάνω πίνακα. Πολλαπλασιάζουμε τα πρόσημα της κατάλληλης στήλης με την αντίστοιχη θεραπεία και το άθροισμα που θα προκύψει το διαιρούμε με 2n. Έτσι για την εκτίμηση της επίδρασης του παράγοντα Α το άθροισμα που προκύπτει είναι:

$$l_A = \left(a + ab - b - (1)\right), \quad \text{επομένως } A = \frac{1}{2n}\, l_A$$

και του παράγοντα Β :

$$l_B = \left(b + ab - a - (1)\right), \quad \text{επομένως } B = \frac{1}{2n}\, l_B$$

Συμβολίζοντας με T_1=(1), T_2=b, T_3=a και T_4=ab μπορούμε να εκτιμήσουμε τις επιδράσεις των παραγόντων A , B καθώς και της αλληλεπίδρασης που προκύπτουν από τις παρακάτω αντιθέσεις, οι οποίες είναι ανά δύο ορθογώνιες.

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{4} c_i T_i}{2n} \qquad \text{όπου } c_1 = -1,\ c_2 = -1,\ c_3 = +1,\ c_4 = +1$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{4} d_i T_i}{2n} \qquad \text{όπου } d_1 = -1,\ d_2 = +1,\ d_3 = -1,\ d_4 = +1$$

$$AB = \frac{\sum_{i=1}^{4} k_i T_i}{2n} \qquad \text{όπου } k_1 = +1,\ k_2 = -1,\ k_3 = -1,\ k_4 = +1$$

1.1.2 Ανάλυση διασποράς

Τα αθροίσματα τετραγώνων SSA και SSB των παραγόντων Α, Β καθώς και SSAB της αλληλεπίδρασης ΑΒ υπολογίζονται σύμφωνα με τον τύπο:

$$SSl = \frac{\left(\sum_{i=1}^{4} c_i Ti\right)^2}{4n} \quad , \text{όπου } T_1=(1),\ T_2=b,\ T_3=a \text{ και } T_4=ab$$

Ο υπολογισμός του ολικού αθροίσματος τετραγώνων δίνεται από τον τύπο:

$$SSTO = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{n} y_{iJk}^2 - \frac{y_{\cdots}^2}{4n}$$

και το άθροισμα τετραγώνων του τυχαίου σφάλματος από τον τύπο:

$$SSE = SSTO - SSA - SSB - SSAB$$

1.1.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να εξετάσουμε την επίδραση δύο παραγόντων Α και Β με δύο επίπεδα ο καθένας στον χρόνο επίδρασης μίας χημικής διαδικασίας. Οι τιμές του παράγοντα Α είναι (20 και 50) και του παράγοντα Β (15 και 17) και ο αριθμός των επαναλήψεων για κάθε συνδυασμό των παραγόντων είναι n=3. Το πλάνο του πειράματος φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

ΘΕΡΑΠΕΙΑ					ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ			
A	B	A	B	AB	n=1	n=2	n=3	ΣΥΝΟΛΟ
20	15	-	-	+	28	25	27	(1) =80
50	15	+	-	-	18	19	23	a = 60
20	17	-	+	-	36	32	32	b =100
50	17	+	+	+	31	30	29	ab =90

Πίνακας 5 : Πειραματικό πλάνο ενός 2^2 παραγοντικού σχεδιασμού

Για τον υπολογισμό των κύριων επιδράσεων έχουμε:

$l_A = \left(a + ab - b - (1)\right) = 60 + 90 - 100 - 80 = -30$, επομένως

$A = \frac{1}{2n} l_A = (-30):6 = -5$

$l_B = \left(b + ab - a - (1)\right) = 100 + 90 - 60 - 80 = 50$, επομένως

$B = \frac{1}{2n} l_B = 50:6 = 8.3$

$l_{AB} = ((1) + ab - b - a) = 80 + 90 - 100 - 60 = 10$, επομένως

$AB = \frac{1}{2n} l_{AB} = 10:6 = 1.66$

Και τα αθροίσματα τετραγώνων είναι :

$SSA = l_A^2 \cdot \frac{1}{4n} = 900:12 = 75$

$SSB = l_B^2 \cdot \frac{1}{4n} = 250:12 = 208.3$

$SSAB = l_{AB}^2 \cdot \frac{1}{4n} = 100:12 = 8.3$

$SSTO = 323$

$SSE = 31.3$

1.1.4 Το 2^k Παραγοντικό

Οι παραπάνω μέθοδοι μπορούν να γενικευτούν στον 2^k πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό, ο οποίος έχει:

- k κύριες επιδράσεις
- $\binom{k}{2}$ αλληλεπιδράσεις 2 παραγόντων
- $\binom{k}{3}$ αλληλεπιδράσεις 3 παραγόντων

……...

- **1** αλληλεπίδραση k παραγόντων

Η τυπική διάταξη των θεραπειών γίνεται προσθέτοντας έναν παράγοντα κάθε φορά ο οποίος συνδυάζεται με όλους όσους προηγούνται από αυτόν. Οι εκτιμήσεις των επιδράσεων και το άθροισμα των τετραγώνων τους υπολογίζεται από την αντίθεση που αντιστοιχεί σε κάθε επίδραση, τις οποίες μπορούμε να βρούμε από τον πίνακα αλγεβρικών προσήμων. Ωστόσο για μεγάλες τιμές του k, δεν είναι εύκολο να τις υπολογίσουμε από τον πίνακα αλγεβρικών προσήμων ο οποίος θα έχει πολλές στήλες. Η αντίθεση για την αλληλεπίδραση ABC…K μπορεί να υπολογιστεί από την παρακάτω ισότητα αναπτύσσοντας το γινόμενο στο 2ο μέλος

$$L_{ABC\cdots K} = (a \pm 1)(b \pm 1)\cdots(k \pm 1)$$

Αν ο παράγοντας ανήκει στην αλληλεπίδραση το πρόσημο σε κάθε παρένθεση είναι αρνητικό ενώ στην αντίθετη περίπτωση είναι θετικό. Στο τέλος ο αριθμός 1 παριστάνει το (1) δηλαδή όλους τους παράγοντες στην χαμηλή στάθμη και αντικαθίσταται. Οι επιδράσεις και τα αθροίσματα τετραγώνων τους μπορούν να υπολογιστούν από τους τύπους:

$$AB\cdots K = \frac{2}{n \cdot 2^k} L_{ABC\cdots K} \qquad \text{και}$$

$$SS_{AB\cdots K} = \frac{1}{n \cdot 2^k}(L_{ABC\cdots K})^2,$$

όπου *n* ο αριθμός των επαναλήψεων.

1.2 Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί

Στην περίπτωση ενός πλήρους 2^6 παραγοντικού σχεδιασμού απαιτούνται 64 εκτελέσεις για μια επανάληψη του σχεδιασμού. Από τους 63 βαθμούς ελευθερίας, μόνο οι 6 αφορούν τις κύριες επιδράσεις και οι 15 τις αλληλεπιδράσεις δυο παραγόντων. Υπάρχουν μόνο 21 βαθμοί ελευθερίας οι οποίοι σχετίζονται με παράγοντες που είναι πιθανό να παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον. Οι υπόλοιποι αντιστοιχούν σε αλληλεπιδράσεις τριών και περισσότερων παραγόντων. Θεωρώντας ότι κάποιες αλληλεπιδράσεις υψηλής τάξης είναι αμελητέες, μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες για τις κύριες επιδράσεις και τις αλληλεπιδράσεις χαμηλής τάξης. Έτσι επιλέγοντας ένα κατάλληλο υποσύνολο (κλάσμα) των θεραπειών αυτών, έχουμε έναν κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό (fractional factorial design).

Οι σχεδιασμοί αυτοί είναι οι πιο ευρέως χρησιμοποιούμενοι τύποι για την βελτίωση βιομηχανικού-πειραματικού σχεδιασμού, καθώς και τον σχεδιασμό προϊόντων και διεργασιών. Η κυριότερη χρήση τους είναι σε πειράματα κρησαρίσματος με πολλούς παράγοντες, όπου στόχος είναι να εντοπίσουμε εκείνους τους παράγοντες (αν υπάρχουν) που επηρεάζουν περισσότερο την μεταβλητή απόκρισης. Οι κλασματικοί σχεδιασμοί με δυο παράγοντες συμβολίζονται με 2^{k-p} ή $1/2^p$ του πλήρους 2^k παραγοντικού σχεδιασμού.

Για παράδειγμα στον 2^{3-1} σχεδιασμό με 3 παράγοντες (2 επιπέδων), θα μελετηθούν 4 θεραπείες αντί για 8 που περιέχει ο πλήρης 2^3 σχεδιασμός. Το συγκεκριμένο κλάσμα καλείται και ½ του 2^3 παραγοντικού σχεδιασμού. Ωστόσο οι σχεδιασμοί αυτοί έχουν σαν μεγάλο μειονέκτημα ότι «θυσιάζονται» πληροφορίες, με αποτέλεσμα να δυσκολεύει η ερμηνεία των παραγοντικών επιδράσεων στην συνέχεια. Ἑτσι οδηγούμαστε αναπόφευκτα στο φαινόμενο της σύγχυσης των παραγοντικών επιδράσεων. Η επιτυχής χρήση τους βασίζεται σε τρεις βασικές ιδέες:

- Αρχή της σποραδικότητας των κύριων επιδράσεων: Σε κάποιες περιπτώσεις οι επιδράσεις των παραγόντων στην απόκριση δεν είναι ομοιόμορφες. Αυτό σημαίνει ότι οι επιδράσεις των παραγόντων διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους. Οι Box and Mayer (1986) παρατήρησαν ότι όταν υπάρχουν αρκετές μεταβλητές η διαδικασία διερεύνησης της επίδρασης στην απόκριση του πειράματος, μπορεί να οδηγείται από μερικές κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις χαμηλής τάξης

- Ιδιότητα της προβολής: Οι σχεδιασμοί αυτοί μπορούν να προβληθούν σε ισχυρότερα (μεγαλύτερα) σχέδια στο υποσύνολο σημαντικών παραγόντων

- Διαδοχικός πειραματισμός: Είναι δυνατό να συνδυαστούν τα αποτελέσματα δύο ή περισσότερων κλασματικών σχεδιασμών για την κατασκευή ενός μεγαλύτερου σχεδίου, έτσι ώστε να εκτιμηθούν οι παραγοντικές επιδράσεις και οι αλληλεπιδράσεις που μας ενδιαφέρουν.

Από τον παρακάτω πίνακα αλγεβρικών πρόσημών του 2^3 παραγοντικού σχεδιασμού (Πίνακας 6), μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν 2^{3-1} κλασματικό σχεδιασμό αν επιλέξουμε μια στήλη του πίνακα και κρατήσουμε τις γραμμές της που έχουν το ίδιο επίπεδο. Έτσι αν επιλέξουμε για παράδειγμα την στήλη ABC στην στάθμη με το πρόσημο «+» σαν γεννήτορα του σχεδιασμού θα έχουμε τον κλασματικό σχεδιασμό που φαίνεται στον πίνακα 7.

I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
+	-	-	+	-	+	+	-
+	+	-	-	-	-	+	+
+	-	+	-	-	+	-	+
+	+	+	+	-	-	-	-
+	-	-	+	+	-	-	+
+	+	-	-	+	+	-	-
+	-	+	-	+	-	+	-
+	+	+	+	+	+	+	+

Πίνακας 6 : Πίνακας αλγεβρικών πρόσημών του 2^3 παραγοντικού σχεδιασμού

A	B	C	Συνδ. Θεραπειών
+	-	-	a
-	+	-	b
-	-	+	c
+	+	+	abc

Πίνακας 7 : Πίνακας πρόσημών του 2^{3-1} κλασματικού σχεδιασμού

Παρατηρούμε ότι η στήλη του γεννήτορα που επιλέξαμε είναι ίδια με την στήλη της ορίζουσας I=ABC. Γι' αυτό τον λόγο θα ονομάζεται ορίζουσα σχέση του σχεδιασμού. Οι συνδυασμοί των θεραπειών αποδίδουν τρεις βαθμούς ελευθερίας τους οποίους μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να εκτιμήσουμε τις κύριες επιδράσεις. Ο γραμμικός συνδυασμός των παρατηρήσεων που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση τους είναι :

$$A = \frac{1}{2} \cdot (\ \ \mathrm{a} - b - c + \mathrm{a}bc)$$
$$B = \frac{1}{2} \cdot (-\mathrm{a} + b - c + \mathrm{a}bc)$$
$$C = \frac{1}{2} \cdot (-\mathrm{a} - b + c + \mathrm{a}bc)$$

Οι γραμμικοί αυτοί συνδυασμοί των παρατηρήσεων είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι χρησιμοποιούνται και για την εκτίμηση των αλληλεπιδράσεων 2 παραγόντων. Κατά συνέπεια είναι αδύνατο να γίνει διαφοροποίηση μεταξύ της επίδρασης του παράγοντα A και της αλληλεπίδρασης BC ή μεταξύ του B και της AC καθώς και του C με την αλληλεπίδραση AB. Στην περίπτωση αυτή οι επιδράσεις ονομάζονται ταυτόσημες.

Σε κάθε κλασματικό σχεδιασμό ωστόσο, αν γνωρίζουμε την-τις ορίζουσες σχέσεις μπορούμε να βρούμε τις ταυτόσημες επιδράσεις πολλαπλασιάζοντας τις παραγοντικές επιδράσεις με την ορίζουσα σχέση, (θεωρώντας ότι FF=I) όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ	ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΣΧΕΣΗ I=ABC	ΤΑΥΤΟΣΗΜΕΣ ΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ
A	AABC=BC	A, BC
B	BABC=AC	B, AC
AB	ABABC=C	AB, C
C	CABC=AB	C, AB
AC	ACABC=B	AC, B
BC	BCABC=A	BC, A
ABC	ABCABC=I	ABC, I

Πίνακας 8: Ταυτόσημες Επιδράσεις

Όταν υπάρχουν περισσότερες από μία ορίζουσες σχέσεις όμως, ο προσδιορισμός των ταυτόσημων επιδράσεων είναι μια επίπονη διαδικασία.

1.2.1 Διακριτική ικανότητα του σχεδιασμού (RESOLUTION)

Ως διακριτική ικανότητα ενός σχεδιασμού ορίζεται το μέτρο του βαθμού της σύγχυσης (ταύτισης) σε ένα πειραματικό σχεδιασμό. Ένας παράγοντας ή κάποια αλληλεπίδραση παραγόντων θεωρούμε ότι συγχέεται με κάποιον άλλον παράγοντα ή αλληλεπίδραση παραγόντων όταν οι κύριες επιδράσεις των παραγόντων ή των αλληλεπιδράσεων τους δεν μπορούν να διαχωριστούν μεταξύ τους λόγω των περιορισμών των δεδομένων του πειράματος.

Ο 2^{3-1} σχεδιασμός με ορίζουσα σχέση την I=ABC ονομάζεται και σχεδιασμός με διακριτική ικανότητα III. Γενικά ένας σχεδιασμός έχει διακριτική ικανότητα R ,αν καμία κύρια επίδραση δεν είναι ταυτόσημη με άλλη επίδραση που περιέχει λιγότερους από R-p παράγοντες, όπου p=k+1. Για τον συμβολισμό χρησιμοποιούμε την λατινική αρίθμηση. Για παράδειγμα το ½ κλάσμα του 2^3 σχεδιασμού με ορίζουσα σχέση την ABC είναι ένας 2_{III}^{3-1} σχεδιασμός. Οι σχεδιασμοί με διακριτική ικανότητα III, IV και V είναι οι πιο σημαντικοί:

Διακριτική ικανότητα III : είναι σχέδια όπου καμία κύρια επίδραση δεν ταυτίζεται με κάποια άλλη, αλλά κύριες επιδράσεις ταυτίζονται με αλληλεπιδράσεις 2 παραγόντων και μερικές αλληλεπιδράσεις 2 παραγόντων ταυτίζονται μεταξύ τους

Διακριτική ικανότητα IV : είναι σχέδια όπου καμία κύρια επίδραση δεν ταυτίζεται με κάποια άλλη ούτε με κάποια αλληλεπίδραση 2 παραγόντων, αλλά αλληλεπιδράσεις 2 παραγόντων ταυτίζονται μεταξύ τους.

Διακριτική ικανότητα V : είναι σχέδια όπου καμία κύρια επίδραση ή αλληλεπίδραση 2 παραγόντων δεν ταυτίζεται με άλλη κύρια επίδραση ή αλληλεπίδραση 2 παραγόντων, αλλά αλληλεπιδράσεις 2 παραγόντων ταυτίζονται με άλλες 3 παραγόντων.

Η διακριτική ικανότητα ενός κλασματικού σχεδιασμού με 2 παράγοντες είναι το μήκος της μικρότερης «λέξης» που χρησιμοποιείται σαν γεννήτορας σε ορίζουσα σχέση. Συνήθως θέλουμε να χρησιμοποιούμε κλασματικούς σχεδιασμούς με την μεγαλύτερη δυνατή διακριτική ικανότητα. Όσο υψηλότερη είναι η διακριτική ικανότητα τόσο λιγότεροι είναι οι περιορισμοί για τις υποθέσεις που απαιτούνται σχετικά με το ποιες αλληλεπιδράσεις είναι αμελητέες με σκοπό να πάρουμε μια μοναδική ερμηνεία για τα δεδομένα.

1.2.2 Το ¼ κλάσμα του 2^k παραγοντικού σχεδιασμού

Ο σχεδιασμός αυτός ο οποίος συμβολίζεται επίσης 2^{k-2} , έχει 2 γεννήτορες που διαιρούν τις θεραπείες σε 4 μέρη. Ο σχεδιασμός του γίνεται επιλέγοντας 2 παραγοντικές επιδράσεις P , Q ως γεννήτορες και από τον πίνακα προσήμων διαλέγουμε έναν συγκεκριμένο συνδυασμό των προσήμων τους για την επιλογή των θεραπειών. Εναλλακτικά μπορούμε να δημιουργήσουμε τον πλήρη 2^{k-2} σχεδιασμό και να προσθέσουμε δύο στήλες ανάλογα με τους γεννήτορες που επιλέξαμε. Για παράδειγμα η κατασκευή του 2^{4-2} σχεδιασμού και ο πίνακας αλγεβρικών πρόσημών του με γεννήτορες τους ABC και BCD, φαίνεται στους παρακάτω πίνακες :

A	***B***	***C***	***D***
-	+	-	-
-	-	+	-
+	-	-	+
+	+	+	+

Πίνακας 9 : Κατασκευή ενός 2^{4-2} κλασματικού σχεδιασμού

I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD
+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+	-
+	-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-
+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Πίνακας 10 : Πίνακας αλγεβρικών προσήμων με γεννήτορες ABC και BCD

Από τον πίνακα 10 παρατηρούμε ότι δημιουργείται μία ακόμα ορίζουσα σχέση (AD) εκτός των δύο αρχικών. Επομένως το πλήθος των οριζουσών με βάση τους γεννήτορες είναι : I = ±P και I =±Q όπου με πολλαπλασιασμό των 2 σχέσεων κατά μέλη προκύπτει : I • I = ± PQ . Έτσι ο 2^{k-2} έχει 2^2 -1 = 3 ορίζουσες σχέσεις.

1.2.3 Το $1/2^p$ του 2^k παραγοντικού

Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να γενικεύσουμε για τον 2^{k-p} τα εξής:

Πλήθος γεννητόρων: p

Πλήθος αρχικών οριζουσών σχέσεων: p

Πλήθος συνολικών οριζουσών σχέσεων: $2^p - 1$

Πλήθος ταυτόσημων επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων: 2^p

1.2.4 Προβολή κλασμάτων σε παραγοντικούς σχεδιασμούς

Κάθε κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός με διακριτική ικανότητα R περιέχει πλήρεις παραγοντικούς σχεδιασμούς σε οποιοδήποτε υποσύνολο R-1 παραγόντων. Επομένως σε ένα πείραμα με αρκετούς παράγοντες , αν ο πειραματιστής θεωρεί ότι μόνο R-1 από αυτούς έχουν σημαντικές επιδράσεις, τότε η κατάλληλη επιλογή είναι ένας κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός με διακριτική ικανότητα R καθώς θα προβάλλεται σε έναν πλήρη σχεδιασμό με τους R-1 παράγοντες.

Επειδή η μέγιστη διακριτική ικανότητα του κλάσματος ½ ενός 2^k παραγοντικού σχεδιασμού είναι R=k , κάθε 2^{k-1} σχεδιασμός θα προβάλλεται σε έναν πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό με k-2 παράγοντες. Επιπλέον ένας 2^{k-1} σχεδιασμός μπορεί να προβληθεί σε 2 αντίγραφα ενός πλήρη παραγοντικού σχεδιασμού σε οποιοδήποτε υποσύνολο με k-2 παράγοντες, ένας 2^{k-2} σε 4 αντίγραφα ενός πλήρη σχεδιασμού σε οποιοδήποτε υποσύνολο με k-3 παράγοντες κοκ. Η χρήση των κλασματικών παραγοντικών σχεδιασμών συχνά οδηγεί σε μεγάλη οικονομία και αποτελεσματικότητα στον πειραματισμό ειδικά αν μπορούμε να τους εκτελέσουμε διαδοχικά.

Για παράδειγμα αν μελετάμε k=4 παράγοντες, δηλαδή έχουμε 2^4 =16 εκτελέσεις, ίσως είναι προτιμότερο να σχεδιάσουμε έναν 2_{IV}^{4-1} κλασματικό σχεδιασμό με 8 εκτελέσεις, να αναλύσουμε τα αποτελέσματα και να αποφασίσουμε για τον καλύτερο συνδυασμό που θα εκτελέσουμε στην συνέχεια. Αν υπάρχουν ασάφειες μπορούμε να εκτελέσουμε το εναλλακτικό κλάσμα και να ολοκληρώσουμε τον 2^4 παραγοντικό σχεδιασμό.

Όταν χρησιμοποιείται αυτή η μέθοδος, οι δύο ½ κλασματικοί σχεδιασμοί αντιπροσωπεύουν ομάδες (blocks) του πλήρους σχεδιασμού με την υψηλότερης τάξης αλληλεπίδραση να συγχέεται με τις ομάδες. (στο παράδειγμα αυτό με την ABCD).

Αυτός ο διαδοχικός πειραματισμός έχει σαν αποτέλεσμα να χάνεται πληροφορία μόνο από τις υψηλής τάξης αλληλεπιδράσεις. Το μεγάλο πλεονέκτημα είναι ότι πολλές φορές μαθαίνουμε αρκετά από τον πρώτο ½ κλάσμα με αποτέλεσμα στην συνέχεια της μεθόδου να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε παράγοντες, να αλλάζουμε τις αποκρίσεις ή και να διαφοροποιούμε παράγοντες σε νέα εύρη τιμών.

1.3 Ορθογώνιοι σχηματισμοί

Οι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ανήκουν σε μια ευρύτερη οικογένεια σχεδιασμών που ονομάζονται ορθογώνιοι (Orthogonal arrays -OA), οι οποίοι πρωτοπαρουσιάστηκαν από τους Plackett and Burman (1946).

Ένας ορθογώνιος σχεδιασμός δύο επιπέδων **OA(n,k,s,t)** με s=2, είναι ένας n x k πίνακας με n γραμμές και k στήλες και στοιχεία +1 και -1 (μπορούμε επίσης να τα συμβολίσουμε με 1 και 0) στον οποίο, αν επιλέξουμε οποιεσδήποτε δύο στήλες του, θα βρούμε τους συνδυασμούς επιπέδων (+1, +1), (+1, –1), (–1, +1) και (–1, –1) να εμφανίζονται τον ίδιο αριθμό φορών. Επομένως σε κάθε στήλη του σχεδιασμού θα έχουμε τον ίδιο αριθμό στοιχείων γι' αυτό ονομάζονται ισορροπημένοι σχεδιασμοί. Διαπιστώνεται εύκολα και από τα παρακάτω παραδείγματα, ότι οι πλήρεις σχεδιασμοί όπως και οι κλασματικοί σχεδιασμοί με διακριτική ικανότητα τουλάχιστον III είναι ορθογώνιοι σχηματισμοί.

- Ο 2^3 πλήρης σχεδιασμός

A	B	C
-1	-1	-1
+1	-1	-1
-1	+1	-1
+1	+1	-1
-1	-1	+1
+1	-1	+1
-1	+1	+1
+1	+1	+1

A	B
-1	-1
+1	-1
-1	+1
+1	+1
-1	-1
+1	-1
-1	+1
+1	+1

B	C
-1	-1
-1	-1
+1	-1
+1	-1
-1	+1
-1	+1
+1	+1
+1	+1

A	C
-1	-1
+1	-1
-1	-1
+1	-1
-1	+1
+1	+1
-1	+1
+1	+1

Αν διαλέξουμε δύο από τις τρείς στήλες του σχεδιασμού κάθε φορά όπως φαίνεται παραπάνω, τότε παρατηρούμε ότι το άθροισμα των γινομένων των γραμμών στις δύο αυτές στήλες είναι ίσο με μηδέν.

- Ο 2^{3-1} κλασματικός σχεδιασμός με ορίζουσα σχέση I=ABC

A	B	C
+1	-1	-1
-1	+1	-1
-1	-1	+1
+1	+1	+1

A	B
+1	-1
-1	+1
-1	-1
+1	+1

B	C
-1	-1
+1	-1
-1	+1
+1	+1

A	C
+1	-1
-1	-1
-1	+1
+1	+1

Παρατηρούμε ότι και σε αυτή την περίπτωση του 2^{3-1} κλασματικού σχεδιασμού το άθροισμα των γινομένων των γραμμών του πίνακα ανά δύο στήλες είναι ίσο με μηδέν.

Οι ορθογώνιοι σχεδιασμοί μπορεί να θεωρηθούν λοιπόν ως κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί, όπου *n* είναι το πλήθος των πειραματικών εκτελέσεων του σχεδιασμού, *k* είναι ο αριθμός των υπό εξέταση παραγόντων, *s* είναι ο αριθμός των επιπέδων κάθε παράγοντα και *t* είναι η ισχύς του σχηματισμού. Η ισχύς *t* ενός ορθογώνιου σχηματισμού μας παρέχει πληροφορίες για τη συσχέτιση των εκτιμήσεων των παραγοντικών επιδράσεων, καθώς σχετίζεται με τη διακριτική ικανότητα (Resolution) των κλασματικών παραγοντικών σχεδιασμών. Συνοπτικά, ένας σχεδιασμός με ισχύ $t = 2$ προσφέρει ασυσχέτιστες εκτιμήσεις για τις κύριες επιδράσεις, αλλά όχι και για τις αλληλεπιδράσεις 2 παραγόντων, ενώ ένας σχηματισμός με ισχύ $t = 4$, προσφέρει ασυσχέτιστες εκτιμήσεις και για τις αλληλεπιδράσεις δεύτερης τάξης. Για τις περισσότερες περιπτώσεις κρησαρίσματος, οι ορθογώνιοι σχηματισμοί με ισχύ $t = 2$ είναι μια ικανοποιητική επιλογή.

Οι ορθογώνιοι σχηματισμοί είναι πιο οικονομικοί σχηματισμοί καθώς μπορούν να κατασκευαστούν αν το πλήθος των εκτελέσεων είναι πολλαπλάσιο του 4. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν επομένως σαν κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί για την μελέτη των επιδράσεων των υπό εξέταση παραγόντων. Οι k στήλες περιέχουν τους παράγοντες (2 επιπέδων) και κάθε μια από τις n γραμμές τους συνδυασμούς των επιπέδων των παραγόντων (θεραπείες) με βάση τους οποίους θα γίνουν οι μετρήσεις της μεταβλητής απόκρισης. Η ανάλυση με την οποία εξετάζουμε τις επιδράσεις των κύριων παραγόντων γίνεται με μεθόδους πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης.

Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων στο γραμμικό μοντέλο που προκύπτει είναι ασυσχέτιστες, καθώς ο πίνακας πληροφορίας του μοντέλου είναι διαγώνιος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο σχεδιασμός είναι ορθογώνιος. Όταν στο μοντέλο όμως εισέρχονται και αλληλεπιδράσεις παραγόντων τότε κάποιοι ορθογώνιοι σχηματισμοί μπορεί να είναι «καλύτεροι» από κάποιους άλλους.

1.4 Γραμμική Παλινδρόμηση

Σε πολλά προβλήματα δύο ή περισσότερες μεταβλητές σχετίζονται μεταξύ τους και η σχέση αυτή προκαλεί ενδιαφέρον ώστε να διερευνηθεί. Για παράδειγμα η ποιότητα ενός προϊόντος μπορεί να σχετίζεται με την προβλεπόμενη θερμοκρασία παραγωγής. Για τον λόγο αυτό ένας χημικός μηχανικός θα χρειαστεί ένα μοντέλο επίδρασης της θερμοκρασίας στην ποιότητα του προϊόντος, το οποίο θα χρησιμοποιήσει για πρόβλεψη, βελτιστοποίηση ή έλεγχο της διαδικασίας.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία εξαρτημένη μεταβλητή y (μεταβλητή απόκρισης) και k ανεξάρτητες μεταβλητές x_1 , x_2 ,…., x_k. Η σχέση μεταξύ αυτών των μεταβλητών χαρακτηρίζεται από ένα μαθηματικό μοντέλο που ονομάζεται γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης. Το γραμμικό μοντέλο προσαρμόζεται σε ένα σύνολο δεδομένων, ώστε να αναδείξει τους παράγοντες που είναι πιο σημαντικοί και επηρεάζουν την μεταβλητή απόκρισης. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές συχνά καλούνται και μεταβλητές πρόβλεψης.

Το γραμμικό μοντέλο για τη μελέτη m το πλήθος επιδράσεων είναι της μορφής:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \textbf{(1)}$$

$$\text{όπου} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}, \mathbf{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

Ο όρος «γραμμική» προέρχεται από το γεγονός ότι η σχέση (1) παραπάνω είναι μια γραμμική συνάρτηση των άγνωστων παραμέτρων του διανύσματος $\mathbf{\beta}$, οι οποίοι ονομάζονται και συντελεστές παλινδρόμησης. Γενικά το **Y** είναι ένα (n x 1) διάνυσμα που αποτελείται από τις παρατηρήσεις, **X** είναι ένας (n x p) πίνακας όπου $p = k + 1$, ο οποίος καλείται και πίνακας σχεδιασμού, όπου η πρώτη στήλη του είναι η μοναδιαία και οι υπόλοιπες αποτελούνται από τα επίπεδα των ανεξάρτητων μεταβλητών, **β** είναι ένα (p x 1) διάνυσμα με τους συντελεστές της παλινδρόμησης και **ε** ένα (n x 1) διάνυσμα με τα τυχαία σφάλματα. Τα σφάλματα του μοντέλου θεωρείται ότι είναι ασυσχέτιστα και ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και σταθερή διασπορά σ^2.

Το γραμμικό μοντέλο μπορεί να λάβει διάφορες μορφές ανάλογα με το είδος των επιδράσεων που μελετώνται. Για παράδειγμα, αν μελετώνται μόνο οι k κύριες επιδράσεις των παραγόντων, το μοντέλο ονομάζεται πρώτης τάξης και είναι της μορφής:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\text{όπου} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}, \mathbf{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_\kappa \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

Στο μοντέλο αυτό οι παράμετροι $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, του διανύσματος **β** μετράνε την μέση μεταβολή στην μεταβλητή απόκρισης y όταν μία από τις ανεξάρτητες μεταβλητές x_1 , x_2 ,…., x_k μεταβληθεί κατά μία μονάδα, ενώ οι υπόλοιπες παραμένουν σταθερές.

Αν μελετώνται εκτός από κύριες επιδράσεις και κάποιες αλληλεπιδράσεις παραγόντων, η σχέση (1) μπορεί να περιγράψει και το μοντέλο αυτό καθώς κάθε αλληλεπίδραση μπορεί να περιγραφεί με συγκεκριμένη στήλη στον πίνακα $\boldsymbol{X}$.

1.4.1 Εκτίμηση των παραμέτρων στο μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων είναι αυτή που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων σε ένα μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης. Η μέθοδος αυτή, στην οποία υπάρχουν p=m+1 εξισώσεις για κάθε έναν από τους συντελεστές της παλινδρόμησης, επιλέγει τους συντελεστές έτσι ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων να ελαχιστοποιείται. Με τον τρόπο αυτό επιθυμούμε να βρούμε το διάνυσμα των εκτιμητριών των ελαχίστων τετραγώνων $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ το οποίο ελαχιστοποιεί την σχέση :

$$L = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = (Y - X \cdot \beta)' \cdot (Y - X \cdot \beta) = Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta$$

Οι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων πρέπει να ικανοποιούν την σχέση :

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0 \Leftrightarrow X'X\hat{\beta} = X'Y \qquad (2)$$

Η σχέση (2) στην ουσία παριστάνει τις εξισώσεις των ελαχίστων τετραγώνων σε μορφή πίνακα. Για να λύσουμε τις εξισώσεις αυτές πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας (2) με τον αντίστροφο του πίνακα $X'X$. Έτσι οι εκτιμητές των ελαχίστων τετραγώνων του διανύσματος **β** δίνονται από την σχέση:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (X'X)^{-1}X'Y \ = X^{-1}Y$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι ο πίνακας $X'X$ είναι ένας $(p \times p)$ όπου $p = m + 1$, συμμετρικός πίνακας και $X'Y$ είναι ένα $(p \times 1)$ διάνυσμα στήλη. Η δομή του πίνακα $X'X$ ο οποίος ονομάζεται πίνακας πληροφορίας έχει ως εξής:

Τα διαγώνια στοιχεία του είναι τα αθροίσματα τετραγώνων των στοιχείων των στήλων του πίνακα **X,** ενώ όλα τα υπόλοιπα είναι τα εσωτερικά γινόμενα των στηλών του πίνακα **X** ανά δύο. Επίσης τα στοιχεία του πίνακα $X'Y$ είναι τα εσωτερικά γινόμενα των στηλών του πίνακα **X** και των παρατηρήσεων y του πειράματος. Το μοντέλο εκείνο που προσαρμόζεται στα δεδομένα είναι το: $\hat{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$.

Για το διάνυσμα των εκτιμητών των παραμέτρων του διανύσματος **β**, προκύπτει ότι έχει μέση τιμή $E(\hat{\beta}) = \beta$ και πίνακα διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων $Cov(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$.

1.5 D- αποδοτικότητα

Στους σχεδιασμούς στους οποίους η εκτίμηση των παραμέτρων που ενδιαφέρουν (κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις) γίνεται με ένα γραμμικό μοντέλο όπως αναφέραμε παραπάνω, η D-αποδοτικότητα (D-efficiency) είναι ένα κριτήριο βάσει του οποίου, οι διάφοροι σχεδιασμοί μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους, ως προς την απόδοσή τους σχετικά με την εκτίμηση των παραμέτρων. Η τιμή του κριτηρίου υπολογίζεται με βάση την ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας $M = X'X$ του γραμμικού μοντέλου που χρησιμοποιείται. Οι σχεδιασμοί εκείνοι που επιτυγχάνουν τη μέγιστη τιμή του κριτηρίου αυτού, ονομάζονται και *D* – βέλτιστοι σχεδιασμοί του μοντέλου.

Η D-αποδοτικότητα ενός μοντέλου με m παραμέτρους (κύριες επιδράσεις ή και αλληλεπιδράσεις) που προκύπτει από τη χρήση ενός σχεδιασμού δύο επιπέδων με k παράγοντες, και έχει πίνακα **X** τον

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}$$

δίνεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{D_{eff}} = \frac{|\boldsymbol{X'X}|^{\frac{1}{m+1}}}{n}$$

όπου $|\boldsymbol{X'X}|$ είναι η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας, m το πλήθος των επιδράσεων που εξετάζονται και n το πλήθος των γραμμών του σχεδιασμού. Είναι προφανές ότι κάτω από οποιοδήποτε γραμμικό μοντέλο, η μέγιστη τιμή της D – αποδοτικότητας είναι ίση με 1, και επιτυγχάνεται όταν ο πίνακας $M = X'X$ είναι διαγώνιος και συνεπώς οι παράμετροι εκτιμώνται ασυσχέτιστα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1 Ομαδοποίηση του πλήρους 2^k παραγοντικού σχεδιασμού

Σε μερικές περιπτώσεις είναι αδύνατο να εκτελεστούν όλες οι θεραπείες ενός 2^k παραγοντικού σχεδιασμού κάτω από ομοιογενής συνθήκες. Για παράδειγμα μία μόνο παρτίδα πρώτης ύλης μπορεί να μην είναι αρκετά μεγάλη ώστε να γίνουν όλες οι απαιτούμενες εκτελέσεις και να παραχθεί ένα δοχείο μια χημικής ουσίας. Σε άλλες περιπτώσεις μπορεί να είναι επιθυμητή η διαφοροποίηση των πειραματικών συνθηκών, για να διασφαλίσουμε ότι οι θεραπείες είναι εξίσου αποτελεσματικές σε πολλές καταστάσεις που μπορεί να συναντηθούν στην πράξη.

Όπως για παράδειγμα ένας χημικός μηχανικός μπορεί να εκτελέσει το πείραμα με πολλές παρτίδες πρώτης ύλης γιατί γνωρίζει ότι στην πραγματικότητα χρησιμοποιούνται διαφορετικά υλικά διαφορετικής ποιότητας. Η μεταβλητότητα που δεν μπορεί να ξεπεραστεί συγχέεται με αλληλεπιδράσεις υψηλότερης τάξης. Έτσι για την εξάλειψη της επιρροής της στο τελικό προϊόν, χρησιμοποιείται στους σχεδιασμούς μία τεχνική που ονομάζεται ομαδοποίηση (blocking). Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται για να εξαλείψει την επίδραση των παραγόντων μεταξύ των θεραπειών. Ο έλεγχος ύπαρξης διαφορών μεταξύ των ομάδων επιτυγχάνεται με τη μελέτη των επιδράσεων μιας «βοηθητικής» μεταβλητής που εισάγεται για το σκοπό αυτό, η οποία καλείται μεταβλητή ομαδοποίησης ή block παράγοντας. Για την ανάλυση των δεδομένων, θεωρείται ότι ο block παράγοντας δεν αλληλοεπιδρά με τους παράγοντες που μελετώνται στο πείραμα.

Η ομαδοποίηση των εκτελέσεων ενός πειράματος ελέγχει τις διακυμάνσεις που οφείλονται σε ετερογενείς συνθήκες, οι οποίες μπορούν να προκύψουν σε πειράματα που περιέχουν πολλές μέρες ή παρτίδες για παράδειγμα. Είναι ιδιαίτερα σημαντική τεχνική και χρησιμοποιείται εκτενώς σε βιομηχανικούς πειραματισμούς.

Για παράδειγμα ας σκεφτούμε ότι η θερμοκρασία ενός αντιδραστήρα και η παρτίδα των πρώτων υλών είναι πιο σημαντική από τον συνδυασμό τους. Επομένως είναι προτιμότερο να συγχέεται αυτή η μεταβλητότητα με την υψηλότερη αλληλεπίδραση.

Γενικά για να κατασκευάσουμε έναν ομαδοποιημένο 2^p πλήρη σχεδιασμό με p παράγοντες θεραπείας και 2^q ομάδες ίδιου μεγέθους, χρειαζόμαστε έναν «καλό» σχεδιασμό με p+q στήλες στον οποίο, οι q κατάλληλες στήλες θα αποτελούν τους ομαδοποιημένους παράγοντες και οι υπόλοιπες p στήλες τους υπό εξέταση παράγοντες της θεραπείας.

Στην εργασία αυτή ως «καλούς» σχεδιασμούς θα θεωρούμε τους ορθογώνιους σχηματισμούς, με τον αριθμό των ομάδων να ισούται με 2^q για κάποιον φυσικό αριθμό q, ο οποίος δείχνει τον αριθμό των ομαδοποιημένων παραγόντων της θεραπείας. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό 2^k που έχει αναπαραχθεί n φορές. Στις n επαναλήψεις, κάθε σύνολο μη ομοιογενών συνθηκών ορίζει ένα μπλοκ (ομάδα) και κάθε μια από τις επαναλήψεις εκτελείται σε ένα από τα μπλοκ. Οι εκτελέσεις σε κάθε μπλοκ (ή αναπαραγωγή) γίνονται με τυχαία σειρά.

Ας δούμε ένα παράδειγμα όπου σε μια χημική διαδικασία εξετάζονται δύο παράγοντες A και B με δύο στάθμες, κατά πόσο επηρεάζουν την απόδοση στην διαδικασία αυτή. Τα αποτελέσματα του πειράματος φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

			Αριθμός Επαναλήψεων		
Συνδυασμός θεραπειών	A	B	1	2	3
(1)	-	-	28	25	27
A	+	-	36	32	32
B	-	+	18	13	23
ab	+	+	31	30	29

ΠΙΝΑΚΑΣ 11 : Πειραματικό σχέδιο με 2 παράγοντες και 3 επαναλήψεις

Επειδή έχουμε έναν πλήρη 2^2 παραγοντικό σχεδιασμό με 3 επαναλήψεις θα χωρίσουμε τις 12 τιμές σε 3 ομάδες.

Block 1	Block 2	Block 3
(1)= 28	(1)= 25	(1)= 27
a =36	a =32	a =32
b =18	b =19	b =23
ab =31	ab =30	ab = 29

ΠΙΝΑΚΑΣ 12 : Διαχωρισμός των παρατηρήσεων σε 3 ομάδες

Σε πολλά προβλήματα όμως είναι αδύνατο να εκτελεστεί μια πλήρης αναπαραγωγή ενός παραγοντικού σχεδιασμού σε ένα μόνο μπλοκ. Η σύγχυση (confounding) είναι μια τεχνική που χρησιμοποιείται για την οργάνωση του σχεδιασμού ενός πλήρους παραγοντικού πειράματος σε ομάδες, όπου το μέγεθος κάθε ομάδας είναι μικρότερο από τον συνδυασμό των θεραπειών σε μία αναπαραγωγή. Η τεχνική πληροφορεί σχετικά με ορισμένες επιδράσεις της θεραπείας (συνήθως υψηλής τάξης αλληλεπιδράσεις) όπου δεν διακρίνονται ή συγχέονται με μπλοκ.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια μόνο επανάληψη ενός 2^2 πλήρους παραγοντικού σχεδιασμού. Κάθε ένας από τους συνδυασμούς των τεσσάρων θεραπειών απαιτεί για παράδειγμα μια ποσότητα πρώτης ύλης και κάθε παρτίδα πρώτης ύλης επαρκεί για τον έλεγχο 2 μόνο συνδυασμών της θεραπείας. Έτσι αν θεωρήσουμε τις 2 παρτίδες που απαιτούνται ως ομάδες (blocks), κάθε ομάδα θα περιέχει δύο από τους συνδυασμούς των θεραπειών όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

Συνδυασμός θεραπειών	I	A	B	AB	BLOCK
(1)	+	-	-	+	1
a	+	+	-	-	2
b	+	-	+	-	2
ab	+	+	+	+	1

ΠΙΝΑΚΑΣ 13 : Διαχωρισμός του συνόλου των συνδυασμών σε 2 ομάδες

Επειδή στην πρώτη ομάδα υπάρχουν οι συνδυασμοί των θεραπειών (1) και ab, ενώ στην δεύτερη οι συνδυασμοί των A και B παραγόντων, προκύπτει ότι η επίδραση της πρώτης ομάδας είναι πανομοιότυπη με της αλληλεπίδρασης AB. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η αλληλεπίδραση AB συγχέεται με τις ομάδες. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε και από την στήλη AB όπου ο συνδυασμός των θεραπειών με πρόσημο «+» ανήκει στην πρώτη ομάδα, ενώ με το «-» στην δεύτερη. Σύμφωνα με αυτή την παρατήρηση επομένως μπορούμε να ανακαλύψουμε αν κάποια επίδραση A, B ή AB συγχέεται με τις ομάδες.

Αν για παράδειγμα ο συνδυασμός των θεραπειών (1) και b ανήκει στην πρώτη ομάδα, τότε η επίδραση του παράγοντα A θα συγχέεται με τις ομάδες. Η πρακτική που χρησιμοποιείται συνήθως είναι να συγχέουμε την υψηλότερης τάξης αλληλεπίδραση με τις ομάδες.

Ας θεωρήσουμε σαν επιπλέον παράδειγμα έναν 2^3 πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό με 2 ομάδες. Επειδή θέλουμε να συνδέσουμε την υψηλότερης τάξης αλληλεπίδραση ABC με τις ομάδες, θα θεωρήσουμε στην πρώτη ομάδα τον συνδυασμό των θεραπειών της στήλης ABC με πρόσημο «-» και στην δεύτερη ομάδα με το πρόσημο «+».

Να επισημάνουμε ότι ο συνδυασμός των θεραπειών που επιλέγονται σε κάποια ομάδα γίνεται με τυχαία σειρά. Ο σχηματισμός των δύο ομάδων φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

I	Συνδυασμός θεραπειών	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	BLOCK
+	(1)	-	-	+	-	+	+	-	1
+	a	+	-	-	-	-	+	+	2
+	b	-	+	-	-	+	-	+	2
+	ab	+	+	+	-	-	-	-	1
+	c	-	-	+	+	-	-	+	2
+	ac	+	-	-	+	+	-	-	1
+	bc	-	+	-	+	-	+	-	1
+	abc	+	+	+	+	+	+	+	2

ΠΙΝΑΚΑΣ 14 : Σχηματισμός 2 ομάδων σε έναν 2^3 παραγοντικό σχεδιασμό

Μια επιπλέον μέθοδος που χρησιμοποιείται για την κατασκευή ομαδοποιημένων σχεδιασμών βασίζεται στον γραμμικό συνδυασμό:

$L = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k$ όπου $a_i = 0{,}1$ $και$ $x_i = 0{,}1$ (0 = χαμηλή τάξη) ή (1= υψηλή τάξη).

Οι συνδυασμοί των θεραπειών που έχουν ίδια τιμή στην συνάρτηση L (mod 2) θα βρίσκονται στην ίδια ομάδα. Καθώς οι μοναδικές τιμές που μπορεί να πάρει η συνάρτηση L (mod 2) είναι 0 και 1, ο συνδυασμός των θεραπειών σε έναν 2^k πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό θα χωριστεί ακριβώς σε 2 ομάδες.

Αν εφαρμόσουμε την μέθοδο στον 2^3 πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό που είχαμε παραπάνω με την αλληλεπίδραση ABC να συγχέεται με τις ομάδες τότε προκύπτει:

- $L = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \quad με \quad a_1 = a_2 = a_3 = 1$
- Για τον συνδυασμό (1) των θεραπειών έχουμε: $L = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 = 0\, mod\, 2$
- Για τον συνδυασμό a των θεραπειών έχουμε: $L = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1 = 1\, mod\, 2$
- Για τον συνδυασμό b των θεραπειών έχουμε: $L = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1 = 1\, mod\, 2$
- Για τον συνδυασμό ab των θεραπειών έχουμε: $L = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2 = 0\, mod\, 2$

- Για τον συνδυασμό c των θεραπειών έχουμε: $L = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 = 1\, mod\, 2$
- Για τον συνδυασμό ac των θεραπειών έχουμε: $L = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2 = 0\, mod\, 2$

- Για τον συνδυασμό bc των θεραπειών έχουμε: $L = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 = 0\, mod\, 2$
- Για τον συνδυασμό abc των θεραπειών έχουμε: $L = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3 = 1\, mod\, 2$

Έτσι οι συνδυασμοί: **(1), ab, ac, bc** θα ανήκουν στην πρώτη ομάδα (block 1) και οι συνδυασμοί: **a, b, c, abc** στην δεύτερη (block 2). Παρατηρούμε ότι ο σχεδιασμός είναι ο ίδιος με την παραπάνω μέθοδο που παρουσιάζεται στην στήλη ABC του πίνακα 2.1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1 Ομαδοποίηση ορθογώνιων σχηματισμών 2 επιπέδων

Η ομαδοποίηση είναι μία τεχνική που χρησιμοποιείται για την εξάλειψη του θορύβου στα πειράματα. Ο θόρυβος μπορεί να προέρχεται από την διακύμανση από μέρα σε μέρα, από χειριστή σε χειριστή ή από παρτίδα σε παρτίδα. Χωρίς ομαδοποίηση ο θόρυβος μπορεί να επηρεάσει την ακρίβεια και την αποτελεσματικότητα της εκτίμησης των επιδράσεων. Η σημαντικότητα της ομαδοποίησης γενικεύεται στο ρητό «ομαδοποίησε ότι μπορείς, τυχαιοποίησε ότι δεν μπορείς». Πολλές εργασίες επικεντρώνονται στα κριτήρια εκείνα που οδηγούν στον βέλτιστο σχεδιασμό ομαδοποίησης όπως οι Bisgaard (1994), Sun, Wu and Chen (1997), Cheng and Wu (2002). Όλες οι παραπάνω εργασίες έχουν ως κεντρικό θέμα την βέλτιστη ομαδοποίηση στους απλούς κλασματικούς σχεδιασμούς που βασίζονται σε υποομάδες αντιθέσεων. Όμως βέλτιστα σχέδια για ορθογώνιους σχεδιασμούς έχουν προταθεί από τους Cheng, Li and Ye (2004).

Οι ορθογώνιοι σχεδιασμοί (OAs) έχουν μερικά πλεονεκτήματα όπως η ευελιξία στο μέγεθος των επαναλήψεων και η υψηλή ικανότητα εκτίμησης. Ο στόχος είναι οι εκτιμήσεις του παράγοντα block να είναι ασυσχέτιστες με τις εκτιμήσεις όλων των κύριων επιδράσεων (στο μοντέλο πρώτης τάξης) και επιπλέον, οι παράμετροι ενός γραμμικού μοντέλου δεύτερης τάξης να εκτιμώνται με τη μέγιστη δυνατή D – αποδοτικότητα. Υπενθυμίζεται ότι ο block παράγοντας δεν αλληλοεπιδρά με τους παράγοντες που μελετώνται στο πείραμα και συνεπώς, αυτές οι αλληλεπιδράσεις δεν συμπεριλαμβάνονται στο γραμμικό μοντέλο.

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με ορθογώνιους σχεδιασμούς δύο επιπέδων με ισχύ t τουλάχιστον 2 και σύμβολα «-1» για την χαμηλή στάθμη των παραγόντων και «+1» για την υψηλή στάθμη.

3.1.1 Διαχωρισμός ορθογώνιου σχεδιασμού σε 2 blocks

Σε κάθε ορθογώνιο σχηματισμό $OA(n,\text{k},2,t)$, οι n εκτελέσεις του σχηματισμού μπορούν να χωριστούν σε δύο blocks ίδιου μεγέθους ($n/2$), χρησιμοποιώντας τις αντιθέσεις οποιασδήποτε από τις k στήλες που υπάρχουν, δεδομένου ότι κάθε στήλη είναι ισορροπημένη. Επομένως οποιαδήποτε στήλη του σχηματισμού, μπορεί να παίξει το ρόλο του παράγοντα block σε ένα πείραμα, αφήνοντας τις υπόλοιπες k−1 στήλες να χρησιμοποιηθούν ως παράγοντες θεραπείας.

Με βάση τα παραπάνω είναι προφανές ότι οι παράμετροι του ακόλουθου μοντέλου κύριων επιδράσεων

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

με πίνακα σχεδιασμού τον

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1bl} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{2bl} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{nbl} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}$$

(όπου x_2, x_3,…, x_k δηλώνουν τις k-1 στήλες που απομένουν μετά τη χρήση μιας εκ των k για block) μπορεί να εκτιμηθούν με τη μέγιστη αποδοτικότητα, αφού ο αντίστοιχος πίνακας πληροφορίας που προκύπτει από τον πίνακα σχεδιασμού **X** είναι διαγώνιος, ανεξαρτήτως ποιας στήλης (από τις k) θα χρησιμοποιηθεί ως block.

Το ενδιαφέρον ζήτημα που προκύπτει στο σημείο αυτό, είναι η εύρεση της βέλτιστης στήλης (από τις k) για τον παράγοντα block, σε περιπτώσεις που ενδιαφέρει και η μελέτη αλληλεπιδράσεων δύο παραγόντων. Σε αυτήν την περίπτωση στο μοντέλο θα υπάρχουν συνολικά m παράμετροι (ο μέσος, το block, οι k-1 κύριες επιδράσεις των παραγόντων θεραπείας και οι αλληλεπιδράσεις αυτών) και ο πίνακας **X** θα έχει τη μορφή

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1bl} & x_{12} & \cdots & x_{1k} & x_{12}x_{13} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{2bl} & x_{22} & \cdots & x_{2k} & x_{22}x_{23} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{nbl} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} & x_{n2}x_{n3} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}$$

και η βέλτιστη επιλογή θα προκύψει από αυτήν την επιλογή στήλης για block η οποία μεγιστοποιεί την ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας **M** του μοντέλου και θα δώσει μέγιστη δυνατή *D*–αποδοτικότητα του σχεδιασμού. Σημειώνεται ότι η βέλτιστη τιμή της D – αποδοτικότητας ισούται με 1 και επιτυγχάνεται όταν ο πίνακας πληροφορίας **M** του γραμμικού μοντέλου είναι διαγώνιος.

Συμπερασματικά σε μοντέλα που περιλαμβάνουν και αλληλεπιδράσεις, η μέγιστη δυνατή *D*–αποδοτικότητα δεν επιτυγχάνεται εξ ορισμού. Μέσω της σωστής επιλογής της στήλης block, μπορεί να επιτευχθεί η μεγαλύτερη δυνατή αποδοτικότητα.

3.2 Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε τον 2^{4-1} κλασματικό σχεδιασμό που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα,

A	B	C	D
-1	-1	-1	-1
-1	-1	1	1
-1	1	-1	1
-1	1	1	-1
1	-1	-1	1
1	-1	1	-1
1	1	-1	-1
1	1	1	1

Πίνακας 15 : Σχέδιο ενός 2^{4-1} κλασματικού σχεδιασμού

στον οποίο αποφασίζουμε να μελετήσουμε τέσσερις παράγοντες δύο επιπέδων, σε ένα πείραμα με ένα block μεγέθους 8. Για τη μελέτη του πειράματος χρησιμοποιείται το γραμμικό μοντέλο το οποίο περιλαμβάνει, το μέσο, την επίδραση της ομαδοποίησης (block), όλες τις κύριες επιδράσεις των τριών παραγόντων καθώς και όλες τις αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων. Ακολουθώντας τη μεθοδολογία, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έναν $OA(8,4,2,2)$ ορθογώνιο σχηματισμό, όπου ένας εκ των k = 4 παραγόντων θα αποτελέσει τον παράγοντα block.

Έστω ότι επιλέγουμε τον παράγοντα A ως μεταβλητή block. Ο πίνακας σχεδιασμού X του μοντέλου θα είναι :

I	BL	A	B	C	AB	AC	BC
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Πίνακας 16 : Πίνακας σχεδιασμού X του μοντέλου

Έτσι ο πίνακας πληροφορίας **M= X΄ X** που προκύπτει είναι ο

8	0	0	0	0	0	0	0
0	8	0	0	0	0	0	0
0	0	8	0	0	0	0	0
0	0	0	8	0	0	0	0
0	0	0	0	8	0	0	0
0	0	0	0	0	8	0	0
0	0	0	0	0	0	8	0
0	0	0	0	0	0	0	8

Πίνακας 17 : Ο πίνακας που προκύπτει από το γινόμενο του ανάστροφου του X με τον X

Παρατηρούμε ότι ο συγκεκριμένος πίνακας είναι διαγώνιος και η ορίζουσα του θα ισούται με 8^8, καθώς προκύπτει από το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του πίνακα M, πετυχαίνοντας έτσι την μέγιστη απόδοση D-eff=1. Αν επιλέξουμε με τον ίδιο τρόπο ως μεταβλητή block οποιονδήποτε από τους υπόλοιπους παράγοντες B, C, D θα δούμε ότι η D-αποδοτικότητα θα ισούται επίσης με 1 για κάθε επιλογή. Επομένως οποιοσδήποτε από τους παράγοντες χρησιμοποιηθεί ως block θα μας δώσει σχεδιασμό που επιτυγχάνει την μέγιστη αποδοτικότητα για την εκτίμηση των παραμέτρων που ενδιαφέρουν. Αυτό βέβαια στην πράξη δεν επιτυγχάνεται πάντα. Τα τελευταία χρόνια έχει σημειωθεί σημαντική πρόοδος στην μελέτη μη ομαδοποιημένων ορθογώνιων σχεδιασμών. Αρκετά κριτήρια που ισχύουν σε κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς, γενικεύονται και σε ορθογώνιους σχεδιασμούς 2 επιπέδων από τους Tang and Deng (1999) και Ye (2003). Οι Li, Lin και Ye όρισαν λέξεις με κλασματικά μήκη και τα εφάρμοσαν για την κατασκευή βέλτιστων ορθογώνιων σχεδιασμών χωρίς να υπάρχει διαθέσιμη η καθοριστική υποομάδα αντιθέσεων που χρειαζόταν σε προηγούμενες μελέτες.

Για όλα τα παραπάνω πρέπει να ισχύουν οι εξής παραδοχές:

1. Οι επιδράσεις των παραγόντων θεραπείας χαμηλότερης τάξης είναι πιο πιθανό να είναι σημαντικές από τις αντίστοιχες επιδράσεις υψηλότερης τάξης
2. Οι επιδράσεις των θεραπειών ίδιας τάξης είναι εξίσου σημαντικές
3. Οι ομαδοποιημένες επιδράσεις είναι πιθανό να είναι πιο σημαντικές από τις επιδράσεις των θεραπειών
4. Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ομαδοποιημένων παραγόντων και των παραγόντων της θεραπείας θεωρούνται αμελητέες
5. Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ομαδοποιημένων παραγόντων είναι εξίσου σημαντικές όπως οι κύριες επιδράσεις των ομαδοποιημένων παραγόντων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.1 Πρακτική ομαδοποίησης σε σχεδιασμούς

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε στην πράξη πειράματα που περιέχουν 4, 5 και 6 παράγοντες. Ο αριθμός των πειραματικών εκτελέσεων θα είναι 12, 16, 20 και 24 αντίστοιχα για κάθε πλήθος παραγόντων όπως αναφέρθηκε παραπάνω.

Για κάθε έναν από τους ορθογώνιους σχηματισμούς, θα δημιουργήσουμε τον πίνακα σχεδιασμού X του μοντέλου, ο οποίος θα έχει ως πρώτη στήλη την μοναδιαία, δεύτερη στήλη την μεταβλητή που θα παριστάνει κάθε φορά το block και ως υπόλοιπες στήλες τις εναπομένοντες μεταβλητές καθώς και τις αλληλεπιδράσεις τους.

Ο αριθμός των γραμμών θα είναι ίσος με τον αριθμό των εκτελέσεων του πειράματος, δηλαδή 12, 16, 20 και 24 αντίστοιχα.

Έτσι από ένα πλήθος δοθέντων πινάκων για κάθε συνδυασμό παραγόντων-εκτελέσεων, θα παρουσιάσουμε εκείνους που πετυχαίνουν την καλύτερη απόδοση.

Θα ξεκινήσουμε από τον σχεδιασμό που περιέχει 4 παράγοντες και 12 εκτελέσεις. Οι 12 αυτές εκτελέσεις θα χωριστούν σε δύο ομάδες μεγέθους 6 η κάθε μία. Η πρώτη ομάδα θα περιέχει τον παράγοντα που θα παίζει τον ρόλο του block, ενώ οι υπόλοιποι τρεις θα ανήκουν στην δεύτερη ομάδα. Οι παράγοντες θα εξετάζονται ως παράγοντες block με την σειρά που δίνονται.

Για παράδειγμα, θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τον τρόπο εργασίας χρησιμοποιώντας το (μοναδικό) ορθογώνιο σχηματισμό με 4 στήλες και 12 εκτελέσεις που δίνεται παρακάτω.

Σ1	Σ2	Σ3	Σ4
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	-1	-1
1	-1	1	-1
1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1
-1	1	1	-1
-1	1	-1	1
-1	1	-1	-1
-1	-1	1	1
-1	-1	1	-1
-1	-1	-1	1

Αν θεωρήσουμε την πρώτη στήλη (Σ1) ως block, και τις υπόλοιπες 3 ως στήλες παραγόντων (A, B, C), προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας X για το μοντέλο με αλληλεπιδράσεις.

I	Block	A	B	C	AB	AC	BC
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1

1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1

Ο πίνακας πληροφορίας λοιπόν θα είναι ο

$$M = X^T X = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

με ορίζουσα ίση με 188743680. Προκύπτει λοιπόν D-eff = 90.22%.

Αν θεωρήσουμε τη δεύτερη στήλη (Σ2) ως block, και τις υπόλοιπες 3 ως στήλες παραγόντων (A, B, C), προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας X για το μοντέλο με αλληλεπιδράσεις.

I	Block	A	B	C	AB	AC	BC
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1

Ο πίνακας πληροφορίας λοιπόν θα είναι ο

$$M = X^T X = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

με ορίζουσα και πάλι ίση με 188743680. Προκύπτει λοιπόν D-eff = 90.22%.

Αν θεωρήσουμε την τρίτη στήλη (Σ3) ως block, και τις υπόλοιπες 3 ως στήλες παραγόντων (A, B, C), προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας X για το μοντέλο με αλληλεπιδράσεις.

I	Block	A	B	C	AB	AC	BC
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1

Ο πίνακας πληροφορίας λοιπόν θα είναι ο

$$M = X^T X = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

με ορίζουσα και πάλι ίση με 188743680. Προκύπτει λοιπόν D-eff = 90.22%.

Τέλος, αν θεωρήσουμε την τέταρτη (Σ4) ως block, και τις υπόλοιπες 3 ως στήλες παραγόντων (A, B, C), προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας X για το μοντέλο με αλληλεπιδράσεις.

I	Block	A	B	C	AB	AC	BC
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	1	1

1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1	1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	1	1

Ο πίνακας πληροφορίας λοιπόν θα είναι ο

$$M = X^T X = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

με ορίζουσα και πάλι ίση με 188743680. Προκύπτει λοιπόν D-eff = 90.22%.

Συμπερασματικά λοιπόν, οποιαδήποτε επιλογή στήλης του μοναδικού 12x4 ορθογώνιου σχηματισμού για στήλη block, οδηγεί σε σχεδιασμό με ίδια αποδοτικότητα. Η βέλτιστη επιλογή λοιπόν δίνεται στον παρακάτω πίνακα

Block	A	B	C
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	-1	-1
1	-1	1	-1
1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1
-1	1	1	-1
-1	1	-1	1
-1	1	-1	-1
-1	-1	1	1
-1	-1	1	-1
-1	-1	-1	1

4.2 Ομαδοποίηση σε ορθογώνιους σχεδιασμούς με 16 γραμμές και 4 στήλες

Υπάρχουν 5 μη ισοδύναμοι ορθογώνιοι σχηματισμοί με 16 γραμμές και 4 στήλες. Σε καθέναν από αυτούς εφαρμόζουμε την τεχνική που αναλυτικά παρουσιάστηκε στην εισαγωγή του κεφαλαίου. Η βέλτιστή επιλογή που προκύπτει δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Block	A	B	C
1	1	1	1
-1	1	1	1
1	1	1	-1
-1	1	1	-1
1	1	-1	1
-1	1	-1	1
1	1	-1	-1
-1	1	-1	-1
1	-1	1	1
-1	-1	1	1
1	-1	1	-1
-1	-1	1	-1
1	-1	-1	1
-1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1

Ο πίνακας πληροφορίας είναι ο

$$M = X^T X = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

με ορίζουσα ίση με 4294967296. Έτσι προκύπτει D-eff = 100%.

4.3 Ομαδοποίηση σε ορθογώνιους σχεδιασμούς με 20 γραμμές και 4 στήλες

Υπάρχουν 3 μη ισοδύναμοι ορθογώνιοι σχηματισμοί με 20 γραμμές και 4 στήλες. Σε καθέναν από αυτούς εφαρμόζουμε την τεχνική που αναλυτικά παρουσιάστηκε στην εισαγωγή του κεφαλαίου. Η βέλτιστή επιλογή που προκύπτει δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Block	A	B	C
1	1	1	1
-1	1	1	1
-1	1	1	1
1	1	1	-1
1	1	1	-1
1	1	-1	1
1	1	-1	1

-1	1	-1	-1
-1	1	-1	-1
-1	1	-1	-1
1	-1	1	1
-1	-1	1	1
1	-1	1	-1
-1	-1	1	-1
-1	-1	1	-1
1	-1	-1	1
-1	-1	-1	1
-1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1

Ο πίνακας πληροφορίας είναι ο

$$M = X^T X = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 4 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 20 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

με ορίζουσα ίση με 19818086400. Έτσι προκύπτει D-eff = 96.8%.

4.4 Ομαδοποίηση σε ορθογώνιους σχεδιασμούς με 24 γραμμές και 4 στήλες

Υπάρχουν 10 μη ισοδύναμοι ορθογώνιοι σχηματισμοί με 24 γραμμές και 4 στήλες. Σε καθέναν από αυτούς εφαρμόζουμε την τεχνική που αναλυτικά παρουσιάστηκε στην εισαγωγή του κεφαλαίου. Η βέλτιστή επιλογή που προκύπτει δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Block	A	B	C
1	1	1	1
-1	1	1	1
-1	1	1	1
1	1	1	-1
1	1	1	-1
-1	1	1	-1
1	1	-1	1
1	1	-1	1
-1	1	-1	1
1	1	-1	-1
-1	1	-1	-1
-1	1	-1	-1

1	-1	1	1
1	-1	1	1
-1	-1	1	1
-1	-1	1	-1
-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1
-1	-1	-1	1
-1	-1	-1	1
-1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1

Ο πίνακας πληροφορίας είναι ο

$$M = X^T X = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

με ορίζουσα ίση με 77309411328. Έτσι προκύπτει D-eff = 100%.

4.5 Ομαδοποίηση σε ορθογώνιους σχεδιασμούς με 16 γραμμές και 5 στήλες

Υπάρχουν 11 μη ισοδύναμοι ορθογώνιοι σχηματισμοί με 16 γραμμές και 5 στήλες. Σε καθέναν από αυτούς εφαρμόζουμε την τεχνική που αναλυτικά παρουσιάστηκε στην εισαγωγή του κεφαλαίου. Η βέλτιστή επιλογή που προκύπτει δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Block	A	B	C	D
1	1	1	1	-1
1	1	1	-1	1
1	1	-1	1	1
1	1	-1	-1	-1
-1	1	1	1	1
-1	1	1	-1	-1
-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	1
1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1
1	-1	-1	-1	1
-1	-1	1	1	-1
-1	-1	1	-1	1

-1	-1	-1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1

Ο πίνακας πληροφορίας είναι

$$M = X^T X = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

με ορίζουσα ίση με 281474976710655. Έτσι προκύπτει D-eff = 100%.

4.6 Ομαδοποίηση σε ορθογώνιους σχεδιασμούς με 20 γραμμές και 5 στήλες

Υπάρχουν 11 μη ισοδύναμοι ορθογώνιοι σχηματισμοί με 20 γραμμές και 5 στήλες. Σε καθέναν από αυτούς εφαρμόζουμε την τεχνική που αναλυτικά παρουσιάστηκε στην εισαγωγή του κεφαλαίου. Η βέλτιστή επιλογή που προκύπτει δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Block	A	B	C	D
1	1	1	1	1
1	1	1	1	-1
-1	1	1	1	-1
1	1	1	-1	-1
-1	1	1	-1	1
-1	1	-1	1	1
-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	-1
-1	1	-1	-1	1
-1	-1	1	1	1
-1	-1	1	1	-1
1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	-1
-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	1	-1
-1	-1	-1	-1	-1

-1	-1	-1	-1	-1

Ο πίνακας πληροφορίας είναι ο

$$M = X^T X = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 4 & -4 & -4 & -4 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 20 & 4 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 & 0 & 4 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & -4 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

με ορίζουσα ίση με 1620491160780798. Έτσι προκύπτει D-eff = 92.6%.

4.7 Ομαδοποίηση σε ορθογώνιους σχεδιασμούς με 24 γραμμές και 5 στήλες

Υπάρχουν 63 μη ισοδύναμοι ορθογώνιοι σχηματισμοί με 24 γραμμές και 5 στήλες. Σε καθέναν από αυτούς εφαρμόζουμε την τεχνική που αναλυτικά παρουσιάστηκε στην εισαγωγή του κεφαλαίου. Η βέλτιστή επιλογή που προκύπτει δίνεται στον παρακάτω πίνακα

Block	A	B	C	D
1	1	1	1	1
1	1	1	1	-1
-1	1	1	1	1
-1	1	1	1	-1
1	1	1	-1	1
-1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	1
1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	-1
-1	1	-1	-1	1
-1	1	-1	-1	-1
1	-1	1	1	-1
-1	-1	1	1	1
1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	-1
-1	-1	1	-1	1
-1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	1	-1
-1	-1	-1	1	1
-1	-1	-1	1	-1

1	-1	-1	-1	1
-1	-1	-1	-1	-1

Ο πίνακας πληροφορίας είναι ο

$$M = X^T X = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

με ορίζουσα ίση με 20171471. Έτσι προκύπτει D-eff = 96.1%.

4.8 Ομαδοποίηση σε ορθογώνιους σχεδιασμούς με 20 γραμμές και 6 στήλες

Υπάρχουν 75 μη ισοδύναμοι ορθογώνιοι σχηματισμοί με 20 γραμμές και 6 στήλες. Σε καθέναν από αυτούς εφαρμόζουμε την τεχνική που αναλυτικά παρουσιάστηκε στην εισαγωγή του κεφαλαίου. Η βέλτιστή επιλογή που προκύπτει δίνεται στον παρακάτω πίνακα

Block	A	B	C	D	E
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	-1	1
1	1	1	-1	1	1
1	1	-1	1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	1	1	1	-1	-1
-1	1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	-1	1	-1
-1	1	-1	-1	-1	1
-1	-1	1	1	-1	-1
-1	-1	1	-1	1	1
-1	-1	1	-1	-1	1
-1	-1	-1	1	1	1

-1	-1	-1	1	1	-1

Ο πίνακας πληροφορίας είναι ο

$$M = X^T X = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & -4 & -4 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 4 & 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & -4 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 4 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & -4 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & 4 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 20 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 20 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 20 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 20 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 4 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & -4 & 4 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & -4 & 0 & 4 & 4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

με ορίζουσα ίση με 8,8. Έτσι προκύπτει D-eff = 85.28%.

4.9 Ομαδοποίηση σε ορθογώνιους σχεδιασμούς με 24 γραμμές και 6 στήλες

Υπάρχουν 1350 μη ισοδύναμοι ορθογώνιοι σχηματισμοί με 24 γραμμές και 6 στήλες. Σε καθέναν από αυτούς εφαρμόζουμε την τεχνική που αναλυτικά παρουσιάστηκε στην εισαγωγή του κεφαλαίου. Η βέλτιστή επιλογή που προκύπτει δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Block	A	B	C	D	E
1	1	1	1	1	-1
1	1	1	-1	1	1
1	1	1	-1	-1	1
1	1	1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	1	1	1	-1
1	-1	1	1	-1	1
1	-1	-1	1	1	1
1	-1	-1	-1	1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	1	1	1	1	1
-1	1	1	1	-1	-1

-1	1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	-1	1	1
-1	1	-1	-1	1	-1
-1	1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	1	1	-1	-1
-1	-1	1	-1	1	1
-1	-1	1	-1	1	-1
-1	-1	1	-1	-1	1
-1	-1	-1	1	1	-1
-1	-1	-1	1	-1	1

Ο πίνακας πληροφορίας είναι

$$M = X^T X = \begin{bmatrix}
24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & -8 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 24 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24
\end{bmatrix}$$

με ορίζουσα ίση με 7,1. Έτσι προκύπτει D-eff = 93.02%.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξένη

Bisgaard S., (1994). *A note on the definition of resolution for blocked* 2^{k-p} *designs*, Technometrics, 36, 308–311.

Box, G.E., & Meyer R.D., (1986). Dispersion effects from fractional designs, *Technometrics*, *28*(1), 19-27.

Cheng, S. W., & Wu C. J., (2002). Choice of optimal blocking schemes in two-level and three-level designs, *Technometrics*, *44*(3), 269-277.

Cheng, S. W., Li W., & Ye K. Q., (2004). Blocked nonregular two-level factorial designs, *Technometrics*, *46*(3), 269-279.

Deng, L. Y., & Tang B., (1999). Generalized resolution and minimum aberration criteria for Plackett-Burman and other nonregular factorial designs, *Statistica Sinica*, 1071-1082.

Evangelaras H., & Peveretos C., (2017). Efficient arrangements of two-level orthogonal arrays in two and four blocks, *Statistics*, *51*(6), 1326-1341.

Fisher R. A., (1926). The arrangement of field experiments, *Journal of the Ministry of Agriculture*, *33*, 503-515.

Fisher R. A., (1966). *The design of experiments*, 21st ed., Edinburgh: Oliver and Boyd.

Kenny, Q. Y. (2003). Indicator function and its application in two-level factorial designs, *The Annals of Statistics*, *31*(3), 984-994.

Montgomery D. C., (2017). *Design and analysis of experiments*, Wiley & sons.

Plackett R.L., & Burman J.P., (1946). *The Design of Optimum Multifactorial Experiments*, Biometrika, 33(4), 305–25.

Schoen, E. D., Sartono B., & Goos P., (2013). Optimal blocking for general resolution-3 designs, *Journal of Quality Technology*, *45*(2), 166-187.

Sun, D. X., Jeff Wu C. F., & Chen Y., (1997). Optimal Blocking Schemes for 2^n and 2^{n-p} Designs, *Technometrics*, *39*(3), 298-307.