

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**  
**Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής**



**Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ  
ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ**

**ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΩΝ  
ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΩΝ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ  
ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΣΗ ΤΟΥ  
ΠΡΩΤΑΣΦΑΛΙΣΤΗ**

**Παρασκευή Π. Παπαγεωργίου**

**Διπλωματική Εργασία**

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και  
Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς  
ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του  
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην  
*Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων*

**Πειραιάς**

**Μάρτιος 2024**

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη Συνέλευση του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .... συνεδρίασή της, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπλ. Καθηγητής Ε. Χατζηκωνσταντινίδης (Επιβλέπων)
- Αναπλ. Καθηγητής Γ. Τζαβελάς
- Καθηγητής Β. Σεβρόγλου

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**  
**School of Finance and Statistics**



**Department of Statistics and Insurance Science**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN  
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT**

**OPTIMAL REINSURANCE DESIGNS  
FROM INSURER'S PERSPECTIVE**

By

Paraskevi P. Papageorgiou

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and  
Insurance Science of the University of Piraeus in  
partial fulfilment of the requirements for the degree of  
Master of Science in Actuarial Science and Risk  
Management

Piraeus, Greece  
March 2024



*Στους γονείς μου  
Αντίκα και Αναστάσιο*

## Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να εκφράσω τις ιδιαίτερες ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ε. Χατζηκωνσταντινίδη, Αναπληρωτή Καθηγητή στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύτιμη καθοδήγησή του, την υπομονή που επέδειξε και την ουσιαστική βοήθεια του καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους γονείς μου που μου συμπαραστέκονται και στηρίζουν ηθικά και οικονομικά κάθε προσπάθεια και επιλογή μου.

## Περίληψη

Η έρευνα για τον βέλτιστο σχεδιασμό της αντασφάλισης χρονολογείται από τη δεκαετία του 1960. Για σχεδόν μισό αιώνα, η αναζήτηση του βέλτιστου αντασφαλιστικού σχεδιασμού παραμένει ένα συναρπαστικό θέμα, προσελκύοντας σημαντικό ενδιαφέρον τόσο από ακαδημαϊκούς όσο και από επαγγελματίες. Η γοητεία του έγκειται στις δυνατότητές του ως ένα αποτελεσματικό εργαλείο διαχείρισης κινδύνων για την ασφαλιστές. Υπάρχουν πολλοί τρόποι διατύπωσης του βέλτιστου σχεδιασμού της αντασφάλισης, ανάλογα με τον επιλεγμένο στόχο και τους περιορισμούς. Στην παρούσα διατριβή, ασχολούμαστε με το πρόβλημα του βέλτιστου σχεδιασμού της αντασφάλισης από τη σκοπιά ενός ασφαλιστή. Για το έναν ασφαλιστή, η κατάλληλη χρήση της αντασφάλισης συμβάλλει στη μείωση του δυσμενούς κινδύνου έκθεση και να βελτιώσει τη συνολική βιωσιμότητα της υποκείμενης επιχείρησης. Από την άλλη από την άλλη πλευρά, η αντασφάλιση συνεπάγεται πρόσθετο κόστος για τον ασφαλιστή με τη μορφή αντασφάλισης ασφάλιστρο. Αυτό συνεπάγεται ένα κλασικό tradeoff κινδύνου και ανταμοιβής που αντιμετωπίζει ο ασφαλιστής.

Ο πρωταρχικός στόχος της διατριβής είναι η ανάπτυξη θεωρητικά τεκμηριωμένων και συνάμα πρακτική λύση στην αναζήτηση βέλτιστων αντασφαλιστικών σχεδίων.

Προκειμένου να επιτευχθεί του στόχου αυτού, η παρούσα διατριβή χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος, ένας αριθμός ων μοντέλων αντασφάλισης αναπτύσσονται και οι βέλτιστες αντασφαλιστικές συμβάσεις τους παράγονται ρητά. Το μέρος αυτό επικεντρώνεται στην αντασφάλιση ελαχιστοποίησης του μέτρου κινδύνου και συζητά τις βέλτιστες αντασφαλιστικές συμβάσεις αξιοποιώντας δύο από τα πιο κοινά μέτρα κινδύνου γνωστά ως η αξία κινδύνου (VaR) και η υπό συνθήκη ουρά Conditional Tail Expectation (CTE). Ορισμένοι πρόσθετοι σημαντικοί οικονομικοί παράγοντες, όπως ο προϋπολογισμός των ασφαλιστρών αντασφάλισης, η κερδοφορία του ασφαλιστή λαμβάνονται επίσης υπόψη.

Το δεύτερο μέρος προτείνει μια καινοτόμο μέθοδο για τη διατύπωση των μοντέλων αντασφάλισης, η οποία αναφερόμαστε ως εμπειρική προσέγγιση, δεδομένου ότι αξιοποιεί ρητά την εμπειρικά δεδομένα ζημιών του ασφαλιστή. Η εμπειρική προσέγγιση έχει το πλεονέκτημα ότι είναι πρακτική και διαισθητικά ελκυστική. Η προσέγγιση αυτή

υποκινείται από τη δυσχέρεια ότι τα μοντέλα ανασφάλισης είναι συχνά προβλήματα βελτιστοποίησης σε περιορισμένες διαστάσεις και, ως εκ τούτου, οι ρητές λύσεις είναι εφικτές μόνο σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις. Η εμπειρική προσέγγιση αναδιατυπώνει αποτελεσματικά το πρόβλημα της βέλτιστης ανασφάλισης σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης περιορισμένων διαστάσεων. Επιπλέον, αποδεικνύουμε ότι ο κωνικός δεύτερης τάξης προγραμματισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόκτηση των βέλτιστων λύσεων για ένα ευρύ φάσμα ανασφαλιστικών που διατυπώνονται με την εμπειρική προσέγγιση.



## Abstract

The research on optimal reinsurance design dated back to the 1960's. For nearly half a century, the quest for optimal reinsurance designs has remained a fascinating subject, drawing significant interests from both academicians and practitioners. Its fascination lies in its potential as an effective risk management tool for the insurers. There are many ways of formulating the optimal design of reinsurance, depending on the chosen objective and constraints. In this thesis, we address the problem of optimal reinsurance designs from an insurer's perspective. For an insurer, an appropriate use of the reinsurance helps to reduce the adverse risk exposure and improve the overall viability of the underlying business. On the other hand, reinsurance incurs additional cost to the insurer in the form of reinsurance premium. This implies a classical risk and reward tradeoff faced by the insurer.

The primary objective of the thesis is to develop theoretically sound and yet practical solution in the quest for optimal reinsurance designs. In order to achieve such an objective, this thesis is divided into two parts. In the first part, a number of reinsurance models are developed and their optimal reinsurance treaties are derived explicitly. This part focuses on the risk measure minimization reinsurance models and discusses the optimal reinsurance treaties by exploiting two of the most common risk measures known as the Value-at-Risk (VaR) and the Conditional Tail Expectation (CTE). Some additional important economic factors such as the reinsurance premium budget, the insurer's profitability are also considered. The second part proposes an innovative method in formulating the reinsurance models, which we refer as the empirical approach since it exploits explicitly the insurer's empirical loss data. The empirical approach has the advantage that it is practical and intuitively appealing. This approach is motivated by the difficulty that the reinsurance models are often infinite dimensional optimization problems and hence the explicit solutions are achievable only in some special cases. The empirical approach effectively reformulates the optimal reinsurance problem into a finite dimensional optimization problem. Furthermore, we demonstrate that the second-order

conic programming can be used to obtain the optimal solutions for a wide range of reinsurance models formulated by the empirical approach.

## Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή .....	14
1.1 Ιστορική Αναδρομή .....	14
1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση .....	18
1.3 Mathematical Background .....	24
1.3.1 Κίνδυνοι και μέτρα κινδύνου ασφαλιστικών εταιρειών.....	24
1.2.2 Αρχές Ασφαλίσεων .....	26
1.4 Στόχος και περίγραμμα .....	28
1.4.1 Στόχος.....	28
2. Μοντέλα Ελαχιστοποίησης VaR και CTE: Quota-Share και Stop-Loss ανασφάλιση	30
2.1 Εισαγωγή.....	30
2.2 Εισαγωγικά.....	33
2.3 Βελτιστοποίηση Quota-share .....	38
2.4 Βελτιστοποίηση stop-loss .....	42
2.4.1 VaR βελτιστοποίηση για stop-loss ανασφάλιση .....	42
2.4.2 CTE βελτιστοποίηση για stop-loss ανασφάλιση .....	45
3. Μοντέλο Ελαχιστοποίησης VaR : Αύξηση των κυρτών ανασφαλιστικών συμβάσεων	
3.1 Εισαγωγή και Μοντέλο Ανασφάλισης.....	49
3.2 Μοντέλο Αναμόρφωσης .....	51
3.3 Βέλτιστες Λύσεις.....	53
3.3.1 Μοντέλα Προσέγγισης .....	55
3.3.2 Λύσεις στα Μοντέλα Προσέγγισης.....	57
3.3.3 Βέλτιστες Λύσεις για το Μοντέλο Ελαχιστοποίησης VaR .....	60
3.4 Κάποιες παρατηρήσεις και παραδείγματα .....	62
4. Μοντέλο Ελαχιστοποίησης CTE: Συμβόλαια γενικής ανασφάλισης .....	68
4.1 Εισαγωγή και μοντέλα ανασφάλισης.....	68
4.2 Βέλτιστες ανασφαλιστικές συμβάσεις .....	70

4.2.1 Βοηθητικό μοντέλο και συνθήκες βελτιστοποίησης.....	71
4.2.2 Βέλτιστες συναρτήσεις ζημιών .....	73
4.3 Βέλτιστο μοντέλο ανασφάλισης: Δεσμευτική Περίπτωση.....	77
5. Εμπειρικά μοντέλα ανασφάλισης .....	84
5.1 Εισαγωγή.....	84
5.2 Γενικά εμπειρικά μοντέλα ανασφάλισης.....	86
5.3 Προγραμματισμός κώνου δεύτερης τάξης (SOC).....	87
5.4 Προγραμματισμός SOC και εμπειρικά μοντέλα ανασφάλισης .....	91
5.4.1 Περιορισμός SOC-αντιπροσωπευτικών ανασφαλίσεων .....	91
5.4.2 Εμπειρικό μοντέλο ανασφάλισης: Ελαχιστοποίηση της διακύμανσης.....	95
5.4.3 Εμπειρικό μοντέλο ανασφάλισης: Ελαχιστοποίηση CTE.....	97
5.4.4 Εμπειρικό μοντέλο ανασφάλισης: Ελαχιστοποίηση VaR.....	103
<b>Βιβλιογραφία .....</b>	<b>106</b>



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Ιστορική Αναδρομή

Η έρευνα για τον βέλτιστο σχεδιασμό της αντασφάλισης χρονολογείται από τη δεκαετία του 1960 (βλέπε Borch (1960), Kahn (1961) και Ohlin (1969)). Για σχεδόν μισό αιώνα, η αναζήτηση του βέλτιστου σχεδιασμού αντασφάλισης παραμένει ένα συναρπαστικό θέμα, προσελκύνοντας σημαντικό ενδιαφέρον τόσο από ακαδημαϊκούς όσο και από επαγγελματίες. Η γοητεία του έγκειται στην προοπτική του ως αποτελεσματικό εργαλείο διαχείρισης κινδύνου για τους ασφαλιστές. Το θέμα της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη του βέλτιστου αντασφαλιστικού σχεδιασμού. Συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε διάφορα μοντέλα αντασφάλισης με στόχο την εξαγωγή των λύσεων τους.

Για να παρουσιάσουμε την έννοια του βέλτιστου σχεδιασμού της αντασφάλισης, ας θυμηθούμε πρώτα την έννοια της αντασφάλισης. Σε γενικές γραμμές, η αντασφάλιση είναι μια ασφάλιση για την ασφάλεια ή μια ασφάλιση για τους ασφαλιστές. Πρόκειται για μια συμβατική συμφωνία μεταξύ ενός ασφαλιστή (εκχωρητή) και ενός αντασφαλιστή, σύμφωνα με την οποία, ανάλογα με τη φύση της συμφωνίας αντασφάλισης, ο αντασφαλιστής αποζημιώνει μέρος των ζημιών του ασφαλιστή.

Υπάρχουν πολλοί λόγοι για την ύπαρξη της αντασφάλισης. Πρώτον, η αντασφάλιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί από την ασφαλιστική εταιρεία για να μετριάσει την έκθεσή της στον κίνδυνο και, ως εκ τούτου, να σταθεροποιήσει τις μεταβλητότητες της ανάληψης κινδύνων (ή των κερδών). Δεύτερον, η αντασφάλιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί από την ασφαλιστική εταιρεία για να αποφύγει μια μεγάλη μεμονωμένη ζημία, για παράδειγμα, απαιτήσεις που προκύπτουν από έναν καταστροφικό κίνδυνο, η οποία θα μπορούσε να οδηγήσει στην πτώχευση της ασφαλιστικής εταιρείας. Τρίτον, μια

νεοσύστατη ασφαλιστική εταιρεία μπορεί να αποκτήσει την επιχειρηματική τεχνογνωσία από ορισμένες αντασφαλιστικές εταιρείες, συνδεδεμένη μαζί τους μέσω συμβάσεων αντασφάλισης. Τέταρτον, η αντασφάλιση παρέχει επίσης έναν μηχανισμό που επιτρέπει σε μια ασφαλιστική εταιρεία να αυξήσει την ικανότητά της να δέχεται κινδύνους.

Προκειμένου να διευκρινιστεί η έννοια του βέλτιστου σχεδιασμού αντασφάλισης, ας αναλύσουμε περαιτέρω τη γενική επίδραση μιας αντασφαλιστικής σύμβασης στον ασφαλιστή. Προφανώς, με την κατανομή ορισμένων από τους κινδύνους σε έναν αντασφαλιστή, ο ασφαλιστής επιβαρύνεται με πρόσθετο κόστος με τη μορφή αντασφαλίστρου που καταβάλλεται στον αντασφαλιστή. Φυσικά, όσο υψηλότερη είναι η αναμενόμενη μεταφορά κινδύνου σε έναν αντασφαλιστή, τόσο πιο δαπανηρό είναι το ασφάλιστρο αντασφάλισης. Ομοίως, ένας παραχωρούμενος μπορεί να μειώσει το κόστος της αντασφάλισης εκθέτοντας σε υψηλότερο αναμενόμενο διατηρούμενο κίνδυνο. Αυτό καταδεικνύει την αντιστάθμιση μεταξύ της διασποράς και της διατήρησης κινδύνου. Ένα τέτοιο δικαίωμα ανταλλαγής οδηγεί στο θέμα του βέλτιστου σχεδιασμού αντασφάλισης είναι μια διαδικασία καθορισμού του βέλτιστου συμβολαίου αντασφάλισης σύμφωνα με ορισμένα κριτήρια βελτιστοποίησης μαζί με ορισμένους περιορισμούς εάν είναι απαραίτητο. Με λίγα λόγια, ασχολείται με τη βέλτιστη κατανομή ενός κινδύνου μεταξύ ασφαλιστή και αντασφαλιστή.

Επομένως, ο βέλτιστος σχεδιασμός αντασφάλισης συνεπάγεται τον προσδιορισμό ορισμένων προβλημάτων βελτιστοποίησης και την επίλυσή τους για τις βέλτιστες συμβάσεις αντασφάλισης. Θα ονομάσουμε αυτά τα προβλήματα βελτιστοποίησης ως μοντέλα αντασφάλισης και θα αναφέρουμε τον κίνδυνο στον οποίο εφαρμόζεται η αντασφάλιση ως υποκείμενο κίνδυνο.

Συνεπώς, οι μελέτες των μοντέλων αντασφάλισης θα μπορούσαν να παρέχουν σημαντικές πληροφορίες για τη φύση των υποκείμενων κινδύνων στους οποίους εκτίθεται ο ασφαλιστής και θα μπορούσαν επίσης να βοηθήσουν στην ανάπτυξη υγιών και συνετών εργαλείων διαχείρισης κινδύνων για τις ασφαλιστικές εταιρείες.

Ας θυμηθούμε τώρα διάφορους τύπους μοντέλων αντασφάλισης που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία. Είναι σημαντικό να χωρίσουμε πρώτα τα μοντέλα σε δύο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με τις χρονικές περιόδους. Αυτά είναι γνωστά ως στατικά μοντέλα και δυναμικά μοντέλα. Στα πρώτα μοντέλα, ασχολούμαστε μόνο με την αντασφάλιση του κινδύνου σε μία μόνο χρονική περίοδο και γι' αυτό ονομάζονται επίσης μοντέλα μιας περιόδου. Τα τελευταία μοντέλα αφορούν την αντασφάλιση σε ένα περιβάλλον πολλαπλών περιόδων που συνήθως περιλαμβάνει τον καθορισμό μιας διαδικασίας πλεονάσματος όπως το κλασικό σύνθετο μοντέλο Poisson. Αναφέρουμε επίσης το τελευταίο μοντέλο ως μοντέλα πολλαπλών περιόδων.

Μεταξύ αυτών των μοντέλων, μπορεί κανείς να ταξινομήσει περαιτέρω είτε σε παγκόσμια μοντέλα είτε σε τοπικά μοντέλα, ανάλογα με το πώς είναι δομημένη η αντασφάλιση. Όταν η αντασφάλιση εφαρμόζεται μόνο στον κίνδυνο συνολικά, ονομάζουμε τέτοια μοντέλα ως παγκόσμια, διαφορετικά τοπικά. Ως εκ τούτου, στην πρώτη περίπτωση χρειάζεται μόνο να γνωρίζουμε τη συνολική κατανομή ζημιών, ενώ στη δεύτερη περίπτωση, πρέπει να γνωρίζουμε την κοινή κατανομή των κινδύνων και πώς η σύμβαση αντασφάλισης επηρεάζει τον κίνδυνο που προκύπτει.

Σημειώστε ότι ένα σημαντικό μέρος της υπάρχουσας βιβλιογραφίας συζητά τα παγκόσμια μοντέλα, αν και τα τοπικά μοντέλα και ο συνδυασμός αυτών των δύο τύπων μοντέλων είναι κοινά στην πράξη. Η παρούσα διατριβή θα επικεντρωθεί στα παγκόσμια μοντέλα.

Η περαιτέρω ταξινόμηση των μοντέλων αντασφάλισης είναι δυνατή ανάλογα με τον τρόπο ορισμού της βελτιστοποίησης. Για παράδειγμα, στα μοντέλα που προσανατολίζονται στον ασφαλιστή και τον αντασφαλιστή, η βέλτιστη αντασφάλιση καθορίζεται κατά τρόπο ώστε να αντανakλά από κοινού τα συμφέροντα τόσο του ασφαλιστή όσο και του αντασφαλιστή. Στην περίπτωση αυτή, η βελτιστοποίηση διατυπώνεται συχνά ως ένα πρόβλημα θεωρίας παιγνίων μεταξύ των δύο παικτών και στη συνέχεια προσδιορίζεται η κατά Pareto βέλτιστη αντασφάλιση, εάν υπάρχει- βλέπε, για παράδειγμα, Borch (1960). Από την άλλη πλευρά, υπάρχουν μοντέλα, τα οποία



αναφέρονται ως μοντέλα προσανατολισμένα στον ασφαλιστή, τα οποία εστιάζουν αποκλειστικά στον ασφαλιστή κατά την εξαγωγή της βέλτιστης αντασφάλισης. Η βέλτιστη αντασφάλιση προσδιορίζεται αποκλειστικά από την άποψη του ασφαλιστή. Ως εκ τούτου, ο ασφαλιστής είναι ο ενεργός παίκτης, ενώ ο αντασφαλιστής είναι ο παθητικός αντίπαλος. Ενώ η υπόθεση ότι ο αντασφαλιστής είναι παθητικός είναι συζητήσιμη, μπορεί κανείς να υποστηρίξει ότι η αντασφαλιστική αγορά είναι ανταγωνιστική και ο ασφαλιστής μπορεί να είναι απαιτητικός. Ένα άλλο πλεονέκτημα της εστίασης στο μοντέλο που είναι προσανατολισμένο στον ασφαλιστή είναι ότι από τη σκοπιά του ασφαλιστή, η βέλτιστη αντασφάλιση μπορεί να αποτελέσει σημείο αναφοράς ή κατευθυντήρια γραμμή για τον ασφαλιστή, ακόμη και αν η εν λόγω βέλτιστη αντασφαλιστική σύμβαση δεν είναι διαθέσιμη από την αγορά. Μεγάλο μέρος της έρευνας των τελευταίων ετών είναι αφιερωμένο στα μοντέλα προσανατολισμένα στον ασφαλιστή, στα οποία επικεντρώνεται και η παρούσα διπλωματική εργασία.

Παραθέτουμε τώρα τα ακόλουθα μοντέλα αντασφάλισης που χρησιμοποιούνται συνήθως, ανάλογα με τη φύση της συνάρτησης στόχου:

(α) *μοντέλα ελαχιστοποίησης διακύμανσης*: εάν ο ασφαλιστής επρόκειτο να ελαχιστοποιήσει τη διακύμανση του διατηρούμενου κινδύνου (ή του συνολικού κινδύνου)

(β) *Μοντέλα μεγιστοποίησης αναμενόμενης χρησιμότητας*: εάν ο ασφαλιστής επρόκειτο να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη χρησιμότητα του.

(γ) *(κυρτά) μοντέλα ελαχιστοποίησης μέτρησης κινδύνου*: εάν ο ασφαλιστής επρόκειτο να ελαχιστοποιήσει ένα (κυρτό) μέτρο κινδύνου του διατηρούμενου κινδύνου (ή του συνολικού κινδύνου).

(δ) *μοντέλα ελαχιστοποίησης πιθανοτήτων καταστροφής*: εάν ο ασφαλιστής ελαχιστοποιούσε την πιθανότητα καταστροφής για τη διαδικασία του πλεονάσματος.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα τρία πρώτα μοντέλα είναι ένθετα με την έννοια ότι τα μοντέλα ελαχιστοποίησης διακύμανσης μπορούν να θεωρηθούν ως υποσύνολο των μοντέλων μεγιστοποίησης της αναμενόμενης χρησιμότητας, το οποίο με τη σειρά του είναι μια ειδική περίπτωση των μοντέλων ελαχιστοποίησης του μέτρου κινδύνου.

Σημειώστε επίσης ότι κατά τη μελέτη των παραπάνω μοντέλων βελτιστοποίησης, συχνά επιβάλλονται περιορισμοί όπως ο μέγιστος προϋπολογισμός ασφαλίστρου ή η ελάχιστη εγγύηση αναμενόμενων κερδών. Σε αυτές τις περιπτώσεις, κάποιος ασχολείται με μοντέλα βελτιστοποίησης περιορισμένης χρήσης, σε αντίθεση με τα μοντέλα βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς.

## 1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Στην παρούσα ενότητα, παραθέτουμε μια σύντομη βιβλιογραφική ανασκόπηση και συνοψίζουμε ορισμένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα σχετικά με τη βέλτιστη αντασφάλιση που αφορούν τη διατριβή. Ειδικότερα, θα δώσουμε έμφαση στα στατικά παγκόσμια μοντέλα με περιστασιακή αναφορά σε άλλα μοντέλα και τεχνικές.

Εξετάζοντας την υπάρχουσα βιβλιογραφία, υπάρχει πληθώρα ερευνών που διεξάγονται σχετικά με τα μοντέλα προσανατολισμένα στους ασφαλιστές, ιδίως τα στατικά παγκόσμια μοντέλα προσανατολισμένα στους ασφαλιστές. Αυτός ο τύπος μοντέλου συνήθως περιλαμβάνει τη μοντελοποίηση του υποκείμενου κινδύνου ως μη αρνητική τυχαία μεταβλητή, ας πούμε  $X$ . Ας υποθέσουμε ότι  $f(X)$ , με τη συμβατική υπόθεση  $0 \leq f(x) \leq x$  για όλα τα  $x \geq 0$ , είναι το μέρος του υποκείμενου κινδύνου που καλύπτεται από τον αντασφαλιστή, και  $\Pi$  υποδηλώνει την αρχή του ασφαλίστρου που υιοθετείται για τον προσδιορισμό του αντασφαλίστρου για μια δεδομένη αντασφαλιστική ρύθμιση  $f \equiv f(X)$ . Τότε ο ασφαλιστής διατηρεί τον κίνδυνο  $I_f \equiv I_f(X) := X - f(X)$  και πληρώνει  $\Pi(f) = \Pi(f(X))$  στον αντασφαλιστή με τη μορφή αντασφαλίστρου- συνεπώς το συνολικό κόστος ή ο συνολικός κίνδυνος, που συμβολίζεται με  $T_f \equiv T_f(X) = Tf(X)$ , είναι το άθροισμα των  $\Pi(f)$  και  $I_f$ , δηλ.  $T_f(X) = I_f(X) + \Pi(f(X))$ . Σημειώστε ότι η συνάρτηση  $f(X)$  συνεπάγεται μια κατανομή του αρχικού κινδύνου  $X$  μεταξύ ασφαλιστή και αντασφαλιστή. Η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή ως συνάρτηση αποζημίωσης, συνάρτηση αποζημίωσης ή συνάρτηση εκχωρούμενων ζημιών, ενώ η  $I_f(X)$  αναφέρεται ως συνάρτηση διατηρούμενων ζημιών. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι ο ασφαλιστής έχει έναν προκαθορισμένο αντασφαλιστικό προϋπολογισμό, π.χ.  $\pi$ . Αυτό σημαίνει ότι  $\pi$  είναι

το μέγιστο ασφάλιστρο που είναι διατεθειμένος να πληρώσει ο ασφαλιστής για την αντασφάλιση του κινδύνου του. Αυτό ισοδυναμεί με την επιβολή του περιορισμού  $\Pi(f(X)) \leq \pi$  στο μοντέλο αντασφάλισης.

Τα περισσότερα από τα στατικά μοντέλα αντασφάλισης που έχουν διερευνηθεί μέχρι σήμερα έχουν μία από τις ακόλουθες διατυπώσεις:

$$\begin{cases} \min E[\omega(I_f(X))] = E[\omega(X - f(X))] \\ \text{s. t. } 0 \leq f(x) \leq x, \text{ για όλα τα } x \geq 0, \text{ και } \Pi(f(X)) = \pi, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

$$\begin{cases} \min E[\omega(\overline{I_f(X)})] = E[\omega(\overline{X - f(X)})] \\ \text{s. t. } 0 \leq f(x) \leq x, \text{ για όλα τα } x \geq 0, \text{ και } \Pi(f(X)) = \pi \end{cases} \quad (1.2.2)$$

όπου  $w$  είναι μια κυρτή συνάρτηση και  $\bar{Y}$  συμβολίζει  $Y - EY$  για μια τυχαία μεταβλητή  $Y$ . Τα μοντέλα βελτιστοποίησης (1.2.1) και (1.2.2) είναι οι γενικές μορφές των διαφόρων μοντέλων αντασφάλισης που περιλαμβάνουν, για παράδειγμα, το ακόλουθο μοντέλο μεγιστοποίησης της αναμενόμενης χρησιμότητας:

$$\begin{cases} \max E[u(W_0 - X + f(X) - \pi)] \\ \text{s. t. } 0 \leq I(x) \leq x, \text{ για όλα τα } x \geq 0, \text{ και } \Pi(f(X)) = \pi, \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Όπου  $W_0$  υποδηλώνει τον αρχικό πλούτο του ασφαλιστή, ενώ  $W_0 - X + f(X)$  αναπαριστά τον πλούτο του ασφαλιστή μετά τη συμφωνία αντασφάλισης. Δεδομένου ότι ο ασφαλιστής επιδιώκει τη μεταφορά κινδύνου, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι αποστρέφεται τον κίνδυνο με κοίλη συνάρτηση χρησιμότητας. Ας υποθέσουμε ότι η  $u(t)$  είναι η αντίστοιχη κοίλη συνάρτηση χρησιμότητας, τότε η  $u(-t + W_0 - \pi)$  είναι προφανώς κυρτή ως συνάρτηση του  $t$ . Επιπλέον, θέτοντας  $w(t) = u(-t + W_0 - \pi)$ , ανακτάται η (1.2.3) από την (1.2.1). Για μια εξαιρετική επισκόπηση της συνάρτησης χρησιμότητας σε σχέση με τις ασφαλιστικές εφαρμογές, βλέπε Gerber and Pafumi (1998). Μια άλλη σημαντική κατηγορία μοντέλου αντασφάλισης προκύπτει αν αφήσουμε  $w(x) = x^2$  στην (1.2.2). Αυτό οδηγεί στο κλασικό μοντέλο ελαχιστοποίησης της διακύμανσης:

$$\begin{cases} \min Var(I_f(X)) = Var(X - f(X)) \\ \text{s. t. } 0 \leq f(x) \leq x, \text{ για όλα } x \geq 0, \text{ και } \Pi(f(X)) = \pi. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Το πιο κλασικό και το πιο θεμελιώδες αποτέλεσμα σχετικά με τη βέλτιστη αντασφάλιση είναι ότι η αντασφαλιστική σύμβαση stop-loss είναι η βέλτιστη λύση που επιλύει τόσο το μοντέλο μεγιστοποίησης της χρησιμότητας (1.2.3) όσο και το μοντέλο ελαχιστοποίησης της διακύμανσης (1.2.4). Αυτό το βασικό αποτέλεσμα υποθέτει ότι το αντασφαλιστικό ασφάλιστρο καθορίζεται από την αρχή του αναμενόμενου ασφαλιστρού. Το αποτέλεσμα που αφορά τη χρησιμότητα οφείλεται στον Arrow (1974)- βλέπε επίσης Bowers et al. (1997), Gerber and Pafumi (1998, ενότητα 6). Το αποτέλεσμα του Arrow μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση του αποτελέσματος που έχει καθιερωθεί σε προηγούμενη βιβλιογραφία, συμπεριλαμβανομένων των Borch (1960), Kahn (1961) και Ohlin (1969). Για λεπτομερή συζήτηση σχετικά με το υπόδειγμα ελαχιστοποίησης της διακύμανσης (1.2.4), βλέπε, για παράδειγμα, Bowers, et al. (1997), Kaas, et al. (2001) και Gerber (1979). Στη δεκαετία του 1980 παρατηρούνται επίσης πολυάριθμες γενικεύσεις του αποτελέσματος του Arrow. Για παράδειγμα, οι Deprez και Gerber (1985) γενίκευσαν το αποτέλεσμα αυτό υπό την έννοια ότι καθόρισαν μία επαρκή και αναγκαία συνθήκη για το βέλτιστο συμβόλαιο  $f^*$  υπό κυρτή και διαφοροποιήσιμη αρχή ασφαλιστρού του Gâteaux  $\Pi$  για μοντέλα αντασφάλισης χωρίς τον περιορισμό  $\pi$  του προϋπολογισμού ασφαλιστρού. Δηλαδή, καθόρισαν τις επαρκείς και αναγκαίες συνθήκες για τη λύση του μοντέλου (1.2.3) για κυρτή και διαφοροποιήσιμη αρχή ασφαλιστρού του Gâteaux χωρίς τον περιορισμό  $\Pi(f(X)) = \pi$ .

Οι Heerwaarden κ.ά. (1989) στη συνέχεια γενίκευσαν το αποτέλεσμα του Arrow στα λεγόμενα tail-averse κριτήρια απόφασης, τα οποία είναι μια κατηγορία κριτηρίων που περιλαμβάνουν, για παράδειγμα, τη μεγιστοποίηση της αναμενόμενης χρησιμότητας χρησιμοποιώντας μια κοίλη αύξουσα συνάρτηση χρησιμότητας, την ελαχιστοποίηση της διακύμανσης, του μηδενικού ασφαλιστρού χρησιμότητας ή του ασφαλιστρού μέσης αξίας για τον διατηρούμενο κίνδυνο, τη μεγιστοποίηση του συντελεστή προσαρμογής ή της πιθανότητας καταστροφής σε μια σύνθετη διαδικασία κινδύνου Poisson κ.ο.κ. Ο Young (1999) επέκτεινε την εργασία των Deprez και Gerber (1985) στην περίπτωση με την αρχή

του ασφαλιστρού του Wang, η οποία είναι κυρτή αλλά όχι διαφοροποιήσιμη κατά Gâteaux.

Τα τελευταία χρόνια, φαίνεται να έχει αυξηθεί το ενδιαφέρον για τη βέλτιστη αντασφάλιση, με αποτέλεσμα να έχουν εμφανιστεί πολλά δημιουργικά μοντέλα βέλτιστης αντασφάλισης. Σε συνδυασμό με αυτό, κομψά μαθηματικά εργαλεία και καινοτόμες θεωρίες βελτιστοποίησης έχουν επίσης χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή των βέλτιστων λύσεων των προτεινόμενων μοντέλων αντασφάλισης. Οι κύριες εξελίξεις σχετικά με τα πρόσφατα προτεινόμενα στατικά μοντέλα έχουν ως εξής.

Οι Gajec και Zagrodny (2000) εξέτασαν το υπόδειγμα ελαχιστοποίησης της διακύμανσης (1.2.4) αλλάζοντας τον δεσμευτικό όρο του προϋπολογισμού  $\Pi(f(X)) = \pi$  σε μη δεσμευτικό περιορισμό  $\Pi(f(X)) \leq \pi$  και την αρχή του αναμενόμενου ασφαλιστρού σε αρχή της τυπικής απόκλισης. Αν και οι τροποποιήσεις αυτές εισήγαγαν πρόσθετη πολυπλοκότητα στα προβλήματα βελτιστοποίησης, προέκυψαν ρητά οι βέλτιστες αντασφαλιστικές συμβάσεις στηριζόμενες σε τεχνικές που βασίζονται στη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange και στις παραγώγους Gâteaux. Σε απάντηση στην κριτική που δέχθηκε η χρήση της διακύμανσης ως κριτήριο μέτρησης του κινδύνου, οι ίδιοι συγγραφείς σε μεταγενέστερη εργασία τους (Gajec and Zagrodny (2004)) ανέπτυξαν μια μέθοδο για την ανάλυση των βέλτιστων αντασφαλιστικών συμβολαίων στο μοντέλο (1.2.2) με το  $w$  να ορίζεται ως μία από τις λεγόμενες ψευδοκυρτές συναρτήσεις. Οι ψευδοκυρτές συναρτήσεις περιλαμβάνουν μια μεγάλη κατηγορία ασύμμετρων συναρτήσεων, όπως  $h(t) = \max(0, t)$  και  $h(t) = [\max(0, t)]^2$ . Στην εργασία τους, προέκυψαν ρητές μορφές βέλτιστων συμβάσεων στην περίπτωση των μέτρων κινδύνου απόλυτης απόκλισης και περικομμένης διακύμανσης. Βλέπε επίσης Zagrodny (2003) για σχετικές εργασίες.

Μια σειρά εργασιών που δημοσίευσε ο Kaluszka (2001, 2004a, 2004b, 2005) συνέβαλε αναμφισβήτητα σημαντικά στον βέλτιστο σχεδιασμό της αντασφάλισης. Το 2001, ο Kaluszka ανέπτυξε μια τεχνική για την εξαγωγή ρητών μορφών της βέλτιστης αντασφαλιστικής σύμβασης με το μοντέλο ελαχιστοποίησης της διακύμανσης (1.2.4) για τις αρχές μέσης διακύμανσης, δηλαδή τις αρχές βάσει των οποίων το αντασφάλιστρο βασίζεται μόνο στην προσδοκία και τη διακύμανση της εκχωρούμενης ζημίας. Στη συνέχεια, με βάση την προηγούμενη εργασία του, ο Kaluszka (2004a) ανέπτυξε μια μέθοδο για τις λύσεις του γενικότερου μοντέλου (1.2.2) υπό την ίδια κατηγορία αρχών

ασφαλιστρών. Διερευνήθηκαν οι λύσεις κάτω από επτά συγκεκριμένες συναρτήσεις για το  $u$ , όπως  $u(x) = x_+^2$  και  $u(x) = x_+$ . Για μια συγκεκριμένη συνάρτηση  $u$ , η μέθοδος του μπορεί να αποδειχθεί ακόμη πολύ περίπλοκη και οι βέλτιστες λύσεις είναι πιθανότερο να εκφράζονται ως λύσεις ενός συστήματος εξισώσεων και ως εκ τούτου χρειάζεται να στηριχθεί σε αριθμητική μέθοδο για την απόκτηση των βέλτιστων λύσεων.

Στην πιο πρόσφατη εργασία του, ο Kaluszka (2005) εξέτασε πιο γενικά μοντέλα (δηλ. τα κυρτά μοντέλα μέτρων κινδύνου) μαζί με μια ευρύτερη κατηγορία αρχών πριμοδότησης (κυρίως τις κυρτές αρχές). Με τον όρο κυρτή αρχή εννοούμε ότι το ποσό του ασφαλιστρου  $p$  επί μιας τυχαίας απώλειας  $Z$  μπορεί να προσδιοριστεί μέσω της εξίσωσης  $g(p) = H(Z)$ , όπου  $g$  είναι μια αύξουσα συνάρτηση και  $H$  είναι μια κυρτή συνάρτηση. Ο συγγραφέας αρχικά διατύπωσε διάφορα πολύ γενικά θεωρήματα και στη συνέχεια προσδιόρισε με τη σειρά του, κατά περίπτωση, τις λύσεις για μοντέλα με συγκεκριμένο μέτρο κινδύνου και συγκεκριμένη αρχή ασφαλιστρου. Αν και τα αποτελέσματα που έλαβε για κάθε συγκεκριμένο μοντέλο είναι αρκετά σαφή ώστε να είναι πρακτικά χρήσιμα, η μέθοδος του θα μπορούσε να αποδειχθεί πολύ περίπλοκη για τον εντοπισμό των λύσεων για άλλα μοντέλα, ακόμη και αν αυτά βασίζονται επίσης σε ένα κυρτό μέτρο κινδύνου και μια κυρτή αρχή ασφαλιστρου.

Μια άλλη σημαντική εργασία στον βέλτιστο σχεδιασμό της αντασφάλισης αποδίδεται στους Promislow και Young (2005). Στην εργασία αυτή, οι συγγραφείς συζήτησαν τη βέλτιστη αγορά ασφάλισης κάτω από ένα ενοποιητικό πλαίσιο με κριτήριο την ελαχιστοποίηση ενός γενικού μέτρου κινδύνου. Το μοντέλο τους μπορεί να μεταφερθεί στο πλαίσιο του σχεδιασμού αντασφάλισης. Αν και τα αποτελέσματά τους είναι εφαρμόσιμα για ένα γενικό μοντέλο ελαχιστοποίησης του διαφοροποιήσιμου μέτρου κινδύνου Gâteaux, το συμπέρασμά τους περιορίζεται μόνο στον προσδιορισμό του κατά πόσον μια συνάρτηση εκχωρούμενης ζημίας (ή η αντίστοιχη παρακρατούμενη ζημία) θα πρέπει να έχει απαλλαγή ή όχι.

Πιο πρόσφατα, οι Cai και Tan (2007) εισήγαγαν δύο νέα μοντέλα αντασφάλισης. Προσδιόρισαν τη βέλτιστη απαλλαγή των συμβολαίων stop-loss, αντίστοιχα, ελαχιστοποιώντας τα μέτρα κινδύνου VaR (Value-at-Risk) και CTE (Conditional Tail Expectation) του  $Tf(X) \equiv If(X) + \Pi(f(X))$ , της συνολικής έκθεσης σε κίνδυνο ενός ασφαλιστή. Αργότερα, οι Cai et al. (2008) γενίκευσαν τα αποτελέσματα των

Cai και Tan (2007) εξετάζοντας τη βέλτιστη ανασφάλιση μεταξύ όλων των αυξανόμενων κυρτών συμβάσεων. Σημειώστε ότι οι συναρτήσεις των εκχωρούμενων ζημιών στην ανασφάλιση stop-loss, στην ανασφάλιση με quota-share και στον συνδυασμό τους είναι όλες κάποιες ειδικές αυξανόμενες κυρτές συναρτήσεις. Ενώ τα αποτελέσματα που προκύπτουν σε αυτές τις δύο εργασίες είναι σαφή, η κριτική στα μοντέλα τους βασίζεται σε δύο πτυχές. Η πρώτη είναι ότι εξετάζουν μόνο την αρχή της προσδοκίας για το ασφαλιστρο ανασφάλισης. Δεύτερον, το μοντέλο τους ασχολείται μόνο με την ελαχιστοποίηση της έκθεσης σε κίνδυνο για τον ασφαλιστή, χωρίς να λαμβάνει υπόψη άλλους σημαντικούς παράγοντες, όπως ο προϋπολογισμός του ανασφαλιστρού ή η κερδοφορία του ασφαλιστή.

Τα μοντέλα που εξετάσαμε μέχρι στιγμής είναι όλα παγκόσμια μοντέλα μιας περιόδου. Υπάρχουν αποτελέσματα που αφορούν τοπικά μοντέλα, τα οποία αναφέρω τώρα εν συντομία. Για παράδειγμα, οι Borch (1960), Deprez και Gerber (1985) και Aase (2002) συζήτησαν τις συνθήκες για την επίτευξη της βέλτιστης κατά Pareto κατάστασης κατά τη διάρκεια της κατανομής κινδύνου μεταξύ μιας ομάδας χρηματοοικονομικών ατόμων. Ένα άλλο παράδειγμα είναι από τον Kaluszka (2004b) ο οποίος συζήτησε τις βέλτιστες ανασφαλιστικές συμβάσεις όταν η αρχή του ασφαλιστρού μέσης διακύμανσης εφαρμόζεται στο άθροισμα των επιμέρους εκχωρούμενων ζημιών με κριτήριο την ελαχιστοποίηση της διακύμανσης της συνολικής παρακρατούμενης ζημίας του ασφαλιστή, επιβάλλοντας παράλληλα το αναμενόμενο κέρδος του ασφαλιστή. Υπάρχουν επίσης εργασίες που είναι αφιερωμένες στη συζήτηση των βέλτιστων συμβάσεων στο πλαίσιο διαφόρων κοινών τύπων ανασφάλισης, όπως η quota-share, το πλεόνασμα, η stop-loss και οι συνδυασμοί τους. Βλέπε για παράδειγμα, Centeno (1985, 1986) ή Verlaak and Beirlant (2003).

Ο δυναμικός βέλτιστος ανασφαλιστικός σχεδιασμός αποτελεί επίσης τομέα ενεργής έρευνας τα τελευταία χρόνια. Ορισμένες πρόσφατες εργασίες οφείλονται στους Schmidli (2001), Hipp και Vogt (2003), Hald και Schmidli (2004), Dickson και Waters (2006) και Kaishev και Dimitrova (2006). Τα περισσότερα από αυτά τα αποτελέσματα ορίζουν τον βέλτιστο σχεδιασμό ανασφάλισης με κριτήριο την ελαχιστοποίηση των πιθανοτήτων καταστροφής της διαδικασίας πλεονάσματος του ασφαλιστή. Οι Kaishev και Dimitrova (2006), από την άλλη πλευρά, εξήγαγαν τη βέλτιστη με τη μεγιστοποίηση της κοινής

πιθανότητας επιβίωσης των διαδικασιών πλεονάσματος τόσο του ασφαλιστή όσο και του αντασφαλιστή. Στο δυναμικό περιβάλλον, τα προβλήματα είναι συνήθως τόσο περίπλοκα που πρέπει να συμβιβαστεί κανείς για να εξετάσει κάποιο συγκεκριμένο τύπο αντασφάλισης, ώστε το πρόβλημα να καταλήξει στον προσδιορισμό πολλών βέλτιστων παραμέτρων στα μοντέλα αντασφάλισης. Για παράδειγμα, οι Hipp και Vogt (2003) χρησιμοποίησαν μεθόδους στοχαστικού ελέγχου για να προσδιορίσουν τη βέλτιστη αντασφάλιση υπέρβασης ζημιών υπό την υπόθεση ότι το πλεόνασμα του ασφαλιστή ακολουθεί μια σύνθετη διαδικασία Poisson.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι η αρχή Π που υιοθετείται για το ασφάλιστρο αντασφάλισης διαδραματίζει κρίσιμο ρόλο στον βέλτιστο σχεδιασμό της αντασφάλισης. Η μορφή της βέλτιστης συνάρτησης της εκχωρούμενης ζημίας μπορεί να είναι δραματικά διαφορετική για διαφορετικούς τύπους αρχών αντασφαλιστικών ασφαλιστρών. Η πολυπλοκότητα της επίλυσης των μοντέλων αντασφάλισης που προκύπτουν μπορεί επίσης να διαφέρει σημαντικά για διαφορετικές αρχές αντασφαλιστικού ασφαλιστρου.

## **1.3 Mathematical Background**

### **1.3.1 Κίνδυνοι και μέτρα κινδύνου ασφαλιστικών εταιρειών**

Ο κίνδυνος είναι ο πυρήνας της δραστηριότητάς μας- η διαχείριση του κινδύνου ήταν η ειδικότητά μας. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, μας απασχολεί η αποτελεσματική χρήση της αντασφάλισης ως εργαλείο διαχείρισης κινδύνου για έναν ασφαλιστή. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι η (συνολική) έκθεση σε κίνδυνο ενός ασφαλιστή συμβολίζεται με την τυχαία μεταβλητή  $X$ . Σε συνδυασμό με την τυχαία μεταβλητή κινδύνου  $X$ , μπορούμε να ορίσουμε κατάλληλα μέτρα μέτρησης και ποσοτικοποίησης της  $X$ . Αυτό οδηγεί στην ανάπτυξη του μέτρου κινδύνου. Συνήθως, ορίζεται απλά ως μια απεικόνιση  $\rho$  από το  $X$ , ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών που αντιπροσωπεύουν ορισμένους κινδύνους, στους πραγματικούς αριθμούς  $\mathbb{R}$ .

Οι αρχές των ασφαλιστρών που χρησιμοποιούνται από τις ασφαλιστικές εταιρείες μπορούν να θεωρηθούν ως ορισμένα είδη μέτρων κινδύνου. Στο 1.3.2 του παρόντος



κεφαλαίου παρατίθενται ορισμένες κοινώς υιοθετούμενες αρχές ασφαλιστρών. Γενικότερα, τα μέτρα κινδύνου χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό των προβλέψεων και των κεφαλαιακών απαιτήσεων ενός χρηματοπιστωτικού ιδρύματος για τη διασφάλιση της φερεγγυότητας. Η αξία σε κίνδυνο (VaR) και η υπό συνθήκη ουρά προσδοκίας (CTE) είναι δύο από τα πιο δημοφιλή μέτρα κινδύνου για το σκοπό αυτό.

### **Ορισμός 1.1**

Το VaR μίας τυχαίας μεταβλητής  $Z$  σε διάστημα εμπιστοσύνης  $1 - \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , ορίζεται επίσης:

$$VaR_{\alpha}(Z) = \inf\{z \in \mathbb{R} : \Pr(Z \leq z) \geq 1 - \alpha\}. \quad (1.3.5)$$

Σημειώστε ότι το ελάχιστο στο (1.2.1) επιτυγχάνεται επειδή το  $\Pr(Z \leq z)$  είναι μη φθίνουσα και δεξιά-συνεχής στο  $z$  ως η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής  $Z$ .

Όταν το  $\Pr\{Z \leq z\}$  είναι συνεχές και αυστηρά αυξανόμενο, το  $z = VaR_{\alpha}(Z)$  είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης  $\Pr(Z \leq z) = 1 - \alpha$ . Επιπλέον, είναι επίσης προφανές ότι το  $VaR_{\alpha}(Z)$  είναι ορθό συνεχές ως συνάρτηση του  $\alpha$ .

### **Λήμμα 1.1**

Το μέτρο κινδύνου VaR έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

Έστω  $Z$  μια τυχαία μεταβλητή πραγματικής αξίας και  $0 < \alpha < 1$ .

(i) Ισχύει ότι

$$VaR_{\alpha}(g(Z)) = g(VaR_{\alpha}(Z))$$

για οποιαδήποτε μη φθίνουσα και αριστερή συνεχή συνάρτηση  $g$  έτσι ώστε  $VaR_{\alpha}(g(Z))$  είναι καλά ορισμένη.

(ii) Εάν επιπλέον το  $Z$  έχει πεπερασμένη προσδοκία, τότε

$$E[Z] = \int_0^1 VaRu(Z) du$$

### **Ορισμός 1.2**

Το CTE μιας τυχαίας μεταβλητής  $Z$  σε επίπεδο εμπιστοσύνης  $1 - \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , ορίζεται επίσης ως ο μέσος όρος της κατανομής της  $\alpha$ -άνω ουράς  $\Psi_\alpha(\xi)$ , η οποία κατασκευάζεται με βάση την  $\alpha$ -ουρά της κατανομής απώλειας του  $Z$  και δίνεται από:

$$\Psi_\alpha(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{για } \xi < VaR_\alpha(Z) \\ \frac{Pr(Z \leq \xi) - (1 - \alpha)}{\alpha}, & \text{για } \xi \geq VaR_\alpha(Z) \end{cases}$$

**Πρόταση 1.1** Έστω  $Z$  μια τυχαία μεταβλητή μη αρνητικής απώλειας και  $0 < \alpha < 1$ .

(i) CTE και VaR of  $Z$  σχετίζονται με:

$$CTE_\alpha(Z) = VaR_\alpha(Z) + \frac{1}{\alpha} \int_{VaR_\alpha(Z)}^{\infty} S_Z(x) dx$$

,όπου  $S_Z$  δηλώνει την συνάρτηση επιβίωσης του  $Z$ , δηλαδή  $S_Z(x) = Pr\{Z > x\}$  για κάθε  $x \in R$ .

(ii) Το CTE μπορεί να οριστεί ισοδύναμα ως ο μέσος όρος του VaR στην  $\alpha$ -ουρά, δηλ.

$$CTE_\alpha(Z) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_q(Z) dq .$$

(iii) Αν  $\beta = \inf\{u : VaR_u(Z) = VaR_\alpha(Z)\}$ , ή ισοδύναμα  $\beta = Pr\{Z > VaR_\alpha(Z)\}$ , τότε

$$CTE_\alpha(Z) = \frac{1}{\alpha} ((\alpha - \beta) VaR_\alpha(Z) + \beta E[Z | Z > VaR_\alpha(Z)])$$

με την προϋπόθεση ότι το  $\{Z > VaR_\alpha(Z)\}$  έχει μη μηδενική πιθανότητα.

(iv) Εάν το  $Z$  είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή, τότε η CTE έχει την ακόλουθη απλή αναπαράσταση:

$$CTE_\alpha(Z) = E[Z | Z > VaR_\alpha(Z)].$$

### **1.2.2 Αρχές Ασφαλίσεων**

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, οι αρχές των ασφαλίσεων μπορούν να θεωρηθούν ως κάποια είδη μέτρων κινδύνου. Αυτές οι αρχές χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό του ασφάλιστρου των ασφαλιστικών συμβολαίων. Υπάρχει πολλή συζήτηση

για τα αξιώματα που πρέπει να ικανοποιεί ένα μέτρο κινδύνου για να είναι η κατάλληλη αρχή του ασφαλιστρού βλέπε, για παράδειγμα, Wang et al. (1997). Ακολουθεί μια λίστα με τις κοινές αρχές ασφαλιστρών.

A1 (Προσδοκώμενη Αρχή) :  $\Pi(Z) = (1 + \theta) E[Z]$  με  $\theta > 0$ ,

A2 (Αρχή της τυπικής απόκλισης) :  $\Pi(Z) = E[Z] + \beta \sqrt{D[Z]}$ , όπου  $\beta > 0$  και  $D[Z]$  δηλώνει την διακύμανση του  $Z$ ,

A3 (Μικτή Αρχή) :  $\Pi(Z) = E[Z] + \beta D[Z]/E[Z]$ , όπου  $\beta > 0$ ,

A4 (Τροποποιημένη αρχή απαλλαγής) :  $\Pi(Z) = E[Z] + \beta \sqrt{D[Z]} + \gamma D[Z]/E[Z]$ , όπου  $\gamma, \beta > 0$ ,

A5 (Αρχή μέσης αξίας) :  $\Pi(Z) = \sqrt{E[Z^2]} = \sqrt{(E[Z])^2 + D[Z]}$ ,

A6 (Αρχή p-μέσης αξίας) :  $\Pi(Z) = (E[[Z^p]])^{\frac{1}{p}}$ , όπου  $p > 1$ ,

A7 (Αρχή ημι-απόκλισης) :  $\Pi(Z) = E[Z] + \beta \{E(Z) - E[Z]\}_+^{1/2}$ , με  $0 < \beta < 1$ ,

A8 (Ολλανδική Αρχή) :  $\Pi(Z) = E[Z] + \beta E(Z - E[Z])_+$ , με  $0 < \beta \leq 1$ ,

A9 (Αρχή του Wang) :  $\Pi(Z) = \int_0^\infty [Pr(Z \geq t)]^p dt$ , με  $0 < p < 1$ ,

A10 (Αρχή της Gini) :  $\Pi(Z) = E[Z] + \beta E|Z - Z'|$ , όπου  $\beta > 0$  και  $Z'$  είναι μία ανεξάρτητη αντιγραφή του  $Z$ ,

A11 (Γενικευμένη εκατοστιαία αρχή) :  $\Pi(Z) = E[Z] + B\{F_Z^{-1}(1-p) - E[Z]\}$  με  $0 < \beta, p < 1$ ,

A12 (Αρχή CTE) :  $\Pi(Z) = \frac{1}{p} \int_{1-p}^1 F_Z^{-1}(x) dx$ , όπου  $0 < p < 1$ ,

A13 (Αρχή Διακύμανσης) :  $\Pi(Z) = E[Z] + \beta D[Z]$  με  $\beta > 0$

A14 (Αρχή της Ημι-διακύμανσης) :  $\Pi(Z) = E[Z] + \beta E(Z - E[Z])_+^2$  με  $\beta > 0$ ,

A15 (Αρχή της τετραγωνικής χρησιμότητας) :  $\Pi(Z) = E[Z] + \gamma \sqrt{\gamma^2 - D[Z]}$ , με  $\gamma > 0$  και  $\gamma^2 \geq D[Z]$ ,

A16 (Αρχή της Συνδιακύμανσης) :  $\Pi(Z) = E[Z] + 2\beta D[Z] - \beta \text{Cov}(Z, Y)$ , όπου  $\beta$  και  $Y$  είναι τυχαίες μεταβλητές.

A17 (Εκθετική Αρχή):  $\Pi(Z) = \frac{1}{\beta} \log E[\exp(\beta Z)]$  με  $\beta > 0$ .

## 1.4 Στόχος και περίγραμμα

### 1.4.1 Στόχος

Ο κύριος στόχος αυτής της διπλωματικής είναι να αναπτυχθεί θεωρητικά ορθή και συνάμα πρακτική λύση στην αναζήτηση βέλτιστων αντασφαλιστικών σχεδίων. Για την επίτευξη αυτού του στόχου, η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελείται σε γενικές γραμμές από δύο κύρια μέρη. Στο πρώτο μέρος, αναπτύσσεται μια σειρά από αντασφαλιστικά μοντέλα και προκύπτουν ρητά οι βέλτιστες αντασφαλιστικές συμβάσεις τους. Στο δεύτερο μέρος, προτείνουμε ένα καινοτόμο μοντέλο αντασφάλισης, το οποίο αναφερόμαστε ως εμπειρικό μοντέλο, καθώς αξιοποιεί ρητά τα εμπειρικά δεδομένα ζημιών του ασφαλιστή. Το μοντέλο αυτό έχει το πλεονέκτημα της πρακτικότητας και της διαισθητικής ελκυστικότητας.

Όσον αφορά την έρευνα που διεξήχθη στο πρώτο μέρος, εστιάζουμε στα μοντέλα αντασφάλισης ελαχιστοποίησης των μέτρων κινδύνου και συζητάμε τις βέλτιστες αντασφαλιστικές συμβάσεις αξιοποιώντας δύο από τα πιο κοινά μέτρα κινδύνου γνωστά ως Value-at-Risk (VaR) και Conditional Tail Expectation (CTE). Ορισμένοι πρόσθετοι σημαντικοί οικονομικοί παράγοντες, όπως ο προϋπολογισμός των αντασφαλιστρών αντασφάλισης, η κερδοφορία του ασφαλιστή θα ενσωματωθούν για την ανάλυση του βέλτιστου σχεδιασμού της αντασφάλισης.

Υπάρχουν διάφοροι λόγοι που αφορούν τους βέλτιστους σχεδιασμούς αντασφάλισης που περιλαμβάνουν μέτρα κινδύνου όπως η VaR και η CTE. Ο ένας είναι εμπνευσμένος από τις εξέχουσες χρήσεις τους στη διαχείριση κινδύνου μεταξύ τραπεζών και ασφαλιστικών εταιρειών για την αξιολόγηση κινδύνου και την κατανομή κεφαλαίου κινδύνου, καθώς και από την ευρεία χρήση τους από τις ρυθμιστικές αρχές για τη ρύθμιση της απαίτησης φερεγγυότητας για τις τράπεζες και τις ασφαλιστικές εταιρείες. Ο άλλος λόγος υποκινείται από τα μοντέλα βέλτιστης αντασφάλισης των Cai και Tan (2007), τα οποία εκμεταλλεύονται ρητά τα μέτρα κινδύνου VaR και CTE. Αξίζει να σημειωθεί ότι ενώ οι

Cai και Tan (2007) υιοθετούν το  $CTE_{\alpha}(Z) = E[Z|Z \geq VaR_{\alpha}(Z)]$  για τον ορισμό του CTE, η παρούσα διπλωματική εργασία θα χρησιμοποιήσει τον επίσημο ορισμό 1.2 για το μέτρο κινδύνου.

Η εμπειρική προσέγγιση έχει ως κίνητρο το γεγονός ότι τα αντασφαλιστικά μοντέλα είναι συχνά προβλήματα βελτιστοποίησης άπειρης διάστασης και, ως εκ τούτου, οι ρητές λύσεις είναι εφικτές μόνο σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις. Η προσέγγιση αυτή προτείνεται για την εξαγωγή πρακτικών λύσεων στα μοντέλα αντασφάλισης, των οποίων οι θεωρητικές λύσεις είναι δύσκολο να ληφθούν. Τα αντασφαλιστικά μοντέλα που διατυπώνονται με τη χρήση της εμπειρικής προσέγγισης είναι προβλήματα βελτιστοποίησης πεπερασμένων διαστάσεων και, ως εκ τούτου, είναι πολύ πιο εύχρηστα. Θα συζητήσουμε την εμπειρική προσέγγιση με περισσότερες λεπτομέρειες στο Κεφάλαιο 5 , όπου θα παρουσιάσουμε επίσης πολλά άλλα πλεονεκτήματα της εμπειρικής προσέγγισης για τον βέλτιστο σχεδιασμό της αντασφάλισης.

## Κεφαλαίο 2

# Μοντέλα Ελαχιστοποίησης VaR και CTE: Quota-Share και Stop-Loss αντασφάλιση

### 2.1 Εισαγωγή

Σε αυτήν την ενότητα, συζητάμε τη βέλτιστη αντασφάλιση quota-share σε σχέση με τις αρχές ασφαλιστρών A1-A17 που αναφέρονται στην Ενότητα 1.3.2. Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας δηλώνεται στα Θεωρήματα 2.1 και 2.2.

Έστω  $X$  η συνολική μη αρνητική τυχαία μεταβλητή απώλειας (ελλείπει αντασφάλιση) στην οποία εφαρμόζεται η αντασφάλιση. Στη συνέχεια, στο πλαίσιο της κατανομής quota-share αντασφάλισης με quota-share συντελεστή  $c \in [0, 1]$ , οι μετασχηματισμένες απώλειες και στον εκχωρητή και στον αντασφαλιστή μπορούν να εκφραστούν αντίστοιχα ως εξής:

$$X_{I_{q_s}} = (1 - c)X, \text{ και } X_{R_{q_s}} = cX, \quad (2.1.1)$$

όπου  $X_{I_{q_s}}$  είναι η ζημία που παρακρατείται από τον εκχωρητή και  $X_{R_{q_s}}$  είναι η ζημία που απορροφάται από το αντασφαλιστή. Με άλλα λόγια, ο εκχωρητής μεταφέρει τον κίνδυνο διατηρώντας  $1 - c$  ποσοστό της συνολικής ζημίας, ενώ ο αντασφαλιστής είναι υπεύθυνος για το υπόλοιπο  $c$  ποσοστό. Σημειώστε ότι  $c = 0$  δηλώνει την ειδική περίπτωση όπου ο ασφαλιστής διατηρεί όλες τις ζημίες ενώ  $c = 1$  αντιπροσωπεύει τον ασφαλιστή που μεταβιβάζει όλες τις ζημίες σε αντασφαλιστή. Κατά συνέπεια, η πρώτη περίπτωση δεν συνεπάγεται αντασφάλιση, ενώ η δεύτερη περίπτωση οδηγεί σε πλήρη αντασφάλιση. προστασία. Στο πλαίσιο της αντασφάλισης stop-loss, οι αντίστοιχες ζημίες για τον εκχωρητή και τον αντασφαλιστή, που συμβολίζονται αντίστοιχα με  $X_{I_{sl}}$  και  $X_{R_{sl}}$ , αναπαρίστανται ως εξής:

$$X_{I_{sl}} = \begin{cases} X, & X \leq d \\ d, & X > d \end{cases} = X \wedge d, \quad (2.1.2)$$

$$X_{Rsl} = \begin{cases} 0, & X \leq d \\ X - d, & X > d \end{cases} = [X - d]_+, \quad (2.1.3)$$

όπου η παράμετρος  $d \geq 0$  είναι γνωστή ως απαλλαγή,  $a \wedge b = \min[a, b]$ , και

$[a]_+ = \max[a, 0]$ . Με τη συνθήκη αυτή, η έκθεση του εκχωρητή σε κίνδυνο περιορίζεται σε

την απαλλαγή, ενώ ο αντασφαλιστής είναι υπεύθυνος για τυχόν ζημίες που υπερβαίνουν την απαλλαγή, εάν τυχόν. Σημειώστε και πάλι ότι όταν  $d = 0$  και  $d \rightarrow \infty$ , αυτές οι δύο ειδικές περιπτώσεις αντιπροσωπεύουν, αντίστοιχα, πλήρη ανασφάλιση και μηδενική ανασφάλιση.

Υπενθυμίζεται ότι ο κύριος στόχος του κεφαλαίου είναι ο προσδιορισμός της βέλτιστης quota-share και της βέλτιστης ανασφάλισης stop-loss υπό διάφορους τύπους αρχές ασφαλιστρών. Αυτό σημαίνει ότι καταλήγει στον προσδιορισμό του βέλτιστου quota-share συντελεστή  $c^* \in [0, 1]$  στην ανασφάλιση με μερίδιο ποσόστωσης και τη βέλτιστη απαλλαγή  $d^* \in [0, \infty)$  στην ανασφάλιση stop-loss. Όσον αφορά τη λύση της βέλτιστης μοντέλου ανασφάλισης που μελετάται στην παρούσα διπλωματική εργασία, κατατάσσουμε τη βέλτιστη ανασφάλιση είτε ως τετριμμένη ή μη τετριμμένη. Με τον όρο τετριμμένη βέλτιστη ανασφάλιση εννοούμε ότι είναι βέλτιστο να έχουμε είτε μηδενική ανασφάλιση είτε πλήρη ανασφάλιση. Με άλλα λόγια, η τετριμμένη βέλτιστη ανασφάλιση συνεπάγεται  $c^*$  είναι είτε 0 είτε 1 στη συνθήκη quota-share, ενώ είτε  $d^* = 0$

Αρχές Ασφαλίσεων	Quota Share		Stop Loss	
	VaR	CTE	VaR	CTE
A1) Προσδοκώμενη Αρχή	T	T	NT	NT*
A2) Αρχή της τυπικής απόκλισης	T	T	-	-
A3) Μικτή Αρχή	T	T	-	-
A4) Τροποποιημένη αρχή απαλλαγής	T	T	-	-
A5) Αρχή μέσης αξίας	T	T	T	T
A6) Αρχή p-μέσης αξίας	T	T	T	T
A7) Αρχή ημι-απόκλισης	T	T	T	-
A8) Ολλανδική Αρχή	T	T	NT	NT*
A9) Αρχή του Wang	T	T	T	T
A10) Αρχή της Gini	T	T	-	-
A11) Γενικευμένη εκατοστιαία αρχή	T	T	T	T
A12) Αρχή CTE	T	T	T	T
A13) Αρχή Διακύμανσης	NT	NT	NT	NT*
A14) Αρχή της Ημι-διακύμανσης	NT	NT	NT	NT*
A15) Αρχή της τετραγωνικής χρησιμότητας	NT	NT	NT	NT*
A16) Αρχή της Συνδιακύμανσης	NT	NT	-	-
A17) Εκθετική Αρχή	NT	NT	T	-

Πίνακας 2.1: Μη αποκλειστικότητα της βέλτιστης αντασφάλισης σύμφωνα με το κριτήριο VaR/CTE.

ή  $d^* \rightarrow \infty$  στη συνθήκη stop-loss. Από την άλλη πλευρά, ο βέλτιστος quota-share συντελεστής στην αντασφάλιση με μερίδιο ποσόστωσης είναι μη τετριμμένη εάν βρίσκεται στο ανοικτό διάστημα  $(0, 1)$  και η βέλτιστη παρακράτηση στην αντασφάλιση stop-loss είναι μη τετριμμένη εάν είναι πραγματικός αριθμός στο ανοικτό διάστημα  $(0, \infty)$ .

Τα κύρια αποτελέσματα του κεφαλαίου έγκεινται στην τεκμηρίωση των θεωρημάτων 2.1, 2.2, 2.3 και 2.4 για τη μη τετριμμένη (και τετριμμένη) βέλτιστη κατανομή ποσοστάσεων και τη βέλτιστη αντασφάλιση stop-loss υπό τη γενική αρχή των ασφαλίσεων. Στη συνέχεια, με την προσαρμογή σε ειδικές συνθήκες αρχή των ασφαλίσεων, τα θεωρήματα αυτά μας επιτρέπουν να αναλύσουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια τις συνθήκες για το βέλτιστο quota-share συντελεστή  $c^*$  και τη βέλτιστη απαλλαγή  $d^*$ . Ο πίνακας 3.1 παρέχει μια πρόγευση των συμπερασμάτων μας. Στον πίνακα, η αρχή ασφαλίσεων και το κριτήριο που προσδιορίζεται με ένα "T" συνεπάγεται ότι η βέλτιστη λύση είναι τετριμμένη. Ομοίως, εκείνα με ένα "NT" σημαίνουν ότι οι κατάλληλες και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη μη τετριμμένης βέλτιστης αντασφάλισης. Από την άλλη πλευρά, το "NT\*" υποδηλώνει ότι



μόνο οι συντελεστές προσδιορίζονται για την ύπαρξη της μη τετριμμένης βέλτιστης ανασφάλισης. Σημειώστε επίσης ότι λόγω της πολυπλοκότητας η βέλτιστη ανασφάλιση υπάρχει ή όχι για μια γενική κατανομή ζημιών. Αυτές οι περιπτώσεις υποδεικνύονται με τον συμβολισμό "-". Για τις περιπτώσεις αυτές, πρόσθετες αριθμητικές μέθοδοι πρέπει να χρησιμοποιηθούν για την περαιτέρω διερεύνηση της βελτιστότητάς τους. Τα συμπεράσματά μας υπογραμμίζουν επίσης τη σημασία της παραδοχής της αρχής των ανασφαλιστρών. Ανάλογα με τις υιοθετούμενες αρχές ανασφαλιστικών ασφαλιστρών, υπάρχουν περιπτώσεις για τις οποίες η βέλτιστη ανασφάλιση είναι μη τετριμμένη και υπάρχουν άλλες περιπτώσεις για τις οποίες η βέλτιστη ανασφάλιση είναι τετριμμένη.

Το υπόλοιπο κεφάλαιο είναι οργανωμένο ως εξής. Στην ενότητα 2.2 παρουσιάζεται ο συμβολισμός και παρέχει ορισμένα προκαταρκτικά αποτελέσματα. Οι ενότητες 2.3 και 2.4 συζητούν, αντίστοιχα, τη βελτιστοποίηση της ανασφαλιστικής σύμβασης με quota-share και τη βέλτιστη ανασφαλιστική συνθήκη διακοπής ζημιών. Στην ενότητα 2.5 παρουσιάζονται ορισμένα αριθμητικά παραδείγματα για την απεικόνιση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν στις προηγούμενες ενότητες.

## 2.2 Εισαγωγικά

Σε όλο το παρόν κεφάλαιο, χρησιμοποιούμε αποκλειστικά το  $X$  για να υποδηλώσουμε την τυχαία ζημία στην οποία εφαρμόζεται η ανασφαλιστική σύμβαση. Υποθέτουμε επίσης ότι η  $X$  έχει συνεχή κατανομή ένα προς ένα στο  $(0, \infty)$ . Χρησιμοποιούμε  $X_I$  και  $X_R$  για να υποδηλώσουμε, αντίστοιχα, τις τυχαίες μεταβλητές της παρακρατούμενης ζημίας και της εκχωρούμενης ζημίας υπό μια γενική συμφωνία ανασφάλισης. Σημειώστε ότι  $X = X_I + X_R$ , έτσι ώστε τα  $X_I$  και  $X_R$  να αποτελούν ένα τμήμα του  $X$ . Όταν χρειάζεται να διακρίνουμε μεταξύ μιας ανασφάλισης με quota-share και μιας ανασφάλισης stop-loss, απλά τον συμβολισμό με "sl" και "qs", όπως κάνουμε στα (2.1.1), (2.1.2) και (2.1.3).

Υπενθυμίζεται ότι, με την παρουσία ενός εκ των ανασφαλίσεων quota-share και stop-loss, ο συνολικός κίνδυνος του ασφαλιστή είναι το άθροισμα της διατηρούμενης ζημίας  $X_I$  και

το ποσό του ανασφαλιστικού ασφαλιστρου  $P(X_R)$ , δηλ.,

$$X_T = X_I + \Pi(X_R) \quad (2.2.1)$$

Έτσι, από την ιδιότητα της αμετάβλητης ερμηνείας προκύπτει τόσο για το VaR όσο και για το CTE ότι:

$$VaR_a(X_T) = VaR_a(X_I) + \Pi(X_R) \quad (2.2.2)$$

$$CTE_a(X_T) = CTE_a(X_I) + \Pi(X_R) \quad (2.2.3)$$

Με βάση τη σχέση VaR και CTE στο (1.3.7), η CTE της διατηρούμενης ζημίας του ασφαλιστή μπορεί να αναλυθεί περαιτέρω ως εξής:

$$CTE_a(X_I) = VaR_a(X_I) + \frac{1}{a} \int_{VaR_a(X_I)}^{\infty} S_{X_I}(x) dx \quad (2.2.4)$$

όπου αν χρησιμοποιήσουμε τη (2.2.3) οδηγεί στην παρακάτω σχέση:

$$CTE_a(X_T) = VaR_a(X_I) + \frac{1}{a} \int_{VaR_a(X_I)}^{\infty} S_{X_I}(x) dx + \Pi(X_R) \quad (2.2.5)$$

Μέχρι στιγμής έχουμε καθιερώσει ορισμένες γενικές σχέσεις για τα μέτρα κινδύνου που σχετίζονται με την τυχαία μεταβλητή της διατηρούμενης απώλειας και την τυχαία μεταβλητή του συνολικού κόστους της ασφάλισης των κινδύνων υπό το πρίσμα της αντασφάλισης. Εξετάζουμε τώρα τις σχέσεις αυτές με περισσότερη λεπτομέρεια εξετάζοντας αυτές τις δύο συγκεκριμένες αντασφαλιστικές συμβάσεις: την αντασφάλιση Quota-Share και την αντασφάλιση stop-loss.

Για την αντασφάλιση Quota-Share, η συνάρτηση επιβίωσης της διατηρούμενης ζημίας  $X_{I_{qs}}$  δίνεται από τη σχέση:

$$S_{X_{I_{qs}}}(x) = \Pr((1-c)X > x) = \begin{cases} S_x\left(\frac{x}{1-c}\right), & 0 \leq c < 1 \\ 0, & c = 1 \end{cases} \quad (2.2.6)$$

για  $x \geq 0$ , και το VaR της σε επίπεδο εμπιστοσύνης  $1 - \alpha$ , που συμβολίζεται με  $VaR_a(X_{I_{qs}}; c)$  δίνεται από τη σχέση:

$$VaR_a(X_{I_{qs}}; c) = (1-c)S_x^{-1}(\alpha) \quad (2.2.7)$$

Η παραπάνω εξίσωση και μαζί με την (2.2.2) μας δίνουν μια έκφραση για την  $VaR_a(X_{T_{qs}}; c)$  η οποία αντιπροσωπεύει το VaR του συνολικού κόστους στο πλαίσιο της Quota-Share. Το διατυπώνουμε επίσημα στην ακόλουθη πρόταση:

**Πρόταση 2.1:** Για  $0 \leq c \leq 1$  και  $0 < a < S_x(0)$ ,

$$VaR_a(X_{T_{qs}}; c) = (1 - c)S_x^{-1}(a) + \Pi(cX) \quad (2.2.8)$$

Ομοίως, από την (2.2.5) προκύπτει ότι η αντίστοιχη CTE του συνολικού κόστους,  $CTE_a(X_{T_{qs}}; c)$ , στο πλαίσιο της Quota-Share μπορεί να αναπαρασταθεί με την ακόλουθη πρόταση:

**Πρόταση 2.2:** Για  $0 \leq c \leq 1$  και  $0 < a < S_x(0)$ ,

$$CTE_a(X_{T_{qs}}; c) = (1 - c)S_x^{-1}(a) + \frac{1-c}{a} \int_{S_x^{-1}(a)}^{\infty} s_X(x) dx + \Pi(cX). \quad (2.2.9)$$

Σημειώνεται ότι στην ανωτέρω πρόταση που σχετίζεται με τα μέτρα κινδύνου, η Quota-Share συντελεστής  $c$  είναι ένα από τα επιχειρήματα για να τονιστεί το γεγονός ότι στο πλαίσιο της αντασφάλισης με Quota-Share, τα εν λόγω μέτρα κινδύνου εξαρτώνται από το  $c$ .

Θεωρούμε τη Stop-Loss αντασφάλιση. Σε αυτή την περίπτωση, η συνάρτηση επιβίωσης της παρακρατούμενης ζημίας  $X_{I_{sl}}$  δίνεται από:

$$S_{X_{I_{sl}}}(x) = \begin{cases} S_X(x), & 0 \leq x < d, \\ 0, & x \geq d, \end{cases} \quad (2.2.10)$$

Συνεπώς το VaR μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$VaR_a(X_{I_{sl}}) = VaR_a(X_{I_{sl}}; d) = \begin{cases} d, & 0 \leq d \leq S_x^{-1}(a) \\ S_x^{-1}(a), & d > S_x^{-1}(a) \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Τότε, σε συνδυασμό με την (2.2.2), λαμβάνουμε μια έκφραση για το  $VaR_a(X_{T_{sl}}) \equiv VaR_a(X_{T_{sl}}; d)$ , όπως φαίνεται στην ακόλουθη πρόταση:

**Πρόταση 2.3:** Για κάθε  $d \geq 0$  και  $0 < a < S_x(0)$ ,

$$VaR_a(X_{T_{sl}}; d) = \begin{cases} d + \Pi([X - d]_+), & 0 \leq d \leq S_x^{-1}(a) \\ S_x^{-1}(a) + \Pi([X - d]_+), & d > S_x^{-1}(a) \end{cases} \quad (2.2.12)$$

Type equation here.

Επιπλέον, από τη σχέση (2.2.10), (2.2.11) και από τη συνθήκη ότι  $0 < VaR_a(X_{I_{sl}}; d) \leq d$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{VaR_a(X_{I_{sl}}; d)}^{\infty} S_{I_{sl}}(x) dx &= \int_{VaR_a(X_{I_{sl}}; d)}^d S_X(x) dx \\ &= \begin{cases} 0, & 0 \leq d \leq S_X^{-1}(a) \\ \int_{S_X^{-1}(a)}^d S_X(x) dx, & d > S_X^{-1}(a) \end{cases} \quad (2.2.13) \end{aligned}$$

Εξ' ορισμού έχουμε:

$$\begin{aligned} G(d) &= S_X^{-1}(a) + \frac{1}{a} \int_{S_X^{-1}(a)}^d S_X(x) dx + \Pi([X - \delta]_+) \quad (2.2.14) \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.2.5), (2.2.11) και (2.2.13), θα αποκτήσουμε την ακόλουθη έκφραση για  $CTE_a(X_{T_{sl}}; d) = \begin{cases} d + \Pi([X - d]_+), & 0 \leq d \leq S_X^{-1}(a) \\ G(d), & d > S_X^{-1}(a) \end{cases} \quad (2.2.15)$

Επανερχόμαστε τώρα στην (2.2.1), η οποία αναδεικνύει το δίλημμα που αντιμετωπίζει ο ασφαλιστής. Σημειώστε ότι, κατά προσέγγιση, η αρχή του ασφαλιστρού  $\Pi(X_R)$  αναμένεται να είναι αύξουσα συνάρτηση της  $X_R$ . Αυτό σημαίνει ότι όσο μικρότερος είναι ο κίνδυνος που εκχωρείται σε έναν αντασφαλιστή, τόσο λιγότερο δαπανηρό είναι το ασφάλιστρο αντασφάλισης. Από την άλλη πλευρά, μία μικρή παρακρατούμενη έκθεση σε κίνδυνο μπορεί να επιτευχθεί εις βάρος υψηλότερου αντασφαλιστικού ασφαλιστρού. Κατά συνέπεια, υπάρχει ένας συμβιβασμός μεταξύ του πόσος κίνδυνος πρέπει να διατηρηθεί και του πώς ο κίνδυνος αυτός πρέπει να εκχωρηθεί. Το πρόβλημα της βέλτιστης αντασφάλισης αντιμετωπίζει ουσιαστικά το βέλτιστες καταταμήσεις  $X_I$  και  $X_R$ . Όταν η αντασφαλιστική σύμβαση περιορίζεται είτε στην Quota-Share ή στην stop-loss, τότε το πρόβλημα εξαντλείται στον προσδιορισμό του βέλτιστου συντελεστή Quota-Share  $c^*$  στην πρώτη περίπτωση ή της βέλτιστης απαλλαγής  $d^*$  στη δεύτερη περίπτωση.

Πιο συγκεκριμένα, τα βέλτιστα μοντέλα αντασφάλισης με quota-share μπορούν να διατυπωθούν ως αναζήτηση των βέλτιστων συντελεστών  $c^*$  της quota-share

που αποτελούν τις λύσεις των ακόλουθων προβλημάτων βελτιστοποίησης, ανάλογα με το υιοθετούμενο μέτρο κινδύνου:

$$\text{βελτιστοποίηση-VaR: } VaR_a(X_{T_{qs}}; c^*) = \min_{c \in [0,1]} \{VaR_a(X_{T_{qs}}; c)\}, \quad (2.2.16)$$

$$\text{βελτιστοποίηση-CTE: } CTE_a(X_{T_{qs}}; c^*) = \min_{c \in [0,1]} \{CTE_a(X_{T_{qs}}; c)\}. \quad (2.2.17)$$

Αντίστοιχα, σύμφωνα με τα βέλτιστα μοντέλα αντασφάλισης stop-loss, οι βέλτιστες κρατήσεις  $d^*$  είναι οι λύσεις των ακόλουθων προβλημάτων βελτιστοποίησης:

$$\text{βελτιστοποίηση-VaR: } VaR_a(X_{T_{sl}}; d^*) = \min_{d \in [0, \infty)} \{VaR_a(X_{T_{sl}}; d)\}, \quad (2.2.18)$$

$$\text{βελτιστοποίηση-CTE: } CTE_a(X_{T_{sl}}; d^*) = \min_{d \in [0, \infty)} \{CTE_a(X_{T_{sl}}; d)\}. \quad (2.2.19)$$

Συνοψίζοντας αυτή την παράγραφο εισάγουμε τη νέα συνάρτηση  $\varphi_a$  και τον παράγοντα  $u_a$ :

$$\varphi_a(d) = d + \frac{1}{a} \int_d^\infty S_X(x) dx, \quad u_a = S_X^{-1}(a) + \frac{1}{a} \int_{S_X^{-1}(a)}^\infty S_X(x) dx$$

Όπως θα ανακαλύψουμε σύντομα, αυτές οι δύο λειτουργίες παίζουν κρίσιμο ρόλο στην εύρεση των λύσεων για τα βέλτιστα αντασφαλιστικά μας μοντέλα. Επιπλέον, είναι επίσης χρήσιμο να επισημάνουμε τις ακόλουθες δύο σχέσεις:

- $u_a = \varphi_a(S_X^{-1}(a))$  και
- $u_a = \lim_{d \rightarrow \infty} G(d)$

Γνωρίζουμε ότι  $\lim_{d \rightarrow \infty} ([X - d]_+) = 0$ , που είναι άμεση συνέπεια των ορισμών τους.

Σημειώστε ότι η συνάρτηση  $G(d)$  ορίζεται στο (2.2.14).

## 2.3 Βελτιστοποίηση Quota-share

### Θεώρημα 2.1

Θεωρούμε VaR-βελτιστοποίηση

(α) Ας υποθέσουμε ότι το ασφάλιστρο αντασφάλισης  $\Pi(\cdot)$  ικανοποιεί το  $\Pi(0) = 0$ , και το ιδιότητα θετικής ομοιογένειας, δηλαδή  $\Pi(cX) = c\Pi(X)$  για σταθερά  $c > 0$ . Τότε το βέλτιστη quota-share είναι ασήμαντη, και επιπλέον, ο βέλτιστος συντελεστής μεριδίου ποσόστωσης εξαρτάται από το σχετικό μέγεθος μεταξύ  $\Pi(X)$  και  $S_x^{-1}(a)$  όπως αναφέρεται παρακάτω:

$$c^* = \begin{cases} 0, & \Pi(X) > S_x^{-1}(a) \\ \text{οποιαδήποτε σε } [0,1], & \Pi(X) = S_x^{-1}(a) \\ 1, & \Pi(X) < S_x^{-1}(a) \end{cases} \quad (2.3.1)$$

(β) Εάν το  $\Pi(cX)$  είναι αυστηρά κυρτό στο  $c$  για  $0 \leq c \leq 1$ , τότε η μη τετριμμένη βέλτιστη quota-share υπάρχει εάν και μόνο εάν υπάρχει σταθερά  $c^* \in (0, 1)$  τέτοια που

$$\Pi'_c = (c^*X) - S_x^{-1}(a) = 0, \quad (2.3.2)$$

όπου  $\Pi'_x(\cdot)$  δηλώνει την παράγωγο του  $\Pi(cX)$  ως προς το  $c$ . Επιπλέον, το  $c^*$  που ικανοποιεί το (2.2.2) είναι ο βέλτιστος συντελεστής μεριδίου ποσόστωσης.

### Θεώρημα 2.2

Θεωρούμε CTE-βελτιστοποίηση

(α) Ας υποθέσουμε ότι το ασφάλιστρο αντασφάλισης  $\Pi(\cdot)$  ικανοποιεί το  $\Pi(0) = 0$ , και τη θετική ομοιογένεια, δηλ.  $\Pi(cX) = c\Pi(X)$  για σταθερά  $c > 0$ . Τότε η βέλτιστη quota-share είναι ασήμαντη, και επιπλέον, ο βέλτιστος συντελεστής ποσόστωσης-μεριδίου προσδιορίζεται ανάλογα με τις ποσότητες  $\Pi(X)$  και  $u_a$  με τον ακόλουθο τρόπο:

$$c^* = \begin{cases} 0, & \Pi(X) > u_a \\ \text{οποιοσδήποτε αριθμός στο } [0,1], & \Pi(X) = u_a \\ 1, & \Pi(X) < u_a \end{cases} \quad (2.3.3)$$

(β) Αν  $\Pi(cX)$  είναι αυστηρά κυρτό στο  $c$  για  $0 \leq c \leq 1$ , τότε το βέλτιστο μερίδιο ποσόστωσης

αντασφάλιση υπάρχει εάν και μόνο εάν υπάρχει μια σταθερή  $c^* \in (0, 1)$  τέτοια ώστε

$$\Pi'_c(c^*X) - u_a = 0, \quad (2.3.4)$$

και σε αυτήν την περίπτωση, το  $c^*$  που προσδιορίζεται από το (2.3.4) είναι ο βέλτιστος συντελεστής μεριδίου ποσόστωσης.

Τα παραπάνω δύο θεωρήματα παρέχουν την προϋπόθεση βελτιστοποίησης για την ύπαρξη (ή μη) της μη τετριμμένης βέλτιστης quota-share αντασφάλισης βάσει της γενικής αρχής των ασφαλίσεων. Με σκοπό την ολοκλήρωση των αποτελεσμάτων μας θα βασιστούμε στις αρχές των ασφαλίσεων. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στις ακόλουθες ακολουθίες τριών προτάσεων. Η πρόταση 2.5 αναφέρει ότι η βέλτιστη αντασφάλιση ποσοστώσεων-μεριδίων είναι ασήμαντη για τις αρχές ασφαλίσεων A1-A12 ενώ οι προτάσεις 2.6 και 2.7 μελετούν τις υπόλοιπες αρχές ασφαλίσεων για τη βελτιστοποίηση VaR και τη βελτιστοποίηση CTE αντίστοιχα. Η απόδειξη της πρώτης πρότασης δεν είναι σημαντική και προκύπτει από το μέρος (α) των δύο παραπάνω θεωρημάτων (θεωρήματα

2.1 και 2.2) και από το γεγονός ότι όλες οι αρχές ασφαλιστρών A1-A12 ικανοποιούν την ιδιότητα  $\Pi(0) = 0$  και θετική ομοιογένεια.

### Πρόταση 2.5

Τόσο για τη βελτιστοποίηση VaR όσο και για τη βελτιστοποίηση CTE, η βέλτιστη αντασφάλιση quota-share είναι ασήμαντη για τις αρχές ασφαλιστρών A1-A12 και ο βέλτιστος συντελεστής μεριδίου ποσόστωσης καθορίζεται σύμφωνα με το (2.2 .1) για το κριτήριο VaR και (2.2.3) για το κριτήριο CTE.

### Πρόταση 2.6

Θεωρούμε την βελτιστοποίηση του VaR.

(α) A13(αρχή της διακύμανσης): η βέλτιστη quota-share αντασφάλιση είναι μη τετριμμένη εάν και μόνο αν

$$E[X] < S_x^{-1}(\alpha) < E[X] + 2\beta D[X] \quad (2.3.5)$$

Στο οποίο ο βέλτιστος συντελεστής quota-share δίνεται από τον τύπο

$$c^* = \frac{S_x^{-1}(\alpha) - E[X]}{2\beta D[X]} \quad (2.3.6)$$

(β) A14: η βέλτιστη quota-share αντασφάλιση είναι μη τετριμμένη αν και μόνο αν

$$E[X] < S_x^{-1}(\alpha) < E[X] + 2\beta [E[X - EX]_+^2], \quad (2.3.7)$$

Στην περίπτωση αυτή, ο βέλτιστος συντελεστής quota-share δίνεται από

$$c^* = \frac{S_x^{-1}(\alpha) - E[X]}{2\beta E[X - EX]_+^2} \quad (2.3.8)$$

(γ) A15: η βέλτιστη quota-share αντασφάλιση είναι μη τετριμμένη αν και μόνο αν

$$S_x^{-1}(\alpha) > E[X], \quad \text{και} \quad \frac{(S_x^{-1}(\alpha) - E[X])^\gamma}{\sqrt{D[X]\{D[X] + (S_x^{-1}(\alpha) - E[X])^2\}}} < 1, \quad (2.3.9)$$

Στην περίπτωση αυτή, ο βέλτιστος συντελεστής quota-share δίνεται από



$$c^* = \frac{(S_x^{-1}(\alpha) - E[X])\gamma}{\sqrt{D[X]\{D[X] + (S_x^{-1}(\alpha) - E[X])^2\}}} \quad (2.3.10)$$

(δ)A16: Έστω Y μία τυχαία μεταβλητή, τότε η βέλτιστη quota-share αντασφάλιση υπάρχει αν και μόνο αν

$$E[X] > \beta \text{Cov}(X, Y), \quad (2.3.11)$$

Και

$$E[X] - \beta \text{Cov}(X, Y) < S_x^{-1}(\alpha) < 4\beta D[X] + E[X] - \beta \text{Cov}(X, Y), \quad (2.3.12)$$

Στην περίπτωση αυτή, ο βέλτιστος συντελεστής quota-share δίνεται από :

$$c^* = \frac{S_x^{-1}(\alpha) - E[X] + \beta \text{Cov}(X, Y)}{4\beta D[X]} \quad (2.3.13)$$

(ε)A17: η βέλτιστη quota-share αντασφάλιση είναι μη τετριμμένη αν και μόνο αν υπάρχει μία σταθερά  $c^* \in (0, 1)$  τέτοια ώστε

$$E[X \exp(c^*, \beta X)] = S_x^{-1}(\alpha) E[\exp(c^* \beta X)], \quad (2.3.14)$$

Στην περίπτωση αυτή, ο βέλτιστος συντελεστής quota-share  $c^*$  καθορίζεται από (2.3.14).

### Πρόταση 2.3

Θεωρούμε τη CTE βελτιστοποίηση

(α)A13 : η βέλτιστη quota-share αντασφάλιση είναι μη τετριμμένη αν και μόνο αν

$$E[X] < u(\alpha) < E[X] + 2\beta D[X], \quad (2.3.15)$$

Στην περίπτωση αυτή, ο βέλτιστος συντελεστής quota-share δίνεται από

$$c^* = \frac{u(\alpha) - E[X]}{2\beta D[X]}. \quad (2.3.16)$$

(β)A14: η βέλτιστη quota-share αντασφάλιση είναι μη τετριμμένη αν και μόνο αν

$$E[X] < u(\alpha) < E[X] + 2\beta E[X - EX]_+^2, \quad (2.3.17)$$

Στην περίπτωση αυτή, ο βέλτιστος συντελεστής quota-share δίνεται από τον τύπο:

$$c^* = \frac{u(\alpha) - E[X]}{2\beta E[X - EX]_+^2}. \quad (2.3.18)$$

(γ)A15 : η βέλτιστη quota-share αντασφάλιση είναι μη τετριμμένη αν και μόνο αν

$$u(\alpha) > E[X], \text{ και } \frac{(u(\alpha) - E[X])\gamma}{\sqrt{D[X]\{D[X] + u(\alpha) - E[X]\}^2}}. \quad (2.3.19)$$

στην περίπτωση αυτή, ο βέλτιστος συντελεστής quota-share δίνεται από τον τύπο:

$$c^* = \frac{(u(\alpha) - E[X])\gamma}{\sqrt{D[X]\{D[X] + u(\alpha) - E[X]\}^2}}. \quad (2.3.20)$$

(δ)A16: Έστω μια τυχαία μεταβλητή  $Y$ , η βέλτιστη quota-share αντασφάλιση είναι μη τετριμμένη εάν και μόνο εάν

$$E[X] > \beta \text{Cov}(X, Y), \quad (2.3.21)$$

και

$$E[X] - \beta \text{Cov}(X, Y) < u(\alpha) < 4\beta D[X] + E[X] - \beta \text{Cov}(X, Y), \quad (2.3.22)$$

Στην περίπτωση αυτή, ο βέλτιστος συντελεστής quota-share δίνεται από τον τύπο:

$$c^* = \frac{u(\alpha) - E[X] + \beta \text{Cov}(X, Y)}{4\beta D[X]}. \quad (2.3.23)$$

(ε)A17: η βέλτιστη quota-share αντασφάλιση quota-share είναι μη τετριμμένη εάν και μόνο αν

υπάρχει μια σταθερά  $c^* \in (0, 1)$  τέτοια ώστε

$$E[X \exp(c^* \beta X)] = u(\alpha) E[\exp(c^* \beta X)]. \quad (2.3.24)$$

στην περίπτωση αυτή, ο βέλτιστος συντελεστής quota-share  $c^*$  καθορίζεται από (2.3.24).

## 2.4 Βελτιστοποίηση stop-loss

Συζητάμε τώρα τα προβλήματα βελτιστοποίησης (2.3.18) και (2.3.19) για τη σύμβαση αντασφάλισης stop-loss. Όπως θα δούμε, εάν η αντασφάλιση είναι stop-loss, είναι μαθηματικά πιο δύσκολο να αναλυθεί η βελτιστοποίησή της, ιδίως για τη βελτιστοποίηση CTE με αρχές ασφαλιστρών A2-A4, A10 και A16. Το υποκεφάλαιο 2.4.1 αφιερώνεται στη βελτιστοποίηση VaR (2.2.18), ενώ το υποκεφάλαιο 2.4.2 επικεντρώνεται στη βελτιστοποίηση CTE (2.2.19).

### 2.4.1 VaR βελτιστοποίηση για stop-loss αντασφάλιση

Παρουσιάζουμε πρώτα το ακόλουθο θεώρημα, σχετικά με τη γενική αρχή του αντασφαλιστικού ασφαλιστρου για τη βέλτιστη αντασφάλιση stop-loss και το κριτήριο VaR.

#### Θεώρημα 2.3

Θεωρούμε VaR-βελτιστοποίηση. Υποθέτουμε  $\Pi(\cdot)$  είναι μια αρχή ασφαλιστρου τέτοια ώστε η  $\Pi([X - d]_+)$  να είναι φθίνουσα στο  $d$ .

(α) Η βέλτιστη αντασφάλιση stop-loss είναι τετριμμένη εάν ικανοποιείται μία από τις ακόλουθες συνθήκες:

- (i)  $d + \Pi([X - d]_+)$  είναι μία αύξουσα συνάρτηση του  $d$  στο  $[0, S_x^{-1}\{-1\}(\alpha)]$ , ή  
(ii) υπάρχει μία σταθερά  $d_0$  ( $0, S_x^{-1}\{-1\}(\alpha)$ ) τέτοια ώστε  $d + \Pi([X - d]_+)$  είναι αύξουσα στο  $d$  στο  $[0, d_0]$ , ενώ είναι φθίνουσα στο  $[d_0, S_x^{-1}(\alpha)]$ .

Επιπλέον, σε κάθε ένα από τα παραπάνω (i) και (ii), η τετριμμένη βέλτιστη διατήρηση εξαρτάται από το σχετικό μέγεθος μεταξύ  $\Pi(X)$  και  $S^{-1}(\alpha)$ , όπως υποδεικνύεται παρακάτω:

$$d^* = \begin{cases} 0, & \text{αν } \Pi(X) < S_x^{-1}(\alpha), \\ 0, +\infty, & \text{αν } \Pi(X) = S_x^{-1}(\alpha), \\ +\infty, & \text{αν } \Pi(X) > S_x^{-1}(\alpha). \end{cases} \quad (2.4.25)$$

(β) Εάν η αρχή των ασφαλιστρών  $\Pi(\cdot)$  ικανοποιεί τη συνθήκη  $\lim_{d \rightarrow \infty} \Pi([X - d]_+) = 0$  και υπάρχει θετική σταθερά  $d_0$  τέτοια ώστε  $d + \Pi([X - d]_+)$  είναι φθίνουσα στο  $d$  στο  $[0, d_0]$ , ενώ είναι φθίνουσα στο  $[d_0, \infty]$ , τότε η βέλτιστη ανασφάλιση stop-loss είναι μη τετριμμένη εάν και μόνο εάν ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη:

$$S_x^{-1}(\alpha) > d_0 + \Pi([X - d_0]_+). \quad (2.4.26)$$

Επιπλέον, όταν η βέλτιστη ανασφάλιση stop-loss δεν είναι τετριμμένη,  $d_0$  είναι η βέλτιστη παρακράτηση με την αντίστοιχη ελάχιστη τιμή του  $VaR_a(X_{T_{sl}}; d)$

$$\min_{d \geq 0} VaR_a(X_{T_{sl}}; d) = d_0 + \Pi([X - d_0]_+) \quad (2.4.27)$$

## Πρόταση 2.8

Θεωρούμε VaR βελτιστοποίηση. Η βέλτιστη stop-loss ανασφάλιση είναι τετριμμένη και η τετριμμένη βέλτιστη παρακράτηση  $d^*$  προσδιορίζεται όπως στο (2.2.25) για τις ακόλουθες αρχές ασφαλιστρών:

- A5 (Αρχή της Μέσης Τιμής):  $\Pi(X) = \sqrt{E[X^2]} = \sqrt{E^2[X] + D[X]}$ ,
- A6 (Αρχή της p-Μέσης Τιμής):  $\Pi(X) = (E[[X]^p])^{1/p}$ , όπου  $p > 1$ ,
- A7 (Αρχή της ημι-αποκλίσεως):  $\Pi(X) = E[X] + \beta [E[X - EX]_+]^{1/2}$ , όπου  $0 < \beta < 1$ ,

- d. A8 (Αρχή του Wang):  $\Pi(X) = \int_0^\infty [Pr(X \geq t)]^p dt$ , όπου  $0 < p < 1$ ,
- e. A11 (Γενικευμένη Αρχή του ποσοστιαίου στοιχείου):  $\Pi(X) = E[X] + \beta (F_x^{-1}(1 - p) - E[X])$ , όπου  $0 \leq \beta \leq 1$
- f. A12 (Αρχή CTE):  $\Pi(X) = (1/p) \int_{1-p}^1 F_x^{-1}(x) dx$ , όπου  $0 < p < 1$ ,
- g. A17 (Εκθετική Αρχή):  $\Pi(X) = \frac{1}{\beta} \log E(\beta X)$ , με  $\beta > 0$

Ενώ η παραπάνω πρόταση καταδεικνύει τις αρχές των ασφαλιστρών για τις οποίες η βέλτιστη αντασφάλιση stop-loss είναι τετριμμένη, η ακόλουθη πρόταση δείχνει ότι για ορισμένες άλλες αρχές ασφαλιστρών, η βέλτιστη αντασφάλιση διακοπής ζημιών βάσει VaR δεν είναι τετριμμένη υπό ορισμένες ήπιες συνθήκες.

**Πρόταση 2.9** Θεωρούμε την VaR βελτιστοποίηση.

- a) A1 : η βέλτιστη stop-loss αντασφάλιση είναι μη τετριμμένη αν και μόνο αν

$$S_x^{-1}(a) \geq d_0 + (1 + \theta) \int_{d_0}^\infty S_x(x) dx, \quad (2.4.28)$$

,όπου  $d_0 = S_x^{-1}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)$ , επιπλέον, σε αυτήν την περίπτωση  $d_0$  είναι η μοναδική βέλτιστη απαλλαγή.

- b) A8 (Ολλανδική αρχή): εάν υπάρχει μια θετική σταθερά  $d_0$  που ικανοποιεί την εξίσωση  $\beta S_x(d_0 + E[X - d_0]_+) = 1$ , τότε η βέλτιστη αντασφάλιση stop-loss είναι μη τετριμμένη εάν και μόνο εάν

$$S_x^{-1}(a) \geq d_0 + E[X - d_0]_+ + \beta E[[X - d_0]_+ - E[X - d_0]_+]_+, \quad (2.4.29)$$

,όπου  $d_0$  είναι η μοναδική βέλτιστη αποζημίωση.

- c) A13 (Αρχή της Διακύμανσης): υπάρχει μια θετική σταθερά  $d_0$  που ικανοποιεί την εξίσωση  $2\beta E[X - d_0]_+ = 1$ , τότε η βέλτιστη αντασφάλιση stop-loss είναι μη τετριμμένη εάν και μόνο εάν

$$S_x^{-1}(a) \geq d_0 + E[X - d_0]_+ + \beta D[X - d_0]_+, \quad (2.4.30)$$

,όπου επιπλέον  $d_0$  είναι η μοναδική βέλτιστη αποζημίωση.

d) A14 (αρχή της ημι-διακύμανσης): εάν υπάρχει μια θετική σταθερά  $d_0$  που ικανοποιεί την εξίσωση  $2\beta E[X - d_0 - E[X - d_0]_+] = 1$ , τότε η βέλτιστη αντασφάλιση stop-loss είναι μη τετριμμένη εάν και μόνο εάν

$$S_x^{-1}(a) \geq d_0 + E[X - d_0]_+ + \beta E[[X - d_0]_+ - E[X - d_0]_+]^2, \quad (2.4.31)$$

,όπου επιπλέον  $d_0$  είναι η μοναδική βέλτιστη αποζημίωση.

e) A15 (αρχή της τετραγωνικής χρησιμότητας): εάν υπάρχει θετική σταθερά  $d_0$  που ικανοποιεί την εξίσωση  $\frac{E[X - d_0]_+}{\sqrt{\gamma^2 - D[X - d_0]_+}} = 1$ , τότε η βέλτιστη αντασφάλιση stop-loss είναι μη τετριμμένη αν και μόνο αν

$$S_x^{-1}(a) \geq d_0 + E[X - d_0]_+ + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - D[X - d_0]_+}, \quad (2.4.32)$$

,όπου  $d_0$  είναι η μοναδική βέλτιστη απαλλαγή.

## Παρατήρηση 2.2

Το μέρος (α) της παραπάνω πρότασης είναι ισοδύναμο με το θεώρημα 2.1 των Cai και Tan (2007)(ii) Για αυτές τις αρχές A2-A4, A10 και A16, εκτός από αυτές που εξετάζονται στις προτάσεις 2.4 και 2.5, η συνάρτηση στόχου στο πρόβλημα βελτιστοποίησης (2.2.19) είναι τόσο περίπλοκη που δεν έχουν προκύψει γενικά αποτελέσματα σχετικά με τη βελτιστότητα της αντασφάλισης stop-loss. Για αυτά, ίσως πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια αριθμητική προσέγγιση.

### 2.4.2 CTE βελτιστοποίηση για stop-loss αντασφάλιση

Αντίθετα με τη βέλτιστη αντασφάλιση διακοπής ζημιών σύμφωνα με το κριτήριο VaR, η ανάλυση για την αντίστοιχη βέλτιστη CTE περιπλέκεται από το γεγονός ότι η βέλτιστη αποζημίωση μπορεί να προκύψει για  $d \in (S_x^{-1}(a), \infty)$ . Για την περαιτέρω συζήτηση, παρουσιάζουμε πρώτα το X το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 2.4** Θεωρούμε την CTE βελτιστοποίηση (2.2.19).

a) Αν  $d + \Pi([X - d]_+)$  είναι αύξουσα στο  $d$  στο  $[0, S^{-1}(\alpha)]$  και ένα από τα ακόλουθα συνθήκες ισχύουν, τότε η βέλτιστη αντασφάλιση διακοπής ζημιών είναι τετριμμένη.

(i)  $G(d)$  είναι κοίλη για  $d \geq S_x^{-1}(\alpha)$ , ή

(ii) υπάρχει μια σταθερά  $d_0 > S_x^{-1}(\alpha)$  τέτοια ώστε η  $G(d)$  να είναι αύξουσα για

$$d \in [S_x^{-1}(\alpha), d_0] \text{ ενώ μειώνεται για } d \geq d_0.$$

Επιπλέον, σε οποιοδήποτε από τα παραπάνω (i) και (ii), η τετριμμένη βέλτιστη συγκράτηση εξαρτάται από το σχετικό μέγεθος μεταξύ  $\Pi(X)$  και  $u_\alpha$ , όπως υποδεικνύεται κατωτέρω:

$$d^* = \begin{cases} 0, & \text{αν } \Pi(X) < u_\alpha \\ 0, \text{ ή } \infty, & \text{αν } \Pi(X) = u_\alpha \\ +\infty, & \text{αν } \Pi(X) > u_\alpha \end{cases} \quad (2.4.33)$$

b) Εάν ισχύουν και οι δύο ακόλουθες προϋποθέσεις, τότε η βέλτιστη αντασφάλιση διακοπής ζημιών δεν είναι τετριμμένη.

i. υπάρχει μια σταθερά  $d_0 \in (0, S_x^{-1}(\alpha))$  τέτοια ώστε  $d + \Pi([X - d]_+)$  να είναι μειώνεται στο  $d$  στο  $[0, d_0]$  ενώ αυξάνεται στο  $d$  στο  $[d_0, S_x^{-1}(\alpha)]$ , και

ii.  $S_x^{-1}(\alpha) \geq d_0 + \Pi([X - d_0]_+)$ .

Επιπλέον, όταν ισχύουν τα (i) και (ii), η βέλτιστη διατήρηση  $d^* = d_0$  με την αντίστοιχη ελάχιστη τιμή του  $CTETsl(d, \alpha)$

$$\min_{d \geq 0} CTE_\alpha(X_{Tsl}; d) = d_0 + \Pi([X - d_0]_+). \quad (2.4.34)$$

Με βάση το θεώρημα 2.4, αποδεικνύουμε τώρα ότι η βέλτιστη αντασφάλιση stop-loss είναι τετριμμένη κάτω από ορισμένες αρχές ασφαλίσεων, όπως φαίνεται στην ακόλουθη πρόταση με την απόδειξή της να συγκεντρώνεται στην ενότητα 2.6.

### Πρόταση 2.10

Θεωρούμε CTE βελτιστοποίηση. Η βέλτιστη stop-loss αντασφάλιση είναι τετριμμένη και η βέλτιστη τετριμμένη παρακράτηση προσδιορίζεται στο (2.2.33) για τις ακόλουθες αρχές ασφαλιστρών:

(α) A9 ( Αρχή του Wang )  $\Pi(X) = \int_0^\infty [Pr(X \geq t)]^p dt$  , όπου  $0 < p < 1$ ,

(β) A11 (Γενικευμένη εκατοστιαία αρχή) :  $\Pi(X) = E[X] + B \{F_x^{-1}(1 - p) - E[X]\}$  με  $0 < \beta$  ,  $p < 1$  ,

(γ) A12 (Αρχή CTE) :  $\Pi(X) = \frac{1}{p} \int_{1-p}^1 F_x^{-1}(x) dx$  , όπου  $0 < p < 1$  ,

Με βάση το στοιχείο β) του θεωρήματος 2.4, διαπιστώνουμε ότι η βέλτιστη σύμβαση σε σχέση με τη βελτιστοποίηση CTE (2.2.19) υπάρχει για ορισμένες αρχές ασφαλιστρών υπό ορισμένες προϋποθέσεις. Η ακόλουθη Πρόταση 2.11 παρουσιάζει αυτές τις αρχές μαζί με τις αντίστοιχες ικανές συνθήκες. Στην πραγματικότητα, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι ικανές συνθήκες και η βέλτιστη διατήρηση για κάθε αρχή με το κριτήριο CTE είναι οι ίδιες με εκείνες με το κριτήριο VaR. Ωστόσο, οι αντίστοιχες συνθήκες δεν είναι μόνο επαρκείς αλλά και αναγκαίες για το κριτήριο VaR, ενώ είναι απλώς επαρκείς για το κριτήριο CTE. Μεταξύ αυτών των αρχών, ωστόσο, η P1 (προσδοκώμενη αρχή) αποτελεί εξαίρεση, οι συνθήκες που παρατίθενται στην Πρόταση 2.11 για την ύπαρξη βέλτιστης αντασφάλισης stop-loss είναι επίσης αναγκαίες- βλέπε Cai and Tan (2007) για λεπτομερή ερμηνεία. Παραλείπουμε την απόδειξη της ακόλουθης Πρότασης 2.11, καθώς είναι τετριμμένη συνδυάζοντας το (β) του Θεωρήματος 2.4 και την απόδειξη της Πρότασης 2.9.

### Πρόταση 2.11

Θεωρούμε CTE βελτιστοποίηση.

(α) Κάτω από το A1 (προσδοκώμενη αρχή)  $\Pi(X) = (1 + \theta) E[X]$  με  $\theta > 0$ , με  $\theta > 0$ , αν

$$d_0 := S_x^{-1} \left( \frac{1}{1+\theta} \right) \in (0, S_x^{-1}(a)) \quad (2.4.35)$$

και  $S_x^{-1}(a) \geq d_0 + (1 + \theta) \int_{d_0}^\infty S_x(x) dx$  (2.4.36)

ισχύουν, τότε η βέλτιστη αντασφάλιση stop-loss είναι μη τετριμμένη με τη βέλτιστη παρακράτηση  $d^* = d_0$ .

(β) Κάτω από το A8 (Ολλανδική Αρχή) :  $\Pi(X) = E[X] + \beta E[X - EX]$  , με  $0 < \beta \leq 1$  ,αν υπάρχει σταθερά  $d_0$  που ικανοποιεί την ισότητα  $\beta S_x(d_0 + E[X - d_0]_+) = 1$  τέτοια ώστε και το

$d_0 \in (0, S_x^{-1}(a))$  και

$$S_x^{-1}(a) \geq d_0 + E[X - d_0]_+ + \beta E\{[X - d_0]_+ - E[(X - d_0)_+] \}_+ \quad (2.4.37)$$

ισχύουν, τότε η βέλτιστη stop-loss αντασφάλιση είναι μη τετριμμένη με βέλτιστη απαλλαγή  $d^* = d_0$

(γ) Κάτω από A13 (Αρχή Διακύμανσης)  $\Pi(X) = E[X] + \beta D[X]$  με  $\beta > 0$ , αν υπάρχει σταθερά  $d_0$  που ικανοποιεί την ισότητα  $2\beta E[X - d_0]_+ = 1$  τέτοιο ώστε και  $d_0 \in (0, S_x^{-1}(a))$  και

$$S_x^{-1}(a) \geq d_0 + E[X - d_0]_+ + \beta D[X - d_0]_+ \quad (2.4.38)$$

ισχύουν, τότε η βέλτιστη stop-loss αντασφάλιση είναι μη τετριμμένη με την βέλτιστη αντασφάλιση  $d^* = d_0$ .

(δ) Κάτω από A14 (Αρχή της ημιδιακύμανσης)  $\Pi(X) = E[X] + \beta E[X - EX]_+^2$  με  $\beta > 0$ , αν υπάρχει μία σταθερά  $d_0$  που ικανοποιεί την ισότητα  $2\beta E\{X - d_0 - E[(X - d_0)_+] \}_+ = 1$  , τέτοιο ώστε και τα δύο  $d_0 \in (0, S_x^{-1}(a))$  και

$$S_x^{-1}(a) \geq d_0 + E[X - d_0]_+ + \beta E[X - d_0]_+^2 \quad (2.4.39)$$

Ισχύουν, τότε η βέλτιστη stop-loss αντασφάλιση είναι μη τετριμμένη με την βέλτιστη αντασφάλιση  $d^* = d_0$ .

(ε) Κάτω από A15 (Αρχή της τετραγωνικής χρησιμότητας)  $\Pi(X) = E[X] + \gamma \sqrt{\gamma^2 - D[X]}$  με  $\gamma > 0$ , αν υπάρχει μία σταθερά  $d_0$  που ικανοποιεί την ισότητα  $\frac{E[X - d_0]_+}{\sqrt{\gamma^2 - D[X - d_0]_+}} = 1$  τέτοιο ώστε

$$d_0 \in (0, S_x^{-1}(a)) \text{ και } S_x^{-1}(a) \geq d_0 + E[X - d_0]_+ + \beta E[X - d_0]_+^2 \quad (2.4.40)$$

ισχύουν, τότε η βέλτιστη stop-loss αντασφάλιση είναι μη τετριμμένη με την βέλτιστη παρακράτηση  $d^* = d_0$ .



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## Μοντέλο Ελαχιστοποίησης VaR : Αύξηση των κυρτών αντασφαλιστικών συμβάσεων

### 3.1 Εισαγωγή και Μοντέλο Αντασφάλισης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναλύθηκαν δύο συγκεκριμένοι τύποι αντασφάλισης: η ποσοστιαία συμμετοχή και η διακοπή ζημιών. Το παρόν κεφάλαιο γενικεύει για να αναλύσει τη βέλτιστη αντασφάλιση μεταξύ όλων των αυξανόμενων κυρτών συμβάσεων. Με τον τρόπο αυτό, υιοθετούμε το μοντέλο ελαχιστοποίησης VaR και εξετάζουμε ένα μοντέλο περιορισμένης αντασφάλισης με περιορισμούς στον προϋπολογισμό των ασφαλιστρών αντασφάλισης. Υποθέτουμε την αρχή της αναμενόμενης αντασφάλισης ασφαλιστρών και σε αυτή την περίπτωση ο περιορισμός της αρχής των αντασφαλιστρών μπορεί επίσης να ερμηνευθεί ως εγγύηση αναμενόμενου κέρδους για τον ασφαλιστή. Με ισοδύναμη αναδιαμόρφωση του μοντέλου σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης πάνω σε ένα χώρο  $\sigma$ -περιορισμένων θετικών μέτρων σε ορισμένο μετρήσιμο χώρο, εξάγουμε τις ρητές βέλτιστες λύσεις.

Για να προσδιορίσουμε το υπόδειγμά μας, ας υποδηλώσουμε με  $X$  τη μη αρνητική τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει την (συνολική) ζημία που αναλαμβάνει αρχικά ένας ασφαλιστής. Για να απλουστεύσουμε τις συζητήσεις μας, υποθέτουμε ότι η  $X$  έχει πεπερασμένο μέσο όρο και ότι η  $X$  έχει μια συνεχή αυστηρά αύξουσα συνάρτηση κατανομής στο  $(0, \infty)$  με ένα πιθανό άλμα στο 0. Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο ασφαλιστής θα διαχειριζόταν την έκθεσή του στον κίνδυνο μέσω μιας αντασφαλιστικής σύμβασης. Σύμφωνα με αυτή τη συμφωνία, ο ασφαλιστής εκχωρεί μέρος της ζημίας του, ας πούμε  $f(X)$  που ικανοποιεί  $0 \leq f(X) \leq X$ , σε έναν αντασφαλιστή. Ο ασφαλιστής διατηρεί έτσι τη ζημία  $I_f(X) = X - f(X)$ , όπου η συνάρτηση  $f(x)$  είναι γνωστή ως συνάρτηση

εκχωρούμενης ζημίας και η  $I_f(X) = x - f(x)$  αναφέρεται ως συνάρτηση διατηρούμενης ζημίας. Μεταφέροντας μέρος των ζημιών του σε έναν αντασφαλιστή, ο ασφαλιστής επιβαρύνεται με ένα κόστος υπό τη μορφή αντασφαλίστρου, το οποίο συμβολίζεται με  $\Pi(f(X))$  και το οποίο καταβάλλεται σε έναν αντασφαλιστή. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα  $I_f(X) + \Pi(f(X))$  μπορεί να ερμηνευθεί ως ο συνολικός κίνδυνος (ή το συνολικό κόστος) του ασφαλιστή παρουσία αντασφάλισης. Χρησιμοποιώντας  $T_f(X)$  για να δηλώσουμε το συνολικό κόστος, έχουμε  $f \in \mathcal{IC}$

$$T_f(X) = I_f(X) + \Pi(f(X)). \quad (3.1.1)$$

Επομένως, αν χρησιμοποιήσουμε το VaR ως μέτρο κινδύνου, το βέλτιστο μοντέλο αντασφάλισης μπορεί να διατυπωθεί με βάση το συνολικό κόστος  $T_f$  του ασφαλιστή ως

$$\text{εξής. } \begin{cases} \min_{f \in \mathcal{IC}} VaR_\alpha(T_f(X)) \\ \text{s. t. } \Pi[f] \leq \pi \end{cases} \quad (3.1.2)$$

όπου IC συμβολίζει την κλάση όλων των αυξανόμενων κυρτών συναρτήσεων στο  $[0, \infty]$  έτσι ώστε  $0 \leq f(x) \leq x$  για όλα τα  $x \geq 0$ . Επίσης, το  $\pi$  στο ανωτέρω υπόδειγμα είναι μια προκαθορισμένη θετική σταθερά που αντιπροσωπεύει τον προϋπολογισμό του αντασφαλίστρου, έτσι ώστε το  $\Pi[f] \leq \pi$  συνεπάγεται την υπόθεση ότι ο ασφαλιστής είναι διατεθειμένος να πληρώσει το αντασφάλιστρο όχι περισσότερο από  $\pi$ .

Με την πρόσθετη υπόθεση ότι το αντασφαλιστικό ασφάλιστρο  $\Pi(f(X))$  καθορίζεται από την αρχή του προσδοκώμενου ασφαλίστρου, δηλ.,

$$\Pi(f(X)) = (1 + \theta)E[f(X)], \quad (3.1.3)$$

όπου  $\theta > 0$  είναι ο συντελεστής επιβάρυνσης ασφάλειας, ο περιορισμός του προϋπολογισμού των ασφαλίστρων αντασφάλισης είναι ισοδύναμος με  $E[f] \leq E[X]/(1 + \theta)$  και έτσι καταλήγουμε σε ένα μοντέλο αντασφάλισης σε μια πιο ρητή μορφή ως εξής.

$$\begin{cases} \min_{f \in \mathcal{IC}} VaR_\alpha(T_f(X)) \\ \text{s. t. } E[f(X)] \leq B \\ 0 \leq f(x) \leq x \text{ για όλα } x \geq 0, \end{cases} \quad (3.1.4)$$

,όπου B συμβολίζεται η σταθερά  $\pi/(1+\theta)$ .

Ο περιορισμός  $E[f] \leq B$  μπορεί επίσης να ερμηνευθεί ως εγγύηση αναμενόμενου κέρδους για τον ασφαλιστή. Αυτό μπορεί να υποστηριχθεί λαμβάνοντας υπόψη το ασφάλιστρο που

εισπράττει ο ασφαλιστής από τους ασφαλισμένους και εξηγείται ως εξής. Έστω  $p_0$  που υποδηλώνει το συνολικό ασφάλιστρο που χρεώνεται. Μειώνοντας τη συνολική έκθεση σε κίνδυνο κατά το ποσό του εισπραχθέντος ασφαλίστρου, προκύπτει το καθαρό κόστος ή ο καθαρός κίνδυνος της ασφάλισης του κινδύνου  $X$ , το οποίο θα συμβολίζεται με  $NC_f(X)$ ; δηλ.

$$NC_f(X) = T_f(X) - p_0 = I_f(X) + \Pi(f(X)) - p_0. \quad (3.1.5)$$

Τότε, η ποσότητα  $E[-NC_f(X)]$  μπορεί να ερμηνευθεί ως το αναμενόμενο κέρδος του ασφαλιστή και η συνθήκη περιορισμού  $E[-NC_f(X)] \geq P$  διασφαλίζει ότι το αναμενόμενο κέρδος του ασφαλιστή υπό τη συνάρτηση ζημίας  $f$  είναι τουλάχιστον  $P$ . Προφανώς, η  $E[-NC_f(X)] \geq P$  είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη  $E[f] \leq B$  με  $B = (p_0 - P - E[X])/θ$ .

### 3.2 Μοντέλο Αναμόρφωσης

Όπως επισημαίνεται στους Gaijvoronski και Pflug (Winter 2004-005), το πρόβλημα βελτιστοποίησης που σχετίζεται με το VaR, γενικά, είναι μια μη τετριμμένη άσκηση ακόμη και στην περίπτωση των πεντακοσίων διαστάσεων. Για να εξάγουμε τις λύσεις, αναδιατυπώνουμε το (3.1.4) ως γραμμικό προγραμματισμό ως προς  $\sigma$ -περιορισμένα θετικά μέτρα επί των μετρήσιμων Borelχώρο  $([0, \infty), B)$ , όπου  $B := B([0, \infty))$  συμβολίζει το σίγμα Borel πάνω στη θετική μισή πραγματική γραμμή  $[0, \infty)$ . Στη συνέχεια, λαμβάνουμε τις λύσεις με μια προσεγγιστική διαδικασία, η οποία είναι μια ευρέως χρησιμοποιούμενη τεχνική για την επίλυση ενός γραμμικού προγραμματισμού που αφορά θετικά μέτρα σε ορισμένο μετρήσιμο χώρο, και το κρίσιμο σημείο είναι να δημιουργηθεί μια ακολουθία προγραμματισμού που είναι επιλύσιμη και με λύσεις που συγκλίνουν στον αρχικό γραμμικό προγραμματισμό.

Πριν από την αναδιατύπωση, χρειαζόμαστε τα ακόλουθα δύο λήμματα- βλέπε Cardin and Pacelli (2007) για την απόδειξη του λήμματος 3.1 και ενότητα 3.5 για την απόδειξη του λήμματος 3.2.

**Λήμμα 3.1** Μία αύξουσα κυρτή συνάρτηση  $f$  ορίζεται στο  $[0, \infty)$  μπορεί να αναπαρασταθεί από την ακόλουθη μορφή:

$$f(x) = f(0) + \int [x - t]_+ d\mu, \text{ για κάθε σταθερό } x \geq 0, \quad (3.2.6)$$

για για κάποιο θετικό  $\sigma$ -προσθετικό μέτρο  $\mu$  στο  $B$ .

**Λήμμα 3.2** Για κάθε  $f(x) \in IC$ ,  $I_f(x) = x - f(x)$  είναι αύξουσα και κοίλη στο  $x$ . Τώρα έχουμε τα ακόλουθα σημαντικά γεγονότα:

(i) Σημειώστε ότι για κάθε συνάρτηση απώλειας ceded  $f \in IC$ ,  $f(0) = 0$  και επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα 3.1, η συνάρτηση απώλειας ceded  $f$  έχει την ακόλουθη αναπαράσταση:  $f(x) = \int (x - t)_+ d\mu$ , γιακάθεσταθερό  $x \geq 0$ . (3.2.7) με θετικό  $\sigma$ -περιορισμένο μέτρο  $\mu$  στο  $B$ . Επιπλέον, σύμφωνα με την θεωρία Fubini έχουμε

$$E[f(X)] = \int E[(X - t)_+] d\mu. \quad (3.2.8)$$

(ii) Μέσω του λήμματος 3.2., για κάθε  $f \in IC$ , η συνάρτηση  $I_f(x) = x - f(x)$  είναι αύξουσα και κοίλη, και συνεχής. Συνεπώς,  $c$

$$\begin{aligned} VaR_a(T_f(X)) &= VaR_a(X - f(X) + (1 + \theta)E[f(X)]) \\ &= VaR_a(X) - f(VaR_a(X)) + (1 + \theta)E[f(X)]. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Σημειώστε ότι όταν  $a \geq S_x(0)$ , τότε  $VaR_a(X) = 0$ , η συνάρτηση στόχου  $VaR_a(T_f(X))$  στο υπόδειγμα (3.1.4) εξαρτάται μόνο από την τιμή της  $E[f(X)]$  και, ως εκ τούτου, θα είναι βέλτιστο για τον ασφαλιστή να μην εκχωρήσει κανέναν κίνδυνο. Για να αποφύγουμε αυτή την τετριμμένη περίπτωση, υποθέτουμε  $0 < a < S_x(0)$ , στο εξής.

Σύμφωνα με τα (3.2.7) και (3.2.8) και θέτοντας  $\varphi(t) = (VaR_a(X) - t)$  και  $\psi(t) = E[(X - t)_+]$  για  $t \geq 0$ , η (3.2.4) μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$VaR_a(T_f(X)) = VaR_a(X) - \int [\varphi(t) - (1 + \theta)\psi(t)] d\mu.$$

Συνεπώς, το προτεινόμενο από εμάς μοντέλο βέλτιστης αντασφάλισης (3.1.4) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο γραμμικό προγραμματισμό σε σχέση με το θετικό μέτρο  $\mu$ :

$$\left( \begin{array}{l} \min_{\mu \in M^+} VaR_a(X) - \int \varphi(t) - (1 + \theta)\psi(t) d\mu \\ s. t \int \psi(t) d\mu \leq B \end{array} \right) \quad (3.2.10)$$

,όπου  $M^+$  συμβολίζει το σύνολο όλων των  $\sigma$ -περιορισμένων θετικών μέτρων στο μετρήσιμο χώρο  $([0, \infty), B)$  τέτοιο ώστε  $0 \leq \int (x - t)_+ d\mu \leq x$  για όλα  $x \geq 0$ .

### 3.3 Βέλτιστες Λύσεις

Δεδομένου ότι τα υποδείγματα (3.1.4) και (3.2.10) είναι ισοδύναμα όσον αφορά τις λύσεις τους, μας αρκεί να επικεντρωθούμε στο υπόδειγμα (3.2.10) για την εξαγωγή των βέλτιστων συναρτήσεων απώλειας από την εκχώρηση. Ο προσδιορισμός των λύσεων του (3.2.10) είναι ο στόχος της παρούσας ενότητας. Θα χρησιμοποιήσουμε την προσεγγιστική προσέγγιση, η οποία είναι μια προσέγγιση ρουτίνας όσον αφορά τη βελτιστοποίηση σε ένα χώρο μέτρων. Για να προχωρήσουμε, ας εισαγάγουμε πρώτα ορισμένους συμβολισμούς και ας ορίσουμε ορισμένες συναρτήσεις ως εξής αρχικά:

$$\theta^* = \frac{1}{1+\theta}, \delta_{\theta^*} = S_x^{-1}(\theta^*), \delta_\alpha = S_x^{-1}(\alpha). \quad (3.3.11)$$

$$\beta(d) = \frac{B}{\int_0^\infty S_x(x) dx}, \quad (3.3.12)$$

$$\kappa(d) = d + (1 + \theta) \int_d^\infty S_x(x) dx - \delta_\alpha, \quad (3.3.13)$$

$$\lambda(d) = \int_d^\infty S_x(x) dx + S_x(d)[d - \delta_\alpha], \quad (3.3.14)$$

Το ακόλουθο Λήμμα 3.3 συγκεντρώνει ορισμένες ιδιότητες των συναρτήσεων  $\kappa(\cdot)$  και  $\lambda(\cdot)$  που ορίστηκαν παραπάνω. Αυτές οι ιδιότητες θα χρησιμοποιηθούν συχνά στη μετέπειτα συζήτηση- δείτε την ενότητα 3.5 για την απόδειξή τους.

#### Λήμμα 3.3

(α) Η συνεχής συνάρτηση  $\kappa(d)$  που ορίζεται στην (3.3.13) είναι κυρτή για  $d \geq 0$ . Επιπλέον, εάν  $\theta^* < S_x(0)$ , τότε η  $\kappa(d)$  είναι φθίνουσα στο  $[0, \delta_{\theta^*}]$ , επί αυξανόμενη στο  $[\delta_{\theta^*}, \infty)$  και ικανοποιεί

- $\min_{0 \leq d \leq \alpha} \{\kappa(d)\} = \kappa(\alpha), \text{ για } 0 \leq \alpha \leq \delta_{\theta^*}, \quad (3.3.15)$

- $\min_{0 \leq d \leq \alpha} \{\kappa(d)\} = \kappa(\delta_{\theta^*}), \text{ για } \delta_{\theta^*} \leq \alpha, \quad (3.3.16)$

Αν  $\theta^* \geq S_x(0)$ , τότε  $\kappa(d)$  είναι αύξουσα στο  $[0, \infty)$  και ικανοποιεί

- $\min_{0 \leq d \leq \alpha} \{\kappa(d)\} = \kappa(0) \text{ για } \alpha \geq 0 \quad (3.3.17)$

(β) η συνεχής συνάρτηση  $\lambda(d)$  που ορίζεται στο (3.3.14) είναι αυστηρά αύξουσα στο  $[0, \delta_\alpha]$ . Επιπλέον, όταν  $\alpha < \theta^*$ , και  $\lambda(\delta_{\theta^*}) < 0$ , υπάρχει μοναδική ρίζα  $d = d_0$  στην εξίσωση  $\lambda(d) = 0$  στο  $(\delta_{\theta^*}, \delta_\alpha)$ .

Η διαδικασία μας για την επίλυση της (3.2.10) έχει ως εξής. Πρώτα απ' όλα, στην Υποενότητα 3.3.1 κατασκευάζουμε μια σειρά γραμμικών προγραμματισμών (3.3.19) που είναι προβλήματα βελτιστοποίησης πάνω σε ένα σύνολο διακριτών μέτρων με συγκεκριμένη δομή και στη συνέχεια αναδιατυπώνουμε αυτούς τους προγραμματισμούς σε κάποια ισοδύναμα μοντέλα (3.3.23) που είναι προβλήματα βελτιστοποίησης πάνω στον Ευκλείδειο χώρο. Στην υποενότητα 3.3.2, επιλύουμε τα μοντέλα (3.3.23) με ρητές λύσεις που προσδιορίζονται. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι αναγνωρισμένες λύσεις είναι κοινές για όλα αυτά τα μοντέλα (3.3.23). Οι λύσεις του (3.3.19) προκύπτουν από την ισοδυναμία του με τα μοντέλα (3.3.23). Τέλος, στην υποενότητα 3.3.3 δείχνουμε ότι αυτές οι λύσεις επιλύουν επίσης το μοντέλο (3.2.10), οι οποίες αναφέρονται στον πίνακα 3.11.

Case	Conditions	$\mu^*$	$f^*(x)$	$\text{VaR}_\alpha^*$
(1)	$\alpha \geq \theta^*$	0	0	$\delta_\alpha$
(2)	$\alpha < \theta^*$ , $\kappa(\delta_{\theta^*}) > 0$	0	0	$\delta_\alpha$
(3)	$\alpha < \theta^*$ , $\kappa(\delta_{\theta^*}) = 0$	$c^* \mathcal{X}(\delta_{\theta^*}, \cdot)$ where $0 \leq c^* \leq \min\{\beta(\delta_{\theta^*}), 1\}$	$c^*(x - \delta_{\theta^*})_+$ , for $0 \leq c^* \leq \min\{\beta(\delta_{\theta^*}), 1\}$	$\delta_\alpha$
(4)	$\alpha < \theta^*$ , $\kappa(\delta_{\theta^*}) < 0$ , $\beta(\delta_{\theta^*}) > 1$	$\mathcal{X}(\delta_{\theta^*}, \cdot)$	$(x - \delta_{\theta^*})_+$	$\delta_\alpha + \kappa(\delta_{\theta^*})$
(5)	$\alpha < \theta^*$ , $\kappa(\delta_{\theta^*}) < 0$ , $\beta(\delta_{\theta^*}) \leq 1$ , $\lambda(\delta_{\theta^*}) \geq 0$	$\beta(\delta_{\theta^*}) \mathcal{X}(\delta_{\theta^*}, \cdot)$	$\beta(\delta_{\theta^*})(x - \delta_{\theta^*})_+$	$\delta_\alpha + \beta(\delta_{\theta^*}) \cdot \kappa(\delta_{\theta^*})$
(6)	$\alpha < \theta^*$ , $\kappa(\delta_{\theta^*}) < 0$ , $\beta(\delta_{\theta^*}) \leq 1$ , $\lambda(\delta_{\theta^*}) < 0$ , $\beta(d_0) \leq 1$	$\beta(d_0) \mathcal{X}(d_0, \cdot)$	$\beta(d_0)(x - d_0)_+$	$\delta_\alpha - B\left(\frac{1}{S_X(d_0)} - \frac{1}{\theta^*}\right)$
(7)	$\alpha < \theta^*$ , $\kappa(\delta_{\theta^*}) < 0$ , $\beta(\delta_{\theta^*}) \leq 1$ , $\lambda(\delta_{\theta^*}) < 0$ , $\beta(d_0) > 1$	$\mathcal{X}(d_B, \cdot)$ where $B = \int_{d_B}^\infty S_X(x) dx$	$(x - d_B)_+$ , where $B = \int_{d_B}^\infty S_X(x) dx$	$\delta_\alpha + u(d_B)$

Πίνακας 3.1: Βέλτιστες συναρτήσεις ζημιών και ελάχιστο VaR.

### 3.3.1 Μοντέλα Προσέγγισης

Για ακέραιο αριθμό  $n \geq 1$ , έστω  $M_n^+$  το σύνολο όλων των μέτρων στο  $([0, \infty), B)$  με την ακόλουθη δομή:

$$\mu_n(\cdot) = \sum_{j=1}^n c_{n,j} X(d_{n,j}, \cdot), \quad (3.3.18)$$

όπου οι συντελεστές  $c_{n,j} \geq 0$  και  $d_{n,j} \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $\sum_{j=1}^n c_{n,j} \leq 1$ , και  $X(d_{n,j}, \cdot)$  δηλώνουν το μέτρο Dirac συγκεντρωμένο στο σημείο  $d_{n,j}$ . Χωρίς καμία απώλεια γενικότητας, υποθέτουμε ότι  $0 \leq d_{n,1} \leq d_{n,2} \leq \dots \leq d_{n,n}$  για όλα τα  $n = 1, 2, \dots$ . Σημειώστε ότι  $M_n^+ \subset CM^+$  για όλα τα  $n = 1, 2, \dots$ . Στη συνέχεια, εξετάζουμε τα ακόλουθα προβλήματα:

$$\begin{cases} \min_{\mu_n \in M_n^+} VaR_\alpha(X) - \int [\phi(t) - (1 + \theta)\psi(t)] d\mu_n \\ \text{s. t. } \int \psi(t) d\mu_n \leq B \end{cases} \quad (3.3.19)$$

Ορίζοντας τα διανύσματα συντελεστών  $\mathbf{c} := (c_{n,1}, \dots, c_{n,n})$  και  $\mathbf{d} := (d_{n,1}, \dots, d_{n,n})$ , και χρησιμοποιώντας (3.3.18), η συνάρτηση στόχου σε (3.3.19) μπορεί να εκφραστεί όπως παρακάτω.

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(\mathbf{c}, \mathbf{d}) &:= VaR_\alpha(X) - \int [\phi(t) - (1 + \theta)\psi(t)] d\mu_n \\ &= VaR_\alpha(X) - \sum_{j=1}^n c_{n,j} [\phi(d_{n,j}) - (1 + \theta)\psi(d_{n,j})] \\ &= \begin{cases} \delta_\alpha + \Pi_{\mu_n}(X), \delta_\alpha \leq d_{n,1} \\ A_{n,i} \delta_\alpha + B_{n,i} + \Pi_{\mu_n}(X), d_{n,1} \leq \delta_\alpha \leq d_{n,i+1}, i = 1, \dots, n-1, \\ A_{n,n} \delta_\alpha + B_{n,n} + \Pi_{\mu_n}(X), d_{n,n} \leq \delta_\alpha \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

,όπου

$$A_{n,i} = 1 - \sum_{j=1}^i c_{n,j}, \quad B_{n,i} = \sum_{j=1}^i c_{n,j} d_{n,j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.3.21)$$

και

$$\Pi_{\mu_n}(X) = (1 + \theta) \left\{ \sum_{j=1}^n c_{n,j} \int_{d_{n,j}}^{\infty} S_x(x) dx \leq B \right\} \quad (3.3.22)$$

Ομοίως, ο περιορισμός στο πρόβλημα βελτιστοποίησης (3.3.19) γίνεται

$$\sum_{j=1}^n c_{n,j} \int_{d_{n,j}}^{\infty} S_x(x) dx \leq B.$$

Σημειώστε ότι η αντικειμενική συνάρτηση και ο περιορισμός εξαρτώνται ρητά από τη μεταβλητή Αυτό εξηγεί τον συμβολισμό  $VaR_{\alpha}(c,d)$  με τα ορίσματα  $c$  και  $d$ .

Ας παρουσιάσουμε τώρα τα ακόλουθα σύνολα:

$$\mathcal{C}_n = \left\{ (c_{n,1}, \dots, c_{n,n}) \in \mathbb{R}^n : c_{n,j} \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \text{ και } \sum_{j=1}^n c_{n,j} \leq 1 \right\},$$

$$\mathcal{D}_n = \{(d_{n,1}, \dots, d_{n,n}) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq d_{n,1} \leq \dots \leq d_{n,n}\},$$

$$\mathcal{S}_n = \{(\mathbf{c}, \mathbf{d}) : \mathbf{c} \in \mathcal{C}_n, \mathbf{d} \in \mathcal{D}_n, \sum_{j=1}^n c_{n,j} \int_{d_{n,j}}^{\infty} S_x(x) dx \leq B\},$$

Τότε τα διανύσματα των συντελεστών  $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$  που ορίζονται στο (3.3.18) πρέπει να ικανοποιούν  $\mathbf{c} \in \mathcal{C}_n$  και  $\mathbf{d} \in \mathcal{D}_n$ . Επιπλέον, το σύνολο  $\mathcal{S}_n$  περιλαμβάνει τόσο τις εφικτές τιμές των  $c$  και  $d$  όσο και την περιορισμένη συνθήκη τους του προβλήματος (3.3.19). Συνεπώς, το πρόβλημα βελτιστοποίησης (3.3.19) μπορεί να εκφραστεί πιο συμπαγώς ως εξής :

$$\min_{(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \in \mathcal{S}_n} VaR_{\alpha}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \tag{3.3.23}$$

Θα πρέπει να τονιστεί ότι η παραπάνω διατύπωση είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς, καθώς ο περιορισμός για τα  $\mathbf{c}$  και  $\mathbf{d}$  ενσωματώνεται στον ορισμό του  $\mathcal{S}_n$ . Κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις για δύο ειδικές περιπτώσεις σε σχέση με το πρόβλημα βελτιστοποίησης (3.3.23). Η πρώτη είναι όταν  $\mathbf{c}=0$ , όπου  $0$  είναι ένα μηδενικό διάνυσμα  $(0, \dots, 0)$ . Στην περίπτωση αυτή, η αντικειμενική συνάρτηση και ο περιορισμός στο (3.3.23) είναι σταθεροί, ανεξάρτητοι από το  $\mathbf{d}$ . Όταν  $\mathbf{c}=0$  είναι η βέλτιστη λύση του (3.3.23), τότε δεν είναι ποτέ βέλτιστη η αντασφάλιση του κινδύνου του ασφαλιστή. Δεύτερον, όταν



$d_{n,j} = d$  για  $j = 1, 2, \dots, n$  και σταθερό  $d$ , τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και ο περιορισμός στο (3.3.23) εξαρτώνται μόνο από το  $d$  και το  $c := \sum_{j=1}^n c_{n,j}$ . Αυτό σημαίνει ότι το πρόβλημα βελτιστοποίησης (3.3.23) ανάγεται σε ένα διδιάστατο πρόβλημα ως προς τα  $c$  και  $d$ , από  $2n$  διαστάσεις. Στη συνέχεια, θα μπορούσαμε απλά να συμβολίσουμε  $(c, d) \in S$  για την κατάσταση αυτή για ένα σύνολο δομημένο με τον ίδιο τρόπο όπως το  $S_n$ .

### 3.3.2 Λύσεις στα Μοντέλα Προσέγγισης

Όπως επισημάνθηκε προηγουμένως, το μοντέλο βελτιστοποίησης με βάση το VaR, γενικά, είναι ένα μη τετριμμένο πρόβλημα- βλέπε Gaijvoronski and Pflug (Winter 2004-2005). Επομένως, είναι δύσκολο να ληφθεί άμεσα ο παγκόσμιος ελαχιστοποιητής του περιορισμένου προβλήματος βελτιστοποίησης (3.3.23). Από την άλλη πλευρά, το γεγονός ότι το (3.3.23) διατυπώνεται τώρα ως πρόβλημα βελτιστοποίησης στον ευκλείδειο χώρο υποδηλώνει ότι μπορούμε να εξάγουμε τη βέλτιστη λύση μέσω της ακόλουθης προσέγγισης. Για να εξηγήσουμε αυτή την προσέγγιση, ας αρχίσουμε σημειώσουμε ότι για  $n = 1, 2, \dots$ , τα σύνολα  $\mathcal{D}_n$  και  $S_n$  μπορούν να χωριστούν, αντίστοιχα, ως εξής

$$\mathcal{D}_n^0 = \{(d_{n,1}, \dots, d_{n,n}) \in \mathbb{R}^n : \delta_\alpha \leq d_{n,1} \leq \dots \leq d_{n,n}\},$$

$$\mathcal{D}_n^i = \{(d_{n,1}, \dots, d_{n,n}) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq d_{n,1} \leq \dots \leq d_{n,i} \leq \delta_\alpha \leq d_{n,i+1} \leq \dots \leq d_{n,n}\}, \quad i=1, \dots, n-1$$

$$\mathcal{D}_n^n = \{(d_{n,1}, \dots, d_{n,n}) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq d_{n,1} \leq \dots \leq d_{n,n} \leq \delta_\alpha\},$$

και

$$\mathcal{S}_n^i = \left\{ (c, d) : c \in \mathcal{C}_n, d \in \mathcal{D}_n, \sum_{j=1}^n c_{n,j} \int_{d_{n,j}}^{\infty} S_x(x) dx \leq B \right\}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Με άλλα λόγια, έχουμε  $\mathcal{D}_n = \bigcup_{i=0}^n \mathcal{D}_n^i$  και  $\mathcal{S}_n = \bigcup_{i=0}^n \mathcal{S}_n^i$ . Ο διαχωρισμός του  $\mathcal{S}_n$  σε  $\mathcal{S}_n^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  μας επιτρέπει να αναλύσουμε, κατά περίπτωση, τη λύση της (3.3.23) με το εφικτό σύνολο να αντικαθίσταται από το  $\mathcal{S}_n^i$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Η συνολική λύση της (3.3.23) επί του εφικτού συνόλου  $\mathcal{S}_n$  δίνεται τότε από την κατάτμηση που αποδίδει το χαμηλότερο VaR του συνολικού κινδύνου του ασφαλιστή μεταξύ όλων των κατατμήσεων  $\mathcal{S}_n^i$ ,  $i = 0, \dots$

... , n. Πιο συγκεκριμένα, έστω  $VaR_{\alpha}^*(S)$  η ελάχιστη τιμή του  $VaR_{\alpha}(\mathbf{c}, \mathbf{d})$  για  $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$  πάνω στο εφικτό σύνολο  $S$  και έστω  $(\mathbf{c}^*, \mathbf{d}^*) \in S$  τα αντίστοιχα βέλτιστα διανύσματα για τα οποία επιτυγχάνεται το ελάχιστο. Υιοθετώντας αυτόν τον συμβολισμό, το  $VaR_{\alpha}^*(S_n)$  με βέλτιστο διάνυσμα  $(\mathbf{c}^*, \mathbf{d}^*) \in S_n$  είναι η βέλτιστη λύση της (3.3.23). Το επιχείρημα που παρατίθεται ανωτέρω συνεπάγεται ότι η ελάχιστη τιμή  $VaR_{\alpha}^*(S_n)$  μπορεί να ληφθεί έμμεσα μέσω

$$VaR_{\alpha}^*(S_n) = \min VaR_{\alpha}^*(S_n^0), VaR_{\alpha}^*(S_n^1), \dots, VaR_{\alpha}^*(S_n^n), \quad (3.3.24)$$

με το βέλτιστο διάνυσμα  $(\mathbf{c}^*, \mathbf{d}^*)$  που αντιστοιχεί στην κατάτμηση που αποδίδει το χαμηλότερο VaR.

Το υπόλοιπο της παρούσας ενότητας αφιερώνεται στην ανάλυση της ελάχιστης τιμής του  $VaR_{\alpha}(\mathbf{c}, \mathbf{d})$  για  $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$  σε ένα εφικτό σύνολο  $S_n^i$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Αποδεικνύεται ότι η βέλτιστη τιμή που σχετίζεται με τις πρώτες  $n$  περιπτώσεις (δηλαδή για το εφικτό σύνολο  $S_n^i$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ ), είναι σχετικά εύκολο να προσδιοριστεί, όπως αποδεικνύεται στην Πρόταση 3.1. Η βέλτιστη  $VaR_{\alpha}^*(S_n)$ , από την άλλη πλευρά, είναι πιο περίπλοκη και απαιτεί να εξετάσουμε αρκετές πρόσθετες υποπεριπτώσεις, όπως θα αναλύσουμε στη συνέχεια.

Πριν από την παρουσίαση ορισμένων βασικών αποτελεσμάτων, είναι χρήσιμο να δώσουμε τις ακόλουθες ρητές εκφράσεις για  $VaR_{\alpha}(\mathbf{c}, \mathbf{d})$  που αφορούν ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης  $1 - \alpha$  με  $0 < \alpha < S_x(0)$

(i) Όταν  $\delta_{\alpha} \leq d_{n,1}$ , δηλαδή  $(d_{n,1}, \dots, d_{n,n}) \in \mathcal{D}_n^0$ ,

$$VaR_{\alpha}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \delta_{\alpha} + (1 + \theta) \left\{ \sum_{j=1}^n c_{n,j} \int_{d_{n,j}}^{\infty} S_x(x) dx \right\} \quad (3.3.25)$$

(ii) Όταν  $d_{n,1} \leq \delta_{\alpha} \leq d_{n,i+1}$ , δηλαδή  $(d_{n,1}, \dots, d_{n,n}) \in \mathcal{D}_n^i$  για  $i = 1, \dots, n-1$ ,

$$VaR_{\alpha}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \delta_{\alpha} + \sum_{j=1}^i c_{n,j} [d_{n,j} - \delta_{\alpha}] + (1 + \theta) \left\{ \sum_{j=1}^n c_{n,j} \int_{d_{n,j}}^{\infty} S_x(x) dx \right\}, \quad (3.3.26)$$

Όταν  $d_{n,n} \leq \delta_{\alpha}$ , δηλαδή  $(d_{n,1}, \dots, d_{n,n}) \in \mathcal{D}_n^n$ ,

$$VaR_{\alpha}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \delta_{\alpha} + \sum_{j=1}^n c_{n,j} k(d_{n,j}). \quad (3.3.27)$$

Παρουσιάζουμε τώρα την ακόλουθη πρόταση, η οποία συνοψίζει τη βελτιστοποίηση για τις πρώτες  $n$  θέσεις του  $S_n$ .

**Πρόταση 3.1**\_(α) Στον  $S_n^0$ ,  $\mathbf{c}^* = 0$  είναι μια βέλτιστη λύση του  $VaR_\alpha^*(S_n^0)$  με βέλτιστη ελάχιστη τιμή  $VaR_\alpha^*(S_n^0) = \delta_\alpha$ .

(β) Στο  $S_n^1$ ,  $i=1,2,\dots,n-1$ , οι βέλτιστες λύσεις  $(\mathbf{c}^*, \mathbf{d}^*)$  του  $VaR_\alpha^*(S_n^i)$  πρέπει να ικανοποιούν είτε  $d_{n,j}^* \rightarrow \infty$  για  $j = i + 1, \dots, n$  είτε ισοδύναμα  $c_{n,j}^* = 0$  για  $j = i + 1, \dots, n$ .

**Πρόταση 3.2** Θεωρούμε την ελαχιστοποίηση της  $VaR_\alpha(\mathbf{c}, \mathbf{d})$  με εφικτό σύνολο  $S_n$ . Όταν (i)  $\alpha \geq \theta^*$  ή (ii)  $\alpha < \theta^*$  και  $\kappa(\delta_{\theta^*}) > 0$ ,  $\mathbf{c}^* = 0$  είναι μια λύση με  $VaR_\alpha^*(S_n^n) = \delta_\alpha$ .

**Πρόταση 3.3** Θεωρούμε ελαχιστοποίηση της  $VaR_\alpha(\mathbf{c}, \mathbf{d})$  με εφικτό σύνολο  $S_n$ .

(α) Όταν  $\alpha < \theta^*$  και  $\kappa(\delta_{\theta^*}) = 0$ ,  $(\mathbf{c}^*, \delta_{\theta^*})$  τέτοιο ώστε  $0 \leq c^* \leq \min\{\beta(\delta_{\theta^*}), 1\}$  είναι μια λύση στο  $VaR_\alpha^*(S_n^n) = \delta_\alpha$ .

(β) Όταν  $\alpha < \theta^*$ ,  $\kappa(\delta_{\theta^*}) < 0$  και  $\beta(\delta_{\theta^*}) > 1$ , το  $(1, \delta_{\theta^*})$  είναι μία λύση με  $VaR_\alpha^*(S_n^n) = \delta_\alpha + \kappa(\delta_{\theta^*}) < \delta_\alpha$ .

### Πρόταση 3.4

Ας υποθέσουμε ότι  $\alpha < \theta^*$  και  $\kappa(\delta_{\theta^*}) < 0$ , και  $\beta(\delta_{\theta^*}) \leq 1$ , και θεωρούμε την ελαχιστοποίηση της  $VaR_\alpha(\mathbf{c}, \mathbf{d})$  με το εφικτό σύνολο  $S_n$ .

1. Αν  $\lambda(\delta_{\theta^*}) \geq 0$ , τότε  $(\beta(\delta_{\theta^*}), \delta_{\theta^*})$  είναι μοναδική λύση με  $VaR_\alpha^*(S_n^n) = \delta_\alpha + \beta(\delta_{\theta^*}) * \kappa(\delta_{\theta^*}) < \delta_\alpha$ .

2. Ας υποθέσουμε  $\lambda(\delta_{\theta^*}) < 0$ .

i. Αν  $\beta(d_0) \leq 1$ , τότε  $(\beta(d_0), d_0)$  είναι μοναδική λύση με

$$VaR_\alpha^*(S_n^n) = \delta_\alpha - B \left[ \frac{1}{S_x(d_0)} - \frac{1}{\theta^*} \right], \text{ με } d_0 \in (\delta_{\theta^*}, \delta_\alpha) \text{ ικανοποιεί το } \lambda(d_0) = 0.$$

ii. Αν  $\beta(d_0) > 1$ , τότε  $(1, d_B)$  είναι μοναδική λύση με  $VaR_\alpha^*(S_n^n) = \delta_\alpha + \kappa(d_B) < \delta_\alpha$ , όπου το  $d_B$  προσδιορίζεται από την εξίσωση

$$\int_{d_B}^{\infty} S_x(x) dx.$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να παρουσιάσουμε τη λύση των μοντέλων (3.3.23) και (3.3.19). Υπενθυμίζεται ότι  $S_n = \cup_{i=0}^n S_n^i$ ,  $S_n$  είναι το εφικτό σύνολο του (3.3.23) και οι προτάσεις 3.1-3.4 ισχύουν για κάθε  $n = 1, 2, \dots$ . Από την Πρόταση 3.1(β) προκύπτει ότι το  $(\mathbf{c}_n^*, \mathbf{d}_n^*)$  είναι μια λύση του προβλήματος (3.3.23) εάν ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη:

$$VaR_{\alpha}\{\mathbf{c}_n^*, \mathbf{d}_n^*\} = \min(VaR_{\alpha}^*(S_n^0), VaR_{\alpha}^*(S_n^n)) \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.3.36)$$

Από τις προτάσεις 3.1(α), 3.4 και 3.3, συμπεραίνουμε ότι  $(c^*, \delta_{\theta^*})$  τέτοιο ώστε  $0 \leq c^* \leq \min\{\beta(\delta_{\theta^*}), 1\}$  είναι λύσεις του προβλήματος (3.3.23) όταν  $\alpha < \theta^*$  και  $\kappa(\delta_{\theta^*}) = 0$ , και ότι  $(1, \delta_{\theta^*})$  είναι μία λύση του προβλήματος (3.3.23) όταν  $\alpha < \theta^*$ ,  $\kappa(\delta_{\theta^*}) < 0$  και  $\beta(\delta_{\theta^*}) > 1$ . Επιπλέον, αφού συγκρίνουμε το  $VaR_{\alpha}^*(V)$  της Πρότασης 3.4 με το  $VaR_{\alpha}^*(S_n^0)$  της Πρότασης 3.1, συμπεραίνουμε ότι οι λύσεις πάνω από το  $S_n$  επιλύουν το πρόβλημα (3.3.23) όταν  $\alpha < \theta^*$ ,  $\kappa(\delta_{\theta^*}) < 0$  και  $\beta(\delta_{\theta^*}) \leq 1$ . Για τις βέλτιστες λύσεις στις υπόλοιπες περιπτώσεις, χρειάζεται μόνο να συγκρίνουμε την Πρόταση 3.2 με την Πρόταση 3.1. Τα αποτελέσματα, μαζί με τις αντίστοιχες προτάσεις, συνοψίζονται στον πίνακα 3.2, όπου  $(\mathbf{c}^*, \mathbf{d}^*)$  είναι η λύση του μοντέλου (3.3.23). Σημειώστε ότι η λύση είναι ανεξάρτητη από τη διάσταση  $n$ . Στη συνέχεια, από τον τύπο (3.3.18) προκύπτει η λύση του (3.3.19), η οποία είναι επίσης ανεξάρτητη από τη διάσταση  $n$  και αναφέρεται από τη στήλη με τίτλο  $\mu^*$  στον Πίνακα 3.1.

### 3.3.3 Βέλτιστες Λύσεις για το Μοντέλο Ελαχιστοποίησης VaR

Αυτή η υποενότητα αποσκοπεί στο να δείξει ότι η λύση που προκύπτει στην προηγούμενη υποενότητα για τα μοντέλα (3.3.19) επίσης επιλύει το μοντέλο (3.2.10). Αυτό αποδεικνύεται όπως παρουσιάζεται στην ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 3.5** Η λύση  $\mu^*$  που παρουσιάζεται στον πίνακα 3.1 επίσης επιλύει το μοντέλο (3.2.10).

**Απόδειξη.** Υπενθυμίζουμε ότι η  $\mu^*$  στον πίνακα 3.1 επιλύει τα μοντέλα (3.3.19) για όλα τα  $n = 1, 2, \dots$ . Έστω  $\mu$  μια θετική μέτρηση από το εφικτό σύνολο του προβλήματος (3.2.10), δηλαδή  $\mu \in M^+$  και  $\int \gamma(t) d\mu \leq B$ . Χρειάζεται να δείξουμε ότι  $VaR_{\alpha}(\mu^*) \leq$

$VaR_a(\mu)$ . Πριν προχωρήσουμε, μπορεί να είναι χρήσιμο να υπενθυμίσουμε τη σημείωση ότι  $\phi(t) = (VaR_a(X) - t)_+$  και  $\psi(t) = E[(X - t)_+]$ .

Από το Λήμμα 3.8, υπάρχει μια ακολουθία μέτρησης  $\{\mu_n, n = 1, 2, \dots\}$  στο  $M_n^+$  τέτοια ώστε η  $\int (x - t)_+ d\mu$  συγκλίνει κατά σημείο προς την  $\int (x - t)_+ d\mu_n$  από κάτω. Αυτό το γεγονός έχει δύο επιπτώσεις, οι οποίες ολοκληρώνουν την ολοκλήρωση της απόδειξης. Από τη μία πλευρά, έχουμε  $\int (x - t)_+ d\mu_n \leq B$  και συνεπώς  $\int \psi(t) d\mu_n \leq B$  από το Θεώρημα του Fubini για κάθε  $n = 1, 2, \dots$ . Αυτό σημαίνει ότι η  $\mu_n$  ανήκει στο εφικτό σύνολο του προβλήματος (3.3.19) για κάθε  $n = 1, 2, \dots$  και, ως εκ τούτου, έχουμε

$$VaR_a(\mu^*) \leq VaR_a(\mu_n) \text{ για } n = 1, 2, \dots \quad (3.3.37)$$

Από την άλλη πλευρά, με βάση το Θεώρημα του Fubini και το Λήμμα 3.8 έχουμε

$$\begin{aligned} \int \phi(t) d\mu_n &= \int (VaR_a(X) - t)_+ d\mu_n \\ &\rightarrow \int (VaR_a(X) - t)_+ \\ &= \int \phi(t) d\mu_n \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \int \psi(t) d\mu_n &= \int E(X - t)_+ d\mu_n \\ &= E[\int (X - t)_+ d\mu_n] \\ &\rightarrow E[\int (X - t)_+ d\mu_n] \\ &= \int E(X - t)_+ d\mu_n \\ &= \int \psi(t) d\mu_n, \end{aligned}$$

όπου το πρώτο αποτέλεσμα σύγκλισης οφείλεται στο Λήμμα 3.8 και το δεύτερο αποτέλεσμα σύγκλισης είναι συνδυασμός του Λήμματος 3.8 και του θεωρήματος της μονότονης σύγκλισης. Αυτά τα αποτελέσματα επομένως συνεπάγονται

$$\begin{aligned} VaR_a(\mu) &= VaR_a(X) - \int [\phi(t) - (1 + \theta)\psi(t)] d\mu_n \\ &\rightarrow VaR_a(X) - \int [\phi(t) - (1 + \theta)\psi(t)] d\mu_n \\ &= VaR_a(\mu) \end{aligned} \quad (3.3.38)$$

Τέλος, συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.3.37) και (3.3.38), έχουμε αμέσως  $VaR_a(\mu^*) \leq VaR_a(\mu)$ , με το οποίο η απόδειξη ολοκληρώνεται.

### 3.4 Κάποιες παρατηρήσεις και παραδείγματα

Όπως έχει αναφερθεί νωρίτερα, ο Cai et al. (2008) συζητά την βέλτιστη ανανεωτική ασφάλιση με ασυντελεστοποιημένα μοντέλα ανανεωτικής ασφάλισης που αφορούν μόνο στην ελαχιστοποίηση ενός συγκεκριμένου μέτρου κινδύνου της συνολικής έκθεσης κινδύνου του ασφαλιστή. Η προσέγγιση που περιγράφεται σε αυτό το κεφάλαιο, από την άλλη πλευρά, είναι μια γενίκευση του μοντέλου ελαχιστοποίησης  $VaR$  στο Cai et al. (2008), καθώς επιβάλλουμε ένα νέο περιορισμό εκτός από το συνηθισμένο κριτήριο στόχου για τον καθορισμό της βέλτιστης ανανεωτικής ασφάλισης. Αυτός ο νέος περιορισμός μπορεί να ερμηνευτεί είτε ως ένα όριο προϋπολογισμού ανανεωτικής ασφάλισης είτε ως μια εγγύηση κερδοφορίας για τον ασφαλιστή. Το παρόν μοντέλο είναι ευκρινέστερο καθώς λαμβάνει υπόψη και τον κίνδυνο και την ανταμοιβή. Τώρα κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις για να συγκρίνουμε και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από αυτήν τη μελέτη με αυτά που προκύπτουν από το Cai et al. (2008) όσον αφορά το μοντέλο ελαχιστοποίησης  $VaR$ .

**Παρατήρηση 3.1** Εκτός από τις δύο πρώτες περιπτώσεις, οι βέλτιστες συναρτήσεις καταβεβλημένων απωλειών που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.1 είναι όλες στη μορφή τύπων απώλειας στάσης. Πράγματι, υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις θα μειωθούν σε συμφωνημένες συνθήκες κατανομής. Για παράδειγμα, αν  $\theta^* > S(0)$ , τότε  $\delta_{\theta^*} \equiv S_x^{-1}(\theta^*) = 0$ , το οποίο σημαίνει ότι οι βέλτιστες συναρτήσεις καταβεβλημένων απωλειών στις περιπτώσεις (3), (4) και (5) συρρέουν στον τύπο κατανομής κοινού.

**Παρατήρηση 3.2** Υπενθυμίζουμε ότι όταν  $B > E[X]$ , ο περιορισμός του προϋπολογισμού της ανανεωτικής ασφάλισης στο προτεινόμενο μοντέλο της περιορισμένης βέλτιστης ανανεωτικής ασφάλισης (3.1.4) δεν επηρεάζει τη λύση. Ως εκ τούτου, αυτή η ειδική περίπτωση μειώνεται στο μη περιορισμένο μοντέλο ανανεωτικής ασφάλισης στο Cai et al. (2008) για το κριτήριο  $VaR$ . Μπορούμε επίσης να εξετάσουμε το εύρος του αναμενόμενου κέρδους  $P$  του ασφαλιστή που αντιστοιχεί σε αυτήν την ειδική περίπτωση. Παρατηρούμε

ότι όταν  $B > E[X]$ , η ανισότητα  $B > \int_{\delta_{\theta^*}}^{\infty} S_x(x) dx$  (ή αντίστοιχα  $\beta(\delta_{\theta^*}) > 1$ ) ισχύει αυτομάτως. Επιπλέον, η συνθήκη  $B > \int_{\delta_{\theta^*}}^{\infty} S_x(x) dx$  συνεπάγεται

$$P < P_0 - E[X] - \theta \int_{\delta_{\theta^*}}^{\infty} S_x(x) dx. \quad (3.4.39)$$

Επομένως, αν το αναμενόμενο κέρδος  $P$  του ασφαλιστή είναι μικρότερο από το ποσό στη δεξιά πλευρά της παραπάνω ανισότητας, ο περιορισμός κερδοφορίας γίνεται περιττός. Πράγματι, σε αυτήν την κατάσταση, η Περίπτωση (4) του Πίνακα 3.1 ανακτά τα μέρη (α) και (γ) του Θεωρήματος 3.1 στο Cai et al. (2008), ενώ η Περίπτωση (3) του Πίνακα 3.1 είναι ισοδύναμη με τα μέρη (β) και (δ) του Θεωρήματος 3.1 στο Cai et al. (2008).

**Παρατήρηση 3.3** Για να κατανοήσουμε την επίδραση της επιβολής του περιορισμού της κερδοφορίας στο βέλτιστο μοντέλο ανανεωτικής ασφάλισης, ας πούμε, συγκρίνουμε την περίπτωση (4) με την περίπτωση (5) του Πίνακα 3.1 υποθέτοντας ότι  $\lambda(\delta_{\theta^*}) \geq 0$ . Όταν ένας ασφαλιστής γίνεται πιο επιθετικός και απαιτεί ένα αναμενόμενο κέρδος μεγαλύτερο από το ποσό στη δεξιά πλευρά της ανισότητας (3.4.39) (δηλαδή,  $\beta(\delta_{\theta^*}) < 1$ ), η βέλτιστη συνάρτηση απωλειών που καταβάλλεται είναι  $f^*(x) = \beta(\delta_{\theta^*})(x - \delta_{\theta^*})_+$  με  $VaR_a^* = \delta_a + \beta(\delta_{\theta^*}) \cdot \kappa(\delta_{\theta^*})$ . Η αντίθεση αυτών των αποτελεσμάτων με το ανεξάρτητο μοντέλο, όπως στην περίπτωση (4) του Πίνακα 3.1, υπονοεί ότι με την παρουσία του περιορισμού της κερδοφορίας, η βέλτιστη σχεδίαση ανανεωτικής ασφάλισης είναι να διατηρούνται μεγαλύτερες απώλειες ενώ εκτίθενται σε υψηλότερο ελάχιστο επιτεύξιμο  $VaR_a^*$ . Αυτό είναι συνάδελφο με το κλασικό εμπόριο κινδύνου και ανταμοιβής.

Για να ολοκληρώσουμε αυτήν την ενότητα, παρέχουμε δύο παραδείγματα για να επιδείξουμε τα αποτελέσματά μας.

**Παράδειγμα 3.1** Υποθέστε ότι η μεταβλητή  $X$  ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή  $E[X] = 1.000$ . Τότε η συνάρτηση κατανομής  $S_x(x) = e^{-0.001x}$ ,  $x \geq 0$  και  $S_x(0) = 1$ . Υποθέστε επίσης ότι οι παράγοντες φόρτωσης για τον επανασφαλιστή και τον ασφαλιστή είναι 20% και 15% αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι  $\theta = 0.2$  και  $\delta_{\theta^*} = S_x^{-1}(1 / (1 + \theta)) = 182.32$ . Υπό την επιπρόσθετη υπόθεση της αρχής του προσδόκιμου ασφαλιστικού αποτελέσματος, έχουμε  $p_0 = 1.15E[X] = 1,150$  και  $\Pi(f(X)) = 1.2E[f(X)]$  για μια δεδομένη συνάρτηση απώλειας  $f$  που παραχωρείται. Στην πράξη αναμένεται ο

παράγοντας φόρτωσης για τον ανανεωτή να είναι υψηλότερος από αυτόν του ασφαλιστή. Συνεπώς, τα επιτεύξιμα αναμενόμενα κέρδη  $P$  κυμαίνονται στο διάστημα  $[0, 150]$ , έτσι ώστε το  $B \in [0, 750]$ . Ο πίνακας 3.3 αναφέρει το  $VaR_a^*$  και την αντίστοιχη βέλτιστη συνάρτηση απώλειας που παραχωρείται (όπως καθορίζεται από τις  $c$  και  $d$ ) για διάφορους συνδυασμούς των  $P \in \{148, 145, 140, 100, 50, 0\}$  και  $\alpha \in \{1\%, 5\%, 10\%\}$ . Για αυτά τα παραδείγματα, ικανοποιούνται οι συνθήκες  $a < \theta^*$ ,  $\kappa(\delta_{\theta^*}) < 0$  και  $\beta(\delta_{\theta^*}) \leq 1$  και συνεπώς χρησιμοποιείται η Πρόταση 3.4 για να καθοριστούν οι βέλτιστες λύσεις. Για παράδειγμα, στο  $\alpha = 10\%$ , η ρίζα της  $\lambda(d)$  εμφανίζεται στο  $d_0 = 1,302.6$  με το  $\beta(d_0)$  να εξαρτάται από το επίπεδο του  $B$  (εξίσωση (3.3.12)). Αν εγγυηθούμε ένα αναμενόμενο κέρδος \$145 (ή αντίστοιχα  $B = 25$ ), τότε η βέλτιστη συνάρτηση απώλειας που παραχωρείται στην κατηγορία  $IC$  είναι μια συνδυασμός αναλογικής κατανομής και επιφανειακής απώλειας που καταβάλλεται και δίνεται από τη συνάρτηση  $f(x) = c(x - d)_+$  όπου  $c = \beta(d_0) = 0.09$ ,  $d = d_0 = 1,302.6$  και με ελάχιστο επιτεύξιμο  $VaR$  \$2.240,6.

Παρατηρούμε ότι όταν αυξάνουμε το επίπεδο εμπιστοσύνης  $1 - \alpha$ , το ελάχιστο  $VaR$ , οι βέλτιστες τιμές των  $c$  και  $d$  γίνονται μεγαλύτερες, υπό την προϋπόθεση ότι  $\beta(d_0) \leq 1$ . Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να επιτύχουμε υψηλότερο επίπεδο εμπιστοσύνης με το κόστος υψηλότερου ελάχιστου  $VaR$ . Επιπλέον, ο βέλτιστος συμβόλαιος επαναασφάλισης και το ελάχιστο επιτεύξιμο  $VaR$  παραμένουν αμετάβλητα ως προς το  $\alpha$ , υπό την προϋπόθεση ότι  $\beta(d_0) > 1$ .

Η επίδραση του αναμενόμενου κέρδους  $P$  (ή ισοδύναμα  $B$ ) στην βέλτιστη επαναασφάλιση φαίνεται επίσης με σαφήνεια. Πρώτον, αν μειώσουμε το ελάχιστο επίπεδο αναμενόμενου κέρδους, η βέλτιστη διατήρηση  $d$  δεν αλλάζει όσο ισχύει  $\beta(d_0) \leq 1$ . Το βέλτιστο  $c$ , ωστόσο, θα αυξηθεί ανάλογα, όπως δηλώνεται από το μέρος (i) της Πρότασης 3.4(b) και επιβεβαιώνεται από τα αριθμητικά μας αποτελέσματα. Δεύτερον, όταν η συνθήκη  $\beta(d_0) > 1$  ικανοποιείται καθώς μειώνουμε περαιτέρω το  $P$ , ο βέλτιστος σχεδιασμός της επαναασφάλισης γίνεται ένα καθαρό συμβόλαιο stop-loss με την βέλτιστη διατήρηση  $d$  που μειώνεται επίσης με το  $P$  (δείτε την εξίσωση (3.3.12)). Τρίτον, το ελάχιστο επιτεύξιμο  $VaR$  είναι μια αυξανόμενη συνάρτηση του  $P$ . Αυτό είναι το κλασικό εμπόριο κινδύνου και ανταμοιβής, με την έννοια ότι μπορεί να επιτευχθεί υψηλότερο αναμενόμενο κέρδος με το κόστος υψηλότερης ελάχιστης έκθεσης στον κίνδυνο (όπως μετράτε από το  $VaR$ ) (δείτε



την παρατήρηση 3.3). Τέλος, εάν επιτρέψουμε το  $B$  να αυξηθεί πέρα από το 833.33 (και το  $P$  είναι αρνητικό), τότε  $\beta(\delta_{\theta^*}) > 1$  επειδή  $\int_{\delta_{\theta^*}}^{\infty} S_x(x) dx = 833.33$  και το μέρος ( $\beta$ ) της Πρότασης 3.3 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιοριστεί η βέλτιστη απώλεια επανασφάλισης. Σε αυτήν την περίπτωση, ο ανώτατος περιορισμός  $B$  δεν έχει καμία επίδραση στο πρόβλημα βελτιστοποίησης και, στην πραγματικότητα, μειώνεται στο πρόβλημα ανεπιφύλακτου περιορισμού, όπως μελετήθηκε στο Cai et al. (2007). Στο παράδειγμά μας, το  $VaR_a^*$  είναι 1,182.3 δολάρια με βέλτιστη διατήρηση  $\delta_{\theta^*} = 182.3$  (δείτε επίσης την παρατήρηση 3.2). Ο μη περιορισμένος βέλτιστος σχεδιασμός επανασφάλισης λειτουργεί επίσης ως ένα πρότυπο για το προτεινόμενο πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης μας. Για παράδειγμα, στο  $\alpha = 1\%$ , αν ο ασφαλιστής ήθελε να επιδιώξει ένα αναμενόμενο κέρδος 145 δολαρίων, ο ασφαλιστής πρέπει να αντέξει περισσότερες από τρεις φορές την έκθεση στον κίνδυνο σε σχέση με την περίπτωση ανεπιφύλακτη επανασφάλισης (σύγκρινε 3,715.5 δολάρια με 1,182.3).

**Παράδειγμα 3.2** Σε αυτό το παράδειγμα, υποθέτουμε ότι η μεταβλητή  $X$  ακολουθεί μια κατανομή Pareto με  $S_x(x) = \left(\frac{2,000}{x+2000}\right)^3$ , για  $x \geq 0$ , έτσι ώστε η  $E[X] = 1.000$  να είναι η ίδια με το προηγούμενο παράδειγμα. Υποθέτουμε επίσης ότι  $\theta = 0,2$  και  $p_0 = 1150$ . Ο πίνακας 3.4 παρουσιάζει τους βέλτιστους σχεδιασμούς επανασφάλισης για την ίδια σύνολο τιμών παραμέτρων με το προηγούμενο παράδειγμα. Παρατηρούμε ότι για ένα σταθερό  $P$  και  $\alpha$ , το ελάχιστο επιτεύξιμο  $VaR$  είναι μεγαλύτερο για το ρίσκο της κατανομής Pareto. Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς η κατανομή Pareto θεωρείται πιο κινδυνώδης από την αντίστοιχη εκθετική κατανομή, καθώς έχει μια πιο "βαριά" ουρά. Εκτός από αυτό, οι συζητήσεις που κάναμε προηγουμένως είναι εξίσου εφαρμόσιμες στο παρόν παράδειγμα.

### Απόδειξη του Λήμματος 3.2.

Η κωνικότητα της  $I_f(x)$  προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι η  $f(x)$  είναι κυρτή. Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχουν δύο σημεία  $x_1$  και  $x_2$  τέτοια ώστε  $0 \leq x_1 < x_2$  και ισχύει  $I_f(x_1) - I_f(x_2) > 0$ , δηλαδή,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 1 \quad (3.5.40)$$

Από την άλλη πλευρά, από την κυρτότητα της  $f(x)$  έχουμε

$$f(x_2) \leq \frac{x - x_2}{x - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x - x_1} f(x)$$

για  $x \geq x_2$ , ή αντίστοιχα

$$f(x) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1}.$$

Επομένως, από την (3.5.40) προκύπτει ότι υπάρχει μια σταθερά  $x_0$  τέτοια ώστε  $f(x_0) > x_0$ , το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση ότι  $f(x) \leq x$  για όλα τα  $x \geq 0$ . Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι η  $I_f(x)$  είναι αύξουσα.

### Απόδειξη του Λήμματος 3.3

(α) Πρώτα παρατηρούμε ότι οι παράγωγοι των  $\kappa(d)$ ,  $\kappa'(d) = 1 - (1 + \theta)S_x(d)$ ,  $\kappa''(d) = (1 + \theta)f_x(d) \geq 0$  για  $d \geq 0$ . Συνεπώς, η  $\kappa(d)$  είναι κυρτή στο διάστημα  $[0, \infty)$ . Επιπλέον, μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι εάν  $\theta^* < S_x(0)$ , τότε  $\kappa'(d) < 0$  για  $0 < d < \delta_{\theta^*}$  και  $\kappa'(d) > 0$  για  $\kappa'(d) > \delta_{\theta^*}$ , και ότι  $\kappa'(d) > 0$  για  $d > 0$  εάν  $\theta^* \geq S_x(0)$ . Αυτό δικαιολογεί τις εξισώσεις (3.3.15)-(3.3.17).

(β) Από την (3.3.14) προκύπτει ότι  $\lambda'(d) = [\delta_\alpha - d] f_x(d)$ . Από την υπόθεση ότι η  $X$  έχει αυστηρά αύξουσα κατανομή, έχουμε  $f_x(d) > 0$  για  $d \geq 0$ , οπότε  $\lambda'(d) > 0$  για  $d \in [0, \delta_\alpha)$ . Ως αποτέλεσμα, η συνάρτηση  $\lambda(d)$  είναι αυστηρά αύξουσα στο διάστημα  $[0, \delta_\alpha]$ . Επιπλέον, έχουμε  $\lambda(\delta_\alpha) = \int_{\delta_\alpha}^{\infty} S_x(x) > 0$ , και  $\delta_{\theta^*} < \delta_\alpha$  αφού  $\alpha < \theta^*$ . Συνεπώς, πρέπει να υπάρχει μια μοναδική ρίζα  $d_0$  για την εξίσωση  $\lambda(d) = 0$  στο  $(\delta_{\theta^*}, \delta_\alpha)$  αφού έχουμε  $\lambda(\delta_{\theta^*}) < 0$ .

### Λήμμα 3.4

Αν  $\alpha < \theta^*$ , τότε  $Var^*(S_n^n) = Var_a^*(T_n^n)$ ; δηλαδή, ισχύει η (3.3.28).

Απόδειξη.

Αν  $\theta^* \geq S_x(0)$ , τότε η (3.3.28) ισχύει αυτονόητα, αφού  $\delta_{\theta^*} = 0$ , επομένως  $S_n^n = T_n^n$ .

Υποθέτουμε ότι  $\theta^* < S_x(0)$ . Έστω  $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$  ένας διάνυσμα στο  $S_n^n$  που ικανοποιεί τη σχέση  $d_{n,j} < \delta_{\theta^*}$ , για  $j = 1, 2, \dots, i$ , για ένα σταθερό  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , και έστω  $(\mathbf{c}, \mathbf{d}')$  το αντίστοιχο διάνυσμα που προκύπτει από το  $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$  αντικαθιστώντας απλώς την  $d_{n,j}$  με το  $\delta_{\theta^*}$  για όλα τα  $j = 1, 2, \dots, i$ .

**Λήμμα 3.5** Αν  $\alpha < \theta^*$ ,  $\kappa(\delta\theta^*) < 0$  και  $\beta(\delta\theta^*) \leq 1$ , τότε ισχύει η ακόλουθη σχέση  

$$VaR_\alpha^*(T \geq n) = VaR_\alpha^*(V). \quad (3.5.42)$$

**Λήμμα 3.6** Αν  $\alpha < \theta^*$ ,  $\kappa(\delta\theta^*) < 0$  και  $\beta(\delta\theta^*) \leq 1$ , τότε ισχύει η παρακάτω ανισότητα:  

$$VaR_\alpha^*(T_n^{\leq}) \geq VaR_\alpha^*(V).$$

**Λήμμα 3.7** Αν  $\alpha < \theta^*$ ,  $\kappa(\delta\theta^*) < 0$  και  $\beta(\delta\theta^*) \leq 1$ , τότε ισχύει  $VaR_\alpha^*(S_n^n) = VaR_\alpha^*(V)$ , (V), δηλαδή η εξίσωση (3.3.31) ισχύει.

**Λήμμα 3.8** Για οποιοδήποτε μέτρο  $\mu \in M^+$ , υπάρχει μια ακολουθία μέτρων  $\{\mu_n, n = 1, 2, \dots\}$  στο  $M_n^+$  τέτοια ώστε η  $h_n(x)$  να συγκλίνει σημείο-προς-σημείο προς την  $f(x)$  από κάτω, όπου  

$$h_n(x) = \int (x - t)_+ d\mu_n \text{ και } f(x) = \int (x - t)_+ d\mu \quad x \geq 0.$$

# Κεφάλαιο 4

## Μοντέλο Ελαχιστοποίησης CTE: Συμβόλαια γενικής αντασφάλισης

### 4.1 Εισαγωγή και μοντέλα αντασφάλισης

Στα προηγούμενα κεφάλαια, η βέλτιστη συνάρτηση απώλειας από την εκχώρηση υποτίθεται είτε ότι έχει ορισμένη συγκεκριμένη μορφή είτε ότι περιορίζεται σε κάποια ειδική κατηγορία. Για παράδειγμα, εξετάσαμε τις συμβάσεις stop-loss ή quota-share στο κεφάλαιο 2 και αναλύσαμε την κατηγορία των αυξανόμενων κυρτών συναρτήσεων στο κεφάλαιο 3. Σε αυτό το κεφάλαιο θα επεκτείνουμε τα αποτελέσματά μας εξετάζοντας τη βέλτιστη μεταξύ όλων των πιθανών συναρτήσεων εκχωρούμενων ζημιών χρησιμοποιώντας το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του CTE του συνολικού κινδύνου του ασφαλιστή. Λόγω της γενικότητας του μοντέλου, αυτό αυξάνει σημαντικά τη μαθηματική πολυπλοκότητα σχετικά με τον εντοπισμό των βέλτιστων λύσεων. Όπως θα παρουσιάσουμε σύντομα, η διατύπωση του μοντέλου βέλτιστης αντασφάλισης συνεπάγεται την επίλυση κάποιου κυρτού προβλήματος βελτιστοποίησης σε έναν χώρο Hilbert με μια συνάρτηση στόχου η οποία είναι κατευθυντικά διαφοροποιήσιμη αλλά όχι διαφοροποιήσιμη κατά Gâteaux. Ως εκ τούτου, η μέθοδος Lagrange που βασίζεται στην έννοια της κατευθυντικής παραγώγου θα χρησιμοποιηθεί για την αναζήτηση της βέλτιστης εκχωρούμενης ζημίας συνάρτησης.

Πριν προσδιορίσουμε το μοντέλο αντασφάλισης, ας υπενθυμίσουμε τη γενική ρύθμιση σε έναν στατικό σχεδιασμό αντασφάλισης και ας κάνουμε ορισμένες τεχνικές παραδοχές. Έστω ότι το  $X$  συμβολίζει τη (συνολική) ζημία που αναλαμβάνει αρχικά ένας ασφαλιστής. Ας υποθέσουμε ότι η  $X$  είναι μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή και την ταυτίζουμε με ένα μέτρο πιθανότητας  $P_r$  στον μετρήσιμο χώρο  $(\Omega, \mathcal{F})$  με  $\Omega = [0, \infty)$  και  $\mathcal{F}$  το  $\sigma$ -πεδίο Borel στο  $\Omega$ , έτσι ώστε η συνάρτηση κατανομής του υποκείμενου κινδύνου  $X$  να ορίζεται από την  $F_x(t) := P_r\{[0, t]\}$  για  $t \geq 0$ . Συμβολίζουμε με  $f(X)$  το μέρος της ζημίας που

μεταβιβάζεται από τον ασφαλιστή σε έναν αντασφαλιστή παρουσία της αντασφάλισης. Η  $f$  μπορεί να ταυτιστεί ως μια τέτοια συνάρτηση  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , και ονομάζεται συνάρτηση εκχωρούμενης ζημίας ή συνάρτηση αποζημίωσης. Μια συμβατική υπόθεση για τη συνάρτηση ceded loss  $f$  είναι ότι  $0 \leq f(x) \leq x$  για όλα τα  $x \geq 0$ . Με τη συνάρτηση ceded loss  $f(X)$ , ο ασφαλιστής θα διατηρήσει ζημιά  $I_f(X) := X - f(X)$ . Ομοίως, η  $I_f$  μπορεί επίσης να αναγνωριστεί ως συνάρτηση  $I_f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , που ονομάζεται συνάρτηση διατηρούμενης απώλειας. Από την άλλη πλευρά, μεταφέροντας μέρος της ζημίας του στον αντασφαλιστή, ο ασφαλιστής υποχρεούται να καταβάλει το αντασφάλιστρο  $\Pi(f(X))$  στον αντασφαλιστή σύμφωνα με μια δεδομένη αρχή  $\Pi$ . Κατά συνέπεια, το συνολικό κόστος ή ο συνολικός κίνδυνος για τον ασφαλιστή με την παρουσία αντασφάλισης, που συμβολίζεται με  $T_f(X)$ , είναι το άθροισμα της διατηρούμενης ζημίας και του αντασφαλιστικού ασφαλίστρου, δηλ.

$$T_f(X) = I_f(X) + \Pi(f(X)) = X - f(X) + \Pi(f(X)). \quad (4.1.1)$$

Στα επόμενα, θα μπορούσαμε να παραλείψουμε το "(X)" σε συμβολισμούς όπως  $f(X)$ ,  $I_f(X)$  και  $T_f(X)$ , και απλά να χρησιμοποιήσουμε τα  $f$ ,  $I_f$  και  $T_f$  για να συμβολίσουμε αυτές τις τυχαίες μεταβλητές, αν αυτό είναι σαφές στο αντίστοιχο πλαίσιο.

Ας υποθέσουμε ότι το ασφάλιστρο αντασφάλισης χρησιμοποιεί την αρχή της προσδοκίας με ένα φορτίο ασφαλείας  $\theta > 0$ , δηλαδή  $\Pi(f) = (1 + \theta)E[f]$ , και ας υποθέσουμε ότι ο ασφαλιστής αναζητά τη βέλτιστη αντασφάλιση ελαχιστοποιώντας το μέτρο κινδύνου CTE με βάση τον συνολικό του κίνδυνο  $T_f$ . Τότε το πρόβλημα του ασφαλιστή μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$(\mathbf{P}'_0) \begin{cases} \min_f CTE_\alpha(T_f) = CTE_\alpha(X - f(X) + (1 + \theta)E[f]) \\ \text{s. t. } 0 \leq f(x) \leq x \text{ για όλα τα } x \geq 0, E[f(X)] \in [0, \pi/(1 + \theta)]. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Σημειώστε ότι το παραπάνω μοντέλο βέλτιστης αντασφάλισης μοιάζει πολύ με αυτά που έχουμε αναλύσει στο παρελθόν. Η σημαντική διαφορά είναι ότι η ελαχιστοποίηση στο μοντέλο  $(\mathbf{P}'_0)$  λαμβάνεται σε σχέση με όλες τις πιθανές συναρτήσεις ζημιών των ασφαλισμένων, αντί να περιορίζεται σε κάποια ειδική κατηγορία.

**Παρατήρηση 4.1** Ο περιορισμός  $E[f(X)] \leq \pi/(1 + \theta)$  για τη συνάρτηση απώλειας  $f$  έχει τουλάχιστον τις ακόλουθες δύο οικονομικές ερμηνείες:

(i) Ο περιορισμός μπορεί να ερμηνευθεί ως ο προϋπολογισμός των αντασφαλιστρών-δηλαδή, το αντασφάλιστρο που είναι διατεθειμένος να πληρώσει ο ασφαλιστής δεν είναι μεγαλύτερο από  $\pi$ .

(ii) Ο περιορισμός μπορεί επίσης να ερμηνευθεί ως εγγύηση ελάχιστης αναμενόμενης κερδοφορίας. Για να γίνει αυτό αντιληπτό, ας υποδηλώσουμε με  $p_0$  το ασφάλιστρο που λαμβάνει ο ασφαλιστής για την ανάληψη ασφάλισης στον κίνδυνο  $X$  και ας υποδηλώσουμε με  $B$  το καθαρό κέρδος του ασφαλιστή παρουσία της αντασφάλισης. Τότε έχουμε

$$B(f) = p_0 - T_f(X) = p_0 - X + f(X)\theta(1 + \theta)E[f],$$

έτσι ώστε το αναμενόμενο κέρδος,  $b(f) := E[B]$ , να δίνεται από τη σχέση

$$b(f) = E[B(f)] = p_0 - E[X] - \theta E[f].$$

Κατά συνέπεια, ένας περιορισμός κερδοφορίας τέτοιος ώστε  $b \geq l$  για ένα ορισμένο προκαθορισμένο επίπεδο  $b$  μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα ως  $E[f] \leq \frac{\pi}{1+\theta}$  όπου

$$\pi = \frac{1+\theta}{\theta}(p_0 - E[X] - l).$$

Συνεχίζουμε τώρα με την αντιμετώπιση του προβλήματος βελτιστοποίησης ( $P'_0$ ). Για μαθηματική ευκολία, υποθέτουμε ότι το  $X$  έχει πεπερασμένες δύο πρώτες στιγμές, ώστε να μπορούμε να περιορίσουμε τον χώρο  $\mathcal{L}^2 := \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  για τις βέλτιστες συνάρτηση απώλειας. Έστω  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_f \cap \mathcal{Q}_\pi$  όπου

$$\mathcal{Q}_f := \{f \in \mathcal{L}^2: 0 \leq f(x) \leq x \text{ για } x \geq 0\}, \quad (4.1.3)$$

Και

$$\mathcal{Q}_\pi := \{f \in \mathcal{L}^2: 0 \leq (1 + \theta)E[f] \leq \pi\}, \quad (4.1.4)$$

αντίστοιχα. Τότε μοντέλο αντασφάλισης ( $P'_0$ ) μπορεί να επαναδιατυπωθεί ισοδύναμα ως εξής

$$(P_0) \min_{f \in \mathcal{Q}} CTE_\alpha(T_f) = CTE_\alpha(X - f(X) + (1 + \theta)E[f]) \quad (4.1.5)$$

## 4.2 Βέλτιστες αντασφαλιστικές συμβάσεις

Στόχος της παρούσας ενότητας είναι να συζητηθούν οι βέλτιστες λύσεις για το μοντέλο αντασφάλισης ( $P_0$ ) που ορίζεται στο (4.1.5). Οι μαθηματικές προκλήσεις της επίλυσης αυτού του προβλήματος έγκεινται άμεσα σε δύο τουλάχιστον πτυχές. Πρώτον, το μοντέλο

είναι προφανώς ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης άπειρης διάστασης, που περιλαμβάνει την αναζήτηση μιας βέλτιστης συνάρτησης αντί για τις βέλτιστες τιμές ενός πεπερασμένου αριθμού παραμέτρων. Δεύτερον, για μια γενική εφικτή συνάρτηση απώλειας ceded  $f$  δεν υπάρχει αναλυτική έκφραση για τη συνάρτηση στόχου  $CTE_\alpha(T_f)$ . Αναγνωρίζοντας ότι η άμεση επίλυση του (P0) μπορεί να είναι πολύ δύσκολη, το επιλύουμε αυτό εισάγοντας πρώτα ένα βοηθητικό μοντέλο ( $P_T$ ) (όπως ορίζεται στο (4.2.10)). Στη συνέχεια θα αποδείξουμε σύντομα ότι το μοντέλο (PT) είναι πιο εύχρηστο. Επιπλέον, ένα βασικό αποτέλεσμα των Rockafellar and Uryasev (2002) υποστηρίζει ότι η λύση του ( $P_T$ ) όσον αφορά τη μεταβλητή απόφασης  $f$  είναι επίσης η λύση του ( $P_0$ ).

#### 4.2.1 Βοηθητικό μοντέλο και συνθήκες βελτιστοποίησης

Για να περιγράψουμε το βοηθητικό μοντέλο ( $P_T$ ), είναι βολικό να εισάγουμε την απεικόνιση  $G_\alpha(\xi, f) := \xi + \frac{1}{\alpha} E[X - f + (1 + \theta)E[f] - \xi)_+]$  (4.2.6)

με το ίδιο  $\alpha > 0$  με αυτό που σχετίζεται με το μέτρο κινδύνου CTE στο μοντέλο ( $P_0$ ). Η σημασία της εισαγωγής του  $G_\alpha(\xi, f)$  μπορεί να συναχθεί από το παρακάτω λήμμα, το οποίο αποτελεί συνέπεια κατεύθυνσης των Rockafellar και Uryasev (2002, Θεώρημα 14):

Λήμμα 4.1 Η ελαχιστοποίηση της  $CTE_\alpha(T_f)$  ως προς  $f \in \mathcal{Q}$  είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση με την ελαχιστοποίηση του  $G_\alpha(\xi, f)$  σε όλα τα  $(\xi, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Q}$ , με την έννοια ότι

$$\min_{f \in \mathcal{Q}} CTE_\alpha(T_f) = \min_{(\xi, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Q}} G_\alpha(\xi, f), \quad (4.2.7)$$

Όπου επιπλέον,

$$(\xi^*, f^*) \in \operatorname{argmin}_{(\xi, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Q}} G_\alpha(\xi, f) \quad (4.2.8)$$

αν και μόνο αν

$$f^* \in \operatorname{argmin}_{f \in \mathcal{Q}} CTE_\alpha(T_f), \xi^* \in \operatorname{argmin}_{\xi \in \mathbb{R}} G_\alpha(\xi, f^*). \quad (4.2.9)$$

Το παραπάνω λήμμα δηλώνει τυπικά ότι η ελαχιστοποίηση της  $CTE_\alpha(T_f)$  πάνω στο  $\mathcal{Q}$  είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης  $G_\alpha(\xi, f)$  πάνω στο χώρο του

γινομένου  $\mathbb{R} \times \mathcal{Q}$ . Πιο σημαντικά, αυτό μας επιτρέπει να αναδιατυπώσουμε την  $(\mathbf{P}_0)$  ως εξής.

$$(\mathbf{P}_T) \left\{ \begin{array}{l} \min_{(\xi, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Q}} G_\alpha(\xi, f) \equiv \xi + \frac{1}{\alpha} E[(X - f + (1 + \theta)E[f] - \xi)_+] \\ \text{s. t. } E[f] \in [0, \pi/(1 + \theta)] \end{array} \right. \quad (4.2.10)$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 4.1, αν το  $(\xi^*, f^*)$  είναι μια λύση του προβλήματος  $\mathbf{P}_T$ , τότε το  $f^*$  λύνει αντασφαλιστικό μοντέλο  $\mathbf{P}_0$ , δηλαδή η  $f^*$  είναι μια βέλτιστη συνάρτηση απώλειας.

Ενώ το  $(\mathbf{P}_T)$  είναι ισοδύναμο με το αρχικό μας πρόβλημα  $(\mathbf{P}_0)$ , δεν έχουμε ακόμη λύσει το  $(\mathbf{P}_T)$ . Σε σύγκριση με το πρόβλημα  $(\mathbf{P}_0)$ , ένα προφανές πλεονέκτημα του μοντέλου  $(\mathbf{P}_T)$  είναι ότι η συνάρτηση στόχου του τελευταίου προβλήματος έχει αναλυτική έκφραση. Ωστόσο, θα εξακολουθεί να είναι αρκετά μαθηματική η εμπλοκή στην επίλυση του προβλήματος  $(\mathbf{P}_T)$ . Η πρόκληση είναι ότι εξακολουθεί να είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης άπειρων διαστάσεων και η συνάρτηση στόχου δεν είναι παραγωγίσιμη κατά Gâteaux, γεγονός που συνεπάγεται ότι το ευρέως χρησιμοποιούμενο θεώρημα Karush-Kuhn-Tucker δεν είναι χρήσιμο για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος.

Όπως θα αποδείξουμε στην ενότητα 4.4 του παραρτήματος του παρόντος κεφαλαίου, το  $(\mathbf{P}_T)$  είναι ένα κυρτό πρόβλημα. Επιπλέον, η συνάρτηση στόχου του  $G_\alpha(\xi, f)$  είναι κατευθυντικά διαφορίσιμη ως προς  $(\xi, f)$  πάνω στο εφικτό σύνολό του. Αυτό μας παρακινεί να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο κατευθυντικών παραγώγων με βάση τη μέθοδο Lagrange για την επίλυση του προβλήματος  $(\mathbf{P}_T)$ . Πράγματι, ορίζοντας τα  $g^*$  και  $V$  ως

$$g^* = X - f^* + (1 + \theta)E[f^*] - \xi^* \quad (4.2.11)$$

και

$$V = (1 + \theta)E[f] - \xi - f, \quad (4.2.12)$$

αντίστοιχα, η Ενότητα 4.4 καθορίζει τυπικά τις συνθήκες βελτιστοποίησης για το πρόβλημα  $(\mathbf{P}_T)$ , όπως φαίνεται στην ακόλουθη πρόταση:

**Πρόταση 4.1** Ένα στοιχείο  $(\xi^*, f^*) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Q}$  λύνει το πρόβλημα  $(\mathbf{P}_T)$  εάν και μόνο εάν υπάρχει μια σταθερά  $\gamma \in \mathbb{R}$  και μια τυχαία μεταβλητή  $\lambda \in \mathcal{L}^2$  έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες τρεις συνθήκες:



$$\Sigma 1. \quad A(\xi, f) \equiv \alpha[\xi + r(1 + \theta)E[f] + E[\lambda f]] + E[V_1 1_{g^* > 0}] + E[V_+ 1_{g^* > 0}] \geq 0, \\ \forall(\xi, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{L}^2,$$

$$\Sigma 2. \quad E[\lambda[f - f^*]] \leq 0, f \in \mathcal{Q}_f,$$

$$\Sigma 3. \quad r(E[f] - E[f^*]) \leq 0 \text{ για κάθε } f \in \mathcal{Q}_\pi.$$

## 4.2.2 Βέλτιστες συναρτήσεις ζημιών

Σε όλη την παρούσα υποενότητα, υποθέτουμε ότι  $\alpha(1 + \theta) \leq 1$ . Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό  $\pi_\alpha$  για να υποδηλώσουμε

$$\pi_\alpha = (1 + \theta)E[(X - d_\alpha)_+] \quad (4.2.13)$$

Όπου

$$d_\alpha = \inf\{d: Pr[X > d] \leq \alpha\}. \quad (4.2.14)$$

Οι συμβολισμοί  $\pi_\theta$  και  $d_\theta$  ορίζονται αναλογικά ως εξής

$$\pi_\theta = (1 + \theta)E[(X - d_\theta)_+] \quad (4.2.15)$$

Όπου

$$d_\theta = \inf\left\{d: Pr[X > d] \leq \frac{1}{1 + \theta}\right\}. \quad (4.2.16)$$

Τονίζουμε ότι η συνθήκη  $\alpha(1 + \theta) \leq 1$  είναι αρκετά ήπια, καθώς στην πράξη τόσο το  $\alpha$  όσο και το  $\theta$  είναι συνήθως πολύ μικρότερα από τη μονάδα. Η ίδια συνθήκη συνεπάγεται επίσης ότι  $d_\alpha \geq d_\theta$  έτσι ώστε  $\pi_\alpha \leq \pi_\theta$ .

Ασχολούμαστε τώρα με τις βέλτιστες λύσεις του προβλήματος  $(P_T)$ . Παρουσιάζουμε τις λύσεις ανάλογα με το επίπεδο του προϋπολογισμού των αντασφαλιστρών. Ειδικότερα, εξετάζουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

- Περίπτωση (i):  $\pi \in (0, \pi_\alpha)$ ,
- Περίπτωση (ii):  $\pi \in [\pi_\alpha, \pi_\theta]$  και
- Περίπτωση (iii):  $\pi \in [\pi_\theta, \infty)$ .

Οι λύσεις σε αυτές τις περιπτώσεις διατυπώνονται επίσημα στα θεωρήματα 4.1, 4.2 και 4.3, αντίστοιχα.

Περίπτωση (i):  $\pi \in (0, \pi_\alpha)$

#### Θεώρημα 4.1

Ας υποθέσουμε ότι  $\alpha(1 + \theta) \leq 1$ . Τότε όλες οι συναρτήσεις απώλειας  $f^*$  της ακόλουθης μορφής είναι οι βέλτιστες λύσεις του προβλήματος ( $P_T$ ):

$$f^*(x) = \begin{cases} 0, & x < d \\ \ell(x), & x \geq d \end{cases} \quad (4.2.17)$$

,όπου η συνάρτηση  $\ell(x)$  ικανοποιεί την σχέση

$$0 \leq \ell(x) < x - d_\alpha, \text{ για } x \geq d, \quad (4.2.18)$$

Και η απαλλαγή  $\hat{d} > 0$  είναι η λύση της σχέσης

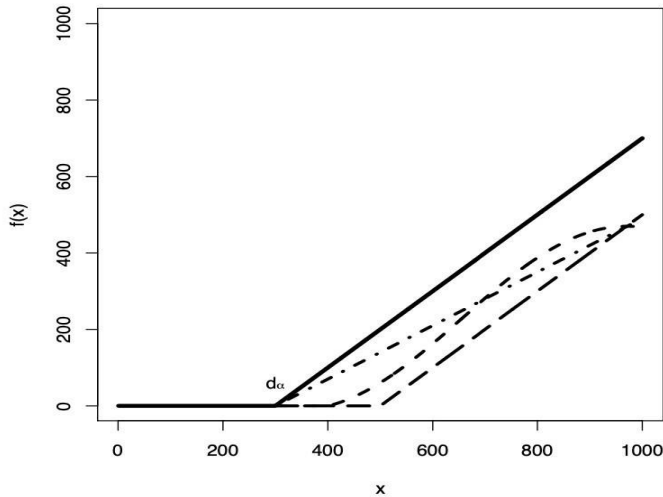
$$E[f^*] = \frac{\pi}{(1 + \theta)}. \quad (4.2.19)$$

Κάνουμε τώρα τις ακόλουθες δύο παρατηρήσεις σε σχέση με το παραπάνω θεώρημα.

Παρατήρηση 4.2 Ο περιορισμός (4.2.18) δηλώνει ότι για  $x \geq \hat{d}$  η συνάρτηση  $\ell(x) \geq 0$  περιορίζεται από πάνω με  $x - d_\alpha$ . Επιπλέον, όταν  $x = \hat{d}$ , έχουμε  $\hat{d} > \ell(\hat{d}) + d_\alpha \geq d_\alpha$ .

Κατά συνέπεια, η συνάρτηση (4.2.17) που ικανοποιεί τις (4.2.18) και (4.2.19) ορίζει μια κατηγορία συναρτήσεων εκχωρούμενων ζημιών που έχουν σχήμα κάτω από την ευθεία  $f(x) = x - d_\alpha$  με απαλλαγή μεγαλύτερη από  $d_\alpha$  και προκύπτουν αντασφαλιστικό ασφάλιστρο ακριβώς ίσο με τον προκαθορισμένο προϋπολογισμό  $\pi$ . Στο Σχήμα 4.1, οι τρεις κάτω καμπύλες (διακεκομμένες γραμμές) απεικονίζουν τρία δείγματα τέτοιων συναρτήσεων εκχωρούμενων ζημιών που είναι βέλτιστες.

Εικόνα 4.1: Τρεις τυπικές συναρτήσεις απώλειας



**Παρατήρηση 4.3** Επαναλαμβάνουμε ότι το θεώρημα 4.1 παρέχει λύση, αν υπάρχει, μόνο για  $\pi \in (0, \pi_\alpha)$ . Αυτό είναι άμεση συνέπεια των συνθηκών (4.2.18) και (4.2.19). Πιο ρητά, υποθέστε ότι  $f^*$  είναι η βέλτιστη συνάρτηση απώλειας που προσδιορίζεται από το Θεώρημα 4.1, τότε πρέπει να έχουμε  $\pi \in (0, \pi_\alpha)$ , όπως μπορεί να αιτιολογηθεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \pi &= (1 + \theta)E[f^*(X)] \\ &= (1 + \theta)E\left[\ell(X) \cdot 1_{\{X \geq d\}}\right] \\ &< (1 + \theta)E[(X - d_\alpha)1_{\{X \geq d_\alpha\}}] \\ &= (1 + \theta)E[X - d_\alpha]_+ \\ &= \pi_\alpha. \end{aligned}$$

Περίπτωση (ii):  $\pi_\alpha \leq \pi \leq \pi_\theta$

#### Θεώρημα 4.2

Για μια δεδομένη υποκειμένη τυχαία μεταβλητή απώλειας  $X$ , εάν υπάρχει μια θετική σταθερά  $d^*$  τέτοια ώστε

$$(1 + \theta)E[(X - d^*)_+] = \pi, \quad (4.2.39)$$

$$Pr\{X \geq d^*\} \leq \frac{1}{1+\theta}, \quad (4.2.40)$$

$$Pr\{X \geq d^*\} \geq \alpha, (4.2.31)$$

τότε  $f^* = (X - d^*)_+$  είναι μια βέλτιστη συνάρτηση απώλειας για το πρόβλημα  $(P_T)$ .

**Παρατήρηση 4.4** Οι συνθήκες (4.2.29), (4.2.30) και (4.2.31) του θεωρήματος 4.2 συνεπάγονται ότι οι ακόλουθες δύο συνθήκες πρέπει να ισχύουν για να είναι το θεώρημα εφαρμόσιμο:

1.  $\alpha(1 + \theta) \leq 1$ ,
2.  $d_\alpha \geq d^* \geq d_\theta$ , όπου  $d_\alpha$  και  $d_\theta$  έχουν οριστεί στο (4.2.14) και (4.2.16) αντίστοιχα.

Η τελευταία συνθήκη, με τη σειρά της, συνεπάγεται ότι ο προϋπολογισμός  $\pi$  για τα αντασφάλιστρα πρέπει να ικανοποιεί την προϋπόθεση  $\pi_\alpha \leq \pi \leq \pi_\theta$ .

Περίπτωση (iii):  $\pi \in [\pi_\theta, \infty)$ .

### **Θεώρημα 4.3**

Ας υποθέσουμε ότι  $\alpha(1 + \theta) \leq 1$  και  $\pi \geq \pi_\theta$  τότε  $f^* = (X - d_\theta^*)_+$  είναι μια βέλτιστη συνάρτηση απώλειας για το πρόβλημα  $(P_T)$ .

**Παρατήρηση 4.5** Ας υποθέσουμε ότι  $\pi \leq \pi_\alpha$  και υπάρχει μια σταθερά  $d^*$  τέτοια ώστε  $(1 + \theta)E[(X - d^*)_+] = \pi$ . Τότε το θεώρημα 4.1 υποστηρίζει ότι η συνθήκη απώλειας διακοπής  $f^*(x) = (x - d^*)_+$  είναι μια βέλτιστη συνάρτηση απώλειας από την εκχώρηση. Συνεπώς, συνδυάζοντας το γεγονός αυτό με τα Θεωρήματα 4.2 και 4.3, βλέπουμε ότι η συνθήκη stop loss  $f^*(x) = (X - d^*)_+$  είναι βέλτιστη για ένα γενικό προϋπολογισμό αντασφαλίσεων  $\pi$ , όπου η παρακράτηση  $d^*$  καθορίζεται από την  $(1 + \theta)E[(X - d^*)_+] = \min\{\pi, \pi_\theta\}$ .

**Παρατήρηση 4.6** Ας υποθέσουμε ότι ένας ασφαλιστής είναι πρόθυμος να δαπανήσει έως και  $\pi$  με  $\pi \geq \pi_\theta$ , για να μεταβιβάσει μέρος του κινδύνου του σε έναν αντασφαλιστή. Το θεώρημα 4.3 υποστηρίζει ότι ο ασφαλιστής θα πρέπει να δαπανά βέλτιστα μόνο έναν προϋπολογισμό αντασφαλίσεων ύψους  $\pi_\theta$ . Δεν είναι δυνατόν να μειώσει τον κίνδυνο του (από την άποψη μικρότερου CTE) δαπανώντας περισσότερα από  $\pi_\theta$ .

### 4.3 Βέλτιστο μοντέλο αντασφάλισης: Δεσμευτική Περίπτωση

Για να ολοκληρώσουμε την ανάλυσή μας σχετικά με το βέλτιστο μοντέλο αντασφάλισης, η παρούσα ενότητα επικεντρώνεται στο ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$(\mathbf{Q}_0) \begin{cases} \min_{f \in \mathcal{Q}_f} CTE_\alpha(T_f), \\ \text{s.t. } (1 + \theta)E[f] = \pi. \end{cases} \quad (4.3.40)$$

Όπως και στα προηγούμενα εξεταζόμενα μοντέλα βέλτιστης αντασφάλισης, ο συμβολισμός  $\mathcal{Q}_f$  δηλώνει το σύνολο των εφικτών συναρτήσεων ζημιών των ασφαλισμένων, δηλαδή  $\mathcal{Q}_f = \{f \in \mathcal{L}^2: 0 \leq f(x) \leq x \text{ για } x \geq 0\}$ , και  $\pi$  είναι μια εξωγενής μεταβλητή που αντιπροσωπεύει τον προϋπολογισμό της αντασφάλισης. Η μόνη διαφορά μεταξύ του προβλήματος (P0) που ορίζεται στην (4.1. 5) και του προβλήματος  $(\mathbf{Q}_0)$  έγκειται στον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύουμε τον προϋπολογισμό αντασφαλιστικών ασφαλιστρών  $\pi$ . Στην πρώτη περίπτωση, ο ασφαλιστής είναι διατεθειμένος να δαπανήσει μέχρι το  $\pi$ , ενώ στη δεύτερη περίπτωση, ο περιορισμός είναι δεσμευτικός με την έννοια ότι το αντασφαλιστικό ασφάλιστρο της βέλτιστης συνάρτησης εκχωρούμενων ζημιών είναι αυστηρά ίσο με το  $\pi$ . Ως εκ τούτου, το πρόβλημα  $(\mathbf{Q}_0)$  είναι πιο περιοριστικό και μας ενδιαφέρει η λύση του  $\pi \in (0, \pi_x)$ , όπου  $\pi_x = (1 + \theta)E[X]$ .

Ένα κίνητρο για την εξέταση του παραπάνω προβλήματος βελτιστοποίησης  $(\mathbf{Q}_0)$  είναι ότι μας επιτρέπει να αντιμετωπίσουμε με μεγαλύτερη σαφήνεια την αντιστάθμιση μεταξύ κινδύνου και ανταμοιβής. Για να το δούμε αυτό, θα επικεντρωθούμε πρώτα στην αντικειμενική συνάρτηση στο μοντέλο  $(\mathbf{Q}_0)$  και στη συνέχεια στη συνθήκη περιορισμού της. Υπενθυμίζουμε ότι ο συμβολισμός  $\Gamma(f)$  εισήχθη στην αρχή του κεφαλαίου για να υποδηλώσει τον καθαρό κίνδυνο ενός ασφαλιστή από την ασφάλιση του κινδύνου  $X$ , ο οποίος λαμβάνει υπόψη το ασφάλιστρο που λαμβάνει ο ασφαλιστής από τους ασφαλισμένους και το αντασφάλιστρο που υποχρεούται να καταβάλει ο ασφαλιστής για την αντασφάλιση του κινδύνου  $X$ , δηλαδή  $\Gamma(f) = T_f - p_0 = X - f(X) + (1 + \theta)E[f] - p_0$ . Λόγω της ιδιότητας του αμετάβλητου στη μετάφραση, έχουμε  $CTE_\alpha(\Gamma(f)) = CTE_\alpha(T_f) - p_0$ . Δεδομένου ότι το  $p_0$  είναι μια σταθερά για ένα δεδομένο  $X$ , αυτό συνεπάγεται ότι αν το  $f^*$  είναι ελαχιστοποιητής του  $CTE_\alpha(T_f)$ , είναι επίσης ελαχιστοποιητής του  $CTE_\alpha(\Gamma(f))$ . Με άλλα λόγια, χρησιμοποιώντας το CTE ως το

σχετικό μέτρο κινδύνου, εάν το  $f^*$  ελαχιστοποιεί το CTE του συνολικού κινδύνου  $T_f \tau$  ου ασφαλιστή, τότε ελαχιστοποιεί επίσης το αντίστοιχο CTE του καθαρού κινδύνου του ασφαλιστή.

Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στη συνθήκη περιορισμού στο μοντέλο  $(\mathbf{Q}_0)$ . Ο όρος  $b(f) \equiv -E[\Gamma(f)] = p_0 - E[X] - \theta E[f]$  αποτυπώνει το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του ασφαλιστή στην παρουσία αντασφάλισης. Σημειώστε ότι το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του ασφαλιστή εξαρτάται από την επιλογή της συνάρτησης της εκχωρούμενης ζημίας. Επιπλέον, ο περιορισμός  $E[f] = \pi / (1 + \theta)$ , όπου  $\pi = \frac{1+\theta}{\theta} (p_0 - E[X] - b(f))$ , μπορεί να ερμηνευθεί ως η απαίτηση κερδοφορίας  $\theta$  δεδομένου ότι μόλις επιτευχθεί η προϋπόθεση, η προκύπτουσα βέλτιστη συνάρτηση ζημίας από εκχωρήσεις  $f^*$  εξασφαλίζει ένα ορισμένο προδιαγεγραμμένο επίπεδο αναμενόμενου καθαρού κέρδους  $b(f^*)$ . Κατά συνέπεια, η  $f^*$  που επιλύει το υπόδειγμα  $(\mathbf{Q}_0)$  αντιπροσωπεύει τη μικρότερη έκθεση του ασφαλιστή σε κίνδυνο (όπως μετράται από το CTE) για ένα δεδομένο επίπεδο αναμενόμενης κερδοφορίας. Συνεπώς, εάν το μοντέλο  $(\mathbf{Q}_0)$  επιλυθεί επανειλημμένα για κάθε  $\pi \in (0, \pi_x)$ , όπου  $\pi_x = (1 + \theta)E[X]$ , τότε εντοπίζονται τα ζεύγη  $(CTE_\alpha(\Gamma(f^*)), b(f^*))$  που δίνουν την καλύτερη δυνατή αντιστάθμιση κινδύνου και ανταμοιβής. Αυτό είναι ανάλογο με το αποτελεσματικό σύνορο της ανάλυσης μέσης διακύμανσης χαρτοφυλακίου του Markowitz. Για το λόγο αυτό, αναφερόμαστε στην καμπύλη που αντιπροσωπεύεται από  $CTE_\alpha(\Gamma(f^*)), b(f^*)$  ως το αποτελεσματικό σύνορο αντασφάλισης του ασφαλιστή. Ανάλογα με την ανοχή κινδύνου ενός ασφαλιστή, το αποτελεσματικό όριο αντασφάλισης διευκολύνει τον ασφαλιστή στη βέλτιστη επιλογή της συνάρτησης ζημιών που εκχωρεί.

Η μαθηματική τεχνική που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του προβλήματος  $(\mathbf{P}_0)$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί ομοίως για την εξαγωγή της βέλτιστης λύσης για το πρόβλημα  $(\mathbf{Q}_0)$ . Αυτό συνεπάγεται την αναδιατύπωση του προβλήματος  $(\mathbf{Q}_0)$  ως εξής:

$$(\mathbf{Q}_T) \begin{cases} \min_{(\xi, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Q}_f} G_\alpha(\xi, f) = \xi + \frac{1}{\alpha} E[(X - f + (1 + \theta)E[f] - \xi)_+] \\ \text{s. t. } (1 + \theta)E[f] = \pi. \end{cases} \quad (4.3.41)$$

Εάν οι  $(\xi^*, f^*)$  είναι οι βέλτιστες λύσεις της  $(\mathbf{Q}_T)$ , τότε η  $f^*$  είναι επίσης η βέλτιστη λύση της  $(\mathbf{Q}_0)$  (βλέπε Λήμμα 4.1). Επιπλέον, το πρόβλημα  $(\mathbf{Q}_T)$  είναι κυρτό και συνεπώς μια

συνάρτηση απώλειας  $f^*$  είναι λύση του  $(Q_T)$  εάν και μόνο εάν υπάρχουν σταθερές  $\xi^*$  και  $r$ , και η τυχαία μεταβλητή  $\lambda \in \mathcal{L}^2$  έτσι ώστε οι τρεις συνθήκες βελτιστότητας C1, C2 και C3 της Πρότασης 4.1 να ικανοποιούνται εκτός από τη δεσμευτική συνθήκη  $(1+\theta)E[f] = \pi$  στον ορισμό του συνόλου  $Q_\pi$ . Για να αποφύγουμε οποιαδήποτε σύγχυση, θα ορίσουμε το  $\dot{Q}_\pi$  ως  $\dot{Q}_\pi = \{f \in \mathcal{L}^2: (1 + \theta)E[f] = \pi\}$ , ενώ διατηρούμε το  $Q_\pi$  για το  $Q_\pi = \{f \in \mathcal{L}^2: (1 + \theta)E[f] = \pi\}$ .

**Παρατήρηση 4.7** Τα αποτελέσματα των θεωρημάτων 4.1 και 4.2 δείχνουν ότι για κάθε δεδομένο προϋπολογισμό ασφαλιστρων αντασφάλισης  $\pi \in (0, \pi_\theta)$ , η καθαρή συνθήκη stop-loss  $f^*(x) = (X - d^*)_+$ , όπου  $(1 + \theta)E[f^*] = \pi$ , είναι μια βέλτιστη λύση αντασφάλισης στο πρόβλημα  $(P_0)$ . Σημειώστε ότι η βέλτιστη παρακράτηση  $d^*$  προσδιορίζεται έτσι ώστε το προκύπτον αντασφαλιστικό προμήνυμα να συμπίπτει με τον προϋπολογισμό αντασφαλιστικών ασφαλιστρων  $\pi$ . Με άλλα λόγια, η βέλτιστη συνάρτηση εκχωρούμενων ζημιών επιτυγχάνεται στον προϋπολογισμό αντασφαλιστικών ασφαλιστρων. Το θεώρημα 4.3, από την άλλη πλευρά, ενισχύει ότι ακόμη και αν ένας ασφαλιστής είναι διατεθειμένος να δαπανήσει  $\pi \geq \pi_\theta$ , η συνθήκη stop-loss εξακολουθεί να είναι μια πιθανή βέλτιστη αντασφαλιστική συνθήκη, με τη διαφορά ότι η λύση δεν είναι πλέον δεσμευτική. Πιο συγκεκριμένα για  $\pi \geq \pi_\theta$ , η βέλτιστη παρακράτηση  $d^*$  είναι  $d_\theta$  και ο βέλτιστος προϋπολογισμός αντασφάλισης είναι  $\pi_\theta \leq \pi$ , ακόμη και αν ο ασφαλιστής είναι πρόθυμος να δαπανήσει περισσότερα. Λαμβάνοντας υπόψη αυτό το αποτέλεσμα, δεν είναι επομένως ποτέ ορθολογικό για έναν ασφαλιστή να δαπανήσει περισσότερα από  $\pi_\theta$  για να αντασφαλίσει τον κίνδυνο του. Παρ' όλα αυτά, έχει θεωρητικό ενδιαφέρον να εξετάσουμε τη λύση του υποδείγματός μας για τη βέλτιστη αντασφάλιση υπό τον δεσμευτικό περιορισμό του προϋπολογισμού των ασφαλιστρων αντασφάλισης, όπως διαπιστώνουμε στο ακόλουθο θεώρημα για  $\pi \in (0, \pi_x)$ .

#### Θεώρημα 4.4

Υποθέστε ότι  $\alpha(1 + \theta) \leq 1$  και ότι υπάρχει μια σταθερά  $d^*$  τέτοια ώστε  $(1 + \theta)E[(X - d^*)_+] = \pi$  για κάθε  $\pi \in (0, \pi_x]$ . Τότε η συνθήκη stop-loss  $f^*(x) = (x - d^*)_+$  είναι μια βέλτιστη λύση του προβλήματος  $(Q_0)$ .

### Παρατήρηση 4.8

Από το ανωτέρω θεώρημα, η συνάρτηση απώλειας με εγγύηση  $f^*(x) = (x - d^*)_+$  με  $(1 + \theta)E[f^*] = \pi$  περιλύει το μοντέλο  $(Q_0)$  εάν  $\alpha(1 + \theta) \leq 1$  και ο υποκείμενος κίνδυνος  $X$  είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή. Έτσι, το αποτελεσματικό όριο αντασφάλισης δίνεται από τη σχέση

$$\left\{ \left( CTE_\alpha(\Gamma(f^*)), b(f^*) \right) : f^* = (X - d^*)_+, (1 + \theta)E[f^*] = \pi, \text{ και } \pi \in (0, \pi_x] \right\},$$

$$\text{όπου } \Gamma(f^*) = (X \wedge d^*) + \pi - p_0, \text{ και } b(f^*) = p_0 - E[X] - \frac{\theta}{1 + \theta} \pi.$$

**Παράδειγμα 4.4** Υποθέτουμε ότι ο υποκείμενος κίνδυνος  $X$  κατανέμεται εκθετικά με μέση τιμή  $\mu = 1000$ . Η αρχή του προσδοκώμενου ασφαλιστρού υιοθετείται τόσο από τον ασφαλιστή όσο και από τον αντασφαλιστή για τον καθορισμό του ασφαλιστρού με αντίστοιχο συντελεστή επιβάρυνσης ασφαλείας  $\eta = 0,1$  και  $\theta = 0,2$ . Μας ενδιαφέρει το αποτελεσματικό όριο αντασφάλισης  $\alpha = 5\%$ .

Με βάση τα παραπάνω, έχουμε  $d_\theta = 2995.73$ ,  $d_\theta = 182.32$ ,  $\pi_\alpha = 60$ ,  $\pi_\theta = 1000$  και  $\pi_x = (1 + \theta)E[X] = 1200$ . Το θεώρημα 4.4 ισχυρίζεται ότι για να λάβουμε τη βέλτιστη συνάρτηση απώλειας από την εκχώρηση, πρέπει απλώς να προσδιορίσουμε το επίπεδο διακράτησης  $d^*$  που ικανοποιεί την  $(1 + \theta)E[(X - d^*)_+] = \pi$  για κάθε  $\pi \in (0, \pi_x]$ . Σύμφωνα με την εκθετική κατανομή με μέση τιμή  $\mu$ , είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι

$$d^* = \mu \ln \left( \frac{\mu(1 + \theta)}{\pi} \right)$$

Επιπλέον, είναι σαφές ότι  $CTE_\alpha(X \wedge d) = d$  για  $d \leq d_\alpha \equiv -\mu \ln \alpha$ , ή ισοδύναμα  $\pi \geq \pi_\alpha$ . Για  $d \geq d_\alpha$ , δηλ.  $\pi \leq \pi_\alpha$ .

$$\begin{aligned} CTE_\alpha(X \wedge d) &= d_\alpha + \frac{1}{\alpha} \int_{d_\alpha}^{\infty} Pr X \wedge d > x dx \\ &= d_\alpha + \frac{\mu}{\alpha} [e^{-d_\alpha/\mu} - e^{-d/\mu}] \\ &= \mu(1 - \ln \alpha) - \frac{\pi}{\alpha(1 + \theta)}. \end{aligned}$$



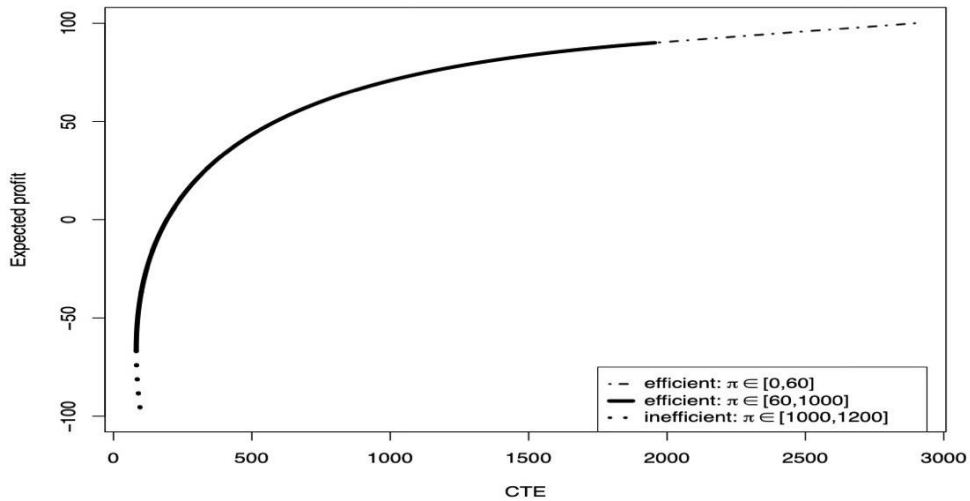
Άρα, το αποτελεσματικό όριο αντασφάλισης,  $(CTE_\alpha(\Gamma(f^*)), b(f^*))$ , δίνεται από τον τύπο

$$CTE_\alpha(\Gamma(f^*)) = CTE_\alpha(X \wedge d) + \pi - p_0$$

=

$$\begin{cases} \mu(1 - \ln\alpha) - p_0 + \pi \left[1 - \frac{1}{\alpha(1+\theta)}\right], \pi \leq \pi_\alpha, \\ \mu \ln\left(\frac{\mu(1+\theta)}{\pi}\right) + \pi - p_0, \pi \geq \pi_\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-47}{3}\pi + 2895.732, \pi \leq 60, \\ 1000 \ln\left(\frac{1200}{\pi}\right) + \pi - 1100, \pi \geq 60, \end{cases} \quad (4.3.45)$$



**Εικόνα 1:** Ανταμοιβή κινδύνου στο πλαίσιο της βέλτιστης αντασφαλιστικής συμφωνίας

Και

$$b(f^*) = p_0 - E[X] - \frac{\theta}{1+\theta}\pi = 100 - \frac{1}{6}\pi. \quad (4.3.46)$$

Στο σχήμα 4.2 απεικονίζεται το προκύπτον αποτελεσματικό σύνορο αντασφάλισης για  $\pi \in (0, \pi_x]$ . Τώρα ολοκληρώνουμε το παράδειγμα με τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

i. Είναι εντυπωσιακό να σημειωθεί ότι το αποτελεσματικό σύνορο αντασφάλισης έχει τρομερή ομοιότητα με το κλασικό αποτελεσματικό σύνορο μέσης διακύμανσης Markowitz, παρόλο που ο κίνδυνος στο μοντέλο αντασφάλισης μας αποτυπώνεται από το CTE.

ii. Χωρίς την αντασφάλιση, ο ασφαλιστής διατηρεί ολόκληρο το ποσό του ασφαλιστή και συνεπώς το αναμενόμενο περιθώριο κέρδους του είναι  $100^2$ . Αυτό δεν αποτελεί έκπληξη, δεδομένου ότι έχουμε υποθέσει ότι ο συντελεστής επιβάρυνσης του ασφαλιστή είναι  $\eta = 10\%$ . Επιπλέον, η έκθεση κινδύνου του ασφαλιστή σε όρους CTE φτάνει στο μέγιστο σημείο της στο 2895.72. Οι τιμές αυτές μπορούν να ληφθούν θέτοντας  $\pi = 0$  στις (4.3.45) και (4.3.46). Παρόλα αυτά, καθώς ο ασφαλιστής αποστρέφεται περισσότερο τον κίνδυνο και είναι διατεθειμένος να δαπανήσει περισσότερα στην αγορά αντασφάλισης, το αναμενόμενο κέρδος του μειώνεται, αλλά η έκθεση στον κίνδυνο CTE μειώνεται επίσης. Αυτή είναι η κλασική αντιστάθμιση κινδύνου και ανταμοιβής. Πιο συγκεκριμένα, καθώς ο προϋπολογισμός των αντασφαλιστών  $\pi$  αυξάνεται από 0 σε 60, τόσο το αναμενόμενο κέρδος όσο και η CTE μειώνονται γραμμικά με ρυθμό  $\frac{1}{6}$  και  $15\frac{2}{3}$  από 100 και 2895.72, αντίστοιχα. Η διακεκομμένη διακεκομμένη γραμμή στο Σχήμα 4.2 απεικονίζει την αντιστάθμιση για  $\pi \in [0, 60]$ .

iii. Όταν ο προϋπολογισμός των αντασφαλιστών αυξάνεται πάνω από 60, το προβλεπόμενο κέρδος του ασφαλιστή συνεχίζει να μειώνεται γραμμικά. Το CTE, από την άλλη πλευρά, συνεχίζει να μειώνεται, αλλά φτάνει στο ελάχιστό του σε  $\pi = \pi_\theta = 1000$ . Όταν  $\pi > 1000$ , το CTE στην πραγματικότητα αυξάνεται, παρόλο που το αναμενόμενο κέρδος εξακολουθεί να μειώνεται. Κατά συνέπεια, δεν είναι ποτέ ορθολογικό να ξοδεύει περισσότερα από 1000 για την αντασφάλιση του κινδύνου της, όπως έχει ήδη σημειωθεί στο Θεώρημα 4.3. Για να διακρίνουμε αυτά τα δύο τμήματα του συνόρου, συμβολίζουμε το τμήμα με  $\pi \leq 1000$  ως το αποτελεσματικό σύνορο, ενώ το τμήμα με  $\pi > 1000$  ως το μη

αποτελεσματικό σύνορο, κατ' αναλογία με το υπόδειγμα Markowitz. Το αποτελεσματικό και το μη αποτελεσματικό αντασφαλιστικό σύνορο απεικονίζονται στο Σχήμα 4.2.

iv. Επισημαίνουμε ότι ενώ το  $\pi \leq 1000$  δίνει ένα αποτελεσματικό όριο αντασφάλισης, σημειώνουμε επίσης ότι για  $\pi > 600$ , το αναμενόμενο κέρδος του ασφαλιστή είναι αρνητικό (βλ. (4.3.46)). Συνεπώς, υπό συνήθεις συνθήκες, ο ασφαλιστής δεν θα δαπανά περισσότερα από 600 για αντασφάλιση, διαφορετικά θα ήταν συνετό να μην ασφαλίσει καθόλου τον κίνδυνο.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

## Εμπειρικά μοντέλα αντασφάλισης

### 5.1 Εισαγωγή

Στα τελευταία κεφάλαια, επικεντρωθήκαμε σε ορισμένα μοντέλα αντασφάλισης με διάφορους βαθμούς γενικότητας. Ο πρωταρχικός στόχος αυτών των κεφαλαίων ήταν να προκύψουν αναλυτικά οι βέλτιστες συναρτήσεις εκχωρούμενων ζημιών για τα προτεινόμενα μοντέλα. Παρατηρήσαμε ότι η δυνατότητα προσέγγισης των μοντέλων βελτιστοποίησης εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τις προδιαγραφές και τις παραδοχές του μοντέλου και δεν είναι τετριμμένη η εξαγωγή αναλυτικών λύσεων σε πολλές από αυτές τις περιπτώσεις. Σε αυτό το κεφάλαιο, προτείνουμε μια νέα προσέγγιση ανάλυσης της βέλτιστης αντασφάλισης αξιοποιώντας ρητά τα δεδομένα ζημιών που έχει εκ των προτέρων η ασφαλιστική εταιρεία. Επειδή το προτεινόμενο από εμάς μοντέλο βέλτιστης αντασφάλισης βασίζεται άμεσα στα εμπειρικά παρατηρούμενα δεδομένα, ονομάζουμε το μοντέλο αυτό ως μοντέλο αντασφάλισης με βάση την εμπειρία ή απλώς ως εμπειρικό μοντέλο αντασφάλισης. Θα υποστηρίξουμε σύντομα ότι υπάρχει μια σειρά πλεονεκτημάτων που συνδέονται με το προτεινόμενο εμπειρικό μοντέλο αντασφάλισης, συμπεριλαμβανομένης της απλότητας και της δυνατότητάς του.

Υπενθυμίζεται ότι μια γενική διατύπωση ενός βέλτιστου μοντέλου αντασφάλισης μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\begin{cases} \min_f \rho(X, f) \\ \text{s. t. } 0 \leq f(x) \leq x, \\ \Pi(f(x)) \leq \pi \end{cases} \quad (5.1.1)$$

όπου  $\rho(X, f)$  είναι ένα κατάλληλα επιλεγμένο μέτρο κινδύνου, ο πρώτος περιορισμός είναι η συμβατική υπόθεση για τη συνάρτηση ζημίας  $f$  και ο δεύτερος περιορισμός αντιπροσωπεύει τον προϋπολογισμό των ασφαλιστρών. Σημειώστε ότι το  $\rho(X, f)$  εξαρτάται από την υποτιθέμενη κατανομή ζημιών  $X$  και τη συνάρτηση ζημιών  $f$ . Επιπλέον, η βελτιστοποίηση πραγματοποιείται σε όλες τις πιθανές συναρτήσεις  $f$ , έτσι ώστε το

παραπάνω πρόβλημα να είναι ένα άπειρο διαθεματικό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Αν δεν επιβληθούν πρόσθετες απλουστευτικές παραδοχές (όπως ο περιορισμός της  $f$  σε μια κατηγορία αύξουσας κυρτής συνάρτησης και η  $\Pi$  είναι μια αρχή πριμοδότησης προσδοκίας), μπορεί να είναι εξαιρετικά δύσκολο να εξαχθούν οι αναλυτικές λύσεις του μοντέλου (5.1.1).

Κατά την εξέταση του μοντέλου (5.1.1), μια σιωπηρή υπόθεση είναι η διαθεσιμότητα της κατανομής ζημιών  $X$ . Στην πράξη αυτή εκτιμάται εμπειρικά από τα παρατηρούμενα δεδομένα. Η εκτιμώμενη κατανομή του  $X$  ενσωματώνεται στη συνέχεια στο μοντέλο (5.1.1) για την εξαγωγή των επιθυμητών λύσεων. Αντί να χρησιμοποιήσουμε μια τέτοια διαδικασία δύο βημάτων, ένα φυσικό ερώτημα που τίθεται είναι αν μπορούμε να αναδιατυπώσουμε ένα βέλτιστο μοντέλο ανασφάλισης που εκμεταλλεύεται άμεσα τα παρατηρούμενα εμπειρικά δεδομένα. Εάν αυτό είναι δυνατό, τότε ένα τέτοιο μοντέλο θα παρουσιάζει μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Θα είναι διαισθητικά ελκυστικό και πρακτικό, καθώς θα παρέχει άμεση σύνδεση μεταξύ των βέλτιστων συναρτήσεων εκχωρούμενων ζημιών και των δεδομένων ζημιών που βιώνει ένας ασφαλιστής. Το πιο σημαντικό είναι ότι δεν χρειάζεται να κάνουμε καμία ρητή υπόθεση σχετικά με τον υποκείμενο κίνδυνο. Προκειμένου να γίνει διάκριση μεταξύ του μοντέλου ανασφάλισης (5.1.1) και του προτεινόμενου από εμάς μοντέλου ανασφάλισης με βάση την εμπειρία, αναφερόμαστε στο πρώτο μοντέλο ως θεωρητικό μοντέλο, ενώ στο δεύτερο μοντέλο ως εμπειρικό μοντέλο. Αντίστοιχα, η βέλτιστη λύση του πρώτου μοντέλου αναφέρεται ως θεωρητική λύση ενώ η βέλτιστη λύση του δεύτερου μοντέλου ως εμπειρική λύση.

Το υπόλοιπο κεφάλαιο είναι οργανωμένο ως εξής. Στην ενότητα 5.2 περιγράφεται η γενική διατύπωση του προτεινόμενου μοντέλου ανασφάλισης με βάση την εμπειρία. Η ενότητα 5.3 παρέχει μια σύντομη εισαγωγή στον προγραμματισμό κώνου δεύτερης τάξης (SOC). Αποδεικνύεται ότι πολλά από τα εμπειρικά μοντέλα ανασφάλισης μπορούν να διατυπωθούν ως προγραμματισμός SOC, όπως διαπιστώνουμε στην ενότητα 5.4 για τα μοντέλα ανασφάλισης ελαχιστοποίησης διακύμανσης, ελαχιστοποίησης CTE και ελαχιστοποίησης VaR. Οι Ενότητες 5.5, 5.6 και 5.7, αντίστοιχα, εξετάζουν τις λύσεις για τα τρία εμπειρικά μοντέλα που παρουσιάστηκαν στην Ενότητα 5.4. Τέλος, η Ενότητα 5.8 ολοκληρώνει το κεφάλαιο σχολιάζοντας τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα του εμπειρικού μοντέλου ανασφάλισης.

## 5.2 Γενικά εμπειρικά μοντέλα ανασφάλισης

Στην παρούσα ενότητα, περιγράφουμε το προτεινόμενο μοντέλο ανασφάλισης με βάση την εμπειρία. Ξεκινάμε συμβολίζοντας  $x_i$  ως το  $i$ -οστό δεδομένο απώλειας (ή ποσού απαίτησης) (πριν από οποιαδήποτε εφαρμογή ανασφάλισης) που παρατηρείται εμπειρικά από την ασφαλιστική εταιρεία. Έστω  $x^T := (x_1, x_2, \dots, x_N)$  ένα διάνυσμα που συγκεντρώνει όλα τα  $N$  εμπειρικά δεδομένα. Με βάση αυτά τα εμπειρικά δεδομένα, ο στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε μια βέλτιστη ανασφαλιστική κάλυψη  $f_i$  που αντιστοιχεί σε κάθε παρατήρηση ζημίας  $x_i$ . Προφανώς το  $f_i$  είναι η μεταβλητή απόφασης και χρησιμοποιούμε το διάνυσμα  $f^T := (f_1, f_2, \dots, f_N)$  για να αναπαραστήσουμε όλες τις  $N$  μεταβλητές βελτιστοποίησης. Η αρχή που διέπει το μοντέλο ανασφάλισης με βάση την εμπειρία είναι η διατύπωση του μοντέλου βελτιστοποίησης που περιλαμβάνει άμεσα τόσο το  $x$  όσο και το  $f$ . Πιο συγκεκριμένα, σε αντιστοιχία με το θεωρητικό μοντέλο (5.1.1), το προτεινόμενο εμπειρικό μοντέλο ανασφάλισης μπορεί να διατυπωθεί στην ακόλουθη συμβολική μορφή:

$$\begin{cases} \min_f \hat{\rho}(x, f) \\ \text{s. t. } 0 \leq f_i \leq x_i, i = 1, 2, \dots, N, (5.2.2) \\ \Pi(\hat{f}) \leq \pi. \end{cases}$$

Σε σύγκριση με το μοντέλο (5.1.1), η ανωτέρω αντικειμενική τιμή  $\hat{\rho}(x, f)$  εξαρτάται ρητά από τα  $x$  και  $f$  και, ως εκ τούτου, μπορεί να ερμηνευθεί ως η εμπειρική εκτίμηση της  $\rho(X, f)$ . Ομοίως, το  $\Pi(\hat{f})$  μπορεί να ερμηνευθεί ως η εμπειρική εκτίμηση του  $\Pi(f(X))$  δεδομένου του διανύσματος απόφασης  $f$ .

Κατασκευαστικά, το παραπάνω εμπειρικό μοντέλο (5.2.2) είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης  $N$ -διαστάσεων, δεδομένου ότι απαιτεί τον βέλτιστο προσδιορισμό του  $f_i$  για κάθε εμπειρικό δεδομένο  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Έστω  $f^{*T} = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_N^*)$  που υποδηλώνει τις εμπειρικές λύσεις που προκύπτουν για το μοντέλο (5.2.2). Σημειώστε ότι το εμπειρικό μοντέλο ανασφάλισης μετασχηματίζει ουσιαστικά ένα μοντέλο

βελτιστοποίησης άπειρης διάστασης (5.1.1) σε ένα μοντέλο βελτιστοποίησης ανασφάλισης που είναι N-διαστάσεων. Επιπλέον, η βέλτιστη συνάρτηση απώλειας ανασφάλισης αντιπροσωπεύεται τώρα από ένα σύνολο πεπερασμένων σημείων  $(x_i, f_i^*)$ ,  $i=1, \dots, N$ , αντί για μια ομαλή συνάρτηση απώλειας ανασφάλισης  $f(x)$  ως προς το  $x$ . Ωστόσο, ορισμένες τυπικές τεχνικές εξομάλυνσης, όπως η παρεμβολή spline, μπορούν πάντα να χρησιμοποιηθούν εάν ενδιαφερόμασταν για μια ομαλή συνάρτηση απώλειας ανασφάλισης. Στα παραδείγματά μας που θα συζητηθούν σε μεταγενέστερες ενότητες, θα αναπαραστήσουμε τη λύση δείχνοντας απλώς τα διαγράμματα διασποράς των ζευγών  $\{(x_i, f_i^*), i = 1, 2, \dots, N\}$  και στη συνέχεια θα συμπεράνουμε το σχήμα της βέλτιστης συνάρτησης απώλειας. Όπως θα ανακαλύψουμε σύντομα, τα διαγράμματα διασποράς αποκαλύπτουν ότι οι βέλτιστες συναρτήσεις εκχωρούμενης απώλειας παραδέχονται ορισμένα ενδιαφέροντα σχήματα ανάλογα με τις πραγματικές προδιαγραφές των εμπειρικών μοντέλων.

Για να ολοκληρώσουμε την παρούσα ενότητα, επισημαίνουμε ότι κατά την εφαρμογή των προτεινόμενων μοντέλων ανασφάλισης με βάση την εμπειρική βάση, οι βέλτιστες λύσεις μπορεί να εξαρτώνται από τον τρόπο με τον οποίο ορίζουμε επίσημα τους εμπειρικούς εκτιμητές της αντικειμενικής συνάρτησης και τους περιορισμούς στα εμπειρικά μοντέλα. Στα αριθμητικά παραδείγματά μας, εκτιμούμε αυτά τα μεγέθη χρησιμοποιώντας την εμπειρική κατανομή, δηλαδή αναθέτοντας ίση πιθανότητα  $1/N$  σε κάθε ζεύγος  $(x_i, f_i)$  για  $i = 1, 2, \dots, N$ .

### 5.3 Προγραμματισμός κώνου δεύτερης τάξης (SOC)

Στην προηγούμενη ενότητα, υποστηρίζουμε ότι ένα από τα πλεονεκτήματα της προτεινόμενης προσέγγισης που βασίζεται στην εμπειρική προσέγγιση είναι ότι μετατρέπει ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης άπειρης διάστασης σε πρόβλημα πεπερασμένης διάστασης. Ωστόσο, δεν έχουμε ακόμη ασχοληθεί με τον τρόπο προσδιορισμού της βέλτιστης λύσης  $f^*$  των εμπειρικών μοντέλων που προκύπτουν. Αποδεικνύεται ότι πολλά από τα προτεινόμενα εμπειρικά ανασφαλιστικά μοντέλα μας μπορούν να διατυπωθούν ως SOC program- ming και ως εκ τούτου οι αριθμητικές τεχνικές

που σχετίζονται με την επίλυση του SOC programming μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εξαγωγή των λύσεων των προτεινόμενων εμπειρικών μοντέλων μας. Λεπτομερής συζήτηση για τον προγραμματισμό SOC μπορεί να βρεθεί στους Alizadeh και Goldfarb (2003), Ben-Tal και Nemirovski (2001) και Lobo, et al. (1998). Παρακάτω παρέχουμε μια σύντομη εισαγωγή στον προγραμματισμό SOC και αντλούμε το μεγαλύτερο μέρος αυτού του υλικού από τις προαναφερθείσες αναφορές.

Η πιο ρητή μορφή ενός προγραμματισμού SOC έχει ως εξής:

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s. t. } \|D_i \mathbf{x} - \mathbf{d}_i\| \leq \mathbf{p}_i^T \mathbf{x} - q_i, i = 1, 2, \dots, \kappa, \end{cases} \quad (5.3.3)$$

Όπου  $x \in \mathbb{R}^n$  είναι η μεταβλητή βελτιστοποίησης και οι παράμετροι του προβλήματος είναι  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $D_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1) \times n}$ ,  $d_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}$ , και  $q_i \in \mathbb{R}$ . Η νόρμα που εμφανίζεται στους περιορισμούς είναι η τυπική ευκλείδεια νόρμα, δηλαδή  $\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}^T \mathbf{u})^{1/2}$

Ο περιορισμός

$$\|D_i \mathbf{x} - \mathbf{d}_i\| \leq \mathbf{p}_i^T \mathbf{x} - q_i$$

ονομάζεται περιορισμός κώνου δεύτερης τάξης (διάστασης n). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο τυπικός ή μοναδιαίος κώνος δεύτερης τάξης (κυρτός) διάστασης n ορίζεται ως εξής

$$\mathcal{E}_n = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ t \end{pmatrix} : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-1}, t \in \mathbb{R}, \|\mathbf{u}\| \leq t \right\}.$$

Το παραπάνω σύνολο  $\mathcal{E}_n$  ονομάζεται επίσης τετραγωνικός κώνος, κώνος παγωτού ή κώνος Lorentz. Ορισμένη βιβλιογραφία ονομάζει τον προγραμματισμό SOC ως "κωνικό τετραγωνικό προγραμματισμό" και αντίστοιχα τους αντίστοιχους περιορισμούς ως "Conic Quadratic Constraints". Το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν έναν περιορισμό κώνου δεύτερης τάξης είναι η αντίστροφη εικόνα του μοναδιαίου κώνου δεύτερης τάξης υπό μια affine απεικόνιση:

$$\|D_i \mathbf{x} - \mathbf{d}_i\| \leq \mathbf{p}_i^T \mathbf{x} - q_i \Leftrightarrow \begin{pmatrix} D_i \\ \mathbf{p}_i^T \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} \mathbf{d}_i \\ q_i \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_{n_i}$$

και συνεπώς είναι κυρτό. Έτσι, ο προγραμματισμός SOC (5.3.3) είναι ένα πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού, αφού ο στόχος είναι μια κυρτή συνάρτηση και οι περιορισμοί ορίζουν ένα κυρτό σύνολο. Πράγματι, ο προγραμματισμός SOC περιλαμβάνει μια ευρεία κατηγορία κοινών κυρτών προβλημάτων βελτιστοποίησης. Τα γραμμικά προγράμματα, τα



κυρτά τετραγωνικά προγράμματα και τα κυρτά τετραγωνικά προγράμματα με τετραγωνικούς περιορισμούς μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις προβλημάτων προγραμματισμού SOC, όπως και πολλά άλλα προβλήματα που δεν εμπίπτουν σε αυτές τις κατηγορίες. Τα προβλήματα προγραμματισμού SOC μπορούν να επιλυθούν αποτελεσματικά με τη χρήση διαφόρων διαθέσιμων επιλυτών που βασίζονται στη μέθοδο εσωτερικού σημείου. Αυτά τα λογισμικά περιλαμβάνουν τα SeDuMi (βλέπε Sturm(1999)), SDPT3 (βλέπε Tütüncü et al. (2003)) και CVX (βλέπε Grant and Boyd (2008)). Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα χρησιμοποιήσουμε το CVX, το οποίο διατίθεται για δωρεάν λήψη από την ιστοσελίδα του συγγραφέα και είναι ένα πακέτο βασισμένο στο Matlab.

Για να συζητήσουμε ποιος τύπος προβλημάτων μπορεί να θεωρηθεί ως πρόβλημα προγραμματισμού SOC, είναι χρήσιμο να εισάγουμε τις έννοιες των συνόλων και των συναρτήσεων που μπορούν να αναπαρασταθούν με κώνο δεύτερης τάξης (συντομογραφικά SOC-αναπαριστάμενο). Λέμε ένα κυρτό σύνολο  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  SOC-αναπαριστάμενο αν μπορεί να αναπαρασταθεί με πεπερασμένης τάξης κωνικούς περιορισμούς δεύτερης τάξης, ενδεχομένως μετά την εισαγωγή κάποιων βοηθητικών μεταβλητών, δηλαδή, υπάρχει

$D_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1) \times (n+m)}$ ,  $d_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}$ ,  $p_i \in \mathbb{R}^{n+m}$  και κλιμάκιο  $q_i \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε

$$x \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists \text{διάνυσμα } \mu \in \mathbb{R}^m \text{ τέτοιο ώστε } \left\| D_i \begin{pmatrix} x \\ \mu \end{pmatrix} - d_i \right\| \leq p_i^T \begin{pmatrix} x \\ \mu \end{pmatrix} - q_i,$$

$$i = 1, 2, \dots, k$$

Λέμε ότι μια συνάρτηση  $g(\cdot)$  είναι SOC-αντιπροσωπευτική αν το γράφημά της  $\{(x, t) : g(x) \leq t\}$  είναι ένα SOC-αντιπροσωπευτικό σύνολο. Οι Alizadeh and Goldfarb (2003), Ben-Tal and Nemirovski 2001) και Lobo, et al. (1998) συνόψισαν πολλά σημαντικά SOC-αντιπροσωπευτικά σύνολα/συναρτήσεις, καθώς και πολλές πράξεις κάτω από τις οποίες η SOC-αντιπροσωπευτικότητα διατηρείται για αυτά τα σύνολα/συναρτήσεις.

Παρακάτω παρατίθενται ορισμένα παραδείγματα των SOC-αντιπροσωπευτικών συναρτήσεων που θα χρησιμοποιηθούν εκτενώς σε αυτό το κεφάλαιο:

Λέμε ότι μια συνάρτηση  $g(\cdot)$  είναι SOC-αντιπροσωπευτική αν το γράφημά της  $\{(x, t) : g(x) \leq t\}$  είναι ένα SOC-αντιπροσωπευτικό σύνολο. Οι Alizadeh and Goldfarb (2003), Ben-Tal

and Nemirovski 2001) και Lobo, et al. (1998) συνόψισαν πολλά σημαντικά SOC-αντιπροσωπευτικά σύνολα/συναρτήσεις, καθώς και πολλές πράξεις κάτω από τις οποίες η SOC-αντιπροσωπευτικότητα διατηρείται για αυτά τα σύνολα/συναρτήσεις.

Παρακάτω παρατίθενται ορισμένα παραδείγματα των SOC-αντιπροσωπευτικών συναρτήσεων που θα χρησιμοποιηθούν εκτενώς σε αυτό το κεφάλαιο:

- 1) Affine συνάρτηση  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + b$ ,
- 2) Κυρτή τετραγωνική συνάρτηση  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{q}^T \mathbf{x} + r$ , όπου  $\mathbf{Q}$  είναι ένας ημιπεριοριστικός πίνακας,
- 3) Ο κανόνας  $L^p$   $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{1/p}$  ( $p \geq 1$  ένας λογικός αριθμός).

Σημειώστε ότι αν το  $g(\mathbf{x})$  είναι SOC-αντιπροσωπευτικό, τότε ο περιορισμός  $g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{a}^T \mathbf{x} + b$  είναι επίσης SOC-αντιπροσωπευτικός για οποιοδήποτε διάνυσμα  $\mathbf{a}$  με κατάλληλη διάσταση και κλιμάκιο  $b$ . Αυτό μπορεί να εξηγηθεί από την ακόλουθη συνάρτηση:

$$g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{a}^T \mathbf{x} + b \Leftrightarrow \begin{cases} g(\mathbf{x}) \leq t \\ t \leq \mathbf{a}^T \mathbf{x} + b \end{cases}$$

των οποίων και οι δύο ανισότητες στη δεξιά πλευρά είναι περιορισμοί που μπορούν να αναπαρασταθούν με SOC.

Μια συνέπεια της SOC - αναπαραστασιμότητας των συναρτήσεων  $g(\mathbf{x})$ ,  $h(\mathbf{x})$  και του συνόλου  $S$  είναι ότι το πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\begin{cases} \min_x g(\mathbf{x}) \\ s. t. \mathbf{x} \in S \\ h(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως προγραμματισμός SOC.

Για να συζητήσουμε ποια είδη εμπειρικών μοντέλων ανασφάλισης μπορούν να αποτελέσουν τα προβλήματα προγραμματισμού SOC, εστιάζουμε στο γενικό εμπειρικό μοντέλο (5.2.2) και θεωρούμε δύο περιπτώσεις. Εάν η συνάρτηση στόχου  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{f})$  είναι γραμμική, τότε το προκύπτον εμπειρικό μοντέλο είναι προγραμματισμός SOC υπό την προϋπόθεση ότι ο περιορισμός του προϋπολογισμού ανασφάλισης ασφαλιστρών  $\hat{\Pi}(\mathbf{f}) \leq$  πείναι αναπαραστάσιμος με SOC, δεδομένου ότι οι συμβατικοί περιορισμοί  $0 \leq$

$f_i \leq x_i, i=1,2, \dots, N$  είναι γραμμικοί. Από την άλλη μεριά, αν η συνάρτηση στόχου είναι μη γραμμική, τότε μπορούμε να αναδιατυπώσουμε το (5.2.2) σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης της ακόλουθης μορφής:

Προφανώς, το  $(f^*, t^*)$  επιλύει το (5.3.4) εάν και μόνο εάν το  $f^*$  επιλύει το μοντέλο (5.2.2).

Συνεπώς, και οι δύο  $\hat{\Pi}(f) \leq \pi$  και  $\rho(x, f) \leq t$  απαιτείται να είναι SOC, ώστε το εμπειρικό μοντέλο ανασφάλισης να είναι ένα πρόβλημα προγραμματισμού SOC.

## 5.4 Προγραμματισμός SOC και εμπειρικά μοντέλα ανασφάλισης

Στην παρούσα ενότητα, συζητάμε τη σύνδεση μεταξύ των εμπειρικών μοντέλων ανασφάλισης και του προγραμματισμού SOC. Ειδικότερα, η υποενότητα 5.4.1 δείχνει αρχικά ότι ο εμπειρικός περιορισμός του προϋπολογισμού των ανασφαλιστρών  $\hat{\Pi}(f) \leq \pi$  είναι αναπαραστάσιμος ως SOC για δέκα αρχές ανασφάλισης ασφαλιστρών. Στη συνέχεια, στα επόμενα υποκεφάλαια 5.4.2-5.4.4, εξετάζουμε τρία συγκεκριμένα εμπειρικά μοντέλα ανασφάλισης, δηλαδή το μοντέλο ελαχιστοποίησης της διακύμανσης, το μοντέλο ελαχιστοποίησης της CTE και το μοντέλο ελαχιστοποίησης της VaR. Για κάθε μοντέλο, θα δείξουμε πώς να επαναδιατυπώσουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης ως προγραμματισμό SOC, ώστε οι λύσεις αυτών των προβλημάτων να μπορούν να ληφθούν αποτελεσματικά.

### 5.4.1 Περιορισμός SOC-αντιπροσωπευτικών ανασφαλιστρών

Σε αυτό το υποκεφάλαιο, αναλύουμε μία προς μία την αρχή των ασφαλιστρών για την οποία ο εμπειρικός περιορισμός του προϋπολογισμού των ανασφαλιστρών  $\hat{\Pi}(f) \leq \pi$  είναι αναπαραστάσιμος με SOC. Ο ακόλουθος συμβολισμός χρησιμοποιείται εκτενώς στις επόμενες συζητήσεις.

- Το  $e$  συμβολίζει ένα  $N$ -διάστατο διάνυσμα με όλα τα στοιχεία ίσα με 1.
- Το  $E$  συμβολίζει έναν πίνακα  $N \times N$  με όλα τα στοιχεία ίσα με 1.

- Για δεδομένα διανύσματα  $\mathbf{x}^T := (x_1, x_2, \dots, x_N)$  και  $\mathbf{f}^T := (f_1, f_2, \dots, f_N)$ , έστω  $\bar{x}$  και  $\bar{f}$  είναι ο αντίστοιχος μέσος όρος τους, δηλαδή  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N} \mathbf{e}^T \mathbf{x}$  και  $\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i = \frac{1}{N} \mathbf{e}^T \mathbf{f}$ .

- Το  $\mathbf{Q}$  είναι ένας πίνακας  $N \times N$  με τις ακόλουθες προδιαγραφές:

$\mathbf{Q} = (q_i^T)$  to be updated

Στον παραπάνω ορισμό του  $\mathbf{Q}$ , το  $\mathbf{q}_i$  είναι ένα  $N$ -διάστατο διάνυσμα με το  $i$ -οστό στοιχείο του να ισούται με  $1 - 1$  και οι υπόλοιπες εγγραφές να αντιστοιχούν σε  $-1/N$ . Είναι επίσης εύκολο να επαληθεύσουμε την ακόλουθη σχέση:

$$\sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2 = \|\mathbf{f} - \bar{f} \mathbf{e}\|^2 = \mathbf{f}^T \mathbf{Q} \mathbf{f}.$$

Στη συζήτηση που ακολουθεί σχετικά με την αναπαραστασιμότητα SOC του περιορισμού  $\hat{\Pi}(f) \leq \pi$ , υπενθυμίζουμε ότι ο εμπειρικός εκτιμητής θα κατασκευαστεί με βάση την εμπειρική κατανομή.

Q1. Αρχή προσδοκίας:  $\hat{\Pi}(f) = (1 + \theta)E[f]$  με  $\theta > 0$ .

$$\hat{\Pi}(f) \leq \pi \Leftrightarrow (1 + \theta)\bar{f} \leq \pi \Leftrightarrow \mathbf{e}^T \mathbf{f} \leq \frac{1 + \theta}{N} \pi,$$

ο οποίος είναι γραμμικός περιορισμός και ως εκ τούτου αναπαρίσταται με SOC.

Q2. Αρχή της τυπικής απόκλισης:  $\hat{\Pi}(f) = E[f] + \beta \sqrt{D[f]}$ , όπου  $\beta > 0$ .

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}(f) \leq \pi &\Leftrightarrow \bar{f} + \beta \frac{1}{\sqrt{N}} \|\mathbf{f} - \bar{f} \mathbf{e}\| \leq \pi \\ &\Leftrightarrow \|\mathbf{Q} \mathbf{f}\| \leq -\frac{1}{\beta \sqrt{N}} \mathbf{e}^T \mathbf{f} + \frac{\sqrt{N}}{\beta} \pi, \end{aligned}$$

ο οποίος είναι σαφώς ένας περιορισμός κώνου δεύτερης τάξης.

Q3. Μικτή αρχή :  $\Pi(f) = E[f] + \beta D[f]E[f]$ , όπου  $\beta > 0$ .

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi(f)} \leq \pi &\Leftrightarrow \bar{f} + \frac{\beta \|f - \bar{f}e\|^2}{\bar{f}N} \leq \pi \Leftrightarrow (\bar{f})^2 + \beta \frac{\|f - \bar{f}e\|^2}{N} \leq \pi \bar{f} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{f}^T \left( \frac{1}{N} \mathbf{E} + \beta \mathbf{Q} \right) \mathbf{f} \leq \pi \mathbf{e}^T \mathbf{f} \end{aligned}$$

ο οποίος είναι ένας κυρτός τετραγωνικός περιορισμός, δεδομένου ότι ο πίνακας  $\left( \frac{1}{N} \mathbf{E} + \beta \mathbf{Q} \right)$  είναι θετικά ημικαθορισμένος. Έτσι,  $\widehat{\Pi(f)} \leq \pi$  είναι SOC-αναπαρίσταται για τη μικτή αρχή  $\Pi$ .

Q4. Τροποποιημένη αρχή της παραλλαγής :  $\Pi(f) = E[f] + \beta \sqrt{D[f]} + \gamma D[f]/E[f]$  με  $\gamma, \beta > 0$ .

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi(f)} \leq \pi &\Leftrightarrow \bar{f} + \beta \frac{1}{\sqrt{N}} \|f - \bar{f}e\| + \gamma \frac{\|f - \bar{f}e\|^2}{N\bar{f}} \leq \pi \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{f} + \beta \frac{1}{\sqrt{N}} \|f - \bar{f}e\| \leq t_1 \\ \frac{\gamma}{N} \|f - \bar{f}e\|^2 / \bar{f} \leq t_2 \\ t_1 + t_2 \leq \pi \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow t_2 \geq 0$$

οι οποίοι είναι περιορισμοί κώνου δεύτερης τάξης με δύο βοηθητικές μεταβλητές απόφασης

$t_1$  και  $t_2$ .

Q5. Η αρχή της p-μέσης τιμής:  $\Pi(f) = (E[f^p])^{1/p}$ , όπου  $p > 1$ , ένας τυχαίος αριθμός.

$$\widehat{\Pi(f)} \leq \pi \Leftrightarrow \left( \frac{1}{N} \right)^{1/p} \|f\|_p \leq \pi,$$

ο οποίος είναι ένας περιορισμός κώνου δεύτερης τάξης.

Q6. Αρχή της ημι-απόκλισης:  $\Pi(f) = E[f] + \beta\{E[f] - E[f]_+^2\}^{1/2}$  με  $0 < \beta < 1$ .

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi(\bar{f})} \leq \pi &\Leftrightarrow \bar{f} + \frac{\beta}{\sqrt{N}} \left( \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})_+^2 \right)^{1/2} \leq \pi \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \|(y_1, \dots, y_N)^T\| \leq -\frac{1}{\beta\sqrt{N}} e^T f + \frac{\sqrt{N}}{\beta} \pi, \\ y_i \geq 0, y_i \geq f_i - \frac{1}{N} e^T f, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \end{aligned}$$

οι οποίες, εξ ορισμού, είναι περιορισμοί κώνου δεύτερης τάξης με βοηθητικές μεταβλητές  $y_1, \dots, y_N$ .

Q7. Ολλανδική αρχή:  $\Pi(f) = E[f] + \beta E(f - E[f])_+$  με  $0 < \beta \leq 1$ .

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi(\bar{f})} \leq \pi &\Leftrightarrow \bar{f} + \frac{\beta}{N} \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})_+ \leq \pi \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{f} + \frac{\beta}{N} \sum_{i=1}^N u_i \leq \pi, \\ u_i \geq 0, u_i \geq f_i - \bar{f}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \end{aligned}$$

οι οποίοι είναι γραμμικοί περιορισμοί και συνεπώς περιορισμοί κώνου δεύτερης τάξης.

Q8. Αρχή της διακύμανσης:  $\Pi(f) = E[f] + \beta D[f]$  με  $\beta > 0$

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi(\bar{f})} \leq \pi &\Leftrightarrow \bar{f} + \frac{\beta}{N} \|f - e\bar{f}\|^2 \leq \pi \\ &\Leftrightarrow \mathbf{f}^T \mathbf{Q} \mathbf{f} + \frac{1}{\beta} e^T \mathbf{f} - \frac{N}{\beta} \pi \leq 0, \end{aligned}$$

ο οποίος είναι ένας κυρτός τετραγωνικός περιορισμός και ως εκ τούτου ένας κωνικός περιορισμός δεύτερης τάξης.

Q9. Αρχή της ημί-διακύμανσης:  $\Pi(f) = E[f] + \beta E(f - E[f])_+^2$  με  $\beta > 0$ .

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}(f) \leq \pi &\Leftrightarrow \bar{f} + \frac{\beta}{N} \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})_+^2 \leq \pi \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{f} + \frac{\beta}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2 \leq \pi \\ y_i \geq 0, y_i \geq f_i - \bar{f}, i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \end{aligned}$$

οι οποίοι, εξ ορισμού, είναι σαφώς περιορισμοί κώνου δεύτερης τάξης με βοηθητικές μεταβλητές απόφασης  $y_1, \dots, y_N$ .

Q10. Αρχή της τετραγωνικής χρησιμότητας :  $\Pi(f) = E[f] + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - D[f]}$  με  $\gamma > 0$  και  $\gamma^2 \geq D[f]$ .

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}(f) \leq \pi &\Leftrightarrow \bar{f} + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \frac{1}{N} f^T Q f} \leq \pi \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{N} f^T Q f \leq \gamma^2 \\ \bar{f} + \gamma - \pi \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} f^T Q f \leq N\gamma^2 \\ e^T f \leq N(\pi - \gamma) \end{cases} \end{aligned}$$

Οι περιορισμοί στα δύο παραπάνω συστήματα είναι είτε γραμμικοί είτε κυρτοί τετραγωνικοί.

Ως εκ τούτου, το  $\overline{\Pi}(f) \leq \pi$  μπορεί να θεωρηθεί ως η ένωση δύο SOC-αντιπροσωπευτικών συνόλων.

#### 5.4.2 Εμπειρικό μοντέλο αντασφάλισης: Ελαχιστοποίηση της διακύμανσης

Υπενθυμίζεται ότι για το μοντέλο ελαχιστοποίησης της διακύμανσης, ο στόχος είναι η ελαχιστοποίηση της διακύμανσης της παρακρατούμενης ζημίας του ασφαλιστή (ή

ισοδύναμα της συνολικής ζημίας). Πιο επίσημα, η θεωρητική διατύπωση του μοντέλου αντασφάλισης μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$\begin{cases} \min_f VaR(R_f) = VaR(X - f(X)) \\ \text{s. t. } 0 \leq f(x) \leq x, \\ \Pi(f) \leq \pi, \end{cases} \quad (5.4.6)$$

Για να εξετάσουμε την εμπειρική της αντιστοιχία, σημειώνουμε πρώτα ότι με δεδομένα τα  $x$  και  $f$ , μια δειγματοληπτική εκτίμηση της αντικειμενικής συνάρτησης  $VaR(X - f(X))$  δίνεται από τη σχέση

$$VaR(\widehat{R}_f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(x_i - f_i) - (\bar{x} - \bar{f})]^2, \quad (5.4.7)$$

όπου  $\bar{x}$  και  $\bar{f}$  δηλώνουν τον δειγματικό μέσο όρο των παρατηρούμενων δεδομένων  $x$  και την απόφαση μεταβλητή  $f$ , αντίστοιχα. Ομοίως, το εμπειρικό ανάλογο των περιορισμών είναι

$$0 \leq f_i \leq x_i, i = 1, 2, \dots, N, \text{ και } \Pi(\widehat{x}) \leq \pi.$$

Κατά συνέπεια, λαμβάνουμε το ακόλουθο εμπειρικό μοντέλο ελαχιστοποίησης της διακύμανσης:

$$\begin{cases} \min_{f \in \mathbb{R}^n} VaR(\widehat{R}_f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(x_i - f_i) - (\bar{x} - \bar{f})]^2 \\ \text{s. t. } 0 \leq f_i \leq x_i, i = 1, 2, \dots, N, \text{ και } \Pi(x) \leq \pi. \end{cases} \quad (5.4.8)$$

Επιπλέον, ξαναγράφοντας την (5.4.7) ως εξής:

$$\begin{aligned} VaR(\widehat{R}_f) &= \frac{1}{N} (\mathbf{x} - \mathbf{f})^T \mathbf{Q} (\mathbf{x} - \mathbf{f}) \\ &= \frac{1}{N} [\mathbf{f}^T \mathbf{Q} \mathbf{f} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{f} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}]. \end{aligned}$$



Το εμπειρικό μοντέλο αντασφάλισης (5.4.8) μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα ως εξής:

$$\begin{cases} \min_{f \in \mathbb{R}^N} f^T Q f - 2x^T Q f \\ \text{s. t. } 0 \leq f_i \leq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \Pi(f) \leq \pi. \end{cases} \quad (5.4.9)$$

Σημειώστε ότι η συνάρτηση στόχου είναι μια κυρτή τετραγωνική συνάρτηση της  $f$  και επομένως είναι SOC αναπαραστάσιμη. Επιπλέον, αποδείξαμε στην Υποενότητα 5.4.1 ότι ο εμπειρικός περιορισμός αντασφαλιστικών ασφαλίσεων  $\Pi(f) \leq \pi$  είναι SOC για όσο το δυνατόν περισσότερες από δέκα αρχές ασφαλίσεων. Αυτό σημαίνει ότι το παραπάνω μοντέλο αντασφάλισης (5.4.9) μπορεί να διατυπωθεί ως προγραμματισμός SOC για τις αρχές ασφαλίσεων που συζητήθηκαν στο υποκεφάλαιο 5.4.1.

### 5.4.3 Εμπειρικό μοντέλο αντασφάλισης: Ελαχιστοποίηση CTE

Υπενθυμίζεται ότι το θεωρητικό μοντέλο ελαχιστοποίησης της CTE παίρνει την ακόλουθη για:

$$\begin{cases} \min_f CTE_\alpha(T_f) = CTE_\alpha(X - f(X) + \Pi[f(X)]) \\ \text{s. t. } 0 \leq f(x) \leq x, \quad \Pi[f(x)] \leq \pi, \end{cases} \quad (5.4.10)$$

όπου  $\Pi$  είναι η αρχή των αντασφαλίσεων,  $T_f \equiv X - f(X) + \Pi[f(X)]$  υποδηλώνει τη συνολική ζημία του ασφαλιστή παρουσία της αντασφάλισης με συνάρτηση  $f$  της εκχωρούμενης ζημίας και  $\pi$  είναι ένας προκαθορισμένος προϋπολογισμός αντασφαλίσεων. Όπως υποστηρίξαμε στο κεφάλαιο 4, αντί να εξετάσουμε το μοντέλο αντασφάλισης (5.4.10), είναι πιο εύχρηστο να εξετάσουμε το ακόλουθο ισοδύναμο μοντέλο βελτιστοποίησης:

$$\begin{cases} \min_{(\xi, f)} G_\alpha(\xi, f) = \xi + \frac{1}{\alpha} E \sum_{i=1}^N [(X - f(X) + \Pi(f(X)) - \xi)_+] \\ \text{s. t. } 0 \leq f(x) \leq x, \quad \Pi(f(X)) \leq \pi. \end{cases} \quad (5.4.11)$$

Αυτά τα δύο μοντέλα (5.4.10) και (5.4.11) είναι ισοδύναμα υπό την έννοια ότι το  $(\xi^*, f^*)$  επιλύει το (5.4.11) εάν και μόνο εάν το  $f^*$  επιλύει το (5.4.10) και το  $\xi^*$  ελαχιστοποιεί το  $G_\alpha(\xi, f^*)$ . Το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται στους Rockafellar και Uryasev (2002, Θεώρημα 14).

Λόγω της ευχερούς εφαρμογής του τελευταίου μοντέλου, εστιάζουμε ομοίως στην εμπειρική εκδοχή του μοντέλου (5.4.11), αντί του μοντέλου (5.4.10). Κατά συνέπεια, το εμπειρικό αντίστοιχο του υποδείγματος (5.4.11) δίνεται απλά από τη σχέση

$$\begin{cases} \min_{(\xi, f)} G_\alpha(\widehat{\xi}, f) = \xi + \frac{1}{\alpha N} \sum_{i=1}^N [(x_i - f_i + \widehat{\Pi}(f) - \xi)_+] \\ \text{s. t. } \Pi(f) \leq \pi, \text{ και } 0 \leq \widehat{f}_i \leq x_i, \text{ για } i = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (5.4.12)$$

όπου έχουμε λάβει τον "δειγματικό μέσο όρο" ως εκτιμητή για την προσδοκία  $E[(X - f(X) + \Pi(f(X)) - \xi)_+]$  στο θεωρητικό υπόδειγμα (5.4.11).

Προκειμένου να καταδειχθεί η σύνδεση μεταξύ του παραπάνω μοντέλου (5.4.12) και του προγραμματισμού SOC, είναι βολικό να εισαχθεί το βοηθητικό διάνυσμα απόφασης  $z = (z_1, \dots, z_N)^T$  και να επαναδιατυπωθεί το μοντέλο (5.4.12) ως εξής:

Προφανώς, το μοντέλο (5.4.13) είναι ισοδύναμο με το (5.4.12) υπό την έννοια ότι το  $(\xi^*, f^*)$  επιλύει μοντέλο (5.4.12) εάν και μόνο εάν  $((\xi^*, f^*, z^*) (\xi^*, f^*, z^*)$  επιλύει την (5.4.13) με κατάλληλα επιλεγμένο σταθερό διάνυσμα  $z^*$ . Το εναπομένον καθήκον είναι να επαληθευτεί ότι το μοντέλο (5.4.13) μπορεί να είναι

ως προγραμματισμός SOC. Για να εξασφαλιστεί ότι το παραπάνω μοντέλο βελτιστοποίησης είναι SOC, χρειάζεται μόνο να επαληθεύσουμε τους δύο περιορισμούς  $z_i \geq x_i - f_i + \widehat{\Pi}(f) - \xi$  και  $\Pi(f) \leq \pi$  είναι SOC-αναπαραστάσιμοι, αφού οι υπόλοιποι περιορισμοί καθώς και οι

αντικειμενική συνάρτηση είναι γραμμικές στις μεταβλητές βελτιστοποίησης. Στην υποενότητα 5.4.1 θα έχουμε ήδη διαπιστώσει ότι υπάρχουν τουλάχιστον δέκα αρχές

πριμοδότησης για τις οποίες ο προϋπολογισμός αντασφαλιστρών  $\Pi(f) \leq \pi$  είναι SOC. Ως εκ τούτου, απομένει να

να επαληθεύσουμε τη δυνατότητα απεικόνισης SOC του  $z_i \geq x_i - f_i + \overline{\Pi(f)} - \xi$ . Για να γίνει αυτό, είναι βολικό να συμβολίσουμε πρώτα  $g_i(\xi, f, z) = \overline{\Pi(f)} - f_i - \xi - z_i + x_i$  για  $i=1,2,\dots,N$ . Στη συνέχεια πρέπει να δείξουμε ότι  $\{g_i(\xi, f, z) \leq 0, i = 1,2,\dots,N\}$  είναι SOC-αντιπροσωπευτικά κάτω από κάθε αρχή πριμοδότησης. Η συζήτηση που ακολουθεί επιβεβαιώνει ότι αυτοί οι περιορισμοί πράγματι επιτυγχάνουν SOC-αντιπροσωπευσιμότητα για το ίδιο σύνολο δέκα αρχών ασφαλιστρών.

Q1. Αρχή της προσδοκίας:  $\Pi(f) = (1 + \theta)E[f]$  με  $\theta > 0$ .

$$\begin{aligned} g_i(\xi, f, z) \leq 0 &\Leftrightarrow (1 + \theta)\bar{f} - f_i - \xi - z_i + x_i \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1 + \theta}{N} e^T f - f_i - \xi - z_i + x_i \leq 0, \end{aligned}$$

η οποία είναι ένας γραμμικός περιορισμός και, ως εκ τούτου, είναι αναπαραστάσιμη με SOC.

Q2. Αρχή της τυπικής απόκλισης :  $\Pi(f) = E[f] + \beta\sqrt{D[f]}$ , όπου  $\beta > 0$ .

$$g_i(\xi, f, z) \leq 0 \Leftrightarrow$$

Q3. Μικτή αρχή :  $\Pi(f) = E[f] + \beta D[f]/E[f]$ , όπου  $\beta > 0$ .

$$\begin{aligned} g_i(\xi, f, z) \leq 0 &\Leftrightarrow \bar{f} + \frac{\beta}{\bar{f}} \frac{\|f - \bar{f}e\|^2}{N} - f_i - \xi - z_i + x_i \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\|Q_f\|^2}{\bar{f}} \leq \frac{N}{\beta} (f_i + \xi + z_i - x_i - \bar{f}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^N u_j \leq \frac{N}{\beta} (f_i + \xi + z_i - x_i - \bar{f}) \\ \omega_j^2 \leq u_j u_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \\ u_j = \bar{f} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \\ \omega_j = \mathbf{q}_j^T \mathbf{f}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \end{cases}$$

όπου  $q_j$  συμβολίζει την  $j$ -οστή γραμμή του πίνακα  $Q$ . Είναι σαφές ότι όλοι οι παραπάνω περιορισμοί είναι γραμμικοί εκτός από τον  $\omega_j^2 \leq u_j u_j$ , ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί ως ένας δευτεροβάθμιος κωνικός περιορισμός τέτοιος ώστε  $\left\| \left( \omega_j, \frac{u_j - u_j}{2} \right)^T \right\| \leq \frac{u_j + u_j}{2}$ . Έτσι,  $g_i(\xi, f, z) \leq 0$  είναι SOC-αντιπροσωπευτικές.

Q4. Τροποποιημένη αρχή της μεταβολής:  $\Pi(f) = E[f] + \beta\sqrt{D[f]} + \gamma D[f]/E[f]$ , όπου  $\gamma, \beta > 0$ .

$$g_i(\xi, f, z) \leq 0 \Leftrightarrow \bar{f} + \frac{\beta}{\sqrt{N}} \|f - \bar{f}e\| + \gamma \frac{\|f - \bar{f}e\|^2}{N\bar{f}} - f_i - \xi - z_i + x_i \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{f} + \beta \frac{1}{\sqrt{N}} \|Q_f\| \leq t_1 \\ \|Q_f\|^2 / \bar{f} \leq \frac{N}{\gamma} t_2 \\ t_1 + t_2 \leq f_i + \xi + z_i - x_i, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|Q_f\| \leq \frac{\sqrt{N}}{\beta} t_1 - \frac{1}{\beta\sqrt{N}} e^T f \\ \sum_{j=1}^N \frac{N-1}{\gamma} t_2 \\ \omega_j^2 \leq u_j u_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \\ u_j = \bar{f} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \\ \omega_j = \mathbf{q}_j^T \mathbf{f}, \quad j = 1, 2, \dots, N \\ t_1 + t_2 \leq f_i + \xi + z_i - x_i \end{cases}$$

,οι οποίοι είναι περιορισμοί κώνου δεύτερης τάξης με δύο βοηθητικές μεταβλητές απόφασης  $t_1$  και  $t_2$ .

Q5. Αρχή της p-μέσης τιμής :  $\Pi(f) = (E[f^p])^{1/p}$ , όπου  $p > 1$ , ένας τυχαίος αριθμός.

$$g_i(\xi, f, z) \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{N}\right)^{1/p} \|f\|_p - f_i - \xi - z_i + x_i \leq 0,$$

ο οποίος είναι σαφώς ένας περιορισμός κώνου δεύτερης τάξης.

Q6. Αρχή της ημι-απόκλισης:  $\Pi(f) = E[f] + \beta\{E[f] - E[f]_+^2\}^{1/2}$  με  $0 < \beta < 1$ .

$$g_i(\xi, f, z) \leq 0 \Leftrightarrow \bar{f} + \frac{\beta}{\sqrt{N}} \left( \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})_+^2 \right)^{1/2} - f_i - \xi - z_i + x_i \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|(y_1, \dots, y_N)^T\| \leq \frac{\sqrt{N}}{\beta} (f_i + \xi + z_i - x_i - \bar{f}), \\ y_i \geq 0, y_i \geq f_i - \frac{1}{N} e^T f, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{cases}$$

Q7. Ολλανδική αρχή:  $\Pi(f) = E[f] + \beta E(f - E[f])_+$  με  $0 < \beta \leq 1$ .

$$g_i(\xi, f, z) \leq 0 \Leftrightarrow \bar{f} + \frac{\beta}{N} \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})_+ - f_i - \xi - z_i + x_i \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{f} + \frac{\beta}{N} \sum_{i=1}^N u_i - f_i - \xi - z_i + x_i \leq 0, \\ u_j \geq 0, u_j \geq f_j - \bar{f}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \end{cases}$$

οι οποίοι είναι γραμμικοί περιορισμοί.

Q8. Αρχή της διακύμανσης :  $\Pi(f) = E[f] + \beta D[f]$  με  $\beta > 0$

$$g_i(\xi, f, z) \leq 0 \Leftrightarrow \bar{f} + \frac{\beta}{N} \|f - e\bar{f}\|^2 - f_i - \xi - z_i + x_i \leq 0$$

$$\Leftrightarrow f^T Q f + \frac{1}{\beta} e^T f - \frac{N}{\beta} (f_i + \xi + z_i - x_i) \leq 0,$$

ο οποίος είναι ένας κυρτός τετραγωνικός περιορισμός και ως εκ τούτου ένας κωνικός περιορισμός δεύτερης τάξης.

Q9. Αρχή της ημι-διακύμανσης:  $\Pi(f) = E[f] + \beta E(\beta - E[f])_+^2$  με  $\beta > 0$ .

$$g_i(\xi, f, z) \leq 0 \Leftrightarrow \bar{f} + \frac{\beta}{N} \sum_{j=1}^N [f_j - \bar{f}]_+^2 - f_i - \xi - z_i + x_i \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{f} + \frac{\beta}{N} \sum_{j=1}^N y_j^2 - f_i - \xi - z_i + x_i \leq 0 \\ y_j \geq 0, y_j \geq f_j - \bar{f}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \end{cases}$$

, οι οποίοι, εξ ορισμού, είναι σαφώς περιορισμοί κώνου δεύτερης τάξης με βοηθητικές μεταβλητές απόφασης  $y_1, y_2, \dots, y_N$ .

Q10. Αρχή της τετραγωνικής χρησιμότητας :  $\Pi(f) = E[f] + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - D[f]}$  με  $\gamma > 0$  και  $\gamma^2 \geq D[f]$ .

$$g_i(\xi, f, z) \leq 0 \Leftrightarrow \bar{f} + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \frac{1}{N} f^T Q f} - f_i - \xi - z_i + x_i \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{N} f^T Q f \leq \gamma^2 \\ \bar{f} + \gamma - f_i - \xi - z_i + x_i \leq 0 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{N} f^T Q f \leq \gamma^2 \\ \bar{f} + \gamma - f_i - \xi - z_i + x_i \leq 0 \leq 0 \\ (\bar{f} + \gamma - f_i - \xi - z_i + x_i)^2 \leq \gamma^2 - \frac{1}{N} f^T Q f. \end{cases}$$

Οι περιορισμοί στα δύο παραπάνω συστήματα είναι είτε γραμμικοί είτε κυρτοί τετραγωνικοί.

Ως εκ τούτου, το  $g_i(\xi, f, z) \leq 0$  μπορεί να θεωρηθεί ως η ένωση δύο SOC-αντιπροσωπευτικών συνόλων.

#### 5.4.4 Εμπειρικό μοντέλο αντασφάλισης: Ελαχιστοποίηση VaR

Υπενθυμίζεται ότι αν ο στόχος ήταν η ελαχιστοποίηση VaR του συνολικού κινδύνου του ασφαλιστή παρουσία αντασφάλισης, τότε το βέλτιστο μοντέλο αντασφάλισης μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{cases} \min_f VaR_\alpha(T_f) = VaR_\alpha(X - f(X)) + \Pi(f) \\ \text{s. t. } 0 \leq f(x) \leq x, \Pi[f(X)] \leq \pi. \end{cases} \quad (5.4.14)$$

Για να κατασκευάσουμε την εμπειρική εκδοχή του παραπάνω μοντέλου ελαχιστοποίησης της VaR (5.4.14), σημειώνουμε πρώτα ότι η ποσότητα  $VaR_\alpha(X - f(X))$  με συνάρτηση απώλειας  $f$  ορίζεται ως εξής

$$VaR_\alpha(X - f(X)) = \min\{\xi \in \mathbb{R} : Pr(X - f(X) \leq \xi) \geq \alpha\},$$

και συνεπώς η εμπειρική εκτίμησή της δίνεται από τη σχέση

$$VaR_\alpha(f) = \max_{1 \leq i \leq N}^{[\alpha N] + 1} (x_i - f_i),$$

όπου  $[\cdot]$  δηλώνει το ακέραιο μέρος και  $\max_{1 \leq i \leq N}^k$  δηλώνει το κοστό μεγαλύτερο στοιχείο

Κατά συνέπεια, λαμβάνουμε το ακόλουθο εμπειρικό μοντέλο ελαχιστοποίησης του VaR

$$\begin{cases} \min_f \max_{1 \leq j \leq N}^{[\alpha N] + 1} x_j - f_j + \widehat{\Pi}(f) \\ \text{s. t. } 0 \leq f_i \leq x_i, i = 1, 2, \dots, N, \\ \widehat{\Pi}(f) \leq \pi \end{cases} \quad (5.4.15)$$

Θα πρέπει να τονιστεί ότι το παραπάνω εμπειρικό μοντέλο ελαχιστοποίησης της VaR δεν είναι πλέον ένα κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης, δεδομένου ότι γενικά η VaR δεν είναι κυρτή.

## 5.5 Συμπεράσματα

Λόγω της εγγενούς άπειρης διάστασης του προβλήματος βελτιστοποίησης, τα περισσότερα ανασφαλιστικά μοντέλα αποδεικνύονται μαθηματικά πολύ απαιτητικά για να επιλυθούν αποτελεσματικά και έτσι ο ασφαλιστής περιορίζεται τρομερά στη διερεύνηση των βέλτιστων ανασφαλιστικών συμβάσεων κατά τη λήψη των αποφάσεών του. Για να ξεπεραστεί ένας τέτοιος περιορισμός, το παρόν κεφάλαιο προτείνει μια καινοτόμο μέθοδο για την αντιμετώπιση των βέλτιστων λύσεων - την εμπειρική προσέγγιση. Πειραματιζόμενοι με το μοντέλο ελαχιστοποίησης της διακύμανσης, το μοντέλο ελαχιστοποίησης της CTE και το μοντέλο ελαχιστοποίησης της VaR, το παρόν κεφάλαιο δείχνει ότι η εμπειρική μας προσέγγιση είναι έντονα αποτελεσματική υπό την έννοια ότι οι εμπειρικές λύσεις που προκύπτουν από την εμπειρική προσέγγιση είναι σε μεγάλο βαθμό συνεπείς με τις θεωρητικές λύσεις όποτε αυτές υπάρχουν.

Στη συνέχεια, ας σημειώσουμε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της προτεινόμενης εμπειρικής προσέγγισης. Επικεντρωθείτε πρώτα στα πλεονεκτήματά της. Τα εμπειρικά μοντέλα βασίζονται πλήρως σε εμπειρικά δεδομένα και, ως εκ τούτου, χρησιμοποιώντας αυτή την εμπειρική προσέγγιση δεν χρειάζεται να κάνουμε καμία ρητή υπόθεση σχετικά με την κατανομή του υποκείμενου κινδύνου. Τα εμπειρικά μοντέλα είναι προβλήματα βελτιστοποίησης πεπερασμένων διαστάσεων και ως εκ τούτου είναι πολύ πιο εύχρηστα από τα αντίστοιχα θεωρητικά τους, τα οποία είναι συνήθως προβλήματα άπειρων διαστάσεων. Ως εκ τούτου, η εμπειρική προσέγγιση επιτρέπει πολύ μεγαλύτερη ευελιξία του στόχου βελτιστοποίησης καθώς και της αρχής του ανασφαλιστικού ασφαλιστρού στα ανασφαλιστικά μοντέλα, σε σύγκριση με τα θεωρητικά μοντέλα. Για παράδειγμα, με το κριτήριο ελαχιστοποίησης CTE, δεν είμαστε σε θέση να εξάγουμε τις λύσεις των θεωρητικών μοντέλων εάν οι αρχές των ανασφαλιστικών ασφαλιστρών είναι άλλες από την αρχή της προσδοκίας για την οποία μιλήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας την εμπειρική προσέγγιση αντλήσαμε τις λύσεις των θεωρητικών μοντέλων για την αρχή της τυπικής απόκλισης. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που κάναμε για την αρχή της τυπικής απόκλισης, μπορούμε να εξάγουμε τις λύσεις του εμπειρικού μοντέλου ελαχιστοποίησης της CTE για όλες τις άλλες αρχές που



εμπλέκονται σε αυτό το κεφάλαιο με τις ετικέτες Q1-Q10. Τέλος, υπενθυμίζουμε ότι για να βρούμε τις λύσεις του θεωρητικού μοντέλου ελαχιστοποίησης της CTE, πρώτα καθορίζουμε κάποιες ικανές και αναγκαίες συνθήκες τις οποίες πρέπει να ικανοποιεί μια βέλτιστη λύση και στη συνέχεια προσδιορίζουμε τις λύσεις δοκιμάζοντας κάποιους υποψηφίους με αυτές τις συνθήκες. Η επιλογή των υποψηφίων για το σκοπό αυτό μπορεί να είναι αρκετά μη τετριμμένη. Ως εκ τούτου, αφού εξάγουμε τις εμπειρικές λύσεις, θα παρέχουν πολύτιμες πληροφορίες για το πώς να επιλέξουμε έναν κατάλληλο υποψήφιο κατά την αναζήτηση των θεωρητικών βέλτιστων λύσεων.

Ένας προφανής περιορισμός της εμπειρικής προσέγγισης έγκειται στο γεγονός ότι το εμπειρικό μοντέλο θα αποδειχθεί προγραμματισμός μεγάλης κλίμακας όταν το μέγεθος του δείγματος είναι εξαιρετικά μεγάλο, και ως εκ τούτου θα προκύψουν ζητήματα όπως ο υπολογιστικός χρόνος και η απαίτηση για σημαντική μνήμη του υπολογιστή. Ένα άλλο ζήτημα σχετικά με την εμπειρική προσέγγιση είναι ότι η γενική θεωρητική σχέση μεταξύ των εμπειρικών λύσεων και των θεωρητικών λύσεων είναι άγνωστη και απαιτεί μελλοντική έρευνα. Φαίνεται ότι πρέπει να διαπιστώσουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της συνάρτησης στόχου στα εμπειρικά μοντέλα προς τη συνάρτηση στόχου στο θεωρητικό μοντέλο για όλες τις εφικτές παραχωρούμενες συναρτήσεις απώλειας.

## Βιβλιογραφία

Cai, J., and Tan, K. S., 2007. *Optimal Retention for a Stop-loss Reinsurance under the VaR and CTE Risk Measure. The ASTIN Bulletin 37, 93-112.*

Cai, J., Tan, K. S., Weng, C., and Zhang, Y., 2008. *Optimal Reinsurance under VaR and CTE Risk Measures. Insurance: Mathematics & Economics 43, 185-196.*

Kaluszka, M., 2005. *Optimal Reinsurance under Convex Principles of Premium Calculation. Insurance: Mathematics & Economics 36, 375-398.*

Rockafellar, R.T., and Uryasev, S., 2002. *Conditional Value-atRisk for General Loss Distributions. Journal of Banking & Finance 26, 1443-1471.*