ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝΣΤΗΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ

ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ LEVY ΜΕ ΦΟΡΟΛΟΓΗΣΗ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ

Ηλιάνα Γ. Γριμάνη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων*

Πειραιάς

Μάρτιος 2024

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ **ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ**

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ LEVY ΜΕ ΦΟΡΟΛΟΓΗΣΗ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ

Ηλιάνα Γ. Γριμάνη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων*

Πειραιάς

Μάρτιος 2024

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη Συνέλευση του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. ……..
συνεδρίασή της, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Ευστάθιος Χατζηκωνσταντινίδης, Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Μάρκος Κούτρας, Καθηγητής
- Γεώργιος Τζαβελάς, Αναπληρωτής Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

LEVY INSURANCE RISK MODELS WITH TAX

By

Iliana G. Grimani

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece
March 2024

Στους γονείς μου

Γιώργο και Ναταλία

Ευχαριστίες

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω κάποιους ανθρώπους, οι οποίοι είτε άμεσα είτε έμμεσα ήταν δίπλα μου και με βοήθησαν να ολοκληρώσω επιτυχώς τις Μεταπτυχιακές μου σπουδές. Πρώτα απ' όλα, θα ήθελα να εκφράσω το θαυμασμό μου και να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του κατά την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας, αλλά και τις γνώσεις και τα εφόδια που μου προσέφερε μέσα από τις διαλέξεις του. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, που πάντα είναι δίπλα μου, με στηρίζουν και με έμαθαν να κυνηγάω τους στόχους μου. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου για την στήριξη και ενθάρρυνση που μου προσέφεραν και όλους όσους πιστεύουν σε μένα.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα μελετήσουμε την στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος ενός χαρτοφυλακίου κινδύνων, θεωρώντας ότι περιγράφεται από μια γενική φασματικά αρνητική στοχαστική διαδικασία κινδύνου Levy (general spectrally negative Levy risk process). Επιπλέον, θα θεωρήσουμε ότι η ασφαλιστική εταιρεία καταβάλλει φόρο με σταθερό ρυθμό όταν βρίσκεται σε κατάσταση κερδοφορίας. Θα μελετηθεί η κατανομή των προεξοφλημένων φόρων που καταβάλλονται, καθώς και θα υπολογιστεί ποιο είναι το αναγκαίο πλεόνασμα που πρέπει να κατέχει η ασφαλιστική εταιρεία για να αρχίσει τη διαδικασία καταβολής φόρων έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το αναμενόμενο προεξοφλημένο συνολικό εισόδημα που καταβάλλεται ως φόρος. Επίσης, θα μελετηθεί μια ανάλογη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος θεωρώντας ότι η ασφαλιστική εταιρείας ελέγχει το πλεόνασμά της σε διακριτές χρονικές στιγμές. Τέλος, θα υπολογισθούν διάφορα μέτρα χρεοκοπίας μελετώντας την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu, καθώς επίσης θα μελετηθεί και η κατανομή των φόρων που καταβάλλονται μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου.

Abstract

In this thesis, we will study the stochastic surplus process of a risk portfolio, assuming that it is described by a general spectrally negative Levy risk process. Additionally, we will consider that the insurance company pays taxes at a fixed rate when it is in a profitable state. We will examine the distribution of the prepaid taxes paid and calculate the necessary surplus that the insurance company must hold to initiate the tax payment process in order to maximize the expected prepaid total income paid as taxes. Furthermore, a similar stochastic surplus process will be studied, assuming that the insurance company controls its surplus at discrete time points. Finally, various bankruptcy measures will be computed by studying the expected prepaid penalty function of Gerber-Shiu, as well as analyzing the distribution of taxes paid until the moment of bankruptcy of the portfolio.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Εικόνων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Ένα από τα κυρίαρχα ζητήματα στις επιχειρήσεις, εμπορικές, ασφαλιστικές, επενδυτικές κ.ο.κ. είναι η βιωσιμότητα σε μεγάλο χρονικό διάστημα, δηλαδή στο διηνεκές. Για την εταιρεία, καταστροφικό γεγονός είναι αυτό της χρεοκοπίας όπου το διαθέσιμο κεφάλαιο δεν επαρκεί για την κάλυψη των απαιτήσεων. Υπάρχουν ασφαλώς πολλοί παράγοντες που μπορούν να παρατείνουν το καταστροφικό γεγονός αυτό της χρεοκοπίας, όπως για παράδειγμα ένα μεγάλο αποθεματικό κεφάλαιο, αλλά δεν μπορεί η χρεοκοπία να αποφευχθεί αν η διαχείριση δεν είναι ορθή ή τα έσοδα είναι συνεχώς λιγότερα από τα έξοδα. Στόχοι των εταιρειών είναι είτε η ελαχιστοποίηση της πιθανότητας χρεοκοπίας ή ισοδυνάμως η μετάθεση αυτής ακόμη περισσότερο στο διηνεκές χρόνο. Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται αναλυτική παρουσίαση των βασικών αρχών που περιγράφουν την πιθανότητα και το χρόνο χρεοκοπίας και επίσης παρατίθενται παραδείγματα μετάθεσης του χρόνου στο διηνεκές και μείωσης της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Έχει αναλυθεί εκτενώς και από άλλες διπλωματικές εργασίες το κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας των Cramer-Lundberg (Μουσκόβιας, 2021; Χριστοδούλου 2022) σε σχέση με κινδυνο-κατανομές και άλλες παραμέτρους που πιθανοθεωρούν την πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα ή σο διηνεκές. Η παρούσα εργασία, βασίζεται αρχικά μεν στο κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας αναλύοντας το θεωρητικό υπόβαθρο με ζημιοκατανομές τις πιο διαδεδομένες όπως είναι η εκθετική και η μίξη εκθετικών. Περαιτέρω δε, αναλύει την καταβολή φόρων και μερισμάτων σε μετόχους πέρα των απαιτήσεων από ζημιές. Η καταβολή των παραπάνω παραμετρικοποιείται με ρυθμό $0 < \gamma < 1$ ο οποίος είναι $\gamma = 0$ στην περίπτωση του κλασσικού μοντέλου χρεοκοπίας των Cramer-Lundberg.

Το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει, και βασίζεται στην βιβλιογραφική ανασκόπηση ειδικών δημοσιευμένων μελετών είναι ότι οι εταιρείες μεταβάλλουν το ρυθμό γ σε σχέση με τα κέρδη ή τις ζημιές. Την χρονική περίοδο όπου η εταιρεία εμφανίζει κέρδη πάνω από ένα κατώφλι, αυξάνει την καταβολή φόρων και μερισμάτων και στην χρονική περίοδο όπου η εταιρεία δεν εμφανίζει κέρδη τότε και μηδενίζει το ρυθμό γ. Ο προσδιορισμός του ρυθμού γ είναι τέτοιος ώστε να μειώνει την πιθανότητα χρεοκοπίας τόσο βραχυπρόθεσμα όσο και στο διηνεκές.

Η δομή των κεφαλαίων που ακολουθούν είναι η εξής: στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε τις βασικές αρχές για συμβάντα σε χρόνο απαιτήσεων. Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε το κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας στο οποίο βασίζεται το κεφάλαιο 4 της εξόφλησης φόρων και μερισμάτων παράλληλα με τις απαιτήσεις ζημιών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Βασικές αρχές κατανομών

Σε κάθε πρόβλημα είναι απαραίτητο να μοντελοποιήσουμε το ύψος της ατομικής ζημιάς ως τυχαία μεταβλητή (τ.μ.), την οποία συμβολίζουμε *X*, και ο προσδιορισμός αυτής βασίζεται σε εμπειρικά δεδομένα προηγουμένων ετών στα οποία προσαρμόζεται η κατανομή αυτή μετά από έλεγχο X^2 του Pearson (έλεγχος καλής προσαρμογής). Η χρήση μιας κατανομής για την μοντελοποίηση της τ.μ. *X* της ατομικής ζημιάς λαμβάνει χώρα σε ομοιογενή χαρτοφυλάκια κινδύνου (Πολίτης, 2017). Με τον όρο ομοιογενή χαρτοφυλάκια εννοούμε αυτά στα οποία οι κίνδυνοι έχουν συνάφεια, δηλαδή αποτελούνται από κάλυψη ζημιών λόγω τροχαίων ατυχημάτων αυτοκινήτων περίπου ίδιου κυβισμού, ιδιωτικής χρήσης και οδηγούς ομοιογενούς ηλικιακής τάξης (π.χ. έμπειροι οδηγοί). Ένα άλλο χαρτοφυλάκιο θα αποτελείται από επαγγελματίες οδηγούς φορτηγών δημόσιας χρήσης, κλπ. Γίνεται εμφανές ότι η μεγαλύτερη έκθεση στον κίνδυνο διαφοροποιεί τα χαρτοφυλάκια μεταξύ τους.

Οι ζημιές λαμβάνουν χώρα σε πλήθος το οποίο μοντελοποιείται από την κατανομή Poisson την οποία θα συμβολίζουμε ως *N*. Τα χαρακτηριστικά αυτής είναι το διακριτό πλήθος που δύναται να έχει τιμές από 0 μέχρι το άπειρο (απροσδιόριστο) και έχει το μέγιστο βαθμό τυχαιότητας. Η κατανομή αυτή έχει σημαντική χρήση στην περιγραφή του πλήθους συμβάντων σε ένα ορισμένο χρονικό πλαίσιο το οποίο ονομάζουμε *μονάδα χρόνου*. Συνήθως η μονάδα χρόνου είναι τόσο μεγαλύτερη όσο λιγότερα συμβάντα υφίστανται. Έτσι, αν θέλουμε να μελετήσουμε τις πτώσεις επιβατηγών αεροσκαφών επιλέγουμε το έτος ως χρονική μονάδα, ενώ για τα τροχαία ατυχήματα επιλέγουμε την ημέρα ως χρονική μονάδα. Τέλος, η σημαντική πληροφορία που μας παρέχει η κατανομή αυτή των συμβάντων είναι το πλήθος και όχι το πότε αυτά λαμβάνουν χώρα στη μονάδα του χρόνου. Δηλαδή η πιθανότητα *n*- συμβάντων είναι ίδια ανεξάρτητα αν αυτά γίνουν στην αρχή, στο τέλος ή ομοιόμορφα στο χρόνο αναφοράς.

Ορίζουμε τη συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Poisson με παράμετρο λ>0 ως εξής

$$\Pr(N = x) = f(x;\lambda) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, x = 0,1,2,\ldots.$$

με αναμενόμενη τιμή και διασπορά ίσες με λ, και ροπογεννήτρια συνάρτηση

$$M_N(u) = e^{\lambda\left(e^u - 1\right)}$$

και πιθανογεννήτρια συνάρτηση

$$P_N(u) = e^{\lambda(u-1)}$$

Η παράμετρός λ είναι ο αναμενόμενος αριθμός ζημιών $E(N)$ όσο και η διασπορά $\mathrm{Var}(N)$ στη μονάδα του χρόνου και προσδιορίζεται από μεθόδους εκτίμησης όπως η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας και η μέθοδος ροπών (Ηλιόπουλος, 2013). Πιο αναλυτικά, ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου $\lambda>0$ είναι ο δειγματικός μέσος του πλήθους ζημιών των n-προηγούμενων χρονικών περιόδων:

$$\hat{\lambda} = \bar{N} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} N_i$$

όπου N_i είναι το παρατηρούμενο πλήθος ζημιών της i- μοναδιαίας μονάδα χρόνου, $i=1,\ldots,n$. Ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\lambda}$ της παραμέτρου $\lambda>0$ είναι πλήρως αποτελεσματικός, δηλαδή είναι αμερόληπτος και ελάχιστης διασποράς σε σχέση με όποιον άλλο εκτιμητή $\tilde{\lambda}$ (Πολίτης, 2017):

$$E\left(\hat{\lambda}\right) = \lambda, \quad Var\left(\hat{\lambda}\right) \le Var\left(\tilde{\lambda}\right)$$

Τέλος, ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας ταυτίζεται με τον εκτιμητή της μεθόδου των ροπών.

Η παράμετρος $\lambda > 0$ δεν είναι σταθερή αλλά δύναται να μεταβάλλεται και συνεπώς να τυχαιοποιείται ως τυχαία μεταβλητή (Κουτσόπουλος, 1999). Πρόκειται για την περίπτωση της εκ των προτέρων κατανομής και η τ.μ. του πλήθους των ζημιών N είναι δεσμευμένη κατανομή $N|\lambda$ ~ Poisson(λ), όπου λ είναι η εκ των προτέρων κατανομή. Προκύπτει έτσι ότι ο αναμενόμενος αριθμός ζημιών ανεξάρτητα της παραμέτρου λ είναι

$$E(N) = E\{E(N|\lambda)\} = E(\lambda)$$

με αντίστοιχη διασπορά

$$Var(N) = Var\{E(N|\lambda)\} + E\{Var(N|\lambda)\} = Var(\lambda) + E(\lambda)$$

Ας πάρουμε την περίπτωση της μοντελοποίησης της εκ των προτέρων κατανομής λ ως εκθετική μέσης τιμής ίσης με την παράμετρο $\theta > 0$. Τότε ο αναμενόμενος αριθμός ζημιών στη μονάδα του χρόνου είναι $E(N) = E(\lambda) = \theta$ και η διασπορά είναι $Var(N) = Var(\lambda) + E(\lambda) = \theta^2 + \theta$

Αν επεκταθούμε σε χρόνο $t > 0$, τότε το πλήθος των ζημιών $N(t)$ είναι στοχαστική ανέλιξη Poisson με παράμετρο λt. Εδώ παρατηρούμε την εφαρμογή της αρχής της αναλογίας. Αν αναμένονται 2 ζημιές σε διάστημα ενός μηνός ($\lambda = 2$), τότε θα αναμένουμε 24 ζημιές (12λ) στο διάστημα του έτους. Η κατανομή Poisson συνδέεται με την εκθετική κατανομή, καθώς το μεσοδιάστημα εμφάνισης ζημιών είναι εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/λ (ή ισοδύναμα παράμετρο $\lambda > 0$). Βασική προϋπόθεση είναι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και αυτό είναι σύνηθες στη θεωρία κινδύνου καθώς η ανέλιξη του πλήθους ζημιών $N(t)$ είναι ανανεωτική.

Οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των ζημιών, όπως είπαμε νωρίτερα, ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$, και η οποία χαρακτηρίζεται ως κατανομή με έλλειψη μνήμης. Πράγματι, η συνάρτησης κατανομής αυτής είναι

$$F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda y}, y > 0 \, .$$

και θα αποδείξουμε ότι η πιθανότητα να μεσολαβήσει χρονικό διάστημα $Y < s + y$ (έως την επόμενη ζημιά) δοθέντος ότι $Y > s$ είναι ανεξάρτητη της τιμής s και ίση με την πιθανότητα να μεσολαβήσει χρονικό διάστημα $Y < y$:

$$P(Y < s + y|Y > s) = \frac{P(s < Y < s + y)}{P(Y > s)} = \frac{F_Y(s + y) - F_Y(s)}{\bar{F}_Y(s)}$$

$$= \frac{\bar{F}_Y(s) - \bar{F}_Y(s+y)}{\bar{F}_Y(s)} = 1 - e^{-\lambda y} = P(Y < y)$$

Όπως η εκθετική κατανομή, έτσι και η ανέλιξη Poisson δεν έχει μνήμη.

Πράγματι, υποθέτουμε ότι στο χρονικό διάστημα (0, t) συμβαίνουν k-ζημιές, τότε η πιθανότητα να συμβούν $k + n$ ζημιές στο χρονικό διάστημα (0, s), $s > t$ είναι ίση με την πιθανότητα να συμβούν n- ζημιές στο διάστημα (0, s-t):

$$P\left(N(s)=k+n \mid N(t)=k\right)=\frac{P\left(N(t)=k, N(s)=k+n\right)}{P\left(N(t)=k\right)}=\frac{P\left(N(t)=k, N(s-t)=n\right)}{P\left(N(t)=k\right)}=$$

$$\frac{P\left(N(t)=k\right)\cdot P\left(N(s-t)=n\right)}{P\left(N(t)=k\right)}=P\left(N(s-t)=n\right)$$

Πρακτικά αυτό μεταφράζεται ως εξής: έστω ότι σε διάστημα ενός μήνα αναμένονται 2 ζημιές, τότε η πιθανότητα να υπάρξουν 3 ζημιές στο διάστημα 1,5 μηνός είναι ίση με την πιθανότητα να υπάρξει 1 ζημιά σε διάστημα μισού μήνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας

3.1 Σε συνεχή χρόνο t > 0

Το πλεόνασμα $u(t)$ παριστάνεται με μια ανέλιξη στο χρόνο $t > 0$ και προσδιορίζεται από το απόθεμα $u = u(0)$, το ρυθμό (ή ένταση) εισροών c και το ρυθμό εκροών ή ζημιών λόγω απαιτήσεων $S(t)$:

$$u(t) = u + c \cdot t - S(t)$$

όπου $S(t)$ είναι σε χρόνο $t > 0$ σύνθετη Poisson (CP; Compound Poisson):

$$S(t) \sim CP(\lambda \cdot t,\, f_X),$$

όπου f_X είναι η συνάρτηση πυκνότητας ή πιθανότητας της ατομικής ζημιάς, και περιγράφεται από το κάτωθι μοντέλο συλλογικού κινδύνου

$$S(t) = \begin{cases} 0, & N(t) = 0 \\ X_1 + \ldots + X_{N(t)}, & N(t) > 0 \end{cases}$$

με αναμενόμενη ζημιά $E\big(S(t)\big) = \lambda \cdot t \cdot E(X)$ και διασπορά $Var\big(S(t)\big) = \lambda \cdot t \cdot E\left(X^2\right)$.

Αν η ατομική ζημιά είναι διακριτή, τότε η συνολική ζημιά είναι επίσης διακριτή τυχαία μεταβλητή με σ.π. $g(x)$ η οποία προσδιορίζεται από την αναδρομική σχέση:

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\lambda t\left(f_X(0)-1\right)}, & x = 0 \\ \dfrac{\lambda t}{x} \cdot \displaystyle\sum_{u=1}^{x} u \cdot f_X(u) \cdot g(x-u), & x > 0 \end{cases}$$

Η βασική υπόθεση της εταιρείας είναι η ένταση ταμειακών εισροών c να υπερβαίνει την αναμενόμενη συνολική ζημιά στη μονάδα του χρόνου $\mathrm{E}(S(t)) = \lambda\ \mathrm{E}(X)$, διότι σε αντίθετη περίπτωση η χρεοκοπία στο διηνεκές είναι βέβαιη (Albrecher et al, 2008).

Η υπόθεση $c > \lambda\ \mathrm{E}(X)$ είναι αναγκαία αλλά δεν μπορεί να αποτρέψει τη χρεοκοπία εφόσον μια μεγάλη ζημιά X δύναται να δημιουργήσει έλλειμμα πλεονάσματος $u(T) < 0$ όπου T είναι ο χρόνος χρεοκοπίας.

Ο χρόνος χρεοκοπίας *T;* είναι αυτός όταν η συνολική ζημιά υπερβεί το άθροισμα αποθέματος και εισροών:

$$u(T) < 0 \Leftrightarrow S(T) > u + c \cdot T,$$

και ορίζεται από τη σχέση

$$T = \begin{cases} inf\{t\colon U(t) < 0\} \\ \infty, U(t) > 0, \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Πρόκειται για ελλειμματική τυχαία μεταβλητή, εφόσον μπορεί με θετική πιθανότητα να απειρισθεί, υπό την προϋπόθεση ότι $c > \lambda\ \mathrm{E}(X)$.

Μια βασική παράμετρος που καθορίζει σημαντικά την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι το απόθεμα της εταιρείας κατά την έναρξη της δραστηριότητας της, δηλαδή το χρόνο $t = 0$. Τελικά, σε συνδυασμό με το χρόνο $t > 0$, η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως διμετάβλητη συνάρτηση του αποθέματος u και του χρόνου $t > 0$

$$\Psi\left(u, t\right) = \mathrm{P_r}\left(\exists\, \tau, 0 < \tau < t : u(\tau) < 0\right)$$

και είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του αποθέματος $\dfrac{\partial \Psi}{\partial u} < 0$ και γνησίως αύξουσα συνάρτηση του χρόνου $\dfrac{\partial \Psi}{\partial t} > 0$.

Αν και η πρώτη συνθήκη μας δείχνει λογική, η δεύτερη είναι μάλλον λίγο απαισιόδοξη για μακροπρόθεσμα σενάρια.

Είναι γεγονός λοιπόν ότι υψηλό απόθεμα μειώνει μεν την πιθανότητα χρεοκοπίας χωρίς όμως να είναι ικανή συνθήκη να τη διατηρήσει χαμηλή στο χρόνο. Για το λόγο αυτό επιβάλλεται αλλαγή στρατηγικής λαμβάνοντας υπόψη τα νέα δεδομένα σε ότι αφορά κυρίως την μοντελοποίηση της τ.μ. ύψους ζημιάς ή την θεώρηση της έντασης των ζημιών ως συνάρτηση του χρόνου $\lambda(t)$ παρά σταθερή. Στο διηνεκές πάντως η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ασυμπτωτικά μονομεταβλητή συνάρτηση ως προς το αρχικό απόθεμα:

$$\Psi(u) = \lim_{t\to\infty} \Psi(u,t)$$

Μια βασική και σχετικά απλή παράμετρος που καθορίζει τον κίνδυνο χρεοκοπίας είναι το περιθώριο ασφάλειας $\theta > 0$ που εκφράζει το σχετικό αναμενόμενο κέρδος για την εταιρεία στη μονάδα του χρόνου:

$$\theta = \frac{c}{\lambda \cdot E(X)} - 1$$

Το περιθώριο ασφάλειας είναι ανάλογο της ροής εισφορών και αντιστρόφως ανάλογο της έντασης ζημιών και αναμενόμενης ζημιάς. Όσο μεγαλύτερο είναι το περιθώριο ασφάλειας τόσο πρακτικά μειώνεται ο κίνδυνος χρεοκοπίας καθώς μεγαλώνει η απόσταση του κλάσματος από τη μονάδα ή ισοδύναμα μεγαλώνει η απόσταση του ρυθμού εισφορών από την συνολικό αναμενόμενο μέγεθος ζημιάς στη μονάδα του χρόνου. Το πρόβλημα είναι ότι υψηλές τιμές του περιθωρίου ασφάλειας, κυρίως $\theta > 1$, θέτουν θέμα χαμηλής ανταγωνιστικότητας βάζοντας σε κίνδυνο μελλοντικές ταμειακές εισροές (Πολίτης, 2017). Ένα για παράδειγμα υψηλό ασφάλιστρο μπορεί να διασφαλίζει την κάλυψη μεγάλου μεγέθους ζημιάς, αλλά δεν είναι ελκυστικό για να προσελκύσει υποψήφια άτομα προς ασφάλιση.

Το αναμενόμενο ύψος ζημιάς $E(X)$ και το περιθώριο ασφάλειας θ αποτελούν βασικές παραμέτρους για την πιθανότητα μη χρεοκοπίας

$$\delta(u)=1-\Psi(u)$$

η οποία υπολογίζεται από την διαφορική εξίσωση:

$$(\theta+1)\cdot E(X)\cdot\frac{d\delta(u)}{du} = \delta(u) - \int_0^u \delta(u-x) f(x)dx$$

με αρχική τιμή $\delta(0) = \theta / (1 + \theta)$.

Στην περίπτωση $t \to \infty$, μπορεί να αποδειχθεί ότι ένα άνω και κάτω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι το εξής:

$$\frac{\bar{H}(u)}{\bar{H}(u) + \theta} \leq \Psi(u) \leq e^{-R \cdot u}$$

όπου

$$\bar{H}(u) = \frac{1}{E(X)} \int_u^{\infty} \bar{F}_X(x) dx$$

και ο συντελεστής προσαρμογής R είναι θετική λύση της εξίσωσης του Lundberg:

$$-\frac{1}{R} + \frac{1}{R} M_X(R) = \frac{c}{\lambda}$$

όπου $M_X(t)$ είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση του ύψους ατομικής ζημιάς X

Σε πολλές των περιπτώσεων, στην ατομική ζημιά προσαρμόζεται η εκθετική κατανομή με παράμετρο $\beta > 0$, και η πιθανότητα χρεοκοπίας στο διηνεκές υπολογίζεται με ακρίβεια από την σχέση

$$\Psi(u) = \Psi(0) \cdot e^{-R \cdot u}$$

όπου ο συντελεστής προσαρμογής R ως λύση της εξίσωσης του Lundberg είναι

$$R = \beta \cdot \frac{\theta}{\theta + 1}.$$

Στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής ζημιάς, υπολογίζουμε το αποθεματικό ώστε η πιθανότητα χρεοκοπίας να είναι κάτω από ορισμένο επιθυμητό όριο πιθανότητας p:

$$\Psi(u) \leq p \Leftrightarrow \Psi(0) \cdot e^{-R \cdot u} \leq p \Leftrightarrow e^{-R \cdot u} \leq \frac{p}{\Psi(0)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -R \cdot u \leq \ln\left(\frac{p}{\Psi(0)}\right) \Leftrightarrow u \geq -\frac{1}{R} \cdot \ln\left(\frac{p}{\Psi(0)}\right)$$

Άρα $\min(u) = u_{\min} = -\frac{1}{R} \cdot \ln\left(\frac{p}{\Psi(0)}\right)$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{d}{dp} u_{\min} = -\frac{1}{R} \cdot \Psi(0) < 0$$

οπότε όσο μικρότερη επιθυμητή πιθανότητα χρεοκοπίας τόσο μεγαλύτερο το ελάχιστο απόθεμα. Επίσης, για μικρή επιθυμητή πιθανότητα χρεοκοπίας p και συνήθως $p < \Psi(0)$, όσο μεγαλύτερος ο συντελεστής προσαρμογής R τόσο πιο χαμηλό δύναται να είναι το ελάχιστο αποθεματικό.

Στην ειδική περίπτωση του μεγέθους αποζημίωσης ως μίξη k- το πλήθος εκθετικών κατανομών με παραμέτρους $\beta_1, \ldots, \beta_k$ και συντελεστές $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ώστε $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$, με σ.π.π.

$$f(x) = a_1 \beta_1 e^{-\beta_1 x} + \ldots + a_k \beta_k e^{-\beta_k x},$$

η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογισθεί ακριβώς και δίνεται ως εξής:

$$\psi(u) = c_1 e^{-r_1 u} + \ldots + c_k e^{-r_k u}$$

όπου $r_1, \ldots, r_k$ είναι λύσεις της εξίσωσης του Lundberg και επαληθεύουν την ανισότητα $0 < r_1 < \beta_1 < r_2 < \beta_2 < \ldots < r_k < \beta_k$. Αν $k = 2$, τότε οι συντελεστές c_1, c_2 αποτελούν λύση του συστήματος

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \dfrac{1}{1+\theta} \\ c_1 r_1 + c_2 r_2 = \dfrac{\theta}{(1+\theta)^2 E(X)} \end{cases}$$

Για την περίπτωση της μη εκθετικής κατανομής μεγέθους απαιτήσεων χρησιμοποιείται ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg:

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\psi(u)}{c \cdot e^{-Ru}} = 1, \qquad 0 < c < 1$$

ή η προσέγγιση De Vylder (1984):

$$\hat{\Psi}(u) = \hat{\Psi}(0)e^{-\hat{R}u} = \frac{1}{1+\hat{\theta}}e^{-\frac{\hat{\theta}}{1+\hat{\theta}\hat{p}_1}u}$$

όπου οι εκτιμητές προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}\hat{\lambda}\hat{p}_1 &= \theta\lambda p_1 \\
\hat{\lambda}\hat{p}_2 &= \lambda p_2 \\
\hat{\lambda}\hat{p}_3 &= \lambda p_3 \\
\hat{p}_k &= k!\cdot \hat{p}_1^k
\end{aligned}$$

Ένα άνω φράγμα για το συντελεστή προσαρμογής δίνεται από τη σχέση

$$R \leq \frac{2 \cdot E(X) \cdot \theta}{E(X^2)}$$

Διαγραμματικά, η ανέλιξη πλεονάσματος σε συνεχή χρόνο ακολουθεί μια διαδρομή ανόδου με κλίση όπου κατόπιν διακόπτεται από τις ατομικές απαιτήσεις με τη μορφή «πτώσης». Για τη μελέτη του διαγράμματος εξετάζουμε τις χρονικές στιγμές όπου παρατηρείται ένα νέο ελάχιστο στην ανέλιξη του πλεονάσματος. Στο διάγραμμα βασικές τιμές είναι το απόθεμα, το χρονικό σημείο απαίτησης αποζημίωσης, η τιμή του πλεονάσματος ακριβώς πριν την απαίτηση και η τιμή του πλεονάσματος κατόπιν αποζημίωσης της απαίτησης. Αν η τελευταία είναι αρνητική τότε πρόκειται για έλλειμμα πλεονάσματος και ο χρόνος απαίτησης, όταν αυτό συμβεί για πρώτη φορά, αναφέρεται ως χρόνος χρεοκοπίας.

Η τιμή του πλεονάσματος ακριβώς πριν την *j*-απαίτηση ορίζεται

$$u(t_j^-) = u(t_{j-1}) + c\cdot(t_j - t_{j-1})$$

ενώ κατόπιν καταβολής της αποζημίωσης X_j λόγω της αντίστοιχης απαίτησης είναι

$$u(t_j) = u(t_{j-1}) + c\cdot(t_j - t_{j-1}) - X_j$$

Το μέγεθος X_j της j-απαίτησης είναι $X_j = u(t_j^-) - u(t_j)$. Στο χρόνο χρεοκοπίας $T > 0$, $u(T) < 0$.

Μια επίσης πολύ βασική τιμή στο διάγραμμα είναι η κατανομή των κλιμακωτών υψών ή πτώση πλεονάσματος.

Αν το μέγεθος αποζημίωσης είναι συνεχής τ.μ., τότε οι διαδοχικές πτώσεις πλεονάσματος είναι ισόνομες και ανεξάρτητες τ.μ. με συνάρτηση κατανομής

$$F_{L_1}(x) = \frac{1}{E(X)} \cdot \int_0^x \left(1 - F_X(t)\right) dt, \qquad x > 0$$

και σ.π.π. $f_{L1}(x) = \frac{1 - F_X(x)}{E(X)}, x > 0$.

Το άθροισμα των πτώσεων πλεονάσματος $L_1 + \ldots + L_k$ ορίζεται ως μέγιστη σωρευτική απώλεια L με ροπογεννήτρια συνάρτηση

$$M_L(u) = \frac{\theta}{1 + \theta - M_{L_1}(u)}$$

και συνάρτηση κατανομής $F_L(u) = \delta(u)$.

Η μέση τιμή και διασπορά της μέγιστης σωρευτικής απώλειας είναι

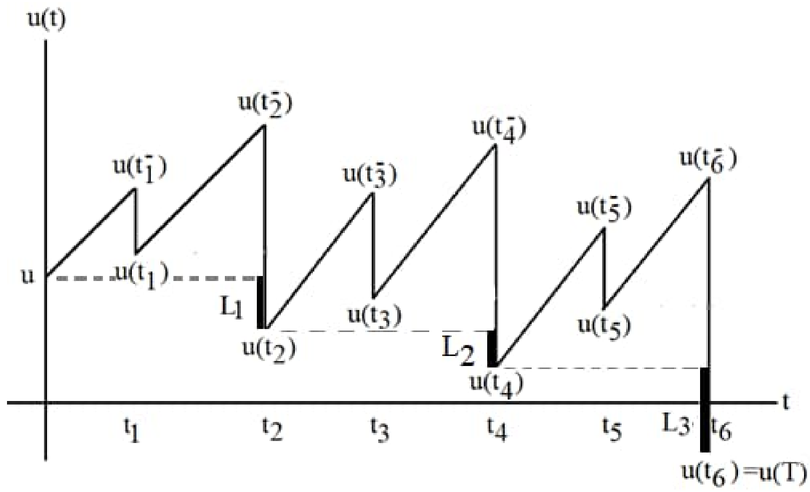
$$E(L) = \frac{E(X^2)}{2\theta E(X)} = \left\{UB(R)\right\}^{-1}, \qquad Var(L) = \frac{E(X^3)}{3\theta E(X)} + \left(\frac{E(X^2)}{2\theta E(X)}\right)^2$$

όπου $UB(R)$ είναι το άνω φράγμα του συντελεστή προσαρμογής.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας δοθέντος αποθέματος $u > 0$ με την πρώτη απαίτηση ικανοποιεί τη σχέση

$$\Psi_1(u) = \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \left(1 - F_X\left(u + c \cdot t\right)\right) dt$$

Το κάτωθι διάγραμμα (εικόνα 1) δίνει μια αναπαράσταση επεξηγηματική των εννοιών που αναλύσαμε παραπάνω και παρουσιάζει την εξέλιξη του πλεονάσματος στο χρόνο.



Εικόνα 1

Ξεκινώντας από απόθεμα u τη χρονική στιγμή $t = 0$, οι χρόνοι απαίτησης είναι t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, $t_6 = T$ εφόσον πρόκειται για χρεοκοπία. Οι πτώσεις πλεονάσματος

$$L_1 = u - u(t_2),\ L_2 = u(t_2) - u(t_4) \text{ και } L_3 = u(t_4) - u(t_6)$$

συμβαίνουν τις χρονικές στιγμές t_2, t_4 και t_6 αντίστοιχα. Η τελευταία πτώση πλεονάσματος είναι πάντοτε στο χρόνο χρεοκοπίας. Παρατηρούμε ότι μεταξύ των απαιτήσεων το πλεόνασμα έχει γραμμική θετική εξέλιξη με κλίση c την ένταση εισφορών. Στο χρόνο της απαίτησης φαίνεται η πτώση που μειώνει στιγμιαία το πλεόνασμα ώστε αν αυτή υπερβεί προς τα κάτω την τιμή πλεονάσματος στην προηγούμενη απαίτηση, τότε έχουμε την πτώση πλεονάσματος.

3.2 Σε διακριτό χρόνο n

Στο συνεχή χρόνο όπου η χρεοκοπία συμβαίνει οποιαδήποτε χρονική στιγμή εφόσον το πλεόνασμα γίνει αρνητικό. Στο διακριτό, αντίθετα, η διάκριση του χρόνου σε περιόδους περιορίζει την περίπτωση χρεοκοπίας μόνο σε αυτές τις διακριτές περιόδους (Πολίτης, 2017). Αυτό ισχύει εφόσον το πλεόνασμα υπολογίζεται σε διακριτές περιόδους 1, 2, …, n, …:

$$U(n) = u + c \cdot n - S(n),$$

όπου $S(n)$ είναι το άθροισμα των απαιτήσεων $W_1 + \ldots + W_n$ ανά χρονική περίοδο και κάθε περιοδική απαίτηση είναι μοντέλο συλλογικού κινδύνου σε σχέση με το ύψος ατομικής ζημιάς και το πλήθος ζημιών N που είναι κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$, άρα η περιοδική απαίτηση είναι σύνθετη Poisson:

$$W \sim \mathrm{CP}(\lambda, f_X).$$

Τα κέρδη των περιόδων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. $G = c - W$ και το κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας στο διακριτό χρόνο είναι:

$$u(n) = u + \sum_{i=1}^{n} G_i$$

Στο μοντέλο αυτό η περίοδος χρεοκοπίας είναι

$$\tilde{T} = \min\{n: u(n) \leq 0, u(n-1) > 0\}$$

και ο συντελεστής προσαρμογής $\tilde{R}$ δύναται εκτός από την εξίσωση του Lundberg να εκτιμηθεί από την εξίσωση της ροπογεννήτριας συνάρτησης των περιοδικών απαιτήσεων

$$M_W(\tilde{R}) = e^{c\tilde{R}}$$

ή ισοδυνάμως του περιοδικού κέρδους

$$M_G(-\tilde{R}) = 1.$$

Τέλος, η πιθανότητα χρεοκοπίας με έλλειμμα χρεοκοπίας $u_{\tilde{T}} < 0$ μπορεί να βρεθεί με βάση τη σχέση

$$\tilde{\Psi}(u) = \frac{e^{-\tilde{R}u}}{E\left[e^{-\tilde{R}u_T} \middle| T < \infty\right]}$$

Συνοπτικά και με βάση τα παραπάνω, στη θεωρία χρεοκοπίας το μείζον πρόβλημα είναι η μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα το πλεόνασμα να αντιστραφεί σε πρόσημο, από θετικό σε αρνητικό (εφόσον ξεκινά τη χρονική στιγμή 0 από απόθεμα).

Ωστόσο, εκτός από το γεγονός της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από μια τιμή, που μπορεί να είναι μεν θετική, αλλά αποτελεί δε σήμα κινδύνου για μελλοντική χρεοκοπία είτε άμεσα είτε στο διηνεκές, η ασφαλιστική εταιρεία ενδιαφέρεται και για την περίπτωση της υπέρβασης του πλεονάσματος πάνω από ένα προκαθορισμένο άνω φράγμα. Οι αιτίες που δύναται να σπάσει προς το πάνω την τιμή αυτή θα μπορούσαν να είναι (Πολίτης, 2017; Gerber, 1079):

- Πολύ μεγάλο αρχικό απόθεμα
- Η ύπαρξη πολλών χαρτοφυλακίων, ώστε αν παρουσιαστεί έλλειμμα σε κάποιο από αυτά, δύναται παρόλα αυτά να καλυφθεί από τα κέρδη των υπολοίπων χαρτοφυλακίων. Πρόκειται κυρίως για χαρτοφυλάκια με συνδιακύμανση κοντά στην τιμή μηδέν τα οποία εμφανίζουν σχετική ανεξαρτησία ώστε να μειώνεται ο επενδυτικός κίνδυνος (Dickson et al, 2009)
- Η διερεύνηση του χρόνου που απαιτείται μέχρι το πλεόνασμα να σπάσει προς τα πάνω την τιμή άνω φράγματος, αποτελεί στόχο για την ασφαλιστική εταιρεία η οποία προτίθεται να δώσει μερίσματα σε μετόχους.

Ο χρόνος T_b πρώτης διέλευσης της τιμής αυτής, έστω $b > u$ είναι $T_b = \tau_b^+ = \inf\left\{t : U(t) = b\right\}$ και στην περίπτωση όπου η ανέλιξη πλεονάσματος U(t) δεν παρουσιάζει άλματα προς τα πάνω αλλά προς τα κάτω, τότε $T_b = \tau_b^+ = \inf\left\{t : U(t) \geq b\right\}$

.

Ο χρόνος διέλευσης T_b είναι τυχαία μεταβλητή με ροπογεννήτρια συνάρτηση

$$E\left(e^{rT_b}\right) = e^{sb}$$

όπου *r*, *s* συνδέονται από τη σχέση

$$r = s \cdot c - \lambda\left(M_X\left(s\right) - 1\right)$$

όπου $M_X(s)$ είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση του μεγέθους απαίτησης (αποζημιώσεις) X.

Στην περίπτωση (Asmussen & Albrecher, 2011), όπου το αποθεματικό της εταιρείας είναι $u \geq 0$, τότε ο αναμενόμενος χρόνος T_b είναι

$$E(T_b) = \frac{b-u}{c-\lambda\mu_1} = \frac{b-u}{\theta\lambda\mu_1}$$

και είναι ανάλογος του ύψους (b - u) και αντιστρόφως ανάλογος του περιθώριου ασφάλειας (θ), του μέσου μεγέθους απαίτησης (μ_1 = Ε(X)) και του αναμενόμενου αριθμού αφίξεων των απαιτήσεων (λ).

Ακολούθως του περιορισμού $T_b < T = \inf\{t: U(t) < 0\}$ ορίζουμε τη μεταβλητή $T_b(u) = \min\{T, T_b\}$, με $P(T_b(u) < \infty) = 1$ και την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία πριν το πλεόνασμα υπερβεί το κατώφλι:

$$\psi_b(u) = P\big(U(T_b(u)) < 0\big) = \frac{\psi(u)-\psi(b)}{1-\psi(b)}, \qquad b > u \geq 0$$

Για την ειδική περίπτωση της εκθετικής κατανομής του ύψους απαίτησης X,

$$\psi_b(u) = \frac{e^{-Ru}-e^{-Rb}}{1+\theta-e^{-Rb}}, \qquad b > u \geq 0$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Αναμενόμενη προεξοφλημένη ποινή

(discounted penalty function)

4.1 Θεμελιώδεις αρχές

Όταν συμβεί χρεοκοπία, η ασφαλιστική εταιρεία χρεώνεται με ποινή ή πρόστιμο τη στιγμή αυτή. Το χρηματικό ύψος της ποινής αυτής εξαρτάται από τους εξής παράγοντες:

Το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία $U(T^-)$ και το έλλειμμα της χρεοκοπίας $|U(T)|$. Ας υποθέσουμε ότι το ύψος της ποινής αυτής είναι w, τότε η τυχαία μεταβλητή $w\{U(T^-), |U(T)|\}$ εκπροσωπεί το χρηματικό πρόστιμο που θα πληρώσει η ασφαλιστική εταιρεία τη στιγμή της χρεοκοπίας T.

Η συνάρτηση

$$m_\delta(u) = E\left[w\left(U(T-), \left|U(T)\right|\right) e^{-\delta T} 1 \cdot (T < \infty) \middle| U(0) = u \right]$$

(όπου $\delta > 0$ η ένταση ανατοκισμού), ορίζεται ως η συνάρτηση αναμενόμενης προεξοφλημένης ποινής ή εναλλακτικά συνάρτηση των Gerber-Shiu (Gerber & Shiu, 1998). Η συνάρτηση αυτή είναι ίση με 0 αν δεν συμβεί χρεοκοπία.

Για την ειδική περίπτωση της μηδενικής έντασης ανατοκισμού ($\delta = 0$) και

- $w\left(U\left(T-\right),\left|U\left(T\right)\right|\right)$=1, η συνάρτηση των Gerber-Shiu ταυτίζεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας στο διηνεκές $m_0\left(u\right)=\psi\left(u\right)$
- $w\left(U\left(T-\right),\left|U\left(T\right)\right|\right)=\left|U\left(T\right)\right|$ τότε $m_0\left(u\right)=E\left(U\left(T\right)\right)$
- $w\left(U\left(T-\right),\left|U\left(T\right)\right|\right)=\left|U\left(T-\right)\right|$ τότε $m_0\left(u\right)=E\left(U\left(T-\right)\right)$

Οι Gerber και Shiu μελέτησαν την κάτωθι εξίσωση η οποία αποτελεί την γενικευμένη (ή θεμελιώδης) εξίσωση του Lundberg:

$$l\left(s\right)=\delta+\lambda-cs,\qquad \sigma\geq 0$$

όπου $l(0)$ = σ + λ ≥ λ. Για την εξίσωση $l\left(s\right)=\lambda\hat{f}\left(s\right)$ όπου $\hat{f}\left(s\right)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της πυκνότητας *f* του μεγέθους αποζημίωσης *X*:

$$\hat{f}\left(s\right)=\int_0^\infty e^{-sx}f\left(x\right)dx=M_X\left(-s\right)$$

(M_X η ροπογεννήτρια συνάρτηση) τότε και $l\left(0\right)=\lambda\hat{f}\left(0\right)$. Η εξίσωση $l\left(s\right)=\lambda\hat{f}\left(s\right)$ έχει μοναδική ρίζα στον μη –αρνητικό ημιάξονα έστω *ρ*. Στην πιο διαδεδομένη περίπτωση της εκθετικής κατανομής μεγέθους αποζημίωσης με έστω *β* > 0 την παράμετρο αυτής, έχουμε

$$l\left(s\right)=\sigma+\lambda-cs=\lambda\hat{f}\left(s\right)=\lambda\cdot\frac{\beta}{\beta+s}\Leftrightarrow cs^2+\left(c\beta-\sigma-\lambda\right)s-\beta\sigma=0$$

Η επίλυση της παραπάνω εξίσωσης για *ρ* > 0 είναι

$$\rho=\frac{\lambda+\sigma-c\beta+\sqrt{\left(c\beta-\sigma-\lambda\right)^2+4c\beta\sigma}}{2c}$$

Ακολούθως θα παρουσιάσουμε τη μελέτη των Kyprianou και Palmowski (2007) που αφορά τη βέλτιστη πληρωμή των μερισμάτων στους μετόχους των ασφαλιστικών εταιρειών νωρίτερα της στιγμής της χρεοκοπίας. Η ερευνητική ομάδα βασίζεται στο κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας όπως αυτό θεμελιώθηκε από τον De Finetti (XVth

International Congress for Actuaries, 1957) και τον Gerber (1979) και αναλύθηκε αργότερα εκτενώς από την ερευνητική ομάδα των Azcue και Muler (2005) και Avram et al (2007).

Σύμφωνα με την ομάδα των Kyprianou και Palmowski (2007), το μοντέλο των Cramer-Lundberg είναι αντίστοιχο της διαδικασίας Levy

$$X^{CL} = \{X_t^{CL} : t \geq 0\}$$

με χαρακτηριστική συνάρτηση της ανέλιξης πλεονάσματος $u(t)$ η οποία προσδιορίζεται ως εξής:

$$\psi^{CL}(\theta) = -\ln E\left(e^{i\theta(u(1)-u)}\right) = -\ln \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} P(X_1^{CL} \in dx) = -ic^{CL}\theta + \lambda^{CL} \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-i\theta x}) F(dx)$$

Για $\theta \in \mathbb{R}$ και $\lim_{t\to\infty} X^{CL} = \infty$. Με άλλα λόγια, η διαδικασία X^{CL} είναι μια σύνθετη Poisson με ρυθμό αφίξεων συμβάντων $\lambda^{CL} > 0$ και αρνητικά άλματα, τα οποία προσδιορίζουν απαιτήσεις και έχουν κοινή συνάρτηση κατανομής F με πεπερασμένη μέση τιμή $1/\mu^{CL}$. Ο σταθερός ρυθμός εισφορών $c^{CL} > 0$ είναι τέτοιος ώστε να ικανοποιεί τη συνθήκη καθαρού κέρδους $c^{CL} - \lambda^{CL}/\mu^{CL} > 0$.

Ας υποθέσουμε τώρα μια γενικά φασματική αρνητική διαδικασία Levy $X^{CL} = \left\{X_t^{CL} : t \geq 0\right\}$ μέτρο Π το οποίο ικανοποιεί $\Pi\left((-\infty, 0)\right) = \infty$. Μια τέτοια γενίκευση η ισοδύναμη της συνθήκης $c^{CL} - \lambda^{CL}/\mu^{CL} > 0$ είναι $E(X_1) > 0$ οπότε και η διαχωριστική διαδικασία των Levy-Ito προσφέρει μια βοήθεια για ασφαλιστικές εταιρείες μεγάλου μεγέθους δια μέσου της χαρακτηριστικής συνάρτησης (1) όπως διατυπώθηκε από τους Cramer-Lundberg:

$$\psi(\theta) = -\log \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} P(X_1 \in dx) = \left\{\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right\} + \left\{-i\theta c + \int_{(-\infty,-1)} (1 - e^{i\theta x})\Pi(dx)\right\} +$$
$$\left\{\int_{(-1,0)} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x)\Pi(dx)\right\}$$

για $\theta \in \mathbb{R}$ και $\sigma \geq 0$.

Το μέτρο Levy ικανοποιεί τη συνθήκη $\int_{(-\infty,0)} (1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty$ και επιπρόσθετα $c - \int_{(-\infty,-1)} |x|\Pi(dx) > 0$ καθώς $X \to \infty$. Ειδικότερα, στην περίπτωση όπου $\Pi(-\infty,0) = \infty$ τότε και η διαδικασία X ικανοποιεί έναν πεπερασμένο αριθμό αλμάτων σε πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα. Ξεκινώντας την ανάλυση των τριών συνιστωσών από την τελευταία, η τρίτη συνιστώσα $\left\{ \int_{(-1,0)} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x)\Pi(dx) \right\}$ του αθροίσματος της αναπαριστά μικρού μεγέθους φθίνουσες απαιτήσεις στο χρόνο που δύναται να συμβούν συχνά και τυχαία και χωρίς προειδοποίηση. Η εταιρεία λαμβάνοντας υπόψη τις απαιτήσεις αυτού του είδους, διασφαλίζει την λήψη ασφαλίστρων μεγέθους $|x|\Pi(dx)dt$ σε διάστημα *dt*. Η δεύτερη συνιστώσα $\left\{ -i\theta c + \int_{(-\infty,-1)} (1 - e^{i\theta x})\Pi(dx) \right\}$ αφορά απαιτήσεις υψηλού μεγέθους με πολύ μικρή πιθανότητα ή πρακτικά σπάνιες και καλύπτονται από σταθερά έσοδα ρυθμού *c*. Πρακτικά στην παραπάνω αναπαράσταση, οι υψηλές απαιτήσεις αφορούν μέγεθος μεγαλύτερο της 1 νομισματικής μονάδας. Τέλος, η πρώτη συνιστώσα $\left\{ \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 \right\}$ αφορά στοχαστικές διαταράξεις ασφαλίστρων και ρυθμού εισφορών. Η πρώτη και η τρίτη συνιστώσες αντιστοιχούν σε ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών. Η ασφαλιστική εταιρεία εγγυάται την αύξηση των εσόδων στο διηνεκές ώστε να διασφαλίσει την περίπτωση που αναλύσαμε και αφορά την δεύτερη συνιστώσα της.

Συνέχεια του κλασσικού μοντέλου χρεοκοπίας των Cramer-Lundberg είναι το αντίστοιχο μοντέλο του De Finetti το οποίο διατυπώθηκε το 1957 στο XV διεθνές συνέδριο Αναλογισμού. Ο De Finetti βασίστηκε μεν στο μοντέλο της προηγούμενης ομάδας εισάγοντας δε τη δυνατότητα της καταβολής μερισμάτων στους μετόχους πριν την στιγμή της χρεοκοπίας.

Η ομάδα των Kyprianou και Palmowski λαμβάνοντας υπόψη την μελέτη του De Finetti, όρισαν την ποσότητα $\{L_t^\pi\}_{t\geq 0}$ το συσωρευτικό ποσό των μερισμάτων που καταβάλλονται τη χρονική στιγμή *t*. Έστω η ποσότητα $U_t^\pi = X_t - L_t^\pi$. Μια μερισματική στρατηγική είναι νομικά ορθή αν οποιαδήποτε στιγμή πριν τη χρεοκοπία το συσωρευτικό ποσό L_t^π των μερισμάτων που πρέπει να αποδοθεί είναι μικρότερο του μεγέθους αποζημίωσης X_t που πρέπει να καταβληθεί τη χρονική στιγμή *t*, ή ισοδυνάμως $U_t^\pi > 0$. Έστω $\sigma^\pi = \inf\left\{t > 0 : U_t^\pi < 0\right\}$, τότε το αναμενόμενο ποσό προεξόφλησης των μερισμάτων (με ένταση ανατοκισμού $\delta > 0$) είναι

$$v_\pi(u) = E\left(\int_0^{\sigma^\pi} e^{-\delta t} dL_t^\pi\right)$$

Σε μια πρόσφατη εργασία, οι Albrecher και Hipp (2007) διερεύνησαν πώς οι πληρωμές φόρων (σύμφωνα με σύστημα μεταφοράς ζημιών) επηρεάζουν τη συμπεριφορά μιας διαδικασίας πλεονάσματος των Cramér-Lundberg. Πιο αναλυτικά, για μια ασφαλιστική εταιρεία που στηρίζεται στο κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας, το πλεόνασμα $R_0(t)$ τη χρονική στιγμή $t \geq 0$ είναι

$$R_0(t) = s + c\, t - S(t)$$

όπου S(t) είναι η συνολική συσσώρευση απαιτήσεων το χρόνο *t* και αναπαρίσταται ως σύνθετη Poisson με ένταση ζημιών $\lambda > 0$, απαιτήσεις X με συνάρτηση κατανομής F και μέσης τιμής $E(X) = \mu$, ρυθμός εισφορών $c > 0$ ώστε $c > \lambda\, \mu$. Για το απόθεμα
$s = R_0(0) \geq 0$ η πιθανότητα χρεοκοπίας στο διηνεκές

$$\psi_0(s) = \psi_0(s) = \lim_{t\to\infty} \psi_0(s,t) = P\left(s + ct < S(t)\right)$$

Στο μοντέλο που πρότειναν, οι φόροι καταβάλλονται με σταθερό αναλογικό συντελεστή $\gamma > 0$ όποτε η εταιρεία βρίσκεται σε κατάσταση κερδοφορίας και ο συντελεστής αυτός ορίζεται ως το τρέχον μέγιστο της διαδικασίας πλεονάσματος.
Πιο αναλυτικά, το πλεόνασμα δοθέντος του συντελεστή γ είναι

$$R_\gamma(t) = \max\left\{R_\gamma(u) : u \leq t\right\}$$

Συνεπώς, η ασφαλιστική εταιρεία θα πληρώσει φόρο με ρυθμό $c\gamma$ σε χρονικές στιγμές κερδοφορίας και ρυθμό μηδέν όταν δεν έχει κέρδος ή έχει ζημιές. Λόγω των καταβληθέντων φόρων, ο ρυθμός εισφορών μειώνεται από c (όταν δεν υπάρχει κέρδος ή υπάρχει ζημιά) σε $c\,(1 - \gamma)$ (όταν υπάρχει κέρδος).

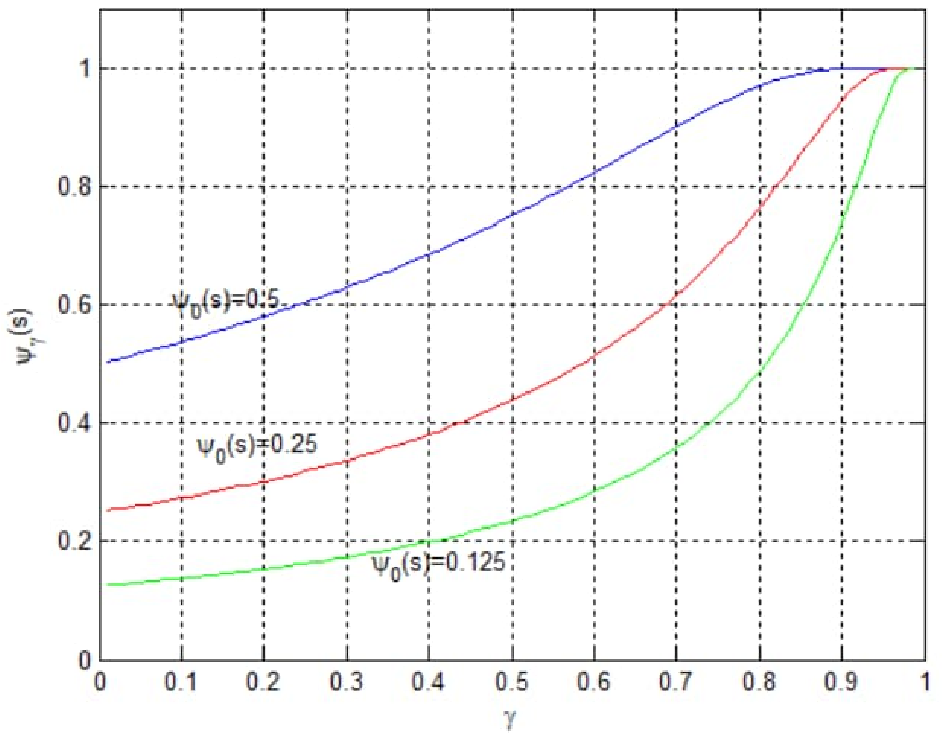
Για την περίπτωση του συντελεστή $\gamma \geq 1$ ο ρυθμός εισφορών $c\,(1 - \gamma) \leq 0$ και η χρεοκοπία είναι βέβαιη στο διηνεκές.

Ασφαλώς, εκ των προτέρων αν $\gamma < 1$ η μη χρεοκοπία στο διηνεκές είναι αβέβαιη και ίση με

$$\psi_\gamma(s) = 1 - \left(1 - \psi_0(s)\right)^{1/(1-\gamma)}$$

και ισχύει $\psi_\gamma(s) > \psi_0(s)$.

Στο κάτωθι γράφημα (εικόνα 3) αναπαρίστανται τρεις καμπύλες εξέλιξης της πιθανότητας χρεοκοπίας για απόθεμα s σε σχέση με το συντελεστή $\gamma < 1$. Η μπλε, κόκκινη και πράσινη καμπύλη αφορούν πιθανότητες χρεοκοπίας 50%, 25% και 12.5% αντίστοιχα όταν $\gamma = 0$.



Εικόνα 2

Στην περίπτωση ύπαρξης φόρων, απαιτείται μεγαλύτερο απόθεμα ώστε να μειώνεται η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_\gamma(s)$. Ασυμπτωτικά δηλαδή,

$$\lim_{s \to \infty} \psi_\gamma(s) = \psi_0(s), \qquad \gamma < 1$$

Για την περίπτωση ζημιών από κατανομές με ελαφριά ουρά (μια τέτοια περίπτωση είναι η εκθετική κατανομή) η βέλτιστη αύξηση του αποθέματος s που μειώνει την πιθανότητα χρεοκοπίας λόγω της καταβολής φόρων είναι

$$-\frac{1}{R}\log(1-\gamma)$$

όπου R είναι ο συντελεστής προσαρμογής.

Στην περίπτωση της κατανομής Pareto με παραμέτρους $\alpha > 0$ και $\delta > 0$ η οποία είναι κατανομή βαρύτερης ουράς $\left(\bar{F}(x) = \frac{\lambda^\alpha}{(x+\lambda)^\alpha}\right), \quad x > 0$ σε σχέση με την εκθετική κατανομή (Χριστοδούλου, 2022) και αποκτά βαρύτερη ουρά όσο μειώνεται η παράμετρος α (Χριστοδούλου, 2022), το πρόσθετο απόθεμα που απαιτείται είναι

$$\left((1-\gamma)^{-1/(\alpha-1)} - 1\right)s$$

Αν επιπλέον προστεθεί κόστος κεφαλαίου $v > 0$, ο ρυθμός εισφορών από c αυξάνεται σε $c + v\,s$, και επιπρόσθετα για ρυθμό καταβολής φόρων $\gamma < 1$ σε κατά προσέγγιση

$$c + v \cdot s - v \cdot \frac{1}{R} \cdot \log(1-\gamma)$$

και για την περίπτωση της κατανομής Pareto

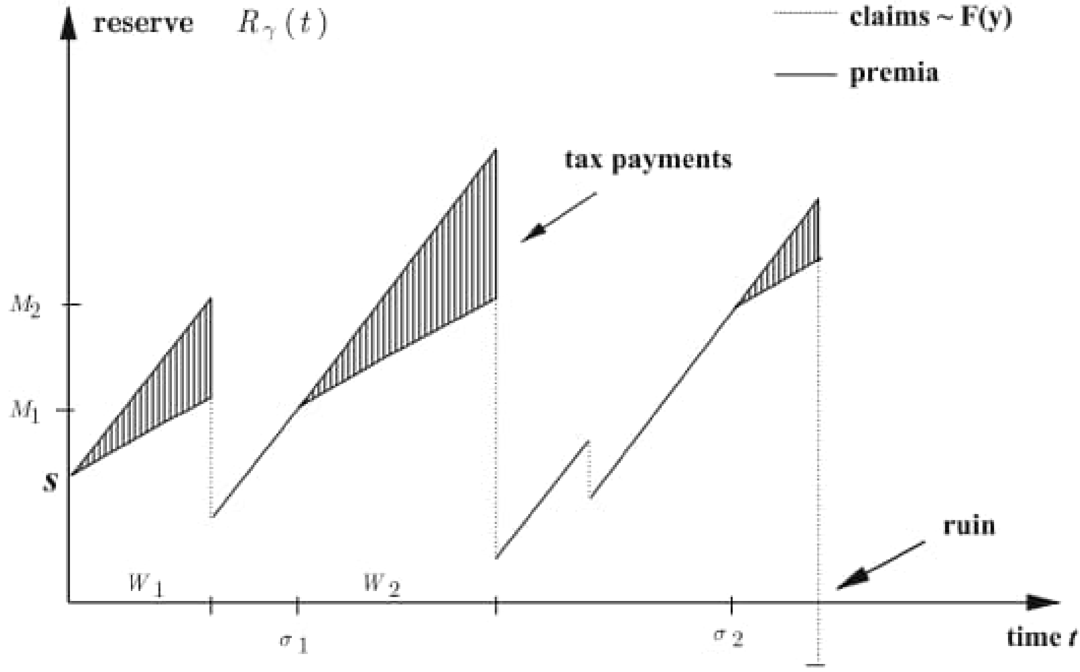
$$c + v \cdot s \cdot (1-\gamma)^{-1/(\alpha-1)}$$

Η αναμενόμενη σωρευτική ποσότητα φόρου για αρχικό απόθεμα s είναι

$$v(s) = E\left[\int_0^\tau e^{-\delta t}\gamma(t)\,dt\right]$$

όπου τ είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, $\delta > 0$ η ένταση ανατοκισμού και $\gamma(t)$ ο ρυθμός πληρωμής φόρων τη χρονική στιγμή t ώστε $\gamma(t) = c\,\gamma$ στις χρονικές στιγμές κερδοφορίας και 0 διαφορετικά.

Η ανέλιξη πλεονάσματος R_γ(t) που αναλύσαμε παραπάνω αποδίδεται στο κάτωθι γράφημα (εικόνα 4) το οποίο και επεξηγούμε.



Εικόνα 3

Για αρχικό απόθεμα s, ακολούθως μεσολαβεί μια περίοδος W_1 εσόδων με ρυθμό εισφορών c και $c(1\text{-}\gamma)$ που σχηματίζουν το πρώτο τρίγωνο μέχρι την πρώτη απαίτηση μεγέθους X_1. Τα έσοδα της περιόδου είναι $c\,(1\text{-}\gamma)\,W_1$ και το πλεόνασμα ανέρχεται σε ύψος

$$M_1 = s + c\,(1\text{-}\gamma)\,W_1$$

Κατόπιν η πρώτη απαίτηση X_1 μειώνει το πλεόνασμα σε τιμή $M_1 - X_1$.

Ακολουθεί μια περίοδος $\sigma_1 - W_1$ χωρίς κέρδος και τα έσοδα έχουν ρυθμό εισφορών c. Κατόπιν της χρονικής στιγμής σ_1 ακολουθεί μια περίοδος W_2 με κέρδος, οπότε και ο ρυθμός εσόδων είναι $c(1\text{-}\gamma)$ (πλευρά δεύτερου τριγώνου μικρότερης κλίσης) ώστε τα έσοδα $c\,(1\text{-}\gamma)\,W_2$ να διαμορφώνουν την τιμή πλεονάσματος

$$M_2 = s + c\,(1\text{-}\gamma)\,(W_1 + W_2)$$

πριν την απαίτηση X_2 τη χρονική στιγμή $\sigma_1 + W_2$ ώστε το πλεόνασμα να είναι $M_2 - X_2$. Το διάγραμμα συνεχίζεται μέχρι τη χρονική στιγμή της χρεοκοπίας (μετά το χρόνο σ_2).

Αλγοριθμικά, θα περιγράφαμε τη διαδικασία με τα κάτωθι βήματα:

$\sigma_0 = 0$, $M_0 = s$

$W_n = \inf\{t>0: N(\sigma_{n-1} + t) > N(\sigma_{n-1})\}$

$X_n = R_\gamma(\sigma_{n-1} + W_n-) – R_\gamma(\sigma_{n-1} + W_n)$

$M_n = M_{n-1} + c\,(1-\gamma)W_n$

$\sigma_n = \inf\{t > \sigma_{n-1} + W_n: R_\gamma\,(t) = M_n\}$, $n \geq 1$

όπου $N(t)$ είναι η ανέλιξη ρυθμού αφίξεων των απαιτήσεων, M_n είναι η τιμή πλεονάσματος ακριβώς πριν την καταβολή απαίτησης μεγέθους X_n, σ_n οι χρόνοι έναρξης κέρδους και W_n τα μεσοδιαστήματα μεταξύ χρόνου εμφάνισης απαίτησης X_n και σ_n.

Τα μεσοδιαστήματα εμφάνισης κέρδους είναι

$$(\sigma_{n-1}, \sigma_{n-1} + W_n),\ n \geq 1$$

Τα μεσοδιαστήματα χωρίς κέρδος είναι

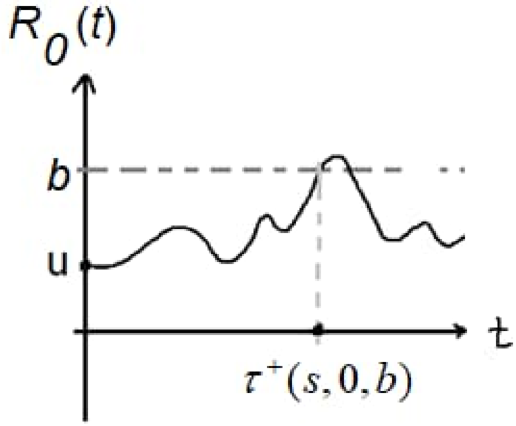
$$C_n = (\ \sigma_{n-1}\ + W_n, \sigma_n),\ n \geq 1$$

Την χρονική στιγμή της χρεοκοπίας $t = T$ η ανέλιξη πλεονάσματος είναι αρνητική,

$$R_\gamma(T) < 0,\ T \in C_n,\ n \geq 1$$

Η ομάδα του Albrecher στην εργασία αυτή (2007) μελετά περαιτέρω την περίπτωση της έκπτωσης λόγω συνολικής πληρωμής του φόρου.

Έστω $B(s,b) = E\left[e^{-\delta\tau^+(s,0,b)}\right]$ ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου $\tau^+(s,0,b)$ κατά τον οποίο η ανέλιξη πλεονάσματος $R_0(t) = b$ με απόθεμα $s < b$ πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας (βλ. εικόνα 5).



Εικόνα 4

Η συνάρτηση $B(s, b)$ μπορεί να γραφτεί και ως

$$B(s,b)=\frac{h(s)}{h(b)}$$

όπου η συνάρτηση $h(z)$ είναι η λύση της ολοκληρω-διαφορικής εξίσωσης

$$c\cdot h'(z)-(\lambda+\delta)h(z)+\lambda\int_0^z h(z-y)dF(y)=0$$

$$h(z)=e^{\rho s}-q_\delta(s)$$

Η μεταβλητή $\rho > 0$ είναι η θετική λύση του συντελεστή προσαρμογής R και προκύπτει από τη θεμελιώδη εξίσωση του Lundberg

$$c\cdot R-(\lambda+\delta)+\lambda\int_0^\infty e^{-Ry}dF(y)=0$$

και τέλος, $q_\delta(s)=E\left(e^{-\delta T+\rho R_0(T)}\cdot 1_{\{T<\infty\}}\middle|R_0(0)=s\right)$ όπου Τ είναι ο χρόνος χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας. Η ποσότητα $q_\delta(s)$ δύναται ως η παρούσα αξία πληρωμής 1 νομισματικής μονάδας αμέσως μετά τη στιγμή χρεοκοπίας ή εναλλακτικά ως μια συνάρτηση προστίμου $w(x, y) = e^{-\rho y}$. Βασικές ιδιότητες της ποσότητας αυτής είναι

- $\lim_{u\to\infty} q_\delta(u)=0$
- $\lim_{u\to\infty} q_\delta'(u)=0$

Έστω τώρα $V(s, b)$ είναι οι αναμενόμενες εκπτώσεις πληρωμής μερισμάτων στο κλασσικό μοντέλο των Cramer-Lundberg με ρυθμό εισφορών c, ένταση ανατοκισμού $\delta > 0$ και απόθεμα $s < b$. Τότε (Dickson and Waters, 2004),

$$V(s,b)=\frac{h(s)}{h'(b)}$$

και κατ' επέκταση

$$B(s,b)=\frac{V(s,b)}{V(b,b)}$$

Ασυμπτωτικά δε, ισχύει $\lim_{s\to\infty} V(s,s)=\dfrac{1}{\rho}$

Μια σημαντική σχέση που απέδειξαν στην εργασία αυτή ο Albrecher και η ομάδα του (2007) είναι η εξής:

$$v(s)=\lim_{b\to\infty} V(s,b)=\frac{\gamma}{1-\gamma}\cdot e^{\int_0^s \frac{d\xi}{V(\xi,\xi)(1-\gamma)}}\cdot\int_s^\infty e^{-\int_0^s \frac{d\xi}{V(\xi,\xi)(1-\gamma)}}dt=$$

$$\frac{\gamma}{1-\gamma}\cdot h(s)^{\frac{1}{1-\gamma}}\cdot\int_s^\infty h(t)^{-\frac{1}{1-\gamma}}dt$$

Ακολουθούν παραδείγματα ως προς την ευρέως χρησιμοποιούμενη κατανομή μεγέθους απαιτήσεων, δηλαδή την εκθετική.

Έστω το μέγεθος απαίτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή μέσης τιμής $\alpha > 0$. Τότε, $h(s)=(a+\rho)e^{\rho s}\left(1-\eta(s)\right)$ όπου $\eta(s)=\dfrac{a+r_2}{a+\rho}e^{(r_2-\rho)s}$ και $\rho > 0$, $r_2 < 0$ οι λύσεις της θεμελιώδους εξίσωσης των Cramer-Lundberg:

$$c\cdot R^2+(c\cdot a-\lambda-\delta)R-a\cdot\delta=0$$

Τότε προκύπτει

$$v(s)=\frac{\gamma}{\rho}\cdot\left(1-\eta(s)\right)^{1/(1-\gamma)}\cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{1-\gamma},\frac{\rho}{(\rho-r_2)(1-\gamma)},\frac{\rho}{(\rho-r_2)(1-\gamma)}+1;\eta(s)\right)$$

όπου ${}_2F_1\left(\alpha,b,c;z\right)=\dfrac{\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(b\right)\cdot\Gamma\left(c-b\right)}\int_0^1 t^{b-1}\left(1-t\right)^{c-b-1}\left(1-t\cdot z\right)^{-z}dt$ (η συνάρτηση Γάμμα είναι $\Gamma\left(x\right)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, x>0$), $c > 0$, $b > 0$ (Abramowitz & Stegun, 1965)

Όπως ειπώθηκε νωρίτερα, οι ερευνητές στην εργασία αυτή προτείνουν την πληρωμή φόρων την περίοδο κερδοφορίας. Σε μια τέτοια περίοδο, το πλεόνασμα θα έχει ξεπεράσει έναν ουδό, έστω $M > s$ και η πιθανότητα χρεοκοπίας μειώνεται. Είναι δε

$$\psi_{\gamma,\mathrm{M}}\left(s\right)=\frac{\psi_0\left(s\right)}{\psi_0\left(M\right)}\cdot\psi\left(M\right)=\frac{\psi_0\left(s\right)}{\psi_0\left(M\right)}\cdot\psi_0\left(M\right)^{1/(1-\gamma)}=\psi_0\left(s\right)\psi_0\left(M\right)^{\gamma/(1-\gamma)}>\psi_\gamma\left(s\right)$$

Η τιμή του πλεονάσματος M που αποτελεί τον ουδό για την καταβολή των φόρων, έχει βέλτιστη τιμή M^* η οποία βελτιστοποιεί την συνάρτηση $v_{\mathrm{M}}(s)$ υπό τη συνθήκη:

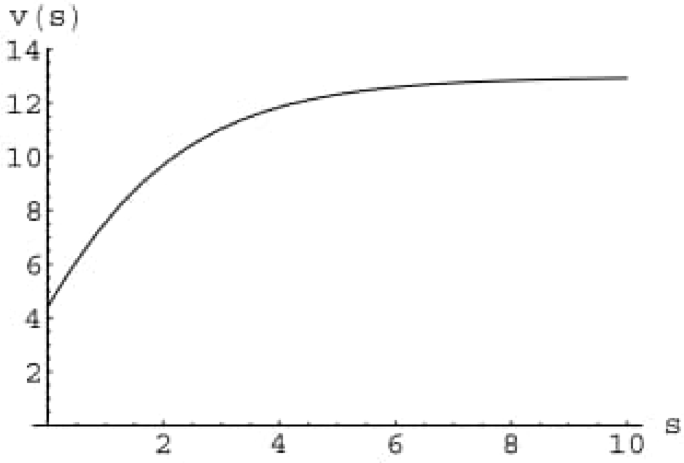
$$v'\left(M\right)=1$$

εφόσον. Τότε $v_{\mathrm{M}^*}\left(s\right)=\begin{cases}V\left(s,M^*\right), & s\le M^*\\ v\left(s\right), & s\ge M^*\end{cases}$

Στην περίπτωση όπου $v\left(0\right)\le\dfrac{c}{\lambda+\delta}$ τότε $M^* = 0$.

Η μελέτη της οδού Μ μελετάται και αριθμητικά με τη βοήθεια παραδείγματος που βασίζεται στην εκθετική κατανομή παραμέτρου $\alpha > 0$ ύψους μεγέθους απαίτησης:
Έστω οι παράμετροι $\alpha = 1$, $c = 2$, $\lambda = 1$, $\delta = 0.04$ και $\gamma = 0.5$. Τότε (κώδικας 1, παράρτημα) με το αντίστοιχο γράφημα (εικόνα 6)

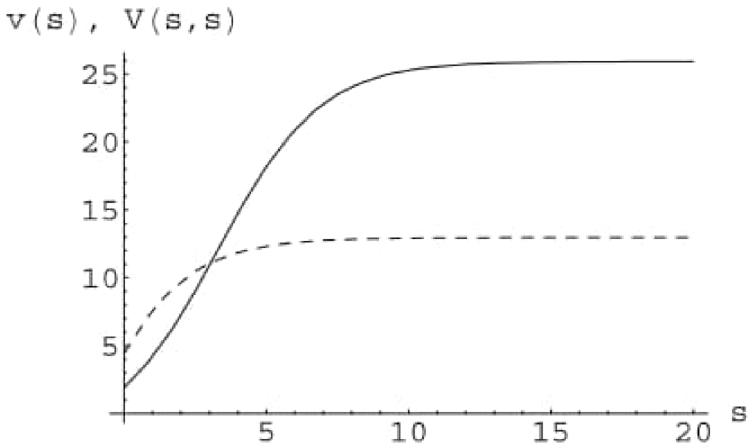
$$v\left(s\right)=12.019e^{-0.077s}\left(-0.481e^{-0.519s}+1.039e^{0.0386s}\right)^2\cdot{}_2F_1\left(2,0.139,1.139;0.464e^{-0.557s}\right)$$



Εικόνα 5

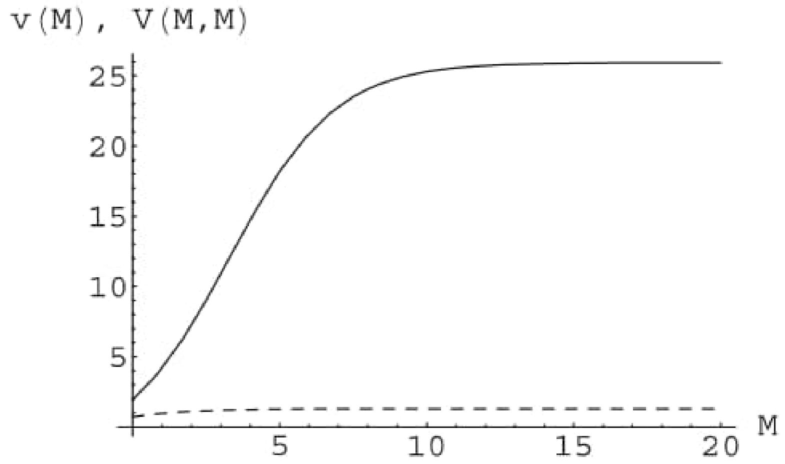
Η αρχική τιμή v(0) = 4.4252 και η ασυμπτωτική $\lim_{s\to\infty} v(s) = \frac{\gamma}{\rho} = 12.9642$. Η συνάρτηση είναι αύξουσα ως προς το απόθεμα *s* και ικανοποιείται η συμπεριφορά της στο πεδίο κάτω και άνω φράγματος: $0.9615 \le v(s) \le 25$.

Ο βέλτιστος ουδός M^*= 3.0529 είναι το σημείο τομής των συναρτήσεων *v*(*s*) και *V*(*s*, *s*) (γράφημα εικόνας 7)



Εικόνα 6

Τροποποιώντας το συντελεστή γ = 0.1 και διατηρώντας τις υπόλοιπες παραμέτρους ίδιες, τότε $v(0) = c / (\lambda + \delta) = 1.9231$, $\lim_{s\to\infty} v(s) = \frac{\gamma}{\rho} = 2.5928$, και $M^* = 0$ (γράφημα εικόνας 8)



Εικόνα 7

Αποδείχθηκε δε με το μοντέλο αυτό ότι υπάρχει μια εντυπωσιακά απλή σχέση μεταξύ των πιθανοτήτων χρεοκοπίας με και χωρίς την ύπαρξη φόρου και ότι θα μπορούσαμε επίσης να λάβουμε έναν σαφή τύπο για το αναμενόμενο άθροισμα φόρου με έκπτωση στις πληρωμές κατά τη διάρκεια ζωής και όσο υφίσταται η έκθεση σε κίνδυνο.

Σε εξέλιξη της εργασία τους (Albrecher etal, 2008) η ομάδα αυτή ενσωματώνει αυτό το φορολογικό μοντέλο σε ένα γενικό πλαίσιο κατά Lévy.

Πιο αναλυτικά, θεωρώντας μια φασματικά αρνητική διαδικασία κατά Levy $X = \left(X(t)\right)_{t\geq 0}$ και εν προκειμένω πρόκειται για μια διαδικασία χωρίς θετικά άλματα με $X\left(0\right) = u \geq 0$. Ο μετασχηματισμός Laplace

$$E_u\left[e^{\lambda\left(X(t)-u\right)}\right] = e^{t\cdot\psi(\lambda)}$$

όπου $\lambda \geq 0$, $t \geq 0$ και $\psi\left(\lambda\right) = -\Psi\left(-i\lambda\right)$ (i είναι το μιγαδικό όρισμα). Για την Laplace συνιστώσα ψ ισχύει ότι είναι αυστηρά κυρτή και $\lim_{\lambda\to\infty}\psi\left(\lambda\right) = \infty$. Συνεπώς, θα υπάρχει συνάρτηση $\Phi:\left[0,\infty\right)\to\left[0,\infty\right)$ έτσι ώστε

$$\psi\left(\Phi\left(\lambda\right)\right) = \lambda, \qquad \lambda \geq 0$$

Κατόπιν ορίζεται η συνάρτηση $\left\{W^{(q)}; q \geq 0\right\}$ έτσι ώστε $W^{(q)}:\left[0,\infty\right)\to\left[0,\infty\right)$ και είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής με μετασχηματισμό Laplace

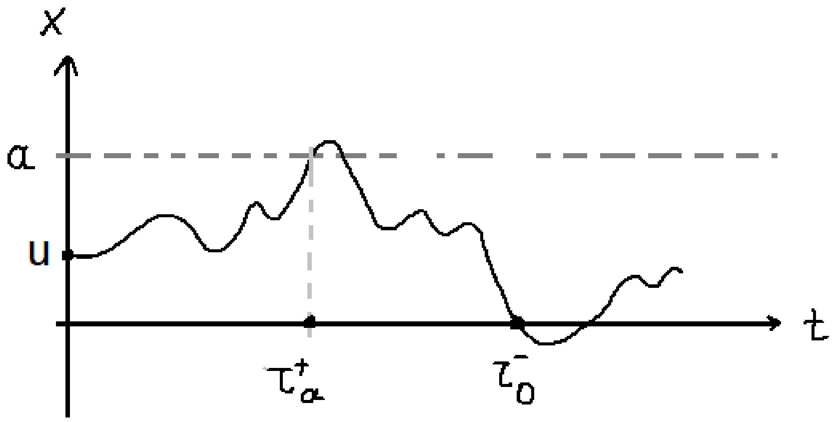
$$\int_0^\infty e^{-\lambda z} W^{(q)}(z) dz = \frac{1}{\psi(\lambda) - q}$$

για $\lambda > \Phi(q)$. Όταν $q = 0$ γράφουμε W αντί για $W^{(0)}$.

4.2 Δίπλευρο πρόβλημα εξόδου

Έστω $\alpha > 0$, τότε ορίζουμε $\tau_\alpha^+ = \inf\{t > 0 : X(t) > a\}$ και $\tau_0^- = \inf\{t > 0 : X(t) < 0\}$ υπό τη συνθήκη $\inf \varnothing = \infty$. Όταν η διαδικασία X ξεκινά εντός του διαστήματος (δηλαδή, $X(0) = u \in (0, a)$) ο τυχαίος χρόνος $\tau_a^+ \wedge \tau_0^- = \min\{\tau_a^+, \tau_0^-\}$ είναι ο πρώτος χρόνος εξόδου της διαδικασίας X από το διάστημα.

Το κάτωθι διάγραμμα (εικόνα 9) επεξηγεί τους χρόνους εξόδου τ_a^+ και τ_0^-.



Εικόνα 8

Ο μετασχηματισμός Laplace της διαδικασίας $\{X(t) > a\}$ είναι

$$E_u[\exp(-q\tau_a^+) 1_{\{\tau_a^+ < \tau_0^-\}}] = \frac{W^{(q)}(u)}{W^{(q)}(a)}, \qquad q \geq 0$$

Συνεπακόλουθα, όταν $q = 0$ η πιθανότητα

$$P_u\{\tau_a^+ < \tau_0^-\} = \frac{W(u)}{W(a)}$$

Αν Ε(X)>0, τότε

$$P_u\{\inf X(t) \geq 0\} = \psi'(0+) \cdot W(u)$$

Οι παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιούνται για τη μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας και επιβίωσης στην ασφαλιστική θεωρία κινδύνου.

4.3 Περιορισμοί

Αν οι απαιτήσεις εκφρασμένες από την τυχαία μεταβλητή *X* είναι μη φραγμένης διασποράς, τότε η βαθμωτή συνάρτηση $W^{(q)}$ πρέπει να είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Διαφορετικά, αν δηλαδή οι απαιτήσεις είναι φραγμένης διασποράς τότε η βαθμωτή συνάρτηση $W^{(q)}$ πρέπει να είναι συνεχώς διαφορίσιμη αν και μόνο αν $\{x \mid x<0\}=\varnothing$

4.4 Το μοντέλο Levy

Έστω η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής *X* είναι παραγωγίσιμη. Ορίζουμε $S^X=\{S^X(t)\}_{t\geq 0}=\{\max_{0\leq s\leq t} X(s)\}_{t\geq 0}$. Πρόκειται για μια διαδικασία συνεχής και αύξουσα. Επίσης, $S^X(0)=u$ εφόσον $X(0)=u$. Επίσης ορίζουμε για $0\leq\gamma\leq 1$ μια διαδικασία $U_\gamma=\{U_\gamma(t)\}_{t\geq 0}$ ως εξής:

$$U_\gamma(t)=X(t)-\gamma\left(S^X(t)-X(0)\right)$$

Η διαδικασία U_γ είναι πλεονασματική για μια ασφαλιστική εταιρεία η οποία καταβάλλει τους φόρους με σταθερό ρυθμό γ οποτεδήποτε βρίσκεται σε κατάσταση κερδοφορίας. Αν $\gamma = 1$ τότε αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου η εταιρεία pays out as dividends any capital above its initial value. Για την περίπτωση $\gamma < 1$ η ομάδα του Albrecher (2008) απέδειξε ότι

$$E_u\left[\exp\left(-q\cdot\tau^+_{\alpha,\gamma}\right)1\cdot\left(\tau^+_{\alpha,\gamma}<\tau^-_{0,\gamma}\right)\right]=\left(\frac{W^{(q)}(u)}{W^{(q)}(a)}\right)^{1/(1-\gamma)}=P(N=0)$$

για $0<u<\alpha$ και $q\geq 0$, $\tau^+_{\alpha,\gamma}=\inf\{t>0:U_\gamma(t)>a\}$, $\tau^-_{0,\gamma}=\inf\{t>0:U_\gamma(t)<0\}$ και N είναι διαδικασία Poisson με παράμετρο $\int_0^{(\alpha-u)/(1-\gamma)} v\left(u+(1-\gamma)s,\infty\right)ds$.

Παρατηρούμε ότι $X\left(\tau^+_{a,\gamma}\right)=S^X\left(\tau^+_{a,\gamma}\right)$, για $\tau^+_{a,\gamma}<\infty$.

Εφόσον $\alpha=U_\gamma\left(\tau^+_{a,\gamma}\right)=X\left(\tau^+_{a,\gamma}\right)-\gamma\cdot\left(S^X\left(\tau^+_{a,\gamma}\right)-u\right)$, τότε

$$X\left(\tau_{\alpha,\gamma}^{+}\right)\cdot 1\left(\tau_{\alpha,\gamma}^{+}<\infty\right)=\frac{a-\gamma u}{1-\gamma}\cdot 1\left(\tau_{\alpha,\gamma}^{+}<\infty\right)$$

4.5 Η πιθανότητα επιβίωσης

Έστω $\phi_\gamma(u)=P_u\left(\inf_{t\geq 0} U_\gamma(t)\geq 0\right)$ η πιθανότητα επιβίωσης στο μοντέλο κινδύνου με ρυθμό καταβολής φόρων γ και αρχικό απόθεμα u. Προφανώς $\phi_0(u)$ είναι η πιθανότητα επιβίωσης χωρίς καταβολή φόρων ενώ για $\gamma < 1$, $\phi_\gamma(u)=\left\{\psi'(0+)\cdot W(u)\right\}^{1/(1-\gamma)}$. Να σημειώσουμε ότι $\phi_\gamma(u)>0$ αν και μόνο αν $\phi_0(u)=\psi'(0+)>0$ που αντιστοιχεί στην περίπτωση της συνθήκης $E_u[X(1)-u]>0$.

4.6 Οι πληρωμές φόρων με έκπτωση

Έστω $\tau_\gamma=\tau_{0,\gamma}^{-}$ η χρονική στιγμή της χρεοκοπίας με απαίτηση φόρου. Η ποσότητα

$$T_{\gamma,\delta}=\gamma\cdot\int_0^{\tau_\gamma} e^{-\delta t}dD(t)$$

αναπαριστά την παρούσα αξία όλων των χρεωστικών φόρων μέχρι τη χρονική στιγμή τ_γ, όπου $D(t) = S^X(t) - X(0)$ και $\delta\geq 0$ η ένταση ανατοκισμού. Παραπέμποντας στην εργασία του Zhou (2006):

$$V_1(u,u)=\frac{W^{(\delta)}(u)}{\left(W^{(\delta)}(u)\right)'(u)}$$

όπου $V_1(u, u)$ είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία όλων των πληρωτέων μερισμάτων πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας με φορολογικό εμπόδιο ύψους u (σχετικά με την εκάστοτε φορολογική νομοθεσία του κράτους στο οποίο ανήκει η επιχείρηση). Ο Zhou στην εργασία αυτή όρισε την $V_1(u,u)=v_{1,\delta}(u)=E_u\left[T_{1,\delta}\right]$, δηλαδή $E_u\left[T_{\gamma,\delta}\right]_{\gamma=1}$.

Αν $\gamma < 1$ και προφανώς $\delta > 0$ τότε ο Albrecher και η ομάδα του (2008) απέδειξαν ότι

$$v_{\gamma,\delta}(u)=\frac{\gamma}{1-\gamma}\cdot\int_u^\infty\left(\frac{W^{(\delta)}(u)}{W^{(\delta)}(s)}\right)^{1/(1-\gamma)}ds$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η ασυμπτωτική σχέση $\lim_{u\to\infty}v_{\gamma,\delta}(u)=\gamma\cdot\lim_{u\to\infty}V_1(u,u)$ (με βάση τον κανόνα του L'Hospital) Επίσης, για την περίπτωση της ροπής κ-τάξεως

$v_{\gamma,\delta}^{\kappa}(u)=E_u^{\kappa}\left[T_{\gamma,\delta}\right]$ για απόθεμα *u*, και $V_\kappa(u,u)=v_{1,\delta}^{(\kappa)}(u)=\kappa!\prod_{i=1}^{\kappa}\frac{W^{(i\delta)}(u)}{\left(W^{(i\delta)}(u)\right)'(u)}$, για $\gamma<1$ και $\delta>0$ απέδειξαν ότι

$$v_{\gamma,\delta}(u)=\frac{\kappa\cdot\gamma}{1-\gamma}\cdot\int_u^\infty v_{\gamma,\delta}^{(\kappa-1)}(s)\left(\frac{W^{(\kappa\delta)}(u)}{W^{(\kappa\delta)}(s)}\right)^{1/(1-\gamma)}ds$$

και $\lim_{u\to\infty}v_{\gamma,\delta}^{(\kappa)}(u)=\kappa\gamma\cdot\lim_{u\to\infty}v_{\gamma,\delta}^{(\kappa-1)}(u)\cdot\frac{W^{(\kappa\delta)}(u)}{\left(W^{(\kappa\delta)}\right)'(u)}=\gamma^{\kappa}\lim_{u\to\infty}V_\kappa(u,u)$.

Ας δούμε τώρα κάποια παραδείγματα:

Παράδειγμα 1

Ας υποθέσουμε ότι *X* είναι μια σύνθετη Poisson με εκθετικά άλματα, δηλαδή, οι απαιτήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες με παράμετρο $\alpha>0$ και αναμενόμενο αριθμό αυτών των απαιτήσεων $\lambda>0$ (η μέση τιμή της Poisson). Τα μεσοδιαστήματα μεταξύ διαδοχικών απαιτήσεων είναι επίσης εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda>0$. Η συνάρτηση $W^{(\delta)}(x)$ ορίζεται ως εξής

$$W^{(\delta)}(x)=\frac{(a+\rho)\cdot e^{\rho x}\cdot\left(1-\eta(x)\right)}{c\cdot(\rho-r)}$$

όπου $\eta(x)=\frac{\alpha+r}{a+\rho}\cdot e^{(r-\rho)x}$ και ρ, r είναι θετική και αρνητική λύση αντίστοιχα της εξίσωσης $cR^2+(c\alpha-\lambda-\delta)-\alpha\delta=0$ (ως προς *R*). Τέλος, η συνάρτηση $v_{\gamma,\delta}(u)$ ορίζεται ως εξής:

$$v_{\gamma,\delta}(u)=\frac{\gamma}{\rho}\cdot\left(1-\eta(u)\right)^{1/(1-\gamma)}\cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{1-\gamma},\frac{\rho}{(\rho-r)\cdot(1-\gamma)},\frac{\rho}{(\rho-r)\cdot(1-\gamma)}+1;\eta(u)\right)$$

όπου η συνάρτηση ${}_2F_1(\alpha,b,c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\cdot\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt$, $c > b >$ 0.

Παράδειγμα 2

Έστω $X(t)=m\cdot t+\sigma\cdot B(t)$ είναι κίνηση Brown, $m \neq 0$, $\sigma > 0$. Στην περίπτωση αυτή, $\psi(\lambda)=m\lambda+\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2$ και $\Phi(\alpha)=-\omega+\theta_\alpha$ και αποδεικνύεται ότι

$$W^{(\delta)}(x)=\frac{1}{\sigma^2\theta_\delta}\left(\exp\left((-\omega+\theta_\delta)x\right)-\exp\left(-(\omega+\theta_\delta)x\right)\right)$$

όπου $\theta_\delta=\frac{\sqrt{m^2+2\delta\sigma^2}}{\sigma^2}$ και $\omega=\frac{m}{\sigma^2}$. Ιδιαιτέρως η συνάρτηση $W^{(\delta)}(x)$ ανεξάρτητα της έντασης ανατοκισμού δ είναι

$$W(x)=\frac{1}{m}\left(1-\exp\left(-\frac{2m}{\sigma^2}\cdot x\right)\right)$$

Ακολούθως προκύπτει ότι (Gerber and Shiu, 2004)

$$v_{1,\delta}(u)=V_1(u,u)=\frac{\sigma^2}{2m}\left(\exp\left(\frac{2m}{\sigma^2}\cdot u\right)-1\right)$$

Για τις περιπτώσεις $\gamma < 1$ και $\delta > 0$,

$$v_{\gamma,\delta}(u)=\frac{\gamma}{1-\gamma}\cdot\frac{\left(1-\exp(-2\theta_\delta u)\right)^{1/(1-\gamma)}}{\theta_\delta-\omega}\cdot {}_2F_1\left((1-\gamma)^{-1},\frac{\theta_\delta-\omega}{2\theta_\delta},\frac{3\theta_\delta-\omega}{2\theta_\delta};\exp(-2\theta_\delta u)\right)$$

Στο θέμα της πληρωμής φόρων με έκπτωση για τη διαχείριση του ρίσκου και της χρεοκοπίας αναφέρθηκε η ερευνητική ομάδα του Wang (2011) τέλος. Στη μελέτη αυτή ασχολήθηκαν με το γενικευμένο κλασικό μοντέλο των Cramer-Lundberg το οποίο περιλαμβάνει πληρωμές φόρων. Διερεύνησαν πως επηρεάζεται το πλεόνασμα από την καταβολή φόρων (πριν τη χρεοκοπία) ορίζοντας για τη διαδικασία αυτή μια διαφορική εξίσωση την οποία και κατόπιν επίλυσαν.

Η μελέτη ξεκινά από τη θεμελιώδη εξίσωση του Lundberg:

$$\lambda+\delta-c\xi=\lambda\cdot\int_0^{\infty}e^{-\xi y}p\left(y\right)dy$$

η οποία επιλύεται ως προς τη συνάρτηση πυκνότητας του μεγέθους της απαίτησης $p(y)$ με αρχική λύση $p(0) = 0$ και η λύση είναι μη αρνητική.

Υπό την θεμελιώδη υπόθεση της αβέβαιης χρεοκοπίας στο διηνεκές, για αναμενόμενο μέγεθος απαίτησης μ, $c>\lambda\cdot\mu$ και για ρυθμό πληρωμής των φόρων $0 < \gamma < 1$, το πλεόνασμα $\{U_\gamma(t);\ t \geq 0\}$, η συνάρτηση που περιγράφει την πληρωμή φόρων με έκπτωση είναι

$$\phi_\gamma\left(x\right)=\frac{1}{c\left(1-\gamma\right)}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{c\left(1-\gamma\right)}\int_0^x V_1\left(s\right)ds\right\}\int_x^{\infty}V_2\left(t\right)\exp\left\{\frac{1}{c\left(1-\gamma\right)}\int_0^t V_1\left(s\right)\right\}dt$$

όπου

$$V_1\left(t\right)=\lambda\cdot\int_0^t B\left(t-y,t\right)p\left(y\right)dy-\left(\lambda+\delta\right)$$

$$V_2\left(t\right)=-V_1\left(t\right)\cdot\phi\left(t\right)-c\cdot\phi'\left(t\right)$$

Η συνάρτηση $B\left(x,b\right)=P\left(U(t)=b>0\,|\,U(0)=x\right)=\dfrac{1-\psi\left(x\right)}{1-\psi\left(b\right)}$.

Όταν $\delta = 0$ τότε

$$\phi_\gamma\left(x\right)=\frac{1}{1-\gamma}\phi\left(x\right)-\frac{\gamma}{\left(1-\gamma\right)^2}\left(1-\psi\left(x\right)\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}\int_x^{\infty}\frac{\left(1-\psi\left(t\right)\right)'}{\left(1-\psi\left(t\right)\right)^{\frac{1}{1-\gamma}+1}}\phi\left(t\right)dt$$

και στην περίπτωση όπου $\delta > 0$,

$$\phi_\gamma\left(x\right)=\frac{1}{1-\gamma}\phi\left(x\right)-\frac{\gamma}{\left(1-\gamma\right)^2}\left(h\left(x\right)\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}\int_x^{\infty}\frac{\left(h\left(t\right)\right)'}{\left(h\left(t\right)\right)^{\frac{1}{1-\gamma}+1}}\phi\left(t\right)dt$$

όπου η συνάρτηση $h(x)$ είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$ch'(x)-(\lambda+\delta)h(x)+\lambda\int_0^x h(x-y)dF(y)=0$$

Η ερευνητική ομάδα παραθέτει ένα παράδειγμα για την περίπτωση της εκθετικής κατανομής μεγέθους ζημιάς, $p(y) = \beta e^{-\beta y}$, $y \geq 0$, με παράμετρο $\beta > 0$ και $c > \lambda/\beta$.

Τότε,

$$\phi(x) = \hat{w}(\beta, \infty)(\beta - R)e^{-Rx}, \qquad h(t) = e^{\rho t} - \frac{\beta - R}{\beta + \rho} e^{-Rt}$$

όπου $\hat{w}$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης *w*: $w(y, z) \geq 0$, $y > 0$, $z > 0$, η οποία έχει αναλυθεί εκτενώς στη μελέτη των Dickson (1992), Gerber and Shiu (1997a,b, 1998) και Cheng et al. (2000). Αποδεικνύεται δε ότι

$$\phi_\gamma(x) = \hat{w}(\beta) \cdot (\beta - R) \cdot e^{-Rx} + \frac{\gamma R}{(1-\gamma)(R+\rho)} \cdot \hat{w}(\beta) \cdot (\beta - R) \cdot$$

$$\left(e^{\rho x} - \frac{\beta - R}{\beta + \rho} e^{-Rx} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \cdot e^{-\left(\frac{\rho}{1-\gamma} + R\right)x} \cdot \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(c)} \cdot F_1(a, b; c; z_1)$$

όπου,

$$\alpha = \frac{1}{1-\gamma}, \qquad b = \frac{(1-\gamma)R + \rho}{(1-\gamma)(R+\rho)}, \qquad c = b + 1, \qquad z_1 = \frac{\beta - R}{\beta + \rho} e^{-(R+\rho)x},$$

$$z_2 = \frac{\beta - R}{\beta + \rho} e^{-(R+\rho)y}, \qquad F1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 s^{b-1}(1-s)^{c-b-1}(1-sz)^{-a}\, ds$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Συμπεράσματα

Αν όχι το σημαντικότερο τότε σίγουρα ένα από τα σημαντικότερα στοιχεία επιβίωσης αλλά και επιτυχίας μιας επιχείρησης είναι οι ταμειακές ροές της και ειδικότερα η ελεύθερη ρευστότητα που δημιουργεί.

Απουσία ορθολογικής παρατήρησης και καταγραφής συστηματικά των εσόδων-εξόδων οδηγεί με μεγάλη πιθανότητα σε καθυστέρηση των πληρωμών φόρων προς το κράτος και απόδοσης μερισμάτων σε μετόχους καθώς αυτό δίνει στην εταιρεία οφειλέτη λίγη παραπάνω ελεύθερη ρευστότητα από αυτήν που πραγματικά της αναλογεί. Ως εκ τούτου, οι επερχόμενες οφειλές αυξάνονται και προστίθενται στις απαιτήσεις αποζημίωσης ζημιών αυξάνοντας έτσι την πιθανότητα χρεοκοπίας είτε βραχυπρόθεσμα είτε στο διηνεκές. Πρακτικά, η μη καταβολή των υποχρεώσεων δημιουργεί ένα ψευδο-υπέρ πλεόνασμα στα ταμεία και η ασάφεια αυτή κρύβει το μελλοντικό πρόβλημα της καταβολής των συσσωρευμένων απαιτήσεων.

Οι ερευνητές στη διαχείριση του προβλήματος αυτού, αφού ανέλυσαν επαρκώς το κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας των Lundberg – Cramer προσδιόρισαν τη βέλτιστη λύση με κυμαινόμενη απόδοση των οφειλών αναλογικά σε σχέση με τα πραγματικά κέρδη. Σε περίπτωση μη ύπαρξης κερδών, διακόπτεται προσωρινά η καταβολή φόρων και μερισμάτων. Με τον τρόπο αυτό, δύναται εφικτή η διαχείριση των απαιτήσεων από ζημιές χωρίς να υφίσταται μεγάλος κίνδυνος σε αυτές να προστεθούν ληξιπρόθεσμες οφειλές.

Το πεδίο αυτό μελέτης αναπτύχθηκε κυρίως μετά την έλευση της νέας χιλιετηρίδας. Θεωρούμε ότι είναι ακόμα σε ερευνητικό στάδιο ως προς τη βελτιστοποίηση του μοντέλου για τη μείωση της πιθανότητας χρεοκοπίας στο διηνεκές.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Π1 Κώδικας 1

```
a = 1

c = 2

delta = 0.04

lamda = 1

gamma = 0.5

f1[t_] = t^(b - 1)*(1 - t)^(c - b - 1)*(1 - t*z)^(-a)

I[s_] = Integrate[f1[t, s], {t, 0, 1}]

f2[t_, x_] = t^(x - 1)*Exp[-t]

G[x_] = Integrate[f2[t, x], {t, 0, Infinity}]

F21[a_, b_, c_, z_] = G[c]/(G[b]*G[c - b])*I[s]

k[R_] = c*R^2 + (c*a - lamda - delta)*R - a*delta

Solve[k[R] == 0, R]

rho = 0.0385678

r2 = -0.518568

hta[s_] = (a + r2)/(a + rho)*Exp[(r2 - rho)*s]

p1 = 1/(1 - gamma)

p2 = rho/((rho - r2)*(1 - gamma))

p3 = p2 + 1

v[s_] = gamma/rho*(1 - hta[s])^(1/(1 - gamma))*   F21[p1, p2, p3,  hta[s])

Dv[s_] = D[v[s],s]
```

```
Solve[Dv[M] == 1, M]
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξένη

Abramowitz M, Stegun IA (1965) Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, New York

Albrecher H and Hipp C, (2007). Lundberg's risk process with tax, Blatter der DGVFM, 28, 13-28.

Albrecher H, Renaud J-Francois, Zhou X, (2008). A Levy insurance risk process with tax, J. Appl. Prob., 45, 363-375.

Asmussen S. and Albrecher H., (2011). Ruin Probabilities, World Scientific, Singapore, 2011

Avram, F., Palmowski, Z. and Pistorius, M. R. (2007). On the optimal dividend problem for a spectrally negative Lévy process. Ann. Appl. Prob. 17, 156–180.

Azcue P. and Muler, N. (2005). Optimal reinsurance and dividend distribution policies in the Cramér–Lundberg model. Math. Finance 15, 261–308

Cheng S, Gerber H. and Shiu E, (2000). Discounted probabilities and ruin theory in the compound binomial model. Insurance: Mathematics and Economics, 26, 239-250

De Vylder F, Goovaerts M and Haezendonck J. *Insurance Premiums: Theory and Applications*. North-Holland, Amsterdam 1984

Dickson D, (1992). On the distribution of the surplus prior to ruin. Insurance: Mathematics and Economics 11, 191-207

Dickson D, Waters H (2004) Some optimal dividend problems. ASTIN Bulletin 34:49–74

Dickson D, Hardy M, Waters H: *Actuarial mathematics for life contingent risks*, Cambridge Univ. Press, UK 2009

Gerber H: *An Introduction to Mathematical Risk Theory,* Huebner Foundation, Monograph, 1979

Gerber H. and Shiu E, (1997a). From ruin theory to pricing reset guarantees and perceptual put options. Insurance: Mathematics and Economics, 24, 3-14

Gerber H. and Shiu E, (1997b). The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin. Insurance: Mathematics and Economics, 7, 129-137

Gerber H. and Shiu, W., (1998). On the time value of ruin, North American Actuarial Journal, 2, 48-78.

Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W. (2004). Optimal dividends: analysis with Brownian motion. N. Amer. Actuarial J. 8, 1–20

Kyprianou A. and Palmowski Z. (2007). Distributional study of De Finetti’s dividend problem for a general Levy insurance risk process, J. Appl. Prob. 44, 428-443

Wang W, Ming R, Hu Y, (2011). On the expected discounted penalty function for risk process with tax. Statistics and Probability Letters, 81, 489-501.

Zhou, X. (2006). Discussion on: On optimal dividend strategies in the compound Poisson model, by H. Gerber and E. Shiu (N. Amer. Actuar. J. 10, 76–93). N. Amer. Actuarial J. 10, 79–84

Ελληνική

Ηλιόπουλος Γ., Βασικές μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων, Εκδ. Σταμούλης, Αθήνα, 2013

Κουτσόπουλος Κ., Αναλογιστικά μαθηματικά, Μέρος Ι, Θεωρία των κινδύνων, Εκδ. Συμμετρία, Αθήνα, 1999

Μουσκόβιας Χ., Μέτρα κινδύνου με εφαρμογές στη θεωρία χρεοκοπίας. Μεταπτυχιακή εργασία Παν. Πειραιώς, Πειραιάς 2021.

Πολίτης Κ., 2017. Εισαγωγή στη θεωρία συλλογικού κινδύνου, Εκδ. Σταμούλης, Αθήνα, 2017.

Χριστοδούλου Κ. Stochastic orders and ruin probabilities for heavy-tailed distributions. Μεταπτυχιακή εργασία Παν. Πειραιώς, Πειραιάς, 2022