ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΜΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΜΗ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΔΥΟ ΚΛΑΣΕΙΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΙΩΑΝΝΗΣ Ν. ΝΤΑΒΑΡΗΣ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και τη Διαχείριση Κινδύνων.

Πειραιάς,

Απρίλιος 2024

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη Συνέλευση του Τμήματος στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστήμιου Πειραιώς, στην υπ' αριθμόν .... συνεδρίασή της, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος, Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Βερροπούλου Γεωργία, Καθηγήτρια
- Τήνιος Πλάτων, Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

NON-RENEWAL STOCHASTIC SURPLUS PROCESSES IN RUIN THEORY WITH TWO CLASSES OF CLAIM

Ioannis N. Ntavaris

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus,

April 2024

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον καθηγητή κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη, επιβλέποντα καθηγητή μου σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, για την πολύτιμη συνεισφορά του και τη σημαντική καθοδήγηση που μου παρείχε, μέχρι την περάτωση της εργασίας. Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω τους καθηγητές και συμφοιτητές με τους οποίους συνεργάστηκα σε όλη τη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς μου την οικογένειά μου, καθώς και τα αδέρφια μου.

Σύντομη Περιγραφή

Η θεωρία κινδύνου πραγματεύεται πλην των άλλων προβλημάτων, την μελέτη της εύρυθμης λειτουργείας ενός ασφαλιστικού οργανισμού μέσω της μελέτης διαφόρων μέτρων κινδύνου, όπως είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα τα αποθεματικά να μην επαρκούν για την κάλυψη των συνολικών αποζημιώσεων.

Οι Gerber-Shiu στην εργασία τους 'On the time value of ruin' έδωσαν πρωτόγνωρες διαστάσεις στη μαθηματική θεωρία κινδύνου. Συγκεκριμένα, κατάφεραν να ενσωματώσουν όλα τα μέτρα κινδύνου ενός ασφαλιστικού οργανισμού, σε μία μόνο συνάρτηση, την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής.

Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη στοχαστικών διαδικασιών πλεονάσματος για χαρτοφυλάκια κινδύνων για τα οποία υπάρχουν δύο ανεξάρτητες πηγές κινδύνων, εξετάζοντας διάφορα μέτρα χρεοκοπίας. Μέσω της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu θα δοθούν αναλυτικά αποτελέσματα υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας τέτοιων χαρτοφυλακίων καθώς επίσης θα μελετηθούν διάφορα άλλα μέτρα χρεοκοπίας.

Πιο συγκεκριμένα στο πρώτο κεφάλαιο εισάγουμε τα μέτρα κινδύνου, τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος, καθώς επίσης δίνουμε μία περιγραφή του κλασσικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνων. Στη συνέχεια του ίδιου κεφαλαίου δίνεται αναλυτική περιγραφή του ανανεωτικού μοντέλου Erlang(2), το οποίου ειδική περίπτωση αποτελεί το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας και ασχολούμαστε με μέτρα κινδύνου της συνάρτησης Gerber-Shiu για το συγκεκριμένο μοντέλο.

Στο Δεύτερο κεφάλαιο παραθέτουμε μια αναλυτική περιγραφή ενός μη-ανανεωτικού μοντέλου με δύο κλάσεις κινδύνων, όπου υποθέτουμε ότι στην πρώτη και στην δεύτερη κλάση ο αριθμός των κινδύνων είναι μια στοχαστική διαδικασία Poisson και μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία με γενικευμένους χρόνους Erlang(2) ενδιάμεσους χρόνους αντίστοιχα. Επίσης δείχνουμε πώς η συνάρτηση των Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση και δίνουμε λύση αυτής.

Στο τρίτο κεφάλαιο, θεωρούμε ότι και οι δύο διαδικασίες αριθμού αξίωσης είναι ανανεωτικές διαδικασίες, με χρόνους απαιτήσεων τύπου φάσης(phase-type). Θα δώσουμε εκ νέου ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις, καθώς και ρίζες της εξίσωσης Lundberg, προσαρμοσμένες στην υπόθεσή μας

Στο Τέταρτο κεφάλαιο, εισάγουμε μια στρατηγική πολλαπλών μερισμάτων και δείχνουμε τρόπο υπολογισμού της συνάρτησης Gerber-Shiu και της αναμενόμενης παρούσας αξίας των σωρευτικών μερισμάτων

Στο πέμπτο κεφάλαιο, ασχολούμαστε με τη μελέτη του μέγιστου πλεονάσματος, πριν ακριβώς από τη χρεοκοπία. Η μελέτη μας γίνεται σε δύο κατηγορίες μοντέλου κινδύνου, όπου και οι δύο διαδικασίες αριθμού των απαιτήσεων έχουν χρόνους άφιξης που ακολουθούν κατανομή τύπου φάσης.

Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο δίνουμε αριθμητικά παραδείγματα.

Abstract

The theory of risk deals, among other issues, with the study of the smooth operation of an insurance organization through the examination of various risk measures, such as the probability of ruin, which is the probability that reserves will be insufficient to cover total claims.

The Gerber-Shiu in their work 'On the time value of ruin' provided unprecedented dimensions to the mathematical theory of risk. Specifically, they managed to incorporate all risk measures of an insurance organization into a single function, the expected discounted penalty function.

The purpose of the work is to study surplus stochastic processes for portfolios of risks for which there are two independent sources of risks, examining various measures of ruin. Through the expected discounted penalty function of Gerber-Shiu, detailed results for calculating the probability of ruin of such portfolios will be provided, as well as various other measures of ruin.

More specifically, in the first chapter, we introduce risk measures, surplus stochastic processes, and also give a description of the classic model of risk theory. Subsequently, within the same chapter, a detailed description of the renewal model Erlang(2) is given, which is a special case of the classic ruin theory model, and we deal with risk measures of the Gerber-Shiu function for this specific model.

In the Second chapter, we present a detailed description of a non-renewal model with two classes of risks, assuming that in the first and second classes the number of risks follows a Poisson stochastic process and a renewal stochastic process with generalized Erlang(2) inter-arrival times respectively. We also show how the Gerber-Shiu function satisfies a defective renewal equation and give a solution to it.

In the third chapter, we consider that both claims arrival processes are renewal processes, with phase-type claim times. We will provide again integro-differential equations, as well as roots of the Lundberg equation, adapted to our assumption.

In the Fourth chapter, we introduce a multiple dividends strategy and show a method for calculating the Gerber-Shiu function and the expected present value of cumulative dividends.

In the fifth chapter, we deal with the study of the maximum surplus, just before ruin. Our study is done in two categories of risk models, where both claims arrival processes have phase-type distribution arrival times.

Finally, in the sixth chapter, we provide numerical examples.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΚΑΙ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

1.1 Εισαγωγή ……………………………………………………12

1.2 Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων ……………………12

1.3 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος ……………………………17

1.4 Χρόνος και Πιθανότητα χρεοκοπίας ………………………………19

1.5 Το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου ……………………………21

1.6 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu και μέτρα χρεοκοπίας ………………………22

1.7 Στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος για το γενικευμένο Erlang ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου 26

2 Η ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΔΥΟ ΚΛΑΣΕΙΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

2.1 Εισαγωγή ……………………………………………………41

2.2 Περιγραφή του μοντέλου ………………………………………42

2.3 Μελέτη της συνάρτησης των Gerber-Shiu σε ένα μη ανανεωτικό μοντέλο ……………………43

3 ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ GERBER-SHIU ΓΙΑ ΔΥΟ ΚΛΑΣΕΙΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥΣ ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΤΥΠΟΥ ΦΑΣΗΣ

3.1 Εισαγωγή ……………………………………………………55

3.2 Υποθέσεις μοντέλου ……………………………………………55

3.3 Ολοκληρωτικές-διαφορικές εξισώσεις ………………………………60

3.4 Η γενικευμένη θεμελιώδη εξίσωση του Lundberg ……………………………62

3.5 Αποτελέσματα για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu ……………………………64

4 Η ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΕΝΑ ΓΕΝΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΔΥΟ ΚΛΑΣΕΙΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ ΚΑΙ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΜΙΑΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΜΕΡΙΣΜΑΤΩΝ

4.1 Περιγραφή του μοντέλου ………………………………………72

4.2 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων ……………………………………………………72

4.3 Αναδρομικός υπολογισμός της συνάρτησης των Gerber-Shiu ……………………82

4.4 Η αναμενόμενη παρούσα αξία των σωρευτικών μερισμάτων ……………………84

5 ΤΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ ΓΙΑ ΤΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΔΥΟ ΚΛΑΣΕΙΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

5.1 Εισαγωγή ……………………………………………………88

5.2 Παρουσίαση του μοντέλου ………………………………………89

5.3 Ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις ……………………………………………………………………….……..91
5.4 Επιλύσεις των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων ……………………………………………………..…94
5.5 Αποτελέσματα για τα μεγέθη των αποζημιώσεων με μετασχηματισμό Laplace …….……………96

6 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

6.1 Παράδειγμα Πρώτο ……………………………………………………………………………………………99
6.2 Παράδειγμα Δεύτερο ……………………………………………………..………………...……...101

7 Βιβλιογραφία…………………………………………...………………………………………………102

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΚΑΙ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

1.1.Εισαγωγή

Η ομαλή λειτουργεία ενός ασφαλιστικού οργανισμού εξαρτάται κατά κύριο λόγο από τον σχηματισμό επαρκών αποθεματικών ώστε να είναι σε θέση να ανταπεξέλθει στις υποχρεώσεις τόσο στα επαγγελματικά όσο και στα ασφαλιστικά ρίσκα.

Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας ή μοντέλο Cramer -Lundberg, το οποίο αποτελεί την αρχή της (μαθηματικής) θεωρίας κινδύνου, εισήχθη αρχικά από τον Σουηδό μαθηματικό Filip Lundberg (1903) στη διδακτορική διατριβή του. Ο Lundberg παρατήρησε πως η διαδικασία Poisson μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μοντέλα ασφαλίσεων. Στη συνέχεια, ο Harald Cramer, κατάφερε να ενσωματώσει τη θεωρία στοχαστικών διαδικασιών στη θεωρία κινδύνου. Κύριο χαρακτηριστικό του κλασικού μοντέλου είναι ότι ο αριθμός των ζημιών σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων περιγράφεται από τη διαδικασία Poisson.

Η γενίκευση του μοντέλου έγινε το 1957 όταν ο Νορβηγός Sparre Andersen παρουσίασε στο $15 o^{o}$ αναλογιστικό συνέδριο στη Νέα Υόρκη, την Εργασία "On The collective Theory of risk in case of contagion between the claims". Κύριο χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου μοντέλου είναι ότι περιγράφεται από μια ανανεωτική διαδικασία. Επίσης, ακολούθησαν πολλές γενικεύσεις του κλασσικού μοντέλου, χρησιμοποιώντας διάφορες κατανομές για την περιγραφή των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των κινδύνων.

1.2. Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων

Για την μοντελοποίηση του πλεονάσματος ενός ασφαλιστικού οργανισμού, αρχικά προσδιορίζουμε τον αριθμό των κινδύνων που είναι εκτεθειμένος.

Ορισμός 1.1

Μια στοχαστική διαδικασία $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ η οποία εκφράζει τον αριθμό των κινδύνων στο χρονικό διάστημα $[0, t]$, ονομάζεται απαριθμήτρια διαδικασία του αριθμού των κινδύνων, αν και μόνο αν ισχύουν τα παρακάτω,

- $N(t) > 0, \mu\varepsilon\ N(0) = 0$,
- $N(t)$ είναι διακριτή,
- αν $s \leq t$ τότε $N(s) \leq N(t)$

Μια χρήσιμη αλλά και ευρέως χρησιμοποιούμενη στοχαστική διαδικασία στην θεωρία κινδύνου είναι η οικογένεια των ανανεωτικών στοχαστικών διαδικασιών. Ο ορισμός μιας ανανεωτικής διαδικασίας βρίσκεται στους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των ενδεχομένων που απαριθμεί η $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$. Έστω $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ μια ακολουθία μη αρνητικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με συνάρτηση κατανομής $F_W(t)$, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_W(t)$, μετασχηματισμό Laplace $\widehat{f_W}(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_W(t)dt$ και μέση τιμή $E(W) < \infty$, όπου με W_i συμβολίζουμε τον ενδιάμεσο χρόνο εμφάνισης του $i-$ενδεχομένου (ζημιάς). Τότε η ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ ορίζεται ως ακολούθως.

Ορισμός 1.2

Έστω μια ακολουθία $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ μη αρνητικών ισόνομων και ανεξάρτητων τ.μ.. Η ακολουθία $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \sigma_0 = 0$, με $\sigma_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ ονομάζεται ακολουθία ανανεώσεων. Τότε η απαριθμήτρια διαδικασία $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ με $N(0) = 0$ που δίνεται από την σχέση

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{(\sigma_n \leq t)}$$

και παριστά τον αριθμό των ανανεώσεων στο χρονικό διάστημα $[0, t]$, ονομάζεται ανανεωτική στοχαστική διαδικασία.

Για κάθε ανανεωτική ανέλιξη, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$N(t) = n \ \alpha\nu\ \kappa\alpha\iota\ \mu\acute{o}\nu o\ \alpha\nu\ \{\sigma_n \leq t < \sigma_{n+1}\}. \tag{1.1}$$

Θέλοντας να ερμηνεύσουμε τα παραπάνω έχουμε ότι η εξίσωση $(N(t) = n)$ σημαίνει την εμφάνιση ακριβώς n γεγονότων έως το χρόνο t, ενώ το ενδεχόμενο $\{\sigma_n \leq t < \sigma_{n+1}\}$ σημαίνει ότι ο χρόνος αναμονής μέχρι να συμβούν n γεγονότα (ανανεώσεις) είναι t. Επειδή οι παραπάνω αποτελούν δύο διαφορετικές εκφράσεις του ίδιου ενδεχομένου, η (1.1) είναι αληθής.

Θεώρημα 1.1

Έστω $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία. Τότε με πιθανότητα 1 ισχύει ότι

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{E(W_1)}.$$

Απόδειξη.

Από τον ορισμό της $N(t)$, οι ανισότητες $\sigma_n \le t < \sigma_{n+1}$ ισχύουν με πιθανότητα 1 (σχεδόν βέβαια). Διαιρώντας τις παραπάνω ανισότητες με $N(t)$ και χρησιμοποιώντας το νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_1) \le \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_n}{n} = \lim_{t\to\infty}\frac{\sigma_{N(t)}}{N(t)} \le \lim_{t\to\infty}\frac{1}{N(t)} \\ \le \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sigma_{N(t)+1}}{N(t)+1}\frac{N(t)+1}{N(t)}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_{n+1}}{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \mathbb{E}(W_1),\end{aligned}$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο.■

Ένα βασικό θεώρημα στη θεωρία στοχαστικών ανελίξεων είναι το «στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα» (ή Elementary Renewal Theorem).Παραθέτουμε την απόδειξη του, αλλά πρώτα θα δώσουμε την απόδειξη ενός Λήμματος που είναι αναγκαίο για την συγκεκριμένη απόδειξη.

Λήμμα 1.1

Ισχύει η σχέση

$$\mathbb{E}[\sigma_{N(t)+1}] = \mathbb{E}[W_1 + W_2 + \cdots + W_{N(t)+1}] = \mathbb{E}[W_1]\mathbb{E}[N(t)+1] = \mathbb{E}[W_1][\mathbb{E}[N(t)]+1]$$

αν $\mathbb{E}[W_1] < \infty$.

Απόδειξη.

Θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω ανανεωτικό επιχείρημα για να προσδιορίσουμε μια ανανεωτική εξίσωση για την συνάρτηση $A(t) = \mathbb{E}[\sigma_{N(t)+1}]$ Δεσμεύοντας ως προς το πρώτο ανανεωτικό χρόνο και εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε,

$$A(t) = \int_0^\infty \left[\mathbb{E}\sigma_{N(t)+1} | W_1 = w\right] dF_w(w).$$

Όμως είναι $\left[\mathbb{E}\sigma_{N(t)+1} | W_1 = w\right] = \begin{cases} w & \alpha\nu\ w > t\ , \\ w + A(t-w) & \alpha\nu\ w \leq t\ . \end{cases}$

Άρα, $A(t) = \int_0^t [w + A(t-W)]dF(w) + \int_0^\infty wdF_w(w) = \int_0^\infty wdF_w(w) + \int_0^t A(t-w)dF_w(w)$

$$= \mathbb{E}[W_1] + \int_0^t A(t-w)dF_w(w).$$

Δηλαδή, η $A(t)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση με $a(t) = \mathbb{E}(W_1)$. Και γνωρίζοντας ότι η $a(t)$ είναι φραγμένη, έπεται ότι

$$A(t) = \mathbb{E}[W_1] + \int_0^t \mathbb{E}(W_1) d\mathbb{E}\big(N(w)\big) = \mathbb{E}[W_1][\mathbb{E}[N(t)] + 1].\blacksquare$$

Θεώρημα 1.2

Έστω $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ μια ανανεωτική στοχαστική ανέλιξη. Τότε ισχύει ότι

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{E(W_1)}.$$

Απόδειξη.

Έχουμε ότι $t < \sigma_{N(t)+1}$. Από το Λήμμα 1.1 έπεται ότι

$$t < \mathbb{E}\left[\sigma_{N(t)+1}\right] = \mathbb{E}[W_1][\mathbb{E}[N(t)] + 1]$$

από την οποία παίρνουμε $\frac{1}{t}\mathbb{E}\big(N(t)\big) > \frac{1}{\mathbb{E}(W_1)} - \frac{1}{t}$.

Επομένως, $$\lim_{t\to\infty} inf \frac{1}{t}\mathbb{E}\big(N(t)\big) \geq \frac{1}{\mathbb{E}(W_1)} \qquad (1.2)$$

Θα δείξουμε τώρα ότι $\lim_{t\to\infty} sup \frac{1}{t}\mathbb{E}\big(N(t)\big) \leq \frac{1}{\mathbb{E}(W_1)}$.

Για ευκολία θέτουμε $M(t) = \mathbb{E}\big(N(t)\big)$ και $m = \mathbb{E}(W_1)$,

για τον σκοπό αυτό ορίζουμε τις εξής τ.μ.:

$$W_i^c = \begin{cases} W_i & , \alpha\nu\ W_i \leq c \\ c & , \alpha\nu\ W_i > c \end{cases}$$

και θεωρούμε την ανανεωτική διαδικασία που έχει ενδιάμεσους χρόνους τις τ.μ. $\{W_i^c\}$.Έστω σ_n^c και $N^c(t)$ οι χρόνοι αναμονής και η απαριθμήτρια διαδικασία που παράγεται από τις $\{W_i^c\}$. Αφού οι τ.μ. W_i^c είναι ομοιόμορφα φραγμένες από το c, είναι φανερό ότι

$$t + c \geq \sigma_{N^c(t)+1}^c,$$

και επομένως,

$$t + c \geq \mathbb{E}\left[\sigma_{N^c(t)+1}^c\right] = \mathbb{E}(W_i^c)[1 + \mathbb{E}(N^c(t))] \tag{1.3}$$

όπου $m^c = \mathbb{E}(W_i^c) = \int_0^c 1 - F(w)dw$ και $M^c(t) = \mathbb{E}(N^c(t))$.

Από το ότι $W_i^c \leq W_i$ έπεται ότι $N^c(t) \geq N(t)$ και άρα $M^c(t) \geq M(t)$. Επομένως, από την σχέση (1.3) παίρνουμε ότι

$$t + c \geq m^c[1 + M(t)]$$

ή

$$\frac{1}{t}M(t) \leq \frac{1}{m^c} + \frac{1}{t}\left(\frac{c}{m^c} - 1\right),$$

οπότε

$$\lim_{t\to\infty} sup \frac{1}{t}M(t) \leq \frac{1}{m^c} \tag{1.4}$$

για οποιοδήποτε $c > 0$.

Αλλά, $\lim_{c\to\infty} m^c = \lim_{c\to\infty} \int_0^c 1 - F(w)dw = \int_0^\infty 1 - F(w)dw = m$.

Επομένως η (1.4) μας δίνει $\lim_{t\to\infty} sup \frac{1}{t}M(t) \leq \lim_{c\to\infty} \frac{1}{m^c} = \frac{1}{m}$

ή

$$\lim_{t\to\infty} sup \frac{1}{t}\big(N(t)\big) \leq \frac{1}{\mathbb{E}(W_1)}. \tag{1.5}$$

Από τις σχέσεις (1.2) και (1.5) έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.■

Παρατηρούμε, από τον Ορισμό 1.2 της ανανεωτικής διαδικασίας, ότι προκύπτει διαφορετική στοχαστική ανέλιξη ανάλογα με την κατανομή που ακολουθούν οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των ενδεχομένων. Όταν υποθέσουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης ακολουθούν την εκθετική κατανομή, προκύπτει μία ειδική περίπτωση ανανεωτικής ανέλιξης, η διαδικασία Poisson.

Ορισμός 1.3

Μια απαριθμήτρια διαδικασία $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$, ονομάζεται διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, με $\lambda > 0$ αν :

i. $N(0) = 0$.
ii. Η διαδικασία έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις
iii. Για κάθε $t > 0$ η $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt:

$$\mathbb{P}(N(t)) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

1.3 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος

Έχοντας μοντελοποιήσει τον αριθμό των κινδύνων, το επόμενο βήμα είναι να μοντελοποιήσουμε τα αποθεματικά ενός ασφαλιστικού οργανισμού. Έτσι θεωρούμε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων όπου το πλεόνασμα του χαρτοφυλακίου περιγράφεται από τη διαδικασία πλεονάσματος, $\{U(t), t > 0\}$ και ορίζεται ακολούθως.

Ορισμός 1.4

Ως διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t), t > 0\}$, ορίζεται η στοχαστική διαδικασία

$$U(t) = u + ct - S(t), \tag{1.6}$$

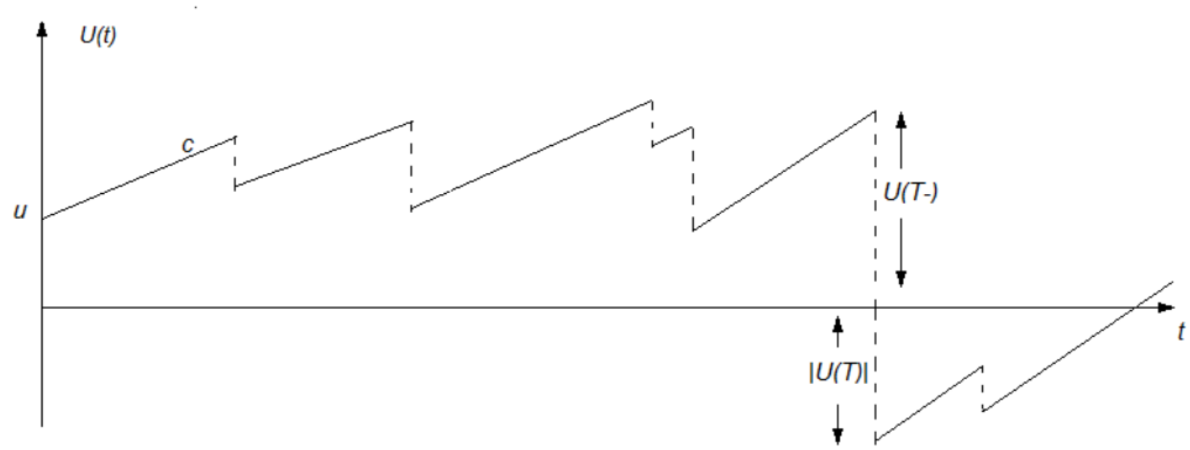
όπου $U(0) = u(\geq 0)$ το αρχικό απόθεμα, c ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων ανά μονάδα χρόνου και $S(t)$ οι συνολικές αποζημιώσεις στο χρονικό διάστημα $[0, t]$, με

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i\,, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

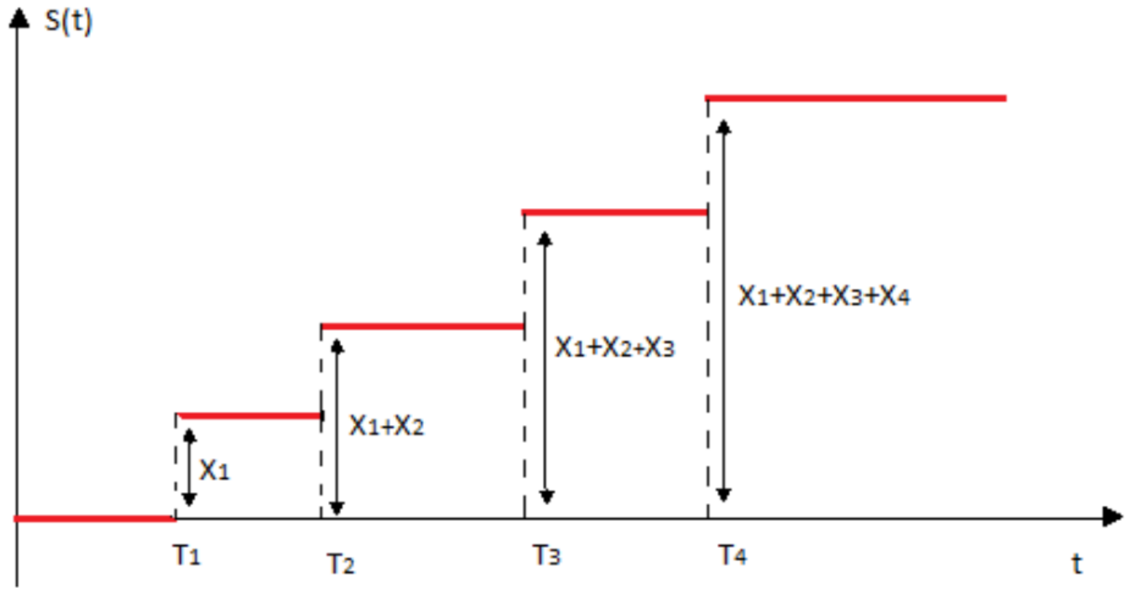
όπου $\{X_i\}_{i\geq 1}^{\infty}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ., με X_i που περιγράφει το μέγεθος της i-οστής ζημιάς. Θεωρούμε ότι η τ.μ. X_i έχει σ.π.π. $f(x)$, σ.κ. $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

και μέση τιμή $m = \mathbb{E}(X) < \infty$. Βασική υπόθεση του μοντέλου είναι ότι οι διαδικασίες $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ και $\{X_i\}_{i\geq 1}^{\infty}$ είναι ανεξάρτητες.

Σχήμα 1.1 : Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$



Σχήμα 1.2 : Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων $S(t)$



Από τις σχέσεις (1.6) και (1.7) (βλ. και σχήμα 1.1.) παρατηρούμε ότι οι δειγματοσυναρτήσεις της $U(t)$ εμφανίζουν άλματα (προς τα κάτω) κατά τις χρονικές στιγμές W_i επέλευσης των ζημιογόνων γεγονότων. Τα άλματα είναι του ίδιου μεγέθους με τα αντίστοιχα άλματα (προς τα πάνω) της $S(t)$, με τη διαφορά ότι μια δειγματοσυνάρτηση της $S(t)$ είναι κλιμακωτή (η $S(t)$ έχει σταθερή τιμή μεταξύ δύο διαδοχικών W_i) ενώ η αντίστοιχη δειγματοσυνάρτηση της $U(t)$ είναι, μεταξύ διαδοχικών

W_i , ευθύγραμμο τμήμα με θετική κλίση και συγκεκριμένα με συντελεστή διεύθυνσης c. (βλ. σχήμα 1.2)

Στο μοντέλο Sparre Andersen θεωρούμε ότι η $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ είναι μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία.

Από τον Ορισμό 1.4. παρατηρείται ότι η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές.

1.4 Χρόνος και Πιθανότητα χρεοκοπίας

Για την ανάπτυξη των μοντέλων χρεοκοπίας, θα αναφέρουμε κάποια βασικά μέτρα που αποτελούν τον πυλώνα ανάπτυξης των μοντέλων.

Ορισμός 1.5

Η χρονική στιγμή κατά την οποία το πλεόνασμα γίνεται για πρώτη φορά αρνητικό, καλείται χρόνος χρεοκοπίας και δίνεται από την σχέση

$$T = \begin{cases} inf\{t: U(t) < 0\}, & για\ όλα\ τα\ t \\ \infty \qquad\qquad\qquad , & αν\ U(t) > 0. \end{cases}$$

Με βάση τον παραπάνω ορισμό η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.6

Για $u > 0$ η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως

$$\psi(u) = \mathbb{P}(T < \infty | U(0) = u)$$

Αξίζει να τονισθεί ότι η «μαθηματική χρεοκοπία» που μόλις ορίσαμε, δεν ισοδυναμεί κατ' ανάγκη με πραγματική χρεοκοπία για τον ασφαλιστικό οργανισμό, αφού η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος δεν είναι η μοναδική «πηγή» εσόδων μια ασφαλιστικής επιχείρησης. Όμως, είναι ένα βασικό μέτρο που βοηθάει την επιχείρηση στη διαμόρφωση της οικονομικής της πολιτικής. Από μαθηματικής άποψης υπολογίζοντας την πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί κανείς να προσδιορίσει κατάλληλα το αρχικό αποθεματικό u και το ασφάλιστρο c έτσι ώστε να αποφύγει το ενδεχόμενο η διαδικασία πλεονάσματος να γίνει αρνητική.

Επιπλέον, από τον ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος είναι φανερό ότι τα ασφάλιστρα c δεν μπορεί να πάρουν οποιαδήποτε τιμή (δεν μπορούν να είναι οποιαδήποτε χρηματικά ποσά, για παράδειγμα δεν μπορεί να είναι μηδενικά). Άρα θεωρούμε ότι ο ρυθμός αύξησης του ασφαλίστρου c στο $[0,t]$ είναι αυστηρά μεγαλύτερος από τις μέσες ζημιές, $\mathbb{E}(S(t))$, που εμφανίζονται στο $[0,t]$, γιατί διαφορετικά η χρεοκοπία στο $[0,t]$ είναι σχεδόν βέβαιη. Για να αποδείξουμε το παραπάνω θεωρούμε ότι υπάρχει ένας σταθερός αριθμός ρ, τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{t}S(t) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \to \rho\,,\ \ t \to \infty \qquad (1.8)$$

1.5. Το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

Το κλασσικό μοντέλο είναι το περισσότερο διαδεδομένο μοντέλο και χρησιμοποιείται ευρέως, κυρίως λόγω της δυνατότητάς του να οδηγεί σε απλούστερους μαθηματικούς υπολογισμούς. Το μοντέλο αυτό, με άπειρο χρόνο λειτουργίας, αν και δεν είναι το πιο ρεαλιστικό σε σχέση με άλλα (πεπερασμένος ή διακριτός χρόνος) ερευνήθηκε για πολλές δεκαετίες περισσότερο από κάθε άλλο μοντέλο.

Στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου θεωρούμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των ζημιογόνων γεγονότων είναι εκθετικά κατανεμημένοι, δηλαδή οι τ.μ. $\{W_n, n \geq 1\}$ ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

$$\mathbb{P}(W_1 \leq x) = 1 - e^{\lambda x}\,, \qquad x > 0, \lambda > 0$$

Η πιθανότητα να εμφανιστεί ένα ενδεχόμενο σε ένα διάστημα είναι ανάλογη του μήκους του διαστήματος αυτού, δηλαδή η στοχαστική διαδικασία $N(t)$ είναι μια στοχαστική διαδικασία Poisson.

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda x}(\lambda t)^n}{n!}, \qquad x > 0, \lambda > 0$$

Θεωρούμε ανεξάρτητες τις τ.μ. $X_1, X_2, \ldots$ και $N(t)$, ενώ οι τ.μ. $X_n, n = 1,2, \ldots$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ισόνομες με από κοινού συνάρτηση κατανομής,

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

όπου $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$ και η συνάρτηση δεξιάς ουράς είναι

$$\bar{F}(x) = 1 - F\int_0^\infty xf(x)dx, \qquad (x) = \int_0^\infty f(x)dx.$$

Συμβολίζουμε με μ το αναμενόμενο ύψος ζημιάς (μέση τιμή) το οποίο ισούται με

$$\mu = E(x) = \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty \bar{F}(x)dx$$

και με $F_e(x)$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση ισορροπίας της τ.μ. X και υπολογίζεται ως

$$F_e(x) = 1 - \bar{F}_e(x) = \int_0^x \frac{\bar{F}(x)}{E(x)}dy = \int_0^x f_e(y)dy \qquad x > 0$$

όπου $$f_e(y) = \frac{\bar{F}(x)}{E(x)}.$$

Στο κλασσικό μοντέλο θεωρούμε ότι ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων είναι σταθερός και ίσος με c και τα ασφάλιστρα (ct) που εισπράττονται στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ ισούνται με τη στοχαστική διαδικασία είσπραξης ασφαλίστρων $P(t)$. Μια βασική υπόθεση που κάνουμε πάντα στο κλασσικό μοντέλο είναι ότι τα ασφάλιστρα που εισπράττονται στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ επαρκούν για να καλύψουν τις αναμενόμενες συνολικές ζημιές, δηλαδή ισχύει η συνθήκη $ct \geq E[S(t)]$. Γνωρίζοντας ότι η στοχαστική διαδικασία $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt θα ισχύει ότι

$$E[N(t)] = \lambda t \qquad και \qquad E[S(t)] = E[N(t)]E[X] = \lambda tE[X].$$

Οπότε έχουμε ότι

$$ct \geq \lambda tE[X] \Rightarrow c \geq \lambda E[X]$$

Παρατηρούμε ότι στο αριστερό μέλος της σχέσης αυτής δηλώνει τη μέση τιμή των εσόδων, ενώ το δεξιό τη μέση τιμή των εξόδων στη μονάδα του χρόνου για τον ασφαλιστή. Η συνθήκη απαιτεί τα έσοδα να υπερβαίνουν τα έξοδα κατά μέσο όρο στη μονάδα του χρόνου, για το λόγο αυτό αναφέρεται ως συνθήκη καθαρού κέρδους.

Αυτό που ενδιαφέρει περισσότερο στην θεωρία χρεοκοπίας είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα το πλεόνασμα του ασφαλιστή να γίνει κάποια στιγμή αρνητικό.

Ορισμός 1.7

Ορίζουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, δεδομένου του αρχικού αποθεματικού u ως

$$\psi(u) = P[U(t) < 0 \ \text{για κάποιο} \ t \geq 0 | U(0) = u]$$

Πολλές φορές η δέσμευση παραλείπεται και, όταν είναι σαφές ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας θεωρείται συνάρτηση του αρχικού αποθεματικού u, γράφουμε απλώς

$$\psi(u) = P[U(t) < 0 \ \text{για κάποιο} \ t \geq 0].$$

Αντίστοιχα η πιθανότητα μη χρεοκοπίας $\delta(u)$ ορίζεται από τη σχέση

$$\delta(u) = 1 - \psi(u)$$

Ορισμός 1.8

Ορίζουμε μια παράμετρο $\theta > 0$, η οποία ονομάζεται περιθώριο ασφαλείας ή συντελεστής ασφαλείας τέτοια ώστε

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 \tag{1.9}$$

Το θ εκφράζει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους της ασφαλιστικής εταιρείας στη μονάδα του χρόνου.

Ορισμός 1.9

Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ο συντελεστής προσαρμογής συμβολίζεται με R και ορίζεται ως η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης

$$1 + (1+\theta)E(x)r = M_x(r) \tag{1.10}$$

όπου θ το περιθώριο ασφαλείας και $M_x(r)$ η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής X στο σημείο r, δηλαδή

$$M_x(r) = E(e^{rX}) = \int_0^\infty e^{rX} f(x)dx.$$

Για να έχει νόημα η παραπάνω εξίσωση θα πρέπει η τ.μ. X να έχει ροπογεννήτρια.

1.6. Η συνάρτηση των Gerber-Shiu και μέτρα χρεοκοπίας

Η πιθανότητα χρεοκοπίας δεν είναι το μοναδικό μέτρο κινδύνου για να κατανοήσουμε την συμπεριφορά της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος σε σχέση με την τυχαία μεταβλητή T. Τυχαίες μεταβλητές που σχετίζονται με την τ.μ. T είναι το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας, που συμβολίζεται με $|U(T)|$, και το πλεόνασμα λίγο πρίν τη χρεοκοπία, που συμβολίζεται με $U(T-)$.

Οι Gerber και Shiu στην εργασία τους "On the Time Value of Ruin" το 1998, κατάφεραν να μοντελοποιήσουν τις τυχαίες μεταβλητές $|U(T)|$, $U(T-)$ και τον χρόνο χρεοκοπίας T, σε μία μόνο συνάρτηση, την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (expected discounted penalty function). Μέσω αυτής της συνάρτησης, μελετήθηκαν ταυτόχρονα μέτρα κινδύνου που μέχρι τότε προσεγγιζόταν μεμονωμένα.

Ορισμός 1.10

Για $u \geq 0, \delta \geq 0$, η συνάρτηση των Gerber-Shiu ορίζεται ως:

$$\varphi(u) := \mathbb{E}\left[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T<\infty)} \middle| U(0) = u\right], \tag{1.11}$$

όπου δ η ένταση ανατοκισμού, $w: [0, \infty] \times (0, \infty) \to [0, \infty)$ μια δισδιάστατη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$ που ονομάζεται συνάρτηση ποινής, $1_{(\cdot)}$ η δείκτρια συνάρτηση και $U(T-)$ & $|U(T)|$ το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία αντίστοιχα.

Η συνάρτηση των Gerber-Shiu μπορεί να ερμηνευθεί ως προ-εξοφλημένη ποινή που επιβάλλεται όταν συμβεί η χρεοκοπία. Από τον Ορισμό 1.10 προκύπτουν διάφορα μέτρα χρεοκοπίας, τα οποία αναφέρονται παρακάτω:

- Για $\delta = 0$ και $w(x, y) = 1$, τότε η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi(u) = \mathbb{E}\left(1_{(T<\infty)} \middle| U(0)\right) = \mathbb{P}(T < \infty | U(0) = u),$$

- Για $\delta > 0$ και $w(x, y) = 1$, προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας,

$$\varphi_T(u) = \mathbb{E}\left(e^{-\delta T} 1_{(T<\infty)} Z | U(0) = u\right).$$

- Όταν $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = 1_{(x_1 \leq x)} 1_{(x_2 \leq y)}$, παίρνουμε την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής του τυχαίου διανύσματος $(U(T-), |U(T)|)$,

$$F_\delta(x_1, x_2|u) = \mathbb{E}\big(e^{-\delta T} 1_{(x_1 \leq x)} 1_{(x_2 \leq y)} | U(0) = u\big).$$

- Για $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = 1_{(x_1 = x)} 1_{(x_2 = y)}$, παίρνουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής του διανύσματος $(U(T-), |U(T)|)$, την

$$F_0(x_1, x_2|u) = \mathbb{E}\big(1_{(x_1 \leq y)} | U(0) = u\big).$$

- Για $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = 1_{(x_1 = x)} 1_{(x_2 = y)}$,προκύπτει η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος $(U(T-), |U(T)|)$,

$$f_\delta(x_1, x_2|u) = \mathbb{E}\big(e^{-\delta T} 1_{(x_1 \leq x)} 1_{(x_2 \leq y)} | U(0) = u\big).$$

- Για $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = 1_{(x_1 = x)} 1_{(x_2 = y)}$, προκύπτει η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος $(U(T-), |U(T)|)$,

$$f_0(x_1, x_2|u) = \mathbb{E}\big(1_{(x_1 \leq x)} 1_{(x_2 \leq y)} | U(0) = u\big).$$

- Αν $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = 1_{(x_1 \leq x)}$, παίρνουμε την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος την στιγμή ακριβώς πριν την χρεοκοπία,

$$H_\delta(x|u) = \mathbb{E}\big(e^{-\delta T} 1_{(x_1 \leq x)} | U(0) = u\big).$$

- Αν $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = 1_{(x_1 \leq x)}$, παίρνουμε την περιθώρια συνάρτηση της κατανομής της τ.μ. $U(T-)$,

$$H_0(x|u) = \mathbb{E}\big(1_{(X_1 \leq X)}\ U(0) = u\big).$$

- Όταν $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = 1_{(x_1 = x)}$, προκύπτει η προ-εξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση της πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U(T-)$,

$$h_\delta(x|u) = \mathbb{E}\big(e^{-\delta T} 1_{(x_1 = x)} | U(0) = u\big).$$

- Όταν $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = 1_{(x_1 = x)}$,προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση της πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U(T-)$,

$$h_0(x|u) = \mathbb{E}\big(1_{(X_1 \leq X)}\, U(0) = u\big).$$

- Αν $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = 1_{(x_2 \leq y)}$, παίρνουμε την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του ελλείματος τη στιγμή ακριβώς πριν την χρεοκοπία,

$$G_\delta(y|u) = \mathbb{E}\big(e^{-\delta T} 1_{(x_2 \leq y)} | U(0) = u\big).$$

- Αν $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = 1_{(x_2 \leq \mathrm{y})}$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $|U(T)|$

$$G_0(y|u) = \mathbb{E}\big(1_{(X_2 \leq X)}\, U(0) = u\big).$$

- Αν $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = 1_{(x_2 = y)}$,παίρνουμε την προ-εξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ελλείμματος τη στιγμή ακριβώς πριν την χρεοκοπία,

$$g_\delta(y|u) = \mathbb{E}\big(e^{-\delta T} 1_{(x_2 = y)} | U(0) = u\big).$$

- Αν $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = 1_{(x_2 = y)}$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ. $|U(T)|$,

$$g_0(y|u) = \mathbb{E}\big(1_{(X_2 = X)}\, U(0) = u\big).$$

Η συνάρτηση των Gerber-Shiu εκτός από τη χρήση της στα αναλογιστικά μαθηματικά, έχει και εφαρμογές στη θεωρία των χρηματοοικονομικών μαθηματικών. Για παράδειγμα, όταν $w(x, y) = \max\{0, K - x\}$, η $\varphi(u)$ χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση ενός Αμερικάνικου put option με τιμή άσκησης K (Gerber and Shiu (1999), Gerber and Landry (1998)).

Η μελέτη της αναμενόμενης προ-εξοφλημένης συνάρτησης ποινής στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου έγινε από τους Gerber και Shiu το 1998. Οι συγγραφείς απέδειξαν ότι η $\varphi(u)$ ικανοποιεί μια ολοκληρο-διαφορική εξίσωση, η λύση της οποίας γίνεται με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace, αποδεικνύοντας ότι η αναμενόμενη προ-εξοφλημένη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

Ακολουθεί περιγραφή της παραπάνω μεθοδολογίας για το ανανεωτικό μοντέλο με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των ζημιών που κατανέμονται σύμφωνα με μια γενικευμένη Erlang$(n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ αφού το κλασσικό μοντέλο είναι ειδική περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου

1.7. Στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος για το γενικευμένο Erlang ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου

Στην παρούσα παράγραφο θα περιγράψουμε τη συνάρτηση των Gerber-Shiu για τη διαδικασία πλεονάσματος ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου κινδύνου $U(t)$ όπως ορίσθηκε στις σχέσεις (1.6)-(1.7), θεωρώντας ότι χρόνοι άφιξης ζημιών είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ που ακολουθούν την γενικευμένη Erlang$(n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, ο ορισμός της οποίας δίνεται στη συνέχεια.

Ορισμός 1.11

Έστω $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία ανεξάρτητων εκθετικών τ.μ. με παραμέτρους λ_i, $i = 1,2, \ldots, n$. Τότε, η τ.μ. $\sigma_n = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i$, ονομάζεται γενικευμένη Erlang κατανομή και συμβολίζεται με Erlang$(n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, σε αυτήν την περίπτωση η σ.π.π. της τ.μ. σ_n δίνεται από την σχέση

$$f_{\sigma_n}(\mathrm{t}) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} \right) \lambda_i e^{-\lambda_i t}, \mathrm{t} \geq 0, \lambda\mathrm{i} > 0$$

και ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ. σ_n, δίνεται από τη σχέση

$$\hat{f}_{\sigma_n}(\mathrm{s}) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_w(t) dt = \mathbb{E}(e^{-sw}) = \frac{\prod_{i=1}^{\infty} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{\infty} (\lambda_i + s)}, s > 0. \tag{1.12}$$

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι η γενικευμένη Erlang κατανομή αποτελεί γενίκευση της κατανομής Erlang. Έτσι θέτοντας $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$ παίρνουμε την κατανομή Erlang(n, λ), ενώ θέτοντας $n = 1$, $\lambda_1 = \lambda$ παίρνουμε την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

Για την συγκεκριμένη διαδικασία κινδύνου, οι Gerber and Shiu ότι η προεξοφλημένη αναμενόμενη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μια ολοκληρο-διαφορική εξίσωση όπως δίνεται στο επόμενο θεώρημα. Εδώ θα δώσουμε μια διαφορετική απόδειξη του θεωρήματος από αυτήν που έδωσαν οι Gerber and Shiu (2005).

Θεώρημα 1.3

Για $u \geq 0$, η αναμενόμενη προ-εξοφλημένη συνάρτηση ποινής, $\varphi(u)$, ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j + \delta - c\frac{\partial}{\partial u}\right)\varphi(u) - \prod_{j=1}^{n}\lambda_j \int_0^u \varphi(u-x)\,f(x)dx - \prod_{j=1}^{n}\lambda_j w(u) = 0 \quad (1.13)$$

Όπου

$$\mathrm{w(u)} = \int_u^{\infty} w(u, x-u)f(x)dx = \int_0^{\infty} w(u,x)f(x+u)dx \quad (1.14)$$

<u>Απόδειξη.</u>

Εδώ θα δώσουμε μια εναλλακτική απόδειξη από αυτή των Gerber και Shiu. Από τον Ορισμού 1.10 της γενικευμένης με Erlang$(n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ κατανομής, χωρίζουμε κάθε ενδιάμεσο χρόνο άφιξης των ζημιών σε άθροισμα n ανεξάρτητων εκθετικών τ.μ., όπου κάθε μία έχει παράμετρο λ_j, $(j = 1,2, \ldots, n)$, όπου η «πραγματοποίηση» κάθε μια από αυτές να προκαλεί μία «υπο-ζημιά» μεγέθους 0 για $j = 1,2, \ldots, n-1$ και η πραγματοποιήση της $n-$οστής τ.μ. να προκαλεί μια «πραγματική» ζημιά με σ.κ. $F(x)$. Με αυτό τον τρόπο μπορεί να θεωρηθεί η διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ σαν μια αλυσίδα Markov $\{X(t),\ t \in T\}$, με σύνολο-δείκτη το $T = \{0,1,2, \ldots\}$ και γράφουμε X_ν αντί για $X(\nu)$, $\nu = 0,1,2, \ldots$. Με $X_\nu = \kappa$ δηλώνουμε ότι η στοχαστική ανέλιξη βρίσκεται στην κατάσταση κ τη χρονική στιγμή ν. Η πιθανότητα

$$p_{ij}(\nu - 1, \nu) = \Pr(X_\nu = j | X_{\nu-1} = i),$$

καλείται πιθανότητα μετάβασης πρώτης τάξης.

Η μετάβαση από την κατάσταση j στην κατάσταση $j+1$ γίνεται με την εμφάνιση μιας εκθετικής τ.μ. με παράμετρο λ_j, για $j = 1,2, \ldots, n-1$, και η μετάβαση από την κατάσταση n στην κατάσταση 1 γίνεται με την εμφάνιση μια εκθετικής τ.μ. με παράμετρο λ_j. Έστω

$$\varphi_j(u) \coloneqq \mathbb{E}\left[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T<\infty)} \middle| X_0 = i, U(0) = u\right], \qquad u \geq 0,$$

μια «βοηθητική» Gerber-Shiu συνάρτηση, όταν η διαδικασία πλεονάσματος βρίσκεται στην κατάσταση $j \in \{1,2, \ldots, n\}$ για την ανανέωση του μοντέλου. Εμάς μας ενδιαφέρει η $\varphi_1(u) = \varphi(u)$.

Επίσης, θεωρώντας ένα απειροστό διάστημα $[0, dt]$ έχουμε τα εξής τέσσερα ενδεχόμενα, όσον αφορά τη μετάβαση της αλυσίδας $\{X_\nu, t \in T\}$ και την εμφάνιση ζημιάς,

- Δεν εμφανίζεται ζημιά και η αλυσίδα δεν μεταβαίνει σε άλλη κατάσταση.
- Εμφανίζεται ζημιά και η αλυσίδα δεν μεταβαίνει σε άλλη κατάσταση.
- Δεν εμφανίζεται ζημιά και η αλυσίδα μεταβαίνει σε άλλη κατάσταση.
- Συμβαίνουν δύο ή περισσότερα από τα παραπάνω ενδεχόμενα.

Τότε για $j = 1,2, \dots, n-1$ έχουμε

$$\varphi_j(u) = \left(1 - \lambda_j dt\right) e^{-\delta dt} \varphi_{j+1}(u + cdt) + \lambda_j e^{-\delta dt} \varphi_{j+1}(u + cdt) + o(dt) \quad (1.15)$$

Με τη βοήθεια του Αναπτύγματος Taylor προκύπτει ότι $e^{-\delta dt} = 1 - \delta dt + o(dt)$ και $\varphi_j(u + cdt) = \varphi_j(u) + c\varphi'_j(u)dt + o(dt)$. Για $dt \to 0$ από την (2.2) έχουμε,

$$\left(c\frac{\partial}{\partial u} - \left(\lambda_j + \delta\right)\right)\varphi_j(u) + \lambda_j \varphi_{j+1}(u) = 0,\ j = 1, \dots, n-1 \quad (1.16)$$

Ομοίως για $j = n$ έχουμε ότι

$$\varphi_n(u) = \left(1 - \lambda_j dt\right) e^{-\delta dt} \varphi_n(u + cdt) + \lambda_n dt e^{-\delta dt} \left(\int_0^{u+cdt} \varphi(u + cdt - x) f(x) dx + \int_{u+ct}^{\infty} w(u + cdt, x - u - cdt) f(x) dx\right) + o(dt),$$

από την οποία συγκεντρώνοντας τους όρους τάξης dt και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του Taylor, για $dt \to 0$ παίρνουμε ότι

$$\left(c\frac{\partial}{\partial u} - (\lambda_n + \delta)\right)\varphi_n(u) + \lambda_n \left(\int_0^u \varphi(u - x) f(x) dx + w(u)\right) = 0. \quad (1.17)$$

Έτσι από την (1.16) παίρνουμε ότι

$$\varphi_{j+1}(u) = \frac{\lambda_j + \delta - \frac{\partial}{\partial \mathrm{u}}}{\lambda_j}\varphi_j(u), \qquad j = 1,2, \dots, n-1,$$

από την οποία με διαδοχικές αντικαταστάσεις για $j = 1,2, \dots$ έχουμε ότι

$$\varphi_n(u) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_i + \delta - \frac{\partial}{\partial \mathrm{u}}}{\lambda_j}\varphi(u).$$

Τέλος, λύνοντας την (1.17) ως προς $\varphi_n(u)$ και αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση, έχουμε το ζητούμενο.■

Πόρισμα 1.1

Για $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$, η εξίσωση (1.13) γίνεται

$$\left(\lambda + \delta - c\frac{\partial}{\partial \mathrm{u}}\right)^n \varphi(u) - \lambda^n \int_0^u \varphi(u-x) f(x) dx + \lambda w(u) = 0, \qquad (1.18)$$

η οποία είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το ανανεωτικό μοντέλο με Erlang(n, λ)ενδιάμεσους χρόνους άφιξης ζημιών

Πόρισμα 1.2

Για $n = 1, \lambda_1 = \lambda$ η εξίσωση (1.13) γίνεται

$$c\varphi'(u) - (\delta + \lambda)\varphi(u) + \lambda \int_0^u \varphi(u-x) f(x) dx + \lambda w(u) = 0, \qquad (1.19)$$

η οποία είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο

Πόρισμα 1.3

Για $n = 2$ και $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ η εξίσωση (1.13) γίνεται

$$c^2 \frac{\partial}{\partial^2 u}\varphi(u) - 2c(\lambda + \delta)\frac{\partial}{\partial u}\varphi(u) + (\lambda + \delta)\varphi(u) - \lambda^2 \int_0^u \varphi(u-x) f(x) dx - \lambda^2 w(u) = 0 \qquad (1.20)$$

Η λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.13) βρίσκεται χρησιμοποιώντας ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο εργαλείο στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, τους μετασχηματισμούς Laplace. Έτσι για $\Re(s) \geq 0$, $s \in \mathbb{C}$, ορίζουμε $\hat{f}(s)$, $\widehat{w}(s)$, $\hat{\varphi}(s)$ να είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των $f(x), w(x), \varphi(u)$ αντίστοιχα , που δίνονται από τις σχέσεις

- $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$,
- $\widehat{w}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} w(x) dx,$
- $\hat{\varphi}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \varphi(u) du,$

Για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace, χρειαζόμαστε το παρακάτω θεώρημα και το παρακάτω λήμμα.

Θεώρημα 1.4 (Lundberg's generalized fundamental equation).

Για $s \in \mathbb{C}$ και $\delta \geq 0$, η θεμελιώδης γενικευμένη εξίσωση του Lundberg δίνεται από την σχέση

$$\tilde{\gamma}(s) - \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{f}\,(s) = 0, \qquad (1.21)$$

όπου $\tilde{\gamma}(s) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda_j + \delta - cs)$

Έστω μια στοχαστική διαδικασία $\{Y(n)\}_{n=0}^{\infty}$. Τότε η ακολουθία $\{F_i\}_{i=0}^{\infty}$ ονομάζεται διύλιση της διαδικασίας $\{Y(n)\}_{n=0}^{\infty}$ και ορίζεται ως μια αύξουσα ακολουθία $\sigma-$αλγεβρών της $\{Y(n)\}_{n=0}^{\infty}$,

$$F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n : F_n = \sigma\{Y_S : s \geq n\},$$

Το σύνολο F_n περιέχει όλη την πληροφορία για τη στοχαστική διαδικασία $\{Y(n)\}_{n=0}^{\infty}$ μέχρι τον χρόνο n.

Μια στοχαστική διαδικασία $\{Y(n)\}_{n=0}^{\infty}$ ονομάζεται προσαρμοσμένη αν και μόνο για κάθε $n \geq 0$, η $\{Y(n)\}_{n=0}^{\infty}$ είναι μετρήσιμη.

Τέλος, μια στοχαστική διαδικασία $\{Y(n)\}_{n=0}^{\infty}$ ονομάζεται $martingale$ αν ισχύουν τα παρακάτω:

- $\mathbb{E}(|Y(n)|) < \infty, \forall n \geq 0$,
- Η $Y(n)$ είναι Fs $\pi\rho o\sigma\alpha\rho\mu o\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta$, $\forall n \geq 0$,
- $\mathbb{E}[Y(n+1)|Y(0), Y(1), \dots, Y(n)] = Y(n), \forall n \geq 0$,

όπου $\mathbb{E}(Y(1)) = Y(0)$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω, $\tau_k = \Sigma_{i=1}^{k} W_i$ ο χρόνος άφιξης της k-$\zeta\eta\mu\iota\acute{\alpha}\varsigma$, με $\tau_0 = 0$.

Επίσης, ορίζουμε $U_0 = u$ και για $k = 1,2, \dots$,

$$U_k = U(\tau_k) = u + c\tau_k - \sum_{j=1}^{N(\tau_k)} X_j = u + \sum_{i=1}^{k}\left(cW_i - \sum_{i=1}^{N(W_I)} X_j\right) \qquad (1.22)$$

Είναι το πλεόνασμα τη στιγμή ακριβώς μετά την εμφάνιση της $k - \zeta\eta\mu\iota\acute{\alpha}\varsigma$. Έστω, ότι υπάρχει ένας αριθμός s τέτοιος ώστε η ακολουθία των τ.μ. $\left\{e^{-\delta\tau_k + U_k}\right\}_{k=0}^{\infty}$ να είναι martingale ως προς μια διύληση $\mathcal{F}_k = \sigma(W_i, X_i, 1 \leq i \leq k)$, με $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Τότε, από τον ορισμό του martingale έπεται ότι

$$e^{-\delta\tau_k+sU_k} = \mathbb{E}\left(e^{-\delta\tau_{k+1}+sU_{k+1}}\middle|U_k\right). \quad (1.23)$$

Από τη σχέση (1.22), έχουμε ότι

$$e^{-\delta\tau_{k+1}+sU_{k+1}} = e^{-\delta\tau_k+sU_k-\delta W_{k+1}+(cW_k-X_1)},$$

και λαμβάνοντας υπόψιν ότι οι $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ισόνομες, η (1.23) γίνεται

$$1 = \mathbb{E}\left(e^{-\delta W_1+s(W_{1-}X_1)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-(\delta-cs)W_1}\right)\mathbb{E}\left(e^{-sX_1}\right),$$

Τέλος με τη χρήση της (1.12) προκύπτει το ζητούμενο.■

Πόρισμα 1.4 (Lundberg's fundemanteal equation).

Για $n = 2$,και $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ η εξίσωση (1.21) γίνεται

$$\left(cs - (\lambda+\delta)\right)^2 = \lambda^2 \hat{f}(s), \quad (1.24)$$

που είναι η θεμελιώδης γενικευμένη εξίσωση Lundberg για το μοντέλο Erlang$(2, \lambda)$.

Πόρισμα 1.5

Για $n = 1$, $\lambda_1 = \lambda$ η εξίσωση (1.21) γίνεται

$$\delta + \lambda - cs = \hat{f}(s), \quad (1.25)$$

που είναι η θεμελιώδης γενικευμένη εξίσωση Lundberg για το κλασσικό μοντέλο.

Για να βρούμε τη λύση της ολοκληρο-διαφορικής (1.13) με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace, θα χρειαστεί το παρακάτω λήμμα

Λήμμα 1.2

(i) Για $\Re(s) \geq 0, \delta > 0$ η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg έχει ακριβώς n ρίζες, στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

(ii) Για $\Re(s) \geq 0$ και $\delta \to 0^+$, τότε η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg έχει ακριβώς μία ρίζα, το 0, και $n-1$ ρίζες, στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Απόδειξη, ΒλέπεGerber και Shiu (2005), Albrececher και Boxma (2005).

Από εδώ και στο εξής, τις θετικές ρίζες της (1.21) θα τις συμβολίζουμε, με $r_i(\delta) \equiv r_i, \Re(r_i) > 0, i = 1,2,\ldots,n$, για τις οποίες θετικές ρίζες r_i υποθέτουμε ότι είναι διακεκριμένες μεταξύ τους.

Έτσι ακολουθώντας την προαναφερθείσα μεθοδολογία, παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.13),και με τη βοήθεια του Λήμματος 1.2, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu δίνεται παρακάτω:

Θεώρημα 1.5

Για $\Re(s) \geq 0$, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu δίνεται από την σχέση

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\prod_{j=1}^{n} \lambda_i \hat{w}(s) - q(s)}{\hat{\gamma}(s) - \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{f}(s)}, \tag{1.26}$$

όπου $q(s) = \sum_{j=1}^{n} \hat{w}(r_j) \prod_{k=1}^{n} \frac{s-r_k}{r_j-r_k}$ και r_i, με $\Re(r_i) > 0, i = 1,2,\dots,n$ οι ρίζες της (1.21).

Απόδειξη, Βλέπε Gerber και Shiu (2005)

Ορισμός 1.12

Έστω $f(x)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε για $\Re(r) > 0$ και $X > 0$ ορίζουμε τον τελεστή $T_r f(x)$ που δίνεται από την σχέση

$$T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(u-x)} f(u) du = \int_0^\infty e^{-ru} f(u+x) du. \tag{1.27}$$

Λήμμα 1.3

Έστω $T_r f(x)$ ο τελεστής μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f(x)$. Τότε, ισχύουν τα παρακάτω:

(i) $T_r f(0) = \hat{f}(r)$, (1.28)

(ii) Αν $T_r \hat{f}(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του τελεστή $T_r f(s)$, τότε έχουμε

$$T_r \hat{f}(s) = \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r-s}, \qquad \forall r \neq s, \tag{1.29}$$

(iii) $T_{r_1} T_{r_2} f(x) = \frac{T_{r_1} f(x) - T_{r_2} f(x)}{r_2 - r_1}, \qquad \forall r_1 \neq r_1,$ (1.30)

(iv) $\frac{d}{dx} T_r f(x) = r T_r f(x) - f(x)$,

$\frac{d}{dx} T_{r_1} T_{r_2} f(x) = -\sum_{k=1}^{2} \frac{r_k T_{r_k} f(x)}{\tau'_2(r_k)}, \tau_2(s) = (s-r_1)(s-r_2)$,

(v) $T_r \hat{f}(s) = \widehat{(T_r f)}(s) = T_s T_r f(0)$,

(vi) $s\hat{\hat{f}}(s) - r\hat{\hat{f}}(r) = (s - r)\left[-sT_r \hat{f}(s) - \hat{f}(r)\right]$,

(vii) $\widehat{f_1}(s)\widehat{f_2}(s)-\widehat{f_1}(r)\widehat{f_2}(r)=-(s-r)\big[\widehat{f_1}(s)T_{r_2}\widehat{f_2}(s)+T_{r_1}\widehat{f_1}(r)\widehat{f_2}(s)\big]$,

για κάθε $s\neq r$, και για f_1, f_2 δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις,

(viii) Αν $r_1, r_2, \dots, r_k$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί, τότε

$T_{r_1}T_{r_2}\ \dots T_{r_k}\ =(-1)^{k-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{T_{r_j}f(x)}{\tau_\kappa(r_j)},\tau(s)=\prod_{j=1}^{k}\left(s-r_j\right)$

και

$T_sT_{r_1}T_{r_2}\dots T_{r_k}f(0)=(-1)^k\left(\frac{\hat f(s)}{\tau_k(s)}-\sum_{j=1}^{k}\frac{\hat f(r_j)}{(s-r_j)\tau'_k(r_j)}\right)$,

επίσης αν η $f(x)$ είναι σ.π.π. της τ.μ. X με σ.κ. $F(x)=1-\bar F(x)$, τότε ισχύουν τα παρακάτω

(ix) $T_0T_rf(x)=\int_x^\infty T_rf(u)\,du=\frac{\bar F(\mathrm{x})-T_rf(x)}{r}=T_r\bar F(\mathrm{x})$,

(x) $\int_0^u T_rf(x+y)\,dx=T_r\bar F(\mathrm{y})-T_r\bar F(\mathrm{y+u})$,

(xi) $\int_0^\infty T_{r_1}T_{r_2}f(x)\,dx=\frac{1}{r_2-r_1}\left(\frac{1-\hat f(r_1)}{r_1}-\frac{1-\hat f(r_2)}{r_2}\right)$,

(xii) $\int_0^\infty (T_{r_1}f\star T_{r_2}f)(x)\,dx=\frac{\left(1-\hat f(r_1)\right)\left(1-\hat f(r_2)\right)}{r_1r_2}$.

<u>Απόδειξη</u>

Για x = 0, η (1.27) γίνεται

$$T_rf(0)=\int_0^\infty e^{-ru}f(u)du=\hat f(r),\quad r\in\mathbb{C}.$$

Ο μετασχηματισμός Laplace του τελεστή $T_rf(x)$ είναι

$$T_r\widehat{f(s)}=\int_0^\infty e^{-sx}T_rf(x)dx=\int_0^\infty\left(\int_0^y e^{-sx}e^{-r(y-x)}f(y)dx\right)dy=\int_0^\infty e^{-ry}f(y)\left(\int_0^y e^{-x(r-s)}dx\right)dy$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

Έστω $h(x)=T_{r_2}f(x)$. Τότε,

$$T_{r_1}T_{r_2}f(x)=T_{r_1}h(x)=\int_x^\infty e^{-r_1(u-x)}\,h(u)du$$

$$=\int_x^\infty e^{-r_1(u-x)}T_{r_2}f(u)du=\int_x^\infty e^{-r_1(u-x)}\int_x^\infty e^{-r_2(s-u)}f(s)dsdu,$$

δηλαδή

$$T_{r_1}T_{r_2}f(x)=\int_x^\infty\int_u^\infty e^{-r_1(u-x)}\,e^{r_2(s-u)}f(s)dsdu. \qquad (1.31)$$

Με αλλαγή στα όρια ολοκλήρωσης και μετά από πράξεις, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
T_{r_1}T_{r_2}f(x) = & \int_x^\infty \int_x^s e^{-r_1(u-x)}e^{-r_2(s-u)}f(s)duds \\
&= \int_x^\infty f(s)e^{r_1x}e^{-r_2s}\left(\int_x^s e^{-r_1u}e^{r_2u}du\right)ds \\
&= \int_x^\infty f(s)e^{-r_1x}e^{-r_2s}\left(\int_x^s e^{(r_2-r_1)u}du\right)ds \\
&= \int_x^\infty f(s)e^{-r_1x}e^{-r_2s}\left[\frac{1}{r_2-r_1}-\left(e^{(r_2-r_1)s}-e^{(r_2-r_1)x}\right)\right]ds \\
&= \frac{1}{r_2-r_1}\left\{\int_x^\infty e^{r_1x}e^{-r_2s}\left[e^{(r_2-r_1)s}-e^{(r_2-r_1)x}\right]f(s)ds\right\} \\
&= \frac{1}{r_2-r_1}\left\{\int_x^\infty e^{-r_1(s-x)}f(s)ds-\int_x^\infty e^{-r_2(s-x)}ds\right\}
\end{aligned}
$$

Που είναι η ζητούμενη σχέση.■

Θεώρημα 1.6

Για $\Re(s) \geq 0$, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu, $\hat{\varphi}(s)$, γράφεται ως

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\hat{G}(s)}{1-\hat{n}(s)}\ , \tag{1.32}$$

όπου

$$\hat{G}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}G(x)dx = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n}T_s\left(\prod_{j=1}^n T_{r_j}w\right)(0),$$

$$\hat{n}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}n(x)dx = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n}T_s\left(\prod_{j=1}^n T_{r_j}f\right)(0),$$

και r_i, $\Re(r_i) > 0, i = 1,2,\dots,n$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1.21).

Απόδειξη, Βλέπε Cheng and Tang (2003) .

Με αντιστροφή της σχέσης (1.32) ως προς s παίρνουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 1.7

Για $u \geq 0$, η αναμενόμενη προ-εξοφλημένη συνάρτηση ποινής, $\varphi(u)$, ικανοποιεί την εξής ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση

$$\varphi(u) = \int_0^u \varphi(u-x)n(x)dx + G(u) = \frac{1}{1+\xi}\int_0^u \varphi(u-x)z(x)dx + \frac{1}{1+\xi}H(u), \qquad (1.33)$$

όπου $\quad n(x) = \frac{\prod_{j=1}^{n}\lambda_j}{c^n}\left(\prod_{j=1}^{n} T_{r_j} f\right)(x),$

$$\mathrm{G(x)} = \frac{\prod_{j=1}^{n}\lambda_j}{c^n}\left(\prod_{j=1}^{n} T_{r_j} w\right)(x),$$

με ξ τέτοιο ώστε $\frac{1}{1+\xi} = \int_0^\infty n(x)\,dx = 1 - \frac{\prod_{j=1}^{n}(\lambda_j+\delta) - \prod_{j=1}^{n}\lambda_j}{c^n \prod_{j=1}^{n} r_j} < 1,$

με r_i, $\Re(r_i) > 0$, $i = 1,2, \ldots, n$, να είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1.17),

$$H(x) = (1+\xi)G(x),$$

$$z(x) = (1+\xi)n(x),$$

όπου η $z(x)$ είναι σ.π.π. της κατανομής

$$Z(u) = \frac{\int_0^u n(y)dy}{n(y)dy}.$$

Όταν $\delta \to 0^+$, τότε $\xi \to \xi_0$, όπου ξ_0 τέτοιο ώστε $\frac{1}{1+\xi_0} = 1 - \frac{\theta \prod_{j=1}^{n}\lambda_j m}{c^n \prod_{j=1}^{n-1} r_j(0)} < 1$, με θ το περιθώριο ασφαλείας.

Απόδειξη βλέπε Cheng and Tang (2003).

Πόρισμα 1.6

Για n = 2, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, η ελαττωματική εξίσωση (1.33) γίνεται

$$\varphi(u) = \int_0^u \varphi(u-x)n(x)dx + G(x) = \frac{1}{1+\xi}\int_0^u \varphi(u-x)z(x)dx + \frac{1}{1+\xi}H(u),$$

η οποία είναι η ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση για το μοντέλο Erlang$(2, \lambda)$

όπου $n(x) = \frac{\lambda^2}{c^2} T_{r_2} T_{r_1} f(x),$

$$G(x) = \frac{\lambda^2}{c^2} T_{r_2} T_{r_1} w(x),$$

ξ τέτοιο ώστε $\frac{1}{1+\xi} = \int_0^\infty n(x)dx = 1 - \frac{2\lambda\delta + \lambda^2}{c^2 r_1 r_1},$

με r_i, $\Re(r_i) > 0$, να είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1.24),

$H(x) = \ (1+\xi)G(x),$ και

$z(x) = (1+\xi)n(x),$

όπου η $z(x)$ είναι η σ.π.π. της κατανομής

$$Z(u) = \frac{\int_0^u n(y)dy}{n(y)dy},$$

όταν $\delta \to 0^+$, τότε $\xi \to \xi_0$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{1+\xi_0} = 1 - \frac{\lambda(2c-\lambda m)}{c^2 r_1(0)} < 1.$

Πόρισμα 1.7

Για n = 1 και λ_1 = λ, η ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση (1.33) γίνεται

$$\varphi(u) = \int_0^u \varphi(u-x)n(x)dx + G(x) = \frac{1}{1+\xi}\int_0^u \varphi(u-x)z(x)dx + \frac{1}{1+\xi}H(x)\,, \qquad (1.34)$$

η οποία είναι η ελαττωματική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με

$$n(x) = \frac{\lambda}{c}\, T_r f(x),$$

$$G(x) = \frac{\lambda}{c}\, T_r w(x)\,,$$

ξ τέτοιο ώστε $\frac{1}{1+\xi} = \int_0^\infty n(x)dx = 1 - \frac{\delta}{cr} < 1,$

με $r, \Re(r) > 0$, να είναι η ρίζα της εξίσωσης (1.24)

$$H(x) = (1+\xi)G(x)$$

$$z(x) = (1+\xi)n(x),$$

όπου η $z(x)$ είναι η σ.π.π. της κατανομής

$$Z(u) = \frac{\int_0^u n(y)dy}{\int_0^\infty n(y)dy}.$$

Όταν $\delta \to 0^+$, τότε $\xi \to \xi_0$, τέτοιο ώστε $\frac{1}{1+\xi_0} = 1 - \frac{1}{cr'(0)} < 1.$

Στη συνέχεια, θα εκφραστεί η λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.33) μέσω της δεξιάς ουράς μιας κατάλληλα ορισμένης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Οπότε, για $u \geq 0$, ορίζουμε την σ.κ. της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής $K(u) =$ 1– $\overline{K}(u)$, όπου η δεξιά ουρά $\overline{K}(u)$ δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\bar{K}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi}{1+\xi}\left(\frac{1}{1+\xi}\right)^n \bar{N}^{*n}(u), \qquad u \geq 0,$$

όπου $\bar{N}^{*n}(u)$ είναι η n –οστή συνέλιξη της δεξιάς ουράς $\bar{N}(u) = 1 - N(u) = \int_u^{\infty} n(y)dy$.

Θεώρημα 1.8

Για $u \geq 0$, η λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.33) δίνεται από τη σχέση

$$\varphi(u) = \frac{1}{\xi}\int_0^u H(u-x)dK(x) + \frac{1}{1+\xi}H(u), \tag{1.35}$$

ή ισοδύναμα

$$\varphi(u) = -\frac{1}{\xi}\int_0^u \bar{K}(u-x)dH(x) - \frac{H(0)}{\xi}\bar{K}(u) + \frac{1}{\xi}K(u), \tag{1.36}$$

ή ισοδύναμα

$$\varphi(u) = \frac{1}{\xi}\int_0^u (1-\bar{K}(u-x))dH(x) + \frac{H(0)}{\xi}\left(1-\bar{K}(u)\right). \tag{1.37}$$

Απόδειξη, Βλέπε Lin και Willmot (1999).

Εκτός των σχέσεων (1.35)-(1.37) οι Lin και Willmot στην εργασία τους «Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory» (1999), απέδειξαν, ότι η ουρά της σύνθετης κατανομής $\bar{K}$, ικανοποιεί την παρακάτω ελαττωματική εξίσωση

$$\bar{K}(u) = \frac{1}{1+\xi}\int_0^u \bar{K}(u-x)z(x)dx + \frac{1}{1+\xi}\bar{Z}(u), \;\; u \geq 0, \tag{1.38}$$

όπου $\bar{Z}(u) = 1 - Z(u) = \int_u^{\infty} z(x)dx$

Παρατήρηση 1.1

Η συνάρτηση των Gerber-Shiu για $w(x,y) = 1$, γίνεται ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, δηλαδή

$$\mathbb{E}(e^{-\delta T} I_{(T<\infty)} | U(0)) = u = \varphi_T(u).$$

Επίσης για $w(x,y) = 1$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των τελεστών T_r, παίρνουμε ότι

$$H(u) = \frac{1}{1+\xi}\int_0^u \varphi_T(u-x)z(x)dx + \frac{1}{1+\xi} + \bar{Z}(u) \tag{1.39}$$

απ' όπου συγκρίνοντας τις εξισώσεις (1.38) και (1.39), είναι εμφανές ότι η δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας T, δηλαδή

$$\overline{K}(u) = \mathbb{E}(e^{-\delta T} I_{(T<\infty)} | U(0)) = u = \varphi_T(u)$$

Με βάση το Θεώρημα 1.8. και την Παρατήρηση 1.1 φαίνεται ότι για να υπολογίσουμε διάφορα μέτρα χρεοκοπίας, όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας, η κατανομή του $U(T-)$ (πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία), η κατανομή του $|U(T)|$ (έλλειμα κατά την χρεοκοπία), η από κοινού κατανομή των δύο παραπάνω τυχαίων μεταβλητών, και άλλα μέτρα χρεοκοπίας, συναρτάται άμεσα από τον υπολογισμό της $\varphi_T(u)$, η οποία μπορεί να υπολογισθεί μέσω των μετασχηματισμών Laplace. Έτσι από τη σχέση (1.32), για $w(x,y) = 1$ και με τη βοήθεια της σχέσης

$$1 - \hat{n}(s) = \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c} - s\right) - \prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c^n}\hat{f}(s)}{\prod_{j=1}^{n}(r_j - s)}, s \neq r_j, j = 1,2, \dots, n. \tag{1.40}$$

έχουμε ότι

$$\hat{\varphi}_T(u) = \frac{\hat{G}(s)\prod_{j=1}^{n}(r_j - s)}{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c} - s\right) - \prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c^n}\hat{f}(s)}. \tag{1.41}$$

Η σχέση (1.41) αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.2. (Βλ. Lin (2003) Θεώρημα 2). Επιπλέον, επιλέγοντας $w(x,y) = 1$, και με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των τελεστών T_r, η συνάρτηση $\hat{G}(s)$γίνεται

$$\hat{G}(s) = \frac{\prod_{j=1}^{n}\lambda_j}{c^n} T_s T_{r_1} \dots T_{r_n} f(0) = \frac{\prod_{j=1}^{n}\lambda_j}{c^n} \cdot \frac{T_0 T_{r_1} \dots T_{r_n} f(0) - T_s T_{r_1} \dots T_{r_n} f(0)}{s} = \frac{\hat{n}(0) - \hat{n}(s)}{s} =$$
$$\frac{1}{s}\left(\frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c} - s\right) - \prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c^n}\hat{f}(s)}{\prod_{j=1}^{n}(r_j - s)} - \frac{\xi}{1+\xi}\right). \tag{1.42}$$

Τώρα, αντικαθιστώντας την εξίσωση (1.42) στην (1.41) προκύπτει ότι

$$\hat{\varphi}_T(s) = \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c} - s\right) - \prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c^n}\hat{f}(s) - \frac{\xi}{1+\xi}\prod_{j=1}^{n}(r_j - s)}{s\left[\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c} - s\right) - \prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c^n}\hat{f}(s)\right]} \tag{1.43}$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός Laplace της σχέσης (1.43),αντιστρέφεται σε ορισμένες μόνο περιπτώσεις, όπου μία από αυτές είναι όταν η $\hat{\varphi}_T(s)$ είναι ρητή συνάρτηση. Έτσι η $\hat{\varphi}_T(s)$ είναι ρητή συνάρτηση, αν και μόνο αν η $\hat{f}(s)$ είναι ρητή συνάρτηση. Για το λόγο αυτόν, επιλέγουμε την κατανομή των ζημιών $f(x)$ να ανήκει στη κλασματική οικογένεια κατανομών.

Ορισμός 1.13

Η τ.μ. X με σ.π.π. $f(x)$, ανήκει στην κλασματική οικογένεια κατανομών $\mathcal{R}_f$, αν ο μετασχηματισμός Laplace, $\hat{f}(s)$, γράφεται ως πηλίκο δύο πολυωνύμων,

$$\hat{f}(s) = \frac{\mathbb{Q}_{m-1}(s)}{\mathbb{Q}_m(s)}, \mu\varepsilon\ \mathbb{Q}_m(0) = \mathbb{Q}_{m-1}(0), \Re(s) \in\ (h_X, \infty) \tag{1.44}$$

$m \in \mathbb{N}^+, h_X = \inf\{s \in \mathbb{R}: \mathbb{E}(e^{-sX}) < \infty,\quad \kappa\alpha\iota\quad \mathbb{Q}_m(s),\quad \mathbb{Q}_{m-1}(s)$ είναι πολυώνυμα με $deg(\mathbb{Q}_m(s)) \leq m$ και $deg(\mathbb{Q}_{m-1}(s)) \leq m-1$.

Η κλασματική οικογένεια κατανομών είναι μια ευρεία κλάση κατανομών που περιλαμβάνει (μεταξύ άλλων) την εκθετική, την Erlang, την Coxian, την phase-type καθώς και τις μίξεις τους.

Έστω τώρα, ότι η $f(x)$ ανήκει στην παραπάνω κλασματική οικογένεια κατανομών, δηλαδή ο μετασχηματισμός Laplace, $\hat{f}(s)$, δίνεται από την εξίσωση (1.44), και επιπλέον ορίζοντας ένα πολυώνυμο $m+n$ βαθμού

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c} - s\right)\mathbb{Q}_m(s) - \prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c^n}\mathbb{Q}_{m-1}(s), \tag{1.45}$$

τότε ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας $\varphi_T(u) = \overline{K}(u)$ δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.9

Έστω ότι ο μετασχηματισμός Laplace της σ.π.π. του μεγέθους των ζημιών $\hat{f}(s)$ είναι της μορφής (1.44). Τότε

$$\hat{\varphi}_T(u) = \frac{\mathcal{B}_{m-1}(s)}{\prod_{i=1}^{m}(s+R_i)},$$

όπου $\mathcal{B}_{m-1}(s) = \frac{1}{s}\left(\prod_{i=1}^{m}(s+R_i) - \frac{1}{1+\xi}\mathbb{Q}_m(s)\right)$, ξ δίνεται από το Θεώρημα 1.7 και $-R_i$ είναι όλες οι ρίζες της εξίσωσης $\mathcal{B}_{m,n}(s) = 0$ με $\Re(Ri\ ) > 0, i = 1,2, \ldots, m$. Επίσης ,αν $-R_i, i = 1,2,\ldots,m$ είναι και διακεκριμένες, τότε

$$\hat{\varphi}_T(s) = \sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{s+R_i},$$

και

$$\varphi_T(s) = \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-R_i u}, u \geq 0,$$

με

$$a_i = \frac{\prod_{i=1}^{m} R_i}{\prod_{i=1, j\neq i}^{m} \left(R_j + R_i\right)} \cdot \frac{\mathbb{Q}_m(-R_i)}{\mathbb{Q}_m(0)}, i = 1,2, \dots, m.$$

Παρατήρηση 1.2

Από το Θεώρημα 1.9. φαίνεται πως ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι άμεσος, επειδή $\psi(u) = \lim_{\delta \to 0} \varphi_T(u)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Η ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΔΥΟ ΚΛΑΣΕΙΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

2.1 Εισαγωγή

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε ένα μοντέλο κινδύνου, όπου η στοχαστική διαδικασία των συσωρευτικών αποζημιώσεων παράγεται από δύο κλάσεις κινδύνων. Πιο αναλυτικά, υποθέτουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{S(t)\}_{t=0}^{\infty}$, η οποία παριστά τις συνολικές αποζημιώσεις ενός χαρτοφυλακίου, αποτελείται από δύο επιμέρους στοχαστικές διαδικασίες: μία σύνθετη διαδικασία Poisson (compound Poisson process) και μια ανανεωτική σύνθετη διαδικασία (compound renewal process)

Κάτω από αυτή την υπόθεση φαίνεται ότι το συγκεκριμένο μοντέλο αποτελεί γενίκευση του κλασσικού, όπως και του ανανεωτικού μοντέλου της θεωρίας χρεοκοπίας. Η κύρια όμως διαφορά είναι ότι το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων ανήκει στην κατηγορία των μη ανανεωτικών μοντέλων.

Αρχικά, το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων εισήχθη από τους Yuen, Guo και Wu με την εργασία τους «On a correlated aggregate claims model with Poisson and Erlang risk process» (2003), υποθέτοντας ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης ζημιών από τη δεύτερη κλάση κινδύνων είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. που ακολουθούν την Erlang$(2, \lambda_1, \lambda_2)$ κατανομή. Οι Li and Gariddo στο άρθρο τους «Ruin probability for two classes of risk process» το 2004 θεωρώντας ότι στο μοντέλο των Yuen, Guo και Wu οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των ζημιών από την δεύτερη κλάση κινδύνων είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. που ακολουθούν την γενικευμένη Erlang$(2, \lambda_1, \lambda_2)$, έδωσαν αναλυτικά αποτελέσματα για την πιθανότητα επίβιωσης (μέσω μετασχηματισμών Laplace) στην περίπτωση όπου τα μεγέθη των αποζημιώσεων και από τις δύο κλάσεις ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών. Επιπροσθέτως, γενικεύοντας περαιτέρω το προαναφερόμενο μοντέλο κινδύνων οι Li and Lu με την εργασία τους «On the expected discounted penalty functions for two classes of risk process» το 2005, μελέτησαν την συνάρτηση των Gerber-Shiu, μέσω μετασχηματισμών Laplace. Επιπλέον, παρουσιάζουν αναλυτικά αποτελέσματα για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, στην περίπτωση όπου τα μεγέθη των ζημιών και για τις δύο κλάσεις κινδύνων κατανέμονται εκθετικά. Τέλος, οι Zhang και Yang το 2009 με την εργασία τους «The Gerber-Shiu discounted penalty function for a risk model with two classes of claims» επέκτειναν το συγκεκριμένο μοντέλο κινδύνων, θεωρώντας ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των ζημιών από την δεύτερη κλάση κινδύνων είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. που ακολουθούν την γενικευμένη Erlang$(n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

2.2 Περιγραφή του μοντέλου

Έστω $\{U(t)\}_{t=0}^{\infty}$ μία διαδικασία πλεονάσματος ενός χαρτοφυλακίου που δίνεται από τη σχέση

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

όπου $u = U(0)$ το αρχικό κεφάλαιο, $c > 0$ το ασφάλιστρο στη μονάδα του χρόνου και $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ η στοχαστική διαδικασία των αποζημιώσεων. Υποθέτουμε ότι η $S(t)$ είναι άθροισμα δύο επιμέρους στοχαστικών διαδικασιών, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i + \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i, \quad t \geq 0, \tag{2.2}$$

Όπου $S_i(t), i = 1{,}2$ παριστούν τις συνολικές αποζημιώσεις προερχόμενες από την i –κλάση, που καταβάλλονται μέχρι το χρόνο t. Υποθέτουμε ότι οι $S_1(t)$ και $S_2(t)$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Επίσης, υποθέτουμε ότι οι $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία θετικών και ανεξάρτητων τ.μ. με σ.κ. $P(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, σ.π.π. $p(x)$, μέση τιμή μ_X και μετασχηματισμό Laplace $\hat{p}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} p(x)\, dx$, που παριστάνουν το μέγεθος των αποζημιώσεων από την πρώτη κλάση.

Αντίστοιχα οι $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία θετικών και ανεξάρτητων τ.μ. με σ.κ Q $Q(x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$, σ.π.π. $q(x)$, μέση τιμή μ_Y και μετασχηματισμό Laplace $\hat{q}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} q(x)\, dx$, που παριστάνουν το μέγεθος των αποζημιώσεων από την δεύτερη κλάση.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $\{N_1(t); t \geq 0\}$ είναι μια ομογενής διαδικασία Poisson με παράμετρο λ και ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$, που είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων εκθετικά κατανεμημένων τ.μ. με παράμετρο λ. Η απαριθμήτρια διαδικασία $\{N_2(t); t \geq 0\}$ υποθέτουμε ότι είναι μια ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ που αποτελούν μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. που ακολουθούν τη γενικευμένη Erlang$(2, \lambda_1, \lambda_2)$ και επομένως η τ.μ. V_i μπορεί να παρασταθεί και ως $V_i = L_{i1} + L_{i2}$, όπου $\{L_{ik}\}_{i=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων εκθετικά κατανεμημένων τ.μ. με παράμετρο $\lambda_k, k = 1,2$ (συνήθως $\lambda_1 \neq \lambda_2$).

Τέλος, υποθέτουμε ότι οι ακολουθίες $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ και $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι αμοιβαία ανεξάρτητες και ανεξάρτητες με τις απαριθμήτριες διαδικασίες $\{N_1(t); t \geq 0\}$, $\{N_2(t); t \geq 0\}$, καθώς και ότι τα ασφάλιστρα που εισπράττονται είναι τέτοια ώστε $c > \lambda\mu_X + \left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)\mu_Y$. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι περιθώριο ασφαλείας θ, είναι τέτοιο ώστε

$$c = (1+\theta)\left(\lambda\mu_X + \frac{\lambda_1\lambda_2\mu_Y}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$$

Ορίζουμε για το μοντέλο (2.1)-(2.2) ο χρόνος χρεοκοπίας να είναι $T = inf\{t \geq 0: U(T) < 0\}$ και $\psi(u) = \mathbb{P}(T < |U(0) = u), u \geq 0$, η πιθανότητα χρεοκοπίας.

2.3 Μελέτη της συνάρτησης των Gerber-Shiu σε ένα μη ανανεωτικό μοντέλο

Έστω $\delta \geq 0$, και ορίζουμε

$$\Phi(u) = \mathbb{E}\left[e^{-\delta T} w(U(-T), |U(T)|) I_{(T<\infty)} | U(0) = u\right], u \geq 0, \qquad (2.3)$$

να είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu, για το μοντέλο που περιγράψαμε στη παράγραφο 2.1.

Λόγω της υπόθεσης ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των κινδύνων της δεύτερης κλάσης ακολουθούν την Erlang κατανομή, η διαδικασία πλεονάσματος δεν είναι χρονικά ομογενής. Έτσι, για την συνάρτηση των Gerber-Shiu (2.3), υποθέτουμε ότι μια αποζημίωση εμφανίζεται σε χρόνο 0.

Μπορούμε να ορίσουμε για το μοντέλο μας την συνάρτηση των Gerber-Shiu σαν μια δισδιάστατη συνάρτηση, $\Phi(u,\tau)$, του αρχικού αποθεματικού u και του χρόνου τ, όπου τ είναι ο χρόνος που απαιτείται μέχρι την εμφάνιση της τελευταίας αποζημίωσης από την δεύτερη κλάση (σε αυτό το σημείο η διαδικασία πλεονάσματος ανανεώνεται). Έτσι, ενδιαφερόμαστε για τον προσδιορισμό της συνάρτησης των στον χρόνο 0, που είναι $\Phi(u, 0) = \Phi(u)$, και για τη συνάρτηση

$$\Phi_1(u) = \mathbb{E}\left[e^{-\delta(T-t)} w(U(T-), |U(T)|) I_{(T<\infty)} | U(t) = u, L_{11} = t\right], u \geq 0, \qquad (2.4)$$

που είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος ότι ένας εκθετικός χρόνος, $\{L_{i1}\}_{i\geq 1}$, από τη δεύτερη κλάση έχει ήδη εμφανισθεί.

Τότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα της ολικής πιθανότητας, έχουμε ότι

$$\Phi(u,t) = \Phi(u)\mathbb{P}(L_{11} > \tau) + \Phi_1(u)\mathbb{P}(L_{11} < \tau) = e^{-\lambda_1\tau}\Phi(u) + \left(1 - e^{-\lambda_1\tau}\right)\Phi_1(u) \qquad (2.5)$$

Επιπροσθέτως εισάγουμε μια ακόμα τ.μ. J (cause of ruin random variable) που ορίζεται ως μία δίτιμη τ.μ. που παριστάνει την κλάση από την οποία προκαλείται η χρεοκοπία, δηλαδή $J = i$, όταν η χρεοκοπία προκαλείται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την κλάση $i, i = 1{,}2$. Έτσι, η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να γραφεί αναλυτικά σαν

$$\Psi(u) = \Psi_1(u) + \Psi_2(u),$$

όπου

$$\Psi_j(u) = \mathbb{P}(T < \infty, J = j | U(0) = u), \quad u \geq 0, j = 1{,}2 \qquad (2.6)$$

να είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, όταν αυτή προκαλείται από την j κλάση.

Επιπλέον, στο άρθρο των Li και Lu το (2005) εισάγονται δύο ακόμα συναρτήσεις των Gerber-Shiu για το μοντέλο (2.1)-(2.2), τις οποίες παραθέτουμε στη συνέχεια.

Για $\delta \geq 0$, ορίζουμε

$$\varphi_j(u) = \mathbb{E}\left[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I_{(T<\infty, J=j)} | U(0) = u\right], \qquad u \geq 0, \qquad (2.7)$$

δοθέντος ότι το μέγεθος της ζημιάς που προκαλεί την χρεοκοπία προέρχεται από την κλάση $i = 1{,}2$.

Αντίστοιχα με την σχέση (2.4) ορίζουμε μια «βοηθητική» συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος ότι ο εκθετικός χρόνος από την δεύτερη κλάση, $\{L_{i1}\}_{i=1}^{\infty}$, έχει ήδη εμφανισθεί, που δίνεται από την σχέση

$$\xi_j(u) = \mathbb{E}\left[e^{-(T-t)} w(U(T-), |U(T)|) I_{(T<\infty, J=j)} | L_{11} = t, U(0) = u\right], \; u \geq 0, j = 1{,}2. \quad (2.8)$$

Τότε, οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu, μπορούν να γραφούν ως $\Phi(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u)$ και $\Phi_1(u) = \xi_1(u) + \xi_2(u)$, για $u \geq 0$.

Τέλος, θα μπορούσαμε να περιγράψουμε αντίστοιχα με τη σχέση (2.5), και με την εφαρμογή του θεωρήματος της ολικής πιθανότητας, τη συνάρτηση $\Phi(u,\tau)$, όπου

$$\Phi_j(u,\tau) = \varphi_j(u)\mathbb{P}(L_{11} > \tau) + \xi_j(u)\mathbb{P}(L_{11} > \tau) = e^{-\lambda_1\tau}\varphi_j(u) + \left(1 - e^{-\lambda_1\tau}\right)\xi_j(u), \; u \geq 0, j = 1{,}2$$

Σ ’αυτήν την ενότητα εστιάζουμε στον προσδιορισμό των αναλυτικών τύπων για τον υπολογισμό των συναρτήσεων $\Phi(u)$ και $\Phi_1(u)$. Για αυτό το σκοπό θα αποδείξουμε ότι αυτές οι συναρτήσεις ικανοποιούν κάποιες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις, οι οποίες λύνονται με βάση το Θεώρημα 1.8.

Λήμμα 2.1

Έστω ότι

$$\int_0^\infty \int_0^\infty w(x,y)p(x+y)dxdy < \infty,$$

και αντίστοιχα

$$\int_0^\infty \int_0^\infty w(x,y)q(x+y)dxdy < \infty,$$

τότε για κάθε $u \geq 0$, ισχύει ότι

$$\Phi(u) < \infty \text{ και } \Phi_1(u) < \infty.$$

Τώρα, θα δείξουμε ότι οι $\Phi(u)$ και $\Phi_1(u)$ ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων.

Θεώρημα 2.1

Έστω ότι η σχέση του Λήμματος 2.1 ισχύει. Τότε για $u \geq 0$, οι $\Phi(u)$ και $\Phi_1(u)$ ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα

$$c\Phi'(u) = (\lambda + \lambda_1 + \delta)\Phi(u) - \lambda \int_0^u \Phi(u-x)p(x)dx - \lambda_1 \Phi_1(u) - \lambda w_1(u)$$

(2.9)

$$c\Phi'_1(u) = (\lambda + \lambda_2 + \delta)\Phi_1(u) - \lambda \int_0^u \Phi_1(u-x)p(x)dx - \lambda w_1(u) - \lambda_2 \int_0^u \Phi(u-x)q(x)dx - \lambda_2 w_2(u)$$

όπου

$$w_1(x) = \int_x^\infty w(x, y-x)p(y)dy = \int_0^\infty w(x,y)p(x+y)dy$$

(2.10)

$$w_2(x) = \int_x^\infty w(x, y-x)q(y)dy = \int_0^\infty w(x,y)p(x+y)dy$$

Απόδειξη, Βλέπε A. Papaioannou (2011)

Πόρισμα 2.1

1. Για $\lambda_1, \lambda_1 \to 0$, τότε $\Phi = \Phi_1$ και το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (2.9) ανάγεται στην εξίσωση (1.20), που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου.
2. Για $\lambda \to 0$, το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (2.9) γίνεται

$$
\begin{aligned}
&c\Phi^{'}(u) = -\lambda_1 \Phi_1(u) + (\lambda_1 + \delta)\Phi(u),\\
&c\Phi^{'}{}_1(u) = -\lambda_2 \int_0^u \Phi(u-x)q(x)dx - \lambda_2 w_2(u) - (\lambda_2 + \delta)\Phi_1(u),
\end{aligned}
$$

απ' όπου παραγωγίζοντας την πρώτη εξίσωση ως προς u και κάνοντας χρήση της δεύτερης εξίσωσης, παίρνουμε ότι

$$
\prod_{J=1}^{2}\left(\lambda_j + \delta - c\frac{\partial}{\partial u}\right)\Phi(u) = \lambda_1\lambda_2 \int_0^u \Phi(u-x)q(x)dx + \lambda_1\lambda_2 w_2(u),
$$

που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (1.13) για το ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με το μοντέλο της γενικευμένης Erlang$(2, \lambda_1, \lambda_2)$, για τους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των κινδύνων.

Τώρα, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Laplace, τους τελεστές T_r (βλ. Ορισμό 1.12), τις ιδιότητες αυτών όπως δίνονται στο Λήμμα 1.3 και το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων του Θεωρήματος 2.1 θα δείξουμε ότι οι συναρτήσεις Φ και Φ_1, ικανοποιούν κάποιες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις. Πρώτα όμως χρειαζόμαστε τη λύση της εξίσωσης Lundberg για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων.

Θεώρημα 2.2

Για δ θετικό, η εξίσωση Lundberg για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$
\gamma(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{q}(s) = 0 \tag{2.11}
$$

όπου $\gamma(s) = \prod_{i=1}^{2}[cs + \lambda\hat{p}(s) - (\lambda + \lambda_i + \delta)]$. Η εξίσωση (2.11) έχει ακριβώς δύο ρίζες, $r_1(\delta)$ και $r_2(\delta)$, με $r_1(\delta) \neq r_2(\delta)$. Έστω ότι $r_1(\delta) < r_2(\delta)$, τότε $r_1(\delta) \to 0$ όταν $\delta \to 0^+$.

Απόδειξη, Βλέπε Li και Lu (2011) Θεώρημα 1

Για λόγους ευκολίας, θα συμβολίζουμε τις ρίζες της εξίσωσης του Lundberg με r_i.

Έστω οι μετασχηματισμοί Laplace των $\Phi(u)$, $\Phi_1(u)$ και $w_j(u), j = 1{,}2$ να είναι οι $\widehat{\Phi}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\Phi(x)dx$, $\widehat{\Phi}_1(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\Phi_1(x)dx$ και $\widehat{w}_j(s) = \int_0^\infty e^{-sx}w_j(x)dx$ αντίστοιχα.

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στο σύστημα των δύο εξισώσεων στην (2.9) και λύνοντας το ως προς $\widehat{\Phi}(s)$ και $\widehat{\Phi}_1(s)$ καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$\widehat{\Phi}(s) = \frac{\lambda_1[\lambda\widehat{w}_1(s)+\lambda_2\widehat{w}_2(s)-c\Phi_1(0)]+[c\Phi(0)-\lambda\widehat{w}_1(s)][cs+\lambda\hat{p}(s)-(\lambda+\lambda_i+\delta)]}{\gamma(s)-\lambda_1\lambda_2\hat{q}(s)} \tag{2.12}$$

$$\widehat{\Phi}_1(s) = \frac{\lambda_2\hat{q}(s)[\lambda\widehat{w}_1(s)-c\Phi(0)]+[c\Phi_1(0)-\lambda_2\widehat{w}_2(s)][cs+\lambda\hat{p}(s)-(\lambda+\lambda_i+\delta)]}{\gamma(s)-\lambda_1\lambda_2\hat{q}(s)} \tag{2.13}$$

όπου οι αρχικές τιμές των Φ, Φ_1 στο σημείο 0, δίνονται από την παρακάτω πρόταση,

Πρόταση 2.1

Κάτω από τις συνθήκες του Λήμματος 2.1, ισχύει

$$\Phi(0) = \frac{\lambda}{c}\left(\widehat{w}_1(r_2) - \frac{cr_1+\lambda\hat{p}(r_1)-(\lambda+\lambda_1+\lambda_2+\delta)}{c-\lambda T_{r_1}T_{r_2}p(0)}T_{r_1}T_{r_2}w_1(0)\right) + \frac{\lambda_1\lambda_2}{c}\frac{T_{r_1}T_{r_2}w_2(0)}{c-\lambda T_{r_1}T_{r_2}p(0)},$$

$$\Phi_1(0) = \Phi(0) + \frac{\lambda_2}{c}\widehat{w}_2(r_2) + \frac{c\Phi(0)-\lambda\widehat{w}_1(r_2)}{c\lambda_1}[cr_2+\lambda\hat{p}(r_2)-(\lambda+\lambda_1+\lambda_2+\delta)].$$

<u>Απόδειξη</u>

Από το Λήμμα 2.1. ισχύει ότι $\widehat{\Phi}(s) < \infty$, για κάθε $s > 0$, οπότε ο αριθμητής της εξίσωσης (2.12) είναι 0 όταν $s = r_1$ και r_2, δηλαδή

$$[c\Phi(0)-\lambda\widehat{w}_1(r_i)][cr_i+\lambda\hat{p}(r_i)-(\lambda+\lambda_2+\delta)] = -\lambda_1[\lambda\widehat{w}_1(r_i)+\lambda_2\widehat{w}_2(r_i)-c\Phi_1(0)], \quad i = 1{,}2$$

Λύνοντας το παραπάνω γραμμικό σύστημα εξισώσεων ως προς $\Phi(0)$ και $\Phi_1(0)$ καταλήγουμε άμεσα στο ζητούμενο αποτέλεσμα.■

Πρόταση 2.2

Κάτω από τις υποθέσεις του Λήμματος 2.1 οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων των Gerber-Shiu $\Phi(u)$ και $\Phi_1(u)$ ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\widehat{\Phi}(s) = \frac{\hat{\Lambda}(s)}{c^2-\hat{n}(s)}, \qquad \widehat{\Phi}_1(s) = \widehat{\Phi}(s) + \frac{\hat{\Lambda}_1(s)}{c^2-\hat{n}(s)} \tag{2.14}$$

όπου

- $\hat{n}(s) = 2\lambda c T_{r_1}\hat{p}(s) + \lambda[(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda + 2\delta) - 2\lambda c r_2 - \lambda\hat{p}(r_1) - \lambda\hat{p}(r_2)]T_{r_1}T_{r_2}\hat{p}(s) - \lambda^2 T_{r_1}\hat{p}(s)T_{r_2}\hat{p}(s) + \lambda_1\lambda_2 T_{r_1}T_{r_2}\hat{q}(s)$
- $\hat{\Lambda}(s) = \lambda[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda + \delta) - cr_2 - \lambda\hat{p}(r_1)]T_{r_1}T_{r_2}\widehat{w}_1(s) + \lambda_1\lambda_2 T_{r_1}T_{r_2}\widehat{w}_2(s) + \lambda c[\Phi_\delta(0) - \lambda\widehat{w}_1(r_2)]T_{r_1}T_{r_2}\hat{p}(s) + 2\lambda c T_{r_1}\widehat{w}_1(s) + \lambda^2 T_{r_1}\hat{p}(s)T_{r_2}\widehat{w}_1(s)$
- $\hat{\Lambda}_1(s) = \lambda_2 c T_{r_1}\widehat{w}_2(s) - \lambda_2\lambda\big(1 - \hat{q}(r_1)\big)T_{r_1}T_{r_2}\widehat{w}_1(s) - \lambda_2\lambda T_{r_1}\hat{p}(s)T_{r_2}\widehat{w}_2(s) + \lambda_2[\lambda + \delta - cr_2 - \lambda\hat{p}(r_1)]T_{r_1}T_{r_2}\widehat{w}_2(s) + \lambda_2\lambda T_{r_1}\hat{q}(s)T_{r_2}\widehat{w}_1(s) + [c\Phi_\delta(0) - \lambda\widehat{w}_1(r_2)] \times \lambda\frac{cr_2 + \lambda\hat{p}(r_2) - (\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \delta)}{\lambda_1}T_{r_1}T_{r_2}\hat{p}(s) - \lambda_2 T_{r_1}T_{r_2}\hat{q}(s).$

Απόδειξη, Βλέπε A. Papaioannou (2011)

Λήμμα 2.2

Έστω $\delta > 0$, τότε ισχύει

$$2\lambda c\hat{\hat{P}}(r_1) + \lambda[\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda + 2\delta - 2cr_2 - \lambda\hat{p}(r_2)]\frac{\hat{\hat{P}}(r_1) - \hat{\hat{P}}(r_2)}{r_2 - r_1} - \lambda^2\hat{\hat{P}}(r_1)\hat{\hat{P}}(r_2) + \lambda_1\lambda_2\frac{\hat{\hat{Q}}(r_1) - \hat{\hat{Q}}(r_2)}{r_2 - r_1} = c^2 - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\delta + \delta^2}{r_1 r_2}. \tag{2.15}$$

<u>Απόδειξη</u>

Δεδομένου ότι οι ρίζες $r_1, r_2 > 0$ ικανοποιούν την γενικευμένη εξίσωση Lundberg του Θεωρήματος 2.2, ισχύει ότι

$$\frac{1}{r_j}\left[\prod_{i=1}^{2}\big(cr_j + \lambda\hat{p}(r_j) - (\lambda + \lambda_\iota + \delta) + \lambda_1\lambda_2(1 - \hat{q}(r_j))\big)\right] = \frac{\lambda_1\lambda_2}{r_j}, \qquad j = 1,2$$

Αφαιρώντας κατά μέλη για $j = 1,2$ στην παραπάνω εξίσωση και μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις προκύπτει ότι η εξίσωση (2.15) είναι αληθής.

Από την πέμπτη ιδιότητα του Λήμματος 1.3 φαίνεται ότι οι συναρτήσεις $\hat{n}(s)$, $\hat{\Lambda}(s)$ και $\hat{\Lambda}_1(s)$ από την Πρόταση 2.2, είναι μετασχηματισμοί Laplace κάποιων συναρτήσεων n, Λ και Λ_1 αντίστοιχα.■

Πρόταση 2.3

Για $u \geq 0$, και κάτω από την ισχύ της υπόθεσης του Λήμματος 2.1, οι συναρτήσεις Gerber Shiu $\Phi(u)$ και $\Phi_1(u)$ ικανοποιούν τις ακόλουθες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις

$$\Phi(u) = \frac{1}{1+\xi}\int_0^u \Phi(u-x)\zeta(x)dx + \frac{E(u)}{1+\xi} \tag{2.16}$$

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{1+\xi}\int_0^u \Phi_1(u-x)\zeta(x)dx + \frac{E(u)+E_1(u)}{1+\xi} \tag{2.17}$$

όπου $\zeta(x) = (1+\xi)\frac{1}{c^2}n(x)$ είναι σ.π.π., $E(u) = (1+\xi)\frac{1}{c^2}\Lambda(x)$, $E_1(u) = (1+\xi)\frac{1}{c^2}\Lambda_1(x)$ και ξ τέτοιο ώστε $\frac{1}{1+\xi} = \int_0^\infty \frac{1}{c^2}n(y)dy = 1 - \frac{(\lambda_1+\lambda_2)\delta+\delta^2}{c^2 r_1 r_2} < 1$. Επίσης, για $\delta \to 0^+$ τότε $\xi \to \xi_0$, τέτοιο ώστε $\frac{1}{1+\xi_0} = 1 - \frac{\lambda(\lambda_1+\lambda_2)\mu_X+\lambda_1\lambda_2\mu_Y}{c^2 r_2(0)} < 1$, δεδομένου ότι το περιθώριο ασφαλείας θ είναι θετικό.

<u>Απόδειξη</u>

Αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $\hat{\Phi}(s)$, στην εξίσωση (2.14) ως προς s έχουμε ότι

$$\Phi(u) = \frac{1}{c^2}\int_0^u \Phi(u-x)n(x)dx + \frac{1}{c^2}\Lambda(u),\ \ u \geq 0 \tag{2.18}$$

Αρχικά, ορίζουμε την σ.κ. $Z(u)$ με δεξιά ουρά $\bar{Z}(u) = 1 - Z(u)$, όπου $\bar{Z}(u) = \frac{\int_u^\infty \frac{1}{c^2}n(y)dy}{\int_0^\infty \frac{1}{c^2}n(y)dy}$.

Αντιστρέφοντας ως προς s το μετασχηματισμό Laplace, $\hat{n}(s)$ της Πρότασης 2.2. και βάσει των σχέσεων $\int_0^\infty T_r p(s)ds = \frac{1-\hat{p}(r)}{r}$, $\int_0^\infty T_r q(s)ds = \frac{1-\hat{q}(r)}{r}$ και $\int_0^\infty \left(T_{r_1}p \star T_{r_2}q\right)(x)dx = \left(\frac{1-\hat{p}(r)}{r_1}\right)\left(\frac{1-\hat{q}(r)}{r_2}\right)$, έχουμε ότι

$$\int_0^\infty \frac{1}{c^2}n(x)dx = \frac{1}{c^2}\Bigg[2\lambda c\hat{\hat{P}}(r_1) + \lambda[\lambda_1+\lambda_2+2\lambda+2\delta-2cr_2-\lambda\hat{p}(r_2)]\frac{\hat{\hat{P}}(r_1)-\hat{\hat{P}}(r_2)}{r_2-r_1} - \lambda^2\hat{\hat{P}}(r_1)\hat{\hat{P}}(r_2)$$
$$+\lambda_1\lambda_2\frac{\hat{\hat{Q}}(r_1)-\hat{\hat{Q}}(r_2)}{r_2-r_1}\Bigg] = 1 - \frac{(\lambda_1+\lambda_2)+\delta}{c^2 r_1 r_1} < 1.$$

Επιπλέον, ορίζουμε $\xi = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)\delta+\delta^2}{c^2 r_1 r_2 - (\lambda_1+\lambda_2)\delta+\delta^2}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{1+\xi} = \frac{1}{c^2}\int_0^\infty n(y)dy$ και $\bar{Z}(u) = (1+\xi)\frac{1}{c^2}\int_0^\infty n(y)dy$. Τότε, η συνάρτηση $\zeta(u) = \frac{d}{du}Z(u) = (1+\xi)\frac{1}{c^2}n(u)$ είναι μία σ.π.π. και από τον ορισμό της συνάρτησης $E(u)$, η ανανεωτική εξίσωση (2.18) μπορεί να εκφρασθεί σε όρους των $\zeta(u), E(u)$ και ξ όπως δίνεται στην εξίσωση (2.16), η οποία είναι ελαττωματική.

Επίσης, από την (2.14) της Πρότασης 2.2, έχουμε

$$\widehat{\Phi}_1(s) = \frac{\hat{\Lambda}(s) + \hat{\Lambda}_1(s)}{c^2 - \hat{n}(s)}$$

Αντιστρέφοντας τον παραπάνω μετασχηματισμό Laplace ως προς s, παίρνουμε ότι

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{c^2}\int_0^u \Phi_1(u-x)n(x)dx + \frac{1}{c^2}\Lambda(u) + \Lambda_1(u), \;\; u \geq 0.$$

Παρόμοια, προκύπτει η σχέση (2.17). Τέλος, για $\delta \to 0^+$, δοθέντος ότι $r_1(\delta) < r_2(\delta)$, έχουμε ότι $r_1(\delta) \to r_1(0) = 0,\; r_2(0) > 0$, και συνεπώς

$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{1+\xi} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)\delta+\delta^2}{c^2 r_1(\delta) r_2(\delta)} = 1 - \frac{\lambda_1+\lambda_2}{c^2 r_1'(0) r_2(0)} \tag{2.19}$$

Τέλος, θέτοντας $s = r_1(\delta)$ στο σύστημα του Θεωρήματος 2.1 παραγωγίζοντας ως προς δ και παίρνοντας $\delta \to 0^+$, έχουμε ότι $r_1'(0) = \frac{1}{C-\mu_X+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\mu_Y}$ και έτσι μπορούμε να εκφράσουμε το $r_1'(0)$ σε όρους του περιθωρίου ασφαλείας , δηλαδή $r_1'(0) = \frac{1}{\Theta\left(\mu_X+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\mu_Y\right)}$. Αντικαθιστώντας το $r_1'(0)$ στην εξίσωση (2.19), το αποτέλεσμα για την ποσότητα $\frac{1}{1+\xi_0}$ είναι προφανές.■

Οι ανανεωτικές εξισώσεις (2.16) και (2.17) έχουν λύσεις, οι οποίες μπορούν να παρασταθούν με όρους μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Έτσι ορίζουμε $K(u) = 1 - \bar{K}(u)$ να είναι η σ.κ. της ακόλουθης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής

$$\bar{K}(u) = \frac{1}{1+\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\xi}\right)^n \bar{Z}^{\star n}(u), \qquad u \geq 0,$$

όπου $\bar{Z}^{\star n}(u)$ είναι η n −οστή συνέλιξη της δεξιάς ουράς $\bar{Z}(u) = \int_u^\infty \zeta(x)dx$. Οπότε, με τη βοήθεια του Θεωρήματος 1.8 μπορούμε να πάρουμε αναλυτικές λύσεις για τις ελαττωματικές εξισώσεις που δίνονται από τις (2.16) και τις (2.17).

Πρόταση 2.4

Αν ισχύει το Λήμμα 2.1, τότε για $u \geq 0$, οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής $\Phi(u)$ και $\Phi_1(u)$ που ικανοποιούν τις ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις (2.16) και (2.17) αντίστοιχα, δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\Phi(u) = \frac{1}{\xi}\int_0^u \left(1 - \overline{K}(u-x)\right) dE(x) + \frac{E(0)}{\xi}\left(1 - \overline{K}(u)\right), \tag{2.20}$$

$$\Phi_1(u) = \Phi(u) + \frac{1}{\xi}\int_0^u \left(1 - \overline{K}(u-x)\right) dE_1(x) + \frac{E_1(0)}{\xi}\left(1 - \overline{K}(u)\right). \tag{2.21}$$

Απόδειξη

Η σχέση (2.20) για την $\Phi(u)$ αποδεικνύεται άμεσα, αφού είναι συνέπεια της εφαρμογής του Θεωρήματος 1.8. Παρόμοια, για την σχέση (2.21) και την $\Phi_1(u)$, εφαρμόζοντας πάλι το Θεώρημα 1.8. έχουμε ότι

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{\xi}\int_0^u \left(1 - \overline{K}(u-x)\right) d[E(x) + E_1(x)] + \frac{E(0) + E_1(0)}{\xi}\left(1 - \overline{K}(u)\right),$$

Από την παραπάνω χρησιμοποιώντας την (2.19) παίρνουμε άμεσα την εξίσωση (2.21).■

Από την Πρόταση (2.4), δεδομένου ότι οι συναρτήσεις $E(u)$ και $E_1(u)$ μπορούν εύκολα να υπολογισθούν για διάφορες μορφές της συνάρτησης ποινής, έπεται ότι ο υπολογισμός των συναρτήσεων Gerber-Shiu μπορεί να γίνει όταν η δεξιά ουρά $\overline{K}(u)$ είναι γνωστή. Αυτό συμβαίνει σε κάποιες περιπτώσεις, όπως όταν ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{\overline{K}}(s)$ έχει την μορφή πηλίκου πολυωνύμων. Η $\hat{\overline{K}}(s)$ έχει μορφή πηλίκου πολυωνύμων αν και μόνο αν οι μετασχηματισμοί Laplace των σ.π.π. των μεγεθών των αποζημιώσεων $p(x)$ και $q(x)$ είναι πηλίκα πολυωνύμων. Σ'αυτή τη περίπτωση, χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων μπορούμε να δώσουμε αναλυτικά αποτελέσματα της $\overline{K}(u)$.

Στην εργασία τους οι Lin and Wilmot το 1999 έδειξαν ότι η δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής $\overline{K}(u)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση

$$\overline{K}(u) = \frac{1}{1+\xi}\int_0^u \overline{K}(u-x)\,\zeta(x)dx + \frac{1}{1+\xi}\bar{Z}(u), \qquad u \geq 0.$$

Παίρνοντας τους μετασχηματισμούς Laplace στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης έχουμε

$$\hat{\hat{K}}(s) = \frac{\hat{\bar{n}}(s)}{c^2 - \hat{n}(s)}, \tag{2.22}$$

όπου $\hat{n}(s)$ δίνεται από την Πρόταση 2.2 και $\hat{\bar{n}}(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\bar{n}(x) = \int_0^{\infty} n(y)dy$. Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.14) στην εξίσωση (2.21) και κάνοντας χρήση του ορισμού της συνάρτησης $\gamma(s)$, έπεται ότι

$$\hat{\hat{K}}(s) = \frac{\hat{\bar{n}}(s)(s-r_1)(s-r_2)}{\prod_{i=1}^{2}\left(cs+\lambda\hat{p}(s)-(\lambda+\lambda_\iota+\delta)\right)-\lambda_1\lambda_2\hat{q}(s)} \tag{2.23}$$

Τώρα εφόσον, $\hat{\bar{n}}(s) = T_s\bar{n}(0) = T_sT_0\bar{n}(0) = \frac{T_0\bar{n}(0)-T_s\bar{n}(0)}{s} = \frac{\hat{n}(0)-\hat{n}(s)}{s}$, και χρησιμοποιώντας ξανά τη σχέση (2.15), και από τον ορισμό της $\gamma(s)$, έχουμε

$$\hat{\bar{n}}(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{\prod_{i=1}^{2}\left(cs+\lambda\hat{p}(s)-(\lambda+\lambda_\iota+\delta)\right)-\lambda_1\lambda_2\hat{q}(s)}{(s-r_1)(s-r_2)} - c^2\frac{\xi}{1+\xi}\right).$$

Έτσι η εξίσωση (2.23) γράφεται ως

$$\hat{\hat{K}}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{2}\left(cs+\lambda\hat{p}(s)-(\lambda+\lambda_\iota+\delta)\right)-\lambda_1\lambda_2\hat{q}(s)-c^2\frac{\xi}{1+\xi}(s-r_1)(s-r_2)}{\left[\prod_{i=1}^{2}\left(cs+\lambda\hat{p}(s)-(\lambda+\lambda_\iota+\delta)\right)-\lambda_1\lambda_2\hat{q}(s)\right]}. \tag{2.24}$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{\hat{K}}(s)$ είναι πηλίκο πολυωνύμων, όταν οι μετασχηματισμοί Laplace $\hat{q}(s)$ και $\hat{p}(s)$ είναι πηλίκα πολυωνύμων. Οπότε, θεωρούμε την περίπτωση όπου τα μεγέθη των αποζημιώσεων και των δύο κλάσεων ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών. Έτσι, θεωρούμε ότι οι μετασχηματισμοί Laplace των σ.π.π. των αποζημιώσεων έχουν την ακόλουθη μορφή

$$\hat{p}(s) = \frac{l_{n-1}(s)}{l_n(s)}, \text{με } l_{n-1}(0) = l_n(0) \text{ και } \hat{q}(s) = \frac{h_{m-1}(s)}{h_m(s)}, \text{ με } h_{m-1}(0) = h_m(0) \tag{2.25}$$

όπου $l_{n-1}(s)$, $h_{m-1}(s)$ είναι πολυώνυμα βαθμού $n-1, m-1$ ή μικρότερου ($\deg(l_{n-1}) \leq n-1, \deg(h_{m-1}) \leq m-1$) αντίστοιχα και $ln\ (s)$, $hm(s)$ είναι πολυώνυμα βαθμού n, m αντίστοιχα.

Έστω $Q_{2n+m-1}(s) = \frac{1}{s}\left[\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i) - \frac{\xi}{1+\xi}l_n^2(s)h_m(s)\right]$ ένα πολυώνυμο βαθμού $2n+m-1$ και

$$a_i = \frac{R_1R_2\ldots R_{2n+m}}{R_i\prod_{j=1,j\neq 1}^{2}\left(R_j-R_i\right)}\frac{l_n^2(-R_i)h_m(-R_i)}{l_n^2(0)h_m(0)}, \qquad i = 1,2,\ldots,2n+m$$

όπου τα $-R_i$, με $\Re(R_i)>0,\ i=1,2,\ldots,2n+m$, είναι οι ρίζες της εξίσωσης $D_{2n+m+2}(s)=0$, με

$D_{2n+m+2}(s)=h_m(s)\prod_{i=1}^{2}[(cs-\lambda-\lambda_i-\delta)l_n(s)+\lambda l_{n-1}(s)]-\lambda_1\lambda_2 h_{m-1}(s)l_n^2(s).$ (2.26)

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι όταν τα μεγέθη των αποζημιώσεων ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών η εξίσωση (2.23) γράφεται ως

$$\hat{\hat{K}}(s)=\frac{D_{2n+m+2}(s)-c^2\frac{\xi}{1+\xi}(s-r_1)(s-r_2)l_n^2(s)h_m(s)}{sD_{2n+m+2}(s)} \qquad (2.27)$$

Θεώρημα 2.3

Έστω ότι οι μετασχηματισμοί Laplace των σ.π.π. $\hat{q}(s)$ και $\hat{p}(s)$ είναι πηλίκα πολυωνύμων όπως στην εξίσωση (2.25). Τότε

$$\hat{\hat{K}}(s)=\frac{Q_{2n+m-1}(s)}{\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i)}.$$

Επιπλέον, αν $-R_i=1,2,\ldots,2n+m$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους, τότε

$$\hat{\hat{K}}(s)=\sum_{i=1}^{2n+m}\frac{a_i}{s+R_i},\ \ s\geq 0 \quad \text{και} \quad \bar{K}(u)=\sum_{i=1}^{2n+m}a_i e^{-R_i u},\ \ u\geq 0 \qquad (2.28)$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\hat{p}(s)=\frac{l_{n-1}(s)}{l_n(s)}$ και $\hat{q}(s)=\frac{h_{m-1}(s)}{h_m(s)}$. Τότε από το Θεώρημα 2.2. έχουμε ότι

$$0=\gamma(s)-\lambda_1\lambda_2\hat{q}(s)=\prod_{i=1}^{2}\left[cs+\lambda\frac{l_{n-1}(s)}{l_n(s)}-(\lambda+\lambda_i+\delta)\right]-\frac{\lambda_1\lambda_2 h_{m-1}(s)}{h_m(s)}=\frac{D_{2n+m+2}(s)}{l_n^2(s)h_m(s)} \qquad (2.29)$$

Η συνάρτηση $D_{2n+m+2}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $2n+m+2$ με μεγιστοβάθμιο όρο το c^2 και συνεπώς η εξίσωση $D_{2n+m+2}(s)$ έχει $2n+m+2$ ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο. Από το γεγονός ότι $\gamma(s)-\lambda_1\lambda_2\hat{q}(s)=0$ είναι η εξίσωση του Lundberg έπεται από την σχέση (2.29), ότι η εξίσωση $D_{2n+m+2}(s)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες r_1, r_2 με θετικά πραγματικά μέρη και $2n+m$ ρίζες, R_i, με αρνητικά πραγματικά μέρη. Επομένως η $D_{2n+m+2}(s)$ μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$D_{2n+m+2}(s)=c^2(s-r_1)(s-r_2)\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i) \qquad (2.30)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση $D_{2n+m+2}(s)$ στην εξίσωση (2.26), έπεται ότι

$$\hat{\hat{K}}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i) - \frac{\xi}{1+\xi} l_n^2(s) h_m(s)}{\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i)} = \frac{Q_{2n+m-1}(s)}{\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i)},$$

όπου $Q_{2n+m-1}(s) = \prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i) - \frac{\xi}{1+\xi} l_n^2(s) h_m(s)$.

Από το γεγονός ότι $\hat{\hat{K}}(s) < \infty$, για $s \geq 0$ καθώς επίσης και ότι το $s = 0$ είναι ρίζα του παρονομαστή της συνάρτησης $\hat{\hat{K}}(s)$, είναι φανερό ότι πρέπει να είναι και ρίζα του αριθμητή, δηλαδή $Q_{2n+m-1}(s)$, απ'όπου παίρνουμε ότι $\frac{\xi}{1+\xi} = \frac{R_1 R_2 \dots R_{2n+m}}{l_n^2(0) h_m(0)}$. Επιπλέον, η συνάρτηση $Q_{2n+m-1}(s) = \frac{1}{s} Q_{2n+m}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $2n+m-1$, και επομένως χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων έχουμε ότι

$$\hat{\hat{K}}(s) = \frac{Q_{2n+m-1}(s)}{\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i)} = \sum_{i=1}^{2n+m} \frac{a_i}{s+R_i}, \qquad a_i = \frac{Q_{2n+m-1}(-R_i)}{\prod_{i=1}^{2n+m}(R_j - R_i)}, \qquad i = 1,2,\dots,2n+m$$

απ' όπου αντιστρέφοντας τον παραπάνω μετασχηματισμό Laplace ως προς s παίρνουμε άμεσα την εξίσωση (2.28).■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ
ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ GERBER-SHIU ΓΙΑ ΔΥΟ ΚΛΑΣΕΙΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥΣ ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΤΥΠΟΥ ΦΑΣΗΣ

3.1. Εισαγωγή

Στο παρών κεφάλαιο, μελετάμε την συνάρτηση Gerber-Shiu για ένα μοντέλο κινδύνου με δύο ανεξάρτητες κατηγορίες κινδύνων, υποθέτοντας ότι και οι δύο διαδικασίες αριθμού απαιτήσεων είναι ανανεωτικές, με χρόνους μεταξύ των απαιτήσεων τύπου φάσης. Με την εκ νέου σύνθεση και ανάλυση αλυσίδων Markov που σχετίζονται με δύο δεδομένες κατανομές τύπου φάσης, λαμβάνουμε συστήματα διαφορικών εξισώσεων για δύο τύπους συναρτήσεων Gerber-Shiu. Αντίστοιχα δημιουργούνται ρητές εκφράσεις για τους μετασχηματισμούς Laplace των δύο τύπων συναρτήσεων Gerber-Shiu. Ρητά αποτελέσματα για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu προκύπτουν όταν το αρχικό πλεόνασμα είναι μηδέν και όταν οι δύο κατανομές του ποσού της απαίτησης είναι και οι δύο από την κλασματική οικογένεια. Τέλος, εξετάζεται ένα παράδειγμα για να καταδειχθεί η εφαρμοσιμότητα των κύριων αποτελεσμάτων μας.

3.2. Υποθέσεις μοντέλου

Για την εφαρμογή του μοντέλου, θεωρούμε τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στην εξίσωση (1.6) και τις απαριθμήτριες διαδικασίες $\{N_1(t); t \geq 0\}$ και $\{N_2(t); t \geq 0\}$, με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ και $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ αντίστοιχα. Αρχικά δίνεται ο ορισμός της την Μαρκοβιανής διαδικασίας ώστε να συνεχίσουμε με αυτόν της phase-type κατανομής.

Ορισμός 3.1

Μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ με αριθμήσιμο σύνολο καταστάσεων S, ονομάζεται Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου, αν έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα, δηλαδή, αν για κάθε ακολουθία χρόνων $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ και για κάθε $i_1, i_2, \ldots, i_n \in S$,

$$\mathbb{P}(X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_1) = i_1) = \mathbb{P}(X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}).$$

Η πιθανότητα $\mathbb{P}(X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1})$ ονομάζεται πιθανότητα μετάβασης. Ομογενής λέγεται μια Μαρκοβιανή αλυσίδα αν για κάθε $s, t \geq 0$ και για κάθε $i, j \in S$,

$$\mathbb{P}(X(s+t) = j | X(s) = i) = \mathbb{P}(X(t) = j | X(0) = i) = p_{ij}(t)$$

Ο πίνακας $P(t) = \left(p_{ij}(t)\right)$ ονομάζεται πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης και είναι στοχαστικός αφού για κάθε $t \geq 0$ ικανοποιεί τις δύο ακόλουθες ιδιότητες:

- $p_{ij}(t) \geq 0$, για κάθε $i, j \in S$.
- $\sum_{j \in S} p_{ij}(t)$, για κάθε $i \in S$.

Οι εξισώσεις Chapman-Kolmogorov σε συνεχή χρόνο έχουν την παρακάτω μορφή

$$p_{i,j}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t)$$

για κάθε $i, j \in S$ και για κάθε $s, t \geq 0$.

Σε μορφή πινάκων οι παραπάνω εξισώσεις, για κάθε $s,t \geq 0$, γράφονται ως

$$P(s+t) = P(s)P(t)$$

Αν

$$a_i = \mathbb{P}(X(0) = i), \qquad i \in S$$

είναι οι αρχικές πιθανότητες της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X(t)\}_{t \geq 0}$, τότε

$$\mathbb{P}(X(t) = i) = \sum_{i \in S} a_i p_{ij}(t), \quad t \geq 0.$$

Ορισμός 3.2

Μια συνεχής κατανομή phase-type είναι η κατανομή του χρόνου απορρόφησης μιας απορροφητικής Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου με πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων S. Έστω $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ μία ομογενής Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με σύνολο καταστάσεων $S = \{1,2, \dots, m, m+1\}$, όπου οι καταστάσεις $\{1,2, \dots, m\}$ είναι παροδικές και η κατάσταση $\{m+1\}$ είναι απορροφητική. Ο απειροστός γεννήτορας πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης μιας τέτοιας Μαρκοβιανής αλυσίδας έχει τη μορφή

$$Q = \begin{pmatrix} T & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

που $T = (t_{ij})_{m\times m}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας διάστασης $m \times m$,το στοιχείο t_{ij}, για $i \neq j$, είναι ο ρυθμός μετάβασης από τη μεταβατική κατάσταση i στη j, το $t = (t_1, t_2, \dots, t_m)^{'}$ είναι ένα διάνυσμα στήλη διάστασης $m \times 1$ που περιέχει τους ρυθμούς εξόδου από τις μεταβατικές καταστάσεις στην απορροφητική κατάσταση και το 0 συμβολίζει το διάνυσμα γραμμή διάστασης $1 \times m$ με όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν. Ισχύει ότι $t_{ij} \geq 0$ για $i \neq j$, $t_{ii} < 0$ και $t_i \geq 0$ $(1 \leq i, j \leq m)$.

Επειδή ο πίνακας Q είναι γεννήτορας πίνακας που αντιστοιχεί σε πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων ισχύει η σχέση

$$T1 + t = 0$$

όπου το 1 συμβολίζει το διάνυσμα στήλη διάστασης $m \times 1$ με όλα τα στοιχεία του ίσα με ένα.

Έστω επίσης

$$\mathbb{P}(X_0 = 1, X_0 = 2, , \dots, X_0 = m+1) = (a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}) = (\vec{a}, a_{m+1})$$

η αρχική κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας.

Είναι φανερό ότι,

$$t = -T1,$$

ή

$$-T^{-1}t = 1,$$

Τα στοιχεία που περιέχει το διάνυσμα t αποκαλούνται ρυθμοί εξόδου.

Υποθέτουμε πως η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης είναι μία κατανομή τύπου φάσης, με αναπαράσταση $(\vec{\alpha}, A, \vec{a}^T)$, όπου $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ είναι ένας πίνακας $n \times n$ με $a_{ij} < 0$, $a_{ij} \geq 0$ για $i \neq j$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ με $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, και $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ με $\vec{a}^T = -A\vec{e}_n^T$ όπου $\vec{x}^T$ υποδηλώνει την μετατροπή του α διανύσματος γραμμής $\vec{x}$ και το $\vec{e}_n$ δηλώνει ένα διάνυσμα γραμμής μήκους n με όλα τα στοιχεία να είναι ένα. Ακολουθώντας τα αποτελέσματα της σχέσης (2.2), έχουμε

$$F(t) = 1 - \vec{\alpha} e^{At} \vec{e}_n^T, \qquad t \geq 0,$$

$$f(t) = \vec{\alpha} e^{At} \vec{a}^T, \qquad t \geq 0,$$

$$\hat{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(dt) = \vec{\alpha}(sI - A)^{-1} \vec{a}^T, \quad s \in \mathbb{C}. \tag{3.1}$$

Προκύπτει ότι κάθε V_k αντιστοιχεί στο χρόνο απορρόφησης σε μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου $\left\{I_t^{(k)}; t \geq 0\right\}, k = 1,2, \dots$ με κοινές n μεταβατικές καταστάσεις $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ και μια απορροφητική κατάσταση $\{E_0\}$.

Ομοίως, υποθέτουμε ότι η κατανομή των χρόνων μεταξύ των απαιτήσεων G είναι τύπου φάσης με αναπαράσταση $(\vec{\beta}, B, \vec{b}^T)$, όπου $B = (b_{ij})_{i,j=1}^m$ είναι ένας πίνακας $m \times m$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ με $\sum_{i=1}^m \beta_i = 1$, και $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ με $\vec{b}^T = -B\vec{e}_m^T$. Τότε έχουμε

$$G(t) = 1 - \vec{\beta} e^{Bt} \vec{e}_m^T, \qquad t \geq 0,$$

$$g(t) = \vec{\beta} e^{Bt} \vec{b}^T, \qquad t \geq 0,$$

$$\hat{G}(s) = \int_0^\infty e^{-st} G(dt) = \vec{\beta}(sI - B)^{-1} \vec{b}^T, \qquad s \in \mathbb{C}.$$

Συμβολίζουμε με $\left\{J_t^{(k)}; t \geq 0\right\}$ την αντίστοιχη τερματική αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου της $L_k, k = 1, 2, \dots$, με κοινές m μεταβατικές καταστάσεις $\{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ και μια απορροφητική κατάσταση $\{F_0\}$.

Στη συνέχεια, συμβολίζουμε $\otimes$ το γινόμενο Kronecker δύο πινάκων, δηλαδή για κάθε $m, n, k, l \in \mathbb{N}$, το Kronecker γινόμενο ενός $m \times n$ πίνακα $A^{(1)} = \left(a_{ij}^{(1)}\right)_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}$ και ενός $k \times l$ πίνακα $A^{(2)}$ ορίζεται ως εξής

$$A^{(1)} \otimes A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} A^{(2)} & a_{12}^{(1)} A^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(1)} A^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^{(1)} A^{(2)} & a_{m2}^{(1)} A^{(2)} & \dots & a_{mn}^{(1)} A^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Συμβολίζουμε $\{(I(t), J(t)); t \geq 0\}$ ως την υποκείμενη διαδικασία κατάστασης η οποία ορίζεται, ως εξής

$$I(t) = I_t^{(1)}, \qquad 0 \leq t < V_1, \qquad I(t) = I_{t-V_1}^{(2)}, \qquad V_1 \leq t < V_1 + V_2, \dots,$$

$$J(t) = J_t^{(1)}, \qquad 0 \leq t < J_1, \qquad J(t) = I_{t-V_1}^{(2)}, \qquad L_1 \leq t < L_1 + L_2, \dots,$$

είναι εύκολο να δούμε ότι $\{(I(t),J(t));t \geq 0\}$ είναι μια δισδιάστατη αλυσίδα Markov με σημεία

$$\{(E_1,F_1),(E_2,F_2),\ldots,(E_n,F_1),(E_1,F_2),(E_2,F_2),\ldots,(E_n,F_m),\ldots,(E_1,F_m),(E_2,F_m),\ldots,(E_n,F_m)\},$$

αρχική κατανομή $\vec{\gamma} = \vec{\beta} \otimes \vec{\alpha}$ και πίνακας πυκνότητας L ο οποίος μπορεί να προκύψει ως εξής.

Σημειώνοντας ότι η πιθανότητα με την οποία η κατάσταση των $\{I(t),;t \geq 0\}$ και $\{J(t);t \geq 0\}$ αλλάζει ταυτόχρονα είναι μηδέν, χρειάζεται μόνο να εξετάσουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις, για κάποιο μικρό χρονικό διάστημα $[s,s+\Delta], s \geq 0$,

(1) η κατάσταση της $\{I(t),;t \geq 0\}$ δεν αλλάζει στο διάστημα $[s,s+\Delta]$, αλλά η κατάσταση της $\{J(t);t \geq 0\}$ αλλάζει,

(2) η κατάσταση της $\{J(t);t \geq 0\}$ δεν αλλάζει στο $[s,s+\Delta]$, αλλά η κατάσταση της $\{I(t);t \geq 0\}$ αλλάζει.

Στην περίπτωση (1), για $i = 1,\ldots.,n, j,k = 1,\ldots,m$ και $j \neq k$, μια μετάβαση από την (E_i,F_j) στην (E_i,F_k) χωρίς τερματισμό κάποιας $\{J_t^{(q)};t \geq 0\}$ στην κατάσταση F_j συμβαίνει με ρυθμό b_{jk}, και μια μετάβαση από (E_i,F_j) σε (E_i,F_k) με τερματισμό κάποιου $\{J_t^{(q)};t \geq 0\}$ στην κατάσταση F_j και μια επακόλουθη αρχική κατάσταση F_k του $\{J_t^{(q+1)};t \geq 0\}$ συμβαίνει με ρυθμό $b_j\beta_k$, όπου $q \in \mathbb{N}^+$ είναι ένας κατάλληλος αριθμός τέτοιος ώστε $\{J^{(q)}_{(s-L_1-L_2-\cdots-L_{q-1})} = J(s)$. Επομένως, ο συνολικός ρυθμός από το (E_i,F_j)στο (E_i,F_k) είναι $b_{jk}+b_j\beta_k$. Από την αναδιατύπωση σε μορφή πίνακα δίνει την πυκνότητα πίνακα στην περίπτωση (1) ως $B \otimes I_{n\times n} + (\vec{b}^T\vec{\beta}) \otimes I_{n\times n}$, όπου $I_{n\times n}$ δηλώνει τον πίνακα ταυτότητας $n \times n$. Ομοίως, ο πίνακας πυκνότητας στη περίπτωση (2) μπορεί να γραφεί ως $I_{n\times n} \otimes A + I_{n\times n} \otimes (\vec{\alpha}^T\vec{\alpha})$. Επομένως, έχουμε $L = I_{n\times n} \otimes A + B \otimes I_{n\times n} + I_{n\times n} \otimes (\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}) + (\vec{b}^T\vec{\beta}) \otimes I_{n\times n}$ ο οποίος είναι ένας συντηρητικός πίνακας Q.

Έστω $T = \inf\{t \geq 0; U(t) < 0\}$($T = \infty$ αν δεν επέλθει χρεοκοπία) για να είναι ο χρόνος χρεωκοπίας για τη διαδικασία κινδύνου (2.2).

Ορίζουμε $\varphi(u) = \varphi^{(1)}(u) + \varphi^{(2)}(u)$, $u \geq 0$, να είναι η συνάρτηση ποινής Gerber-Shiu στην χρεοκοπία, όπου για $\delta \geq 0$,

$$\varphi^{(k)}(u) = E\left[e^{-\delta T} w_k(U(T-),|U(T)|) I_{(T<\infty J=k)} \middle| U(0) = u\right], \qquad u \geq 0, k = 1,2$$

όπου J ορίζεται ως η τυχαία μεταβλητή αιτίας της χρεοκοπίας, και $J = 1$(ή2) εάν η χρεωκοπία προκαλείται από απαίτηση της κατηγορίας 1(ή2), $w_k(x,y),\ για\ x,y \geq 0,\ k =$

$1,2,$ είναι δύο ενδεχομένως διαφορετικές μη αρνητικές συναρτήσεις ποινής και $U(T-), |U(T)|$ είναι δύο σημαντικές μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές σε σχέση με το χρόνο χρεοκοπίας T που αντιπροσωπεύουν το πλεόνασμα αμέσως πριν από την χρεοκοπία και το έλλειμμα κατά την χρεοκοπία, αντίστοιχα. Επιπλέον, ορίζουμε, για $k = 1,2, \quad 1 \le i \le n, 1 \le j \le m, u \ge 0,$

$$\varphi_{ij}^{(k)}(u) = E\left[e^{-\delta T} w_k(U(T-), |U(T)|) I_{(T<\infty J=k)} \middle| U(0) = u, \left(I(0), J(0)\right) = \left(E_i, F_j\right)\right],$$

να είναι η συνάρτηση Gerber-Shiu δεδομένου ότι το αρχικό πλεόνασμα είναι u, η αρχική κατάσταση είναι (E_i, F_j) και η καταστροφή προκαλείται από μια απαίτηση της κατηγορίας k. Κατά συνέπεια, έχουμε

$$\varphi^{(k)}(u) = \vec{\gamma}\vec{\varphi}^{(k)}(u), \quad k = 1,2,$$

όπου

$$\vec{\varphi}^{(k)}(u) = \left(\varphi_{11}^{(k)}(u), \varphi_{21}^{(k)}(u), \dots \varphi_{n1}^{(k)}(u), \varphi_{12}^{(k)}(u), \varphi_{22}^{(k)}(u), \dots \varphi_{n2}^{(k)}(u), \dots, \varphi_{1m}^{(k)}(u), \varphi_{2m}^{(k)}(u), \dots \varphi_{nm}^{(k)}(u)\right)^T.$$

3.3 Ολοκληρωτικές-διαφορικές εξισώσεις

Ορίζουμε την ακόλουθη εξίσωση για το $\varphi_{ij}^{(1)}(u)$ εξετάζοντας αν η κατάσταση που σχετίζεται με τη διαδικασία πλεονάσματος έχει αλλάξει σε ένα μικρό διάστημα $[0, t]$,

$$e^{\delta t}\varphi_{ij}^{(1)}(u) = (1 + a_{ii}t)\left(1 + b_{jj}t\right)\varphi_{ij}^{(1)}(u + ct) + \left(1 + b_{jj}t\right)\sum_{k=1,k\neq i}^{n}(a_{ik}t)\varphi_{kj}^{(1)}(u + ct) + (1 + a_{ii}t)\sum_{l=1,l\neq i}^{n}\left(b_{jl}t\right)\varphi_{il}^{(1)}(u + ct) + \left(1 + b_{jj}t\right)(a_i t)\left[\sum_{f=1}^{n}\alpha_f\int_0^{u+ct}\varphi_{fj}^{(1)}(u + ct - x)P(dx) + \int_{u+ct}^{+\infty}w_1(u + ct, x - u - ct)P(dx)\right] + (1 + a_{ii}t)\left(b_j t\right)\left[\sum_{g=1}^{m}\beta_g\int_0^{u+ct}\varphi_{ig}^{(1)}(u + ct - x)Q(dx)\right] + o(t),\ u \ge 0.$$

Με τη βοήθεια της εξίσωσης $\varphi_{ij}^{(1)}(u + ct) = \varphi_{ij}^{(1)}(u) + \varphi_{ij}^{(1)'}(u)(ct) + o(t)$ και μετά από τον ίδιο υπολογισμό, έχουμε,

$$\delta\varphi_{ij}^{(1)}(u) = \varphi_{ij}^{(1)'}(u) + \sum_{k=1}^{n}a_{ik}\varphi_{kj}^{(1)}(u)\sum_{l=1}^{n}b_{jl}\varphi_{il}^{(1)}(u) + a_\iota\left[\sum_{f=1}^{n}\alpha_f\int_0^{u}\varphi_{fj}^{(1)}(u - x)P(dx)\right] + b_j\left[\sum_{g=1}^{m}\beta_g\int_0^{u}\varphi_{ig}^{(1)}(u - x)Q(dx)\right] + a_1 w_1(u),\ u \ge 0 \qquad (3.2)$$

όπου $w_1(u)=\int_u^{+\infty} w_1(u,x-u)P(dx)$. Ξαναγράφοντας την (3.2) σε μορφή πίνακα, γίνεται,

$$\delta\vec{\Phi}^{(1)}(u)=c\vec{\Phi}^{(1)'}(u)+I_{m\times m}\otimes A\vec{\Phi}^{(1)}(u)+B\otimes I_{n\times n}\vec{\Phi}^{(1)}(u)+I_{m\times m}\otimes(\vec{a}^T\vec{\alpha})\int_0^u\vec{\Phi}^{(1)}(u-x)P(dx)+\left(\vec{b}^T\vec{\beta}\right)\otimes I_{n\times n}\int_0^u\vec{\Phi}^{(1)}(u-x)Q(dx)+\frac{1}{c}(\vec{e}_m^T\otimes\vec{a}^T)w_1(u),\qquad u\geq 0$$

και στη συνέχεια μπορούμε να το αναδιατάξουμε ως εξής

$$\vec{\Phi}^{(1)'}(u)=\frac{\delta}{c}\vec{\Phi}^{(1)}(u)-\frac{1}{c}I_{m\times m}\otimes A\vec{\Phi}^{(1)}(u)-\frac{1}{c}B\otimes I_{n\times n}\vec{\Phi}^{(1)}(u)-\frac{1}{c}I_{m\times m}\otimes(\vec{a}^T\vec{\alpha})\int_0^u\vec{\Phi}^{(1)}(u-x)P(dx)-\frac{1}{c}\left(\vec{b}^T\vec{\beta}\right)\otimes I_{n\times n}\int_0^u\vec{\Phi}^{(1)}(u-x)Q(dx)-\frac{1}{c}(\vec{e}_m^T\otimes\vec{a}^T)w_1(u),\ u\geq 0. \tag{3.3}$$

Παρόμοια, έχουμε

$$\vec{\Phi}^{(2)'}(u)=\frac{\delta}{c}\vec{\Phi}^{(2)}(u)-\frac{1}{c}I_{m\times m}\otimes A\vec{\Phi}^{(2)}(u)-\frac{1}{c}B\otimes I_{n\times n}\vec{\Phi}^{(2)}(u)-\frac{1}{c}I_{m\times m}\otimes(\vec{a}^T\vec{\alpha})\int_0^u\vec{\Phi}^{(2)}(u-x)P(dx)-\frac{1}{c}\left(\vec{b}^T\vec{\beta}\right)\otimes I_{n\times n}\int_0^u\vec{\Phi}^{(2)}(u-x)Q(dx)-\frac{1}{c}\left(\vec{b}^T\otimes\vec{e}_n^T\right)w_2(u),\ u\geq 0, \tag{3.4}$$

Όπου $w_2(u)=\int_u^{+\infty} w_2(u,x-u)Q(dx)$.

Παρατήρηση 3.1

Για $m=1$ και $Q(0)=1$, η (3.3) θα μετατραπεί στην (3.4).

Παρατήρηση 3.2

Αν θεωρήσουμε ότι οι δύο διαδικασίες αριθμού απαιτήσεων είναι ανεξάρτητη Poisson και γενικευμένη Erlang(2) διαδικασίες, δηλαδή

$$\vec{\alpha}=(1),\ \vec{\beta}=(1{,}0),\ A=(-\lambda)\kappa\alpha\iota\, B=\begin{pmatrix}-\lambda_1 & \lambda_1\\ 0 & -\lambda_2\end{pmatrix},$$

μπορούμε να συμπεράνουμε από την (3.3) ότι $\vec{\Phi}^{(1)}(u)=\left(\varphi_{11}^{(1)}(u),\varphi_{12}^{(1)}(u)\right)^T$ ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση, για $u\geq 0$

$$\vec{\Phi}^{(1)\prime}(u) = \frac{\delta}{c}\vec{\Phi}^{(1)}(u) - \frac{1}{c}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\vec{\Phi}^{(1)}(u) - \frac{1}{c}\begin{pmatrix}-\lambda_1 & \lambda_1\\ 0 & -\lambda_2\end{pmatrix}\vec{\Phi}^{(1)}(u)$$
$$-\frac{1}{c}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\int_0^u \vec{\Phi}^{(1)}(u-x)P(dx) - \frac{1}{c}\begin{pmatrix}0 & 0\\ \lambda_2 & 0\end{pmatrix}\int_0^u \vec{\Phi}^{(1)}(u-x)Q(dx)$$
$$-\frac{1}{c}\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda\end{pmatrix}w_1(u),$$

3.4 Η γενικευμένη θεμελιώδη εξίσωση του Lundberg

Υποθέτουμε ότι $\lim_{u\to\infty} e^{-su}\varphi_{ij}^{(1)}(u) = 0$ ισχύει για $i = 1,2,\ldots,n, j = 1,2,\ldots,m$ και κάθε $s \in \mathbb{C}$ που ικανοποιεί $\Re(s) \geq 0$. Λαμβάνοντας μετασχηματισμό Laplace και στις δύο πλευρές της (3.3), έχουμε, για $s \in \mathbb{C}$,

$$s\hat{\vec{\Phi}}^{(1)}(s) - \vec{\Phi}^{(1)}(0) = \frac{\delta}{c}\hat{\vec{\Phi}}^{(1)}(s) - \frac{1}{c}I_{m\times m} \otimes A\hat{\vec{\Phi}}^{(1)}(s) - \frac{1}{c}B \otimes I_{n\times n}\hat{\vec{\Phi}}^{(1)}(s) - \frac{1}{c}I_{m\times m} \otimes (\vec{a}^T\vec{\alpha})\hat{\vec{\Phi}}^{(1)}(s)\hat{P}(s) - \frac{1}{c}\left(\vec{b}^T\vec{\beta}\right) \otimes I_{m\times m}\hat{\vec{\Phi}}^{(1)}(s)\hat{Q}(s) - \frac{1}{c}(\vec{e}_m^T \otimes \vec{a}^T)\hat{w}_1(s),$$

δηλαδή

$$\frac{1}{c}L_\delta(s)\hat{\vec{\Phi}}^{(1)}(s) = \vec{\Phi}^{(1)}(0) - \frac{1}{c}(\vec{e}_m^T \otimes \vec{a}^T)\hat{w}_1(s),\ s \in \mathbb{C}, \tag{3.5}$$

όπου

$$\hat{w}_1(s) = \int_0^\infty e^{-su}w_1(u)du$$

και

$$L_\delta(s) = (cs-\delta)I_{mn\times mn} + I_{m\times m} \otimes A + B \otimes I_{n\times n} + I_{m\times m} \otimes (\vec{a}^T\vec{\alpha})\hat{P}(s) + \left(\vec{b}^T\vec{\beta}\right) \otimes I_{n\times n}\hat{Q}(s). \tag{3.6}$$

Ομοίως, $\lim_{u\to\infty} e^{-su}\varphi_{ij}^{(2)}(u) = 0$ ισχύει για $i = 1,2,\ldots,n, j = 1,2,\ldots,m$ και κάθε $s \in \mathbb{C}$ που ικανοποιεί $\Re(s) \geq 0$. Έχουμε, από την (3.4),

$$\frac{1}{c}L_\delta(s)\hat{\vec{\Phi}}^{(2)}(s) = \vec{\Phi}^{(2)}(0) - \frac{1}{c}\left(\vec{b}^T \otimes \vec{e}_n^T\right)\hat{w}_2(s),\ s \in \mathbb{C}, \tag{3.7}$$

όπου $\hat{w}_2(s) = \int_0^\infty e^{-su}w_2(u)du$.

Θεώρημα 3.1

Θεωρούμε δυο συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$, οι οποίες είναι αναλυτικές πάνω σε μια απλή κλειστή καμπύλη C και στο εσωτερικό της. Εάν πάνω στη C ισχύει $|g(z)| < |f(z)|$, τότε οι συναρτήσεις $f(z) + g(z)$ και $f(z)$ έχουν το ίδιο πλήθος ριζών στο εσωτερικό της C. Το εν λόγω θεώρημα είναι γνωστό ως θεώρημα του Rouche

Θεώρημα 3.2

Για $\delta > 0$, η γενικευμένη θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg $det[L_\delta(s)] = 0$ έχει ακριβώς mn ρίζες, ας πούμε $\rho_1(\delta), \rho_2(\delta), \dots, \rho_{mn}(\delta)$ με $\Re\big(\rho_i(\delta)\big) > 0$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\Lambda = diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$, $\Gamma = diag(b, b_{22}, \dots, b_{mm})$, από την (3.6) έχουμε

$$L_\delta(s) = (cs - \delta)I_{mn\times mn} + [I_{m\times m} \otimes \Lambda + \Gamma \otimes I_{n\times n}] + I_{m\times m} \otimes (A - \Lambda) + (B - \Gamma) \otimes I_{n\times n} + I_{m\times m}(\vec{a}^T \vec{\alpha})\hat{P}(s) + \left(\vec{b}^T \vec{\beta}\right) \otimes I_{n\times n}\hat{Q}(S),\ s \in \mathbb{C}.$$

Έστω C_δ ένας κύκλος με κέντρο $\frac{\delta + \max_{1\le i\le n, 1\le j\le m}(|a_{ii}| + |b_{jj}|)}{c}$ και ακτίνα $\frac{\delta + \max_{1\le i\le n, 1\le j\le m}(|a_{ii}| + |b_{jj}|)}{c}$. Συμβολίζουμε το εσωτερικό του C_δ με C_δ^+, το κλειστό δεξιό μισό του μιγαδικού επιπέδου με $\mathbb{C}^+$, και $\mathbb{C}^+ - C_\delta - C_\delta^+$ με C_δ^-. Ορίζουμε, για $0 \le u \le 1, s \in \mathbb{C}$,

$$L_\delta(u, s) = (cs - \delta)I_{mn\times mn} + [I_{m\times m} \otimes \Lambda + \Gamma \otimes I_{n\times n}] + u\big[I_{m\times m} \otimes (A - \Lambda) + (B - \Gamma) \otimes I_{n\times n} + I_{m\times m}(\vec{a}^T \vec{\alpha})\hat{P}(s) + \left(\vec{b}^T \vec{\beta}\right) \otimes I_{n\times n}\hat{Q}(S)\big].$$

Πρώτα χρησιμοποιούμε τη διαγώνια κυριαρχία για να αποδείξουμε

$$det[L_\delta(u, s)] \neq 0 \ για\ 0 \le u \le 1, s \in C_\delta. \tag{3.8}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την $\big((k - 1)n + l\big)$ η γραμμή του $mn \times mn$ πίνακα $L_\delta(u, s)$ $(1 \le k \le m, 1 \le l \le n)$, προκύπτει ότι

$$\left|(cs - \delta) + a_{ll} + b_{kk} + ua_l\alpha_l\hat{P}(s) + ub_k\beta_k\hat{Q}(s)\right| \ge |\delta + |a_{ll}| + |b_{kk}| - cs| - ua_l\alpha_l\hat{P}(0) - ub_k\beta_k\hat{Q}(0) \ge \delta + |a_{ll}| + |b_{kk}| - ua_l\alpha_l\hat{P}(0) - ub_k\beta_k\hat{Q}(0) > (|a_{ll}| + |b_{kk}|)u - ua_l\alpha_l\hat{P}(0) - ub_k\beta_k\hat{Q}(0) = \left(\sum_{i=1, i\neq l}^n a_{li} + a_l\right)u + \left(\sum_{j=1, j\neq k}^m b_{kj} + b_k\right)u - ua_l\alpha_l\hat{P}(0) - ub_k\beta_k\hat{Q}(0) = u\sum_{i=1, i\neq l}^n a_{li} + u\sum_{j=1, j\neq k}^m b_{kj} + u\sum_{i=1, i\neq l}^n \alpha_i\hat{P}(0) + ub_k\sum_{j=1, j\neq k}^m \beta_j\hat{Q}(0) = u\left(\sum_{i=1, i\neq l}^n a_{li} + a_l\alpha_i\hat{P}(0)\right) + u\sum_{j=1, j\neq k}^m \left(b_{kj} + b_k\beta_j\hat{Q}(0)\right) \ge u\sum_{i=1, i\neq l}^n \left|a_{li} + a_l\alpha_i\hat{P}(s)\right| + u\sum_{j=1, j\neq k}^m \left|b_{kj} + b_k\beta_j\hat{Q}(s)\right|, \tag{3.9}$$

για $0 \leq u \leq 1$ και $s \in C_\delta$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύει η (3.8). Χρησιμοποιώντας την ίδια εξαγωγή με την (3.9), είναι εύκολο να δούμε ότι η ανισότητα (3.8) εξακολουθεί να ισχύει για $0 \leq u \leq 1, s \in C_\delta^-$.

Έστω τώρα $f(u)$ ο αριθμός των μηδενικών της $\det[L_\delta(u,s)]$ στοC_δ^+ . Ως επακόλουθο του θεωρήματος Rouché, έχουμε

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta}^{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\frac{\partial}{\partial s}\det[L_\delta(u,s)]}{\det[L_\delta(u,s)]} ds$$

το οποίο δείχνει ότι η $f(u)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$, ακέραιης αξίας και συνεπώς σταθερή. Είναι εύκολο να δούμε ότι $f(0) = mn$, που σημαίνει $f(1) = mn$. ∎

Παρατήρηση 3.3

Αν $\delta \to 0+$ τότε $\rho_i(\delta) \to \rho_i(0)$ για $1 \leq i \leq mn$, και έχουμε ότι $s = 0$ είναι μία από τις ρίζες από την (3.6) και η το γεγονός ότι $L_0(0) = L$, όπου το L είναι ένας πίνακας Q.

Στη συνέχεια, οι $\rho_i(\delta)$ συμβολίζονται απλώς με ρ_i για $i = 1,2,\ldots,mn$ και $\delta \geq 0$, υποθέτουμε επίσης ότι $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{mn}$ είναι διακριτές.

3.5 Αποτελέσματα για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu

Οι διαφορές ενός πίνακα $L(s)$ ως προς διακριτούς αριθμούς $r_1, r_2, \ldots$, ορίζονται αναδρομικά ως εξής:

$$L[r_1, s] = \frac{L(s) - L(r_1)}{s - r_1}, \tag{3.10}$$

$$L[r_1, r_2, s] = \frac{L[r_1,s] - L[r_1,r_2]}{s - r_2}, \tag{3.11}$$

$$L[r_1, r_2, r_3, s] = \frac{L[r_1,r_2,s] - L[r_1,r_2,r_3]}{s - r_3},$$

και ούτω καθεξής.

Θεώρημα 3.3

Οι συναρτήσεις Gerber-Shiu με μηδενικό αρχικό πλεόνασμα δίνονται από

$$\vec{\Phi}^{(1)}(0) = \frac{1}{c}\, L^{\,*}_{\delta}[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}]^{-1}\, (L^{*}_{\delta}\widehat{w}_1)[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}](\vec{e}^{\,T}_m \otimes \vec{a}^{T}), \tag{3.12}$$

$$\vec{\Phi}^{(2)}(0) = \frac{1}{c}\, L^{\,*}_{\delta}[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}]^{-1}\, (L^{*}_{\delta}\widehat{w}_2)[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}]\big(\vec{b}^{T} \otimes \vec{e}^{\,T}_n\big), \tag{3.13}$$

όπου $L^{\,*}_{\delta}[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}]$ είναι ο συμπληρωματικός πίνακας του $L_{\delta}[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}]$, και $(L^{\,*}_{\delta}\widehat{w}_k)[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}] = \sum_{i=1}^{mn} L^{\,*}_{\delta}[\rho_1, \dots, \rho_i]\widehat{w}_k[\rho_1, \dots, \rho_{mn}]\, \gamma\iota\alpha\ k = 1{,}2$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής

$$(L^{\,*}_{\delta}\widehat{w}_k)[\rho_1, \rho_2] = L^{\,*}_{\delta}(\rho_1)\widehat{w}_k[\rho_1, \rho_2] + L^{\,*}_{\delta}[\rho_1, \rho_2]\widehat{w}_k(\rho_2),$$

$$(L^{\,*}_{\delta}\widehat{w}_k)[\rho_1, \rho_2, \rho_3] = L^{\,*}_{\delta}(\rho_1)\widehat{w}_k[\rho_1, \rho_2, \rho_3] + L^{\,*}_{\delta}[\rho_1, \rho_2]\widehat{\omega}_k(\rho_2, \rho_3) + L^{\,*}_{\delta}[\rho_1, \rho_2, \rho_3]\widehat{\omega}_k(\rho_3),$$

<u>Απόδειξη</u>

Από το γεγονός ότι $\hat{\varphi}^{(1)}_{ij}(s)$ είναι πεπερασμένη για $i = 1,2, \dots, n$, $j = 1,2, \dots, m$ και οποιοδήποτε $s \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε $\Re(s) \geq 0$, έχουμε, από την (3.5), για διακριτούς αριθμούς $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}$,

$$L^{\,*}_{\delta}(\rho_i)\left(c\vec{\Phi}^{(1)}(0)\right) = L^{\,*}_{\delta}(\rho_i)\widehat{w}_1\,(\rho_i)(\vec{e}^{\,T}_m \otimes \vec{a}^{T}).$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.10) και (3.11), συμπεραίνουμε ότι

$$L^{\,*}_{\delta}[\rho_1, \rho_2]\left(c\vec{\Phi}^{(1)}(0)\right) = \frac{L^{\,*}_{\delta}(\rho_2) - L^{\,*}_{\delta}(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1}\left(c\vec{\Phi}^{(1)}(0)\right) = \frac{L^{\,*}_{\delta}(\rho_2)\widehat{w}_1\,(\rho_2) - L^{\,*}_{\delta}(\rho_1)\widehat{w}_1\,(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1}(\vec{e}^{\,T}_m \otimes \vec{a}^{T}) =$$
$$L^{\,*}_{\delta}(\rho_1)\widehat{w}_1[\rho_1, \rho_2] + L^{\,*}_{\delta}[\rho_1, \rho_2]\widehat{w}_1(\rho_2)(\vec{e}^{\,T}_m \otimes \vec{a}^{T}) = (L^{\,*}_{\delta}\widehat{w}_1)[\rho_1, \rho_2](\vec{e}^{\,T}_m \otimes \vec{a}^{T}).$$

Αναδρομικά, τελικά λαμβάνουμε

$$L^{\,*}_{\delta}[\rho_1, \dots, \rho_{mn}]\left(c\vec{\Phi}^{(1)}(0)\right) = (L^{\,*}_{\delta}\widehat{w}_1)[\rho_1, \dots, \rho_{mn}](\vec{e}^{\,T}_m \otimes \vec{a}^{T}),$$

με την οποία αποδεικνύεται ότι ισχύει η (3.12). Ομοίως, και η (3.13) από την (3.7). ∎

Οι εξισώσεις (3.1) και (3.3) μπορούν να ξαναγραφούν ως εξής

$$\widehat{\vec{\Phi}}^{(1)}(s) = \frac{1}{\det[L_{\delta}(s)]}\left[L^{\,*}_{\delta}(s)\left(c\vec{\Phi}^{(1)}(0)\right) - L^{\,*}_{\delta}(s)\widehat{\omega}_1(s)(\vec{e}^{\,T}_m \otimes \vec{a}^{T})\right], \tag{3.14}$$

$$\widehat{\vec{\Phi}}^{(2)}(s) = \frac{1}{\det[L_{\delta}(s)]}\left[L^{\,*}_{\delta}(s)\left(c\vec{\Phi}^{(2)}(0)\right) - L^{\,*}_{\delta}(s)\widehat{\omega}_2(s)\big(\vec{b}^{T} \otimes \vec{e}^{\,T}_n\big)\right]. \tag{3.15}$$

Εφαρμόζοντας επανειλημμένα τις διαιρεμένες διαφορές στους αριθμητές των δύο τελευταίων εξισώσεων, αντίστοιχα, μπορούμε να πάρουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα.

Θεώρημα 3.4

Οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων Gerber-Shiu αναπαρίστανται ως εξής

$$\widehat{\vec{\Phi}}^{(1)}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{mn}(s-\rho_i)}{\det[L_\delta(s)]}\Big\{\big\{L^*_\delta[\rho_1, \dots, \rho_{mn}, s]\big[c\vec{\Phi}^{(1)}(0) - \widehat{w}_1(s)(\vec{e}_m^T \otimes \vec{a}^T)\big] - \sum_{i=1}^{mn} L^*_\delta[\rho_1, \dots, \rho_i]\widehat{w}_1[\rho_i, \dots, \rho_{mn}, s]\,(\vec{e}_m^T \otimes \vec{a}^T)\Big\}, s \in \mathbb{C}\,, \tag{3.16}$$

$$\widehat{\vec{\Phi}}^{(2)}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{mn}(s-\rho_i)}{\det[L_\delta(s)]}\big\{L^*_\delta[\rho_1, \dots, \rho_{mn}, s]\big[c\vec{\Phi}^{(2)}(0) - \widehat{w}_2(s)\big(\vec{b}^T \otimes \vec{e}_n^T\big)\big] - \sum_{i=1}^{mn} L^*_\delta[\rho_1, \dots, \rho_i]\widehat{w}_2[\rho_i, \dots, \rho_{mn}, s]\,\big(\vec{b}^T \otimes \vec{e}_n^T\big)\big\}, s \in \mathbb{C}. \tag{3.17}$$

<u>Απόδειξη</u>

Σημειώνοντας ότι $s = \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}$ είναι ρίζες του αριθμητή της (3.14), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
&L^*_\delta(s)\left(c\vec{\Phi}^{(1)}(0)\right) - L^*_\delta(s)\widehat{w}_1(s)(\vec{e}_m^T \otimes \vec{a}^T) \\
&\quad= L^*_\delta(s)\left(c\vec{\Phi}^{(1)}(0)\right) - L^*_\delta(s)\widehat{w}_1(s)(\vec{e}_m^T \otimes \vec{a}^T) \\
&\quad- \left[L^*_\delta(\rho_1)\left(c\vec{\Phi}^{(1)}(0)\right) - L^*_\delta(\rho_1)\widehat{w}_1(\rho_1)(\vec{e}_m^T \otimes \vec{a}^T)\right] \\
&\quad= (s-\rho_1)\left[L^*_\delta[\rho_1, s]\left(c\vec{\Phi}^{(1)}(0)\right) - L^*_\delta\widehat{w}_1[\rho_1, s](\vec{e}_m^T \otimes \vec{a}^T)\right] \\
&\quad= (s-\rho_1)\left\{\left[L^*_\delta[\rho_1, s] - L^*_\delta[\rho_1, \rho_2]\right]\left(c\vec{\Phi}^{(1)}(0)\right)\right. \\
&\quad\left.- \left[(L^*_\delta\widehat{w}_1)[\rho_1, s] - (L^*_\delta\widehat{w}_1)[\rho_1, \rho_2]\right](\vec{e}_m^T \otimes \vec{a}^T)\right\} \\
&\quad= (s-\rho_1)(s-\rho_2)\left\{L^*_\delta[\rho_1, \rho_2, s]\left(c\vec{\Phi}^{(1)}(0)\right) - (L^*_\delta\widehat{w}_1)[\rho_1, \rho_2, s](\vec{e}_m^T \otimes \vec{a}^T)\right\} = \cdots \\
&\quad= \prod_{i=1}^{mn}(s-\rho_i)\left\{L^*_\delta[\rho_1, \dots, \rho_{mn}, s]\left(c\vec{\Phi}^{(1)}(0)\right) - (L^*_\delta\widehat{w}_1)[\rho_1, \dots, \rho_{mn}, s](\vec{e}_m^T \otimes \vec{a}^T)\right\} \\
&\quad= \prod_{i=1}^{mn}(s-\rho_i)\left\{L^*_\delta[\rho_1, \dots, \rho_{mn}, s]\big[c\vec{\Phi}^{(1)}(0) - \widehat{w}_1(s)\big(\vec{b}^T \otimes \vec{e}_n^T\big)\big]\right. \\
&\quad\left.- \sum_{i=1}^{mn} L^*_\delta[\rho_1, \dots, \rho_i]\widehat{w}_1[\rho_1, \dots, \rho_{mn}, s](\vec{e}_m^T \otimes \vec{a}^T)\right\},
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία εξίσωση χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $(L^*_\delta\widehat{w}_1)[\rho_1, \dots, \rho_{mn}, s] = L^*_\delta[\rho_1, \dots, \rho_{mn}, s]\widehat{w}_1(s) + \sum_{i=1}^{mn} L^*_\delta[\rho_1, \dots, \rho_i]\widehat{w}_1[\rho_i, \dots, \rho_{mn}, s]$ η οποία μπορεί να προκύψει αναδρομικά από την (3.13), και με τη βοήθεια της (3.14) αποδεικνύεται η (3.16).■

Οι μετασχηματισμοί Laplace που έχουμε παραγάγει στο τελευταίο θεώρημα μπορούν να αντιστραφούν για ορισμένες ειδικές κατανομές ύψους απαιτήσεων. Στη συνέχεια, εξετάζουμε την περίπτωση όπου οι κατανομές του ύψους των απαιτήσεων P και Q είναι και οι δύο από την ορθολογική οικογένεια, δηλαδή οι μετασχηματισμοί είναι της μορφής

$$\hat{P}(s) = \frac{p^{(2)}_{k_1-1}(s)}{p^{(1)}_{k_1}(s)}, \qquad \hat{Q}(s) = \frac{q^{(2)}_{k_2-1}(s)}{q^{(1)}_{k_2}(s)}, \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{N},$$

όπου $p^{(1)}_{k_1}(s)$ (ή $q^{(1)}_{k_2}(s)$) είναι πολυώνυμο βαθμού k_1 (ή k_2), ενώ $p^{(2)}_{k_1-1}(s)$ (ή $q^{(2)}_{k_2-1}(s)$) είναι πολυώνυμο βαθμού $k_1 - 1$ (ή $k_2 - 1$), ή λιγότερο. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι εξισώσεις $p^{(1)}_{k_1}(s) = 0$ και $q^{(1)}_{k_2}(s) = 0$ έχουν μόνο ρίζες με αρνητικά πραγματικά μέρη. Μπορούμε επίσης, χωρίς να χάσουμε τη γενικότητα, να υποθέσουμε ότι $p^{(1)}_{k_1}(s)$ και $q^{(1)}_{k_2}(s)$ έχουν και οι δύο τον κύριο συντελεστή 1. Βλέπουμε από την (3.1) ότι αυτή η ευρεία κατηγορία κατανομών περιλαμβάνει την κατανομή τύπου φάσης, άρα και την Erlang, Coxian, την εκθετική και επίσης τα μίγματα αυτών.

Έστω $r(s) = \left[p^{(1)}_{k_1}(s) q^{(1)}_{k_2}(s)\right]^{mn}$. Πολλαπλασιάζοντας τόσο τον αριθμητή όσο και τον παρονομαστή της εξίσωσης με $r(s)$, έχουμε

$$\hat{\vec{\Phi}}^{(1)}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{mn}(s-\rho_i)}{\det[L_\delta(s)] r(s)} \left\{ L^{\,*}_{\delta}[\rho_1, \dots, \rho_{mn}, s] r(s) \left[c\vec{\Phi}^{(1)}(0) - \hat{w}_1(s)(\vec{e}^{\,T}_m \otimes \vec{a}^T)\right] - r(s) \sum_{i=1}^{mn} L^{\,*}_{\delta}[\rho_1, \dots, \rho_i] \hat{w}_1[\rho_i, \dots, \rho_{mn}, s]\, (\vec{e}^{\,T}_m \otimes \vec{a}^T) \right\},\ s \in \mathbb{C}, \tag{3.18}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι ο παρονομαστής $\det[L_\delta(s)]\, r(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $(k_1 + k_2 + 1)mn$ με τον πρώτο συντελεστή c^{mn}, τότε έχουμε

$$\det[L_\delta(s)]\, r(s) = c^{mn} \prod_{i=1}^{mn}(s - \rho_i) \prod_{i=1}^{(k_1+k_2)mn}(s + R_i),\ s \in \mathbb{C},$$

όπου όλα τα R_i έχουν θετικά πραγματικά μέρη, από τον ορισμό της κλασματικής κατανομής και από το γεγονός ότι η γενικευμένη εξίσωση Lundberg's έχει μόνο mn ρίζες στο δεξιό μισό του μιγαδικού επιπέδου. Απαλείφοντας τον κοινό όρο $\prod_{i=1}^{mn}(s - \rho_i)$ και από τον αριθμητή και τον παρονομαστή της (3.16) έχουμε

$$\hat{\vec{\Phi}}^{(1)}(s) = \frac{1}{c^{mn} \prod_{i=1}^{(k_1+k_2)mn}(s+R_i)} \left\{ L^{\,*}_{\delta}[\rho_1, \dots, \rho_{mn}, s] r(s) \left[c\vec{\Phi}^{(1)}(0) - \hat{w}_1(s)(\vec{e}^{\,T}_m \otimes \vec{a}^T)\right] - r(s) \sum_{i=1}^{mn} L^{\,*}_{\delta}[\rho_1, \dots, \rho_i] \hat{w}_1[\rho_i, \dots, \rho_{mn}, s]\, (\vec{e}^{\,T}_m \otimes \vec{a}^T) \right\},\ s \in \mathbb{C}. \tag{3.19}$$

Για να αποδειχθεί ότι τα στοιχεία του πίνακα $L_{\delta}^{*}[\rho_1, \dots, \rho_{mn}, s]r(s)$ είναι πολυώνυμα βαθμού μικρότερου από $(k_1 + k_2 + 1)mn$, αποδεικνύουμε πρώτα το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.1

Για δύο συναρτήσεις $f(s) = \frac{h_{m-1}(s)}{a_m(s)}$ και $g(s) = \frac{h_{m+n}(s)}{a_m(s)}$, $s \in \mathbb{C}$, όπου $a_m(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $m, h_{m+n}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $m+n$, και $h_{m-1}(s)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $m - 1$ ή μικρότερου,

(i) $g[r_1, \dots, r_k, s] = \begin{cases} \frac{d_{m+n-k}^{(k)}(s)}{a_m(s)}, 1 \leq k \leq n \\ \frac{v_{m-1}^{(n+1)}(s)}{a_m(s)},\ k = n+1 \end{cases}$

(ii) $f[r_1, \dots, r_k, s] = \frac{c_{m-1}^{(k)}(s)}{a_m(s)},\ k = 1,2, \dots$

Όπου $r_i \in \mathbb{C}, i = 1,2, \dots$, είναι διαφορετικοί αριθμοί (επίσης διαφορετικοί από το s) που καθιστούν τους $f(r_i)$ και $g(r_i)$ καλά ορισμένους, $v_{m-1}^{(n+1)}(s)$ και $c_{m-1}^{(k)}(s)$, $k = 1,2, \dots$ συμβολίζουν πολυώνυμα βαθμού $m-1$ ή μικρότερου, και $d_{m+n-k}^{(k)}(s)$ υποδηλώνει πολυώνυμο βαθμού $m+n-k$ για $1 \leq k \leq n$.

<u>Απόδειξη</u>

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των διαιρεμένων διαφορών, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$g[r_1, s] = \frac{g(s)-g(r_1)}{s-r_1} = \frac{1}{(s-r_1)a_m(s)a_m(r_1)}[h_{m+n}(s)a_m(r_1) - h_{m+n}(r_1)a_m(s)] =$$
$$\frac{1}{(s-r_1)a_m(s)a_m(r_1)}\{[h_{m+n}(s)-h_{m+n}(r_1)]a_m(r_1) + [a_m(r_1) - a_m(s)]h_{m+n}(r_1)\} =$$
$$\frac{1}{a_m(s)}\frac{1}{a_m(r_1)(s-r_1)}\{[h_{m+n}(s)-h_{m+n}(r_1)]a_m(r_1) + [a_m(r_1) - a_m(s)]h_{m+n}(r_1)\} = \frac{d_{m+n-1}^{(1)}(s)}{a_m(s)},$$

όπου $d_{m+n-1}^{(1)}(s) = \frac{1}{a_m(r_1)(s-r_1)}\{[h_{m+n}(s)-h_{m+n}(r_1)]a_m(r_1) + [a_m(r_1) - a_m(s)]h_{m+n}(r_1)\}$ είναι πολυώνυμο βαθμού $m+n-1$. Αν, για $k = n-1$, $g[r_1, \dots, r_{n-1,} s] = \frac{d_{m+1}^{(1)}(s)}{a_m(s)}$ ισχύει για κάποιο πολυώνυμο $d_{m+1}^{(n-1)}(s)$ βαθμού $m+1$, τότε

$$g[r_1, \dots, r_{n-1}, r_n, s] = \frac{g[r_1,\dots,r_{n-1},s]-g[r_1,\dots,r_{n-1},r_n]}{s-r_n} = \frac{1}{(s-r_n)a_m(s)a_m(r_n)}\Big[d_{m+1}^{(1)}(s)a_m(r_n) -$$
$$d_{m+1}^{(1)}(r_n)a_m(s)\Big] = \frac{d_m^{(n)}(s)}{a_m(s)},$$

Όπου $d_m^{(n)}(s) = \frac{1}{(s-r_n)a_m(r_n)}\left\{\left[d_{m+1}^{(n-1)}(s) - d_{m+1}^{(n-1)}(r_n)\right]a_m(r_n) + [a_m(r_n) - a_m(s)]d_{m+1}^{(n-1)}(r_n)\right\}$ είναι πολυώνυμο βαθμού m, και περαιτέρω $g[r_1, \dots, r_{n-1}, r_n, s] = \frac{v_{m-1}^{(n+1)}(s)}{a_m(s)}$, όπου

$$v_{m-1}^{(n+1)}(s) = \frac{1}{(s - r_{n+1})a_m(r_{n+1})}\left\{\left[d_m^{(n)}(s) - d_m^{(n)}(r_{n+1})\right]a_m(r_{n+1}) + [a_m(r_{n+1}) - a_m(s)]d_m^{(n)}(r_{n+1})\right\}$$

είναι πολυώνυμο βαθμού $m - 1$ ή μικρότερου βαθμού.

Χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα, προκύπτει ότι

$$f[r_1, s] = \frac{f(s) - f(r_1)}{s - r_1} = \frac{1}{(s - r_n)a_m(s)a_m(r_n)}[h_{m-1}(s)a_m(r_1) - h_{m+n}(r_1)a_m(s)]$$
$$= \frac{1}{a_m(s)}\frac{1}{a_m(r_1)(s - r_1)}\{[h_{m-1}(s) - h_{m-1}(r_1)]a_m(r_1) + [a_m(r_1) - a_m(s)]h_{m-1}(r_1)\} = \frac{c_{m-1}^{(1)}(s)}{a_m(s)}$$

όπου $c_{m-1}^{(1)}(s) = \frac{1}{a_m(r_1)(s-r_1)}\{[h_{m-1}(s) - h_{m-1}(r_1)]a_m(r_1) + [a_m(r_1) - a_m(s)]h_{m-1}(r_1)\}$ είναι πολυώνυμο βαθμού $m - 1$ ή μικρότερο, και αναδρομικά, έχουμε, για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$, $f[r_1, \dots, r_k, s] = \frac{c_{m-1}^{(k)}(s)}{a_m(s)}$, όπου $c_{m-1}^{(k)}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $m - 1$ ή μικρότερου.■

Λήμμα 3.2

Τα στοιχεία του πίνακα $L_\delta^*[\rho_1, \dots, \rho_{mn}, s]r(s)$ είναι πολυώνυμα βαθμού $(k_1 + k_2)mn - 1$ ή λιγότερο.

Απόδειξη

Είναι εύκολο να δούμε ότι το (i, j)-οστό στοιχείο του $L_\delta^*(s)$ έχει την παράσταση

$$\left(L_\delta^*(s)\right)_{ij} = \frac{D_{ij}(s)}{\left[p_{k_1}^{(1)}(s)q_{k_2}^{(1)}(s)\right]^{mn-1}},\ 1 \le i, j \le mn,$$

όπου $D_{ij}(s)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $(k_1 + k_2 + 1)(mn - 1)$ ή μικρότερου. Τότε έχουμε, με τη βοήθεια του Λήμματος 4.3, ότι

$$(L_\delta^*[\rho_1, \dots, \rho_{mn}, s])_{ij} = \frac{d_{ij}(s)}{\left[p_{k_1}^{(1)}(s)q_{k_2}^{(1)}(s)\right]^{mn-1}},\ 1 \le i, j \le mn,$$

όπου $d_{ij}(s)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $(k_1+k_2)(mn-1)-1$ ή μικρότερου. Επομένως, $L_\delta^*[\rho_1,\dots,\rho_{mn},s]r(s)$ είναι πολυώνυμο του βαθμού $(k_1+k_2)mn-1$ ή λιγότερο.■

Εάν τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής του $\frac{L_\delta^*[\rho_1,\dots,\rho_{mn},s]r(s)}{\prod_{i=1}^{(k_1+k_2)mn}(s+R_i)}\left(ή\ \frac{r(s)}{\prod_{i=1}^{(k_1+k_2)mn}(s+R_i)}\right)$ έχουν τον ίδιο συντελεστή $s+R_i$ για κάποιο $1\le i\le (k_1+k_2)mn$, πρέπει επίσης να διαγράψουμε τον κοινό όρο τόσο από τον αριθμητή όσο και από τον παρονομαστή του $\frac{L_\delta^*[\rho_1,\dots,\rho_{mn},s]r(s)}{\prod_{i=1}^{(k_1+k_2)mn}(s+R_i)}\left(ή\ \frac{r(s)}{\prod_{i=1}^{(k_1+k_2)mn}(s+R_i)}\right)$ στην (3.19). Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι δεν είναι απαραίτητο να το κάνουμε αυτό και ότι αυτά τα R_i είναι διακριτά καταλήγοντας στα ακόλουθα μερικά κλάσματα:

$$\frac{L_\delta^*[\rho_1,\dots,\rho_{mn},s]r(s)}{\prod_{i=1}^{(k_1+k_2)mn}(s+R_i)}=\sum_{k=1}^{(k_1+k_2)mn}\frac{M^{(k)}}{s+R_k},$$

$$\frac{r(s)}{\prod_{i=1}^{(k_1+k_2)mn}(s+R_i)}=1+\sum_{k=1}^{(k_1+k_2)mn}\frac{G^{(k)}}{s+R_k},$$

όπου $M^{(k)}=m_{i,j=1}^{mn}$, για $k=1,2,\dots,(k_1+k_2)mn$ είναι πίνακες συντελεστών με

$$M^{(k)}=\frac{L_\delta^*[\rho_1,\dots,\rho_{mn},-R_k]r(-R_k)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{(k_1+k_2)mn}(R_l-R_k)} \tag{3.20}$$

ενώ το $G^{(k)}$, για $k=1,2,\dots,(k_1+k_2)mn$, δίνονται ως εξής

$$G^{(k)}=\frac{r(-R_k)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{(k_1+k_2)mn}(R_l-R_k)}. \tag{3.21}$$

Συνεπώς, η εξίσωση (3.19) μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής

$$\begin{aligned}\widehat{\vec{\Phi}}^{(1)}(s)=&\frac{1}{c^{mn}}\sum_{k=1}^{(k_1+k_2)mn}\frac{1}{s+R_k}\Big\{M^{(k)}\big[c\vec{\Phi}^{(1)}(0)-\widehat{\omega}_1(s)(\vec{e}_m^{\,T}\otimes\vec{a}^{\,T})\big]-\\&G^{(k)}\sum_{i=1}^{mn}L^{\,*}_{\delta}[\rho_1,\dots,\rho_i]\widehat{\omega}_1[\rho_i,\dots,\rho_{mn},s]\times(\vec{e}_m^{\,T}\otimes\vec{a}^{\,T})\Big\}-\\&\frac{1}{c^{mn}}\sum_{i=1}^{mn}L^{\,*}_{\delta}[\rho_1,\dots,\rho_i]\widehat{\omega}_1[\rho_i,\dots,\rho_{mn},s]\,(\vec{e}_m^{\,T}\otimes\vec{a}^{\,T}),\ \ s\in\mathbb{C}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Με τα ίδια επιχειρήματα, έχουμε

$$\widehat{\vec{\Phi}}^{(2)}(s) = \frac{1}{c^{mn}} \sum_{k=1}^{(k_1+k_2)mn} \frac{1}{s+R_k} \{ M^{(k)} [c\vec{\Phi}^{(2)}(0) - \widehat{\omega}_2(s) (\vec{b}^T \otimes \vec{e}_n^T)] -$$

$$G^{(k)} \sum_{i=1}^{mn} L_{\delta}^{*}[\rho_1, \dots, \rho_i] \widehat{\omega}_2[\rho_i, \dots, \rho_{mn}, s] \times (\vec{b}^T \otimes \vec{e}_n^T) \} -$$

$$\frac{1}{c^{mn}} \sum_{i=1}^{mn} L_{\delta}^{*}[\rho_1, \dots, \rho_i] \widehat{\omega}_2[\rho_i, \dots, \rho_{mn}, s] \, (\vec{b}^T \otimes \vec{e}_n^T), \; s \in \mathbb{C}. \tag{3.23}$$

Για αντιστρέψουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των (3.21) και (3.22), θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των τελεστών T_r του Λήμματος 1.3 , καταλήγουμε στον εξής τύπο για το αντίστροφο Laplace του $\hat{f}[r_1, r_2, \dots, r_m, s]$:

$$\mathcal{L}^{-1}(\hat{f}[r_1, r_2, \dots, r_m, s]) = (-1)^m (\prod_{i=1}^{m} T_{r_i}) f(x). \tag{3.24}$$

Θεώρημα 3.5

Εάν τόσο το P όσο και το Q ανήκουν στην κλασματική οικογένεια, οι εκφράσεις των συναρτήσεων Gerber- Shiu δίνονται ως εξής

$$\widehat{\vec{\Phi}}^{(1)}(u) = \frac{1}{c^{mn}} \sum_{k=1}^{(k_1+k_2)mn} \frac{1}{s+R_k} \{ c e^{-R_k u} M^{(k)} \vec{\Phi}^{(1)}(0) - e^{-R_k u} \star [\mathrm{M}^{(k)} \omega_1(u) (\vec{e}_m^T \otimes \vec{a}^T) -$$

$$G^{(k)} \sum_{i=1}^{mn} (-1)^{mn-i} L_{\delta}^{*}[\rho_1, \dots, \rho_i] (\prod_{i=1}^{m} T_{\rho_i}) \omega_1(u) (\vec{e}_m^T \otimes \vec{a}^T)] \} -$$

$$\frac{1}{c^{mn}} \sum_{i=1}^{mn} (-1)^{mn-i} L_{\delta}^{*}[\rho_1, \dots, \rho_i] (\prod_{i=1}^{m} T_{\rho_i}) \omega_1(u) (\vec{e}_m^T \otimes \vec{a}^T), \; u \geq 0, \tag{3.25}$$

και

$$\widehat{\vec{\Phi}}^{(2)}(u) = \frac{1}{c^{mn}} \sum_{k=1}^{(k_1+k_2)mn} \frac{1}{s+R_k} \{ c e^{-R_k u} M^{(k)} \vec{\Phi}^{(2)}(0) - e^{-R_k u} \star [\mathrm{M}^{(k)} \omega_2(u) (\vec{b}^T \otimes \vec{e}_n^T) -$$

$$G^{(k)} \sum_{i=1}^{mn} (-1)^{mn-i} L_{\delta}^{*}[\rho_1, \dots, \rho_i] (\prod_{i=1}^{m} T_{\rho_i}) \omega_2(u) (\vec{b}^T \otimes \vec{e}_n^T)] \} -$$

$$\frac{1}{c^{mn}} \sum_{i=1}^{mn} (-1)^{mn-i} L_{\delta}^{*}[\rho_1, \dots, \rho_i] (\prod_{i=1}^{m} T_{\rho_i}) \omega_2(u) (\vec{b}^T \otimes \vec{e}_n^T), \; u \geq 0, \tag{3.26}$$

όπου $\star$ συμβολίζει τον τελεστή συνέλιξης.

Παρατήρηση 3.4

Αν αφήσουμε $m = 1$ και $Q(0) = 1$, τότε έχουμε $\hat{Q}(s) = 1$ και $k_2 = 0$. Επομένως, $\varphi(u) = \vec{a}\vec{\Phi}^{(1)}(u)$ είναι η συνάρτηση Gerber -Shiu για ένα μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen με χρόνους μεταξύ των απαιτήσεων τύπου φάσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

Η ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΕΝΑ ΓΕΝΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΔΥΟ ΚΛΑΣΕΙΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ ΚΑΙ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΜΙΑΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΜΕΡΙΣΜΑΤΩΝ

4.1 Περιγραφή του μοντέλου

Για το μοντέλο του προηγούμενου κεφαλαίου θεωρούμε την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων με ν επίπεδα $0 < b_1 < \cdots < b_\nu < \infty$. Υποθέτουμε ότι όταν η διαδικασία πλεονάσματος βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών επιπέδων b_{k-1} και b_k, $k = 1, \dots, \nu + 1$, με $b_0 = 0$ και $b_{\nu+1} = \infty$, ο ασφαλιστής πληρώνει μερίσματα με ρυθμό d_k και συνεπώς το ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων είναι $c_k = c - d_k, k = 1, \dots, \nu + 1$, με $c = c_1 > \cdots > c_\nu > c_{\nu+1} \geq 0$.

Έστω $b = \{b_1, \dots, b_\nu\}$ και $\{U_b(t)\}_{t\geq 0}$ η διαδικασία πλεονάσματος στον χρόνο t κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερών μερισμάτων, με αρχικό κεφάλαιο $U_b(0) = u$. Τότε, η διαδικασία πλεονάσματος $U_b(t)$ ικανοποιεί την εξίσωση, για $k = 1, \dots, \nu + 1$

$$dU_b(t) = c_k dt - dS(t),\ b_{k-1} \leq U_b(t) \leq b_k, \tag{4.1}$$

όπου $\{U_b(t)\}_{t\geq 0}$ είναι η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων, η οποία γεννάται από την ύπαρξη δύο επιμέρους διαδικασιών,

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i + \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i\,,\ t \geq 0, \tag{4.2}$$

όπου οι $S_i(t), i = 1,2$, παριστούν τις συνολικές αποζημιώσεις που καταβάλλονται μέχρι το χρόνο i προερχόμενες από την i-κλάση.

4.2 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων

Έστω $T_b = inf\{t \geq 0: U_b(t) < 0\}$ ο χρόνος χρεοκοπίας. Τότε, για το μοντέλο κινδύνου (4.1)-(4.2), η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής που αντιστοιχεί στο διάστημα μεταξύ των $b_{k-1}\ και\ b_k, για\ k = 1, \dots, \nu + 1$, ορίζεται ως

$$\varphi_k(u, b) = \mathbb{E}\big(e^{-\delta T_b} w(U_b(T_b -), |U_b(T_b)|) 1_{(T_b<\infty)} | U_b(0) = u\big),\ b_{k-1} \leq u \leq b_k, \tag{4.3}$$

Όπου $\delta \geq 0$ είναι η ένταση ανατοκισμού, $U_b(T_b -)$ είναι το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία, $|U_b(T_b)|$ είναι το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία, $\omega(x,y)$: $[0,\infty) \times (0,\infty) \to [0,\infty)$ και $1_{(.)}$ συμβολίζει την δείκτρια συνάρτηση.

Επίσης, όμοια με τους Ji και Zhang (2010), ορίζουμε, για $k = 1, \dots, \nu + 1$,

$$\varphi_{k,\ell}(u,b) = \mathbb{E}\big(e^{-\delta T_b} w(U_b(T_b -), |U_b(T_b)|) 1_{(T_b<\infty, J=\ell)} | U_b(0) = u\big), \; b_{k-1} \leq u \leq b_k, \ell = 1,2,$$

να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για το διάστημα μεταξύ των επιπέδων b_{k-1} και b_k, για $k = 1, \dots, \nu + 1$, όταν η χρεοκοπία προκαλείται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης που προέρχεται από την κλάση $\ell = 1,2$. Επιπλέον θεωρούμε ότι J είναι μια δίτιμη τ.μ. που παριστά την κλάση από την οποία προέρχεται η αποζημίωση που προκαλεί χρεοκοπία, δηλ. $J = \ell$ εάν η χρεοκοπία προκαλείται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την κλάση $\ell = 1,2$. Τότε, η συνάρτηση των Gerber-Shiu της εξίσωσης (4.3) αναλύεται ως

$$\varphi_k(u,b) = \varphi_{k,1}(u,b) + \varphi_{k,2}(u,b), \text{ για } b_{k-1} \leq u \leq b_k \text{ και } k = 1, \dots, \nu + 1.$$

Έστω $\mathbb{P}_{ij} = \mathbb{P}(\cdot\,|\big(I(0), J(0)\big) = (E_i, F_j)$ και $\mathbb{E}_{ij}$ να είναι η μέση τιμή ως προς το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Τότε, για $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, ορίζουμε

$$\varphi_{ij,k,\ell}(u,b) = \mathbb{E}_{ij}\big(e^{-\delta T_b} w(U_b(T_b -), |U_b(T_b)|) 1_{(T_b<\infty, J=\ell)} | U_b(0) = u\big), \; b_{k-1} \leq u \leq b_k, \ell = 1,2,$$

να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής που αντιστοιχεί στο διάστημα μεταξύ των επιπέδων b_{k-1} και b_k, για $k = 1, \dots, \nu + 1$, όταν η χρεοκοπία προέρχεται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την κλάση $l = 1,2$, δοθέντος ότι το αρχικό απόθεμα είναι u και ότι *η διαδικασία* $\big\{\big(I(t), J(T)\big)\big\}_{t\geq 0}$ *ξεκινάει από την κατάσταση* (E_i, F_j). *Τότε, με βάση τους παραπάνω ορισμούς έχουμε ότι*

$$\varphi_{k,\ell}(u,b) = \vec{\gamma}\vec{\Phi}_{k,\ell}(u,b), \qquad b_{k-1} \leq u \leq b_k \;, k = 1, \dots, \nu + 1, \qquad \ell = 1,2,$$

με

$$\vec{\Phi}_{k,\ell}(u,b) = \Big(\varphi_{11,k,\ell}(u,b), \dots, \varphi_{n1,k,\ell}(u,b), \varphi_{12,k,\ell}(u,b), \dots, \varphi_{n2,k,\ell}(u,b), \dots, \varphi_{1m,k,\ell}(u,b), \dots, \varphi_{nm,k,\ell}(u,b)\Big)^T.$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής, $\varphi_{ij,k,\ell}(u,b), 1 \leq i \leq n, \; 1 \leq j \leq m, \ell = 1,2$ ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων. Τότε με βάση το παραπάνω σύστημα δίνουμε την ολοκληροδιαφορική εξίσωση που ικανοποιεί το διάνυσμα των συναρτήσεων Gerber-Shiu $\vec{\Phi}_{k,\ell}(u,b)$.

Θεώρημα 4.1

Για $k=1,\dots,\nu+1$ και $\ell=1,2$, το διάνυσμα των συναρτήσεων Gerber-Shiu, $\vec{\Phi}_{k,\ell}(u,b)$, ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\vec{\Phi}'_{k,\ell}(u,b)=\frac{1}{c_k}(\delta-B\otimes I_n-I_m\otimes A)\vec{\Phi}_{k,l}(u,b)-\frac{1}{c_k}\int_0^{u-b_{k-1}}\left(\left(\vec{b}^T\vec{\beta}\right)\otimes I_nf_2(x)+I_m\otimes(\vec{a}^T\vec{\alpha})f_1(x)\right)\vec{\Phi}_{k,\ell}(u-x,b)dx-\vec{\zeta}_{k,\ell}(u),\ b_{k-1}\le u\le b_k, \tag{4.4}$$

με οριακές συνθήκες

$$c_k\vec{\Phi}'_{k,\ell}(b_k-,b)=c_{k+1}\vec{\Phi}'_{k+1,\ell}(b_k+,b)\text{ και }\vec{\Phi}_{k,\ell}(b_k-,b)=\vec{\Phi}_{k+1,\ell}(b_k+,b),\ \ k=1,\dots,\nu \tag{4.5}$$

και

$$\vec{\zeta}_{k,\ell}(u)=\frac{1}{c_k}\sum_{i=1}^{k-1}\int_0^{u-b_i-1}\left(\left(\vec{b}^T\vec{\beta}\right)\otimes I_nf_2(x)+I_m\otimes(\vec{a}^T\vec{\alpha})f_1(x)\right)\vec{\Phi}_{i,\ell}(u-x,b)dx$$
$$+(\vec{e}_m\otimes\vec{a}^T)\frac{1}{c_k}w_1(u)1_{(\ell=1)}+\left(\vec{b}^T\otimes\vec{e}_n\right)\frac{1}{c_k}w_2(u)1_{(\ell=2)}$$

με

$$w_j(u)=\int_u^\infty w(u,x-u)f_j(x)dx,\qquad j=1,2,$$

<u>Απόδειξη</u>

Αρχικά θεωρούμε το απειροστό χρονικό διάστημα $[0,dt]$. Τότε, για $u\in[b_{k-1},b_k)$ και δεσμεύοντας ως προς την αλλαγή κατάστασης της αλυσίδας $\{(I(t),J(T))\}_{t\ge0}$, σε συνδυασμό με την εμφάνιση ή μη εμφάνιση μιας αποζημίωσης στο $[0,dt]$, έχουμε για $1\le i\le n,\ 1\le j\le m,\ell=1,2$ ότι

$$e^{\delta dt}\varphi_{ij,k,l}(u,b)=\left(1+\left(a_{ii}+b_{jj}\right)dt\right)\varphi_{ij,k,l}(u,+c_kdt,b)+(1+a_{ii}dt)\sum_{v_1=1,v_2\ne j}^m b_{jv_1}dt\,\Phi_{iv_1,k,l}(u+c_kdt,b)+\left(1+b_{jj}dt\right)\sum_{v_2=1,v_1\ne i}^n a_{iv_2}dt\,\Phi_{v_2j,k,l}(u+c_kdt,b)+(1+a_{ii}dt)b_jdt\sum_{v_1=1}^m\beta_{v_1}\left(\int_0^{u,+c_kdt-b_{k-1}}\Phi_{iv_1,k,\ell}(u+c_kdt-x,b)f_2(x)dx+\sum_{l=1}^m\int_{u,+c_kdt-b_l}^{u,+c_kdt-b_{l-1}}\Phi_{iv_1,l,\ell}(u+c_kdt-x,b)f_2(x)dx+w_2(u+c_kdt)1_{(\ell=2)}\right)+\left(1+\right.$$

$b_{jj}dt\big)a_i dt \sum_{v_2=1}^{m} a_{v_2}\left(\int_0^{u,+c_k dt-b_{k-1}} \Phi_{v_2,j,k,\ell}(u+c_k dt-x,b)f_1(x)dx+\right.$

$\left.\sum_{l=1}^{k-1}\int_{u,+c_k dt-b_l}^{u,+c_k dt-b_{l-1}} \Phi_{v_2,j,l,\ell}(u+c_k dt-x,b)f_1(x)dx+w_1(u+c_k dt)1_{(\ell=1)}\right)+0(dt)$.

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με dt, παίρνοντας $dt \to 0$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\omega_j(u)$ είναι μία συνεχής συνάρτηση ως προς u και συνεπώς

$\lim_{dt\to 0} \omega_j(u+c_k dt) = \omega_j\left(\lim_{dt\to}(u+c_k dt)\right)$ για $j = 1,2$, έχουμε ότι

$c_k \vec{\Phi}'_{ij,k,\ell}(u,b) = \delta\varphi_{ij,k,\ell}(u,b) - \sum_{v_1=1}^{m} b_{jv_1}\, \Phi_{iv_1,k,l}(u,b) - \sum_{v_2=1}^{n} a_{iv_2} dt\, \Phi_{v_2 j,k,l}(u,b) -$

$b_j \sum_{v_1=1}^{m} \beta_{v_1}\left(\int_0^{u,+b_{k-1}} \Phi_{iv_1,k,\ell}(u-x,b)f_2(x)dx + \sum_{l=1}^{m}\int_{u,-b_l}^{u,\pm b_{l-1}} \Phi_{iv_1,l,\ell}(u-x,b)f_2(x)dx+\right.$

$\left.w_2(u)1_{(\ell=2)}\right)$

Γράφοντας την παραπάνω εξίσωση σε μορφή πινάκων/διανυσμάτων και χρησιμοποιώντας το γινόμενο Kronecker, μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις παίρνουμε άμεσα την ολοκληροδιαφορική εξίσωση (4.4). Για την απόδειξη των οριακών συνθηκών (4.5), πρώτα παρατηρούμε από την μορφή της εξίσωσης (4.4) ότι το διάνυσμα $\vec{\Phi}_{k,\ell}(u,b)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση ως προς u. Έτσι το διάνυσμα $\vec{\Phi}_{k,\ell}(u,b)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση σε κάθε επίπεδο b_k, $k = 1,\dots,v$, $\ell = 1,2$ δηλαδή ισχύει ότι $\vec{\Phi}_{k,\ell}(b_k-,u) = \vec{\Phi}_{k+1,\ell}(b_k+,u), k = 1,\dots,v,\ \ell = 1,2$. Τότε συνδυάζοντας την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (4.4) και την συνθήκη συνέχειας για το διάνυσμα $\vec{\Phi}_{k,\ell}(ub)$ στα σημεία $u = b_k$, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η δεύτερη οριακή συνθήκη της σχέσης (4.5) είναι αληθής. ■

Στη συνέχεια «χαλαρώνουμε» τους περιορισμούς για το αρχικό κεφάλαιο από $b_{k-1} \le u \le b_k$ σε $u \ge b_{k-1}$ στη μη-ομογενή ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (4.4) και θεωρούμε ότι το διάνυσμα

$$\vec{\Phi}'_{k,\ell}(u) = \left(\varphi_{11,k,l}(u),\dots,\varphi_{12,k,l}(u),\dots,\varphi_{n2,k,l}(u),\dots,\varphi_{1m,k,l}(u),\dots,\varphi_{nm,k,l}(u)\right)^T$$

αποτελεί λύση της ακόλουθης μη-ομογενούς ολοκηρο-διαφορικής εξίσωσης, για $k = 1,\dots,v+1, l = 1,2,$

$$\vec{\varphi}'_{k,\ell}(u) = \frac{1}{c_k}(\delta - B \otimes I_n - I_m \otimes A)\vec{\varphi}_{k,l}(u) - \frac{1}{c_k}\int_0^{u-b_{k-1}} \left(\left(\vec{b}^T \vec{\beta} \right) \otimes I_n f_2(x) + I_m \otimes (\vec{a}^T \vec{\alpha}) f_1(x) \right) \vec{\varphi}_{k,\ell}(u-x)dx - \vec{\zeta}_{k,\ell}(u), \; u \geq b_{k-1} \quad (4.6)$$

Αλλάζοντας την μεταβλητή $y = u - b_{k-1}$ και ορίζοντας $h_{ij,kl}(y) = \varphi_{ij,kl}(u - b_{k-1}), \vec{h}_{k,l}(y) = \vec{\varphi}_{k,l}(u - b_{k-1})$ και $\vec{z}_{k,l}(y) = \vec{\zeta}_{k,l}(u - b_{k-1})$ για $k = 1, \dots, v+1, l = 1,2$, η μη-ομογενής ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (4.6) γίνεται

$$\vec{h}'_{k,\ell}(u) = \frac{1}{c_k}(\delta - B \otimes I_n - I_m \otimes A)\vec{h}_{k,l}(u) - \frac{1}{c_k}\int_0^{y} \left(\left(\vec{b}^T \vec{\beta} \right) \otimes I_n f_2(x) + I_m \otimes (\vec{a}^T \vec{\alpha}) f_1(x) \right) \vec{h}_{k,\ell}(y-x)dx - \vec{z}_{k,\ell}(y), \; y \geq 0 \quad (4.7)$$

Προκειμένου να βρούμε τη συνάρτηση $\vec{h}_{k,l}(y)$ που αποτελεί λύση της παραπάνω ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης, θεωρούμε την αντίστοιχη της (4.7) ομογενή ολκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\vec{h}'_{k,\ell}(u) = \frac{1}{c_k}(\delta - B \otimes I_n - I_m \otimes A)\vec{h}_{k,l}(u) - \frac{1}{c_k}\int_0^{y} \left(\left(\vec{b}^T \vec{\beta} \right) \otimes I_n f_2(x) + I_m \otimes (\vec{a}^T \vec{\alpha}) f_1(x) \right) \vec{h}_{k,\ell}(y-x)dx, \; y \geq 0 \quad (4.8)$$

Θεωρούμε $\hat{\vec{h}}_{k,l}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} \vec{h}_{k,l}(y)dy$, για $k = 1, \dots, v+1, \; l = 1,2 \; και \, \Re(s) \geq 0$, να είναι ο μετασχηματισμός Laplace του διανύσματος $\vec{h}_{k,l}(y)$. Έτσι, παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της εξίσωσης (4.8), και παραγοντοποιώντας ως προς τη συνάρτηση $\hat{\vec{h}}_{k,l}(s)$ βρίσκουμε ότι, για $k = 1, \dots, v+1$, $και \, \Re(s) \geq 0$

$$L_{k,\delta} \hat{\vec{h}}_{k,l}(s) = \vec{h}_{k,l}(0), \quad (4.9)$$

όπου

$$L_{k,\delta}(s) = (c_k s - \delta) I_{nm} + B \otimes I_n - I_m \otimes A + \left(\vec{b}^T \vec{\beta} \right) \otimes I_n \hat{f}_2(s) + I_m \otimes (\vec{a}^T \vec{a}) \hat{f}_1(s).$$

Πρόταση 4.1

Για $\delta = 0$, η χαρακτηριστική εξίσωση $det L_{k,0}(s) = 0$ εχει ακριβώς μια ρίζα στο σημείο 0 και $nm - 1$ ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο με θετικά πραγματικά μέρη.

Απόδειξη, Βλέπε A. Paraioannou (2011)

Ο υπολογισμός της λύσης της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.6) γίνεται με βάση τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $L_{k,\delta}(s) = 0$, που δίνονται από το Λήμμα 4.1, καθώς και με τη βοήθεια του παρακάτω Θεωρήματος

Θεώρημα 4.2

Έστω $\vec{x}(t)$ ένα $n \times 1$ διάνυσμα πραγματικών παραγωγίσιμων συναρτήσεων, που ικανοποιεί τις ακόλουθες ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις

$$\vec{x}'(t) = P\vec{x}(t) + \int_0^t M(t-s)\vec{x}(s)ds + \vec{n}(t),\ t \geq 0, \tag{4.10}$$

και

$$\vec{x}'(t) = P\vec{x}(t) + \int_0^t M(t-s)\vec{x}(s)ds,\ t \geq 0, \tag{4.11}$$

όπου P ένας $n \times n$ πίνακας με τα στοιχεία του σταθερούς όρους, $M(t)$ ένας $n \times n$ πίνακας συνεχών συναρτήσεων στο $[0, \infty)$ και $\vec{n}(t)$ ένα $n \times 1$ διάννσμα συνεχών συναρτήσεων στο $[0, \infty)$.

Επιπλέον, έστω $Z(t)$ ένας $n \times n$ πίνακας οι στήλες του οποίου αποτελούν λύσεις της ομογενής ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.11), με $Z(0) = I$, όπου I ο $n \times n$ ταυτοτικός πίνακας.

Τότε, για $t \geq 0$, η λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.10) δίνεται από τη σχέση

$$\vec{x}(t) = Z(t)\vec{x}(t) + \int_0^t Z(t-s)\,\vec{n}(s)ds.$$

Απόδειξη, Βλέπε Burton (2005).

Αντιστρέφοντας την εξίσωση (4.9) ως προς s έχουμε ότι

$$\vec{h}_{k,l}(y) = v_k(y)\vec{h}_{k,l}(0) \quad \mu\varepsilon \quad v_k(y) = \mathcal{L}^{-1}\left(\left[L_{k,\delta}(s)\right]^{-1}\right), \tag{4.12}$$

όπου $\mathcal{L}^{-1}$ συμβολίζει τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.

Τώρα, θεωρούμε τον $nm \times nm$ πίνακα $v_k(y) = \left(v_{ij,k}(y)\right)_{i,j=1}^{nm}$ του οποίου οι στήλες αποτελούν λύσεις της εξίσωσης (4.8), με $v_k(0) = I_{nm}$. Τότε, από το Θεώρημα 4.2, η λύση της μη-ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.7) δίνεται από τη σχέση

$$\vec{h}_{k,l}(y) = v_k(y)\vec{h}_{k,l}(0) - \int_0^y v_k(x)\vec{z}_{k,l}(y-x)\,dx,\ y \geq 0. \tag{4.13}$$

Αλλάζοντας τη μεταβλητή $y = u - b_{k-1}$, βρίσκουμε τη λύση του μη-ομογενούς εξίσωσης (4.6) όπως δίνεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.2

Για $k = 1, \dots, \nu + 1,\ l = 1,2$, θεωρούμε ότι $v_k(y) = \left(v_{ij,k}(y)\right)_{i,j=1}^{nm}, y \geq 0$, ένα πίνακα διαστάσεων $nm \times nm$, του οποίου οι στήλες είναι λύσεις της ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.8), με $v_k(0) = I_{nm}$. Τότε, η γενική λύση της μηομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.6) δίνεται από τη σχέση

$$\vec{\varphi}_{k,l}(u) = v_k(u - b_{k-1})\vec{\varphi}_{k,l}(b_{k-1}) - \int_0^{u-b_{k-1}} v_k(x)\vec{\zeta}_{k,l}(u - x)\, dx,\ u \geq b_{k-1}. \qquad (4.14)$$

με $\vec{\zeta}_{k,l}(u)$ όπως δίνεται από το Θεώρημα 4.1.

Για να ολοκληρώσουμε την λύση για την $\vec{\varphi}_{k,l}(u)$, χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε τόσο τις αρχικές τιμές $\vec{\varphi}_{k,l}(b_{k-1})$ για $k = 1, \dots, \nu + 1,\ l = 1,2,$ όσο και τον πίνακα $v_k(y)$. Ο υπολογισμός του πίνακα $v_k(y)$, γίνεται χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Laplace.

Έστω $\hat{v}_k(s) = \left(\hat{v}_{ij,k}(s)\right)_{i,j=1}^{nm}$ ένας $nm \times nm$ πίνακας του οποίου τα στοιχεία $\hat{v}_{ij,k}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} v_{ij,k}(y) dy$ είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των $v_{ij,k}(y)$. Επιπλέον από το γεγονός ότι οι στήλες του πίνακα $v_k(y)$ αποτελούν λύσεις της εξίσωσης (4.8), έπεται ότι ο πίνακας $\hat{v}_k(s)$ ικανοποιεί την εξίσωση (4.9), και συνεπώς χρησιμοποιώντας ότι $v_k(0) = I_{nm}$, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η ακόλουθη σχέση είναι αληθής

$$\hat{v}_k(s) = c_k\left[L_{k,\delta}(s)\right]^{-1} = \frac{c_k L_{k,\delta}^*(s)}{det L_{k,\delta}(s)}, \qquad (4.15)$$

όπου $L_{k,\delta}^*(s)$ είναι ο πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων του πίνακα $L_{k,\delta}(s)$. Ο μετασχηματισμός Laplace, $\hat{v}_k(s)$, της παραπάνω εξίσωσης αντιστρέφεται σε ορισμένες μόνο περιπτώσεις. Έτσι θεωρούμε την περίπτωση όπου τα μεγέθη των αποζημιώσεων ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών. Σε αυτή την περίπτωση οι μετασχηματισμοί Laplace των σ.π.π. f_1 και f_2 έχουν την μορφή πηλίκων πολυωνύμων όπως δίνεται στην παρακάτω σχέση

$$\hat{f}_i(s) = \frac{p_{k_{i-1}}(s)}{p_{k_i}(s)},\ p_{k_{i-1}}(0) = p_{k_i}(0),\ i = 1,2, \qquad (4.16)$$

όπου $p_{k_{i-1}}(s)$ είναι πολυώνυμα βαθμού k_{i-1} ή μικρότερου και $p_{k_i}(s)$ είναι πολυώνυμα βαθμού k_i, με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου ισο με 1. Επιπλέον η εξίσωση $p_{k_i}(s)=0$ για $i=1{,}2$, έχει μόνο ρίζες με αρνητικά πραγματικά μέρη.

Όταν τα μεγέθη των αποζημιώσεων ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών, τότε τα στοιχεία του πίνακα $v_k(y)=\left(v_{ij,k}(y)\right)_{i,j=1}^{nm}$ μπορούν να βρεθούν μέσω της παρακάτω πρότασης.

Πρόταση 4.3.

Εάν οι μετασχηματισμοί Laplace, $\widehat{f}_i(s), i=1{,}2$, των μεγεθών των αποζημιώσεων και από τις δύο κλάσεις έχουν τη μορφή πηλίκου πολυωνύμων όπως στην εξίσωση (4.16), τότε τα στοιχεία του πίνακα $v_k(y)=\left(v_{ij,k}(y)\right)_{i,j=1}^{nm}$ υπολογίζονται με βάση τη σχέση

$$v_{ij,k}(y)=\sum_{l_1=1}^{nm}\bar{\alpha}_{ij,k}\,(l_1)e^{r_{l_1,k}y}+\sum_{l_2=1}^{(k_1+k_2)nm}\bar{\beta}_{ij,k}\,(l_2)e^{-R_{l_2,k}y},\qquad y\geq 0,$$

με

$$\bar{\alpha}_{ij,k}(l_1)=\frac{\left(\prod_{i=1}^{2}pk_i\,(r_{l_1,k})\right)^{nm}\left(L_{k,\delta}^{*}(r_{l_1,k})\right)_{i,j}}{c_k^{nm-1}\prod_{\nu=1,\nu\neq l_1}^{nm}\left(r_{\nu,k}-r_{l_1,k}\right)\prod_{j=1}^{(k_1+=k_2)nm}\left(r_{l_1,k}+R_{j,k}\right)},$$

$$\bar{\beta}_{ij,k}(l_2)=\frac{\left(\prod_{i=1}^{2}pk_i\,(-R_{l_2,k})\right)^{nm}\left(L_{k,\delta}^{*}(-R_{l_2,k})\right)_{i,j}}{(-1)c_k^{nm-1}\prod_{j=1}^{nm}\left(r_{j,k}+R_{l_2,k}\right)\prod_{\nu=1,\nu\neq l_1}^{(k_1+=k_2)nm}\left(R_{\nu,k}-R_{l_2,k}\right)},$$

όπου $\left(L_{k,\delta}^{*}(s)\right)_{i,j}$ είναι το (i,j)-στοχείο του πίνακα $L_{k,\delta}^{*}(s)$ και $r_{l_1,k}$ με $\Re\left(r_{l_1,k}\right)>0$ για $l=1,\ldots,nm$, καθώς και $-R_{l_2,k}$ με $\Re\left(R_{l_2,k}\right)>0$ για $l_2=1,\ldots,(k_1+k_2)nm$ είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $detL_{k,\delta}(s)=0$ για μεγέθη αποζημιώσεων όπως στην εξίσωση (4.16).

<u>Απόδειξη</u>

Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή της εξίσωσης (4.15) με $\left(\prod_{i=1}^{2}pk_i\,(s)\right)^{nm}$ τότε το (i,j)-στοιχείο του πίνακα $\hat{v}_k(s)=\left(\hat{v}_{ij,k}(s)\right)_{i,j=1}^{nm}$ δίνεται από τη σχέση

$$\hat{v}_{ij,k}(s) = \frac{\left(\prod_{i=1}^{2} pk_i(s)\right)^{nm} \left(L_{k,\delta}^{*}(s)\right)_{i,j}}{\left(\prod_{i=1}^{2} pk_i(s)\right)^{nm} detL_{k,\delta}(s)}. \tag{4.17}$$

Ο αριθμητής της παραπάνω εξίσωσης είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $(k_1 + k_2 + 1)nm$ με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου το c^{nm}. Ανακαλώντας από την Πρόταση 4.1 ότι η εξίσωση $detL_{k,\delta}(s) = 0$ έχει ρίζες τα $r_{i,k}, i = 1, \dots, nm$ ρίζες με $\Re(r_{i,k}) > 0$ καθώς επίσης και ότι η εξίσωση $pk_i(s) = 0$ έχει μόνο ρίζες με αρνητικά πραγματικά μέρη, έστω τις $-R_{j,k}, j = 1, \dots, k_i, i = 1,2$ με $\Re(R_{j,k}) > 0$, τότε έπεται ότι ο παρονομαστής της εξίσωσης (4.17) μπορεί, ισοδύναμα, να γραφεί ως

$$\left(\prod_{i=1}^{2} pk_i\,(s)\right)^{nm} detL_{k,\delta}(s) = c_k^{nm} \prod_{i=1}^{nm} (s + r_{i,k}) \prod_{j=1}^{(k_1+k_2)nm} (s - R_{j,k}).$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω στην εξίσωση (4.25) και χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων, έχουμε ότι

$$\hat{v}_{ij,k}(s) = \sum_{l_1=1}^{nm} \frac{\bar{\alpha}_{ij,k}(l_1)}{s - r_{l_1,k}} + \sum_{l_2=1}^{(k_1+k_2)nm} \frac{\bar{\beta}_{ij,k}(l_2)}{s + R_{l_2,k}},$$

απ' όπου αντιστρέφοντας ως προς s παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα.■

Έχοντας υπολογίσει τον πίνακα $v_k(y)$ για να ολοκληρώσουμε την λύση για την $\vec{\varphi}_{k,l}(u)$, χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε τις αρχικές τιμές $\vec{\varphi}_{k,l}(b_{k-1})$ για $k = 1, \dots, v + 1,\ l = 1,2$. Ο υπολογισμός των αρχικών τιμών γίνεται ακολουθώντας όμοια μεθοδολογία με αυτή στον Badescu (2008), χρησιμοποιώντας τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $detL_{k,\delta}(s) = 0$, που δίνονται από την Πρόταση 4.1 και τους τελεστές T_r για πίνακες/διανύσματα. Έτσι, όμοια με τον Ορισμό 1.12, ορίζουμε τον τελεστή T_r για πίνακες/διανύσματα ακολούθως.

Έστω $P(x)$ ένας πίνακας/διάνυσμα του οποίου τα στοιχεία είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ως προς x. Τότε ο τελεστής $T_r P(x)$ ως προς κάποιο μιγαδικό αριθμό r ορίζεται ως

$$T_r P(x) = \int_x^{\infty} e^{-r(u-x)} P(u) du, \qquad \Re(r) \geq 0.$$

Τώρα, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (4.6) με $e^{-s(u-b_{k-1})}$ και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας ως προς u από $u = b_{k-1}$ έως $u = \infty$ παίρνουμε ότι, για $k = 1, \dots, \nu + 1,\ l = 1,2$

$$\frac{1}{c_k} L_{k,\delta}(s) T_s \vec{\varphi}_{k,l}(b_{k-1}) = \vec{\varphi}_{k,l}(b_{k-1}) - T_s \vec{\zeta}_{k,l}(b_{k-1}). \qquad (4.18)$$

Επιπλέον από την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2 έχουμε ότι η εξίσωση $det L_{k,\delta}(s) = 0$ έχει ακριβώς nm ρίζες. Έτσι για κάθε $s = r_{i,k}$, ο πίνακας $L_{k,\delta}(r_i, k),\ i = 1, \dots, nm$, έχει ίδια ιδιοτιμή στο σημείο 0. Συνεπώς, για κάθε $r_{i,k}$ ορίζουμε $\vec{q}_{i,k}$ να είναι το αντίστοιχο αριστερό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $L_{k,\delta}(r_i, k)$ ως προς την ιδιοτιμή στο σημείο 0, τέτοιο ώστε $\vec{q}_{i,k} L_{k,\delta}(r_i, k) = \vec{0}_{nm}, \forall\, i = 1, \dots, nm$. Αντικαθιστώντας $s = r_{i,k}$ στην εξίσωση (4.18) και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της προκύπτουσας εξίσωσης με $\vec{q}_{i,k}$, παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα των nm εξισώσεων, για $k = 1, \dots, \nu + 1,\ l = 1,2$

$$\vec{q}_{i,k}\left(\vec{\varphi}_{k,l}(b_{k-1}) - T_{r_{i,k}} \vec{\zeta}_{k,l}(b_{k-1})\right) = \frac{1}{c_k} \vec{q}_{i,k} L_{k,\delta}(r_{i,k}) T_{r_{i,k}} \vec{\varphi}_{k,l}(b_{k-1}) = \vec{0}_{nm}.$$

Έστω $Q_k = \left(\vec{q}_{1,k}, \dots, \vec{q}_{nm,k}\right)^T$, ένας τετραγωνικός πίνακας διαστάσεων $nm \times nm$, που συμβολίζει τον πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων. Τότε, οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν, ισοδύναμα, να γραφούν σε μορφή πινάκων ως

$$Q_k \vec{\varphi}_{k,l}(b_{k-1}) = \sum_{i=1}^{nm} diag\left(T_{r_{1,k}} \vec{\zeta}_{k,l}(b_{k-1}), \dots, T_{r_{nm,k}} \vec{\zeta}_{k,l}(b_{k-1})\right) Q_k \vec{1}_i,$$

όπου $\vec{1}_i$ αντιστοιχεί την i-στήλη του $nm \times nm$ ταυτοτικού πίνακα. Τέλος, από την υπόθεση ότι τα $r_{i,k}$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους, έχουμε ότι τα διανύσματα $\vec{q}_{1,k}, \dots, \vec{q}_{nm,k}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και συνεπώς [βλ. Badescu (2008)] ο πίνακας Q_k είναι αντιστρέψιμος.

Έτσι το διάνυσμα των αρχικών τιμών, $\vec{\varphi}_{k,l}(b_{k-1})$, για $k = 1, \dots, \nu + 1,\ l = 1,2$ δίνεται από τη σχέση

$$\vec{\varphi}_{k,l}(b_{k-1}) = \sum_{i=1}^{nm} Q_k^{-1} diag\left(T_{r_{1,k}} \vec{\zeta}_{k,l}(b_{k-1}), \dots, T_{r_{k,nm}} \vec{\zeta}_{k,l}(b_{k-1})\right) Q_k \vec{1}_i, \qquad (4.19)$$

Από την Πρόταση 4.3 και την παραπάνω εξίσωση είναι φανερό ότι γνωρίζουμε όλες της ποσότητες που χρειάζονται για τον υπολογισμό του διανύσματος $\vec{\varphi}_{k,l}(b_{k-1})$ που δίνεται από την Πρόταση 4.2.

4.3 Αναδρομικός υπολογισμός της συνάρτησης των Gerber-Shiu

Σε αυτή την ενότητα, δείχνουμε πως το αποτέλεσμα της Πρότασης 4.2 μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να βρούμε έναν αναδρομικό τύπο υπολογισμού για το διάνυσμα των συναρτήσεων Gerber-Shiu, $\vec{\varphi}_{k,l}(u,b)$

Ανακαλώντας το Θεώρημα 4.1 και «χαλαρώνοντας» στην εξίσωση (4.4) τους περιορισμούς για το αρχικό κεφάλαιο σε $u \geq b_{k-1}$, έπεται ότι το διάνυσμα των συναρτήσεων των Gerber-Shiu, $\vec{\varphi}_{k,l}(u,b)$, ικανοποιεί την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση τη σχέσης (4.6) και επομένως η λύση του μπορεί να βρεθεί μέσω της Πρότασης 4.2. Χρησιμοποιώντας πρώτα το αποτέλεσμα της Πρότασης 4.2 με $\vec{\varphi}_{k,l}(u,b)$ στη θέση του διανύσματος $\vec{\varphi}_{k,l}(u)$ και στη συνέχεια επαναφέροντας τον αρχικό περιορισμό για το αρχικό κεφάλαιο, δηλαδή αλλάζοντας τον περιορισμό $u \geq b_{k-1}$ σε $b_{k-1} < u < b_k$, έχουμε ότι, για $k = 1, \dots, v+1$

$$\vec{\varphi}_{k,l}(u,b) = \nu_k(u - b_{k-1})\vec{\varphi}_{k,l}(b_{k-1},b) - \int_0^{u-b_{k-1}} \nu_k(x)\vec{\zeta}_{k,l}(u-x)dx\,,\ b_{k-1} < u < b_k. \quad (4.20)$$

Η περίπτωση $u = b_{k-1}$ ισχύει λόγω της συνέχειας της συνάρτησης $\vec{\varphi}_{k,l}(u,b)$ ως προς u. Τώρα, συγκρίνοντας τις εξισώσεις (4.14) και (4.20), παρατηρούμε ότι ο τελευταίος όρος του δεξιού μέλους και στις δυο εξισώσεις είναι κοινός. Έτσι, αλλάζοντας στην εξίσωση (4.14) τον περιορισμό για το αρχικό κεφάλαιο σε $b_{k-1} < u < b_k$, παρατηρούμε ότι ο όρος $\int_0^{u-b_{k-1}} \nu_k(x)\vec{\zeta}_{k,l}(u-x)dx$ είναι ακριβώς ο ίδιος και με ακριβώς τους ίδιους περιορισμούς για το αρχικό κεφάλαιο. Επομένως, αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο προαναφερόμενες εξισώσεις παίρνουμε για $k = 1, \dots, v+1$ και $l = 1,2$ ότι

$$\vec{\varphi}_{k,l}(u,b) = \nu_k(u - b_{k-1})\vec{\varphi}_{k,l}(b_{k-1},b) + \vec{\varphi}_{k,l}(u) - \nu_k(u - b_{k-1})\vec{\varphi}_{k,l}(b_{k-1}) = \vec{\varphi}_{k,l}(u) + \nu_k(u - b_{k-1})\left(\vec{\varphi}_{k,l}(b_{k-1},b) - \vec{\varphi}_{k,l}(b_{k-1})\right) = \vec{\varphi}_{k,l}(u) + \nu_k(u - b_{k-1})\vec{\eta}_{k,l}(b),\ b_{k-1} < u < b_k, \quad (4.21)$$

όπου $\vec{\eta}_{k,l}(b) = \vec{\varphi}_{k,l}(b_{k-1},b) - \vec{\varphi}_{k,l}(b_{k-1})$ είναι ένα άγνωστο διάνυσμα, διότι το $\vec{\varphi}_{k,l}(b_{k-1},b)$ είναι ένα άγνωστο διάνυσμα, το οποίο θα προσδιορίσουμε με βάση τις οριακές συνθήκες του Θεωρήματος 4.1. Χρησιμοποιώντας την πρώτη οριακή συνθήκη της σχέσης (4.5) και την εξίσωση (4.21) έχουμε για $k = 1, \dots, v+1$ και $l = 1,2$ ότι

$$\nu_k(u - b_{k-1})\vec{\eta}_{k,l}(b) + \vec{\varphi}_{k,l}(u) = \nu_{k+1}(0)\vec{\eta}_{k,l}(b) + \vec{\varphi}_{k,l}(b_k)$$

Επιπλέον, ανακαλώντας από την Πρόταση 4.2 ότι $\nu_{k+1}(0) = I_{nm}$, τότε η παραπάνω εξίσωση μας δίνει ένα αναδρομικό τρόπο υπολογισμού του διανύσματος $\vec{\eta}_{k+1,l}(b)$ που δίνεται από τη σχέση

$$\vec{\eta}_{k+1,l}(b) = \vec{\varphi}_{k,l}(b_k) - \vec{\varphi}_{k+1,l}(b_k) + \nu_k(b_k - b_{k-1})\vec{\eta}_{k,l}(b), \qquad k = 1, \dots, v$$

όπου τα διανύσματα $\vec{\varphi}_{k+1,l}(b_k)$ και $\vec{\varphi}_{k,l}(b_k)$ υπολογίζονται με βάση την εξίσωση (4.19). Ακόμη, για $k = 1, \dots, v + 1$ και $l = 1,2$, η συνάρτηση $\vec{\varphi}_{v+1,l}(u, b)$ ικανοποιεί την εξίσωση (4.20) για $u \geq b_v$. Επομένως για $k = 1, \dots, v + 1$ και $l = 1,2$ οι εξισώσει (4.14) και (4.20) είναι ακριβώς οι ίδιες και συνεπώς

$$\vec{\varphi}_{v+1,l}(u, b) = \vec{\varphi}_{v+1,l}(u), \qquad u \geq b_v, l = 1,2$$

Έτσι από την παραπάνω εξίσωση και από την εξίσωση (4.21) για $k = v + 1$ παίρνουμε άμεσα ότι $\vec{\eta}_{k+1,l}(b) = \vec{0}_{nm}$.
Τέλος, συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 4.3

Για $k = 1, \dots, v + 1$ και $l = 1,2$, το διάνυσμα των αναμενόμενων προεξοφλημενων συναρτήσεων ποινής, $\vec{\varphi}_{k,l}(u, b)$, δίνεται από τη σχέση

$$\vec{\varphi}_{k,l}(u, b) = \vec{\varphi}_{k,l}(u) + \nu_k(u - b_{k-1})\vec{\eta}_{k,l}(b), \; b_{k-1} < u < b_k, \tag{4.22}$$

όπου τα διανύσματα $\vec{\varphi}_{k,l}(u)$ και $\vec{\eta}_{k,l}(b)$ υπολογίζονται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$\vec{\varphi}_{k,l}(u) = \nu_k(u - b_{k-1})\vec{\varphi}_{k,l}(b_{k-1}) - \int_0^{u-b_{k-1}} \nu_k(x)\vec{\zeta}_{k,l}(u - x)dx, \qquad u \geq b_{k-1}$$

και

$$\begin{cases} \vec{\eta}_{k+1,l}(b) = \vec{\varphi}_{k,l}(b_k) - \vec{\varphi}_{k+1,l}(b_k) + \nu_k(b_k - b_{k-1})\vec{\eta}_{k,l}(b), \qquad k = 1, \dots, v \\ \vec{\eta}_{v+1,l}(b) = \vec{0}_{nm} \end{cases}$$

αντίστοιχα.

Παρατήρηση 4.3

- Η εξίσωση (4.22) μας παρέχει μία αλγοριθμική προσέγγιση για τον υπολογισμό του διανύσματος $\vec{\varphi}_{k,l}(u, b)$ με αρχικό σημείο εκκίνησης το διάνυσμα των συναρτήσεων Gerber-Shiu χωρίς την ύπαρξη κάποιας μερισματικής στρατηγικής, το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από την Πρόταση 4.2. Τότε, το διάνυσμα $\vec{\varphi}_{1,l}$ δίνεται από τη σχέση

$$\vec{\varphi}_{1,l}(u) = v_1(u)\vec{\varphi}_{1,l}(0) - \int_0^u v_1(x)\vec{\zeta}_{1,l}(u-x)dx\,, \qquad u \geq 0,$$

όπου το διάνυσμα $\vec{\varphi}_{1,l}(u)$ υπολογίζετε με βάση την εξίσωση (4.19) για $k = 1$

- Από τον αναδρομικό τρόπο υπολογισμού του Θεωρήματος 4.3, έχουμε ότι τα διανύσματα $\vec{\eta}_{k,l}(b)$ για $k = 1, \dots, v+1$ και $l = 1,2$, βρίσκονται, για κάθε επίπεδο των b_i, σε όρους του διανύσματος $\vec{\eta}_{1,l}(b)$, όπου το $\vec{\eta}_{1,l}(b)$ υπολογίζεται στο τελευταίο επίπεδο, δηλ. λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων $\vec{\eta}_{v+1,l}(b) = \vec{0}_{nm}$.

4.4 Η αναμενόμενη παρούσα αξία των σωρευτικών μερισμάτων

Μελετούμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη αξία των σωρευτικών μερισμάτων για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων.

Αρχικά ορίζουμε

$$D_{u,b} = \int_0^{T_b} e^{-\delta t} D(t),$$

να είναι η παρούσα αξία των σωρευτικών μερισμάτων μέχρι το χρόνο χρεοκοπίας, με $D(t)$ να είναι τα συνολικά μερίσματα που καταβάλλονται στους δικαιούχους της ασφάλισης μέχρι το χρόνο t.

Τότε, η αναμενόμενη παρούσα αξία των συνολικών μερισμάτων πριν τη χρεοκοπία μεταξύ δύο διαδοχικών επιπέδων, δηλ. όταν το αρχικό απόθεμα είναι μεταξύ του b_{k-1} και b_k, για $k = 1, \dots, v+1$, ορίζεται ως

$$V_k(u,b) = \mathbb{E}\big(D_{u,b} \big| U_b(0) = u\big), \qquad b_{k-1} \leq u \leq b_k, \tag{4.23}$$

Επίσης,

$$V_{k,\ell}(u,b) = \mathbb{E}\big(D_{u,b} 1_{(J=l)} \big| U_b(0) = u\big), \qquad b_{k-1} \leq u \leq b_k, \ell = 1,2,$$

να είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία των συνολικών μερισμάτων πριν τη χρεοκοπία που αντιστοιχεί μεταξύ των επιπέδων b_{k-1} και b_k, για $k = 1, \dots, v+1$, όταν η χρεοκοπία προκαλείται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την κλάση $\ell = 1,2$. Επομένως, η αναμενόμενη παρούσα αξία των συνολικών μερισμάτων που ορίσθηκε στην εξίσωση (4.23) αναλύεται ως $V_k(u,b) = V_{k,1}(u,b) + V_{k,2}(u,b)$

Επιπλέον, για $1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m$, ορίζουμε

$$V_{ij,k,\ell}(u,b) = \mathbb{E}_{ij}\big(D_{u,b}1_{(J=\ell)}\big|U_b(0) = u\big), \qquad b_{k-1} \le u \le b_k, \ell = 1,2$$

να είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία των σωρευτικών μερισμάτων πριν τη χρεοκοπία, όταν η χρεοκοπία προέρχεται από την εμφάνιση αποζημίωσης από την κλάση $\ell = 1,2$, δοθέντος ότι το αρχικό απόθεμα είναι u και ότι η διαδικασία $\{(I(t),J(t))\}_{t\ge 0}$ ξεκινάει από την κατάσταση (E_i, F_j). Συνεπώς, έχουμε ότι

$$V_{k,\ell}(u,b) = \vec{\gamma}\vec{V}_{k,\ell}(u,b), \qquad b_{k-1} \le u \le b_k, \qquad \kappa = 1,\dots,v+1, \qquad \ell = 1,2$$

όπου $\vec{\gamma}\vec{V}_{k,\ell}(u,b) = \Big(V_{11,k,\ell}(u,b),\dots,V_{n1,k,\ell}(u,b),V_{12,k,\ell}(u,b),\dots,V_{n2,k,\ell}(u,b),\dots,V_{nm,k,\ell}(u,b)\Big)^T$. Με βάση το παραπάνω σύστημα δίνουμε την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί το διάνυσμα των συναρτήσεων των αναμενόμενων προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων $\vec{V}_{k,l}(u,b)$.

Θεώρημα 4.4

Για $k = 1,\dots,v+1$ και $\ell = 1,2$, το διάνυσμα των αναμενόμενων προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων $\vec{V}_{k,l}(u,b)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$\vec{V}'_{k,\ell}(u,b) = \frac{1}{ck}(\delta - B \otimes \mathrm{I}_n - \mathrm{I}_m \otimes \mathrm{A})\vec{V}_{k,\ell}(u,b) -$$

$$\frac{1}{ck}\int_0^{u-b_{k-1}} \Big(\big(\vec{b}^T\vec{\beta}\big) \otimes \mathrm{I}_n f_2(x) + \mathrm{I}_m \otimes (\vec{a}^T\vec{\alpha})f_1(x)\Big)\vec{V}_{k,\ell}(u-x,b)dx \qquad (4.24)$$

με οριακές συνθήκες

$$\vec{V}_{k,\ell}(b_k-,b) = \vec{V}_{k+1,\ell}(b_k+,b),\ k = 1,\dots,v \qquad (4.25)$$

$$c_k\vec{V}'_{k,\ell}(b_k-,b) = c_k\vec{V}'_{k+1,\ell}(b_k+,b) + (c - c_{k+1})\vec{V}_{k+1,\ell}(b_k+,b),\ k = 1,\dots,v \qquad (4.26)$$

και

$$\vec{\xi}_{k,l}(u) = \frac{1}{c_k}(\mathrm{c} - \mathrm{c}_k)\vec{\mathrm{e}}_{nm} + \frac{1}{c_k}\sum_{i=1}^{k-1}\Big(\big(\vec{b}^T\vec{\beta}\big) \otimes \mathrm{I}_n f_2(x) + \mathrm{I}_m \otimes (\vec{a}^T\vec{\alpha})f_1(x)\Big)\vec{V}_{k,\ell}(u-x,b)dx$$

Απόδειξη

Θεωρούμε το απειροστό χρονικό διάστημα $[0,dt]$. Τότε, για $u\in[b_{k-1},b_k)$ και δεσμεύοντας ως προς την αλλαγή κατάστασης της αλυσίδας $\{(I(t),J(t))\}_{t\geq 0}$, σε συνδυασμό με την εμφάνιση ή μη εμφάνιση μιας αποζημίωσης, έχουμε για $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq m$, $\ell=1,2$, ότι

$$
\begin{aligned}
V_{ij,k,l}(u,b) &= (c-c_k)\big(1+(a_{ii}+b_{jj})dt\big)V_{ij,k,l}(u,+c_k dt,b)e^{-\delta dt} \\
&+ (1+a_{ii}dt)\sum_{v_1=1,v_1\neq j}^{m} b_{jv_1}dt\, V_{iv_1,k,l}(u+c_k dt,b)e^{-\delta dt} \\
&+ \big(1+b_{jj}dt\big)\sum_{v_2=1,v_2\neq i}^{n} a_{iv_2}dt\, V_{v_2 j,k,l}(u+c_k dt,b)e^{-\delta dt} \\
&+ (1+a_{ii}dt)(1 \\
&+)b_j dt\sum_{v_1=1}^{m}\beta_{v_1}\left(\int_0^{u,+c_k dt-b_{k-1}} V_{iv_1,k,\ell}(u+c_k dt-x,b)f_2(x)dx\right. \\
&\left.+\sum_{l=1}^{m}\int_{u,+c_k dt-b_l}^{u,+c_k dt-b_{l-1}} V_{iv_1,l,\ell}(u+c_k dt-x,b)f_2(x)dx\right)e^{-\delta dt} \\
&+ \big(1+b_{jj}dt\big)(1 \\
&+)a_i dt\sum_{v_2=1}^{m} a_{v_2}\left(\int_0^{u,+c_k dt-b_{k-1}} V_{v_2,j,k,\ell}(u+c_k dt-x,b)f_1(x)dx\right. \\
&\left.+\sum_{l=1}^{k-1}\int_{u,+c_k dt-b_l}^{u,+c_k dt-b_{l-1}} V_{v_2,j,l,\ell}(u+c_k dt-x,b)f_1(x)dx\right)+0(dt)
\end{aligned}
$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με dt, παίρνοντας $dt\to 0$ παίρνουμε άμεσα ότι

$$
\begin{aligned}
c_k V'_{ij,k,\ell}(u,b) &= \delta V_{ij,k,\ell}(u,b) - \sum_{v_1=1}^{m} b_{jv_1} V_{iv_1,k,l}(u,b) - \sum_{v_2=1}^{n} a_{iv_2} V_{v_2 j,k,l}(u,b) \\
&- b_j\sum_{v_1=1}^{m}\beta_{v_1}\left(\int_0^{u,+b_{k-1}} V_{iv_1,k,\ell}(u-x,b)f_2(x)dx + \sum_{l=1}^{k-1}\int_{u-b_l}^{u-b_{l-1}} V_{iv_1,l,\ell}(u-x,b)f_2(x)dx\right) \\
&- a_i\sum_{v_2=1}^{m}\alpha_{v_2}\left(\int_0^{u,+b_{k-1}} V_{v_2 j,k,\ell}(u-x,b)f_1(x)dx + \sum_{l=1}^{k-1}\int_{u-b_l}^{u-b_{l-1}} V_{v_2 j,l,\ell}(u-x,b)f_1(x)dx\right) \\
&+ (c-c_k)
\end{aligned}
$$

Γράφοντας την παραπάνω εξίσωση σε μορφή πινάκων/διανυσμάτων και χρησιμοποιώντας το γινόμενο Kronecker, μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις παίρνουμε άμεσα την ολοκληροδιαφορική εξίσωση (4.24). Για να δείξουμε την οριακή συνθήκη της εξίσωσης (4.26), αρκεί να συνδυάσουμε την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (4.24) και την συνθήκη συνέχειας για το διάνυσμα $\vec{V}_{k,\ell}(u,b)$ στα σημεία $u=b_k$.■

Παρατήρηση 4.4

Θεωρούμε ότι η παράγωγος $\vec{V}'_{k,\ell}(u,b)$ στην εξίσωση (4.24) είναι δεξιά παράγωγος της συνάρτησης $\vec{V}_{k,\ell}(u,b)$. Επομένως στην εξίσωση (4.4) ο περιορισμός για το αρχικό κεφάλαιο $b_k<u<b_{k-1}$ μπορεί να αντικατασταθεί με $b_k\le u\le b_{k-1}$.

Τώρα, δείχνουμε πως μπορεί να υπολογισθεί η λύση της ομογενής ολοκλκηρο-διαφορικής εξίσωσης μέχρι το επίπεδο b_1, την οποία στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να κατασκευάσουμε έναν αναδρομικό τρόπο υπολογισμού για το διάνυσμα $\vec{V}_{k,\ell}(u,b)$.

Αλλάζοντας, στην εξίσωση (4.24), τους περιορισμούς για το αρχικό κεφάλαιο σε $u\ge b_{k-1}$, το διάνυσμα $\vec{V}_{k,\ell}(u,b)$ ικανοποιεί την μη-ομογενή ολοκληροδιαφορική εξίσωση (4.6), με τη διαφορά ότι ο μη-ομογενής όρος, $\vec{\zeta}_{k,\ell}(u)$ αντικαθίσταται με τον όρο $\vec{\xi}_{k,\ell}(u)$ Επομένως, η γενική λύση για το διάνυσμα $\vec{V}_{k,\ell}(u,b)$, για $k=1,\dots,v+1$, δίνεται από τη σχέση

$$\vec{V}_{k,\ell}(u)=v_k(u-b_{k-1})\vec{V}_{k,\ell}(b_{k-1},b)-\int_0^{u-b_{k-1}}v_k(x)\xi_{k,\ell}(u-x)\,dx,\ \ b_{k-1}\le u\le b_k. \qquad (4.27)$$

Σημειώνουμε ότι από την συνθήκη συνέχειας της σχέσης (4.26), έπεται ότι η εξίσωση είναι αληθής και για την περίπτωση όπου $u=b_{k-1}$.

Επίσης, για $k=1$ ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (4.24) είναι μηδέν, διότι $\vec{\xi}_{k,\ell}(u)=0$ για $c=c_1$ και $k=1$. Σε αυτή την περίπτωση το διάνυσμα των αναμενόμενων προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων μεταξύ των επιπέδων 0 και $b_1,\vec{V}_{1,\ell}(u,b)$, ικανοποιεί την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (4.24) με $\vec{\xi}_{k,\ell}(u)=0$. Επιπλέον, εφόσον για $k=1$ έχουμε ότι $\vec{\xi}_{k,\ell}(u)=0$, από την εξίσωση (4.27), η γενική λύση για το διάνυσμα $\vec{V}_{1,\ell}(u,b)$ δίνεται από τη σχέση

$$\vec{V}_{1,\ell}(u,b)=v_1(u)\vec{V}_{1,\ell}(0,b), \qquad 0\le u\le b_1\,, \ell=1{,}2$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΤΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ ΓΙΑ ΤΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΔΥΟ ΚΛΑΣΕΙΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

5.1.Εισαγωγή

Ένα μέτρο κινδύνου μέσω του οποίου μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα τη συμπεριφορά της διαδικασίας πλεονάσματος είναι το μέγιστο πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία. Ως πιθανότητα του μέγιστου πλεονάσματος ορίζεται η πιθανότητα του ενδεχομένου να συμβεί η χρεοκοπία, χωρίς όμως πρώτα η διαδικασία πλεονάσματος να έχει φτάσει ένα συγκεκριμένο επίπεδο d. Η μελέτη αυτής της ποσότητας τόσο στο κλασσικό όσο και στο ανανεωτικό μοντέλο περιλαμβάνεται στους Bühlmann (1970), Dickson και Gray (1984), Dickson (1998), Dickson και Waters (2004), Li και Dickson (2006).

Ας υποθέσουμε ότι οι διαδικασίες των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητες Poisson και γενικευμένες Erlang(n), αντίστοιχα, στις οποίες λαμβάνονται οι μετασχηματισμοί Laplace των αναμενόμενων προεξοφλητικών συναρτήσεων ζημιάς. Σε αυτή την περίπτωση, διερευνούμε τα μέτρα κινδύνου στο μοντέλο, υποθέτοντας ότι οι χρόνοι άφιξης των δύο διαδικασιών των απαιτήσεων ακολουθούν κατανομή τύπου φάσης. Είναι γνωστό ότι το μέγιστο πλεόνασμα πριν από την χρεοκοπία είναι ένας σημαντικός παράγοντας των περιουσιακών στοιχείων των ασφαλιστικών επιχειρήσεων και θα παρέχει τη βάση για την εκτέλεση της πληρωμής του μερίσματος και της επενδυτικής απόφασης.

Ο σκοπός μας μέσα από αυτήν την ενότητα είναι να εξετάσουμε την κατανομή του μέγιστου πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία σε δύο κατηγορίες μοντέλου κινδύνου, όπου και οι δύο διαδικασίες αριθμού των απαιτήσεων έχουν χρόνους άφιξης που ακολουθούν κατανομή τύπου φάσης. Στη συνέχεια της ενότητας περιγράφουμε το μοντέλο παρουσιάζουμε τις διαφορικές εξισώσεις για την κατανομή του μέγιστου πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία, λαμβάνουμε τα κύρια αποτελέσματα και τέλος εφαρμόζουμε τις προαναφερθείσες διαδικασίες μέσα από ένα παράδειγμα

5.2 Παρουσίαση του μοντέλου

Θεωρούμε την διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$, όπως την αναφέραμε και στις προηγούμενες ενότητες, με τα θεωρήματα, τους ορισμούς, τους περιορισμούς και όλα τα αποτελέσματα που τη συνοδεύουν. Η διαφοροποίηση που θα έχουμε είναι ότι θα εισαγάγουμε στην εξίσωση την διαδικασία Brown $\{B(t): t \geq 0\}$ και μία μεταβλητή σ η οποία ονομάζεται παράμετρος διασποράς.

Ορισμός 5.1

Μία στοχαστική ανέλιξη X_t, $t \geq 0$ (με τιμές στο $\mathbb{R}$) καλείται κίνηση Brown με παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 0$ αν ισχύει ότι, για κάθε $y \geq 0$, $t > 0$,

1) Η τ.μ. $X_t + y - X_y \sim N(\mu t, t\sigma^2)$.

2) Η τ.μ. $X_t + y - X_y$, είναι ανεξάρτητη από τις $X_u, 0 \leq u \leq y$.

Συνεπώς έχουμε:

$$U(t) = u + ct - S(t) + B(t)\sigma, \;\; t \geq 0, \tag{5.1}$$

ενώ για $d > 0$, ορίζουμε με $\xi(u, d)$ την πιθανότητα ότι η χρεοκοπία συμβαίνει, με αρχικό πλεόνασμα u, χωρίς η διαδικασία του πλεονάσματος να φτάσει στο επίπεδο d πριν από την χρεοκοπία, η οποία είναι

$$\xi(u, d) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} U(t) < d, T < \infty | U(0) = u\right),$$

όπου $\xi(u, d) = 1$ για $u = 0$, $\xi(u, d) = 0$ για $d \leq u$ και $\xi(u, d) = \psi(u)$ για $d \to \infty$.

Ορίζουμε την συνάρτηση κατανομής $F(t) = 1 - \vec{a}^T e^{At}\vec{e}_n$, $t \geq 0$ και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(t) = \vec{a}^T e^{At}\vec{a}$, $t \geq 0$ με χρόνους άφιξης $\{T_i\}_{i=1,2,\ldots}$ να είναι μία κατανομή τύπου φάσης με αναπαράσταση $(\vec{a}^T, A, \vec{a})$ όπου

$$\vec{a}^T = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ με } a_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1, A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$$

και

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \text{ με } \vec{a} = -A\vec{e}_n$$

με την συνάρτηση Laplace να έχει την εξίσωση

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \vec{a}^T (sI - A)^{-1} \vec{a}.$$

Αξίζει να σημειωθεί πως οι χρόνοι άφιξης $\{T_i\}_{i=1,2,\dots}$ αναφέρονται στον χρόνο μέχρι η συνεχής αλυσίδα Markov, έστω $I_t^{(i)}{}_{i=1,2,\dots}$, να φτάσει στην απορροφητική της κατάσταση με n μεταβατικές καταστάσεις $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ και μία απορροφητική κατάσταση E_0.

Συνεχίζουμε με την συνάρτηση κατανομής $G(t) = 1 - \vec{\beta}^T e^{Bt} \vec{e}_m$, $t \geq 0$ και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g(t) = \vec{\beta}^T e^{Bt} \vec{b}$, $t \geq 0$ με χρόνους άφιξης $\{V_i\}_{i=1,2,\dots}$ να είναι μία κατανομή τύπου φάσης με αναπαράσταση $(\vec{\beta}^T, B, \vec{b})$ όπου

$$\vec{\beta}^T = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \text{ με } \beta_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \beta_i = 1, B = (b_{ij})_{i,j=1}^m$$

και

$$\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \text{ με } \vec{b} = -B\vec{e}_m$$

με την συνάρτηση Laplace να έχει την εξίσωση

$$\hat{g}(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt = \vec{\beta}^T (sI - B)^{-1} \vec{b}.$$

Οι χρόνοι άφιξης $\{V_i\}_{i=1,2,\dots}$ αναφέρονται στον χρόνο μέχρι η συνεχής αλυσίδα Markov, έστω $J_t^{(i)}{}_{i=1,2,\dots}$, να φτάσει στην απορροφητική της κατάσταση με m μεταβατικές καταστάσεις $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$ και μία απορροφητική κατάσταση Q_0.

Τώρα ας δημιουργήσουμε μία δισδιάστατη διαδικασία Markov $\left\{I_t^{(i)}{}_{i=1,2,\dots}, J_t^{(i)}{}_{i=1,2,\dots}\right\}$ όπου

$$I(t) = I(t)^{(1)}, \quad 0 \leq t \leq T_1, \quad I(t) = I_{t-T_k}^{k+1}, \quad T_k \leq t < T_k + T_{k+1}, \dots,$$
$$J(t) = J(t)^{(1)}, \quad 0 \leq t \leq V_1, \quad J(t) = J_{t-V_k}^{k+1}, \quad V_k \leq t < V_k + V_{k+1}, \dots,$$

συνεπώς οι υποκείμενες διαδικασίες με καταστάσεις $\{(E_1, Q_1), (E_2, Q_2), \dots, (E_n, Q_1), (E_1, Q_2), (E_2, Q_2), \dots, (E_n, Q_m), \dots, (E_1, Q_m), (E_2, Q_m), \dots, (E_n, Q_m)\}$ έχουν κατανομή $\vec{\gamma} = \vec{\beta} \otimes \vec{\alpha}$.

Άρα για $i = 1,2, \dots n$, $j = 1,2, \dots, m$, $k = 1,2$ η συνάρτηση του πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία εάν η χρεοκοπία προκλήθηκε από μία απαίτηση τάξης k είναι

$$\xi^{(k)}(u,d) = \vec{\gamma}^T \vec{\xi}^{(k)}(u,d), \text{ με } U(0) = u\xi_{i,j}^{(k)}(u,d).$$

Οπότε καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\xi(u,d) = \vec{\gamma}^T \vec{\xi}(u,d) = \vec{\gamma}^T\left[\vec{\xi}^{(1)}(u,d) + \vec{\xi}^{(2)}(u,d)\right].$$

5.3 Ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις

Θεώρημα 5.1

Όταν $0 \le u \le d$ τότε τα διανύσματα $\xi_{i,j}^{(k)}(u,d),\ k = 1,2$ ικανοποιούν τις ακόλουθες ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} + c\frac{\partial}{\partial u}\right)\vec{\xi}^{(1)}(u,d) + I_{m\times m} \otimes A\vec{\xi}^{(1)}(u,d) + B \otimes I_{n\times n}\vec{\xi}^{(1)}(u,d) + I_{m\times m} \otimes (\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T)\int_0^u \vec{\xi}^{(1)}(u-x,d)\,f(x)dx + \left(\vec{b}\vec{\beta}\right) \otimes I_{n\times n}\int_0^u \vec{\xi}^{(1)}(u-x,d)\,g(x)dx + (\vec{e}_m \otimes \vec{\alpha})\bar{F}(u) = 0_{mn} \tag{5.2}$$

και

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} + c\frac{\partial}{\partial u}\right)\vec{\xi}^{(2)}(u,d) + I_{m\times m} \otimes A\vec{\xi}^{(2)}(u,d) + B \otimes I_{n\times n}\vec{\xi}^{(2)}(u,d) + I_{m\times m} \otimes (\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T)\int_0^u \vec{\xi}^{(2)}(u-x,d)\,f(x)dx + \left(\vec{b}\vec{\beta}\right) \otimes I_{n\times n}\int_0^u \vec{\xi}^{(2)}(u-x,d)\,g(x)dx + (b \otimes \vec{e}_n)\bar{G}(u) = 0_{mn} \tag{5.3}$$

<u>Απόδειξη</u>

$$\begin{aligned}\xi_{i,j}^{(1)}(u,d) = {} & (1+a_{ii}dt)\left(1+b_{jj}dt\right)E\left[\xi_{i,j}^{(1)}(u+cdt+B(dt)\sigma,d)\right] \\ & + \left(1+b_{jj}dt\right)\sum_{k=1,k\neq i}^{n}(a_{ik}dt)E\left[\xi_{k,j}^{(1)}(u+cdt+B(dt)\sigma,d)\right] \\ & + (1+a_{ii}dt)\sum_{h=1,k\neq i}^{m}\left(b_{jh}dt\right)E\left[\xi_{i,h}^{(1)}(u+cdt+B(dt)\sigma,d)\right] + \left(1+b_{jj}dt\right)(a_i dt) \\ & \times E\left[\sum_{s=1}^{n}a_s\int_0^{u+cdt+B(dt)\sigma}\xi_{i,h}^{(1)}(u+cdt+B(dt)\sigma-x,d)f(x)dx + \int_{u+cdt+B(dt)\sigma}^{\infty}f(x)dx\right] \\ & + (1+a_{ii}dt)\left(b_j dt\right)\times E\left[\sum_{s=1}^{n}b_r\int_0^{u+cdt+B(dt)\sigma}\xi_{i,r}^{(1)}(u+cdt+B(dt)\sigma-x,d)g(x)dx\right] \\ & + 0(dt)\end{aligned}$$

Εάν τώρα στην παραπάνω εξίσωση αντικαταστήσουμε με το ακόλουθο ανάπτυγμα του Taylor

$$E\left[\xi_{i,j}^{(1)}(u+cdt+B(dt)\sigma,d)\right]=\xi_{i,j}^{(1)}(u,d)+cdt\frac{\partial\xi_{i,j}^{(1)}(u,d)}{\partial u}+\frac{\sigma^2}{2}dt\frac{\partial^2\xi_{i,j}^{(1)}(u,d)}{\partial u^2}+0(dt)$$

καταλήγουμε στο ζητούμενο. Ομοίως ενεργούμε και για το δεύτερο σκέλος του Θεωρήματος.■

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί πως εάν θέσουμε $m=1$ και $B=(0)$ τότε έχουμε ότι $\vec{b}=0$ συνεπώς οι απαιτήσεις της δεύτερης τάξης δεν συμβαίνουν. Οπότε έχουμε ότι

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}+c\frac{\partial}{\partial u}\right)\vec{\xi}^{(1)}(u,d)+A\vec{\xi}^{(1)}(u,d)+\left(\vec{a}\int_0^u\vec{\xi}^{(1)}(u-x,d)f(x)dx+\vec{F}(u)\right)a=0$$

Τώρα προσθέτοντας την (5.2) στην (5.3) και με την σημείωση ότι

$$\vec{\xi}(u,d)=\vec{\xi}^{(1)}(u,d)+\vec{\xi}^{(2)}(u,d)$$

οδηγούμαστε στο ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 5.1

Όταν $0\le u<d$ τότε το διάνυσμα $\vec{\xi}(u,d)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}+c\frac{\partial}{\partial u}\right)\vec{\xi}(u,d)+I_{m\times m}\otimes A\vec{\xi}(u,d)+B\otimes I_{n\times n}\vec{\xi}(u,d)+I_{m\times m}\otimes(\vec{a}\vec{\alpha}^T)\int_0^u\vec{\xi}(u-x,d)\,f(x)dx+(\vec{e}_m\otimes\vec{\alpha})\bar{F}(u)+\left(\vec{b}\vec{\beta}\right)\otimes I_{n\times n}\int_0^u\vec{\xi}(u-x,d)\,g(x)dx+(b\otimes\vec{e}_n)\bar{G}(u)=0_{mn}$$

με $\vec{\xi}(0,d)=e_{mn}$ και $\vec{\xi}(d,d)=0_{mn}$.

Στη συνέχεια ορίζουμε την ποσότητα

$$\tau_d=inf\{t\ge 0:U(t)\ge d|U(0)=u\}$$

να είναι η πρώτη φορά που η διαδικασία του πλεονάσματος υπερβαίνει το επίπεδο d Επίσης θεωρούμε

$$\chi(u,d)=\mathbb{P}(\tau_d<T_d|U_d(0)=u),\qquad 0\le u\le d$$

με $\chi(u,d)=0$, να είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου η διαδικασία πλεονάσματος να φτάσει στο επίπεδο d, χωρίς πρώτα να πέσει κάτω του επιπέδου 0, δηλ. χωρίς πρώτα να έχει προηγηθεί η χρεοκοπία.

Τώρα ισχύει $\chi(u,d)=1-\psi(u)$ για $d\to\infty$ και δεδομένου ότι τελικά είτε η χρεοκοπία συμβαίνει χωρίς τη διαδικασία του πλεονάσματος να φτάσει στο d ή το πλεόνασμα να φτάσει στο επίπεδο d, τότε $\xi(u,d)=1-\chi(u,d)$.

Έπειτα, έστω $\chi_{ij}(u,d)$ για $i=1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots,m$ να δηλώνει την πιθανότητα ότι η διαδικασία του πλεονάσματος επιτυγχάνει το επίπεδο d από την αρχική κατάσταση $\left(I_0^{(1)}J_0^{(1)}\right)=\left(E_i,Q_j\right)$ και για u το αρχικό πλεόνασμα πριν από την χρεοκοπία η $\chi(u,d)$ γράφεται ως

$$\chi(u,d)=\vec{\gamma}^T\vec{\chi}(u,d)$$

όπου

$$\vec{\chi}(u,d)=\left(\chi_{11}(u,d),\chi_{21}(u,d),\dots,\chi_{n1}(u,d),\chi_{12}(u,d),\dots,\chi_{n2}(u,d),\dots,\chi_{1m}(u,d)\dots,\chi_{nm}(u,d)\right)^T$$

τότε προφανώς

$$\vec{\chi}(u,d)=\vec{e}_{nm}-\vec{\xi}(u,d).$$

Λήμμα 5.1

Έστω $I_{n\times n}=\left(\eta_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n}$ με $\eta_{i,j}=\begin{cases}1,, i=j\\0,\ i\neq j\end{cases}$ τότε ικανοποιούνται οι ακόλουθες εξισώσεις

$$I_{m\times m}\otimes \mathrm{A}\vec{e}_{mn}=-I_{m\times m}\otimes(\vec{a}\vec{a}^T)\vec{e}_{mn}=-\vec{e}_m\otimes\vec{a}$$

και

$$B\otimes I_{n\times n}\vec{e}_{mn}=-\left(\vec{b}\vec{\beta}^T\right)\otimes I_{n\times n}\vec{e}_{mn}=-\vec{b}\otimes\vec{e}_n$$

Απόδειξη (Wuyuan Jiang & Chaoqun Ma (2018) The maximum surplus before ruin for two classes of perturbed risk model.).

Πόρισμα 5.2

Όταν $0\leq u\leq d$ τότε το διάνυσμα $\vec{\chi}(u,d)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}+c\frac{\partial}{\partial u}\right)\chi(u,d)+I_{m\times m}\otimes A\chi(u,d)+B\otimes I_{n\times n}\chi(u,d)+I_{m\times m}\otimes (\vec{a}\vec{\alpha}^T)\int_0^u \chi(u-x,d)\,f(x)dx+\left(\vec{b}\vec{\beta}^T\right)\otimes I_{n\times n}\int_0^u \chi(u-x,d)\,g(x)dx=0_{mn}$$

με $\chi(0,d)=0_{mn}$ και $\chi(d,d)=\vec{e}_{mn}$

5.4 Επιλύσεις των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων

Στην ενότητα που ακολουθεί θεωρούμε $\zeta(u)$ που είναι διάνυσμα στήλη διάστασης mn και $u \geq 0$, ως τη λύση της κοινής ομοιογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}+c\frac{\partial}{\partial u}\right)\vec{\zeta}(u)+I_{m\times m}\otimes A\vec{\zeta}(u)+B\otimes I_{n\times n}\vec{\zeta}(u)+I_{m\times m}\otimes (\vec{a}\vec{\alpha}^T)\int_0^u \vec{\zeta}(u-x)\,f(x)dx+\left(\vec{b}\vec{\beta}^T\right)\otimes I_{n\times n}\int_0^u \vec{\zeta}(u-x)\,g(x)dx=0_{mn} \quad (5.4)$$

Λήμμα 5.2

Για $u \geq 0$, έστω οι πίνακες διαστάσεων $mn \times mn$, $\vec{\Phi}(u)=\left(\Phi_{i,j}\right)_{i,j=1}^{mn}$ και $\vec{\Gamma}(u)=\left(\Gamma_{i,j}\right)_{i,j=1}^{mn}$ των οποίων οι στήλες έχουν παρόμοιες λύσεις με την εξίσωση (5.4), και με αρχικές συνθήκες $\vec{\Phi}(0)=I_{mn\times mn}$, $\vec{\Phi}'(0)=0_{mn\times mn}$, $\vec{\Gamma}(0)=0_{mn\times mn}$ και $\vec{\Gamma}'(0)=I_{mn\times mn}$. Τότε η εξίσωση (5.4) γράφεται ως εξής

$$\zeta(u)=\vec{\Gamma}(u)\vec{\zeta}'(0)+\vec{\Phi}(u)\vec{\zeta}(0) \quad (5.5)$$

<u>Απόδειξη</u>

Ορίζουμε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς Laplace $\hat{\vec{\Phi}}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\vec{\Phi}(x)dx$ και $\hat{\vec{\Gamma}}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\vec{\Gamma}(x)dx$. Ακολούθως, εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέρη της εξίσωσης

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}+c\frac{\partial}{\partial u}\right)\vec{\Phi}(u)+I_{m\times m}\otimes A\vec{\Phi}(u)+B\otimes I_{n\times n}\vec{\Phi}(u)+I_{m\times m}\otimes (\vec{a}\vec{\alpha}^T)\int_0^u \vec{\Phi}(\mathrm{u}-x)\,f(x)dx+\left(\vec{b}\vec{\beta}^T\right)\otimes I_{n\times n}\int_0^u \vec{\Phi}(u-x)\,g(x)dx=0_{mn}$$

προκύπτουν τα ακόλουθα

$$\left[\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2+cs\right)I_{mn\times mn}+I_{m\times m}\otimes A+B\otimes I_{n\times n}+I_{m\times m}\otimes (\vec{a}\vec{\alpha}^T)\hat{f}(s)+\left(\vec{b}\vec{\beta}^T\right)\otimes I_{n\times n}\hat{g}(s)\right]\hat{\vec{\Phi}}(s)=\frac{\sigma^2}{2}\vec{\Phi}'(0)+p(s)\vec{\Phi}(0)$$

όπου

$$p(s) = c + s\left(\frac{\sigma^2}{2}\right).$$

Θέτουμε

$$L(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs\right) I_{mn\times mn} + I_{m\times m} \otimes A + B \otimes I_{n\times n} + I_{m\times m} \otimes (\vec{a}\vec{\alpha}^T)\hat{f}(s) + \left(\vec{b}\vec{\beta}^T\right) \otimes I_{n\times n}\hat{g}(s)$$

και $L^*(s)$ ο συμπληρωματικός πίνακας του $L(s)$.
Έτσι όταν $det[L(s)] \neq 0$ έχουμε ότι

$$\hat{\vec{\Phi}}(s) = \frac{L^*(s)}{det[L(s)]}\frac{\sigma^2}{2}\left(\vec{\Phi}'(0) + p(s)\vec{\Phi}(0)\right) \Leftrightarrow \hat{\vec{\Phi}}(s) = \frac{L^*(s)}{det[L(s)]}p(s) \tag{5.6}$$

Ομοίως έχουμε ότι

$$\hat{\vec{\Gamma}}(s) = \frac{L^*(s)}{det[L(s)]}\frac{\sigma^2}{2} \tag{5.7}$$

Τώρα εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέρη της εξίσωσης (5.4) προκύπτουν τα ακόλουθα

$$L(s)\hat{\vec{\zeta}}(s) = \frac{\sigma^2}{2}\vec{\zeta}'(0) + p(s)\vec{\zeta}(0),$$

με $\hat{\vec{\zeta}}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\vec{\zeta}(x)\,dx$, οπότε

$$\hat{\vec{\zeta}}(s) = \frac{L^*(s)}{det[L(s)]}\frac{\sigma^2}{2}\vec{\zeta}'(0) + \frac{L^*(s)}{det[L(s)]}p(s)\vec{\zeta}(0). \tag{5.8}$$

Με την προσθήκη των (5.6), (5.7) στην (5.8) προκύπτει

$$\zeta(s) = \hat{\vec{\Gamma}}(s)\vec{\zeta}'(0) + \hat{\vec{\Phi}}(s)\vec{\zeta}(0) \tag{5.9}$$

όπου με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην (5.9) προκύπτει το ζητούμενο.■

Συνεχίζοντας και λαμβάνοντας υπόψη το Πόρισμα 5.2 αλλά και το Λήμμα 5.2 έχουμε

$$\vec{\chi}(u,d) = \vec{\Gamma}(u)\frac{\partial}{\partial u}\vec{\chi}(0,d) + \vec{\Phi}(u)\vec{\chi}(0,d),\ \ 0 \leq u \leq d \tag{5.10}$$

και για $u = d$ είναι

$$\frac{\partial}{\partial u}\vec{\chi}(0,d) = \left[\vec{\Gamma}(d)\right]^{-1}e_{mn} \tag{5.11}$$

Συνδυάζοντας την (5.10) και την (5.11) και χρησιμοποιώντας την σχέση $\vec{\chi}(u,d) = \vec{e}_{nm} - \vec{\xi}(u,d)$, για, $0 \leq u \leq d$ μπορούμε να εξάγουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα.

$$\vec{\chi}(u,d) = \vec{\Gamma}(u)\left[\vec{\Gamma}(d)\right]^{-1} e_{mn} \tag{5.12}$$

και

$$\vec{\xi}(u,d) = \left\{I_{mn\times mn} - \vec{\Gamma}(u)\left[\vec{\Gamma}(d)\right]^{-1}\right\} e_{mn}. \tag{5.13}$$

Η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg $det[L(s)] = 0$ έχει ακριβώς mn ρίζες με $\rho_1 = 0$ και $\rho_2, \ldots, \rho_{mn} \in \Re(\rho_i) > 0$.

Αφού κάθε στοιχείο του $\hat{\vec{\Gamma}}(s)$ είναι άπειρο για όλα τα $\Re(s) > 0$ και $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{mn}$ οι αριθμητικές λύσεις της (5.7) τότε για $L^*(\rho_i)_{i=1,2,\ldots,mn} = 0_{mn\times mn}$ έχουμε

$$L^*[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{mn}] = 0_{mn\times mn}, i = 2,3,..,mn. \tag{5.14}$$

Τότε χρησιμοποιώντας τις (3.10) και (3.11)

$$\begin{aligned} L^*(s) = L^*(s) - L^*(\rho_1) = (s-\rho_1)L^*[\rho_1, s] = (s-\rho_1)\{L^*[\rho_1, s] - L^*[\rho_1, \rho_2]\} = \\ (s-\rho_1)(s-\rho_2)L^*[\rho_1, \rho_2, s] = \cdots = \textstyle\prod_{j=1}^{mn}(s-\rho_j)L^*[\rho_1, \rho_2, .., \rho_{mn}, s]. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Αντικαθιστώντας την (5.15) στην (5.7) καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$\hat{\vec{\Gamma}}(s) = \frac{\prod_{j=1}^{mn}(s-\rho_j)L^*[\rho_1, \rho_2, .., \rho_{mn}, s]}{\det[L(s)]}\frac{\sigma^2}{2}. \tag{5.16}$$

5.5 Αποτελέσματα για τα μεγέθη των αποζημιώσεων με μετασχηματισμό Laplace

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τις κατανομές $F(x)$ και $G(x)$ των απαιτήσεων με μετασχηματισμό Laplace, όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\hat{f}(s) = \frac{q_{l_1-1}(s)}{q_{l_1}(s)}, \;\; \hat{g}(s) = \frac{\tau_{l_2-1}(s)}{\tau_{l_2}(s)}, \;\; l_1, l_2 \in \mathbb{N}^+ \tag{5.17}$$

όπου $q_{l_1-1}(s)$ και $\tau_{l_2-1}(s)$ πολυώνυμα βαθμού $l_1 - 1$ και $l_2 - 1$ ή λιγότερου, ενώ $q_{l_1}(s)$ και $\tau_{l_2}(s)$ πολυώνυμα βαθμού l_1 και l_2 με μόνο αρνητικές ρίζες. Οι παραπάνω ποσότητες ικανοποιούν τις σχέσεις $q_{l_1-1}(0) = q_{l_1}(0)$ και $\tau_{l_2-1}(0) = \tau_{l_2}(0)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι οι κύριοι συντελεστές των $q_{l_1}(s)$ και $\tau_{l_2}(s)$ είναι 1.

Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή της (5.16) με την ποσότητα $\mathfrak{h}(s) = \left[q_{l_1}(s)\tau_{l_2}(s)\right]^{mn}$ προκύπτει ότι

$$\hat{\vec{\Gamma}}(s) = \frac{\prod_{j=1}^{mn}(s-\rho_j)L^*[\rho_1,\rho_2,..,\rho_{mn},s]\mathfrak{h}(s)}{\mathfrak{h}(s)\det[L(s)]}\frac{\sigma^2}{2}. \tag{5.18}$$

Είναι προφανές ότι ο παράγοντας $\mathfrak{h}(s)\det[L(s)]$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $mn(l_1 + l_2 + 2)$ με αρχικό συντελεστή $\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{mn}$. Τότε η εξίσωση $\mathfrak{h}(s)\det[L(s)] = 0$ έχει $mn(l_1 + l_2 + 2)$ ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο και παραγοντοποιώντας την $\mathfrak{h}(s)\det[L(s)]$ έχουμε

$$\mathfrak{h}(s)\det[L(s)] = \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{mn} \prod_{j=1}^{mn}(s-\rho_j) \prod_{j=1}^{mn(l_1+l_2+2)}(s-R_j), \tag{5.19}$$

με

R_j να έχει ένα θετικό πραγματικό μέρος για κάθε j και υποθέτουμε ότι όλα είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

Αντικαθιστώντας την (5.19) στην (5.18) συμπεραίνουμε ότι:

$$\hat{\vec{\Gamma}}(s) = \frac{L^*[\rho_1,\rho_2,..,\rho_{mn},s]\mathfrak{h}(s)}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{mn-1}\prod_{j=1}^{mn(l_1+l_2+1)}(s+R_j)}. \tag{5.20}$$

Στη συνέχεια θέτουμε

$$Q_j = \frac{L^*[\rho_1,\rho_2,..,\rho_{mn},s]\mathfrak{h}(-R_j)}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{mn-1}\prod_{i=1,i\neq j}^{mn(l_1+l_2+1)}(R_i+R_j)}$$

οπότε η (5.20) γράφεται ως εξής:

$$\hat{\vec{\Gamma}}(s) = \sum_{j=1}^{mn(l_1+l_2+1)} \frac{Q_j}{s+R_j}.$$

Συνεπώς με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace καταλήγουμε στην σχέση

$$\vec{\Gamma}(s) = \sum_{j=1}^{mn(l_1+l_2+1)} Q_j e^{-R_j u}.$$

Οπότε αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στις εξισώσεις (5.12) και (5.13) λαμβάνουμε αποτελέσματα για το $\vec{\chi}(u, d)$ και το $\vec{\xi}(u, d)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

6.1 Παράδειγμα Πρώτο

Υποθέτουμε πως η διαδικασία πλεονάσματος μιας ασφαλιστικής εταιρείας δίνεται από την εξίσωση $U_0(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i$. Επιπλέον, υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η παρούσα στιγμή θεωρείται ο αρχικός χρόνος. Ταυτόχρονα, η εταιρεία έχει τη δυνατότητα να εξετάσει την πρόταση ενός αντασφαλιστικού συμβολαίου, με διαδικασία κέρδους $c_2 t - \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i$. Για να αποφασίσουμε εάν η εταιρεία θα πρέπει να δεχθεί τη συμφωνία, θα συγκρίνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας πριν και μετά την αποδοχή της πρότασης.

Θεωρούμε την αρχική διαδικασία πλεονάσματος $U_0(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i$, όπου $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $a = (a_1, a_2)$, και η κατανομή των απαιτήσεων P είναι εκθετικά κατανεμημένη, με μετασχηματισμό Laplace $\hat{P}(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}$. Επίσης, θεωρούμε τη διαδικασία πλεονάσματος $U_1(t) = u + (c_1 + c_2)t - \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i - \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i$, με την αποδοχή της σύμβασης, με διαδικασία κέρδους $c_2 t - \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i$, όπου $\vec{\beta} = (1)$, $B = (b_{11})$, $\vec{b} = (b_1)$, και η κατανομή των απαιτήσεων Q είναι εκθετικά κατανεμημένη, με μετασχηματισμό Laplace $\hat{Q}(s) = \frac{\xi}{s+\xi}$.

Προκειμένου να βρούμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, υποθέτουμε $\delta = 0$ και $w_1(x,y) = w_2(x,y) = 1$. Αναλόγως, παίρνουμε $w_1(x) = e^{-\lambda x}$, $w_2(x) = e^{-\xi x}$, οπότε και $\hat{w}1$ $\hat{w}_1(s) = \frac{1}{s+\lambda}$ και $\hat{w}_2(s) = \frac{1}{s+\xi}$. Οι εκφράσεις για τις πιθανότητες χρεοκοπίας των δύο διαδικασιών πλεονάσματος $U0\ (t)$ και $U1\ (t)$, με βάση τις $\psi 0\ (u)$ και $\psi 1\ (u)$, ορίζονται:

Τώρα, έστω $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $\vec{\alpha} = (0.5, 0.5)$, $\vec{\beta} = (1)$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = (-2)$, $\lambda = 1$, $\xi = 2$. Η κύρια συνθήκη θετικής ασφαλείας ικανοποιείται, αφού $c_1 = 1 > \frac{E(X)}{E(V)} = 0.6667$ και $c_2 = 2 > \frac{E(Y)}{E(L)} = 1$. Έστω $\rho_1^0 = 0$, $\rho_2^0 = 2.3229$, $R_1^0 = 1$, $R_2^0 = 0.3229$, $\rho_1^1 = 0$, $\rho_2^1 = 0.9863$, $R_1^1 = 1$, $R_2^1 = 1.584$, $R_3^1 = 1.5$, $R_4^1 = 0.569$. Οπότε, έχουμε $\vec{\Phi}_0^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0.6457 \\ 0.7085 \end{pmatrix}$, $\vec{\Phi}_1^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0.2019 \\ 0.2685 \end{pmatrix}$, $\vec{\Phi}_1^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0.3441 \\ 0.3234 \end{pmatrix}$ αντίστοιχα.

Έτσι, για $u \geq 0$, έχουμε

$$\vec{\Phi}_0^{(1)}(u) = \begin{pmatrix} 0.6457 \\ 0.7085 \end{pmatrix} e^{-0.3229u},$$

$$\vec{\Phi}_1^{(1)}(u) = \begin{pmatrix} -0.0556 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-u} + \begin{pmatrix} -0.0160 \\ -0.1105 \end{pmatrix} e^{-1.584u} + \begin{pmatrix} -0.0746 \\ -0.0006 \end{pmatrix} e^{-1.5u} + \begin{pmatrix} 0.3480 \\ 0.3785 \end{pmatrix} e^{-0.569u},$$

$$\vec{\Phi}_1^{(2)}(u) = \begin{pmatrix} 0.0431 \\ 0.1598 \end{pmatrix} e^{-1.5840u} + \begin{pmatrix} 0.1429 \\ 0.0012 \end{pmatrix} e^{-1.5u} + \begin{pmatrix} 0.1580 \\ 0.1624 \end{pmatrix} e^{-0.5690u}.$$

Συνεπώς, έχουμε πως

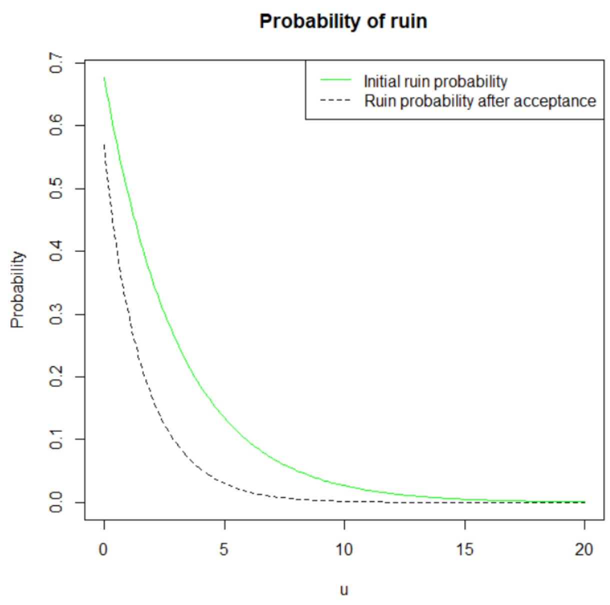
$$\psi_0(u) = \vec{\alpha}\vec{\Phi}_0^{(1)}(u) = 0.6771e^{-0.3229u}, \quad u \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \psi_1(u) &= \vec{\alpha}\left(\vec{\Phi}_1^{(1)}(u) + \vec{\Phi}_1^{(2)}(u)\right) \\ &= -0.0278e^{-u} + 0.0382e^{-1.584u} + 0.0351e^{-1.5u} + 0.5234e^{-0.569u}, \quad u \geq 0. \end{aligned}$$

Στο γράφημα που δημιουργήσαμε μέσω κώδικα R βλέπουμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας $\psi_0(u)$ και $\psi_1(u)$, για $u \in [0,20]$.

```
> u <- seq(0, 20, 0.1) ;
> y0 <- 0.6771 * exp(-0.3229 * u) ;
> y1 <- -0.0278 * exp(-u) + 0.0382 * exp(-1.584 * u) + 0.035 * exp(-1.5 * u) + 0.5234 * exp(-0.569 * u) ;
> smooth_y0 <- predict(smooth.spline(u, y0), u)$y ;
> smooth_y1 <- predict(smooth.spline(u, y1), u)$y ;
> plot(u, y0, type = "n", ylim = c(0, max(y0, y1)), xlab = "u", ylab = "Probability", main = "Probability of ruin") ;
> lines(u, smooth_y0, type = "l", col = "green") ;
> lines(u, smooth_y1, type = "l", lty = 2, col = "black") ;
> legend("topright", legend = c("Initial ruin probability", "Ruin probability after acceptance"), lty = c(1, 2), col = c("green", "black")) ;
```

Σχήμα 6.1 Οι πιθανότητες χρεοκοπίας πριν και μετά την αποδοχή του ανтασφαλιστηρίου συμβολαίου



Συνδυάζοντας το γράφημα και το γεγονός ότι $\frac{\psi_1(u)}{\psi_0(u)} = o(u)$, βλέπουμε ότι η εταιρεία θα πρέπει να αποδεχθεί τη σύμβαση αντασφάλισης, ανεξαρτήτως του ποσού χρήματος που διαθέτει επί του παρόντος, καθώς η $\psi_1(u)$ είναι μικρότερη από την $\psi_0(u)$, για κάθε $u \geq 0$. Επομένως, είναι λογικό να αποδεχθεί το συμβόλαιο αντασφάλισης, καθώς ο αναμενόμενος ρυθμός κέρδους από την αντασφάλιση $c_2 - \frac{E(Y)}{E(L)} = 1$ υπερβαίνει τον αρχικό ρυθμό της εταιρείας, $c_1 - \frac{E(X)}{E(V)} = 0.3333$.

6.2 Παράδειγμα Δεύτερο

Στόχος του παραδείγματος, είναι να υπολογίσουμε το μέγιστο πλεόνασμα πριν από την χρεοκοπία $\vec{\xi}(u,d)$. Υποθέτουμε ότι οι απαιτήσεις των τάξεων 1 και 2 έχουν τις ακόλουθες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \mu_1 e^{-\mu_1 x}, \qquad \mu_1 > 0, \qquad x > 0$$

και

$$g(y) = \mu_2 e^{-\mu_2 y}, \qquad \mu_2 > 0, \qquad y > 0$$

με τον μετασχηματισμό τους Laplace να είναι

$$\hat{f}(s) = \frac{\mu_1}{s + \mu_1},$$

$$\hat{g}(s) = \frac{\mu_2}{s + \mu_2}.$$

Οι χρόνοι των απαιτήσεων από την τάξη 1 ακολουθούν μία διαδικασία Poisson με παράμετρο λ και $\vec{\alpha} = (1)$, $\vec{a} = (\lambda)$, $A = (-\lambda)$, ενώ οι χρόνοι των απαιτήσεων από την τάξη 2 ακολουθούν μία κατανομή τύπου φάσης με $\vec{\beta} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$, $\vec{b} = (\lambda_1, \lambda_2)^T$, $B = diag(-\lambda_1, -\lambda_2)$. Τότε $\mathfrak{h}(s) = [(s + \mu_1)(s + \mu_2)]^2$ και

$$L(s) = \begin{pmatrix} \kappa(s) - \lambda_1 + \dfrac{\lambda_1 \mu_2}{2(s + \mu_2)} & \dfrac{\lambda_1 \mu_2}{2(s + \mu_2)} \\ \dfrac{\lambda_2 \mu_2}{2(s + \mu_2)} & \kappa(s) - \lambda_2 + \dfrac{\lambda_2 \mu_2}{2(s + \mu_2)} \end{pmatrix}$$

όπου

$\kappa(s)=\frac{\sigma^2}{2}s^2+cs-\lambda+\frac{\lambda_1\mu_1}{(s+\mu_1)}$

Κάτω από αυτήν την υπόθεση η εξίσωση $\mathfrak{h}(s)det[L(s)]=0$ έχει ακριβώς δύο μη αρνητικές πραγματικές ρίζες $\rho_1=0$ και ρ_2 και έξι ρίζες με το πραγματικό τους μέρος αρνητικό $[R_j]_{j=1,\dots,6}$.

Άρα

$$L^*(s)=\begin{pmatrix}\kappa(s)-\lambda_2+\dfrac{\lambda_2\mu_2}{2(s+\mu_2)} & -\dfrac{\lambda_1\mu_2}{2(s+\mu_2)}\\ -\dfrac{\lambda_2\mu_2}{2(s+\mu_2)} & \kappa(s)-\lambda_1+\dfrac{\lambda_1\mu_2}{2(s+\mu_2)}\end{pmatrix}$$

και

$$L^*(\rho_1,\rho_2,s)=\begin{pmatrix}\frac{\sigma^2}{2}-\frac{\lambda}{(s+\mu_1)(s+\mu_1)}+\frac{\lambda_2}{2(s+\mu_2)(\rho_2+\mu_2)} & -\frac{\lambda_1}{2(s+\mu_2)(\rho_2+\mu_2)}\\ -\frac{\lambda_2}{2(s+\mu_2)(\rho_2+\mu_2)} & \frac{\sigma^2}{2}+\frac{\lambda}{(s+\mu_1)(\rho_2+\mu_1)}+\frac{\lambda_2}{2(s+\mu_2)(\rho_2+\mu_2)}\end{pmatrix}$$

Οπότε για την ποσότητα Q_j ισχύει:

$$Q_j=\frac{L^*(\rho_1,\rho_2,s)\mathfrak{h}(-R_j)}{\dfrac{\sigma^2}{2}\prod_{i=1,i\neq j}^{6}(R_i-R_j)},$$

συνεπώς

$$\vec{\Gamma}(u)=\sum_{j=1}^{6}Q_j{}^{-R_ju}.$$

Τότε από τις εξισώσεις (5.12) και (5.13) έχουμε

$$\vec{\chi}(u,d)=\vec{\Gamma}(u)\left[\vec{\Gamma}(d)\right]^{-1}e_2,\qquad 0\le u<d$$

και

$$\vec{\xi}(u,d)=\left\{I_{2\times 2}-\vec{\Gamma}(u)\left[\vec{\Gamma}(d)\right]^{-1}\right\}e_2,\qquad 0\le u<d.$$

Τέλος, καταλήγουμε στο ζητούμενο όπου η κατανομή του μέγιστου πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία είναι

$$\xi(u,d)=(\vec{\beta}\otimes\vec{\alpha})\vec{\xi}(u,d)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T\vec{\xi}(u,d),\qquad 0\le u\le d.$$

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση

Stathis Chadjiconstantinidis, Papaioannou, A.D., (2009). Analysis of the Gerber-Shiu function and dividend barrier problems for a risk process with two classes of claims. Insurance: Mathematics and Economics 45:470-484.

Stathis Chadjiconstantinidis, Papaioannou, A.D., (2010). The Gerber-Shiu penalty function for a risk process with two classes of claims under a multi-layer dividend strategy. Proceedings of the VIth International in Actuarial Science & Finance on Samos

Gerber, H.U. & Shiu, E.S.W. (1998). On the time value of ruin, NORTH AMERICAN ACTUARIAL JOURNAL, 2, NUMBER 1, 48-78.

Ji, L. & Zhang, C. (2010). The Gerber–Shiu penalty functions for two classes of renewal risk processes, Journal of Computational and Applied Mathematics 233, 2575-2589.

Jiang, W. & Ma, C. (2018). The maximum surplus before ruin for two classes of perturbed risk model, Applicable Analysis, 97:1, 124-133.

Li, S., Zhang, Z. & Yang, H. (2009). The Gerber–Shiu discounted penalty functions for a risk model with two classes of claims, Journal of Computational and Applied Mathematics 230, 643-655.

Xie, J.H. & Zou, W. (2015). On the expected discounted penalty function for a risk model with classes of claims and random incomes, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 44, 485-501.

Gerber, H.U., Shiu, E.S.W., 2005. The time value of ruin in a Sparre Andersen model. North American Actuarial Journal, 9, 49-69.

Dickson, D.C.M., Hipp, C., 2001. On the time to ruin for Erlang (2) risk processes. Insurance: Mathematics and Economics, 29, 333-344.

Li, S., Garrido, J., 2005. Ruin probabilities for two classes of risk processes. ASTIN Bulletin, 35, 61-77

Ελληνική

Παπαϊωάννου, Δ. Απόστολος. (2011). Μελέτη μη Ανανεωτικών Στοχαστικών Μοντέλων στη Θεωρία Κινδύνου, 1η Έκδοση, Πειραιάς