Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο   Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Σ χ ο λ ή   Χ ρ η μ α τ ο ο ι κ ο ν ο μ ι κ ή ς   κ α ι   Σ τ α τ ι σ τ ι κ ή ς

Τ μ ή μ α   Σ τ α τ ι σ τ ι κ ή ς   κ α ι   Α σ φ α λ ι σ τ ι κ ή ς   Ε π ι σ τ ή μ η ς

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ **ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ**

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΚΛΑΣΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ GERBER-SHIOU ΣΕ ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Ευσταθία Α. Παπαγεωργίου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου*

Πειραιάς
Μάρτιος 2024

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη Συνέλευση του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή της, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπλ. Καθηγητής Ε. Χατζηκωνσταντινίδης (Επιλέπων)
- Αναπλ. Καθηγητής Γ. Ψαρράκος
- Αναπλ. Καθηγητής Κ. Πολίτης

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

STUDY OF THE CLASSICAL AND GENERALIZED GERBER-SHIOU FUNCTION FOR RISK MODELS

By

Efstathia A.Papageorgiou

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece
March 2024

Στους γονείς μου

Αντίκα και Αναστάσιο

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να εκφράσω τις ιδιαίτερες ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ε. Χατζηκωνσταντινίδη, Αναπληρωτή Καθηγητή στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύτιμη καθοδήγησή του, την υπομονή που επέδειξε και την ουσιαστική βοήθεια του καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους γονείς μου που μου συμπαραστέκονται και στηρίζουν ηθικά και οικονομικά κάθε προσπάθεια και επιλογή μου.

Περίληψη

Ένα εξαιρετικά χρήσιμο αναλυτικό εργαλείο για την κατανόηση του γεγονότος της χρεοκοπίας είναι η εκπτωτική συνάρτηση ποινής Gerber-Shiou. Δρα ως ένα ενοποιημένο μέσο για τον προσδιορισμό ποσοτήτων που σχετίζονται με τη χρεοκοπία, τις οποίες μπορεί να βοηθήσει τις ασφαλιστικές εταιρείες να κατανοήσουν την ευπάθειά τους στη χρεοκοπία. Αυτή η διατριβή παρέχει μια εισαγωγή στα βασικά έννοια και στις κοινές τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση Gerber-Shiou.

Το Κεφάλαιο 1 εισάγει τη διαδικασία πλεονάσματος U_T του ασφαλιστή στο κανονικό μοντέλο Sparre Andersen, μαζί με βασικές ποσότητες όπως ο χρόνος της χρεοκοπίας T, το πλεόνασμα αμέσως πριν από τη χρεοκοπία U_{T-}, το έλλειμμα στη στιγμή της χρεοκοπίας $|U_T|$ και η πιθανότητα άπειρης χρεοκοπίας. Αναθεωρούνται ελαττωματικές εξισώσεις ανανέωσης, ο μετασχηματισμός Dickson-Hipp και η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg.

Το Κεφάλαιο 2 εισάγει την κλασσική εκδοχή της ελλειμματικής συνάρτησης ποινής Gerber-Shiou $m_{\delta,12}(u)$. Εξετάζεται η τιμή της συνάρτησης ως ένα ενοποιημένο μέσο προσδιορισμού ποσοτήτων που σχετίζονται με τη χρεοκοπία, λαμβάνοντας υπόψη ειδικές περιπτώσεις της συνάρτησης για διάφορες συναρτήσεις ποινής και τιμές του δ. Παραγάγονται δύο πλαισιώσεις εξισώσεων βάσει συνθηκών στο πρώτο υποχώρηση του πλεονάσματος κάτω από την αρχική του τιμή, και στο χρόνο και το ποσό της πρώτης απαίτησης. Παρέχεται μια λεπτομερής συζήτηση για κάθε μία από αυτές τις συνθήκες. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι, παρά την περιλαμβανομένης 4-μεταβλητής συνάρτησης ποινής, με την συνθήκη της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος, αποδεικνύεται ότι η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί μια ελαττωματική εξίσωση ανανέωσης που εξαρτάται μόνο από την πυκνότητα των 3 μεταβλητών U_{T-}, $|U_T|$ και R_{N_T-1}, χωρίς την εμπλοκή της X_T. Με τη χρήση της ιδιότητας της μοναδικότητας των μετασχηματισμών Laplace, καθορίζεται η μορφή των κοινών ελαττωματικών εκπτωτικών πυκνοτήτων των 4 μεταβλητών $(U_{T-}, |U_T|, X_T, R_{N_T-1})$, καθώς και η

κοινή ελαττωματική πυκνότητα του τελευταίου χρόνου ανάμεσα σε απαιτήσεις πριν την χρεοκοπία και της απαίτησης που προκαλεί την χρεοκοπία.

Στο Κεφάλαιο 3, παρουσιάζουμε το μοντέλο με υστέρηση στο οποίο βασική παραδοχή είναι ότι ο ενδιάμεσος χρόνος μέχρι να εμφανιστεί η πρώτη απαίτηση κατανέμεται διαφορετικά από ότι οι μεταγενέστεροι ενδιάμεσοι χρόνοι.

Τέλος, το Κεφάλαιο 4 εισάγει μια γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiou όπου η συνάρτηση ποινής περιλαμβάνει δύο επιπλέον τυχαίες μεταβλητές: το ελάχιστο επίπεδο πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία X_T και το πλεόνασμα αμέσως μετά την απαίτηση πριν από την απαίτηση που προκαλεί τη χρεοκοπία R_{N_T-1}. Αυτή η γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu, συμβολίζεται ως $m_\delta(u)$), επιτρέπει τη μελέτη των τυχαίων μεταβλητών όπως ο τελευταίος ενδιάμεσος χρόνος και το τελευταίο ύψος σκάλας, που διαφορετικά δεν θα μπορούσαν να μελετηθούν χρησιμοποιώντας τον κλασσικό ορισμό της συνάρτησης. Επιπροσθέτως, υποθέτουμε ότι το μέγεθος μιας απαίτησης εξαρτάται από τον μεσοδιάστημα μεταξύ απαιτήσεων που το προηγείται. Όπως γίνεται και στο Κεφάλαιο 2, παρέχεται μια λεπτομερής συζήτηση για κάθε μια από τις δύο συνθήκες συνθήκες. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι, παρά την περιλαμβανομένης 4-μεταβλητής συνάρτησης ποινής, με την συνθήκη της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος, αποδεικνύεται ότι η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί μια ελαττωματική εξίσωση ανανέωσης που εξαρτάται μόνο από την πυκνότητα των 3 μεταβλητών U_{T-}, $|U_T|$και R_{N_T-1}, χωρίς την εμπλοκή της X_T. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μοναδικότητας των μετασχηματισμών Laplace, καθορίζεται η μορφή των κοινών ελαττωματικών εκπτωτικών πυκνοτήτων των 4 μεταβλητών (U_{T-}, $|U_T|$, X_T, R_{N_T-1}), καθώς και η κοινή ελαττωματική πυκνότητα του τελευταίου χρόνου ανάμεσα σε απαιτήσεις πριν την χρεοκοπία και της απαίτησης που προκαλεί την χρεοκοπία.

Abstract

In 1998, the team Gerber-Shiou, in their article named "On the time value of ruin", revealed only one function which contains all these measures which contains all these measures which are at the same time interesting and important for an insurance company, namely the time of ruin, the deficit at ruin and the surplus immediately prior to ruin. The name of this function is the Gerber-Shiou expected discounted penalty function or else known as Gerber-Shiou function in short.

Chapter 1 introduces the surplus process Ut of the insurer in the standard Sparre Andersen model, along with fundamental quantities like the bankruptcy time T, surplus immediately before bankruptcy U_{T-}, deficit at the time of bankruptcy $|U_T|$, and the probability of ultimate bankruptcy. It also revisits defective renewal equations, the Dickson-Hipp transformation, and the fundamental Lundberg equation.

Chapter 2 introduces the classical version of the Gerber-Shiou penalty function $m_{\delta,12}(u)$). It examines the value of the function as a unified means of determining quantities related to bankruptcy, taking into account specific cases of the function for various penalty functions and values of δ. Two frameworks of equations are derived based on conditions at the first decrease of surplus below its initial value, and at the time and amount of the first claim. A detailed discussion is provided for each of these conditions. Of interest is the fact that, despite the inclusion of a 4-variable penalty function, it is demonstrated that $m_\delta(u)$ satisfies a defective renewal equation that depends only on the density of the 3 variables U_{T-}, $|U_T|$ και R_{N_T-1},, without involving X_T. Using the uniqueness property of Laplace transforms, the form of the common defective discount densities of the 4 variables $(U_{T-}, |U_T|, X_T, R_{N_T-1})$ is determined, as well as the common defective density of the last time between claims before bankruptcy and the claim that causes bankruptcy.

In Chapter 3, we introduce the delayed renewal model which allows the time until the first claim to be distributed differently than subsequent interclaim times.

Finally, Chapter 4 introduces a generalized Gerber-Shiu function where the penalty function includes two additional random variables: the minimum surplus level before bankruptcy X_T and the surplus immediately after the claim before the claim that causes bankruptcy R_{N_T-1}. This generalized Gerber-Shiu function, denoted as $m_\delta(u)$), allows for the study of random variables such as the last intermediate time and the last ladder height, which otherwise could not be studied using the classic definition of the function. Additionally, it is assumed that the size of a claim depends on the interval between preceding claims. As in Chapter 2, a detailed discussion is provided for each of the two condition cases. Of interest is the fact that, despite the inclusion of a 4-variable penalty function, it is demonstrated that $m_\delta(u)$ satisfies a defective renewal equation that depends only on the density of the 3 variables U_{T-}, $|U_T|$, and RNT−1, without involving X_T. Using the uniqueness property of Laplace transforms, the form of the common defective discount densities of the 4 variables (UT−, |UT|, X_T, R_{N_T-1}) is determined, as well as the common defective density of the last time between claims before bankruptcy and the claim that causes bankruptcy.
If you have any specific questions or need further clarification on any part of the text, feel free to ask!

Πίνακας περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένας από τους βασικούς ρόλους ενός ασφαλιστικού οργανισμού είναι η επίβλεψη των κεφαλαίων του. Συγκεκριμένα, όταν τα κεφάλαια είναι επαρκή, η εταιρία μπορεί να ανταποκριθεί στις οικονομικές υποχρεώσεις της, συμπεριλαμβανομένων των λειτουργικών δαπανών, καθώς και να εξετάσει επενδυτικές ευκαιρίες. Στον όρο "αποθεματικά κεφάλαια" αναφερόμαστε στο απόθεμα που προκύπτει από τη διαφορά μεταξύ των ενεργητικών και των παθητικών υποχρεώσεων μιας εταιρίας.

Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, εξετάζουμε ένα από τα κύρια μέτρα κινδύνου, την πιθανότητα χρεοκοπίας. Στην κλασσική θεωρία κινδύνου, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ένα από τα κύρια προβλήματα, καθώς η πρόβλεψή της είναι δύσκολη. Ως αποτέλεσμα, οι ασφαλιστικές εταιρίες δεν μπορούν να προβλέψουν πότε και με ποιο ποσοστό θα αντιμετωπίσουν δυσκολίες στην κάλυψη των δαπανών τους.

Το 1903, ο Σουηδός Filip Lundberg έθεσε τα θεμέλια της μαθηματικής θεωρίας των κινδύνων, ενώ το 1930, ο Harald Cramer ενσωμάτωσε τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών στη θεωρία κινδύνου βασιζόμενος στην διδακτορική διατριβή του Lundberg. Αυτή η συνδυαστική προσέγγιση οδήγησε στη δημιουργία ενός μοντέλου που περιγράφει την εξέλιξη του πλεονάσματος στο χρόνο, γνωστό ως το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ή μοντέλο Cramer – Lundberg.

Μία σημαντική παραδοχή από αυτό το μοντέλο είναι ότι ο αριθμός των κινδύνων που αντιμετωπίζει ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο καθορίζεται από τη στοχαστική διαδικασία Poisson. Επιπλέον, το χαρακτηριστικό του κλασσικού μοντέλου είναι ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν εκθετική κατανομή.

Το 1957, ακολούθησε η γενίκευση του κλασσικού μοντέλου για το πλεόνασμα ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου από τον Νορβηγό Sparre Andersen. Αυτός υπέθεσε ότι ο αριθμός των κινδύνων περιγράφεται από μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία, διαφορετική από τη στοχαστική διαδικασία Poisson που χρησιμοποιήθηκε στο κλασσικό μοντέλο. Και σε αυτήν την περίπτωση, οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν εκθετική κατανομή.

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω, ο τρόπος μοντελοποίησης της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος στη θεωρία κινδύνου εξαρτάται από την επιλογή της κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των κινδύνων. Κάθε μοντέλο προσφέρει μια διαφορετική προσέγγιση για την αξιολόγηση του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου.

1.2. Το κλασσικό μοντέλο Sparre Andersen

Η διαδικασία πλεονάσματος ενός ασφαλιστή ορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$\mathrm{Ut} = \mathrm{u} + \mathrm{ct} - \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{Nt}} \mathrm{Yi}$ με $\{U_t, t \geq 0\}$ (1.2.1)

όπου u είναι το αρχικό αποθεματικό και c είναι ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων στην μονάδα του χρόνου. Η απαριθμήτρια διαδικασία του αριθμού των κινδύνων συμβολίζετε με $\{N_t , t \geq 0\}$ και θεωρείται ότι ορίζεται από μια ακολουθία θετικών, ανεξάρτητων και πανομοιότυπα κατανεμημένων χρόνων όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι $\{V_i , i=1,2,\dots\}$.Έτσι, ορίζουμε τη συνάρτηση κατανομής χρόνου παρεμβολής (σ.κ.) να είναι $K(t) = 1- \overline{K(t)}$ και τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π) να είναι $k(t) = K'(t)$ for $t > 0$. Στη συνέχεια υποθέτουνε ότι $\{Y_i , i=1,2,\dots\dots\}$ να είναι μία σειρά θετικών τυχαίων μεταβλητών και να είναι ανεξάρτητα από $\{V_i ,i=1,2,\dots\}$.

Έτσι, ορίζουμε το χρόνο της καταστροφής T να είναι ο χρόνος στον οποίο το επίπεδο πλεονάσματος πρώτα να πέφτει κάτω από το μηδέν με $T=\inf\{t >0 : U_t < 0\}$ και $T=\infty$ αν $U_t > 0$ για όλα τα $t > 0$. Η $N_{t\text{ιοστή}}$ αξίωση είναι η αξίωση που προκαλεί καταστροφή. Το πλεόνασμα αμέσως πριν από την καταστροφή U_{T-} και το έλλειμμα σε καταστροφή $|U_T|$ είναι 2 βασικά κλειδιά στη λεγόμενη ανάλυση Gerber-Shiu που θα παρουσιαστεί στο επόμενο κεφάλαιο. Ορίζουμε επίσης την άπειρη πιθανότητα καταστροφής ή απλά, πιθανότητα καταστροφής, να είναι $\psi(u) = \Pr(T < \infty | U_0 = u)$.

Παρατηρούμε ότι ο ισχυρισμός που προκαλεί χρεοκοπία Y_{N_T} δίνεται από: $U_{T-} + |U_T|$. Επίσης, υποθέτουμε το επιτόκιο πριμοδότησης c ότι ικανοποιεί τη σχέση

$$cE[V] > E[Y] \qquad \underline{(1.2.2)}$$

η οποία εξασφαλίζει ότι τα έσοδα της εταιρείας υπερβαίνουν τα αναμενόμενα έσοδα έτσι ώστε να ισχυεί $\psi(u) < 1$. Άρα, $c = \frac{(1+\theta)E(Y)}{E(V)}$, $\theta > 0$.

Επίσης, ορίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace μιας συνάρτησης f(x) με

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$$

1.3 Ο μετασχηματισμός Dickson-Hipp

Ο μετασχηματισμός Dickson-Hipp μιας ενσωματωμένης συνάρτησης πραγματικής αξίας δίνεται από τη σχέση:

$$T_r f(x) = e^{rx} \int_x^\infty e^{-ry} f(y)dy \qquad \underline{(1.3.1)}$$

$$= \int_0^\infty e^{-ry} f(x+y)dy ,$$

Όπου r ικανοποιεί τη σχέση $|\tilde{f}(r)| < \infty$.

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός Dickson-Hipp είναι ένας γραμμικός τελεστής με σταθερές a_i και ολοκληρωμένες συναρτήσεις πραγματικών τιμών $f_i(x)$ όπου i = 1, 2, ..., n

$$T_r \left(\sum_{i=1}^n a_i f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^n a_i T_r(f_i(x)) \qquad \underline{(1.3.2)}$$

Επιπρόσθετα, μπορούμε να γράψουμε ότι ισχύει $\tilde{f}(s) = T_s f(0)$ και παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Dickson-hipp είναι μία γενίκευση του μετασχηματισμού Laplace. Μπορούμε να γράψουμε την ουρά της συνάρτησης κατανομής F(x) ως $\bar{F}(x) = \int_x^\infty f(t)dt$ ως $T_0 f(x)$.

Υποτίθεται ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι κατανέμονται σύμφωνα με μία Cox [Willmot and Woo (2010)] κατανομή. Για τους δικούς μας σκοπούς, θεωρούμε τον μετασχηματισμό Laplace του $T_r f(x)$ που δίνεται από:

$$\int_0^\infty e^{-sx}\big(T_r f(x)\big)dx = \int_0^\infty e^{-(s-r)x} \int_x^\infty e^{-ry} f(y)dydx$$

$$= \int_0^\infty e^{-ry} \left(\int_0^y e^{-(s-r)x}dx\right) f(y)dy$$

$$= \int_0^\infty e^{-ry} \left(\frac{1-e^{-(s-r)y}}{s-r}\right) f(y)dy$$

$$= \frac{\int_0^\infty e^{-ry} f(y)dy - \int_0^\infty e^{-sy} f(y)dy}{s-r}$$

$$= \frac{\tilde{f}(r) - \tilde{f}(s)}{s-r} \qquad \text{(1.3.3)} \quad \text{για } s \neq r$$

Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της σ.κ. της ουράς $\bar{F}(x)$ δινέται από τη σχεσή (1.3.3) αν υποθέσουμε ότι r = 0

$$\int_0^\infty e^{-sx} \bar{F}(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx}(T_0 f(x))dx = \frac{1-\tilde{f}(s)}{s} \qquad \text{(1.3.4)}$$

Θεωρούμε ότι Y είναι μία τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(y)=F'(y)$ και $F_x(y) = F(x+y) / \bar{F}(x)$ να είναι η ουρά της κατανομής απώλειας. Παρακάτω θα δούμε τη γενικευμένη κατανομή ισορροπίας της F(y) για $r \in \mathbb{R}$.

$$F_{ge}(y;r) = \frac{\int_0^\infty e^{-rx}\ \bar{F}(x)F_\chi(y)dx}{\int_0^\infty e^{-rx}\bar{F}(x)dx},$$

το οποίο είναι μία σύνθεση της $F_x(y)$ πάνω από το x.

Όταν r = 0 έχουμε:

$$F_{ge}(y;0) = \frac{\int_0^\infty F(x+y)dx}{\int_0^\infty \overline{F}(x)\,dx}$$

$$= \frac{\int_y^\infty F(x)dx}{E[Y]}$$

όπου αυτό είναι η κατανομή ισορροπίας της F(y) και θα ορίσουμε και τη συνάρτηση πυκνότητας ισορροπίας f(y) η οποία ορίζεται ως :

$$f_{ge}(y;r) = F'_{ge}(y;r)$$

$$= \frac{e^{ry} \int_y^\infty e^{-ry} f(x)dx}{\int_0^\infty e^{-rx}\,\overline{F}\,(x)dx}, \qquad \text{(1.3.5)}$$

και δεδομένου ότι ο αριθμητής είναι ο μετασχηματισμός Dickson-Hip της f(x) και ο παρονομαστής είναι ο μετασχηματισμός Laplace του F (x), τότε χρησιμοποιώντας το (1.3.4) έχουμε:

$$f_{ge}(y;r) = \frac{\mathrm{Tr}\, f(y)}{\frac{1-\tilde{f}\,(r)}{r}}$$

και καθώς χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (1.3.3) ο μετασχηματισμός Laplace δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\tilde{f}_{ge}(y; r) = \frac{r}{s-r}\,\frac{\tilde{f}\,(r) - \tilde{f}\,(s)}{1 - \tilde{f}\,(r)} \qquad \text{(1.3.6)}$$

1.4 Η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg

Έστω ότι η θεμελιώδη εξίσωση δίνεται από τη σχέση

$$1 - E[e^{-sY-(\delta-cs)V}] = 0 \qquad \underline{(1.4.1)}$$

όπου για τις τυχαίες μεταβλητές Y και V θεωρούμε ότι είναι τυχαία μεγέθη απαιτήσεων άρα και τυχαίοι ενδιάμεσοι χρόνοι. Άρα οι Y και V είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, έτσι η σχέση (1.4.1) γράφεται ως:

$$1 - \hat{p}(s)\hat{k}(\delta - cs) = 0 \qquad \underline{(1.4.2)}$$

Παρατηρούμε ότι η θεμελιώδη εξίσωση ισορροπίας Lundeberg και πιο συγκεκριμένα οι θετικές ρίζες της διαδραματίζει ένα πολύ σημαντικό ρόλο στην ανάλυση Gerber-Shiu.

Όταν δ=0 τότε το s=0 είναι μη-αρνητική ρίζα.

1.4.1 Μετασχηματισμός Laplace μιας ολοκληρωμένης εξίσωσης

Στην ανάλυση Gerber-Shiu συχνά συναντάμε την παρακάτω μορφή:

$$\eta_\delta(u)= \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\, \omega_t(u+ct)k(t)dt\ (x)\ dx \qquad \underline{(1.4.3)}$$

και έτσι ο μετασχηματισμός Laplace δίνεται από τη σχέση:

$$\eta_\delta(s)= \int_0^{\infty} e^{-su} \left(\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\, \omega_t(u+c_t)k(t)dt\right)du$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(\delta-cs)t} \left(\int_0^{\infty} e^{-s(u+ct)}\, \omega_t(u+ct)du\right)k(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(\delta-cs)t} \left(\tilde{\omega}_t(s) - \int_0^{ct} e^{-sx}\, \omega_t(x)dx\right)k(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(\delta-cs)t}\, \tilde{\omega}_t(s)k(t)dt - \tilde{\omega}_\delta^*(\delta-cs) \qquad \underline{(1.4.5)}$$

όπου $\widetilde{\omega}^*_\delta(s)= \int_0^\infty \int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x+s(ct-x)\}} \omega_t(x)k(t)dxdt$. (1.4.6)

Αν $\omega_t(x)= \omega(x)$ είναι μία συνάρτηση ανεξάρτητη του χρόνου τότε έχουμε:

$$\tilde{\eta}_\delta(s) = \widetilde{\omega}(s)\tilde{k}(\delta\text{-}cs) - \widetilde{\omega}^*_\delta(\delta\text{-}cs) \qquad (1.4.7)$$

Όπου $\widetilde{\omega}^*_\delta(s)= \int_0^\infty \int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x+s(ct-x)\}} \omega(x)k(t)dxdt$. (1.4.8)

1.4.2 Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

Θεωρούμε ότι η m(x) ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$m(x)= \varphi \int_0^x m(x-y)f(y)dy + u(x) \quad \text{με } x>=0. \quad (1.4.9)$$

όπου το $\varphi\epsilon(0,1)$ και η σ.π.π. $f(y)=F'(y)$ με $F(0)=0$ και υποθέτουμε ότι η u(x) είναι μία φραγμένη συνάρτηση. Για να βρούμε μία γενική λύση για m(x) ξεκινάμε από το μετασχηματισμό Laplace της σχέσης (1.4.9) για να πάρουμε:

$\tilde{\mathbf{m}}(s) = \varphi\tilde{\mathbf{m}}(s)\tilde{\mathbf{f}}(s) + \tilde{\mathbf{u}}(s)$ και λύνοντας ως προς $\tilde{m}(s)$ παίρνουμε:

- $\tilde{m}(s) = \frac{\tilde{u}(s)}{1-\varphi\tilde{f}(s)}$ (1.4.10)
- και $g(x) = \sum_{n=1}^\infty (1-\varphi)(\varphi)^n f^{*n}(x)$ (1.4.11)

όπου $f^{*n}(x)$ είναι η n-οστή συνέλιξη της f(x)

- $G(y) = 1 - \bar{G}(y) = 1 + \varphi + \int_0^y g(x)dx$ (1.4.12)

Θεωρούμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $g(x) = -\bar{G}'(x)$ δίνεται από

$$\tilde{g}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} g(x)dx$$

$$= \sum_{n=1}^\infty (1-\varphi)(\varphi^n)\{\tilde{f}(s)\}^n$$

$$= \frac{1-\varphi}{1-\varphi\tilde{f}(s)} - (1\text{-}\varphi) \qquad (1.4.13)$$

Αντικαθιστώντας στην (1.4.10) έχουμε:

$$\widetilde{m}(s) = \frac{\widetilde{u}(s)}{1-\varphi}\,(1 - \varphi + \widetilde{g}\,(s)$$

$$= \widetilde{u}\,(s) + \frac{\widetilde{u}\,(s)\widetilde{g}\,(s)}{1-\varphi}$$

και η αναστροφή μας οδηγεί στην παρακάτω σχέση:

$$m(x) = u(x) + \frac{1}{1-\varphi}\int_0^x u(y)g(x-y)dy \qquad (1.4.15)$$

η οποία είναι μία γενική λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.4.9). Συνεπώς διαπιστώνουμε ότι υπάρχει μία σημαντική σχέση ανάμεσα στην ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση και στη σύνθετη γεωμετρική κατανομή G(x).

Χρησιμοποιώντας την σχέση (1.4.13) και τον μετασχηματισμό Laplace (1.4.12) $G(y) = 1 - \overline{G}\,(y) = 1 + \varphi + \int_0^y g(x)dx$, έχουμε :

$$\widetilde{\overline{G}}\,(s) = \frac{\varphi}{s} - \frac{\widetilde{g}\,(s)}{s}$$

$$= \frac{\varphi}{s} - \frac{1}{s}\left(\frac{1-\varphi}{1-\varphi\widetilde{f}\,(s)} - (1-\varphi)\right)$$

$$= \frac{1}{s}\left(1 - \frac{1-\varphi}{1-\varphi\widetilde{f}\,(s)}\right)$$

$$= \frac{1}{s}\left(\frac{1-\varphi\widetilde{f}\,(s)-(1-\varphi)}{1-\varphi\widetilde{f}\,(s)}\right)$$

$$= \frac{\varphi}{s}\,\frac{1-\widetilde{f}\,(s)}{1-\varphi\widetilde{f}\,(s)}$$

$$\Rightarrow (1 - \varphi\widetilde{f}\,(s))\widetilde{\overline{G}}\,(s) = \varphi\,\frac{1-\widetilde{f}\,(s)}{s}$$

$$\Rightarrow \widetilde{\overline{G}}\,(s) = \varphi\widetilde{\overline{G}}\,(s)\widetilde{f}\,(s) + \varphi\,\frac{1-\widetilde{f}\,(s)}{s}$$

Κάνοντας τώρα την αναστροφή προκύπτει:

$$\overline{G}\,(x) = \varphi \int_0^x \overline{G}\,(x-y)\, f(y) dy + \varphi \overline{F}\,(x) \text{ με } x \geq 0 \qquad (1.4.16)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Η ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ GERBER-SHIOU

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Δεδομένου ότι μας ενδιαφέρει να εντοπίσουμε διάφορες ποσότητες που σχετίζονται με καταστροφές για να κατανοήσουμε τον κίνδυνο χρεοκοπίας, εστιάζουμε την προσοχή μας στην ελλειμματική ανανεωτική πυκνότητα χρεοκοπίας

$$m_{d,12}(u) = E[e^{-\delta t}\, \omega_{12}\,(U_{T-},|U_T|)\; I(T<\infty)|U_o = u] \qquad (2.1.1)$$

Είναι μία συνάρτηση του u όπου δ ≥ 0, η οποία είναι μια συνάρτηση του u όπου δ ≥ 0. Η λεγόμενη συνάρτηση χρεοκοπίας w_{12}(x, y), υποθέτουμε ότι είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση για x > 0 και y > 0. Ορίζουμε τη συνάρτηση δείκτη I(A) να είναι ίση με 1 εάν το συμβάν A συμβαίνει και ίση με 0 εάν το συμβάν A δεν συμβαίνει. Έτσι, δεδομένου ότι το I(T < ∞) περιλαμβάνεται στο $m_{\delta,12}$(u), ενδιαφερόμαστε μόνο για τις περιπτώσεις όπου η χρεοκοπία είναι αναπόφευκτη.

Με διάφορες συναρτήσεις για το w_{12}(x, y) και τιμές του δ, η συνάρτηση Gerber-Shiu γίνεται έκφραση για διάφορες ποσότητες που σχετίζονται με τη χεοκοπία που μας ενδιαφέρουν, όπως στιγμιότυπα, συναρτήσεις κατανομής, μετασχηματισμοί Laplace των πυκνοτήτων που μας ενδιαφέρουν, πιθανότητα χρεοκοπίας κ.λπ. Ορισμένες ειδικές περιπτώσεις της συνάρτησης Gerber-Shiu και των ποσοτήτων που σχετίζονται με την χρεοκοπία που γίνονται για διάφορες συναρτήσεις του w_{12}(x, y) και τιμές του δ δίνονται στον πίνακα στην επόμενη σελίδα.

	ΡΟΠΕΣ	
$w_{12}(x,y)$	δ	$m_{\delta,12}(u)$
$x^j y^k$	0	$E[(U_{T-})^J(\|U_T\|)^K(I(T<\infty)\|U_0=u]$ j-οστή στιγμή του πλεονάσματος αμέσως πριν την χρεοκοπία και την k-οστή στιγμλη του ελλείματος κατά την χρεοκοπία
x^j	0	$E[(U_{T-})^J(I(T<\infty)\|U_0=u]$ η j-οστή στιγμή του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία
y^k	> 0	$E[(\|U_T\|)^k I(T<\infty)\|U_0=u]$ k-οστή στιγμή του ελλείμματος στην χρεοκοπία
y^k	0	$E[e^{-\delta T}(\|U_T\|^k I(T<\infty)\|U_0=u]$ η προεξοφλημένη k-οστή στιγμή του ελλείμματος στην χρεοκοπία
$(x+y)^j$	0	$E[(U_{T-}+\|U_T\|)^J I(T<\infty)\|U_0=u]$, η j-οστή στιγμή της απαίτησης που προκαλεί χρεοκοπία

	ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ	
w12(x, y)	***δ***	$m_{\delta,12}(u)$
$I(X\leq x,\ Y\leq y)$	0	$E[I(U_{T-}\leq x, \|U_T\|\leq y)I(T<\infty)\|U_0=u]$,
$I(Y\leq y)$	0	$E[I(\|U_T\|\leq y)I(T<\infty)\|U_0=u]$
$I(X\leq x)\ I(X+Y\leq z)$	0	$E[I(U_{T-}\leq x)I(T<\infty)\|U_0=u]$,
$I(X+Y\leq z)$	0	$E[I(U_{T-}+\|U_T\|\leq z)I(T<\infty)\|U_0=u]$

Καθώς η συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$ μπορεί να αναπαριστά διάφορες μετρικές σχετικές με τη χρεοκοπία, βάσει της επιλογής μας για τη συνάρτηση ποινής, γίνεται εμφανές ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu είναι ένα πολύτιμο αναλυτικό εργαλείο για την κατανόηση των γεγονότων χρεοκοπίας. Παρέχει μια ενοποιημένη προσέγγιση για την εντοπισμό μετρικών σχετικών με την χρεοκοπία. Όταν $w_{12}(x,y)=1$ και δ > 0, η $m_{\delta,12}(u)$ απλοποιείται στον μετασχηματισμό Laplace της πυκνότητας του χρόνου χρεοκοπίας. Θα διαπιστωθεί αργότερα ότι σε αυτήν την περίπτωση, η $m_{\delta,12}(u)$ ικανοποιεί μια ελλειμματική εξίσωση ανανέωσης και αντιστοιχεί στην ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής τυχαίας μεταβλητής. Αναστρέφοντας αυτήν την ειδική περίπτωση της συνάρτησης Gerber-Shiu για να παράγουμε την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας T, μπορούμε να υπολογίσουμε πιθανότητες πεπερασμένης καταστροφής, Pr(T ≤ t|U_0 = u) για t > 0. Στο [Dickson και Willmot (2005)] χρησιμοποιήθηκε αυτή η μέθοδος για να παραγάγει την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας στον κλασικό μοντέλο Poisson, όπου οι χρόνοι μεταξύ αξιώσεων ακολουθούν εκθετικές κατανομές και υπολογίζονται πιθανότητες πεπερασμένης χρεοκοπίας για διάφορα μεγέθη αξιώσεων Erlang. Ωστόσο, η απόκτηση μιας σαφούς λύσης για αυτήν την πυκνότητα είναι προβληματική, ακόμη και μέσα στον κλασικό μοντέλο Poisson.

Υπό συγκεκριμένες υποθέσεις για το p(y) και/ή το k(t), όπως στο κλασικό μοντέλο Poisson όπου υποθέτουμε ότι το k(t) ακολουθεί εκθετική κατανομή, μπορούμε να εκφράσουμε την mδ,12(u) εξ ολοκλήρου σε όρους γνωστών παραμέτρων. Ωστόσο, για κάποιες περιπτώσεις του p(y) και/ή του k(t), η mδ,12(u) μπορεί να λυθεί μόνο για συγκεκριμένες επιλογές της συνάρτησης ποινής. Για να παράγουμε εκφράσεις που ικανοποιεί η mδ,12(u), χρησιμοποιούμε τεχνικές διακριτών πιθανοτήτων, συχνά με εκτίμηση στην πρώτη πτώση περισσότερου κάτω από την αρχική τιμή u και/ή στο χρόνο και το ποσό της πρώτης αξίωσης. Η ενότητα 2.2 εισάγει την κοινή πυκνότητα (T, UT -, |UT |), ενώ οι ενότητες 2.3 και 2.4 εξετάζουν κάθε επιχείρημα εκτίμησης για να παράγουν εκφράσεις που ικανοποιεί η mδ,12(u) λεπτομερώς.

2.2 Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας *T,U(T-),|U(T)|*

Στην παράγραφο αυτή ορίζουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών ***U(T-),|U(T)|***και T όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι u. Θέτουμε ως h_{12}(t,x,y|u) την από κοινού συνάρτηση κατανομής και ότι ο δείκτης «1» υποδηλώνει την ποσότητα του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία *U(T-)* ενώ με το δείκτη «2» την ποσότητα του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας *U(T)*. Αν θεωρήσουμε ότι συμβαίνει η χρεοκοπία T < ∞ η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας (***T,U(T-),|U(T)|***) συγκλίνουν στην πιθανότητα χρεοκοπίας και ως αποτέλεσμα έχει να είναι ελλειμματικές πυκνότητες.

Πρώτα απ΄ όλα θεωρούμε ότι όταν το πλεόνασμα είναι αμέσως πρίν τη χρεοκοπία δίνεται ίσο με x και t αντίστοιχα. Θέλοντας να δούμε αν θα συμβεί η χρεοκοπία θεωρούμε την πιθανότητα $\overline{P}\,(x)$. Επίσης , εάν το έλλειμα είναι y τότε το μέγεθος της απαίτησης θα είναι x + y με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας p(x+y).
Δίνεται: U(T-) = x και T = t καθώς και η πυκνότητα |U(T)| η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$p_x(y) = \frac{p(x+y)}{\overline{P}\,(x)} \quad , y > 0 \ , x > 0 \qquad \textbf{(2.2.1)}$$

η οποία είναι η κατανομή της p(y) και δεν εξαρτάται από τη στιγμή χρεοκοπία T = t.

Θα θεωρήσουμε ότι η χρεοκοπία συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση. Όμως εάν ένας ασφαλιστής ξεκινά με ένα αρχικό πλεόνασμα του u και εισπράττει ασφάλιστρα με συντελεστή c μέχρι τη στιγμή t , δηλαδή τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία τότε το πλεόνασμα αμέσως πρίν τη χρεοκοπία είναι x = u + ct. Συνεπώς , η χρεοκοπία συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = \frac{x-u}{c}$.

Το έλλειμα y συμβαίνει όταν το μέγεθος της πρώτης απαίτησης είναι ύψους x+y. Τότε η από κοινού συνάρτηση των $\big(T, U(T-), |U(T)|\big)$ με αντίστοιχες μεταβλητές (t , x, y) όταν η χρεοκοπία συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση ισούται με k(t)p(x+y) όπου $t = \frac{x-u}{c}$. Άρα, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας ισούται με :

$$h^*_{12}(x, y|u) = \frac{1}{c}\, k\left(\frac{x-u}{c}\right) p(x+y) \qquad \textbf{(2.2.2)}$$

Όπου x > u και y > 0

Ένας εκθέτης “*” που εμφανίζεται σε ένα “h” υποδηλώνει την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που συμβαίνει όταν η χρεοκοπία συμβαίνει στην πρώτη αξίωση.

$$h^*_{12}(x\,, y|u) = h^*_{1}(x|u)p_x(y) \qquad \textbf{(2.2.3)}$$

$$\overset{(2.2.1)}{\underset{}{\xRightarrow{(2.2.3)}}} h^*_{12}(x|u) = \frac{1}{c}\, k\left(\frac{x-u}{c}\right) \overline{P}\,(x)$$

το οποίο είναι η οριακή ελλειματική πυκνότητα του UT− για χρεοκοπία που συμβαίνει στην πρώτη αξίωση.

Στη συνέχεια , θεωρούμε ότι η χρεοκοπία δεν συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση αλλά σε μεταγενέστερη και δεν υπάρχει καμία άμεση σχέση(σύνδεση) ανάμεσα στο t , x και y. Το μόνο που ξέρουμε είναι ότι το x πρέπει να είναι λιγότερο από το u + ct. Ας ορίσουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $h^{**}{}_{12}(t, x , y|u)$ των (T, U(T−),|U(T)|) με δεδομένο ότι η χρεοκοπία συμβαίνει σε κάποια διαδοχική απαίτηση της πρώτης. Ο εκθέτης "**" υποδηλώνει τη πυκνότητα χρεοκοπίας που συμβαίνει σε επόμενες αξιώσεις.

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των (T, U(T−),|U(T)|) η οποία υποδηλώνεται ως $h\ {}_{12}(t, x , y|u)$ μπορεί να οριστεί διαφορετικά αναλόγως πότε συμβαίνει η χρεοκοπία , δηλαδή αν θα συμβεί στην πρώτη απαίτηση όπου ισχύει x = u + ct ή σε επόμενες απαιτήσεις όπου ισχύει x < u + ct.

Πιο συγκεκριμένα:

$$\mathrm{h}_{12}(t\,, x\,,\ y/u) = \begin{cases} \mathrm{h}_{12}{}^{**}(x\,, y|u) \ = \frac{1}{c} k\left(\frac{x-u}{c}\right) p\ (x+y) & , t = \ \frac{x-u}{c}, \mathrm{x} > \mathrm{u}\ , \mathrm{y} > 0 \\ h^{*}{}_{12}(t, x\,, y|u), & \end{cases}$$

Θα εισάγουμε μία κατηγορία πυκνοτήτων στις οποίες θα αναφερόμαστε ως «προεξοφλημένες» επειδή εμφανίζονται να «προεξοφλούν» την πυκνότητα τους (T, U(T−),|U(T)|) από τη στιγμή της χρεοκοπίας, χρησιμοποιώντας τον παράγοντα δ. Αυτές οι προεξοφλημένες πυκνότητες δεν έχουν ουσιαστικές πιθανολογικές ερμηνείες και στην πραγματικότητα για να κανούμε αυτούς τους τύπους ερμηνειών, συχνά χρειάζεται να θέσουμε το δ=0. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις **(2.2.2)** και **(2.2.3)**, υποθέτουμε ότι η από κοινού προεξοφλημένη πυκνότητα του πλεονάσματος ακριβώς πρίν συμβεί η χρεοκοπία και το έλλειμα τη στιγμή της χρεοκοπίας η οποία συμβαίνει στην εμφάνιση της πρώτης απαίτησης δίνεται από:

$$h^{*}_{\delta,12}\ (\mathrm{x},\, \mathrm{y}|\mathrm{u}) = e^{-\delta\frac{x-u}{c}} h^{*}_{12}(x, y|u) \qquad \textbf{(2.2.4)}$$

$$= e^{-\delta\,\frac{x-u}{c}}\,\frac{1}{c}\ \mathrm{k}\ (\frac{x-u}{c})\mathrm{p}(\mathrm{x+y})$$

$= h^*_{\delta,1}(x|u)p_x(y)$

όπου $h^*_{\delta,1}(x|u) = e^{-\delta\frac{x-u}{c}}\frac{1}{c}\,k(\frac{x-u}{c})\,\overline{P}\,(x)$,

η οποία είναι η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση του πλεονάσματος U(T-) για τη σιγμή που η χρεοκοπία συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση. Ο δείκτης «δ» που εμφανίζεται υποδηλώνει ότι είναι προεξοφλημένη πυκνότητα.Εν συνεχεία , υποθέτουμε ότι η από κοινού προεξοφλημένη πυκνότητα του πλεονάσματος ακριβώς πρίν συμβεί η χρεοκοπία και το έλλειμα τη στιγμή της χρεοκοπίας η οποία δεν συμβαίνει στην εμφάνιση της πρώτης απαίτησης αλλά σε κάποια μεταγνέστερη δίνεται από τη σχέση :

$h^*_{\delta,12}$ (x, y|u) = $\int_0^\infty e^{-\delta t}\, h^{**}_{\delta,12}(t,x,y|u)dt$ **(2.2.5)**

Από την **(2.2.3)** έχουμε:

$h^{**}_{12}(t, x, y|u) = h^{**}_{1}(t, x|u)\; p_x(y)$ **(2.2.6)**

όπου $h^{**}_{1}(t, x\,|u)$ είναι η από κοινού πυκνότητα των *T* και *U(T-)* σε μεταγενέστερες απαιτήσεις μετά την πρώτη απαίτηση. Από τη σχέση **(2.2.5)** έχουμε:

$h^{**}_{\delta,12}(x, y|u) = h^{**}_{\delta,1}(x|u)\; p_x(y)$

όπου $h^{**}_{\delta,1}(x|u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\, h^{**}_{1}(t, x|u)\, dt$ είναι η περιθώρια προεξοφλημένη πυκνότητα του πλεονάσματος *U(T-)*, με τη χρεοκοπία να μην συμβαίνει στην εμφάνιση της πρώτης απαίτησης αλλά σε κάποια μεταγενέστερη απαίτηση.

Έπειτα , χρησιμοποιώντας τις σχέσεις **(2.2.3)** και **(2.2.6)** έχουμε:

$h_{\delta,12}(x\,, y|u) = h^{*}_{\delta,12}(x\,,y|u) + h^{**}_{\delta,12}(x,y|u)$

$= h^{*}_{\delta,1}(x|u)\; p_x(y) + h^{**}_{\delta,1}(x|u)\; p_x(y)$ **(2.2.7)**

$= h_{\delta,1}(x|u)p_x(y)$ **(2.2.8)**

είναι η από κοινού προεξοφλημένη πυκνότητα των (*U(T-)*,|*U(T)*|) όπου

$h_{\delta,1}$(x|u) = $h^{*}_{\delta,1}$(x|u) + $h^{**}_{\delta,1}$(x|u) , η οποία είναι η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση του πλεονάσματος *U(T-).*

Με δεδομένο ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu $m_{\delta,12}$(u) δίνεται από τη σχέση **(2.1.1)** μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση $m_{\delta,12}$(u) ως άθροισμα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την εμφάνιση της χρεοκοπίας στην πρώτη απαίτηση $\left(t = \frac{x-u}{c}\right.$, $\left. x > 0, y > 0\right)$, σε μεταγενέστερες απαιτήσεις μετά την πρώτη απαίτηση (t > 0 , 0 < x < u + ct , y > 0) , και 0 διαφορετικά όπως ακολουθεί παρακάτω.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις **(2.2.4)** , **(2.2.5)** και **(2.2.7)** καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση :

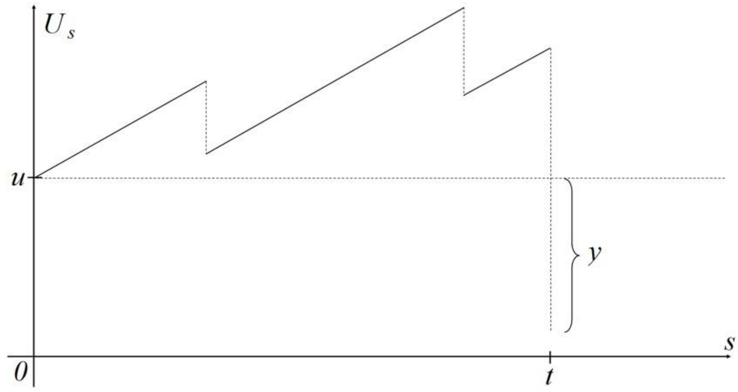
$$m_{\delta,12}(u) = \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)} w_{12}(x,y) h^{*}_{12}(x,y|u)dxdy$$
$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{u+ct} e^{-\delta t} w_{12}(x,y) h^{**}_{12}(x,y|u)\, dxdy$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty w_{12}(x,y)\left(h^{*}_{\delta,12}(x,y|u) + h^{**}_{\delta,12}(x,y|u)\right) dxdy$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty w_{12}(x,y) h_{\delta,12}(x,y|u)\, dxdy \qquad \textbf{(2.2.9)}$$

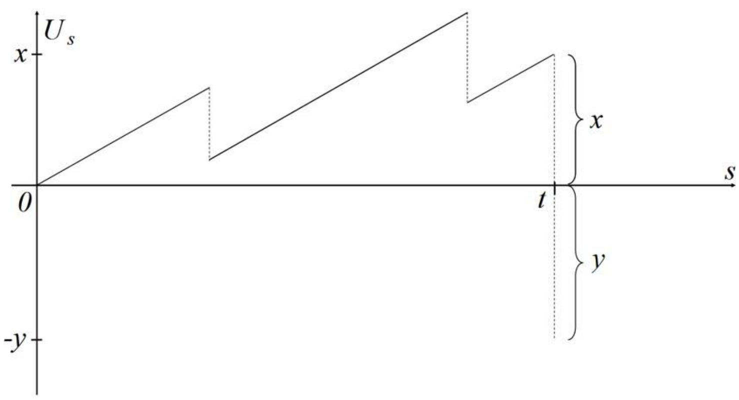
2.3 Μελέτη για την πρώτη πτώση πλεονάσματος

Σε αυτή την ενότητα, ρυθμίζοντας την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό του επίπεδο, προσδιορίζουμε μια σημαντική εξίσωση που ικανοποιείται από $m_{\delta,12}$(u). Εξετάστε την ακόλουθη γραφική αναπαράσταση μιας διαδρομής δείγματος που ακολουθείται από μια διεργασία πλεονάσματος με αρχικό επίπεδο u όπου η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό του επίπεδο είναι μεγέθους y και εμφανίζεται τη στιγμή t.



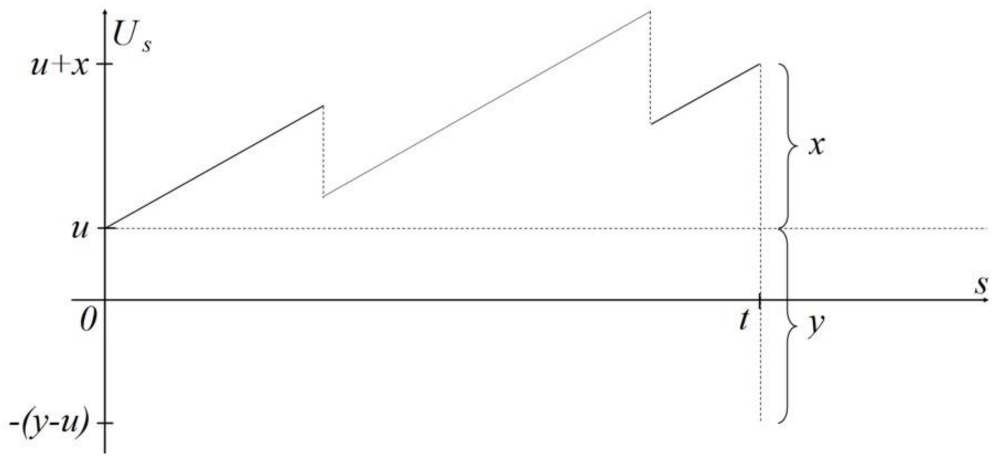
Σχήμα 2.1: Ένα δείγμα διαδρομής του U_t που δείχνει την πρώτη πτώση του πλεονάσματος

Στη συνέχεια , θα αναφερθούμε σε πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό του επίπεδο ως απλά, πτώση του πλεονάσματος. Τώρα θεωρούμε, $h_{12}(t, x, y|u)$, την πυκνότητα της άρθρωσης του $(T, U_{T^-}, |U_T|)$ στο (t, x, y) και αφήνωντας u = 0. Τότε $h_{12}(t,x,y|0)$ είναι η πυκνότητα μιας πλεονασματικής διαδικασίας που ξεκινά από το επίπεδο 0, όντας στο επίπεδο x πάνω από 0 τη στιγμή t χωρίς να προκύψει πρώτα χρεοκοπία και στη συνέχεια μια αξίωση μεγέθους x + y να εμφανίζεται αμέσως , έτσι ώστε η καταστροφή να συμβαίνει με έλλειμμα y και ένα πλεόνασμα αμέσως πριν από την καταστροφή του x. Το δείγμα διαδρομής αυτού του σεναρίου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.2 : ένα δείγμα διαδρομής U_t όπου η χρεοκοπία συμβαίνει όταν u = 0

Θα εξετάσουμε, ένα σχεδόν παράλληλο σενάριο όπου μια διεργασία πλεονάσματος που ξεκινά από το επίπεδο u είναι σε ένα ποσό x πάνω από το u τη στιγμή t χωρίς να εμφανίζεται πρώτα πτώση του πλεονάσματος και μετά να εμφανίζεται αμέσως ένας ισχυρισμός μεγέθους x + y έτσι ώστε να εμφανίζεται η πρώτη πτώση του πλεονάσματος το οποίο είναι μεγέθους y και το πλεόνασμα αμέσως πριν από την πτώση είναι u + x. Σημειώστε ότι αν x = u + ct , τότε η πρώτη πτώση του πλεονάσματος εμφανίζεται στην πρώτη αξίωση, και εάν x < u + ct , τότε η πρώτη πτώση εμφανίζεται στις επόμενες αξιώσεις. Ένα δείγμα διαδρομής αυτού του σεναρίου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.3 : ένα δείγμα διαδρομής U_t που δείχνει μία πτώση του πλεονάσματος που προκαλεί χρεοκοπία.

Παίρνοντας διαφορετικές περιπτώσεις για το που συμβαίνει η πρώτη πτώση του πλεονάσματος καθώς και αν στην πρώτη απαίτηση οδηγείται σε χρεοκοπία το χαρτοφυλάκιο ή όχι , θα εκφράσουμε τη συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$ ως μία ελλειματική ανανεωτική εξίσωση. Συνεπώς έχουμε :

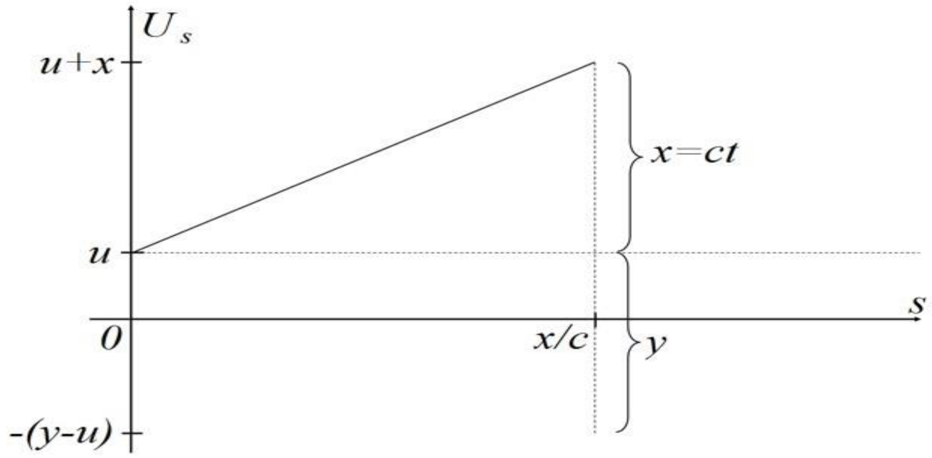
$$m_{\delta,12}(u) = E\, [e^{-\delta T} w_{12}(U(T-),|U(T)|)\, I(T < \infty)|\, U(0) = u]$$

Βάσει αυτής της συνάρτησης μπορούμε να καταλήξουμε σε συμπεράσματα τα οποία παρουσιάζουμε σε τέσσερις περιπτώσεις.

<u>**ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1:**</u> Η πρώτη πτώση συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση και προκαλεί χρεοκοπία

Η πρώτη πτώση εμφανίζεται στην πρώτη αξίωση και προκαλεί χρεοκοπία όταν η διαδικασία πλεονάσματος, ξεκινώντας από το επίπεδο u, συσσωρεύεται με ρυθμό c μέχρι να φτάσει σε ένα ποσό x = ct πάνω από το u όταν εμφανίζεται η πρώτη αξίωση

$\left(\text{τη στιγμή } t = \frac{x}{c}\right)$ και προκαλεί πτώση του πλεονάσματος κάτω από το u του μεγέθους y όπου το y πρέπει να υπερβαίνει το u για να προκαλέσει χρεοκοπία. Τότε το πλεόνασμα αμέσως πριν από την καταστροφή είναι u + x και το έλλειμμα στην καταστροφή είναι y − u.



Σχήμα 2.4: Η χρεοκοπία συμβαίνει όταν το πλεόνασμα πέφτει στην πρώτη απαίτηση.

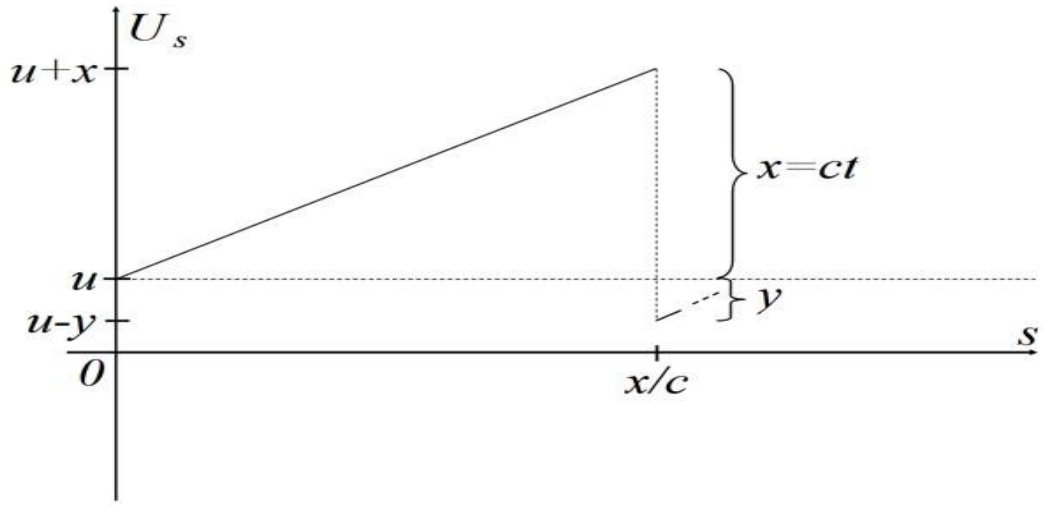
Η πυκνότητα ισούται με h_{12}^{*}(x,y|0) όπου x > 0 και y > u .Έτσι χρησιμοποιώντας **(2.2.4)** για το $m_{\delta,12}(u)$ είναι:

$$= \int_u^\infty \int_0^\infty e^{-\delta\frac{x}{c}}\, w_{12}(u + x\,,\, y - u)\, h_{12}^{*}(x,y|0)dxdy$$

$$= \int_u^\infty \int_0^\infty w_{12}(u+x\,,\; y-u) h_{\delta,12}^{*}(x,y|0)dxdy \qquad \textbf{(2.3.1)}$$

<u>**ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2:**</u> Η πρώτη πτώση συμβαίνει στην πρώτη υποχρέωση και δεν προκαλεί χρεοκοπία

Αυτή η περίπτωση ικανοποιείται από το σενάριο που παρουσιάζεται στην Περίπτωση 1, εκτός από το ότι η πτώση του πλεονάσματος κάτω από το u του μεγέθους y πρέπει να είναι μικρότερη από το u για να μην συμβεί καταστροφή. Αυτό συμβαίνει επίσης με την πυκνότητα h_{12}^{*}(x,y|0) αλλά για x > 0 και y < u. Εφόσον δεν συμβαίνει καταστροφή και επειδή έχουμε υποθέσει ότι η διαδικασία πλεονάσματος ανανεώνεται μετά από κάθε αξίωση, η διαδικασία λέγεται ότι ανανεώνεται με ένα αρχικό πλεόνασμα u − y όπου έχει περάσει ένα χρονικό διάστημα $t = \frac{x}{c}$.



Σχήμα 2.5: Η χρεοκοπία συμβαίνει όταν το πλεόνασμα πέφτει στην πρώτη απαίτηση χωρίς να συμβεί χρεοκοπία

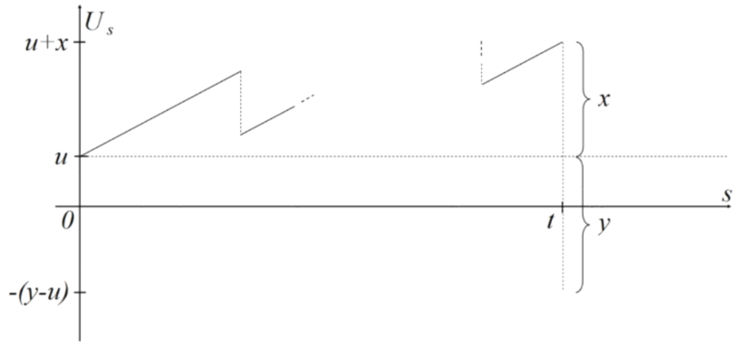
Χρησιμοποιώντας τη σχέση **(2.2.4)** το $m_{\delta,12}(u)$ σε αυτήν την περίπτωση ισούται με:

$$= \int_0^u \int_0^\infty e^{-\delta\frac{x}{c}} m_{\delta,12}(u-y) h_{12}^*(x,y|0)dxdy$$

$$= \int_0^u m_{\delta,12}(u-y)\left(\int_0^\infty h_{\delta,12}^*(x,y|0)dx\right)dy \qquad \textbf{(2.3.2)}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3: Η πρώτη πτώση συμβαίνει σε μία μεταγενέστερη απαίτηση και προκαλεί χρεοκοπία

Η πρώτη πτώση εμφανίζεται σε μια επόμενη αξίωση και προκαλεί χρεοκοπία όταν η διαδικασία πλεονάσματος ξεκινώντας από το αρχικό επίπεδο u είναι ένα ποσό x πάνω από το u τη στιγμή t όταν μια αξίωση (όχι η πρώτη) προκαλεί πτώση του πλεονάσματος για πρώτη φορά μεγέθους y > u για να συμβεί καταστροφή. Και πάλι, το πλεόνασμα πριν από την καταστροφή είναι u+x και το έλλειμμα στην καταστροφή είναι y–u.



Σχήμα 2.6: Πρώτη πτώση πλεονάσματος σε μεταγενέστερη απαίτηση που οδηγεί σε χρεοκοπία

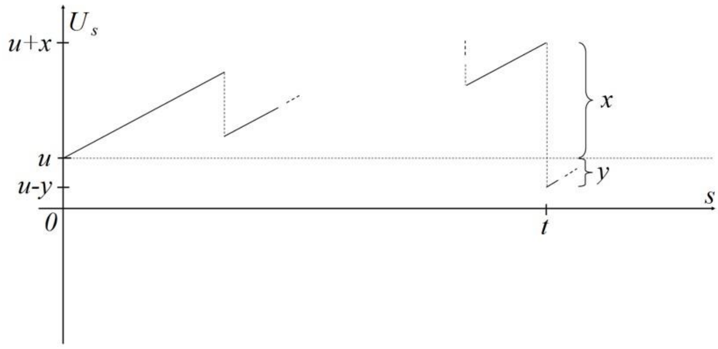
Έτσι στην περίπτωση 3 θα έχουμε:

$m_{\delta,12}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t}\, w_{12}(u + x,\, y - u)\, h_{12}^{**}(t,x,y|0)\,dt\,dx\,dy$

$= \int_u^\infty \int_0^\infty w_{12}\,(u+x,\, y-u) h_{\delta,12}^{**}(x,y|0)\,dx\,dy$ **(2.3.3)**

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4:</u> Η πρώτη πτώση συμβαίνει σε μία μεταγενέστερη αξίωση και δεν προκαλεί χρεοκοπία

Η περίπτωση αυτή ικανοποιείται από το σενάριο που παρουσιάζεται στην Περίπτωση 3 εκτός από την πτώση του πλεονάσματος κάτω από το u του μεγέθους y πρέπει να είναι μικρότερο από το u για να μην συμβεί καταστροφή. Αυτό συμβαίνει και με την πυκνότητα $h_{12}^{*}(t,x,y|0)$ αλλά για t > 0, x > 0 και y < u. Η διαδικασία αυτή λέγεται ότι ανανεώνεται με ένα αρχικό πλεόνασμα u − y όταν έχει περάσει ένα χρονικό διάστημα t.



Σχήμα 2.7: Πρώτη πτώση του πλεονάσματος σε μεταγενέστερη απαίτηση που δεν οδηγεί σε χρεοκοπία.

$$m_{\delta,12}(u) = \int_0^u \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t}\, m_{\delta,12}(u-y) h_{12}^{**}(t,x,y|0)\,dt\,dx\,dy$$
$$= \int_0^u m_{\delta,12}(u-y)\left(\int_0^\infty h_{\delta,12}^{**}(x,y|0)dx\right)dy \qquad \textbf{(2.3.4)}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu $m_{\delta,12}(u)$ περιλαμβάνει τις ποσότητες $e^{-\delta\frac{x}{c}}$ και $e^{-\delta t}$ για την (2.3.2) και (2.3.4) αντίστοιχα.Έτσι , προσθέτοντας τις 4 περιπτώσεις (2.3.1),(2.3.2),(2.3.4) καταλήγουμε σε:

$$m_{\delta,12}(u) = \int_0^\infty m_{\delta,12}(u-y)\left\{\int_0^\infty h_{\delta,12}^{*}(x,y|0)dx + \int_0^\infty h_{\delta,12}^{**}(x,y|0)dx\right\}dy$$
$$+ \int_u^\infty \int_0^\infty w_{12}(u+x, y-u)\left\{h_{\delta,12}^{*}(x,y|0) + h_{\delta.12}^{**}(\chi,\upsilon|0)\right\}dxdy$$
$$= \int_0^u m_{\delta,12}(u-y)\left\{\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)dx\right\}dy$$
$$+ \int_u^\infty \int_0^\infty w_{12}(u+x,y-u)\, h_{\delta,12}(x,y|0)dxdy. \qquad \textbf{(2.3.5)}$$

Τώρα θα ορίσουμε τη θετική σταθερά φ_δ

$$\varphi_\delta = \int_0^\infty \int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)dydx \qquad \textbf{(2.3.6)}$$
$$= \int_0^\infty h_{\delta,1}(x|0)\left(\int_0^\infty p_x(y)dy\right)dx$$
$$= \int_0^\infty h_{\delta,1}(x|0)dx \qquad \textbf{(2.3.7)}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση **(2.2.8)** όπου έχουμε $m_{\delta,12}(0)= \varphi_\delta$ όταν $w_{12}(x,y) = 1$.Τότε από τη σχέση **(2.1.1)** θα προκύψει το εξής:

$$0 < \varphi_\delta = \mathrm{E}\left[e^{-\delta T} I(T < \infty)|U_0 = 0\right]$$

$$\leq \mathrm{E}[I(T < \infty)|U_0 = 0] = \Pr(T < \infty|U_0 = 0) = \psi(0)$$

$$< 1. \qquad \textbf{(2.3.8)}$$

Αν τώρα δ=0 τότε φ_0=ψ(0) το οποίο είναι η πιθανότητα καταστροφής όταν το αρχικό πλεόνασμα u=0 και μπορεί επίσης να ερμηνευθεί και ως η πιθανότητα πτώσης του πλεονάσματος. Ορίζουμε τη συνάρτηση πυκνότητας κλιμακωτού ύψους δίνεται από τη σχέση :

f_δ(y) = $\frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^\infty h_{\delta,12}$(x,y|0)dx, y>0 **(2.3.9)**

Και από τη σχέση **(2.2.8)** μπορούμε να γράψουμε την σχέση **(2.3.9)** ως εξής:

f_δ(y) = $\int_0^\infty p_x(y)\left\{\frac{h_{\delta,1}(x|0)}{\varphi_\delta}\right\}$dx **(2.3.10)**

Χρησιμοποώντας τη σχέση **(2.3.5)** και **(2.3.9)** προκύπτει ότι η $m_{\delta,12}(u)$ μπορεί να γραφτεί ως μία ελλειματική ανανεωτική εξίσωση της μορφής :

$m_{\delta,12}(u)$= $\varphi_\delta\int_0^u m_{\delta,12}\,(u-y)f_\delta(y)dy+\ u_{\delta,12(u)}$ **(2.3.11)**

όπου:

$u_{\delta,12(u)}$ =$\int_u^\infty\int_0^\infty w_{12}\,(u+x,y-u)h_{\delta,12}(x,y|0)dxdy$ **(2.3.12)**

Από το Κεφάλαιο 1 και τη σχέση **(1.4.15)** βλέπουμε ότι η γενική λύση της $m_{\delta,12}$(u) μπορεί να εκφραστεί ως:

$m_{\delta,12}(u)$ = $u_{\delta,12(u)}$ + $\frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u u_{\delta,12}\,(y)g_\delta(u-y)dy.$ **(2.3.13)**

όπου $g_\delta(u)=\ -\overline{G_\delta'}$(u) = $\sum_{n=1}^\infty(1-\ \varphi_\delta)(\varphi_\delta)^n\,f_\delta^{*n}$(u) **(2.3.14)**

είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας σχετιζόμενης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής για u > 0 όπου η φ_δ ορίζεται από τη σχέση **(2.3.6)** και f_δ^{*n}(y) η οποία είναι η n-οστή συνέλιξη της f_δ(y).

Έτσι μπορούμε να απλοποιήσουμε την $m_{\delta,12}$(u) παίρνοντας ειδικές περιπτώσεις για τη συνάρτηση w_{12}(x,y). Αν w_{12}(x,y) = $w_2(y)$ τότε η **(2.3.11)** απλοποιείται ως εξής :

$m_{\delta,12}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,12}\,(u-y) f_\delta(y)dy + \ u_{\delta,12}(u)$ **(2.3.15)**

Και χρησιμοποιώντας την **(2.3.12)** και **(2.3.9)** θα έχουμε

$u_{\delta,2}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty w_2(y-u) h_{\delta,12}(x,y|0)\, dxdy$

$= \varphi_\delta \int_u^\infty w_2\,(y-u) f_\delta(y)dy.$ **(2.3.16)**

η οποία είναι μία πολύ αξιοσημείωτη απλοποίηση διότι σε αντίθεση με $u_{\delta,12(u)}$, η $u_{\delta,2}(u)$ είναι μία συνάρτησης της φ_δ και του κλιμακωτού ύψους $f_\delta(y)$ και δεν εξαρτάται από το $h_{\delta,12}(x,y|0)$.

Επίσης, χρησιμοποιώντας τη **(2.3.13)** η γενική λύση της $m_{\delta,2}(u)$ απλοποιείται σε

$m_{\delta,12}(u)= u_{\delta,12}(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta} \int_0^u u_{\delta,12}\,(y) g_\delta(u-y)dy$ **(2.3.17)**

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι $w_{12}(x,y) = w_2(y) = 1$. Τότε $m_{\delta,12}(u) = E[e^{-\delta T} I(T < \infty)|U(0) = 0]$ και χρησιμοποιώτας τη (2.3.16), η $u_{\delta,2}(u)$ απλοποιείται σε $\varphi_\delta \overline{F_\delta}$(u) όπου $\overline{F_\delta}$(u)= $\int_u^\infty f_\delta(y)dy$. Συνεπώς από την εισαγωγή προκύπτει ότι η $m_{\delta,12}(u)$ δίνεται από την ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής

$\overline{G_\delta}$(u) = $\sum_{n=1}^\infty (1-\varphi_\delta)(\varphi_\delta)^n \overline{F_\delta^{*n}}(u)$

όπου $\overline{F_\delta^{*n}}(u)$=$\int_u^\infty f_\delta^{*n}(y)dy$ και έτσι η (2.3.15) απλοποιείται σε

$\overline{G_\delta}$(u)= $\varphi_\delta \int_0^u \overline{G_\delta}(\mathrm{u}-y) f_\delta(y)dy + \varphi \overline{F_\delta}(u)$ **(2.3.18)**

Έτσι, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\overline{G_\delta}(u)$=E[$e^{-\delta T} I(T < \infty)|U(0) = 0]$, για δ=0, $\overline{G_0}$(u)=ψ(u) και φ_δ=E[$e^{-\delta T} I(T < \infty)|U(0) = 0] = \overline{G_\delta}(0)$.

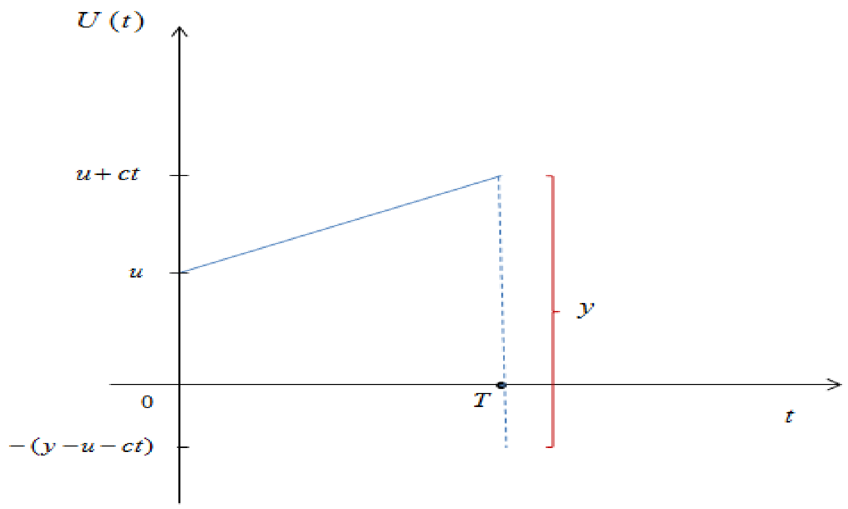
2.4 Μελέτη για το χρόνο και το ποσό της πρώτης αξίωσης

Έχουμε δύο περιπτώσεις:

- *Περίπτωση 1:πρώτη απαίτηση προκαλεί χρεοκοπία*
- *Περίπτωση 2:πρώτη απαίτηση δεν προκαλεί χρεοκοπία*

- ***Περίπτωση 1:πρώτη απαίτηση προκαλεί χρεοκοπία***

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι ένας ασφαλιστής με ένα αρχικό πλεόνασμα u όπου εισπράττει ασφάλιστρα με επιτόκιο c μέχρι η στιγμή t όταν συμβεί η πρώτη απαίτηση έτσι ώστε το πλεόνασμα αμέσως πρίν από την πρώτη απαίτηση να είναι u + ct. Επιπλέον για να είναι βέβαιη η χρεοκοπία θεωρούμε ότι το ύψος της πρώτης απαίτησης y πρέπει να πέσει κάτω από τον οριζόντιο άξονα, δηλαδή να πάρει αρνητική τιμή τη χρονική στιγμή t .Επισημαίνουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας ώστε να συμβεί η πρώτη απαίτηση ύψους y είναι p(y)k(t).



Σχήμα 2.8: Μελέτη του μεγέθους της πρώτης απαίτησης που οδηγεί σε χρεοκοπία

Συνεπώς από τον ορισμό της μέσης τιμής καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα

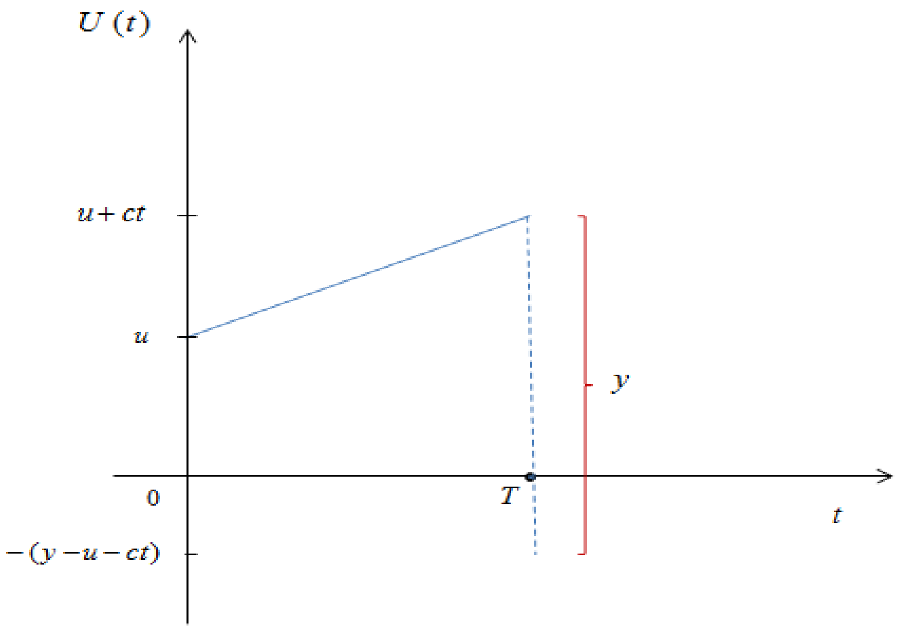
$$\beta_{\delta,12}(u)=\int_0^\infty \int_{u+ct}^\infty e^{-\delta t} w_{12}\,(u+ct, y-u-ct)p(y)k(t)dydt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\delta t}\, a_{12}(u+ct)k(t)dt \qquad \textbf{(2.4.1)}$$

όπου $\alpha_{12}(x) = \int_x^\infty w_{12}\,(x, y-x)p(y)dy$ **(2.4.2)**

- ***Περίπτωση 2: Στην πρώτη απαίτηση δεν συμβαίνει χρεοκοπία***

Στην περίπτωση 2 εξετάζουμε το ενδεχόμενο που η χρεοκοπία δεν συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση. Θεωρούμε ότι το αρχικό αποθεματικό είναι *u* και ότι για να είναι βέβαιο ότι δεν θα συμβεί η χρεοκοπία, πρέπει το ύψος της πρώτης απαίτησης *y* για να είναι λιγότερο από *u*+*ct* ώστε να παίρνει μόνο θετικές τιμές τη χρονική στιγμή t. Επισημαίνουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας ώστε να συμβεί η πρώτη απαίτηση ύψους y είναι p(y)k(t) και ότι η διαδικασία ανανεώνεται με αρχικό αποθεματικό u + ct – y αφού ξεπεράσει τη χρονική στιγμή t.



Σχήμα 2.9: Μελέτη μεγέθους της πρώτης απαίτησης που δεν οδηγεί σε χρεοκοπία.

$$m_{\delta,12}(u)=\int_0^{\infty}\int_0^{u+ct} e^{-\delta t}\, m_{\delta,12}(u+ct-y)p(y)k(t)dydt$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\,\sigma_{\delta,12}(u+ct)k(t)dt. \qquad \textbf{(2.4.3)}$$

όπου $\sigma_{\delta,12}(x) = \int_0^{x} m_{\delta,12}\,(x-y)p(y)dy$ **(2.4.4)**

Αξίζει να σημειωθεί ότι η $\sigma_{\delta,12}(x)$ είναι συνέλιξη της $m_{\delta,12}(u)$ και p(x), ο μετασχηματισμός Laplace δίνεται από

$\hat{\sigma}_{\delta,12}(s)=\hat{m}_{\delta,12}(s)\hat{p}(s)$. **(2.4.5)**

Συνοψίζοντας τις σχέσεις (2.4.1) και (2.4.3) του $m_{\delta,12}(u)$ για κάθε μία από τις περιπτώσεις παίρνουμε την παρακάτω μορφή:

$$m_{\delta,12}(u)=\int_0^\infty e^{-\delta t}\,\sigma_{\delta,12}(u+ct)k(t)dt+\ \beta_{\delta,12}(u) \qquad \textbf{(2.4.6)}$$

Σημειώνουμε ότι ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της (2.4.4) και (1.3.9) από το κεφάλαιο 1 με το $w_t(x)$ να αντικαταστάθηκε με $\sigma_{\delta,12}(x)$ και έτσι η $\sigma_{\delta,12}(x)$ δεν είναι συναρτήσει το t, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.3.12) και (2.4.5) ο μετασχηματισμός Laplace δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\int_0^\infty e^{-su}\int_0^\infty e^{-\delta t}\,\sigma_{\delta,12}(u+ct)k(t)dtdu \qquad \textbf{(2.4.7)}$$

$$=\hat{\sigma}_{\delta,12}(s)\hat{k}\,(\delta-cs)-\ \hat{\sigma}^*_{\delta,12}(\delta-cs) \qquad \textbf{(2.4.8)}$$

$$=\hat{m}_{\delta,12}(s)\hat{p}\,(s)\hat{k}\,(\delta-cs)-\ \hat{\sigma}^*_{\delta,12}(\delta-cs)$$

Όπου $\hat{\sigma}^*_{\delta,12}(s)=\int_0^\infty\int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x+s(ct-x)\}}\sigma_{\delta,12}(x)k(t)dxdt.$ **(2.4.9)**

Επιπλέον , ο μετασχηματισμός Laplace της (2.4.6) δίνεται από:

$$\hat{m}_{\delta,12}(s)=\hat{m}_{\delta,12}(s)\hat{p}\,(s)\hat{k}\,(\delta-cs)-\hat{\sigma}^*_{\delta,12}(\delta-cs)+\hat{\beta}_{\delta,12}(s)$$

Και λύνοτας ως προς $\hat{m}_{\delta,12}(s)$ παίρνουμε

$$\hat{m}_{\delta,12}(s)(1-\hat{p}\,(s)\hat{k}(\delta-cs))=\hat{\beta}_{\delta,12}(s)-\hat{\sigma}^*_{\delta,12}(\delta-cs) \qquad \textbf{(2.4.10)}$$

Αν θέσουμε το δεξιό μέλος μηδέν τότε προκύπτει ότι

$$\hat{\sigma}^*_{\delta,12}(\delta-c\rho s)=\hat{\beta}\ _{\delta,12}(\rho_\delta) \qquad \textbf{(2.4.11)}$$

2.5 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ POISSON

Το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου χαρακτηρίζεται από ένα ανανεωτικό μοντέλο στο οποίο η πυκνότητα του μεγέθους των απαιτήσεων p(y) υποθέτουμε ότι ακολουθεί οποιαδήποτε κατανομή ενώ η πυκνότητα των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί εκθετική κατανομή. [Willmot,G.E.(2011)]. Συνεπώς θεωρούμε ότι k(t) = $\lambda e^{-\lambda t}$ η οποία κατανομή έχει μετασχηματισμό Laplace $\hat{k}\,(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$ και χρησιμοποιώντας την (2.4.9) προκύπτει το εξής:

$$\hat{\sigma}^*_{\delta,12}(s) = \int_0^\infty \int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x+s(ct-x)\}}\,\sigma_{\delta,12}(x)\lambda e^{-\lambda t}\mathrm{dxdt} \qquad \textbf{(2.5.1)}$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{c}\{\delta-s)x}\;\sigma_{\delta,12}(x)\left(\int_{\frac{x}{c}}^\infty \lambda e^{-(\lambda+\sigma)t}\,dt\right)\mathrm{dx}$$

$$= \int_0^\infty e^{-\frac{1}{c}(\delta-s)x}\,\sigma_{\delta,12}(x)\,\frac{\lambda}{\lambda+s}\,e^{-\frac{1}{c}(\lambda+s)x}dx$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+s}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)x}\,\sigma_{\delta,12}(x)dx$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+s}\,\hat{\sigma}_{\delta,12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right) \qquad \textbf{(2.5.2)}$$

Συνεπώς η (2.4.10) γίνεται:

$$\left(1 - \tilde{p}\,(s)\,\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)\tilde{m}_{\delta,12}(s) = \tilde{\beta}_{\delta,12}(s) - \frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\,\tilde{\sigma}_{\delta,12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right) \qquad \textbf{(2.5.3)}$$

Θεώρημα 1: Για δ > 0 , υπάρχει μια πραγματική και θετική ρίζα s=ρ_δ στη θεμελιώδη εξίσωση του Lundberg που δίνεται από τη σχέση:

$$1 - \tilde{p}\,(s)\,\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs} = 0 \qquad \textbf{(2.5.4)}$$

και αν δ=0 τότε s=ρ_0=0 είναι η μόνη πραγματική και μη-αρνητική ρίζα.

Συνεπώς από τη (2.4.11) και χρησιμοποιώντας την (2.5.2) προκύπτει ότι:

$$\frac{\lambda}{\lambda+\delta-c\rho_\delta}\,\tilde{\sigma}_{\delta,12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right) = \tilde{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta)$$

Όπου ρ_δ είναι η μία πραγματική και μη-αρνητική ρίζα της θεμελιώδης εξίσωσης του Lundberg και λύνοντας ως προς $\tilde{\sigma}_{\delta,12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)$ θα έχουμε :

$\tilde{\sigma}_{\delta,12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right) = \frac{\lambda+\delta-c\rho_\delta}{\lambda}\tilde{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta)$,

Και κάνοντας αντικατάσταση στη (2.5.3) προκύπτει ότι:

$$\left(1 - \tilde{p}(s)\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)\tilde{m}_{\delta,12}(s) = \tilde{\beta}_{\delta,12}(s) - \frac{\lambda+\delta-c\rho_\delta}{\lambda+\delta-cs}\tilde{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta)$$

και πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές με $-\left(\frac{\lambda+\delta-cs}{c}\right)$ θα προκύψει ότι:

$$\left(s - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c}\hat{p}(s)\right)\hat{m}_{\delta,12}(s) = \frac{1}{c}\left((\lambda+\delta-c\rho_\delta)\hat{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta) - (\lambda+\delta-cs)\hat{\beta}_{\delta,12}(s)\right) \qquad \textbf{(2.5.5)}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.4.1), ο μετασχηματισμός Laplace της $\beta_{\delta,12}(u)$ δίνεται από:

$$\hat{\beta}_{\delta,12}(s)=\int_0^\infty e^{-su}\int_0^\infty e^{-\delta t}\, a_{12}(u+ct)\lambda e^{-\lambda t}dtdu$$

και παρατηρούμε ότι η μορφή που προκύπτει είναι ίδια με τη σχέση (2.4.7) με το $\sigma_{\delta,12}(x)$ να έχει αντικατασταθεί με το $\alpha_{12}(x)$ και το k(t) να έχει αντικατασταθεί με το $\lambda e^{-\lambda t}$.Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.4.8) και (2.4.9), προκύπτει ότι :

$$\hat{\beta}_{\delta,12}(s) = \hat{a}_{12}(s)\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs} - \hat{a}^*_{\delta,12}(\delta-cs)$$

(2.5.6)

<u>**όπου**</u> $\boldsymbol{\hat{a}^*_{\delta,12}(s) = \int_0^\infty\int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x+s\,(ct-x)\}}\, a_{12}(x)\lambda e^{-\lambda t}dxdt}$

το οποίο έχει την ίδια μορφή με την (2.5.1) με το $\sigma_{\delta,12}$ αν αντικατασταθεί από το $\alpha_{12}(x)$ και έτσι θα γίνει :

$$\hat{\alpha}^*_{\delta,12}(s)=\frac{\lambda}{\lambda+S}\hat{\alpha}_{12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας την (2.5.6) θα προκύψει ότι :

$$\hat{\beta}_{\delta,12}(s)=\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\left(\hat{a}_{12}(s) - \hat{a}_{12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)\right)$$

$$\Rightarrow (\lambda+\delta-cs)\hat{\beta}_{\delta,12}(s) = \lambda\left(\hat{a}_{12}(s) - \hat{a}_{12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)\right)$$

Συνεπώς, η δεξιά μεριά της (2.5.5) δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\frac{1}{c}\Big((\lambda+\delta-c\rho_\delta)\hat{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta)-(\lambda+\delta-cs)\hat{\beta}_{\delta,12}(s)\Big)$$

$$=\frac{\lambda}{c}\left(\hat{\alpha}_{12}(\rho_\delta)-\ \hat{\alpha}_{12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)-\hat{\alpha}_{12}(s)+\ \hat{\alpha}_{12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)\right)$$

$$=\frac{\lambda}{c}\left(\hat{\alpha}_{12}(\rho_\delta)-\ \hat{\alpha}_{12}(s)\right) \qquad \textbf{(2.5.8)}$$

Θεωρούμε ότι η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg η οποία δίνεται από τη σχέση (2.5.4) με s = ρ_δ την οποία μπορούμε να λύσουμε ως προς $\frac{\lambda+\delta}{c}$ = ρ_δ+$\frac{\lambda}{c}\,\hat{p}(\rho_\delta)$ έτσι ώστε ο συντελεστής της $\widehat{m}_{\delta,12}$(s) στη (2.5.5) μπορεί να ξαναγραφτεί ως :

$$s-\ \frac{\lambda+\delta}{c}+\frac{\lambda}{c}\,\widehat{p}\,(s) = s-\rho_\delta-\ \frac{\lambda}{c}\widehat{p}\,(\rho_\delta)+\frac{\lambda}{c}\widehat{p}\,(s)$$

$$= (s-\rho_\delta)\left(1-\ \frac{\lambda}{c}\frac{\widehat{p}\,(\rho_\delta)-\widehat{p}\,(s)}{s-\ \rho_\delta}\right)$$

$$= (s-\rho_\delta)\left(1-\left\{\frac{\lambda}{c}\frac{1-\ \widehat{p}\,(\rho_\delta)}{\rho_\delta}\right\}\left\{\frac{\rho_\delta}{s-\rho_\delta}\frac{\widehat{p}\,(\rho_\delta)-\widehat{p}\,(s)}{1-\ \widehat{p}\,(\rho_\delta)}\right\}\right) \qquad \textbf{(2.5.9)}$$

$$\varphi_\delta=\frac{\lambda}{c}\frac{1-\ \hat{p}(s)}{\rho_\delta}$$

$$=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-\rho\delta y}\,\overline{P}\,(y)dy$$

(2.5.10)

Και επειδή $\int_0^\infty \overline{P}\,(y)\,dy$ = E[Y] γνωρίζουμε ότι $\int_0^\infty e^{-\rho\delta y}\,\overline{P}\,(y)dy$ < E[Y] και έτσι φ_δ < $\frac{\lambda}{c}$E[Y] η οποία είναι μία ποσότητα μικρότερη από 1 καθώς ισχύει η συνθήκη του καθαρού κέρδους και ισχύει :

$$\hat{f}_\delta(s)=\frac{\rho_\delta}{s-\ \rho_\delta}\frac{\widehat{p}\,(\rho_\delta)-\widehat{p}\,(s)}{1-\ \widehat{p}\,(\rho_\delta)}\,,$$

Τη σχέση αυτή την χρησιμοποιήσαμε στις εισαγωγικές έννοιες (1.3.6) και είναι ο μετασχηματισμός Laplace της γενικευμένης ισορροπίας την p(y).Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την (1.3.5) προκύπτει ότι:

$$f_\delta(\mathrm{y}) = \frac{e^{\rho_\delta y} \int_y^\infty e^{-\rho_\delta x} p(x)dx}{\int_0^\infty e^{-\rho_\delta x} \overline{P}\,(x)dx}$$

(2.5.11)

Παρατηρούμε ότι αν δ=0,τότε όπως είδαμε νωρίτερα ρ_0=0 και

$f_0(y) = \overline{P}\,(y) \big/ E[Y]$ η οποία είναι η κατανομή ισορροπίας της p(y).Χρησιμοποιώντας την (2.5.9), έχουμε

$$\mathrm{s} - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c}\widetilde{p}\,(s) = (\mathrm{s} - \rho_\delta)(1 - \varphi_\delta \tilde{\bar{f}}_\delta(s)) \qquad \textbf{(2.5.12)}$$

και από τις σχέσεις (2.5.6) και (2.5.8) παίρνουμε ότι :

$$(\mathrm{s} - \rho_\delta)(1 - \varphi_\delta \bar{f}_\delta(\mathrm{s}))\overline{m}_{\delta,12}(\mathrm{s}) = \frac{\lambda}{c}(\bar{\alpha}_{12}(\rho_\delta) - \bar{\alpha}_{12}(s))$$

το οποίο αν αντικαταστήσουμε θα έχουμε

$$\overline{m}_{\delta,12}(s) = \varphi_\delta \overline{m}_{\delta,12}(s)\bar{f}_\delta(s) + \frac{\lambda}{c}\frac{\bar{\alpha}_{12}(\rho_\delta) - \bar{\alpha}_{12}(s)}{s - \rho_\delta}$$

Συνεπώς, αν χρησιμοποιήσουμε την (1.3.3) παίρνοντας την αντιστροφή του μετασχηματισμού προκύπτει ότι:

$$m_{\delta,12}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,12}(u-y) f_\delta(y)dy + \frac{\lambda}{c} T_{\rho_\delta} \alpha_{12}(\mathrm{u})$$

η οποία είναι μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί τη $m_{\delta,12}$(u) και έτσι χρησιμοποιώντας τη (2.3.17), η γενική λύση δίνεται από:

$$m_{\delta,12}(\mathrm{u}) = \frac{\lambda}{c} T_{\rho\delta} a_{12}(\mathrm{u}) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u \frac{\lambda}{c} T_{\rho\delta}\alpha_{12}(\mathrm{y}) g_\delta(\mathrm{u{-}y})\mathrm{dy}$$

όπου

$$g_\delta(\mathrm{y}) = \sum_{n=1}^\infty (1-\varphi_\delta)\,(\varphi_\delta)^n f_\delta^{*n}(\mathrm{y}) \qquad \textbf{(2.5.13)}$$

Παρατηρούμε ότι οι φ_δ και f_δ(y) δίνονται από τις σχέσεις (2.5.10) και (2.5.11) και οι ενδιάμεσοι χρόνοι κατανέμονται εκθετικά, χρειαζόμαστε μόνο τα αποτελέσματα από τη μελέτη του χρόνου και του μεγέθους της πρώτης απαίτησης ώστε να λύσουμε ως προς $m_{\delta,12}$(u). Θα ασχοληθούμε με το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου στην παράγραφο **4.6** όπου θα μελετήσουμε τη γενικευμένη μορφή της συνάρτηση Gerber-Shiu.

2.6 Παράδειγμα 2: Το μέγεθος των απαιτήσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή

Στη συγκεκριμένη εφαρμογή θεωρούμε το μέγεθος των απαιτήσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή και η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων μια οποιαδήποτε τυχαία κατανομή k(t).[Willmot, G.E. (2011)]. Θεωρούμε, p(y) = $\beta e^{-\beta y}$ όπου $\hat{p}(s) = \frac{\beta}{\beta+s}$ και η κατανομή απώλειας δίνεται από

$$p_x(y) = \frac{p(x+y)}{\bar{P}\,(x)} = \frac{\beta e^{-\beta(x+y)}}{e^{-\beta x}} = \beta e^{-\beta y} \qquad \textbf{(2.6.1)}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.3.10) και (2.3.7), το κλιμακωτό ύψος δίνεται από

$$f_\delta(y) = \int_0^\infty \beta e^{-\beta y} \left\{\frac{h_{\delta,1}(x|0)}{\varphi_\delta}\right\} dx$$

$$= \beta e^{-\beta y} \int_0^\infty \left\{\frac{h_{\delta,1}(x|0)}{\varphi_\delta}\right\} dx$$

$$= \beta e^{-\beta y}$$

(2.6.2)

το οποίο επίσης κατανέμεται εκθετικά.

Υπενθυμίζουμε ότι όταν w_{12}(x,y)=1, τότε $m_{\delta,12}$(u) δίνεται από $\bar{G}_\delta$(u), η οποία είναι η ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής , με τη βοήθεια των σχέσεων (2.3.18) και (2.6.2) ικανοποιεί τη σχέση:

$$\bar{G}_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u \bar{G}_\delta(u-y)\beta e^{-\beta y} dy + \varphi_\delta e^{-\beta u} \qquad \textbf{(2.6.3)}$$

Με το μετασχηματισμό Laplace,

$\hat{\hat{G}}_{\delta}$(s) = $\varphi_\delta \hat{\hat{G}}_{\delta}(s)\frac{\beta}{\beta+s}$ + $\frac{\varphi_\delta}{\beta+s}$,

αν λύσουμε ως προς $\hat{\hat{G}}_{\delta}$(s) θα έχουμε

$\hat{\hat{G}}_{\delta}$(s) = $\frac{\varphi_\delta}{\beta(1-\varphi_\delta)+s}$

Το οποίο αν το αντιστρέψουμε θα έχουμε

$\bar{G}_\delta$ (u) = $\varphi_\delta e^{-\beta(1-\varphi_\delta)u}$ **(2.6.4)**

Για να υπολογίσουμε το φ_δ, θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση της $m_{\delta,12}$(u) που δίνεται από τη σχέση (2.4.6) στην οποία καταλήξαμε μελετώντας το χρόνο και το μέγεθος της πρώτης απαίτησης. Θεωρώντας ότι w_{12}(x , y) =1 τέτοιο ώστε το $m_{\delta,12}$(u) να δίνεται από τη $\bar{G}_\delta$(u) , τότε το $\sigma_{\delta,12}$(u+ct) στη σχέση (2.4.3) για x= u +ct γίνεται:

$\sigma_{\delta,12}$(x)=$\int_0^x \bar{G}_\delta$(x-y)β$e^{-\beta y}$dy

και η (2.4.2) γίνεται

α_{12}(x) = $\int_x^\infty \beta e^{-\beta y}$= $e^{-\beta x}$

Επιπροσθέτως, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.4.6) και (2.4.1) καταλήγουμε ότι

$\bar{G}_\delta$(u) = $\int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{\int_0^{u+ct} \bar{G}_\delta(u+ct-y)\beta e^{-\beta y}\,dyb+\ e^{-x(u+ct)}\right\}k(t)dt$ **(2.6.5)**

Από τη σχέση (2.6.3) αντικαθιστώντας το u με u+ct και διαιρώντας και τις δύο πλευρές της εξίσωσης φ_δ προκύπτει

$\int_0^{u+ct} \bar{G}_\delta$(u+ct-y)$\beta e^{-\beta y}dy$ + $e^{-\beta(u+ct)}$=$\frac{\bar{G}_\delta(u+ct)}{\varphi_\delta}$ **(2.6.6)**

Κάνοντας αντικατάσταση της σχέσης (2.6.6) στη (2.6.5) θα προκύψει:

$\varphi_\delta \bar{G}_\delta$(u) = $\int_0^\infty e^{-\delta t}\, \bar{G}_\delta$(u)$e^{-\beta(1-\varphi_\delta)ct}k(t)dt$

και διαιρώντας με $\bar{G}_\delta$(u) και τα δύο μέλη έχουμε

$\varphi_\delta = \hat{k}(\delta + c\beta(1 - \varphi_\delta))$
(2.6.7)

Υπενθυμίζουμε από τη (2.3.8) ότι $0 < \varphi_\delta < 1$.

Χρησιμοποιώντας τη (2.3.15), η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της $m_{\delta,12}$(u) όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένα δίνεται από:

$$m_{\delta,12}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,12}(u-y)\beta e^{-\beta y} dy + v_{\delta,12}(u). \qquad \textbf{(2.6.8)}$$

όπου από τις σχέσεις (2.3.15) και (2.2.8) θα έχουμε

$$v_{\delta,12}(u) = \int_0^\infty \beta e^{-\beta y} \int_0^\infty w_{12}(u + x , y - u) h_{\delta,1}(x|0) dx dy$$

Επομένως, η γενική λύση της $m_{\delta,12}$(u) δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$m_{\delta,12}(u) = v_{\delta,12}(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u v_{\delta,12}(y) g_\delta(u-y) dy$$

Στην παράγραφο 4.7 θα εξετάσουμε ξανά την υπόθεση ότι τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένα για τη γενικευμένη μορφή της συνάρτησης Gerber-Shiu.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Ένα μη-ανανεωτικό μοντέλο με υστέρηση και η κλασσική συνάρτηση Gerber-Shiou

3.1 Εισαγωγή

Στο μη-ανανεωτικό μοντέλο θεωρούμε ότι η V_1 ακολουθεί μία διαφορετική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την οποία ορίζουμε ως k_d(t) έναντι της πυκνότητας k(t) η οποία ακολουθείται από τις τυχαίες μεταβλητές $\{V_2, V_3, \ldots\ldots\}$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι το μη-ανανεωτικό μοντέλο είναι πανομοιότυπο με το ανανεωτικό καθώς οι τυχαίες μεταβλητές $\{V_2, V_3, \ldots\ldots\}$ παραμένουν ακόμη ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένες θετικά με τη συνάρτηση πυκνότητας k(t) και η τυχαία μεταβλητή V_1 ίναι ανεξάρτητη των $\{V_2, V_3, \ldots\ldots\}$, με τη μόνη διαφορά πως η V_1 έχει πλέον συνάρτηση πυκνότητας k_d(t).

Στο μη-ανανεωτικό μοντέλο η συνάρτηση Gerber-Shiu ορίζεται ως εξής :

$$m^{d}_{\delta,12}(u) = E\left[e^{-\delta T_d} w(U(T_d -), |U(T_d)|), |U(T_d)|)I(T_d < \infty) \mid U(0) = u\right]$$

όπου T_d ο χρόνος χρεοκοπίας, $U(T_d -)$ το πλεόνασμα πριν συμβεί η χρεοκοπία και $|U(T_d)|$ το έλλειμα ακριβώς τη στιγμή της χρεοκοπίας. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση ποινής είναι w(x,y)=1 επομένως προκύπτει ότι $m^{d}_{\delta,12}$(u)=$E\left[e^{-\delta T_d} I(T_d < \infty) |U(0) = u\right]$ ενώ για ένταση ανατοκισμού δ=0 προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας για το μη-ανανεωτικό μοντέλο με

ψ^d(u) = $P_r(T_d < \infty|U(0) = u)$.

Δεδομένου ότι το μη-ανανεωτικό μοντέλο και το κλασσικό μοντέλο διαφέρουν μόνο από τον τρόπο κατανομής της πρώτης αξίωσης V1, είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι μετά την εμφάνιση της πρώτης αξίωσης, το μη-ανανεωτικό μοντέλο επιστρέφει στο Sparre Andersen. Και ως εκ τούτου, η στενή σχέση μεταξύ αυτών των δύο μοντέλων επιτρέπει συχνά τα αποτελέσματα του μη-ανανεωτικού μοντέλου να εκφράζονται με βάση τα αποτελέσματα του συνηθισμένου μοντέλου. Συνεπώς, πρέπει να καθορίσουμε τη σχέση μεταξύ του $m^{d}_{\delta,12}(u)$ και $m_{\delta,12}(u)$ και ανακαλώντας τις σχέσεις (2.4.6) και (2.4.1) θα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
m_{\delta,12}(u) &= \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{\delta,12}(u+ct)k(t)dt + \beta_{\delta,12}(u)\\
&= \int_0^\infty e^{-\delta t}\{\sigma_{\delta,12}(u+ct) + a_{12}(u+ct)\}k(t)dt\\
&= \int_0^\infty e^{-\delta t}\gamma_\delta(u+ct)k(t)dt \qquad (3.1.1)
\end{aligned}
$$

όπου ,

$$\gamma_\delta = \sigma_{\delta,12}(x) + a_{12}(x). \qquad (3.1.2)$$

Δεδομένου ότι το μοντέλο με υστέρηση επανέρχεται πίσω σε ένα κλασσικό μοντέλο μετά την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης , χρειαζόμαστε μόνο να αντικαταστήσουμε το k(t) με $k_d(t)$ στην (3.1.1) ώστε να πάρουμε μία σχέση για το $m^{d}_{\delta,12}(u)$ η οποία δίνεται από:

$$m^{d}_{\delta,12}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\gamma_\delta(u+ct)k_d(t)dt.$$

και κάνοντας αλλαγή μεταβλητών θα έχουμε

$$m^{d}_{\delta,12}(u) = \frac{1}{c}\int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{t-u}{c}\right)}\gamma_\delta(t)k_d\left(\frac{t-u}{c}\right)dt, \qquad (3.1.3)$$

και αν παραγωγίσουμε

$$m'^{d}_{\delta,12}(u)= \frac{\delta}{c}m^{d}_{\delta,12}(u) - \frac{k_d(0)}{c}\gamma_\delta(u) - \frac{1}{c^2}\int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{t-u}{c}\right)}\gamma_\delta(t)k'_d\left(\frac{t-u}{c}\right)dt. \qquad (3.1.4)$$

3.2 Εφαρμογή 3: $m^{d}_{\delta,12}(u)$ για μία ειδική κατηγορία $k_d(t)$

Θεωρούμε ότι $m^{d}_{\delta,12}(u)$, όταν η πυκνότητα του πρώτου ενδιάμεσου χρόνου $k_d(t)$ είναι ένας σταθμισμένος μέσος όρος της γενικευμένης πυκνότητας ισορροπίας k(t) και μίας εκθετικής κατανομής [Willmot, GE (2004b)].

Έχουμε :

$$k_d(t) = q\frac{e^{-rt}\int_t^{\infty} e^{ry}k(y)dy}{\int_0^{\infty} e^{ry}\bar{K}(y)dy} + (1-q)\, re^{-rt} \qquad , t\geq 0 \qquad (3.2.1)$$

όπου το r ικανοποιεί $\hat{k}(r) < \infty$ και αν $0 \leq q < 1$, τότε $r > 0$, και εάν το $q = 1$, τότε $-\infty < r < \infty$. Επισημαίνουμε ότι όταν το $q = 1$ και $r = 0$, $k_d(t) = k_e(t)$ η ανανεωτική διαδικασία με υστέρηση γίνεται στατική διαδικασία. Επίσης, όταν το $q = 0$, $k_d(t)$ είναι μια εκθετική πυκνότητα.

Χρησιμοποιώντας (3.2.1), μπορούμε να εκφράσουμε την $k_d(0)$ ως:

$$k_d(0) = q\frac{1+r\int_0^{\infty} e^{ry}\bar{K}(y)dy}{\int_0^{\infty} e^{ry}\bar{K}(y)} + (1-q)r$$

$$= r + \frac{q}{\int_0^{\infty} e^{ry}\bar{K}(y)dy},$$

και η $k_d(t)$ μπορεί να ξαναγραφτεί ως:

$$k_d(t) = (k_d(0) - r)e^{-rt}\int_t^{\infty} e^{ry}k(y)dy + (1-q)re^{-rt}, \qquad (3.2.2)$$

και αν παραγωγίσουμε θα έχουμε

$$k_d'(t) = (r - k_d(0))k(t) - rk_d(t). \qquad (3.2.3)$$

Εξετάζοντας το ακέραιο μέρος της δεξιάς μεριάς της (3.1.4) και χρησιμοποιώντας την (3.2.3),(3.1.1) και (3.1.3) έχουμε:

$$\frac{1}{c^2}\int_u^{\infty} e^{-\delta\left(\frac{t-u}{c}\right)}\gamma_\delta(t)k_d'\left(\frac{t-u}{c}\right)dt$$

$$= \frac{1}{c^2}\int_u^{\infty} e^{-\delta\left(\frac{t-u}{c}\right)}\gamma_\delta(t)\left[(r - k_d(0))k\left(\frac{t-u}{c}\right) - rk_d\left(\frac{t-u}{c}\right)\right]dt$$

$=\frac{(r-k_d(0))}{c} m_{\delta,12}(u) - \frac{r}{c} m^{d}_{\delta,12}(u).$

$(3.1.4) \underset{(3.1.2)}{\Longrightarrow} m'^{d}_{\delta,12}$

$$= \frac{\delta}{c} m^{d}_{\delta,12}(u) - \frac{k_d(0)}{c}\gamma_\delta(u) - \frac{(r- k_d(0))}{c} m_{\delta,12}(u) + \frac{r}{c} m^{d}_{\delta,12}(u)$$

$$=\frac{r+\delta}{c} m^{d}_{\delta,12}(u) - \frac{r}{c} m_{\delta,12}(u) - \frac{k_d(0)}{c} a_{12}(u)$$

$$+ \frac{k_d(0)}{c}\big(m_{\delta,12}(u) - \sigma_{\delta,12}(u)\big).$$

(3.2.4)

Θέλουμε να προσδιορίσουμε το μετασχηματισμό Laplace της (3.2.4).Αλλά πρώτα θα εξετάσουμε το μετασχηματισμό Laplace του τελευταίου όρου της σχέσης και χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.4.5), προκύπτει ότι:

$$\frac{k_d(0)}{c}\big(\widehat{m}_{\delta,12}(s) - \widehat{\sigma}_{\delta,12}(s)\big) = \frac{k_d(0)}{c}\widehat{m}_{\delta,12}(s)\big(1 - \widehat{p}(s)\big) \qquad (3.2.5)$$

Θεωρούμε μία συνάρτηση που ορίζεται ως:

$$\sigma^{e}_{\delta,12}(u) = \int_0^u m_{\delta,12}(u-y)\, p_e(y)dy, \qquad (3.2.6)$$

όπου $p_e(y) = \overline{P}(y)\big/E[Y]$ είναι η πυκνότητα ισορροπίας του p(y). Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace προκύπτει,

$\widehat{\sigma}^{e}_{\delta,12}(u)= \widehat{m}_{\delta,12}(s)\,\frac{1- \widehat{p}\,(s)}{sE[Y]}.$

(3.2.7)

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.2.5) και (3.2.7), ο μετασχηματισμός Laplace της (3.2.4) δίνεται από την σχέση:

$$s\widehat{m}^{d}_{\delta,12}(s) - m^{d}_{\delta,12}(0) = \frac{r+\delta}{c}\widehat{m}^{d}_{\delta,12}(s) - \frac{r}{c}\widehat{m}_{\delta,12}(s) - \frac{k_d(0)}{c}\hat{a}_{12}(s)$$

$$+\frac{k_d(0)E[y]}{c}s\widehat{\sigma}^{e}_{\delta,12}(s)$$

κάνοντας αριθμητικές πράξεις παίρνουμε,

$$\left(s-\frac{r+\delta}{c}\right)\widehat{m}^{d}_{\delta,12}(s) = m^{d}_{\delta,12}(0) - \frac{r}{c}\widehat{m}_{\delta,12}(s) - \frac{k_d(0)}{c}\hat{a}_{12}(s)$$

$$+\frac{k_d(0)E[Y]}{C}s\widehat{\sigma}^{e}_{\delta,12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right).$$

(3.2.8)

Όταν $s=\frac{r+\delta}{c}$, η αριστερή πλευρά γίνεται μηδέν και προκύπτει ότι

$$m^{d}_{\delta,12}(0) = \frac{r}{c}\widehat{m}_{\delta,12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right) + \frac{k_d(0)}{c}\hat{a}_{12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right) - \frac{k_d(0)E[Y]}{c}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)\widehat{\sigma}^{e}_{\delta,12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right),$$

και κάνοντας αντικατάσταση στη (3.2.8) προκύπτει

$$\left(s-\frac{r+\delta}{c}\right)\widehat{m}^{d}_{\delta,12}(s) = \frac{r}{c}\left[\widehat{m}_{\delta,12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right) - \widehat{m}_{\delta,12}(s)\right]$$

$$+\frac{k_d(0)}{c}\left[\hat{a}_{12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right) - \hat{a}_{12}(s)\right]$$

$$-\frac{k_d(0)E[Y]}{c}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)\left[\widehat{\sigma}^{e}_{\delta,12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right) - \widehat{\sigma}^{e}_{\delta,12}(s)\right]$$

$$+\frac{k_d(0)E[Y]}{c}\left(s-\frac{r+\delta}{c}\right)\widehat{\sigma}^{e}_{\delta,12}(s).$$

Διαιρώντας κατά μέλη με $\left(s-\frac{r+\delta}{c}\right)$ και κάνοντας αριθμητικές πράξεις παίρνουμε ότι

$$\widehat{m}^{d}_{\delta,12}(s)=\frac{k_d(0)E[Y]}{c}\widehat{\sigma}^{e}_{\delta,12}(s)+\frac{r}{c}\left[\frac{\widehat{m}_{\delta,12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)-\widehat{m}_{\delta,12}(s)}{s-\frac{r+\delta}{c}}\right]+\frac{k_d(0)}{c}\left[\frac{\hat{a}_{12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)-\hat{a}_{12}(s)}{s-\frac{r+\delta}{c}}\right]$$

$$-\ \frac{k_d(0)E[Y]}{c}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)\left[\frac{\widehat{\sigma}^{e}_{\delta,12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)-\widehat{\sigma}^{e}_{\delta,12}(s)}{s-\frac{r+\delta}{c}}\right]. \qquad (3.2.9)$$

Θυμίζουμε τη μορφή του μετασχηματισμού Laplace των τελεστών Dickson-Hipp μαζί με τη σχέση (3.2.6),μπορούμε να αντιστρέψουμε την σχέση (3.2.9) και να προκύψει

$$m^{d}_{\delta,12}(u)=\frac{k_d(0)E[Y]}{c}\int_0^u m_{\delta,12}\,(u-y)p_e(y)dy+v^{d}_{\delta,12}(u) \qquad (3.2.10)$$

όπου $p_e(y)$ = $\overline{P}\,(y)\big/E[Y]$ και χρησιμοποιώντας την σχέση (1.3.2), προκύπτει ότι:

$$v^{d}_{\delta,12}(u)=T_{\frac{r+\delta}{c}}\left(\frac{r}{c}m_{\delta,12}(u)+\frac{k_d(0)}{c}a_{12}(u)-\frac{k_d(0)E[Y]}{c}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)\sigma^{e}_{\delta,12}(u)\right). \qquad (3.2.11)$$

Σημειώνουμε ότι η σχέση (3.2.10) δείχνει την ολοκληρωτική σχέση μεταξύ $m^{d}_{\delta,12}(u)$ και $m_{\delta,12}(u)$. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, μας ενδιαφέρει συχνά το στατικό μοντέλο όπου $k_d(t)=k_e(t)$, η πυκνότητα ισορροπίας του k(t). Χρησιμοποιώντας την σχέση (3.2.2), παρατηρούμε ότι αν $k_d(0)=1/E[V]$ και r=0, τότε $k_d(t)=k_e(t)$ και η σχέση (3.2.10) απλοποιείται ως εξής:

$$m^{s}_{\delta,12}(u)=\frac{1}{1+\theta}\int_0^u m_{\delta,12}(u-y)p_e(y)dy+\ v^{s}_{\delta,12}(u),$$

όπου χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.2.11) παίρνουμε

$$v^{s}_{\delta,12}(u)=T_{\frac{\delta}{c}}\left(\frac{1}{cE[V]}a_{12}(u)-\frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\delta}{c}\right)\sigma^{e}_{\delta,12}(u)\right)$$

και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη καθαρού κέρδους cE[V]=(1+θ)E[Y].

Κεφάλαιο 4 : Η γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiou

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτή την ενότητα, θεωρούμε μία γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiou και ξεκινάμε με την εισαγωγή δύο νέων μεταβλητών. Πρώτον, έστω X_T το ελάχιστο επίπεδο πλεονάσματος πριν από τη χρονική στιγμή t. Έτσι, $\mathrm{X_T}$ είναι το ελάχιστο επίπεδο πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία και το πλεόνασμα ακριβώς πριν συμβεί η χρεοκοπία $\mathrm{R_{N_t-1}}$. Αν αυτές οι ποσότητες δεν μπορούν να μελετηθούν πριν συμβεί η χρεοκοπία μπορούμε να υπολογίσουμε τις κατανομές τους καθώς οι συναρτήσεις τους δεν βασίζονται στο χρόνο χρεοκοπίας αλλά εξαρτώνται μόνο από γνωστές ποσότητες .

Ως γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu ορίζουμε την συνάρτηση της μορφής:

$$\mathrm{m_\delta(u)=E\left[e^{-\delta T}w\left\{U(T-),|U(T)|,X_t,R_{N_t-1}\right\}I(T<\infty)|U(0)=u\right],\ u\geq 0} \tag{4.1.1}$$

- Ως <u>κλιμακωτό ύψος</u> ορίζουμε το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό, δοθέντος ότι εμφανίζεται πτώση. Τη συγκεκριμένη σημαντική τυχαία μεταβλητή τη συμβολίζουμε με $\mathrm{L_i}$ με i=1,2,3,….. και παίρνει θετικές τιμές καθώς μελετάμε τη πτώση του πλεονάσματος σε απόλυτη τιμή.

- Ως <u>κλιμακωτές στιγμές</u> ονομάζουμε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες εμφανίζεται το κλιμακωτό ύψος και είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Συμβολίζουμε με $\mathrm{t_i}$ με i=1,2,……,N και ισχύει για την πρώτη κλιμακωτή στιγμή ότι

$t_1 = \min\{t: u - U(t) > 0\} = \min\{t: S(t) - ct > 0\}$.

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πως και η γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiou μπορεί να γραφτεί ως μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Η από κοινου συνάρτηση πυκνότητας των (T,U(T-),|U(T)|,R_{N_t-1}) με αντίστοιχες μεταβλητές (t ,x ,y ,v) και κάποιες άλλες χρήσιμες πυκνότητες. Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο δείκτης «3» υποδηλώνει την ποσότητα X_T ενώ ο δείκτης «4» την ποσότητα R_{N_t-1}.

Υποθέτουμε ότι το μέγεθος των απαιτήσεων εξαρτάται άμεσα από τους ενδιάμεσους χρόνους πριν συμβεί η απαίτηση δηλαδή η τυχαία μεταβλητή Y δεν είναι ανεξάρτητη της τ.μ. V .Θεωρούμε ότι η $P(y|t)$=$P_r(Y \le y, V = t)$ είναι η συνάρτηση κατανομής του μεγέθους της απαίτησης ύψους t. Τονίζουμε ότι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των (V_i , Y_i) για i= 1 , 2 ,….. δίνεται από p(y|t)k(t) και υποθέτουμε ότι οι $\{(V_i, Y_i) : i = 1, 2, \ldots\}$ είναι ανεξάρτητα ισόνομα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές όπως συμβαίνει στο ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου.

Έστω η χρεοκοπία συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση. Τότε N_T = 1 και R_{N-1}=R_0=u και χρησιμοποιώντας τις ίδιες υποθέσεις όπως στην παράγραφο 3.4 που μελετήσαμε την κλασσική μορφή της συνάρτησης των Gerber-Shiu έχουμε ότι. $t = \frac{x-u}{c}$. Συνεπώς η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των

(T,U(T-),|U(T)|,R_{N_t-1}) με αντίστοιχες μεταβλητές (t ,x ,y ,v) εφόσον συμβεί η χρεοκοπία στην πρώτη απαίτηση είναι ίδια όπως στην περίπτωση της κλασσικής, απλά αντικαθιστώντας την πιθανότητα p(y) με p(y|t) προκύπτει ότι :

$$h^*_{12}(x,y|u) = \frac{1}{c}\, k\left(\frac{x-u}{c}\right) p\left(x+y \,\middle|\, \frac{x-u}{c}\right), \tag{4.1.2}$$

όπου $t = \frac{x-u}{c}$, x > u , y > 0 και v = u.

Όταν η χρεοκοπία συμβεί σε μεταγενέστερη απαίτηση ,ακόμα δεν υπάρχει άμεση σχέση μεταξύ των μεταβλητών t,x,y και v. Γνωρίζουμε μόνο ότι x < u+ct και v < x καθώς και το πλεόνασμα αυξάνεται από v σε x με ένταση c κατά τη διάρκεια της τελευταίας απαίτησης .Συμβολίζουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των (T,U(T-),|U(T)|,$R_{N_{t-1}}$) με αντίστοιχες μεταβλητές (t ,x ,y ,v) , δοθέντος ότι η χρεοκοπία συμβαίνει σε μεταγενέστερες απαίτησεις εκτός της πρώτης ως h_{124}^{*}(t,x,y,v|u).Συνεπώς συνοψίζοντας έχουμε:

$$h_{124}^{*}(t,x,y,v|u) = \begin{cases} h_{12}^{*}(x,y|u), & t = \frac{x-u}{c}, x > u, y > 0, v = u \\ h_{124}^{*}(t,x,y,v|u), & t > 0, v < x < u+ct, y > 0, v > 0 \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Έτσι παρατηρούμε ότι παίρνει διαφορετικές τιμές η συνάρτηση πυκνότητας καθώς εξαρτάται από το πότε συμβαίνει η χρεοκοπία δηλαδή αν συμβαίνει στην πρώτη αξίωση ή σε μεταγενέστερες.

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τη σχέση (2.2.4) και αντικαθιστούμε το $p(y|t)$ με $p(y)$ και έχουμε:

$$h_{\delta,12}^{*}(x,y|u) = e^{-\delta\frac{x-u}{c}} h_{12}^{*}(x,y|u)$$

$$= e^{-\delta\frac{x-u}{c}} \frac{1}{c} k\left(\frac{x-u}{c}\right) p\left(x+y \,\middle|\, \frac{x-u}{c}\right)$$

(4.1.4)

Ομοίως και στη (2.2.5), θα έχουμε:

$$h_{\delta,124}^{**}(x,y,v|u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} h_{124}^{**}(t,x,y,v|u) \tag{4.1.5}$$

Η από κοινού ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $(U_{T-}, |U_T|)$ δίνεται από τη σχέση:

$$h_{\delta,12}(x,y|u) = h_{\delta,12}^{*}(x,y|u) + \int_0^x h_{\delta,124}^{**}(x,y,v|u)dv. \tag{4.1.6}$$

Και όπως γίνεται στη κλασσική περίπτωση, έχουμε

$$\varphi_\delta = \int_0^\infty \int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)dxdy \tag{4.1.7}$$

και

$$f_\delta(y) = \frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)dx. \tag{4.1.8}$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι τα μεγέθη των αξιώσεων είναι ανεξάρτητα από το χρόνο των αξιώσεων που προηγείται, τότε έχουμε $p(y|t) = p(y)$ και από (2.2.1) η συνάρτηση πυκνότητας της $|U_T|$ στο y δίνεται από τη σχέση U_{T-}= x =$p_x(y)$. Συνεπώς, προκύπτει από (4.1.4) ότι:

$$h^*_{\delta,12}(x,y|u) = h^*_{\delta,1}(x|u)p_x(y),$$

όπου,

$$h^*_{\delta,1}(x|u)=e^{-\delta\frac{x-u}{c}}\frac{1}{c}k\left(\frac{x-u}{c}\right)\overline{P}(x)$$

είναι η οριακή ελλειμματική προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας U_{T-}=x για την χρεοκοπία που συμβαίνει στην πρώτη αξίωση. Έτσι, από (4.1.5) έχουμε

$$h^*_{\delta,124}(x,y,v|u) = h^{**}_{\delta,14}(x,v|u)p_x(y) \tag{4.1.9}$$

όπου $h^{**}_{\delta,14}(x,v|u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}h^{**}_{14}(t,x,v|u)$ και $h^{**}_{14}(t,x,v|u)$ είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της $\left(T, U_{T-}, R_{N_T-1}\right)$ στο (t,x,v) για χρεοκοπία που συμβαίνει σε επερχόμενες αξιώσεις. Έτσι από (4.1.6) έχουμε:

$$h_{\delta,12}(x,y|u)=h_{\delta,1}(x|u)p_x(y) \tag{4.1.10}$$

όπου $h_{\delta,1}(x|u) = h^*_{\delta,1}(x|u) + \int_0^x h^{**}_{\delta,14}(x,v|u)dv$ είναι η οριακή ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας της U_{T-}.

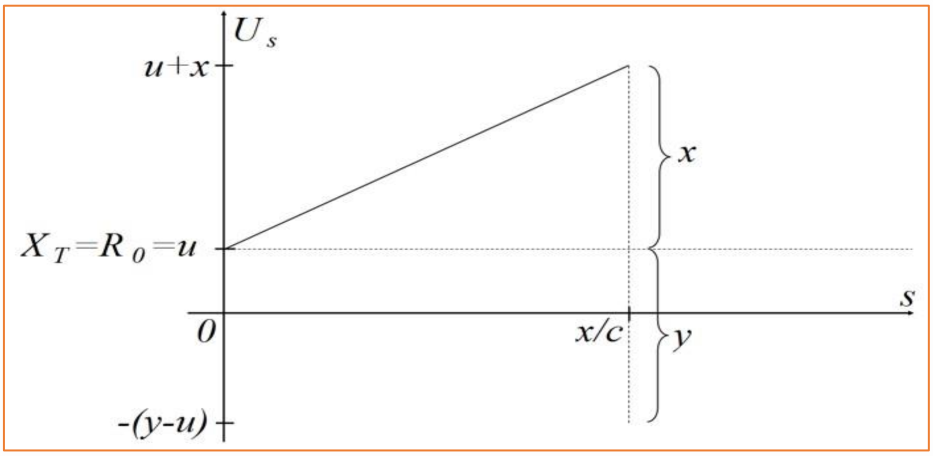
4.2 Μελέτη της πρώτης πτώσης πλεονάσματος

Από την ενότητα 2.3 θυμόμαστε ότι συζητήσαμε την κλασική συνάρτηση Gerber-Shiu, ώστε να προσδιορίσουμε τη $m_\delta(u)$ ως μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

Όπως έχουμε δει ήδη, παρά το γεγονός ότι στη $m_\delta(u)$ εμπεριέχεται ο όρος X_T, θα χρησιμοποιήσουμε μόνο την από κοινού ελλειμματική ανανεωτική συνάρτηση πυκνότητας των $\left(U_{T-}, |U_T|, R_{N_T-1}\right)$, η οποία είναι ανεξάρτητη του X_T.

<u>Περίπτωση1:</u> η πρώτη πτώση του πλεονάσματος συμβαίνει στην πρώτη αξίωση και προκαλεί χρεοκοπία

Όταν η πρώτη πτώση συμβαίνει στην πρώτη αξίωση και προκαλεί χρεοκοπία, N_T=1 και R_{N_T-1}=R_0=u.Έτσι, το ελάχιστο επίπεδο πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία X_T είναι u.



Σχήμα 4.1: η χρεοκοπία συμβαίνει όταν το πλεόνασμα πέφτει στην πρώτη απαίτηση.

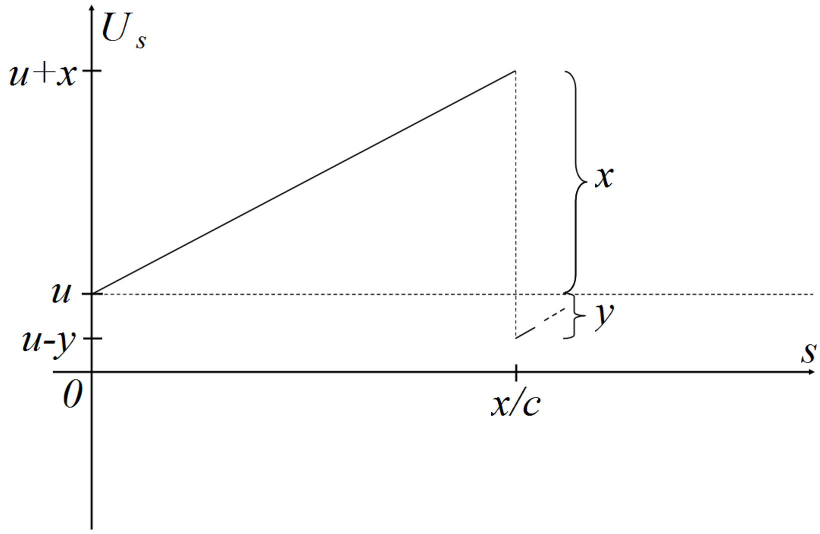
Το $m_\delta(u)$ για αυτή την περίπτωση είναι:

$$m_\delta(u)=\int_u^\infty \int_0^\infty e^{-\delta\frac{x}{c}}\, w(u+x, y-u, u, u)h_{12}^*(x, y|0)dxdy$$

$$= \int_u^\infty \int_0^\infty w(u+x, y-u, u, u)\, h^*_{\delta,12}(x, y|0) dxdy \qquad (4.2.1)$$

<u>Περίπτωση 2:</u> η πρώτη πτώση συμβαίνει στην πρώτη αξίωση και δεν προκαλεί χρεοκοπία

Όταν η πρώτη πτώση του μεγέθους του y συμβαίνει στην πρώτη αξίωση και δεν προκαλεί χρεοκοπία, τότε $y < u$ και η διαδικασία πλεονάσματος ξεκινά ξανά με το αρχικό αποθεματικό ύψους $u - y$.



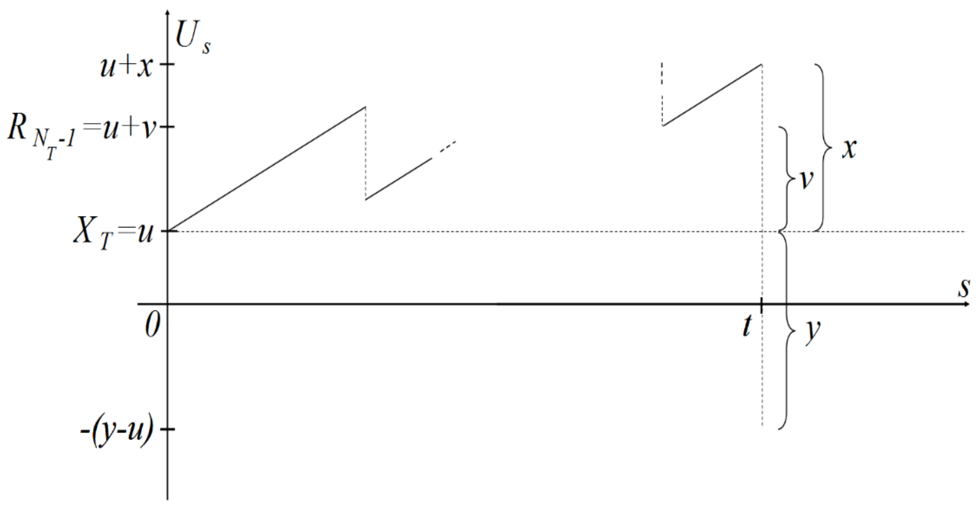
Σχήμα 4.2: Η χρεοκοπία συμβαίνει όταν το πλεόνασμα πέφτει στην πρώτη απαίτηση χωρίς να συμβεί στη χρεοκοπία

Το $m_\delta(u)$ για αυτή την περίπτωση είναι:

$$m_\delta(u) = \int_0^u \int_0^\infty e^{-\delta\frac{x}{c}}\, m_\delta(u-y)\, h^*_{12}(x,y|0)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^u m_\delta(u-y)\left(\int_0^\infty h^*_{\delta,12}(x,y|0)\,dx\right)dy. \tag{4.2.2}$$

Περίπτωση 3: η πρώτη πτώση συμβαίνει σε μεταγενέστερη απαίτηση και προκαλεί χρεοκοπία

Όταν η πρώτη πτώση πλεονάσματος συμβαίνει σε μεταγενέστερη αξίωση και προκαλεί χρεοκοπία, το ελάχιστο επίπεδο πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία είναι u και το πλεόνασμα αμέσως μετά τη δεύτερη τελευταία απαίτηση πριν τη χρεοκοπία πρέπει να είναι πάνω από u , ύψους v όπου $v < x$.



Σχήμα 4.3: Η χρεοκοπία συμβαίνει στην πρώτη πτώση του πλεονάσματος σε μεταγενέστερη απαίτηση.

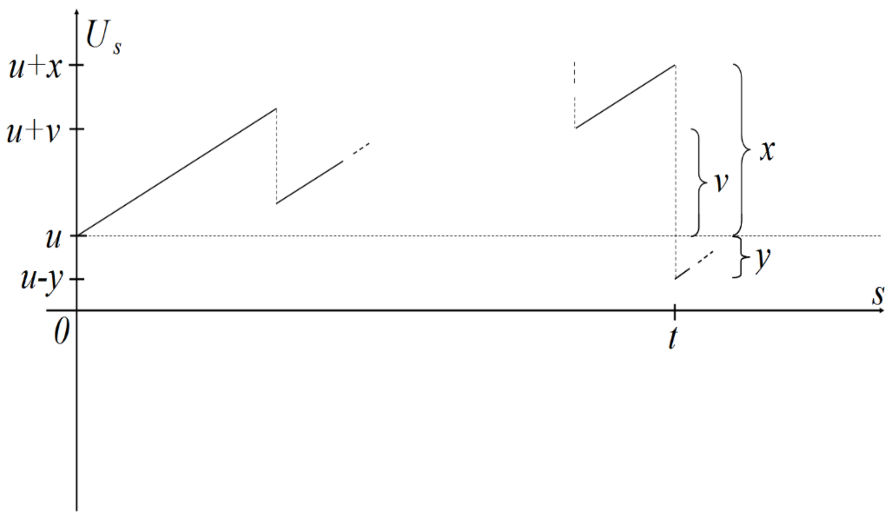
Συνεπώς έχουμε:

$$m_\delta(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x \int_0^\infty e^{-\delta t} w(u+x, y-u, u, u+v) h_{124}^{**}(t, x, y, v|0) dt dv dx dy$$
$$= \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x w(u+x, y-u, u, u+v)\, h_{\delta,124}^{**}(x, y, v|0) dv dx dy.$$

$$(\mathbf{4.2.3})$$

Περίπτωση 4: η πρώτη πτώση συμβαίνει σε μεταγενέστερη απαίτηση και δεν προκαλεί χρεοκοπία

Όταν η πρώτη πτώση ύψους y συμβαίνει σε μεταγενέστερη απαίτηση και όχι στην πρώτη απαίτηση και δεν οδηγεί σε χρεοκοπία. Τότε έχουμε $y < u$ και η διαδικασία ανανεώνεται με αρχικό αποθεματικό ύψους $u - y$.Επίσης το πλεόνασμα ακριβώς μετά τη δεύτερη τελευταία απαίτηση πριν συμβεί η χρεοκοπία πρέπει να είναι μεγαλύτερο από u, ύψος δηλαδή v όπου $v < x$.



Σχήμα 4.4: Δεν συμβαίνει χρεοκοπία στην πρώτη πτώση του πλεονάσματος σε μεταγενέστερη απαίτηση.

Συνεπώς έχουμε:

$$m_\delta(u) = \int_0^u \int_0^\infty \int_0^x \int_0^\infty e^{-\delta t} m_\delta\,(u-y) h^{**}_{124}(t,x,y|0)dtdvdxdy$$
$$= \int_0^u m_\delta(u-y) \int_0^\infty \int_0^x h^{**}_{\delta,124}(x,y,v|0)dvdxdy$$

(4.2.4)

Συνοψίζοντας και προσθέτοντας τις 4 περιπτώσεις (4.2.1),(4.2.2),(4.2.3) και (4.2.4) καταλήγουμε σε μία μορφή η οποία υποδηλώνει την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση:

$$m_\delta(u) = \int_0^u m_\delta\,(u-y)\left(\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)dx + \int_0^\infty \int_0^x h^{**}_{\delta,124}(x,y,v|0)dvdx\right)dy$$
$$+ v_\delta(u)$$

(4.2.5)

όπου

$$v_\delta(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty w(u+x, y-u, u, u) h^{*}_{\delta,12}(x,y|0)dxdy$$
$$+ \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x w(u+x, y-u, u, u+v) h^{**}_{\delta,124}(x,y,v|0)dvdxdy.$$

(4.2.6)

$$= \int_0^\infty e^{-\delta t}\left(\left(\int_0^\infty w(u+ct, y, u, u) p(u+ct+y|t\right)dy\right)k(t)dt$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^x w(u+x, y, u, u+v)\, h^{**}_{\delta,124}(x, u+y, v|0)dvdxdy$$

(4.2.7)

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.1.4) και αλλάζοντας μεταβλητές και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.1.6), (4.2.5) μπορεί να εκφραστεί η $m_\delta(u)$ ως:

$$m_\delta(u) = \int_0^u m_\delta(u-y)\left\{\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)dx\right\}dy + v_\delta(u)$$

Και εν συνεχεία, με τη χρήση των σχέσεων (4.1.7) και (4.1.8) μπορούμε να γράψουμε τη $m_\delta(u)$ ως την ακόλουθη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$m_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_\delta\,(u-y) f_\delta(y)dy + \; v_\delta(u) \qquad \mathbf{(4.2.8)}$$

Συνεπώς από τη σχέση (1.4.15) και τις εισαγωγικές έννοιες από το κεφάλαιο 1 προκύπτει ότι η γενική λύση για τη $m_\delta(u)$ δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$m_\delta(u) = v_\delta(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u v_\delta(y) g_\delta(u-y)dy, \quad \mathbf{(4.2.9)}$$

Όπου χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.4.11), $g_\delta(u) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\varphi_\delta)(\varphi_\delta)^n f_\delta^{*n}(x)$ με φ_δ και $f_\delta(y)$ να δίνονται από τις σχέσεις (4.1.7) και (4.1.8) αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι παρά το γεγονός ότι η ποσότητα $m_\delta(u)$ είναι σε σχέση με το u και περιέχει μία συνάρτηση ποινής με 4 μεταβλητές, μεταξύ των οποίων και τη X_T , η γενική λύση εξαρτάται μόνο από την από κοινού προεξοφλημένη πυκνότητα 3 μεταβλητών $U(T-), |U(T)|$ και $R_{N_{t-1}}$ με $u = 0$.

Τώρα θα εξετάσουμε ειδικές περιπτώσεις της $m_\delta(u)$ για τις διάφορες μορφές της συνάρτησης ποινής.

- Αν $w(x,y.z,v) = w_{124}(x,y,v)$ τότε η (4.2.8) απλοποιείται ως εξής:

$$m_{\delta,124}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,124}(u-y) f_\delta\,(y)dy + v_{\delta,124}(u)$$

και χρησιμοποιώντας τη (4.2.6) έχουμε:

$$v_{\delta,124} = \int_u^\infty \int_0^\infty w_{124}(u+x, y-u, u) h^*_{\delta,12}(x, y|0) dxdy$$
$$+ \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x w_{124}(u+x, y-u, u+v) h^{**}_{\delta,124}(x, y, v|0) dvdxdy$$

(4.2.10)

- Αν $w(x, y, z, v) = w_3(z) w_{124}(x, y, v)$ τότε η (4.2.8) απλοποιείται ως εξής:

$$m_{\delta,3,124}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,3,124}(u-y) f_\delta(y) dy + v_{\delta,3,124}(u)$$

(4.2.11)

όπου χρησιμοποιώντας τη (4.2.6) και (4.2.10) έχουμε

$$v_{\delta,3,124}(u) = w_3(u) v_{\delta,124}(u)$$

(4.2.12)

- Αν $w(x, y, z, v) = w_{123}(x, y, z)$, τότε η σχέση (4.2.8) απλοποιείται ως εξής:

$$m_{\delta,123}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,123}(u-y) f_\delta(y) dy + v_{\delta,123}(u)$$

(4.2.13)

όπου χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.2.6) και (4.1.6) έχουμε

$$v_{\delta,123}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty w_{123}(-u, u) \left\{ h^*_{\delta,12}(x, y|0) + \int_0^x h^{**}_{\delta,124}(x, y, v|0) dv \right\} dxdy$$
$$= \int_u^\infty \int_0^\infty w_{123}(u+x, y-u, u) h_{\delta,12}(x, y|0) dxdy \quad (\mathbf{4.2.14})$$

η οποία αποτελεί σημαντική απλούστευση, δεδομένου ότι δεν εξαρτάται πλέον από το $h^{**}_{\delta,124}(x,y,v|0)$ το οποίο είναι πολύ δύσκολο να προσδιορίσει τους όρους $k(t)$ και $p(y)$.

- Τώρα θεωρούμε ότι $w(x,y,z,v) = w_{23}(y,z)$ το οποίο επιτρέπει την ανάλυση του τελευταίου κλιμακωτού ύψους $X_T + |U_T|$, τότε η (4.2.13) απλοποιείται ως εξής :

$$m_{\delta,23}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,23}(u-y) f_\delta(y) dy + v_{\delta,23}(u) \qquad \mathbf{(4.2.15)}$$

Και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.1.7) και (4.1.8), η (4.2.14) γίνεται:

$$\begin{aligned} v_{\delta,23}(u) &= \int_u^\infty w_{23}(y-u,u)\left(\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)dx\right)dy \\ &= \varphi_\delta \int_u^\infty w_{23}(y-u,u) f_\delta(y) dy. \qquad \mathbf{(4.2.16)} \end{aligned}$$

- $w_{23}(y,z) = w_5(y+z)$ τότε η (4.2.15) γίνεται

$$m_{\delta,5}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,5}(u-y) f_\delta(y) dy + v_{\delta,5}(u) \quad \mathbf{(4.2.17)}$$

όπου χρησιμοποιώντας τη (4.2.16):

$$v_{\delta,5}(u) = \varphi_\delta \int_u^\infty w_5(y) f_\delta(y) dy. \qquad \mathbf{(4.2.18)}$$

4.3 Σχετικές Ελλειμματικές πυκνότητες

Προκειμένου να καθοριστεί η από κοινού ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας της $(U_{T-}, |U_T|, X_T, R_{N_T-1})$ από τη $m_\delta(u)$, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση ποινής $w(x,y,z,v) = e^{-s_1x-s_2y-s_3z-s_4v}$ την οποία μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε ως εξής:

$$\mathrm{w(x,y,z,v) = w_3(z)w_{124}(x,y,v)}$$

όπου $\mathrm{w_3(z) = e^{-s_3 z}}$ και $\mathrm{w_{124}(x,y,v) = e^{-s_1x-s_2y-s_4v}}$. Συνεπώς η $\mathrm{m_\delta(u)}$ ακολουθεί την ανανεωτική ελλειμματική κατανομή η οποία δίνεται από τις σχέσεις (4.2.11) και (4.2.12) και έχουμε $\mathrm{v_{\delta,3,124}(u) = e^{-s_3u}v_{\delta,124}(u)}$ και μέσω της (4.2.10)

$$\mathrm{v_{\delta,124}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty e^{-s_1(u+x)-s_2(y-u)-s_4u} h^*_{\delta,12}\,(x,y|0)dxdy} \\ \mathrm{+ \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x e^{-s_1(u+x)-s_2(y-u)-s_4(u+v)} h^{**}_{\delta,124}(x,y,v|0)dvdxdy}$$

και αλλάζοντας τις μεταβλητές θα έχουμε:

$$\mathrm{v_{\delta,124}(u) = \int_0^\infty e^{-s_1x-s_2y-s_4u} h^*_{\delta,12}(x-u,u+y|0)dxdy} \\ \mathrm{+ \int_0^\infty \int_u^\infty \int_u^x e^{-s_1x-s_2y-s_4u}\, h^{**}_{\delta,124}(x-u,u+y,v-u|0)dvdxd} \tag{4.3.1}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (4.2.9), εφόσον $\mathrm{w(x,y,z,v) = e^{-s_1x-s_2y-s_3z-s_4v}}$ τότε η γενική λύση της $\mathrm{m_\delta(u)}$ δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathrm{m_{\delta,3,124}(u) = e^{-s_3u}v_{\delta,124}(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u e^{-s_3z}v_{\delta,124}(z)g_\delta(u-z)dz}$$

Και αν κάνουμε αντικατάσταση της (4.3.1) και κάνουμε αναδιάταξη στο αποτέλεσμα:

$$
\begin{aligned}
&m_{\delta,3,124}\\
&=\int_0^\infty\int_u^\infty e^{-s_1x-s_2y-s_3u-s_4u}h^*_{\delta,12}(x-u,u+y|0)dxdy\\
&+\int_0^\infty\int_u^\infty\int_u^x e^{-s_1x-s_2y-s_3u-s_4u}\,h^{**}_{\delta,124}(x-u,u+y,v-u|0)dvdxdy\\
&+\int_0^u\int_0^\infty\int_z^\infty e^{-s_1x-s_2y-s_3z-s_4z}\left(h^*_{\delta,12}(x-z,z+y|0)\frac{g_\delta(u-z)}{1-\varphi_\delta}\right)dxdy\\
&+\int_0^u\int_0^\infty\int_z^\infty\int_z^x e^{-s_1x-s_2y-s_3z-s_4u}\\
&\times\ \left(h^{**}_{\delta,124}(x-z,z+y,v-z|0)\frac{g_\delta(u-z)}{1-\varphi_\delta}\right)dvdxdydz.
\end{aligned}
\tag{4.3.2}
$$

Παρατηρούμε ότι εάν $w(x,y,z,v)=e^{-s_1x-s_2y-s_3z-s_4u}$, τότε από τη (4.1.1) έχουμε ότι η $m_\delta(u)$ δίνεται από:

$$
m_{\delta,3,124}(u)=E\left[e^{-\delta t-s_1U_{T-}-s_2|U_T|-s_3X_T-s_4R_{N_T-1}}I(T<\infty)|U_0=u\right]
$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το μετασχηματισμό Laplace της από κοινού ελλειμματικής προεξοφλημένης συνάρτησης πυκνότητας $(U_{T-},|U_T|,X_T,R_{N_T-1})$ εάν η $h_\delta(x,y,z,v|u)$ είναι η από κοινού ελλειμματική προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας της $(U_{T-},|U_T|,X_T,R_{N_T-1})$ στο (x,y,z,v), τότε έχουμε:

$$
m_{\delta,3,124}(u)=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^u\int_0^x e^{-s_1x-s_2y-s_3z-s_4u}\,h_\delta(x,y,z,v|u)dvdzdydx
$$

Και έτσι χρησιμοποιώντας τη μοναδικότητα του μετασχηματισμού Laplace , μπορούμε να ορίσουμε τη $h_\delta(x,y,z,v|u)$ από τη (4.3.2).Έτσι συνοψίζουμε στην επόμενη σελίδα τις διάφορες πυκνότητες που συνθέτουν τη $h_\delta(x,y,z,v|u)$.

$$h(x,y,z,v|u)\begin{cases} h^{*}_{\delta,12}(x-u,u+y|0), & x>u, y>0, z=u, u=v, \\ & \text{(το οποίο αντιστοιχεί στην χρεοκοπία της πρώτης αξίωσης)} \\ h^{**}_{\delta,124}(x-u,u+y,v-u|0), & x>u, y>0 z=u, u<v<x \\ & \text{(το οποίο αντιστοιχεί στην χρεοκοπία που στην πρώτη αξίωση)} \\ h^{*}_{\delta,12}(x-z,z+y|0)\dfrac{g_\delta(u-z)}{1-\varphi_\delta}, & x>z, y>0, 0<z<u, v=z \\ & \text{(το οποίο αντιστοιχεί σε πρώτη πτώση του πλεονάσματος στο χαμηλότερο επίπεδο z χωρίς να έχει προηγηθεί χρεοκοπία)} \\ h^{**}_{\delta,124}(x-z,z+y,v-z|0)\dfrac{g_\delta(u-z)}{1-\varphi_\delta}, & z<v<x, y>0, 0<z<u \\ & \text{(το οποίο αντιστοιχεί σε πρώτη πτώση του πλεονάσματος στο χαμηλότερο επίπεδο z χωρίς να επέλθει πρώτα χρεοκοπία, ακολούθουμενη από χρεκοπία που επέρχεται αλλά όχι στην πρώτη απαίτηση} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι, όταν $\delta = 0$ μπορούμε να ερμηνεύσουμε την $\frac{g_0(u-z)}{1-\varphi_\delta}$ ως την πυκνότητα της διαδικασίας πλεονάσματος που πέφτει στο χαμηλότερο επίπεδο z χωρίς να συμβεί πρώτα χρεοκοπία.

Έστω ότι η συνάρτηση ποινής δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$w(x,y,z,v) = w_{123}(x,y,z) = e^{-s_1x-s_2y-s_3z},$$

τότε η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί μία ανανεωτική ελλειμματική εξίσωση η οποία δίνεται από την (4.2.13) και την (4.2.14)

$$
\begin{aligned}
v_{\delta,123}(u) &= \int_u^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s_1(u+x)-s_2(y-u)-s_3u}\, h_{\delta,12}(x,y|0)dxdy \\
&= \int_0^{\infty}\int_u^{\infty} e^{-s_1x-s_2y-s_3u} h_{\delta,12}(x-u,u+y|0)dxdy,
\end{aligned}
$$

χρησιμοποιώντας την (4.2.9) και κάνοντας αντικατάσταση στην γενική λύση της $m_{\delta,123}(u)$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
m_{\delta,123}(u) &= v_{\delta,123}(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u v_{\delta,123}(z)\, g_\delta(u-z)dz \\
&= \int_0^{\infty}\int_u^{\infty} e^{-s_1x-s_2y-s_3u} h_{\delta,12}(x-u,u+y|0)dxdy \\
&+ \int_0^u\int_0^{\infty}\int_z^{\infty} e^{-s_1x-s_2y-s_3z}\left(h_{\delta,12}(x-z,z+y|0)\frac{g_\delta(u-z)}{1-\varphi_\delta}\right)dxdydz
\end{aligned}
$$

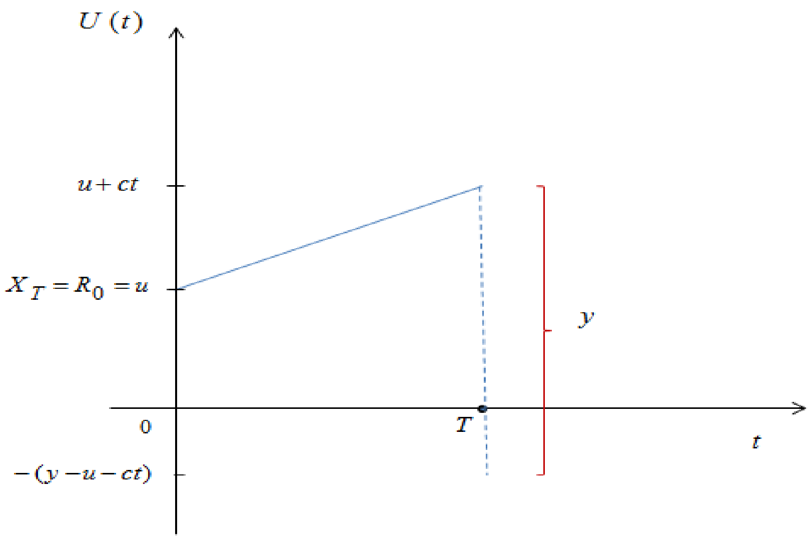
Εάν τώρα χρησιμοποιήσουμε τη μοναδικότητα του μετασχηματισμού Laplace μπορούμε να καθορίσουμε τη $h_{\delta,123}(x,y,z|u)$, την από κοινού ελλειμματική ανανεωτική πυκνότητα της της $(U_{T-},|U_T|,X_T)$ στο (x,y,z) τα οποία τα συνοψίζουμαι παρακάτω:

$$
h_{\delta,123}(x,y,z|u) = \begin{cases} h_{\delta,12}(x-u,u+y|0), & x>u, y>0, z=u \\ h_{\delta,12}(x-z,z+y|0)\dfrac{g_\delta(u-z)}{1-\varphi_\delta}, & x>z, y>0, 0<z<u \end{cases}
$$

4.4 Η μελέτη του χρόνου και του μεγέθους της πρώτης απαίτησης

Περίπτωση 1: η πρώτη απαίτηση προκαλεί χρεοκοπία

Αν η χρεοκοπία συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση, τότε ισχύει ότι N_T=1 και $R_{N_T-1} = R_0 = u$ και το ύψος της πρώτης απαίτησης y πρέπει να είναι μεγαλύτερο $u + ct$.



Σχήμα 4.5: Μελέτη του μεγέθους της πρώτης απαίτησης που οδηγεί σε χρεοκοπία.

Έχουμε:

$$\beta_{\delta,124}(u) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} a_{t,124}(u+ct,u)k(t)dt \qquad \mathbf{(4.4.1)}$$

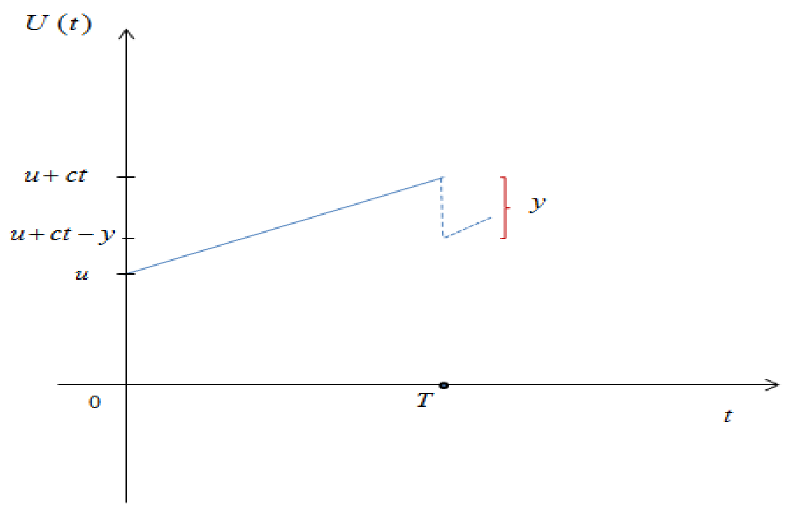
$$= \frac{1}{c}\int_u^{\infty} e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)} a_{t,124}(x,u)k\left(\frac{x-u}{c}\right)dx \qquad \mathbf{(4.4.2)}$$

όπου

$$a_{t,124}(x,u) = \int_x^\infty w_{124}(x, y-u, u)p(y|t)dy. \qquad \mathbf{(4.4.3)}$$

<u>Περίπτωση 2:</u> η πρώτη απαίτηση δεν προκαλεί χρεοκοπία

Αν η χρεοκοπία δεν συμβεί στην πρώτη απαίτηση, τότε το μέγεθος της απαίτησης y είναι μικρότερο από $u + ct$ και η διαδικασία ανανεώνεται με αρχικό απόθεμα $u + ct - y$ αφού ξεπεράσει τη χρονική στιγμή t.



Σχήμα 4.6: Μελέτη του μεγέθους της πρώτης απαίτησης που δεν οδηγεί χρεοκοπία.

Έχουμε:

$$m_{\delta,124}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{t,\delta,124}(u+ct)k(t)dt. \qquad \mathbf{(4.4.4)}$$

όπου

$$\sigma_{t,\delta,124}(x) = \int_0^x m_{\delta,124}(x-y)p(y|t)dy \qquad \mathbf{(4.4.5)}$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω μορφές των σχέσεων (4.4.2) και (4.4.4), θα έχουμε:

$$m_{\delta,124}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{t,\delta,124}(u+ct)k(t)dt + \beta_{\delta,124}(u) \qquad \mathbf{(4.4.6)}$$

η οποία έχει την ίδια μορφή με την (2.4.6) όπου τη $\sigma_{\delta,12}(x)$ αντικατέστησε η $\sigma_{t,\delta,124}(x)$ ενώ την $a_{12}(x)$ αντικατέστησε η $\alpha_{t,124}(x,u)$. Για να πάρουμε το μετασχηματισμό Laplace του πρώτου όρου της σχέσης (4.4.6),χρησιμοποιούμε τη σχέση από το Κεφάλαιο 1 :

$$\int_0^\infty e^{-su}\int_0^\infty e^{-\delta t}\,\sigma_{t,\delta,124}(u+ct)k(t)dtdu$$
$$= \int_0^\infty e^{-(\delta-cs)}\hat{\sigma}_{t,\delta,124}(s)k(t)dt - \hat{\sigma}^*_{\delta,124}(\delta-cs)$$

όπου χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.4.6) θα αποκτήσουμε:

$$\hat{\sigma}^*_{\delta,124}(s) = \int_0^\infty\int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta_x+s(ct-x)\}}\sigma_{t,\delta,124}(x)k(t)dxdt. \qquad \mathbf{(4.4.7)}$$

Εφόσον $\hat{\sigma}_{t,\delta,124}(s) = \hat{m}_{\delta,124}(s)\hat{p}\,(s|t)$, ο μετασχηματισμός Laplace της (4.4.6) προκύπτει ως εξής :

$$\hat{m}_{\delta,124}(s) = \hat{m}_{\delta,124}(s)\int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t}\hat{p}(s|t)k(t)dt - \hat{\sigma}^*_{\delta,124}\,(\delta-cs) + \hat{\beta}_{\delta,124}(s)$$
$$\mathbf{(4.4.8)}$$

και επειδή $\int_0^\infty e^{-(\delta-cs)}\,\hat{p}(s|t)k(t)dt = E\left[e^{-sY-(\delta-cs)Y}\right]$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε και έχουμε:

$$\left(1-E\left[e^{-sY-(\delta-cs)Y}\right]\right)\hat{m}_{\delta,124}(s) = \hat{\beta}_{\delta,124}(s) - \hat{\sigma}^*_{\delta,124}(\delta-cs), \quad \mathbf{(4.4.9)}$$

Το αριστερό μέρος της (4.4.9) είναι 0 όταν $s = \rho_\delta$, όπου ρ_δ είναι οποιαδήποτε ρίζα με θετικό πραγματικό μέρος της θεμελιώδης εξίσωσης του Lundberg , τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τις άγνωστες σταθερές στη σχέση $\hat{\sigma}^*_{\delta,124}(\delta-cs)$ χρησιμοποιώντας,

$$\widehat{\sigma}^*_{\delta,124}(\delta - c\rho_\delta) = \widehat{\beta}_{\delta,124}(\rho_\delta)$$

Και όπως αναφέρεται στην παράγραφο 2.4 για την κλασσική περίπτωση της συνάρτησης Gerber-Shiu , πρέπει να γίνει η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace της $m_{\delta,124}(s)$ κάνοντας κάποιες επιπρόσθετες υποθέσεις για τις συναρτήσεις $k(t)$ και/ή $p(y)$.

Για τα ακόλουθα παραδείγματα, θα υποθέσουμε ότι το μέγεθος των απαιτήσεων Y και οι ενδιάμεσοι χρόνοι V είναι ανεξάρτητοι και γι'αυτό το λόγο θα αντικαταστήσουμε την πυκνότητα $p(y|t)$ με $p(y)$ έτσι ώστε η (4.4.6) να γίνει

$$m_{\delta,124}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{\delta,124}(u + ct)k(t)dt + \beta_{\delta,124}(u)$$

όπου $\sigma_{\delta,124}(x)$ είναι ισοδύναμο με $\sigma_{t,\delta,124}(x)$ με το $p(y|t)$ να έχει αντικατασταθεί με το $p(y)$.

4.5 Παράδειγμα 4: Το κλασσικό μοντέλο Poisson

Σε αυτή την εφαρμογή θα ασχοληθούμε ξανά με το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου όπως μελετήσαμε στην εφαρμογή 1 στην οποία υποθέσαμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι κατανέμονται εκθετικά πχ. $k(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ [Cheung et al. (2015b)].Στην υπο-ενότητα 4.2, παρατηρήσαμε ότι παρόλο που η $m_\delta(u)$ αποτελείται από μία συνάρτηση ποινής η οποία περιλαμβάνει 4 μεταβλητές συμπεριλαμβανομένου X_T, η $m_\delta(u)$ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της από κοινού προεξοφλημένης πυκνότητας πιθανότητας των $\left(U(T-), |U(T)|, R_{N_T-1}\right)$ η οποία δεν εμπεριέχει την X_T.

Πρέπει να επισημάνουμε ότι η $\widehat{\sigma}^*_{\delta,124}(s)$ δίνεται από τη σχέση (4.4.7) και είναι ισοδύναμη της $\widehat{\sigma}^*_{\delta,12}(s)$ η οποία δίνεται από την σχέση (2.5.1) με τη $\sigma_{\delta,12}(x)$ να έχει αντικατασταθεί από η $\sigma_{t,\delta,124}(x)$ η οποία σε αυτή την εφαρμογή οι μεταβλητές

V και Y είναι ανεξάρτητες , είναι ισοδύναμη της $\sigma_{\delta,124}(x)$. Χρησιμοποιώντας λοιπόν τη σχέση (2.5.2) προκύπτει ότι :

$$\widehat{\sigma}^{*}_{\delta,124}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}\,\widehat{\sigma}_{\delta,124}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right),$$

και αντικαθιστώντας την στην (4.4.9), θα έχουμε:

$$\left\{1 - \hat{p}(s)\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right\}\widehat{m}_{\delta,124}(s) = \widehat{\beta}_{\delta,124}(s) - \frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\widehat{\sigma}_{\delta,124}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right) \qquad (\mathbf{4.5.1})$$

Και χρησιμοποιώντας τη (4.4.2)

$$\beta_{\delta,124}(u) = \frac{\lambda}{c}\int_{u}^{\infty} e^{-\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)(x-u)} a_{124}(x,u)dx \qquad (\mathbf{4.5.2})$$

όπου $a_{124}(x,u)$ και $\sigma_{\delta,124}(x)$ δίνονται από τις σχέσεις (4.4.3) και (4.4.5) αντίστοιχα με το $p(y|t)$ να έχει αντικατασταθεί από το $p(y)$.Καθώς η (4.5.1) είναι ισοδύναμη της (2.5.3), με $\widehat{\beta}_{\delta,12}(s)$ να έχει αντικατασταθεί από την $\widehat{\beta}_{\delta,124}(s)$, η $\widehat{m}_{\delta,12}(s)$ να έχει αντικατασταθεί από τη $\widehat{m}_{\delta,124}(s)$ και $\widehat{\sigma}_{\delta,12}(s)$ να έχει αντικατασταθεί από τη $\widehat{\sigma}_{\delta,124}(s)$,προκύπτει από τη σχέση (2.5.6) ότι:

$$\left\{s - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c}\hat{p}(s)\right\}\widehat{m}_{\delta,124}(s)$$

$$= \frac{1}{c}\left\{(\lambda+\delta-c\rho_\delta)\widehat{\beta}_{\delta,124}(\rho_\delta) - (\lambda+\delta-cs)\widehat{\beta}_{\delta,124}(s)\right\}$$

$$=\left(\frac{\lambda+\delta}{c} - \rho_\delta\right)\widehat{\beta}_{\delta,124}(\rho_\delta) - \left(\frac{\lambda+\delta}{c} - s\right)\widehat{\beta}_{\delta,124}(s)$$

$$= (s-\rho_\delta)\widehat{\beta}_{\delta,124}(s) + \left(\frac{\lambda+\delta}{c} - \rho_\delta\right)\left(\widehat{\beta}_{\delta,124}(\rho_\delta) - \widehat{\beta}_{\delta,124}(s)\right)$$

Όπου από το θεώρημα 1 του Παραδείγματος 1 , δείξαμε ότι η ρ_δ είναι η μοναδική και θετική ρίζα της θεμελιώδης εξίσωσης του Lundberg.
Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.5.12) μπορούμε να εκφράσουμε την παραπάνω εξίσωση ως εξής:

$$(s-\rho_\delta)\left(1-\varphi_\delta \hat{f}_\delta(s)\right)\widehat{m}_{\delta,124}(s)$$
$$= (s-\rho_\delta)\hat{\beta}_{\delta,124}(s)+\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-\rho_\delta\right)(\hat{\beta}_{\delta,124}(\rho_\delta)-\hat{\beta}_{\delta,124}(s)$$

Όπου φ_δ και $f_\delta(y)$ δίνεται από (2.5.10) και (2.5.11) αντίστοιχα. Έτσι αν αντικαταστήσουμε θα έχουμε:

$$\widehat{m}_{\delta,124}(s) = \varphi_\delta \widehat{m}_{\delta,124}(s)\hat{f}_\delta(s)+\hat{\beta}_{\delta,124}(s)$$
$$+\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-\rho_\delta\right)\hat{\beta}_{\delta,124}(\rho_\delta)\frac{\hat{\beta}_{\delta,124}(\rho_\delta)-\hat{\beta}_{\delta,124}(s)}{s-\rho_\delta}$$

το οποίο θα αντιστρέψουμε για να αποκτήσουμε την ανανεωτική εξίσωση πυκνότητας ,

$$m_{\delta,124}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,124}(u-y)f_\delta(y)dy + v_{\delta,124}(u),$$

και χρησιμοποιώντας την (1.3.3) κι (1.3.1) έχουμε:

$$v_{\delta,124}(u) = \beta_{\delta,124}(u)+\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-\rho_\delta\right)\int_u^\infty e^{-\rho\delta(v-u)}\beta_{\delta,124}(v)dv. \qquad \mathbf{(4.5.3)}$$

Τότε η γενική λύση για $m_{\delta,124}(u)$ είναι η έξης:

$$m_{\delta,124}(u) = v_{\delta,124}(u)+\frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u v_{\delta,124}(u)g_\delta(u-v)dv,$$

όπου $g_\delta(y)$ δίνεται από τη σχέση (2.5.13) και κάνοντας αντικατάσταση της (4.5.3) έχουμε:

$$\begin{aligned} m_{\delta,124}(u) = {} & \beta_{\delta,124}(u) \\ & + \left(\frac{\lambda+\delta}{c} - \rho_\delta\right)\int_u^\infty e^{-\rho_\delta (v-u)}\beta_{\delta,124}(v)dv \\ & + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u \beta_{\delta,124}(v) g_\delta(u-v)dv \\ & + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\left(\frac{\lambda+\delta}{c} - \rho_\delta\right)\int_0^u \left(\int_v^\infty e^{-\rho_\delta(t-v)}\beta_{\delta,124}(t)dt\right) g_\delta(u-v)dv, \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

αλλάζοντας μεταβλητές στο τελευταίο ολοκλήρωμα θα έχουμε:

$$\begin{aligned} & \int_0^u \left(\int_v^\infty e^{-\rho_\delta(t-v)}\beta_{\delta,124}(t)dt\right) g_\delta\,(u-v)dv \\ & = \int_0^u \beta_{\delta,124}(t)\int_0^t e^{-\rho_\delta(t-v)}\, g_\delta(u-v)dvdt \\ & \qquad + \int_u^\infty \beta_{\delta,124}(t)\int_0^u e^{-\rho_\delta(t-v)} g_\delta(u-v)dvdt. \end{aligned}$$

Για λόγους ευκολίας θα αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή v με t, και τη μεταβλητή t με v στην παραπάνω εξίσωση ,

$$\begin{aligned} & \int_0^u \left(\int_v^\infty e^{-\rho_\delta(t-v)}\beta_{\delta,124}\,(t)\right) g_\delta(u-t)dt \\ & = \int_0^u \beta_{\delta,124}(v)\int_0^v e^{-\rho_\delta(v-t)} g_\delta(u-t)dtdv \\ & \qquad + \int_u^\infty \beta_{\delta,124}(v)\int_0^u e^{-\rho_\delta(v-t)} g_\delta(u-v)dtdv \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (4.5.4) έχουμε:

$$
\begin{aligned}
m_{\delta,124}(u) &= \beta_{\delta,124}(u) \\
&\quad + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u \beta_{\delta,124}(v)\Big\{g_\delta(u-v) \\
&\quad + \left(\frac{\lambda+\delta}{c}-\rho_\delta\right)\int_0^v e^{-\rho_\delta(v-t)} g_\delta(u-t)dt\Big\}dv \\
&\quad + \left(\frac{\lambda+\delta}{c}-\rho_\delta\right)\int_u^\infty \beta_{\delta,124}(v)\left\{e^{-\rho_\delta(v-u)}+\frac{1}{1-\varphi_\delta}\right\} \\
&= \beta_{\delta,124}(u) + \int_0^\infty \beta_{\delta,124}(v)\tau_\delta(u,v)dv, \qquad (\mathbf{4.5.5})
\end{aligned}
$$

όπου

$$
\tau_\delta(u,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\varphi_\delta}\left\{g_\delta(u-v) + \left(\dfrac{\lambda+\delta}{c}-\rho_\delta\right)\displaystyle\int_0^u e^{-\rho_\delta(v-t)}\, g_\delta(u-t)dt\right\}, v<u \\ \left(\dfrac{\lambda+\delta}{c}-\rho_\delta\right)\left\{e^{-\rho_\delta(v-u)} + \dfrac{1}{1-\varphi_\delta}\displaystyle\int_0^u e^{-\rho_\delta(v-t)} g_\delta(u-t)dt\right\}, v>u \end{cases}
$$

(4.5.6)

Παρατηρούμε ότι αν $\delta = 0$, τότε όπως δείχθηκε στην εφαρμογή 1 ότι $p_0 = 0$, και θυμίζουμε ότι $g_0(u) = -\overline{G}_0'(u) = -\psi'(u)$ και $\varphi_0 = \overline{G}_0(0) = \psi(0)$.Τότε για $\delta = 0$, η σχέση (4.5.6) γίνεται:

$$
\tau_0(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{1-\psi(0)}\left\{\frac{\lambda}{c}[\psi(u-v)-\psi(u)] - \psi'(u-v)\right\} & ,v<u \\ \frac{\lambda}{c}\frac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)} & ,v>u \end{cases} \qquad (4.5.7)
$$

Θεωρούμε ότι $w_{124}(x,y,v) = e^{-s_1x-s_2y-s_4v}$, τέτοιο ώστε

$$
m_{\delta,124}(u) = E[e^{-\delta T - s_1U_T - s_2|U_T| - s_4R_{N_T-1}} I(T<\infty)|U_0 = u] \qquad (4.5.8)
$$

είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $h_{\delta,124}(x,y,v|u)$, η από κοινού πυκνότητα πιθανότητα των $\left(U(T-), |U(T)|, R_{N_T-1}\right)$.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη (4.4.3) με $p(y|t)$ να έχει αντικατασταθεί με $p(y)$, η $a_{124}(x,u)$ γίνεται

$$\alpha_{124}(x,u) = \int_x^{\infty} e^{-s_1 x - s_2(y-x) - s_4 u}\, p(y)dy$$

$$= e^{-s_1 x - s_4 u} \int_0^{\infty} e^{-s_2 y} p(x+y)dy \qquad (4.5.9)$$

Και έτσι χρησιμοποιώντας τη (4.1.2) με $p(y|t)$ να έχει αντικατασταθεί με $p(y)$, η (4.5.2) γίνεται:

$$\beta_{\delta,124}(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^{\infty} e^{-\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)(x-u)} e^{-s_1 x - s_4 u} \int_0^{\infty} e^{-s_2 y} p(x+y)dydx$$

$$= \int_u^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right) - s_1 x - s_2 y - s_4 u} \left(\frac{\lambda}{c} e^{-\lambda\left(\frac{x-u}{c}\right)} p(x+y)\right) dydx$$

$$= \int_u^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right) - s_1 x - s_2 y - s_4 u}\, h_{12}^{*}(x,y|u)dydx \qquad (4.5.10)$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι από τη σχέση (4.5.8) η $m_{\delta,124}(u)$ είναι ουσιαστικά η συνάρτηση $e^{-\delta T - s_1 U_T - s_2 |U_T| - s_4 R_{N_T-1}} I(T < \infty)$.Έπειτα, μπορούμε να γράψουμε την $m_{\delta,124}(u)$ ως άθροισμα των μορφών που προκύπτουν από τη μελέτη της χρεοκοπίας στην πρώτη απαίτηση (όπου $t = \frac{x-u}{c}, x > u\, , y > 0$ και $R_{N_T-1} == R_0 = u$) και από τη χρεοκοπία σε μεταγενέστερες απαιτήσεις

$(t > 0\,, v < x < u + ct\,, y > 0$ και $v > 0)$. Και χρησιμοποιώντας την πυκνότητα των $(T, U_{T-}, |U_T|, R_{N_T-1})$ που συνοψίζεται στην σχέση (4.1.3) , η $m_{\delta,124}(u)$ μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής :

$$m_{\delta,124} = \int_u^\infty \int_0^\infty e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)-s_1x-s_2y-s_4u} h_{12}^*(x,y|u)dydx$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^x \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t-s_1x-s_2y-s_4v} h_{124}^{**}(t,x,y,v|u)dtdydvdx$$

$$= \beta_{\delta,124}(u) + \int_0^\infty \int_0^x \int_0^\infty e^{-s_1x-s_2y-s_4v} h_{\delta,124}^{**}(x,y,v|u)dydvdx$$

(4.5.11)

Λύνοντας τον δεύτερο όρο στη δεξιά πλευρά της παραπάνω εξίσωσης και χρησιμοποιώντας την (4.5.5),θα αποκτήσουμε:

$$\int_0^\infty \int_0^x \int_0^\infty e^{-s_1x-s_2y-s_4v} h_{\delta,124}^{**}(x,y,v|u)dydvdx$$

$$= m_{\delta,124}(u) - \beta_{\delta,124}(u)$$

$$= \int_0^\infty \beta_{\delta,124}(u)\mathcal{T}_\delta(u,v)dv$$

$$= \int_0^\infty \mathcal{T}_\delta(u,v) \int_v^\infty \int_0^\infty e^{s_1x-s_2y-s_4v} h_{\delta,12}^*(x,y|v)dydxdv$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^x e^{s_1x-s_2y-s_4v} \left(\mathcal{T}_\delta(u,v)h_{\delta,12}^*(x,y|v)\right) dvdydx$$

(4.5.12)

χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.5.10) και (4.1.4) με $p(y|t)$ να έχει αντικατασταθεί με $p(y)$.

Κάνοντας αντικατάσταση (4.5.10) και (4.5.12) στην (4.5.11) προκύπτει ότι

$$m_{\delta,124}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty e^{-s_1x-s_2y-s_4u} h_{12}^* (x,y|u) dydx$$

$$+\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^x e^{-s_1x-s_2y-s_4v} (\mathcal{T}_\delta(u,v) h_{\delta,12}^*(x,y|v) dvdydx.$$

Χρησιμοποιώντας τη μοναδικότητα του μετασχηματισμού Laplace , η από κοινού προεξοφλημένη πυκνότητα πιθανότητα των $\left(U_{T-}, |U_T|, R_{N_T-1}\right)$ στα σημεία (x,y,v) δίνεται από την παρακάτω σχέση :

$$h_{\delta,12}(x,y,v|u) = \begin{cases} h_{\delta,12}^*(x,y|u) & ,x > v, y > 0, v = u \\ \tau_\delta(u,v) h_{\delta,12}^*(x,y|v) & ,x > v\,, y > 0, v \neq u \end{cases} ,$$

όπου $h_{\delta,12}^*(x,y|u) = \frac{\lambda}{c} e^{-\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)(x-u)} p(x+y)$ και $\tau_\delta(u,v)$ να δίνεται από τη σχέση (4.5.6).Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε περιθώριες προεξοφλημένες πυκνότητες των (U_{T-}) , $|U_T|$ και R_{N_T-1} ολοκληρώνοντας βάση συγκεκριμένων μεταβλητών όπως γίνεται στο [Cheung et al.(2010b)].

Θέλουμε να βρούμε την από κοινού πυκνότητα της τελευταίας ενδιάμεσης απαίτησης V_{N_T} και της τελευταίας απαίτησης που προκαλεί τη χρεοκοπία Y_{N_T}. Γνωρίζομε ότι $V_{N_T} = \frac{U_{T-} - R_{N_T-1}}{C}$ και $Y_{N_T} = U_{T-} + |U_T|$.

Έτσι έχουμε :

$$e^{-zV_{N_T}-sY_{N_T}} = e^{-\left(s+\frac{z}{c}\right)U_{T-}-s|U_T|+\frac{z}{c}R_{N_T-1}}.$$

H $m_{\delta,124}(u)$ είναι ισοδύναμη με τη $E[e^{-z\,V_{N_T}-s\,Y_{N_T}}I(T<\infty)|U(0)=0]$, αν $s_1 = \left(s+\frac{z}{c}\right)$, $s_2 = s$, $s_4 = -\frac{z}{v}$ και $\delta = 0$, τότε η $\alpha_{124}(x,u)$ από τη σχέση (4.5.9) γίνεται :

$$\alpha_{124}(x,u) = e^{-\left(s+\frac{z}{c}\right)x+\frac{z}{c}u}\int_0^\infty e^{-sy}p(x+y)dy$$

$$= e^{-\frac{z}{c}(x-u)}\int_x^\infty e^{-sy}p(y)dy$$

Συνεπώς , για $\delta = 0$ και κάνοντας αλλαγή μεταβλητών, η (4.5.2) γίνεται ως εξής

$$\beta_{0,124}(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-\left(\frac{\lambda+z}{c}\right)(x-u)}\int_x^\infty e^{-sy}p(y)dydx$$

$$= \lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+\zeta)t}\int_{u+ct}^\infty e^{-sy}p(y)dydt$$

$$= \int_0^\infty\int_{u+ct}^\infty e^{zt-sy}\left(\lambda e^{-\lambda t}p(y)\right)dydt$$

Κάνοντας αντικατάσταση στην (4.5.5)

$$E[e^{-zV_{N_T}-sY_{N_T}}I(T<\infty)|U_0=u] = \int_0^\infty\int_{u+ct}^\infty e^{-zt-sy}\left(\lambda e^{-\lambda t}p(y)\right)dydt$$

$$+\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\int_{u+ct}^\infty e^{-zt-sy}\lambda e^{-\lambda t}p(y)dydt\right)\mathcal{T}_0(u,v)dv$$

$$=\int_0^\infty\int_{u+ct}^\infty e^{-zt-sy}\left(\lambda e^{-\lambda t}p(y)\right)dydt$$

$$+\int_0^\infty\int_{ct}^\infty e^{-zt-sy}\left(\lambda e^{-\lambda t}p(y)\int_0^{y-ct}\mathcal{T}_0(u,v)dv\right)dydt$$

Συμπεραίνουμε ότι από τη μοναδικότητα του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει ότι η από κοινού πυκνότητα του τελευταίου ενδιάμεσου χρόνου και της απαίτησης που προκαλεί χρεοκοπία $\left(V_{N_T}, Y_{N_T}\right)$ δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$h_6(t,y|u)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}p(y)\left(1+\int_0^{y-ct}\mathcal{T}_0(u,v)dv\right), & y>u+ct\\ \lambda e^{-\lambda t}p(y)\int_0^{y-ct}\mathcal{T}_0(u,v)dv & ,ct<y<u+ct\\ 0 & ,y<ct\end{cases}$$

όπου $\mathcal{T}_0(u,v)$ δίνεται από τη σχέση (4.5.7).

4.6. Εφαρμογή : Το μέγεθος των απαιτήσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή

Συνεχίζουμε να υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές V και Y είναι ανεξάρτητες, δηλαδή $p(y|t) = p(y)$ και θα εξετάσουμε πότε οι απαιτήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες δηλαδή $p(y) = \beta e^{-\beta y}$ όπως υποθέσαμε και στην Εφαρμογή 2 όπου αναλύσαμε την $m_{\delta,12}(u)$ η οποία εμπεριέχει η συνάρτηση ποινής της 2-μεταβλητές [Cheung et al.(2010a)].Σε αυτή την εφαρμογή , θεωρούμε μία γενικευμένη συνάρτηση ποινής $w(x,y,z,v)$ και θεωρούμε ότι $w(x,y,z,v) = e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 z - s_4 v}$ έτσι ώστε :

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} e^{-s_1 U_{T-} - s_2 |U_T| - s_3 X_T - s_4 R_{N_T - 1}} I(T < \infty) | U_0 = u] \;, \qquad (4.6.1)$$

η οποία όπως αναφέραμε είναι ο μετασχηματισμός Laplace της από κοινού προεξοφλημένης πυκνότητας πιθανότητας των (U_{T-}, $|U_T|$, X_T , $R_{N_T - 1}$).

$$\begin{aligned} h^{**}_{\delta,124}(x, u+y, v|0) &= p_x(u+y) h^{**}_{\delta,14}(x, v|0) \\ &= \beta e^{-\beta(u+y)} h^{**}_{\delta,14}(x, v|0). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.2.7), θα έχουμε :

$$\begin{aligned} v_\delta(u) = &\int_0^\infty e^{-\delta t} \left(\int_0^\infty e^{-s_1(u+ct) - s_2 y - s_3 u - s_4 u} \, \beta e^{-\beta(u+ct+y)} dy \right) k(t) dt \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^x e^{-s_1(u+x) - s_2 y - s_3 u - s_4(u+v)} \beta e^{-\beta(u+y)} h^{**}_{\delta,14}\,(x, v|0) dv dx d \\ &= e^{-(\beta + s_1 + s_3 + s_4) u} \left(\int_0^\infty \beta e^{-(\beta + s_2) y} \, dy \right) \end{aligned}$$

$$\times\left(\int_0^{\infty} e^{-(\delta+cs_1+c\beta)t}k(t)dt+\int_0^{\infty}\int_0^{x} e^{-s_1x-s_4v}h^{**}_{\delta,14}(x,v|0)dvdx\right)$$

$$=\frac{\beta e^{-(\beta+s_1+s_3+s_4)u}}{\beta+s_2}\left(\hat{k}(\delta+cs_1+c\beta)+\hat{h}^{**}_{\delta,14}(s_1,s_4|0)\right)$$

όπου $\hat{h}^{**}_{\delta,14}(s_1,s_4|0)$ είναι ο διδιάστατος μετασχηματισμός Laplace της $\hat{h}^{**}_{\delta,14}(x,y|0)$.

Έστω ότι $\xi_\delta(s_1,s_4)=\hat{k}(\delta+cs_1+c\beta)+\hat{h}^{**}_{\delta,14}(s_1,s_4|0)$ τέτοιο ώστε

$$v_\delta(u)=\tfrac{\beta\xi_\delta(s_1,s_4)}{\beta+s_2}e^{-(\beta+s_1+s_3+s_4)u}. \qquad (4.6.2)$$

Δεδομένου ότι το κλιμακωτό ύψος της σκάλας $f_\delta(y)$ προκύπτει ανεξάρτητα από την επιλογή της συνάρτησης ποινής, χρησιμοποιώντας την (2.6.2), $f_\delta(y)=\beta e^{-\beta y}$.
Και επειδή η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση ανανέωσης, χρησιμοποιώντας την (4.2.8) θα έχουμε :

$$m_\delta(u)=\varphi_\delta\int_0^u m_\delta(u-y)\beta e^{-\beta y}dy+v_\delta(u),$$

όπου $v_\delta(u)$ δίνεται από τη σχέση (4.6.2) και από τι θεώρημα 2.1 , το φ_δ είναι μία πραγματική ρίζα $\in(0,1)$ που ικανοποιεί τη (2.6.7).Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace της ελλειμματικής εξίσωσης προκύπτει ότι:

$$\widehat{m}_\delta(z)=\varphi_\delta\widehat{m}_\delta(z)\frac{\beta}{\beta+z}+\frac{\beta\xi_\delta(s_1,s_4)}{\beta+s_2}(\beta+s_1+s_3+s_4+z)^{-1}$$

Λύνοντας ως προς $\widehat{m}_\delta(z)$, παίρνουμε

$$\widehat{m}_\delta(z)=\frac{\beta\xi_\delta(s_1,s_4)}{\beta+s_2}\frac{(\beta+s_1+s_3+s_4+z)^{-1}}{1-\varphi_\delta\beta(\beta+z)^{-1}}$$

$$\widehat{m}_\delta(z)=\frac{\beta\xi_\delta(s_1,s_4)}{(\beta+s_2)(\varphi_\delta\beta+s_1+s_3+s_4)}\left\{\frac{s_1+s_3+s_4}{\beta+s_1+s_3+s_4+z}+\frac{\varphi_\delta\beta}{\beta(1-\varphi_\delta)+z}\right\}.$$

Χρησιμοποιώντας την (2.6.4) , παίρνουμε την αντίστροφη

$$m_\delta(u) = \frac{\beta\xi_\delta(s_1,s_4)}{(\beta+s_2)(\varphi_\delta\beta+s_1+s_3+s_4)}\left\{(s_1+s_3+s_4)e^{-(\beta+s_1+s_3+s_4)u} + \beta\overline{G}_\delta(u)\right\}. \tag{4.6.3}$$

Προκειμένου να εκφράσουμε το $\xi_\delta(s_1, s_4)$ συναρτήσει του $\hat{k}(\delta)$, θεωρούμε ότι η $m_\delta(u)$ δίνεται από τη σχέση (4.4.6) η οποία προέκυψε από τη μελέτη του χρόνου και του μεγέθους της πρώτης απαίτησης. Δεδομένο ότι η $\xi_\delta(s_1, s_4)$ δεν είναι συναρτήσει των s_2 ή s_3 , υποθέτουμε ότι $s_2 = s_3 = 0$ και έτσι η $\widehat{m}_\delta(z)$ από τη (4.6.3) απλοποιείται ως εξής :

$$m_{\delta,14}(u) = \frac{\beta\xi_\delta(s_1,s_4)}{\varphi_\delta\beta+s_1+s_4}\left\{(s_1+s_4)e^{-(\beta+s_1+s_4)u} + \beta\overline{G}_\delta(u)\right\}. \tag{4.6.4}$$

Η (4.6.4) απλοποιείται

$$m_{\delta,14}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{\delta,14}(u+ct)k(t)dt + \beta_{\delta,14}(u), \tag{4.6.5}$$

όπου από τη σχέση (4.4.1) και (4.4.3)

$$\beta_{\delta,14}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\left(\int_{u+ct}^\infty e^{-s_1(u+ct)-s_4 u}\beta e^{-\beta y}dy\right)k(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\delta t-(\beta+s_1)(u+ct)-s_4 u}\, k(t)dt$$

$$= e^{-(\beta+s_1+s_4)u}\hat{k}(\delta+c\beta+cs_1), \tag{4.6.6}$$

και χρησιμοποιώντας την σχέση (4.4.5) και (4.6.4) θα έχουμε:

$$\sigma_{\delta,14}(x) = \int_0^x m_{\delta,14}(x-y)\beta e^{-\beta y}dy$$

$$= \frac{\xi_\delta(s_1,s_4)}{\varphi_\delta\beta+s_1+s_4}\left\{s_1+s_4)\int_0^x e^{-(\beta+s_1+s_4)(x-y)}\beta e^{-\beta y}dy + \beta\int_0^x \overline{G}_\delta(x-y)\,\beta e^{-\beta y}dy\right\}.$$

Θυμόμαστε από τη σχέση (2.6.3) ότι έχουμε :

$$\int_0^x \bar{G}_\delta(x-y)\ \beta e^{-\beta y} dy = \frac{\bar{G}_\delta(x)}{\varphi_\delta} - \ e^{-\beta x},$$

έτσι αποκτάμε

$$\sigma_{\delta,14}(x) = \frac{\xi_\delta(s_1, s_4)}{\varphi_\delta \beta + s_1 + s_4}\left\{e^{-\beta x}\left(1 - e^{-(s_1+s_4)x}\right) + \left(\frac{\bar{G}_\delta(x)}{\varphi_\delta} - e^{-\beta x}\right)\right\}$$

$$= \frac{\xi_\delta(s_1, s_4)}{\varphi_\delta \beta + s_1 + s_4}\left\{\frac{\bar{G}_\delta(x)}{\varphi_\delta} - e^{-(\beta+s_1+s_4)x}\right\}. \qquad (4.6.7)$$

Επιπρόσθετα , χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.6.6), (4.6.7) και (2.6.6),(4.6.5) γίνεται :

$$m_{\delta,14}(u) = \frac{\beta \xi_\delta(s_1, s_4)}{\varphi_\delta \beta + s_1 + s_4}\left\{\frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^\infty e^{-\delta t}\bar{G}_\delta\,(u+ct)k(t)dt - \int_0^\infty e^{-\delta t-(\beta+s_1+s_4)(u+ct)}k(t)dt\right\}$$

$$+e^{-(\beta+s_1+s_4)u}\hat{k}(\delta + c\beta + cs_1)$$

$$= \frac{\beta \xi_\delta(s_1, s_4)}{\varphi_\delta \beta + s_1 + s_4}\left\{\bar{G}_\delta(u) - e^{-(\beta+s_1+s_4)u}\hat{k}(\delta + c\beta + cs_1 + cs_4)\right\}$$

$$+e^{-(\beta+s_1+s_4)u}\hat{k}(\delta + c\beta + cs_1). \qquad (4.6.8)$$

Εξισώνοντας τις (4.6.4) και (4.6.8) συναρτήσει του $\bar{G}_\delta(u)$ απλοποιώντας και διαιρώντας και τις δύο πλευρές με τον όρο $e^{-(\beta+s_1+s_4)u}$ προκύπτει ότι

$$\frac{\xi_\delta(s_1, s_4)}{\varphi_\delta \beta + s_1 + s_4}(s_1 + s_4) = \hat{k}(\delta + c\beta + cs_1) - \frac{\xi_\delta(s_1, s_4)}{\varphi_\delta \beta + s_1 + s_4}\hat{k}(\delta + c\beta + cs_1 + sc_4).$$

Αν λύσουμε ως προς $\xi_\delta(s_1, s_4)$ θα έχουμε:

$$\xi_\delta(s_1, s_4) = \frac{(\varphi_\delta \beta + s_1 + s_4)\hat{k}(\delta + c\beta + cs_1)}{s_1 + s_4 + \beta\hat{k}(\delta + c\beta + cs_1 + cs_4)},$$

η οποία είναι μία εξίσωση συναρτήσει του $\hat{k}(s)$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.6.3) θα έχουμε:

$$m_\delta(u) = C_\delta(s_1, s_2, s_3, s_4)\left\{(s_1 + s_3 + s_4)e^{-(\beta+s_1+s_3+s_4)u} + \beta\overline{G}_\delta(u)\right\}, \qquad (4.6.9)$$

με $C_\delta(s_1, s_2, s_3, s_4) = \frac{\beta(\varphi_\delta\beta+s_1+s_4)\hat{k}(\delta+c\beta+cs_1)}{(\beta+s_2)(\varphi_\delta\beta+s_1+s_3+s_4)(s_1+s_4+\beta\hat{k}(\delta+c\beta+cs_1+cs_4))}$,

και η $\overline{G}_\delta(u)$ δίνεται από τη σχέση (2.6.4).

Υπενθυμίζουμε ότι , εάν θέλουμε να μελετήσουμε την πυκνότητα του τελευταίου ενδιάμεσου χρόνου πριν συμβεί η χρεοκοπία, η οποία δίνεται από τη σχέση $V_{N_T} = \frac{U_{T-} - R_{N_T-1}}{c}$, τότε επιλέγουμε τη συνάρτηση ποινής $w(x, y, z, v) = e^{-s\left(\frac{x-v}{c}\right)} = e^{-\frac{s}{c}x+\frac{s}{c}v}$. Συνεπώς, αν ορίσουμε την πυκνότητα του τελευταίου ενδιάμεσου χρόνου πριν συμβεί η χρεοκοπία ως $k_T(t|u) = -\overline{K}'_T(t|u)$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της $k_T(t|u)$ δίνεται από την $E[e^{-sV_{N_T}}I(T < \infty)|U(0) = u]$, η οποία μπορεί να δοθεί από την (4.6.9) με $\delta = 0, s_1 = {}^{s}/_{c}$, $s_2 = s_3 = 0$ και $s_4 = -{}^{s}/_{c}$. Έτσι, θυμίζουμε ότι $\overline{G}_0(0) = \psi(u)$ και έχουμε:

$$E\left[e^{-sV_{N_T}}I(T < \infty)\middle|U_0 = U\right] = \frac{\hat{k}(c\beta + s)}{\hat{k}(c\beta)}\psi(u),$$

την οποία αντιστέφουμε με σκοπό να πάρουμε την πυκνότητα του τελευταίου ενδιάμεσου χρόνου

$$k_T(t|u) = \frac{e^{-c\beta}k(t)}{\hat{k}(c\beta)}\psi(u).$$

Η κατανομή $V_{N_T} \mid T < \infty$ δίνεται από

$$\frac{k_T(t|u)}{\psi(u)} = \frac{e^{-c\beta t}k(t)}{\hat{k}(c\beta)},$$

η οποία σημειώνουμε δεν εξαρτάται από το αρχικό πλεόνασμα u και αξιολογούνται για πολλές μορφές $k(t)$. Αποδείχθηκε στο [Cheung et al. (2010a)] ότι ο ενδιάμεσος χρόνος V_{N_T} είναι στοχαστικά δομημένος από το γενικό ενδιάμεσο χρόνο V, δηλαδή

$\overline{K}_T(t|u) \leq \overline{K}(t)$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ένας μικρότερος ενδιάμεσος χρόνος σημαίνει λιγότερος χρόνος να συλλεχθεί το ασφάλιστρο το οποίο αυξάνει τις πιθανότητες μίας απαίτησης να συμβεί η οποία είναι αρκετά μεγαλύτερη ώστε να προκαλέσει χρεοκοπία.

Έστω ότι $s_3 = s_4 = 0$, τέτοιο ώστε η $m_\delta(u)$ να απλοποιείται σε $m_{\delta,12}(u)$ και χρησιμοποιώνας τη σχέση (4.6.9) θα έχουμε:

$$m_{\delta,12}(u) = \frac{\beta\hat{k}(\delta+c\beta+cs_1)}{(\beta+s_2)(s_1+\beta\hat{k}(\delta+c\beta+cs_1))}\left\{s_1 e^{-(\beta+s_1)u} + \beta\overline{G}_\delta(u)\right\} \qquad (4.6.10)$$

η οποία είναι εκτενέστερη λύση της (2.6.8) συναρτήσει του $\hat{k}(s)$ όταν $w_{12}(x,y) = e^{-s_1 x - s_2 y}$.

Ενδιαφερόμαστε να προσδιορίσουμε την $h_{\delta,12}(x,y|u)$, την από κοινού προεξοφλημένη πυκνότητα του πλεονάσματος ακριβώς πριν συμβεί η χρεοκοπία και το έλλειμα τη στιγμή της χρεοκοπίας [Willmot, G.E. (2011)]. Και δεδομένου ότι η $h_{\delta,12}(x,y|u) = h_{\delta,1}(x|u)\beta e^{\beta y}$ από (4.1.10) όπου η $h_{\delta,1}(x|u)$ είναι η προεξοφλημένη πυκνότητα του πλεονάσματος αμέσως πριν συμβεί η χρεοκοπία, χρειαζόμαστε μόνο να εστιάσουμε την προσοχή μας στον εντοπισμό της $h_{\delta,12}(x,y|u)$. Συνεπώς, υποθέτουμε $s_2 = s_3 = s_4 = 0$ τέτοιο ώστε η σχέση η (4.6.1) να γίνεται:

$$\begin{aligned} m_\delta(u) &= E[e^{-\delta T - s_1 U(T-)} I(T < \infty)|U(0) = u] \\ &= \hat{h}_{\delta,1}(s_1|\, u), \end{aligned}$$

όπου $\hat{h}_{\delta,1}(s_1|\, u)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του $h_{\delta,1}(x|u)$. Υποθέτουμε ότι $s_2 = 0$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.6.10), προκύπτει ότι:

$$\hat{h}_{\delta,1}(s_1|\, u) = \frac{\hat{k}(\delta + c\beta + cs_1)}{s_1 + \beta\hat{k}(\delta + c\beta + cs_1)}\left\{s_1 e^{-(\beta+s_1)u} + \beta\overline{G}_\delta(u)\right\}.$$

Δεδομένου ότι,

$$\hat{h}_{\delta,1}(s_1|0) = \frac{\hat{k}(\delta+c\beta+cs_1)}{s_1+\beta\hat{k}(\delta+c\beta+cs_1)}\{s_1+\beta\varphi_\delta\}. \qquad (\mathbf{4.6.11})$$

Έτσι μπορούμε να γράψουμε το εξής :

$$\hat{h}_{\delta,1}(s_1|u) = \frac{\hat{h}_{\delta,1}(s_1|0)}{s_1+\beta\varphi_\delta}\{s_1 e^{-(\beta+s_1)u} + \beta\bar{G}_\delta(u)\}.$$

Και προσθέτοντας και αφαιρώντας $\beta\varphi_\delta e^{-(\beta+s_1)u}$, λαμβάνουμε

$$\hat{h}_{\delta,1}(s_1|u) = \frac{\hat{h}_{\delta,1}(s_1|0)}{s_1+\beta\varphi_\delta}\left((s_1+\beta\varphi_\delta)e^{-(\beta+s_1)u} + \beta\bar{G}_\delta(u) - \beta\varphi_\delta e^{-(\beta+s_1)u}\right)$$

$$= \hat{h}_{\delta,1}(s_1|0)e^{-(\beta+s_1)u} + \frac{\beta\hat{h}_{\delta,1}(s_1|0)}{s_1+\beta\varphi_\delta}\left(\bar{G}_\delta(u) - \varphi_\delta e^{-(\beta+s_1)u}\right). \qquad (4.6.12)$$

Έστω μια αυθαίρετη συνάρτηση $h(x)$ και σταθερά a, θεωρούμε τον μετασχηματισμό Laplace της $e^{-as}\,\hat{h}(s)$ που δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} e^{-as}\,\hat{h}(s) &= e^{-as}\int_0^\infty e^{-sx}h(x)dx \\ &= \int_0^\infty e^{-(x+a)s}h(x)dx \\ &= \int_a^\infty e^{-sx}h(x-a)dx. \end{aligned}$$

και έτσι η $e^{-as}\,\hat{h}(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $h(x-a)I(x>a)$.
Συνεπώς, αντιστρέφουμε την σχέση (4.6.12) και έχουμε :

$$\begin{aligned} h_{\delta,1}(x|u) &= e^{-\beta u}h_{\delta,1}(x-u|0)I(x>u) + \beta\bar{G}_\delta(u)\int_0^x e^{-\beta\varphi_\delta(x-y)}h_{\delta,1}(y|0)dy \\ &\quad + e^{-\beta u}\beta\varphi_\delta\int_0^{x-u} e^{-\beta\varphi_\delta(x-u-y)}h_{\delta,1}(y|0)dy\, I(x>u), \qquad (\mathbf{4.6.13}) \end{aligned}$$

η οποία είναι μία εξίσωση για $h_{\delta,1}(x|u)$ συναρτήσει του $h_{\delta,1}(x|0)$. Υπενθυμίζουμε ότι από τη σχέση (4.6.11) με s_1 να έχει αντικατασταθεί από το s ότι

$$\begin{aligned} \hat{h}_{\delta,1}(s|0) &= \frac{\hat{k}(\delta+c\beta+cs)}{s+\beta\hat{k}(\delta+c\beta+cs)}\{s+\beta\varphi_\delta\} \\ &= \frac{\hat{k}(\delta+c\beta+cs)}{s+\beta-\beta(1-\hat{k}(\delta+c\beta+cs))}\{s+\beta-\beta(1-\varphi_\delta)\}. \end{aligned}$$

Είδαμε από την Εφαρμογή 2 ότι για $\kappa_\delta = \beta(1-\varphi_\delta)$, τότε η $-\kappa_\delta$ είναι η μοναδική θετική ρίζα της θεμελιώδης εξίσωσης του Lundberg και έτσι ικανοποιεί τη σχέση $\kappa_\delta = \beta\left(1-\hat{k}(\delta+c\kappa_\delta)\right)$. Αν προσθέσουμε και αφαιρέσουμε τον όρο κ_δ, θα προκύψει ότι

$$
\begin{aligned}
\hat{h}_{\delta,1}(s-\beta|0) &= \frac{\hat{k}(\delta+cs)}{s-\beta(1-\hat{k}(\delta+cs)}\{s-\kappa_\delta\} \\
&= \frac{\hat{k}(\delta+cs)}{s-\kappa_\delta-\beta\left(1-\hat{k}(\delta+cs)\right)+\beta(1-\hat{k}(\delta+c\kappa_\delta))}\{s-\kappa_\delta\} \\
&= \frac{\hat{k}(\delta+cs)}{1-\beta\left\{\frac{\hat{k}(\delta+c\kappa_\delta)-\hat{k}(\delta+cs)}{s-\kappa_\delta}\right\}} \qquad (\mathbf{4.6.14})
\end{aligned}
$$

Έτσι, ορίζουμε την πυκνότητα

$$
n_\delta(t) = \frac{e^{-\delta\frac{t}{c}}k\left(\frac{t}{c}\right)}{c\hat{k}(\delta)}, \qquad (\mathbf{4.6.15})
$$

η οποία έχει μετασχηματισμό Laplace

$$
\hat{n}_\delta(s) = \frac{\hat{k}(\delta+cs)}{\hat{k}(\delta)}.
$$

Η (4.6.14) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$
\hat{h}_{\delta,1}(s-\beta|0) = \frac{\hat{k}(\delta)\hat{n}_\delta(s)}{1-\beta\hat{k}(\delta)\left\{\frac{\hat{n}_\delta(\kappa_\delta)-\hat{n}_\delta(s)}{s-\kappa_\delta}\right\}}.
$$

Γνωρίζοντας ότι $\kappa_\delta = \beta(1-\hat{k}(\delta+c\kappa_\delta))$ θα προκύψει ότι

$\beta = \frac{\kappa_\delta}{1-\hat{k}(\delta+c\kappa_\delta)}$,το οποίο θα αντικατασταθεί στη $\hat{h}_{\delta,1}(s-\beta|0)$ και θα έχουμε

$$
\hat{h}_{\delta,1}(s-\beta|0) = \frac{\hat{k}(\delta)\hat{n}_\delta(s)}{1-\frac{\kappa_\delta}{1-\hat{k}(\delta+ck_\delta)}\hat{k}(\delta)\left\{\frac{\hat{n}_\delta(\kappa_\delta)-\hat{n}_\delta(s)}{s-\ \kappa_\delta}\right\}}
$$

$$= \frac{\hat{k}(\delta)\hat{n}_\delta(s)}{1 - \frac{\kappa_\delta}{1-\hat{k}(\delta + c\kappa_\delta)}\left(1 - \hat{n}_\delta(\kappa_\delta)\right)\left\{\frac{\kappa_\delta}{s - \kappa_\delta}\frac{\hat{n}_\delta(\kappa_\delta) - \hat{n}_\delta(s)}{1 - \hat{n}_\delta(\kappa_\delta)}\right\}}$$

$$= \frac{\hat{v}_\delta^*(s)}{1 - \varphi_\delta^* \hat{f}_\delta^*(s)} \qquad \mathbf{(4.6.16)}$$

όπου $\hat{v}_\delta^*(s) = \hat{k}(\delta)\hat{n}_\delta(s)$

$$\varphi_\delta^* = \frac{\hat{k}(\delta)}{1 - \hat{k}(\delta + c\kappa_\delta)}\left(1 - \hat{n}_\delta(\kappa_\delta)\right)$$

$$= \frac{\hat{k}(\delta) - \hat{k}(\delta + c\kappa_\delta)}{1 - \hat{k}(\delta + c\kappa_\delta)}.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\phi_\delta^* \in (0,1)$ για $\delta > 1$ και $\phi_0^* = 1$ και

$$\hat{f}_\delta^*(s) = \frac{\kappa_\delta}{s - \kappa_\delta}\frac{\hat{n}_\delta(\kappa_\delta) - \hat{n}_\delta(s)}{1 - \hat{n}_\delta(\kappa_\delta)}. \qquad \mathbf{(4.6.17)}$$

Από τις (1.3.6), (4.6.17) είναι ο μετασχηματισμός Laplace της γενικευμένης πυκνότητας ισορροπίας του $n_\delta(y)$ και με τη χρήση της (1.3.5), προκύπτει ότι:

$$f_\delta^*(y) = \frac{e^{\kappa_\delta y}\int_y^\infty e^{-\kappa_\delta x} n_\delta(x)}{\int_0^\infty e^{-\kappa_\delta x}\, \overline{N}_\delta(y)dy},$$

και από (1.3.1)

$$\overline{N}_\delta(y) = \int_y^\infty n_\delta(x)dx = \int_y^\infty \frac{e^{-\delta\frac{x}{c}} k\left(\frac{x}{c}\right)}{c\hat{k}(\delta)}dx$$

$$= \frac{e^{-\delta\frac{y}{c}} T_\delta k\left(\frac{y}{c}\right)}{\hat{k}(\delta)}.$$

Από τη (4.6.16), θα προκύψει :

$$\hat{h}_{\delta,1}(s - \beta|0) = \varphi_\delta^* \hat{h}_{\delta,1}(s - \beta|0)\hat{f}_\delta^*(s) + v_\delta^*(s),$$

την οποία μετατρέπουμε και θα προκύψει:

$$e^{\beta x} h_{\delta,1}(x|0) = \varphi_\delta^* \int_0^x e^{-\beta(x-y)} h_{\delta,1}(x - y|0) f_\delta^*(y)dy + \hat{k}(\delta) n_\delta(x),$$

το οποίο είναι μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για $e^{\beta x}h_{\delta,1}(x|0)$ για $\delta > 0$ $(\delta = 0)$.Συνεπώς, με τη χρήση της σχέσης (1.4.15), η γενική λύση αυτής της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης για $\delta > 0$ δίνεται από τη σχέση:

$$e^{\beta x}h_{\delta,1}(x|0) = \hat{k}(\delta)n_\delta(x) + \frac{1}{1-\varphi_\delta^*}\int_0^x \hat{k}(\delta)n_\delta(y)g_\delta^*(x-y)dy. \quad (\mathbf{4.6.18})$$

όπου $(f_\delta^*(y))^{*n}$ είναι η n-οστή συνέλιξη της $f_\delta^*(y)$, τότε

$$g_\delta^*(y) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\varphi_\delta^*)\,(\varphi_\delta^*)^n\big(f_\delta^*(y)\big)^{*n}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (4.6.18) με $e^{-\beta x}$ και χρησιμοποιώντας τη (4.6.15), παίρνουμε:

$$h_{\delta,1}(x|0) = e^{\beta x}\left\{\hat{k}(\delta)n_\delta(x) + \frac{\hat{k}(\delta)}{1-\varphi_\delta^*}\int_0^x n_\delta(y)g_\delta^*(x-y)dy\right\}$$
$$= e^{\beta x}\left\{\frac{e^{-\delta\frac{x}{c}}\hat{k}\left(\frac{x}{c}\right)}{c} + \frac{1}{c(1-\varphi_\delta^*)}\int_0^x e^{-\delta\left(\frac{y}{c}\right)}k\left(\frac{y}{c}\right)g_\delta^*(x-y)dy\right\}.$$

4.7 Περιγραφή του μοντέλου και της δομής εξάρτησης

Σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο ως διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$, ορίζουμε τη στοχαστική διαδικασία $U(t) = u + ct - S(t)$, όπου $U(0) = u$ $(u \geq 0)$ είναι το αρχικό απόθεμα και c είναι ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων ανά μονάδα χρόνου. Με $\{S(t), t \geq 0\}$ συμβολίζουμε τη στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται έως το χρόνο t. Ορίζουμε με $\{X\}_{i\ i\geq 1}^{\infty}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με την τ.μ. X_i να περιγράφει το μέγεθος της $i-$οστής ζημιάς. Το μέγεθος των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται έως το χρόνο t ισούται με $S(t) = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)}$. Η κοινή τ.μ. X θεωρούμε ότι έχει συνάρτηση κατανομής $F(x) = P_r(X \leq x) = \int_0^x f(y)dy$, με $f(x) = P_r(X \leq x)$ και συνάρτηση δεξιάς ουράς $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \int_x^{\infty} f(y)dy$. Το αναμενόμενο μέγεθος ζημίας το συμβολίζουμε με μ και είναι ίσο με $\mu = E(x) = \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty \bar{F}(x)dx$. Ο μετασχηματισμός Laplace της σ.π.π. f(x) συμβολίζεται με $\hat{f}(x)$ και ισούται με $\hat{f}(x) = \int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$.

Υποθέτουμε ότι η τ.μ. V κατανέμεται σύμφωνα με την κατανομή $\mathrm{Erlang}(n, \lambda)$ οπότε θα ισχύει ότι $E(V) = \frac{n}{\lambda}, \nu \in \mathbb{N}^*, \lambda > 0$ και σ.π.π., σ.κ. και μετασχηματισμό Laplace όπως δίνονται παρακάτω:

$$f_V(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}, t \geq 0 \quad n \in N^+, \qquad (\mathbf{4.7.1})$$

$$F_V(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \qquad (\mathbf{4.7.2})$$

$$\hat{f}_V(s) = E[e^{-sV}] = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^n. \qquad (\mathbf{4.7.3})$$

Η κοινή σ.π.π. των (X,V) , συμβολίζεται με $f_{X,W}$, και η κοινή σ.κ. συμβολίζεται με $F_{X,W}$, . Για να ορίσουμε τη δομή εξάρτησης μεταξύ του μεγέθους των απαιτήσεων και των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των απαιτήσεων και ως εκ τούτου για τον υπολογισμό της από κοινού κατανομής των (X,V) θα χρησιμοποιήσουμε τη σύζευξη (FGM).

$$C_\theta^{FGM}(u_{1,} u_2) = u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2) \qquad (\mathbf{4.7.4})$$

με $(u_1, u_2) \in [0,1] \times [0,1]$ και $-1 \leq \theta \leq 1$.
Η σύζευξη FGM επιτρέπει θετικές και αρνητικές σχέσεις εξάρτησης και περιλαμβάνει επίσης την ανεξάρτητη σύζευξη για θ=0. Συχνά χρησιμοποιείται σε εφαρμογές για να περιγράψει τη δομή εξάρτησης λόγω της απλότητάς της.
Η δισδιάστατη σ.κ. της $F_{X,V}$, η οποία βασίζεται στη σύζευξη FGM που ορίζεται παρακάτω:

$$F_{X,V}(x,t) = C_\theta{}^{FGM}\big(F_X(x), F_V(t)\big)$$
$$= F_X(x)F_V(t) + \theta F_X(x)F_V(t)\big(1 - F_X(x)\big)\big(1 - F_V(t)\big)$$
$$= F_X(x)F_V(t) + \theta F_X(x)\bar{F}_x(x)F_V(t)\bar{F}_V(t), \quad x,t \in \mathbb{R}^+ \qquad (4.7.5)$$

Καταλήγουμε στη δισδιάστατη σ.π.π. του (X,V) υπολογίζεται ως εξής:

$$f_{X,V}(x,t) = f_X(x)f_V(t) + \theta f_V(t)h(x)[2\bar{F}_V(t) - 1], \; x,t \in \mathbb{R}^+ \qquad (4.7.6)$$

όπου $h(x) = f_X(x)[1 - 2F_X(x)]$.

Αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (4.7.1), (4.7.2) και τη (4.7.6) καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$f_{X,V}(x,t) = f_X(x)\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t}$$
$$+ \theta h(x)\left[2\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right)e^{-2\lambda t} - \frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t}\right],$$

$x,t \in \mathbb{R}^+$.

(4.7.7)

Για την Erlang(n) η διαδικασία κινδύνου με δομή εξάρτησης βασισμένη στη σύζευξη FGM, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\widehat{m}_\delta(s) = \frac{\widehat{\beta}_{1,\delta}(s) + \widehat{\beta}_{2,\delta}(s)}{\widehat{h}_{1,\delta}(s) + \widehat{h}_{2,\delta}(s)}, \qquad (4.7.8)$$

με $\widehat{h}_{1,\delta}(s) = \left(\frac{\delta+\lambda}{c} - s\right)^n \left(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\right)^{2n-1}$ (4.7.9)

και $\widehat{h}_{2,\delta}(s) = \frac{\lambda^n}{c^n}\widehat{f}_X(s)\left(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\right)^{2n-1} + \theta\frac{\lambda^n}{c^n}\widehat{h}(s)$

$$\times\left[2\left(\frac{\delta+\lambda}{c}s\right)^n \sum_{\iota=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{c^i}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\right)^{n-i-1} - \left(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\right)^{2n-1}\right] \qquad (\mathbf{4.7.10})$$

$$\hat{\beta}_{1,\delta}(s) = \frac{\lambda^n}{c^n}\hat{\gamma}_1(s)\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1} + \theta\frac{\lambda^n}{c^n}\hat{\gamma}_2(s)$$
$$\times\left[2\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{c^i}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{n+i-1} - \left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1}\right] \qquad \mathbf{(4.7.11)}$$

Όπου $\hat{\gamma}_1(s) = \int_0^\infty e^{-su}\gamma_i(u)du\,, i = 1{,}2$ και έχουμε

$$\hat{\beta}_{\mathbf{2},\boldsymbol{\delta}}(s) = \sum_{j=1}^{3n-1}\hat{\beta}_{1,\delta}(\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1}\frac{s-\rho_\kappa}{\rho_j-\rho_\kappa}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την πολυωνυμική παρεμβολή Lagrange για το πολυώνυμο $\hat{h}_{1,\delta}(s)$, που είναι βαθμού 3n-1, στα σημεία (0, $\hat{h}_{1,\delta}(0)$), ($\rho_j\hat{h}_{1,\delta}(\rho_j)$), j=1,….,3n-1 θα προκύψει ότι :

$$\hat{h}_{1,\delta}(s) = \hat{h}_{1,\delta}(0)\prod_{k=1}^{3n-1}\frac{s-\rho_k}{(-\rho_k)} + s\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{h}_{1,\delta}(\rho_j)}{\rho_j}\prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1}\frac{s-\rho_\kappa}{\rho_j-\rho_\kappa}$$

$$\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s)$$
$$= \pi_{3n-1}(s)\left[\frac{\hat{h}_{1,\delta}(0)}{\pi_{3n-1}(0)} - \sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{h}_{2,\delta}(\rho_j)}{(-\rho_j)\pi'_{3n-1}(\rho_j)} + \sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{h}_{2,\delta}(\rho_j)}{(s-\rho_j)\pi'_{3n-1}(\rho_j)} - \frac{\hat{h}_{2,\delta}(s)}{\pi_{3n-1}(s)}\right]$$

(4.7.12)

όπου $\pi_{3n-1}(s) = \prod_{i=1}^{3n-1}(s-\rho_i)$.

Χρησιμοποιώντας τους τελεστές Dickson-Hipp, η παραπάνω σχέση (4.7.12) θα γίνει

$$\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s) = (-1)^{3n-1}\pi_{3n-1}(s)\left[1 - T_sT_{\rho_1}\dots T_{\rho_{3n-1}}h_{2,\delta}(0)\right]. \qquad (4.7.13)$$

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε $\hat{f}_{2,\delta}(y|0)$ η οποία είναι η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας για αρχικό απόθεμα u=0 και $\hat{f}_{2,\delta}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} f_{2,\delta}(y|0)dy$ ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Laplace. Συνεπώς, έχουμε:

$$\hat{f}_{2,\delta}(s) = 1 - \frac{\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s)}{\prod_{i=1}^{3n-1}(\rho_i - s)} \qquad (4.7.14)$$

Από τις σχέσεις (4.7.13) και (4.7.14) θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\hat{f}_{2,\delta}(s) &= 1 - \frac{\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s)}{\prod_{i=1}^{3n-1}(\rho_i - s)} \\ &= 1 - \frac{(-1)^{3n-1}\pi_{3n-1}(s)\left[1 - T_s T_{\rho_1} \dots T_{\rho_{3n-1}} h_{2,\delta}(0)\right]}{(-1)^{3n-1}\pi_{3n-1}(s)} \\ &= T_s T_{\rho_1} \dots T_{\rho_{3n-1}} h_{2,\delta}(0) \qquad (\mathbf{4.7.15})\end{aligned}$$

Παίρνουμε αντιστρόφους μετασχηματισμούς Laplace προκύπτει ότι:

$$f_{2,\delta}(y|0) = T_{\rho_1} \dots T_{\rho_{3n-1}} h_{2,\delta}(y)$$

Εφόσον δεσμεύσουμε ως προς την πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό απόθεμα $u \geq 0$ και καθώς δούμε αν συμβαίνει η χρεοκοπία ή το αντίθετο για την πρώτη απαίτηση, παίρνουμε το εξής:

$$m_\delta(u) = \int_0^u m_\delta(u-y) f_{2,\delta}(y|0)dy + G_\delta(u)$$

όπου $G_\delta(u) = T_{\rho_1} \dots T_{\rho_{3n-1}} \beta_{1,\delta}(u)$.

Για $w(x,y) = 1$, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $m_\delta(u)$ αφορά στο μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας $m_T(u)$.

$$m_T(u) = \int_0^u m_T(u-y) f_{2,\delta}(y|0)dy + \int_u^\infty f_{2,\delta}(y|0)dy$$

$$= \frac{1}{1+\kappa_\delta}\int_0^u m_T(u-y)\theta_\delta(y)dy + \frac{1}{1+\kappa_\delta}\overline{\Theta}_\delta(u), \ \ u \geq 0 \quad (\mathbf{4.7.16})$$

Συνεπώς, έχουμε:

$$m_T(u) = \frac{\kappa_\delta}{1+\kappa_\delta}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\kappa_\delta}\right)^j \overline{\Theta}_\delta^{*j}(u) \quad u \geq 0$$

Όπου $\overline{\Theta}_\delta(u) = \int_u^\infty \theta_\delta(y)dy$, $\theta_\delta(y) = (1+\kappa_\delta)f_{2,\delta}(y|0)$ και $\overline{\Theta}_\delta^{*j}(u)$ είναι η j-οστή συνέλιξη της συνάρτησης επιβίωσης $\overline{\Theta}_\delta(u)$. Αν πάρουμε το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της σχέσης (4.7.16) προκύπτει ότι:

$$\widehat{m}_T(s) = \frac{m_T(0)-\hat{f}_{2,\delta}(s)}{s[1-\hat{f}_{2,\delta}(s)]} = \frac{1-\hat{f}_{2,\delta}(s)-[1-m_T(0)]}{s[1-\hat{f}_{2,\delta}(s)]}. \quad (4.7.17)$$

Έχουμε από τις σχέσεις (4.7.13) και (4.7.15) την παρακάτω σχέση:

$$\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s) = [1-\hat{f}_{2,\delta}(s)]\prod_{i=1}^{3n-1}(\rho_i - s)$$

Άρα η σχέση (4.7.17) γίνεται ως εξής:

$$\widehat{m}_T(s) = \frac{\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)-[1-m_T(0)]\prod_{i=1}^{3n-1}(\rho_i-s)}{s[\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)]}. \ (4.7.18)$$

Θεωρούμε ότι οι R_1, R_2 είναι διακριτές τιμές και χρησιμοποιώντας τη τεχνική των μερικών κλασμάτων, προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\widehat{m}_T(s) = \sum_{j=1}^{2}\frac{\zeta_{j,\delta}}{s+R_j},$$

όπου

$$\zeta_{1,\delta} = \frac{R_2}{R_2 - R_1}\left(1 - \frac{3R_1}{2a} + \frac{{R_1}^2}{2a^2}\right) \text{ και } \zeta_{2,\delta} = \frac{R_1}{R_2 - R_1}\left(1 - \frac{3R_2}{2a} + \frac{{R_2}^2}{2a^2}\right).$$

Αν αντιστρέψουμε τον παραπάνω μετασχηματισμό Laplace προκύπτει η παρακάτω:

$$m_T(u) = \zeta_{1,\delta} e^{-R_1 u} + \zeta_{2,\delta} e^{-R_2 u}, u \geq 0, \quad (4.7.19)$$

Για $\delta = 0$ η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι $\psi(u)$.

Εφαρμογή:

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την επίδραση της παραμέτρου εξάρτησης θ στην πιθανότητα χρεοκοπίας και το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.

Για το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου με εξάρτηση μέσω της σύζευξης FGM υποθέτουμε ότι η τ.μ. V ~ Erlang(2,2), οπότε $f_V(t) = 4te^{-2t}$ και επομένως ο αναμενόμενος αριθμός των απαιτήσεων στο διάστημα [0,t] είναι $E[N(t)] = t - \frac{1}{4}(1 - e^{-4t})$. Θεωρώντας ότι ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρου είναι c =1.5 και για δ = 0 από την εξίσωση (4.7.19) παίρνουμε μία αναλυτική έκφραση για την πιθανότητα χρεοκοπίας ψ(u) συναρτήσει του αρχικού αποθεματικού u ≥ 0 . Χρησιμοποιώντας το Mathematica, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου θ , υπολογίσθηκαν οι πιθανότητες χρεοκοπίας όπως παρακάτω:

- Για θ=-1

  ψ(u)= 0.6416701672 $e^{-0.3487s732254u} - 0.0169012248\ e^{-2.151719400u}$

- Για θ=-0.5

  ψ(u)= 0.6111640019 $e^{-0.3833132642u} - 0.0096651749\ e^{-2.0792454120u}$

- Για θ=0.5

  ψ(u)= 0.5314436215 $e^{-0.4762087115u} + 0.01332254042\ e^{-1.911908905u}$

- Για θ=1

  ψ(u)= 0.4774717870 $e^{-0.5409429369u} + 0.03255482730\ e^{-1.811552947u}$,

Επίσης, η παράμετρος θ έχει θετική επιρροή στη πιθανότητα χρεοκοπίας. Όσο μεγαλύτερη είναι η παράμετρος εξάρτησης τόσο μικρότερη θα είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας. Συνεπώς η σχέση εξάρτησης είναι θετική.

Για δ=0.05 παίρνουμε από τη σχέση (4.7.19) μία αναλυτική έκφραση για το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας $m_T(u)$ σε σχέση με το αρχικό απόθεμα u≥ 0. Χρησιμοποιώντας το Mathematica, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου θ, έχουν υπολογισθεί οι μετασχηματισμοί Laplace ως εξής:

- Για θ=-1

$$m_T(u) = 0.58810707054204e^{-0.4015607208u} - 0.01986616515195528e^{-2.150382538u}$$

- Για θ=-0.5

$$m_T(u) = 0.558265539590616e^{-0.4358563215u} - 0.0112379309905072e^{-2.078539964u}$$

- Για θ=0

$$m_T(u) = 0.5230305556e^{-0.4769694444u}$$

- Για θ=0.5

$$m_T(u) = 0.480589531459186e^{-0.5272636613u} + 0.0151619535823271e^{-1.912699668u}$$

- Για θ=1

$$m_T(u) = 0.427916113486677e^{-0.5905527687u} + 0.0366819441278372e^{-1.813223037u}$$

Συνεπώς καταλαβαίνουμε ότι υπάρχει σαφής εξάρτηση μεταξύ της παραμέτρου θ και του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει η παράμετρος θ τόσο μικραίνει η τιμή του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.

Κεφάλαιο 5: Συμπεράσματα

Σε αυτήν την διπλωματική εργασία, αναλύσαμε τα μέτρα της χρεοκοπίας που προκύπτουν τόσο από την κλασσική όσο και από τη γενικευμένη εξίσωση Gerber-Shiou για διάφορα μοντέλα κινδύνου. Η γενικευμένη εξίσωση περιλαμβάνει την εισαγωγή δύο νέων μεταβλητών στη συνάρτηση ποινής, περιλαμβάνοντας το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία (U(T-)) και το έλλειμα στη στιγμή της χρεοκοπίας (|U(T)|). Αυτές οι νέες μεταβλητές είναι το ελάχιστο επίπεδο πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία X_T και το πλεόνασμα αμέσως μετά την εμφάνιση της απαίτησης που προκαλεί τη χρεοκοπία $R_{N_{T-1}}$.. Αν και αυτές οι ποσότητες δεν μπορούν να παρατηρηθούν πριν από τη χρεοκοπία, είναι δυνατό να προσδιοριστούν οι κατανομές τους, καθώς δεν εξαρτώνται από τη χρονική στιγμή που συμβαίνει η χρεοκοπία, αλλά από το αρχικό απόθεμα u.

Αρχικά, στο δεύτερο κεφάλαιο, εισήγαμε την από κοινού πυκνότητα των μεταβλητών (T, U(T-), |U(T)|) και την ορίσαμε έτσι ώστε να διακρίνεται η χρονική στιγμή της χρεοκοπίας στην πρώτη ή σε μεταγενέστερη απαίτηση. Στη συνέχεια, εξετάσαμε γραφικά τις περιπτώσεις όπου συμβαίνει η χρεοκοπία, και σε περίπτωση που η πρώτη πτώση του πλεονάσματος φτάνει κάτω από το αρχικό αποθεματικό. Δείξαμε ότι αυτή η περίπτωση ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Για να καθορίσουμε τη σχέση μεταξύ $m_{\delta,12}(u)$ και k(y), p(y), μελετήσαμε τον χρόνο και το μέγεθος της πρώτης απαίτησης. Έτσι, καταλήξαμε σε μια εξίσωση που ικανοποιείται από το $m_{\delta,12}(u)$.

Επιπλέον, αποδείξαμε ότι η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg, ειδικά οι θετικές ρίζες της, μας επιτρέπουν να αναγνωρίσουμε άγνωστες ποσότητες, οι οποίες είναι απαραίτητες για την αντιστροφή της $m_{\delta,12}(u)$. Αυτό γίνεται μέσω της μελέτης των πυκνοτήτων k(t) και p(y).

Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάσαμε ένα μοντέλο με υστέρηση, το οποίο λαμβάνει υπόψη τον χρόνο μέχρι να συμβεί η πρώτη απαίτηση, με τη χρήση διαφορετικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $k_d(t)$), αντί της κανονικής k(t). Αυτό το μοντέλο λαμβάνει υπόψη τη δυνατότητα μιας απαίτησης να συμβεί πριν το χρόνο 0, με μια υστέρηση, αντίθετα από το μοντέλο Sparre Andersen.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, εισαγάγουμε τη γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu, η οποία περιλαμβάνει δύο επιπλέον μεταβλητές, όπως προαναφέρθηκε. Αυτή η γενικευμένη μορφή μας επιτρέπει να μελετήσουμε μεταβλητές όπως ο τελευταίος ενδιάμεσος χρόνος και το τελευταίο κλιμακωτό ύψος.

Στη συνέχεια, εφαρμόσαμε την ίδια μεθοδολογία όπως στο δεύτερο κεφάλαιο, ορίζοντας την από κοινού πυκνότητα των μεταβλητών $(T, U(T-), |U(T)|, R_{N_T}))$ και μελετώντας γραφικά τις περιπτώσεις όπου συμβαίνει η χρεοκοπία. Καταλήξαμε σε συμπεράσματα σχετικά με τις εξισώσεις που ικανοποιεί η $m_{\delta,12}(u)$για την περίπτωση αυτή.

Συνολικά, η διπλωματική εργασία εμβαθύνει στην κατανόηση των μέτρων της χρεοκοπίας σε διάφορα μοντέλα κινδύνου και εξετάζει τις επιπτώσεις των νέων μεταβλητών που εισήχθησαν στις συναρτήσεις ποινής. Επιπλέον, προσφέρει μια λεπτομερή ανάλυση της μαθηματικής δομής που διέπει αυτά τα μοντέλα.

Βιβλιογραφία

[1] Andersen, S. (1957). On the collective theory of risk in case of contagion between the claims.

[2] Cheung, E. L. (2010a). Structural properties of Gerber-Shiu functions in dependent Sparre Andersen models, Insurance: Mathematics and Economics 46.

[3] Cheung, E. L. (2010b). Gerber-Shiu analysis with a generalized penalty function. .

[4] Gerber, H. S. (1998.). On the time value of ruin. North American Actuarial Journal.

[5] Hipp, D. a. (2001). On the time to ruin for Erlang risk processes.

[6] Kim, S. (2007). opics in delayed renewal risk models. Ph.D. thesis, University of Waterloo.

[7] Willmot, G. (. (2007). On the discounted penalty function in the renewal risk model with general interclaim times.

[8] Willmot, G. (2004.). A note on a class of delayed renewal risk processes. Insurance: Mathematics and Economics 34.