

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής



Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΠΙΝΑΚΑ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ
ΓΕΝΕΑΣ ΓΙΑ ΚΟΟΡΤΕΣ ΠΟΥ ΔΕΝ ΕΧΟΥΝ
ΕΚΛΕΙΨΕΙ

Ανδριάνα Θ. Βασιλείου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων

Πειραιάς
Μάρτιος 2024

UNIVERSITY OF PIRAEUS
SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS



Department of Statistics and Insurance Science

**POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND
RISK MANAGEMENT**

**ESTIMATING A COHORT LIFE TABLE FOR
NON-EXTINCT COHORTS AND APPLICATIONS**

Andriana T. Vasileiou

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of
Piraeus as part of the requirements for obtaining the Master's Degree in Actuarial
Science and Risk Management..

Piraeus, Greece

March 2024

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη Συνέλευση του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν συνεδρίασή της σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγήτρια Βερροπούλου Γεωργία
- Καθηγητής Σεβρόγλου Βασίλειος
- Αναπληρωτής Καθηγητής Ψαρράκος Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμών του συγγραφέα.

Περίληψη

Η σωστή πρόβλεψη των επιπέδων θνησιμότητας είναι πολύ σημαντική για τον καθορισμό ασφαλιστρών και συντάξεων. Παρόλα αυτά οι πίνακες επιβίωσης που εκτιμώνται και χρησιμοποιούνται από αναλογιστές βασίζονται σε στοιχεία περιόδου και σε υποθετικές γενεές και αντικατοπτρίζουν επίπεδα θνησιμότητας με μικρότερη ακρίβεια συγκριτικά με πίνακες επιβίωσης γενεάς. Η εκτίμηση όμως πινάκων επιβίωσης γενεάς κατ' ανάγκη προϋποθέτει την εκτίμηση επιπέδων θνησιμότητας για άτομα τα οποία δεν έχουν εκλείψει. Η εργασία αυτή στόχο έχει τη συγκριτική μελέτη τεχνικών εκτίμησης θνησιμότητας για άτομα τα οποία δεν έχουν εκλείψει. Στα πλαίσια αυτά θα παρουσιάσουμε σχετικές τεχνικές ενώ επιπλέον, θα εκτιμηθούν και συγκριθούν βιομετρικές συναρτήσεις γενεάς και περιόδου βάσει των σχετικών στοιχείων για τη Σουηδία ώστε να διαπιστωθούν διαφοροποιήσεις.

Abstract

The accuracy in forecasting mortality levels is very important for setting premiums and pensions. However, survival tables estimated and used by actuaries are based on period data and hypothetical generations and reflect mortality levels less accurately than cohort survival tables. However, the estimation of cohort survival tables necessarily incorporates the estimation of mortality levels for individuals who are not extinct. The aim of this paper is to study and compare mortality estimation techniques for individuals who are not extinct. In this context we will present relevant techniques and, in addition, biometric cohort and period lifetable functions will be estimated and compared based on relevant data for Sweden in order to identify differences.

Στην Ελπίδα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσα καθηγήτρια κα. Γεωργία Βερροπούλου για τις συμβουλές, τις υποδείξεις και την ευρύτερη καθοδήγηση που μου παρείχε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας μου. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους φίλους μου για την συνεχή υποστήριξη που μου παρείχαν καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου και για την αμέριστη εμπιστοσύνη σε κάθε επιλογή μου.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1 ^ο : Θνησιμότητα: ορισμοί και τρόποι μέτρησης	10
1.1. Θνησιμότητα: βασικοί ορισμοί και δείκτες	10
1.1.1. Ορισμοί	10
1.1.2. Δείκτες Μέτρησης Θνησιμότητας	10
<i>Αδρός Δείκτης θανάτων</i>	10
<i>Ειδικοί κατά ηλικία δείκτες θνησιμότητας</i>	11
<i>Πίνακες Επιβίωσης</i>	12
1.2. Πίνακες επιβίωσης: είδη και υποθέσεις	12
<i>Πλήρεις και συνεπτυγμένοι πίνακες επιβίωσης</i>	12
<i>Πίνακες επιβίωσης γενεάς και περιόδου</i>	13
Κεφάλαιο 2 ^ο : Μεθοδολογία κατασκευής πινάκων επιβίωσης	16
2.1. Πίνακες Επιβίωσης Περιόδου	16
2.1.1. Υποθέσεις	16
2.1.2. Στοιχεία που χρειάζονται	16
2.1.3. Βήματα κατασκευής πίνακα επιβίωσης	17
2.2 Πίνακες Επιβίωσης Κοόρτης	22
2.3 Μελέτες και μοντέλα για μοντέλα θνησιμότητας	22
Κεφάλαιο 3 ^ο : Εφαρμογή: Μελέτη διαφοροποιήσεων των συναρτήσεων θνησιμότητας κοόρτης και περιόδου	37
3.1 Μελέτη του προσδόκιμου ζωής γυναικών και ανδρών σε διάφορες ηλικίες με χρήση διαγραμμάτων	37
3.2 Μελέτη της πιθανότητας θανάτου γυναικών και ανδρών σε διάφορες ηλικίες με χρήση διαγραμμάτων	42
3.3 Μελέτη του προσδόκιμου ζωής ανδρών και γυναικών σε διάφορες ηλικίες με χρήση πινάκων	44
Κεφάλαιο 4 ^ο : Συμπέρασμα	49
Βιβλιογραφία	51

Κατάλογος Διαγραμμάτων

Διάγραμμα 1: Προσδόκιμο ζωής για γυναίκες ηλικίας 0 έτους	37
Διάγραμμα 2: Προσδόκιμο ζωής για γυναίκες ηλικίας 40 ετών	38
Διάγραμμα 3: Προσδόκιμο ζωής για γυναίκες ηλικίας 65 ετών	39
Διάγραμμα 4: Προσδόκιμο ζωής για γυναίκες ηλικίας 80 ετών	39
Διάγραμμα 5: Προσδόκιμο ζωής για άνδρες ηλικίας 0 έτους	40

Διάγραμμα 6: Προσδόκιμο ζωής για άνδρες ηλικίας 40 ετών	40
Διάγραμμα 7: Προσδόκιμο ζωής για άνδρες ηλικίας 65 ετών	41
Διάγραμμα 8: Προσδόκιμο ζωής για άνδρες ηλικίας 80 ετών	41
Διάγραμμα 9: Θνησιμότητα για γυναίκες ηλικίας 0 έτους	42
Διάγραμμα 10: Θνησιμότητα για γυναίκες ηλικίας 65 ετών	43
Διάγραμμα 11: Θνησιμότητα για άνδρες ηλικίας 0 έτους	43
Διάγραμμα 12: Θνησιμότητα για άνδρες ηλικίας 65 ετών	44

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1: Προσδόκιμο ζωής κοόρτης και περιόδου για γυναίκες ηλικίας 0 έτους.....	46
Πίνακας 2: Προσδόκιμο ζωής κοόρτης και περιόδου για γυναίκες ηλικίας 65 ετών.....	47
Πίνακας 3: Προσδόκιμο ζωής κοόρτης και περιόδου για άνδρες ηλικίας 0 έτους.....	48
Πίνακας 4: Προσδόκιμο ζωής κοόρτης και περιόδου για άνδρες ηλικίας 65 ετών.....	49

Κεφάλαιο 1^ο: Θνησιμότητα: ορισμοί και τρόποι μέτρησης

1.1. Θνησιμότητα: βασικοί ορισμοί και δείκτες

1.1.1. Ορισμοί

Η θνησιμότητα ή ρυθμός θνησιμότητας είναι μέτρο του αριθμού των θανάτων, είτε γενικά, είτε λόγω συγκεκριμένης αιτίας, σε ένα συγκεκριμένο πληθυσμό, ως προς το μέγεθος του πληθυσμού, ανά μονάδα του χρόνου. Κατά κανόνα, η μονάδα μέτρησης της θνησιμότητας είναι αριθμός θανάτων ανά 1.000 άτομα ανά έτος (Porta, 2014).

Η θνησιμότητα διαφέρει ανά ηλικία, φύλο και βάσει άλλων χαρακτηριστικών που σχετίζονται με την κοινωνία, οικονομία, βιολογία, περιβάλλον κ.α.· δηλαδή την οικογενειακή κατάσταση, το βιοτικό επίπεδο, την προσβασιμότητα σε ιατροφαρμακευτική περίθαλψη, τη διατροφή, τη φυλή, τις κλιματολογικές συνθήκες, κ.α.

Η μέτρηση της θνησιμότητας είναι απαραίτητο βήμα για την εκπόνηση δημογραφικών ερευνών, όπου αναλύονται θέματα θνησιμότητας, γεννητικότητας, περιλαμβάνονται κατασκευές πινάκων επιβίωσης κ.α. Επιπλέον, χρησιμοποιείται για έρευνες βιοστατιστικής και επιδημιολογίας καθώς και σε κλάδους όπως ο ασφαλιστικός, η φαρμακοβιομηχανία κ.α. (Κωστάκη, 2022).

1.1.2. Δείκτες Μέτρησης Θνησιμότητας

Αδρός Δείκτης Θανάτων

Σύμφωνα με τον ορισμό που βρίσκουμε στη Eurostat ο αδρός δείκτης θανάτων είναι η αναλογία του αριθμού των θανάτων κατά τη διάρκεια του έτους προς τον μέσο πληθυσμό του ίδιου έτους: η αξία εκφράζεται ανά 1000 κατοίκους (Eurostat).

Τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να τον δούμε να εκφράζεται σύμφωνα με τον τύπο:

$$CRD = \frac{\text{Σύνολικοί θάνατοι}}{\text{Πληθυσμός}} \cdot 1000 = \left(\frac{\sum_x m_x \cdot P_x}{\sum_x P_x} \right), \text{ όπου } m_x \text{ το ποσοστό θνησιμότητας}$$

ανάλογα με την ηλικία στην ηλικία x και P_x πληθυσμός στην ηλικία x .

Ο κίνδυνος θνησιμότητας είναι υψηλότερος στα βρέφη και τα μικρά παιδιά, καθώς και στα άτομα μεγαλύτερης ηλικίας. Συνεπώς, είναι πιθανό ότι το CDR θα είναι υψηλότερο σε γερασμένους πληθυσμούς, αφού ο κίνδυνος θανάτου σε ηλικίες άνω των 50-55 είναι αρκετά μεγάλος και ο πληθυσμός αποτελείται από υψηλά ποσοστά ατόμων τέτοιων ηλικιών. Αυτό ισχύει επίσης, αλλά σε μικρότερη κλίμακα, για πληθυσμούς με πολύ υψηλά ποσοστά γεννήσεων, οπότε ένα μεγάλο κλάσμα νέων ατόμων ηλικίας κάτω των πέντε ετών μπορεί να αντιμετωπίσουν υψηλό κίνδυνο θανάτου (Queiroz, 2018).

Ειδικό κατά ηλικία δείκτης θνησιμότητας

Οι ειδικοί δείκτες θνησιμότητας εκφράζουν την αναλογία των θανάτων που συμβαίνουν στη διάρκεια ενός ημερολογιακού έτους σε 1000 άτομα του πληθυσμού ηλικίας x έως $x + 5$ ετών. Συνήθως υπολογίζονται για κάθε φύλο ξεχωριστά.

$$m_x = \frac{D_x}{P_x} \cdot 1000$$

Οι δείκτες αυτοί εξετάζουν θνησιμότητα κατά ηλικία και, συνεπώς, δεν επηρεάζονται από την ηλικιακή δομή ενός πληθυσμού, όπως συμβαίνει με τον CDR. Επιπλέον είναι δυνατόν να υπολογιστούν ξεχωριστά κατά αιτία θανάτου, όπως περιγράφεται παρακάτω.

Για κάθε ηλικία και αιτία θανάτου υπολογίζεται ένας ειδικός δείκτης θνησιμότητας ως ο λόγος των θανόντων ηλικίας x από την αιτία j , που παρατηρήθηκαν σε ένα ημερολογιακό έτος, προς τον πληθυσμό της ίδιας ηλικίας στο μέσο του έτους αυτού, επί 100.000.

$$m_{x,j} = \frac{D_{x,j}}{P_x} \cdot 100000$$

Τέλος, η βρεφική θνησιμότητα συνήθως υπολογίζεται βάσει του δείκτη βρεφικής θνησιμότητας IMR, ο οποίος σχετίζει θανάτους βρεφών που καταγράφηκαν μέσα σε ένα ημερολογιακό έτος με τις γεννήσεις του έτους αυτού.

Ο θάνατος εμβρύου ή αλλιώς γέννηση νεκρού, ορίζεται ως η γέννηση νεογνού το οποίο δεν ανέπνευσε κατά την έξοδό του από την κοιλιά της μητέρας του, ούτε έδειξε άλλα σημεία ζωής (όπως καρδιακό κτύπο ή έκδηλη κίνηση των ελεγχόμενων μυών) διότι επήλθε θάνατος του εμβρύου μετά από κύηση 28 πλήρων εβδομάδων και άνω, πριν από την πλήρη έξοδο και τον αποχωρισμό του από τη μητέρα. Ο όρος βρεφικός θάνατος

αναφέρεται στο θάνατο που επέρχεται σε ένα βρέφος πριν συμπληρώσει το πρώτο έτος της ζωής του.

$$IMR = \frac{D_0}{B} \cdot 1000$$

Πίνακες Επιβίωσης

Ένα άλλο ευρέως χρησιμοποιούμενο μέτρο θνησιμότητας είναι οι πίνακες επιβίωσης. Η δημιουργία πινάκων επιβίωσης είναι ιδιαίτερος σημαντική στην αναλογιστική επιστήμη, τη βιολογία και τη δημογραφία. Αναφέρεται στην επιβίωση ανθρώπων από έναν συγκεκριμένο πληθυσμό. Συνεπώς από τους πίνακες επιβίωσης θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν δεδομένα ώστε για να γίνουν προβλέψεις σχετικά με τα δημογραφικά στοιχεία διαφορετικών πληθυσμιακών ομάδων. Ένας κλάδος στον οποίο τα δεδομένα αυτά θα ήταν πολύ χρήσιμα είναι εκείνος της ασφάλισης, προκειμένου να τιμολογηθούν τα ασφαλιστικά προϊόντα και να διασφαλιστεί η φερεγγυότητα των ασφαλιστικών εταιρειών μέσω επαρκών αποθεματικών. Οπότε το αναλογιστικό τμήμα θα πρέπει να δημιουργήσει μαθηματικά μοντέλα ώστε να κάνει προβλέψεις για μελλοντικά ασφαλιστικά συμβάντα (θάνατος, ασθένεια και αναπηρία). Αυτό το κάνουν μελετώντας τη συχνότητα αυτών των γεγονότων στο πρόσφατο παρελθόν και μερικές φορές αναπτύσσοντας προσδοκίες για το πώς αυτά τα γεγονότα του παρελθόντος θα αλλάξουν με την πάροδο του χρόνου και εξάγοντας αναμενόμενα ποσοστά τέτοιων γεγονότων στο μέλλον, συνήθως με βάση την ηλικία ή άλλα σχετικά χαρακτηριστικά του πληθυσμού. Πιο αναλυτικά, ένας αναλογιστής συγκρίνει τα άτομα που κινδυνεύουν να πεθάνουν και τα άτομα που έχουν ήδη πεθάνει ώστε να καταλήξει σε μια πιθανότητα θανάτου για ένα άτομο σε κάθε ηλικία (Pavlov and Mihova, 2018).

1.2. Πίνακες επιβίωσης: είδη και υποθέσεις

Πλήρεις και συνεπτυγμένοι πίνακες επιβίωσης

Οι πίνακες επιβίωσης διαχωρίζονται, ανάλογα με το μήκος του διαστήματος ηλικίας στο οποίο παρουσιάζονται τα δεδομένα σε δύο κατηγορίες: τους πλήρεις, όπου υπάρχουν δεδομένα για κάθε έτος ηλικίας και τους συνεπτυγμένους, όπου συνήθως περιέχονται δεδομένα ανά ηλικιακά μεσοδιαστήματα 5 ή 10 ετών, εξαιρώντας την ηλικία 0, λόγω της ιδιαιτερότητάς της (Agiar, Heron, Xu, 2016).

Πίνακες επιβίωσης γενεάς και περιόδου

Η κατασκευή ενός πίνακα επιβίωσης είναι χρήσιμο εργαλείο όταν θέλουμε να μετρήσουμε τη θνησιμότητα ενός πληθυσμού. Μέσω του πίνακα αυτού δίνεται η δυνατότητα να μελετηθεί η ειδική θνησιμότητα ανά ηλικία (Κωστάκη, 2022).

Ο σημαντικότερος σκοπός ενός πίνακα επιβίωσης είναι να μελετήσει πώς ο κίνδυνος του θανάτου και η γονιμότητα μεταβάλλεται με τα χρόνια. Δηλαδή, υπολογίζει τον αριθμό των ατόμων οι οποίοι έκαναν είσοδο σε μία συγκεκριμένη περίοδο και τον αριθμό των ατόμων που πέθαναν καθώς και τον αριθμό των απογόνων που προέκυψαν κατά την περίοδο που διεξάγεται η μελέτη, ώστε να εξεταστεί με ορθά στοιχεία η θνησιμότητα και η γεννητικότητα.

Υπάρχουν δύο ομάδες πινάκων επιβίωσης: ο πίνακας επιβίωσης περιόδου και ο πίνακας επιβίωσης κοόρτης (ή γενεάς). Στην πρώτη περίπτωση, ο υπολογισμός γίνεται βάσει των θανάτων κατά ηλικιακή ομάδα μιας περιόδου. Έτσι τα στοιχεία αναφέρονται σε ένα συγκεκριμένο έτος. Στη δεύτερη κατηγορία έχουμε τη μελέτη εκείνων των ατόμων όπου έχουν γεννηθεί συγκεκριμένη χρονική περίοδο, για παράδειγμα ένα έτος. Συνεπώς η διαφορά είναι ότι στη μία περίπτωση στο δείγμα υπάρχει κοινό όλων των ηλικιών ενώ στη δεύτερη όχι (Salguero-Gomez and Gamelon, 2021).

Μια επιπλέον διαφορά μεταξύ των δύο αυτών κατηγοριών είναι η δυσκολία κατασκευής τους. Στις κοόρτες ομάδες η κατασκευή πίνακα επιβίωσης είναι πιο δύσκολη καθώς υπάρχει έλλειψη δεδομένων, αφού θα πρέπει να μελετάται αυτό το σύνολο ατόμων από τη γέννησή τους μέχρι την εξαφάνιση της γενεάς, οπότε συνεπάγονται πολλά χρόνια παρατήρησης για τη συλλογή των στοιχείων και για την εξαγωγή εκτιμήσεων. Από την άλλη, έχουμε τους πίνακες επιβίωσης περιόδου οι οποίοι δεν έχουν ομοιογένεια, με την έννοια ότι τα υπό παρατήρηση άτομα προέρχονται από διαφορετικές γενεές, οπότε η θνησιμότητά τους επηρεάζεται από τα στοιχεία της κάθε μίας γενεάς στην οποία ανήκουν και τις συνθήκες (υγείας, διαβίωσης κλπ.) που την χαρακτηρίζουν. Συνεπώς, μπορούμε να καταλήξουμε στο ότι η εικόνα που μας παρέχεται από τον πίνακα επιβίωσης περιόδου βασίζεται σε υποθέσεις ενώ το τι πραγματικά ισχύει το βλέπουμε μέσα από τον πίνακα επιβίωσης γενεάς.

Το προσδόκιμο ζωής είναι το πιο συνηθισμένο στατιστικό μέτρο της μέσης υπολειπόμενης ζωής ενός ατόμου, δεδομένης της τρέχουσας ηλικίας, του έτους γέννησης, του φύλου και άλλων δημογραφικών στοιχείων και κοινωνικοοικονομικών παραγόντων, συμπεριλαμβανομένου της εκπαίδευσης, του εισοδήματος και της εργασίας.

Είναι ιδιαιτέρως σημαντικό να γνωρίζουμε και να εφαρμόζουμε την καλύτερη δυνατή εκτίμηση του προσδόκιμου ζωής σε πολλούς τομείς της δημόσιας πολιτικής, αλλά η εκτίμηση αυτή είναι ζωτικής σημασίας όταν αναφερόμαστε σε ζητήματα που αφορούν το συνταξιοδοτικό σύστημα τόσο στο δημόσιο όσο και στον ιδιωτικό τομέα. Οι υπεύθυνοι χάραξης πολιτικής και οι διαχειριστές του ιδιωτικού τομέα οφείλουν να γνωρίζουν το μέσο όρο των ετών που αναμένεται να ζήσει ένα άτομο και πώς αυτή η εκτίμηση θα μεταβληθεί σε τις επόμενες δεκαετίες. Συγκεκριμένα για το συνταξιοδοτικό, η εκτίμηση του προσδόκιμου ζωής που απομένει είναι υψηλής σημασίας για τον καθορισμό της αρχικής παροχής ή για την τιμολόγηση του εισοδήματος συνταξιοδότησης προϊόντων συνταξιοδότησης. Παρατηρείται ότι με τη μακροχρόνια μείωση των ποσοστών θνησιμότητας ανά ηλικία, η μακροπρόθεσμη αύξηση του προσδόκιμου ζωής σε μια συγκεκριμένη ηλικία είναι ολοένα και περισσότερο συνδεδεμένη με το δημόσιο δίκαιο και τις συμβάσεις του ιδιωτικού τομέα, συνεπώς η σωστή εκτίμηση είναι κρίσιμη για τον καθορισμό της οικονομικής βιωσιμότητας του δημόσιου και ιδιωτικού τομέα συστημάτων και για την ανάπτυξη νέων συνταξιοδοτικών προϊόντων.

Για την εκτίμηση του προσδόκιμου επιβίωσης υπάρχουν δύο μεθοδολογίες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν: η μία βασίζεται σε πίνακες ζωής περιόδου και η άλλη σε πίνακες ζωής κοόρτης.

Αρχικά για την πρώτη μέθοδο που στηρίζεται σε πίνακα επιβίωσης συμπεραίνουμε ότι είναι πιο απλή καθώς χρησιμοποιεί πληροφορίες για τη θνησιμότητα σε όλες τις ηλικίες για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο για την εκτίμηση των ποσοστών θνησιμότητας και από αυτά, το προσδόκιμο ζωής σε μια συγκεκριμένη ηλικία. Πιο αναλυτικά, οι πίνακες επιβίωσης αντιπροσωπεύουν τους κινδύνους θνησιμότητας που βιώνουν οι διάφορες κοόρτες ενός συνολικού πληθυσμού για μια σύντομη χρονική περίοδο, συνήθως όχι μεγαλύτερη των τριών ετών. Το αντίστοιχο προσδόκιμο ζωής περιόδου υποθέτει ότι τα ποσοστά θνησιμότητας που παρατηρούνται σε μια δεδομένη χρονική στιγμή ισχύουν καθ' όλη τη διάρκεια της υπόλοιπης ζωής ενός ατόμου, δηλαδή, παραμελούν κάθε μελλοντική αναμενόμενη αλλαγή στις προοπτικές μακροζωίας του πληθυσμού. Συνεπώς, σε αυτή τη περίπτωση το προσδόκιμο ζωής περιόδου είναι καθαρά ένα τεχνητά κατασκευασμένο μέτρο, που αναφέρεται σε μια υποθετική κοόρτη που ζει ολόκληρη τη ζωή της σύμφωνα με τα ποσοστά θνησιμότητας που παρατηρήθηκαν σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Η προσέγγιση αυτή είναι κατάλληλη αν θέλουμε να συγκρίνουμε τις τάσεις της θνησιμότητας ανά φύλο,

διαχρονικά, ανά κοινωνικοοικονομικό παράγοντα κινδύνου, εντός των περιφερειών μιας χώρας ή και με άλλες χώρες, αλλά στην πραγματικότητα δεν αντιπροσωπεύει τις προοπτικές μακροζωίας των ατόμων που γεννήθηκαν σε ένα δεδομένο έτος. Στην πραγματικότητα, τα άτομα γερνούν και πεθαίνουν ως μέλη κοόρτων που βιώνουν χρονικά μεταβαλλόμενα ποσοστά θνησιμότητας.

Με τη χρήση αυτής της προσέγγισης αγνοείται το παρελθόν και οι ενδεχόμενες μελλοντικές μεταβολές που μπορεί να υπάρξουν, δηλαδή το να μειωθεί το ποσοστό θνησιμότητας οπότε να έχουμε αύξηση του προσδόκιμου ζωής.

Από την άλλη, έχουμε τη δεύτερη μέθοδο που στηρίζεται σε δεδομένα πίνακα κοόρτης, η οποία ενσωματώνει τη πρόβλεψη που αναμένεται να έχει το ποσοστό θνησιμότητας για κάθε μία κοόρτη ανά φύλο, δηλαδή, οι πίνακες κοόρτης αντιπροσωπεύουν τη θνησιμότητα που βιώνει μια κοόρτη ατόμων που γεννήθηκαν κατά τη διάρκεια μιας σχετικά σύντομης χρονικής περιόδου (συνήθως ενός έτους) κατά τη διάρκεια ολόκληρης της διάρκειας της ζωής τους. Η μέθοδος αυτή μπορεί να χαρακτηριστεί ως φιλόδοξη και εξαρτάται από πολλές προϋποθέσεις, καθώς βασίζεται εξ ολοκλήρου στην παρατηρούμενη θνησιμότητα και στις προβλεπόμενες βελτιώσεις της μακροζωίας. Για το λόγο αυτό, οι περισσότερες χώρες αποφεύγουν να δημιουργήσουν επίσημους πίνακες κοόρτης (Ayuso, 2018).

Παρακάτω παρουσιάζονται οι σχέσεις για τον υπολογισμό του προσδόκιμου ζωής. Η πρώτη αφορά πλήρη περίοδο σε ηλικία x και έτος t , ενώ η δεύτερη πλήρη κοόρτη, αντίστοιχα.

$$\dot{e}_x^P(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\omega-x} n p_x^P(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\omega-x} \left(\prod_{j=0}^{n-1} (1 - q_{x+j}(t)) \right)$$

$$\dot{e}_x^C(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\omega-x} n p_x^C(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\omega-x} \left(\prod_{j=0}^{n-1} (1 - q_{x+j}(t+j)) \right)$$

Κατανοώντας τη σχέση μεταξύ προσδόκιμου ζωής περιόδου και κοόρτης, μπορούμε να ποσοτικοποιήσουμε τη διαφορά που προκύπτει, αναλύοντας πώς η σύνδεση αυτή μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου και να προσδιορίσουμε τους παράγοντες που αποτελούν κρίσιμα ζητήματα για τον σχεδιασμό και τη μεταρρύθμιση των συντάξεων.

Κεφάλαιο 2^ο: Μεθοδολογία κατασκευής πινάκων επιβίωσης

2.1. Πίνακες Επιβίωσης Περιόδου

2.1.1. Υποθέσεις

Ένας πίνακας περιόδου προσομοιάζει έναν πίνακα γενεάς υπό ορισμένες προϋποθέσεις:

- Η εξεταζόμενη γενεά αποτελείται από ένα σταθερό αριθμό γεννήσεων ο οποίος λαμβάνεται συνήθως ως μία δύναμη του δέκα (π.χ. 10^3 ή 10^4), και καλείται ρίζα του πίνακα. Η ρίζα του πίνακα συνιστά τον αρχικό πληθυσμό, δηλαδή τον πληθυσμό στην αρχή του πρώτου έτους ζωής (ηλικία: 0).
- Η γενεά είναι κλειστή σε μεταναστευτικές εισροές και εκροές.
- Το μέγεθος της αρχικής γενεάς μειώνεται σταδιακά με την πάροδο του χρόνου σύμφωνα με προκαθορισμένα και σταθερά ηλικιακά πρότυπα θνησιμότητας. Η ηλικία στην οποία έχουν εκλείψει όλα τα μέλη της γενεάς λέγεται οριακή ηλικία (και συμβολίζεται με το γράμμα ω).
- Οι θάνατοι που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια κάθε ηλικίας (με εξαίρεση τα δύο πρώτα έτη ζωής) ισοκατανέμονται.
- Ο συνολικός αριθμός των θανάτων του πληθυσμού του πίνακα επιβίωσης είναι ίσος με το συνολικό αριθμό γεννήσεων του πληθυσμού, δηλαδή ίσος με τη ρίζα του πίνακα.
- Η γενεά περιλαμβάνει μέλη ενός μόνο φύλου λόγω των μεγάλων διαφοροποιήσεων που υπάρχουν στα επίπεδα θνησιμότητας μεταξύ ανδρών και γυναικών (εκτιμώνται δηλαδή πίνακες επιβίωσης χωριστά για άνδρες και για γυναίκες).

2.1.2. Στοιχεία που χρειάζονται

Τα βασικά στοιχεία που απαιτούνται είναι ο αριθμός των θανάτων κατά ηλικία σε μια χρονική περίοδο και ο αριθμός των ατόμων επίσης κατά ηλικία που ζούσαν στα μέσα της ίδιας χρονιάς που μελετάται.

Η συλλογή πληροφοριών για τους θανάτους πραγματοποιείται γενικά από τα μητρώα θανάτων (ληξιαρχικές καταγραφές) ενώ τα στοιχεία του πληθυσμού λαμβάνονται από απογραφές πληθυσμού ή μητρώα πληθυσμού (Yusuf, Martins, Swanson, 2014).

2.1.3. Βήματα κατασκευής πίνακα επιβίωσης

Βιομετρικές συναρτήσεις

Για τη δημιουργία ενός συνεπτυγμένου πίνακα απαιτούνται γνώσεις τεχνικών δημογραφικής ανάλυσης, εμπειρία στην ανάλυση και επεξεργασία στοιχείων θνησιμότητας, γνώση των ιδιοτεροτήτων του εξεταζόμενου πληθυσμού και εξοικείωση με τεχνικές εξομάλυνσης και διόρθωσης δημογραφικών δεδομένων. Πριν τη μεθοδολογία, θα χρειαστεί να αναφερθούμε σε έννοιες και οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό των πινάκων επιβίωσης και σε πλήρεις και σε συνεπτυγμένους:

Πλήρης Πίνακας Επιβίωσης	Συνεπτυγμένος Πίνακας Επιβίωσης	
m_x	${}_n m_x$	κεντρικός δείκτης θνησιμότητας μεταξύ ηλικίας x και $x + n$
q_x	${}_n q_x$	πιθανότητα θανάτου στο διάστημα ηλικιών x έως $x + n$
p_x	${}_n p_x$	πιθανότητα επιβίωσης στο διάστημα ηλικιών x έως $x + n$
l_x	l_x	επιζώντες στην αρχή της ηλικίας x
d_x	${}_n d_x$	θάνατοι στη διάρκεια της ηλικίας x έως $x + n$
L_x	${}_n L_x$	επιζώντες στο μέσο της ηλικίας x έως $x + n$
T_x	T_x	συνολικός αριθμός επιζώντων από το μέσο της ηλικίας x
e_x	e_x	προσδοκώμενη ή αναμενόμενη ζωή στην ηλικία x

Πίνακας 1: Βιομετρικές συναρτήσεις πλήρων και συνεπτυγμένων πινάκων επιβίωσης

Παρακάτω μπορούμε να αναλύσουμε μερικές σχέσεις που συνδέουν τις παραπάνω συναρτήσεις. Αρχικά, μπορούμε να συνδέσουμε τους επιζώντες στην ηλικία x ή στο διάστημα $x + n$ με τον αριθμό των θανάτων, δηλαδή:

$l_{x+1} = l_x - d_x \Rightarrow d_x = l_x - l_{x+1}$ και $l_{x+n} = l_x - {}_n d_x \Rightarrow {}_n d_x = l_x - l_{x+n}$
 Έπειτα, βλέπουμε τις πιθανότητες επιβίωσης και θανάτου στην ηλικία x . Η αρχική μας σχέση είναι: $p_x + q_x = 1$. Η πιθανότητα θανάτου μπορεί και να γραφεί ως:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Οπότε και οι δύο πιθανότητες, επιβίωσης και θανάτου, στην ηλικία x είναι:

$$p_x = 1 - q_x = 1 - \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x - l_x + l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}$$

Αντίστοιχα για το διάστημα ηλικιών x ως $x + n$ είναι:

$${}_n p_x = 1 - {}_n q_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = \frac{{}_n d_x}{l_x}$$

Ο τύπος για τους επιζώντες στο μέσο της ηλικίας x έως $x + 1$ και x έως $x + n$ είναι:

$$L_x = l_x - a_x \cdot d_x = l_{x+1} + a_x \cdot d_x$$

$${}_n L_x = n \cdot l_x - {}_n a_x \cdot {}_n d_x = n \cdot l_{x+n} - {}_n a_x \cdot {}_n d_x$$

όπου a_x είναι ο μέσος αριθμός ανθρωποετών που έζησαν οι θανόντες d_x στο διάστημα x έως $x + 1$ και ${}_n a_x$ ο μέσος αριθμός ανθρωποετών που έζησαν οι θανόντες ${}_n d_x$ στο διάστημα x έως $x + n$. Ο υπολογισμός του L_x έχει μια ιδιαιτερότητα για τα πρώτα 2 έτη, με τις υποθέσεις ότι για $x = 0$ το 70% των θανάτων συμβαίνει στο πρώτο εξάμηνο και για $x = 1$ το ποσοστό είναι 60%, οπότε έχουμε:

$$L_0 = l_0 - 0,7 \cdot d_0 = 0,3 \cdot l_0 + 0,7 \cdot l_0 \text{ και } L_1 = l_1 - 0,6 \cdot d_1 = 0,4 \cdot l_1 + 0,6 \cdot l_2$$

Η εκτίμηση των L_x και ${}_n L_x$ για ηλικίες μεγαλύτερες των 2 ετών είναι:

$$L_x = l_x - \frac{1}{2} \cdot d_x = l_{x+1} + \frac{1}{2} \cdot d_x = \frac{1}{2} \cdot (l_x + l_{x+1})$$

$${}_nL_x = n \cdot l_x - \frac{n}{2} \cdot {}_nd_x = n \cdot l_{x+n} + \frac{n}{2} \cdot {}_nd_x = \frac{n}{2} \cdot (l_x + l_{x+n})$$

Για τον συνολικό αριθμό ανθρωποετών από το μέσο της ηλικίας x και άνω έχουμε γενικά:

$$T_x = L_x + L_{x+1} + \dots = \sum_x^{\infty} L_x$$

Και για τον υπολογισμό, έχουμε δύο βασικούς τύπους:

$$T_x = L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + \dots$$

$$T_{x+1} = L_{x+1} + L_{x+2} + L_{x+3} + \dots$$

$$T_x = L_x + T_{x+1} \Rightarrow L_x = T_x - T_{x+1}$$

και

$$T_x = \sum_x^{\infty} L_x$$

$$T_{x+n} = \sum_{x+n}^{\infty} L_x$$

$$T_x = {}_nL_x + T_{x+n} \Rightarrow {}_nL_x = T_x - T_{x+n}$$

Ο τύπος που έχουμε για την προσδοκόμενη ζωή του ατόμου είναι:

$$e_x = \frac{T_x}{L_x}$$

Κλασική Μεθοδολογία

Η μεθοδολογία που ακολουθείται περιγράφεται στα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1^ο: Υπολογισμός ειδικών κατά ηλικία δεικτών θνησιμότητας. Με βάση τα τρέχοντα ληξιαρχικά και πληθυσμιακά δεδομένα υπολογίζονται οι εμπειρικοί ειδικοί κατά ηλικία δείκτες θανάτου

$${}_n m_x = \frac{{}_n D_x}{{}_n P_x} \cdot 1000$$

όπου ${}_n D_x$ είναι ο ετήσιος αριθμός των θανόντων ηλικίας x έως $x + n$, και ${}_n P_x$ η εκτίμηση του πληθυσμού της ίδιας ομάδας ηλικιών στο μέσο του έτους αναφοράς.

Βήμα 2^ο: Μετατροπή των κεντρικών ειδικών κατά ηλικία δεικτών θνησιμότητας σε πιθανότητες θανάτου. Ένας τρόπος προσέγγισης, είναι να θεωρήσουμε ότι οι εμπειρικοί κεντρικοί δείκτες θανάτου στον πραγματικό πληθυσμό είναι ίσοι με τους αντίστοιχους του πληθυσμού στον πίνακα επιβίωσης, δηλαδή ${}_n m_x \approx {}_n \dot{m}_x$. Θεωρώντας ότι ο πληθυσμός είναι κλειστός και ότι στη διάρκεια του διαστήματος $(x, x + n)$ οι θάνατοι ισοκατανέμονται, πριν από $n/2$ έτη οι επιζώντες του κλιμακίου θα βρίσκονταν στην αρχή της ηλικίας x θα ήταν ${}_n P_x + \frac{n}{2} \cdot {}_n D_x$. Από τα άτομα αυτά, σε διάστημα n ετών (δηλαδή από την αρχή της ηλικίας x ως την αρχή της ηλικίας $x + n$) πέθαναν $n \cdot {}_n D_x$ άτομα, και κατά συνέπεια, η εμπειρική πιθανότητα θανάτου (${}_n \hat{q}_x$) θα είναι:

$${}_n \hat{q}_x = \frac{n \cdot {}_n D_x}{{}_n P_x + \frac{n}{2} \cdot {}_n D_x} = \frac{n \cdot {}_n D_x}{1 + \frac{n}{2} \cdot {}_n m_x} = \frac{2 \cdot n \cdot {}_n m_x}{1 + n \cdot {}_n m_x}$$

Η πιθανότητα \hat{q}_0 εκτιμάται συνήθως βάσει του γνωστού δείκτη βρεφικής θνησιμότητας (λόγος μεταξύ βρεφικών θανάτων και γεννήσεων ζώντων μιας τριετίας ή πενταετίας). Σε ό,τι αφορά την τελευταία 4 ανοικτή ομάδα ηλικιών (85+) τίθεται ${}_{\infty} q_{85} = 1$, δηλαδή η πιθανότητα θανάτου σηματοδοτεί βέβαιο γεγονός.

Βήμα 3^ο: Εξομάλυνση των εμπειρικών πιθανοτήτων θανάτου. Οι εμπειρικές πιθανότητες ${}_n \hat{q}_x$ εξομαλύνονται στα διαστήματα ηλικιών που κρίνεται ότι αυτό είναι απαραίτητο. Επειδή πρόκειται για ομάδες ηλικιών, η διάγνωση των σφαλμάτων είναι δυσχερής, η δε εξέλιξη των ${}_n \hat{q}_x$ δεν είναι πάντα δυνατό να εκφραστεί με μαθηματικό τρόπο. Για το λόγο αυτό συνήθως εφαρμόζονται τεχνικές κινητών μέσων, γραφικές μέθοδοι και προσεγγίσεις μέσω προτύπων πινάκων επιβίωσης και ποικίλα μαθηματικά πρότυπα.

Βήμα 4^ο: Εκτίμηση των συναρτήσεων του πίνακα. Οι διορθωμένες πιθανότητες q_x αποτελούν το στοιχείο εισόδου βάσει του οποίου καταρτίζεται ο συνεπτυγμένος πίνακας επιβίωσης. Επιλέγεται το μέγεθος της ρίζας του πίνακα (l_0) και οι συναρτήσεις του πίνακα υπολογίζονται εφαρμόζοντας τις αλυσωτές σχέσεις. Η εκτίμηση του συνολικού αριθμού ανθρωπο-ετών για την τελευταία ανοικτή ομάδα ηλικιών (85+) βασίζεται στην υπόθεση ότι $L_{85} = \frac{l_{85}}{m_{85+}}$.

Μέθοδος Greville

Ένας άλλος τρόπος για να κατασκευαστεί ένας συνοπτικός πίνακας επιβίωσης είναι με τη μέθοδο Greville. Αυτό η μέθοδος χρησιμοποιεί έναν πιο περίπλοκο τύπο για τη μετατροπή τιμών ${}_n m_x$ σε ${}_n q_x$, ο οποίος είναι:

$${}_n q_x = \frac{{}_n m_x}{\frac{1}{n} + \left[{}_n m_x \left(0.5 + \frac{n}{12} \right) \cdot ({}_n m_x - 0.95) \right]}$$

όπου n είναι το πλάτος του διαστήματος ηλικίας. Αυτός ο τύπος βασίζεται στην υπόθεση ότι το πρότυπο θνησιμότητας ενός πληθυσμού ακολουθεί το μοντέλο Gompertz.

Για λόγους επεξήγησης, η τιμή των ${}_5 m_5$ έχει μετατραπεί σε ${}_5 q_5$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Greville όπως φαίνεται παρακάτω:

$${}_5 q_5 = \frac{0.00011}{\frac{1}{5} + \left[0.00011 \left(0.5 + \frac{5}{12} \right) \cdot (0.00011 - 0.95) \right]} = 0.00055$$

Στη συνέχεια εφαρμόζονται οι πιθανότητες θανάτου χρησιμοποιούνται όπως περιγράφεται παραπάνω ώστε να υπολογιστούν οι συναρτήσεις του πίνακα επιβίωσης.

Μέθοδος Fergany

Ένας άλλος τρόπος κατασκευής συνεπτυγμένου πίνακα είναι κατά τον Fergany (1971) είναι να μετατρέψουμε τις τιμές ${}_n m_x$ σε ${}_n q_x$. Δηλαδή:

$${}_n q_x = 1 - e^{(-n \cdot {}_n m_x)}$$

όπου εδώ το n είναι το πλάτος του διαστήματος ηλικίας και παίρνουμε πάλι ότι για ${}_5m_5$:

$${}_5q_5 = 1 - e^{(-5 \cdot 0.00011)} = 0.00055$$

Και οι δύο αυτές μέθοδοι δίνουν μία εκτίμηση του ${}_5q_5$ ότι ισούται με 0.00055. Αν συγκρίνουμε τις δύο αυτές μεθόδους φαίνεται να μη διαφέρουν σημαντικά αφού μας δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα καθώς και το προσδόκιμο ζωής ήταν στην ουσία πρακτικά πανομοιότυπο.

2.2 Πίνακες Επιβίωσης Κόορτης

Οι τάσεις θνησιμότητας μιας χώρας έχουν άμεση σχέση με το πώς διαμορφώνεται το προσδόκιμο ζωής κατά τη γέννηση με την πάροδο του χρόνου. Για ένα συγκεκριμένο έτος, η περίοδος προσδόκιμου ζωής αντικατοπτρίζει την αναμενόμενη διάρκεια ζωής ενός νεογέννητου ατόμου, εάν τα ποσοστά θνησιμότητας κατά ηλικία παραμένουν σταθερά για πολλά χρόνια στο μέλλον. Σχετίζεται δηλαδή, με τη συμπεριφορά πολλών διαφορετικών γεννήσεων κοόρτων ομάδων κατά τη διάρκεια ενός ημερολογιακού έτους. Ωστόσο, η κατάσταση αυτή θεωρείται υποθετική καθώς οι πραγματικοί άνθρωποι δεν ζουν έτσι, αφού είναι μέλη μόνο μιας κοόρτης ομάδας και οι περισσότεροι από αυτούς επιβιώνουν για πολλά χρόνια. Όταν η θνησιμότητα αλλάζει με την πάροδο των χρόνων, τότε το προσδόκιμο ζωής δίνει μια στρεβλή οπτική για τη μακροζωία σε κοόρτες γέννησης, δηλαδή, κοόρτη προσδόκιμου ζωής (Keilman, 2019).

2.3 Μελέτες και μοντέλα για μοντέλα θνησιμότητας

Στο παρόν υποκεφάλαιο θα αναφερθούμε σε μερικές μεθόδους και σε μοντέλα που έχουν κατασκευαστεί για τη πρόβλεψη της θνησιμότητας.

Μελέτη του Keilman (2019)

Μελέτη που διεξήχθη με δεδομένα από την HMD (Βάση δεδομένων ανθρώπινης θνησιμότητας) από 10 χώρες (Δανία, Αγγλία και Ουαλία, Φινλανδία, Γαλλία, Ισλανδία, Ιταλία, Ολλανδία, Νορβηγία, Σουηδία και Ελβετία) είχε ως στόχο να ερευνήσει τη μετατόπιση που υφίσταται η θνησιμότητα, αν δηλαδή μειώνεται ή αυξάνεται σε σχέση

με τη προσδοκώμενη ζωή. Για την πραγματοποίηση της έρευνας αυτής, η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε ήταν να αναλυθεί η ηλικία από την κατανομή θνησιμότητας, όπως αυτή υπολογίζεται από τον πίνακα επιβίωσης (d_x). Οπότε επικεντρώνεται στη θνησιμότητα ενηλίκων και ηλικιωμένων ατόμων και αγνοείται η παιδική θνησιμότητα και γενικότερα η θνησιμότητα των νεότερων ατόμων (κάτω των 30 ετών). Τα δεδομένα αντλήθηκαν από πίνακες επιβίωσης περιόδου και πίνακες επιβίωσης κοόρτης (επεκτείνονται μέχρι τα 110 έτη) τόσο για άνδρες και όσο και για γυναίκες. Επιπλέον, οι πιθανότητες θανάτου για ηλικίες άνω των 90 ετών για κοόρτες που γεννήθηκαν το διάστημα 1904-1923 βασίζονται σε παρεκβολή ποσοστών θνησιμότητας χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Kannisto (Wilmoth et al. 2017).

	Period life tables	Cohort life tables
Denmark	1835–2014	1835–1923
England and Wales	1841–2013	1841–1922
Finland	1878–2015	1878–1924
France	1816–2015	1816–1924
Iceland	1838–2013	1838–1922
Italy	1872–2014	1872–1923
Netherlands	1850–2014	1850–1923
Norway	1846–2014	1846–1923
Sweden	1751–2014	1751–1923
Switzerland	1876–2014	1876–1923

Πηγή: Keilman, 2019

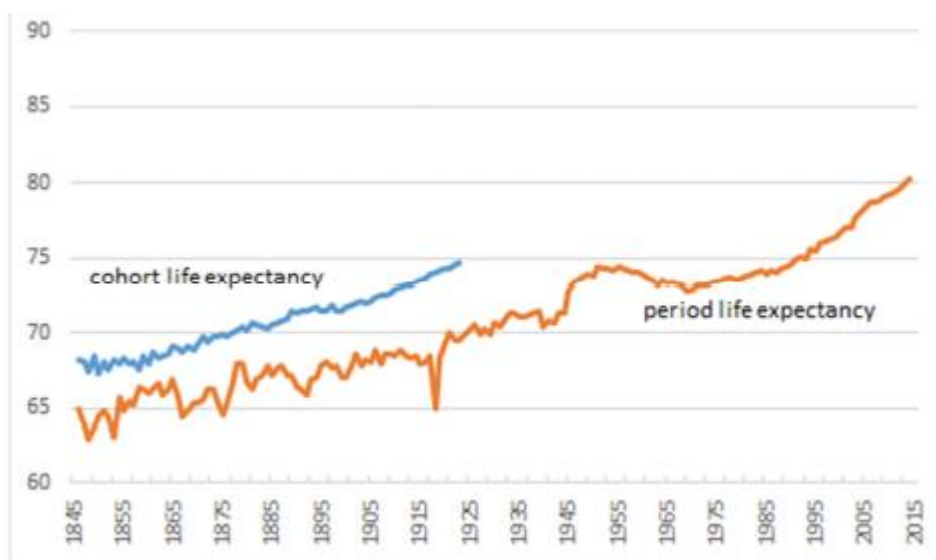
Στα παρακάτω γραφήματα βλέπουμε τα αποτελέσματα της σύγκρισης μεταξύ περιόδου και κοόρτης για τη Νορβηγία. Με πορτοκαλί χρώμα έχουμε την αναμενόμενη ζωή περιόδου και με μπλε της γενεάς και για τα δύο φύλα. Αναφέρεται ότι ο υπολογισμός του προσδόκιμου ζωής έγινε βάσει του μέσου όρου της κατανομής της ηλικίας θανάτου στις ηλικίες 30 έως 110.

Αρχική υπόθεση για την μελέτη αυτή ήταν ότι η αναμενόμενη ζωή κοόρτης για γυναίκες και άνδρες είναι γραμμικές συναρτήσεις του χρόνου για άνδρες και γυναίκες που γεννήθηκαν την περίοδο 1890-1923. Σε μία περίπτωση η σύγκριση έγινε με κάθε γενέθλια κοόρτη με το ημερολογιακό έτος κατά το οποίο η κοόρτη αυτή θα έφτανε σε ηλικία ίση με τη δική της ενώ σε άλλη περίπτωση έγινε το αντίστροφο, η ανάλυση γινόταν προς τα πίσω, δηλαδή με τον αριθμό των ετών που χρειάζεται μια αναμενόμενη ζωή περιόδου να φτάσει την αναμενόμενη ζωή κοόρτης.

Η μελέτη κατέληξε στο συμπέρασμα ότι όταν η θνησιμότητα κατά ηλικία μειώνεται, η προσδοκώμενη ζωή μπορεί να αυξηθεί ταχύτερα από ότι συμβαίνει στους πίνακες επιβίωσης περιόδου. Συγκεκριμένα, για τη χώρα της Νορβηγίας υπήρξε και μια

στασιμότητα για τη προσδοκώμενη ζωή περιόδου, αναφορικά με τους άνδρες κατά τις δεκαετίες του 50 και 60. Επίσης, τη μεγαλύτερη ακρίβεια στα αποτελέσματα τη βρίσκουμε στη γενεά, μιας και τα άτομα του δείγματος παρακολουθούνται μέχρι να πεθάνουν (Keilman, 2019).

α) άνδρες



β) γυναίκες



Πηγή: Keilman, 2019

Όπως έχει ήδη αναφερθεί προηγουμένως, οι περισσότερες μελέτες έχουν βασιστεί σε δεδομένα πινάκων επιβίωσης περιόδου αντί κούρτης, το οποίο αντικατοπτρίζει την υποθετική θνησιμότητα και όχι τη θνησιμότητα που πραγματικά βιώνει μια κούρτη. Η

δυσκολία υπάρχει λόγω των πολλών δεδομένων που χρειάζονται, αφού για να γίνει η συλλογή δεδομένων θνησιμότητας σε μια πλήρη κοόρτη θα πρέπει να περιμένουμε πάνω από έναν αιώνα, και η «νεότερη» κοόρτη με ολοκληρωμένη θνησιμότητα ενδέχεται να παρέχει ξεπερασμένες πληροφορίες (Rizzi et al. 2021).

Μελέτη των Rizzi et al. (2021): The Penalized Composite Link Model (PCLM)

Σύμφωνα με τους Rizzi et al. (2021) παρουσιάζεται μια μελέτη η οποία εισάγει μια νέα μέθοδο για την πρόβλεψη της θνησιμότητας της κοόρτης και την αναμενόμενη ζωή κοόρτης που δεν έχει εκλείψει. Σκοπός της έρευνας είναι να ολοκληρωθεί το προφίλ θνησιμότητας κοόρτων που έχουν γεννηθεί το 1960. Η μέθοδος που ακολουθείται για την εν λόγω έρευνα είναι η χρήση του μοντέλου Penalized Composite Link Model (PCLM). Για τα άτομα που έλαβαν μέρος στη μελέτη κατασκευάστηκαν πίνακες επιβίωσης κοόρτης χρησιμοποιώντας δεδομένα θνησιμότητας κοόρτης από το HMD (Human Mortality Database, 2019). Στη συνέχεια έγιναν ορισμένες παραδοχές: α) οι θάνατοι d_i σε ένα πίνακα επιβίωσης κοόρτης ακολουθούν κατανομή Poisson β) η ομαλότητα της προβλεπόμενης ηλικίας θανάτου ακολουθεί κατανομή Gamma και γ) δεν υπάρχουν θάνατοι μετά την ηλικία των 120 ετών. Ως εκ τούτου, το PCLM ανακατανέμει ομαλά τους εναπομείναντες θανάτους μετά την τελευταία ηλικία θανάτου που παρατηρείται. Στην συγκεκριμένη εφαρμογή, μπορεί να προβλεφθεί με το απλό PCLM η κατανομή ηλικίας θανάτου των κοόρτων που γεννήθηκαν έως το 1935, δηλαδή των κοόρτων όπου οι τελευταίες ηλικίες θανάτου που παρατηρήθηκαν αντιστοιχούν σε περίπου 30 έτη πριν από τη φυσική εξαφάνιση των κοόρτων. Για τις νεότερες κοόρτες, όπου η μέση ηλικία κατά το θάνατο απέχει πολύ από την παρατήρηση, απαιτούνται επιπλέον παραδοχές. Στην παρούσα μελέτη, η μέση ηλικία θανάτου με τον αντίστοιχο αριθμό των θανόντων εκτιμώνται με ένα μοντέλο LLT (linear trend model). Αυτό λειτουργεί με ακρίβεια για τους πληθυσμούς που μελετήθηκαν, όταν τόσο η μέση ηλικία θανάτου όσο και ο αριθμός των θανάτων παρουσιάζουν ένα γραμμικά αυξανόμενο μοτίβο κατά τη διάρκεια των ημερολογιακών ετών. Το μοντέλο PCLM καταφέρνει να προβλέψει τις κατανομές της ηλικίας θανάτου μέχρι τη γενέθλια κοόρτη του 1960, δηλαδή τις κοόρτες στις οποίες η τελευταία ηλικία θανάτου που παρατηρήθηκε αντιστοιχεί σε περίπου 50 χρόνια πριν από τη φυσική εξαφάνιση των κοόρτων και επομένως δεν έχουν ακόμη φτάσει στην ηλικία συνταξιοδότησης. Η χρήση του μοντέλου αυτού συστήνεται για την πρόβλεψη θνησιμότητας πληθυσμών μιας χώρας ή και υποομάδες, όπως για παράδειγμα εκείνες

των ασφαλισμένων. Ένα εύρημα της μελέτης αυτής ήταν ότι η χρήση της μεθόδου θα μπορούσε να εμφανίσει περιορισμούς όταν το πρότυπο θνησιμότητας με την πάροδο του χρόνου δεν είναι σχετικά σταθερό. Για παράδειγμα, εάν η κατανομή της ηλικίας θανάτου για μια συγκεκριμένη κοόρτη αποκλίνει από το μοτίβο των γειτονικών κοόρτων, οι προβλεπόμενοι θάνατοι και η μέση ηλικία θανάτου της συγκεκριμένης κοόρτης μπορεί να είναι ανακριβείς. Επιπλέον, αναφέρεται ότι οι περισσότερες προβλέψεις θνησιμότητας βασίζονται στη θνησιμότητα περιόδου, παρά την απαίτηση από δημόσιους και ιδιωτικούς φορείς να λαμβάνονται προβλέψεις για πραγματικές κοόρτες και όχι για συνθετικούς πληθυσμούς.

Μελέτη των Booth και Tickle (2008)

Το θέμα της αναζήτησης καταλληλότερου μοντέλου για τη θνησιμότητα λόγω γήρατος απασχόλησε πριν από μερικές δεκαετίες αρκετούς αναλογιστές και δημογράφους. Στην ανάγκη για ακριβείς προβλέψεις θνησιμότητας, έχουν αναπτυχθεί διάφορα μοντέλα. Οι Booth και Tickle (2008) κατηγοριοποιούν τις σχετικές μεθοδολογίες σε τρεις μεγάλες ομάδες: εκείνες που αντανακλούν την έννοια της «προσδοκίας» (η πρόβλεψη βασίζεται στη γνώμη ενός εμπειρογνώμονα), εκείνες που βασίζονται στην έννοια της «εξήγησης» (περιλαμβάνουν τη χρήση ειδικών δεδομένων για την αιτία θανάτου και δομικών ή επιδημιολογικών μοντέλων) και, τέλος, εκείνες που χρησιμοποιούν τις αρχές της «παρέκτασης» (υποθέτουν ότι οι τάσεις θνησιμότητας του παρελθόντος θα συνεχιστούν στο μέλλον). Ο τύπος πρόβλεψης «αναμονής» θα μπορούσε να οδηγήσει, περιστασιακά, σε σφάλματα υποκειμενικότητας ή μεροληψίας, ενώ τα μοντέλα «εξήγησης» περιορίζονται σε βραχυπρόθεσμες προβλέψεις. Στην πραγματικότητα, οι μέθοδοι παρέκτασης θεωρείται ότι παρέχουν πιο ισχυρά ευρήματα.

Μέθοδος Lee-Carter (1992)

Η πλειονότητα των «εξωστρεφών» μοντέλων βασίζεται στις παρατηρούμενες τάσεις των ηλικιακών προτύπων θνησιμότητας, υποθέτει τη συνέχιση αυτών των προτύπων και τα προεκτείνει στο μέλλον. Αυτού του είδους τα μοντέλα πρόβλεψης θεωρούνται πιο αντικειμενικά, ενώ είναι επίσης ευκολότερα στην εφαρμογή και πιο πιθανό να οδηγήσουν σε ακριβείς προβλέψεις. Η μέθοδος πρόβλεψης της εξωστρεφούς θνησιμότητας που αποτελεί σημείο αναφοράς είναι η μεθοδολογία πρόβλεψης της θνησιμότητας Lee-Carter (Lee και Carter 1992).

Το μοντέλο θνησιμότητας Lee-Carter για την ηλικιακή περίοδο βασίζεται στα καταγεγραμμένα ποσοστά θνησιμότητας ανά ηλικία ενός πληθυσμού κατά τη διάρκεια μιας ορισμένης χρονικής περιόδου, λαμβάνει υπόψη τη συνολική χρονική τάση, τα ηλικιακά πρότυπα θνησιμότητας και τις μεταβολές των προτύπων αυτών ανά ηλικία με την πάροδο του χρόνου. Το μοντέλο περιλαμβάνει έναν όρο σφάλματος για την αντιμετώπιση των επιδράσεων της ηλικιακής περιόδου που δεν καταγράφονται με άλλο τρόπο. Στη συνέχεια, η θνησιμότητα προβλέπεται με παρέκταση της συνολικής χρονικής τάσης με τη χρήση τυπικών διαδικασιών χρονοσειρών (Lee and Carter 1992). Μεταξύ των σαφών πλεονεκτημάτων της μεθοδολογίας Lee-Carter είναι ότι περιλαμβάνει ένα απλό στοχαστικό υπόδειγμα με μία μόνο χρονικά μεταβαλλόμενη παράμετρο, αποδίδει σχετικά καλά όταν οι παρελθούσες τάσεις ήταν γραμμικές και προβλέπει ένα μεταβαλλόμενο ηλικιακό πρότυπο θνησιμότητας (Booth and Tickle 2008). Η εξίσωση που περιγράφει τη παραπάνω μέθοδο χωρίς καμία παραλλαγή είναι η ακόλουθη:

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t}$$

όπου,

$m_{x,t}$: το ποσοστό θνησιμότητας ανάλογα την ηλικία για το διάστημα x στο έτος t

k_t : ο δείκτης θνησιμότητας στο έτος t

α_x : η μέση θνησιμότητα ανάλογα με την ηλικία

β_x : απόκλιση στη θνησιμότητα λόγω μεταβολών του δείκτη k_t

$\varepsilon_{x,t}$: τυχαίο σφάλμα

Οι περιορισμοί αυτοί επιβάλλονται ώστε να διασφαλιστεί η ταυτοποίηση του μοντέλου: $\sum_x \beta_x = 1$ and $\sum_t k_t = 0$. Έχοντας εκτιμήσει τις παραπάνω παραμέτρους, είναι δυνατό να προβλεφθούν μελλοντικά ποσοστά θνησιμότητας ανά ηλικία, με την προϋπόθεση ότι η παρατηρούμενη διαχρονική τάση ανά ηλικία παραμένει.

Μοντέλο Cairns-Blake-Dowd (CBD)

Έχουν προταθεί διάφορες επεκτάσεις και παραλλαγές της προαναφερθείσας μεθόδου για τη βελτίωση του βαθμού ακρίβειας της μεθοδολογίας Lee-Carter. Το μοντέλο Cairns-Blake-Dowd (CBD) (Cairns et al. 2006, Cairns et al. 2009) προτάθηκαν για την καλύτερη αποτύπωση της θνησιμότητας στις ηλικίες 55 ετών και άνω. Η μέθοδος CBD μοντελοποιεί το λογάριθμο των πιθανοτήτων θανάτου στις μεγαλύτερες ηλικίες ως

γραμμική ή τετραγωνική συνάρτηση της ηλικίας, αντιμετωπίζοντας έτσι τις παραμέτρους της τομής και της κλίσης μεταξύ των ετών ως στοχαστικές διαδικασίες (Villegas et al. 2018). Επιπλέον, για τη βελτίωση της απόδοσης πρόβλεψης του μοντέλου Lee-Carter, ιδίως όταν οι τάσεις θνησιμότητας στο παρελθόν ήταν μη γραμμικές, έχει προταθεί και εφαρμοστεί η συμπερίληψη μιας παραμέτρου κοόρτης (Renshaw and Haberman 2006, Cairns et al. 2009, Plat 2009, Cairns et al. 2016).

Το παραπάνω εκφράζεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\log\left(\frac{q_{x,t}}{1-q_{x,t}}\right) = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \varepsilon_{x,t}$$

όπου,

$q_{x,t}$: η πιθανότητα θανάτου στην ηλικία x το έτος t

$\log\left(\frac{q_{x,t}}{1-q_{x,t}}\right)$: logit πιθανότητας θανάτου

$k_t^{(1)}$: η παράμετρος περιόδου που υποδεικνύει το γενικό επίπεδο θνησιμότητας ανά έτος t

$k_t^{(2)}$: η παράμετρος περιόδου που δείχνει πώς η θνησιμότητα επηρεάζει κάθε ηλικία

\bar{x} : η μέση ηλικία του θεωρούμενου διαστήματος ηλικίας προσαρμογής

$\varepsilon_{x,t}$: δεν αντικατοπτρίζει συγκεκριμένες επιδράσεις αποτυπώνεται από το μοντέλο και αναμένεται να διανεμηθεί κανονικά, με μηδενικό μέσο όρο και σταθερή διακύμανση

Μέθοδος Panjer and Russo (1992) και Panjer and Tan (1995)

Μία μέθοδος είναι των Panjer and Russo και οι Panjer and Tan χρησιμοποίησαν ένα κυβικό πολυώνυμο για να υπολογίσουν την κατανομή των θανάτων για ηλικίες άνω των 100 ετών. Στο πρώτο στάδιο περιλαμβάνονται οι διαβαθμισμένες πιθανότητες θανάτου με συμβολισμό q_x^{grad} . Έπειτα στο δεύτερο στάδιο έχουμε το δεύτερο νόμο του Makeham ο οποίος προσαρμόστηκε στη διαβαθμισμένη θνησιμότητα ελαχιστοποιώντας τα σταθμισμένα τετράγωνα.

$$WLS = \sum_{x=x}^{99} E_x (\mu_x^{grad} - a - bx - cd^x)^2$$

υπό τον περιορισμό ότι $\mu_z^{grad} = -a - bz - cd^z$, όπου $\mu_z^{grad} = -\ln(1 - q_x^{grad})$ και z ισούται με 40 και 44 για άνδρες και γυναίκες αντίστοιχα. Στο τελευταίο στάδιο, η συνάρτηση θνησιμότητας για ηλικίες άνω των 99 ετών έχει τη μορφή:

$$q_{x+99}^{grad} = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Όπου $x \geq 99$. Οι παράμετροι της συνάρτησης μπορούν να προκύψουν από τα ακόλουθα όρια: $q_{99}^{poly} = q_{99}^{grad}$, $q_{99}^{rpol} = q_{99}^{rgrad}$, $q_{99}^{mpoly} = q_{99}^{mgrad}$, $q_{105}^{poly} = 1$.

Μέθοδος Heligman και Pollard (1980)

Επίσης, ένα άλλο μοντέλο για την περιγραφή της θνησιμότητας για ολόκληρο το διάστημα ζωής είναι των Heligman και Pollard όπου έχουν χρησιμοποιήσει 8 παραμέτρους. Η σχέση είναι η ακόλουθη:

$$\frac{q_x}{1-q_x} = A^{(x+B)^C} + D \exp(-E[\ln x - \ln F]^2) + GH^x,$$

όπου $A^{(x+B)^C}$, $D \exp(-E[\ln x - \ln F]^2)$ και GH^x αντιπροσωπεύουν την πρόωμη παιδική θνησιμότητα, την τυχαία θνησιμότητα και την θνησιμότητα από το γήρας αντίστοιχα. Αν και ο υπολογισμός των παραμέτρων είναι σχετικά εύκολος, το μοντέλο δεν είναι τόσο κατάλληλο για ανάλυση θνησιμότητας γήρατος.

Μέθοδος Coale-Kisker (1990)

Μια άλλη μέθοδος που έχει εφαρμοστεί ευρέως στα δεδομένα θνησιμότητας διαφόρων αναπτυγμένων χωρών είναι η Coale-Kisker. Η μέθοδος αυτή υποθέτει ότι τα ποσοστά θνησιμότητας αυξάνονται με μεταβαλλόμενο ρυθμό αντί για σταθερό ρυθμό. Ας υποθέσουμε ότι η παρέκταση Coale-Kisker αρχίζει στην ηλικία των 85 ετών και ορίζεται:

$$k(x) = k(x-1) - R, \quad x \geq 84,$$

Όπου $k(x) = \ln\left(\frac{m_x}{m_{x-1}}\right)$, R σταθερά. Επεκτείνοντας τη φόρμουλα μέχρι $x = 100$ και προσθέτοντας έχουμε:

$$k(85) + \dots + k(110) = 26k(84) - (1 + 2 + \dots + 26)R.$$

Και λύνοντας ως προς R παίρνουμε:

$$R = \frac{26k(84) + \ln(m_{84}) - \ln(m_{110})}{351}$$

Για τον προσδιορισμό του R , οι Coale και Kisker (1990) υπέθεσαν ότι $m_{110} = 1.0$ για τους άνδρες, με βάση το γεγονός ότι δεν υπάρχουν σχεδόν καθόλου επιζώντες σε ηλικίες μεγαλύτερες από 110 έτη. Υπέθεσαν ακόμη ότι για τις γυναίκες είναι $m_{110} = 0.8$ έτσι ώστε να αποφευχθεί η επιβολή διασταύρωσης της θνησιμότητας ανδρών και γυναικών στην ηλικία των 110 ετών.

Μοντέλο Himes, Preston, and Coudran (1994)

Στη συνέχεια, γίνεται λόγος για το σχετικό μοντέλο (Himes, Preston, and Coudran, 1994) που αποτελείται από έναν «τυπικό» πίνακα ζωής - για ηλικίες 45 έως 99 ετών - σχεδιασμένο από 82 διαφορετικά πρότυπα θνησιμότητας που παρατηρήθηκαν σε διάφορες χώρες με χαμηλή θνησιμότητα.

Ο «τυπικός» πίνακας γίνεται χρήσιμος στις υψηλότερες ηλικίες με την προσαρμογή μιας ευθείας γραμμής στα λογάριθμα των ποσοστών θανάτου από την ηλικία των 80 ετών:

$$\text{logit}(m_x^s) = a + \beta x,$$

όπου $\text{logit}(m_x^s) = \ln\left(\frac{m_x^s}{1-m_x^s}\right)$, και m_x^s δηλώνει το «τυπικό» κεντρικό ποσοστό θανάτου στην ηλικία x .

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή των «τυπικών» ποσοστών θανάτου για τις ηλικίες 100 και μετά.

Στη συνέχεια, μπορούμε να προεκτείνουμε οποιονδήποτε πίνακα ζωής συσχετίζοντάς τον με το εκτεταμένο «τυπικό» πρόγραμμα μέσω της ακόλουθης παλινδρόμησης logit:

$$\text{logit}(m_x) = \delta + \gamma \text{logit}(m_x^s)$$

όπου δ και γ είναι οι συντελεστές παλινδρόμησης, και m_x είναι τα κεντρικά ποσοστά θανάτου στον πίνακα ζωής που σκοπεύουμε να προεκτείνουμε (Li et. Al, 2008).

Στοχαστική εκτίμηση θνησιμότητας (Denuit, 2007)

Επιπλέον, γίνεται αναφορά σε μια ακόμη έρευνα του Denuit (2007) όπου θεωρεί τις πιθανότητες επιβίωσης στοχαστικές μιας και την πορεία της θνησιμότητας άγνωστη. Οι δημογραφικοί δείκτες που προκύπτουν με τη σειρά τους γίνονται τυχαίες μεταβλητές. Η μελέτη έχει ως στόχο να εξετάσει την κατανομή του προσδόκιμου ζωής περιόδου και κούρτης που προκύπτει από προβλεπόμενους πίνακες ζωής. Για τον καθορισμό των ιδεών, υιοθετούμε εδώ το τυπικό πλαίσιο Lee-Carter, όπου οι μελλοντικές δυνάμεις της θνησιμότητας αναλύονται με λογαριθμογραμμικό τρόπο. Προκύπτουν ακριβείς τύποι για το προσδόκιμο ζωής περιόδου και προτείνονται προσεγγίσεις για το προσδόκιμο ζωής κούρτης. Στην τελευταία περίπτωση, αριθμητικές απεικονίσεις που βασίζονται σε δεδομένα βελγικού πληθυσμού δείχνουν ότι η σχετική ακρίβεια είναι αξιοσημείωτη.

Γίνεται διαχωρισμός των δημογραφικών δεικτών που τη μια αφορούν προσδόκιμο ζωής περιόδου και την άλλη κούρτης. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε το μοντέλο Lee-Carter. Ορίζεται ως $e_x^\uparrow(t_0 + k)$ το προσδόκιμο ζωής για περίοδο σε ηλικία x σε χρόνο

$t_0 + k$. Ο δημογραφικός δείκτης αυτός εκφράζεται ως:

$$e_x^\uparrow(t_0 + k) = \frac{1}{2} + \sum_{d \geq 1} d P_x^\uparrow((t_0 + k)).$$

Ο συμβολισμός " \uparrow " χρησιμοποιείται για να θυμόμαστε ότι εργαζόμαστε κατά μήκος μιας κάθετης ζώνης στο διάγραμμα Lexis. Στο εξής ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιείται θα είναι ο εξής:

$$F_{e_x^\uparrow(t_0+k)}$$

Έχουμε μια διερευνητική γραφική ανάλυση ενός τυπικού προτύπου του κεντρικού δείκτη θανάτου. Βλέπουμε ότι ο ρυθμός αύξησης μετά την ηλικία των 85 ετών είναι πολύ πιο γρήγορος από ό,τι πριν. Η μοντελοποίηση ενός ηλικιακού προτύπου της θνησιμότητας γίνεται συνήθως με μια προσέγγιση τμηματικά. Αρχικά, μια παραμετρική διαβάθμιση εφαρμόζεται στους ρυθμούς θανάτου σε προηγούμενες ηλικίες για να εξομαλυνθούν οι ανωμαλίες και να προκύψει μια σύνοψη του ηλικιακού προτύπου με λίγες παραμέτρους. Στη συνέχεια, τα διαβαθμισμένα ποσοστά προεκτείνονται σε προχωρημένες ηλικίες. Αυτές οι μέθοδοι, ωστόσο, απαιτούν μια παραδοχή είτε για την ηλικία στην οποία κλείνει ο πίνακας επιβίωσης (η κυβική πολυωνυμική παρέκταση και η μέθοδος Coale-Kisker) είτε για την πορεία της θνησιμότητας γήρατος, χωρίς καμία επιστημονική αιτιολόγηση (το σχεσιακό μοντέλο και το μοντέλο Heligman-Pollard). Επιπλέον, όλες αυτές οι μέθοδοι απαιτούν μια υποκειμενική απόφαση σχετικά με την ηλικία στην οποία αρχίζει η παρέκταση. Ο πίνακας επιβίωσης ορίου είναι επίσης μια προσέγγιση κατά τεμάχια. Διατηρεί την παραμετρική διαβάθμιση για τις προγενέστερες ηλικίες, αλλά η μαθηματική παρέκταση αντικαθίσταται από μια στατιστική κατανομή, η οποία δικαιολογείται από θεωρία ακραίων τιμών. Η προσαρμοσμένη στατιστική κατανομή καθορίζει το κατάλληλο τελικό σημείο του πίνακα επιβίωσης, εάν υπάρχει. Επιπλέον, η ηλικία στην οποία η μοντελοποίηση μεταβαίνει από την παραμετρική διαβάθμιση σε μια ακραία κατανομή τιμών μπορεί να επιλεγεί με στατιστικό τρόπο, χωρίς την ανάγκη υποκειμενικής απόφασης.

Έστω $Z = Y - d | Y > d$ οι υπό συνθήκη υπερβάσεις πάνω από το όριο d . Οι Balkema-de Haan-Pickands δηλώνουν ότι, υπό ορισμένες συνθήκες, η οριακή κατανομή της Z είναι μια γενικευμένη Pareto καθώς το d πλησιάζει τη δεξιά ακραία στήριξη της Y . Αυτό το αποτέλεσμα παρέχει μια θεωρητική αιτιολόγηση του ορίου του πίνακα επιβίωσης, ο οποίος ορίζεται

ως εξής:

για $x \leq N$,

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{B}{\ln C}(C^x - 1)\right)$$

και για $x > N$,

$$F(x) = 1 - p\left(1 + \gamma\left(x - \frac{N}{\theta}\right)\right)^{-1/\gamma},$$

όπου $p = S(N)$ και N είναι το όριο ηλικίας. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι η κατανομή επιβίωσης είναι Gompertzian πριν το όριο ηλικίας και η υπέρβαση πάνω από αυτό το όριο ηλικίας ακολουθεί κατανομή γενικευμένη Pareto. Για να βεβαιώσουμε ότι η F είναι η κατάλληλη συνάρτηση κατανομής θέλουμε να ισχύουν $B > 0, C > 1$ και $\theta > 0$. Σημειώνεται ότι μια τέτοια κατασκευή εγγυάται ότι η F είναι συνεχής στην ηλικία κατωφλίου, αλλά ότι η ομαλότητα της $F(x)$ κατά τη διάρκεια της μετάβασης απαιτεί προσεκτική επιλογή του ορίου ηλικίας.

Έπειτα περνάμε στην εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου, η οποία γίνεται με δύο μεθόδους. Η πρώτη είναι μέσω της μέγιστης πιθανοφάνειας και έχουμε:

$$L(B, C, \gamma, \theta; N) = \left[\prod_{x=65}^{99} \left(\frac{S(x) - S(x+1)}{S(65)} \right)^{d_x} \right] \left(\frac{S(100)}{S(65)} \right)^{l_{100}}.$$

Για ηλικίες $x = 65, \dots, 99$, είναι λογοκριμένα σε διαστήματα, το οποίο δηλώνει ότι η κατανομή για την συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι $S(x) - S(x+1)$ ανά άτομο. Ομοίως, για ηλικία 100, είναι σωστά λογοκριμένα, και μας δίνει τη συνάρτηση $S(100)$ ανά άτομο.

Η δεύτερη είναι μέσω της στάθμισης ελαχίστων τετραγώνων, η οποία εφαρμόζεται εύκολα αν δίνονται τα δεδομένα θνησιμότητας ως προς το κεντρικό δείκτη θανάτου. Το όριο του πίνακα επιβίωσης ως συνάρτηση της δύναμης της θνησιμότητας μπορεί να γραφεί και ως:

για $x \leq N$,

$$\ln(\mu(x)) = \ln(B) + (\ln C)x$$

και για $x > N$,

$$\ln(\mu(x)) = -\ln(\theta) - \ln\left(1 + \gamma\left(\frac{x-N}{\theta}\right)\right).$$

Υπό την παραδοχή της σταθερής δύναμης θνησιμότητας για κλασματικές ηλικίες, το m_x μπορεί να θεωρηθεί το καλύτερο εκτίμηση του $\mu(x)$. Αυτή η σχέση υποδηλώνει ότι

μπορούμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του μοντέλου ελαχιστοποιώντας το άθροισμα των τετραγωνικών σφαλμάτων, SSE, το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$SSE = SSE_1 + SSE_2,$$

$$\text{όπου } SSE_1 = \sum_{x=65}^N E_x (\ln(m_x)) - \ln(B) - (\ln(C)x)^2 \text{ και } SSE_2 = \sum_{x=N+1}^{99} E_x (\ln(m_x) + \ln(\theta) + \ln\left(1 + \gamma\left(\frac{x-N}{\theta}\right)\right)^2).$$

Τα τετραγωνικά σφάλματα σταθμίζονται με τον αριθμό της έκθεσης σε κίνδυνο για να καταστεί δυνατή η καλύτερη προσαρμογή για ηλικίες με μεγαλύτερη έκθεση στον κίνδυνο. Παρόμοια με την εκτίμηση μέγιστης πιθανότητας, το μέρος Gompertz και το μέρος γενικευμένο Pareto μπορούν να εκτιμηθούν χωριστά με μια σταθερή τιμή N . Ο παρακάτω αλγόριθμος εκφράζει τη διαδικασία εκτίμησης:

1. Για $N = 98$,
 - A. Βρίσκουμε τις τιμές των B και C , οι οποίες ελαχιστοποιούν το SSE_1
 - B. Βρίσκουμε τις τιμές των γ και θ , οι οποίες ελαχιστοποιούν το SSE_2
 - Γ. Υπολογίζουμε την τιμή του συνολικού αθροίσματος των τετραγώνων, SSE
2. Επαναλαμβάνουμε το βήμα 1 για $N = 96, 95, \dots, 85$
3. Βρίσκουμε την τιμή του N η οποία μας δίνει το ελάχιστο SSE .

Μέθοδος Chiu και Müller (2009)

Όπως είχαμε αναφέρει και παραπάνω, καθώς οι παγκόσμιοι πληθυσμοί γερνούν ανάλυση των δημογραφικών δεδομένων θνησιμότητας και οι δημογραφικές προβλέψεις για τη μελλοντική θνησιμότητα παρουσιάζουν ενδιαφέρον για περαιτέρω μελέτη. Η μελέτη των προτύπων θνησιμότητας και η πρόβλεψη της μελλοντικής θνησιμότητας με τις συναφείς επιπτώσεις της στην κοινωνική ευημερία, την υγειονομική περίθαλψη και τον κοινωνικό σχεδιασμό έχει γίνει ένα ζήτημα που αφορά όλο και περισσότερο. Ένα ιδανικό σύνολο δεδομένων για τη μελέτη των προτύπων μεταβολής της μακροχρόνιας θνησιμότητας είναι τα γνωστά ιστορικά σουηδικά δεδομένα θνησιμότητας κοόρτης, λόγω της υψηλής ποιότητας και της μεγάλης διάρκειας των δύο και πλέον αιώνων.

Για την έρευνα των Chiu και Müller (2009) λαμβάνεται πρώτα μια μη παραμετρική συνάρτηση log-hazard από τα δεδομένα του πίνακα επιβίωσης κάθε κοόρτης, καθώς η προσέγγιση ήταν σε πιο ευέλικτο πλαίσιο. Τα δημογραφικά δεδομένα του πίνακα επιβίωσης μπορούν να αναπαρασταθούν από τα ζεύγη (N_{j-1}, d_j) , όπου N_{j-1} είναι ο αριθμός των εν ζωή ατόμων, δηλαδή σε κίνδυνο και d_j ο αριθμός των θανόντων που

σημειώνονται στο διάστημα αυτό. Αυτά τα δεδομένα συλλέγονται για $j = 1, 2, \dots$ μέχρι $N_{j-1} = 0$, δηλαδή να πεθάνουν όλα τα άτομα στη κοόρτη. Το αντίστοιχο διάστημα στον πίνακα επιβίωσης είναι $[(j-1)\Delta, j\Delta]$. Το μήκος του διαστήματος Δ μπορεί να ποικίλλει, συγκεκριμένα όμως για τους σουηδικούς πίνακες επιβίωσης είναι ένα έτος. Η συνάρτηση κινδύνου ορίζεται ως:

$$h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} Pr(T \in [t, t + \Delta] | T > t),$$

όπου T είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή που δηλώνει την ηλικία κατά τον θάνατο για ένα θέμα, οι μεροληψίες διακριτοποίησης προκύπτουν λόγω της συγκεντρωτικής φύσης των δεδομένων του πίνακα ζωής. Άλλοι μελετητές πρότειναν ένα άλλο τρόπο προσέγγισης με στόχο την ελαχιστοποίηση της διακριτότητας αυτής. Στόχος είναι μια μετατροπή του κεντρικού δείκτη θνησιμότητας \bar{q}_c . Η μετατροπή αυτή γράφεται ως:

$$\psi(x) = \frac{1}{\Delta} \log \frac{2 + x\Delta}{2 - x\Delta}$$

Εφαρμόζοντας αυτή τη μετατροπή στον κεντρικό δείκτη θανάτου μας δίνει:

$$Y(t_j) = \log\{\psi(\bar{q}_c(t_j))\} = Z(t_j) + \varepsilon_j$$

ως «παρατηρήσεις του t_j » της υποκείμενης συνάρτησης log-hazard $Z(t) = \log[h(t)]$ «μολυσμένη» με μηδενικό μέσο όρο σφαλμάτων παρατήρησης ε_j , τα οποία δείχνουν τις αποκλίσεις των παρατηρούμενων τιμών από τις υποκείμενες τροχιές κινδύνου λόγω διακριτοποίησης και της τυχαίας φύσης των μετρήσεων σε κάθε διάστημα του πίνακα επιβίωσης. Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα και οι εγγενείς περιορισμοί που αντιμετωπίζει η παραμετρική μοντελοποίηση, αναπτύσσεται μια προσέγγιση λειτουργικής ανάλυσης δεδομένων, όπου τα λειτουργικά δεδομένα είναι οι συναρτήσεις log-hazard. Η προσέγγιση αυτή είναι μη παραμετρική και επιβάλλει μόνο ελάχιστες παραδοχές για τα δεδομένα. Η συνάρτηση log-hazard για μια συγκεκριμένη κοόρτη είναι:

$$Z(t) = \mu(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \rho_k(t),$$

όπου $\mu(t)$ η συνολική μέση συνάρτηση και $\rho_k(t)$ είναι η k -οστή ορθοκανονική ιδιοσυνάρτηση του τελεστή αυτοσυνδιακύμανσης. Τα ξ_k είναι οι βαθμοί των λειτουργικών κύριων συνιστωσών. Μια σημαντική πρόκληση για τη μοντελοποίηση των σουηδικών πινάκων κοόρτης είναι πώς να συμπεριληφθεί κατάλληλα η επιρροή του έτους γέννησης της κοόρτης. Προκαταρκτική ανάλυση αποκάλυψε ότι όχι μόνο ο μέσος όρος της κοόρτης log-hazard εξαρτάται από το έτος γέννησης αλλά και η εσωτερική τους δομή, το οποίο είναι λογικό αφού τα έτη γέννησης των κοόρτων

εκτείνονται σε περισσότερο από δύο αιώνες. Για να μοντελοποιηθεί η εξάρτηση τόσο του μέσου όρου όσο και των ιδιοσυναρτήσεων για το έτος γέννησης, εξετάζεται μια προσέγγιση κινούμενων «παραθύρων». Ένα βασικό χαρακτηριστικό είναι η συμπερίληψη και των δύο συναρτήσεων μέσου όρου που μεταβάλλονται χρονικά και χρονικά μεταβαλλόμενες ιδιοσυναρτήσεις. Οι συναρτήσεις log-hazard θεωρείται ότι αλλάζουν ομαλά και αργά ως συνάρτηση του έτους γέννησης κοόρτης X . Αυτό συνεπάγεται ότι αυτή η δομή είναι περίπου σταθερή για εκείνες τις συναρτήσεις log-hazard για τις οποίες το X εμπίπτει σε ένα παράθυρο γύρω από ένα καθορισμένο επίπεδο x_0 . Με δεδομένο ένα τέτοιο παράθυρο $W(x_0)$ γύρω από το x_0 , συγκεντρώθηκαν αυτές τις συναρτήσεις καταγραφής κινδύνου κοόρτης και αντιμετωπίστηκαν ως ένα δείγμα τυχαίων συναρτήσεων.

Μελέτη για την εκτίμηση και πρόβλεψη θνησιμότητας στην Αργεντινή (2011)

Μια άλλη έρευνα που έχει ασχοληθεί με την εκτίμηση και την πρόβλεψη της θνησιμότητας είναι των Adreozzi et al. (2011). Η έρευνα αυτή ασχολήθηκε την εφαρμογή του μοντέλου Lee-Carter σε ποσοστά θανάτων συγκεκριμένων ηλικιών ανά φύλο στην Αργεντινή. Τα ποσοστά αυτά αφορούν τα έτη από το 1979 έως το 2006. Ο δείκτης του επιπέδου θνησιμότητας για κάθε φύλο, και το σχήμα και οι συντελεστές ευαισθησίας για εννέα ηλικιακές ομάδες λήφθηκαν μέσω της μεθόδου Lee-Carter. Ο γενικός δείκτης θνησιμότητας για την περίοδο 2007-2011 προβλέπεται με βάση τα μοντέλα χρονοσειρών (time series models) ARIMA και SSM. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι η περίοδος που μελετάται σε αυτό το άρθρο αντιπροσωπεύει τη μέγιστη περίοδο από την οποία είναι διαθέσιμα δεδομένα. Οπότε χρησιμοποιώντας ποσοστά θνησιμότητας ανάλογα με την ηλικία, το μοντέλο Lee-Carter εκτιμά ένα δείκτη του επιπέδου θνησιμότητας που ονομάζεται k . Η εκτίμηση αυτή υπολογίζεται για άνδρες, γυναίκες και για το συνολικό πληθυσμό. Και τα δύο μοντέλα (ARIMA και SSM) συγκρίνονται ως προς την καλή τους εφαρμογή και προγνωστική τους ικανότητα. Μόλις προβλεφθεί ο δείκτης του επιπέδου θνησιμότητας, είναι δυνατό να εκτιμηθούν τα ποσοστά θνησιμότητας και το προσδόκιμο ζωής. Βασική προϋπόθεση του μοντέλου είναι ότι υπάρχει μια γραμμική σχέση μεταξύ των λογαριθμικών ποσοστών θνησιμότητας ανάλογα με την ηλικία $m_{x,t}$ και των δύο επεξηγηματικών παραγόντων, την αρχική ηλικία διάστημα x και του χρόνου t . Η εξίσωση που περιγράφει το παραπάνω είναι η εξής:

$$m_{x,t} = \exp(a_x + b_x k_t + e_{xt}), \quad t = 1, \dots, n \quad x = 1, \dots, \omega$$

ή αλλιώς:

$$f_{x,t} = \ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + e_{xt}, \quad t = 1, \dots, n \quad x = 1, \dots, \omega$$

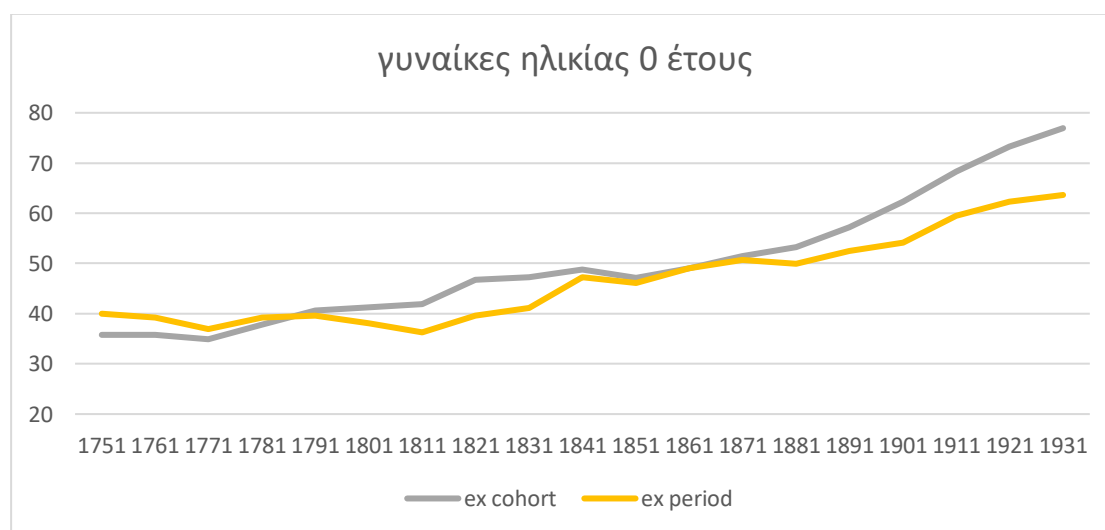
Ο γενικός δείκτης θνησιμότητας (k_t) είναι μια χρονοσειρά που παρουσιάζει χαμηλή μεταβλητότητα και εμφανίζει πτωτική τάση. Μοντέλα προβλέψεων όπως τα ARIMA (0,1,2) με σταθερά και SSM που χρησιμοποιήθηκαν για την προβολή του δείκτη k παρουσιάζουν επαρκή εφαρμογή. Ωστόσο, υπάρχει διαφορά στην ποιότητα εάν η αντίστοιχη συγκρίνονται τα διαστήματα πρόβλεψης. Τα μοντέλα SSM παρουσιάζουν μεγαλύτερα διαστήματα από μοντέλα ARIMA. Σε ένα δεύτερο στάδιο, τα ποσοστά θνησιμότητας ανάλογα με την ηλικία προβλέπονται χρησιμοποιώντας προβλέψεις του δείκτη k_t που λαμβάνονται και από τα δύο μοντέλα. Σύμφωνα με την μέθοδο πρόβλεψης που χρησιμοποιείται, τέτοιοι ρυθμοί δείχνουν διαφορές από το τρίτο ή το τέταρτο δεκαδικό ψηφίο εμπρός. Παρόλο που οι εκτιμήσεις των ποσοστών θνησιμότητας και του προσδόκιμου ζωής είναι παρόμοιες και για τα δύο μοντέλα πρόβλεψης, τα διαστήματα πρόβλεψης για τον δείκτη k_t είναι ελαφρώς πιο ακριβή όταν χρησιμοποιείται το μοντέλο ARIMA. Η μέθοδος Lee Carter σε συνδυασμό με τα μοντέλα Arima και Space-State προβλέπει επιτυχώς τα μελλοντικά ποσοστά θνησιμότητας. Ωστόσο, απαιτούνται μακροπρόθεσμες προβλέψεις στον τομέα της δημογραφίας και η απόκτησή τους εξαρτάται από τα διαθέσιμα στοιχεία.

Κεφάλαιο 3^ο: Εφαρμογή: Μελέτη διαφοροποιήσεων των συναρτήσεων θνησιμότητας κούρτης και περιόδου

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν δεδομένα του προσδόκιμου ζωής e_x και της πιθανότητας θανάτου q_x για τον πληθυσμό της Σουηδίας, σύμφωνα με τα στοιχεία από τη Βάση Δεδομένων Ανθρώπινης Θνησιμότητας (Human Mortality Database (HMD)). Για τη δημιουργία διαγραμμάτων συλλέχθηκαν στοιχεία από πίνακες επιβίωσης περιόδου αλλά και κούρτης τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες. Οι ηλικίες που επιλέχθηκαν για τη κατασκευή διαγραμμάτων είναι οι ηλικίες 0, 40, 65, 80.

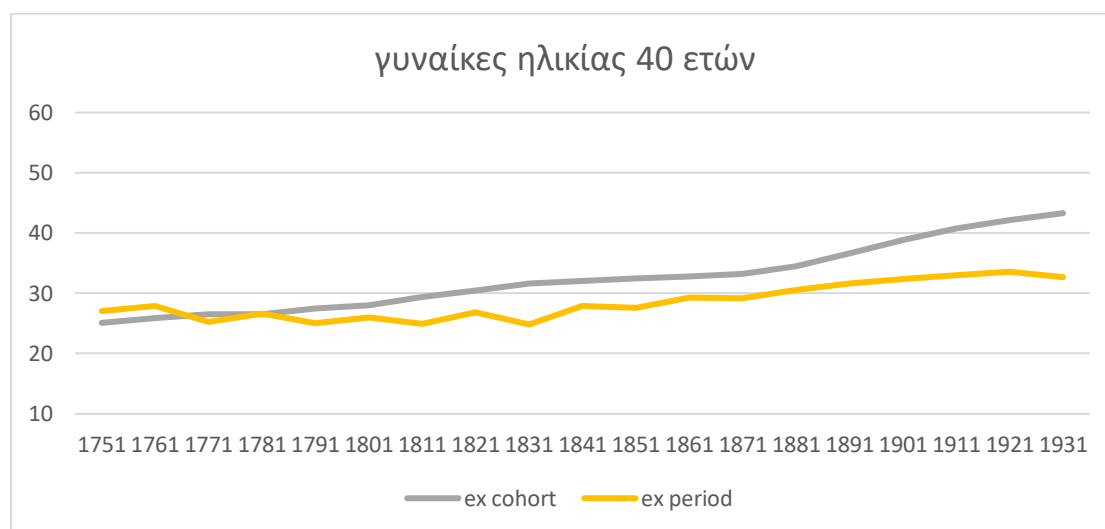
3.1 Μελέτη του προσδόκιμου ζωής γυναικών και ανδρών σε διάφορες ηλικίες με χρήση διαγραμμάτων

Αρχικά, βλέπουμε το πρώτο διάγραμμα, στο οποίο εμφανίζονται οι καμπύλες του προσδόκιμου ζωής των γυναικών κούρτης και περιόδου στην ηλικία 0. Η πρώτη εικόνα που έχουμε και θα δούμε σε όλα τα υπόλοιπα διαγράμματα είναι, ότι όσο περνούν τα χρόνια αυξάνεται και το προσδόκιμο ζωής και για τα δύο φύλα. Στο πρώτο διάγραμμα βλέπουμε ότι ενώ πριν από το 1791 το προσδόκιμο ζωής της περιόδου ξεπερνά αυτό της κούρτης, το αντίθετο ισχύει από εκεί και μετά. Ιδιαίτερα για την περίοδο 1791-1851 και από το 1871 και μετά αυτή η διαφορά είναι έντονη. Αυτή η έντονη διαφοροποίηση, όπου το προσδόκιμο ζωής της κούρτης ξεπερνά κατά πολύ το προσδόκιμο ζωής περιόδου, οφείλεται στη μείωση της θνησιμότητας με γοργούς ρυθμούς και για μεγάλο χρονικό διάστημα.



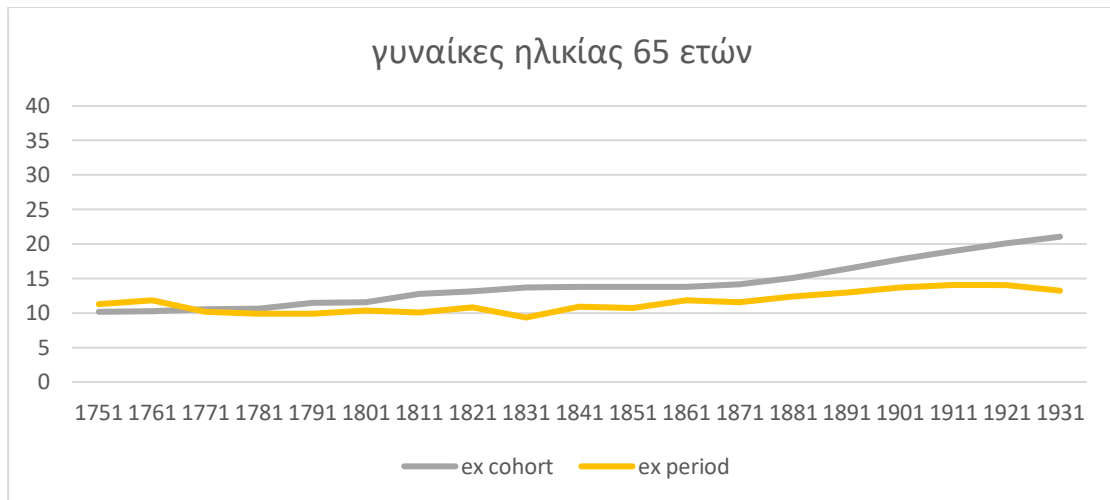
Διάγραμμα 1: Προσδόκιμο ζωής για γυναίκες ηλικίας 0 έτους

Στο διάγραμμα 2 παρίσταται το προσδόκιμο ζωής κούρτης και περιόδου για τις γυναίκες στην ηλικία των 40 ετών. Εδώ παρατηρούμε ότι το προσδόκιμο ζωής κούρτης υπερβαίνει αυτό της περιόδου ουσιαστικά από το 1781 και μετά, υποδεικνύοντας μία σταθερή μείωση στη θνησιμότητα για τις γυναίκες ηλικίας 40 ετών και άνω την περίοδο ενώ στα υπόλοιπα η αλλαγή αυτή ξεκινάει γύρω στο 1761 και μετά για όλα τα έτη η γραμμή της περιόδου βρίσκεται κάτω από την κούρτη. Αυτό σημαίνει ότι η αναμενόμενη ζωή αυξάνεται με πιο γρήγορους ρυθμούς.



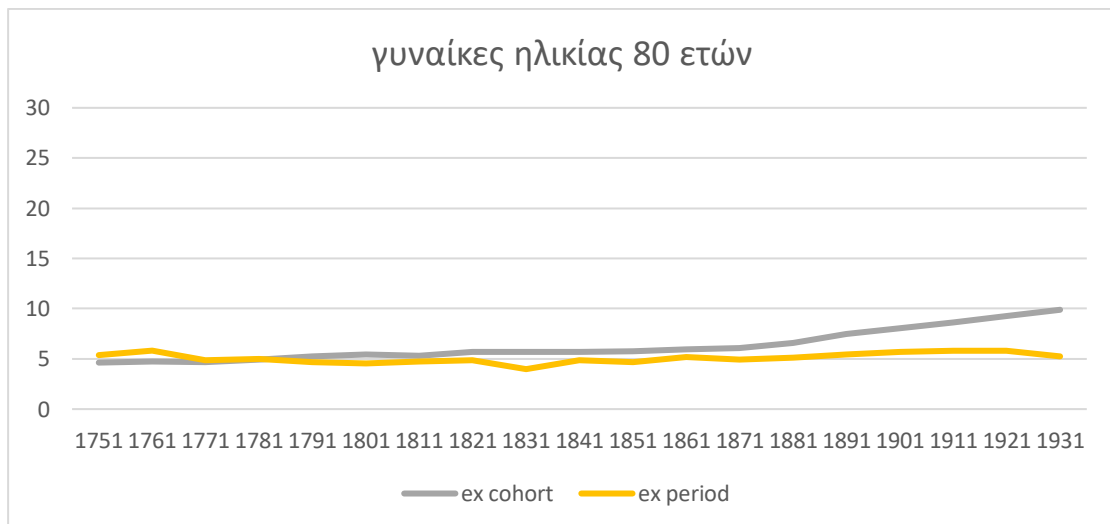
Διάγραμμα 2: Προσδόκιμο ζωής για γυναίκες ηλικίας 40 ετών

Στο διάγραμμα 3 παρίσταται το προσδόκιμο ζωής κούρτης και περιόδου για τις γυναίκες στην ηλικία των 65 ετών. Παρατηρούμε παρόμοιες τάσεις με το αντίστοιχο διάγραμμα των γυναικών 40 ετών. Η μόνη ουσιαστική διαφοροποίηση αφορά την διαφορά μεταξύ προσδόκιμου ζωής κούρτης και περιόδου που είναι λίγο μικρότερη σε σχέση με το προηγούμενο διάγραμμα και οφείλεται στο ότι το προσδόκιμο ζωής στην ηλικία των 65 ετών είναι αρκετά μικρότερο σε σχέση με το προσδόκιμο ζωής στην ηλικία των 40 ετών.



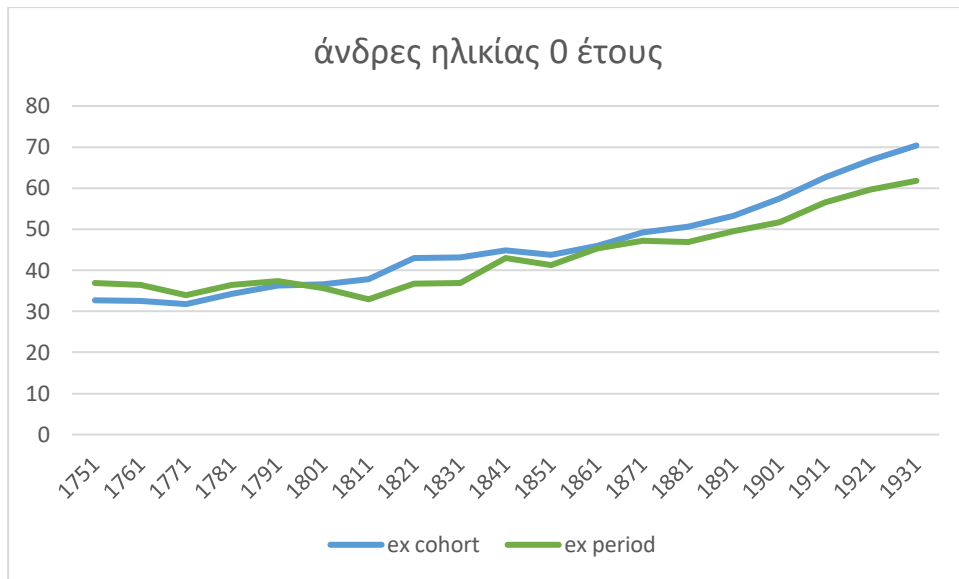
Διάγραμμα 3: Προσδόκιμο ζωής για γυναίκες ηλικίας 65 ετών

Στο διάγραμμα 4 παρίσταται το προσδόκιμο ζωής κοόρτης και περιόδου για τις γυναίκες στην ηλικία των 80 ετών. Εδώ παρατηρούμε ότι, το προσδόκιμο ζωής κοόρτης υπερβαίνει αυτό της περιόδου ουσιαστικά από το 1871 και μετά, δηλαδή με υστέρηση περίπου 100 ετών σε σχέση με τα προηγούμενα διαγράμματα. Αυτό υποδεικνύει ότι η μείωση της θνησιμότητας στην μεγάλες ηλικίες ξεκίνησε με σημαντική καθυστέρηση συγκριτικά με τις μικρότερες ηλικίες και, ιδιαίτερα με την βρεφική ηλικία, όπως είναι άλλωστε γνωστό και από τα σχετικά ιστορικά στοιχεία.



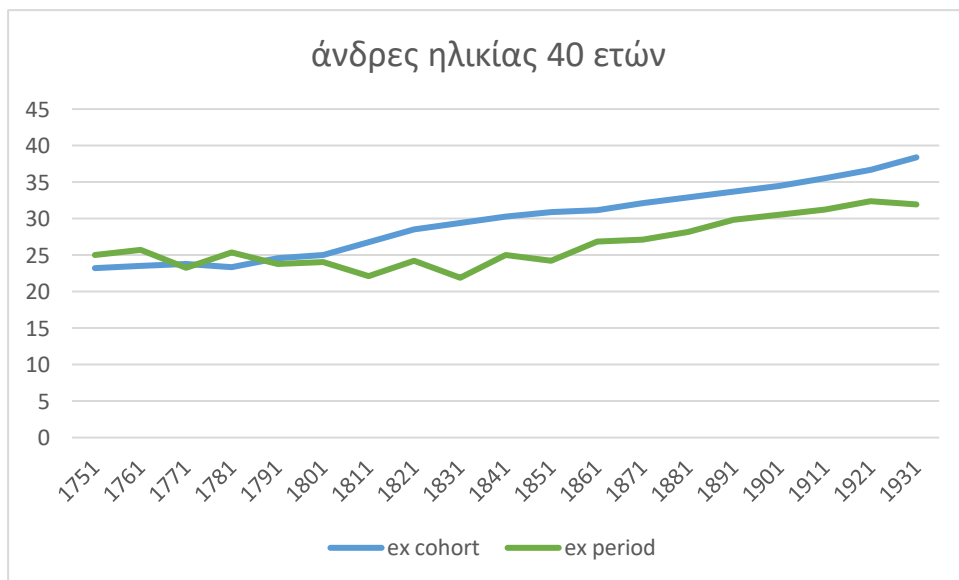
Διάγραμμα 4: Προσδόκιμο ζωής για γυναίκες ηλικίας 80 ετών

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα αναμενόμενης ζωής για το ανδρικό φύλο. Παρατηρώντας τα κάτωθι διαγράμματα βλέπουμε ότι εκείνα των ηλικιών 0 και 40 είναι αρκετά παρόμοια με των γυναικών και διαφέρουν τα άλλα δύο, ηλικιών 65 και 80.



Διάγραμμα 5: Προσδόκιμο ζωής για άνδρες ηλικίας 0 έτους

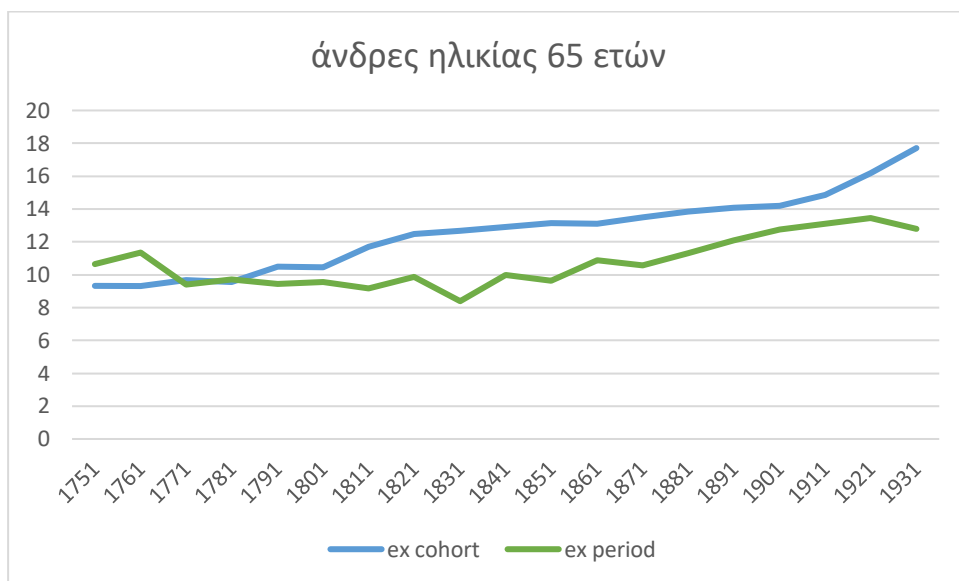
Στο έκτο διάγραμμα εμφανίζεται το προσδόκιμο ζωής κοόρτης και περιόδου για τους άνδρες στην ηλικία των 40 ετών. Εδώ το προσδόκιμο ζωής κοόρτης υπερβαίνει αυτό της περιόδου πάλι από το 1781 και μετά, όπως και στις γυναίκες. Η διαφορά που μπορούμε να αναφέρουμε είναι ότι όλες οι τιμές που αντιστοιχούν στους άνδρες είναι χαμηλότερες από εκείνες των γυναικών. Για παράδειγμα στο έτος 1781, το προσδόκιμο ζωής για τους άνδρες ήταν στα 25,34 έτη και για τις γυναίκες 26,63 έτη.



Διάγραμμα 6: Προσδόκιμο ζωής για άνδρες ηλικίας 40 ετών

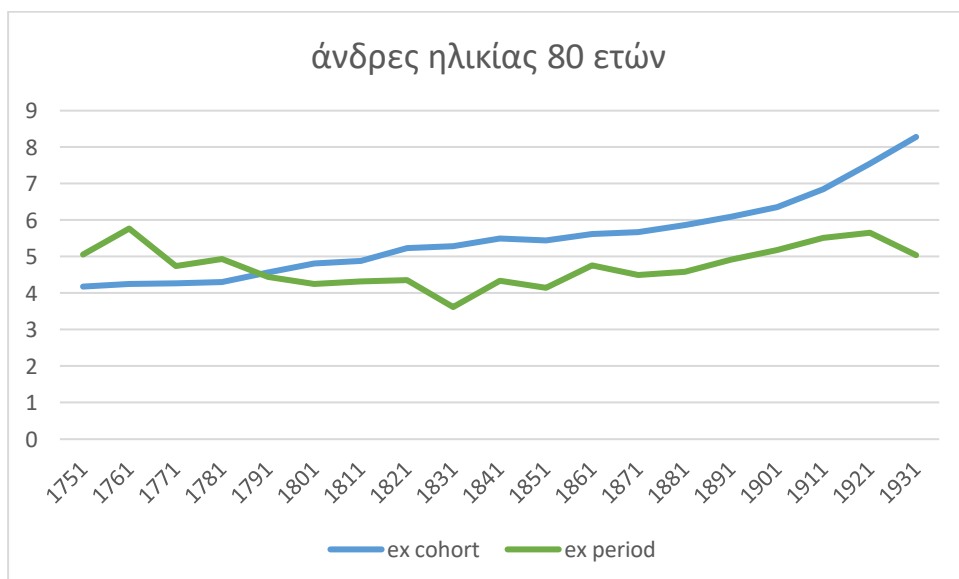
Στο διάγραμμα 7 παρουσιάζεται το προσδόκιμο ζωής για τους άνδρες στην ηλικία των 65 ετών. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για το χρονικό διάστημα από το 1771 και

για μια δεκαετία οι γραμμές της κοόρτης και της περιόδου σχεδόν ταυτίζονται. Έπειτα υπάρχει μια μόνιμη θέση της κοόρτης να βρίσκεται πάνω από εκείνη της περιόδου.



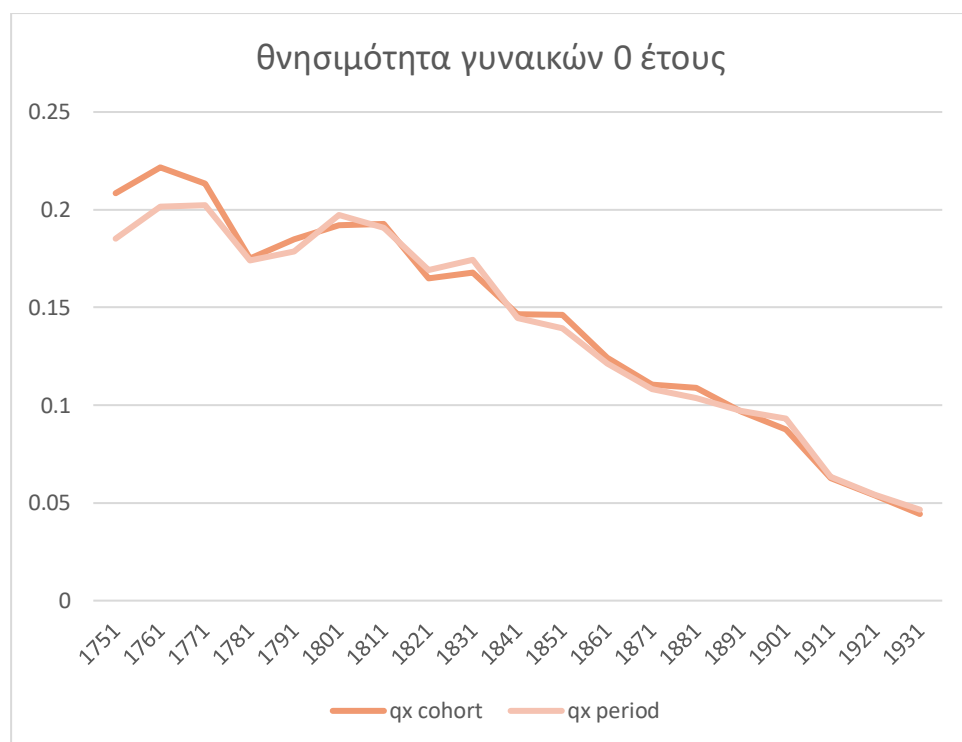
Διάγραμμα 7: Προσδόκιμο ζωής για άνδρες ηλικίας 65 ετών

Στο τελευταίο διάγραμμα για το προσδόκιμο ζωής των ανδρών είναι στην ηλικία των 80 ετών. Εδώ οι γραμμές κοόρτης και περιόδου διαφέρουν αρκετά με εκείνη των γυναικών. Βλέπουμε να υπάρχουν περισσότερα μέγιστα και ελάχιστα σε σχέση με των γυναικών που εμφανίζουν πιο ομαλές γραμμές.



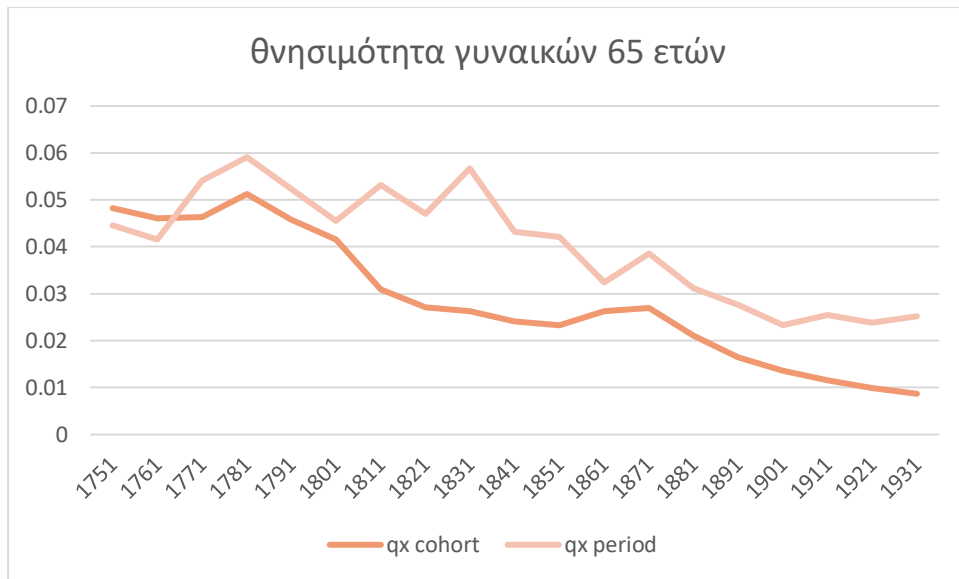
Διάγραμμα 8: Προσδόκιμο ζωής για άνδρες ηλικίας 80 ετών

3.2 Μελέτη της πιθανότητας θανάτου γυναικών και ανδρών σε διάφορες ηλικίες με χρήση διαγραμμάτων

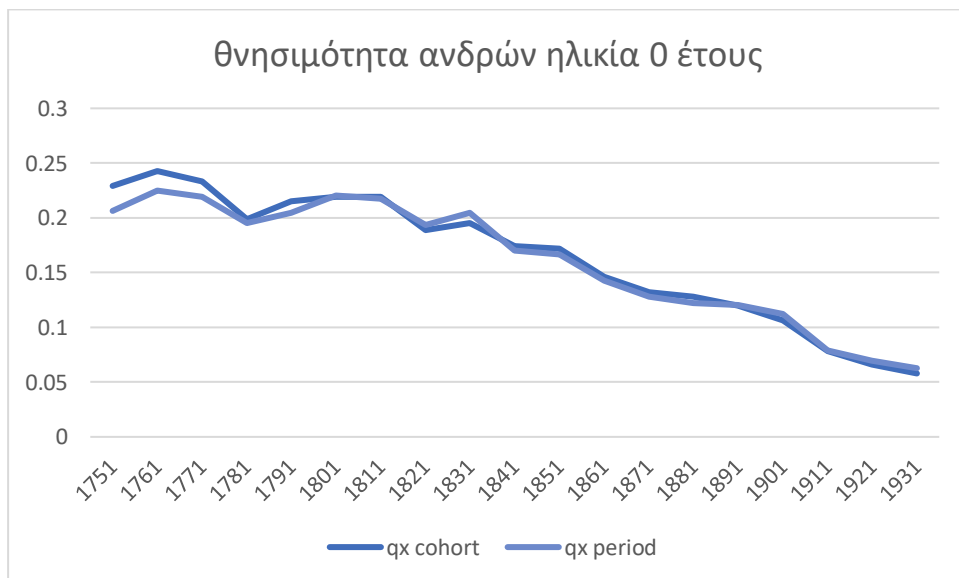


Διάγραμμα 9: Θνησιμότητα για γυναίκες ηλικίας 0 έτους

Το διάγραμμα 10 δείχνει την πιθανότητα θανάτου (q_x) κοόρτης και περιόδου για τις γυναίκες ηλικίας 65 ετών. Παρατηρούμε ότι ενώ αρχικά η πιθανότητα θανάτου κοόρτης είναι υψηλότερη από αυτής της περιόδου, η τάση αυτή αντιστρέφεται από το 1761 και μετά. Η διαφοροποίηση είναι έντονη, ιδιαίτερα για την περίοδο 1800-1861. Επιπλέον παρατηρούμε ότι η χρονοσειρά των πιθανοτήτων θανάτου κοόρτης είναι ομαλή σε αντίθεση με αυτή της περιόδου που παρουσιάζει κάποια μέγιστα, π.χ. αυτά του 1811 και του 1831. Τα μέγιστα αυτά πιθανόν ταυτίζονται με κάποιες εξάρσεις θνησιμότητας λόγω π.χ. επιδημιών ή πολέμων ή λιμών κλπ.

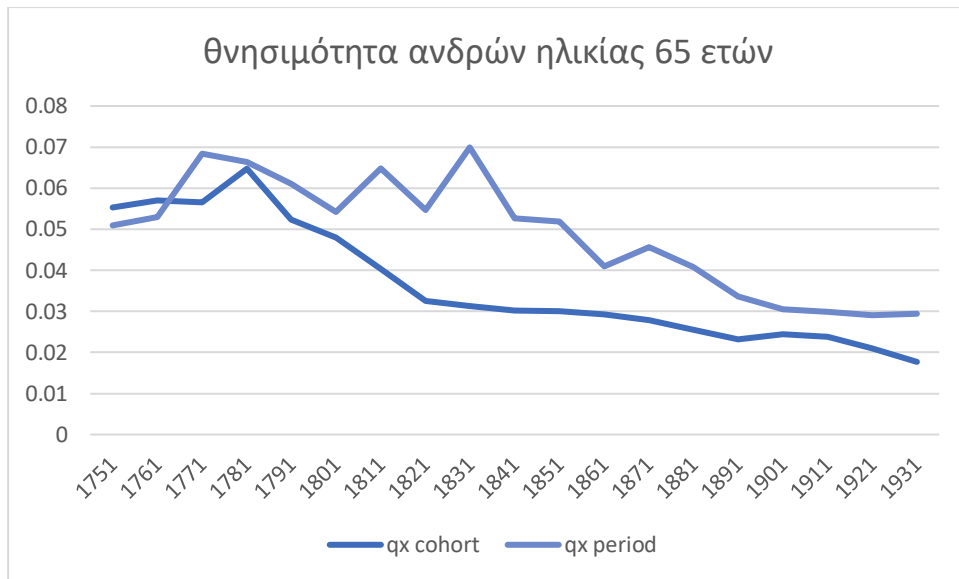


Διάγραμμα 10: Θνησιμότητα για γυναίκες ηλικίας 65 ετών



Διάγραμμα 11: Θνησιμότητα για άνδρες ηλικίας 0 έτους

Στο τελευταίο διάγραμμα παρίσταται η πιθανότητα θανάτου κοόρτης και περιόδου των ανδρών ηλικίας 65 ετών. Η εικόνα είναι παρόμοια με εκείνη των γυναικών στην ίδια ηλικία, δηλαδή η περίοδος ξεπερνά την κοόρτης κατά τη χρονολογία του 1771 και έπειτα, με ένα σημείο το έτος 1781 που το μέγιστο της κοόρτης πλησιάζει τη γραμμή της περιόδου.



Διάγραμμα 12: Θνησιμότητα για άνδρες ηλικίας 65 ετών

3.3 Μελέτη του προσδόκιμου ζωής ανδρών και γυναικών σε διάφορες ηλικίες με χρήση πινάκων

Σε αυτό το σημείο θα εισάγουμε πίνακες για να ποσοτικοποιήσουμε τις διαφοροποιήσεις του προσδόκιμου ζωής ανδρών και γυναικών, περιόδου και κοόρτης, κατά τη γέννηση και στην ηλικία των 65 ετών.

Στον πρώτο πίνακα, όπου παρουσιάζεται το προσδόκιμο ζωής των γυναικών περιόδου και κοόρτης στην ηλικία 0 και η διαφορά τους, φαίνεται πιο ξεκάθαρα σε σχέση με τα διαγράμματα, ότι μέχρι το 1821 έχουμε αυξομειώσεις του προσδόκιμου ζωής περιόδου στην ηλικία 0 με την πάροδο του χρόνου, δηλαδή η μειωτική τάση της θνησιμότητας δεν είναι σταθερή. Αυτό προφανώς οφείλεται σε εξάρσεις της θνησιμότητας συγκεκριμένες χρονιές (π.χ. το 1811). Οι εξάρσεις αυτές είναι πιο περιορισμένες όσον αφορά το προσδόκιμο ζωής κοόρτης.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι ενώ το 1751 το προσδόκιμο ζωής περιόδου υπερτερεί κατά 4,13 έτη, η διαφορά αυτή μειώνεται με την πάροδο των ετών και 40 έτη αργότερα (το 1791) αντιστρέφεται και διευρύνεται με την πάροδο του χρόνου, με αντίθετη κατεύθυνση, φθάνοντας τα 7,11 έτη το 1821. Ακολούθως, η διαφορά μειώνεται πάλι μέχρι το έτος 1871 και διευρύνεται ξανά μέχρι το 1931 όπου φθάνει τα 13,31 έτη.

Έτος	Ηλικία	Προσδόκιμο ζωής κοόρτης	Προσδόκιμο ζωής περιόδου	Διαφορά
1751	0	35,8	39,93	4,13
1761	0	35,79	39,19	3,4
1771	0	34,9	36,89	1,99
1781	0	37,83	39,19	1,36
1791	0	40,57	39,61	-0,96
1801	0	41,2	38,09	-3,11
1811	0	41,92	36,27	-5,65
1821	0	46,68	39,57	-7,11
1831	0	47,23	41,17	-6,06
1841	0	48,8	47,24	-1,56
1851	0	47,09	46,1	-0,99
1861	0	49,01	49,01	0
1871	0	51,4	50,67	-0,73
1881	0	53,27	49,93	-3,34
1891	0	57,26	52,5	-4,76
1901	0	62,27	54,09	-8,18
1911	0	68,33	59,43	-8,9
1921	0	73,32	62,27	-11,05
1931	0	76,94	63,63	-13,31

Πίνακας 1: Προσδόκιμο ζωής κοόρτης και περιόδου για γυναίκες ηλικίας 0 έτους

Οι τάσεις αυτές υποδηλώνουν μία γρήγορη μείωση των επιπέδων θνησιμότητας με την πάροδο του χρόνου όταν η διαφορά μεταξύ προσδόκιμου ζωής κοόρτης και περιόδου διευρύνεται (με αυτήν της κοόρτης να υπερτερεί αυτής της περιόδου) και μία μείωση του ρυθμού που υποχωρεί η θνησιμότητα ή εξάρσεις της θνησιμότητας, όταν η διαφορά αυτή μειώνεται και οι τιμές του προσδόκιμου ζωής κοόρτης και περιόδου συγκλίνουν. Βάσει των παραπάνω παρατηρήσεων και του αντίστοιχου πίνακα, καταλήγουμε ότι σταθερή μείωση της θνησιμότητας με γρήγορους ρυθμούς παρατηρείται από το 1861 και μετά.

Στη συνέχεια, έχουμε το προσδόκιμο κοόρτης και περιόδου στην ηλικία των 65 ετών για το γυναικείο φύλο, όπου βλέπουμε τη διαφορά να μη παρουσιάζει μεγάλες και απότομες αυξομειώσεις. Στην ηλικία των 65 ετών, όπως και σε άλλες μεγαλύτερες ηλικίες, φαίνεται ο ρυθμός μείωσης της θνησιμότητας ή των εξάρσεων θνησιμότητας να μην είναι τόσο γρήγορος σε σχέση με εκείνον στην ηλικία 0. Τα αποτελέσματα συνάδουν με την γρήγορη και μεγάλη μείωση της βρεφικής και παιδικής θνησιμότητας που παρατηρήθηκε από το 1850 και μετά. Από το 1861, όπου σημειώθηκε μια πτώση σε σχέση με το 1851, μέχρι και το 1931 η διαφορά στο προσδόκιμο ζωής κοόρτης και περιόδου στην ηλικία των 65 ετών σταθερά αυξάνεται χρόνο με το χρόνο, δηλαδή σε

διάστημα 70 χρόνων από τα 13,3 έτη προσδόκιμου ζωής κοόρτης το 1931 το προσδόκιμο ζωής ανέρχεται στα 21,05 έτη.

Έτος	Ηλικία	Προσδόκιμο ζωής κοόρτης	Προσδόκιμο ζωής περιόδου	Διαφορά
1751	65	10,17	11,26	1,09
1761	65	10,28	11,88	1,6
1771	65	10,58	10,18	-0,4
1781	65	10,59	9,88	-0,71
1791	65	11,46	9,86	-1,6
1801	65	11,57	10,32	-1,25
1811	65	12,79	10,06	-2,73
1821	65	13,18	10,79	-2,39
1831	65	13,66	9,34	-4,32
1841	65	13,75	10,91	-2,84
1851	65	13,83	10,7	-3,13
1861	65	13,83	11,87	-1,96
1871	65	14,18	11,53	-2,65
1881	65	15,06	12,43	-2,63
1891	65	16,42	12,98	-3,44
1901	65	17,79	13,68	-4,11
1911	65	18,95	14,03	-4,92
1921	65	20,12	14,04	-6,08
1931	65	21,05	13,2	-7,85

Πίνακας 2: Προσδόκιμο ζωής κοόρτης και περιόδου για γυναίκες ηλικίας 65 ετών

Στον πίνακα 3 αποτυπώνεται η εικόνα του προσδόκιμου ζωής κοόρτης και περιόδου για τους άνδρες στην ηλικία 0. Εδώ έχουμε μέχρι το 1831 αυξομειώσεις στα έτη του προσδόκιμου ζωής των ανδρών και πιο αναλυτικά από το 1751 μέχρι και το 1801 η διαφορά μεταξύ κοόρτης και περιόδου χρόνο με το χρόνο μειώνεται και το 1811 αρχίζει και μεγαλώνει πάλι μέχρι και τα επόμενα 20 έτη. Από το 1861 και μετά το προσδόκιμο ζωής κοόρτης υπερέχει της περιόδου και η τάση είναι αυξητική. Οπότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι ρυθμοί μείωσης της θνησιμότητας του πληθυσμού από το 1861 είναι γρήγοροι, χωρίς εξάρσεις θνησιμότητας.

Έτος	Ηλικία	Προσδόκιμο ζωής κούρτης	Προσδόκιμο ζωής περιόδου	Διαφορά
1751	0	32,66	36,87	4,21
1761	0	32,56	36,41	3,85
1771	0	31,76	33,95	2,19
1781	0	34,26	36,43	2,17
1791	0	36,29	37,3	1,01
1801	0	36,59	35,72	-0,87
1811	0	37,89	32,93	-4,96
1821	0	42,93	36,73	-6,2
1831	0	43,18	36,87	-6,31
1841	0	44,82	43,05	-1,77
1851	0	43,73	41,21	-2,52
1861	0	45,92	45,35	-0,57
1871	0	49,2	47,15	-2,05
1881	0	50,58	46,89	-3,69
1891	0	53,31	49,53	-3,78
1901	0	57,46	51,65	-5,81
1911	0	62,67	56,53	-6,14
1921	0	66,79	59,69	-7,1
1931	0	70,38	61,79	-8,59

Πίνακας 3: Προσδόκιμο ζωής κούρτης και περιόδου για άνδρες ηλικίας 0 έτους

Τέλος, παρουσιάζεται ο πίνακας για το προσδόκιμο ζωής κούρτης και περιόδου αναφορικά με τους άνδρες ηλικίας 65 ετών. Σε αυτή την ηλικία έχουμε περισσότερες αυξομειώσεις μέσα στα χρόνια. Τα χρόνια του προσδόκιμου ζωής που αναφέρονται σε περίοδο είναι, από το 1791 και μετά, πιο λίγα από εκείνα της κούρτης. Η μεγαλύτερη διαφορά τους εντοπίζεται στα έτη 1831 και 1931, με τιμές 4,29 και 4,91 αντίστοιχα. Αυτό καταδεικνύει το γοργό ρυθμό πτώσης της θνησιμότητας σε σχέση με τις άλλες χρονιές, όπου υπήρχε μείωση της θνησιμότητας αλλά με αργούς ρυθμούς.

Έτος	Ηλικία	Προσδόκιμο ζωής κούρτης	Προσδόκιμο ζωής περιόδου	Διαφορά
1751	65	9,32	10,63	1,31
1761	65	9,31	11,35	2,04
1771	65	9,67	9,39	-0,28
1781	65	9,54	9,71	0,17
1791	65	10,51	9,42	-1,09
1801	65	10,46	9,54	-0,92
1811	65	11,71	9,15	-2,56
1821	65	12,46	9,86	-2,6
1831	65	12,68	8,39	-4,29
1841	65	12,89	10	-2,89
1851	65	13,14	9,65	-3,49

1861	65	13,11	10,9	-2,21
1871	65	13,49	10,58	-2,91
1881	65	13,83	11,31	-2,52
1891	65	14,07	12,07	-2
1901	65	14,19	12,74	-1,45
1911	65	14,85	13,12	-1,73
1921	65	16,19	13,45	-2,74
1931	65	17,71	12,8	-4,91

Πίνακας 4: : Προσδόκιμο ζωής κοόρτης και περιόδου για άνδρες ηλικίας 65 ετών

Συγκρίνοντας τους αντίστοιχους πίνακες για τα δύο φύλα παρατηρούμε ότι η διαφορά μεταξύ προσδόκιμου ζωής κοόρτης και περιόδου είναι μεγαλύτερη για τις γυναίκες, υποδηλώνοντας πιο γρήγορη μείωση της θνησιμότητας, σε σχέση με τους άνδρες. Αυτό επιβεβαιώνεται και από την γνωστή αύξηση της διαφοράς του προσδόκιμου ζωής περιόδου ανδρών και γυναικών που παρατηρήθηκε από το 1950 και μετά.

Κεφάλαιο 4^ο: Συμπέρασμα

Σύμφωνα με όσα έχουν προαναφερθεί στη παρούσα εργασία, μπορούμε να κατανοήσουμε ότι η κατασκευή πρώτα και ύστερα η μελέτη των πινάκων επιβίωσης είναι ιδιαιτέρως σημαντική και απαραίτητη ενέργεια για τον υπολογισμό των ασφαλιστρών, συντάξεων κ.ά.. Οι αναλογιστές χρησιμοποιούν διάφορες μεθόδους και μοντέλα με σκοπό να υπολογίσουν όσο δυνατόν πιο ακριβέστερα μεγέθη όπως η θνησιμότητα ή το προσδόκιμο ζωής.

Η πιο απλή και συνηθισμένη μέθοδος που ακολουθείται είναι η κλασική, όπου το αρχικό βήμα είναι να μετατραπεί ο ειδικός κατά ηλικία δείκτης θνησιμότητας σε πιθανότητα θανάτου και έπειτα με διάφορες εξομαλύνσεις να δημιουργηθεί η σωστή πιθανότητα θανάτου ώστε να προχωρήσουμε στην εκτίμηση των βιομετρικών συναρτήσεων. Έπειτα, υπάρχει και μια παραλλαγή της κλασικής μεθόδου, εκείνη του Greville, όπου πάλι το ζητούμενο είναι η μετατροπή του ειδικού κατά ηλικία δείκτη θνησιμότητας σε πιθανότητα θανάτου, όμως με πιο περίπλοκο τρόπο, αφού βασίζεται στην υπόθεση ότι το πρότυπο θνησιμότητας ενός πληθυσμού ακολουθεί το μοντέλο Gompertz. Αρκετά παρόμοια μέθοδος με την προηγούμενη είναι και η Fergany, με μικρές διαφοροποιήσεις.

Στην περίπτωση της Σουηδίας έχει χρησιμοποιηθεί η κλασική μεθοδολογία για την κατασκευή του πίνακα επιβίωσης περιόδου και γενεάς, όπου λαμβάνονται υπόψιν η πιθανότητα θανάτου, το προσδόκιμο ζωής, οι επιζώντες στην αρχή μιας συγκεκριμένης ηλικίας, ο κεντρικός δείκτης θνησιμότητας σε μια συγκεκριμένη ηλικία ή σε διάστημα ηλικιών.

Είδαμε ωστόσο παραπάνω, ότι οι πίνακες επιβίωσης αν και είναι πιο εύκολο να κατασκευαστούν, τα δεδομένα που προκύπτουν δεν είναι και τόσο ακριβή σε σχέση με εκείνα των πινάκων κοόρτης, όπου παρατηρούνται όλα τα άτομα που ανήκουν στη ίδια γενεά μέχρι να εκλείψουν όλοι. Σκοπός είναι να εφαρμοστούν μοντέλα από τα οποία να προκύπτουν όσο το δυνατότερο πιο αντικειμενικά και ακριβή αποτελέσματα για την πρόβλεψη της θνησιμότητας.

Τέλος, έπειτα από την ανάλυση των διαγραμμάτων προσδόκιμου ζωής και πιθανότητας θανάτου, που προέκυψαν χρησιμοποιώντας στοιχεία από πίνακες επιβίωσης κοόρτης και περιόδου για άνδρες και γυναίκες στη χώρα της Σουηδίας, μπορούμε να κατανοήσουμε ότι οι πίνακες επιβίωσης μας δίνουν πολύ χρήσιμα δεδομένα για την αναμενόμενη ζωή και την πιθανότητα θανάτου. Συνεπώς μπορούμε να αντιληφθούμε

με αριθμητικά δεδομένα πώς έχει «προχωρήσει» μέσα στα χρόνια ο πληθυσμός μιας χώρας. Μία διαπίστωση είναι ότι το προσδόκιμο ζωής στο γυναικείο φύλο είναι σε υψηλότερα επίπεδα από το αντρικό. Επιπλέον, προκύπτει ότι τα επίπεδα θνησιμότητας στη βρεφική ηλικία παρουσίαζαν με τη πάροδο του χρόνου μεγαλύτερη μείωση απ' ό τι στις μεγαλύτερες ηλικίες, όπου ενώ υπήρχε μείωση της θνησιμότητας και αύξηση του προσδόκιμου ζωής, η διαφορά αυτή γινόταν πολύ σταδιακά και όχι με ταχείς ρυθμούς. Επιπροσθέτως, συγκρίνοντας τη συγκεκριμένη μελέτη για τη Σουηδία με τη μελέτη του Keilman για τη Νορβηγία μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχουν ανάλογα αποτελέσματα, δηλαδή φαίνεται να υπάρχει μεγάλη διαφορά στο προσδόκιμο επιβίωσης περιόδου με κοόρτης. Συγκεκριμένα, το προσδόκιμο επιβίωσης κοόρτης είναι μεγαλύτερο από εκείνο της περιόδου όταν μειώνεται η θνησιμότητα και η διαφορά είναι ακόμα μεγαλύτερη όταν η θνησιμότητα μειώνεται με γρηγορότερο ρυθμό.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση

Βερροπούλου, Γ. (2022) Αναλογιστικά Πρότυπα Επιβίωσης. Σημειώσεις μαθήματος 2022, ΠΜΣ «Αναλογιστικά πρότυπα επιβίωσης», Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Κωστάκη, Α. (2022). Κεφάλαιο 2: Θνησιμότητα. Available online <http://www2.stat-athens.aueb.gr/~akostaki/gr/courses/kefalaio2.pdf> [Accessed Nov 2022]

Ξενόγλωσση

Adair, T., & Lopez, A. D. (2018). Estimating the completeness of death registration: an empirical method. *PloS one*, *13*(5), e0197047.

Andreozzi, L., Blacona, M. T., & Arnesi, N. E. (2011). The Lee Carter method for estimating and forecasting mortality: An application for Argentina. In *The 31st International Symposium on Forecasting*. International Institute of Forecasters.

Ayuso, M., Bravo, J. M., & Holzmann, R. (2021). Getting life expectancy estimates right for pension policy: period versus cohort approach. *Journal of Pension Economics & Finance*, *20*(2), 212-231.

Booth, H., & Tickle, L. (2008). Mortality modelling and forecasting: A review of methods. *Annals of actuarial science*, *3*(1-2), 3-43.

Cairns, A. J., Blake, D., & Dowd, K. (2006). A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: theory and calibration. *Journal of Risk and Insurance*, *73*(4), 687-718.

Cairns, A. J., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., Ong, A., & Balevich, I. (2009). A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States. *North American Actuarial Journal*, *13*(1), 1-35.

Chiou, J. M., & Müller, H. G. (2009). Modeling hazard rates as functional data for the analysis of cohort lifetables and mortality forecasting. *Journal of the American Statistical Association*, *104*(486), 572-585.

Coale, A., & Kisker, E. E. (1990). Defects in data on old age mortality in the United States: New procedures for calculating approximately accurate mortality schedules and life tables at the highest ages. In *Asian and Pacific Population Forum* (Vol. 4, No. 1, pp. 1-31).

- Denuit, M. (2007). Distribution of the random future life expectancies in log-bilinear mortality projection models. *Lifetime Data Analysis*, 13 , 381-397.
- Heligman, L., & Pollard, J. H. (1980). The age pattern of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries*, 107(1), 49-80.
- Keilman, N. (2019). Mortality shifts and mortality compression in period and cohort life tables. *Demographic Research*, 41, 1147-1196.
- Lee, R. D., & Carter, L. R. (1992). Modeling and forecasting US mortality. *Journal of the American statistical association*, 87(419), 659-671.
- Li, J. S. H., Hardy, M. R., & Tan, K. S. (2008). Threshold life tables and their applications. *North American Actuarial Journal*, 12(2), 99-115.
- Mihova, Maccheroni, C., & Nocito, S. (2017). Backtesting the lee–carter and the cairns–blake–dowd stochastic mortality models on italian death rates. *Risks*, 5(3), 34.
- Panjer, H. H., & Russo, G. (1991). *Parametric Graduation of Canadian Individual Insurance Mortality Experience, 1982-1988*. Canadian Institute of Actuaries.
- Panjer, H. H., & Tan, K. S. (1995). *Graduation of Canadian individual insurance mortality experience: 1986-1992*. Ottawa: Canadian Institute of Actuaries.
- Pavlov, V., & Mihova, V. (2018, October). An application of survival model in insurance. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2025, No. 1). AIP Publishing.
- Porta, M. (2014). Mortality Rate, Morbidity rate; Death rate; Cumulative death rate; Case fatality rate. *A Dictionary of Epidemiology, 5th ed.*; Oxford University Press: Oxford, UK, 60.
- Rizzi, S., Kjærgaard, S., Boucher, M. P. B., Camarda, C. G., Lindahl-Jacobsen, R., & Vaupel, J. W. (2021). Killing off cohorts: Forecasting mortality of non-extinct cohorts with the penalized composite link model. *International Journal of Forecasting*, 37(1), 95-104.
- Salguero-Gomez, R., & Gamelon, M. (Eds.). (2021). *Demographic Methods Across the Tree of Life*. Oxford University Press.
- Yusuf, F., Swanson, D. A., & Martins, J. M. (2014). *Methods of demographic analysis*. <https://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php?title=Glossary:Death>