ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ **ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ**

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΜΕ ΒΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΠΙΤΗΡΗΣΗ

Ευστράτιος Α. Χατζηαναγνώστου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων*

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2023

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη Συνέλευση του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθμόν ………………. συνεδρίασή της σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγητής Μ. Κούτρας (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Κ. Πολίτης
- Αναπληρωτής Καθηγητής Γ. Ψαρράκος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

MARKET-BASED ESTIMATION OF DEFAULT PROBABILITIES AND FINANCIAL SURVEILLANCE

By
Efstratios A. Chatzianagnostou

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece
September 2023

Στην οικογένεια μου

Ευχαριστίες

Με αφορμή την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την στήριξή τους σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Επίσης οφείλω να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης κ. Κούτρα Μάρκο για την υποστήριξη, τις εύστοχες υποδείξεις, την υπομονή του, αλλά και την πολύτιμη καθοδήγηση που μου παρείχε κατά την διάρκεια της συγγραφής.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους διδάσκοντες του μεταπτυχιακού προγράμματος για τις γνώσεις που μου προσέφεραν, αλλά και την Γραμματεία που μου προσέφερε ότι πληροφορίες χρειάστηκα κατά την διάρκεια του κύκλου σπουδών μου.

Περίληψη

Τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί διάφορα εργαλεία, μοντέλα και διαδικασίες που αφορούν την αξιολόγηση και μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου, αφού το ενδιαφέρον των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων για την ορθολογική διαχείρισή του έχει μετατραπεί σε αδήριτη ανάγκη. Έχει γίνει πια σαφές ότι ο πιστωτικός κίνδυνος αποτελεί τη σοβαρότερη απειλή για τη φερεγγυότητα των πιστωτικών οργανισμών και πολλές φορές για τη βιωσιμότητά τους.

Η Τράπεζα της Ελλάδος, γνωρίζοντας τις προκλήσεις που δημιουργούν οι εξελίξεις αυτές, έχει εντείνει την προληπτική εποπτεία των τραπεζών, σύμφωνα με το αναθεωρημένο κανονιστικό πλαίσιο της Βασιλείας («Βασιλεία ΙΙΙ»).

Στην παρούσα εργασία θα περιγράψουμε μια μέθοδος εκτίμησης της έκθεσης στον πιστωτικό κίνδυνο όπως προκύπτει από την ανάλυση διαθέσιμων στοιχείων της αγοράς που αφορούν στα ασφάλιστρα κινδύνου και την καμπύλη αποδόσεων για τα εταιρικά ομόλογα ή δάνεια. Πιο συγκεκριμένα θα γίνει παρουσίαση των μέτρων εποπτείας και της σημασίας τους για την ορθή λειτουργία της οικονομικής αγοράς. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα μοντέλα πρόβλεψης της πιθανότητας αθέτησης για απλό δανεισμό μιας και δυο περιόδων χωρίς και με ανάκτηση και θα γενικεύσουμε το μοντέλο για πολλές περιόδους. Τέλος, στην περίπτωση που έχουμε στοχαστικά επιτόκια θα εξετάσουμε πώς μπορούμε να μελετήσουμε τα παραπάνω μοντέλα με τη χρήση προσομοίωσης.

Abstract

In recent years, various tools, models and procedures have been developed regarding the evaluation and measurement of credit risk, since the interest of financial institutions for rational management of credit risk has turned into an overwhelming need. It has now become clear that credit risk is the most serious threat to the solvency of credit organizations and often to their viability.

The Bank of Greece, aware of the challenges created by these developments, has intensified the prudential supervision of banks, in accordance with the revised regulatory framework of Basel.(Basel III)

In the present thesis we will describe a method of estimating credit risk exposure as derived from the analysis of available market data regarding risk premiums and the yield curve for corporate bonds or loans. More specifically, supervisory measures and their importance for the proper functioning of the financial market will be presented. Then, we will present the default probability prediction models for lending one and two-period without and with recovery and generalize the model for multiple periods. Finally, in the case that we have stochastic interest rates, we will examine how we can study the above models using simulation.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Σχημάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΑΓΟΡΕΣ

1.1 Στόχοι των παρεμβάσεων και εποπτικές αρμοδιότητες

Κύρια επιδίωξη της ρυθμιστικής παρέμβασης και της εποπτείας στο χρηματοοικονομικό σύστημα αποτελεί η προάσπιση και η διατήρηση της μακροοικονομικής και μικροοικονομικής σταθερότητας. Η μακροοικονομική σταθερότητα επιτυγχάνεται κυρίως από την άσκηση νομισματικής πολιτικής από την Ευρωπαϊκή Κεντρική Τράπεζα. Από την άλλη, η μικροοικονομική σταθερότητα επιτυγχάνεται με την καθιέρωση και επιβολή γενικών και ειδικών εποπτικών προτύπων και κανόνων στον χρηματοοικονομικό τομέα από τις Εποπτικές Αρχές.

Η διατήρηση της χρηματοοικονομικής σταθερότητας σχετίζεται με την προστασία έναντι του συστημικού κινδύνου. Με τον όρο συστημικός κίνδυνος εννοούμε τον κίνδυνο που απορρέει από την χρηματοοικονομική «μόλυνση» των χρηματοοικονομικών διαμεσολαβητών σε περίπτωση πτώχευσης ενός χρηματοπιστωτικού ιδρύματος η οποία θα προκαλέσει περαιτέρω ανισορροπία και αστάθεια στο χρηματοπιστωτικό σύστημα.

Δεύτερος στόχος της εποπτείας αποτελεί η διασφάλιση της διαφάνειας στην αγορά. Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται η προστασία του επενδυτή από φαινόμενα κερδοσκοπίας (arbitrage). Η αναγκαιότητα προστασίας του επενδυτή έγκειται στο πρόβλημα της ασυμμετρίας της πληροφόρησης ανάμεσα στον επενδυτή και στις επιχειρήσεις.

Τρίτο σκοπό αποτελεί η διαφύλαξη και προώθηση ευγενούς ανταγωνισμού στον χρηματοοικονομικό τομέα. Αυτό απαιτεί την ύπαρξη κανονισμών ρύθμισης της αγοράς και την αποτροπή κερδοσκοπικών θέσεων από ορισμένα μονοπώλια.

Αρμόδιες Εποπτικές Αρχές, σύμφωνα με το νόμο 4557/2018, είναι η **Τράπεζα της Ελλάδος** για τα πιστωτικά ιδρύματα, τις ασφαλιστικές επιχειρήσεις και τους ασφαλιστικούς διαμεσολαβητές και η **Επιτροπή Κεφαλαιαγοράς** για τις εταιρείες επενδύσεων χαρτοφυλακίου, τις εταιρείες διαχείρισης Αμοιβαίων Κεφαλαίων και τις εταιρείες παροχής επενδυτικών υπηρεσιών.

Στόχος της εποπτείας που ασκεί η Τράπεζα της Ελλάδος, είναι η σταθερότητα και η εύρυθμη λειτουργία του χρηματοπιστωτικού συστήματος καθώς και η διαφάνεια των διαδικασιών και των όρων των συναλλαγών.

Οι εποπτικές αρμοδιότητες της Τράπεζας της Ελλάδος περιλαμβάνουν:

- τη διαρκή παρακολούθηση της εφαρμογής του πλαισίου εποπτείας της κεφαλαιακής επάρκειας, των κανόνων ρευστότητας και της συγκέντρωσης κινδύνων στο χρηματοπιστωτικό σύστημα, όπως επίσης και τη συνεργασία με την Ευρωπαϊκή Κεντρική Τράπεζα στο πλαίσιο του Ενιαίου Εποπτικού Μηχανισμού,
- την αξιολόγηση αιτημάτων για τη χορήγηση αδειών λειτουργίας, αδειών επέκτασης και λοιπών αιτημάτων και την εξέταση της τήρησης των προβλεπόμενων όρων και προϋποθέσεων,
- την εξέταση της συμμόρφωσης των εποπτευόμενων οντοτήτων, σε ατομική και ενοποιημένη βάση, προς το πλαίσιο που διέπει τη λειτουργία τους,
- την αξιολόγηση του συστήματος εταιρικής διακυβέρνησης (διοίκησης, εσωτερικού ελέγχου, διαχείρισης κινδύνων, κανονιστικής συμμόρφωσης, συμπεριλαμβανομένης της αναλογιστικής λειτουργίας των ασφαλιστικών και αντασφαλιστικών επιχειρήσεων),
- την παρακολούθηση της εφαρμογής της νομοθεσίας όσον αφορά στην προσυμβατική ενημέρωση πελατών, καθώς και σε θέματα διαφάνειας των διαδικασιών και των όρων των συναλλαγών, χωρίς να υπεισέρχεται όμως σε θέματα τυχόν καταχρηστικότητας, για τα οποία η Τράπεζα της Ελλάδος δεν έχει αρμοδιότητα, σύμφωνα με την ισχύουσα νομοθεσία,
- την επιτόπια επιθεώρηση (επιτόπιος έλεγχος) των εποπτευόμενων ιδρυμάτων.

Η Τράπεζα της Ελλάδος είναι αρμόδια για την Επιτόπια Επιθεώρηση (επιτόπιος έλεγχος / On-site inspection) του συνόλου των εποπτευόμενων ιδρυμάτων, η οποία αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της συνολικής εποπτικής διαδικασίας. Οι επιτόπιες επιθεωρήσεις έχουν ως στόχο τον έλεγχο της εφαρμογής του εποπτικού και κανονιστικού πλαισίου. Με βάση τις τεχνικές ελέγχου εξετάζονται, μεταξύ άλλων, οι επιμέρους κίνδυνοι, τα συστήματα εσωτερικού ελέγχου, τα επιχειρηματικά μοντέλα και θέματα εταιρικής διακυβέρνησης.

Οι επιτόπιοι έλεγχοι εφαρμόζουν προσέγγιση βάσει κινδύνων (risk-based approach) τηρώντας την αρχή της αναλογικότητας (proportionality principle) και αποσκοπώντας σε μια εις βάθος (intrusive) απεικόνιση της κατάστασης του εκάστοτε εποπτευόμενου ιδρύματος σε μία δεδομένη χρονική στιγμή (point-in-time), ενώ ταυτόχρονα διατηρούν έναν προσανατολισμένο προς το μέλλον χαρακτήρα (forward-looking). Πραγματοποιούνται σε περιοδική ή έκτακτη βάση, έχουν προκαθορισμένο αντικείμενο και χρονοδιάγραμμα και διενεργούνται στις εγκαταστάσεις της επιθεωρούμενης εταιρείας ή συναφούς νομικής οντότητας.

Το πρόγραμμα ελέγχων καθορίζεται σε ετήσια βάση και συμφωνείται κατά κύριο λόγο α) από τις αρμόδιες Διευθύνσεις του Ενιαίου Εποπτικού Μηχανισμού και τη Διεύθυνση Επιθεώρησης Εποπτευόμενων Εταιρειών για τα τέσσερα συστημικά πιστωτικά ιδρύματα και β) από τις αρμόδιες Διευθύνσεις της ΤτΕ αναφορικά με τα υπόλοιπα εποπτευόμενα ιδρύματα.

Επιπλέον αρμοδιότητες της Τράπεζας της Ελλάδος αποτελούν :

- ο έλεγχος της συμμόρφωσης των εποπτευόμενων ιδρυμάτων με τις υποχρεώσεις που απορρέουν από το θεσμικό πλαίσιο πρόληψης της νομιμοποίησης εσόδων από εγκληματικές δραστηριότητες (ξέπλυμα χρήματος), της χρηματοδότησης της τρομοκρατίας και της διασποράς των όπλων μαζικής καταστροφής.
- ο έλεγχος και η εποπτεία της ειδικής εκκαθάρισης των εποπτευόμενων οντοτήτων των οποίων έχει ανακαλέσει την άδεια λειτουργίας και έχει ορίσει ειδικό εκκαθαριστή.
- η επιβολή διοικητικών κυρώσεων και λοιπών διοικητικών μέτρων για παραβάσεις του νομικού και κανονιστικού πλαισίου την εφαρμογή του οποίου εποπτεύει.

Ο Ενιαίος Εποπτικός Μηχανισμός συστάθηκε με τον Κανονισμό (ΕΕ) 1024/2013 του Συμβουλίου για την ανάθεση ειδικών καθηκόντων στην Ευρωπαϊκή Κεντρική Τράπεζα (ΕΚΤ) σχετικά με την προληπτική εποπτεία των πιστωτικών ιδρυμάτων. Το πλαίσιο λειτουργίας του εξειδικεύεται μέσω του Κανονισμού (ΕΕ) 468/2014 της ΕΚΤ, που θεσπίζει το πλαίσιο συνεργασίας μεταξύ της ΕΚΤ, των εθνικών αρμόδιων αρχών και των εθνικών εντεταλμένων αρχών εντός του Ενιαίου Εποπτικού Μηχανισμού. Στον Ενιαίο Εποπτικό Μηχανισμό συμμετέχουν υποχρεωτικά τα κράτη-μέλη της ευρωζώνης, ενώ τα υπόλοιπα κράτη-μέλη της ΕΕ μπορούν, εφόσον το επιθυμούν, να συμμετέχουν μέσω της καθιέρωσης συνεργασίας των εθνικών εποπτικών αρχών τους με την ΕΚΤ.

Εντός του Ενιαίου Εποπτικού Μηχανισμού, η ΕΚΤ ανέλαβε την άμεση προληπτική εποπτεία των πιστωτικών ιδρυμάτων που εδρεύουν σε κράτη-μέλη της ευρωζώνης και χαρακτηρίζονται ως σημαντικά ιδρύματα, ενώ για τα λοιπά πιστωτικά ιδρύματα (λιγότερο σημαντικά) η άμεση εποπτεία ασκείται από τις εθνικές εποπτικές αρχές υπό την επίβλεψη της ΕΚΤ.

1.2 Η Εποπτεία των χρηματαγορών

Η πρόληψη ή η αντιμετώπιση των οικονομικών κρίσεων με τον πλέον ανώδυνο τρόπο για την οικονομία, είναι το κυριότερο αντικείμενο της τραπεζικής εποπτείας. Οικονομικές κρίσεις συμβαίνουν όταν υπάρχουν αναταραχές στο οικονομικό σύστημα που οδηγούν στην απότομη αύξηση της αρνητικής επιλογής και του ηθικού κινδύνου στις αγορές. Συνέπεια της κατάστασης αυτής είναι η αδυναμία των αγορών να κατευθύνουν κεφάλαια από τις πλεονασματικές μονάδες σε αποδοτικές επενδυτικές δραστηριότητες, το οποίο με τη σειρά του προκαλεί την συρρίκνωση της οικονομικής δραστηριότητας. Οι παράγοντες που προκαλούν τέτοιες κρίσεις διακρίνονται σε τέσσερις κατηγορίες:

- Αυξήσεις στα επιτόκια, που οδηγούν σε αύξηση του κινδύνου αρνητικής επιλογής. Ο λόγος είναι ότι ιδιώτες και εταιρείες με υψηλού κινδύνου επενδυτικά σχέδια επιθυμούν να δανειστούν ακόμη και με υψηλά επιτόκια, ενώ οι δανειστές είναι απρόθυμοι να συνάψουν δάνεια. Έτσι, η μείωση των δανειακών κεφαλαίων μειώνει τις επενδύσεις και κατά συνέπεια τη συνολική οικονομική δραστηριότητα.
- Αυξημένη αστάθεια στις οικονομικές αγορές, με αποτέλεσμα οι δανειστές να αδυνατούν να διακρίνουν την ποιότητα των δανειζόμενων και να γίνονται απρόθυμοι να δανείσουν, με τις ίδιες συνέπειες.
- Επιδράσεις της αξίας των περιουσιακών στοιχείων στους ισολογισμούς των εταιρειών. Οι μεταβολές στην αξία των περιουσιακών στοιχείων έχουν συνέπειες στην καθαρή θέση των εταιρειών. Έτσι, μειώσεις στις χρηματιστηριακές αξίες των εταιρειών, μειώσεις στο συνολικό επίπεδο τιμών (όταν ο δανεισμός είναι με σταθερά επιτόκια), υποτίμηση του εγχώριου νομίσματος (όταν ο δανεισμός είναι σε ξένα νομίσματα) και αυξήσεις επιτοκίων, έχουν ανεπιθύμητο αποτέλεσμα στην καθαρή θέση των δανειζόμενων, αυξάνοντας επίσης τα προβλήματα της αντίθετης επιλογής και του ηθικού κινδύνου.

- Προβλήματα στον τραπεζικό τομέα τα οποία λόγω της ασύμμετρης πληροφόρησης, μπορεί να οδηγήσουν σε πανικό, με τρομακτικές συνέπειες για την οικονομία. Επειδή οι τράπεζες είναι σημαντικός κρίκος στη λειτουργία όλου του οικονομικού συστήματος, προβλήματα στα μεγέθη των ισολογισμών και πιθανές πτωχεύσεις, μπορεί να οδηγήσουν τους καταθέτες, λόγω ασύμμετρης πληροφόρησης, σε μαζικές αναλήψεις, προκαλώντας σοβαρές διαταραχές στο πιστωτικό σύστημα και γενικότερα στην «πίστη» μιας οικονομίας.

Στη σημερινή εποχή τα χρηματοοικονομικά συστήματα αναπτύσσονται με έντονους ρυθμούς εξαιτίας της τεχνολογικής εξέλιξης, των θεσμικών αλλαγών, της αύξησης των διασυνοριακών συναλλαγών, καθώς και της ανάπτυξης των εργαλείων των μαθηματικών, της οικονομετρίας και της πληροφορικής. Το γεγονός αυτό κάνει επιτακτική την ανάγκη ύπαρξης ενός ευέλικτου πλαισίου, το οποίο θα επιδέχεται προσαρμογές ανάλογα με τις αλλαγές που συντελούνται στο διεθνές οικονομικό περιβάλλον. Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημάνουμε ότι είναι απαραίτητο να υπάρχει ισορροπία μεταξύ του θεσμικού πλαισίου και της συνολικής χρηματιστηριακής αγοράς χωρίς καταπάτηση του δημοσίου συμφέροντος. Επομένως οι παραπάνω διαπιστώσεις συνηγορούν σε ένα δίκαιο, προβλέψιμο και αποτελεσματικό θεσμικό πλαίσιο έτσι ώστε να μπορέσει να επιτευχθεί ορθολογική ανάληψη και διαχείριση των κινδύνων.

1.3 Μέτρα εποπτείας

Οι εποπτικές αρχές, προκειμένου να αποτρέψουν την εμφάνιση κρίσεων, έχουν στη διάθεσή τους τα προληπτικά μέτρα εποπτείας. Αυτά τα μέτρα είναι οι προϋποθέσεις για την ίδρυση και λειτουργία των τραπεζικών ιδρυμάτων, η επιβολή κεφαλαιακών απαιτήσεων για τους αναλαμβανόμενους κινδύνους, ο περιορισμός των χρηματοδοτικών ανοιγμάτων (ώστε να αποφεύγεται η συγκέντρωση των κινδύνων), η διεξαγωγή ελέγχων, η καταγραφή διαδικασιών και ορίων ανάληψης κινδύνων κ.ο.κ. Μερικά ακόμη μέτρα που μπορούν να εφαρμοστούν από τις εποπτικές αρχές, για την γενικότερη βελτίωση του χρηματοπιστωτικού συστήματος αλλά και την πρόληψη εμφάνισης και επέκτασης των κρίσεων είναι τα εξής:

- **Ανάκληση Άδειας Πιστωτικού Ιδρύματος**

  Ένας βασικός ρόλος των εποπτικών αρχών είναι η παρακολούθηση της συμμόρφωσης των τραπεζών με τους ισχύοντες κανόνες και η παρέμβασή τους σε περίπτωση που αυτό δεν συμβαίνει. Οι τρόποι παρέμβασης εξαρτώνται από τη νομοθεσία κάθε χώρας. Άλλες χώρες καθορίζουν λεπτομερώς τα γεγονότα που προκαλούν συγκεκριμένες δράσεις των εποπτικών αρχών, ενώ άλλες τους δίνουν την ευχέρεια να χειριστούν τις προκύπτουσες καταστάσεις. Ο δεύτερος τρόπος προϋποθέτει τη μη ύπαρξη πολιτικών παρεμβάσεων. Όταν το πιστωτικό ίδρυμα δεν συμμορφώνεται με τις υποδείξεις των εποπτικών αρχών, τότε αυτές πρέπει να έχουν το δικαίωμα να παρεμβαίνουν και να λάβουν τα κατάλληλα μέτρα, ώστε να μην κινδυνεύσει συνολικά το τραπεζικό σύστημα.

- **Δημιουργία και Γνωστοποίηση Στοιχείων για την Κατάσταση των Τραπεζών**

  Οι εποπτικές αρχές μπορούν να συμβάλλουν στη διαφάνεια του τραπεζικού συστήματος, δημοσιοποιώντας αφ' ενός τα στοιχεία που αφορούν στην κατάσταση των τραπεζών και αφ' ετέρου να βελτιώσουν την διαθεσιμότητα των στοιχείων για τις τράπεζες, το σύνολο του πιστωτικού συστήματος και την αγορά γενικότερα. Τα στοιχεία που μπορούν να παράσχουν οι εποπτικές αρχές είναι χρήσιμα εφ' όσον είναι ακριβή και έγκυρα. Η δημοσιοποίηση στοιχείων βέβαια είναι ευκολότερη όταν τα πιστωτικά ιδρύματα είναι γενικά υγιή και όταν οι επενδυτές είναι έμπειροι. Όταν υπάρχει πρόβλημα στο χρηματοπιστωτικό σύστημα, οι εποπτικές αρχές έχουν μεν την υποχρέωση ενημέρωσης του κοινού, αλλά υπάρχει ο κίνδυνος δημιουργίας πανικού, επομένως ο χειρισμός τέτοιου είδους περιπτώσεων πρέπει να είναι προσεκτικός.

- **Πληροφόρηση για την Κατάσταση των Αγορών**

  Η ύπαρξη στοιχείων για την κατάσταση των αγορών, μπορεί να προλάβει προβλήματα που δημιουργούνται στο χρηματοπιστωτικό σύστημα, λόγω της συγκέντρωσης των χαρτοφυλακίων των τραπεζών σε τομείς της οικονομίας, όπου ενδεχομένως υπάρχουν "φούσκες" (π.χ. αγορά ακινήτων, χρηματιστήριο). Αν υπάρχει πληροφόρηση για τις τρέχουσες συνθήκες της αγοράς, τότε οι εποπτικές αρχές έχουν τη δυνατότητα να λάβουν τα απαραίτητα μέτρα προκειμένου να προλάβουν το πρόβλημα.

- **Δίκτυα Προστασίας (Κρατική Εγγύηση/Ασφάλεια)**

  Ένα ακόμη μέτρο που λαμβάνεται για την πρόληψη των κρίσεων στο τραπεζικό σύστημα είναι η εγγύηση των καταθέσεων. Η ύπαρξη εγγύησης καταθέσεων σημαίνει ότι οι καταθέτες παίρνουν πίσω όλο τους το κεφάλαιο μέχρι το ποσό που είναι εγγυημένο, ότι και αν συμβεί στην τράπεζα τους. Ένα δεύτερο μέτρο είναι η δυνατότητα των τραπεζών να δανείζονται από την Κεντρική Τράπεζα (που σε αυτές τις περιπτώσεις λειτουργεί ως «δανειστής της τελευταίας προσφυγής») όταν αντιμετωπίζουν προβλήματα με τις αυξημένες απαιτήσεις των καταθετών τους. Σε άλλες περιπτώσεις τα κεφάλαια προς τα προβληματικά τραπεζικά ιδρύματα παρέχονται από το κράτος. Τέλος, το ίδιο το κράτος μπορεί να αναλάβει μια προβληματική τράπεζα, εγγυώμενο με αυτόν τον τρόπο τα χρήματα των καταθετών. Ταυτόχρονα, λόγω της παροχής εγγύησης παρουσιάζονται διάφορα προβλήματα. Υπάρχει ηθικός κίνδυνος, λόγω του ότι οι καταθέτες δεν υφίστανται απώλειες στην περίπτωση χρεοκοπίας. Έτσι, δεν επιβάλλουν πειθαρχία στις τράπεζες, όταν αυτές αναλαμβάνουν υπερβολικούς κινδύνους, με αποτέλεσμα την ανάληψη μεγαλύτερων κινδύνων από τις τράπεζες. Παρουσιάζεται επίσης το πρόβλημα της αντίθετης επιλογής, επειδή οι καταθέτες δεν έχουν λόγο να ελέγξουν τις δραστηριότητες της τράπεζάς τους. Επομένως, αν απουσίαζε η κρατική παρέμβαση, ο χώρος των τραπεζών θα ήταν ιδανικό πεδίο για τις δραστηριότητες κερδοσκόπων που θα μπορούσαν πολύ εύκολα να καλύψουν απάτες και καταχρήσεις.

1.4 Η εποπτεία της αγοράς σήμερα

1.4.1 Εισαγωγή

Οι κρίσεις του πρόσφατου παρελθόντος στον τραπεζικό τομέα δημιούργησαν σκεπτικισμό για την δυνατότητα των εποπτικών αρχών να προλάβουν πιθανές πτωχεύσεις τραπεζικών ιδρυμάτων. Η αρχική αντίδραση στις οικονομικές κρίσεις ήταν οι αυστηρότεροι έλεγχοι και η επιβολή νέων κανόνων. Σήμερα, με αφορμή την αποτυχία των εποπτικών αρχών να εμποδίσουν τις πτωχεύσεις κάποιων τραπεζών, η ανάγκη για περισσότερη εποπτεία αμφισβητείται και πολλοί συνηγορούν υπέρ μίας νέας εποχής, μη εποπτευόμενης τραπεζικής δραστηριότητας. Η κύρια όμως αποστολή της προληπτικής εποπτείας δεν είναι να εμποδίσει οποιαδήποτε χρεοκοπία, αλλά να διορθώσει τις δύο βασικές ατέλειες της αγοράς που είναι:

- η αδυναμία των καταθετών/επενδυτών να παρακολουθήσουν πώς τα πιστωτικά ιδρύματα χρησιμοποιούν τα χρήματά τους και
- η αλυσιδωτή αντίδραση που μπορεί να δημιουργηθεί, αν η αφερεγγυότητα ενός πιστωτικού ιδρύματος επηρεάσει και υγιή πιστωτικά ιδρύματα

Έχουν υπάρξει περιπτώσεις κατά τις οποίες η εποπτεία δεν έχει επιτύχει τους στόχους της, αλλά απεναντίας, δημιούργησε στρεβλώσεις στους μηχανισμούς της αγοράς και επέβαλλε υπερβολικό κόστος στους συμμετέχοντες στην αγορά ή και στην οικονομία γενικότερα. Τα τελευταία χρόνια, οι εποπτικές αρχές έχουν αντιληφθεί αυτούς τους κινδύνους, με αποτέλεσμα την τάση της εποπτείας να γίνει «φιλικότερη» προς την αγορά, σκοπεύοντας στην ενίσχυση της ικανότητας της αγοράς να αναπτύξει η ίδια ικανοποιητικές ισορροπίες, αντί να εμποδίσει ανεπιθύμητες συμπεριφορές με λήψη αναγκαστικών μέτρων.

1.4.2 Χορήγηση αδειών λειτουργίας στις τράπεζες

Λόγω των καινοτομιών στον τομέα παροχής χρηματοπιστωτικών υπηρεσιών, ο χαρακτηρισμός μιας επιχείρησης ως αποκλειστικά τραπεζικής δεν είναι πλέον τόσο ξεκάθαρος. Η είσοδος επιχειρήσεων στον τραπεζικό χώρο που προσφέρουν προϊόντα όμοια με τα τραπεζικά και η χρήση ηλεκτρονικών οδών για την προώθησή τους, έχει προκαλέσει συζήτηση για το αν είναι πλέον απαραίτητος ο αυστηρός έλεγχος για την έναρξη λειτουργίας ενός πιστωτικού ιδρύματος. Στο ζήτημα αυτό οι απόψεις διίστανται. Η αυξανόμενη φιλελευθεροποίηση των αγορών έχει δημιουργήσει ένα ισχυρό ρεύμα, μεταξύ των οικονομολόγων κυρίως, οι οποίοι θεωρούν ότι η εποπτεία στον τραπεζικό χώρο εμποδίζει την ανάπτυξη των χρηματοπιστωτικών αγορών. Για το λόγο αυτό πιστεύουν ότι η διαδικασία χορήγησης αδειών λειτουργίας θα πρέπει να καταργηθεί.

Όμως, η εμπειρία τραπεζικών κρίσεων σε χώρες με χαλαρή τραπεζική νομοθεσία και εποπτεία, έχει δημιουργήσει σοβαρές αμφιβολίες για τις δυνατότητες αυτορύθμισης του τραπεζικού συστήματος. Είναι γι' αυτόν το λόγο που έχει ακόμα και σήμερα αρκετούς υποστηρικτές η εναλλακτική προσέγγιση, που θεωρεί ότι οι ρυθμιστικοί κανόνες λειτουργίας των τραπεζών προφυλάσσουν το δημόσιο συμφέρον, ενώ ταυτόχρονα παραμένει φιλική προς την αγορά. Η προσέγγιση αυτή αναγνωρίζει τις δυσκολίες και το επιπλέον κόστος που δημιουργεί η τραπεζική εποπτεία στην ανάπτυξη των χρηματοπιστωτικών αγορών και γι' αυτό επικεντρώνει το ενδιαφέρον της στους κινδύνους της παρεμβολής των κανονισμών στην πορεία των καινοτομιών και υποστηρίζει την αυτορύθμιση, αναγνωρίζοντας τον παρεμβατικό ρόλο των αρχών στις περιπτώσεις που προκύπτουν συστημικά προβλήματα.

Τα επιχειρήματα που υποστηρίζουν την κατάργηση της χορήγησης άδειας λειτουργίας από έναν κεντρικό «δημόσιο» φορέα εποπτείας, φαίνεται να παρερμηνεύουν το ρόλο του φορέα αυτού. Οι έλεγχοι σχετίζονται κυρίως με την εκπλήρωση των ελάχιστων κεφαλαιακών απαιτήσεων και τη διαπίστωση της καταλληλότητας των μετόχων και διοικητικών στελεχών του υπό ίδρυση πιστωτικού ιδρύματος και δεν αποτελούν εμπόδιο για κανέναν από τους υγιείς υποψήφιους που επιθυμούν να εισέλθουν στην αγορά. Αν όμως ίσχυε η αυτορύθμιση στην αδειοδότηση, το πιθανότερο είναι ότι οι δυνατότητες εισόδου στον τραπεζικό κλάδο θα γίνονταν πολύ πιο δύσκολες γιατί τα ήδη υπάρχοντα πιστωτικά ιδρύματα θα είχαν ισχυρό συμφέρον να εμποδίσουν την είσοδο νέων ανταγωνιστών στην αγορά.

Ένας άλλος κίνδυνος που προκύπτει όταν ασκείται τραπεζική δραστηριότητα χωρίς διαδικασία χορήγησης άδειας και συνεπώς χωρίς εποπτεία, είναι η αδυναμία της Κεντρικής Τράπεζας να αντιμετωπίσει συστημικές διαταραχές, αφού η παροχή ρευστότητας και το δίκτυο προστασίας του κοινού διευρύνεται υπερβολικά. Αυτό δημιουργεί πρόβλημα ηθικού κινδύνου στο κοινό και κυρίως στην Κεντρική Τράπεζα, που εκ των πραγμάτων προσπαθεί να τα αντιμετωπίσει με επιπλέον κανονισμούς και εποπτεία. Αν η εξέλιξη αυτή αγνοηθεί, τότε θα αυξηθεί ο αναλαμβανόμενος κίνδυνος στο χρηματοπιστωτικό σύστημα συνολικά. Τέλος, η χαλάρωση της διαδικασίας αδειοδότησης ενδεχομένως να δημιουργήσει πρόβλημα εμπιστοσύνης για το χρηματοπιστωτικό σύστημα από την πλευρά του κοινού, εξέλιξη που θα αποτελούσε απειλή για τη σταθερότητά του.

Η δραστηριότητα που κάνει τη θέση των τραπεζών τόσο ιδιαίτερη στο οικονομικό περιβάλλον και για την οποία απαιτείται άδεια, είναι η διαχείριση χρηματοοικονομικών συμφωνιών και αξιόγραφων, προκειμένου να ξεπεραστεί η ασυμμετρία πληροφόρησης δανειστών-δανειζόμενων, μια ασυμμετρία δομικής μορφής που υφίσταται συνεχώς, παρά την αυξανόμενη τεχνολογική πρόοδο. Η δραστηριότητα αυτή σχετίζεται με την άμεση παροχή ρευστότητας και περιλαμβάνει συστημικό κίνδυνο, αφού αστάθεια σε μια τράπεζα μπορεί να δημιουργήσει συνολική κρίση μέσω «μόλυνσης» του συστήματος. Αυτός είναι και ο βασικός λόγος ύπαρξης του δικτύου ασφαλείας (με τη μορφή του ταμείου εγγύησης καταθέσεων και της ανάληψης του ρόλου του δανειστή τελευταίας προσφυγής “lender of last resort” από τις Κεντρικές Τράπεζες), αλλά και των κανονισμών της εποπτείας. Προκειμένου όμως να υπάρξει σωστή εποπτεία της δραστηριότητας που περιγράψαμε παραπάνω, πρέπει να υπάρχει μία διαδικασία προσδιορισμού που την ασκεί και αποτελεί τον κύριο σκοπό της χορήγησης άδειας λειτουργίας στις τράπεζες.

1.4.3 **Τραπεζικός ανταγωνισμός**

Η σύγχρονη στάση στο ερώτημα, “κατά πόσο ο τραπεζικός ανταγωνισμός είναι περισσότερο ή λιγότερο επωφελής;”, έχει διαφοροποιηθεί σε σχέση με παλαιότερες εποχές. Η διαφοροποίηση αυτή άρχισε να διαφαίνεται από τα μέσα της δεκαετίας του 1970, με την ανάδειξη, όλο και πιο συχνά, των πλεονεκτημάτων που φέρνει ο ανταγωνισμός στην ανάπτυξη των χρηματοπιστωτικών αγορών. Η μετατόπιση στην αντίληψη αυτή είναι φανερή:

Στον τομέα της εποπτείας: Στη σημερινή εποχή η εποπτεία βασίζεται στην άποψη της ενδυνάμωσης του συστήματος μέσω του ανταγωνισμού και της επικράτησης των ισχυρότερων παικτών, ενώ δε θέτει περιορισμούς στην αποδοτικότερη, (κατά την άποψη των τραπεζών) τοποθέτηση των κεφαλαίων, ελέγχει όμως τους αναλαμβανόμενους κινδύνους.

Στην νομισματική πολιτική: Από ένα διοικητικό μηχανισμό μετάδοσης της νομισματικής πολιτικής στον πιστωτικό τομέα από την Κεντρική Τράπεζα, έχουμε περάσει πλέον σε ένα αποκεντρωμένο μηχανισμό λήψης αποφάσεων από οικονομικούς και χρηματιστικούς φορείς, που λειτουργούν μεταξύ της Κεντρικής Τράπεζας και της πραγματικής οικονομίας (ιδιαίτερα τις τράπεζες), με γνώμονα το κέρδος.

Στην πολιτική ανταγωνισμού και την εποπτεία των αγορών αξιόγραφων: Κατά το παρελθόν, στις χώρες που υπήρχε νομοθεσία για τον ανταγωνισμό, οι αντίστοιχες επιτροπές δεν είχαν αρμοδιότητα για τις τράπεζες, ενώ οι υποχρεώσεις γνωστοποίησης στοιχείων για τις εισηγμένες σε χρηματιστήρια τράπεζες δεν ήταν ίδιες με των άλλων εταιρειών. Σήμερα, οι τράπεζες αντιμετωπίζονται όπως όλες οι άλλες εταιρείες και με τις ίδιες απαιτήσεις διαφάνειας.

1.4.4 Αγορές χρεογράφων και τραπεζικές εργασίες

Οι αγορές χρεογράφων απέκτησαν σταδιακά αυξανόμενο ρόλο και μέγεθος και συνδέθηκαν στενά με τις τραπεζικές εργασίες. Σε αυτό βοήθησαν εξελίξεις, όπως η τιτλοποίηση απαιτήσεων, η δημιουργία εταιρειών επενδύσεων που απευθύνονται στο ευρύ επενδυτικό κοινό (όπως τα αμοιβαία κεφάλαια), και τα νέα σύνθετα χρηματοοικονομικά προϊόντα για τη διαχείριση κινδύνων. Το αποτέλεσμα αυτής της διασύνδεσης έχει οπωσδήποτε θετικές επιδράσεις, αλλά παρουσιάζει και αυξημένους κινδύνους τόσο για τα επιμέρους τραπεζικά ιδρύματα, όσο και για το σύνολο του χρηματοπιστωτικού συστήματος. Έτσι, η αποτελεσματική διαχείριση των κινδύνων από τη μεριά των πιστωτικών ιδρυμάτων, αλλά και ο σωστός προσδιορισμός τους από τις εποπτικές αρχές, είναι ένα σημείο καθοριστικής σημασίας για τη διατήρηση της σταθερότητας του συστήματος.

Οι κανονισμοί και η εποπτεία στην τραπεζική δραστηριότητα αποβλέπουν κυρίως στη διατήρηση της σταθερότητας του χρηματοπιστωτικού συστήματος. Στον τομέα της αγοράς χρεογράφων η νομοθεσία στοχεύει στην επαρκή πληροφόρηση των επενδυτών και τη διαφάνεια των συναλλαγών. Η διασύνδεση όμως των δύο αυτών στόχων, έχει ως συνέπεια την αμοιβαία επωφελή υιοθέτηση κανόνων προληπτικής εποπτείας από τον τραπεζικό τομέα σε αυτόν της αγοράς χρεογράφων, αλλά και απαιτήσεων για διαφάνεια στις συναλλαγές από την αγορά χρεογράφων στον τραπεζικό κλάδο. Παρόλο που το σημερινό πλαίσιο κανόνων για τις εταιρείες επενδύσεων είναι επαρκές, η αποτελεσματικότητά του πρέπει να παρακολουθείται στενά και να προσαρμόζεται στις εξελίξεις, ώστε να παραμείνει επαρκές και στο μέλλον. Η έμφαση πρέπει να δοθεί στους κινδύνους που προκύπτουν από τις σχετικές δραστηριότητες, καθώς αυτό σημαίνει στενή συνεργασία, τόσο μεταξύ των εποπτικών αρχών των αγορών χρεογράφων, όσο και μεταξύ αυτών και των κεντρικών τραπεζών σε εθνικό και ευρωπαϊκό επίπεδο.

1.4.5 Εναλλακτικές λύσεις για την εποπτεία

Ένα ερώτημα που εγείρεται, σχετίζεται με την αναγκαιότητα ύπαρξης μίας ενιαίας ή πολλών ξεχωριστών εποπτικών αρχών, για κάθε τμήμα του χρηματοπιστωτικού συστήματος. Η ύπαρξη μίας αρχής είναι αποτελεσματική απέναντι στην κατάργηση των διαφορών των τομέων του χρηματοπιστωτικού συστήματος, αλλά κάνει το αντικείμενο εποπτείας ευρύ και πολύπλοκο. Αντίθετα, η ύπαρξη εξειδικευμένων αρχών για κάθε τομέα απαιτεί καλό συντονισμό μεταξύ τους. Ένα άλλο σημαντικό ερώτημα αναφέρεται κυρίως στην εποπτεία των πιστωτικών ιδρυμάτων και σχετίζεται με το κατά πόσο αυτή πρέπει να ανατίθεται στην Κεντρική Τράπεζα. Η συλλογιστική της ανάθεσης της εποπτείας σε άλλο οργανισμό, βασίζεται στον ηθικό κίνδυνο που υπάρχει όταν συσχετίζονται η άσκηση νομισματικής πολιτικής και τραπεζικής εποπτείας.

Στις χώρες της ζώνης του Ευρώ, η Κεντρική Τράπεζα είναι υπεύθυνη για την άσκηση της νομισματικής πολιτικής, αλλά όχι για την εποπτεία του τραπεζικού συστήματος. Γι' αυτόν το λόγο απαιτείται στενή και απρόσκοπτη συνεργασία μεταξύ της Ευρωπαϊκής Κεντρικής Τράπεζας και των εθνικών εποπτικών αρχών. Η αδυναμία άσκησης ενιαίας εποπτικής πολιτικής και έλλειψης ενός κεντρικού φορέα εποπτείας των τραπεζικών συστημάτων των χωρών, είναι δυνατό να δημιουργήσει σημαντικά προβλήματα στη λειτουργία και στην άσκηση της νομισματικής πολιτικής από την Ευρωπαϊκή Κεντρική Τράπεζα, ιδιαίτερα σε περιόδους κρίσεων. Στις συνθήκες αυξανόμενης παγκοσμιοποίησης και απελευθέρωσης των χρηματαγορών, η ύπαρξη απλώς ενιαίων κανόνων εποπτείας των εθνικών τραπεζικών συστημάτων δεν αποτελεί εγγύηση για την ομαλή και φερέγγυα λειτουργία του πιστωτικού συστήματος. Απαιτείται επίσης η συνεργασία και ο συντονισμός των Κεντρικών Τραπεζών, έτσι ώστε να υπάρχει ένας «συλλογικός επόπτης» του πιστωτικού συστήματος στη ζώνη του Ευρώ, που να εγγυάται τη φερεγγυότητα του όλου συστήματος. Στο πλαίσιο αυτό και στη διαδικασία πειθαρχίας των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων που ασκείται μέσω της αγοράς, εμπλέκονται δύο παράγοντες:

- Οι μέτοχοι, οι οποίοι έχουν τη δυνατότητα αυξημένων ή μειωμένων αποδόσεων ανάλογα με τις επιδόσεις της εταιρείας. Οι μέτοχοι έχουν ένα διαρκές δικαίωμα στις ταμειακές ροές της εταιρείας. Όσο το πιστωτικό ίδρυμα πλησιάζει την χρεοκοπία, οι μέτοχοι δεν επιθυμούν την ανάληψη υψηλού κινδύνου, γιατί αυτό θέτει σε κίνδυνο τα μελλοντικά τους εισοδήματα. Όταν όμως, η εταιρεία είναι ουσιαστικά (άλλα άτυπα) χρεοκοπημένη, οι μέτοχοι δεν έχουν τίποτα να χάσουν και επιθυμούν την ανάληψη κινδύνων από τη διοίκηση, ελπίζοντας σε πιθανή αντιστροφή της κατάστασης.
- Οι δανειστές. Στους τελευταίους περιλαμβάνονται οι πιστωτές, των οποίων οι απαιτήσεις δεν είναι εξασφαλισμένες και οι καταθέτες, των οποίων οι καταθέσεις δεν είναι εγγυημένες. Αυτή η κατηγορία αναλαμβάνει και τον πιστωτικό κίνδυνο που σχετίζεται με το επίπεδο ανάληψης κινδύνου της εταιρείας που δανείζουν. Όσο για τους πιστωτές, αυτοί είναι απαραίτητο να γνωρίζουν τον αναλαμβανόμενο κίνδυνο

ώστε να τον τιμολογήσουν σωστά, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Σε περίπτωση που αλλάξει το επίπεδο του αναλαμβανόμενου κινδύνου, επαναπροσδιορίζουν την απαιτούμενη απόδοση ή αρνούνται επιπλέον δανεισμό αν δεν υπάρχουν οι απαραίτητες διασφαλίσεις (collaterals).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΣ – ΕΝΤΑΣΗ ΑΘΕΤΗΣΗΣ

2.1 Εισαγωγή

Ο πιστωτικός κίνδυνος πηγάζει από την πιθανότητα ο δανειολήπτης να μην είναι σε θέση να ανταποκριθεί στις δανειακές του υποχρεώσεις. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε διαφορετικές προσεγγίσεις για την εκτίμηση της πιθανότητας αθέτησης και θα ερμηνεύσουμε την κύρια διαφορά ανάμεσα στις πιθανότητες αθέτησης χωρίς κίνδυνο (risk-neutral) και στις πραγματικές πιθανότητες αθέτησης (real-world).

Οι οίκοι αξιολόγησης (Moody's, S&P, Fitch κ.α) ταξινομούν τις επιχειρήσεις σε διαβαθμισμένες κατηγορίες σύμφωνα με την πιστοληπτική ικανότητα των εταιρικών ομολόγων του εκάστοτε εκδότη. Επομένως η πιθανότητα αθέτησης σε κάθε κατηγορία προκύπτει από την σχετική συχνότητα εμφάνισης του αντίστοιχου ενδεχομένου σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (π.χ. χρεοκοπία εταιρειών Baa σε ένα έτος).

2.2 Πιθανότητα αθέτησης από ιστορικά δεδομένα

Οι Οίκοι πιστοληπτικής αξιολόγησης είναι σε θέση να βαθμολογήσουν και να αξιολογήσουν την πιστοληπτική διαβάθμιση χρηματοοικονομικών προϊόντων, όπως για παράδειγμα είναι τα εταιρικά ομόλογα, των οποίων η αξία εμπεριέχει πιστωτικό κίνδυνο.

Ο Πίνακας 2.1 είναι ένας χαρακτηριστικός πίνακας που εκδίδεται και δημοσιοποιείται από τους οίκους αξιολόγησης. Απεικονίζει τις πιθανότητες αθέτησης ομολόγων με συγκεκριμένη πιστοληπτική βαθμίδα κατά τη διάρκεια μιας εικοσαετίας. Για παράδειγμα, ένα ομόλογο Baa έχει 0.177% πιθανότητα αθέτησης στο πρώτο έτος και 0.495% πιθανότητα αθέτησης μέχρι το τέλος του δεύτερου έτους. Η πιθανότητα αθέτησης του ομολόγου κατά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου έτους μπορεί να εξαχθεί από τον πίνακα. Για παράδειγμα, ένα ομόλογο βαθμίδας Baa χρεοκοπεί στη διάρκεια του δεύτερου έτους με πιθανότητα 0.495% - 0.177%= 0.318%.

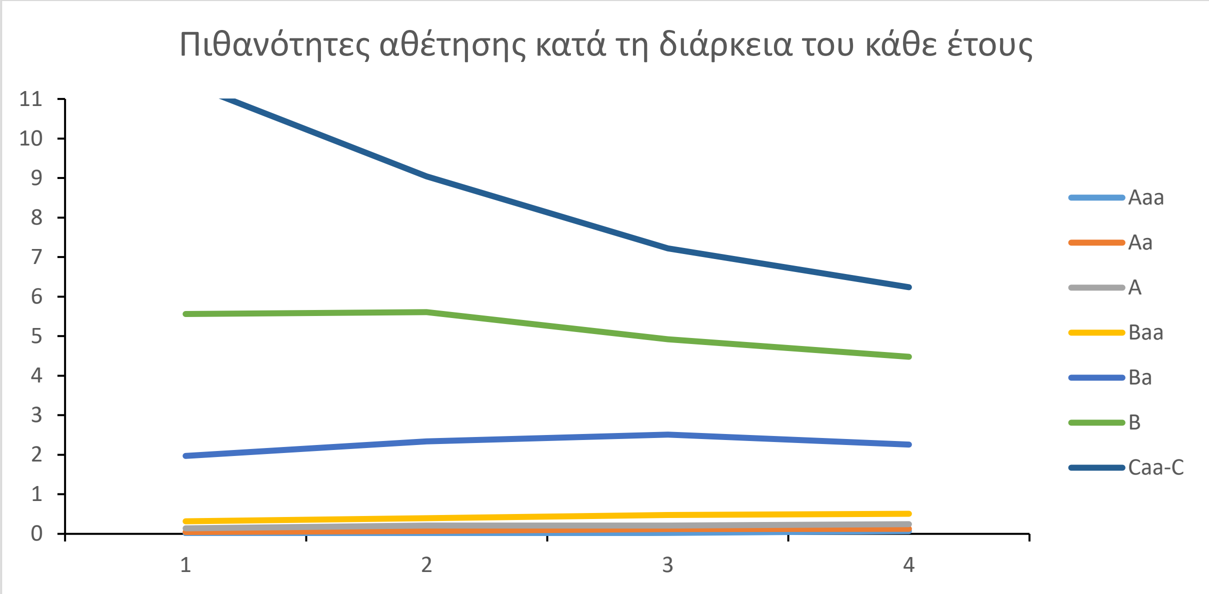
Χρόνος	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*7*	*10*	*15*	*20*
Aaa	0.000	0.013	0.013	0.037	0.106	0.247	0.503	0.935	1.104
Aa	0.022	0.069	0.139	0.256	0.383	0.621	0.922	1.756	3.135
A	0.063	0.203	0.414	0.625	0.870	1.441	2.480	4.255	6.841
Baa	0.177	0.495	0.894	1.369	1.877	2.927	4.740	8.628	12.483
Ba	1.112	3.083	5.424	7.934	10.189	14.117	19.708	29.172	36.321
B	4.051	9.608	15.216	20.134	24.613	32.747	41.947	52.217	58.084
Caa-C	16.448	27.867	36.908	44.128	50.366	58.302	69.483	79.178	81.248

Πίνακας 2.1.Μέσες αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης (%) 1970-2012 from Moody's *Hull J.C. (2015).*

Παρατηρώντας τις τιμές του πίνακα για ομόλογα επενδυτικής βαθμίδας, η πιθανότητα αθέτησης σε ένα έτος είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου. Για παράδειγμα για ομόλογο βαθμίδας A οι πιθανότητες αθέτησης κατά τη διάρκεια των ετών 0 – 5, 5 – 10, 10 – 15 και 15 – 20 είναι 0.870%, 2.48 – 0.87=1.61%, 4.255 – 2.48=1,775% και 6.841 – 4.255=2.586% αντίστοιχα. Αυτό συμβαίνει γιατί ο εκδότης ενός τέτοιου ομολόγου θεωρείται αρχικά πιστωτικά αξιόπιστος. Όμως όσο περνάει ο χρόνος, τόσο μεγαλώνει η πιθανότητα η φερεγγυότητά του να ελαττωθεί. Στον Πίνακα 2.2 δίνονται οι πιθανότητες αθέτησης κατά τη διάρκεια κάθε έτους την πρώτη πενταετία και το αντίστοιχο γράφημα των πιστοληπτικών διαβαθμίσεων.

Διαφορές μεταξύ πιθανοτήτων αθέτησης (%)					
Χρόνος	**1ο**	**2ο-1ο**	**3ο-2ο**	**4ο-3ο**	**5ο-4ο**
Aaa	0.000	0.013	0.000	0.024	0.069
Aa	0.022	0.047	0.070	0.117	0.127
A	0.063	0.140	0.211	0.211	0.245
Baa	0.177	0.318	0.399	0.475	0.508
Ba	1.112	1.971	2.341	2.510	2.255
B	4.051	5.557	5.608	4.918	4.479
Caa-C	16.448	11.419	9.041	7.220	6.238

Πίνακας 2.2. Πιθανότητες αθέτησης (%) κατά τη διάρκεια των πέντε πρώτων ετών



Σχήμα 2.1 Πιθανότητες αθέτησης κατά τη διάρκεια του κάθε έτους

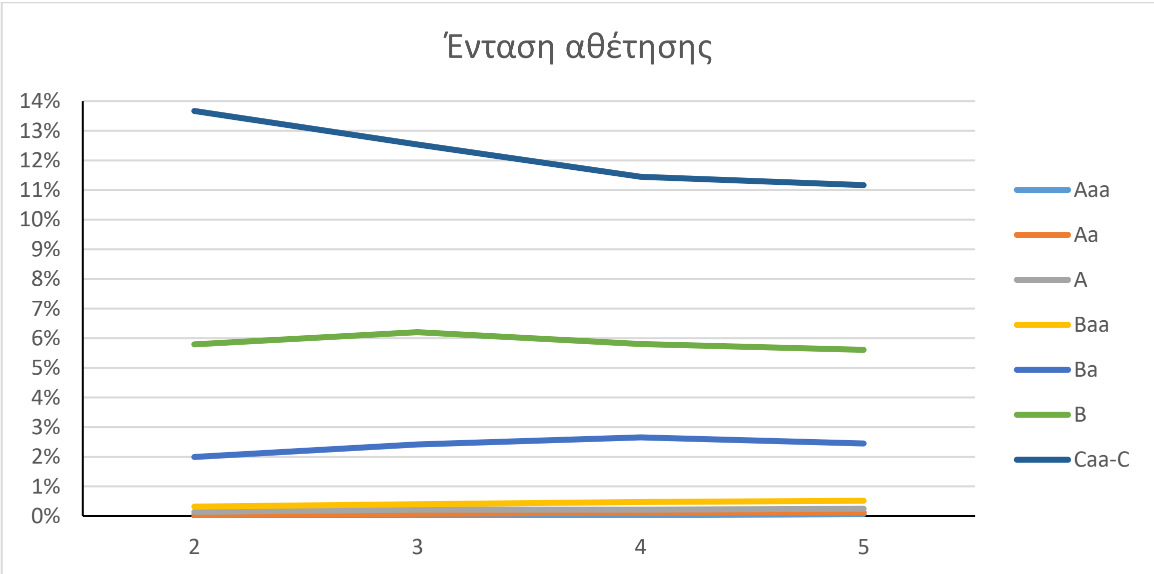
Από την άλλη, σε ομόλογα με χαμηλή πιστοληπτική βαθμίδα, η πιθανότητα αθέτησής τους είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου. Ο λόγος είναι ότι τα πρώτα 1-2 έτη είναι το κρίσιμο διάστημα για να συμβεί πιστωτικό γεγονός. Όσο περνάει ο χρόνος, τόσο μεγαλώνει η πιθανότητα βελτίωσης της «οικονομικής υγείας» του εκδότη.

Μία άλλη ποσότητα η οποία εμπλέκεται στην έννοια του πιστωτικού κινδύνου είναι η ένταση αθέτησης (default intensity ή hazard rate). Αυτή ορίζεται ως η δεσμευμένη πιθανότητα αθέτησης κατά την επόμενη χρονική περίοδο, με δεδομένο ότι δεν πραγματοποιήθηκε αθέτηση μέχρι εκείνη την στιγμή. Για παράδειγμα για ένα ομόλογο βαθμίδας Caa και κάτω, η πιθανότητα αθέτησης στο τρίτο έτος είναι 36.908 – 27.867=9.041%. Η πιθανότητα ότι το ομόλογο δε γίνεται default μέχρι το τέλος του δεύτερου έτους είναι 100 – 27.867=72.133%. Διαιρώντας τις δυο παραπάνω πιθανότητες προκύπτει η ένταση αθέτησης για το τρίτο έτος $\frac{9.041}{72.133} = 12.53\%$. Στον Πίνακα 2.2 παρουσιάζεται η ένταση αθέτησης για το δεύτερο και τρίτο έτος όπως προκύπτουν από την επεξεργασία του Πίνακα 2.1.

Χρόνος	1	2	3	4	5	Ένταση 2ο έτος	Ένταση 3ο έτος	Ένταση 4ο έτος	Ένταση 5ο έτος
Aaa	0.000	0.013	0.013	0.037	0.106	0.01%	0.00%	0.02%	0.07%
Aa	0.022	0.069	0.139	0.256	0.383	0.05%	0.07%	0.12%	0.13%
A	0.063	0.203	0.414	0.625	0.870	0.14%	0.21%	0.21%	0.25%
Baa	0.177	0.495	0.894	1.369	1.877	0.32%	0.40%	0.48%	0.52%
Ba	1.112	3.083	5.424	7.934	10.189	1.99%	2.42%	2.65%	2.45%
B	4.051	9.608	15.216	20.134	24.613	5.79%	6.20%	5.80%	5.61%
Caa-C	16.448	27.867	36.908	44.128	50.366	13.67%	12.53%	11.44%	11.16%

Πίνακας *2.3.* Ένταση αθέτησης (%) *(*Moody's*)*

Η ένταση αθέτησης ανά πιστοληπτική βαθμίδα του προϊόντος παρουσιάζεται στο επόμενο γράφημα



Σχήμα 2.2 Ένταση αθέτησης

2.3 Εκτίμηση της πιθανότητας αθέτησης από τα spread των ομολόγων

Ο πίνακας 2.1 που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο περιγράφει έναν από τους τρόπους εκτίμησης της πιθανότητας αθέτησης. Μια άλλη προσέγγιση είναι να μελετήσουμε τις αποδόσεις των spread των ομολόγων. Το spread ενός ομολόγου είναι το υπερβάλλον της υποσχόμενης απόδοσής του έναντι του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου. Η επιπλέον απόδοση αποτελεί ένα είδος αποζημίωσης για τον επενδυτή ο οποίος αναλαμβάνει τον κίνδυνο σε περίπτωση χρεοκοπίας.

Έστω ότι το ετήσιο spread ενός ομολόγου διάρκειας T ετών είναι $s(T)$. Αυτό σημαίνει ότι ο μέσος ρυθμός απώλειας της αξίας του ομολόγου μεταξύ των χρονικών στιγμών 0 και T θα είναι περίπου $s(T)$. Επομένως αν συμβολίσουμε με R το εκτιμώμενο ποσοστό ανάκτησης και $\overline{\lambda}(T)$ την μέση ένταση αθέτησης στο διάστημα $(0,T)$, θα ισχύει η σχέση

$$\overline{\lambda}(T)\cdot(1-R)=s(T)\Rightarrow\overline{\lambda}(T)=\frac{s(T)}{1-R}.$$

Παράδειγμα 1: Έστω ομόλογα διάρκειας ενός, δυο, τριών ετών με αντίστοιχα spreads 1,50%, 1,80%, 1,95% αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι το ποσοστό ανάκτησης σε περίπτωση αθέτησης είναι 40%. Τότε η μέση ένταση αθέτησης για το πρώτο έτος είναι

$$\frac{0.0150}{1-0.4}=0.025=2.5\% \text{ ετησίως.}$$

Παρόμοια, η μέση ένταση αθέτησης για τα πρώτα δυο έτη είναι

$$\frac{0.018}{1-0.4}=0.03=3\% \text{ ετησίως,}$$

ενώ η μέση ένταση αθέτησης στα τρία έτη είναι

$$\frac{0.0195}{1-0.4}=0.0325=3.25\%.$$

Δηλαδή χρησιμοποιούμε το spread του ομολόγου με την μικρότερη ληκτότητα (maturity) για να υπολογίσουμε την μέση ένταση αθέτησης στο πρώτο έτος, το spread του ομολόγου με την αμέσως μεγαλύτερη ληκτότητα για τον υπολογισμό της έντασης αθέτησης στο δεύτερο έτος κ.ο.κ.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι η μέση ένταση αθέτησης για το δεύτερο έτος είναι $2\cdot0.03-1\cdot0.025=0.035=3.5\%$ και η μέση ένταση αθέτησης για το τρίτο έτος είναι $3\cdot3.25-2\cdot3=3.75\%$. Για ακριβέστερο υπολογισμό μπορούμε να αντιστοιχίσουμε την ένταση αθέτησης με τις τιμές των ομολόγων όπως παρουσιάζεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2: Υποθέτουμε ότι το (ετήσιο) επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι 5% για όλες τις ληκτότητες ομολόγων (maturity) και ότι τα ομόλογα ενός έτους, δυο και τριών ετών έχουν αντίστοιχα αποδόσεις (yields) 6.5%, 6.8% και 6.95% ώστε τα spreads να είναι ίδια με αυτά του παραδείγματος 1. Θεωρούμε επίσης ότι κάθε ομόλογο έχει ονομαστική αξία 100€ και δίνει κουπόνι 8% ετησίως. Αυτό σημαίνει ότι οι χρηματοροές για το ομόλογο διάρκειας ενός έτους είναι 4 μονάδες στο τέλος του πρώτου εξαμήνου και 100+4=104 στο τέλος του δεύτερου εξαμήνου. Λαμβάνοντας υπόψη ότι έχουμε συνεχή ανατοκισμό, η αξία του ομολόγου στην λήξη του θα είναι $4\cdot e^{-0.5\cdot 0.065}+104\cdot e^{-1\cdot 0.065}=101.33$. Με ανάλογο τρόπο η αξία του διετούς και τριετούς ομολόγου στη λήξη του είναι 101.99 και 102.47 αντίστοιχα. Αν το ομόλογο διάρκειας ενός έτους είχε απόδοση το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου 5%, η αξία του στη λήξη θα ήταν $4\cdot e^{-0.5\cdot 0.05}+104\cdot e^{-1\cdot 0.05}=102.83$. Εργαζόμενοι με ανάλογο τρόπο οι αξίες των διετών και τριετών ομολόγων στη λήξη τους θα είναι

$$4\cdot e^{-0.5\cdot 0.05}+4\cdot e^{-1\cdot 0.05}+4\cdot e^{-1.5\cdot 0.05}+104\cdot e^{-2\cdot 0.05}=105.52$$

$$4\cdot e^{-0.5\cdot 0.05}+4\cdot e^{-1\cdot 0.05}+4\cdot e^{-1.5\cdot 0.05}+4\cdot e^{-2\cdot 0.05}+4\cdot e^{-2.5\cdot 0.05}+104\cdot e^{-3\cdot 0.05}=108.08$$

Αυτό σημαίνει ότι η παρούσα αξία των αναμενόμενων απωλειών για το ομόλογο διάρκειας ενός έτους είναι $102.83-101.33=1.50$€., για το διετές ομόλογο είναι $105.52-101.99=3.53$€ ενώ για το τριετές ομόλογο είναι $108.08-102.47=5.61$€.

Έστω λ_i η ένταση αθέτησης στο έτος i, $i=1,2,3$, και ας θεωρήσουμε ότι υπάρχει ποσοστό ανάκτησης 40% και ότι η αθέτηση του χρηματοοικονομικού προϊόντος συμβαίνει μόνο στα μεσοδιαστήματα των αντίστοιχων εξάμηνων χρηματοροών.

Για ομόλογο ενός έτους η πιθανότητα αθέτησης τους πρώτους έξι μήνες είναι

P(αθέτηση στο α΄ εξάμηνο)=$1-e^{-0.5\cdot\lambda_1}$

και η πιθανότητα αθέτησης στο δεύτερο εξάμηνο είναι

P(αθέτηση στο β΄ εξάμηνο χωρίς αθέτηση στο α΄)=$\left(1-e^{-\lambda_1}\right)-\left(1-e^{-0.5\cdot\lambda_1}\right)=e^{-0.5\cdot\lambda_1}-e^{-\lambda_1}$.

Οι πιθανές χρονικές στιγμές αθέτησης είναι στους τρεις και στους εννιά μήνες. Η (forward) αξία του ομολόγου (χωρίς κίνδυνο) στο σημείο των τριών μηνών βρίσκεται με προεξόφληση των χρηματικών ροών 4, 104 δηλαδή $4\cdot e^{-0.05\cdot 0.25}+104\cdot e^{-0.05\cdot 0.75}=104.12$€, ενώ στο χρονικό σημείο των εννέα μηνών προεξοφλούμε τη χρηματική ροή 104 €, οπότε $104\cdot e^{-0.05\cdot 0.25}=102.71$€.

Αν πραγματοποιηθεί αθέτηση, η αξία του ομολόγου θα είναι 40€, δηλαδή το ποσό που μπορεί να ανακτηθεί. Αν στη χρονική στιγμή των τριών μηνών συμβεί αθέτηση, η παρούσα αξία της απώλειας του ομολόγου είναι $(104.12-40)\cdot e^{-0.05\cdot 0.25}=63.33$€, ενώ όταν η αθέτηση συμβεί στους εννέα μήνες, η παρούσα αξία της απώλειας του ομολόγου προκύπτει $(102.71-40)\cdot e^{-0.05\cdot 0.75}=60.4$€.

Άρα η αναμενόμενη απώλεια της αξίας του ομολόγου θα είναι:

63.33P(αθέτηση στο α΄ εξάμηνο)+60.4P(αθέτηση στο β΄ εξάμηνο χωρίς αθέτηση στο α΄)=

$$63.33 \cdot \left(1 - e^{-0,5 \cdot \lambda_1}\right) + 60.4 \cdot \left(e^{-0.5 \cdot \lambda_1} - e^{-\lambda_1}\right) = 1.5 .$$

Η παραπάνω εξίσωση ανάγεται σε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού και έχει λύση $\lambda_1 = 2{,}46\%$.

Συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα των χρηματοροών, της αξίας κάθε ομολόγου προεξοφλώντας με το επιτόκιο με ή χωρίς κίνδυνο και οι αναμενόμενες απώλειες δίνονται στον πίνακα του παραρτήματος Β στο τέλος της εργασίας.

Οι πιθανότητες αθέτησης που υπολογίζονται από τα ιστορικά δεδομένα (real-world default probability) όπως περιγράφηκαν στην Παράγραφο 2.2 είναι μικρότερες σε σύγκριση με αυτές που προκύπτουν από τις αποδόσεις spread των ομολόγων (risk-neutral default probability). Το γεγονός αυτό δικαιολογείται αν λάβουμε υπόψη ότι κατά τη διάρκεια της χρηματοπιστωτικής κρίσης 2008-2010, η πλειοψηφία των επενδυτών επιθυμούσε τη διακράτηση χρεογράφων με το μικρότερο δυνατό ρίσκο, όπως τα κρατικά ομόλογα. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα οι τιμές των εταιρικών ομολόγων να μειωθούν αυξάνοντας τις αποδόσεις τους. Τα ασφάλιστρα κινδύνων αυτών των ομολόγων (spread) αυξήθηκαν οδηγώντας σε υψηλές τιμές τις πιθανότητες αθέτησης. Ένας άλλος λόγος για τη διαφορά μεταξύ risk-neutral και real-world πιθανοτήτων αθέτησης αποτελεί το γεγονός ότι τα εταιρικά ομόλογα είναι πιο δύσκολα ρευστοποιήσιμα στην αγορά σε σχέση με τα κρατικά ομόλογα, πράγμα που δικαιολογεί τις υψηλότερες αποδόσεις σε αυτήν την κατηγορία ομολόγων.

Αξίζει να επισημάνουμε ότι τα spreads αποδόσεων των ομολόγων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογιστούν οι αναμενόμενες χρηματοροές του χρηματοοικονομικού προϊόντος, η αξία του οποίου βρίσκεται προεξοφλώντας αυτές με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΕΤΡΗΣΗ ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ

3.1 Η καμπύλη απόδοσης

Η καμπύλη απόδοσης (yield curve) παριστάνει γραφικά την σχέση των επιτοκίων σε συνάρτηση με το χρόνο ή αλλιώς τη διάρκεια μέχρι τη λήξη για κάποιο χρεόγραφο που περικλείει κίνδυνο. Αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για την ερμηνεία της διάρθρωσης επιτοκίου εξετάζοντας την.

Αν παρατηρήσει κάποιος τις αποδόσεις των ομολόγων, θα διαπιστώσει ότι τα μακροπρόθεσμα ομόλογα έχουν συνήθως υψηλότερες αποδόσεις από ότι τα βραχυπρόθεσμα. Μια πιθανή ερμηνεία για το γεγονός αυτό είναι ότι τα πρώτα ενέχουν μεγαλύτερους επενδυτικούς κινδύνους και ως αποτέλεσμα προσφέρουν μεγαλύτερες αποδόσεις. Μια άλλη αιτία είναι ότι οι επενδυτές προσδοκούν αυξήσεις των επιτοκίων στο μέλλον, οπότε η άνοδος των αποδόσεων συμβαίνει ως αντίδραση της αγοράς στην πρόβλεψη αυτή. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η καμπύλη απόδοσης έχει θετική κλίση. Στην αντίθετη περίπτωση όπου τα μακροπρόθεσμα επιτόκια βρίσκονται σε χαμηλότερο επίπεδο από τα βραχυπρόθεσμα, η καμπύλη απόδοσης έχει αρνητική κλίση και είναι γνωστή ως μη ομαλή καμπύλη απόδοσης (abnormal yield curve) λόγω της σπανιότητας που παρουσιάζει.

Η καμπύλη απόδοσης δίνει σημαντικές πληροφορίες όσον αφορά τις προσδοκίες των επενδυτών. Όταν προβλέπονται ομαλές οικονομικές προοπτικές χωρίς πληθωριστικές αποκλίσεις, η καμπύλη απόδοσης έχει θετική κλίση. Δηλαδή οι επενδυτές που διαθέτουν τα κεφάλαιά τους σε μακροπρόθεσμα χρεόγραφα απαιτούν υψηλότερη απόδοση. Επίσης όσο μεγαλύτερη κλίση έχει η καμπύλη απόδοσης, τόσο πιο έντονη είναι η διαφορά μεταξύ βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων επιτοκίων που παρατηρείται σε περιόδους οικονομικής ύφεσης.

Ας υποθέσουμε ότι τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια στην αγορά των ομολόγων για τα επόμενα τέσσερα έτη δίνονται από τον ακόλουθο πίνακα

Έτος	Επιτόκιο
0 (Σήμερα)	8%
1	10%
2	11%
3	11%

Πίνακας 3.1

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ομόλογα χωρίς κουπόνι (zero-coupon). Ένα ομόλογο ενός έτους που έχει τιμή 1000€ στη λήξη του, σήμερα έχει αξία

$$\frac{1000}{1+0.08} = 925.93 \text{ €}$$

Όμοια ένα ομόλογο διάρκειας δυο ετών έχει παρούσα αξία

$$\frac{1000}{1.08 * 1.10} = 841.75 \text{ €}$$

Από τις τιμές των ομολόγων μπορούμε να υπολογίσουμε την απόδοση στη λήξη του κάθε ομολόγου. Η **απόδοση** (yield) είναι το σταθερό ετήσιο επιτόκιο (με ανατοκισμό) το οποίο εξισώνει την παρούσα αξία του ομολόγου με την τιμή του στη λήξη. Για παράδειγμα, η απόδοση του διετούς ομολόγου χωρίς κουπόνι είναι το επιτόκιο r_2 που ικανοποιεί την σχέση

$$841.75 = \frac{1000}{(1+r_2)^2}$$

και λύνοντας ως προς r_2 παίρνουμε, $r_2 = 0.08995$.

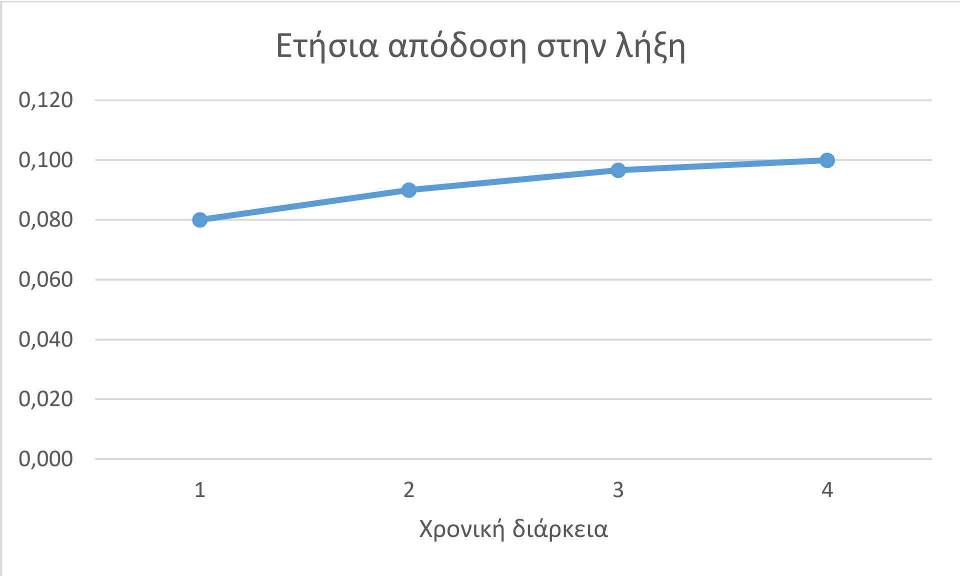
Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για τις τιμές των ομολόγων διάρκειας τριών και τεσσάρων ετών προκύπτουν οι σχέσεις

$$758.33 = \frac{1000}{(1+r_3)^3} \Rightarrow r_3 = 0.0966 \; \kappa\alpha\iota \;\; 683.18 = \frac{1000}{(1+r_4)^4} \Rightarrow r_4 = 0.0993$$

Λήξη	Τιμή	Ετήσια απόδοση στην λήξη
1	925.93	8%
2	841.75	8.995%
3	758.33	9.66%
4	683.18	9.993%

Πίνακας 3.2 Τιμή και απόδοση των ομολόγων του Πίνακα 3.1

Το επόμενο σχήμα παριστάνει την μεταβολή της απόδοσης ως συνάρτηση της διάρκειας λήξης του ομολόγου (**καμπύλη απόδοσης**).



Σχήμα 3.1 Απόδοση στη λήξη του ομολόγου

Αξίζει να σημειώσουμε ότι σε κάθε τρέχουσα χρονική περίοδο στην αγορά χρήματος υπάρχουν επιτόκια διαφορετικής προθεσμίας (maturity), που αντιστοιχούν σε επενδύσεις διαφορετικού χρονικού ορίζοντα. Η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στα επιτόκια και τις προθεσμίες τους αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως **χρονική διάρθρωση των επιτοκίων** (term structure of interest rates) ή πιο απλά ως **καμπύλη των επιτοκίων** (interest rates curve). Η γνώση της καμπύλης αυτής είναι απαραίτητη τόσο για τις εταιρείες όσο και για την αγορά. Οι πρώτες γιατί έχουν στη διάθεσή τους τα σωστά επιτόκια για να προεξοφλήσουν μελλοντικές εισροές ή υποχρεώσεις τους που αναφέρονται σε διαφορετικές χρονικές περιόδους. Η δε αγορά γιατί μπορεί να χρησιμοποιήσει την καμπύλη των επιτοκίων στην τιμολόγηση προϊόντων όπως, για παράδειγμα, είναι τα ομόλογα τα οποία έχουν σίγουρες μελλοντικές ροές μέχρι τη λήξη τους ή αναχρηματοδότηση υφιστάμενων δανείων.

Τα υποδείγματα περιθωρίου αποδόσεων (yield spread models) συγκεντρώνουν πληροφορίες από την αγορά εταιρικών ομολόγων. Κάθε ομόλογο όμως συνεπάγεται επιτοκιακό κίνδυνο και πιστωτικό κίνδυνο. Ο επιτοκιακός κίνδυνος προσεγγίζεται από τη διακύμανση των αποδόσεων των τίτλων του δημοσίου, ο δε πιστωτικός κίνδυνος από το περιθώριο των αποδόσεων μεταξύ των εταιρικών ομολόγων και των ομολόγων του δημοσίου. Όταν είναι γνωστό το περιθώριο, είναι δυνατός ο υπολογισμός της αναμενόμενης πιθανότητας πτώχευσης.

Μια μέθοδος βασιζόμενη σε στοιχεία της αγοράς για να αποτιμήσουμε την έκθεση στον πιστωτικό κίνδυνο και την πιθανότητα αθέτησης είναι μέσω της καμπύλης απόδοσης (Term Structure Derivation of Credit Risk). Το συγκεκριμένο υπόδειγμα αναλύει τα ασφάλιστρα κινδύνου από την καμπύλη απόδοσης για εταιρικά ομόλογα ή δάνεια σε δανειολήπτες με όμοιο δανειακό προφίλ. Οι οίκοι αξιολόγησης (π.χ Standard & Poor's) κατηγοριοποιούν τις εκδόσεις εταιρικών ομολόγων σε ομάδες σύμφωνα με την εκλαμβανόμενη πιστοληπτική ικανότητα. Στην περίπτωση των υποδειγμάτων περιθωρίου αποδόσεων, ο πιστωτικός κίνδυνος ενός ομολόγου βρίσκεται από το περιθώριο (spread) των αποδόσεων μεταξύ των εταιρικών ομολόγων μηδενικού τοκομεριδίου (zero-coupon) και των ομολόγων μηδενικού τοκομεριδίου του Δημοσίου. Δηλαδή τα περιθώρια των αποδόσεων αντικατοπτρίζουν την εκλαμβανόμενη έκθεση στον πιστωτικό κίνδυνο των εταιρικών δανειοληπτών για εφάπαξ καταβολές (χωρίς κουπόνι) σε διαφορετικές χρονικές στιγμές στο μέλλον.

Στα μοντέλα που βασίζονται σε στοιχεία της αγοράς, τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα χρησιμοποιούν πληροφορίες για την πιστοληπτική ικανότητα δανειοληπτών με υφιστάμενο χρέος με σκοπό να αποφασίσουν την χορήγηση ή μη επιπλέον χρηματοδότησης στο δανειολήπτη. Δηλαδή, επεξεργάζονται τα διαθέσιμα δημοσιευμένα στοιχεία της αγοράς που διεκπεραιώθηκαν από τους οίκους αξιολόγησης, προκειμένου να εκτιμήσουν την πιθανότητα αθέτησης αντί να χρησιμοποιήσουν τις δικές τους βάσεις δεδομένων. Έτσι η χρήση αυτών των μοντέλων έχει ως αποτέλεσμα το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα να είναι σε θέση να επεξεργάζεται την πληροφορία που είναι διαθέσιμη στις αγορές προκειμένου να εκτιμήσει την πιθανότητα αθέτησης.

Η εκτίμηση των πιθανοτήτων αθέτησης για υπόχρεους δανειολήπτες είναι το πρώτο βήμα για την αξιολόγηση του πιστωτικού κινδύνου και των δυνητικών ζημιών που αντιμετωπίζουν τα πιστωτικά ιδρύματα. Για κανονιστικούς σκοπούς αποτελεί επίσης το πρώτο βήμα για τον υπολογισμό του συστημικού κινδύνου και των τέστ αντοχής (stress testing) σε τοπικό και εθνικό επίπεδο. Ειδικότερα, γνωρίζοντας τις πιθανότητες αθέτησης για ένα σύνολο δανειοληπτών είναι άμεσος ο υπολογισμός της κατανομής ζημιάς, ένα βασικό συστατικό για την αποτίμηση των κινδύνων στον εταιρικό και οικονομικό τομέα.

Από την άλλη η εκτίμηση των πιθανοτήτων αθέτησης αποτελεί πρόκληση εξαιτίας των περιορισμών στη διαθεσιμότητα των δεδομένων. Υπάρχουν ένα πλήθος από τεχνικές που μας βοηθούν να ξεπεράσουμε αυτούς τους περιορισμούς, όπως αγοραίες τεχνικές (market-based) που βασίζονται στις τιμές των χρεογράφων και στα συστήματα κατάταξης (ratings).

Οι παραπάνω market-based τεχνικές εφαρμόζονται οποτεδήποτε υπάρχει ρευστοποιήσιμη δευτερογενής αγορά των ομολόγων ή πιστωτικών παραγώγων που σχετίζονται με τον υπόχρεο. Κάτω από την υπόθεση της αποτελεσματικότητας της αγοράς, οι τιμές των χρεογράφων και των πιστωτικών παραγώγων «αντικατοπτρίζονται» στο μέλλον (forward-looking) και αποδίδουν δημόσια την διαθέσιμη πληροφορία σχετικά με τον κίνδυνο αθέτησης (default risk) του υπόχρεου. Έτσι τα πιστωτικά ιδρύματα μπορούν να εκτιμήσουν τις μελλοντικές πιθανότητες αθέτησης και να τις χρησιμοποιήσουν για την αξιολόγηση και τιμολόγηση των δανείων. Επειδή οι αγοραίες τιμές είναι παρατηρήσιμες, οι τεχνικές αυτές βασίζονται στον αντίστροφο τεχνικό σχεδιασμό (reverse-engineering) των τύπων τιμολόγησης των στοιχείων ενεργητικού (asset) προκειμένου να εξαχθεί η πιθανότητα αθέτησης.

3.2 Απλός δανεισμός μιας περιόδου χωρίς ανάκτηση

Υποθέτουμε ότι ένα πιστωτικό ίδρυμα απαιτεί αναμενόμενη απόδοση ενός ετήσιου εταιρικού ομολόγου τουλάχιστον ίση με την απόδοση μηδενικού κινδύνου (risk-free) που αντιστοιχεί σε κυβερνητικό ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τους επόμενους συμβολισμούς:

i: επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (risk-free rate) για ένα έτος.

k: το επιτόκιο δανεισμού του δανειολήπτη (ή υποσχόμενη απόδοση) και καθορίζεται από την «αγορά».

p: πιθανότητα αθέτησης /μη αποπληρωμής.

Με βάση αυτούς η υποσχόμενη απόδοση του ετήσιου εταιρικού ομολόγου είναι $1 + k$ και η απόδοση του ετήσιου κυβερνητικού ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου είναι $1 + i$.

Το μοντέλο λαμβάνει ως παραδοχή τη θεωρία των προσδοκιών (αρχή της αδιαφορίας). Σύμφωνα με αυτήν, η μορφή της καμπύλης των επιτοκίων καθορίζεται μόνο από τις προσδοκίες των επενδυτών για το μελλοντικό επίπεδο των επιτοκίων. Δηλαδή ένας επενδυτής θα είναι αδιάφορος (risk neutral) μεταξύ των επιλογών να επενδύσει στο ετήσιο εταιρικό ομόλογο που ενέχει κίνδυνο (Πολιτική *A*) και στο να επενδύσει σε risk-free κυβερνητικό ομόλογο (Πολιτική *B*), με την προϋπόθεση ότι οι αναμενόμενες τελικές αξίες είναι ίσες. Αν συμβολίσουμε με V_A, V_B τις αξίες της επένδυσης στο τέλος του έτους αν ακολουθηθεί η Πολιτική Α και η Πολιτική Β αντίστοιχα, τότε θα έχουμε

$$V_B = 1 + i \Longrightarrow E(V_B) = 1 + i,$$

$$V_A = \begin{cases} 0, & \text{αν ο δανειολήπτης χρεοκοπήσει} \\ 1 + k & \text{αν ο δανειολήπτης δεν χρεοκοπήσει} \end{cases}.$$

Υπολογίζοντας την μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής V_A προκύπτει

$$E(V_A) = 0 \cdot P(V_A = 0) + (1 + k) \cdot P(V_A = 1 + k) = = 0 \cdot p + (1 + k) \cdot (1 - p) =$$
$$= (1 + k) \cdot (1 - p).$$

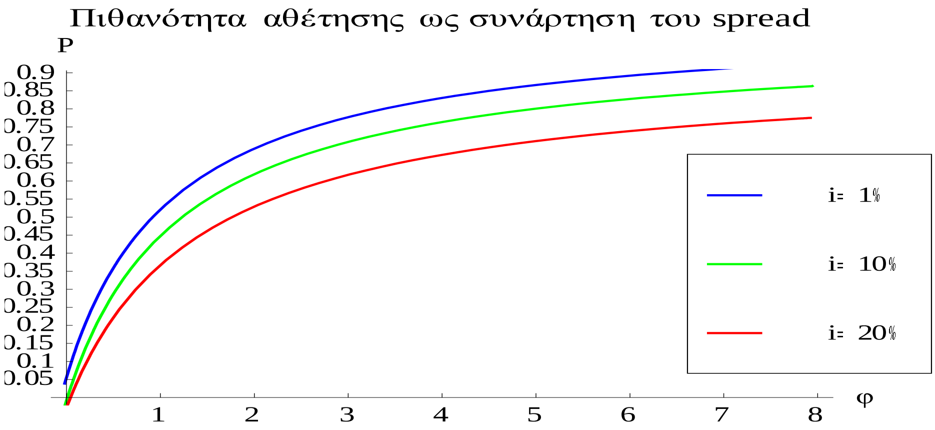
Επομένως εξισώνοντας τις μέσες τιμές των τυχαίων μεταβλητών V_A, V_B, θα ισχύει η σχέση

$$1 + i = 0 \cdot p + (1 + k)(1 - p) \Leftrightarrow 1 - p = \frac{1 + i}{1 + k} \Longrightarrow p = \frac{k - i}{1 + k}. \quad (3.2.1)$$

Η διαφορά $\varphi = k - i$ αντιπροσωπεύει το ασφάλιστρο κινδύνου (spread). Αν η απόδοση μηδενικού κινδύνου παραμείνει σταθερή, τότε μια αύξηση του spread οδηγεί σε αύξηση της πιθανότητας αθέτησης. Πράγματι, αντικαθιστώντας το $k = \varphi + i$ στην (3.2.1) παίρνουμε την επόμενη έκφραση

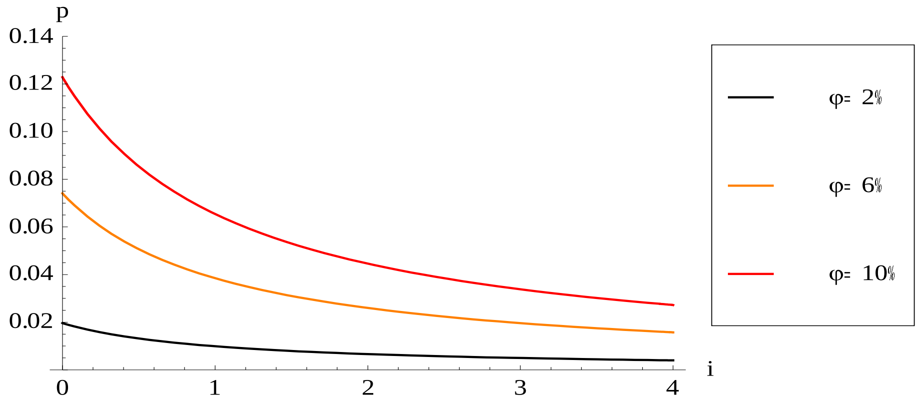
$$p = \frac{\varphi}{1 + k} = \frac{\varphi}{1 + \varphi + i} = \frac{(1 + i + \varphi) - (1 + i)}{1 + i + \varphi} = 1 - \frac{1 + i}{1 + i + \varphi} \quad (3.2.2)$$

από όπου είναι φανερό ότι το p είναι αύξουσα συνάρτηση του φ. Στο Σχήμα 3.2 αποτυπώνεται η πιθανότητα αθέτησης ως συνάρτηση του spread για διάφορες τιμές του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου i.



Σχήμα 3.2 Πιθανότητα αθέτησης ως συνάρτηση του spread

Αν στην παραπάνω σχέση (3.2.2) θεωρήσουμε την πιθανότητα αθέτησης ως συνάρτηση του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου i σταθεροποιώντας την τιμή του φ, τότε η πιθανότητα αθέτησης είναι φθίνουσα συνάρτηση του i, με τιμή $\frac{\varphi}{1+\varphi}$ όταν μηδενίζεται το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου i, και παρουσιάζεται γραφικά στο Σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.3 Πιθανότητα αθέτησης ως συνάρτηση του risk-free rate

3.3 Απλός δανεισμός μιας περιόδου με ανάκτηση

Στις περισσότερες περιπτώσεις η τράπεζα λαμβάνει εξασφαλίσεις προκειμένου να εισπράξει μέρος του χορηγούμενου κεφαλαίου όταν ο δανειολήπτης αθετήσει. Έστω γ το ποσοστό ανάκτησης σε περίπτωση αθέτησης με $\gamma > 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο πιστωτής δεν χάνει όλο το αρχικό κεφάλαιο με τους δεδουλευμένους τόκους. Ρευστοποιώντας τις διασφαλίσεις (collaterals) που έχει λάβει κατά την σύμβαση του δανείου, είναι σε θέση να εισπράξει ποσό $\gamma(1 + k)$.

Υποθέτουμε ότι έχουμε δυο στρατηγικές A και B. Στην στρατηγική A μπορούμε να επενδύσουμε μια χρηματική μονάδα για ένα έτος με το επιτόκιο i μηδενικού κινδύνου, ενώ στην στρατηγική B μια χρηματική μονάδα επενδύεται σε ένα ομόλογο με απόδοση k για ένα έτος (ή γίνεται δανεισμός σε δανειολήπτη με επιτόκιο δανεισμού k για το ίδιο χρονικό διάστημα) το οποίο ενέχει τον κίνδυνο να μην πληρώσει τον κάτοχο του ομολόγου με πιθανότητα p (αντίστοιχα με πιθανότητα p ο δανειολήπτης δεν θα είναι σε θέση να ανταποκριθεί στις δανειακές του υποχρεώσεις).

Αν συμβολίσουμε πάλι με V_A, V_B τις αξίες της επένδυσης στο τέλος του έτους αν ακολουθήσουμε την στρατηγική A και B αντίστοιχα, θα ισχύει ότι:

$$V_A = 1 + i,\ V_B = \begin{cases} \gamma(1+k), & \text{αν ο δανειολήπτης χρεοκοπήσει} \\ 1+k, & \text{αν ο δανειολήπτης δεν χρεοκοπήσει} \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας την αρχή της ουδετερότητας στον κίνδυνο προκύπτει ότι οι αναμενόμενες αξίες της επένδυσης θα είναι ίσες. Αυτό σημαίνει ότι:

$$E(V_A) = E(V_B) \Rightarrow 1 + i = \gamma \cdot (1+k) \cdot P(V_B = \gamma(1+k)) + (1+k) \cdot P(V_B = 1+k)$$

$$\Rightarrow 1 + i = \gamma \cdot (1+k) \cdot p + (1+k) \cdot (1-p)$$

από όπου προκύπτει διαδοχικά

$$1 + i = (1+k) \cdot \{\gamma p + (1-p)\} \Leftrightarrow 1 + i = (1+k) \cdot [1 - p(1-\gamma)] \Leftrightarrow \tag{3.3.1}$$

$$\Leftrightarrow 1 + i = (1+k) - p(1+k)(1-\gamma) \Leftrightarrow p(1+k)(1-\gamma) = k - i$$

και έτσι καταλήγουμε στον τύπο

$$p = \frac{k - i}{(1+k) \cdot (1-\gamma)} \tag{3.3.2}$$

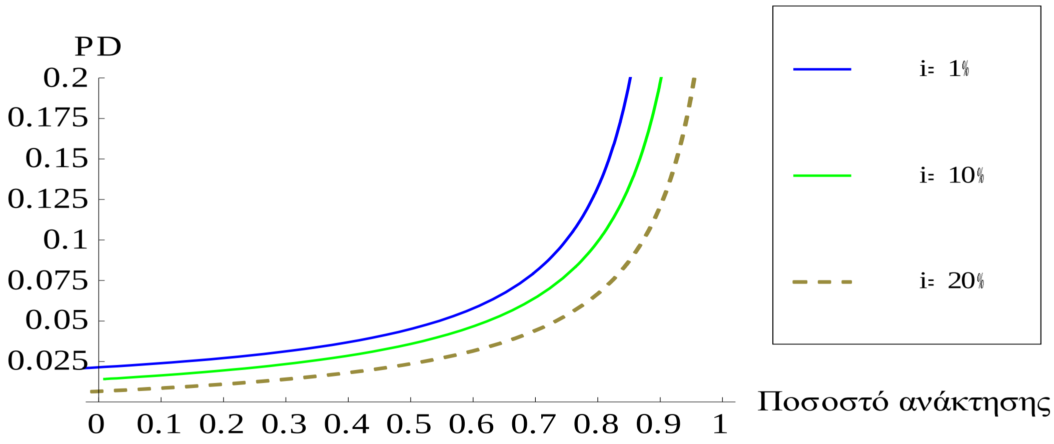
ή ισοδύναμα αντικαθιστώντας το $k = \varphi + i$,

$$p = \frac{\varphi}{(1 + \varphi + i) \cdot (1-\gamma)} \tag{3.3.3}$$

Στο διάγραμμα του Σχήματος 3.4 απεικονίζονται οι καμπύλες των πιθανοτήτων αθέτησης για διάφορες τιμές του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου (για σταθερό $\varphi = 0{,}02$) ως συνάρτηση του ποσοστού ανάκτησης. Οι εντολές του Mathematica για τη δημιουργία του γραφήματος είναι:

$$f[\text{gamma\_}, \text{i\_}, \text{phi\_}] := (1/(1-\text{gamma}))*(\text{phi}/(1+\text{phi}+i))$$
$$f[\text{gamma}, i, \text{phi}]$$
$$\text{Plot}[\text{Evaluate}[\text{Table}[f[\text{gamma}, i, 0.02], \{i, 0.02{,}0.19{,}0.08\}]], \{\text{gamma}, 0{,}1\}, \text{PlotRange} \to \{0{,}0.1\}, \text{AxesLabel} \to \{\text{"Ποσοστό ανάκτησης"}, \text{"PD"}\}, \text{PlotLabel} \to \text{"p} = \varphi/(1+\varphi+\mathrm{i})(1-\gamma)\text{"}, \text{BaseStyle} -> \{\text{FontWeight} -> \text{"Bold"}, \text{FontSize} \to 20\}, \text{PlotStyle} \to \{\text{Blue}, \text{Green}, \text{Dashed}\}]$$

Παρατηρούμε ότι για το ίδιο ποσοστό ανάκτησης όταν το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου αυξάνεται, η αντίστοιχη καμπύλη έχει μικρότερη κλίση. Η μπλε καμπύλη αντιστοιχεί στο μικρότερο risk-free επιτόκιο.



Σχήμα 3.4 Πιθανότητες αθέτησης ως συνάρτηση του ποσοστού ανάκτησης

Μια εναλλακτική έκφραση, η οποία προκύπτει επίσης από την σχέση (3.3.2) είναι η επόμενη

$$p = \frac{1}{1-\gamma}\left[1 - \frac{1+i}{1+k}\right] \quad . \tag{3.3.4}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο όρος $\gamma(1+k)$ εκφράζει το ποσό πληρωμής που εισπράττει η τράπεζα σε περίπτωση αθέτησης του δανειολήπτη.

Ορισμένα χρήσιμα συμπεράσματα που εξάγονται από τους παραπάνω τύπους και τη γραφική παράσταση είναι τα επόμενα :

- Όταν υπάρχει ποσοστό ανάκτησης, η πιθανότητα αθέτησης αυξάνεται σε σχέση με την περίπτωση χωρίς ανάκτηση. Μάλιστα, όσο μεγαλύτερο είναι το ποσοστό ανάκτησης κατά την πραγματοποίηση της χρεοκοπίας, σημαίνει ότι η αγορά έχει εκτιμήσει μεγαλύτερη την πιθανότητα πτώχευσης του δανειολήπτη.
- Από την σχέση (3.3.3) συμπεραίνουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι αύξουσα συνάρτηση του περιθωρίου κινδύνου. Πράγματι όταν αυξάνει το ασφάλιστρο κινδύνου φ που απαιτεί η αγορά, τότε μεγαλώνει και η πιθανότητα αθέτησης.

Η ποσοστιαία ζημιά με δεδομένη την αθέτηση του δανειολήπτη (loss given default) είναι $LGD = 1 - \gamma$, οπότε η αναμενόμενη ζημιά (Expected Loss) κατά την αθέτηση θα είναι ίση με

$$EL = PD \cdot LGD = p(1 - \gamma)$$

και η εξίσωση αδιαφορίας μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$1 + i = (1 + k)(1 - EL) = (1 - PD \cdot LGD)(1 + k)$$

από όπου προκύπτει ο επόμενος τύπος, λαμβάνοντας υπόψη ότι $k = \varphi + i$,

$$p = PD = \frac{\varphi}{LGD(1+k)} = \frac{1}{LGD}\frac{(1+i+\varphi)-(1+i)}{1+\varphi+i} = \frac{1}{LGD}\left(1 - \frac{1+i}{1+i+\varphi}\right).$$

Προκειμένου να γίνει πιο ξεκάθαρη η σχέση μεταξύ πιθανότητας αθέτησης χωρίς ανάκτηση και αυτής με ανάκτηση ας συμβολίσουμε με

$$p(i,\varphi) = 1 - \frac{1+i}{1+i+\varphi}$$

την «επαγόμενη» πιθανότητα χρεοκοπίας για επίπεδο μηδενικού κινδύνου i και περιθώριο κινδύνου φ όταν δεν έχουμε ανάκτηση και με

$$p(i,\varphi;\gamma) = \frac{1}{1-\gamma}\left(1 - \frac{1+i}{1+i+\varphi}\right)$$

την αντίστοιχη «επαγόμενη» πιθανότητα χρεοκοπίας για επίπεδο μηδενικού κινδύνου i και περιθώριο κινδύνου φ, όταν υπάρχει ανάκτηση από τον πιστωτή με ποσοστό ανάκτησης γ.

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$p(i,\varphi) = p(i,\varphi;0)$,

$p(i,\varphi\,;\gamma) = \frac{1}{1-\gamma}p(i,\varphi)$,

$p(i, \varphi\,; \gamma) \geq p(i, \varphi)$, αφού $0 < 1 - \gamma < 1$

$\lim_{\gamma \to 0} p(i, \varphi; \gamma) = p(i, \varphi)$.

Για ποσοστά ανάκτησης $\gamma_1\, και\, \gamma_2$ με $\gamma_1 < \gamma_2$ ισχύει ότι

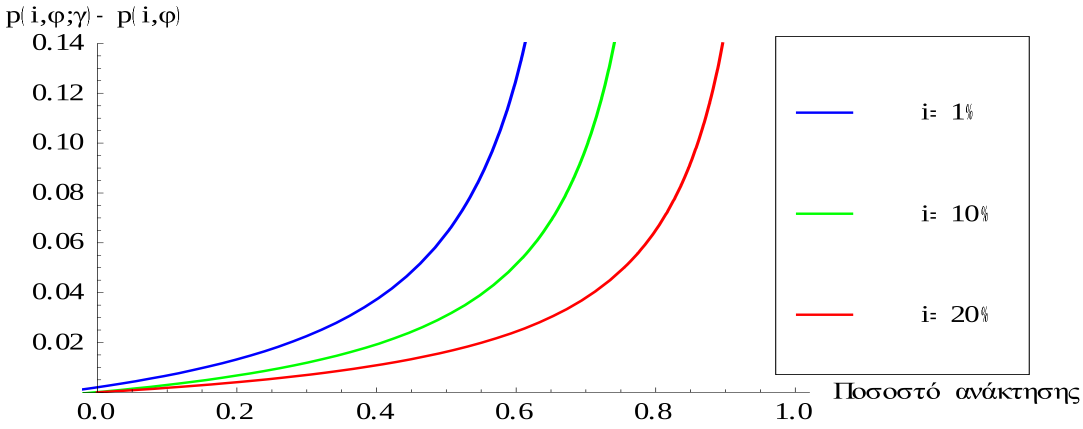
$$p(i, \varphi\,; \gamma_1) \leq p(i, \varphi\,; \gamma_2).$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη της συμπεριφοράς της διαφοράς

$$p(i, \varphi; \gamma) - p(i, \varphi) = \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(1 - \frac{1+i}{1+i+\varphi}\right)$$

για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων i, φ, γ.

Πιο συγκεκριμένα, όταν μεταβάλλεται μόνο το γ στο διάστημα $(0, 1)$ για δεδομένη τιμή του ασφαλίστρου κινδύνου (έστω $\varphi = 0{,}02$), δίνεται στο Σχήμα 3.5 η γραφική παράσταση της διαφοράς για διάφορες τιμές του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου. Παρατηρούμε ότι όσο μικρότερη είναι η τιμή του risk-free rate, τόσο πιο απότομη γίνεται η καμπύλη, ενώ η διαφορά παρουσιάζει ραγδαία άνοδο για τιμές του ποσοστού ανάκτησης στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$.



Σχήμα 3.5 Διαφορά των πιθανοτήτων αθέτησης ως συνάρτηση του γ

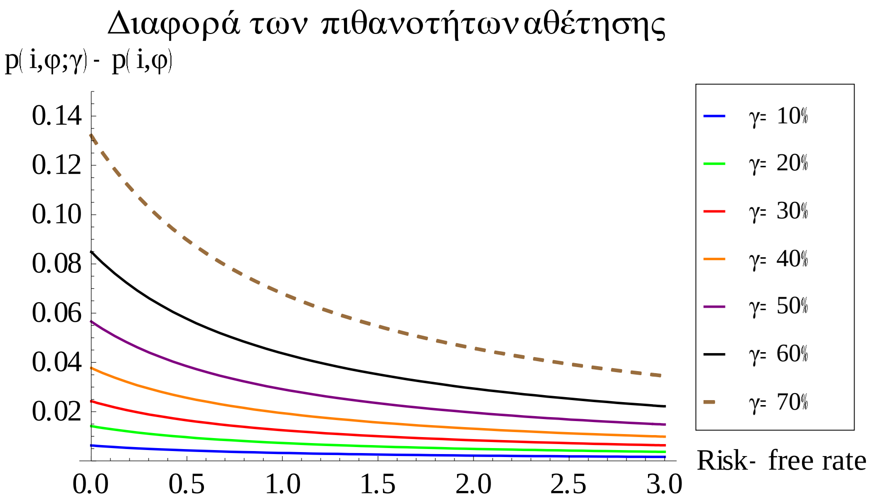
Όταν μεταβάλλεται μόνο η παράμετρος i διατηρώντας το spread σταθερό (έστω $\varphi = 0{,}06$), το Σχήμα 3.6 απεικονίζει τη διαφορά $p(i, \varphi; \gamma) - p(i, \varphi)$ για διάφορες τιμές του ποσοστού ανάκτησης. Παρατηρούμε ότι η διαφορά παριστάνεται από καμπύλες. Όσο μικρότερο είναι το ποσοστό ανάκτησης, τόσο γρηγορότερα η διαφορά $p(i, \varphi; \gamma) - p(i, \varphi)$ συγκλίνει στο μηδέν. Για την υλοποίηση της γραφικής παράστασης στο Mathematica εκτελούμε τις ακόλουθες εντολές:

$$g[\text{i\_}, \text{phi\_}, \text{gamma\_}] := (\text{gamma}/(1-\text{gamma})) * (1-((1+i)/(1+i+\text{phi})))$$

$$g[i, \text{phi}, \text{gamma}]$$

$$\frac{\text{gamma}\left(1-\frac{1+i}{1+i+\text{phi}}\right)}{1-\text{gamma}}$$

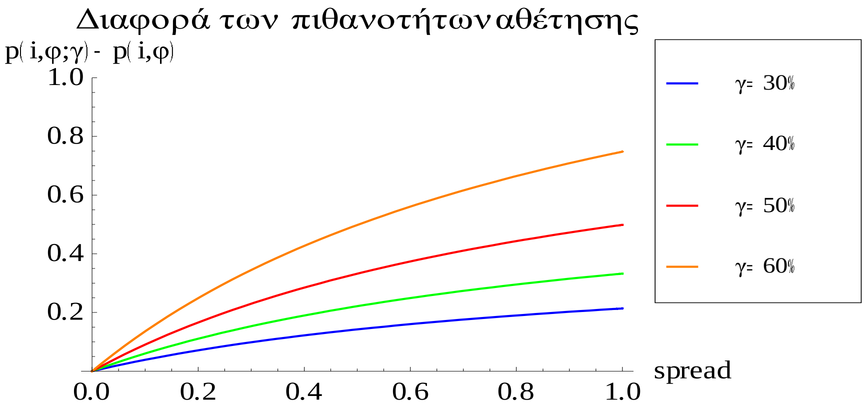
Plot[Evaluate[Table[g[i, 0.06, gamma], {gamma, 0.1,0.7,0.1}]], {i, 0,0.1}, PlotRange
→ {0,0.15}, AxesLabel
→ {"Risk − free rate", "p(i, φ; γ) − p(i, φ)"}, PlotLabel
→ "Διαφορά των πιθανοτήτων αθέτησης", BaseStyle−> {FontWeight−
> "Regular", FontSize → 12}, PlotStyle
→ {Blue, Green, Red, Orange, Purple, Black, Dashed}]



Σχήμα 3.6 Διαφορά των πιθανοτήτων αθέτησης ως συνάρτηση του i

Όταν μεταβάλλεται μόνο η παράμετρος φ διατηρώντας το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου σταθερό (έστω $i = 0{,}02$), το παρακάτω Σχήμα 3.7 απεικονίζει τη διαφορά $p(i,\varphi;\gamma) - p(i,\varphi)$ για διάφορες τιμές του ποσοστού ανάκτησης. Από το Σχήμα 3.7 παρατηρούμε ότι η διαφορά $p(i,\varphi;\gamma) - p(i,\varphi)$ αυξάνεται, όσο μεγαλύτερο γίνεται το ποσοστό ανάκτησης. Για την υλοποίηση της γραφικής παράστασης στο Mathematica εκτελούμε τις ακόλουθες εντολές:

Plot[Evaluate[Table[g[0.03, phi, gamma], {gamma, 0.3,0.9,0.1}]], {phi, 0,0.15}, PlotRange → {0,0.8}, AxesLabel → {"spread", "p(i, φ; γ) − p(i, φ)"}, PlotLabel → "Διαφορά των πιθανοτήτων αθέτησης", BaseStyle−> {FontWeight−> "Regular", FontSize → 14}, PlotStyle → {Blue, Green, Red, Orange, Purple, Black, Dashed}]



Σχήμα 3.7 Διαφορά των πιθανοτήτων αθέτησης ως συνάρτηση του spread

3.4 Απλός δανεισμός δυο περιόδων

Έστω ότι τώρα ο χρονικός ορίζοντας είναι τα δυο έτη και ψάχνουμε την πιθανότητα αθέτησης του δανειολήπτη κατά τη διάρκεια των δυο ετών. Ας συμβολίσουμε με

p_1 : πιθανότητα αθέτησης του δανειολήπτη στο πρώτο έτος

p_2 : πιθανότητα αθέτησης του δανειολήπτη στο δεύτερο έτος, χωρίς να υπάρχει αθέτηση κατά το πρώτο έτος

C_2 : πιθανότητα αθέτησης του δανειολήπτη κατά τη διάρκεια των δυο ετών

Η C_2 λέγεται **αθροιστική πιθανότητα αθέτησης** (cumulative default rate) στο διάστημα – περίοδο των δυο ετών. Ορίζοντας τα ενδεχόμενα

E_1 : συμβαίνει αθέτηση του δανειολήπτη στο πρώτο έτος

E_2 : συμβαίνει αθέτηση του δανειολήπτη στο δεύτερο έτος

E_{12} : συμβαίνει αθέτηση του δανειολήπτη κατά τη διάρκεια των δυο ετών

Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα E_1, E_2 δεν είναι ανεξάρτητα μιας και αναφέρονται στον ίδιο δανειολήπτη. Το E_{12} μπορεί να γραφεί ένωση δυο ξένων μεταξύ τους ενδεχομένων ως $E_{12} = E_1 \cup E_2 E_1'$ και χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων παίρνουμε τη σχέση

$$C_2 = P(E_{12}) = P(E_1) + P(E_2 E_1') \Rightarrow C_2 = P(E_1) + P(E_2 \mid E_1') \cdot P(E_1') \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_2 = p_1 + p_2(1 - p_1) \Rightarrow C_2 = p_1 + p_2 - p_1 p_2 .$$

Ο τύπος αυτός μπορεί εναλλακτικά να γραφεί στην μορφή

$$C_2 = 1 - (1 - p_1) + (1 - p_1) p_2 = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \ . \tag{3.4.1}$$

Η τελευταία έκφραση του C_2 έχει τη διαισθητική ερμηνεία, ότι για να βρούμε την πιθανότητα αθέτησης στα δύο έτη, αρκεί να αφαιρέσουμε από την μονάδα το γινόμενο των πιθανοτήτων επιβίωσης κατά τις δύο περιόδους.

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα p_2, θα βασιστούμε στη θεωρία των προσδοκιών της αγοράς. Σύμφωνα με αυτήν, ένας επενδυτής σε μια αποτελεσματική αγορά χωρίς περιθώρια κέρδους από κερδοσκοπία (arbitrage), περιμένει ίδια απόδοση από την αγορά και τη διακράτηση ενός διετούς ομολόγου, με την απόδοση από την αγορά ενός ετήσιου ομολόγου που στη λήξη του (τέλος του έτους) επανεπενδύεται σε άλλο ετήσιο ομόλογο. Σε μια τέτοια περίπτωση ο επενδυτής θα είναι αδιάφορος μεταξύ των δυο παραπάνω επιλογών. Ας συμβολίσουμε με

${}_0 i_1$: επιτόκιο επένδυσης μηδενικού κινδύνου για το πρώτο έτος

${}_1 i_1$: επιτόκιο επένδυσης μηδενικού κινδύνου για το δεύτερο έτος

${}_0 i_2$: ετήσιο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου για διετή επένδυση (π.χ. διετή ομόλογο).

Θα ισχύει:

$$(1 + {}_0 i_2)^2 = (1 + {}_0 i_1) \cdot (1 + {}_1 i_1) \Rightarrow 1 + {}_1 i_1 = \frac{(1 + {}_0 i_2)^2}{1 + {}_0 i_1}$$

οπότε

$$ {}_1i_1 = \frac{(1+{}_0i_2)^2}{1+{}_0i_1} - 1 . \qquad (3.4.2) $$

Όμοια συμβολίζουμε με

${}_0k_1$: επιτόκιο δανεισμού του δανειολήπτη για το πρώτο έτος

${}_1k_1$: επιτόκιο δανεισμού του δανειολήπτη ένα έτος από σήμερα (forward rate)

${}_0k_2$: ετήσιο επιτόκιο δανεισμού δυο ετών του δανειολήπτη.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του ανατοκισμού για τα επιτόκια δανεισμού προκύπτει ο τύπος

$$ {}_1k_1 = \frac{(1+{}_0k_2)^2}{1+{}_0k_1} - 1 . \qquad (3.4.3) $$

Όπως στην περίπτωση του απλού δανεισμού μιας περιόδου, υποθέτουμε ότι ένας επενδυτής έχει στη διάθεση του δυο στρατηγικές *Γ* και *Δ*. Στην στρατηγική *Γ* μπορούμε να επενδύσουμε μια χρηματική μονάδα ένα έτος από σήμερα με το ετήσιο επιτόκιο ${}_1i_1$ μηδενικού κινδύνου, ενώ στην στρατηγική *Δ* μια χρηματική μονάδα επενδύεται ένα έτος από σήμερα σε ένα ομόλογο με απόδοση ${}_1k_1$ για ένα έτος (ή δανείζεται σε δανειολήπτη με επιτόκιο δανεισμού ${}_1k_1$ για το ίδιο χρονικό διάστημα) το οποίο ενέχει τον κίνδυνο να μην πληρώσει τον κάτοχο του ομολόγου με πιθανότητα p_2 (αντίστοιχα με πιθανότητα p_2 ο δανειολήπτης να μην είναι σε θέση να ανταποκριθεί στις δανειακές του υποχρεώσεις).

Αν συμβολίσουμε με $V_Γ, V_Δ$ τις αξίες της επένδυσης στο τέλος του δεύτερου έτους όταν ακολουθήσουμε την στρατηγική *Γ* και *Δ* αντιστοίχως, θα ισχύει ότι:

$$ V_Γ = 1 + {}_1i_1 \Rightarrow E(V_Γ) = 1 + {}_1i_1 $$

$$ V_Δ = \begin{cases} 0, & \text{αν συμβεί αθέτηση στο τέλος του δεύτερου έτους} \\ 1+{}_1\mathrm{k}_1, & \text{αν δεν συμβεί αθέτηση στο τέλος του δεύτερου έτους} \end{cases} $$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση αδιαφορίας για τα προθεσμιακά επιτόκια[1] ενός έτους προκύπτει η σχέση

$$E(V_\Gamma) = E(V_\Delta) \Rightarrow 1 +_1 i_1 = 0 \cdot P(V_\Delta = 0) + \left(1 +_1 k_1\right) \cdot P\left(V_\Delta = 1 +_1 k_1\right) \Rightarrow$$

$$1 +_1 i_1 = \left(1 - p_2\right) \cdot \left(1 +_1 k_1\right) \Rightarrow p_2 = \frac{{}_1k_1 - {}_1i_1}{1 +_1 k_1}.$$

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση τα ${}_1k_1$, ${}_1i_1$ με τη βοήθεια των (3.4.2), (3.4.3) έχουμε

$$p_2 = \frac{\dfrac{(1 +_0 k_2)^2}{1 +_0 k_1} - 1 + 1 - \dfrac{(1 +_0 i_2)^2}{1 +_0 i_1}}{\dfrac{(1 +_0 k_2)^2}{1 +_0 k_1}}.$$

Κάνοντας τις πράξεις και το σύνθετο κλάσμα απλό καταλήγουμε στον τύπο

$$p_2 = \frac{\left(1 +_0 i_1\right)\left(1 +_0 k_2\right)^2 - \left(1 +_0 i_2\right)^2\left(1 +_0 k_1\right)}{\left(1 +_0 i_1\right)\left(1 +_0 k_2\right)^2} = 1 - \frac{\left(1 +_0 i_2\right)^2\left(1 +_0 k_1\right)}{\left(1 +_0 k_2\right)^2\left(1 +_0 i_1\right)} \qquad (3.4.4)$$

από όπου μπορούμε να υπολογίσουμε το p_2 αφού είναι γνωστά από την αγορά τα επιτόκια μηδενικού κινδύνου ${}_0i_1$, ${}_0i_2$ και τα επιτόκια δανεισμού ${}_0k_1$, ${}_0k_2$.

Σημειώνουμε ότι, αντικαθιστώντας τα p_1, p_2 από τους τύπους (3.2.1) και (3.4.4) στον τύπο (3.4.1) προκύπτει μια σχέση για την αθροιστική πιθανότητα αθέτησης στο διάστημα των δύο ετών συναρτήσει των ${}_0i_2$, ${}_0k_2$. Πράγματι :

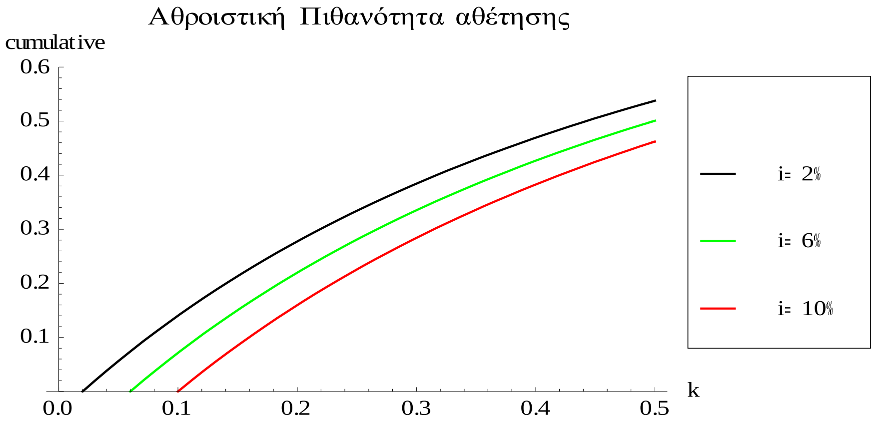
$$C_2 = 1 - \left(1 - \frac{{}_0k_1 - {}_0i_1}{1 +_0 k_1}\right) \cdot \frac{\left(1 +_0 i_2\right)^2\left(1 +_0 k_1\right)}{\left(1 +_0 k_2\right)^2\left(1 +_0 i_1\right)} = 1 - \frac{1 +_0 i_1}{1 +_0 k_1} \cdot \frac{\left(1 +_0 i_2\right)^2\left(1 +_0 k_1\right)}{\left(1 +_0 k_2\right)^2\left(1 +_0 i_1\right)}$$

ή ακόμη

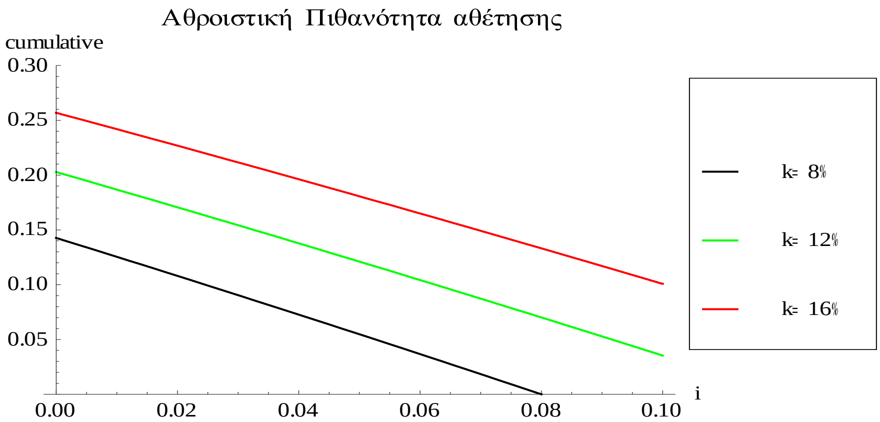
$$C_2 = 1 - \frac{\left(1 +_0 i_2\right)^2}{\left(1 +_0 k_2\right)^2}.$$

[1]Προθεσμιακό είναι το επιτόκιο που εφαρμόζεται σε μια χρηματοοικονομική συναλλαγή που θα πραγματοποιηθεί στο μέλλον

Στα Σχήματα 3.8 και 3.9 δίνεται η γραφική παράσταση της αθροιστικής πιθανότητας αθέτησης για διάφορες τιμές των επιτοκίων i και k.



Σχήμα 3.8 Αθροιστική πιθανότητα αθέτησης για διάφορες τιμές του i



Σχήμα 3.9 Αθροιστική πιθανότητα αθέτησης για διάφορες τιμές του k

3.5 Δανεισμός για δυο περιόδους με ανάκτηση

Στην περίπτωση που ο πιστωτής ανακτά ποσοστό $\gamma > 0$ του αρχικού κεφαλαίου και των δεδουλευμένων τόκων, τότε η τελική αξία της επένδυσης στο τέλος του δεύτερου έτους για ομόλογο με απόδοση ${}_1k_1$ ένα έτος από σήμερα, θα δίνεται από τον τύπο

$$V_\Delta = \begin{cases} \gamma(1+{}_1k_1), & \text{αν συμβεί αθέτηση στο τέλος του δεύτερου έτους} \\ 1+{}_1k_1 & \text{αν δεν συμβεί αθέτηση στο τέλος του δεύτερου έτους} \end{cases}.$$

Η εξίσωση αδιαφορίας στη σχέση (4.2.1) όταν το ποσοστό ανάκτησης είναι γ, και χρησιμοποιώντας προθεσμιακά επιτόκια ενός έτους παίρνει την μορφή

$$1+{}_1 i_1 = \gamma(1+{}_1 k_1)\cdot p_2 + (1+{}_1 k_1)(1-p_2) \Rightarrow$$
$$1+{}_1 i_1 = (1+{}_1 k_1)\cdot[1-p_2(1-\gamma)] \Rightarrow$$
$$1+{}_1 i_1 = (1+{}_1 k_1) - p_2(1+{}_1 k_1)(1-\gamma)$$

οπότε παίρνουμε τον τύπο

$$p_2 = \frac{{}_1 k_1 - {}_1 i_1}{(1+{}_1 k_1)\cdot(1-\gamma)} \quad . \tag{3.5.1}$$

Αντικαθιστώντας τα ${}_1k_1$, ${}_1i_1$ από τους τύπους (3.4.2), (3.4.3) στον τύπο (3.5.1) παίρνουμε

$$p_2 = \frac{\dfrac{(1+{}_0 k_2)^2}{1+{}_0 k_1} - \dfrac{(1+{}_0 i_2)^2}{1+{}_0 i_1}}{\dfrac{(1+{}_0 k_2)^2}{1+{}_0 k_1}(1-\gamma)} = \frac{(1+{}_0 i_1)(1+{}_0 k_2)^2 - (1+{}_0 i_2)^2(1+{}_0 k_1)}{(1+{}_0 i_1)(1+{}_0 k_2)^2(1-\gamma)}$$

ή ακόμη

$$p_2 = \frac{1}{(1-\gamma)}\cdot\left[1-\frac{(1+{}_0 i_2)^2(1+{}_0 k_1)}{(1+{}_0 k_2)^2(1+{}_0 i_1)}\right]. \tag{3.5.2}$$

3.6 Το γενικό μοντέλο για δανεισμό n περιόδων χωρίς ανάκτηση

Είδαμε στις δύο προηγούμενες παραγράφους πως υπολογίζουμε την πιθανότητα αθέτησης του δανειολήπτη κατά τη διάρκεια των δυο ετών. Ας συμβολίσουμε τώρα με p_3 την πιθανότητα αθέτησης του δανειολήπτη στο τρίτο έτος, χωρίς να υπάρχει αθέτηση στα δυο πρώτα έτη.

Με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας τα προθεσμιακά επιτόκια που θα ισχύουν **για δυο έτη από σήμερα,** μπορούμε να εξάγουμε αναλυτικό τύπο για την πιθανότητα p_3.

Συμβολίζουμε με

${}_0 i_3$: το ετήσιο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου για τριετή επένδυση

${}_2 i_1$: το επιτόκιο επένδυσης μηδενικού κινδύνου για το τρίτο έτος (forward rate)

${}_0 k_3$:το (ετήσιο) επιτόκιο δανεισμού τριών ετών του δανειολήπτη

${}_2k_1$:το επιτόκιο δανεισμού του δανειολήπτη για το τρίτο έτος, δηλαδή αυτό που θα ισχύει 2 έτη από σήμερα (forward rate).

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.2.1) που βρήκαμε στο μοντέλο μιας περιόδου προκύπτει ότι

$$p_3 = \frac{{}_2k_1 - {}_2i_1}{1 + {}_2k_1}. \tag{3.6.1}$$

Από τις εξισώσεις ανατοκισμού έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις για τα επιτόκια ${}_2k_1$, ${}_2i_1$

$$\left(1+{}_0i_3\right)^3 = \left(1+{}_0i_2\right)^2 \cdot \left(1+{}_2i_1\right) \Rightarrow {}_2i_1 = \frac{\left(1+{}_0i_3\right)^3}{\left(1+{}_0i_2\right)^2} - 1 \tag{3.6.2}$$

$$\left(1+{}_0k_3\right)^3 = \left(1+{}_0k_2\right)^2 \cdot \left(1+{}_2k_1\right) \Rightarrow {}_2k_1 = \frac{\left(1+{}_0k_3\right)^3}{\left(1+{}_0k_2\right)^2} - 1. \tag{3.6.3}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.6.2), (3.6.3) στην (3.6.1) έχουμε

$$p_3 = \frac{\dfrac{(1+{}_0k_3)^3}{\left(1+{}_0k_2\right)^2} - 1 + 1 - \dfrac{(1+{}_0i_3)^3}{\left(1+{}_0i_2\right)^2}}{\dfrac{(1+{}_0k_3)^3}{\left(1+{}_0k_2\right)^2}} = \frac{\dfrac{(1+{}_0k_3)^3\left(1+{}_0i_2\right)^2 - (1+{}_0i_3)^3\left(1+{}_0k_2\right)^2}{\left(1+{}_0i_2\right)^2\left(1+{}_0k_2\right)^2}}{\dfrac{(1+{}_0k_3)^3}{\left(1+{}_0k_2\right)^2}}$$

και μετά από κάποιες πράξεις και απλοποιήσεις βρίσκουμε

$$p_3 = 1 - \frac{(1+{}_0i_3)^3}{(1+{}_0k_3)^3} \cdot \frac{\left(1+{}_0k_2\right)^2}{\left(1+{}_0i_2\right)^2} \quad . \tag{3.6.4}$$

Γενικότερα με ${}_ji_t$ συμβολίζουμε το **ετήσιο προθεσμιακό επιτόκιο** (forward rate) για επένδυση t ετών που ξεκινά j έτη από σήμερα.

Τώρα ο τύπος (3.4.2) μπορεί να γενικευτεί για $n = t + j$ περιόδους, καταλήγοντας στον ακόλουθο

$$ {}_j i_t = \frac{\left(1 + {}_0 i_{t+j}\right)^{t+j}}{\left(1 + {}_0 i_j\right)^j} - 1 \quad \text{εξίσωση ανατοκισμού.} $$

Αν εργαστούμε όπως προηγουμένως, μπορούμε χρησιμοποιώντας τα προθεσμιακά επιτόκια που θα ισχύουν σε $n-1$ έτη από σήμερα, να καταλήξουμε στην πιθανότητα αθέτησης στο n-οστό έτος p_n χωρίς να έχουμε αθέτηση στα προηγούμενα έτη. Πιο συγκεκριμένα θα έχουμε τον τύπο

$$ p_n = 1 - \left(\frac{1 + {}_0 i_n}{1 + {}_0 k_n}\right)^n \left(\frac{1 + {}_0 k_{n-1}}{1 + {}_0 i_{n-1}}\right)^{n-1}. \tag{3.6.5} $$

3.7 Το γενικό μοντέλο για δανεισμό n περιόδων με ανάκτηση

Έχοντας υπολογίσει την αθροιστική πιθανότητα αθέτησης C_2 σε προηγούμενη παράγραφο, θα γενικεύσουμε τον τύπο της αθροιστικής πιθανότητας αθέτησης για n έτη.

Ξεκινώντας από την περίπτωση δανεισμού για τρεις περιόδους με ανάκτηση, θα υπολογίσουμε την πιθανότητα αθέτησης p_3 στην τρίτη περίοδο με την προϋπόθεση ότι δεν έχουμε πιστωτικό γεγονός κατά τη διάρκεια των δυο πρώτων περιόδων.

Η εξίσωση αδιαφορίας στη σχέση (3.2.1) όταν το ποσοστό ανάκτησης είναι γ, και χρησιμοποιώντας προθεσμιακά επιτόκια δυο ετών παίρνει την μορφή

$$ 1 + {}_2 i_1 = \gamma\left(1 + {}_2 k_1\right) \cdot p_3 + \left(1 + {}_2 k_1\right)\left(1 - p_3\right) \Rightarrow 1 + {}_2 i_1 = \left(1 + {}_2 k_1\right) \cdot \left[1 - p_3\left(1 - \gamma\right)\right] \Rightarrow $$

$$ 1 + {}_2 i_1 = \left(1 + {}_2 k_1\right) - p_3\left(1 + {}_2 k_1\right)\left(1 - \gamma\right) \Rightarrow p_3 = \frac{{}_2 k_1 - {}_2 i_1}{\left(1 + {}_2 k_1\right) \cdot \left(1 - \gamma\right)}, $$

και αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.6.2), (3.6.3) στην τελευταία ισότητα προκύπτει

$$ p_3 = \frac{1}{1-\gamma}\left[1 - \frac{(1 + {}_0 i_3)^3}{(1 + {}_0 k_3)^3} \cdot \frac{\left(1 + {}_0 k_2\right)^2}{\left(1 + {}_0 i_2\right)^2}\right]. \tag{3.7.1} $$

Γενικότερα για n περιόδους οδηγούμαστε στον τύπο

$$p_n = \frac{1}{1-\gamma}\left[1-\left(\frac{1+_0 i_n}{1+_0 k_n}\right)^n \left(\frac{1+_0 k_{n-1}}{1+_0 i_{n-1}}\right)^{n-1}\right].$$

Μετά την εύρεση της περιθώριας πιθανότητας αθέτησης p_3 (marginal default rate) για το τρίτο έτος, υπολογίζουμε την αθροιστική πιθανότητα αθέτησης C_3 (του προϊόντος, δανειολήπτη) στη διάρκεια των τριών ετών. Αυτό σημαίνει ότι ο δανειολήπτης «χρεοκοπεί» είτε στο πρώτο, είτε στο δεύτερο, είτε στο τρίτο έτος. Έχουμε:

$$C_3 = p_1 + (1-p_1)p_2 + (1-p_1)(1-p_2)p_3 = 1-(1-p_1)+(1-p_1)p_2 + (1-p_1)(1-p_2)p_3 =$$

$$= 1-(1-p_1)[1-p_2-(1-p_2)p_3],$$

οπότε βρίσκουμε τελικά

$$C_3 = 1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3). \qquad (3.7.2)$$

Η σχέση (3.7.2) είναι αναμενόμενη γιατί το αποτέλεσμα $(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$ εκφράζει το γινόμενο των πιθανοτήτων ο δανειολήπτης να αποπληρώνει τις δανειακές υποχρεώσεις του σε καθεμιά από τις τρεις περιόδους. Γενικότερα, αν έχουμε n περιόδους – έτη, τότε η πιθανότητα αθέτησης (αθροιστική) κατά τη διάρκεια των n ετών θα είναι:

$$C_n = 1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i),$$

όπου p_i η (περιθώρια) πιθανότητα αθέτησης για το i έτος, i =1,2…, n.

Εφαρμόζοντας την τελευταία σχέση βρίσκουμε τις αθροιστικές πιθανότητες χρεοκοπίας για τις διάφορες ληκτότητες δανείων ή χρηματοοικονομικών προϊόντων. Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$1-C_n = (1-C_{n-1})(1-p_n)$$

οπότε θα έχουμε

$$1-C_n \le 1-C_{n-1} \Rightarrow C_n \ge C_{n-1}.$$

Επομένως καθώς ο χρονικός ορίζοντας αυξάνει, η αθροιστική πιθανότητα αθέτησης αυξάνει επίσης, καθώς ενσωματώνει τον κίνδυνο των προηγούμενων περιόδων μαζί με τον κίνδυνο αθέτησης στο έτος n.

3.8 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της χρήσης της καμπύλης απόδοσης

Η μέθοδος που περιγράψαμε για την εκτίμηση της πιθανότητας αθέτησης έχει δυο βασικά πλεονεκτήματα:

- Χρησιμοποιεί στοιχεία της αγοράς που είναι περισσότερο αντικειμενικά, προσβάσιμα με χαμηλό κόστος και ως εκ τούτου δεν επηρεάζονται από την υποκειμενικότητα των μοντέλων εκτίμησης των πιστωτικών ιδρυμάτων.
- Το μοντέλο είναι σε θέση να εκτιμήσει τις πιθανότητες αθέτησης σύμφωνα με τις μελλοντικές προσδοκίες της αγοράς χωρίς τη χρήση ιστορικών στοιχείων.

Από την άλλη μεριά υπάρχουν και κάποια μειονεκτήματα. Η υπόθεση που έχει γίνει για να αναπτυχθεί το μοντέλο, είναι ότι η διαφορά ανάμεσα στο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου και στο επιτόκιο με κίνδυνο οφείλεται αποκλειστικά στον πιστωτικό κίνδυνο του προϊόντος (π.χ. ομόλογο). Στην πραγματικότητα ένα μέρος αυτής της διαφοράς αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι τα εταιρικά ομόλογα είναι λιγότερο ρευστοποιήσιμα. Σε προηγούμενη παράγραφο, χρησιμοποιήσαμε τα προθεσμιακά επιτόκια ως αμερόληπτο εκτιμητή των μελλοντικών επιτοκίων (spot rates) υποθέτοντας ότι η θεωρία των προσδοκιών είναι έγκυρη. Παρόλα αυτά, η θεωρία των προσδοκιών είναι δύσκολο να στηριχθεί για ληκτότητες μεγαλύτερης χρονικής διάρκειας όπου τα αυξανόμενα ασφάλιστρα δεν είναι άμεσα συνδεδεμένα με τον πιστωτικό κίνδυνο.

Μια δεύτερη υπόθεση του μοντέλου είναι η ουδετερότητα στον κίνδυνο. Υποθέσαμε ότι ο επενδυτής θα είναι αδιάφορος μεταξύ της διακράτησης ενός κρατικού ομολόγου (risk-free) ή εταιρικού ομολόγου, εφόσον η αναμενόμενη τελική αξία είναι η ίδια. Στην πράξη προκειμένου ένας επενδυτής να προτιμήσει το ομόλογο που ενέχει κίνδυνο, απαιτεί ένα ασφάλιστρο R, οπότε η εξίσωση (3.2.1) γίνεται:

$$1+i+R=(1+k)\cdot\left[1-p^{*}\cdot(1-\gamma)\right] \tag{3.8.1}$$

Συγκρίνοντας τις (3.2.1) και (3.8.1) είναι ξεκάθαρο ότι η τιμή του p που αποτελεί λύση της (3.2.1) είναι μεγαλύτερη από την λύση p^{*} της (3.8.1). Επομένως η εξίσωση (3.2.1) υπερεκτιμά τις τιμές της πιθανότητας αθέτησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΕΠΙΤΟΚΙΑ

4.1 Εισαγωγή

Στον πραγματικό κόσμο το επιτόκιο δεν είναι σταθερό. Μπορεί να θεωρηθεί σταθερό μόνο για μικρό χρονικό διάστημα (π.χ μία μέρα). Επειδή το επιτόκιο μεταβάλλεται τυχαία στο χρόνο, συμπεραίνουμε ότι είναι μια τυχαία μεταβλητή που μπορεί να προσεγγιστεί με διάφορους τρόπους. Το ίδιο συμβαίνει και με την πιθανότητα αθέτησης ενός δανειολήπτη.

Ένας τρόπος μελέτης ενός στοχαστικού φαινομένου είναι η παρακολούθηση πολλών πραγματοποιήσεων του στο χρόνο, η καταγραφή των αποτελεσμάτων και η προσπάθεια εξαγωγής εμπειρικών συμπερασμάτων. Με τη μέθοδο αυτή, γνωστή ως προσομοίωση, θα παράγουμε ψευδοτυχαίους αριθμούς επιτοκίων και θα αναζητήσουμε προσεγγιστικά την κατανομή της πιθανότητας αθέτησης για τα μοντέλα που αναπτύχθηκαν στο ντετερμινιστικό πλαίσιο.

4.2 Κατανομές επιτοκίων

Η κατανομή Βήτα παρέχει ένα ικανοποιητικό μοντέλο για την περιγραφή τυχαίων μεταβλητών που παίρνουν τιμές μεταξύ δυο συγκεκριμένων ορίων, όπως για παράδειγμα, το ποσοστό ατόμων ενός πληθυσμού που έχουν μία συγκεκριμένη ιδιότητα. Το ίδιο συμβαίνει με τα επιτόκια που παίρνουν τιμές στο διάστημα $(0,1)$. Λέμε ότι η X είναι μία τυχαία μεταβλητή Βήτα (Beta) με θετικές παραμέτρους a, b και γράφουμε $X \sim Beta(a,b)$, αν η συνάρτηση πυκνότητας f_X είναι

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, 0 < x < 1$$

και

$$f_X(x) = 0, x \notin (0,1).$$

Η f_X είναι πράγματι μια συνάρτηση πυκνότητας διότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = 1,$$

όπου

$B(a,b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$ η συνάρτηση Βήτα.

Αν $a = b = 1$, τότε μία τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε X ~ $B(1,1)$, ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 1)$.

Η μέση τιμή και η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής $X \sim B(a,b)$ δίνονται από τους τύπους

$$E(X) = \frac{a}{a+b}, \tag{4.2.1}$$

$$Var(X) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}\,. \tag{4.2.2}$$

Θα περιγράψουμε στη συνέχεια ένα αλγόριθμο που θα μας βοηθήσει στην κατασκευή τυχαίων αριθμών, ο οποίος λέγεται αποδοχής – απόρριψης. Έστω λοιπόν ότι επιθυμούμε την παραγωγή τυχαίων αριθμών από μια συνεχή κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x), x \in R$. Αν μπορούμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από μια συνεχή κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g(x)$, τότε αποδεχόμαστε τον τυχαίο αριθμό Y από την κατανομή με σ.π.π $g(x)$, δηλαδή θέτουμε $X = Y$ με πιθανότητα ανάλογη του πηλίκου $\frac{f(x)}{g(x)}$. Αν δεν γίνει αποδεκτός, παράγουμε ένα άλλο τυχαίο αριθμό από την κατανομή με σ.π.π $g(x)$. Πιο συγκεκριμένα υπολογίζουμε ένα άνω φράγμα ή μέγιστο για το λόγο $\frac{f(x)}{g(x)}$, δηλαδή προσδιορίζουμε μια πραγματική σταθερά c για την οποία ισχύει

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq c \text{ για κάθε } x \text{ με } g(x) \neq 0.$$

Συνοψίζοντας, τα βήματα του αλγορίθμου αποδοχής – απόρριψης είναι τα εξής:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε ένα τυχαίο αριθμό Y από την κατανομή με σ.π.π $g(x)$.

ΒΗΜΑ 2. Παράγουμε ένα τυχαίο αριθμό U από την ομοιόμορφη στο διάστημα $(0, 1)$.

ΒΗΜΑ 3. Αν $U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}$,τότε θέτουμε $X = Y$ και σταματάμε. Διαφορετικά επιστρέφουμε στο βήμα 1.

Ο τυχαίος αριθμός X που παράγεται από τον παραπάνω αλγόριθμο έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x), x \in R$.

Στην περίπτωση που επιθυμούμε την παραγωγή τυχαίων αριθμών από την κατανομή Βήτα με παραμέτρους a και b, μπορούμε ως βοηθητική κατανομή να χρησιμοποιήσουμε την ομοιόμορφη στο διάστημα $(0, 1)$, δηλαδή $g(x) = 1, x \in (0, 1)$. Η σταθερά c θα πρέπει να ικανοποιεί την $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \leq c, x \in (0,1)$ και επομένως αρκεί να βρούμε το μέγιστο της f στο $(0,1)$. Αν $a < 1$ ή $b < 1$, τότε η f δεν είναι άνω φραγμένη στο $(0,1)$. Πράγματι αν $a < 1$ τότε $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$, ενώ αν $b < 1$ τότε $\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$, άρα στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο αποδοχής – απόρριψης. Αν τώρα $a = 1, b > 1$ τότε η $f(x) = b(1-x)^{b-1}$ είναι φθίνουσα στο $(0,1)$ και άρα $c = f(0) = b$. Αντίστοιχα αν $a > 1, b = 1$ τότε η $f(x) = ax^{a-1}$ είναι αύξουσα στο $(0,1)$ και άρα $c = f(1) = a$.

Τέλος θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου $a, b > 1$, χρησιμοποιώντας ένα αριθμητικό παράδειγμα με παραμέτρους $a = 2, b = 4$. Η τυχαία μεταβλητή που μας ενδιαφέρει θα έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = 20x(1-x)^3, x \in (0,1).$$

Θα βρούμε σε ποιο σημείο λαμβάνει μέγιστη τιμή η $lnf(x)$ για $x \in (0,1)$. Ισχύει ότι:

$$\frac{d}{dx} lnf(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{1-x}.$$

Άρα τα πιθανά σημεία μεγίστου της lnf και ισοδύναμα της f θα ικανοποιούν την

$$\frac{1}{x} - \frac{3}{1-x} = 0 \Leftrightarrow 1 - x - 3x = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{4}.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$\frac{d^2}{dx^2} lnf(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{(1-x)^2} < 0,$$

άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = \frac{1}{4}$, το $c = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{20}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{135}{64}$, οπότε

$$\frac{f(x)}{cg(x)} = \frac{64}{135} 20x(1-x)^3 = \frac{256x(1-x)^3}{27}.$$

Ο αλγόριθμος παραγωγής τυχαίων αριθμών στην περίπτωση αυτή είναι:

- Παράγουμε τυχαίους αριθμούς U_1, U_2 από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$.
- Αν $U_2 \leq \frac{256}{27} U_1(1-U_1)^3$, τότε θέτουμε $X = U_1$ και σταματάμε. Αλλιώς πηγαίνουμε στο προηγούμενο βήμα.

Συνοψίζοντας μπορούμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από την κατανομή Βήτα για $a, b > 1$ ως εξής:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε τυχαίους αριθμούς U_1, U_2 από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 1)$.

ΒΗΜΑ 2. Αν $U_2 \leq \frac{f(U_1)}{c} = \frac{(a+b-2)^{a+b-2}}{(a-1)^{a-1}(b-1)^{b-1}} {U_1}^{a-1}(1-U_1)^{b-1}$, τότε θέτουμε $X = U_1$ και σταματάμε. Διαφορετικά επιστρέφουμε στο βήμα 1.

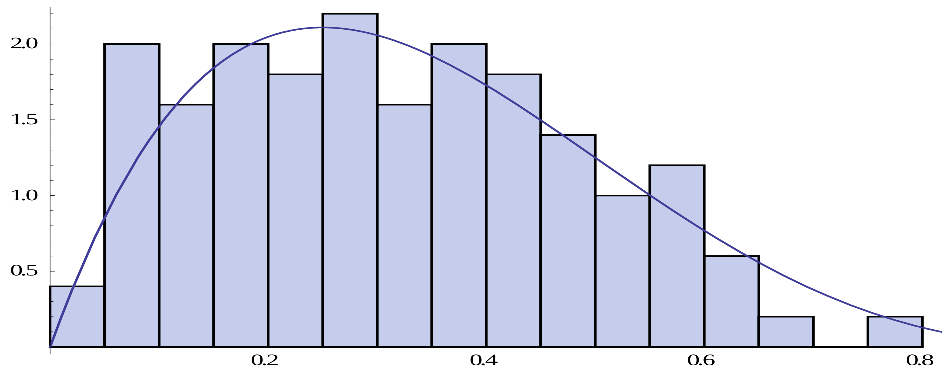
Μια υλοποίηση του παραπάνω αλγόριθμου μέσω Mathematica για την παραγωγή $n = 100$ τυχαίων αριθμών είναι η ακόλουθη:

```
a = 2; b = 4; randomnumbers = { };
Do[cont = True; While[cont, U1 = Random[ ]; U2 = Random[ ]; If[U2
        ≤ (a + b − 2)^(a + b − 2) ∗ (a − 1)^(−a + 1) ∗ (b − 1)^(−b + 1)
        ∗ U1^(a − 1) ∗ (1 − U1)^(b − 1), cont = False]]; randomnumbers
        = Append[randomnumbers, U1], {100}];
Print[randomnumbers];
```

Οι παραγόμενοι αριθμοί μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελούν ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή $B(2,4)$. Το ιστόγραμμα συχνοτήτων ενός τυχαίου δείγματος $n = 100$ και η συνάρτηση πυκνότητας της $B(2,4)$ υλοποιούνται με χρήση των εντολών

```
Needs["Histograms`"]
h = Histogram[randomnumbers, HistogramScale → 1];
p = Plot[(1/Beta[a, b]) ∗ x^(a − 1) ∗ (1 − x)^(b − 1), {x, 0,1}];
Show[h, p]
```

και παρουσιάζονται στο επόμενο σχήμα.

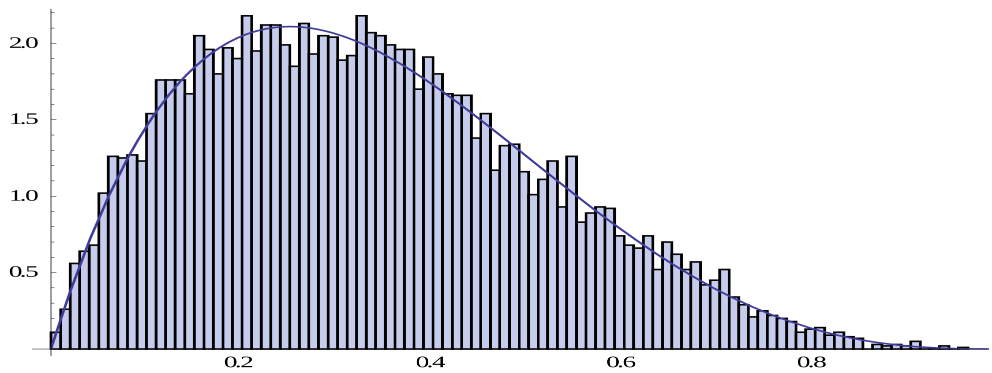


Σχήμα 4.1 Ιστόγραμμα και συνάρτηση πυκνότητας της $B(2,4)$ για $n = 100$

Αν τώρα πάρουμε ένα αρκετά μεγάλο δείγμα, θα πρέπει το ιστόγραμμα συχνοτήτων να προσεγγίζει την συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής $B(2,4)$. Αρχικά κατασκευάζουμε την λίστα 10000 τυχαίων αριθμών από την συγκεκριμένη κατανομή. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις εντολές

```
Needs["Histograms`"]
h1 = Histogram[randomnumbers, HistogramScale → 1];
p1 = Plot[(1/Beta[a, b]) * x^(a − 1) * (1 − x)^(b − 1), {x, 0,1}];
Show[h1, p1]
```

παίρνουμε ένα κοινό γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας της κατανομής $B(2,4)$ και του ιστογράμματος συχνοτήτων του δείγματος των 10000 τυχαίων αριθμών. Όπως μπορούμε να δούμε στο επόμενο σχήμα το ιστόγραμμα συχνοτήτων προσεγγίζει την συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής Βήτα με παραμέτρους 2 και 4.



Σχήμα 4.2 Ιστόγραμμα και συνάρτηση πυκνότητας της $B(2,4)$ για $n = 10000$

4.3 Προσομοίωση της πιθανότητας αθέτησης

Έστω ότι θέλουμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς για το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου i από την κατανομή Βήτα με $E(I) = 0.04$ και τυχαίους αριθμούς για το επιτόκιο δανεισμού k από την κατανομή Βήτα με $E(K) = 0.1$. Από την σχέση (4.2.1) μπορούμε να αντιληφθούμε ότι υπάρχουν άπειρες επιλογές των παραμέτρων a, b για τις οποίες $E(I) = 0.04$, αφού αυτή η συνθήκη σημαίνει ότι:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{25} \Rightarrow 25a = a + b \Rightarrow b = 24a. \qquad (4.3.1)$$

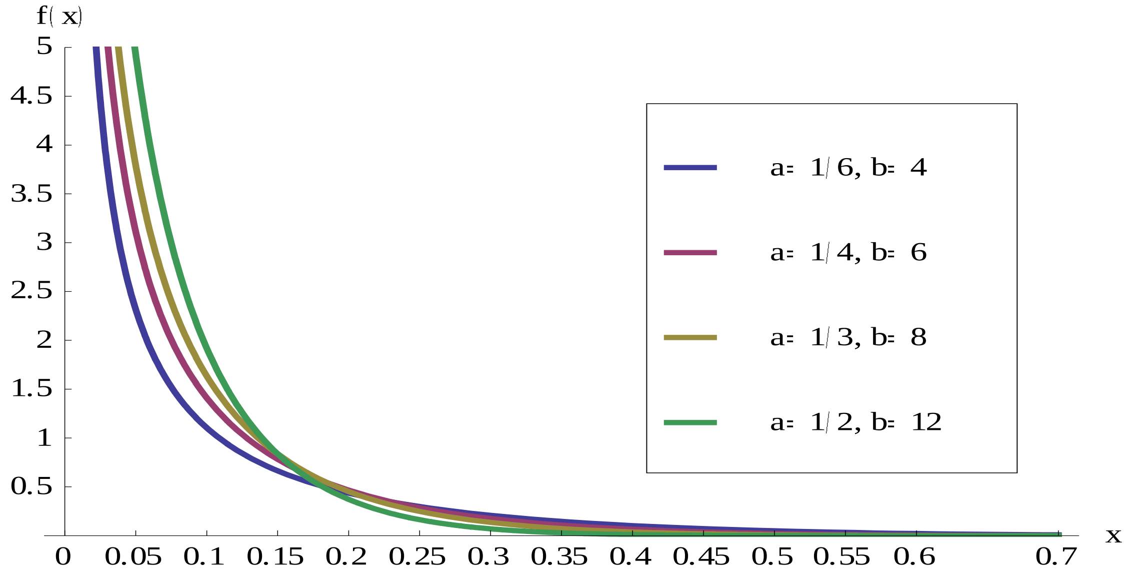
Μας ενδιαφέρει η μικρή διασπορά των τυχαίων μεταβλητών I και K ώστε να διασφαλίσουμε ότι οι διαφορές $K - I$ που αντιπροσωπεύουν το spread θα είναι θετικές. Αν αντικαταστήσουμε την σχέση (4.3.1) στον τύπο (4.2.2) προκύπτει ότι:

$$Var(I) = \frac{24}{25^2(25a+1)}$$

και η διακύμανση είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του α. Για διάφορες τιμές του α έχουμε τον παρακάτω πίνακα για τη $Var(I)$.

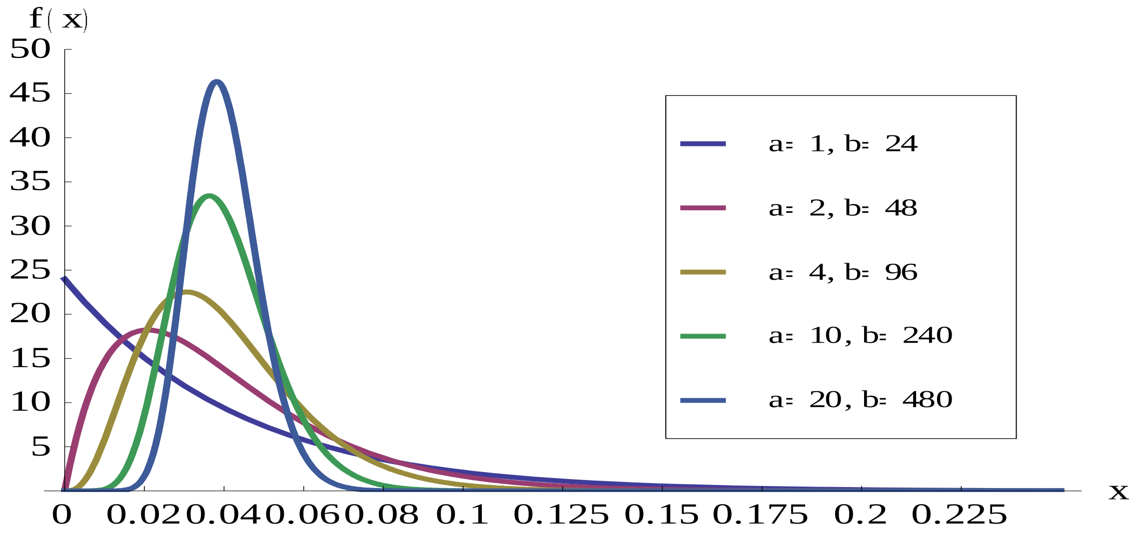
a	Var(I)
0.33	0.004114286
0.50	0.002844444
0.75	0.001944304
10	0.000152988
15	0.000102128
20	0.000076647
25	0.000061342
30	0.000051132

Επιλέγοντας ως παραμέτρους της βήτα κατανομής τα ζεύγη $\left(\frac{1}{6},4\right),\left(\frac{1}{4},6\right),\left(\frac{1}{3},8\right),\left(\frac{1}{2},12\right)$, για $0 < \alpha < 1$ σχεδιάζουμε στο Σχήμα 4.3 τις αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας



Σχήμα 4.3 Συναρτήσεις πυκνότητας της Βήτα Κατανομής με μέση τιμή 0.04 και $\alpha < 1$

ενώ επιλέγοντας τα ζεύγη $(1,24),(1{,}5,36),(5,120),(10,240)$ για $\alpha \geq 1$ παίρνουμε τις αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας στο Σχήμα 4.4.



Σχήμα 4.4 Συναρτήσεις πυκνότητας της Βήτα Κατανομής με μέση τιμή 0.04 και $\alpha > 1$

Με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε για το επιτόκιο δανεισμού k. Από την σχέση

$$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{10} \Rightarrow 10a = a + b$$

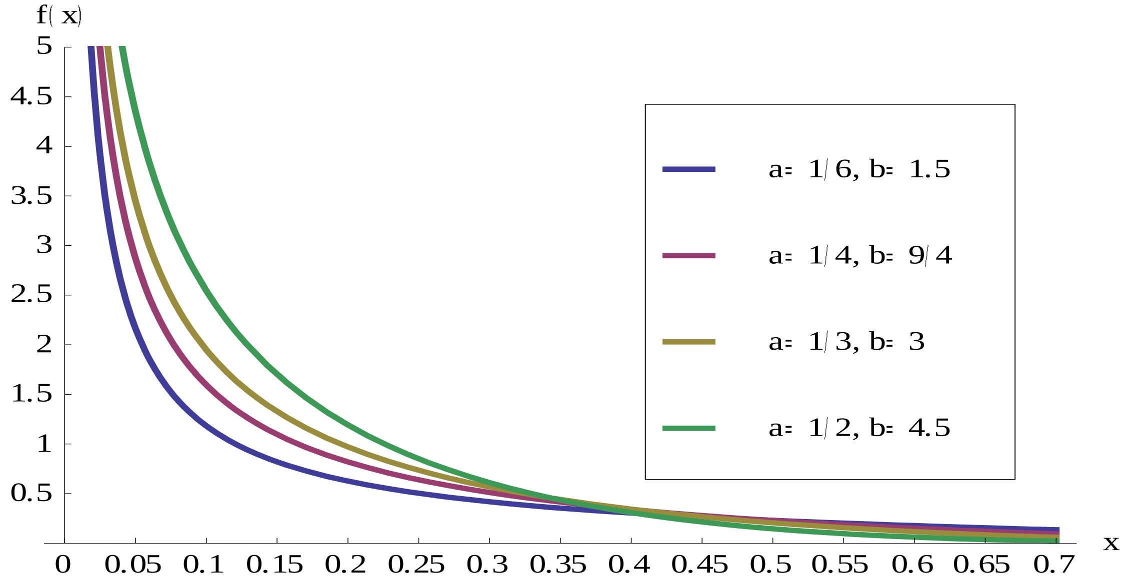
καταλήγουμε στην $b = 9a$. Αντικαθιστώντας την τελευταία στον τύπο (4.2.2) παίρνουμε για την διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής K

$$Var(K) = \frac{0.09}{10a+1}$$

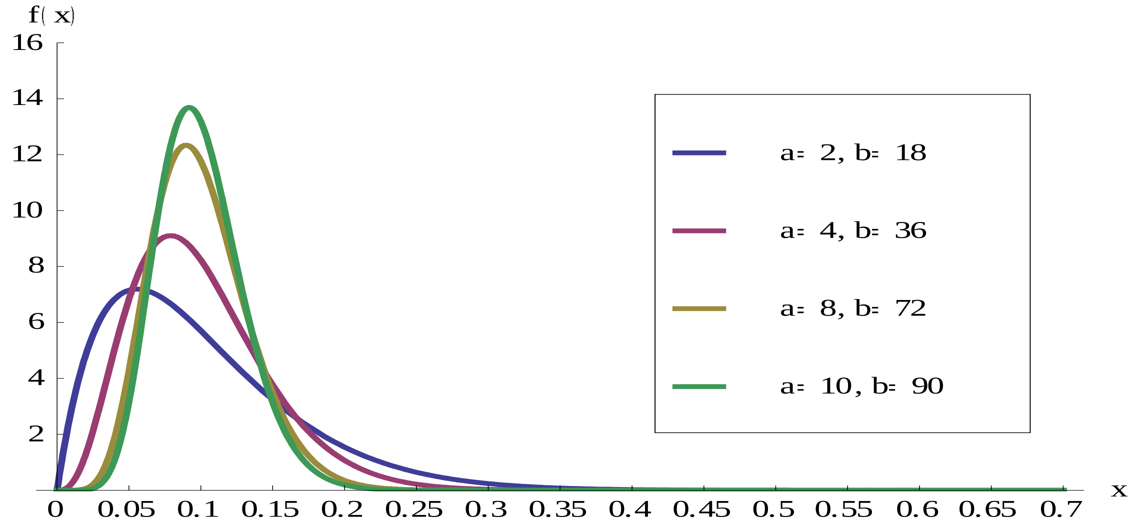
και για τις διάφορες τιμές του έχουμε τον ακόλουθο πίνακα.

a	**Var(K)**
0.25	0.025714
0.333	0.020769
0.5	0.015
10	0.000891
15	0.000596
20	0.000448
25	0.000359
30	0.000299

Για διάφορες τιμές του $\alpha < 1$ και $\alpha > 1$ δίνουμε στα Σχήματα 4.5 και 4.6 τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων πυκνότητας οι οποίες έχουν την ίδια μέση τιμή 0.1.



Σχήμα 4.5 Συναρτήσεις πυκνότητας της Βήτα Κατανομής με μέση τιμή 0.1 και $\alpha < 1$



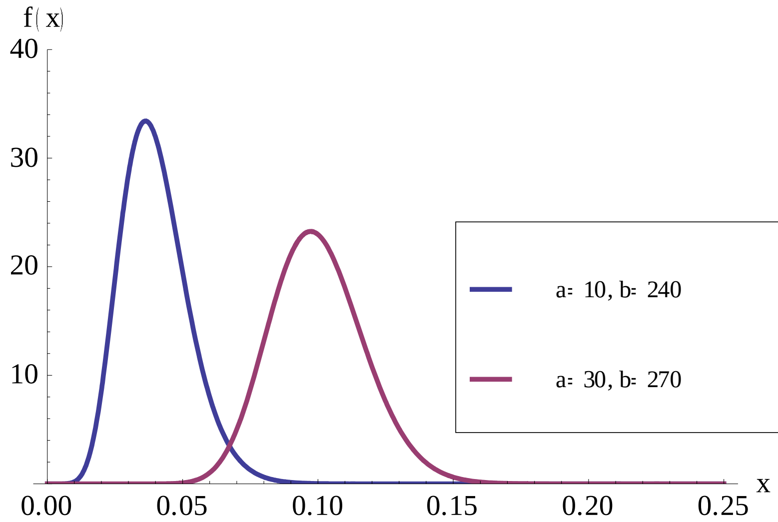
Σχήμα 4.6 Συναρτήσεις πυκνότητας της Βήτα Κατανομής με μέση τιμή 0.1 και $\alpha > 1$

Από τις προηγούμενες γραφικές παραστάσεις μπορούμε να συμπεράνουμε ότι όσο μεγαλώνει η παράμετρος α, τόσο πιο λεπτή γίνεται η ουρά της κατανομής ή όπως λέμε συγκλίνει γρηγορότερα στο μηδέν. Μάλιστα όταν τα α και b είναι μεγαλύτερα από 1 και ισχύει $\alpha < b$, τότε η καμπύλη πυκνότητας της βήτα είναι στρεβλωμένη προς τα δεξιά (θετικά λοξή). Πιο συγκεκριμένα, όταν $\alpha < b$, η τυχαία μεταβλητή που περιγράφεται από την κατανομή βήτα συγκεντρώνεται περισσότερο στο κατώτερο άκρο του διαστήματος $(0, 1)$. Όσο μεγαλύτερο είναι το b σε σύγκριση με το a, τόσο πιο έντονη είναι η λοξότητα της κατανομής.

A. Μοντέλο μιας περιόδου χωρίς ανάκτηση

Κάνοντας την υπόθεση ότι για τα τυχαία επιτόκια I και K ισχύουν $E(I) = 0.04$ και $E(K) = 0.1$, θα παράγουμε τυχαίους αριθμούς δείγματος $\nu = 30000$ από τις κατανομές βήτα $B(10{,}240)$ και $B(30, 270)$ με διασπορές 0.000153 και 0.000299 αντιστοίχως.

Από τις γραφικές παραστάσεις των τυχαίων μεταβλητών I και K, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας της K έχει μικρότερη κορυφή, ενώ και οι δυο εμφανίζουν θετική ασυμμετρία.



Σχήμα 4.7 Συναρτήσεις πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών I και K

Ο αλγόριθμος για την παραγωγή των τυχαίων αριθμών είναι ο ακόλουθος:

$$\mathrm{a1} = 10; \mathrm{b1} = 240; \mathrm{a2} = 30; \mathrm{b2} = 270; \mathrm{randomnumbersi} = \{\ \}; \mathrm{randomnumbersk} = \{\ \};$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Do[cont = True; While[cont, U1 = Random[\ ]; U2 = Random[\ ]; If[U2}\\ &\quad \leq (\mathrm{a1} + \mathrm{b1} - 2)\text{^}(\mathrm{a1} + \mathrm{b1} - 2) * (\mathrm{a1} - 1)\text{^}(-\mathrm{a1} + 1) * (\mathrm{b1} - 1)\text{^}(-\mathrm{b1}\\ &\quad + 1) * \mathrm{U1}\text{^}(\mathrm{a1} - 1) * (1 - \mathrm{U1})\text{^}(\mathrm{b1} - 1), \mathrm{cont = False]]; randomnumbersi}\\ &\quad = \mathrm{Append[randomnumbersi, U1], \{30000\}];}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Do[cont = True; While[cont, U3 = Random[\ ]; U4 = Random[\ ]; If[U4}\\ &\quad \leq (\mathrm{a2} + \mathrm{b2} - 2)\text{^}(\mathrm{a2} + \mathrm{b2} - 2) * (\mathrm{a2} - 1)\text{^}(-\mathrm{a2} + 1) * (\mathrm{b2} - 1)\text{^}(-\mathrm{b2}\\ &\quad + 1) * \mathrm{U3}\text{^}(\mathrm{a2} - 1) * (1 - \mathrm{U3})\text{^}(\mathrm{b2} - 1), \mathrm{cont = False]]; randomnumbersk}\\ &\quad = \mathrm{Append[randomnumbersk, U3], \{30000\}];}\end{aligned}$$

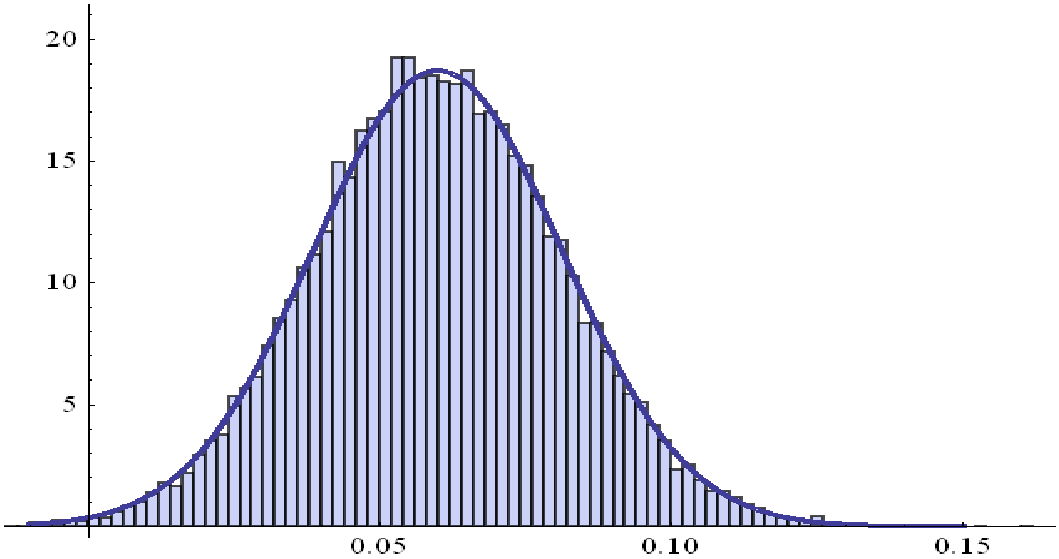
$$\mathrm{spread = randomnumbersk - randomnumbersi;}$$

Με την τελευταία εντολή παράγουμε 30000 τυχαίους αριθμούς για το $\varphi = k - i$ και στην συνέχεια με τις εντολές

$\mathcal{H}$ = DistributionFitTest[spread, Automatic, "HypothesisTestData"];

$\mathcal{H}$["FittedDistribution"]

ζητάμε να βρεθεί η καλύτερη κατανομή που προσαρμόζεται στα δεδομένα μας. Ως αποτέλεσμα, παίρνουμε ένα κοινό γράφημα του ιστογράμματος συχνοτήτων του τυχαίου δείγματος των 30000 αριθμών και της κατανομής που προσαρμόζεται σε αυτά. Παρατηρούμε ότι η κανονική κατανομή NormalDistribution[0.0599, 0.0213] παρουσιάζει πολύ καλή προσαρμογή για το spread που εξετάζουμε.



Σχήμα 4.8 Ιστόγραμμα συχνοτήτων του spread και γράφημα της προσαρμοσμένης κατανομής σε τυχαίο δείγμα 30000 αριθμών

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δημιουργήσουμε τυχαίους αριθμούς για την πιθανότητα αθέτησης $p = \frac{k-i}{1+k}$ που αφορά το μοντέλο μιας περιόδου με τις εντολές

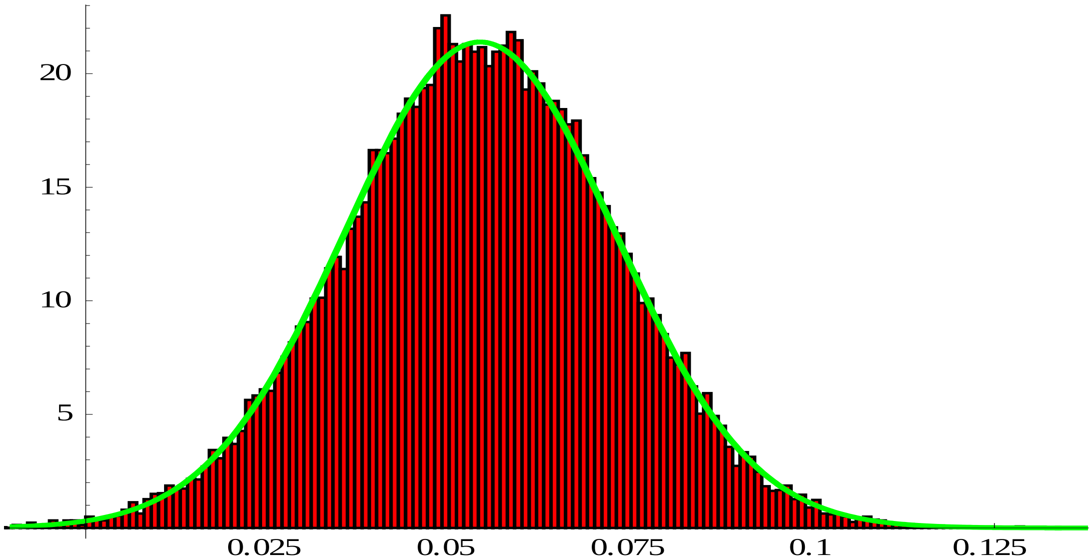
h1 = Histogram[randomp1, HistogramScale → 1];

$\mathcal{H}$1 = DistributionFitTest[randomp1, Automatic,HypothesisTestData];

$\mathcal{H}$1 = DistributionFitTest[randomp1, Automatic,HypothesisTestData];

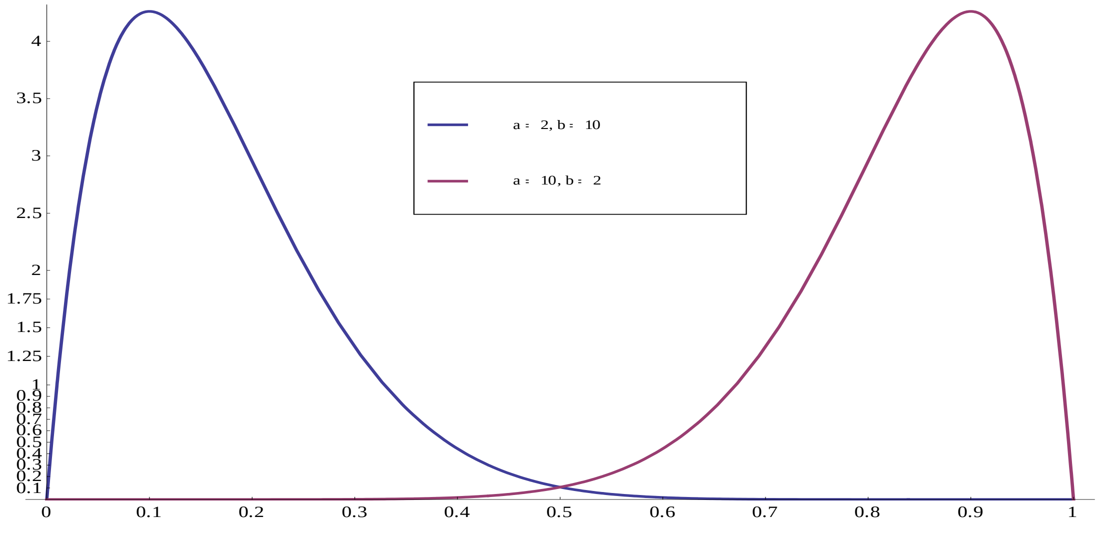
Παρατηρούμε ότι η κανονική κατανομή NormalDistribution[0.0542, 0.0186] παρουσιάζει πολύ καλή προσαρμογή και για τα δεδομένα των πιθανοτήτων αθέτησης χωρίς ανάκτηση.

Επομένως στις περιπτώσεις που εξετάσαμε η κανονική κατανομή μας δίνει ένα ικανοποιητικό μοντέλο για να περιγράψει την πιθανότητα αθέτησης ενός δανειολήπτη όταν τα επιτόκια δανεισμού και μηδενικού κινδύνου είναι στοχαστικά.



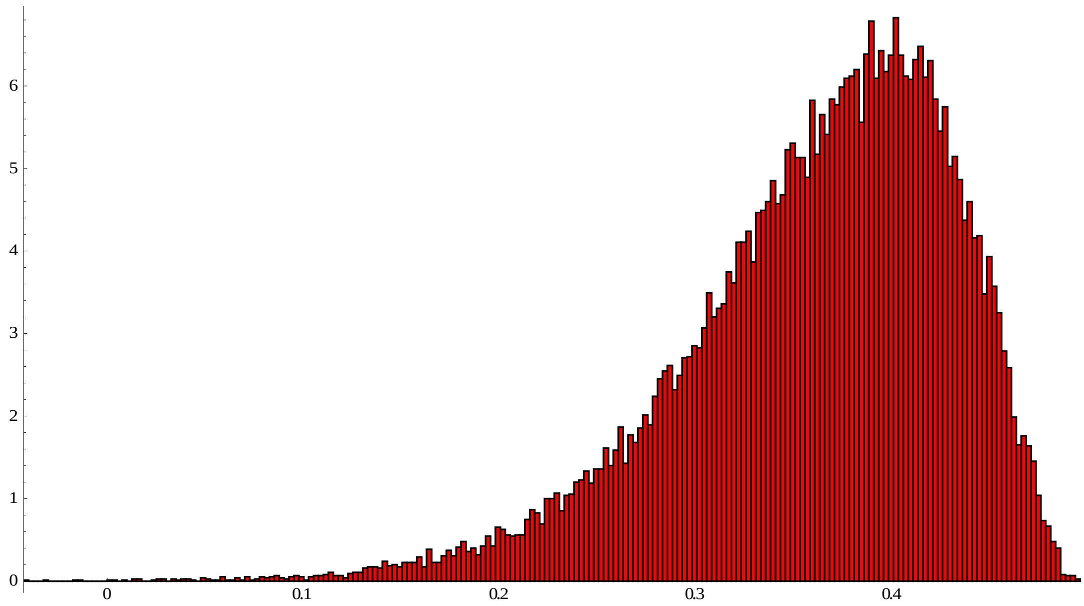
Σχήμα 4.9 Ιστόγραμμα συχνοτήτων της πιθανότητας αθέτησης χωρίς ανάκτηση και γράφημα της προσαρμοσμένης κατανομής σε τυχαίο δείγμα 30000 αριθμών

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η μελέτη της συμπεριφοράς των τιμών πιθανοτήτων αθέτησης που προκύπτουν από τη μέθοδο της προσομοίωσης, όταν οι κατανομές των επιτοκίων δεν είναι συμμετρικές. Δηλαδή, οι σ.π.π των κατανομών βήτα για τις τυχαίες μεταβλητές I και K να έχουν τη γραφική παράσταση του ακόλουθου σχήματος

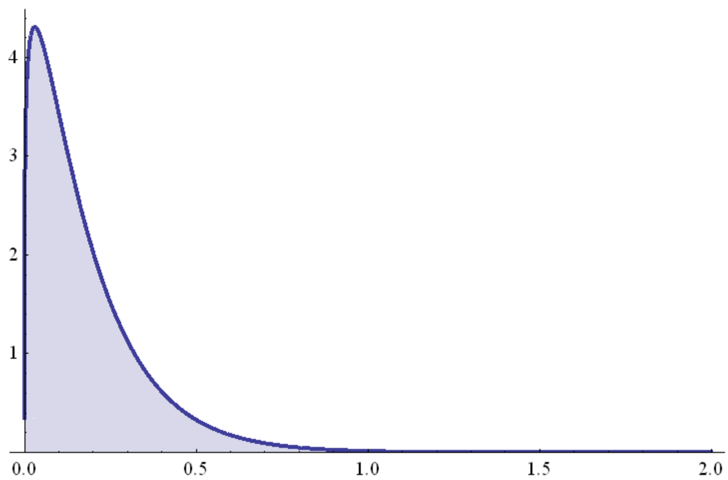


Σχήμα 4.10 Συναρτήσεις πυκνότητας των κατανομών $B(2, 10)$ και $B\ (10, 2)$

Κατασκευάζουμε τη λίστα των 30000 πιθανοτήτων αθέτησης χωρίς ανάκτηση με τα επιτόκια I και K να ακολουθούν τις κατανομές $B(2, 10)$ και $B\ (10, 2)$ αντιστοίχως. Ζητάμε να βρεθεί η καλύτερη κατανομή που προσαρμόζεται στα δεδομένα μας και κατασκευάζουμε ένα γράφημα του ιστογράμματος συχνοτήτων του τυχαίου δείγματος και της κατανομής που προσαρμόζεται σε αυτά. Παρατηρούμε ότι η κατανομή Γάμμα(1.2, 0.15) παρουσιάζει καλή προσαρμογή για το μοντέλο μας.



Σχήμα 4.11 Ιστόγραμμα συχνοτήτων της πιθανότητας αθέτησης σε ασύμμετρη κατανομή επιτοκίων



Σχήμα 4.12 Η σ.π.π της κατανομής Γάμμα(1.2, 0.15)

B. Μοντέλο μιας περιόδου με ανάκτηση

Όταν έχουμε ποσοστό ανάκτησης (π.χ. 30%) τότε με τις ακόλουθες εντολές παράγουμε 30000 τυχαίους αριθμούς από πιθανότητες αθέτησης για το μοντέλο μιας περιόδου με ανάκτηση:

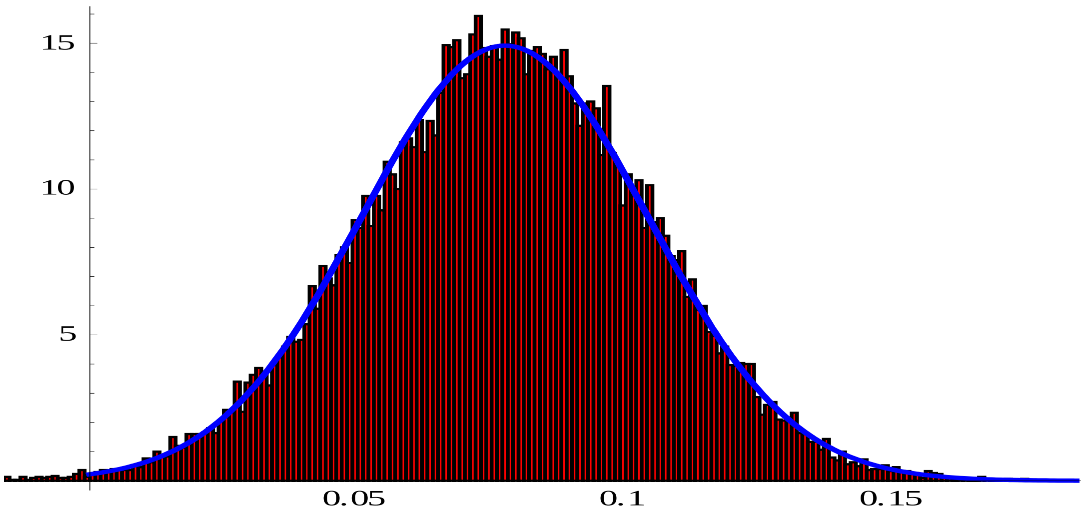
$\mathrm{gamma} = 0.3; \mathrm{randomcollateralp1} = \mathrm{randomp1}/(1 - \mathrm{gamma})$;

$\mathrm{h2} = \mathrm{Histogram}[\mathrm{randomcollateralp1}, \mathrm{HistogramScale} \to 1]$;

$\mathrm{Show}[\mathrm{h2}, \mathrm{Plot}[\mathrm{PDF}[\mathcal{H}2[\text{"FittedDistribution"}], x], \{x, 0, 0.3\}, \mathrm{PlotStyle} \to$

$\{\mathrm{Blue}, \mathrm{Thick}\}], \mathrm{AxesOrigin} \to \{0,0\}]$.

Ζητάμε να βρεθεί η καλύτερη κατανομή που προσαρμόζεται στα δεδομένα μας και κατασκευάζουμε ένα κοινό γράφημα του ιστογράμματος συχνοτήτων του τυχαίου δείγματος των 30000 αριθμών και της κατανομής που προσαρμόζεται σε αυτά. Παρατηρούμε ότι η κανονική κατανομή $\mathrm{N}[0.07747, 0.02674]$ παρουσιάζει πολύ καλή προσαρμογή για τα δεδομένα των πιθανοτήτων αθέτησης με ανάκτηση.



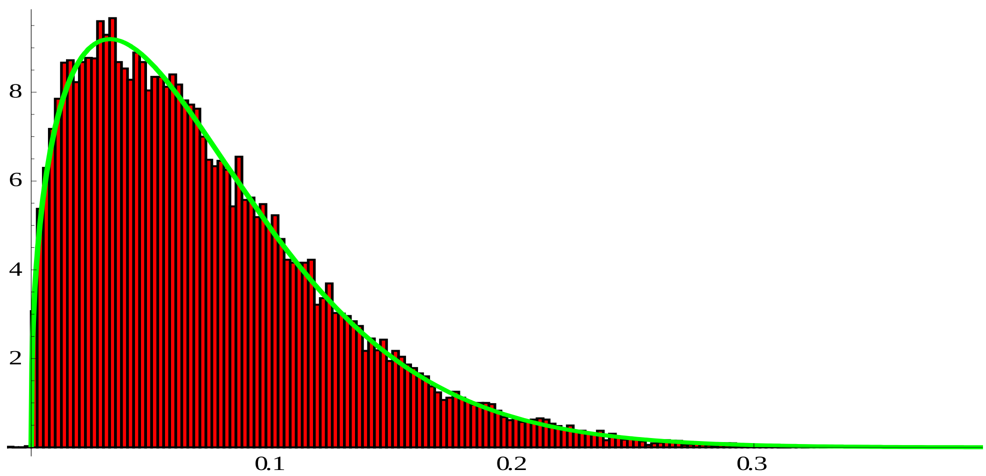
Σχήμα 4.13 Ιστόγραμμα συχνοτήτων της πιθανότητας αθέτησης με ανάκτηση σε τυχαίο δείγμα 30000 αριθμών και η σ.π.π της fitted κατανομής

Αξίζει να μελετήσουμε και την περίπτωση που το ποσοστό ανάκτησης Γ αποτελεί μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κατανομή $B(6, 1.5)$ η οποία δεν παρουσιάζει συμμετρία. Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο παράγουμε τυχαίους αριθμούς για την πιθανότητα αθέτησης $p = \frac{k-i}{(1+k)(1-\gamma)}$ με τις εντολές

$a = 6; b = 1.5; \mathrm{randomgamma} = \{\};$

```
a1 = 2; b1 = 10; a2 = 10; b2 = 2; randomnumbersi = {}; randomnumbersk = {};
Do[cont = True; While[cont, G1 = Random[]; G2 = Random[]; If[G2
        ≤ (a + b − 2)^(a + b − 2) ∗ (a − 1)^(−a + 1) ∗ (b − 1)^(−b + 1)
        ∗ G1^(a − 1) ∗ (1 − G1)^(b − 1), cont = False]]; randomgamma
        = Append[randomgamma, G1], {30000}];
Do[cont = True; While[cont, U1 = Random[]; U2 = Random[]; If[U2
        ≤ (a1 + b1 − 2)^(a1 + b1 − 2) ∗ (a1 − 1)^(−a1 + 1) ∗ (b1 − 1)^(−b1
        + 1) ∗ U1^(a1 − 1) ∗ (1 − U1)^(b1 − 1), cont = False]]; randomnumbersi
        = Append[randomnumbersi, U1], {30000}];
Do[cont = True; While[cont, U3 = Random[]; U4 = Random[]; If[U4
        ≤ (a2 + b2 − 2)^(a2 + b2 − 2) ∗ (a2 − 1)^(−a2 + 1) ∗ (b2 − 1)^(−b2
        + 1) ∗ U3^(a2 − 1) ∗ (1 − U3)^(b2 − 1), cont = False]]; randomnumbersk
        = Append[randomnumbersk, U3], {30000}];
randompr = spread/(1 + randomnumbersk) ∗ (1 − randomgamma);
h2 = Histogram[randompr, HistogramScale → 1];
Show[h2, Plot[PDF[WeibullDistribution[1.4,0.08], x], {x, 0,1}, PlotStyle
        → {Thick, Green}, PlotRange → {0,20}], AxesOrigin → {0,0}]
```

Ζητάμε να βρεθεί η καλύτερη κατανομή που προσαρμόζεται στα δεδομένα μας και κατασκευάζουμε ένα κοινό γράφημα του ιστογράμματος συχνοτήτων του τυχαίου δείγματος των 30000 αριθμών και της κατανομής που προσαρμόζεται σε αυτά. Παρατηρούμε ότι η Weibull κατανομή (1.4, 0.08) παρουσιάζει πολύ καλή προσαρμογή για τα δεδομένα των πιθανοτήτων αθέτησης με ανάκτηση.



Σχήμα 4.14 Ιστόγραμμα συχνοτήτων της πιθανότητας αθέτησης με ανάκτηση με ασύμμετρη κατανομή επιτοκίου και η σ.π.π της fitted κατανομής

Γ. Μοντέλο n περιόδων χωρίς ανάκτηση

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιώντας τον τύπο $p_n = 1 - \left(\frac{1+\ {}_0i_n}{1+{}_0k_n}\right)^n \left(\frac{1+{}_0k_{n-1}}{1+{}_0i_{n-1}}\right)^{n-1}$ θα παράγουμε τυχαίους αριθμούς από τη βήτα κατανομή για τις τυχαίες μεταβλητές ${}_0I_n$, ${}_0I_{n-1}$, ${}_0K_n$, ${}_0K_{n-1}$ όπου ισχύουν ${}_0i_n > {}_0i_{n-1}$, ${}_0k_n > {}_0k_{n-1}$. Αν υποθέσουμε ότι για κάποιο $n, E(\ {}_0I_{n-1}) = 3\%$, τότε οι παράμετροι a και b θα ικανοποιούν την σχέση

$$\frac{a}{a+b} = \frac{3}{100} \Rightarrow 97a = 3b,$$

ενώ όταν

$$E\ ({}_0I_n) = 3.5\%\ ,$$

οι παράμετροι της κατανομής Βήτα συνδέονται με την $96.5a = 3.5b$. Επιλέγοντας μια αρκετά μεγάλη τιμή για την παράμετρο a, $a = 200$ ώστε να διασφαλίσουμε μικρές διασπορές των επιτοκίων και κατά συνέπεια θετικές πιθανότητες αθέτησης, τα τυχαία δείγματα των επιτοκίων σχηματίζονται από τις κατανομές $B(200, 6466.67)$ και $B(200, 5514.29)$ αντιστοίχως.

Με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε για τα επιτόκια ${}_0k_{n-1}$, ${}_0k_n$. Αν υποθέσουμε ότι $E({}_0K_{n-1}) = 10\%$, $E({}_0K_n) = 12\%$, τότε οι παράμετροι των κατανομών βήτα θα ικανοποιούν τις σχέσεις

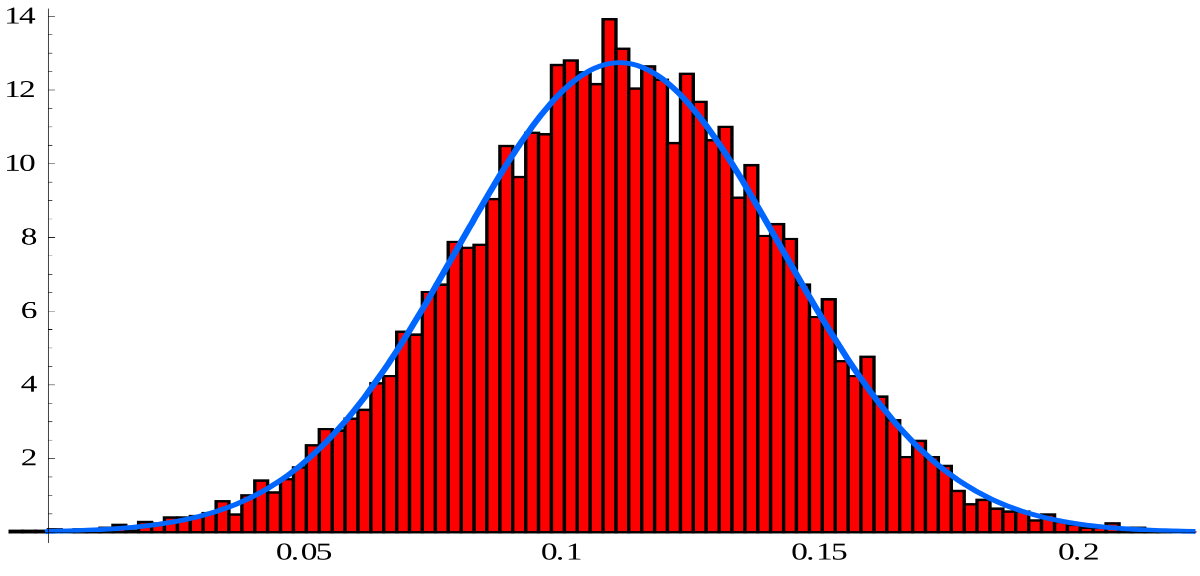
$$b = 9a \text{ και } 3b = 22a.$$

Επιλέγοντας $a = 200$ δημιουργούμε τυχαία δείγματα των επιτοκίων ${}_0k_{n-1}$, ${}_0k_n$ από τις κατανομές $B(200, 1800)$ και $B(200, 1466.67)$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε $n = 4$ και κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων για το δείγμα των προσομοιωμένων πιθανοτήτων αθέτησης και την προσαρμοσμένη κατανομή (Fitted Distribution) με χρήση των εντολών

```
a3 = 200; b3 = 6466.67; a4 = 200; b4 = 5514.29; randomIn = { }; randomIn1 = { };
a5 = 200; b5 = 1800; a6 = 200; b6 = 1466.67; randomKn = { }; randomKn1 = { };
Do[cont = True; While[cont, W1 = Random[ ]; W2 = Random[ ]; If[W2
≤ (a3 + b3 − 2)^(a3 + b3 − 2) ∗ (a3 − 1)^(−a3 + 1) ∗ (b3 − 1)^(−b3 + 1) ∗ W1^(a3
−1) ∗ (1 − W1)^(b3 − 1), cont = False]]; randomIn1
= Append[randomIn1, W1], {10000}];
Do[cont = True; While[cont, W3 = Random[ ]; W4 = Random[ ]; If[W4
≤ (a4 + b4 − 2)^(a4 + b4 − 2) ∗ (a4 − 1)^(−a4 + 1) ∗ (b4 − 1)^(−b4 + 1) ∗ W3^(a4
```

```
−1) ∗ (1 − W3)^(b4 − 1), cont = False]]; randomIn
= Append[randomIn, W3], {10000}];
Do[cont = True; While[cont, W5 = Random[ ]; W6 = Random[ ]; If[W6
≤ (a5 + b5 − 2)^(a5 + b5 − 2) ∗ (a5 − 1)^(−a5 + 1) ∗ (b5 − 1)^(−b5 + 1) ∗ W5^(a5
−1) ∗ (1 − W5)^(b5 − 1), cont = False]]; randomKn1
= Append[randomKn1, W5], {10000}];
Do[cont = True; While[cont, W7 = Random[ ]; W8 = Random[ ]; If[W8
≤ (a6 + b6 − 2)^(a6 + b6 − 2) ∗ (a6 − 1)^(−a6 + 1) ∗ (b6 − 1)^(−b6 + 1) ∗ W7^(a6
−1) ∗ (1 − W7)^(b6 − 1), cont = False]]; randomKn
= Append[randomKn, W7], {10000}];
probn = 1 − ((1 + randomIn)/(1 + randomKn))^4
            ∗ ((1 + randomKn1)/(1 + randomIn1))^(3);
h3 = Histogram[probn, HistogramScale → 1];
Show[h3, Plot[PDF[ℋ3["FittedDistribution"], x], {x, 0,0.4}, PlotStyle
            → {Hue[0.6], Thick}], AxesOrigin → {0,0}]
ℋ3["FittedDistribution"].
```



Σχήμα 4.15 Ιστόγραμμα συχνοτήτων της πιθανότητας αθέτησης χωρίς ανάκτηση στο 4ο έτος σε τυχαίο δείγμα 10000 αριθμών και η προσαρμοσμένη κατανομή

Συμπεραίνουμε ότι και στο μοντέλο τεσσάρων περιόδων χωρίς ανάκτηση, για μεγάλες τιμές της παραμέτρου α, οι τιμές των πιθανοτήτων αθέτησης προσεγγίζονται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή $\mathrm{N}[0.1107, 0.0313]$.

Δ. Μοντέλο n περιόδων με ανάκτηση

Θα εξετάσουμε το μοντέλο της προηγούμενης παραγράφου στην περίπτωση που υπάρχουν διασφαλίσεις (collaterals) και ο πιστωτής είναι σε θέση να εισπράξει μέρος του κεφαλαίου που έχει δανείσει. Το ποσοστό ανάκτησης γ παίρνει τιμές στο διάστημα $(0,1)$ και μπορεί να μεταβάλλεται ακόμη και για τον ίδιο δανειολήπτη. Επομένως όπως συμβαίνει και με τα επιτόκια αποτελεί μια τυχαία μεταβλητή Γ που μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά από μια κατανομή βήτα.

Ας υποθέσουμε ότι το μέσο ποσοστό ανάκτησης είναι 20%. Επιθυμούμε να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους a και b ώστε η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής Γ να είναι αρκετά μικρή. Από τον τύπο (4.2.1) έχουμε ότι:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{2}{10} \Rightarrow 10a = 2a + 2b \Rightarrow b = 4a,$$

και αντικαθιστώντας την προηγούμενη σχέση στον τύπο (4.2.2) καταλήγουμε στην

$$Var(\Gamma) = \frac{4}{25(5\alpha+1)} \ .$$

Ο παρακάτω πίνακας δίνει τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής για διάφορες τιμές της παραμέτρου α,

a	**Var(Γ)**
0.25	0.071111
0.333	0.06
0.5	0.045714
10	0.003137
15	0.002105
20	0.001584
25	0.00127
30	0.00106
40	0.000796
50	0.000637
100	0.000319
200	0.00016

και επιλέγοντας $\alpha = 200$, θα δημιουργήσουμε δείγμα προσομοίωσης τιμών του γ από τη βήτα κατανομή $B(200, 800)$.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$p_n = \frac{1}{1-\gamma}\left[1 - \left(\frac{1+{}_0i_n}{1+{}_0k_n}\right)^n \left(\frac{1+{}_0k_{n-1}}{1+{}_0i_{n-1}}\right)^{n-1}\right],$$

προκειμένου να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από τη βήτα κατανομή για τις τυχαίες μεταβλητές ${}_0I_n$, ${}_0I_{n-1}$, ${}_0K_n$, ${}_0K_{n-1}$ όπου ισχύουν ${}_0i_n > {}_0i_{n-1}$, ${}_0k_n > {}_0k_{n-1}$. Αν υποθέσουμε όπως στην προηγούμενη παράγραφο ότι για κάποιο $n, E({}_0I_{n-1}) = 3\%$, τότε οι παράμετροι a και b θα ικανοποιούν την σχέση

$$\frac{a}{a+b} = \frac{3}{100} \Rightarrow 97a = 3b,$$

ενώ όταν

$$E\ ({}_0I_n) = 3.5\%\ ,$$

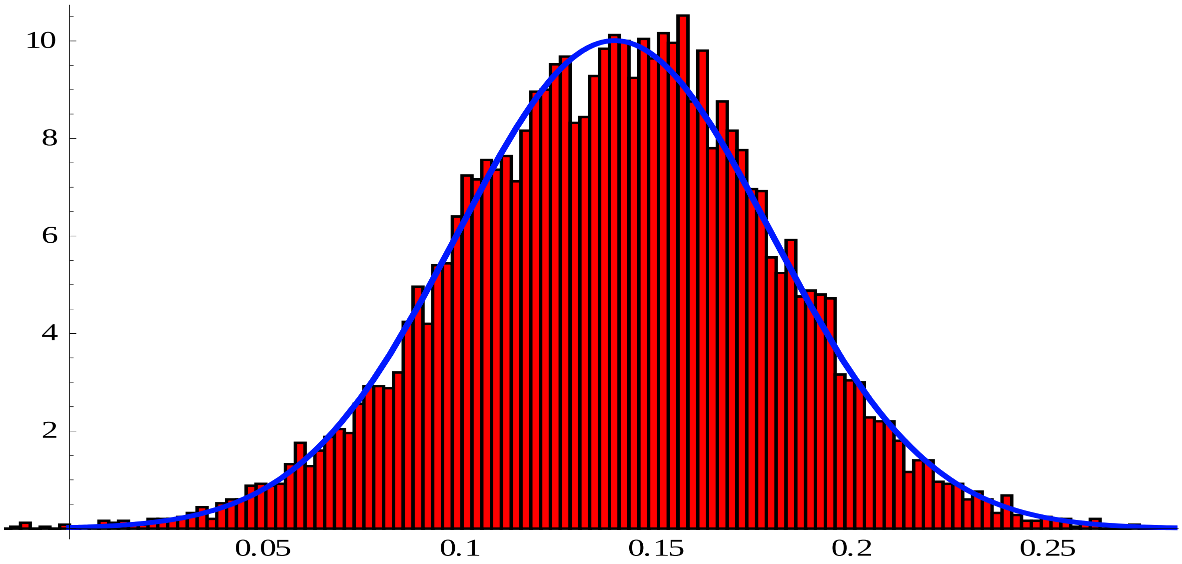
οι παράμετροι της κατανομής Βήτα συνδέονται με την $96.5a = 3.5b$. Επιλέγοντας μια αρκετά μεγάλη τιμή για την παράμετρο a, $a = 200$ ώστε να διασφαλίσουμε μικρές διασπορές των επιτοκίων και κατά συνέπεια θετικές πιθανότητες αθέτησης, τα τυχαία δείγματα των επιτοκίων σχηματίζονται από τις κατανομές $B(200, 6466.67)$ και $B(200, 5514.29)$ αντιστοίχως.

Με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε για τα επιτόκια ${}_0k_{n-1}$, ${}_0k_n$. Αν υποθέσουμε ότι $E({}_0K_{n-1}) = 10\%$, $E({}_0K_n) = 12\%$, τότε οι παράμετροι των βήτα κατανομών θα ικανοποιούν τις σχέσεις

$$b = 9a \text{ και } 3b = 22a.$$

Επιλέγοντας $a = 200$ δημιουργούμε τυχαία δείγματα των επιτοκίων ${}_0k_{n-1}$, ${}_0k_n$ από τις κατανομές $B(200, 1800)$ και $B(200, 1466.67)$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε $n = 4$ και κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων για το δείγμα των προσομοιωμένων πιθανοτήτων αθέτησης και την προσαρμοσμένη κατανομή. Όπως απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα τα δεδομένα μας προσαρμόζονται ικανοποιητικά σε κανονική κατανομή $\mathrm{N}[0.1388, 0.0399]$.



Σχήμα 4.16 Ιστόγραμμα συχνοτήτων της πιθανότητας αθέτησης με ανάκτηση στο 4ο έτος σε τυχαίο δείγμα 10000 αριθμών και η προσαρμοσμένη κατανομή

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Χριστοφόρου Β. (2011). *Η χρηματοπιστωτική κρίση και η εποπτεία των χρηματαγορών*, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πατρών.

Πάκος Γεώργιος (2012). *Μοντέλα Χρονικής Διάρθρωσης Επιτοκίων*, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας.

Εποπτικές αρμοδιότητες της Τράπεζας της Ελλάδος, Available at **https://www.bankofgreece.gr**

Bingham Nicolas, and Kiesel Rudiger (2004). *Risk-neutral valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives*, 2nd Edition Springer.

Hull, J., Predescu, M., White, A. (2004). The relationship between credit default swap spreads, bond yields, and credit rating announcements, *Journal of Banking & Finance,* **28**, 2789–2811.

Hull J.C. (2015). *Options, Futures and Other Derivatives*, Pearson Education 9th edition.

Jorge, A. Chan-Lau (2006). Market-Based Estimation of Default Probabilities and Its Application to Financial Market Surveillance. *IMF Working Paper*. Available at **https://www.researchgate.net/publication/5124813**

Jorion, P. (2011). *Financial Risk Manager Handbook Plus Test Bank,* 6th Edition, John Wiley & Sons.

Knopf P., & Teall J. (2015). *Risk neutral pricing and Financial Mathematics, A primer*, Academic Press.

Mishkin, F. (2001). *The Economics of Money, Banking and Financial Markets*, Boston: Addison Wesley, 6th edition

Padoa-Schioppa, Tommaso (2004). *Regulating Finance: Balancing Freedom and Risk*, Oxford University Press

Saunders, A. and Cornett, M.M (2008). *Financial institutions management: A risk management approach*, 9th Edition, McGraw-Hill Education.

Saunders, A. (1999). *Credit Risk Measurement: New Approaches to value at risk and other paradigms*. New York, Wiley.

Shashidhar, M. (2011). Market-implied risk neutral probabilities, actual probabilities, credit risk and news, *IIMB Management Review,* **23***,* 140-150.

Resti, A., & Sironi, A. (2007). *Risk Management and Shareholders' Value in Banking: From Risk Measurements Models to Capital Allocation Policies,* John Wiley and Sons Ltd.