

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ

ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΣΤΗ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

**Προσαρμογή πραγματικών δεδομένων ζημιών σε κατανομές
με βαριές ουρές : Εναλλακτικά μοντέλα και σύγκριση της
απόδοσής τους**

Θεοδόσιος Ν. Αναστασίου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Πειραιάς

Σεπτέμβριος 2023

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Κούτρας Μάρκος, Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Πολίτης Κωσταντίνος, Αναπ. Καθηγητής
- Ψαράκος Γεώργιος, Αναπ. Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics



DEPARTMENT OF STATISTICS

AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL

SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

Fitting real claims data to heavy tail distributions: Alternative models and their efficacy comparison

Theodosios N. Anastasiou

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial science and Risk management

Piraeus, Greece

September 2023

Στους γονείς μου
Νικόλαο και Θεοδώρα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κο Κούτρα Μάρκο, για τη συνεχή, ορθή και πάνω από όλα αποτελεσματική καθοδήγηση του, καθώς ήταν δίπλα μου σε όλη την διάρκεια συγγραφής της παρούσας εργασίας, βοηθώντας με να ξεπεράσω κάθε δυσκολία.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος για τις γνώσεις που έλαβα από αυτούς καθώς και για τις συμβουλές και την συνεργασία μας.

Θα ήταν παράλειψη μου να μην ευχαριστήσω την οικογένεια μου καθώς και την κοπέλα μου για την υπομονή και την στήριξη που μου παρείχαν.

Περίληψη

Είναι γνωστό ότι τα ασφαλιστικά δεδομένα ζημιών έχουν συνήθως βαριά δεξιά ουρά, θετική λοξότητα και υψηλή κύρτωση. Στο πλαίσιο αυτό οι αναλογιστές είναι σε συνεχή αναζήτηση νέων δυναμικών μοντέλων με σκοπό την καλύτερη περιγραφή των ασφαλιστικών δεδομένων. Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την εισαγωγή μιας νέας οικογένειας κατανομών με βαριά ουρά. Για αυτή την οικογένεια κατανομών θα παρουσιάσουμε αναλυτικά την ειδική περίπτωση της Weibull. Αφού πρώτα αναφέρουμε βασικά χαρακτηριστικά και στατιστικές ιδιότητες της κατανομής θα πραγματοποιήσουμε προσαρμογή της κατανομής σε ένα σύνολο ασφαλιστικών δεδομένων, που προέρχονται από πραγματικές ζημιές αυτοκινήτου Ελληνικής ασφαλιστικής εταιρείας. Τέλος, θα συγκρίνουμε την προσαρμογή της νέας κατανομής με άλλες γνωστές στην αναλογιστική κοινότητα κατανομές με βαριά ουρά και θα υπολογίσουμε κάποια γνωστά μέτρα κινδύνου.

Abstract

Insurance loss data are known to share properties such as heavy right tail, positive skewness, and high kurtosis. In this context, actuaries are continuously searching for new dynamic models in order to better describe the insurance data. The thesis presents the introduction of a new family of heavy-tailed distributions. For this family of distributions, we will present in detail the special case of the Weibull distribution. After mentioning the basic characteristics and statistical properties of the distribution, we will fit the distribution to a set of insurance data, derived from real car damages of a Greek insurance company. Finally, we will compare the fit of the new distribution to other heavy-tailed distributions known to the actuarial community and we will calculate some well known measures risk.

Περιεχόμενα

Περίληψη	9
Abstract.....	11
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΩΝ.....	15
Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή.....	17
Κεφάλαιο 2 Περιγραφή Δεδομένων-Είδη Κατανομών	21
2.1 Βασικές εισαγωγικές έννοιες	22
2.1.1 Βαριά ουρά κατανομής	22
2.1.2 Λοξότητα ή ασυμμετρία κατανομής	24
2.1.3 Κυρτότητα κατανομής	25
2.2 Περιγραφική Στατιστική Ανάλυση	27
2.2.1 Ημερήσια Ανάλυση Διετίας.....	27
2.2.2 Ημερήσια Ανάλυση κατά έτος.....	31
2.2.3 Εβδομαδιαία Ανάλυση	34
Κεφάλαιο 3 Κατανομές Πιθανότητας και Μέτρα Κινδύνου	39
3.1 Κατανομές Πιθανότητας	39
3.1.1 Η Κατανομή Weibull.....	39
3.1.2 Η Λογαριθμοκανονική Κατανομή.....	40
3.1.3 Η Κατανομή Exponentiated Weibull	40
3.1.4 Η Κατανομή Lomax ή Pareto type II	41
3.1.5 Η Κατανομή Burr-XII	41
3.2 Μέτρα Κινδύνου	41
3.2.1 Value at Risk	42
3.2.2 Tail Value at Risk ή Expected Shortfall	43
Κεφάλαιο 4 Η νέα οικογένεια Κατανομών με Βαριά Ουρά και η ειδική περίπτωση της κατανομής Weibull	45
4.1 Η νέα οικογένεια κατανομών με βαριά ουρά.....	45
4.2 Η νέα οικογένεια κατανομών Weibull	47
4.3 Βασικές Στατιστικές ιδιότητες	50
4.3.1 Η Συνάρτηση ποσοστημορίων	50
4.3.2 Οι θεωρητικές Ροπές της NEHTW	52
4.3.2 Η Εκτίμηση παραμέτρων της NEHTW	53
Κεφάλαιο 5 Μελέτη Προσομοίωσης Monte Carlo για τη NEHTW	55
5.1 Εκτιμητές Μεγίστης Πιθανοφάνειας.....	55
5.2 Υπολογισμός Αναλογιστικών Μέτρων Κινδύνου	60

5.2.1 VaR ή Αξία σε Κίνδυνο για την ΝΕΗΤW	60
5.2.2 TVaR ή Απομείωση Κινδύνου	62
5.2.3 Αριθμητικός υπολογισμός Μέτρων Κινδύνου	62
Κεφάλαιο 6 Προσαρμογή ασφαλιστικών δεδομένων ζημιών.....	67
6.1 Εφαρμογή της ΝΕΗΤW στα ασφαλιστικά δεδομένα ζημιών αυτοκινήτου.....	67
6.2 Υπολογισμός αναλογιστικών μέτρων κινδύνου για τα ασφαλιστικά δεδομένα ζημιών..	70
Κεφάλαιο 7 Σύνοψη	73
Παράρτημα	74
Βιβλιογραφία	90

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΩΝ

1. Τυχαία μεταβλητή (τ.μ)
2. Αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ)
3. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π)
4. New Heavy Tailed Weibull (NEHTW)
5. Maximum Likelihood Estimators (MLE)
6. Mean Square Error (MSE)

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Γενικά, ο ρόλος των πάσης φύσεως ασφαλιστικών εταιρειών, έγκειται στο να αναλαμβάνει κινδύνους των ασφαλισμένων έναντι του ασφαλιστή. Έτσι για παράδειγμα σε ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο αυτοκινήτου, ο κάτοχος του συμβολαίου έχει πληρώσει ένα συγκεκριμένο αντίτιμο, ώστε να μεταβιβάσει τον κίνδυνο μιας πιθανής ζημιάς από τον εαυτό του στην ασφαλιστική. Αυτή η σχέση μεταξύ ασφαλισμένου και ασφαλιστικής που μόλις περιγράψαμε γεννά το εξής βασικό ερώτημα για την ασφαλιστική: πως θα διαχειριστεί τον κίνδυνο που έχει αναλάβει;

Τα τελευταία χρόνια στην Ελλάδα αλλά και παγκοσμίως τόσο η οικονομική κρίση, όσο και ο ανταγωνισμός στον ασφαλιστικό κλάδο έχει στρέψει τους αναλογιστές σε νέες μελέτες, για την εύρεση νέων αποτελεσματικών μεθόδων μοντελοποίησης ασφαλιστικών δεδομένων. Με τον τρόπο αυτό, τα διαθέσιμα δεδομένα περιγράφονται και κατανοούνται καλύτερα, έχοντας ως αποτέλεσμα την καλύτερη εκτίμηση των αποθεμάτων που απαιτείται να διατηρεί μια ασφαλιστική.

Όσον αφορά, της γενικές ασφαλίσεις κατά ζημιών, αυτό που ενδιαφέρει άμεσα την ασφαλιστική είναι με κάποιο τρόπο να μπορεί να προβλέπει το πλήθος αλλά και το μέγεθος των απαιτήσεων που καταφτάνουν σε αυτή ανά μονάδα χρόνου (ημερησίως, εβδομαδιαία, μηνιαία κλπ) ώστε να μπορεί να εξασφαλίζει τη βιωσιμότητα και την ομαλή λειτουργία της. Καθίσταται καίριας σημασίας λοιπόν, η εύρεση ενός μοντέλου ικανού να μπορεί να περιγράψει τη στοχαστική συμπεριφορά των ζημιών, ως προς το πλήθος αλλά και ως προς το μέγεθός τους. Έχοντας στη διάθεση της ιστορικά δεδομένα ζημιών από ασφαλιστήρια συμβόλαια, και σε συνδυασμό με το κατάλληλο μοντέλο η ασφαλιστική μπορεί να εκτιμήσει μελλοντικές ζημιές. Η παρούσα εργασία, παρουσιάζει ένα νέο στατιστικό μοντέλο περιγραφής των ζημιών, οι οποίες απορρέουν από ασφαλιστήρια συμβόλαια αυτοκινήτων, το οποίο θα προσαρμόσουμε σε πραγματικά ασφαλιστικά δεδομένα που αφορούν αποκλειστικά και μόνο το ύψος των ζημιών.

Αναμφίβολα, τα ασφαλιστικά δεδομένα ύψους ζημιών είναι θετικά, και συνήθως αποτελούνται από ένα μεγάλο πλήθος μικρών ζημιών και από ένα μικρό πλήθος μεγάλων ζημιών. Συνεπώς από τη φύση τους, χαρακτηρίζονται από θετική λοξότητα, υψηλή κύρτωση και βαριά δεξιά ουρά. Παρόμοιες κατανομές, έχουν μελετηθεί εδώ και δεκάδες χρόνια από τους αναλογιστές, δίνοντας λύση στη μοντελοποίηση ασφαλιστικών δεδομένων και πολύ περισσότερο στη μέτρηση του επιπέδου κινδύνου της εταιρείας. Ορισμένες από τις ευρέως γνωστές στην

αναλογιστική κοινότητα κατανομές με βαριά ουρά είναι οι : Pareto, Lognormal, Beta, Γάμμα, Lomax, Burr, Weibull, Marshall-Olkin-Weibull και Kumaraswamy Weibull. Ωστόσο σε πολλές περιπτώσεις οι κλασικές αυτές κατανομές, παρά τις σημαντικές ιδιότητες που διαθέτουν, παρουσιάζουν σημαντικά προβλήματα στην προσαρμογή ασφαλιστικών δεδομένων. Για παράδειγμα η Pareto, η πιο δημοφιλής από τις κατανομές, σε ορισμένες περιπτώσεις δεν παρουσιάζει καλή εφαρμογή εξαιτίας της φθίνουσας συνάρτησης πιθανότητας. Από την άλλη η συνάρτηση πυκνότητας των Lognormal και Γάμμα δεν έχει κλειστή μορφή, αποτελώντας έτσι τις λιγότερο διαδεδομένες κατανομές στον αναλογισμό. Επίσης, η Weibull ερμηνεύει ικανοποιητικά τις μικρές ζημιές αλλά όχι τόσο καλά τη συμπεριφορά των μεγάλων ζημιών.

Η σημαντικότητα των κατανομών με βαριές ουρές, έχει στρέψει τους αναλογιστές σε συνεχή αναζήτηση νέων στατιστικών μοντέλων ικανών να καλύψουν τις αδυναμίες των παραδοσιακών κατανομών με βαριά ουρά. Μερικές από τις μεθόδους πάνω στις οποίες χτίζονται τα νέα δυναμικά μοντέλα είναι :

- i. Μετασχηματισμός κατανομών
- ii. Χρήση σύνθετων κατανομών
- iii. Μίξεις κατανομών
- iv. Συνδυασμός κατανομών

Βασικό στόχο αποτελεί η δημιουργία ενός μοντέλου, το οποίο θα διαθέτει όσο το δυνατόν λιγότερες παραμέτρους και συγχρόνως θα μπορεί να γραφεί σε κλειστή μορφή. Η συγκεκριμένη εργασία πραγματεύεται την εισαγωγή μιας νέας οικογένειας κατανομών με βαριά ουρά. Πιο συγκεκριμένα στόχος μας είναι να ορίσουμε και να αναλύσουμε ένα ειδικό υπό-μοντέλο αυτής που ονομάζεται New Heavy Tailed Weibull (συντομογραφία NHTW). Το νέο αυτό μοντέλο θα παρουσιαστεί πλήρως σε επόμενο κεφάλαιο και αφού πρώτα αναφέρουμε τις μαθηματικές του ιδιότητες θα υπολογίσουμε βασικά μέτρα κινδύνου. Τέλος, με τη βοήθεια του στατιστικού πακέτου R θα προσαρμόσουμε το νέο μοντέλο στα πραγματικά δεδομένα ζημιών.

Η διάρθρωση της εργασίας είναι η ακόλουθη: Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται αναλυτικά τα ιστορικά δεδομένα ζημιών των ημερολογιακών ετών 2007 και 2008 μιας μεγάλης Ελληνικής ασφαλιστικής εταιρείας. Με τη βοήθεια της R παρουσιάζουμε περιγραφικά μέτρα, και χρησιμοποιούμε διαγράμματα για να εξάγουμε συμπεράσματα για τη μορφή της κατανομής που τα χαρακτηρίζει. Στο Κεφάλαιο 3 περιγράφουμε μια σειρά από κλασικές κατανομές με βαριά ουρά, τις οποίες θα συγκρίνουμε ως προς την προσαρμογή τους στα δεδομένα ζημιών με το νέο μοντέλο που θα εισάγουμε. Συγχρόνως θα ορίσουμε βασικά αναλογιστικά μέτρα κινδύνου. Εν συνεχεία στο Κεφάλαιο 4, αφού εισάγουμε το νέο μοντέλο και το περιγράψουμε πλήρως θα προχωρήσουμε στην εκτίμηση των παραμέτρων του. Στο Κεφάλαιο 5 πραγματοποιείται Προσομοίωση Monte Carlo για το μοντέλο μας. Τέλος, στο 6^ο και τελευταίο Κεφάλαιο αυτής της εργασίας προσαρμόζουμε όλες τις

θεωρητικές κατανομές με βαριά ουρά που έως τώρα έχουμε αναφέρει, στα ασφαλιστικά δεδομένα ζημιών. Αναλύονται τα αποτελέσματα και εξάγονται βασικά συμπεράσματα που έχουν προκύψει από την ανάλυση της όλης εργασίας και θα μπορούσαν να αποτελέσουν πηγή ερευνητικού ενδιαφέροντος. Στο παράρτημα παρατίθενται αναλυτικά οι εντολές του στατιστικού πακέτου R και η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκαν για τις ανάγκες της εργασίας .

Κεφάλαιο 2

Περιγραφή Δεδομένων-Είδη Κατανομών

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, θα πραγματοποιηθεί η περιγραφή και ανάλυση των δεδομένων μεγάλης ελληνικής ασφαλιστικής εταιρείας. Το χαρτοφυλάκιο ζημιών ασφαλιστηρίων συμβολαίων αυτοκινήτων, το οποίο θα μελετήσουμε περιλαμβάνει τα εξής στοιχεία:

- Τον αριθμό ζημιάς ή αριθμό φακέλου
- Την ημερομηνία δήλωσης της ζημιάς
- Το ποσό ή ύψος της ζημιάς

Παρόλο που ο αριθμός της εκάστοτε ζημιάς είναι μοναδικός και αποτελεί τον ταξινομικό αριθμό της μέσα σε ένα χαρτοφυλάκιο, εντούτοις οι πληρωμές που πραγματοποιούνται σε ένα φάκελο μπορεί να είναι περισσότερες από μία. Καθοριστικό παράγοντα σε αυτό αποτελεί η λανθασμένη αρχική εκτίμηση της ζημιάς κατά την ημερομηνία εγγραφής της από την ασφαλιστική, καθώς επίσης και η εξέλιξη γεγονότων που οδηγεί σε αναβίωση της ζημιάς και άνοιγμα του φακέλου, έως ότου επέλθει διακανονισμός. Σύμφωνα με τα διαθέσιμα δεδομένα που παρείχε η ασφαλιστική, θα μελετήσουμε την πιο απλή περίπτωση της μιας πληρωμής ανά φάκελο ζημιάς χωρίς να λαμβάνουμε υπόψιν αποθέματα εκκρεμών ζημιών. Επίσης θα πρέπει να τονιστεί ότι στο τελικό ποσό κάθε μοναδικής ζημιάς του χαρτοφυλακίου όπου μελετάμε συμπεριλαμβάνονται τα λεγόμενα ALAE (Allocated Loss Adjustment Expenses) έξοδα. Δηλαδή τα άμεσα έξοδα που σχετίζονται με τη φροντίδα μιας ζημιάς όπως εμπειρογνωμοσύνη, νομικά έξοδα, αμοιβές διακανονιστών κ.λ.π.

Γενικά, η ημερομηνία δήλωσης ή εγγραφής μιας ζημιάς (από την ασφαλιστική) διαφέρει πολύ από την ημερομηνία πραγματοποίησης του συμβάντος που προκάλεσε την ζημιά και από την ημερομηνία αναγγελίας της ζημιάς στην ασφαλιστική. Το χαρτοφυλάκιο ζημιών το οποίο μελετάται στην παρούσα εργασία, αφορά ζημιές οι οποίες εγγράφηκαν από την ασφαλιστική εταιρία κατά τη διάρκεια των ημερολογιακών ετών (calendar year-cy) 2007-2008. Πιο συγκεκριμένα η πρώτη ζημιά για την ασφαλιστική καταγράφεται στις 3/1/2007 και η τελευταία στις 31/12/2008. Ως μονάδα χρόνου στην ανάλυση που θα ακολουθήσει, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η εβδομάδα, ο μήνας, το έτος ακόμη και η διετία.

Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε, ότι το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από 25348 το πλήθος ατομικές ζημιές που αγγίζουν το ποσό των 60 εκατομμυρίων ευρώ και καταγράφηκαν από μεγάλη Ελληνική ασφαλιστική εταιρεία την περίοδο 1/1/2007 έως και 31/12/2008. Οι ατομικές ζημιές που απορρέουν από ασφαλιστήρια συμβόλαια αυτοκινήτων, είναι απαιτήσεις που δημιουργούνται για την ασφαλιστική

και καλείται να καλύψει. Τόσο το πλήθος αλλά πόσο μάλλον το ύψος των ζημιών που καταφτάνουν σε μια ασφαλιστική εταιρεία ανά μονάδα χρόνου, είναι από μόνο του ένα πολύ σημαντικό ζήτημα. Αφού η ασφαλιστική θα πρέπει ανά πάσα στιγμή να διαθέτει την κατάλληλη ρευστότητα ώστε να διασφαλίζεται η βιωσιμότητά της. Και πως ακριβώς επιτυγχάνεται αυτό; Μα φυσικά, με την διατήρηση των κατάλληλων αποθεμάτων και μέσω της σωστής τιμολόγησης των προϊόντων της. Όπως είναι αναμενόμενο λοιπόν η απάντηση σε αυτά τα ζητήματα κρύβεται στην σωστή επεξεργασία και στην ανάπτυξη μοντέλων περιγραφής των ζημιών.

Ωστόσο, η μελέτη της συγκεκριμένης εργασίας, περιορίζεται αποκλειστικά και μόνο στην περιγραφή του ύψους των ζημιών του χαρτοφυλακίου. Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι, η ανάλυση του χαρτοφυλακίου ζημιών, μέσω της οποίας θα αποκτήσουμε καλύτερη κατανόηση για τη μορφή και τα βασικά χαρακτηριστικά του μοντέλου περιγραφής του ύψους των ζημιών.

2.1 Βασικές εισαγωγικές έννοιες

Οι στατιστικές κατανομές παίζουν καθοριστικό ρόλο στη μοντελοποίηση δεδομένων σε εφαρμοσμένα πεδία όπως οι οικονομικές επιστήμες, ο αναλογισμός και η διαχείριση κινδύνου. Μεταξύ των κατανομών αυτών ιδιαίτερη χρησιμότητα έχουν αυτές με βαριές ουρές διότι διαχρονικά έχει αποδειχθεί ότι προσαρμόζονται καλύτερα σε θετικά μη-συμμετρικά δεδομένα όπως λόγου χάρη είναι τα ασφαλιστικά δεδομένα ζημιών.

Προτού, προχωρήσουμε όμως στην ανάλυση του χαρτοφυλακίου ζημιών απαραίτητη προϋπόθεση για την ομαλή μετάβαση και καλύτερη κατανόηση του αντικειμένου της εργασίας, αποτελεί η εισαγωγή κάποιων βασικών εννοιών.

2.1.1 Βαριά ουρά κατανομής

Η συμπεριφορά της ουράς μία συνάρτησης κατανομής διαδραματίζει σπουδαίο ρόλο σε ποικίλες εφαρμογές όπως, η υδρολογία, διαστημική μηχανική, μετεωρολογία, ασφαλιστική επιστήμη και χρηματοοικονομικά. Πιο συγκεκριμένα, στην ασφαλιστική επιστήμη και ιδιαίτερα στον αναλογισμό, μας ενδιαφέρει η δεξιά ουρά μιας κατανομής. Η δεξιά ουρά μιας κατανομής ευθύνεται για την εμφάνιση των υψηλών τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής (για συντομογραφία τ.μ.). Έτσι, για τις τ.μ οι οποίες τείνουν να πάρουν υψηλές τιμές με μεγαλύτερη πιθανότητα λέμε ότι έχουν μια κατανομή με βαριά δεξιά ουρά. Γιατί λοιπόν είναι τόσο σημαντικές οι κατανομές με βαριές ουρές στην επιστήμη του αναλογισμού; Η απάντηση στο ερώτημα είναι αρκετά απλή. Παρόλο που η συχνότητα εμφάνισης αρκετά μεγάλων ζημιών σε μια ασφαλιστική εταιρεία είναι αρκετά μικρή, εντούτοις η πιθανότητα εμφάνισης μεγάλης ζημιάς αυξάνεται όταν η κατανομή των ζημιών έχει βαριά ουρά, απειλώντας έτσι την ομαλή λειτουργία της εταιρείας.

Μια συνάρτηση κατανομής F στο $[0, \infty)$ θα λέμε ότι έχει βαριά ουρά όταν ισχύει μια από τις δύο ισοδύναμες συνθήκες (Klugman et al., 2012).

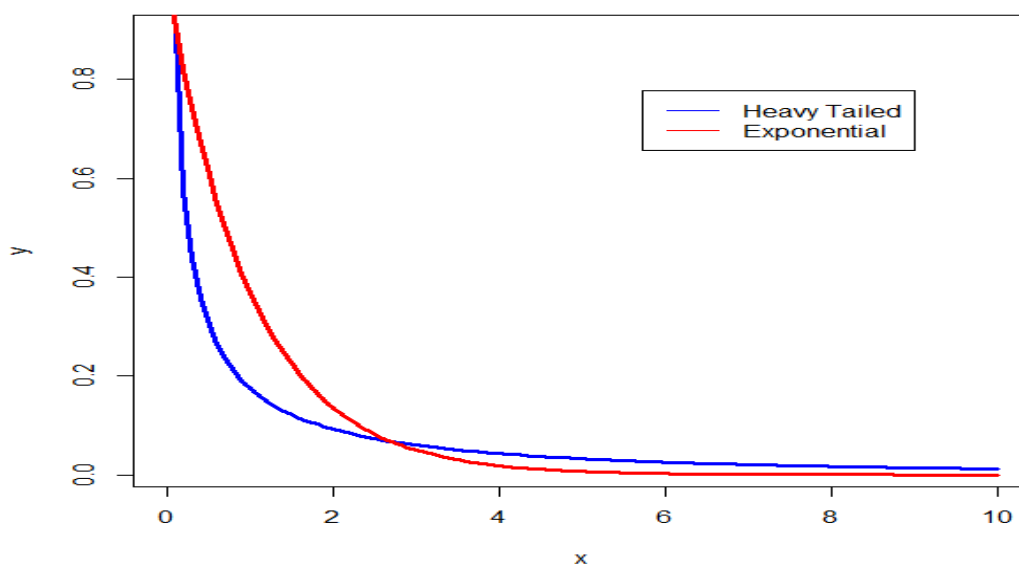
$$\int_0^{\infty} e^{sx} f(x) dx = \infty, \quad \forall s > 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} F(x) = \infty, \quad \forall s > 0.$$

Βασικό χαρακτηριστικό των κατανομών με βαριά ουρά, είναι η αργή σύγκλιση της συνάρτησης επιβίωσης στο 0 για μεγάλες τιμές της εξεταζόμενης τ.μ. Θεωρώντας, ως X την τ.μ που περιγράφει το ύψος της ατομικής ζημιάς για το χαρτοφυλάκιο ζημιών στην παρούσα εργασία, η $P(X > x)$ καθώς το x αυξάνει συγκλίνει αργά στο 0. Το χαρακτηριστικό αυτό των κατανομών με βαριά ουρά αποτελεί ιδιαίτερο κίνδυνο για την ομαλή λειτουργία της ασφαλιστικής. Για αυτό το λόγο οι αναλογιστές σήμερα είναι σε συνεχή αναζήτηση νέων μοντέλων ικανών να περιγράψουν τα ασφαλιστικά δεδομένα και να προβλέπουν τέτοιου είδους ζημιές.

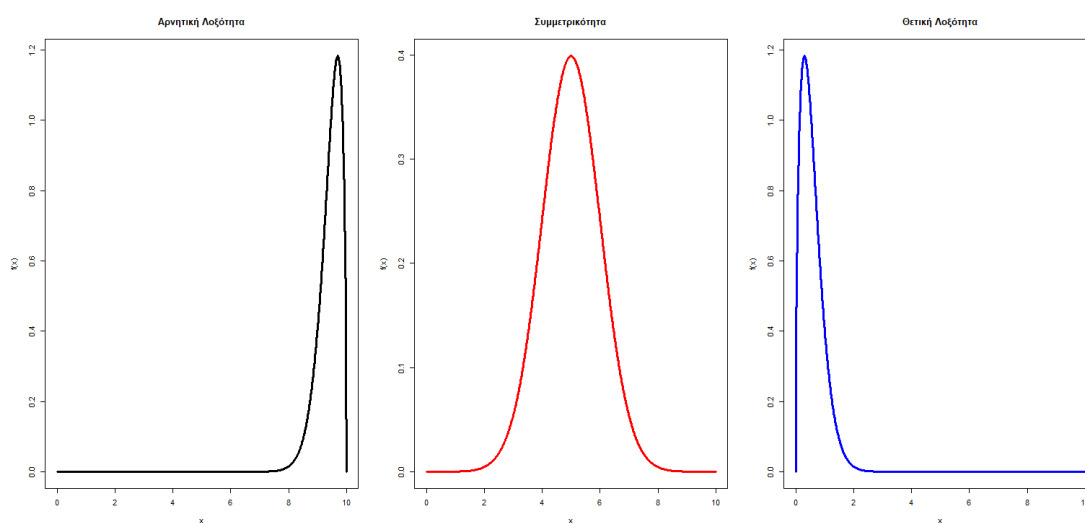
Γενικά, αναφέρεται ότι μια κατανομή έχει βαριά ουρά εάν η ουρά της είναι πιο βαριά από αυτή της εκθετικής. Αρχικά, μια ταξινόμηση κατανομών σε κατανομές με βαριά ή ελαφριά ουρά αποτελεί η ύπαρξη ή όχι των θεωρητικών ροπών τους. Επίσης ένα κριτήριο σύγκρισης της ουράς δυο κατανομών αποτελεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά του λόγου των συναρτήσεων επιβίωσης. Στο [Σχήμα 2.1](#) που ακολουθεί βλέπουμε τη γραφική απεικόνιση μιας κατανομής με βαριά ουρά συγκριτικά με της εκθετικής.



[Σχήμα 2.1](#) : Γραφική απεικόνιση (Πιτσέλης, 2018). μιας κατανομής με βαριά ουρά συγκριτικά με της εκθετικής

2.1.2 Λοξότητα ή ασυμμετρία κατανομής

Έχοντας στη διάθεση του κάποιος ένα σύνολο δεδομένων, μπορεί να κατασκευάσει το ιστόγραμμα συχνοτήτων και να δει την μορφή της καμπύλης συχνοτήτων μέσω αυτού. Όταν η καμπύλη συχνοτήτων είναι συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από την κορυφή της κατανομής, δηλαδή όταν περίπου το ίδιο ποσοστό παρατηρήσεων κατανέμονται ομοιόμορφα δεξιά και αριστερά του άξονα συμμετρίας ή της μέσης τιμής, τότε λέμε ότι η κατανομή είναι συμμετρική. Όμως, σε πολλές εφαρμογές και ιδιαίτερα στον αναλογισμό και την ασφαλιστική επιστήμη, οι παρατηρήσεις δεν κατανέμονται ομοιόμορφα γύρω από τη μέση τιμή του πληθυσμού. Επομένως, θα αναφέρεται ότι τα δεδομένα έχουν θετική λοξότητα ή θετική ασυμμετρία στην περίπτωση που υπάρχει μεγαλύτερη συγκέντρωση των παρατηρήσεων δεξιά της μέσης τιμής, δηλαδή για μεγαλύτερες τιμές. Ενώ, αντίθετα εάν υπάρχει μεγαλύτερη συγκέντρωση αριστερά της μέσης τιμής αναφέρεται ότι τα δεδομένα παρουσιάζουν αρνητική λοξότητα ή αρνητική ασυμμετρία. Στο [Σχήμα 2.2](#) πιο κάτω παρουσιάζονται οι τύποι ασυμμετρίας :



Σχήμα 2.2 : Γραφική απεικόνιση για τα διάφορα είδη Ασυμμετρίας που παρουσιάζει μια κατανομή

Ένας σημαντικός δείκτης, ο οποίος μας πληροφορεί για την συμμετρικότητα των δεδομένων είναι ο συντελεστής λοξότητας που ορίζεται ως :

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^2}$$

όπου,

$$\bullet \quad \mu_k = E[(X - \mu)^k] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k f(x) dx, & \text{αν η τ.μ συνεχής} \\ \sum_j (x_j - \mu)^k p(x_j), & \text{αν η τ.μ διακριτή} \end{cases}$$

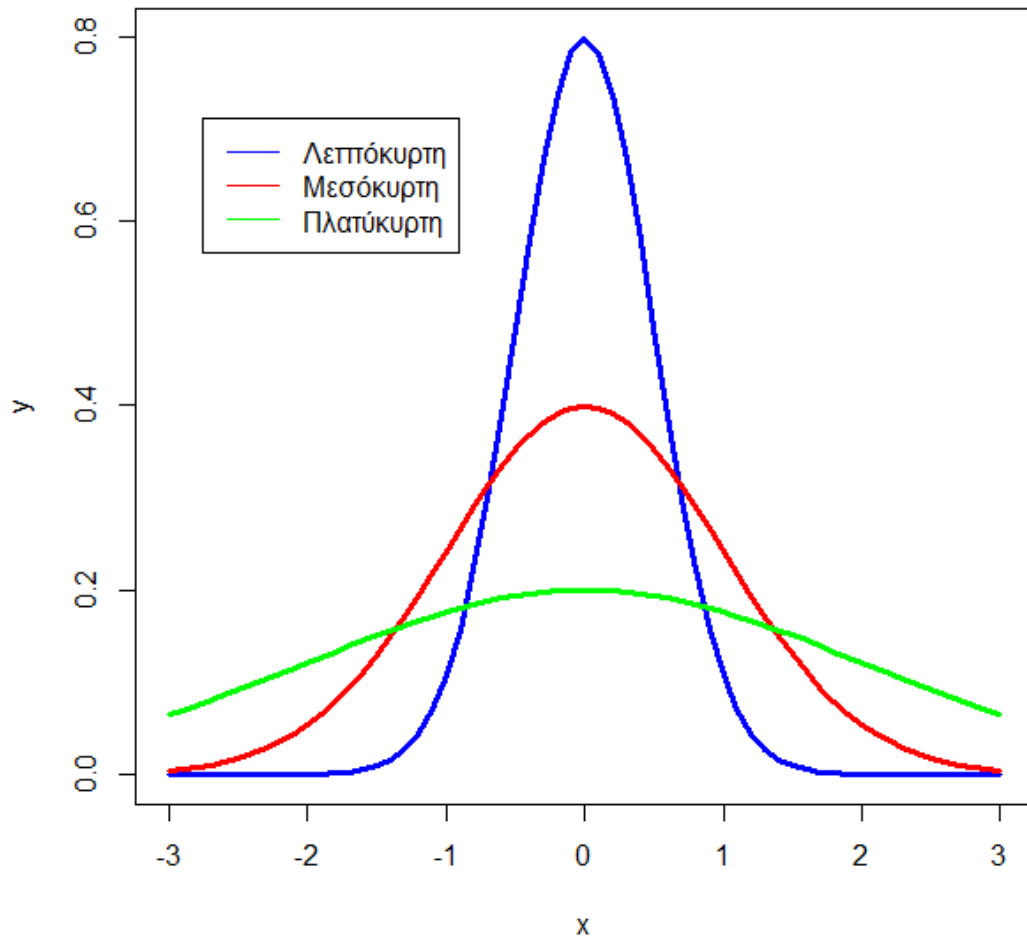
η κεντρική ροπή k-τάξης και $\sigma^2 = \mu_2 = Var(X)$.

Ο κανόνας βάση του οποίου αξιολογείται η συμμετρία μιας κατανομής είναι ο εξής :

- i. Όταν $\gamma_1 \cong 0$, έχουμε συμμετρία
- ii. Όταν $\gamma_1 > 0$, έχουμε θετική λοξότητα
- iii. Όταν $\gamma_1 < 0$, έχουμε αρνητική λοξότητα

2.1.3 Κυρτότητα κατανομής

Ένα άλλο σημαντικό μέτρο περιγραφής μιας κατανομής, που χαρακτηρίζει το ύψος της κορυφής και δίνει πληροφορίες για την αιχμηρότητα της καμπύλης, είναι η κύρτωση. Οι καμπύλες συχνότητας, ανάλογα με το βαθμό συγκέντρωσης των παρατηρήσεων γύρω από το κέντρο της κατανομής, διακρίνονται σε μεσόκυρτες, λεπτόκυρτες, και πλατύκυρτες. Πρότυπο για τον χαρακτηρισμό μιας κατανομής σε μια από τις 3 κατηγορίες, αποτελεί η κυρτότητα της κανονικής κατανομής η οποία είναι μεσόκυρτη. Επομένως, μια κατανομή χαρακτηρίζεται ως λεπτόκυρτη ή αναφέρεται ότι έχει υψηλή κύρτωση όταν παρουσιάζει οξεία κορυφή και η κύρτωση της είναι μεγαλύτερη της Κανονικής. Ενώ, σε αντίθετη περίπτωση αναφέρεται ως πλατύκυρτη. Στο [Σχήμα 2.3](#), παρατηρούμε τη μορφή της καμπύλης για μια κατανομή, ανάλογα την κυρτότητα της.



Σχήμα 2.3 : Γραφική απεικόνιση (Πιτσέλης, 2018), για τη μορφή μιας κατανομής ανάλογα την Κυρτότητας της

Παρόμοια με την περίπτωση της ασυμμετρίας ορίζεται και εδώ ένας δείκτης που μας πληροφορεί για την Κυρτότητα. Ο δείκτης αυτός, γνωστός ως συντελεστής κύρτωσης Pearson, ορίζεται ως εξής :

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

Ανάλογα με την τιμή του συντελεστή γ_2 χαρακτηρίζεται το είδος της Κυρτότητας ως :

- i. Αν $\gamma_2=3$, η κατανομή μεσόκυρτη
- ii. Αν $\gamma_2>3$, η κατανομή λεπτόκυρτη
- iii. Αν $\gamma_2<3$, η κατανομή πλατύκυρτη

2.2 Περιγραφική Στατιστική Ανάλυση

Σε αυτή την υπό-ενότητα, πραγματοποιείται η αναλυτική παρουσίαση του χαρτοφυλακίου ζημιών, μέσω περιγραφικής στατιστικής ανάλυσης και διαγραμμάτων. Τα δεδομένα, αποτελούνται από ατομικές ζημιές αυτοκινήτων που κατέγραψε μεγάλη Ελληνική ασφαλιστική εταιρεία κατά την διετία 2007-2008. Η ανάλυση θα πραγματοποιηθεί στα δεδομένα 2ετίας, ξεχωριστά για κάθε έτος καθώς και σε εβδομαδιαία βάση.

2.2.1 Ημερήσια Ανάλυση Διετίας

Στη συγκεκριμένη ανάλυση θεωρείται ως αυτούσιο το χαρτοφυλάκιο που περιλαμβάνει κάθε ατομική ζημιά που καταγράφηκε από τις 3/1/2007 έως 31/12/2008. Ύστερα από επεξεργασία των δεδομένων, πραγματοποιήθηκε ομαδοποίηση κάθε μοναδικής ατομικής ζημιάς με βάση την ημέρα καταγραφής της από την ασφαλιστική εταιρεία. Συνολικά σε αυτή την περίοδο καταγράφηκαν 25.348 ατομικές ζημιές. Μετά την ομαδοποίηση, προέκυψαν συνολικά 494 μοναδικές ζημιές όπου κάθε μια αντιστοιχεί στο άθροισμα των ζημιών που καταγράφηκαν από την ασφαλιστική ανά ημέρα εγγραφής. Βασικά περιγραφικά στοιχεία για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο παρουσιάζονται στον [Πίνακα 2.1](#)

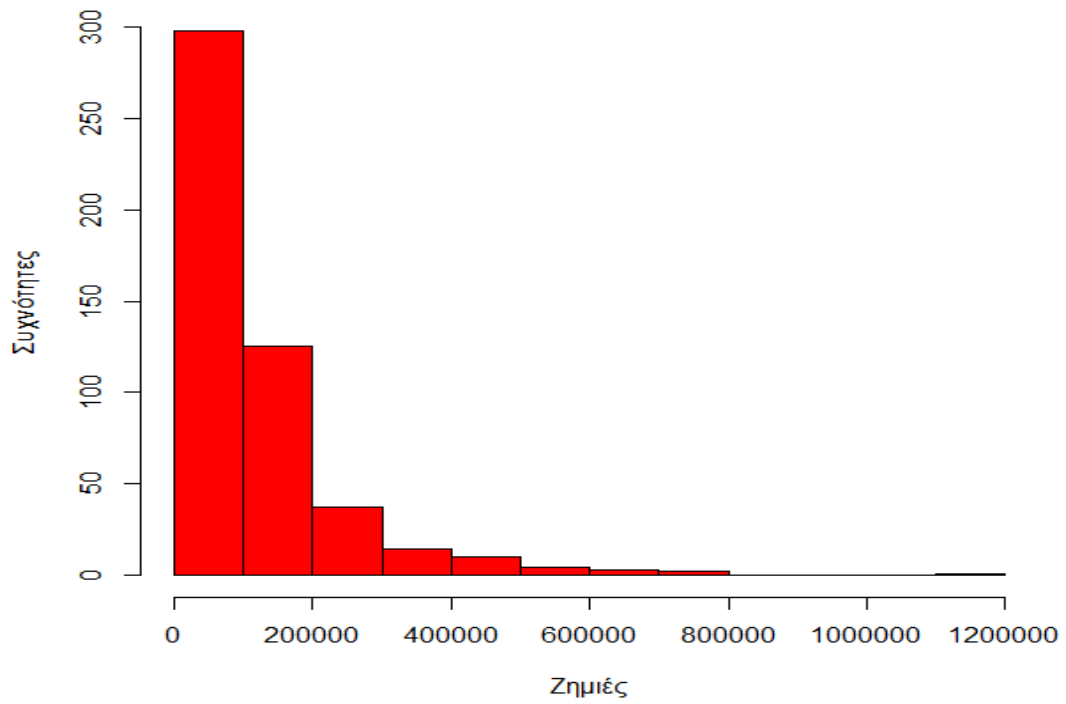
Περιγραφική Στατιστική Ανάλυση	Μεταβλητή Ύψους Ζημιών
Συνολικές Ζημιές	59.880.791 €
Μέση Τιμή	121.216
Διακύμανση	13.715.594.588
Τυπική Απόκλιση	117.113,6
25% Ποσοστιαίο σημείο	58.103
75% Ποσοστιαίο σημείο	133.803
Διάμεσος	85.776
Μέγιστη Τιμή	1.143.227
Ελάχιστη Τιμή	382
Εύρος	1.142.845
Συντελεστής Ασυμμετρίας	3,32
Κυρτότητα	19,57
Ενδοτεταρτομοριακό Εύρος	75.700

Πίνακας 2.1 : Βασικά περιγραφικά μέτρα για τις συνολικές ζημιές ανά ημέρα

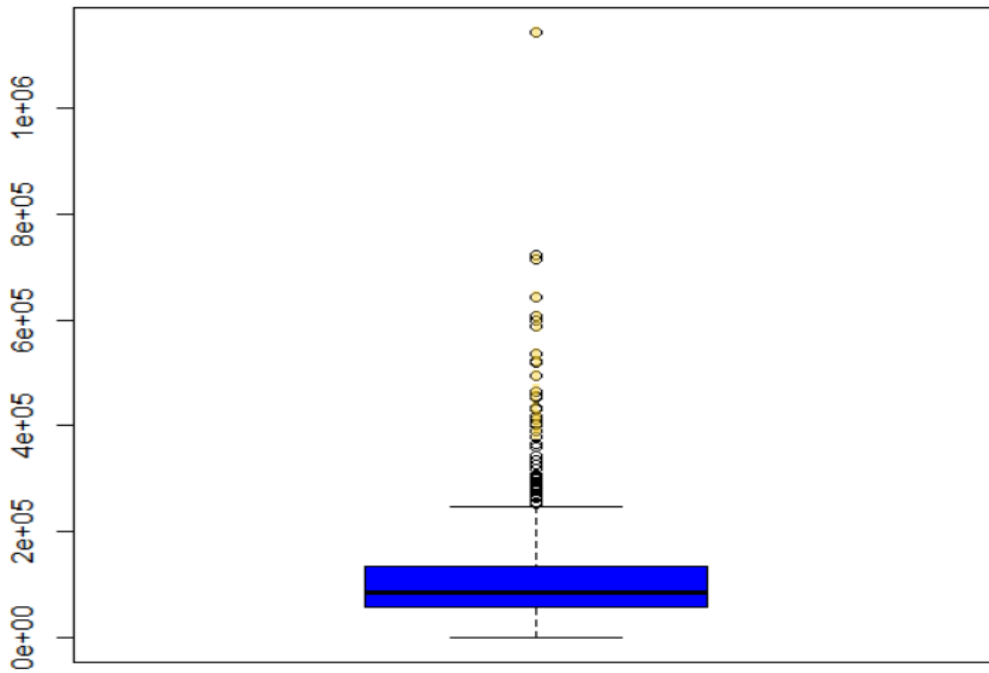
Με μια πρόχειρη ματιά στον παραπάνω πίνακα, εύκολα μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι τα δεδομένα προέρχονται από κάποια μη-συμμετρική κατανομή. Το γεγονός ότι η μέση τιμή είναι αρκετά μεγαλύτερη από τη διάμεσο, καθώς και ο θετικός δείκτης ασυμμετρίας αποτελούν ενδείξεις για μια θετική λοξότητα των δεδομένων μας. Επίσης, η πολλή υψηλή διακύμανση είναι δείγμα του πόσο διασκορπισμένες είναι οι παρατηρήσεις γύρω από τη μέση τιμή ενισχύοντας έτσι τη πεποίθηση της μη-συμμετρικότητας. Συγχρόνως, η τιμή του συντελεστή Pearson φανερώνει υψηλή κύρτωση για τα δεδομένα. Τα αποτελέσματα αυτά αναμενόταν, αφού όπως ήδη έχουμε αναφέρει, από τη φύση τους τα ασφαλιστικά δεδομένα χαρακτηρίζονται από θετική λοξότητα και υψηλή κύρτωση.

Το [Σχήμα 2.4](#) επιβεβαιώνει τους παραπάνω ισχυρισμούς τόσο για τη μη συμμετρικότητα όσο και την υψηλή κύρτωση της κατανομής των δεδομένων. Το ιστόγραμμα παρουσιάζει μια τυπική εικόνα ασφαλιστικών δεδομένων. Δηλαδή, παρατηρείται ένα μεγάλο πλήθος μικρών ζημιών και ένα μικρό πλήθος μεγάλων ζημιών. Τις παρατηρήσεις αυτές έρχεται να επιβεβαιώσει επίσης το θηκόγραμμα των δεδομένων [Σχήμα 2.5](#) :

Ιστόγραμμα Ζημιών αυτοκινήτου



Σχήμα 2.4 : Ιστόγραμμα συχνοτήτων για τις συνολικές ζημιές ανά ημέρα.

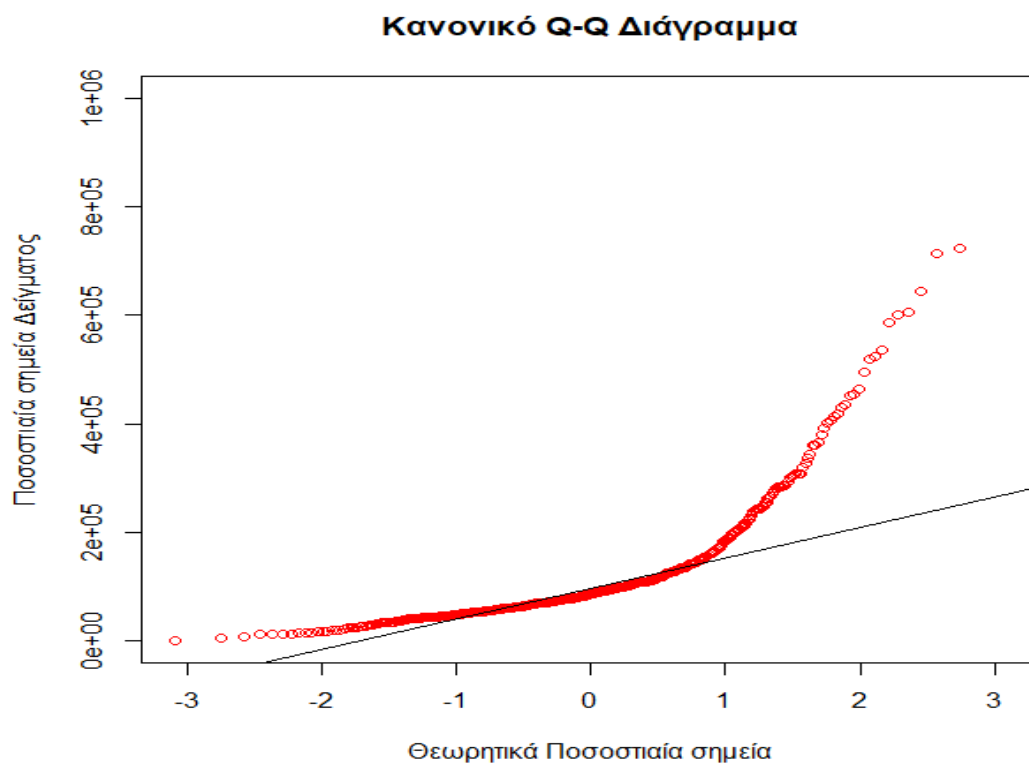


Σχήμα 2.5 : Θηκόγραμμα για τις συνολικές ζημιές ανά ημέρα

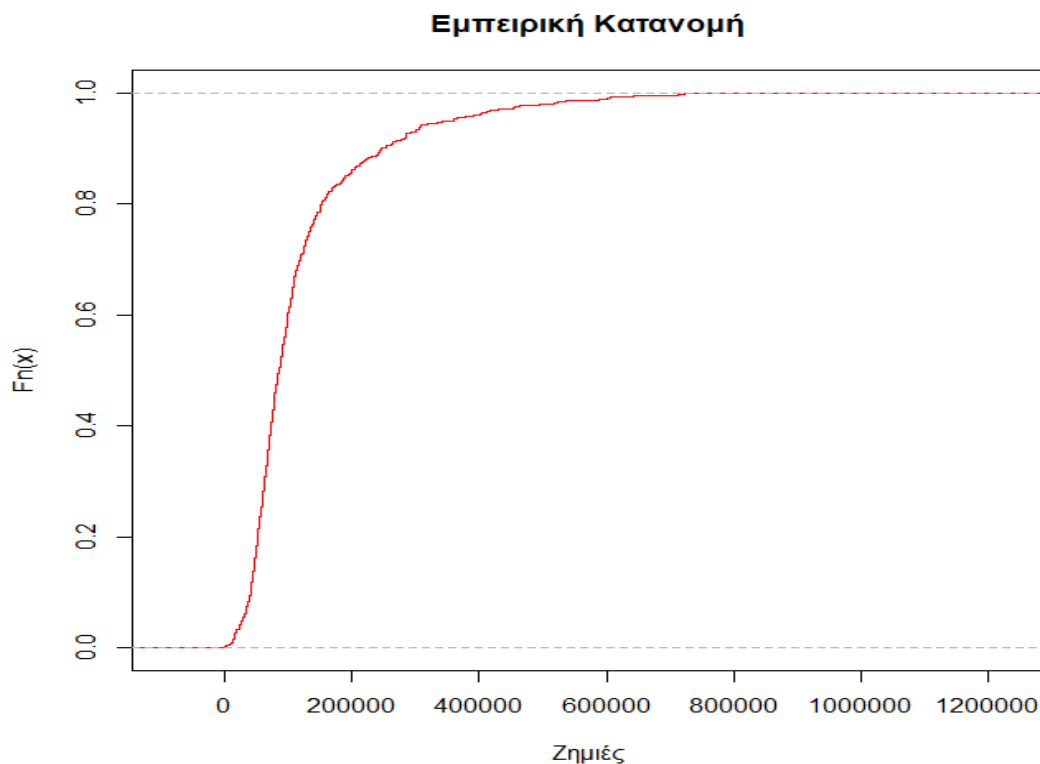
Όπως φαίνεται στο [Σχήμα 2.5](#) η κύρια γραμμή του θηκογράμματος είναι ελαφρώς αριστερά που σημαίνει ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των παρατηρήσεων λαμβάνει υψηλές τιμές. Γεγονός το οποίο ερμηνεύει τη θετική λοξότητα που υπάρχει στα δεδομένα. Με το αχνό κίτρινο χρώμα παρατηρούνται οι ακραίες παρατηρήσεις του δείγματος, οι οποίες προδίδουν βαριά δεξιά ουρά της κατανομής. Ως ακραίες παρατηρήσεις σε ένα δείγμα αναφέρονται όσες ξεπερνούν τα εξωτερικά όρια του θηκογράμματος, τα οποία υπολογίζονται βάση της σχέσης :

$$\text{Ακραίες τιμές} > 75\% \text{ ποσοστιαίο σημείο} + 3 * \text{Ενδοτεταρτομοριακό Εύρος}$$

Παράλληλα, στα πλαίσια διερεύνηση της μορφής της κατανομής που περιγράφει τα δεδομένα, πραγματοποιείται ένα κανονικό διάγραμμα ποσοστημορίων. Παρατηρώντας το [Σχήμα 2.6](#) βλέπουμε ότι η εκτιμημένη ευθεία των δεδομένων απέχει πολύ της ευθείας $Y=X$. Συμπεραίνεται λοιπόν, ότι τα δεδομένα δεν προέρχονται από κάποια συμμετρική κατανομή.



[Σχήμα 2.6](#) : Κανονικό διάγραμμα ποσοστιαίων σημείων για τις συνολικές ζημιές ανά ημέρα



Σχήμα 2.7 : Εμπειρική κατανομή των συνολικών ζημιών ανά ημέρα

Τέλος, όπως θα διαπιστώσουμε από το [Σχήμα 2.7](#) η εμπειρική συνάρτηση κατανομής είναι σχεδόν κατακόρυφη στο μηδέν (μικρή απόκλιση από την κάθετο) και πλησιάζει στο ένα. Δηλαδή, οι περισσότερες μικρές ζημιές εμφανίζονται με μεγάλη πιθανότητα, ωστόσο υπάρχει ένας υπολογίσιμος αριθμός μεγάλων ζημιών που εμφανίζονται σχετικά με μικρή πιθανότητα. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η δεξιά ουρά της κατανομής έχει αργή σύγκλιση στο 0, αφού προσδίδει κάποια έστω και μικρή πιθανότητα σε μεγάλες ζημιές.

Συμπερασματικά, έχοντας αναλύσει εκτενώς τα δεδομένα ζημιών ανά ημέρα και για τα 2 έτη μαζί, θα τολμούσαμε να αποφανθούμε ότι για την καλύτερη περιγραφή των δεδομένων είναι λογικό να χρησιμοποιήσουμε μια κατανομή με μια βαριά δεξιά ουρά.

2.2.2 Ημερήσια Ανάλυση κατά έτος

Στη συγκεκριμένη ανάλυση το συνολικό χαρτοφυλάκιο ζημιών 2 ετών χωρίζεται σε 2 διαφορετικά χαρτοφυλάκια, ένα για το κάθε έτος καταγραφής της ατομικής ζημιάς. Το πρώτο χαρτοφυλάκιο περιλαμβάνει όλες τις ατομικές ζημιές αυτοκινήτου που καταγράφηκαν από την ασφαλιστική εταιρεία από τις 3/1/2007 έως και τις 31/12/2007. Παράλληλα το δεύτερο χαρτοφυλάκιο αποτελείται από ζημιές που καλύπτουν την περίοδο 8/1/2008 έως 31/12/2008. Και σε αυτή την ανάλυση θα ακολουθηθεί η ίδια λογική της ομαδοποίησης των συνολικών ζημιών ανά ημέρα

καταγραφής τους από την ασφαλιστική. Η ανάλυση και η σύσταση των 2 χαρτοφυλακίων φαίνονται στον [Πίνακα 2.2](#) που ακολουθεί :

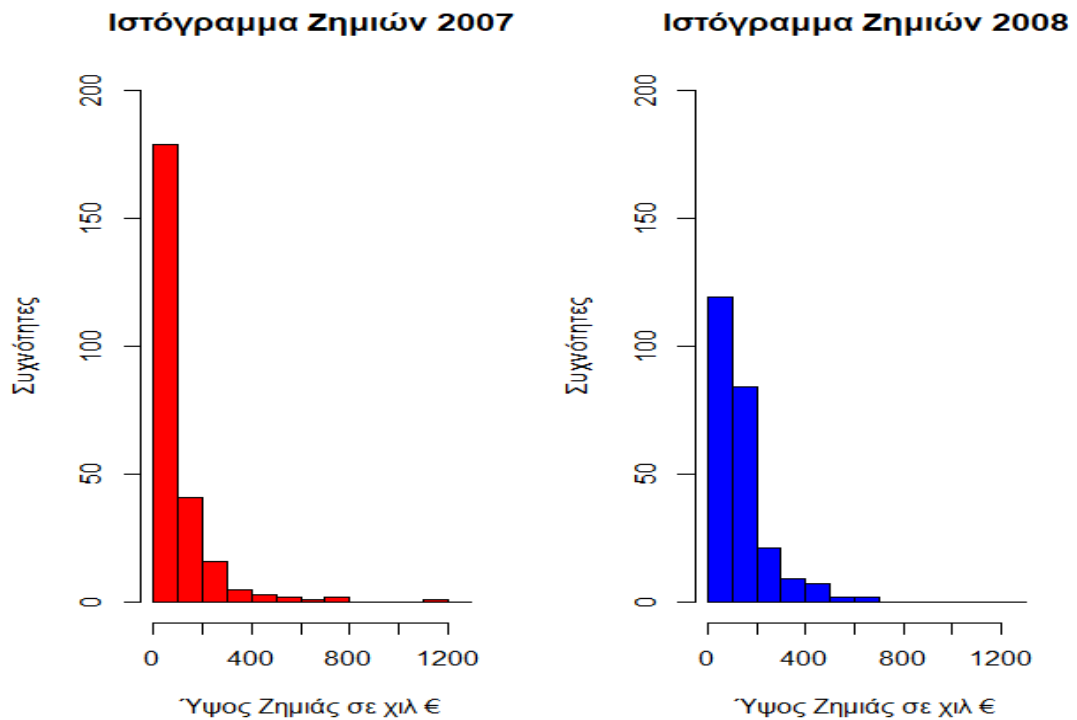
Περιγραφική Στατιστική Ανάλυση	Ζημιές του έτους 2007	Ζημιές του έτους 2008
Πλήθος Ζημιών	11.325	14.023
Πλήθος Ζημιών μετά την ομαδοποίηση ανά ημέρα	250	244
Συνολικό Ύψος Ζημιών	27.493.721	32.387.070
Μέση Τιμή	109.975	132.734
Διακύμανση	16.093.145.886	11.072.570.526
Τυπική Απόκλιση	126.858,8	105.226,3
25% Ποσοστιαίο σημείο	49.776	65.885
75% Ποσοστιαίο σημείο	106.953	149.953
Διάμεσος	71.993	102.746
Μέγιστη Τιμή	1.143.227	643.633
Ελάχιστη Τιμή	7.398	382
Εύρος	1.135.829	643.251
Συντελεστής Ασυμμετρίας	4,007	2,249
Κυρτότητα	25,001	8,868
Ενδοτεταρτομοριακό Εύρος	57.177,5	84.068

Πίνακας 2.2 : Βασικά περιγραφικά μέτρα για τις συνολικές ζημιές ανά ημέρα και έτος

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα κατά το ημερολογιακό έτος 2007 καταγράφηκαν από την ασφαλιστική εταιρεία 11.325 ατομικές ζημιές. Οι ζημιές αυτές αντιστοιχούν κατά μέσο όρο σε 45,3 ζημιές ανά εργάσιμη ημέρα με ένα μέσο κόστος ανά ζημιά 2.427,7 €. Για το ημερολογιακό έτος 2008 το πλήθος ζημιών φτάνει τις 14.023 ατομικές ζημιές που αντιστοιχούν σε 57,5 ζημιές ανά ημέρα με μέσο κόστος ανά ζημιά τα 2309,5 €.

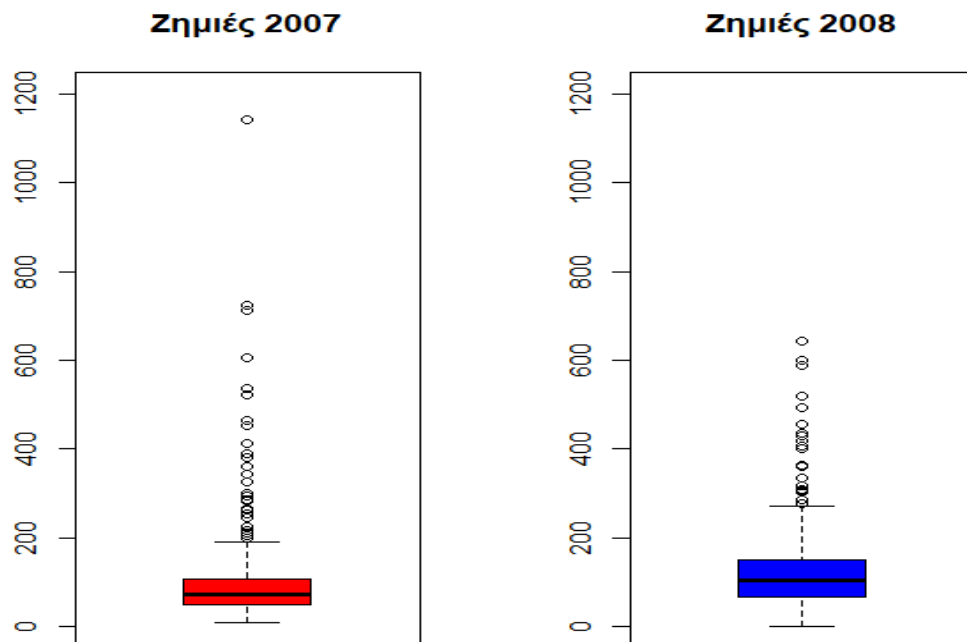
Η διάμεσος και για τα 2 χαρτοφυλάκια είναι αρκετά μικρότερη της μέσης τιμής των δεδομένων. Αναμένουμε λοιπόν ότι τα δεδομένα δεν προέρχονται από συμμετρική κατανομή. Ο συντελεστής ασυμμετρίας ενισχύει αυτή την ένδειξη αφού και στις 2 περιπτώσεις είναι θετικός.

Η διακύμανση είναι αρκετά μεγάλη και στις 2 περιπτώσεις, δείγμα του πόσο διασκορπισμένες είναι οι παρατηρήσεις γύρω από τη μέση τιμή. Επίσης ο συντελεστής κύρτωσης (ειδικά για το 2007) είναι αρκετά μεγαλύτερος του 3. Συνεπώς η κατανομή του ύψους των ζημιών είναι λεπτόκυρτη



Σχήμα 2.8 : Ιστόγραμμα συχνότητων για τις συνολικές ζημιές ανά ημέρα των ημερολογιακών ετών 2007-2008

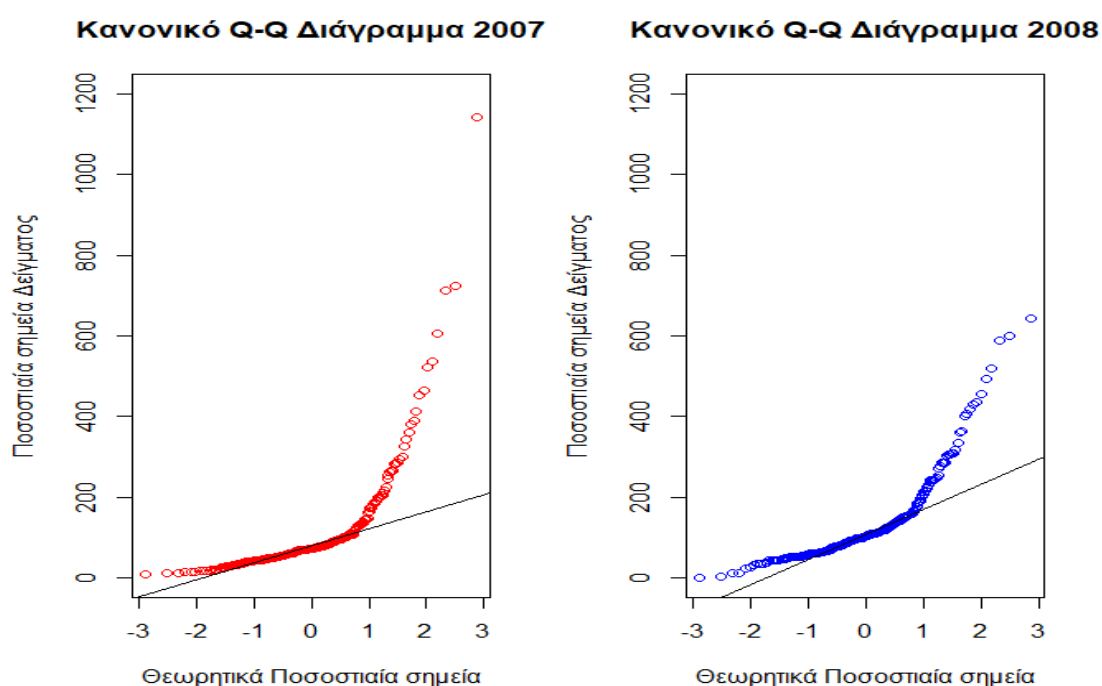
Όπως φαίνεται από το [Σχήμα 2.8](#), και τα δύο χαρτοφυλάκια ζημιών χαρακτηρίζονται από θετική λοξότητα και υψηλή κύρτωση. Το χαρτοφυλάκιο ζημιών του 2007 διαθέτει πιο υψηλή κύρτωση και επίσης μια πιο βαριά δεξιά ουρά.



Σχήμα 2.9 : Θηκόγραμμα για τις συνολικές ζημιές ανά ημέρα των ημερολογιακών ετών 2007-2008

Παρόμοια εικόνα παρατηρείται και από το θηκόγραμμα των δεδομένων. Όπως φαίνεται στο [Σχήμα 2.9](#) το χαρτοφυλάκιο ζημιών του 2007 παρουσιάζει μεγαλύτερο πλήθος αλλά και πιο ακραίες παρατηρήσεις από το χαρτοφυλάκιο ζημιών του 2018. Συνεπώς, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι τα δεδομένα ζημιών του 2017 είναι πιο βαριά και ίσως αποτελούν τον λόγο ύπαρξης ασυμμετρίας στα συνολικά δεδομένα ζημιών.

Τέλος, το κανονικό διάγραμμα ποσοστιαίων σημείων για τις συνολικές ζημιές ανά ημέρα ([Σχήμα 2.10](#)) και των 2 ετών δείχνει ότι η κατανομή των ζημιών απέχει πολύ από την Κανονική και επομένως κάποια συμμετρική κατανομή.



Σχήμα 2.10 : Κανονικό διάγραμμα ποσοστιαίων σημείων για τις συνολικές ζημιές ανά ημέρα των ημερολογιακών ετών 2007 και 2008

2.2.3 Εβδομαδιαία Ανάλυση

Η τελευταία ανάλυση των δεδομένων ζημιών που διαθέτουμε, θα πραγματοποιηθεί σε εβδομαδιαία βάση. Στη συγκεκριμένη ανάλυση κάθε ατομική ζημιά που καταγράφεται ημερησίως ταξινομείται με βάση την εβδομάδα στην οποία ανήκει. Στην εταιρεία από το 2007 μέχρι και το 2008 αναγγέρονται κατά μέσο όρο 216,6 ζημιές εβδομαδιαίως και το εβδομαδιαίο μέσο ποσό αποζημίωσης είναι 511.803,20 €. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το μέσο κόστος ανά ζημιά είναι 2362,9 €

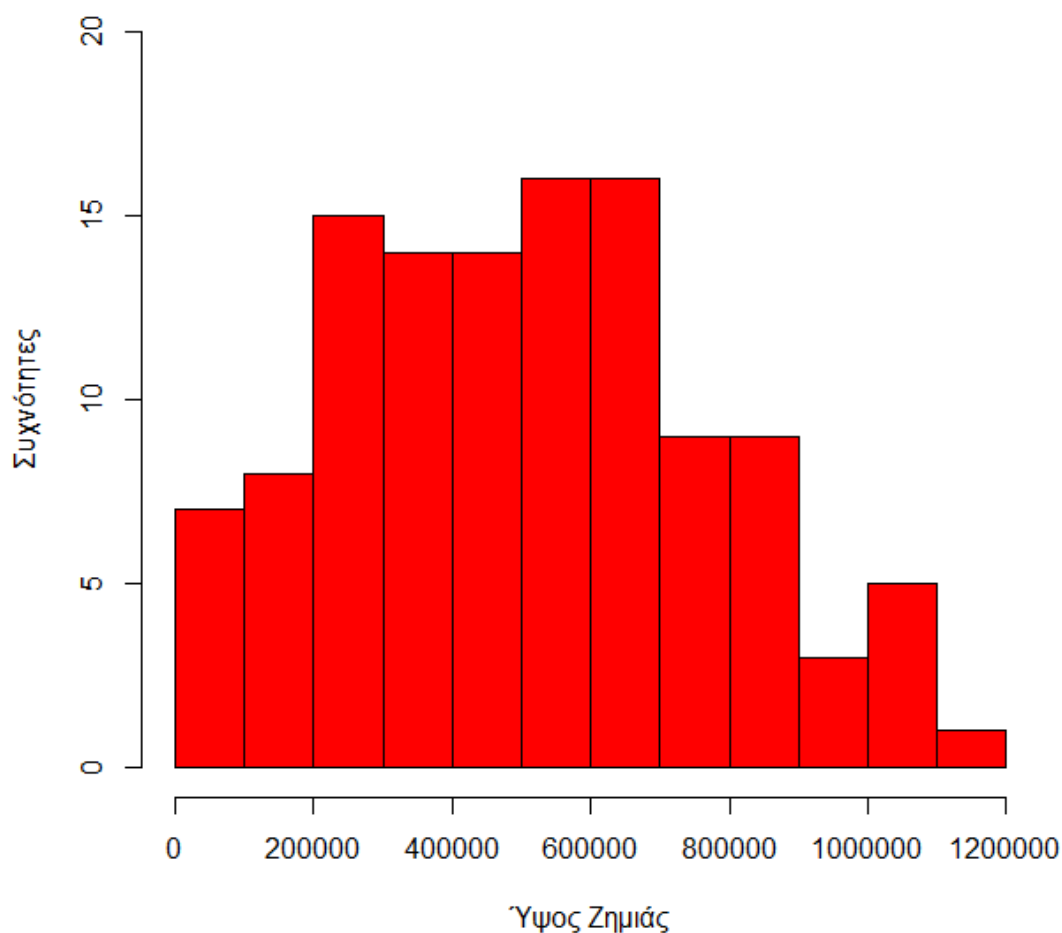
Περιγραφική Στατιστική Ανάλυση	Μεταβλητή Ύψους Ζημιών
Πλήθος Ζημιών	25348
Πλήθος Ζημιών μετά την ομαδοποίηση ανά εβδομάδα	117
Συνολικές Ζημιές	59.880.791 €
Μέση Τιμή	511.803
Διακύμανση	70797640777
Τυπική Απόκλιση	266.078,3
25% Ποσοστιαίο σημείο	296.861
75% Ποσοστιαίο σημείο	695.488
Διάμεσος	512.340
Μέγιστη Τιμή	1.143.227
Ελάχιστη Τιμή	29.857
Εύρος	1.113.370
Συντελεστής Ασυμμετρίας	0,256
Κυρτότητα	2,423
Ενδοτεταρτομοριακό Εύρος	398.627

Πίνακας 2.3 : Βασικά περιγραφικά μέτρα για τις συνολικές ζημιές ανά εβδομάδα

Βλέποντας τις τιμές του [Πίνακα 2.3](#), είναι σημαντικό να σχολιαστεί η μέγιστη τιμή των ζημιών ανά εβδομάδα. Όπως θα ανέμενε κανείς λόγω του πλήθους των ζημιών που αθροίζονται ώστε να δημιουργηθεί μια ζημιά ανά εβδομάδα, τόσο η ελάχιστη όσο και η μέγιστη τιμή των δεδομένων θα έπρεπε να είναι αρκετά μεγαλύτερες από τις 2 προηγούμενες αναλύσεις που κάναμε έως τώρα. Το αποτέλεσμα αυτό δεν επιβεβαιώνει ο [Πίνακας 2.2](#). Αφού η μέγιστη τιμή των δεδομένων είναι ίση με αυτήν των συνολικών ζημιών ανά ημέρα για το έτος 2007. Το γεγονός αυτό, σχετίζεται με τον τρόπο λειτουργίας των ασφαλιστικών εταιρειών και τον τρόπο με τον οποίο επιθυμούν να καταγράψουν τις ζημιές. Οι ζημιές του τελευταίου μήνα εκάστοτε έτους, τείνουν να εγγράφονται τις τελευταίες εργάσιμες ημέρες του χρόνου, για λόγους οικονομικών αποτελεσμάτων. Τυχαίνει λοιπόν, όλες οι ζημιές τις τελευταίας εβδομάδας του 2007 να εγγραφούν από την ασφαλιστική την τελευταία εργάσιμη ημέρα.

Παρατηρείται ότι η διάμεσος είναι αρκετά κοντά στην μέση τιμή των δεδομένων. Οπότε αναμένεται η κατανομή των ομαδοποιημένων δεδομένων ανά εβδομάδα να είναι μάλλον συμμετρική. Ο συντελεστής ασυμμετρίας ενισχύει αυτή την ένδειξη αφού είναι αρκετά κοντά στο 0. Επίσης, οι ζημιές είναι αρκετά διασκορπισμένες γύρω από το μέσο όπως φαίνεται από την τιμή της διασποράς αλλά συγχρόνως η οξύτητα της κορυφής είναι μικρή (συντελεστή κύρτωσης 2,423) . Συνεπώς, θα λέγαμε ότι η κατανομή του ύψους των ζημιών είναι πλατύκυρτη. Τέλος, ο δείκτης ασυμμετρίας είναι κοντά στο 0, ενισχύοντας έτσι την γνώμη περί συμμετρικότητας των δεδομένων.

Ιστόγραμμα Εβδομαδιαίων Ζημιών

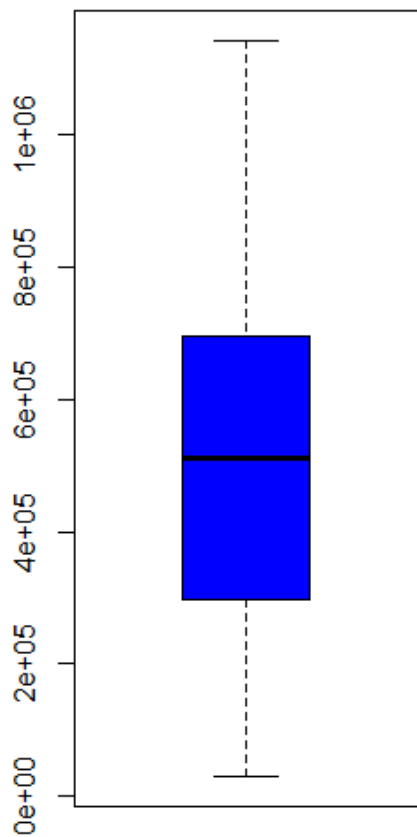


Σχήμα 2.11 : Ιστόγραμμα συχνοτήτων για τις συνολικές ζημιές ανά εβδομάδα

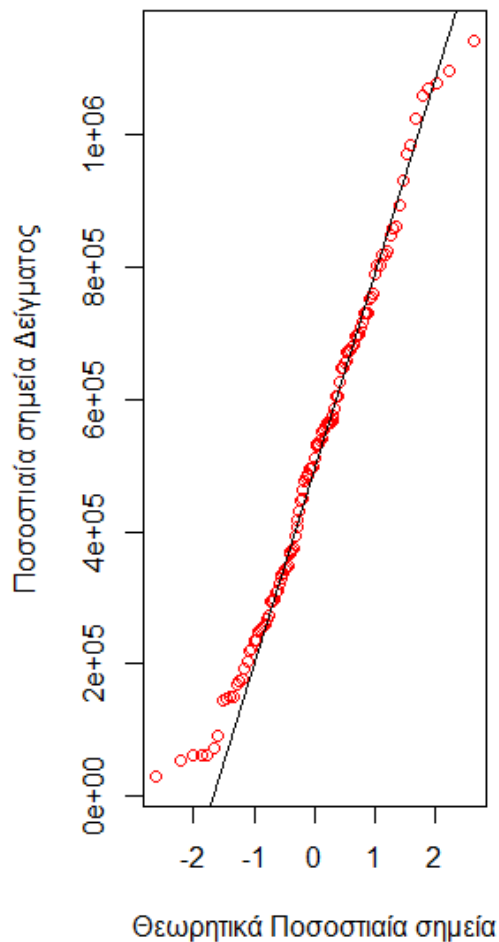
Όσα αναμέναμε και επισημάναμε από την περιγραφική στατιστική ανάλυση, έρχεται να μας επιβεβαιώσει το ιστόγραμμα των ζημιών του [Σχήματος 2.11](#). Η κατανομή των δεδομένων μοιάζει όντως να είναι συμμετρική με το μεγαλύτερο ποσοστό των ζημιών να βρίσκεται κοντά στον μέσο. Όπως φαίνεται και από το σχήμα, δεν υπάρχει οξεία κορυφή και η κατανομή θα λέγαμε ότι είναι πλατύκυρτη.

Τα αποτελέσματα ισχυροποιούνται από το [Σχήμα 2.12](#). Το boxplot απεικονίζει συμμετρική κατανομή χωρίς να υπάρχουν ακραίες παρατηρήσεις, ενώ στο κανονικό διάγραμμα των δεδομένων φαίνεται να προσαρμόζει αρκετά καλά η ευθεία.

Εβδομαδιαίες Ζημιές



Κανονικό Q-Q Διάγραμμα



Σχήμα 2.12 :Θηκόγραμμα (αριστερά) και Κανονικό διάγραμμα ποσοστιαίων σημείων (δεξιά) για τις συνολικές ζημιές ανά εβδομάδα.

Κεφάλαιο 3

Κατανομές Πιθανότητας και Μέτρα Κινδύνου

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε κάποιες κατανομές της θεωρίας πιθανοτήτων, τις οποίες και θα χρησιμοποιήσουμε για τη μελέτη της κατανομής που ακολουθούν τα εμπειρικά δεδομένα. Πιο συγκεκριμένα, οι κατανομές που θα ορίσουμε είναι συνεχείς κατανομές με θετικό στήριγμα και χαρακτηρίζονται από βαριά δεξιά ουρά. Όπως διαπιστώσαμε και από την ανάλυση του προηγούμενου κεφαλαίου, τέτοιου είδους κατανομές είναι αναγκαίες στην ανάλυση ασφαλιστικών ζημιών.

Οι αναμενόμενες ζημιές, οι οποίες αναφέρονται και ως μέσες απώλειες ή συνήθεις ζημιές είναι γενικά διαχειρίσιμες. Ωστόσο, οι μη αναμενόμενες ζημιές, αυτές δηλαδή που αποκλίνουν από τις συνήθεις μπορούν να θέσουν σε κίνδυνο τη βιωσιμότητα μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Ένα από τα πιο δύσκολα καθήκοντα μιας ασφαλιστικής εταιρείας λοιπόν, είναι η κατάλληλη ρύθμιση των αναγκαίων κεφαλαίων που απαιτούνται ώστε να ανταπεξέλθει στις υποχρεώσεις της. Συνεπώς και ο σωστός υπολογισμός των μέτρων κινδύνου που θα ορίσουμε στη συνέχεια.

3.1 Κατανομές Πιθανότητας

Σε αυτή την υποενότητα εισάγουμε κάποιες βασικές κατανομές πιθανότητας. Οι κατανομές στις οποίες θα αναφερθούμε, χρησιμοποιούνται ευρέως στην αναλογιστική κοινότητα με σκοπό τη μοντελοποίηση ασφαλιστικών δεδομένων.

3.1.1 Η Κατανομή Weibull

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο α με σ.π.π που δίνεται από τη σχέση :

$$f(y) = \alpha e^{-\alpha y}, y > 0$$

Τότε η τυχαία μεταβλητή $X = Y^{\frac{1}{\alpha}}$ λέμε ότι ακολουθεί την κατανομή Weibull με παράμετρο σχήματος α . Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Weibull δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = \alpha \gamma x^{\gamma-1} e^{-\alpha x^\gamma}, x > 0$$

και η συνάρτηση δεξιάς ουράς της κατανομής από τον

$$\bar{F}(x) = e^{-\alpha x^\gamma}, x > 0.$$

Η κατανομή της Weibull έχει βαριά ουρά όταν η παράμετρος α είναι μεγαλύτερη του 0, αλλά μικρότερη του 1.

Στην κατανομή Weibull εάν $\gamma=1$, η κατανομή γίνεται η Εκθετική με παράμετρο α .

3.1.2 Η Λογαριθμοκανονική Κατανομή

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την Κανονική κατανομή με παραμέτρους μ , σ^2 και σ.π.π που δίνεται από τη σχέση :

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, y \in R, \mu \in R, \sigma^2 > 0$$

Τότε η τ.μ $X=e^Y > 0$ ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική τυχαία μεταβλητή X . Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Λογαριθμοκανονικής δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{x}, x > 0$$

3.1.3 Η Κατανομή Exponentiated Weibull

Μια από τις πολλές κατανομές που έχουν προκύψει από τη την κλασική διπαραμετρική Weibull είναι η Εκθετική Weibull. Η εκθετική οικογένεια κατανομών Weibull εισάχθηκε για πρώτη φορά από τους Mudholkar and Srivastava (1993). Η προσθήκη μιας επιπλέον παραμέτρου ως εκθετικό κομμάτι στο μοντέλο να μεν προσδίδει μεγαλύτερο βάρος στην ουρά αλλά επίσης αυξάνει την πολυπλοκότητα του μοντέλου. Η σ.π.π της Exponentiated Weibull (Ahmad et al., 2019). δίνεται από την σχέση :

$$f(x) = \alpha \theta \gamma e^{-\gamma x^\alpha} x^{\alpha-1} (1 - e^{-\gamma x^\alpha})^{\theta-1}, x > 0, \alpha > 0, \gamma > 0, \theta > 0$$

και αντίστοιχα η συνάρτηση δεξιάς ουράς της κατανομής από τον τύπο:

$$\bar{F}(x) = 1 - (1 - e^{-\gamma x^\alpha})^\theta.$$

Αν η παράμετρος $\theta=1$, προκύπτει κατανομή της Weibull

3.1.4 Η Κατανομή Lomax ή Pareto type II

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Lomax με παραμέτρους α και γ ορίζεται ως :

$$f(x) = \frac{\alpha\gamma}{(1+\gamma x)^{\alpha+1}}, \quad x>0, \alpha>0, \gamma>0$$

ενώ η συνάρτηση δεξιάς ουράς της κατανομής δίνεται από τον τύπο :

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{(1+\gamma x)^\alpha}, \quad x>0, \alpha>0, \gamma>0.$$

3.1.5 Η Κατανομή Burr-XII

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Burr-XII με παραμέτρους c και k (Ahmad et al., 2020). ορίζεται ως :

$$f(x) = ck \frac{x^{c-1}}{(1+x^c)^{k+1}}, \quad x>0, c>0, k>0$$

και η συνάρτηση δεξιάς ουράς της κατανομής δίνεται από την σχέση :

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{(1+x^c)^k}, \quad x>0, c>0, k>0.$$

Για την κατανομή Burr εάν $c=1$, ταυτίζεται με τη Lomax που έχει $\gamma=1$.

3.2 Μέτρα Κινδύνου

Σύμφωνα με τον Πυλώνα 1 του νομικού πλαισίου Solvency II κάθε ασφαλιστική εταιρεία υποχρεούται να διατηρεί συγκεκριμένα κεφάλαια ώστε να εξασφαλίζεται ότι μπορεί να καλύψει τις υποχρεώσεις της. Στο πλαίσιο αυτό οι ασφαλιστικές εταιρείες εντείνουν τις προσπάθειες τους για να εκτιμήσουν τα

εσωτερικά τους ρίσκα. Για το λόγο αυτό δημιουργήθηκαν κάποια μέτρα κινδύνου ως ένα μέσο ποσοτικοποίησης του Κινδύνου που αναλαμβάνει η εταιρεία.

3.2.1 Value at Risk

Το πιο γνωστό μέτρο κινδύνου είναι το Value at Risk (συντομογραφία VaR) ή αλλιώς η Αξία σε Κίνδυνο. Η αξία σε κίνδυνο είναι το ποσό του κεφαλαίου εκείνου που απαιτείται, ώστε με συγκεκριμένο βαθμό βεβαιότητας η ασφαλιστική εταιρεία να μπορέσει να συνεχίσει την λειτουργία της και να μη καταστεί αφερέγγυα. (Χατζηκωνσταντινίδης, 2015).

Ο βαθμός βεβαιότητας είναι αυθαίρετος, αλλά στην πράξη είναι αρκετά μεγάλος, συνήθως $p=99%$, $98%$ ή $95%$. Όπως είναι αναμενόμενο, όσο αυξάνεται ο βαθμός βεβαιότητας τον οποίο θέτει η ασφαλιστική, τόσο αυξάνεται και το κεφάλαιο που απαιτείται να διατηρεί ως αποθεματικό.

Έστω X η τυχαία μεταβλητή, που δηλώνει ζημιά. Η αξία σε κίνδυνο του X για το $100_p\%$ επίπεδο εμπιστοσύνης, το οποίο συμβολίζεται ως $VaR_p(X)$ είναι το p -ποσοστημόριο της κατανομής του X . Για τις συνεχείς κατανομές όπως αυτές που εξετάζονται στην παρούσα εργασία, η τιμή $VaR_p(X)$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$Pr[X > VaR_p(X)] = 1-p$$

Παράδειγμα 1. Έστω ότι υπολογίζεται $VaR_{0,95} = 50.000.000$ €. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το ποσό που απαιτείται να διατηρεί η ασφαλιστική εταιρεία, ώστε με την έλευση ενός κινδύνου να συνεχίσει τη λειτουργία της με πιθανότητα 95% είναι τα 50 εκ €.

Η Αξία σε Κίνδυνο ως μέτρο κινδύνου, με βάση το p -ποσοστημόριο, μας προσφέρει σημαντική πληροφόρηση για το χειρότερο σενάριο που μπορεί να συμβεί με μία πιθανότητα p . Δεν έχουμε όμως κάποια πληροφόρηση για τη συμπεριφορά της τυχαίας μεταβλητής πέρα από το p -ποσοστημόριο. Αν δηλαδή επέλθει μια αρκετά ακραία ζημιά με πιθανότητα $1-p$, κατά πόσον αυτή θα επηρεάσει την ομαλή λειτουργία της ασφαλιστικής; Το ερώτημα αυτό δημιούργησε την ανάγκη για εύρεση, επιπρόσθετων μέτρων κινδύνου.

3.2.2 Tail Value at Risk ή Expected Shortfall

Το Tail Value at Risk (συντομογραφία TVaR) ή απομείωση κινδύνου είναι το ποσό εκείνο το οποίο απαιτείται να διαθέτει η ασφαλιστική ώστε να συνεχίσει την λειτουργία της εάν επέλθει ένας κίνδυνος μεγαλύτερος του $VaR_p(X)$ με πιθανότητα $1-p$.

Έστω X η συνεχής τυχαία μεταβλητή, που δηλώνει ζημιά. Το Tail Value at Risk είναι το απαιτούμενο ποσό ώστε να καλυφθούν οι αναμενόμενες ζημιές, για ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο, δοθέντος ότι οι ζημιές ξεπερνούν το $100p\%$ ποσοστημόριο της κατανομής που το χαρακτηρίζει.

$$TVaR_p(X) = E[X | x > VaR_p(x)] = \frac{\int_{VaR_p(x)}^{\infty} x f(x) dx}{1-p}$$

Παράδειγμα 2. Έστω ότι υπολογίζεται $TVaR_{0,95} = 80.000.000$ €. Αυτό πρακτικά είναι το ποσό που υποχρεούται να διατηρεί στα ταμεία της η ασφαλιστική ώστε να συνεχίσει τη λειτουργία της με 95% βαθμό βεβαιότητας, στην περίπτωση που επέλθει (με πιθανότητα 5%) ένας κίνδυνος μεγαλύτερος του VaR (π.χ € 50 εκ) .

Κεφάλαιο 4

Η νέα οικογένεια Κατανομών με Βαριά Ουρά και η ειδική περίπτωση της κατανομής Weibull.

Περισσότερο από οποιαδήποτε άλλα, τα ασφαλιστικά δεδομένα ζημιών χαρακτηρίζονται από θετική λοξότητα, υψηλή κύρτωση και από μια βαριά δεξιά ουρά. Στο πλαίσιο αυτό, οι αναλογιστές βρίσκονται σε συνεχή αναζήτηση νέων μοντέλων που θα παρέχουν καλύτερη και πιο ολοκληρωμένη περιγραφή των δεδομένων. Στην προσπάθεια αυτή, έδαφος φαίνεται να κερδίζουν οι κατανομές με βαριά ουρά, προσαρμόζοντας καλύτερα και περιγράφοντας πιο αποτελεσματικά τα μεγέθη των ζημιών. Στο παρόν κεφάλαιο θα εισάγουμε μια νέα οικογένεια κατανομών με βαριά ουρά. Ακολούθως, θα πραγματοποιηθεί ανάλυση και θα παρουσιαστεί η ειδική περίπτωση της Weibull για αυτή την οικογένεια κατανομών.

4.1 Η νέα οικογένεια κατανομών με βαριά ουρά

Έστω X η συνεχής θετική τ.μ που συμβολίζει το ύψος ζημιάς. Υποθέτουμε ότι η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (συντομογραφία α.σ.κ) που περιγράφει το ύψος ζημιάς είναι η $F(x;\xi)$ και γράφουμε $X \sim F(x;\xi)$. Ορίζουμε λοιπόν (Arif et al., 2021). μια νέα οικογένεια κατανομών με βαριά ουρά προσθέτοντας μια ακόμη παράμετρο σ . Η α.σ.κ της νέας οικογένειας κατανομών προκύπτει από τον εξής μετασχηματισμό :

$$G(x; \sigma, \xi) = \frac{e^{1-(1-\sigma F(x;\xi))^2} - 1}{e^{1-\bar{\sigma}^2} - 1}, \quad x > 0 \quad (4.1.1)$$

Παραγωγίζοντας την Σχέση (4.1.1) ως προς x προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της νέας οικογένειας κατανομών με βαριά ουρά :

$$g(x; \sigma, \xi) = \frac{2\sigma f(x;\xi)(1-\sigma F(x;\xi))e^{1-(1-\sigma F(x;\xi))^2}}{e^{1-\bar{\sigma}^2} - 1}, \quad x > 0 \quad (4.1.2)$$

όπου για τις παραμέτρους της κατανομής ισχύει : $\sigma > 0$, $\xi \in R$, $\bar{\sigma} = 1 - \sigma$.

Έστω μια τ.μ X που έχει την σ.π.π της (4.1.2). Τότε, θα λέμε ότι έχει τη New Family Heavy Tailed (συντομογραφία NEFHT) κατανομή και θα γράφουμε $X \sim NEFHT(x, \sigma, \xi)$.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να τονιστεί πως η επιλογή της παραμέτρου σ δεν είναι αυθαίρετη, αλλά θα πρέπει να ληφθούν υπόψιν οι κάτωθι περιορισμοί :

$$\lim_{x \rightarrow 0} G(x; \sigma; \xi) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} G(x; \sigma; \xi) = 1$$

Η συνάρτηση της σχέσης (4.1.1) ως α.σ.κ πρέπει να είναι αύξουσα συνάρτηση. Όμως η $G(x; \sigma, \xi)$ δεν είναι αύξουσα συνάρτηση για κάθε επιλογή της παραμέτρου σ . Πράγματι αν $\sigma > 1$, τότε θα μπορούσε να προκύψει $\sigma F(x, \xi) > 1$ οπότε $1 - \sigma F(x, \xi) < 0$. Στην περίπτωση αυτή η $(1 - \sigma F(x, \xi))^2$ δεν είναι απαραίτητα φθίνουσα συνάρτηση, ώστε η $G(x; \sigma, \xi)$ να είναι απαραίτητα αύξουσα συνάρτηση. Για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού ας θεωρήσουμε $x_1 \neq x_2$ με $x_1, x_2 > 0$ και $x_1 < x_2$. Τότε θα έχουμε διαδοχικά :

$$F(x_1, \xi) < F(x_2, \xi) \Leftrightarrow 1 - \sigma F(x_1, \xi) > 1 - \sigma F(x_2, \xi) \Leftrightarrow -(1 - \sigma F(x_1, \xi)) < -(1 - \sigma F(x_2, \xi))$$

Οπότε

$$(1 - \sigma F(x_1, \xi))^2 < (1 - \sigma F(x_2, \xi))^2 \Leftrightarrow G(x_1; \sigma, \xi) > G(x_2; \sigma, \xi)$$

δηλαδή η G δεν είναι αύξουσα.

Παρατηρούμε ότι η $(1 - \sigma F(x, \xi))^2$ είναι αύξουσα συνάρτηση για $\sigma > 1$ επομένως βάση της σχέσης (4.1.1) η $G(x; \sigma; \xi)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση. Μέσα από την παραπάνω ανάλυση λοιπόν παρατηρούμε ότι για να είναι η $G(x, \sigma, \xi)$ αύξουσα οπωσδήποτε συνάρτηση θα πρέπει να ισχύει :

$$1 - \sigma F(x, \xi) > 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow \sigma F(x, \xi) < 1, \forall x > 0 \Leftrightarrow \sigma < \frac{1}{F(x, \xi)}, \forall x > 0$$

Οπότε

$$\Leftrightarrow \sigma < \frac{1}{\sup_x F(x; \xi)} = \frac{1}{1} = 1$$

Καταλήγοντας, η παράμετρος σ θα πρέπει να παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, 1)$. Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζεται ότι η συνάρτηση $G(x; \sigma, \xi)$ είναι αύξουσα για κάθε $x > 0$ ώστε η παράγωγος της να είναι θετική. Δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g(x; \sigma, \xi)$ της νέας οικογένειας κατανομών παίρνει πάντα θετικές τιμές.

Στην παρούσα εργασία, το μοντέλο το οποίο θα εξετάσουμε είναι αυτό στο οποίο η κατανομή του ύψους των ζημιών είναι η κατανομή Weibull, που ορίσαμε αναλυτικά στην Παράγραφο 3.1.1.

4.2 Η νέα οικογένεια κατανομών Weibull

Όπως ήδη αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο θα περιγράψουμε αναλυτικά την νέα οικογένεια κατανομών με βαριά ουρά στην ειδική περίπτωση της κατανομής Weibull. Αντικαθιστώντας λοιπόν στις σχέσεις (4.1.1) και (4.1.2) με την α.σ.κ και τη σ.π.π της Weibull (παράγραφος 3.1.1) προκύπτουν οι εξής σχέσεις για το μοντέλο (Arif et al., 2021):

$$G(x; \sigma, \alpha, \gamma) = \frac{e^{1 - \left(1 - \sigma(1 - e^{-\gamma x^\alpha})\right)^2} - 1}{e^{1 - \sigma^2} - 1}, \quad x \geq 0 \quad (4.2.1)$$

$$g(x; \sigma, \alpha, \gamma) = \frac{2\alpha\sigma\gamma x^{\alpha-1} e^{-\gamma x^\alpha} \left(1 - \sigma(1 - e^{-\gamma x^\alpha})\right) e^{1 - \left(1 - \sigma(1 - e^{-\gamma x^\alpha})\right)^2}}{e^{1 - \sigma^2} - 1}, \quad x \geq 0 \quad (4.2.2)$$

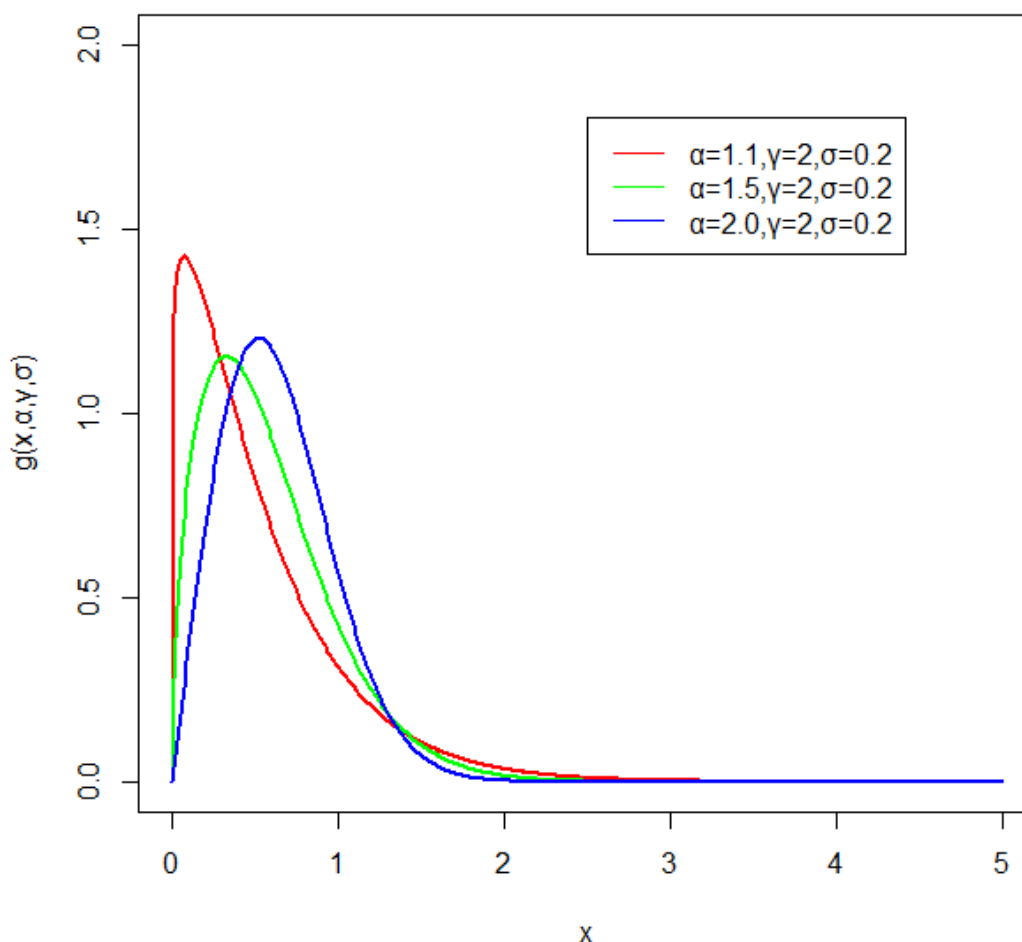
όπου για τις παραμέτρους της κατανομής ισχύει $\alpha, \gamma, \sigma > 0$

Μέσα από συγκεκριμένες γραφικές παραστάσεις θα παρουσιάσουμε το ρόλο που έχει η κάθε παράμετρος στο μοντέλο, και πως αυτή επηρεάζει την μορφή της καμπύλης. Συγκεκριμένα, ιδιαίτερη βάση θα δοθεί στην παράμετρο σ της νέας οικογένειας κατανομών όπου είναι υπεύθυνη για την βαριά ουρά της κατανομής. Η νέα κατανομή που ορίστηκε παραπάνω, έχει την ονομασία New Heavy Tailed Weibull (συντομογραφία NEHTW)

Όπως φαίνεται στο [Σχήμα 4.1](#) που ακολουθεί, έχοντας σταθερές τις παραμέτρους γ, σ και δίνοντας διάφορες τιμές στην παράμετρο α παρατηρούμε ότι αυτό που αλλάζει είναι η λοξότητα της κατανομής. Πιο συγκεκριμένα, φαίνεται ότι όσο πιο μικρή είναι η τιμή της παραμέτρου α τόσο πιο λοξή ή ασύμμετρη είναι η κατανομή. Ενώ, καθώς η τιμή της παραμέτρου α αυξάνει βλέπουμε ότι η καμπύλη της κατανομής τείνει να γίνει πιο συμμετρική. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η

παράμετρος α στο μοντέλο είναι υπεύθυνη για την συμμετρικότητα της κατανομής.

Διάγραμμα της ΝΕΗΤW για διάφορες τιμές του α

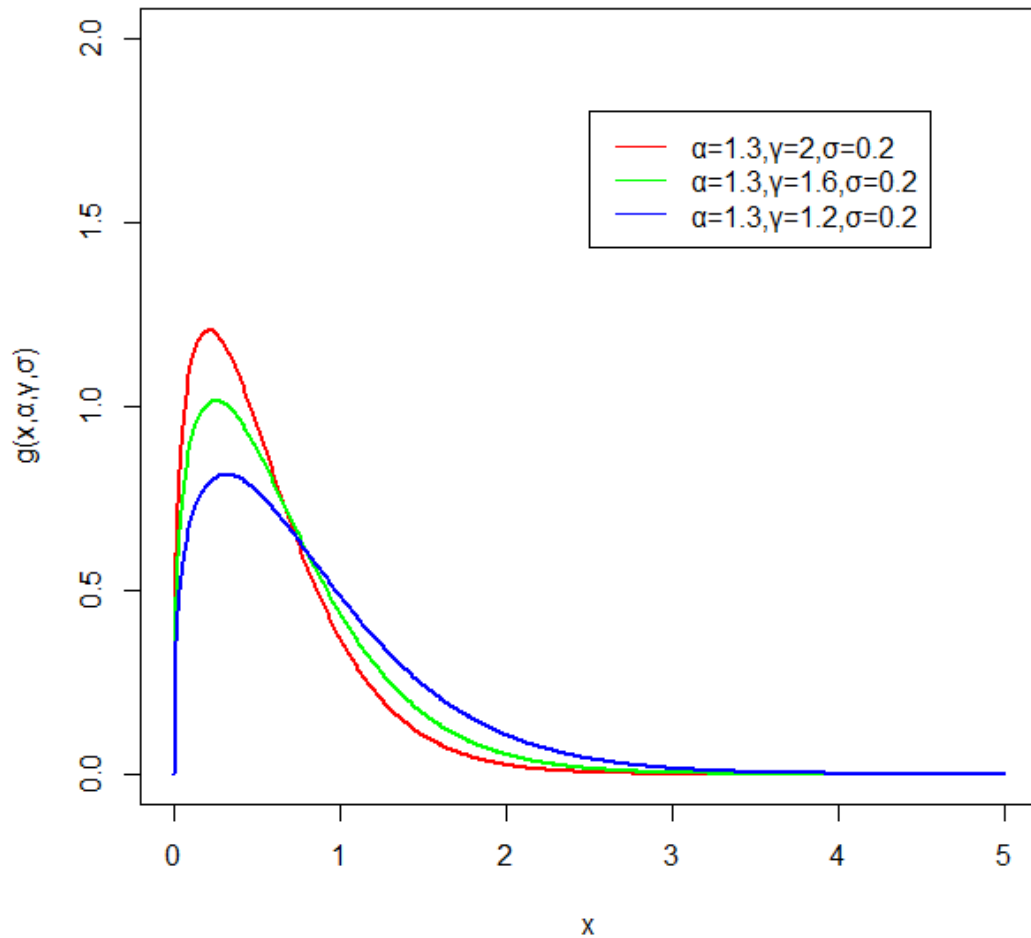


Σχήμα 4.1 : Η συμμετρικότητα της ΝΕΗΤW ανάλογα τις τιμές της παραμέτρου α

Με ακριβώς ανάλογη διαδικασία, διατηρώντας σταθερές αυτή την φορά τις παραμέτρους α , σ και δίνοντας διάφορες τιμές στην παράμετρο γ παρατηρούμε μέσα από το [Σχήμα 4.2](#) :

Καθώς η τιμή της παραμέτρου γ αυξάνει, αυξάνεται και η κυρτότητα της κατανομής. Ανάλογα η κυρτότητα της κατανομής μειώνεται καθώς η τιμή της παραμέτρου γ είναι πιο μικρή. Είναι άμεσα αντιληπτό λοιπόν, ότι η παράμετρος γ στο μοντέλο σχετίζεται με την κυρτότητα της κατανομής.

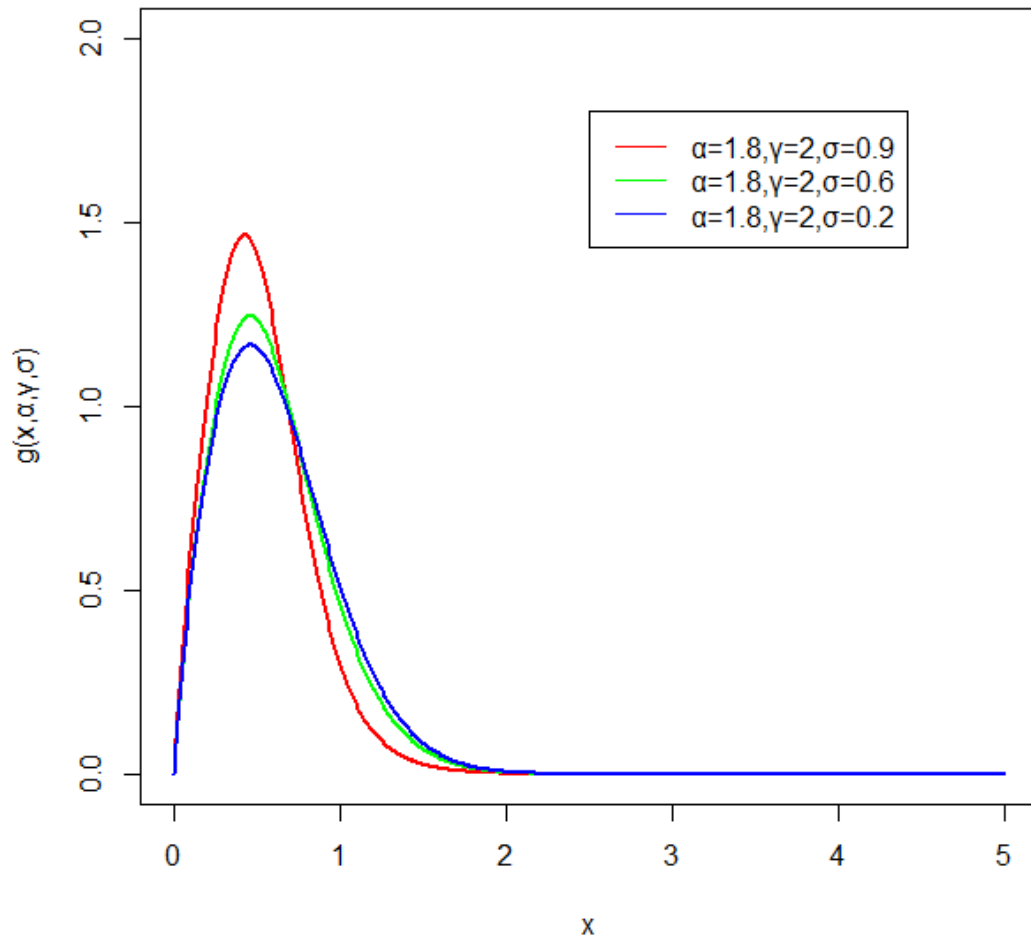
Διάγραμμα της ΝΕΗΤW για διάφορες τιμές του γ



Σχήμα 4.2 : Η κυρτότητα της ΝΕΗΤW ανάλογα τις τιμές της παραμέτρου γ

Η προσθήκη μιας επιπλέον παραμέτρου αυτή της σ προσδίδει μεγαλύτερη προσαρμοστικότητα στο μοντέλο καθιστώντας το κατάλληλο στην προσέγγιση των πάσης φύσεως οικονομικών δεδομένων. Όπως θα φανεί και μέσα από το [Σχήμα 4.3](#) που ακολουθεί, η νέα παράμετρος επηρεάζει κυρίως την ουρά της κατανομής. Συγκεκριμένα, φαίνεται άμεσα ότι όσο πιο μικρή είναι η τιμή της παραμέτρου σ τόσο πιο βαριά είναι η ουρά της κατανομής και αντίστροφα. Έτσι, στο [Σχήμα 4.3](#) η μπλέ καμπύλη με την μικρότερη τιμή του $\sigma=0,2$, φαίνεται ότι συγκλίνει πιο αργά στο 0 από τις υπόλοιπες καμπύλες του διαγράμματος.

Διάγραμμα της ΝΕΗΤW για διάφορες τιμές του σ



Σχήμα 4.3 : Η δεξιά ουρά της ΝΕΗΤW ανάλογα τις τιμές της παραμέτρου σ

4.3 Βασικές Στατιστικές ιδιότητες

Σε αυτή την παράγραφο, θα αναφέρουμε κάποιες βασικές ιδιότητες και χαρακτηριστικά της ΝΕΗΤW όπως για παράδειγμα τη συνάρτηση ποσοστιαίων σημείων, τις ροπές της και την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας.

4.3.1 Η Συνάρτηση ποσοστημορίων

Στην παράγραφο 4.1 ορίσαμε ως α.σ.κ της νέας οικογένειας κατανομών μέσω της Σχέσης (4.1.1) ως :

$$G(x; \sigma, \xi) = \frac{e^{1-(1-\sigma F(x;\xi))^2} - 1}{e^{1-\bar{\sigma}^2} - 1}, \quad \sigma > 0, x > 0, \xi \in R \text{ και } \bar{\sigma} = 1 - \sigma$$

Για να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση ποσοστιαίων σημείων για τη ΝΕΗΤW θα λύσουμε την ισότητα $G(x; \sigma, \xi) = u$ ως προς x . Έχουμε διαδοχικά :

$$\begin{aligned} \frac{e^{1-(1-\sigma F(x;\xi))^2} - 1}{e^{1-\bar{\sigma}^2} - 1} = u &\Leftrightarrow e^{1-(1-\sigma F(x;\xi))^2} - 1 = u(e^{1-\bar{\sigma}^2} - 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{1-(1-\sigma F(x;\xi))^2} = u(e^{1-\bar{\sigma}^2} - 1) + 1 \end{aligned}$$

και λογαριθμίζοντας προκύπτει :

$$\Leftrightarrow 1 - (1 - \sigma F(x; \xi))^2 = \log [u(e^{1-\bar{\sigma}^2} - 1) + 1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sigma F(x; \xi))^2 = 1 - \log [u(e^{1-\bar{\sigma}^2} - 1) + 1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sigma F(x; \xi) = \sqrt{1 - \log [u(e^{1-\bar{\sigma}^2} - 1) + 1]} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(x; \xi) = \frac{1 - \sqrt{1 - \log [u(e^{1-\bar{\sigma}^2} - 1) + 1]}}{\sigma}$$

οπότε βρίσκουμε

$$\Leftrightarrow x = F^{-1} \left\{ \frac{1 - \sqrt{1 - \log [1 + u(e^{1-\bar{\sigma}^2} - 1)]}}{\sigma} \right\}.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι, η συνάρτηση ποσοστιαίων σημείων (Arif et al., 2021). για την ΝΕΗΤW κατανομή ορίζεται από την σχέση :

$$Q(u) = F^{-1} \left\{ \frac{1 - \sqrt{1 - \log [1 + u(e^{1-\bar{\sigma}^2} - 1)]}}{\sigma} \right\}, \quad u \in (0, 1) \quad (4.3.1)$$

όπου η $F^{-1}(x)$ είναι η συνάρτηση ποσοστημορίων της Weibull.

Για $u=0.25$, $u=0.5$ και $u=0.75$ υπολογίζονται το 1^ο, 2^ο (διάμεσος) και 3^ο τεταρτημόριο. Η συνάρτηση ποσοστημορίων μας επιστρέφει την τιμή της τ.μ X της κατανομής, για την οποία το $p\%$ των παρατηρήσεων είναι μικρότερες ή ίσες της X . Επιπλέον, μια ιδιαίτερα σημαντική χρησιμότητα της συνάρτησης ποσοστημορίων είναι ότι βοηθά στη μέτρηση της λοξότητας και της κυρτότητας μιας κατανομής. Η Ασυμμετρία και η Κυρτότητα για τη ΝΕΗΤW υπολογίζονται εύκολα από τις σχέσεις που ακολουθούν :

$$\text{Ασυμμετρία} = \frac{q(\frac{1}{4}) + q(\frac{3}{4}) - 2q(\frac{1}{2})}{q(\frac{3}{4}) - q(\frac{1}{4})}$$

$$\text{Κυρτότητα} = \frac{q(\frac{7}{8}) - q(\frac{5}{8}) + q(\frac{3}{8}) - q(\frac{1}{8})}{q(\frac{6}{8}) - q(\frac{2}{8})}$$

4.3.2 Οι θεωρητικές Ροπές της ΝΕΗΤW

Ας υποθέσουμε ότι μια τ.μ X έχει την κατανομή της ΝΕΗΤW με παραμέτρους α, γ, σ . Τότε η σ.π.π της κατανομής είναι αυτή της σχέσης (4.1.2) και οι r θεωρητικές τις ροπές υπολογίζονται βάση της σχέσης :

$$\mu_r = E(X^r) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu_r = \int_0^{\infty} x^r \frac{2\sigma f(x; \xi)(1 - \sigma F(x; \xi))e^{1 - (1 - \sigma F(x; \xi))^2}}{e^{1 - \sigma^2} - 1} dx \quad (4.3.2)$$

Είναι γνωστό το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά της e^x ως :

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

και αν στη θέση του x αντικαταστήσουμε με $1 - (1 - \sigma F(x; \xi))^2$ προκύπτει :

$$e^{1 - (1 - \sigma F(x; \xi))^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1 - (1 - \sigma F(x; \xi))^2)^i}{i!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{1 - (1 - \sigma F(x; \xi))^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \frac{(-1)^j}{i!} \binom{i}{j} (1 - \sigma F(x; \xi))^{2j}.$$

Επομένως

$$e^{1 - (1 - \sigma F(x; \xi))^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{2j} \frac{(-1)^{j+k} \sigma^k}{i!} \binom{i}{j} \binom{2j}{k} F(x; \xi)^k. \quad (4.3.3)$$

Κάνοντας αντικατάσταση την (4.3.3) στην (4.3.2) και εναλλάσσοντας την άθροιση με την ολοκλήρωση προκύπτει η ακόλουθη σχέση για την ροπή r τάξης της ΝΕΗΤW :

$$\mu_r = \eta_{i,j,k} \int_0^{\infty} x^r f(x; \xi) F(x; \xi)^k dx - \sigma \eta_{i,j,k} \int_0^{\infty} x^r f(x; \xi) F(x; \xi)^{k+1} dx \quad (4.3.4)$$

όπου το $\eta_{i,j,k}$ δίνεται από τη σχέση :

$$\eta_{i,j,k} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{2j} \frac{2(-1)^{j+k} \sigma^{k+1}}{i!(e^{1-\sigma^2}-1)} \binom{i}{j} \binom{2j}{k}.$$

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση για μια κατανομή υπολογίζεται ως :

$$M_x(t) = E(e^{tX}) = E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i X^i}{i!}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} E\left(\frac{(tX)^i}{i!}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} E(X^i)$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$M_x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \mu_i \tag{4.3.5}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.3.4) στην (4.3.5) προκύπτει ο τύπος της ροπογεννήτριας συνάρτησης για τη ΝΕΗΤW κατανομή.

4.3.2 Η Εκτίμηση παραμέτρων της ΝΕΗΤW

Σε αυτή την υποπαράγραφο θα μελετήσουμε την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου της ΝΕΗΤW με την χρήση της πιο διαδεδομένης μεθόδου εκτιμητικής στη στατιστική, αυτή της Μεγίστης Πιθανοφάνειας. Σε ένα τυχαίο δείγμα είναι αρκετά σημαντικό να μπορούμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους της κατανομής την οποία έχουμε υποθέσει ότι το χαρακτηρίζει. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να περιγράψουμε και να εκτιμήσουμε διάφορα χαρακτηριστικά του υπό μελέτη πληθυσμού.

Έστω $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ένα δείγμα ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών από την κατανομή της σχέσης (4.2.2). Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ η οποία είναι συνάρτηση των παραμέτρων σ και ξ , ονομάζεται συνάρτηση πιθανοφάνειας και δίνεται από τη σχέση

$$L(x_i; \sigma, \xi) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \sigma, \xi) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma, \xi).$$

Στην περίπτωση της ΝΕΗΤW παίρνουμε

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \sigma, \xi) = \frac{(2\sigma)^n \prod_{i=1}^n f(x_i; \xi) \prod_{i=1}^n (1 - \sigma F(x_i; \xi)) e^{n - \sum_{i=1}^n (1 - \sigma F(x_i; \xi))^2}}{(e^{1-\sigma^2} - 1)^n}$$

Και ο λογάριθμος της πιθανοφάνειας $L(x_i; \sigma, \xi)$ προκύπτει ίσος με

$$\mathcal{L}(x_i; \sigma, \xi) = v \log 2 + n \log \sigma + \sum_{i=1}^v \log f(x_i; \xi) + \sum_{i=1}^v \log(1 - \sigma F(x_i; \xi)) + v - \sum_{i=1}^v (1 - \sigma F(x_i; \xi))^2 - v \log(e^{1 - \bar{\sigma}^2} - 1) \quad (4.3.6)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (4.3.6) ως προς τις παραμέτρους σ και ξ (Arif et al., 2021). παίρνουμε :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} = \frac{v}{\sigma} - \sum_{i=1}^v \frac{F(x_i; \xi)}{1 - \sigma F(x_i; \xi)} + \sum_{i=1}^v 2F(x_i; \xi)(1 - \sigma F(x_i; \xi)) - \frac{2v\bar{\sigma}}{e^{1 - \bar{\sigma}^2} - 1} e^{1 - \bar{\sigma}^2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^v \frac{\partial f(x_i; \xi) / \partial \xi}{f(x_i; \xi)} - \sum_{i=1}^v \frac{\sigma \partial F(x_i; \xi) / \partial \xi}{1 - \sigma F(x_i; \xi)} + \sum_{i=1}^v 2\sigma(1 - \sigma F(x_i; \xi)) \frac{\partial}{\partial \xi} F(x_i; \sigma, \xi)$$

Επιλύοντας ως προς τις παραμέτρους σ και ξ το σύστημα των εξισώσεων

- $\frac{\partial \mathcal{L}(x; \sigma, \xi)}{\partial \sigma} = 0$
- $\frac{\partial \mathcal{L}(x; \sigma, \xi)}{\partial \xi} = 0$

επιδιώκουμε να βρούμε τις τιμές των παραμέτρων $\hat{\sigma}$ και $\hat{\xi}$ που μεγιστοποιούν την (4.3.6).

Κεφάλαιο 5

Μελέτη Προσομοίωσης Monte Carlo για τη ΝΕΗΤW

Στο παρόν Κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο προσομοίωσης Monte Carlo για την παραγωγή τυχαίων δειγμάτων από τη ΝΕΗΤW κατανομή. Στη συνέχεια θα εκτιμηθούν αλλά και θα αξιολογηθούν ως προς την απόδοση τους οι εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας του μοντέλου, όπως αυτοί ορίστηκαν στο Κεφάλαιο 4. Τέλος, θα εκτελεστεί αριθμητική εφαρμογή με τον υπολογισμό των αναλογιστικών μέτρων κινδύνου VaR και TVaR. (Μπούτσικας, 2002).

5.1 Εκτιμητές Μεγίστης Πιθανοφάνειας

Σε αυτή την παράγραφο, θα αξιολογήσουμε τη συμπεριφορά των εκτιμητών μεγίστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων $\hat{\alpha}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\sigma}$, της ΝΕΗΤW κατανομής την οποία ορίσαμε αναλυτικά στην Παράγραφο 4.2. Η μελέτη προσομοίωσης διεξάγεται μέσω του στατιστικού πακέτου R. Τα βήματα που ακολουθήθηκαν ώστε να ολοκληρωθεί η προσομοίωση ήταν τα εξής (Ahmad et al., 2020):

- Παραγωγή 1000 τυχαίων δειγμάτων μεγέθους $n=25, 50, 75, \dots, 1000$ από την κατανομή της ΝΕΗΤW. Η παραγωγή του τυχαίου δείγματος από την συγκεκριμένη κατανομή έγινε με την μέθοδο της αντιστροφής και συγκεκριμένα κάνοντας χρήση της συνάρτησης ποσοστιαίων σημείων της ΝΕΗΤW που ορίσαμε στη σχέση (4.3.1).
- Υπολογισμός των εκτιμητριών μεγίστης πιθανοφάνειας για τις παραμέτρους του μοντέλου.
- Υπολογισμός του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος (MSE) και της μεροληψίας (Bias) μέσω των τύπων :

$$MSE(\theta) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (\hat{\theta}_i - \theta)^2$$

$$Bias(\theta) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (\hat{\theta}_i - \theta)$$

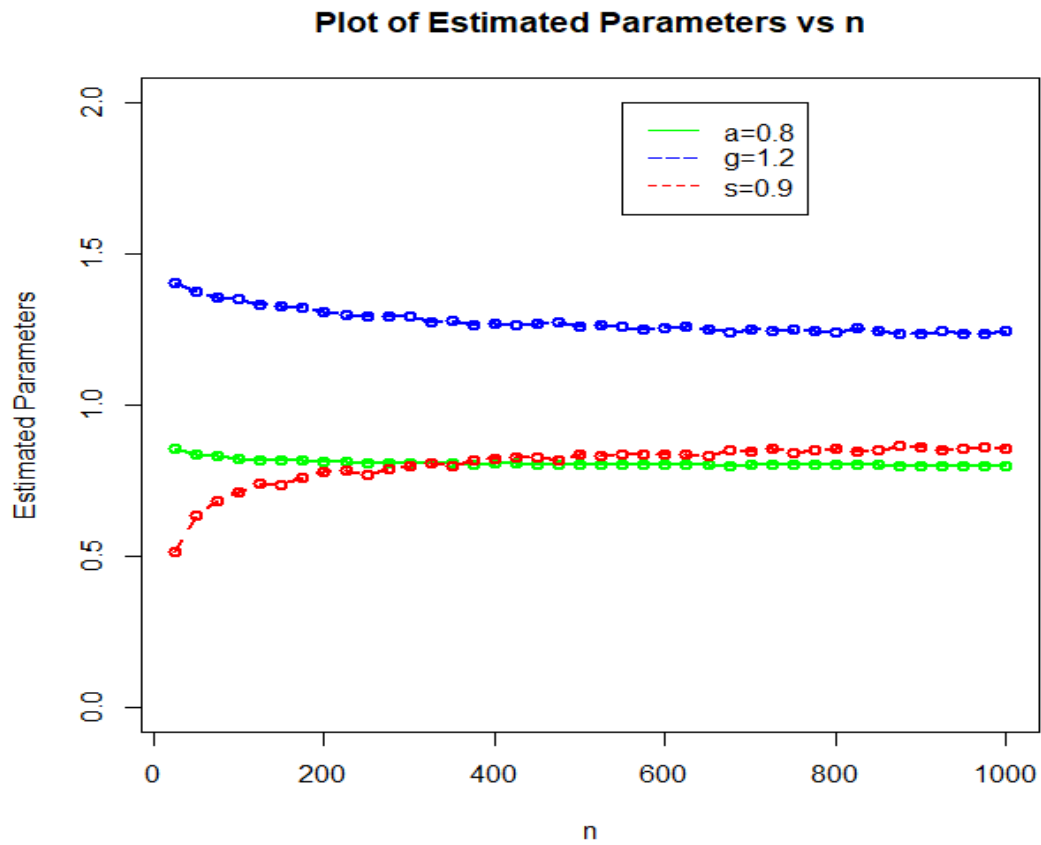
$$Absolute\ Bias(\theta) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} |\hat{\theta}_i - \theta|$$

όπου $\vec{\theta} = (\alpha, \gamma, \sigma)$ και $\hat{\theta}$ η εκτίμηση αυτών.

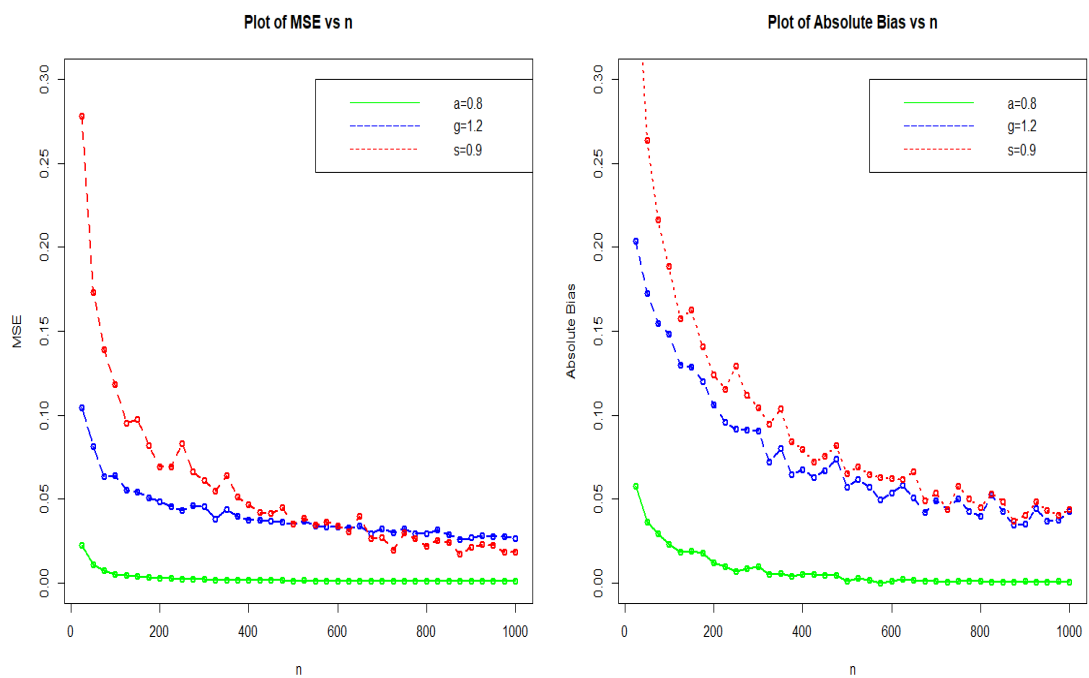
Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για 2 διαφορετικά σεντ τιμών των παραμέτρων παρουσιάζονται στους [Πίνακες 5.1](#) & [5.2](#). Τα αριθμητικά αυτά αποτελέσματα γίνονται πιο εύκολα κατανοητά μέσα από τα [Σχήματα 5.1-5.4](#) που ακολουθούν.

n	Παράμετροι	<i>Set 1: $\alpha=0.8, \gamma=1.2, \sigma=0.9$</i>		
		MLE	MSE's	Biases
25	α	0.8874522	0.0291557	0.0874522
	γ	1.5430480	0.2293833	0.340476
	σ	0.4303632	0.3388540	0.4696368
50	α	0.8518737	0.0139224	0.0518737
	γ	1.5206380	0.1873998	0.3206379
	σ	0.4842259	0.2962240	0.4157741
100	α	0.8376937	0.0068555	0.0376937
	γ	1.4568910	0.1328370	0.2568912
	σ	0.5616878	0.2364197	0.3383122
300	α	0.8166218	0.0021739	0.0166218
	γ	1.3558510	0.0718641	0.1558508
	σ	0.6950048	0.1346416	0.2049952
500	α	0.8114526	0.0014829	0.0114526
	γ	1.3257930	0.0581581	0.1257925
	σ	0.7502175	0.0869423	0.1497825
700	α	0.8052230	0.0012149	0.0052230
	γ	1.2801430	0.0394487	0.0801435
	σ	0.8038263	0.0539280	0.0961737
850	α	0.8015132	0.0009762	0.0015132
	γ	1.2544800	0.0321343	0.0544795
	σ	0.8373765	0.0328603	0.0626235
1000	α	0.8016258	0.0009268	0.0016258
	γ	1.2568130	0.0323327	0.068131
	σ	0.8386550	0.0303901	0.0613450

Πίνακας 5.1 : Αποτελέσματα της προσομοίωσης για τη NEHTW κατανομή με παραμέτρους $\alpha=0.8, \gamma=1.2$ και $\sigma=0.9$



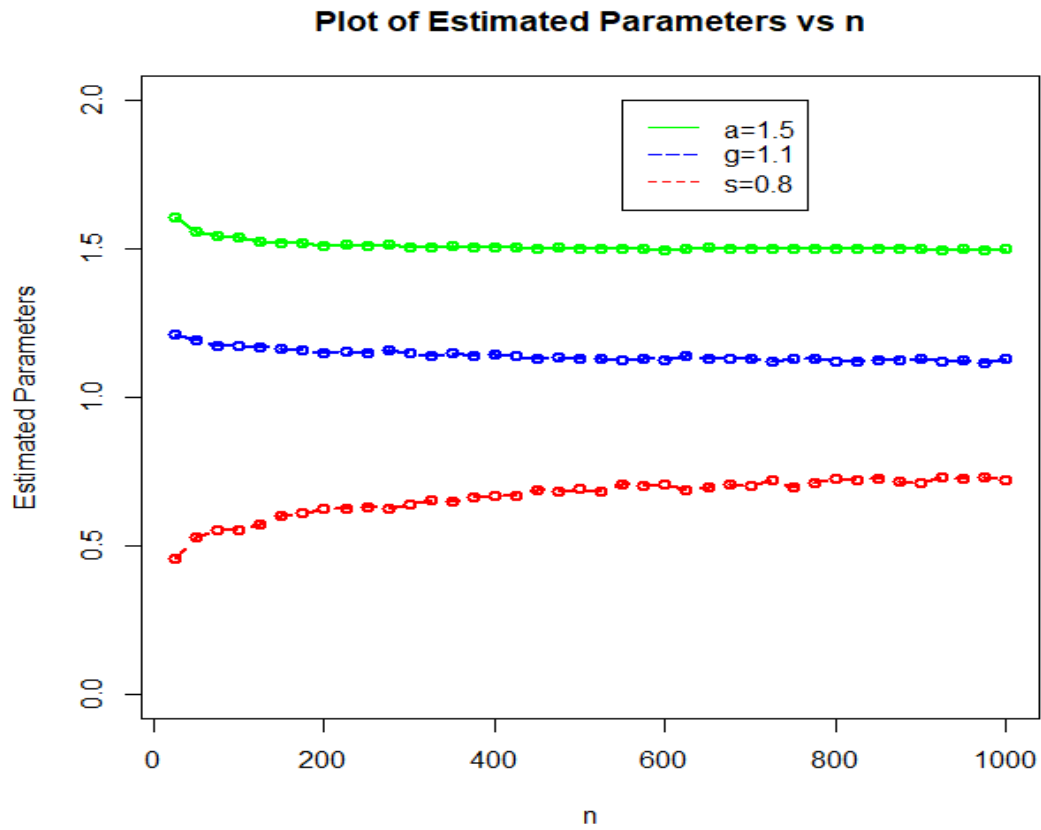
Σχήμα 5.1 : Γράφημα των MLE'S για τη NEHTW κατανομή με $\alpha=0.8$, $\gamma=1.2$ και $\sigma=0.9$



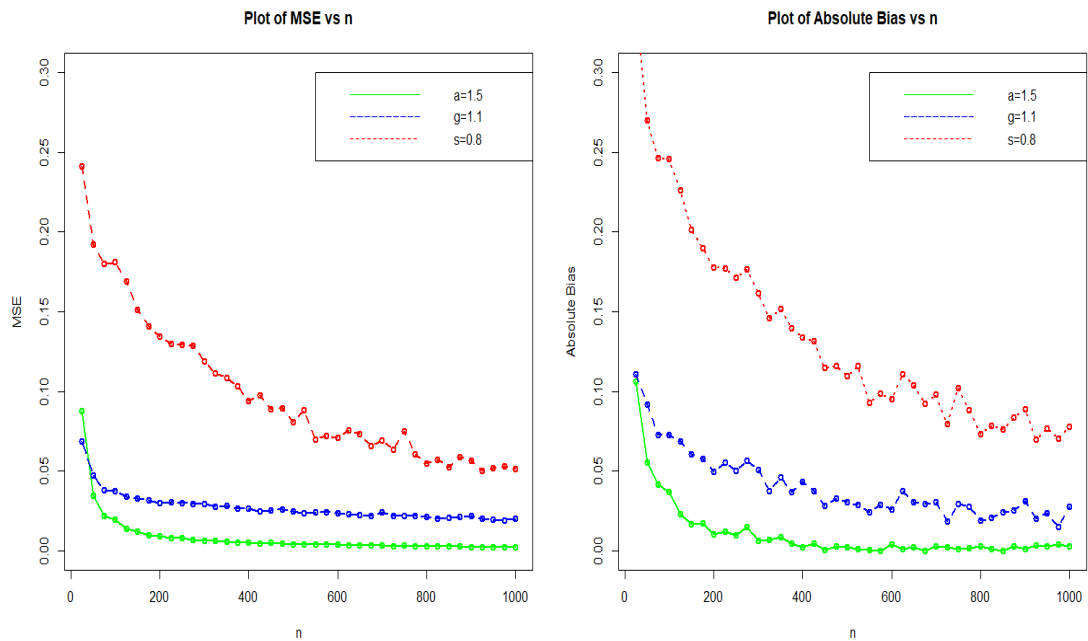
Σχήμα 5.2 : Γραφήματα των MSE'S και Absolute Biases για τη NEHTW κατανομή με $\alpha=0.8$, $\gamma=1.2$ και $\sigma=0.9$

<i>Set 2: $\alpha=1.5, \gamma=1.1, \sigma=0.8$</i>				
n	Παράμετροι	MLE	MSE's	Biases
25	α	1.5823190	0.0726762	0.0823194
	γ	1.1902020	0.0580442	0.0902023
	σ	0.4570360	0.2399267	-0.342964
50	α	1.5646330	0.0396978	0.0646328
	γ	1.1921150	0.0464433	0.0921146
	σ	0.4851866	0.2259178	-0.3148134
100	α	1.5343520	0.0191517	0.034352
	γ	1.1771920	0.0361629	0.0771924
	σ	0.5449793	0.1912297	-0.2550207
300	α	1.5068180	0.0056489	0.0068183
	γ	1.1442090	0.0263298	0.0442092
	σ	0.6443256	0.1155965	-0.1556744
500	α	1.4980390	0.004341	-0.0019605
	γ	1.1278300	0.0242345	0.02783
	σ	0.6900517	0.0809076	-0.1099483
700	α	1.4988460	0.0029094	-0.0011545
	γ	1.1280480	0.0218922	0.028048
	σ	0.7042271	0.0682404	-0.0957729
850	α	1.4969660	0.0026326	-0.0030339
	γ	1.1233100	0.0206163	0.0233102
	σ	0.7164813	0.0587733	-0.0835187
1000	α	1.4963830	0.0022914	-0.0036165
	γ	1.1256570	0.0200314	0.0256575
	σ	0.7257086	0.0504988	-0.0742914

Πίνακας 5.2 : Αποτελέσματα της προσομοίωσης για τη ΝΕΗΤW κατανομή με παραμέτρους $\alpha=1.5, \gamma=1.1$ και $\sigma=0.8$



Σχήμα 5.3 : Γράφημα των MLE'S για τη NEHTW κατανομή με $\alpha=1.5$, $\gamma=1.1$ και $\sigma=0.8$



Σχήμα 5.4 : Γραφήματα των MSE'S και Absolute Biases για τη NEHTW κατανομή με $\alpha=1.5$, $\gamma=1.1$ και $\sigma=0.8$

Από την ανάλυση που προηγήθηκε μπορούμε να εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα :

- Οι εκτιμητές τείνουν να σταθεροποιηθούν καθώς το μέγεθος του δείγματος n αυξάνει, και μάλιστα σε πολύ κοντινές τιμές με τις πραγματικές.
- Τα εκτιμημένα MSE's συγκλίνουν στο 0 καθώς το μέγεθος του δείγματος n αυξάνει.
- Τα απόλυτα Biases ελαττώνονται καθώς το n αυξάνει

Θα μπορούσαμε να πούμε λοιπόν ότι οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων α , γ , σ , όπως αυτοί ορίστηκαν στη σχέση (4.3.6) συμπεριφέρονται αρκετά καλά, με καλύτερη τη συμπεριφορά του εκτιμητή του α και χειρότερη αυτή του σ .

5.2 Υπολογισμός Αναλογιστικών Μέτρων Κινδύνου

Μια από τις πιο σημαντικές προκλήσεις που έχουν να αντιμετωπίσουν οι αναλογιστές και οι οικονομικοί αναλυτές είναι αυτή της ποσοτικοποίησης του ρίσκου στο οποίο είναι εκτεθειμένο ένα χαρτοφυλάκιο, συνεπώς και η ίδια η εταιρεία. Ο κίνδυνος για ένα χαρτοφυλάκιο μεταβάλλεται αρκετά εύκολα εξαιτίας των ραγδαίων εξελίξεων των τελευταίων ετών (πανδημίες, πόλεμοι, φυσικές καταστροφές). Συνεπώς, η σωστή εκτίμηση και ποσοτικοποίηση των μέτρων κινδύνου χρήζει ιδιαίτερης σημασίας.

Στις παραγράφους [3.2.1](#) & [3.2.2](#) αναλύσαμε γενικά τις έννοιες των VaR και TVaR. Σε αυτή την παράγραφο, θα ορίσουμε συγκεκριμένα αυτές τις 2 ποσότητες για το μοντέλο της ΝΕΗΤW και εν συνεχεία θα εκτελέσουμε αριθμητική μελέτη για τον υπολογισμό τους.

5.2.1 VaR ή Αξία σε Κίνδυνο για την ΝΕΗΤW

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει στην παράγραφο [3.2.1](#) το VaR σε $p\%$ επίπεδο εμπιστοσύνης ορίζεται ως εκείνο το ποσό το οποίο απαιτείται να διατηρεί στα ταμεία της μια ασφαλιστική ώστε για παράδειγμα εάν έρθει μια αρκετά μεγάλη ζημιά από την κατανομή της ΝΕΗΤW αυτή θα είναι μικρότερη ή ίση του ποσού με πιθανότητα p . Το VaR για ένα χαρτοφυλάκιο ζημιών μιας ασφαλιστικής, όπου η τ.μ X παριστά ζημιά με $X \sim \text{NEHTW}$, αντιστοιχεί στο q -ποσοστιαίο σημείο της κατανομής.

Στην παράγραφο [4.3.1](#) ορίσαμε αναλυτικά τη συνάρτηση ποσοστιαίου σημείου για τη ΝΕΗΤW κατανομή μέσα από τη σχέση [\(4.3.1\)](#) ως :

$$\text{VaR}_p = F^{-1} \left\{ \frac{1 - \sqrt{1 - \log[1 + p(e^{1-\sigma^2} - 1)]}}{\sigma} \right\} \quad (4.3.1)$$

Η συνάρτηση $F^{-1}(x)$ της σχέσης (4.3.1) στο μοντέλο της ΝΕΗΤW είναι η συνάρτηση ποσοστημορίων της κατανομής Weibull που υπολογίζεται ως εξής :

Έστω η κατανομή Weibull με παραμέτρους α , γ και α.σ.κ που δίνεται από τη σχέση :

$$F(x) = 1 - e^{-\gamma x^\alpha} \quad (5.2.1)$$

Έστω ένα q τέτοιο ώστε να ισχύει $0 < q < 1$. Θέτω :

$$F(x) = q \Leftrightarrow 1 - e^{-\gamma x^\alpha} = q \Leftrightarrow e^{-\gamma x^\alpha} = 1 - q$$

και λογαριθμίζοντας και τα 2 μέλη προκύπτει :

$$-\gamma x^\alpha = \log(1 - q) \Leftrightarrow x^\alpha = \frac{\log(1 - q)}{-\gamma}$$

αφού υψώσουμε και τα 2 μέλη εις την $\frac{1}{\alpha}$ προκύπτει :

$$x = F^{-1}(q) = \left[-\frac{\log(1 - q)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (5.2.2)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (5.2.2) στην [\(4.3.1\)](#) προκύπτει η συνάρτηση ποσοστιαίων σημείων της ΝΕΗΤW όπως φαίνεται στην παρακάτω σχέση :

$$\text{VaR}_{p\%} = \left\{ \frac{\log \sigma - \log \left[\sigma - 1 + \sqrt{1 - \log[1 + p(e^{1-\sigma^2} - 1)]} \right]}{\gamma} \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \quad (5.2.3)$$

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, για τον υπολογισμό του VaR της ΝΕΗΤW χρησιμοποιείται η συνάρτηση ποσοστιαίων σημείων. Βάσει της σχέσης (5.2.3) πραγματοποιούνται όλοι οι αριθμητικοί υπολογισμοί που ακολουθούν σε αυτό το

κεφάλαιο. Τα επίπεδα πάνω στα οποία συνηθίζεται να υπολογίζεται το VaR είναι 90%, 95% ή 99%.

5.2.2 TVaR ή Απομείωση Κινδύνου

Ανάλογα με το VaR, στην παράγραφο 3.2.2 ορίσαμε το Tail Value at Risk ή Expected Shortfall. Το TVaR αντιστοιχεί στο ποσό εκείνο που απαιτείται να διαθέτει η ασφαλιστική εταιρεία ώστε να συνεχίσει την λειτουργία της (ή ενός χαρτοφυλακίου) εάν επέλθει ένας κίνδυνος μεγαλύτερος του $VaR_p(X)$ με πιθανότητα $q=1-p$. Είναι δηλαδή, οι αναμενόμενες απώλειες – ζημιές που είναι μεγαλύτερες ή ίσες από το πόσο του VaR.

Βάσει του ορισμού λοιπόν, εάν υποθέσουμε ότι X η τ.μ που αναπαριστά τα ύψη ζημιών, η μαθηματική σχέση υπολογισμού του TVaR δίνεται από τη σχέση :

$$TVaR_p = E(X|X > VaR_p) = \frac{\int_{VaR_p}^{\infty} x f(x) dx}{q} \quad (5.2.4)$$

Όπου, το VaR υπολογίζεται από την σχέση (5.2.3) ενώ η $f(x)$ είναι η σ.π.π της ΝΕΗΤW κατανομής όπως αυτή ορίσθηκε μέσα από τη σχέση (4.2.2).

5.2.3 Αριθμητικός υπολογισμός Μέτρων Κινδύνου

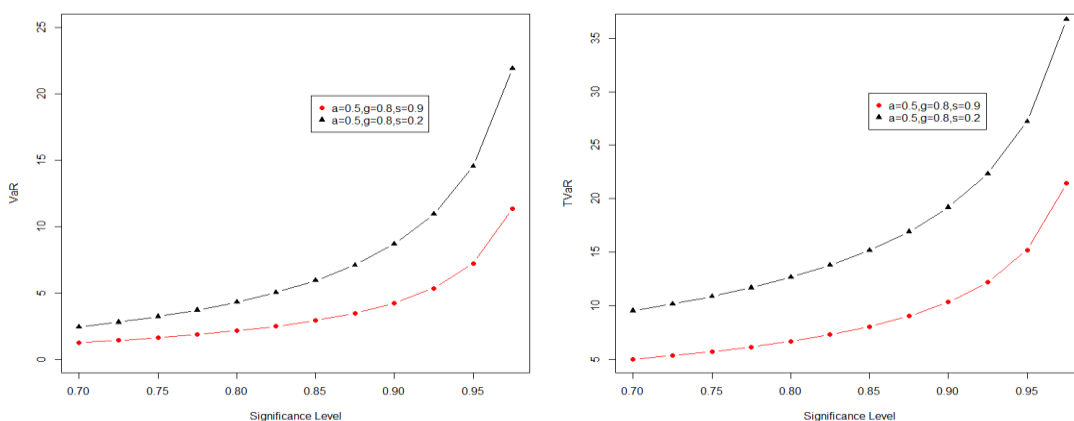
Στην παράγραφο αυτή, θα εκτελέσουμε αριθμητική μελέτη για τον υπολογισμό των VaR και TVaR. Για τον υπολογισμό τους θα κάνουμε χρήση της παραδοσιακής δι-παραμετρικής Weibull με α.σ.κ τη σχέση (5.2.1) και της ΝΕΗΤW οικογένειας κατανομών για 2 διαφορετικούς συνδυασμούς παραμέτρων α, γ, σ . Τα βήματα που θα πραγματοποιηθούν για τη συγκεκριμένη μελέτη είναι τα εξής (Arif et al., 2021). :

- Παράγονται τυχαία δείγματα μεγέθους 100 και 150 από την Weibull και από τη ΝΕΗΤW.
- Από αυτά τα δείγματα εκτιμώνται οι παράμετροι της Weibull και ΝΕΗΤW με τη μέθοδο Μεγίστης Πιθανοφάνειας.
- Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται 1000 φορές, ώστε να έχουμε πιο ασφαλή συμπεράσματα για τον αριθμητικό υπολογισμό των VaR και TVaR και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα μεταξύ των 2 κατανομών.

Στον [Πίνακα 5.3](#) που ακολουθεί παρουσιάζονται οι αριθμητικές τιμές των VaR και TVaR για την NEHTW για διάφορα επίπεδα εμπιστοσύνης και τιμές της παραμέτρου σ . Παράλληλα, στο [Σχήμα 5.5](#) πιο κάτω λαμβάνουμε μια καλύτερη εικόνα αυτών των τιμών.

Distribution	Parameter	Significance level	VaR	TVaR
NEHTW	$\alpha=0.5$ $\gamma=0.8$ $\sigma=0.9$	0.7	1.251	4.989
		0.725	1.42	5.321
		0.75	1.618	5.702
		0.775	1.851	6.143
		0.8	2.132	6.662
		0.825	2.475	7.286
		0.85	2.905	8.053
		0.875	3.465	9.03
		0.9	4.229	10.331
		0.925	5.352	12.191
		0.95	7.228	15.188
		0.975	11.356	21.425
NEHTW	$\alpha=0.5$ $\gamma=0.8$ $\sigma=0.2$	0.7	2.437	9.518
		0.725	2.793	10.146
		0.75	3.211	10.861
		0.775	3.705	11.685
		0.8	4.299	12.646
		0.825	5.025	13.788
		0.85	5.932	15.176
		0.875	7.101	16.914
		0.9	8.672	19.181
		0.925	10.927	22.333
		0.95	14.543	27.214
		0.975	21.912	36.747

Πίνακας 5.3: Αποτελέσματα Προσομοίωσης VaR και TVaR, για την NEHTW με $n=150$



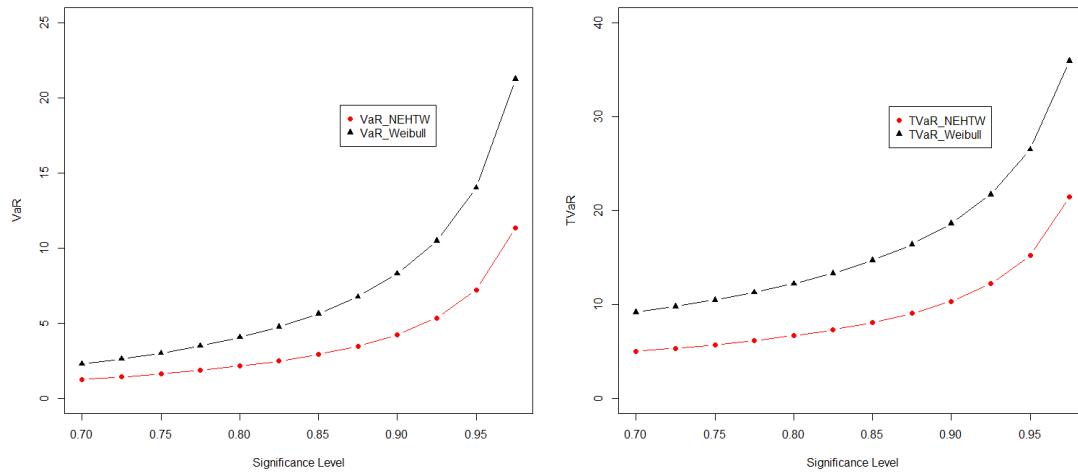
Σχήμα 5.5 : Γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων του Πίνακα 3.

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί η σημασία της παραμέτρου σ για το μοντέλο μας. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, η παράμετρος σ είναι αυτή που καθορίζει το πόσο βαριά είναι η ουρά της ΝΕΗΤW. Πιο συγκεκριμένα όσο πιο μικρή είναι η τιμή της παραμέτρου σ τόσο πιο βαριά η ουρά της κατανομής, και αντίστροφα. Αυτό επιβεβαιώνεται άμεσα από τις τιμές του [Πίνακα 5.3](#), αλλά και οπτικός στο [Σχήμα 5.5](#). Αφού, για τις ίδιες τιμές των επιπέδων εμπιστοσύνης και των παραμέτρων α , γ παρουσιάζονται σημαντικά μεγαλύτερες τιμές των VaR και TVaR, εκεί που παρατηρείται μικρότερη τιμή για το σ .

Για μια στατιστική κατανομή, όσο πιο βαριά δεξιά ουρά διαθέτει τόσο πιο υψηλές είναι οι αριθμητικές τιμές των μέτρων κινδύνου αυτής. Βάσει αυτού του κριτηρίου, γίνεται μια σύγκριση της δεξιάς ουράς μεταξύ των Weibull και ΝΕΗΤW. Η σύγκριση πραγματοποιείται μέσω του αριθμητικού υπολογισμού των Var και TVaR για 2 διαφορετικές τιμές της παραμέτρου σ , και τα αποτελέσματα αυτής παρουσιάζονται στους [Πίνακες 5.4](#) και [5.5](#) που ακολουθούν.

Distribution	Parameter	Significance level	VaR	TVaR
<i>Weibull</i>	$\alpha=0.5$ $\gamma=0.8$	0.7	2.265	9.152
		0.725	2.604	9.763
		0.75	3.003	10.46
		0.775	3.477	11.263
		0.8	4.047	12.202
		0.825	4.747	13.319
		0.85	5.624	14.677
		0.875	6.756	16.38
		0.9	8.284	18.605
		0.925	10.484	21.703
		0.95	14.023	26.509
	0.975	21.262	35.915	
<i>NEHTW</i>	$\alpha=0.5$ $\gamma=0.8$	0.7	1.251	4.989
		0.725	1.42	5.321
	$\sigma=0.9$	0.75	1.618	5.702
		0.775	1.851	6.143
		0.8	2.132	6.662
		0.825	2.475	7.286
		0.85	2.905	8.053
		0.875	3.465	9.03
		0.9	4.229	10.331
		0.925	5.352	12.191
0.95	7.228	15.188		
0.975	11.356	21.425		

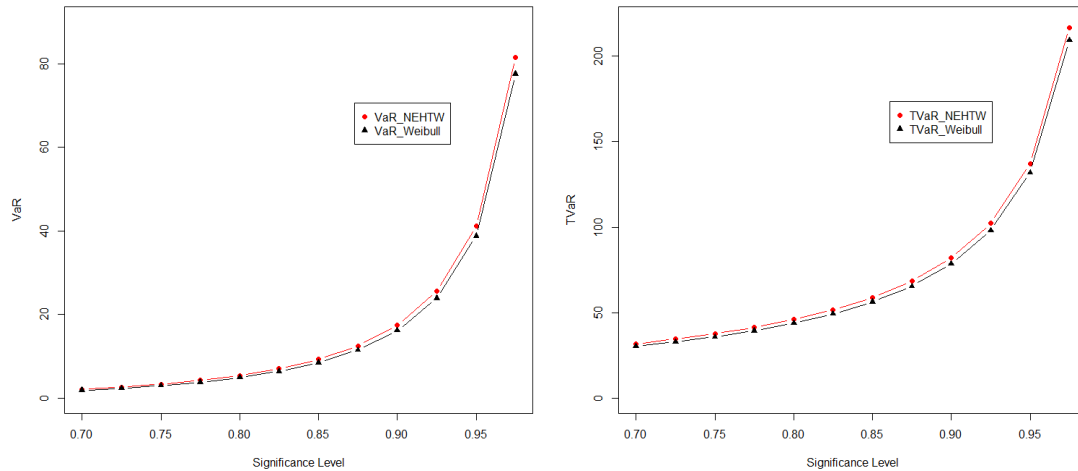
[Πίνακας 5.4](#): Σύγκριση των VaR και TvaR με παραμέτρους $\alpha=0.5$, $\gamma=0.8$, $\sigma=0.9$



Σχήμα 5.6 : Γραφική αναπαράσταση των τιμών του Πίνακα 5.4 για $\alpha=0.5$, $\gamma=0.8$, $\sigma=0.9$

Distribution	Parameter	Significance level	VaR	TVaR
<i>Weibull</i>	$\alpha=0.3$ $\gamma=1$	0.7	1.857	30.21
		0.725	2.343	32.766
		0.75	2.971	35.778
		0.775	3.792	39.38
		0.8	4.886	43.764
		0.825	6.372	49.217
		0.85	8.452	56.195
		0.875	11.477	65.461
		0.9	16.121	78.421
		0.925	23.868	98.017
		0.95	38.756	131.829
		0.975	77.562	209.262
<i>NEHTW</i>	$\alpha=0.3$ $\gamma=1$ $\sigma=0.2$	0.7	2.098	31.782
		0.725	2.633	34.457
		0.75	3.321	37.607
		0.775	4.217	41.369
		0.8	5.403	45.942
		0.825	7.007	51.625
		0.85	9.24	58.886
		0.875	12.468	68.513
		0.9	17.398	81.955
		0.925	25.574	102.237
		0.95	41.185	137.143
		0.975	81.555	216.804

Πίνακας 5.5: Σύγκριση των VaR και TvaR με παραμέτρους $\alpha=0.3$, $\gamma=1$, $\sigma=0.2$



Σχήμα 5.7 : Γραφική αναπαράσταση των τιμών του πίνακα 5.5 για $\alpha=0.3$, $\gamma=1$, $\sigma=0.2$

Παρατηρώντας προσεκτικά τις αριθμητικές τιμές των [Πινάκων 5.4](#) και [5.5](#) αλλά και τα [Σχήματα 5.6](#) και [5.7](#) που προηγήθηκαν μπορούμε να επαληθεύσουμε τις εξής παρατηρήσεις :

- i. Όσο αυξάνεται το επίπεδο εμπιστοσύνης, τόσο αυξάνονται και οι τιμές των μέτρων κινδύνου.
- ii. Όσο πιο βαριά η ουρά μιας κατανομής, τόσο πιο μεγάλες είναι οι τιμές των μέτρων Κινδύνου
- iii. Επιβεβαιώνεται και στην πράξη, όπως αναμέναμε εξ'ορισμού ότι οι τιμές του TVaR είναι πάντοτε μεγαλύτερες από τις τιμές του VaR, για κάθε επιλογή παραμέτρων και επιπέδου εμπιστοσύνης.
- iv. Η παράμετρος σ είναι αυτή που καθορίζει το βάρος της ουράς για τη NEHTW
- v. Όσο πιο μικρή είναι η παράμετρος σ τόσο πιο βαριά η ουρά της NEHTW και αντίστροφα. Αυτή η παρατήρηση, επιβεβαιώνεται άμεσα στο [Σχήμα 5.7](#) , Αφού για σ αρκετά μικρό η ουρά της NEHTW είναι πιο βαριά της Weibull. Αντιθέτως, στο [Σχήμα 5.6](#) παρατηρούμε ότι για μεγάλη τιμή του σ η Weibull έχει πιο βαριά ουρά.
- vi. Στον [πίνακα 5.5](#) συναντώνται οι πιο υψηλές τιμές των μέτρων κινδύνου τόσο για τη Weibull όσο και για τη NEHTW. Αυτό, αφενός συμβαίνει γιατί τα δείγματα παρήχθησαν με το πιο μικρό σ , άρα και πιο βαριά ουρά, αφετέρου διότι έχουμε πιο μικρή τιμή της παραμέτρου α . Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η κατανομή γίνεται πιο λοξή προς τα δεξιά, οπότε είναι και λογικό για μεγάλες τιμές, να προσδίδονται μεγαλύτερες πιθανότητες.

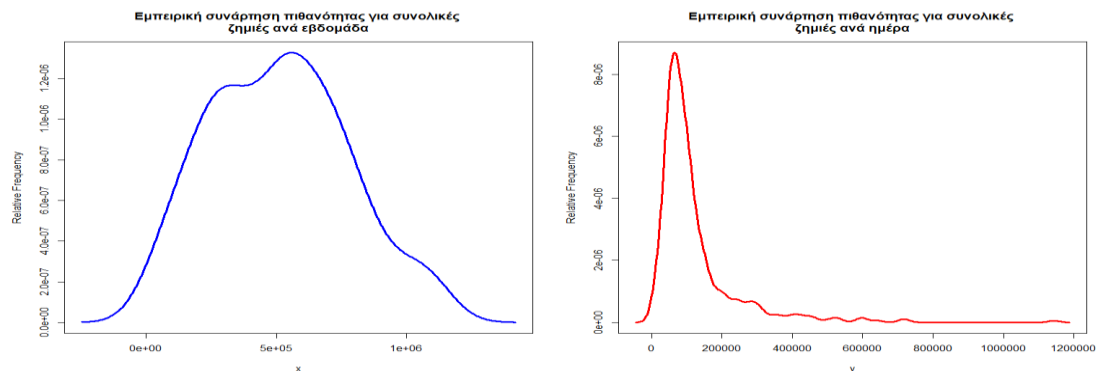
Κεφάλαιο 6

Προσαρμογή ασφαλιστικών δεδομένων ζημιών

Στο παρόν κεφάλαιο, το οποίο αποτελεί και το τελευταίο της παρούσης εργασίας, θα χρησιμοποιήσουμε τα ασφαλιστικά δεδομένα ζημιών που παρουσιάσαμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 2. Προκειμένου, να αξιολογήσουμε την ποιότητα του μοντέλου της ΝΕΗΤW στην προσαρμογή δεδομένων, θα πραγματοποιηθεί μια σύγκριση με άλλες γνωστές κατανομές με βαριά ουρά. Η σύγκριση αυτή θα πραγματοποιηθεί μέσω δεικτών καλής προσαρμογής οι οποίοι θα ορισθούν παρακάτω. Η προσαρμογή των δεδομένων θα πραγματοποιηθεί πάνω στα δεδομένα των συνολικών ζημιών ανά ημέρα. Τέλος, αφού καταλήξουμε στο μοντέλο κατανομής το οποίο προσαρμόζει καλύτερα στα δεδομένα, θα υπολογιστούν τα αναλογιστικά μέτρα κινδύνου για αυτό.

6.1 Εφαρμογή της ΝΕΗΤW στα ασφαλιστικά δεδομένα ζημιών αυτοκινήτου

Σε αυτή τη παράγραφο θα μελετήσουμε την προσαρμογή που έχει η ΝΕΗΤW κατανομή σε ένα σύνολο δεδομένων ζημιών μεγάλης ελληνικής ασφαλιστικής εταιρείας. Τα δεδομένα αναλύθηκαν εκτενώς στο κεφάλαιο 2, σε ημερήσια αλλά και εβδομαδιαία βάση. Βάσει αυτής της ανάλυσης, αποφασίστηκε ότι η προσαρμογή των δεδομένων θα πραγματοποιηθεί σε ημερήσια βάση και για τα 2 έτη συνολικά, αφού όπως φαίνεται και από τα γραφήματα εμπειρικής πυκνότητας των δεδομένων του [Σχήματος 6.1](#), οι συνολικές ζημιές ανά εβδομάδα προσεγγίζονται καλύτερα από μία συμμετρική κατανομή, ενώ οι ζημιές ανά ημέρα φαίνεται να προσεγγίζονται από μια λοξή κατανομή με βαριά δεξιά ουρά.



Σχήμα 6.1 : Απεικόνιση των εμπειρικών συναρτήσεων πυκνότητας για τα δεδομένα ανά εβδομάδα και ημέρα.

Για να αξιολογήσουμε την εφαρμογή που έχει η ΝΕΗΤW στα δεδομένα ζημιών, πραγματοποιείται μια σύγκριση με τις κατανομές που ορίσθηκαν αναλυτικά στο Κεφάλαιο 3: Weibull, Lomax, Log-Normal, Exponentiated Weibull, Lomax & Burr X-II. Κριτήριο, βάσει του οποίου επιλέγεται το μοντέλο με την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα, αποτελούν οι πληροφοριακοί δείκτες όπως ορίζονται πιο κάτω (Punzo et al., 2018).

- Akaike information criterion (AIC)

$$AIC = 2K - 2L$$

- Bayesian information criterion (BIC)

$$BIC = K \log(n) - 2L$$

- Hannan-Quinn information criterion (HQIC)

$$HQIC = 2K \log(\log(n)) - 2L$$

- Consistent Akaike information criterion (CAIC)

$$CAIC = \frac{2nK}{n-K-1} - 2L$$

όπου,

n : το μέγεθος του δείγματος των δεδομένων προσαρμογής

K : οι παράμετροι του μοντέλου υπό προσαρμογή

L : ο λογάριθμός της πιθανοφάνειας του μοντέλου υπολογισμένος βάσει των εκτιμητών μέγιστης πιθανοφάνειας, των παραμέτρων του μοντέλου.

Σύμφωνα με τα παραπάνω κριτήρια, το στατιστικό μοντέλο που θα έχει την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα, είναι αυτό με την χαμηλότερη τιμή του πληροφοριακού δείκτη. Η σύγκριση των παραπάνω δεικτών για τα διάφορα μοντέλα πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια της R. Αρχικά, υπολογίσθηκαν τα MLE'S των μοντέλων μέσω της συνάρτησης `optim()` και στη συνέχεια εκτιμήθηκαν οι πληροφοριακοί δείκτες. Τα αποτελέσματα της προσαρμογής στα δεδομένα παρουσιάζονται παρακάτω στους [Πίνακες 6.1-6.2](#).

Distribution	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}$	\hat{c}	\hat{k}
Weibull	0.0704748	1				
NEHTW	0.0708296	1		0.2524445		
Log-Normal	11.39845	1				
EW	0.1703518	1	712.562226			
Lomax	0.0877348	1				
B-XII					0.1352669	1

Πίνακας 6.1 : Εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας των μοντέλων για τις συνολικές ζημιές ανά ημέρα

Distribution	AIC	BIC	CAIC	HQIC
NEHTW	12.483	12.491	12.483	12.486
Weibull	12.542	12.555	12.542	12.547
EW	14.657	14.666	14.657	14.661
Lomax	15.150	15.158	15.150	15.153
B-XII	15.253	15.266	15.254	15.258
Log-Normal	15.302	15.310	15.302	15.305

Πίνακας 6.2 : Οι πληροφοριακοί δείκτες για τη NEHTW και τα συγκριτικά μοντέλα

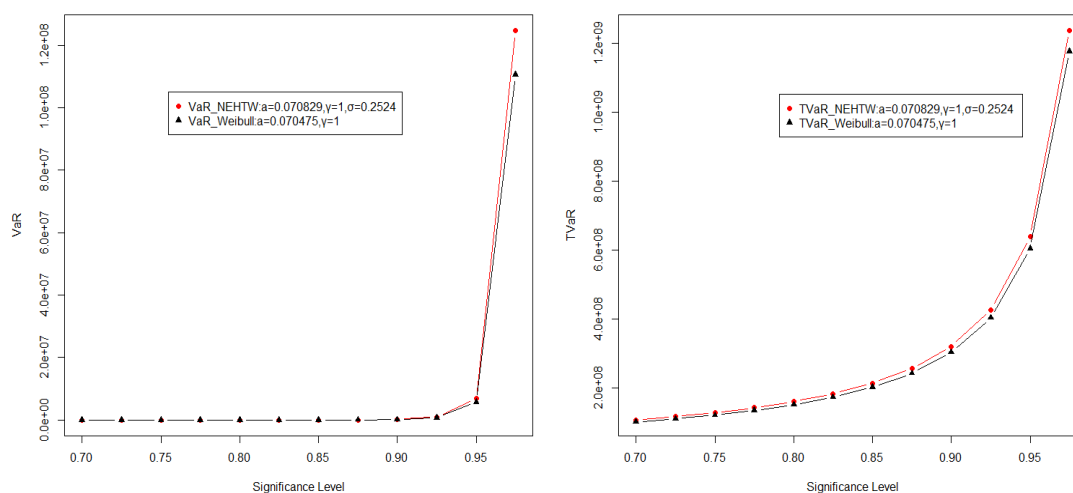
Σύμφωνα με τις τιμές του [πίνακα 6.2](#) , παρατηρούμε ότι το μοντέλο της NEHTW προσαρμόζει καλύτερα από κάθε άλλο μοντέλο τα δεδομένα ζημιών, αφού διαθέτει την μικρότερη τιμή του AIC. Εάν προσέξουμε τις τιμές των εκτιμημένων παραμέτρων του [πίνακα 6.1](#) μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η κατανομή Weibull και η NEHTW έχουν την ίδια τιμή της παραμέτρου γ και σχεδόν την ίδια τιμή για την παράμετρο α . Επίσης, οι πληροφοριακοί δείκτες των 2 κατανομών είναι πάρα πολύ κοντά, με τη NEHTW να φαίνεται να έχει λίγο ανώτερη ποιότητα στο μοντέλο της. Εξήγηση σε αυτό το φαινόμενο αποτελεί η ύπαρξη της παραμέτρου σ . Τα δεδομένα είναι αρκετά βαριά, συνεπώς η ύπαρξη της παραμέτρου σ στο μοντέλο της NEHTW προσδίδει μεγαλύτερη προσαρμοστικότητα στην ουρά της κατανομής. Ήδη από το κεφάλαιο 5 αναφέραμε ότι όσο πιο κοντά στο 0 είναι η παράμετρος σ τόσο πιο βαριά γίνεται η ουρά της κατανομής και σε συγκεκριμένες περιπτώσεις πιο βαριά και από αυτή της Weibull. Αυτό το γεγονός επιβεβαιώνουν οι τιμές του [πίνακα 6.1](#) αφού φαίνεται το σ να έχει εκτιμηθεί για τα δεδομένα με την τιμή $\hat{\sigma} = 0,2$.

6.2 Υπολογισμός αναλογιστικών μέτρων κινδύνου για τα ασφαλιστικά δεδομένα ζημιών

Σε αυτή την παράγραφο, θα χρησιμοποιήσουμε τις εκτιμημένες παραμέτρους που συναντήσαμε στον [πίνακα 6.1](#) προκειμένου να υπολογίσουμε τα VaR και TVaR για τη Weibull και για NEHTW. Σε αυτό το σημείο, αξίζει να ανακαλέσουμε τους τύπους βάσει των οποίων πραγματοποιήθηκαν οι υπολογισμοί (βλέπε σχέσεις ([5.2.3](#)) και [5.2.4](#))

- $$VaR_{p\%} = \left\{ \frac{\log \sigma - \log \left[\sigma - 1 + \sqrt{1 - \log \left[1 + p \left(e^{1 - \sigma^2} - 1 \right) \right]} \right]}{\gamma} \right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$
- $$TVaR_p(x) = E(X|X > VaR) = \frac{\int_{VaR_p}^{\infty} x f(x) dx}{q}$$

Τα αριθμητικά αποτελέσματα φαίνονται αναλυτικά στον [Πίνακα 6.3](#) που ακολουθεί, ενώ μια εικόνα αυτών παρουσιάζεται μέσω του [Σχήματος 6.2](#).



Σχήμα 6.2 : Γραφική αναπαράσταση των αποτελεσμάτων του πίνακα 6.3

Distribution	Parameter	Significance level	VaR	TVaR
<i>Weibull</i>	$\alpha=0.070475$ $\gamma=1$	0.7	0.01	98572.36
		0.725	0.04	107533.49
		0.75	0.1	118286.83
		0.775	0.29	131429.79
		0.8	0.86	147858.46
		0.825	2.65	168980.9
		0.85	8.83	197143.57
		0.875	32.47	236568.52
		0.9	137.92	295692.32
		0.925	733.03	394149.19
		0.95	5771.72	590138.31
	0.975	1106390.1	1151108.61	
<i>NEHTW</i>	$\alpha=0.070829$ $\gamma=1$ $\sigma=0.252444$	0.7	0.02	104254.49
		0.725	0.06	113732.16
		0.75	0.17	125105.37
		0.775	0.45	139005.94
		0.8	1.29	156381.59
		0.825	3.87	178721.5
		0.85	12.44	208507.18
		0.875	44.14	250203.07
		0.9	180.58	312728.93
		0.925	921.09	416825.68
		0.95	6917.41	623813.27
	0.975	1.247.518,00	1291038.86	

Πίνακας 6.3 : Αναλογιστικά μέτρα Κινδύνου (σε χιλιάδες) υπολογισμένα βάσει των εκτιμημένων παραμέτρων των συνολικών ζημιών ανά ημέρα

Όπως φαίνεται για μικρές τιμές της παραμέτρου σ η NEHTW προσεγγίζει την αντίστοιχη κατανομή της Weibull παρουσιάζοντας όμως καλύτερη συμπεριφορά για τα βαριά ασφαλιστικά δεδομένα ζημιών ανά ημέρα που χρησιμοποιήθηκαν.

Κεφάλαιο 7

Σύνοψη

Η κατάλληλη επιλογή μιας στατιστικής κατανομής για την ανάλυση και περιγραφή ενός συνόλου χρηματοοικονομικών δεδομένων, είναι μια ιδιαίτερα σημαντική διαδικασία και έχει άμεση σχέση με τη μέτρηση των επιπέδων κινδύνου στα οποία είναι εκτεθειμένη μια εταιρεία. Είναι γνωστό ότι τα πάσης φύσεως χρηματοοικονομικά δεδομένα χαρακτηρίζονται από θετική λοξότητα, υψηλή κύρτωση και βαριά δεξιά ουρά. Στα πλαίσια αυτά οι Muhammad et al. (2020) πρότειναν μια νέα οικογένεια κατανομών με βαριά ουρά. Η New Heavy Tailed Weibull κατανομή όπως ονομάσθηκε αποτελεί ένα μετασχηματισμό της κλασικής διπαραμετρικής Weibull με την προσθήκη μιας επιπλέον παραμέτρου σ . Πλεονέκτημα έναντι άλλων κατανομών με βαριά ουρά αποτελεί το γεγονός ότι η NEHTW επιτρέπει εκφράσεις κλειστού τύπου. Η εφαρμογή της κατανομής δοκιμάστηκε έναντι άλλων γνωστών κατανομών με βαριά ουρά, με την προσαρμογή της σε ένα σύνολο δεδομένων από ζημιές αυτοκινήτου Ελληνικής ασφαλιστικής εταιρείας. Τα αποτελέσματα αυτής της προσαρμογής έδειξαν ότι η NEHTW αποτελεί μια αρκετά καλή επιλογή, αφού η παράμετρος σ του μοντέλου, προσδίδει ευελιξία στην ουρά της κατανομής συνεπώς και στην προσαρμογή ανάλογα με τη φύση των δεδομένων.

Παράρτημα

Για την παρουσίαση των αριθμητικών αποτελεσμάτων, των Πινάκων και των διάφορων γραφημάτων της παρούσης εργασίας χρησιμοποιήθηκε η γλώσσα προγραμματισμού R. Παρακάτω, παρατίθενται αναλυτικά οι εντολές που γράφηκαν ανά Κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 2

Σχήμα 2.1

```
x=seq(0,10,0.1)
y=dweibull(x,0.5,2)
z=dexp(x,1)
plot(x,y,type="l",col="blue",lwd=3)
lines(x,z,col="red",lwd=3)
legend(locator(1),c("Heavy Tailed","Exponential"),lty=c(1,1),col=c("blue","red"))
```

Σχήμα 2.2

```
x<-seq(0,10,0.01);a<-1.5;g<-2;z<-dnorm(x,5,1)
fx<-a*g*x^(a-1)*exp(-g*x^a)
gx<-a*g*(10-x)^(a-1)*exp(-g*(10-x)^a)
par(mfcol=c(1,3))
plot(x,gx,type="l",lwd=3,ylab="f(x)",main="Αρνητική Λοξότητα")
plot(x,z,type="l",ylab="f(x)",lwd=3,col="red",main="Συμμετρικότητα")
plot(x,fx,type="l",lwd=3,ylab="f(x)",main="Θετική Λοξότητα",col="blue")
```

Σχήμα 2.3

```
x=seq(-3,3,0.1)
y=dnorm(x,0,0.5)
z=dnorm(x,0,1)
t=dnorm(x,0,2)
plot(x,y,type="l",col="blue",lwd=3)
lines(x,z,col="red",lwd=3)
lines(x,t,col="green",lwd=3)
```

```
legend(locator(1),c("Λεπτόκυρτη","Μεσόκυρτη","Πλατύκυρτη"),lty=c(1,1,1),col=c("blue","red","green"))
```

Πίνακας 2.1

```
a=read.table("datatotal.txt",header=T)
attach(a)
name(a)
summary(Loss)
sd(Loss)
max(Loss)-min(Loss)
IQR(Loss)
kurtosis(Loss)
skewness(Loss)
sum(Loss)
```

Σχήμα 2.4

```
a=read.table("datatotal.txt",header=T)
attach(a)
x=seq(0,1200000,50000)
hist(Loss,col="red",main="Ιστόγραμμα-Ζημιών
αυτοκινήτου",xlab="Ζημιές",ylab="Συχνότητες")
```

Σχήμα 2.5

```
a=read.table("datatotal.txt",header=T)
attach(a)
boxplot(Loss,col="blue",id=list(n=Inf))
```

Σχήμα 2.6

```
a=read.table("datatotal.txt",header=T)
attach(a)
qqnorm(Loss,ylim=c(0,1000000),xlab="Θεωρητικά Ποσοστιαία
σημεία",ylab="Ποσοστιαία σημεία Δείγματος",main="Κανονικό Q-Q
Διάγραμμα",col="red")
qqline(Loss)
```

Σχήμα 2.7

```
a=read.table("datatotal.txt",header=T)
attach(a)
plot(ecdf(Loss),do.points=F,verticals=T,col="red",main="Εμπειρική
Κατανομή",xlab="Ζημιές")
```

Από εδώ και πέρα για τα υπόλοιπα σχήματα και πίνακες του Κεφαλαίου 2, οι εντολές επαναλαμβάνονται με ακριβώς τον ίδιο τρόπο πάνω στα δεδομένα του 2007, 2008 αλλά και για την ομαδοποίηση των δεδομένων ανά εβδομάδα.

Κεφάλαιο 4

Σχήμα 4.1

```
ggg = function(x, a, g, s) {  
  z = exp(-g*(x^a));  
  t = 1-s*(1-z)  
  n = 2*a*s*g*x^(a-1)  
  k=exp(1-t^2)  
  d = exp(1-(1-s)^2)-1  
  y=z*t*n*k  
  y/d  
}  
y1=ggg(x,1.1,2,0.2)  
y2=ggg(x,1.5,2,0.2)  
y3=ggg(x,2,2,0.2)  
plot(x,y1,type="l",lwd="2",col="red",ylim=c(0,2),ylab="g(x,α,γ,σ)",main="Διάγραμμα  
της ΝΕΗΤW για διάφορες τιμές του α")  
lines(x,y2,col="green",lwd="2")  
lines(x,y3,col="blue",lwd="2")  
legend(2.5,1.8,c("α=1.1,γ=2,σ=0.2","α=1.5,γ=2,σ=0.2","α=2.0,γ=2,σ=0.2"),lty=c(1,1,1)  
,col=c("red","green","blue"))
```

Σχήμα 4.2

```
y1=ggg(x,1.3,2,0.2)  
y2=ggg(x,1.3,1.6,0.2)  
y3=ggg(x,1.3,1.2,0.2)  
plot(x,y1,type="l",lwd="2",col="red",ylim=c(0,2),ylab="g(x,α,γ,σ)",main="Διάγραμμα  
της ΝΕΗΤW για διάφορες τιμές του γ")  
lines(x,y2,col="green",lwd="2")  
lines(x,y3,col="blue",lwd="2")  
legend(2.5,1.8,c("α=1.3,γ=2,σ=0.2","α=1.3,γ=1.6,σ=0.2","α=1.3,γ=1.2,σ=0.2"),lty=c(1,  
1,1),col=c("red","green","blue"))
```

Σχήμα 4.3

```
y1=ggg(x,1.8,2,0.9)  
y2=ggg(x,1.8,2,0.6)  
y3=ggg(x,1.8,2,0.2)  
plot(x,y1,type="l",lwd="2",col="red",ylim=c(0,2),ylab="g(x,α,γ,σ)",main="Διάγραμμα  
της ΝΕΗΤW για διάφορες τιμές του σ")
```

```

lines(x,y2,col="green",lwd="2")
lines(x,y3,col="blue",lwd="2")
legend(2.5,1.8,c("α=1.8,γ=2,σ=0.9","α=1.8,γ=2,σ=0.6","α=1.8,γ=2,σ=0.2"),lty=c(1,1,1)
,col=c("red","green","blue"))

```

Κεφάλαιο 5

Πίνακες 5.1-5.2 και Σχήματα 5.1-5.4

```

rNEHTW=function(par,n){
a=par[1]; g=par[2];s=par[3]
u=runif(n)
x=c()
for (i in 1:n){
S=1-s
k=1+u[i]*(exp(1-S^2)-1)
l=sqrt(1-log(k))
m=log(s-1+l)
n=log(s)
p=(n-m)/g
x[i]=p^(1/a)
}
return(x)
}

```

```

loglikelihoodNEHTW=function(par){
a=par[1]
g=par[2]
s=par[3]
S=1-s
aux=1-s*(1-exp(-g*(x^a)))
aux1=exp(1-S^2)-1
if(a>0 & g>0 & s>0 & min(x)>0 & min(aux)>0 & min(aux1)>0 )
{
w=log(2)+log(a)+log(g)+log(s)+(a-1)*log(x)-g*(x^a)+log(aux)+1-aux^2-log(aux1)
return(sum(w))
}
else
{
return(-9999999.9)
}
}

```

```

par=c(1.5,1.1,0.8);a=1.5;g=1.1;s=0.8;
n_replicas = 1000
matriz_par <- matrix(0,40,3)
matriz_bias<- matrix(0,40,3)
matriz_MSE <- matrix(0,40,3)
matriz_std <- matrix(0,40,3)
colnames(matriz_par) <- c("a", "g", "s")
colnames(matriz_bias)<- c("a", "g", "s")
colnames(matriz_MSE) <- c("a", "g", "s")
colnames(matriz_std) <- c("a", "g", "s")

cont = 1
n = 25
while(n <= 1000){
par_mean <- c(0,0,0)
std_mean <- c(0,0,0)
bias <- c(0,0,0)
MSE <- c(0,0,0)
replica = 1
while(replica <= n_replicas)
{
print(paste("n = ",n, ", replica = ", replica))
x <-rNEHTW(par,n)
Data <- x
result=optim(c(a, g, s),loglikelihoodNEHTW, hessian = F,
control = list(fnscale = -1),
method = "L-BFGS-B", lower = c(0.001,0.001, 0.001), upper = c(5,5,5))
if (class(result) != "try-error" && result$convergence == 0)
{
par_mean <- par_mean + result$par
bias = bias + (result$par - par)
MSE = MSE + (result$par - par)^2
replica = replica +1
}
}
par_mean = par_mean/n_replicas
bias = bias/n_replicas
MSE = MSE/n_replicas
matriz_par[cont,] = par_mean
matriz_std[cont,] = std_mean
matriz_bias[cont,] = bias

```

```

matriz_MSE[cont,] = MSE
print("mean = ")
print( par_mean )
print("bias = ")
print( bias )
print("MSE = ")
print(MSE)
n = n + 25
cont = cont +1
}

alpha=cbind(matriz_par[,1],matriz_MSE[,1],matriz_bias[,1])
gamma=cbind(matriz_par[,2],matriz_MSE[,2],matriz_bias[,2])
sigma=cbind(matriz_par[,3],matriz_MSE[,3],matriz_bias[,3])
dimnames(alpha)=list(seq(25,1000,25),c("a","mse","bias"))
dimnames(gamma)=list(seq(25,1000,25),c("g","mse","bias"))
dimnames(sigma)=list(seq(25,1000,25),c("s","mse","bias"))
alpha
gamma
sigma

n=seq(25,1000, 25)
plot(n,(matriz_par[,1]), type="o", col="green", lty=1, lwd=2,xlab="n",
ylab="Estimated Parameters",ylim=c(0,2))
lines(n,(matriz_par[,2]), col="blue", lty=5,lwd=2,type="o")
lines(n,(matriz_par[,3]), col="red", lty=8,lwd=2,type="o")
title("Plot of Estimated Parameters vs n")
legend(550,2, legend = c(expression(paste(a,"=", "1.5")),
expression(paste(g,"=", "1.1")),
expression(paste(s,"=", "0.8"))),
lty =c(1,5,8),cex=1,
col=c("green","blue","red"))

par(mfcol=c(1,2))

plot(n,matriz_MSE[,1], col="green", lty=1, lwd=2,type="o", xlab="n",
ylab="MSE",ylim=c(0,0.3))
lines(n,matriz_MSE[,2], col="blue", lty=5, lwd=2,type="o")
lines(n,matriz_MSE[,3], col="red", lty=8,lwd=2,type="o")
title("Plot of MSE vs n")
legend(550,0.3, legend = c(expression(paste(a,"=", "1.5")),
expression(paste(g,"=", "1.1")),
expression(paste(s,"=", "0.8"))),
lty =c(1,5,8),cex=1,

```

```
col=c("green","blue","red"))
```

```
plot(n,abs(matriz_bias[,1]), type="o", col="green", lty=1, lwd=2,xlab="n",  
ylab="Absolute Bias",ylim=c(0,0.3))  
lines(n,abs(matriz_bias[,2]), col="blue", lty=2, lwd=2,type="o")  
lines(n,abs(matriz_bias[,3]), col="red", lty=3,lwd=2,type="o")  
title("Plot of Absolute Bias vs n")  
legend(550,0.3, legend = c(expression(paste(a,"=", "1.5")),  
expression(paste(g,"=", "1.1")),  
expression(paste(s,"=", "0.8"))),  
lty =c(1,5,8),cex=1,col=c("green", "blue", "red"))
```

Πίνακας 5.3 και Σχήμα 5.5

```
a=0.5;g=0.8;q=seq(0.7,0.975,0.025);s1=0.9;s2=0.2
```

```
S1=1-s1
```

```
k1=1+q*(exp(1-S1^2)-1)
```

```
l1=sqrt(1-log(k1))
```

```
m1=log(s1-1+l1)
```

```
n1=log(s1)
```

```
p1=(n1-m1)/g
```

```
VarNHTW1=p1^(1/a)
```

```
S2=1-s2
```

```
k2=1+q*(exp(1-S2^2)-1)
```

```
l2=sqrt(1-log(k2))
```

```
m2=log(s2-1+l2)
```

```
n2=log(s2)
```

```
p2=(n2-m2)/g
```

```
VarNHTW2=p2^(1/a)
```

```
VarNHTW1
```

```
VarNHTW2
```

```
a1=0.5;g1=0.8;q=0.7;s1=0.9;s2=0.2;j=1;
```

```
vec=vector(mode="numeric",length=12)
```

```
mec=vector(mode="numeric",length=12)
```

```
while(q<1){
```

```
S1=1-s1
```

```
k1=1+q*(exp(1-S1^2)-1)
```

```
l1=sqrt(1-log(k1))
```

```
m1=log(s1-1+l1)
```

```
n1=log(s1)
```



```

p1=(n1-m1)/g1
VarNHTW1=p1^(1/a1)
fx1=function(x){
z = exp(-g1*(x^a1))
t = 1-s1*(1-z)
n = 2*a1*s1*g1*x^a1
k=exp(1-t^2)
d = exp(1-S1^2)-1
y=z*t*n*k
y/d/(1-q)
}
S2=1-s2
k2=1+q*(exp(1-S2^2)-1)
l2=sqrt(1-log(k2))
m2=log(s2-1+l2)
n2=log(s2)
p2=(n2-m2)/g1
VarNHTW2=p2^(1/a1)
fx2=function(x){
z = exp(-g1*(x^a1))
t = 1-s2*(1-z)
n = 2*a1*s2*g1*x^a1
k=exp(1-t^2)
d = exp(1-S2^2)-1
y=z*t*n*k
y/d/(1-q)
}
mec[j]=integrate(fx2,lower=VarNHTW2,upper=Inf)
vec[j]=integrate(fx1,lower=VarNHTW1,upper=Inf)
q=q+0.025
j=j+1
}
vec
mec
par(mfcol=c(1,2))
plot(q,VarNHTW1,pch=16,col="red",type="b",ylim=c(0,25),xlab="Significance
Level",ylab="VaR")
lines(q,VarNHTW2,pch=17,col="black",type="b")
legend(locator(1),c("a=0.5,g=0.8,s=0.9","a=0.5,g=0.8,s=0.2"),col=c("red","black"),pch
=c(16,17))
q=seq(0.7,0.975,0.025)
plot(q,vec,pch=16,col="red",type="b",ylim=c(5,36),xlab="Significance
Level",ylab="TVaR")
lines(q,mec,pch=17,col="black",type="b")

```

```
legend(locator(1),c("a=0.5,g=0.8,s=0.9","a=0.5,g=0.8,s=0.2"),col=c("red","black"),pch
=c(16,17))
```

[Πίνακες 5.4-5.5 και Σχήματα 5.6-5.7](#)

```
a=0.3;g=1;q=seq(0.7,0.975,0.025);s1=0.2
par(mfcol=c(1,2))
S1=1-s1
k1=1+q*(exp(1-S1^2)-1)
l1=sqrt(1-log(k1))
m1=log(s1-1+l1)
n1=log(s1)
p1=(n1-m1)/g
VarNHTW=p1^(1/a)
VarW=(-log(1-q)/g)^(1/a)
plot(q,VarNHTW,pch=16,col="red",type="b",ylim=c(0,90),xlab="Significance
Level",ylab="VaR")
lines(q,VarW,pch=17,col="black",type="b")
legend(locator(1),c("VaR_NEHTW","VaR_Weibull"),col=c("red","black"),pch=c(16,17)
)
VarNHTW
VarW
```

```
a1=0.3;g1=1;q1=0.7;s1=0.2;j=1;
vec=vector(mode="numeric",length=12)
mec=vector(mode="numeric",length=12)
```

```
while(q1<1){
S1=1-s1
k1=1+q1*(exp(1-S1^2)-1)
l1=sqrt(1-log(k1))
m1=log(s1-1+l1)
n1=log(s1)
p1=(n1-m1)/g1
VarNHTW1=p1^(1/a1)
VarW=(-log(1-q1)/g1)^(1/a1)
fx1=function(x){
z = exp(-g1*(x^a1))
t = 1-s1*(1-z)
n = 2*a1*s1*g1*x^a1
k=exp(1-t^2)
d = exp(1-S1^2)-1
y=z*t*n*k
y/d/(1-q1)
}
```

```

fx2=function(x) (a1*g1*(x^a1)*exp(-g1*(x^a1)))/(1-q1)
vec[j]=integrate(fx1,lower=VarNHTW1,upper=Inf)
mec[j]=integrate(fx2,lower=VarW,upper=Inf)
q1=q1+0.025
j=j+1
}
q=seq(0.7,0.975,0.025)
plot(q,vec,pch=16,col="red",type="b",ylim=c(0,220),xlab="Significance
Level",ylab="TVaR")
lines(q,mec,pch=17,col="black",type="b")
legend(locator(1),c("TVaR_NEHTW","TVaR_Weibull"),col=c("red","black"),pch=c(16,1
7))
vec
mec

```

Κεφάλαιο 6

Σχήμα 6.1

```

a=read.table("dataweek.txt",header=T)
b=read.table("datatotal.txt",header=T)
attach(a)
attach(b)
par(mfcol=c(1,2))
epdfPlot(Loss,epdf.col="blue",main="Εμπειρική συνάρτηση πιθανότητας για
συνολικές
ζημιές ανά εβδομάδα")
epdfPlot(loss,epdf.col="red",main="Εμπειρική συνάρτηση πιθανότητας για
συνολικές
ζημιές ανά ημέρα")

```

Πίνακας 6.1-6.2

```

## όλα τα δεδομένα ανά ημέρα##
b=read.table("datatotal.txt",header=T)
attach(b)
names(x)
x=Loss

```

```

## LogLikelihood of NEHTW ##
LLNEHTW=function(par){

```

```

a=par[1]
g=par[2]
s=par[3]
S=1-s
aux=1-s*(1-exp(-g*(x^a)))
aux1=exp(1-S^2)-1
if(a>0 & g>0 & s>0 & min(x)>0 & min(aux)>0 & min(aux1)>0 )
{
w=log(2)+log(a)+log(g)+log(s)+(a-1)*log(x)-g*(x^a)+log(aux)+1-aux^2-log(aux1)
return(sum(w))
}
else
{
return(-9999999.9)
}
}

```

```

a=0.3;g=1;s=0.2
result<-optim(c(a, g, s), LLNEHTW, hessian=F,control=list(fnscale=-1),
method="L-BFGS-B", lower=c(0.001,1,0.001), upper=c(Inf,Inf,Inf))
result
par=c(result$par[1],result$par[2],result$par[3])
L=LLNEHTW(par)
K=length(par)
N=length(x)
AIC1=2*K-2*L
BIC1=K*log(N)-2*L
HQIC1=2*K*log(log(N))-2*L
CAIC1=(2*N*K)/(N-K-1)-2*L
BIC1
AIC1
HQIC1
CAIC1

```

```

## LogLikelihood of Weibull ##
LLWeibull<-function(par) {
a1=par[1]
g1=par[2]
if(a1>0&&g1>0&&min(x)>0)
{
LL=log(a1)+log(g1)+(a1-1)*log(x)-(g1*x^a1)
return(sum(LL))
}
else

```

```

{
return(-9999999.9)
}
}
a=0.3;g=1
result<-optim(c(a, g), LLWeibull, hessian=F,control=list(fnscale=-1),
method="L-BFGS-B", lower=c(0.001,1,0.001), upper=c(Inf,Inf,Inf))
result
par=c(result$par[1],result$par[2])
L=LLWeibull(par)
K=length(par)
N=length(x)
AIC1=2*K-2*L
BIC1=K*log(N)-2*L
HQIC1=2*K*log(log(N))-2*L
CAIC1=(2*N*K)/(N-K-1)-2*L
BIC1
AIC1
HQIC1
CAIC1

```

LogLikelihood of Lomax

```

LLlomax<-function(par) {
a=par[1]
g=par[2]
aux=1+g*x
if(a>0&&g>0&&min(aux)>0)
{
LL=log(a)+log(g)-(a+1)*log(aux)
return(sum(LL))
}
else
{
return(-9999999.9)
}
}
a=0.3;g=1
result<-optim(c(a, g),LLlomax , hessian=F,control=list(fnscale=-1),
method="L-BFGS-B", lower=c(0.001,1,0.001), upper=c(Inf,Inf,Inf))
result
par=c(result$par[1],result$par[2])
L=LLlomax(par)
K=length(par)

```

```

N=length(x)
AIC1=2*K-2*L
BIC1=K*log(N)-2*L
HQIC1=2*K*log(log(N))-2*L
CAIC1=(2*N*K)/(N-K-1)-2*L
BIC1
AIC1
HQIC1
CAIC1

## LogLikelihood of EW ##
LLEW<-function(par) {
a=par[1]
g=par[2]
t=par[3]
aux=1-exp(-g*(x^a))
if(a>0&&g>0&&t>0&&min(aux)>0&&min(x))
{
LL=log(a)+log(g)+log(t)+(t-1)*log(aux)+(a-1)*log(x)-g*x^a
return(sum(LL))
}
else
{
return(-9999999.9)
}
}
a=0.3;g=1;t=1
result<-optim(c(a,g,t),LLEW , hessian=F,control=list(fnscale=-1),
method="L-BFGS-B", lower=c(0.001,1,0.001), upper=c(Inf,Inf,Inf))
result
par=c(result$par[1],result$par[2],result$par[3])
L=LLEW(par)
K=length(par)
N=length(x)
AIC1=2*K-2*L
BIC1=K*log(N)-2*L
HQIC1=2*K*log(log(N))-2*L
CAIC1=(2*N*K)/(N-K-1)-2*L
BIC1
AIC1
HQIC1
CAIC1

## LogLikelihood of B-XII ##

```

```

LLBURR<-function(par) {
c=par[1]
k=par[2]
aux=1+x^c
if(c>0&&k>0&&min(aux)>0&&min(x)>0)
{
LL=log(c)+log(k)+(c-1)*log(x)-(k+1)*log(aux)
return(sum(LL))
}
else
{
return(-9999999.9)
}
}
c=2;k=5
result<-optim(c(c, k),LLBURR , hessian=F,control=list(fnscale=-1),
method="L-BFGS-B", lower=c(0.001,1,0.001), upper=c(Inf,Inf,Inf))
result
par=c(result$par[1],result$par[2])
L=LLBURR(par)
K=length(par)
N=length(x)
AIC1=2*K-2*L
BIC1=K*log(N)-2*L
HQIC1=2*K*log(log(N))-2*L
CAIC1=(2*N*K)/(N-K-1)-2*L
BIC1
AIC1
HQIC1
CAIC1

## LogLikelihood of LNorm ##
LLlnorm<-function(par) {
m=par[1]
s=par[2]
aux=(log(x)-m)^2
if(min(s)>0&&min(x)>0)
{
LL=-log(x)-log(s)-log(sqrt(2*pi))-aux/(2*s^2)
return(sum(LL))
}
else
{
return(-9999999.9)
}
}

```

```

}
}
m=4;s=5
result<-optim(c(m, s),LLlnorm , hessian=F,control=list(fnscale=-1),
method="L-BFGS-B", lower=c(0.001,1,0.001), upper=c(Inf,Inf,Inf))
result
par=c(result$par[1],result$par[2])
L=LLlnorm(par)
K=length(par)
N=length(x)
AIC1=2*K-2*L
BIC1=K*log(N)-2*L
HQIC1=2*K*log(log(N))-2*L
CAIC1=(2*N*K)/(N-K-1)-2*L
BIC1
AIC1
HQIC1
CAIC1

```

Πίνακας 6.3 και Σχήμα 6.2

##σύγκριση VAR για NEHTW και Weibull##

```

a=0.070829;g=1;q=seq(0.7,0.975,0.025);s1=0.252444
par(mfcol=c(1,2))
S1=1-s1
k1=1+q*(exp(1-S1^2)-1)
l1=sqrt(1-log(k1))
m1=log(s1-1+l1)
n1=log(s1)
p1=(n1-m1)/g
VarNHTW=p1^(1/a)
VarW=(-log(1-q)/g)^(1/a)
plot(q,VarNHTW,pch=16,col="red",type="b",xlab="Significance Level",ylab="VaR")
lines(q,VarW,pch=17,col="black",type="b")
legend(locator(1),c("VaR_NEHTW:a=0.070829,γ=1,σ=0.2524","VaR_Weibull:a=0.070
475,γ=1"),col=c("red","black"),pch=c(16,17))
VarNHTW
VarW

```

##σύγκριση TVAR για NEHTW και Weibull##

```

a1=0.070475;g1=1;q1=0.7;s1=0.252444;j=1;
vec=vector(mode="numeric",length=12)

```



```

mec=vector(mode="numeric",length=12)

while(q1<1){
S1=1-s1
k1=1+q1*(exp(1-S1^2)-1)
l1=sqrt(1-log(k1))
m1=log(s1-1+l1)
n1=log(s1)
p1=(n1-m1)/g1
VarNHTW1=p1^(1/a1)
VarW=(-log(1-q1)/g1)^(1/a1)
fx1=function(x){
z = exp(-g1*(x^a1))
t = 1-s1*(1-z)
n = 2*a1*s1*g1*x^a1
k=exp(1-t^2)
d = exp(1-S1^2)-1
y=z*t*n*k
y/d/(1-q1)
}
fx2=function(x) (a1*g1*(x^a1)*exp(-g1*(x^a1)))/(1-q1)
vec[j]=integrate(fx1,lower=VarNHTW1,upper=10^10)
mec[j]=integrate(fx2,lower=VarW,upper=10^10)
q1=q1+0.025
j=j+1
}
q=seq(0.7,0.975,0.025)
plot(q,vec,pch=16,col="red",type="b",xlab="Significance Level",ylab="TVaR")
lines(q,mec,pch=17,col="black",type="b")
legend(locator(1),c("TVaR_NEHTW:a=0.070829,gamma=1,sigma=0.2524",
"TVaR_Weibull:a=0.070475,gamma=1"),col=c("red","black"),pch=c(16,17))

vec
mec

```

Βιβλιογραφία

Ελληνική

Μπούτσικας, Μ. (2002). Σημειώσεις Παραδόσεων: «Μέθοδοι Προσομοίωσης και Υπολογιστικές Στατιστικές Τεχνικές», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.**55**

Πιτσέλης, Γ. (2018). *Κατανομές Μ.Π.Α.ΟΥ.Ζ.* Αθήνα: Εκδόσεις Παπαζήση.**23**

Χατζικωνσταντινίδης Ε. (2015). *Κατανομές Απώλειας. Σημειώσεις μαθήματος, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Αθήνα.***42**

Ξενόγλωσση

Ahmad, Z., Mahmoudi, E., & Hamedani, G. G. (2019). A family of loss distributions with an application to the vehicle insurance loss data. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*,**23-25**

Ahmad, Z., Mahmoudi, E., Dey, S., & Khosa, S. K. (2020). Modeling vehicle insurance loss data using a new member of TX family of distributions. *Journal of Statistical Theory and Applications*, *19*(2), **40**

Ahmad, Z., Mahmoudi, E., Hamedani, G. G., & Kharazmi, O. (2020). New methods to define heavy-tailed distributions with applications to insurance data. *Journal of Taibah University for Science*, *14*(1), **55**

Arif, M., Khan, D. M., Khosa, S. K., Aamir, M., Aslam, A., Ahmad, Z., & Gao, W. (2021). Modelling Insurance Losses with a New Family of Heavy-Tailed Distributions. *Computers, Materials & Continua*, **62**

Klugman, S. A., Panjer, H. H., & Willmot, G. E. (2012). *Loss models: from data to decisions* (Vol. 715). John Wiley & Sons,**23-24**

Punzo, A., Bagnato, L., & Maruotti, A. (2018). Compound unimodal distributions for insurance losses. *Insurance: Mathematics and Economics*,**70**