

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Οι μη κεντρικές t , F , και X^2 κατανομές και οι
εφαρμογές τους στην Βιοστατιστική.

ΗΛΙΑΣ ΚΟΖΙΟΚΟΣ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου

Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος

Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς, 2023

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή και ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Γεώργιος Τζαβελάς (Αναπληρωτής Καθηγητής, Επιβλέπων)
- Κωνσταντίνος Πολίτης (Αναπληρωτής Καθηγητής)
- Ευαγγελάρας Χαράλαμπος (Αναπληρωτής Καθηγητής)

UNIVERSITY OF PIRAEUS
School of Finance and Statistics



DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN APPLIED STATISTICS

The non-central t , F and X^2 distributions and their use in
Biostatistics.

By
ILIAS KOZIOKOS

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the
University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of
Master of Science in Applied Statistics.

Piraeus, Greece 2023

Στην γυναίκα μου Δήμητρα.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Σε όλη την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας, υπήρξαν πολλά αγαπημένα πρόσωπα, που βοήθησαν και στήριξαν την προσπάθεια αυτή και στάθηκαν δίπλα μου. Ένα θερμό ευχαριστώ σε όλους τους συναδέλφους, τους φίλους και την οικογένειά μου που με την υπομονή τους με βοήθησαν να ανταπεξέλθω σε όλες τις δυσκολίες. Ένα μεγάλο ευχαριστώ ιδιαίτερα στην γυναίκα μου Δήμητρα, χωρίς την πολύτιμη βοήθειά της δεν θα τα είχα καταφέρει.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Γεώργιο Τζαβελά, Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς για τις πολύτιμες γνώσεις και την καθοδήγησή του καθ' όλη την διάρκεια της διπλωματικής εργασίας μου, καθώς και τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, τους κυρίους Κωνσταντίνο Πολίτη, Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, και Ευαγγελάρα Χαράλαμπο, Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την επίβλεψή τους.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής είναι η ενδεδειγμένη παρουσίαση των μη-κεντρικών κατανομών t , F , και X^2 τόσο θεωρητικά όσο και μέσω διαφόρων εφαρμογών.

Ως μη-κεντρική κατανομή ορίζουμε μια οικογένεια κατανομών που συσχετίζεται με άλλες κεντρικές οικογένειες κατανομών, μέσω μιάς παραμέτρου μη-κεντρικότητας. Ενώ η κεντρική κατανομή περιγράφει έναν στατιστικό έλεγχο υποθέσεων που αποδέχεται την μηδενική υπόθεση, η μη-κεντρική κατανομή περιγράφει έναν στατιστικό έλεγχο υποθέσεων που απορρίπτει την μηδενική (άρα η εναλλακτική υπόθεση είναι αληθής). Ο προηγούμενος ισχυρισμός συνεπικουρεί στον υπολογισμό της στατιστικής ισχύος.

Στην εν λόγω διπλωματική θα παρουσιαστούν οι ορισμοί και οι ιδιότητες της κάθε κατανομής ξεχωριστά στην στατιστική και την θεωρία πιθανοτήτων, καθώς και οι γραφικές παραστάσεις αυτών. Στο πρώτο κεφάλαιο θα γίνει μια πρώτη εισαγωγή στο τι είναι οι μη κεντρικές κατανομές και πιο συγκεκριμένα με ποιες θα ασχοληθούμε. Στην συνέχεια, στο δεύτερο κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η μη-κεντρική X^2 κατανομή, στο τρίτο η μη-κεντρική F και στο τέταρτο η μη-κεντρική t κατανομή. Επιπλέον, στο τελευταίο κεφάλαιο θα δοθεί μια εφαρμογή στον κλάδο της Βιοστατιστικής.

ABSTRACT

In the Diploma Thesis the non-central t , F and X^2 distributions are examined in both theoretical and practical level.

Noncentral distributions are families of probability distributions that are related to other "central" families of distributions by means of a noncentrality parameter. Whereas the central distribution describes how a test statistic is distributed when the difference tested is null, noncentral distributions describe the distribution of a test statistic when the null is false (so the alternative hypothesis is true). This leads to their use in calculating statistical power.

Our thesis will present the definitions and main features of each distribution in statistics and probability theory, along with the graphical representations. The first chapter will be an introduction to the definition of the non central distributions and more precisely the ones what we will discuss. At the second chapter, the non centras X^2 is examined, in the third the non central F and in the forth the non central t distribution. Additionally, their applications in Biostatistics will be also included in the last chapter.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	23
2	Η μη-κεντρική X^2 κατανομή	25
2.1	Ορισμός	25
2.2	Συνάρτηση Κατανομής - Συνάρτηση Πυκνότητας	29
2.3	Γεννήτριες Συναρτήσεις	41
2.4	Εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας	44
2.5	Εφαρμογές	48
2.5.1	Η ισχύς ενός ελέγχου	48
2.5.2	Έλεγχος X^2 καλής προσαρμογής	50
2.5.3	Η χρησιμότητα της ισχύος στον έλεγχο καλής προσαρμογής X^2	55
2.5.4	Μια καλύτερη προσέγγιση της συνάρτησης ισχύος στον έλεγχο καλής προσαρμογής X^2	59
2.5.5	Υπό όρους συνάρτηση ισχύος	61
3	Η μη-κεντρική F κατανομή	63
3.1	Εισαγωγή	63
3.2	Ιδιότητες Κατανομής	66
3.3	Εκτίμηση της παραμέτρου μη-κεντρικότητας	75
3.4	Σχετικές κατανομές	79
3.4.1	Διπλά μη-κεντρική F κατανομή	79

3.5	Εφαρμογές	81
3.5.1	Εκτίμηση της συνάρτησης ισχύος	81
3.5.2	Η διαφορά μεταξύ συστηματικών και τυχαίων επιδράσεων	84
3.5.3	Εφαρμογές της συνάρτησης ισχύος	88
4	Η μη-κεντρική t κατανομή	95
4.1	Ορισμός	95
4.2	Συνάρτηση Πυκνότητας	97
4.3	Γεννήτριες Συναρτήσεις	102
4.4	Σχετικές κατανομές	103
4.4.1	Διπλά μη-κεντρική t κατανομή	103
4.4.2	Τροποποιημένη μη-κεντρική t κατανομή	104
4.4.3	Η κατανομή της μη-κεντρικής t όταν ο πληθυσμός είναι μη-κανονικός	104
4.5	Εφαρμογές	106
4.5.1	Η ισχύς του ελέγχου	109
4.5.2	Σχέδια δειγματοληψίας αποδοχής μεταβλητών	113
4.5.3	Διάστημα ανοχής	116
4.5.4	Όρια εμπιστοσύνης πιθανοτήτων ουράς	117
4.5.5	Όρια για τις παραμέτρους ελέγχου διεργασίας	119
4.5.6	Όρια εμπιστοσύνης για τον συντελεστή διακύμανσης	121
5	Εφαρμογές στην Βιοστατιστική	123
5.1	Παράλληλος σχεδιασμός δύο ομάδων	123
5.1.1	Σχεδιασμός δύο ομάδων: Έλεγχος για ισότητα	124
5.1.2	Σχεδιασμός δύο ομάδων: Έλεγχος για μη-κατωτερότητα/ανωτερότητα	128
5.1.3	Σχεδιασμός δύο ομάδων: Έλεγχος για ισοδυναμία	130

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Σ.π.π. και σ.κ μιας κεντρικής και μιας μη-κεντρικής X^2 κατανομής με $\nu = 3$ βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη-κεντρικότητας $\lambda = 2$	31
2.2	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μη-κεντρικών X^2 κατανομών για $\lambda = 3$	38
2.3	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μη-κεντρικών X^2 κατανομών για $\lambda = 5$	39
2.4	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κεντρικών X^2 κατανομών για $\lambda = 0$	39
2.5	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κεντρικών $X_0'^2$ κατανομών για $\lambda \leq 2$	40
2.6	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κεντρικών $X_0'^2(\lambda)$ κατανομών για $\lambda \geq 2$	41
2.7	Ο λόγος των ασυμπτωματικών διασπορών ARE για διάφορες τιμές του λ	46
2.8	Ο λόγος των ασυμπτωματικών διασπορών ARE για διάφορες τιμές του ν και $\lambda = 0.5$ και $\lambda = 2$	47
2.9	Ένταση κινδύνου μιας μη-κεντρικής $X'^2(\lambda)$ κατανομής για $\lambda = 0.5$	48
2.10	Ένταση κινδύνου μιας μη-κεντρικής $X'^2(\lambda)$ κατανομής για $\lambda = 2$	48
2.11	Έλεγχος Υποθέσεων - Κανονική κατανομή	49
2.12	Έλεγχος X^2 καλής προσαρμογής $\nu = 5$ βαθμούς ελευθερίας και επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$	58
2.13	Συνάρτηση ισχύος για τον έλεγχο X^2 καλής προσαρμογής με $\nu = 5$ βαθμούς ελευθερίας και επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$	58
2.14	Συνάρτηση ισχύος για τον έλεγχο X^2 καλής προσαρμογής για διαφορετικά επίπεδα σημαντικότητας και $\nu = 5$ βαθμοί ελευθερίας.	59
3.1	Σ.π.π. και σ.κ μιας κεντρικής και μιας μη-κεντρικής F κατανομής με $\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 10$ βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη-κεντρικότητας $\lambda = 2$	66

3.2	Τρισδιάστατο διάγραμμα για τον συντελεστή ασυμμετρίας μιας μη-κεντρικής F κατανομής.	69
3.3	Τρισδιάστατο διάγραμμα για τον συντελεστή κύρτωσης μιας μη-κεντρικής F κατανομής.	70
3.4	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μη-κεντρικών F κατανομών.	74
3.5	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μη-κεντρικών F κατανομών.	75
3.6	Καμπύλες ισχύος για τυχαίες και συστηματικές επιδράσεις για k ομάδες με n τυχαίες παρατηρήσεις σε κάθε ομάδα.	87
3.7	Περιγράμματα ίσης ισχύος για τον έλεγχο ανάλυσης διασποράς με τη συστηματική ρύθμιση για $\alpha = 0.05$, και ισχύς $f(\nu_1, \nu_2, \lambda) = 0.5$.	90
3.8	Περιγράμματα ίσης ισχύος για τον έλεγχο ανάλυσης διασποράς με τη συστηματική ρύθμιση για $\alpha = 0.05$, και ισχύς $f(\nu_1, \nu_2, \lambda) = 0.9$.	91
3.9	Έλεγχος F για την ανισότητα δύο διακύμανσης με $\alpha = 5\%$ και ισχύς $f(\nu_1, \nu_2, \lambda) = 0.5$.	92
3.10	Έλεγχος F για την ανισότητα δύο διακύμανσης με $\alpha = 5\%$ και ισχύς $f(\nu_1, \nu_2, \lambda) = 0.5$.	92
3.11	Συνάρτηση ισχύος για την ανισότητα δύο διακύμανσης για διαφορετικά επίπεδα σημαντικότητας.	93
4.1	Σ.π.π. και σ.κ μιας κεντρικής και μιας μη-κεντρικής t κατανομής με $\nu = 3$ βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη-κεντρικότητας $\lambda = 2$.	97
4.2	Έλεγχος t για την ισότητα δύο μέσων με $\alpha = 5\%$.	111
4.3	Συνάρτηση ισχύος για την ισότητα δύο μέσων για διαφορετικά επίπεδα σημαντικότητας.	112
5.1	Σχέση ισχύος με το μέγεθος του δείγματος στην περίπτωση του ελέγχου για ισότητα	126
5.2	Σχέση ισχύος με το μέγεθος του δείγματος στην περίπτωση του ελέγχου για μη-κατωτερότητα / ανωτερότητα	129
5.3	Σχέση ισχύος με το μέγεθος του δείγματος στην περίπτωση του ελέγχου για ισοδυναμία	132

Κατάλογος Πινάκων

2.4.1 Ο λόγος των ασυμπτωματικών διασπορών ARE για $\lambda \in [1,5]$, και $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$	46
2.4.2 Ο λόγος των ασυμπτωματικών διασπορών ARE για διάφορες τιμές του ν και $\lambda = 0.5$ και $\lambda = 2$	46
2.5.1 Έλεγχος Υποθέσεων	49
2.5.2 Η ισχύς του ελέγχου X^2 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$	50
2.5.3 Έλεγχος X^2 καλής προσαρμογής για διαφορετικά επίπεδα σημαντικότητας και $\nu = 5$ βαθμοί ελευθερίας.	59
3.5.1 Συνάρτηση ισχύος για την ανισότητα δύο διακύμανσης για διαφορετικά επίπεδα σημαντικότητας.	93
4.5.1 Συνάρτηση ισχύος για την ισότητα δύο διακύμανσης για διαφορετικά επίπεδα σημαντικότητας.	112
5.1.1 Διάφορες τιμές των α, β και $\lambda = \frac{ \varepsilon }{\sigma}$	127

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Ως μη-κεντρική κατανομή ορίζουμε μια οικογένεια κατανομών που συσχετίζεται με άλλες κεντρικές οικογένειες κατανομών, μέσω μιάς παραμέτρου μη-κεντρικότητας. Αξίζει να σημειωθεί ότι, ενώ η κεντρική κατανομή περιγράφει έναν στατιστικό έλεγχο υποθέσεων που αποδέχεται την μηδενική υπόθεση, η μη-κεντρική κατανομή αντίστοιχα, έναν στατιστικό έλεγχο υποθέσεων που απορρίπτει την μηδενική (άρα η εναλλακτική υπόθεση είναι αληθής). Ο προηγούμενος ισχυρισμός συνεπικουρεί στον υπολογισμό της στατιστικής ισχύος.

Γενικά, μια παράμετρος μη-κεντρικότητας υπεισέρχεται σε κατανομές που αποτελούν μετασχηματισμούς μιας κανονικής κατανομής. Αυτοί οι μετασχηματισμοί ορίζονται από μη-κεντρικές παραμέτρους. Οι κεντρικές κατανομές προέρχονται από την κανονική κατανομή με μέσο ίσο με το μ . Εάν μια παράμετρος μη-κεντρικότητας είναι μηδέν, τότε αυτές είναι κεντρικές κατανομές. Αν η εν λόγω παράμετρος είναι διαφορά του μηδενός, τότε ακολουθεί μια μη-κεντρική κατανομή. Στην παρούσα διπλωματική θα αναλυθούν εκτενέστερα οι μη-κεντρικές κατανομές t , F και X^2 .

Αρχικά, στο Κεφάλαιο 2 θα αναλυθεί η μη-κεντρική X^2 κατανομή. Η κατανομή αυτή επικράτησε κυρίως λόγω του Fisher (1928), ο οποίος όρισε ένα 5% άνω όριο της κατανομής για συγκεκριμένες τιμές των ν και λ , ως μια περίπτωση περιορισμού της κατανομής του πολλαπλού συντελεστή συσχέτισης. Ο Patnaik (1949) τόνισε την συνάφεια της κατανομής αυτής με τον κατά προσέγγιση προσδιορισμό της ισχύος του X^2 -test και πρότεινε προσεγγίσεις για τη μη-κεντρική κατανομή. Σύμφωνα με τον Patnaik, η μη-κεντρική κατανομή X^2 μπορεί να θεωρηθεί ως μια γενικευμένη κατανομή Rayleigh, γνωστή και ως κατανομή Rayleigh-Rice ή Rice. Σε αυτή της την μορφή παρουσιάζεται στην μαθηματική φυσική. Η μη-κεντρική X^2 κατανομή έχει αξιοσημείωτο αντίκτυπο ακόμα και στην θεωρία της επικοινωνίας. Σε αυτό το πλαίσιο, η μη-

κεντρική συνάρτηση κατανομής X^2 ονομάζεται συνάρτηση Marcum Q-function και η παράμετρος μη-κεντρικότητας απεικονίζει το λόγο της ισχύος του σήματος προς την ισχύ του θορύβου (signal-to-noise).

Η μη-κεντρική Βήτα κατανομή, ο οποία σχετίζεται με τη μη-κεντρική F , προήλθε από τον Fisher (1928) σε σχέση με την έρευνά του πάνω στην κατανομή του πολλαπλού συντελεστή συσχέτισης. Για τον λόγο αυτό, στο Κεφάλαιο 3 θα αναλύθει η μη-κεντρική F κατανομή. Οι ιδιότητές της παρουσιάστηκαν εκτενέστερα από τον Wishart (1932), ενώ η ίδια η μη-κεντρική κατανομή F προήλθε από τον Tang (1938), αν και ο Patnaik (1949) φαίνεται να είναι ο πρώτος που της απέδωσε την ονομασία αυτή. Ο Tang χρησιμοποίησε ακόμα την διπλά μη-κεντρική F κατανομή (αν και χωρίς την χρήση αυτής της ονομασίας) σε μελέτες των ιδιοτήτων των δοκιμών ανάλυσης διακύμανσης κάτω από μη-τυπικές συνθήκες. Επιπλέον, μια γενική περιγραφή της κατανομής και των εφαρμογών της σε γραμμικά μοντέλα έδωσαν οι Odeh και Fox (1975).

Στο Κεφάλαιο 4 θα παρουσιαστεί ενδελεχώς η μη-κεντρική t κατανομή. Η μη-κεντρική t κατανομή προήλθε (αν και όχι με αυτή την ονομασία) από τον Fisher (1931), ο οποίος έδειξε πως θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν πίνακες επαναλαμβανόμενων μερικών ολοκληρωμάτων υπό την τυπική κανονική κατανομή σε σχέση με την κατανομή αυτή. Οι πίνακες που δώθηκαν από τους Neyman, Iwazskiewicz και Kolodziejczyk (1935) και από τους Neyman και Tokarska (1936) βασίστηκαν στην αξιολόγηση των ακραίων πιθανοτήτων ορισμένων μη-κεντρικών t κατανομών. Οι πίνακες από τους οποίους θα μπορούσαν να ληφθούν ποσοστιαίες μονάδες μη-κεντρικών t κατανομών δόθηκαν από τους Johnson και Welch. Οι τυπικές εκφράσεις για την συνάρτηση κατανομής της t είναι μάλλον πιο περίπλοκες από αυτές για τις μη-κεντρικές F και X^2 . Αρκετοί διαφορετικοί τύποι δώθηκαν από τον Amos (1964), ενώ έχει επίσης προταθεί ένας αριθμός προσεγγίσεων για ολοκληρώματα πιθανότητας και για ποσοστιαίες μονάδες μη-κεντρικών t κατανομών. Συγκρίσεις διαφόρων προσεγγίσεων για ποσοστιαίες μονάδες έχουν γίνει από τους Eeden (1961) και Owen (1963).

Τέλος, στο Κεφάλαιο 5 θα παρουσιαστούν κάποια παραδείγματα στον κλάδο της Βιοστατιστικής. Θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό του μεγέθους του δείγματος που απαιτείται για να έχουμε ισχύ $1 - \beta$, στην περίπτωση που εξετάζουμε δύο δείγματα. Το ένα δείγμα αφορά την ομάδα ατόμων, στην οποία εφαρμόζεται η πειραματική θεραπεία και το άλλο αφορά την ομάδα ατόμων, στην οποία εφαρμόζεται η καθιερωμένη θεραπεία. Πιο συγκεκριμένα θα αναλυθεί η περίπτωση του παράλληλου σχεδιασμού δύο ομάδων με τον έλεγχο ισότητας, έλεγχο για μη κατωτερότητα/ανωτερότητα και έλεγχο ισοδυναμίας.

Κεφάλαιο 2

Η μη-κεντρική X^2 κατανομή

2.1 Ορισμός

Αν Z_1, Z_2, \dots, Z_n είναι n ανεξάρτητες τυποποιημένες κανονικές τυχαίες μεταβλητές, δηλαδή, αν $Z_i \sim N(0,1)$, $i = 1, 2, \dots, n$, τότε η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής:

$$X = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2 \quad (2.1)$$

ονομάζεται κατανομή X^2 με n βαθμούς ελευθερίας και συμβολίζεται X_n^2 .

Έστω τώρα ότι U_1, U_2, \dots, U_ν είναι ανεξάρτητες κανονικές μεταβλητές με κοινή διασπορά $\sigma^2 = 1$ και $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\nu$ σταθερές, τότε η κατανομή:

$$\sum_{j=1}^{\nu} (U_j + \delta_j)^2 \quad (2.2)$$

εξαρτάται από τις σταθερές $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\nu$ μόνο μέσω του αθροίσματος των τετραγώνων τους. Η κατανομή αυτή ονομάζεται μη-κεντρική X^2 κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας με παράμετρο μη-κεντρικότητας $\lambda = \sum_{j=1}^{\nu} \delta_j^2$.

Η μη-κεντρική X^2 κατανομή, παρουσιάζεται συνήθως με το σύμβολο $X_\nu'^2(\lambda)$. Το σύμβολο X_ν^2 δηλώνει μια κεντρική X^2 μεταβλητή με ν βαθμούς ελευθερίας, η οποία έχει την ίδια κατανομή με την $\sum_{j=1}^{\nu} U_j^2$. Στην πραγματικότητα, όταν $\lambda=0$, η μη-κεντρική X^2 κατανομή μετατρέπεται σε X^2 κεντρική κατανομή.

Στην παρούσα διπλωματική, και σύμφωνα με τα παραπάνω δεδομένα, τα σύμβολα ν και λ μπορούν να παραληφθούν και να χρησιμοποιηθεί μόνο το σύμβολο $X_\nu'^2$ (ο τόνος παραμένει για να δηλώσει την «μη-κεντρικότητα»).

Η μη-κεντρική κατανομή X^2 είναι η κατανομή του αθροίσματος τετραγώνων συνάρτησης S :

$$S = \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2,$$

όπου

$$\bar{X} = n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j$$

και X_1, X_2, \dots, X_n ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, με $X_j \sim N(\xi_j, \sigma)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Συνεπώς, προκύπτει ότι:

$$X_j = \xi_j + \sigma Z'_j,$$

όπου Z'_j ανεξάρτητες τυχαίες κανονικές μεταβλητές $N(0,1)$. Τότε,

$$S = \sigma^2 \sum_{j=1}^n \{Z'_j + \xi_j \sigma^{-1} - (\bar{Z}' + \bar{\xi} \sigma^{-1})\}^2,$$

όπου

$$\bar{Z}' = n^{-1} \sum_{j=1}^n Z'_j,$$

$$\bar{\xi} = n^{-1} \sum_{j=1}^n \xi_j.$$

Έστω οι ανεξάρτητες κανονικές τυχαίες μεταβλητές Z_1, \dots, Z_{n-1} και έστω ότι τα Z'_1, \dots, Z'_n της παραπάνω σχέσης αντικαθίστανται από τα $Z_1, \dots, Z_{n-1}, \bar{Z}'$, έτσι ώστε:

$$\sum_{j=1}^n (Z'_j - \bar{Z}')^2 = \sum_{j=1}^{n-1} Z_j^2,$$

τότε προκύπτει άμεσα ότι:

$$S = \sigma^2 \sum_{j=1}^{n-1} (Z_j + \delta_j)^2,$$

όπου δ_j είναι γραμμικές συναρτήσεις των ξ_j , και Z_j γραμμικές συναρτήσεις των Z'_j , για $j = 1, 2, \dots, n-1$.

Στην περίπτωση που, $Z'_j = 0$ για κάθε j , προκύπτει άμεσα ότι $Z_j = 0$ για κάθε j και επακόλουθα ότι

$$\sum_{j=1}^{n-1} \delta_j^2 = \sum_{j=1}^n (\xi_j - \bar{\xi})^2 / \sigma^2.$$

Εν κατακλείδι, η συνάρτηση S κατανέμεται σ^2 φορές ως μια συνάρτηση X^2 με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη-κεντρικότητας

$$\sum_{j=1}^n (\xi_j - \bar{\xi})^2 / \sigma^2,$$

που ορίζεται ως

$$\sigma^2 X_{n-1}^2 \left(\sum_{j=1}^n (\xi_j - \bar{\xi})^2 / \sigma^2 \right).$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 2.1 Η εύρεση της πυκνότητας πιθανότητας της $X_n^2(p)$ θα γίνει μέσω της υπεργεωμετρικής σειράς:

$${}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!} \quad (2.3)$$

όπου $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$.

ΛΗΜΜΑ 2.1

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)\right)} \int_0^x e^{z \cos \theta} \sin^{n-2} \theta d\theta = {}_0F_1\left(\frac{1}{2}n; \frac{1}{4}z^2\right) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^k}{\left(\frac{1}{2}n\right)_k k!} \quad (2.4)$$

ΛΗΜΜΑ 2.2

$$\int_0^{\infty} e^{zt} t_p^{\alpha-1} F_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; b_1, \dots, b_q; kt) dt = \Gamma(\alpha) z_p^{-\alpha} F_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; b_1, \dots, b_q; kz^{-1}) \quad (2.5)$$

για

$$p < q, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

ή

$$p = q, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(k).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1 Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την $N_n(\mu, I_n)$, τότε η τυχαία μεταβλητή $Z = X'X$ έχει συνάρτηση πιθανότητας:

$$e^{-\delta/2} {}_0F_1\left(\frac{1}{2}n; \frac{1}{4}\delta z\right) \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} e^{-z/2} z^{n/2-1}, \quad z > 0, \quad (2.6)$$

όπου $\delta = \mu' \mu$. Τότε η τυχαία μεταβλητή Z ακολουθεί την μη-κεντρική X^2 κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη-κεντρικότητας λ , και συμβολίζεται $X_n^2(\delta)$.

Απόδειξη: Έστω $Y = HX$, όπου H είναι ένας πίνακας $n \times n$ όπου τα στοιχεία στην πρώτη γραμμή είναι:

$$\frac{\mu}{(\mu' \mu)^{1/2}} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Τότε η Y ακολουθεί την $N_n(\nu, I_n)$ με $\nu = (\delta^{1/2}, 0, \dots, 0)'$, έτσι ώστε:

$$Z = X'X = Y'Y_1^2 + U,$$

όπου $U = \sum_{i=2}^n Y_i^2$ ακολουθεί την X_{n-1}^2 και είναι ανεξάρτητη από την Y_1 , η οποία ακολουθεί την $N(\delta^{1/2}, 1)$.

Συνεπώς, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των Y_1 και U , είναι:

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y_1 - \delta^{1/2})^2\right] \frac{1}{2^{(n-1)/2} \Gamma\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]} \exp\left(-\frac{1}{2}u\right) u^{(n-3)/2}.$$

Ορίζουμε τις κάτωθι συναρτήσεις:

$$y_1 = z^{1/2} \cos\theta \quad (0 < z < \infty, 0 < \theta < \pi)$$

$$u = z \sin^2\theta$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα μπορεί εύκολα να υπολογισθεί ως $z^{1/2} \sin\theta$, έτσι ώστε η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των Z και θ , είναι:

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\delta\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]} \exp(z^{1/2}\delta^{1/2}\cos\theta) \sin^{n-2}\theta \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} \exp\left(-\frac{1}{2}z\right) z^{n/2-1}.$$

Αν ολοκληρώσουμε ως προς θ , $0 < \theta < \pi$, χρησιμοποιώντας το Λήμμα (2.1), προκύπτει η επιθυμητή συνάρτηση πυκνότητας της Z .

□

Ένας εναλλακτικός τρόπος έκφρασης της μη-κεντρικής X^2 κατανομής είναι ως μείξη των κεντρικών X^2 κατανομών όπου τα βάρη είναι πιθανότητες Poisson. Το αποτέλεσμα είναι συχνά χρήσιμο στην διερεύνηση κατανομών συναρτήσεων τυχαίων μεταβλητών όπου μια ή περισσότερες από αυτές είναι μη-κεντρικές X^2 , όπως παρουσιάζεται στο κάτωθι συμπέρασμα, το οποίο προκύπτει άμεσα μέσω του Θεωρήματος (2.1).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 2.1 Αν η τυχαία μεταβλητή Z ακολουθεί την κατανομή X^2 , τότε η συνάρτηση πυκνότητας της Z μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(K = k) g_{n+2k}(z), \quad (z > 0),$$

όπου η τυχαία μεταβλητή K προέρχεται από μια Poisson με μέση τιμή $\delta/2$, έτσι ώστε:

$$P(K = k) = \frac{e^{\delta/2} \left(\frac{1}{2}\delta\right)^k}{k!}, \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (2.7)$$

και

$$g_r(z) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(\frac{r}{2})} e^{-\frac{r}{2}z} z^{\frac{r}{2}-1} \quad (2.8)$$

η συνάρτηση πυκνότητας της X^2 κατανομής.

2.2 Συνάρτηση Κατανομής - Συνάρτηση Πυκνότητας

Η μη-κεντρική X^2 κατανομή, όπως η κεντρική X^2 και η X κατανομή, είναι μια συνεχής κατανομή στο $(0, \infty)$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής δεν έχουν απλές εκφράσεις, αλλά υπάρχει μια ενδιαφέρουσα σύνδεση με την κατανομή Poisson.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2 Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της $X_\nu^2(\lambda)$ είναι:

$$\begin{aligned} P[X_\nu^2(\lambda) \leq x] &= F(x; \nu, \lambda) \\ &= e^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}\lambda)^j / j!}{2^{(\nu/2)+j}\Gamma(\frac{1}{2}\nu + j)} \int_0^x y^{(\nu/2)+j-1} e^{-y/2} dy, \quad x > 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

όπου $F(x; \nu, \lambda) = 0$ για $x < 0$. [Patnaik (1949)]

□

Η συνάρτηση $F(x; \nu, \lambda)$ για $x > 0$ μπορεί εύκολα να εκφραστεί ως ένα σταθμισμένο άθροισμα κεντρικών X^2 πιθανοτήτων με βάρη ίσα με τις πιθανότητες μιας Poisson κατανομής με μέση τιμή $\frac{1}{2}\lambda$.

Συνεπώς:

$$\begin{aligned} F(x; \nu, \lambda) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\frac{1}{2}\lambda)^j}{j!} e^{-\lambda/2} \right\} Pr[X_{\nu-2j}^2 \leq x] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(\frac{1}{2}\lambda)^j}{j!} e^{-\lambda/2} \right] F(x; \nu + 2j, 0). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Η $X_\nu^2(\lambda)$ μπορεί να οριστεί ως μια μείξη X^2 μεταβλητών. Αυτή η ερμηνεία είναι συχνά χρήσιμη στον προσδιορισμό της κατανομής των συναρτήσεων των τυχαίων μεταβλητών, όπου μερικές (ή όλες) είναι μη-κεντρικές X^2 μεταβλητές.

Με παρόμοιο τρόπο, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μπορεί να εκφραστεί ως μια μείξη κεντρικών X^2 συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας:

$$\begin{aligned}
p(x; \nu, \lambda) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\frac{1}{2}\lambda)^j}{j!} e^{-\lambda/2} \right\} p(x; \nu + 2j, 0) \\
&= \frac{\exp\{-\frac{1}{2}(\lambda + x)\}}{2^{\nu/2}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{4}\right)^j \frac{x^{(\nu/2)+j-1}}{j! \Gamma(\frac{1}{2}\nu + j)} \\
&= e^{-(\lambda+x)/2} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{(\nu-2)/4} I_{(\nu-2)/2}(\sqrt{\lambda x}), \quad x > 0,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

όπου,

$$I_{\alpha}(y) = \left(\frac{1}{2}y\right)^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(y^2/4)^j}{j! \Gamma(\alpha + j + 1)}.$$

είναι η πρώτη τάξης του α τροποποιημένη συνάρτηση Bessel.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3 *Ας υποθέσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή N ακολουθεί την κατανομή Poisson $(\lambda/2)$, $\lambda \in (0, \infty)$ και ότι κατανομή της Y δεδομένου N είναι X^2 με $n+2N$ βαθμούς ελευθερίας, όπου $n \in (0, \infty)$. Τότε, η κατανομή της Y είναι η μη-κεντρική X^2 κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη-κεντρικότητας λ .*

Απόδειξη: Για $j \in \mathbb{N}_+$, όπου f_j ας υποδηλώσει την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X^2 κατανομής με j βαθμούς ελευθερίας. Συνεπώς, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας g της Y δίνεται από την σχέση:

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = k) f_{n+2k}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^k}{k!} f_{n+2k}(y), \quad y \in (0, \infty)$$

η οποία είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μη-κεντρικής X^2 κατανομής με n βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη-κεντρικότητας λ .

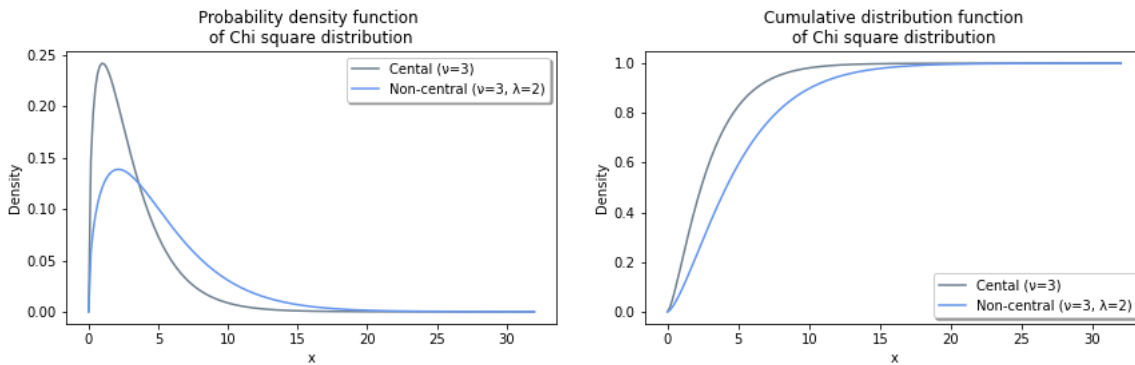
□

Έστω τώρα ότι οι συμβολισμοί f και F υποδηλώστε την πυκνότητα πιθανότητας και την συνάρτηση κατανομής της X^2 κατανομής με $k \in (0, \infty)$ βαθμούς ελευθερίας. Ας υποθέσουμε ότι η Y ακολουθεί την μη-κεντρική κατανομή X^2 με $n \in \mathbb{N}_+$ βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη-κεντρικότητας $\lambda \in (0, \infty)$. Το ακόλουθο θεμελιώδες θεώρημα δίνει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως άπειρη σειρά και δείχνει ότι η κατανομή στην πραγματικότητα εξαρτάται μόνο από τους βαθμούς ελευθερίας και την παράμετρο μη-κεντρικότητας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4 Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας g της \mathcal{T} , δίνεται από την σχέσης:

$$\begin{aligned} g(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^k}{k!} f_{n+2k}(y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^k}{k!} \frac{1}{2^{(2k+1)/2} \Gamma[(2k+1)/2]} y^{(2k+1)/2-1} e^{-y/2}, \quad y \in (0, \infty) \end{aligned} \quad (2.12)$$

(Απόδειξη: βλ. <https://www.randomservices.org/random/special/ChiSquare.html#non>).



Σχήμα 2.1: Σ.π.π. και σ.κ μιας κεντρικής και μιας μη-κεντρικής X^2 κατανομής με $\nu = 3$ βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη-κεντρικότητας $\lambda = 2$.

Η κατανομή X^2 μπορεί να προκύψει με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Στην συνέχεια του κεφαλαίου θα παρουσιαστούν διάφορες εναλλακτικές μορφές για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και την συνάρτηση κατανομής της μη-κεντρικής X^2 κατανομής.

- Ο Fisher (1928) έδωσε μια έμμεση ερμηνεία, μέσω της περιοριστικής διαδικασίας. Η πρώτη άμεση ερμηνεία δόθηκε από τον Tang (1938). Επιπλέον, γεωμετρικές ερμηνείες έχουν δοθεί από τους Patnaik (1959), Ruben (1960) και Guenther (1964). Είναι επίσης εφικτό να προκύψει η κατανομή με μια διαδικασία επαγωγής, λαμβάνοντας πρώτα την κατανομή της $X_1'^2(\lambda)$ και στην συνέχεια μέσω της σχέσης:

$$X_\nu'^2(\lambda) = X_1'^2(\lambda) + X_{\nu-1}'^2, \quad (2.13)$$

όπου τα κεντρικά και μη-κεντρικά X^2 είναι αμοιβαία ανεξάρτητα στο δεξιό μέρος.

- Ο Hjort (1989) χρησιμοποίησε μια εναλλακτική σχέση:

$$X_\nu'^2(\lambda) = Z_\lambda + X_\nu^2, \quad (2.14)$$

όπου Z_λ είναι το 'καθαρό έκκεντρο μέρος' (ή καθαρά μη-κεντρικό μέρος) της $X_\nu'^2(\lambda)$ και ακολουθεί την μη-κεντρική κατανομή X^2 με μηδέν βαθμούς ελευθερίας (και μη-κεντρικότητας λ), με συνάρτηση κατανομής:

$$F(Z) = Pr[Z_\lambda \leq z] = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\frac{1}{2}\lambda)^j}{j!} e^{-\lambda/2} \right\} Pr[X_{2j}^2 \leq z], \quad z \geq 0, \quad (2.15)$$

όπου $Pr[X_0^2 \leq z] = 1$ για κάθε z .

- Η πρώτη αναφορά στην μη-κεντρική X^2 κατανομή με μηδέν βαθμούς ελευθερίας, έγινε από τον Torgerson (1972).

Σε αυτό το σημείο, αξίζει να τονιστεί ότι σε πρώτο στάδιο παρουσιάστηκαν οι πιο ευρέως χρησιμοποιούμενοι τύποι τόσο για την συνάρτηση κατανομής, όσο και για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μη-κεντρικής X^2 κατανομής. Στην συνέχεια, θα αναλυθούν κάποιοι εναλλακτικοί τύποι αυτών.

Θεωρώντας ν έναν ακέραιο αριθμό, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής του $X'_\nu{}^2(\lambda)$ μπορεί να εκφραστεί μέσω κατάλληλων βοηθητικών συναρτήσεων. Χρησιμοποιώντας τη σχέση μεταξύ του ολοκληρώματος μιας $X'_\nu{}^2$ κατανομής (με ν άρτιο) και του αθροίσματος Poisson πιθανοτήτων, προκύπτει ότι:

$$Pr[X'_\nu{}^2(\lambda) \leq x] = Pr[X_1 - X_2 \geq \frac{1}{2}\nu] \quad (2.16)$$

όπου X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες Poisson μεταβλητές με παράμετρο $\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}\lambda$ αντίστοιχα.

Από τα ανωτέρω, συνεπάγεται ότι, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $X'_\nu{}^2(\lambda)$ μπορεί επίσης να εκφραστεί μέσω κατάλληλων βοηθητικών συναρτήσεων, με την προϋπόθεση ότι το μέγεθος του δείγματος ν είναι άρτιος. Ο ισχυρισμός αυτός ισχύει και όταν το μέγεθος του δείγματος ν είναι περιττός καθώς η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μπορεί να γραφεί μέσω μιας στοιχειώδης συνάρτησης ως εξής:

$$I_{m+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{m+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^m \left(\frac{\sinh z}{z} \right) \quad (m \text{ integer}) \quad (2.17)$$

- Ο Tiku (1965) διατύπωσε την παρακάτω συνάρτηση με την βοήθεια των γενικευμένων πολυωνύμων Laguerre ¹:

¹Στα μαθηματικά, τα πολυώνυμα **Laguerre**, που ονομάστηκαν από τον **Edmond Laguerre**, είναι λύσεις της εξίσωσης του **Laguerre**: που είναι γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. Αυτή η εξίσωση έχει μη μοναδικές λύσεις μόνο εάν το ν είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος.

$$L_j^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^j \frac{(-x)^j}{j!(j-1)!} \frac{\Gamma(j+m+1)}{\Gamma(i+m+1)}, \quad m > -1. \quad (2.18)$$

Βάσει της σχέσης 2.18, ο Tiku απέδειξε ότι μια μορφή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της $X_\nu'^2(\lambda)$ είναι η:

$$p(x;\nu,\lambda) = \frac{1}{2}e^{-x/2} \left(\frac{1}{2}x\right)^{(\frac{\nu}{2}-1)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2}\lambda)^j}{\Gamma(\frac{1}{2}\nu+j)} L_j^{(\frac{\nu}{2}-1)} \left(\frac{1}{2}x\right) \quad (2.19)$$

• Ένας εναλλακτικός τύπος για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $X_\nu'^2(\lambda)$ αποτυπώθηκε από τον Venables (1971):

$$p(x;\nu,\lambda) = e^{-\lambda/2} {}_0F_1\left(\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{4}\lambda x\right) \frac{e^{-x/2} x^{(\nu/2)-1}}{2\nu/2 \Gamma(\frac{1}{2}\nu)}, \quad x > 0. \quad (2.20)$$

• Η σχέση (2.9) της συνάρτησης κατανομής, τροποποιήθηκε από τους Bol'shev και Kuznetzov (1963) ως εξής:

$$F(x;\nu,\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}\lambda)^j}{j!} \Delta^j g_0 \quad (2.21)$$

όπου, $g_j = Pr[X_{\nu+2j}^2 \leq x]$ και $\Delta g_m = g_{m+1} - g_m$.

• Βασιζόμενοι στον τύπο του Tiku, οι Gideon και Gurland (1977) διατύπωσαν μια επέκταση της συνάρτησης κατανομής της $X_\nu'^2(\lambda)$ με την βοήθεια των πολυωνύμων Laguerre:

$$F(x;\nu,\lambda) \sim \int_0^{x_1} \frac{\lambda'^{\alpha+1} y^\alpha e^{-\lambda' y}}{\Gamma(\alpha+1)} dy + e^{-\lambda' x_1} (\lambda' x_1)^{(\alpha+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda'^k C_k \Gamma(k)}{\Gamma(\alpha+1+k)} L_{k-1}^{\alpha+1}(\lambda' x_1). \quad (2.22)$$

Οι παρακάτω συμβολισμοί $L_i, i = 0, 1, 2, 3$, αποτελούν μια επέκταση του τύπου (2.22), στον οποίο οι πρώτες i-ροπές των τυχαίων μεταβλητών L_i έχουν εξισωθεί με τις αντίστοιχες ροπές της $X_\nu'^2(\lambda)$. Το $L_n^{(\alpha)}(x)$ είναι το n-οστό γενικευμένο πολυώνυμο Laguerre, $x_1 = x + \theta$ και α, θ και λ' επιλέγονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{Για } L_0, \alpha + 1 &= \frac{\nu}{2}, \theta = 0, \lambda' = \frac{1}{2} \\ \text{Για } L_1, \alpha + 1 &= \frac{\nu}{2}, \theta = 0, \lambda' = \frac{\alpha + 1}{n(1 + \delta^2)} \end{aligned}$$

$$\text{Για } L_2, \alpha + 1 = \nu \lambda' (1 + \delta^2), \theta = 0, \lambda' = \frac{1 + \delta^2}{2(1 + 2\delta^2)}$$

$$\text{Για } L_3, \alpha + 1 = 2\nu \lambda'^2 (1 + 2\delta^2), \theta = 2n\lambda' (1 + 2\delta^2) - n(1 + \delta^2), \lambda' = \frac{1 + 2\delta^2}{2 + 3\delta^2} \text{ και } \delta^2 = \frac{\lambda}{\nu}.$$

Οι συντελεστές C_k , όπως παρουσιάζονται στην σχέση (2.26), υπολογίζονται αναδρομικά και οι τύποι τους δεν είναι ευρέως χρησιμοποιούμενοι. Συγκρίσεις μεταξύ των συναρτήσεων $L_i, i = 0, 1, 2, 3$ δείχνουν ότι για μεγάλη και μικρή μη-κεντρικότητας της παραμέτρου λ , η L_0, L_1 είναι προτιμότερες. Ως εκ τούτου, οι συναρτήσεις L_2, L_3 αποφέρουν εξίσου αποτελεσματικά αποτελέσματα. Μεταξύ των L_0, L_2, L_3 συναρτήσεων, η L_3 συνήθως έχει ακρίβεια της τάξεως του 60% για κ 1 έως 5, αλλά δύσκολα αυξάνει την ακρίβειά της. Όσο αφορά την συνάρτηση L_0 , συνήθως δίνει μικρότερη ακρίβεια για τα πρώτα 5 έως 10 μερικά αθροίσματα ($5 < \kappa < 10$), αλλά μετά από αυτά συγκλίνει ραγδαία στην πραγματική πιθανότητα.

• Ο Venables (1971) πρότεινε πολλές εναλλακτικές επεκτάσεις Laguerre για την $F(x; \nu, \lambda)$ του Laguerre. Η πιο διαδεδομένη είναι:

$$F(x; \nu, \lambda) = \Gamma_\beta \left(\frac{1}{2} \alpha x + b \right) - \gamma_{\beta+1} \left(\frac{1}{2} \alpha x + b \right) \sum_{j=1}^{\infty} d_j L_{j-1}^{(\beta)} \left(\frac{1}{2} \alpha x + b \right) \quad (2.23)$$

όπου

$$\alpha = (\nu + 2\lambda)(\nu + 3\lambda)^{-1},$$

$$b = \frac{1}{2} \lambda^2 (\nu + 2\lambda)(\nu + 3\lambda)^{-1} = \frac{1}{2} \lambda^2 \alpha,$$

$$\beta = \frac{1}{2} (\nu + 2\lambda)^3 (\nu + 3\lambda)^{-2},$$

$$\gamma_\alpha(x) = \left\{ \Gamma(\alpha)^{-1} \right\} x^{\alpha-1} e^{-x}, \quad x, \alpha > 0,$$

$$\Gamma_\alpha = \int_0^x \gamma_\alpha(t) dt,$$

$$d_j = \frac{j!}{(\beta)_j} \sum_{i=0}^j (1 - \alpha)^i L_i^{\beta-1} \left(\frac{1}{2} \lambda \alpha \right) L_{j-i}^{\beta-3-\frac{\nu}{2}}(b), \text{ όπου } (\beta)_j = \beta(\beta+1)\dots(\beta+j-1).$$

$$\text{με } (\beta)_j = \beta(\beta+1)\dots(\beta+j-1).$$

Η σύγκλιση είναι ραγδαία αν, είτε το ν είτε το λ είτε αμφότερα λαμβάνουν μεγάλες τιμές και δοθέντος ότι το x δεν είναι τόσο μικρό, θεωρούμε την $X_{\nu, 0.01}^{\prime 2}(\lambda)$.

• Ο Han (1975) απέδωσε τον παρακάτω τύπο, ο οποίος προϋποθέτει το μέγεθος του δείγματος ν να είναι περιττός αριθμός:

$$F(x; 2s + 1, \lambda) = F(x; 1, \lambda) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^i \binom{i-1}{j-1} 2^j F^{(j)}(x; 1, \lambda), \quad (2.24)$$

όπου $F(\cdot)$ δηλώνει την παράγωγο $\frac{d^j F(\cdot)}{d\lambda^j}$. Για $\nu = 3$ ($m = 1$), προκύπτει:

$$F(x;3,\lambda) = \Phi(\sqrt{\lambda} + \sqrt{x}) - \Phi(\sqrt{\lambda} - \sqrt{x}) + \lambda^{-\frac{1}{2}} \left\{ \phi(\sqrt{\lambda} + \sqrt{x}) - \phi(\sqrt{\lambda} - \sqrt{x}) \right\}, \quad (2.25)$$

όπου $\phi(t) = \Phi'(t)$.

- Ο Chou et al. (1984) παραγώγισε την κάτωθι σχέση:

$$F(x;\nu,\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu-1}\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \int_0^x y^{(\nu-3)/2} \phi(\sqrt{y}) \left\{ \Phi(\sqrt{x-y} - \sqrt{\lambda}) - \Phi(-\sqrt{x-y} - \sqrt{\lambda}) \right\} dy, \quad (2.26)$$

από την οποία προέκυψε:

$$f(x;1,\lambda) = \Phi(\sqrt{x} - \sqrt{\lambda}) - \Phi(-\sqrt{x} - \sqrt{\lambda}).$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζεται ως:

$$p(x;\nu,\lambda) = \frac{(2\pi)^{1/2}}{2^{(\nu-1)/2}\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \int_0^x y^{(\nu-3)/2} \phi(\sqrt{y}) \phi(\sqrt{x-y} - \sqrt{\lambda}) - \phi(-\sqrt{x-y} - \sqrt{\lambda}) \frac{1}{2} (x-y)^{-1/2} dy. \quad (2.27)$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, καταλήγουμε στην σχέση (2.51).

- Ο Guenther (1964) κατέληξε ότι:

$$p(x;\nu,\lambda) = \frac{(2\pi)^{1/2}}{2^{(\nu-1)/2}\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} x^{(\nu-2)/2} \phi(\sqrt{x}) \int_0^\phi \exp(\sqrt{x\lambda} \cos\theta) \sin^{n-2}\theta d\theta = \phi \lambda^{-(\nu-2)/4} I_{(\nu-2)/2}(\sqrt{x\lambda}) x^{(\nu-2)/4} \phi(\sqrt{\lambda}) \phi(\sqrt{x}). \quad (2.28)$$

- Ο Temme (1993) όρισε την κάτωθι δίκλαδη συνάρτηση:

$$p(x;\nu,\lambda) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\nu/4} \left\{ T_{(\nu-2)/2}(\sqrt{x\lambda}, \omega) - T_{\nu/2}(\sqrt{x\lambda}, \omega) \right\}, & x > \lambda, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\nu/4} \left\{ T_{(\nu-2)/2}(\sqrt{x\lambda}, \omega) - T_{\nu/2}(\sqrt{x\lambda}, \omega) \right\}, & x < \lambda, \end{cases} \quad (2.29)$$

όπου

$$\omega = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{x} - \sqrt{\lambda})^2}{\sqrt{x\lambda}},$$

$$T_\mu(\sqrt{x\lambda}, \omega) = \int_{\sqrt{x\lambda}}^{\infty} e^{-(\omega+1)t} I_\mu(t) dt$$

- Οι Ennis και Johnson (1993) απέδωσαν τον τύπο:

$$F(x; \nu, \lambda) = \frac{1}{2} - \pi^{-1} \int_0^{\infty} y^{-1} (1-y^2)^{-\nu/4} \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda y^2 (1+y^2)^{-1}\right\} \times \sin\left[\frac{1}{2}\left\{\nu \tan^{-1}y + \lambda y(1+y^2)^{-1}\right\} - yz\right] dy. \quad (2.30)$$

Για υπολογιστικούς σκοπούς, ο τύπος αυτός δεν απαιτεί τον υπολογισμό του αθροίσματος μιας μη-πεπερασμένης σειράς, αλλά προϋποθέτει το ολοκλήρωμα να συγκλίνει αριθμητικά στο $(0, +\infty)$.

- Ο Ruben (1974) επισήμανε την απειροελάχιστη διαφορά των τιμών της $F(x; \nu, \lambda)$ για $\nu > 6$ μέσω της σχέσης:

$$\lambda F(x; \nu, \lambda) = \{\lambda - (\nu - 4)\} F(x; \nu - 2, \lambda) + \{x + (\nu - 4)\} F(x; \nu - 4, \lambda) - x F(x; \nu - 6, \lambda). \quad (2.31)$$

- Για $\lambda = 0$ και θέτοντας όπου $\nu = \nu + 2$, η σχέση (2.31) μετατρέπεται στην σχέση:

$$(\nu - 2)F(x; \nu, 0) = (x + \nu - 2)F(x; \nu - 2, 0) - xF(x; \nu - 4, 0) \quad (2.32)$$

όπως σημειώθηκε από τον Khamis(1965).

- Οι παρακάτω σχέσεις, μεταξύ άλλων, αποτυπώθηκαν από τον Cohen(1988):

$$p(x; \nu, \lambda) = p(x; \nu - 2, \lambda) + 2 \frac{\partial p(x; \nu - 2, \lambda)}{\partial \lambda}. \quad (2.33)$$

$$p(x; \nu, \lambda) = p(x; \nu + 2, \lambda) + 2 \frac{\partial p(x; \nu + 2, \lambda)}{\partial \lambda}. \quad (2.34)$$

$$p(x; \nu, \lambda) = \lambda^{-(\nu-2)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\lambda - 1)(x - 1)\right\} p(\lambda x; \nu, 1). \quad (2.35)$$

Η παρακάτω σχέση:

$$\frac{\partial F(x;\nu,\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \{F(x;\nu+2,\lambda) - F(x;\nu,\lambda)\} \quad (2.36)$$

χρησιμοποιείται όταν παραγωγίσουμε ως προς λ , ενώ η σχέση:

$$\frac{\partial F(x;\nu,\lambda)}{\partial \lambda} = p(x;\nu,\lambda) = \frac{1}{2} \{F(x;\nu-2,\lambda) - F(x;\nu,\lambda)\} \quad (2.37)$$

προκύπτει αν παραγωγίσουμε αντίστοιχα ως προς x .

Αξίζει να σημειωθεί ότι, οι δύο ανωτέρω σχέσεις συνεπάγονται ότι:

$$\frac{\partial F(x;\nu,\lambda)}{\partial \lambda} = -p(x;\nu+2,\lambda) \quad (2.38)$$

• Οι Ashour και Abdel-Samad (1990) βασιζόμενοι στον Shea (1988) ανέπτυξαν τον παρακάτω υπολογιστικό τύπο:

$$F(x;\nu,\lambda) = e^{-\lambda/2} p(x;\nu,0) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} C_j \left(\frac{1}{4}\lambda, \frac{1}{2}\nu \right) \sum_{i=0}^{\infty} C_i \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}\nu + i \right) \quad (2.39)$$

όπου,

$$C_i(\alpha, b) = \frac{\alpha}{b+i} C_{i-1}(\alpha, b)$$

$$C_0(\alpha, b) = 1.$$

Για ακέραιες περιττές τιμές του ν , χρησιμοποίησαν την ακολουθία (2.10) με:

$$F(x;\nu+2j,\lambda) = 2 \left\{ 1 - \Phi(\sqrt{x}) \right\} + \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} e^{x/2} \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(\nu-1)+j} \frac{x^{i-\frac{1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2i-1)} \quad (2.40)$$

• Ο Kallenberg (1990) έθεσε όρια για την διαφορά μεταξύ των συναρτήσεων κατανομής των μη κεντρικών X^2 κατανομών, με κοινούς βαθμούς ελευθερίας ν αλλά διαφορετικές παραμέτρους μη-κεντρικότητας (λ, λ^*) . Αν $\lambda \leq \lambda^*$, τότε:

$$0 \leq F(x;\nu,\lambda) - F(x;\nu,\lambda^*) \leq (2\pi)^{-1/2} (\sqrt{\lambda^*} - \sqrt{\lambda}) F(x;\nu-1,0) \quad (2.41)$$

όπου $F(x;\nu-1,0)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της κεντρικής $x_{\nu-1}^2$.

Το κάτω όριο (0) επιβεβαιώνει το γεγονός ότι η $F(x; \nu, \lambda)$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του λ . Ένα καταλληλότερο κάτω όριο, που τέθηκε επίσης από τον Kallenberg, παρουσιάζεται στα κάτωθι αποτελέσματα, αν:

$$\liminf_{n \rightarrow 0} \max(\lambda_n, \lambda_n^*) > 0 \quad (2.42)$$

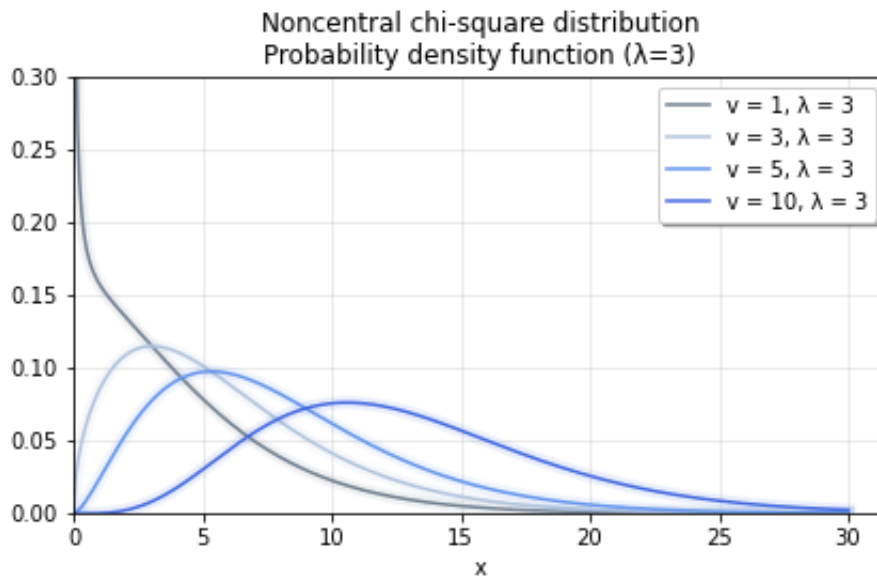
και

$$\sqrt{\lambda^*} - \sqrt{\lambda} = O(1).$$

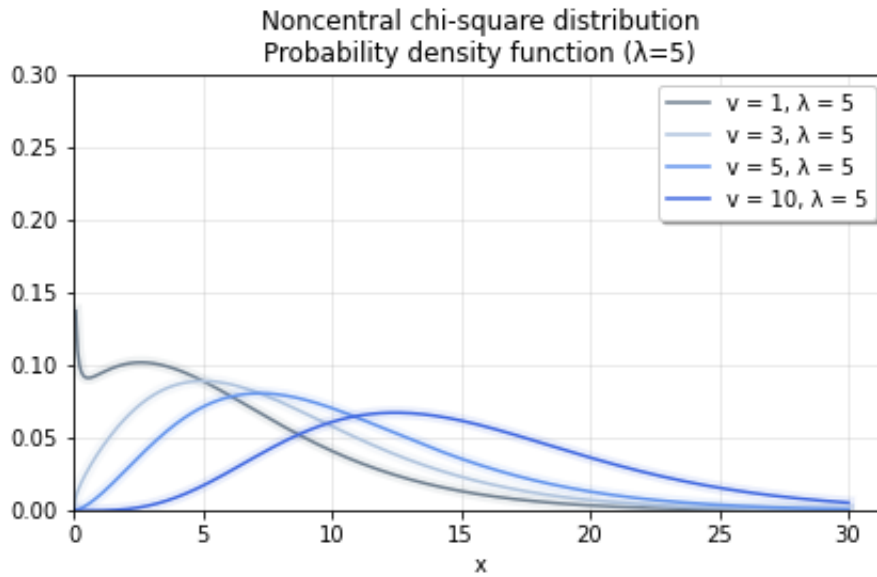
τότε, υπάρχει ένα $C(\nu)$, τέτοια ώστε:

$$\sup_{x > 0} |F(x; \nu, \lambda) - F(x; \nu, \lambda^*)| \geq C(\nu) |\sqrt{\lambda_n^*} - \sqrt{\lambda_n}|.$$

• Στην συνέχεια, βασιζόμενοι στους Narula και Levi (1975), παρουσιάζονται τα κάτωθι γραφήματα της $p(x; \nu, \lambda)$:

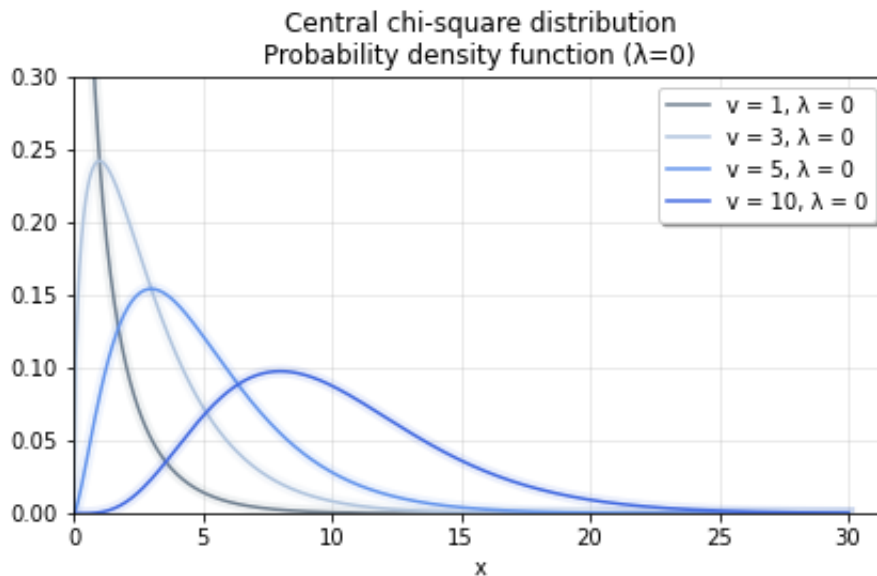


Σχήμα 2.2: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μη-κεντρικών X^2 κατανομών για $\lambda = 3$.



Σχήμα 2.3: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μη-κεντρικών X^2 κατανομών για $\lambda = 5$.

Σε αντίθεση, το Σχήμα (2.4) παριστάνει την $p(x; \nu, \lambda)$, η οποία είναι η συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας των κεντρικών X^2 κατανομών. Εύκολα διακρίνεται μια ανάλογη σχέση μεταξύ των μέτρων θέσης (μέση τιμή, διάμεσος, επικρατούσα τιμή) και της παραμέτρου μη-κεντρικότητας λ , για γνωστό μέγεθος δείγματος ν .



Σχήμα 2.4: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κεντρικών X^2 κατανομών για $\lambda = 0$.

- Ο Siegel (1979) όρισε μια μη-κεντρική X^2 μεταβλητή με 0 βαθμούς ελευθερίας, την $X_0'^2(\lambda)$, με τα εξής βήματα:

1. Επιλογή κατάλληλου K από μια Poisson κατανομή με μέση τιμή $1/2\lambda$ τέτοια ώστε, $Pr[K = k] = e^{-\lambda/2}(\frac{1}{2}\lambda)^k/k!$, ($k = 0, 1, \dots$).
2. Επιλογή κατάλληλου $Y \sim X_2^{2K}$ μια κεντρική X^2 κατανομή.
3. Όταν το $K = 0$, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το $X_0^2(\lambda)$ είναι 0.

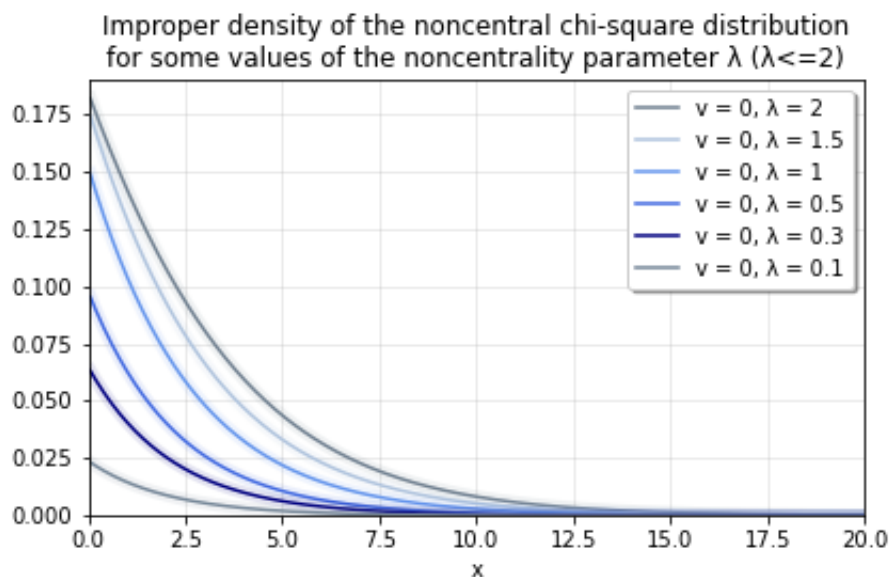
Ομοίως, ισχύει και για την διακριτή ποσότητα $X_0^2(\lambda)$. Επομένως, $X_0^2(\lambda)$ είναι μια μείξη του $0, X_2^2, X_4^2, \dots$ με βάρη κατανομής Poisson.

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής του $Y \sim X_0^2(\lambda)$, είναι:

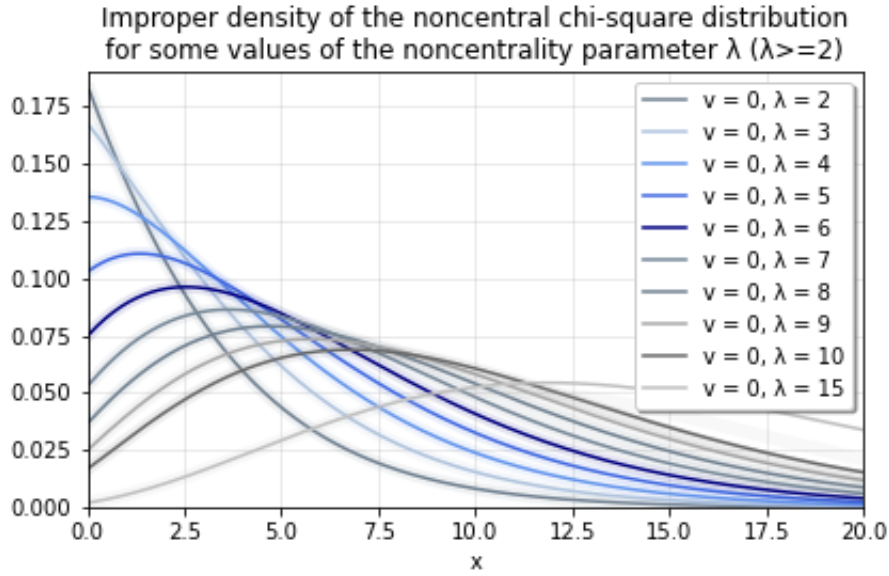
$$F(y;0, \lambda) = 1 - e^{-(\lambda+y)/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}\lambda)^k}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\frac{1}{2}y)^j}{j!} \quad (2.43)$$

όπου $y \geq 0$ και 0 αλλιώς.

Τα Σχήματα (2.5) και (2.6) της $p(x; \nu, \lambda)$ παρουσιάζονται βασιζόμενοι στον Siegel (1979) και αναπαριστούν τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας X_0^2 για διάφορες τιμές του λ . Όπως φαίνεται στα γραφήματα που ακολουθούν, υπάρχει έντονη μείωση στην περιοχή που η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας εμφανίζει μάζα πιθανότητας στο 0, ασυμπτωτικά κανονική κατανομή για μεγάλες τιμές του λ και ασυμπτωτικά εκθετική αύξηση όταν το λ είναι μικρό.



Σχήμα 2.5: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κεντρικών X_0^2 κατανομών για $\lambda \leq 2$.



Σχήμα 2.6: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κεντρικών $X_0^2(\lambda)$ κατανομών για $\lambda \geq 2$.

2.3 Γεννήτριες Συναρτήσεις

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5 Η ροπογεννήτρια συνάρτηση μπορεί να προκύψει ως εξής:

$$\begin{aligned}
 E \left[\exp \left\{ \sum_{j=1}^{\nu} t(U_j + \delta_j)^2 \right\} \right] &= \prod_{j=1}^{\nu} E \left[\exp \left\{ t(U_j + \delta_j)^2 \right\} \right] \\
 &= \prod_{j=1}^{\nu} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2}u^2 + t(u + \delta_j)^2 \right\} du \right] \\
 &= \prod_{j=1}^{\nu} \left[(1 - 2t)^{-1/2} \exp \left\{ \delta_j^2 t (1 - 2t)^{-1} \right\} \right] \tag{2.44} \\
 &= (1 - 2t)^{-\nu/2} e^{-\lambda/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \lambda (1 - 2t)^{-1} \right\} \\
 &= e^{-\lambda/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} \lambda)^j (1 - 2t)^{-(\nu+2j)/2}}{j!}.
 \end{aligned}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι, $(1 - 2t)^{-(\nu+2j)/2}$ είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της $X_{\nu+2j}^2$.
[Van der Vaart (1967)]

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.6 Ισχύει η κάτωθι σχέση για την ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$\begin{aligned} M(t) &= E \left[e^{t \sum_{i=1}^n X_i^2 / \sigma^2} \right] = \prod_{i=1}^n E \left[e^{t X_i^2 / \sigma^2} \right] \\ &= (1 - 2t)^{-n/2} \exp \left(\frac{1}{1 - 2t} \delta \right), \quad t < \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Απόδειξη: Η ροπογεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$M(t) = E \left[e^{t \sum_{i=1}^n X_i^2 / \sigma^2} \right] = \prod_{i=1}^n E \left[e^{t X_i^2 / \sigma^2} \right] \quad (2.46)$$

όπου $X_i \sim N(\mu_i, \sigma)$. Συνεπώς:

$$E \left[e^{t X_i^2 / \sigma^2} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ \frac{t x_i^2}{\sigma^2} - \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2} \right\} dx_i,$$

όπου το ολοκλήρωμα ισχύει για $t < \frac{1}{2}$. Στο ολοκλήρωμα προσθέτουμε τετράγωνα, και ύστερα από πράξεις προκύπτει ότι:

$$E \left[e^{t X_i^2 / \sigma^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{1 - 2t}} \exp \left\{ \frac{t \mu_i^2}{\sigma^2 (1 - 2t)} \right\}, \quad t < \frac{1}{2}.$$

Συνεπώς:

$$M(t) = (1 - 2t)^{-n/2} \exp \left(\frac{1}{1 - 2t} \frac{\sum \mu_i^2}{\sigma^2} \right), \quad t < \frac{1}{2}. \quad (2.47)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η ροπογεννήτρια συνάρτηση της $X^2(n, \delta)$ είναι:

$$M(t) = (1 - 2t)^{-n/2} \exp \left(\frac{1}{1 - 2t} \delta \right), \quad t < \frac{1}{2}. \quad (2.48)$$

□

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, και μέσω της σχέσης (2.44), προκύπτει ότι, η ροπογεννήτρια συνάρτηση της $X_\nu^2(\lambda)$ είναι:

$$M(t; \nu, \lambda) = (1 - 2t)^{-\nu/2} \exp \left(\frac{\lambda t}{1 - 2t} \right). \quad (2.49)$$

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση μπορεί να γραφεί εξίσου ως:

$$M(t; \nu, \lambda) = \frac{\exp\{\lambda t/(1-2t)\}}{(1-2t)^{(\nu/2)-1}} \frac{1}{1-2t} = \frac{\exp\{\lambda t/(1-2t)\}}{(1-2t)^{(\nu/2)-1}} + \frac{2t \exp\{\lambda t/(1-2t)\}}{(1-2t)^{\nu/2}} \quad (2.50)$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$F(x; \nu, \lambda) = F(x; \nu - 2, \lambda) - 2p(x; \nu, \lambda) \quad (2.51)$$

το οποίο μπορεί επίσης να προκύψει με ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Αντίστοιχα, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$K(t; \nu, \lambda) = \log M(t; \nu, \lambda) = \frac{1}{2} \nu \log(1-2t) + \lambda t(1-2t)^{-1}. \quad (2.52)$$

Συνεπώς, η r -τάξεως ροπή είναι η:

$$\kappa_r = 2^{r-1} (r-1)! (\nu + r\lambda). \quad (2.53)$$

Πιο συγκεκριμένα:

$$\begin{cases} \kappa_1 = \nu + \lambda = E[X'^2], \\ \kappa_2 = 2(\nu + 2\lambda) = \text{var}(X'^2) = [\sigma(X'^2)]^2, \\ \kappa_3 = 8(\nu + 3\lambda) = \mu_3(X'^2), \\ \kappa_4 = 48(\nu + 4\lambda), \end{cases} \quad (2.54)$$

και συνεπώς,

$$\mu_4(X'^2) = \kappa_4 + 3\kappa_2^2 = 48(\nu + 4\lambda) + 12(\nu + 2\lambda)^2. \quad (2.55)$$

Από τις ανωτέρω συναρτήσεις μπορούν να υπολογιστούν οι συντελεστές ασυμμετρίας και κύρτωσης:

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \sqrt{\beta_1} = \frac{\sqrt{8}(\nu + 3\lambda)}{(\nu + 2\lambda)^{3/2}} \\ \alpha_4 &= \beta_2 = 3 + \frac{12(\nu + 4\lambda)}{(\nu + 2\lambda)^2}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι:

$$\frac{\beta_2 - 3}{\beta_1} = \frac{3(\nu + 4\lambda)(\nu + 2\lambda)}{2(\nu + 3\lambda)^2} = \frac{3}{2} \left[1 - \frac{\lambda^2}{(\nu + 3\lambda)^2} \right],$$

όπου:

$$\frac{4}{3} \leq \frac{\beta_2 - 3}{\beta_1} \leq \frac{3}{2}. \quad (2.57)$$

Ο D.W.Boyd όρισε την ακόλουθη σχέση για την r-τάξεως ροπή:

$$\mu'_r = 2^r \Gamma \left(r + \frac{1}{2} \nu \right) \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \frac{(\frac{\lambda}{2})^j}{\Gamma(j + \frac{1}{2} \nu)}.$$

2.4 Εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας

Η μη-κεντρική X^2 κατανομή εξαρτάται από δυο παράγοντες:

- τους βαθμούς ελευθερίας ν και
- την παράμετρο μη-κεντρικότητας λ .

Στην περίπτωση που το ν είναι γνωστό, τότε ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\lambda}$ του λ , για ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_n όπου η κάθε τ.μ ακολουθεί την συνάρτηση πιθανότητας της σχέσης (2.11), πρέπει να ικανοποιεί την σχέση:

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\hat{\lambda}/2} \left[\left\{ \left(\frac{1}{2} \hat{\lambda} \right)^{j-1} / (j-1)! \right\} - \left\{ \left(\frac{1}{2} \hat{\lambda} \right)^j / j! \right\} \right] p(X_i; \nu + 2j, 0)}{\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\hat{\lambda}/2} \left\{ \left(\frac{1}{2} \hat{\lambda} \right)^j / j! \right\} p(X_i; \nu + 2j, 0)} \right] = 0, \quad (2.58)$$

όπου:

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} \hat{\lambda} \right)^{j-1} / (j-1)! \right\} p(X_i; \nu + 2j, 0)}{\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} \hat{\lambda} \right)^j \right\} p(X_i; \nu + 2j, 0)} \right] = n \quad (2.59)$$

αν η εξίσωση έχει θετική ρίζα. Η εξίσωση αυτή δεν είναι συνήθως εύκολη στην λύση.

Ο Mayer (1967) έδειξε ότι στην περίπτωση όπου $\nu = 2$, η ανωτέρω συνάρτηση έχει θετικό αποτέλεσμα στην περίπτωση όπου $\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i > 2$. Σε διαφορετική περίπτωση, ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας παίρνει την τιμή μηδέν.

Ο Mayer επιπλέον έδειξε ότι:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr[\bar{X} > 2] = 1$$

Βασει του αποτελέσματος του Mayer, οι Dwivedi και Pandey (1975) έδειξαν ότι στην περίπτωση όπου το ν είναι μεγαλύτερο του 2, ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας του λ (για ν γνωστό) είναι ίσος με το μηδέν, αν το \bar{X} δεν είναι μεγαλύτερο από το ν και ικανοποιεί την σχέση:

$$\sum_{i=1}^n h\left(\sqrt{2X_i\hat{\lambda}}\right) X_i = n, \quad \bar{X} > \nu, \quad (2.60)$$

Όταν το ν είναι μεγάλο,

$$\hat{\lambda} \doteq \frac{1}{2} \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i^{1/2} \right)^2$$

όπου $h(z) \doteq z^{-1}$ για μεγάλο z .

Στην περίπτωση όπου το σ είναι γνωστό, ένας αμερόληπτος εκτιμητής του λ είναι:

$$\tilde{\lambda} = n^{-1} \sigma^{-2} \sum_{i=1}^n X_i - \nu. \quad (2.61)$$

και ισχύει ότι:

$$n \operatorname{var}(\tilde{\lambda}) = 2\nu + 4\lambda, \quad (2.62)$$

ενώ ένα κάτω Cramer-Rao φράγμα για την διακύμανση του αμερόληπτου εκτιμητή του λ είναι:

$$4(\theta\lambda^{-1} - 1)^{-1} n^{-1}, \quad (2.63)$$

$$\text{όπου } \theta = E \left[\frac{X I_{\nu/2}^2(\sqrt{X\lambda/\sigma})}{I_{(\nu-2)/2}^2(\sqrt{X\lambda/\sigma})} \right].$$

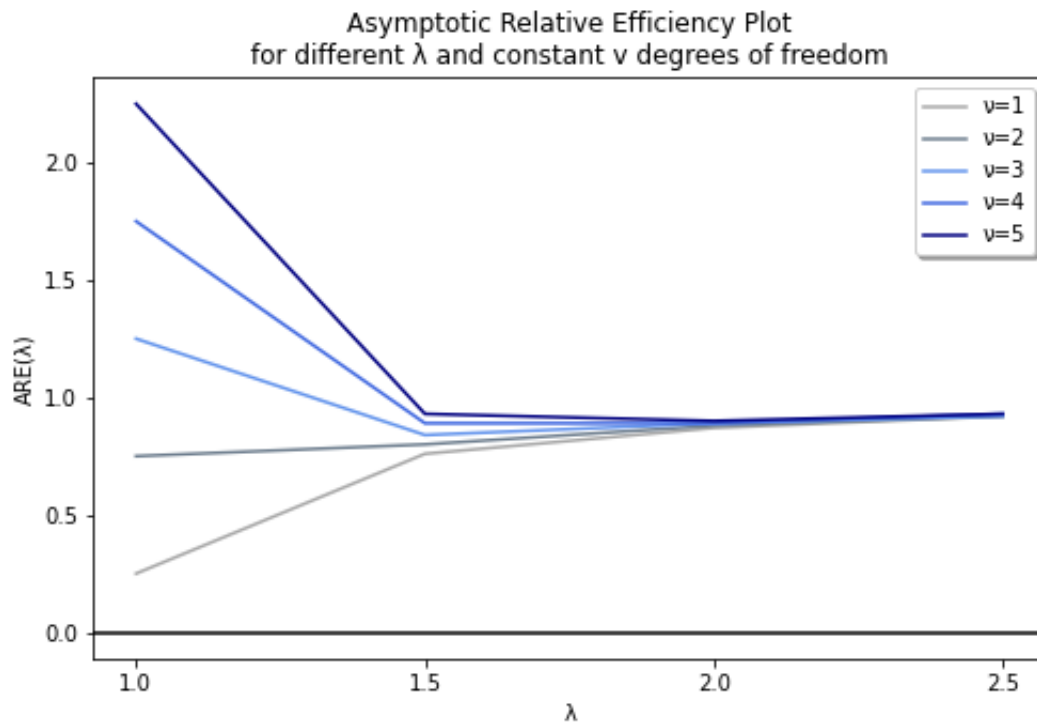
Ο λόγος των ασυμπτωματικών διασπορών (ARE) του $\tilde{\lambda}$ είναι:

$$\begin{aligned} ARE(\tilde{\lambda}) &= 4(\theta\lambda^{-1} - 1)^{-1} (2\nu + 4\lambda)^{-1} \\ &= 1 - \frac{1}{2}\lambda^{-2} + \frac{1}{4}(2\nu - 3)\lambda^{-6} + \dots \quad \text{για μεγάλο } \lambda. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Στην συνέχεια παρουσιάζεται ένα πιο αναλυτικό παράδειγμα για τον λόγο των ασυμπτωματικών διασπορών για διάφορες τιμές των λ και ν .

λ	ARE(λ)				
	$\nu = 1$	$\nu=2$	$\nu=3$	$\nu=4$	$\nu=5$
1.0	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25
1.5	0.755	0.799	0.843	0.887	0.931
2.0	0.871	0.878	0.886	0.894	0.902
2.5	0.918	0.921	0.923	0.925	0.927
3.0	0.944	0.944	0.945	0.946	0.946
3.5	0.959	0.959	0.959	0.959	0.960
4.0	0.968	0.968	0.968	0.969	0.969
4.5	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975
5.0	0.979	0.980	0.980	0.980	0.980

Πίνακας 2.4.1: Ο λόγος των ασυμπτωματικών διασπορών ARE για $\lambda \in [1.5]$, και $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$.

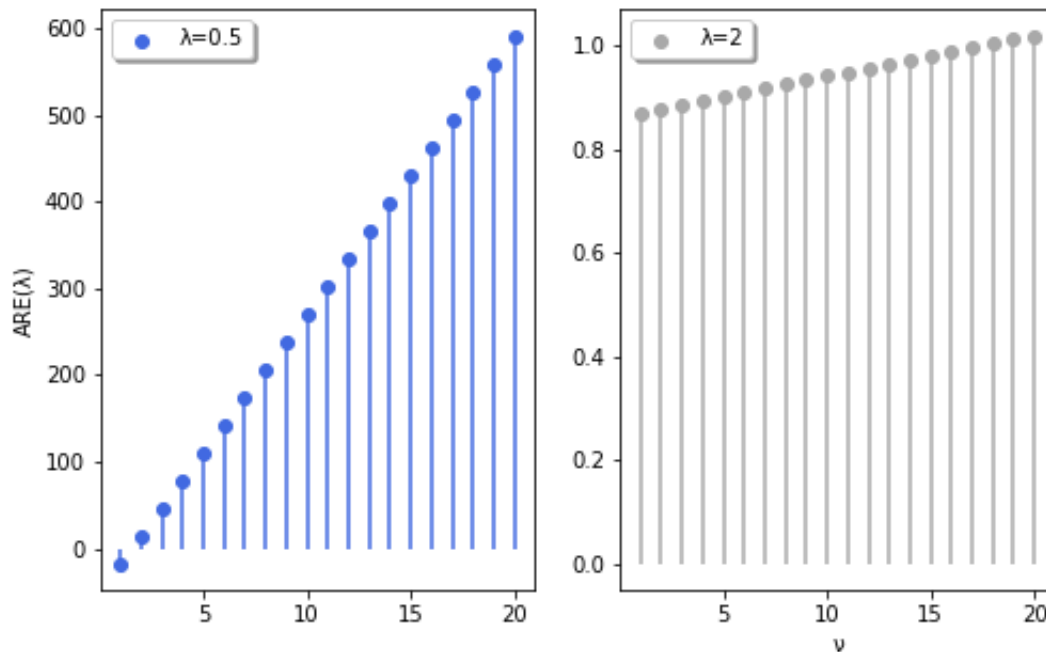


Σχήμα 2.7: Ο λόγος των ασυμπτωματικών διασπορών ARE για διάφορες τιμές του λ .

Έστω τώρα ότι θέλουμε να εξετάσουμε την περίπτωση όπου το λ είναι σταθερός αριθμός (έστω $\lambda = 0.5$ και $\lambda = 2$) και το ν παίρνει τιμές σε ένα διάστημα $[1, 20]$.

	ARE(λ)							
	$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$	$\nu=4$	$\nu=5$	$\nu=10$	$\nu=15$	$\nu=20$
$\lambda=0.5$	0.0	15.0	47.0	79.0	111.0	271.0	431.0	591.0
$\lambda=2$	0.87	0.87	0.88	0.89	0.90	0.94	0.98	1.01

Πίνακας 2.4.2: Ο λόγος των ασυμπτωματικών διασπορών ARE για διάφορες τιμές του ν και $\lambda = 0.5$ και $\lambda = 2$.



Σχήμα 2.8: Ο λόγος των ασυμπτωματικών διασπορών ARE για διάφορες τιμές του ν και $\lambda = 0.5$ και $\lambda = 2$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1 Η ένταση κινδύνου (hazard rate) μιας κατανομής με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f και συνάρτηση κατανομής F ορίζεται ως ο λόγος:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \quad t \geq 0. \quad (2.65)$$

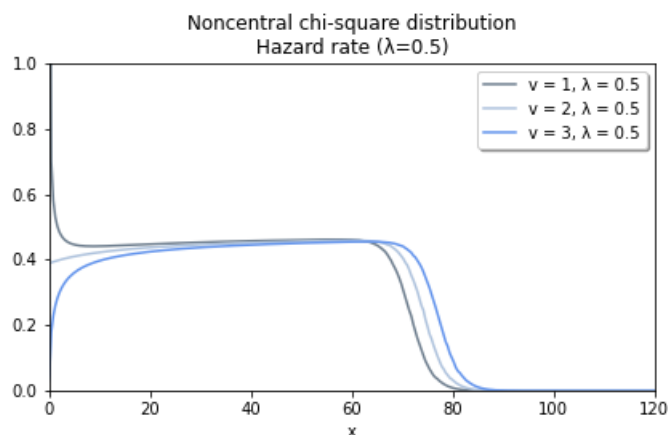
Η ένταση κινδύνου $h(t)$ αναφέρεται στον ρυθμό θανάτου ενός αντικειμένου μια χρονική στιγμή.

□

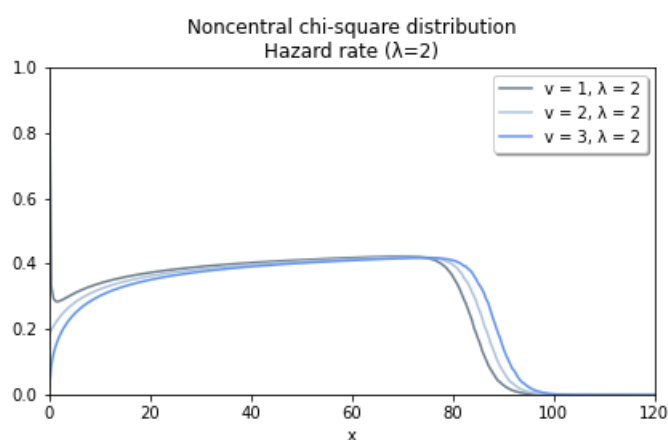
Η σχέση (2.65) μπορεί να γραφεί και ως:

$$h(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Pr(t < X \leq t + h | X > t)}{h}$$

και ερμηνεύεται σαν ο ρυθμός θανάτου στο διάστημα $(t, t + h]$ μεταξύ αυτών που επέζησαν μέχρι την στιγμή t (δεν είναι πιθανότητα).



Σχήμα 2.9: Ένταση κινδύνου μιας μη-κεντρικής $X'^2(\lambda)$ κατανομής για $\lambda = 0.5$.



Σχήμα 2.10: Ένταση κινδύνου μιας μη-κεντρικής $X'^2(\lambda)$ κατανομής για $\lambda = 2$.

2.5 Εφαρμογές

Υπάρχουν πολλές εφαρμογές της μη-κεντρικής X^2 κατανομής στη στατιστική. Στην παρούσα διπλωματική θα εξεταστούν μόνο μερικές από αυτές.

2.5.1 Η ισχύς ενός ελέγχου

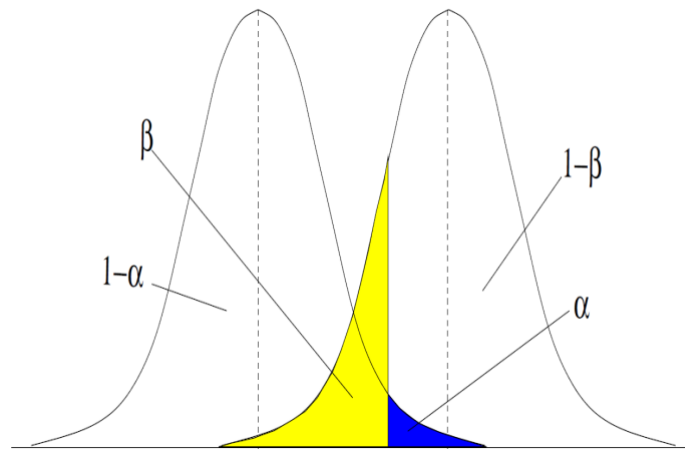
Στον Στατιστικό Έλεγχο Υποθέσεων, μπορούν να ορισθούν δύο πιθανά είδη σφαλμάτων σύμφωνα με τις αποφάσεις για κάποια παράμετρο του πληθυσμού με βάση ενδείξεις από ένα δείγμα. Η περίπτωση α αναφέρεται στην πιθανότητα λανθασμένης απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης (σφάλμα τύπου I), ενώ το β εκφράζει την λανθασμένη μη-απόρριψη της μηδενικής (σφάλμα τύπου II). Η ισχύς ενός ελέγχου (power function) είναι η πιθανότητα ότι μια λανθασμένη μηδενική υπόθεση θα εντοπιστεί από τον έλεγχο $(1 - \beta)$.

- Σφάλμα Τύπου I: Λανθασμένη απόρριψη της H_0 , όταν ισχύει η H_0 , με πιθανότητα $= 1 - \alpha$.

- Σφάλμα Τύπου II: Λανθασμένη αποδοχή της H_0 , όταν ισχύει η H_1 , με πιθανότητα $= \beta$.

	Αποδοχή H_0	Απόρριψη H_0
H_0 αληθής	Ορθή απόφαση Πιθανότητα $= 1 - \alpha$	Σφάλμα Τύπου I Πιθανότητα $= \alpha$
H_0 όχι αληθής	Σφάλμα Τύπου II Πιθανότητα $= \beta$	Ορθή απόφαση Πιθανότητα $= 1 - \beta$

Πίνακας 2.5.1: Έλεγχος Υποθέσεων



Σχήμα 2.11: Έλεγχος Υποθέσεων - Κανονική κατανομή

Η ισχύς ενός ελέγχου ($1 - \beta$) αποτελεί μια ένδειξη της ευαισθησίας της στατιστικής διαδικασίας με μέτρο την πιθανότητα απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης όταν αυτή είναι λανθασμένη και θα πρέπει πράγματι να απορριφθεί. Η ισχύς του στατιστικού ελέγχου εξαρτάται από το πόσο διαφέρει η πραγματική τιμή της παραμέτρου από την υποθετική τιμή της (την τιμή της κάτω από την υπόθεση H_0). Εάν υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ της πραγματικής και της υποτιθέμενης τιμής της παραμέτρου, η ισχύς του ελέγχου θα είναι πολύ μεγαλύτερη από όσο όταν η διαφορά μεταξύ της πραγματικής και της υποτιθέμενης τιμής της παραμέτρου είναι μικρή. Με άλλα λόγια, μεγαλύτερη ισχύς σημαίνει μεγαλύτερη πιθανότητα να μην αποτύχουμε να απορρίψουμε την H_0 όταν είναι αληθής η H_1 (και επομένως πιο καλός έλεγχος).

Έστω ότι οι $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ είναι ανεξάρτητες παρατηρήσεις σε ένα δείγμα. Έστω τώρα ότι έχει ορισθεί η μηδενική υπόθεση (H_0) ότι τα ξ_i ανήκουν σε έναν κανονικό πληθυσμό με μέσο μηδέν και τυπική απόκλιση ίση με 1, τότε στην περίπτωση όπου η H_0 είναι αληθής, η στατιστική συνάρτηση $X^2 = \sum \xi_i^2$ θα υπερβεί το X_α^2 , το α -ποσοστιαίο σημείο της X^2 κατανομής, με n βαθμούς ελευθερίας.

Η ισχύς του ελέγχου της X^2 δίνεται από την πιθανότητα το $X^2 = \sum \xi_i^2$ θα υπερβεί το X_α^2 κάτω από κάποια εναλλακτική υπόθεση. Αν ως H_1 ορίσουμε την περίπτωση όπου τα ξ_i προέρχονται από την κανονική κατανομή, με τυπική απόκλιση γνωστή και ίση με την μονάδα αλλά διαφορετικές μέσες τιμές α_i , τότε τα $\sum \xi_i^2$ θα προέρχονται από την μη-κεντρική X^2 κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη-κεντρικότητας $\lambda = \sum \alpha_i^2$.

Συνεπώς, η συνάρτηση της ισχύος δίνεται από την σχέση:

$$p_n(X'^2|\lambda) = \int_{X_\alpha^2}^{\infty} (X'^2|\lambda) dX'^2 \equiv \beta(n, \lambda, \alpha). \quad (2.66)$$

Συνεπώς, η ισχύς είναι συναρτήση της μοναδικής παραμέτρου λ και επομένως μπορούμε να γράψουμε την μηδενική υπόθεση ως $H_0(\lambda = 0)$ έναντι της εναλλακτικής $H_1(\lambda)$, όπου H_1 είναι μια σύνθετη υπόθεση που περιλαμβάνει την οικογένεια εναλλακτικών υποθέσεων για την οποία ισχύει $\sum \alpha_i^2 = \lambda$.

Στην περίπτωση όπου το n ή το λ είναι αρκετά μεγάλο έτσι ώστε $\nu = n + \lambda^2/(n + 2\lambda) > 30$, χρησιμοποιούμε την κανονική προσέγγιση για να αποκτήσουμε την συνάρτηση ισχύος πιο γρήγορα, από ότι με την μέθοδο της προσέγγισης X^2 .

Στην συνέχεια παρουσιάζεται ένας πίνακας των τιμών της ισχύος του ελέγχου X^2 , σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$:

$\beta(n, \lambda, \alpha)$					
ν	λ				
	2	4	10	12	20
2	0.234	0.416	0.819	0.885	0.983
3	0.195	0.357	0.762	0.841	0.974
4	0.171	0.320	0.719	0.803	0.963
5	0.157	0.292	0.678	0.796	0.952
10	0.121	0.215	0.542	0.640	0.891
20	0.096	0.158	0.402	0.489	0.775

Πίνακας 2.5.2: Η ισχύς του ελέγχου X^2 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$.

2.5.2 Έλεγχος X^2 καλής προσαρμογής

Συχνά μας ενδιαφέρει να ελέγξουμε αν τα δεδομένα μας συμφωνούν ή όχι με κάποιο μοντέλο πιθανοτήτων. Οι έλεγχοι καλής προσαρμογής μας δίνουν τη δυνατότητα να ελέγξουμε αν μια κατανομή πιθανοτήτων προσαρμόζεται σε ένα δείγμα. Από τους πλέον γνωστούς και ευρέως χρησιμοποιούμενους είναι ο έλεγχος X^2 καλής προσαρμογής (chi-square goodness-of-fit test).

Ο έλεγχος καλής προσαρμογής X^2 ασχολείται με την σύγκριση των παρατηρούμενων συχνοτήτων σε σχέση με αυτές που αναμένονται κάτω από μια δεδομένη υπόθεση. Η σύγκριση αυτή μπορεί να είναι οι θεωρητικές συχνότητες μιας συνεχούς κατανομής ή μπορεί να ληφθεί λαμβάνοντας ολοκληρώματα μιας συνεχούς κατανομής συχνότητας σε ένα σύνολο διαστημάτων κλάσης.

Έστω ότι n_i είναι οι παρατηρούμενες συχνότητες και $N\pi_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) οι αναμενόμενες συχνότητες, με $k = 0$ αριθμός των ομάδων και $N = 0$ συνολικός αριθμός παρατηρήσεων στο δείγμα. Τότε:

$$\sum_{i=1}^k n_i = \sum_{i=1}^k N\pi_i = N. \quad (2.67)$$

Ισχύει ότι, η κατανομή:

$$\phi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - N\pi_i)^2}{N\pi_i}, \quad (2.68)$$

όταν τα $N\pi_i$ είναι οι πραγματικές πληθυσμιακές εκτιμήσεις, μπορεί να συσχετιστεί ως μια προσέγγιση με αυτή του αθροίσματος τετραγώνων της κανονικής κατανομής. Αν και τα συμπεράσματα που θα ακολουθήσουν στην συνέχεια δεν είναι ακριβή, η ακόλουθη προσέγγιση μπορεί να υιοθετηθεί, ως μέσω σύνδεσης με την αντίστοιχη μη-κεντρική κατανομή. Όπως σε όλα τα προβλήματα που αφορούν την X^2 , είναι γενικά εφικτό να εκτιμηθεί ο βαθμός σφάλματος, σε δείγματα πεπερασμένου μεγέθους, μόνο με συγκεκριμένες αριθμητικές συγκρίσεις.

Όπως παρουσιάστηκε αρχικά από τον Pearson (1900, 1916), οι διακυμάνσεις και οι συνδιακυμάνσεις των k συχνοτήτων n_i , όπως παρουσιάζονται στην σχέση (2.67), είναι ακριβώς αυτές που ισχύουν στο τμήμα:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_k = 0 \quad (2.69)$$

της k -διάστασης κανονικής κατανομής πιθανοτήτων της οποίας πυκνότητα πιθανότητας στο:

$$(X_1, X_2, \dots, X_k)$$

δηλαδή, είναι ίσες με:

$$p(X_1, X_2, \dots, X_n) = \text{constant} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_i \frac{X_i^2}{N\pi_i} \right]. \quad (2.70)$$

Συνεπώς, υπό την προϋπόθεση ότι οι αναμενόμενες τιμές $N\pi_i$ είναι αρκετά μεγάλες ώστε να αποτρέπουν σοβαρές ανακρίβειες από φαινόμενα ασυνέχειας ή περιορισμούς ορίων, οι σχέσεις μεταξύ του n_i μπορούν να αντιμετωπίζονται ως σχέσεις, μέσω της συνάρτησης (2.69), μεταξύ των κανονικών X_i μεταβλητών, οι οποίες στον k -διαστάσεων χώρο κατανέμονται ανεξάρτητα με μέσο όρο ίσο με το μηδέν και διακυμάνσεις $N\pi_i$. Σύμφωνα με αυτούς τους περιορισμούς, ισχύει:

$$x_i = \frac{X_i}{\sqrt{(N\pi_i)}} = \frac{n_i - N\pi_i}{\sqrt{(N\pi_i)}} \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (2.71)$$

Η συνθήκη $\sum n_i = N$ μπορεί να γραφεί ως:

$$\sum_i \sqrt{\pi_i} \frac{n_i - N\pi_i}{\sqrt{(N\pi_i)}} = 0 \quad (2.72)$$

που αντιστοιχεί στην $\sum_i c_i x_i = p = 0$, όπου $\sum_i c_i^2 = 1$. Συνεπώς η ϕ^2 μπορεί να προέρχεται κατά προσέγγιση ως X^2 με $k - 1$ βαθμούς ελευθερίας.

Έχοντας υπόψιν το ερώτημα για τον έλεγχο της ισχύος, στην συνέχεια θα εξεταστεί ποια είναι η κατανομή της ϕ^2 αν οι συχνότητες $N\pi_i$ που εισάγονται στην σχέση (2.68) δεν είναι αληθινά οι αναμενόμενες. Έστω ότι οι $N\pi_i$ είναι όντως οι αναμενόμενες. Στην περίπτωση αυτή τα $\sum_i p_i$ και $\sum_i \pi_i$ θα είναι μονάδα.

Ισχύει ότι:

$$\xi_i = \frac{n_i - N\pi_i}{\sqrt{(Np_i)}}, \quad x_i = \frac{n_i - N\pi_i}{\sqrt{(N\pi_i)}}, \quad \alpha_i = \frac{N(p_i - \pi_i)}{\sqrt{(Np_i)}}, \quad (2.73)$$

ενώ:

$$\sum_i \sqrt{p_i} \frac{n_i - N\pi_i}{\sqrt{(Np_i)}} = \sum_i c_i \xi_i = 0. \quad (2.74)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η:

$$\phi'^2 = \sum_i \xi_i^2 = \sum_i \frac{(n_i - N\pi_i)^2}{Np_i} \quad (2.75)$$

θα κατανομηθεί κατά προσέγγιση ως μη-κεντρική X^2 κατανομή με $k - 1$ βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη-κεντρικότητας:

$$\lambda' = \sum_i (\alpha_i^2) = N \sum_i \frac{(p_i - \pi_i)^2}{p_i}. \quad (2.76)$$

Το άθροισμα τετραγώνων που χρειαζόμαστε είναι το ϕ^2 της σχέσης (2.68) και όχι το ϕ'^2 της (2.75). Ωστόσο, εισάγοντας μια περαιτέρω προσέγγιση, προκύπτει το συμπέρασμα ότι η $\phi^2 = \sum_i (n_i - N\pi_i)^2 / N\pi_i$ κατανέμεται ως μια μη-κεντρική X^2 κατανομή με $k - 1$ βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη-κεντρικότητας:

$$\lambda = N \sum_i \frac{(p_i - \pi_i)^2}{\pi_i}. \quad (2.77)$$

Η σχετική προσέγγιση δεν θα πρέπει να είναι σημαντική αν η διαφορά $\delta_i = N\pi_i - Np_i$ είναι μικρή σε σχέση με το $N\pi_i$, για:

$$\begin{aligned} \phi'^2 &= \sum_i \frac{(n_i - N\pi_i)^2}{Np_i} = \sum_i \frac{(n_i - N\pi_i)^2}{N\pi_i} \left\{ 1 - \frac{\delta_i}{N\pi_i} \right\}^{-1} \\ &= \phi^2 + \sum_i \delta_i \frac{(n_i - N\pi_i)^2}{(N\pi_i)^2} + \sum_i \delta_i^2 \frac{(n_i - N\pi_i)^2}{(N\pi_i)^2} + \dots \end{aligned} \quad (2.78)$$

Δεδομένου ότι οι πολλαπλασιαστές δ_i στον δεύτερο όρο μπορεί να είναι είτε θετικοί είτε αρνητικοί και $\sum_i \delta_i = 0$, ο όρος αυτός θα είναι γενικά μικρός. Οι περαιτέρω όροι, που περιέχουν διαδοχικές δυνάμεις του $\delta_i / (N\pi_i)$, θα είναι επίσης μικρής σημασίας.

Αυτό το αποτέλεσμα καθιστά δυνατό τον προσδιορισμό της ισχύος του ελέγχου καλής προσαρμογής οποιασδήποτε απλής (πλήρως καθορισμένης) υπόθεσης H_0 (καθορισμένης πιθανότητας π_i) σε σχέση με μια απλή εναλλακτική υπόθεση H_1 (πιθανότητας p_i). Ως εκ τούτου, για οποιαδήποτε δεδομένη κατηγορία εναλλακτικών υποθέσεων H_1 , μπορούμε να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση ισχύος.

Στο βαθμό που χρησιμοποιείται το επίπεδο σημαντικότητας 5%, η ισχύς μπορεί να προσδιοριστεί από τον Πίνακα (2.5.2), χρησιμοποιώντας το λ στην συνάρτηση (2.77) και $k - 1$ βαθμούς ελευθερίας. Συνεπώς, η ισχύς ορίζεται ως:

$$\int_{X_{\alpha}^2}^{\infty} p_{k-1}(X'^2 | \lambda) dX'^2 = \int_{X_{\alpha}^2}^{\infty} p_{\nu}(X^2) dX^2, \quad (2.79)$$

όπου:

$$p = \frac{k-1+2\lambda}{k-1+\lambda}, \quad \nu = \frac{(k-1+\lambda)^2}{k-1+2\lambda}, \quad N \left(\sum_i \frac{p_i^2}{\pi_i} - 1 \right). \quad (2.80)$$

Στην προσπάθεια σύγκρισης της κατά προσέγγιση κατανομής με την ακριβή, στην συνέχεια θα εξετάσουμε τις ακριβείς ροπές του ϕ^2 . Σύμφωνα με τον Haldane (1937), υπό την εναλλακτική H_1 υπόθεση, οι αναμενόμενες παρατηρούμενες συχνότητες n_i της ισχύος, είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(n_i) &= Np_i, \\ \mathcal{E}(n_i^2) &= N_2 p_i^2 + Np_i, \\ \mathcal{E}(n_i^4) &= N_4 p_i^4 + 6N_3 p_i^3 + 7N_2 p_i^2 + Np_i, \\ \mathcal{E}(n_i^2 n_j^2) &= N_4 p_i^2 p_j^2 + N_3 (p_i^2 p_j + p_j^2 p_i) + N_2 p_i p_j, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.81)$$

όπου $N_r = N!/(N-r)!$.

Αν το ϕ^2 γραφεί στην μορφή $\phi^2 = \frac{1}{N} \sum (n_i^2/\pi_i) - N$, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\phi^2) &= \frac{1}{N} \sum \frac{\mathcal{E}(n_i^2)}{\pi_i} - N \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \sum \frac{N_2 p_i^2}{\pi_i} + \sum \frac{N p_i}{\pi_i} \right\} - N. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου:

$$\mu_1' = (N-1) \sum (p_i^2/\pi_i) + \sum (p_i/\pi_i) - N.$$

Και πάλι:

$$\mathcal{E}[(\phi^2)^2] = \mathcal{E} \left[\frac{1}{N} \sum \frac{n_i^2}{\pi_i} + \frac{1}{N^2} \sum_{\neq j} \frac{n_i^2 n_j^2}{\pi_i \pi_j} - 2 \sum \frac{n_i^2}{\pi_i} + N^2 \right], \quad (2.82)$$

από την οποία με αντικατάσταση και απλοποίηση προκύπτει:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= N^{-1} \left\{ (N-1)(6-4N) \left[\sum (p_i^2/\pi_i) \right]^2 + 4(N-1)(N-2) \sum (p_i^2/\pi_i^2) \right. \\ &\quad - 4(N-1) \sum (p_i^2) \sum (p_i/\pi_i) + 6(N-1) \sum (p_i^2/\pi_i^2) \\ &\quad \left. - \left[\sum (p_i/\pi_i)^2 \right] + \sum (p_i/\pi_i^2) \right\} \end{aligned} \quad (2.83)$$

Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει και η τρίτη ροπή, αλλά η συνάρτηση είναι τόσο μεγάλη και περίπλοκη που μπορεί να μην έχει μεγάλη αξία για λόγους σύγκρισης.

Στην περίπτωση όπου $p_i = \pi_i$, οι παραπάνω σχέσεις περιορίζονται σε εκείνες του Haldane (1937) για την ακριβή ροπή της κατανομής της ϕ^2 υπό την H_0 . Σύμφωνα με την προσέγγιση για την ϕ^2 , προκύπτουν οι ακόλουθες δύο πρώτες ροπές:

$$\begin{aligned}\mu'_1 &= \nu + \lambda = k - 1 + \lambda = k - 1 + N \left[\sum (p_i^2 / \pi_i) - 1 \right], \\ \mu_2 &= 2(\nu + 2\lambda) = 2(k - 1) + 4\lambda = 2(k - 1) + 4N \left[\sum (p_i^2 / \pi_i) - 1 \right],\end{aligned}\tag{2.84}$$

όπου λ προκύπτει σύμφωνα με την σχέση (2.77).

Η σύγκριση αυτών των κατά προσέγγιση ροπών όπως ορίστηκαν στις σχέσεις (2.82) και (2.83), με τις ακριβείς, (2.83), φαίνεται να είναι δυνατή μόνο αριθμητικά. Έχουν γίνει ορισμένες συγκρίσεις, συμπεριλαμβανομένου ενός ελέγχου της συνολικής κατανομής με ένα πείραμα τυχαίας δειγματοληψίας. Στις περιπτώσεις που ελήφθησαν, η προσέγγιση φάνηκε ικανοποιητική για πρακτικούς σκοπούς, αλλά η εν λόγω έρευνα βρίσκεται ακόμα σε εξέλιξη.

2.5.3 Η χρησιμότητα της ισχύος στον έλεγχο καλής προσαρμογής X^2

Η ισχύς του ελέγχου X^2 για την H_0 σε σχέση με την εναλλακτική H_1 είναι μια συνάρτηση των $k - 1$, λ , α και μπορεί να γραφτεί ως $\beta(k - 1, \lambda, \alpha)$, όπου k είναι ο αριθμός των ομάδων, α το επίπεδο σημαντικότητας και παράμετρο μη-κεντρικότητας λ ίση με:

$$\lambda = N \left(\sum_{i=1}^k \frac{p_i^2}{\pi_i} \right) = N \Delta(H_0, H_1).$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το λ είναι συνάρτηση των p_i και π_i και μπορεί να θεωρηθεί ως μέτρο «ασυμφωνίας» μεταξύ των δύο συναρτήσεων κατανομής όπως αυτές ορίζονται από τις υποθέσεις H_0 και H_1 .

Η συνάρτηση ισχύος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να απαντήσει σε πολλές ερωτήσεις που σχετίζονται με τον έλεγχο καλής προσαρμογής:

1. Για δεδομένο μέγεθος δείγματος N και αριθμό ομάδων k , μπορεί να τεθεί το ερώτημα ποια είναι η πιθανότητα να διαπιστωθεί η ανεπάρκεια της υπόθεσης H_0 , χρησιμοποιώντας ένα δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας.

2. Για δεδομένο κ , μπορεί να τεθεί το ερώτημα πόσες παρατηρήσεις είναι απαραίτητες για να καθοριστεί, με πιθανότητα 90%, το επίπεδο σημαντικότητας στο 5%.
3. Για δεδομένα κ και N , μπορεί να τεθεί το ερώτημα πόσο μεγάλη θα ανιχνευθεί μια απόκλιση του H_1 από το H_0 (σύμφωνα με την σχέση $\Delta(H_0, H_1)$) με μια δεδομένη πιθανότητα.

Στην προσπάθεια να δοθεί μια καλύτερη επεξήγηση για αυτές τις εφαρμογές, στην συνέχεια θα παρουσιαστεί ένα παράδειγμα από την γενετική. Έστω η διασταύρωση:

$$\frac{AB}{ab} \times \frac{AB}{ab}$$

όπου οι A και B είναι δύο ανεξάρτητοι παράγοντες, τα υπολειπόμενα γονίδια των οποίων αντιπροσωπεύονται από τα a και b . Οι απόγονοι είναι των τεσσάρων τύπων [AB], [Ab], [aB], [ab] με συχνότητες στην αναλογίες $9, 3, 3r, r$ (με r μικρότερο της μονάδας). Αυτό συμβαίνει όταν οι δύο κατηγορίες απογόνων που περιέχουν τα δύο υπολειπόμενα γονίδια a, a είναι λιγότερο βιώσιμες από αυτές που περιέχουν μόνο ένα κυρίαρχο γονίδιο, έτσι ώστε μόνο ένα κλάσμα των απογόνων επιβιώνει.

Εδώ οι αναμενόμενες συχνότητες είναι:

$$\begin{aligned} \pi_i &: \frac{9}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16} \\ p_i &: \frac{9}{4}(3+r), \frac{3}{4}(3+r), \frac{3r}{4}(3+r), \frac{r}{4}(3+r). \end{aligned}$$

Εδώ:

$$\lambda = N \left(\frac{4(3+r^2)}{(3+r)^2} - 1 \right). \quad (2.85)$$

όπου N είναι ο αριθμός των απογόνων που μελετήθηκαν. Τότε:

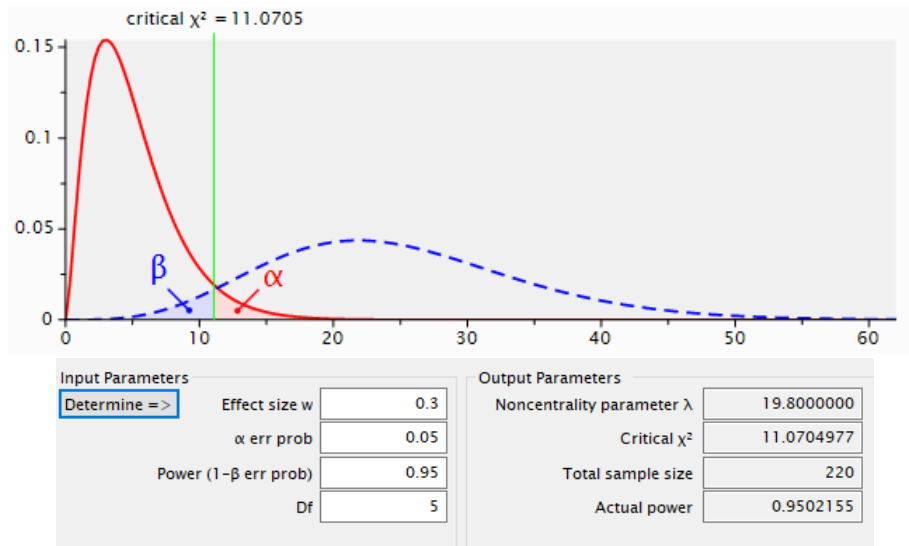
$$\Delta \equiv \Delta(H_0, H_1) = \frac{4(3+r^2)}{(3+r)^2} - 1. \quad (2.86)$$

Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν τρεις καταστάσεις όπου θα μπορούσε να εφαρμοστεί η συνάρτηση ισχύος.

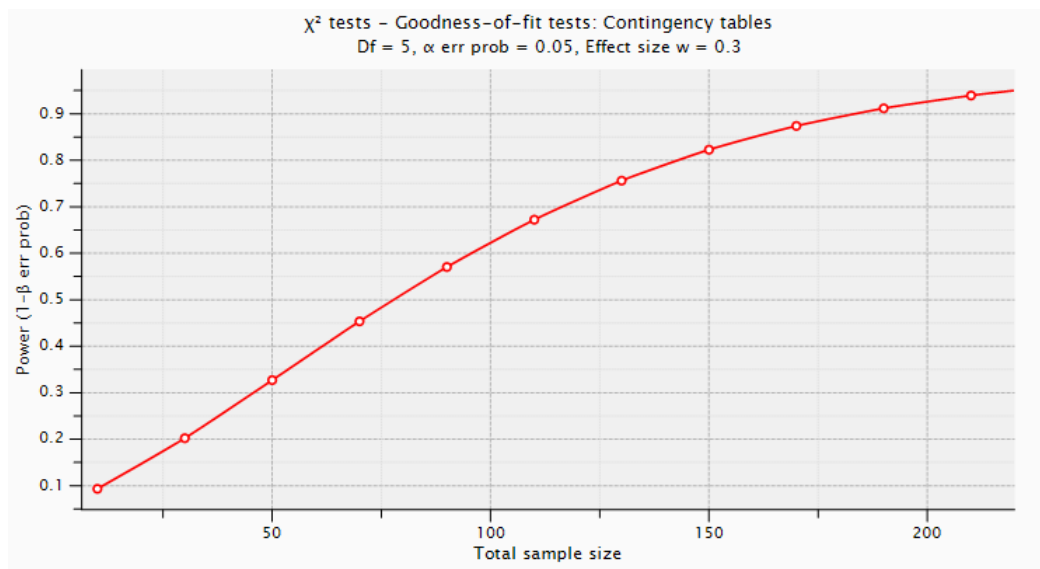
1. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε 100 παρατηρήσεις. Χρησιμοποιώντας τον έλεγχο X^2 σε επίπεδο σημαντικότητας 5% για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης ($r = 1$), η πιθανότητα να καθοριστεί η διαφορική βιωσιμότητα όταν $r = \frac{1}{2}$ λαμβάνεται υπολογίζοντας την παράμετρο μη-κεντρικότητας λ από την σχέση (2.77) και μετά εισάγοντάς την στον Πίνακα (2.5.2) και $n = k - 1 = 3$. Εδώ $\lambda = 300/49$ και άρα η ισχύς $\beta = 0.52$.
2. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε με πιθανότητα 90% να ορίσουμε ότι $r = \frac{1}{2}$, χρησιμοποιώντας επίπεδο σημαντικότητας 5%. Σύμφωνα με τον Πίνακα (2.5.2) ισχύει ότι $\lambda = 14.1$ και ως εκ τούτου, θέτοντας στην σχέση (2.86) όπου $r = \frac{1}{2}$, λαμβάνουμε $\Delta = 3/49$. Στη συνέχεια, μέσω της σχέσης (2.85) βρίσκουμε ότι θα χρειαστούμε ένα δείγμα $N = 230$.
3. Και πάλι, εάν $N = 100$, $\alpha = 0.05$, μπορούμε να ρωτήσουμε πόσο μικρό πρέπει να είναι το r για να δώσουμε μια πιθανότητα 50 : 50 για τον ορισμό της αξιοπιστίας; Το λ προκύπτει όπως πριν και μέσω της σχέσης (2.85) ορίζεται το r . Συνεπώς, προκύπτει ότι $\beta = 0.50$, $\lambda = 5.8$ και $r = 0.51$.

Στην συνέχεια παρουσιάζεται ένα πιο αναλυτικό παραδείγματα με την βοήθεια του προγράμματος G*Power². Έστω ότι μας ενδιαφέρει μέσω του ελέγχου X^2 καλής προσαρμογής να υπολογίσουμε σε επίπεδο σημαντικότητας 5% και με $\nu = 5$ βαθμούς ελευθερίας, το απαιτούμενο μέγεθος του δείγματος N , την παράμετρο μη-κεντρικότητας λ , την ισχύς του ελέγχου και το X^2 .

²Το G*Power είναι ένα δωρεάν λογισμικό που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της στατιστικής ισχύος. Το πρόγραμμα προσφέρει τη δυνατότητα υπολογισμού ισχύος για μια μεγάλη ποικιλία στατιστικών δοκιμών, συμπεριλαμβανομένων των ελέγχων t , F και X^2 , μεταξύ άλλων.



Σχήμα 2.12: Έλεγχος χ^2 καλής προσαρμογής $\nu = 5$ βαθμούς ελευθερίας και επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$.



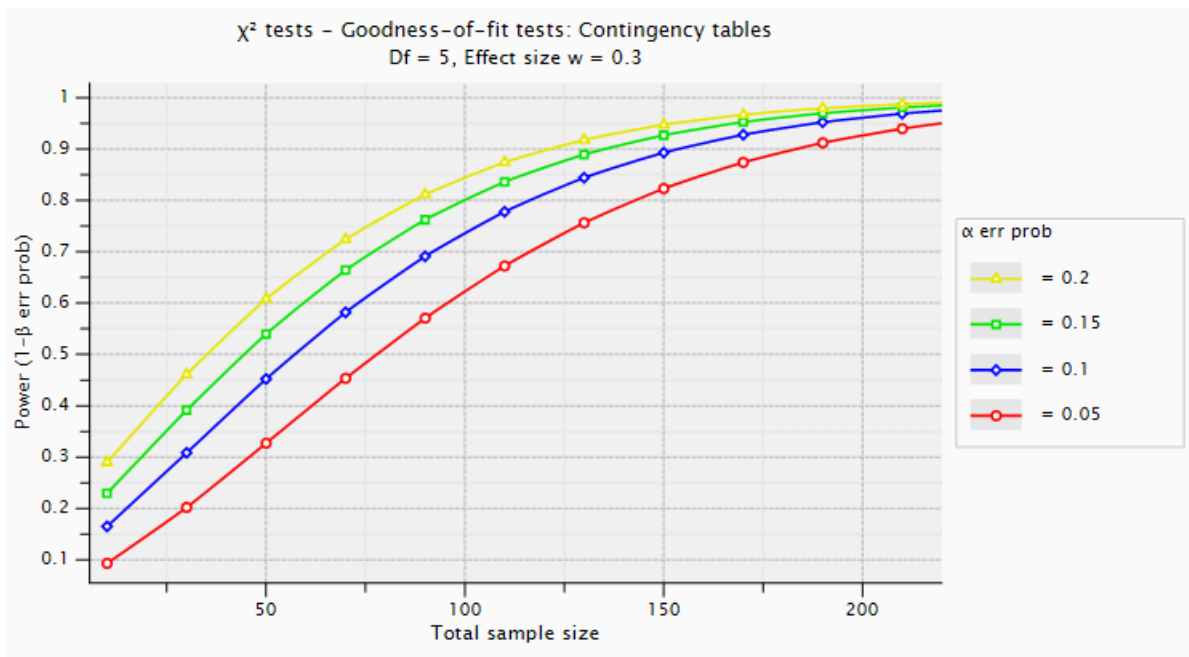
Σχήμα 2.13: Συνάρτηση ισχύος για τον έλεγχο χ^2 καλής προσαρμογής με $\nu = 5$ βαθμούς ελευθερίας και επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$.

Ας δούμε τώρα την περίπτωση όπου θέλουμε να εξετάσουμε διαφορετικά επίπεδα σημαντικότητας. Η συνάρτηση ισχύος για την κάθε περίπτωση, ανάλογα με το μέγεθος του δείγματος διαμορφώνεται ως εξής:

χ^2 tests – Goodness-of-fit tests: Contingency tables
Df = 5, Effect size w = 0.3

#	Total sample size	α err prob = 0.05 Power (1-β err prob)	α err prob = 0.1 Power (1-β err prob)	α err prob = 0.15 Power (1-β err prob)	α err prob = 0.2 Power (1-β err prob)
1	10.0000	0.0932462	0.165082	0.229747	0.289888
2	30.0000	0.202173	0.308552	0.391442	0.461073
3	50.0000	0.327179	0.452168	0.539606	0.607648
4	70.0000	0.453517	0.581901	0.663996	0.723936
5	90.0000	0.570588	0.690964	0.762108	0.811236
6	110.000	0.672300	0.777817	0.835900	0.874044
7	130.000	0.756322	0.844082	0.889335	0.917716
8	150.000	0.822945	0.892899	0.926841	0.947236
9	170.000	0.873995	0.927819	0.952483	0.966718
10	190.000	0.911991	0.952178	0.969622	0.979315
11	210.000	0.939566	0.968803	0.980854	0.987314

Πίνακας 2.5.3: Έλεγχος X^2 καλής προσαρμογής για διαφορετικά επίπεδα σημαντικότητας και $\nu = 5$ βαθμοί ελευθερίας.



Σχήμα 2.14: Συνάρτηση ισχύος για τον έλεγχο X^2 καλής προσαρμογής για διαφορετικά επίπεδα σημαντικότητας και $\nu = 5$ βαθμοί ελευθερίας.

2.5.4 Μια καλύτερη προσέγγιση της συνάρτησης ισχύος στον έλεγχο καλής προσαρμογής X^2

Στην ενότητα (2.5.2) κατά την ορισμό της προσέγγισης X^2 στην κατανομή της:

$$\phi^2 = \sum \frac{(n_i - N\pi_i)^2}{N\pi_i},$$

κάνουμε την υπόθεση ότι τα p_i και π_i , οι αναλογίες των αναμενόμενων συχνοτήτων στις υποθέσεις H_0 και H_1 δεν διαφέρουν πολύ, έτσι ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε την συνθήκη $(n_i - Np_i)/\sqrt{(N\pi_i)}$ ως κανονική απόκλιση με μηδενικό μέσο όρο και διακύμανση ίση με την μονάδα. Θα εξετάσουμε τώρα την κατανομή της ϕ^2 χωρίς να κάνουμε μια τέτοια υπόθεση και θα τη χρησιμοποιήσουμε για να επιτύχουμε μια καλύτερη προσέγγιση στη συνάρτηση ισχύος.

Η συνάρτηση ϕ^2 μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$\phi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{\pi_i} \left(\frac{n_i - Np_i}{\sqrt{(Np_i)}} + \frac{Np_i - N\pi_i}{\sqrt{(Np_i)}} \right)^2, \quad (2.87)$$

Τώρα, κάτω από την μηδενική υπόθεση, οι ποσότητες $(n_i - Np_i)/\sqrt{(Np_i)}$ κατανομονται κατά προσέγγιση κανονικά, σαν τυπική κανονική $N(0, 1)$, με τον περιορισμό ότι $\sum n_i = N$. Επομένως, το ϕ^2 σύμφωνα με την σχέση (2.87) μπορεί να θεωρηθεί ως το σταθμισμένο άθροισμα των k κανονικών αποκλίσεων έχοντας διαφορετικές αναμενόμενες τιμές υπό την συνθήκη $\sum n_i = N$.

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της ϕ^2 ορίζεται ως:

$$\left(\sum \frac{p}{1 - 2itp/\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} \prod_1^k (1 - 2itp/\pi)^{-\frac{1}{2}} \times \exp \left\{ N \sum \left(\frac{it(p - \pi)^2/\pi}{1 - 2itp/\pi} \right) - \frac{N}{2} \left(\sum \frac{p - \pi}{1 - 2itp/\pi} \right)^2 \left(\sum \frac{p}{1 - 2itp/\pi} \right)^{-1} \right\}. \quad (2.88)$$

όπου απορρίπτονται οι δείκτες των p_i και π_i . Από αυτό προκύπτουν οι σχέσεις για τις τρεις πρώτες ροπές. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= (N - 1) \sum (p_i^2/\pi_i) + \sum (p_i/\pi_i) - N, \\ \mu_2 &= 4(N - 1) \sum (p_i^2/\pi_i^2) - 2(2N - 1) \left[\sum (p_i^2/\pi_i) \right]^2 + 2 \sum (p_i^2/\pi_i^2) \\ \mu_3 &= 24(N - 1) \sum (p_i^4/\pi_i^2) - 24(2N - 1) \left[\sum (p_i^2/\pi_i) \right] \left[\sum (p_i^3/\pi_i^2) \right] \\ &\quad + 8(3N - 1) \left[\sum (p_i^2/\pi_i) \right]^3 + 8 \sum (p_i^3/\pi_i^3). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Εύκολα διακρίνεται ότι η μόνη υπόθεση που αποτιμώνεται, ότι η συνθήκη $(n_i - Np_i)/\sqrt{(Np_i)}$ κατανέμεται ως τυπική κανονική $N(0, 1)$ κάτω από την H_1 , είναι παρόμοια με την υπόθεση βάσει της οποίας βασίζεται ο έλεγχος X^2 καλής προσαρμογής, δηλαδή ότι η $(n_i - Np_i)/\sqrt{(Np_i)}$

ακολουθεί επίσης την τυπική κανονική υπό την H_0 , το οποίο ισχύει όταν τα $N\pi_i$ δεν είναι πολύ μικρά. Έτσι, όταν τα $N\pi_i$ δεν είναι πολύ μικρά, μπορούμε να περιμένουμε ότι οι ροπές στην σχέση (2.89) θα συμπίπτουν με τις ακριβείς ροπές που δίνονται στις (2.82) και (2.83). Προφανώς οι εκφράσεις για το μ'_1 είναι ακριβώς ίδιες. Οι τιμές της δεύτερης ροπής μ_2 στις περιπτώσεις που εξετάστηκαν στην (2.89), λαμβάνοντας υπόψιν όλα τα παραπάνω, αντιλαμβανόμαστε ότι είναι πανομοιότυπες με αυτές στην σχέση (2.83).

Στην συνέχεια δίνεται μια αναπαράσταση της κατανομής του ϕ^2 υπό την H_0 ως σφάλμα τύπου III³ που έχει τις δύο πρώτες ροπές της παραπάνω σχέσης, δηλαδή, υποθέτουμε ότι το ϕ^2/p κατανέμεται ως X^2 κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας, όπου $p = \frac{1}{2}\mu_2/\mu'_1$ και $\nu = 2\mu_1'^2/\mu_2$. Είναι σαφές ότι αυτή θα είναι μια καλύτερη προσέγγιση σε σχέση από εκείνη του τύπου III που έχει ορισθεί από τις μ'_1, μ_2 που δίνεται στην σχέση (2.84), και η συνάρτηση ισχύος που βασίζεται σε αυτό θα είναι πιο κοντά στην ακριβή από αυτή που ορίζεται στις σχέσεις (2.79) και (2.80). Όμως, παρόλο που δίνεται μια καλύτερη προσέγγιση, χάνεται η απλότητα της κατά προσέγγιση μεθόδου. Μπορεί παρομοίως να εξεταστεί η αναπαράσταση μιας κατανομής Τύπου III, χρησιμοποιώντας τις πραγματικές ροπές μ'_1 και μ_2 , αλλά η διαδικασία υπολογισμού της δεύτερης ροπής, που δίνεται στην (2.83), φαίνεται να είναι δύσκολο να υπολογιστεί αριθμητικά.

2.5.5 Υπό όρους συνάρτηση ισχύος

Ως τώρα εξετάστηκε η περίπτωση της συνάρτησης ισχύος του ελέγχου X^2 καλής προσαρμογής όταν η μηδενική υπόθεση είναι πλήρως καθορισμένη, δηλαδή είναι μια απλή υπόθεση. Συχνά όμως μας ενδιαφέρει να ελέγξουμε αν ένα παρατηρούμενο δείγμα προέρχεται από συγκεκριμένο τύπο πληθυσμού, ώστε να μας δίνεται μόνο η μορφή του πληθυσμού και όχι οι τιμές των παραμέτρων. Στην περίπτωση αυτή η H_0 είναι μια σύνθετη υπόθεση. Σε ορισμένες περιπτώσεις πρέπει ακόμα να ελέγξουμε την υπόθεση ότι πολλά δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό, χωρίς να διευκρινίσουμε τίποτα σχετικά με τον πληθυσμό αυτό. Σε αυτές τις περιπτώσεις λαμβάνουμε εκτιμήσεις των απροσδιόριστων παραμέτρων, ας πούμε T_1, T_2, \dots, T_ν , από το δείγμα και επομένως υπολογίζουμε τις αναμενόμενες συχνότητες \hat{m}_i . Τότε, εάν η μέθοδος εκτίμησης είναι ικανοποιητική, η συνάρτηση

$$\phi^2 = \sum_i (n_i - \hat{m}_i)^2 / \hat{m}_i \quad (2.90)$$

³Ένα σφάλμα Τύπου III είναι η περίπτωση όπου ορθά απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση αλλά για λάθος λόγους. Αυτό το είδος σφάλματος αποτελεί συνδυασμό των σφαλμάτων τύπου I και II.

εξακολουθεί να ακολουθεί μια κατά προσέγγιση X^2 κατανομή με $k-1$ βαθμούς ελευθερίας.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ως εναλλακτική της υπόθεσης H_0 , υπάρχει μια απλή υπόθεση H_1 . Τότε τίθεται το ερώτημα: με την εκτίμηση του m_i στην υπόθεση ότι η H_0 είναι αληθής και εφαρμόζοντας τον έλεγχο X^2 , τι πιθανότητες υπάρχουν να απορριφθεί η μηδενική υπόθεση, όταν, στην πραγματικότητα, η H_1 είναι αληθής;

Έχει δοθεί κάποια προσοχή σε αυτό το πρόβλημα και φαίνεται δυνατό να βρεθεί μια λύση χρησιμοποιώντας, ως πρώτο βήμα, αυτό που ο David (1947) όρισε ως συνάρτηση ισχύος υπό όρους. Αυτή δίνει την πιθανότητα απόρριψης του μηδενικής υπόθεσης όταν η δοκιμή περιορίζεται σε ένα πεπερασμένο σύνολο S δειγμάτων που δίνουν τις ίδιες τιμές για τις εκτιμώμενες παραμέτρους. Αυτό δίνει την πιθανότητα απόρριψης της H_0 όταν η δοκιμή περιορίζεται σε ένα πεπερασμένο σύνολο S δειγμάτων που παρέχουν τις ίδιες τιμές, ας πούμε $T_1^s, T_2^s, \dots, T_r^s$ για τις εκτιμώμενες παραμέτρους. Έτσι, εάν η διαδικασία προσαρμογής περιλαμβάνει εκτίμηση δύο παραμέτρων από τον μέσο όρο του δείγματος και τη διακύμανση, δείγματα ενός συνόλου θα είναι εκείνα που έχουν κοινό μέσο όρο και διακύμανση. Και πάλι, κατά τον έλεγχο της ανεξαρτησίας σε έναν πίνακα συνάφειας, η συνάρτηση ισχύος υπό όρους θα ληφθεί για ένα σύνολο δειγμάτων που δίνουν τα ίδια οριακά σύνολα.

Κεφάλαιο 3

Η μη-κεντρική F κατανομή

3.1 Εισαγωγή

Έστω S_{ν_1} και S_{ν_2} δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν τις κατανομές $X_{\nu_1}^2$ και $X_{\nu_2}^2$ αντίστοιχα. Τότε, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής:

$$F = \frac{S_{\nu_1}/\nu_1}{S_{\nu_2}/\nu_2} \quad (3.1)$$

ονομάζεται κατανομή F με βαθμούς ελευθερίας ν_1, ν_2 και συμβολίζεται με F_{ν_1, ν_2} .

Στην περίπτωση όπου και οι δύο X^2 κατανομές αντικατασταθούν από δυο μη-κεντρικές X^2 , θα λάβουμε μια διπλά μη-κεντρική κατανομή F με βαθμούς ελευθερίας ν_1, ν_2 και παραμέτρους μη-κεντρικότητας λ_1, λ_2 , που ορίζονται ως η κατανομή του λόγου:

$$\left\{ \frac{X_{\nu_1}^{\prime 2}(\lambda_1)}{\nu_1} \right\} \left\{ \frac{X_{\nu_2}^{\prime 2}(\lambda_2)}{\nu_2} \right\}^{-1} \quad (3.2)$$

Σε ορισμένες περιπτώσεις, στην (3.2) το $\lambda_2 = 0$, συνεπώς υπάρχει μόνο ένα κεντρικό X^2 στον παρονομαστή. Αυτό θα μπορούσε να ονομαστεί ως "μεμονωμένα μη-κεντρική F κατανομή", αλλά συνήθως ο όρος "μεμονωμένα" απορρίπτεται, συνεπώς ορίζεται ως μη-κεντρική F κατανομή με ν_1, ν_2 βαθμούς ελευθερίας και παραμέτρους μη-κεντρικότητας λ_1, λ_2 . Η περίπτωση όπου $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ συνήθως δεν εξετάζεται χωριστά, καθώς αυτό αντιστοιχεί απλώς στον αντίστροφο τύπο μιας μη-κεντρικής F , όπως ήδη ορίστηκε.

Για την διπλά μη-κεντρική μεταβλητή F , σύμφωνα με την (3.2) θα χρησιμοποιηθούν οι συμβολισμοί $F_{\nu_1, \nu_2}''(\lambda_1, \lambda_2)$ και $F_{\nu_1}'(\lambda_1)$ για την (μεμονωμένη) μη-κεντρική μεταβλητή F (και για τις αντίστοιχες συναρτήσεις τους).

$$\left\{ \frac{X_{\nu_1}^{\prime 2}(\lambda_1)}{\nu_1} \right\} \left\{ \frac{X_{\nu_2}^{\prime 2}}{\nu_2} \right\}^{-1} \quad (3.3)$$

Ισχύει ακόμα ότι:

$$F_{\nu_1, \nu_2}(0, \lambda_2) = [F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_2)]^{-1}$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί κυρίως η (μεμονωμένη) μη-κεντρική F κατανομή. Οι διπλά μη-κεντρικές F θα εμφανιστούν ξανά στην ενότητα (3.4.1).

Η απόδειξη της μεμονωμένης μη-κεντρική F κατανομή μπορεί να παρουσιαστεί με δύο τρόπους.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1 *Ας υποθέσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή N ακολουθεί μια κατανομή Poisson με την παράμετρο $\lambda/2$, και ότι η δεσμευμένη κατανομή του X για δεδομένο N είναι η F κατανομή με $n + 2N$ βαθμούς ελευθερίας στον αριθμητή και d βαθμούς ελευθερίας στον παρονομαστή, όπου $\lambda \in [0, \infty)$ και $n, d \in (0, \infty)$. Τότε, η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη μη-κεντρική F κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας στον αριθμητή, και d βαθμούς ελευθερίας στον παρονομαστή και παράμετρο μη-κεντρικότητας λ .*

Απόδειξη: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή N ακολουθεί μια κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda/2$, και ας υποθέσουμε επίσης ότι η δεσμευμένη κατανομή U για δεδομένο N είναι X^2 με $n+2N$ βαθμούς ελευθερίας, και ότι η V προέρχεται εξίσου από μια X^2 με d βαθμούς ελευθερίας και είναι ανεξάρτητη από τα (N, U) . Έστω τυχαία μεταβλητή X , τέτοια ώστε:

$$X = \frac{U/n}{V/d}$$

Δεδομένου ότι η μεταβλητή V είναι ανεξάρτητη από τα (U, N) , η μεταβλητή X ικανοποιεί τη συνθήκη στο θεώρημα, δηλαδή η υπό όρους κατανομή του X για δεδομένο N είναι η F κατανομή με $n + 2N$ βαθμούς ελευθερίας στον αριθμητή και d βαθμούς ελευθερίας στον παρονομαστή. Αλλά τότε ισχύει επίσης ότι, η U ακολουθεί την μη-κεντρική X^2 κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας στον αριθμητή και παράμετρο μη-κεντρικότητας λ , και η V ακολουθεί την μη-κεντρική X^2 κατανομή με d βαθμούς ελευθερίας και οι U, N είναι ανεξάρτητες. Έτσι εξ ορισμού η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί μια F κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας στον αριθμητή, d βαθμούς ελευθερίας στον παρονομαστή και παράμετρο μη-κεντρικότητας λ .

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2 Έστω η τυχαία μεταβλητή X_1 ακολουθεί την μη-κεντρική X^2 κατανομή με βαθμούς ελευθερίας n_1 και παράμετρο μη-κεντρικότητας $\lambda \geq 0$ και έστω η τυχαία μεταβλητή X_2 ακολουθεί επίσης την μη-κεντρική X^2 κατανομή με βαθμούς ελευθερίας n_2 και X_1, X_2 ανεξάρτητες. Η κατανομή της F , όπως ορίζεται από την σχέση:

$$F = \frac{(X_1/n_1)}{(X_2/n_2)} \quad (3.4)$$

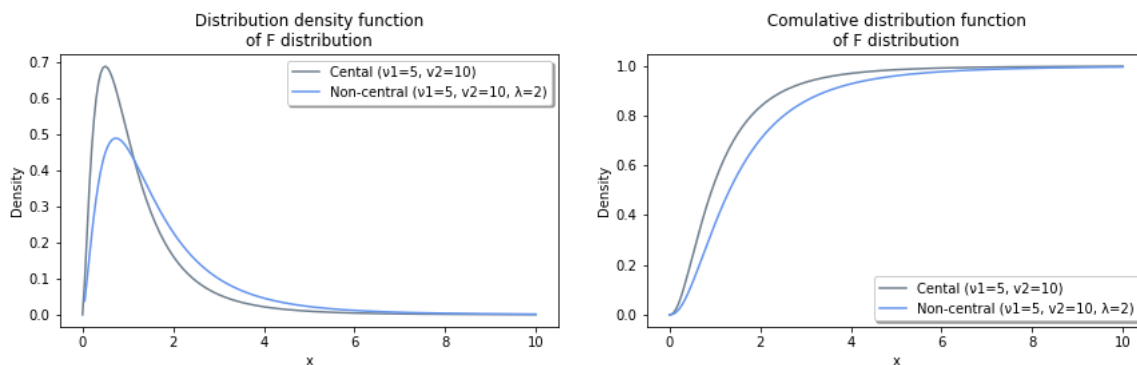
ονομάζεται μη-κεντρική F κατανομή με βαθμούς ελευθερίας n_1, n_2 και παράμετρο μη-κεντρικότητας λ .

(Απόδειξη: βλ. UW-Madison Stat 609: Mathematical Statistics Lecture 13)

□

Η μη-κεντρική F κατανομή χρησιμοποιείται στον υπολογισμό των συναρτήσεων ισχύος των δοκιμών γενικών γραμμικών υποθέσεων. Οι υποθέσεις αυτές περιλαμβάνουν τυπικές δοκιμές που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση διακύμανσης, όπως ορισθηκε από τους Tang (1938), Madow (1948), Lehmann (1959) και Scheffe (1959) σε κάποιες πρώτες δημοσιεύσεις. Κάποιες μεταγενέστερες αναφορές περιλαμβάνουν τους Cohen (1977), Fleishman (1980) και Cohen και Nel (1987), οι οποίοι έδωσαν έμφαση στα μοντέλα σταθερών επιδράσεων (fixed effects models)¹.

¹Στην στατιστική, ένα μοντέλο σταθερών επιδράσεων (fixed effects models) είναι ένα στατιστικό μοντέλο στο οποίο οι παράμετροι του μοντέλου είναι σταθερές ή μη τυχαίες ποσότητες. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τα μοντέλα τυχαίων επιδράσεων και τα μικτά μοντέλα, στα οποία όλες ή μερικές από τις παραμέτρους του μοντέλου είναι τυχαίες μεταβλητές.



Σχήμα 3.1: Σ.π.π. και σ.κ μιας κεντρικής και μιας μη-κεντρικής F κατανομής με $\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 10$ βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη-κεντρικότητας $\lambda = 2$.

3.2 Ιδιότητες Κατανομής

Στην συνέχεια, μέσω της (3.3) παρουσιάζονται οι ροπές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3 *Εφόσον ο αριθμητής και ο παρονομαστής στην (3.3) είναι ανεξάρτητοι, έπεται ότι η r -ροπή είναι:*

$$\begin{aligned} \mu'_r(F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1)) &= \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^r \mu'_r(X'_{\nu_1}(\lambda_1)) \mu'_{-r} X_{\nu_2}^2 \\ &= e^{-\lambda_1/2} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right) \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\nu_2 - r)}{\Gamma(\frac{1}{2}\nu_2)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}\lambda_1)^j}{j!} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\nu_1 + j + r)}{\Gamma(\frac{1}{2}\nu_1 + j)} \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει:

$$E[F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1)] = \frac{\nu_2(\nu_1 + \lambda_1)}{\nu_1(\nu_2 - 2)}, \quad \nu_2 > 2, \quad (3.5)$$

$$\text{var}((F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1))) = 2 \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^2 \frac{(\nu_1 + \lambda_1)^2 + (\nu_1 + 2\lambda_1)(\nu_2 - 2)}{(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)}, \quad \nu_2 > 4, \quad (3.6)$$

και η τρίτη κεντρική ροπή είναι:

$$\begin{aligned} \mu_3(F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1)) &= \frac{4}{(\nu_2 - 4)(\nu_2 - 6)} \\ &\times \left[4 \left(\frac{\nu_1 + \lambda_1}{\nu_2 - 2}\right)^3 + \frac{6(\nu_1 + \lambda_1)(\nu_1 + 2\lambda_1)}{(\nu_2 - 2)^2} + \frac{2(\nu_1 + 3\lambda_1)}{\nu_2 - 2} \right], \quad \nu_2 > 6. \end{aligned} \quad (3.7)$$

□

Οι Pearson και Tiku (1970) έδωσαν κάποιους εναλλακτικούς τύπους, θεωπίζοντας τον συμβολισμό $\Lambda_1 = \frac{\lambda_1}{\nu_1}$:

$$\mu_1' = \frac{\nu_2}{(\nu_2 - 2)}(1 + \Lambda_1). \quad (3.8)$$

$$\mu_2 = \frac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)} \left\{ 1 + 2\Lambda_1 + \frac{\nu_1}{(\nu_1 + \nu_2 - 2)}\Lambda_1^2 \right\} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \mu_3 = & \frac{8\nu_2^3(\nu_1 + \nu_2 - 2)(2\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1^2(\nu_2 - 2)^3(\nu_2 - 4)(\nu_2 - 6)} \\ & \times \left\{ 1 + 3\Lambda_1^2 + \frac{6\nu_1}{(2\nu_1 + \nu_2 - 2)}\Lambda_1^2 + \frac{2\nu_1^2}{(\nu_1 + \nu_2 - 2)(2\nu_1 + \nu_2 - 2)}\Lambda_1^3 \right\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \mu_4 = & \frac{12\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1^3(\nu_2 - 2)^4(\nu_2 - 4)(\nu_2 - 6)(\nu_2 - 8)} \\ & \times \{ [2(3\nu_1 + \nu_2 - 2)(2\nu_1 + \nu_2 - 2) + (\nu_1 + \nu_2 - 2)(\nu_2 - 2)(\nu_1 + 2)](1 + 4\Lambda_1) \\ & + 2\nu_1(3\nu_1 + 2\nu_2 - 4)(\nu_2 + 10)\Lambda_1^2 + 4\nu_1^2(\nu_2 + 10)\Lambda_1^3 + \frac{\nu_1^3(\nu_2 + 10)}{(\nu_1 + \nu_2 - 2)}\Lambda_1^4 \}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Εναλλακτικά, οι δύο πρώτες ροπές μπορούν να υπολογισθούν ως εξής:

$$E\left(\frac{1}{X_2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n_2 - 2}, & n_2 > 2 \\ \infty, & n_2 \leq 2 \end{cases}$$

Για $n_2 > 2$,

$$E(F) = E\left(\frac{X_1/n_1}{X_2/n_2}\right) = E\left(\frac{X_1}{n_1}\right)E\left(\frac{X_2}{n_2}\right) = \frac{n_1 + \delta}{n_1} \frac{n_2}{n_2 - 2} = \frac{n_2(n_1 + \delta)}{n_1(n_2 - 2)}.$$

Επιπλέον,

$$E\left(\frac{1}{X_2^2}\right) = \frac{1}{\Gamma(n_2/2)2^{n_2/2}} \int_0^\infty x^{n_2/2-3} e^{-x/2} dx = \begin{cases} \frac{1}{(n_2 - 2)(n_2 - 4)}, & n_2 > 4 \\ \infty, & n_2 \leq 4 \end{cases}$$

Επομένως, για $n_2 > 4$,

$$\begin{aligned} Var(F) &= E\left(\frac{X_1^2/n_1^2}{X_2^2/n_2^2}\right) - [E(F)]^2 = \frac{n_2^2}{n_1^2} E(X_1^2)E\left(\frac{1}{X_2^2}\right) - \left(\frac{n_2(n_1 + \delta)}{n_1(n_2 - 2)}\right)^2 \\ &= \frac{n_2^2}{n_1^2} \left(\frac{2n_1 + 4\delta + (n_1 + \delta)^2}{(n_2 - 2)(n_2 - 4)} - \frac{(n_1 + \delta)^2}{(n_2 - 2)^2} \right) \\ &= \frac{2n_2^2 [(n_1 + \delta)^2 + (n_2 - 2)(n_1 + 2\delta)]}{n_1^2(n_2 - 2)^2(n_2 - 4)}. \end{aligned}$$

Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι αντίστροφες ροπές του $F_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1)$.

Για $\nu_1 > 2r$ και ν άρτιος αριθμός:

$$\begin{aligned}
 E \left[\left\{ F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1) \right\}^{-r} \right] &= \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^r (-1)^{r-(\nu_1/2)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\nu_2 + r)}{\Gamma(r)\Gamma(\frac{1}{2}\nu_2)} \\
 &\times \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r-1}{s} \left(\frac{1}{2}\lambda_1 \right)^{s-(\nu_1/2)+1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\nu_1 - s - 1\right) \\
 &\times \left\{ s^{-\lambda_1/2} - \sum_{t=0}^{(\nu_1/2)-s-2} \frac{(\frac{1}{2}\lambda_2^2)^t}{t!} \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Για $\nu_1 > 2r$ και ν περιττός αριθμός:

$$\begin{aligned}
 E \left[\left\{ F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1) \right\}^{-r} \right] &= \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^r (-1)^{r-(\nu_1/2)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\nu_2 + r)}{\Gamma(r)\Gamma(\frac{1}{2}\nu_2)} \\
 &\times \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r-1}{s} \left(\frac{1}{2}\lambda_1 \right)^{s-(\nu_1/2)+1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\nu_1 - s - 1\right) \\
 &\times \left\{ 2\pi^{-1/2} D \left(\left(\frac{1}{2}\lambda_1 \right)^{1/2} \right) - \left(\frac{1}{2}\lambda_1 \right)^{1/2} \sum_{t=0}^{\frac{1}{2}(\nu_1-5)-s} \frac{(\frac{1}{2}\lambda_1)^t}{\Gamma(t + \frac{3}{2})} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

όπου:

$$D(y) = e^{-y^2} \int_0^y e^{u^2} du$$

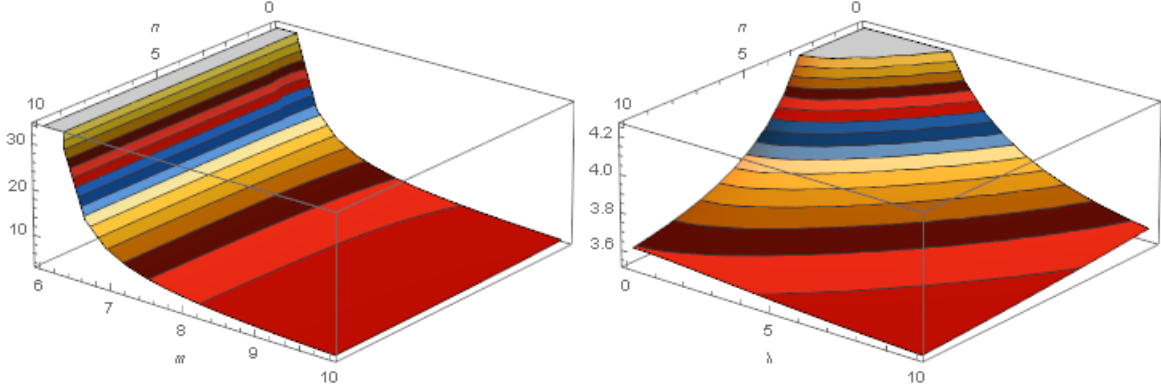
είναι το ολοκλήρωμα Dawson. Για $\nu_1 \leq 2r$, η αντίστροφη ροπή τείνει στο άπειρο.

Ο συντελεστές ασυμμετρίας και κύρτωσης της μη-κεντρικής κατανομής F είναι αρκετά δύσκολοι στον υπολογισμό και περίπλοκοι τύποι.

Όπως ισχύει για την κεντρική κατανομής F , έτσι και η μη-κεντρική F έχει θετική ασυμμετρία. Ως αναλογία δύο θετικών μεγεθών, η κατανομή F μπορεί να λάβει μόνο θετικές τιμές, χωρίς ανώτατο όριο, που σημαίνει ότι είναι πάντα θετικά λοξή. Η κατανομή είναι επομένως αρκετά διαφορετική από την κανονική και την t κατανομή, οι οποίες μπορούν να λάθουν απεριόριστες θετικές και αρνητικές τιμές.

Η ασυμμετρία από τους βαθμούς ελευθερίας ν_1, ν_2 καθώς και από τη παράμετρο μη-κεντρικότητας λ :

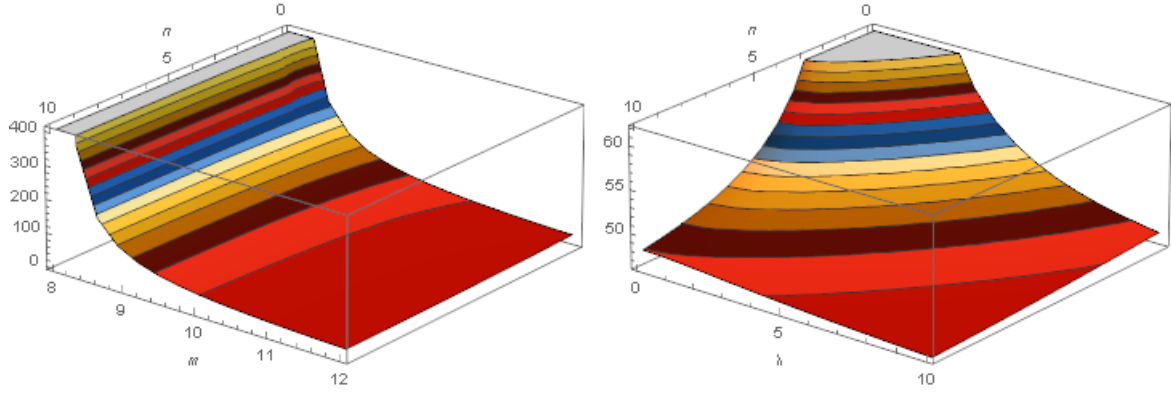
$$\begin{aligned}
\gamma_1 = & (2\sqrt{2}\sqrt{-4 + \nu_2}(\nu_1(-2 + \nu_2 + \nu_1))(-2 + \nu_2 + 2\nu_1) \\
& + 3(-2 + \nu_2 + \nu_1)(-2 + \nu_2 + 2\nu_1)\lambda \\
& + 6(-2 + \nu_2 + \nu_1)\lambda^2 + 2\lambda^3) / ((-6 + \nu_2)(\nu_1(-2 + \nu_2 + \nu_1) \\
& + 2(-2 + \nu_2 + \nu_1)\lambda + \lambda^2)^{3/2}), \quad \nu_2 > 6.
\end{aligned} \tag{3.14}$$



Σχήμα 3.2: Τρισδιάστατο διάγραμμα για τον συντελεστή ασυμμετρίας μιας μη-κεντρικής F κατανομής.

Αντίστοιχα, και η κύρτωσης εξαρτάται από τους βαθμούς ελευθερίας ν_1 , ν_2 καθώς και από τη παράμετρο μη-κεντρικότητας λ :

$$\begin{aligned}
\gamma_2 = & (3(-4 + \nu_2)(\nu_1(-2 + \nu_2 + \nu_1))(4(-2 + \nu_2)^2 + (-2 + \nu_2)(10 + \nu_2)\nu_1 \\
& + (10 + \nu_2)n^2) + 4(-2 + \nu_2 + n)(4(-2 + \nu_2)^2 + (-2 + \nu_2)(10 + \nu_2)\nu_1 \\
& + (10 + \nu_2)\nu_1^2)\lambda + 2(10 + \nu_2)(-2 + \nu_2 + \nu_1)(-4 + 2\nu_2 \\
& + 3\nu_1)\lambda^2 + 4(10 + \nu_2)(-2 + \nu_2 + \nu_1)\lambda^3 \\
& + (10 + \nu_2)\lambda^4) / ((-8 + \nu_2)(-6 + \nu_2)(\nu_1(-2 + \nu_2 + \nu_1) \\
& + 2(-2 + \nu_2 + \nu_1)\lambda + \lambda^2)^2), \quad \nu_2 > 8.
\end{aligned} \tag{3.15}$$



Σχήμα 3.3: Τρισδιάστατο διάγραμμα για τον συντελεστή κύρτωσης μιας μη-κεντρικής F κατανομής.

Όπως θα παρουσιάστηκε ήδη στο Κεφάλαιο (2), η κατανομή $X_{\nu_1}^{\prime 2}(\lambda_1)$ μπορεί να απεικονισθεί ως μια μείξη των κεντρικών $X_{\nu_1+2j}^2$ κατανομών σε αναλογία $e^{-\lambda_1/2}(\frac{1}{2}\lambda_1)^j/j!$, ($j = 0, 1, 2, \dots$).

Συνεπώς η σχέση:

$$G'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1) = \frac{X_{\nu_1}^{\prime 2}(\lambda_1)}{X_{\nu_2}^2} \quad (3.16)$$

ορίζεται ως μια μείξη κεντρικών G_{ν_1+1, ν_2} κατανομών σε αναλογία $e^{-\lambda_1/2}(\frac{1}{2}\lambda_1)^j/j!$, ($j = 0, 1, 2, \dots$).

Συνεπώς, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $G'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1)$ (ο συμβολισμός G' θα χρησιμοποιηθεί για λόγους ευκολίας) είναι:

$$\begin{aligned} p_{G'}(g) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{(\frac{1}{2}\lambda_1)^j}{j!} e^{-\lambda_1/2} \right) \frac{g(\nu_1/2) + j - 1}{B(\frac{1}{2}\nu_1 + j, \frac{1}{2}\nu_2)(1+g)^{\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)+j}} \\ &= \frac{e^{-\lambda_1/2}}{B(\frac{1}{2}\nu_1, \frac{1}{2}\nu_2)} \cdot \frac{g(\nu_1/2) - 1}{(1+g)^{(\nu_1+\nu_2)/2}} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{\frac{1}{2}\lambda_1 g}{1+g} \right]^j \times \frac{(\nu_1 + \nu_2)(\nu_1 + \nu_2 + 2) \cdots (\nu_1 + \nu_2 + 2 \cdot \overline{j-1})}{j! \nu_1(\nu_1 + 2) \cdots (\nu_1 + 2 \cdot \overline{j-1})}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1) = (\nu_2/\nu_1)G'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1)$ (ο συμβολισμός F' χρησιμοποιείται τώρα για λόγους ευκολίας) είναι:

$$\begin{aligned}
P_{F'}(f) &= \frac{e^{-\lambda_1/2} \nu_1^{\nu_1/2} \nu_2^{\nu_2/2}}{B(\frac{1}{2}\nu_1, \frac{1}{2}\nu_2)} \cdot \frac{f(\nu_1/2) - 1}{(\nu_2 + \nu_1 f)^{(\nu_1 + \nu_2)/2}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{2}\lambda_1 \nu_1 f}{\nu_2 + \nu_1 f} \right)^j \\
&\quad \times \frac{(\nu_1 + \nu_2)(\nu_1 + \nu_2 + 2) \cdots (\nu_1 + \nu_2 + 2 \cdot \overline{j-1})}{j! \nu_1 (\nu_1 + 2) \cdots (\nu_1 + 2 \cdot \overline{j-1})} \\
&= p_{F_{\nu_1, \nu_2}}(f) e^{-\lambda_1/2} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\frac{1}{2}\lambda_1 \nu_1 f}{\nu_2 + \nu_1 f} \right]^j \times \frac{(\nu_1 + \nu_2)(\nu_1 + \nu_2 + 2) \cdots (\nu_1 + \nu_2 + 2 \cdot \overline{j-1})}{j! \nu_1 (\nu_1 + 2) \cdots (\nu_1 + 2 \cdot \overline{j-1})} \right\}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

όπου $P_{F_{\nu_1, \nu_2}}(f)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας την κεντρικής F κατανομής με ν_1, ν_2 βαθμούς ελευθερίας.

Αξίζει να σημειωθεί πως ενώ ισχύει ότι:

$$p_{G'}(g) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\lambda_1/2} \left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)^j}{j!} \right] P_{G_{\nu_1+2j, \nu_2}}(g),$$

δεν ισχύει αντίστοιχα ότι:

$$p_{F'}(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\lambda_1/2} \left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)^j}{j!} \right] P_{F_{\nu_1+2j, \nu_2}}(f).$$

Η μη-κεντρική F κατανομή για $\nu_1 = \nu_2 = 1$ είναι:

$$\begin{aligned}
p_{F'}(f) &= \frac{e^{-\lambda/2}}{\pi} f^{-1/2} (1+f) {}_1F_1\left(1; \frac{1}{2}; c\right) \\
&= (e^{-\lambda/2} f^{-1/2} (1+f))^{-1} \lambda^{-1} \left\{ 1 + 2e^c c^{1/2} D(e^{1/2}) \right\}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

όπου $c = (\lambda/2)f(1+f)^{-1}$ και $D(\cdot)$ είναι το ολοκλήρωμα του Dawson.

Η αθροιστική κατανομή μπορεί να εκφραστεί σε όρους μιας άπειρης σειράς πολλαπλάσιων αναλογιών ατελής Βήτα κατανομών:

$$\begin{aligned}
Pr \left[F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1) \right] &= Pr \left[G'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1) \leq \frac{\nu_1}{\nu_2} f \right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\left[\frac{1}{2}\lambda_1 \right]^j}{j!} e^{-\lambda_1/2} \right) \cdot I_{\nu_1 f / (\nu_2 + \nu_1 f)} \left(\frac{1}{2}\nu_1 + j, \frac{1}{2}\nu_2 \right),
\end{aligned} \tag{3.20}$$

όπου $I_p(\alpha, b)$ είναι μια μη-πλήρης αναλογία μιάς συνάρτησης Βήτα όπως προκύπτει από το $I_p(\alpha, b) = \int_0^p t^{\alpha-1}(1-t)^{b-1}dt/B(\alpha, b)$. Δεδομένου ότι είναι εφικτό η ατελής Βήτα κατανομή να εκφραστεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, υπάρχει ένα αντίστοιχο εύρος διαφορετικών εκφράσεων για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της μη-κεντρικής F κατανομής. Στην περίπτωση όπου το ν_2 είναι άρτιος ακέραιος αριθμός, υπάρχουν κάποιες πολύ απλές εκφράσεις για πεπερασμένους όρους. Ο Sibuya (1967) επισήμανε ότι όλα αυτά μπορούν να αποκτηθούν χρησιμοποιώντας τον κάτωθι τύπο:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)^j}{j!} e^{-\lambda_1/2} h(j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)^j}{j!} \Delta^j h(0) \quad (3.21)$$

με $h(\cdot)$ μια μη-πλήρης Βήτα συνάρτηση, συνδυασμένη με επαναληπτικές σχέσεις που ικανοποιούνται από αυτή την συνάρτηση και $\Delta_j h(0)$ η πεπερασμένη διαφορά όπως ορίζεται στην (2.21).

Συγκεκριμένα, ο Sibuya (1967) έδειξε ότι (αν το ν_2 είναι άρτιος ακέραιος αριθμός), τότε ισχύει ότι:

$$Pr \left[F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1) \right] = e^{-(\lambda_1/2)(1-Y)} \sum_{i=0}^{(\nu_2/2)-1} \frac{\left[\frac{1}{2}\lambda_1(1-Y)\right]^i}{i!} I_Y \left(\frac{1}{2}\nu_1 + i, \frac{1}{2}\nu_2 - i \right), \quad (3.22)$$

όπου $Y = \nu_1 f / (\nu_2 + \nu_1 f)$.

Αντικαθιστώντας το $I_Y(\frac{1}{2}\nu_1 + i, \frac{1}{2}\nu_2 - i)$ με ένα πολυώνυμο, προκύπτει ο τύπος όπως τον όρισε ο Seber (1936):

$$\begin{aligned} Y^{\nu_1/2} \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2}\lambda_1(1-Y) \right] \right\} \sum_{i=0}^{(\nu_2/2)-1} (1-Y)^i \times \sum_{j=0}^i \left\{ \binom{i + (\nu_1/2) - 1}{i-j} \frac{\left[\frac{1}{2}\lambda_1 Y\right]^j}{j!} \right\} \\ = Y^{\nu_1/2} \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2}\lambda_1(1-Y) \right] \right\} \sum_{i=0}^{(\nu_2/2)-1} T_i, \end{aligned} \quad (3.23)$$

όπου:

$$T_{-1} = 0,$$

$$T_0 = 1,$$

$$T_i = i^{-1}(1-Y) \left\{ (2i-2 + \frac{1}{2}\nu_1 + \frac{1}{2}\lambda_1 Y) T_{i-1} - (i + \frac{1}{2}\nu_1 - 2)(1-Y) T_{i-2} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}\nu_2 - 1.$$

Ο τύπος αυτός επικράτησε (σε ελαφρώς διαφορετική μορφή) από τους **Nicholson (1954)** και **Hodges (1955)**, αν και δεν έδωσαν τον τύπο επανάληψης της T_i . Ένας παρόμοιος τύπος δώθηκε από τους **Wishart (1932)** και **Tang (1938)**:

$$Y^{\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)-1} e^{-(\lambda_1/2)(1-Y)} \sum_{i=0}^{(\nu_2/2)-1} T'_i, \quad (3.24)$$

όπου:

$$T_{-1} = 0,$$

$$T_0 = 1,$$

$$T_i = i^{-1}(Y^{-1} - 1) \left\{ \left[\frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) - i + \frac{1}{2}\lambda_1 Y \right] T'_{i-1} + \frac{1}{2}\lambda_1(1 - Y)T'_{i-2} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}\nu_2 - 1.$$

Οι εξισώσεις (3.22), (3.23) και (3.24) ισχύουν μόνο στην περίπτωση όπου το ν_2 είναι άρτιος και ακέραιος αριθμός. Ο **Price (1964)** έδωσε κάποιες περιορισμένες εκφράσεις για την περίπτωση όπου το ν_2 είναι περιττός ακέραιος αριθμός. Αυτές οι περιπτώσεις είναι αρκετά περίπλοκες και δεν θα παρουσιαστούν στην εν λόγω διπλωματική εργασία. Αν ο τύπος (3.21) εφαρμοστεί απευθείας στον τύπο (3.20) η ακόλουθη επέκταση άπειρων σειρών, ισχύει για ένα γενικό ν_2 :

$$Pr \left[F_{\nu_1, \nu'_2(\lambda_1)} \right] = I_Y \left(\frac{1}{2}\nu_1, \frac{1}{2}\nu_2 \right) - \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2))}{\Gamma(\frac{1}{2}\nu_1 + 1)} Y^{\nu_1/2} (1 - Y)^{\nu_2/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \Delta^{j-1} t_j, \quad (3.25)$$

όπου:

$$t_1 = 1,$$

$$t_{j+1} = \left(\frac{1}{2}\nu_1 + j \right)^{-1} \left[\frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) + j - 1 \right] Y t_j.$$

Αυτό μπορεί να εκφραστεί σε όρους γενικευμένων πολυωνύμων **Laguerre**. Ο **Tiku** απέδωσε επίσης μια πιο περίπλοκη αλλά πιο γρήγορα συγκλίνουσα προέκταση από τον τύπο (3.25).

$$Pr \left[F_{\nu_1, \nu'_2(\lambda_1)} \right] = I_Y \left(\frac{1}{2}\nu_1, \frac{1}{2}\nu_2 \right) + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} b_j \frac{Y'^{\alpha/2} (1 - Y')^{\nu_2/2}}{B(\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\nu_2)} \Delta^{j-1} t_j, \quad (3.26)$$

όπου t_j 's όπως ορίζονται στην (3.25),

$$\alpha = (\nu_1 + \lambda_1)^2(\nu_1 + 2\lambda_1)^{-1},$$

$$Y' = 1 - \left[1 + \frac{\nu_1(\nu_1) + \lambda_1}{\nu_2(\nu_1 + 2\lambda_2)} f \right]^{-1},$$

$$b_3 = 2\lambda_1^2(\nu_1 + 2\lambda_2)^{-2},$$

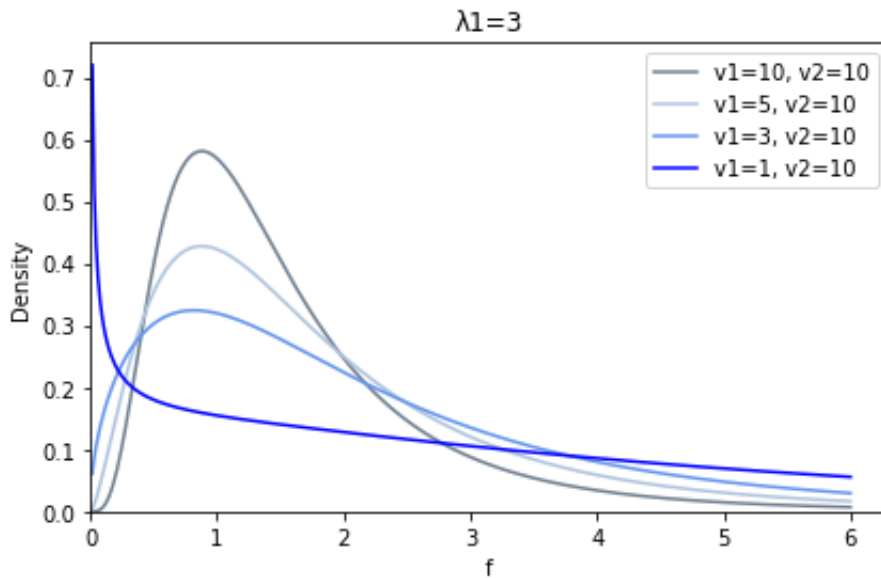
$$b_4 = 6\lambda_1^2(\nu_1 + 4\lambda_1)(\nu_1 + 2\lambda_1)^{-3},$$

$$b_5 = 24\lambda_1^2(\nu_1 + 6\nu_1\lambda_1 + 11\lambda_1^2)(\nu_1 + 2\lambda_1)^{-4}, \dots$$

όπου τα $b's$ δεν εξαρτώνται από το ν_2 .

Όπως θα ήταν αναμενόμενο, μπορεί να αποδειχθεί ότι το $Pr[F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1) \leq f]$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του λ_1 . Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι ανομοιόμορφη. Καθώς το ν_2 τείνει στο άπειρο, η κατανομή $F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1)$ πλησιάζει αυτή του $\nu_1^{-1} \times$ (μη-κεντρική X^2 κατανομή με ν_1 βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη-κεντρικότητας λ_1). Επιπλέον, καθώς το λ_1 τείνει στο μηδέν, η κατανομή τείνει στην (κεντρική) F κατανομή.

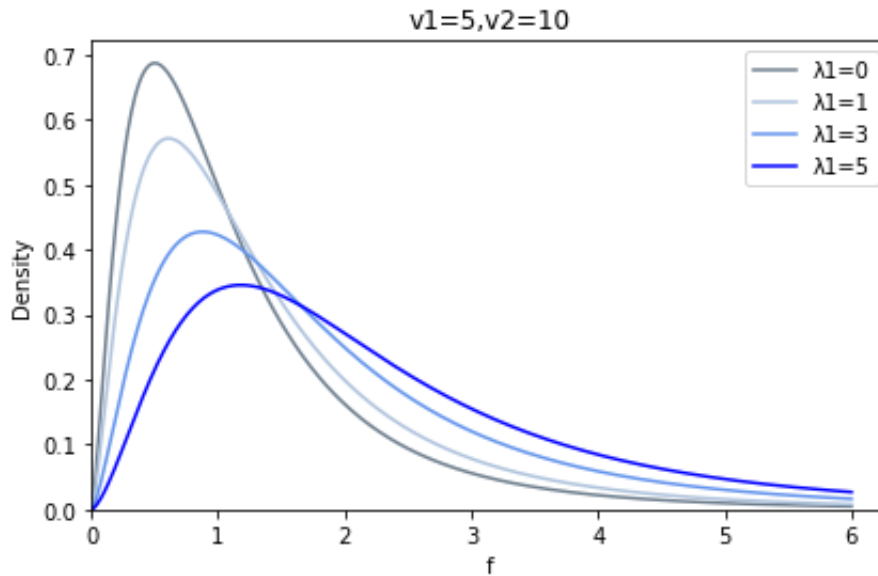
Εναλλακτικές εκφράσεις για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής και την ροπογεννήτρια συνάρτηση δόθηκαν από τον Vanables (1975).



Σχήμα 3.4: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μη-κεντρικών F κατανομών.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα (3.4), η μη-κεντρική F κατανομή για $\lambda_1 = 3$ και $(\nu_1, \nu_2) = (10, 10), (5, 10), (3, 10), (1, 10)$, καθώς οι βαθμοί ελευθερίας στον αριθμητώ μειώνονται, οι καμπύλες γίνονται πιο επίπεδες καθώς η μέση τιμή, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή μετατοπίζονται προς τα δεξιά.

Αντίστοιχα, στο Σχήμα (3.5) παρουσιάζονται μια σειρά από μη-κεντρικές F καμπύλες πυκνότητας για $(\nu_1, \nu_2) = (5, 10)$ καθώς η παράμετρος μη-κεντρικότητας λ_1 αυξάνεται από $\lambda = 0$ σε $\lambda_1 = 1$, $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_1 = 5$. Και σε αυτή την περίπτωση οι καμπύλες γίνονται πιο επίπεδες για μεγάλες τιμές του λ_1 και παρατηρείται παρόμοια μετατόπιση της μέσης τιμής, της διαμέσου και της επικρατούσας τιμής προς τα δεξιά.



Σχήμα 3.5: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μη-κεντρικών F κατανομών.

3.3 Εκτίμηση της παραμέτρου μη-κεντρικότητας

Ιδιαίτερα μεγάλη προσοχή έχει δοθεί στην εκτίμηση της παραμέτρου μη-κεντρικότητας λ_1 από μία παρατηρούμενη τιμή F' μιας $F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1)$ μεταβλητής (με ν_1, ν_2 γνωστά). Το μεγαλύτερο μέρος της ενότητας αυτής θα αφοσιωθεί στην περιγραφή των αποτελεσμάτων αυτών των προσπαθειών. Στους τέλους της ενότητας γίνεται μια σύντομη περιγραφή για την εκτίμηση της μέγιστης πιθανογάνειας με βάση n ανεξάρτητες παρατηρηθείσες τιμές F'_1, F'_2, \dots, F'_n .

Ο ομοιόμορφα αμερόληπτος εκτιμητής ελάχιστης διακύμανσης του λ_1 είναι:

$$\lambda_1^* = \nu_1 \nu_2^{-1} (\nu_2 - 2) F' - \nu_1 \quad (3.27)$$

το οποίο δεν είναι πάντα θετικό, συνεπώς είναι μη-αποδεκτό.

Ο Chow (1987) πρότεινε τον τύπο:

$$(\lambda_1^*)_+ = \begin{cases} \nu_1 \nu_2^{-1} (\nu_2 - 2) F' - \nu_1 & , \quad F' > \nu_2 (\nu_2 - 2)^{-1} \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.28)$$

το οποίο είναι επίσης μη-αποδεκτό.

Πράγματι, αν λάβουμε ως κριτήριο το αναμενόμενο τετραγωνικό σφάλμα, οποιοσδήποτε εκτιμητής της μορφής $\alpha \left\{ \nu_2^{-1} (\nu_2 - 2) F' - 1 \right\}_+$ είναι μη-αποδεκτός. Ο εκτιμητής $\alpha \left\{ \nu_2^{-1} (\nu_2 - 2) F' - 1 \right\}$ επικρατεί στο λ_1^* για όλα τα λ_1 , με την προϋπόθεση ότι:

$$\max \left(0, \frac{\nu_2 - 6}{\nu_2 - 2} \right) \leq \alpha \leq 1.$$

Ο Rukhin (1993) έχει διερευνήσει τις γραμμικές συναρτήσεις του F' ως εκτιμητές του λ_1 . Για σκοπούς ανάλυσης, είναι βολικό να αντικαταστήσουμε το F' με $G' = \nu_1 F' / \nu_2$ το οποίο κατανέμεται ως $G_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1)$.

Το αναμενόμενο σφάλμα δευτέρου βαθμού του $\alpha G' + b$ είναι:

$$E \left[(\alpha G' + b - \lambda_1)^2 \right] = 2(\nu_2 - 2)^{-1} (\nu_2 - 4)^{-1} \left\{ \nu_1 + 2\lambda_1 + \frac{1}{2} (\nu_1 + \lambda_1)^2 \right\} \alpha^2 + 2(\nu_2 - 2)^{-1} (\nu_1 + \lambda_1) (\nu_1 \lambda_1) \alpha (b - \lambda_1) + (b - \lambda_1)^2, \quad \nu_2 > 4. \quad (3.29)$$

Οι υπολογισμοί δείχνουν ότι οποιοσδήποτε εκτιμητής με $\alpha > \nu_2 - 4$ βελτιώνεται όταν $\alpha = \nu_2 - 4$. Στην περίπτωση όπου $\alpha \leq \nu_2 - 4$, το αναμενόμενο σφάλμα δευτέρου βαθμού του εκτιμητή $\alpha G' + b$ τείνει στο άπειρο, συνεπώς είναι μη-αποδεκτό.

Ο εκτιμητής Bayes του λ_1 συζητήθηκε εκτενέστερα από τους Perlman και Rasmussen (1975) και DeWaal (1974). Εάν το λ_1 έχει ως προηγούμενη κατανομή (prior distribution²) αυτή του $yX_\nu^2(\gamma > 0)$, τότε το τετραγωνικό σφάλμα του εκτιμητή Bayes είναι:

$$\frac{\gamma}{1 + \gamma} \cdot \frac{\gamma (\nu_1 + \nu_2) \nu_1 F' / \nu_2}{1 + \gamma + (\nu_1 F' / \nu_2)}. \quad (3.30)$$

Όταν το $\gamma \rightarrow \infty$, λαμβάνουμε τον μη-αποδεκτό εκτιμητή:

$$\nu_1 (\nu_1 + \nu_2) \nu_2^{-1} F' + \nu_1. \quad (3.31)$$

²Στα στατιστικά συμπεράσματα Bayes, μια προηγούμενη κατανομή πιθανότητας prior probability distribution μιας αβέβαιης ποσότητας είναι η κατανομή πιθανότητας που θα εξέφραζε τις πεποιθήσεις κάποιου σχετικά με αυτήν την ποσότητα προτού ληφθούν υπόψη κάποια στοιχεία.

Αμφότερες οι (3.30) και (3.31) έχουν μεγαλύτερα μέσα τετραγωνικά σφάλματα από την κάτωθι σχέση:

$$\nu_1(\nu_2 - 4) \left\{ \nu_2^{-1} F' - (\nu_2 - 2)^{-1} \right\}. \quad (3.32)$$

Οι Perlman και Rasmussen (1975) απέδωσαν ότι οποιαδήποτε σωστή προηγούμενη κατανομή (ανεξάρτητα από το πόσο διάχυτη) αποδίδει έναν εκτιμητή Bayes που είναι πιο κοντά στην (3.32) από ότι στην (3.30) ή στην (3.31). Πράγματι, οι δύο αυτοί εκτιμητές δεν μπορούν να είναι μικρότεροι από ν_1 , κάτι που φαίνεται να είναι περίεργο.

Για $\nu_1, \nu_2 \geq 5$, ο εκτιμητής:

$$\alpha \nu_1 \left\{ \nu_2^{-1} (\nu_2 - 2) F' - 1 \right\} + b \nu_1^{-1} \nu_2 F'^{-1}. \quad (3.33)$$

έχει μικρότερο μέσω τετραγωνικό σφάλμα από τον:

$$\alpha \nu_1 \left\{ \nu_2^{-1} (\nu_2 - 2) F' - 1 \right\} \quad (3.34)$$

αν $0 < b < 4\nu_2^{-1}(\nu_2 + 2)^{-1}(\nu_1 - 4)(\nu_1 - \nu_2 - 2)\alpha$ για κάθε $\alpha > 0$.

Οι Perlman και Rasmussen (1975) συνέστησαν την χρήση των σχέσεων:

$$\begin{aligned} \alpha &= (\nu_2 - 2)^{-1}(\nu_2 - 4) \\ b &= 2\nu_2^{-1}(\nu_2 + 2)^{-1}(\nu_2 - 2)^{-1}(\nu_1 - 4)(\nu_2 - 4)(\nu_1 + \nu_2 - 2). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Οι ίδιοι παρατήρησαν επίσης πως η εισαγωγή μη-κατάλληλων προηγούμενων κατανομών μπορεί να είναι ο λόγος που οι εκτιμητές (3.30) και (3.31) φαίνονται τόσο περίεργοι. Μέθοδοι αναζήτησης κατάλληλων προηγούμενων κατανομών έχουν αναπτυχτεί από τον Gelfand (1983).

Στην συνέχεια, ας θεωρήσουμε την κατασκευή ενός διαστήματος εμπιστοσύνης για το λ_1 , βάσει μίας μοναδικής παρατήρησης F' . Ο Vanables (1975) πρότεινε μια μέθοδο για την κατασκευή ενός διαστήματος εμπιστοσύνης για την λ_1 . Κατασκεύασε μια κατανομή εμπιστοσύνης για την λ_1 , δίνοντας μια παρατηρούμενη τιμή F' μιας μεταβλητής $F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1)$, με συνάρτηση κατανομής:

$$\begin{aligned} Pr [F_{\nu_1, \nu_2} > F'] + p(F'; \nu_1, \nu_2, 0) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left\{ \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) \right\}^{[j-1]}}{\frac{1}{2}\nu_1^{[j]}} \cdot \left(\frac{2}{\nu_2} \right)^{j-1} \\ \times \frac{\left(\frac{1}{2}F' \right)^j}{(1 + \nu_2^{-1}F')^{j-1}} Pr [X_{2j}^2 \leq \lambda_1]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση που αντιστοιχεί στην (3.36) είναι:

$$\begin{aligned} Pr [F_{\nu_1, \nu_2} > F'] + \left\{ 1 - \frac{2F't}{\nu_2(1-2t)} \right\}^{-\nu_2+(1/2)} (1-2t)^{(\nu_1/2)-1} \\ \times F \left(\frac{F'}{1-2(1+\nu_2^{-1}F')} ; \nu_1, \nu_2, 0 \right), \end{aligned} \quad (3.37)$$

όπου ο Venables προσέγγισε κατά:

$$\left\{ 1 - \frac{2F't}{\nu_2(1-2t)} \right\}^{-\nu_2/2} (1-2t)^{(\nu_1/2)-1}, \quad (3.38)$$

δίνοντας κατά προσέγγιση αντίστοιχες ροπές:

$$\begin{aligned} \kappa_r^* &= 2^{r-1}(r-1)! \left\{ \nu_2(1+\nu_2^{-1}F')^r - \nu_1 - \nu_2 + 2 \right\} \\ &= 2^{r-1}(r-1)! \left\{ rF' - \nu_1 + 2 + O(\nu_2^{-1}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ωστόσο, δεν προχώρησε στην ανάπτυξη μιας επέκτασης τύπου Cornish-Fisher για ποσοστιαία (όρια εμπιστοσύνης) για την λ_1 , αλλά πρότεινε να προσαρμόσει μια κατανομή χρησιμοποιώντας τις πρώτες κατά προσέγγιση ροπές.

Ο Guirguis (1990) στην προσπάθειά του να λύσει την εξίσωση:

$$Pr [F'_{\nu_1, \nu_2(\lambda_1)} \leq F'] = \alpha \quad (3.40)$$

για το λ_1 , χρησιμοποίησε μια επαναληπτική μέθοδο, σύμφωνα με τον τύπο:

$$\frac{\partial Pr [F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1) \leq F']}{\partial \lambda_1} = \frac{1}{2} \left\{ Pr \left[F'_{\nu_1+2, \nu_2}(\lambda_1) \geq \frac{\nu_1 F'}{\nu_1+2} \right] - Pr [F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1) \geq F'] \right\}. \quad (3.41)$$

Για $F' > 0$, το $\partial Pr [F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1) \leq F'] / \partial \lambda_1$ είναι αρνητικό και δεν υπάρχει λύση για την (3.40). Σε αντίθετη περίπτωση, υπάρχει μια μοναδική λύση, εφόσον $Pr [F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1) \leq F'] \rightarrow 0$, όταν $\lambda_1 \rightarrow 0$.

3.4 Σχετικές κατανομές

3.4.1 Διπλά μη-κεντρική F κατανομή

Η διπλά μη-κεντρική F κατανομή, όπως ορίζεται από την (3.2) έχει ήδη αναφερθεί. Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση καθεμιάς απο τις μη-κεντρικές X^2 's ως μείξη κεντρικών X^2 κατανομών, προκύπτει ότι η:

$$G''_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{X_{\nu_1}^{\prime 2}(\lambda_1)}{X_{\nu_2}^{\prime 2}(\lambda_2)}$$

κατανέμεται ως μια μείξη των G_{ν_1+2j, ν_2+2k} κεντρικών κατανομών, σε αναλογίες $\left\{ e^{-\lambda_1/2} \left(\frac{1}{2} \lambda_1 \right)^j / j! \right\} \cdot \left\{ e^{-\lambda_2/2} \left(\frac{1}{2} \lambda_2 \right)^k / k! \right\}$. Συνεπώς, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της G'' είναι:

$$p(g; \nu_1, \nu_2; \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\lambda_1/2} \left(\frac{1}{2} \lambda_1 \right)^j}{j!} \right] \left[\frac{e^{-\lambda_2/2} \left(\frac{1}{2} \lambda_2 \right)^k}{k!} \right] \left[B \left(\frac{1}{2} \nu_1 + j, \frac{1}{2} \nu_2 + k \right) \right]^{-1} \\ \times g^{(\nu_1/2)+j-1} (1+g)^{-\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)-j-k}, \quad (3.42)$$

και η αντίστοιχη για την $F'' (= \nu_2 G'' / \nu_1)$ είναι:

$$p(f; \nu_1, \nu_2; \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\lambda_1/2} \left(\frac{1}{2} \lambda_1 \right)^j}{j!} \right] \left[\frac{e^{-\lambda_2/2} \left(\frac{1}{2} \lambda_2 \right)^k}{k!} \right] \nu_1^{(\nu_1/2)+j} \nu_2^{(\nu_2/2)+k} f^{(\nu_1/2)+j-1} \\ \times (\nu_2 + \nu_1 f)^{-\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)-j-k} \left[B \left(\frac{1}{2} \nu_1 + j, \frac{1}{2} \nu_2 + k \right) \right]^{-1} \\ = p_{F_{\nu_1, \nu_2}} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{e^{\lambda_1/2} \left[\frac{1}{2} \lambda_1 \nu_1 f / (\nu_2 + \nu_1 f) \right]^j}{j!} \right] \\ \times \left[\frac{e^{-\lambda_2/2} \left[\frac{1}{2} \lambda_2 \nu_2 / (\nu_2 + \nu_1 f) \right]^k}{k!} \right] \frac{B \left(\frac{1}{2} \nu_1, \frac{1}{2} \nu_2 \right)}{B \left(\frac{1}{2} \nu_1 + j, \frac{1}{2} \nu_2 + k \right)}. \quad (3.43)$$

Ο Tiku (1972) διερεύνησε μια προσέγγιση στην κατανομή του $F''_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1, \lambda_2)$ με αυτή μιας γραμμικής συνάρτησης μιας κεντρικής F μεταβλητής. Η ανάλυσή του περιλάμβανε τα ακόλουθα βήματα:

1. Αν $(\lambda_2/\nu_2) < \frac{1}{2}$, $M(r, \frac{1}{2}\nu_2; -\frac{1}{2}\lambda_2)$ συγκλίνει γρήγορα και είναι κατα προσέγγιση περίπου ίσο με $(1 + \nu_2^{-1}\lambda_2)$ και συνεπώς η r -τάξεως ροπή του F'' (σύμφωνα με την «;» είναι περίπου ίση με $\mu'_r(F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1))(1 + \nu_2^{-1}\lambda_2)^{-r}$

2. Με την σειρά της, η κατανομή $(F'' + \alpha)/h$ κατανέμεται περίπου ως F_{ν_1, ν_2} με

$$\nu = \frac{1}{2}(\nu_2 - 2) + \left[\left\{ 1 - \frac{32(\nu_2 - 4)}{(\nu_2 - 6)^2 \beta_1} \right\}^{-1/2} - 1 \right]^{-1},$$

$$h = \frac{1}{2}\nu(\nu_2 - 2)(\nu_3 - 6)\mu_3 \{ \nu_2 \mu_2 (2\nu + \nu_2) - 2 \}^{-1},$$

και

$$\alpha = h\nu_2(\nu_2 - 2)^{-1} - \mu'_1,$$

όπου μ'_1, μ_2, μ_3 και β_1 αναφέρονται στις κατανομές της F'' .

Οι προσεγγίσεις στις κατανομές των μη-κεντρικών X^2 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εξαχθούν προσεγγίσεις για τις διπλά μη-κεντρικές F κατανομές. Έτσι, αν η κατανομή της $x'^2_{\nu_2}(\lambda_2)$ είναι προσεγγιστεί με εκείνη της $c'X^2_{\nu'}$, με $c' = (\nu_2 + 2\lambda_2)(\nu_2 + \lambda_2)^{-1}$ και $\nu' = (\nu_2 + \lambda_2)^2(\nu_2 + 2\lambda_2)^{-1}$, τότε η αντίστοιχη προσέγγιση στην κατανομή $F''_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1, \lambda_2)$ είναι αυτή $(\nu_2/c'\nu')F'_{\nu_1, \nu'}(\lambda_1) = (1 + \lambda_2\nu_2^{-1})^{-1}F'_{\nu_1, \nu'}(\lambda_1)$. Εάν προσεγγιστούν και ο αριθμητής και ο παρονομαστής, τότε η κατά προσέγγιση κατανομή θα είναι:

$$\frac{1 + \lambda_1\nu_1^{-1}}{1 + \lambda_2\nu_2^{-1}} F_{\nu, \nu'} \quad (3.44)$$

με $\nu = (\nu_1 + \lambda_1)^2(\nu_1 + 2\lambda_1)^{-1}$ και $\nu' = (\nu_2 + \lambda_2)^2(\nu_2 + 2\lambda_2)^{-1}$

Η διπλά μη-κεντρική κατανομή F χρησιμοποιείται στον υπολογισμό της συνάρτησης ισχύος των μη-τυχαίων επιδράσεων στην υπολειπόμενη διακύμανση. Για παράδειγμα, σε μια τυπική μονόπλευρη μέθοδο ταξινόμησης, εάν κάθε άτομο σε μια ομάδα έχει απόκλιση από τον μέσο όρο της εκάστοτε ομάδας, ανάλογα με την σειρά των παρατηρήσεων, τότε το υπολειπόμενο (εντός της ομάδας) άθροισμα τετραγώνων κατανέμεται ως πολλαπλάσιο μιας μη-κεντρικής παρά μιας κεντρικής X^2 μεταβλητής (Scheffe (1959)).

Μια εφαρμογή των διπλά μη-κεντρικών F κατανομών σε αμφίπλευρη διαταξική ανάλυση διακύμανσης απεικονίστηκε από τον Tiku (1972), μεταξύ άλλων πηγών. Επιπλέον, εφαρμογές μηχανικής δώθηκαν από τους Wishner (1962) και Price (1964)

3.5 Εφαρμογές

3.5.1 Εκτίμηση της συνάρτησης ισχύος

Ο έλεγχος μιας γενικής γραμμικής υπόθεσης μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι τα x_1, x_2, \dots, x_N , είναι μεταβλητές που ακολουθούν την κανονική κατανομή με ίδια τυπική απόκλιση σ και μέσους όρους $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ αντίστοιχα. Αν τα ξ_i είναι μια γραμμική συνάρτηση των παραμέτρων $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$, με $s < N$, τότε:

$$\xi_i = \alpha_{i1}\theta_1 + \alpha_{i2}\theta_2 + \dots + \alpha_{is}\theta_s,$$

Η μηδενική υπόθεση που ελέγχεται για τον αριθμό των r -παραμέτρων είναι:

$$H_0 : \theta_1 = \theta_1^0, \theta_2 = \theta_2^0, \dots, \theta_r = \theta_r^0. \quad (3.45)$$

Είναι δυνατό με έναν κατάλληλο μετασχηματισμό της μορφής:

$$y_1 = c_{j1}x_1 + c_{j2}x_2 + \dots + c_{jN}x_N$$

η σχέση:

$$T^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \xi_i)^2$$

μετατρέπεται σε:

$$T^2 = \sum_{j=1}^{N-s} y_j^2 + \sum_{j=N-s+1}^{N-s+r} (y_j - \eta_j)^2 + \sum_{j=N-s+r+1}^N (y_j - \eta_j)^2,$$

όπου η_j στο δεύτερο άθροισμα είναι γραμμική συνάρτηση των $\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_r^0$ και το η_j στο τρίτο άθροισμα είναι γραμμική συνάρτηση όλων των θ , ενώ τα a και c μπαίνουν ως συντελεστές.

Για να ελέγξουμε την υπόθεση (3.45) εξετάζουμε το κριτήριο:

$$\left\{ \frac{T_{min}^2(\theta_1^0, \dots, \theta_r^0, \theta_{r+1}, \dots, \theta_s)}{T_{min}^2(\theta_1, \dots, \theta_r, \dots, \theta_s)} \right\} = \frac{\sum_{j=N-s+1}^{N-s+r} (y_j - \eta_j)^2}{\sum_{j=1}^{N-s} y_j^2}. \quad (3.46)$$

Εάν η υπόθεση καθορίζει τέτοιες τιμές για τα $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$, έτσι ώστε τα η_j στην (3.46) εξαφανίζεται, τότε ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι τα αθροίσματα των κεντρικών τετραγώνων των r και $N - s$ αντίστοιχα. Άρα, ο λόγος των μέσων τετραγώνων ακολουθεί μια F κατανομή. Από την άλλη πλευρά, εάν τα η_j δεν εξαφανίζονται όλα, έχουμε την αναλογία

ενός αθροίσματος r μη-κεντρικών τετραγώνων προς το άθροισμα των κεντρικών τετραγώνων $N - s$. Ως εκ τούτου, ο λόγος των μέσων τετραγώνων κατανέμεται ως μη-κεντρική F , και η παράμετρος μη-κεντρικότητας λ είναι $\sigma\eta_j^2$ που μπορεί να εκφραστεί με όρους $\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_r^0$. Έτσι παίρνουμε τον έλεγχο F της ανάλυσης διασποράς και λαμβάνουμε τη συνάρτηση ισχύος του εν λόγω ελέγχου σε σχέση με μια εναλλακτική υπόθεση ως ένα ολοκλήρωμα F .

Στην συνέχεια θα εξεταστεί το ζήτημα της αξιολόγησης της ισχύος ενός ελέγχου ανάλυσης διασποράς παίρνοντας ως παράδειγμα την απλή περίπτωση k -ομάδων παρατηρήσεων:

$$x_{ti} (i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, k).$$

Έστω ότι:

$$x_{ti} = A + B_i + z_{ti} \quad (3.47)$$

όπου A είναι ο γενικός μέσος όρος, B_t η απόκλιση του μέσου όρου της t -ομάδας από τον γενικό μέσο όρο έτσι ώστε $\sum B_t = 0$ και z_{ti} να είναι τυχαία υπολείμματα, κατανομημένα κανονικά με μέσο μηδέν και τυπική απόκλιση όση με σ_0 . Οι εκφράσεις για τα μέσα τετράγωνα μεταξύ ομάδων και εντός ομάδων προκύπτουν από την (3.47):

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{k-1} \sum_{t=1}^k (\bar{x}_t - \bar{x}_{..})^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{t=1}^k n(\bar{z}_t - \bar{z}_{..} + B_t)^2, \\ \nu_0 &= \frac{1}{k(n-1)} \sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^n (\bar{x}_{ti} - \bar{x}_t)^2 = \frac{1}{k(n-1)} \sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^n n(\bar{z}_{ti} - \bar{z}_t)^2, \end{aligned}$$

Εφόσον το $(\bar{z}_t - \bar{z}_{..})$ είναι μια κανονική απόκλιση με μέσο όρο μηδέν και διακύμανση σ_0^2/n , βλέπουμε ότι ν είναι το άθροισμα των k μη-κεντρικών τετραγώνων που υπόκεινται στον γραμμικό περιορισμό:

$$\sum_{t=1}^k (\bar{z}_t - \bar{z}_{..} + B_t) = 0.$$

Εφόσον $\sum B_i = 0$, το ν κατανέμεται ως $\sigma_0^2 X_1'^2 / (k-1)$, όπου το $X_1'^2$ έχει $(k-1)$ βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο:

$$\lambda = n \sum B_i^2 / \sigma_0^2.$$

Αν

$$S^2 = (\sum B_t^2) / k \quad (3.48)$$

για τη μεταβλητότητα μεταξύ των ομάδων, ισχύει:

$$\lambda = knS^2/\sigma_0^2. \quad (3.49)$$

Τώρα το ν_0 ακολουθεί την κατανομή του $\sigma_0^2 x_2^2/[k(n-1)]$, όπου το x_2^2 έχει $k(n-1)$ βαθμούς ελευθερίας. Ως εκ τούτου, το ν/ν_0 κατανέμεται ως:

$$\frac{\frac{1}{k-1} X_1'^2}{\frac{1}{k(n-1)} X_2^2} \quad (3.50)$$

δηλαδή ως F' με $\nu_1 = k-1$, $\nu_2 = k(n-1)$ και λ που δίνεται από την (3.49).

Σε αυτό το παράδειγμα θέλουμε να ελέγξουμε για οποιαδήποτε πιθανή διαφορά μεταξύ των μέσων όρων των ομάδων, έτσι ώστε η μηδενική μας υπόθεση να είναι:

$$B_1 = B_2 = \dots = B_k = 0 \quad (3.51)$$

Συνεπώς, σύμφωνα με την (3.48), το S^2 και επομένως και το λ είναι μηδέν. Ως εκ τούτου, το ν/ν_0 ακολουθεί μια κατανομή F και παίρνουμε μια δοκιμή F . Έτσι ο έλεγχος της υπόθεσης στην (3.51) βασίζεται στην κρίσιμη περιοχή:

$$\frac{\nu}{\nu_0} \geq F_\alpha, \quad (3.52)$$

όπου α είναι το επίπεδο σημαντικότητας στο οποίο γίνεται ο έλεγχος.

Στην συνέχεια θα εξεταστεί η περίπτωση η εναλλακτική υπόθεση ότι τα B_t δεν είναι όλα μηδενικά. Τότε, η συνάρτηση ισχύος, δηλαδή η πιθανότητα $(\nu/\nu_0) \geq F$, εξαρτάται μόνο από τη μοναδική παράμετρο:

$$\frac{S^2}{\sigma_0^2} = \frac{\Sigma B_t^2}{k\sigma_0^2}.$$

Ο Hsu (1941) έδειξε ότι μεταξύ όλων των κρίσιμων περιοχών μεγέθους α , των οποίων οι συναρτήσεις ισχύος εξαρτώνται από τη μοναδική παράμετρο (S^2/σ_0^2) , η κρίσιμη περιοχή της (3.52) είναι αυτή με την μεγαλύτερη ισχύς.

Έτσι προσδιορίζουμε την εναλλακτική υπόθεση της μηδενικής υπόθεσης (3.51) από τη μοναδική παράμετρο S^2/σ_0^2 στη θέση των επιμέρους παραμέτρων B_t . Σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα σε μια διαδικασία κατασκευής, μας ενδιαφέρει περισσότερο να ανιχνεύσουμε τη συνολική μεταβλητότητα σε ένα σύνολο μηχανών παρά να ανιχνεύσουμε την απόκλιση κάθε

συγκεκριμένης μηχανής από τον γενικό μέσο όρο της μηχανής. Τότε η συνάρτηση ισχύος θα είναι χρήσιμη για τη μέτρηση της πιθανότητας ανίχνευσης αυτής της συνολικής μεταβλητότητας μέσω του ελέγχου F .

Η συνάρτηση ισχύος των δοκιμών ανάλυσης διασποράς έχει εξεταστεί από τους Tang (1938) και Hsu (1941). Η εργασία που απαιτείται για τον υπολογισμό των ακριβών τιμών της ισχύος είναι αρκετά πολύπλοκη και μέχρι στιγμής δεν έχει καταστεί εφικτή η κατάθεση σε εκτενή κλίμακα. Ωστόσο, με τις προσεγγίσεις της F κατανομής, μπορούμε να λάβουμε εύκολα μια αρκετά ακριβή τιμή για τη συνάρτηση ισχύος του ελέγχου οποιασδήποτε γραμμικής υπόθεσης.

Επιστρέφοντας στην περίπτωση k -ομάδων και kn -παρατηρήσεων, έχουμε τη συνάρτηση ισχύος που δίνεται από την σχέση:

$$\beta\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2}\right) \int_{F_\alpha}^{\infty} p_{\nu_1, \nu_2}(F' | \lambda) dF',$$

όπου F_α είναι το εναλλασσόμενο ποσοστό της κατανομής F με βαθμούς ελευθερίας ν_1, ν_2 . Το ολοκλήρωμα ισούται περίπου με:

$$\int_{F_\alpha \nu_1 / (\nu_1 + \lambda)}^{\infty} p_{\nu_1, \nu_2}(F) dF, \quad (3.53)$$

όπου:

$$\nu = \frac{(\nu_1 + \lambda)^2}{\nu_1 + 2\lambda}.$$

Επομένως, σε αυτήν την προσέγγιση, ισχύει:

$$\beta\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2}\right) = I_x\left(\frac{1}{2}\nu_2, \frac{1}{2}\nu\right) \quad (3.54)$$

όπου:

$$x = \frac{(\nu_1 + 2\lambda)\nu_2}{(\nu_1 + 2\lambda)\nu_2 + (\nu_1 + \lambda)\nu_1 F_\alpha}.$$

3.5.2 Η διαφορά μεταξύ συστηματικών και τυχαίων επιδράσεων

Οι μετρήσεις των ποσοτήτων γίνονται με στόχο να βρεθεί η πραγματική τιμή της εν λόγω ποσότητας. Στην πραγματικότητα, είναι αδύνατο να ληφθεί η πραγματική τιμή οποιασδήποτε ποσότητας, καθώς θα υπάρχει πάντα ένας βαθμός αβεβαιότητας. Η αβεβαιότητα είναι μια εκτίμηση της διαφοράς μεταξύ μιας ένδειξης μέτρησης και της πραγματικής τιμής. Οι δύο τύποι σφαλμάτων μέτρησης που οδηγούν σε αβεβαιότητα είναι τα τυχαία σφάλματα και τα συστηματικά.

Τα τυχαία σφάλματα προκαλούν απρόβλεπτες διακυμάνσεις στις ενδείξεις ενός οργάνου ως αποτέλεσμα μη ελεγχόμενων παραγόντων, όπως οι περιβαλλοντικές συνθήκες. Αυτό επηρεάζει την ακρίβεια των μετρήσεων που λαμβάνονται, προκαλώντας ευρύτερη διάδοση των αποτελεσμάτων σχετικά με τη μέση τιμή. Για την μείωση του τυχαίου σφάλματος, μια αποδεκτή λύση είναι η επανάληψη της μέτρησης πολλές φορές και ο υπολογισμός ενός μέσου όρου από αυτές.

Τα συστηματικά σφάλματα προκύπτουν από τη χρήση ελαττωματικών οργάνων που χρησιμοποιούνται ή από ελαττώματα της πειραματικής μεθόδου. Αυτός ο τύπος σφάλματος επαναλαμβάνεται κάθε φορά που χρησιμοποιείται το όργανο ή ακολουθείται η μέθοδος, γεγονός που επηρεάζει την ακρίβεια όλων των μετρήσεων που λαμβάνονται. Για την μείωση του συστηματικού σφάλματος, τα όργανα πρέπει να βαθμονομηθούν εκ νέου ή να χρησιμοποιηθούν διαφορετικά όργανα. Με άλλα λόγια να γίνουν διορθώσεις ή προσαρμογές στην τεχνική.

Τα παραπάνω μπορούν να περιγραφούν καλύτερα με τα παρακάτω παραδείγματα: Εάν οι ομάδες στην προηγούμενη ενότητα αντιστοιχούν σε χωριά και οι παρατηρήσεις είναι οι αποδόσεις των χωραφιών σε μια έρευνα καλλιιεργειών, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τα k χωριά ως τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό και η τυχειότητα που περιγράφεται από την σχέση:

$$x_{ti} = A + y_t + z_u \quad (3.55)$$

γίνεται σχετική. Εδώ, το A είναι ο γενικός μέσος όρος και y_t οι μέσοι όροι ομάδας που είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με αναμενόμενη τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση σ , και z_{ti} είναι τα τυχαία υπολείμματα που έχουν μέση τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση σ_0 .

Από την άλλη πλευρά, εάν οι ομάδες αντιστοιχούν σε k -μηχανές οι οποίες, από τη σκοπιά του χρήστη, αποτελούν ολόκληρο τον πληθυσμό των μηχανών, δεν μπορούμε να τις θεωρήσουμε ως δείγμα, και έτσι η τυχειότητα που περιγράφεται στην (3.47), είναι σχετική. Η μηδενική υπόθεση στην (3.55) είναι ότι η παράμετρος $\sigma^2 = 0$, και στην άλλη ότι $S^2 = 0$, που ισοδυναμεί με της (3.51). Αλλά φαίνεται εύκολα ότι και τα δύο οδηγούν στον ίδιο έλεγχο F για τη μηδενική υπόθεση.

Κατά την εφαρμογή της δοκιμής, αναζητούμε την ύπαρξη εναλλακτικών συνθηκών, όπου στη μία περίπτωση το σ^2 και στην άλλη το $S^2 > 0$. Αξίζει να σημειωθεί ότι το (S^2/σ_0^2) της συστηματικής ρύθμισης αντιστοιχεί σε (σ/σ_0^2) της τυχαίας διάταξης. Και τα δύο είναι μέτρα

σχετικής μεταβλητότητας μεταξύ ομάδων και μπορούν να ονομαστούν «σχετική μεταβλητότητα ομάδας».

Είναι εφικτό να συσχετιστεί η συνάρτηση ισχύος κάτω από την τυχαία ρύθμιση με αυτήν στη συστηματική ρύθμιση. Αν θεωρήσουμε τις k -ομάδες ως δείγμα από έναν άπειρο αριθμό ομάδων, τότε το $\Sigma B_i^2/(k-1)$, δηλ. το $kS^2/(k-1)$ θα είναι η εκτίμηση δείγματος της διακύμανσης του πληθυσμού σ^2 . Έτσι, αντιμετωπίζοντας το S^2 ως μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή πιθανότητας που συμβολίζεται με $p(S^2/\sigma^2)$, μπορούμε να λάβουμε τη μέση ισχύ σε όλα τα S^2 . Συνεπώς:

$$\beta = \int_0^\infty \beta \left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} \right) p(S^2|\sigma^2) dS^2$$

δίνει την ισχύ όταν εφαρμόζεται η τυχαία ρύθμιση.

Αυτή η ισχύς β για δεδομένο (σ^2/σ_0^2) , σύμφωνα με τον Johnson (1948) λαμβάνεται άμεσα από το ολοκλήρωμα της F :

$$\int_{\frac{F_\alpha}{(n\sigma^2/\sigma_0^2)+1}}^\infty p_{\nu_1, \nu_2}(F) dF = \int_{\frac{F_\alpha(\nu_1+\lambda)}{\nu_1+1+\lambda}}^\infty p_{\nu_1, \nu_2}(F) dF, \quad (3.56)$$

όπου:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= k - 1, \\ \nu_2 &= k(n - 1), \\ \lambda &= kn\sigma^2/\sigma_0^2 \end{aligned}$$

Αυτό μπορεί να τεθεί με τη μορφή των ατελών συναρτήσεων B:

$$I_{x'} \left(\frac{1}{2}\nu_2, \frac{1}{2}\nu_1 \right) \quad (3.57)$$

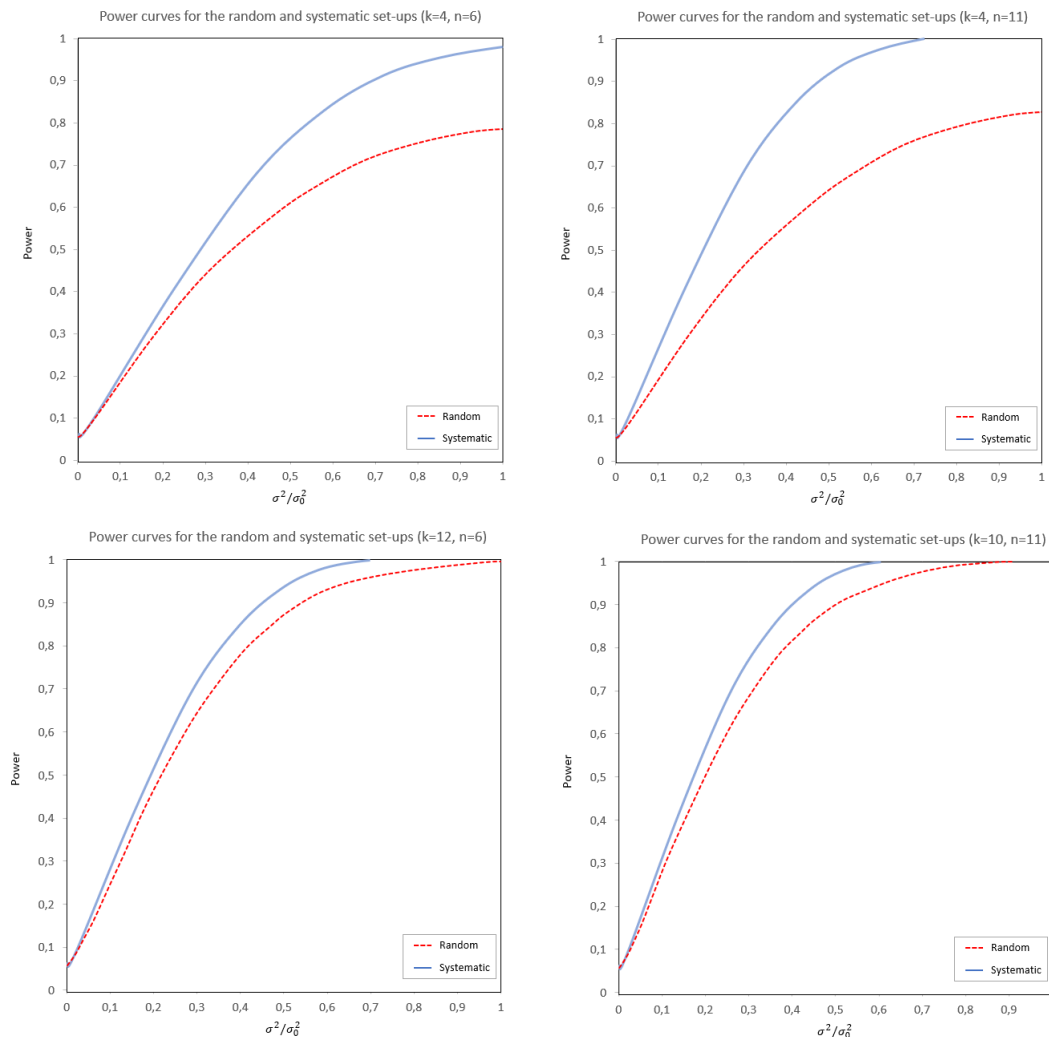
όπου:

$$x' = \frac{(\nu_1 + 1 + \lambda)\nu_2}{(\nu_1 + 1 + \lambda)\nu_2 + (\nu_1 + 1)\nu_1 F_\alpha}$$

Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ένα αποτέλεσμα που πιστεύουμε ότι ισχύει γενικά και το οποίο για λόγους διαίσθησης αναμένεται να ισχύει, δηλαδή, εάν η μηδενική υπόθεση δεν είναι αληθής, τότε για τις ίδιες αριθμητικές τιμές των αναλογιών S^2/σ_0^2 και σ^2/σ_0^2 , η ισχύς του ελέγχου F είναι μεγαλύτερη στη συστηματική περίπτωση παρά στην τυχαία. Τέσσερις συγκεκριμένες περιπτώσεις έχουν εξεταστεί αριθμητικά ως εξής:

	(a)	(b)	(c)	(d)
Number of groups k	4	4	12	10
Number of observations n in each group	6	11	6	11

Οι τιμές της ισχύος απεικονίζονται στα παρακάτω σχήματα ως τεταγμένες έναντι $\sigma^2/\sigma_0^2 (= S^2/\sigma_0^2)$. Όπως μπορούμε να δούμε και γραφικά, η συστηματική καμπύλη ισχύος βρίσκεται πάνω από την τυχαία. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι οι καμπύλες είναι πιο κοντά η μία στην άλλη στα δύο τελευταία γραφήματα παρά στα δύο πρώτα, γεγονός που συμφωνεί με τη θεωρία ότι οι δύο συναρτήσεις ισχύος πρέπει να τείνουν μεταξύ τους όταν αυξάνεται το k . Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι, τα σφάλματα προσέγγισης στον υπολογισμό της ισχύος στη συστηματική περίπτωση είναι πιθανό να είναι μικρά και δεν θα πρέπει να επηρεάζουν τις σχετικές θέσεις των καμπυλών ισχύος.



Σχήμα 3.6: Καμπύλες ισχύος για τυχαίες και συστηματικές επιδράσεις για k ομάδες με n τυχαίες παρατηρήσεις σε κάθε ομάδα.

3.5.3 Εφαρμογές της συνάρτησης ισχύος

Εδώ θα μας απασχολήσει κυρίως η συστηματική διάταξη και θα απεικονίσουμε την εφαρμογή των αποτελεσμάτων μας, λαμβάνοντας την απλή περίπτωση k ομάδων και n παρατηρήσεων. Ωστόσο, η ερμηνεία είναι αρκετά γενική και θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε σχεδιασμένο πείραμα όπως περιγράφεται στη γενική δήλωση που δόθηκε στην αρχή της ενότητας (3.5.1). Μπορούν να τεθούν δύο τύποι ερωτήσεων σε σχέση με τον έλεγχο για διαφορές μεταξύ των ομάδων:

1. Πόση είναι η απόκλιση από τη μηδενική υπόθεση, μετρούμενη με το S^2/σ_0^2 , που θα μπορούσε να ανιχνευθεί με μια δεδομένη πιθανότητα;
2. Πόσες παρατηρήσεις πρέπει να κάνουμε σε κάθε ομάδα ώστε να μπορούμε να ανιχνεύσουμε μια δεδομένη αναλογία μεταβλητότητας μεταξύ ομάδας προς εντός ομάδας S^2/σ_0^2 με μια προβλεπόμενη πιθανότητα;

Για να απαντήσουμε σε αυτές τις ερωτήσεις πρέπει να εξετάσουμε τη συνάρτηση $\beta(S^2/\sigma_0^2)$, η οποία μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$\beta(\nu_1, \nu_2, \lambda, \alpha) = e^{-\frac{1}{2}\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}\lambda)^j}{j! B(\frac{1}{2}\nu_2 + j, \frac{1}{2}\nu_2)} \int_{\frac{\nu_1 F \alpha}{\nu_1 + \nu_2 F \alpha}}^1 x^{\frac{1}{2}\nu_1 - 1 + j} (1-x)^{\frac{1}{2}\nu_2 - 1} dx,$$

και θεωρούμε το αντίστροφό του, δηλ. $\lambda \equiv \lambda(\nu_1, \nu_2, \alpha, \beta)$. Γενικά, το λ πρέπει να λαμβάνεται με αντίστροφη παρεμβολή από πίνακες για το β όπως του Tang. Το διάστημα του πίνακα των 0.5 για:

$$\phi = \sqrt{[\lambda/(\nu_1 + 1)]}$$

στους πίνακες του Tang δεν είναι αρκετά καλό ώστε η παρεμβολή να είναι ικανοποιητική. Ακόμα, δίνουν μια δοκιμαστική τιμή ϕ για την οποία υπολογίζεται το β και στη συνέχεια διορθώνεται με τη βοήθεια της παραγώγου $\partial\beta/\partial\phi$. Ακολουθώντας αυτή τη μέθοδο, η Emma Lehmer (1944) παρουσίασε το ϕ για $\alpha = 0.01$ και $\beta = 0.7$ και για ένα ευρύ φάσμα ν_1 και ν_2 . Για αυτές τις δύο τιμές της ισχύος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες της για να λάβουμε το λ . Θα ήταν σαφώς χρήσιμο να επεκταθούν αυτοί οι πίνακες.

Μπορούμε, ωστόσο, για οποιοδήποτε σύνολο τιμών ν_1, ν_2, α και β να πάρουμε το λ περίπου με τη βοήθεια της κατά προσέγγιση μορφής της β όπως δίνεται στην (3.53). Λαμβάνοντας μια δοκιμαστική τιμή του λ μπορούμε να βρούμε δύο διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς λ_1, λ_2 μεταξύ των οποίων βρίσκεται το λ με την ακόλουθη μέθοδο. Από την (3.53) για το β βλέπουμε ότι το λ πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$F_{\beta(\nu, \nu_2)} = \frac{\nu_1}{\nu_1 + \lambda} F_{\alpha}(\nu_1, \nu_2) \quad (3.58)$$

όπου τα ορίσματα ν, ν_1 και ν_1, ν_2 είναι οι βαθμοί ελευθερίας. Ως εκ τούτου, οι δύο ακέραιοι αριθμοί λ_1 και λ_2 θα κάνουν τη δεξιά πλευρά της (3.58) ακριβώς μεγαλύτερη και μόλις μικρότερη από την αριστερή πλευρά. Αυτά μπορούν να ληφθούν με δοκιμή και λάθος, λαμβάνοντας τις ποσοστιαίες μονάδες α και β από τους πίνακες F και συγκρίνοντας τις δύο πλευρές. Για αυτές τις τιμές των λ_1 και λ_2 , το β στη συνέχεια αξιολογείται χρησιμοποιώντας την (3.54) και με την ανάδρομη παρεμβολή καθορίζεται το λ .

Για την αντιμετώπιση αντίστροφων προβλημάτων, θα είναι πιο χρήσιμη μια γραφική αναπαράσταση της σχέσης μεταξύ ν_1, ν_2 και λ για σταθερά α και β . Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται παραπάνω για την εύρεση του λ , έχουν κατασκευαστεί γραφήματα για $\alpha = 0.05$ και για δύο επίπεδα ισχύος, $\beta = 0.5$ και $\beta = 0.9$. Τα διαγράμματα δίνουν στην προσέγγιση που αναφέρεται στην (3.53), περιγράμματα ίσης ισχύος και θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό οποιασδήποτε από τις τρεις ποσότητες, ν_1, ν_2 και λ , δεδομένων των άλλων δύο. Όταν $\nu_2 = \infty$, το F' μειώνεται σε X'^2/ν_1 , και ως εκ τούτου αυτά τα γραφήματα θα μπορούσαν επίσης να χρησιμοποιηθούν για την απάντηση στις αντίστροφες ερωτήσεις που σχετίζονται με τη συνάρτηση ισχύος του ελέγχου X^2 .

Στην συνέχεια παρουσιάζονται απεικονίσεις της χρήσης αυτών των διαγραμμάτων.

Για τη μελέτη της εποχιακής διακύμανσης στη συχνότητα εμφάνισης ενός συγκεκριμένου κυρίαρχου φυκιού σε μια λίμνη, λαμβάνεται 10 δείγματα των 15 κ.ε. νερό από τη λίμνη την πρώτη ημέρα καθενός από τους πέντε μήνες, Απρίλιος έως Αύγουστος. Λαμβάνονται δεκαπέντε σταγόνες σε αντικειμενοφόρους πλάκες από κάθε δείγμα, και ο αριθμός των φυκιών της συγκεκριμένης μορφής μετράται στο μικροσκόπιο και το σύνολο των δεκαπέντε πλακών λαμβάνεται ως η πυκνότητα για κάθε δείγμα.

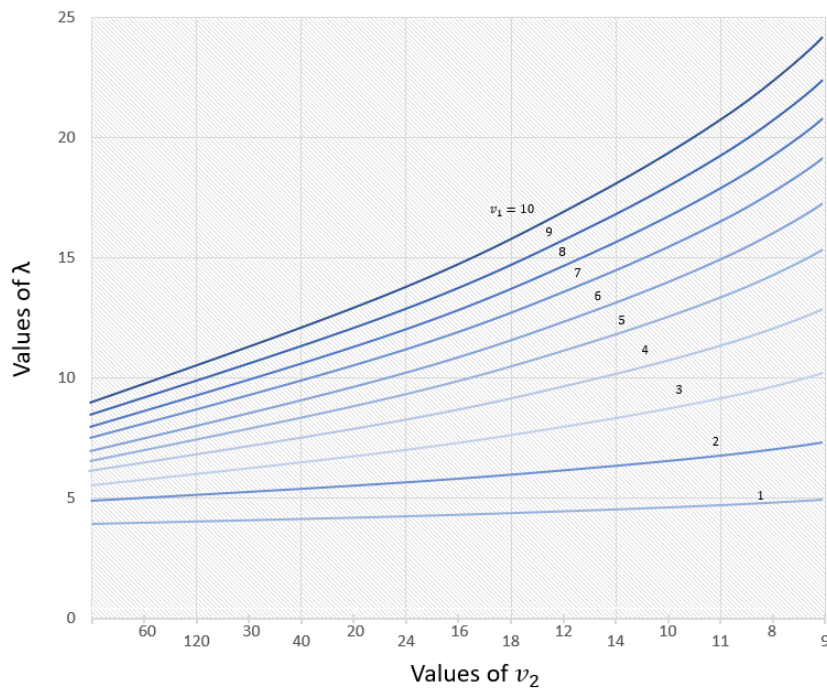
Για να ελεγχθεί εάν υπάρχει σημαντική διακύμανση στην πυκνότητα αυτής της μορφής φυκών από μήνα σε μήνα, εφαρμόζεται ο έλεγχος ανάλυσης διακύμανσης, ως πούμε, σε επίπεδο

5%. Θα έχει ενδιαφέρον να μάθουμε πόσο μεγάλη πρέπει να είναι η αναλογία της εποχιακής μεταβλητότητας προς τη μεταβλητότητα στη λίμνη, ώστε να μπορούμε να την εντοπίσουμε με πιθανότητα 90%.

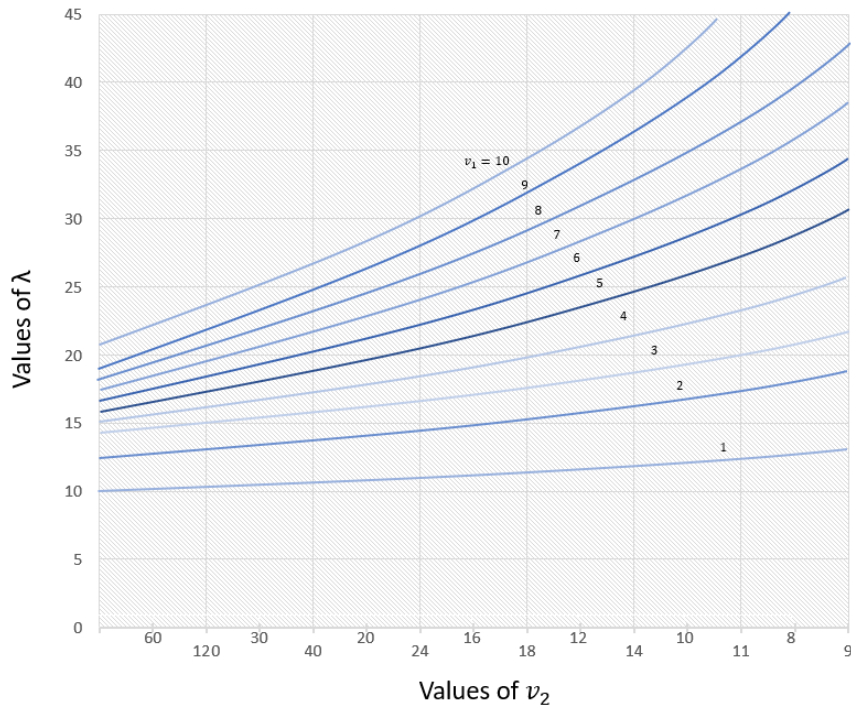
Εδώ, $\nu_1 = k - 1 - 4$, $\nu_2 = k(n - 1) = 45$. Για αυτά, το διάγραμμα στο Σχήμα (3.8) δίνει $\lambda = 16.8$, από το οποίο βρίσκουμε την αναλογία μεταξύ μήνα προς εντός μεταβλητότητα μήνα:

$$\frac{S^2}{\sigma_0^2} = \frac{\lambda}{nk} = 0.34.$$

Αυτό σημαίνει ότι οι πιθανότητες είναι 9 προς 1 για τον εντοπισμό διαφορών στο επίπεδο 5% αν η τυπική απόκλιση από την πυκνότητα των φυκιών μεταξύ των μηνών ήταν 0.58 από την τυπική απόκλιση μέσα στη λίμνη. Από την άλλη πλευρά, όπως φαίνεται από το Σχήμα (3.7) θα υπήρχε πιθανότητα 50:50 ανίχνευσης διαφορών εάν η τυπική απόκλιση μεταξύ των μηνών είναι 0.38 από εκείνη ενός δείγματος σε ένα μήνα ($S^2/\sigma_0^2 = 0.145$).



Σχήμα 3.7: Περιγράμματα ίσης ισχύος για τον έλεγχο ανάλυσης διασποράς με τη συστηματική ρύθμιση για $\alpha = 0.05$, και ισχύς $f(\nu_1, \nu_2, \lambda) = 0.5$.



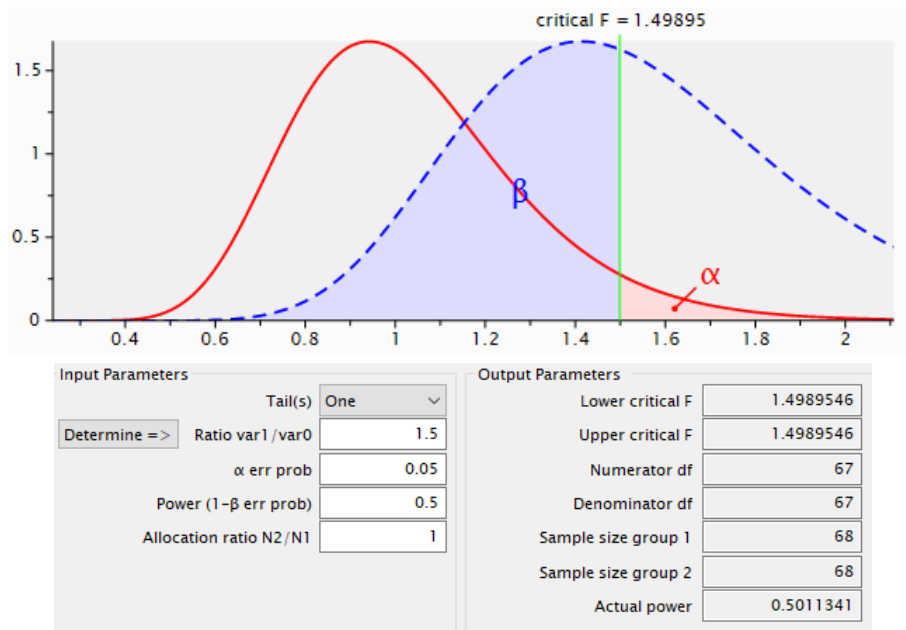
Σχήμα 3.8: Περιγράμματα ίσης ισχύος για τον έλεγχο ανάλυσης διασποράς με τη συστηματική ρύθμιση για $\alpha = 0.05$, και ισχύς $f(\nu_1, \nu_2, \lambda) = 0.9$.

Στην συνέχεια παρουσιάζεται ένα πιο αναλυτικό παραδείγματα με την βοήθεια του προγράμματος **G*Power**. Έστω ότι μας ενδιαφέρει η ανάλυση ισχύος για την περίπτωση όπου οι πληθυσμιακές διακυμάνσεις σ_0^2 και σ_1^2 δύο κανονικά κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών είναι πανομοιότυπες. Η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση του ελέγχου είναι:

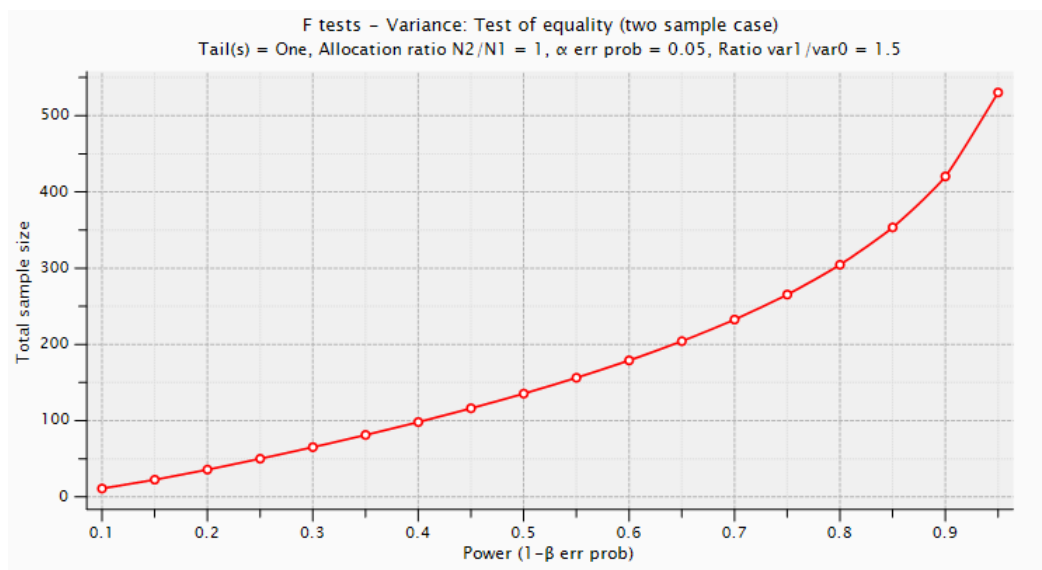
$$H_0 : \sigma_1 - \sigma_0 = 0$$

$$H_1 : \sigma_1 - \sigma_0 \neq 0$$

Θέλουμε να ελέγξουμε αν η διακύμανση σ_1^2 στον πληθυσμό B είναι διαφορετική από την διακύμανση σ_0^2 του πληθυσμού A. Εμείς στον παράδειγμά μας θα θεωρήσουμε την αναλογία $\sigma_1^2/\sigma_0^2 > 1.5$. Θέλουμε να δημιουργήσουμε μεγέθη ίσου δείγματος και στις δύο ομάδες. Συνεπώς, σκοπός του εν λόγω πείραματος είναι να βρούμε το μέγεθος του δείγματος του κάθε πληθυσμού για επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$ και ισχύς $f(\nu_1, \nu_2, \lambda) = 0.5$. Με την βοήθεια του προγράμματος **G*Power** προκύπτουν τα κάτωθι αποτελέσματα:



Σχήμα 3.9: Έλεγχος F για την ανισότητα δύο διακύμανσης με $\alpha = 5\%$ και ισχύς $f(\nu_1, \nu_2, \lambda) = 0.5$.



Σχήμα 3.10: Έλεγχος F για την ανισότητα δύο διακύμανσης με $\alpha = 5\%$ και ισχύς $f(\nu_1, \nu_2, \lambda) = 0.5$.

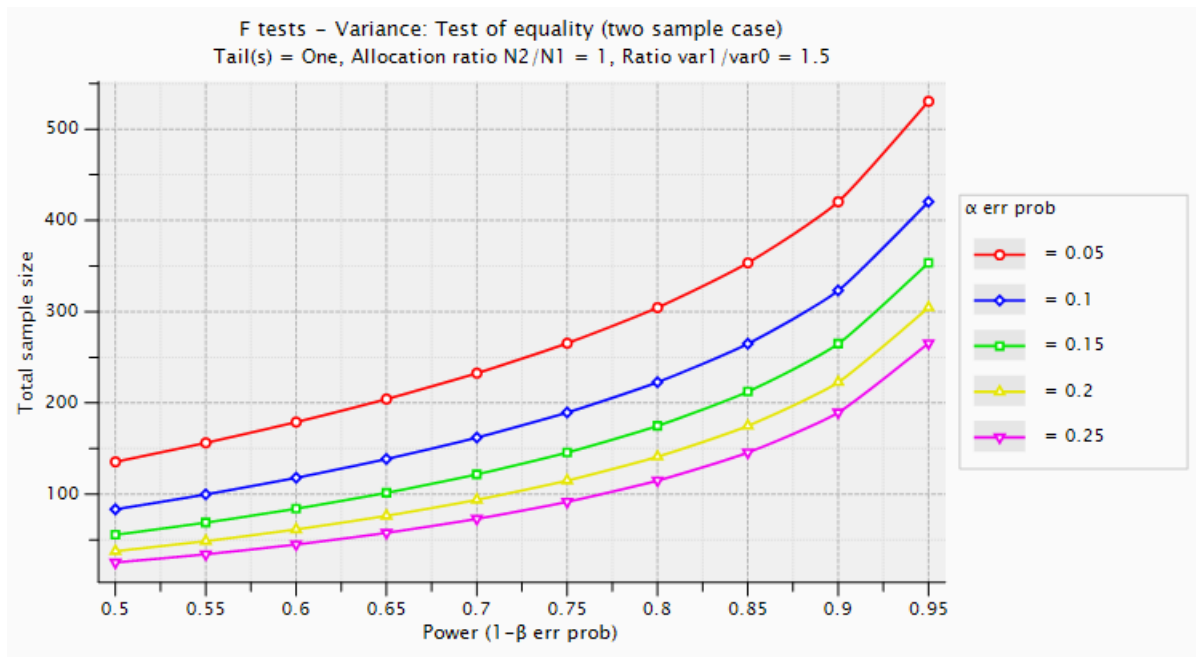
Το αποτέλεσμα μας δείχνει ότι θα χρειαστούμε τουλάχιστον 136 παρατηρήσεις (68 σε κάθε ομάδα) για να πετύχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Ας δούμε τώρα την περίπτωση όπου θέλουμε να εξετάσουμε διαφορετικά επίπεδα σημαντικότητας. Η συνάρτηση ισχύος για την κάθε περίπτωση, ανάλογα με το μέγεθος του δείγματος διαμορφώνεται ως εξής:

F tests – Variance: Test of equality (two sample case)
 Tail(s) = One, Allocation ratio $N_2/N_1 = 1$, Ratio $\text{var}_1/\text{var}_0 = 1.5$

#	Power ($1-\beta$ err prob)	α err prob = 0.05 Total sample size	α err prob = 0.1 Total sample size	α err prob = 0.15 Total sample size	α err prob = 0.2 Total sample size	α err prob = 0.25 Total sample size
1	0.500000	135.546	83.4556	55.6153	37.6854	25.2630
2	0.550000	156.369	99.8511	69.0243	48.7216	34.2653
3	0.600000	179.112	118.095	84.2330	61.5186	44.9942
4	0.650000	204.297	138.630	101.631	76.4232	57.7604
5	0.700000	232.684	162.117	121.811	93.9766	73.0599
6	0.750000	265.445	189.589	145.716	115.045	91.6960
7	0.800000	304.524	222.778	174.932	141.103	115.045
8	0.850000	353.529	264.919	212.441	174.932	145.716
9	0.900000	420.471	323.224	264.919	222.778	189.589
10	0.950000	530.519	420.471	353.529	304.524	265.445

Πίνακας 3.5.1: Συνάρτηση ισχύος για την ανισότητα δύο διακύμανσης για διαφορετικά επίπεδα σημαντικότητας.



Σχήμα 3.11: Συνάρτηση ισχύος για την ανισότητα δύο διακύμανσης για διαφορετικά επίπεδα σημαντικότητας.

Κεφάλαιο 4

Η μη-κεντρική t κατανομή

4.1 Ορισμός

Έστω Z μια τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή, δηλαδή $Z \sim N(0, 1)$, και S_ν μια τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από την Z οποία ακολουθεί την κατανομή X^2 , δηλαδή $S_\nu \sim X_\nu^2$. Τότε, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{S_\nu}{\nu}}} \quad (4.1)$$

ονομάζεται κατανομή t (ή κατανομή *Student*) με ν βαθμούς ελευθερίας και συμβολίζεται με t_ν .

Η κατανομή της μορφής:

$$t'_\nu(\delta) = \frac{U + \delta}{X_\nu \nu^{-1/2}}, \quad (4.2)$$

όπου δ μια σταθερά, και U, X_ν ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $U \sim N(0, 1)$ και $X_\nu \sim X$ με ν βαθμούς ελευθερίας, ονομάζεται μη-κεντρική t κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη-κεντρικότητας λ . Σε ορισμένες περιπτώσεις, ως παράμετρος μη-κεντρικότητας μπορεί να οριστεί η ποσότητα λ^2 ή ακόμα και το $\frac{1}{2}\lambda^2$. Στην περίπτωση όπου $\lambda = 0$, τότε τότε αναφερόμαστε στην (κεντρική) t κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας. Σε κάποιες περιπτώσεις, το λ μπορεί να παραληφθεί, και η κατανομή ορίζεται ως t'_ν αντί για $t'_\nu(\lambda)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1 Έστω τυχαία μεταβλητή $X \sim N(\lambda, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και έστω τυχαία μεταβλητή U ακολουθεί την κεντρική X^2 κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας, με X, U ανεξάρτητες. Τότε η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής:

$$T = \frac{X}{\sqrt{U/n}} \quad (4.3)$$

ονομάζεται μη-κεντρική t κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη-κεντρικότητας λ .

Χρησιμοποιώντας τον τύπο για τον λόγο των δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, μπορούμε να δείξουμε ότι η T έχει την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$\frac{1}{2^{(n+1)/2}\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}} \int_0^\infty y^{(n-1)/2} e^{-[(x\sqrt{y/n}-\delta)^2+y]/2} dy$$

Εφόσον η U ακολουθεί την κεντρική X^2 κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας, η $W = \sqrt{U/n}$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$\frac{2n^{n/2}}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} w^{n-1} e^{-nw^2/2}, \quad w > 0$$

Συνεπώς, η T έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty w \left(\frac{n^{n/2}}{\Gamma(n/2)2^{n/2-1}} w^{n-1} e^{-nw^2/2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(xw-\delta)^2/2} \right) dw \\ &= \frac{n^{n/2}}{\Gamma(n/2)2^{(n-1)/2}\sqrt{\pi}} \int_0^\infty w^n e^{[(xw-\delta)^2+nw^2]/2} dw \end{aligned}$$

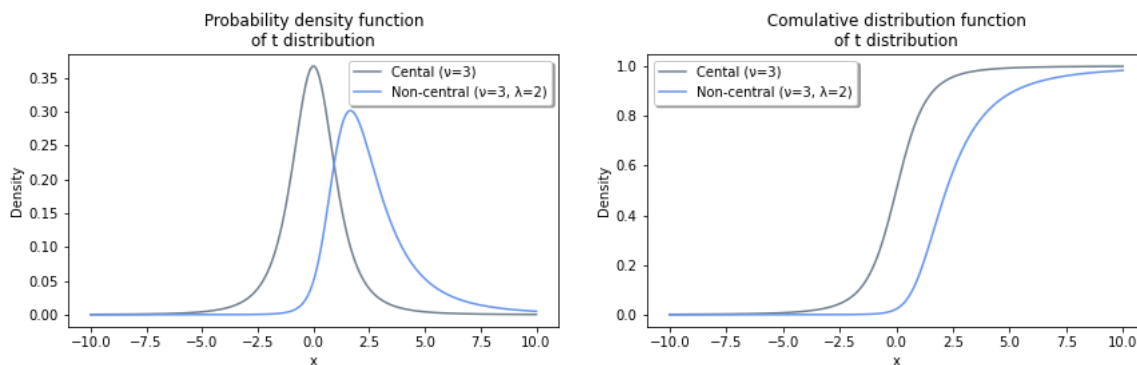
Εφόσον τα X και U είναι ανεξάρτητα, όπου $X \sim N(\delta, 1)$ και $U \sim X^2$, η πρώτη και η δεύτερη ροπή υπολογίζονται από τους κάτωθι τύπους:

$$\begin{aligned} E(T) &= E\left(\frac{x}{\sqrt{U/n}}\right) = \sqrt{n}E(X)E\left(\frac{1}{\sqrt{U}}\right) \\ &= \sqrt{n}\delta \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} \left(\frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} u^{n/2-1} e^{-u/2} \right) du \\ &= \frac{\sqrt{n}\delta}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} \int_0^\infty u^{(n-1)/2-1} e^{-u/2} du \\ &= \frac{\sqrt{n}\delta\Gamma((n-1)/2)}{\sqrt{2}\Gamma(n/2)}, \quad n > 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(T^2) &= E\left(\frac{X^2}{U/n}\right) = nE(X^2)E\left(\frac{1}{U}\right) \\ &= n(1+\delta^2) \frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} \int_0^\infty u^{n/2-2} e^{-u/2} du \\ &= \frac{n(1+\delta^2)}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} \Gamma(n/2-1)2^{n/2-1} = \frac{n(1+\delta^2)}{n-2}, \quad n > 2. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για $n > 2$, η διακύμανση ορίζεται ως:

$$Var(T) = \frac{n(1+\delta^2)}{n-2} - \frac{n\delta^2}{2} \left[\frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n/2)} \right]^2.$$



Σχήμα 4.1: Σ.π.π. και σ.κ μιας κεντρικής και μιας μη-κεντρικής t κατανομής με $\nu = 3$ βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη-κεντρικότητας $\lambda = 2$.

4.2 Συνάρτηση Πυκνότητας

Δεδομένου ότι τα συμβάντα $t'_\nu(\delta) < 0$ και $U + \delta < 0$ είναι πανομοιότυπα, ισχύει ότι:

$$Pr [t'_\nu(\delta) < 0] = Pr [U < -\delta] = \Phi(-\delta) \quad (4.4)$$

Επιπλέον ισχύει ότι:

$$Pr [t'_\nu(\delta) \leq t] = 1 - Pr [t'_\nu(-\delta) \leq -t]. \quad (4.5)$$

Η σχέση:

$$Pr [t'_\nu \leq t] = Pr \left[U + \delta \leq \frac{tX_\nu}{\sqrt{\nu}} \right]$$

μπορεί να γραφεί αντίστοιχα ως:

$$Pr [t'_\nu \leq t] = \frac{1}{2^{(\nu/2)-1}\Gamma(\frac{1}{2}\nu)} \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-x^2/2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{tx/\sqrt{\nu}} \exp \left[-\frac{1}{2}(u - \delta)^2 \right] dudx. \quad (4.6)$$

Η δεξιά πλευρά της (4.6) μπορεί να γραφεί επίσης ως:

$$\frac{1}{2^{(2/\nu)-1}\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\infty \left\{ x^{\nu-1} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(tx/\sqrt{\nu})-\delta} e^{-u^2/2} \right\} dudx. \quad (4.7)$$

• Σύμφωνα με τον Kuhlmeier (1970), οι ακόλουθες σχέσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για υπολογιστικούς λόγους.

Στην περίπτωση όπου το ν είναι περιττός αριθμός, ισχύει ότι:

$$Pr [t'_\nu(\delta) \leq t] = \Phi(-\delta\sqrt{B}) + 2r \left(-\delta\sqrt{B}, \frac{t}{\sqrt{\nu}} \right) + 2(M_1 + M_3 + \dots + M_{\nu-2}).$$

Στην περίπτωση όπου ν άρτιος αριθμός:

$$Pr [t'_\nu(\delta) \leq t] = \Phi(-\delta) + 2\pi(M_0 + M_2 + \dots + M_{\nu-2}),$$

όπου:

$$\begin{aligned} B &= \nu(\nu + t^2)^{-1}, \\ \tau(h, \alpha) &= (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_0^\alpha \exp\left\{-\frac{1}{2}h^2(1+x^2)\right\} dx, \\ M_k &= (1 - k^{-1})B \left\{ \alpha_k \delta \left(\frac{t}{\sqrt{\nu}}\right) M_{k-1} + M_{k-2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

με:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \{(k-2)\alpha_{k-1}\}^{-1}, \quad \text{για } k \geq 3, \alpha_2 = 1, \\ M_0 &= \left(\frac{t}{\sqrt{\nu}}\right) \sqrt{B} (\delta\sqrt{B}) \phi(\delta\sqrt{B}) \Phi\left(\delta t \sqrt{\frac{B}{\nu}}\right), \\ M_1 &= B \left\{ \delta M_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{t}{\sqrt{\nu}} \phi(\delta) \right\}, \\ M_2 &= \frac{1}{2} B \left\{ \delta \frac{t}{\sqrt{\nu}} M_1 + M_0 \right\}, \\ \phi(x) &= \left(\sqrt{2\phi}\right)^{-1} e^{-x^2/2} = \Phi'(x). \end{aligned}$$

• Μια αναλλακτική μορφή δόθηκε από τον Fisher (1931) στην εισαγωγή πινάκων των συναρτήσεων Hh του Airey's (1931), όπου η διαφορική εξίσωση της (4.6) ως προς το t , δίνει την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$\begin{aligned} p_{t'_\nu}(t) &= \frac{e^{\delta^2/2}}{2^{(\nu-1)/2} \sqrt{\pi\nu} \Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)} \int_0^\infty x^\nu \exp\left[-\frac{1}{2}\{(1+t^2\nu^{-1})x^2 - 2(t\nu^{1/2})x\}\right] dx \\ &= \frac{\nu!}{2^{(\nu-1)/2} \sqrt{\pi\nu} \Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)} \left\{ \exp\left[-\frac{\nu\delta^2}{\nu+t^2}\right] \right\} \times \left(\frac{\nu}{\nu+t^2}\right)^{(\nu-1)/2} Hh_\nu\left[-\frac{\delta t}{\sqrt{\nu+t^2}}\right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

όπου $Hh_\nu(x) = (\nu!)^{-1} \int_0^\infty u^\nu \exp\left[-\frac{1}{2}(u+x)^2\right] du$. Αξίζει να σημειωθεί ότι το $(\sqrt{2\pi}^{-1})Hh_\nu(x)$ είναι το ν -οστό επαναλαμβανόμενο μερικό ολοκλήρωμα της τυπική κανονικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας:

$$\left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} Hh_\nu(x) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \int_x^\infty \int_{y_\nu}^\infty \dots \int_{y_3}^\infty \int_{y_2}^\infty e^{-y_1^2/2} dy_1 dy_2 \dots dy_\nu. \quad (4.10)$$

• Οι Voit και Rust (1990) επισήμαναν ότι η συνάρτηση Hhu μπορεί να εκφραστεί σε όρους της συνάρτησης Whittaker U ως εξής:

$$Hh_\nu(-\theta) = U\left(\nu + \frac{1}{2}, -\theta\right) e^{-\theta^2/4}, \quad (4.11)$$

όπου:

$$U\left(\nu + \frac{1}{2}, -\theta\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu + 1\right)}(2y_1 + y_2)$$

και y_1, y_2 είναι οι άρτιες και περιττές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} - \left(\frac{1}{4}\theta^2 + \nu + \frac{1}{2}\right)y = 0.$$

- Στη συνέχεια αποδεικνύεται η πιό γνωστή μορφή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_{t'_\nu}(t) = \frac{e^{-\delta^2/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}(\nu + 1)\right)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)} \left(\frac{\nu}{\nu + t^2}\right)^{(\nu+1)/2} \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\nu + j + 1)\right)}{j!\Gamma\left(\frac{1}{2}(\nu + 1)\right)} \left[\frac{t\delta\sqrt{2}}{\sqrt{\nu + t^2}}\right]^j. \quad (4.12)$$

Αυτό είναι της μορφής $p_{t'_\nu}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j[\theta(t)]^j$ με τα c_j να είναι σταθερές και $\theta(t) = t\delta\sqrt{2}(\nu + t^2)^{-1/2}$. Η έκφραση $[\theta(t)]^0$ πρέπει να εκφραστεί ως μονάδα για όλες τις τιμές του $\theta(t)$ (συμπεριλαμβανομένου του 0). Στην περίπτωση όπου $\delta = 0$, η έκφραση για το $p_{t'_\nu}(t)$ μειώνεται σε αυτή της (κεντρικής) t_ν πυκνότητας. Αν τα δ και t έχουν αντίθετα πρόσημα, τότε η σχέση εναλλάσσεται στο πρόσημο. Η (4.12) μπορεί να αξιολογηθεί κάθε φορά για να δώσει τιμές για τις πιθανότητες ως προς τους ατελείς λόγους μιας βήτα συνάρτησης. Εάν το εύρος της ολοκλήρωσης είναι από το 0 έως το $t(> 0)$, τότε κάθε όρος είναι θετικός και ισχύει ότι:

$$Pr[0 < t'_\nu \leq t] = \frac{1}{2}e^{-\delta^2/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\delta^2\right)^{j/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}j + 1\right)} I_{t^2/(\nu+t^2)}\left(\frac{1}{2}(j+1), \frac{1}{2}\nu\right). \quad (4.13)$$

- Ο Guenther (1975) παρείχε μια επέκταση των ημιτελή βήτα αναλογιών συναρτήσεων:

$$Pr[0 < t'_\nu < t] = \sum_{j=0}^{\infty} \left[p_j I_x\left(j + \frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right) + q_j I_x\left(j + 1, \frac{\nu}{p2}\right) \right], \quad (4.14)$$

όπου:

$$x = \frac{t^2}{t^2 + \nu},$$

$$p_j = \frac{\frac{1}{2}e^{-\delta/2}(\delta^2/2)^j}{j!},$$

$$q_j = \frac{\frac{1}{2}\delta e^{-\delta^2/2}(\delta^2/2)^j}{\sqrt{2}\Gamma\left(j + \frac{3}{2}\right)} \quad (4.15)$$

Αυτός ο τύπος είναι κατάλληλος για αριθμομηχανές τσέπης και αυτή η συνάρτηση χρησιμοποιήθηκε από τον Lenth (1989) για τον αλγόριθμο του υπολογιστή του.

Είναι δυνατό να ληφθεί μια επέκταση παρόμοια με την (4.13) για $Pr[-t < t'_\nu \leq 0]$ με $-t < 0$, αλλά οι όροι θα εναλλάσσονται στο πρόσημο. Ωστόσο, αυτές οι πιθανότητες μπορούν να προκύψουν από την (4.13), καθώς και η τιμή του $Pr[-t < t'_\nu \leq 0]$ που είναι ίση με $Pr[t'_\nu \leq t^2]$. Σε αυτή την περίπτωση σημειώνουμε ότι η t'_ν έχει την μη-κεντρική F κατανομή $F'_{t,\nu}(\delta)$. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} Pr[-t \leq t'_\nu \leq t] &= e^{-\delta^2/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\delta^2\right)^j}{j!} Pr[F_{1+2j,\nu} < (1+2j)^{-1}t^2] \\ &= e^{-\delta^2/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\delta^2\right)^j}{j!} I_{t^2/(\nu+t^2)}(j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\nu). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Εαν το ν είναι άρτιος αριθμός και $t > 0$, η πιθανότητα $Pr[0 < t'_\nu < t]$ μπορεί να εκφραστεί ως πεπερασμένο άθροισμα ως προς την συνάρτηση Hh :

$$\begin{aligned} Pr[0 \leq t'_\nu \leq t] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\delta^2\nu}{2(\nu+t^2)}\right] \\ &\times \sum_{j=0}^{(\nu-2)/2} \frac{(2j)!}{2^j j!} \left[\frac{\nu}{2(\nu+t^2)}\right]^j Hh_{2j}\left[\frac{\delta t}{\sqrt{\nu+t^2}}\right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

• Μεταξύ των τύπων που έδωσε ο Amos (1964), ένας στον οποίο έδωσε ιδιαίτερη προσοχή όσον αφορά την υπολογιστική του χρήση, εκφράζει τη συνάρτηση αθροιστικής κατανομή της t'_ν ως προς τις από κοινού υπεργεωμετρικές συναρτήσεις:

$$M(\alpha, b; x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+j)\Gamma(b)x^j}{\Gamma(\alpha)\Gamma(b+j)j!}$$

όπου το b δεν μπορεί να είναι μηδέν ή αρνητικός αριθμός. Η συνάρτηση για $\nu > 2$ είναι:

$$\begin{aligned} Pr[t'_\nu \leq t] &= 1 - (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{-\infty}^{\delta\nu^{1/2}/(\nu+t^2)^{t/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du \\ &+ (\sqrt{\pi})^{-1} \left[\frac{t}{\sqrt{\nu+t^2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\nu+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)} \right. \\ &\times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-\frac{1}{2}\nu+j)}{j!(2j+1)\Gamma(1-\frac{1}{2}\nu)} \left(\frac{t^2}{\nu+t^2}\right)^j \\ &\times M\left[j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{-\delta^2\nu}{2(\nu+t^2)}\right] \\ &- \frac{\delta\sqrt{\nu}}{\sqrt{2(\nu+t^2)}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-\nu)+j\right)}{j!\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-\nu)\right)} \left(\frac{t^2}{\nu+t^2}\right)^j \\ &\left. \times M\left(j+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{-\delta\nu}{2(\nu+t^2)}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Στην περίπτωση όπου το ν είναι άρτιος αριθμός, το πρώτο από τα δύο αθροίσματα περιέρχει μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό $(\frac{1}{2}\nu + 1)$ όρων. Αν το ν είναι περιττός αριθμός, το δεύτερο αθροίσμα περιέρχει μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό $[\frac{1}{2}(\nu + 3)]$ όρων.

- Οι Hodges και Lehmann (1965) έδωσαν μια ασυμπτωτική ακολουθία (με $\nu \rightarrow \infty$) για την ισχύς του ελέγχου t με ν βαθμούς ελευθερίας ως προς τις κεντρικές ροπές της $X_\nu \sqrt{\nu}$. Βρήκαν ότι αυτή η ακολουθία για ν "όχι πολύ μικρό", ο προσδιορισμός της ισχύος με επαρκή ακρίβεια είναι δυνατός σε πολλές περιπτώσεις. Επιπλέον, οι ακολουθίες είναι χρήσιμες ως δείκτης των σωστών διαδικασιών παρεμβολής σε σχέση με το δ στους μη-κεντρικούς t πίνακες.

- Στην περίπτωση όπου $t > 0$, ο Guenther (1975) πρότεινε τον διαχωρισμό του απείρου αθροίσματος στην εξίσωση (4.18) σε δύο αθροίσματα, ένα για j άρτιο και ένα για j περιττό. Αθροίζοντας τους άρτιους όρους, χρησιμοποιώντας την σχέση:

$$j! = \frac{2^j \Gamma[(j+1)/2] \Gamma[(j+2)/2]}{\sqrt{\pi}}$$

και θέτοντας όπου $t = u$, ακολουθούμενο από $u = (j+1)/f$, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} Pr[t'_\nu > t] &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\delta^2/2} (\delta^2/2)^j}{j!} \int_{t^2/(2j+1)}^{\infty} p(f; 2j+1, \nu) df \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\delta e^{-\delta^2/2} j! (2\delta^2)^j}{\sqrt{2\pi} (2j+1)!} \int_{t^2/(2j+2)}^{\infty} p(f; 2j+2, \nu) df \end{aligned} \quad (4.19)$$

όπου $p(f; \nu_1, \nu_2)$ είναι η κεντρική F πυκνότητα με ν_1, ν_2 βαθμούς ελευθερίας.

- Ο Ifram (1970) τόνισε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας κανονικής κατανομής X με αναμενόμενη τιμή δ και διακύμανση 1 μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\begin{aligned} p_x(x) &= \phi(x - \delta) \\ &= \phi(x) \exp(-\frac{1}{2}\delta^2 + \delta x) \\ &= \frac{1}{2} E_K \left[p_{x_{2K+1}^2(|x|)} \right] + \frac{1}{2} \delta x^{-1} E_K \left[p_{x_{2K+2}^2(|x|)} \right], \end{aligned} \quad (4.20)$$

όπου:

$$p_{x_\nu}^2(x) = \left\{ 2^{\nu/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right) \right\}^{-1} x^{(\nu/2)-1} e^{-x/2}$$

και K ακολουθεί μια Poisson κατανομή με μέση τιμή $\frac{1}{2}\delta^2$. Σύμφωνα με το συμπέρασμα αυτό, προκύπτει ότι:

$$P_{t'_\nu(\delta)(t)} = \frac{1}{2} E_K \left[p_{\sqrt{G_{2K+1, \nu}}(|x|)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\delta}{t} \frac{\Gamma((\nu-1)/2)}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{1}{2}\nu)} E_K \left[p_{\sqrt{2K+3, \nu-1}(|t|)} \right], \quad (4.21)$$

όπου G_{ν_1, ν_2} κατανομονται ως ο λόγος των $X_{\nu_1}^2/X_{\nu_2}^2$ ανεξάρτητων X^2 . Αν το $U^2 G_{\nu_1, \nu_2}$ κατανομή, τότε το U είναι μια τυχαία μεταβλητή $\sqrt{G_{\nu_1, \nu_2}}$.

• Οι Voit και Rust (1990) υπολόγισαν την μη-κεντρική κατανομή t χρησιμοποιώντας μια κανονική μορφή S -συστήματος. Επισημάναν ότι η μη-κεντρική πυκνότητα της t , σύμφωνα με την (4.12) μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{\exp(\delta^2/2)}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)} \left[\frac{\nu}{\nu+t^2} \right]^{(\nu+1)/2} S(t), \quad (4.22)$$

όπου:

$$S(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma((\nu+j+1)/2)}{\Gamma((\nu+1)/2)} \left[\frac{t\delta\sqrt{2}}{\sqrt{\nu+t^2}} \right]^j.$$

και ότι οι σχέσεις:

$$S(t) \text{ και } Z(t) = \frac{(\nu+t^2)^{3/2}}{\nu\delta} S'(t)$$

ικανοποιούν την διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \frac{t\nu\delta^2}{(\nu+t^2)^2} Z(t) + \frac{\nu(\nu+1)\delta}{(\nu+t^2)^{3/2}} S(t). \quad (4.23)$$

Αυτό επιτρέπει την κατασκευή μιας αναπαράστασης S -συστήματος για κεντρικές και μη-κεντρικές κατανομές t . Οι εν λόγω σχέσεις περιγράφουν επίσης μια προσέγγιση του συστήματος για τον υπολογισμό των τεταρτημόριω και των ροπών της μη-κεντρικής t κατανομής.

4.3 Γεννήτριες Συναρτήσεις

Η r -τάξεως ροπή της $t'_\nu(\delta)$ γύρω από το μηδέν είναι:

$$\begin{aligned} E[t'_\nu{}^r(\delta)] &= \nu^{r/2} E[X_\nu^{-r}] E[(U+\delta)^r] \\ &= \left(\frac{1}{2}\nu\right)^{r/2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu-r))}{\Gamma(\frac{1}{2}\nu)} \sum_{0 \leq j \leq r/2} \binom{r}{2j} \frac{(2j)!}{2^j j!} \delta^{r-2j}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Οι Hogben, Pinkham και Wilk (1961) έδωσαν μια εναλλακτική μορφή, στην οποία το άθροισμα αντικαθίσταται από την σχέση $e^{-\delta^2/2} (d/d\delta)^r (e^{\delta^2/2})$. Οι Merrington και Pearson (1958) έδωσαν τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$\mu'_1 = \left(\frac{1}{2}\nu\right)^{1/2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu-1))}{\Gamma(\frac{1}{2}\nu)} \delta, \quad (4.25)$$

$$\mu_2 = \text{var}(t'_\nu) = \frac{\nu}{\nu-2} (1+\delta^2) - \mu_1'^2, \quad (4.26)$$

$$\mu_3 = \mu_1' \left\{ \frac{\nu(2\nu - 3 + \delta^2)}{(\nu - 2)(\nu - 3)} - 2\mu_2 \right\}, \quad (4.27)$$

$$\mu_4 = \frac{\nu^2}{(\nu - 2)(\nu - 4)}(3 + 6\delta^2 + \delta^4) - \mu_1'^2 \left\{ \frac{\nu[(\nu + 1)\delta^2 + 3(3\nu - 5)]}{(\nu - 2)(\nu - 3)} - 3\mu_2 \right\}. \quad (4.28)$$

Η r -τάξεως κεντρική ροπή μπορεί να εκφραστεί ως πολυώνυμο στο δ^2 :

$$\mu_r = \sum_{j=0}^{[r/2]} c_{r,r-2j}(\nu) \delta^{r-2j}.$$

Για μεγάλο ν (με δ σταθερό), ισχύει ότι:

$$\mu_1' \doteq \delta, \quad \text{var}(t'_\nu) \doteq +\frac{1}{2}\delta^2\nu^{-1}, \quad \mu_3 \doteq \nu^{-1}\delta\left[3 + \frac{5}{4}\delta^2\nu^{-1}\right],$$

και ο λόγος $\sqrt{\beta_1}$ της ροπής ασυμμετρίας (skewness moment ratio), είναι περίπου ίσος με $\nu^{-1}\delta(3 - \delta^2\nu^{-1})$. Αξίζει να σημειωθεί επίσης πως η ασυμμετρία έχει το ίδιο πρόσημο με το δ . Αυτό ισχύει και για την αναμενόμενη τιμή. Επιπλέον, η κατανομή της $t'_\nu(-\delta)$ είναι μια κατοπτρική εικόνα (στο $t'_\nu = 0$) αυτή της $t'_\nu(\delta)$.

Οι τιμές (β_1, β_2) της t'_ν κατανομής, εμπίπτουν στην περιοχή Τύπου IV του συστήματος κατανομών συχνοτήτων του Pearson. Οι Merrington και Pearson (1958) βρήκαν την ακόλουθη κατά προσέγγιση σχέση:

$$\beta_2 \doteq \frac{1.406(\nu - 3.2)}{\nu - 4}\beta_1 + \frac{3(\nu - 2)}{\nu - 4}.$$

4.4 Σχετικές κατανομές

4.4.1 Διπλά μη-κεντρική t κατανομή

Αν το X_ν στον παρονομαστή της $t'_\nu\delta$ αντικατασταθεί από μια μη-κεντρική X_ν (με παράμετρο μη-κεντρικότητας λ), η κατανομή της τροποποιημένης μεταβλητής ονομάζεται διπλά μη-κεντρική t κατανομή με παραμέτρους μη-κεντρικότητας (δ, λ) και ν βαθμούς ελευθερίας. Συνεπώς:

$$t''_\nu(\delta, \lambda) = \frac{U + \delta}{X'_\nu/\sqrt{\nu}}. \quad (4.29)$$

Η συνάρτηση κατανομής της $t''_\nu(\delta, \lambda)$ ορίζεται ως:

$$F(t; \nu; \delta, \lambda) = Pr[t''_\nu(\delta, \lambda) \leq t] = Pr\left[U + \delta \leq t\left(\frac{W}{\nu}\right)^{1/2}\right], \quad (4.30)$$

όπου U, W είναι ανεξάρτητες κανονικές μονάδες και $X_{\nu}^{\prime 2}(\lambda)$ μεταβλητές, αντίστοιχα. Ως εκ τούτου:

$$F(t; \nu; \delta, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[e^{-\lambda/2} \frac{(\frac{1}{2}\lambda)^j}{j!} \right] F\left(t(1 + 2\nu^{-1}j)^{1/2}; \nu + 2j, \delta\right), \quad (4.31)$$

όπου $F(t; \nu, \delta)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας $t'_{\nu}(\delta)$.

Οι Krishnan (1968) και Kocherlakota και Kocherlakota (1991) παρατήρησαν ότι εφόσον ισχύει ότι:

$$1 - F(t; \nu; \delta, \lambda) = F(-t; \nu; -\delta, \lambda), \quad (4.32)$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι $t''_{\nu, \alpha} = -t''_{\nu, 1-\alpha}(-\delta, \lambda)$. Ως αποτέλεσμα, οι πίνακες για αρνητικές τιμές δεν χρειάζεται. Αξίζει να σημειωθεί επίσης ότι η διάμεσος της $t''_{\nu}(-\delta, \lambda)$ είναι ίδια με μείον την $t''_{\nu}(\delta, \lambda)$.

4.4.2 Τροποποιημένη μη-κεντρική t κατανομή

Η πιο διαδεδομένη περίπτωση τροποποιημένης t κατανομή προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το S στον παρονομαστή με εύρος του δείγματος W ή με τον μέσο όρο ενός αριθμού ανεξάρτητων εύρων τιμών στο δείγμα. Συνεπώς, στην θέση του X_{ν} στον παρονομαστή της $t'_{\nu}(\delta)$ υπάρχει μια μεταβλητή που ακολουθεί κάποια άλλη κατανομή αλλά εξακολουθεί να είναι ανεξάρτητη από την μεταβλητή U του αριθμητή.

Η μη-κεντρικότητα της κατανομής συνδέεται με το δ στον παρονομαστή. Ο παρονομαστής (στην αρχική και την τροποποιημένη μορφή) ακολουθεί την ίδια κατανομή τόσο στην κεντρική όσο και στην μη-κεντρική περίπτωση. Έτσι οι προσεγγίσεις της τελευταίας που έχουν χρησιμοποιηθεί για την κεντρική περίπτωση μπορούν επίσης να εφαρμοστούν στην μη-κεντρική περίπτωση, με την ελπίδα να επιτευχθούν χρήσιμα αποτελέσματα. Για παράδειγμα, αν η κατανομή της W προσεγγίζεται από αυτή της $X_{\nu}(c'\nu'^{1/2})^{-1}$, τότε η $(U + \delta)/W$ μπορεί να προσεγγιστεί κατά $c't'_{\nu}(\delta)$. Η έρευνα σχετικά με τις προσεγγίσεις για την κατανομή της μη-κεντρικής τροποποιημένης t , αποδίδεται στους Lord (1950) και Zaludova (1960).

4.4.3 Η κατανομή της μη-κεντρικής t όταν ο πληθυσμός είναι μη-κανονικός

Οι μη-κεντρικές t κατανομές έχουν μελετηθεί από την δεκαετία του '30 και του '40 προκειμένου να εκτιμηθεί η επίδραση της μη-κανονικότητας στην ισχύ του ελέγχου t . Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Ghurye (1949) στην έρευνά του, επέκτεινε ορισμένα αποτελέσματα του Geary (1936, 1947), ο οποίος θεώρησε ότι η πληθυσμιακή συνάρτηση πυκνότητας μπορεί να

αναπαρασταθεί επαρκώς ως:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\xi}{\sigma} \right)^2 \right] \right\} \left[1 + \frac{\sqrt{\beta_1}}{6} \left\{ \left(\frac{x-\xi}{\sigma} \right)^3 - 3 \left(\frac{x-\xi}{\sigma} \right) \right\} \right] \quad (4.33)$$

Ο Srivastava (1958) χρησιμοποιώντας μεταγενέστερα αποτελέσματα του Geary (1949), έλαβε τύπους για την περίπτωση που η πληθυσμιακή συνάρτηση πυκνότητας είναι όπως στην (4.33), με πρόσθετους όρους:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\xi}{\sigma} \right)^2 \right] \right\} \\ & \times \left[\frac{\beta-3}{24} \left\{ \left(\frac{x-\xi}{\sigma} \right)^4 - 6 \left(\frac{x-\xi}{\sigma} \right)^2 + 3 \right\} \right. \\ & \left. + \frac{\beta_1}{72} \left\{ \left(\frac{x-\xi}{\sigma} \right)^6 - 15 \left(\frac{x-\xi}{\sigma} \right)^4 + 45 \left(\frac{x-\xi}{\sigma} \right)^2 - 15 \right\} \right] \end{aligned}$$

Η διόρθωση στην κανονική θεωρία ισχύος είναι της μορφής:

$$-\sqrt{\beta_1} P_{\sqrt{\beta_1}} - (\beta_2 - 3) P_{\beta_2} - \beta_1 P_{\beta_1}, \quad (4.34)$$

όπου τα P δεν εξαρτώνται από τα β , αλλά από την μη-κεντρικότητα, τους βαθμούς ελευθερίας και το επίπεδο σημαντικότητας.

Οι Bowman, Lam και Shenton (1986) μελέτησαν τις άριτες περιπτώσεις ροπών και προσεγγίσεων της:

$$T = \sqrt{n} \bar{X} \left\{ (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right\}^{-1/2}, \quad (4.35)$$

όπου τα X_i είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, κάθε μία από τις οποίες ακολουθεί την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_X(x) = \exp(-x).$$

Ο Mulholland (1977) πρότεινε την μελέτη της κατανομής της:

$$W_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{(\sum_{i=1}^n X_i)^2} = n^{-1} + (n-1)n^{-1}T^{-2}, \quad (4.36)$$

χρησιμοποιώντας την σχέση:

$$p_{W_n}(w) = (n-1) \int_1^\infty y^{-(n-2)} p_{w_{n-1}}(wy^2 - (y-1)^2) dy. \quad (4.37)$$

Οι Bowman, Lam και Shenton έλαβαν τους ακόλουθους τύπους για τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των W_2, W_3 και W_4 :

$$p_{W_2}(w) = (2w - 1)^{-1/2}, \quad \frac{1}{2} \leq w \leq 1, \quad (4.38)$$

$$p_{W_3}(w) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, & \frac{1}{3} \leq w \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\cos^{-1}(6w - 2)^{-1/2}, & \frac{1}{2} \leq w \leq 1, \end{cases} \quad (4.39)$$

$$p_{W_4}(w) = \begin{cases} 3\pi(4w - 1)^{-1/2}, & \frac{1}{4} \leq w \leq \frac{1}{3}, \\ 2\sqrt{3}\pi - 3\pi(4w - 1)^{-1/2}, & \frac{1}{3} \leq w \leq \frac{1}{2}, \\ 2\sqrt{3}\pi - 3\pi(4w - 1)^{-1/2} - 6\sqrt{3}\tan^{-1}(6w - 3)^{1/2} \\ \quad + 18(4w - 1)[(2w - 1)/(4w - 1)]^{1/2}, & \frac{1}{2} \leq w \leq 1, \end{cases} \quad (4.40)$$

4.5 Εφαρμογές

Η στατιστική συνάρτηση $\sqrt{n}(\bar{X} - \xi_0)/S$ χρησιμοποιείται στον έλεγχο υποθέσεων ότι η μέση τιμή ενός κανονικού πληθυσμού είναι ίση με το ξ_0 .

Αν $\bar{X} = (n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i)$ και

$$S = \left(\sqrt{(n-1)^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right)$$

υπολογίζονται από ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n , και ο πληθυσμιακός μέσος είναι ίσος με ξ_0 , τότε $\sqrt{n}(\bar{X} - \xi_0)/S$ θα πρέπει να κατανέμεται ως μια (κεντρική) t κατανομή με $n - 1$ βαθμούς ελευθερίας. Αν, παρόλα αυτά, ο πληθυσμιακός μέσος ξ δεν είναι ίσος με το ξ_0 , τότε η σχέση $\sqrt{n}(\bar{X} - \xi_0)/S$ κατανέμεται ως $t'_{n-1}(\sqrt{n}(\xi - \xi_0)/\sigma)$, όπου σ είναι η πληθυσμιακή τυπική απόκλιση. Η ισχύς του ελέγχου υπολογίζεται ως μερικό ολοκλήρωμα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της μη-κεντρικής t κατανομής.

Με παρόμοιο τρόπο, μια στατιστική σχέση που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της ισότητας των μέσων δύο κανονικών πληθυσμών (Π_1) και (Π_2) (με κοινή αν και άγνωστη διακύμανση σ^2), χρησιμοποιώντας τυχαία δείγματα μεγέθους n_1, n_2 αντίστοιχα, είναι της μορφής:

$$\frac{\sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2)^{-1} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}}{\sqrt{(n_1 + n_2 - 2)^{-1} [(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2]}}. \quad (4.41)$$

Αν οι δύο πληθυσμιακοί μέσοι είναι όντως ίσοι, αυτή η στατιστική σχέση μπορεί να θεωρηθεί ως (κεντρική) t κατανομή με $(n_1 + n_2 - 2)$ βαθμούς ελευθερίας. Αλλά αν ισχύει:

$$(\text{μέση τιμή του πληθυσμού } \Pi_1) - (\text{μέση τιμή του πληθυσμού } \Pi_2) = \theta$$

τότε η στατιστική σχέση ορίζεται ως:

$$t'_{n_1+n_2-2} \left(\theta \sigma^{-1} \sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2)^{-1}} \right).$$

Συνεπώς, και σε αυτή την περίπτωση, η ισχύς του ελέγχου μπορεί να υπολογιστεί ως μερικό ολοκλήρωμα μια μη-κεντρικής t κατανομής.

Γραφήματα της ισχύς του ελέγχου t έχουν δημοσιευθεί από τους Pearson και Hartley (1954) και Croarkin (1962). Αντίστοιχα, πίνακες για την συνάρτηση ισχύος είναι επίσης διαθέσιμα από τους Neyman, Iwazkiewics και Kolodziejczyk (1935) και Davis (1954). Η μη-κεντρικές t κατανομές μπορούν επίσης να προκύψουν ως κατανομές συγκεκριμένων στατιστικών ελέγχων στην πολυμεταβλητή ανάλυση.

Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι αναγκαίος ο υπολογισμός των διαστημάτων εμπιστοσύνης για την αναλογία του πληθυσμιακού μεσου όρου προς την τυπική απόκλιση (αντίστροφο του συντελεστή διακύμανσης). Τέτοια διαστήματα μπορούν να υπολογισθούν σε κατάλληλες περιπτώσεις σημειώνοντας ότι τα \bar{X} και S^2 υπολογίζονται από ένα τυχαίο δείγμα X_1, X_2, \dots, X_n μεταβλητών που προέρχονται από έναν κανονικό πληθυσμό με μέση τιμή ξ και τυπική απόκλιση σ , τότε η σχέση $\sqrt{n}\bar{X}/S$ κατανέμεται ως $t'_{n-1}(\sqrt{n}\xi/\sigma)$.

Συμμετρικά $100(1 - \alpha)\%$ όρια εμπιστοσύνης για το ξ/σ λαμβάνονται ως λύση για το θ των συναρτήσεων:

$$t'_{n-1, \frac{\alpha}{2}}(\sqrt{n}\theta) = \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S} \quad (4.42)$$

και

$$t'_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}(\sqrt{n}\theta) = \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S}. \quad (4.43)$$

- Οι προσεγγίσεις στην κατανομή του συντελεστή διακύμανσης του δείγματος σε σχέση με την μη-κεντρική t κατανομή μελετήθηκαν από τον McKay (1932) και μια ακριβής (με τέσσερα δεκαδικά ψηφία) προσέγγιση στα ποσοστιαία σημεία σε σχέση με τα X^2 ποσοστιαία σημεία δόθηκε από τους Iglewicz, Myers και Howe (1968).

- Οι Belobragina και Eliseyev (1967) κατασκεύασαν ένα σύστημα που δίνει άμεσα τα κατώτερα όρια $100(1 - \alpha)$ για το ξ/σ . Στην πραγματικότητα τα διαγράμματά τους εμφανίζουν άνω όρια για το $\Phi(-\xi/\sigma)$, δεδομένου ότι \bar{X}/S .

• Ο Rukhin (1992) θεώρησε την βαθμολογική εκτίμηση του (ξ/σ^2) . Ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας είναι:

$$\frac{n}{n-1} \left(\frac{\bar{X}}{S} \right)^2,$$

και ο αμερόληπτος εκτιμητής ελάχιστης διακύμανσης (για $n > 3$) είναι:

$$\frac{n-3}{n-1} \left(\frac{\bar{X}}{S} \right)^2 - \frac{1}{n}. \quad (4.44)$$

Ο Rukhin επισήμανε ότι αυτός ο εκτιμητής μπορεί να είναι αρνητικός και συνεπώς μη αποδεκτός, και προχώρησε στην αναζήτηση καλύτερων εκτιμητών της μορφής:

$$\frac{\alpha}{n-1} \left(\frac{\bar{X}}{S} \right)^2 + \frac{b}{n}, \quad \alpha, b \geq 0. \quad (4.45)$$

Χρησιμοποιώντας το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ως μέτρο ανακρίβειας, ο Rukhin έχει συστήσει εκτιμητές της μορφής:

$$\frac{n-5}{n-1} \left(\frac{\bar{X}}{S} \right)^2 + \frac{b}{n}, \quad n > 5, b > 0. \quad (4.46)$$

για περιπτώσεις όπου $|\xi/\sigma|$ αναμένεται να είναι μεγάλο. Αυτοί οι εκτιμητές είναι αποδεκτοί στην κατηγορία των εκτιμητών της (4.45) αλλά όχι γενικά.

• Το πρόβλημα της κατασκευής ενός διαστήματος εμπιστοσύνης $100(1-\alpha)$ για το $100P\%$ ποσοστό της κατανομή της X , το οποίο είναι $\xi + u_p\sigma$ (με ξ και σ όπως ορίστηκαν παραπάνω και $\Phi(u_p) = P$) εξετάστηκε από τους Stedinger (1983) και Chowdhury και Stedinger (1991) σε σχέση με την εκτίμηση P^{-1} των ετήσιων ροών πλυμμήρας στην υδραυλική μηχανική. Εφόσον το $\sqrt{n}(\bar{X} - \xi - u_p\sigma)S$ κατανέμεται ως προς $t'_{n-1}(-u_p\sqrt{n})$, ισχύει:

$$Pr \left[\bar{X} - t'_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}(-u_p\sqrt{n}) \frac{S}{\sqrt{n}} < \xi + u_p\sigma < \bar{X} - t'_{n-1, \frac{\alpha}{2}}(-u_p\sqrt{n}) \mid \xi, \sigma \right] = 1 - \alpha.$$

Συνεπώς:

$$\left[\bar{X} - \left\{ \frac{t'_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}(-u_p\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \right\} S, \bar{X} - \left\{ \frac{t'_{n-1, \frac{\alpha}{2}}(-u_p\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \right\} S \right] \quad (4.47)$$

είναι ένα $100(1-\alpha)$ όριο εμπιστοσύνης για $\xi + u_p\sigma$.

• Ένας ισοδύναμος τύπος σύμφωνα με τον Wolfowitz (1946) είναι:

$$\left[\bar{X} + \left\{ \frac{t'_{n-1, \frac{\alpha}{2}}(-u_p\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \right\} S, \bar{X} + \left\{ \frac{t'_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}(-u_p\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \right\} S \right]. \quad (4.48)$$

- Οι Hall και Sampson (1973) χρησιμοποίησαν την (4.47) για την κατά προσέγγιση κατασκευή ορίων για την κατανομή δύο ανεξάρτητων κανονικών μεταβλητών σε σχέση με την παρασκευή φαρμακευτικών φαρμάκων.

- Ο Malcolm (1984) χρησιμοποίησε την μη-κεντρική t κατανομή στον καθορισμό μικροβιολογικών προδιαγραφών για τα τρόφιμα.

- Οι Lahiri και Teigland (1978) βρήκαν ότι οι μη-κεντρικές δοκιμές t δίνουν καλές προσαρμογές στις εκτιμήσεις των προβλέψεων για το Ακαθάριστο Εθνικό Προϊόν και τον Αποπληθωριστή Τιμών Πληθωρισμού.

- Ο Miller (1987) χρησιμοποίησε την μη-κεντρική κατανομή t στον υπολογισμό των παραμετρικών εμπειρικών παραγόντων του Bayes για τον υπολογισμό των ορίων κανονικής ανοχής.

- Οι Dasgupta και Lahiri (1992) χρησιμοποίησαν την μη-κεντρική t κατανομή σε ένα από τα πολλά μοντέλα που εξετάζουν για την ερμηνεία των δεδομένων της έρευνας.

- Ο Phillips (1993) εφάρμοσε την μη-κεντρική κατανομή t στην κατασκευή δοκιμών για υποθέσεις ότι η πιθανότητα της αναλογίας μεταξύ της βιοδιαθεσιμότητας για ένα νέο και πρότυπο φάρμακο πέφτει μεταξύ καθορισμένων ορίων.

4.5.1 Η ισχύς του ελέγχου

Έστω η υπόθεση $H_0 : \mu \leq \mu_0$ έναντι της $H_1 : \mu > \mu_0$. Εδώ το μ_0 είναι κάποια καθορισμένη τιμή. Για τον έλεγχο την μηδενικής υπόθεσης έναντι την εναλλακτικής, η βέλτιστη διαδικασία είναι να απορρίψουμε την H_0 υπέρ της H_1 όταν ισχύει:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \geq t_{n-1}(1 - \alpha) \quad (4.49)$$

ή ισοδύναμα όταν:

$$\bar{X} - \frac{t_{n-1}(1 - \alpha)S}{\sqrt{n}} \geq \mu_0. \quad (4.50)$$

Εδώ $t_{n-1}(1 - \alpha)$ είναι το $1 - \alpha$ ποσοστιαίο σημείο της κεντρικής t κατανομής με $n - 1$ βαθμούς ελευθερίας. Σε αυτή τη μορφή, ο έλεγχος έχει ίσες ή και λιγότερες πιθανότητες α να απορρίψει την μηδενική υπόθεση όταν ισχύει $\mu \leq \mu_0$, δηλαδή όταν η H_0 είναι αληθής. Όπως θα γίνει σαφές παρακάτω, η πιθανότητα απόρριψης είναι μεγαλύτερη του α όταν $\mu < \mu_0$. Έτσι α είναι η μέγιστη πιθανότητα λανθασμένης απόρριψης της μηδενικής, δηλαδή η μέγιστη πιθανότητα σφάλματος τύπου I.

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό του ελέγχου είναι η συνάρτηση ισχύος, η οποία ορίζεται ως η πιθανότητα απόρριψης την μηδενικής ως συνάρτηση των (μ, σ) , δηλαδή:

$$\beta(\mu, \sigma) = P_{\mu, \sigma} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \geq t_{n-1}(1 - \alpha) \right). \quad (4.51)$$

Τα ορίσματα και οι δείκτες (μ, σ) υποδηλώνουν ότι η πιθανότητα είναι υπολογισμένη κάτω από την υπόθεση ότι τα X_1, X_2, \dots, X_n προέρχεται από έναν κανονικό πληθυσμό με μέση μ και τυπική απόκλιση σ . Για $\mu > \mu_0$, η τιμή του $1 - \beta(\mu, \sigma)$ συμβολίζει την πιθανότητα λανθασμένης αποδοχής της μηδενικής υπόθεσης, δηλαδή την πιθανότητα σφάλμα τύπου II. Η συνάρτηση ισχύος μπορεί να εκφραστεί απευθείας σε όρους των $G_{f, \delta}(t)$, όπου $G_{f, \delta}(t) = P(T_{f, \delta} \leq t)$ η συνάρτηση κατανομής της μη-κεντρικής t , σημειώνοντας ότι:

$$\frac{\sqrt{n}(X - \mu_0)}{S} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma + \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma}{S/\sigma} = \frac{Z + \delta}{\sqrt{V/(n-1)}},$$

έτσι ώστε:

$$\beta(\mu, \sigma) = P_{\mu, \sigma} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \geq t_{n-1}(1 - \alpha) \right) = 1 - G_{n-1, \delta}(t_{n-1}(1 - \alpha)), \quad (4.52)$$

όπου $\delta = \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί κανείς να αντιμετωπίσει το διπλό πρόβλημα του ελέγχου της υπόθεσης $H_0' : \mu \geq \mu_0$ έναντι της εναλλακτικής $H_1' : \mu < \mu_0$. Οι τροποποιήσεις, οι οποίες συνίστανται στην αντιστροφή ορισμένων ανισοτήτων, είναι απλές και παραλείπονται.

Για τον αμφίπλευρο έλεγχο της $H_0^* : \mu = \mu_0$ έναντι της $H_1^* : \mu \neq \mu_0$, ο αντίστοιχος έλεγχος απορρίπτει την μηδενική υπόθεση έναντι της εναλλακτικής όταν ισχύει:

$$\frac{\sqrt{n}|\bar{X} - \mu_0|}{S} \geq t_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad (4.53)$$

Η συνάρτηση ισχύος υπολογίζεται με παρόμοιο τρόπο όπως παραπάνω:

$$\begin{aligned} P_{\mu, \sigma} &= \left(-\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \leq t_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \right) \\ &= 1 - G_{n-1, \delta}(t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2})) + G_{n-1, \delta}(-t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2})) = \beta^*(\mu, \sigma), \end{aligned} \quad (4.54)$$

όπου $\delta = \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma$.

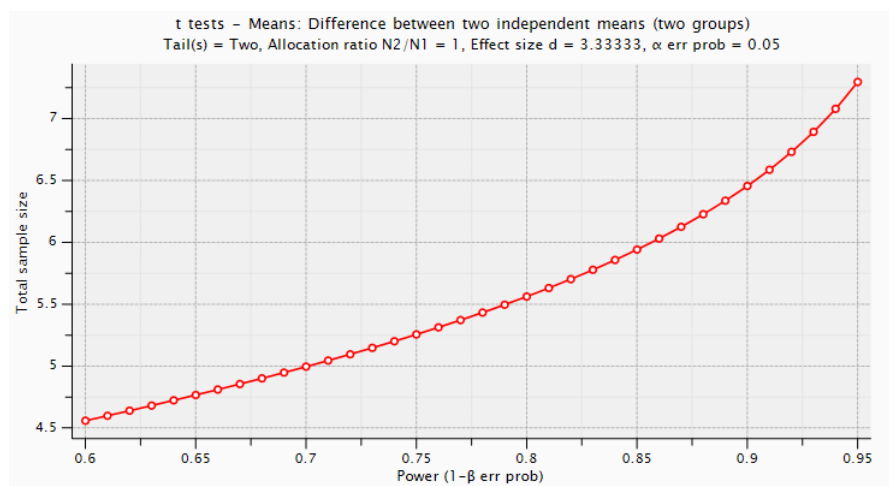
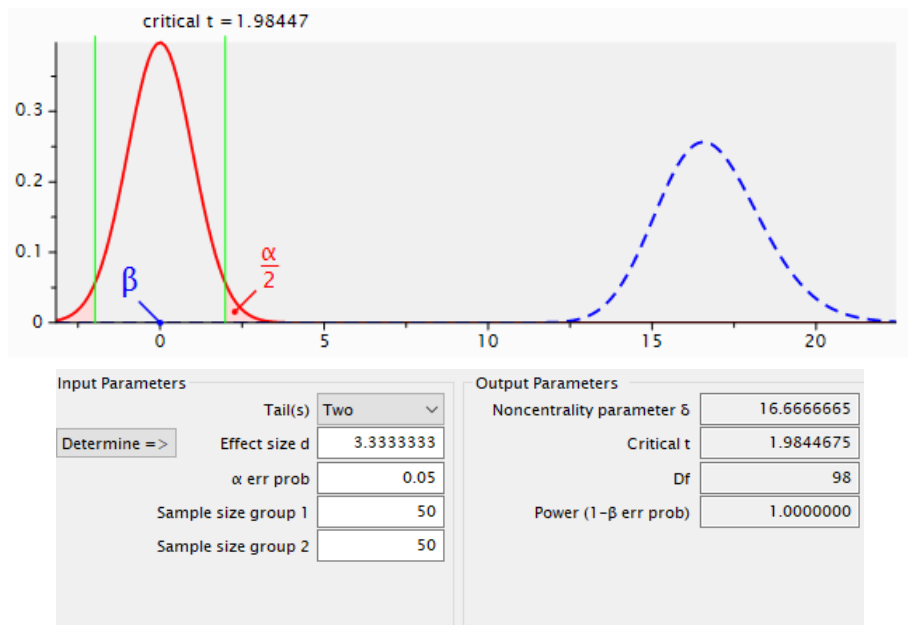
Στην συνέχεια παρουσιάζεται ένα πιο αναλυτικό παραδείγματα με την βοήθεια του προγράμματος **G*Power**. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θέλουμε να ελέγξουμε κατά πόσον οι μέσοι όροι

των πληθυσμών είναι διαφορετικοί, επομένως έχουμε αμφίπλευρο έλεγχο. Η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση του ελέγχου είναι αντίστοιχα:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Θέλουμε να ελέγξουμε αν ο μέσος όρος στον πληθυσμό Β είναι διαφορετικός από τον μέσο όρο του πληθυσμού Α. Εμείς στον παράδειγμά μας θα θεωρήσουμε δύο πληθυσμούς μεγέθους 50 ο κάθε ένας και έστω ότι το επίπεδο εμπιστοσύνης ορίζεται στο 95%, που σημαίνει ότι έχουμε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$. Με την βοήθεια του προγράμματος G*Power προκύπτουν τα κάτωθι αποτελέσματα:



Σχήμα 4.2: Έλεγχος t για την ισότητα δύο μέσων με $\alpha = 5\%$.

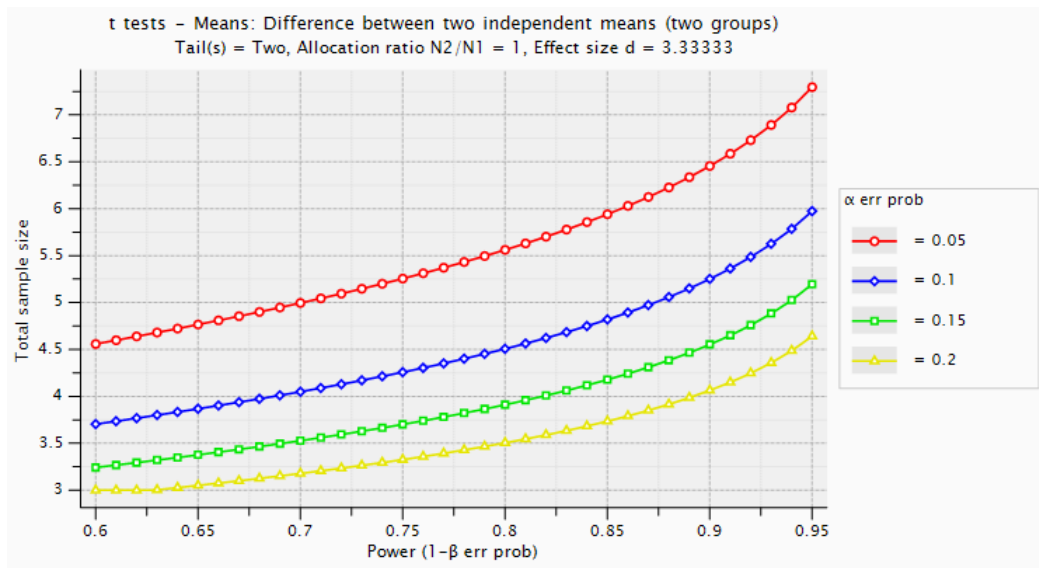
Το αποτέλεσμα μας δείχνει ότι για $df = 50 + 50 - 2 = 98$ βαθμούς ελευθερίας, η κρίσιμη περιοχή είναι $t = 1.9844678$ και η αντίστοιχη ισχύει υπολογίσθηκε ως $1 - \beta = 1$.

Ας δούμε τώρα την περίπτωση όπου θέλουμε να εξετάσουμε διαφορετικά επίπεδα σημαντικότητας. Η συνάρτηση ισχύος για την κάθε περίπτωση, ανάλογα με το μέγεθος του δείγματος διαμορφώνεται ως εξής:

t tests - Means: Difference between two independent means (two groups)
Tail(s) = Two, Allocation ratio N2/N1 = 1, Effect size d = 3.33333

		α err prob = 0.05	α err prob = 0.1	α err prob = 0.15	α err prob = 0.2
#	Power (1- β err prob)	Total sample size	Total sample size	Total sample size	Total sample size
1	0.600000	4.55878	3.70473	3.24243	3.00000
2	0.650000	4.76652	3.86827	3.37751	3.05173
3	0.700000	4.99582	4.05022	3.52835	3.17916
4	0.750000	5.25596	4.25878	3.70241	3.32668
5	0.800000	5.56200	4.50725	3.91179	3.50539
6	0.850000	5.94157	4.82016	4.17892	3.73596
7	0.900000	6.45571	5.25197	4.55388	4.06493
8	0.950000	7.29591	5.97487	5.19619	4.64192

Πίνακας 4.5.1: Συνάρτηση ισχύος για την ισότητα δύο διακύμανσης για διαφορετικά επίπεδα σημαντικότητας.



Σχήμα 4.3: Συνάρτηση ισχύος για την ισότητα δύο μέσων για διαφορετικά επίπεδα σημαντικότητας.

4.5.2 Σχέδια δειγματοληψίας αποδοχής μεταβλητών

Οι εφαρμογές ποιοτικού ελέγχου που διέπονται από το MIL-STD-414¹ ασχολούνται με σχέδια δειγματοληψίας αποδοχής μεταβλητών (VASP²). Σε ένα VASP η ποιότητα των αντικειμένων σε ένα δεδομένο δείγμα μετράται σε ποσοτική κλίμακα. Ένα αντικείμενο κρίνεται ελαττωματικό όταν η μετρούμενη ποιότητά του υπερβαίνει ένα ορισμένο όριο.

Τα δείγματα λαμβάνονται τυχαία από έναν πληθυσμό. Το ζητούμενο είναι να βγάλουμε συμπεράσματα σχετικά με το ποσοστό των ελαττωματικών παρατηρήσεων στον πληθυσμό. Αυτό οδηγεί είτε σε αποδοχή είτε σε απόρριψη της ποιότητας του πληθυσμού ως σύνολο. Σε διάφορες εφαρμογές ο όρος 'πληθυσμός' μπορεί να έχει διαφορετική σημασία. Αντιπροσωπεύει το σύνολο των στοιχείων από τα οποία προέρχεται το επιλεγμένο δείγμα. Έτσι θα μπορούσε να είναι μια αποστολή, μια παρτίδα ή μια παρτίδα ή οποιαδήποτε άλλη συλλογικότητα οντότητα.

Ένα VASP υποθέτει ότι οι μετρήσεις (μεταβλητές) X_1, \dots, X_n για ένα τυχαίο δείγμα n στοιχείων από έναν πληθυσμό είναι διαθέσιμο και το ελαττωματικό για κάθε δεδομένο δείγμα του i ισοδυναμεί με $X_i < L$, όπου το L είναι κάποιο δεδομένο κάτω όριο προδιαγραφών. Σε άλλες εφαρμογές μπορεί να ονομάσουμε το στοιχείο i ελαττωματικό όταν $X_i > U$, όπου U είναι κάποιο δεδομένο άνω όριο προδιαγραφών. Η μεθοδολογία οποιοδήποτε VASP εξαρτάται από την υποτιθέμενη υποκείμενη κατανομή για τις μεταβλητές X_1, \dots, X_n . Εδώ πάλι θα υποθέσουμε ότι ασχολούμαστε με τυχαίο δείγμα από κανονικό πληθυσμό με μέσο όρο μ και τυπική απόκλιση σ . Η ακόλουθη συζήτηση θα αφορά το κατώτερο όριο προδιαγραφών L . Η αντίστοιχη διαδικασία για ένα ανώτερο όριο προδιαγραφών U θα αναφερθεί, χωρίς όμως περεταίρω ανάλυση.

Εάν το L είναι ένα κατώτερο όριο προδιαγραφών, τότε η σχέση:

$$p = P_{\mu, \sigma}(X \leq L) = P_{\mu, \sigma}\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{L - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{L - \mu}{\sigma}\right) \quad (4.55)$$

αντιπροσωπεύει την πιθανότητα ένα δεδομένο μεμονωμένο στοιχείο στον πληθυσμό να είναι ελαττωματικό. Εδώ το $\Phi(x)$ υποδηλώνει την συνάρτηση της τυπικής κανονικής κατανομής και το $\Phi^{-1}(x)$ το αντίστροφό του. Το p μπορεί να ερμηνευθεί ως η αναλογία του ελαττωματικού στοιχείου στον πληθυσμό. Είναι προς το συμφέρον του καταναλωτή να διατηρήσει την αναλογία p ελαττωματικών στοιχείων στον πληθυσμό κάτω από ένα ανεκτή τιμή p_1 . Η διατήρηση της

¹MIL-STD-414: ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ: ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΕΣ ΓΙΑ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗ ΑΠΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΓΙΑ ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΛΑΤΤΩΜΑΤΟΣ (11 ΙΟΥΝΙΟΥ 1957). Αυτό το πρότυπο καθορίζει σχέδια δειγματοληψίας και διαδικασίες δειγματοληψίας για επιθεώρηση, προμήθεια και αποθήκευση και εργασίες επιθεώρησης συντήρησης.

²Variables Acceptance Sampling Plans

αναλογίας p είναι συνήθως δαπανηρή για τον παραγωγό. Ως εκ τούτου, ο παραγωγός θα προσπαθήσει επίσης να κρατήσει το p μόνο τόσο χαμηλό ώστε να παραμείνει οικονομικός αλλά αρκετά χαμηλό ώστε να μην προκαλούνται πάρα πολλές δαπανηρές απορρίψεις. Συνεπώς, ο παραγωγός θα επιδιώξει να διατηρήσει το $p \leq p_0$, όπου p_0 είναι τυπικά μικρότερο από το p_1 , στην προσπάθεια επαρκούς περιθωρίου ενδιαφέροντος ανάμεσα σε παραγωγό και καταναλωτή.

Για κανονικά δεδομένα, το τυπικό VASP συνίσταται στον υπολογισμό των \bar{X} και S από το δείγμα n στοιχείων και κατά τη σύγκριση των $\bar{X} - S$ με το L για μια κατάλληλα επιλεγμένη σταθερά k . Εάν $\bar{X} - S \geq L$, ο καταναλωτής αποδέχεται το πληθυσμό από τον οποίο προήλθε το δείγμα, σε διαφορετική περίπτωση απορρίπτεται.

Πριν συζητηθεί η επιλογή του k , είναι σκόπιμο να ορισθούν οι δύο έννοιες κινδύνου για ένα τέτοιο VASP. Λόγω της τυχαίας φύσης του δείγματος υπάρχουν πιθανότητα το δείγμα να μην είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού και έτσι να μας παρακινεί να προβούμε σε λανθασμένες ενέργειες. Ο κίνδυνος του καταναλωτή είναι η πιθανότητα αποδοχής του πληθυσμού όταν στην πραγματικότητα η αναλογία p των ελαττωμάτων στον πληθυσμό είναι μεγαλύτερη από το αποδεκτό όριο p_1 (πιθανότητα σφάλματος τυπου II). Ο κίνδυνος του παραγωγού είναι η πιθανότητα απόρριψης του πληθυσμού όταν στην πραγματικότητα η αναλογία p των ελαττωματικών στο είναι ίση με p_0 (πιθανότητα σφάλματος τύπου I).

Για ένα δεδομένο VASP, έστω ότι $\gamma(p)$ δηλώνει την πιθανότητα αποδοχής ως συνάρτηση του ποσοστού των ελαττωματικών στον πληθυσμό. Αυτή η λειτουργία είναι γνωστή και ως χαρακτηριστικό λειτουργίας ή καμπύλη OC³ του VASP. Το $\gamma(p)$ μπορεί να εκφραστεί σε όρους $G_{n-1, \delta(t)}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} \gamma(p) &= P_{\mu, \sigma}(\bar{X} - kS \geq L) = P_{\mu, \sigma} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}(\mu - L)}{\sigma} \geq k\sqrt{n} \frac{S}{\sigma} \right) \\ &= P_{\mu, \sigma} \left(\frac{Z + \delta}{\sqrt{V/(n-1)}} \geq k\sqrt{n} \right) = P(T_{n-1, \delta \geq k\sqrt{n}}) \end{aligned} \quad (4.56)$$

όπου η παράμετρος μη-κεντρικότητας:

$$\delta = \delta(p) = \frac{\sqrt{n}(\mu - L)}{\sigma} \sqrt{n} \frac{L - \mu}{\sigma} = -\sqrt{n} \Phi^{-1}(p) \quad (4.57)$$

είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του p . Ως εκ τούτου:

$$\gamma(p) = 1 - G_{n-1, \delta(p)}(k\sqrt{n}) \quad (4.58)$$

³Η καμπύλη χαρακτηριστικών λειτουργίας (OC) απεικονίζει τη διακριτική ισχύ ενός σχεδίου δειγματοληψίας αποδοχής. Η καμπύλη απεικονίζει τις πιθανότητες αποδοχής ενός πληθυσμού έναντι του ελαττωματικού δείγματος.

μειώνεται στο p .

Ο κίνδυνος του καταναλωτή συνίσταται στην πιθανότητα αποδοχής του πληθυσμού όταν ισχύει $p \geq p_1$. Προκειμένου να ελεγχθεί ο κίνδυνος του καταναλωτή, το $\gamma(p)$ πρέπει να είναι διατηρείται σε κάποιο αρκετά μικρό επίπεδο β για $p \leq p_1$. Εφόσον το $\gamma(p)$ μειώνεται στο p , πρέπει να εξασφαλιστεί μόνο ότι θα ισχύει $\gamma(p_1) = \beta$ με σωστή επιλογή του k . Συνεπώς ο παράγοντας k βρίσκεται λύνοντας την εξίσωση:

$$\beta = 1 - G_{n-1, \delta(p_1)}(k\sqrt{n}) \quad (4.59)$$

για k . Είναι σύνηθες αλλά όχι απαραίτητως επιτακτικό να επιλέγουμε $\beta = 0.10$. Αυτό λύνει το πρόβλημα όσον αφορά τον καταναλωτή. Δεν απευθύνεται στις απαιτήσεις κινδύνου του παραγωγού.

Ο κίνδυνος του παραγωγού συνιστά την πιθανότητα απόρριψης του πληθυσμού όταν μάλιστα $p \leq p_0$. Δεδομένου ότι η πιθανότητα απόρριψης του πληθυσμού είναι $1 - \gamma(p)$, αυτή η πιθανότητα είναι μέγιστη πάνω από $p \leq p_0$ στο p_0 . Ως εκ τούτου θα μπορούσε κανείς να περιορίσει αυτόν τον μέγιστο κίνδυνο $1 - \gamma(p)$ με κάποια τιμή α , που συνήθως επιλέγεται να είναι 0.05. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα α και β πρέπει να ικανοποιούν τον περιορισμό $\alpha + \beta < 1$.

Έτσι ο παραγωγός ενδιαφέρεται να διασφαλίσει ότι:

$$\alpha = 1 - \gamma(p_0) = G_{n-1, \delta(p_0)}(k\sqrt{n}) \quad (4.60)$$

Λύνοντας την (4.60) ως προς k συνήθως οδηγεί σε διαφορετική λύση από αυτή που λαμβάνεται στην (4.59) αφήνοντάς μας μια σύγκρουση.

Αυτή η αντίφαση μπορεί να επιλυθεί αφήνοντας το μέγεθος του δείγματος n ελεύθερο έτσι ώστε υπάρχουν δύο παράμετροι ελέγχου, n και k , οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ικανοποίηση των δύο αντικρουόμενων στόχων. Ένα μικρό πρόβλημα είναι ότι το n είναι ακέραιος και άρα μπορεί να μην είναι δυνατό να ικανοποιηθούν επακριβώς και οι δύο εξισώσεις (4.59) και (4.60). Μια εναλλακτική λύση είναι η ακόλουθη: Για μια δεδομένη τιμή του n και έστω ότι $k = k(n)$, επιλύεται η (4.59). Αν για αυτό το $k(n)$ ισχύει επίσης:

$$\alpha \geq G_{n-1, \delta(p_0)}(k(n)\sqrt{n}), \quad (4.61)$$

τότε αυτό το μέγεθος δείγματος n που επιλέχθηκε πιθανώς είναι αρκετά μεγάλο και πρέπει να δοκιμαστεί μια μικρότερη τιμή. Αν ισχύει:

$$\alpha < G_{n-1, \delta(p_0)}(k(n)\sqrt{n}), \quad (4.62)$$

τότε το n που επιλέχθηκε είναι πολύ μικρό και θα πρέπει να δοκιμαστεί μια μεγαλύτερη τιμή. Μέσω της επανάληψης μπορεί κανείς να φτάσει στο μικρότερο μέγεθος δείγματος n έτσι ώστε τα $k(n)$ και n να ικανοποιούν και τις δύο σχέσεις (4.59) και (4.61). Αντίθετα, θα μπορούσε κανείς να προσπαθήσει να ικανοποιήσει την εξίσωση (4.60) και να διατηρήσει της κατάλληλης ανισότητας ($\leq \beta$) στην (4.59) με την ελάχιστη δυνατή τιμή του n . Αυτή η διαδικασία επανάληψης θα οδηγήσει σε ένα αποτέλεσμα όπου $p_0 < p_1$. Αν τα p_0 και p_1 είναι πολύ κοντά το ένα στο άλλο, θα χρειαστεί να χρησιμοποιηθεί μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος.

Στην περίπτωση ανώτατου ορίου προδιαγραφών U , αποδεχόμαστε τον πληθυσμό όταν ισχύει:

$$\bar{X} + kS \leq U. \quad (4.63)$$

Η χαρακτηριστικών λειτουργίας για το VASP είναι και εδώ της μορφής:

$$\gamma(p) = P_{\mu,\sigma}(\bar{X} + kS \leq U) = 1 - G_{n-1,\delta(p)}(k\sqrt{n}) \quad (4.64)$$

όπου $\delta(p) = -\sqrt{n}\Phi^{-1}(p)$ και p δηλώνει την αναλογία των ελλατωματικών μονάδων στον πληθυσμό, δηλαδή:

$$p = P_{\mu,\sigma}(X > U) = \Phi\left(\frac{\mu - U}{\sigma}\right) \quad (4.65)$$

Οι παράμετροι k και n προσδιορίζονται και πάλι επαναληπτικά από τις δύο απαιτήσεις:

$$\alpha = G_{n-1,\delta(p_0)}(k\sqrt{n}) \quad (4.66)$$

και

$$\beta = 1 - G_{n-1,\delta(p_1)}(k\sqrt{n}) \quad (4.67)$$

όπου p_0 και p_1 ($p_0 < p_1$) είναι τα όρια στο p που στοχεύουν παραγωγός και καταναλωτή αντίστοιχα. Τα α και β αντιπροσωπεύουν τους αντίστοιχους κινδύνους των VASP και συνήθως ορίζονται ως 0.05 και 0.10 αντίστοιχα.

4.5.3 Διάστημα ανοχής

Τα όρια ανοχής είναι τα κατώτερα ή ανώτερα όρια συγκέντρωσης στα ποσοστιαία σημεία ενός πληθυσμός. Η ανάλυση θα επικεντρωθεί κυρίως στα κατώτερα όρια συγκέντρωσης.

Το p -ποσοστιαίο σημείο ενός κανονικού πληθυσμού με μέσο μ και τυπική απόκλιση σ μπορεί να εκφραστεί ως:

$$x_p = \mu + x_p\sigma, \quad (4.68)$$

όπου $z_p = \Phi^{-1}(p)$ είναι το p -ποσοστιαίο σημείο της τυπικής κανονικής κατανομής. Το πρόβλημα στο όριο x_p πηγάζει από το γεγονός ότι οι δύο παράμετροι μ και σ είναι άγνωστοι και θα χρειαστεί να εκτιμηθούν από μέσω των \bar{X} και S . Αυτά υπολογίζονται από ένα δείγμα X_1, X_2, \dots, X_n από αυτόν τον πληθυσμό. Το κατώτερο φράγμα συγκέντρωσης για x_p υπολογίζεται στη συνέχεια ως $\bar{X} - kS$ όπου προσδιορίζεται το k για να επιτευχθεί το επιθυμητό επίπεδο εμπιστοσύνης γ , δηλαδή έτσι ώστε για όλα τα (μ, σ) να ισχύει:

$$P_{\mu, \sigma}(\bar{X} - kS \leq x_p) = \gamma \quad (4.69)$$

Συμπληρωματικά αυτό αποδίδει αμέσως ότι για όλα τα (μ, σ) ισχύει:

$$P_{\mu, \sigma}(\bar{X} - kS \geq x_p) = 1 - \gamma \quad (4.70)$$

δηλαδή, το $\bar{X} - kS$ χρησιμεύει επίσης ως άνω φράγμα για x_p με επίπεδο σημαντικότητας $1 - \gamma$. Φυσικά, για να λάβουμε ένα επίπεδο σημαντικότητας 0.95 για ένα τέτοιο άνω όριο θα πρέπει να επιλεγεί $\gamma = 0.05$ στην παραπάνω ερμηνεία του $\bar{X} - kS$ ως άνω φράγμα.

Ο προσδιορισμός του παράγοντα k γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} P_{\mu, \sigma}(\bar{X} - kS \leq x_p) &= P_{\mu, \sigma}(\bar{X} - x_p \leq kS) = P_{\mu, \sigma}(\bar{X} - \mu - \sigma z_p \leq kS) \\ &= P_{\mu, \sigma}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} - \frac{n}{z_p} par \leq \sqrt{nk} \frac{S}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{Z - \sqrt{n}z_p}{\sqrt{V/(n-1)}} \leq \sqrt{nk}\right) \\ &= P(T_{n-1, \delta} \leq \sqrt{nk}) = G_{n-1, \delta}(\sqrt{nk}), \end{aligned} \quad (4.71)$$

όπου $\delta = -\sqrt{n}z_p$.

Συνεπώς το k προσδιορίζεται λύνοντας την ακόλουθη εξίσωση:

$$G_{n-1, \delta}(\sqrt{nk}) = \gamma \quad (4.72)$$

4.5.4 Όρια εμπιστοσύνης πιθανοτήτων ουράς

Ενδιαφέρον εδώ είναι οι πιθανότητες ουράς ενός κανονικού πληθυσμού με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ . Για μια δεδομένη τιμή x_0 στο όριο εμπιστοσύνης, η πιθανότητα ουράς ορίζεται ως:

$$p = P_{\mu, \sigma}(X \leq x_0) = \Phi\left(\frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right). \quad (4.73)$$

Αν το \hat{p}_u υποδηλώνει ένα άνω φράγμα για το p με επίπεδο σημαντικότητας γ , δηλαδή για όλα τα (μ, σ) ισχύει:

$$P_{\mu, \sigma}(\hat{p}_0 \geq p) = \gamma, \quad (4.74)$$

τότε ισχύει εξίσου ότι για όλα τα (μ, σ) :

$$P_{\mu, \sigma}(\hat{p}_0 \leq p) = 1 - \gamma, \quad (4.75)$$

έτσι ώστε το \hat{p}_u μπορεί επίσης να χρησιμεύσει ως κάτω φράγμα για το p με επίπεδο εμπιστοσύνης $1 - \gamma$. Εάν η πιθανότητα $1 - \gamma$ της άνω ουράς της κανονικής κατανομής ενδιαφέρει, τότε το $1 - \hat{p}_u$ θα χρησιμεύσει ως άνω φράγμα για το $1 - p$ σε επίπεδο εμπιστοσύνης $1 - \gamma$.

Κατά την ερμηνεία αυτών των άνω ορίων θα χρησιμοποιηθεί το ακόλουθο αποτέλεσμα: Εάν το X είναι μια τυχαία μεταβλητή με συνεχή, αυστηρά αυξανόμενη συνάρτηση κατανομής $F(t) = P(X \leq t)$, τότε η τυχαία μεταβλητή $U = F(X)$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή, δηλαδή $P(U \leq u) = u$ για $0 \leq u \leq 1$. Η απόδειξη σε αυτή τη μορφή είναι αρκετά εύκολο να δοθεί ως εξής:

$$P(U \leq u) = P(F(X) \leq u) = P(X \leq F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u. \quad (4.76)$$

Ως αρχή για την κατασκευή των άνω ορίων για το p εξετάστε την περίπτωση:

$$\frac{\sqrt{n}(x_0 - \bar{X})}{S} = \frac{\sqrt{n}(x_0 - \mu)/\sigma + \sqrt{n}(\mu - \bar{X})/\sigma}{S/\sigma} = T_{n-1, \delta}, \quad (4.77)$$

και σημειώστε ότι τα $Z' = \sqrt{n}(\mu - \bar{X})/\sigma$ και $Z = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma = -Z'$ ακολουθούν την ίδια τυπική κανονική κατανομή. Εδώ, $\delta = \sqrt{n}(x_0 - \mu)/\sigma = \sqrt{n}\Phi^{-1}(p)$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση του p .

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η τυχαία μεταβλητή:

$$U = G_{n-1, \delta} \left(\frac{\sqrt{n}(x_0 - \bar{X})}{S} \right) = G_{n-1, \delta}(T_{n-1, \delta}) \quad (4.78)$$

ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$ και έτσι προκύπτει ότι:

$$\gamma = P(U \geq 1 - \gamma). \quad (4.79)$$

Εφόσον το $G_{n-1, \delta}(t)$ μειώνεται σε δ , ισχύει:

$$U \leq 1 - \gamma \text{ ισχύει αν και μόνο αν } G_{n-1, \delta}(\sqrt{n}(x_0 - \bar{X})/S) \geq 1 - \gamma$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με $\delta \leq \hat{\delta}$

όπου το δ ικανοποιεί τη σχέση:

$$G_{n-1,\delta}(\sqrt{n}(x_0 - \bar{X})/S) = 1 - \gamma \quad (4.80)$$

Ως εκ τούτου, το $\hat{\delta}$ είναι ένα άνω όριο εμπιστοσύνης για το $\delta = \sqrt{n}\Phi^{-1}(p)$ με επίπεδο σημαντικότητας γ . Εφόσον ισχύει:

$$\hat{\delta} \geq \delta = \sqrt{n}\Phi^{-1}(p) \text{ ισχύει αν και μόνο αν } \hat{p}_u \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\hat{\delta}/\sqrt{n}) \geq p, \quad (4.81)$$

το \hat{p}_u είναι ένα επιθυμητό άνω όριο εμπιστοσύνης για το p , με επίπεδο σημαντικότητας γ .

4.5.5 Όρια για τις παραμέτρους ελέγχου διεργασίας

Κάτω όρια προδιαγραφών C_L

Έστω X_1, X_2, \dots, X_n είναι τυχαίο δείγμα από κανονικό πληθυσμό με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ . Τότε:

$$C_L = \frac{\mu - x_L}{3\sigma} \quad (4.82)$$

όπου x_L είναι ένα δεδομένο κατώτερο όριο προδιαγραφών. Συμβολίζουμε με:

$$\hat{C}_L = \frac{\bar{X} - x_L}{3S} \quad (4.83)$$

την εκτίμηση του C_L . Ο στόχος είναι να βρεθεί ένα $100\gamma\%$ κατώτερο όριο εμπιστοσύνης για το C_L σύμφωνα με το \hat{C}_L . Συνεπώς:

$$\begin{aligned} P(\hat{C}_L \leq k) &= P\left(\frac{\bar{X} - x_L}{3S} \leq k\right) \\ &= P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma + \sqrt{n}(\mu - x_L)/\sigma}{S/\sigma} \leq 3\sqrt{nk}\right) \\ &= P(T_{n-1,3\sqrt{nk}} \leq 3\sqrt{nk}). \end{aligned} \quad (4.84)$$

Ορίζουμε $k = k(C_L)$ ως τον μοναδικό αριθμό που λύνει την εξίσωση:

$$P(T_{n-1,3\sqrt{nk}} \leq 3\sqrt{nk}(C_L)) = \gamma, \text{ δηλαδή } P(\hat{C}_L \leq (C_L)) = \gamma \quad (4.85)$$

όπου $k(C_L)$ είναι μια αυξανόμενη συνάρτηση του C_L . Ως κατώτατο όριο εμπιστοσύνης του C_L παίρνουμε την σχέση:

$$\hat{B}_L = k^{-1}(\hat{C}_L) \quad (4.86)$$

από την οποία παρατηρούμε ότι:

$$P(\hat{B}_L \leq C_L) = P(\hat{C}_L \leq k(C_L)) = \gamma \quad (4.87)$$

δηλαδή το \hat{B}_L είναι πράγματι ένα 100% κάτω όριο για το C_L .

Στην συνέχεια θα δείξουμε πως το \hat{B}_L υπολογίζεται για κάθε παρατηρούμενη τιμή \hat{c}_L του \hat{C}_L . Στην εξίσωση για το $k(C_L)$ αν θέσουμε $C_L = k^{-1}(\hat{c}_L)$, η (4.84) μπορεί να γραφεί αντίστοιχα ως:

$$P(T_n - 1, 3\sqrt{n}k^{-1}(\hat{C}_L) \leq 3\sqrt{n}k(k^{-1}(\hat{C}_L))) = \gamma \quad (4.88)$$

ή

$$P(T_n - 1, 3\sqrt{n}k^{-1}(\hat{C}_L) \leq 3\sqrt{n}\hat{C}_L) = \gamma. \quad (4.89)$$

Αν, για σταθερό \hat{c}_L λύσουμε την κάτωθι εξίσωση ως προς δ :

$$P(T_{n-1,\delta} \geq \sqrt{n}\hat{C}_L) = \gamma \quad (4.90)$$

τότε προκύπτει το εξής αποτέλεσμα για το \hat{B}_L :

$$\hat{B}_L = k^{-1}(\hat{C}_L) \frac{\hat{\delta}}{3\sqrt{n}}. \quad (4.91)$$

Άνω όρια προδιαγραφών C_U

Με παρόμοιο τρόπο όπως υπολογίστηκε το κατώτερο όριο εμπιστοσύνης, θα υπολογισθεί τώρα και το ανώτερο όριο για:

$$C_U = \frac{x_U - \mu}{3\sigma} \quad (4.92)$$

όπου x_U είναι ένα δεδομένο ανώτερο όριο προδιαγραφών. Έστω η εκτίμηση:

$$\hat{C}_U = \frac{x_U - \bar{X}}{3S} \quad (4.93)$$

για το C_U . Για ένα δεδομένο C_u , έστω $k(C_U)$ τέτοιο ώστε:

$$P(\hat{C}_U \leq k(C_U)) = P(T_{n-1,3\sqrt{n}C_U} \leq 3\sqrt{n}k(C_U)) = \gamma. \quad (4.94)$$

Όπως και προηγουμένως, προκύπτει ότι το $\hat{B}_U = k^{-1}(\hat{C}_U)$ είναι ένα 100% κατώτερο όριο εμπιστοσύνης για το C_U . Για μια παρατηρούμενη τιμή \hat{c}_U του \hat{C}_U υπολογίζουμε το \hat{B}_U ως $\hat{\delta}/(3\sqrt{n})$, όπου το $\hat{\delta}$ λύνει την εξίσωση:

$$P(T_{n-1,\delta} \leq 3\sqrt{n}\hat{C}_U) = \gamma. \quad (4.95)$$

Δίπλευρα όρια προδιαγραφών C_{pk}

Βάζοντας τα όρια του C_L και C_U μαζί, μπορούμε να αποκτήσουμε (ελαφρώς συντηρητικά) όρια εμπιστοσύνης για την παράμετρο στατιστικού ελέγχου διεργασίας δύο όψεων:

$$C_{pk} = \min(C_L, C_U) \quad (4.96)$$

λαμβάνοντας απλώς

$$B = \min(\hat{B}_L, \hat{B}_U). \quad (4.97)$$

Αν $C_L \leq C_U$, δηλαδή αν ισχύει $C_{pk} = C_L$, τότε:

$$P(\min(\hat{B}_L, \hat{B}_U) \leq \min(C_L, C_U)) = P(\min(\hat{B}_L, \hat{B}_U) \leq C_L \geq P(\hat{B}_L \leq C_L)) = \gamma \quad (4.98)$$

και στην περίπτωση όπου $C_U \leq C_L$, δηλαδή αν ισχύει $C_{pk} = C_U$, τότε:

$$P(\min(\hat{B}_L, \hat{B}_U) \leq \min(C_L, C_U)) = P(\min(\hat{B}_L, \hat{B}_U) \leq C_U \geq P(\hat{B}_U \leq C_U)) = \gamma \quad (4.99)$$

Ως εκ τούτου το \hat{B} μπορεί να ληφθεί ως κατώτερο όριο για το C_{pk} με επίπεδο εμπιστοσύνης τουλάχιστον ίσο με γ . Το ακριβές επίπεδο εμπιστοσύνης του \hat{B} είναι κάπως υψηλότερο από το γ για $C_L = C_U$, δηλαδή όταν το μ είναι το μέσο του διαστήματος προδιαγραφών. Καθώς το μ απομακρύνεται από αυτό το μέσο, το πραγματικό επίπεδο εμπιστοσύνης \hat{B} του πλησιάζει πολύ το γ .

4.5.6 Όρια εμπιστοσύνης για τον συντελεστή διακύμανσης

Ο συντελεστής διακύμανσης ορίζεται ως ο λόγος της τυπικής απόκλισης προς την μέση τιμή, δηλαδή $\nu = \sigma/\mu$. Αντίστοιχα, θα δώσουμε επίπεδα σημαντικότητας για τον αντίστροφο του συντελεστή διακύμανσης, δηλαδή $p = 1/\nu = \mu.\sigma$. Ο λόγος για αυτό είναι ότι το X , στην εκτίμηση S/\bar{X} του ν , θα μπορούσε να είναι μηδέν προκαλώντας ορισμένα προβλήματα. Αν ο συντελεστής διακύμανσης είναι αρκετά μικρός, τότε η διάκριση μεταξύ αυτού και του αμοιβαίου του είναι κάπως ασήμαντη αφού τα τυπικά όρια για ν μπορούν να αντιστραφούν σε όρια για p και αντίστροφα. Αυτή η κατάσταση αναγνωρίζεται εύκολα από το πρόσημο του άνω ή κάτω ορίου, αντίστοιχα. Αν το \hat{p} ως κατώτερο όριο για το p είναι θετικό, τότε το $\hat{\nu} = 1/\hat{p}$ είναι ένα άνω όριο για μια θετική τιμή ν . Αν το \hat{p} ως ανώτερο όριο για το p είναι αρνητικό, τότε το $\hat{\nu} = 1/\hat{p}$ είναι ένα κάτω όριο για μια αρνητική τιμή ν . Και στις δύο περιπτώσεις το p περιορίζεται μακριά από το μηδέν που σημαίνει ότι η αντίστροφη σχέση $\nu = 1/p$ είναι περιορισμένη. Από την άλλη πλευρά, εάν το \hat{p} ως κατώτερο όριο για το p είναι αρνητικό, τότε δεν περιορίζεται από το μηδέν

και οι αμοιβαίες τιμές θα μπορούσαν να είναι αυθαίρετα μεγάλες. Ως εκ τούτου, σε αυτήν την περίπτωση, το $\hat{\nu} = 1/\hat{p}$ είναι άχρηστο ως άνω φράγμα για το ν αφού δεν υπάρχει άνω όριο που να περιορίζεται στις τιμές του μπορούν να προκύψουν από το \hat{p} .

Για να δημιουργήσετε ένα κατώτερο όριο εμπιστοσύνης για το $p = \mu/\sigma$, έστω:

$$\sqrt{n} \frac{\hat{X}}{S} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma + \sqrt{n}\mu/\sigma}{S/\sigma} = T_{n-1,\delta} \quad (4.100)$$

με $\delta = \sqrt{n}\mu/\sigma$. Η τυχαία μεταβλητή

$$U = G_{n-1,\delta}(\sqrt{n}\bar{X}/S) = G_{n-1,\delta}(T_{n-1,\delta}) \quad (4.101)$$

κατανέμεται ομοιόμορφα στο $(0,1)$. Συνεπώς, ισχυει ότι $P(U \leq \gamma) = \gamma$, έτσι ώστε:

$$G_{n-1,\delta}(\sqrt{n}\bar{X}/S) \leq \gamma \text{ μόνο και μόνο όταν } \delta \leq \hat{\delta} \quad (4.102)$$

όπου $\hat{\delta}$ είναι η λύση της εξίσωσης:

$$G_{n-1,\delta}(\sqrt{n}\bar{X}/S) = \gamma \quad (4.103)$$

και $\hat{p} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\delta}/\sqrt{n}$ μπορεί έτσι να χρησιμοποιηθεί ως χαμηλότερο όριο εμπιστοσύνης για $p = \delta/\sqrt{n} = \mu/\sigma$ σε επίπεδο σημαντικότητας γ .

Για να λάβουμε ένα ανώτερο όριο για με επίπεδο σημαντικότητας γ , λύνουμε την παρακάτω εξίσωση ως προς $\hat{\delta}$:

$$G_{n-1,\delta}(\sqrt{n}\bar{X}/S) = 1 - \gamma \quad (4.104)$$

και ορίζουμε το $\hat{p} := \hat{\delta}/\sqrt{n}$ ως άνω όριο για το $p = \delta/\sqrt{n} = \mu/\sigma$.

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογές στην Βιοστατιστική

5.1 Παράλληλος σχεδιασμός δύο ομάδων

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό του μεγέθους του δείγματος που απαιτείται για να έχουμε ισχύ ίση με $1 - \beta$, στην περίπτωση που εξετάζουμε δύο δείγματα. Το ένα αφορά την ομάδα των ατόμων, στην οποία εφαρμόζεται η πειραματική θεραπεία και το άλλο αφορά την ομάδα των ατόμων, στην οποία εφαρμόζεται η καθιερωμένη θεραπεία.

Έστω ότι x_{ij} είναι η απόκριση του j -οστού ατόμου που λαμβάνει την i θεραπεία, $j = 1, 2, \dots, n_i$, $i = 1, 2$. Θεωρούμε ότι τα x_{ij} είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 .

Έστω ότι:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

είναι η δειγματική μέση τιμή της i -θεραπείας και

$$s_p^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

είναι η συνολική δειγματική διακύμανση.

Έστω ότι $\varepsilon = \mu_1 - \mu_2$ είναι η πραγματική μέση διαφορά μεταξύ της υπό δοκιμή θεραπείας (μ_2) και της θεραπείας αναφοράς (placebo ή control) (μ_1). Εάν το ε είναι θετικό ($\varepsilon > 0$), τότε θεωρούμε ότι η υπό δοκιμή θεραπεία είναι καλύτερη από την θεραπεία αναφοράς. Αντίθετα, εάν είναι αρνητικό ($\varepsilon < 0$), τότε θεωρούμε ότι η υπό δοκιμή θεραπεία είναι χειρότερη από την θεραπεία αναφοράς.

Στην πράξη, συνηθίζεται να έχουμε άνιση κατανομή των ασθενών στις ομάδες θεραπείας, π.χ. $\frac{n_1}{n_2} = \kappa$ και κάποιο κ . Εάν $\kappa = 2$, τότε έχουμε 2 προς 1 κατανομή (δηλαδή η πρώτη ομάδα έχει διπλάσιους ασθενείς από την δεύτερη ομάδα), ενώ εάν $\kappa = 1/2$ τότε έχουμε 1 προς 2 κατανομή (δηλαδή η πρώτη ομάδα έχει τους μισούς ασθενείς σε σχέση με την δεύτερη ομάδα). Η επιλογή του κ γίνεται συνήθως ανάλογα με τις ανάγκες της μελέτης.

5.1.1 Σχεδιασμός δύο ομάδων: Έλεγχος για ισότητα

Για να ελέγξουμε εάν υπάρχει διαφορά μεταξύ της μέσης απόκρισης στην υπό δοκιμή θεραπεία και στην θεραπεία αναφοράς, θεωρούμε τον έλεγχο:

$$H_0 : \varepsilon = 0 \quad vs \quad H_1 : \varepsilon \neq 0$$

Εναλλακτικά, ο έλεγχος μπορεί να γραφεί ως

$$H_0 : \mu_2 = \mu_1 \quad vs \quad H_1 : \mu_2 \neq \mu_1.$$

Στην περίπτωση όπου η διακύμανση σ^2 είναι γνωστή, απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α , εάν ισχύει:

$$\left| \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right| > Z_{\alpha/2},$$

όπου $Z_{\alpha/2}$ είναι το άνω $\alpha/2$ ποσοστημόριο της τυπικής κανονικής κατανομής.

Υπό την εναλλακτική υπόθεση ότι $\varepsilon \neq 0$ (δηλαδή $\mu_1 \neq \mu_2$), η ισχύς του ελέγχου $1 - \beta$ δίνεται από την σχέση

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} - Z_{\alpha/2}\right) + \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} - Z_{\alpha/2}\right)$$

όπου Φ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής.

Αγνοώντας μια μικρή τιμή ($\leq \alpha/2$), η παραπάνω ισχύς είναι περίπου ίση με

$$\Phi\left(\frac{|\varepsilon|}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} - Z_{\alpha/2}\right)$$

Το μέγεθος του δείγματος που χρειάζεται για να επιτύχουμε ισχύ $1 - \beta$ προκύπτει, εάν λύσουμε την εξίσωση

$$\frac{|\varepsilon|}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} - Z_{\alpha/2} = Z_{\beta}$$

Θεωρώντας ότι $n_1 = \kappa n_2$, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{|\varepsilon|}{\sigma \sqrt{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}}} - Z_{\alpha/2} = Z_{\beta} &\Leftrightarrow \frac{|\varepsilon|}{\sigma \sqrt{\frac{1}{\kappa \nu_2} + \frac{1}{\nu_2}}} - Z_{\alpha/2} = Z_{\beta} \Leftrightarrow \\ \sqrt{\frac{1+\kappa}{\kappa \nu_2}} = \frac{\sigma (Z_{\alpha/2} + Z_{\beta})^2}{|\varepsilon|} &\Leftrightarrow \frac{1+\kappa}{\kappa n_2} = \frac{\sigma^2}{(\varepsilon)^2} (Z_{\alpha/2} + Z_{\beta})^2 \Leftrightarrow \\ n_2 = \frac{\sigma^2 (Z_{\alpha/2} + Z_{\beta})^2 (1 + \frac{1}{\kappa})}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1 Ας θεωρήσουμε μια κλινική δοκιμή για την αξιολόγηση της επίδρασης ενός φαρμάκου στην χοληστερόλη ασθενών με στεφανιαία νόσο (CHD). Η χοληστερόλη είναι το κύριο λιπίδιο που σχετίζεται με την αρτηριοσκληρωτική αγγειακή νόσο. Ο σκοπός του ελέγχου της χοληστερόλης είναι να αναγνωρίσουμε ασθενείς με κίνδυνο να εμφανίσουν αρτηριοσκληρωτική νόσο. Το ήπαρ μεταβολίζει τη χοληστερόλη στην ελεύθερη μορφή της, η οποία μεταφέρεται μέσω του αίματος από λιποπρωτεΐνες. Σχεδόν το 75% της χοληστερόλης δεσμεύεται σε λιποπρωτεΐνες χαμηλής πυκνότητας (LDL) και το 25% σε υψηλής πυκνότητας λιποπρωτεΐνες (HDL). Η LDL λοιπόν σχετίζεται πιο άμεσα με τον αυξημένο κίνδυνο της στεφανιαίας νόσου.

Μια φαρμακευτική εταιρία ενδιαφέρεται να διεξάγει μια κλινική δοκιμή για να συγκρίνει δύο φάρμακα για τη μείωση της χοληστερόλης ως θεραπεία ασθενών με στεφανιαία νόσο χρησιμοποιώντας ένα σχεδιασμό παράλληλων ομάδων με μια πειραματική θεραπεία και μια θεραπεία αναφοράς. Η κύρια παράμετρος αποτελεσματικότητας είναι η LDL.

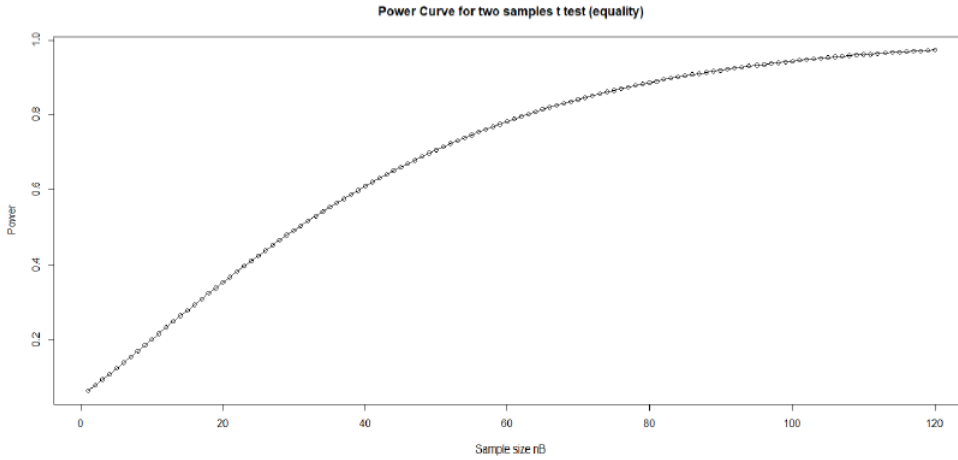
Η φαρμακευτική εταιρία ενδιαφέρεται να ελέγξει την ισότητα των μέσων αποκρίσεων. Υποθέτουμε ότι η μέση απόκριση στην πρώτη ομάδα είναι 200 μονάδες ενώ ως κλινικά σημαντική διαφορά στην μείωση της LDL θεωρούνται οι 5 μονάδες, δηλαδή $\varepsilon = 5$. Υποθέτουμε επίσης ότι η τυπική απόκλιση είναι $\sigma = 10$ μονάδες. Σκοπός της έρευνας είναι να υπολογισθεί το μέγεθος του δείγματος έτσι ώστε να έχουμε ισχύ 80% (δηλαδή $\beta = 0.20$) σε επίπεδο σημαντικότητας 5%.

Εάν υποθέσουμε ότι έχουμε ισοκατανομή των ασθενών στις δύο ομάδες (δηλαδή $n_1 = n_2$ ή $\kappa = 1$), τότε προκύπτει ότι

$$n_1 = n_2 = \frac{2\sigma^2 (Z_{\alpha/2} + Z_{\beta})^2}{\varepsilon^2} = \frac{1 \cdot 10^2 (1.96 + 0.84)^2}{5^2} \approx 63$$

Απο τα αποτελέσματα προκύπτει πως χρειαζόμαστε 63 ασθενείς στην πρώτη ομάδα και 63 στην δεύτερη ομάδα. Δυνολικά δηλαδή έχουμε 126 ασθενείς για να επιτύχουμε ισχύ 80% σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$.

Η καμπύλη ισχύος παρουσιάζεται στο σχήμα (5.1) και δείχνει τη σχέση της ισχύος με το μέγεθος του δείγματος.



Σχήμα 5.1: Σχέση ισχύος με το μέγεθος του δείγματος στην περίπτωση του ελέγχου για ισότητα

□

Στην περίπτωση όπου η διακύμανση σ^2 είναι άγνωστη, την αντικαθιστούμε με την δειγματική διακύμανση s^2 . Απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α , εάν ισχύει η σχέση:

$$\left| \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1 - \delta}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right| > t_{n_1+n_2-2, \alpha/2},$$

όπου $t_{n_1+n_2-2, \alpha/2}$ είναι το άνω $\alpha/2$ ποσοστημόριο της t κατανομής με $n_1 + n_2 - 2$ βαθμούς ελευθερίας.

Υπό την εναλλακτική υπόθεση ότι $\varepsilon \neq 0$ (δηλαδή $\mu_2 \neq \mu_1$), η ισχύς του ελέγχου δίνεται από τη σχέση:

$$1 - T_{n_1+n_2-2} \left(t_{n_1+n_2-2, \alpha/2} \left| \frac{\varepsilon}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right| \right) + T_{n_1+n_2-2} \left(t_{n_1+n_2-2} \left| \frac{\varepsilon}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right| \right),$$

όπου $T_{n_1+n_2-2}(\cdot|\theta)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής μια μη-κεντρικής t κατανομής με $n_1 + n_2 - 2$ βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη-κεντρικότητας λ .

Αγνοώντας μια μικρή τιμή ($\leq \alpha/2$), η ισχύς είναι περίπου ίση με

$$1 - T_{n_1+n_2-2} \left(t_{n_1+n_2-2, \alpha/2} \left| \frac{\varepsilon}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right| \right)$$

Θεωρώντας ότι $n_1 = \kappa n_2$, το μέγεθος του δείγματος που χρειαζόμαστε για να επιτύχουμε ισχύ $1 - \beta$ προκύπτει, εάν λύσουμε την εξίσωση

$$T_{(1+\kappa)n_2-2} \left(t_{(1+\kappa)n_2-2, \alpha/2} \left| \frac{\sqrt{n_2}|\varepsilon|}{\sigma \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa}}} \right. \right) = \beta.$$

Ο παρακάτω Πίνακας (5.1.1) περιέχει τη λύση της εξίσωσης για διάφορες τιμές των α, β και $\theta = \frac{|\varepsilon|}{\sigma}$.

θ	$\kappa = 1$				$\kappa = 2$			
	$\alpha = 2.5\%$		$\alpha = 5\%$		$\alpha = 2.5\%$		$\alpha = 5\%$	
	$1 - \beta =$		$1 - \beta =$		$1 - \beta =$		$1 - \beta =$	
	80%	90%	80%	90%	80%	90%	80%	90%
0.30	176	235	139	191	132	176	104	144
0.32	155	207	122	168	116	155	92	126
0.34	137	183	108	149	103	137	81	112
0.36	123	164	97	133	92	123	73	100
0.38	110	147	87	120	83	110	65	90
0.40	100	133	78	108	75	100	59	81
0.42	90	121	71	98	68	90	54	74
0.44	83	110	65	90	62	83	49	67
0.46	76	101	60	82	57	76	45	62
0.48	70	93	55	76	52	70	41	57
0.50	64	86	51	70	48	64	38	52
0.52	60	79	47	65	45	59	35	48
0.54	55	74	44	60	42	55	33	45
0.56	52	68	41	56	39	51	31	42
0.58	48	64	38	52	36	48	29	39
0.60	45	60	36	49	34	45	27	37
0.65	39	51	30	42	29	38	23	31
0.70	34	44	26	36	25	33	20	27
0.75	29	39	23	32	22	29	17	24
0.80	26	34	21	28	20	26	15	21
0.85	23	31	18	25	17	23	14	19
0.90	21	27	16	22	16	21	12	17
0.95	19	25	15	20	14	19	11	15
1.00	17	23	14	18	13	17	10	14
1.05	16	21	12	17	12	15	9	13
1.10	15	19	11	15	11	14	9	12
1.15	13	17	11	14	10	13	8	11
1.20	12	16	10	13	9	12	7	10
1.25	12	15	9	12	9	11	7	9
1.30	11	14	9	11	8	11	6	9
1.35	10	13	8	11	8	10	6	8
1.40	10	12	8	10	7	9	6	8
1.45	9	12	7	9	7	9	5	7
1.50	9	11	7	9	6	8	5	7

Πίνακας 5.1.1: Διάφορες τιμές των α, β και $\lambda = \frac{|\varepsilon|}{\sigma}$

Για μεγάλο n , ισχύει ότι:

- $t_{n_1+n_2-2, \alpha/2} \approx Z_{\alpha/2}$
- $t_{n_1+n_2-2, \beta} \approx Z_{\beta}$
- $T_{(1+\kappa)n_2-2} \left(t_{(1+\kappa)n_2-2, \alpha/2} \left| \frac{\sqrt{n_2}|\varepsilon|}{\sigma \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa}}} \right. \right) \approx \Phi \left(\frac{\sqrt{n_2}|\varepsilon|}{\sigma \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa}}} - Z_{\alpha/2} \right)$. οπότε ισχύουν τα ίδια με

την περίπτωση της γνωστής διακύμανσης. Δηλαδή έχουμε

$$n_2 = \frac{\sigma^2(Z_{\alpha/2} + Z_{\beta})^2(1 + \frac{1}{\kappa})}{\varepsilon^2}.$$

και

$$n_1 = \kappa n_2.$$

5.1.2 Σχεδιασμός δύο ομάδων: Έλεγχος για μη-κατωτερότητα/ανωτερότητα

Το πρόβλημα της μη-κατωτερότητας και της ανωτερότητας, μπορεί να ενοποιηθεί υπό τον παρακάτω έλεγχο υπόθεσης

$$H_0 : \varepsilon \leq \delta \quad vs \quad H_1 : \varepsilon > \delta.$$

Εναλλακτικά, ο έλεγχος μπορεί να γραφεί ως:

$$H_0 : \mu_2 - \mu_1 \leq \delta \quad vs \quad H_1 : \mu_2 - \mu_1 > \delta.$$

Η παράμετρος δ ονομάζεται περιθώριο ανωτερότητας ή μη-κατωτερότητας. Εάν η παράμετρος δ είναι αρνητική ($\delta < 0$), τότε η απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης σημαίνει μη-κατωτερότητα της πειραματικής θεραπείας έναντι μιας τυπικής θεραπείας (η πειραματική θεραπεία είναι κατώτερη της τυπικής θεραπείας το πολύ κατά δ). Εάν η τιμή της παραμέτρου είναι θετική ($\delta > 0$), τότε η απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης δείχνει ανωτερότητα έναντι της τυπικής θεραπείας και η διαφορά της πειραματικής θεραπείας από την τυπική θεραπεία είναι ανώτερη από δ .

Στην περίπτωση όπου η διακύμανση σ^2 είναι γνωστή, σπορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α , εάν ισχύει:

$$\frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1 - \delta}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} > Z_{\alpha}.$$

Εάν η πραγματική διαφορά ε είναι μεγαλύτερη από το περιθώριο δ ($\varepsilon > \delta$), η ισχύς του ελέγχου είναι ίση με

$$\Phi \left(\frac{\varepsilon - \delta}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} - Z_{\alpha} \right).$$

Θεωρώντας ότι $n_1 = \kappa n_2$, το μέγεθος του δείγματος που χρειαζόμαστε για να επιτύχουμε ισχύ $1 - \beta$ προκύπτει αν λύσουμε την εξίσωση:

$$\frac{\varepsilon - \delta}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} - Z_{\alpha} = Z_{\beta}$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση παίρνουμε:

$$n_2 = \frac{\sigma^2(Z_\alpha + Z_\beta)^2(1 + \frac{1}{\kappa})}{(\varepsilon - \delta)^2}.$$

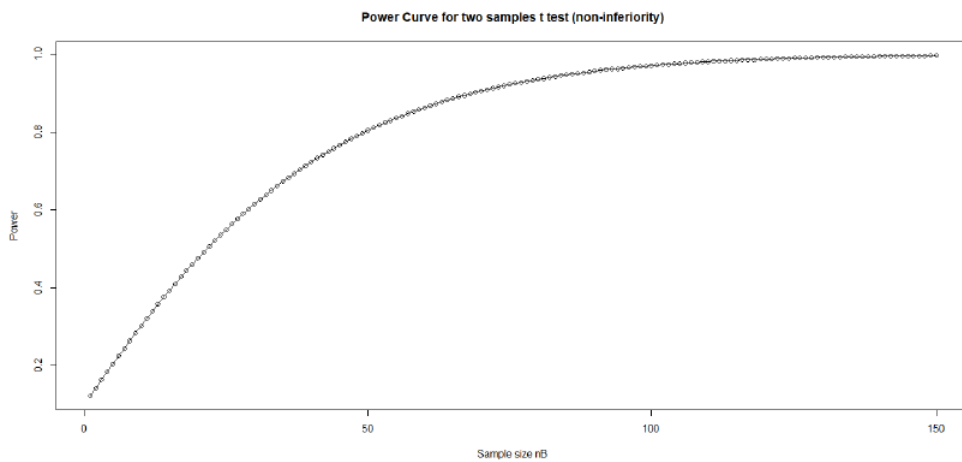
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2 *Ας υποθέσουμε ότι η φαρμακευτική εταιρία ενδιαφέρεται να δείξει ότι η επίδραση του πειραματικού φαρμάκου δεν είναι μικρότερη από την επίδραση του φαρμάκου αναφοράς κατά 5 μονάδες (δηλαδή $\delta = -5$). Ας υποθέσουμε επίσης ότι η πραγματική διαφορά της μέσης LDL μεταξύ των δύο ομάδων είναι 0 (δηλαδή $\varepsilon = \mu_2 - \mu_1 = 0$). Σκοπός της έρευνας είναι να υπολογισθεί το μέγεθος του δείγματος έτσι ώστε να έχουμε ισχύ 80% (δηλαδή $\beta = 0.20$) σε επίπεδο σημαντικότητας 5%.*

Θεωρώντας ισοκατανομή των ασθενών στις δύο ομάδες (δηλαδή $\kappa = 1$), το απαιτούμενο μέγεθος του δείγματος για να διασφαλίσουμε ισχύ 80% δίνεται από τον τύπο:

$$n_1 = n_2 = \frac{\sigma^2(Z_\alpha + Z_\beta)^2(1 + \frac{1}{\kappa})}{(\varepsilon - \delta)^2} = \frac{2 \cdot 10^2(1.64 + 0.84)^2}{(0 + 5)^2} \approx 50.$$

Δηλαδή, σε κάθε ομάδα θα πρέπει να έχουμε 50 άτομα. Συνολικά δηλαδή θα έχουμε 100 ασθενείς για να πετύχουμε ισχύ 80%.

Η καμπύλη ισχύος που προκύπτει για το παραπάνω μέγεθος δείγματος, παρουσιάζεται στο σχήμα (5.2).



Σχήμα 5.2: Σχέση ισχύος με το μέγεθος του δείγματος στην περίπτωση του ελέγχου για μη-κατωτερότητα/ ανωτερότητα

□

Στην περίπτωση που η διακύμανση σ^2 είναι άγνωστη, την αντικαθιστούμε με την δειγματική διακύμανση s^2 . Απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α , εάν ισχύει

η σχέση:

$$\frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1 - \delta}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} > t_{n_1+n_2-2, \alpha}.$$

Η ισχύς του ελέγχου δίνεται από την σχέση:

$$1 - T_{n_1+n_2-2} \left(t_{n_1+n_2-2, \alpha} \left| \frac{\varepsilon - \delta}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right. \right)$$

οπότε το μέγεθος του δείγματος που χρειαζόμαστε για να επιτύχουμε ισχύ $1 - \beta$ προκύπτει, εάν λύσουμε την εξίσωση:

$$T_{n_1+n_2-2} \left(t_{n_1+n_2-2, \alpha} \left| \frac{\varepsilon - \delta}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right. \right) = \beta$$

Θεωρώντας $\theta = \frac{(\varepsilon - \delta)}{\sigma}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον Πίνακα 2. Στην περίπτωση μεγάλου δείγματος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα της περίπτωσης με τη γνωστή διακύμανση. Δηλαδή, το απαιτούμενο μέγεθος δείγματος είναι:

$$n_2 = \frac{\sigma^2 (Z_{\alpha+Z_\beta}^2) (1 + \frac{1}{\kappa})}{(\varepsilon - \delta)^2}$$

και

$$n_1 = \kappa n_2.$$

5.1.3 Σχεδιασμός δύο ομάδων: Έλεγχος για ισοδυναμία

Στον έλεγχο για ισοδυναμία ελέγχουμε τις υποθέσεις

$$H_0 : |\varepsilon| \geq \delta - H_1 : |\varepsilon| < \delta,$$

οι οποίες εναλλακτικά, μπορούν να γραφούν ως

$$H_0 : |\mu_2 - \mu_1| \geq \delta - H_1 : |\mu_2 - \mu_1| < \delta,$$

Εάν απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α , συμπεραίνουμε ότι η υπό μελέτη θεραπεία είναι ισοδύναμη με τη θεραπεία αναφοράς.

Στην περίπτωση που η διακύμανση σ^2 είναι γνωστή, απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α , εάν ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < -Z_\alpha$$

και

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \delta}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < Z_\alpha$$

Η ισχύς του ελέγχου είναι ίση με:

$$\Phi\left(\frac{\delta - \varepsilon}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} - Z_\alpha\right) + \Phi\left(\frac{\delta + \varepsilon}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} - Z_\alpha\right) - 1,$$

η οποία είναι περίπου ίση με

$$2\Phi\left(\frac{\delta - |\varepsilon|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} - Z_\alpha\right) - 1$$

Θεωρώντας ότι $n_1 = \kappa n_2$, το μέγεθος του δείγματος προκύπτει αν λύσουμε την εξίσωση:

$$\frac{\delta - |\varepsilon|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} - Z_\alpha = Z_{\beta/2}$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση, παίρνουμε:

$$n_2 = \frac{\sigma^2(Z_\alpha + Z_{\beta/2})^2(1 + \frac{1}{\kappa})^2}{\delta - |\varepsilon|}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3 Ας υποθέσουμε ότι η φαρμακευτική εταιρία ενδιαφέρεται να ελέγξει την ισοδυναμία του πειραματικού με το φάρμακο αναφοράς, θεωρώντας ότι η πραγματική διαφορά είναι 1 μονάδα (δηλαδή $\varepsilon = 1$) και το όριο ισοδυναμίας είναι 5 μονάδες (δηλαδή $\delta = 5$). Σκοπός της έρευνας είναι να υπολογισθεί το μέγεθος του δείγματος έτσι ώστε να έχουμε ισχύ 80% (δηλαδή $\beta = 0.20$) σε επίπεδο σημαντικότητας 5%.

Θεωρώντας ισοκατανομή των ασθενών στις δύο ομάδες (δηλαδή $\kappa = 1$) το μέγεθος του δείγματος που απαιτείται για την επίτευξη ισχύος 80% δίνεται από τον τύπο:

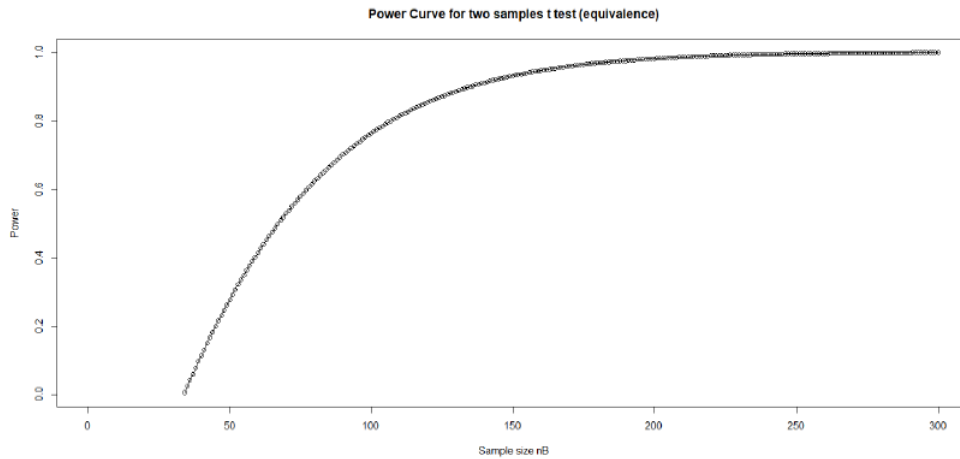
$$n_1 = n_2 = \frac{2\sigma^2(Z_\alpha + Z_{\beta/2})^2}{(\delta - |\varepsilon|)^2} = \frac{2 \cdot 10^2 \cdot (1.64 + 1.28)^2}{(5 - 1)^2} \approx 108.$$

Συνεπώς, θα χρειαστούμε 108 ασθενείς σε κάθε ομάδα για να έχουμε ισχύ 80%.

Η καμπύλη ισχύος που προκύπτει για το παραπάνω μέγεθος δείγματος, παρουσιάζεται στο σχήμα (5.3).

□

Στην περίπτωση που η διακύμανση σ^2 είναι άγνωστη, την αντικαθιστούμε με την δειγματική διακύμανση s^2 . Απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α , εάν ισχύουν



Σχήμα 5.3: Σχέση ισχύος με το μέγεθος του δείγματος στην περίπτωση του ελέγχου για ισοδυναμία

οι σχέσεις:

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < -t_{n_1+n_2-2, \alpha}$$

και

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \delta}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} > t_{n_1+n_2-2, \alpha}$$

Η ισχύς του ελέγχου δίνεται από την σχέση:

$$1 - T_{n_1+n_2-2} \left(t_{n_1+n_2-2, \alpha} \left| \frac{\delta - \varepsilon}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right. \right) - T_{n_1+n_2-2} \left(t_{n_1+n_2-2, \alpha} \left| \frac{\delta + \varepsilon}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right. \right),$$

η οποία είναι μεγαλύτερη από την ποσότητα

$$1 - 2T_{n_1+n_2-2} \left(t_{n_1+n_2-2, \alpha} \left| \frac{\delta - |\varepsilon|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right. \right).$$

Λαμβάνοντας υπόψη μας ότι $n_1 = \kappa n_2$, το μέγεθος του δείγματος που χρειαζόμαστε για να επιτύχουμε ισχύ $1 - \beta$ προκύπτει, εάν λύσουμε την εξίσωση:

$$T_{(1+\kappa)n_2-2} \left(t_{(1-\kappa)n_2-1, \alpha} \left| \frac{\sqrt{n_2}(\delta - |\varepsilon|)}{\sigma\sqrt{1 + \frac{1}{\kappa}}} \right. \right) = \frac{\beta}{2}.$$

Βιβλιογραφία

Ελληνική

- [1] Τζαβελάς Γ. (2021), *Σημειώσεις παραδόσεων του Μαθήματος 'Κλινικές Δοκιμές'*, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Π.Μ.Σ. Εφαρμοσμένης Στατιστικής.
- [2] Σαχλάς Α. (2021), *Σημειώσεις 1ου και 2ου εργαστηρίου στις 'Κλινικές δοκιμές με χρήση της R'*, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Π.Μ.Σ. Εφαρμοσμένης Στατιστικής.
- [3] Κουτρας Μ. και Μπούτσικας Μ. (2011-2012), *Σημειώσεις παραδόσεων του Μαθήματος 'Στατιστική II'*, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- [4] Δαγούμας Α., *Σημειώσεις παραδόσεων του Μαθήματος 'Οικονομικά της Ενέργειας και των Φυσικών Πόρων'*, Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Ξένα

- [5] Airey, J.R. (1931), *Table of Hh functions*, In British Association Mathematical Tables.
- [6] Amos, D.E. (1964), *Representations of the central and noncentral t distributions*, Biometrika.
- [7] Ashour, S.K., and Abdel-Samad, A.I. (1990), *On the computation of non-central X^2 distribution*, Communications in Statistics-Simulation and Computation.
- [8] Belobragina, L.S., and Eliseyev, V.K. (1967), *Statistical estimation of a recognition error based on experimental data*, Kibernetika.
- [9] Bol'shev, L.N., and Kuznetsov, P.I. (1963), *On computing the integral $p(x,y) = \dots$* , Zhurnal Vychislitelnoj Matematiki i Matematicheskoi Fiziki.
- [10] Bowman, K.O, Liam, H.K, and Shenton, L.R (1986), *Series for Student's non-central t under exponential sampling with comments due to H.P. Mulholland*, Communications in Statistics-Simulation and Computation.
- [11] Bulgren, W.G., and Amos, D.E (1968), *A note on representations of the doubly noncentral t distribution*, Journal of the American Statistical Association.
- [12] Bulgren, W.G. (1971), *On representation of the doubly non-central F distribution*, Journal of the American Statistical Association.
- [13] Chou, Y.M., Athur, K.H., Rosenstein, R.B., and Owen, D.B. (1984), *New representations of the non-central chi-square density and cumulative*, Communications in Statistics - Theory and Methods.
- [14] Chow, M.S. (1987), *A complete class theorem for estimating a noncentrality parameter*, Annals of Statistics.
- [15] Chowdhury, J.V, and Stedinger, J.R. (1991), *Confidence interval for design floods with estimated skew coefficients*, Journal of Hydraulic Engineering.

- [16] Cohen, J. (1977), *Statistical Power Analysis for the Behavioral Science*, New York: Academic Press.
- [17] Cohen, J.P. (1988), *Noncentral chi-square: Some observations on recurrence*, The American Statistician.
- [18] Croarkin, M.C. (1962), *Graphs for determining the power of Student's t-test*, Journal of Research of the National Bureau of Standards.
- [19] Dasgupta, S., and Lahiri, K. (1992), *A comparative study of alternative methods of quantifying qualitative survey responses using NAPM data*, Journal of Business and Economic Statistics.
- [20] DeWaal, D.J. (1974), *Bayes estimate of the noncentrality parameter in multivariate analysis*, Communications in Statistics.
- [21] Dwivedi, T.D., and Pandey, J.N. (1975), *A note on Meyer's maximum likelihood estimate of the non-centrality of the non-central X^2 variate*, Sankhyā, Series B.
- [22] Ennis, D.M., and Johnson, N.L. (1993), *Noncentral and central chi-square, F and beta distribution function as special cases of the distribution of an indefinite quadratic form*, Communications in Statistics - Theory and Methods.
- [23] Fisher, R.A. (1928), *The general sampling distribution of the multiple correlation coefficient*, Proceedings of the Royal Society of London.
- [24] Fisher (1931), *Introduction to "Table of Hh Functions"*
- [25] Fleishman, A.I. (1980), *Confidence intervals for correlation ratios*, Educational and Psychological Measurement.
- [26] Gayen, A.K. (1949), *The distribution of "Student's" t in random samples of any size drawn from non-normal universes*, Biometrika.
- [27] Geary, R.C. (1936), *The distribution of "Student's" ratio for non-normal samples*, Journal of the Royal Statistical Society.
- [28] Geary, R.C. (1974), *testing for normality*, Biometrika.
- [29] Gelfand, A.E. (1983), *Estimation in noncentral distributions*, Communications in Statistics - Theory and Methods.
- [30] Ghurye, S.G. (1949), *On the use of Student's t-test in an asymmetrical population*, Biometrika.
- [31] Gideon, R.A., and Gurland, J. (1977), *Some alternative expansions for the distribution function of a noncentral chi-square variable*, SIAM Journal on Mathematical Analysis.
- [32] Guenther, W.C. (1964), *Another derivation of the non-central chi-square distribution*, Journal of the American Statistical Association.
- [33] Guenther, W.C. (1975), *Evaluation of noncentral distribution integrals with a desk calculator*, College of Commerce and Industry, University of Wyoming, Laramie.
- [34] Guirguis, G.H. (1990), *A note on computing the noncentrality parameter of the noncentral F distribution*, Communications in Statistics - Simulation and Computation.
- [35] Hall, I.J., and Sampson, C.B. (1973), *Tolerance limits for the distribution of the product and quotient of normal variates*, Biometrics.
- [36] Han, C.P. (1975), *Some relationships between noncentral chi-squared and normal distributions*, Biometrika.
- [37] Harley, B.I. (1957), *Relation between the distributions of noncentral t and a transformed correlation coefficient*, Biometrika.
- [38] Hjort, N.L., (1989), *The eccentric part of the non-central chi-square distribution*, Manuscript, Norwegian Computing Center, Oslo.

- [39] Hodges, J.I. (1955), *On the noncentral beta-distribution*, Annals of Mathematical Statistics.
- [40] Hodges, J.L., and Lehmann, E.L. (1965), *Moments of chi and power of t*, Proceedings of the 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability
- [41] Hogben, D., Pinkham, R.S., and Wilk, M.B. (1964) *An approximation to the distribution of q (a variate related to the noncentral t)*, Annals of Mathematical Statistics.
- [42] Ifram, A.F. (1970), *On mixture of distributions with applications to estimation*, Journal of the Americal Statistical Association.
- [43] Iglewics, B., Mayers, R.H., and Howe, R.B. (1968), *On the percentage points of the sample coefficient of variation*, Biometrika.
- [44] Kallenberg, W.C.M. (1990), *Inaqualities for noncentral chi-square distributions*, Statistics & Probability Letters.
- [45] Khamis, S.H. (1965), *Some basic properties of the incomplete gamma function*, Ammals of Mathematical Statistics.
- [46] Kocherlakota, K., and Kocherlakota, S. (1991), *On the doubly noncentral t distribution*, Communications in Statistics - Simulation and Computation.
- [47] Krishnan, M. (1967), *The moments of a doubly noncentral t-distribution*, Journals of the American Statistical Sciences.
- [48] Kuhlmeier, M. (1970), *Die Nichtzentrale t-Verteilung*, Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Statistics, New York.
- [49] Lahiri, K., and Teigland, C. (1987), *On the normality of probability distributions of inflation and GNP forecasts*, International Journal of Forecasting.
- [50] Lenth, R.V. (1989), *Comulative distribution function of the non-central t distribution*, Applied Statistics.
- [51] Lehmann, E.L. (1959), *Testing Statistical Hypotheses*, New York: Wiley.
- [52] Lord, E. (1950), *Power of modified t-test (u-test) based on range*, Biometrika.
- [53] Malcolm, S. (1984), *A note on theuse of the noncentral t-distribution in setting numerical microbiological specifications for food*, Journald of Applied Bactriology.
- [54] Madow, W.G. (1948), *On a source of downward bias in the analysis of variance and covariance*, Annals of Mathematical Statistics.
- [55] McKay, A.T. (1932), *Distribution of the coefficient of variation and the extended t distribution*, Journal of the Royal Statistical Society.
- [56] Malik, H.J. (1970), *An alternative derivation of doubly noncentral F distribution*, Metron
- [57] Marrington, M., and Pearson, E.S. (1958), *An approximation to the distribution of noncentral t*, Biometrika.
- [58] Mayer, P.L. (1967), *The maximum likelihood estimate of the non-centrality parameter of a non-central X^2 variate*, Journal of the American Statistical Association.
- [59] Miller, R.W. (1989), *Parametric empirical Bayes tolerance intervals*, Technometrics.
- [60] Muirhead, R.J. (1982), *Aspects of Multivariate Statistical Theory*
- [61] Narula, S.C., and Levy, K.J.(1975), *Probability density plots of the noncentral X^2 and noncentral F distributions*, International Statistical Review.
- [62] Neyman, J., Iwaskiewicz, K., and Kolodziejczyk, S. (1935), *Statistical problems in agricaltural experimentation*, Journal of the Royal Statistical Society.

- [63] Nicholson, W.L. (1954), *A computing formula for the power of the analysis of variance test*, Annals of Mathematical Statistics.
- [64] Norman L. Johnson, Samuel Kotz, N. Balakrishnan, (1995), *Continuous Univariate Distributions Volume 2, Second Edition*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, JOHN WILEY & SONS, INC, New York - Chichester - Brisbane - Toronto - Singapore.
- [65] Odeh, R.E., and Fox, M. (1975), *Sample Size Choice? Charts for Experiments with Linear Models*, New York: Dekker.
- [66] Patnaik, P.B. (1949), *The non-central X^2 and F-distributions and their application*, Biometrika.
- [67] Patnaik, P.B. (1955), *Hypotheses concerning the means of observations in normal samples*, Sankhya.
- [68] Pe, T., and Drygar, H. (1994), *Alternative representations of some doubly noncentral distributions: Univariate case*, Statistical Papers.
- [69] Pearson, E.S., and Hartley, H.O. (1954), *Biometrika Tables for Statisticians, vol.1*, Cambridge: Cambridge University Press.
- [70] Pearson, E.S., and Tiku, M.L. (1970), *Some notes on the relationship between the distributions of central and noncentral F*, Biometrika.
- [71] Perlman, M.D., and Rasmussen, U.A. (1975), *Some remarks on estimating a noncentrality parameter*, Communication in Statistics.
- [72] Phillips, K.F. (1993), *A log-normal model for individual bioequivalence*, Journal of Biopharmaceutical Statistics.
- [73] Price, R. (1964), *Some noncentral F distributions expressed in closed form*, Biometrika.
- [74] Ruben, H. (1960), *Probability content of regions under spherical normal distributions*, Annals of Mathematical Statistics.
- [75] Ruben, H. (1974), *Non-central chi-square and gamma revisited*, Communications in Statistics.
- [76] Rukhin, A.L. (1992), *Estimating the noncentrality parameter of a t-distribution*, Systems Science and Mathematical Sciences.
- [77] Rukhin, A.L. (1993), *Estimation of the noncentrality parameter of an F distribution*, Journal of Statistical Planning and Inference.
- [78] Scheffe, H. (1959), *The Analysis of Variance*, New York: Wiley
- [79] Seber, G.A.F. (1963), *The noncentral chi-squared and beta distributions*, Biometrika.
- [80] Shea, B.L. (1988), *Algorithm AS 239. Chi-squared and incomplete gamma integral*, Applied Statistics.
- [81] Sibuya, M. (1967), *On the noncentral beta distribution function*, Unpublished manuscript.
- [82] Siegel, A.F., (1979), *the noncentral chi-squared distribution with zero degrees of freedom and tetin for uniformity*, Biometrika.
- [83] Drivastava, A.B.L. (1958), *Effect of non-normality on the power function of t-test*, Biometrika.
- [84] Stedinger, J.R. (1983), *Confidence intervals for design events*, Journal of Hydraylic Engineering.
- [85] Tang, P.C. (1938), *The power function of the analysis of variance tests with tables and illustrations of their use*, Statistical Research Memoirs.
- [86] Temme, N.M. (1993), *Asymptotic and numerical aspects of the noncentral chi-square distribution*, Computers in Mathematics and Applications.
- [87] Tiku, M.L. (1965), *Laguerre series forms of non-central X^2 and F distributions*, Biometrika.

- [88] Torgerson, E.N. (1972), *Supplementary notes on linear models*, Statistical Memoirs-1, Institute of Mathematics, University of Oslo, Norway.
- [89] Van de Vaart, H.R. (1967), *A note on the derivation of the non-central chi-square density function*, Statistica Neerlandica.
- [90] Venables, W.N. (1971), *Inference problems basen on non-central distribution*, Ph.D. dissertation, Department of Statistics, University of Adelaide, Australia.
- [91] Venables, W.N. (1975) *Calculation of confidence intervals for non-centrality parameters*, Journals of the Royal Statistical Society, Series B.
- [92] Voit, E.O., and Rust, P.F. (1990), *Evaluation of the noncentral t-distribution in S-systems*, Biometrical Journal.
- [93] Washart, J. (1932), *A note on the distribution of the correlation ratio*, Biometrika.
- [94] Winer, B.J., (1971), *Statistical Principles in Experimental Design*, New York:McGraw-Hill.
- [95] Wishner, R.P. (1962), *Distribution of the noncentralized periodogram detector*, IRE Transactions on Information Theory.
- [96] Wolfowitz, J. (1946), *Confidence limits for the fraction of a normal population which lies between two given limits*, annuals of Mathematical Statistics.
- [97] Zaludova, A.H. (1960), *The noncentral t-test (q-test) based on range in place of standard deviation*, Acta Technica.

Ιστοσελίδες (Ημ/νία τελευταίας επίσκεψης 05.04.2023)

<https://www.r-bloggers.com/2014/11/central-and-non-central-distributions/>

https://en.wikipedia.org/wiki/Noncentral_distribution

https://en.wikipedia.org/wiki/Noncentral_chi-squared_distribution

<http://www2.stat-athens.aueb.gr/~jpan/statistiki-skepsi-II/chapter21.pdf>

<https://www.real-statistics.com/chi-square-and-f-distributions/power-chi-square-tests/>

<https://www.aua.gr/gpapadopoulos/files/14x2test14-15.pdf>

<https://www.randomservices.org/random/special/ChiSquare.html#non>