ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝΣΤΗΝ

ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ

ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΑΡΧΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΩΝ ΚΑΙ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΒΑΣΙΣΜΕΝΕΣ ΣΕ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΚΑΙ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Αναστάσιος Δημούτσης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων*

Πειραιάς

Απρίλιος 2023

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝΣΤΗΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ

ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΑΡΧΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΩΝ ΚΑΙ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΒΑΣΙΣΜΕΝΕΣ ΣΕ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΚΑΙ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Αναστάσιος Δημούτσης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων*

Πειραιάς
Απρίλιος 2023

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη Συνέλευση του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. ……..
συνεδρίασή της, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτής Καθηγητής: Ψαρράκος Γεώργιος (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής :Πολίτης Κωνσταντίνος
- Αναπληρωτής Καθηγητής: Τζαβελάς Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

WEIGHTED PREMIUM CALCULATION PRINCIPLES AND PRICING BASED ON UNIVARIATE AND MULTIVARIATE WEIGHTED DISTRIBUTIONS

By

Anastasios Dimoutsis

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus,Greece
April 2023

Στην μητέρα μου

Ζωή

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, κ. Ψαρράκο Γεώργιο για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του καθ’ όλη την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας αλλά και καθ’ όλη την διάρκεια των σπουδών μου, όπως επίσης και τα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ. Πολίτη Κωνσταντίνο και κ. Τζαβελά Γεώργιο.
Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την στήριξη και την υπομονή που μου προσέφεραν σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου.

Δημούτσης Αναστάσιος
Αθήνα, Απρίλιος 2023

Περίληψη

Στην αναλογιστική επιστήμη η κατασκευή αρχών υπολογισμού ασφαλίστρων που ικανοποιούν ορισμένες ιδιότητες αποτελεί ένα σημαντικό πρόβλημα. Στην εργασία αυτή μελετάται μία οικογένεια αρχών ασφαλίστρων που βασίζονται σε σταθμισμένες κατανομές. Αρχικά αναπτύσσεται μία μεθοδολογία κατασκευής ασφαλίστρων χρησιμοποιώντας μονοδιάστατες σταθμισμένες κατανομές, και στη συνέχεια η θεωρία αυτή επεκτείνεται για πολυδιάστατες σταθμισμένες κατανομές. Επιπλέον, διερευνάται ο ρόλος των σταθμισμένων κατανομών στην τιμολόγηση των ασφαλιστικών κινδύνων. Δόθηκαν αριθμητικά παραδείγματα που επαληθεύουν τα θεωρητικά αποτελέσματα.

Abstract

In actuarial science the construction of premium calculation principles that satisfies certain properties constitutes one significant problem. In this paper a family of premium calculation principles is studied, based on weighted distributions. Initially, a construction methodology of premium calculation principles will be developed by using univariate weighted distributions, and then this theory is extended for multivariate weighted distributions. In addition, it is investigated the role of weighted allocations in the pricing of insurance risks. Numerical examples are given which verify the theoretical results.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1:ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με μία ειδική κλάση υπολογισμού αρχών ασφαλίστρων που βασίζονται στις σταθμισμένες κατανομές και την τιμολόγηση μέσω αυτών. Αρχικά θα παρουσιάσουμε αυτές τις αρχές στην περίπτωση των μονοδιάστατων σταθμισμένων κατανομών, έπειτα θα μελετήσουμε την τιμολόγηση μέσω αυτών και τέλος θα διευρυνθεί αυτή η θεωρία στην περίπτωση των πολυδιάστατων σταθμισμένων κατανομών.

Θα χρησιμοποιήσουμε διάφορα μαθηματικά εργαλεία για να αναλύσουμε και να αποδείξουμε τις παραπάνω θεωρίες. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε κάποια βασικά εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε στα παρακάτω κεφάλαια.

1.2 ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Βασικό κομμάτι της εργασίας βασίζεται στις σταθμισμένες κατανομές. Η έννοια των σταθμισμένων κατανομών χρησιμοποιείται ευρέως σε πολλούς τομείς της Στατιστικής. Πρώτα εισάχθηκε από τους Patil and Rao (1978). Η βασική ιδέα είναι ότι όταν καταγράφουμε μία παρατήρηση με βάση κάποιο στοχαστικό μοντέλο, δεν μπορεί πάντοτε αυτή να ακολουθεί την αρχική κατανομή εκτός αν κάθε παρατήρηση έχει ίση πιθανότητα να καταγραφεί.

Ορισμός 1.1

Έστω η τ.μ. X έχει σ.π.π. $f(x)$ και η συνάρτηση στάθμισης $w(x)$, με $0 \leq w(x) \leq 1$, τότε η σ.π.π. της νέας σταθμισμένης τ.μ. X_w είναι

$$f_{X_w}(x) = \frac{w(x)}{\omega} f(x),$$

όπου ω λέγεται παράγοντας κανονικοποίησης και επιλέγεται έτσι ώστε η συνάρτηση $f_{X_w}(x)$ να ολοκληρώνει στο 1, διασφαλίζοντας την ιδιότητά της ως συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Για διάφορες επιλογές της $w(x)$ προκύπτουν διάφορες σταθμισμένες σ.π.π. παραδείγματα των οποίων θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια. Στην περίπτωση μας σαν παράγοντα κανονικοποίησης θα χρησιμοποιήσουμε την $E(w(X))$ (για περισσότερα βλ. Patil and Rao (1978) Ενότητα 2.3). Όπως αναφέραμε και προηγουμένως θα χρησιμοποιήσουμε και πολυδιάστατες σταθμισμένες κατανομές. Αναφορά γίνεται από τον Navarro et al (2006) και θα αναλυθούν εκτενέστερα στο Κεφάλαιο 4.

1.2 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την έννοια των στοχαστικών διατάξεων και θα αναφέρουμε κάποιες από αυτές που θα χρησιμοποιηθούν στα παρακάτω κεφάλαια της εργασίας. Γενικά οι στοχαστικές διατάξεις έχουν μεγάλη χρησιμότητα στον αναλογισμό διότι μας βοηθούν να κατατάξουμε τους κινδύνους και να μπορέσουμε με κάποιο τρόπο να τους ποσοτικοποιήσουμε. Βέβαια αυτό δεν είναι πάντα εύκολο επομένως υπάρχουν διάφοροι τύποι στοχαστικών διατάξεων που βασίζονται στις συναρτήσεις ουράς των κατανομών, στις συναρτήσεις πυκνότητας των κατανομών κ.α.

Ορισμός 1.2

Έστω δύο τ.μ. X,Y που παριστάνουν κινδύνους με $X \geq 0$ και $Y \geq 0$. Άρα ο κίνδυνος X είναι μικρότερος από τον κίνδυνο Y με την συνήθη στοχαστική διάταξη και συμβολίζουμε με

$$X \leq_{st} Y \text{ αν } P(X > x) \leq P(Y > x), x \in [0, \infty).$$

Επομένως,

$$X \leq_{st} Y \text{ αν } \bar{F}_X(x) \leq \bar{F}_Y(x), \forall x.$$

Παρακάτω παρουσιάζουμε ένα Θεώρημα για την συνήθη στοχαστική διάταξη που ανάγεται και για οποιαδήποτε στοχαστική διάταξη (βλ. Denuit et al 2006).

Θεώρημα 1.1

$$X \leq_{st} Y \text{ αν και μόνο αν } E[t(X)] \leq E[t(Y)],$$

για κάθε αύξουσα συνάρτηση t, έτσι ώστε να υπάρχουν οι μέσες τιμές.

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε άλλα δύο είδη διατάξεων, την διάταξη έντασης κινδύνου και την διάταξη λόγου πιθανοφανειών.

Ορισμός 1.3

Έστω δύο τ.μ. X,Y που παριστάνουν κινδύνους με $X \geq 0$ και $Y \geq 0$. Άρα ο κίνδυνος X είναι μικρότερος από τον κίνδυνο Y με την διάταξη λόγου πιθανοφανειών (*likelihood ratio ordering*) και συμβολίζουμε με

$$X \leq_{lr} Y \text{ αν } \frac{f_Y(x)}{f_X(x)} \uparrow x.$$

Πριν ορίσουμε την επόμενη στοχαστική διάταξη θα ορίσουμε την συνάρτηση κινδύνου που θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω.

Ορισμός 1.4

Η συνάρτηση κινδύνου (*hazard rate*) ορίζεται ως

$$h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

Ορισμός 1.5

Έστω δύο τ.μ. X, Y που παριστάνουν κινδύνους με $X \geq 0$ και $Y \geq 0$. Άρα ο κίνδυνος X είναι μικρότερος από τον κίνδυνο Y με την διάταξη έντασης κινδύνου (*hazard rate ordering*) και συμβολίζουμε με

$$X \leq_{hr} Y \text{ αν } \frac{\bar{F}_Y(x)}{\bar{F}_X(x)} \uparrow x.$$

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς αποδεικνύεται το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 1.2

Έστω δύο τ.μ. X,Y που παριστάνουν κινδύνους με $X \geq 0$ και $Y \geq 0$. Αν ισχύει

$$X \leq_{lr} Y \Rightarrow X \leq_{hr} Y \Rightarrow X \leq_{st} Y,$$

δηλαδή,

$$\frac{f_Y(x)}{f_X(x)} \uparrow x \Rightarrow \frac{\bar{F}_Y(x)}{\bar{F}_X(x)} \uparrow x \Rightarrow \bar{F}_X(x) \leq \bar{F}_Y(x).$$

Έπειτα θα δώσουμε ένα παράδειγμα που βασίζεται στην χρήση του Θεωρήματος 1.2.

Παράδειγμα 1.1

Έστω ότι έχουμε δύο συναρτήσεις ουράς, $\bar{F}_X(x) = e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ και $\bar{F}_Y(x) = e^{-\xi x}$, $x \geq 0$, με $0 < \xi < \lambda$.

Θα εξετάσουμε αν η $X \leq_{lr} Y$.

$$\frac{f_Y(x)}{f_X(x)} = \frac{\xi e^{-\xi x}}{\lambda e^{-\lambda x}} = \frac{\xi}{\lambda} e^{(\lambda-\xi)x} \uparrow x \text{ γιατί } \lambda - \xi > 0.$$

Άρα ισχύει $X \leq_{lr} Y$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2 θα πρέπει αφού ισχύει $X \leq_{lr} Y$ θα συνεπάγεται ότι ισχύει $X \leq_{hr} Y$.

$$\frac{\bar{F}_Y(x)}{\bar{F}_X(x)} = \frac{e^{-\xi x}}{e^{-\lambda x}} = e^{(\lambda-\xi)x} \uparrow x \text{ γιατί } \lambda - \xi > 0.$$

Άρα ισχύει $X \leq_{hr} Y$.

Έπειτα θα εξετάσουμε αν ισχύει $X \leq_{st} Y$.

$$\bar{F}_X(x) = e^{-\lambda x} \leq e^{-\xi x} = \bar{F}_Y(x), \text{ γιατί } \xi < \lambda.$$

Επομένως, $X \leq_{st} Y$.

1.3 ΣΥΖΕΥΞΕΙΣ

Η λέξη *copula* προέρχεται από το λατινικό ουσιαστικό το οποίο σημαίνει σύζευξη. Την έννοια εισήγαγε πρώτος ο Sklar (1959) και την χρησιμοποίησε για να περιγράψει την σχέση εξάρτησης πολυδιάστατων κατανομών. Οι συζεύξεις είναι πολυδιάστατες κατανομές των οποίων οι περιθώριες είναι ομοιόμορφες στο (0,1). Δεδομένων των περιθωρίων συναρτήσεων μιας πολυδιάστατης κατανομής, η κατανομή ορίζεται απόλυτα από την σύζευξη που την περιγράφει. Εμείς θα ασχοληθούμε με την περίπτωση των δισδιάστατων συζεύξεων. Η έννοια των συζεύξεων με τα χρόνια βρήκε μεγάλη εφαρμογή σε διάφορους τομείς όπως και στον αναλογισμό και τα χρηματοοικονομικά.

Ορισμός 1.6

Έστω μία συνάρτηση $C(u,v): [0,1]^2 \to [0,1]$ είναι δισδιάστατη σύζευξη εάν:

i. Για οποιαδήποτε $u,v \in (0,1)$,

$$C(u,0)=0=C(0,v), C(u,1)=u, C(1,v)=v.$$

ii. $C(u_2,v_2)-C(u_2,v_1)-C(u_1,v_2)+C(u_1,v_1) \geq 0$

iii. Μία σύζευξη είναι συνεχείς ως προς u και v. Συγκεκριμένα ικανοποιεί την αυστηρή συνθήκη Lipschitz.

$$|C(u_2,v_2)-C(u_1,v_1)| \leq |u_2-u_1|+|v_2-v_1|$$

iv. Για $0 \leq u_1 \leq u_2$ και $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$,

$$P(u_1 \leq U \leq u_2, v_1 \leq V \leq v_2) = C(u_2,v_2)-C(u_2,v_1)-C(u_1,v_2)+C(u_1,v_1) \geq 0.$$

Έστω τ.μ. X,Yμονοδιάστατες τ.μ. με συνάρτηση κατανομής F και G: $F(x)=P(X \leq x)$ και $G(y)=P(Y \leq y)$ και έχουμε $X \sim F$ και $Y \sim G$. Εάν η δισδιάστατη τ.μ. (X,Y) έχει από κοινού συνάρτηση κατανομής H, $H(x,y)=P(X \leq x, Y \leq y)$, τότε $(X,Y) \sim H$.

Μία σύζευξη C είναι η από κοινού συνάρτηση κατανομής του ζεύγους (U,V), όπου οι περιθώριες $U,V \sim \mathcal{U}(0,1)$. Έτσι αν,

$$(X,Y) \sim H, X \sim F, Y \sim G,$$

και αν οι X,Y συνεχείς τότε,

$$(F(X),G(Y)) \equiv (U,V) \sim C.$$

Τέλος θα αναφερθούμε στο Θεώρημα του Sklar (1959).

Θεώρημα 1.3

Κάθε από κοινού συνάρτηση κατανομής H μπορεί να γραφεί με την εξής μορφή:

$$H(x,y)=C(F(x),G(y)), x,y \in \mathbb{R}$$

και η C μπορεί να γραφτεί ως

$$C(u,v) = H\left(F^{-1}(u), G^{-1}(v)\right).$$

Μία δισδιάστατη σύζευξη $C: [0,1]^2 \to [0,1]$ είναι μία από κοινού συνάρτηση κατανομής με ομοιόμορφες περιθώριες. Ο ορισμός αυτός μας επιτρέπει να δούμε τις συζεύξεις σαν πιθανότητες

$$C(u,v) = P(U \leq u, V \leq v).$$

Υπάρχουν διάφορες μορφές συζεύξεων που προκύπτουν από τον γενικό ορισμό. Θα κάνουμε ιδιαίτερη αναφορά στις Αρχιμήδειες συζεύξεις.

Σε κάποιες περιπτώσεις υπάρχει συνάρτηση φ τέτοια ώστε

$$\varphi(C(u,v)) = \varphi(u) + \varphi(v)$$

Οι συζεύξεις της παραπάνω μορφής λέγονται Αρχιμήδειες συζεύξεις. Συμβολικά, θα έχουμε

$$\varphi(H(x,y)) = \varphi(F(x)) + \varphi(G(y)).$$

Για παράδειγμα μπορούμε να γράψουμε την $H(x,y)$ σαν άθροισμα των περιθωρίων F και G. Για περισσότερες ιδιότητες των Αρχιμήδειων συζεύξεων βλ. Balakrishnan and Lai (2009).

1.4 ΒΑΣΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Στη συνέχεια της εργασίας θα χρησιμοποιήσουμε, ιδιαιτέρως στα παραδείγματα, κάποιες κατανομές. Αυτές οι κατανομές έχουν ευρεία εφαρμογή σε πολλούς τομείς και ιδιαίτερα στον αναλογισμό. Σε αυτή την ενότητα θα δώσουμε κάποια βασικά στοιχεία γι’ αυτές. Για περισσότερα βλ. Klugman et al. (2019).

Κατανομή Γάμμα

Αρχικά ορίζουμε τη συνάρτηση Γάμμα. Έστω $\Gamma: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται από τον τύπο

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt, a > 0.$$

Για $a = 1$ προκύπτει,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^0 e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1,$$

ενώ για κάθε $a > 0$, θα έχουμε

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty t^a e^{-t} dt = \int_0^\infty t^a (-e^{-t})' dt = [-t^a e^{-t}]_0^\infty - \int_0^\infty a t^{a-1} (-e^{-t}) dt$$
$$= 0 + a \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt,$$

δηλαδή,

$$\Gamma(a+1) = \Gamma(a), \ \ a > 0.$$

Επαγωγικά, για κάθε ακέραιο ν ισχύει:

$$\Gamma(\nu+1) = \nu!.$$

Αφού ορίσαμε την συνάρτηση Γάμμα, μέσω αυτής, θα ορίσουμε την κατανομή Γάμμα.

Ορισμός 1.7

Έστω X μία συνεχής τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

όπου $\lambda > 0$ και $a > 0$ πραγματικοί αριθμοί. Η κατανομή της τ.μ. X καλείται κατανομή Γάμμα με παραμέτρους λ και a. Συμβολικά έχουμε, $X \sim \Gamma\alpha\mu\mu\alpha(\alpha, \lambda)$.

Πρόταση 1.1

Αν η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους λ και a, $X \sim \Gamma\alpha\mu\mu\alpha(\alpha, \lambda)$, τότε η μέση τιμή της και η διακύμανση της X θα δίνονται από τους τύπους

$$E(X) = \frac{a}{\lambda}, \qquad V(X) = \frac{a}{\lambda^2}.$$

Επίσης η ροπογεννήτρια της τ.μ. $X \sim \Gamma \alpha \mu \mu \alpha(\alpha, \lambda)$ είναι,

$$M(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^a}, \ \ t < \lambda.$$

Ειδικές περιπτώσεις της κατανομής Γάμμα.

- Όταν $a = 1$, προκύπτει Εκθετική κατανομή. Δηλαδή, $E(\lambda) \equiv \Gamma \alpha \mu \mu \alpha(1, \lambda)$. Όταν $a = n$ ακέραιος τότε έχουμε κατανομή Erlang, όπου προκύπτει από το άθροισμα n Εκθετικών.
- Όταν $a = \frac{n}{2}$, $\lambda = 2$ τότε προκύπτει η κατανομή Χ τετράγωνο με n βαθμούς ελευθερίας. Δηλαδή,

$$X_n^2 \sim \Gamma \alpha \mu \mu \alpha \left(\frac{n}{2}, 2\right).$$

Λογαριθμοκανονική κατανομή

Ορισμός 1.8

Αν $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε η $X = e^Y$ ακολουθεί Λογαριθμοκανονική κατανομή με σ.π.π.

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{\frac{(logx - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \ \ x \in (0, \infty),$$

με $\mu \in (-\infty, \infty)$ και $\sigma \in (0, \infty)$.

Πρόταση 1.2

Αν $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε η $X = e^Y$ ακολουθεί Λογαριθμοκανονική κατανομή. Άρα οι ροπές, η μέση τιμή και η διακύμανση της X θα δίνονται από τους τύπους

$$E(X^k) = exp\left\{k\mu + \frac{1}{2}k^2\sigma^2\right\},$$

$$E(X) = exp\left\{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right\},$$

$$V(X) = exp\{2\mu + \sigma^2\}(exp\{\sigma^2 - 1\}).$$

Ενδιαφέρον έχει ότι η Λογαριθμοκανονική κατανομή δεν επηρεάζεται μονοσήμαντα από τις ροπές της. Αυτό συμβαίνει διότι ενώ υπάρχουν όλες οι ροπές της, δεν υπάρχει η ροπογεννήτρια που θα προσδιόριζε μονοσήμαντα την κατανομή.

Κατανομή Pareto

Η κατανομή Pareto εμφανίζεται σε διάφορες μορφές. Εμείς θα αναφερθούμε στην Pareto τύπου II.

Ορισμός 1.9

Αν $X \sim Pareto(\alpha, \beta)$ τότε η σ.π.π. θα είναι,

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(x+\beta)^{\alpha+1}}, \alpha > 0, \beta > 0.$$

Η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση ουράς της θα είναι αντίστοιχα,

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{x+\beta}\right)^{\alpha}, \ \ \bar{F}(x) = \left(\frac{\beta}{x+\beta}\right)^{\alpha}.$$

Πρόταση 1.3

Αν $X \sim Pareto(\alpha, \beta)$ τότε η μέση τιμή της και η διακύμανσή της θα είναι,

$$E(X) = \frac{\beta\alpha}{\alpha-1}, \ \ V(X) = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}.$$

Για την ύπαρξη της μέσης τιμής ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι $\alpha > 1$ και για να είναι η διακύμανση πεπερασμένη πρέπει $\alpha > 2$. Ένα χαρακτηριστικό της κατανομής Pareto είναι ότι η ροπογεννήτρια της δεν υπάρχει καθώς απειρίζεται για $t > 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ ΒΑΣΙΣΜΕΝΑ ΣΕ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η βασική έννοια της ασφάλισης είναι το ασφαλιστήριο συμβόλαιο. Με βάση αυτό ο ασφαλιζόμενος υποχρεούται να πληρώνει ένα προκαθορισμένο ποσό, το λεγόμενο ασφάλιστρο. Από την άλλη μεριά η ασφαλιστική εταιρεία αναλαμβάνει έναν κίνδυνο με την υποχρέωση αν συμβεί κάποιο ζημιογόνο γεγονός να καλύψει την ζημιά. Κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο διαφέρει με βάση τον κίνδυνο που ασφαλίζεται, το ποσό του ασφαλίστρου και τον τρόπο υπολογισμού του, τον τρόπο καταβολής του ασφαλίστρου και των αποζημιώσεων και διάφορους άλλους παράγοντες. Στην συγκεκριμένη εργασία θα ασχοληθούμε με τις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων. Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε Kaas et.al (2008).

Ένα μείζον πρόβλημα στην ασφαλιστική επιστήμη είναι ο καθορισμός αρχών υπολογισμών ασφαλίστρων που ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες. Μία γνωστή τεχνική είναι μέσω της στρέβλωσης (*distortion*) που χρησιμοποιούμε στην σ.κ. και έπειτα υπολογίζουμε την μέση τιμή μέσω αυτής. Ενώ αυτή η τεχνική έχει καλή εφαρμογή το πρόβλημα είναι ότι δεν ισχύει για όλες τις περιπτώσεις. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων βασισμένες σε μονοδιάστατες σταθμισμένες κατανομές. Επομένως σταθμίζοντας τις κατανομές προκύπτουν σταθμισμένα ασφάλιστρα. Διαφορετικά βάρη οδηγούν σε διαφορετικές αρχές ασφαλίστρων, όπως θα αναλύσουμε και στην συνέχεια. Θα μελετήσουμε την εφαρμογή αυτών των αρχών ασφαλίστρων ως προς την ισχύ συγκεκριμένων ιδιοτήτων και θα δώσουμε αριθμητικά παραδείγματα.

2.2 ΕΝΝΟΙΑ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΩΝ

Θεωρούμε ότι $X \geq 0$ μία συνεχή τ.μ. που εκφράζει τον κίνδυνο με σ.κ. F και συνάρτηση ουράς $\overline{F} = 1 - F$. Ο κίνδυνος εκφράζει το ποσό της αποζημίωσης που πρέπει να πληρώσει η ασφαλιστική εταιρεία στον ασφαλιζόμενο μετά από ένα ζημιογόνο γεγονός. Όπως αναφέραμε παραπάνω ο ασφαλιζόμενος υποχρεούται να πληρώνει ένα προκαθορισμένο ποσό, το ασφάλιστρο, για να του παρέχονται τα πλεονεκτήματα της ασφάλισης.

Η πιο απλή ιδέα υπολογισμού του ασφαλίστρου είναι να σκεφτούμε ότι για τ.μ. X το ασφάλιστρο θα είναι η μέση τιμή αυτής της τ.μ., δηλαδή,

$$E(X) = \int_0^\infty \overline{F}(x)dx. \qquad (2.1)$$

Αυτή η μέση τιμή ονομάζεται καθαρό ασφάλιστρο (*net premium*) και συμβολίζεται ως $\Pi(X)$. Επομένως προκύπτει άμεσα μία βασική και αναγκαστική ιδιότητα μιας αρχής υπολογισμού ασφαλίστρου, που ονομάζεται μη-αρνητικό περιθώριο ασφαλείας (*non-negative loading*). Θα πρέπει το ασφάλιστρο να είναι μεγαλύτερο ή ίσο της μέσης τιμής του κινδύνου, δηλαδή,

$$\Pi(X) \geq E(X). \qquad (2.2)$$

Ουσιαστικά η μέση τιμή του κινδύνου αποτελεί το κατώτερο φράγμα του ασφαλίστρου. Αν δεν συμβαίνει αυτό τότε μπορεί και μια μικρή ζημιά να είναι μεγαλύτερη από το ασφάλιστρο οπότε να μην μπορεί να την καλύψει η εταιρεία. Επομένως στην δημιουργία ασφαλίστρων χρησιμοποιούμε πάντα αυτή την βασική και αναγκαστική ιδιότητα. Τα ασφάλιστρα που είναι μεγαλύτερα από την μέση τιμή ονομάζονται επιβαρυμένα (*loaded*).

Άλλο ένα βασικό πρόβλημα προκύπτει όταν συμβεί ένα ακραίο γεγονός δηλαδή μία μεγάλη ζημιά που μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την μέση τιμή. Συνεπώς για να κατασκευαστούν ασφάλιστρα που να μην έχουν αυτό το πρόβλημα δημιουργήθηκαν τα στρεβλά ασφάλιστρα. Η βασική ιδέα είναι να τροποποιήσουμε την συνάρτηση ουράς $\overline{F}$ χρησιμοποιώντας για παράδειγμα μια συνάρτηση της μορφής $x^p,\ p \in (0,1)$.

Γενικά μια συνάρτηση $g: [0,1] \to [0,1]$ αύξουσα με $g(0) = 0,\ g(1) = 1$ καλείται στρεβλή συνάρτηση ή συνάρτηση στρέβλωσης. Το ασφάλιστρο που βασίζεται στην στρεβλή συνάρτηση είναι

$$\Pi_g(X) = \int_0^\infty g\left(\overline{F}(x)\right) dx$$

και ονομάζεται στρεβλό ασφάλιστρο.

Στην περίπτωση που μελετάμε εμείς επιθυμούμε η g να είναι κοίλη ($g''(x) \leq 0$, όπου ορίζεται). Αυτό διασφαλίζει ότι το περιθώριο ασφαλείας είναι μη-αρνητικό για κάθε ρίσκο, δηλαδή ισχύει η βασική ιδιότητα (2.2). Επομένως τροποποιούμε την συνάρτηση ουράς προσαρμόζοντας την έτσι ώστε η να ισχύει $X \leq_{st} X_g$, $όπου\ X \sim F\ και\ X_g \sim g(F)$, που συνεπάγεται ότι $E(X) \leq E(X_g)$. Άρα κατορθώσαμε να έχει το στρεβλό ασφάλιστρο καλή εφαρμογή για πιθανότητες μεγάλης ζημιάς, κάτι που δεν συμβαίνει στην περίπτωση του καθαρού ασφαλίστρου και γενικά για αρκετές περιπτώσεις επιβαρυμένων ασφαλίστρων. Ακόμη οι αρχές ασφαλίστρων που βασίζονται στην στρέβλωση (*distortion*) αποδεικνύεται ότι ικανοποιούν σημαντικές ιδιότητες. Δεν θα ασχοληθούμε με αυτές τις ιδιότητες στην συγκεκριμένη εργασία. Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε Wang (1996) και Wang (2000).

Όπως αναφέραμε τα στρεβλά ασφάλιστρα είναι ένας τρόπος δημιουργίας επιβαρυμένων ασφαλίστρων που προσαρμόζονται καλά για πιθανότητες να συμβούν μεγάλες ζημιές. Αποτελούν και αυτά μία κατηγορία αρχών ασφαλίστρου. Μία άλλη κατηγορία αρχών ασφαλίστρου βασίζονται στην γενική ιδέα ότι προσθέτουμε μία θετική ποσότητα στην μέση τιμή $E(X)$. Αυτή η θετική ποσότητα περιέχει ένα μέτρο κινδύνου. Στη συνέχεια αναφέρουμε κάποιες γνωστές αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων:

1. **Αρχή της μαθηματικής ελπίδας:** $\Pi(X) = (1+\lambda)E(X), \lambda > 0$
2. **Αρχή της διακύμανσης:** $\Pi(X) = E(X) + \lambda V(X), \lambda > 0$
3. **Αρχή της τυπικής απόκλισης:** $\Pi(X) = E(X) + \lambda\sqrt{V(X)}, \lambda > 0$
4. **Αρχή του ασφαλίστρου Esscher:** $\Pi(X) = \frac{E(Xe^{\lambda X})}{E(e^{\lambda X})} = \frac{M_X'(\lambda)}{M_X(\lambda)}, \lambda > 0$
5. **Αρχή του ασφαλίστρου Kamps:** $\Pi(X) = \frac{E\left(X(1-e^{-\lambda X})\right)}{E(1-e^{-\lambda X})}, \lambda > 0$
6. **Ασφάλιστρο της εκθετικής αρχής:**

   $\Pi(X) = \frac{\ln E(e^{\lambda X})}{\lambda} = \frac{\ln M_X(\lambda)}{\lambda},\ \lambda > 0$, όπου $M_X(\lambda) = E(e^{\lambda X})$ ροπογεννήτρια συνάρτηση.

   Αναφορά στις παραπάνω αρχές κάνουν οι Goovaerts et.al (1984).

Είναι προφανές και προκύπτει άμεσα ότι η βασική και αναγκαστική ιδιότητα (2.2) ισχύει για την αρχή της μαθηματικής ελπίδας, την αρχή της διακύμανσης και την αρχή της τυπικής απόκλισης.

Πρόταση 2.1

Για τις παρακάτω αρχές ασφαλίστρων ισχύει:

i. $\Pi(X) = \frac{E(Xe^{\lambda X})}{E(e^{\lambda X})} \geq E(X)$ (Esscher)

ii. $\Pi(X) = \frac{E\left(X(1-e^{-\lambda X})\right)}{E(1-e^{-\lambda X})} \geq E(X)$ (Kamps)

iii. $\Pi(X) = \frac{\ln E(e^{\lambda X})}{\lambda} \geq E(X)$ (εκθετικής αρχής)

Απόδειξη

i. $\Pi(X) = \frac{E(Xe^{\lambda X})}{E(e^{\lambda X})} = E(X) + \Pi(X) - E(X) = \frac{E(Xe^{\lambda X})}{E(e^{\lambda X})} - E(X)$

$$= \frac{Cov\left(X, e^{\lambda X}\right)}{E(e^{\lambda X})} + E(X) \geq E(X).$$

Οι συναρτήσεις x και $e^{\lambda x}$ είναι αύξουσες ως προς x και προκύπτει $Cov\left(X, e^{\lambda X}\right) \geq 0$.

ii. $\Pi(X) = \frac{E\left(X(1-e^{-\lambda X})\right)}{E(1-e^{-\lambda X})} = E(X) + \frac{E\left(X(1-e^{-\lambda X})\right)}{E(1-e^{-\lambda X})} - E(X)$

$$= \frac{Cov\left(X, 1-e^{-\lambda X}\right)}{E(1-e^{-\lambda X})} + E(X) \geq E(X).$$

Οι συναρτήσεις x και $1 - e^{-\lambda x}$ είναι αύξουσες ως προς x (αφού $\lambda > 0$) και προκύπτει $Cov\left(X, 1 - e^{-\lambda X}\right) \geq 0$.

iii. Για να αποδείξουμε αυτή την ιδιότητα για το ασφάλιστρο της εκθετικής αρχής θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Jensen.

Για το ασφάλιστρο της εκθετικής αρχής, επιλέγουμε $g(x) = e^{\lambda x}, x \geq 0, \lambda > 0$. Έχουμε, $g'(x) = \lambda e^{\lambda x} > 0$ και $g''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} > 0$ άρα g κυρτή. Επομένως,

$$g\left(E(X)\right) \leq E\left(g(X)\right) \Rightarrow e^{\lambda E(X)} \leq E\left(e^{\lambda X}\right) \Rightarrow \lambda E(X) \leq \ln E\left(e^{\lambda X}\right)$$

$$\Rightarrow E(X) \leq \frac{\ln E\left(e^{\lambda X}\right)}{\lambda} = \Pi(X).$$

Επιπλέον υπάρχουν αρχές ασφαλίστρων που λαμβάνουν υπόψιν την ουρά $\overline{F} = 1 - F$ της κατανομής, όχι μόνο στατιστικά μέτρα (μέση τιμή, διακύμανση, τυπική απόκλιση) όπως είδαμε παραπάνω. Ενδεικτικά αυτές είναι

- **Δεσμευμένη προσδοκία ουράς(*Conditional Tail Expectation, CTE*):**
  $\Pi(X) = E(X|X > x_q)$
- **Τροποποιημένη διακύμανση ουράς (*Modified Tail Variance, MTV*):**
  $\Pi(X) = E(X|X > x_q) + \frac{V(X|X > x_q)}{E(X|X > x_q)}$

όπου $x_q = VaR = inf\{x: F(x) \geq q\}$ η αξία σε κίνδυνο ή το ποσοστιαίο σημείο της κατανομής F.

Στη συνέχεια αφού αναφέραμε βασικές αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων θα αναφέρουμε κάποιες βασικές, επιθυμητές αλλά όχι αναγκαστικές, ιδιότητες. Η μόνη βασική και αναγκαστική ιδιότητα που πρέπει να ικανοποιούν οι αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων είναι η σχέση (2.2), όπως αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου.

i. **Προσθετικότητα ως προς την σταθερά (*Translativity*)**

$$\Pi(X + c) = \Pi(X) + c, \forall c$$

ii. **Σταθερότητα ή μη αδικαιολόγητο περιθώριο ασφαλείας (*Constancy or no unjustified risk loading*)**

$$\Pi(c) = c$$

iii. **Θετική ομοιογένεια (*Positive homogeneity*)**

$$\Pi(cX) = c\Pi(X)$$

iv. **Μη υπερβολικό όριο ασφαλείας (*Non-excessive loading or no rip-off*)**

$$\Pi(X) \leq min\{p|F_X(p) = 1\}$$

ουσιαστικά η ιδιότητα αυτή εκφράζει ότι το ασφάλιστρο είναι μικρότερο από τη μέγιστη δυνατή ζημιά.

v. **Υποπροσθετικότητα (*Subadditivity*)**

$$\Pi(pX + qY) \leq p\Pi(X) + q\Pi(Y) \text{ , όπου } p, q > 0 \text{ , } p + q = 1$$

vi. **Προσθετικότητα (*Additivity*)**

$$\text{Για } X, Y \text{ ανεξάρτητους κινδύνους}: \Pi(X + Y) = \Pi(X) + \Pi(Y)$$

vii. **Αντικειμενικότητα (*Objectivity*)**

$$X =_d Y \Rightarrow \Pi(X) = \Pi(Y)$$

Αναφορά στις ιδιότητες αυτές κάνουν οι Goovaerts and Laeven (2008).

Συνεχίζοντας θα εξετάσουμε ποιες ιδιότητες ικανοποιούνται για συγκεκριμένες αρχές ασφαλίστρων.

<u>Ασφάλιστρο Esscher</u>

Προσθετικότητα ως προς την σταθερά

$$\Pi(X+c)=\frac{E\left((X+c)e^{\lambda(X+c)}\right)}{E(e^{\lambda(X+c)})}$$

$$=\frac{E\left(Xe^{\lambda(X+c)}+ce^{\lambda(X+c)}\right)}{E(e^{\lambda X}e^{\lambda c})}$$

$$=\frac{E\left(Xe^{\lambda X}e^{\lambda c}\right)+cE\left(e^{\lambda X}e^{\lambda c}\right)}{e^{\lambda c}E(e^{\lambda X})}$$

$$=\frac{E\left(Xe^{\lambda X}\right)}{E(e^{\lambda X})}+c=\Pi(X)+c.$$

Θετική ομοιογένεια

$$\Pi(cX)=\frac{E\left(cXe^{\lambda cX}\right)}{E(e^{\lambda cX})}\neq c\frac{E\left(Xe^{\lambda X}\right)}{E(e^{\lambda X})}=c\Pi(X).$$

Σταθερότητα

$$\Pi(c)=\frac{E(ce^{c})}{E(e^{c})}=c.$$

Προσθετικότητα

$$\Pi(X+Y)=\frac{E\left((X+Y)e^{\lambda(X+Y)}\right)}{E(e^{\lambda(X+Y)})}$$

$$=\frac{E\left((X+Y)e^{\lambda X}e^{\lambda Y}\right)}{E(e^{\lambda X}e^{\lambda Y})}$$

$$=\frac{E\left(Xe^{\lambda X}e^{\lambda Y}+Ye^{\lambda X}e^{\lambda Y}\right)}{E(e^{\lambda X}e^{\lambda Y})}$$

$$= \frac{E\left(Xe^{\lambda X}e^{\lambda Y}\right) + E\left(Ye^{\lambda X}e^{\lambda Y}\right)}{E(e^{\lambda X}e^{\lambda Y})}$$
$$= \frac{E\left(Xe^{\lambda X}\right)E\left(e^{\lambda Y}\right) + E\left(Ye^{\lambda Y}\right)E\left(e^{\lambda X}\right)}{E(e^{\lambda X}e^{\lambda Y})}$$
$$= \frac{E\left(Xe^{\lambda X}\right)}{E(e^{\lambda X})} + \frac{E\left(Ye^{\lambda Y}\right)}{E(e^{\lambda Y})}$$
$$= \Pi(X) + \Pi(Y).$$

<u>Αρχή της τυπικής απόκλισης</u>

Προσθετικότητα ως προς την σταθερά

$$\Pi(X+c) = E(X+c) + \lambda\sqrt{V(X+c)}$$
$$= E(X) + c + \lambda\sqrt{V(X)}$$
$$= \Pi(X) + c.$$

Θετική ομοιογένεια

$$\Pi(cX) = E(cX) + \lambda\sqrt{V(cX)}$$

$$= cE(X) + \lambda c\sqrt{V(X)}$$

$$= c\Pi(X).$$

Σταθερότητα

$$\Pi(c) = E(c) + \lambda\sqrt{V(c)} = c + 0 = c.$$

Προσθετικότητα

$$\Pi(X+Y) = E(X+Y) + \lambda\sqrt{V(X+Y)}$$

$$= E(X) + E(Y) + \lambda\sqrt{V(X) + V(Y)} \neq \Pi(X) + \Pi(Y).$$

Υποπροσθετικότητα

$$V(pX+qY) = p^2V(X) + q^2V(Y) + 2pqCov(X,Y)$$

$$\leq p^2V(X) + q^2V(Y) + 2pq\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}$$

$$= \left(pV(X) + qV(Y)\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{V(pX + qY)} \leq p\sqrt{V(X)} + q\sqrt{V(Y)}.$$

Συνεπώς,

$$\Pi(pX + qY) = E(pX + qY) + \lambda\sqrt{V(pX + qY)}$$

$$\leq pE(X) + qE(Y) + \lambda\left(p\sqrt{V(X)} + q\sqrt{V(Y)}\right)$$

$$= p\left(E(X) + \lambda\sqrt{V(X)}\right) + q\left(E(Y) + \lambda\sqrt{V(Y)}\right)$$

$$= p\Pi(X) + q\Pi(Y).$$

Επομένως, συμφωνούμε ότι αυτές οι ιδιότητες είναι επιθυμητές και όχι αναγκαστικές γιατί δεν ισχύουν όλες για κάθε αρχή ασφαλίστρου.

2.3 ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΑ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ

Οι βασικές αρχές ασφαλίστρων προσαρμόζονται καλά σε διάφορες περιπτώσεις αλλά υπάρχει μεγάλο εύρος περιπτώσεων που δημιουργείται πρόβλημα ιδιαίτερα για ακραίες ζημιές. Κάτι αντίστοιχο ισχύει και για τα στρεβλά ασφάλιστρα που προσαρμόζονται καλύτερα στις περιπτώσεις μεγάλων ζημιών. Επομένως γεννήθηκε η ανάγκη να αναπτυχθεί μια νέα θεωρία υπολογισμού ασφαλίστρων που προσαρμόζεται καλά για όλο το εύρος των ζημιών. Συνεπώς οι Furman and Zitikis (2008a) ανέπτυξαν μια θεωρία υπολογισμού ασφαλίστρων βασισμένη στις σταθμισμένες κατανομές. Οι σταθμισμένες κατανομές είναι ένα εργαλείο στατιστικής με το οποίο ασχολήθηκαν ιδιαιτέρως οι Patil and Rao (1978) άλλα δεν είχε βρει εφαρμογή στην ασφαλιστική επιστήμη.

Έστω X ένας συνεχής κίνδυνος με συνάρτηση πυκνότητας f, συνάρτηση κατανομής F και συνάρτηση ουράς $\overline{F} = 1 - F$. Ας υποθέσουμε, μία συνάρτηση $w\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ αύξουσα με μέση τιμή $0 < E[w(X)] < \infty$. Η σταθμισμένη συνάρτηση κατανομής ορίζεται ως εξής

$$F_w(x) := \frac{E[\mathbf{1}\{X \leq x\}w(X)]}{E[(w(X)]},$$

όπου γενικά μία δείκτρια συνάρτηση με συνθήκη S

$$\mathbf{1}\{S\} = \begin{cases} 1, & \text{αν ισχύει το } S \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Αφού γνωρίζουμε την σταθμισμένη σ.κ. F_w τότε μπορούμε να βρούμε εύκολα το αντίστοιχο σταθμισμένο ασφάλιστρο. Από την σχέση (2.1), έχουμε

$$\Pi(X_w) = H[F_w] = E(X_w) = \int_0^\infty \bar{F}_w(x)dx. \qquad (2.3)$$

Γνωρίζοντας την σταθμισμένη σ.κ. μπορούμε να βρούμε και την σταθμισμένη σ.π.π. της τ.μ. του σταθμισμένου κινδύνου X_w, που είναι

$$f_w(x) = \frac{w(x)}{E[w(X)]} f(x), x > 0. \qquad (2.4)$$

Φυσικά ισχύει,

$$\int_0^\infty f_w(x)dx = \frac{1}{w(x)} \int_0^\infty w(x)f(x)dx = 1.$$

Έχουμε υποθέσει, ότι $w(x) \uparrow$ ως προς x. Από (2.3) έχουμε

$$\frac{f_w(x)}{f(x)} = \frac{w(x)}{E[w(X)]}$$

πηλίκο που είναι $\uparrow$ ως προς x γιατί $w(x) \uparrow$ ως προς x άρα ισχύει $X \leq_{lr} X_w$. Οπότε προκύπτει ότι $E(X) \leq E(X_w)$ συνεπάγεται ότι $\Pi(X) \leq \Pi(X_w)$. Άρα ένα σταθμισμένο ασφάλιστρο είναι μεγαλύτερο οπότε μας δίνει μεγαλύτερη ευελιξία. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.3), (2.4) καταλήγουμε σε μία πιο απλή σχέση για το σταθμισμένο ασφάλιστρο

$$\Pi(X_w) = \int_0^\infty x f_w(x)dx = \frac{1}{E[w(X)]} \int_0^\infty x w(x) f(x)dx = \frac{E[Xw(X)]}{E[w(X)]}. \qquad (2.5)$$

Ένας λόγος που τα σταθμισμένα ασφάλιστρα βρίσκουν καλή εφαρμογή είναι επειδή ενσωματώνουν στην οικογένειά τους πολλές γνωστές αρχές ασφαλίστρων. Δηλαδή για συγκεκριμένες επιλογές της $w(x)$ προκύπτουν γνωστές αρχές ασφαλίστρων. Αυτό φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Αρχή Ασφαλίστρων	$\boldsymbol{w(x)}$	$\boldsymbol{\Pi(X)}$
Καθαρό ασφάλιστρο	$w(x) = c$	$E(X)$
Διακύμανση	$w(x) = x$	$E(X) + \frac{1}{E(X)}V(X)$
Esscher	$w(x) = e^{\lambda x}$	$\frac{E[Xe^{\lambda X}]}{E[e^{\lambda X}]}$
Kamps	$w(x) = 1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{E[X(1-e^{-\lambda X})]}{E[(1-e^{-\lambda X}]}$
CTE	$w(x) = \mathbf{1}\{x > x_q\}$	$\frac{E[X\mathbf{1}\{X > x_q\}]}{E[\mathbf{1}\{X > x_q\}]}$
MTV	$w(x) = x\mathbf{1}\{x > x_q\}$	$E\{X \vert X > x_q\} + \frac{V\{X \vert X > x_q\}}{E\{X \vert X > x_q\}}$

Σημειώνουμε: $\lambda > 0$, $c > 0$ σταθερές.

Παρατηρούμε ότι τα βάρη $w(x)$ χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Στα βάρη που εξαρτώνται από την σ.κ. F και σε αυτά που δεν εξαρτώνται. Για παράδειγμα στην περίπτωση του CTE ασφαλίστρου επιλέγουμε για βάρος την $w(x) = x_q = F^{-1}(q)$ που εξαρτάται από την σ.κ. που πολλές φορές είναι άγνωστη και δύσκολο να βρεθεί. Ενώ για παράδειγμα στην περίπτωση της αρχής της διακύμανσης επιλέγουμε για $w(x) = x$ ανεξάρτητο της σ.κ. άρα και εφαρμόσιμο χωρίς πολλούς περιορισμούς. Μία άλλη παρατήρηση είναι ότι στα ασφάλιστρα Esscher και Kamps ενώ το βάρος είναι ανεξάρτητο της σ.κ. κατανομής ενσωματώνεται και μία θετική παράμετρος λ.

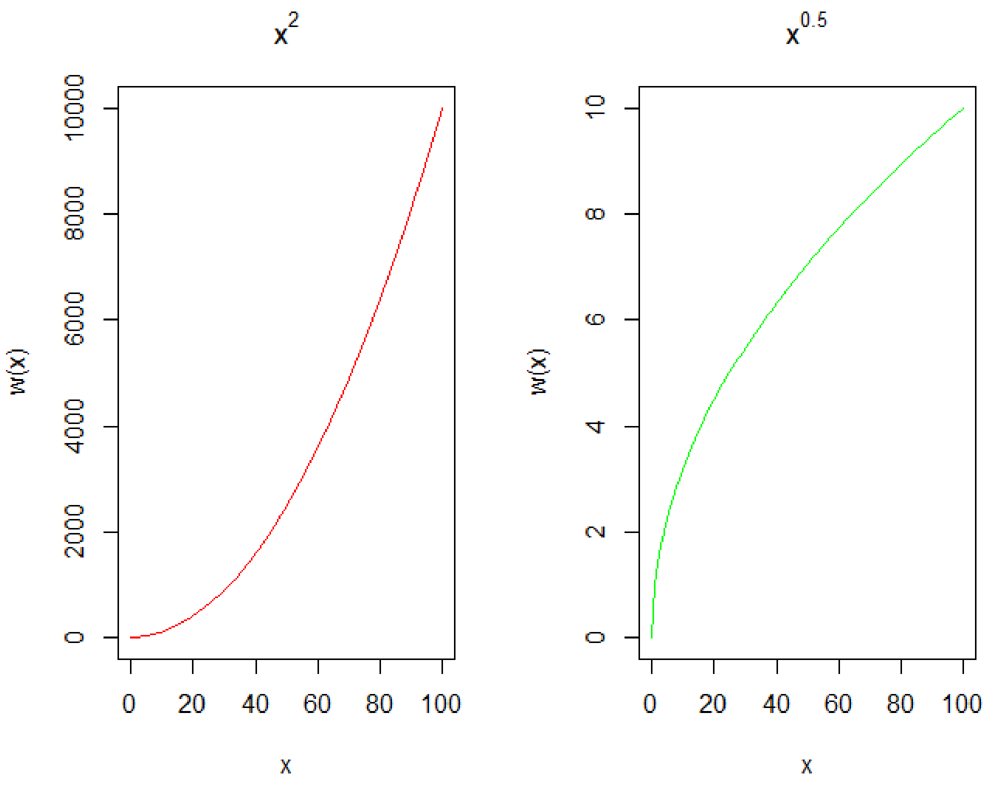
Όπως είδαμε η $w(x)$ είναι μη-αρνητική άρα το σταθμισμένο ασφάλιστρο παίρνει τιμές στο εύρος των τιμών της X, δηλαδή

$$essinf[X] \leq \Pi(X_w) \leq esssup[X]. \qquad (2.6)$$

Το δεξί μέλος του φράγματος είναι γνωστό και ως περίπτωση *no rip-off*. Το φράγμα (2.6) σημειώνει μια ιδιότητα που αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως *no unjustified risk loading*. Αυτή η ιδιότητα αναφέρει ότι αν η ζημιά X ισούται με μία σταθερά τότε η επιβάρυνση του ασφαλίστρου $\Pi(X_w) - E(X) = 0$. Κανονικά όμως η επιβάρυνση πρέπει να είναι μη-αρνητική με βάση την βασική και αναγκαστική ιδιότητα των ασφαλίστρων (2.2), δηλαδή

$$\Pi(X_w) \geq E(X) \Rightarrow \Pi(X_w) - E(X) \geq 0.$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε κάποια σταθμισμένα ασφάλιστρα που προκύπτουν από βάρη της μορφής $w(x) = x^c$, $c \in [0,1]$. Η συνάρτηση x^c είναι προφανώς αύξουσα ως προς x και παρατηρούμε το εύρος τιμών του c. Η συνάρτηση θα μπορούσε να ήταν της μορφής $w(x) = x^c$, $c > 1$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτουν δύο προβλήματα. Αρχικά για $c > 1$ η $w(x)$ δεν είναι κοίλη και έπειτα μεγαλώνει πολύ το περιθώριο ασφαλείας και προκύπτει ότι το ασφάλιστρο δεν είναι ανταγωνιστικό και θελκτικό για τον ασφαλιζόμενο. Αυτή η παρατήρηση εξηγείται από το παρακάτω σχήμα.



Στην περίπτωση για $w(x) = x^c$ η σταθμισμένη σ.κ. F_{w_c} καλείται συνάρτηση κατανομής μεροληπτικού μεγέθους (*size biased*) (Patil and Ord (1976)). Επομένως για $w(x) = x^c$ έχουμε,

$$\Pi(X_w) = H\left[F_{w_c}\right] = \frac{E[XX^c]}{E[X]} = \frac{E\left[X^{1+c}\right]}{E[X]}.$$

Σημειώνουμε ότι το $\Pi(X_w)$ συγκλίνει στο καθαρό ασφάλιστρο για $c \to 0$ και συγκλίνει στην αρχή της διακύμανσης για $c \to 1$. Άρα έχουμε,

$$\lim_{c\to 0} \Pi(X_w) = \lim_{c\to 0} \frac{E\left[X^{1+c}\right]}{E[X^c]} = E(X).$$

$$\lim_{c\to 1} \Pi(X_w) = \lim_{c\to 1} \frac{E[X^{1+c}]}{E[X^c]} = \frac{E(X^2)}{E(X)} = \frac{E(X^2)}{E(X)} + E(X) - E(X)$$

$$= \frac{E(X^2) - E^2(X)}{E(X)} + E(X) = E(X) + \frac{V(X)}{E(X)}.$$

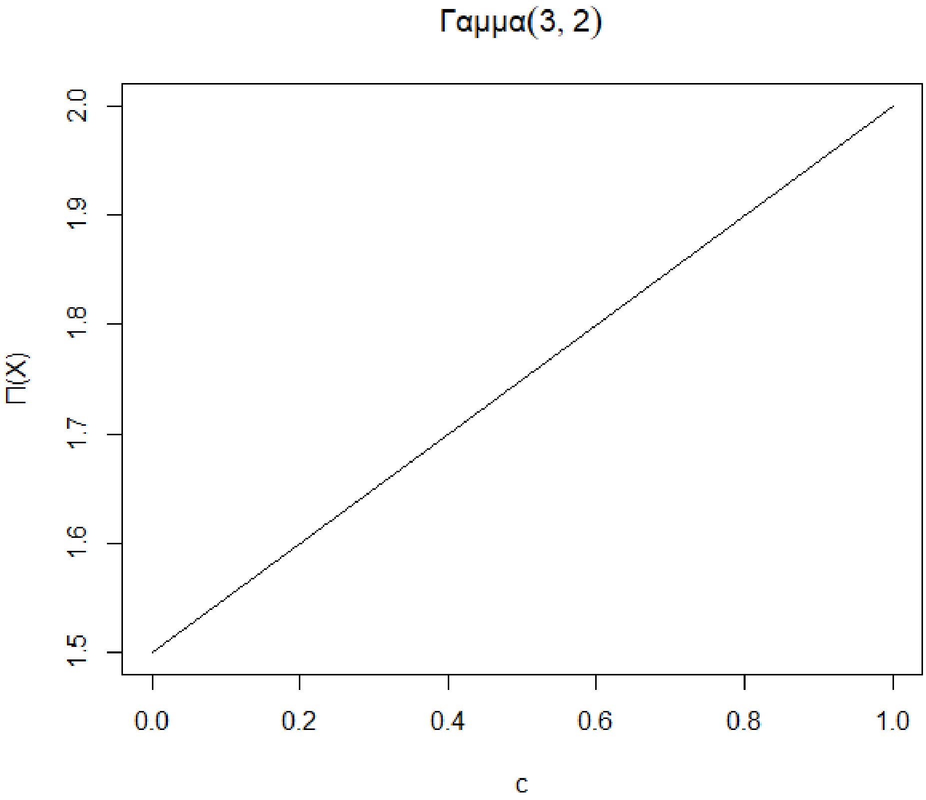
Αφού το σταθμισμένο ασφάλιστρο εκφράζεται ως πηλίκο δύο ροπών και μπορούμε για ορισμένες κατανομές να το υπολογίσουμε εύκολα. Επιπλέον υπάρχουν γνωστές κατανομές όπου μετά τη στάθμιση $w(x) = x^c, c \in [0,1]$ παραμένουν στην ίδια οικογένεια κατανομών. Θα δούμε τρία παραδείγματα τέτοιων κατανομών παρακάτω.

Παράδειγμα 2.1

Έστω $X \sim \Gamma\alpha\mu\mu\alpha(\alpha,\beta)$ με σ.π.π. $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\, e^{-\beta x}, x > 0$ και $E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$. Τότε η σ.π.π. X_{w_c} είναι

$$f_{w_c}(x) = \frac{x^c}{E(X^c)} f(x) = \frac{x^c}{E(X^c)} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\, e^{-\beta x} = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)E(X^c)} x^{\alpha+c-1} e^{-\beta x} \sim \Gamma\alpha\mu\mu\alpha(\alpha + c,\beta)$$

Δηλαδή, $f_{w_c}(x) = \frac{\beta^{\alpha+c}}{\Gamma(\alpha+c)} x^{\alpha+c-1}\, e^{-\beta x}, x > 0$ και $E\left(X_{w_c}\right) = \frac{\alpha+c}{\beta}$. Επομένως το σταθμισμένο ασφάλιστρο με βάση την σχέση (2.3) είναι $\Pi\left(X_{w_c}\right) = \frac{\alpha+c}{\beta}$. Άρα αν έχω $\Gamma\alpha\mu\mu\alpha(\alpha,\beta)$ με στάθμιση $x^c, c \in [0,1]$ τότε προκύπτει πάλι μία $\Gamma\alpha\mu\mu\alpha$ με ίδια παράμετρο κλίμακας β και παράμετρο σχήματος αυξημένη κατά c. Το σταθμισμένο ασφάλιστρο είναι της μορφής $\Pi\left(X_{w_c}\right) = \frac{\alpha+c}{\beta} = E(X) + \frac{c}{\beta},\ c \in [0,1]$. Τότε το $\frac{c}{\beta}$ λέγεται αύξηση του καθαρού κέρδους. Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε την μεταβολή του ασφαλίστρου σε συνάρτηση με το c, με $\alpha = 3, \beta = 2$ και $c \in [0,1]$.



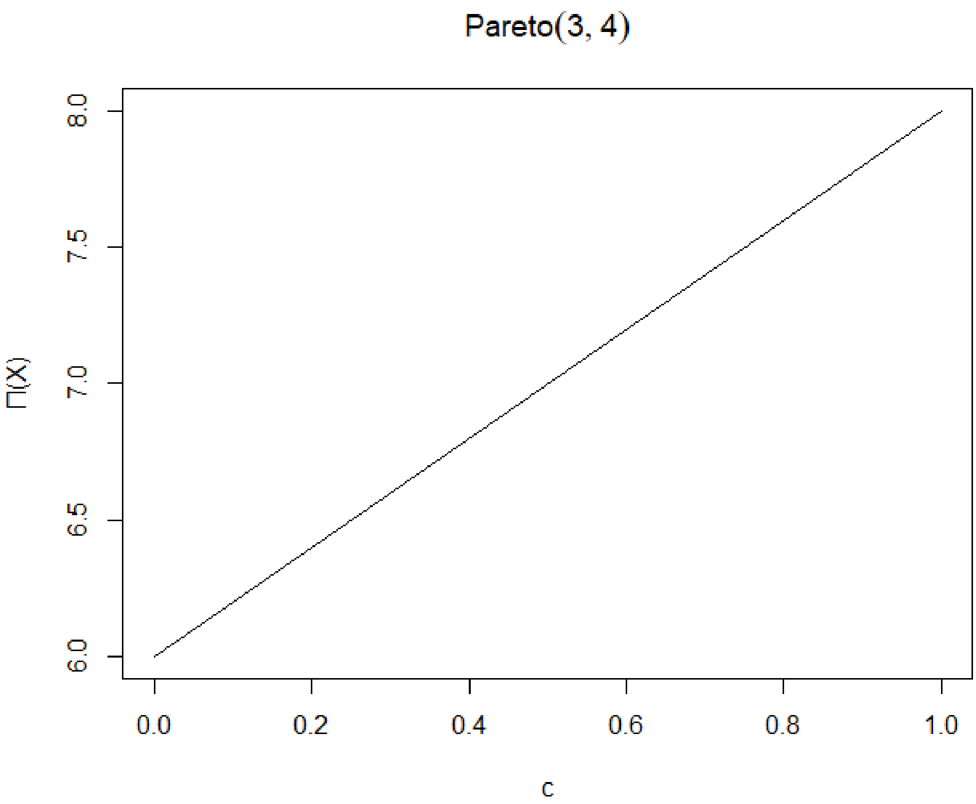
Παράδειγμα 2.2

Έπειτα, έστω $X \sim Pareto(\alpha, \beta), \alpha > 1, \beta > 0$ με σ.π.π. $f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}}, x > \beta$ και $E(X) = \frac{\beta\alpha}{\alpha-1}$. Τότε η σ.π.π. X_{w_c} είναι

$$f_{w_c}(x) = \frac{x^c}{E(X^c)} f(x) = \frac{x^c}{E(X^c)} \frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}} = \frac{1}{E(X^c)} \frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\alpha-c+1}}$$

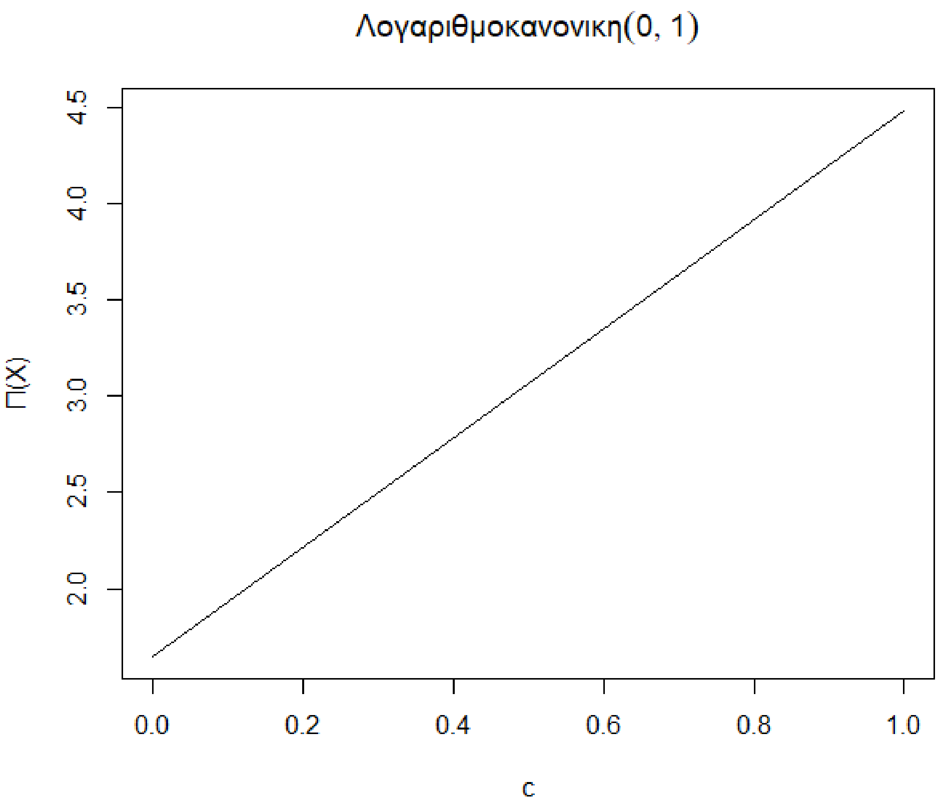
$$= \frac{1}{E(X^c)} \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\alpha-c)\beta^{\alpha-c}} \frac{(\alpha-c)\beta^{\alpha-c}}{x^{\alpha-c+1}} \sim Pareto(\alpha-c, \beta)$$

Άρα από την σχέση (2.3) το σταθμισμένο ασφάλιστρο πάνω στον κίνδυνο X, είναι $\Pi(X_{w_c}) = \frac{\beta(\alpha-c)}{\alpha-c-1}$, με $\alpha > c+1$. Ανάλογα τις παραμέτρους της $Pareto$ και το c υπολογίζεται η αύξηση του καθαρού κέρδους. Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε την μεταβολή του ασφαλίστρου σε συνάρτηση με το c, με $\alpha = 3, \beta = 4$ και $c \in [0,1]$.



Παράδειγμα 2.3

Έστω $X \sim Λογαριθμοκανονική(\mu, \sigma^2)$ με σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$, $\mu \in (-\infty, +\infty), \sigma > 0$ και $E(X) = exp\left\{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right\}$. Μετά από πράξεις προκύπτει ότι η $X_{w_c} \sim Λογαριθμοκανονική(\mu + c\sigma^2, \sigma^2)$. Επομένως από την σχέση (2.3) το σταθμισμένο ασφάλιστρο είναι $\Pi(X_{w_c}) = exp\left\{\mu + \left(c + \frac{1}{2}\right)\sigma^2\right\}$. Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε την μεταβολή του ασφαλίστρου σε συνάρτηση με το c, με $\mu = 0, \sigma = 1$ και $c \in [0,1]$.



Παρατηρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις το σταθμισμένο ασφάλιστρο μεταβάλλεται γραμμικά με το c και είναι αύξουσα ως προς c.

2.4 ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΑ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗΝ ΟΥΡΑ

Τα σταθμισμένα ασφάλιστρα καλύπτουν πολλές περιπτώσεις αρχών ασφαλίστρων όπως αναφέραμε παραπάνω, και μια από αυτές είναι τα ασφάλιστρα με βάση την ουρά της κατανομής. Αναφέραμε νωρίτερα στο κεφάλαιο αυτό δύο ασφάλιστρα με βάση την ουρά, το ασφάλιστρο CTE και το ασφάλιστρο MTV.

Για να δείξουμε ότι το ασφάλιστρο CTE είναι σταθμισμένο θέτουμε για $w(x) = \mathbf{1}\{x > x_q\} = \begin{cases} 1, \ \alpha\nu\ x > x_q \\ 0, \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$ και προκύπτει $\Pi(X) = \frac{E[X\mathbf{1}\{X>x_q\}]}{E[\mathbf{1}\{X>x_q\}]}$. Για να υπολογίσουμε το CTE ασφάλιστρο μπορούμε εύκολα μέσω σταθμισμένων κατανομών, όπως:

$$CTE_q(X) = E(X)\frac{\bar{F}_{w_1}(x_q)}{\bar{F}(x_q)},$$

όπου $w_1(x) = x$. Έχουμε, $E(X) = \Pi(X_{w_0})$, όπου $w_0(x) = x^0 = 1$. Στη συνέχεια δίνουμε παραδείγματα για το CTE ασφάλιστρο όταν η σ.κ. είναι Γάμμα, Λογαριθμοκανονική, Pareto.

I. $X \sim Γαμμα(\alpha, \lambda) \Rightarrow CTE_q(X) = \frac{\alpha}{\lambda}\frac{\bar{F}(x_q|\alpha+1,\lambda)}{\bar{F}(x_q|\alpha,\lambda)}$

II. $X \sim Λογαριθμοκανονική(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$

$$CTE_q(X) = exp\left\{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right\}\frac{\bar{F}(x_q|\mu+\sigma^2,\sigma^2)}{\bar{F}(x_q|\mu,\sigma^2)}$$

III. $X \sim Pareto(\alpha, \beta) \Rightarrow CTE_q(X) = \frac{\alpha\beta}{\alpha-1}\frac{\bar{F}(x_q|\alpha-1,\beta)}{\bar{F}(x_q|\alpha,\beta)}$

Για να ενσωματώσουμε την μεταβλητότητα των ζημιών, κατασκευάζουμε μία άλλη αρχή ασφαλίστρου με βάση την ουρά. Αυτή είναι η δεσμευμένη διακύμανση ουράς (*Conditional Tail Variance, CTV*)

$$CTV_q(X) := V\{X|X > x_q\}.$$

Για να υπολογίσουμε το CTV_q μπορούμε εύκολα μέσω σταθμισμένων κατανομών όπως

$$CTV_q(X) = E(X^2)\frac{\bar{F}_{w_2}(x_q)}{\bar{F}(x_q)} - \left[E(X)\frac{\bar{F}_{w_1}(x_q)}{\bar{F}(x_q)}\right]^2 = E(X^2)\frac{\bar{F}_{w_2}(x_q)}{\bar{F}(x_q)} - \left[CTE_q(X)\right]^2.$$

Έχουμε, όπου $w_1(x) = x$ και $w_2(x) = x^2$. Επίσης θα ισχύει ότι $E(X) = \Pi(X_{w_0})$ και $E(X^2) = \Pi(X_{w_0})\Pi(X_{w_1})$.

Ως εκ τούτου, με βάση τα προηγούμενα παραδείγματα καταλήγουμε στα παρακάτω:

I. $X \sim Γαμμα(\alpha, \lambda) \Rightarrow CTV_q = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda}\frac{\bar{F}(x_q|\alpha+2,\lambda)}{\bar{F}(x_q|\alpha,\lambda)} - \left(\frac{\alpha}{\lambda}\frac{\bar{F}(x_q|\alpha+1,\lambda)}{\bar{F}(x_q|\alpha,\lambda)}\right)^2$

II. $X \sim Λογαριθμοκανονική(\mu,\sigma^2) \Rightarrow CTV_q = e^{2(\mu+\sigma^2)} \frac{\bar{F}(x_q|\mu+2\sigma^2,\sigma^2)}{\bar{F}(x_q|\mu,\sigma^2)} - \left(e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \frac{\bar{F}(x_q|\mu+\sigma^2,\sigma^2)}{\bar{F}(x_q|\mu,\sigma^2)}\right)^2$

III. $X \sim Pareto(\alpha,\beta) \Rightarrow CTV_q = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha-2} \frac{\bar{F}(x_q|\alpha-2,\beta)}{\bar{F}(x_q|\alpha,\beta)} - \left[\frac{\alpha\beta}{\alpha-1} \frac{\bar{F}(x_q|\alpha-1,\beta)}{\bar{F}(x_q|\alpha,\beta)}\right]^2$

Οι παραπάνω εκφράσεις για τα ασφάλιστρα CTE και MTV και η ευκολία ορισμού τους μέσω σταθμισμένων κατανομών καταδεικνύει την αμεσότητα και την εφαρμογή της συγκεκριμένης τεχνικής σταθμισμένων ασφαλίστρων.

2.5 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΑ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ

Σε προηγούμενο κεφάλαιο αναπτύξαμε την θεωρία των σταθμισμένων ασφαλίστρων, είδαμε παραδείγματα και ελέγξαμε αν αυτά τα ασφάλιστρα ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες. Επίσης είδαμε ότι τα σταθμισμένα ασφάλιστρα είναι μία ευρεία οικογένεια ασφαλίστρων που σε αυτή περιέχονται πολλά γνωστά ασφάλιστρα, με κατάλληλη επιλογή του $w(x)$. Σε αυτό το κεφάλαιο θα γενικεύσουμε ακόμη περισσότερο την οικογένεια των σταθμισμένων ασφαλίστρων εισάγοντας τα γενικευμένα σταθμισμένα ασφάλιστρα (Furman and Zitikis (2008a)).

Ένας τρόπος για να γενικευθεί το σταθμισμένο ασφάλιστρο (2.3) είναι μέσω σταθμισμένου ολοκληρώματος της μορφής, $\int_0^\infty \bar{F}_w(x)h(x)dx$, με κατάλληλη επιλογή της $h(x)$. Άρα το ολοκλήρωμα εκφράζεται ως

$$\Pi(X_{w,v}) = H[v,F_w] = \int_0^\infty \bar{F}_w(x)h(x)dx = \frac{E[v(X)w(X)]}{E[w(X)]},$$

όπου $v(x) := \int_0^x h(y)dy$ και $v(x) \uparrow$ ως προς x, όπως αναπτύξαμε και τα σταθμισμένα ασφάλιστρα. Παρατηρούμε στην περίπτωση που $v(x) = x$, τότε προκύπτει

$$\Pi(X_{w,v}) = \frac{E[v(X)w(X)]}{E[w(X)]} = \frac{E[Xw(X)]}{E[w(X)]} = \Pi(X_w). \qquad (2.7)$$

Επομένως η γενική ιδέα είναι να σταθμιστεί η τ.μ. X_w μέσω της συνάρτησης στάθμισης $v(x)$ και να προκύψει ένα νέο σταθμισμένο ασφάλιστρο. Αυτό αποδείχθηκε νωρίτερα καταλήγοντας στην σχέση (2.7), με τον ίδιο τρόπο που κάναμε και προηγουμένως για τα σταθμισμένα ασφάλιστρα.

Όπως έχουμε αναφέρει όλες οι αρχές ασφαλίστρων πρέπει να ικανοποιούν μία βασική και υποχρεωτική ιδιότητα, την (2.2). Άρα για να ευσταθεί ο ισχυρισμός ότι είναι κι αυτή μία αρχή ασφαλίστρου πρέπει να εξετάσουμε αν ισχύει η ιδιότητα (2.2).

Αρχικά ανακαλούμε την τεταρτημοριακή εξάρτηση (*quadrant dependence*) με βάση τον Lehmann (1966). Έχουμε, ότι για ένα ζεύγος (X,Y) τ.μ. κάτω από μία σ.κ. F, έχει θετική τεταρτημοριακή εξάρτηση όταν ισχύει,

$$P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x)P(Y \leq y) \quad \text{για όλα τα } x, y.$$

Στην περίπτωση που η παραπάνω ανισότητα έχει αντίθετη φορά τότε λέμε ότι το ζεύγος (X,Y) έχει αρνητική τεταρτημοριακή εξάρτηση. Άρα για το ζεύγος (X,X) έχουμε θετική τεταρτημοριακή εξάρτηση που με την σειρά της δείχνει την θετική τεταρτημοριακή εξάρτηση για το ζεύγος $\big(h_1(X), h_2(X)\big)$. Δηλαδή,

$$P(h_1(X) \leq x, h_2(X) \leq x) \geq P(h_1(X) \leq x)P(h_2(X) \leq x)$$

που καταλήγει στο ότι

$$E[h_1(X), h_2(X)] \geq E[h_1(X)]E[h_2(X)],$$

για h_1, h_2 αύξουσες. Ως εκ τούτου, για κάθε αύξουσα συνάρτηση $v(x)$ και $w(x)$ έχουμε ότι

$$\Pi\big(X_{w,v}\big) = \frac{E[v(X)w(X)]}{E[w(X)]} \geq \frac{E[v(X)]E[w(X)]}{E[w(X)]} = E[v(X)]$$

και σε συνέχεια αυτού παίρνουμε ότι.

$$\Pi\big(X_{w,v}\big) \geq E(X). \qquad (2.8)$$

Ισχύει για αύξουσα συνάρτηση $v(x)$ τέτοια ώστε $E[v(X)] \geq E(X)$.

Συνοψίζοντας, αποδεικνύεται η σχέση (2.8) αρκεί να θεωρήσουμε αρχικά ότι $E[v(X)] \geq E(X)$. Συγκεκριμένα για $v(x) = x$, με $x > 0$, η συνάρτηση $v(x)$ είναι αύξουσα. Συνεπώς, $E(X_w) > E(X)$. Επομένως, από την ανισότητα (2.8) προκύπτει η βασική και αναγκαστική ιδιότητα $\Pi(X_w) \geq E(X)$.

Στη συνέχεια, αν γράψουμε το φράγμα $\Pi\left(X_{w,v}\right) \geq\ E[v(X)] \Rightarrow H[v, F_w] \geq E[v(X)]$ ως εξής:

$$H[v, F_w] \geq H[v, F]. \qquad (2.9)$$

Αυτό το φράγμα υποδεικνύει ότι το ασφάλιστρο $H[v, F]$ αλλάζει όταν χρησιμοποιούμε την F_w αντί της F κάτι που είναι ανάλογο με προηγούμενο κεφάλαιο που αναφέραμε ότι αλλάζει το ασφάλιστρο όταν αλλάζει η συνάρτηση βάρους $w(x)$. Με βάση αυτά και με ανάλογο τρόπο σκέψης καταλήγουμε σε ανισότητα της μορφής

$$H\left[v, F_{w_{**}}\right] \geq H\left[v, F_{w_*}\right]. \qquad (2.10)$$

Αφού το πηλίκο $\frac{w_{**}(x)}{w_*(x)}$ είναι μη φθίνουσα συνάρτηση τότε $E\left(X_{w_{**}}\right) \geq E\left(X_{w_*}\right)$, από Θεώρημα 4 Patil and Rao (1978). Επομένως οι σχέσεις (2.9) και (2.10) είναι ισοδύναμες. Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το πηλίκο $\frac{w_{**}(x)}{w_*(x)}$ είναι το πηλίκο πιθανοφάνειας των σταθμισμένων κατανομών $F_{w_{**}}$ και F_{w_*}.

Τώρα για το φράγμα (2.10) παρατηρούμε ότι δεν έχουμε μια ανισότητα για τα $w_{**}(x)$ και $w_*(x)$ αλλά έχουμε μία σχέση για το πηλίκο. Για παράδειγμα θεωρούμε ότι $w_{**}(x) = x^2(x-2)$ και $w_*(x) = x^3$. Τότε το πηλίκο $\frac{w_{**}(x)}{w_*(x)} = \frac{x^2(x-2)}{x^3} = \frac{x-2}{x}$ αυξάνει για $x > 0$, άρα το φράγμα (2.10) ισχύει γι' αυτήν την περίπτωση. Αν θεωρούσαμε το αντίστοιχο του πηλίκου δηλαδή την περίπτωση της ανισότητας θα καταλήγαμε σε $w_{**}(x) \leq\ w_*(x)$ που δεν ισχύει και θα μπορούσε να μας οδηγήσει λανθασμένα στην αντίθετη ανισότητα μεταξύ των ασφαλίστρων $H\left[v, F_{w_{**}}\right]$ και $H\left[v, F_{w_*}\right]$.

Με βάση την σχέση (2.8) και το φράγμα $E[v(X)] \geq\ E(X)$ θα θεωρούσαμε ότι μας ενδιαφέρουν μόνο οι συναρτήσεις $v(x)$ που ικανοποιούν το συγκεκριμένο φράγμα, κάτι που δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω $v(x) = \mathbf{1}\{x > y\}$ για σταθερό y και μέσω αυτού καταλήγουμε στην σταθμισμένη κατανομή της X μέσω της εξίσωσης

$$\bar{F}_w(y) = \frac{E[\mathbf{1}\{X > y\}w(X)]}{E[w(X)]}.$$

Τώρα μέσω της (2.9) προκύπτει ότι,

$$H[v, F_w] \geq H[v, F] \Leftrightarrow \bar{F}_w \geq \bar{F} \Leftrightarrow 1 - F_w \geq 1 - F \Leftrightarrow F_w \leq F$$

Άρα με βάση τον ορισμό της συνήθης στοχαστικής διάταξης έχουμε ότι, για $X \sim F$ και $X_w \sim F_w$ τότε $X \leq_{st} X_w$. Όπως είδαμε παραπάνω το φράγμα (2.9) είναι ισοδύναμο με το φράγμα (2.10). Επομένως, αν χρησιμοποιήσουμε το φράγμα (2.10), έχουμε

$$H\left[v, F_{w_{**}}\right] \geq H\left[v, F_{w_*}\right] \Leftrightarrow \bar{F}_{w_{**}} \geq \bar{F}_{w_*} \Leftrightarrow 1 - F_{w_{**}} \geq 1 - F_{w_*} \Leftrightarrow F_{w_{**}} \leq F_{w_*},$$

που ισχύει για κάθε μη φθίνουσα συνάρτηση $w_{**}(x)$ και $w_*(x)$, όπως και για κάθε πηλίκο πιθανοφανειών $\frac{w_{**}(x)}{w_*(x)}$ που είναι μη φθίνουσα συνάρτηση.

Η μέχρι τώρα μελέτη και οι διατάξεις ήταν για τον ίδιο πληθυσμό και για διαφορετικά βάρη. Με όλα τα παραπάνω εργαλεία που αναπτύξαμε θα συγκρίνουμε σταθμισμένες κατανομές και σταθμισμένα ασφάλιστρα για δύο ή περισσότερους πληθυσμούς, με σ.κ. F και G.

Έστω $F(x), G(x)$ σ.κ. και $f(x)$, $g(x)$ σ.π.π. και συμβολίζουμε με $\frac{\partial G(x)}{\partial F(x)} = r(x)$ ή αλλιώς $r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Άρα από το παραπάνω πηλίκο προκύπτει ότι $H[v, G_w] = H\left[v, F_{w_r}\right]$. Εάν $r(x)$ είναι μη-φθίνουσα τότε από το φράγμα (2.10) παίρνουμε ότι $H\left[v, F_{w_r}\right] \geq H[v, F_w]$.

Συνδυάζοντας την παραπάνω ανισότητα και την ισότητα καταλήγουμε στην

$$H[v, F_w] \leq H\left[v, G_{w_*}\right]. \qquad (2.10)$$

Έστω η συνάρτηση $r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι μη φθίνουσα και έστω $X \sim F$ και $Y \sim G$. Άρα θα ισχύει,

$$\frac{f_w(x)}{g_w(x)} \uparrow x \Rightarrow \frac{\bar{F}_w(x)}{\bar{G}_w(x)} \uparrow x \Rightarrow \bar{F}_w(x) \leq \bar{G}_w(x) \Rightarrow X \leq_{lr} Y \Rightarrow H[v, F_w] \leq H[v, G_w].$$

Επομένως παρατηρούμε ότι γνωρίζοντας ότι η $r(x)$ είναι μη φθίνουσα τότε βρίσκουμε μία σχέση διάταξης και για τις τ.μ. X και Y και μία σχέση διάταξης για τα ασφάλιστρα $H[v, F_w]$ και $H[v, G_w]$.

2.6 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΩΝ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΩΝ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΩΝ

Στις προηγούμενες ενότητες αναφέραμε ότι οι αρχές ασφαλίστρων ικανοποιούν κάποιες επιθυμητές ιδιότητες. Σε αυτή την ενότητα θα γενικεύσουμε ακόμη περισσότερο κάποιες από τις ιδιότητες αυτές, αποδεικνύοντας ότι ισχύουν για την οικογένεια των γενικευμένων σταθμισμένων ασφαλίστρων.

Οι ιδιότητες που θα εξετάσουμε είναι η μη-μεταβλητότητα ως προς την κλίμακα, προσθετικότητα ως προς την παράμετρο και η γενική προσθετικότητα. Ξεκινάμε με την ιδιότητα της μη-μεταβλητότητας ως προς την κλίμακα.

Πρόταση 2.2

Έστω $a \geq 0$ σταθερά και η τ.μ. $aX \sim A$, τότε

$$v(ax) \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} av(x) \Rightarrow H[v, A_w] \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} aH[v, F_{w_{h_a}}],$$

όπου $h_a(x) = \frac{w(ax)}{w(x)}$.

Απόδειξη

Αρχικά θεωρούμε $v(ax) = av(x)$ και $h_a(x) = \frac{w(ax)}{w(x)}$. Άρα έχουμε,

$$H[v, A_w] = \frac{E[v(aX)w(aX)]}{E[w(aX)]} = \frac{aE[v(X)w(aX)]}{E[w(aX)]}$$

$$= \frac{aE[v(X)w(X)h_a(X)]}{E[w(X)h_a(X)]} = aH\left[v, F_{w_{h_a}}\right].$$

Για $v(ax) \leq av(x)$ και $h_a(x) = \frac{w(ax)}{w(x)}$, έχουμε

$$H[v, A_w] = \frac{E[v(aX)w(aX)]}{E[w(aX)]} \leq \frac{aE[v(X)w(aX)]}{E[w(aX)]}$$

$$= \frac{aE[v(X)w(X)h_a(X)]}{E[w(X)h_a(X)]} = aH\left[v, F_{w_{h_a}}\right].$$

Για $v(ax) \geq av(x)$ και $h_a(x) = \frac{w(ax)}{w(x)}$, αποδεικνύεται ανάλογα ότι

$$H[v, A_w] \geq aH\left[v, F_{w_{h_a}}\right].$$

Παρατήρηση 2.1

Ανακαλώντας την σχέση (2.9) (ή (2.10)) προκύπτει ότι αν $h_a(x)$ είναι

$$\begin{Bmatrix} \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha \\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta} \\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha \end{Bmatrix} \text{ τότε προκύπτει } H\left[v, F_{w_{h_a}}\right] \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} H[v, F_w].$$

Από την Πρόταση 2.2 και την Παρατήρηση 2.1 προκύπτει ότι $H[v, A_w] = H[v, F_w]$, $\forall a \geq 0$ εάν υπάρχει $\xi(a)$ τέτοιο ώστε $h_a(x) = \xi(a)$ και $v(ax) = av(x)$ για όλα τα x και a. Η μόνη μη-τετριμμένη λύση της εξίσωσης του $v(ax) = av(x)$ είναι η συνάρτηση $v(x) = x$. Αυτό μας δίνει το σταθμισμένο ασφάλιστρο $H[F_w]$ όπως είδαμε στην ενότητα (2.3). Ακόμη, η μόνη μη-τετριμμένη λύση της εξίσωσης $w(xa) = w(x)\xi(a)$ είναι για την συνάρτηση $w(x) = x^c$, όπου $c > 0$ μία σταθερά. Την συνάρτηση στάθμισης $w(x) = x^c$, $c > 0$ αναφέραμε και στην ενότητα (2.3). Για περισσότερα βλέπε Castillo et al. (2005), Θεώρημα 4.4.

Έπειτα θα εξετάσουμε την ιδιότητα της προσθετικότητας ως προς την παράμετρο.

Πρόταση 2.3

Έστω $b > 0$ σταθερά και $X + b \sim B$, τότε

$$v(x+b) \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} v(x) + b \Rightarrow H[v, B_w] \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} H\left[v, F_{w_{g_b}}\right] + b,$$

όπου $g_b(x) = \frac{w(x+b)}{w(x)}$.

Απόδειξη

Αρχικά θεωρούμε $v(x+b) = v(x) + b$ και $g_b(x) = \frac{w(x+b)}{w(x)}$. Άρα έχουμε,

$$H[v, B_w] = \frac{E[v(X+b)w(X+b)]}{E[w(X+b)]}$$

$$= \frac{E[(v(X)+b)w(X+b)]}{E[w(X+b)]}$$

$$= \frac{E[v(X)w(X+b)+bw(X+b)]}{E[w(X+b)]}$$

$$= \frac{E[v(X)w(X+b)]+E[bw(X+b)]}{E[w(X+b)]}$$

$$= \frac{E[v(X)w(X+b)]}{E[w(X+b)]} + b\frac{E[w(X+b)]}{E[w(X+b)]}$$

$$= \frac{E[v(X)w(X)g_b(X)]}{E[w(X)g_b(X)]} + b$$

$$= H\left[v, F_{w_{g_b}}\right] + b.$$

Για $v(x+b) \leq\ v(x)+b$ και $g_b(x) = \frac{w(x+b)}{w(x)}$ έχουμε,

$$H[v, B_w] = \frac{E[v(X+b)w(X+b)]}{E[w(X+b)]}$$

$$\leq \frac{E[(v(X)+b)w(X+b)]}{E[w(X+b)]}$$

$$= \frac{E[v(X)w(X+b)+bw(X+b)]}{E[w(X+b)]}$$

$$= \frac{E[v(X)w(X+b)]+E[bw(X+b)]}{E[w(X+b)]}$$

$$= \frac{E[v(X)w(X+b)]}{E[w(X+b)]} + b\frac{E[w(X+b)]}{E[w(X+b)]}$$

$$= \frac{E[v(X)w(X)g_b(X)]}{E[w(X)g_b(X)]} + b$$

$$= H\left[v, F_{w_{g_b}}\right] + b.$$

Για $v(x+b) \geq\ v(x)+b$ και $g_b(x)=\frac{w(x+b)}{w(x)}$ αποδεικνύεται ανάλογα ότι $H[v,B_w] \geq H\left[v,F_{w_{g_b}}\right]+b.$

Παρατήρηση 2.2

Ανακαλώντας την σχέση (2.9) (ή (2.10)) προκύπτει ότι αν $g_b(x)$ είναι

$\begin{Bmatrix} \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha \\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta} \\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha \end{Bmatrix}$ τότε προκύπτει $H[v,F_{w_{g_b}}] \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} H[v,F_w].$

Από την Πρόταση 2.3 και την Παρατήρηση 2.2 προκύπτει ότι $H[v,F_{w_{g_b}}]\ =H[v,F_w]$, $\forall b \geq 0$ εάν υπάρχει $\xi(b)$ τέτοιο ώστε $g_b(x)=\xi(b)$ και $v(x+b)=v(x)+b$ για όλα τα x και b. Η μόνη μη-τετριμμένη λύση της εξίσωσης $v(x+b)=v(x)+b$ είναι πάλι η συνάρτηση $v(x)=x$. Αυτό μας δίνει πάλι το σταθμισμένο ασφάλιστρο $H[F_w]$ όπως είδαμε στην Ενότητα 2.3. Όσο, για την εξίσωση του $w(x+b)=w(x)\xi(b)$ η μόνη μη-τετριμμένη λύση της είναι για την συνάρτηση $w(x)=e^{cx}$, όπου $c>0$ μία σταθερά. Για περισσότερα βλέπε Castillo et al. (2005), Θεώρημα 4.2. Επομένως οι συγκεκριμένες επιλογές της $v(x)$ και $w(x)$ δείχνουν ότι το ασφάλιστρο Esscher είναι το μόνο μέλος της κλάσης των γενικευμένων σταθμισμένων ασφαλίστρων που προκύπτει από την Πρόταση 2.3 και την Παρατήρηση 2.2.

Τέλος, θα εξετάσουμε την ιδιότητα της γενικής προσθετικότητας.

Πρόταση 2.4

Έστω $X \sim F$, $Y \sim G$ και $X+Y \sim C$. Τότε

$$v(x+y) \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} v(x)+v(y) \Rightarrow\ H[v,C_w] \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} H\big[v,(F_w)_{r_1}\big]+H\big[v,(G_w)_{r_2}\big],$$

όπου $r_1(x)=E\{w(X+Y)|X\}/w(X)$ και $r_2(x)=E\{w(X+Y)|Y\}/w(Y)$.

Απόδειξη

Έστω $v(x+y)=v(x)+v(y)$ και $r_1(x)=E\{w(X+Y)|X\}/w(X)$, $r_2(x)=E\{w(X+Y)|Y\}/w(Y)$. Άρα έχουμε,

$$H[v, C_w] = \frac{E[v(X)E\{w(X+Y)|X\}]}{E[\{w(X+Y)|X\}]} + \frac{E[v(Y)E\{w(X+Y)|Y\}]}{E[\{w(X+Y)|Y\}]}$$

$$= \frac{E[v(X)w(X)r_1(X)]}{E[w(X)r_1(X)]} + \frac{E[v(Y)w(Y)r_1(Y)]}{E[w(Y)r_1(Y)]}$$

$$= H\left[v, F_{w_{r_1}}\right] + H\left[v, G_{w_{r_2}}\right].$$

Για $v(x+y) \leq v(x) + v(y)$ και $r_1(x) = E\{w(X+Y)|X\}/w(X)$, $r_2(x) = E\{w(X+Y)|Y\}/w(Y)$. Άρα έχουμε,

$$H[v, C_w] = \frac{E[v(X)E\{w(X+Y)|X\}]}{E[\{w(X+Y)|X\}]} + \frac{E[v(Y)E\{w(X+Y)|Y\}]}{E[\{w(X+Y)|Y\}]}$$

$$\leq \frac{E[v(X)w(X)r_1(X)]}{E[w(X)r_1(X)]} + \frac{E[v(Y)w(Y)r_1(Y)]}{E[w(Y)r_1(Y)]}$$

$$= H\left[v, F_{w_{r_1}}\right] + H\left[v, G_{w_{r_2}}\right].$$

Για $v(x+y) \geq v(x) + v(y)$ αποδεικνύεται ανάλογα ότι

$$H[v, C_w] \geq H\left[v, F_{w_{r_1}}\right] + H\left[v, G_{w_{r_2}}\right].$$

Παρατήρηση 2.3

Από την σχέση (2.9) (ή (2.10)) προκύπτει ότι αν $r_1(x)$, $r_2(x)$ είναι

$$\begin{Bmatrix} \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\varepsilon\varsigma \\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma \\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\varepsilon\varsigma \end{Bmatrix} \text{τότε προκύπτει} \begin{matrix} H\left[v, F_{w_{r_1}}\right] \\ H\left[v, G_{w_{r_2}}\right] \end{matrix} \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} \begin{matrix} H[v, F_w] \\ H[v, G_w] \end{matrix}.$$

Από την Πρόταση 2.4 και την Παρατήρηση 2.3 συνεπάγεται ότι $H[v, C_w] = H[v, F_w] + H[v, G_w]$, δεδομένου ότι υπάρχουν σταθερές c_1,c_2 τέτοιες ώστε να ισχύει $r_1(x) = c_1$, $r_2(x) = c_2$ και $v(x+y) = v(x) + v(y)$. Γνωρίζουμε (Castillo et al. (2005), Θεώρημα 3.3) ότι η μόνη μη-τετριμμένη λύση της εξίσωσης είναι για $v(x) = cx$, όπου c σταθερά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΤΑ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΑ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα σημαντικό και δύσκολο πρόβλημα στον αναλογισμό είναι η τιμολόγηση ασφαλιστικών κινδύνων. Αυτός ο κλάδος ασχολείται με το ποιες αρχές ασφαλίστρων θα χρησιμοποιηθούν ή όχι ανάλογα την περίπτωση.

Γενικά θυμίζουμε, όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο 2, ότι οι αρχές ασφαλίστρων είναι συναρτήσεις της μορφής $\Pi: X \to [0, \infty)$, όπου $X \geq 0$ είναι μία συνεχή τ.μ. που παριστάνει ασφαλιστικούς κινδύνους. Από την ιδιότητα της αντικειμενικότητας (βλέπε Ενότητα 2.2) συμπεραίνουμε ότι οι αρχές ασφαλίστρων εξαρτώνται από την συνάρτηση κατανομής F. Η ιδιότητα της αντικειμενικότητας των αρχών ασφαλίστρων μας αποκλείει να λάβουμε υπόψιν μας κι άλλους παράγοντες όπως τα οικονομικά δεδομένα του ασφαλισμένου, την γενική κατάσταση της οικονομίας, την εξάρτηση από άλλους κινδύνους. Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε μία θεωρία τιμολόγησης, λαμβάνοντας υπόψιν όλα τα παραπάνω, η οποία βασίζεται στα σταθμισμένα ασφάλιστρα (βλ. Furman and Zitikis (2009)).

3.2 ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ

Οι σταθμισμένες αρχές ασφαλίστρων ή σταθμισμένα ασφάλιστρα μπορούν να επεκταθούν σε μία πιο ευρεία οικογένεια συναρτήσεων τις σταθμισμένες οικονομικές συναρτήσεις τιμολόγησης, $\Pi_w: X \times X \to [0, \infty)$ που ορίζονται ως εξής:

$$\Pi_w[X, Y] = \frac{E[Xw(Y)]}{E[w(Y)]}, \qquad (3.1)$$

όπου η τ.μ. X εκφράζει τον υπό θεώρηση κίνδυνο και η Y είναι μία τ.μ. που επηρεάζεται από την X. Η συνάρτηση $w: [0, \infty) \to [0, \infty)$ είναι αύξουσα με μέση τιμή $0 < E[w(X)] < \infty$, όπως και στην περίπτωση των σταθμισμένων ασφαλίστρων. Παρατηρούμε ότι για $w(y) = c$, όπου c οποιαδήποτε σταθερά, προκύπτει το καθαρό ασφάλιστρο $\Pi(X) = E(X)$. Επίσης η σχέση (3.1) μπορεί να γραφεί και ως

$$\Pi_w[X, Y] = E(X) + \frac{Cov[X, w(Y)]}{E[w(Y)]} \geq E(X). \qquad (3.2)$$

Αυτό ισχύει γιατί $\frac{Cov[X,w(Y)]}{E[w(Y)]} \geq 0$ γιατί το $Cov[X,w(Y)]$ είναι αύξουσα και ως προς X και ως προς $w(Y)$, άρα πληρείται η ιδιότητα (2.2).

Στις σταθμισμένες οικονομικές συναρτήσεις τιμολόγησης η γενική ιδέα είναι ότι σταθμίζουμε την τ.μ. X αλλά η στάθμιση που χρησιμοποιούμε είναι ως προς την τ.μ. Y που επηρεάζεται από την X. Σε αντιπαράθεση με τα σταθμισμένα ασφάλιστρα που η στάθμιση ήταν ως προς την τ.μ. X λόγω της ιδιότητας της αντικειμενικότητας.

Όπως και στην περίπτωση των σταθμισμένων ασφαλίστρων έτσι και με τις σταθμισμένες οικονομικές συναρτήσεις τιμολόγησης για συγκεκριμένη επιλογή της συνάρτησης $w(y)$ προκύπτουν και διαφορετικές γνωστές μορφές συναρτήσεων τιμολόγησης. Αναφέρουμε κάποιες περιπτώσεις στον παρακάτω πίνακα.

Οικονομική Συνάρτηση Τιμολόγησης	$\boldsymbol{w(y)}$	$\boldsymbol{\Pi_w[X,Y]}$
Τροποποιημένη Συνδιακύμανση	y	$E(X)+\frac{Cov(X,Y)}{E(Y)}$
Size-biased	y^t	$\frac{E(XY^t)}{E(Y^t)}$
Esscher	e^{ty}	$\frac{E(Xe^{tY})}{E(e^{tY})}$
Kamps	$1-e^{-ty}$	$\frac{E[X(1-e^{-tY})]}{E[(1-e^{-tY})]}$
Στρεβλό	$g'(F_Y(y))$	$E[Xg'(F_Y(y))]$

CTE	$\mathbf{1}\{y \geq y_p\}$	$E(X \mid Y \geq y_p)$
MTV	$y\mathbf{1}\{y \geq y_p\}$	$E(X \mid Y \geq y_p) + \frac{Cov\{X, Y \mid Y \geq y_p\}}{E(X \mid Y \geq y_p)}$

Όπως αναφέραμε και στο Κεφάλαιο 2, για το σταθμισμένο ασφάλιστρο η συνάρτηση στάθμισης $w(x)$ εξαρτάται ή όχι από την σ.κ. F. Στην περίπτωση των οικονομικών συναρτήσεων τιμολόγησης για την $w(y)$ δεν ισχύει το ίδιο, αλλά κάτι αντίστοιχο. Ανάλογα με την επιλογή της $w(y)$ τότε επηρεάζεται η δομή εξάρτησης της X και Y. Στην περίπτωση που δεν επηρεάζεται η δομή εξάρτησης ανάγεται το ασφάλιστρο Esscher, Kamps ενώ στην περίπτωση που επηρεάζεται ανάγεται το ασφάλιστρο CTE, MTV και το στρεβλό.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναλύσαμε το γενικευμένο σταθμισμένο ασφάλιστρο (βλ. Ενότητα 2.5). Με βάση αυτό ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε την γενικευμένη οικονομική συνάρτηση τιμολόγησης. Για συνάρτηση $v: [0, \infty) \to [0, \infty)$ αύξουσα ορίζουμε την γενικευμένη οικονομική συνάρτηση τιμολόγησης ως εξής:

$$\Pi_{v,w}[X, Y] = \frac{E[v(X)w(Y)]}{E[w(Y)]}. \qquad (3.3)$$

Όταν $v(x) = x$ τότε

$$\Pi_{v,w}[X, X] = \frac{E[Xw(Y)]}{E[w(Y)]} = \Pi_w[X, Y]$$

προκύπτει η σταθμισμένη οικονομική συνάρτηση τιμολόγησης. Ενώ όταν έχουμε $v(x) = \mathbf{1}\{x \leq y\}$ τότε το $\Pi_{v,w}[Y, Y]$ γίνεται η σ.κ. $F_w(y)$. Τέλος, για την συνάρτηση $v(x) = x^t$ για διάφορες επιλογές του t προκύπτει η CTV οικονομική συνάρτηση τιμολόγησης ή άλλες μεγαλύτερης τάξης δεσμευμένες ροπές. Επιπλέον ισχύουν αντίστοιχες ιδιότητες όπως στα γενικευμένα σταθμισμένα ασφάλιστρα (βλ. Ενότητα 2.2, 2.6).

3.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ

Είναι σημαντικό να μπορούμε να υπολογίσουμε το $\Pi_w[X,Y]$ δοθέντος μίας δισδιάστατης κατανομής του (X,Y) και μίας συνάρτησης στάθμισης w. Γενικά αυτό μπορεί να είναι πολύ απαιτητικό πρόβλημα σε κάποιες περιπτώσεις όπως στην οικονομική συνάρτηση τιμολόγησης CTE. Επομένως σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό της οικονομικής συνάρτησης τιμολόγησης μιας ειδικής περίπτωσης που παρουσιάζει ενδιαφέρον και με έναν διαφορετικό τρόπο υπολογισμού, μέσω ενός διαφορετικού εργαλείου της οικονομικής συνάρτησης τιμολόγησης.

Αρχικά θα περιγράψουμε μια μεθοδολογία υπολογισμού του $\Pi_w[X,Y]$ στην περίπτωση που οι τ.μ. X,Y είναι εξαρτημένες. Ειδικότερα η τ.μ. X θα είναι X_i για κάποια $i \in \{1,2,\dots,j\}$, με $X_1, X_2, \dots, X_j$ ανεξάρτητες και η τ.μ. Y θα είναι ο γραμμικός συνδυασμός $\sum_{k=1}^{j} c_k X_k$ με κάποια μη-αρνητική σταθερά c_k, όπου μπορεί να είναι για παράδειγμα μερίδιο ενός ασφαλιστικού κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου. Αυτή η μεθοδολογία ισχύει για τις οικονομικές συναρτήσεις τιμολόγησης αλλά και στην περίπτωση των γενικευμένων οικονομικών συναρτήσεων τιμολόγησης.

Όπως αναφέραμε στην Ενότητα 3.2 η οικονομική συνάρτηση τιμολόγησης μπορεί να γενικευθεί και να γραφεί σαν την σχέση (3.2). Επομένως θα υπολογίσουμε την ποσότητα

$$\Pi_{v,w}[X_i,Y] = \frac{E[v(X_i)w(Y)]}{E[w(Y)]} = \frac{E\left[v(X_i)w(\sum_{k=1}^{j} c_k X_k)\right]}{E\left[w(\sum_{k=1}^{j} c_k X_k)\right]}.$$

Η τεχνική υπολογισμού βασίζεται στο ότι η $E\left[v(X_i)w(\sum_{k=1}^{j} c_k X_k)\right]$ μπορεί να γραφεί ως το γινόμενο των $E[v(X_i)]$ και $E\left[w\left(c_i X_{i,v} + \sum_{k\neq i} c_k X_k\right)\right]$ όπου $X_{i,v}$ είναι μία ανεξάρτητη τ.μ. και έχει σ.κ.

$$F_{X_{i,v}}(x) = \frac{E[\mathbf{1}\{X_i \le x\} v(X_i)]}{E[v(X_i)]}.$$

Συνεπώς,

$$\Pi_{v,w}[X_i,Y] = \frac{E[v(X_i)]}{E[w(Y)]}\, E\left[w\left(c_i X_{i,v} + \sum_{\kappa\neq i} c_k X_k\right)\right]. \qquad (3.4)$$

Για περισσότερες πληροφορίες για την απόδειξη βλέπε Furman and Zitikis (2008c,d). Το δεξί μέλος της εξίσωσης είναι υπολογιστικά εύκολο όταν έχουμε καθορίσει την κατανομή των $X_{i,v}$ δοθέντος των X_i και όταν έχουμε καθορίσει την κατανομή των $c_i X_{i,v} + \sum_{k\neq i} c_k X_k$. Παρόλο που η παραπάνω τεχνική αναλύθηκε στην περίπτωση των ανεξάρτητων κινδύνων μπορεί να εφαρμοστεί και σε πιο ευρύ φάσμα όπως στην περίπτωση των εξαρτημένων κινδύνων (βλ. Tsanakas (2008); Furman and Landsman 2008).

Επιπλέον παρακάτω θα αναφέρουμε σε κάποιες ιδιότητες στην περίπτωση των οικονομικών συναρτήσεων τιμολόγησης στην περίπτωση που η τ.μ. X θα είναι X_i για κάποια $i \in \{1,2,\dots,j\}$, με $X_1, X_2, \dots, X_j$ ανεξάρτητες και η τ.μ. Y θα είναι ο γραμμικός συνδυασμός $\sum_{k=1}^{j} c_k X_k$ με κάποια μη-αρνητική σταθερά c_k. Οι αποδείξεις θα παραλειφθούν γιατί είναι αντίστοιχες με αυτές στην περίπτωση των γενικευμένων ασφαλίστρων (βλ. Ενότητα 2.2, 2.6).

1. **Μη-αρνητικό περιθώριο ασφαλείας**

$$\Pi_w[X_i,Y] \geq E(X_i).$$

2. **Σταθερότητα ή μη αδικαιολόγητο περιθώριο ασφαλείας**

$$\Pi_w[c,Y] = c.$$

3. **Προσθετικότητα**

$$\sum_{k=1}^{j} \Pi_w[X_i,Y] = \Pi(Y),$$

όπου

$$\Pi(Y) = \frac{E(Y^2)}{E(Y)} = E(Y) + \frac{1}{E(Y)} V(Y).$$

4. **Translation type invariance**

$$\Pi_w[X_i, Y+a] \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} a + \Pi_w[X_i,Y],$$

όπου $a \geq 0$ σταθερά.

5. **Scale type invariance**

$$\Pi_w[X_i, Y + (b-1)X_i] \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} \Pi_w[X_i, Y],$$

όπου $b > 0$ σταθερά.

6. **Additivity type invariance**

$$\Pi_w\left[\xi, \left(\sum_{i \neq k} X_i + \xi\right) + \eta\right] \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} \Pi_w\left[\xi, \sum_{i \neq k} X_i + \xi\right],$$

όπου $\eta = X_i$ αν $\xi = Y$ και $\eta = Y$ αν $\xi = X_i$.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το $\Pi_w[X, Y]$ χρησιμοποιώντας επιχειρήματα τύπου *Stein*. Αρχικά υποθέτουμε ότι το (X, Y) ακολουθεί μία δισδιάστατη κατανομή, συμμετρική ή όχι, και η συνάρτηση στάθμισης w μπορεί να είναι διαφορίσιμη ή όχι. Θα γράψουμε το $\Pi_w[X, Y]$ στην μορφή της σχέσης (3.2) δηλαδή,

$$\Pi_w[X, Y] = E(X) + \frac{Cov[X, w(Y)]}{E[w(Y)]}. \qquad (3.5)$$

Έπειτα παρατηρούμε ότι, σε πολλές περιπτώσεις, η συνδιακύμανση $Cov[X, w(Y)]$ μπορεί να χωριστεί στο γινόμενο δύο όρων:

$$Cov[X, w(Y)] = C(F_{X,Y})D(w, F_X, F_Y) \qquad (3.6)$$

όπου $C(F_{X,Y})$ δεν εξαρτάται από τη συνάρτηση στάθμισης w και $D(w, F_X, F_Y)$ δεν εξαρτάται από την α.σ.κ. $F_{X,Y}$.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την δισδιάστατη κανονική κατανομή και θα αναφέρουμε κάποιες σχετικές πληροφορίες.

Ορισμός 3.1

Έστω ότι για μια δισδιάστατη τ.μ. (X, Y) ισχύουν τα επόμενα:

i. Η τ.μ. X ακολουθεί την κανονική κατανομή.
ii. Η δεσμευμένη κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Y, δοθέντος ότι $X = x$, είναι κανονική για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
iii. Η συνάρτηση παλινδρόμησης της Y στη X είναι γραμμική, δηλαδή

$$E(Y|X=x)=\alpha x+\beta,\;\; x\in\mathbb{R}$$

όπου α,β είναι δύο πραγματικές σταθερές.

iv. Η δεσμευμένη διακύμανση της Y, δοθέντος ότι $X=x$, είναι σταθερή για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Τότε λέμε ότι η τ.μ. (X,Y) ακολουθεί την δισδιάστατη κανονική κατανομή. Για περισσότερες πληροφορίες βλ. Κούτρας (2016).

Μετά τον ορισμό της δισδιάστατης κανονικής κατανομής θα αναφέρουμε την σ.π.π. της.

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}Q(x,y)\right\},\;\; x,y\in\mathbb{R}$$

όπου

$$Q(x,y)=\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)+\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2$$

και

$$\mu_X=E(X),\mu_Y=E(Y),\sigma_X^2=V(X),\sigma_Y^2=V(Y),\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

Έπειτα θα αναφέρουμε κάποιες βασικές προτάσεις που προκύπτουν για την δισδιάστατη κανονική κατανομή.

Πρόταση 3.1

Έστω η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας μιας δισδιάστατης κανονικής τ.μ. (X,Y), τότε

i. η περιθώρια κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X είναι κανονική με παραμέτρους μ_X και σ_X^2 και

ii. η δεσμευμένη κατανομή της τ.μ. Y δοθέντος ότι $X=x$ είναι κανονική με δεσμευμένη μέση τιμή

$$E(Y|X=x)=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)+\mu_Y$$

και δεσμευμένη διακύμανση

$$V(Y|X=x) = (1-\rho^2)\sigma_Y^2.$$

Αξίζει να αναφέρουμε ότι λόγω συμμετρίας όταν η τ.μ. (X,Y) ακολουθεί τη δισδιάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους μ_X, μ_Y, σ_X^2, σ_Y^2 και ρ, θα ισχύουν επίσης και τα εξής:

i. η περιθώρια κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Y είναι κανονική με παραμέτρους μ_Y και σ_Y^2 και
ii. η δεσμευμένη κατανομή της τ.μ. X δοθέντος ότι $Y=y$ είναι κανονική με δεσμευμένη μέση τιμή

$$E(X|Y=y) = \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y)+\mu_X$$

και δεσμευμένη διακύμανση

$$V(X|Y=y) = (1-\rho^2)\sigma_X^2.$$

Παρακάτω θα δούμε ένα παράδειγμα που ισχύει η σχέση (3.6) που βασίζεται στην δισδιάστατη κατανομή του (X,Y).

Παράδειγμα 3.1

Υποθέτουμε ότι το (X,Y) ακολουθεί μία δισδιάστατη κανονική κατανομή $N_2(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$ με διάνυσμα μέσων τιμών $\boldsymbol{\mu}=(\mu_X,\mu_Y)$ και πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων Σ. Έστω η συνάρτηση w να είναι διαφορίσιμη. Από το Λήμμα του Stein (βλέπε Stein(1981)), έχουμε

$$Cov[X,w(Y)] = Cov[X,Y]E[w'(Y)] \qquad (3.7)$$

Τότε, η (3.6) ισχύει για $C(F_{X,Y}) = Cov[X,Y]$ και $D(w,F_X,F_Y) = E[w'(Y)]$. Από τις σχέσεις (3.6) και (3.7) θα έχουμε,

$$\Pi_w[X,Y] = E(X) + \frac{Cov[X,w(Y)]}{E[w(Y)]} = E(X) + Cov(X,Y)\frac{E[w'(Y)]}{E[w(Y)]}. \qquad (3.8)$$

Το δεξί μέλος της (3.8) καταφέρνει τον επιθυμητό διαχωρισμό της δομής εξάρτησης. Εάν, για παράδειγμα, είχαμε $w(y)=y$, τότε το $\Pi_w[X,Y]$ θα είναι η οικονομική συνάρτηση τιμολόγησης τροποποιημένης διακύμανσης. Δηλαδή θα είχαμε,

$$\Pi_w[X,Y] = E(X) + \frac{Cov(X,Y)}{E(Y)}.$$

Εάν είχαμε $w(y) = e^{ty}$, τότε τότε το $\Pi_w[X,Y]$ θα είναι η οικονομική συνάρτηση τιμολόγησης Esscher. Δηλαδή θα έχουμε,

$$\Pi_w[X,Y] = E(X) + Cov(X,Y)\frac{E[w'(Y)]}{E[w(Y)]}$$

$$= E(X) + Cov(X,Y)\frac{E[te^{tY}]}{E[e^{tY}]}$$

$$= E(X) + tCov(X,Y).$$

Εδώ καταλήγει το Παράδειγμα 3.1.

Η σχέση (3.6) ισχύει και σε πιο γενικές περιπτώσεις όπως στην περίπτωση των ελλειπτικών κατανομών. Για περισσότερα βλέπε Landsman and Neslehova (2008). Τελικώς προκύπτει ότι ούτε η δισδιάστατη κανονικότητα/ελλειπτικότητα του (X,Y) ούτε η διαφορισιμότητα του w είναι αναγκαίες για να χρησιμοποιηθεί η τύπου Stein (*Stein-type)* διαχώριση. Όπως απέδειξαν οι Furman and Zitikis (2008b), διαχωρίζοντας την α.σ.κ. $(X,w(Y))$ από την συνάρτηση στάθμισης w καταλήγουμε σε μία κεντρική συνάρτηση παλινδρόμησης

$$r_{X|Y}(y) = E\{X - E[X]|Y = y\}$$

η οποία απαιτεί την παραδοχή της διαχώρισης

$$r_{X|Y}(y) = C\big(F_{X,Y}\big)q(y, F_X, F_Y), \qquad (3.9)$$

όπου η ποσότητα $C\big(F_{X,Y}\big)$ δεν εξαρτάται από το βάρος w και $y \to q(y, F_X, F_Y)$ μία συνάρτηση η οποία δεν εξαρτάται από την α.σ.κ. $F_{X,Y}$. Η κεντρική συνάρτηση παλινδρόμησης είναι μία συνάρτηση μίας τ.μ. από την οποία αφαιρείται η μέση τιμή ώστε η μέση τιμή της νέας μεταβλητής να πλησιάζει στο 0 και να αλλάζει η θέση (*scale*) της. Γενικά όταν θέλουμε να δημιουργήσουμε μία κεντρική συνάρτηση αφαιρούμε από την τ.μ. μία σταθερά και δημιουργούμε μία νέα.

Αν ισχύει η διαχώριση (3.6) τότε για $D(w, F_X, F_Y) = E[w(Y)q(Y, F_X, F_Y)]$, συνάρτηση ανεξάρτητη από την α.σ.κ. $F_{X,Y}$, το $\Pi_w[X,Y]$ γράφεται ως:

$$\Pi_w[X,Y] = E(X) + C\big(F_{X,Y}\big)\frac{E[w(Y)q(Y, F_X, F_Y)]}{E[w(Y)]}. \qquad (3.10)$$

Θεωρούμε μία ειδική περίπτωση, όταν $q(y, F_X, F_Y) = y - E(Y)$. Τότε προκύπτει (βλ. Furman and Zitikis (2010)),

$$Cov[X, w(Y)] = C\big(F_{X,Y}\big)Cov[Y, w(Y)] \qquad (3.11)$$

που το δεξί μέλος της εξίσωσης (3.10) διαχωρίζει την δομή εξάρτησης του ζεύγους (X, Y) από την συνάρτηση στάθμισης w. Αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφεί σε ακόμη καλύτερη μορφή σαν

$$\frac{Cov[X, w(Y)]}{Cov[Y, w(Y)]} = C\big(F_{X,Y}\big). \qquad (3.12)$$

Η εξίσωση (3.12) δείχνει ότι το πηλίκο στο αριστερό μέλος της δεν εξαρτάται από την συνάρτηση στάθμισης w.

Έπειτα μπορούμε να γράψουμε το Λήμμα του Stein ως

$$Cov[X, w(Y)] = Cov(X, Y)\frac{Cov[Y, w(Y)]}{V(Y)}. \qquad (3.13)$$

Αφού ισχύει η σχέση (3.11) για κάθε συνάρτηση στάθμισης w τέτοια ώστε να ισχύει $E[w(Y^2)]$ τότε θα πρέπει να ισχύει και για την περίπτωση όπου $w(y) = y$, με την προϋπόθεση ότι ισχύει $E(Y^2)$. Αυτό δείχνει ότι η $C\big(F_{X,Y}\big)$ πρέπει να είναι ίση με

$$\frac{Cov[X, w(Y)]}{V(Y)}, \qquad (3.14)$$

που στα χρηματοοικονομικά ονομάζεται συντελεστής «βήτα». Τότε με βάση την προηγούμενη παρατήρηση και από τις σχέσεις (3.6), (3.10), (3.11) και (3.13) προκύπτει ότι

$$\Pi_w[X,Y] = E(X) + \frac{Cov[Y, w(Y)]}{E[w(Y)]}\frac{Cov(X, Y)}{V(Y)}. \qquad (3.15)$$

Επομένως υποθέτοντας ότι έχουμε ίδιες περιθώριες κατανομές των δύο ζευγών ρίσκων X και Y, αυτό με την μεγαλύτερη συνδιακύμανση δίνει μεγαλύτερη τιμή για το $\Pi_w[X, Y]$ λόγω της (3.15).

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε λίγα πράγματα για τις ελλειπτικές κατανομές. Οι δισδιάστατες κατανομές των οποίων οι καμπύλες των πυκνοτήτων τους είναι ελλείψεις, συγκεκριμένα ελλείψεις με σταθερή εκκεντρότητα, ονομάζονται ελλειπτικές. Τα τελευταία χρόνια υπάρχει μεγάλη ανάπτυξη των πολυδιάστατων ελλειπτικών κατανομών σαν μία γενίκευση των πολυδιάστατων κανονικών κατανομών. Αυτό συμβαίνει γιατί οι πολυδιάστατες ελλειπτικές κατανομές διατηρούν τις περισσότερες επιθυμητές ιδιότητες των πολυδιάστατων κανονικών κατανομών.

Έπειτα θα ορίσουμε την σ.π.π. μιας ελλειπτικής κατανομής. Εάν η σ.π.π. $h(x, y)$ είναι μία συνάρτηση της τετραγωνικής μορφής

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$$

τότε οι καμπύλες τους είναι ελλείψεις, όπου $\boldsymbol{x}' = (x, y)$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ και $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι ένας αντιστρέψιμος κλιμακωτός πίνακας που προσδιορίζεται μόνο από μία πολλαπλασιαστική σταθερά. Ο ρόλος του πίνακα είναι ανάλογος με τον πίνακα διακυμάνσεων συνδιακυμάνσεων. Πιο συγκεκριμένα η σ.π.π. εκφράζεται ως

$$h(x, y) = \left|\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\right| g_c\big((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\big)$$

όπου $g_c(\cdot)$ είναι μία συνάρτηση κλίμακας που αναφέρεται και ως γεννήτορας πυκνότητας. Επίσης η χαρακτηριστική συνάρτηση ψ εξαρτάται μόνο από την τετραγωνική μορφή $\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{t}$ (θεωρώντας ότι $\boldsymbol{\mu} = 0$). Εδώ $\boldsymbol{t}' = (s, t)$. Γενικά η χαρακτηριστική συνάρτηση μίας ελλειπτικής κατανομής δίνεται από

$$\psi(s, t) = exp\{i\boldsymbol{t}\boldsymbol{\mu}\}\psi(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{t})$$

Για μία βαθμωτή συνάρτηση ψ που καλείται χαρακτηριστικός γεννήτορας. Επιπλέον

$$\psi(s, t) = exp\{i\boldsymbol{t}\boldsymbol{\mu}\}\psi(s^2 + 2\rho st + t^2)$$

αν $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$. Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε Balakrishnan and Lai (2009).

Με έναυσμα την σχέση (3.15) θα δώσουμε ένα παράδειγμα στην περίπτωση που το (X, Y) ακολουθεί δισδιάστατη ελλειπτική κατανομή.

Παράδειγμα 3.2

Έστω (X, Y) ακολουθεί δισδιάστατη ελλειπτική κατανομή $E_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{B}, \psi)$ όπου το διάνυσμα των μέσων $\boldsymbol{\mu} = (E(X), E(Y))$, ο θετικά ορισμένος πίνακας $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \beta_X^2 & \gamma_{X,Y} \\ \gamma_{Y,X} & \beta_Y^2 \end{pmatrix}$ και χαρακτηριστικό γεννήτορα ψ: $[0, \infty] \to \mathbb{R}$. Η κεντρική συνάρτηση παλινδρόμησης $r_{X|Y}(y)$ προκύπτει να είναι γραμμική και είναι της μορφής

$$r_{X|Y}(y) = \frac{\gamma_{X,Y}}{\beta_Y^2}(y - E(Y)).$$

Επομένως, η (3.9) ισχύει για $C(F_{X,Y}) = \frac{\gamma_{X,Y}}{\beta_Y^2}$ και $q(y, F_X, F_Y) = y - E(Y)$ και έχουμε και ότι

$$\Pi_w[X, Y] = E(X) + \frac{\gamma_{X,Y}}{\beta_Y^2} \frac{Cov[Y, w(Y)]}{E(w(Y))}$$

Εδώ καταλήγει το Παράδειγμα 3.2.

Επομένως είδαμε ότι η σχέση (2.15) έχει εφαρμογή και στην περίπτωση των δισδιάστατων ελλειπτικών κατανομών που ναι μεν είναι συμμετρικές αλλά είναι και πιο γενικές από την περίπτωση των δισδιάστατων κανονικών. Επίσης προκύπτει ότι η $r_{X|Y}(y)$ είναι γραμμική μία ιδιότητα που είναι επιθυμητή.

3.4 ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΟ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ

Στην αρχή του Κεφαλαίου 3 αναπτύχθηκε μία νέα κλάση οικονομικών συναρτήσεων τιμολόγησης που βασίζεται στα σταθμισμένα ασφάλιστρα που αναφέραμε στο Κεφάλαιο 2. Έπειτα υπολογίσαμε την οικονομική συνάρτηση τιμολόγησης για κάποιες συγκεκριμένες περιπτώσεις και μέσω ενός διαφορετικού εργαλείου, της τύπου *Stein* (*Stein-type*) διαχώρισης. Ακολούθως θα μελετήσουμε μία μεθοδολογία τιμολόγησης για ασφαλιστικούς κινδύνους που βασίζεται στο μοντέλο *Capital Asset Pricing Model* (*CAPM*) (βλ. Furman and Zitikis 2017).

Αρχικά θα αναφέρουμε λίγα λόγια για το κλασσικό μοντέλο CAPM. Το CAPM είναι ένα μοντέλο που χρησιμοποιείται στα χρηματοοικονομικά και υπολογίζει την αναμενόμενη απόδοση ενός περιουσιακού στοιχείου (*asset*) i ή μίας επένδυσης ($E(R_i)$). Το μοντέλο υπολογίζει την αναμενόμενη απόδοση χρησιμοποιώντας το επιτόκιο μηδενικού ρίσκου (*risk-free*) (r_j), την αναμενόμενη απόδοση της αγοράς ($E(R_m)$) και την ευαισθησία ή αλλιώς τον συντελεστή «βήτα». Επομένως το μοντέλο CAPM δίνεται από την σχέση

$$E(R_i) = r_j + \beta_{i,m}\big(E(R_m) - r_j\big). \qquad (3.16)$$

Ο συντελεστής «βήτα» προκύπτει από την σχέση (3.12) και στην περίπτωσή μας θα συμβολίζεται ως

$$\beta_{i,m} = \frac{Cov[R_i, R_m]}{V(R_m)}. \qquad (3.17)$$

Παρατηρώντας την εξίσωση (3.15) καταλήγουμε ότι ενώ στην θεωρητική βάση του το μοντέλο CAPM έλαβε υπόψιν την συνάρτηση ωφελιμότητας, η τελική εξίσωση τιμολόγησης δεν βασίζεται σε αυτήν. Αυτό έχει αποδειχθεί ότι ισχύει για συγκεκριμένες περιπτώσεις της συνάρτησης ωφελιμότητας του επενδυτή και της κατανομής των (R_i, R_m), όπως η δισδιάστατη κανονικότητα ή γενικότερα η ελλειπτικότητα (βλ. Muller (1987), Valdez and Hamada (2008)).

Αργότερα οι Furman and Zitikis (2009) απέδειξαν ότι το μοντέλο CAPM ισχύει για μία κλάση δισδιάστατων κατανομών πιο γενική από αυτή των συμμετρικών. Με βάση αυτό μπορεί να αναπτυχθεί ένα μοντέλο ασφαλιστικής τιμολόγησης που «μιμείται» με κάποιο τρόπο το CAPM. Για να δείξουμε το σκεπτικό μας θεωρούμε ότι το ζεύγος (X, Y) ακολουθεί δισδιάστατη κανονική κατανομή. Από την Ενότητα 3.3 και τις σχέσεις (3.5) και (3.15) έχουμε,

$$\begin{aligned}\Pi_w[X,Y] - E(X) &= \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)}\frac{Cov[Y,w(Y)]}{E[w(Y)]} \\ &= \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)}\frac{E[Yw(Y)] - E(Y)E[w(Y)]}{E[w(Y)]}\end{aligned}$$

$$= \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)}\left[\frac{E[Yw(Y)]}{E[w(Y)]} - \frac{E(Y)E[w(Y)]}{E[w(Y)]}\right]$$

$$= \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)}\big(\Pi(Y_w) - E(Y)\big). \qquad (3.18)$$

Η μορφή της εξίσωσης (3.18) είναι πολύ σημαντική γιατί συμπεραίνουμε εύκολα από αυτή ότι για να υπολογίσουμε την οικονομική συνάρτηση τιμολόγησης $\Pi_w[X,Y]$ αρκεί να υπολογίσουμε το σταθμισμένο ασφάλιστρο $\Pi(Y_w)$, μία διαδικασία σαφώς πιο εύκολη. Οι υπόλοιπες ποσότητες στο δεξί μέλος της (3.18) (μέση τιμή, διακύμανση, συνδιακύμανση) είναι εύκολα υπολογίσιμες ποσότητες δοθέντος της κατανομής των εκάστοτε τ.μ. είτε μπορούν εύκολα να εκτιμηθούν από τα δεδομένα. Επιπλέον μπορώ να γράψω την εξίσωση (3.18) στην μορφή

$$\frac{\Pi_w[X,Y] - E(X)}{\Pi(Y_w) - E(Y)} = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)}. \qquad (3.19)$$

Άρα σύμφωνα με την εξίσωση (3.19) παρατηρούμε ότι το πηλίκο $[\Pi_w[X,Y] - E(X)]/[\Pi(Y_w) - E(Y)]$ του αριστερού μέλους δεν εξαρτάται από την συνάρτηση στάθμισης w. Αυτή η παρατήρηση βρίσκεται σε αναλογία με το CAPM μοντέλο και πάνω σε αυτήν βασίστηκε η ιδέα του σταθμισμένου ασφαλιστικού μοντέλου τιμολόγησης (*Weighted Insurance Pricing Model, WIPM*).

Συγκεκριμένα έστω ότι το ζεύγος (X,Y) είναι τέτοιο ώστε η κεντρική συνάρτηση παλινδρόμησης

$$r_{X|Y}(y) = C\big(F_{X,Y}\big)(y - E(Y)). \qquad (3.20)$$

Τότε από την (3.18) θα ισχύει

$$\Pi_w[X,Y] = E(X) + C\big(F_{X,Y}\big)\big(\Pi(Y_w) - E(Y)\big). \qquad (3.21)$$

Η ισχύ της σχέσης (3.21) εξαρτάται από την γραμμικότητα της κεντρική συνάρτησης παλινδρόμησης $r_{X|Y}(y)$ άρα η εξίσωση ισχύει για μία μεγάλη κλάση δισδιάστατων κατανομών. Πιο συγκεκριμένα γνωρίζουμε ήδη ότι η σχέση (3.21) ισχύει για δισδιάστατες κανονικές και ελλειπτικές κατανομές. Παρακάτω θα δείξουμε ότι ισχύει και για άλλες κατανομές που έχουν εφαρμογή στον αναλογισμό. Πριν από αυτό όμως θα παρουσιάσουμε κάποια θεωρητικά αποτελέσματα που σχετίζονται με τα επακόλουθα παραδείγματα.

Αρχικά θα αναφερθούμε στην πολυδιάστατη Pareto. Γενικά η κατανομή Pareto έχει διάφορες μορφές όπως και στην μονοδιάστατη έτσι και στην πολυδιάστατη περίπτωση. Θα ασχοληθούμε συγκεκριμένα με την πολυδιάστατη Pareto τύπου II που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω σε ένα παράδειγμα. Ο Mardia (1962) όρισε την πολυδιάστατη Pareto τύπου II. Αρχικά σημειώνουμε ότι αν

$$f_X(x) = \alpha\theta x^{-\alpha-1}, \;\; x > \theta > 0, \alpha > 0,$$

τότε $\log(X/\theta)$ θα ακολουθεί εκθετική κατανομή. Αν $X_1, X_2, \ldots, X_k$ το καθένα ακολουθεί Pareto κατανομή με

$$f_{X_i}(x_i) = \alpha_i \theta_i^{\alpha_i} x_i^{-\alpha_i-1}, \;\; x_i > \theta > 0, \alpha_i > 0.$$

Τότε οι τ.μ.

$$Y_i = \alpha_i \log(X_i/\theta_i), \;\; , i = 1,2, \ldots, k$$

θα ακολουθούν μία μορφή πολυδιάστατης εκθετικής κατανομής. Σημειώνουμε ότι τα α_i δεν χρειάζεται να είναι ίσα για να είναι μία πολυδιάστατη κατανομή Pareto τύπου II. Προκύπτει ότι η πολυδιάστατη εκθετική μορφή είναι μία πολυδιάστατη Pareto τύπου I. Από την μορφή της από κοινού συνάρτηση ουράς της Pareto τύπου I ο Arnold (1983) την γενίκευσε και προέκυψε η από κοινού συνάρτηση ουράς Pareto τύπου II, με την προσθήκη μίας παραμέτρου θέσης $\boldsymbol{\mu}$. Άρα θα έχουμε

$$F(x_i) = \left(1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i - \mu_i}{\theta_i}\right)^{-\alpha}, \;\; x_i \geq \mu_i, \theta_i \geq 0, \alpha > 0$$

και συμβολίζουμε $X \sim Pa_k(II)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \alpha)$ με

$$E(X_i) = \mu_i + \frac{\theta_i}{\alpha - 1}, \alpha > 1.$$

$$V(X_i) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \theta_i^2, \;\; \alpha > 2, i = 1,2, \ldots, k.$$

$$Cov(X_i, X_j) = \frac{\theta_i \theta_j}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, i \neq j.$$

Επίσης προκύπτει ότι η κεντρική συνάρτηση παλινδρόμησης είναι γραμμική. Για περισσότερα βλέπε Kotz et al. (2000).

Στη συνέχεια μέσω ενός παραδείγματος θα ελέγξουμε αν ισχύει η σχέση (3.21) για μία δισδιάστατη κατανομή Pareto τύπου ΙΙ.

Παράδειγμα 3.3

Έστω $(X, Y) \sim Pa_2(II)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \alpha)$, τότε από την σχέση (3.20) και την θεωρία για την Pareto που αναφέραμε παραπάνω θα έχουμε

$$C(F_{X,Y}) = \frac{Cov(X, Y)}{V(Y)} = \frac{\theta_1}{\alpha \theta_2}.$$

Επομένως θα ισχύει και η σχέση (3.21). Επίσης πρέπει να σημειώσουμε ότι όλη η κλάση των Pearson δισδιάστατων κατανομών, που η Pareto τύπου ΙΙ ανήκει σε αυτή, χαρακτηρίζεται από γραμμικές κεντρικές συναρτήσεις παλινδρόμησης. Εδώ καταλήγει το Παράδειγμα 3.3.

Το επόμενο παράδειγμα θα αφορά μία δισδιάστατη κατανομή Γάμμα που δεν ανήκει στην κλάση Pearson αλλά έχει γραμμική κεντρική συνάρτηση παλινδρόμησης. Αρχικά θα αναφέρουμε κάποια πράγματα για την κατανομή Γάμμα με βάση τους Mathai and Moschopoulos (1991).

Μια πραγματική κατανομή Γάμμα με παραμέτρους σχήματος, κλίμακας και τοποθεσίας α, β και γ αντίστοιχα έχουν πυκνότητα

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{(x-\gamma)^{\alpha-1} exp\left(-\frac{x-\gamma}{\beta}\right)}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)}, \ \ x > \gamma, \alpha > 0, \beta > 0.$$

Τότε γράφουμε ότι $X \sim Γάμμα$. Η κατανομή Γάμμα δύο παραμέτρων (σχήματος-κλίμακας) και η εκθετική προκύπτουν από την παραπάνω γενικευμένη μορφή. Τώρα θα ορίσουμε την πολυδιάστατη μορφή της.

Ορισμός 3.2

Έστω $V_i \sim Γάμμα(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i), i = 0,1, \dots, k$ όπου τα V_i είναι εξαρτημένα και έστω

$$V_i = \frac{\beta_i}{\beta_0} V_0 + V_i, \quad i = 1,2, \dots, k.$$

Τότε η πυκνότητα του διανύσματος $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \dots, Z_k)$ θα είναι μία πολυδιάστατη κατανομή Γάμμα, δηλαδή $Z_i \sim Γάμμα(\alpha_0 + \alpha_i, \beta_i, \left(\frac{\gamma_0}{\beta_0}\right) \beta_i + \gamma_i)$. Επίσης θα έχει

$$E(Z_i) = (\alpha_0 + \alpha_i)\beta_i + \left(\frac{\gamma_0}{\beta_0}\right) \beta_i + \gamma_i,$$

$$V(Z_i) = (\alpha_0 + \alpha_i)\beta_i^2,$$

$$Cov(Z_i, Z_j) = \alpha_0 \beta_i \beta_j, i \neq j.$$

Έπειτα θα δώσουμε ένα παράδειγμα που αναφέρεται σε μία δισδιάστατη γενικευμένη κατανομή Γάμμα.

Παράδειγμα 3.4

Έστω $(X, Y) \sim Γάμμα(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \gamma)$ η δισδιάστατη γενικευμένη κατανομή Γάμμα των Mathai and Moschopoulos (1991). Τότε από την (3.20) και την θεωρία που αναφέραμε παραπάνω θα έχουμε

$$C(F_{X,Y}) = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)} = \frac{\beta_1 \alpha_0}{\beta_2(\alpha_0 + \alpha_2)}.$$

Επομένως θα ισχύει και η σχέση (3.21). Η συγκεκριμένη κατανομή Γάμμα χρησιμοποιείται για να μελετηθούν εξαρτημένοι κίνδυνοι δεδομένου ότι υπάρχει ένα κίνδυνος στο προσκήνιο και μέσω αυτού δημιουργούμε ανεξάρτητους κινδύνους.

Εδώ καταλήγει το Παράδειγμα 3.4. Με βάση όλη την παραπάνω ανάλυση και μέσω των παραδειγμάτων δείξαμε ότι το σταθμισμένο ασφαλιστικό μοντέλο τιμολόγησης έχει ευρεία εφαρμογή και είναι αρκετά γενικό δηλαδή ισχύει για πολλές περιπτώσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ ΒΑΣΙΣΜΕΝΑ ΣΕ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΕΣ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε προηγούμενο Κεφάλαιο έχουμε αναλύσει την έννοια των αρχών ασφαλίστρων, την γενική ιδέα δημιουργία τους και διάφορες ιδιότητες τους (βλ. Κεφάλαιο 2). Οι αρχές ασφαλίστρων επηρεάζονται από την συνεχή τ.μ. $X \geq 0$ που εκφράζει τον κίνδυνο. Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι οι αρχές ασφαλίστρων μπορεί να επηρεάζονται και από άλλον έναν παράγοντα ταυτόχρονα με τον κίνδυνο X όπως το γενικό οικονομικό περιβάλλον ή την εξάρτηση από άλλους κινδύνους κτλ. (βλ. Κεφάλαιο 3).

Στην ασφαλιστική επιστήμη είναι πιθανό τα ασφάλιστρα να επηρεάζονται από πολλούς παράγοντες ταυτόχρονα εκτός από τον κίνδυνο X. Για παράδειγμα, στο κλάδο των ασφαλίσεων ζημιών μπορεί να συμβεί ένα καταστροφικό γεγονός, όπως πλημμύρες, φωτιές, ανεμοστρόβιλοι, και να προκληθεί μία τεράστια ζημιά για τις ασφαλιστικές εταιρείες. Επομένως αυτά τα γεγονότα έχουν αντίκτυπο και στους ασφαλιστές και στους ασφαλισμένους, συνεπώς επηρεάζουν τις αρχές ασφαλίστρων. Σε έναν ειδικό τομέα ασφαλίσεων, στις αγροτικές ασφαλίσεις, οι ζημιές είναι μεταβλητές και υψηλά συσχετισμένες με την γεωγραφική θέση, λόγω και των κλιματικών αλλαγών και των ακραίων καιρικών φαινομένων. Οι Zhu et. al (2016) και Zhu et. al (2019) έδειξαν ότι ενσωματώνοντας επιπρόσθετες πληροφορίες σχετικά με την τιμολόγηση των αγροτικών κινδύνων βελτιώνεται και η αποτελεσματικότητα των ασφαλίστρων. Συνεπώς η γενική ιδέα είναι να ενσωματώσουμε εξωτερικούς παράγοντες κινδύνου στο κάδρο τιμολόγησης ώστε να βελτιώσουμε τα ασφάλιστρα. Με βάση και τα προηγούμενα δύο κεφάλαια, η ιδέα είναι να συμβεί αυτό μέσω των πολυδιάστατων σταθμισμένων κατανομών, γενικεύοντας ότι αναφέρθηκε στην μονοδιάστατη περίπτωση (κίνδυνος X) και στην δισδιάστατη περίπτωση (κίνδυνος X, εξωτερικός παράγοντας κινδύνου Y).

4.2 ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΑ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΑ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ

Γενικά, οι πολυδιάστατες σταθμισμένες κατανομές ορίζονται σύμφωνα με τον Navarro et. al (2006).

Ορισμός 4.1

Η πυκνότητα της πολυδιάστατης σταθμισμένης κατανομής που σχετίζεται με το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_p)$ και τη σταθμισμένη συνάρτηση $w(\boldsymbol{x}) = w(x_1, \dots, x_p)$ είναι

$$f_{\boldsymbol{X}_w}(\boldsymbol{x}) = f_{\boldsymbol{X}_w}(x_1, \dots, x_p)$$

$$= \frac{w(x_1, \dots, x_p)}{E\left(w(X_1, \dots, X_p)\right)} f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \dots, x_p)$$

$$= \frac{w(\boldsymbol{x})}{E\left(w(\boldsymbol{X})\right)} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}).$$

Θεωρούμε ότι $X \geq 0$ είναι μία συνεχής τ.μ. και $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \dots, Y_p)$ κάποιο p-διάστατο τυχαίο διάνυσμα. Τότε η πολυδιάστατη σταθμισμένη κατανομή του $(X, \boldsymbol{Y})$ ορίζεται παρακάτω.

Ορισμός 4.2

Έστω $(X_w, \boldsymbol{Y}_w)$ είναι ένα διάνυσμα σταθμισμένων τ.μ. που σχετίζεται με το $(X, \boldsymbol{Y})$ και $w(\boldsymbol{y}) = w(y_1, \dots, y_p)$ με από κοινού πυκνότητα

$$f_{X_w, \boldsymbol{Y}_w}(x, \boldsymbol{y}) = \frac{w(y_1, \dots, y_p)}{E\left[w(Y_1, \dots, Y_p)\right]} f_{X, \boldsymbol{Y}}(x, y_1, \dots, y_p)$$

$$= \frac{w(\boldsymbol{y})}{E[w(\boldsymbol{Y})]} f_{X, \boldsymbol{Y}}(x, \boldsymbol{y}).$$

Σύμφωνα με αυτούς τους ορισμούς, η πυκνότητα της τ.μ. X_w μπορεί να εκφραστεί ως (δες Navarro et al 2006).

$$f_{X_w}(x) = \int_{y \in \mathbb{R}_+^p} f_{X_w, \boldsymbol{Y}_w}(x, \boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{y}$$

$$= \frac{\int_{y \in \mathbb{R}_+^p} w(\boldsymbol{y}) f_{\boldsymbol{Y}|X}(\boldsymbol{y}|x)\, d\boldsymbol{y}}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)}$$

$$= \frac{E(w(\boldsymbol{Y})|X = x)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)} f_X(x).$$

Στην συνέχεια με βάση τους ορισμούς των σταθμισμένων ασφαλίστρων, γενικεύοντας τους, θα δώσουμε τον ορισμό του πολυδιάστατου σταθμισμένου ασφαλίστρου.

Ορισμός 4.3

Για ένα κίνδυνο X με πυκνότητα $f_X(x)$, το πολυδιάστατο σταθμισμένο ασφάλιστρο που σχετίζεται με τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{Y}$ και θετική σταθμισμένη συνάρτηση $w(\boldsymbol{y})$ ορίζεται ως

$$\Pi_w(X, \boldsymbol{Y}) = \frac{E(Xw(\boldsymbol{Y}))}{E(w(\boldsymbol{Y}))}. \qquad (4.1)$$

Το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{Y}$ εκφράζει τους εξωτερικούς παράγοντες κινδύνου που μπορεί να σχετίζονται με την τ.μ. X, που εμπεριέχει σημαντικές μεταβλητές που πρέπει να ληφθούν υπόψη από τους ασφαλιστές και τους αντασφαλιστές στην τιμολόγηση. Επίσης, το διάνυσμα $\boldsymbol{Y}$ δεν μπορεί να είναι διαφορετικής μορφής από την X. Συγκεκριμένα όταν $\boldsymbol{Y} = X$ το πολυδιάστατο σταθμισμένο ασφάλιστρο, με βάση τον Ορισμό 4.3, εκφυλίζεται στο μονοδιάστατο σταθμισμένο ασφάλιστρο του Furman and Zitikis (2008a).

Στο Κεφάλαιο 3 είδαμε κάποια παραδείγματα της οικονομικής συνάρτησης τιμολόγησης ή αλλιώς την δισδιάστατη περίπτωση ασφαλίστρων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα υπολογίσουμε πολυδιάστατα σταθμισμένα ασφάλιστρα. Γενικά για να υπολογίσουμε πολυδιάστατα σταθμισμένα ασφάλιστρα το πιο δύσκολο κομμάτι είναι ο υπολογισμός της $E(Xw(\boldsymbol{Y}))$ γιατί απαιτεί να γνωρίζουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής των X και $\boldsymbol{Y}$. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάσαμε ότι μπορεί να γίνει διάσπαση της συνδιακύμανσης $Cov(X.w(\boldsymbol{Y}))$ μέσω επιχειρημάτων τύπου-*Stein* (βλ. Furman and Zitikis (2008b)). Στην πολυδιάστατη περίπτωση μπορούμε να δούμε την $w(\boldsymbol{Y})$ σαν μία νέα τ.μ. $U = w(\boldsymbol{Y})$. Έτσι η $E(Xw(\boldsymbol{Y}))$ μπορεί να υπολογιστεί μέσω μιας δισδιάστατης *copula*. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με το θεώρημα του Sklar (1959), η από κοινού σ.κ. του X και U μπορεί να διαχωριστεί σε δύο μέρη: τις περιθώριες κατανομές, που συμβολίζονται ως $F_X(x)$ και $F_U(u)$, και την δομή εξάρτησης π.χ. την συνάρτηση *copula* που συμβολίζεται ως $C_{X,U}$.

Επομένως μπορούμε να εκφράσουμε την από κοινού σ.κ. και σ.π.π. των X και U ως:

$$F_{X,U}(x,u) = C_{X,U}(F_X(x), F_U(u)), \qquad (4.2)$$

$$\begin{aligned} f_{X,U}(x,u) &= \frac{\partial^2 F_{X,U}(x,u)}{\partial x \partial u} \\ &= c_{X,U}(F_X(x), F_U(u)), \qquad (4.3) \end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση $c_{X,U}$ είναι η σ.π.π. της *copula*. Σύμφωνα με τις σχέσεις (4.2) και (4.3), μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την $E(Xw(\boldsymbol{Y}))$ ως εξής:

$$\begin{aligned} E\big(Xw(\boldsymbol{Y})\big) &= E(XU) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} xu\, f_{X,U}(x,u)dxdu \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} xuc_{X,U}\big(F_X(x), F_U(u)\big) f_X(x) f_U(u)dxdu. \qquad (4.4) \end{aligned}$$

Η σχέση (4.4) δεν είναι δύσκολο να υπολογιστεί αν υπάρχει γνωστή συνάρτηση *copula*. Αυτός ο υπολογισμός είναι ιδιαίτερα εύκολος όταν η συνάρτηση *copula* είναι από μία γνωστή οικογένεια κατανομών copula όπου οι πυκνότητες έχουν κλειστή μορφή, όπως οι Ελλειπτικές και οι Αρχιμήδειες *copulas*.

4.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΩΝ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΩΝ

Στα προηγούμενα κεφάλαια αναφέραμε κάποιες επιθυμητές ιδιότητες των αρχών υπολογισμού ασφαλίστρων και πως στην περίπτωση των μονοδιάστατων σταθμισμένων ασφαλίστρων και στην οικονομική συνάρτηση τιμολόγησης αυτές ικανοποιούνται (βλ. Κεφάλαιο 2 και Κεφάλαιο 3). Σε αυτή την ενότητα θα συζητηθούν κάποιες αντίστοιχες ιδιότητες που ισχύουν και στην περίπτωση των πολυδιάστατων σταθμισμένων ασφαλίστρων.

1) Μη-αρνητικό περιθώριο ασφαλείας

$\Pi_w(X,\boldsymbol{Y}) \geq E(X)$ αν και μόνο αν $Cov\big(X, w(\boldsymbol{Y})\big) \geq 0$.

Απόδειξη

Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.3 έχουμε,

$$\Pi_w(X,\boldsymbol{Y}) - E(X) = \frac{E\big(Xw(\boldsymbol{Y})\big)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)} - E(X)$$

$$= \frac{E\big(Xw(\boldsymbol{Y})\big) - E(X)E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)}$$

$$= \frac{Cov\big(X, w(\boldsymbol{Y})\big)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)}.$$

Για $w(\boldsymbol{Y})$ αύξουσα συνάρτηση και $X \geq 0$ τ.μ. έχουμε, $Cov\big(X, w(\boldsymbol{Y})\big) \geq 0$.

Άρα προκύπτει ότι, $\Pi_w(X,\boldsymbol{Y}) \geq E(X)$ αν και μόνο αν $Cov\big(X, w(\boldsymbol{Y})\big) \geq 0$.

2) Σταθερότητα ή μη αδικαιολόγητο περιθώριο ασφαλείας

Αν ο κίνδυνος X είναι εκφυλισμένος, όπου υπάρχει μία σταθερά c έτσι ώστε $P(X = c) = 1$, για οποιαδήποτε τυχαία διανύσματα $\boldsymbol{Y}$ που έχουμε $E(X|\boldsymbol{Y}) = c$. Επομένως,

$$\Pi_w(X,\boldsymbol{Y}) = \frac{E\big(w(\boldsymbol{Y})E(X|\boldsymbol{Y})\big)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)} = \frac{E(w(\boldsymbol{Y})c)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)} = c.$$

3) Γραμμικότητα

Για οποιαδήποτε σταθερά a και b,

$$\Pi_w(aX + b,\boldsymbol{Y}) = \frac{E\big((aX+b)w(\boldsymbol{Y})\big)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)}$$

$$= \frac{E\big(aXw(\boldsymbol{Y}) + bw(\boldsymbol{Y})\big)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)}$$

$$= \frac{aE\big(Xw(\boldsymbol{Y})\big) + bE\big(w(\boldsymbol{Y})\big)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)}$$

$$= a\frac{E\big(Xw(\boldsymbol{Y})\big)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)} + b$$

$$= a\Pi_w(X, \boldsymbol{Y}) + b.$$

Η ιδιότητα της γραμμικότητας υποδηλώνει ότι το πολυδιάστατο σταθμισμένο ασφάλιστρο είναι αμετάβλητο κάτω από την αλλαγή της κλίμακας και επίσης ικανοποιεί την προσθετικότητα ως προς την σταθερά.

4) Προσθετικότητα

Για δύο τ.μ. X_1, X_2 (όχι αναγκαστικά ανεξάρτητες), έχουμε

$$\Pi_w(X_1 + X_2, \boldsymbol{Y}) = \frac{E\big((X_1 + X_2)w(\boldsymbol{Y})\big)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)}$$

$$= \frac{E\big(X_1 w(\boldsymbol{Y})\big) + E\big(X_2 w(\boldsymbol{Y})\big)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)}$$

$$= \Pi_w(X_1, \boldsymbol{Y}) + \Pi_w(X_2, \boldsymbol{Y}).$$

5) Διατηρεί την συνήθη στοχαστική διάταξη

Πρόταση 4.1

Για δύο τυχαίους κινδύνου X_1, X_2, τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{Y}$ και συνάρτηση στάθμισης w, αν $(X_1, w(\boldsymbol{Y}))$ και $(X_2, w(\boldsymbol{Y}))$ έχουν την ίδια δομή εξάρτησης, τότε το πολυδιάστατο σταθμισμένο ασφάλιστρο διατηρεί τη συνήθη στοχαστική διάταξη. Με άλλα λόγια, αν $(X_1, w(\boldsymbol{Y}))$ και $(X_2, w(\boldsymbol{Y}))$ έχουν την ίδια συνάρτηση *copula* $C(u, v) = P(U \le u, V \le v)$ όπου U,V είναι ομοιόμορφες τ.μ., έχουμε

$$X_1 \ge_{st} X_2 \text{ τότε } \Pi_w(X_1, \boldsymbol{Y}) \ge \Pi_w(X_2, \boldsymbol{Y}).$$

Απόδειξη

Συμβολίζουμε με $Z = w(\boldsymbol{Y})$ με σ.κ. $F_Z(z)$. Η αθροιστική σ.κ. για τα X_1,X_2 είναι αντίστοιχα $F_{X_1}(x)$ και $F_{X_2}(x)$. Επίσης ορίζουμε την συνάρτηση $h(s, v) = s - C(s, v)$. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η $h(s, v)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς s, αφού

$$\frac{\partial h(s,v)}{\partial s} = 1 - \frac{\partial}{\partial s} C(s,v)$$

$$= 1 - P(V \leq v | S \leq s) \geq 0.$$

Επίσης έχουμε ότι,

$$X_1 \geq_{st} X_2 \Leftrightarrow F_{X_1}(x) \leq F_{X_2}(x).$$

Επομένως,

$$h\big(F_{X_1}(x), v\big) \leq h\big(F_{X_2}(x), v\big),\ \forall v \epsilon [0,1].$$

Συγκεκριμένα, έστω $v = F_Z(z)$,

$$F_{X_1}(x) - C\left(F_{X_1}(x), F_Z(z)\right) \leq F_{X_2}(x) - C\left(F_{X_2}(x), F_Z(z)\right)$$

$$\Leftrightarrow P(X_1 \leq x) - P(X_1 \leq x, Z \leq z) \leq P(X_2 \ \leq x) - P(X_2 \ \leq x, Z \leq z)$$

$\Leftrightarrow P(X_1 \leq x, Z > z) \leq P(X_2 \leq x, Z > z)$, για όλα τα x,$z \geq 0$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty P(X_1 \leq x, Z > z) dz \leq \int_0^\infty P(X_2 \leq x, Z > z) dz. \qquad (4.5)$$

Για τη συνέχεια, θα εισάγουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις:

$$f_I(s,t) = \mathbf{1}\{s \leq t\}$$

$$g_I(s,t) = 1 - f_I(s,t).$$

Επομένως, για την τ.μ. ζημίας X και θετική τ.μ. Z έχουμε,

$$\int_0^\infty P(X \leq x, Z \leq z) dz = \int_0^\infty E\big(f_I(X,x) g_I(Z,z)\big) dz = E\left(\int_0^\infty g_I(Z,z) dz\, f_I(X,x)\right)$$

$$= E\big(Z f_I(X,x)\big). \qquad (4.6)$$

Συνεπώς, συνδυάζοντας την (4.5) και την (4.6) έχουμε,

$$E\big(Z f_I(X,x)\big) = E\big(w(\boldsymbol{Y}) f_I(X_1,x)\big) \leq \big(Z f_I(X_2,x)\big) = E\big(w(\boldsymbol{Y}) f_I(X_2,x)\big). \qquad (4.7)$$

Επίσης, σημειώνουμε ότι η σ.κ. της X_w μπορεί να εκφραστεί ως:

$$F_{X_w}(x) = \int_0^x \frac{E(w(\boldsymbol{Y})|u)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)} f_X(u)du$$

$$= \int_0^\infty \frac{E(w(\boldsymbol{Y})|u)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)} f_X(u) f_I(X,x)du$$

$$= \frac{E(f_I(X,x)E(w(\boldsymbol{Y})|X))}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)}$$

$$= \frac{E\big(f_I(X,x)w(\boldsymbol{Y})\big)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)}. \qquad (4.8)$$

Άρα, συνδυάζοντας την (4.7) και την (4.8) έχουμε,

$$F_{X_{w_1}}(x) \leq F_{X_{w_2}}(x) \Leftrightarrow X_{w_1} \geq_{st} X_{w_2}.$$

Συνεπάγεται ότι,

$$\Pi_w(X_1, \boldsymbol{Y}) \geq \Pi_w(X_2, \boldsymbol{Y}).$$

6) Διατηρεί την διάταξη ως προς την ανακοπή ζημίας (*stop-loss ordering*)

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.1, είναι εύκολο να δείξουμε ότι τα πολυδιάστατα σταθμισμένα ασφάλιστρα έχουν την ιδιότητα να διατηρούν την διάταξη ως προς ανακοπή ζημίας (*stop-loss*).

Πρόταση 4.2

Έστω δύο κίνδυνοι X_1, X_2, τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{Y}$ εάν $(X_1, w(\boldsymbol{Y}))$ και $(X_2, w(\boldsymbol{Y}))$ έχουν την ίδια δομή εξάρτησης, τότε το πολυδιάστατο σταθμισμένο ασφάλιστρο έχει την ιδιότητα να διατηρεί την διάταξη ως προς ανακοπή ζημίας, που είναι για κάθε τυχαίο ζεύγος $(X_1, w(\boldsymbol{Y}))$ και $(X_2, w(\boldsymbol{Y}))$ που έχουν την ίδια συνάρτηση *copula* $C(u,v) = P(U \leq u, V \leq v)$ όπου U,V είναι ομοιόμορφες τ.μ. και για οποιοδήποτε όριο ιδίας κράτησης d, θα ισχύει

$$X_1 \geq_{st} X_2 \text{ τότε } \Pi_w((X_1 - d)_+, \boldsymbol{Y}) \geq \Pi_w((X_2 - d)_+, \boldsymbol{Y}).$$

Απόδειξη

Έχουμε,

$$X_1 \geq_{st} X_2 \Rightarrow (X_1 - d)_+ \geq_{st} (X_2 - d)_+.$$

Συμβολίζουμε με $Z = w(\boldsymbol{Y})$ με σ.κ. $F_Z(z)$ και έστω μία τ.μ. X. Τότε

$$P((X-d)_+ \leq x, Z > z) = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \\ P(X \leq d + x, Z > z) & ,x \geq 0 \end{cases}$$

Σύμφωνα με την ανισότητα (4.5), έχουμε

$$P((X_1 - d)_+ \leq x, Z > z) \leq P((X_2 - d)_+ \leq x, Z > z) \quad \forall x, z \geq 0.$$

Παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.1, δείχνουμε ότι

$$(X_1 - d)_+ \geq_{st} (X_2 - d)_+.$$

Η Πρόταση 4.1 δείχνει ότι τα πολυδιάστατα σταθμισμένα ασφάλιστρα διατηρούν την συνήθη στοχαστική διάταξη. Η Πρόταση 4.2 δείχνει ότι η εισαγωγή των ορίων ιδίας κράτησης δεν τροποποιεί τα ασφάλιστρα και διατηρείται η διάταξή τους.

Πρόταση 4.3

Αν $Cov\big(X, w(\boldsymbol{Y})\big) \geq 0$, τότε η σταθμισμένη τ.μ. ζημιάς X_w είναι στοχαστικά μεγαλύτερη από την τ.μ. X, δηλαδή προκύπτει $X_w \geq_{st} X$.

Απόδειξη

Από την σχέση (4.8) έχουμε,

$$\bar{F}_{X_w}(x) = \frac{E\big(g_I(X,x)w(\boldsymbol{Y})\big)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)}$$

$$\bar{F}_{X_w}(x) - \bar{F}_X = \frac{E\big(f_I(X,x)w(\boldsymbol{Y})\big) - E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)E\big(f_I(X,x)\big)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)}$$

$$= -\frac{Cov\big(f_I(X,x), w(\boldsymbol{Y})\big)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)},$$

όπου $Cov\big(f_I(X,x),w(\boldsymbol{Y})\big)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$Cov\big(f_I(X,x),w(\boldsymbol{Y})\big)=E\Big(\big[w(\boldsymbol{Y})-E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)\big]\big[f_I(X,x)-E\big(f_I(X,x)\big)\big]\Big)\leq 0.$$

Η παραπάνω ανισότητα ισχύει επειδή $Cov\big(X,w(\boldsymbol{Y})\big)\geq 0$ και $f_I(s,t)$ είναι μία φθίνουσα συνάρτηση ως προς s. Επομένως, $\bar{F}_{X_w}(x)-\bar{F}_X\geq 0$, $\forall x\geq 0$ και προκύπτει $\bar{F}_{X_w}(x)\geq \bar{F}_X$, άρα $X_w\geq_{st} X$.

Η Πρόταση 4.3 δείχνει ότι η τ.μ. X_w, που σταθμίζεται από μία άλλη θετικά συσχετισμένη τ.μ. $w(\boldsymbol{Y})$, προκύπτει να έχει βαρύτερες ουρές από την τ.μ. X. Αυτή η ιδιότητα έχει εμπειρικές ερμηνείες, αφού τα ασφάλιστρα που υπολογίζονται σύμφωνα με την σταθμισμένη τ.μ. X_w παρέχουν μία διαφορετική οπτική στην επιβάρυνση του ασφαλίστρου. Αν θεωρήσουμε την επιβάρυνση, συμβολίζοντας με Θ_Π, του ασφαλίστρου πάνω στον κίνδυνο X, $\Pi(X)$, σαν

$$\Theta_\Pi=\frac{\Pi(X)}{E(X)}-1.$$

Τότε μπορούμε για κάθε περίπτωση ενός οποιουδήποτε κινδύνου X και μιας συνάρτησης στάθμισης $w(\boldsymbol{Y})$ να βρούμε την επιβάρυνση του ασφαλίστρου.

7) Κατανομή του ασφαλίστρου μεταξύ των στρωμάτων

Με αυτή την ιδιότητα θα δείξουμε ότι το ασφάλιστρο κατανέμεται μεταξύ των στρωμάτων. Αρχικά θα ορίσουμε το στρώμα (*layer*) της τ.μ. ζημίας και την αντίστοιχη συνάρτηση απόλυτου ρίσκου (*Absolute Risk function, AR function*) και την συνάρτηση σχετικού ρίσκου (*Relative Risk function, RR function*), σύμφωνα με τον Wang (1995).

Ορισμός 4.4

Ένα στρώμα (*layer*) $(a,b]$ μιας τ.μ. ζημιάς X, $L_{(a,b]}$, ορίζεται ως:

$$\boldsymbol{L}_{(a,b]}=\begin{cases}0 & ,0\leq X<a\\ X-a & ,a\leq X<b.\\ b-a & ,\quad X>b\end{cases}$$

Ορισμός 4.5

- Ένα ασφάλιστρο $\Pi(X)$ έχει φθίνουσα επιβάρυνση απόλυτου κινδύνου αν η AR συνάρτηση ορίζεται ως,

$$AR(x) = \Pi\big(\boldsymbol{L}_{(x,x+h]}\big), h > 0$$

είναι μία φθίνουσα συνάρτηση ως προς x.

- Ένα ασφάλιστρο $\Pi(X)$ έχει αύξουσα επιβάρυνση σχετικού κινδύνου αν η RR συνάρτηση ορίζεται ως

$$RR(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Pi_w\big(\boldsymbol{L}_{(x,x+h]}\big)}{E\big(\boldsymbol{L}_{(x,x+h]}\big)}$$

Είναι μία αύξουσα συνάρτηση ως προς x.

Ορισμός 4.6

Η συνάρτηση έντασης κινδύνου (*hazard function*) μίας τ.μ. X ορίζεται ως

$$\lambda_X(x) = \frac{f_X(x)}{\bar{F}_X(x)}. \qquad (4.9)$$

Η διάταξη έντασης κινδύνου σχετίζεται με την υπό συνθήκη συνήθη στοχαστική διάταξη και την συνάρτηση έντασης κινδύνου.

Ορισμός 4.7

Για δύο τ.μ. X_1 και X_2, η X_1 είναι στοχαστικά μεγαλύτερη ως προς διάταξη έντασης κινδύνου από την X_2, δεδομένου ότι $X_1 \leq_{st} X_2$, αν

$$[X_1|X_1 > t] \leq_{st} [X_2|X_2 > t], \forall t \in \mathbb{R}.$$

Για περισσότερα δες Denuit et. al (2005).

Στην Ιδιότητα 5 δείξαμε ότι το πολυδιάστατο σταθμισμένο ασφάλιστρο διατηρεί την συνήθη στοχαστική διάταξη. Ένα πρόβλημα είναι πως το ασφάλιστρο θα πρέπει κατανέμεται ανάμεσα στα στρώματα (*layers*). Μας ενδιαφέρει να δούμε κατά πόσο το πολυδιάστατο σταθμισμένο ασφάλιστρο είναι προσθετικό ως προς τα *layers* καθώς και αν διατηρεί την στοχαστική διάταξη ανάμεσα στα διαφορετικά *layers*. Αυτές οι ιδιότητες συνοψίζονται στο παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 4.1

Έστω μία τ.μ. X και ένα τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{Y}$, έχουμε:

1) (Προσθετικό ως προς τα *layers*) Το πολυδιάστατο σταθμισμένο ασφάλιστρο είναι προσθετικό ως προς τα *layers*, δοθέντος μίας διαμέρισης του X, $\{[x_i, x_{i+1}]\}$, $i = 0,1, \ldots$, $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$, έχουμε

$$\Pi_w(X, \boldsymbol{Y}) = \sum_{i=0}^{\infty} \Pi_w\left(\boldsymbol{L}_{(x_i, x_{i+1}]}, \boldsymbol{Y}\right).$$

2) (Φθίνουσα απόλυτη συνάρτηση κινδύνου) Η $AR(x)$ είναι φθίνουσα ως προς x. Με άλλα λόγια, για οποιαδήποτε σταθερά $h > 0$, έχουμε

$$x < y \Rightarrow \Pi\left(\boldsymbol{L}_{(x,x+h]}\right) \geq \Pi\left(\boldsymbol{L}_{(y,y+h]}\right).$$

3) (Αύξουσα σχετική συνάρτηση κινδύνου) Η $RR(x)$ είναι αύξουσα ως προς x αν και μόνον αν $X \leq_{hr} X|\,\boldsymbol{Y}$.

Απόδειξη

1) Αφού $X = \sum_{i=0}^{\infty} L_{(x_i, x_{i+1}]}$ έχουμε,

$$E\big(Xw(\boldsymbol{Y})\big) = E\left(\sum_{i=0}^{\infty} L_{(x_i, x_{i+1}]}\, w(\boldsymbol{Y})\right) = \sum_{i=0}^{\infty} E\left(\boldsymbol{L}_{(x_i, x_{i+1}]} w(\boldsymbol{Y})\right)$$

$$\frac{E\big(Xw(\boldsymbol{Y})\big)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{E\left(\boldsymbol{L}_{(x_i, x_{i+1}]} w(\boldsymbol{Y})\right)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)}.$$

Συγκεκριμένα,

$$\Pi_w(X, \boldsymbol{Y}) = \sum_{i=0}^{\infty} \Pi_w\left(\boldsymbol{L}_{(x_i, x_{i+1}]}, \boldsymbol{Y}\right).$$

2) Η AR συνάρτηση και η παράγωγός της μπορούν να γραφούν ως:

$$AR(x) = \frac{E\left(\boldsymbol{L}_{(x,x+h]}w(\boldsymbol{Y})\right)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)}$$

$$= \frac{E\big[w(\boldsymbol{Y})E\big(\boldsymbol{L}_{(x,x+h]}|\boldsymbol{Y}\big)\big]}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)}$$

$$= \frac{E\left(w(\boldsymbol{Y})\int_x^{x+h}\bar{F}_{X|\boldsymbol{Y}}(u|\boldsymbol{Y})du\right)}{E(w(\boldsymbol{Y}))}.$$

$$\frac{\partial AR(x)}{\partial x} = \frac{E\big[w(\boldsymbol{Y})\big(\bar{F}_{X|\boldsymbol{Y}}(x+h|\boldsymbol{Y}) - \bar{F}_{X|\boldsymbol{Y}}(x|\boldsymbol{Y})\big)\big]}{E(w(\boldsymbol{Y}))} \leq 0.$$

Η ανισότητα ισχύει γιατί $y = \bar{F}_{X|\boldsymbol{Y}}(x|\boldsymbol{Y})$ είναι φθίνουσα ως προς x.

3) Έχει δειχθεί στην Ιδιότητα 3.3.38 του Denuit et. al (2005) ότι

$$X \leq_{hr} X|\boldsymbol{Y} \Leftrightarrow \lambda_X(x) \geq \lambda_{X|\boldsymbol{Y}}(x), \forall x \geq 0. \qquad (4.10)$$

Επίσης, η RR συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί ως

$$RR(x) = \lim_{h\to 0}\frac{E\left(w(\boldsymbol{Y})\int_x^{x+h}\bar{F}_{X|\boldsymbol{Y}}(u|\boldsymbol{Y})du\right)}{E\left(w(\boldsymbol{Y})\int_x^{x+h}\bar{F}_X(u)du\right)}.$$

Συνεπώς από τον κανόνα του De L’ Hospital έχουμε

$$RR(x) = \lim_{h\to 0}\frac{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big[\bar{F}_{X|\boldsymbol{Y}}(x+h|\boldsymbol{Y})\big]\big)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)\bar{F}_X(x+h)} = \frac{E\big(w(\boldsymbol{Y})\bar{F}_{X|\boldsymbol{Y}}(x|\boldsymbol{Y})\big)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)\bar{F}_X(x)}.$$

Άρα, η παράγωγος της RR συνάρτησης είναι

$$\frac{\partial RR(x)}{\partial x} = \frac{E\left(\frac{w(\boldsymbol{Y})\bar{F}_{X|\boldsymbol{Y}}(x|\boldsymbol{Y})}{\bar{F}_X(x)}\left(\lambda_X(x) \geq \lambda_{X|\boldsymbol{Y}}(x|\boldsymbol{Y})\right)\right)}{E\big(w(\boldsymbol{Y})\big)}. \qquad (4.11)$$

Από την (4.10) και (4.11) συμπεραίνουμε ότι

$$X \leq_{hr} X|\,\boldsymbol{Y} \Leftrightarrow \frac{\partial RR(x)}{\partial x} \geq 0.$$

4.3 ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΟ ΣΤΡΕΒΛΟ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΟ

Το ασφάλιστρο Wang ή αλλιώς στρεβλό ασφάλιστρο που ορίζεται από μία συνάρτηση στρέβλωσης g αναφέρθηκε και ορίστηκε στο Κεφάλαιο 2 (βλ. Ενότητα 2.2). Το παρακάτω θεώρημα δείχνει ότι για ένα συγκεκριμένο πολυδιάστατο σταθμισμένο ασφάλιστρο, μπορούμε να βρούμε μία αντίστοιχη έκφραση για το στρεβλό (Wang) ασφάλιστρο.

Θεώρημα 4.2

Έστω κίνδυνος $X \in \mathcal{X}$ τέτοιο ώστε $E(|X|) < \infty$, $E(|X|^2) < \infty$, ένα τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{Y}$ και μία συνάρτηση στάθμισης w, τότε υπάρχει μία συνάρτηση $g(x)$, που ικανοποιεί τις συνθήκες ώστε να είναι στρεβλή, αν το $\boldsymbol{Y}$ είναι μετρήσιμο ως προς X.

Απόδειξη

Αν το $\boldsymbol{Y}$ είναι μετρήσιμο ως προς X, τότε μπορούμε να βρούμε μία μη-αρνητική συνάρτηση, $h(x)$ της μορφής

$$h(X) = \frac{w(\boldsymbol{Y})}{E(w(\boldsymbol{Y}))} \geq 0.$$

Επίσης έχουμε ότι,

$$\Pi_w(X, \boldsymbol{Y}) = \frac{E(Xw(\boldsymbol{Y}))}{E(w(\boldsymbol{Y}))} = E(Xh(X)).$$

Ορίζουμε την συνάρτηση $g(x) = \int_0^x h(\bar{F}_X^{-1}(u))du$, τότε θα επιβεβαιώνονται οι συνθήκες ώστε η $g(x)$ να είναι στρεβλή συνάρτηση. Συγκεκριμένα,

i. $g'(x) = h(\bar{F}_X^{-1}(u)) \geq 0.$

ii. $g(0) = 0,$

$$g(1) = \int_0^x h(\bar{F}_X^{-1}(u))du = \int_0^\infty h(x)dF(x) = E(h(X)) = 1.$$

iii. Το πολυδιάστατο σταθμισμένο ασφάλιστρο που βασίζεται στην συνάρτηση g μπορεί να εκφραστεί ως

$$\int_0^\infty g(\bar{F}_X(x))dx = E\left(Xg'(\bar{F}_X(x))\right)$$

$$= E(Xh(X))$$

$$= \Pi_w(X, \boldsymbol{Y}).$$

Το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο βασίζεται στον μετασχηματισμό έντασης κινδύνου (*PH transform*) είναι μία ειδική περίπτωση του ασφαλίστρου Wang (1995). Σύμφωνα με τον ορισμό της έντασης κινδύνου, από την σχέση (4.9), μπορούμε να δούμε ότι ο μετασχηματισμός έντασης κινδύνου προσαρμόζει τον κίνδυνο X απεικονίζοντας μία τ.μ. ζημίας X με μία άλλη X^{PH} μέσω της συνάρτησης έντασης κινδύνου,

$$\lambda_{X^{PH}}(t) = \frac{1}{\rho}\lambda_X(t), \;\; \rho > 0.$$

Θεωρώντας την συνάρτηση έντασης κινδύνου της πολυδιάστατης σταθμισμένης τ.μ. X_w έχουμε,

$$\lambda_{X_w}(t) = \frac{f_{X_w}(t)}{1 - F_{X_w}(t)}$$

$$= \frac{\bar{F}_X(t)E(w(\boldsymbol{Y})|X = t)}{\bar{F}_{X_w}(t)E(w(\boldsymbol{Y}))}\lambda_X(t).$$

Αντί για τη σταθερά ρ, το πολυδιάστατο σταθμισμένο ασφάλιστρο χρησιμοποιεί την συνάρτηση

$$\rho(t) = \frac{\bar{F}_{X_w}(t)E(w(\boldsymbol{Y}))}{\bar{F}_X(t)E(w(\boldsymbol{Y})|X = t)},$$

για να αντιστοιχίσουμε την ένταση κινδύνου. Πράγματι, η συνάρτηση στάθμισης του προσαρμοσμένου ασφαλίστρου μπορεί να εκφραστεί ως

$$w(x) = c(\bar{F}_X(x))^{\frac{1}{\rho}-1},$$

όπου c μία σταθερά τέτοια ώστε $c = E(w(X))/\rho$.

4.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΩΝ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΩΝ

Τα πολυδιάστατα σταθμισμένα ασφάλιστρα ικανοποιούν πολλές επιθυμητές ιδιότητες όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 4.2. Ένα σημαντικό πρόβλημα που προκύπτει είναι η κατάλληλη επιλογή εξωτερικών παραγόντων κινδύνου $\boldsymbol{Y}$. Ως μία ειδική περίπτωση του οικονομικού ασφαλίστρου, Buhlmann (1980), θεωρείται όταν έχουμε εκθετική συνάρτηση ωφελιμότητας $U(w) = e^{-pW}$. Τότε το οικονομικό ασφάλιστρο προκύπτει να είναι

$$\Pi(X,Y) = \frac{E(Xe^{-pY})}{E(e^{-pY})},$$

όπου

$$p = \frac{1}{\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{p_i}}, p_i, i = 1, \dots, p,$$

είναι η αποστροφή κινδύνου (*risk aversion*) της αγοράς και $Y = \sum_{i=1}^{p} X_i$ είναι το άθροισμα όλων των κινδύνων της αγοράς. Ενδιαφέρον έχει να σημειώσουμε ότι αν ορίσουμε την συνάρτηση στάθμισης $w(y)$ ως $w(y) = e^{\rho y}$ και επιλέξουμε $Y = \sum_{i=1}^{p} X_i$ ως σταθμισμένη τ.μ., τότε το οικονομικό ασφάλιστρο μπορεί να εκφραστεί σαν πολυδιάστατο σταθμισμένο ασφάλιστρο. Στη συνέχεια θα δούμε ένα παράδειγμα που η επιλογή του $\boldsymbol{Y}$ γίνεται ώστε να ελαχιστοποιείται το σφάλμα εκτίμησης του ασφαλίστρου.

Γενικά μία αρχή ασφαλίστρου, όπως αναφέραμε και στο Κεφάλαιο 2, μπορεί να γραφτεί πάντα ως ένα άθροισμα του καθαρού ασφαλίστρου και μίας επιβάρυνσης όπως,

$$\Pi(X) = E(X) + \Theta_{\Pi}(X),$$

όπου $\Theta_{\Pi}(X)$ συμβολίζει την επιβάρυνση ασφαλίστρου.

Στην περίπτωση του σταθμισμένου ασφαλίστρου, η επιβάρυνση μπορεί να εκφραστεί ως μία συνάρτηση των συνδιακύμανσης της τ.μ. ζημίας και της σταθμισμένης μεταβλητής. Πιο συγκεκριμένα, όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 3, το μονοδιάστατο ασφάλιστρο μπορεί να γραφεί ως

$$\Pi(X_w) = \frac{E(Xw(X))}{E(w(X))} = E(X) + \frac{Cov(X, w(X))}{E(w(X))}.$$

Από την οπτική της ασφαλιστικής τιμολόγησης, μία αρχή ασφαλίστρου με επιθυμητές ιδιότητες μπορεί να προσφέρει στους ασφαλισμένους επαρκή και σταθερή επιβάρυνση. Στο παράδειγμά μας θεωρούμε ότι υπάρχουν p κίνδυνοι στην αγορά, $X_1, \dots, X_p$, και επιλέγουμε σταθμισμένη μεταβλητή την $Y = \left(\sum_{i=1}^{p} X_i - d\right)_+ \wedge m$, και χρησιμοποιούμε ως συνάρτηση στάθμισης την εκθετική, $w(y) = e^{\eta y}$, τότε τα μονοδιάστατα και πολυδιάστατα σταθμισμένα ασφάλιστρα για κάθε κίνδυνο, X_i, μπορούν να εκφραστούν ως

$$\Pi_w(X_i) = \frac{E(X_i \exp(X_i)}{E(\exp(X_i))}, \qquad (4.12)$$

$$\Pi_w(X_i, Y) = \frac{E\left(X_i \exp\left\{\eta\left(\sum_{i=1}^{p} X_i - d\right)_+ \wedge m\right\}\right)}{E\left(\exp\left\{\eta\left(\sum_{i=1}^{p} X_i - d\right)_+ \wedge m\right\}\right)}. \qquad (4.13)$$

Για να τα συγκρίνουμε θέτουμε τα ασφάλιστρα ίσα με την αρχή της μαθηματικής ελπίδας με επιβάρυνση θ. Πιο συγκεκριμένα, θα έχουμε $\Pi_w(X_i) = \Pi_w(X_i, Y) = (1+\theta)E(X_i)$ και συγκρίνουμε τις διαφορές στις εκτιμήσεις των δύο ασφαλίστρων. Για παράδειγμα, θεωρούμε ότι όλοι οι κίνδυνοι ακολουθούν ανεξάρτητες Γάμμα κατανομές με ίδια παράμετρο ρυθμού π.χ. $X_i \sim \Gamma\alpha\mu\mu\alpha(a_i, b)$, άρα $\sum_{i=1}^{p} X_i \sim \Gamma\alpha\mu\mu\alpha(\sum_{i=1}^{p} a_i, b)$. Συμβολίζουμε με $X = \sum_{i=1}^{p} X_i$, $a = \sum_{i=1}^{p} a_i$, $X_{-\iota} = \sum_{j \neq i} X_j$ και $a_{-i} = \sum_{j \neq i} a_j$, τότε $X \sim \Gamma\alpha\mu\mu\alpha(a, b)$ και $X_{-i} \sim \Gamma\alpha\mu\mu\alpha(\, a_{-i}, b)$. Η ασφαλιστική κάλυψη που επιλέγουμε είναι της μορφής,

$$(X-d)_+ \wedge m = min\{(X-d)_+ \wedge m\} = \begin{cases} 0 & , \quad X \leq d \\ X-d & , d < X < m+d. \\ m & , \quad X \geq m+d \end{cases}$$

Τώρα μπορούμε να αναλύσουμε τον παρονομαστή της (4.13) ως

$$E\left(\exp\left\{\eta\left(\sum_{i=1}^{p} X_i - d\right)_+ \wedge m\right\}\right)$$
$$= E\left(\mathbf{1}_{\{X \leq d\}}\right) + E\left(e^{\eta(X-d)}\mathbf{1}_{\{d \leq X \leq m+d\}}\right) + E\left(e^{\eta m}\mathbf{1}_{\{X \geq m+d\}}\right)$$

$$= \frac{\gamma(a, bd)}{\Gamma(a)} + \frac{e^{-\eta d} b^a}{(b-\eta)^a} \frac{\gamma\big(a, b(m+d)\big) - \gamma(a, bd)}{\Gamma(a)} + e^{\eta m}\left(1 - \frac{\gamma\big(a, b(m+d)\big)}{\Gamma(a)}\right).$$

Ο αριθμητής της (4.13) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} E(X_i \exp\{\eta(X-d)_+ \wedge m\}) \\ &= E\left(X_i E\big(\mathbf{1}_{\{X_{-i} < d - X_i\}} | X_i\big)\right) + E\left(X_i E\big(\mathbf{1}_{\{d - X_i < X_{-i} \leq d+m-X_i\}} | X_i\big)\right) \\ &+ E\left(X_i E\big(\mathbf{1}_{\{X_{-i} \geq d+m-X_i\}} | X_i\big)\right). \end{aligned}$$

$$E\left(X_i E\big(\mathbf{1}_{\{X_{-i} < d - X_i\}} | X_i\big)\right) = \int_0^d x^{a_i} e^{-bx} \frac{b^{a_i} \gamma(a_{-i}, b(d-x))}{\Gamma(a_i)\Gamma(a_{-i})} dx.$$

$$\begin{aligned} E\left(X_i E\big(\mathbf{1}_{\{d - X_i < X_{-i} \leq d+m-X_i\}} | X_i\big)\right) \\ &= \int_0^d x^{a_i} e^{(\eta-d)x-\eta d} b^{a_{-i}} \frac{\gamma\big(a_{-i}, b(m+d-x)\big) - \gamma\big(a_{-i}, b(d-x)\big)}{(b-\eta)^{a_{-i}} \Gamma(a_i)\Gamma(a_{-i})} dx \\ &+ \int_d^{d+m} x^{a_i} e^{(\eta-b)x-\eta d} b^{a_{-i}} \frac{\gamma(a_{-i}, b(m+d-x))}{(b-\eta)^{a_{-i}} \Gamma(a_i)\Gamma(a_{-i})} dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(X_i E\big(\mathbf{1}_{\{X_{-i} \geq d+m-X_i\}} | X_i\big)\right) \\ &= \int_0^{d+m} x^{a_i} e^{-bx+\eta m} \frac{b^{a_i}}{\Gamma(a_i)} \left(1 - \frac{\gamma(a_{-i}, b(d+m-x))}{\Gamma(a_{-i})}\right) dx \\ &+ \int_{d+m}^{\infty} x^{a_i} e^{-bx+\eta m} \frac{b^{a_i}}{\Gamma(a_i)} dx. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θέτουμε $\Pi_w(X_i) = (1+\theta)E(X_i)$, $i = 1,2,3$ και για $w(x) = e^{\eta x}$.

Έχουμε,

$$\frac{E\left(X e^{\eta_i^{univ} X}\right)}{E\left(e^{\eta_i^{univ} X}\right)} = (1+\theta)E(X_i) \Rightarrow \frac{\dfrac{a_i b^{a_i}}{(b-\eta)^{a_i+1}}}{\dfrac{b^{a_i}}{\left(b - \eta_i^{univ}\right)^{a_i}}} = (1+\theta)\frac{a_i}{b} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{b-\ \eta_i^{univ}}=(1+\theta)\frac{1}{b}\Rightarrow b=b\theta-\ \eta_i^{univ}(1+\theta)\Rightarrow$$

$$\eta_i^{univ}=\frac{b\theta}{1+\theta}.$$

Η παράμετρος η_i^{univ} είναι η παράμετρος για το μονοδιάστατο σταθμισμένο ασφάλιστρο για κάθε κίνδυνο i. Η αντίστοιχη εκτίμηση της παραμέτρου για το πολυδιάστατο σταθμισμένο ασφάλιστρο, η_i^{mult}, υπολογίζεται αριθμητικά θέτοντας $\Pi_w(X_i,\boldsymbol{Y})=(1+\theta)E(X_i)$.

Σε ένα αριθμητικό παράδειγμα, θεωρούμε ότι υπάρχουν τρεις κίνδυνοι και $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$ και $b=0.5$. Επίσης θεωρούμε ότι η επιβάρυνση του ασφαλίστρου για την αρχή της μαθηματικής ελπίδας, $\theta=0.1$. Είναι εύκολο να υπολογίσουμε ότι $\eta_i^{univ}=0.0455,\ i=1,2,3$ και $\eta_1^{mult}=0.0269,\ \eta_2^{mult}=0.0189,\ \eta_3^{mult}=0.0145$. Υποθέτουμε ότι $\Pi_w(X_i)=\Pi_w(X_i,\boldsymbol{Y})=(1+\theta)E(X_i)$ και βρίσκουμε $d^*=4.90$ και $m^*=49.60$, τέτοια ώστε το σφάλμα εκτίμησης του πολυδιάστατου σταθμισμένου ασφαλίστρου να ελαχιστοποιείται. Το σφάλμα εκτίμησης των μονοδιάστατων και πολυδιάστατων σταθμισμένων κινδύνων υπολογίζεται στον παρακάτω πίνακα.

Κίνδυνος	**Ασφάλιστρο**	**Σφάλμα μονοδιάστατου**	**Σφάλμα πολυδιάστατου**
$\boldsymbol{X_1}$	2.2	0.4269	0.3805
$\boldsymbol{X_2}$	4.4	0.6238	0.5027
$\boldsymbol{X_3}$	6.6	0.6340	0.5254

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το ασφάλιστρο αυξάνεται και το σφάλμα εκτίμησης, όπως θα περιμέναμε, όμως το σφάλμα στην περίπτωση του πολυδιάστατου σταθμισμένου ασφαλίστρου είναι μικρότερο απ’ ότι στην περίπτωση του μονοδιάστατου. Επομένως η εκτίμηση στην περίπτωση του πολυδιάστατου σταθμισμένου ασφαλίστρου θα είναι πιο ακριβής.

Παράρτημα

Συντομογραφίες

Σ.κ.	Συνάρτηση κατανομής
Τ.μ.	Τυχαία μεταβλητή
Α.σ.κ.	Από κοινού συνάρτηση κατανομής
CTE	Conditional Tail Expectation
MTV	Modified Tail Variance
CTV	Conditional Tail Variance

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση

1. Bühlmann, H. (1980). An economic premium principle. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 11(1), 52-60.
2. Castillo, E., Iglesias, A., Ruiz-Cobo, R., (2005). Functional Equations in Applied Sciences. Elsevier, Amsterdam.
3. Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R. (2006*).* Actuarial Theory for Dependent Risks: measures, orders and models. John Wiley & Sons, Chichester, England.
4. Furman, E., Landsman, Z. (2008). Economic capital allocations for non-negative portfolios of dependent risks. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 38(2), 601-619.
5. Furman, E., Zitikis, R. (2008a). Weighted premium calculation principles. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(1), 459-465.
6. Furman, E., Zitikis, R. (2008b). Weighted risk capital allocations. *Insurance: Mathematics and Economics*, 43(2), 263-269.
7. Furman, E., Zitikis, R. (2008c). A monotonicity property of the composition of regularized and inverted-regularized gamma functions with applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 348(2), 971-976.
8. Furman, E., Zitikis, R. (2008d). Monotonicity of ratios involving incomplete gamma functions with actuarial applications. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 9(3), 1-6.
9. Furman, E., Zitikis, R. (2009). Weighted pricing functionals with applications to insurance: an overview. *North American Actuarial Journal*, 13(4), 483-496.
10. Furman, E., Zitikis, R. (2010). General Stein-type covariance decompositions with applications to insurance and finance. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 40(1), 369-375.
11. Furman, E., Zitikis, R. (2017). An adaptation of the classical CAPM to insurance: The weighted insurance pricing model. In *Casualty Actuarial Society E-Forum* (pp. 1-12). Spring.
12. Goovaerts, M.J., De Vijlder, F., Haezendonck, J., 1984. Insurance Premiums: Theory and Applications. North-Holland Publishing Co., Amsterdam.
13. Hamada, M., Valdez, E. A. (2008). CAPM and option pricing with elliptically contoured distributions. *Journal of Risk and Insurance*, 75(2), 387-409.
14. Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M. (2008). Modern Actuarial Risk Theory: Using R. Springer Science & Business Media, Berlin.

15. Klugman, S. A., Panjer, H. H., Willmot, G. E. (2019). Loss Models From Data to Decisions. John Willey & Sons, Hoboken, New Jersey.
16. Kotz, S., Balakrishnan, N., Johnson, N. L. (2000). Continuous Multivariate Distributions, Volume 1: Models and Applications. John Wiley & Sons, New York.
17. Laeven, R. J., Goovaerts, M. J. (2008). Premium calculation and insurance pricing. *Encyclopedia of quantitative risk analysis and assessment*, *3*, 1302-1314.
18. Landsman, Z., Nešlehová, J. (2008). Stein's Lemma for elliptical random vectors. *Journal of Multivariate Analysis*, 99(5), 912-927.
19. Lai, C. D., Balakrishnan, N. (2009). Continuous Bivariate Distributions. Springer-Verlag, New York.
20. Lehmann, E. L. (1966). Some concepts of dependence. *The Annals of Mathematical Statistics*, 37(5), 1137-1153.
21. Mardia, K. V. (1962). Multivariate pareto distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1008-1015.
22. Mathai, A. M., Moschopoulos, P. G. (1991). On a multivariate gamma. *Journal of Multivariate Analysis*, 39(1), 135-153.
23. Müller, H. H. (1987). Economic premium principles in insurance and the capital asset pricing model. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 17(2), 141-150.
24. Navarro, J., Ruiz, J. M., Del Aguila, Y. (2006). Multivariate weighted distributions: a review and some extensions. *Statistics*, 40(1), 51-64.
25. Patil, G. P., Rao, C. R. (1978). Weighted distributions and size-biased sampling with applications to wildlife populations and human families. *Biometrics*, 179-189.
26. Stein, C. M. (1981). Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. *The Annals of Statistics*, 1135-1151.
27. Tsanakas, A. (2008). Risk measurement in the presence of background risk. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(2), 520-528.
28. Wang, S. (1995). Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms. *Insurance: Mathematics and Economics*, 17(1), 43-54.
29. Wang, S. (1996). Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 26(1), 71-92.
30. Wang, S. S. (2000). A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks. *Journal of Risk and Insurance*, 15-36.
31. Zhu, W., Tan, K. S., Porth, L. (2016). On a class of premium calculation principles based on the multivariate weighted distribution. *Available at SSRN 2888702*.

32. Zhu, W., Tan, K. S., Porth, L. (2019). Agricultural insurance ratemaking: Development of a new premium principle. *North American Actuarial Journal*, 23(4), 512-534.

Ελληνική

1. Κούτρας Μ., (2016), Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές Γ Έκδοση, Εκδόσεις Σταμούλης.