

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής



Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Διαγράμματα ελέγχου για την
παρακολούθηση της διασποράς

Στουραϊτή Δανάη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και
Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως
μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην
Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Μάρτιος 2023

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αντζουλάκος Δημήτριος (Επιβλέπων), Αναπληρωτής Καθηγητής
- Ευαγγελάρας Χαράλαμπος, Αναπληρωτής Καθηγητής
- Ρακιτζής Αθανάσιος, Επίκουρος Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS
School of Finance and Statistics



Department of Statistics and Insurance Science

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**Control charts for monitoring process
variability**

By

Danai Stouraiti

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment
of the requirements for the degree of Master of Science
in Applied Statistics

Piraeus, Greece
March 2023

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω πρωτίστως τον κ. Δημήτριο Αντζουλάκο, επιβλέποντα καθηγητή μου, για την καθοδήγηση και την βοήθεια που μου παρείχε καθόλη την διάρκεια εκπόνησης αυτής της εργασίας διότι αποδείχτηκαν πολύτιμες. Ακόμα , οφείλω να ευχαριστήσω και τους ανθρώπους που με στήριξαν τόσο από την οικογένεια μου όσο και από το φιλικό μου περιβάλλον.

Περίληψη

Τα διαγράμματα ελέγχου είναι ένα σημαντικό και ισχυρό εργαλείο σε μια προσπάθεια προς μια σταθερότερη παραγωγική διεργασία. Μέσω αυτών των διαγραμμάτων, μπορούν να ελεγχθούν πιθανές αποκλίσεις σε διάφορες παραμέτρους του προϊόντος, οι οποίες αν δεν προσδιοριστούν εγκαίρως, θα μπορούσαν ενδεχομένως να οδηγήσουν σε διεργασία εκτός ελέγχου. Η αποτελεσματική χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή προϊόντων βέλτιστης ποιότητας και την ελαχιστοποίηση της παραγωγής μη συμμορφούμενων προϊόντων. Συνήθως, χρησιμοποιούνται δύο τύποι διαγραμμάτων ελέγχου για μεταβλητές. Ένα διάγραμμα για την παρακολούθηση της μέσης τιμής της διεργασίας και ένα για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας. Η παρακολούθηση της μεταβλητότητας μιας διεργασίας έχει κερδίσει το ενδιαφέρον αρκετών επιστημόνων τις τελευταίες δεκαετίες.

Η παρούσα διατριβή χωρίζεται σε τρία κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται περιγραφή των διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής και της μεταβλητότητας μιας διεργασίας. Επιπλέον, παρουσιάζονται βασικά εργαλεία όπως το μέσο μήκος ροής καθώς και εκτιμήτριες της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης που χρησιμοποιούνται στα διαγράμματα ελέγχου. Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετώνται εκτενώς τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart R και S τόσο με όρια ελέγχου 3σ όσο και με όρια πιθανότητας. Πραγματοποιείται σύγκριση της αποτελεσματικότητας των διαγραμμάτων ελέγχου R και S για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας μιας διεργασίας για διάφορα μεγέθη δειγμάτων και για διάφορες μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης. Στο τρίτο κεφάλαιο μελετώνται αναλυτικά τα διαγράμματα CUSUM- S^2 , CUSUM - $\ln S^2$, EWMA - S^2 και EWMA - $\ln S^2$. Επίσης γίνεται σύγκριση όλων των διαγραμμάτων ελέγχου με μέτρο το μέσο μήκος ροής και εξάγονται συμπεράσματα για το ποιο διάγραμμα υπερτερεί σε μικρές και μεγάλες μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης.

Abstract

Shewhart control charts are a significant and powerful tools in an attempt towards a more stable production process. Through these charts, possible deviations on various product parameters can be controlled, which if not identified on time, could possibly lead to an out of control process. Effective use of Shewhart control charts results in the production of optimum quality products and minimize the production of non-conforming ones. Usually, two types of control charts are compiled. One chart for monitoring the process mean and one for monitoring the process variability. Monitoring the process variability has gained the interest of several scientists the past decades.

The present thesis is divided into three chapters. The first chapter describes control charts for monitoring the mean value and variability of a process. In addition the average run length is presented as well as the mean and variability estimates used in the control charts. In the second chapter the Shewhart R and S control charts with both 3σ control limits and probability limits are extensively studied. A comparison is made of the effectiveness of R and S control charts for monitoring the variability of a process for various sample sizes and various standard deviations. Finally, in the third chapter of this thesis, the CUSUM- S^2 , CUSUM - $\ln S^2$, EWMA - S^2 and EWMA - $\ln S^2$ charts are studied. Also, all control charts are compared with the average run length and conclusions are drawn as to which chart excels at small and large standard deviation shifts.

Περιεχόμενα

Στατιστικός έλεγχος διεργασιών και διαγράμματα ελέγχου	13
1.1 Εισαγωγή.....	1
1.2 Περιγραφή και χρήση ενός διαγράμματος ελέγχου.....	2
1.3 Μέσο μήκος ροής (ARL).....	6
1.4 Ορθολογικές υποομάδες.....	8
1.5 Διαγράμματα ελέγχου φάσης I και φάσης II.....	9
1.6 Εκτίμηση της μέσης τιμής και της διασποράς.....	9
1.6.1 Η περίπτωση των μεμονωμένων παρατηρήσεων.....	9
1.6.2 Η περίπτωση των δειγμάτων.....	10
Διαγράμματα ελέγχου τύπου <i>Shewhart</i> για μεταβλητές	
2.1 Διαγράμματα ελέγχου για τη μέση τιμή.....	13
2.1.1 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης II.....	13
2.1.2 Διάγραμμα ελέγχου Φάσης I.....	14
2.2 Διαγράμματα ελέγχου για τη διασπορά με όρια ελέγχου 3σ	16
2.2.1 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης II.....	16
2.2.2 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I.....	18
2.2.3 Παράδειγμα.....	21
2.2.4 Απόδοση διαγραμμάτων R και S με όρια ελέγχου 3σ	28
2.3 Διαγράμματα ελέγχου για τη διασπορά με όρια πιθανότητας.....	32
2.3.1 R διάγραμμα ελέγχου με όρια πιθανότητας - Φάση II.....	33
2.3.2 S διάγραμμα ελέγχου με όρια πιθανότητας - Φάση II.....	36
2.3.3 R διάγραμμα ελέγχου με όρια πιθανότητας - Φάση I.....	38
2.3.4 S διάγραμμα ελέγχου με όρια πιθανότητας - Φάση I.....	39
2.3.5 Σταθερές για την ανάπτυξη R και S διαγραμμάτων ελέγχου με όρια πιθανότητας.....	40
2.3.6 Απόδοση των διαγραμμάτων R και S με όρια πιθανότητας.....	43
2.4 Παράδειγμα.....	48
<i>CUSUM</i> και <i>EWMA</i> διαγράμματα ελέγχου για τη διασπορά	
3.1 Εισαγωγή.....	53
3.2 Το <i>CUSUM-S²</i> διάγραμμα ελέγχου.....	55
3.3 Το <i>CUSUM-lnS²</i> διάγραμμα ελέγχου.....	60
3.4 Το <i>EWMA-S²</i> διάγραμμα ελέγχου.....	64
3.5 Το <i>EWMA-lnS²</i> διάγραμμα ελέγχου.....	71

3.6 Σύγκριση των τιμών ARL.....	74
Παράρτημα.....	78
Βιβλιογραφία.....	83

Πίνακες

Πίνακας 2.1. Τιμές των σταθερών d_2, d_3, c_4, A_2, A_3	16
Πίνακας 2.2. Τιμές των σταθερών D_1, D_2, D_3, D_4	20
Πίνακας 2.3. Τιμές των σταθερών B_3, B_4, B_5, B_6	21
Πίνακας 2.4. Τα δεδομένα του παραδείγματος.....	22
Πίνακας 2.5. Τιμές ARL για το R διάγραμμα ελέγχου ορίων 3σ	29
Πίνακας 2.6. Τιμές ARL για το S διάγραμμα ελέγχου ορίων 3σ	31
Πίνακας 2.7. Τιμές των $D_1^*, D_2^*, D_L^*, D_U^*, D_3^*$ και D_4^* για $\alpha = 0.0027$ ($ARL_0 = 370$)	40
Πίνακας 2.8. Τιμές ARL των $D_1^*, D_2^*, D_L^*, D_U^*, D_3^*$ και D_4^* για $\alpha = 0.005$ ($ARL_0 = 200$).....	41
Πίνακας 2.9. Τιμές των $B_5^*, B_6^*, B_L^*, B_U^*, B_3^*$ και B_4^* για $\alpha = 0.0027$ ($ARL_0 = 370$)	42
Πίνακας 2. 10. Τιμές των $B_5^*, B_6^*, B_L^*, B_U^*, B_3^*$ και B_4^* για $\alpha = 0.005$ ($ARL_0 = 200$)	43
Πίνακας 2.11. Τιμές ARL για το δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου ($\alpha=0.0027$)	44
Πίνακας 2.12. Τιμές ARL για το δίπλευρο S διάγραμμα ελέγχου ($\alpha=0.0027$)	46
Πίνακας 2.13. Τα δεδομένα του Zhang	48
Πίνακας 3.1. Τιμές ARL για το άνω CUSUM- S^2 βελτιστοποιημένο για $\sigma_1 = 1.2$	58
Πίνακας 3.2. Τιμές ARL για το άνω CUSUM- S^2 βελτιστοποιημένο για $\sigma_1 = 1.1, 1.3, 1.5, 1.7$ ($n = 10$)	59
Πίνακας 3.3. Τιμές ARL για το άνω CUSUM- $\ln S^2$ βελτιστοποιημένο για $\sigma_1 = 1.2$ ($ARL_0 = 200$)	62
Πίνακας 3.4. Τιμές ARL για το κάτω CUSUM- $\ln S^2$ βελτιστοποιημένο για $\sigma_1 = 0.8$ ($ARL_0 = 200$)	63
Πίνακας 3.5. Τιμές ARL για το άνω EWMA- S^2 ($\lambda = 0.10, ARL_0 = 200, n = 5, 10, 15, 20$).....	67
Πίνακας 3.6. Τιμές ARL για το κάτω EWMA- S^2 ($\lambda=0.12, ARL_0=200, n=5, 10, 15, 20$).....	69
Πίνακας 3.7. Τιμές ARL για το άνω EWMA- S^2 με και χωρίς ανακλαστικό φράγμα ($\lambda=0.3, ARL_0 = 500, n = 10$)	70
Πίνακας 3.8. Τιμές ARL για το άνω EWMA- $\ln S^2$ με μηδενικό ανακλαστικό φράγμα και αρχική τιμή ($n = 5, ARL_0 = 200$).....	73
Πίνακας 3.9. Τιμές ARL για το άνω EWMA- $\ln S^2$ με ανακλαστικό φράγμα και αρχική τιμή ίση με -0.267 ($n = 5, ARL_0 = 200$)	74
Πίνακας 3.10. ARL διαγραμμάτων ελέγχου CUSUM – S^2 , CUSUM – $\ln S^2$, EWMA – S^2 EWMA – $\ln S^2$, R και S ($n = 10, ARL_0 = 200$).....	75
Πίνακας 3.11. ARL διαγραμμάτων ελέγχου CUSUM – S^2 , CUSUM – $\ln S^2$,	

EWMA – S^2 EWMA – $\ln S^2$, R και S ($n = 10$, $ARL_0 = 500$).....	76
--	----

Σχήματα

Σχήμα 1.1. Τυπικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart.....	3
Σχήμα 1.2. Προειδοποιητικά όρια ελέγχου.....	5
Σχήμα 2.1. R διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.4.....	23
Σχήμα 2.2 R διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.4 πλην του 15 ^{ου} δείγματος.....	24
Σχήμα 2.3. \bar{X} διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.4 πλην του 15 ^{ου} δείγματος	25
Σχήμα 2.4. S διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.4.....	26
Σχήμα 2.5. S διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.4 πλην του 15 ^{ου} δείγματος.....	27
Σχήμα 2.6. \bar{X} διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.4 πλην του 15 ^{ου} δείγματος.....	28
Σχήμα 2.7. Καμπύλη ARL για το R διάγραμμα ελέγχου ορίων.....	30
Σχήμα 2.8. Καμπύλη ARL για το S διάγραμμα ελέγχου ορίων	32
Σχήμα 2.9. Καμπύλες ARL για δίπλευρα R διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$).....	45
Σχήμα 2.10 Καμπύλες ARL για δίπλευρα S διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$).....	47
Σχήμα 2.11. Δίπλευρο διάγραμμα R ελέγχου φάσης II για τα δεδομένα του Πίνακα 2.11.....	49
Σχήμα 2.12. Δίπλευρο διάγραμμα S ελέγχου φάσης II για τα δεδομένα του Πίνακα 2.11.....	50

Σχήμα 2.13. Δίπλευρο διάγραμμα R ελέγχου Φάσης II με όρια ελέγχου 3σ για τα δεδομένα του Πίνακα 2.13.....	51
Σχήμα 2.14. Δίπλευρο διάγραμμα S ελέγχου Φάσης II με όρια ελέγχου 3σ για τα δεδομένα του Πίνακα 2.13.....	51
Σχήμα 3.1. Καμπύλες ARL για το άνω CUSUM- S^2 βελτιστοποιημένο για $\sigma_1 = 1.2$	5
8	
Σχήμα 3.2 Καμπύλες ARL για το άνω CUSUM- S^2 με $n = 10$ βελτιστοποιημένο για $\sigma_1 = 1.1, 1.3, 1.5$ και 1.7	59
Σχήμα 3.3. Καμπύλες ARL για το άνω CUSUM- $\ln S^2$ ($ARL_0 = 200, n = 3,5,10$).....	
.....63	
Σχήμα 3.4. Καμπύλες ARL για το κάτω CUSUM- $\ln S^2$ ($ARL_0 = 200, n = 3,5,10$).....	
.....64	
Σχήμα 3.5. Καμπύλες ARL για το άνω EWMA- S^2 ($\lambda = 0.10, ARL_0 = 200, n=5,10,15,20$).....	68
Σχήμα 3.6. Καμπύλες ARL για το κάτω EWMA- S^2 ($\lambda = 0.12, ARL_0 = 200, n=5,10,15,20$)	
.....69	
Σχήμα 3.7. Καμπύλες ARL για το άνω EWMA- $\ln S^2$ με μηδενικό ανακλαστικό φράγμα και αρχική τιμή ($n = 5, ARL_0 = 200$).....	
.....73	

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Στατιστικός έλεγχος διεργασιών και διαγράμματα ελέγχου

1.1 Εισαγωγή

Σε μια παραγωγική διαδικασία εξαιρετικά σημαντική είναι η ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων. Για αυτό το λόγο κάθε εταιρεία επιθυμεί την παραγωγή όσο το δυνατόν περισσότερων προϊόντων, αν όχι όλων, με χαρακτηριστικά τα οποία πληρούν συγκεκριμένες προδιαγραφές. Αυτό προϋποθέτει ότι η παραγωγική διαδικασία είναι όσο γίνεται πιο σταθερή με ελάχιστη μεταβλητότητα σε σημαντικούς παράγοντες που επηρεάζουν την παραγωγή. Ο στατιστικός έλεγχος ποιότητας διαθέτει τις κατάλληλες στατιστικές μεθόδους μέσα από τις οποίες ελέγχεται η σταθερότητα της παραγωγικής διαδικασίας και γίνεται όσο το δυνατόν πιο έγκαιρη η ανίχνευση παραγόμενων προϊόντων που δεν πληρούν τις προδιαγραφές έτσι ώστε να διακοπεί η παραγωγική διαδικασία έως ότου βρεθεί και διορθωθεί η αιτία που οδήγησε σε παραγωγή μη συμμορφούμενων προϊόντων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα μεγαλύτερη αξιοπιστία και φήμη για τα προϊόντα της εταιρείας αλλά και μικρότερο κόστος παραγωγής.

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αποτελείται από ένα σύνολο στατιστικών μεθόδων όπου κάθε μια είναι προσανατολισμένη σε μια συγκεκριμένη φάση της παραγωγικής διαδικασίας. Οι μέθοδοι αυτές είναι οι ακόλουθες:

1. Σχεδιασμός και Ανάλυση Πειραμάτων (Design of Experiments)
2. Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (Statistical Process Control)
3. Δειγματοληψία Αποδοχής (Acceptance Sampling)

Το αντικείμενο της παρούσης διπλωματικής εργασίας εμπεριέχεται στο μέρος του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών ο οποίος περιέχει στατιστικές τεχνικές απαραίτητες για τον έλεγχο της παραγωγικής διαδικασίας κατά την παραγωγή των προϊόντων. Κατά την παραγωγική διαδικασία ανεξάρτητα από την ποιότητα των μηχανημάτων, την άρτια εκπαίδευση του προσωπικού ή την πρώτη ύλη που θα χρησιμοποιηθεί, τα παραγόμενα προϊόντα δεν θα είναι ποτέ ίδια. Θα είναι πάντα παρούσα μια φυσική μορφή μεταβλητότητας η οποία προέρχεται από τυχαίες αιτίες και γενικά μη ελέγξιμους παράγοντες. Μια διεργασία που λειτουργεί μόνο με την παρουσία φυσικής μεταβλητότητας χαρακτηρίζεται ως εντός ελέγχου διεργασία (in control process). Παρ' όλα αυτά υπάρχει το ενδεχόμενο σε μια παραγωγική διαδικασία να εμφανιστεί και μια δεύτερη μορφή μεταβλητότητας η οποία χαρακτηρίζεται ως ειδική μορφή μεταβλητότητας. Η παρουσία αυτής οφείλεται σε συστηματική αλλαγή στα επίπεδα σημαντικών για την ποιότητα του προϊόντος παραγόντων. Δύναται συνήθως να προκληθεί από φθορές μηχανών, από λάθη του προσωπικού ή από κακής ποιότητας πρώτη ύλη. Μια διεργασία που λειτουργεί με την παρουσία ειδικής μεταβλητότητας χαρακτηρίζεται ως εκτός ελέγχου διεργασία (out of control process). Μέσα από την χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου γίνεται συνεχής παρακολούθηση μιας παραγωγικής διαδικασίας για την γρήγορη ανίχνευση οποιασδήποτε μορφής ειδικής μεταβλητότητας. Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο θα δοθούν βασικές έννοιες για την ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart, που εισήχθησαν από τον Shewhart (1931). Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση των μεταβλητών, δηλαδή με διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διασποράς. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στα διαγράμματα ελέγχου R και S που χρησιμοποιούνται για την ανίχνευση μετατοπίσεων στη διασπορά της διεργασίας.

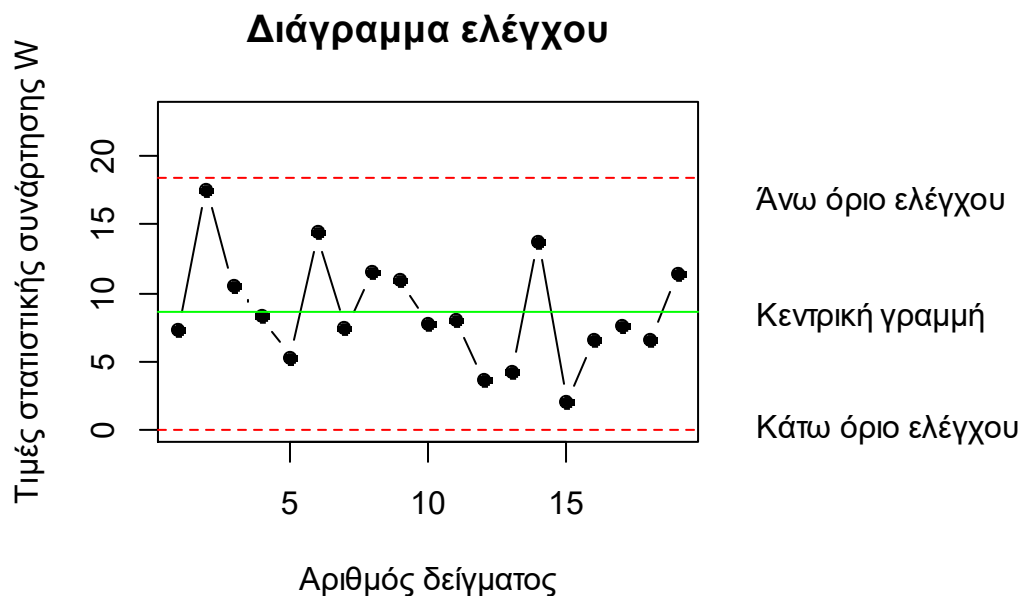
Οι κύριες πηγές για το παρόν κεφάλαιο είναι το βιβλίο του Montgomery (2013), οι πανεπιστημιακές σημειώσεις του Αντζουλάκος (2010), και τα βιβλία των Μπερσίμη, Ρακιτζή και Σαχλά (2021) και Ταγαρά (2002).

1.2 Περιγραφή και χρήση ενός διαγράμματος ελέγχου

Κατά την παραγωγική διαδικασία μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της συμπεριφοράς μιας κρίσιμης ποσότητας ενός χαρακτηριστικού X (τυχαία μεταβλητή) Για την

παρακολούθηση του συγκεκριμένου χαρακτηριστικού επιλέγονται τυχαία δείγματα προϊόντων από την παραγωγή σε διάφορες χρονικές στιγμές τα οποία αντιστοιχούν σε τυχαία δείγματα τιμών του χαρακτηριστικού X , έστω τα X_1, X_2, \dots . Στην συνέχεια υπολογίζεται η τιμή μιας στατιστικής συνάρτησης $W_i = g(X_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ η οποία εκτιμά ένα κρίσιμο χαρακτηριστικό ποιότητας της X . Έτσι την συμπεριφορά του κρίσιμου χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει την παρακολουθούμε μέσα από τις τιμές που παίρνει η στατιστική συνάρτηση W , οι οποίες απεικονίζονται σε ένα ειδικό διάγραμμα που ονομάζεται διάγραμμα ελέγχου.

Μια τυπική μορφή διαγράμματος ελέγχου είναι η ακόλουθη.



Σχήμα 1.1. Τυπικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart

Σε ένα διάγραμμα ελέγχου όπως αυτό της παραπάνω εικόνας απεικονίζεται η συμπεριφορά του χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει στην διάρκεια της παραγωγής. Στο διάγραμμα διακρίνουμε την κεντρική γραμμή (center line, CL) ή μέσο επίπεδο της διεργασίας όπου παριστάνει συνήθως την μέση τιμή της στατιστικής συνάρτησης W καθώς και άλλες δύο οριζόντιες γραμμές οι οποίες αποτελούν τα άνω και κάτω όρια ελέγχου (upper and lower control limits, UCL και LCL). Τέλος παρατηρούμε τις τιμές της στατιστικής συνάρτησης W οι οποίες ενώνονται μεταξύ τους με μια τεθλασμένη γραμμή. Στην περίπτωση που όλες οι τιμές της στατιστικής συνάρτησης βρίσκονται ανάμεσα στα όρια ελέγχου μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διεργασία παραμένει εντός

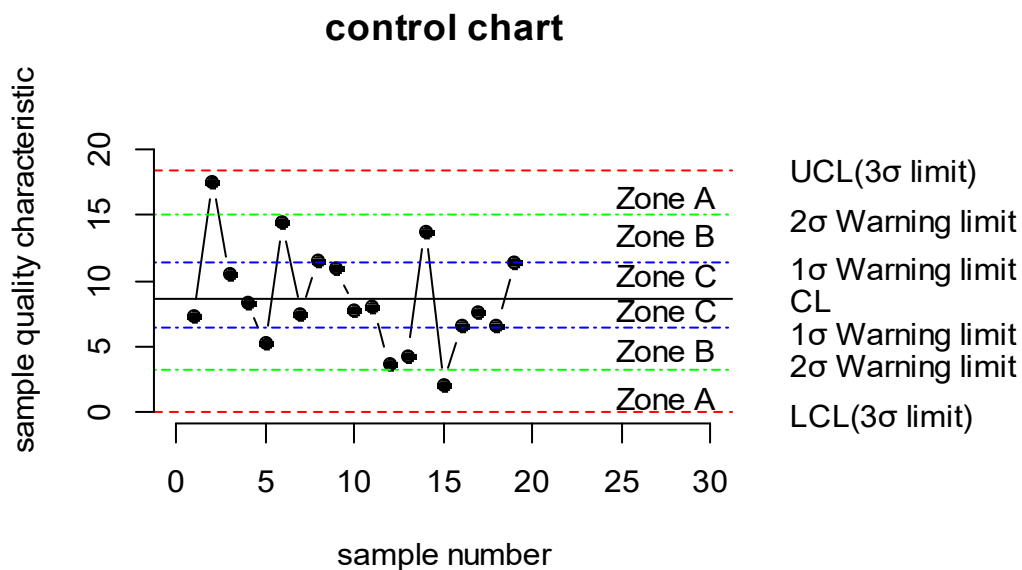
στατιστικού ελέγχου και η παραγωγή συνεχίζεται κανονικά. Στην περίπτωση όμως που παρατηρηθεί κάποιο σημείο εκτός των ορίων ελέγχου πρέπει να σταματήσουμε την παραγωγική διαδικασία καθώς είναι πιθανό η διεργασία να βρίσκεται εκτός ελέγχου και τότε θα πρέπει να ελέγξουμε τυχόν ειδικές αιτίες μεταβλητότητας στις οποίες οφείλεται αυτή η συμπεριφορά. Ένδειξη ότι η διεργασία μπορεί να βρίσκεται εκτός ελέγχου αποτελεί και η περίπτωση που τα σημεία παρ' όλο που βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου αλλά δεν φαίνεται να είναι κατανεμημένα με τυχαίο τρόπο.

Η πιο συνήθης μέθοδος κατασκευής ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου Shewhart είναι η μέθοδος ορίων ελέγχου L σίγμα που παρουσιάζεται στο ακόλουθο πλαίσιο.

Μοντέλο ορίων L σίγμα
$UCL = \mu_W + L\sigma_W$
$CL = \mu_W$
$LCL = \mu_W - L\sigma_W$

Προφανώς με W συμβολίζεται η στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται στο διάγραμμα η οποία «παρακολουθεί» την κρίσιμη ποσότητα που μελετάμε. Η μέση τιμή της W συμβολίζεται με μ_W και η τυπική της απόκλιση με σ_W . Το L δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή εκφρασμένη σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Το σύνηθες είναι να παίρνει την τιμή 3 οπότε σε αυτή την περίπτωση αναφερόμαστε σε όρια ελέγχου 3σ . Μπορούμε βέβαια να δώσουμε και άλλες τιμές στο L ανάλογα με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της παραγωγικής διεργασίας και τις ανάγκες μας. Αν δώσουμε τιμή μεγαλύτερη από το 3, τα όρια ελέγχου θα απομακρυνθούν από την κεντρική γραμμή με αποτέλεσμα να είναι πιο δύσκολο να εντοπιστεί κάποιο σημείο εκτός των ορίων σε μια εντός ελέγχου διεργασία. Ταυτόχρονα όμως αυξάνεται η πιθανότητα να βρεθεί εντός των ορίων ελέγχου ένα σημείο που έχει παραχθεί ενώ η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Αν δώσουμε μικρότερες τιμές από 3 στο L θα μικρύνει η απόσταση ανάμεσα στα όρια ελέγχου και την κεντρική γραμμή με αποτέλεσμα να εμφανίζονται πιο συχνά σημεία εκτός των ορίων ελέγχου ενώ η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Αυτό σημαίνει αύξηση της πιθανότητας του σφάλματος τύπου I ενώ παράλληλα μειώνεται η πιθανότητα μια διεργασία να βρίσκεται εκτός ελέγχου και να εντοπιστεί ένα σημείο εντός των ορίων, κάτι που σημαίνει μείωση στην πιθανότητα σφάλματος τύπου II.

Ανάλογα με το είδος της μετατόπισης που περιμένουμε να εντοπίσουμε κατασκευάζουμε είτε δίπλευρα, είτε μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου. Στην περίπτωση όπου γνωρίζουμε ποια μπορεί να είναι η πιθανή μεταβολή ή μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε μόνο αύξηση ή μόνο μείωση στο επίπεδο του υπό μελέτη χαρακτηριστικού μπορούμε να κατασκευάσουμε μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου. Σε διαφορετική περίπτωση καταλήγουμε σε κατασκευή δίπλευρων διαγραμμάτων



ελέγχου.

Στην περίπτωση που επιθυμούμε να εντοπίζουμε πιο γρήγορα εκτός ελέγχου διεργασίες σχεδιάζουμε και προειδοποιητικά όρια ελέγχου (warning limits) όπως φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα.

Σχήμα 1.2. Προειδοποιητικά όρια ελέγχου

Τα προειδοποιητικά όρια ελέγχου μαζί με κάποιους κανόνες που περιγράφουν ειδικές ακολουθίες σημείων (μοτίβων), χρησιμεύουν στο να ανιχνεύουμε νωρίτερα αν μια διεργασία είναι εκτός ελέγχου χωρίς να χρειάζεται απαραίτητα να παρατηρήσουμε ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου. Σε περίπτωση που παρατηρηθεί κάποιο μοτίβο τότε υπάρχει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας.

Μερικοί από τους σημαντικότερους κανόνες (μοτίβα) είναι οι ακόλουθοι:

1. Ένα ή περισσότερα σημεία εκτός των ορίων ελέγχου

2. Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία στην ζώνη A (σε μια από τις δύο ζώνες A)
3. Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία πέραν της ζώνης C (σε μια από τις δύο περιοχές)
4. Οκτώ συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (επάνω ή κάτω) της κεντρικής γραμμής
5. Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη
6. Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική ζώνη C
7. Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή "πάνω-κάτω"
8. Οκτώ συνεχόμενα σημεία εκτός της ζώνης C
9. Οποιαδήποτε ασυνήθιστη ή μη τυχαία ακολουθία σημείων
10. Ένα ή περισσότερα σημεία κοντά στα προειδοποιητικά όρια ή τα όρια ελέγχου.

1.3 Μέσο μήκος ροής

Μια βασική έννοια που σχετίζεται με τα διαγράμματα ελέγχου είναι το μέσο μήκος ροής ARL (Average Run Length). Υπολογίζεται από τον τύπο

$$ARL = \frac{1}{p}$$

οπού το p συμβολίζει την πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου.

Είναι γνωστό ότι αν μια μεταβλητή X ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή $G(p)$, τότε

$$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

και

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad V(X) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

Το μήκος ροής σε ένα διάγραμμα ελέγχου ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή καθώς δηλώνει τον αριθμό των σημείων που θα απεικονιστούν σε αυτό έως ότου

εμφανιστεί το πρώτο σημείο εκτός των ορίων ελέγχου. Συνεπώς το μέσο μήκος ροής δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό σημείων που πρέπει να σχεδιαστούν στο διάγραμμα ελέγχου μέχρι να εντοπιστεί το πρώτο σημείο εκτός των ορίων ελέγχου.

Σε μια εντός ελέγχου διεργασία όπου στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση W η οποία έχει μέση τιμή μ_0 , τυπική απόκλιση σ_0 και συνάρτηση κατανομής $F_0(\cdot)$, η πιθανότητα α εμφάνισης στο διάγραμμα ενός σημείου εκτός των ορίων ελέγχου ισούται με

$$\alpha = 1 - P(LCL \leq W \leq UCL) = 1 - F_0(\mu_0 + L\sigma_0) + F_0(\mu_0 - L\sigma_0).$$

Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι προφανώς ίσο με

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}.$$

Το ARL_0 θέλουμε να έχει μεγάλη τιμή έτσι ώστε να μειωθεί ο αριθμός των λανθασμένων ενδείξεων εκτός ελέγχου διεργασίας.

Στην περίπτωση όπου η στατιστική συνάρτηση W ακολουθεί την κανονική κατανομή και χρησιμοποιούμε 3σ όρια ελέγχου το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι

$$ARL_0 = \frac{1}{0.0027} = 370.$$

Σε μια εκτός ελέγχου διεργασία, όπου στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση W η οποία έχει συνάρτηση κατανομής $F_1(\cdot)$, η πιθανότητα $1 - \beta$ εμφάνισης ενός σημείου εκτός των ορίων ελέγχου του διαγράμματος ισούται με

$$1 - \beta = 1 - P(LCL \leq W \leq UCL) = 1 - F_1(\mu_0 + L\sigma_0) + F_1(\mu_0 - L\sigma_0).$$

Το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ισούται με

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}$$

και δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό σημείων που θα απεικονιστούν στο διάγραμμα μέχρις ότου εντοπιστεί η αλλαγή στο μέσο επίπεδο της διεργασίας. Το ARL_1 θέλουμε να παίρνει μικρές τιμές έτσι ώστε να ανιχνευτεί όσο το δυνατόν νωρίτερα μια ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας.

Η χρήση του ARL ως περιγραφικό μέτρο της απόδοσης μιας διεργασίας έχει υποστεί αρκετή κριτική (δείτε, π.χ., Chakraborti (2000)) καθώς το ARL που παρατηρείται στην πράξη διαφέρει από το θεωρητικό και αυτό οφείλεται στο ότι η κατανομή του μήκους

ροής που είναι η γεωμετρική είναι μια ασύμμετρη κατανομή (λοξή προς τα δεξιά), και άρα η μέση τιμή δεν μπορεί να θεωρηθεί ως αντιπροσωπευτικό μέτρο κεντρικής τάσης της κατανομής. Παρόλα αυτά η χρήση του ARL είναι αρκετά διαδεδομένη για την αποτίμηση της απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου.

Ένα άλλο ισοδύναμο μέτρο που χρησιμοποιείται αρκετά συχνά, πέραν του μέσου μήκους ροής, είναι ο μέσος χρόνος σήματος *ATS* (average time to signal)

$$ATS = ARL \times h$$

όπου το *h* συμβολίζει το χρόνο που μεσολαβεί ανάμεσα στην λήψη δύο διαδοχικών δειγμάτων, και άρα ο μέσος χρόνος σήματος δηλώνει το μέσο χρόνο που απαιτείται για να δώσει το διάγραμμα ελέγχου ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας.

1.4 Ορθολογικές υποομάδες

Για τον τρόπο συλλογής των δεδομένων που θα χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου ο Shewhart πρότεινε την έννοια των ορθολογικών υποομάδων (rational subgroups). Στην περίπτωση όπου υπάρχει ειδική αιτία μεταβλητότητας τα δείγματα πρέπει να επιλέγονται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε οι διαφορές ανάμεσα στις υποομάδες να μεγιστοποιούνται ενώ οι διαφορές μέσα στις υποομάδες να ελαχιστοποιούνται. Για να το πετύχουμε αυτό υπάρχουν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις.

Σύμφωνα με την πρώτη μέθοδο, τα προϊόντα ενός δείγματος θα πρέπει να έχουν παραχθεί την ίδια χρονική στιγμή. Αυτό συμβαίνει διότι αν πάρουμε, για παράδειγμα, δείγμα από δύο διαφορετικές βάρδιες η μεταβλητότητα μπορεί να διαφέρει από δείγμα σε δείγμα και έτσι με αυτόν τον τρόπο το διάγραμμα ελέγχου είναι πιθανό να μην μπορεί να εντοπίσει ειδική αιτία μεταβλητότητας ανάμεσα στις δύο βάρδιες. Αυτή η προσέγγιση χρησιμοποιείται όταν θέλουμε μέσα από το διάγραμμα ελέγχου να ανιχνεύσουμε αλλαγές στην διεργασία.

Σύμφωνα με τη δεύτερη μέθοδο, τα προϊόντα ενός δείγματος επιλέγονται τυχαία από όλη την παραγωγή. Αυτό συμβαίνει όταν μέσα από το διάγραμμα θέλουμε να

πάρουμε αποφάσεις γύρω από την αποδοχή όλου του αριθμού των παραγόμενων προϊόντων από την τελευταία φορά που είχαμε δειγματοληψία.

1.5 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I και Φάσης II

Φάση I: Σε αυτή τη φάση χρησιμοποιούνται δείγματα που συλλέχθηκαν σε παρελθόντα χρόνο. Σκοπός είναι να ελεγχθεί αν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου και αν δεν ήταν να γίνουν τα κατάλληλα βήματα ώστε ο διαχειριστής να την φέρει εντός στατιστικού ελέγχου. Το αποτέλεσμα αυτής της φάσης είναι να προκύψουν η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου τα οποία θα χρησιμοποιηθούν για την παρακολούθηση της διεργασίας στο μέλλον. Αυτή η χρήση των διαγραμμάτων αναφέρεται και ως αναδρομική (retrospective). Πολλές δράσεις και σκέψεις εξελίσσονται στην διάρκεια αυτής της φάσης εκτός από την απλή απεικόνιση κάποιων δεδομένων σε ένα διάγραμμα. Αυτό γιατί ο διαχειριστής πρέπει να μελετήσει σε βάθος την διεργασία έως ότου αποφασίσει αν αυτή βρισκόταν εντός ή εκτός στατιστικού ελέγχου την περίοδο που συλλέχθηκαν τα δεδομένα. Στην συνέχεια τα διαγράμματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παρακολούθηση της μελλοντικής συμπεριφοράς της διεργασίας (Φάση II).

Φάση II: Σε αυτή τη φάση χρησιμοποιούνται η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου που προέκυψαν από τη Φάση I. Τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται για την συνεχή παρακολούθηση της παραγωγικής διαδικασίας και γίνεται έλεγχος κάθε στιγμή αν υπάρχει κάποια αλλαγή στο μέσο επίπεδο των χαρακτηριστικών που μελετάμε που θα μπορούσε να επηρεάσει την ποιότητα του προϊόντος. Για κάθε δείγμα που συλλέγεται ο διαχειριστής έχει την δυνατότητα να καταλάβει εάν η διεργασία παραμένει εντός στατιστικού ελέγχου.

1.6 Εκτίμηση της μέσης τιμής και της διασποράς

Για την ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart για μεταβλητές Φάσης I είναι απαραίτητη η εκτίμηση της μέσης τιμής και της διασποράς του υπό μελέτη χαρακτηριστικού. Οι σχετικοί τύποι δίνονται στη συνέχεια.

1.6.1 Η περίπτωση των μεμονωμένων παρατηρήσεων

Έστω $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από ένα πληθυσμό με άγνωστη μέση τιμή μ και άγνωστη διακύμανση σ^2 . Μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της μέσης τιμής είναι ο δειγματικός μέσος

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

και μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της διακύμανσης του πληθυσμού είναι η δειγματική διακύμανση

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Στην περίπτωση όπου το τυχαίο δείγμα προέρχεται από κανονικό πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$, καταλήγουμε στις ακόλουθες αμερόληπτες εκτιμήτριες της τυπικής απόκλισης σ ,

$$\hat{\sigma} = \frac{R}{d_2} = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{d_2}$$

και

$$\hat{\sigma} = \frac{S}{c_4} = \frac{\sqrt{S^2}}{c_4}.$$

Επίσης

$$\mu_R = E(R) = \sigma d_2 \quad , \quad \sigma_R = \sqrt{V(R)} = \sigma d_3$$

$$\mu_S = E(S) = \sigma c_4 \quad , \quad \sigma_S = \sigma \sqrt{1 - c_4^2}$$

Οι σταθερές d_2, d_3 και c_4 που εμφανίζονται στους παραπάνω τύπους εξαρτώνται από το μέγεθος n του δείγματος.

1.6.2 Η περίπτωση των δειγμάτων

Έστω ότι έχουμε στη διάθεση μας m τυχαία δείγματα, τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, για $1 \leq i \leq m$, μεγέθους n το καθένα από τον κανονικό πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$ με άγνωστη μέση τιμή και διακύμανση.

- **Εκτίμηση της μέσης τιμής**

Έστω $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$, οι δειγματικοί μέσοι των m δειγμάτων. Θέτουμε

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{mn}.$$

Η ποσότητα $\bar{\bar{X}}$ ακολουθεί κατανομή $N(\mu, \frac{\sigma^2}{mn})$ και χρησιμοποιείται ως εκτιμήτρια της μέσης τιμής μ (αμερόληπτη εκτιμήτρια του μ), δηλαδή

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}.$$

- **Εκτίμηση της τυπικής απόκλισης σ (μέθοδος R)**

Έστω R_1, R_2, \dots, R_m τα εύρη των m δειγμάτων, δηλαδή

$$R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Θέτοντας

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$$

καταλήγουμε ότι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ είναι η

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}.$$

- **Εκτίμηση της τυπικής απόκλισης σ (Μέθοδος S)**

Έστω S_i η δειγματική τυπική απόκλιση του i δείγματος, δηλαδή

$$S_i = \sqrt{S_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Θέτοντας

$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_m}{m}$$

καταλήγουμε ότι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ είναι η

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}.$$

- **Εκτίμηση της διακύμανσης σ (Μέθοδος S^2)**

Έστω $S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2$ οι δειγματικές διασπορές των m δειγμάτων, δηλαδή

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Θέτοντας

$$\bar{S}^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_m^2}{m}$$

έχουμε ότι μια εκτιμήτρια του σ είναι η

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\bar{S}^2}$$

η οποία αν και δεν είναι αμερόληπτη, χρησιμοποιείται αρκετές φορές λόγω του ότι έχει μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα από την εκτιμήτρια \bar{S}/c_4 .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart για την παρακολούθηση της διασποράς

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart για μεταβλητές. Τέτοια διαγράμματα χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διασποράς των τιμών ενός χαρακτηριστικού ποιότητας X έτσι ώστε να είναι εφικτή η ανίχνευση οποιασδήποτε μεταβολής της διεργασίας. Ιδιαίτερη έμφαση θα δοθεί στα διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς. Για μέρος των αποτελεσμάτων του παρόντος κεφαλαίου ο αναγνώστης παραπέμπεται στους Montgomery (2013), Ryan (2011), Grant and Leavenworth (1999), Αντζουλάκος (2010), Κοϊμτζόγλου (2020), Μπερσίμης Ρακιτζής και Σαχλάς (2021) και Ταγαράς (2001).

2.1 Διαγράμματα ελέγχου για τη μέση τιμή

2.1.1 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης II

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού X των προϊόντων που παράγονται ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με γνωστή μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ , και έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i \geq 1$, τυχαία δείγματα μεγέθους n από το χαρακτηριστικό X . Ο δειγματικός μέσος

$$\bar{X}_i = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n}, \quad i = 1, 2, \dots$$

ακολουθεί την κατανομή $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, και είναι αμερόληπτος εκτιμητής της μέσης τιμής μ του χαρακτηριστικού X . Θέτουμε, λοιπόν $W_i = \bar{X}_i$ ως τη στατιστική συνάρτηση που θα απεικονιστεί στο διάγραμμα ελέγχου.

Η διαδικασία που ακολουθείται για την κατασκευή του διαγράμματος ελέγχου με όρια 3σ , το οποίο θα καθορίσει εάν η διεργασία βρίσκεται εντός ή εκτός στατιστικού

ελέγχου (σε σχέση με τη μέση τιμή), προϋποθέτει ότι η διακύμανση του χαρακτηριστικού X σε όλη την διαδικασία παραμένει σταθερή. Τα όρια ελέγχου για τη μέση τιμή του χαρακτηριστικού X συνοψίζονται στο παρακάτω πλαίσιο

\bar{X} διάγραμμα ελέγχου
Φάση II - Όρια ελέγχου 3σ
$UCL = \mu + A\sigma$ $CL = \mu$ $LCL = \mu - A\sigma$

όπου $A = 3/\sqrt{n}$.

Σημειώνεται ότι στην περίπτωση που θέλουμε να αναπτύξουμε όρια ελέγχου διαφορετικών των 3σ ορίων πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το κάτωθι πλαίσιο

\bar{X} διάγραμμα ελέγχου
Φάση II - Όρια ελέγχου $L\sigma$
$UCL = \mu + L\sigma/\sqrt{n}$ $CL = \mu$ $LCL = \mu - L\sigma/\sqrt{n}$

2.1.2 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I

Στην πράξη συνήθως οι παράμετροι μ και σ είναι άγνωστες και πρέπει να εκτιμηθούν από προκαταρκτικά δείγματα, υποθέτοντας ότι η επιλογή τους έγινε όταν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου. Έτσι χρησιμοποιούνται m ανεξάρτητα προκαταρκτικά τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα, τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i = 1, 2, \dots, m$. Συνήθως είναι 20 έως 25 δείγματα μεγέθους 4 έως 6 το καθένα.

Η (αμερόληπτη) εκτιμήτρια που χρησιμοποιείται για την μέση τιμή είναι η

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$$

ενώ για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης έχουμε τις ακόλουθες εκτιμήτριες

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\bar{S}^2}.$$

Καθεμία από τις παραπάνω στατιστικές συναρτήσεις οδηγεί σε διαφορετικό διάγραμμα ελέγχου Φάσης I για τη μέση τιμή. Σε κάθε περίπτωση στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζονται οι δειγματικές μέσες τιμές $W_i = \bar{X}_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Έτσι έχουμε τα τρία ακόλουθα διαγράμματα ελέγχου

\bar{X} διάγραμμα ελέγχου
Φάση I - Όρια ελέγχου 3σ Μέθοδος R
$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}$ $CL = \bar{\bar{X}}$ $LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R}$

\bar{X} διάγραμμα ελέγχου
Φάση I - Όρια ελέγχου 3σ Μέθοδος S
$UCL = \bar{\bar{X}} + A_3\bar{S}$ $CL = \bar{\bar{X}}$ $LCL = \bar{\bar{X}} - A_3\bar{S}$

\bar{X} διάγραμμα ελέγχου
Φάση II - Όρια ελέγχου 3σ Μέθοδος S^2
$UCL = \bar{\bar{X}} + A\sqrt{\bar{S}^2}$ $CL = \bar{\bar{X}}$ $LCL = \bar{\bar{X}} - A\sqrt{\bar{S}^2}$

όπου

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}, \quad A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}}.$$

Για τις τιμές των σταθερών που εμφανίζονται στους παραπάνω τύπους έχουμε τον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 2.1. Τιμές των σταθερών d_2, d_3, c_4, A_2, A_3

n	d_2	d_3	c_4	A_2	A_3
2	1.12837917	0.85250247	0.79788456	1.87997121	2.65868077
3	1.69256875	0.88836800	0.88622693	1.02332671	1.95441004
4	2.05875075	0.87980820	0.92131773	0.72859719	1.62810282
5	2.32592895	0.86408194	0.93998560	0.57681933	1.42729929
6	2.53441272	0.84803969	0.95153286	0.48324602	1.28712829
7	2.70435675	0.83320534	0.95936879	0.41928396	1.18191610
8	2.84720061	0.81983110	0.96503046	0.37252738	1.09909502
9	2.97002632	0.80783427	0.96931070	0.33669735	1.03166095
10	3.07750546	0.79705067	0.97265927	0.30826373	0.97535007
11	3.17287270	0.78731462	0.97535008	0.28508362	0.92739423
12	3.25845528	0.77847834	0.97755935	0.26577790	0.88590570
13	3.33598036	0.77041620	0.97940560	0.24941702	0.84954618
14	3.40676311	0.76302309	0.98097144	0.23535060	0.81733646
15	3.47182690	0.75621142	0.98231618	0.22310924	0.78854109
16	3.53198280	0.74990808	0.98348353	0.21234531	0.76259538
17	3.58788398	0.74405177	0.98450641	0.20279554	0.73905753
18	3.64006378	0.73859084	0.98541004	0.19425670	0.71757618
19	3.68896305	0.73348148	0.98621414	0.18656929	0.69786791
20	3.73494927	0.72869080	0.98693427	0.17960629	0.67970118
21	3.77833585	0.72417333	0.98758293	0.17326508	0.66288475
22	3.81938466	0.71991481	0.98817025	0.16746209	0.64725905
23	3.85832342	0.71588675	0.98870455	0.16212825	0.63268976
24	3.89534813	0.71206822	0.98919267	0.15720609	0.61906284
25	3.93062918	0.70844083	0.98964038	0.15264732	0.60628084

2.2 Διαγράμματα ελέγχου για τη διασπορά με όρια ελέγχου 3σ

2.2.1 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης II

Στην περίπτωση που ένα σημείο του διαγράμματος ελέγχου για τη μέση τιμή του χαρακτηριστικού X βρεθεί εντός των ορίων του διαγράμματος τότε υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου με την προϋπόθεση ότι η διασπορά του χαρακτηριστικού X είχε παραμείνει σταθερή σε όλη τη διάρκεια της διαδικασίας. Στην παρούσα παράγραφο θα αναπτύξουμε την κατασκευή διαγραμμάτων για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της διασποράς ενός συνεχούς χαρακτηριστικού X .

Η χρήση διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας είναι εξίσου σημαντική με την παρακολούθηση της μέσης τιμής, διότι μία εντός ελέγχου διασπορά στην διεργασία διασφαλίζει ότι τα προϊόντα είναι ομοιογενή στην ποιότητα (Chang & Gan (1993)).

- **R διάγραμμα**

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού X των προϊόντων που παράγονται ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με γνωστές παραμέτρους και έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i \geq 1$, τυχαία δείγματα μεγέθους n από το χαρακτηριστικό X . Για την παρακολούθηση της διασποράς του χαρακτηριστικού X χρησιμοποιούμε τη στατιστική συνάρτηση

$$W_i = R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

για την οποία γνωρίζουμε ότι

$$\mu_{R_i} = E(R_i) = \sigma d_2, \quad \sigma_{R_i} = \sqrt{V(R_i)} = \sigma d_3.$$

Το διάγραμμα ελέγχου ορίων 3σ , που χρησιμοποιείται για την παρακολούθηση της διασποράς είναι το R διάγραμμα ελέγχου όπου η απεικονιζόμενη ποσότητα θα είναι τα εύρη $W_i = R_i$. Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο

R διάγραμμα ελέγχου
Φάση II - Όρια ελέγχου 3σ
$UCL = D_2\sigma$
$CL = d_2\sigma$
$LCL = D_1\sigma$

όπου

$$D_1 = d_2 - 3d_3, \quad D_2 = d_2 + 3d_3.$$

Στις περιπτώσεις που $n \leq 6$ προκύπτει ότι $D_1 < 0$, και τότε θέτουμε $D_1 = 0$.

- **S διάγραμμα**

Για την παρακολούθηση της διασποράς του χαρακτηριστικού X μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επίσης τη στατιστική συνάρτηση

$$W_i = S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

για την οποία ισχύει ότι

$$\mu_{S_i} = E(S_i) = \sigma c_4, \quad \sigma_{S_i} = \sqrt{V(S_i)} = \sigma \sqrt{1 - c_4^2}.$$

Συνεπώς ένα διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά του χαρακτηριστικού X μπορεί να βασιστεί σε ένα διάγραμμα όπου η απεικονιζόμενη ποσότητα θα είναι οι δειγματικές τυπικές αποκλίσεις $W_i = S_i$ που είναι μέτρο διασποράς της X . Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο

S διάγραμμα ελέγχου
Φάση II - Όρια ελέγχου 3σ
$UCL = B_6\sigma$
$CL = c_4\sigma$
$LCL = B_5\sigma$

όπου

$$B_5 = c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2}, \quad B_6 = c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2}.$$

Στις περιπτώσεις όπου $n \leq 5$ προκύπτει ότι $B_5 < 0$ και τότε θέτουμε $B_5 = 0$.

2.2.2 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I

Στην πράξη τα παραπάνω πλαίσια δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν όταν η τυπική απόκλιση σ είναι άγνωστη και πρέπει να εκτιμηθεί.

- **R διάγραμμα**

Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του σ την ποσότητα $\hat{\sigma} = \frac{R}{d_2}$ προκύπτει το R διάγραμμα ελέγχου Φάσης I το οποίο δίνεται στο ακόλουθο πλαίσιο

R διάγραμμα ελέγχου
Φάση I - Όρια ελέγχου 3σ
$UCL = D_4\bar{R}$

$$CL = \bar{R}$$

$$LCL = D_3 \bar{R}$$

όπου

$$D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_2}, \quad D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2}.$$

Στις περιπτώσεις όπου $n \leq 6$ προκύπτει ότι $D_3 < 0$ και τότε θέτουμε $D_3 = 0$.

- **S διάγραμμα**

Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του σ την ποσότητα $\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_4}$ προκύπτει το S διάγραμμα ελέγχου φάσης I το οποίο δίνεται στο ακόλουθο πλαίσιο

S διάγραμμα ελέγχου
Φάση I - Όρια ελέγχου 3σ
$UCL = B_4 \bar{S}$
$CL = \bar{S}$
$LCL = B_3 \bar{S}$

όπου

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}, \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}.$$

Στις περιπτώσεις όπου $n \leq 5$ προκύπτει ότι $B_3 < 0$ και τότε θέτουμε $B_3 = 0$.

Οι τιμές των σταθερών που χρησιμοποιούνται για την εύρεση των ορίων ελέγχου στα διαγράμματα που παρουσιάστηκαν σε αυτή την παράγραφο δίνονται στους δύο ακόλουθους πίνακες.

Πίνακας 2.2. Τιμές των σταθερών D_1, D_2, D_3, D_4 .

n	D_1	D_2	D_3	D_4
2	0.00000000	3.68588657	0.00000000	3.26653192
3	0.00000000	4.35767276	0.00000000	2.57459129
4	0.00000000	4.69817535	0.00000000	2.28205156
5	0.00000000	4.91817477	0.00000000	2.11449915
6	0.00000000	5.07853178	0.00000000	2.00382982
7	0.20474074	5.20397276	0.07570774	1.92429226
8	0.38770732	5.30669390	0.13617141	1.86382859
9	0.54652350	5.39352915	0.18401302	1.81598698
10	0.68635344	5.46865748	0.22302266	1.77697734
11	0.81092884	5.53481656	0.25558190	1.74441810
12	0.92302026	5.59389030	0.28326927	1.71673073
13	1.0247317	5.64722896	0.30717560	1.69282440
14	1.11769383	5.69583239	0.32808088	1.67191912
15	1.20319263	5.74046117	0.34655893	1.65344107
16	1.28225856	5.78170704	0.36304213	1.63695787
17	1.35572867	5.82003929	0.37786302	1.62213698
18	1.42429128	5.85583629	0.39128196	1.60871804
19	1.48851862	5.88940748	0.40350597	1.59649403
20	1.54887688	5.92102167	0.41469824	1.58530176
21	1.60581586	5.95085584	0.42500612	1.57499388
22	1.65964023	5.97912908	0.43453079	1.56546921
23	1.71066316	6.00598368	0.44336956	1.55663044
24	1.75914348	6.03155277	0.45160110	1.54839890
25	1.80530667	6.05595168	0.45929204	1.54070796

Πίνακας 2.3. Τιμές των σταθερών B_3, B_4, B_5, B_6 .

n	B_3	B_4	B_5	B_6
2	0.00000000	3.26653192	0.00000000	2.60631539
3	0.00000000	2.56816960	0.00000000	2.27598105
4	0.00000000	2.26604708	0.00000000	2.08774936
5	0.00000000	2.08899787	0.00000000	1.96362792
6	0.03036321	1.96963679	0.02889159	1.87417413
7	0.11768503	1.88231497	0.11290335	1.80583423
8	0.18508960	1.81491040	0.17861710	1.75144381
9	0.23913280	1.76086720	0.23179398	1.70682742
10	0.28370556	1.71629444	0.27594884	1.66936971
11	0.32128015	1.67871985	0.31336062	1.63733954
12	0.35351183	1.64648817	0.34557880	1.60953991
13	0.38155570	1.61844430	0.37369779	1.58511342
14	0.40624538	1.59375462	0.39851512	1.56342775
15	0.42819954	1.57180046	0.42062734	1.54400502
16	0.44788816	1.55211184	0.44049063	1.52647643
17	0.46567554	1.53432446	0.45846055	1.51055226
18	0.48184896	1.51815104	0.47481881	1.49600128
19	0.49663844	1.50336156	0.48979185	1.48263642
20	0.51023059	1.48976941	0.50356405	1.47030448
21	0.52277862	1.47722138	0.51628724	1.45887862
22	0.53440963	1.46559037	0.52808770	1.44825280
23	0.54523009	1.45476991	0.53907147	1.43833762
24	0.55532993	1.44467007	0.54932830	1.42905705
25	0.56478571	1.43521429	0.55893474	1.42034601

2.2.3 Παράδειγμα

Τα δεδομένα του Πίνακα 2.4 αναφέρονται σε πλακέτες τυπωμένου κυκλώματος. Συλλέχθηκαν 25 δείγματα μεγέθους $n = 3$ το κάθε ένα, για να ελεγχθεί το πάχος τους καθώς αποτελεί μια σημαντική παράμετρο της ποιότητας (Montgomery(2013), p. 282). Επίσης στον Πίνακα 2.4 δίνεται η δειγματική μέση τιμή, το εύρος και η τυπική απόκλιση κάθε δείγματος.

Πίνακας 2.4. Τα δεδομένα του παραδείγματος

n	X_1	X_2	X_3	\bar{X}_i	R_i	S_i
1	0.0629	0.0636	0.064	0.06350000	0.0011	0.000557
2	0.063	0.0631	0.0622	0.06276666	0.0009	0.000493
3	0.0628	0.0631	0.0633	0.06306666	0.0005	0.000252
4	0.0634	0.063	0.0631	0.06316666	0.0004	0.000208
5	0.0619	0.0628	0.063	0.06256666	0.0011	0.000586
6	0.0613	0.0629	0.0634	0.06253333	0.0021	0.001097
7	0.063	0.0639	0.0625	0.06313333	0.0014	0.000709
8	0.0628	0.0627	0.0622	0.06256666	0.0006	0.000321
9	0.0623	0.0626	0.0633	0.06273333	0.0010	0.000513
10	0.0631	0.0631	0.0633	0.06316666	0.0002	0.000115
11	0.0635	0.063	0.0638	0.06343333	0.0008	0.000404
12	0.0623	0.063	0.063	0.06276666	0.0007	0.000404
13	0.0635	0.0631	0.063	0.06320000	0.0005	0.000265
14	0.0645	0.064	0.0631	0.06386666	0.0014	0.000709
15	0.0619	0.0644	0.0632	0.06316666	0.0025	0.00125
16	0.0631	0.0627	0.063	0.06293333	0.0004	0.000208
17	0.0616	0.0623	0.0631	0.06233333	0.0015	0.000751
18	0.063	0.063	0.0626	0.06286666	0.0004	0.000231
19	0.0636	0.0631	0.0629	0.06320000	0.0007	0.000361
20	0.064	0.0635	0.0629	0.06346666	0.0011	0.000551
21	0.0628	0.0625	0.0616	0.06230000	0.0012	0.000624
22	0.0615	0.0625	0.0619	0.06196666	0.0010	0.000503
23	0.063	0.0632	0.063	0.06306666	0.0002	0.000115
24	0.0635	0.0629	0.0635	0.06330000	0.0006	0.000346
25	0.0623	0.0629	0.063	0.06273333	0.0007	0.000379

Η κατανομή του χαρακτηριστικού που θέλουμε να μελετήσουμε είναι άγνωστη. Αφού λοιπόν μέση τιμή και τυπική απόκλιση είναι άγνωστα υποθέτουμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού είναι κανονική και προχωράμε σε κατασκευή R και S διαγραμμάτων ελέγχου Φάσης I. Με αυτόν τον τρόπο θα ελέγξουμε εάν η διασπορά στα δείγματα είναι εντός στατιστικού ελέγχου.

- **R διάγραμμα**

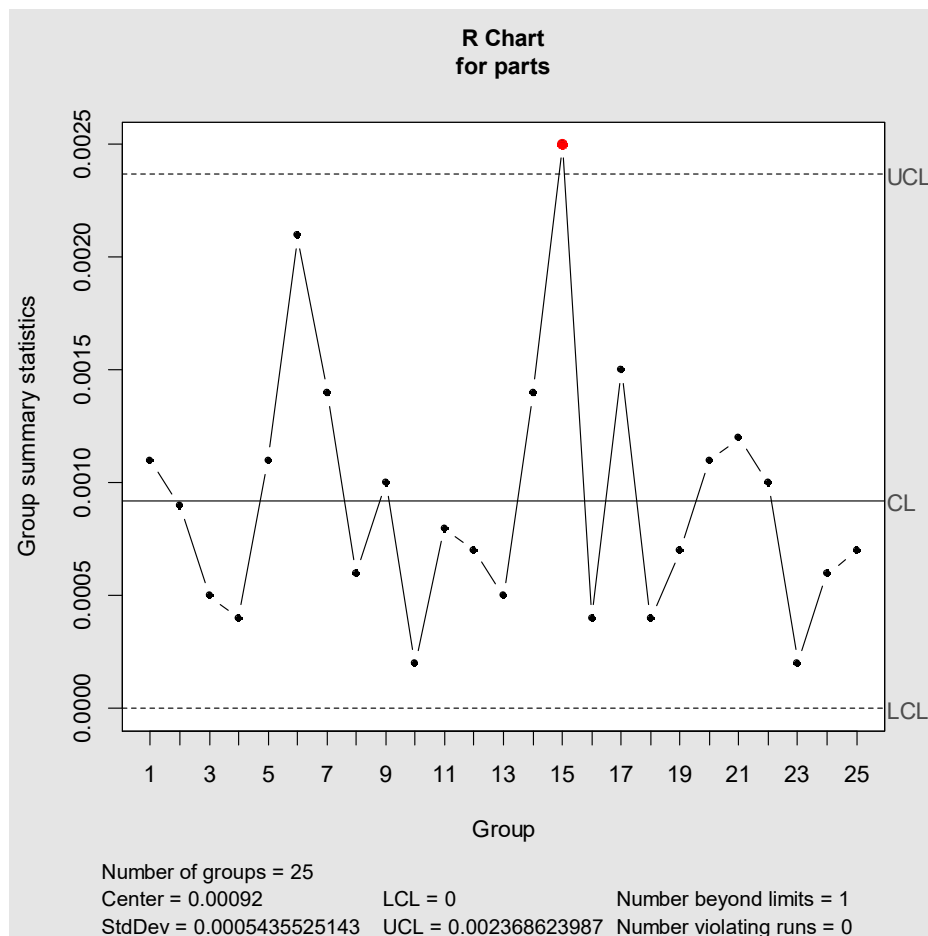
Η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου του R διαγράμματος ελέγχου Φάσης I είναι

$$CL = \bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_{25}}{25} = 0.00092,$$

$$LCL = D_3 \bar{R} = 0 \times 0.00092 = 0,$$

$$UCL = D_4 \times \bar{R} = 2.57459129 \times 0.00092 = 0.002368623987.$$

Το διάγραμμα είναι το ακόλουθο



Σχήμα 2.1. R διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.4

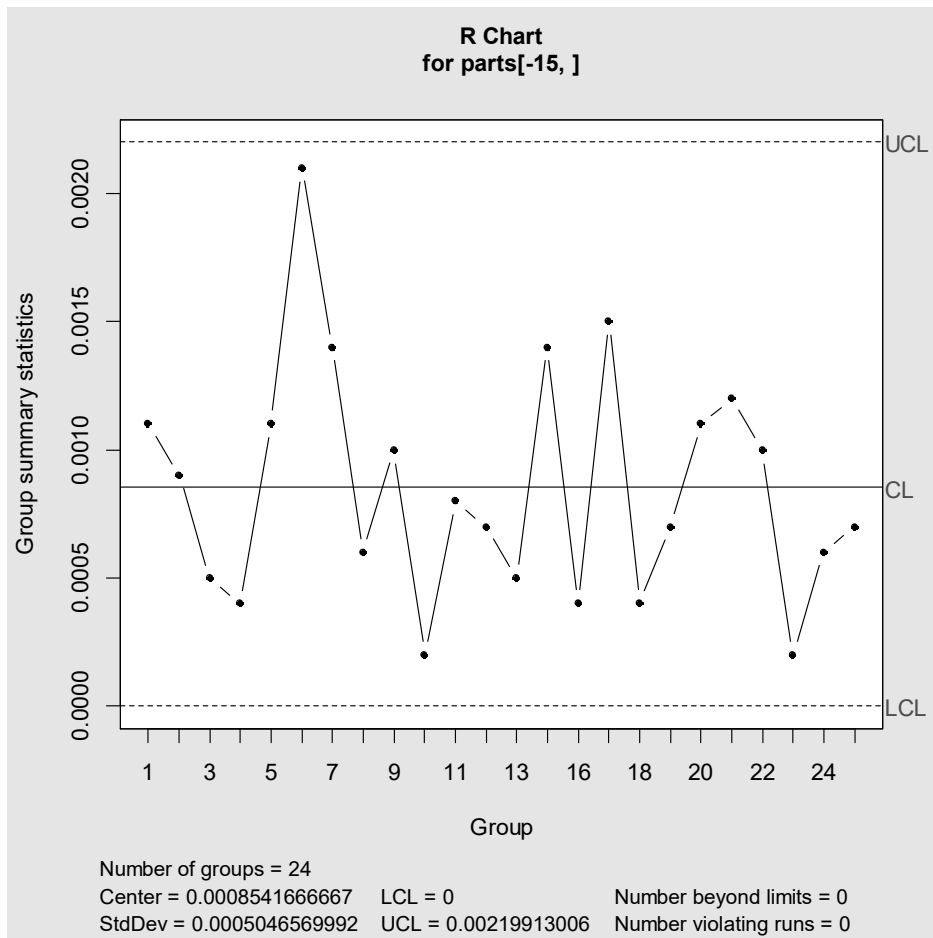
Είναι σαφές από το παραπάνω διάγραμμα ελέγχου ότι υπάρχει ένδειξη πως η διεργασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου καθώς η δέκατη πέμπτη παρατήρηση βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου. Στη συνέχεια αφαιρούμε το δέκατο πέμπτο δείγμα και υπολογίζουμε ξανά τα όρια ελέγχου και την κεντρική γραμμή, θεωρώντας ότι υπήρξε εμφάνιση ειδικής αιτίας μεταβλητότητας. Έτσι

$$CL = \bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_{14} + R_{16} + R_{17} + \dots + R_{25}}{24} = 0.0008541666667,$$

$$LCL = D_3 \bar{R} = 0 \times 0.0008541666667 = 0,$$

$$UCL = D_4 \times \bar{R} = 2.57459129 \times 0.0008541666667 = 0.00219913006.$$

Το διάγραμμα είναι το ακόλουθο

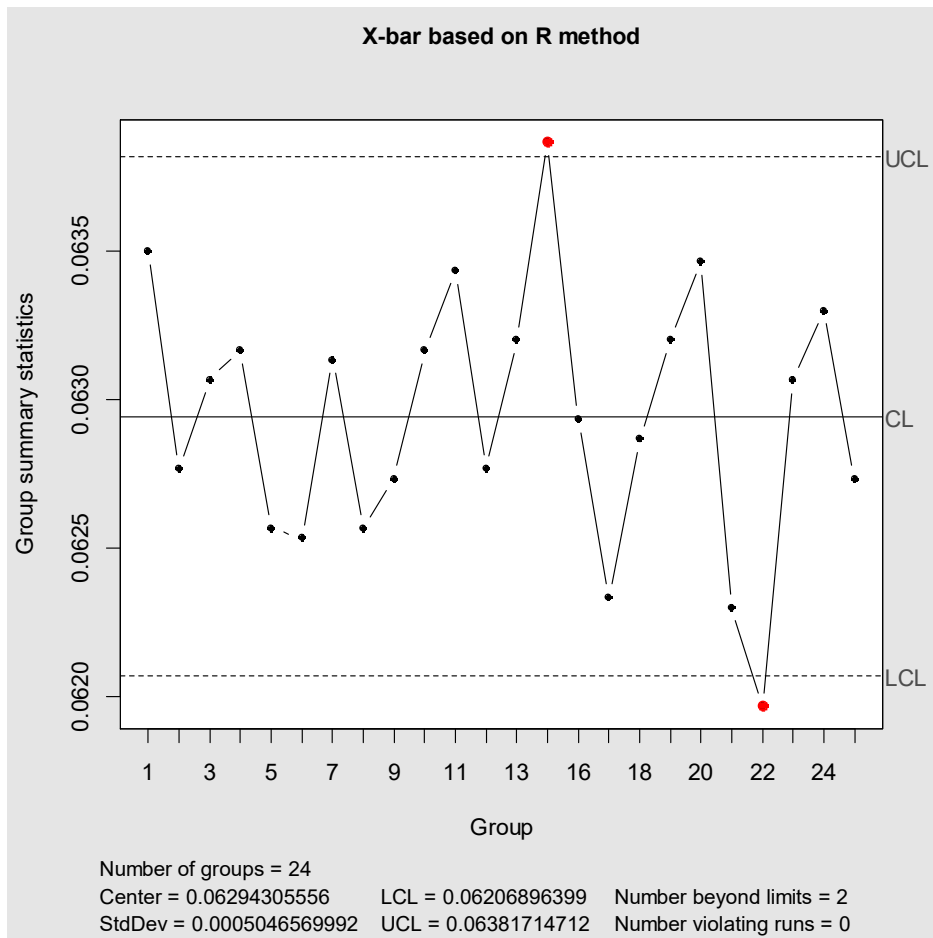


Σχήμα 2.2. *R* διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.4 πλην του 15^{ου} δείγματος

Η διεργασία φαίνεται να είναι πλέον εντός στατιστικού ελέγχου και τα όρια που καταλήξαμε θα χρησιμοποιηθούν στο *R* διάγραμμα ελέγχου Φάσης II. Επιπροσθέτως η εκτίμηση της τυπική απόκλισης είναι

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{0.000854166667}{1.692568751} = 0.0005046569992.$$

Για λόγους πληρότητας δίνουμε και το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου Φάσης I για τα 24 δείγματα από το οποίο προκύπτει ότι η μέση τιμή του χαρακτηριστικού είναι εκτός στατιστικού ελέγχου.



Σχήμα 2.3. \bar{X} διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.4 (Μέθοδος R)

- **S διάγραμμα**

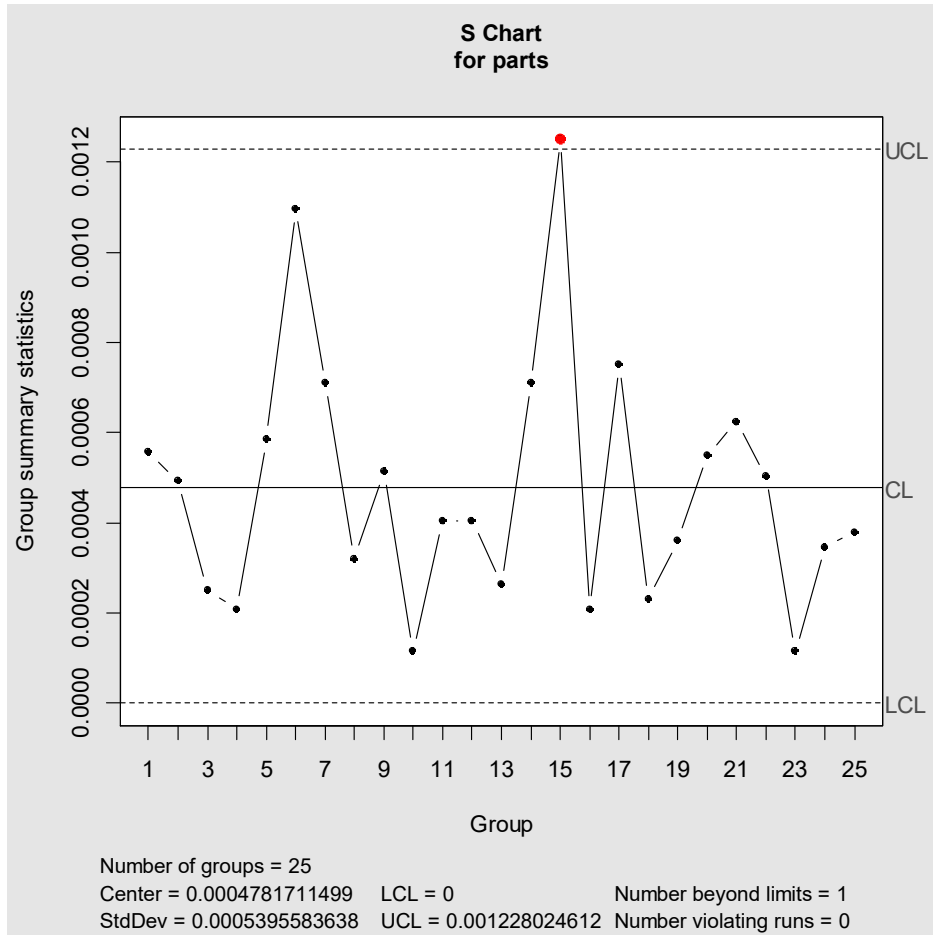
Η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου του S διαγράμματος ελέγχου Φάσης I είναι

$$CL = \bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_{25}}{25} = 0.0004781711499$$

$$LCL = B_3\bar{S} = 0 \times 0.0004781711499 = 0$$

$$UCL = B_4\bar{S} = 2.568169603 \times 0.0004781711499 = 0.001228024612.$$

Το διάγραμμα είναι το ακόλουθο



Σχήμα 2.4. S διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.4

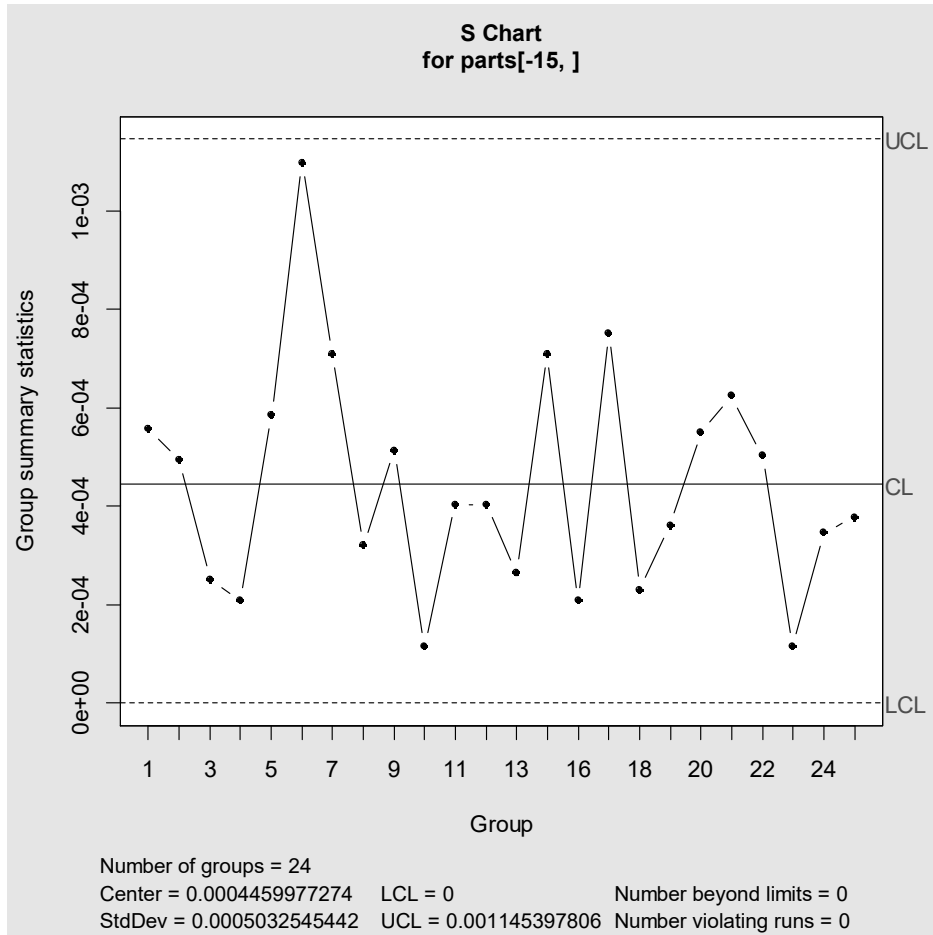
Παρατηρούμε ότι και σε αυτό το διάγραμμα υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου καθώς η δέκατη πέμπτη παρατήρηση βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου. Αφαιρώντας το δέκατο πέμπτο δείγμα από τα δεδομένα παίρνουμε

$$CL = \bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_{14} + S_{16} + S_{17} + \dots + S_{25}}{24} = 0.0004459977274$$

$$LCL = B_3\bar{S} = 0 \times 0.0004459977274 = 0$$

$$UCL = B_4\bar{S} = 2.568169603 \times 0.0004459977274 = 0.001145397806.$$

Το διάγραμμα είναι το ακόλουθο

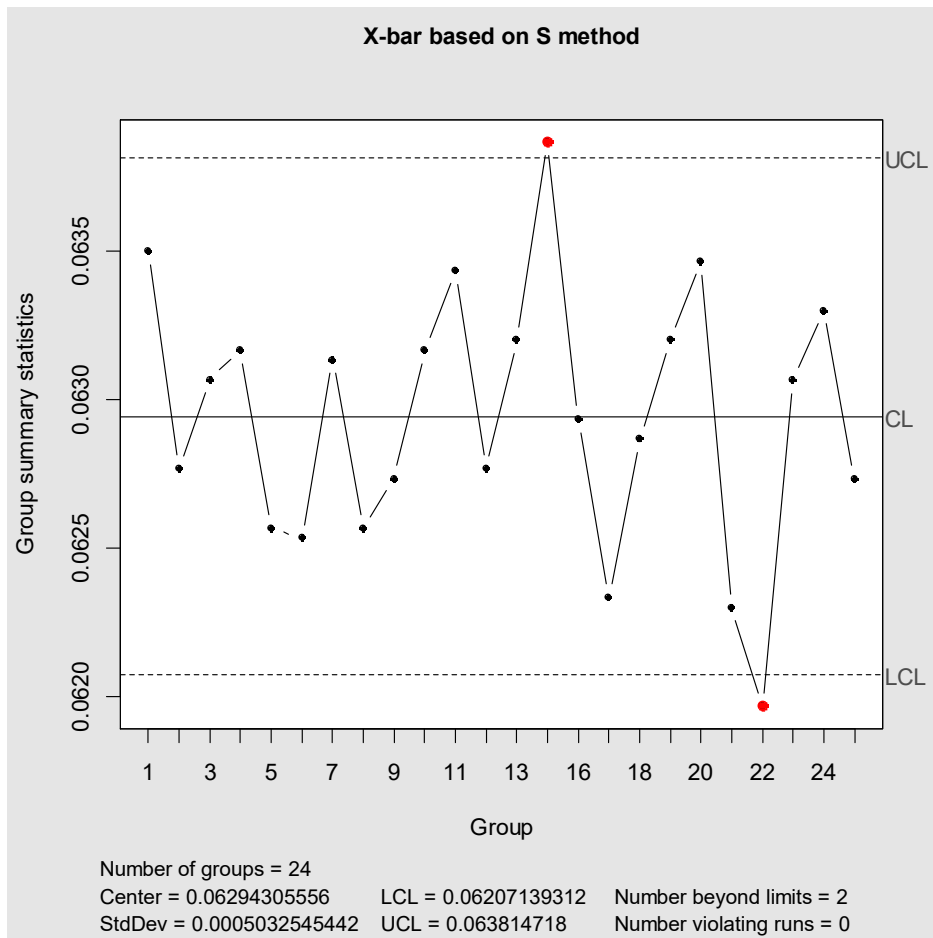


Σχήμα 2.5. S διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.4 πλην του 15^{ου} δείγματος

Η διεργασία φαίνεται να είναι εντός στατιστικού ελέγχου και τα όρια που καταλήξαμε θα χρησιμοποιηθούν στο S διάγραμμα ελέγχου Φάσης II. Επιπροσθέτως η εκτίμηση της τυπική απόκλισης είναι

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4} = \frac{0.0004459977274}{0.8862269255} = 0.0005032545442.$$

Για λόγους πληρότητας δίνουμε και το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου Φάσης I για τα 24 δείγματα από το οποίο προκύπτει ότι η μέση τιμή του χαρακτηριστικού είναι εκτός στατιστικού ελέγχου.



Σχήμα 2.6. \bar{X} διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.4 (Μέθοδος S)

2.2.4 Απόδοση των διαγραμμάτων R και S με όρια ελέγχου 3σ

Παρά την αδιαμφισβήτητη χρησιμότητα των R και S διαγραμμάτων ελέγχου 3σ για την παρακολούθηση μιας διεργασίας, παρουσιάζουν μειονεκτήματα κυρίως λόγω του μη σταθερού εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής (αλλάζει με την αλλαγή του μεγέθους του δείγματος), σε αντίθεση με τα \bar{X} διαγράμματα ελέγχου. Προφανώς το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής δεν είναι ίσο με 370 (Zhang and Govindaraju (2007)) αφού η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση δεν έχει την κανονική κατανομή. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε πίνακες και διαγράμματα για να γίνει πλήρως ορατή αυτή η αδυναμία.

Έστω ότι η εντός ελέγχου κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού X που παρακολουθούμε είναι η $N(\mu_0, \sigma_0^2)$. Ας υποθέσουμε ότι η εντός ελέγχου κατανομή άλλαξε λόγω μετατόπισης της τυπικής απόκλισης από την (εντός ελέγχου) τιμή σ_0 στην

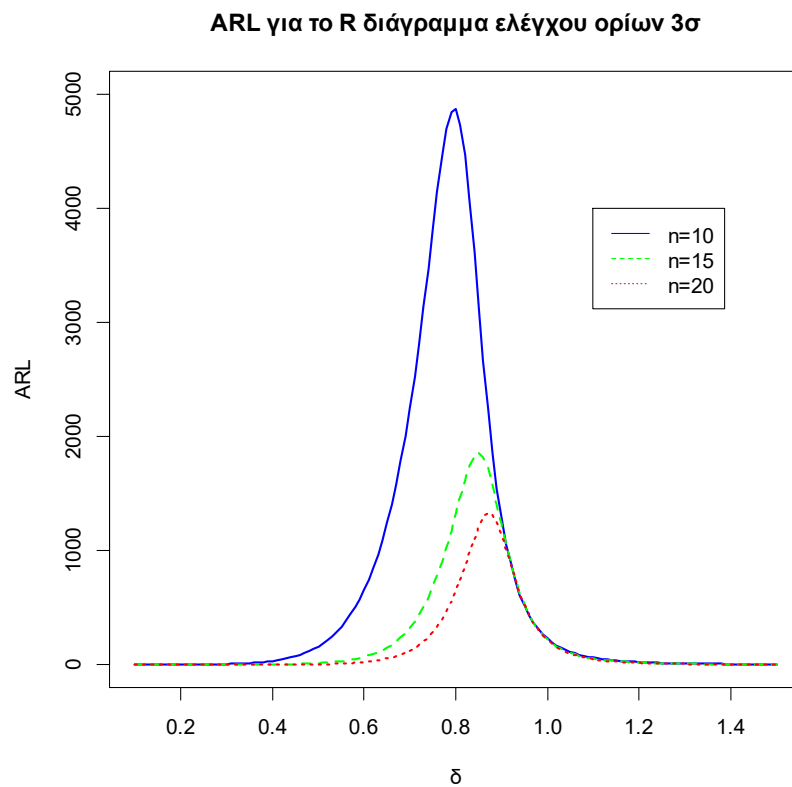
(εκτός ελέγχου) τιμή $\sigma_1 = \delta\sigma_0$, δηλαδή η εκτός ελέγχου κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού X είναι η $N(\mu_0, \sigma_1^2)$ (ή ισοδύναμα $N(\mu_0, (\delta\sigma_0)^2)$).

Στον Πίνακα 2.5 δίνονται τιμές για το μέσο μήκος ροής του R διαγράμματος ελέγχου με όρια ελέγχου 3σ στις περιπτώσεις που το μέγεθος δείγματος είναι $n = 5$, $n = 10$ και $n = 20$ για διάφορες μετατοπίσεις στην τιμή της τυπικής απόκλισης.

Πίνακας 2.5. Τιμές ARL για το R διάγραμμα ελέγχου ορίων 3σ

δ	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$
0.10	Inf	1.0001	1.0000
0.20	Inf	1.4486	1.0000
0.30	Inf	6.2450	1.0362
0.40	2.441×10^{13}	33.8730	1.6659
0.50	2.8408×10^{10}	162.4694	5.1745
0.60	14761767	655.5565	23.5333
0.70	149241	2250.6214	123.2211
0.80	7439.2	4865.0004	641.2930
0.90	947.07	1278.0315	1139.6411
1.00	217.25	228.9670	216.5794
1.05	121.46	114.1248	98.0265
1.10	73.510	62.6948	49.5492
1.15	47.527	37.4048	27.6318
1.20	32.480	23.9295	16.7618
1.25	23.262	16.2425	10.9248
1.30	17.337	11.5953	7.5715
1.35	13.369	8.6431	5.5317
1.40	10.616	6.6862	4.2291
1.45	8.6455	5.3407	3.3623
1.50	7.1975	4.3860	2.7651
1.60	5.2707	3.1697	2.0331
1.70	4.0948	2.4653	1.6312
1.80	3.3310	2.0284	1.3959
1.90	2.8096	1.7426	1.2520
2.00	2.4391	1.5480	1.1617
2.10	2.1670	1.4111	1.1041
2.20	1.9617	1.3126	1.0670
2.30	1.8032	1.2401	1.0432
2.40	1.6785	1.1861	1.0277
2.50	1.5787	1.1452	1.0178
2.60	1.4978	1.1141	1.0114
2.70	1.4313	1.0901	1.0074
2.80	1.3762	1.0715	1.0047
2.90	1.3300	1.0570	1.0031
3.00	1.2910	1.0456	1.0020

Στο Σχήμα 2.7 δίνονται οι καμπύλες ARL του R διαγράμματος ελέγχου για $n = 10$, $n = 15$ και $n = 20$.

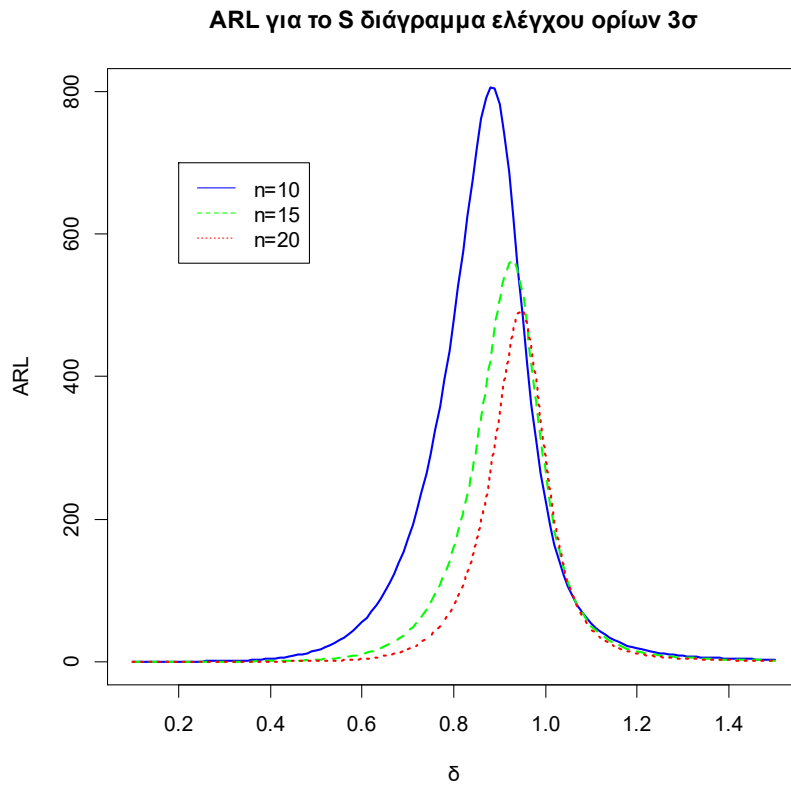


Σχήμα 2.7. Καμπύλες ARL για το R διάγραμμα ελέγχου ορίων 3σ

Αντίστοιχα αποτελέσματα για το S διάγραμμα ελέγχου με όρια ελέγχου 3σ δίνονται στον Πίνακα 2.6 (για $n = 5, 10, 20$) και στο Σχήμα 2.8 (για $n = 10, 15, 20$).

Πίνακας 2.6. Τιμές ARL για το S διάγραμμα ελέγχου ορίων 3σ

δ	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$
0.10	80.1458	1.0000	1.0000
0.20	1180.5026	1.0087	1.0000
0.30	5884.8528	1.5755	1.0000
0.40	18498.8083	4.6839	1.0354
0.50	45050.1951	16.4674	1.6108
0.60	92694.8122	55.7805	4.5395
0.70	67129.2444	172.6049	17.9124
0.80	4804.1826	480.3351	80.1360
0.90	603.2314	781.6397	347.4716
1.00	140.0912	225.1427	286.5455
1.05	79.3734	105.5209	111.0329
1.10	48.8135	54.2414	46.2066
1.15	32.1201	30.7230	22.2351
1.20	22.3582	18.9543	12.2100
1.25	16.3136	12.5717	7.4864
1.30	12.3853	8.8615	5.0266
1.35	9.7249	6.5739	3.6365
1.40	7.8585	5.0916	2.7972
1.45	6.5085	4.0898	2.2626
1.50	5.5061	3.3881	1.9074
1.60	4.1536	2.5062	1.4907
1.70	3.3135	2.0023	1.2753
1.80	2.7595	1.6929	1.1573
1.90	2.3763	1.4925	1.0907
2.00	2.1009	1.3574	1.0524
2.10	1.8968	1.2635	1.0303
2.20	1.7415	1.1967	1.0176
2.30	1.6209	1.1484	1.0102
2.40	1.5254	1.1129	1.0059
2.50	1.4488	1.0865	1.0035
2.60	1.3863	1.0668	1.0020
2.70	1.3349	1.0518	1.0012
2.80	1.2921	1.0404	1.0007
2.90	1.2562	1.0317	1.0004
3.00	1.2258	1.0250	1.0003



Σχήμα 2.8. Καμπύλες ARL για το S διάγραμμα ελέγχου ορίων 3σ

Από την παρακολούθηση των παραπάνω πινάκων και σχημάτων είναι φανερό πως τα R και S διαγράμματα ελέγχου ορίων 3σ στην πράξη δεν δίνουν εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής 370 γεγονός που καθιστά τη χρήση τους προβληματική ιδίως για μικρά δείγματα. Σε αυτές τις περιπτώσεις ιδανική λύση αποτελεί η χρήση R και S διαγραμμάτων ελέγχου με όρια πιθανότητας.

2.3 Διαγράμματα ελέγχου για τη διασπορά με όρια πιθανότητας

Στην προηγούμενη παράγραφο, τόσο το R διάγραμμα όσο και το S διάγραμμα είναι βασισμένα στην υπόθεση ότι η κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού X είναι κανονική ή κατά προσέγγιση κανονική. Όμως οι πραγματικές δειγματικές κατανομές του εύρους R και της τυπικής απόκλισης S έχουν μακριές δεξιές ουρές. Επομένως, ακόμα και με κανονικά κατανομημένο ποιοτικό χαρακτηριστικό X η χρήση ορίων ελέγχου 3σ δεν είναι κατάλληλη. Τα όρια ελέγχου 3σ, παράγουν μεγαλύτερο σφάλμα τύπου I απ' ότι το \bar{X} διάγραμμα. Τα διαγράμματα ελέγχου R και S δεν μπορούν να

παρέχουν ένα εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARL) κατά προσέγγιση 370, ούτε ισοδύναμα να εξασφαλίσουν ένα σφάλμα τύπου I της τάξεως του 0.0027. Ακόμη, όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό, τα κάτω όρια ελέγχου των R και S διαγραμμάτων είναι 0 και για αυτό το λόγο είναι αδύνατο να ανιχνευθεί μια βελτίωση της διαδικασίας. Για να ξεπεραστούν αυτά τα προβλήματα μελετάμε τα διαγράμματα ελέγχου με όρια πιθανότητας α , $0 < \alpha < 1$ (δείτε Zhang (2013)).

Έστω

- X_1, X_2, \dots τυχαία δείγματα τιμών του χαρακτηριστικού X της διεργασίας που παρακολουθούμε,
- $W_t = g(X_t)$, $t = 1, 2, \dots$, η στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου, και
- w_α είναι το άνω α -ποσοστιαίο σημείο των ισόνομων τυχαίων μεταβλητών W_t ($t = 1, 2, \dots$).

Τότε το διάγραμμα ελέγχου με όρια πιθανότητας α συνοψίζεται στο ακόλουθο πλαίσιο (w_α είναι το άνω- α ποσοστιαίο σημείο της τ.μ. W)

Μοντέλο ορίων πιθανότητας α
$UCL = w_{\alpha/2}$
$CL = w_{0.5}$
$LCL = w_{1-\alpha/2}$

Τα διαγράμματα ελέγχου με όρια πιθανότητας α εγγυώνται ότι η πιθανότητα σφάλματος τύπου I είναι πάντα ίση με α και το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι $ARL_0 = 1/\alpha$. Επομένως για $\alpha = 0.0027$ έχουμε πάντα ότι $ARL_0 = 370$.

2.3.1 R διάγραμμα ελέγχου με όρια πιθανότητας - Φάση II

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα τυχαίο δείγμα X_1, X_2, \dots, X_n που προέρχεται από τον κανονικό πληθυσμό $N(\mu_0, \sigma_0^2)$. Έστω g και G η συνάρτηση πυκνότητας και η συνάρτηση κατανομής της κατανομής $N(\mu_0, \sigma_0^2)$. Τότε, η συνάρτηση πυκνότητας g_R και η συνάρτηση κατανομής G_R του εύρους R ($R = X_{(n)} - X_{(1)}$) του τυχαίου δείγματος X_1, X_2, \dots, X_n δίνονται από τους τύπους

$$g_R(r) = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+r)[G(t+r) - G(t)]^{n-2} dt, \quad r > 0$$

και

$$G_R(r) = n \int_{-\infty}^{\infty} g(t)[G(t+r) - G(t)]^{n-1} dt, \quad r > 0.$$

Στην ειδική περίπτωση που το τυχαίο μας δείγμα Z_1, Z_2, \dots, Z_n προέρχεται από την τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$ με συνάρτηση πυκνότητας φ και συνάρτηση κατανομής Φ , έχουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας φ_W και η συνάρτηση κατανομής Φ_W του εύρους W των παρατηρήσεων ($W = Z_{(n)} - Z_{(1)}$) δίνονται από τους τύπους

$$\varphi_W(r) = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\varphi(t+r)[\Phi(t+r) - \Phi(t)]^{n-2} dt, \quad r > 0$$

και

$$\Phi_W(r) = n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)[\Phi(t+r) - \Phi(t)]^{n-1} dt, \quad r > 0.$$

Σε αυτή την περίπτωση τα όρια ελέγχου πιθανότητας α , έστω \mathcal{L} και \mathcal{U} του δίπλευρου W διαγράμματος ελέγχου Φάσης II, προκύπτουν ως λύσεις των εξισώσεων

$$\Phi_W(\mathcal{L}) = \alpha/2$$

και

$$\Phi_W(\mathcal{U}) = 1 - (\alpha/2)$$

τα οποία συμβολίζουμε με $\mathcal{L} = D_1^*$ και $\mathcal{U} = D_2^*$.

Στη γενικότερη περίπτωση όπου το τυχαίο δείγμα X_1, X_2, \dots, X_n προέρχεται από τον κανονικό πληθυσμό $N(\mu_0, \sigma_0^2)$, τα όρια ελέγχου πιθανότητας α , έστω LCL και UCL του δίπλευρου R διαγράμματος ελέγχου Φάσης II, προκύπτουν ως λύσεις των εξισώσεων

$$G_R(LCL) = \alpha/2$$

και

$$G_R(UCL) = 1 - (\alpha/2)$$

Μπορεί να δειχθεί ότι

$$LCL = D_1^* \sigma_0, \quad UCL = D_2^* \sigma_0$$

αφού το εύρος R των παρατηρήσεων X_1, X_2, \dots, X_n και το εύρος W των παρατηρήσεων

$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu_0}{\sigma_0}, \quad Z_2 = \frac{X_2 - \mu_0}{\sigma_0}, \quad \dots, \quad Z_n = \frac{X_n - \mu_0}{\sigma_0}$$

συνδέονται με τη σχέση

$$W = \frac{R}{\sigma_0}$$

και επομένως $G_R(x) = \Phi_W\left(\frac{x}{\sigma_0}\right)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου Φάσης II, με όρια ελέγχου πιθανότητας α , δίνεται στο ακόλουθο πλαίσιο

Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$
Φάση II - Όρια ελέγχου πιθανότητας α
$UCL = D_2^* \sigma_0$
$LCL = D_1^* \sigma_0$

όπου φυσικά D_1^* και D_2^* οι λύσεις των εξισώσεων

$$\Phi_W(D_1^*) = \frac{\alpha}{2}, \quad \Phi_W(D_2^*) = 1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να προκύψουν ανάλογα αποτελέσματα για το μονόπλευρο άνω και το μονόπλευρο κάτω R διάγραμμα ελέγχου που δίνονται στα δύο ακόλουθα πλαίσια

Μονόπλευρο άνω R διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$
Φάση II - Όρια ελέγχου πιθανότητας α
$U = UCL = D_U^* \sigma_0$

Μονόπλευρο κάτω R διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$
Φάση II - Όρια ελέγχου πιθανότητας α
$L = LCL = D_L^* \sigma_0$

όπου οι σταθερές D_L^* και D_U^* προκύπτουν ως λύσεις των εξισώσεων

$$\Phi_W(D_L^*) = \alpha$$

και

$$\Phi_W(D_U^*) = 1 - \alpha.$$

Σε όλα τα παραπάνω διαγράμματα ελέγχου έχουμε ότι η πιθανότητα διάπραξης σφάλματος τύπου I είναι ίση με α , και επομένως η τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής ARL_0 είναι ίση με

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}.$$

2.3.2 S διάγραμμα ελέγχου με όρια πιθανότητας - Φάση II

Ας υποθέσουμε ότι το τυχαίο δείγμα X_1, X_2, \dots, X_n προέρχεται από τον κανονικό πληθυσμό $N(\mu_0, \sigma_0^2)$. Τότε η στατιστική συνάρτηση $(n-1)S^2/\sigma_0^2$ έχει την κατανομή χι τετράγωνο με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

Επομένως, αν συμβολίσουμε με $\chi_{\alpha;n}^2$ το άνω α -ποσοστιαίο σημείο της κατανομής χ_n^2 , παίρνουμε

$$P\left(\chi_{1-(\alpha/2);n-1}^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{\alpha/2;n-1}^2\right) = 1 - \alpha$$

ή ισοδύναμα

$$P\left(\sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{1-(\alpha/2);n-1}^2}{n-1}} \leq S \leq \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2;n-1}^2}{n-1}}\right) = 1 - \alpha.$$

Έτσι, το δίπλευρο S διάγραμμα ελέγχου Φάσης II με όρια ελέγχου πιθανότητας α δίνεται στο ακόλουθο πλαίσιο

Δίπλευρο S διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ **Φάση II - Όρια ελέγχου πιθανότητας α**

$$UCL = B_6^* \sigma_0 = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2; n-1}^2}{n-1}}$$

$$LCL = B_5^* \sigma_0 = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{1-(\alpha/2); n-1}^2}{n-1}}$$

όπου

$$B_5^* = \sqrt{\frac{\chi_{1-(\alpha/2); n-1}^2}{n-1}}, \quad B_6^* = \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2; n-1}^2}{n-1}}$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να προκύψουν ανάλογα αποτελέσματα για το μονόπλευρο άνω και το μονόπλευρο κάτω S διάγραμμα ελέγχου που δίνονται στα δύο ακόλουθα πλαίσια.

Μονόπλευρο άνω S διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ **Φάση II - Όρια ελέγχου πιθανότητας α**

$$U = UCL = B_U^* \sigma_0 = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{\alpha; n-1}^2}{n-1}}$$

Μονόπλευρο κάτω S διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ **Φάση II - Όρια ελέγχου πιθανότητας α**

$$L = LCL = B_L^* \sigma_0 = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha; n-1}^2}{n-1}}$$

όπου

$$B_L^* = \sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha; n-1}^2}{n-1}}, \quad B_U^* = \sqrt{\frac{\chi_{\alpha; n-1}^2}{n-1}}$$

Σε όλα τα παραπάνω διαγράμματα ελέγχου έχουμε ότι η πιθανότητα διάπραξης σφάλματος τύπου I είναι ίση με α , και επομένως η τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής ARL_0 είναι

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}.$$

2.3.3 R διάγραμμα ελέγχου με όρια πιθανότητας - Φάση I

Στην περίπτωση που θέλουμε να αναπτύξουμε R διαγράμματα ελέγχου Φάσης I, δηλαδή για την περίπτωση που η (εντός ελέγχου) τυπική απόκλιση σ_0 είναι άγνωστη, στη βιβλιογραφία προτείνεται απλά να αντικαθιστούμε την τιμή σ_0 που εμφανίζεται στα διαγράμματα ελέγχου Φάσης II με την εκτίμησή της

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

Τα R διαγράμματα ελέγχου Φάσης I με όρια πιθανότητας α δίνονται στα ακόλουθα πλαίσια

Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ Φάση I - Όρια ελέγχου πιθανότητας α
$UCL = D_2^* \frac{\bar{R}}{d_2} = D_4^* \bar{R}$ $LCL = D_1^* \frac{\bar{R}}{d_2} = D_3^* \bar{R}$

Μονόπλευρο άνω R διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ Φάση I - Όρια ελέγχου πιθανότητας α
$U = UCL = D_U^* \frac{\bar{R}}{d_2}$

Μονόπλευρο κάτω S διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ Φάση I - Όρια ελέγχου πιθανότητας α
$L = LCL = D_L^* \frac{\bar{R}}{d_2}$

όπου

$$D_3^* = \frac{D_1^*}{d_2}, \quad D_4^* = \frac{D_2^*}{d_2}.$$

2.3.4 S διάγραμμα ελέγχου με όρια πιθανότητας - Φάση I

Στην περίπτωση που θέλουμε να αναπτύξουμε S διαγράμματα ελέγχου Φάσης I, δηλαδή για την περίπτωση που η (εντός ελέγχου) τυπική απόκλιση σ_0 είναι άγνωστη, στη βιβλιογραφία προτείνεται απλά να αντικαθιστούμε την τιμή σ_0 που εμφανίζεται στα διαγράμματα ελέγχου Φάσης II με την εκτίμησή της

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{S}}{c_4}.$$

Τα S διαγράμματα ελέγχου Φάσης I με όρια πιθανότητας α δίνονται στα ακόλουθα πλαίσια

Δίπλευρο S διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ Φάση I - Όρια ελέγχου πιθανότητας α
$UCL = B_4^* \bar{S} = \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2; n-1}^2}{n-1}}$ $LCL = B_3^* \bar{S} = \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{\frac{\chi_{1-(\alpha/2); n-1}^2}{n-1}}$

Μονόπλευρο άνω S διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ Φάση I - Όρια ελέγχου πιθανότητας α
$U = UCL = \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{\frac{\chi_{\alpha; n-1}^2}{n-1}}$

Μονόπλευρο κάτω S διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ Φάση I - Όρια ελέγχου πιθανότητας α
$L = LCL = \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha; n-1}^2}{n-1}}$

όπου

$$B_3^* = \frac{B_5^*}{c_4}, \quad B_4^* = \frac{B_6^*}{c_4}.$$

2.3.5 Σταθερές για την ανάπτυξη R και S διαγραμμάτων ελέγχου με όρια πιθανότητας

Για την ανάπτυξη των R και S διαγραμμάτων ελέγχου με όρια πιθανότητας χρησιμοποιούνται διάφορες σταθερές που δίνονται στους ακόλουθους πίνακες για τις περιπτώσεις $\alpha = 0.0027$ και $\alpha = 0.005$.

Πίνακας 2.7. Τιμές των D_1^* , D_2^* , D_L^* , D_U^* , D_3^* και D_4^* για $\alpha = 0.0027$ ($ARL_0 = 370$)

n	D_1^*	D_2^*	D_L^*	D_U^*	D_3^*	D_4^*
2	0.00239281	4.53274281	0.00478563	4.24260815	0.00212058	4.01703873
3	0.07000363	4.95017506	0.09903466	4.67870314	0.04135940	2.92465228
4	0.22055164	5.19965723	0.27837786	4.93845559	0.10712887	2.52563709
5	0.39652809	5.37740238	0.47338377	5.12314014	0.17048160	2.31193751
6	0.56899583	5.51506523	0.65750635	5.26596958	0.22450796	2.17607226
7	0.72884702	5.62713250	0.82450833	5.38211271	0.26950846	2.08076560
8	0.87439594	5.72145757	0.97449834	5.47978001	0.30710725	2.00950279
9	1.00641122	5.80277497	1.10928601	5.56391535	0.33885599	1.95377897
10	1.12634306	5.87415750	1.23093181	5.63772351	0.36599222	1.90873991
11	1.23570683	5.93771110	1.34131930	5.70340010	0.38945995	1.87139909
12	1.33588290	5.99494106	1.44205842	5.76251255	0.40997429	1.83981075
13	1.42806792	6.04696000	1.53449316	5.81621881	0.42808043	1.81264856
14	1.51327952	6.09461303	1.61973805	5.86539792	0.44419863	1.78897470
15	1.59237682	6.13855635	1.69871812	5.91073260	0.45865674	1.76810553
16	1.66608569	6.17931098	1.77220399	5.95276341	0.47171399	1.74953031
17	1.73501990	6.21729554	1.84084284	5.99192549	0.48357748	1.73285858
18	1.79970472	6.25285229	1.90517866	6.02857417	0.49441571	1.71778646
19	1.86058447	6.28626434	1.96567518	6.06300325	0.50436517	1.70407354
20	1.91804391	6.31776851	2.02272792	6.09545840	0.51353948	1.69152726
21	1.97241483	6.34756480	2.07667718	6.12614760	0.52203269	1.67998956
22	2.02398450	6.37582367	2.12781810	6.15524674	0.52992424	1.66933269
23	2.07300653	6.40269151	2.17640483	6.18290789	0.53728169	1.65944915
24	2.11969912	6.42829497	2.22266316	6.20926230	0.54416167	1.65024916
25	2.16425733	6.45274432	2.26678954	6.23442421	0.55061346	1.64165685

Πίνακας 2.8. Τιμές των D_1^* , D_2^* , D_L^* , D_U^* , D_3^* και D_4^* για $\alpha = 0.005$ ($ARL_0 = 200$)

n	D_1^*	D_2^*	D_L^*	D_U^*	D_3^*	D_4^*
2	0.00443114	4.27565047	0.00886233	3.96974523	0.00392700	3.78919657
3	0.09529133	4.70957257	0.13484755	4.42423527	0.05629983	2.78250001
4	0.27126100	4.96813081	0.34270220	4.69408746	0.13176000	2.41317742
5	0.46412980	5.15200918	0.55490392	4.88558454	0.19954599	2.21503292
6	0.64697677	5.29423882	0.74898299	5.03347915	0.25527680	2.08894107
7	0.81321178	5.40990905	0.92182532	5.15361337	0.30070433	2.00044208
8	0.96273480	5.50718877	1.07528121	5.25454999	0.33813381	1.93424683
9	1.09723756	5.59099746	1.21211484	5.34143874	0.36943698	1.88247404
10	1.21871293	5.66452459	1.33492717	5.41761601	0.39600675	1.84062211
11	1.32900365	5.72995529	1.44591958	5.48536413	0.41886447	1.80592032
12	1.42969490	5.78884977	1.54689776	5.54631219	0.43876462	1.77656260
13	1.52211461	5.84236070	1.63932736	5.60166276	0.45627205	1.75131748
14	1.60736710	5.89136320	1.72440342	5.65232826	0.47181652	1.72931402
15	1.68636974	5.93653695	1.80310370	5.69901694	0.48572979	1.70991732
16	1.75988932	5.97842016	1.87623628	5.74228935	0.49827233	1.69265268
17	1.82856853	6.01744607	1.94447129	5.78259652	0.50965096	1.67715737
18	1.89294991	6.05396851	2.00837181	5.82030661	0.52003207	1.66314902
19	1.95349566	6.08828004	2.06841301	5.85572395	0.52955143	1.65040418
20	2.01059941	6.12062529	2.12499956	5.88910291	0.53832041	1.63874389
21	2.06460087	6.15121129	2.17847794	5.92065820	0.54643127	1.62802131
22	2.11579416	6.18021335	2.22914725	5.95057319	0.55396205	1.61811755
23	2.16443395	6.20778287	2.27726666	5.97900401	0.56097784	1.60893274
24	2.21074483	6.23405055	2.32306267	6.00608674	0.56753460	1.60038342
25	2.25492308	6.25913017	2.36673357	6.03193952	0.57367993	1.59239905

Πίνακας 2.9. Τιμές των B_5^* , B_6^* , B_L^* , B_U^* , B_3^* και B_4^* για $\alpha = 0.0027$ ($ARL_0 = 370$)

n	B_5^*	B_6^*	B_L^*	B_U^*	B_3^*	B_4^*
2	0.00169197	3.20513318	0.00338395	2.99997699	0.00212058	4.01703873
3	0.03675476	2.57053510	0.05199665	2.43197523	0.04147330	2.90053825
4	0.09951769	2.28257189	0.12560505	2.17226859	0.10801669	2.47750782
5	0.16260928	2.10952676	0.19409758	2.01563707	0.17299125	2.24421177
6	0.21815524	1.99104360	0.25201045	1.90814762	0.22926717	2.09245911
7	0.26563401	1.90346392	0.30034136	1.82856510	0.27688415	1.98407948
8	0.30617834	1.83536843	0.34097603	1.76661060	0.31727325	1.90187617
9	0.34106312	1.78048237	0.37556165	1.71662439	0.35186151	1.83685414
10	0.37137176	1.73503535	0.40537243	1.67520027	0.38181074	1.78380590
11	0.39796326	1.69660796	0.43136883	1.64014974	0.40802095	1.73948615
12	0.42150710	1.66356734	0.45427589	1.60999424	0.43118313	1.70175584
13	0.44252536	1.63476653	0.47464670	1.58369423	0.45183054	1.66914149
14	0.46142830	1.60937318	0.49290890	1.56049477	0.47037893	1.64059127
15	0.47854155	1.58676676	0.50939773	1.53983261	0.48715633	1.61533201
16	0.49412638	1.56647398	0.52437956	1.52127791	0.50242466	1.59278110
17	0.50839469	1.54812675	0.53806871	1.50449619	0.51639551	1.57249027
18	0.52152006	1.53143393	0.55063960	1.48922277	0.52924167	1.55410830
19	0.53364608	1.51616186	0.56223570	1.47524510	0.54110569	1.53735563
20	0.54489256	1.50212051	0.57297618	1.46239027	0.55210624	1.52200664
21	0.55536034	1.48915359	0.58296090	1.45051602	0.56234300	1.50787701
22	0.56513490	1.47713121	0.59227423	1.43950405	0.57190033	1.49481448
23	0.57428922	1.46594439	0.60098799	1.42925510	0.58085018	1.48269207
24	0.58288603	1.45550098	0.60916372	1.41968520	0.58925429	1.47140291
25	0.59097958	1.44572241	0.61685450	1.41072273	0.59716600	1.46085633

Πίνακας 2.10. Τιμές των B_5^* , B_6^* , B_L^* , B_U^* , B_3^* και B_4^* για $\alpha = 0.005$ ($ARL_0 = 200$)

n	B_5^*	B_6^*	B_L^*	B_U^*	B_3^*	B_4^*
2	0.00313329	3.02334144	0.00626661	2.80703377	0.00392700	3.78919657
3	0.05003129	2.44774683	0.07079931	2.30180741	0.05645427	2.76198653
4	0.12239463	2.18482243	0.15461972	2.06866756	0.13284737	2.37141037
5	0.19030690	2.02632279	0.22748027	1.92745032	0.20245725	2.15569555
6	0.24798460	1.91758247	0.28696408	1.83027880	0.26061591	2.01525616
7	0.29624566	1.83709018	0.33559072	1.75819909	0.30879227	1.91489467
8	0.33689083	1.77443716	0.37592850	1.70200470	0.34909865	1.83873695
9	0.37152650	1.72389364	0.40994102	1.65661383	0.38328939	1.77847376
10	0.40140648	1.68201198	0.43905617	1.61896231	0.41268972	1.72929208
11	0.42748063	1.64657739	0.4643120	1.58707843	0.43828430	1.68819117
12	0.45046830	1.61609376	0.48647357	1.55962842	0.46080915	1.65319247
13	0.47091952	1.58950934	0.50611458	1.53567354	0.48082175	1.62293265
14	0.48926027	1.56606036	0.52367302	1.51453144	0.49875078	1.59643828
15	0.50582495	1.54517707	0.53948884	1.49569262	0.51493090	1.57299361
16	0.52087953	1.52642469	0.55383003	1.47876797	0.52962710	1.55205923
17	0.53463816	1.50946492	0.56691079	1.46345453	0.54305198	1.53322001
18	0.54727527	1.49403006	0.57890450	1.44951241	0.55537821	1.51615063
19	0.55893443	1.47990516	0.58995314	1.43674887	0.56674753	1.50059212
20	0.56973494	1.46691538	0.60017416	1.42500705	0.57727750	1.48633544
21	0.57977683	1.45491684	0.60966566	1.41415781	0.58706647	1.47320979
22	0.58914462	1.44378993	0.61851025	1.40409376	0.59619748	1.46107407
23	0.59791029	1.43343430	0.62677807	1.39472472	0.60474112	1.44981057
24	0.60613556	1.42376504	0.63452909	1.38597439	0.61275783	1.43932024
25	0.61387365	1.41470973	0.64181492	1.37777768	0.62029972	1.42951901

2.3.6 Απόδοση των διαγραμμάτων R και S με όρια πιθανότητας

Για τη μελέτη του δίπλευρου R διαγράμματος ελέγχου δίνεται ο Πίνακας 2.11 με τιμές του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για διάφορες μετατοπίσεις (μειώσεις ή αυξήσεις) της τυπικής απόκλισης για μεγέθη δειγμάτων 5, 10 και 20 στην περίπτωση όπου $\alpha = 0.0027$. Υποθέτουμε ότι η εντός ελέγχου κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού που παρακολουθούμε άλλαξε λόγω μετατόπισης της τυπικής απόκλισης από την (εντός ελέγχου) τιμή σ_0 στην (εκτός ελέγχου) τιμή $\sigma_1 = \delta\sigma_0$, δηλαδή οι παρατηρήσεις X_1, X_2, \dots ,

X_n προέρχονται πλέον από τον κανονικό πληθυσμό $N(\mu_0, \sigma_1^2)$ (ή ισοδύναμα $N(\mu_0, (\delta\sigma_0)^2)$).

Πίνακας 2.11: Τιμές ARL για το δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

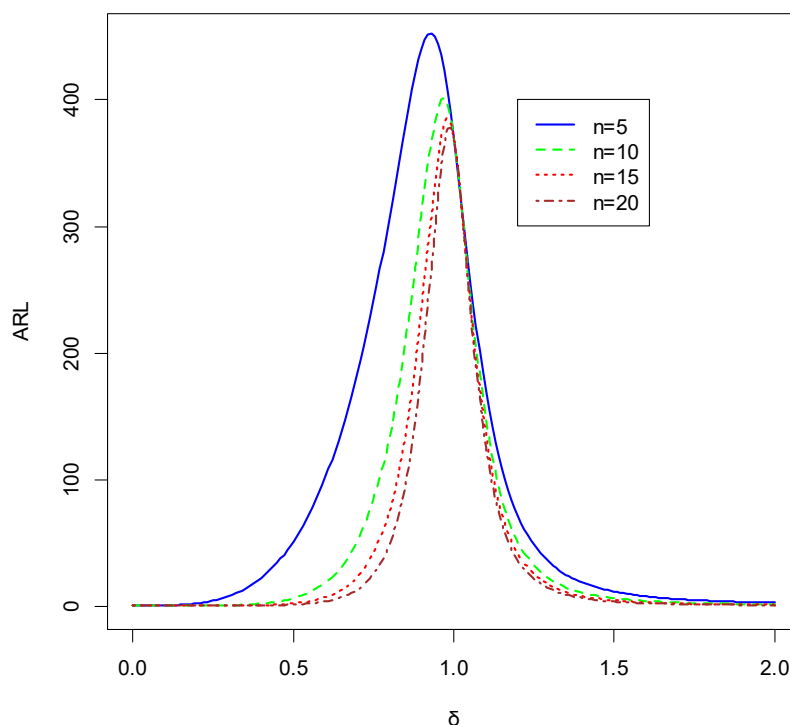
δ	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$
0.10	1.042	1.000	1.000
0.20	2.677	1.003	1.000
0.30	8.583	1.238	1.001
0.40	22.899	2.534	1.088
0.50	51.601	6.759	1.720
0.60	102.397	19.068	4.202
0.70	184.694	52.210	13.557
0.80	307.801	134.638	50.022
0.90	440.191	309.034	188.504
1.00	370.373	370.370	370.370
1.05	261.274	251.860	242.649
1.10	169.762	147.089	125.576
1.15	109.026	84.987	65.487
1.20	71.688	51.256	36.613
1.25	48.861	32.649	22.051
1.30	34.588	21.926	14.207
1.35	25.376	15.444	9.710
1.40	19.232	11.344	6.986
1.45	15.002	8.643	5.256
1.50	12.005	6.799	4.110
1.60	8.201	4.560	2.770
1.70	6.011	3.334	2.069
1.80	4.656	2.605	1.672
1.90	3.768	2.144	1.433
2.00	3.158	1.838	1.283
2.10	2.722	1.627	1.186
2.20	2.401	1.476	1.123
2.30	2.158	1.367	1.082
2.40	1.970	1.285	1.054
2.50	1.822	1.224	1.036
2.60	1.703	1.177	1.024
2.70	1.607	1.140	1.016
2.80	1.527	1.112	1.010
2.90	1.461	1.090	1.007
3.00	1.406	1.073	1.004

Στο Σχήμα 2.9 δίνονται καμπύλες ARL για μεγέθη δειγμάτων 5, 10, 15 και 20 στην περίπτωση $\alpha = 0.0027$. Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του

δείγματος τόσο πιο αποτελεσματικό φαίνεται να είναι το διάγραμμα στην ανίχνευση οποιασδήποτε μετατόπισης. Όταν το δ πάρει τιμές μικρότερες (ή μεγαλύτερες) του 1 η αποτελεσματικότητα του διαγράμματος για μέγεθος δείγματος 20 είναι η καλύτερη. Για παράδειγμα για $\delta = 0.9$ και για μέγεθος δείγματος 5 έχουμε ότι $ARL = 440.191$, για μέγεθος δείγματος 10 έχουμε ότι $ARL = 309.03$, ενώ για μέγεθος δείγματος 20 έχουμε ότι $ARL = 188.504$.

Για μεγάλες μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης (πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές) το R διάγραμμα φαίνεται να έχει την ίδια αποτελεσματικότητα ανεξάρτητα από το μέγεθος του δείγματος, με την καλύτερη συμπεριφορά να την επιδεικνύει το διάγραμμα με το μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος. Η μεροληπτική συμπεριφορά του δίπλευρου R διαγράμματος ελέγχου, δηλαδή η αύξηση των τιμών ARL πέραν του $ARL_0 = 370$, για σχετικά μικρές μειώσεις της τυπικής απόκλισης, είναι φανερή και από το Σχήμα 2.9, ωστόσο αυτή η μεροπληπτική συμπεριφορά τείνει να μειώνεται με την αύξηση του μεγέθους του δείγματος.

ARL δίπλευρου R διαγράμματος ελέγχου ορίων πιθανότητας 0.0027



Σχήμα 2.9. Καμπύλες ARL για δίπλευρα R διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

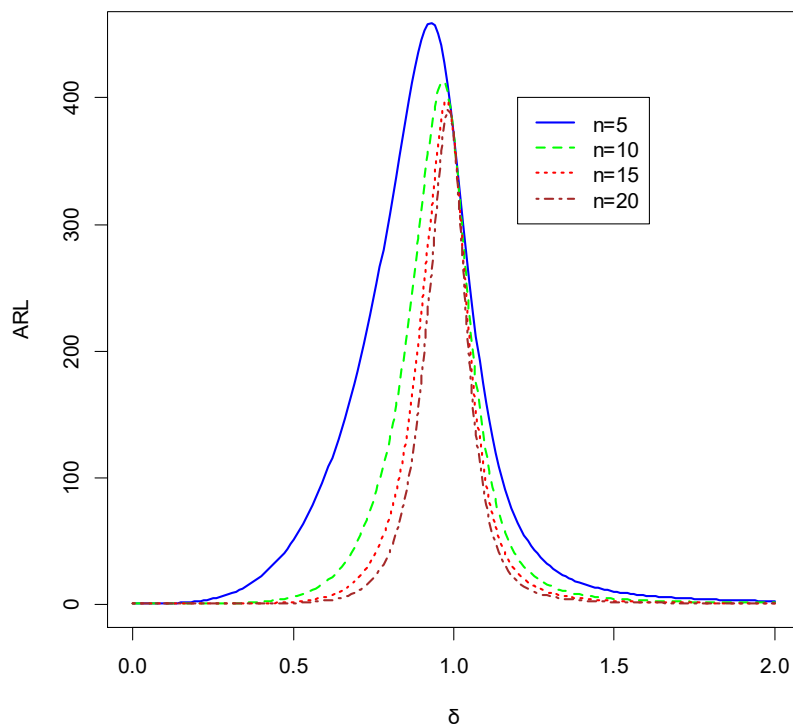
Για τη μελέτη του δίπλευρου S διαγράμματος ελέγχου παρουσιάζεται ο Πίνακας 2.12 με τιμές του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για διάφορες τιμές του δ σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις μεγέθους δείγματος 5, 10 και 20, και στην περίπτωση όπου $\alpha = 0.0027$. Στο Σχήμα 2.10 δίνονται καμπύλες ARL για μεγέθη δειγμάτων 5, 10, 15 και 20 στην περίπτωση $\alpha = 0.0027$.

Πίνακας 2.12: Τιμές ARL για το δίπλευρο S διάγραμμα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

δ	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$
0.10	1.033	1.000	1.000
0.20	2.625	1.000	1.000
0.30	8.487	1.149	1.000
0.40	22.750	2.266	1.013
0.50	51.401	6.148	1.346
0.60	102.156	17.815	3.117
0.70	184.445	49.945	10.569
0.80	308.152	131.343	42.437
0.90	445.751	311.289	177.058
1.00	370.370	370.370	370.370
1.05	253.531	227.709	190.711
1.10	159.560	119.856	78.563
1.15	99.864	64.223	35.444
1.20	64.455	36.873	18.225
1.25	43.380	22.793	10.535
1.30	30.462	15.064	6.719
1.35	22.245	10.549	4.649
1.40	16.823	7.761	3.441
1.45	13.119	5.956	2.692
1.50	10.509	4.739	2.206
1.60	7.216	3.275	1.647
1.70	5.327	2.479	1.364
1.80	4.160	2.008	1.210
1.90	3.395	1.710	1.122
2.00	2.869	1.514	1.072
2.10	2.493	1.378	1.042
2.20	2.215	1.283	1.025
2.30	2.005	1.214	1.015
2.40	1.842	1.164	1.009
2.50	1.714	1.126	1.005
2.60	1.610	1.098	1.003
2.70	1.526	1.076	1.002
2.80	1.457	1.060	1.001
2.90	1.400	1.047	1.001
3.00	1.352	1.037	1.000

Τα συμπεράσματα είναι παρόμοια με αυτά του δίπλευρου R διαγράμματος ελέγχου. Για μεγάλες τιμές του μεγέθους του δείγματος η τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής βαίνει μειούμενη και το διάγραμμα ελέγχου γίνεται ολοένα και πιο αποτελεσματικό στην ανίχνευση οποιασδήποτε μετατόπισης της τυπικής απόκλισης. Για τιμές του δ μικρότερες (ή μεγαλύτερες) του 1 το διάγραμμα ελέγχου με μέγεθος δείγματος 20 αναμένεται να δώσει πολύ πιο γρήγορα ένδειξη για σημείο εκτός των ορίων ελέγχου έναντι των διαγραμμάτων που αντιστοιχούν σε μέγεθος δείγματος 5, 10 και 15. Για αρκετά μεγάλες αυξήσεις της τυπικής απόκλισης το S διάγραμμα φαίνεται να έχει την ίδια περίπου αποτελεσματικότητα ανεξάρτητα από το μέγεθος του δείγματος, με την καλύτερη συμπεριφορά να την επιδεικνύει το διάγραμμα με το μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος.

ARL δίπλευρου S διαγράμματος ελέγχου ορίων πιθανότητας 0.0027



Σχήμα 2.10. Καμπύλες ARL για δίπλευρα S διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

Συμπερασματικά και τα δύο διαγράμματα για να μπορέσουν να εντοπίσουν έγκαιρα μικρές μετατοπίσεις (αυξήσεις και μειώσεις) στην τυπική απόκλιση θα πρέπει το μέγεθος του δείγματος να είναι αρκετά μεγάλο. Για μεγάλες μετατοπίσεις (αυξήσεις και μειώσεις) έχουν παρόμοια αποτελεσματικότητα και με μικρότερα μεγέθη δείγματος. Το

S διάγραμμα ελέγχου φαίνεται να είναι πιο αποτελεσματικό από το R διάγραμμα. Παρ' όλα αυτά στα δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου υπάρχει ένα διάστημα τιμών για το δ που αντιστοιχεί σε πολύ μικρές μειώσεις της τυπικής απόκλισης στο οποίο το R διάγραμμα παρουσιάζεται πιο αποτελεσματικό. Πιο συγκεκριμένα, για $\alpha = 0.0027$, το R διάγραμμα έχει καλύτερη απόδοση από το S διάγραμμα για $\delta \in (0.775, 1)$ όταν $n = 5$, για $\delta \in (0.885, 1)$ όταν $n = 10$, και για $\delta \in (0.94, 1)$ όταν $n = 20$. Για μεγάλα μεγέθη δείγματος προτείνεται η χρήση του S διαγράμματος ελέγχου.

2.4 Παράδειγμα

Στην παράγραφο αυτή θα δοθεί ένα παράδειγμα για να επιδειχθεί η εφαρμογή των R και S διαγραμμάτων ελέγχου Φάσης II με όρια πιθανότητας. Τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται δόθηκαν από τον Zhang (2014). Υπάρχουν $m = 20$ υποομάδες μεγέθους $n = 5$ η κάθε μια. Οι πρώτες 5 υποομάδες είναι εντός ελέγχου και είναι παρατηρήσεις από την κατανομή $N(0, 1)$, ενώ οι επόμενες 15 υποομάδες είναι εκτός ελέγχου αφού προέρχονται από την κατανομή $N(0, 4)$ (δηλαδή $\delta = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = 2$). Παρακάτω δίνεται ο πίνακας με τα δεδομένα αυτά όπου για κάθε δείγμα έχει υπολογιστεί το εύρος και η δειγματική τυπική απόκλιση.

Πίνακας 2.13. Τα δεδομένα του Zhang (2014)

i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	R_i	S_i
1	1.404	-1.426	0.624	1.489	0.454	2.915	1.174
2	0.653	-1.768	0.814	-0.224	0.531	2.582	1.066
3	-0.082	1.332	1.146	-0.721	1.816	2.537	1.057
4	-0.912	-1.245	-0.932	-0.976	0.735	1.980	0.794
5	-0.621	-0.935	-0.08	-1.076	0.742	1.818	0.741
6	-2.464	-1.087	-1.278	-4.671	-3.11	3.584	1.464
7	-1.697	-1.656	-0.862	3.117	2.738	4.814	2.399
8	2.558	0.556	-0.099	1.701	-1.772	4.330	1.670
9	-0.963	0.359	0.812	0.797	-0.203	1.775	0.752
10	-4.107	3.126	-3.466	1.682	-0.782	7.233	3.145
11	1.047	0.185	0.617	0.557	3.022	2.837	1.124
12	3.279	-2.259	0.847	-4.152	1.583	7.431	3.009
13	-2.821	1.719	0.201	0.739	0.567	4.540	1.716
14	0.368	1.493	-0.04	-1.639	4.485	6.124	2.280
15	4.947	1.723	1.183	4.658	1.738	3.764	1.799
16	1.259	0.922	2.74	-0.233	-0.067	2.973	1.196
17	-2.168	-1.41	0.13	2.24	2.451	4.619	2.086
18	-1.87	1.009	-4.67	-0.002	0.096	5.679	2.259
19	-3.479	1.546	-1.482	1.842	-2.756	5.321	2.445
20	1.861	0.946	1.135	0.035	0.78	1.826	0.657

Στην συνέχεια δίνουμε τα δίπλευρα R και S διαγράμματα ελέγχου στην περίπτωση όπου $\alpha = 0.0027$. Τα όρια ελέγχου για το R διάγραμμα ελέγχου είναι (δείτε Πίνακα 2.7)

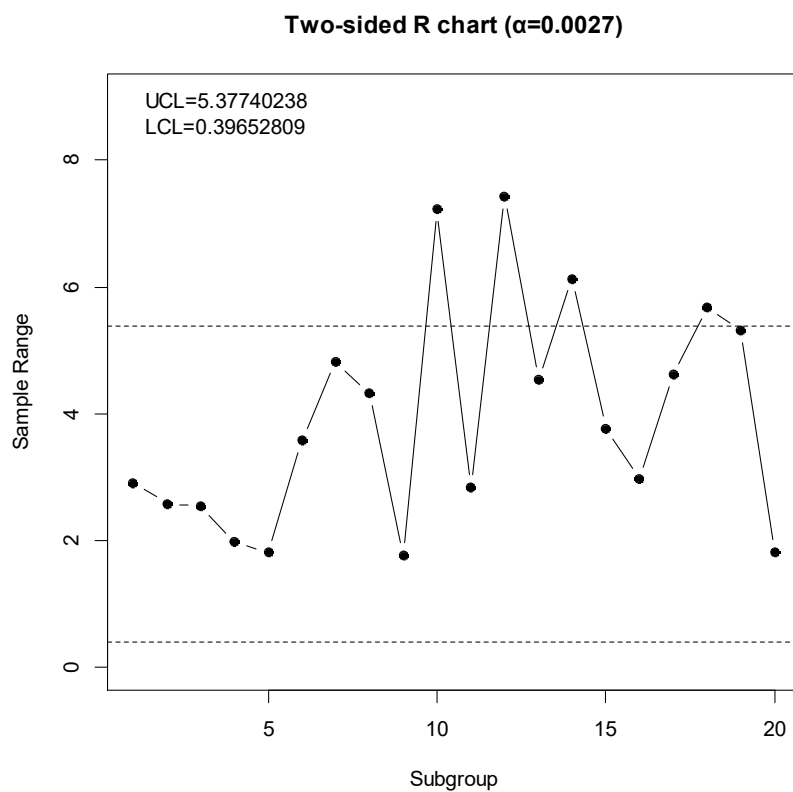
$$UCL = D_2^* \sigma_0 = 5.37740238 \times 1 = 5.37740238,$$

$$LCL = D_1^* \sigma_0 = 0.39652809 \times 1 = 0.39652809,$$

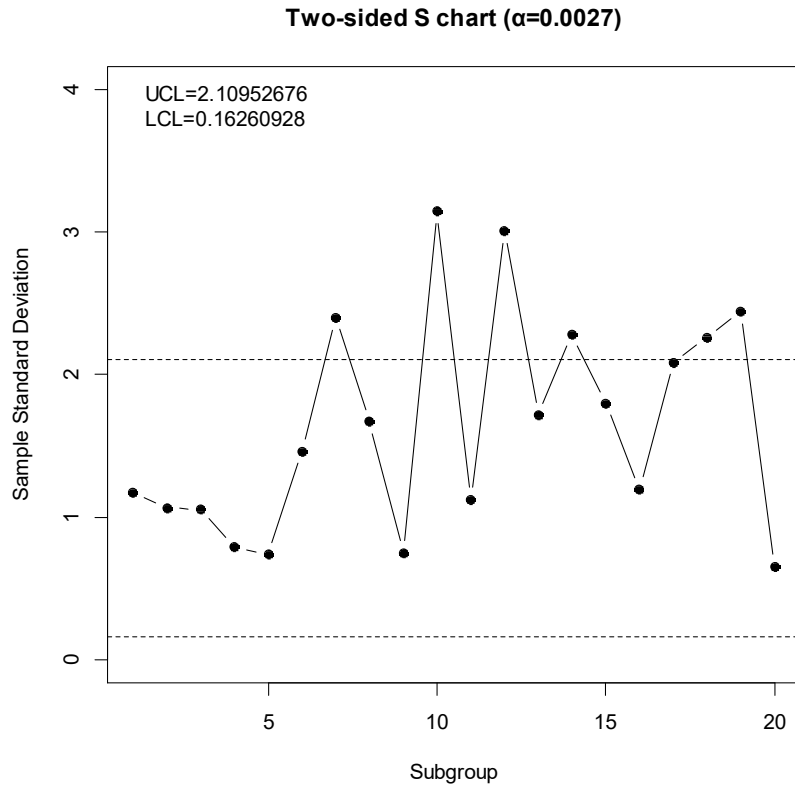
ενώ για το S διάγραμμα ελέγχου είναι (δείτε Πίνακα 2.9)

$$UCL = B_6^* \sigma_0 = 2.10952676 \times 1 = 2.10952676,$$

$$LCL = B_5^* \sigma_0 = 0.16260928 \times 1 = 0.16260928.$$



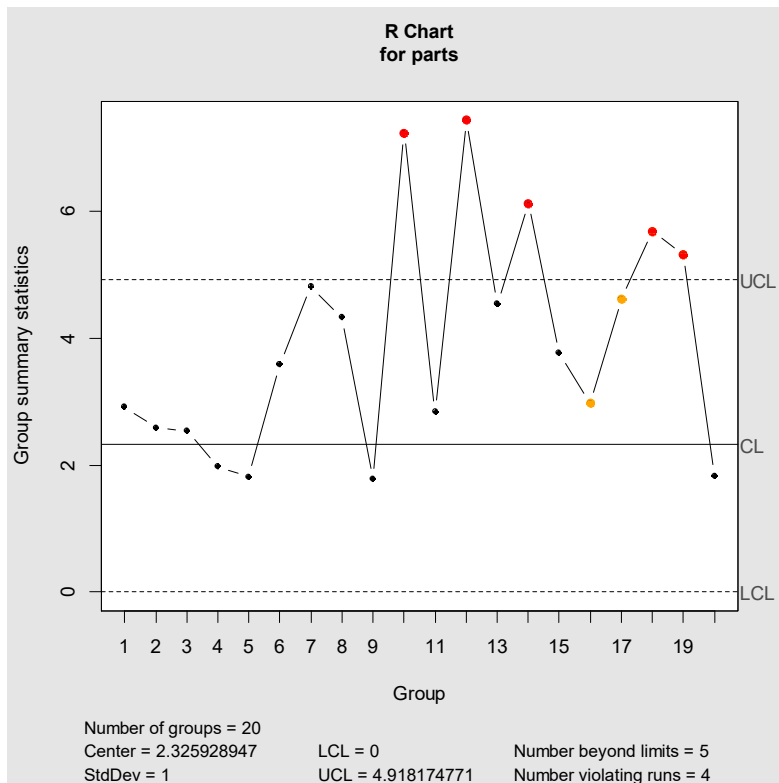
Σχήμα 2.11. Δίπλευρο διάγραμμα R ελέγχου Φάσης II για τα δεδομένα του Πίνακα 2.13



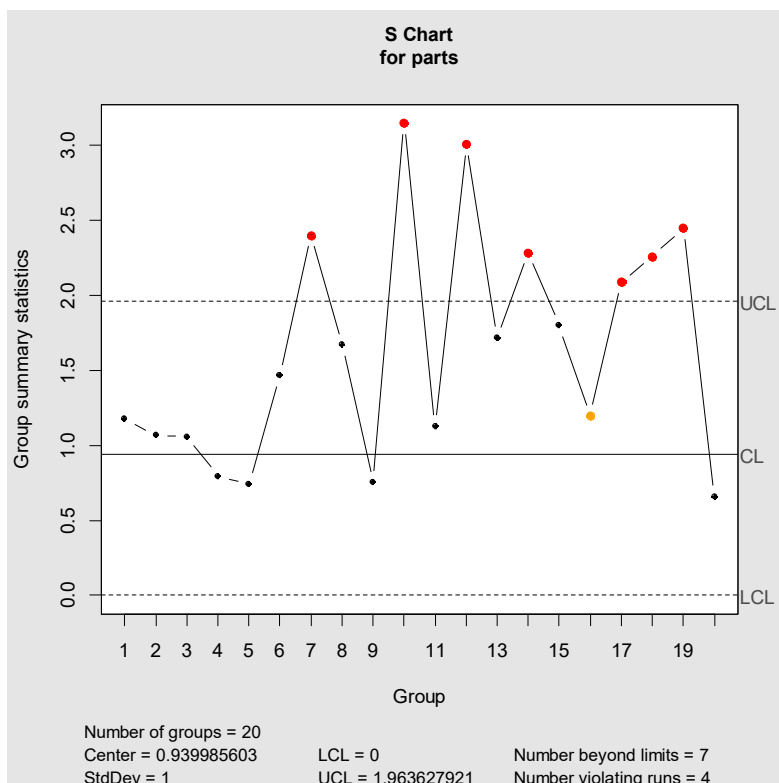
Σχήμα 2.12. Δίπλευρο διάγραμμα S ελέγχου φάσης II για τα δεδομένα του Πίνακα 2.13

Παρατηρούμε λοιπόν ότι στο R διάγραμμα ελέγχου το πρώτο σημείο εκτός ορίων ελέγχου είναι το 10° και ακολουθούν το 12° , το 14° και το 18° , συνεπώς έχουμε ενδείξεις για εκτός ελέγχου διεργασία. Στην περίπτωση όμως του διαγράμματος S παρατηρούμε ότι το πρώτο σημείο εκτός ορίων ελέγχου είναι το 7° και ακολουθούν το 12° , το 14° , το 18° και το 19° . Το παράδειγμα αυτό επιβεβαιώνει την υπεροχή του S διαγράμματος ελέγχου έναντι του R διαγράμματος ελέγχου στην ανίχνευση μετατοπίσεων της τυπικής απόκλισης.

Τα αντίστοιχα κλασσικά διαγράμματα ελέγχου με όρια ελέγχου 3σ δίνονται στα ακόλουθα δύο σχήματα.



Σχήμα 2.13. Δίπλευρο διάγραμμα *R* ελέγχου Φάσης II με όρια ελέγχου 3σ για τα δεδομένα του Πίνακα 2.13



Σχήμα 2.14. Δίπλευρο διάγραμμα *S* ελέγχου Φάσης II με όρια ελέγχου 3σ για τα δεδομένα του Πίνακα 2.13

Φυσικά αυτά τα διαγράμματα δεν είναι άμεσα συγκρίσιμα με τα διαγράμματα με όρια ελέγχου πιθανότητας αφού τα τελευταία έχουν εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής 370. Το R διάγραμμα ελέγχου Φάσης II με όρια ελέγχου 3σ έχει εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής 217.25, ενώ το S διάγραμμα ελέγχου Φάσης II με όρια ελέγχου 3σ έχει εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής 140.09.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

CUSUM και EWMA διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς

3.1 Εισαγωγή

Στα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart η απόφαση για να ανακηρύξουμε αν μια διεργασία βρίσκεται εντός ή εκτός στατιστικού ελέγχου βασίζεται στο αν κάποιο σημείο του διαγράμματος βρεθεί εντός ή εκτός των ορίων ελέγχου. Τα σημεία που σχεδιάζονται σε ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart έχουν συντεταγμένες που υπολογίζονται από πληροφορίες που δίνει μόνο ένα δείγμα (το πιο πρόσφατο) αγνοώντας πληροφορίες που μπορούν να δώσουν προηγούμενα δείγματα. Για αυτό το λόγο τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart ονομάζονται συνήθως διαγράμματα ελέγχου χωρίς μνήμη. Τα τελευταίες δεκαετίες έχουν αναπτυχθεί διαγράμματα ελέγχου που ο σχεδιασμός ενός σημείου στο διάγραμμα ελέγχου βασίζεται σε πληροφορίες που δίνει όχι μόνο το πιο πρόσφατο δείγμα αλλά και προγενέστερα δείγματα. Τέτοιου είδους διαγράμματα ελέγχου ονομάζονται διαγράμματα ελέγχου με μνήμη (Montgomery (2013)). Τα πλέον διαδεδομένα είναι τα διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM και EWMA.

Τα CUSUM διαγράμματα ελέγχου αρχικά χρησιμοποιήθηκαν για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας διεργασίας ενώ λιγότερη προσοχή φαίνεται να είχε δοθεί στην χρήση τους ως εργαλείο για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας και την ανίχνευση αυξήσεων ή μειώσεων της. Άλλωστε όπως κατέδειξαν και οι Lowry, Champ and Woodall (1995), ειδικά ο εντοπισμός μειώσεων της τυπικής απόκλισης καθίσταται υψίστης σημασίας για τη βελτίωση μιας διεργασίας. Ενδεικτικά, μπορούν να αναφερθούν τα άρθρα των Page (1954) ο οποίος αποτελεί τον πρωτοπόρο των CUSUM διαγραμμάτων ελέγχου, Hawkins (1981), Moustakides (1986), Howell

(1987), Ramirez and Juan (1989) και Box and Ramirez (1991). Οι ερευνητές αυτοί πρότειναν διάφορα CUSUM διαγράμματα ελέγχου και μελέτησαν τις ιδιότητες και την απόδοσή τους. Στις Παραγράφους 3.2 και 3.3 δίνεται μια λεπτομερής περιγραφή δύο συγκεκριμένων CUSUM διαγραμμάτων ελέγχου που αφορούν την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας, το CUSUM – S^2 και το CUSUM – $\ln S^2$ διάγραμμα ελέγχου. Όπως αναφέρεται και από τους Lowry, Champ and Woodall (1995) τα διαγράμματα CUSUM είναι πιο αποδοτικά σε μικρές μεταβολές της τυπικής απόκλισης από εκείνα που βασίζονται στο δειγματικό εύρος.

Το EWMA διάγραμμα ελέγχου χρησιμοποιήθηκε αρχικά στον ποιοτικό έλεγχο για τον εντοπισμό μετατοπίσεων στη μέση τιμή της διεργασίας, όπως φαίνεται, ενδεικτικά, στα άρθρα των Robinson and Ho (1978), Crowder (1987, 1989) και Lucas and Saccucci (1990), με τον Roberts (1959) να είναι αυτός που ανέπτυξε πρώτος διάγραμμα ελέγχου τέτοιου τύπου χρησιμοποιώντας τον εκθετικά κινούμενο σταθμισμένο μέσο όρο (EWMA) του δειγματικού μέσου. Στα άρθρα αυτά διερευνήθηκαν εκτενώς οι ιδιότητες των EWMA διαγραμμάτων ελέγχου, αναπτύχθηκαν τεχνικές για τον υπολογισμό του ARL , και παρουσιάστηκαν βέλτιστες διαδικασίες σχεδιασμού και εκτενείς συγκρίσεις με άλλα διαγράμματα ελέγχου. Σχετικά λιγότερη προσοχή είχε δοθεί αρχικά στη χρήση του EWMA διαγράμματος ελέγχου για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας, με κάποια αντιπροσωπευτικά άρθρα αυτής της κατηγορίας να αποτελούν οι μελέτες των Wortham and Ringer (1971), Sweet (1986) και Ng and Case (1989). Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει περιγραφή δύο συγκεκριμένων EWMA διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας, το EWMA – S^2 και το EWMA – $\ln S^2$ διάγραμμα ελέγχου.

Παρατηρούμε, λοιπόν, πως και στις δύο κατηγορίες διαγραμμάτων, προτείνεται η χρήση του λογαριθμικού μετασχηματισμού της δειγματικής διακύμανσης. Στα άρθρα των Box and Hunter (1978) και Crowder and Hamilton (1992) αναφέρονται οι κυριότεροι λόγοι επιλογής του συγκεκριμένου λογαριθμικού μετασχηματισμού. Ο κυριότερος λόγος είναι ότι η κατανομή του $\ln S^2$ προσεγγίζει καλύτερα την κανονική κατανομή, και είναι επομένως λιγότερο λοξή από την κατανομή της δειγματικής διασποράς S^2 . Επίσης η διακύμανση του $\ln S^2$ είναι ανεξάρτητη του σ^2 αφού εξαρτάται μόνο από το μέγεθος του δείγματος n . Στις Παραγράφους 3.4 και 3.5 δίνεται μια λεπτομερής περιγραφή του EWMA – S^2 και του EWMA – $\ln S^2$ διαγράμματος ελέγχου.

Στην τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου, περιλαμβάνεται μια σύγκριση των τεσσάρων διαγραμμάτων που παρουσιάζονται στο παρόν κεφάλαιο μαζί με αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου R και S .

3.2 Το CUSUM- S^2 διάγραμμα ελέγχου

Στους Hawkins and Olwell (1998) (δείτε επίσης Acosta-Mejía et al. (1999), Chang and Gan (1995) και Knoth (2006)) υπάρχει μια αναλυτική εισαγωγή και περιγραφή του CUSUM- S^2 διαγράμματος ελέγχου. Ο σχεδιασμός ενός CUSUM διαγράμματος ελέγχου βασίζεται στη μεθοδολογία των ακολουθιακών ελέγχων λόγου πιθανοφάνειας και σύμφωνα με τον Moustakides (1986) είναι βέλτιστο σύμφωνα με το κριτήριο του Lorden (1971) για την ανίχνευση αλλαγών σε μια διεργασία όταν τα δεδομένα είναι ανεξάρτητα με την ίδια κατανομή πριν και μετά την αλλαγή.

Ας υποθέσουμε ότι η εντός ελέγχου κατανομή των μετρήσεων που παρακολουθούμε είναι η κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_0 και διασπορά σ_0^2 . Από τη διεργασία επιλέγουμε τυχαία δείγματα μεγέθους n σε τακτά χρονικά διαστήματα. Έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ το δείγμα που πήραμε στην i -οστή δειγματοληψία ($i = 1, 2, \dots$). Σύμφωνα με τα παραπάνω, όταν η διεργασία λειτουργεί υπό συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας έχουμε ότι $X_{ij} \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$, $i = 1, 2, \dots$ και $j = 1, 2, \dots, n$.

Για $i \geq 1$, ορίζουμε τις ποσότητες

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij},$$

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2,$$

που είναι, αντίστοιχα, ο δειγματικός μέσος και η δειγματική διασπορά του i δείγματος.

Μια εκτός ελέγχου τιμή σ_1 για την τυπική απόκλιση θα εκφράζεται ως $\sigma_1 = d\sigma_0$ ($d > 0$), όπου η τιμή $d = 1$ αντιστοιχεί στην εντός ελέγχου τιμή της τυπικής απόκλισης.

Στο άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου CUSUM- S^2 (χωρίς *FIR*, Fast Initial Response), το οποίο χρησιμοποιείται για να ανιχνεύει αυξήσεις στη διασπορά της διεργασίας, απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$C_i^+ = \max\{0, C_{i-1}^+ + S_i^2 - k^+\}, \quad i \geq 1,$$

με αρχική συνθήκη $FIR = C_0^+ = 0$. Για τον προσδιορισμό της τιμής αναφοράς k^+ χρησιμοποιείται ο τύπος

$$k^+ = \frac{\sigma_0^2 \sigma_1^2 \ln(\sigma_0^2 / \sigma_1^2)}{\sigma_0^2 - \sigma_1^2} = \frac{2\sigma_0^2 \sigma_1^2 \ln(\sigma_0 / \sigma_1)}{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}$$

όπου σ_1 ($\sigma_1 > \sigma_0$) είναι η εκτός ελέγχου τιμή της τυπικής απόκλισης την οποία θέλουμε το διάγραμμα να εντοπίζει γρήγορα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sigma_0 = 1$, οπότε σε αυτή την περίπτωση

$$k^+ = \frac{\sigma_1^2 \ln(\sigma_1^2)}{\sigma_1^2 - 1}.$$

Το διάγραμμα CUSUM- S^2 δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν για πρώτη φορά η τιμή C_i^+ ξεπεράσει το όριο h^+ , δηλαδή όταν $C_i^+ > h^+$ για κάποιο $i \geq 1$. Η τιμή h^+ επιλέγεται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να προκύπτει προκαθορισμένη τιμή για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής.

Σημειώνουμε ότι όταν η εντός ελέγχου μέση τιμή μ_0 είναι γνωστή τότε η δειγματική διασπορά είναι προτιμότερο να υπολογίζεται από τον τύπο (Knoth (2006))

$$\tilde{S}_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \mu_0)^2.$$

Αντίστοιχα αναπτύσσεται και το μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου CUSUM- S^2 (χωρίς FIR) το οποίο χρησιμοποιείται για να ανιχνεύει μειώσεις στη διασπορά, στο οποίο απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$C_i^- = \max\{0, C_{i-1}^- - S_i^2 + k^-\}, \quad i \geq 1$$

με αρχική συνθήκη $FIR = C_0^- = 0$.

Η μέθοδος της άμεσης αρχικής αντίδρασης (Fast Initial Response, FIR) έχει προταθεί προκειμένου να δίνεται ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας, όταν αυτή συμβαίνει, όσο το δυνατόν πιο σύντομα. Σε διεργασίες με πραγματικά δεδομένα, παρατηρούμε ότι όταν είναι εκτός ελέγχου η διεργασία σε αρχικό στάδιο, ένα CUSUM διάγραμμα με FIR συστήνεται για τον πιο γρήγορο εντοπισμό της εκτός ελέγχου διεργασίας. Από την άλλη, όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου στο πρωταρχικό

στάδιο, η προσθήκη του FIR θα έχει πολύ μικρή επίδραση καθώς το προβάδισμα που δίνεται συνήθως εξαλείφεται σταδιακά. Για τον προσδιορισμό της τιμής αναφοράς k^- χρησιμοποιείται ο τύπος

$$k^- = \frac{\sigma_0^2 \sigma_1^2 \ln(\sigma_0^2 / \sigma_1^2)}{\sigma_0^2 - \sigma_1^2} = \frac{2\sigma_0^2 \sigma_1^2 \ln(\sigma_0 / \sigma_1)}{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}$$

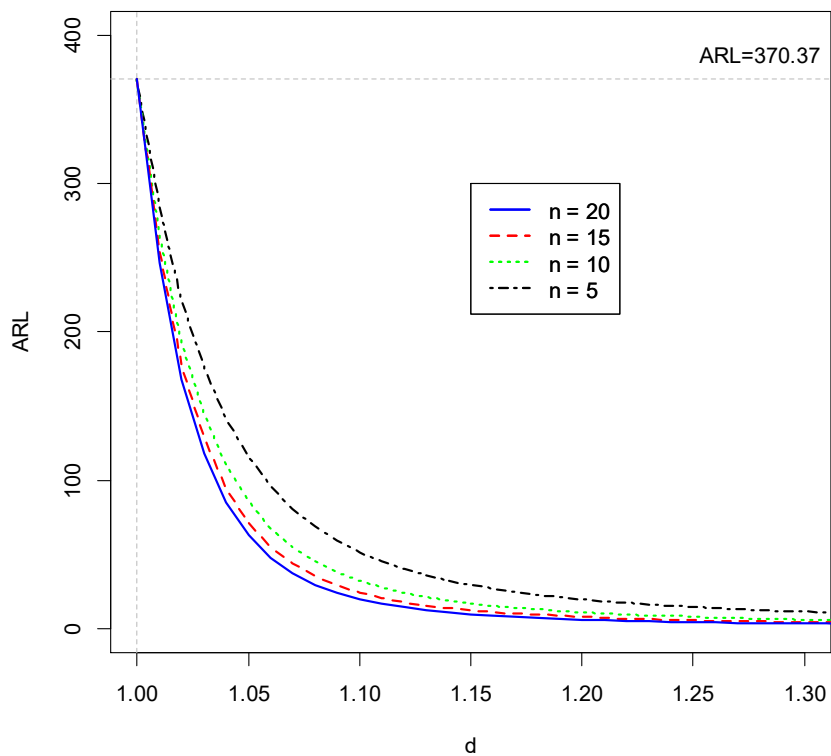
όπου σ_1 ($\sigma_1 < \sigma_0$) είναι η εκτός ελέγχου τιμή της τυπικής απόκλισης την οποία θέλουμε το διάγραμμα να εντοπίζει γρήγορα. Το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου CUSUM- S^2 δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν για πρώτη φορά η τιμή C_i^- ξεπεράσει κάποιο όριο, έστω h^- , δηλαδή όταν $C_i^- > h^-$ για κάποιο $i \geq 1$.

Στην εργασία του Knoth (2006) προτείνονται ορισμένες τεχνικές υπολογισμού του ARL . Κάνοντας χρήση αυτών των μεθοδολογιών και των συναρτήσεων «scusum.crit» και «scusum.arl» του πακέτου src της γλώσσας προγραμματισμού R, προκύπτουν οι ακόλουθοι δύο πίνακες. Στον Πίνακα 3.1 (δείτε και Σχήμα 3.1) παρουσιάζονται τιμές ARL για τέσσερα διαφορετικά δειγματικά μεγέθη ($n = 5, 10, 15$ και 20), όταν το εντός ελέγχου ARL είναι ίσο με 370.37 και θέλουμε να εντοπίσουμε γρήγορα συγκεκριμένη αύξηση της τυπικής απόκλισης $\sigma_1 = 1.2$. Στον Πίνακα 3.2 (δείτε και Σχήμα 3.2), παίρνοντας σταθερό μέγεθος δείγματος $n = 10$ και εντός ελέγχου ARL ίσο με 370.37, παρουσιάζονται τιμές ARL βελτιστοποιημένων διαγραμμάτων ελέγχου για τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις μετατόπισης (αύξησης) της τυπικής απόκλισης, $\sigma_1 = 1.1, 1.3, 1.5$ και 1.7 . Σε όλες τις περιπτώσεις η εντός ελέγχου κατανομή των παρατηρήσεων είναι η τυποποιημένη κανονική κατανομή ($\mu_0 = 0, \sigma_0 = 1$).

Πίνακας 3.1 Τιμές ARL για το άνω CUSUM- S^2 βελτιστοποιημένο για $\sigma_1 = 1.2$

$d = \sigma_1$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$
	$k^+ = 1.193377$ $h^+ = 5.299968$	$k^+ = 1.193377$ $h^+ = 2.702887$	$k^+ = 1.193377$ $h^+ = 1.836286$	$k^+ = 1.193377$ $h^+ = 1.393833$
1	370.37	370.37	370.37	370.37
1.1	51.69	32.30	24.53	20.15
1.2	19.90	11.20	8.08	6.42
1.3	11.61	6.43	4.63	3.68
1.4	8.09	4.49	3.25	2.60
1.5	6.18	3.45	2.52	2.03
1.6	5.00	2.82	2.07	1.69
1.7	4.19	2.39	1.78	1.46
1.8	3.62	2.08	1.57	1.31
1.9	3.19	1.86	1.42	1.20
2.0	2.85	1.69	1.30	1.13

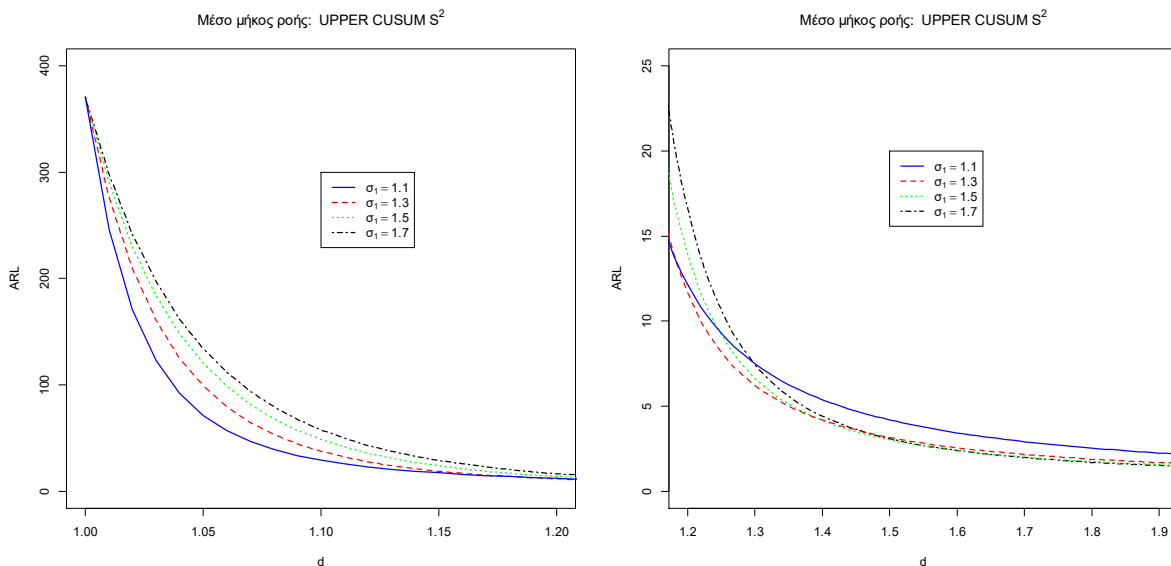
Μέσο μήκος ροής: UPPER CUSUM S^2



Σχήμα 3.1 Καμπύλες ARL για το άνω CUSUM- S^2 βελτιστοποιημένο για $\sigma_1 = 1.2$.

Πίνακας 3.2 Τιμές ARL για το άνω $CUSUM-S^2$ βελτιστοποιημένο για $\sigma_1 = 1.1, 1.3, 1.5, 1.7$ ($n = 10$)

$d = \sigma_1$	$n = 10$ $k^+ = 1.098336$ $h^+ = 3.850856$	$n = 10$ $k^+ = 1.285205$ $h^+ = 2.159576$	$n = 10$ $k^+ = 1.459674$ $h^+ = 1.608217$	$n = 10$ $k^+ = 1.622768$ $h^+ = 1.303896$
1	370.37	370.37	370.37	370.37
1.1	29.35	37.67	48.78	57.81
1.2	12.14	11.66	13.95	16.61
1.3	7.50	6.22	6.64	7.45
1.4	5.39	4.19	4.17	4.42
1.5	4.20	3.17	3.03	3.09
1.6	3.44	2.56	2.40	2.40
1.7	2.92	2.17	2.01	1.98
1.8	2.54	1.89	1.75	1.71
1.9	2.26	1.69	1.57	1.53
2.0	2.03	1.54	1.43	1.40



Σχήμα 3.2 Καμπύλες ARL για το άνω $CUSUM-S^2$ με $n = 10$ βελτιστοποιημένο για $\sigma_1 = 1.1, 1.3, 1.5$ και 1.7

Από την σύγκριση των αποτελεσμάτων που έχουμε στους Πίνακες 3.1 και 3.2 είναι σαφές πως στην πρώτη περίπτωση που το μέγεθος του δείγματος δεν είναι σταθερό και εξετάζουμε μια σχετικά μικρή μετατόπιση της τυπικής απόκλισης (μεταβολή της

τάξεως του 20%), όσο μεγαλώνει το μέγεθος δείγματος τόσο πιο αποδοτικό γίνεται το διάγραμμα ελέγχου CUSUM- S^2 , καθώς όπως παρατηρούμε η τιμή του ARL μειώνεται. Παρατηρούμε λοιπόν πως μελετώντας αύξηση της τυπικής απόκλισης σε 1.2 η τιμή του ARL μειώνεται από 19.90 σε 11.20, 8.08 και 6.42 όσο το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται από 5 σε 10, 15 και 20. Στον Πίνακα 3.2 που διατηρούμε σταθερό το μέγεθος του δείγματος συμπεραίνουμε πως για πολύ μικρές μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης, δηλαδή από $\sigma_0 = 1$ σε $\sigma_1 = 1.1$, το διάγραμμα CUSUM- S^2 είναι πιο αποδοτικό για το ζεύγος ($k^+ = 1.098336$, $h^+ = 3.850856$) ενώ σε μεγάλες μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης, $\sigma_1 = 1.7$, βλέπουμε πως το διάγραμμα CUSUM- S^2 είναι πιο ευαίσθητο στο συνδυασμό των τιμών ($k^+ = 1.622768$, $h^+ = 1.303896$). Όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή της τυπικής απόκλισης σ_1 , η τιμή h^+ μειώνεται ενώ η τιμή k^+ αυξάνεται.

3.3 Το CUSUM- $\ln S^2$ διάγραμμα ελέγχου

Οι Chang and Gan (1995) (δείτε επίσης Acosta-Mejía et al. (1999) και Knoth (2006)) παρουσίασαν και μελέτησαν ένα CUSUM διάγραμμα ελέγχου το οποίο βασίζεται στον λογαριθμικό μετασχηματισμό $\ln S^2$ της δειγματικής διακύμανσης..

Στο άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου CUSUM- $\ln S^2$ (χωρίς FIR), το οποίο χρησιμοποιείται για να ανιχνεύει αυξήσεις στη διασπορά, απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$C_i^+ = \max \{0, C_{i-1}^+ + \ln S_i^2 - k^+\}, i \geq 1$$

με αρχική συνθήκη $FIR = C_0^+ = 0$. Το άνω μονόπλευρο διάγραμμα CUSUM- $\ln S^2$ δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν για πρώτη φορά η τιμή C_i^+ ξεπεράσει το όριο h^+ , δηλαδή όταν $C_i^+ > h^+$. Οι τιμές k^+ και h^+ επιλέγονται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε (α) να προκύπτει προκαθορισμένη τιμή για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής, και (β) το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής να επιτυγχάνει ελάχιστη τιμή για μια συγκεκριμένη εκτός ελέγχου μετατόπιση της τυπικής απόκλισης.

Αντίστοιχα αναπτύσσεται και το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου CUSUM- $\ln S^2$ (χωρίς FIR), το οποίο χρησιμοποιείται για να ανιχνεύει μειώσεις στη διασπορά, στο οποίο απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$C_i^- = \min \{0, C_{i-1}^- + \ln S_i^2 + k^-\}, i \geq 1$$

με αρχική συνθήκη $FIR = C_0^- = 0$. Το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα CUSUM- $\ln S^2$ δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν για πρώτη φορά η τιμή C_i^- πάρει τιμή μικρότερη του το $-h^-$, δηλαδή όταν $C_i^- < -h^-$.

Η τιμή του ARL στο άνω μονόπλευρο διάγραμμα CUSUM με παραμέτρους και h^+ και k^+ όταν $\sigma^2 = \sigma_0^2$, είναι ίδια με την τιμή του ARL στο άνω μονόπλευρο διάγραμμα CUSUM με παραμέτρους h^+ και $k^+ - \ln \sigma_0^2$ όταν $\sigma^2 = 1$. Συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sigma_0^2 = 1$. Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν και στο κάτω μονόπλευρο διάγραμμα CUSUM. Οι τιμές ARL δύνανται να προσεγγιστούν με ακρίβεια, ακολουθώντας την μεθοδολογία που εμφανίζεται στους Chang and Gan (1995). Συγκεκριμένα όταν οι μετρήσεις του ποιοτικού χαρακτηριστικού είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και κανονικά κατανομημένες, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της στατιστικής $\ln S^2$ δίνεται από

$$f(y) = \frac{\exp \left[ay - \frac{\exp(y)}{\beta} \right]}{\Gamma(a)\beta^a}, \quad -\infty < y < \infty$$

όπου $a = (n-1)/2$ και $\beta = 2\sigma^2/(n-1)$. Έστω $H(u)$ η συνάρτηση ARL του άνω μονόπλευρου CUSUM διαγράμματος δοθέντος ότι $C_0^+ = u$ με $0 \leq u < h^+$. Οι Chang and Gan (1995) έδειξαν ότι

$$H(u) = 1 + H(0)P(\ln S^2 \leq k^+ - u) + \int_0^{h^+} H(x)f(x + k^+ - u)dx.$$

Μια παρόμοια συνάρτηση μπορεί να παραχθεί και για την ARL συνάρτηση $L(v)$ του κάτω μονόπλευρου CUSUM διαγράμματος δοθέντος ότι $C_0^- = v$ με $-h^- \leq v < 0$. Η λύση της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να προσεγγιστεί με μεγάλη ακρίβεια χρησιμοποιώντας αποτελέσματα του Baker (1977).

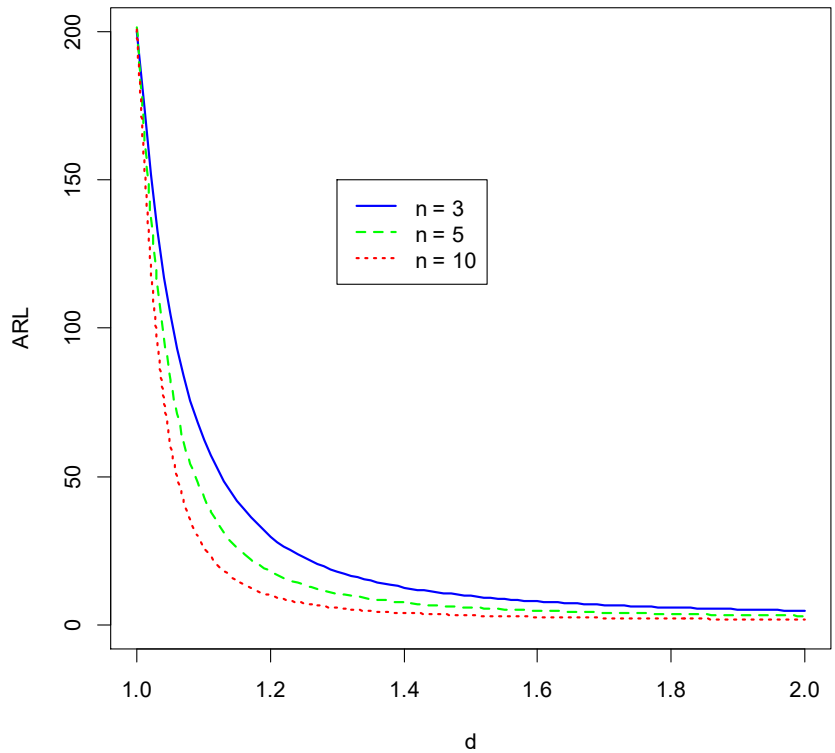
Στον Πίνακα 3.3 παρουσιάζονται τιμές ARL για τρία διαφορετικά δειγματικά μεγέθη ($n = 3, 5$ και 10), όταν το εντός ελέγχου ARL είναι ίσο με 200 και θέλουμε να εντοπίσουμε συγκεκριμένη αύξηση της τυπικής απόκλισης ίση με $\sigma_1 = 1.2$. Αντίστοιχα, στον Πίνακα 3.4 παρουσιάζονται οι τιμές ARL για εντοπισμό μείωσης της τυπικής απόκλισης με τιμή ίση με $\sigma_1 = 0.8$. Σε όλες τις περιπτώσεις η εντός ελέγχου κατανομή των παρατηρήσεων είναι η τυποποιημένη κανονική κατανομή ($\mu_0 = 0, \sigma_0 = 1$). Και για τους δύο πίνακες, οι σταθερές k^+, h^+, k^- και h^- που χρησιμοποιούνται προκύπτουν

από πίνακες που παρουσιάζονται στους Chang and Gan (1995), ενώ ο υπολογισμός των τιμών *ARL* προέκυψε με μεθόδους προσομοίωσης (10000 επαναλήψεις).

Πίνακας 3.3 Τιμές ARL για το άνω CUSUM- $\ln S^2$ βελτιστοποιημένο για $\sigma_1 = 1.2$ ($ARL_0 = 200, n = 3, 5, 10$)

$d = \sigma_1$	$n = 3$ $k^+ = -0.026$ $h^+ = 3.771$	$n = 5$ $k^+ = 0.068$ $h^+ = 2.657$	$n = 10$ $k^+ = 0.144$ $h^+ = 1.464$
1	199.94	201.27	200.67
1.1	62.37	42.82	26.30
1.2	29.90	18.11	9.93
1.3	18.06	10.71	5.78
1.4	12.72	7.62	4.17
1.5	9.84	5.93	3.32
1.6	8.05	4.94	2.81
1.7	6.86	4.28	2.47
1.8	6.00	3.80	2.22
1.9	5.37	3.45	2.03
2.0	4.88	3.17	1.88
2.1	4.50	2.96	1.75
2.2	4.20	2.78	1.64
2.3	3.94	2.64	1.55
2.4	3.73	2.52	1.46
2.5	3.56	2.41	1.39
2.6	3.40	2.32	1.33
2.7	3.26	2.24	1.28
2.8	3.14	2.16	1.24
2.9	3.03	2.10	1.20
3.0	2.94	2.04	1.17

Μέσο μήκος ροής: UPPER CUSUM- $\ln S^2$



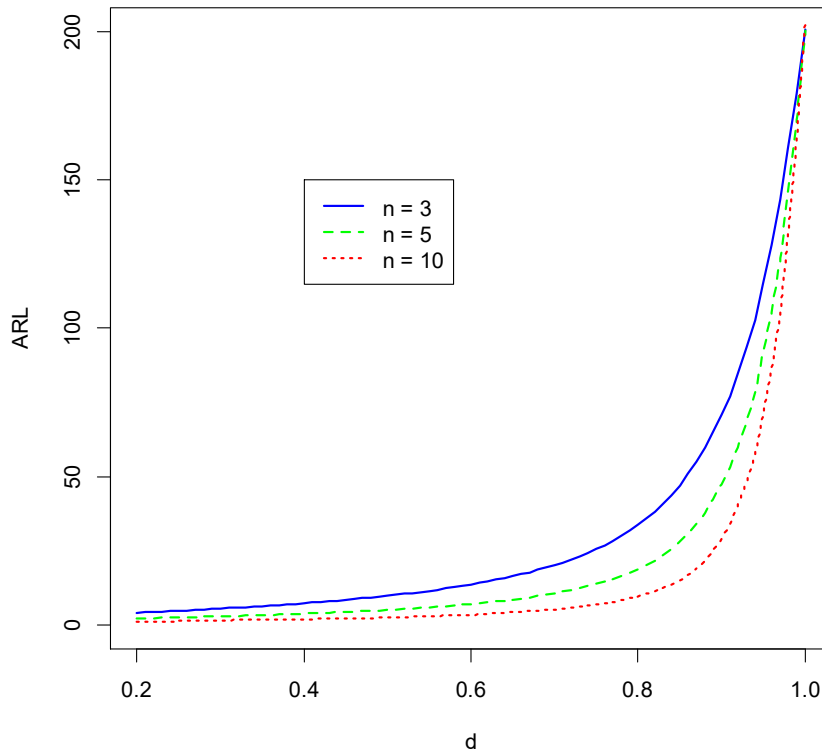
Σχήμα 3.3 Καμπύλες ARL για το άνω CUSUM- $\ln S^2$ βελτιστοποιημένο για $\sigma_1 = 1.2$ ($ARL_0 = 200, n = 3, 5, 10$)

Πίνακας 3.4 Τιμές ARL για το κάτω CUSUM- $\ln S^2$ βελτιστοποιημένο για $\sigma_1 = 0.8$ ($ARL_0 = 200, n = 3, 5, 10$)

$d = \sigma_1$	$n = 3$ $k^- = 0.704$ $h^- = 11.361$	$n = 5$ $k^- = 0.426$ $h^- = 5.492$	$n = 10$ $k^- = 0.290$ $h^- = 2.457$
1	200.53	200.10	204.44
0.9	70.73	47.48	29.24
0.8	33.75	18.94	9.80
0.7	20.20	10.81	5.37
0.6	13.76	7.19	3.58
0.5	9.94	5.18	2.62
0.4	7.44	3.89	2.04
0.3	5.63	3.00	1.70
0.2	4.26	2.30	1.11

0.1	3.07	1.90	1.00
-----	------	------	------

Μέσο μήκος ροής: LOWER CUSUM- $\ln S^2$



Σχήμα 3.4 Καμπύλες ARL για το κάτω CUSUM- $\ln S^2$ βελτιστοποιημένο για $\sigma_1 = 0.8$ ($ARL_0 = 200$, $n = 3, 5, 10$)

Από τον Πίνακα 3.3 καθίσταται σαφές πως για τον εντοπισμό της αύξησης της τυπικής απόκλισης το CUSUM διάγραμμα βασισμένο σε μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος είναι πιο ευαίσθητο από τα διαγράμματα με μικρότερο μέγεθος δείγματος. Ομοίως και για τον εντοπισμό της μείωσης της τυπικής απόκλισης όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.4.

3.4 Το EWMA- S^2 διάγραμμα ελέγχου

Το EWMA- S^2 διάγραμμα ελέγχου μελετήθηκε διεξοδικά από τον Knoth (2005) (δείτε επίσης Knoth (2006, 2010) και MacGregor and Harris (1993)).

Υποθέτουμε ότι η εντός ελέγχου κατανομή των μετρήσεων που παρακολουθούμε είναι η κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_0 και διασπορά σ_0^2 . Έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ το δείγμα που πήραμε στην i -οστή δειγματοληψία ($i = 1, 2, \dots$), και έστω

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}, \quad S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad i \geq 1.$$

Μια εκτός ελέγχου τιμή σ_1 για την τυπική απόκλιση θα εκφράζεται ως $\sigma_1 = d\sigma_0$ ($d > 0$), όπου η τιμή $d = 1$ αντιστοιχεί στην εντός ελέγχου τιμή της τυπικής απόκλισης.

Στο άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου EWMA- S^2 , (χωρίς ανακλαστικό όριο (reflecting barrier)), το οποίο χρησιμοποιείται για να ανιχνεύει αυξήσεις στη διασπορά ($\sigma_1^2 > \sigma_0^2$), απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$Z_i = (1 - \lambda) Z_{i-1} + \lambda S_i^2, \quad i \geq 1,$$

όπου $Z_0 = \sigma_0^2$ και $0 < \lambda \leq 1$. Εκτός ελέγχου σήμα δίνεται όταν για πρώτη φορά διαπιστωθεί ότι $Z_i > UCL$ ($i \geq 1$), όπου

$$UCL = \sigma_0^2 + c \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \sqrt{\frac{2}{n - 1}} \sigma_0^2$$

και c είναι μια κατάλληλη σταθερά.

Σημειώνουμε ότι όταν η εντός ελέγχου μέση τιμή μ_0 είναι γνωστή τότε στη θέση της δειγματικής διασποράς S_i^2 χρησιμοποιείται η στατιστική

$$\tilde{S}_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \mu_0)^2, \quad i \geq 1,$$

και τότε ο όρος $\sqrt{2/(n-1)}$ που εμφανίζεται στο UCL θα πρέπει να αντικατασταθεί με τον όρο $\sqrt{2/n}$.

Αντίστοιχα αναπτύσσεται και το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου EWMA- S^2 (χωρίς ανακλαστικό όριο) το οποίο χρησιμοποιείται με σκοπό τον εντοπισμό μειώσεων στη διασπορά. Σε αυτό απεικονίζεται η ίδια στατιστική συνάρτηση

$$Z_i = (1 - \lambda) Z_{i-1} + \lambda S_i^2, \quad i \geq 1,$$

($Z_0 = \sigma_0^2$) και εκτός ελέγχου σήμα δίνεται όταν για πρώτη φορά διαπιστωθεί ότι $Z_i < LCL$ ($i \geq 1$), όπου

$$LCL = \sigma_0^2 - c \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \sqrt{\frac{2}{n - 1}} \sigma_0^2.$$

Επίσης το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου EWMA-S² μπορεί να σχεδιαστεί εύκολα, συνδυάζοντας το άνω και κάτω διάγραμμα ελέγχου EWMA-S² (οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη).

Η συμπερίληψη ανακλαστικών φραγμάτων σε ένα άνω (κάτω) μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου EWMA έχει ως σκοπό να αποτραπεί η μεγάλη απομάκρυνση προς τα κάτω (άνω) της στατιστικής EWMA από την τιμή στόχο. Εκτενή αριθμητικά αποτελέσματα σε αυτή την περίπτωση δόθηκαν από τους Chang and Gan (1994) και Crowder and Hamilton (1992).

Στο άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου EWMA-S² με ανακλαστικό όριο, το οποίο χρησιμοποιείται για να ανιχνεύει αυξήσεις στη διασπορά ($\sigma_1^2 > \sigma_0^2$), απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$Z_i = \max \{ (1 - \lambda) Z_{i-1} + \lambda S_i^2, \sigma_0^2 \}, i \geq 1,$$

όπου $Z_0 = \sigma_0^2$ και $0 < \lambda \leq 1$.

Στο κάτω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου EWMA-S² με ανακλαστικό όριο, το οποίο χρησιμοποιείται για να ανιχνεύει μειώσεις στη διασπορά ($\sigma_1^2 < \sigma_0^2$), απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$Z_i = \min \{ (1 - \lambda) Z_{i-1} + \lambda S_i^2, \sigma_0^2 \}, i \geq 1,$$

όπου $Z_0 = \sigma_0^2$ και $0 < \lambda \leq 1$.

Όσον αφορά τη σταθερά λ προτείνεται να παίρνει τιμές στο διάστημα (0.1, 0.3), με το βέλτιστο λ σε κάθε περίπτωση να επιλέγεται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να προκύπτει η μικρότερη τιμή για το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής, όταν $\sigma = \sigma_1$.

Στην εργασία του Knoth (2006) γίνεται αναφορά στην μέθοδο υπολογισμού των τιμών ARL του διαγράμματος EWMA-S². Συνεπώς κάνοντας χρήση της παραπάνω μεθόδου και προγραμμάτων της γλώσσας προγραμματισμού R προκύπτουν οι πίνακες που ακολουθούν. Οι σχετικές συναρτήσεις της R βρίσκονται στο πακέτο src και είναι οι «sewma.crit» (υπολογίζει μία εκ των παραμέτρων λ και c όταν είναι γνωστή η άλλη και το ARL_0) και «sewma.arl», (υπολογίζει το ARL όταν είναι γνωστές οι τιμές λ και c).

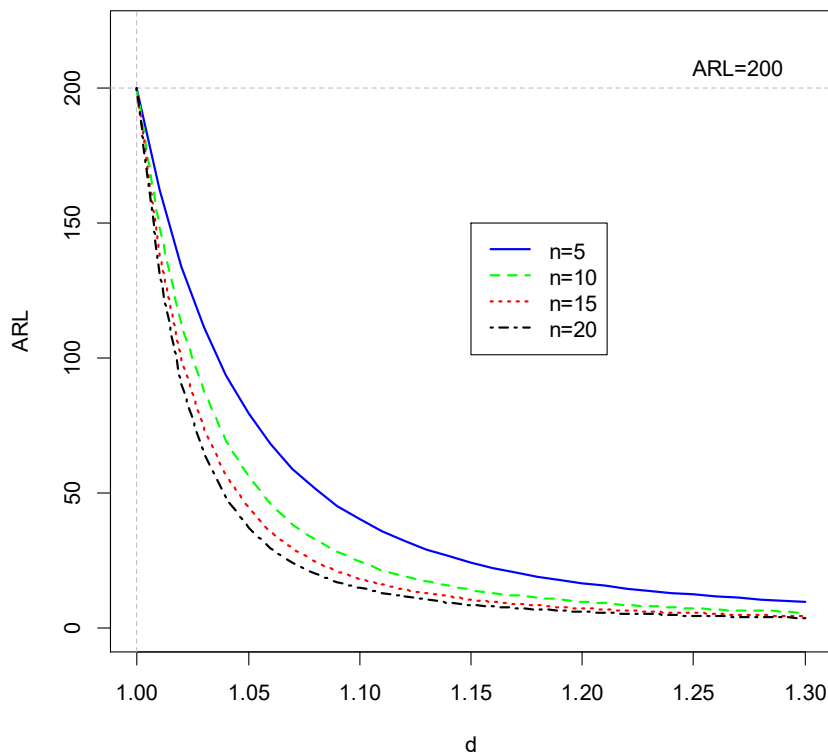
Στον Πίνακα 3.5 (δείτε και Σχήμα 3.5) παρουσιάζονται τιμές ARL για τέσσερα διαφορετικά δειγματικά μεγέθη ($n = 5, 10, 15$ και 20), όταν το εντός ελέγχου ARL είναι ίσο με 200 και $\lambda = 0.10$ για το άνω EWMA-S² διάγραμμα ελέγχου με ανακλαστικό

φράγμα. Επιλέγεται η συγκεκριμένη τιμή του λ καθώς από τα σχετικά γραφήματα που υπάρχουν στους Chang and Gan (1994) φαίνεται πως για να εντοπίσουμε συγκεκριμένη αύξηση της τυπικής απόκλισης κατά 20% ($\sigma_1 = 1.2$) με $ARL_0 = 200$, προσεγγιστικά η βέλτιστη τιμή του λ πλησιάζει στο 0.10.

Πίνακας 3.5 Τιμές ARL για το άνω EWMA-S² ($\lambda = 0.10, ARL_0 = 200, n = 5, 10, 15, 20$)

$d = \sigma_1$	$n = 5$ $\lambda = 0.10$ $c = 2.69562$ 6	$n = 10$ $\lambda = 0.10$ $c = 2.59088$ 7	$n = 15$ $\lambda = 0.10$ $c = 2.547551$	$n = 20$ $\lambda = 0.10$ $c = 2.52235$
1	200.00	200.00	200.00	200.00
1.1	40.25	24.54	18.32	14.93
1.2	16.68	9.79	7.40	6.14
1.3	9.82	5.91	4.56	3.84
1.4	6.85	4.21	3.30	2.81
1.5	5.24	3.28	2.60	2.23
1.6	4.25	2.70	2.16	1.87
1.7	3.58	2.31	1.86	1.62
1.8	3.10	2.02	1.64	1.43
1.9	2.75	1.81	1.48	1.30
2.0	2.47	1.65	1.36	1.20

Μέσο μήκος ροής: UPPER EWMA S^2

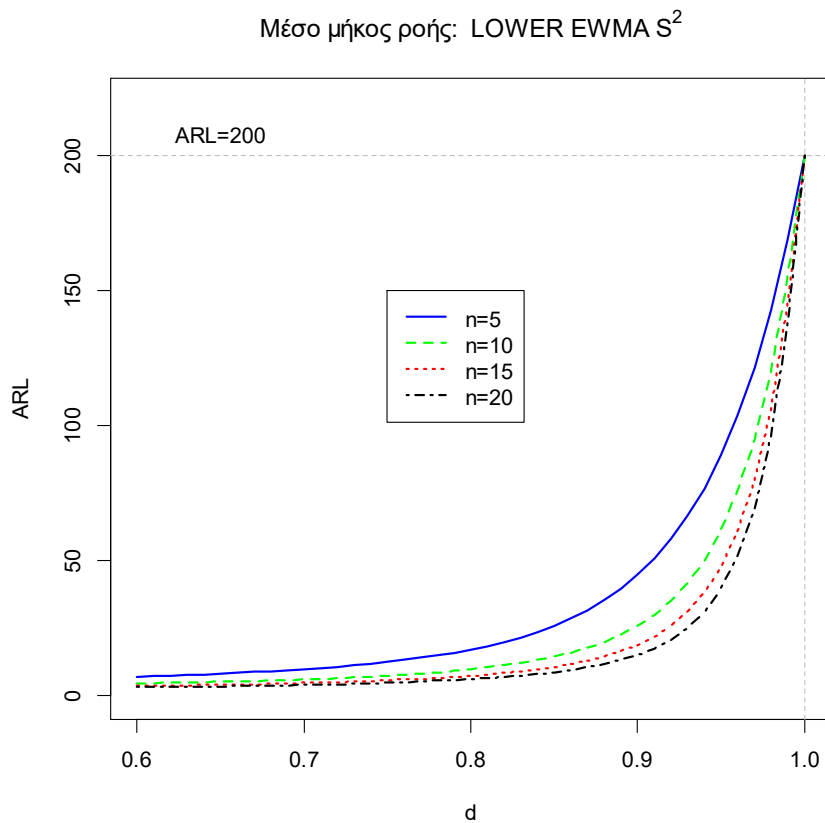


Σχήμα 3.5 Καμπύλες ARL για το άνω EWMA- S^2 ($\lambda = 0.10$, $ARL_0 = 200$, $n = 5, 10, 15, 20$)

Στον Πίνακα 3.6 (δείτε και Σχήμα 3.6) παρουσιάζονται τιμές ARL για τα ίδια δειγματικά μεγέθη ($n = 5, 10, 15$ και 20), $ARL_0 = 200$ και $\lambda = 0.12$ για το κάτω EWMA- S^2 διάγραμμα ελέγχου με ανακλαστικό φράγμα. Επιλέγεται η συγκεκριμένη τιμή του λ καθώς από τα προαναφερθέντα γραφήματα των Chang and Gan (1994) φαίνεται πως για να εντοπίσουμε συγκεκριμένη μείωση της τυπικής απόκλισης κατά 40% ($\sigma_1 = 0.6$) με $ARL_0 = 200$, προσεγγιστικά η βέλτιστη τιμή του λ πλησιάζει στο 0.12.

Πίνακας 3.6 Τιμές ARL για το κάτω EWMA-S² ($\lambda = 0.12$, $ARL_0 = 200$, $n = 5, 10, 15, 20$)

$d = \sigma_1$	$n = 5$ $\lambda = 0.12$ $c = 2.022091$	$n = 10$ $\lambda = 0.12$ $c = 2.149909$	$n = 15$ $\lambda = 0.12$ $c = 2.201726$	$n = 20$ $\lambda = 0.12$ $c = 2.231632$
1	200.00	200.00	200.00	200.00
0.9	44.83	25.87	18.84	15.16
0.8	17.14	9.82	7.43	6.19
0.7	9.89	6.06	4.75	4.04
0.6	7.08	4.56	3.63	3.16
0.5	5.69	3.82	3.06	2.86
0.4	4.96	3.19	3.00	2.20
0.3	4.36	3.00	2.82	2.00
0.2	4.00	3.00	2.01	2.00
0.1	4.00	3.00	2.00	2.00



Σχήμα 3.6 Καμπύλες ARL για το κάτω EWMA-S² ($\lambda = 0.12$, $ARL_0 = 200$, $n = 5, 10, 15, 20$)

Ολοκληρώνοντας την παράγραφο δίνουμε τον Πίνακα 3.7 που συγκρίνει σχέδια με

και χωρίς ανακλαστικό φράγμα. Αρχικά υλοποιούμε ένα άνω EWMA- S^2 διάγραμμα ελέγχου χωρίς ανακλαστικό φράγμα με παραμέτρους

$$\lambda = 0.3, ARL_0 = 500, n = 10.$$

Για το συγκεκριμένο διάγραμμα προκύπτει

$$c = 3.414126, UCL = 1.676098.$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι τιμές ARL του σχεδίου που δίνονται στην πρώτη στήλη του Πίνακα 3.7. Στη συνέχεια υλοποιούμε ένα άνω EWMA- S^2 διάγραμμα ελέγχου με ανακλαστικό φράγμα και υπολογίζουμε τιμές ARL χρησιμοποιώντας το ίδιο άνω όριο ελέγχου. Παρατηρούμε την υπεροχή του διαγράμματος με ανακλαστικό φράγμα για μικρές μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης.

Πίνακας 3.7 Τιμές ARL για το άνω EWMA- S^2 με και χωρίς ανακλαστικό φράγμα ($\lambda = 0.3, ARL_0 = 500, n = 10$)

	$\lambda = 0.3, ARL_0 = 500, n = 10,$ $UCL = 1.676098, c = 3.414126$	
$d = \sigma_1$	Χωρίς ανακλαστικό φράγμα	Με ανακλαστικό φράγμα
1.00	500	352.22
1.05	129.18	108.53
1.10	47.62	43.67
1.15	23.03	21.99
1.20	13.53	13.15
1.25	9.08	8.91
1.30	6.68	6.58
1.35	5.23	5.17
1.40	4.28	4.25
1.45	3.63	3.61
1.50	3.15	3.14

3.5 Το EWMA- $\ln S^2$ διάγραμμα ελέγχου

Το EWMA- $\ln S^2$ διάγραμμα ελέγχου εμφανίστηκε για πρώτη φορά στην εργασία των Crowder and Hamilton (1992), στην οποία παρουσιάζονται επίσης ορισμένες ιδιότητες

του και μια βέλτιστη στρατηγική σχεδιασμού του (δείτε επίσης MacGregor and Harris (1993), Chang and Gan (1994) και Knoth (2005)).

Υποθέτουμε ότι η εντός ελέγχου κατανομή των μετρήσεων που παρακολουθούμε είναι η κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_0 και διασπορά σ_0^2 . Έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ το δείγμα που πήραμε στην i -οστή δειγματοληψία ($i = 1, 2, \dots$), και έστω

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}, \quad S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad i \geq 1.$$

Μια εκτός ελέγχου τιμή σ_1 για την τυπική απόκλιση θα εκφράζεται ως $\sigma_1 = d\sigma_0$ ($d > 0$), όπου η τιμή $d = 1$ αντιστοιχεί στην εντός ελέγχου τιμή της τυπικής απόκλισης. Στο άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου EWMA- $\ln S^2$, το οποίο χρησιμοποιείται για να ανιχνεύει αυξήσεις στη διασπορά ($\sigma_1^2 > \sigma_0^2$), απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$Z_i = \max \{ (1 - \lambda) Z_{i-1} + \lambda \ln(S_i^2), \ln(\sigma_0^2) \}, \quad i \geq 1,$$

όπου $Z_0 = \ln(\sigma_0^2)$ και $0 < \lambda \leq 1$.

Για την ενίσχυση της αποτελεσματικότητας του διαγράμματος ως προς την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας και τον εντοπισμό αυξήσεων σε αυτή, η στατιστική EWMA επαναφέρεται στην τιμή $\ln(\sigma_0^2)$ εάν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης $(1 - \lambda) Z_{i-1} + \lambda \ln(S_i^2)$ που θα προκύψει είναι μικρότερη του $\ln(\sigma_0^2)$. Η αναπροσαρμογή αυτή στο $\ln(\sigma_0^2)$, όταν προκύπτουν μικρότερες τιμές, μπορεί να αυξήσει την απόδοσή του όπως αναφέρεται και από τους Abbas et al. (2020). Η τιμή $\ln(\sigma_0^2)$ στον παραπάνω τύπο είναι ουσιαστικά ένα κάτω ανακλαστικό φράγμα (reflecting barrier). Γενικά όταν υπάρχει ένα ανακλαστικό φράγμα τότε είναι λογικό η τιμή του ανακλαστικού φράγματος να είναι και η τιμή του Z_0 .

Οι μειώσεις στη μεταβλητότητα της διεργασίας είναι εξίσου σημαντικές και η ανίχνευσή τους είναι δυνατή με τη συχνή εμφάνιση αρκετών τιμών ίσων με $\ln(\sigma_0^2)$ στο άνω EWMA- $\ln S^2$ διάγραμμα ελέγχου. Η κατασκευή ενός δίπλευρου EWMA- $\ln S^2$ διαγράμματος με άνω και κάτω όρια ελέγχου για την παρακολούθηση τόσο αυξήσεων όσο και μειώσεων στην μεταβλητότητα της διεργασίας είναι δυνατή, όμως προτιμήθηκε εδώ να παρουσιαστεί η άνω μονόπλευρη εκδοχή του που παρουσιάζει και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον.

Για την περαιτέρω ανάπτυξη του EWMA- $\ln S^2$ διαγράμματος μπορούμε να θεωρήσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η εντός ελέγχου τιμή της διασποράς της είναι $\sigma_0^2 = 1$.

Το άνω όριο ελέγχου του διαγράμματος (UCL) δίνεται από τη σχέση

$$UCL = K\sigma_{EWMA}$$

όπου

$$\sigma_{EWMA}^2 = \frac{\lambda}{2-\lambda} \text{Var}(\ln(S_i^2)) \cong \frac{\lambda}{2-\lambda} \left[\frac{2}{n-1} + \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5} \right]$$

όπως έδειξαν οι Crowder and Hamilton (1992). Εκτός ελέγχου σήμα δίνεται όταν για πρώτη φορά διαπιστωθεί ότι $Z_i > UCL$, $i \geq 1$.

Οι παράμετροι σχεδιασμού του EWMA- $\ln S^2$ διαγράμματος ελέγχου, λ και K , καθορίζονται από τον χρήστη, αφού σε κάθε πιθανή τιμή του λ μπορεί να αντιστοιχιστεί μία τιμή του K έτσι ώστε να προκύπτουν επιθυμητές τιμές του ARL για εντός και εκτός ελέγχου καταστάσεις. Ένας επιλεγμένος συνδυασμός (λ, K) θεωρείται βέλτιστος, εάν για κάποιο σταθερό εντός ελέγχου ARL , παράγει το μικρότερο δυνατό ARL για μια συγκεκριμένη μετατόπιση, έστω σ_1 , της τυπικής απόκλισης. Αφού επιλεγούν τα λ και K το ARL υπολογίζεται με προχωρημένες υπολογιστικές μεθόδους (λύση ολοκληρωτικών εξισώσεων).

Κάνοντας χρήση της συνάρτησης «`lns2ewma.crit`» του πακέτου `spr` της γλώσσας προγραμματισμού R, προκύπτουν οι ακόλουθες τιμές για την παράμετρο K για δεδομένες τιμές λ και εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής 200 (μηδενικό ανακλαστικό φράγμα και αρχική τιμή Z_0)

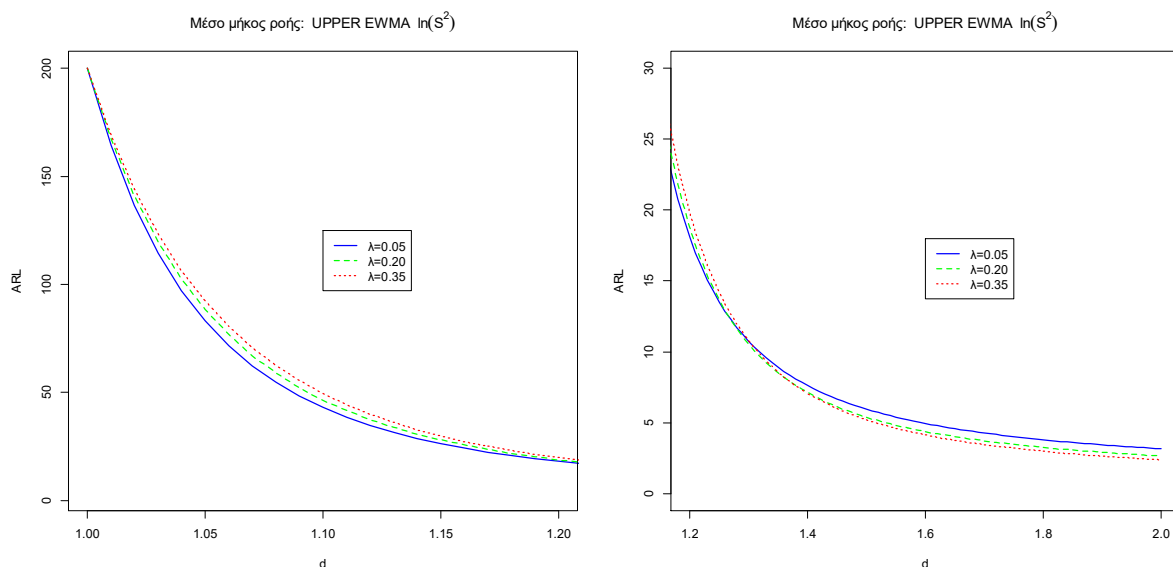
λ	0.05	0.20	0.35
K	1.055207	1.512553	1.621565

Κάνοντας χρήση της συνάρτησης «`lns2ewma.arl`» του πακέτου `spr` της γλώσσας προγραμματισμού R προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας με τιμές ARL (μηδενικό ανακλαστικό φράγμα και αρχική τιμή Z_0).

Πίνακας 3.8 Τιμές ARL για το άνω EWMA- $\ln S^2$ με μηδενικό ανακλαστικό φράγμα και αρχική τιμή ($n = 5, ARL_0 = 200$)

$d = \sigma_1$	$\lambda = 0.05$ $K = 1.055207$	$\lambda = 0.20$ $K = 1.512553$	$\lambda = 0.35$ $K = 1.621565$
1.0	200.00	200.00	200.00
1.1	43.04	46.47	49.51
1.2	18.10	18.79	19.85
1.3	10.75	10.54	10.80
1.4	7.63	7.14	7.08
1.5	5.97	5.40	5.22
1.6	4.96	4.38	4.14
1.7	4.28	3.72	3.46
1.8	3.80	3.26	2.99
1.9	3.45	2.93	2.65
2.0	3.17	2.67	2.40

Από τον παραπάνω πίνακα, αλλά και από τα δύο παρακάτω σχήματα, επιβεβαιώνεται ότι μικρές (μεγάλες) τιμές του λ χρησιμοποιούνται για τον έγκαιρο εντοπισμό μικρών (μεγάλων) μετατοπίσεων στη διασπορά.



Σχήμα 3.7 Καμπύλες ARL για το άνω EWMA- $\ln S^2$ με μηδενικό ανακλαστικό φράγμα και αρχική τιμή ($n = 5, ARL_0 = 200$).

Τα ακόλουθα αποτελέσματα προκύπτουν χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία που περιγράφεται από τον Knoth (2005) για ανακλαστικό φράγμα (και ίδια αρχική τιμή Z_0) ίσο με -0.267 , $n = 5$ και $ARL_0 = 200$.

λ	0.05	0.20	0.35
K	-0.06289376	1.231385	1.48118

Πίνακας 3.9 Τιμές ARL για το άνω EWMA- $\ln S^2$ με ανακλαστικό φράγμα και αρχική τιμή ίση με -0.267 ($n = 5$, $ARL_0 = 200$)

$d = \sigma_1$	$\lambda = 0.05$ $K = -0.06289$	$\lambda = 0.20$ $K = 1.23138$	$\lambda = 0.35$ $K = 1.48118$
1.0	200.00	200.00	200.00
1.1	41.55	44.12	47.59
1.2	19.92	18.51	19.34
1.3	13.11	10.92	10.82
1.4	9.93	7.70	7.30
1.5	8.11	6.00	5.51
1.6	6.94	4.98	4.46
1.7	6.11	4.29	3.79
1.8	5.50	3.81	3.32
1.9	5.04	3.45	2.97
2.0	4.67	3.17	2.71

3.6 Σύγκριση διαγραμμάτων

Στη συγκεκριμένη παράγραφο ακολουθεί μια μόνο συνολική σύγκριση των διαγραμμάτων που μελετήθηκαν σε αυτή την εργασία και συγκεκριμένα των διαγραμμάτων R και S με όρια πιθανότητας (Κεφάλαιο 2) και των διαγραμμάτων CUSUM- S^2 , CUSUM - $\ln S^2$, EWMA - S^2 και EWMA - $\ln S^2$. Σε κάθε περίπτωση τα διαγράμματα που συγκρίνονται είναι άνω μονόπλευρα.

Στον Πίνακα 3.10 δίνονται οι τιμές ARL όπως αυτές προέκυψαν για μέγεθος δείγματος ίσο με $n = 10$ και εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ίσο με $ARL_0 = 200$. Για τα

διαγράμματα CUSUM-S², CUSUM – lnS², EWMA – S² και EWMA – lnS² οι σταθερές k^+ , h^+ , λ , c και K αντίστοιχα έχουν πάρει προσεγγιστικά βέλτιστες τιμές για τον εντοπισμό συγκεκριμένης μετατόπισης της τυπικής απόκλισης ίσης με $\sigma_1 = 1.2$. Από τον Πίνακα 3.10 λοιπόν, προκύπτει πως για μικρές μετατοπίσεις $\sigma_1 \leq 1.5$ την καλύτερη απόδοση έχει το διάγραμμα CUSUM-S² με εξαίρεση την μετατόπιση $\sigma_1 = 1.1$ που υπερτερεί το EWMA – S². Για μεγάλες μετατοπίσεις $\sigma_1 > 1.5$ την καλύτερη απόδοση έχει το διάγραμμα S.

Πίνακας 3.10 ARL διαγραμμάτων ελέγχου CUSUM-S², CUSUM – lnS², EWMA – S², EWMA – lnS², R και S ($n = 10$, $ARL_0 = 200$).

$d = \sigma_1$	CUSUM – S ² $k^+ = 1.193377$ $h^+ = 2.279854$	CUSUM – lnS ² $k^+ = 0.144$ $h^+ = 1.464$	EWMA – S ² $\lambda = 0.10$ $c = 2.590887$	EWMA – lnS ² $\lambda = 0.10$ $K = 1.616656$	R $a = 0.005$	S $a = 0.005$
1.0	200.000	200.675	200.000	200.000	200.000	200.000
1.1	25.156	26.300	24.536	25.786	56.003	46.958
1.2	9.504	9.931	9.792	10.076	21.818	16.855
1.3	5.579	5.784	5.905	6.123	10.750	8.076
1.4	3.935	4.169	4.214	4.481	6.283	4.732
1.5	3.051	3.320	3.285	3.603	4.167	3.198
1.6	2.506	2.806	2.703	3.064	3.039	2.394
1.7	2.140	2.470	2.307	2.704	2.381	1.931
1.8	1.880	2.220	2.022	2.448	1.971	1.645
1.9	1.688	2.035	1.810	2.256	1.702	1.459
2.0	1.542	1.880	1.647	2.104	1.519	1.333

Στον Πίνακα 3.11 δίνονται οι τιμές ARL όπως αυτές προέκυψαν για μέγεθος δείγματος ίσο με $n = 10$ και εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ίσο με $ARL_0 = 500$. Για τα διαγράμματα CUSUM-S², CUSUM – lnS², EWMA – S² και EWMA – lnS² οι σταθερές k^+ , h^+ , λ , c και K αντίστοιχα έχουν πάρει προσεγγιστικά βέλτιστες τιμές για τον εντοπισμό συγκεκριμένης μετατόπισης της τυπικής απόκλισης ίσης με $\sigma_1 = 1.2$. Από τον Πίνακα 3.11 λοιπόν, προκύπτει πως για μικρές μετατοπίσεις $\sigma_1 \leq 1.6$ την καλύτερη απόδοση έχει το διάγραμμα CUSUM-S². Για μεγάλες μετατοπίσεις $\sigma_1 > 1.6$ την καλύτερη απόδοση έχει το διάγραμμα S.

Πίνακας 3.11 ARL διαγραμμάτων ελέγχου CUSUM-S², CUSUM – lnS², EWMA – S², EWMA – lnS², R και S (n = 10, ARL₀ = 500).

$d = \sigma_1$	CUSUM – S ² $k^+ = 1.193377$ $h^+ = 2.91252$	CUSUM – lnS ² $k^+ = 0.126$ $h^+ = 1.957$	EWMA – S ² $\lambda = 0.10$ $c = 3.063997$	EWMA – lnS ² $\lambda = 0.10$ $K = 1.890478$	R $a = 0.002$	S $a = 0.002$
1.0	500.000	501.000	500.000	500.000	500.000	500.000
1.1	36.140	38.834	36.444	39.135	117.720	95.435
1.2	12.040	12.844	12.436	12.893	40.046	29.334
1.3	6.853	7.304	7.128	7.414	17.708	12.488
1.4	4.760	5.207	4.964	5.298	9.482	6.678
1.5	3.650	4.121	3.810	4.202	5.855	4.202
1.6	2.969	3.464	3.099	3.536	4.026	2.974
1.7	2.512	3.030	2.621	3.092	3.005	2.295
1.8	2.186	2.722	2.279	2.777	2.389	1.887
1.9	1.944	2.497	2.024	2.546	1.995	1.627
2.0	1.758	2.325	1.828	2.372	1.731	1.454

Συμπερασματικά, από τους παραπάνω πίνακες αλλά και από άλλες παρόμοιες συγκρίσεις που δοκιμάστηκαν, προτείνεται η χρήση του διαγράμματος CUSUM-S² για την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων της τυπικής απόκλισης, ενώ για μεγάλες μετατοπίσεις προτείνεται η χρήση του διαγράμματος S. Τα ίδια συμπεράσματα προκύπτουν και από τους Πίνακες 4 και 5 του Knoth (2006).

Σύμφωνα με τους Chang & Gan (1993) άλλωστε, τα διαγράμματα CUSUM και EWMA σημειώνουν καλύτερη απόδοση από τα Shewhart όσον αφορά σε αυξήσεις της τυπικής απόκλισης, με εξαίρεση μεγάλες αυξήσεις του σ που το διάγραμμα Shewhart είναι ελάχιστα πιο ευαίσθητο από τα υπόλοιπα. Επιπρόσθετα, οι Chang & Gan (1995) κατέληξαν πως δεν παρατηρείται αξιόλογη διαφορά ανάμεσα στα CUSUM-S² και CUSUM – lnS², με τον Moustakides(1986) να έχει αποδείξει πως ένα διάγραμμα που βασίζεται στη μεθοδολογία των ακολουθιακών ελέγχων λόγου πιθανοφάνειας, όπως είναι το CUSUM-S², είναι βέλτιστο. Τέλος, οι Lowry, Champ and Woodall (1995) ήταν αυτοί που υπέδειξαν πως το S διάγραμμα έχει καλύτερη απόδοση από το R διάγραμμα ειδικά στον εντοπισμό μικρών/ήπιων μετατοπίσεων της τυπικής απόκλισης.

Παράρτημα

Κώδικας για την εξαγωγή του Πίνακα 2.1

```
install.packages("SixSigma")
library(SixSigma)
options(digits=10)
nmax <- 25
n <- 2:nmax
d2 <- sapply(2:nmax, ss.cc.getd2)
d3 <- sapply(2:nmax, ss.cc.getd3)
c4 <- sapply(2:nmax, ss.cc.getc4)
A2 <- 3/(d2*sqrt(n))

mat <- cbind(n,d2,d3,c4,A2)
rownames(mat) <- rep("", nrow(mat))
colnames(mat) <- c("n", " d2", " d3", " c4", " A2")
round(mat,digits=8)
```

n	d2	d3	c4	A2
2	1.12837917	0.85250247	0.79788456	1.87997121
3	1.69256875	0.88836800	0.88622693	1.02332671
4	2.05875075	0.87980820	0.92131773	0.72859719
5	2.32592895	0.86408194	0.93998560	0.57681933
6	2.53441272	0.84803969	0.95153286	0.48324602
7	2.70435675	0.83320534	0.95936879	0.41928396
8	2.84720061	0.81983110	0.96503046	0.37252738
9	2.97002632	0.80783427	0.96931070	0.33669735
10	3.07750546	0.79705067	0.97265927	0.30826373
11	3.17287270	0.78731462	0.97535008	0.28508362
12	3.25845528	0.77847834	0.97755935	0.26577790
13	3.33598036	0.77041620	0.97940560	0.24941702
14	3.40676311	0.76302309	0.98097144	0.23535060
15	3.47182690	0.75621142	0.98231618	0.22310924
16	3.53198280	0.74990808	0.98348353	0.21234531
17	3.58788398	0.74405177	0.98450641	0.20279554
18	3.64006378	0.73859084	0.98541004	0.19425670
19	3.68896305	0.73348148	0.98621414	0.18656929
20	3.73494927	0.72869080	0.98693427	0.17960629
21	3.77833585	0.72417333	0.98758293	0.17326508
22	3.81938466	0.71991481	0.98817025	0.16746209
23	3.85832342	0.71588675	0.98870455	0.16212825
24	3.89534813	0.71206822	0.98919267	0.15720609
25	3.93062918	0.70844083	0.98964038	0.15264732

Κώδικας για την εξαγωγή του Πίνακα 2.2 και του Πίνακα 2.3

```
install.packages("SixSigma")
library(SixSigma)
options(digits=10)
nmax <- 25
n <- 2:nmax

D1<- ifelse((d2-3*d3)=0,d2-3*d3,0)
D2<- d2+3*d3
D3<- ifelse((1-3*(d3/d2))=0 , 1-3*(d3/d2),0)
D4<- 1+3*(d3/d2)
B5<- ifelse((c4-3*sqrt(1-c4^2))=0,c4-3*sqrt(1-c4^2),0)
B6<- c4+3*sqrt(1-c4^2)
```

```
B3<- ifelse((1-(3/c4)*sqrt(1-c4^2))=0,1-(3/c4)*sqrt(1-c4^2),0)
B4<- 1+(3/c4)*sqrt(1-c4^2)
```

```
mat1<- cbind(n,D1,D2,D3,D4)
rownames(mat1)<- rep("", nrow(mat1))
colnames(mat1)<- c("n","D1","D2","D3","D4")
round(mat1,digits=8)
```

```
mat2<- cbind(n,B5,B6,B3,B4)
rownames(mat2)<- rep("", nrow(mat2))
colnames(mat2)<- c("n","B5","B6","B3","B4")
round(mat2,digits=8)
```

n	D1	D2	D3	D4
2	0.00000000	3.68588657	0.00000000	3.26653192
3	0.00000000	4.35767276	0.00000000	2.57459129
4	0.00000000	4.69817535	0.00000000	2.28205156
5	0.00000000	4.91817477	0.00000000	2.11449915
6	0.00000000	5.07853178	0.00000000	2.00382982
7	0.20474074	5.20397276	0.07570774	1.92429226
8	0.38770732	5.30669390	0.13617141	1.86382859
9	0.54652350	5.39352915	0.18401302	1.81598698
10	0.68635344	5.46865748	0.22302266	1.77697734
11	0.81092884	5.53481656	0.25558190	1.74441810
12	0.92302026	5.59389030	0.28326927	1.71673073
13	1.02473175	5.64722896	0.30717560	1.69282440
14	1.11769383	5.69583239	0.32808088	1.67191912
15	1.20319263	5.74046117	0.34655893	1.65344107
16	1.28225856	5.78170704	0.36304213	1.63695787
17	1.35572867	5.82003929	0.37786302	1.62213698
18	1.42429128	5.85583629	0.39128196	1.60871804
19	1.48851862	5.88940748	0.40350597	1.59649403
20	1.54887688	5.92102167	0.41469824	1.58530176
21	1.60581586	5.95085584	0.42500612	1.57499388
22	1.65964023	5.97912908	0.43453079	1.56546921
23	1.71066316	6.00598368	0.44336956	1.55663044
24	1.75914348	6.03155277	0.45160110	1.54839890
25	1.80530667	6.05595168	0.45929204	1.54070796

n	B5	B6	B3	B4
2	0.00000000	2.60631539	0.00000000	3.26653192
3	0.00000000	2.27598105	0.00000000	2.56816960
4	0.00000000	2.08774936	0.00000000	2.26604708
5	0.00000000	1.96362792	0.00000000	2.08899787
6	0.02889159	1.87417413	0.03036321	1.96963679
7	0.11290335	1.80583423	0.11768503	1.88231497
8	0.17861710	1.75144381	0.18508960	1.81491040
9	0.23179398	1.70682742	0.23913280	1.76086720
10	0.27594884	1.66936971	0.28370556	1.71629444
11	0.31336062	1.63733954	0.32128015	1.67871985
12	0.34557880	1.60953991	0.35351183	1.64648817
13	0.37369779	1.58511342	0.38155570	1.61844430
14	0.39851512	1.56342775	0.40624538	1.59375462
15	0.42062734	1.54400502	0.42819954	1.57180046
16	0.44049063	1.52647643	0.44788816	1.55211184
17	0.45846055	1.51055226	0.46567554	1.53432446
18	0.47481881	1.49600128	0.48184896	1.51815104
19	0.48979185	1.48263642	0.49663844	1.50336156
20	0.50356405	1.47030448	0.51023059	1.48976941
21	0.51628724	1.45887862	0.52277862	1.47722138
22	0.52808770	1.44825280	0.53440963	1.46559037

```

23 0.53907147 1.43833762 0.54523009 1.45476991
24 0.54932830 1.42905705 0.55532993 1.44467007
25 0.55893474 1.42034601 0.56478571 1.43521429

```

Κώδικας για την εξαγωγή του Παραδείγματος 2.2.3

```

c1<-c(0.0629, 0.0636 , 0.0640)
c2<-c( 0.0630, 0.0631, 0.0622)
c3<-c(0.0628, 0.0631, 0.0633)
c4<-c(0.0634, 0.0630, 0.0631)
c5<-c(0.0619, 0.0628, 0.0630)
c6<-c(0.0613 ,0.0629,0.0634)
c7<-c( 0.0630, 0.0639, 0.0625)
c8<-c(0.0628, 0.0627, 0.0622)
c9<-c( 0.0623, 0.0626, 0.0633)
c10<-c( 0.0631, 0.0631, 0.0633)
c11<-c( 0.0635, 0.0630, 0.0638)
c12<-c( 0.0623 ,0.0630 ,0.0630)
c13<-c( 0.0635, 0.0631, 0.0630)
c14<-c( 0.0645, 0.0640, 0.0631)
c15<-c( 0.0619, 0.0644, 0.0632)
c16<-c( 0.0631, 0.0627, 0.0630)
c17<-c( 0.0616, 0.0623 ,0.0631)
c18<-c(0.0630, 0.0630, 0.0626)
c19<-c(0.0636, 0.0631, 0.0629)
c20<-c(0.0640, 0.0635, 0.0629)
c21<-c( 0.0628, 0.0625, 0.0616)
c22<-c( 0.0615, 0.0625, 0.0619)
c23<-c( 0.0630, 0.0632, 0.0630)
c24<-c( 0.0635, 0.0629, 0.0635)
c25<-c(0.0623, 0.0629, 0.0630)

parts <-
rbind(c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,c10,c11,c12,c13,c14,c15,c16,c17,c18,c19,c2
0,c21,c22,c23,c24,c25)
rownames(parts)<- rep("", 25)
colnames(parts)<- c("x1","x2","x3")

mean=c()
for(i in 1:25) {
  mean[i]=mean(parts[i,])
}

range=c()
for(i in 1:25) {
  range[i]=(max(parts[i,])-min(parts[i,]))
}

sd=c()
for(i in 1:25) {
  sd[i]=sd(parts[i,])
}

table<-cbind(n,parts,mean,range,sd)
table

  n      x1      x2      x3      mean  range      sd
1 0.0629 0.0636 0.0640 0.06350000 0.0011 0.0005567764
2 0.0630 0.0631 0.0622 0.06276667 0.0009 0.0004932883
3 0.0628 0.0631 0.0633 0.06306667 0.0005 0.0002516611
4 0.0634 0.0630 0.0631 0.06316667 0.0004 0.0002081666

```

```

5 0.0619 0.0628 0.0630 0.06256667 0.0011 0.0005859465
6 0.0613 0.0629 0.0634 0.06253333 0.0021 0.0010969655
7 0.0630 0.0639 0.0625 0.06313333 0.0014 0.0007094599
8 0.0628 0.0627 0.0622 0.06256667 0.0006 0.0003214550
9 0.0623 0.0626 0.0633 0.06273333 0.0010 0.0005131601
10 0.0631 0.0631 0.0633 0.06316667 0.0002 0.0001154701
11 0.0635 0.0630 0.0638 0.06343333 0.0008 0.0004041452
12 0.0623 0.0630 0.0630 0.06276667 0.0007 0.0004041452
13 0.0635 0.0631 0.0630 0.06320000 0.0005 0.0002645751
14 0.0645 0.0640 0.0631 0.06386667 0.0014 0.0007094599
15 0.0619 0.0644 0.0632 0.06316667 0.0025 0.0012503333
16 0.0631 0.0627 0.0630 0.06293333 0.0004 0.0002081666
17 0.0616 0.0623 0.0631 0.06233333 0.0015 0.0007505553
18 0.0630 0.0630 0.0626 0.06286667 0.0004 0.0002309401
19 0.0636 0.0631 0.0629 0.06320000 0.0007 0.0003605551
20 0.0640 0.0635 0.0629 0.06346667 0.0011 0.0005507571
21 0.0628 0.0625 0.0616 0.06230000 0.0012 0.0006244998
22 0.0615 0.0625 0.0619 0.06196667 0.0010 0.0005033223
23 0.0630 0.0632 0.0630 0.06306667 0.0002 0.0001154701
24 0.0635 0.0629 0.0635 0.06330000 0.0006 0.0003464102
25 0.0623 0.0629 0.0630 0.06273333 0.0007 0.0003785939

```

```
library(qcc)
```

```
#Δημιουργία R-διαγράμματος
q6 = qcc(parts, type="R")
```

```
#Δημιουργία R-διαγράμματος εξαιρουμένου του 15ου σημείου
q6 = qcc(parts[-15,], type="R")
```

```
#Δημιουργία Xbar-διαγράμματος με R-μέθοδο
qxR = qcc(parts[-21,], type="xbar", std.dev=q6$std.dev, title="X-bar based
on R method")
```

```
#Δημιουργία S-διαγράμματος
q6 = qcc(parts, type="S")
```

```
#Δημιουργία S-διαγράμματος εξαιρουμένου του 15ου σημείου
q6 = qcc(parts[-15,], type="S")
```

```
#Δημιουργία Xbar-διαγράμματος με S-μέθοδο
qxS = qcc(parts, type="xbar", std.dev=q6$std.dev, title="X-bar based on S
method")
```

Κώδικας για την εξαγωγή του Πίνακα 3.2.

```

library(spc)
n <- 10           # Μέγεθος δείγματος
df <- n-1
m0 <- 0          # Εντός ελέγχου μέση τιμή
s0 <- 1          # Εντός ελέγχου τυπική απόκλιση
L0 <- 370.37     # Εντός ελέγχου ARL
sigmas <- seq(1,2,0.1) # Εκτός ελέγχου τυπικές αποκλίσεις
#####
# Case 1: σ1=1.1
s1 <- 1.1       # "Βέλτιστη" εκτός ελέγχου τυπική απόκλιση
(k1 <- (s0^2*s1^2*log(s0^2/s1^2))/(s0^2-s1^2))
(h1 <- scusum.crit(k1, L0, sigma=s0, df, hs=0, sided="upper")) # Τιμή
του h+
arl1 <- rep(NA, length(sigmas))

```

```

for (i in 1:length(sigmas))
arl1[i] <- round(scusum.arl(k1, h1, sigmas[i], df, r=63, qm=20, version=2),
digits=2)

# Case 2:  $\sigma_1=1.3$ 
s1 <- 1.3 # "Βέλτιστη" εκτός ελέγχου τυπική απόκλιση
(k2 <- (s0^2*s1^2*log(s0^2/s1^2))/(s0^2-s1^2))
(h2 <- scusum.crit(k2, L0, sigma=s0, df, hs=0, sided="upper")) # Τιμή
του h+
arl2 <- rep(NA, length(sigmas))
for (i in 1:length(sigmas))
arl2[i] <- round(scusum.arl(k2, h2, sigmas[i], df, r=63, qm=20, version=2),
digits=2)

# Case 3:  $\sigma_1=1.5$ 
s1 <- 1.5 # "Βέλτιστη" εκτός ελέγχου τυπική απόκλιση
(k3 <- (s0^2*s1^2*log(s0^2/s1^2))/(s0^2-s1^2))
(h3 <- scusum.crit(k3, L0, sigma=s0, df, hs=0, sided="upper")) # Τιμή
του h+
arl3 <- rep(NA, length(sigmas))
for (i in 1:length(sigmas))
arl3[i] <- round(scusum.arl(k3, h3, sigmas[i], df, r=63, qm=20, version=2),
digits=2)

# Case 4:  $\sigma_1=1.7$ 
s1 <- 1.7 # "Βέλτιστη" εκτός ελέγχου τυπική απόκλιση
(k4 <- (s0^2*s1^2*log(s0^2/s1^2))/(s0^2-s1^2))
(h4 <- scusum.crit(k4, L0, sigma=s0, df, hs=0, sided="upper")) # Τιμή
του h+
arl4 <- rep(NA, length(sigmas))
for (i in 1:length(sigmas))
arl4[i] <- round(scusum.arl(k4, h4, sigmas[i], df, r=63, qm=20, version=2),
digits=2)

# Πίνακας με τιμές ARL
data.frame(sigmas, arl1, arl2, arl3, arl4)

```

	sigmas	arl1	arl2	arl3	arl4
1	1.0	370.37	370.37	370.37	370.37
2	1.1	29.35	37.67	48.78	57.81
3	1.2	12.14	11.66	13.95	16.61
4	1.3	7.50	6.22	6.64	7.45
5	1.4	5.39	4.19	4.17	4.42
6	1.5	4.20	3.17	3.03	3.09
7	1.6	3.44	2.56	2.40	2.40
8	1.7	2.92	2.17	2.01	1.98
9	1.8	2.54	1.89	1.75	1.71
10	1.9	2.26	1.69	1.57	1.53
11	2.0	2.03	1.54	1.43	1.40

Κώδικας για την εξαγωγή της τέταρτης στήλης του Πίνακα 3.3.

```
n <- 10           # Μέγεθος δείγματος
m0 <- 0           # Εντός ελέγχου μέση τιμή
s0 <- 1           # Εντός ελέγχου τυπική απόκλιση
k <- 0.144        # Τιμή από Chang & Gan (1995)
h <- UCL <- 1.464 # Τιμή από Chang & Gan (1995)
simu <- 10000     # Αριθμός προσομοιώσεων

counter <- rep(0, times=simu)
FUN.ARL <- function (s1) {           # s1  Εκτός ελέγχου τυπική απόκλιση
  for (i in 1:simu) {
    set.seed(i)      # Για σταθεροποίηση των τυχαίων δειγμάτων
    x=c(); z=0; t=0; alarm=FALSE
    while(isFALSE(alarm)){
      rv <- rnorm(n,mean=m0,sd=s1)
      x <- log(var(rv))
      z <- max(z+x-k, 0 )      # SOS  z0= 0
      t <- t+1
      if(z >= UCL) {alarm=TRUE}
    }
    counter[i] <- t
  }
  return(mean(counter))
}

s1 <- seq(1,3,0.1); ARL <- Vectorize(FUN.ARL); ARL.OUT <- ARL(s1)
mat <- cbind(s1, ARL.OUT)
colnames(mat) <- c("δ", "ARL")
round(mat, digits=2)
```

```
      δ    ARL
[1,] 1.0 200.67
[2,] 1.1  26.30
[3,] 1.2   9.93
[4,] 1.3   5.78
[5,] 1.4   4.17
[6,] 1.5   3.32
[7,] 1.6   2.81
[8,] 1.7   2.47
[9,] 1.8   2.22
[10,] 1.9   2.03
[11,] 2.0   1.88
[12,] 2.1   1.75
[13,] 2.2   1.64
[14,] 2.3   1.55
[15,] 2.4   1.46
[16,] 2.5   1.39
[17,] 2.6   1.33
[18,] 2.7   1.28
[19,] 2.8   1.24
[20,] 2.9   1.20
[21,] 3.0   1.17
```

Κώδικας για την εξαγωγή της δεύτερης στήλης του Πίνακα 3.4.

```
n <- 3           #Μέγεθος δείγματος
m0 <- 0          # Εντός ελέγχου μέση τιμή
s0 <- 1          # Εντός ελέγχου τυπική απόκλιση
k <- 0.704
h <- LCL <- 11.361
simu <- 10000    # Number of simulations

counter <- rep(0, times=simu)
FUN.ARL <- function (s1) {
for (i in 1:simu) {
  set.seed(i)    # Για σταθεροποίηση των τυχαίων δειγμάτων
  x=c(); z=0; t=0; alarm=FALSE
  while(isFALSE(alarm)){
    rv <- rnorm(n,mean=m0,sd=s1)
    x <- log(var(rv))
    z <- min(z+x+k, 0 )      # SOS   z0= 0
    t <- t+1
    if(z < -LCL) {alarm=TRUE}
  }
  counter[i] <- t
}
return(mean(counter))
}

s1 <- seq(0.1,1,0.1 ); ARL <- Vectorize(FUN.ARL); ARL.OUT <- ARL(s1)
mat <- cbind(rev(s1), rev(ARL.OUT))
colnames(mat) <- c("d", "ARL")
round(mat, digits=2)

      d    ARL
[1,] 1.0 200.53
[2,] 0.9  70.73
[3,] 0.8  33.75
[4,] 0.7  20.20
[5,] 0.6  13.76
[6,] 0.5   9.94
[7,] 0.4   7.44
[8,] 0.3   5.63
[9,] 0.2   4.26
[10,] 0.1   3.07
```

Κώδικας για την εξαγωγή του Πίνακα 3.6.

```
n <- c(5,10,15,20)
df <- n-1
L0 <- 200 # In control ARL
L <- lambda <- 0.12 # lambda values
RB <- 1 # Reflecting Barrier
sigmas <- seq(0.1,1,0.1) # Values of d=sigma for TABLE

library(spc)
S2 <- Vectorize("sewma.arl") # Function sewma.arl is vectorided in order
to accept vectors as input
# n= 5
limits1 <- sewma.crit(l=L, L0=L0, df=df[1], cu=RB, sided="Rlower", r=100)
LCL1 <- limits1[["cl"]]
LCL1
c1 <- (1-LCL1)/( sqrt(L/(2-L))*sqrt(2/df[1]))
c1
arls1 <- S2(l=L, cl=LCL1, cu=RB, sigma=sigmas, df=df[1], sided="Rlower",
r=100)
# n= 10
limits2 <- sewma.crit(l=L, L0=L0, df=df[2], cu=RB, sided="Rlower", r=100)
LCL2 <- limits2[["cl"]]
LCL2
c2 <- (1-LCL2)/( sqrt(L/(2-L))*sqrt(2/df[2]))
c2
arls2 <- S2(l=L, cl=LCL2, cu=RB, sigma=sigmas, df=df[2], sided="Rlower",
r=100)
# n= 15
limits3 <- sewma.crit(l=L, L0=L0, df=df[3], cu=RB, sided="Rlower", r=100)
LCL3 <- limits3[["cl"]]
LCL3
c3 <- (1-LCL3)/( sqrt(L/(2-L))*sqrt(2/df[3]))
c3
arls3 <- S2(l=L, cl=LCL3, cu=RB, sigma=sigmas, df=df[3], sided="Rlower",
r=100)
# n= 20
limits4 <- sewma.crit(l=L, L0=L0, df=df[4], cu=RB, sided="Rlower", r=100)
LCL4 <- limits4[["cl"]]
LCL4
c4 <- (1-LCL4)/( sqrt(L/(2-L))*sqrt(2/df[4]))
c4
arls4 <- S2(l=L, cl=LCL4, cu=RB, sigma=sigmas, df=df[4], sided="Rlower",
r=100)

# TABLE
data.frame(rev(sigmas), rev(arls1), rev(arls2), rev(arls3), rev(arls4))

  rev.sigmas. rev.arls1. rev.arls2. rev.arls3. rev.arls4.
1          1.0 200.000000 200.000000 200.000000 200.000000
2           0.9  44.828507  25.866833  18.844366  15.155124
3           0.8  17.143709   9.823615   7.429763   6.187001
4           0.7   9.888096   6.064194   4.751833   4.043108
5           0.6   7.077970   4.559196   3.631850   3.159825
6           0.5   5.694122   3.820193   3.060942   2.860955
7           0.4   4.962070   3.194664   2.996595   2.204656
8           0.3   4.363178   3.000411   2.817440   2.000087
9           0.2   4.001248   2.999999   2.011867   1.999993
10          0.1   3.998817   2.996237   1.997056   1.998880
```


Βιβλιογραφία

Ξένη Βιβλιογραφία

- [1] Acosta-Mejia C. A. and Pignatiello J.J. (2008), Modified R charts for improved performance, *Qual. Eng.* 20, pp. 361–369.
- [2] Box G.E.P and Ramirez J. (1992), Cumulative Score Charts, *Quality and Reliability Engineering International*, pp.17-27
- [3] Box G.E.P, Hunter W.G. and Hunter J.S. (1978), *Statistics for Experimenters: An Introduction to Design, Data Analysis, and Model Building*, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [4] Chang T. and Gan F. (1994), Optimal designs of one sided ewma charts for monitoring a process variance, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 49:1-2, 33-48
- [5] Chang, T. and Gan, F. (1995), A cumulative sum control chart for monitoring process variance, *Journal of Quality Technology*, Vol. 27 No. 2, pp. 109-19.
- [6] Chakraborti, S. (2000), Run length, average run length and falsealarm rate of shewhart x-bar chart: exact derivations by conditioning, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 29:1, 61 - 81
- [7] Crowder S. V., Hamilton M. D. (1992), An EWMA for monitoring a process standard deviation, *Journal of Quality Technology*, pp.12–21.
- [8] Crowder, S.V. (1989), Design of Exponentially Weighted Moving Average Schemes, *Journal of Quality Technology*, 21, 155-162.
- [9] Crowder, S. V. (1987), Average Run Lengths of Exponentially Weighted Moving Average Control Charts, *Journal of Quality Technology*, 19(3), 161–164
- [10] Grant, E. L. and Leavenworth, R. S. (1999), *Statistical Quality Control*, McGraw Hill
- [11] Hawkins,D.(1981), Testing for equality of variance of correlated normal variables, *Statistica Neerlandica*, pp39-47
- [12] Hawkins D. M. , Olwell D. H. (1998), *Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement*, 1st edition, Springer New York, NY.
- [13] Howell, D. K. (1987), A CUSUM Scheme for the Control of Process Variance, Presented at the Joint Statistical Meetings, San Fransisco, CA
- [14] Knoth, S. (2005), Accurate ARL computation for EWMA-S2 control charts, *Statist. Comput.* , 341–352.
- [15] Lorden, G. (1971), Procedures for reacting to a change in distribution, *Ann. Math. Statist.* 42 pp.1897-1908.
- [16] Lowry C.A., Champ C.W. & Woodall W.H. (1995). The performance of control charts for monitoring process variation, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, pp. 409-437.
- [17] Lucas J.M. and Saccucci M.S.(1990), Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements, *Technometrics*, Vol. 32, No. 1 , pp. 1-12
- [18] Macgregor J.F. and Harris T.J.(1993), The Exponentially Weighted Moving Variance, *Journal of Quality Technology*, pp.106-118

- [19] Montgomery, D. C. (2013). *Introduction to Statistical Quality Control*, 7th edition. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [20] Moustakides G.V. (1986), Optimal stopping times for detecting changes in distributions, *The Annals of Statistics*, Vol.14, No.4, pp. 1379-1387
- [21] Ng, C.H. and Case, K.E. (1989), Development and evaluation of control charts using exponentially weighted moving averages, *Journal of Quality Technology*, 21, pp.242-250.
- [22] Page E. (1954), Control Charts for the mean of normal population, *Biometrika*, 1, p p 131 -135.
- [23] Page, E. (1963), Controlling the standard deviation by CUSUM and warning lines, *Technometrics*, Vol. 5 No. 3, pp. 307-15.
- [24] Ramirez, J. G. and Juan, J. (1989). A contour nomogram for designing cusum charts for variance, Report No. 33, Center for Quality and Productivity Improvement, University of Wisconsin-Madison, Madison, WI.
- [25] Roberts S. D.(1959), Properties of Control Chart Zone Tests, *The Bell System Technical Journal* 37, pp 83-114.
- [26] Robinson P. and Ho T. (1978), Average Run Lengths of Geometric Moving Averages by Numerical Methods, *Applied Statistics*, 35, pp 151-158.
- [27] Ryan, T. P. (2011). *Statistical Methods for Quality Improvement*, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc.
- [28] Shewhart W.A. (1931), Economic Control of Quality of Manufactured Product, D. Van Nostrand Company via Internet Archive.
- [29] Sweet A.L. (1986), Control Charts Using Coupled Exponentially Weighted Moving Average, *IIE Transactions on Information Theory*, pp. 26-33.
- [30] Tuprah, K. and Ncube, M. (1987). A comparison of dispersion quality control charts, *Sequential Analysis*, 6(2), pp.155-163.
- [31] Wortham, A.W. and Ringer, L.J. (1971), Control Via Exponential Smoothing, *The Transportation and Logistic Review*, 7,pp. 33-39.
- [32] Zhang L. (2013) Improved R and s control charts for monitoring the process variance, *Journal of Applied Statistics*, pp.1260-1273,
- [33] Zhang L. and Govindaraju K. (2007), On probability limits for phase II S control chart, *International Journal of Statistics*, vol. LXV, n. 3, pp. 305-318.

Ελληνική Βιβλιογραφία

- [1] Αντζουλάκος, Δ. (2010). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις.
- [2] Κοϊμτζόγλου, Α. (2020). R και S διαγράμματα ελέγχου με όρια πιθανότητας, Διπλωματική Εργασία, ΠΜΣ Εφαρμοσμένη Στατιστική, Παν/μιο Πειραιώς
- [3] Μπερσίμης, Σ., Ρακιτζής, Α. & Σαχλάς, Α. (2021). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Εκδόσεις Τζιόλας, Θεσσαλονίκη.
- [4] Ταγαράς, Γ. (2001). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.