



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**

**ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ**  
**ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ**  
**ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**«ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ**  
**ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΓΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΜΕ ΒΑΡΙΑ ΟΥΡΑ»**

Χριστοδούλου Κωνσταντίνα

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς, Οκτώβριος 2022



Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν ..... συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτής Καθηγητής Πολίτης Κωνσταντίνος (Επιβλέπων)
- Επίκουρος Καθηγητής Πιτσέλης Γεώργιος
- Αναπληρωτής Καθηγητής Ψαρράκος Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**

**SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS**

**DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE  
SCIENCE**

**ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT**

**«STOCHASTIC ORDERS AND RUIN PROBABILITIES  
FOR HEAVY-TAILED DISTRIBUTIONS»**

Christodoulou Konstantina

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the  
University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of  
Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, October 2022

This thesis was approved unanimously by the three-member Commission of Inquiry appointed by the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus No..... Meeting in accordance with the laws of the Postgraduate Program in Actuarial Science and Risk Management

Committee members were:

- Associate Professor Politis Konstantinos (Supervisor)
- Assistant Professor Pitselis Georgios
- Associate Professor Psarrakos Georgios

The approval of the thesis by the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus does not imply acceptance of the opinions of the author.

*Στον ανιψιό μου,*

*Νικόλα*



## Ευχαριστίες

Το 2012, ξεκίνησα τις προπτυχιακές μου σπουδές στο τμήμα «Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης» του Πανεπιστημίου Πειραιώς και σήμερα με την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας ένα όμορφο ταξίδι γνώσης φτάνει στο τέλος του.

Αρχικά, οφείλω ένα ειλικρινές ευχαριστώ στον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Κωνσταντίνο Πολίτη, τόσο για την καθοδήγησή του, την υπομονή του και την στήριξη του για την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας, όσο και για το ενδιαφέρον και τις γνώσεις που αποκόμισα όλα αυτά τα χρόνια. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κο. Πιτσέλη Γεώργιο και κο. Ψαρράκο Γεώργιο για τις ουσιαστικές παρατηρήσεις τους και τις συμβουλές τους, ως μέλη της επιτροπής αξιολόγησης της διπλωματικής μου εργασίας.

Ευχαριστώ, ακόμα, τους φίλους μου για την υποστήριξή τους και την συνεχή ενθάρρυνσή τους και κυρίως την Αργυρώ και τον Γιώργο, για την πολύτιμη βοήθειά τους, για τις στιγμές γέλιου αλλά και άγχους που μοιραστήκαμε μαζί κατά την διάρκεια των σπουδών μας.

Ένα πολύ μεγάλο ευχαριστώ στον Λευτέρη, που είναι δίπλα μου όλα αυτά τα χρόνια, που με κάνει να χαμογελάω και που βλέπει όλα τα θετικά μου στοιχεία, ακόμη κι όταν εγώ δεν μπορώ να τα διακρίνω.

Τέλος, όσα ευχαριστώ και να πω στην οικογένειά μου είναι λίγα. Ευχαριστώ τους γονείς μου που με γέμισαν αγάπη και αξίες, καθώς και την αδελφή μου, για την στήριξη και την προσοχή της και που ως «μεγάλη» θα αποτελεί πάντοτε για μένα το καλύτερο παράδειγμα.



## Περίληψη

Τα μοντέλα της οικονομίας, της ιατρικής, και άλλων θετικών επιστημών εμπεριέχουν την αβεβαιότητα για να τονίσουν ότι δεν προβλέπονται όλες οι καταστάσεις και περιπτώσεις. Η αβεβαιότητα δεν είναι μετρήσιμη σε αντίθεση με τον κίνδυνο. Για παράδειγμα μπορεί να χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα ο επόμενος ισχυρός σεισμός που μπορεί να ισοπεδώσει δίκτυα μεταφορών και να οδηγήσει εκτός από απώλειες σε ανθρώπινες ζωές (το πιο σημαντικό), σε κατάρρευση τις οικονομίες που υπέστησαν το φυσικό φαινόμενο. Εντούτοις όμως, η μέτρηση της δυνητικά ισχυρού μεγέθους ζημιάς λόγω πιθανού γεγονότος μπορεί να μοντελοποιηθεί ως προς τι αναμένουμε και με ποια πιθανότητα. Εφόσον, ως εκ τούτου, πρόκειται για ισχυρά μεγέθη ζημιών, αναφερόμαστε σε κατανομές αυτών με βαριά δεξιά ουρά. Και τέλος, εφόσον οι κίνδυνοι διαφέρουν σε διάταξη μεταξύ τους, πόσο ένας μεγαλύτερος κίνδυνος επηρεάζει την πιθανότητα αυτή? Τα θέματα αυτά αναλύονται εκτενώς στην παρούσα διπλωματική. Αφού αρχικά, στο πρώτο Κεφάλαιο της εισαγωγής παρουσιάζουμε ιστορικά στοιχεία για την αναγκαιότητα αντιμετώπισης του ρίσκου, ακολούθως στο δεύτερο Κεφάλαιο παρουσιάζονται οι κατανομές με βαριά ουρά και συγκρίνονται μεταξύ τους ως προς τη βαρύτερη. Στο τρίτο Κεφάλαιο, παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες των κλασικών μοντέλων χρεοκοπίας σε συνεχή και διακριτό χρόνο και δίνεται έμφαση για την περίπτωση κατανομών βαριάς ουράς. Στο τέταρτο Κεφάλαιο, παρουσιάζονται οι κίνδυνοι (μεμονωμένοι ή χαρτοφυλάκια αυτών) βαριάς ουράς σε διάταξη όπως επίσης και οι διατάξεις της πιθανότητας χρεοκοπίας αυτών. Τέλος στο πέμπτο Κεφάλαιο αναπτύσσονται εφαρμογές των τριών ενοτήτων.

## Abstract

The mathematical models we use in economics, finance, insurance and other fields of applied science are stochastic, in order to incorporate the uncertainty inherent in them; that is, to emphasize that not all outcomes and cases are predicted. Unlike risk, uncertainty is not measurable. For example, the next strong earthquake can be characterized by uncertainty, which can affect transport networks and lead to the loss of human lives (most importantly), as well as the collapse of the economies that suffered the natural phenomenon. However, measuring the potentially strong amount of damage due to a potential event can be modeled in terms of what we expect and with what probability.

Typically for such catastrophic risks the potential financial loss is represented by a heavy right-tailed distribution. Last but not least, since each and every risk differs from other in terms of structure, the following question may arise, "how much does a greater risk affect the foresaid probability". The above-mentioned issues are analyzed extensively throughout this dissertation. In the first introductory chapter, we present historical evidence for the necessity of facing risk itself. In the second chapter, the heavy-tailed distributions are presented and compared with each other in terms of the magnitude of their tail. In the third chapter, the basic concepts of classical models of ruin in continuous and discrete time are presented and emphasis is placed on the case of heavy tail distributions. In the fourth chapter, risk (individual or portfolio) of heavy-tailed distributions is presented, as well as the case of possible ruin. Finally, in the fifth chapter, implementation and illustration of the results in the previous three sections is carried out.

## Πίνακας περιεχομένων

Ευχαριστίες.....	8
Περίληψη .....	9
Abstract.....	10
<b>Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή .....</b>	<b>13</b>
<b>Κεφάλαιο 2. Κατανομές βαριάς ουράς.....</b>	<b>16</b>
2.1 Εισαγωγή.....	16
2.2 Δεξιά ουρά κατανομής.....	16
2.3 Κατανομή βαρύτερης δεξιάς ουράς .....	24
2.4. Η κλάση των υποεκθετικών κατανομών.....	26
<b>Κεφάλαιο 3. Θεωρία Χρεοκοπίας .....</b>	<b>28</b>
3.1 Εισαγωγή.....	28
3.2 Βασικές αρχές .....	28
3.3 Κλασσικό μοντέλο Χρεοκοπίας.....	32
3.4 Χρεοκοπία για κατανομές με βαριά ουρά.....	45
<b>Κεφάλαιο 4. Στοχαστικές Διατάξεις.....</b>	<b>48</b>
4.1. Εισαγωγή.....	48
4.2. Στοχαστική διάταξη δύο τυχαίων μεταβλητών .....	48
4.3. Στοχαστικές διατάξεις και αναλογιστική επιστήμη .....	54
4.4. Διατάξεις βαθμίδας κινδύνου.....	60
4.5. Διατάξεις λόγου πιθανοφάνειας .....	64
4.6. Σκεδαστικές διατάξεις.....	66
<b>Κεφάλαιο 5. Εφαρμογές Στοχαστικών Διατάξεων για κατανομές με Βαριά Ουρά.....</b>	<b>68</b>
5.1 Εισαγωγή.....	68
5.2 Εφαρμογές Συνήθους Στοχαστικής Διάταξης .....	68
5.3. Σύγκριση Χαρτοφυλακίων για κατανομές με βαριά ουρά .....	74
5.4. Συνοπτικός πίνακας σύγκρισης κατανομών με βαριά ουρά υπό την Συνήθη Στοχαστική Διάταξη .....	102
<b>Βιβλιογραφία .....</b>	<b>104</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕΝΤΟΛΕΣ MATHEMATICA .....</b>	<b>106</b>



## Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή

Από τη αρχαιότητα παρατηρούμε την αδιάλειπτη προσπάθεια της πρόβλεψης του κινδύνου για τη διαφύλαξη των περιουσιακών στοιχείων ατομικών ή εταιρικών. Οι μεταφορές προϊόντων ήταν ένα πολύπλοκο πρόβλημα καθώς παράγοντες κινδύνου απώλειας αυτών ήταν οι καιρικές συνθήκες, οι ενέδρες τόσο στην ξηρά αλλά και στην θάλασσα. Όσο μεγαλύτερη αξία είχε το προϊόν, τόσο μεγαλύτερος ο κίνδυνος απώλειας αυτού. Κάπως έτσι ξεκινά η ιστορία της ασφάλισης. Μπορεί δε να μην ήταν στη μορφή που είναι σήμερα, αλλά σίγουρα η στελέχωση στις μεταφορές με μισθοφόρους επιδέξιους στη φύλαξη ή μεγαλύτερα πλοία προσέδιδε μεγαλύτερο κόστος στο εμπόρευμα. Η πληροφόρηση για τυχόν απρόοπτα αποτελούσε ισχυρό σύμμαχο στην ασφάλεια των μεταφορών.

Η εξέλιξη των επιστημών συνέβαλε καθοριστικά στην αύξηση της πληροφορίας και σε αυτό είχε σημαντικό ρόλο η θεωρία των πιθανοτήτων και η επιστήμη της στατιστικής. Η συσσώρευση ιστορικών στοιχείων αποτέλεσε μια καλή βάση δεδομένων για την επίλυση απλών προβλημάτων και αν όχι επίλυση, μοντελοποίηση σύνθετων προβλημάτων. Κατανομές όπως η Poisson, χρησιμοποιούνται ευρέως σήμερα είτε μέτρηση του πλήθους ατυχημάτων, είτε στη μοντελοποίηση του αριθμού πελατών που θα επισκεφτούν ένα κατάστημα τραπεζών, κοκ. Δεν είναι τελικά τόσο τυχαίο ότι συμβαίνουν λίγες ζημιές μεγάλου μεγέθους και πολλές ζημιές μικρού μεγέθους και αυτό οδηγεί τις ασφαλιστικές εταιρίες να προσομοιάσουν τον κίνδυνο με εκθετική κατανομή. Επειδή όμως η εκθετική κατανομή έχει περιορισμένη δυνατότητα στην περιγραφή μεγάλου μεγέθους ζημιάς και παραφράζοντας τη φράση του Βολταίρου «ο εχθρός του καλού είναι το καλύτερο» σε «ο εχθρός της μεγάλης ζημιάς είναι η μεγαλύτερη», εισάγουμε κατανομές με βαρύτερη ουρά σε σχέση με την εκθετική.

Η κατηγορία των κατανομών βαριάς ουράς είναι ιδιαίτερα δημοφιλή σε αρκετές επιστήμες όπως αυτή της οικονομίας, ιατρικής, βιολογίας κ.ο.κ., με μεγάλη σημασία για τις ασφαλιστικές εταιρίες που όσο και υψηλό αποθεματικό και αν έχουν, εντούτοις παραμονεύει μια δυνητικά πολύ μεγάλη ζημιά που μπορεί να οδηγήσει άμεσα σε χρεοκοπία. Το ζήτημα της αποφυγής της χρεοκοπίας στις επιχειρήσεις είναι σημαντικό για τη βιωσιμότητά τους σε μακροπρόθεσμο ορίζοντα (διηκεές). Από την άλλη δε, τα χαρτοφυλάκια περιλαμβάνουν

πολλούς και διαφορετικούς κινδύνους. Η σύγκριση και η διάταξη των κινδύνων συμβάλλει στην επιλογή της απόφασης αυτής με το μικρότερο ρίσκο. Είναι σαφές ότι δεν οδηγεί η απόφαση αυτή σε λογικά αποτελέσματα αν δεν ληφθούν υπόψη ταυτόχρονα πολλές παράμετροι όπως η μέση τιμή του κινδύνου, η πιθανότητα εμφάνισης δυνητικά μεγάλης ζημιάς για παράδειγμα.

Η εργασία αυτή αποτελείται από τα εξής κεφάλαια:

Το Κεφάλαιο 2 με την περιγραφή των κατανομών βαριάς ουράς, στο οποίο και συγκρίνουμε κινδύνους μεταξύ τους για βαρύτερη ουρά. Η σύγκριση αυτή αφορά είτε κινδύνους προερχόμενους από ποιοτικά την ίδια ονομαστικά κατανομή αλλά με διαφορετικές παραμέτρους, είτε τη σύγκριση κινδύνων από διαφορετικές ονομαστικές κατανομές.

Το Κεφάλαιο 3 με την περιγραφή των βασικών εννοιών της θεωρίας της χρεοκοπίας. Αναλύεται με επάρκεια το κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας σε συνεχή και σε διακριτό χρόνο και προσδιορίζεται η πιθανότητα χρεοκοπίας είτε με ακριβή τρόπο, είτε με φράγματα (άνω και κάτω), είτε με προσεγγιστική μέθοδο. Σε συνέχεια της σύνδεσης με το προηγούμενο κεφάλαιο, παρουσιάζεται η πιθανότητα χρεοκοπίας για την περίπτωση κατανομών με βαριά ουρά.

Το Κεφάλαιο 4 με την περιγραφή των στοχαστικών διατάξεων μεταξύ τυχαίων μεταβλητών που εκφράζουν κινδύνους. Γίνεται ιδιαίτερη έμφαση της διάταξης στην αναλογιστική επιστήμη και επίσης παρουσιάζονται οι διατάξεις βαθμίδας κινδύνου και λόγου πιθανοφάνειας. Το κεφάλαιο αυτό ολοκληρώνεται με τις σκεδαστικές διατάξεις. Στη διάταξη των κινδύνων παρουσιάζονται και οι αντίστοιχες διατάξεις πιθανότητας χρεοκοπίας είτε για μεμονωμένους κινδύνους είτε για χαρτοφυλάκια αυτών.

Τέλος, στο τελευταίο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται παραδείγματα και εφαρμογές σε σχέση με το θεωρητικό περιεχόμενο των προηγούμενων κεφαλαίων.

Για την παρουσίαση των παραδειγμάτων και εφαρμογών, πραγματοποιήθηκε ανάλυση και αποδείξεις είτε χειρός, είτε με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica, από το οποίο παρουσιάζονται τόσο τα γραφήματα των αποτελεσμάτων αλλά και ο κώδικας.

Η παρούσα μελέτη στηρίχθηκε και σε προηγούμενες μελέτες συναδέλφων. Ως εκ τούτου, πέραν της δυνητικής επάρκειας του αντικειμένου με το οποίο ασχολήθηκε, ευελπιστώ να αποτελέσει μια πηγή για περαιτέρω μελλοντική μελέτη.

## Κεφάλαιο 2. Κατανομές βαριάς ουράς

### 2.1 Εισαγωγή

Τα στοχαστικά μοντέλα που περιλαμβάνουν κατανομές με βαριά ουρά γίνονται ολοένα και πιο δημοφιλή. Δεδομένα τα οποία δικαιολογούν την ενσωμάτωση της ειδικής αυτής κατηγορίας κατανομών συναντώνται στην οικονομία, τις θετικές αλλά και ιατροβιολογικές επιστήμες (Klebanov, 2003). Μια κατανομή βαριάς ουράς δεν αποκλείει ασυμπτωτικά την ύπαρξη πολύ μεγάλης τιμής που θα αποτελούσε μεγάλη δυνητικά ζημιά στον κλάδο της ασφάλισης αν δεν είχε προβλεφθεί. Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά προσδιορίζουμε την έννοια της ουράς της κατανομής παρουσιάζοντας γενικά κατανομές με ουρά – όχι κατά ανάγκη βαριά – και τέλος αναλύουμε τις κατανομές αυτές με βαριά ουρά υπό την έννοια ότι είναι βαρύτερης ουράς έναντι κάποιας άλλης. Οι υπολογισμοί έγιναν είτε δια χειρός, είτε με το πρόγραμμα Mathematica όπου και ενσωματώνεται ο κώδικας σε κάθε εφαρμογή.

### 2.2 Δεξιά ουρά κατανομής

Έστω τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)  $X$  με συνάρτηση κατανομής (Χατζηκωνσταντινίδης, 2015)

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1], \quad F(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Μια κατανομή έχει δεξιά ουρά την συνάρτηση επιβίωσης αυτής

$$P_r(X > x) = S(x) = \bar{F}(x) = 1 - F(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Χαρακτηριστική κατανομή που δεν έχει ουρά είναι η ομοιόμορφη με παραμέτρους 0 και  $\beta > 0$  ( $X \sim U(0, \beta)$ ) διότι οι τιμές της τ.μ.  $X$  φράσσονται άνω από την παράμετρο  $\beta$ .

Η κατανομή με δεξιά ουρά χρησιμεύει για την μοντελοποίηση ζημιών μεγάλου μεγέθους με μικρή συχνότητα, ώστε όσο μεγαλύτερο μέγεθος τόσο μικρότερη συχνότητα: συγκεκριμένα ισχύει πάντα ότι

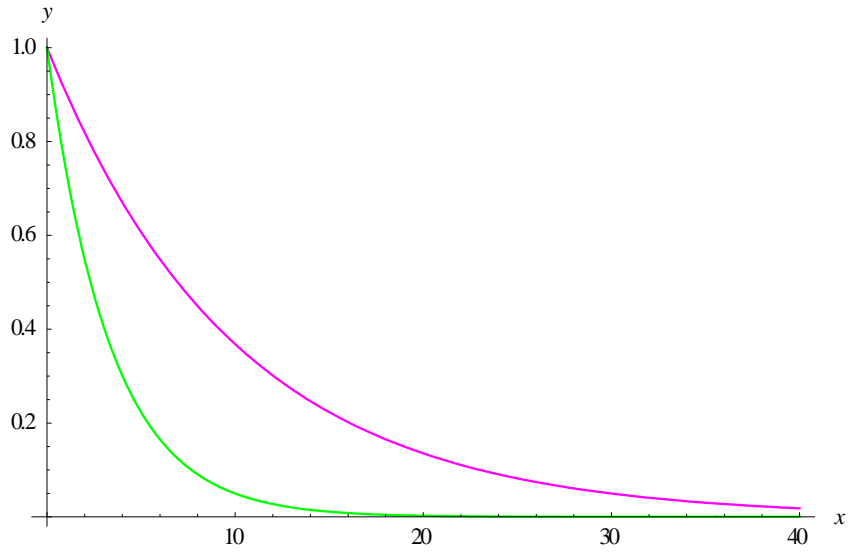
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x) = 0$$

Ευρέως χρησιμοποιούμενες κατανομές στην αναλογιστική επιστήμη είναι

- η εκθετική παραμέτρου  $\lambda > 0$ , με  $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$ ,  $x > 0$

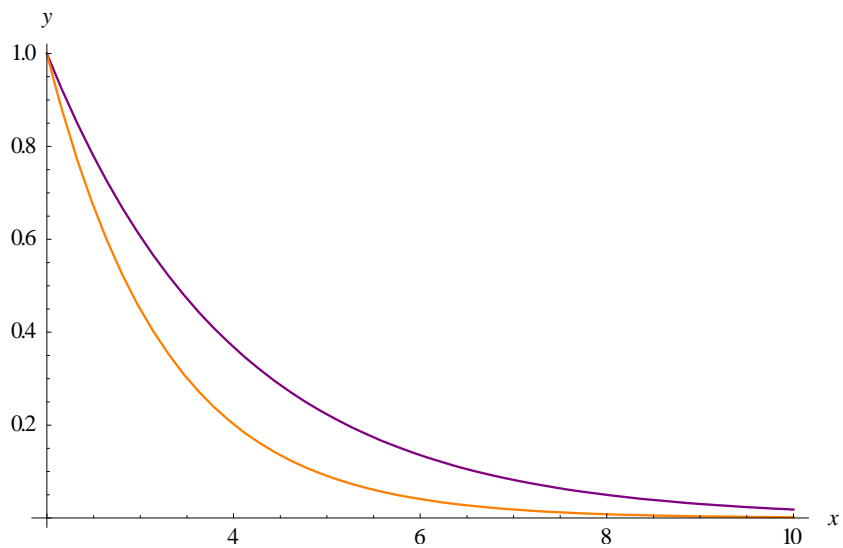
Στο κάτωθι διάγραμμα συγκρίνουμε δύο εκθετικές κατανομές και παρουσιάζουμε τη συνάρτηση επιβίωσης με  $\lambda=0,1$  (μωβ καμπύλη) και  $\lambda=0,3$  (πράσινη καμπύλη).





Γραφική Παράσταση 2.1 - Σύγκριση Συναρτήσεων Επιβίωσης δύο τυχαίων μεταβλητών  $X \sim \text{Exp}(0.1)$  και  $Y \sim \text{Exp}(0.3)$

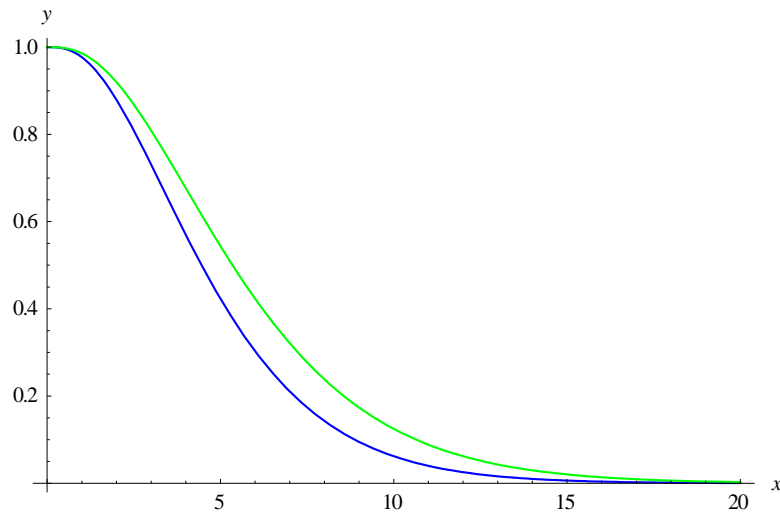
- η διπαραμετρική εκθετική παραμέτρων  $\beta > 0, \lambda > 0$  με  $\bar{F}(x) = e^{-\lambda(x-\beta)}, \quad x > \beta$   
 Στο κάτωθι διάγραμμα συγκρίνουμε δύο διπαραμετρικές εκθετικές κατανομές παραμέτρων  $\lambda=0,5$  (μωβ καμπύλη) και  $\lambda=0,8$  (πορτοκαλί καμπύλη) και  $\beta=2$ .



Γραφική Παράσταση 2.2 - Σύγκριση Συναρτήσεων Επιβίωσης δύο τυχαίων μεταβλητών  $X \sim \text{Exp}(0.5, 2)$  και  $Y \sim \text{Exp}(0.8, 2)$

- η Γάμμα με παραμέτρους  $\nu > 0$  και  $\lambda > 0$  (ή Erlang), με  $\bar{F}(x) = e^{-\lambda \cdot x} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\lambda^k \cdot x^k}{k!}$ ,  $x > 0$

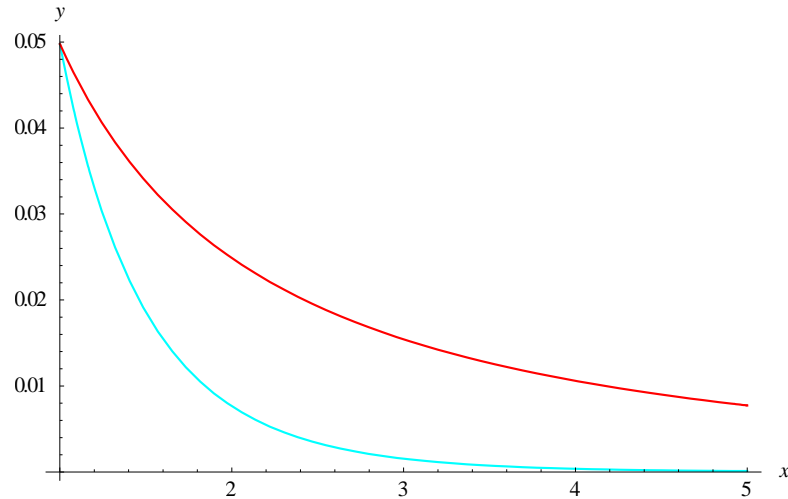
Στο κάτωθι διάγραμμα παρουσιάζουμε (καμπύλες μπλε και πράσινη αντίστοιχα) και συγκρίνουμε τις συναρτήσεις επιβίωσης για τις κατανομές Erlang( $\nu_1=3, \lambda_1=0,6$ ) και Erlang( $\nu_2=3, \lambda_2=0,5$ ).



Γραφική Παράσταση 2.3 - Σύγκριση Συναρτήσεων Επιβίωσης δύο τυχαίων μεταβλητών  $X \sim \text{Erlang}(3, 0.6)$  και  $Y \sim \text{Erlang}(3, 0.5)$

- η Weibull με παραμέτρους  $c > 0, \gamma > 0$  με  $\bar{F}(x) = e^{-c \cdot x^\gamma}$ ,  $x > 0$

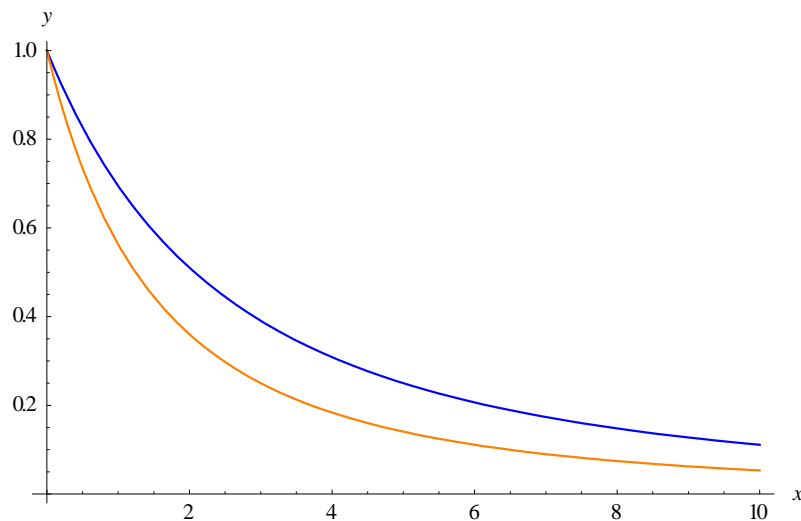
Στο κάτωθι διάγραμμα παρουσιάζουμε (καμπύλες γαλάζια και κόκκινη αντίστοιχα) και συγκρίνουμε τις συναρτήσεις επιβίωσης για τις κατανομές Weibull( $c_1=3, \gamma_1=0,7$ ) και Weibull( $c_2=3, \gamma_2=0,3$ ).



Γραφική Παράσταση 2.4 - Σύγκριση Συναρτήσεων Επιβίωσης δύο τυχαίων μεταβλητών  $X \sim \text{Weibull}(3, 0.7)$  και  $Y \sim \text{Weibull}(3, 0.3)$

- η Pareto με παραμέτρους  $\alpha > 0, \lambda > 0$  με  $\bar{F}(x) = \frac{\lambda^\alpha}{(x + \lambda)^\alpha}, \quad x > 0$

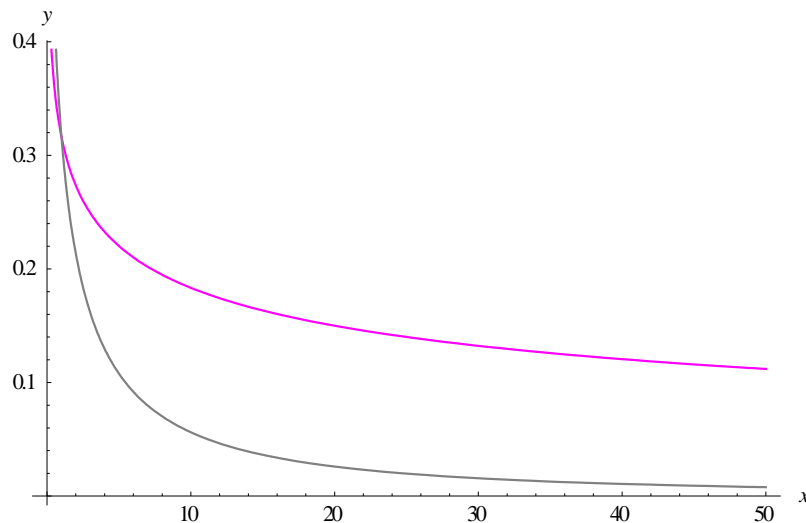
Στο κάτωθι διάγραμμα παρουσιάζουμε (καμπύλες μπλε και πορτοκαλί αντίστοιχα) και συγκρίνουμε τις συναρτήσεις επιβίωσης για τις κατανομές  $\text{Pareto}(\alpha_1=2, \lambda_1=5)$  και  $\text{Pareto}(\alpha_2=2, \lambda_2=3)$ .



Γραφική Παράσταση 2.5 - Σύγκριση Συναρτήσεων Επιβίωσης δύο τυχαίων μεταβλητών  $X \sim \text{Pareto}(2, 5)$  και  $Y \sim \text{Pareto}(2, 3)$

- η Burr με παραμέτρους  $\alpha > 0, \lambda > 0, \tau > 0$  με  $\bar{F}(x) = \frac{\lambda^\alpha}{(x^\tau + \lambda)^\alpha}, \quad x > 0$

Στο κάτωθι διάγραμμα παρουσιάζουμε (καμπύλες μωβ και γκρι αντίστοιχα) και συγκρίνουμε τις συναρτήσεις επιβίωσης για τις κατανομές  $Burr(\alpha_1=4, \lambda_1=3, \tau_1=0,2)$  και  $Burr(\alpha_2=4, \lambda_2=3, \tau_2=0,5)$ .



Γραφική Παράσταση 2.6 - Σύγκριση Συναρτήσεων Επιβίωσης δύο τυχαιών μεταβλητών  $X \sim Burr(4,3,0.2)$  και  $Y \sim Burr(4,3,0.5)$

Σε ότι αφορά τον εκθετικό μετασχηματισμό της τ.μ.  $X: Y=e^X$ , η συνάρτηση επιβίωσης της τ.μ.

$Y$  είναι:

$$\bar{F}_Y(x) = P_r(Y \geq x) = P_r(e^X \geq x) = P_r(X \geq \ln x) = \bar{F}_X(\ln x), \quad x > 0$$

Για παράδειγμα η λογαριθμοκανονική με παραμέτρους  $\mu \in \mathfrak{R}$  και  $\sigma > 0$ , με συνάρτηση επιβίωσης:

$$\bar{F}(x) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$$

Η κανονική κατανομή αν και είναι ίσως η πιο χρήσιμη και ευρέως χρησιμοποιούμενη κατανομή στη Στατιστική, ωστόσο δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει τη μεταβλητότητα των μεγεθών ατομικών ζημιών σε χαρτοφυλάκια κινδύνων. Ο βασικός λόγος

είναι ότι το μέγεθος ατομικής ζημιάς είναι μη-αρνητική τ.μ., συνήθως με θετική λοξότητα, ενώ η κανονική κατανομή παίρνει και αρνητικές τιμές (ορίζεται σ' ολόκληρο το διάστημα των πραγματικών αριθμών) που αυτές προφανώς δεν μπορούν να εκφράζουν χρηματικά ποσά όπως τα μεγέθη ζημιών, και επιπλέον είναι και συμμετρική (γύρω από το μέσο). Έτσι η κανονική κατανομή είναι ακατάλληλη ως μοντέλο ζημιοκατανομών, η οποία ωστόσο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως προσεγγιστική κατανομή για τα μεγέθη ζημιών, όταν φυσικά συντρέχουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος. Όμως, όπως έχει παρατηρηθεί στην πράξη από τη μελέτη και ανάλυση χαρτοφυλακίων ζημιών, ο εκθετικός μετασχηματισμός της κανονικής κατανομής (που είναι θετική τ.μ.) είναι ένα από τα πλέον καταλληλότερα μοντέλα ζημιοκατανομών η οποία έχει επίσης και ένα πάρα πολύ μεγάλο εύρος εφαρμογών και σε άλλα επιστημονικά πεδία, όπως στη θεωρία αξιοπιστίας, ασύρματη επικοινωνία, βιολογία, ιατρική, δημογραφία, χημεία (Klebanov, 2013). Ιδιαίτερα, στα στοχαστικά χρηματοοικονομικά μαθηματικά (και σε άλλα πεδία του αναλογισμού, όπως στη θεωρία χρεοκοπίας και στις ασφαλίσεις ζωής), η λογαριθμοκανονική κατανομή χρησιμοποιείται για να περιγράψει την εξέλιξη των τιμών των μετοχών στο περίφημο μοντέλο των Black-Scholes (Shinde & Takale, 2012). Επίσης, χρησιμοποιείται για την περιγραφή φυσικών φαινομένων, όπως στην υδρολογία για την ανάλυση ακραίων τιμών διαφόρων μεταβλητών, π.χ. των μηνιαίων και ετήσιων μέγιστων τιμών της καθημερινής βροχόπτωσης  $X$ ).

Η μη αρνητική συνάρτηση  $\lambda(x)$  καλείται ρυθμός επικινδυνότητας (hazardrate) της τ.μ.  $X$ ,

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}, \quad x > 0$$

και ανάλογα με τον κλάδο έχει διάφορες ονομασίες, στον κλάδο του αναλογισμού αναφέρεται ως ένταση θνησιμότητας (Παπαϊωάννου & Φερεντίνος, 2004) ενώ στον κλάδο της αξιοπιστίας αναφέρεται ως βαθμός αποτυχίας (Μπούτσικας, 2008).

Για παράδειγμα, στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής με παράμετρο  $\beta > 0$ ,

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = \frac{\beta e^{-\beta x}}{e^{-\beta x}} = \beta$$

ο ρυθμός επικινδυνότητας είναι σταθερός και ίσος με την παράμετρό της. Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερη ζημιά αναμένεται ( $E(X) = 1/\beta$ ,  $\beta \rightarrow 0$ ), τόσο μικρότερος είναι ο ρυθμός

επικινδυνότητας.

Στην περίπτωση της διπαραμετρικής Pareto( $\alpha, \delta$ ),

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = \frac{\frac{\alpha\delta^\alpha}{(x+\delta)^{\alpha+1}}}{\frac{\delta^\alpha}{(x+\delta)^\alpha}} = \frac{\alpha}{x+\delta}$$

ο ρυθμός επικινδυνότητας εξαρτάται και από τις δύο παραμέτρους. Όσο μεγαλώνει η αποζημίωση ( $x \rightarrow \infty$ ), τόσο μικρότερος είναι ο ρυθμός επικινδυνότητας.

Η μίξη κατανομών είναι επίσης κατανομή με συνάρτηση δεξιάς ουράς που προκύπτει ως εξής: έστω η σ.π.π. της τ.μ.  $Y$ :

$$f_Y(x) = \sum_{i=1}^k a_i \cdot f_i(x), \quad \sum_{i=1}^k a_i = 1$$

Η σ.κ. είναι  $F_Y(x) = \sum_{i=1}^k a_i \cdot F_i(x)$  και

$$\begin{aligned} \bar{F}_Y(x) &= P_r(Y \geq x) = 1 - F_Y(x) = 1 - \sum_{i=1}^k a_i \cdot F_i(x) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^k a_i \cdot (1 - \bar{F}_i(x)) = 1 - \sum_{i=1}^k a_i \cdot (1 - \bar{F}_i(x)) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^k a_i + \sum_{i=1}^k \bar{F}_i(x) = \sum_{i=1}^k \bar{F}_i(x) \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον Χατζηκωνσταντινίδη επίσης (2015), αν μια συνεχής κατανομή είναι δεξιάς ουράς, τότε η μέση τιμή αυτής  $E(X)$  υπολογίζεται ως εξής:

$$E(X) = \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx$$

Η ιδιότητα αυτή δίνει τη δυνατότητα πιο εύκολου υπολογισμού της μέσης τιμής μια κατανομής. Ας δούμε για παράδειγμα την κατανομή Pareto με παραμέτρους  $\alpha > 0$  και  $\delta > 0$ .

$$E(X) = \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^a}{(x+\lambda)^a} dx = \frac{\lambda}{a-1} \cdot \int_0^{\infty} \frac{(a-1)\lambda^{a-1}}{(x+\lambda)^{a-1+1}} dx = \frac{\lambda}{a-1} \cdot \int_0^{\infty} f_1(x) dx = \frac{\lambda}{a-1}$$

όπου  $f_1(x) = \frac{(a-1)\lambda^{a-1}}{(x+\lambda)^{a-1+1}}$ ,  $x > 0$  είναι η σ.π.π. της διπαραμετρικής κατανομής Pareto με παραμέτρους  $a > 1$  και  $\lambda > 0$ .

Εδώ χρειάζεται προσοχή διότι αν η ουρά της κατανομής είναι ιδιαίτερα περίπλοκη τότε δεν είναι χρήσιμη η ιδιότητα αυτή. Για παράδειγμα, αν πρόκειται για λογαριθμοκατανομή  $Y = e^X$  τότε χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της ροπογεννήτριας συνάρτησης:

$$E(Y) = E(e^X) = M_X(1)$$

Για παράδειγμα, αν  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , τότε

$$E(Y) = E(e^X) = M_X(1) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \Big|_{t=1} = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

Το παραπάνω ισχύει υπό την προϋπόθεση της ύπαρξης της ροπογεννήτριας συνάρτησης. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση για παράδειγμα της διπαραμετρικής κατανομής  $X \sim \text{Pareto}(a, \lambda)$  δεν ορίζεται, άρα δεν ορίζεται και η μέση τιμή της  $Y \sim \text{Log-Pareto}(a, \lambda)$ . Πράγματι,

$$M_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{a\lambda^a}{(x+\lambda)^{a+1}} dx = a\lambda^a \int_0^{\infty} \frac{e^{tx}}{(x+\lambda)^{a+1}} dx = a\lambda^a \int_0^{\infty} g(x) dx$$

Όμως, (βλέπε επίσης παράδειγμα 2.3.1) η εκθετική συνάρτηση στον αριθμητή του κλάσματος τρέχει πιο γρήγορα σε σχέση με το πολυώνυμο του παρονομαστή, άρα  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$

Συνεπώς, δεν ορίζεται η ροπογεννήτρια της Pareto, άρα και η μέση τιμή της Log-Pareto. Τέλος, συγκρίνουμε τις κατανομές ως προς βαρύτερη δεξιά ουρά παρακάτω (Χατζηκωνστανίδης, 2015).

## 2.3 Κατανομή βαρύτερης δεξιάς ουράς

Για να συγκρίνουμε κατανομές με τ.μ.  $X$  και  $Y$  ως προς αυτή βαρύτερης ουράς, υπολογίζουμε το κάτωθι όριο:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_X(x)}{f_Y(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_X(x)}{\bar{F}_Y(x)} = \begin{cases} 0, & Y : \text{βαρύτερης δεξιάς ουράς} \\ \infty, & X : \text{βαρύτερης δεξιάς ουράς} \end{cases}$$

Αν όμως  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_X(x)}{f_Y(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_X(x)}{\bar{F}_Y(x)} = c > 0$ , τότε είναι ανάλογης ουράς.

Ακολουθούν παραδείγματα σύγκρισης ουρών κατανομών.

### Παράδειγμα 2.3.1:

Έστω οι κατανομές εκθετική παραμέτρου  $\lambda > 0$  ( $X$ ) και Pareto παραμέτρων  $\alpha > 0$  και  $\delta > 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_X(x)}{\bar{F}_Y(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda \cdot x}}{\frac{\delta^\alpha}{(x + \delta)^\alpha}} = \delta^\alpha \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \delta)^\alpha}{e^{\lambda \cdot x}} = 0$$

όποιες και αν είναι οι τιμές των παραμέτρων  $\alpha, \lambda, \delta > 0$ .

Παρότι τόσο ο αριθμητής αλλά και ο παρονομαστής συγκλίνουν στο άπειρο, στον παρονομαστή η εκθετική συνάρτηση θετικά ορισμένης δυνάμεως συγκλίνει πιο γρήγορα στο άπειρο σε σχέση με το πολυώνυμο στον αριθμητή. Αυτό είναι εύκολο να παρατηρηθεί με το θεώρημα DeL' Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \delta)^\alpha}{e^{\lambda \cdot x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x + \delta)^{\alpha-1}}{\lambda e^{\lambda \cdot x}} = \dots = 0$$

όπου με συνεχείς παραγωγίσεις στον αριθμητή το πολυώνυμο χάνει βαθμό ενώ ο παρονομαστής παραμένει ίδιος. Παρατηρούμε επίσης ότι το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο των παραμέτρων  $\alpha, \lambda, \delta$ . Ως συμπέρασμα θα λέγαμε ότι οποιαδήποτε λοιπόν Pareto είναι κατανομή βαρύτερης ουράς σε σχέση με οποιαδήποτε εκθετική.



### Παράδειγμα 2.3.2:

Η λογαριθμοκατανομή είναι βαρύτερης ουράς σε σχέση με την αρχική κατανομή. Έστω για παράδειγμα η τ.μ.  $X$  που ακολουθεί την Weibull και η τ.μ.  $Y$  που ακολουθεί την Log-Weibull με ίδιες παραμέτρους  $c$  και  $\gamma$  και οι δύο, άρα η σ.κ. αυτής είναι  $\bar{F}_Y(x) = \bar{F}_X(\ln x) = e^{-c(\ln x)^\gamma}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_X(x)}{\bar{F}_Y(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-c \cdot x^\gamma}}{e^{-c(\ln x)^\gamma}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{c\{(\ln x)^\gamma - x^\gamma\}} = 0$$

διότι  $\ln x < x$ , συνεπώς η Log-Weibull είναι κατανομή βαρύτερης ουράς σε σχέση με την Weibull.

### Παράδειγμα 2.3.3:

Η Erlang παραμέτρους  $\nu > 1$  και  $\lambda > 0$  προκύπτει από τη συνέλιξη  $\nu$ - βαθμού ανεξάρτητων ισόνομων εκθετικών παραμέτρου  $\lambda$ . Έστω η τ.μ.  $Y$  ακολουθεί την Erlang, τότε  $Y = X_1 + \dots + X_\nu$ , όπου η τ.μ.  $X$  ακολουθεί την εκθετική. Θα υπολογίσουμε εδώ το όριο των πηλίκων των σ.π.π. για μεγαλύτερη ευκολία:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_X(x)}{f_Y(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda x}}{\lambda^\nu e^{-\lambda x} x^{\nu-1}} = \lambda^{-\nu+1} \cdot (\nu-1)! \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\nu-1}} = 0$$

Άρα η Erlang είναι κατανομή βαρύτερης ουράς σε σχέση με την εκθετική. Μάλιστα, όπως μπορούμε να δούμε, όσο μεγαλύτερος βαθμός συνέλιξης τόσο βαρύτερη ουρά η κατανομή. Συγκρίνοντας τις  $Y \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$  με την  $X \sim \text{Erlang}(\nu, \lambda)$ ,  $k < \nu$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_X(x)}{f_Y(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda x} x^{k-1}}{\lambda^\nu e^{-\lambda x} x^{\nu-1}} = \frac{(\nu-1)!}{(k-1)!} \cdot \lambda^{k-\nu} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^{k-\nu} = 0$$

### Παράδειγμα 2.3.4:

Εκτός από τη σύγκριση μεταξύ διαφορετικών ποιοτικά κατανομών (βλ. παραδείγματα 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3) δύναται και η σύγκριση ποιοτικά ίδιας κατανομής με αλλαγή στις παραμέτρους

ώστε να μελετήσουμε την επίδραση της παραμέτρου (ή των παραμέτρων) στην δεξιά ουρά της κατανομής. Θα συγκρίνουμε δύο κατανομές Weibull, έστω τ.μ.  $X \sim \text{Weibull}(\alpha, \gamma)$  και τ.μ.  $Y \sim \text{Weibull}(\beta, \delta < \gamma)$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_X(x)}{\bar{F}_Y(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\alpha \cdot x^\gamma}}{e^{-\beta \cdot x^\delta}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\beta x^\delta - \alpha x^\gamma} = 0$$

Παρατηρούμε ότι αν  $\gamma > \delta$ , δηλαδή αν μειώνεται η δεύτερη παράμετρος της Weibull και ανεξάρτητα από τη σχέση μεταξύ των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\beta$ , τότε η κατανομή Weibull έχει βαρύτερη δεξιά ουρά. Αυτό οφείλεται στο ότι στον εκθέτη της βάσης του λογαρίθμου (e) το πολυώνυμο είναι  $\delta - \gamma < 0$  βαθμού.

Στην γραφική παράσταση 2.2.4, είδαμε επίσης ότι για μείωση της παραμέτρου  $\gamma$  (από 0,3 σε 0,2) η κατανομή έχει εμφανώς βαρύτερη δεξιά ουρά.

## 2.4. Η κλάση των υποεκθετικών κατανομών

Σύμφωνα με τον Κωνσταντινίδη (2011), μια κατανομή  $B(x)$  ανήκει στην κλάση των κατανομών με βαριές ουρές  $K$ , και γράφουμε  $\bar{B} \in K$ , αν  $\forall \varepsilon > 0$  ισχύει

$$\int_0^\infty e^{\varepsilon y} dB(y) = \infty$$

Επίσης είναι χρήσιμο να χαρακτηρίσουμε τις κατανομές των μεγάλων αποζημιώσεων με τη βοήθεια της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της ουράς της κατανομής  $\bar{B}(x)$ , για  $x \rightarrow \infty$ .

Η βαριά ουρά της κατανομής  $B(x)$  ανήκει στην κλάση των υποεκθετικών ουρών, και γράφουμε, αν  $\forall \nu = 2, 3, \dots$  ισχύει η ακόλουθη συνθήκη

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_r(A_\nu > x)}{P_r(M_\nu > x)} = 1$$

με  $A_\nu = \sum_{i=1}^\nu Z_i$ ,  $M_\nu = \max(Z_i)$ ,  $i = 1, \dots, \nu$  και η ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ.  $Z_1, \dots, Z_\nu$  με κατανομή  $B(x)$ .

Σύμφωνα πάντα με τον Κωνσταντινίδη (2011), η σύγκριση μεταξύ του αθροίσματος  $A_n$  και του μεγίστου  $M_n$  των ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ.  $Z_1, \dots, Z_n$  που μπορούμε να τις δούμε ως αποζημιώσεις, είναι καθοριστική για την εκτίμηση των ακραίων τιμών. Σε εργασία των Rootzen και Tajvidi (1997) παρατηρήθηκε ότι σε μια περίοδο 12 ετών από το 1982 μέχρι το 1993, η πιο δαπανηρή αποζημίωση (δηλαδή η μέγιστη  $M_n$ ) από θυελλώδεις ανέμους καλύπτει το 25% της συνολικής αποζημίωσης ( $A_n$ ) στην περίοδο αυτή και είναι 2.7 φορές μεγαλύτερη από τη δεύτερη σε μέγεθος αποζημίωση, ενώ οι πρώτες 4 αποζημιώσεις καλύπτουν το μισό περίπου της συνολικής αποζημίωσης της περιόδου.

## Κεφάλαιο 3. Θεωρία Χρεοκοπίας

### 3.1 Εισαγωγή

Ένα από τα κυρίαρχα ζητήματα στις επιχειρήσεις, εμπορικές, ασφαλιστικές, επενδυτικές κ.ο.κ. είναι η βιωσιμότητα σε μεγάλο χρονικό διάστημα, δηλαδή θεωρητικά στο διηνεκές. Υπάρχουν ασφαλώς πολλοί παράγοντες που μπορούν να παρατείνουν το καταστροφικό γεγονός αυτό της χρεοκοπίας, όπως για παράδειγμα ένα μεγάλο αποθεματικό κεφάλαιο, αλλά δεν μπορεί η χρεοκοπία να αποφευχθεί αν η διαχείριση δεν είναι ορθή ή τα έσοδα είναι συνεχώς λιγότερα από τα έξοδα. Στόχοι των εταιρειών είναι είτε η ελαχιστοποίηση της πιθανότητας χρεοκοπίας ή ισοδυνάμως η μετάθεση αυτής ακόμη περισσότερο στο διηνεκή χρόνο. Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται αναλυτική παρουσίαση των βασικών αρχών που περιγράφουν την πιθανότητα και το χρόνο χρεοκοπίας και επίσης παρατίθενται παραδείγματα μετάθεσης του χρόνου στο διηνεκές και μείωσης της πιθανότητας χρεοκοπίας.

### 3.2 Βασικές αρχές

Σε κάθε πρόβλημα είναι απαραίτητο να μοντελοποιήσουμε το ύψος της ατομικής ζημιάς ως τυχαία μεταβλητή (τ.μ.), την οποία συμβολίζουμε  $X$ , και ο προσδιορισμός αυτής βασίζεται σε εμπειρικά δεδομένα προηγούμενων ετών στα οποία προσαρμόζεται η κατανομή αυτή μετά από έλεγχο  $X^2$  του Pearson (έλεγχος καλής προσαρμογής). Η χρήση μιας κατανομής για την μοντελοποίηση της τ.μ.  $X$  της ατομικής ζημιάς λαμβάνει χώρα σε ομοιογενή χαρτοφυλάκια κινδύνου (Πολίτης, 2017). Με τον όρο ομοιογενή χαρτοφυλάκια εννοούμε αυτά στα οποία οι κίνδυνοι έχουν συνάφεια, δηλαδή αποτελούνται από κάλυψη ζημιών λόγω τροχαίων ατυχημάτων αυτοκινήτων περίπου ίδιου κυβισμού, ιδιωτικής χρήσης και οδηγούς ομοιογενούς ηλικιακής τάξης (π.χ. έμπειροι οδηγοί). Ένα άλλο χαρτοφυλάκιο θα αποτελείται από επαγγελματίες οδηγούς φορτηγών δημόσιας χρήσης, κλπ. Γίνεται εμφανές ότι η μεγαλύτερη έκθεση στον κίνδυνο διαφοροποιεί τα χαρτοφυλάκια μεταξύ τους.

Οι ζημιές λαμβάνουν χώρα σε πλήθος το οποίο μοντελοποιείται από μια μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Poisson την οποία θα συμβολίζουμε ως  $N$ . Τα χαρακτηριστικά αυτής είναι το διακριτό πλήθος που δύναται να έχει τιμές από 0 μέχρι το άπειρο (απροσδιόριστο). Η κατανομή αυτή έχει σημαντική χρήση στην περιγραφή του πλήθους

συμβάντων σε ένα ορισμένο χρονικό πλαίσιο το οποίο ονομάζουμε *μονάδα χρόνου*. Συνήθως η μονάδα χρόνου είναι τόσο μεγαλύτερη όσο λιγότερα συμβάντα υφίστανται. Έτσι, αν θέλουμε να μελετήσουμε τις πτώσεις επιβατηγών αεροσκαφών επιλέγουμε το έτος ως χρονική μονάδα, ενώ για τα τροχαία ατυχήματα επιλέγουμε την ημέρα ως χρονική μονάδα. Τέλος, η σημαντική πληροφορία που μας παρέχει η κατανομή αυτή των συμβάντων είναι το πλήθος και όχι το πότε αυτά λαμβάνουν χώρα στη μονάδα του χρόνου. Δηλαδή η πιθανότητα  $n$ - συμβάντων είναι ίδια, ανεξάρτητα αν αυτά γίνουν στην αρχή, στο τέλος ή ομοιόμορφα στο χρόνο αναφοράς.

Ορίζουμε τη συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Poisson με παράμετρο  $\lambda > 0$  ως εξής

$$\Pr(N = x) = f(x; \lambda) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$$

με αναμενόμενη τιμή και διασπορά ίσες με  $\lambda$ , και ροπογεννήτρια συνάρτηση

$$M_N(u) = e^{\lambda(e^u - 1)}$$

και πιθανογεννήτρια συνάρτηση

$$P_N(u) = e^{\lambda(u-1)}.$$

Η παράμετρος  $\lambda$  είναι ο αναμενόμενος αριθμός ζημιών  $E(N)$  όσο και η διασπορά  $\text{Var}(N)$  στη μονάδα του χρόνου και προσδιορίζεται από μεθόδους εκτίμησης όπως η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας και η μέθοδος ροπών (Ηλιόπουλος, 2013). Πιο αναλυτικά, ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου  $\lambda > 0$  είναι ο δειγματικός μέσος του πλήθους ζημιών των  $n$ -προηγούμενων χρονικών περιόδων:

$$\hat{\lambda} = \bar{N} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n N_i$$

όπου  $N_i$  είναι το παρατηρούμενο πλήθος ζημιών της  $i$ - μονάδας χρόνου,  $i=1, \dots, n$ . Ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας  $\hat{\lambda}$  της παραμέτρου  $\lambda > 0$  είναι πλήρως αποτελεσματικός, δηλαδή είναι

αμερόληπτος και ελάχιστης διασποράς σε σχέση με όποιον άλλο εκτιμητή  $\tilde{\lambda}$  (Ηλιόπουλος, 2013):

$$E(\hat{\lambda}) = \lambda, \quad \text{Var}(\hat{\lambda}) \leq \text{Var}(\tilde{\lambda}).$$

Τέλος, ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας ταυτίζεται στην περίπτωση αυτή με τον εκτιμητή της μεθόδου των ροπών.

Η παράμετρος  $\lambda > 0$  δεν είναι σταθερή αλλά δύναται να μεταβάλλεται και συνεπώς να θεωρείται ως τυχαία μεταβλητή (Κουτσόπουλος, 1999). Πρόκειται για την περίπτωση της εκ των προτέρων κατανομής και η τ.μ. του πλήθους των ζημιών  $N$  είναι δεσμευμένη κατανομή  $N|\lambda \sim \text{Poisson}(\lambda)$ , όπου  $\lambda$  ακολουθεί μια εκ των προτέρων κατανομή. Προκύπτει έτσι ότι ο αναμενόμενος αριθμός ζημιών ανεξάρτητα της παραμέτρου  $\lambda$  είναι

$$E(N) = E\{E(N|\lambda)\} = E(\lambda)$$

με αντίστοιχη διασπορά

$$\text{Var}(N) = \text{Var}\{E(N|\lambda)\} + E\{\text{Var}(N|\lambda)\} = \text{Var}(\lambda) + E(\lambda)$$

Ας πάρουμε την περίπτωση της μοντελοποίησης της εκ των προτέρων κατανομής  $\lambda$  ως εκθετική μέσης τιμής ίσης με την παράμετρο  $\theta > 0$ . Τότε ο αναμενόμενος αριθμός ζημιών στη μονάδα του χρόνου είναι  $E(N) = E(\lambda) = \theta$  και η διασπορά είναι  $\text{Var}(N) = \text{Var}(\lambda) + E(\lambda) = \theta^2 + \theta$ .

Αν επεκταθούμε σε χρόνο  $t > 0$ , τότε το πλήθος των ζημιών  $N(t)$  είναι στοχαστική ανέλιξη Poisson με παράμετρο  $\lambda t$ . Εδώ παρατηρούμε την εφαρμογή της αρχής της αναλογίας. Αν αναμένονται 2 ζημιές σε διάστημα ενός μηνός ( $\lambda = 2$ ), τότε θα αναμένουμε 24 ζημιές ( $12\lambda$ ) στο διάστημα του έτους. Η κατανομή Poisson συνδέεται με την εκθετική κατανομή, καθώς το μεσοδιάστημα εμφάνισης ζημιών ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή  $1/\lambda$  (ή ισοδύναμα παράμετρο  $\lambda > 0$ ). Βασική προϋπόθεση είναι ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και αυτό είναι σύνηθες στη θεωρία κινδύνου καθώς η ανέλιξη του πλήθους ζημιών  $N(t)$  είναι ανανεωτική.

Οι ενδιαμέσοι χρόνοι άφιξης των ζημιών, όπως είπαμε νωρίτερα, ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda > 0$ , και η οποία χαρακτηρίζεται ως κατανομή με έλλειψη μνήμης. Πράγματι, η συνάρτηση κατανομής αυτής είναι

$$F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda y}, y > 0.$$

και θα αποδείξουμε ότι η πιθανότητα να μεσολαβήσει χρονικό διάστημα  $Y < s+y$  (έως την επόμενη ζημιά) δοθέντος ότι  $Y > s$  είναι ανεξάρτητη της τιμής  $s$  και ίση με την πιθανότητα να μεσολαβήσει χρονικό διάστημα  $Y < y$ :

$$\begin{aligned} P(Y < s + y | Y > s) &= \frac{P(s < Y < s + y)}{P(Y > s)} = \frac{F_Y(s + y) - F_Y(s)}{\bar{F}_Y(s)} \\ &= \frac{\bar{F}_Y(s) - \bar{F}_Y(s + y)}{\bar{F}_Y(s)} = 1 - e^{-\lambda y} = P(Y < y) \end{aligned}$$

Όπως η εκθετική κατανομή, έτσι και η ανέλιξη Poisson δεν έχει μνήμη.

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι στο χρονικό διάστημα  $(0, t)$  συμβαίνουν  $k$ -ζημιές, τότε η πιθανότητα να συμβούν  $k+n$  ζημιές στο χρονικό διάστημα  $(0, s)$ ,  $s > t$  είναι ίση με την πιθανότητα να συμβούν  $n$ -ζημιές στο διάστημα  $(0, s-t)$ :

$$\begin{aligned} P(N(s) = k + n | N(t) = k) &= \frac{P(N(t) = k, N(s) = k + n)}{P(N(t) = k)} = \frac{P(N(t) = k, N(s - t) = n)}{P(N(t) = k)} \\ &= \frac{P(N(t) = k) \cdot P(N(s - t) = n)}{P(N(t) = k)} = P(N(s - t) = n) \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι η ανέλιξη Poisson έχει στάσιμες προσαυξήσεις. Πρακτικά αυτό μεταφράζεται ως εξής: έστω ότι σε διάστημα ενός μήνα αναμένονται 2 ζημιές, τότε η πιθανότητα να υπάρξουν 3 ζημιές στο διάστημα 1,5 μηνός είναι ίση με την πιθανότητα να υπάρξει 1 ζημιά σε διάστημα μισού μήνα.

Η συνολική ζημιά σε χρόνο  $t > 0$  ακολουθεί μια σύνθετη Poisson (CP; Compound Poisson) κατανομή:

$$S(t) \sim CP(\lambda \cdot t, f_X),$$

όπου  $f_X$  είναι η συνάρτηση πυκνότητας ή πιθανότητας της ατομικής ζημιάς, και περιγράφεται από το κάτωθι μοντέλο συλλογικού κινδύνου

$$S(t) = \begin{cases} 0, & N(t) = 0 \\ X_1 + \dots + X_{N(t)}, & N(t) > 0 \end{cases}$$

με αναμενόμενη ζημιά  $E(S(t)) = \lambda \cdot t \cdot E(X)$  και διασπορά  $Var(S(t)) = \lambda \cdot t \cdot E(X^2)$ .

Αν η ατομική ζημιά είναι διακριτή, τότε η συνολική ζημιά είναι επίσης διακριτή τυχαία μεταβλητή με σ.π.  $g(x)$  η οποία προσδιορίζεται από την αναδρομική σχέση (Χατζηκωνσταντινίδης, 2015):

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\lambda t (f_X(0)-1)}, & x = 0 \\ \frac{\lambda t}{x} \cdot \sum_{u=1}^x u \cdot f_X(u) \cdot g(x-u), & x > 0 \end{cases}$$

### 3.3 Κλασσικό μοντέλο Χρεοκοπίας

#### 3.3.1 Χρεοκοπία σε συνεχή χρόνο $t > 0$

Το πλεόνασμα  $u(t)$  παριστάνεται με μια ανέλιξη στο χρόνο  $t > 0$  και προσδιορίζεται από το απόθεμα  $u = u(0)$ , το ρυθμό (ή ένταση) εισροών  $c$  και το ρυθμό εκροών ή ζημιών λόγω απαιτήσεων  $S(t)$ :

$$u(t) = u + c \cdot t - S(t)$$

Η βασική υπόθεση της εταιρείας είναι η ένταση ταμειακών εισροών  $c$  να υπερβαίνει την αναμενόμενη συνολική ζημιά στη μονάδα του χρόνου  $E(S(1)) = \lambda \cdot E(X)$ , διότι σε αντίθετη περίπτωση η χρεοκοπία στο διηνεκές είναι βέβαιη (Πολίτης, 2017). Η υπόθεση  $c > \lambda \cdot E(X)$  είναι αναγκαία αλλά δεν μπορεί να αποτρέψει τη χρεοκοπία εφόσον μια μεγάλη ζημιά  $X$  δύναται να δημιουργήσει έλλειμμα πλεονάσματος  $u(T) < 0$  όπου  $T$  είναι ο χρόνος χρεοκοπίας.

Ο χρόνος χρεοκοπίας  $T$  είναι αυτός όταν η συνολική ζημιά υπερβεί το άθροισμα αποθέματος και εισροών:

$$u(T) < 0 \Leftrightarrow S(T) > u + c \cdot T$$



και ορίζεται από τη σχέση

$$T = \begin{cases} \inf\{t: U(t) < 0\} \\ \infty, U(t) > 0, \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Πρόκειται για ελλειμματική τυχαία μεταβλητή, εφόσον μπορεί με θετική πιθανότητα να απειρισθεί, υπό την προϋπόθεση ότι  $c > \lambda \cdot E(X)$ .

Μια βασική παράμετρος που καθορίζει σημαντικά την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι το απόθεμα της εταιρείας κατά την έναρξη της δραστηριότητάς της, δηλαδή το χρόνο  $t=0$ . Τελικά, σε συνδυασμό με το χρόνο  $t>0$ , η πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο ορίζεται ως διμεταβλητή συνάρτηση του αποθέματος  $u$  και του χρόνου  $t>0$

$$\Psi(u, t) = P_r(\exists \tau, 0 < \tau < t: u(\tau) < 0)$$

και είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του αποθέματος  $\frac{\partial \Psi}{\partial u} < 0$  και γνησίως αύξουσα συνάρτηση του χρόνου  $\frac{\partial \Psi}{\partial t} > 0$ .

Αν και η πρώτη συνθήκη μας δείχνει λογική, η δεύτερη είναι μάλλον λίγο απαισιόδοξη για μακροπρόθεσμα σενάρια.

Είναι γεγονός λοιπόν ότι υψηλό απόθεμα μειώνει μεν την πιθανότητα χρεοκοπίας χωρίς όμως να είναι ικανή συνθήκη να τη διατηρήσει χαμηλή στο χρόνο. Για το λόγο αυτό επιβάλλεται αλλαγή στρατηγικής λαμβάνοντας υπόψη τα νέα δεδομένα σε ό,τι αφορά κυρίως την μοντελοποίηση της τ.μ. ύψους ζημιάς ή την θεώρηση της έντασης των ζημιών ως συνάρτηση του χρόνου  $\lambda(t)$  παρά σταθερή. Στο διηλεκές πάντως η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ασυμπτωτικά μονομεταβλητή συνάρτηση ως προς το αρχικό απόθεμα:

$$\Psi(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(u, t)$$

Μια βασική και σχετικά απλή παράμετρος που καθορίζει τον κίνδυνο χρεοκοπίας είναι το περιθώριο ασφάλειας  $\theta > 0$  που εκφράζει το σχετικό αναμενόμενο κέρδος για την εταιρεία στη μονάδα του χρόνου:

$$\theta = \frac{c}{\lambda \cdot E(X)} - 1$$

Το περιθώριο ασφάλειας, ή καλύτερα η ποσότητα  $1+\theta$ , είναι ανάλογο της ροής εισφορών και αντιστρόφως ανάλογο της έντασης ζημιών και αναμενόμενης ζημιάς. Όσο μεγαλύτερο είναι το περιθώριο ασφάλειας τόσο πρακτικά μειώνεται ο κίνδυνος χρεοκοπίας καθώς μεγαλώνει η απόσταση του κλάσματος από τη μονάδα ή ισοδύναμα μεγαλώνει η απόσταση του ρυθμού εισφορών από την συνολικό αναμενόμενο μέγεθος ζημιάς στη μονάδα του χρόνου. Το πρόβλημα είναι ότι υψηλές τιμές του περιθωρίου ασφάλειας, κυρίως  $\theta > 1$ , θέτουν θέμα χαμηλής ανταγωνιστικότητας βάζοντας σε κίνδυνο μελλοντικές ταμειακές εισροές (Πολίτης, 2017). Ένα για παράδειγμα υψηλό ασφάλιστρο μπορεί να διασφαλίζει την κάλυψη μεγάλου μεγέθους ζημιάς, αλλά δεν είναι ελκυστικό για να προσελκύσει υποψήφια άτομα προς ασφάλιση.

Το αναμενόμενο ύψος ζημιάς  $E(X)$  και το περιθώριο ασφάλειας  $\theta$  αποτελούν βασικές παραμέτρους για την πιθανότητα μη χρεοκοπίας

$$\delta(u) = 1 - \Psi(u)$$

η οποία υπολογίζεται από την ολοκληρωδιαφορική εξίσωση:

$$(\theta + 1) \cdot E(X) \cdot \frac{d\delta(u)}{du} = \delta(u) - \int_0^u \delta(u-x)f(x)dx$$

με αρχική τιμή  $\delta(0) = \theta/(1+\theta)$  (Πολίτης, 2017).

Στην περίπτωση  $t \rightarrow \infty$ , μπορεί να αποδειχθεί ότι ένα άνω και κάτω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι το εξής:

$$\frac{\bar{H}(u)}{\bar{H}(u) + \theta} \leq \Psi(u) \leq e^{-R \cdot u}$$

όπου

$$\bar{H}(u) = \frac{1}{E(X)} \int_u^\infty \bar{F}_X(x) dx$$

και ο συντελεστής προσαρμογής  $R$  είναι θετική λύση της εξίσωσης του Lundberg:

$$-\frac{1}{R} + \frac{1}{R} M_X(R) = \frac{c}{\lambda}$$

όπου  $M_X(t)$  είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση του ύψους ατομικής ζημιάς  $X$ , με την προϋπόθεση ότι η ροπογεννήτρια συνάρτηση υπάρχει (δεν απειρίζεται).

Σε πολλές των περιπτώσεων, στην ατομική ζημιά προσαρμόζεται η εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\beta > 0$ , και η πιθανότητα χρεοκοπίας στο διηνεκές υπολογίζεται με ακρίβεια από την σχέση (Πολίτης, 2017):

$$\Psi(u) = \Psi(0) \cdot e^{-R \cdot u}$$

όπου ο συντελεστής προσαρμογής  $R$  ως λύση της εξίσωσης του Lundberg είναι

$$R = \beta \cdot \frac{\theta}{\theta + 1}$$

Στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής ζημιάς, υπολογίζουμε το αποθεματικό ώστε η πιθανότητα χρεοκοπίας να είναι κάτω από ορισμένο επιθυμητό όριο πιθανότητας  $p$ :

$$\Psi(u) \leq p \Leftrightarrow \Psi(0) \cdot e^{-R \cdot u} \leq p \Leftrightarrow e^{-R \cdot u} \leq \frac{p}{\Psi(0)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -R \cdot u \leq \ln\left(\frac{p}{\Psi(0)}\right) \Leftrightarrow u \geq -\frac{1}{R} \cdot \ln\left(\frac{p}{\Psi(0)}\right)$$

Άρα  $\min(u) = u_{\min} = -\frac{1}{R} \cdot \ln\left(\frac{p}{\Psi(0)}\right)$ . Παρατηρούμε ότι

$$\frac{d}{dp} u_{\min} = -\frac{1}{R} \cdot \Psi(0) < 0$$

οπότε όσο μικρότερη επιθυμητή πιθανότητα χρεοκοπίας τόσο μεγαλύτερο το ελάχιστο απόθεμα. Επίσης, για μικρή επιθυμητή πιθανότητα χρεοκοπίας  $p$  και ασφαλώς  $p < \Psi(0)$ , όσο

μεγαλύτερος ο συντελεστής προσαρμογής  $R$  τόσο πιο χαμηλό δύναται να είναι το ελάχιστο αποθεματικό.

Στην ειδική περίπτωση του μεγέθους αποζημίωσης ως μίξη  $k$ - το πλήθος εκθετικών κατανομών με παραμέτρους  $\beta_1, \dots, \beta_k$  και συντελεστές  $a_1, \dots, a_k$  ώστε  $a_1 + \dots + a_k = 1$ , με σ.π.π.

$$f(x) = a_1 \beta_1 e^{-\beta_1 x} + \dots + a_k \beta_k e^{-\beta_k x}$$

η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογισθεί ακριβώς και δίνεται ως εξής:

$$\psi(u) = c_1 e^{-r_1 u} + \dots + c_k e^{-r_k u}$$

όπου  $r_1, \dots, r_k$  είναι λύσεις της εξίσωσης του Lundberg και επαληθεύουν την ανισότητα  $0 < r_1 < \beta_1 < r_2 < \beta_2 < \dots < r_k < \beta_k$ . Αν  $k=2$ , τότε οι συντελεστές  $c_1, c_2$  αποτελούν λύση του συστήματος (Πολίτης, 2017):

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{1}{1 + \theta} \\ c_1 r_1 + c_2 r_2 = \frac{\theta}{(1 + \theta)^2 E(X)} \end{cases}$$

Για την περίπτωση της μη εκθετικής κατανομής μεγέθους απαιτήσεων χρησιμοποιείται ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{C \cdot e^{-Ru}} = 1, \quad 0 < C < 1$$

ή η προσέγγιση DeVylder:

$$\hat{\Psi}(u) = \hat{\Psi}(0) e^{-\hat{r}u} = \frac{1}{1 + \hat{\theta}} e^{-\frac{\hat{\theta}}{1 + \hat{\theta} \hat{p}_1} u}$$

όπου οι εκτιμητές προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος

$$\begin{aligned} \hat{\theta} \hat{\lambda} \hat{p}_1 &= \theta \lambda p_1 \\ \hat{\lambda} \hat{p}_2 &= \lambda p_2 \\ \hat{\lambda} \hat{p}_3 &= \lambda p_3 \\ \hat{p}_k &= k! \cdot p_1^k \end{aligned}$$

όπου  $p_1, p_2, p_3$  είναι οι 3 πρώτες ροπές γύρω από το μηδέν της κατανομής ατομικών ζημιών.

Ένα άνω φράγμα για το συντελεστή προσαρμογής δίνεται από τη σχέση

$$R \leq \frac{2 \cdot E(X) \cdot \theta}{E(X^2)} = \max(R)$$

Διαγραμματικά, η ανέλιξη πλεονάσματος σε συνεχή χρόνο ακολουθεί μια διαδρομή ανόδου με κλίση όπου κατόπιν διακόπτεται από τις ατομικές απαιτήσεις με τη μορφή «πτώσης». Για τη μελέτη του διαγράμματος εξετάζουμε τις χρονικές στιγμές όπου παρατηρείται ένα νέο ελάχιστο στην ανέλιξη του πλεονάσματος. Στο διάγραμμα βασικές τιμές είναι το απόθεμα, το χρονικό σημείο απαίτησης αποζημίωσης, η τιμή του πλεονάσματος ακριβώς πριν την απαίτηση και η τιμή του πλεονάσματος κατόπιν αποζημίωσης της απαίτησης. Αν η τελευταία είναι αρνητική τότε πρόκειται για έλλειμμα πλεονάσματος και ο χρόνος απαίτησης, όταν αυτό συμβεί για πρώτη φορά, αναφέρεται ως χρόνος χρεοκοπίας.

Η τιμή του πλεονάσματος ακριβώς πριν την  $j$ -απαίτηση ορίζεται

$$u(t_j^-) = u(t_{j-1}) + c \cdot (t_j - t_{j-1})$$

ενώ κατόπιν καταβολής της αποζημίωσης  $X_j$  λόγω της αντίστοιχης απαίτησης είναι

$$u(t_j) = u(t_{j-1}) + c \cdot (t_j - t_{j-1}) - X_j$$

Το μέγεθος  $X_j$  της  $j$ -απαίτησης είναι  $X_j = u(t_j^-) - u(t_j)$ . Στο χρόνο χρεοκοπίας  $T > 0$ , ισχύει πάντα  $u(T) < 0$ .

Μια επίσης πολύ βασική ποσότητα σε σχέση με τις μεταβολές του πλεονάσματος είναι η κατανομή των κλιμακωτών υψών ή πτώση πλεονάσματος. Αν η πρώτη φορά που το απόθεμα πέσει κάτω από το αρχικό αποθεματικό  $u$  είναι τη χρονική στιγμή  $t_j$ , ορίζουμε την τ.μ.  $L_1 = u - u(t_j)$ , που είναι το μέγεθος της πρώτης πτώσης. Αν η πρώτη φορά που το αποθεματικό πέσει κάτω από  $u(t_j)$  είναι τη στιγμή  $t_k$ , τότε  $L_2 = u(t_k) - u(t_j)$  είναι η δεύτερη πτώση πλεονάσματος. Με τον τρόπο αυτό ορίζουμε μια ακολουθία  $L_1, L_2, \dots$ . Το πλήθος των μεταβλητών  $L_i$  που παίρνουν μη μηδενικές τιμές είναι πεπερασμένο και συμβολίζεται με  $K$ .

Αν το μέγεθος αποζημίωσης είναι συνεχής τ.μ., τότε οι διαδοχικές πτώσεις πλεονάσματος είναι ισόνομες και ανεξάρτητες τ.μ. με συνάρτηση κατανομής

$$F_{L_1}(x) = \frac{1}{E(X)} \cdot \int_0^x (1 - F_X(t)) dt, \quad x > 0$$

και σ.π.π.  $f_{L_1}(x) = \frac{1 - F_X(x)}{E(X)}, x > 0$ .

Το άθροισμα των πτώσεων πλεονάσματος  $L_1 + \dots + L_k$  ορίζεται ως μέγιστη σωρευτική απώλεια  $L$  με ροπογεννήτρια συνάρτηση (Πολίτης, 2017):

$$M_L(u) = \frac{\theta}{1 + \theta - M_{L_1}(u)}$$

και συνάρτηση κατανομής  $F_L(u) = \delta(u)$ .

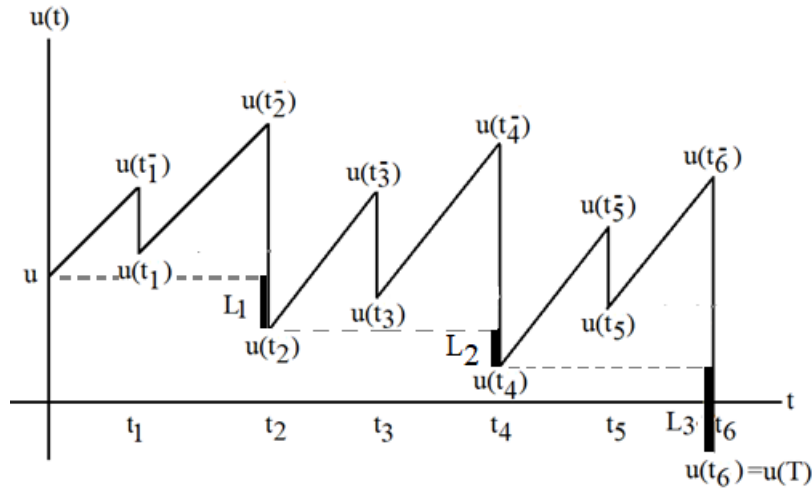
Η μέση τιμή και διασπορά της μέγιστης σωρευτικής απώλειας είναι

$$E(L) = \frac{E(X^2)}{2\theta E(X)} = \{\max(R)\}^{-1}, \quad \text{Var}(L) = \frac{E(X^3)}{3\theta E(X)} + \left( \frac{E(X^2)}{2\theta E(X)} \right)^2$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας - δοθέντος αποθέματος  $u > 0$  - με την πρώτη απαίτηση ικανοποιεί τη σχέση

$$\Psi_1(u) = \int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t} (1 - F_X(u + c \cdot t)) dt$$

Το κάτωθι διάγραμμα δίνει μια αναπαράσταση επεξηγηματική των εννοιών που αναλύσαμε παραπάνω και παρουσιάζει την εξέλιξη του πλεονάσματος στο χρόνο.



*Σχήμα 3.1 Ανέλιξη πλεονάσματος*

Ξεκινώντας από απόθεμα  $u$  τη χρονική στιγμή  $t=0$ , οι χρόνοι απαίτησης είναι  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 = T$  εφόσον πρόκειται για χρεοκοπία. Οι πτώσεις πλεονάσματος  $L_1=u-u(t_2), L_2=u(t_2)-u(t_4)$  και  $L_3=u(t_4)-u(t_6)$  συμβαίνουν τις χρονικές στιγμές  $t_2, t_4$  και  $t_6$  αντίστοιχα. Η τελευταία πτώση πλεονάσματος είναι πάντοτε στο χρόνο χρεοκοπίας. Παρατηρούμε ότι μεταξύ των απαιτήσεων το πλεόνασμα έχει γραμμική θετική εξέλιξη με κλίση  $c$  την ένταση εισφορών. Στο χρόνο της απαίτησης φαίνεται η πτώση που μειώνει στιγμιαία το πλεόνασμα ώστε αν αυτή υπερβεί προς τα κάτω την τιμή πλεονάσματος στην προηγούμενη απαίτηση, τότε έχουμε την πτώση πλεονάσματος.

### 3.3.2 Εφαρμογές για χρεοκοπία σε συνεχή χρόνο $t>0$

#### Εφαρμογή 3.3.2.1

Έστω το κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας σε συνεχή χρόνο, όπου η ατομική απαίτηση είναι τ.μ.  $X$  που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\beta=0.5$  ή ισοδύναμα μέση τιμή

$$E(X) = \frac{1}{\beta} = 2 \text{ ν.μ.}$$

Έστω ότι ο ρυθμός πληρωμής ασφαλίσεων είναι  $c=4 \text{ ν.μ.}$ , και ο ρυθμός

απαίτησης είναι  $\lambda=1$ , δηλαδή οι αφίξεις απαιτήσεων ακολουθούν Poisson με παράμετρο  $t$  στο διάστημα  $(0, t)$ . Ισοδυνάμως, τα μεσοδιαστήματα απαιτήσεων ακολουθούν εκθετική

κατανομή με παράμετρο 1 (1/λ). Με βάση τα δεδομένα αυτά, η χρεοκοπία είναι αβέβαιη στο διηνεκές εφόσον ικανοποιείται η σχέση  $c > \lambda \cdot E(X) \Leftrightarrow 4 > 2$ .

Το περιθώριο ασφάλειας είναι  $\theta = 1 > 0$  και η πιθανότητα χρεοκοπίας με αποθεματικό μηδέν είναι  $\Psi(0)=0.5$ . Ο συντελεστής προσαρμογής είναι  $R=0.25$  και αν θεωρήσουμε αρχικό αποθεματικό  $u=5$ ν.μ. τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας στο διηνεκές είναι

$$\Psi(5) = \Psi(0) \cdot e^{-0.25 \cdot 5} = 14.33\%$$

Για την περίπτωση που θα επιθυμούσε η εταιρεία να μειώσει κάτω από 5% ή ακόμα λιγότερο 1% την πιθανότητα αυτή, τότε θα όφειλε να έχει αρχικό αποθεματικό 9.22 ν.μ. ή 15.7 ν.μ. τουλάχιστον. Αυτά προκύπτουν εφόσον:

$$\Psi(u) = 0.5 \cdot e^{-0.25 \cdot u} > a \Leftrightarrow e^{-0.25 \cdot u} > \frac{a}{0.5} \Rightarrow -0.25u > \ln \frac{a}{0.5} \Leftrightarrow$$

$$u > -\frac{1}{0.25} \cdot \ln \frac{a}{0.5} = \begin{cases} 9.22, & a = 0.05 \\ 15.7, & a = 0.01 \end{cases}$$

Πράγματι, η αύξηση του αποθέματος οδηγεί σε μείωση της πιθανότητας χρεοκοπίας στο διηνεκές.

Η αύξηση του αποθέματος επιφέρει και μείωση στην πιθανότητα χρεοκοπίας με την πρώτη απαίτηση.

$$\Psi_1(u) = \int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t} (1 - F_X(u + c \cdot t)) dt = \int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{-(u+ct)\lambda} dt = \int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-(u+ct+t)\lambda} dt$$

$$= \lambda \cdot e^{-u\lambda} \int_0^{\infty} e^{-(c+1)t} dt = \lambda \cdot e^{-u\lambda} \cdot \frac{1}{c+1} \int_0^{\infty} (c+1)e^{-(c+1)t} dt = \lambda \cdot e^{-u\lambda} \cdot \frac{1}{c+1} \cdot 1 = \frac{\lambda \cdot e^{-u\lambda}}{c+1}$$

Στον κάτωθι πίνακα παρουσιάζονται οι πιθανότητες χρεοκοπίας στο διηνεκές και με την πρώτη απαίτηση για τις διάφορες τιμές των αποθεμάτων, οι οποίες βρέθηκαν με την βοήθεια του Mathematica από την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης:



### Πιθανότητα χρεοκοπίας

Απόθεμα (ν.μ.)	Στο διηνεκές	Με την πρώτη απαίτηση
5	14.33%	0.13%
9.22	5%	$1.981 \times 10^{-3} \%$
15.7	1%	$3.038 \times 10^{-6} \%$

Η πτώση πλεονάσματος είναι επίσης εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\beta=0.5$  εφόσον

$$F_L(x) = \frac{1}{1/\beta} \cdot \int_0^x e^{-\beta t} dt = \int_0^x \beta e^{-\beta t} dt = F_X(x)$$

και η μέγιστη σωρευτική απώλεια  $L$  έχει μέση τιμή  $E(L)=2$  και διασπορά  $V(L)=12$ , δηλαδή όση είναι η μέση τιμή της πτώσης πλεονάσματος, αλλά διπλάσιας διασποράς. Για τον υπολογισμό της μέσης σωρευτικής απώλειας και διασπορά αυτής υπολογίσαμε με την βοήθεια του Mathematica αρχικά τις ροπές πρώτης ( $E(X)=2$ ), δεύτερης ( $E(X^2)=8$ ) και τρίτης τάξης ( $E(X^3)=48$ ) της εκθετικής κατανομής του παραδείγματός μας και κατόπιν τις σχέσεις:

$$E(L) = \frac{E(X^2)}{2\theta E(X)} \text{ και } Var(L) = \frac{E(X^3)}{3\theta E(X)} + (E(L))^2$$

#### Εφαρμογή 3.3.2.2

Έστω το κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας σε συνεχή χρόνο, όπου η ατομική απαίτηση είναι τ.μ.  $X$  που ακολουθεί την κατανομή Pareto με παραμέτρους  $\alpha=4$ ,  $\delta=12$  με μέση τιμή

$$E(X) = \frac{\delta}{\alpha - 1} = 4 \text{ και διασπορά } V(X) = \frac{\alpha\delta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} = 32.$$

Έστω ότι ο ρυθμός πληρωμής ασφαλίσεων είναι  $c=8$ ν.μ., και ο ρυθμός απαίτησης είναι  $\lambda=1.5$ , δηλαδή οι αφίξεις απαιτήσεων ακολουθούν Poisson με παράμετρο  $1.5t$  στο διάστημα  $(0, t)$ . Ισοδυνάμως, τα μεσοδιαστήματα απαιτήσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο  $2/3$  ( $1/\lambda$ ). Με βάση τα δεδομένα αυτά, η χρεοκοπία είναι αβέβαιη στο διηνεκές εφόσον ικανοποιείται η σχέση  $c > \lambda \cdot E(X) \Leftrightarrow 8 > 6$ .

Το περιθώριο ασφάλειας είναι  $\theta=1/3>0$  και η πιθανότητα χρεοκοπίας με αποθεματικό μηδέν είναι  $\Psi(0)=0.75$ . Σε σχέση με την εφαρμογή 3.2.2.1, εδώ έχουμε μικρότερο περιθώριο ασφάλειας και λογικά μεγαλύτερη πιθανότητα χρεοκοπίας για μηδενικό απόθεμα.

Ο συντελεστής προσαρμογής  $R$  δεν υπολογίζεται αναλυτικά διότι στην εξίσωση του Lundberg δεν υπάρχει (απειρίζεται) η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής Pareto.

Επίσης, η πιθανότητα χρεοκοπίας δεν υπολογίζεται επακριβώς. Για τον υπολογισμό του κάτω φράγματος διενεργούμε τα κάτωθι:

$$\bar{H}(u) = \frac{1}{E(X)} \cdot \int_u^{\infty} \bar{F}_X(t) dt = \frac{1}{\delta} \cdot \int_u^{\infty} \frac{\delta^a}{(t+\delta)^a} dt = \int_u^{\infty} \frac{(a-1)\delta^{a-1}}{(t+\delta)^a} dt = \bar{F}_1(u)$$

όπου  $F_1$  είναι η συνάρτηση κατανομής της Pareto με παραμέτρους  $a-1$  και  $\delta$ :

$$F_1(x) = 1 - \frac{\delta^{a-1}}{(x+\delta)^{a-1}}, \quad x > 0$$

Για τις παραμέτρους  $a$  και  $\delta$  που επιλέξαμε, καθώς επίσης και για τις σταθερές  $c$ ,  $\lambda$ , έστω αρχικό αποθεματικό  $u=5$ ν.μ., τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας στο διηνεκές έχει κάτω φράγμα 51.34%. Αυτό ισχύει διότι:

$$\bar{F}_1(5) = \frac{12^3}{(5+12)^3} = \bar{H}(5), \quad \frac{\frac{12^3}{(5+12)^3}}{\frac{12^3}{(5+12)^3} + \frac{1}{3}} = 0.5134$$

Για διπλάσιο αποθεματικό,  $u=10$ ν.μ. το κάτω φράγμα είναι 32.74%, μειώνεται δηλαδή για μεγαλύτερο αποθεματικό:

$$\bar{F}_1(10) = \frac{12^3}{(10+12)^3} = \bar{H}(10), \quad \frac{\frac{12^3}{(10+12)^3}}{\frac{12^3}{(10+12)^3} + \frac{1}{3}} = 0.3274$$

Τέλος, η πτώση πλεονάσματος  $L_1$  έχει σ,κ.

$$F_{L_1}(x) = \frac{1}{E(X)} \cdot \int_0^x (1 - F_X(t)) dt = H(x) = F_1(x)$$

δηλαδή, είναι κατανομή Pareto με παραμέτρους  $\alpha-1=3$  και  $\delta=12$  και η μέγιστη σωρευτική απώλεια  $L$  έχει μέση τιμή  $E(L)=36$ .

### 3.3.3 Χρεοκοπία σε διακριτό χρόνο $n$

Στο συνεχή χρόνο είδαμε ότι η χρεοκοπία μπορεί να συμβεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή εφόσον το πλεόνασμα γίνει αρνητικό. Στο διακριτό, αντίθετα, η διάκριση του χρόνου σε περιόδους περιορίζει την περίπτωση χρεοκοπίας μόνο σε αυτές τις διακριτές περιόδους (Πολίτης, 2017). Αυτό ισχύει εφόσον το πλεόνασμα υπολογίζεται σε διακριτές περιόδους  $1, 2, \dots, n$ :

$$u(n) = u + c \cdot n - S(n)$$

όπου  $S(n)$  είναι το άθροισμα των ατομικών απαιτήσεων  $W_1 + \dots + W_n$  ανά χρονική περίοδο και κάθε περιοδική απαίτηση είναι μοντέλο συλλογικού κινδύνου σε σχέση με το ύψος ατομικής ζημιάς και το πλήθος ζημιών  $N$  που είναι κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda > 0$ , άρα η περιοδική απαίτηση είναι σύνθετη Poisson:

$$W \sim CP(\lambda, f_X)$$

Τα κέρδη των περιόδων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.  $G = c - W$  και το κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας στο διακριτό χρόνο είναι:

$$u(n) = u + \sum_{i=1}^n G_i$$

Στο μοντέλο αυτό η περίοδος/ (χρόνος) χρεοκοπίας είναι

$$\tilde{T} = \min \{n: u(n) \leq 0, u(n-1) > 0\}$$

και ο συντελεστής προσαρμογής  $\tilde{R}$  δύναται εκτός από την εξίσωση του Lundberg να εκτιμηθεί ισοδύναμα από την εξίσωση της ροπογεννήτριας συνάρτησης των περιοδικών απαιτήσεων

$$M_W(\tilde{R}) = e^{c\tilde{R}}$$

ή ισοδυνάμως του περιοδικού κέρδους

$$M_G(-\tilde{R}) = 1$$

όπου  $M_W, M_G$  οι ροπογεννήτριες των τ.μ.  $W, G$  αντίστοιχα.

Τέλος, η πιθανότητα χρεοκοπίας με έλλειμμα χρεοκοπίας  $u_{\tilde{T}} < 0$  μπορεί να βρεθεί με βάση τη σχέση

$$\tilde{\Psi}(u) = \frac{e^{-\tilde{R}u}}{E\left[e^{-\tilde{R}u_T} \mid T < \infty\right]}$$

### 3.3.4 Εφαρμογές για χρεοκοπία σε διακριτό χρόνο

#### Εφαρμογή 3.3.3.1

Έστω ότι το αποθεματικό της εταιρείας είναι  $u=2$ ν.μ. και η περιοδική απαίτηση είναι τ.μ.  $W$  με συνάρτηση πιθανότητας  $P(W = 1) = 0.7$  και  $P(W = 3) = 0.3$  και η εταιρεία θέτει ρυθμό ασφαλιστρού  $c=2$ . Εφόσον  $c > E(W) = 1.6$  η πιθανότητα χρεοκοπίας στο διηνεκές δεν είναι βέβαιη.

Την πρώτη περίοδο το πλεόνασμα είναι  $u(1)=3$ ν.μ. με πιθανότητα 0.7 και  $u(1)=1$ ν.μ. με πιθανότητα 0.3. Την δεύτερη περίοδο το πλεόνασμα είναι  $u(2)=4$  ν.μ. με πιθανότητα  $0.7 \times 0.7=0.49$ ,  $u(2)=2$  ν.μ. με πιθανότητα  $2 \times 0.7 \times 0.3=0.42$ ,  $u(2)=0$  ν.μ. με πιθανότητα  $0.3 \times 0.3=0.09$ . Σύμφωνα με την παραπάνω ροή του αποθεματικού για κάθε χρονική περίοδο διακρίνονται δύο περιπτώσεις περιοδικών απαιτήσεων. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει περίπτωση χρεοκοπίας την πρώτη περίοδο ενώ τη δεύτερη περίοδο η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι 9%.

Την τρίτη περίοδο δύναται να είναι αρνητικό το πλεόνασμα, δηλαδή  $u(3) = -1$  όταν

$$u(3) < 0 \Leftrightarrow u + 3c < W_1 + W_2 + W_3 \Leftrightarrow W_1 + W_2 + W_3 > 8$$

με πιθανότητα  $P(\tilde{T} = 3) = P(W_1 = 3, W_2 = 3, W_3 = 3) = \{P(W_1 = 3)\}^3 = 2.7\%$

### Εφαρμογή 3.3.4.2

Ας υποθέσουμε ότι η περιοδική απαίτηση  $W \in \{c-1, c, c+1\}$  με πιθανότητες μεγαλύτερες του μηδενός και μικρότερες της μονάδας που αθροίζουν στη μονάδα (δεν μας ενδιαφέρουν οι τιμές αυτών). Επίσης ας υποθέσουμε ότι το απόθεμα  $u$  και ο ρυθμός ασφαλίσεων  $c$  παίρνουν μόνο ακέραιες τιμές. Στην περίπτωση αυτή, το έλλειμμα πλεονάσματος θα είναι  $u_{\tilde{T}} = -1$ .

#### Απόδειξη 3.1

Έστω ο χρόνος χρεοκοπίας είναι την περίοδο  $n$ , τότε

$$\left. \begin{array}{l} u_n \leq 0 \\ u_{n-1} > 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} u + c \cdot n - \sum_{i=1}^n W_i \leq 0 \\ u + c \cdot n - \sum_{i=1}^{n-1} W_i > 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} u + \sum_{i=1}^{n-1} (c - W_i) + c - W_n \leq 0 \\ u + \sum_{i=1}^{n-1} (c - W_i) > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \tilde{T} = n \\ -u \leq \sum_{i=1}^{n-1} (c - W_i) \geq 0 < -u + W_n - c \end{array}$$

συνεπώς,  $W_n > c$  άρα,  $W_n = c + 1$ .

Εφόσον,  $-u \leq \sum_{i=1}^{n-1} (c - W_i) \geq 0 < -u + 1$  και επειδή το άθροισμα στην ανίσωση είναι ακέραιος αριθμός, δεν δύναται να είναι ανάμεσα σε διάστημα ακεραίων πλάτους 1, αλλά να ταυτίζεται με τουλάχιστον ένα άκρο, το αριστερό στην περίπτωση μας λόγω της ύπαρξης ισότητας εκεί, δηλαδή,  $-u = \sum_{i=1}^{n-1} (c - W_i)$  και τελικά  $u + \sum_{i=1}^{n-1} (c - W_i) + c - W_n = 0$ .

## 3.4 Χρεοκοπία για κατανομές με βαριά ουρά

Όπως είπαμε νωρίτερα, κατανομές με βαριά ουρά δεν έχουν ροπογεννήτρια συνάρτηση με αποτέλεσμα να μην ορίζεται ο συντελεστής προσαρμογής  $R$ . Αυτό ισχύει για τις υποεκθετικές κατανομές αποζημιώσεων, δηλαδή δεν μπορεί να εφαρμοσθεί η εξίσωση Lundberg ή ο

ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg. Το αποτέλεσμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ασυμπτωτικό (Πολίτης, 2017) και είναι γνωστό ως ο τύπος των Embrechts-Veraverbeke:

$$\Psi(u) \sim \frac{1}{\theta} \cdot \bar{H}(u)$$

Με βάση το παραπάνω ας δούμε την περίπτωση της διπαραμετρικής κατανομής Pareto( $\alpha, \lambda$ ) για την οποία δεν ορίζεται η ροπογεννήτρια συνάρτηση αυτής, άρα και ο συντελεστής προσαρμογής.

$$\begin{aligned} \bar{H}(u) &= \frac{1}{E(X)} \cdot \int_u^{\infty} \bar{F}_X(t) dt = \frac{1}{\frac{\lambda}{\alpha-1}} \cdot \int_u^{\infty} \frac{\lambda^\alpha}{(t+\lambda)^\alpha} dt \\ &= \int_u^{\infty} \frac{(a-1)\lambda^{a-1}}{(t+\lambda)^a} dt = \bar{F}_1(u) = \frac{\lambda^{a-1}}{(u+\lambda)^{a-1}} \end{aligned}$$

Άρα,  $\Psi(u) \sim \frac{1}{\theta} \cdot \frac{\lambda^{a-1}}{(u+\lambda)^{a-1}}$ , όπου  $\theta$  είναι το περιθώριο ασφάλειας και  $u$  το αρχικό απόθεμα.

Η παραπάνω προσέγγιση είναι ικανοποιητική σε ότι αφορά τα εξής: όσο μεγαλύτερο περιθώριο ασφάλειας ή το αρχικό αποθεματικό  $u$  τόσο μικρότερη η πιθανότητα χρεοκοπίας (αμφότερες παράμετροι είναι στον παρονομαστή, οπότε δεν απαιτείται να το δείξουμε με τη βοήθεια της πρώτης παραγώγου). Η μόνη διαφοροποίηση είναι στο μηδενικό απόθεμα, καθώς ενώ γνωρίζουμε ότι  $\Psi(0)=1/(1+\theta)$ , εδώ η πιθανότητα χρεοκοπίας για μηδενικό απόθεμα προσεγγίζεται από  $1/\theta$ .

Μια άλλη περίπτωση κατανομής που δεν έχει ροπογεννήτρια συνάρτηση και ως εκ τούτου δεν μπορεί να υπολογισθεί ο συντελεστής προσαρμογής  $R$  από την εξίσωση του Lundberg είναι η Weibull με παραμέτρους  $c>0$  και  $0<\gamma<1$ . Αρχικά θα διερευνήσουμε αν η Weibull είναι κατανομή βαρύτερης ουράς σε σχέση με την Pareto παραμέτρων  $\alpha>0$  και  $\lambda>0$ . Έστω οι τ.μ.  $X$  και  $Y$  που ακολουθούν αντίστοιχα τις κατανομές Weibull και Pareto. Θα δείξουμε ότι

ανεξάρτητα παραμέτρων, η Pareto κατανομή είναι βαρύτερης ουράς σε σχέση με την Weibull.

Πράγματι, ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_X(x)}{\bar{F}_Y(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-c \cdot x^\gamma}}{\lambda^a} = \lambda^a \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\lambda + x)^a}{e^{c \cdot x^\gamma}} = 0$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας αν η κατανομή μεγέθους απαιτήσεων είναι Weibull βαριάς ουράς ( $0 < \gamma < 1$ ), είναι  $\Psi(u) \sim \frac{1}{\theta} \cdot \bar{H}(u)$

όπου

$$\begin{aligned} \bar{H}(u) &= \frac{1}{E(X)} \cdot \int_u^\infty \bar{F}_X(x) dx = \frac{1}{E(X)} \cdot \int_u^\infty e^{-c \cdot x^\gamma} dx = \frac{1}{E(X)} \cdot \int_u^\infty e^{-c \cdot x^\gamma} dx \\ &\left( \text{θέτουμε, } x^\gamma = y \Leftrightarrow x = y^{1/\gamma}, \frac{dy}{dx} = \gamma x^{\gamma-1} = \gamma y^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{\gamma y^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \right) \\ &= \frac{1}{E(X)} \cdot \int_{u^\gamma}^\infty e^{-c \cdot y} \frac{dy}{\gamma y^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \frac{1}{E(X)} \cdot \int_{u^\gamma}^\infty \frac{1}{\gamma} y^{\frac{1}{\gamma}-1} e^{-c \cdot y} dy = \frac{\Gamma(\frac{1}{\gamma})}{\frac{1}{c^\gamma E(X)}} \cdot \int_{u^\gamma}^\infty \frac{1}{\gamma} y^{\frac{1}{\gamma}-1} \frac{e^{-c \cdot y} c^{\frac{1}{\gamma}}}{\Gamma(\frac{1}{\gamma})} dy \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{\gamma})}{\frac{1}{c^\gamma E(X)}} \cdot \int_{u^\gamma}^\infty f_1(y) dy = \frac{\Gamma(\frac{1}{\gamma})}{\frac{1}{c^\gamma E(X)}} \cdot \bar{F}_1(u^\gamma) \end{aligned}$$

Όπου,  $f_1$  και  $F_1$  είναι η σ.π.π. και η σ.κ. της Γάμμα κατανομής με παραμέτρους  $1/\gamma$  και  $c$ .

## Κεφάλαιο 4. Στοχαστικές Διατάξεις

### 4.1. Εισαγωγή

Οι οικονομικές δραστηριότητες περιέχουν κίνδυνο. Στην περίπτωση των χαρτοφυλακίων με πολλούς κινδύνους, είναι χρήσιμη τόσο η σύγκριση όσο και η διάταξη των κινδύνων με κύριο σκοπό την επιλογή της κατάστασης αυτής που έχει το μικρότερο ρίσκο. Στην κατεύθυνση αυτή συμβάλλει ο ορισμός του ασφαλίστρου για κάθε κίνδυνο. Η ταξινόμηση των ασφαλίστρων είναι μεν ένας τρόπος σύγκρισης διαφορετικών καταστάσεων επικινδυνότητας μεταξύ τυχαίων μεταβλητών αλλά δεν οδηγεί πάντοτε σε λογικά αποτελέσματα. Η σύγκριση επικινδυνότητας μεταξύ τυχαίων καταστάσεων μπορεί να γίνει περισσότερο ανορθολογική στην περίπτωση όπου οι κίνδυνοι έχουν ίδια περίπου μέση τιμή, αλλά διαφέρουν στην δεξιά ουρά, δηλαδή ένας κίνδυνος είναι βαρύτερης δεξιάς ουράς σε σχέση με άλλον κίνδυνο (βλέπε κεφάλαιο 2). Τα αποτελέσματα είναι περισσότερο ορθολογικά χάριν της σύγκρισης της επικινδυνότητας με βάση τη θεωρία των στοχαστικών διατάξεων. Τέλος, σε ότι αφορά τη θεωρία χρεοκοπίας (βλ. κεφάλαιο 3) η διάταξη κινδύνων είναι αποτελεσματική για την σύγκριση μεταξύ των αντίστοιχων πιθανοτήτων χρεοκοπίας. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε αρχικά τη στοχαστική διάταξη τυχαίων μεταβλητών μεταξύ τους, και ακολούθως τη στοχαστική διάταξη στην αναλογιστική επιστήμη, τις διατάξεις βαθμίδας κινδύνου και λόγου πιθανοφάνειας και τέλος τις σκεδαστικές διατάξεις. Πέραν της ξενόγλωσσης βιβλιογραφίας, χρησιμοποιήθηκαν ως πηγές οι αντίστοιχες διπλωματικές εργασίες των συναδέλφων Γαϊτανή (2020) και Σεβνταλή (2012).

### 4.2. Στοχαστική διάταξη δύο τυχαίων μεταβλητών

Η στοχαστική διάταξη (ST) αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο το οποίο επιτρέπει αφενός την σύγκριση της επικινδυνότητας μεταξύ διαφορετικών τυχαίων καταστάσεων και αφετέρου την αναζήτηση εκείνου του κινδύνου ο οποίος είναι περισσότερο ελκυστικός μεταξύ άλλων. Ο ευκολότερος τρόπος προκειμένου να ταξινομηθούν αυτά τα ζημιογόνα ενδεχόμενα είναι μέσω του υπολογισμού κάποιων μέτρων κινδύνων και εν συνεχεία η αξιολόγηση αυτών. Οι στοχαστικές διατάξεις αποτελούν ειδικές περιπτώσεις των μερικών διατάξεων (partial orders). Παρατίθεται ο ορισμός της μερικής διάταξης.



### 4.2.1 Ορισμός

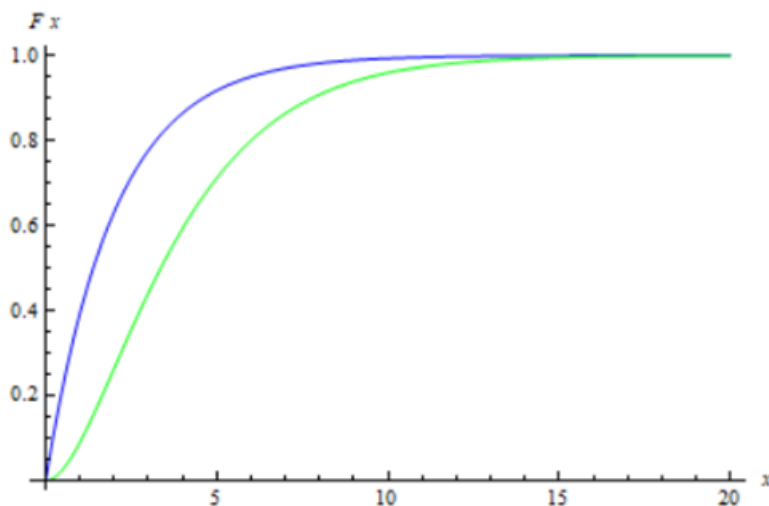
Η διμελής σχέση  $<$  σε ένα αυθαίρετο σύνολο  $S$  ονομάζεται μερική διάταξη αν και μόνο αν ισχύει (Σεβνταλής, 2012):

- i. Αντανεκλαστικότητα (reflexivity) :  $x < x \forall x \in S$
- ii. Μεταβατικότητα (transitivity) : αν  $x < y$  και  $y < z$  τότε  $x < z$
- iii. Αντισυμμετρία (antisymmetry) : αν  $x < y$  και  $y < x$  τότε  $x = y$

Στην περίπτωση που το σύνολο  $S$  περιλαμβάνει τις συναρτήσεις κατανομής (σ.κ.) για τις πραγματικές τιμές των τ.μ., τότε αυτή η μερική διάταξη ονομάζεται στοχαστική διάταξη.

Η πιο συνήθης σύγκριση πιθανοτικών μέτρων δύο κινδύνων είναι η σύγκριση των σ.κ. τους. Αν  $F_X(t) > F_Y(t)$  τότε η τ.μ.  $X$  παίρνει μικρές τιμές με πιο μεγάλη πιθανότητα από ότι η τ.μ.  $Y$ , ή αντίστροφα η τ.μ.  $X$  παίρνει μεγάλες τιμές με μικρότερη πιθανότητα απ'ότι η  $Y$ .

Υπάρχουν δε περιπτώσεις όπως η Εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda > 0$  της οποίας η σ.κ. είναι μεγαλύτερη για κάθε  $x > 0$  της σ.κ. της κατανομής Erlang με παραμέτρους 2 και  $\lambda > 0$ . Στο γράφημα της εικόνας 1 σχεδιάζουμε τις σ.κ. για κάθε μια κατανομή (Mathematica, εικόνα 1), την εκθετική( $\lambda=0,5$ ) και την Erlang( $\nu=2, \lambda=0,5$ ) (μπλε και πράσινη καμπύλη αντίστοιχα).



Γραφική Παράσταση 4.1 – Σύγκριση συναρτήσεων κατανομών δύο τυχαίων μεταβλητών  $X \sim \text{Exp}(0.5)$  και  $Y \sim \text{Erlang}(2, 0.5)$

Στο κεφάλαιο 2 είδαμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η πρώτη παράμετρος της κατανομής Erlang (εφόσον η δεύτερη παράμετρος είναι σταθερή) τόσο περισσότερο βαριά ουρά αποκτά η κατανομή. Στην περίπτωση που μελετάμε εδώ, η Erlang(2, λ) είναι βαρύτερης ουράς της Erlang(1, λ) που ταυτίζεται με την εκθετική(λ). Εκτός από διαγραμματικά που μας δίνει μια οπτική εικόνα, το παραπάνω μπορεί να αποδειχθεί και αναλυτικά. Πράγματι, έστω  $X \sim \text{Erlang}(k < v, \lambda)$  και  $Y \sim \text{Erlang}(v, \lambda)$ , τότε:

$$F_Y(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{v-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = 1 - e^{-\lambda t} \left( \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} + \sum_{i=k}^{v-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \right) > 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = F_X(t)$$

$$\Leftrightarrow \bar{F}_X(t) < \bar{F}_Y(t)$$

συνεπώς σύμφωνα με τον Ορισμό 4.2.2 που ακολουθεί,  $X <_{ST} Y$ .

#### 4.2.2. Ορισμός

Η τ.μ.  $X$  είναι μικρότερη από την τ.μ.  $Y$  ως προς τη συνήθη στοχαστική διάταξη, δηλαδή  $X <_{ST} Y$ , αν:

$$F_X(t) \geq F_Y(t), \quad \forall t > 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t), \quad \forall t > 0, \quad \text{όπου } \bar{F}_X(t) = \Pr(X > t)$$

Ας πάρουμε την περίπτωση της κατανομής Pareto και ας δούμε πως επιδρούν οι παράμετροι αυτής  $\alpha > 0$  και  $\delta > 0$  στη στοχαστική διάταξη.

#### 4.2.1 Εφαρμογή – Στοχαστική διάταξη της μέγιστης σωρευτικής απώλειας $L_X, L_Y$ με Pareto

Έστω  $X \sim \text{Pareto}(\alpha_1, \delta)$  και  $Y \sim \text{Pareto}(\alpha_2, \delta)$  με  $\alpha_1 < \alpha_2$ . Τότε

$$\bar{F}_X(t) = \left( \frac{\delta}{t + \delta} \right)^{\alpha_1} > \left( \frac{\delta}{t + \delta} \right)^{\alpha_2} = \bar{F}_Y(t), \quad \text{άρα } X >_{st} Y.$$

Έστω  $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \delta_1)$  και  $Y \sim \text{Pareto}(\alpha, \delta_2)$  με  $\delta_1 < \delta_2$ . Τότε

$$\bar{F}_X(t) = \left( \frac{\delta_1}{t + \delta_1} \right)^\alpha < \left( \frac{\delta_2}{t + \delta_2} \right)^\alpha = \bar{F}_Y(t) \Leftrightarrow \frac{\delta_1}{t + \delta_1} < \frac{\delta_2}{t + \delta_2} \Leftrightarrow \delta_1(t + \delta_2) < \delta_2(t + \delta_1) \Leftrightarrow \delta_1 < \delta_2$$

αληθές, άρα

$$X <_{st} Y$$

Συνεπώς, μεγαλύτερη παράμετρος  $\alpha > 0$  μειώνει τη στοχαστική διαταξιμότητα του κινδύνου, ενώ αντιθέτως μεγαλύτερη παράμετρος  $\delta > 0$  αυξάνει τη στοχαστική διαταξιμότητα του κινδύνου.

Η παραπάνω πληροφορία μεταφέρεται επίσης και στην κατανομή της πτώσης πλεονάσματος εφόσον είδαμε (Εφαρμογή 3.3.2.2) ότι για ατομικό κίνδυνο κατανομής  $\text{Pareto}(\alpha, \delta)$ , η πτώση πλεονάσματος ακολουθεί την κατανομή  $\text{Pareto}(\alpha-1, \delta)$ .

Επομένως, η πτώση πλεονάσματος της τ.μ.  $X$  είναι  $L_{1,X} \sim \text{Pareto}(\alpha_1-1, \delta)$  και η πτώση πλεονάσματος της τ.μ.  $Y$  είναι  $L_{1,Y} \sim \text{Pareto}(\alpha_2-1, \delta)$ , τότε εφόσον  $\alpha_1 < \alpha_2$  προκύπτει ότι και  $\alpha_1-1 < \alpha_2-1$ , άρα  $L_{1,X} >_{st} L_{1,Y}$ .

Αν οι κίνδυνοι τ.μ.  $X$  και  $Y$  ακολουθούν τις κατανομές  $\text{Pareto}(\alpha, \delta_1)$  και  $\text{Pareto}(\alpha, \delta_2)$  αντίστοιχα με  $\delta_1 < \delta_2$ , τότε οι αντίστοιχες πτώσεις πλεονάσματος θα είναι  $L_{1,X} \sim \text{Pareto}(\alpha-1, \delta_1)$  και  $L_{1,Y} \sim \text{Pareto}(\alpha-1, \delta_2)$ . Συνεπώς,  $L_{1,X} <_{st} L_{1,Y}$ .

Ας υποθέσουμε τώρα την ύπαρξη δύο χαρτοφυλακίων, το καθένα από τα οποία απαρτίζεται από κινδύνους  $\text{Pareto}$  ώστε  $L_{1,X} <_{st} L_{1,Y}$ , όπου  $L_{1,X}$  και  $L_{1,Y}$  είναι οι πτώσεις πλεονάσματος αντίστοιχα των κινδύνων  $X$  και  $Y$  που αφορούν αντίστοιχα το πρώτο και δεύτερο χαρτοφυλάκιο. Έστω τ.μ  $M$  και  $N$  το πλήθος αυτών στο πρώτο και δεύτερο χαρτοφυλάκιο αντίστοιχα, ώστε  $M <_{st} N$ . Τότε προκύπτει η στοχαστική διάταξη της μέγιστης σωρευτικής απώλειας  $L_X, L_Y$  του πρώτου και δεύτερου χαρτοφυλακίου αντίστοιχα (Γραμματικοπούλου, 2021):

$$\sum_{i=1}^M L_{i,X} \leq_{ST} \sum_{i=1}^M L_{i,Y} \Leftrightarrow L_X \leq L_Y$$

#### 4.2.2 Εφαρμογή – Στοχαστική διάταξη της μέγιστης σωρευτικής απώλειας $L_X, L_Y$ με Weibull

Έστω τώρα ένα πρώτο χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από κινδύνους τ.μ.  $X \sim \text{Weibull}(c=3, \gamma=0.5)$  και ένα δεύτερο χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από κινδύνους τ.μ.  $Y \sim \text{Weibull}(c=3, \gamma=0.6)$ .

Η σ.κ. των κινδύνων  $X$  και  $Y$  είναι αντίστοιχα

$$F_X(x) = 1 - e^{-3x^{0.5}} \quad x \geq 0 \quad \text{και} \quad F_Y(x) = 1 - e^{-3x^{0.6}}, \quad x \geq 0$$

και μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι

$$F_X(x) < F_Y(x) \quad \text{για κάθε } x > 0$$

άρα

$$X >_{st} Y$$

Οι αντίστοιχες πτώσεις πλεονάσματος των κινδύνων τ.μ.  $X$  και  $Y$  είναι  $L_X$  και  $L_Y$  με σ.κ.

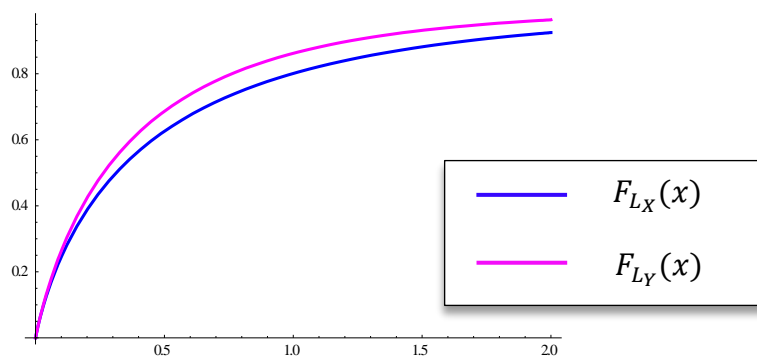
$$F_{L_X}(x) = 1 - \bar{H}_X(x) = 1 - \frac{1}{0.222} \cdot \int_x^\infty e^{-3t^{0.5}} dt \quad \text{και}$$

$$F_{L_Y}(x) = 1 - \bar{H}_Y(x) = 1 - \frac{1}{0.241} \cdot \int_x^\infty e^{-3t^{0.6}} dt$$

όπου,

$$\bar{H}_X(x) = \frac{1}{\mu_{1,X}} \int_x^\infty \bar{F}_X(t) dt = \frac{1}{\mu_{1,X}} \int_x^\infty e^{-3t^{0.5}} dt = \frac{1}{0.222} \cdot \int_x^\infty e^{-3t^{0.5}} dt \quad \text{και}$$

$$\bar{H}_Y(x) = \frac{1}{\mu_{1,Y}} \int_x^\infty \bar{F}_Y(t) dt = \frac{1}{\mu_{1,Y}} \int_x^\infty e^{-3t^{0.6}} dt = \frac{1}{0.241} \cdot \int_x^\infty e^{-3t^{0.6}} dt$$



Γραφική Παράσταση 4.2 - Κατανομή των κλιμακωτών υψών  $X$  και  $Y$

Όπως προκύπτει από το παραπάνω σχεδιάγραμμα  $F_{L_X}(x) < F_{L_Y}(x)$ . Συνεπώς, ακολούθως της στοχαστικής διάταξης  $X >_{st} Y$  παρατηρούμε και ότι  $L_X >_{st} L_Y$ .

Έστω τ.μ  $M$  και  $N$  το πλήθος αυτών στο πρώτο και δεύτερο χαρτοφυλάκιο αντίστοιχα, ώστε  $M >_{st} N$ . Τότε προκύπτει η στοχαστική διάταξη της μέγιστης σωρευτικής απώλειας  $L_X, L_Y$  του πρώτου και δεύτερου χαρτοφυλακίου αντίστοιχα (Γραμματικοπούλου, 2021):

$$\sum_{i=1}^M L_{i,X} \geq_{ST} \sum_{i=1}^M L_{i,Y} \Leftrightarrow L_X \geq L_Y$$

Γράφουμε  $X <_{ST} Y$ , αλλά στη πραγματικότητα ισχύει  $F_X <_{ST} F_Y$ . Όταν ένας κίνδυνος  $X$  είναι μικρότερος από έναν κίνδυνο  $Y$  ως προς την στοχαστική διάταξη, τότε η στοχαστική διάταξη ισχύει και για τις σ.κ. των κινδύνων αυτών. Στην περίπτωση αυτή, η από κοινού σ.κ. των  $X$  και  $Y$  είναι συνήθως αδιάφορη, εξετάζονται μόνο οι περιθώριες συναρτήσεις των μεταβλητών. Ακολούθως (Denuit et al, 2005), παρατηρούμε ότι για τ.μ.  $X$  και  $Y$ , με σ.κ.  $F_X$  και  $F_Y$ , αντίστοιχα, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i.  $X <_{ST} Y$

ii. Υπάρχει ένας πιθανοτικός χώρος  $(\Omega, A, P)$  ο οποίος περιλαμβάνει τις τ.μ.

$\hat{X}$  και  $\hat{Y}$  με σ.κ.  $F_X$  και  $F_Y$  έτσι ώστε  $\hat{X}(\omega) \leq \hat{Y}(\omega)$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ .

Με άλλα λόγια, αν  $X <_{ST} Y$  τότε  $X <_{ST} \hat{Y}$  με την ίδια περιθώρια σ.κ. με την  $Y$ .

### 4.2.3. Παρατήρηση

Αν ισχύει  $X <_{ST} Y$  τότε ισοδύναμα  $E(f_X(x)) \leq E(f_Y(x))$  για κάθε αύξουσα συνάρτηση  $f$  για την οποία υπάρχει η μέση τιμή.

Η παρακάτω πρόταση αναφέρεται στην διάταξη των ροπών δύο τ.μ.  $X, Y$  όταν η  $X$  είναι στοχαστικά μικρότερη από την  $Y$ .

#### 4.2.4. Πρόταση

Έστω  $X$  και  $Y$  τ.μ. όπου η κάθε μία τ.μ. έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε:

i.  $X <_{ST} Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

ii.  $X <_{ST} Y$  και  $E(X) = E(Y)$ , τότε  $X =_d Y$

iii.  $X <_{ST} Y \Rightarrow E(X^n) \leq E(Y^n)$  ( $\tilde{X}, \tilde{Y}$  μη-αρνητικές τ.μ.)

Σε κάποιους επιστημονικούς κλάδους αντί για την συνηθισμένη στοχαστική διάταξη, χρησιμοποιείται η μηχανική διάταξη (engineer's order) η οποία βασίζεται στην σύγκριση των μέσων τιμών των μεταβλητών, δηλαδή η τ.μ.  $X$  είναι μικρότερη από την  $Y$  ως προς τους μέσους αν  $E(X) \leq E(Y)$ .

### 4.3. Στοχαστικές διατάξεις και αναλογιστική επιστήμη

Ακολουθούν βασικά θεωρήματα (Σεβνταλής, 2012) των απλών στοχαστικών διατάξεων (ST) τα οποία είναι πολύ χρήσιμα στην αναλογιστική επιστήμη και την μοντελοποίηση των κινδύνων.

#### 4.3.1. Πρόταση

Αν ισχύει  $F_n <_{ST} G_n \forall n$ , και οι ακολουθίες  $F_n$  και  $G_n$ , συγκλίνουν κατά κατανομή στις  $F$  και  $G$  αντίστοιχα, τότε  $F <_{ST} G$ .

#### 4.3.2. Πρόταση

Έστω  $X, Y, \Theta$  τ.μ. τέτοιες ώστε:  $(X / \Theta = \theta) <_{ST} (Y / \Theta = \theta) \forall \theta \in \Omega_\Theta$ , τότε:

$X <_{ST} Y$  όπου  $\Omega_\Theta$ , ο παραμετρικός χώρος της τ.μ.  $\Theta$ .

#### 4.3.3. Πρόταση

Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , και  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , ανεξάρτητες τ.μ. με  $X_i <_{ST} Y_i, i=1, \dots, n$

και  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  αύξουσα συνάρτηση, τότε θα ισχύει:

$$\Psi (X_1, \dots, X_n) <_{ST} \Psi (Y_1, \dots, Y_n).$$

#### 4.3.4. Πρόταση

Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , και  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , ανεξάρτητες τ.μ. με  $X_i <_{ST} Y_i, i=1, \dots, n$ , τότε:

$$\sum_{i=1}^n X_i <_{ST} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

#### 4.3.5. Πρόταση

Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , και  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , ανεξάρτητες τ.μ. με  $X_i <_{ST} Y_i, i=1, \dots, n$  και οι τ.μ.  $M, N$  είναι διακριτές και ανεξάρτητες από τις  $X, Y$ , τότε θα ισχύει:

$$\text{Αν } M <_{ST} N, \text{ τότε } \sum_{i=1}^M X_i <_{ST} \sum_{i=1}^N Y_i.$$

Ας δούμε εδώ ένα παράδειγμα στο συλλογικό πρότυπο όπου η συνολική ζημιά τ.μ.  $S$  περιγράφεται ως άθροισμα ανεξάρτητων κινδύνων ως τ.μ.  $X$ , το πλήθος των οποίων ως τ.μ.  $N$  ακολουθεί μια διακριτή κατανομή:

$$S = \begin{cases} 0, & N = 0 \\ X_1 + \dots + X_N, & N > 0 \end{cases}$$

Έστω δύο ανεξάρτητα χαρτοφυλάκια, κάθε ένα από τα οποία περιλαμβάνει ισόνομους αλλά ανεξάρτητους ατομικούς κινδύνους που ακολουθούν την εκθετική κατανομή και το πλήθος αυτών ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή:

Χαρτοφυλάκιο	Ατομικός κίνδυνος	Πλήθος κινδύνων
1	τ.μ. $X \sim \text{Exp}(\lambda_1), \lambda_1 > 0$	τ.μ. $N \sim G_1(p_1), 0 < p_1 < 1$
2	τ.μ. $Y \sim \text{Exp}(\lambda_2), \lambda_2 > 0$	τ.μ. $M \sim G_1(p_2), 0 < p_2 < 1$

Η πιθανότητα του ατομικού κινδύνου στο πρώτο χαρτοφυλάκιο να υπολείπεται του ατομικού κινδύνου στο δεύτερο χαρτοφυλάκιο είναι:

$$\begin{aligned}\Pr(X < Y) &= \int_0^{\infty} f_X(t) \cdot \bar{F}_Y(t) dt = \int_0^{\infty} \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} dt \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_0^{\infty} (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} dt = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\end{aligned}$$

η οποία είναι ασυμπτωτικά ίση με 1 αν  $\lambda_1 \gg \lambda_2$  (η παράμετρος  $\lambda_1$  είναι κατά πολύ μεγαλύτερη σε σχέση με την παράμετρο  $\lambda_2$ ), ή ισοδύναμα  $E(X) \ll E(Y)$ . Η κατανομή του πλήθους ζημιών σε κάθε χαρτοφυλάκιο είναι γεωμετρική ( $G_1$ ) με παραμέτρους  $p_1$  και  $p_2$  για το πρώτο και δεύτερο χαρτοφυλάκιο και συμβολίζονται με τ.μ.  $N$  και  $M$  αντίστοιχα, όπου  $M, N=1,2,\dots$ , δηλαδή υποθέτουμε τουλάχιστον μια ζημιά σε κάθε χαρτοφυλάκιο.

Στο χαρτοφυλάκιο 1, η συνολική ζημιά  $S_1$  ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $p_1 \lambda_1$ . Πράγματι, η ροπογεννήτρια συνάρτηση αυτής  $M_1(u)$ :

$$M_1(u) = P_N(M_X(u)) = \frac{p_1 \cdot M_X(u)}{1 - q_1 \cdot M_X(u)} = \frac{p_1 \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - u}}{1 - q_1 \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - u}} = \frac{p_1 \cdot \lambda_1}{\lambda_1 - u - q_1 \cdot \lambda_1} = \frac{p_1 \cdot \lambda_1}{p_1 \cdot \lambda_1 - u}$$

Αντίστοιχα, η συνολική ζημιά  $S_2$  στο δεύτερο χαρτοφυλάκιο ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $p_2 \lambda_2$ . Η πιθανότητα αντίστοιχα  $\Pr(S_1 < S_2) = \frac{\lambda_1 p_1}{\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2}$  η οποία ασυμπτωτικά είναι ίση με 1 αν σε συνδυασμό με την παραπάνω πληροφορία  $\lambda_1 \gg \lambda_2$  θεωρήσουμε ότι επιπρόσθετα  $p_1 \gg p_2$  ή ισοδύναμα  $E(N) = 1/p_1 \ll E(M) = 1/p_2$ .

Συνεπώς, αν με τις προϋποθέσεις τις παραπάνω θεωρήσουμε ότι  $X \leq_{st} Y$  και  $N \leq_{st} M$  τότε και  $S_1 \leq_{st} S_2$ .

Σε ότι αφορά την πιθανότητα χρεοκοπίας για ίδιο αποθεματικό  $u$ , ίδιο ρυθμό εισφορών  $c$  και ένταση ζημιών  $\lambda$ , θα δείξουμε ότι είναι μεγαλύτερη για το δεύτερο χαρτοφυλάκιο, δηλαδή ακολουθεί και αυτή την παραπάνω στοχαστική διάταξη:

$$\Psi_1(u; \lambda, c) \leq \Psi_2(u; \lambda, c)$$



Πράγματι,

$$\theta_1 = \frac{c}{\lambda \cdot E(X)} - 1 = \lambda_1 \cdot \frac{c}{\lambda} - 1 \geq \lambda_2 \cdot \frac{c}{\lambda} - 1 = \theta_2 \Leftrightarrow \frac{1}{1+\theta_1} \leq \frac{1}{1+\theta_2} \Rightarrow \Psi_1(0; \lambda, c) \leq \Psi_2(0; \lambda, c)$$

Επίσης,  $R_1 = \lambda_1 - \frac{c}{\lambda} \geq \lambda_2 - \frac{c}{\lambda} = R_2 \Rightarrow e^{-R_1 \cdot u} \leq e^{-R_2 \cdot u}$  και συνδυάζοντας αυτά μαζί,

$$\Psi_1(u; \lambda, c) = \Psi_1(0; \lambda, c) \cdot e^{-R_1 \cdot u} \leq \Psi_2(0; \lambda, c) \cdot e^{-R_2 \cdot u} = \Psi_2(u; \lambda, c)$$

Στον αναλογισμό και στην διαχείριση κινδύνων μία πολύ σημαντική έννοια η οποία έχει αναπτυχθεί τις τελευταίες δεκαετίες είναι η αξία σε κίνδυνο (Value at Risk, *VaR*). Η έννοια αυτή συνδέεται με το ερώτημα: σε ένα χαρτοφυλάκιο πόσο ζημιά περιμένουμε σε μία μέρα, ένα μήνα, ένα χρόνο κλπ και με ποιά πιθανότητα; Η χρήση του *VaR* αποτελεί το βασικό στοιχείο με βάση το οποίο υπολογίζεται η έκθεση σε κίνδυνο. Σε γενικές γραμμές το *VaR* είναι η κεφαλαιακή απαίτηση με πολύ μεγάλο βαθμό βεβαιότητας πχ 99.95%, η οποία είναι αναγκαία για την βιωσιμότητα της ασφαλιστικής εταιρείας ή ενός χρηματοοικονομικού οργανισμού.

Προκειμένου να γίνει η σύγκριση μεταξύ δύο κινδύνων  $X, Y$ , είναι αναγκαία η εξέταση της έννοιας του *VaR* (Kaas et al, 2008).

#### 4.3.6. Ορισμός

Έστω κίνδυνος  $X$  και ένα επίπεδο πιθανότητας  $p \in [0, 1]$  τότε, η αξία σε κίνδυνο  $VaR[X; p]$  είναι το  $100p$  ποσοστημόριο της κατανομής του κινδύνου  $X$ .

Η αξία της χρήσης κατανομών και πιθανοτήτων καθιστά περισσότερο προσδιοριστική την έννοια της αξίας κινδύνου *VaR* σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα δοθέντος επιπέδου πιθανότητας  $p$  (Denuit et al, 2005). Η αξία κινδύνου  $X$  και πιθανότητας  $p$  είναι:

$$VaR(X; p) = F_X^{-1}(p) = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) < p\}$$

όπου  $F_X$  είναι η συνάρτηση κατανομής του κινδύνου  $X$ .

Για παράδειγμα, επιλέγοντας την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda > 0$ ,

$$F_X(x) = y \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda x} = y \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - y \Leftrightarrow -\lambda x = \ln(1 - y) \Leftrightarrow x = -\frac{\ln(1 - y)}{\lambda}.$$

Συνεπώς,

$$VaR[X; p] = F_X^{-1}(p) = -\frac{\ln(1 - p)}{\lambda}.$$

Η αξία σε κίνδυνο στο παράδειγμα αυτό είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση ως προς  $p$  διότι

$$\frac{\partial}{\partial p} \left( -\frac{\ln(1 - p)}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda(1 - p)} > 0$$

και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ως προς την παράμετρο  $\lambda > 0$  ή ισοδύναμα αυξάνεται για μεγαλύτερο αναμενόμενο κίνδυνο καθώς

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left( -\frac{\ln(1 - p)}{\lambda} \right) = \frac{\ln(1 - p)}{\lambda^2} = \ln(1 - p) \cdot (E(X))^2 < 0$$

Η σχέση που προσδιορίζει την αξία σε κίνδυνο είναι ιδιαίτερος χρηστική διότι για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$  και πιθανότητα  $p$  ισχύει (εργασία, Πολίτης Θ. 2014):

$$VaR(X; p) \leq x \Leftrightarrow p \leq F_X(x)$$

Η σχέση αυτή είναι επίσης σχέση αντικειμενικότητας του  $VaR$  δεδομένου ότι εξαρτάται μόνο από την συνάρτηση κατανομής του κινδύνου.

Με βάση τον ορισμό της αξίας του ρίσκου που παρουσιάσαμε παραπάνω, προκύπτουν οι κάτωθι ιδιότητες:

- $VaR(X; p) \leq \max\{X\}, \forall p \in (0, 1)$ , δηλαδή το  $VaR$  δεν υπερβαίνει το μέγιστο κίνδυνο.
- Ιδιότητα γραμμικότητας:  $VaR(aX + b; p) = a \cdot VaR(X; p) + b$ , όπου  $X$  είναι ο στοχαστικός κίνδυνος και  $b$  είναι ο σταθερός (ντετερμινιστικός) κίνδυνος. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι το  $VaR$  είναι ανάλογο του κινδύνου  $X$  ή σταθερό ως προς τον ντετερμινιστικό κίνδυνο  $b$ . Ειδικότερα για τον σταθερό κίνδυνο παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει πρόσθετο περιθώριο ασφάλειας.
- Μονοτονική ιδιότητα:  $P_r(X \leq Y) = 1 \Leftrightarrow VaR(X; p) \leq VaR(Y; p)$

- *Σύγκλιση κατά κατανομή*:  $\lim_{n \rightarrow \infty} VaR(X_n; p) = VaR(X; p)$  για μια ακολουθία κινδύνων  $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$  η οποία συγκλίνει κατά κατανομή στην  $X$ .
- *Προσθετικότητα ανεξάρτητων κινδύνων*  $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ :  $VaR(S; p) = \sum_{j=1}^n VaR(X_j; p)$ , όπου  $S = \sum_{j=1}^n X_j$ . Στην περίπτωση δε όπου δεν ισχύει η ανεξαρτησία δεν ισχύει η παραπάνω σχέση. Για παράδειγμα για δύο συναφείς μεταξύ τους κινδύνους  $X, Y$  το  $VaR$  του αθροίσματος αυτών είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο του αθροίσματος των επιμέρων  $VaR$  (Denuit et al, 2005).

Η συνάρτηση του μέτρου κινδύνου  $\rho(X)$  συνδυάζεται με την αξία κινδύνου  $VaR$  ώστε να προκύψει η ελαχιστοποίηση που αναφέραμε παραπάνω σε ότι αφορά το υψηλό κεφάλαιο που αυξάνει τη φερεγγυότητα μεν, αλλά αυξάνει και το κόστος κράτησης (Dhaen et al., 2003):

$$\rho(X) = VaR(X; p = 1 - \varepsilon).$$

Προκύπτει ως εκ τούτου η χρησιμότητα του  $VaR$  για την ποσοτικοποίηση των επιχειρηματικών οικονομικών κεφαλαίων (EC):

$$EC(S; p) = Var(S; p) - E(S)$$

Το επίπεδο  $p$  είναι η πιθανότητα επάρκειας του κεφαλαίου κάλυψης των αναμενόμενων ζημιών.

#### 4.3.1 Εφαρμογή – Αξία σε ρίσκο $VaR$

Θα συγκρίνουμε τις αξίες σε ρίσκο μεταξύ κινδύνων  $X$  και  $Y$  που ακολουθούν την κατανομή Pareto και την κατανομή Log-Pareto αντίστοιχα αμφότερες με παραμέτρους  $\alpha=5>0$  και  $\delta=20>0$  και  $p=0.99$ .

Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ.  $X \sim \text{Pareto}$  είναι

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = 16000000 \cdot \left( \frac{1}{16000000} - \frac{1}{5 \cdot (20+x)^5} \right), \quad x > 0$$

Η συνάρτηση κατανομής της  $Y \sim \text{Log} - \text{Pareto}$  είναι

$$F_Y(t) = F_X(\ln t)$$

Υπολογίζουμε ότι για την κατανομή Pareto,

$$VaR(X; p) = F_X^{-1}(p) = 30.2377$$

ενώ για την αντίστοιχη Log-Pareto,

$$VaR(Y; p) = F_Y^{-1}(p) = 1.35543 \times 10^{12}$$

Συνεπώς, παρατηρούμε ότι  $VaR(Y; p) > VaR(X; p)$

Επίσης, υπολογίζοντας το όριο

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_X(x)}{\bar{F}_Y(x)} = 0$$

παρατηρούμε ότι η τ.μ.  $Y$  είναι βαρύτερης δεξιάς ουράς σε σχέση με την τ.μ.  $X$ .

Τα παραπάνω ευρήματα στοιχειοθετούν ότι  $X <_{st} Y$ .

#### 4.4. Διατάξεις βαθμίδας κινδύνου

Σε πολλές περιπτώσεις απαιτούνται έννοιες περισσότερο πολύπλοκες από τις απλές στοχαστικές διατάξεις. Έστω ένα πρόβλημα όπου κάποιος θέλει να αγοράσει ένα μηχάνημα έχοντας να επιλέξει μεταξύ δύο μηχανημάτων με υπολειπόμενους χρόνους ζωής  $X$  και  $Y$  αντίστοιχα. Αν ισχύει  $X <_{st} Y$  και η τιμή των μηχανημάτων αυτών είναι η ίδια, τότε θα επιλέξει το δεύτερο μηχάνημα εφόσον δεν πρόκειται για παράλογο άτομο. Αν όμως θέλει να αγοράσει ένα μηχάνημα που ήδη μετράει ένα χρόνο παλαιότητας, οι νέοι υπολειπόμενοι χρόνοι ζωής θα είναι  $\tilde{X}$  και  $\tilde{Y}$ , όπου  $\Pr(\tilde{X} > t) = \Pr(X > 1+t / X > 1)$  και αντίστοιχα και για την  $\tilde{Y}$ . Το ερώτημα είναι ποιο μηχάνημα θα επιλεγεί στην περίπτωση αυτή;

Οι διατάξεις βαθμίδας κινδύνου (Hazard Rate orders; HR) επικεντρώνονται στην μελέτη των ποσοτήτων  $(X - t / X > t)$  και  $(Y - t / Y > t)$ . Οι διατάξεις αυτές βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή στην αντασφάλιση, αφού η τ.μ.  $Z = X - t / X > t$  αναπαριστά το ποσό που πλήρωσε ο αντασφαλιστής σε ένα συμβόλαιο stop-loss δεδομένου ότι η ζημιά είχε φτάσει το όριο  $t$ .

Επιπλέον, αυτές οι διατάξεις έχουν εφαρμογή και στις ασφαλίσεις ζωής, δεδομένου ότι οι τ.μ.  $X$  και  $Y$  αναπαριστούν τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής ομάδας ασφαλισμένων. Ο συμβολισμός  $X <_{HR} Y$  σημαίνει ότι οι ασφαλισμένοι της 2ης ομάδας θα ζήσουν περισσότερο από εκείνους της 1ης. Οι ορισμοί, προτάσεις και παρατηρήσεις αναφορικά της διάταξης βαθμίδας κινδύνων προέρχονται από την εργασία του Γαϊτανή (2020).

#### 4.4.1. Ορισμός

Η τ.μ.  $X$  είναι μικρότερη από την τ.μ.  $Y$  ως προς την διάταξη βαθμίδας κινδύνου  $X <_{HR} Y$  αν και μόνο αν ισχύει μία από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:

i.  $(X / X > t) <_{ST} (Y / Y > t) \forall t \geq 0$

ii.  $t \rightarrow \frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)}$  είναι μη φθίνουσα

iii.  $\bar{F}_X(u)\bar{F}_Y(w) > \bar{F}_X(w)\bar{F}_Y(u), \forall u < w$

Αν θεωρήσουμε ότι οι τ.μ.  $X$  και  $Y$  είναι διακριτές τότε έχουμε την παρακάτω παρατήρηση.

#### 4.4.2. Παρατήρηση

Έστω  $X <_{HR} Y$ , τότε ισχύει:

$$\Pr(X > u)\Pr(Y > w) > \Pr(X > w)\Pr(Y > u), \forall u < w$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Pr(X > u) > \Pr(Y > u) \\ \Pr(X > w) > \Pr(Y > w) \end{cases}$$

Έστω:  $u=w=n, u=n+1, w=n \forall n \in \mathbb{N}$

Τότε: 
$$\frac{\Pr(X = n)}{\Pr(X > n)} \geq \frac{\Pr(Y = n)}{\Pr(Y > n)}$$

Η συνάρτηση αξιοπιστίας ή επιβίωσης μιας τυχαίας μεταβλητής εξετάζει την πιθανότητα να προκύψουν απώλειες ζωής ή καταστροφές πέρα από μια τιμή. Η διάρκεια ζωής μιας τυχαίας μεταβλητής δεδομένου ότι έχει επιζήσει μέχρι κάποια χρονική στιγμή  $t > 0$  έχει σ.π.π. τη συνάρτηση ρυθμού κινδύνου ή βαθμίδας κινδύνου (hazard rate function, ή failure rate function) και συμβολίζεται με  $r(t)$ .

#### 4.4.3. Πρόταση

Αν οι τ.μ.  $X$  και  $Y$  είναι συνεχείς και  $r(t) = \frac{f(t)}{F(t)}$ , η συνάρτηση βαθμίδας κινδύνου (hazard rate function) τότε:

- i.  $X <_{HR} Y \Leftrightarrow r_Y(t) < r_X(t), \forall t$
- ii.  $X <_{HR} Y \Leftrightarrow g(X) <_{HR} g(Y)$ , για κάθε αύξουσα συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- iii.  $X <_{HR} Y \Rightarrow X <_{ST} Y$

#### 4.4.4. Ορισμός

Η τ.μ.  $X$  είναι μικρότερη από την τ.μ.  $Y$  ως προς την διάταξη της αντίστροφης βαθμίδας κινδύνου ( $X <_{RH} Y$ ) αν:

- i.  $t \rightarrow \frac{F_Y(t)}{F_X(t)}$  είναι μη-φθίνουσα
- ii.  $(X/X < t) <_{ST} (Y/Y < t), \forall t > 0$

Παρακάτω αναλύουμε τέσσερα βασικά μοντέλα διατάξεων βαθμίδας κινδύνου:

I) Σταθερό μοντέλο διαβάθμισης κινδύνου, όταν η κατανομή του κινδύνου είναι εκθετική με

παράμετρο  $\lambda > 0$  οπότε και  $r(t) = \lambda$ . Πράγματι,  $r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$

II) Γραμμικό μοντέλο διαβάθμισης κινδύνου, όταν η κατανομή του κινδύνου έχει σ.π.π.

$$f(t) = (a+bt)e^{-at-\frac{bt^2}{2}}, \quad t \geq 0, \text{ και } \sigma.κ. \quad F(t) = 1 - e^{-at-\frac{bt^2}{2}}, \quad \text{οπότε}$$

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{(a+bt)e^{-at-\frac{bt^2}{2}}}{e^{-at-\frac{bt^2}{2}}} = a + bt$$

III) Μοντέλο δύναμης διαβάθμισης κινδύνου, αν η σ.π.π. είναι  $f(t) = e^{-t^c} ct^{c-1}$ ,  $t \geq 0$ ,  $c > 0$  με

$$F(t) = 1 - e^{-t^c} \text{ άρα, } r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{e^{-t^c} ct^{c-1}}{e^{-t^c}} = ct^{c-1}$$

IV) Εκθετικό μοντέλο διαβάθμισης κινδύνου, όπου η σ.π.π.  $f(t) = e^t e^{-e^t+1}$ ,  $t \geq 0$

$$\text{με } \sigma.κ. \quad F(t) = 1 - e^{-e^t} \text{ άρα, } r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{e^t e^{-e^t+1}}{e^{-e^t}} = e^{t+1}$$

#### 4.4.1 Εφαρμογή – Διατάξεις βαθμίδας κινδύνου

Θα συγκρίνουμε μεταξύ τους βαθμίδες κινδύνου α) μοντέλου δύναμης (τ.μ. X) και β) εκθετικού μοντέλου (τ.μ. Y) με αντίστοιχες σ.π.π

$$f_1(t) = e^{-t^c} ct^{c-1} \text{ και } f_2(t) = e^t e^{-e^t+1}, \quad t \geq 0$$

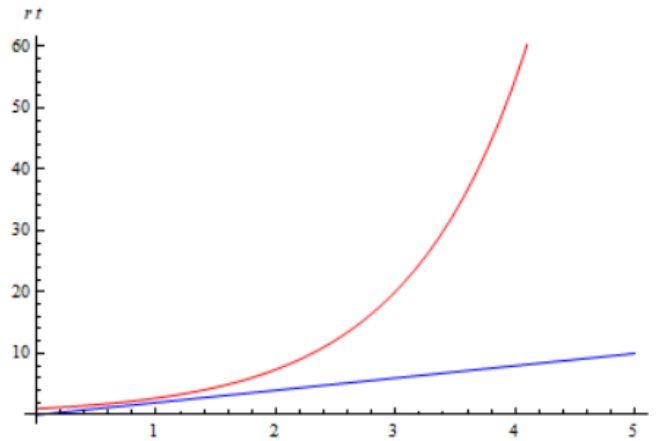
και αντίστοιχες σ.κ.

$$F_1(t) = c \left( \frac{1}{c} - \frac{e^{-t^c}}{c} \right) \text{ και } F_2(t) = 1 - e^{1-e^t}$$

Υπολογίζουμε τη βαθμίδα κινδύνου για τις τ.μ. X και Y

$$r_1(t) = \frac{f_1(t)}{\bar{F}_1(t)} = \frac{e^{-t^c} ct^{c-1}}{1 - c \left( \frac{1}{c} - \frac{e^{-t^c}}{c} \right)} \text{ και } r_2(t) = \frac{f_2(t)}{\bar{F}_2(t)} = e^t$$

Παρατηρούμε ότι για  $c = 1 \Rightarrow r_1(t) < r_2(t) \Leftrightarrow 1 < e^t$ , και για  $c = 2$ , επίσης (διαγραμματικά)  $r_1(t) < r_2(t)$



Γραφική παράσταση 4.3 – Σύγκριση συναρτήσεων βαθμίδας κινδύνου για τις τ.μ.  $X$  και  $Y$

και καταλήγουμε σε αμφότερες περιπτώσεις ότι  $X <_{st} Y$ .

## 4.5. Διατάξεις λόγου πιθανοφάνειας

Στην ενότητα αυτή θα αναλυθούν οι διατάξεις λόγου πιθανοφάνειας (Likelihood Ratio order; LR) (Denuit et al, 2005).

### 4.5.1. Ορισμός

Η τ.μ.  $X$  είναι μικρότερη από την τ.μ.  $Y$  ως προς την διάταξη του λόγου πιθανοφάνειας ( $X <_{LR} Y$ ) αν και μόνο αν ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:

i. Η συνάρτηση  $t \rightarrow \frac{f_Y(t)}{f_X(t)}$  είναι αύξουσα

ii.  $(X/a < X < b) <_{st} (Y/a < Y < b)$ ,  $\forall a < b \in \mathbb{R}$

Ο ορισμός αυτός ισχύει τόσο για συνεχείς κατανομές, όσο και για διακριτές και μικτές κατανομές.

### 4.5.2. Πρόταση

Ισχύει  $X <_{LR} Y$  αν και μόνο αν το γράφημα  $\mathbf{K} = P-P$  plot είναι κυρτό (convex): για κάθε σημεία  $(x, y) \in \mathbf{K}$ , και για κάθε  $0 < \lambda < 1$  ισχύει  $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathbf{K}$  (Ηλιόπουλος, 2019).



Οι διατάξεις λόγου πιθανοφάνειας είναι στοχαστικά πιο ισχυρές από τις διατάξεις της βαθμίδας αποτυχίας και τις απλές στοχαστικές διατάξεις (Γαϊτανής, 2020), δηλαδή:

$$X <_{LR} Y \Rightarrow X <_{HR} Y \Rightarrow X <_{ST} Y$$

### 4.5.3. Παρατήρηση

Οι παρακάτω σχέσεις είναι ισοδύναμες

i.  $X <_{LR} Y$

ii.  $\Pr(X \in V)\Pr(Y \in U) \leq \Pr(X \in U)\Pr(Y \in V)$ ,  $U = [a, b], V = [c, d], a < b < c < d$

iii.  $(X/X \in A) <_{ST} (Y/Y \in A)$  για όλα τα ενδεχόμενα  $A$  με  $\Pr(X \in A) > 0$  και  $\Pr(Y \in A) > 0$

iv.  $(X/X \in A) <_{LR} (Y/Y \in A)$  για όλα τα ενδεχόμενα  $A$  με  $\Pr(X \in A) > 0$  και  $\Pr(Y \in A) > 0$

Ακολουθούν βασικά θεωρήματα των διατάξεων του λόγου πιθανοφάνειας (LR) τα οποία είναι πολύ χρήσιμα στην αναλογιστική επιστήμη και την μοντελοποίηση των κινδύνων.

### 4.5.4. Πρόταση

Αν ισχύει  $X <_{LR} Y$ , τότε:

$$g(X) <_{LR} g(Y) \text{ για κάθε αύξουσα συνάρτηση } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν κάποιες προτάσεις οι οποίες συνδέονται με την κυρτότητα και ειδικότερα με το πότε μία τ.μ. είναι λογαριθμικά κοίλη. Ακολουθεί ο ορισμός μιας λογαριθμικά κοίλης τυχαιάς μεταβλητής.

### 4.5.5. Ορισμός

Μία τ.μ.  $X$  έχει λογαριθμικά κοίλη (log-concave) συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.),  $f_X(x)$  στο διάστημα  $(a, b)$  αν και μόνο αν η συνάρτηση  $\ln f_X(x)$  είναι κοίλη συνάρτηση στο διάστημα  $(a, b)$ , δηλαδή αν ισχύει:

$$\frac{d^2(\ln f_X(x))}{dx^2} < 0.$$

#### 4.5.6. Πρόταση

Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , και  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές (α.ι.τ.μ.) με λογαριθμικά κοίλες σ.π.π. έτσι ώστε  $X_i <_{ST} Y_i, i=1, \dots, n$ . Τότε θα ισχύει:

$$\sum_{i=1}^n X_i <_{LR} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

#### 4.5.7. Πρόταση

Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ανεξάρτητες τ.μ. με λογαριθμικά κοίλες σ.π.π., τότε

$$(X_i / \sum_{j=1}^m X_j = s_1) <_{LR} (X_i / \sum_{j=1}^m X_j = s_2), \text{ όπου } s_1 < s_2$$

### 4.6. Σκεδαστικές διατάξεις

Μια άλλη κατηγορία στοχαστικών διατάξεων είναι οι σκεδαστικές διατάξεις. Οι σκεδαστικές διατάξεις (Dispersive Orders; DISP) διατυπώθηκαν για πρώτη φορά από την ομάδα του Doksum το 1969 (Bickel & Doksum, 1969) ως διατάξεις κλίμακας (scale orders).

#### 4.6.1. Ορισμός

Η τ.μ.  $X$  είναι μικρότερη από την τ.μ.  $Y$  ως προς της σκεδαστική διάταξη ( $X <_{DISP} Y$ ) αν και μόνο αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

i.  $F_X^{-1}(t) - F_X^{-1}(s) < G_Y^{-1}(t) - G_Y^{-1}(s) \quad 0 < s < t < 1$

ii.  $X =_d \Phi(Y)$  όπου  $\Phi$  αύξουσα συνάρτηση έτσι ώστε  $\Phi(y) - \Phi(x) < y - x, \quad x < y$

iii.  $\Phi$  αύξουσα συνάρτηση έτσι ώστε  $\Phi(y) - \Phi(x) \geq y - x, \quad x < y$

Αν ισχύει  $X <_{DISP} Y$  και  $Y <_{DISP} X$ , τότε:

$$Y =_d X + c$$

Οι συνθήκες (ii) και (iii) του Ορισμού 4.6.1 χρησιμοποιούνται μόνο αν οι τ.μ.  $X$  και  $Y$  είναι συνεχείς.

#### 4.6.2. Πρόταση

Έστω  $X, X_1$  και  $Y, Y_1$  ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.. Αν ισχύει  $X <_{DISP} Y$  τότε  $|X - X_1| <_{ST} |Y - Y_1|$ , δηλαδή ισοδύναμα,  $\Pr(|X - X_1| > z) \leq \Pr(|Y - Y_1| > z)$ ,  $z \geq 0$ .

Με άλλα λόγια, αν η τ.μ.  $Y$  είναι περισσότερο διασκορπισμένη (dispersed) από την τ.μ.  $X$ , τότε η απόλυτη απόσταση  $|Y - Y_1|$ , μεταξύ των δύο ανεξάρτητων απεικονίσεων της  $Y$ , είναι μεγαλύτερη ως προς την στοχαστική διάταξη από εκείνη των ανεξάρτητων απεικονίσεων της  $X$ .

Επίσης,  $X <_{DISP} Y \Rightarrow X <_{ST} Y$

Σε συνέχεια της ερευνητικής μελέτης της ομάδας των Doksum και Bickel (1969) και αναφορικά με τις σκεδαστικές διατάξεις και αξία σε κίνδυνο παραθέτουμε τη κάτωθι πρόταση:

#### 4.6.3. Πρόταση

Η τ.μ.  $X$  είναι μικρότερη από την τ.μ.  $Y$  ως προς της σκεδαστική διάταξη ( $X <_{DISP} Y$ ) αν και μόνο αν:

$$i. (X - VaR[X; p])_+ <_{ST} (Y - VaR[Y; p])_+, \quad 0 < p < 1$$

$$ii. VaR[X; p_2] - VaR[X; p_1] < VaR[Y; p_2] - VaR[Y; p_1], \quad 0 < p_1 < p_2 < 1$$

$$iii. r_Y(VaR[X; p]) < r_X(VaR[X; p]), \quad 0 < p < 1$$

## Κεφάλαιο 5. Εφαρμογές Στοχαστικών Διατάξεων για κατανομές με Βαριά Ουρά

### 5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα συνδυάσουμε όσα προαναφέρθηκαν και θα παρουσιάσουμε πρακτικές εφαρμογές για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων.

### 5.2 Εφαρμογές Συνήθους Στοχαστικής Διάταξης

Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.2.2, αν για κάθε πραγματικό  $t$ , ισχύει ότι

$$F_X(t) \geq F_Y(t), \forall t > 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t), \forall t > 0, \text{ όπου } \bar{F}_X(t) = \Pr(X > t)$$

τότε η τυχαία μεταβλητή  $X$  θεωρείται ότι είναι μικρότερη ή ίση από την τυχαία μεταβλητή  $Y$  ως προς τη συνήθη στοχαστική διάταξη.

#### *Εφαρμογή 5.2.1 - Σύγκριση τυχαίων μεταβλητών που εκφράζονται από κατανομές Weibull με $c_1=c_1$*

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή  $X$  ακολουθεί την κατανομή Weibull με παραμέτρους  $c_1=6$  και  $\gamma_1=0.6$  και η τυχαία μεταβλητή  $Y$  ακολουθεί την κατανομή Weibull με παραμέτρους  $c_2=6$  και  $\gamma_2=0.3$ . Θα γίνει σύγκριση των δύο τυχαίων μεταβλητών ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη.

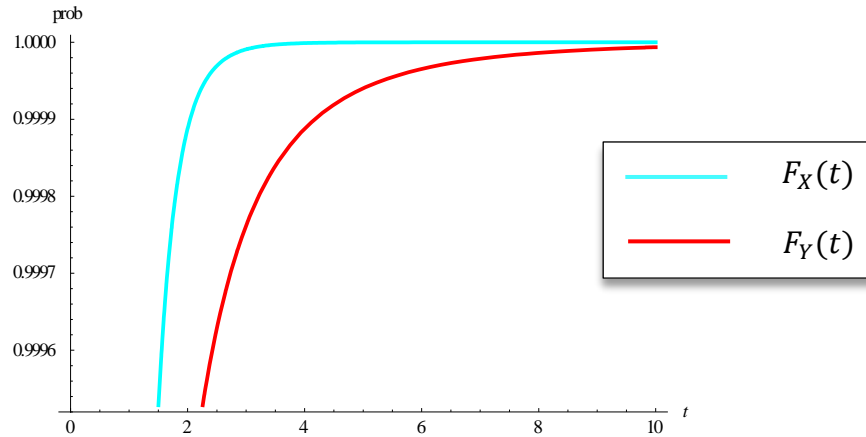
Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής  $X$  είναι:

$$F_X(t) = 1 - e^{-6t^{0.6}}, \quad t \geq 0$$

Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής  $Y$  είναι

$$F_Y(t) = 1 - e^{-6t^{0.3}}, \quad t \geq 0$$

Στη γραφική παράσταση 5.1 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι συναρτήσεις κατανομών και φαίνεται ότι η γραφική παράσταση της  $X$  βρίσκεται πιο πάνω από την γραφική παράσταση της  $Y$ .



*Γραφική Παράσταση 5.1 - Σύγκριση Συναρτήσεων Κατανομής  $X \sim \text{Weibull}(6,0.6)$ ,  $Y \sim \text{Weibull}(6,0.3)$*

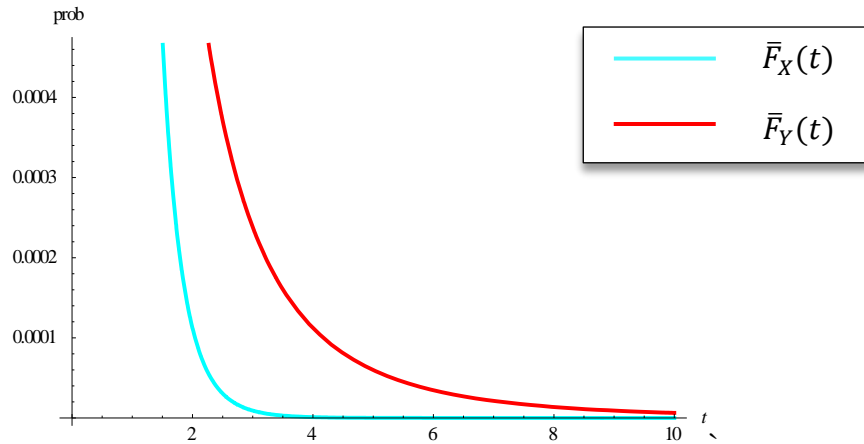
Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της  $X$ , είναι:

$$\bar{F}_X(t) = e^{-6t^{0.6}}, \quad t \geq 0$$

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της  $Y$ , είναι:

$$\bar{F}_Y(t) = e^{-6t^{0.3}}, \quad t \geq 0$$

Στη γραφική παράσταση 5.2 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι ουρές των κατανομών και παρατηρείται ότι η γραφική παράσταση της  $Y$  είναι πιο πάνω από την γραφική παράσταση της  $X$ .



*Γραφική Παράσταση 5.2 - Σύγκριση Συναρτήσεων Δεξιάς Ουράς των τυχαίων μεταβλητών  $X \sim \text{Weibull}(6,0.6)$ ,  $Y \sim \text{Weibull}(6,0.3)$*

Η παραπάνω απεικόνιση εύκολα αποδεικνύεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \bar{F}_X(t) &= e^{-c_1 \cdot t^{\gamma_1}} < \bar{F}_Y(t) = e^{-c_2 \cdot t^{\gamma_2}} \\ \Leftrightarrow -c_1 \cdot t^{\gamma_1} &< -c_2 \cdot t^{\gamma_2} \Leftrightarrow c_1 \cdot t^{\gamma_1} > c_2 \cdot t^{\gamma_2} \\ \stackrel{c_1=c_2}{\Leftrightarrow} t^{\gamma_1} &> t^{\gamma_2} \Leftrightarrow \gamma_1 > \gamma_2 \end{aligned}$$

Επομένως, η τυχαία μεταβλητή  $X$  υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής  $Y$ , ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη.

Άρα,

$$\bar{F}_X(t) < \bar{F}_Y(t) \Leftrightarrow X <_{st} Y$$

***Εφαρμογή 5.2.2 - Σύγκριση τυχαίων μεταβλητών που εκφράζονται από κατανομές Pareto με  $\alpha_1 = \alpha_2$***

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή  $X$  ακολουθεί την κατανομή Pareto με παραμέτρους  $\alpha_1 = 6$  και  $\lambda_1 = 4$  και η τυχαία μεταβλητή  $Y$  ακολουθεί την κατανομή Pareto με παραμέτρους  $\alpha_2 = 6$  και  $\lambda_2 = 8$ . Θα γίνει σύγκριση των δύο τυχαίων μεταβλητών ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη.

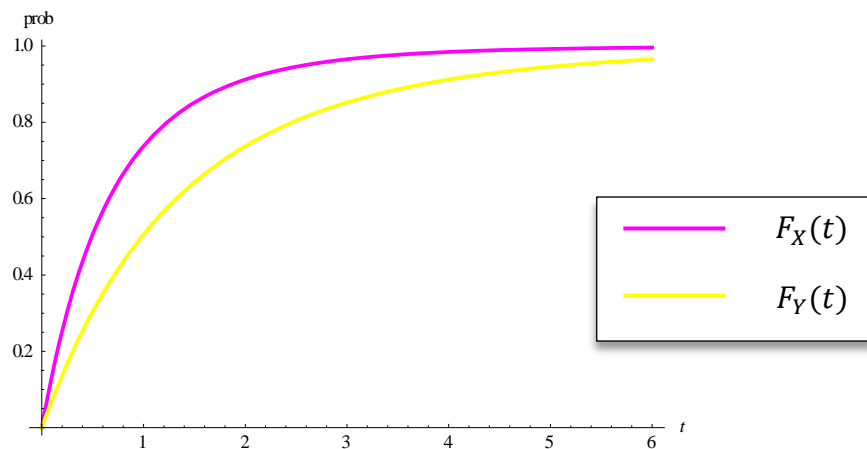
Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$F_X(t) = 1 - \frac{4096}{(4+t)^6}, \quad t \geq 0$$

Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής Y είναι

$$F_Y(t) = 1 - \frac{262144}{(8+t)^6}, \quad t \geq 0$$

Στη γραφική παράσταση 5.3 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι συναρτήσεις κατανομών και φαίνεται ότι η γραφική παράσταση της X βρίσκεται πιο πάνω από την γραφική παράσταση της Y.



Γραφική Παράσταση 5.3 - Σύγκριση Συναρτήσεων Κατανομής  $X \sim \text{Pareto}(6,4)$ ,  $Y \sim \text{Pareto}(6,8)$

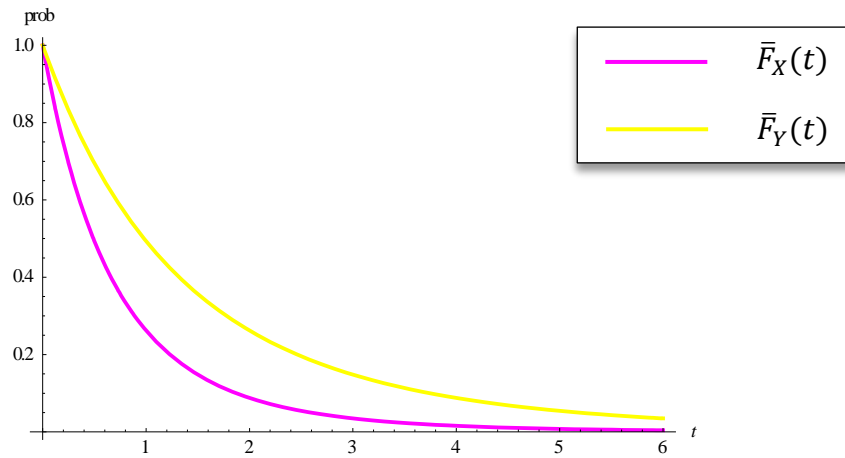
Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της X, είναι :

$$\bar{F}_X(t) = \frac{4096}{(4+t)^6}, \quad t \geq 0$$

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της Y, είναι :

$$\bar{F}_Y(t) = \frac{262144}{(8+t)^6}, \quad t \geq 0$$

Στη γραφική παράσταση 5.4 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι ουρές των κατανομών και παρατηρείται ότι η γραφική παράσταση της  $Y$  είναι πιο πάνω από την γραφική παράσταση της  $X$ .



*Γραφική Παράσταση 5.4 - Σύγκριση Συναρτήσεων Δεξιάς Ουράς των τυχαίων μεταβλητών  $X \sim \text{Pareto}(6,4)$ ,  $Y \sim \text{Pareto}(6,8)$*

Η παραπάνω απεικόνιση εύκολα αποδεικνύεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \bar{F}_X(t) &= \left(\frac{\lambda_1}{t + \lambda_1}\right)^{\alpha_1} < \left(\frac{\lambda_2}{t + \lambda_2}\right)^{\alpha_2} = \bar{F}_Y(t) \stackrel{\alpha_1 = \alpha_2}{\iff} \frac{\lambda_1}{t + \lambda_1} < \frac{\lambda_2}{t + \lambda_2} \\ &\iff \lambda_1(t + \lambda_2) < \lambda_2(t + \lambda_1) \iff \lambda_1 < \lambda_2 \end{aligned}$$

Επομένως, η τυχαία μεταβλητή  $X$  υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής  $Y$ , ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη.

Άρα,

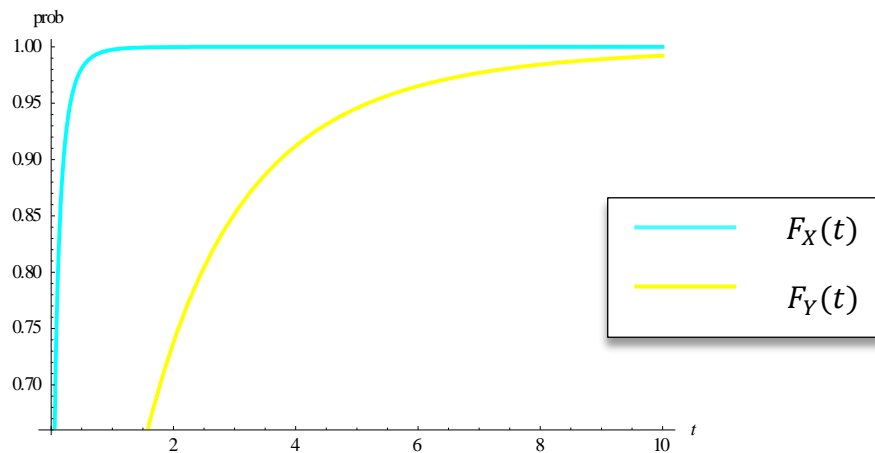
$$\bar{F}_X(t) < \bar{F}_Y(t) \iff X <_{st} Y$$



**Εφαρμογή 5.2.3 - Σύγκριση τυχαίων μεταβλητών που εκφράζονται από κατανομές Weibull και Pareto**

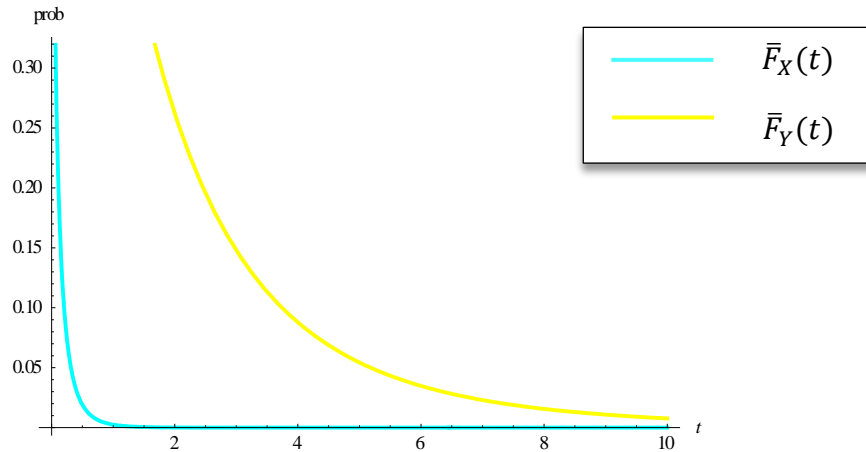
Έστω ότι έχουμε την τυχαία μεταβλητή  $X$  της Εφαρμογής 5.2.1 που ακολουθεί την κατανομή Weibull με παραμέτρους  $c_1=6$  και  $\gamma_1=0.6$  και την τυχαία μεταβλητή  $Y$  της Εφαρμογής 5.2.2 που ακολουθεί την κατανομή Pareto με παραμέτρους  $\alpha_2=6$  και  $\lambda_2=8$ . Θα γίνει σύγκριση των δύο τυχαίων μεταβλητών ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη.

Στη γραφική παράσταση 5.5 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι συναρτήσεις κατανομών και φαίνεται ότι η γραφική παράσταση της  $X$  βρίσκεται πιο πάνω από την γραφική παράσταση της  $Y$ .



*Γραφική Παράσταση 5.5 - Σύγκριση Συναρτήσεων Κατανομής  $X \sim \text{Weibull}(6,0.6)$ ,  $Y \sim \text{Pareto}(6,8)$*

Στη γραφική παράσταση 5.6 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι ουρές των κατανομών και παρατηρείται ότι η γραφική παράσταση της  $X$  είναι πιο κάτω από την γραφική παράσταση της  $Y$ .



*Γραφική Παράσταση 5.6 - Σύγκριση Συναρτήσεων Δεξιάς Ουράς των τυχαίων μεταβλητών  $X \sim \text{Weibull}(6,0.6)$ ,  $Y \sim \text{Pareto}(6,8)$*

Επομένως, η τυχαία μεταβλητή  $X$  υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής  $Y$ , ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη.

Άρα,

$$\bar{F}_X(t) < \bar{F}_Y(t) \Leftrightarrow X <_{st} Y$$

### 5.3. Σύγκριση Χαρτοφυλακίων για κατανομές με βαριά ουρά

Στην συνέχεια, θα μελετήσουμε και θα συγκρίνουμε δυο χαρτοφυλάκια με τη βοήθεια των στοχαστικών διατάξεων.

Όπως είδαμε στην **Πρόταση 4.3.5.**, ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα,

Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , και  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , ανεξάρτητες τ.μ. με  $X_i <_{ST} Y_i, i=1, \dots, n$  και οι τ.μ  $M, N$  είναι διακριτές και ανεξάρτητες από τις  $X, Y$ , τότε θα ισχύει:

$$\text{Αν } M <_{ST} N, \text{ τότε } \sum_{i=1}^M X_i <_{ST} \sum_{i=1}^N Y_i$$

**Εφαρμογή 5.3.1 - Σύγκριση Χαρτοφυλακίων που εκφράζονται από κατανομές Pareto με διαφορετικές παραμέτρους**

Έστω ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο ζημιών  $A$ , του οποίου οι ατομικές αποζημιώσεις εκφράζονται μέσω των τυχαίων μεταβλητών  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , οι οποίες ακολουθούν την κατανομή Pareto με μέση τιμή  $\mu_X = 2$  και η τ.μ.  $N \sim G_1\left(\frac{1}{3}\right)$ . Δίνεται επίσης ότι η ένταση της ανέλιξης Poisson  $\lambda$  για την άφιξη των αποζημιώσεων θα ισούται με 2 και η ένταση του ασφαλιστρού  $c$  θα ισούται με 6.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ατομικών ζημιών  $X_i$  θα δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$f(x) = \frac{5184}{(6+x)^5}$$

με παραμέτρους  $\alpha=4, \delta=6$ .

Η συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων θα δίνεται από την σχέση

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{5184}{(6+t)^5} dt = 1 - \frac{1296}{(6+x)^4}$$

και μέσω αυτής προκύπτει άμεσα η συνάρτηση δεξιάς ουράς ως εξής

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \frac{1296}{(6+x)^4}$$

Όπως είδαμε στην **Ενότητα 3.4**, η κατανομή Pareto δεν έχει ροπογεννήτρια συνάρτηση, καθώς απειρίζεται, με αποτέλεσμα να μην ορίζεται και ο συντελεστής προσαρμογής. Συνεπώς θα χρησιμοποιήσουμε τον ασυμπτωτικό τύπο των Embrechts-Veraverbeke:

$$\Psi_X(u) \sim \frac{1}{\theta} \cdot \bar{H}(u)$$

Η κατανομή των κλιμακωτών υψών δίνεται εξ ορισμού από την συνάρτηση κατανομής ισορροπίας

$$H_X(x) = P(L_{i,X} \leq x) = \frac{1}{\mu_{1,X}} \int_0^x \bar{F}(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1296}{(6+t)^4} dt = 1 - \frac{216}{(6+x)^3}$$

Η ουρά της συνάρτησης ισορροπίας θα είναι

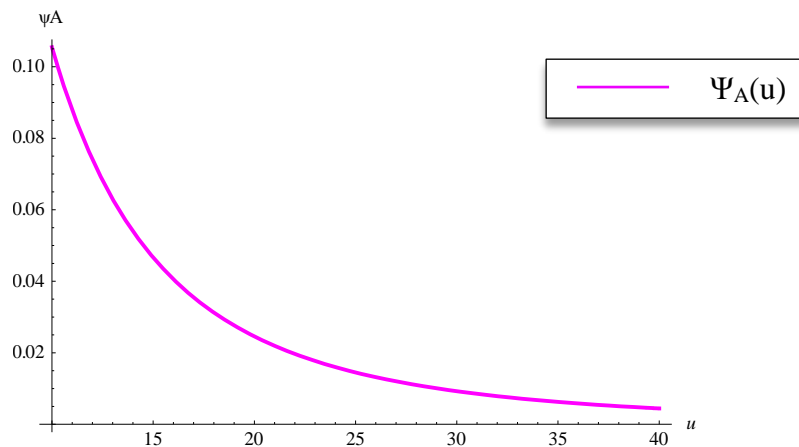
$$\bar{H}_X(x) = 1 - H_X(x) = \frac{216}{(6+x)^3}$$

Το περιθώριο ασφαλείας  $\theta_X$ , μπορεί να υπολογισθεί μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$\theta_X = \frac{c}{\lambda \cdot \mu_{1,X}} - 1 = \frac{6}{4} - 1 = 0,5$$

Συνεπώς, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

$$\Psi_X(u) \sim \frac{432}{(6+u)^3}$$



*Γραφική Παράσταση 5.7 - Πιθανότητα Χρεοκοπίας Χαρτοφυλακίου A.*

Για το χαρτοφυλάκιο B, δίνεται το ύψος των ατομικών αποζημιώσεων  $Y_1, Y_2, \dots, Y_M$  εκφράζεται και πάλι μέσω της κατανομής Pareto με μέση τιμή  $\mu_Y = 4$  και η τ.μ.  $M \sim G_1\left(\frac{1}{6}\right)$ .

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ατομικών ζημιών  $Y_i$  θα δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$f(y) = \frac{375}{(5+y)^4}$$

με παραμέτρους  $\alpha=3, \delta=5$ .

Η συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων θα δίνεται από την σχέση

$$F(y) = \int_0^y f(t)dt = \int_0^y \frac{375}{(5+t)^4} dt = 1 - \frac{125}{(5+y)^3}$$

και μέσω αυτής προκύπτει άμεσα η συνάρτηση δεξιάς ουράς ως εξής

$$\bar{F}(y) = 1 - F(y) = \frac{125}{(5+y)^3}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τον ασυμπτωτικό τύπο των Embrechts-Veraverbeke:

$$\Psi_Y(u) \sim \frac{1}{\theta} \cdot \bar{H}(u)$$

Η κατανομή των κλιμακωτών υψών δίνεται εξ ορισμού από την συνάρτηση κατανομής ισορροπίας

$$H_Y(y) = P(L_{i,Y} \leq y) = \frac{1}{\mu_{1,Y}} \int_0^y \bar{F}(t)dt = \frac{2}{5} \int_0^y \frac{125}{(5+t)^3} dt = \frac{y(10+y)}{(5+y)^2}$$

Η ουρά της συνάρτησης ισορροπίας θα είναι

$$\bar{H}_Y(y) = 1 - H_Y(y) = 1 - \frac{y(10+y)}{(5+y)^2}$$

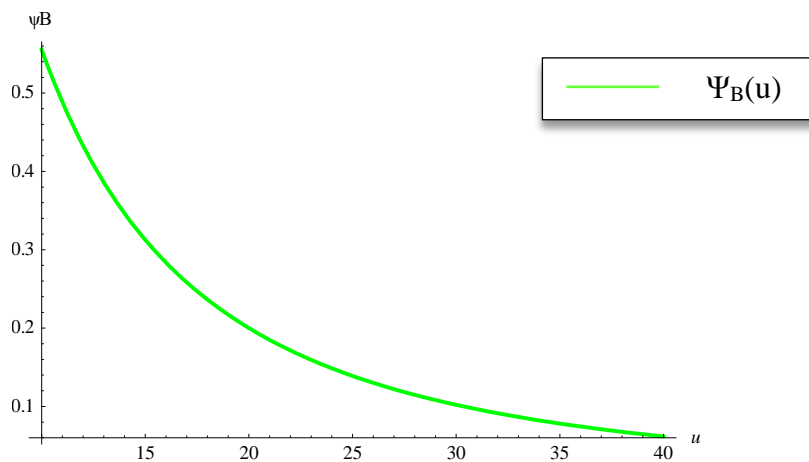
Η ένταση της ανέλιξης Poisson και η ένταση του ασφαλιστρού θα είναι και πάλι  $\lambda=2$  και  $c=6$  αντίστοιχα.

Το περιθώριο ασφαλείας  $\theta_Y$ , μπορεί να υπολογισθεί μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$\theta_Y = \frac{c}{\lambda \cdot \mu_{1,Y}} - 1 = \frac{6}{5} - 1 = 0,2$$

Συνεπώς, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

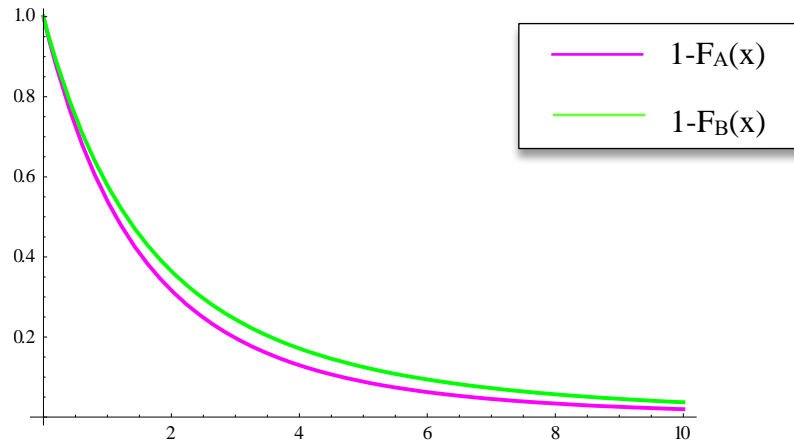
$$\Psi_Y(u) \sim 5 \cdot \left(1 - \frac{u(10+u)}{(5+u)^2}\right)$$



*Γραφική Παράσταση 5.8 - Πιθανότητα Χρεοκοπίας Χαρτοφυλακίου B.*

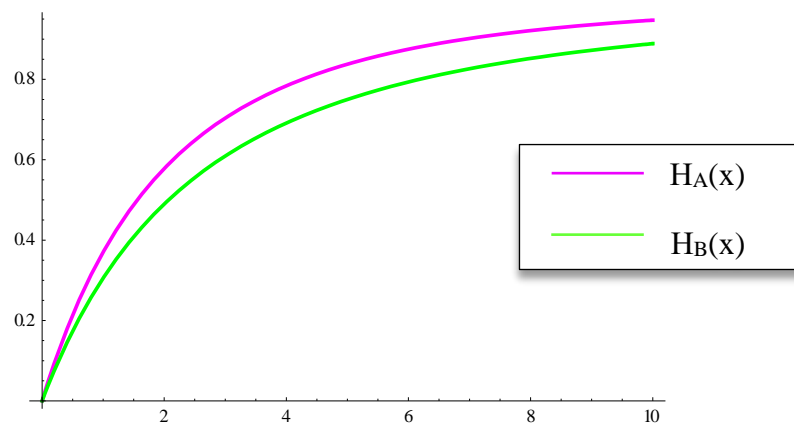
Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε σχηματικά τα δύο χαρτοφυλάκια.

Στη γραφική παράσταση 5.9 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι ουρές των κατανομών και φαίνεται ότι για τα δυο αυτά χαρτοφυλάκια οι ουρές σχεδόν συμπίπτουν μεταξύ τους.



*Γραφική Παράσταση 5.9 - Ουρά της Κατανομής των Χαρτοφυλακίων A και B αντίστοιχα*

Στο ακόλουθο σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση 5.10 οι κατανομές ισορροπίας του χαρτοφυλακίου A και B αντίστοιχα.

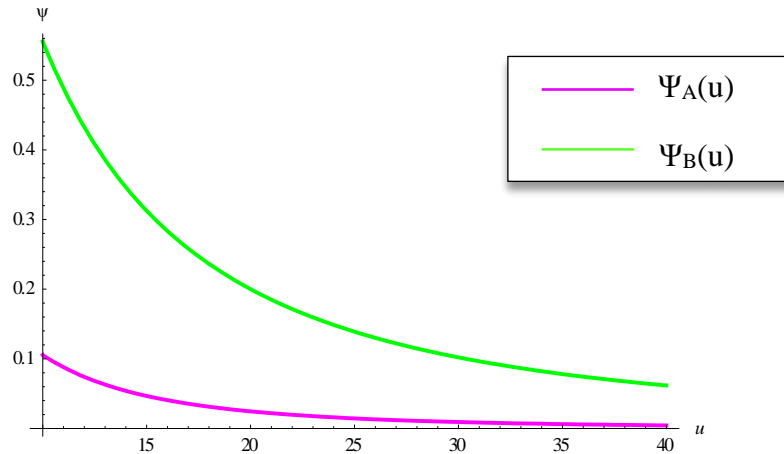


*Γραφική Παράσταση 5.10 - Κατανομή Ισορροπίας των Χαρτοφυλακίων A και B αντίστοιχα*

Παρατηρείται ότι η γραφική παράσταση που αντιστοιχεί στο χαρτοφυλάκιο A είναι πιο πάνω από την γραφική παράσταση του χαρτοφυλακίου B για κάθε τιμή του x.

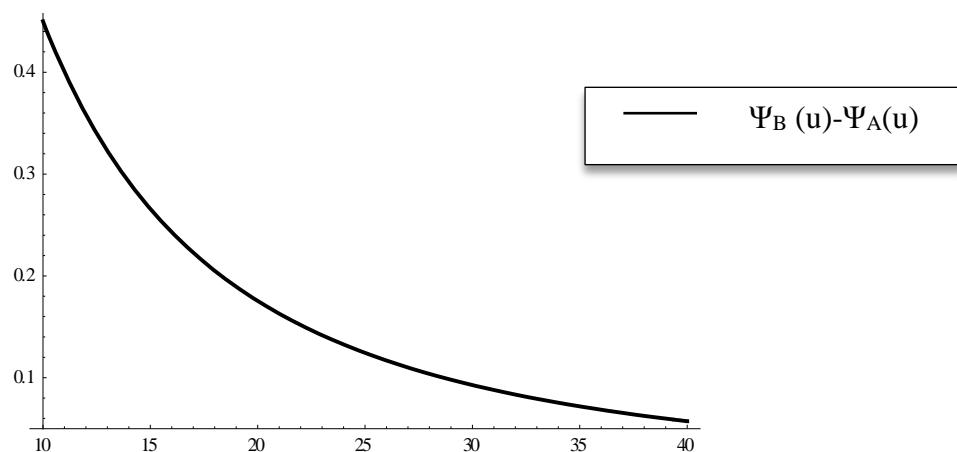
Παρακάτω, για την πιθανότητα χρεοκοπίας έχουμε τελικά το ακόλουθο σχήμα από το οποίο φαίνεται ότι και η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου A είναι πιο κάτω από την πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου B. Στο κάτωθι διάγραμμα, όπως και στα

αντίστοιχα διαγράμματα των επόμενων εφαρμογών, χρησιμοποιούμε μεγάλες τιμές για το αρχικό αποθεματικό  $u$ , γιατί ο τύπος των Embrechts-Veraverbeke είναι ασυμπτωτικός.



*Γραφική Παράσταση 5.11 - Πιθανότητα Χρεοκοπίας των Χαρτοφυλακίων A και B αντίστοιχα*

Παρακάτω, παρουσιάζεται το σχεδιάγραμμα της διαφοράς των δύο πιθανοτήτων χρεοκοπίας, με σκοπό να δούμε αν τέμνονται για κάποιο  $u$ . Με βάση το διάγραμμα, παρατηρούμε ότι η καμπύλη είναι πάντα πάνω από τον άξονα των  $x$  και συμπεραίνουμε ότι η μία πιθανότητα χρεοκοπίας είναι πάντα μεγαλύτερη από την άλλη.



*Γραφική Παράσταση 5.12 - Γραφική παράσταση της διαφοράς  $\Psi_B(u) - \Psi_A(u)$*



Επομένως, για δυο χαρτοφυλάκια A και B των οποίων οι αποζημιώσεις εκφράζονται μέσω κατανομών Pareto(4,6) και Pareto(3,5), αντίστοιχα, προκύπτει ότι αν  $\bar{F}_X(t) < \bar{F}_Y(t)$  και κατά συνέπεια, η ουρά της κατανομής των  $X_i$  είναι σχηματικά κάτω από την ουρά της κατανομής των  $Y_i$  τότε υπό την Συνήθη Στοχαστική Διάταξη έχουμε ότι

$$\bar{F}_X(t) < \bar{F}_Y(t) \Leftrightarrow X <_{st} Y$$

και επίσης,

$$\mu_X < \mu_Y = 2 < 2,5.$$

Για τις διακριτές μεταβλητές N και M ισχύει

$$E(N) < E(M) \text{ εφόσον } 3 < 6$$

Άρα,

$$N <_{st} M$$

Συνεπώς, αφού  $X <_{st} Y$  και  $N <_{st} M$  τότε  $\sum_{i=1}^N X_i <_{ST} \sum_{i=1}^M Y_i$  και

$$\Psi_X(u) \leq \Psi_Y(u)$$

καταλήγουμε ότι το χαρτοφυλάκιο B είναι περισσότερο ζημιογόνο συγκριτικά με το χαρτοφυλάκιο A.

**Εφαρμογή 5.3.2 - Σύγκριση Χαρτοφυλακίων που εκφράζονται από κατανομές Pareto με  $\alpha_A = \alpha_B$  και  $\delta_A > \delta_B$**

Έστω ότι έχουμε το χαρτοφυλάκιο A της Εφαρμογής 5.3.1, καθώς και το χαρτοφυλάκιο B, του οποίου οι αποζημιώσεις  $Y_1, Y_2, \dots, Y_M$  εκφράζονται και πάλι μέσω της κατανομής Pareto με μέση τιμή  $\mu_Y = 4/3$  και η τ.μ.  $M \sim G_1\left(\frac{5}{9}\right)$ .

Για το δεύτερο χαρτοφυλάκιο έχουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ατομικών ζημιών  $Y_i$

$$f(y) = \frac{1024}{(4+y)^5}$$

με παραμέτρους  $\alpha=4, \delta=4$ .

Επίσης, έχουμε τη συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων  $Y_i$

$$F(y) = \int_0^y f(t)dt = \int_0^y \frac{1024}{(4+t)^5} dt = 1 - \frac{256}{(4+y)^4}$$

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση δεξιάς ουράς ως εξής

$$\bar{F}(y) = 1 - F(y) = \frac{256}{(4+y)^4}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τον ασυμπτωτικό τύπο των Embrechts-Veraverbeke:

$$\Psi_Y(u) \sim \frac{1}{\theta} \cdot \bar{H}(u)$$

Η κατανομή των κλιμακωτών υψών θα είναι

$$H_Y(y) = P(L_{i,Y} \leq y) = \frac{1}{\mu_{1,Y}} \int_0^y \bar{F}(t)dt = \frac{3}{4} \int_0^y \frac{256}{(4+t)^4} dt = 1 - \frac{64}{(4+y)^3}$$

Μέσω της τελευταίας βρίσκουμε την ουρά της συνάρτησης ισορροπίας

$$\bar{H}_Y(y) = 1 - H_Y(y) = \frac{64}{(4+y)^3}$$

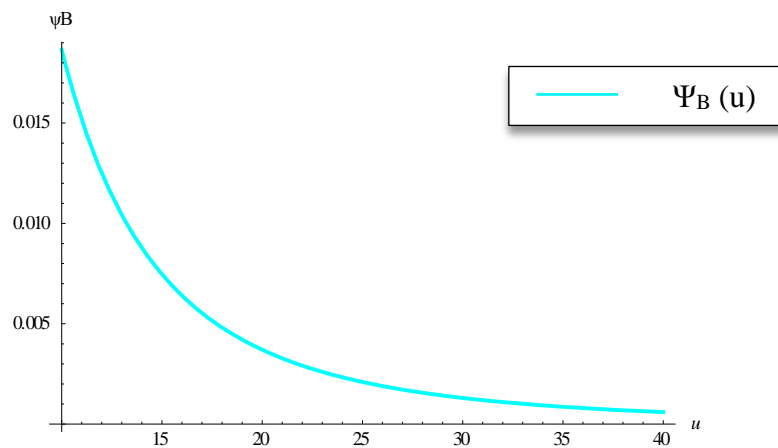
Η ένταση της ανέλιξης Poisson και η ένταση του ασφαλιστρου θα είναι και πάλι  $\lambda=2$  και  $c=6$  αντίστοιχα.

Υπολογίζουμε το περιθώριο ασφαλείας  $\theta_Y$  ως εξής

$$\theta_Y = \frac{c}{\lambda \cdot \mu_{1,Y}} - 1 = \frac{18}{8} - 1 = 1,25$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

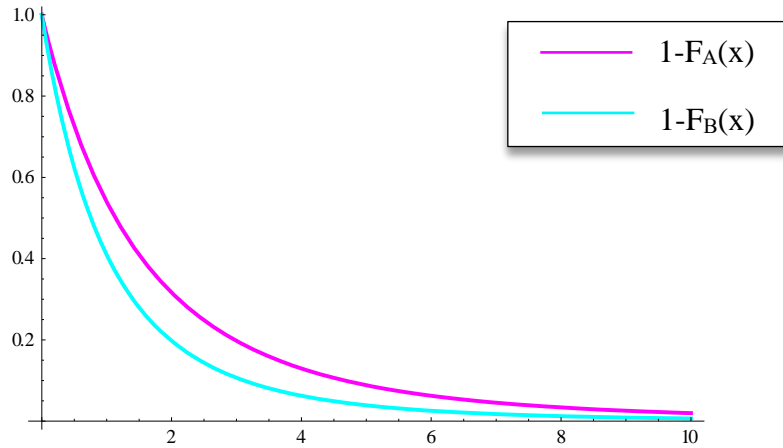
$$\Psi_Y(u) \sim \frac{256}{5(4+u)^3}$$



*Γραφική Παράσταση 5.13 - Πιθανότητα Χρεοκοπίας Χαρτοφυλακίου B.*

Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε σχηματικά τα δύο χαρτοφυλάκια.

Στη γραφική παράσταση 5.14 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι ουρές των κατανομών και φαίνεται ότι η ουρά του χαρτοφυλακίου A είναι πιο πάνω από την ουρά του χαρτοφυλακίου B, άρα είναι και πιο βαριά.

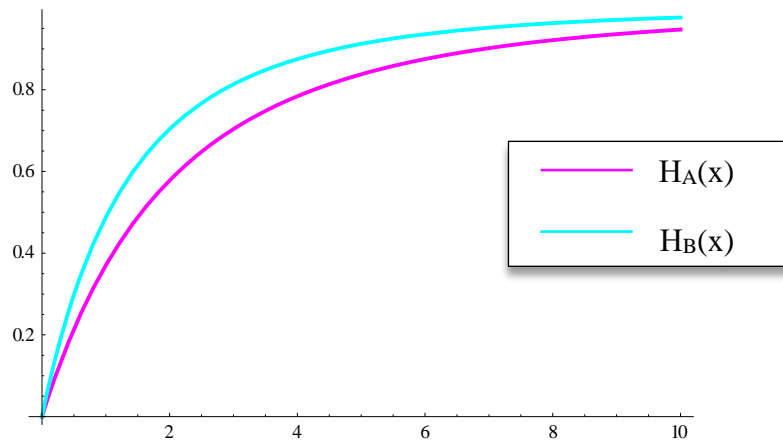


Γραφική Παράσταση 5.14 - Ουρά της κατανομής των χαρτοφυλακίων A και B αντίστοιχα

Η παραπάνω απεικόνιση εύκολα αποδεικνύεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \bar{F}_X(t) = \left(\frac{\delta_A}{t + \delta_A}\right)^{\alpha_A} &> \left(\frac{\delta_B}{t + \delta_B}\right)^{\alpha_B} = \bar{F}_Y(t) \xleftrightarrow{\alpha_A = \alpha_B} \frac{\delta_A}{t + \delta_A} > \frac{\delta_B}{t + \delta_B} \\ &\Leftrightarrow \delta_A(t + \delta_B) > \delta_B(t + \delta_A) \Leftrightarrow \delta_A > \delta_B \end{aligned}$$

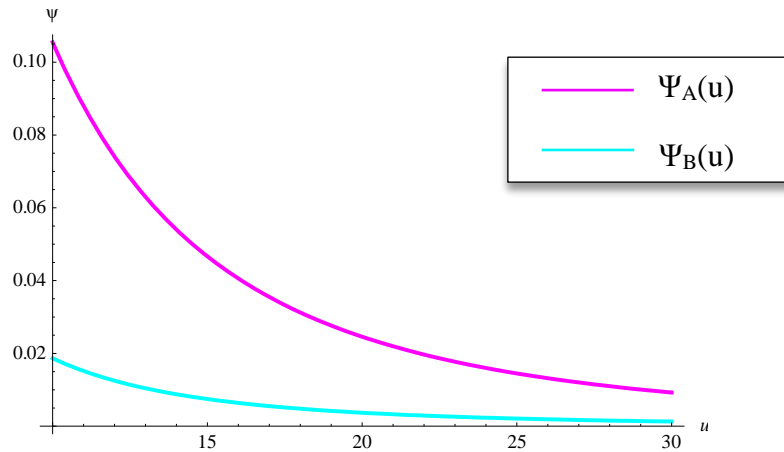
Παρουσιάζονται στη κάτωθι γραφική παράσταση, οι κατανομές ισορροπίας του χαρτοφυλακίου A και B αντίστοιχα.



Γραφική Παράσταση 5.15 - Κατανομή Ισορροπίας των Χαρτοφυλακίων A και B αντίστοιχα

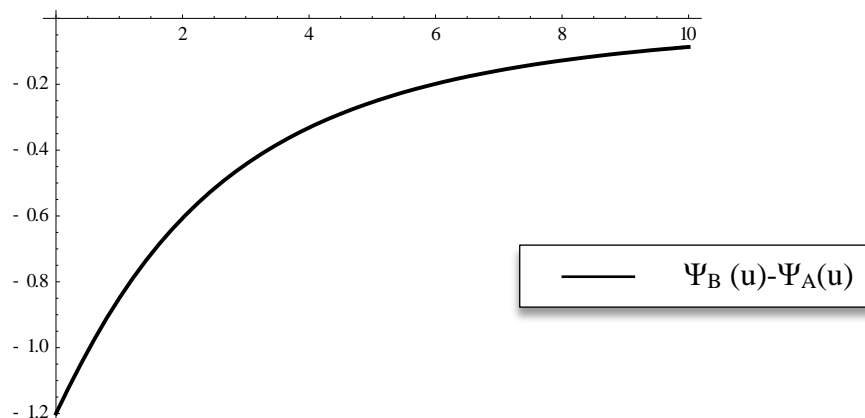
Με βάση το παραπάνω σχήμα, η γραφική παράσταση που αντιστοιχεί στο χαρτοφυλάκιο A είναι πιο κάτω από την γραφική παράσταση του χαρτοφυλακίου B για κάθε τιμή του  $x$ .

Στο ακόλουθο σχήμα, βλέπουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου B είναι μικρότερη από τη πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου A.



*Γραφική Παράσταση 5.16 - Πιθανότητα χρεοκοπίας των χαρτοφυλακίων A και B αντίστοιχα*

Στην συνέχεια, για να δούμε αν οι πιθανότητες χρεοκοπίας A και B τέμνονται για κάποιο  $u$ , παρουσιάζεται το σχεδιάγραμμα της διαφοράς των και προκύπτει ότι η καμπύλη είναι πάντα κάτω από τον άξονα των  $x$ . Επομένως, με βάση το διάγραμμα, η μία πιθανότητα χρεοκοπίας είναι πάντα μεγαλύτερη από την άλλη.



*Γραφική Παράσταση 5.17 - Γραφική παράσταση της διαφοράς  $\Psi_B(u) - \Psi_A(u)$*

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, για δυο χαρτοφυλάκια A και B των οποίων οι αποζημιώσεις εκφράζονται μέσω κατανομών Pareto(4,6) και Pareto(4,4), αντίστοιχα, αν  $\bar{F}_X(t) > \bar{F}_Y(t)$  και κατά συνέπεια, η ουρά της κατανομής των  $X_i$  είναι σχηματικά πάνω από την ουρά της κατανομής των  $Y_i$ , τότε υπό την Συνήθη Στοχαστική Διάταξη έχουμε ότι

$$\bar{F}_X(t) > \bar{F}_Y(t) \Leftrightarrow X >_{st} Y$$

και επίσης,

$$\mu_X > \mu_Y = 2 > 1,33$$

Για τις διακριτές μεταβλητές N και M ισχύει

$$E(N) > E(M) \text{ εφόσον } 3 > \frac{9}{5} \Leftrightarrow 3 > 1.8$$

Άρα,

$$N >_{st} M$$

Συνεπώς, αφού  $X >_{st} Y$  και  $N >_{st} M$  τότε  $\sum_{i=1}^N X_i >_{ST} \sum_{i=1}^M Y_i$  και

$$\Psi_X(u) \geq \Psi_Y(u)$$

καταλήγουμε ότι το χαρτοφυλάκιο A είναι περισσότερο ζημιογόνο συγκριτικά με το χαρτοφυλάκιο B.

### **Εφαρμογή 5.3.3 - Σύγκριση Χαρτοφυλακίων που εκφράζονται από κατανομές Pareto με $\alpha_A > \alpha_B$ και $\delta_A = \delta_B$**

Έστω ότι έχουμε το χαρτοφυλάκιο A της εφαρμογής 5.3.1 και έστω επίσης ότι έχουμε το χαρτοφυλάκιο B, του οποίου το ύψος των ατομικών αποζημιώσεων  $Y_1, Y_2, \dots, Y_M$  εκφράζεται και πάλι μέσω της κατανομής Pareto με μέση τιμή  $\mu_Y = 12/5$  και η τ.μ.  $M \sim G_1\left(\frac{1}{5}\right)$ .

Έχουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ατομικών ζημιών  $Y_i$

$$f(y) = \frac{1851.81}{(6+y)^{4.5}}$$

με παραμέτρους  $\alpha=3.5$ ,  $\delta=6$ .

Επιπλέον, έχουμε τη συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων

$$F(y) = \int_0^y f(t)dt = \int_0^y \frac{1851.81}{(6+t)^{4.5}} dt = 1 - \frac{529.09}{(6+y)^{3.5}}$$

και τη συνάρτηση δεξιάς ουράς

$$\bar{F}(y) = 1 - F(y) = \frac{529.09}{(6+y)^{3.5}}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τον ασυμπτωτικό τύπο των Embrechts-Veraverbeke:

$$\Psi_Y(u) \sim \frac{1}{\theta} \cdot \bar{H}(u)$$

Δίνεται η κατανομή των κλιμακωτών υψών

$$H_Y(y) = P(L_{i,Y} \leq y) = \frac{1}{\mu_{1,Y}} \int_0^y \bar{F}(t)dt = \frac{5}{12} \int_0^y \frac{529.09}{(6+t)^{3.5}} dt = 1 - \frac{88.1816}{(6+y)^{2.5}}$$

Η ουρά της συνάρτησης ισορροπίας θα είναι

$$\bar{H}_Y(y) = 1 - H_Y(y) = \frac{88.1816}{(6+y)^{2.5}}$$

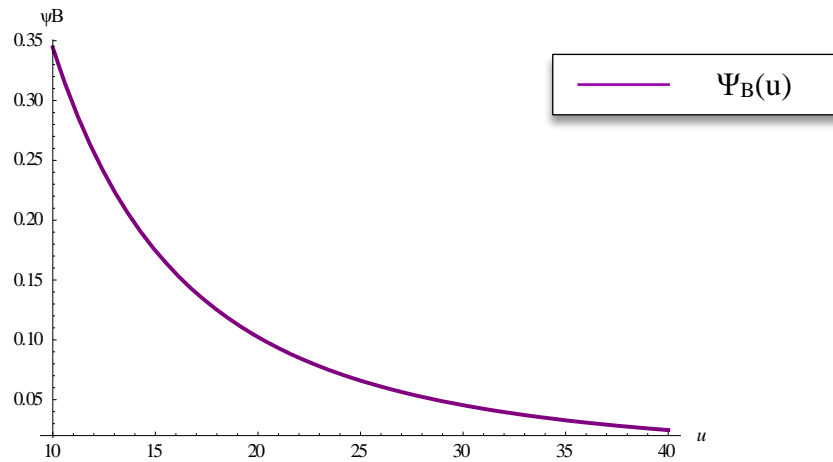
Η ένταση της ανέλιξης Poisson και η ένταση του ασφαλιστρού θα είναι και πάλι  $\lambda=2$  και  $c=6$  αντίστοιχα.

Το περιθώριο ασφαλείας  $\theta_Y$ , μπορεί να υπολογισθεί ως κάτωθι

$$\theta_Y = \frac{c}{\lambda \cdot \mu_{1,Y}} - 1 = \frac{30}{24} - 1 = 0,25$$

Συνεπώς, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

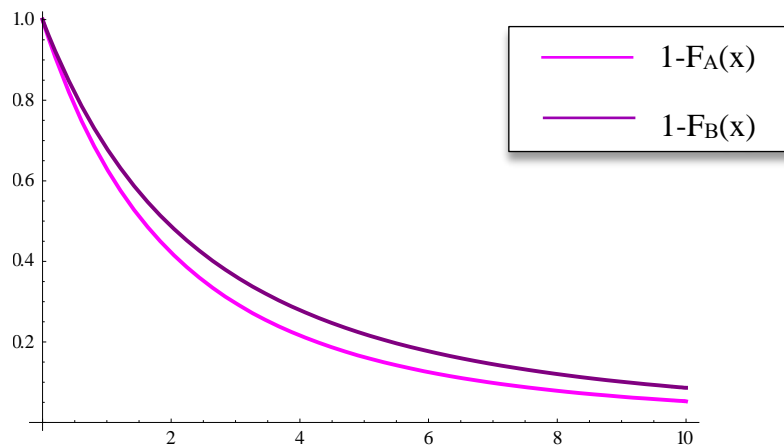
$$\Psi_Y(u) \sim \frac{352.7264}{(6 + u)^{2.5}}$$



*Γραφική Παράσταση 5.18 - Πιθανότητα Χρεοκοπίας Χαρτοφυλακίου B.*

Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε σχηματικά τα δύο χαρτοφυλάκια.

Στη γραφική παράσταση 5.19 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι ουρές των κατανομών και φαίνεται ότι για τα δυο αυτά χαρτοφυλάκια η ουρά του χαρτοφυλακίου B είναι ελάχιστα πιο πάνω από την ουρά του χαρτοφυλακίου A.



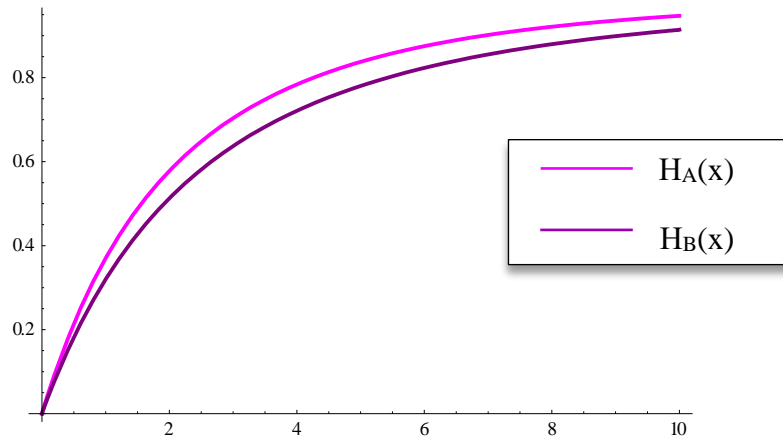
*Γραφική Παράσταση 5.19 - Ουρά της κατανομής των χαρτοφυλακίων A και B αντίστοιχα*



Η παραπάνω απεικόνιση εύκολα αποδεικνύεται ως εξής:

$$\bar{F}_X(t) = \left(\frac{\delta_A}{t+\delta_A}\right)^{\alpha_A} < \left(\frac{\delta_B}{t+\delta_B}\right)^{\alpha_B} = \bar{F}_Y(t), \text{ αφού } \delta_A=\delta_B \text{ και } \alpha_A>\alpha_B.$$

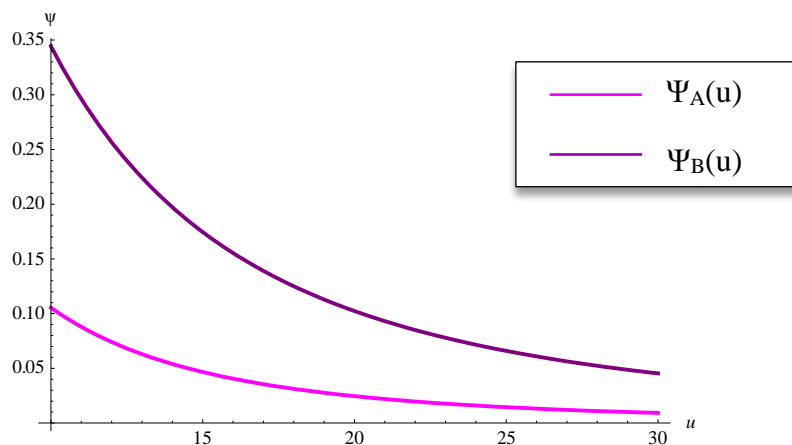
Στο ακόλουθο σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση 5.20 οι κατανομές ισορροπίας του χαρτοφυλακίου A και B αντίστοιχα.



*Γραφική Παράσταση 5.20 - Κατανομή ισορροπίας των χαρτοφυλακίων A και B αντίστοιχα*

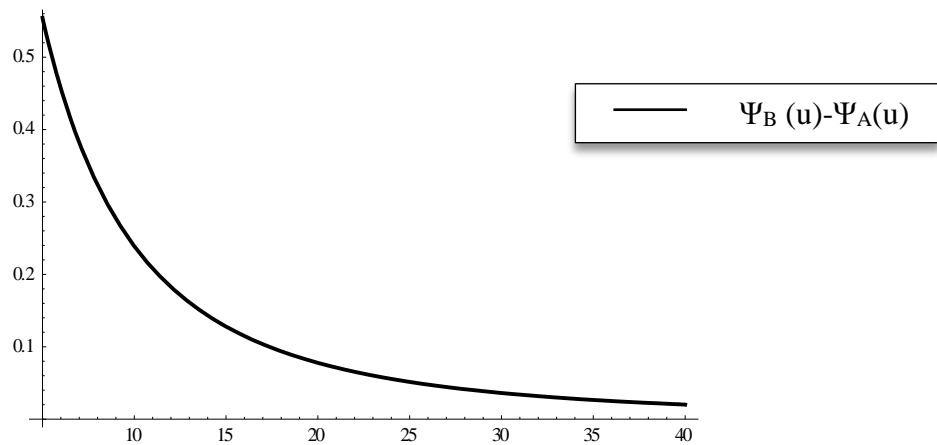
Παρατηρείται ότι η γραφική παράσταση που αντιστοιχεί στο χαρτοφυλάκιο A είναι πιο πάνω από την γραφική παράσταση του χαρτοφυλακίου B για κάθε τιμή του x.

Με το ακόλουθο σχήμα φαίνεται ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου B είναι πιο πάνω από την πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου A.



*Γραφική Παράσταση 5.21 - Πιθανότητα χρεοκοπίας των χαρτοφυλακίων A και B αντίστοιχα*

Για να φανεί πιο ξεκάθαρα το αν οι δύο πιθανότητες χρεοκοπίας τέμνονται για κάποιο  $u$ , παρουσιάζεται επιπρόσθετα το σχεδιάγραμμα της διαφοράς αυτών, στο οποίο παρατηρούμε ότι η καμπύλη είναι πάντα πάνω από τον άξονα των  $x$ . Επομένως, όπως προκύπτει από το διάγραμμα, η μία πιθανότητα χρεοκοπίας είναι πάντα μεγαλύτερη από την άλλη.



*Γραφική Παράσταση 5.22 - Γραφική παράσταση της διαφοράς  $\Psi_B(u) - \Psi_A(u)$*

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, για δυο χαρτοφυλάκια A και B των οποίων οι αποζημιώσεις εκφράζονται μέσω κατανομών Pareto(4,6) και Pareto(3.5,6), αντίστοιχα, αν  $\bar{F}_X(t) < \bar{F}_Y(t)$  και κατά συνέπεια, η ουρά της κατανομής των  $X_i$  είναι σχηματικά κάτω από την ουρά της κατανομής των  $Y_i$  τότε υπό την Συνήθη Στοχαστική Διάταξη έχουμε ότι

$$\bar{F}_X(t) < \bar{F}_Y(t) \Leftrightarrow X <_{st} Y$$

και επίσης,

$$\mu_X < \mu_Y = 2 < 2,5$$

Για τις διακριτές μεταβλητές N και M ισχύει

$$E(N) < E(M) \text{ εφόσον } 3 < 5$$

Άρα,

$$N <_{st} M$$

Συνεπώς, αφού  $X <_{st} Y$  και  $N <_{st} M$  τότε  $\sum_{i=1}^N X_i <_{ST} \sum_{i=1}^M Y_i$  και

$$\Psi_X(u) \leq \Psi_Y(u)$$

Συμπεραίνουμε ότι το χαρτοφυλάκιο B είναι περισσότερο ζημιογόνο συγκριτικά με το χαρτοφυλάκιο A.

**Εφαρμογή 5.3.4 – Σύγκριση Χαρτοφυλακίων που εκφράζονται από κατανομές Weibull με  $\gamma_A = \gamma_B$**

Έστω ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο ζημιών A, του οποίου οι ατομικές αποζημιώσεις εκφράζονται μέσω των τυχαίων μεταβλητών  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , οι οποίες ακολουθούν την κατανομή Weibull με παραμέτρους  $c_A=4$  και  $\gamma_A=0.4$  και η τ.μ.  $N \sim G_1(0.93)$ . Δίνεται επίσης ότι η ένταση της ανέλιξης Poisson  $\lambda$  για την άφιξη των αποζημιώσεων θα ισούται με 2 και η ένταση του ασφαλιστρού  $c$  θα ισούται με 3.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ατομικών ζημιών  $X_i$  για το δεύτερο χαρτοφυλάκιο είναι

$$f(x) = \frac{1.6e^{-4x^{0.4}}}{x^{0.6}}$$

και η συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων είναι

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = 1 - e^{-4x^{0.4}}$$

από την οποία, προκύπτει η συνάρτηση δεξιάς ουράς ως εξής

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = e^{-4x^{0.4}}$$

Για την μέση τιμή έχουμε

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1.6e^{-4x^{0.4}}}{x^{0.6}} dx = 0.103855 = \mu_{1,X}$$

Όπως και στην Εφαρμογή 5.3.1 για την κατανομή Weibull θα χρησιμοποιήσουμε τον ασυμπτωτικό τύπο των Embrechts-Veraverbeke, καθώς δεν ορίζεται η ροπογεννήτρια αυτής:

$$\Psi_X(u) \sim \frac{1}{\theta} \cdot \bar{H}(u)$$

Η κατανομή των κλιμακωτών υψών δίνεται εξ ορισμού από την συνάρτηση κατανομής ισορροπίας

$$H_X(x) = P(L_{i,X} \leq x) = 1 - \bar{H}_X(x) = 1 - \frac{1}{0.103855} \cdot \int_x^{\infty} e^{-4t^{0.4}} dt$$

όπου, η ουρά της συνάρτησης ισορροπίας, σύμφωνα με την [Ενότητα 3.4](#) θα είναι

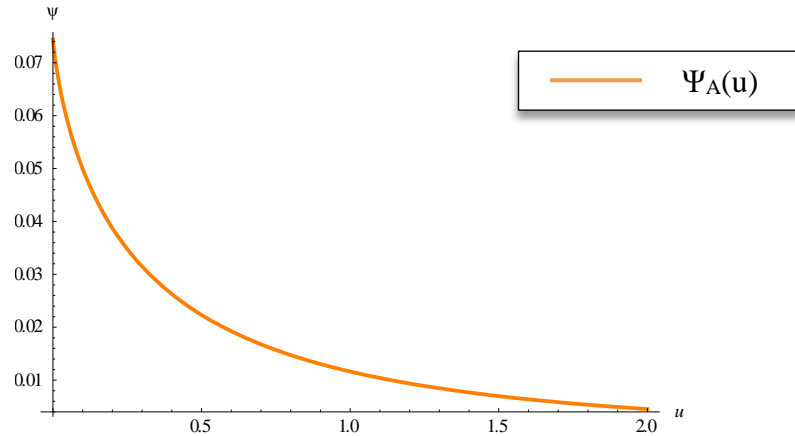
$$\bar{H}_X(x) = \frac{1}{\mu_{1,X}} \int_x^{\infty} \bar{F}(t) dt = \frac{1}{\mu_{1,X}} \int_x^{\infty} e^{-4t^{0.4}} dt = \frac{1}{0.103855} \cdot \int_x^{\infty} e^{-4t^{0.4}} dt$$

Το περιθώριο ασφαλείας  $\theta_x$ , μπορεί να υπολογισθεί μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$\theta_x = \frac{c}{\lambda \cdot \mu_{1,X}} - 1 = \frac{3}{0.20771} - 1 = 13.4433$$

Συνεπώς, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

$$\Psi_X(u) \sim 0.716258 \cdot \int_u^{\infty} e^{-4t^{0.4}} dt$$



*Γραφική Παράσταση 5.23 - Πιθανότητα Χρεοκοπίας Χαρτοφυλακίου Α.*

Για το χαρτοφυλάκιο Β, δίνεται το ύψος των ατομικών αποζημιώσεων  $Y_1, Y_2, \dots, Y_M$  οι οποίες ακολουθούν την κατανομή Weibull με παραμέτρους  $c_B=3$  και  $\gamma_B=0.4$  και η τ.μ.  $M \sim G_1(0.86)$ .

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ατομικών ζημιών  $Y_i$  είναι

$$f(y) = \frac{1.2e^{-3y^{0.4}}}{y^{0.6}}$$

Η συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων είναι

$$F(y) = \int_0^y f(t)dt = \int_0^y \frac{1.2e^{-3t^{0.4}}}{t^{0.6}} dt = 1 - e^{-3y^{0.4}}$$

και η συνάρτηση δεξιάς ουράς είναι

$$\bar{F}(y) = 1 - F(y) = e^{-3y^{0.4}}$$

Για την μέση τιμή έχουμε

$$E(Y) = \int_0^{\infty} y \cdot f(y)dy = \int_0^{\infty} y \cdot \frac{1.2e^{-3y^{0.4}}}{y^{0.6}} dy = 0.213193 = \mu_{1,Y}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τον ασυμπτωτικό τύπο των Embrechts-Veraverbeke:

$$\Psi_Y(u) \sim \frac{1}{\theta} \cdot \bar{H}(u)$$

Για την κατανομή των κλιμακωτών υψών έχουμε κατανομής ισορροπίας

$$H_Y(y) = P(L_{i,Y} \leq y) = 1 - \bar{H}_Y(y) = 1 - \frac{1}{0.213193} \cdot \int_y^\infty e^{-3t^{0.4}} dt$$

όπου, η ουρά αυτής, σύμφωνα, επίσης, με την **Ενότητα 3.4** θα είναι

$$\bar{H}_Y(y) = \frac{1}{\mu_{1,Y}} \int_y^\infty \bar{F}(t) dt = \frac{1}{\mu_{1,Y}} \int_y^\infty e^{-3t^{0.4}} dt = \frac{1}{0.213193} \cdot \int_y^\infty e^{-3t^{0.4}} dt.$$

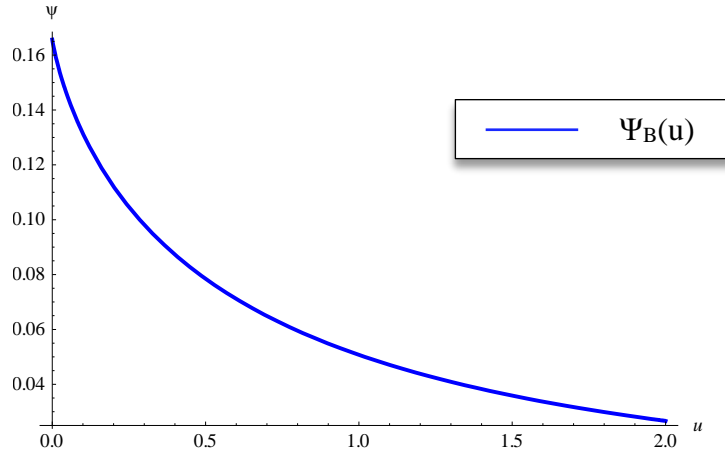
Η ένταση της ανέλιξης Poisson και η ένταση του ασφαλιστρου θα είναι και πάλι  $\lambda=2$  και  $c=3$  αντίστοιχα.

Δίνεται το περιθώριο ασφαλείας  $\theta_Y$

$$\theta_Y = \frac{c}{\lambda \cdot \mu_{1,Y}} - 1 = \frac{3}{0.426386} - 1 = 6.03588$$

Συνεπώς, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

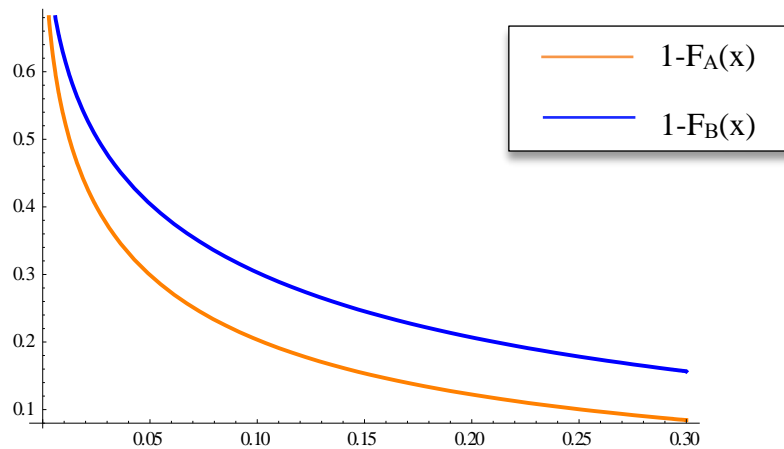
$$\Psi_Y(u) \sim 0.777117 \cdot \int_u^\infty e^{-3t^{0.4}} dt$$



*Γραφική Παράσταση 5.24 - Πιθανότητα Χρεοκοπίας Χαρτοφυλακίου B.*

Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε σχηματικά τα δύο χαρτοφυλάκια.

Στη γραφική παράσταση 5.25 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι ουρές των κατανομών και φαίνεται ότι η ουρά του χαρτοφυλακίου B είναι πιο πάνω από την ουρά του χαρτοφυλακίου A.



*Γραφική Παράσταση 5.25 - Ουρά της Κατανομής των Χαρτοφυλακίων A και B αντίστοιχα*

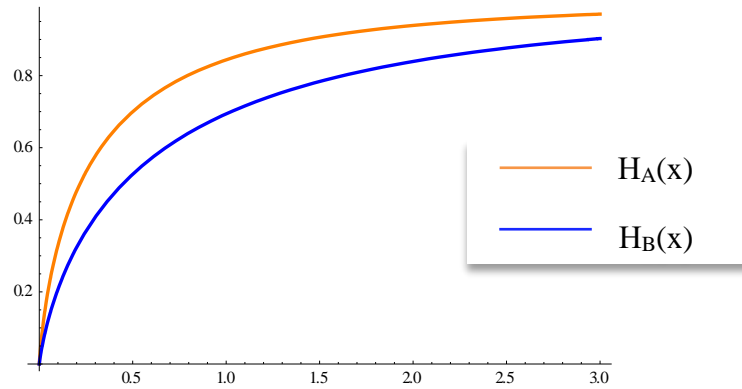
Η παραπάνω απεικόνιση εύκολα αποδεικνύεται ως εξής:

$$\bar{F}_X(t) = e^{-c_A \cdot t^{\gamma_A}} < \bar{F}_Y(t) = e^{-c_B \cdot t^{\gamma_B}}$$

$$\Leftrightarrow -c_A \cdot t^{\gamma_A} < -c_B \cdot t^{\gamma_B}$$

$$\xLeftrightarrow{\gamma_A = \gamma_B} -c_A < -c_B \Leftrightarrow c_A > c_B$$

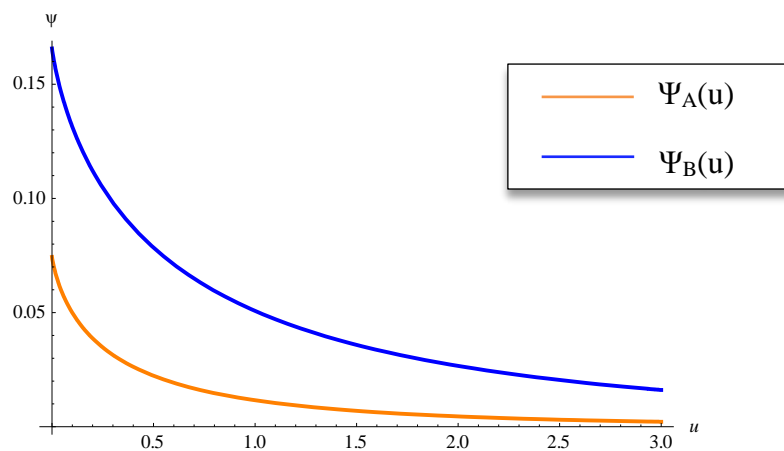
Στο ακόλουθο σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση 5.26 οι κατανομές ισορροπίας του χαρτοφυλακίου A και B αντίστοιχα.



*Γραφική Παράσταση 5.26 - Κατανομή Ισορροπίας των Χαρτοφυλακίων A και B αντίστοιχα*

Παρατηρείται ότι η γραφική παράσταση που αντιστοιχεί στο χαρτοφυλάκιο A είναι πιο πάνω από την γραφική παράσταση του χαρτοφυλακίου B για κάθε τιμή του x.

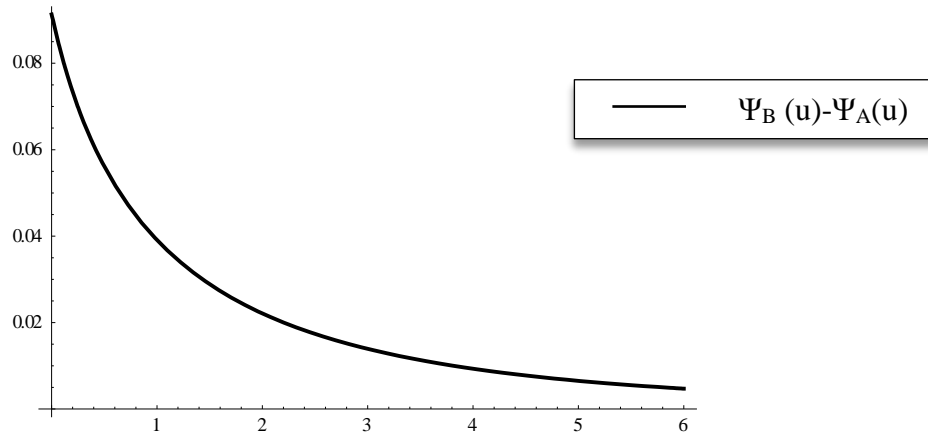
Παρακάτω, για την πιθανότητα χρεοκοπίας έχουμε τελικά το ακόλουθο σχήμα από το οποίο φαίνεται ότι και η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου A είναι πιο κάτω από την πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου B.



*Γραφική Παράσταση 5.27 - Πιθανότητα Χρεοκοπίας των Χαρτοφυλακίων A και B αντίστοιχα*



Για να δούμε αν οι δύο πιθανότητες χρεοκοπίας τέμνονται για κάποιο  $u$ , παρουσιάζεται επιπρόσθετα το σχεδιάγραμμα της διαφοράς αυτών, στο οποίο παρατηρούμε ότι η καμπύλη είναι πάντα πάνω από τον άξονα των  $x$ . Επομένως η μία πιθανότητα χρεοκοπίας είναι πάντα μεγαλύτερη από την άλλη.



*Γραφική Παράσταση 5.28 - Γραφική παράσταση της διαφοράς  $\Psi_B(u) - \Psi_A(u)$*

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, για δυο χαρτοφυλάκια A και B των οποίων οι αποζημιώσεις εκφράζονται μέσω κατανομών Weibull(4,0.4) και Weibull(3,0.4), αντίστοιχα, αν  $\bar{F}_X(t) < \bar{F}_Y(t)$  και κατά συνέπεια, η ουρά της κατανομής των  $X_i$  είναι σχηματικά κάτω από την ουρά της κατανομής των  $Y_i$ , τότε υπό την Συνθήκη Στοχαστική Διάταξη έχουμε ότι

$$\bar{F}_X(t) < \bar{F}_Y(t) \Leftrightarrow X <_{st} Y$$

και επίσης,

$$\mu_X < \mu_Y = 0.103855 < 0.213193$$

Για τις διακριτές μεταβλητές N και M ισχύει

$$E(N) < E(M) \text{ εφόσον } \frac{1}{0.93} < \frac{1}{0.86} = 1.0753 < 1.1628$$

Άρα,

$$N <_{st} M$$

Συνεπώς, αφού  $X <_{st} Y$  και  $N <_{st} M$  τότε  $\sum_{i=1}^N X_i <_{ST} \sum_{i=1}^M Y_i$  και

$$\Psi_X(u) \leq \Psi_Y(u)$$

καταλήγουμε ότι το χαρτοφυλάκιο B είναι περισσότερο ζημιολόγο συγκριτικά με το χαρτοφυλάκιο A.

### **Εφαρμογή 5.3.5 – Σύγκριση Χαρτοφυλακίων που εκφράζονται από κατανομές Weibull με $c_A=c_B$**

Έστω ότι έχουμε το χαρτοφυλάκιο A της Εφαρμογής 5.3.4 και έστω επίσης ότι έχουμε το χαρτοφυλάκιο B, του οποίου το ύψος των ατομικών αποζημιώσεων  $Y_1, Y_2, \dots, Y_M$  οι οποίες ακολουθούν την κατανομή Weibull με παραμέτρους  $c_B=4$  και  $\gamma_B=0.5$  και η τ.μ.  $M \sim G_1(0.92)$ .

Δίνεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ατομικών ζημιών  $Y_i$

$$f(y) = \frac{2e^{-4y^{0.5}}}{y^{0.5}}$$

και η συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων

$$F(y) = \int_0^y f(t)dt = \int_0^y \frac{2e^{-4t^{0.5}}}{t^{0.5}} dt = 1 - e^{-4y^{0.5}}$$

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς υπολογίζεται ως εξής

$$\bar{F}(y) = 1 - F(y) = e^{-4y^{0.5}}$$

Η μέση τιμή των ατομικών ζημιών  $Y_i$  είναι

$$E(Y) = \int_0^\infty y \cdot f(y)dy = \int_0^\infty y \cdot \frac{2e^{-4y^{0.5}}}{y^{0.5}} dy = 0.125 = \mu_{1,y}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τον ασυμπτωτικό τύπο των Embrechts-Veraverbeke:

$$\Psi_Y(u) \sim \frac{1}{\theta} \cdot \bar{H}(u)$$

Για την κατανομή των κλιμακωτών υψών έχουμε

$$H_Y(y) = P(L_{i,Y} \leq y) = 1 - \bar{H}_Y(y) = 1 - \frac{1}{0.125} \cdot \int_y^\infty e^{-4t^{0.5}} dt.$$

όπου, η ουρά της συνάρτησης ισορροπίας, σύμφωνα, επίσης, με την **Ενότητα 3.4** θα είναι

$$\bar{H}_Y(y) = \frac{1}{\mu_{1,Y}} \int_y^\infty \bar{F}(t) dt = \frac{1}{\mu_{1,Y}} \int_y^\infty e^{-4t^{0.5}} dt = \frac{1}{0.125} \cdot \int_y^\infty e^{-4t^{0.5}} dt.$$

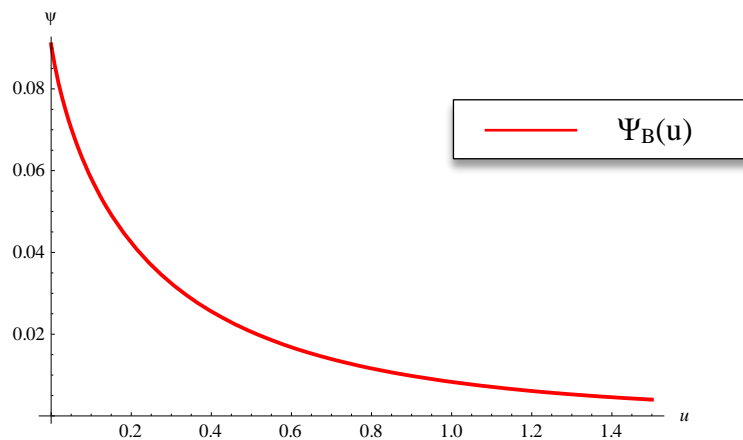
Η ένταση της ανέλιξης Poisson και η ένταση του ασφαλιστρου θα είναι και πάλι  $\lambda=2$  και  $c=3$  αντίστοιχα.

Το περιθώριο ασφαλείας  $\theta_Y$ , μπορεί να υπολογισθεί ως ακολούθως

$$\theta_Y = \frac{c}{\lambda \cdot \mu_{1,Y}} - 1 = \frac{3}{0.25} - 1 = 11$$

Συνεπώς, προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας

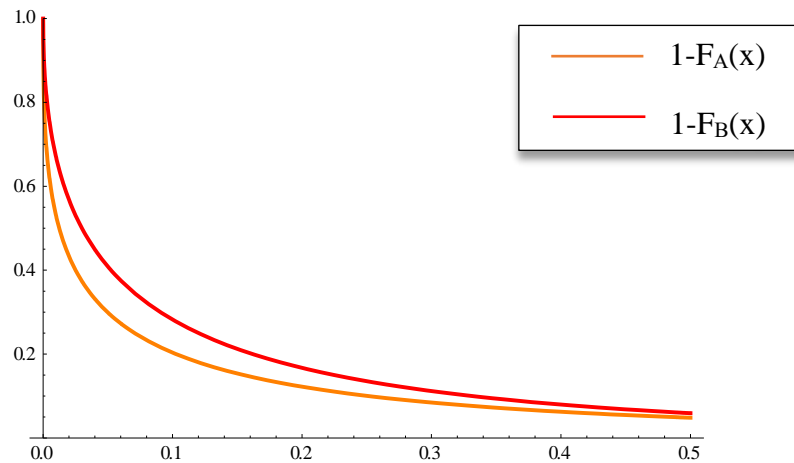
$$\Psi_Y(u) \sim 0.727273 \cdot \int_u^\infty e^{-4t^{0.5}} dt$$



*Γραφική Παράσταση 5.25 - Πιθανότητα Χρεοκοπίας Χαρτοφυλακίου B.*

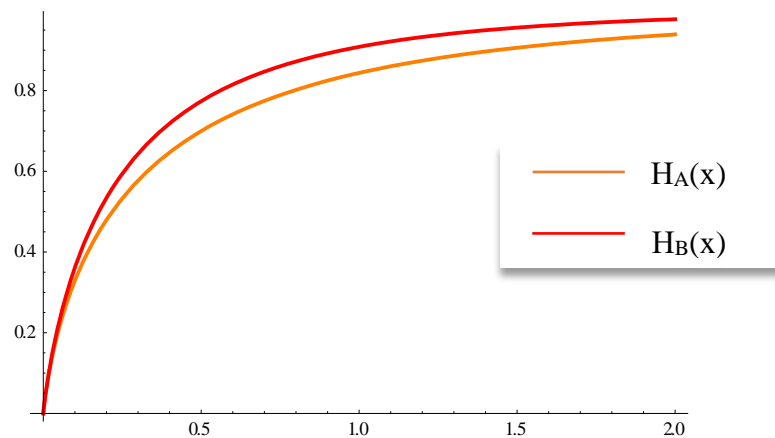
Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε σχηματικά τα δύο χαρτοφυλάκια.

Στη γραφική παράσταση 5.26 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι ουρές των κατανομών και φαίνεται ότι για τα δυο αυτά χαρτοφυλάκια η ουρά του B βρίσκεται πιο πάνω από την ουρά του A.



*Γραφική Παράσταση 5.26 - Ουρά της κατανομής των χαρτοφυλακίων A και B αντίστοιχα*

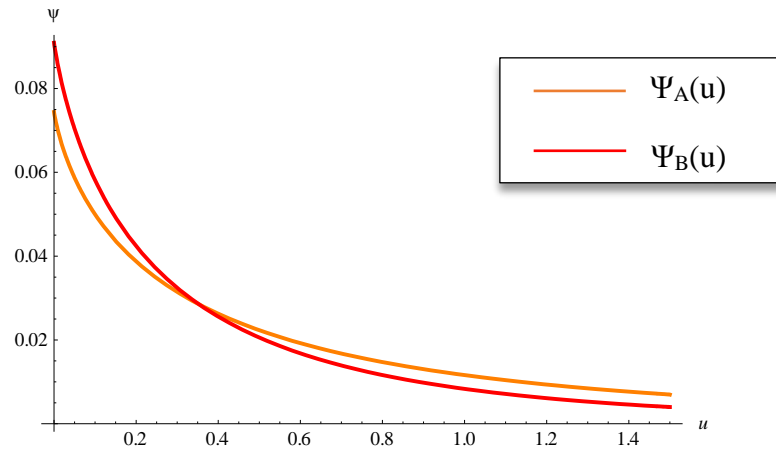
Στο ακόλουθο σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση 5.27 οι κατανομές ισορροπίας του χαρτοφυλακίου A και B αντίστοιχα.



*Γραφική Παράσταση 5.27 - Κατανομή Ισορροπίας των X A και B αντίστοιχα*

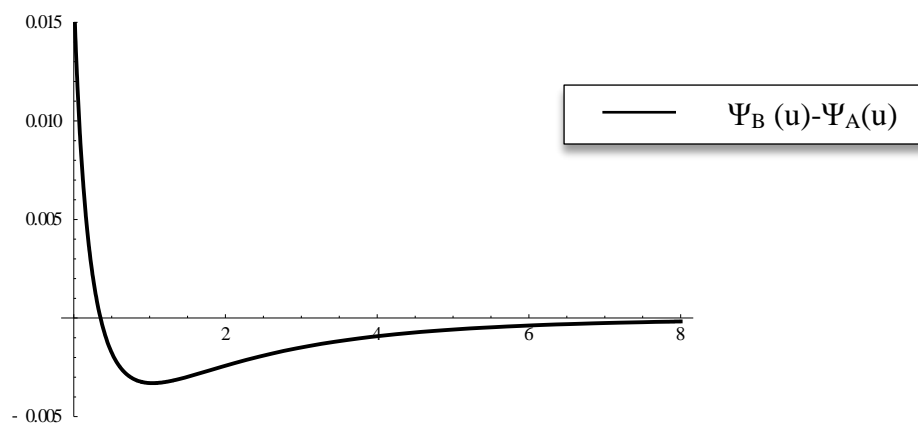
Παρατηρείται ότι η γραφική παράσταση που αντιστοιχεί στο χαρτοφυλάκιο A είναι πιο κάτω από την γραφική παράσταση του χαρτοφυλακίου B για κάθε τιμή του x.

Παρακάτω, για την πιθανότητα χρεοκοπίας έχουμε τελικά το ακόλουθο σχήμα από το οποίο φαίνεται ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου B για πολύ μικρές τιμές του  $u$  είναι πιο πάνω από την πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου A, ενώ για μεγάλες τιμές του  $u$  η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου A είναι μεγαλύτερη από τη πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου B.



*Γραφική Παράσταση 5.28 - Πιθανότητα Χρεοκοπίας των Χαρτοφυλακίων A και B αντίστοιχα*

Παρουσιάζεται επιπρόσθετα το σχεδιάγραμμα της διαφοράς των δύο πιθανοτήτων χρεοκοπίας, ώστε να δούμε αν αυτές τέμνονται για κάποιο  $u$ . Βάσει σχεδιαγράμματος, παρατηρούμε ότι η καμπύλη αρχικά βρίσκεται πάνω από τον άξονα των  $x$  για και μετά πέφτει και βρίσκεται κυρίως κάτω από τον άξονα των  $x$ . Επομένως, προκύπτει ότι η μία πιθανότητα χρεοκοπίας δεν είναι πάντα μεγαλύτερη από την άλλη.



*Γραφική Παράσταση 5.29 - Γραφική παράσταση της διαφοράς  $\Psi_B(u) - \Psi_A(u)$*

Σε αντίθεση με τις προηγούμενες εφαρμογές, παρατηρούμε ότι για δυο χαρτοφυλάκια A και B των οποίων οι αποζημιώσεις εκφράζονται μέσω κατανομών Weibull(4,0.4) και Weibull(4,0.5), αντίστοιχα, οι δύο καμπύλες τέμνονται για  $u=0.3529$ . Συνεπώς, το ένα χαρτοφυλάκιο δεν είναι πάντα περισσότερο ζημιολογικό από το άλλο, αφού για  $u < 0.3529$  η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου A είναι μικρότερη από την πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου B, ενώ για  $u > 0.3529$  η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου A είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου B.

## 5.4. Συνοπτικός πίνακας σύγκρισης κατανομών με βαριά ουρά υπό την Συνήθη Στοχαστική Διάταξη

Τα αποτελέσματα των εφαρμογών που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες Ενότητες συνοψίζονται και στον παρακάτω πίνακα όπου παρουσιάζονται συγκριτικά οι κατανομές Pareto και Weibull για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων τους υπό την Συνήθη Στοχαστική Διάταξη.

Κατανομή τ.μ. X	Κατανομή τ.μ. Y	Παράμετροι	Συνήθης Στοχαστική Διάταξη
$X \sim \text{Pareto}(\alpha_1, \lambda_1)$	$Y \sim \text{Pareto}(\alpha_2, \lambda_2)$	$\alpha_1 = \alpha_2$ και $\lambda_1 < \lambda_2$	$X <_{st} Y$
$X \sim \text{Pareto}(\alpha_1, \lambda_1)$	$Y \sim \text{Pareto}(\alpha_2, \lambda_2)$	$\alpha_1 = \alpha_2$ και $\lambda_1 > \lambda_2$	$X >_{st} Y$
$X \sim \text{Pareto}(\alpha_1, \lambda_1)$	$Y \sim \text{Pareto}(\alpha_2, \lambda_2)$	$\alpha_1 > \alpha_2$ και $\lambda_1 = \lambda_2$	$X <_{st} Y$
$X \sim \text{Pareto}(\alpha_1, \lambda_1)$	$Y \sim \text{Pareto}(\alpha_2, \lambda_2)$	$\alpha_1 > \alpha_2$ και $\lambda_1 > \lambda_2$	$X <_{st} Y$
$X \sim \text{Weibull}(c_1, \gamma_1)$	$Y \sim \text{Weibull}(c_2, \gamma_2)$	$c_1 = c_2$ και $\gamma_1 > \gamma_2$	$X <_{st} Y$
$X \sim \text{Weibull}(c_1, \gamma_1)$	$Y \sim \text{Weibull}(c_2, \gamma_2)$	$c_1 = c_2$ και $\gamma_1 < \gamma_2$	$X >_{st} Y$
$X \sim \text{Weibull}(c_1, \gamma_1)$	$Y \sim \text{Weibull}(c_2, \gamma_2)$	$c_1 > c_2$ και $\gamma_1 = \gamma_2$	$X <_{st} Y$
$X \sim \text{Weibull}(c, \gamma)$	$Y \sim \text{Pareto}(\alpha, \lambda)$	$c = \alpha$ και $\gamma < \lambda$	$X <_{st} Y$

## Βιβλιογραφία

### Ελληνόγλωσση

Γαϊτανής Κ., Στοχαστικές διατάξεις, θεωρία και εφαρμογές στο συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνου, Διπλωματική εργασία, Μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών στην αναλογιστική επιστήμη και διοικητική κινδύνου, Παν. Πειραιώς, Πειραιάς, 2020.

Γραμματικοπούλου Δ.Π., Σύγκριση Πιθανοτήτων Χρεοκοπίας με χρήση Στοχαστικών Διατάξεων, Διπλωματική εργασία, Μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών στην αναλογιστική επιστήμη και διοικητική κινδύνου, Παν. Πειραιώς, Πειραιάς, 2021.

Ηλιόπουλος Γ., Βασικές μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων, Εκδ. Σταμούλης, Αθήνα, 2013.

Κουτσόπουλος Κ., Αναλογιστικά μαθηματικά, Μέρος Ι, Θεωρία των κινδύνων, Εκδ. Συμμετρία, Αθήνα, 1999.

Κωνσταντινίδης Δ.Γ., Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου, Μέρος Β', Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2012.

Μπούτσικας Μ., Πανεπιστημιακές σημειώσεις μαθήματος Θεωρία Αξιοπιστίας, Παν. Πειραιώς, Πειραιάς, 2008.

Παπαϊωάννου Τ., Φερεντίνος Κ., Ιατρική Στατιστική και Στοιχεία Βιομαθηματικών, Εκδ. Σταμούλης, Αθήνα, 2004.

Πολίτης Θ: *Μέτρα Κινδύνου στην Αναλογιστική Επιστήμη*, Μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου. Παν. Πειραιώς, Πειραιάς, 2014.

Πολίτης Κ., Εισαγωγή στη θεωρία συλλογικού κινδύνου, Εκδ. Σταμούλης, Αθήνα, 2017.

Σεβνταλής Β., Στοχαστικές διατάξεις και εξάρτηση στη θεωρία κινδύνων, Διπλωματική εργασία, Μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών στην αναλογιστική επιστήμη και διοικητική κινδύνου, Παν. Πειραιώς, Πειραιάς, 2012.



Χατζηκωνσταντινίδης Ε., Πανεπιστημιακές σημειώσεις μαθήματος Κατανομές Απώλειας, Παν. Πειραιώς, Πειραιάς, 2015.

### **Ξενόγλωσση**

Bickel P., Doksum K., Tests for monotone failure rate based on normalized spacing, The Annals of Mathematical Statistics, 40(4):1216-1235, 1969.

Denuit M, Dhaene J, Goovaerts M and Kass R: *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*, John Wiley & Sons, Ltd. 2005.

Dhaene J., Goovaerts M., Kaas R., Economic Capital Allocation Derived from Risk Measures, North American Actuarial Journal, 7(2): 44-56, 2003.

Kaas R, Goovaerts M and Dhaene J, *Modern Actuarial Risk Theory: Using R*, Springer, 2008.

Klebanov, L., B., Heavy Tailed Distributions, notes in Charles Univeristy, Prague, 2003.

Shibde A., S., Takale K., C., Study of Black-Scholes Model and its Applications. *Procedia Engineering*, 38:270-279, 2012.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### ΕΝΤΟΛΕΣ MATHEMATICA

#### Γραφική Παράσταση 2.1

```
lamda1 = 0.1  
lamda2 = 0.3  
FbarX[t_] = Exp[-lamda1 * t]  
FbarY[t_] = Exp[-lamda2 * t]  
Limit[FbarX[t], t -> Infinity]  
Plot[{FbarX[t], FbarY[t]}, {t, 0, 10}, PlotRange -> Automatic, AxesLabel -> {x, y},  
PlotStyle -> {Magenta, Green}]
```

#### Γραφική Παράσταση 2.2

```
lamda1=0.5  
beta=2  
lamda2=0.8  
FbarX[t_]=Exp[-lamda1 *(t-beta)]  
FbarY[t_]=Exp[-lamda2*(t-beta)]  
Limit[FbarX[t],t->Infinity]  
Plot[{FbarX[t],FbarY[t]}, {t,beta,10},PlotRange->Automatic,AxesLabel->{x,y},PlotStyle-  
>{Purple,Orange}]
```

#### Γραφική Παράσταση 2.3

```
lamda1 = 0.6  
v1 = 3  
lamda2 = 0.5  
v2 = 3  
FbarX[t_] = Exp[-lamda1 * t] * Sum[(lamda1 * t)^k / Gamma[k + 1], {k, 0, v1 - 1}]  
FbarY[t_] = Exp[-lamda2 * t] * Sum[(lamda2 * t)^k / Gamma[k + 1], {k, 0, v2 - 1}]  
Limit[FbarX[t], t -> Infinity]  
Plot[{FbarX[t], FbarY[t]}, {t, 0, 20}, PlotRange -> Automatic, AxesLabel -> {x, y}, PlotStyle  
-> {Blue, Green}]
```

#### Γραφική Παράσταση 2.4

```
gamma1 = 0.7  
c1 = 3
```

```

gamma2 = 0.3
c2 = 3
FbarX[t_] = Exp[-c1*t^gamma1]
FbarY[t_] = Exp[-c2*t^gamma2]
Limit[FbarX[t], t -> Infinity]
Plot[{FbarX[t], FbarY[t]}, {t, 1, 5}, PlotRange -> Automatic, AxesLabel -> {x, y}, PlotStyle
-> {Cyan, Red}]

```

### Γραφική Παράσταση 2.5

```

lamda1 = 5
a1 = 2
lamda2 = 3
a2 = 2
FbarX[t_] = (lamda1/(t + lamda1))^a1
FbarY[t_] = (lamda2/(t + lamda2))^a2
Limit[FbarX[t], t -> Infinity]
Plot[{FbarX[t], FbarY[t]}, {t, 0, 10}, PlotRange -> Automatic, AxesLabel -> {x, y}, PlotStyle
-> {Blue, Orange}]

```

### Γραφική Παράσταση 2.6

```

lamda1 = 3
t1 = 0.2
a1 = 4
lamda2 = 3
t2 = 0.5
a2 = 4
FbarX[t_] = (lamda1/(t^t1 + lamda1))^a1
FbarY[t_] = (lamda2/(t^t2 + lamda2))^a2
Limit[FbarX[t], t -> Infinity]
Plot[{FbarX[t], FbarY[t]}, {t, 0, 10}, PlotRange -> Automatic, AxesLabel -> {x, y}, PlotStyle
-> {Magenta, Gray}]

```

### Εφαρμογή 3.3.2.1

```

f[x_] = β*Exp[-β*x]
β = 0.5
μ = Integrate[x*f[x], {x, 0, Infinity}]
c = 4
λ = 1

```

```

θ = (c/(λ*μ)) - 1
M[R_] = Integrate[Exp[x*R]*f[x], {x, 0, Infinity}]
Solve[M[R] == 1 + R*c/λ, R]
R = 0.25
psi[u_] = 1/(1 + θ)*Exp[-R*u]
psi[0]
psi[5]
psi[9.22]
psi[15.7]
psi1[u_] = (λ*Exp[-u*λ])/(c + 1)
psi1[5]
psi1[9.22]
psi1[15.7]
F[x_] = Integrate[f[t], {t, 0, x}]
μ2 = Integrate[x^2*f[x], {x, 0, Infinity}]
μ3 = Integrate[x^3*f[x], {x, 0, Infinity}]
EL = μ2/(2*θ*μ)
VL = μ3/(3*θ*μ) + EL^2

```

### Εφαρμογή 3.3.2.2

```

α = 4
δ = 12
EX = δ/(α - 1)
VX = α*δ^2/((α - 2)*(α - 1)^2)
c = 8
λ = 1.5
θ = c/(λ*EX) - 1
psi0 = 1/(1 + θ)
f[x_] = (α*δ^α)/((δ + x)^(α + 1))
F[x_] = 1 - ((δ^α)/((δ + x)^α))
Hbar[u_] = (1/EX)*Integrate[(1 - F[x]), {x, u, Infinity}, Assumptions -> u > -1.5]
Hbar[5]
F1[x_] = 1 - ((δ^(α - 1))/((δ + x)^(α - 1)))
F1bar[x_] = 1 - F1[x]
katofragma[u_] = Hbar[u]/(Hbar[u] + θ)
katofragma[5]
F1bar[10]
katofragma[10]
g[x_] = (3*12^3)/((12 + x)^(3 + 1))
μ = Integrate[x*g[x], {x, 0, Infinity}]
μ2 = Integrate[x^2*g[x], {x, 0, Infinity}]
EL = μ2/(2*θ*μ)

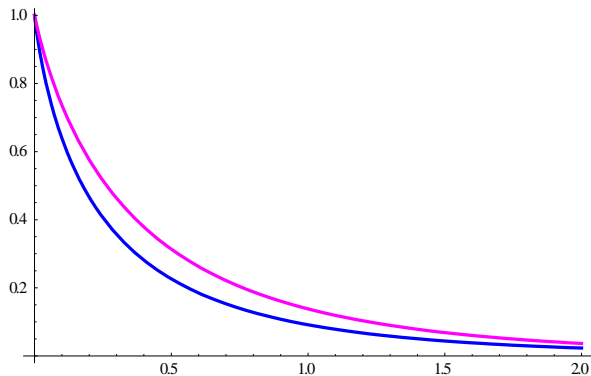
```

## Γραφική Παράσταση 4.1

```
lamda = 0.5  
F1[x_] = 1 - Exp[-lamda*x]  
F2[x_] = 1 - Exp[-lamda*x]*(1 + lamda*x)  
Plot[{F1[x], F2[x]}, {x, 0, 20}, PlotRange -> Automatic,  
AxesLabel -> {x, F(x)}, PlotStyle -> {Blue, Green}]
```

### 4.2.2 Εφαρμογή:

```
γ1=0.5  
c1=3  
fx[x_]=c1*γ1*(x^(γ1-1))*Exp[-c1*x^γ1]  
Fx[x_]=1-Exp[-c1*x^γ1]  
Fxbar[x_]=1-Fx[x]  
Ex=Integrate[x*fx[x],{x,0,Infinity},Assumptions->{x>0}]  
γ2=0.6  
c2=3  
fy[y_]=c2*γ2*(y^(γ2-1))*Exp[-c2*y^γ2]  
Fy[y_]=1-Exp[-c2*y^γ2]  
Fybar[y_]=1-Fy[y]  
Ey=Integrate[y*fy[y],{y,0,Infinity},Assumptions->{y>0}]  
Hxbar[x_]=(1/Ex)*Integrate[Exp[-c1*(x^γ1)],{x,u,Infinity},Assumptions->{u>0}]  
Hybar[y_]=(1/Ey)*Integrate[Exp[-c2*(y^γ2)],{y,u,Infinity},Assumptions->{u>0}]  
Plot[{1-Hxbar[u],1-  
Hybar[u]},{u,0,2},PlotRange->Automatic,PlotStyle->{{Blue,Thickness[Large]},{Magenta,Thickness[Large]}}
```



### 4.3.1 Εφαρμογή:

```
a=5  
d=20  
f1[x_]=a*d^a/(x+d)^(a+1)
```

```

F1[x_]=Integrate[f1[t],{t,0,x}]
p=0.99
Solve[F1[VaR]==p,VaR]
F2[x_]=F1[Log[x]]
Solve[F2[VaRL]==p,VaRL]
F1bar[x_]=1-F1[x]
F2bar[x_]=1-F2[x]
Limit[F1bar[x]/F2bar[x],x->Infinity]

```

#### 4.4.1 Εφαρμογή:

```

f1[t_]=Exp[-t^c]*c*t^(c-1)
f2[t_]=Exp[t]*Exp[-Exp[t]+1]
F1[t_]=Integrate[f1[x],{x,0,t}]
F2[t_]=Integrate[f2[x],{x,0,t}]
F1bar[t_]=1-F1[t]
F2bar[t_]=1-F2[t]
r1[t_]=f1[t]/F1bar[t]
r2[t_]=f2[t]/F2bar[t]
c=1
r1[t_]
r1[t]<r2[t]
clear[c]
c=2
r1[t]<r2[t]
Plot[{r1[t],r2[t]},{t,0,5},PlotRange->Automatic,AxesLabel->{t,r(t)},PlotStyle->{Blue,Red}]

```

#### Εφαρμογή 5.2.1

```

gamma1 = 0.6
c1 = 6
gamma2 = 0.3
c2 = 6
FbarX[t_] = Exp[-c1*t^gamma1]
FbarY[t_] = Exp[-c2*t^gamma2]
Limit[FbarX[t], t -> Infinity]
Plot[{FbarX[t], FbarY[t]}, {t, 0, 10}, PlotRange -> Automatic,
AxesLabel -> {t, prob},
PlotStyle -> {{Cyan, Thickness[Large]}, {Red, Thickness[Large]}}]
Plot[{1 - FbarX[t], 1 - FbarY[t]}, {t, 1, 10}, PlotRange -> Automatic,
AxesLabel -> {t, prob}, PlotStyle -> {{Cyan, Thickness[Large]}, {Red,
Thickness[Large]}}]

```

#### Εφαρμογή 5.2.2

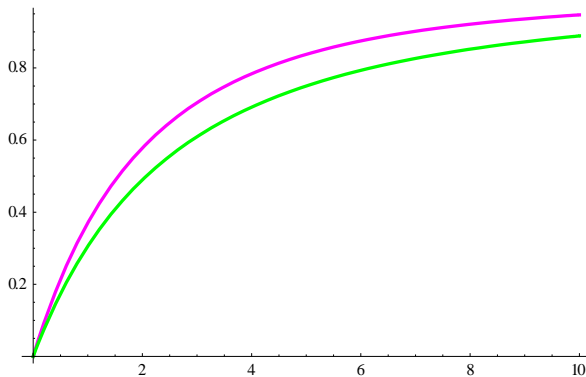
Ομοίως με την εφαρμογή 5.2.2 για την κατανομή Pareto

### Εφαρμογή 5.2.3

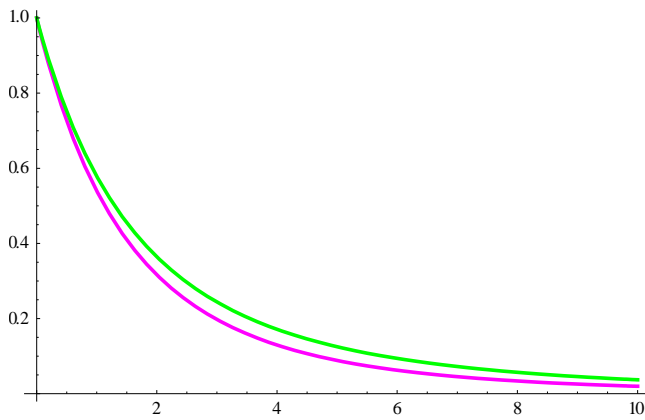
```
gamma1=0.6
c1=6
a2=6
lamda2=8
FbarX[t_]=Exp[-c1*t^gamma1]
FbarY[t_]=(lamda2^a2)/(lamda2+t)^a2
Limit[FbarX[t],t->Infinity]
Plot[{FbarX[t],FbarY[t]},{t,0,10},PlotRange->Automatic,AxesLabel->{t,prob},PlotStyle->{{Cyan,Thickness[Large]},{Yellow,Thickness[Large]}}]
Plot[{1-FbarX[t],1-FbarY[t]},{t,0,10},PlotRange->Automatic,AxesLabel->{t,prob},PlotStyle->{{Cyan,Thickness[Large]},{Yellow,Thickness[Large]}}]
```

### Εφαρμογή 5.3.1

```
λ1=6
α1=4
fx[x_]=(α1*λ1^α1)/(λ1+x)^(α1+1)
Fx[x_]=1-((λ1^α1)/(λ1+x)^α1)
Ex=λ1/(α1-1)
Fbarx[x_]=(λ1^α1)/(λ1+x)^α1
1296/(6+x)^4
FLx[x_]=Integrate[(1/Ex)*Fbarx[t],{t,0,x},Assumptions->{x>0}]
λ2=5
α2=3
fy[y_]=(α2*λ2^α2)/(λ2+y)^(α2+1)
Fy[y_]=1-((λ2^α2)/(λ2+y)^α2)
Ey=λ2/(α2-1)
Fbary[y_]=(λ2^α2)/(λ2+y)^α2
FLy[y_]=Integrate[(1/Ey)*Fbary[t],{t,0,y},Assumptions->{y>0}]
(y (10+y))/(5+y)^2
Plot[{FLx[t],FLy[t]},{t,0,10},PlotRange->Automatic,PlotStyle->{{Magenta,Thickness[Large]},{Green,Thickness[Large]}}]
```



```
Plot[{Fbarx[t],Fbary[t]},{t,0,10},PlotRange->Automatic,PlotStyle->{{Magenta,Thickness[Large]},{Green,Thickness[Large]}}
```



$c=6$

$\lambda=2$

$\theta=(c/(\lambda*Ex))-1$

$Hbarx[x_]=1-FLx[x]$

$\psi x[u_]=(1/\theta)*Hbarx[u]$

$c=6$

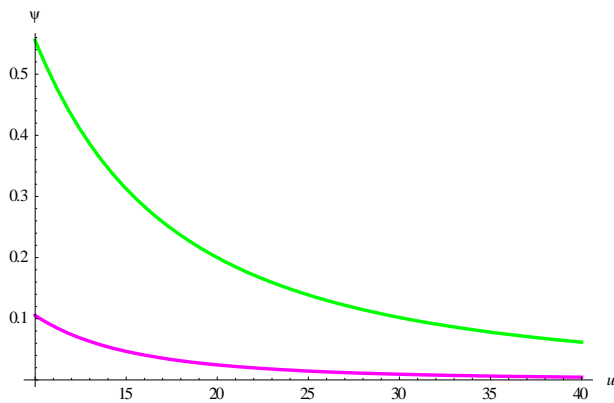
$\lambda=2$

$\theta y=(c/(\lambda*Ey))-1$

$Hbary[y_]=1-FLy[y]$

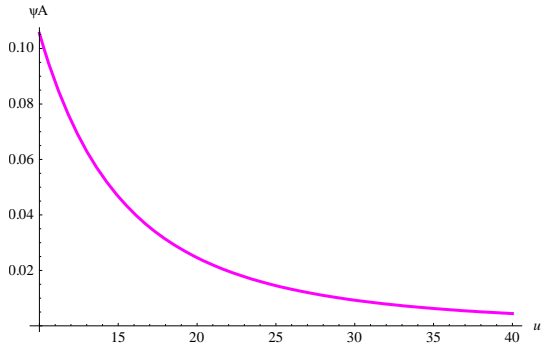
$\psi y[u_]=(1/\theta y)*Hbary[u]$

```
Plot[{ψx[u],ψy[u]},{u,10,40},PlotRange->Automatic,AxesLabel->{u,ψ},PlotStyle->{{Magenta,Thickness[Large]},{Green,Thickness[Large]}}
```

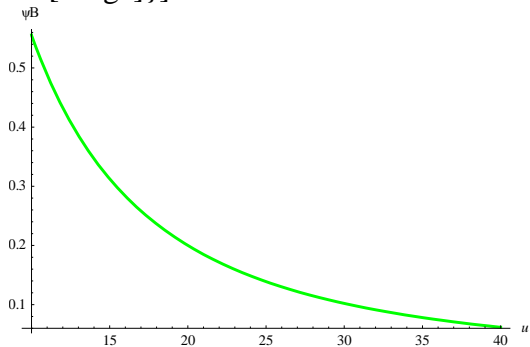


```
Plot[ψx[u],{u,10,40},PlotRange->Automatic,AxesLabel->{u,ψA},PlotStyle->{Magenta,Thickness[Large]}}
```

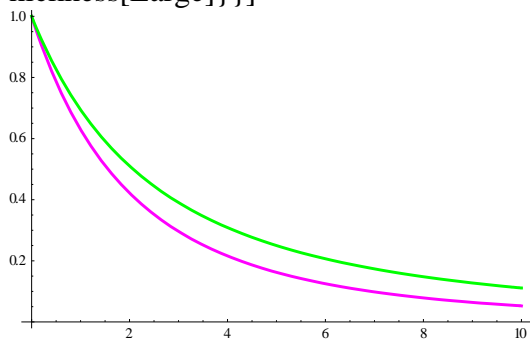




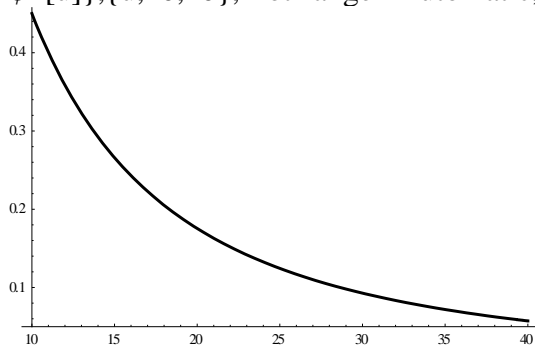
`Plot[ψy[u],{u,10,40},PlotRange→Automatic,AxesLabel→{u,ψB},PlotStyle→{Green,Thickn  
ess[Large]}`



`Plot[{1-FLx[t],1-  
FLy[t]},{t,0,10},PlotRange→Automatic,PlotStyle→{{Magenta,Thickness[Large]},{Green,T  
hickness[Large]}}`



`Plot[{ψy[u]-  
ψx[u]},{u,10,40},PlotRange→Automatic,PlotStyle→{{Black,Thickness[Large]}}`



### Εφαρμογή 5.3.2

Ομοίως με την εφαρμογή 5.3.1 αλλάζοντας τι; παραμέτρους

### Εφαρμογή 5.3.3

Ομοίως με την εφαρμογή 5.3.1 αλλάζοντας τι; παραμέτρους

### Εφαρμογή 5.3.4

$$\gamma_1=0.4$$

$$c_1=4$$

$$f_x[x_]=c_1*\gamma_1*(x^{(\gamma_1-1)})*Exp[-c_1*x^{\gamma_1}]$$

$$F_x[x_]=1-Exp[-c_1*x^{\gamma_1}]$$

$$F_xbar[x_]=1-F_x[x]$$

$$E_x=Integrate[x*f_x[x],\{x,0,Infinity\},Assumptions\to\{x>0\}]$$

$$\gamma_2=0.4$$

$$c_2=3$$

$$f_y[y_]=c_2*\gamma_2*(y^{(\gamma_2-1)})*Exp[-c_2*y^{\gamma_2}]$$

$$F_y[y_]=1-Exp[-c_2*y^{\gamma_2}]$$

$$F_ybar[y_]=1-F_y[y]$$

$$E_y=Integrate[y*f_y[y],\{y,0,Infinity\},Assumptions\to\{y>0\}]$$

$$H_xbar[x_]=(1/E_x)*Integrate[Exp[-c_1*(x^{\gamma_1})],\{x,u,Infinity\},Assumptions\to\{u>0\}]$$

$$H_x[x_]=1-H_xbar[x]$$

$$H_ybar[y_]=(1/E_y)*Integrate[Exp[-c_2*(y^{\gamma_2})],\{y,u,Infinity\},Assumptions\to\{u>0\}]$$

$$H_y[y_]=1-H_ybar[y]$$

$$c=3$$

$$\lambda=2$$

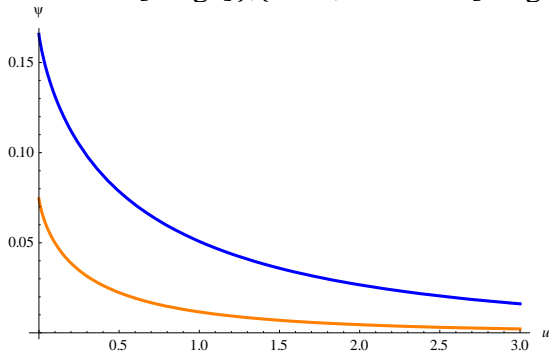
$$\theta_x=(c/(\lambda*E_x))-1$$

$$\theta_y=(c/(\lambda*E_y))-1$$

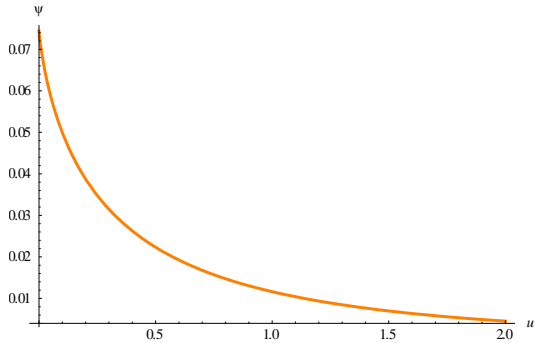
$$\psi_x[u_]=(1/\theta_x)*H_xbar[u]$$

$$\psi_y[u_]=(1/\theta_y)*H_ybar[u]$$

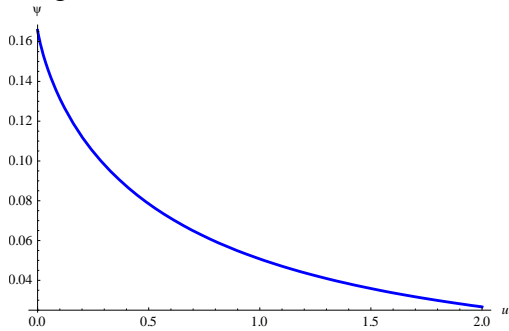
$$Plot[\{\psi_x[u],\psi_y[u]\},\{u,0,3\},PlotRange\to Automatic,AxesLabel\to\{u,\psi\},PlotStyle\to\{\{Orange,Thickness[Large]\},\{Blue,Thickness[Large]\}\}]$$



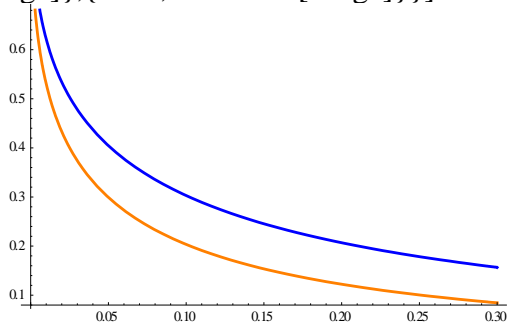
$$Plot[\psi_x[u],\{u,0,2\},PlotRange\to Automatic,AxesLabel\to\{u,\psi\},PlotStyle\to\{\{Orange,Thickness[Large]\}\}]$$



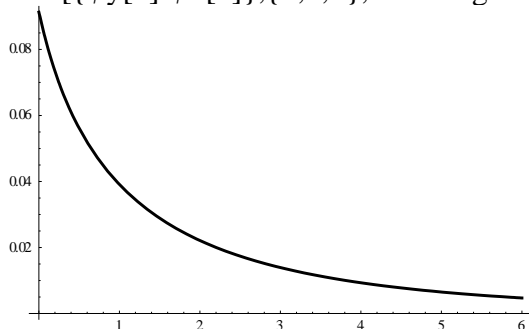
`Plot[ $\psi$ y[u],{u,0,2},PlotRange→Automatic,AxesLabel→{u, $\psi$ },PlotStyle→{{Blue,Thickness[Large]}]}`



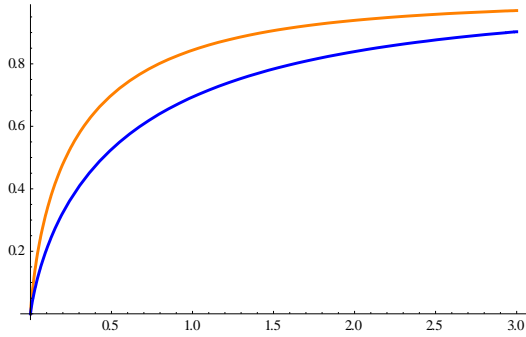
`Plot[{Fxbar[t],Fybar[t]},{t,0,0.3},PlotRange→Automatic,PlotStyle→{{Orange,Thickness[Large]},{Blue,Thickness[Large]}]}`



`Plot[{ $\psi$ y[u]- $\psi$ x[u]},{u,0,6},PlotRange→Automatic,PlotStyle→{{Black,Thickness[Large]}]}`



`Plot[{Hx[u],Hy[u]},{u,0,3},PlotRange→Automatic,PlotStyle→{{Orange,Thickness[Large]},{Blue,Thickness[Large]}]}`

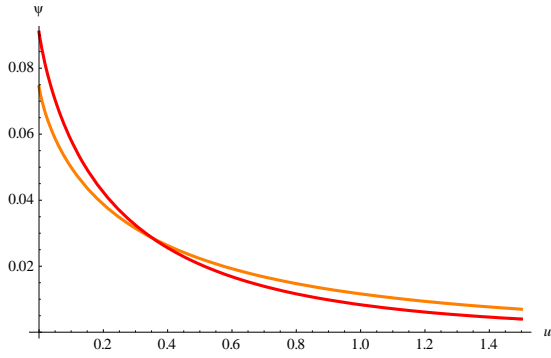


### Εφαρμογή 5.3.5

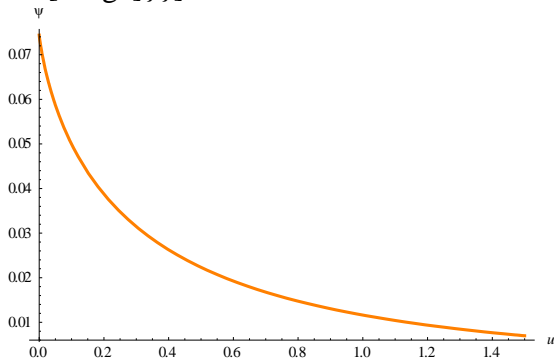
```

γ1=0.4
c1=4
fx[x_]=c1*γ1*(x^(γ1-1))*Exp[-c1*x^γ1]
Fx[x_]=1-Exp[-c1*x^γ1]
Fxbar[x_]=1-Fx[x]
Ex=Integrate[x*fx[x],{x,0,Infinity},Assumptions->{x>0}]
γ2=0.5
c2=4
fy[y_]=c2*γ2*(y^(γ2-1))*Exp[-c2*y^γ2]
Fy[y_]=1-Exp[-c2*y^γ2]
Fybar[y_]=1-Fy[y]
Ey=Integrate[y*fy[y],{y,0,Infinity},Assumptions->{y>0}]
Hxbar[x_]=(1/Ex)*Integrate[Exp[-c1*(x^γ1)],{x,u,Infinity},Assumptions->{u>0}]
Hx[x_]=1-Hxbar[x]
Hybar[y_]=(1/Ey)*Integrate[Exp[-c2*(y^γ2)],{y,u,Infinity},Assumptions->{u>0}]
Hy[y_]=1-Hybar[y]
c=3
λ=2
θx=(c/(λ*Ex))-1
θy=(c/(λ*Ey))-1
ψx[u_]=(1/θx)*Hxbar[u]
ψy[u_]=(1/θy)*Hybar[u]
Plot[{ψx[u],ψy[u]},{u,0,1.5},PlotRange->Automatic,AxesLabel->{u,ψ},PlotStyle->{{Orange,Thickness[Large]},{Red,Thickness[Large]}}]

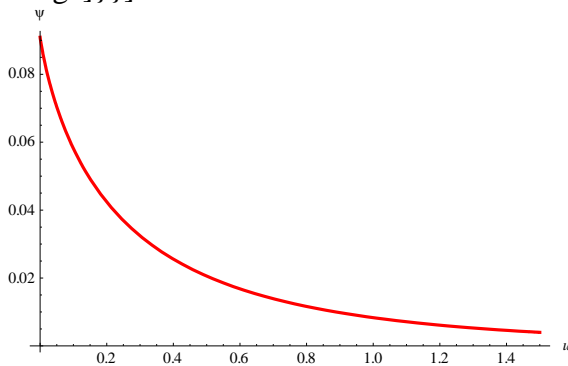
```



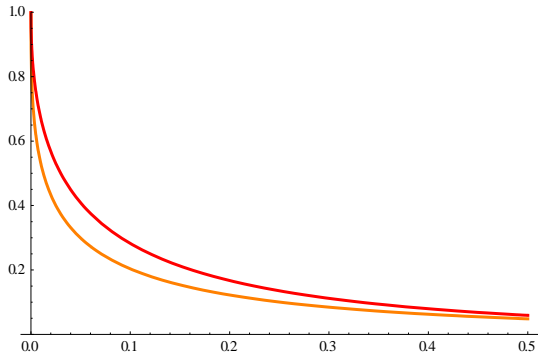
`Plot[ $\psi_x[u]$ , {u, 0, 1.5}, PlotRange  $\rightarrow$  Automatic, AxesLabel  $\rightarrow$  {u,  $\psi$ }, PlotStyle  $\rightarrow$  {{Orange, Thickness[Large]}}`



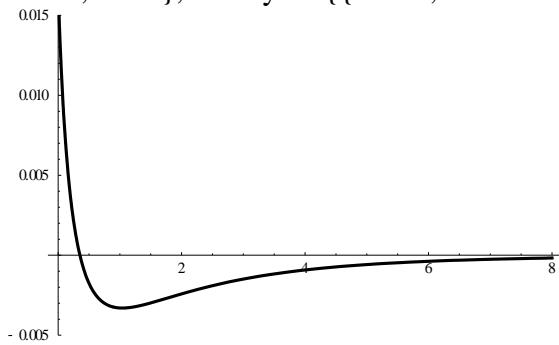
`Plot[ $\psi_y[u]$ , {u, 0, 1.5}, PlotRange  $\rightarrow$  Automatic, AxesLabel  $\rightarrow$  {u,  $\psi$ }, PlotStyle  $\rightarrow$  {{Red, Thickness[Large]}}`



`Plot[{F $\bar{x}$ [t], F $\bar{y}$ [t]}, {t, 0, 0.5}, PlotRange  $\rightarrow$  {0, 1}, PlotStyle  $\rightarrow$  {{Orange, Thickness[Large]}, {Red, Thickness[Large]}}`



Plot[ $\{\psi_y[u]-\psi_x[u]\},\{u,0,8\},\text{PlotRange}\rightarrow\{-0.005,0.015\},\text{PlotStyle}\rightarrow\{\{\text{Black},\text{Thickness}[\text{Large}]\}\}$ ]



Plot[ $\{\text{Hx}[u],\text{Hy}[u]\},\{u,0,2\},\text{PlotRange}\rightarrow\text{Automatic},\text{PlotStyle}\rightarrow\{\{\text{Orange},\text{Thickness}[\text{Large}]\},\{\text{Red},\text{Thickness}[\text{Large}]\}\}$ ]

