

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

**«Μέθοδοι εκτίμησης πινάκων επιβίωσης και βιομετρικών
συναρτήσεων: εφαρμογή για την Ελλάδα το 2018»**

Κακούρη Χριστίνα-Άννα

Διπλωματική εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Πειραιάς, Οκτώβριος 2022

UNIVERSITY OF PIRAEUS
SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS



**DEPARTMENT OF STATISTICS & INSURANCE
SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE & RISK
MANAGEMENT**

**«Methods of constructing a life-table and estimating biometric
functions: an application for Greece, 2018»**

Kakouri Christina-Anna

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics & Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science & Risk Management.

Piraeus, October 2022

[2]

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη Γ.Σ.Ε.Σ. του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμό συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγήτρια Γεωργία Βερροπούλου (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Αντζουλάκος Δημήτριος
- Αναπληρωτής Καθηγητής Τζαβελάς Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

*Στους γονείς μου,
Εμμανουήλ και Παρασκευή*

Ευχαριστίες

Ήρθε, λοιπόν, η ώρα για να κλείσει ένας υπέροχος κύκλος στη ζωή μου. Στο σημείο αυτό, αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν στην επιτυχή περάτωση των ακαδημαϊκών μου σπουδών.

Εν πρώτοις, θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς την επιβλέπουσα, Καθηγήτρια κ. Γεωργία Βερροπούλου, για τη διαρκή ενθάρρυνση και υποστήριξη, τις συμβουλές, τις υποδείξεις, τις αμέτρητες εργατοώρες που αφιέρωσε και την γενικότερη καθοδήγηση που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Θα ήθελα να της ευχηθώ να είναι πάντα καλά και να συνεχίσει αυτό το έργο για πολλά χρόνια ακόμα! Παράλληλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κ.κ. Αντζουλάκο και Τζαβελά για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή. Επιπλέον, δράττομαι της ευκαιρίας να ευχαριστήσω όλα τα μέλη του διδακτικού προσωπικού για την συνεργασία μας τα τελευταία έξι χρόνια καθώς πορευθήκαμε μαζί από το 2016 όταν ξεκίνησα να φοιτώ στο προπτυχιακό Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στους δικούς μου ανθρώπους, καθώς αποτέλεσαν κινητήρια δύναμη σε κάθε μου βήμα. Μα το μεγαλύτερο ευχαριστώ, θα ήθελα να το απευθύνω στους γονείς μου, Εμμανουήλ και Παρασκευή τόσο για την απύθμενη στήριξη και εμπιστοσύνη που έδειξαν στο πρόσωπό μου καθ' όλη τη διάρκεια των ακαδημαϊκών μου σπουδών που με βοήθησε να ανταπεξέλθω σε όλες τις δυσκολίες όσο και για την υπομονή και αντοχή στο πρόσωπό μου εδώ και 24 χρόνια.

Περίληψη

Ένα από τα σημαντικότερα αντικείμενα της αναλογιστικής επιστήμης, είναι η κατασκευή πινάκων επιβίωσης. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η κατασκευή συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης του πληθυσμού της Ελλάδας ανά ηλικιακή ομάδα και φύλο για το έτος 2018, και στη συνέχεια αναγωγή του συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης σε πλήρη με τη βοήθεια δύο μεθόδων, την μέθοδο της ομοιόμορφης κατανομής των θανάτων (UDD) και την μέθοδο της σταθερής έντασης θνησιμότητας (CFM). Τα δεδομένα αντλήθηκαν από την Ελληνική Στατιστική Αρχή.

Στα πρώτο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση κάποιων βασικών ορισμών αλλά και μια περιγραφική ανάλυση των βασικών συναρτήσεων που απαρτίζουν έναν πίνακα επιβίωσης. Στη συνέχεια γίνεται αναφορά στις υποθέσεις στις οποίες βασίζεται ένας πίνακας επιβίωσης αλλά και στα βήματα που ακολουθήθηκαν για την κατασκευή ενός συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης από πραγματικά δεδομένα. Έπειτα, στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται μέθοδοι για την αναγωγή ενός συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης σε πλήρη: αναλύονται οι τρεις πολύ σημαντικές υποθέσεις που αφορούν την ένταση θνησιμότητας, η υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής θανάτων, η υπόθεση της σταθερής έντασης θνησιμότητας και η υπόθεση Balducci, ενώ γίνεται αναφορά και σε άλλες μεθόδους που αναφέρονται στη διεθνή βιβλιογραφία. Στο τρίτο κεφάλαιο, πραγματοποιείται η κατασκευή ενός πλήρη πίνακα επιβίωσης ανά φύλο, βάσει ενός συνεπτυγμένου πίνακα και με χρήση κάποιων από τις προαναφερθείσες μεθόδους, ενώ με τη βοήθεια διαγραμμάτων γίνεται απεικόνιση και ανάλυση ορισμένων αποτελεσμάτων.

Εν κατακλείδι, στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο συνοψίζονται τα κυριότερα αποτελέσματα που εξήχθησαν μέσω της ανάλυσης και γίνεται μια σύγκριση των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν. Παρατηρήθηκε ότι το προσδόκιμο ζωής των γυναικών είναι μεγαλύτερο από των ανδρών σε κάθε μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε. Επιπλέον παρατηρήθηκαν διαφοροποιήσεις μεταξύ των μεθόδων, ωστόσο βάση των αποτελεσμάτων αλλά και των διαδικασιών καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η μέθοδος της ομοιόμορφης κατανομής θανάτων μας δίνει πιο ρεαλιστικές προσεγγίσεις.

Abstract

One of the most important topics of Actuarial Science is the construction of life tables. This thesis aims to construct an abridged life table of the population of Greece by age-group and gender for the year 2018, and then to transform the abridged life table to a complete one, based on two methods, the method of uniform distribution of deaths (UDD) and the constant force mortality method (CFM). The data was obtained from the Hellenic Statistical Authority.

In the first chapter, basic definitions are presented along with a descriptive analysis of the basic functions that constitute a life table. Then, the assumptions on which a survival table is based are discussed as well as the required steps for constructing a life table from empirical data. Subsequently, in the second chapter, methods that allow the transformation of an abridged life table to a complete one are presented. First, the three very important hypotheses concerning the force of mortality are analyzed, the hypothesis of the uniform distribution of deaths, the hypothesis of constant force of mortality and the Balducci hypothesis; subsequently, methods based on the available literature are presented. In the third chapter, a complete life table by gender is constructed for each method, based on an estimated abridged one, while some results are illustrated and analyzed with the help of diagrams.

To conclude, the fourth and last chapter summarizes the main results extracted through the analysis and compares the methods used. It was observed that the life expectancy of women is greater than that of men for all methods under consideration. In addition, small differences were observed between the methods for each age, however, based on the results and the procedures, we came to the conclusion that the method of uniform distribution of deaths gives us more realistic estimates.

Πίνακας Περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Κατασκευή πινάκων επιβίωσης.....	14
1.1 Βασικοί ορισμοί.....	14
1.2 Πίνακας επιβίωσης.....	15
1.3 Υποθέσεις πάνω στις οποίες βασίζεται ένας πίνακας επιβίωσης.....	17
1.4 Αξιοπιστία μέτρου και χρήσεις γενικότερα στην αναλογιστική επιστήμη.....	18
1.5 Κατασκευή ενός πίνακα επιβίωσης από πραγματικά στοιχεία.....	18
1.5.1 Βήματα κατασκευής συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης.....	23
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ^ο : Μέθοδοι αναγωγής συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης σε πλήρη	26
2.1 Μοντέλα που προκύπτουν βάσει υποθέσεων για force of mortality.....	27
2.2 Άλλα προτεινόμενα μοντέλα.....	32
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ^ο : Εφαρμογή: Κατασκευή πινάκων επιβίωσης για την Ελλάδα.....	34
3.1 Κατασκευή συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης.....	35
3.2 Κατασκευή πλήρους πίνακα επιβίωσης με τη χρήση μεθόδων.....	41
3.2.1 Επεξεργασία δεδομένων σε περιβάλλον Excel	42
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ^ο : Σύγκριση μεθόδων – Προβληματισμοί και Συμπεράσματα.....	69
4.1 Συγκριτική θεώρηση των αποτελεσμάτων και προβληματισμοί.....	69
4.2 Σύνοψη και συμπεράσματα.....	74

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1: Πίνακας Επιβίωσης Αρρένων, Ελλάδα 2012.....	25
Πίνακας 2: Σχέσεις μεταξύ των συναρτήσεων.....	29
Πίνακας 3:Πληθυσμός αντρών ανά ηλικιακή ομάδα κατά το έτος 2017	35
Πίνακας 4:Πληθυσμός γυναικών ανά ηλικιακή ομάδα κατά το έτος 2017	35
Πίνακας 5: Συναρτήσεις excel για την κατασκευή ενός συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης. 36	
Πίνακας 6: Συνεπτυγμένος πίνακας επιβίωσης ανδρών για το έτος 2018.....	37
Πίνακας 7:Συνεπτυγμένος πίνακας επιβίωσης γυναικών για το έτος 2018	38
Πίνακας 8: Πλήρης πίνακας επιβίωσης γυναικών (υπόθεση UDD).....	44
Πίνακας 9: Πλήρης πίνακας επιβίωσης ανδρών (υπόθεση UDD).....	47
Πίνακας 10:Πλήρης πίνακας επιβίωσης γυναικών (υπόθεση CFM).....	54
Πίνακας 11:Πλήρης πίνακας επιβίωσης ανδρών (υπόθεση CFM).....	58
Πίνακας 12:Πλήρης πίνακας επιβίωσης ανδρών (extrapolation).....	63
Πίνακας 13: Σύγκριση των εκτιμήσεων της προσδοκώμενης ζωής για κάθε μέθοδο.....	71
Πίνακας 14:Πλήρης πίνακας επιβίωσης ανδρών ($\omega=115$).....	73
Πίνακας 15: Πλήρης πίνακας επιβίωσης γυναικών ($\omega=115$)	74

Κατάλογος Διαγραμμάτων

Γράφημα 1: Ποσοστά έκθεσης ανά μέθοδο	31
Γράφημα 2: Επιζώντες $l(x)$ ανά ηλικία και φύλο για το έτος 2018	39
Γράφημα 3: Πιθανότητες θανάτου q_x ανά ηλικία και φύλο για το έτος 2018	39
Γράφημα 4: Προσδοκώμενη ζωή στην ηλικία x ανά φύλο και ηλικιακή ομάδα για το έτος 2018.....	40
Γράφημα 5: Επιζώντες $l(x)$ ανά ηλικία και φύλο για το έτος 2018 (UDD)	47
Γράφημα 6: Πιθανότητες θανάτου q_x ανά ηλικία και φύλο για το έτος 2018	48
Γράφημα 7: Επιζώντες $l(x)$ ανά ηλικία και φύλο για το έτος 2018 (υπόθεση CFM)	59
Γράφημα 8: Πιθανότητα θανάτου q_x ανά ηλικία και φύλο (υπόθεση CFM)	60
Γράφημα 9: Επιζώντες $l(x)$ ανά ηλικία και φύλο για το έτος 2018 (extrapolation)	67
Γράφημα 10: Πιθανότητα θανάτου q_x ανά ηλικία και φύλο (extrapolation)	68
Γράφημα 11: Επιζώντες $l(x)$ ανά ηλικία - Σύγκριση μεθόδων (Άνδρες).....	69
Γράφημα 12: Πιθανότητα θανάτου q_x ανά ηλικία - Σύγκριση μεθόδων (Άνδρες).....	70
Γράφημα 13: Γράφημα 11: Επιζώντες $l(x)$ ανά ηλικία - Σύγκριση μεθόδων (Γυναίκες)	70
Γράφημα 14: Γράφημα 12: Πιθανότητα θανάτου q_x ανά ηλικία - Σύγκριση μεθόδων (Γυναίκες)	71

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο: Κατασκευή πινάκων επιβίωσης

1.1 Βασικοί Ορισμοί

Αρχικά, παραθέτουμε ορισμένους απαραίτητους ορισμούς, στους οποίους θα αναφερόμαστε κατά κόρον καθ' όλη τη διάρκεια της ανάλυσης.

Θάνατος και Θνησιμότητα

Σύμφωνα με τον Παγκόσμιο Οργανισμό Υγείας, **θάνατος** είναι η διαρκής και οριστική εξοφάνιση κάθε ένδειξης ζωής, η οποία επέρχεται σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μετά τη γέννηση ζώντος ανθρώπινου οργανισμού. Στην επιστήμη της Δημογραφίας, ο θάνατος αποτελεί αναπόφευκτο παρεπόμενο (της γέννησης) μη επαναλαμβανόμενο δημογραφικό γεγονός.

Οι βασικότερες αιτίες που προκαλούν τον θάνατο συνοπτικά είναι:

- α) Βιολογικές: το γήρας, κληρονομικές, «συγγενείς», ορμονικές και άλλες ανωμαλίες και παθήσεις, η ασιτία, η κακή διατροφή κλπ.
- β) Ασθένειες: λοιμώδεις και μεταδοτικές αρρώστιες, εκφυλιστικές παθήσεις
- γ) Βίαιοι θάνατοι: ανθρωποκτονίες, ατυχήματα, αυτοκινητιστικά, άλλα ατυχήματα
- δ) Θεομηνίες και έκτακτα γεγονότα, π.χ. σεισμοί, πλημμύρες
- ε) Πολεμικές αιτίες

Ως **θνησιμότητα** (mortality) ορίζεται η απώλεια της ανθρώπινης ζωής. Πρόκειται για ένα αναπόφευκτο φαινόμενο για κάθε άνθρωπο, με την υποσημείωση ότι δεν είναι γνωστά εκ των προτέρων ούτε ο χρόνος που θα συμβεί ούτε η αιτία που θα τον προκαλέσει. Μέσα στα γενικότερα συμπεράσματα που θεωρούνται κοινά στον κόσμο για τη θνησιμότητα είναι ότι στα βρέφη και στους ηλικιωμένους παρατηρείται υψηλότερη θνησιμότητα ενώ οι άνδρες παρουσιάζουν υψηλότερη θνησιμότητα σε σχέση με τις γυναίκες.

Η μελέτη της αναπαραγωγής ενός πληθυσμού έχει βασική προϋπόθεση τη μέτρηση της θνησιμότητας, καθώς επιδρά σε σημαντικό βαθμό τόσο σε κοινωνικούς όσο και σε οικονομικούς παράγοντες. Τα επίπεδα λοιπόν, της θνησιμότητας εξαρτώνται από την ηλικία του ατόμου, καθώς διαφοροποιούνται σε νεαρότερες ή μεγαλύτερες ηλικίες, το φύλο, την οικογενειακή κατάσταση, τον τόπο διαμονής, τη διατροφή, τις κακές συνήθειες, τα φάρμακα και την κληρονομικότητα. Οι μετρήσεις της θνησιμότητας είναι σημαντικές για κάθε χώρα διότι μπορούν να συμβάλλουν στην αποτελεσματικότερη μελέτη της υγείας και στην εφαρμογή καλύτερου σχεδιασμού τόσο στον τομέα της υγείας όσο και της κοινωνικής ασφάλισης. Οι μεταβολές στις μετρήσεις θνησιμότητας αποτελούν βασικό εργαλείο για την ασφάλιση ζωής και για τα συνταξιοδοτικά. Αυτές οι μελέτες έχουν συμβάλει σημαντικά και στην αύξηση του προσδόκιμου ζωής ιδιαίτερα από τον 20ο αιώνα και μετά.

1.2 Πίνακας επιβίωσης

Ο Πίνακας επιβίωσης είναι ένας τρόπος μέτρησης της θνησιμότητας. Η φυσιογνωμία της θνησιμότητας ενός πληθυσμού αποτυπώνεται παραστατικά στη δέσμη των συναρτήσεων που δημιουργούν τον πίνακα επιβίωσης. Σκοπός ενός τέτοιου πίνακα είναι η αναλυτική παρουσίαση της ειδικής κατά ηλικία θνησιμότητας ενός πληθυσμού. Οι πρώτοι Πίνακες Επιβίωσης κατασκευάστηκαν έπειτα από αρκετή μελέτη, από τους John Graunt και Edmund Halley, στα μέσα του 17ου αιώνα. Με την πάροδο του χρόνου υλοποιήθηκαν σημαντικές αναβαθμίσεις με αποτέλεσμα να παρέχουν μέχρι και σήμερα σημαντικά ευρήματα για τη δημογραφική - δημομετρική ανάλυση. Εκτός από τη μελέτη της θνησιμότητας, τα ευρήματα αυτά βρίσκουν εφαρμογή και στις προβολές πληθυσμού, στις έρευνες γεννητικότητας, στη βιοστατιστική και στην αναλογιστική επιστήμη.

Οι Πίνακες Επιβίωσης μπορούν να διακριθούν σε δύο τύπους ανάλογα με τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται για να υπολογιστούν οι δείκτες τους, τους πίνακες επιβίωσης γενεάς και τους πίνακες επιβίωσης περιόδου:

A. Πίνακες επιβίωσης γενεάς (Cohort life tables)

Οι πίνακες επιβίωσης γενιάς αναφέρονται στη συμπεριφορά μιας γενιάς και απεικονίζουν την πραγματική πιθανότητα θανάτου ενός πληθυσμού με κοινό έτος

γέννησης, σε κάθε ηλικία. Ουσιαστικά καταγράφουν το τι πραγματικά συμβαίνει σε μια γενεά με την πάροδο του χρόνου. Για τη δημιουργία ενός τέτοιου πίνακα κρίνεται απαραίτητη η μελέτη και η συλλογή στοιχείων σε όλα τα στάδια της ζωής των ατόμων μιας προκαθορισμένης γενιάς. Έτσι επιτυγχάνεται η μέτρηση της πιθανότητας θανάτου σε κάθε ηλικία.

B. Πίνακες επιβίωσης περιόδου (Period life tables)

Οι πίνακες επιβίωσης περιόδου αφορούν τη συμπεριφορά ενός πληθυσμού μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, σε συγκεκριμένη γεωγραφική περιοχή. Δεν γίνεται αναφορά σε μια γενιά, όπως στους πίνακες επιβίωσης γενιάς, αλλά σε διαφορετικές. Προκειμένου να δημιουργηθούν οι πίνακες επιβίωσης περιόδου απαιτούνται οι κατά ηλικία δείκτες θνησιμότητας που αναφέρονται σε καθορισμένη χρονική περίοδο. Εκ των πραγμάτων, οι εν λόγω πίνακες περιγράφουν το τι θα συνέβαινε στα μέλη μιας πλασματικής γενεάς αν οι συνθήκες θνησιμότητας, για τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο που μελετάμε, παρέμεναν σταθερές και αναλλοίωτες στο χρόνο.

Επιπλέον, οι Πίνακες Επιβίωσης μπορούν να διακριθούν βάσει της μορφής τους, σε πλήρεις και συνεπτυγμένους.

- Οι πλήρεις πίνακες επιβίωσης αναφέρονται σε μονοετείς ηλικιακές ομάδες, είναι αναλυτικότεροι από τους συνεπτυγμένους και ως εκ τούτου λεπτομερέστεροι και ακριβέστεροι αναφορικά με την επιτυχία αντιμετώπισης του θανάτου από ένα πληθυσμό. Η ακρίβεια και η λεπτομέρεια των πινάκων αυτών, βρίσκουν εφαρμογή σε βιοστατιστικές και αναλογιστικές αναλύσεις.
- Οι συνεπτυγμένοι πίνακες επιβίωσης αναφέρονται σε 5-ετείς ηλικιακές ομάδες. Λόγω αυτού, για τη κατασκευή τους χρίζουν μικρότερου όγκου δεδομένων συγκριτικά με τους πλήρεις, συνεπώς είναι και πιο εύχρηστοι στην ανάλυση. Επιπλέον, λόγω της σύμπτυξης των θανάτων σε 5-ετείς ομάδες υπόκεινται σε μικρότερο σφάλμα στην περίπτωση που τα πρωτογενή στοιχεία είναι ανακριβή όσον αφορά την ηλικία των θανόντων.

Ο χρόνος στους πίνακες επιβίωσης είναι ένα σημείο αναφοράς και αναφέρεται είτε στην αρχή κάθε ηλικίας ή σε διαστήματα ηλικιών. Επιπλέον, οι πίνακες ζωής (αναλυτικοί ή Compact) μπορούν να εκτιμηθούν κατά αιτία θανάτου. Για την κατάταξη των θανάτων για κάθε αιτία χρησιμοποιείται το πρότυπο ταξινόμησης του Παγκόσμιου Οργανισμού Υγείας (Εγχειρίδιο της Διεθνούς Στατιστικής Ταξινόμησης Νόσων, Τραυματισμών και Αιτιών Θανάτου), ο οποίος κατατάσσει τους θανάτους σε διαφορετικές κατηγορίες αιτιών.

1.3 Υποθέσεις πάνω στις οποίες βασίζεται ένας πίνακας επιβίωσης

Γενικά, ο πληθυσμός που εξετάζουμε κάθε φορά με τη χρήση των πινάκων επιβίωσης εκτίθεται σε κινδύνους που επηρεάζουν, πολλές φορές σημαντικά, την εξέλιξη του στο χρόνο. Για το λόγο αυτό, υιοθετούμε κάποιες υποθέσεις κατά την κατάρτιση ενός πίνακα επιβίωσης έτσι ώστε να είμαστε όσο το δυνατόν περισσότερο ασφαλείς για το αποτέλεσμα μας.

Οι εν λόγω υποθέσεις είναι οι εξής:

1. Η γενεά αποτελείται από ένα σταθερό αριθμό γεννήσεων ο οποίος ορίζεται αυθαίρετα και λαμβάνεται συνήθως ως μία δύναμη του δέκα (π.χ. 10^3 ή 10^4), και καλείται ρίζα του πίνακα. Η ρίζα του πίνακα συνιστά τον αρχικό πληθυσμό, δηλαδή τον πληθυσμό στην αρχή του πρώτου έτους ζωής ($x = 0$) και συμβολίζεται με l_0 .
2. Η γενεά είναι κλειστή σε μεταναστευτικές εισροές και εκροές.
3. Το μέγεθος της αρχικής γενεάς μειώνεται σταδιακά με την πάροδο του χρόνου σύμφωνα με προκαθορισμένα και σταθερά ηλικιακά πρότυπα θνησιμότητας. Η ηλικία στην οποία έχουν εκλείψει όλα τα μέλη της γενεάς καλείται οριακή ηλικία (= ω). Προφανώς ο συμβολισμός είναι l_ω .
4. Οι θάνατοι που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια κάθε ηλικίας (με εξαίρεση τα δύο πρώτα έτη ζωής) ισοκατανέμονται.

5. Ο συνολικός αριθμός των θανάτων του πληθυσμού του πίνακα επιβίωσης είναι ίσος με το συνολικό αριθμό γεννήσεων του πληθυσμού, δηλαδή ίσος με τη ρίζα του πίνακα.
6. Η γενεά περιλαμβάνει μέλη ενός μόνο φύλου.
7. Οι θάνατοι ατόμων επέρχονται από μία και μόνο αιτία.
8. Ο πληθυσμός βάσει του οποίου κατασκευάζουμε τους πίνακες επιβίωσης είναι ο στάσιμος πληθυσμός. Με τον όρο «στάσιμος» εννοούμε ότι δεν υπάρχει μεταβολή τόσο στο μέγεθος του πληθυσμού όσο και στην κατά ηλικία κατανομή του.

Προφανώς κάποιες από τις ανωτέρω υποθέσεις δεν ανταποκρίνονται απολύτως στην πραγματικότητα. Ωστόσο, η κατασκευή ενός πίνακα επιβίωσης βασίζεται πάνω σε πραγματικά ληξιαρχικά και πληθυσμιακά δεδομένα με αποτέλεσμα να αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο πρακτικής δημογραφικής ανάλυσης.

1.4 Αξιοπιστία μέτρου και χρήσεις γενικότερα στην αναλογιστική επιστήμη

Για την τιμολόγηση των ασφαλιστικών προϊόντων και την διασφάλιση της επάρκειας των τεχνικών προβλέψεων για την πληρωμή των υποχρεώσεων που καλείται να καταβάλει η ασφαλιστική επιχείρηση ασφαλίσεων ζωής, οι αναλογιστές χρησιμοποιούν τους πίνακες θνησιμότητας για να προβάλουν τον αριθμό και τη χρονική στιγμή των μελλοντικών θανάτων των ασφαλισμένων. Οι αναλογιστές μελετούν τη συχνότητα των θανάτων του πρόσφατου παρελθόντος και κάνουν εκτιμήσεις για την μελλοντική εξέλιξη αυτών, το χρόνο και τον αριθμό των θανάτων που θα συμβούν στο μέλλον.

1.5 Κατασκευή πίνακα επιβίωσης από πραγματικά στοιχεία

Ο Πίνακας Επιβίωσης αποτελεί ουσιαστικά το αποτέλεσμα της ανάλυσης επιβίωσης ενός πληθυσμού. Θεωρούμε αρχικά μια συνεχή μη αρνητική τυχαία μεταβλητή T_x , που δηλώνει την διάρκεια ζωής ενός ατόμου (lifetime) ή την μελλοντική ζωή ενός νεογέννητου ή ισοδύναμα εκφράζει την ανθρώπινη ηλικία στον θάνατο (age at death). Επίσης, ως K_x ορίζουμε τον ακέραιο αριθμό των ετών που θα ζήσει ο (x). Ο ακέραιος

υπολειπόμενος χρόνος ζωής (curtate future lifetime) είναι μια διακριτή (μη αρνητική) τυχαία μεταβλητή και διαφέρει από την T_x κατά το ότι η K_x αγνοεί οποιοδήποτε κλάσμα έτους ζήσει πριν από το θάνατο ο (x).

Αν και ο πλήρης πίνακας επιβίωσης έχει απλή και κατανοητή δομή, η κατασκευή του παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες που σχετίζονται με την ακρίβεια των διαθέσιμων δεδομένων. Έχει αποδειχθεί ότι η σύμπτυξη των πληροφοριών σε ηλικιακές ομάδες διευκολύνει τη διαδικασία κατάρτισης και μετριάξει τα σφάλματα που μπορεί να περιέχουν τα δημογραφικά στοιχεία.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η κατασκευή ενός συνεπτυγμένου Πίνακα Επιβίωσης και των βασικών βιομετρικών συναρτήσεων από πληθυσμιακά στοιχεία η οποία βασίζεται σε 5ετή διαστήματα ηλικιών και στη συνέχεια η μετατροπή του συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης σε πλήρη. Ας ξεκινήσουμε από τα βασικά στοιχεία ενός τέτοιου πίνακα επιβίωσης.

- **Βιομετρικές συναρτήσεις**

Ένας συνεπτυγμένος πίνακας επιβίωσης αποτελείται από τις παρακάτω στήλες :

- Ηλικία (x):** Η μεταβλητή x δηλώνει την ηλικία ενός ατόμου. Θεωρητικά, η μεταβλητή x μπορεί να πάρει τιμές από το μηδέν μέχρι το άπειρο. Στην πράξη όμως θεωρούμε ότι η μεταβλητή x μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από μηδέν μέχρι το ανώτατο όριο ζωής, που το συμβολίζουμε με ω και ονομάζεται οριακή ηλικία, και παριστάνει την ηλικία στην οποία θεωρούμε ότι ο θάνατος θα επέλθει με πιθανότητα ίση με τη μονάδα.
- ${}_n a_x$:** ο μέσος αριθμός ετών που βιώνονται στο διάστημα $[x, x+n)$ από τα άτομα που πεθαίνουν μέσα στο διάστημα $[x, x+n)$. Υποθέτοντας ότι οι θάνατοι κατανέμονται ομοιόμορφα στο διάστημα $[x, x+n)$, τότε ${}_n a_x = n/2$. Εναλλακτικά χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές τιμές του ${}_n a_x$ προερχόμενες από άλλους πληθυσμούς (Preston et al. 2001, p.48)

iii. l_0 : Αρχικά ορίζεται ο αριθμός γεννήσεων των ατόμων υπό παρατήρηση της υποθετικής γενεάς l_0 , κατά σύμβαση ίσος με 100.000.

iv. **Επιζώντες στην αρχή της ηλικίας x (l_x)**: Η μεταβλητή αυτή δηλώνει τον αριθμό των ατόμων που έφτασαν στην ηλικία x .

v. **Θανόντες στη διάρκεια διαστήματος ηλικιών (${}_n d_x$)**: Η μεταβλητή αυτή δηλώνει το πλήθος των ατόμων που εκτιμάται να αποβιώσουν από την αρχή της ηλικίας x έως την αρχή της ηλικίας $x+n$.

Ισχύει η σχέση:

$${}_n d_x = l_x - l_{x+n}$$

ή εναλλακτικά:

$${}_n d_x = l_x \cdot {}_n q_x$$

vi. **Πιθανότητα θανάτου στη διάρκεια διαστήματος ηλικιών (${}_n q_x$)**: είναι η πιθανότητα κάποιος ακριβούς ηλικίας x να πεθάνει στο διάστημα ηλικίας $[x, x+n)$. Η πιθανότητα θανάτου είναι μια δεσμευμένη πιθανότητα με τη δέσμευση ότι κάποιος έχει επιβιώσει μέχρι την ακριβή ηλικία x .

vii. **Πιθανότητα επιβίωσης στη διάρκεια του διαστήματος ηλικιών (${}_n p_x$)**: είναι η πιθανότητα κάποιος ακριβούς ηλικίας x να επιβιώσει όλο το διάστημα ηλικίας $[x, x+n)$.

Μεταξύ των δύο πιθανοτήτων ισχύει η σχέση:

$${}_n p_x = 1 - {}_n q_x$$

viii. **Η συνάρτηση επιβίωσης (Survival distribution function)**, δηλώνει την πιθανότητα ένα νεογέννητο ή ένα άτομο ηλικίας x , να επιβιώσει πέρα από την ηλικία t δηλαδή την πιθανότητα: $P(T(x) > t)$.

Είναι, ουσιαστικά, ο λόγος του l_x προς το l_0 , δηλαδή:

$$S(x) = \frac{l_x}{l_0}$$

Η πιθανότητα επιβίωσης θα μπορούσε επίσης να εκφραστεί μέσω των πιθανοτήτων p_i και q_i ως εξής:

$$S(x) = \prod_{i=0}^{x-1} p_i = \prod_{i=0}^{x-1} (1 - q_i)$$

- ix. **Επιζώντες στο μέσο διαστήματος ηλικιών (${}_nL_x$):** είναι ο συνολικός αριθμός ετών ζωής που βιώνονται από τα άτομα του πληθυσμού στο διάστημα ηλικίας $[x, x+n)$.

Κάθε μέλος του πληθυσμού που βιώνει όλο το διάστημα ηλικίας $[x, x+n)$, συμβάλλει στον υπολογισμό του ${}_nL_x$ κατά n έτη ζωής, ενώ κάθε ένας που πεθαίνει κάποια χρονική στιγμή μέσα στο ίδιο διάστημα, κάτω από την υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής θανάτων μέσα στο διάστημα ηλικίας, συμβάλλει στο ${}_nL_x$ κατά μέσο όρο με $\frac{n}{2}$ αριθμό ετών ζωής. Έτσι το ${}_nL_x$ μπορεί να εκτιμηθεί από τον προσεγγιστικό τύπο:

$${}_nL_x = n \cdot l_{x+n} + \frac{n}{2} \cdot nd_x$$

$$\text{όμως, } d_x = l_x - l_{x+n}$$

Αρα,
$${}_nL_x = \frac{n}{2} \cdot (l_x + l_{x+n})$$

- x. **Συνολικός αριθμός ανθρωπο-ετών από την ηλικία x και άνω (T_x):** είναι ο συνολικός αριθμός ετών ζωής που πρόκειται να βιώσουν τα άτομα του υποθετικού πληθυσμού στο διάστημα ηλικίας $[x, w)$ όπου w η ηλικία που δεν φτάνει κανείς ($w-1$: η ανώτατη ηλικία στον πληθυσμό).

$$T_x = \sum_{i \geq x} {}_nL_x$$

Ακόμα,
$$T_{x+1} = T_x - {}_nL_x \Rightarrow {}_nL_x = T_x - T_{x+n}$$

- xi. **Κεντρικός δείκτης θνησιμότητας στο διάστημα ηλικιών ${}_n\dot{m}_x$:** Στην περίπτωση ενός συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης, ο κεντρικός δείκτης θνησιμότητας στο διάστημα ηλικιών x έως $x+n$ υπολογίζεται με τη σχέση:

$${}_n m_x = \frac{n d_x}{n L_x}$$

- xii. Τέλος, η περισσότερο ενδιαφέρουσα στήλη του πίνακα επιβίωσης είναι η στήλη της **προσδοκώμενης ζωής**, e_x (expectation of life, life expectancy). Η στήλη αυτή εκφράζει την αναμενόμενη (μέση) υπολειπόμενη ζωή των ατόμων ηλικίας x του πληθυσμού στον οποίο αναφέρεται ο πίνακας επιβίωσης.

$$e_x = \frac{T_x}{l_x}$$

Έτσι η αναμενόμενη ηλικία θανάτου κάποιου ατόμου ηλικίας x ισούται με:

$$x + e_x$$

- **Ο Πίνακας Επιβίωσης σαν ένας Στάσιμος Πληθυσμός**

Μια εναλλακτική εξήγηση των μεγεθών που περιλαμβάνει ο πίνακας επιβίωσης συνδέεται με την θεώρηση ενός στάσιμου πληθυσμού. Στάσιμος πληθυσμός είναι εκείνος του οποίου το συνολικό μέγεθος και η κατά ηλικία σύνθεση παραμένουν αμετάβλητα στο χρόνο. Σε ένα τέτοιο υποθετικό πληθυσμό, ο αριθμός γεννήσεων κάθε χρόνο είναι σταθερός και ίσος με τον αριθμό θανάτων και η ειδική κατά ηλικία θνησιμότητα παραμένει και αυτή αμετάβλητη.

Αν θεωρήσουμε ότι ο πίνακας επιβίωσης αναφέρεται σε ένα στάσιμο πληθυσμό στον οποίο συμβαίνουν $l_0 (= 100.000)$ γεννήσεις και προφανώς ίδιος αριθμός θανάτων κάθε χρόνο και ότι στο στάσιμο αυτό πληθυσμό αντιστοιχούν τα επίπεδα της κατά ηλικία θνησιμότητας όπως αυτά δίνονται από την στήλη ${}_n q_x$ του πίνακα επιβίωσης, τότε και οι υπόλοιπες συναρτήσεις του πίνακα θα αναφέρονται όχι σε μια υποθετική γενεά αλλά σε αυτόν το στάσιμο πληθυσμό.

Έτσι έχουμε:

l_x : ο αριθμός ατόμων που φθάνουν την ηλικία x κάθε χρόνο στο στάσιμο πληθυσμό.

${}_n d_x$: ο αριθμός θανάτων σε ηλικίες του διαστήματος $[x, x+n)$ που συμβαίνουν κάθε χρόνο στο στάσιμο πληθυσμό.

${}_n L_x$: ο μέσος αριθμός ατόμων ηλικιών $[x, x+n)$ στο στάσιμο πληθυσμό.

${}_n T_x$: ο μέσος αριθμός ατόμων ηλικιών $[x, \omega)$ στο στάσιμο πληθυσμό.

Κάθε μια από τις δύο διαφορετικές θεωρήσεις του πίνακα επιβίωσης είναι κατάλληλη για διαφορετικές εφαρμογές. Η πρώτη θεωρηση (της υποθετικής γενεάς) εφαρμόζεται σε μελέτες δημόσιας υγείας, στην ανάλυση θνησιμότητας, στον υπολογισμό συντελεστών επιβίωσης για να εκτιμηθεί ο πληθυσμός, η γεννητικότητα, η αναπαραγωγή. Η δεύτερη θεωρηση (του στάσιμου πληθυσμού) εφαρμόζεται σε συγκρίσεις θνησιμότητας και σε μελέτες της σύνθεσης του πληθυσμού.

1.5.1 Βήματα κατασκευής ενός συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε πολύ περιληπτικά την κλασσική μέθοδο κατασκευής ενός συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης η οποία στηρίζεται στην υπόθεση ότι οι θάνατοι κατανέμονται ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[x, x+n)$. Η διαδικασία κατασκευής ενός συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης είναι όμοια με εκείνη που εφαρμόζεται και στην περίπτωση που θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν πλήρη ή αναλυτικό πίνακα επιβίωσης.

Τα βήματα είναι τα εξής:

Βήμα 1^ο : Υπολογισμός ειδικών κατά ηλικία δεικτών θνησιμότητας στον πραγματικό πληθυσμό

Με βάση τα δεδομένα που έχουμε στη διάθεση μας, υπολογίζουμε τους ειδικούς κατά ηλικία δείκτες θνησιμότητας ${}_n m_x$ με τη χρήση της σχέσης:

$${}_n m_x = \frac{{}_n D_x}{{}_n P_x}$$

Όπου, ${}_n D_x$ είναι αριθμός των θανόντων ηλικίας x έως $x+n$ το έτος αναφορά, και ${}_n P_x$ ο πληθυσμός της ίδιας ομάδας ηλικιών στο μέσο του έτους αναφοράς.

Βήμα 2^ο : Μετατροπή των κεντρικών δεικτών θνησιμότητας σε πιθανότητες θανάτου

Ένας τρόπος είναι να θεωρήσουμε ότι προσεγγιστικά ισχύει η σχέση ${}_n m_x \approx {}_n \dot{m}_x$, δηλαδή ότι οι εμπειρικοί ειδικοί κατά ηλικία δείκτες θνησιμότητας στον πραγματικό πληθυσμό είναι ίσοι με τους αντίστοιχους του πληθυσμού του πίνακα επιβίωσης. Θεωρώντας ότι ο πληθυσμός είναι κλειστός και ότι στα διαστήματα της μορφής $[x,$

$x+n$) οι θάνατοι κατανέμονται ομοιόμορφα, η εμπειρική πιθανότητα θανάτου ${}_n\hat{q}_x$ θα είναι:

$${}_n\hat{q}_x = \frac{n \cdot {}_nD_x}{n P_x + \frac{n}{2} \cdot {}_nD_x} = \frac{n \cdot {}_n m_x}{1 + \frac{n}{2} \cdot {}_n m_x} = \frac{2 \cdot n \cdot {}_n m_x}{2 + n \cdot {}_n m_x}$$

Σημειώνουμε ότι στην τελευταία ομάδα ηλικιών (85+), όπου ο θάνατος είναι ένα βέβαιο γεγονός με πιθανότητα ίση με τη μονάδα, θέτουμε ${}_{\infty}q_{85} = 1$.

Βήμα 3^ο : Εξομάλυνση των εμπειρικών πιθανοτήτων θανάτων

Οι εμπειρικές πιθανότητες ${}_n\hat{q}_x$ εξομαλύνονται στα διαστήματα ηλικιών που εκτιμάται ότι αυτό είναι απαραίτητο. Λόγω του ότι έχουμε ομάδες ηλικιών, η διάγνωση των σφαλμάτων είναι δύσκολη και καμιά φορά οι εμπειρικές πιθανότητες δεν είναι εφικτό να εκφραστούν με μαθηματικό τρόπο. Έτσι, για τη διευκόλυνση μας, εφαρμόζουμε τεχνικές κινητών μέσων, γραφικές μεθόδους και δημογραφικές προσεγγίσεις μέσω προτύπων πινάκων επιβίωσης.

Βήμα 4^ο : Εκτίμηση των συναρτήσεων του πίνακα

Οι διορθωμένες πιθανότητες q_x αποτελούν το πρωταρχικό στοιχείο εισόδου βάσει του οποίου συνιστάται ο συνεπτυγμένος πίνακας επιβίωσης. Επιλέγεται το μέγεθος της ρίζας του πίνακα (l_0) και οι συναρτήσεις του πίνακα υπολογίζονται εφαρμόζοντας τους τύπους που αναπτύξαμε παραπάνω. Η εκτίμηση του συνολικού αριθμού ανθρωπο-ετών για την τελευταία ομάδα (85+) στηρίζεται στην υπόθεση ότι ${}_{\infty}L_{85} = \frac{l_{85}}{m_{(85+)}}$.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει το συνεπτυγμένο πίνακα επιβίωσης των αρρένων στην Ελλάδα κατά το έτος 2012. Σύμφωνα με τον πίνακα αυτόν, με τις συνθήκες θνησιμότητας του 2012 ένα αγόρι που γεννήθηκε το 2011 αναμένεται να ζήσει κατά μέσο όρο 78 έτη.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
x	${}_n P_x$	${}_n D_x$	${}_n m_x$	${}_n a_x$	${}_n q_x$	${}_n p_x$	l_x	${}_n d_x$	${}_n L_x$	T_x	e_x
0	52.951	168	0,00317	0,5	0,0031677	0,9968323	100000	317	99684,2	7799626	78,00
1	230.153	37	0,00016	2	0,0006428	0,9993572	99683	64	398605	7699941	77,24
5	274.642	30	0,00011	2,5	0,000546	0,999454	99619	54	497960	7301337	73,29
10	274.108	30	0,00011	2,5	0,0005471	0,9994529	99565	54	497688	6803377	68,33
15	281.887	135	0,00048	2,5	0,0023917	0,9976083	99510	238	496956	6305689	63,37
20	323.374	261	0,00081	2,5	0,0040275	0,9959725	99272	400	495362	5808733	58,51
25	366.203	289	0,00079	2,5	0,0039381	0,9960619	98872	389	493389	5313371	53,74
30	424.293	427	0,00101	2,5	0,0050193	0,9949807	98483	494	491180	4819982	48,94
35	419.858	517	0,00123	2,5	0,0061379	0,9938621	97989	601	488440	4328803	44,18
40	423.993	774	0,00183	2,5	0,009086	0,990914	97387	885	484724	3840362	39,43
45	386.014	1.126	0,00292	2,5	0,0144794	0,9855206	96502	1397	479019	3355638	34,77
50	360.934	1.778	0,00493	2,5	0,0243309	0,9756691	95105	2314	469741	2876619	30,25
55	329.174	2.711	0,00824	2,5	0,0403481	0,9596519	92791	3744	454596	2406878	25,94
60	305.485	3.607	0,01181	2,5	0,0573445	0,9426555	89047	5106	432470	1952282	21,92
65	270.102	4.674	0,0173	2,5	0,0829351	0,9170649	83941	6962	402300	1519812	18,11
70	241.078	6.323	0,02623	2,5	0,1230704	0,8769296	76979	9474	361211	1117512	14,52
75	217.269	9.581	0,0441	2,5	0,1985934	0,8014066	67505	13406	304011	756300,2	11,20
80	152.585	12.087	0,07922	2,5	0,3306036	0,6693964	54099	17885	225783	452288,7	8,36
85+	97.448	15.580	0,15988	2,5	1	0	36214	36214	226506	226506,1	6,25

Πίνακας 1: Πίνακας Επιβίωσης Αρρένων, Ελλάδα 2012. (πηγή: <https://repository.kallipos.gr/>)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο: Μέθοδοι αναγωγής συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης σε πλήρη

Ο πλήρης πίνακας επιβίωσης έχει απλή δομή και περιγράφει με λεπτομέρεια το τρέχον πρότυπο θνησιμότητας του πληθυσμού το έτος αναφοράς. Ένας πλήρης πίνακας επιβίωσης περιέχει βιομετρικές συναρτήσεις, οι οποίες απεικονίζουν διάφορα μεγέθη που μας δίνουν πληροφορίες για τη θνησιμότητα του πληθυσμού ανά έτος ηλικίας.

Ακολουθώντας τις μεθόδους την αναλογιστικής επιστήμης ένας πίνακας επιβίωσης κατασκευάζεται αφού εκτιμηθούν πρώτα οι δεσμευμένες πιθανότητες για ακέραιες ηλικίες, ξεκινώντας από μια συγκεκριμένη ελάχιστη ηλικία, συνήθως από την ηλικία 0. Επομένως ένας τέτοιος πίνακας ορίζει πλήρως την κατανομή των ακέραιων ηλικιών, καθώς οι πιθανότητες εξατομικεύονται για κάθε ακέραια ηλικία x .

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πως αναπτύσσεται ένας πλήρης πίνακας επιβίωσης καθώς και τις συναρτήσεις που τον απαρτίζουν. Αρχικά θα παρουσιάσουμε την έννοια της έντασης θνησιμότητας, μιας πολύ σημαντικής ποσότητας, που μας δείχνει την οριακή τιμή του ειδικού κατά ηλικία συντελεστή θνησιμότητας ενός διαστήματος. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τρεις υποθέσεις, οι οποίες αποτελούν τα πιο γνωστά μέλη γενικευμένης οικογένειας κλασματικών υποθέσεων, την ομοιόμορφη κατανομή θανάτου (Uniform Death Distribution), την σταθερή ένταση θνησιμότητας (Constant Force of Mortality) και την υπόθεση Balducci (αρμονική παρεμβολή). Τέλος θα δούμε κάποια άλλα προτεινόμενα μοντέλα εξίσου σημαντικά.

Οι συναρτήσεις ενός πλήρους πίνακα επιβίωσης δεν διαφέρουν από αυτές ενός συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης, με τη μόνη διαφορά ότι, τώρα, δεν αναφερόμαστε σε διαστήματα ηλικιών εύρους n ετών: $[x, x+n)$

Συνοψίζοντας, οι συναρτήσεις οι οποίες απαρτίζουν έναν ολοκληρωμένο πλήρη πίνακα επιβίωσης, είναι οι εξής:

- (i) l_x : Επιζώντες στην αρχή της ηλικίας x
- (ii) d_x : Θανόντες κατά τη διάρκεια της ηλικίας x

- (iii) p_x : Πιθανότητα επιβίωσης κατά τη διάρκεια της ηλικίας x
- (iv) q_x : Πιθανότητα θανάτου στη διάρκεια της ηλικίας x
- (v) L_x : Επιζώντες στο μέσον της ηλικίας x
- (vi) T_x : Συνολικός αριθμός άνθρωπο-ετών από την ηλικία x και άνω
- (vii) e_x : Προσδοκώμενη Ζωή στην ηλικία x
- (viii) \dot{m}_x : Κεντρικοί Δείκτες Θνησιμότητας κατά ηλικία x

2.1 Μοντέλα που προκύπτουν βάσει υποθέσεων για force of mortality

Ένταση θνησιμότητας

Μία πολύ σημαντική έννοια η οποία θα οριστεί παρακάτω, είναι η ένταση θνησιμότητας ή αλλιώς το στιγμιαίο ποσοστό θνησιμότητας.

Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα ένα νεογέννητο να πεθάνει μεταξύ των ηλικιών x και z , δοθέντος ότι θα επιζήσει για x έτη είναι:

$$\begin{aligned} Pr(x < X \leq z | X > x) &= \frac{F(z) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{S(x) - S(z)}{S(x)}, \quad x < z. \end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε ένα μικρό διάστημα ζωής dx της τυχαίας μεταβλητής X , τότε οι τιμές που παίρνει η X στο διάστημα $(x, x + dx)$ δοθέντος ότι έχει επιζήσει για x έτη εκφράζεται με την δεσμευμένη πιθανότητα:

$$\begin{aligned} Pr(x < X \leq x + dx | X > x) &= \frac{Pr(x < X \leq x + dx)}{Pr(X > x)} \\ &= \frac{F(x + dx) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{f(x)dx}{1 - F(x)}. \end{aligned}$$

Τέλος, αν διαιρέσουμε αυτή τη δεσμευμένη πιθανότητα με το dx και πάρουμε το όριο αυτής της ποσότητας να τείνει στο 0 θα έχουμε την ένταση θνησιμότητας.

Δηλαδή,

$$\mu_x = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\Pr(x < X \leq x + dx | X > x)}{dx}, x \geq 0.$$

Επιπλέον, είναι:

$$\mu_x = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\Pr(x < X \leq x + dx)}{\Pr(X > x) dx}$$

και

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{d}{dx} F(x) \\ &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{F(x + dx) - F(x)}{dx} \\ &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{P(x < X \leq x + dx)}{dx} \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω ποσότητες προκύπτει ότι:

$$\mu_x = \frac{f(x)}{S(x)}$$

όπου, $f(x) = F'(x) = (1 - S(x))' = -S'(x)$ και επομένως θα έχουμε:

$$\mu_x = \frac{-S'(x)}{S(x)}$$

Με απλά λόγια, η ένταση θνησιμότητας δίνει τη πιθανότητα άτομο ηλικίας x να πεθάνει εντός του διαστήματος $x + dx$.

Ο παρακάτω πίνακας μας δείχνει κάποιες σχέσεις που συνδέουν τις παραπάνω ποσότητες.

Συνάρτηση	$F(x)$	$f(x)$	$S(x)$	μ_x
$F(x)$	-	$F'(x)$	$1 - F(x)$	$\frac{F'(x)}{1 - F(x)}$
$f(x)$	$\int_0^x f(t) dt$	-	$1 - \int_0^x f(t) dt$	$\frac{f(x)}{1 - \int_0^x f(t) dt}$
$S(x)$	$1 - S(x)$	$-S'(x)$	-	$\frac{-S'(x)}{S(x)}$
μ_x	$1 - e^{-\int_0^x \mu t dt}$	$\mu_x e^{-\int_0^x \mu t dt}$	$e^{-\int_0^x \mu t dt}$	-

Πίνακας 2: Σχέσεις μεταξύ των συναρτήσεων.

Για την κατάρτιση ενός πίνακα επιβίωσης ή αλλιώς πίνακα θνησιμότητας υπάρχουν κάποιες σχέσεις που συνδέουν τις συναρτήσεις του πίνακα αυτού και θα μας φανούν πολύ χρήσιμες. Οι σχέσεις αυτές είναι οι εξής:

$$\checkmark S(x) = \frac{l_x}{l_0} \rightarrow l_x = l_0 S(x)$$

$$\checkmark {}_n d_x = l_x - l_{x+n}$$

$$\checkmark {}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$\checkmark {}_n q_x = \frac{n d_x}{l_x}$$

Οι υποθέσεις και η γενικευμένη τους μορφή

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε τις τρεις γνωστές υποθέσεις που αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου, οι οποίες έχουν συμβάλει σε μεγάλο βαθμό στην ανάλυση επιβίωσης και γενικότερα στην αναλογιστική επιστήμη.

- **Ομοιόμορφη κατανομή θανάτων (UDD):** Η συνάρτηση επιβίωσης $S(x)$ της ηλικίας θανάτου είναι μια τυχαία μεταβλητή και είναι γραμμικός συνδυασμός των ακέραιων ηλικιών. Υπό αυτή την υπόθεση το ${}_t p_x$ είναι μια γραμμική συνάρτηση και επομένως θα ισχύει:

$$S(x + t) = (1 - t)S(x) + tS(x + 1), \text{ για } x \geq 0 \text{ και } 0 < t < 1$$

Για τις βιομετρικές συναρτήσεις ισχύουν τα εξής:

$$\left. \begin{array}{l} \blacksquare {}_t q_x = tq_x \\ \blacksquare {}_t p_x = 1 - t(1 - p_x) \\ \blacksquare \mu_{x+t} = \frac{q_x}{1 - tq_x} \end{array} \right\} {}_t p_x \mu_{x+t} = q_x$$

- **Σταθερή ένταση θνησιμότητας (CFM):** Υπό αυτή την υπόθεση η ένταση θνησιμότητας είναι σταθερή μεταξύ των ακέραιων ηλικιών και η ${}_t p_x$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Επομένως:

$$\begin{array}{l} \blacksquare \mu_{x+t} = \mu_x \\ \blacksquare \mu_x = -\log p_x \\ \blacksquare {}_t p_x = (p_x)^t \end{array}$$

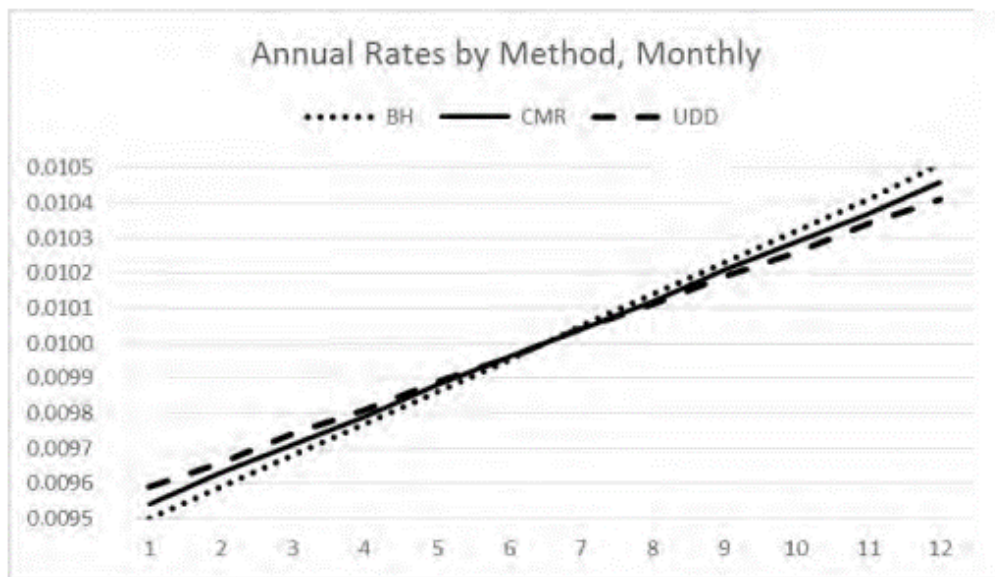
- **Υπόθεση Balducci :** Το αντίστροφο της συνάρτησης επιβίωσης είναι γραμμικός συνδυασμός μεταξύ των ακέραιων ηλικιών. Επομένως υπό αυτή την υπόθεση το ${}_t p_x$ είναι υπερβολική καμπύλη και έχουμε:

$$S(x + t) - 1 = (1 - t)S(x) - 1 + tS(x + 1) - 1$$

και θα ισχύει:

- ${}_t p_x = \frac{p_x}{1 - (1-t)q_x}$
- $\mu_{x+t} = \frac{q_x}{1 - (1-t)q_x}$

Το παρακάτω γράφημα απεικονίζει την ετήσια έκθεση της κάθε μιας από τις τρεις μεθόδους. Βλέπουμε ότι και οι τρεις μέθοδοι παράγουν ποσοστά χαμηλότερα το πρώτο εξάμηνο του έτους και υψηλότερα το δεύτερο εξάμηνο του έτους. Επιπλέον, οι διαφορές μεταξύ των τριών μεθόδων έκθεσης είναι μεγαλύτερες στην αρχή και στο τέλος του έτους.



Γράφημα 1: Ποσοστά έκθεσης ανά μέθοδο. (Πηγή: Experience Study Calculations, Society Of Actuaries, 2016)



2.2 Άλλα προτεινόμενα μοντέλα

Τόσο στην ελληνική όσο και στην ξένη βιβλιογραφία έχουν προταθεί αρκετές τεχνικές για την μετατροπή ενός συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης σε ένα πλήρη πίνακα. Οι μέθοδοι Kostaki και Brass χρησιμοποιούν πληροφορίες από άλλους πίνακες ζώης (ονομάζονται ως «εκ των προτέρων πίνακες επιβίωσης»).

Οι μέθοδοι είναι οι εξής:

A. Η μέθοδος Kostaki

Η Kostaki (2000,2001) δίνει μια απλή μη-παραμετρική μέθοδο χρησιμοποιώντας τις παρατηρούμενες συχνότητες θνησιμότητας ${}_nq_x$, ενός συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης, κατά πενταετείς ομάδες ηλικιών, με σκοπό την εκτίμηση των κατά ηλικία πιθανοτήτων θανάτου q_x .

Η βασική υπόθεση αυτής της μεθόδου είναι ότι σε κάθε ηλικιακό διάστημα της μορφής $[x, x+n)$ η ένταση θνησιμότητας μ_x ενός συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο της έντασης θνησιμότητας ${}^s\mu_x$ ενός πλήρους πίνακα επιβίωσης στο ίδιο ηλικιακό διάστημα.

Θα υπολογίσουμε, λοιπόν, μια σταθερά, την ${}_nK_x$, για κάθε ηλικιακό διάστημα $[x, x+n)$ ως εξής:

$${}_nK_x = \frac{\ln(1 - {}_nq_x)}{\sum_{i=0}^{n-1} \ln(1 - {}^sq_{x+i})}$$

Όπου, ${}_nq_x$ είναι η πιθανότητες θανάτου του συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης για το ηλικιακό διάστημα $[x, x+n)$, και sq_x είναι η πιθανότητα θανάτου του πλήρη πίνακα επιβίωσης στην ηλικία x , $x \in [x, x+n)$.

Τις τελικές πιθανότητες θανάτου θα τις εκτιμήσου ως εξής:

$$q_x = (1 - {}^sq_x) {}_nK_x$$

Και τα ${}_nK_x$, υπολογίζονται ανά πενταετή διαστήματα, δηλαδή:

$${}_4K_1, \quad \text{για } x \in [1, 4)$$

$${}_5K_5, \quad \text{για } x \in [5, 9)$$

...

$${}_5K_{95}, \quad \text{για } x \in [95, 99)$$

B. Η μέθοδος Brass Logit

Ο William Brass (Brass, 1971) ανέπτυξε το Γενικό Πρότυπο Μοντέλο (General Standard Model). Σε αυτό το μοντέλο, οι πίνακες επιβίωσης συνδέονται με ένα σύστημα δύο παραμέτρων logit, βασισμένο σε ένα γενικό πρότυπο θνησιμότητας και μια γραμμική σχέση μεταξύ δύο ομάδων logit (1) και (2). Με την αλλαγή των δύο παραμέτρων της γραμμικής σχέσης, το γενικό πρότυπο αλλάζει σε σχέση με το επίπεδο και το πρότυπο της θνησιμότητας.

$$\text{logit}(1 - l_x) = \alpha + \beta \text{logit}(1 - {}_s l_x) \quad (1)$$

$$\text{logit}(1 - l_x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{l_x}{1 - l_x} \right) \quad (2)$$

Για να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους α και β μέσω των γραμμικών εξισώσεων χρειάζεται να γνωρίζουμε μόνο δύο από τις τιμές των ανεξάρτητων $\text{logit}(1 - l_x)$, έστω τις l_1 και l_{50} . Αφού εκτιμήσουμε τις παραμέτρους α και β , οι επιζώντες l_x θα υπολογίζονται ως εξής:

$$l_x = \frac{1}{1 + e^{2(\alpha + \beta \text{logit}(1 - {}_s l_x))}}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο : Εφαρμογή: Κατασκευή πινάκων επιβίωσης για την Ελλάδα

ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Για τη δημιουργία των πινάκων επιβίωσης χρησιμοποιήθηκαν απογραφικά και ληξιαρχικά δεδομένα που συλλέγει και δημοσιεύει η Ελληνική Στατιστική Αρχή (ΕΛΣΤΑΤ). Το στατιστικό πληροφοριακό υλικό που χρησιμοποιήσαμε περιλαμβάνει τα εξής στοιχεία:

- 1) Στοιχεία του πληθυσμού της Ελλάδας για το 2017, βάσει των απογραφικών εκτιμήσεων της ΕΛΣΤΑΤ, κατά φύλο και πενταετείς ομάδες ηλικιών με εξαίρεση τα δύο πρώτα κλιμάκια όπου ελήφθησαν πληροφορίες για τις ηλικίες <1 και 1-4 καθώς η βρεφική και παιδική θνησιμότητα έχουν ιδιαίτερη σημασία και πρέπει να τα λάβουμε ξεχωριστά.
- 2) Ληξιαρχικές καταγραφές κατά φύλο και πενταετείς ομάδες ηλικιών, όπως αναφέραμε παραπάνω ο αριθμός των θανάτων για τα δύο πρώτα κλιμάκια αναφέρεται και εδώ στις ηλικίες <1 και 1-4 για να διαχωριστεί η βρεφική και παιδική θνησιμότητα από τις υπόλοιπες ομάδες ηλικιών. Οι θάνατοι είναι ταξινομημένοι κατά ηλικία και φύλο. Αξίζει να σημειώσουμε ότι για να αποφύγουμε τυχόν τυχαίες κυμάνσεις και για να έχουμε πιο αντιπροσωπευτικούς δείκτες θνησιμότητας έχουμε λάβει ληξιαρχικά γεγονότα τριών ετών, συγκεκριμένα των ετών 2017, 2018 και 2019 (τα πιο πρόσφατα δημοσιευμένα στοιχεία της ΕΛΣΤΑΤ) και στη συνέχεια υπολογίσαμε τον μέσο αριθμό θανάτων κατά φύλο και ηλικία.

Τα αρχικά απογραφικά και ληξιαρχικά δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για τις εκτιμήσεις των πινάκων επιβίωσης παρουσιάζονται παρακάτω.

ΣΥΝΟΛΟ TOTAL	5.221.277
0-4	244.596
5-9	280.191
10-14	273.144
15-19	275.824
20-24	282.307
25-29	293.909
30-34	337.784
35-39	398.648
40-44	398.915
45-49	400.874
50-54	358.241
55-59	337.815
60-64	310.338
65-69	286.853
70-74	239.299
75-79	205.680
80-84	161.774
85+	135.085

Πίνακας 3: Πληθυσμός αντρών ανά ηλικιακή ομάδα κατά το έτος 2017

ΣΥΝΟΛΟ TOTAL	5.546.916
0-4	230.963
5-9	266.829
10-14	258.946
15-19	262.203
20-24	269.192
25-29	292.302
30-34	333.768
35-39	398.726
40-44	408.224
45-49	424.570
50-54	389.965
55-59	377.289
60-64	342.889
65-69	323.164
70-74	278.200
75-79	263.084
80-84	225.643
85+	200.959

Πίνακας 4: Πληθυσμός γυναικών ανά ηλικιακή ομάδα κατά το έτος 2017

3.1 Κατασκευή συνεπυγμένου πίνακα επιβίωσης

Παρακάτω παρουσιάζονται οι συναρτήσεις του excel, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του συνεπυγμένου πίνακα επιβίωσης.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	ΣΥΝΕΠΤΥΓΜΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ										
2											
3	x	${}_n P_x$	${}_n D_x$	${}_n m_x$	${}_n q_x$	${}_n p_x$	l_x	${}_n d_x$	${}_n L_x$	T_x	e_x
4											
5	0	244596	46,2	=C5/B5	=(2*5*D5)/(2+5*D5)	=1-E5	100000	=G5-G6	=2,5*(G5+G6)	=J6+I5	=J5/G5
6	5	280191	27	=C6/B6	=(2*5*D6)/(2+5*D6)	=1-E6	=G5*F5	=G6-G7	=2,5*(G6+G7)	=J7+I6	=J6/G6
7	10	273144	30	=C7/B7	=(2*5*D7)/(2+5*D7)	=1-E7	=G6*F6	=G7-G8	=2,5*(G7+G8)	=J8+I7	=J7/G7
8	15	275824	101,66666	=C8/B8	=(2*5*D8)/(2+5*D8)	=1-E8	=G7*F7	=G8-G9	=2,5*(G8+G9)	=J9+I8	=J8/G8
9	20	282307	172,66666	=C9/B9	=(2*5*D9)/(2+5*D9)	=1-E9	=G8*F8	=G9-G10	=2,5*(G9+G10)	=J10+I9	=J9/G9
10	25	293909	209	=C10/B10	=(2*5*D10)/(2+5*D10)	=1-E10	=G9*F9	=G10-G11	=2,5*(G10+G11)	=J11+I10	=J10/G10
11	30	337784	286,66666	=C11/B11	=(2*5*D11)/(2+5*D11)	=1-E11	=G10*F10	=G11-G12	=2,5*(G11+G12)	=J12+I11	=J11/G11
12	35	398648	424,33333	=C12/B12	=(2*5*D12)/(2+5*D12)	=1-E12	=G11*F11	=G12-G13	=2,5*(G12+G13)	=J13+I12	=J12/G12
13	40	398915	622,33333	=C13/B13	=(2*5*D13)/(2+5*D13)	=1-E13	=G12*F12	=G13-G14	=2,5*(G13+G14)	=J14+I13	=J13/G13
14	45	400874	1089,33333	=C14/B14	=(2*5*D14)/(2+5*D14)	=1-E14	=G13*F13	=G14-G15	=2,5*(G14+G15)	=J15+I14	=J14/G14
15	50	358241	1716,33333	=C15/B15	=(2*5*D15)/(2+5*D15)	=1-E15	=G14*F14	=G15-G16	=2,5*(G15+G16)	=J16+I15	=J15/G15
16	55	337815	2655,33333	=C16/B16	=(2*5*D16)/(2+5*D16)	=1-E16	=G15*F15	=G16-G17	=2,5*(G16+G17)	=J17+I16	=J16/G16
17	60	310338	3663,33333	=C17/B17	=(2*5*D17)/(2+5*D17)	=1-E17	=G16*F16	=G17-G18	=2,5*(G17+G18)	=J18+I17	=J17/G17
18	65	286853	4925,66666	=C18/B18	=(2*5*D18)/(2+5*D18)	=1-E18	=G17*F17	=G18-G19	=2,5*(G18+G19)	=J19+I18	=J18/G18
19	70	239299	5928,66666	=C19/B19	=(2*5*D19)/(2+5*D19)	=1-E19	=G18*F18	=G19-G20	=2,5*(G19+G20)	=J20+I19	=J19/G19
20	75	205680	8568	=C20/B20	=(2*5*D20)/(2+5*D20)	=1-E20	=G19*F19	=G20-G21	=2,5*(G20+G21)	=J21+I20	=J20/G20
21	80	161774	11803,66666	=C21/B21	=(2*5*D21)/(2+5*D21)	=1-E21	=G20*F20	=G21-G22	=2,5*(G21+G22)	=J22+I21	=J21/G21
22	85	135085	19372	=C22/B22	1	=1-E22	=G21*F21	=G22-G23	=G22/D22	=J23+I22	=J22/G22

Πίνακας 5: Συναρτήσεις excel για την κατασκευή ενός συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης

Για την κατασκευή των πινάκων, αρχικά, με βάση τα προηγούμενα δεδομένα πληθυσμού και θανάτων, υπολογίστηκαν οι κεντρικοί δείκτες θνησιμότητας κατά φύλο και πενταετείς ομάδες ηλικιών. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια των σχέσεων που αναπτύχθηκαν στο κεφάλαιο 1, υπολογίστηκαν οι πιθανότητες θανάτου (q_x) και επιβίωσης (p_x) αντίστοιχα. Έπειτα, κατασκευάστηκαν οι πίνακες επιβίωσης για τους άνδρες και τις γυναίκες, οι οποίοι έχουν ως αρχικό αριθμό επιζώντων (ρίζα του πίνακα επιβίωσης) το 100.000. Αφού εκτιμήθηκαν οι επιζώντες l_x στην αρχή κάθε ηλικιακής ομάδας, υπολογίστηκαν οι θανούντες d_x , οι επιζώντες στο μέσο των ηλικιών L_x , ο συνολικός αριθμός επιζώντων στο μέσο των ηλικιών και άνω T_x και τέλος, η προσδοκώμενη ζωή e_x στη αρχή κάθε ηλικιακής ομάδας

Τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων των πινάκων επιβίωσης κατά φύλο παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες:

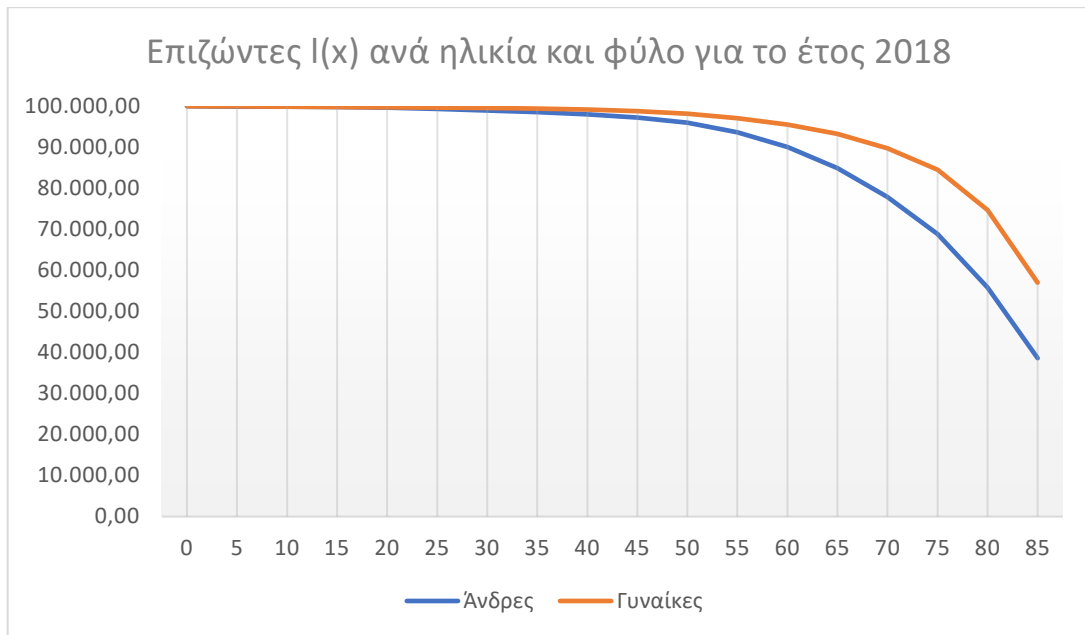
ΣΥΝΕΠΤΥΓΜΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ ΑΝΔΡΩΝ										
x	${}_n P_x$	${}_n D_x$	${}_n m_x$	${}_n q_x$	${}_n p_x$	l_x	${}_n d_x$	${}_n L_x$	T_x	e_x
0	244.596	46,20	0,000189	0,0009	0,9991	100.000,00	94,40	499.764,01	7.907.993,80	79,08
5	280.191	27,00	0,000096	0,0005	0,9995	99.905,60	48,12	499.407,70	7.408.229,80	74,15
10	273.144	30,00	0,000110	0,0005	0,9995	99.857,48	54,82	499.150,34	6.908.822,09	69,19
15	275.824	101,67	0,000369	0,0018	0,9982	99.802,66	183,76	498.553,87	6.409.671,75	64,22
20	282.307	172,67	0,000612	0,0031	0,9969	99.618,89	304,18	497.334,01	5.911.117,88	59,34
25	293.909	209,00	0,000711	0,0035	0,9965	99.314,71	352,49	495.692,33	5.413.783,88	54,51
30	337.784	286,67	0,000849	0,0042	0,9958	98.962,22	419,04	493.763,50	4.918.091,55	49,70
35	398.648	424,33	0,001064	0,0053	0,9947	98.543,18	523,07	491.408,22	4.424.328,05	44,90
40	398.915	622,33	0,001560	0,0078	0,9922	98.020,11	761,62	488.196,50	3.932.919,83	40,12
45	400.874	1.089,33	0,002717	0,0135	0,9865	97.258,49	1.312,53	483.011,12	3.444.723,33	35,42
50	358.241	1.716,33	0,004791	0,0237	0,9763	95.945,96	2.271,18	474.051,83	2.961.712,21	30,87
55	337.815	2.655,33	0,007860	0,0385	0,9615	93.674,77	3.610,62	459.347,33	2.487.660,38	26,56
60	310.338	3.663,33	0,011804	0,0573	0,9427	90.064,16	5.163,36	437.412,39	2.028.313,04	22,52
65	286.853	4.925,67	0,017171	0,0823	0,9177	84.900,80	6.989,29	407.030,77	1.590.900,65	18,74
70	239.299	5.928,67	0,024775	0,1167	0,8833	77.911,51	9.088,43	366.836,49	1.183.869,88	15,20
75	205.680	8.568,00	0,041657	0,1886	0,8114	68.823,08	12.982,74	311.658,56	817.033,40	11,87
80	161.774	11.803,67	0,072964	0,3085	0,6915	55.840,34	17.228,93	236.129,39	505.374,83	9,05
85	135.085	19.372,00	0,143406	1,0000	0,0000	38.611,41	38.611,41	269.245,45	269.245,45	6,97

Πίνακας 6: Συνεπτυγμένος πίνακας επιβίωσης ανδρών για το έτος 2018

ΣΥΝΕΠΤΥΓΜΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ ΓΥΝΑΙΚΩΝ										
x	${}_n P_x$	${}_n D_x$	${}_n m_x$	${}_n q_x$	${}_n p_x$	l_x	${}_n d_x$	${}_n L_x$	T_x	e_x
		0								
0	230.963	36	0,000156	0,0008	0,9992	100.000,00	77,90	499.805,24	8.418.889,10	84,19
5	266.829	23,33333	0,000087	0,0004	0,9996	99.922,10	43,68	499.501,28	7.919.083,86	79,25
10	258.946	22	0,000085	0,0004	0,9996	99.878,42	42,42	499.286,03	7.419.582,58	74,29
15	262.203	38,66667	0,000147	0,0007	0,9993	99.836,00	73,59	498.996,02	6.920.296,55	69,32
20	269.192	51,33333	0,000191	0,0010	0,9990	99.762,41	95,08	498.574,37	6.421.300,53	64,37
25	292.302	58,33333	0,000200	0,0010	0,9990	99.667,34	99,40	498.088,17	5.922.726,17	59,42
30	333.768	115,3333	0,000346	0,0017	0,9983	99.567,93	171,88	497.409,97	5.424.637,99	54,48
35	398.726	187	0,000469	0,0023	0,9977	99.396,05	232,81	496.398,25	4.927.228,02	49,57
40	408.224	331,3333	0,000812	0,0041	0,9959	99.163,25	401,61	494.812,20	4.430.829,77	44,68
45	424.570	544,6667	0,001283	0,0064	0,9936	98.761,63	631,46	492.229,51	3.936.017,56	39,85
50	389.965	832,3333	0,002134	0,0106	0,9894	98.130,17	1.041,68	488.046,66	3.443.788,05	35,09
55	377.289	1243	0,003295	0,0163	0,9837	97.088,49	1.586,25	481.476,83	2.955.741,39	30,44
60	342.889	1653,333	0,004822	0,0238	0,9762	95.502,24	2.275,03	471.823,63	2.474.264,56	25,91
65	323.164	2439,333	0,007548	0,0370	0,9630	93.227,21	3.453,36	457.502,67	2.002.440,93	21,48
70	278.200	3382	0,012157	0,0590	0,9410	89.773,85	5.295,83	435.629,70	1.544.938,26	17,21
75	263.084	6493,667	0,024683	0,1162	0,8838	84.478,02	9.819,84	397.840,51	1.109.308,56	13,13
80	225.643	12103,33	0,053639	0,2365	0,7635	74.658,18	17.655,49	329.152,17	711.468,05	9,53
85	200.959	29962,67	0,149098	1,0000	0,0000	57.002,69	57.002,69	382.315,88	382.315,88	6,71

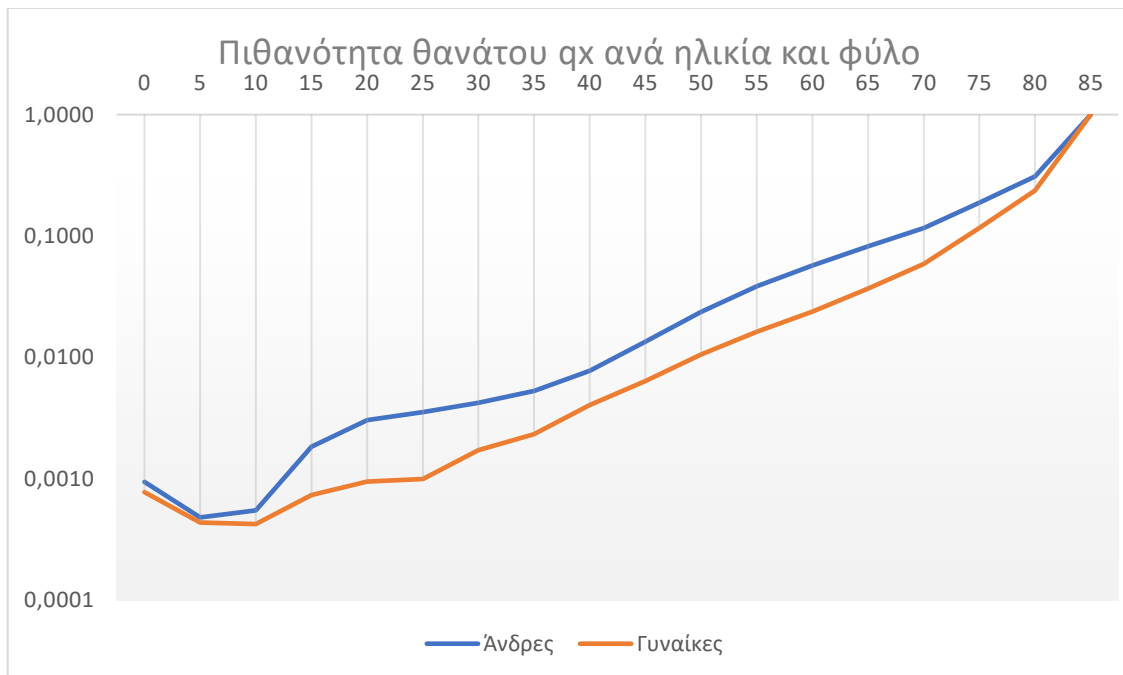
Πίνακας 7: Συνεπτυγμένος πίνακας επιβίωσης γυναικών για το έτος 2018

Στο παρακάτω γράφημα παρουσιάζονται διαγραμματικά οι επιζώντες l_x , ανά φύλο και ηλικιακή ομάδα:



Γράφημα 2: Επιζώντες $l(x)$ ανά ηλικία και φύλο για το έτος 2018

Επίσης, στο παρακάτω γράφημα παρουσιάζονται διαγραμματικά οι πιθανότητες θανάτου q_x , ανά φύλο και ηλικιακή:

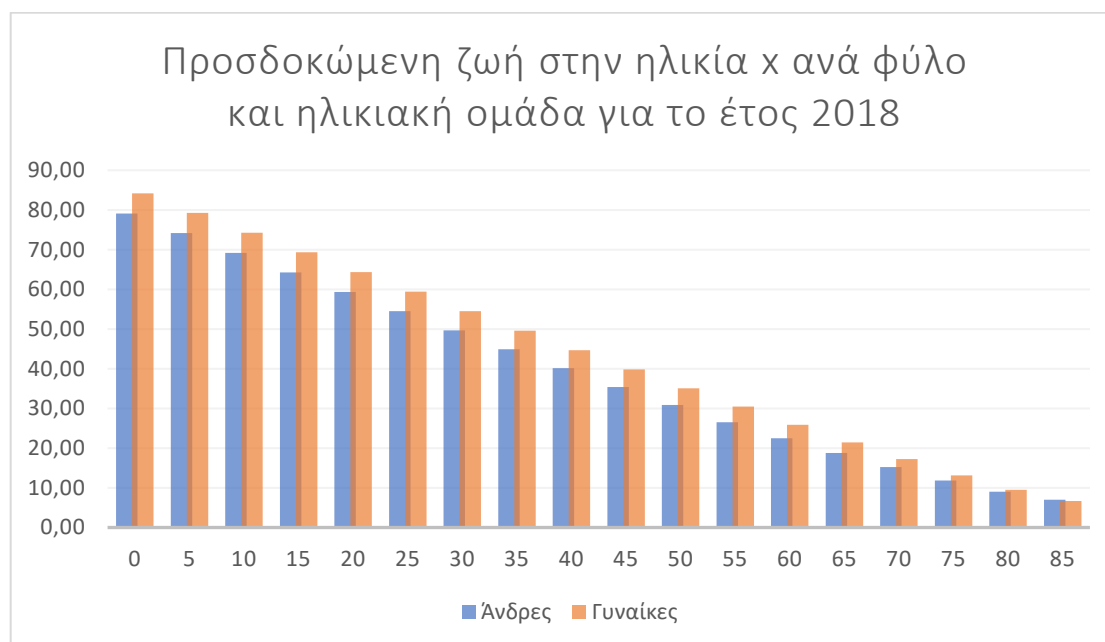


Γράφημα 3: Πιθανότητες θανάτου q_x ανά ηλικία και φύλο για το έτος 2018

Παρατηρώντας τα παραπάνω γραφήματα σε συνδυασμό με τους πίνακες επιβίωσης, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Οι γυναίκες παρουσιάζουν μεγαλύτερο αριθμό επιζώντων σχεδόν στο σύνολό τους σε σχέση με τους άνδρες
- Οι επιζώντες, στο σύνολό τους, παρουσιάζουν μικρή μείωση σε αριθμό από την ηλικία 0 μέχρι τα 55 έτη. Από την ηλικία των 55 ετών και μετά, παρατηρούμε μια απότομη μείωση τόσο για τους άνδρες όσο και για τις γυναίκες
- Όσον αφορά τις πιθανότητες θανάτου, βλέπουμε ότι με το πέρασμα των χρόνων αυξάνονται, με τους άνδρες να παρουσιάζουν μεγαλύτερη πιθανότητα τόσο στο σύνολό τους όσο και σε κάθε ηλικιακή ομάδα σε σχέση με τις γυναίκες. Η διαφοροποίηση είναι πολύ μικρή στη βρεφική και την παιδική ηλικία μέχρι 10 ετών καθώς και στις ηλικίες 70 ετών και άνω.

Παρακάτω απεικονίζονται τα αποτελέσματα για την προσδοκώμενη ζωή e_x ανά φύλο για το έτος 2018:



Γράφημα 4: Προσδοκώμενη ζωή στην ηλικία x ανά φύλο και ηλικιακή ομάδα για το έτος 2018

3.2 Κατασκευή πλήρους πίνακα επιβίωσης με τη χρήση μεθόδων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μετατρέψουμε τον συνεπτυγμένο πίνακα επιβίωσης σε πλήρη πίνακα επιβίωσης χρησιμοποιώντας δύο υποθέσεις: α) την υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής θανάτων (UDD), και β) την υπόθεση της σταθερής έντασης θνησιμότητας (εκθετική παρεμβολή).

A) Υπόθεση ομοιόμορφης κατανομής θανάτων

Η μέθοδος αυτή υποθέτει ότι η συνάρτηση l_{x+t} είναι γραμμική συνάρτηση του t , σε κάθε έτος ηλικίας $[x, x + 1)$. Έτσι αν η l_{x+t} είναι γραμμική για $0 \leq t < 1$, η τιμή της l_{x+t} προκύπτει από γνωστές τιμές l_x και l_{x+1} με γραμμική παρεμβολή έτσι ώστε:

$$l_{x+t} = (1 - t) \cdot l_x + t \cdot l_{x+1} = l_x - t \cdot (l_x - l_{x+1}) = l_x - t \cdot d_x \rightarrow t \cdot d_x = l_x - l_{x+t}$$

Από το σύνολο των θανούντων d_x κατά τη διάρκεια του έτους ηλικίας $[x, x + 1)$, υποθέτουμε ότι οι $t \cdot d_x$ εξ αυτών έχουν αποβιώσει κατά το t τμήμα αυτής της ηλικίας, έτσι θα έχουμε ότι:

$$l_{x+t} = l_x - t \cdot d_x \rightarrow l_{x+t} = l_x - t \cdot (l_x - l_{x+1})$$

$$\rightarrow \frac{l_{x+t}}{l_x} = 1 - t \cdot \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

$$\rightarrow {}_t p_x = 1 - t \cdot q_x$$

$$\rightarrow {}_t q_x = t \cdot q_x \text{ για } 0 \leq t < 1$$

Επίσης ξέρουμε ότι:

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_x = {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}, \text{ όμως}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_x = -\frac{\partial}{\partial t} {}_t q_x = -\frac{\partial}{\partial t} t \cdot p_x = -q_x$$

Και επομένως,

$$f_{T(x)}(t) = {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} = q_x$$

[41]

Άρα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της απομένουσας ζωής T_x είναι σταθερή σε κάθε έτος ηλικίας, δηλαδή κατανέμεται ομοιόμορφα μεταξύ των ακέραιων ηλικιών. Επίσης η συνάρτηση κατανομής απομένουσας ζωής είναι γραμμική συνάρτηση του t , καθώς $F_{T(x)}(t) = {}_tq_x = t \cdot q_x$. Δηλαδή η T_x ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$.

Αφού η l_{x+t} είναι γραμμική για $0 \leq t < 1$, οι θάνατοι μέσα στο έτος της ηλικίας $[x, x + 1)$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι και έτσι προκύπτει η υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής των θανάτων μέσα σε κάθε έτος ηλικίας (uniform distribution of deaths ή UDD). Εμείς κάνουμε χρήση της υπόθεσης αυτής για πενταετή διαστήματα ηλικιών.

3.2.1 Επεξεργασία δεδομένων σε περιβάλλον Excel

Για την επεξεργασία των δεδομένων μας εργαζόμαστε, όπως και στην κατασκευή του συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης, σε περιβάλλον Excel. Αρχικά καταχωρούμε τα διαθέσιμα δεδομένα που έχουμε από τον συνεπτυγμένο πίνακα, δηλαδή τον πληθυσμό, τους θανάτους και την ειδική θνησιμότητα κατά πενταετείς ηλικιακές ομάδες. Στη συνέχεια εκτιμούμε τις βιομετρικές συναρτήσεις κατά έτος ηλικίας με τη μέθοδο της ομοιόμορφης κατανομής. Για τις ηλικίες 0-4 χρησιμοποιήσαμε την εμπειρική κατανομή θανάτων, δεδομένου ότι αποκλίνει σημαντικά σε σχέση με την ομοιόμορφη κατανομή, ενώ για τις ηλικίες 85+ κάναμε μια προσεγγιστική εκτίμηση των συναρτήσεων θεωρώντας ως τελική ηλικία του πίνακα επιβίωσης τα 100 έτη, καθώς δεν έχουμε εμπειρικά στοιχεία.

Στην μέθοδο αυτή, ουσιαστικά, πήραμε τους θανάτους σε κάθε ηλικιακό διάστημα και τους χωρίσαμε ισόποσα σε κάθε ηλικία (1/5 των θανάτων σε κάθε ηλικία). Έτσι, τα l_x θα υπολογίζονται παίρνοντας τους επιζώντες στην ηλικία $x-1$ (l_{x-1}) μείον το 1/5 των θανόντων του διαστήματος ηλικιών στο οποίο υπολογίζουμε τα l_x .

Τα αποτελέσματα για τις γυναίκες και τους άνδρες παρατίθενται παρακάτω. Παρατηρώντας την εμπειρική κατανομή των θανάτων στις ηλικίες 0-4, είναι προφανές ότι η συντριπτική πλειοψηφία (γύρω στο 85%) καταγράφεται κατά τη διάρκεια του πρώτου έτους ζωής.

Εμπειρική κατανομή θανάτων		
x	A	Θ
0	86,15	85,19
1	5,19	7,22
2	3,90	3,89
3	2,45	1,48
4	2,31	2,22

x	l_x	p_x	q_x	d_x	L_x	T_x	e_x	m_x
0	100000	0,999336	0,0007	66,36	99.953,55	8.463.945,81	84,64	0,000664
1	99933,6372	0,999944	0,0001	5,63	99.930,26	8.363.992,27	83,70	0,000056
2	99928,0107	0,999970	0,0000	3,03	99.926,50	8.264.062,01	82,70	0,000030
3	99924,9811	0,999988	0,0000	1,15	99.924,40	8.164.135,51	81,70	0,000012
4	99923,8270	0,999983	0,0000	1,73	99.922,96	8.064.211,11	80,70	0,000017
5	99922,096	0,999913	0,0001	8,74	99.917,73	7.964.288,14	79,70	0,000087
6	99913,36	0,999913	0,0001	8,74	99.908,99	7.864.370,42	78,71	0,000087
7	99904,624	0,999913	0,0001	8,74	99.900,26	7.764.461,42	77,72	0,000087
8	99895,888	0,999913	0,0001	8,74	99.891,52	7.664.561,17	76,73	0,000087
9	99887,152	0,999913	0,0001	8,74	99.882,78	7.564.669,65	75,73	0,000087
10	99878,416	0,999915	0,0001	8,48	99.874,17	7.464.786,87	74,74	0,000085
11	99869,932	0,999915	0,0001	8,48	99.865,69	7.364.912,69	73,75	0,000085
12	99861,448	0,999915	0,0001	8,48	99.857,21	7.265.047,00	72,75	0,000085
13	99852,964	0,999915	0,0001	8,48	99.848,72	7.165.189,79	71,76	0,000085
14	99844,481	0,999915	0,0001	8,48	99.840,24	7.065.341,07	70,76	0,000085
15	99835,997	0,999853	0,0001	14,72	99.828,64	6.965.500,83	69,77	0,000147
16	99821,28	0,999853	0,0001	14,72	99.813,92	6.865.672,19	68,78	0,000147
17	99806,562	0,999853	0,0001	14,72	99.799,20	6.765.858,27	67,79	0,000147
18	99791,845	0,999853	0,0001	14,72	99.784,49	6.666.059,07	66,80	0,000147
19	99777,128	0,999852	0,0001	14,72	99.769,77	6.566.274,58	65,81	0,000148
20	99762,411	0,999809	0,0002	19,02	99.752,90	6.466.504,81	64,82	0,000191
21	99743,396	0,999809	0,0002	19,02	99.733,89	6.366.751,91	63,83	0,000191
22	99724,381	0,999809	0,0002	19,02	99.714,87	6.267.018,02	62,84	0,000191
23	99705,365	0,999809	0,0002	19,02	99.695,86	6.167.303,15	61,86	0,000191
24	99686,35	0,999809	0,0002	19,02	99.676,84	6.067.607,29	60,87	0,000191
25	99667,335	0,999801	0,0002	19,88	99.657,40	5.967.930,45	59,88	0,000199
26	99647,455	0,999800	0,0002	19,88	99.637,52	5.868.273,05	58,89	0,000200
27	99627,575	0,999800	0,0002	19,88	99.617,63	5.768.635,54	57,90	0,000200
28	99607,695	0,999800	0,0002	19,88	99.597,75	5.669.017,90	56,91	0,000200
29	99587,815	0,999800	0,0002	19,88	99.577,87	5.569.420,15	55,92	0,000200
30	99567,934	0,999655	0,0003	34,38	99.550,75	5.469.842,28	54,94	0,000345
31	99533,558	0,999655	0,0003	34,38	99.516,37	5.370.291,53	53,95	0,000345
32	99499,182	0,999655	0,0003	34,38	99.481,99	5.270.775,16	52,97	0,000346
33	99464,806	0,999654	0,0003	34,38	99.447,62	5.171.293,16	51,99	0,000346
34	99430,431	0,999654	0,0003	34,38	99.413,24	5.071.845,55	51,01	0,000346
35	99396,055	0,999532	0,0005	46,56	99.372,77	4.972.432,30	50,03	0,000469
36	99349,493	0,999531	0,0005	46,56	99.326,21	4.873.059,53	49,05	0,000469
37	99302,932	0,999531	0,0005	46,56	99.279,65	4.773.733,32	48,07	0,000469
38	99256,37	0,999531	0,0005	46,56	99.233,09	4.674.453,67	47,09	0,000469
39	99209,808	0,999531	0,0005	46,56	99.186,53	4.575.220,58	46,12	0,000469
40	99163,247	0,999190	0,0008	80,32	99.123,09	4.476.034,05	45,14	0,000810
41	99082,924	0,999189	0,0008	80,32	99.042,76	4.376.910,96	44,17	0,000811
42	99002,602	0,999189	0,0008	80,32	98.962,44	4.277.868,20	43,21	0,000812
43	98922,28	0,999188	0,0008	80,32	98.882,12	4.178.905,76	42,24	0,000812
44	98841,957	0,999187	0,0008	80,32	98.801,80	4.080.023,64	41,28	0,000813
45	98761,635	0,998721	0,0013	126,29	98.698,49	3.981.221,85	40,31	0,001280
46	98635,342	0,998720	0,0013	126,29	98.572,20	3.882.523,36	39,36	0,001281
47	98509,049	0,998718	0,0013	126,29	98.445,90	3.783.951,16	38,41	0,001283
48	98382,756	0,998716	0,0013	126,29	98.319,61	3.685.505,26	37,46	0,001285
49	98256,463	0,998715	0,0013	126,29	98.193,32	3.587.185,65	36,51	0,001286
50	98130,17	0,997877	0,0021	208,34	98.026,00	3.488.992,33	35,55	0,002125

51	97921,834	0,997872	0,0021	208,34	97.817,67	3.390.966,33	34,63	0,002130
52	97713,499	0,997868	0,0021	208,34	97.609,33	3.293.148,67	33,70	0,002134
53	97505,164	0,997863	0,0021	208,34	97.401,00	3.195.539,33	32,77	0,002139
54	97296,828	0,997859	0,0021	208,34	97.192,66	3.098.138,34	31,84	0,002144
55	97088,493	0,996732	0,0033	317,25	96.929,87	3.000.945,68	30,91	0,003273
56	96771,242	0,996722	0,0033	317,25	96.612,62	2.904.015,81	30,01	0,003284
57	96453,992	0,996711	0,0033	317,25	96.295,37	2.807.403,19	29,11	0,003295
58	96136,741	0,996700	0,0033	317,25	95.978,12	2.711.107,83	28,20	0,003305
59	95819,491	0,996689	0,0033	317,25	95.660,87	2.615.129,71	27,29	0,003316
60	95502,24	0,995236	0,0048	455,01	95.274,74	2.519.468,84	26,38	0,004776
61	95047,235	0,995213	0,0048	455,01	94.819,73	2.424.194,11	25,51	0,004799
62	94592,229	0,995190	0,0048	455,01	94.364,73	2.329.374,37	24,63	0,004822
63	94137,224	0,995167	0,0048	455,01	93.909,72	2.235.009,65	23,74	0,004845
64	93682,219	0,995143	0,0049	455,01	93.454,72	2.141.099,93	22,85	0,004869
65	93227,213	0,992592	0,0074	690,67	92.881,88	2.047.645,21	21,96	0,007436
66	92536,541	0,992536	0,0075	690,67	92.191,21	1.954.763,33	21,12	0,007492
67	91845,869	0,992480	0,0075	690,67	91.500,53	1.862.572,13	20,28	0,007548
68	91155,197	0,992423	0,0076	690,67	90.809,86	1.771.071,59	19,43	0,007606
69	90464,526	0,992365	0,0076	690,67	90.119,19	1.680.261,73	18,57	0,007664
70	89773,854	0,988202	0,0118	1.059,17	89.244,27	1.590.142,54	17,71	0,011868
71	88714,688	0,988061	0,0119	1.059,17	88.185,10	1.500.898,27	16,92	0,012011
72	87655,522	0,987917	0,0121	1.059,17	87.125,94	1.412.713,17	16,12	0,012157
73	86596,356	0,987769	0,0122	1.059,17	86.066,77	1.325.587,23	15,31	0,012306
74	85537,19	0,987617	0,0124	1.059,17	85.007,61	1.239.520,45	14,49	0,012460
75	84478,025	0,976752	0,0232	1.963,97	83.496,04	1.154.512,85	13,67	0,023522
76	82514,056	0,976198	0,0238	1.963,97	81.532,07	1.071.016,81	12,98	0,024088
77	80550,087	0,975618	0,0244	1.963,97	79.568,10	989.484,74	12,28	0,024683
78	78586,119	0,975009	0,0250	1.963,97	77.604,13	909.916,63	11,58	0,025308
79	76622,15	0,974368	0,0256	1.963,97	75.640,17	832.312,50	10,86	0,025965
80	74658,181	0,952703	0,0473	3.531,10	72.892,63	756.672,33	10,14	0,048442
81	71127,083	0,950355	0,0496	3.531,10	69.361,53	683.779,70	9,61	0,050909
82	67595,984	0,947762	0,0522	3.531,10	65.830,43	614.418,17	9,09	0,053639
83	64064,885	0,944882	0,0551	3.531,10	62.299,34	548.587,73	8,56	0,056680
84	60533,787	0,941667	0,0583	3.531,10	58.768,24	486.288,40	8,03	0,060085
85	57002,688	0,933333	0,0667	3.800,18	55.102,60	427.520,16	7,50	0,068966
86	53202,509	0,928571	0,0714	3.800,18	51.302,42	372.417,56	7,00	0,074074
87	49402,33	0,923077	0,0769	3.800,18	47.502,24	321.115,14	6,50	0,080000
88	45602,15	0,916667	0,0833	3.800,18	43.702,06	273.612,90	6,00	0,086957
89	41801,971	0,909091	0,0909	3.800,18	39.901,88	229.910,84	5,50	0,095238
90	38001,792	0,900000	0,1000	3.800,18	36.101,70	190.008,96	5,00	0,105263
91	34201,613	0,888889	0,1111	3.800,18	32.301,52	153.907,26	4,50	0,117647
92	30401,434	0,875000	0,1250	3.800,18	28.501,34	121.605,73	4,00	0,133333
93	26601,254	0,857143	0,1429	3.800,18	24.701,16	93.104,39	3,50	0,153846
94	22801,075	0,833333	0,1667	3.800,18	20.900,99	68.403,23	3,00	0,181818
95	19000,896	0,800000	0,2000	3.800,18	17.100,81	47.502,24	2,50	0,222222
96	15200,717	0,750000	0,2500	3.800,18	13.300,63	30.401,43	2,00	0,285714
97	11400,538	0,666667	0,3333	3.800,18	9.500,45	17.100,81	1,50	0,400000
98	7600,3584	0,500000	0,5000	3.800,18	5.700,27	7.600,36	1,00	0,666667
99	3800,1792	0,000000	1,0000	3.800,18	1.900,09	1.900,09	0,50	2,000000
100	0	0,000000	1,0000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000000

Πίνακας 8: Πλήρης πίνακας επιβίωσης γυναικών (υπόθεση UDD)

x	l_x	p_x	q_x	d_x	L_x	T_x	e_x	m_x
0	100000	0,9992	0,0008	81,32	99.943,08	7.928.156,33	79,28	0,000814
1	99918,6798	1,0000	0,0000	4,90	99.915,74	7.828.213,26	78,35	0,000049
2	99913,7760	1,0000	0,0000	3,68	99.911,94	7.728.297,52	77,35	0,000037
3	99910,0982	1,0000	0,0000	2,32	99.908,94	7.628.385,58	76,35	0,000023
4	99907,7826	1,0000	0,0000	2,18	99.906,69	7.528.476,64	75,35	0,000022
5	99905,603	0,9999	0,0001	9,62	99.900,79	7.428.569,95	74,36	0,000096
6	99895,978	0,9999	0,0001	9,62	99.891,17	7.328.669,16	73,36	0,000096
7	99886,353	0,9999	0,0001	9,62	99.881,54	7.228.777,99	72,37	0,000096
8	99876,729	0,9999	0,0001	9,62	99.871,92	7.128.896,45	71,38	0,000096
9	99867,104	0,9999	0,0001	9,62	99.862,29	7.029.024,54	70,38	0,000096
10	99857,479	0,9999	0,0001	10,96	99.852,00	6.929.162,25	69,39	0,000110
11	99846,514	0,9999	0,0001	10,96	99.841,03	6.829.310,25	68,40	0,000110
12	99835,55	0,9999	0,0001	10,96	99.830,07	6.729.469,22	67,41	0,000110
13	99824,585	0,9999	0,0001	10,96	99.819,10	6.629.639,15	66,41	0,000110
14	99813,621	0,9999	0,0001	10,96	99.808,14	6.529.820,05	65,42	0,000110
15	99802,656	0,9996	0,0004	36,75	99.784,28	6.430.011,91	64,43	0,000368
16	99765,903	0,9996	0,0004	36,75	99.747,53	6.330.227,63	63,45	0,000368
17	99729,151	0,9996	0,0004	36,75	99.710,77	6.230.480,10	62,47	0,000369
18	99692,398	0,9996	0,0004	36,75	99.674,02	6.130.769,33	61,50	0,000369
19	99655,645	0,9996	0,0004	36,75	99.637,27	6.031.095,31	60,52	0,000369
20	99618,893	0,9994	0,0006	60,84	99.588,47	5.931.458,04	59,54	0,000611
21	99558,056	0,9994	0,0006	60,84	99.527,64	5.831.869,56	58,58	0,000611
22	99497,22	0,9994	0,0006	60,84	99.466,80	5.732.341,92	57,61	0,000612
23	99436,383	0,9994	0,0006	60,84	99.405,96	5.632.875,12	56,65	0,000612
24	99375,546	0,9994	0,0006	60,84	99.345,13	5.533.469,16	55,68	0,000612
25	99314,71	0,9993	0,0007	70,50	99.279,46	5.434.124,03	54,72	0,000710
26	99244,212	0,9993	0,0007	70,50	99.208,96	5.334.844,57	53,75	0,000711
27	99173,714	0,9993	0,0007	70,50	99.138,47	5.235.635,61	52,79	0,000711
28	99103,216	0,9993	0,0007	70,50	99.067,97	5.136.497,14	51,83	0,000712
29	99032,719	0,9993	0,0007	70,50	98.997,47	5.037.429,17	50,87	0,000712
30	98962,221	0,9992	0,0008	83,81	98.920,32	4.938.431,70	49,90	0,000847
31	98878,412	0,9992	0,0008	83,81	98.836,51	4.839.511,39	48,94	0,000848
32	98794,604	0,9992	0,0008	83,81	98.752,70	4.740.674,88	47,99	0,000849
33	98710,796	0,9992	0,0008	83,81	98.668,89	4.641.922,18	47,03	0,000849
34	98626,987	0,9992	0,0008	83,81	98.585,08	4.543.253,29	46,07	0,000850
35	98543,179	0,9989	0,0011	104,61	98.490,87	4.444.668,20	45,10	0,001062
36	98438,565	0,9989	0,0011	104,61	98.386,26	4.346.177,33	44,15	0,001063
37	98333,951	0,9989	0,0011	104,61	98.281,64	4.247.791,07	43,20	0,001064
38	98229,337	0,9989	0,0011	104,61	98.177,03	4.149.509,43	42,24	0,001066
39	98124,723	0,9989	0,0011	104,61	98.072,42	4.051.332,40	41,29	0,001067
40	98020,109	0,9984	0,0016	152,32	97.943,95	3.953.259,98	40,33	0,001555
41	97867,785	0,9984	0,0016	152,32	97.791,62	3.855.316,04	39,39	0,001558
42	97715,462	0,9984	0,0016	152,32	97.639,30	3.757.524,41	38,45	0,001560
43	97563,138	0,9984	0,0016	152,32	97.486,98	3.659.885,11	37,51	0,001563
44	97410,814	0,9984	0,0016	152,32	97.334,65	3.562.398,14	36,57	0,001565
45	97258,491	0,9973	0,0027	262,51	97.127,24	3.465.063,49	35,63	0,002703
46	96995,984	0,9973	0,0027	262,51	96.864,73	3.367.936,25	34,72	0,002710
47	96733,478	0,9973	0,0027	262,51	96.602,22	3.271.071,52	33,82	0,002717

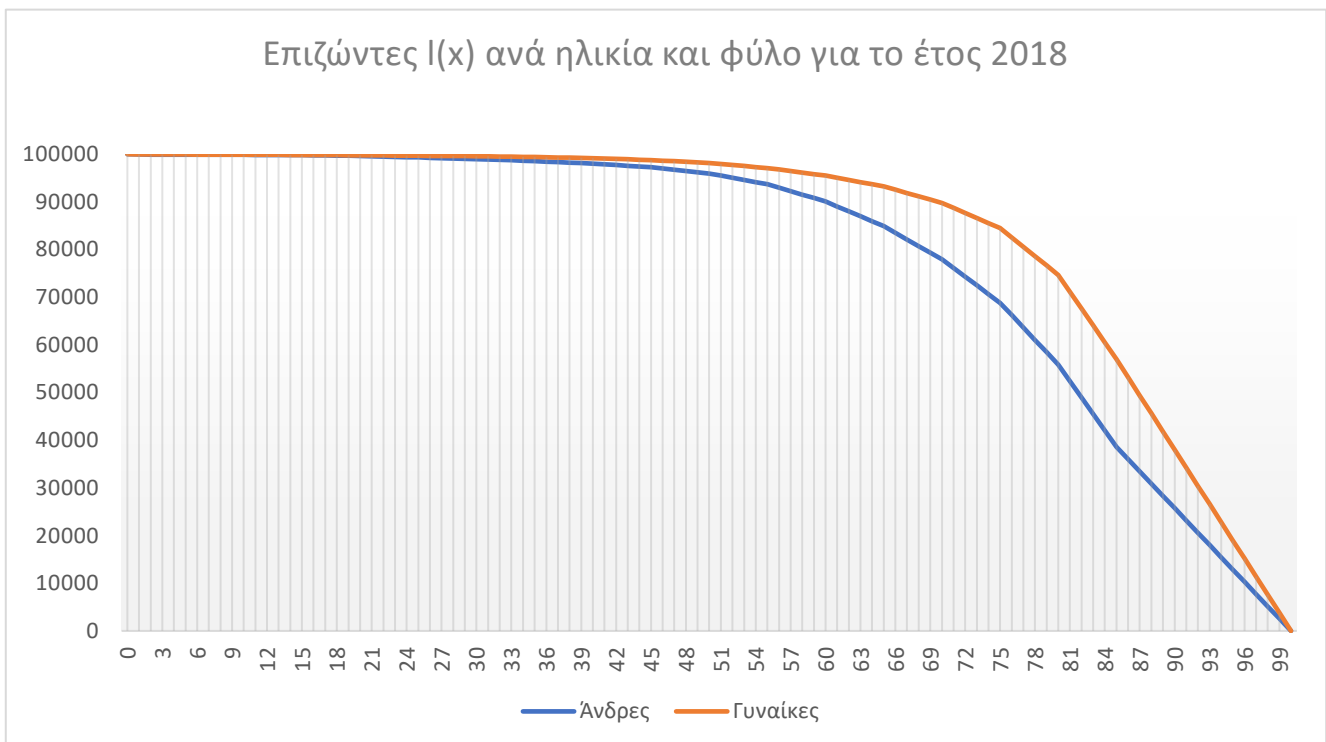
48	96470,971	0,9973	0,0027	262,51	96.339,72	3.174.469,29	32,91	0,002725
49	96208,465	0,9973	0,0027	262,51	96.077,21	3.078.129,57	31,99	0,002732
50	95945,958	0,9953	0,0047	454,24	95.718,84	2.982.052,36	31,08	0,004746
51	95491,722	0,9952	0,0048	454,24	95.264,60	2.886.333,52	30,23	0,004768
52	95037,485	0,9952	0,0048	454,24	94.810,37	2.791.068,92	29,37	0,004791
53	94583,248	0,9952	0,0048	454,24	94.356,13	2.696.258,55	28,51	0,004814
54	94129,012	0,9952	0,0048	454,24	93.901,89	2.601.902,42	27,64	0,004837
55	93674,775	0,9923	0,0077	722,12	93.313,71	2.508.000,53	26,77	0,007739
56	92952,652	0,9922	0,0078	722,12	92.591,59	2.414.686,82	25,98	0,007799
57	92230,529	0,9922	0,0078	722,12	91.869,47	2.322.095,23	25,18	0,007860
58	91508,405	0,9921	0,0079	722,12	91.147,34	2.230.225,76	24,37	0,007923
59	90786,282	0,9920	0,0080	722,12	90.425,22	2.139.078,42	23,56	0,007986
60	90064,159	0,9885	0,0115	1.032,67	89.547,82	2.048.653,20	22,75	0,011532
61	89031,486	0,9884	0,0116	1.032,67	88.515,15	1.959.105,37	22,00	0,011667
62	87998,814	0,9883	0,0117	1.032,67	87.482,48	1.870.590,22	21,26	0,011804
63	86966,142	0,9881	0,0119	1.032,67	86.449,81	1.783.107,74	20,50	0,011945
64	85933,469	0,9880	0,0120	1.032,67	85.417,13	1.696.657,94	19,74	0,012090
65	84900,797	0,9835	0,0165	1.397,86	84.201,87	1.611.240,81	18,98	0,016601
66	83502,94	0,9833	0,0167	1.397,86	82.804,01	1.527.038,94	18,29	0,016882
67	82105,082	0,9830	0,0170	1.397,86	81.406,15	1.444.234,93	17,59	0,017171
68	80707,225	0,9827	0,0173	1.397,86	80.008,30	1.362.828,77	16,89	0,017471
69	79309,368	0,9824	0,0176	1.397,86	78.610,44	1.282.820,48	16,17	0,017782
70	77911,51	0,9767	0,0233	1.817,69	77.002,67	1.204.210,04	15,46	0,023605
71	76093,825	0,9761	0,0239	1.817,69	75.184,98	1.127.207,37	14,81	0,024176
72	74276,14	0,9755	0,0245	1.817,69	73.367,30	1.052.022,39	14,16	0,024775
73	72458,455	0,9749	0,0251	1.817,69	71.549,61	978.655,09	13,51	0,025405
74	70640,769	0,9743	0,0257	1.817,69	69.731,93	907.105,48	12,84	0,026067
75	68823,084	0,9623	0,0377	2.596,55	67.524,81	837.373,55	12,17	0,038453
76	66226,536	0,9608	0,0392	2.596,55	64.928,26	769.848,74	11,62	0,039991
77	63629,987	0,9592	0,0408	2.596,55	62.331,71	704.920,48	11,08	0,041657
78	61033,438	0,9575	0,0425	2.596,55	59.735,16	642.588,77	10,53	0,043468
79	58436,89	0,9556	0,0444	2.596,55	57.138,62	582.853,60	9,97	0,045443
80	55840,341	0,9383	0,0617	3.445,79	54.117,45	525.714,99	9,41	0,063672
81	52394,556	0,9342	0,0658	3.445,79	50.671,66	471.597,54	9,00	0,068002
82	48948,77	0,9296	0,0704	3.445,79	47.225,88	420.925,88	8,60	0,072964
83	45502,985	0,9243	0,0757	3.445,79	43.780,09	373.700,00	8,21	0,078707
84	42057,199	0,9181	0,0819	3.445,79	40.334,31	329.919,91	7,84	0,085431
85	38611,413	0,9333	0,0667	2.574,09	37.324,37	289.585,60	7,50	0,068966
86	36037,319	0,9286	0,0714	2.574,09	34.750,27	252.261,23	7,00	0,074074
87	33463,225	0,9231	0,0769	2.574,09	32.176,18	217.510,96	6,50	0,080000
88	30889,131	0,9167	0,0833	2.574,09	29.602,08	185.334,78	6,00	0,086957
89	28315,037	0,9091	0,0909	2.574,09	27.027,99	155.732,70	5,50	0,095238
90	25740,942	0,9000	0,1000	2.574,09	24.453,90	128.704,71	5,00	0,105263
91	23166,848	0,8889	0,1111	2.574,09	21.879,80	104.250,82	4,50	0,117647
92	20592,754	0,8750	0,1250	2.574,09	19.305,71	82.371,02	4,00	0,133333
93	18018,66	0,8571	0,1429	2.574,09	16.731,61	63.065,31	3,50	0,153846
94	15444,565	0,8333	0,1667	2.574,09	14.157,52	46.333,70	3,00	0,181818
95	12870,471	0,8000	0,2000	2.574,09	11.583,42	32.176,18	2,50	0,222222
96	10296,377	0,7500	0,2500	2.574,09	9.009,33	20.592,75	2,00	0,285714
97	7722,2827	0,6667	0,3333	2.574,09	6.435,24	11.583,42	1,50	0,400000

98	5148,1885	0,5000	0,5000	2.574,09	3.861,14	5.148,19	1,00	0,666667
99	2574,0942	0,0000	1,0000	2.574,09	1.287,05	1.287,05	0,50	2,000000
100	0	0,0000	1,0000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000000

Πίνακας 9: Πλήρης πίνακας επιβίωσης ανδρών (υπόθεση UDD)

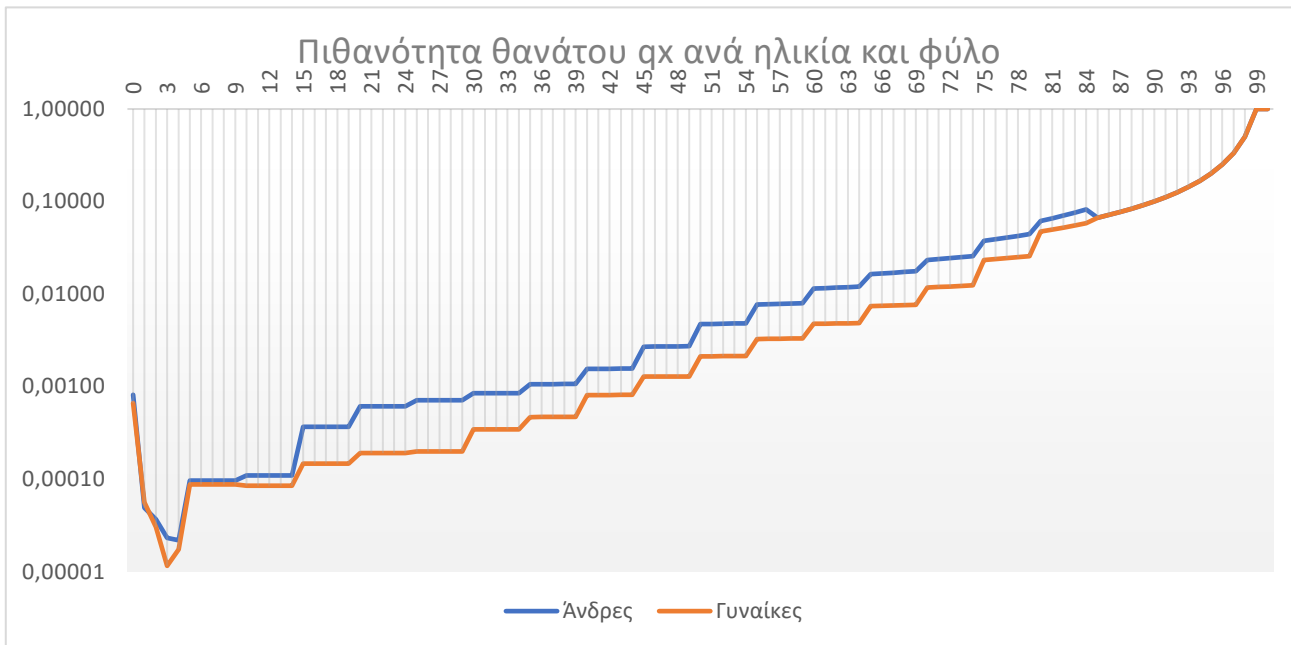
*Σημείωση: στην 5^η στήλη έχουμε υπολογίσει τους θανάτους για κάθε έτος της πενταετούς ηλικιακής ομάδας για τις ηλικίες 5-85 ενώ για τις ηλικίες 85+, βάσει της υπόθεσης ότι $l_{100} = 0$.

Στο παρακάτω γράφημα παρουσιάζονται διαγραμματικά οι επιζώντες l_x , ανά φύλο και ηλικιακή ομάδα για τα δεδομένα του πλήρη πίνακα επιβίωσης. Παρατηρούμε και πάλι ότι οι γυναίκες παρουσιάζουν μεγαλύτερο αριθμό επιζώντων στο σύνολό τους για το 2018 σε σχέση με τους άνδρες. Επίσης οι άνδρες επιζώντες, παρουσιάζουν μικρή μείωση σε αριθμό από την ηλικία 0 μέχρι τα 65 έτη και από την ηλικία των 65 ετών και μετά, παρατηρούμε μια απότομη μείωση, ενώ για τις γυναίκες εμφανίζεται απότομη μείωση από την ηλικία των 75 ετών και μετά.



Γράφημα 5: Επιζώντες $l(x)$ ανά ηλικία και φύλο για το έτος 2018 (UDD)

Όσον αφορά τις πιθανότητες θανάτου, βλέπουμε ότι αυξάνονται κλιμακωτά στις ηλικίες 15-85, με τους άνδρες να παρουσιάζουν μεγαλύτερη πιθανότητα σε σχέση με τις γυναίκες έως την ηλικία των 85 ετών, όπου από την ηλικία των 85 ετών προσεγγιστικά οι άνδρες και οι γυναίκες έχουν ίδια πιθανότητα.



Γράφημα 6: Πιθανότητες θανάτου qx ανά ηλικία και φύλο για το έτος 2018

B) Υπόθεση σταθερής έντασης θνησιμότητας

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει νωρίτερα κάτω από αυτή την υπόθεση η ένταση θνησιμότητας είναι σταθερή μεταξύ των ακέραιων ηλικιών και η ${}_t p_x$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή και επομένως για κάθε διάστημα ηλικίας $[x, x + 1)$, θα έχουμε:

$$p_x = \exp(-\mu_x) \rightarrow \mu_x = -\ln(p_x)$$

Αυτή η τελευταία σχέση είναι φυσικά προσεγγιστική. Βάσει αυτής της έκφρασης εκτιμάται η ένταση θνησιμότητας για κάθε έτος ηλικίας, βάσει των πιθανοτήτων θανάτου του συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης.

Για την επεξεργασία των δεδομένων μας εργαζόμαστε σε περιβάλλον Excel. Αρχικά καταχωρούμε τα διαθέσιμα δεδομένα που έχουμε από τον συνεπτυγμένο πίνακα όπως κάναμε και στην προηγούμενη μέθοδο. Στη συνέχεια, για κάθε πενταετή ηλικιακή ομάδα, εκτιμούμε τον αριθμό των επιζώντων στην αρχή της ηλικίας $x + i$ ($i = 0, \dots, 4$) με τη μέθοδο της εκθετικής παρεμβολής, βάσει της παρακάτω εξίσωσης:

$$l_{x+i} = l_x \times (l_{x+5} / l_x)^{[(x+i-x)/5]}$$

όπου x θεωρούμε την αρχική ηλικία της πενταετούς ηλικιακής ομάδας.

Η παραπάνω εξίσωση εφαρμόζεται για τις ηλικίες 0 έως 84 και είναι ταυτόσημη με το να πάρει κανείς τις εκτιμήσεις των πιθανοτήτων επιβίωσης του συνεπτυγμένου πίνακα ανά πενταετή διαστήματα ηλικιών και να τις υψώσει εις την 1/5. Στη συνέχεια εκτιμούμε τις υπόλοιπες βιομετρικές συναρτήσεις κατά έτος ηλικίας. Για τις ηλικίες 85+ χρησιμοποιήσαμε δύο διαφορετικές προσεγγίσεις: α) χρησιμοποιήσαμε τα αποτελέσματα που πήραμε με την μέθοδο της ομοιόμορφης κατανομής των θανάτων και β) κάναμε extrapolation βάσει της εκθετικής κατανομής, θεωρώντας ως τελική ηλικία του πίνακα επιβίωσης την ηλικία των 100 ετών.

Τα αποτελέσματα της πρώτης προσέγγισης για τις γυναίκες και τους άνδρες παρατίθενται παρακάτω.

1^{ος} τρόπος (τα l_x για τις ηλικίες 85+ βασίζονται στη μέθοδο της ομοιόμορφης κατανομής των θανάτων με τελική ηλικία τα 100 έτη)

x	$({}_5p_x)^{\frac{1}{5}}$	l_x	p_x	q_x	d_x	L_x	T_x	e_x	m_x
0	0,999844143	100.000,00	0,999844	0,000156	15,59	99.989,09	8.461.479,81	84,61	0,000156
1		99.984,41	0,999844	0,000156	15,58	99.975,06	8.361.490,72	83,63	0,000156
2		99.968,83	0,999844	0,000156	15,58	99.961,04	8.261.515,65	82,64	0,000156
3		99.953,25	0,999844	0,000156	15,58	99.945,46	8.161.554,61	81,65	0,000156
4		99.937,67	0,999844	0,000156	15,58	99.929,88	8.061.609,15	80,67	0,000156
5	0,999912557	99.922,10	0,999913	0,000087	8,74	99.917,73	7.961.679,27	79,68	0,000087
6		99.913,36	0,999913	0,000087	8,74	99.908,99	7.861.761,54	78,69	0,000087
7		99.904,62	0,999913	0,000087	8,74	99.900,25	7.761.852,55	77,69	0,000087
8		99.895,89	0,999913	0,000087	8,74	99.891,52	7.661.952,30	76,70	0,000087
9		99.887,15	0,999913	0,000087	8,73	99.882,78	7.562.060,78	75,71	0,000087
10	0,999915044	99.878,42	0,999915	0,000085	8,49	99.874,17	7.462.178,00	74,71	0,000085
11		99.869,93	0,999915	0,000085	8,48	99.865,69	7.362.303,82	73,72	0,000085
12		99.861,45	0,999915	0,000085	8,48	99.857,20	7.262.438,13	72,73	0,000085
13		99.852,96	0,999915	0,000085	8,48	99.848,72	7.162.580,93	71,73	0,000085
14		99.844,48	0,999915	0,000085	8,48	99.840,24	7.062.732,21	70,74	0,000085
15	0,999852542	99.836,00	0,999853	0,000147	14,72	99.828,64	6.962.891,97	69,74	0,000147
16		99.821,28	0,999853	0,000147	14,72	99.813,92	6.863.063,34	68,75	0,000147
17		99.806,56	0,999853	0,000147	14,72	99.799,20	6.763.249,42	67,76	0,000147
18		99.791,84	0,999853	0,000147	14,72	99.784,48	6.663.450,22	66,77	0,000147
19		99.777,12	0,999853	0,000147	14,71	99.769,77	6.563.665,74	65,78	0,000147
20	0,999809324	99.762,41	0,999809	0,000191	19,02	99.752,90	6.463.895,97	64,79	0,000191

21		99.743,39	0,999809	0,000191	19,02	99.733,88	6.364.143,08	63,81	0,000191
22		99.724,37	0,999809	0,000191	19,02	99.714,86	6.264.409,20	62,82	0,000191
23		99.705,35	0,999809	0,000191	19,01	99.695,85	6.164.694,33	61,83	0,000191
24		99.686,34	0,999809	0,000191	19,01	99.676,84	6.064.998,49	60,84	0,000191
25	0,999800455	99.667,34	0,9998	0,0002	19,89	99.657,39	5.965.321,65	59,85	0,000200
26		99.647,45	0,9998	0,0002	19,88	99.637,51	5.865.664,25	58,86	0,000200
27		99.627,56	0,9998	0,0002	19,88	99.617,62	5.766.026,75	57,88	0,000200
28		99.607,68	0,9998	0,0002	19,88	99.597,74	5.666.409,13	56,89	0,000200
29		99.587,81	0,9998	0,0002	19,87	99.577,87	5.566.811,38	55,90	0,000200
30	0,9997	99.567,93	0,999655	0,000345	34,40	99.550,73	5.467.233,51	54,91	0,000346
31		99.533,53	0,999655	0,000345	34,39	99.516,34	5.367.682,78	53,93	0,000346
32		99.499,15	0,999655	0,000345	34,38	99.481,96	5.268.166,44	52,95	0,000346
33		99.464,77	0,999655	0,000345	34,36	99.447,59	5.168.684,48	51,96	0,000346
34		99.430,41	0,999655	0,000345	34,35	99.413,23	5.069.236,89	50,98	0,000346
35	0,999531116	99.396,05	0,999531	0,000469	46,61	99.372,75	4.969.823,66	50,00	0,000469
36		99.349,45	0,999531	0,000469	46,58	99.326,16	4.870.450,91	49,02	0,000469
37		99.302,87	0,999531	0,000469	46,56	99.279,59	4.771.124,75	48,05	0,000469
38		99.256,30	0,999531	0,000469	46,54	99.233,03	4.671.845,16	47,07	0,000469
39		99.209,76	0,999531	0,000469	46,52	99.186,51	4.572.612,13	46,09	0,000469
40	0,999188682	99.163,25	0,999189	0,000811	80,45	99.123,02	4.473.425,62	45,11	0,000812
41		99.082,79	0,999189	0,000811	80,39	99.042,60	4.374.302,60	44,15	0,000812
42		99.002,41	0,999189	0,000811	80,32	98.962,25	4.275.260,00	43,18	0,000812
43		98.922,08	0,999189	0,000811	80,26	98.881,96	4.176.297,76	42,22	0,000812
44		98.841,83	0,999189	0,000811	80,19	98.801,73	4.077.415,80	41,25	0,000812
45	0,998717952	98.761,63	0,998718	0,001282	126,62	98.698,33	3.978.614,07	40,29	0,001283

46		98.635,02	0,998718	0,001282	126,45	98.571,79	3.879.915,74	39,34	0,001283
47		98.508,56	0,998718	0,001282	126,29	98.445,42	3.781.343,95	38,39	0,001283
48		98.382,27	0,998718	0,001282	126,13	98.319,20	3.682.898,54	37,43	0,001283
49		98.256,14	0,998718	0,001282	125,97	98.193,15	3.584.579,33	36,48	0,001283
50	0,997867876	98.130,17	0,997868	0,002132	209,23	98.025,56	3.486.386,18	35,53	0,002134
51		97.920,94	0,997868	0,002132	208,78	97.816,55	3.388.360,62	34,60	0,002134
52		97.712,16	0,997868	0,002132	208,33	97.608,00	3.290.544,07	33,68	0,002134
53		97.503,83	0,997868	0,002132	207,89	97.399,89	3.192.936,07	32,75	0,002134
54		97.295,94	0,997868	0,002132	207,45	97.192,22	3.095.536,19	31,82	0,002134
55	0,99671079	97.088,49	0,996711	0,003289	319,34	96.928,82	2.998.343,97	30,88	0,003295
56		96.769,15	0,996711	0,003289	318,29	96.610,00	2.901.415,15	29,98	0,003295
57		96.450,85	0,996711	0,003289	317,25	96.292,23	2.804.805,15	29,08	0,003295
58		96.133,61	0,996711	0,003289	316,20	95.975,51	2.708.512,92	28,17	0,003295
59		95.817,40	0,996711	0,003289	315,16	95.659,82	2.612.537,41	27,27	0,003295
60	0,995189599	95.502,24	0,99519	0,00481	459,40	95.272,54	2.516.877,59	26,35	0,004822
61		95.042,84	0,99519	0,00481	457,19	94.814,24	2.421.605,05	25,48	0,004822
62		94.585,64	0,99519	0,00481	454,99	94.358,14	2.326.790,81	24,60	0,004822
63		94.130,65	0,99519	0,00481	452,81	93.904,24	2.232.432,67	23,72	0,004822
64		93.677,84	0,99519	0,00481	450,63	93.452,53	2.138.528,42	22,83	0,004822
65	0,992479244	93.227,21	0,992479	0,007521	701,14	92.876,64	2.045.075,89	21,94	0,007549
66		92.526,07	0,992479	0,007521	695,87	92.178,14	1.952.199,25	21,10	0,007549
67		91.830,21	0,992479	0,007521	690,63	91.484,89	1.860.021,11	20,26	0,007549
68		91.139,58	0,992479	0,007521	685,44	90.796,86	1.768.536,22	19,40	0,007549
69		90.454,14	0,992479	0,007521	680,28	90.114,00	1.677.739,36	18,55	0,007549
70	0,987913173	89.773,85	0,987913	0,012087	1.085,08	89.231,31	1.587.625,37	17,68	0,012160

71		88.688,77	0,987913	0,012087	1.071,97	88.152,79	1.498.394,05	16,89	0,012160
72		87.616,81	0,987913	0,012087	1.059,01	87.087,30	1.410.241,26	16,10	0,012160
73		86.557,80	0,987913	0,012087	1.046,21	86.034,69	1.323.153,96	15,29	0,012160
74		85.511,59	0,987913	0,012087	1.033,56	84.994,81	1.237.119,27	14,47	0,012160
75	0,975588632	84.478,02	0,975589	0,024411	2.062,22	83.446,91	1.152.124,46	13,64	0,024713
76		82.415,80	0,975589	0,024411	2.011,88	81.409,86	1.068.677,55	12,97	0,024713
77		80.403,92	0,975589	0,024411	1.962,77	79.422,53	987.267,69	12,28	0,024713
78		78.441,15	0,975589	0,024411	1.914,86	77.483,72	907.845,16	11,57	0,024713
79		76.526,29	0,975589	0,024411	1.868,11	75.592,24	830.361,44	10,85	0,024713
80	0,947465895	74.658,18	0,947466	0,052534	3.922,10	72.697,13	754.769,20	10,11	0,053951
81		70.736,08	0,947466	0,052534	3.716,06	68.878,05	682.072,07	9,64	0,053951
82		67.020,02	0,947466	0,052534	3.520,84	65.259,61	613.194,02	9,15	0,053951
83		63.499,19	0,947466	0,052534	3.335,87	61.831,25	547.934,41	8,63	0,053951
84		60.163,31	0,947466	0,052534	3.160,63	58.583,00	486.103,16	8,08	0,053951
85		57.002,69	0,933333	0,066667	3.800,18	55.102,60	427.520,16	7,50	0,068966
86		53.202,51	0,928571	0,071429	3.800,18	51.302,42	372.417,56	7,00	0,074074
87		49.402,33	0,923077	0,076923	3.800,18	47.502,24	321.115,14	6,50	0,080000
88		45.602,15	0,916667	0,083333	3.800,18	43.702,06	273.612,90	6,00	0,086957
89		41.801,97	0,909091	0,090909	3.800,18	39.901,88	229.910,84	5,50	0,095238
90		38.001,79	0,9	0,1	3.800,18	36.101,70	190.008,96	5,00	0,105263
91		34.201,61	0,888889	0,111111	3.800,18	32.301,52	153.907,26	4,50	0,117647
92		30.401,43	0,875	0,125	3.800,18	28.501,34	121.605,73	4,00	0,133333
93		26.601,25	0,857143	0,142857	3.800,18	24.701,16	93.104,39	3,50	0,153846
94		22.801,08	0,833333	0,166667	3.800,18	20.900,99	68.403,23	3,00	0,181818
95		19.000,90	0,8	0,2	3.800,18	17.100,81	47.502,24	2,50	0,222222

96		15.200,72	0,75	0,25	3.800,18	13.300,63	30.401,43	2,00	0,285714
97		11.400,54	0,666667	0,333333	3.800,18	9.500,45	17.100,81	1,50	0,400000
98		7.600,36	0,5	0,5	3.800,18	5.700,27	7.600,36	1,00	0,666667
99		3.800,18	0	1	3.800,18	1.900,09	1.900,09	0,50	2,000000
100		0,00	0	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000000

Πίνακας 10: Πλήρης πίνακας επιβίωσης γυναικών (υπόθεση CFM)

x	$({}_5p_x)^{\frac{1}{5}}$	l_x	p_x	q_x	d_x	L_x	T_x	e_x	m_x
0		100.000,00	0,999811	0,000189	18,89	99.986,78	7.923.803,08	79,24	0,000189
1		99.981,11	0,999811	0,000189	18,88	99.969,78	7.823.816,30	78,25	0,000189
2	0,999811	99.962,23	0,999811	0,000189	18,88	99.952,79	7.723.846,52	77,27	0,000189
3		99.943,35	0,999811	0,000189	18,88	99.933,91	7.623.893,73	76,28	0,000189
4		99.924,48	0,999811	0,000189	18,87	99.915,04	7.523.959,81	75,30	0,000189
5		99.905,60	0,999904	0,000096	9,63	99.900,79	7.424.044,77	74,31	0,000096
6		99.895,98	0,999904	0,000096	9,63	99.891,16	7.324.143,98	73,32	0,000096
7		99.886,35	0,999904	0,000096	9,62	99.881,54	7.224.252,82	72,32	0,000096
8	0,999904	99.876,73	0,999904	0,000096	9,62	99.871,91	7.124.371,28	71,33	0,000096
9		99.867,10	0,999904	0,000096	9,62	99.862,29	7.024.499,37	70,34	0,000096
10		99.857,48	0,999890	0,000110	10,97	99.852,00	6.924.637,08	69,35	0,000110
11	0,999890	99.846,51	0,999890	0,000110	10,97	99.841,03	6.824.785,08	68,35	0,000110

12		99.835,55	0,999890	0,000110	10,96	99.830,06	6.724.944,05	67,36	0,000110
13		99.824,58	0,999890	0,000110	10,96	99.819,10	6.625.113,99	66,37	0,000110
14		99.813,62	0,999890	0,000110	10,96	99.808,14	6.525.294,89	65,37	0,000110
15		99.802,66	0,999631	0,000369	36,78	99.784,27	6.425.486,75	64,38	0,000369
16	0,999631	99.765,88	0,999631	0,000369	36,77	99.747,49	6.325.702,49	63,41	0,000369
17		99.729,11	0,999631	0,000369	36,75	99.710,73	6.225.954,99	62,43	0,000369
18		99.692,36	0,999631	0,000369	36,74	99.673,99	6.126.244,26	61,45	0,000369
19		99.655,62	0,999631	0,000369	36,73	99.637,26	6.026.570,27	60,47	0,000369
20	0,999389	99.618,89	0,999389	0,000611	60,91	99.588,44	5.926.933,02	59,50	0,000612
21		99.557,98	0,999389	0,000611	60,87	99.527,54	5.827.344,58	58,53	0,000612
22		99.497,11	0,999389	0,000611	60,84	99.466,69	5.727.817,04	57,57	0,000612
23		99.436,27	0,999389	0,000611	60,80	99.405,87	5.628.350,35	56,60	0,000612
24		99.375,47	0,999389	0,000611	60,76	99.345,09	5.528.944,47	55,64	0,000612
25	0,999289	99.314,71	0,999289	0,000711	70,60	99.279,41	5.429.599,38	54,67	0,000711
26		99.244,11	0,999289	0,000711	70,55	99.208,84	5.330.319,97	53,71	0,000711
27		99.173,56	0,999289	0,000711	70,50	99.138,31	5.231.111,13	52,75	0,000711
28		99.103,07	0,999289	0,000711	70,45	99.067,84	5.131.972,82	51,78	0,000711
29		99.032,62	0,999289	0,000711	70,40	98.997,42	5.032.904,98	50,82	0,000711
30	0,999152	98.962,22	0,999152	0,000848	83,95	98.920,25	4.933.907,56	49,86	0,000849
31		98.878,27	0,999152	0,000848	83,88	98.836,33	4.834.987,31	48,90	0,000849
32		98.794,39	0,999152	0,000848	83,81	98.752,49	4.736.150,98	47,94	0,000849
33		98.710,58	0,999152	0,000848	83,74	98.668,71	4.637.398,50	46,98	0,000849
34		98.626,85	0,999152	0,000848	83,67	98.585,01	4.538.729,78	46,02	0,000849
35	0,998936	98.543,18	0,998936	0,001064	104,84	98.490,76	4.440.144,77	45,06	0,001064
36		98.438,34	0,998936	0,001064	104,73	98.385,98	4.341.654,01	44,11	0,001064

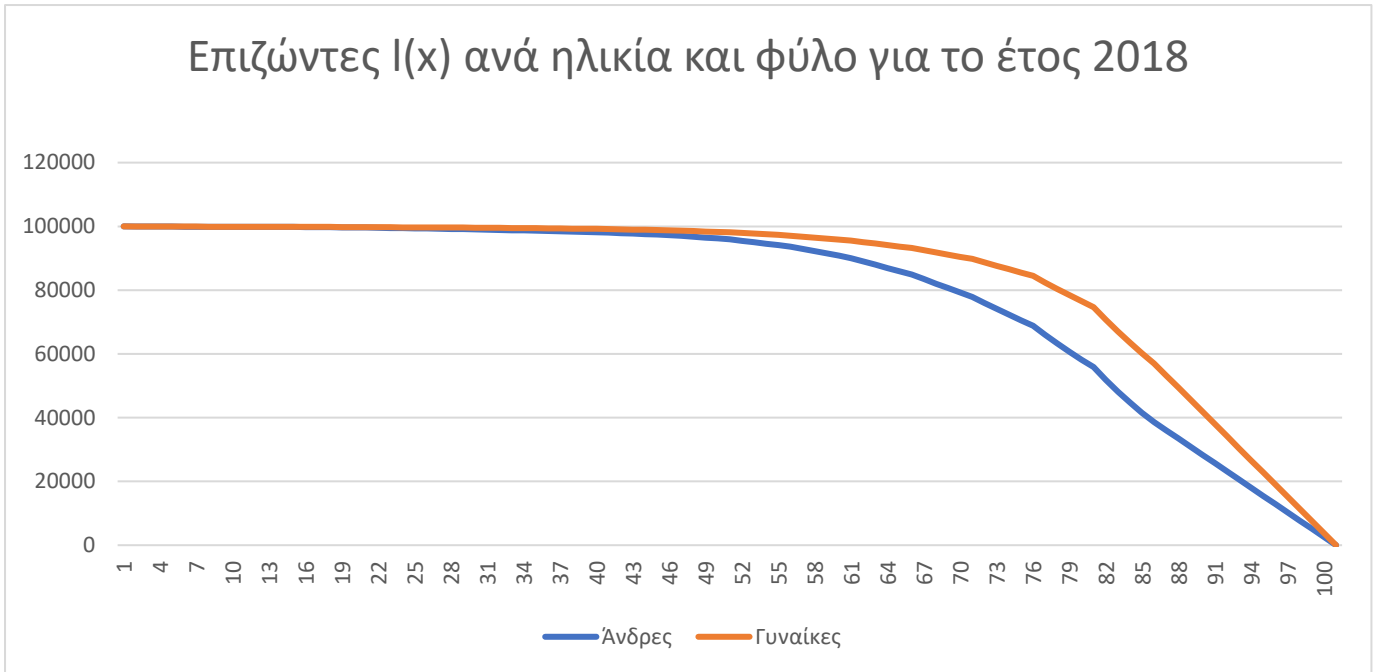
37		98.333,62	0,998936	0,001064	104,61	98.281,31	4.243.268,03	43,15	0,001064
38		98.229,00	0,998936	0,001064	104,50	98.176,75	4.144.986,72	42,20	0,001064
39		98.124,50	0,998936	0,001064	104,39	98.072,30	4.046.809,97	41,24	0,001064
40	0,998441	98.020,11	0,998441	0,001559	152,80	97.943,71	3.948.737,66	40,28	0,001560
41		97.867,31	0,998441	0,001559	152,56	97.791,03	3.850.793,95	39,35	0,001560
42		97.714,75	0,998441	0,001559	152,32	97.638,59	3.753.002,92	38,41	0,001560
43		97.562,43	0,998441	0,001559	152,09	97.486,38	3.655.364,34	37,47	0,001560
44		97.410,34	0,998441	0,001559	151,85	97.334,42	3.557.877,96	36,52	0,001560
45	0,997286	97.258,49	0,997286	0,002714	263,94	97.126,52	3.460.543,54	35,58	0,002717
46		96.994,56	0,997286	0,002714	263,22	96.862,95	3.363.417,02	34,68	0,002717
47		96.731,34	0,997286	0,002714	262,50	96.600,08	3.266.554,07	33,77	0,002717
48		96.468,83	0,997286	0,002714	261,79	96.337,94	3.169.953,99	32,86	0,002717
49		96.207,04	0,997286	0,002714	261,08	96.076,50	3.073.616,05	31,95	0,002717
50	0,995220	95.945,96	0,995220	0,004780	458,60	95.716,66	2.977.539,55	31,03	0,004791
51		95.487,36	0,995220	0,004780	456,41	95.259,15	2.881.822,89	30,18	0,004791
52		95.030,95	0,995220	0,004780	454,23	94.803,84	2.786.563,74	29,32	0,004791
53		94.576,72	0,995220	0,004780	452,06	94.350,70	2.691.759,90	28,46	0,004791
54		94.124,67	0,995220	0,004780	449,89	93.899,72	2.597.409,20	27,60	0,004791
55	0,992169	93.674,77	0,992169	0,007831	733,52	93.308,01	2.503.509,48	26,73	0,007861
56		92.941,25	0,992169	0,007831	727,78	92.577,36	2.410.201,47	25,93	0,007861
57		92.213,48	0,992169	0,007831	722,08	91.852,44	2.317.624,10	25,13	0,007861
58		91.491,40	0,992169	0,007831	716,42	91.133,19	2.225.771,67	24,33	0,007861
59		90.774,97	0,992169	0,007831	710,81	90.419,57	2.134.638,48	23,52	0,007861
60	0,988262	90.064,16	0,988262	0,011738	1.057,20	89.535,56	2.044.218,91	22,70	0,011808
61		89.006,96	0,988262	0,011738	1.044,79	88.484,56	1.954.683,36	21,96	0,011808

62		87.962,16	0,988262	0,011738	1.032,53	87.445,90	1.866.198,80	21,22	0,011808
63		86.929,64	0,988262	0,011738	1.020,41	86.419,43	1.778.752,90	20,46	0,011808
64		85.909,23	0,988262	0,011738	1.008,43	85.405,01	1.692.333,46	19,70	0,011808
65	0,982965	84.900,80	0,982965	0,017035	1.446,30	84.177,65	1.606.928,45	18,93	0,017182
66		83.454,50	0,982965	0,017035	1.421,66	82.743,66	1.522.750,81	18,25	0,017182
67		82.032,83	0,982965	0,017035	1.397,44	81.334,11	1.440.007,14	17,55	0,017182
68		80.635,39	0,982965	0,017035	1.373,64	79.948,57	1.358.673,03	16,85	0,017182
69		79.261,75	0,982965	0,017035	1.350,24	78.586,63	1.278.724,46	16,13	0,017182
70	0,975498	77.911,51	0,975498	0,024502	1.908,97	76.957,03	1.200.137,83	15,40	0,024806
71		76.002,54	0,975498	0,024502	1.862,19	75.071,45	1.123.180,81	14,78	0,024806
72		74.140,35	0,975498	0,024502	1.816,57	73.232,07	1.048.109,36	14,14	0,024806
73		72.323,78	0,975498	0,024502	1.772,06	71.437,75	974.877,29	13,48	0,024806
74		70.551,72	0,975498	0,024502	1.728,64	69.687,40	903.439,54	12,81	0,024806
75	0,959053	68.823,08	0,959053	0,040947	2.818,07	67.414,05	833.752,14	12,11	0,041802
76		66.005,01	0,959053	0,040947	2.702,68	64.653,67	766.338,09	11,61	0,041802
77		63.302,33	0,959053	0,040947	2.592,02	62.006,32	701.684,42	11,08	0,041802
78		60.710,32	0,959053	0,040947	2.485,88	59.467,37	639.678,09	10,54	0,041802
79		58.224,43	0,959053	0,040947	2.384,09	57.032,39	580.210,72	9,97	0,041802
80	0,928867	55.840,34	0,928867	0,071133	3.972,09	53.854,30	523.178,33	9,37	0,073756
81		51.868,25	0,928867	0,071133	3.689,54	50.023,48	469.324,04	9,05	0,073756
82		48.178,70	0,928867	0,071133	3.427,10	46.465,16	419.300,56	8,70	0,073756
83		44.751,61	0,928867	0,071133	3.183,32	43.159,95	372.835,40	8,33	0,073756
84		41.568,29	0,928867	0,071133	2.956,88	40.089,85	329.675,45	7,93	0,073756
85	0,691461	38.611,41	0,933333	0,066667	2.574,09	37.324,37	289.585,60	7,50	0,068966
86		36.037,32	0,928571	0,071429	2.574,09	34.750,27	252.261,23	7,00	0,074074

87		33.463,22	0,923077	0,076923	2.574,09	32.176,18	217.510,96	6,50	0,080000
88		30.889,13	0,916667	0,083333	2.574,09	29.602,08	185.334,78	6,00	0,086957
89		28.315,04	0,909091	0,090909	2.574,09	27.027,99	155.732,70	5,50	0,095238
90		25.740,94	0,900000	0,100000	2.574,09	24.453,90	128.704,71	5,00	0,105263
91		23.166,85	0,888889	0,111111	2.574,09	21.879,80	104.250,82	4,50	0,117647
92		20.592,75	0,875000	0,125000	2.574,09	19.305,71	82.371,02	4,00	0,133333
93		18.018,66	0,857143	0,142857	2.574,09	16.731,61	63.065,31	3,50	0,153846
94		15.444,57	0,833333	0,166667	2.574,09	14.157,52	46.333,70	3,00	0,181818
95		12.870,47	0,800000	0,200000	2.574,09	11.583,42	32.176,18	2,50	0,222222
96		10.296,38	0,750000	0,250000	2.574,09	9.009,33	20.592,75	2,00	0,285714
97		7.722,28	0,666667	0,333333	2.574,09	6.435,24	11.583,42	1,50	0,400000
98		5.148,19	0,500000	0,500000	2.574,09	3.861,14	5.148,19	1,00	0,666667
99		2.574,09	0,000000	1,000000	2.574,09	1.287,05	1.287,05	0,50	2,000000
100		0,00	0,000000	1,000000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000000

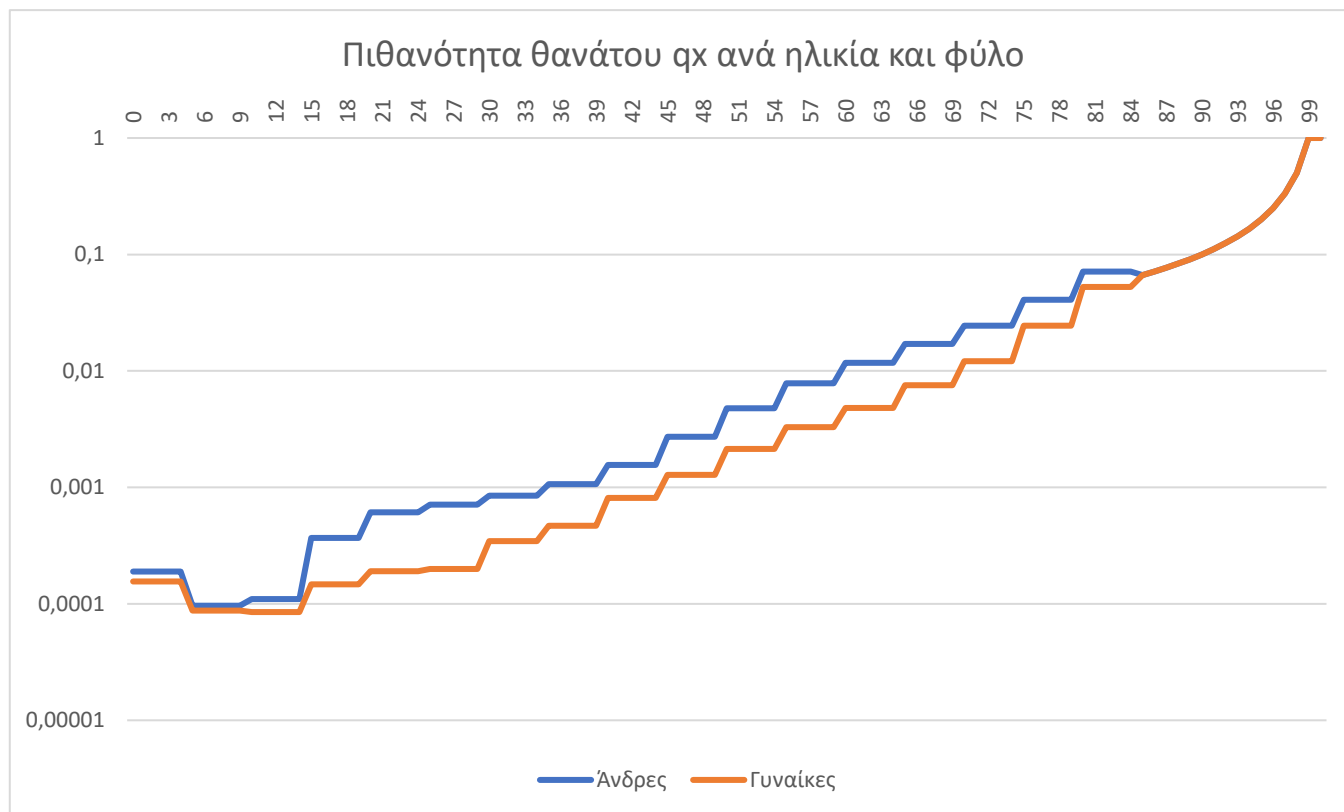
Πίνακας 11: Πλήρης πίνακας επιβίωσης ανδρών (υπόθεση CFM)

Στο παρακάτω γράφημα παρουσιάζονται διαγραμματικά οι επιζώντες l_x , ανά φύλο και ηλικιακή ομάδα για τα δεδομένα μας. Παρατηρούμε όπως και στην προηγούμενη μέθοδο ότι οι γυναίκες παρουσιάζουν μεγαλύτερο αριθμό επιζώντων στο σύνολό τους για το 2018 σε σχέση με τους άνδρες. Επίσης οι άνδρες επιζώντες, παρουσιάζουν μικρή μείωση σε αριθμό από την ηλικία 0 μέχρι τα 65 έτη και από την ηλικία των 65 ετών και μετά, παρατηρούμε μια απότομη μείωση, ενώ για τις γυναίκες εμφανίζεται απότομη μείωση από την ηλικία των 75 ετών.



Γράφημα 7: Επιζώντες $l(x)$ ανά ηλικία και φύλο για το έτος 2018 (υπόθεση CFM)

Όσον αφορά τις πιθανότητες θανάτου, βλέπουμε ότι προσομοιάζουν το γράφημα που είδαμε και στη μέθοδο της ομοιόμορφης κατανομής θανάτων.



Γράφημα 8: Πιθανότητα θανάτου q_x ανά ηλικία και φύλο (υπόθεση CFM)

Εξετάζοντας τα γραφήματα των πιθανοτήτων θανάτου για τις δύο μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε, βλέπουμε ότι προσεγγιστικά αυτές οι δύο μέθοδοι βγάζουν παρόμοια αποτελέσματα για τις ηλικίες 0-84. Θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε τι θα γινόταν αν για τις ηλικίες 85+ χρησιμοποιούσαμε παρεκβολή (*extrapolation*) βάσει της εκθετικής συνάρτησης. Ο τύπος που χρησιμοποιήσαμε για την εύρεση των επιζώντων για τις ηλικίες 85+ είναι ο εξής:

$$l_{x+n} = l_x \times (1 / l_x)^{[(x+n-x)/(\omega-x)]}$$

Όπου:

x: ηλικία (εδώ θεωρούμε σταθερά ως x τα 85 έτη και n=1, 2, ...)

ω = οριακή ηλικία (100 έτη)

Άρα, για παράδειγμα, για την ηλικία των 86 ετών θα έχουμε,

$$l_{86} = l_{85} \times (1 / l_{85})^{[(85+1-85)/(100-85)]}$$

Σημειώνουμε ότι τα l_x βασίζονται στην υπόθεση ότι για την τελική ηλικία των 100 ετών $l_{100} = 1$ και όχι 0.

Παρακάτω παραθέτουμε τα αποτελέσματα βάσει της μεθόδου της εκθετικής παρεκβολής για τις ηλικίες 85+:

x	l_x	p_x	q_x	d_x	L_x	T_x	e_x	m_x
0	100.000,00	0,999811	0,000189	18,89	99.990,56	7.691.308,14	76,91	0,000189
1	99.981,11	0,999811	0,000189	18,88	99.971,67	7.591.317,58	75,93	0,000189
2	99.962,23	0,999811	0,000189	18,88	99.952,79	7.491.345,91	74,94	0,000189
3	99.943,35	0,999811	0,000189	18,88	99.933,91	7.391.393,12	73,96	0,000189
4	99.924,48	0,999811	0,000189	18,87	99.915,04	7.291.459,21	72,97	0,000189
5	99.905,60	0,999904	0,000096	9,63	99.900,79	7.191.544,17	71,98	0,000096
6	99.895,98	0,999904	0,000096	9,63	99.891,16	7.091.643,38	70,99	0,000096
7	99.886,35	0,999904	0,000096	9,62	99.881,54	6.991.752,21	70,00	0,000096
8	99.876,73	0,999904	0,000096	9,62	99.871,91	6.891.870,68	69,00	0,000096
9	99.867,10	0,999904	0,000096	9,62	99.862,29	6.791.998,76	68,01	0,000096
10	99.857,48	0,999890	0,000110	10,97	99.852,00	6.692.136,47	67,02	0,000110
11	99.846,51	0,999890	0,000110	10,97	99.841,03	6.592.284,48	66,02	0,000110
12	99.835,55	0,999890	0,000110	10,96	99.830,06	6.492.443,45	65,03	0,000110
13	99.824,58	0,999890	0,000110	10,96	99.819,10	6.392.613,38	64,04	0,000110
14	99.813,62	0,999890	0,000110	10,96	99.808,14	6.292.794,28	63,05	0,000110
15	99.802,66	0,999631	0,000369	36,78	99.784,27	6.192.986,15	62,05	0,000369
16	99.765,88	0,999631	0,000369	36,77	99.747,49	6.093.201,88	61,08	0,000369
17	99.729,11	0,999631	0,000369	36,75	99.710,73	5.993.454,39	60,10	0,000369
18	99.692,36	0,999631	0,000369	36,74	99.673,99	5.893.743,65	59,12	0,000369
19	99.655,62	0,999631	0,000369	36,73	99.637,26	5.794.069,67	58,14	0,000369
20	99.618,89	0,999389	0,000611	60,91	99.588,44	5.694.432,41	57,16	0,000612
21	99.557,98	0,999389	0,000611	60,87	99.527,54	5.594.843,97	56,20	0,000612
22	99.497,11	0,999389	0,000611	60,84	99.466,69	5.495.316,43	55,23	0,000612
23	99.436,27	0,999389	0,000611	60,80	99.405,87	5.395.849,74	54,26	0,000612
24	99.375,47	0,999389	0,000611	60,76	99.345,09	5.296.443,87	53,30	0,000612
25	99.314,71	0,999289	0,000711	70,60	99.279,41	5.197.098,78	52,33	0,000711
26	99.244,11	0,999289	0,000711	70,55	99.208,84	5.097.819,37	51,37	0,000711
27	99.173,56	0,999289	0,000711	70,50	99.138,31	4.998.610,53	50,40	0,000711
28	99.103,07	0,999289	0,000711	70,45	99.067,84	4.899.472,21	49,44	0,000711
29	99.032,62	0,999289	0,000711	70,40	98.997,42	4.800.404,37	48,47	0,000711
30	98.962,22	0,999152	0,000848	83,95	98.920,25	4.701.406,95	47,51	0,000849
31	98.878,27	0,999152	0,000848	83,88	98.836,33	4.602.486,71	46,55	0,000849
32	98.794,39	0,999152	0,000848	83,81	98.752,49	4.503.650,38	45,59	0,000849
33	98.710,58	0,999152	0,000848	83,74	98.668,71	4.404.897,89	44,62	0,000849
34	98.626,85	0,999152	0,000848	83,67	98.585,01	4.306.229,18	43,66	0,000849
35	98.543,18	0,998936	0,001064	104,84	98.490,76	4.207.644,16	42,70	0,001064

36	98.438,34	0,998936	0,001064	104,73	98.385,98	4.109.153,40	41,74	0,001064
37	98.333,62	0,998936	0,001064	104,61	98.281,31	4.010.767,42	40,79	0,001064
38	98.229,00	0,998936	0,001064	104,50	98.176,75	3.912.486,11	39,83	0,001064
39	98.124,50	0,998936	0,001064	104,39	98.072,30	3.814.309,36	38,87	0,001064
40	98.020,11	0,998441	0,001559	152,80	97.943,71	3.716.237,06	37,91	0,001560
41	97.867,31	0,998441	0,001559	152,56	97.791,03	3.618.293,35	36,97	0,001560
42	97.714,75	0,998441	0,001559	152,32	97.638,59	3.520.502,32	36,03	0,001560
43	97.562,43	0,998441	0,001559	152,09	97.486,38	3.422.863,73	35,08	0,001560
44	97.410,34	0,998441	0,001559	151,85	97.334,42	3.325.377,35	34,14	0,001560
45	97.258,49	0,997286	0,002714	263,94	97.126,52	3.228.042,93	33,19	0,002717
46	96.994,56	0,997286	0,002714	263,22	96.862,95	3.130.916,41	32,28	0,002717
47	96.731,34	0,997286	0,002714	262,50	96.600,08	3.034.053,46	31,37	0,002717
48	96.468,83	0,997286	0,002714	261,79	96.337,94	2.937.453,38	30,45	0,002717
49	96.207,04	0,997286	0,002714	261,08	96.076,50	2.841.115,44	29,53	0,002717
50	95.945,96	0,995220	0,004780	458,60	95.716,66	2.745.038,95	28,61	0,004791
51	95.487,36	0,995220	0,004780	456,41	95.259,15	2.649.322,29	27,75	0,004791
52	95.030,95	0,995220	0,004780	454,23	94.803,84	2.554.063,13	26,88	0,004791
53	94.576,72	0,995220	0,004780	452,06	94.350,70	2.459.259,29	26,00	0,004791
54	94.124,67	0,995220	0,004780	449,89	93.899,72	2.364.908,60	25,13	0,004791
55	93.674,77	0,992169	0,007831	733,52	93.308,01	2.271.008,88	24,24	0,007861
56	92.941,25	0,992169	0,007831	727,78	92.577,36	2.177.700,86	23,43	0,007861
57	92.213,48	0,992169	0,007831	722,08	91.852,44	2.085.123,50	22,61	0,007861
58	91.491,40	0,992169	0,007831	716,42	91.133,19	1.993.271,06	21,79	0,007861
59	90.774,97	0,992169	0,007831	710,81	90.419,57	1.902.137,87	20,95	0,007861
60	90.064,16	0,988262	0,011738	1.057,20	89.535,56	1.811.718,31	20,12	0,011808
61	89.006,96	0,988262	0,011738	1.044,79	88.484,56	1.722.182,75	19,35	0,011808
62	87.962,16	0,988262	0,011738	1.032,53	87.445,90	1.633.698,19	18,57	0,011808
63	86.929,64	0,988262	0,011738	1.020,41	86.419,43	1.546.252,29	17,79	0,011808
64	85.909,23	0,988262	0,011738	1.008,43	85.405,01	1.459.832,86	16,99	0,011808
65	84.900,80	0,982965	0,017035	1.446,30	84.177,65	1.374.427,85	16,19	0,017182
66	83.454,50	0,982965	0,017035	1.421,66	82.743,66	1.290.250,20	15,46	0,017182
67	82.032,83	0,982965	0,017035	1.397,44	81.334,11	1.207.506,54	14,72	0,017182
68	80.635,39	0,982965	0,017035	1.373,64	79.948,57	1.126.172,42	13,97	0,017182
69	79.261,75	0,982965	0,017035	1.350,24	78.586,63	1.046.223,86	13,20	0,017182
70	77.911,51	0,975498	0,024502	1.908,97	76.957,03	967.637,23	12,42	0,024806
71	76.002,54	0,975498	0,024502	1.862,19	75.071,45	890.680,20	11,72	0,024806
72	74.140,35	0,975498	0,024502	1.816,57	73.232,07	815.608,75	11,00	0,024806
73	72.323,78	0,975498	0,024502	1.772,06	71.437,75	742.376,69	10,26	0,024806
74	70.551,72	0,975498	0,024502	1.728,64	69.687,40	670.938,94	9,51	0,024806
75	68.823,08	0,959053	0,040947	2.818,07	67.414,05	601.251,53	8,74	0,041802
76	66.005,01	0,959053	0,040947	2.702,68	64.653,67	533.837,48	8,09	0,041802
77	63.302,33	0,959053	0,040947	2.592,02	62.006,32	469.183,81	7,41	0,041802

78	60.710,32	0,959053	0,040947	2.485,88	59.467,37	407.177,49	6,71	0,041802
79	58.224,43	0,959053	0,040947	2.384,09	57.032,39	347.710,11	5,97	0,041802
80	55.840,34	0,928867	0,071133	3.972,09	53.854,30	290.677,72	5,21	0,073756
81	51.868,25	0,928867	0,071133	3.689,54	50.023,48	236.823,43	4,57	0,073756
82	48.178,70	0,928867	0,071133	3.427,10	46.465,16	186.799,95	3,88	0,073756
83	44.751,61	0,928867	0,071133	3.183,32	43.159,95	140.334,80	3,14	0,073756
84	41.568,29	0,928867	0,071133	2.956,88	40.089,85	97.174,85	2,34	0,073756
85	38.611,41	0,494560	0,505440	19.515,75	28.853,54	57.084,99	1,48	0,676373
86	19.095,66	0,494560	0,505440	9.651,71	14.269,80	28.231,46	1,48	0,676373
87	9.443,95	0,494560	0,505440	4.773,35	7.057,27	13.961,65	1,48	0,676373
88	4.670,60	0,494560	0,505440	2.360,71	3.490,24	6.904,38	1,48	0,676373
89	2.309,89	0,494560	0,505440	1.167,51	1.726,14	3.414,14	1,48	0,676373
90	1.142,38	0,494560	0,505440	577,40	853,68	1.688,00	1,48	0,676373
91	564,98	0,494560	0,505440	285,56	422,19	834,32	1,48	0,676373
92	279,41	0,494560	0,505440	141,23	208,80	412,13	1,47	0,676373
93	138,19	0,494560	0,505440	69,85	103,26	203,33	1,47	0,676373
94	68,34	0,494560	0,505440	34,54	51,07	100,06	1,46	0,676373
95	33,80	0,494560	0,505440	17,08	25,26	48,99	1,45	0,676373
96	16,72	0,494560	0,505440	8,45	12,49	23,74	1,42	0,676373
97	8,27	0,494560	0,505440	4,18	6,18	11,24	1,36	0,676373
98	4,09	0,494560	0,505440	2,07	3,06	5,07	1,24	0,676373
99	2,02	0,494560	0,505440	1,02	1,51	2,01	0,99	0,676373
100	1,00	0,000000	1,000000	1,00	0,50	0,50	0,50	2,000000

Πίνακας 12: Πλήρης πίνακας επιβίωσης ανδρών (extrapolation)

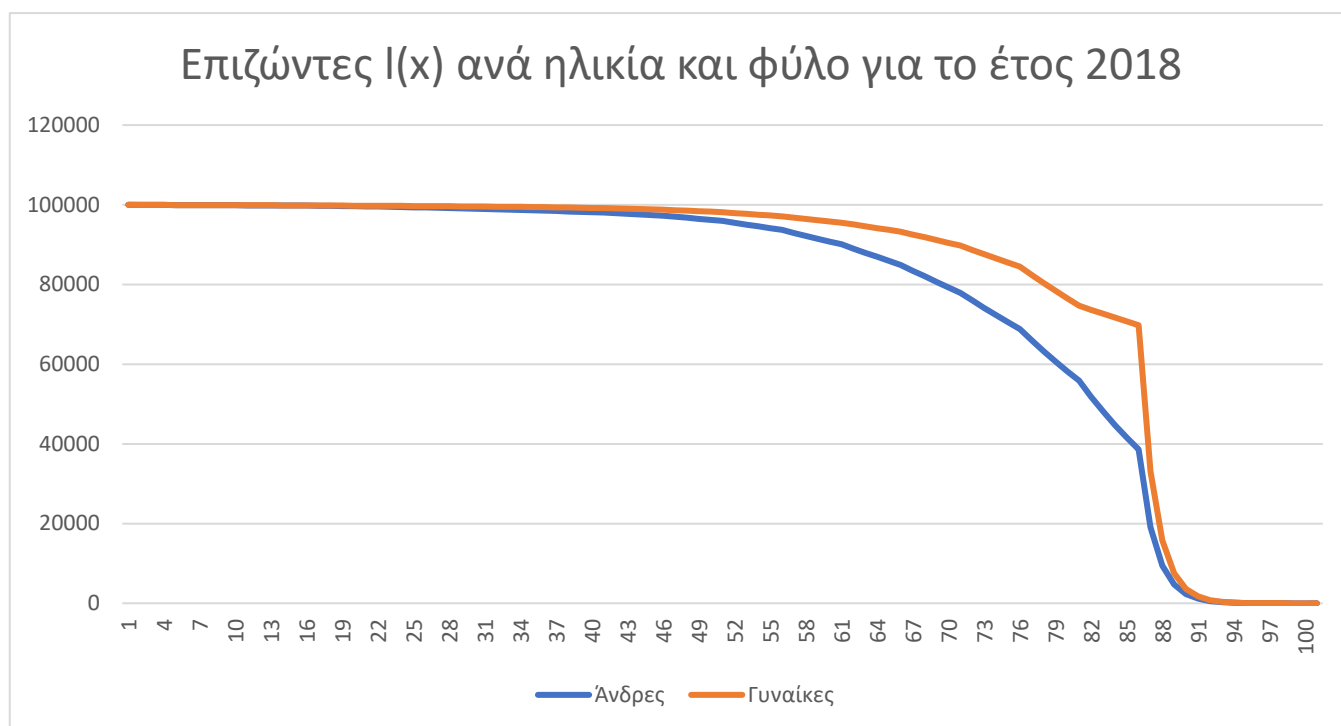
x	l_x	p_x	q_x	d_x	L_x	T_x	e_x	m_x
0	100.000,00	0,999844	0,000156	15,59	99.992,21	8.165.842,15	81,66	0,000156
1	99.984,41	0,999844	0,000156	15,58	99.976,62	8.065.849,94	80,67	0,000156
2	99.968,83	0,999844	0,000156	15,58	99.961,04	7.965.873,32	79,68	0,000156
3	99.953,25	0,999844	0,000156	15,58	99.945,46	7.865.912,28	78,70	0,000156
4	99.937,67	0,999844	0,000156	15,58	99.929,88	7.765.966,82	77,71	0,000156
5	99.922,10	0,999913	0,000087	8,74	99.917,73	7.666.036,93	76,72	0,000087
6	99.913,36	0,999913	0,000087	8,74	99.908,99	7.566.119,21	75,73	0,000087
7	99.904,62	0,999913	0,000087	8,74	99.900,25	7.466.210,22	74,73	0,000087
8	99.895,89	0,999913	0,000087	8,74	99.891,52	7.366.309,96	73,74	0,000087
9	99.887,15	0,999913	0,000087	8,73	99.882,78	7.266.418,44	72,75	0,000087
10	99.878,42	0,999915	0,000085	8,49	99.874,17	7.166.535,66	71,75	0,000085
11	99.869,93	0,999915	0,000085	8,48	99.865,69	7.066.661,49	70,76	0,000085
12	99.861,45	0,999915	0,000085	8,48	99.857,20	6.966.795,80	69,76	0,000085
13	99.852,96	0,999915	0,000085	8,48	99.848,72	6.866.938,59	68,77	0,000085
14	99.844,48	0,999915	0,000085	8,48	99.840,24	6.767.089,87	67,78	0,000085
15	99.836,00	0,999853	0,000147	14,72	99.828,64	6.667.249,64	66,78	0,000147
16	99.821,28	0,999853	0,000147	14,72	99.813,92	6.567.421,00	65,79	0,000147
17	99.806,56	0,999853	0,000147	14,72	99.799,20	6.467.607,08	64,80	0,000147
18	99.791,84	0,999853	0,000147	14,72	99.784,48	6.367.807,89	63,81	0,000147
19	99.777,12	0,999853	0,000147	14,71	99.769,77	6.268.023,41	62,82	0,000147
20	99.762,41	0,999809	0,000191	19,02	99.752,90	6.168.253,64	61,83	0,000191
21	99.743,39	0,999809	0,000191	19,02	99.733,88	6.068.500,74	60,84	0,000191
22	99.724,37	0,999809	0,000191	19,02	99.714,86	5.968.766,86	59,85	0,000191
23	99.705,35	0,999809	0,000191	19,01	99.695,85	5.869.052,00	58,86	0,000191
24	99.686,34	0,999809	0,000191	19,01	99.676,84	5.769.356,15	57,88	0,000191
25	99.667,34	0,9998	0,000200	19,89	99.657,39	5.669.679,31	56,89	0,000200
26	99.647,45	0,9998	0,000200	19,88	99.637,51	5.570.021,92	55,90	0,000200
27	99.627,56	0,9998	0,000200	19,88	99.617,62	5.470.384,41	54,91	0,000200
28	99.607,68	0,9998	0,000200	19,88	99.597,74	5.370.766,79	53,92	0,000200
29	99.587,81	0,9998	0,000200	19,87	99.577,87	5.271.169,05	52,93	0,000200
30	99.567,93	0,999655	0,000345	34,40	99.550,73	5.171.591,18	51,94	0,000346
31	99.533,53	0,999655	0,000345	34,39	99.516,34	5.072.040,44	50,96	0,000346
32	99.499,15	0,999655	0,000345	34,38	99.481,96	4.972.524,10	49,98	0,000346
33	99.464,77	0,999655	0,000345	34,36	99.447,59	4.873.042,14	48,99	0,000346
34	99.430,41	0,999655	0,000345	34,35	99.413,23	4.773.594,55	48,01	0,000346
35	99.396,05	0,999531	0,000469	46,61	99.372,75	4.674.181,32	47,03	0,000469
36	99.349,45	0,999531	0,000469	46,58	99.326,16	4.574.808,57	46,05	0,000469
37	99.302,87	0,999531	0,000469	46,56	99.279,59	4.475.482,41	45,07	0,000469
38	99.256,30	0,999531	0,000469	46,54	99.233,03	4.376.202,83	44,09	0,000469
39	99.209,76	0,999531	0,000469	46,52	99.186,51	4.276.969,79	43,11	0,000469
40	99.163,25	0,999189	0,000811	80,45	99.123,02	4.177.783,29	42,13	0,000812

41	99.082,79	0,999189	0,000811	80,39	99.042,60	4.078.660,27	41,16	0,000812
42	99.002,41	0,999189	0,000811	80,32	98.962,25	3.979.617,67	40,20	0,000812
43	98.922,08	0,999189	0,000811	80,26	98.881,96	3.880.655,42	39,23	0,000812
44	98.841,83	0,999189	0,000811	80,19	98.801,73	3.781.773,47	38,26	0,000812
45	98.761,63	0,998718	0,001282	126,62	98.698,33	3.682.971,73	37,29	0,001283
46	98.635,02	0,998718	0,001282	126,45	98.571,79	3.584.273,41	36,34	0,001283
47	98.508,56	0,998718	0,001282	126,29	98.445,42	3.485.701,62	35,38	0,001283
48	98.382,27	0,998718	0,001282	126,13	98.319,20	3.387.256,20	34,43	0,001283
49	98.256,14	0,998718	0,001282	125,97	98.193,15	3.288.937,00	33,47	0,001283
50	98.130,17	0,997868	0,002132	209,23	98.025,56	3.190.743,84	32,52	0,002134
51	97.920,94	0,997868	0,002132	208,78	97.816,55	3.092.718,29	31,58	0,002134
52	97.712,16	0,997868	0,002132	208,33	97.608,00	2.994.901,73	30,65	0,002134
53	97.503,83	0,997868	0,002132	207,89	97.399,89	2.897.293,73	29,71	0,002134
54	97.295,94	0,997868	0,002132	207,45	97.192,22	2.799.893,85	28,78	0,002134
55	97.088,49	0,996711	0,003289	319,34	96.928,82	2.702.701,63	27,84	0,003295
56	96.769,15	0,996711	0,003289	318,29	96.610,00	2.605.772,81	26,93	0,003295
57	96.450,85	0,996711	0,003289	317,25	96.292,23	2.509.162,81	26,01	0,003295
58	96.133,61	0,996711	0,003289	316,20	95.975,51	2.412.870,58	25,10	0,003295
59	95.817,40	0,996711	0,003289	315,16	95.659,82	2.316.895,07	24,18	0,003295
60	95.502,24	0,99519	0,004810	459,40	95.272,54	2.221.235,25	23,26	0,004822
61	95.042,84	0,99519	0,004810	457,19	94.814,24	2.125.962,71	22,37	0,004822
62	94.585,64	0,99519	0,004810	454,99	94.358,14	2.031.148,47	21,47	0,004822
63	94.130,65	0,99519	0,004810	452,81	93.904,24	1.936.790,33	20,58	0,004822
64	93.677,84	0,99519	0,004810	450,63	93.452,53	1.842.886,09	19,67	0,004822
65	93.227,21	0,992479	0,007521	701,14	92.876,64	1.749.433,56	18,77	0,007549
66	92.526,07	0,992479	0,007521	695,87	92.178,14	1.656.556,91	17,90	0,007549
67	91.830,21	0,992479	0,007521	690,63	91.484,89	1.564.378,77	17,04	0,007549
68	91.139,58	0,992479	0,007521	685,44	90.796,86	1.472.893,88	16,16	0,007549
69	90.454,14	0,992479	0,007521	680,28	90.114,00	1.382.097,03	15,28	0,007549
70	89.773,85	0,987913	0,012087	1.085,08	89.231,31	1.291.983,03	14,39	0,012160
71	88.688,77	0,987913	0,012087	1.071,97	88.152,79	1.202.751,72	13,56	0,012160
72	87.616,81	0,987913	0,012087	1.059,01	87.087,30	1.114.598,93	12,72	0,012160
73	86.557,80	0,987913	0,012087	1.046,21	86.034,69	1.027.511,63	11,87	0,012160
74	85.511,59	0,987913	0,012087	1.033,56	84.994,81	941.476,93	11,01	0,012160
75	84.478,02	0,975589	0,024411	2.062,22	83.446,91	856.482,13	10,14	0,024713
76	82.415,80	0,975589	0,024411	2.011,88	81.409,86	773.035,21	9,38	0,024713
77	80.403,92	0,975589	0,024411	1.962,77	79.422,53	691.625,35	8,60	0,024713
78	78.441,15	0,975589	0,024411	1.914,86	77.483,72	612.202,82	7,80	0,024713
79	76.526,29	0,975589	0,024411	1.868,11	75.592,24	534.719,10	6,99	0,024713
80	74.658,18	0,9866	0,013400	1.000,46	74.157,95	459.126,86	6,15	0,013491
81	73.657,73	0,9866	0,013400	987,05	73.164,20	384.968,91	5,23	0,013491
82	72.670,68	0,9866	0,013400	973,82	72.183,76	311.804,71	4,29	0,013491

83	71.696,85	0,9866	0,013400	960,77	71.216,47	239.620,95	3,34	0,013491
84	70.736,08	0,9866	0,013400	947,90	70.262,13	168.404,48	2,38	0,013491
85	69.788,18	0,475424	0,524576	36.609,20	51.483,58	98.142,35	1,41	0,711085
86	33.178,98	0,475424	0,524576	17.404,90	24.476,54	46.658,76	1,41	0,711085
87	15.774,09	0,475424	0,524576	8.274,71	11.636,74	22.182,23	1,41	0,711085
88	7.499,38	0,475424	0,524576	3.934,00	5.532,38	10.545,49	1,41	0,711085
89	3.565,39	0,475424	0,524576	1.870,32	2.630,23	5.013,10	1,41	0,711085
90	1.695,07	0,475424	0,524576	889,19	1.250,47	2.382,88	1,41	0,711085
91	805,88	0,475424	0,524576	422,74	594,51	1.132,40	1,41	0,711085
92	383,13	0,475424	0,524576	200,98	282,64	537,90	1,40	0,711085
93	182,15	0,475424	0,524576	95,55	134,37	255,25	1,40	0,711085
94	86,60	0,475424	0,524576	45,43	63,89	120,88	1,40	0,711085
95	41,17	0,475424	0,524576	21,60	30,37	56,99	1,38	0,711085
96	19,57	0,475424	0,524576	10,27	14,44	26,62	1,36	0,711085
97	9,31	0,475424	0,524576	4,88	6,87	12,18	1,31	0,711085
98	4,42	0,475424	0,524576	2,32	3,26	5,32	1,20	0,711085
99	2,10	0,475424	0,524576	1,10	1,55	2,05	0,98	0,711085
100	1,00	0	1,000000	1,00	0,50	0,50	0,50	2,000000

Πίνακας 13: Πλήρης πίνακας επιβίωσης γυναικών (extrapolation)

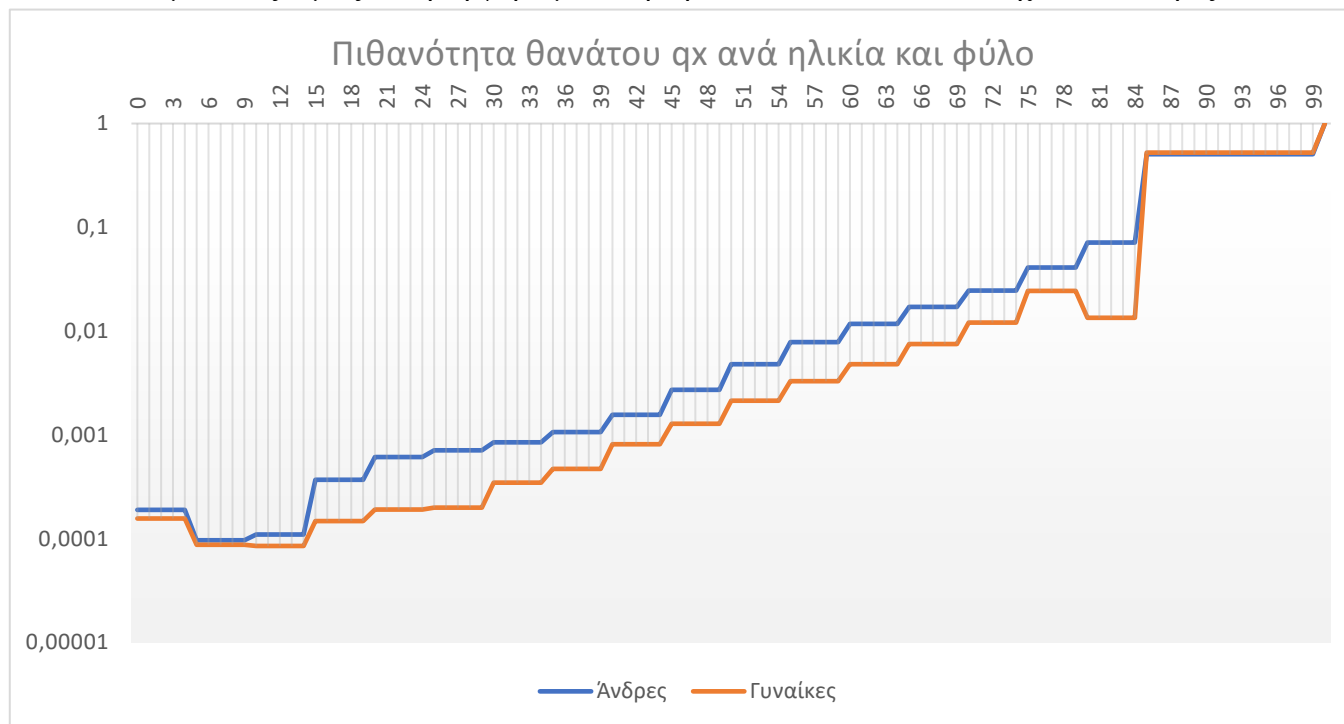
Κάποια αποτελέσματα παρατίθενται παρακάτω.



Γράφημα 9:Επιζώντες $l(x)$ ανά ηλικία και φύλο για το έτος 2018 (extrapolation)

Παρατηρούμε ότι οι γυναίκες παρουσιάζουν μεγαλύτερο αριθμό επιζώντων στο σύνολό τους για το 2018 σε σχέση με τους άνδρες. Επιπλέον, οι άνδρες επιζώντες, παρουσιάζουν σταδιακή μείωση σε αριθμό από την ηλικία 0 μέχρι τα 85 έτη και από την ηλικία των 85 ετών και μετά η μείωση τους είναι σχεδόν κατακόρυφη, ενώ, από την άλλη οι γυναίκες παρουσιάζουν σχεδόν κατακόρυφη μείωση από την ηλικία των 86+ αλλά και πάλι με πιο αργό ρυθμό σε σχέση με τους άνδρες.

Αναφορικά με τις πιθανότητες θανάτου βλέπουμε ότι και σε αυτή την περίπτωση είναι κλιμακωτές, όμως αυτή τη φορά μετά την ηλικία των 85 ετών είναι σχεδόν σταθερές.



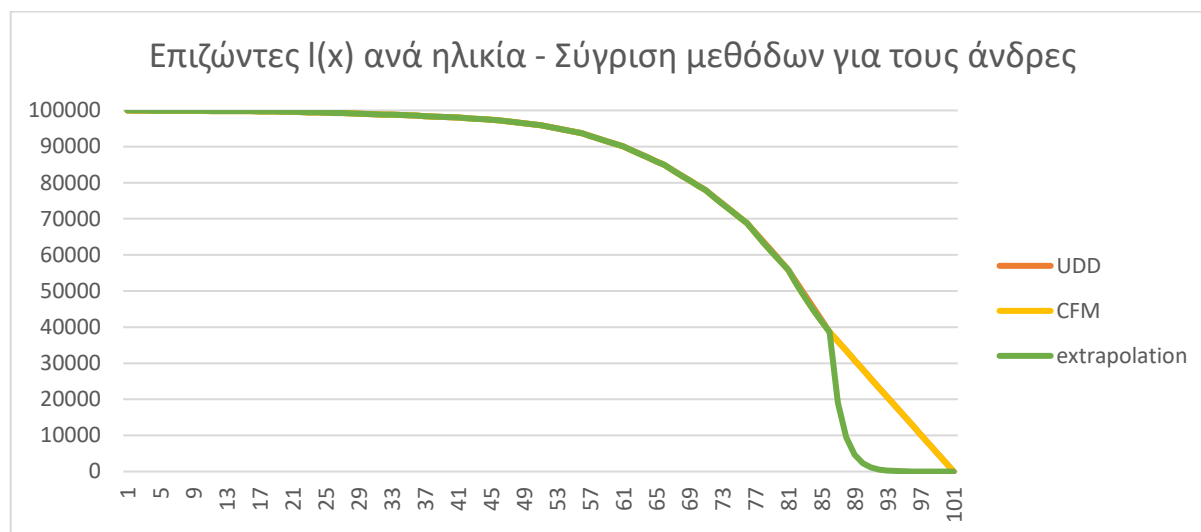
Γράφημα 10: Πιθανότητα θανάτου q_x ανά ηλικία και φύλο (extrapolation)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο : Σύγκριση μεθόδων – Προβληματισμοί και Συμπεράσματα

4.1 Συγκριτική θεώρηση των αποτελεσμάτων και προβληματισμοί

Το παρόν κεφάλαιο παρουσιάζει μέσω γραφημάτων τα αποτελέσματα από την κατασκευή πινάκων επιβίωσης με χρήση των μεθόδων της Ομοιόμορφης κατανομής των θανάτων και της Εκθετικής παρεμβολής με τις διαφορετικές προσεγγίσεις που χρησιμοποιήσαμε για τις ηλικίες 85+. Η σύγκριση των παραπάνω μεθόδων γίνεται κατά φύλο.

Για τους Άνδρες έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

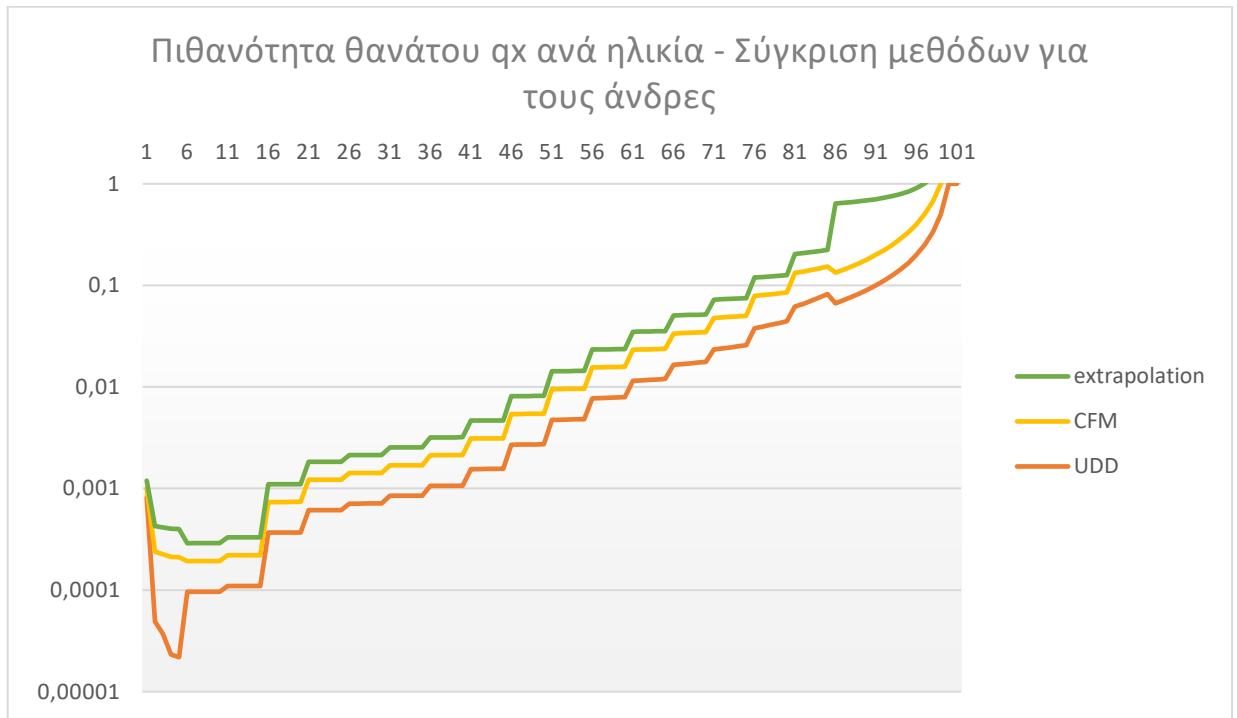


Γράφημα 11: Επιζώντες $l(x)$ ανά ηλικία - Σύγκριση μεθόδων (Άνδρες)

Στο παραπάνω γράφημα βλέπουμε τους επιζώντες l_x ανά ηλικία για κάθε μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε. Παρατηρούμε ότι οι μέθοδοι UDD και CFM μας δίνουν σχεδόν ίδια αποτελέσματα ενώ με την εκθετική παρεκβολή (extrapolation) μπορούμε να διακρίνουμε μια σημαντική διαφοροποίηση από την ηλικία των 85+.

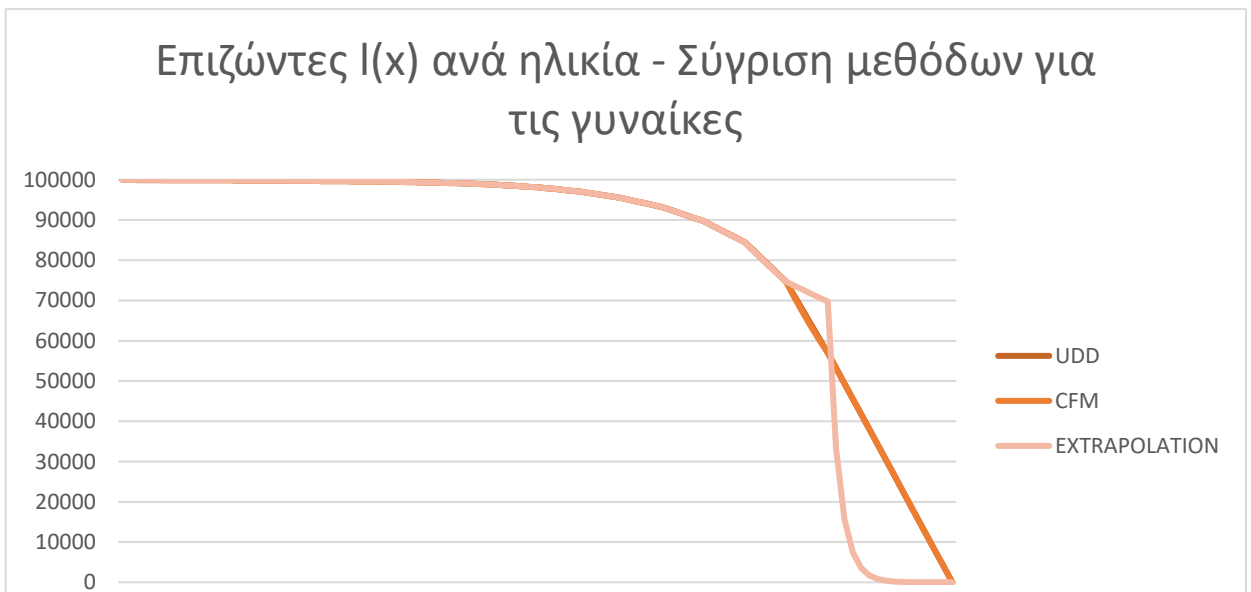
Παρακάτω βλέπουμε συγκριτικά τις πιθανότητες θανάτου q_x ανά ηλικία για κάθε μέθοδο. Παρατηρούμε ότι διαγραμματικά οι πιθανότητες συμπεριφέρονται παρόμοια για το διάστημα ηλικιών [15-85] ενώ για τις ηλικίες 0-14 και 85+ βλέπουμε μεγάλες

διαφορές. Η διαφορά που παρατηρούμε για τις ηλικίες 0-4 οφείλονται στο γεγονός ότι στη μέθοδο UDD έχουμε χρησιμοποιήσει τις εμπειρικές πιθανότητες θανάτου κατά ηλικία.



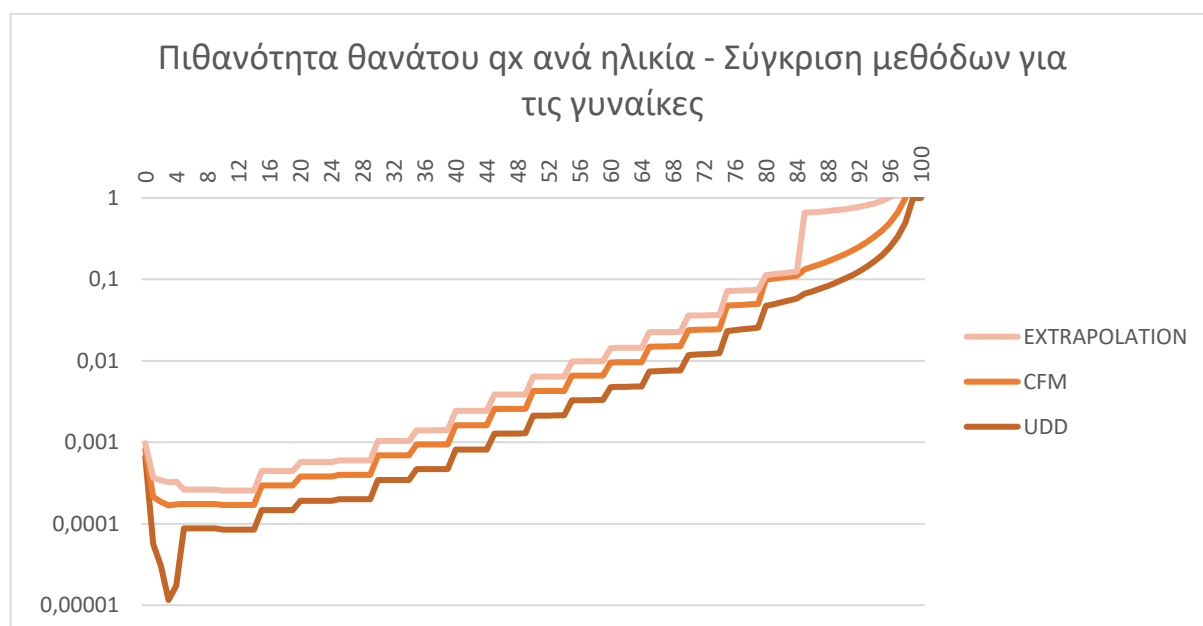
Γράφημα 12: Πιθανότητα θανάτου q_x ανά ηλικία - Σύγκριση μεθόδων (Άνδρες)

Για τις γυναίκες τα αποτελέσματα είναι παρόμοια με των ανδρών και παρατίθενται παρακάτω:



Γράφημα 13: Γράφημα 11: Επιζώντες $l(x)$ ανά ηλικία - Σύγκριση μεθόδων (Γυναίκες)

Βλέπουμε ότι, όπως και στους άνδρες, έτσι και στις γυναίκες οι σημαντικές διαφορές παρατηρούνται από την ηλικία των 85+.



Γράφημα 14: Γράφημα 12: Πιθανότητα θανάτου q_x ανά ηλικία - Σύγκριση μεθόδων (Γυναίκες)

Όσον αφορά τις πιθανότητες θανάτου βλέπουμε ότι και στις γυναίκες οι σημαντικές διαφορές μεταξύ των μεθόδων παρατηρούνται στις ηλικίες 0-12 και 85+. Στη βάση της λογαριθμικής μορφής της πιθανότητας θανάτου, γραμμική τάση παρατηρείται από την ηλικία των 85+ ετών και άνω και για τα δύο φύλα.

Τέλος θα είχε ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε τις εκτιμήσεις της προσδοκώμενης ζωής στις ηλικίες 0 και 85 για κάθε μια από τις μεθόδους και να τις συγκρίνουμε με τις εκτιμήσεις που πήραμε με τον συνεπτυγμένο πίνακα επιβίωσης.

Μέθοδος	Άνδρες		Γυναίκες	
	e_0	e_{85}	e_0	e_{85}
Συνεπτυγμένος πίνακας	79,08	6,97	84,19	6,71
UDD	79,28	7,50	84,64	7,50
CFM	79,24	7,50	84,61	7,50
CFM(extrapolation)	76,91	1,48	81,66	1,41

Πίνακας 13: Σύγκριση των εκτιμήσεων της προσδοκώμενης ζωής για κάθε μέθοδο

Εκ πρώτης όψεως θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι μέθοδοι UDD και ο συνδυασμός της εκθετικής παρεμβολής με την UDD για ηλικίες 85 και άνω, δίνουν πολύ παρόμοια αποτελέσματα, τα οποία προσομοιάζουν σε μεγάλο βαθμό αυτά του συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης. Για τις ηλικίες 85+ η υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής των θανάτων δίνει ελαφρώς υψηλότερη προσδοκώμενη ζωή σε σχέση με τον συνεπτυγμένο πίνακα επιβίωσης. Η μέθοδος της σταθερής έντασης θνησιμότητας που συνδυάζει εκθετικό extrapolation για τις ηλικίες 85+ δίνει σημαντικά χαμηλότερη εκτίμηση της προσδοκώμενης ζωής στην γέννηση και στην ηλικία των 85 ετών. Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μέθοδος της εκθετικής παρεκβολής για τις ηλικίες 85 και άνω θα πρέπει να βασίζεται σε προσεκτικά διατυπωμένες υποθέσεις σχετικά με τη τελική ηλικία του πλήρη πίνακα επιβίωσης, διαφορετικά δίνει αναξιόπιστα αποτελέσματα.

Βάσει της παρατήρησης αυτής προχωράμε στην περαιτέρω διερεύνηση της επίδρασης διαφορετικών υποθέσεων σε σχέση με την τελική ηλικία του πίνακα επιβίωσης στην προσδοκώμενη ζωή, με χρήση της μεθόδου της εκθετικής παρεκβολής για τις ηλικίες 85+. Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι η μέγιστη ηλικία ω είναι τα 115 έτη παρατηρούμε ότι, ακόμα κι αν η προσδοκώμενη ζωή στη γέννηση δεν μεταβάλλεται ιδιαίτερα και παραμένει αρκετά χαμηλότερη σε σχέση με τον συνεπτυγμένο πίνακα επιβίωσης (κατά 1,5 έτη για τους άνδρες και 1,7 έτη για τις γυναίκες), ο τρόπος με τον οποίο μειώνεται ο πληθυσμός στις ηλικίες 85+ είναι πιο ομαλός και, κατά κάποιον τρόπο, πιο ρεαλιστικός: Τα αποτελέσματα αυτής της υπόθεσης παρατίθενται για άνδρες και γυναίκες παρακάτω:

x	l_x	p_x	q_x	d_x	L_x	T_x	e_x	m_x
0	100.000,00	0,999811	0,000189	18,89	99.990,56	7.745.029,16	77,45	0,000189
1	99.981,11	0,999811	0,000189	18,88	99.971,67	7.645.038,61	76,46	0,000189
2	99.962,23	0,999811	0,000189	18,88	99.952,79	7.545.066,94	75,48	0,000189
...
51	95.487,36	0,995220	0,004780	456,41	95.259,15	2.703.043,31	28,31	0,004791
52	95.030,95	0,995220	0,004780	454,23	94.803,84	2.607.784,16	27,44	0,004791
53	94.576,72	0,995220	0,004780	452,06	94.350,70	2.512.980,32	26,57	0,004791
54	94.124,67	0,995220	0,004780	449,89	93.899,72	2.418.629,62	25,70	0,004791
55	93.674,77	0,992169	0,007831	733,52	93.308,01	2.324.729,90	24,82	0,007861
...
97	564,98	0,703250	0,296750	167,66	481,15	1.619,02	2,87	0,348452
98	397,32	0,703250	0,296750	117,90	338,37	1.137,87	2,86	0,348452
99	279,41	0,703250	0,296750	82,92	237,96	799,50	2,86	0,348452
100	196,50	0,703250	0,296750	58,31	167,34	561,55	2,86	0,348452
101	138,19	0,703250	0,296750	41,01	117,68	394,20	2,85	0,348452
102	97,18	0,703250	0,296750	28,84	82,76	276,52	2,85	0,348452
103	68,34	0,703250	0,296750	20,28	58,20	193,76	2,84	0,348452
104	48,06	0,703250	0,296750	14,26	40,93	135,56	2,82	0,348452
105	33,80	0,703250	0,296750	10,03	28,78	94,63	2,80	0,348452
106	23,77	0,703250	0,296750	7,05	20,24	65,84	2,77	0,348452
107	16,72	0,703250	0,296750	4,96	14,24	45,60	2,73	0,348452
108	11,76	0,703250	0,296750	3,49	10,01	31,37	2,67	0,348452
109	8,27	0,703250	0,296750	2,45	7,04	21,35	2,58	0,348452
110	5,81	0,703250	0,296750	1,73	4,95	14,31	2,46	0,348452
111	4,09	0,703250	0,296750	1,21	3,48	9,36	2,29	0,348452
112	2,88	0,703250	0,296750	0,85	2,45	5,88	2,05	0,348452
113	2,02	0,703250	0,296750	0,60	1,72	3,43	1,70	0,348452
114	1,42	0,703250	0,296750	0,42	1,21	1,71	1,20	0,348452
115	1,00	0,000000	1,000000	1,00	0,50	0,50	0,50	2,000000

Πίνακας 14: Πλήρης πίνακας επιβίωσης ανδρών ($\omega=115$)

x	l_x	p_x	q_x	d_x	L_x	T_x	e_x	m_x
0	100.000,00	0,999844	0,000156	15,59	99.992,21	8.257.571,42	82,58	0,000156
1	99.984,41	0,999844	0,000156	15,58	99.976,62	8.157.579,21	81,59	0,000156
2	99.968,83	0,999844	0,000156	15,58	99.961,04	8.057.602,59	80,60	0,000156
...
51	97.920,94	0,997868	0,002132	208,78	97.816,55	3.184.447,56	32,52	0,002134
52	97.712,16	0,997868	0,002132	208,33	97.608,00	3.086.631,00	31,59	0,002134
53	97.503,83	0,997868	0,002132	207,89	97.399,89	2.989.023,01	30,66	0,002134
54	97.295,94	0,997868	0,002132	207,45	97.192,22	2.891.623,12	29,72	0,002134
55	97.088,49	0,996711	0,003289	319,34	96.928,82	2.794.430,91	28,78	0,003295
...
97	805,88	0,68951	0,310490	250,22	680,77	2.190,34	2,72	0,367550
98	555,66	0,68951	0,310490	172,53	469,40	1.509,57	2,72	0,367550
99	383,13	0,68951	0,310490	118,96	323,65	1.040,18	2,71	0,367550
100	264,17	0,68951	0,310490	82,02	223,16	716,52	2,71	0,367550
101	182,15	0,68951	0,310490	56,56	153,87	493,36	2,71	0,367550
102	125,59	0,68951	0,310490	39,00	106,10	339,49	2,70	0,367550
103	86,60	0,68951	0,310490	26,89	73,15	233,39	2,70	0,367550
104	59,71	0,68951	0,310490	18,54	50,44	160,24	2,68	0,367550
105	41,17	0,68951	0,310490	12,78	34,78	109,79	2,67	0,367550
106	28,39	0,68951	0,310490	8,81	23,98	75,01	2,64	0,367550
107	19,57	0,68951	0,310490	6,08	16,54	51,03	2,61	0,367550
108	13,50	0,68951	0,310490	4,19	11,40	34,50	2,56	0,367550
109	9,31	0,68951	0,310490	2,89	7,86	23,10	2,48	0,367550
110	6,42	0,68951	0,310490	1,99	5,42	15,24	2,37	0,367550
111	4,42	0,68951	0,310490	1,37	3,74	9,82	2,22	0,367550
112	3,05	0,68951	0,310490	0,95	2,58	6,08	1,99	0,367550
113	2,10	0,68951	0,310490	0,65	1,78	3,50	1,66	0,367550
114	1,45	0,68951	0,310490	0,45	1,23	1,73	1,19	0,367550
115	1,00	0	1,000000	1,00	0,50	0,50	0,50	2,000000

Πίνακας 15: Πλήρης πίνακας επιβίωσης γυναικών ($\omega=115$)

4.2 Σύνοψη και συμπεράσματα

Συνοψίζοντας, σκοπός αυτής της εργασίας ήταν η αναγωγή ενός συνεπτυγμένου πίνακα επιβίωσης του πληθυσμού της Ελλάδας για το έτος 2018 σε πλήρη ανά φύλο και ανά ηλικιακή ομάδα με τη χρήση διαφορετικών μεθόδων. Οι μέθοδοι που

χρησιμοποιήθηκαν βασίζονταν στην υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής των θανάτων και στην εκθετική παρεμβολή με κάποιες παραλλαγές.

Τα βασικά συμπεράσματα που προέκυψαν από αυτή την ανάλυση είναι τα παρακάτω:

- Η υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής των θανάτων φαίνεται να δίνει αρκετά αξιόπιστα αποτελέσματα παρότι αυτή η υπόθεση δεν ισχύει αυστηρά στις μεγαλύτερες ηλικίες. Πράγματι, η τιμή της προσδοκώμενης ζωής στην ηλικία των 85 ετών είναι λίγο υψηλότερη, κατά 0,5 έτη για τους άνδρες και κατά 0,8 έτη για τις γυναίκες, σε σύγκριση με τον συνεπτυγμένο πίνακα επιβίωσης.
- Η εκτίμηση των βιομετρικών συναρτήσεων με την μέθοδο της σταθερής έντασης θνησιμότητας παρουσιάζει δυσκολίες εξαιτίας της φύσης της κατανομής για τις ηλικίες άνω των 85 ετών, και αυτό είναι κάτι που μας οδηγεί σε αβεβαιότητα σε σχέση με το πόσο κατάλληλη είναι τελικά αυτή η μέθοδος για να εκτιμήσουμε τα ζητούμενα ποσοστά θνησιμότητας. Σε αυτή την περίπτωση ίσως θα ήταν εύλογο να «πειραματιστούμε» και να βρούμε τη «χρυσή τομή» ώστε να έχουμε πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα. Συμπερασματικά, η μέθοδος της εκθετικής παρεμβολής πρέπει να εφαρμόζεται με προσοχή γιατί επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από την υπόθεση σχετικά με την τελική ηλικία του πίνακα επιβίωσης.
- Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι και ο συνεπτυγμένος πίνακας επιβίωσης, δεδομένου της έλλειψης στοιχείων για την εκτίμηση μέτρων θνησιμότητας στα άτομα ηλικίας 85 και άνω, στερείται απόλυτης ακρίβειας.
- Η ύπαρξη στοιχείων σχετικά με τον αριθμό των θανάτων κατά έτος ηλικίας, ιδιαίτερα για ηλικίες άνω των 85, θα επέτρεπε την σύγκριση των αποτελεσμάτων των μεθόδων αυτών με εμπειρικά στοιχεία και την εξαγωγή αξιόπιστων συμπερασμάτων.

Εξαιτίας των παραπάνω, καταλαβαίνουμε ότι η μελέτη και εκτίμηση της θνησιμότητας βασιζόμενοι σε διαφορετικές μεθόδους είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα και σημαντική. Επιπλέον, εξίσου ενδιαφέρον θα είχε και η εκτίμηση πινάκων επιβίωσης

χρησιμοποιώντας άλλες πιο σύνθετες μεθόδους, όπως η μη-παραμετρική μέθοδος Kaplan-Meier.

Βιβλιογραφία

Ελληνική

Αντζουλάκος Δ. (2017). Αναλογιστικά Μοντέλα Επιβίωσης. Σημειώσεις Παραδόσεων Μαθήματος του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης στο Πανεπιστήμιο Πειραιά.

Βερροπούλου Γεωργία. (2021). Σημειώσεις στο μάθημα : Αναλογιστικά πρότυπα επιβίωσης, Πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών : Αναλογιστική επιστήμη και Διαχείριση κινδύνων.

Ζυμπίδης Α. (2009). Αναλογιστική Στατιστική: Κατασκευή Πινάκων Θνησιμότητας. Αθήνα. Εκδόσεις Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Ηλιόπουλος Γ. (2006). Βασικές Μέθοδοι Εκτίμησης Παραμέτρων με σημείο και με διάστημα. Πειραιάς. Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.

Κακλαμάνη, Σ., & Κοτσυφάκης, Γ. (2009). Η θνησιμότητα στην Ελλάδα (1960- 2001).

Καφφές Γ.Δ. (1991). Μαθήματα Ανάλυσης Παλινδρόμησης. Πειραιάς. Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.

Κοτζαμάνης Β., Ανδρουλάκη Ελευθερία (1999), *Δημογραφία* Διδακτικές Σημειώσεις Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, Βόλος

Παπαδάκης Μ. και Τσίμπος Κ. (2003). Δημογραφική Ανάλυση, Αρχές, Μέθοδοι, Υποδείγματα, εκδόσεις Σταμούλης.

Παπαδάκης Μ., Τσίμπος Κ. (1993), *Περιφερειακοί Πίνακες επιβίωσης του Ελληνικού πληθυσμού*, Αθήνα, εκδ. Βήτα

Ξενόγλωσση

- Atkinson D.B., Experience Study Calculations, Society Of Actuaries, 2016
- Baili P., Micheli A., Montanari A. & Capocaccia R. (2005) Comparison of Four Methods for Estimating Complete Life Tables from Abridged Life Tables Using Mortality Data Supplied to EURO CARE-3, Mathematical Population Studies
- Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J., (1997). Actuarial Mathematics, 2nd Edition. Society of Actuaries, Schaumburg, IL.
- Brass, W., Coale, A. J., 1968, Methods of Analysis and Estimation in the Demography of Tropical Africa, Edited by W. Brass et al. Princeton University Press, Princeton.
- Brezinski, C., & Zaglia, M. R. (2013). *Extrapolation methods: theory and practice*. Elsevier.
- European Demographic Observatory 6/2002: Methodology for the calculation of Eurostat's demographic indicators.
- Hsieh, J.J. (1991). A general theory of life table construction and a precise life table method, Biometrical Journal, 33(2), 143-162
- Hsieh, J.J. (1991). Construction of Expanded Continuous Life Tables - A Generalization of Abridged and Complete Life Tables, Mathematical Biosciences, 103, 287-302.
- Keyfitz, N. (1966b). "A unified Approach to Interpolation and Graduation", Demography, 3(2): 528-536
- Keyfitz, N. (1968). Introduction to the Mathematics of Population, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.
- Kostaki, A., and Panousis V. 2001. Expanding an abridged life table. Demographic Research , 5, 1-22.
- London, D., (1997). Survival Models and their Estimation, 3rd Edition. ACTEX Publications, Winsted, CT.
- Sidi, A. (2003). *Practical extrapolation methods: Theory and applications* (Vol. 10). Cambridge university press.

Spiegelman, M. (1968). *Introduction to Demography*, Rev. ed., Massachusetts: Harvard University Press.

Wunsch, G. (2002). Introduction. Wunsch, G., Mouchart, M., & Duchene, J. (Eds.), *The life table. Modeling survival and death* (σσ. 1-12). Netherlands: Springer.