Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΣΤΗΝ **ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗΣ ΜΕΣΩ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕΤΡΩΝ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Βασίλειος Α. Ζαχαριουδάκης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου*

Πειραιάς

Σεπτέμβριος 2022

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN

ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

STRATEGIES FOR OPTIMAL REINSURANCE RETENTIONS UNDER RUIN – RELATED OPTIMIZATION CRITERIA

By

Vasileios A. Zacharioudakis

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

September 2022

Η παρούσα διπλωματική εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη Γ.Σ.Ε.Σ. του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν …….. συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τριμελής επιτροπή:

Αναπληρωτής Καθηγητής, Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος (Επιβλέπων)

Αναπληρωτής Καθηγητής, Πλάτων Τήνιος

Αναπληρωτής Καθηγητής, Ψαρράκος Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

Ευχαριστίες

Έπειτα από την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη, για την πολύτιμη βοήθεια του, τις συμβουλές καθώς και την σωστή καθοδήγηση και καθ’ όλη την διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Επιπροσθέτως θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ. Πλάτων Τήνιο καικ.Ψαρράκο Γεώργιο για τη συμμετοχή τους στην επιτροπή.

Περίληψη

Ένα σημαντικό τμήμα στο οποίο επικεντρώνεται η θεωρία κινδύνου είναι η θεωρία χρεοκοπίας καθώς και στο «πρόβλημα» της χρεοκοπίας όταν υπάρχει αντασφάλιση δηλαδή η διαδικασία κατά την οποία η ασφαλιστική εταιρεία εκχωρεί ένα μέρος του κινδύνου σε μια άλλη ασφαλιστική εταιρεία, η οποία ονομάζεται αντασφαλίστρια.

Στη τρέχουσα εργασία αποτυπώνεται η θεωρία χρεοκοπίας καθώς επίσης και ορισμένα μέτρα, όπως για παράδειγμα ο χρόνος έως την χρεοκοπία, ο συντελεστής προσαρμογής. Επιπλέον αναλύονται οι κατηγορίες και τα είδη αντασφάλισης, παρουσιάζοντας παράλληλα μεθόδους βελτιστοποίησης, κυρίως της αντασφάλισης Quota-Shareκαι Stop-Loss, έχοντας πάντα ως γνώμονα το συμφέρον τόσου του εκχωρητή όσο και του αντασφαλιστή. Τέλος γίνεται αναφορά στη εύρεση του βέλτιστου ορίου κράτησης μέσω της προσθήκης των προμηθείων και εξόδων από τον εκχωρητή.

Abstract

An important part on which risk theory focuses is ruin theory and the "problem" of ruin when there is reinsurance, i. e. the process whereby the insurance company cedes part of the risk to another insurance company, called the reinsurer.

In the current paper the ruin theory is reflected as well as some risk measures, for example the time to default, the adjustment factor. In addition, the categories and types of reinsurance are analyzed, presenting at the same time optimization methods, mainly Quota-Share and Stop-Loss reinsurance, always keeping in mind the interests of both the ceding company and the reinsurer. Finally, reference is made to finding the optimal retention through the addition of commissions and expenses by the ceding.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή στην Ασφάλιση και Αντασφάλιση 1

1.1 Ασφάλιση 1

1.2 Αντασφάλιση 1

1.3 Κατηγορίες και είδη αντασφάλισης 2

1.3.1 Η αναλογική αντασφάλιση (Proportional) 4

1.3.2 Μη αναλογική αντασφάλιση (NonProportional) 7

Κεφάλαιο 2 Θεωρία κινδύνου και Χρεοκοπία 12

2.1 Το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου 12

2.1.1 Το συλλογικό μοντέλο με αντασφάλιση 15

2.2 Θεωρία Χρεοκοπίας 16

2.2.1 Στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος 16

2.2.2 Πιθανότητα χρεοκοπίας 19

2.2.3 Η συνάρτηση Gerber-Shiu 27

Κεφάλαιο 3 Βέλτιστες κρατήσεις αντασφάλισης 29

3.1 Βέλτιστη διατήρηση μεταξύ Ασφαλιστή και Αντασφαλιστή 29

3.1.1 Μεγιστοποίηση κοινής πιθανότητας υπό την Quota – share 30

3.1.2 Μεγιστοποίηση κοινής πιθανότητας υπό την Stop – loss 32

3.1.3 Μεγιστοποίηση κοινής πιθανότητας υπό την Stop – loss 34

3.2 Βέλτιστη κράτηση μέσω της προσέγγισης De Vylder 42

3.3 Αντασφάλιση και Μερίσματα 49

3.3.1 Βέλτιστες στρατηγικές μερισμάτων 49

3.3.2 Βέλτιστες στρατηγικές μερισμάτων με Quota-share 55

Κεφάλαιο 4 Διαδικασία διάχυσης και ποσοστό προμήθειας 57

4.1 Βέλτιστες κρατήσεις και ανισότητα Lundberg 57

4.1.1 Συντελεστής προσαρμογής και όρια κράτησης 62

4.2 Άνω φράγμα και πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο 67

4.3 Το άνω φράγμα Gerber ως συνάρτηση του ποσού κράτησης 72

Ελληνική Βιβλιογραφία 76

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία 76

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή στην Ασφάλιση και Αντασφάλιση

1.1 Ασφάλιση

Οι ασφαλιστικές εταιρείες κατά κύριο λόγο ασχολούνται με τους κινδύνους. Ο ρόλος τους, δηλαδή, είναι να συγκεντρώνουν τους κινδύνους που αντιμετωπίζουν άτομα ή εταιρείες ώστε σε περίπτωση ζημίας να αποζημιώνονται από τον ασφαλιστή και έτσι να μειώνεται η οικονομική τους επιβάρυνση. Στην απλούστερη μορφή του, όταν συμβαίνουν ορισμένα γεγονότα, ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο θα παρέχει στον αντισυμβαλλόμενο το δικαίωμα να διεκδικήσει το σύνολο ή μέρος της ζημίας. Σε αντάλλαγμα αυτού του δικαιώματος, ο κάτοχος της ασφάλισης πληρώνει ένα καθορισμένο ποσό που ονομάζεται ασφάλιστρο και ο ασφαλιστής υποχρεούται να τηρήσει τις υποσχέσεις της όταν αυτές γίνουν ληξιπρόθεσμες.

Η ασφάλιση, λοιπόν, είναι η κοινωνία όμοιων κινδύνων που παρέχει στα μέλη της αξίωση για ασφαλιστική κάλυψη έναντι ανταλλάγματος.

1.2 Αντασφάλιση

Η αντασφάλιση αποτελεί βασικό πυλώνα της ασφαλιστικής λειτουργίας καθώς αποτελεί μηχανισμό μεταβίβασης ενός μέρους της ευθύνης που έχει αναλάβει μια ασφαλιστική εταιρεία. Αντασφάλιση,δηλαδή, καλείται η σύμβαση όπου ο πρωτασφαλιστής εκχωρεί στον αντασφαλιστή τους κινδύνους που έχει αναλάβει με ασφαλιστικές συμβάσεις παρέχοντας στους βασικούς ασφαλιστές προστασία από απρόβλεπτες ή ασυνήθιστες ζημίες. Κύριος στόχος της αντασφαλιστικής σύμβασης είναι η διασπορά των κινδύνων και συνεπώς η καλύτερη αντιμετώπιση των συνεπειών τους.

Επιπλέον η αντασφάλιση βοηθά τους ασφαλιστές να περιορίσουν την ευθύνη σε συγκεκριμένους κινδύνους, να ενισχύσουν την ικανότητα των μεμονωμένων ασφαλιστών, να μοιράζονται την ευθύνη όταν οι ζημιές υπερβαίνουν τους πόρους του πρωτογενούς ασφαλιστή και να σταθεροποιήσουν τις οικονομικές ανησυχίες που προκαλούνται από τις μεγάλες διακυμάνσεις του περιθωρίου κέρδους και ζημίας του ασφαλιστικού κλάδου. Οι συμβάσεις αντασφάλισης μπορούν να καλύπτουν είτε συγκεκριμένο κίνδυνο είτε ευρεία κατηγορία δραστηριοτήτων.

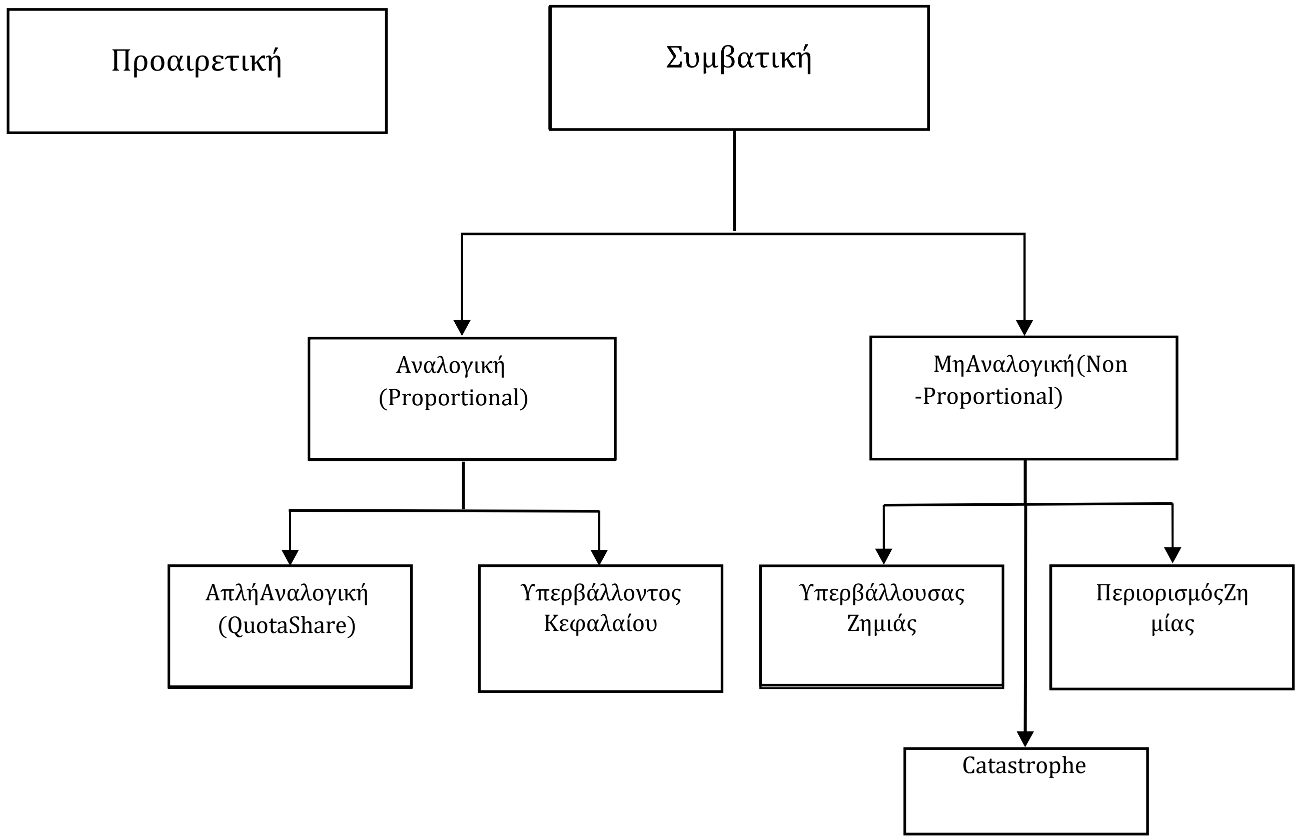
1.3 Κατηγορίες και είδη αντασφάλισης

Δεδομένου ότι η αντασφάλιση μπορεί να καλύψει πολλές διαφορετικές ανάγκες, υπάρχουν διάφοροι τύποι αντασφάλισης ώστε να καλύπτονται στοχευμένα οι ανάγκες της εκάστοτε ασφαλιστικής εταιρείας.

Η αντασφάλιση διακρίνεται σε προαιρετική,όπου αποτελεί αντικείμενο διαπραγμάτευσης ξεχωριστά για κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο που αντασφαλίζεται, και σε συμβατική όπου ο πρωτασφαλιστής και ο αντασφαλιστής διαπραγματεύονται για να συμπράξουν σε μία σύμβαση κατά την οποία ο αντασφαλιστής καλύπτει συγκεκριμένο ποσοστό από όλα τα ασφαλιστήρια συμβόλαια που εκδίδονται από τον πρωτασφαλιστή και εμπίπτουν στο πεδίο εφαρμογής της εν λόγω σύμβαση.

Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζονται τόσο η κατηγορία της προαιρετικής και της συμβατικής αντασφάλισης, όσο και τα είδη της δεύτερης. Στο συμβατικό τύπο αντασφάλισης ο πρωτασφαλιστής (που αναφέρεται ως εκχωρητής) συνάπτει συμφωνία με έναν ή περισσότερους αντασφαλιστές προκειμένου να τους εκχωρήσει ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων(καλύπτεται συγκεκριμένο ποσοστό), όπως ορίζεται στην αντίστοιχη αντασφαλιστική συμφωνία ή συνθήκη. Σε μια τέτοια συμφωνία, η εκχωρούσα εταιρεία συμφωνεί να εκχωρήσει και οι αντασφαλιστές συμφωνούν να αποδεχθούν όλους τους κινδύνους που έχει αναλάβει η εκχωρούσα εταιρεία και εμπίπτουν στους όρους της σύμβασης, με την επιφύλαξη των ορίων που καθορίζονται σε αυτήν. Οι αντασφαλίσεις βάσει συμβολαίου μπορούν να έχουν τη μορφή αναλογικής ή μη αναλογικής αντασφάλισης βάσει συμβολαίου.

Με τις αναλογικές συμβάσεις να αποσκοπούν στην παροχή χωρητικότητας, ενώ οι μη αναλογικές έχουν σχεδιαστεί για την προστασία των κινδύνων που διατηρεί η αντασφαλιζόμενη οντότητα.



Στη προαιρετική αντασφάλιση, παρουσιάζεται με κάθε λεπτομέρεια ένας και μόνο κίνδυνος, σε έναν ή περισσότερους υποψήφιους αντασφαλιστές. Οι αντασφαλιστές με την σειρά τους, αναλύουν τα δεδομένα και έχουν την επιλογή να αναλάβουν ή να απορρίψουν την προσφορά.

Επιπλέον,επιλέγεται κυρίως από αντασφαλιστές για όχι τόσο συνηθισμένους κινδύνους καθώς και για μεμονωμένους κινδύνους, οι οποίοι δεν μπορούν να καλυφθούν επαρκώς από τις αντασφαλιστικές συμβάσεις τους.

Στη προαιρετική αντασφάλιση, παρουσιάζονται αρκετές δυσκολίες ως προς την λειτουργία, καθώς η διαδικασία σύναψης είναι χρονοβόρα και δαπανηρή διότι ο κάθε κίνδυνος είναι διαφορετικός το οποίο σημαίνει πως θα πρέπει να εκτιμάται κάθε φορά διαφορετικά.

Στη συμβατική αντασφάλιση, ο αντασφαλιστής καλύπτει ένα προσυμφωνημένο ποσοστό των ασφαλιστικών συμβολαίων που εκδίδει ο πρωτασφαλιστής και ανήκουν είτε σε έναν συγκεκριμένο κλάδο, είτε σε μια συγκεκριμένη γεωγραφική περιοχή, είτε σε ένα ασφαλιζόμενο ποσό που δεν υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο όριο.

Η συμβατική αντασφάλιση, είναι μια συμφωνία, η οποία δίνει το δικαίωμα στον πρωτασφαλιστή να ασφαλίσει έναν κίνδυνο και να τον αντασφαλίσει αυτόματα στους αντασφαλιστές, οι οποίοι υποχρεούνται να τον δεχθούν, αφού έχουν αποδειχθεί μέρος της σύμβασης.

Η συγκεκριμένη κατηγορία αντασφάλισης αποτελείται από δύο επιμέρους κατηγορίες οι οποίες είναι,

- η αναλογική αντασφάλιση και
- η μη-αναλογική αντασφάλιση.

1.3.1 Η αναλογική αντασφάλιση (Proportional)

Ένα ποσοστό επί του συνολικού ασφαλισμένου ποσού, όπου είναι προκαθορισμένο και καλύπτει το χαρτοφυλάκιο στο σύνολο του, αναλαμβάνεται από τον αντασφαλιστή. Αυτό σημαίνει πως στις αποζημιώσεις που πρόκειται να δοθούν αλλά και στα ασφάλιστρα που εισπράττονται, ανάλογα με το ποσοστό τους, φέρουν συμμετοχή τόσο ο πρωτασφαλιστής όσο και ο αντασφαλιστής. Ο αντασφαλιστής αποζημιώνεται από τον εκχωρητή (πρωτασφαλιστή) για τις υπηρεσίες που προσφέρει.

Παράλληλα ο αντασφαλιστής επιστρέφει στον πρωτασφαλιστή ένα ποσοστό προμήθειας επί του ασφαλίστρου που λαμβάνει, με σκοπό ο πρωτασφαλιστής να καλύψει το κόστος underwriting κλπ. Η επέκταση του χαρτοφυλακίου μιας ασφαλιστικής εταιρείας, αποτελεί κύριο λόγο ώστε να καταφύγει σε αυτόν τον τύπο αντασφάλισης.

Η αναλογική αντασφάλιση, με την σειρά της, χωρίζεται σε δύο επιμέρους κατηγορίες:

- απλή αναλογική ή αντασφάλιση κατ' αναλογία (QuotaShare) και
- αντασφάλιση υπερβάλλοντος κεφαλαίου (Surplusreinsurance)

1.3.1.1 Αντασφάλιση σταθερού ποσού

Το συγκεκριμένο είδος αποτελεί την πιο απλή μορφή αντασφάλισης, καθώς ο πρωτασφαλιστής συνάπτει συμφωνία με τον αντασφαλιστή για το ποσοστό του κινδύνου που θα του εκχωρήσει. Οι περισσότερες συμβάσεις αυτής της μορφής, έχουν προκαθορισμένη ημερομηνία λήξης στο τέλος της οικονομικής χρήσεις κάθε έτους και όχι κατά την διάρκεια του έτους κάλυψης όπου έχουν αποπληρωθεί όλες οι υποχρεώσεις. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, ο αντασφαλιστής πληρώνει στον πρωτασφαλιστή το συνολικό ποσό που του αναλογεί για την κάλυψη των εκτιμένων ζημιών που εκκρεμούν. Επίσης, ο αντασφαλιστής επιστρέφει και τα ασφάλιστρα, τα οποία αφορούν την υπολειπόμενη περίοδο (μη δεδουλευμένα ασφάλιστρα).

Η ιδία κράτηση καθορίζεται από ένα σταθερό ποσοστό για όλους τους κινδύνους. Αν X το ύψος της ζημιάς, τότε αX είναι το μέρος του κινδύνου το οποίο καλύπτει ο πρωτασφαλιστής και $(1-\alpha)X$ είναι το μέρος του κινδύνου που αναλογεί στον αντασφαλιστή.

Προφανώς, ισχύει ότι

$$X = \alpha X + (1-\alpha)X, \qquad \text{για } 0 < a < 1$$

και για

- $\alpha = 0$ γίνεται πλήρης εκχώρηση του κινδύνου στον αντασφαλιστή και
- $\alpha = 1$ δεν πραγματοποιείται αντασφάλιση τους κινδύνου.

Το ποσοστό α καλείται ρυθμός ιδίας κράτησης.

Έστω $\alpha \in (0,1)$, ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων θα συμβολίζεται με $C(\alpha)$. Επειδή αX είναι ο κίνδυνος που καλύπτει ο πρωτασφαλιστής, τότε ο συντελεστής προσαρμογής του πρωτασφαλιστή $R(\alpha)$ είναι η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης,

$$E\left\{e^{r[X(\alpha)-C(\alpha)W]}\right\} = 1, \quad \text{ως προς } r$$

όπου $X(\alpha)$ είναι η αποζημίωση που καταβάλλει ο πρωτασφαλιστής, δηλαδή $X(\alpha) = \alpha X$.

Με την εν λόγω μορφή αντασφάλισης επιτυγχάνεται η διασπορά του κινδύνου και η επέκταση του χαρτοφυλακίου. Μειονέκτημά της, όμως, αποτελεί το γεγονός ότι, ανεξαρτήτως μεγέθους και κατηγορίας κινδύνου, εφαρμόζεται η ίδια αναλογία και μάλιστα υπάρχει μέγιστο ποσό ζημιάς πάνω από το οποίο ο αντασφαλιστής δεν συμμετέχει στη ζημία.

1.3.1.2 Αντασφάλιση Υπερβάλλοντος κεφαλαίου

Εκτός από την απλή αναλογική συναντάται και η αντασφάλιση υπερβάλλοντος κεφαλαίου (Surplus) όπου κατά κανόνα οι συμβάσεις που συνάπτονται είναι παρόμοιες με εκείνες της απλής αναλογικής, με την μοναδική διαφορά να συναντάται στο ότι η εκχωρήτρια εταιρεία (πρωτασφαλιστής) καθορίζει σταθερό ποσό, το οποίο παρακρατά το λεγόμενο όριο κράτησης και το ποσό που υπολείπεται εκχωρείται στον αντασφαλιστή.

Δηλαδή, ο αντασφαλιστής συμφωνεί να καλύψει το ποσό των αποζημιώσεων που είναι μεγαλύτερο από το όριο κράτησης μέχρι ένα ποσό. Έτσι, στην περίπτωση όπου μια αποζημίωση υπερβεί το όριο κράτησης καθώς και το όριο που έχει τεθεί από τον αντασφαλιστή ο εκχωρητής καλείται να καλύψει την υπέρβαση αυτή.

Ο τύπος που δίνει το ποσοστό από κάθε κίνδυνο που καλύπτεται από τον αντασφαλιστή σε μία Surplus σύμβαση δίνεται από τη σχέση,

$$X(\alpha) = \frac{X^{line}}{X^{max}} X,$$

όπου

- $X(\alpha)$ το ποσό της αποζημίωσης που έχει παρακρατήσει ο εκχωρητής,
- X^{line} το όριο κράτησης,
- X η αποζημίωση για τον κίνδυνο και
- X^{max} η μέγιστη τιμή της X.

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στην αντασφάλιση υπερβάλλοντος κεφαλαίου, το ποσό διατήρησης είναι $\frac{X^{line}}{X^{max}}$, δηλαδή εξαρτάται από το X^{max}. Αντίθετα, στην quota-share ο ρυθμός ίδιας κράτησης α είναι ίδιος για όλους τους κινδύνους.

Οι εταιρείες που χρησιμοποιούν αυτού του είδους αντασφάλιση πέρα από τη διασπορά του κινδύνου και την επέκταση του χαρτοφυλακίου, αναλαμβάνουν μεγαλύτερους κινδύνους με αποτέλεσμα να δημιουργούν χαρτοφυλάκια με ποικιλία στους κινδύνους που επωμίζονται.

Ωστόσο, τέτοιου είδους συμβάσεις είναι πιο δαπανηρές από τις απλές αναλογικές συμβάσεις. Το πλεονέκτημα της συγκεκριμένης μορφής αντασφάλισης έγκειται στο γεγονός ότι, ενώ στην απλή αναλογική αντασφάλιση το ποσό παρακράτησης ήταν το ίδιο για όλους τους κινδύνους, στην συγκεκριμένη αντασφάλιση, το ποσό διατήρησης εξαρτάται από την μέγιστη τιμή, η οποία διαφέρει ανά κίνδυνο.

1.3.2 Μη αναλογική αντασφάλιση (NonProportional)

Στη μη αναλογική αντασφάλιση, η συμμετοχή του αντασφαλιστή είναι προκαθορισμένη και εξαρτάται από το ύψος των αποζημιώσεων που θα πρέπει να δοθούν. Ο αντασφαλιστής συμμετέχει στις αποζημιώσεις καλύπτοντας μόνο ένα μέρος τους και μόνο στην περίπτωση όπου μία αποζημίωση ξεπεράσει ένα προκαθορισμένο ποσό ή ποσοστό.

Η μη αναλογική αντασφάλιση συναντάται κυρίως στις "ασφαλίσεις κατά ζημιών", όπως για παράδειγμα κινδύνους πυρός, νοσοκομειακής περίθαλψηςκ.τ.λ καθώς το ύψος ενδεχόμενης αποζημίωσης δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων αλλά υπολογίζεται εφόσον επέλθει το ζημιογόνο συμβάν.

Συνεπώς, το συγκεκριμένο είδος αντασφάλισης συνίσταται σε μεγάλους κινδύνους. Η μη αναλογική αντασφάλιση όπως φαίνεται και στο παραπάνω διάγραμμα αποτελείται από τα εξής, τρία, επιμέρους είδη:

- αντασφάλιση υπερβάλλουσας ζημιάς (Excessoflossreinsurance),
- καταστροφική αντασφάλιση υπερβάλλουσας ζημιάς (Catastropheexcessloss) και
- αντασφάλιση ανακοπής ζημιάς (StopLoss).

Οι δύο κυριότερες κατηγορίες είναι η αντασφάλιση υπερβάλλουσας ζημιάς (Excess of loss) και η αντασφάλιση ανακοπής ζημιάς (Stop-loss).

1.3.2.1 Αντασφάλιση υπερβάλλουσας ζημιάς

Στο συγκεκριμένο είδος μη αναλογικής αντασφάλισης, ο αντασφαλιστής καλείται να αποζημιώσει την επιχείρηση, για πιθανές ζημιές που θα εμφανιστούν στο αντασφαλισμένο χαρτοφυλάκιο και το ποσό αυτό της αποζημίωσης θα υπερβαίνει κάποιο συγκεκριμένο συμφωνηθέν ποσό. Αναλυτικότερα, ο αντασφαλιστής έχει τη δυνατότητα να καταβάλλει το σύνολο του υπερβάλλοντος ποσού ή μέχρι κάποιο συγκεκριμένο ανώτατο όριο. Στη τελευταία περίπτωση, ο ασφαλιστής καλείται να αποκτήσει, μέσω αγοράς, ορισμένα επίπεδα κάλυψης από διαφορετικούς αντασφαλιστές, έτσι ώστε να είναι εξασφαλισμένος, σε περίπτωση που επέλθει μία ζημιά.

Ισχύουν τα παρακάτω:

- Αποζημίωση πρωτασφαλιστή (ιδία κράτηση):

$$X_I = X^\wedge d = \min\{X, d\} = \begin{cases} X, & X \leq d \\ d, & X > d \end{cases}$$

- Αποζημίωση αντασφαλιστή (εκχώρηση):

$$X_R = (X - d)_+ = \max\{0, X - d\} = \begin{cases} 0, & X \leq d \\ X - d, & X > d \end{cases}$$

  και

$$X = X^d + (X - d)_+,$$

  όπου d είναι το όριο της ιδίας κράτησης του πρωτασφαλιστή.

Επιπλέον, η αντασφαλίστρια εταιρεία προκειμένου να είναι εξασφαλισμένη σε περίπτωση αύξησης του ποσού της ζημιάς, εξαιτίας του πληθωρισμού, επιδιώκει την συσχέτιση του υψηλότερου ποσού ιδίας κράτησης του ασφαλιστικού οργανισμού με κάποιο δείκτη, ο οποίος τις περισσότερες φορές είναι ο πληθωρισμός.

Συγκεκριμένα, απαιτεί το ποσό της ιδίας κράτησης να μεγεθύνεται ετησίως, σύμφωνα με ένα γενικά αναγνωρισμένο δείκτη. Σε αντίθετη περίπτωση, η αντασφαλίστριαεταιρεία αντιμετωπίζει τον κίνδυνο, το σύνολο του κόστους, εξαιτίας του πληθωρισμού, να αθροιστεί στις ζημιές, οι οποίες κοστίζουν ήδη πέραν της ιδίας κράτησης και μαζί με την πιθανότητα επιπλέον ζημιών, να αγγίξει το υψηλότερο ποσό κάλυψης, που προκαθορίζεται από την στιγμή της σύμβασης.

Ουσιαστικά, το είδος αυτό της μη αναλογικής αντασφάλισης υφίσταται, ώστε να μπορεί ο ασφαλιστικός οργανισμός να επωμίζεται την κάλυψη υψηλού κινδύνου.

Επιπλέον, ορισμένοι ακόμη στόχοι της αντασφάλισης αυτής είναι,

- ο περιορισμός του κινδύνου μη σχηματισμού του απαραίτητου περιθωρίου φερεγγυότητας από την εταιρεία, λόγω ενός καταστροφικού συμβάντος ή μεγάλων ζημιών και

- η σταθεροποίηση του ρυθμού μεταβολής των αποτελεσμάτων χρήσης της εταιρείας, μέσω της μείωσης του επιπέδου των διακυμάνσεων των αποζημιώσεων.

1.3.2.2 Καταστροφική αντασφάλιση υπερβάλλουσας ζημιάς

Σκοπός αυτού του είδους αντασφάλισης είναι η προστασία από τον κίνδυνο πρόκλησης τεραστίων αποζημιώσεων από έναν κίνδυνο. Για παράδειγμα, ένας τυφώνας ή ένας σεισμός μπορεί να σημαίνει τεράστιες αποζημιώσεις για μια ασφαλιστική εταιρία, οι οποίες μάλιστα θα προκύψουν και σε ένα πολύ μικρό, σχετικά, χρονικό διάστημα.

Ορίζεται, λοιπόν,ένας ελάχιστος αριθμός αποζημιώσεων και ένα μέγιστο χρονικό διάστημα. Αν ο αριθμός των αποζημιώσεων ξεπεράσει μέσα στο χρονικό διάστημα που έχει ορισθεί, τον ελάχιστο αριθμό αποζημιώσεων, τότε ο αντασφαλιστής οφείλει να συμμετέχει στις αποζημιώσεις.

1.3.2.3 Αντασφάλιση ανακοπής ζημιάς

Σκοπός της Stop-Loss αντασφάλισης είναι η προστασία του ετήσιου αποτελέσματος ενός χαρτοφυλακίου κινδύνων, σε αρνητικές διακυμάνσεις από τον μέσο όρο, κάτι το οποίο μπορεί να οφείλεται σε ενδεχόμενη άνοδο του αριθμούς συχνότητας των ζημιών.

Με την συγκεκριμένη σύμβαση, ο αντασφαλιστής αναλαμβάνει να καλύψει το ποσοστό του συνολικού ύψους των ζημιών που προέκυψαν κατά τη διάρκεια μίας χρήσης και που θα υπερβαίνει όριο d, το οποίο ονομάζεται και παρακράτηση της Stop-Loss.

Ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα της συγκεκριμένης αντασφάλισης είναι το γεγονός ότι ο πρωτασφαλιστής έχει τη δυνατότητα να αναλάβει μεγαλύτερους κινδύνους συγκριτικά με τους άλλους τύπους αντασφαλιστικών συμβάσεων.

Πρόκειται λοιπόν, για μια αντασφάλιση όμοια με την excessofloss, με την μόνη διαφορά, ότι το συγκεκριμένο είδος αντασφάλισης εφαρμόζεται στις συνολικές αποζημιώσεις μίας οικονομικής χρήσης ενώ η αντασφάλιση υπερβάλλουσας ζημιάς εφαρμόζεται σε κάθε αποζημίωση ξεχωριστά.

Η αντασφάλιση ανακοπής ζημιάς, προσφέρει μια αρκετά ικανοποιητική εγγύηση έναντι της χρεοκοπίας, στην περίπτωση κατά την οποία ο πρωτασφαλιστής μπορεί να καταβάλει αποζημίωση έως το ποσό ίδιας κράτησης, έπειτα από το οποίο τίθεται σε εφαρμογή η σύμβαση αντασφάλισης.

Κεφάλαιο 2 Θεωρία κινδύνου και Χρεοκοπία

2.1 Το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου

Η θεωρία συλλογικού κινδύνου εμφανίζεται για πρώτη φορά το 1903 από τον FilipLundberg μέσω της διδακτορικής του διατριβής ,όπου αναφέρθηκε στην εισαγωγή της Poisson σε μοντέλα ασφαλίσεων, στην οποία μετέπειτα βασίστηκε ο HaraldCramer και ενσωμάτωσε τις στοχαστικές διαδικασίες στην θεωρία κινδύνου.

Ας υποθέσουμε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο το οποίο πρόκειται να τεθεί άμεσα σε ισχύ π.χ. ένα χαρτοφυλάκιο ασφάλισης κατοικίας ή ζημιών αυτοκινήτων. Θεωρούμε ότι, εξετάζουμε τη λειτουργία αυτού του χαρτοφυλακίου σε συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα, π.χ. ένα έτος. Το κύριο ενδιαφέρον για την ασφαλιστική εταιρεία δεν βρίσκεται στην κάθε ζημιά που θα προκύψει από τις ατομικές απαιτήσεις των πελατών, αλλά στο συνολικό ποσό που θα χρειαστεί καταβάλει γι' αυτές τις απαιτήσεις στο διάστημα που εξετάζουμε.

Για τη μελέτη του συνολικού ποσού των αποζημιώσεων, έστω S, που θα κληθεί να πληρώσει η εταιρεία, υπάρχουν δύο πηγές αβεβαιότητας,

- το πλήθος των απαιτήσεων που θα φτάσουν στην εταιρεία και
- τα μεγέθη αυτών των απαιτήσεων.

Καθεμία από αυτές τις ποσότητες, εφόσον δεν είναι γνωστή η τιμή της εκ των προτέρων, παριστάνεται με μια τυχαία μεταβλητή. Πιο συγκεκριμένα, ο συμβολισμός που χρησιμοποιούμε και οι υποθέσεις που κάνουμε στο συλλογικό πρότυπο έχουν ως εξής,

I. το συνολικό πλήθος των απαιτήσεων που φτάνουν στην εταιρεία κατά το χρονικό διάστημα που εξετάζουμε παριστάνεται με μία διακριτή τυχαία μεταβλητή N, η οποία παίρνει τιμές στο σύνολο {0,1,2..} και

II. τα μεγέθη των αποζημιώσεων συμβολίζονται με Χι, Χ2,…. θεωρούμε ότι οι X_i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές και ακολουθούν την ίδια κατανομή F. Η κατανομή αυτή μπορεί να είναι,είτε συνεχής είτε διακριτή.

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις πυκνότητας ορισμένες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R, τότε η συνέλιξη τους η οποία συμβολίζεται $f * g$, είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση,

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Αν F, G είναι δύο συναρτήσεις κατανομής, τότε η συνέλιξη $F * G$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση,

$$(F * G)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x-y)G(y)dy.$$

Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2οι οποίες είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με συνάρτηση κατανομής F. Τότε η συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος $X_1 + X_2$είναι $F * F$, η οποία συμβολίζεται F^{*2} και ονομάζεται δυναμοσυνέλιξη δεύτερης τάξης της F.

Αν X_3 είναι μια άλλη μεταβλητή, η οποία είναι ανεξάρτητη από τις X_1, X_2 και έχει επίσης συνάρτηση κατανομής F, τότε η συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος,

$$X_1 + X_2 + X_3$$

ορίζεται ως

$$(F^{*2} * F)(x) = [(F * F) * F](x)$$

η οποία συμβολίζεται με $F^{*3}(x)$ και αποτελεί τη δυναμοσυνέλιξη τρίτης τάξης της F.

Στη γενική περίπτωση , αν $X_1, X_2, X_3 \ldots$ είναι ανεξάρτητες με την ίδια συνάρτηση κατανομής F, τότε το άθροισμα $S_n = X_1 + X_2 + \ldots . + X_n$,

έχει συνάρτηση κατανομής

$$F^{*n}(x) = (F^{*(n-1)} * F)(x),$$

η οποία είναι η δυναμοσυνέλιξη της n-τάξης της F.

Αντίστοιχα για την συνάρτηση πιθανότητας, ισχύει

$$f^{*n}(x) = (f^{*(n-1)} * f)(x).$$

Στο μοντέλο συλλογικού κινδύνου τα τμήματα του χαρτοφυλακίου αντιμετωπίζονται ως σύνολο αποζημιώσεων οι οποίες είναι ανεξάρτητες αλλά και ισόνομες.

Οι συνολικές απαιτήσεις λαμβάνονται ως στοχαστική ανέλιξη S(t) και εξετάζονται τόσο σε διακριτικό χρόνο όσο και σε συνεχή χρόνο t. Η στοχαστική ανέλιξη δίνεται από την σχέση

$$S(t) = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_{N(t)},$$

όπου N(t) είναι μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη και $X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_{N(t)}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

Η διαφορά του συλλογικού προτύπου με το ατομικό έγκειται στο γεγονός πως, το πλήθος των απαιτήσεων στο ατομικό μοντέλο είναι ένας μη τυχαίος αριθμός n.

Αν θεωρήσουμε το παρακάτω τυχαίο άθροισμα,

$$S = \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \\ 0 \end{cases}$$

τότε ισχύει ότι,

$$P(S_n \leq x) = F^{*n}(x) = \begin{cases} \int_0^x F^{*(n-1)}(x-y)f(y)dy & \text{όταν η X είναι συνεχής} \\ \sum_{y=0}^{x} F^{*(n-1)}(x-y)f(y) & \text{όταν η X είναι διακριτή.} \end{cases}$$

Επιπλέονέχουν εφαρμογή οι παρακάτω σχέσεις:

- $E(S) = E(N)E(X)$
- $Var(S) = E(N)Var(X) + \big(E(X)\big)^2 Var(N)$
- $M_s(t) = M_N(\ln M_X(t)) = P_N(M_X(t))$
- $P_S(t) = P_N(P_x(t))$

2.1.1 Το συλλογικό μοντέλο με αντασφάλιση

Στη συνέχεια παρουσιάζονταικάποια χαρακτηριστικά του συλλογικού προτύπου στην περίπτωση που ο συνολικός κίνδυνοςS, για ένα χαρτοφυλάκιο,καλύπτεται από κάποια από τις δύο αυτές μορφές αντασφάλισης(αναλογική/μη αναλογική). Και στις δύο περιπτώσεις, θεωρούμε ότι ο συνολικός κίνδυνος επιμερίζεται στη μορφή: $S = S_I + S_R$

μεS_I να είναι το συνολικό ποσό το οποίο καταβάλλει η ασφαλίστρια εταιρεία (πρωτασφαλίστρια) και S_R το τμήμα του συνολικού κινδύνου το οποίο καλύπτεται από την αντασφαλίστρια εταιρεία.

I. <u>Απλή Αναλογική αντασφάλιση</u>

Σε ένα σχήμα απλή αναλογικής αντασφάλισης, ο πρωτασφαλιστής εκχωρεί ένα σταθερό ποσοστό κάθε κινδύνου στην αντασφαλίστρια εταιρεία. Το ποσοστό του κινδύνου το οποίο πληρώνεται από τον πρωτασφαλιστή (ποσοστό ιδίας κράτησης), εκφραστεί ως δεκαδικός αριθμός μεταξύ 0 και 1, και όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο συμβολίζεται με α, οπότε για έναν συνολικό κίνδυνο S έχουμε ότι,

$$S_I = \alpha S \text{ και } S_2 = (1-\alpha)S.$$

II. <u>Αντασφάλιση Υπερβάλλουσας ζημιάς</u>

Σε μια αντασφαλιστική κάλυψη υπερβάλλουσας ζημιάς με ίδια κράτηση του πρωτασφαλιστή, d, το ποσό που καταβάλει η πρωτασφαλίστρια εταιρεία με την επέλευση ενός κινδύνου X_i, είναι,

$$Y_i = \begin{cases} X_i & \text{εάν } X_i \leq d \\ d & \text{εάν } X_i > d. \end{cases}$$

Το συνολικό ποσό αποζημιώσεων που καταβάλει η εταιρεία ορίζεται από την σύνθετη τυχαία μεταβλητή,

$$S_I = \sum_{i=1}^{N} Y_i = \sum_{i=1}^{N} \min\{X_i, d\}$$

ενώ το συνολικό ποσό που καταβάλει η αντασφαλίστρια εταιρεία είναι

$$S_I = \sum_{i=1}^{N} \max\{0, X_i - d\}.$$

2.2 Θεωρία Χρεοκοπίας

2.2.1 Στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος

Η $\{S(t): t \geq 0\}$ είναι μια σύνθετη (στοχαστική) ανέλιξη όπου ορίζεται για κάθε t από την σχέση,

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i & \text{αν } N(t) \geq 0 \\ 0 & \text{αν } N(t) = 0. \end{cases}$$

Το σημαντικότερο παράδειγμα μια σύνθετης ανέλιξης, είναι εκείνο στο οποίο η $\{N(t) : t \geq 0\}$ είναι μια ανέλιξη Poisson, και κατά συνέπεια η $\{S(t) : t \geq 0\}$ που παριστάνει τις συνολικές αποζημιώσεις καθώς μεταβάλλονται στο χρόνο, ακολουθεί μια σύνθετη ανέλιξη Poisson.

Επιπλέον, θεωρούμε μια συνάρτηση $P(t)$ η οποία εκφράζει το σύνολο των ασφαλίστρων που εισπράττονται στο διάστημα$(0, t]$, για τα οποία θεωρούμε πως υπάρχει βεβαιότητα ως προς την εξέλιξη τους στο χρόνο, και ως εκ τούτου η $P(t)$ είναι μια αύξουσα μαθηματική συνάρτηση, παρόλο που επηρεάζεται από αρκετούς παράγοντες, και όχι μια στοχαστική ανέλιξη.

Η στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος λοιπόν, ορίζεται ως,

$$U(t) = u + P(t) - S(t)$$

όπου,

- $S(t)$ η σύνθετη ανέλιξη για τις συνολικές αποζημιώσεις στο διάστημα $(0, t]$,
- u το αρχικό απόθεμα,
- $P(t)$ το σύνολο των ασφαλίστρων που εισπράττονται στο διάστημα$(0, t]$και
- $U(t)$ απόθεμα ή πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t.

Η $S(t)$ εφόσον δίνεται ως ένα άθροισμα τυχαίου αριθμού ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, ακολουθεί πάντα μια σύνθετη κατανομή.

Καθώς είναι απίθανο να μην υπάρχει κάποια αβεβαιότητα ως προς τα έσοδα της εταιρείας, ενώ δεν είναι ιδιαίτερα ρεαλιστικό να θεωρήσουμε πως όλα τα έσοδα προέρχονται αποκλειστικά και μόνο από ασφάλιστρα, ως εκ τούτο γίνεται αντιληπτό πως η ανέλιξη πλεονάσματος που παρουσιάζεται στον παραπάνω ορισμό, αποτελεί μια αρκετά πιο απλοϊκή μορφή του πραγματικού μηχανισμού με τον οποίο μεταβάλλεται το πλεόνασμα μιας ασφαλιστικής εταιρείας, σε σχέση με ένα χαρτοφυλάκιο, στο χρόνο.

Μια πιο ρεαλιστική σχέση για το πλεόνασμα μιας εταιρείας είναι,

$$U(t) = u + P(t) + I(t) - S(t)$$

όπου I(t) είναι τα έσοδα από επενδύσεις της εταιρείας στο χρονικό διάστημα [0,t].

Τα συνολικά ασφάλιστρα δίνονται από τη σχέση,

$$\mathrm{P(t) = ct}$$

και λύνοντας την σχέση ως προς t, προκύπτει η θετική σταθερά

$$\mathrm{c = \frac{P(t)}{t}}.$$

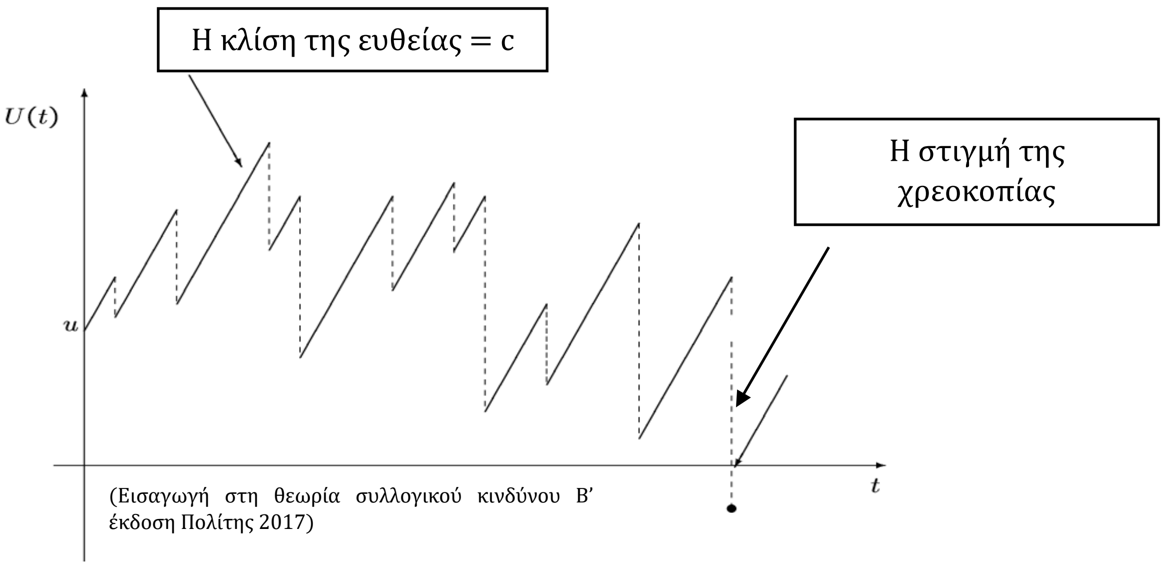
Δηλαδή, το c εκφράζει το ασφάλιστρο που πληρώνεται στη μονάδα του χρόνου και ονομάζεται ένταση ασφαλίστρου.

Συνεπώς, η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος μπορεί να δοθεί ως,

$$\mathrm{U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, t \geq 0}.$$

{N(t):t≥}, είναι η στοχαστική διαδικασία του πλήθους των κινδύνων, όπου στο κλασσικό μοντέλο θεωρίας κινδύνου υποθέτουμε πως περιγράφεται από μια διαδικασία Poisson.

Η ανέλιξη πλεονάσματος παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα.



(Εισαγωγή στη θεωρία συλλογικού κινδύνου Β' έκδοση Πολίτης 2017)

2.2.2 Πιθανότητα χρεοκοπίας

Η θεωρία κινδύνου εστιάζει στον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας, δηλαδή την πιθανότητα να μην υπάρχουν επαρκή αποθεματικά για την διευθέτηση των συνολικών απαιτήσεων.

Έτσι, η πιθανότητα χρεοκοπίας και η εξέλιξη των τιμών των συνολικών απαιτήσεων μέσα στο έτος, συνιστούν τη βασική μελέτης της θεωρίας κινδύνου. Καθώς εξετάζονται οι συνολικές αποζημιώσεις που αφορούν ένα χαρτοφυλάκιο όπως αυτές εξελίσσονται στον χρόνο, χρησιμοποιείται μια στοχαστική ανέλιξη $\{S(t)\colon t \geq 0\}$ και όχι μια τυχαία μεταβλητή για να περιγράψει το συνολικό μέγεθος αυτών των αποζημιώσεων.

Η $\{S(t)\colon t \geq 0\}$ είναι μια σύνθετη (στοχαστική) ανέλιξη όπου ορίζεται για κάθε t από την σχέση,

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i & \text{αν } N(t) \geq 0 \\ 0 & \text{αν } N(t) = 0. \end{cases}$$

Η σωστή λειτουργία ενός ασφαλιστικού οργανισμού απαιτεί την ύπαρξη επαρκών αποθεματικών(πλεόνασμα), δηλαδή, την διαφορά ανάμεσα στο ενεργητικό της εταιρείας και στη βέλτιστη αναλογιστή εκτίμηση του συνόλου των υποχρεώσεων.

Το πλεόνασμα(surplus) αποτελεί «περιθώριο ασφαλείας» για την αντιμετώπιση δυσμενών αποκλίσεων στις ασφαλιστικές υποχρεώσεις της εταιρείας. Η τιμή του πλεονάσματος κατά την χρονική στιγμή t, με $t \geq 0$ είναι $U(t)$ και κατά συνέπεια το $U(0)$ καλείται αρχικό απόθεμα.

<u>Ορισμός 1.2</u>

Μία βασική υπόθεση στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων είναι ότι τα αναμενόμενα έξοδα μιας εταιρείας δεν θα πρέπει να υπερβαίνουν τα έσοδα της (συνθήκη καθαρού κέρδους). Κατά συνέπεια σε κάθε χρονική στιγμή τα ασφάλιστρα που εισπράττονται πρέπει να είναι μεγαλύτερα κατά μέσο όρο από τις αποζημιώσεις που καταβάλλονται προς τους ασφαλισμένους. Δηλαδή πρέπει να ισχύει,

$$\mathrm{c} > \lambda\mu$$

όπου, από το αριστερό μέλος της σχέσης ορίζουμε τα αναμενόμενα έσοδα στη μονάδα του χρόνου για τον ασφαλιστή, ενώ το «λμ» είναι ο ρυθμός αποζημιώσεων στη μονάδα του χρόνου.

- λ, η ένταση της ανέλιξης Poisson
- μ, η μέση αποζημίωσή

$$\mathrm{\mu} = \mathrm{\mu}_1 = \mathrm{E(X)} = \int_0^{\infty} \mathrm{xf(x)dx} = \int_0^{\infty} \overline{\mathrm{F}}\mathrm{(x)dy} = \mathrm{E(X_i)}.$$

<u>**Ορισμός 1.3**</u>

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση και εφόσον ισχύει, είναι προφανές πως το θ παίρνει πάντα θετικές τιμές. Δίνεται μια ποιοτική συνθήκη, τα έσοδα να είναι περισσότερα από τα αναμενόμενα έξοδα, ώστε η χρεοκοπία να μην είναι βέβαιη.

Το ποσοτικό μέτρο που εκφράζει τη φερεγγυότητα ενός χαρτοφυλακίου, ονομάζεται περιθώριο ασφαλείας θ και στο κλασικό μοντέλο δίνεται από τη σχέση,

$$\mathrm{\theta} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{\lambda\mu}} - 1\,, > 0$$

και το επιβαρυμένο ασφάλιστρο δίνεται ως

$$\mathrm{c} = (1 + \mathrm{\theta})\mathrm{\lambda\mu}.$$

Εφόσον υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση στον ορισμό 1.2, είναι προφανές ότι το θ παίρνει πάντα θετικές τιμές.

Επίσης, για συγκεκριμένη τιμή του αρχικού αποθέματος u, όσο μεγαλώνει το περιθώριο ασφαλείας σε ένα μοντέλο, τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Διαισθητικά, ο συντελεστής θ εκφράζει πόσο μεγαλύτερα είναι τα έσοδα από τα έξοδα της εταιρείας κατά μέσο όρο σε ένα χαρτοφυλάκιο. Έτσι, το θ μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους για τον ασφαλιστή.

Για το λόγο αυτό, το θ παίρνει συνήθως τιμές μεταξύ 0 και 1 καθώς διαφορετικά το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο δεν θα είναι ανταγωνιστικό (ο ασφαλιστής έχει πολύ μεγάλο κέρδος, άρα ο ασφαλιζόμενος δεν έχει λόγο να το επιλέξει).

Εφόσον $\theta > 0$(αν και μόνο αν$c > \lambda\mu$), τότε η $c > \lambda\mu$ αναφέρεται ως συνθήκη καθαρού κέρδους με την έννοια ότι το αναμενόμενο κέρδος της ασφαλιστικής εταιρείας είναι θετικό.

Στην εφαρμογή του κλασικού μοντέλου στην πράξη, θεωρούμε ότι το περιθώριο ασφαλείας θ μπορεί να καθοριστεί με ακρίβεια από τον ασφαλιστή. Η μέση τιμή της κατανομής των αποζημιώσεων, που χρειάζεται για να καθοριστεί το θ, θεωρείται είτε ότι είναι γνωστή είτε μπορεί να εκτιμηθεί, με παραμετρικές ή μη-παραμετρικές στατιστικές μεθόδους.

<u>Ορισμός 1.4</u>

Ένα από τα βασικότερα μέτρα της θεωρίας χρεοκοπίας είναι η πιθανότητα το απόθεμα να λάβει κάποια στιγμή αρνητική τιμή. Η πιθανότητα χρεοκοπίας (probabilityofruin) οποιαδήποτε χρονική στιγμή (T) ορίζεται ως,

$$\psi(u) = \Pr[U(t) < 0 \,|U(0) = u].$$

Πολλές φορές, η δέσμευση μέσα στην πιθανότητα παραλείπεται από το συμβολισμό και, όταν είναι σαφές πως η πιθανότητα χρεοκοπίας θεωρείται συνάρτηση του αρχικού αποθέματος u,

$$\psi(u) = \Pr[U(t) < 0].$$

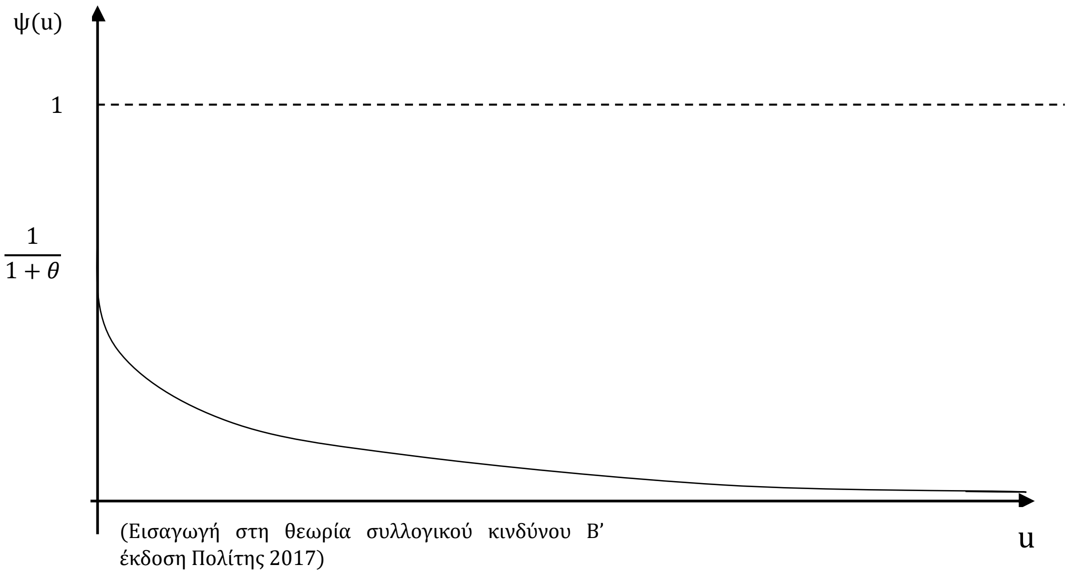
Στην περίπτωση που ισχύει ότι,

$$c \leq \lambda\mu$$

τότε $\psi(u) = 1$ για οποιοδήποτε $u > 0$, δηλαδή η χρεοκοπία είναι βέβαιη ακόμα και για μεγάλο αρχικό απόθεμα.

Ο όρος χρεοκοπία, δηλαδή το ενδεχόμενο$[U(t) < 0 \; \text{για} \; t \geq 0]$, αποτελεί τεχνικό όροκαι χρησιμοποιείται ως μέτρο της φερεγγυότητας ενός χαρτοφυλακίου.

Εύκολα μπορεί κανείς να αντιληφθεί, πως αν, σε ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο το απόθεμα U(t) πέσει κάτω από το μηδέν τότε η εταιρεία στην πραγματικότητα δεν "χρεοκοπεί", αλλά ούτε καν παύει η λειτουργία του συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου.



(Εισαγωγή στη θεωρία συλλογικού κινδύνου Β' έκδοση Πολίτης 2017)

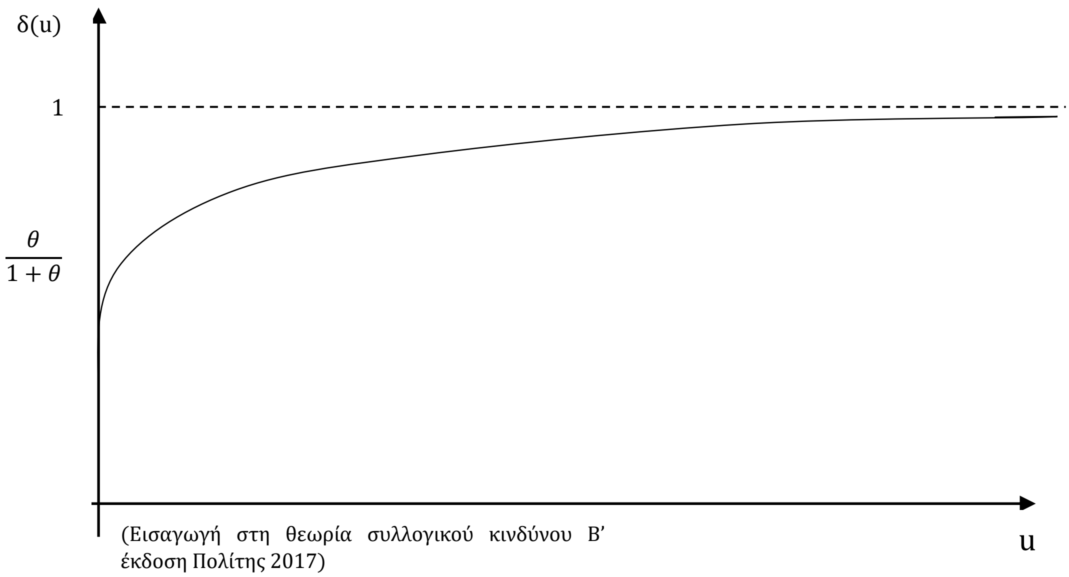
Ορισμός 1.5

Η πιθανότητα να μην συμβεί η χρεοκοπία ορίζεται ως η πιθανότητα να μην υπάρξει χρεοκοπία όταν το αρχικό απόθεμα είναι u,

$$\delta(u) = 1 - \psi(u) = \Pr[U(t) > 0 \,|U(0) = u]$$

Με βάση τα όσα προαναφέρθηκαν για τη πιθανότητα χρεοκοπίας,

- η $\delta(u)$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση,
- $\lim_{u \to \infty} \delta(u) = 1$ και
- η$\delta(u)$, μπορεί να θεωρηθεί μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής, όπου δεν είναι ούτε συνεχής ούτε διακριτή, αλλά πρόκειται για μια μεικτή κατανομή αφού $\delta(0) > 0$, δηλαδή η πιθανότητα μη χρεοκοπίας με μηδέν αρχικό απόθεμα είναι θετική.



(Εισαγωγή στη θεωρία συλλογικού κινδύνου Β' έκδοση Πολίτης 2017)

Ορισμός 1.6

Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων ο συντελεστής προσαρμογής R ορίζεται να είναι η μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης,

$$M_X(r) = 1 + (1+\theta)\mu r$$

$$M_X(r) = E(e^{rX})$$

Η ανισότητα Lundberg δίνει πληροφορίες για την πιθανότητα χρεοκοπίας με τη βοήθεια ενός άνω φράγματος συναρτήσει του αρχικού αποθέματος και του συντελεστή προσαρμογής.

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας η ανισότητα Lundberg εγγυάται ότι,

$$\psi(u) \le e^{-Ru}, \quad u \ge 0.$$

Ορισμός 1.7

Η Θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg ορίζεται από τον τύπο,

$$cs + \lambda\,\hat{f}(s) - (\lambda + \delta) = 0$$

όπου $\hat{f}(s)$είναι ο μετασχηματισμός Laplace της πυκνότητας f των αποζημιώσεων,

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

και για $\delta > 0$ υπάρχουν οι θετικές ρίζες της εξίσωσης είτε για $\theta < 0$ είτε για $\theta > 0$.

Στη περίπτωση όπου $\delta = 0$ τότε,

- οι ρίζες της εξίσωσης είναι θετικές για $\theta < 0$ και
- οι ρίζες τις εξίσωσης είναι 0 για $\theta > 0$.

Ορισμός 1.8

Ο χρόνος της χρεοκοπίας συμβολίζεται με T και ορίζεται ως,

$$\mathrm{T} = \begin{cases} \inf\{\mathrm{t}: \mathrm{U(t)} \quad < 0\} \\ \infty, \quad \text{αν } \mathrm{U(t)} \ \geq 0 \end{cases}$$

συνεπώς, γίνεται αντιληπτόπως ο χρόνος της χρεοκοπίας είναι μια ελλειμματική τυχαία μεταβλητή, καθώς μπορεί με θετική πιθανότητα να λάβει την τιμή άπειρο,

$$\mathrm{P(T < \infty) < 1} \ \text{ή} \ \ P(T = \infty) > 0$$

$$\mathrm{P(T = \infty) = P(U(t) \geq 0) = 1 - \psi(u)}.$$

Αυτό συμβαίνει διότι όταν ισχύει η συνθήκη $\mathrm{c} > \lambda\mu$ η εταιρεία μπορεί να μην χρεοκοπήσει ποτέ.

Το πλεόνασμα την χρονική στιγμή t, ορίζεται με $U(t)$, το έλλειμα τη στιγμή της χρεοκοπίας θα ισούται με U(T) και θα παίρνει αναγκαστικά μια αρνητική τιμή. Η σφοδρότητα της χρεοκοπίας , δηλαδή το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν συμβολίζεται με $-\mathrm{U(T)}$.

Αντίθετα το πλεόνασμα πριν από τη χρεοκοπία, ορίζεται από την σχέση $\mathrm{U(T-)} = \lim_{\mathrm{t \to T^-}} \mathrm{U(t)}$.

Ορισμός 1.9

Το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό απόθεμα u, συμβολίζεται με $\mathrm{L_1}$ και παίρνει θετικές τιμές, εφόσον εξετάζουμε και πάλι την πτώση του πλεονάσματος κατ' απόλυτη τιμή. Εφόσον δεν υπάρξει πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό απόθεμα τότε θέτουμε $\mathrm{L_1} = 0$.

Έστω τώρα ότι η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από την τιμή u συμβαίνει τη χρονική στιγμή $\mathrm{t_1}$ και το πλεόνασμα τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή αυτή είναι $\mathrm{u_1} = \mathrm{U(t_1)}$. Τότε η τιμή που παίρνει η τυχαία μεταβλητή $\mathrm{L_1}$ είναι $\mathrm{u} - \mathrm{u_1}$.

Στη συνέχεια μπορούμε να ορίσουμε, κατ' αντιστοιχία με την $\mathrm{L_1}$, μία τυχαία μεταβλητή $\mathrm{L_2}$ η οποία δίνει την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από την τιμή u_1. Η πιθανότητα να συμβεί πτώση του πλεονάσματος κάτω από το u_1, όταν το αρχικό απόθεμα είναι u_1, ισούται και πάλι με $\psi(0)$, ενώ όταν το πλεόνασμα πέσει για πρώτη φορά κάτω από το u_1, θα πάρει τιμή u_2 , τότε η τ.μ. L_2 παίρνει τιμή $u_1 - u_2$.

Εφόσον, οι $L_1, L_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και το πλήθος του, Κ, είναι επίσης μια τυχαία μεταβλητή, ορίζεται η σύνθετη μεταβλητή L,

$$L = \begin{cases} \sum_{i=1}^{K} L_i & K \geq 1 \\ 0, & K = 0. \end{cases}$$

Η L ονομάζεται μέγιστη σωρευτική απώλεια και εκφράζει τη συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω από την τιμή του αρχικού αποθέματος έως την ελάχιστη τιμή της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος.

Όταν $u \geq L$ δεν προκύπτει χρεοκοπία.

Έστω ότι $u > 0$, η ποσότητα $P(L > u)$ εκφράζει τη πιθανότητα η συνολική πτώση του πλεονάσματος να υπερβαίνει μια σταθερή τιμή.

Συνεπώς,

$$1 - \psi(u) = \Pr(L \leq u)$$

$$\psi(u) = 1 - \Pr(L \leq u)$$

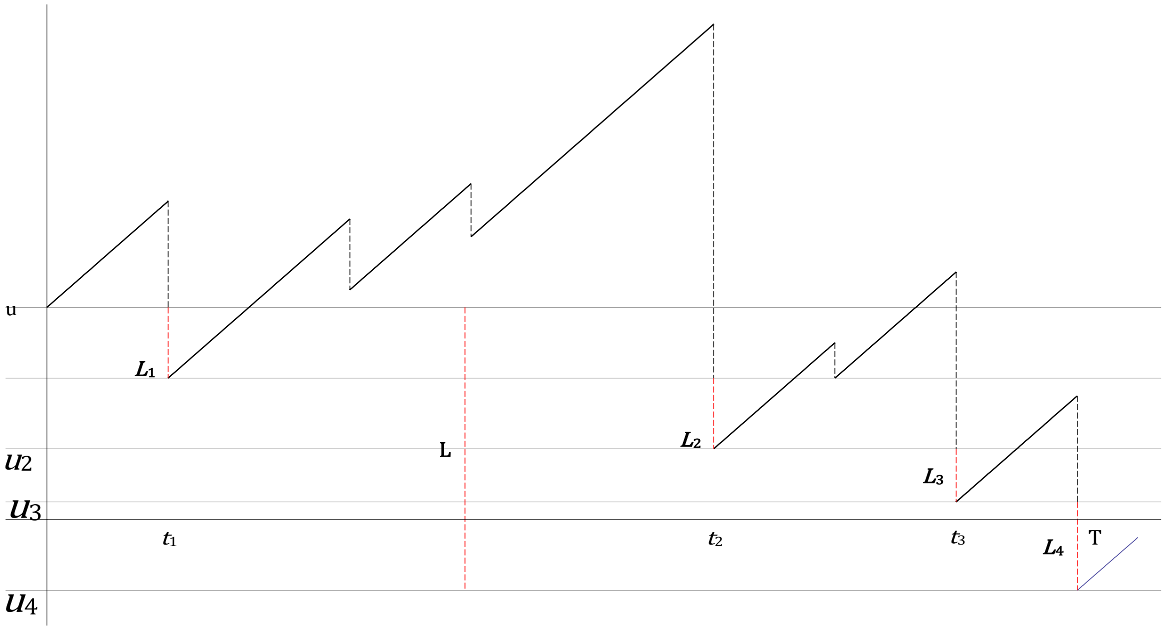
$$\psi(u) = \Pr(L > u)$$

και

$$P(L \leq u) = \delta(u).$$

Η κατανομή τηςL είναι μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή και ισχύει ότι,

$$\Pr(L = 0) = \delta(0) = \frac{\theta}{1 + \theta}.$$



2.2.3 Η συνάρτηση Gerber-Shiu

Έστω $z\,(x, y)$ για $x, y \geq 0$ μια μη αρνητική δισδιάστατη συνάρτηση. Θεωρούμε τη διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t): t \geq 0\}$ σε ενα κλασσικό μοντέλο.

Η συνάρτηση Gerber - Shiu ορίζεται από τη σχέση,

$$\varphi_\delta(u) = E\left[e^{-\delta t} z(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty) \mid U(0) = u\right], u \geq 0$$

όπου δ είναι η ένταση ανατοκισμού, η συνάρτηση $I(.)$ είναι μια δείκτρια συνάρτηση ενός ενδεχομένου, η οποία μας πληροφορεί ότι έχει επέλθει η χρεοκοπία και T ο χρόνος χρεοκοπίας.

Η ποσότητα $z(U(T-), |U(T)|)$ είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία της ποινής την στιγμή της χρεοκοπίας.

Για διάφορες τιμές που μπορεί να λάβει η συνάρτηση ποινής και από τον ορισμό της $\varphi_\delta(\mathrm{u})$προκύπτουν ορισμένα μέτρα κινδύνου. Ενδεικτικά:

- για δ= 0 και $z(x, y)$ =1, προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας,

$$\varphi_0(\mathrm{u}) = \mathrm{E}[\mathrm{I}(\mathrm{T} < \infty) \mid \mathrm{U}(0) = \mathrm{u}] = \Pr[\mathrm{T} < \infty \mid U(0) = \mathrm{u}] = \psi(\mathrm{u})$$

- για δ= 0 και $z(x, y) = y$, προκύπτει η μέση τιμή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας,

- για δ> 0 και $w(x, y)$ =1, προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας,

$$\varphi_\delta(\mathrm{u}) = \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{-\delta \mathrm{t}} \mathrm{I}(\mathrm{T} < \infty) \mid U(0) = u\right]$$

- για δ> 0και $z(x, y) = \mathrm{I}(x \le x_1)\mathrm{I}(y \le y_1)$ προκύπτει η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής των U(T–) , |U(T)| τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\begin{aligned}\phi_\delta(\mathrm{u}) &= \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{-\delta \mathrm{T}} \mathrm{I}(\mathrm{U}(\mathrm{T}-) \le x_1)\mathrm{I}(|\mathrm{U}(\mathrm{T})| \le y_1)\mathrm{I}\left(\mathrm{T} < \frac{\infty}{U(0)} = u\right)\right] \\ &= \mathrm{F}_\delta\left(x_1, \frac{y_1}{\mathrm{u}}\right).\end{aligned}$$

Η $\mathrm{F}_\delta(x_1, y_1/\mathrm{u})$εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία, με αρχικό απόθεμα u , ενώ το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ x_1και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ y_1.

Κεφάλαιο 3 Βέλτιστες κρατήσειςαντασφάλισης

3.1 Βέλτιστη διατήρηση μεταξύ Ασφαλιστή και Αντασφαλιστή

Είναι εμφανές πως, κατά την σύναψη ενός συμβολαίου αντασφάλισης επικρατούν αντικρουόμενα συμφέροντα μεταξύ των αντισυμβαλλομένων, δηλαδή του εκχωρητή (πρωτασφαλιστή) και του αντασφαλιστή καθώς και οι δύο προσπαθούν να ελαχιστοποιήσουν τον κίνδυνο, ώστε να επιτύχουν μεγαλύτερο ποσοστό των ασφαλιστικών εσόδων.

Παρ' όλα αυτά, ο αντασφαλιστής και ο εκχωρητής μπορούν να θεωρηθούν και ως συνέταιροι καθώς έχουν κοινό στόχο την διαχείριση των ασφαλισμένων κινδύνων. Συνεπώς η βέλτιστη σύμβαση χαρακτηρίζεται από τον λογικό συμβιβασμό μεταξύ των αντισυμβαλλομένων.

Κύριος παράγοντας, για την επίτευξη τόσο της χρηματοοικονομικής σταθερότητας αλλά και της φερεγγυότητας, είναι η μεγιστοποίηση της πιθανότητας επιβίωσης. Αυτή η ενότητα επικεντρώνεται στην εύρεση συνθηκών ώστε να επέλθει η βέλτιστη μεγιστοποίηση της κοινής πιθανότητας επιβίωσης λαμβάνοντας πάντα υπόψη τα συμφέροντα τόσο του πρωτασφαλιστή όσο και του αντασφαλιστή.

Κοινή πιθανότητα επιβίωσης νοείται η πιθανότητα να επιβιώσουν και οι δύο εταιρείες, εφόσον δηλαδή οι καταβληθείσες αποζημιώσεις είναι είτε μικρότερες είτε το πολύ ίσες με τα ασφάλιστρα όπου έχουν εισπραχθεί.

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο επιδιώκεται η μεγιστοποίηση της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας κάτω από την quota-share και stop-loss. Δηλαδή ότι τα ασφάλιστρα που εισπράττονται είναι περισσότερα ή τουλάχιστον ίσα με τις πληρωθείσες ζημιές.

Γενικά για μια ζημιά ύψους X , η ασφαλιστική εταιρεία πληρώνει$X_I = \alpha X \wedge d$ με την αντασφαλίστρια εταιρεία να αναλαμβάνει να πληρώσει το ποσό που απομένει ύψους,

$$X_R = X - (\alpha X \wedge d).$$

Επιπλέον σύμφωνα με την αρχή της αναμενόμενης αξίας, το καθαρό ασφάλιστρο που εισπράττεται από την αντασφαλιστική εταιρεία θα ήταν ίσο με,

$$P_R = (1 + \Theta_R)E(X_R)$$

και το ασφάλιστρο το οποίο θα εισπραχθεί από την ασφαλιστική εταιρεία, θα ήταν,

$$P_I = (1 + \Theta_I)E(X) - P_R.$$

όπου $(1 + \Theta_I)E(X)$, το ασφάλιστρο που λαμβάνει ο ασφαλιστής από έναν ασφαλισμένο.

Η από κοινού πιθανότητα επιβίωσης ή φερεγγυότητας της ασφαλιστικής και αντασφαλιστικής εταιρείας Pr_J ορίζεται ως εξής,

$$Pr[X_I \leq P_I + u_I, X_R \leq P_R + u_R]$$

όπου $u_I, u_R > 0$ το αρχικό απόθεμα του ασφαλιστή και αντασφαλιστή αντίστοιχα.

Για μια quota-share αντασφάλιση το σύνολο των αποδεκτών τιμών που μπορεί να λάβει ο ρυθμός κράτησης α είναι [0,1] ενώ για μια stop-loss οι αποδεκτές τιμές για το όριο κράτησης d είναι $[0, \infty)$.

3.1.1 Μεγιστοποίηση κοινής πιθανότητας υπό την Quota – share

Στην απλή αναλογική, η κράτηση d τείνει στο άπειρο με αποτέλεσμα ο ρυθμός κράτησης α να είναι η μόνη που πρέπει να ληφθεί υπόψη.

Συνεπώς, αΧείναι το ύψος του κινδύνου το οποίο καλύπτει ο εκχωρητής και το ποσό που καλύπτεται από τον αντασφαλιστή είναι $X_R = (1 - \alpha)X$ και η αναμενόμενη ζημιά του αντασφαλιστή είναι ίση με,

$$E(X_R) = (1 - \alpha)E(X). \quad \alpha \in (0,1)$$

Με βάση τα παραπάνω, το ασφάλιστρο που θα εισπραχθεί από την αντασφαλιστική εταιρεία διαμορφώνεται ως εξής,

$$P_R = (1 + \Theta_I)(1-\alpha)E(X)$$

και κατά συνέπεια,

$$P_I = P - (1 + \Theta_R)(1-\alpha)E(X)$$

$$P_I = (1 + \Theta_I)E(X) - (1 + \Theta_R)(1-\alpha)E(X) > 0.$$

<u>Πρόταση 2.1.1</u>

Για $\alpha = 0$ η απόκοινού πιθανότητα επιβίωσηςτης ασφαλιστικής και αντασφαλιστικής εταιρείας είναι,

$$Pr_J = \begin{cases} 0 & \text{για } u_I < (\Theta_R - \Theta_I)E(X) \\ F((1+\Theta_R)E(X)+u_R) & \text{για } u_I \geq (\Theta_R - \Theta_I)E(X). \end{cases}$$

Ενώ για $\alpha = 1$η από κοινού πιθανότητα επιβίωσης Pr_Jείναι,

$$F\left(u_I + (1 + \Theta_I)E(X)\right)$$

Αν $u_I \leq (\Theta_R - \Theta_I)E(X)$ για $\alpha \in (0,1)$ τότε η από κοινού πιθανότητα επιβίωσης είναι,

$$F\left((1 + \Theta_R)E(X) + \frac{u_I - (\Theta_R - \Theta_I)E(X)}{\alpha}\right)$$

και αν $u_I > (\Theta_R - \Theta_I)E(X)$,

$$Pr_J = \begin{cases} F\left((1 + \Theta_R)E(X) + \dfrac{u_R}{1-\alpha}\right) & \text{για } 0 < \alpha < \dfrac{u_I - (\Theta_R - \Theta_I)E(X)}{u_I + u_R - (\Theta_R - \Theta_I)E(X)} \\ F\left((1 + \Theta_R)E(X) + \dfrac{u_I - (\Theta_R - \Theta_I)E(X)}{\alpha}\right) & \text{για } \dfrac{u_I - (\Theta_R - \Theta_I)E(X)}{u_I + u_R - (\Theta_R - \Theta_I)E(X)} \leq \alpha < 1. \end{cases}$$

Θεώρημα 3.1

Με βάση τα παραπάνω καταλήγουμε στα εξής :

I. Αν $u_I < (\Theta_R - \Theta_I)E(X)$ ο βέλτιστος ρυθμός ίδιας κράτησης quota-share$\hat{a}$ είναι 1 τότε δεν πραγματοποιείται αντασφάλιση του κινδύνου.

II. Αν $u_I = (\Theta_R - \Theta_I)E(X)$ ο βέλτιστος ρυθμός ίδιας κράτησης quota-share$\hat{a}$είναι 0 υπάρχει πλήρης εκχώρηση του ασφαλιζόμενου κινδύνου στον αντασφαλιστή.

III. Αν $u_I > (\Theta_R - \Theta_I)E(X)$ ο βέλτιστος ρυθμός ίδιας κράτησης quota-share$\widehat{\alpha}$είναι,

$$\widehat{\alpha} = \frac{u_I - (\Theta_R - \Theta_I)E(X)}{u_I + u_R - (\Theta_R - \Theta_I)E(X)}$$

Άρα το μέγιστο της από κοινού πιθανότητας επιβίωσης είναι,

$$\max_{0 \le a \le 1} Pr_J = F\big(u_I + u_R + (1 + \Theta_I)E(X)\big).$$

3.1.2 Μεγιστοποίηση κοινής πιθανότητας υπό την Stop – loss

Στην αντασφάλιση ανακοπής ζημιάς ο ρυθμός κράτησης α από την απλή αναλογική τίθεται ίσος με 1 και κατά συνέπεια η κράτηση d είναι η μοναδική τιμή που λαμβάνεται υπόψη και το αναμενόμενο ποσό αντασφαλιστικής ζημιάς είναι ίσο με

$$\begin{aligned}
E(X_R) &= \\
&= E(X) - E(X \wedge d) \\
&= \int_0^\infty xF(x)dx - \int_0^d xF(x)dx - \int_d^\infty mF(x)dx \\
&= \int_d^\infty xF(x)dx - \int_d^\infty mF(x)dx \\
&= \int_d^\infty (x-d)F(x)dx
\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, το ασφάλιστρο όπου εισπράττεται από την αντασφαλιστική εταιρεία είναι,

$$P_R = (1+\Theta_R)\int_d^{\infty}(x-d)F(x)dx$$

και το καθαρό ασφάλιστρο το οποίο εισπράττει ο πρωτασφαλιστής δίνεται από την σχέση,

$$P_I = (1 + \Theta_I)E(X) - P_R$$

$$P_I = (1 + \Theta_I)E(X) - (1+\Theta_R)\int_d^{\infty}(x-d)F(x)dx.$$

Η από κοινού πιθανότητα επιβίωσης της ασφαλιστικής και αντασφαλιστικής εταιρείας Pr_J διαμορφώνεται ως εξής,

$$\begin{aligned}
&\Pr[X \leq d]\Pr[X \wedge d \leq u_I + P_I,\ X - (X \wedge d) \leq u_R + P_R | X \leq d] + \\
&+ \Pr[X > d]\Pr[X \wedge d \leq u_I + P_I,\ X - (X \wedge d) \leq u_R + P_R | X > d] \\
&= \Pr[X \leq d]\Pr[X \leq u_I + P_I | X \leq d] + \\
&+ \Pr[X > d]\Pr[d \leq u_I + P_I, X - d \leq u_R + P_R | X > d] \\
&= \Pr[X \leq u_I + P_I, X \leq d] + \\
&+ \Pr[d \leq u_I + P_I]\Pr[X \leq d + u_R + P_R, X > d]
\end{aligned}$$

$$Pr_J = \begin{cases} F(u_R + d + P_R) & \text{για } d \leq u_I + (1+\Theta_I)E(X) - P_R \\ F(u_I + (1+\Theta_I)E(X) - P_R) & \text{για } d > u_I + (1+\Theta_I)E(X) - P_R \end{cases}$$

Από τις παρακάτω σχέσεις,

$$\frac{\partial(d + P_R + u_R)}{\partial d} = 1 + (1+\theta_R)\frac{\partial}{\partial d}\int_d^{\infty}(x-d)F(x)dx = (1+\theta_R)F(d) - \theta_R,$$

$$\frac{\partial^2(d + P_R + u_R)}{\partial d^2} = (1+\theta_R)f(d) > 0$$

συμπεραίνεται ότι η $d + P_R + u_R$ είναι μια κυρτή συνάρτηση ως προς d και ελαχιστοποιείται όταν $d = F^{-1}\left(\frac{\theta_R}{(1+\theta_R)}\right)$.

Επιπλέον από τις σχέσεις,

$$\frac{\partial(u_I+(1+\Theta_I)E(X)-P_R)}{\partial d} = (1+\theta_R)\big(1-F(d)\big) = (1+\theta_R)S(d) > 0$$

και

$$\frac{\partial^2(u_I+(1+\Theta_I)E(X)-P_R)}{\partial d^2} = -(1+\theta_R)f(d) < 0$$

συμπεραίνεται πως, η $u_I + (1+\Theta_I)E(X) - P_R$ είναι μια μονότονα αυξανόμενη κοίλη συνάρτηση ως προς d.

Καθώς το d τείνει στο άπειρο τότε $d > u_I+(1+\Theta_I)E(X) - P_R$ και η μέγιστη από κοινού πιθανότητα επιβίωσηςτης ασφαλιστικής και αντασφαλιστικής εταιρείας είναι η $F(u_I+(1+\Theta_I)E(X))$.

Διαφορετικά, δεν υφίσταται βέλτιστη αντασφάλιση stop-loss και κατ' επέκταση δεν απαιτείται αντασφάλιση από την ασφαλιστική εταιρεία.

3.1.3 Μεγιστοποίηση κοινής πιθανότητας υπό την Stop – loss

Σκοπός της συγκεκριμένης ενότητας, είναι να εξαχθεί η κοινή πιθανότητα επιβίωσης της ασφαλιστικής και αντασφαλιστικής εταιρείας και να δημιουργηθεί η βέλτιστη αντασφαλιστική σύμβαση, η οποία μεγιστοποιεί την κοινή πιθανότητα επιβίωσης για την συνδυαστική αντασφάλιση quota-share και stop-loss .

Έστω, λοιπόν,X (μη αρνητική τυχαία μεταβλητή) η απαίτηση για έναν ασφαλιστή σε μια χρονική περίοδο, με συνεχή συνάρτηση κατανομής $F(x) = \Pr[X \leq x]$ και συνάρτηση επιβίωσης $S(x) = 1 - F(x) = \Pr[X > x]$.

Σε πρώτο στάδιο ορίζεται από τον ασφαλιστή ένα quota-share όριο κράτησης a, και έπειτα ορίζεται το stop-loss όριο ίδιας κράτησης d. Συνεπώς, από μία απαίτηση X ο πρωτασφαλιστής διατηρεί $(\alpha X \wedge d) = X_I$, με την υπόλοιπη απαίτηση ύψους$X - (\alpha X \wedge d) = X_R$ να καλύπτεται από τον αντασφαλιστή.

Γίνεται αντιληπτό πως, σε περίπτωση που το a πάρει την τιμή 1 τότε έχουμε μια αντασφάλιση stop-loss ενώ, στην περίπτωση που το d τείνει στο άπειρο τότε έχουμε αποκλειστικά αντασφάλιση quota-share.

Με βάση την αρχή της αναμενόμενης αξίας το ασφάλιστρο το οποίο εισπράττει ο αντασφαλιστής δίνεται από την σχέση,

$$P_R = (1 + \Theta_R)E[X_R]$$

όπου $E[X_R]$

$$= E[X - (\alpha X \wedge d)]$$

$$= E(X) - E[\alpha X \wedge d]$$

$$= \int_0^{\infty} xF(x)dx - \int_0^{\frac{d}{\alpha}} \alpha xF(x)dx - \int_{\frac{d}{\alpha}}^{\infty} dF(x)dx$$

$$= (1 - a)\int_0^{\infty} xF(x)dx + a\int_0^{\infty} xF(x)dx - \int_0^{\frac{d}{\alpha}} \alpha xF(x)dx - \int_{\frac{d}{\alpha}}^{\infty} mF(x)dx$$

$$= (1 - a)\int_0^{\infty} xF(x)dx + \int_{\frac{d}{\alpha}}^{\infty} \alpha xF(x)dx - \int_{\frac{d}{\alpha}}^{\infty} mF(x)dx$$

$$= (1 - a)E(X) + \int_{\frac{d}{\alpha}}^{\infty} (\alpha x - d)F(x)dx$$

Κατά συνέπεια με το ασφάλιστρο της αντασφάλισης δίνεται από την σχέση,

$$P_R = (1 + \Theta_R)E[X_R] = (1 + \Theta_R)\left((1 - a)E(X) + \int_{\frac{d}{\alpha}}^{\infty} (\alpha x - d)F(x)dx\right)$$

και το ασφάλιστρο που εισπράττει ο ασφαλιστής έπειτα από την αντασφάλιση δίνεται από την σχέση,

$$P_I = (1+\Theta_I)E(X) - P_R$$

$$P_I = (1+\Theta_I)E(X) - (1+\Theta_R)\left((1-a)E(X) + \int_{\frac{d}{\alpha}}^{\infty}(\alpha x - m)F(x)dx\right).$$

Υποθέτοντας πως, ο ασφαλιστής δεν μπορεί να αντασφαλίσει όλο τον κίνδυνο και δοθέντος πως το ασφάλιστρο του ασφαλιστή πρέπει να είναι θετικό, ισχύει ότι το περιθώριο ασφαλείας του αντασφαλιστή είναι μεγαλύτερο από εκείνο του ασφαλιστή.

Δηλαδή,

$$\Theta_R > \Theta_I$$

και

$$E[X_R] = E[X - (\alpha X \wedge d)] < \frac{(1+\Theta_I)E(X)}{(1+\Theta_R)}.$$

<u>**Πρόταση 3.1**</u>

I. $\frac{u_I+P_I}{\alpha} = \frac{u_I + (1+\Theta_I)E(X) - P_R}{\alpha}$

$$= \frac{u_I + (1+\Theta_I)E(X) - (1+\Theta_R)\left((1-a)E(X) + \int_{\frac{d}{\alpha}}^{\infty}(\alpha x - d)F(x)dx\right)}{\alpha}.$$

II. $\frac{u_R+P_R}{1-\alpha}$

$$= \frac{u_R + (1+\Theta_R)\left((1-a)E(X) + \int_{\frac{d}{\alpha}}^{\infty}(\alpha x - d)F(x)dx\right)}{1-\alpha}.$$

Καθώς το περιθώριο ασφαλείας του αντασφαλιστή είναι μεγαλύτερο από εκείνο του ασφαλιστή, δηλαδή $Θ_R>Θ_I$, συμπεραίνεται ότι

$$\frac{u_R+P_R}{1-\alpha}>\frac{u_I+P_I}{\alpha}.$$

Αναλύοντας την σχέση μεταξύ $\frac{u_I+P_I}{\alpha}$ και $\frac{d}{\alpha}$ έχουμε ότι,

- $\frac{u_I+P_I}{\alpha} < \frac{d}{\alpha}$

  ή
- $\frac{u_I+P_I}{\alpha} = \frac{d}{\alpha} \Leftrightarrow u_I + P_I = d \Leftrightarrow u_I + (1 + Θ_R)E(X) = d + P_R$

  ή
- $\frac{u_I+P_I}{\alpha} > \frac{d}{\alpha}$.

Συνεπώς, η από κοινού πιθανότητα επιβίωσης Pr_J διαμορφώνεται ως,

$$\begin{aligned}
\Pr[X_I \le u_I + P_I,\quad X_R \le u_R + P_R]
&= \Pr[\,\alpha X \le d\,]\Pr[\,\alpha X \le u_I + P_I,\\
&\quad (1-\alpha)X \le u_R + P_R | \alpha X \le d + \Pr[\,aX > d\,]\,Pr\,[\,\alpha\\
&\quad \le u_I + P_I,\ X - \alpha \le u_R + P_R | aX > d\,]\\
&= \Pr[\,X \le d\,]\Pr\left[X \le \frac{u_I+P_I}{\alpha},\ X \le \frac{u_R+P_R}{1-\alpha} \middle| aX \le d\right]\\
&\quad + \Pr[\alpha X > d\,]\Pr[\,d \le u_I + P_I,\ X \le u_R + d + P_R | \alpha X > d\,]\\
&= \Pr\left[X \le \frac{u_I + P_I}{\alpha},\quad X \le \frac{u_R + P_R}{1-\alpha},\quad X \le \frac{d}{\alpha}\right]\\
&\quad + \Pr\left[d \le u_I + P_I,\quad X \le u_R + d,\quad X > \frac{d}{\alpha}\right].
\end{aligned}$$

Η οποία μπορεί να δοθεί ως εξής,

$$Pr_J(\alpha,d) = \begin{cases} F(d+u_R+P_R) & \text{για } d \le u_I + P_I \\ F(\frac{u_I + P_I}{\alpha}) & \text{για } d > u_I + P_I \end{cases}$$

$$Pr_J(\alpha,d) = \begin{cases} F(m+u_R+P_R) & \text{για } d + P_R \le u_I + (1+Θ_I)E(X) \\ F(\frac{u_I + P_I}{\alpha}) & \text{για } d + P_R > u_I + (1+Θ_I)E(X) \end{cases}$$

Ας υποθέσουμε γενικά μια συνεχή συνάρτηση $f(\alpha,\beta)$, με $\alpha,\beta \in R^{+}$.Αν για κάθε σταθερό β, η $f(\alpha,\beta)$ είναι μια μονοκόρυφη συνάρτηση ως προς α και $f(\hat{a},\beta) = \max_{a} f(\alpha,\beta)$ και για κάθε σταθερό α, η $f(\alpha,\beta)$ είναι μια μονοκόρυφη συνάρτηση ως προς β και $f\left(\alpha,\hat{\beta}\right) = \max_{\beta} f(\alpha,\beta)$.

Τότε,

$$f\left(\hat{\alpha},\hat{\beta}\right) = \max_{\alpha,\beta} f(\alpha,\beta).$$

Συνεπώς, παρακάτω θα προσδιοριστεί η βέλτιστη κράτηση $\left(\hat{\alpha},\hat{d}\right)$ η οποία μεγιστοποιεί την από κοινού πιθανότητα επιβίωσης $Pr_J(\alpha,d)$ ικανοποιώντας την$Pr_J\left(\hat{\alpha},\hat{d}\right) = \max_{\alpha,d} Pr_J(a,d)$.

Σε αυτό το σημείο θα θέσουμε $u_R = 0$ και $u_I = 0$και θα ορίσουμε $d + P_R = G_1(\alpha,d)$.

Αν ισχύει η συνθήκη $\min_{\alpha} G_1\left(\alpha, \alpha F^{-1}\left(\frac{\theta_R}{1+\theta_R}\right)\right) < (1+\theta_I)E(X)$, τότε η από κοινού πιθανότητα επιβίωσης επιτυγχάνεται όταν ικανοποιείται η συνθήκη,

$$(1+\Theta_I)E(X) = m + P_R \tag{3.1.1}$$

Όπως αναφέρεται παραπάνω για την από κοινού πιθανότητα επιβίωσης Pr_J ισχύει ότι,

$$Pr_J(\alpha,d) = \begin{cases} F(m+P_R) & \text{για } d \leq P_I \\ F\left(\frac{P_I}{\alpha}\right) & \text{για } d > P_I \end{cases}$$

$$Pr_J(\alpha,d) = \begin{cases} F(m+P_R) & \text{για } d + P_R \leq (1+\Theta_I)E(X) \\ F\left(\frac{P_I}{\alpha}\right) & \text{για } d + P_R > (1+\Theta_I)E(X) \end{cases}$$

Με βάση την 3.1.1,

$$\alpha + P_R = d - d + (1+\Theta_I)E(X) = (1+\Theta_I)E(X)$$

$$\frac{P_I}{\alpha} = \frac{(1+\Theta_I)E(X) - P_R}{\alpha} = \frac{d}{\alpha}.$$

Η μέγιστη τιμή της Pr_J είναι ίση ή μικρότερη από την μεγαλύτερη μεταξύ των $F\big((1+\Theta_I)E(X)\big)$ και $F\left(\frac{d}{\alpha}\right)$.

Για να ορίσουμε τα κρίσιμα σημεία της μιας f(x,y) απαιτείται:

- Η δεύτερη παράγωγος f''_{xx} , $f''_{yy,}f''_{xy}$και
- $\varDelta = f''_{yy}f''_{xx} - (f''_{xx})^2$.

Κατά συνέπεια,

- όταν $\Delta > 0$ και $f''_{xx} < 0$ τότε το σημείο είναι τοπικό μέγιστο,
- όταν $\Delta > 0$ και $f''_{xx} > 0$ τότε το σημείο είναι τοπικό ελάχιστο και
- όταν $\Delta < 0$ τότε το σημείο είναι σασματικό.

$$\frac{\partial G_1(\alpha,d)}{\partial d} = 1-(1+\theta_R)\left(1-F\left(\frac{d}{\alpha}\right)\right) = (1+\theta_R)F\left(\frac{d}{\alpha}\right) - \theta_R$$

$$\frac{\partial G_1(\alpha,d)}{\partial \alpha} = (1+\theta_R)\left(\int_{\frac{d}{\alpha}}^{\infty} x\,F(X)dx - E(X)\right) = -(1+\theta_R)\int_0^{\frac{d}{\alpha}} xF(X)dx < 0,$$

$$\frac{\partial^2 G_1(\alpha,d)}{\partial d^2} = (1+\theta_R)\frac{1}{\alpha}f\left(\frac{d}{\alpha}\right) > 0,$$

$$\frac{\partial^2 G_1(\alpha,d)}{\partial \alpha\,\partial d} = -(1+\theta_R)\frac{d}{\alpha^2}f\left(\frac{d}{\alpha}\right) < 0$$

$$\frac{\partial^2 G_1(\alpha,d)}{\partial \alpha^2} = (1+\theta_R)\frac{d^2}{\alpha^3}f\left(\frac{d}{\alpha}\right) > 0$$

Συμπεραίνεται, λοιπόν, πως η $G_1(\alpha,d)$ είναι γνησίως φθίνουσα κυρτή συνάρτηση ως προς α και όταν το α αποκτήσει την μικρότερη δυνατή τιμή η $G_1(\alpha,d)$μεγιστοποιείται.

Η $G_1(\alpha,d)$ είναι μια κυρτή συνάρτηση η οποία μεγιστοποιείται όταν,

$$(1+\theta_R)F\left(\frac{d}{\alpha}\right) - \theta_R = 0$$

$$F\left(\frac{d}{\alpha}\right) = \frac{\theta_R}{(1+\theta_R)}.$$

Ορίζοντας ότι $G_2(\alpha, d) = \frac{P_I}{\alpha}$ ισχύει,

$$G_2(a, d) = \frac{(1+\theta_I)E(X) - P_R}{a}$$

$$G_2(a, d) = \frac{(1+\theta_I)E(X) - (1+\Theta_R)\left((1-a)E(X) + \int_{\frac{d}{\alpha}}^{\infty}(\alpha x - d)F(x)dx\right)}{a}$$

$$G_2(a, d) = \frac{(\theta_I - \theta_R)E(X) - (1+\theta_R)\int_{\frac{d}{a}}^{\infty}(ax - d)dF(x)}{a} + (1+\theta_R)E(X)$$

$$\frac{\partial G_2(a, d)}{\partial d} = \frac{(1+\theta_R)}{\alpha}\left(1 - F\left(\frac{d}{\alpha}\right)\right) > 0,$$

$$\frac{\partial G_2(\alpha, d)}{\partial \alpha} = \frac{-(1+\theta_R)\int_{\frac{d}{\alpha}}^{\infty} xF(X)dx}{\alpha} - \frac{(\theta_I - \theta_R)E(X) - (1+\theta_R)\int_{\frac{d}{\alpha}}^{\infty}(\alpha x - d)F(x)dx}{\alpha^2}$$

$$= \frac{(\theta_R - \theta_I)E(X) - (1+\theta_R)\alpha\left(1 - F\left(\frac{d}{\alpha}\right)\right)}{\alpha^2}$$

$$\frac{\partial^2 G_2(\alpha, d)}{\partial d^2} = -\frac{(1+\theta_R)}{a^2} f\left(\frac{d}{\alpha}\right) < 0,$$

$$\frac{\partial^2 G_2(\alpha, d)}{\partial \alpha\, \partial d} = \frac{(1+\theta_R)d}{\alpha^3} f\left(\frac{d}{\alpha}\right) - \frac{(1+\theta_R)}{\alpha^2}\left(1 - F\left(\frac{d}{\alpha}\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2 G_2(\alpha, d)}{\partial \alpha^2} = 2\frac{(1+\theta_R)m\left(1 - F\left(\frac{d}{\alpha}\right)\right) - (\theta_R - \theta_I)E(X)}{\alpha^3} - \frac{(1+\theta_R)d^2 f\left(\frac{d}{\alpha}\right)}{\alpha^4}.$$

Συνεπώς, η $G_2(\alpha, d)$είναι γνησίως αύξουσα κυρτή συνάρτηση ως προς d και όταν το d αποκτήσει την μέγιστη δυνατή τιμή η $G_2(\alpha, d)$ μεγιστοποιείται.

Η $G_2(\alpha, d)$είναι μια κυρτή συνάρτηση η οποία μεγιστοποιείται όταν,

$$\frac{(\theta_R - \theta_I)E(X) - (1+\theta_R)d\left(1 - F\left(\frac{d}{\alpha}\right)\right)}{\alpha^2} = 0$$

$$(\theta_R - \theta_I)E(X) = (1+\theta_R)d\left(1 - F\left(\frac{d}{\alpha}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} G_2(a,d) &= \frac{(\theta_I - \theta_R)E(X) - (1+\theta_R)\int_{\frac{d}{a}}^{\infty}(ax-d)F(x)dx}{a} + (1+\theta_R)E(X) \\ &= \frac{(\theta_I - \theta_R)E(X) - (1+\theta_R)a\int_{\frac{d}{a}}^{\infty} xF(x)dx + d(1+\theta_R)\int_{\frac{d}{a}}^{\infty}F(x)dx}{a} \\ &\quad +(1+\theta_R)E(X) \\ &= (1+\theta_R)E(X) - (1+\theta_R)\int_{\frac{d}{a}}^{\infty} xF(x)dx \\ &= (1+\theta_R)\int_0^{\frac{d}{a}} xF(x)dx \end{aligned}$$

I. Εφόσον ισχύει ότι,

$$\min_{\alpha} G_1\left(\alpha, \alpha F^{-1}\left(\frac{\theta_R}{1+\theta_R}\right)\right) < (1+\theta_I)E(X)$$

τότε η από κοινού πιθανότητα επιβίωσης επιτυγχάνεται όταν ικανοποιείται η συνθήκη,

$$(1+\Theta_I)E(X) = d + P_R + u_R.$$

Με $G_1(a,d) = (1+\Theta_I)E(X) + u_R$ και $G_1(a,d) > G_2(a,d)$, η μέγιστη από κοινού πιθανότητα επιβίωσης Pr_J δίνεται από τη σχέση,

$$F(G_1(\alpha,d) = F\big((1+\Theta_I)E(X)\big).$$

II. Για να επιτευχθεί η μεγιστοποίηση της από κοινού πιθανότητα επιβίωσης Pr_J, η μέγιστη τιμή του d πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη

$$(\theta_I - \theta_R)E(X) = (1+\theta_R)d\left(1 - F\left(\frac{d}{\alpha}\right)\right),$$

καθώς $P_I < d$, τα α, d πρέπει να ικανοποιούν την συνθήκη,

$$d > a(1+\theta_R)\int_0^{\frac{d}{a}} xF(x)dx.$$

Τότε η μέγιστη από κοινού πιθανότητα επιβίωσης Pr_J δίνεται από $F\big((\alpha, d)\big) = F\left(\frac{d}{\alpha}\right)$.

3.2 Βέλτιστη κράτηση μέσω της προσέγγισης De Vylder

Στη θεωρία του ασφαλιστικού κινδύνου, ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα είναι η αξιολόγηση της πιθανότητας καταστροφής και των συναφών μεγεθών, όπως το πλεόνασμα αμέσως πριν από την καταστροφή και το έλλειμμα κατά την καταστροφή.

Για τις ποσότητες αυτές υπάρχουν χρήσιμοι υπολογιστικοί τύποι, όταν η κατανομή μεγέθους ζημιών είναι γνωστή και ικανοποιεί ορισμένες επιθυμητές ιδιότητες.

Με μερική πληροφόρηση για το μέγεθος των επιμέρους απαιτήσεων, η βασική ιδέα της μεθόδου του De Vylder είναι να αντικαταστήσει μια σύνθετη Poisson με μια σύνθετη Poisson με εκθετικές ζημιές, γεγονός που καθιστά τις τρεις πρώτες στιγμές της διαδικασίας κινδύνου με γενικές απαιτήσεις ίσες με τις αντίστοιχες της διαδικασίας κινδύνου με εκθετικές απαιτήσεις.

Ως εκ τούτου, η πιθανότητα χρεοκοπίας στη διαδικασία κινδύνου προσεγγίζεται από την πιθανότητα χρεοκοπίας στη διαδικασία κινδύνου με εκθετικές ζημιές .

Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή, στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου η διαδικασία πλεονάσματος του ασφαλιστή δίνεται $U(t)t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο,

$$U(t) = u + P(t) - S(t)$$

όπου,

- U, το αρχικό πλεόνασμα του ασφαλιστή,
- $P(t)$, τα εισπρακτέα ασφάλιστρα και
- $S(t)$, η συνολική διαδικασία απαιτήσεων.

Επιπλέον T, η τυχαία μεταβλητή η οποία δηλώνει την στιγμή της χρεοκοπίας έτσι ώστε $T = \inf\{t \mid U(t) < 0\}$.

Στη περίπτωση που υπάρχει αντασφάλιση, για τις μεταβολές του πλεονάσματος στο κλασσικό πρότυπο δεν χρησιμοποιείται η παραπάνω σχέση, αλλά το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t δίνεται από την σχέση,

$$U(t) = u_I + P_I - \sum_{k=1}^{N(t)} X_{I_k}$$

όπου,

- P_I , το καθαρό ασφάλιστρο που εισπράττει η πρωτασφαλίστρια εταιρεία(αφαιρώντας δηλαδή το ασφάλιστρο που πληρώνεται στην αντασφαλίστρια εταιρεία) και
- X_{I_k} , για $\kappa = 1,2,3 \ldots$ το ποσό που πληρώνει η πρωτασφαλίστρια εταιρεία για την κ απαίτηση.

Σε αυτό το σημείο θα εξεταστεί το σύνθετο μοντέλο κινδύνου Poisson, τροποποιημένο κατάλληλα με την αντασφάλιση και τον τόκο, δηλαδή εξετάζεται η περίπτωση όπου ο ασφαλιστής εισπράττει τους τόκους επί του πλεονάσματος με ένα συνεχώς ανατοκιζόμενο τόκο r.

Εξετάζεται, δηλαδή, η ακόλουθη διαδικασία ασφαλιστικού πλεονάσματος,

$$U_r(t) = u_I e^{rt} + P_I \bar{s}_{\overline{t}|} - \sum_{i=1}^{N(t)} X_{I_i} e^{r(t-T_i)},$$

με,

- $\bar{s}_{\overline{t}|} = \frac{(e^{rt}-1)}{r}$,
- $P_I \bar{s}_{\overline{t}|}$ να είναι το συσσωρευμένο εισόδημα από ασφάλιστρα κατά το χρονικό διάστημα $[0, t]$και
- T_i η στιγμή της «i» ζημιάς.

Το πλεόνασμα του ασφαλιστή μπορεί να δοθεί από την σχέση,

$$U_r(t) = u_I e^{rt} + \frac{P_I(e^{rt} - 1)}{r} - \sum_{i=1}^{N(t)} X_{I_i} e^{r(t-T_i)},$$

με την στιγμή της χρεοκοπίας να είναι

$$T_r = \inf\{t \mid U_r(t) < 0\}$$

και τη πιθανότητα χρεοκοπίας να ορίζεται από την σχέση

$$\psi_r(u_I) = \Pr\{U_{t\geq 0}(U_r(t) < 0)\}.$$

Σύμφωνα με την προσέγγιση DeVylder ισχύει ότι,

$$\tilde{U}_r(t) = u_I e^{rt} + \frac{\tilde{P}_I(e^{rt} - 1)}{\delta} - \sum_{i=1}^{\tilde{N}(t)} \tilde{X}_i e^{r(t-\tilde{T}_i)},$$

όπου $\tilde{X}_i$ ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή $\tilde{\mu}$ και$\tilde{N}(t)$ είναι μια διαδικασία Poisson με ένταση $\tilde{\lambda}$.

Για τον υπολογισμό των $\tilde{\mu}$, $\tilde{\lambda}$και $\tilde{P}_I$ η συνθήκη που έθεσε ο De Vylder είναι ότι για $t \geq 0$, οι τρεις πρώτες ροπές του πλεονάσματος, $U(t)$ για την αρχική ανέλιξη και $\widetilde{U(t)}$ για την προσεγγιστική ανέλιξη, να είναι ίσες. Δηλαδή πρέπει να ισχύει η σχέση,

$$E\left[U_r^k(t)\right] = E\left[\tilde{U}_r^k(t)\right] k = 1,2,3.$$

Για την πιθανότητα χρεοκοπίας ισχύει,

$$\tilde{\psi}_r(u_I) = \frac{\Gamma\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{r}}, \frac{\tilde{P}_I}{\tilde{r}\tilde{\mu}} + \frac{u_I}{\tilde{r}}\right)}{\Gamma\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{r}}, \frac{\tilde{P}_I}{r\tilde{\mu}}\right) + \frac{\tilde{r}}{\lambda}\left(\frac{\tilde{P}_I}{\lambda\tilde{\mu}}\right)^{\tilde{\lambda}/\tilde{r}} e^{-\frac{\tilde{P}_I}{r\mu}}}.$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι τρεις πρώτες ροπές του πλεονάσματος ως εξής,

$$E[U_r(t)] = u_I e^{rt} + (P_I - \lambda\mu)\frac{e^{rt} - 1}{r}$$

$$E[U_r^2(t)] = (u_I e^{rt})^2 + 2u_I(P_I - \lambda\mu_1)e^{rt}\frac{e^{rt} - 1}{r} + (P_I - \lambda\mu_1)^2\left(\frac{e^{rt} - 1}{r}\right)^2 + \lambda\mu_2\frac{e^{2rt} - 1}{2r}$$

$$E[U_r^3(t)] = (u_I e^{rt})^3 + 3u_I^2(P_I - \lambda\mu_1)e^{2rt}\frac{e^{rt} - 1}{r} + 3u_I\lambda\mu_2 e^{rt}\frac{e^{2rt} - 1}{2r} + 3u_I(P_I - \lambda\mu_1)^2 e^{rt}\left(\frac{e^{rt} - 1}{r}\right)^2 + (P_I - \lambda\mu_1)^3\left(\frac{e^{rt} - 1}{r}\right)^3 + 3\lambda\mu_2(P_I - \lambda\mu_1)\frac{e^{rt} - 1}{r}\frac{e^{2rt} - 1}{2r} - \lambda\mu_3\frac{e^{3rt} - 1}{3r}$$

μ_1, μ_2, μ_3 είναι οι πρώτες ροπές του X_I.

Οι παραπάνω ροπές προκύπτουν θέτοντας $D\ (k, v)$, κατά συνέπεια έχουμε ότι,

$$X_r(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_{I_i} e^{-rT_i} = \sum_{i=1}^{N(t)} D\left(T_i, X_{I_i}\right).$$

Από γνωστό λήμμα,

$$E\left[e^{izX_r(t)}\right] = e^{\lambda \int_0^t \int_0^\infty \left(e^{izxe^{-rv}} - 1\right) G(x)dxdv}$$

έστω $s = -zi$ προκύπτει ο μετασχηματισμός laplace της $X_r(t)$,

$$\hat{g}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} G(x)dx.$$

$$E\left[e^{-sX_r(t)}\right] = e^{\lambda \int_0^t \int_0^\infty \left(e^{-sxe^{-rv}} - 1\right) G(x)dxdv} = e^{\lambda \int_0^t (\hat{g}(se^{-rv}) - 1)dv}.$$

Ο μετασχηματισμός Laplace του αθροίσματος $\sum_{i=1}^{N(t)} X_{I_i} e^{-r(t-T_i)}$ δίνεται από την σχέση,

$$\varphi(s) = E\left[e^{-se^{rt}X_r(t)}\right]$$

$$= e^{\lambda \int_0^t \left(\hat{g}\left(se^{rt}e^{-rv}\right) - 1\right)dv} = e^{\lambda \int_0^t \left(\hat{g}\left(se^{r(t-v)}\right) - 1\right)dv}$$

$$= e^{\lambda \int_0^t (\hat{g}(se^{rx}) - 1)dx}$$

$$\varphi'(s) = \varphi(s)\lambda \int_0^t \hat{g}'(se^{rx})e^{rx}dx$$

$$\varphi''(s) = \varphi'(s)\lambda \int_0^t \hat{g}'(se^{rx})e^{rx}dx + \varphi(s)\lambda \int_0^t \hat{g}''(se^{rx})e^{2rx}dx$$

$$\varphi'''(s) = \varphi''(s)\lambda \int_0^t \hat{g}'(se^{rx})e^{rx}dx + \varphi'(s)\lambda \int_0^t \hat{g}''(se^{rx})e^{2rx}dx$$
$$+ \varphi'(s)\lambda \int_0^t \hat{g}''(se^{rx})e^{2rx}dx + \varphi(s)\lambda \int_0^t \hat{g}'''(se^{rx})e^{3rx}dx$$

Δοθέντος ότι,

- $\varphi(s) = E[e^{-sx}]$
- $\varphi^{(k)}(s) = E\left[(-X)^k e^{-sX}\right]$

Τότε $\varphi^{(k)}(0) = (-1)^k \mu_\kappa$

$$\varphi'(0) = \lambda \int_0^t \hat{g}'(0)e^{rx}dx = -\lambda\mu_1 \int_0^t e^{rx}dx = -\lambda\mu_1 \frac{e^{rt} - 1}{r} = -E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_{I_i} e^{r(t-T_i)}\right]$$

$$\varphi''(0) = \varphi'(0)\lambda \int_0^t \hat{g}'(0)e^{rx}dx + \varphi(0)\lambda \int_0^t \hat{g}''(0)e^{2rx}dx$$

$$= -\lambda\mu_1 \frac{e^{rt}-1}{r}\lambda(-\mu_1)\frac{e^{rt}-1}{r} + \lambda\mu_2\frac{e^{2rt}-1}{2r}$$

$$= (\lambda\mu_1)^2\left(\frac{e^{rt}-1}{r}\right)^2 + \lambda\mu_2\frac{e^{2rt}-1}{2r} = E\left[\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_{I_i}e^{r(t-T_i)}\right)^2\right].$$

$$\varphi'''(0) = \left((\lambda\mu_1)^2\left(\frac{e^{rt}-1}{r}\right)^2 + \lambda\mu_2\frac{e^{2rt}-1}{2r}\right)\lambda\int_0^t \hat{g}'(0)e^{rx}dx$$

$$+\left(-\lambda\mu_1\frac{e^{rt}-1}{r}\right)\lambda\int_0^t \hat{g}''(0)e^{2rx}dx$$

$$+\left(-\lambda\mu_1\frac{e^{rt}-1}{r}\right)\lambda\int_0^t \hat{g}''(0)e^{2rx}dx + \lambda\int_0^t \hat{g}'''(0)e^{3rx}dx$$

$$= \left((\lambda\mu_1)^2\left(\frac{e^{rt}-1}{\delta}\right)^2 + \lambda\mu_2\frac{e^{2rt}-1}{2r}\right)\lambda(-\mu_1)\frac{e^{rt}-1}{r}$$

$$+\left(-\lambda\mu_1\frac{e^{rt}-1}{r}\right)\lambda\mu_2\frac{e^{2rt}-1}{2r} + \left(-\lambda\mu_1\frac{e^{rt}-1}{r}\right)\lambda\mu_2\frac{e^{2rt}-1}{2r}$$

$$+\lambda(-\mu_3)\frac{e^{3rt}-1}{3r}$$

$$= -(\lambda\mu_1)^3\left(\frac{e^{rt}-1}{r}\right)^3 - 3\lambda^2\mu_1\mu_2\frac{e^{2rt}-1}{2r}\frac{e^{rt}-1}{r} - \lambda\mu_3\frac{e^{3rt}-1}{3r}$$

$$= -E\left[\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_{I_k}e^{\delta(t-T_i)}\right)^3\right].$$

__Θεώρημα 3.2__

- Για την πρώτη ροπή ισχύει

$$\mathrm{E}[\mathrm{U_r(t)}] = \mathrm{E}\big[\widetilde{\mathrm{U}}^{\mathrm{k}}(\mathrm{t})\big]$$

$$u_I e^{rt} + (P_I - \lambda\mu_1)\frac{e^{rt}-1}{r} = u_I e^{rt} + \big(\widetilde{P}_I - \tilde{\lambda}\tilde{\mu}\big)\frac{e^{rt}-1}{r}$$

$$\boxed{P_I - \lambda\mu_1 = \tilde{P}_I - \tilde{\lambda}\tilde{\mu}}$$

- Για την δεύτερη ροπή ισχύει

$$\mathrm{E}[\mathrm{U_r^2(t)}] = \mathrm{E}\big[\widetilde{\mathrm{U}}_r^2(\mathrm{t})\big]$$

$$(u_I e^{rt})^2 + 2u_I(P_I - \lambda\mu_1)e^{rt}\frac{e^{rt}-1}{r} + (P_I - \lambda\mu_1)^2\left(\frac{e^{rt}-1}{r}\right)^2 + \lambda\mu_2\frac{e^{2rt}-1}{2r}$$

$$= (u_I e^{rt})^2 + 2u_I\big(\widetilde{P}_I - \tilde{\lambda}\tilde{\mu}\big)e^{rt}\frac{e^{rt}-1}{r} + \big(\widetilde{P}_I - \tilde{\lambda}\tilde{\mu}\big)^2\left(\frac{e^{rt}-1}{r}\right)^2 + \tilde{\lambda}\tilde{\mu}^2\frac{e^{2rt}-1}{2r}$$

$$\boxed{\lambda\mu_2 = \tilde{\lambda}\tilde{\mu}^2}$$

- Για την τρίτη ροπή ισχύει

$$\mathrm{E}[\mathrm{U_r^3(t)}] = \mathrm{E}\big[\widetilde{\mathrm{U}}_r^3(\mathrm{t})\big]$$

$$\begin{aligned}
&(u_I e^{rt})^3 + 3u_I^2(P_I - \lambda\mu_1)e^{2rt}\frac{e^{rt}-1}{r} + 3u_I\lambda\mu_2 e^{rt}\frac{e^{2rt}-1}{2r}\\
&+3u_I(P_I - \lambda\mu_1)^2 e^{rt}\left(\frac{e^{rt}-1}{r}\right)^2 + (P_I - \lambda\mu_1)^3\left(\frac{e^{rt}-1}{r}\right)^3\\
&+3\lambda\mu_2(P_I - \lambda\mu_1)\frac{e^{rt}-1}{r}\frac{e^{2rt}-1}{2r} - \lambda\mu_3\frac{e^{3rt}-1}{3r}\\
=\ &(u_I e^{rt})^3 + 3u_I^2\big(\widetilde{P}_I - \tilde{\lambda}\tilde{\mu}\big)e^{2rt}\frac{e^{rt}-1}{r} + 3u_I\tilde{\lambda}\tilde{\mu}^2 e^{rt}\frac{e^{2rt}-1}{2r}\\
&+3u_I\big(\widetilde{P}_I - \tilde{\lambda}\tilde{\mu}\big)^2 e^{rt}\left(\frac{e^{rt}-1}{r}\right)^2 + \big(\widetilde{P}_I - \tilde{\lambda}\tilde{\mu}\big)^3\left(\frac{e^{rt}-1}{r}\right)^3\\
&+3\tilde{\lambda}\tilde{\mu}^2\big(\widetilde{P}_I - \tilde{\lambda}\tilde{\mu}\big)\frac{e^{rt}-1}{r}\frac{e^{2rt}-1}{2r} - 2\tilde{\lambda}\tilde{\mu}^3\frac{e^{3rt}-1}{3r},
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda\mu_3 = 2\tilde{\lambda}\tilde{\mu}^3}$$

Με βάση τα παραπάνω καταλήγουμε στις εξής σχέσεις,

- $\tilde{\mu} = \frac{\mu_3}{2\mu_2}$.
- $\tilde{\lambda} = \frac{4\mu_2^3}{\mu_3^2}\lambda$.
- $\widetilde{P}_I = P_I - \lambda\mu_1 + \frac{2\mu_2^2}{\mu_3}\lambda$.

3.3 Αντασφάλιση και Μερίσματα

3.3.1 Βέλτιστες στρατηγικές μερισμάτων

Στην κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, το πρόβλημα είναι να υπολογιστεί η πιθανότητα χρεοκοπίας, ελπίζοντας ότι η χρεοκοπία δεν θα επιτευχθεί και έτσι το πλεόνασμα θα αυξάνεται απεριόριστα κάτι το οποίο όμως δεν είναι ρεαλιστικό.

Ο De Finetti πρότεινε ότι, μια εταιρεία θα πρέπει να επιδιώκει να μεγιστοποιήσει την προσδοκία της παρούσας αξίας όλων των μερισμάτων πριν από μια πιθανή χρεοκοπία. Έδειξε λοιπόν ότι, υπό την υπόθεση ότι το πλεόνασμα της εταιρείας είναι μια διακριτή διαδικασία με βήματα μεγέθους συν ή μείον (ένα μόνο), η βέλτιστη στρατηγική καταβολής μερισμάτων είναι μια στρατηγική φραγμού, δηλαδή, κάθε πλεόνασμα πάνω από ένα ορισμένο επίπεδο θα καταβάλλεται ως μέρισμα στους μετόχους της εταιρείας.

Σε μια σειρά εγγράφων, ο KarlBorch ακολούθησε αυτές τις ιδέες,τις οποίες έκανε προσιτές και στους οικονομολόγους. Επιπλέον οι Jeanblan -Picque´ και Shiryaev (1995) και οι Asmussen και Taksar (1997) απέδειξαν πως στο μοντέλο κίνησης Brown, ότι η βέλτιστη στρατηγική μερισμάτων είναι μια στρατηγική κατωφλίου, δηλαδή, τα μερίσματα θα πρέπει να καταβάλλονται στο μέγιστο επιτρεπτό ποσοστό μόλις το πλεόνασμα υπερβαίνει μία ορισμένη τιμή «κατωφλίου». Μερικοί πραγματικοί υπολογισμοί για αυτό το μοντέλο μπορούν να βρεθούν στους Gerber και Shiu (2006) οι οποίοι γενίκευσαν το μοντέλο σε μια σύνθετη

Poisson και παρείχαν τύπο της αναμενόμενης αξίας του μερίσματος για απαιτήσεις με εκθετική κατανομή.

Στη κλασσικό μοντέλο θεωρίας κινδύνου, η διαδικασία πλεονάσματος όπως είδαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο δίνεται από την σχέση,

$$U(t) = U(0) + ct - S(t).$$

Τα ασφάλιστρα εισπράττονται με σταθερό ρυθμό c και η διαδικασία συνολικών απαιτήσεων S(t) είναι μια σύνθετη Poisson με παράμετρο λ και πυκνότητα πιθανότητας κάθε ποσού $p(y), y \geq 0$.

Γίνεται η υπόθεση, λοιπόν, πως η ασφαλιστική εταιρεία είναι μετοχική και ότι τα μερίσματα καταβάλλονται στους μετόχους σύμφωνα με μια στρατηγική μερίσματος. Έστω, ότι τα συνολικά μερίσματα τα οποία καταβλήθηκαν μεταξύ χρόνου 0 και t, συμβολίζονται με D(t) και το αρχικό πλεόνασμα της εταιρείας, χωρίς τις πληρωμές των μερισμάτων, την χρονική στιγμή t να ορίζεται X(t). Τότε ισχύει,

$$X(t) = U(t) - D(t).$$

Έστωη στιγμή χρεοκοπίας,

$$T = \inf\{t \geq 0 \,|X(t) < 0\}$$

η παρούσα αξία όλων των μερισμάτων έως την στιγμή της χρεοκοπίας με ένταση ανατοκισμούδ > 0, δίνεται από την σχέση

$$D = \int_0^T e^{-\delta t} D(t) dT$$

Με V(u) ορίζεται το μέγιστο της E[D] , το οποίο λαμβάνεται σε όλες τις αποδεκτές στρατηγικές διανομής των μερισμάτων, και u είναι το αρχικό πλεόνασμα της εταιρείας,

$$X(0) = U(0).$$

Η συνάρτηση v(u) ικανοποιεί την λεγόμενη Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) συνάρτηση εξίσωσης, δηλαδή

$$\mathrm{Max}_{0\leq r\leq \varepsilon}\{r+(c-r)V'(u)\}-(\lambda+\delta)V(u)+\lambda\int_0^u V(u-y)p(y)dy=0, u\geq 0.$$

Στην περίπτωση όπου, για την λύση της ανωτέρω ισότητας, ισχύει ότι $V'(u)>1$ για $u<b$ και $V'(u)<1$ για $u>b$, για κάποια τιμή b, τότε η βέλτιστη στρατηγική διανομής μερισμάτων είναι ιδιαίτερα «ελκυστική». Αν $X(t)<b$τότε δεν καταβάλλονται μερίσματα, ενώ στην περίπτωση που $X(t)>b$, τα μερίσματα καταβάλλονται στο μέγιστο ρυθμό ε. Έτσι, η τιμή κατωφλίουb, έχει το ρόλο ενός σημείου διακοπής ή ενός ορίου εναλλαγής καθεστώτος. Η συγκεκριμένη στρατηγική ονομάζεται στρατηγική κατωφλίου.

Έστω $V(u;b)$ η αναμενόμενη τιμή της παρούσας αξίας όλων των μερισμάτων έως την χρεοκοπία, όπου u είναι το αρχικό πλεόνασμα και b η τιμή «κατωφλίου». Η $V(u;b)$ ικανοποιεί τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$cV'(u;b)-(\lambda+\delta)V(u;b)+\lambda\int_0^u V(u-y;b)p(y)dy=0 \quad \text{για } 0<u<b\,. \tag{3.3.1}$$

$$\varepsilon+(c-\varepsilon)V'(u;b)-(\lambda+\delta)V(u;b)+\lambda\int_0^u V(u-y;b)p(y)dy=0 \quad \text{για } u>b. \tag{3.3.2}$$

Όταν το $u\to\infty$, η $V(u;b)$ προσεγγίζει την παρούσα αξία ενός διηνεκούς συμβολαίου με συνεχής πληρωμές και ρυθμό ε.

$$\lim_{u\to\infty} V(u;b)=\frac{\varepsilon}{\delta} \tag{3.3.3}$$

Από την σχέση,

$$e^{-\frac{(\delta+\lambda)y}{c}}V(b;b)<V(b-y;b)<V(b;b)\ 0<y\leq b,$$

είναι εμφανές πως η$V(u;b)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση του u στο $u=b$.

Από τις εξισώσεις 3.3.1και 3.3.3προκύπτει η σχέση,

$$cV'(b-;b) = (c-\varepsilon)V'(b+;b) + \varepsilon.$$

Επιπλέον η διαφορική εξίσωση,

$$ch'(u) - (\lambda+\delta)h(u) + \lambda\int_0^u h(u-y)p(y)dy = 0 \quad \text{για } u > 0 \qquad \mathbf{3.3.4}$$

έχει μοναδικήh(u).

$$V(u;b) = \gamma h(u)$$

<u>Παράδειγμα 3.1</u>

Θεωρούμε ότι οι απαιτήσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,

$$p(x) = \beta e^{-\beta x}.$$

Τότε, η διαφορική εξίσωση 3.3.4, μετατρέπεται σε γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς παράγοντες,

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} + \beta\right)\int_0^u h(u-y)p(y)dy = \beta h(u) \quad \text{για } u \geq 0$$

$$h(u)p(0) + \int_0^u h(y)p'(u-y)dy = \beta\left[h(u) - \int_0^u h(y)p(u-y)dy\right].$$

Εφαρμόζοντας το $\left(\frac{\partial}{\partial u} + \beta\right)$ στην εξίσωση 3.3.4, προκύπτει η διαφορική εξίσωση,

$$ch''(u) + (\beta c - \lambda - \delta)h'(u) - \beta\delta h(u) = 0$$

με την λύση της εξίσωσης να δίνεται από την σχέση,

$$h(u) = C_0 e^{rx} + C_1 e^{sx},$$

όπου r, s είναι οι τιμές όπου επαληθεύουν την χαρακτηριστική εξίσωση

$$c\xi^2 + (\beta c - \lambda - \delta)\xi - \beta\delta = 0$$

$$\lambda\beta\left(\frac{C_0}{r+\beta} + \frac{C_1}{s+\beta}\right) = 0$$

συνεπώς, η h(u) είναι ανάλογη με

$$(r+\beta)e^{ru} - (s+\beta)e^{su}.$$

Δεδομένου ότι $V(u;b) = \gamma h(u)$, δίνεται η σχέση,

$$V(u;b) = \gamma[(r+\beta)e^{ru} - (s+\beta)e^{su}], \qquad \text{με } 0 \leq u \leq b.$$

στη περίπτωση όπου $\varepsilon = c$ τότε,

$$\gamma = \frac{1}{(r+\beta)re^{rb} - (s+\beta)se^{sb}}$$

$$(c-\varepsilon)V''(u;b) + [\beta(c-\varepsilon) - \lambda - \delta]V'(u;b) - \beta\delta V(u;b) + \beta\varepsilon = 0, \quad u > b.$$

Για την παραπάνω η σταθερή συνάρτηση $\frac{\varepsilon}{\delta}$ είναι μια συγκεκριμένη λύση, όπου σε συνδυασμό με την3.3.3, συμπεραίνεται ότι,

$$V(u;b) = \frac{\varepsilon}{\delta} + De^{wu}.$$

Με w, να είναι η αρνητική λύση της εξίσωσης,

$$(c-\varepsilon)\xi^2 + [\beta(c-\varepsilon) - \lambda - \delta]\xi - \beta\delta = 0.$$

Στη συνέχεια, για να προσδιοριστεί η σταθερά γ και το D ισχύει ότι

$$V(b-;b) = V(b+;b)$$

$$\gamma\left[(r+\beta)e^{rb} - (s+\beta)e^{sb}\right] = \frac{\varepsilon}{\delta} + De^{wb}.$$

Το ολοκλήρωμα της συνέλιξης της 3.3.2είναι,

$$\int_0^u V(z;b)p(u-z)dz = \gamma\int_0^b [(r+\beta)e^{r\varepsilon} - (s+\beta)e^{s}]p(u-z)dz +$$
$$+\int_b^u \left[\frac{\varepsilon}{\delta} + De^{wz}\right]p(u-z)dz$$

$$= \beta e^{-\beta u}\left\{\gamma\left(e^{(\beta+r)b} - e^{(\beta+s)b}\right) + \frac{\varepsilon}{\delta}\frac{1}{\beta}\left(e^{\beta u} - e^{\beta b}\right) + D\frac{1}{\beta+w}\left[e^{(\beta+w)u} - e^{(\beta+w)b}\right]\right\}.$$

Θέτοντας τον συντελεστή του $e^{-\beta u}$ στο 0 και ακυρώνοντας παράλληλα τον παράγοντα $\beta e^{\beta b}$, ισχύει ότι

$$\gamma(e^{rb} - e^{sb}] - \frac{\varepsilon}{\delta\beta} - \frac{De^{wb}}{\beta+w} = 0$$

$$\gamma = \frac{-w}{\beta}\frac{\varepsilon}{\delta}\frac{1}{(r-w)e^{rb} - (s-w)e^{sb}}.$$

Τότε, η αναμενόμενη τιμή της παρούσας αξίας όλων των μερισμάτων έως την χρεοκοπία δίνεται από την σχέση,

$$V(u;b) = \frac{-w}{\beta}\frac{\varepsilon}{\delta}\frac{(\beta+r)e^{ru} - (\beta+s)e^{su}}{(r-w)e^{rb} - (s-w)e^{sb}} \qquad 0 \le u \le b$$

$$V(u;b) = \frac{\varepsilon}{\delta}\left[1 - e^{w(u-b)}\right] + V(b;b)e^{w(u-b)} \qquad u \ge b$$

$$V(0;0) = \frac{-w}{\beta}\frac{\varepsilon}{\delta}.$$

3.3.2 Βέλτιστες στρατηγικές μερισμάτων με Quota-share

Σκοπός της τρέχουσας ενότητας είναι να προσδιοριστεί ο βέλτιστος ρυθμός κράτησης α (quota-share), ώστε να μεγιστοποιηθεί το αναμενόμενο μέρισμα πριν από την ενδεχόμενη χρεοκοπία. Στη συνέχεια εξετάζονται δύο περιπτώσεις κατανομής των απαιτήσεων.

Γίνεται η υπόθεση πως, οι απαιτήσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή, στην αντασφάλιση quota-share λοιπόν, ισχύει ότι το ασφάλιστρο που λαμβάνει ο εκχωρητής είναι,

$$P_I = (\alpha(1 + \Theta_R) - (\Theta_R - \Theta_I))\lambda\mu$$

$$X_I < x$$

Άρα η συνάρτηση κατανομής δίνεται από την σχέση,

$$F_{X_I}(x) = P\left(X < \frac{x}{\alpha}\right) = F\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

και

$$f_{X_I}(x) = \frac{\beta}{\alpha} e^{\frac{-\beta}{\alpha}x}.$$

Πρόκειται, δηλαδή, για μια εκθετική κατανομή με παράμετρο $\frac{\beta}{\alpha}$ και κατά συνέπεια η αναμενόμενη τιμή της παρούσας αξίας όλων των μερισμάτων έως την χρεοκοπία δίνεται από την σχέση,

$$V_\alpha(u;b) = \frac{-w}{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{\varepsilon}{\delta} \frac{(\frac{\beta}{\alpha} + r)e^{ru} - (\frac{\beta}{\alpha} + s)e^{su}}{(r-w)e^{rb} - (s-w)e^{sb}} \qquad 0 \le u \le b$$

ή

$$V_\alpha(u;b) = \frac{\varepsilon}{\delta}\left[1 - e^{w(u-b)}\right] + V(b;b)e^{w(u-b)} \qquad u \ge b$$

$$V(0;0) = \frac{-w}{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{\varepsilon}{\delta},$$

r, s είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$P_I \xi^2 + \left[\frac{\beta}{\alpha} P_I - \lambda - \delta\right] \xi - \frac{\beta}{\alpha} \delta = 0$$

όπου

$$r = \frac{-\left(\frac{\beta}{a} P_I - \lambda - \delta\right) + \sqrt{\left(\frac{\beta}{a} P_I - \lambda - \delta\right)^2 + 4P_I \frac{\beta}{a} \delta}}{2P_I} > 0$$

$$s = \frac{-\left(\frac{\beta}{a} P_I - \lambda - \delta\right) + \sqrt{\left(\frac{\beta}{a} P_I - \lambda - \delta\right)^2 + 4P_I \frac{\beta}{a} \delta}}{2P_I} < 0$$

και w είναι η ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$(P_I - \varepsilon)\xi^2 + \left[\frac{\beta}{\alpha}(P_I - \varepsilon) - \lambda - \delta\right] \xi - \frac{\beta}{\alpha} \delta = 0$$

$$w = \frac{-\left(\frac{\beta}{a}(P_I - \varepsilon) - \lambda - \delta\right)}{2(P_I - \varepsilon)} - \frac{\sqrt{\left(\frac{\beta}{a}(P_I - \varepsilon) - \lambda - \delta\right)^2 + 4(P_I - \varepsilon)\frac{\beta}{a} \delta}}{2(P_I - \varepsilon)}$$

Για την εύρεση του βέλτιστου ποσοστού εκχώρησης quota-share, ώστε να μεγιστοποιηθεί το αναμενόμενο μέρισμα πριν από μια ενδεχομένη χρεοκοπία υπολογίζεται η παράγωγος της $V_\alpha(u; b)$ ως προς α και τίθεται ίση με το μηδέν.

Κεφάλαιο 4 Διαδικασία διάχυσης και ποσοστό προμήθειας

4.1 Βέλτιστες κρατήσεις και ανισότητα Lundberg

Στο κλασσικό μοντέλο, το πλεόνασμα δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{U(t) = u + ct - S(t)}$$

Επεκτείνοντας τη παραπάνω σχέση με την προσθήκη μιας διάχυσης Wiener, τότε το πλεόνασμα της χρονική στιγμή t, δίνεται από τον τύπο,

$$\mathrm{U(t) = u + ct - S(t) + W(t)}$$

όπου $\{\mathrm{W(t)}\}$, είναι μια διαδικασία Wiener με απειροελάχιστη μετατόπιση 0 και απειροελάχιστη διακύμανση 2D. Για οποιοδήποτε $\mathrm{t} > 0$ η τυχαία μεταβλητή $\mathrm{W(t)}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 2Dt. Επιπλέον ισχύει η υπόθεση, πως οι $\{\mathrm{W(t)}\}$ και $\{\mathrm{S(t)}\}$ είναι ανεξάρτητες.

Η πιθανότητας επιβίωσης όπως και στο κλασσικό μοντέλο ορίζεται από τη σχέση,

$$\mathrm{R(u) = Pr\,\{U(t) \geq 0 \; για t \geq 0\}}$$

και η πιθανότητας χρεοκοπίας είναι

$$\psi(\mathrm{u}) = 1 - \mathrm{R(u)}.$$

Σύμφωνα με την σχέση (7.2) που δίνεται από τους FranqoisDufresne και Hans U. Gerber, ο συντελεστής προσαρμογής R είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης

$$\lambda \int_0^{\infty} \mathrm{e^{rx} dP(x) + Dr^2} = \lambda + \mathrm{cr}. \qquad 4.1.1$$

Έστω ότι ισχύουν τα παρακάτω,

- P τα έσοδα του ασφαλιστή από ασφάλιστρα ανά μονάδα χρόνου,
- c, το ποσοστό πληρωμής προμήθειας και
- e, το ποσοστό εξόδων του πρωτασφαλιστή.

Δοθέντος ότι το πλήθος των απαιτήσεων ακολουθεί την Poisson με παράμετρο λ, γίνεται η υπόθεση ότι ο πρωτασφαλιστής δεν μπορεί να αντασφαλίσει ολόκληρο τον κίνδυνο με ένα σταθερό κέρδος, και κατά συνέπεια,

$$(1-e)P-(1-\alpha)\lambda\mu<0.$$

Το περιθώριο ασφαλείας δίνεται από τη σχέση,

$$\theta=\frac{(1-e)P}{\lambda\mu}-1>0,$$

το καθαρό ασφάλιστρο του πρωτασφαλιστή είναι,

$$P_I\ =\ (1-e)P-P_R$$

και το ασφάλιστρο του αντασφαλιστή δίνεται ως εξής

$$P_R=(1-c)(1-\alpha)P+(1+\alpha)\lambda\int_{\frac{d}{\alpha}}^{\infty}(\alpha x-d)F(x)dx.$$

Έστω,$N(\alpha,d)$ το καθαρό κέρδος του ασφαλιστή έπειτα από την αντασφάλιση τότε, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος ανά μονάδα χρόνου, μετά τα έξοδα και την αντασφάλιση δίνεται από την σχέση,

$$E[W(\alpha,d)]=P_I-\lambda E(X_I).$$

Με βάση τη σχέση 4.1.1προκύπτει πως ο συντελεστής R είναι η μοναδική θετική λύση της εξίσωσης,

$$\lambda E[e^{rX_1}]+Dr^2=\lambda+P_Ir.$$

Για την μεγιστοποίηση του συντελεστή προσαρμογής μέσω των τιμών α, d, το άνω φράγμαLundberg,

$$\psi_{\alpha,d}(u) \leq e^{-Ru}$$

πρέπει να ελαχιστοποιηθεί.

Έστω,L το σύνολο των σημείων για τα οποία το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του ασφαλιστή είναι θετικό, δηλαδή,

$$L = \{(\alpha, d): 0 \leq \alpha \leq 1, d \geq 0 \text{ και } E[W(\alpha, d)] > 0\}$$

και επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις,

- $X_{\alpha,d}(r) = \ln E[e^{rX_{\alpha,d}}]$

- $k(r) = \ln E[e^{-rT}]$

- $H_{\alpha,d}(r) = \lambda E[e^{rX_1}] + Dr^2 - \lambda - P_I r.$

Με βάση γνωστές σχέσεις (βλ. Λήμμα 4.1& Λήμμα 4.2), προερχόμενεςαπότηνμελέτη «MeasuringtheeffectsofreinsurancebytheadjustmentcoefficientintheSparreAnder » καισεσυνδυασμόμετηνισότηταπουδόθηκεπαραπάνω,

$$\lambda E[e^{rX_1}] + Dr^2 = \lambda + P_I r \qquad 4.1.2$$

η όποια μπορεί να δοθεί και ως,

$$\lambda E[e^{rX_1}] = \lambda + P_I r - Dr^2,$$

προκύπτει ότι η $E[e^{rX_1}]$ είναι μια μη-φθίνουσα κυρτή συνάρτηση και η $\lambda + P_I r - Dr^2$ είναι μια κοίλη συνάρτηση, η οποία για $r = 0$ είναι ίση με λ.

Λήμμα 4.1

- Ο συντελεστής προσαρμογής $R_{\alpha,d}$ είναι θετικός αν και μόνο αν $(\alpha, d) \in L$ και

- για κάθε $(\alpha, d) \in L$, η $H'_{\alpha,d}(r)$είναι > 0 στο $r = R_{\alpha,d}$.

Ας υποθέσουμε ότι το (α, d) είναι σταθερό, τότε

$$X'_{a,d}(r) = \frac{E\left[X_{a,d}e^{rX_{a,d}}\right]}{E\left[e^{rX_{a,d}}\right]}$$

$$X''_{a,d}(r) = \frac{E\left[X^2_{a,d}e^{rX_{a,d}}\right]}{E[e^{rX_{a,d}}]} - \left(\frac{E\left[X_{a,d}e^{rX_{a,d}}\right]}{E[e^{rX_{a,d}}]}\right)^2$$

$$\kappa'(r) = -\frac{E[Te^{-rT}]}{E[e^{-rT}]}$$

$$\kappa''(r) = \frac{E[T^2e^{-rT}]}{E[e^{-rT}]} - \left(\frac{E[Te^{-rT}]}{E[e^{-rT}]}\right)^2.$$

Οι συναρτήσεις $X_{\alpha,d}(r)$ και $k(r)$ είναι κυρτές συναρτήσεις του r και κατά συνέπεια για σταθερό (α, d), η $H_{\alpha,d}(r)$ είναι μια κυρτή συνάρτηση του r και ισχύει ότι,

$$H'_{a,d}(r) = E[X_I] - P_I E[T] < 0.$$

Έστω,

$$\xi = \begin{cases} +\infty & \text{για } d < +\infty \\ \tau & \text{για } d = +\infty \end{cases}$$

γιαd $= +\infty$ σημαίνει ότι δεν υπάρχει αντασφάλιση excessofloss.

Από τις σχέσεις

- $H_{\alpha,d}(0) = 0$
- $\lim\limits_{r \to \xi} H_{\alpha,d}(r) = +\infty$

και δοθέντος ότι η $H_{a,d}(r)$ είναι κυρτή συνάρτηση, συμπεραίνεται ότι ο συντελεστής προσαρμογής είναι θετικός αν και μόνο αν $H'_{a,d}(r) < 0$ το όποιο απεδείχθη.

Έστω τώρα ότι,

$$\alpha_0 = \frac{(e-c)P}{(1-c)P - \lambda E[X]}$$

και

$$A = \{\alpha\colon 0 < \alpha \leq 1 \ \ \textit{και υπάρχει ένα}\ \mathrm{d}\ \text{ τέτοιο ώστε } E[W(\alpha, d)] = 0\}.$$

<u>Λήμμα 4.2</u>

- $A = (\alpha_0, 1]$,

- για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένα μοναδικό d τέτοιο ώστε $E[W(\alpha, d)] = 0$ δηλαδή υπάρχει μια συνάρτηση Φ η οποία απεικονίζει το A στο $(0, \infty)$, ώστε,
  $d = \Phi(\alpha)$ να ισοδυναμεί με $E[W(\alpha, d)] = 0$,

- η$\Phi(\alpha)$ είναι κυρτή και

- $\lim_{\alpha \to \alpha_0} \Phi(\alpha) = +\infty$.

4.1.1 Συντελεστής προσαρμογής και όρια κράτησης

Στη συνέχεια αποδεικνύονται τα εξής δύο:

I. Για σταθερό $\alpha \in (\alpha_0, 1]$, ο συντελεστής προσαρμογής $R_{\alpha,d}$ είναι μια μονοτροπική συνάρτηση του d, η οποία λαμβάνει τη μέγιστη τιμής της στο μοναδικό σημείο που ικανοποιεί τη σχέση,

$$d = \frac{1}{R_{\alpha,d}} \ln(1+\alpha)$$

όπου $R_{a,d}$ είναι η μοναδική θετική λύση της 4.3.1.

II. Έστω, ότι $\widehat{R}_{\alpha}$ ορίζεται το μέγιστο του $R_{\alpha,d}$. Τότε, ο $\widehat{R}_{\alpha}$ είναι μια μονοτροπική συνάρτηση ως προς του α, για κάθε $\alpha \in (\alpha_0, 1]$, επιτυγχάνοντας τη μέγιστη τιμή στο $\alpha = 1$ αν και μόνο αν,

$$\lim_{\alpha \to 1^-} \frac{d}{d\alpha} \widehat{R}_{\alpha} \geq 0.$$

Ο συντελεστής προσαρμογής $R_{\alpha,d}$,για σταθερό $\alpha \in (\alpha_0, 1]$ και $d > \Phi(\alpha)$,είναι η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης,

$$H_{\alpha,d} = 0.$$

Έστω ότι $R_{\alpha,d}$ είναι μια συνάρτηση των $(\alpha, d) \in L$, τότε από το θεώρημα της έμμεσης συνάρτησης προκύπτει ότι,

$$\frac{\partial R_{a,d}}{\partial d} = - \left. \frac{(\partial/\partial d) H_{a,d}(r)}{(\partial/\partial r) H_{a,d}(r)} \right|_{r=R_{a,d}}.$$

Δοθέντος ότι, η σχέση $(\partial/\partial r)H_{a,d}(r) > 0$, τότε η σχέση $\frac{\partial R_{a,d}}{\partial d}$ είναι ίση με το μηδέν αν και μόνο αν $\partial H_{\alpha,d}(r)/\partial d|_{r=R_{a,d}} = 0$.

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση,

$$\frac{\partial \mathrm{E}[e^{rX_I}]}{\partial M} = re^{rM}\left[1 - F\left(\frac{M}{a}\right)\right],$$

για την πρώτη παράγωγό ισχύει,

$$\frac{\partial H_{a,d}(r)}{\partial d} = \lambda \frac{\partial \mathrm{E}[e^{rX_I}]}{\partial d} - r\frac{\partial P_I}{\partial d}$$

$$= \lambda re^{rM}\left(1 - F\left(\frac{d}{a}\right)\right) - (1+\alpha)\lambda r\left(1 - F\left(\frac{d}{a}\right)\right)$$

$$= \lambda r\left(1 - F\left(\frac{d}{a}\right)\right)\left(e^{rd} - (1+\alpha)\right).$$

και για την δεύτερη παράγωγο,

$$\frac{\partial^2 H_{a,d}(r)}{\partial d^2} = \lambda \frac{\partial^2 \mathrm{E}[e^{rX_I}]}{\partial d^2} - r\frac{\partial^2 P_I}{\partial d^2}$$

$$= \lambda\left(r^2 e^{rd}\left(1 - F\left(\frac{d}{a}\right)\right) - \frac{1}{a} re^{rd} f\left(\frac{d}{a}\right)\right) + \frac{r}{a}(1+\alpha)\lambda\, f\left(\frac{d}{a}\right)$$

$$= \lambda r^2 e^{rd}\left(1 - F\left(\frac{d}{a}\right)\right) + \frac{\lambda r}{a} f\left(\frac{d}{a}\right)\left((1+\alpha) - e^{rd}\right).$$

Για να ισχύει η σχέση,

$$\frac{\partial R_{a,d}}{\partial d} = -\left.\frac{(\partial/\partial d)H_{a,d}(r)}{(\partial/\partial r)H_{a,d}(r)}\right|_{r=R_{a,d}}$$

πρέπει το d να ικανοποιεί την

$$d = \frac{1}{R_{a,d}}\ln(1+\alpha).$$

Εφόσον το d ικανοποιεί την $d = \frac{1}{R_{\alpha,d}} \ln(1+\alpha)$ προκύπτει ότι,

$$\left.\frac{\partial^2 H_{a,d}(r)}{\partial d^2}\right|_{r=R_{a,d},\ \frac{\partial R_{a,d}}{\partial d}=0} = \lambda r^2 e^{rd}\left(1 - F\left(\frac{d}{a}\right)\right) > 0$$

και επιπλέον

$$\left.\frac{\partial^2 R_{a,d}}{\partial d^2}\right|_{\frac{\partial R_{a,d}}{\partial d}=0} = -\left.\frac{(\partial^2/\,\partial d^2)H_{a,d}(r)}{(\partial/\,\partial r)H_{a,d}(r)}\right|_{r=R_{a,d},\ \frac{\partial R_{a,d}}{\partial d}=0} < 0.$$

Επομένως, η δεύτερη παράγωγος του $R_{a,d}$ ως προς d είναι < 0 όταν η πρώτη παράγωγος είναι μηδέν, το οποίο σημαίνει πως για σταθερό $\alpha \in (\alpha_0, 1]$, ο συντελεστής $R_{a,d}$ έχει το πολύ ένα σημείο καμπής, και όταν υπάρχει ένα τέτοιο σημείο, είναι το μέγιστο.

Το μέγιστο θα υπάρχει εφόσον υπάρχει μια πεπερασμένη λύση που ικανοποιεί την σχέση ,

$$d = \frac{1}{R_{\alpha,d}} \ln(1+\alpha).$$

- Όταν το καθαρό κέρδος είναι μηδενικό,

$$\lim_{r\to 0}(e^{rd} - (1+\alpha)) = -\alpha.$$

- Επειδή ο συντελεστής προσαρμογής πριν από την αντασφάλιση excessofloss λαμβάνει χώρα, ισχύει ότι,

$$\lim_{r\to\infty}\left(e^{rd} - (1+\alpha)\right) = \infty.$$

Η εξίσωση $\frac{\partial H_{a,d}(r)}{\partial d} = 0$ ορίζει το d ως συνάρτηση του α , την οποία θεωρούμε ως $\Upsilon(\alpha)$ και έστω $\widehat{R}_{\alpha} = R_{\alpha,\Upsilon(\alpha)}$.

Υπολογίζοντας τις δύο πρώτες παραγώγους προκύπτουν οι σχέσεις

$$\frac{d\widehat{R}_a}{da} = -\left.\frac{(\partial H_{a,d}(r)/\,\partial a)}{(\partial H_{a,d}(r)/\,\partial r)}\right|_{M=\Upsilon(a),r=\widehat{R}_a}$$

και

$$\left.\frac{d^2\widehat{R}_a}{da^2}\right|_{\frac{d\widehat{R}a}{da}=0} = -\left.\frac{\left(\partial^2 H_{a,d}(r)/\,\partial a^2\right)\left(\partial^2 H_{a,d}(r)/\,\partial d^2\right) - \left(\partial^2 H_{a,d}(r)/\,\partial a\,\partial d^2\right)}{\left(\partial^2 H_{a,M}(r)/\,\partial d^2\right)\left(\partial H_{a,d}(r)/\,\partial r\right)}\right|_{M=\Upsilon(a),r=\widehat{R}_a,\frac{d\widehat{R}a}{da}=0} \quad \textbf{4.1.3}$$

Δοθέντος ότι σε προηγούμενο σημείο έχει δειχθεί πως,

$$\left.\frac{\partial^2 H_{a,d}(r)}{\partial d^2}\right|_{M=\Upsilon(\alpha),r=\widehat{R}_a} > 0$$

$$\left.\frac{\partial H_{a,d}(r)}{\partial r}\right|_{M=\Upsilon(\alpha),r=\widehat{R}_a} > 0$$

κατά συνέπεια, συμπεραίνεται πως η εξίσωση 4.1.3είναι αρνητική αν και μόνο αν,

$$\left.\frac{\partial^2 H_{a,d}(r)}{\partial \alpha^2}\frac{\partial^2 H_{a,d}(r)}{\partial d^2} - \left(\frac{\partial^2 H_{a,d}(r)}{\partial \alpha\,\partial d}\right)^2\right|_{r=R_{a,d};(\partial/\partial\alpha)H_{\alpha,d}(r)=0;(\partial/\partial d)H_{\alpha,d}(r)=0} > 0.$$

Οι μερικές παράγωγοι ως προς α δίνονται από τις σχέσεις,

$$\frac{\partial H_{a,d}(r)}{\partial a} = \lambda r \int_0^{d/a} x e^{rax} F(x)dx + (1+\alpha)\lambda r \int_{d/a}^{\infty} xF(x)dx - (1-c)rP$$

$$\frac{\partial^2 H_{a,d}(r)}{\partial a^2} = \lambda r^2 \int_0^{d/a} x^2 e^{rax} F(x)dx + \frac{\lambda r d^2}{a^3} f\left(\frac{d}{a}\right)\left((1+\alpha) - e^{rd}\right)$$

$$\frac{\partial^2 H_{a,d}(r)}{\partial a\, \partial d} = \frac{\lambda r d}{a^2} f\left(\frac{d}{a}\right)\left(e^{rd} - (1+\alpha)\right).$$

Συμπεραίνεται λοιπόν πως,

$$\frac{\partial^2 H_{a,d}(r)}{\partial \alpha^2}\frac{\partial^2 H_{a,d}(r)}{\partial d^2} - \left(\frac{\partial^2 H_{a,d}(r)}{\partial \alpha\, \partial d}\right)^2 \Bigg|_{r=R_{a,d};(\partial/\partial\alpha)H_{\alpha,d}(r)=0;(\partial/\partial d)H_{\alpha,d}(r)=0}$$

$$\lambda^2 r^4 e^{rd}\left(1 - F\left(\frac{d}{a}\right)\right)\int_0^{d/a} x^2 e^{rax} F(x)dx \; > 0$$

άρα,

$$\left.\frac{d^2 \widehat{R}_a}{da^2}\right|_{\frac{d\widehat{R}a}{da}=0} < 0.$$

Αντίθετα, όταν το $\alpha \to a_0$, τότε ο συντελεστής $\widehat{R}_a$ πηγαίνει στο μηδέν και η μέγιστη τιμή του $\widehat{R}_a$ είναι το 1 αν και μόνο αν

$$\lim_{\alpha \to 1^-} \frac{d}{d\alpha} \widehat{R}_\alpha \geq 0.$$

4.2 Άνω φράγμα και πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο

Έστω ότι ο πρωτασφαλιστής αντασφαλίζει τον κίνδυνο με μια αντασφάλιση excessofloss, με όριο κράτησης d, δηλαδή όταν προκύπτει μια απαίτηση ύψους X, είναι υπεύθυνος για $X_d = \min(X, d)$ και ο αντασφαλιστής είναι υπεύθυνος για $X - X_d = \max(0, X - d)$.

Με $\psi_d(u, t)$ συμβολίζεται η πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο.

Το άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας, μετά την αντασφάλιση σε πεπερασμένο χρόνο, με διάχυση δίνεται από τη σχέση,

$$\psi_d(u, t) \leq \exp\left(\min_{r \geq R_d} f_d(r; u, t)\right) \qquad \textbf{4.2.1}$$

όπου

$$f_d(r; u, t) = -ur + t\theta_d(r)$$

και

$$\theta_d(r) = \lambda E[e^{rX_I}] + Dr^2 - P_I r - \lambda.$$

Με βάση τα παραπάνω ισχύουν τα εξής,

- για κάποιο δεδομένο d, ο συντελεστής προσαρμογής R_d είναι η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης,

$$\lambda E[e^{rX_I}] + Dr^2 = P_I r + \lambda$$

- το$\theta_d(r)$ είναι η μοναδική ρίζα της,

$$\lambda E[e^{rX_I}] + Dr^2 = P_I r + \lambda + \theta_d(r)$$

- και καθώς πρόκειται για αντασφάλιση excessofloss<u>μόνο</u>, το καθαρό ασφάλιστρο που εισπράττεται από τον πρωτασφαλιστή, έπειτα από την αντασφάλιση δίνεται από την σχέση,

$$P_I = (1 - e)P - (1 - \alpha)\lambda\mu + (1 + \alpha)\lambda E(P_I).$$

<u>**Λήμμα 1.2.1**</u>

Για $d > 0$, ισχύει ότι,

I. Το $\theta_d(r)$ είναι μια κυρτή συνάρτηση του r,

II. $\theta_d(0) = \theta_d(R_d) = 0$

III. $\lim_{r\to\infty}\theta_d(r) = +\infty$, $\lim_{r\to\infty}\theta_d(r)/r = +\infty$ και

IV. $(\partial/\partial r)\theta_d(0) = \lambda E[X_d] - P_I$.

<u>**Απόδειξη 1.2.1**</u>

Με βάση τη πρώτη παράγωγο ως προς r, προκύπτει η σχέση,

$$\frac{\partial}{\partial r}\theta_d(r) = \lambda E[X_I e^{rX_I}] + 2D - P_I$$

και για $r = 0$

$$\frac{\partial}{\partial r}\theta_d(0) = \lambda E[X_I e^{rX_I}] - P_I < 0.$$

Μέσω της δεύτερης παραγώγου ως προς r,

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\theta_d(r) = \lambda E\left[{X_I}^2 e^{rX_I}\right] + 2D > 0$$

συμπεραίνεται πως η $\theta_d(r)$ είναι μια κυρτή συνάρτηση στοr.

Επιπλέον από τη σχέση $\theta_d(0) = \theta_d(R_d) = 0$ και το γεγονός πως η $\theta_d(r)$ είναι μια κυρτή συνάρτηση, προκύπτει ότι $\lim_{r\to\infty} \theta_d(r) = +\infty$ και $\lim_{r\to\infty} \theta_d(r)/r = +\infty$.

Σε αυτό το σημείο η προσοχή δίνεται στο άνω φράγμα το οποίο δίνεται από την σχέση,

$$\psi_d(u,t) \le \exp\left(\min_{r\ge R_d} f_d(r;u,t)\right)$$

ως συνάρτηση του ορίου κράτησης.

<u>**Λήμμα 1.2.2**</u>

- Για κάθε $d > 0$ και $r > 0$ η $f_d(r;u,t) = -ur + t\theta_d(r)$, έχει ένα τοπικό ελάχιστο αν και μόνο το αναμενόμενο πλεόνασμα την χρονική στιγμή t είναι θετικό. Τότε η τιμή που οδηγεί στην ελαχιστοποίηση είναι μοναδική και συμβολίζεται με $\hat{r}_d$.

- Γίνεται η υπόθεση ότι το αναμενόμενο πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t είναι θετικό. Τότε $\hat{r}_d > R_d$,όπου R_d είναι η μοναδική θετική ρίζα της σχέσης,

$$\lambda E[e^{rX_I}] = -Dr^2 + P_I r + \lambda$$

αν και μόνο αν

$$\frac{u}{t} > \lambda E[X_I e^{R_d X_I}] + 2DR_d - P_I.$$

<u>**Απόδειξη 1.2.2**</u>

Για $d > 0$ είναι εμφανές πως η $f_d(r;u,t)$ είναι μια κυρτή συνάρτηση του r, για $r > 0$.

Από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι,

$$\lim_{r\to 0} f_d(r;u,t) = 0$$

και

$$\lim_{r\to \infty} f_d(r;u,t) = +\infty.$$

Η$f_d(r;u,t)$ θα έχει ελάχιστο στο r αν και μόνο η παράγωγος της ως προς r, όταν το $r \to 0$, είναι αρνητική,

$$\lim_{r\to 0} \frac{\partial}{\partial r} f_d(r;u,t) = -u + t\frac{\partial}{\partial r}\theta_d(0) < 0.$$

Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι $\hat{r}_d > R_d$.

Έστω $\hat{r}_d$ είναι η λύση της,

$$\frac{\partial}{\partial r} f_d(r;u,t) = 0$$

όπου,

$$\frac{\partial}{\partial r} f_d(r;u,t) = -u + \lambda E[X_I e^{rX_I}]t + 2Drt - P_I t$$

είναι εμφανές πως $\hat{r}_d > R_d$, αν και μόνο αν $\frac{\partial}{\partial r} f_d(r;u,t) < 0$ στο $r = R_d$.

Έστω d_1 είναι το ελάχιστο, από τις τιμές που μπορεί να λάβει το d, για το οποίο το αναμενόμενο πλεόνασμα την χρονική στιγμή t δεν είναι αρνητικό, δηλαδή

$$d_1 = \min\{d\colon d \geq 0 \text{ και } u + P_I t - \lambda E[X_I]t \geq 0\}$$

$$d_1 = 0 \text{ αν και μόνο αν } \frac{u}{t} \geq \lambda\mu(\alpha - \rho)$$

για $d \geq d_1$,

$$\psi_d(u,t) \leq \begin{cases} e^{f_d(u,t,\hat{r}_d)} & \text{εφόσον} \quad \frac{u}{t} > \lambda E[X_I e^{R_d X_I}] + 2DR_d - P_I \\ e^{f_d(u,t,R_d)} & \text{εφόσον} \quad \frac{u}{t} \leq \lambda E[X_I e^{R_d X_I}] + 2DR_d - P_I \end{cases}.$$

Το R_d είναι η μοναδική θετική λύση της εξίσωσης 4.1.2εάν $d > d_0$ ή μηδέν, και το $r = \hat{r}_d$ παίρνει τέτοια τιμή ώστε το $\left(r, \theta_d(r)\right)$ να είναι η λύση της σχέσης,

$$\lambda E[X_I e^{rX_I}] + Dr^2 = \lambda + P_I, \qquad e^{rd} = (1 + \alpha).$$

Προκύπτει λοιπόν το συμπέρασμα, ότι για ορισμένες τιμές του d, είναι εφικτό να βελτιωθεί η ανισότητα Lundberg, η οποία συνεπάγεται πως σε ορισμένες περιπτώσεις η τιμή του d, όπου ελαχιστοποιεί το άνω φράγμα που δίνεται από την ανισότητα4.2.1, είναι διαφορετική από τη τιμή του d που μεγιστοποιεί τον συντελεστή προσαρμογής.

Αυτό ισχύει όταν,

$$\frac{u}{t} > \lambda E[X_I e^{rX_I}] + 2Dr - P_I$$

όπου $(\hat{d}, \widehat{R}_{\hat{d}})$ είναι η λύση της σχέσης

$$\lambda E[e^{rX_I}] + 2Dr - P_I = \frac{u}{t}.$$

4.3 Το άνω φράγμα Gerber ως συνάρτηση του ποσού κράτησης

Αν$\frac{u}{t} \geq \lambda\mu(\alpha-\rho)$, τότε το άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας πριν από την χρονική στιγμή t, επιτυγχάνει το ελάχιστο στο $d = 0$.

Εάν όμως $\frac{u}{t} < \lambda\mu(\alpha-\rho)$, τότε το άνω φράγμα, ως συνάρτηση του d, έχει απόλυτο ελάχιστο το οποίο επιτυγχάνεται στο μοναδικό σημείο για το οποίο ικανοποιείται η τιμή,

$$d = \frac{1}{r^*}\ln(1+\alpha)$$

όπου $r^* = \max(\hat{r}, \hat{R})$ και $\hat{r}$ είναι η λύση της εξίσωσης

$$\lambda E\left[X_I e^{\hat{r}X_I}\right] + 2D\hat{r} - P_I = \frac{u}{t}$$

και $\hat{R}$ είναι ο συντελεστής προσαρμογής.

Ισχύει ότι,

$$\min_{d \geq d_1} \psi_d(u,t) \leq \exp\left(\min_{d \geq d_1}\min_{r \geq R(d)} f_d(r;u,t)\right) = \exp\left(\min_{d \geq d_1}\min_{r \geq R(d)} f_d(r;u,t)\right)$$

όπου

$$f_d(r;u,t) = -ur + t(\lambda E[e^{rX_I}] + Dr^2 - P_I r - \lambda). \qquad \mathbf{4.3.1}$$

Έστω ότι οι δύο παραπάνω σχέσεις είναι συναρτήσεις τόσο του r όσο και του d. Υπολογίζοντας τις παραγώγους της 4.3.1 ως προς d,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial d} f_d(r;u,t) = t\frac{\partial}{\partial d}\theta_d(r) \\
&= \left(\lambda\frac{\partial}{\partial d}E[e^{rX_I}] - r\frac{\partial P_I}{\partial d}\right)t \\
&= \left(\lambda re^{rd}(1-F(d)) - r(1+\alpha)\lambda(1-F(d))\right)t \\
&= \left(e^{rd} - (1+\alpha)\right)\lambda r(1-F(d))t
\end{aligned}$$

και

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial d^2} f_d(r; u, t) = t \frac{\partial^2}{\partial d^2} \theta_d(r) \\
&= \left(\lambda \frac{\partial^2}{\partial d^2} E[e^{rX_I}] - r \frac{\partial^2 P_I}{\partial d^2} \right) t \\
&= \big(\lambda\big(r^2 e^{rd}(1 - F(d)) - re^{rd} f(d)\big) + r(1 + \alpha)\lambda f(d)\big) t \\
&= \lambda r^2 e^{rd}(1 - F(d)) t + \big((1 + \alpha) - e^{rd}\big)\lambda r f(d) t.
\end{aligned}
$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι,

$$\frac{\partial}{\partial d} f_d(r; u, t) = 0$$

αν και μόνο αν

$$d = \frac{1}{r} \ln(1 + \alpha).$$

Η δεύτερη παράγωγος του $\theta_d(r)$, ως προς d, στα σημεία όπου το πρώτο είναι ίσο με το μηδέν, δίνεται από τη σχέση,

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial d^2} f_d(r; u, t) \right|_{\frac{\partial}{\partial d} f_d(r;u,t)=0} = e^{rd} \lambda t r^2 \big(1 - F(d)\big) > 0.$$

Συνεπώς για σταθερό r, u, t η $f_d(r; u, t)$ έχει ένα τοπικό ελάχιστο, το οποίο είναι μοναδικό και επιτυγχάνεται στο σημείο $\widehat{R}(r)$, ώστε το $\widehat{R}(r)$ να είναι λύση του

$$d = \frac{1}{r} \ln(1 + \alpha).$$

Επιπλέον μελετώντας την συνάρτηση $f_{\widehat{d}(r)}(r;u,t)$, προκύπτει ότι,

$$\frac{d}{dr}f_{\widehat{d}(r)}(r;u,t) = -u + t\frac{\partial\theta_d(r)}{\partial r}\bigg|_{\frac{\partial}{\partial d}} f_d(r;u,t) = 0$$

και

$$\frac{d^2}{dr^2}f_{\widehat{d}(r)}(r;u,t)$$
$$= t\frac{(\partial^2/\partial r^2)\theta_d(r)(\partial^2/\partial d^2)\theta_d(r) - \left((\partial^2/\partial r\,\partial d)\theta_d(r)\right)^2}{(\partial^2/\partial d^2)\theta_d(r)}\Bigg|_{(\partial/\partial M)\theta_d(r)=0} > 0.$$

Η $f_{\widehat{d}(r)}(r;u,t)$ είναι λοιπόν μια κυρτή συνάρτηση ως προς r, καθώς,

$$\frac{d^2}{dr^2}f_{\widehat{d}(r)}(r;u,t) > 0$$

και επομένως, συμπεραίνεται πως υπάρχει το πολύ μια λύση για τη σχέση,

$$\frac{d}{dr}f_{\widehat{d}(r)}(r;u,t) = 0$$

και όταν υπάρχει είναι το ολικό ελάχιστο της $f_{\widehat{d}(r)}(r;u,t)$.

Όπως αναφέρεται σε προηγούμενο λήμμα ισχύει ότι,

$$\lim_{r\to 0} f_{\widehat{d}(r)}(r;u,t) = 0$$

και

$$\lim_{r\to 0}\frac{d}{dr}f_{\widehat{d}(r)}(r;u,t) < 0.$$

Στην περίπτωση όπου $\frac{u}{t} \geq \lambda\mu(\alpha - \rho)$, τότε το $d_1 = 0$, το οποίο σημαίνει ότι το άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας πριν τη χρονική στιγμή t, επιτυγχάνει το ελάχιστο στο $d = 0$.

Στην περίπτωση όπου $\frac{u}{t} < \lambda\mu(\alpha - \rho)$, έστω ότι r_1 είναι η λύση της σχέσης,

$$d = \frac{1}{r}\ln(1 + \alpha)$$

για $d_1 = d$, όπου είναι πεπερασμένο, και

$$\lim_{r \to r_1} \frac{d}{dr} f_{\hat{d}(r)}(r; u, t) = -u + t(\lambda E[X_I e^{rX_I}] + 2Dr - P_I)|_{d=d_1}$$

$$= -\lambda E[X_I]t + t\lambda E[X_I e^{rX_I}] + 2Drt|_{d=d_1} \geq 0.$$

Συνεπώς το $\hat{r}$ υπάρχει και ισχύει ότι $\hat{r} < r_1$.

Ελληνική Βιβλιογραφία

- Χατζηκωνσταντινίδης Ε., Θεωρία Κινδύνων, Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος του τμήματος «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου, Πανεπιστήμιο Πειραιώς».

- Πολίτης Κ., Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου, Το Συλλογικό Πρότυπο και Θεωρία Χρεοκοπίας.

- Κ.Ι Κουτσόπουλου, Αναλογιστικά Μαθηματικά: Μέρος Ι Θεωρία των Κινδύνων.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- Ying Fang, «Optimal combination of quota-share and stop-loss reinsurance treaties under the joint survival probability».

- Hans U. Gerber, Elias S. W. Shiu,« On Optimal Dividend Strategies In The Compound Poisson Model».

- Jae-Kyung Woo, «On a periodic dividend barrier strategy in the dual model with continuous monitoring of solvency».

- KchoukBilel and MélinaMailhot, «Reciprocal Reinsurance Treaties Under an Optimal and Fair Joint Survival Probability».

- ApichartLuesamai, «Lower and Upper Bounds of the Ultimate Ruin Probability in a Discrete Time Risk Model with Proportional Reinsurance and Investment».

- Peng Li, Ming Zhou, Chuancun Yin «Optimal reinsurance with both proportional and fixed costs»

- David C.M. Dickson, Howard R. Waters «Reinsurance and ruin».

- Lin Xu, Minghan Wang «Minimizing Lundberg inequality for ruin probability under correlated risk model by investment and reinsurance».

- Maria de Lourdes Centeno, « Measuring the effects of reinsurance by the adjustment coefficient in the Sparre Anderson model ».

- Maria de Lourdes Centeno, «Excess of loss reinsurance and the probability of ruin in finite horizon».

- Maria de Lourdes Centeno, «Excess of loss reinsurance and Gerber's inequality in the Sparre Anderson model».

- Christian Kasumo, «Minimizing the probability of ultimate ruin by proportional reinsurance and investments».

- Xiang Hu, Baige Duan «De Vylder approximation to the optimal retention for a combination of quota-share and excess of loss reinsurance with partial information».

- Tao Jiang, Wu Zang, «Ruin probability of stop-loss reinsurance with diffusion term.