ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΔΙΚΑΙΗ ΑΞΙΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ ΜΕ ΦΡΑΓΜΑΤΑ

Ευστάθιος Ι. Ζάχαρης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς

Σεπτέμβριος 2022

Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο   Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Σ χ ο λ ή   Χ ρ η μ α τ ο ο ι κ ο ν ο μ ι κ ή ς   κ α ι   Σ τ α τ ι σ τ ι κ ή ς

Τ μ ή μ α   Σ τ α τ ι σ τ ι κ ή ς   κ α ι   Α σ φ α λ ι σ τ ι κ ή ς   Ε π ι σ τ ή μ η ς

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΔΙΚΑΙΗ ΑΞΙΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ ΜΕ ΦΡΑΓΜΑΤΑ

Ευστάθιος Ι. Ζάχαρης

Δ ι π λ ω μ α τ ι κ ή   Ε ρ γ α σ ί α
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2022

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

Μπούτσικας Μιχαήλ (Επιβλέπων),	Αναπληρωτής Καθηγητής
Πολίτης Κωνσταντίνος,	Αναπληρωτής Καθηγητής
Ψαρράκος Γεώργιος,	Αναπληρωτής Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN APPLIED STATISTICS

Interest rate derivatives pricing models

By

Efstathios I. Zacharis

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
September 2022

Στους γονείς μου,

Ιωάννη και Βασιλική

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του μεταπτυχιακού προγράμματος «Εφαρμοσμένη Στατιστική» του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, του Πανεπιστημίου Πειραιώς, κατά το έτος 2022.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Μιχαήλ Μπούτσικα, Αναπληρωτή Καθηγητή του ΠΑ.ΠΕΙ. για την πολύτιμη καθοδήγηση που προσέφερε, τον χρόνο που διέθεσε και την καθοριστική συμβολή του στην επιστημονική μου συγκρότηση. Στο ίδιο πλαίσιο ευγνωμοσύνης, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές μου για την μεγάλη τους προθυμία, την συμπαράσταση και την άριστη συνεργασία που είχαμε.

Οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλους εκείνους που μου συμπαραστάθηκαν ποικιλοτρόπως και συνετέλεσε ο καθένας με τον δικό του τρόπο στην ολοκλήρωση ενός τέτοιου πονήματος (μεγάλου ή μικρού). Θέλω να εκφράσω την βαθιά μου ευγνωμοσύνη σε όλους όσοι με βοήθησαν ψυχικά, όλο αυτό το διάστημα της κοπιώδους πνευματικής δοκιμασίας, και ειδικά σε αυτούς που δεν είναι πια μαζί μας.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου, τον αδερφό μου και τη σύντροφό μου που ήταν για εμένα διαρκώς φάροι ελπίδας.

Περίληψη

Με εναρκτήριο έτος το 1973, τρεις ερευνητές με διαφορετικές αφετηρίες πρότειναν ένα από τα σημαντικότερα μοντέλα περιγραφής της Οικονομικής Επιστήμης. Ο αντίκτυπος που σημειώθηκε άμεσος. Ως αποτέλεσμα, οι συγκεκριμένοι ερευνητές τιμήθηκαν με το βραβείο Nobel των Οικονομικών το έτος 1997. Ο περίφημος τύπος τιμολόγησης ουδέτερου ρίσκου των Black, Scholes και Merton, όχι μόνο άλλαξε τον τρόπο με τον οποίο τιμολογείται μια σημαντική κατηγορία αξιογράφων της Αγοράς, αλλά επηρέασε ριζικά τον τρόπο που αντιλαμβάνονται ερευνητές και επαγγελματίες των Χρηματιστηρίων Παραγώγων την στοχαστική συμπεριφορά των κινήσεων των διαπραγματευόμενων αξιογράφων. Αυτό έδωσε νέα ώθηση στην Επιστήμη των Οικονομικών Μαθηματικών και έχει δημιουργήσει ένα ευρύ και αυτόνομο ερευνητικό πεδίο το οποίο αναπτύσσεται διαρκώς μέχρι και σήμερα. Σε συνδυασμό με την άνθηση του Χρηματιστηρίου, ενός Θεσμού-ακρογωνιαίου λίθου του σύγχρονου Πολιτισμού, και την Επανάσταση στην Επιστήμη των Υπολογιστών τις τελευταίες δεκαετίες, έχει δημιουργηθεί μια εναλλακτική πειραματική μεθοδολογία για την τιμολόγηση των Παράγωγων Χρηματοοικονομικών Προϊόντων, όπως τα Δικαιώματα Προαίρεσης με φράγματα, τα οποία αναλύονται στην παρούσα εργασία. Τα αποτελέσματα της μεθόδου Monte Carlo είναι συνεπή με αυτά που αναμένονται από το θεωρητικό μοντέλο και γενικεύονται ώστε να δίνουν εκτιμήσεις στην αξία αξιογράφων όπου είναι δύσκολο ή ανέφικτο να υπολογιστεί η αξία τους με κλειστό τύπο.

Abstract

During the year 1973, three researchers who worked independently from different starting points, proposed one of the most fundamental models in modern Economic theory. The impact from this discovery was enormous, while these researchers were awarded the Nobel prize of Economics in 1997. The celebrated Black, Scholes and Merton's risk neutral pricing formula altered the way in which one of the most important and traded class of financial instruments is priced. In addition, it shaped the way market practitioners and researchers perceive the stochastic behavior of traded risky assets. This new and vibrant field of Mathematical Finance is developing until now, attracting more and more researchers every year. The revolution that happens in the field of Computer Science paired with the growth of Financial Markets, has led to the development of new theoretical and numerical methods for the study of various financial derivatives including Barrier Options which are the main theme of this MSc thesis. The theoretical results and formulas concerning the fair price of barrier options that are reviewed in this thesis were also numerically verified using Monte Carlo simulation techniques. These techniques can easily be modified to estimate the price of more complex financial derivatives that may have intricate or intractable pricing formula.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα

1.1 Υποθέσεις για την λειτουργία της Χρηματοοικονομικής Αγοράς

Για την μαθηματική μελέτη της Αγοράς γίνονται εξ αρχής κάποιες υποθέσεις που αφορούν στην λειτουργία της, και οι οποίες απλοποιούν τους υπολογισμούς, μειώνοντας την πολυπλοκότητα της "πραγματικής" Αγοράς. Η βασική συνθήκη που απαιτείται να ισχύει σε μια εξιδανικευμένη εκδοχή της Αγοράς, είναι ότι αυτή βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, επομένως μακροπρόθεσμα δεν προσφέρεται ευκαιρία για σίγουρο κέρδος (no-arbitrage principle). Αν και στην πράξη μπορεί να διατηρηθεί μια μικρή διαφοροποίηση στις τιμές ενός αξιογράφου λόγω κάποιων τριβών στις Αγορές (όπως τα κόστη συναλλαγών που εμφανίζονται και τα μερίσματα που αποδίδει μια μετοχή), θεωρείται ότι αυτή η ανισορροπία εκμηδενίζεται ιδιαίτερα γρήγορα από τις κινήσεις των arbitrageurs. Συνήθως μεγάλες επενδυτικές τράπεζες, με βάση την πληροφόρηση που έχουν, σπεύδουν να αξιοποιήσουν την ευκαιρία και να παραγάγουν βέβαιο κέρδος (riskless profit) κάνοντας συναλλαγές μεγάλου όγκου με χαμηλά κόστη. Η εξισορρόπηση των τιμών γίνεται μάλλον αυθόρμητα και πηγάζει από την ίδια την δυναμική της προσφοράς και ζήτησης. (π.χ. βλ. Kwok (2008))

Επιπλέον, θεωρείται ότι ισχύουν κάποιες ασθενείς υποθέσεις όπως η "Υπόθεση της Τέλειας Αγοράς" (perfect market hypothesis) και η "Υπόθεση της συμμετρικής Ορθολογικότητας στην Αγορά" (symmetric market rationality). Σε μια Τέλεια Αγορά, απαραίτητα:

- δεν υφίστανται κόστη συναλλαγών.
- όλα τα κέρδη φορολογούνται με τον ίδιο τρόπο (ίδιο φορολογικό συντελεστή).
- όλοι οι συμμετέχοντες έχουν την δυνατότητα να δανείζουν και να δανείζονται με το ίδιο ετήσιο, ονομαστικό επιτόκιο και να εκτελούν ανοικτή πώληση (short-selling) ενός αξιογράφου.

Η Χρηματαγορά ως ένα οργανωμένο σύστημα, φέρει δυνάμεις οι οποίες γίνονται αντιληπτές έμμεσα, από την εν γένει απρόβλεπτη επίδρασή τους στις αξίες των τίτλων που υπάρχουν. Για τον λόγο αυτό, οι τιμές των αξιογράφων που βρίσκονται υπό διαπραγμάτευση είναι αβέβαιο για το πως θα εξελιχθούν ακόμα και βραχυπρόθεσμα, κατ' αναλογία με ένα μικροσωματίδιο που βάλλεται από τα μόρια του μέσου στο οποίο εμβαπτίζεται. Η επίτευξη αυτής της αναλογίας μεταξύ ενός αμιγώς φυσικού φαινομένου και της εμπορευματοποιημένης αξίας ενός προϊόντος που παράγει ο ανθρώπινος πολιτισμός έγινε σταδιακά και οφείλεται κυρίως στην συνεισφορά και στο έργο του βοτανολόγου Robert Brown (1827), του Louis Bachelier (1900) και του νομπελίστα φυσικού Albert Einstein (1905). Η αυστηρή μαθηματική θεμελίωση της έννοιας της κίνησης Brown που περιγράφει σε ικανοποιητικό βαθμό την κίνηση μιας μετοχής, έγινε από τον Norbert Wiener (1923).

Η υπόθεση της συμμετρικής Ορθολογικότητας στην Αγορά, δεν αφορά εν γένει ούτε αυτή στην κατανομή της τροχιάς του υποκειμένου αξιογράφου, αλλά στην συμπεριφορά των συμμετεχόντων οι οποίοι δρουν με τρόπο ορθολογικό λαμβάνοντας αποφάσεις και εκτελώντας συναλλαγές που μεγιστοποιούν τα κέρδη τους. (π.χ. βλ. Μπούτσικας, (2005))

1.2 Προθεσμιακά Συμβόλαια, Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης και Δικαιώματα Προαίρεσης

Τα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα (ΠΧΠ) αποτελούν τα βασικά αξιόγραφα που συναλλάσσονται στα Χρηματιστήρια Παραγώγων και αντλούν άμεσα την αξία τους από την αξία απλούστερων αξιογράφων, τα οποία συνήθως λέγονται υποκείμενα αξιόγραφα ή υποκείμενοι τίτλοι (underlying assets). Τα υποκείμενα αξιόγραφα αφορούν σε τίτλους των οποίων η αξία αποτελεί προϊόν διαπραγμάτευσης στο Χρηματιστήριο Αξιών ή στην δευτερογενή αγορά. Ένα ΠΧΠ είναι μια διμερής, τυποποιημένη σύμβαση συνήθως μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων μερών, τα οποία συμφωνούν ως προς τους όρους και τα χαρακτηριστικά της.

Από αυτή την ευρεία κατηγορία των χρηματοοικονομικών παραγώγων (financial derivatives), εστιάζουμε στα δικαιώματα προαίρεσης (Options). Με τον όρο δικαίωμα προαίρεσης εννοείται οποιοδήποτε συμβόλαιο το οποίο παρέχει το δικαίωμα -και όχι την υποχρέωση- στον αγοραστή (holder) του, να προβεί σε ορισμένες χρηματοοικονομικές συναλλαγές με τον αντισυμβαλλόμενο πωλητή.

Με αφετηρία το έτος 1973, παρατηρείται μια αξιοσημείωτη καμπή όσον αφορά στα συγκεκριμένα παράγωγα χρηματοοικονομικά, καθώς πραγματοποιήθηκε η εισαγωγή τους στο Εθνικό Χρηματιστήριο του Σικάγο στις 26 Απριλίου -Chicago Board Options Exchange CBOE-. Για αρκετές δεκαετίες ο κύριος όγκος των δικαιωμάτων προαίρεσης επί μετοχών βρίσκονταν αποκλειστικά στην εξωχρηματιστηριακή αγορά (Over-The-Counter Market). Λόγω παραγόντων όπως οι εξής:

- τα υψηλά κόστη συναλλαγών, τα οποία περιλάμβαναν ποσά που αποτελούσαν εγγύηση για την αμφίπλευρη τήρηση των όρων του συμβολαίου σε περίπτωση εξάσκησης του δικαιώματος (endorsement fees) και ποσά που σχετίζονταν με την αποζημίωση του μεσάζοντα (dealer’s spread)
- η απουσία ενός ενοποιημένου θεσμικού πλαισίου, και
- η ανυπαρξία μιας οργανωμένης δευτερογενούς αγοράς όπου θα ήταν διαθέσιμα τα δικαιώματα προαίρεσης ως εμπορεύσιμα χρηματοοικονομικά αγαθά στο ευρύ επενδυτικό κοινό.

Τα δικαιώματα προαίρεσης έχουν γνωρίσει τεράστια επιτυχία στην διεθνή αγορά για λόγους που αναλύονται εκτενέστερα π.χ. από τους Cox & Rubinstein, (1985).

Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με την τυποποίηση των όρων αυτών των συμβολαίων, επιτρέπει πλέον, δυνητικά όλοι οι συμμετέχοντες στην αγορά να είναι σε θέση να εμπλουτίσουν τα χρηματοοικονομικά εργαλεία που χρησιμοποιούν στα χαρτοφυλάκια επενδύσεως τους, με στόχο την επίτευξη μεγαλύτερης προστασίας απέναντι στον κίνδυνο εμφάνισης τεραστίων ζημιών, και μεγαλύτερο διασκορπισμό (diversification) των περιουσιακών τους στοιχείων. Παράλληλα, η αύξηση του βάθους των συναλλαγών ομοιόμορφων αξιογράφων στα πλαίσια μιας κεντρικής αγοράς, οδήγησε σε ενίσχυση της ανταγωνιστικότητάς της και παρέχοντας γρηγορότερες, πιο αξιόπιστες και ευκολότερες συναλλαγές (π.χ. βλ. Bodie, Kane και Marcus (2003))

Ωστόσο στην αγορά διατίθενται και άλλου είδους, πιο απλά συμβόλαια όπως τα Προθεσμιακά Συμβόλαια και τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης. Και στις δύο αυτές κατηγορίες ΠΧΠ, καθορίζεται ρητά η δεσμευτικότητα όσον αφορά στην τήρηση της αγοράς ή πώλησης του υποκείμενου χρεογράφου ενώ η εισαγωγή στο συμβόλαιο γίνεται χωρίς κάποιο κόστος. (π.χ. βλ. Μπούτσικας, (2005), Hull, (2014), James, (2003))

1.2.1 Προθεσμιακά Συμβόλαια (Forward Contracts)

Τέτοιου είδους συμβόλαια διαπραγματεύονται εκτός της οργανωμένης χρηματιστηριακής αγοράς, συνήθως μεταξύ δύο χρηματοοικονομικών ιδρυμάτων ή μεταξύ ενός χρηματοοικονομικού ιδρύματος και ενός πελάτη του. Ένα Προθεσμιακό Συμβόλαιο είναι μια προσαρμοσμένη συμφωνία για την αγορά ή πώληση μιας δεδομένης ποσότητας ενός περιουσιακού στοιχείου (υποκείμενο αγαθό), σε μια συγκεκριμένη τιμή ή ισοτιμία (έστω K), μια προκαθορισμένη χρονική στιγμή, έστω T, στο μέλλον. Ο αγοραστής και ο πωλητής δεσμεύονται από το συμβόλαιο να πραγματοποιήσουν την αγοραπωλησία. Ο μεν στον χρόνο λήξης θα έχει κέρδος που εξαρτάται με τρόπο ανάλογο από την (spot) τιμή S_T του περιουσιακού στοιχείου στον χρόνο λήξης T:

$$P_T = S_T - K$$

Όπως θα υποτεθεί παρακάτω, η κίνηση που πραγματοποιεί ένα οποιοδήποτε περιουσιακό στοιχείο της αγοράς μπορεί στην απλούστερη περίπτωση να μοντελοποιηθεί από μια Γεωμετρική Κίνηση Brown. Η τυχαία συνάρτηση κέρδους ή ζημίας ανά μονάδα P_T, υπολογίζεται χωρίς να ληφθεί υπόψη η χρονική αξία του χρήματος. Για τον πωλητή, ο οποίος έχει λάβει την αντίθετη θέση (short), η συνάρτηση αυτή είναι $-P_T$ αποφέροντας θετικό κέρδος μόνο όταν η (spot) τιμή S_T του περιουσιακού στοιχείου γίνει μικρότερη από K.

1.2.2 Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Future Contracts)

Μια άλλη κατηγορία σχετικά απλών συμβολαίων είναι τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, τα οποία έχουν κοινά χαρακτηριστικά με τα Προθεσμιακά Συμβόλαια. Η κύρια διαφορά τους είναι ότι η διαπραγμάτευση αυτών γίνεται κατά βάση εντός του Χρηματιστηρίου Παραγώγων, το οποίο θεσμικά λειτουργεί ως διαμεσολαβητής που παρέχει εγγύηση για την εκπλήρωση των συμφωνημένων και από τις δύο πλευρές. Η εγγύηση η οποία παρέχεται έναντι του κινδύνου αθέτησης (default) αφορά στον υποψήφιο αγοραστή του συμβολαίου από τον οποίο απαιτείται να καταβάλλει εκ των προτέρων ένα ποσό σε έναν λογαριασμό περιθωρίου (margin account) ώστε να κατοχυρώσει την αγορά. Αυτό το ποσό δεν υπεισέρχεται στην αξία του συμβολαίου, καθώς ο πωλητής του, οφείλει να επιστρέφει σταδιακά μέχρι την λήξη του -στο πέρας κάθε ημέρας συναλλαγής (trading day)- ένα μέρος του ποσού στον κάτοχο του.

1.2.3 Δικαιώματα Προαίρεσης (Options)

Η τελευταία κατηγορία συμβολαίων που θα οριστεί είναι αυτή των δικαιωμάτων προαίρεσης. Σε αντίθεση με τα δύο προηγούμενα ΠΧΠ, ένα δικαίωμα προαίρεσης δίνει στον κάτοχο (holder) του συμβολαίου το δικαίωμα αγοράς ή πώλησης του υποκείμενου τίτλου (παραδείγματος χάρη μιας μετοχής, ενός συναλλάγματος, κάποιου εμπορεύματος ή άλλου χρηματοοικονομικού αγαθού) σε μια προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης K (exercise price) σε μια, επίσης καθορισμένη στους όρους του συμβολαίου, ημερομηνία παράδοσης στο μέλλον T (expiration date, delivery ή maturity date). Ο πωλητής του δικαιώματος προαίρεσης, ο οποίος παίρνει την αντίθετη θέση (short) από τον πρώτο, δεσμεύεται από το συμβόλαιο να προβεί σε αγορά ή πώληση του υποκειμένου τίτλου στην ημερομηνία λήξης T στην τιμή εξάσκησης K, εάν αυτό απαιτηθεί από τον αγοραστή. Ο πωλητής λέγεται και εκδότης (writer), διότι στην πράξη είναι αυτός που εκδίδει το δικαίωμα προαίρεσης.

Τα δικαιώματα προαίρεσης εμπορεύονται στο Χρηματιστήριο Παραγώγων, αλλά και εκτός αυτού (Over-The-Counter Markets), κυρίως από τράπεζες και άλλα μεγάλα χρηματοοικονομικά ιδρύματα. Με βάση τις ιδιότητες τους, χρησιμοποιούνται ευρέως ως ισχυρά εργαλεία αντιστάθμισης του κινδύνου ή ακόμα και ως εργαλεία κερδοσκοπίας.

1.2.4 Speculators και Hedgers

Στο σημείο αυτό διασαφηνίζεται ότι στην αγορά οι συναλλασσόμενοι, ανάλογα με τον βαθμό αποστροφής τους στον κίνδυνο που συνεπάγεται ζημίες πολλές φορές, εντάσσονται σε κάποιες γενικές κατηγορίες.

Κερδοσκόποι (Speculators): Από την μια θεωρείται ότι στην αγορά διαπραγματεύονται και δρουν κερδοσκόποι, συναλλασσόμενοι οι οποίοι αναλαμβάνουν ρίσκα με σκοπό κυρίως να μεγαλώσουν τα κέρδη τους σε σχετικά μικρό χρονικό ορίζοντα χωρίς να διασφαλίζουν την θέση τους ως προς τις δυνητικά μεγάλες απώλειες. Συνήθως διαμορφώνουν χαρτοφυλάκια των οποίων η διασπορά της συνάρτησης του τυχαίου κέρδους αυξάνεται. Αυτό συμβαίνει εκτελώντας συναλλαγές, με βάση την πεποίθηση, ότι η επενδυτική στρατηγική που υλοποιείται, θα υπεραποδόσει κέρδη που δικαιολογούν αυτή την ανάληψη κινδύνου.

Αντισταθμιστές Κινδύνου (Hedgers): Στην κατηγορία αυτή ανήκουν συναλλασσόμενοι οι οποίοι τυπικά προσπαθούν να προστατεύσουν μια ανοικτή θέση που αφορά ένα χρηματοοικονομικό προϊόν και μπορεί να προκαλέσει απώλειες (είτε από την άμεση κατοχή μιας ποσότητας του υποκειμένου αξιογράφου είτε από μια ανοικτή θέση στην Αγορά που επηρεάζεται από την τιμή του). Εν γένει η αντιστάθμιση κινδύνου (hedging) σαν πρακτική αποτελεί μια μορφή ασφάλισης. Ακριβώς όπως και στην καθημερινή χρήση της, η ασφάλιση προστατεύει έναντι της εμφάνισης ενός αρνητικού ενδεχομένου ικανού να υποβαθμίσει την αξία ενός περιουσιακού στοιχείου ή να μειώσει το κεφάλαιο κάποιου.

Επομένως ένας hedger, επιστρατεύει κάποιο από τα διαθέσιμα ΠΧΠ στην αγορά των παραγώγων ώστε να προστατεύσει το χαρτοφυλάκιό του.

1.3 Τα είδη των Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Δύο είναι τα βασικά είδη των δικαιωμάτων προαίρεσης, τα δικαιώματα αγοράς (call options) και τα δικαιώματα πώλησης (put options).

1.3.1 Δικαίωμα Αγοράς (Call Option)

Ένα δικαίωμα αγοράς παρέχει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση στον αγοραστή να αγοράσει μια συγκεκριμένη ποσότητα από το υποκείμενο αξιόγραφο σε μια συγκεκριμένη στιγμή T στο μέλλον σε μια προσυμφωνημένη τιμή K. Αντίθετα ο εκδότης ή πωλητής του δικαιώματος οφείλει να παραχωρήσει αυτή την ποσότητα υπακούοντας στους όρους του συμβολαίου.

Το δικαίωμα αγοράς είναι πιο σύνθετο από ένα προθεσμιακό συμβόλαιο ή ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης, καθώς ο αγοραστής του έχει την δυνατότητα να μην το εξασκήσει, εάν στον χρόνο λήξης του, η εξάσκηση δεν αποφέρει κέρδος. Λόγω αυτής της συνθήκης, στον χρόνο σύναψης του συμβολαίου, προκαταβάλλεται εφάπαξ από τον αγοραστή στον πωλητή του δικαιώματος ένα μη επιστρεπτέο πόσο, το ασφάλιστρο ή τιμή δικαιώματος (option premium/option price) C, το οποίο είναι και η αγοραία τιμή του δικαιώματος.

Από την στιγμή έκδοσης ενός δικαιώματος προαίρεσης μέχρι την σύναψη αυτού, η τιμή του ασφαλίστρου C μεταβάλλεται καθώς επηρεάζεται από την προσφορά και την ζήτηση που θα έχει, ακριβώς όπως συμβαίνει στις τιμές των μετοχών.

Με βάση τις δύο θέσεις (long και short) η συνάρτηση κέρδους για τους δύο αντισυμβαλλομένους έχει την εξής μορφή για τον holder:

$$C_T^H = (S_T - K)_+ - C \stackrel{\text{def}}{=} \max\{S_T - K, 0\} - C$$

$$= \begin{cases} S_T - K - C, & S_T > K \\ -C, & S_T \leq K \end{cases}$$

Και για τον writer:

$$\begin{aligned} C_T^W &= -C_T^H = C - (S_T - K)_+ \stackrel{\text{def}}{=} C - \max\{S_T - K, 0\} \\ &= \begin{cases} C - S_T + K, & S_T > K \\ C, & S_T \leq K \end{cases} \end{aligned}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ανταποκρίνονται φυσιολογικά στο κέρδος που αναμένουμε να έχει ο καθένας από τους συμμετέχοντες ανάλογα με την διαμόρφωση της τιμής του υποκειμένου αξιογράφου στην λήξη. Έτσι, αν ο αγοραστής αναμένει μια ελαφρώς ανοδική τάση της τιμής του υποκειμένου αξιογράφου από την ημέρα σύναψης του συμβολαίου μέχρι την λήξη T θα έχει κέρδος $(S_T - K)$ χρηματικές μονάδες για κάθε μονάδα του υποκειμένου αξιογράφου. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής, με βάση τον τρόπο λειτουργίας της αγοράς: αν εξασκήσει το δικαίωμα θα αγοράσει την κάθε μονάδα, παραδείγματος χάρη του εμπορεύματος A, και στην συνέχεια κάνει πώληση on-the-spot στην αγορά σε τιμή S_T ανά μονάδα εμπορεύματος. Θα έχει πληρώσει μόνο το ασφάλιστρο C που αφαιρείται από το κέρδος της επένδυσης.

Αντιθέτως ο πωλητής, έχει εισπράξει το ασφάλιστρο C την ημέρα σύναψης και διαθέτει το εμπόρευμα A σε τιμή χαμηλότερη από εκείνη που έχει στην αγορά στον χρόνο T. Δεν θα έχει ζημία σε περίπτωση που η τιμή του εμπορεύματος A στην λήξη είναι στάσιμη ή μειωμένη σε σχέση με την τιμή εξάσκησης K. Θα έχει κερδίσει το ασφάλιστρο C.

Οι συναρτήσεις κέρδους στα δικαιώματα αγοράς και πώλησης υπολογίζονται χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η χρονική αξία του χρήματος.

1.3.2 Δικαίωμα πώλησης (Put Option)

Τα δικαιώματα πώλησης προσφέρουν διαφορετικές στρατηγικές στους επενδυτές καθώς με την αγορά ενός δικαιώματος πώλησης, ο αγοραστής έχει το δικαίωμα να πωλήσει μια δεδομένη ποσότητα ενός υποκείμενου αξιόγραφου σε μια συγκεκριμένη στιγμή T στο μέλλον σε μια προσυμφωνημένη τιμή K. Ο πωλητής οφείλει να τηρήσει ό,τι έχει συμφωνηθεί.

Η συνάρτηση κέρδους στην λήξη για τον κάτοχο σε αυτό το συμβόλαιο είναι:

$$P_T^H = (K - S_T)_+ - C' \stackrel{\text{def}}{=} \max\{K - S_T, 0\} - C'$$

$$= \begin{cases} K - S_T - C', & S_T < K \\ -C', & S_T \geq K \end{cases}$$

Και από την μεριά του πωλητή (writer) του δικαιώματος προκύπτει κέρδος:

$$P_T^W = C' - (K - S_T)_+ \overset{\text{def}}{=} C' - \max\{K - S_T, 0\}$$
$$= \begin{cases} C' - K + S_T, & S_T < K \\ C', & S_T \geq K \end{cases}$$

Έτσι ο κάτοχος του συμβολαίου αντισταθμίζει τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου του από την κατοχή του υποκείμενου αξιόγραφου καταβάλλοντας στον πωλητή το ασφάλιστρο C'. Με βάση αυτή την στρατηγική το περιθώριο απώλειας κεφαλαίου έχει πάντα ως κάτω φράγμα την τιμή C'. Αντίθετα, ο πωλητής αποσκοπεί σε ελαφρά άνοδο ή στασιμότητα της τιμή του υποκείμενου αξιόγραφου καθώς τότε ο αγοραστή δεν εξασκεί το δικαίωμα πώλησης και του μένει το ασφάλιστρο που του έχει δοθεί.

Σχόλια:

Ενώ λοιπόν, η τιμή εξάσκησης K θεωρείται σταθερή και καθορίζεται ρητά την ημέρα σύναψης του συμβολαίου, τελικά η εξάσκηση ή μη του δικαιώματος από τον αγοραστή είναι αβέβαιη, διότι οφείλεται στην απροσδιοριστία που ενέχουν οι παράμετροι της αγοράς και στον τρόπο που μπορεί να επηρεάζουν την τροχιά της τιμής του υποκειμένου αγαθού $S_t, t \in [0, T]$. Η τιμή S_t μπορεί να θεωρηθεί ως τυχαία μεταβαλλόμενη ποσότητα η οποία είναι αδύνατον να υπολογιστεί με τρόπο ντετερμινιστικό από ιστορικά δεδομένα, με την σύγχρονη υπολογιστική ισχύ και συνήθως στην πράξη υλοποιείται προσομοίωση για να μελετηθούν εμπειρικά οι ποσότητες που μας ενδιαφέρουν. Έτσι το να έχουμε μια ακριβή εκτίμηση της τιμής του υποκειμένου αγαθού στην λήξη του συμβολαίου S_T, με μηδενικό περιθώριο σφάλματος, και χρησιμοποιώντας ένα σχετικά απλό μαθηματικό υπόδειγμα είναι ανέφικτο.

Εφόσον, η αξία του υποκείμενου τίτλου μεταξύ δύο οποιωνδήποτε χρονικών στιγμών, παρουσιάζει διακυμάνσεις που σχετίζονται με ένα τεράστιο πλήθος (άγνωστων γενικά) παραγόντων, ενδιαφέρον παρουσιάζει η διαμόρφωση ενός μαθηματικού μοντέλου για την μεταβολή αυτή των τιμών του αγαθού.

Συνοπτικά, υπάρχουν τέσσερεις απλές επενδυτικές στρατηγικές στην Αγορά Παραγώγων που αφορούν τα δικαιώματα προαίρεσης και διαμορφώνονται ανάλογα με την θέση που θα λάβει ο επενδυτής στο συμβόλαιο (long έναντι short) καθώς και το είδος του (call ή put). Συνεπώς, χρησιμοποιώντας δικαιώματα προαίρεσης έχουμε τους:

1. Αγοραστές δικαιωμάτων αγοράς (long call)
2. Πωλητές δικαιωμάτων αγοράς (short call)
3. Αγοραστές δικαιωμάτων πώλησης (long put)
4. Πωλητές δικαιωμάτων πώλησης (short put)

Τέλος, κλείνοντας αυτή την λίστα με τα σχόλια πάνω στα απλά παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα, υπάρχει άλλο ένα επίπεδο διαίρεσης που αφορά στην δυνατότητα εξάσκησης του δικαιώματος του αγοραστή κάποια άλλη στιγμή μέσα στην διάρκεια ζωής του συμβολαίου και πριν την ημερομηνία λήξης.

1.3.3 Ευρωπαϊκού Τύπου Δικαιώματα Προαίρεσης (European Style Options)

Τα δύο είδη δικαιωμάτων στις Παραγράφους 1.3.1. και 1.3.2. μπορούν να εξασκηθούν μόνο στο χρόνο λήξης του, T. Επομένως οι αντίστοιχες σχέσεις που προσδιορίστηκαν αφορούν στα λεγόμενα Ευρωπαϊκού Τύπου δικαιώματα.

1.3.4 Αμερικανικού Τύπου Δικαιώματα Προαίρεσης (American Style Options)

Αυτού του τύπου τα δικαιώματα ορίζονται πανομοιότυπα με τα αντίστοιχα Ευρωπαϊκού Τύπου και έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά (χρόνος λήξης T, τιμή εξάσκησης K, option premium C) αλλά με έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας. Ένα Αμερικάνικου Τύπου δικαίωμα προαίρεσης μπορεί να εξασκηθεί ανά πάσα στιγμή πριν από τον χρόνο λήξης του συμβολαίου και μετά την αγορά. Άρα τα δικαιώματα Αμερικανικού Τύπου είναι μια κατηγορία αξιογράφων τα οποία εξαρτώνται από το μονοπάτι ή την τροχιά (path dependent) της τιμής του υποκειμένου τίτλου.

Υπό ορισμένες γενικές συνθήκες-περιορισμούς για την λειτουργία της αγοράς, αποδεικνύεται ότι δεν είναι ποτέ συμφέρον να εξασκήσει κάποιος ένα <u>δικαίωμα αγοράς</u> Αμερικανικού Τύπου πριν τη λήξη του. Πρακτικά αυτό το αποτέλεσμα υποδηλώνει την ισοδυναμία μεταξύ ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού Τύπου, με το αντίστοιχο Ευρωπαϊκού Τύπου (όταν το υποκείμενο αγαθό δεν καταβάλλει μερίσματα στο χρονικό διάστημα $[0, T]$). Η κατοχή ενός εκ των δύο στο χαρτοφυλάκιο αποφέρει το ίδιο αναμενόμενο κέρδος στην λήξη, ανεξαρτήτως της τροχιάς της τιμής του υποκείμενου τίτλου.

1.4 Εσωτερική Αξία και Ρευστότητα των Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Είναι φανερό ότι η κατοχή ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι ικανή να παραγάγει μια ταμειακή ροή στο χαρτοφυλάκιο του κατόχου του, η οποία δεν μπορεί να αναπαραχθεί από την κατοχή του υποκείμενου αξιόγραφου, παραδείγματος χάρη από μια μετοχή που είναι ένα από τα πιο συνηθισμένα υποκείμενα αξιόγραφα. Αυτό διότι το μέτρο που ονομάζεται εσωτερική αξία αυτών των δύο χρηματοοικονομικών τίτλων ενδέχεται να διαφέρει σημαντικά σε κάποιες χρονικές περιόδους.

1.4.1 Εσωτερική ή Εγγενής Αξία (Intrinsic Value)

Η εσωτερική αξία ενός περιουσιακού στοιχείου μια δεδομένη χρονική στιγμή t είναι μια μη-αρνητική τιμή που απορρέει από το κέρδος το οποίο θα έχει ο κάτοχος του εκείνη την στιγμή, μόνον όταν αυτό είναι μη-αρνητικό, αλλιώς η εσωτερική αξία είναι μηδέν.

Για ένα δικαίωμα αγοράς (call option) επί μιας μετοχής, με τιμή εξάσκησης K η εσωτερική αξία του στον χρόνο t είναι:

$$(S_t - K)_+ = \max\{S_t - K, 0\} \geq 0$$

Αντίστοιχα για ένα δικαίωμα πώλησης (put option) με τιμή εξάσκησης K' η εσωτερική αξία του στον χρόνο t είναι:

$$(K' - S_t)_+ = \max\{K' - S_t, 0\} \geq 0$$

1.4.2 Ρευστότητα (Moneyness)

Η ρευστότητα χαρακτηρίζει την εσωτερική αξία ενός συμβολαίου προαίρεσης μια δεδομένη στιγμή και διακρίνεται σε εντός-των-χρημάτων (in-the-money), επί-των-χρημάτων (at-the-money) και εκτός-των-χρημάτων (out-of-the-time). Ένα ΠΧΠ θεωρείται ότι βρίσκεται σε κατάσταση εντός-των-χρημάτων μια χρονική στιγμή t αν σε περίπτωση άμεσης εξάσκησης αποφέρει θετικό κέρδος. Είναι επί-των-χρημάτων όταν αποφέρει οριακά μηδενικό κέρδος (καθώς η παραγωγή ακριβώς μηδενικού ποσού στην πράξη είναι σπάνια, μπορεί να λέγεται near-the-money ή close-to-the-money) και εκτός-των-χρημάτων όταν αποφέρει αρνητικό κέρδος.

Σε σχέση με την εσωτερική του αξία, ένα δικαίωμα προαίρεσης που είναι εκτός-των-χρημάτων πολύ κοντά στον χρόνο εξάσκησής του T, είναι σχεδόν βέβαιο ότι δεν θα εξασκηθεί στην λήξη και έχει εσωτερική αξία μηδενική. Από την κατοχή ενός δικαιώματος αγοράς, η εσωτερική του αξία καθορίζεται από την σχέση της παρούσας τιμής του υποκείμενου τίτλου και της τιμής εξάσκησης Κ και ενδεικτικά θα έχουμε ότι τα εξής:

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-1

Εσωτερική Αξία ενός Δικαιώματος Αγοράς

Intrinsic Value of a Call Option	
ITM (in-the-money)	$S_t > K$
ATM (at-the-money)	$S_t = K$
OTM (out-of-the-time)	$S_t < K$

Αντίστοιχα, η εσωτερική αξία ενός δικαιώματος πώλησης βασίζεται στις αντίθετες σχέσεις:

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-2

Εσωτερική Αξία ενός Δικαιώματος Πώλησης

Intrinsic Value of a Put Option	
ITM (in-the-money)	$S_t < K$
ATM (at-the-money)	$S_t = K$
OTM (out-of-the-time)	$S_t > K$

1.5 Ιδιότητες των Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Αναφορικά με την συνολική αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης επί μιας μετοχής (stock option), έχουμε ότι αυτή διασπάται σε δύο επιμέρους συνιστώσες,

- στην **εγγενή αξία** του δικαιώματος, η οποία αποτελεί συνάρτηση της τιμής της μετοχής στον χρόνο t και της τιμής εξάσκησης,
- και στην **υπεραξία** (time value), η οποία θεωρείται εξωγενής σε σχέση με το συμβόλαιο και αποτελεί το μέρος εκείνο του ασφαλίστρου που καταβάλλει ο αγοραστής το οποίο είναι ικανό να αποδοθεί στον υπολειπόμενο χρόνο μέχρι την λήξη.

Τονίζεται ότι η τιμή του συμβολαίου δεν τυποποιείται στους όρους του συμβολαίου και συνδιαμορφώνεται από τους συμμετέχοντες στην αγορά. Η τιμή αυτή παρουσιάζει διακυμάνσεις στον χρόνο που οφείλονται στην δράση δυνάμεων της αγοράς και στην μεταβλητότητα που αυτή ενέχει, προερχόμενη από διάφορες πηγές. Στο σημείο αυτό αναφέρονται κάποιοι σημαντικοί παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν άμεσα την αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης.

Σαν μεθοδολογικό υπόδειγμα για τον προσδιορισμό της σημαντικότητας και του μεγέθους της επίδρασης μιας μεταβλητής (προσδιοριστικού παράγοντα) στην αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης μπορεί να θεωρηθεί το παρακάτω:

Έστω ότι στην αγορά υπάρχουν δύο συμβόλαια που το ένα είναι πιστό αντίγραφο του άλλου, με την έννοια ότι έχουν εξομοιωθεί σε όλα τα χαρακτηριστικά τους και επομένως είναι συγκρίσιμα. Για τον λόγο αυτό, δημιουργώντας δύο ξεχωριστά χαρτοφυλάκια επενδύσεων, όπου το μεν περιέχει το ένα από τα δύο συμβόλαια ενώ το δε περιέχει το άλλο αλλά με αλλαγμένο ένα χαρακτηριστικό (διαφορετικό τύπο -Ευρωπαϊκό ή Αμερικάνικο, την τιμή εξάσκησης, τον χρόνο λήξης). Τότε είμαστε σε θέση να συγκρίνουμε τις αξίες τους ανά πάσα στιγμή με στόχο την αξιολόγηση της επίδρασης της αλλαγής. Έπειτα σημειώνεται η διαφορά στις τιμές τους για να εξακριβωθεί η μεταβολή που προκλήθηκε.

Συχνά αναφέρονται οι παρακάτω βασικοί, προσδιοριστικοί παράγοντες (π.χ. βλ. Cox & Rubinstein, (1985) και Hull, (2014) και Reiner & Rubinstein, (1991)), οι οποίοι επηρεάζουν άμεσα την αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης:

1. Το είδος του δικαιώματος.
2. Η παρούσα τιμή S_0 της μετοχής.
3. Η τιμή εξάσκησης K.
4. Ο χρόνος λήξης T.
5. Η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής, σ.
6. Το ύψος του ακίνδυνου επιτοκίου δανεισμού (risk-free interest rate) r, καθώς και των άλλων επιτοκίων της αγοράς.
7. Η καταβολή μερισμάτων (dividends) για την υποκείμενη μετοχή.

Σχέσεις μεταξύ διαφορετικών Δικαιωμάτων Προαίρεσης

1.5.1 Σχέση δικαιωμάτων Αμερικανικού και Ευρωπαϊκού Τύπου

Ένα Αμερικανικού Τύπου δικαίωμα προαίρεσης απολαμβάνει τα ίδια δικαιώματα με ένα αντίστοιχο Ευρωπαϊκού τύπου, με το επιπλέον "προνόμιο" πρόωρης εξάσκησης. Επομένως η αξία του μεν θα είναι μεγαλύτερη ή ίση με την αξία του δε. Αυτό συνοψίζεται στο παρακάτω αποτέλεσμα (π.χ. βλ. Merton, (1973))

Θεώρημα 1.1 Αν συμβολιστεί με $V = V(S_t, t; K) \geq 0$ η αξία ενός δικαιώματος Αμερικανικού Τύπου επί μετοχής S_t με τιμή εξάσκησης K, και $v = v(S_t, t; K) \geq 0$ η αξία ενός δικαιώματος Ευρωπαϊκού Τύπου επί της ίδιας μετοχής και ίση τιμή εξάσκησης, τότε

$$v(S_t, t; K) \leq V(S_t, t; K)$$

1.5.2 Σχέση αξίας δικαιωμάτων προαίρεσης με διαφορετικές τιμές εξάσκησης

Συγκεκριμένα, η αγορά ενός δικαιώματος αγοράς επί μιας μετοχής (call option) αποφέρει κέρδος ανάλογο της διαφοράς της τιμής της υποκείμενης μετοχής S_T στον μελλοντικό χρόνο εξάσκησης, με την τιμή εξάσκησης K. Επομένως, η αξία του δικαιώματος μεγαλώνει για μεγαλύτερες τιμές της S_T, έχοντας διατηρήσει την K σταθερή. Αντιθέτως, ένα συμβόλαιο με τιμή εξάσκησης K_1 έχει μικρότερη αναμενόμενη αξία σε σχέση με ένα άλλο, πανομοιότυπο συμβόλαιο, το οποίο έχει τιμή εξάσκησης $K_1 > K_2$.

Η αξία των δικαιωμάτων πώλησης παρουσιάζει αντίθετης μορφής συνάρτηση αξίας από εκείνη των αντίστοιχων δικαιωμάτων αγοράς, δίνοντας σε αυτά τα συμβόλαια μεγαλύτερη αναμενόμενη αξία για μεγαλύτερες τιμές εξάσκησης (διατηρώντας όλα τα άλλα χαρακτηριστικά του σταθερά).

Θεώρημα 1.2 Έστω δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού Τύπου (call option) με τιμή εξάσκησης K, επί μιας μετοχής που δεν αποδίδει μερίσματα σε όλη την διάρκεια ζωής του δικαιώματος $[0, T]$. Τότε το δικαίωμα προαίρεσης έχει κάτω φράγμα το εξής:

$$v(S_t) \geq (S_t - K, 0)_+$$

Απόδειξη: Θεωρούμε δύο χαρτοφυλάκια και θα αποδειχθεί ότι αυτό που περιέχει το option έχει μεγαλύτερη αξία στην λήξη.

<u>Χαρτοφυλάκιο Α</u>: Αγορά του δικαιώματος αγοράς και παράλληλη αγορά K ομολόγων με αξία $B = 1$ το καθένα και χρόνο λήξης προσαρμοσμένο επί της λήξης του call.

<u>Χαρτοφυλάκιο Β</u>: Αγορά μιας μονάδας του υποκειμένου αξιογράφου (μετοχής).

Παρατηρείται ότι με αυτή την κατάσταση το κυρίαρχο χαρτοφυλάκιο A (dominant portfolio) θα υπερέχει σε αξία του κυριαρχημένου χαρτοφυλακίου B (dominated portfolio) στην λήξη.

Πράγματι, εάν η μετοχή, στον χρόνο λήξης έχει τιμή S_T η οποία διαμορφώθηκε χαμηλότερα από την τιμή K τότε το δικαίωμα λήγει χωρίς να εξασκηθεί. Επομένως αποφέρει κέρδος $0 + K$. Το χαρτοφυλάκιο B θα έχει απόδοση S_T.

Από την άλλη, εάν $S_T > K$ τότε το χαρτοφυλάκιο A αποφέρει κέρδος $(S_T - K) + K = S_T$ ίσο με το κέρδος του χαρτοφυλακίου B. Η τωρινή αξία (στο χρόνο t) του χαρτοφυλακίου A είναι μεγαλύτερη από την αξία του χαρτοφυλακίου B. Επομένως συνάγεται η σχέση:

$$v(S_t) - K \geq S_t$$

Λόγω της ιδιότητας μη-αρνητικότητας της αξίας ενός option προκύπτει:

$$v(S_t) \geq \max\{S_t - K, 0\} \qquad \blacksquare$$

Έτσι αποδείχθηκε κατασκευαστικά η ύπαρξη ενός κάτω φράγματος μέσω ενός ζεύγους χαρτοφυλακίων (κυριαρχημένο-κυρίαρχο) και την εφαρμογή της no-arbitrage υπόθεσης. Γενικά ισχύουν οι εξής ανισότητες για την αξία $C(S_t, \infty; 0)$ ενός Δικαιώματος Αγοράς εις το διηνεκές (perpetual call option) Αμερικανικού Τύπου -με απεριόριστα μεγάλο χρόνο λήξης και μηδενική τιμή εξάσκησης, την αξία $C(S_t, t; K)$ ενός Δικαιώματος Αγοράς Αμερικανικού Τύπου και την αξία $c(S_t, t; K)$ ενός Δικαιώματος Αγοράς Ευρωπαϊκού Τύπου (π.χ. βλ. Kwok, (2008)):

$$S_t \geq C(S_t, \infty; 0) \geq C(S_t, t; K) \geq c(S_t, t; K)$$

1.5.3 Ομόλογα

Έστω $B(t)$ η τιμή ενός ακίνδυνου ομολόγου (riskless bond) με σταθερό προεξοφλητικό επιτόκιο $r > 0$, το οποίο αποδίδει μια χρηματική μονάδα κάποια μελλοντική χρονική στιγμή t. Για την εύρεση την τιμής B στην λήξη ενός ημερολογιακού έτους, για ένα αρχικό ποσό επένδυσης X, το οποίο ισοδυναμεί με κατάθεση σε τράπεζα ή ακόμα αγορά ομολόγων με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο r, ισχύει:

$$\lim_{k \to \infty} X\left(1 + \frac{r}{k}\right)^k = Xe^r$$

Καθώς το πλήθος των ανατοκισμών τείνει στο άπειρο ($k \longrightarrow \infty$), προκύπτει το μοντέλο του συνεχούς ανατοκισμού. Επειδή είναι προτιμότερο να κάνουμε αναγωγή του επενδυμένου ποσού X από τον χρόνο 0 (παρόν), σε μια χρηματική μονάδα μετά από t έτη (μέλλον), τότε εξισώνεται το παραπάνω όριο με μονάδα, και προκύπτει εύκολα $X = e^{-rt}$. Με άλλα λόγια, μπορούμε με ντετερμινιστικό τρόπο (επενδύοντας σε ομόλογα) να παραγάγουμε την αξία μιας χρηματικής μονάδας στο μέλλον από την επένδυση e^{-rt} χρηματικών μονάδων την παρούσα στιγμή.

Η ύπαρξη της δυνατότητας δανεισμού ή έκδοσης δανείου με μορφή ομολόγου είναι ένα σημαντικό επενδυτικό εργαλείο το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην κατασκευή:

- αφενός ενός χαρτοφυλακίου αναπαραγωγής (replicating portfolio),
- αφετέρου μιας γενικής ισότητας (put-call parity) μεταξύ ενός Δικαιώματος Αγοράς και ενός Δικαιώματος Πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου, καθώς και κάποιες παράγωγες προτάσεις κυρίως επί των call options Αμερικανικού τύπου.

Στην πρώτη περίπτωση, αποδεικνύεται η εξασφάλιση μιας απλής επενδυτικής στρατηγικής, χωρίς (ή με ελάχιστο) κίνδυνο απώλειας του αρχικού ποσού επένδυσης, ικανή να δημιουργήσει μελλοντικά, μια ροή εσόδων ίση προς αυτή που αποφέρει στο χαρτοφυλάκιο η εξάσκηση ενός καταλλήλου δικαιώματος προαίρεσης. Στην δεύτερη, προκύπτει ότι η δίκαιη αξία ενός δικαιώματος συγκεκριμένου τύπου συνδέεται φυσιολογικά με τη αξία ενός άλλου, χωρίς να γίνεται κάποια υπόθεση για την κίνηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Το γεγονός αυτό θα χρησιμοποιηθεί και στην τιμολόγηση των βασικών δικαιωμάτων προαίρεσης με φράγματα, διατυπώνοντας κατάλληλες σχέσεις ισότητας για τις αξίες αυτών.

1.5.4 Χρόνος που απομένει μέχρι την λήξη

Ο χρόνος λήξης είναι ένας άλλος προσδιοριστικός παράγοντας για την αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης καθώς επιδρά σημαντικά στην αξία ενός δικαιώματος Αμερικάνικου τύπου. Ο μεγάλος χρονικός ορίζοντας μέχρι την εξάσκηση ενός δικαιώματος, εντείνει την απροσδιοριστία στις τιμές του υποκειμένου αξιογράφου ακόμα και σε σχετικά σταθερής, μικρής μεταβλητότητας αξιόγραφα. Φυσιολογικά ο κάτοχος ενός Αμερικάνικου τύπου δικαιώματος θα έχει περισσότερες ευκαιρίες και πληροφορία ώστε να το εξασκήσει εντός του χρονικού διαστήματος $[0, T_1]$ σε σχέση με τον κάτοχο ενός πιο βραχύχρονου Αμερικάνικου τύπου δικαιώματος με ακριβώς τα ίδια χαρακτηριστικά αλλά μικρότερο χρόνο λήξης $T_2 < T_1$. Αυτή η συλλογιστική συνοψίζεται με μορφή θεωρήματος παρακάτω. (Joshi, (2008))

Θεώρημα 1.3 Έστω μια μετοχή η οποία δεν αποδίδει μερίσματα και δύο δικαιώματα αγοράς επί της μετοχής με κοινή τιμή εξάσκησης K και χρόνους λήξης T_1 και T_2 αντίστοιχα ώστε $T_2 < T_1$. Τότε αν θεωρήσουμε ότι τα επιτόκια δανεισμού είναι μη-μηδενικά, η τιμή premium C_1 είναι τουλάχιστον όσο η τιμή C_2.

Θεώρημα 1.4 (Put-Call Parity) Υφίσταται η ακόλουθη σχέση μεταξύ ενός Δικαιώματος Αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου, ενός δικαιώματος πώλησης επίσης Ευρωπαϊκού τύπου και ενός Προθεσμιακού Συμβολαίου επί του ίδιου υποκειμένου τίτλου, με κοινό χρόνο λήξης T και τιμή εξάσκησης K:

$$c(S_t, t; K) - p(S_t, t; K) = f(S_t; K)$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στις σημειώσεις (Μπούτσικας, 2005).

Εάν ο υποκείμενος τίτλος είναι μια μετοχή που αποδίδει μερίσματα D η εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$c(S_t, T; K) - p(S_t, T; K) = f(S_t; K) + D$$

Ισχύει ότι η δίκαιη, no-arbitrage αξία ενός Προθεσμιακού Συμβολαίου με λήξη T στον χρόνο $t < T$ ισούται με την διαφορά της τιμής της μετοχής στον χρόνο t και της προεξοφλημένης αξίας της τιμής εξάσκησης K (αντιστοιχεί στην αξία ενός ομολόγου με risk-free επιτόκιο r επί K χρηματικών μονάδων με χρονικό ορίζοντα $[t, T]$):

$$f(S_t; K) = S_t - K \cdot e^{-r(T-t)}$$

Συνεπώς η ανεπτυγμένη μορφή της εξίσωσης put-call σε μια χρονική στιγμή t πριν την λήξη είναι η:

$$c(S_t, t; K) + K \cdot e^{-r(T-t)} = p(S_t, t; K) + S_t + D$$

Όπως έχει αναφερθεί στην Παράγραφο 1.3.4, ισχύει η ακόλουθη πρόταση (ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στις σημειώσεις Μπούτσικας, (2005)).

Πρόταση 1.5 Για ένα Δικαίωμα Αγοράς Αμερικανικού τύπου, το ποσό $C(t)$ που θα καταβάλλει ο αγοραστής για να το αποκτήσει, έχει την ίδια no-arbitrage (όταν δεν προσφέρεται δυνατότητα σίγουρου κέρδους) τιμή $c(t)$ με ένα αντίστοιχο δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου. Δηλαδή ισχύει η παρακάτω ταυτότητα:

$$C(t) = c(t), \forall t \in [0, T]$$

Η πρόταση αυτή αφορά σε μετοχές που δεν αποδίδουν μερίσματα (non-dividend paying) ως υποκείμενα αξιόγραφα των δικαιωμάτων της πρότασης.

1.6 Εισαγωγή στα Δικαιώματα Προαίρεσης με Φράγματα (Barrier Options)

1.6.1 Ορισμός των Barrier Options και Περιγραφή τους

Κυρίως από την ανάγκη διαμόρφωσης πιο σύνθετων συμβολαίων στην Αγορά, τα οποία θα είναι περισσότερα ευέλικτα, παρέχοντας μεγαλύτερη ποικιλία στα χαρτοφυλάκια επενδύσεων από τα απλά (vanilla) Ευρωπαϊκού και Αμερικανικού τύπου Δικαιώματα Προαίρεσης, δημιουργήθηκαν τα λεγόμενα "εξωτικά" συμβόλαια. Τα εξωτικά συμβόλαια περιλαμβάνουν τυποποιημένους όρους, και μπορούν να προσαρμοστούν καλύτερα ώστε να καλύψουν τις ανάγκες των συμμετεχόντων. Για τον λόγο αυτό προσελκύουν όλο και περισσότερους επενδυτές. Τα Δικαιώματα Προαίρεσης με Φράγματα ανήκουν στην κατηγορία των εξωτικών δικαιωμάτων, και διαφοροποιούνται από τα απλά vanilla Δικαιώματα τα οποία παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη υποενότητα, καθώς η τυχαία συνάρτηση κέρδους/απόδοσης (pay-off function) έχει μορφή που εξαρτάται άμεσα από την τροχιά της τιμής του υποκείμενου τίτλου μέχρι την ημέρα λήξης (και όχι μόνο από την τιμή που διαμορφώνεται στην λήξη). Επομένως η τιμολόγησή τους προϋποθέτει κάποιου είδους παρακολούθηση στο διάστημα $[0, T]$ της τιμής του υποκειμένου τίτλου ή/και των θέσεων τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της. Σημειωτέο ότι στην πράξη η διαδικασία παρακολούθησης γίνεται σε διακριτά χρονικά σημεία, συνήθως μετά από την ημερήσια συνέλευση του Χρηματιστηρίου οπότε καταγράφεται η τιμή του υποκειμένου τίτλου και σημειώνεται εάν υπάρχει παραβίαση του φράγματος.

Ορισμός 1.6 (Δικαίωμα Προαίρεσης με Φράγμα)

Ένα Δικαίωμα με Φράγμα είναι ένα συμβόλαιο που δίνει το δικαίωμα στον αγοραστή του να προβεί σε μια συναλλαγή σε κάποια προκαθορισμένη στιγμή στο μέλλον T, δεδομένου ότι δεν έχει τεθεί ως ανενεργό κάποια στιγμή στην διάρκεια ζωής του $[0, T]$ (option's life).

Η συνθήκη που καθιστά ένα Δικαίωμα Προαίρεσης με Φράγμα από ισχύον ή ενεργό (knock-in ή alive) σε μη-ισχύον ή ανενεργό (knock-out ή killed) είναι αυτή που εξασφαλίζει εάν η τιμή του υποκείμενου αξιογράφου έχει παραβιάσει ένα προκαθορισμένο φράγμα Η (one-touch).

Τα Δικαιώματα αυτά συναλλάσσονται τόσο στην οργανωμένη αγορά, το Χρηματιστήριο Παραγώγων όσο και εκτός αυτής (Over-The-Counter Market). Είναι ελκυστικότερα σε κάποιους συναλλασσόμενους επειδή είναι λιγότερο ακριβά από τα αντίστοιχα απλά Δικαιώματα Προαίρεσης που έχουν ίδια συνάρτηση κέρδους.

1.6.2 Βασικά Είδη των Δικαιωμάτων Προαίρεσης με Φράγματα

Η παρουσίαση θα εστιάσει στα απλούστερα Εξωτικά Δικαιώματα η αξία των οποίων καθορίζεται από ένα "σημειακό" γεγονός (one touch). Στην πραγματικότητα υπάρχουν ακόμα πιο σύνθετα συμβόλαια, προσαρμοσμένα καλύτερα στις πεποιθήσεις των επενδυτών για τις μελλοντικές κινήσεις των υποκειμένων αξιογράφων όπως ενδεικτικά τα παρακάτω.

- **Δικαιώματα Προαίρεσης με διπλά φράγματα (double barrier options):** Η ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση του δικαιώματος, εξαρτάται από την σχετική θέση της τιμής του υποκειμένου τίτλου και ενός ζεύγους φραγμάτων $\mathrm{H_u} \geq \mathrm{K}$ και $\mathrm{H_d} \leq \mathrm{K}$ εκατέρωθεν της τιμής εξάσκησης Κ, σε όλο το χρονικό διάστημα μέχρι την λήξη του συμβολαίου.
- **Ακολουθιακά Δικαιώματα Προαίρεσης με φράγματα (sequential barrier options):** Η ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση του δικαιώματος, συμβαίνει όταν η τιμή του υποκειμένου τίτλου "χτυπήσει" μόνο ένα από τα δύο φράγματα ή χτυπήσει και τα δύο αλλά με συγκεκριμένη σειρά.
- **Παρισινού τύπου Δικαιώματα Προαίρεσης με φράγματα (Parisian barrier options):** Το δικαίωμα χαρακτηρίζεται ως ανενεργό (αντίστοιχα) όταν η τιμή του υποκειμένου τίτλου παραμείνει στην περιοχή απενεργοποίησης για κάποιο προκαθορισμένο χρονικό διάστημα πριν την λήξη.

Ανενεργά Δικαιώματα Προαίρεσης με φράγματα (knock-out barriers): Ένα Δικαίωμα Προαίρεσης με Φράγμα θεωρείται ανενεργό στην λήξη, αν και μόνον αν, η τιμή του υποκείμενου τίτλου αγγίξει ένα σταθερό, προκαθορισμένο φράγμα $H \in \mathbb{R}$ στην διάρκεια ζωής του συμβολαίου. Σε αυτή την περίπτωση της πρόωρης (πριν την λήξη) ακύρωσης του δικαιώματος, ο κάτοχος του θα λάβει σαν αποζημίωση ένα ποσό έκπτωσης (rebate payment).

Για ένα ανενεργό Δικαίωμα Προαίρεσης με φράγμα Η, υπάρχουν δύο υποδιαιρέσεις:

- Down-and-out Δικαίωμα Προαίρεσης με Φράγμα: Απενεργοποιείται όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου περάσει κάτω από το προκαθορισμένο φράγμα.
- Up-and-Out Δικαίωμα Προαίρεσης με Φράγμα: Απενεργοποιείται όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου υπερβεί το προκαθορισμένο φράγμα.

Ενεργά Δικαιώματα Προαίρεσης με φράγματα (knock-in barriers): Ένα Δικαίωμα Προαίρεσης με Φράγμα θεωρείται ενεργό, αν και μόνον αν, κάποια χρονική στιγμή η τιμή του υποκείμενου τίτλου αγγίξει ένα σταθερό, προκαθορισμένο φράγμα $H \in \mathbb{R}$ στην διάρκεια ζωής του συμβολαίου. Στην περίπτωση αυτή, ο κάτοχος θα εξασκήσει το δικαίωμα του αν αποβεί συμφέρον στην λήξη T, έχοντας προκαταβάλλει ένα ασφάλιστρο.

Για ένα Ενεργό Δικαίωμα Προαίρεσης με φράγμα H, υπάρχουν επίσης δύο υποδιαιρέσεις:

- Down-and-in Δικαίωμα Προαίρεσης με Φράγμα: Ενεργοποιείται όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου περάσει κάτω από το προκαθορισμένο φράγμα.
- Up-and-in Δικαίωμα Προαίρεσης με Φράγμα: Ενεργοποιείται όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου υπερβεί το προκαθορισμένο φράγμα.

Στον πίνακα 1-3 παρουσιάζονται οι συναρτήσεις απόδοσης (payoff at maturity) των 8 διαφορετικών Δικαιωμάτων Προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου με Φράγμα H, επί μετοχής με τιμή S_t και τιμή εξάσκησης K.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-3

Συνάρτηση Απόδοσης διαφορετικών Δικαιωμάτων Προαίρεσης με φράγμα

Τύπος Δικαιώματος	Συμπεριφορά	Συνάρτηση απόδοσης (για τον κάτοχο)
Barrier Call Option	**Down-and-Out**	$c_{DO} = (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{I}_{\left\{\min\limits_{0 \le t \le T} S_t > H\right\}}$
	Up-and-Out	$c_{UO} = (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{I}_{\left\{\max\limits_{0 \le t \le T} S_t < H\right\}}$
	Down-and-In	$c_{DI} = (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{I}_{\left\{\min\limits_{0 \le t \le T} S_t < H\right\}}$
	Up-and-In	$c_{UI} = (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{I}_{\left\{\max\limits_{0 \le t \le T} S_t > H\right\}}$
Barrier Put Option	**Down-and-Out**	$p_{DO} = (K - S_T)^+ \cdot \mathbb{I}_{\left\{\min\limits_{0 \le t \le T} S_t > H\right\}}$
	Up-and-Out	$p_{UO} = (K - S_T)^+ \cdot \mathbb{I}_{\left\{\max\limits_{0 \le t \le T} S_t < H\right\}}$
	Down-and-In	$p_{DI} = (K - S_T)^+ \cdot \mathbb{I}_{\left\{\min\limits_{0 \le t \le T} S_t < H\right\}}$
	Up-and-In	$p_{UI} = (K - S_T)^+ \cdot \mathbb{I}_{\left\{\max\limits_{0 \le t \le T} S_t > H\right\}}$

Πρόταση 1.7 (Ταυτότητες μεταξύ των Δικαιωμάτων Προαίρεσης με Φράγματα) Το άθροισμα της αξίας ενός ενεργού με ένα ανενεργό Δικαίωμα Προαίρεσης με Φράγμα με τα ίδια χαρακτηριστικά, ισούται με την αξία του αντίστοιχου απλού Δικαιώματος, δηλαδή προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις.

$$c_{UI}(t) + c_{UO}(t) = c(t) \tag{1}$$
$$c_{DI}(t) + c_{DO}(t) = c(t) \tag{2}$$
$$p_{UI}(t) + p_{UO}(t) = p(t) \tag{3}$$
$$p_{DI}(t) + p_{DO}(t) = p(t) \tag{4}$$

Απόδειξη: Από την απόδειξη της σχέσης (1) προκύπτουν εύκολα οι υπόλοιπες. Εξ ορισμού, ισχύει:

$$c_{UI}(t) = \begin{cases} (S_T - K)^+, & \text{αν } \max\limits_{0 \le t \le T} S_t > H \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
&c_{UI}(t) + c_{UO}(t) = (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{I}_{\left\{\max\limits_{0\le t\le T} S_t > H\right\}} + (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{I}_{\left\{\max\limits_{0\le t\le T} S_t < H\right\}} \\
&= (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{I}_{\left\{\max\limits_{0\le t\le T} S_t < H \,\cup\, \max\limits_{0\le t\le T} S_t > H\right\}} = (S_T - K)^+
\end{aligned}
$$

Η δείκτρια συνάρτηση στην τελευταία ισότητα παίρνει τιμή 1 καθώς εκτιμάται στο ενδεχόμενο

$$
\max_{0\le t\le T} S_t < H \cup \max_{0\le t\le T} S_t > H
$$

που είναι σχεδόν βέβαιο ότι θα εκπληρωθεί. Από τις ιδιότητες της γεωμετρικής κίνησης Brown που ακολουθεί η S_t έχουμε ότι $\mathbb{P}(\{S_t = H\}) = 0$. Επομένως το άθροισμα της αξίας ενός ενεργού Δικαιώματος Προαίρεσης με το αντίστοιχο ανενεργό Δικαιώματος Προαίρεσης, συμπίπτει με την αξία ενός απλού Δικαιώματος Αγοράς.

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, αρκεί να υπολογιστεί η δίκαιη τιμή ενός Up-and-In Δικαιώματος Προαίρεσης με Φράγμα και ενός απλού Δικαιώματος Αγοράς για να βρεθεί η δίκαιη τιμή του αντίστοιχου knock-out συμβολαίου. Επιπλέον, εφόσον η αξία $c(t)$ ενός Δικαιώματος Αγοράς είναι πάντα μη-αρνητική, τότε η αντίστοιχη αξία ενός ανενεργού ή του αντίστοιχου ενεργού θα είναι μικρότερη από αυτή.

Κεφάλαιο 2

Δίκαιη Τιμολόγηση Απλών Δικαιωμάτων Προαίρεσης

2.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο διατυπώθηκαν αποτελέσματα με γνώμονα την υπόθεση της μη ύπαρξης βέβαιου κέρδους (no-arbitrage argument). Η εφαρμογή της υπόθεσης αυτής στην εύρεση της αξίας απλών χρηματοοικονομικών αξιογράφων, όπως τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, υποδεικνύει μια μέθοδο τιμολόγησης, ανεξάρτητη από τον υπολογισμό της αναμενόμενης μελλοντικής τιμής του υποκειμένου τίτλου. Αυτό και σε συνδυασμό με την ευχέρεια κατασκευής ενός χαρτοφυλακίου, που περιέχει αξιόγραφα χωρίς κίνδυνο (riskless assets), όπως ομόλογα με σταθερό ονομαστικό επιτόκιο, παρέχει το υπόβαθρο για την τιμολόγηση των πιο σύνθετων δικαιωμάτων προαίρεσης.

Πιο συγκεκριμένα, στα πλαίσια ενός εξιδανικευμένου προτύπου της Αγοράς, στην οποία δεν υφίσταται ενδογενείς τριβές, αποδεικνύεται η ύπαρξη μιας επενδυτικής στρατηγικής εξασφάλισης με σκοπό την δυναμική αναπαραγωγή της δίκαιης αξίας ενός δικαιώματος, η οποία αποφέρει ισοδύναμη ροή κεφαλαίου με αυτό στην λήξη T, χωρίς την ανάληψη ρίσκου του ίδιου επιπέδου. Αυτός είναι ο χαρακτηρισμός μια Πλήρους Αγοράς στην οποία η μελλοντική αξία ενός οποιουδήποτε αξιογράφου ισοδυναμεί με την αξία μιας συλλογής άλλων διαθέσιμων αξιογράφων.

Σε αυτό υπεισέρχονται έννοιες και θεωρήματα της Στοχαστικής Ανάλυσης και Θεωρίας των Martingales όπως το Στοχαστικό Ολοκλήρωμα του Itô, το *Θεώρημα Αλλαγής Μέτρου* και το *Θεώρημα Αναπαράστασης Martingales*. Μια παρουσίαση αυτών δίνεται π.χ. από τους Μπούτσικας (2005) και Privault (2013). Η ανάγκη υπολογισμού ποσοτήτων όπως η αναμενόμενη απόδοση ενός χαρτοφυλακίου αναπαραγωγής στην λήξη ενός Δικαιώματος Προαίρεσης οδηγούν στην επέκταση του στοχαστικού ολοκληρώματος σε προσαρμοσμένες τυχαίες διαδικασίες ακολουθώντας την επαγωγική οδό:

$$\text{Ορισμός Ολοκληρώματος Ito σε μια προσαρμοσμένη διαδικασία } (W_t, t \geq 0)$$

$$\Rightarrow \text{Υπολογισμός της αναμενόμενης αξίας } E(V_t) \text{ ενός χαρτοφυλακίου η οποία αλλάζει με τυχαίο τρόπο}$$

$$\Rightarrow \text{μεταβολή των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου με βάση την συμπεριφορά του υποκειμένου τίτλου}$$

Από την σκοπιά των χρηματοοικονομικών μαθηματικών, η απουσία βέβαιου κέρδους ισοδυναμεί με την ύπαρξη ενός μέτρου πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου Q, το οποίο:

- ισοδυναμεί με το μέτρο πιθανότητας του "πραγματικού κόσμου" (δηλαδή δίδει μηδενική πιθανότητα στα ίδια ενδεχόμενα που έχουν μηδενική πιθανότητα και στον «πραγματικό κόσμο»), συμφωνά με το οποίο υπολογίζεται η πιθανότητα των διαφόρων ενδεχομένων
- έχει την ιδιότητα Martingales.

Η μελέτη της τιμολόγησης της (δίκαιης) αξίας των απλών (vanilla) δικαιωμάτων προαίρεσης σε χρόνο $\mathrm{t} \in [0, \mathrm{T}]$ που θα μας απασχολήσουν στο κεφάλαιο αυτό, θα γίνει στα πλαίσια του μοντέλου των F. Black, M. Scholes και R. Merton που προτάθηκε το έτος 1973. Το πρόβλημα θα επιλυθεί εναλλακτικά με μια ισοδύναμη μέθοδο (μέσω της Θεωρίας των Martingales), με αυτήν που χρησιμοποίησαν οι παραπάνω ερευνητές Black και Scholes (Θεωρία Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους).

2.2 Κίνηση Brown

2.2.1 Ορισμός Κίνησης Brown

Η κίνηση Brown, ή αλλιώς διαδικασία του Wiener μελετήθηκε συστηματικά για πρώτη φορά από τον Αμερικανό μαθηματικό N. Wiener ως προς τις μαθηματικές της ιδιότητες, φαίνεται να ενσωματώνει πολλά από τα χαρακτηριστικά του μονοπατιού ή τροχιάς που ακολουθεί χρονικά, η τιμή του υποκειμένου αγαθού. Εκτός των άλλων, αποδεικνύεται ότι προκύπτει φυσιολογικά από το διωνυμικό μοντέλο διακριτού χρόνου, έχοντας θεωρήσει ότι σε κάθε απειροστό χρονικό διάστημα συμβαίνει ένα τυχαίο γεγονός. Το γεγονός που μας ενδιαφέρει είναι η ανοδική (ή καθοδική) κίνηση της τιμής της μετοχής με πιθανότητα p (αντίστοιχα $1-p$).

Η κίνηση Brown που θα οριστεί με τρόπο αξιωματικό στην συνέχεια, ουσιαστικά μοντελοποιεί την αβεβαιότητα για την άνοδο ή κάθοδο της τιμής της μετοχής $X_t - X_s$, μεταξύ δύο οποιωνδήποτε χρονικών στιγμών.

Ορισμός 2.1 (Κίνηση Brown) Μια στοχαστική διαδικασία $(W_t)_{t\geq 0}$ ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, με τιμές στους πραγματικούς αριθμούς, καλείται (Μονοδιάστατη) Κίνηση Brown με παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 0$, αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες.

1. **(Εκκίνηση από το 0)** $W_0 = 0$ με πιθανότητα 1.
2. **(Ιδιότητα Συνέχειας)** Η συνάρτηση $t \longrightarrow W_t(\omega)$, $t \geq 0$ είναι συνεχής με πιθανότητα 1 για κάθε $\omega \in \Omega$.
3. **(Κανονικότητα των προσαυξήσεων)** Κάθε χρονική προσαύξηση ακολουθεί την κανονική κατανομή $\left(W_{t+y} - W_t\right) \sim N(y\mu, y\sigma^2)$, για κάθε $t, y \geq 0$.
4. (**Ανεξαρτησία των προσαυξήσεων)** Κάθε προσαύξηση $\left(W_{t+y} - W_t\right)$ είναι ανεξάρτητη από τις W_s, για κάθε $0 \leq s \leq t$.

Αν μια στοχαστική διαδικασία $(W_t)_{t\geq 0}$ ακολουθεί Κίνηση Brown, συμβολίζεται με $W \sim BM(\mu, \sigma)$. Λόγω της πρώτης συνθήκης του ορισμού, η τυχαία μεταβλητή W_0 έχει κατανομή πιθανότητας $\mathcal{M}$ η οποία δίνει όλη την μάζα σε ένα συγκεκριμένο σημείο που ταυτίζεται με το 0. Θα μπορούσε να επιλεγεί και ένα άλλο τυχόν $x \in R$ έναντι του μηδενός το οποίο συμπίπτει με την τιμή του υποκειμένου τίτλου την στιγμή σύναψης του συμβολαίου. Η χρήση της 2.1.1. δικαιολογείται από το γεγονός ότι η $W_t = W_t - W_0$ είναι κανονική προσαύξηση. Οι δύο παράμετροι που καθορίζουν την κατανομή μετάβασης λέγονται:

- τάση (drift) $\mu \in R$, και
- πτητικότητα (volatility) $\sigma > 0$.

Αποδεικνύεται με κάποια τεχνικά μέσα τόσο η ύπαρξη της κίνησης Brown που περιγράφεται από τον ορισμό 2.1, όσο και η μοναδικότητά της στον χώρο των συνεχών συναρτήσεων $C\big([0, \infty)\big)$.

2.2.2 Βασικές Ιδιότητες Κίνησης Brown

Πριν παρουσιαστούν κάποιες ιδιότητες της κίνησης Brown που χρησιμοποιούνται εκτεταμένα στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά, έχουμε τα εξής αποτελέσματα που προκύπτουν επίσης άμεσα από τις συνθήκες του ορισμού 2.1. Οι παρακάτω προτάσεις, παρατίθενται και αποδεικνύονται στις σημειώσεις (Χελιώτης, (2020)).

Πρόταση 2.2 Έστω $W \sim BM(0,1)$ και $0 \leq s, t$. Τότε,

- $E(W_t - W_s) = 0$ και $V(W_t - W_s) = t - s$.
- $E(W_t \cdot W_s) = \min(t, s)$
- Η τυχαία μεταβλητή W_t είναι ανεξάρτητη από την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ αν $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n < t$.

Στην συνέχεια η επόμενη πρόταση εμπεριέχει πολύ απλές και χρήσιμες ιδιότητες της Κίνησης Brown. Η ιδιότητα της αλλαγής κλίμακας (scaling invariance property) επιβεβαιώνει ότι η Γεωμετρία της κίνησης Brown διατηρείται αναλλοίωτη τοπικά όσο μικρό τμήμα του χώρου θεωρήσουμε.

Πρόταση 2.3 Βασικές Ιδιότητες Έστω $W_t \sim BM(\mu, \sigma)$, $t \geq 0$. Τότε:

1. (Συμμετρία ως προς τον άξονα του χρόνου) Η στοχαστική διαδικασία $X_t = -W_t, t \geq 0$ είναι κίνηση Brown.
2. (Αλλαγή κλίμακας) Αν $c \neq 0$ σταθερά η στοχαστική διαδικασία $X_t = \frac{1}{c} W_{c^2 t}, t \geq 0$ είναι κίνηση Brown.
3. (Ανάκλαση χρόνου) Έστω $T > 0$. Η $X_t = W_T - W_{T-t}, t \in [0, T]$ είναι κίνηση Brown.

Ένα αξιοσημείωτο αποτέλεσμα το οποίο δεν είναι διαισθητικά αναμενόμενο και αφορά στην κίνηση Brown είναι ότι αμέσως μετά την έναρξη του χρόνου όπου βρίσκεται στο 0, η τροχιά θα πάρει θετικές τιμές, δηλαδή θα βρεθεί στο διάστημα των θετικών πραγματικών αριθμών $(0, \infty)$ όπως και αρνητικές του διαστήματος $(-\infty, 0)$. Επίσης θα πάρει πολύ μεγάλες και μικρές τιμές σε πεπερασμένο χρόνο. Αυτό δείχνει την εκθετική συμπεριφορά της στοχαστικής διαδικασίας καθώς περνάει ο χρόνος. (βλ. Le Gall, (2013))

Ο παρακάτω ορισμός επιτρέπει να κωδικοποιηθεί η πληροφορία που προσφέρει η πραγματοποίηση της κίνησης της ανέλιξης W. Σε κάθε βήμα όλοι οι συμμετέχοντες έχουν (πλήρη και συμμετρική) γνώση για το ποια τροχιά διαγράφηκε, άρα ποια σύνολα της μορφής $\{W_s : 0 \leq s \leq t\}$ πραγματοποιήθηκαν και ποια όχι.

2.2.3 Μελλοντική Ιστορία, Προσαρμοσμένη Ανέλιξη και Ιδιότητα Markov Κίνησης Brown

Ορισμός 2.4 (i) Μια οικογένεια σ-αλγεβρών $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ λέγεται διήθηση, φιλτράρισμα ή μελλοντική ιστορία αν ικανοποιεί την συνθήκη:

$$\emptyset \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s \text{ αν } t \leq s$$

σύμφωνα με την οποία, η πληροφορία που γίνεται γνωστή συσσωρεύεται καθώς περνάει ο χρόνος.

(ii) Για μια Κίνηση Brown $W \sim BM(\mu, \sigma)$, η οικογένεια:

$$\mathcal{F}_t \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\{W_s : 0 \leq s \leq t\})$$

λέγεται φυσική διήθηση της κίνησης.

(iii) Μια στοχαστική διαδικασία $(X_t)_{t\geq 0}$ λέγεται προσαρμοσμένη στην διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ αν η X_u είναι $\mathcal{F}_u$-μετρήσιμη για κάθε $u \geq 0$. Φυσιολογικά, κάθε Κίνηση Brown είναι προσαρμοσμένη τουλάχιστον στην φυσική της διήθηση.

Παραδείγματος χάρη, ο χρόνος εξάσκησης T ενός Αμερικανικού τύπου δικαιώματος προαίρεσης, δεν είναι $\mathcal{F}_\tau$- μετρήσιμος για κάθε $\tau \leq T$.

Συνοπτικά μια Κίνηση Brown χαρακτηρίζεται από την Μαρκοβιανή ιδιότητα, το ακαθόριστο σχήμα της και την στοχαστική μορφοκλασματική (fractal) συμπεριφορά της. Ως στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου, αλλάζει τιμή σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα (απείρως μικρού μήκους) και γι' αυτό ξεφεύγει της παρατήρησης. Ένα άλλο χαρακτηριστικό της είναι ότι κάθε χρονική στιγμή t_0 "αναγεννάται", με την έννοια ότι τα γεγονότα που θα συμβούν μετά την t_0 (παρόν), επηρεάζονται από την προϊστορία και την συσσωρευμένη πληροφορία της μόνο μέσω της παρούσας τιμής. Με άλλα λόγια μόνο η W_{t_0} σχετίζεται με την μελλοντική ιστορία της ανέλιξης και όχι η τροχιά που ακολούθησε αυτή μέχρι να φτάσει εκεί. (π.χ. βλ. Shreve, (2004))

2.3 Γεωμετρική Κίνηση Brown και Στοιχηματικές Διαδικασίες

2.3.1 Ορισμός Γεωμετρικής Κίνησης Brown και Ιδιότητα Martingale

Έστω ότι η τιμή μιας μετοχής W_t περιγράφεται με μεγάλη ακρίβεια από την Κίνηση Brown. Από όσα αναφέρθηκαν, ακόμα και αν ξεκινήσει η καταγραφή της από το σημείο $W_0 > 0$ τότε αργά ή γρήγορα, σε βάθος χρόνου, η τιμή της θα γίνει αρνητική με θετική πιθανότητα, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη κάποιος εξωγενής (στοχαστικός) παράγοντας που να επιδρά σε αυτή. Για τον λόγο αυτό υιοθετείται το επίσης απλό στοχαστικό πρότυπο για τις ποσοστιαίες (στιγμιαίες) μεταβολές της τιμής του υποκειμένου τίτλου.

Ορισμός 2.6 (Γεωμετρική Κίνηση Brown) Μια στοχαστική διαδικασία $(W_t)_{t\geq 0}$ ακολουθεί την Γεωμετρική Κίνηση Brown με παράμετρο τάσης $\mu \in R$ και μεταβλητότητα $\sigma > 0$ αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες για κάθε $t > 0, y \geq 0$:

1. Η προσαύξηση των λογαρίθμων $\ln\left(\frac{W_{t+y}}{W_t}\right)$ έχει την κατανομή $N(y\mu, y\sigma^2)$:
2. Η τυχαία μεταβλητή $\frac{W_{t+y}}{W_t}$ είναι ανεξάρτητη από τις από τις W_u, για κάθε $0 \leq u \leq t$.

Αν μια στοχαστική διαδικασία ακολουθεί την Γεωμετρική Κίνηση Brown, τότε συμβολίζεται $(W_t, t \geq 0) \sim GBM(\mu, \sigma^2)$.

Αν μια τυχαία μεταβλητή ακολουθεί Κίνηση Brown $W_t \sim BM(\mu, \sigma^2)$ τότε ισοδύναμα η $(S_t = e^{W_t}, t \geq 0) \sim GBM(\mu, \sigma^2)$ και η τυχαία μεταβλητή $S_t = e^{W_t}$ έχει την λογαριθμοκανονική κατανομή. Με απευθείας υπολογισμούς και με βάση τις ιδιότητες της μέσης τιμής, αποδεικνύεται ότι οι ροπές τάξης $k \in \mathbb{Z}$ δίνονται από τον τύπο (π.χ. βλ. Kwok, (2008)):

$$\mathbb{E}\left(S_t^k\right) = e^{kt\mu + \frac{1}{2}k^2 t\sigma^2}$$

Η μέση τιμή και η διασπορά της ροπής πρώτης τάξης της S_t αντίστοιχα, είναι:

$$\mathbb{E}(S_t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}t\sigma^2}, \text{Var}\,(S_t) = \mathbb{E}(S_t^2) - \mathbb{E}(S_t)^2 = e^{2t\mu + t\sigma^2}(e^{t\sigma^2} - 1)$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνεται ότι η Γεωμετρική Κίνηση Brown παρουσιάζει παρόμοιο ιδιάζοντα χαρακτήρα στις τροχιές της με την διαφορά ότι δεν παίρνει αρνητικές τιμές. Επίσης τώρα οι ποσοστιαίες προσαυξήσεις $\frac{S_{t+u}}{S_t}$ της Γεωμετρικής Κίνησης Brown είναι ανεξάρτητες από το παρελθόν και ακολουθούν την λογαριθμοκανονική κατανομή.

Ορισμός 2.7 (Martingales ή στοιχηματικές διαδικασίες) Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ με διήθηση πληροφορίας $\mathbb{F} \coloneqq \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ όπου I είναι ένα σύνολο διακριτών ή συνεχών χρόνων. Μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία $\{W_t, t \in I\}$ τέτοια ώστε $\mathbb{E}(|W_t|) < \infty$, λέγεται Martingale (ή $\mathbb{F} - \text{Martingale}$), αν επάγεται η εξής ταυτότητα:

$$\mathbb{E}(W_T|\mathcal{F}_t) = W_t, \qquad \forall\, t, T\colon\ 0 \leq t \leq T.$$

Με άλλα λόγια, το αναμενόμενο κέρδος (ή ζημία) ενός επενδυτή μια μελλοντική χρονική στιγμή T, ισούται με το ποσό που έχει στην διάθεσή του την παρούσα στιγμή t. Αυτός ο φορμαλισμός ξεκίνησε από την ανάγκη περιγραφής δίκαιων παιγνίων. Η αποτίμηση της δίκαιης αξίας ενός Δικαιώματος Προαίρεσης συγκεκριμένου είδους, σχετίζεται στενά με την θεωρία των Στοιχηματικών Διαδικασιών.

Πρόταση 2.8 (Ιδιότητα Martingale μιας Γεωμετρικής Κίνησης Brown) Έστω $(W_t, t \geq 0) \sim BM(\mu, \sigma^2)$ μια στοχαστική διαδικασία η οποία ορίζεται σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ εφοδιασμένο με την φυσική διήθηση $\mathcal{G} \supset \mathbb{F} := (\mathcal{F}_t = \sigma(W_x, x \leq t), t \geq 0)$ και ισχύει $\mathbb{E}(|W_t|) < \infty, t \geq 0$. Τότε οι παρακάτω προσαρμοσμένες στην $\mathbb{F}$ ανελίξεις:

(i) $W_t, t \geq 0$

(ii) $e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t}, t \geq 0$

είναι $\mathbb{F} - \text{Martingales}$.

Μια ενδεικτική απόδειξη της Πρότασης 2.8 καθώς και περισσότερα αποτελέσματα για το βασικό μαθηματικό αντικείμενο, την Κίνηση Brown, βρίσκονται π.χ. στις σημειώσεις (Χελιώτης, (2020)).

2.3.2 Δυναμική της Γεωμετρικής Κίνησης Brown μιας μετοχής (Stock Price Dynamics)

Σύμφωνα με το κλασικό μοντέλο των Black and Scholes, μια μετοχή, έστω AAA, έχει τιμές $S_t, t \geq 0$ που ανελίσσονται στον χρόνο ακολουθώντας την Γεωμετρική Κίνηση Brown. Από την Πρόταση 2.8 είναι σαφές ότι μια μετέπειτα χρονική στιγμή $t + \Delta t, \Delta t \geq 0$, ο κάτοχος μιας ποσότητας αυτής της μετοχής, μπορεί να βασίσει την απόφαση του που αφορά στην μεταβολή της, λαμβάνοντας υπόψη μόνο την τιμή της S_t, και υποθέτοντας ότι μέσα στο χρονικό διάστημα $[t, t+\Delta t]$ δεν συντελέστηκε μεταβολή. Συμβολίζοντας με:

$$dS_t = S_{t+\Delta t} - S_t$$

η S_t έχει οριακά σε απειροελάχιστες μεταβολές του χρόνου, δηλαδή καθώς $\Delta t \to 0$, δυναμική τέτοια ώστε να ικανοποιείται η Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση:

$$dS_t = \underbrace{\mu S_t dt}_{\text{όρος τάσης}} + \underbrace{\sigma S_t dW_t}_{\text{όρος μεταβλητότητας}} \quad (\mu > 0, \sigma > 0)$$

Όπου $W_t \sim BM(0,1)$ είναι μια τυπική Κίνηση Brown. Η $S_t, t \geq 0$ εντάσσεται στις λεγόμενες **Στοχαστικές Ανελίξεις του Itô**.

Από την παραπάνω ΣΔΕ προκύπτει ότι σε πολύ μικρές μεταβολές του χρόνου, η ποσοστιαία απόδοση $\frac{dS_t}{S_t}$ της τιμής της μετοχής θα προσεγγίζεται από το άθροισμα των δύο ποσοτήτων. Η μεν είναι τρόπον τινά η αναμενόμενη στιγμιαία μεταβολή της τιμής S_t με αναμενόμενο ρυθμό απόδοσης της μετοχής μ. Η δε εισαγάγει μεταβλητότητα στο μοντέλο αυτό, -λέγεται και όρος διάχυσης όπως στις σημειώσεις (π.χ. βλ. Χελιώτης, (2020))- μέσω της προσαύξησης dW_t μιας Κίνησης Brown.

Αν δεν υπήρχε μεταβλητότητα, απαλείφοντας το $\sigma S_t dW_t$, προκύπτει η εξής Διαφορική Εξίσωση:

$$dS_t = \mu S_t dt$$

Στον χρόνο μεταξύ $[0, T]$ έχει λύση,

$$S_T = S_0 e^{\mu T}, T \geq 0.$$

Με άλλα λόγια η τιμή της μετοχής έχει την απόδοση ενός ακίνδυνου χρεογράφου (ομόλογο με επιτόκιο μ και χρόνο ωρίμασης $T > 0$). Ο δεύτερος όρος, σdW_t, καθορίζει την απόκλιση της ποσοστιαίας απόδοσης της τιμής από την αναμενόμενη εκθετική αύξηση και εμπεριέχει όλη την τυχαιότητα της κίνησης.

2.4 Το Μοντέλο των Black-Scholes-Merton

2.4.1 Αυτοχρηματοδοτούμενα Χαρτοφυλάκια και Μέτρα Ουδέτερου Κινδύνου

Στην παράγραφο αυτή θα δοθεί το μοντέλο τιμολόγησης των Black, Merton και Scholes για απλά Δικαιώματα Προαίρεσης. Στο πλαίσιο του συνεχούς χρόνου, οι συναλλαγές εκτελούνται διαδοχικά σε πολύ κοντινές χρονικές στιγμές. Η Αγορά μοντελοποιείται από τον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ και έχει οριστεί καλώς, μια τυπική Κίνηση Brown $\mathrm{BM}(0,1)$, προσαρμοσμένη στην φυσική διήθηση $\mathcal{F}_s = \sigma(W_t, s \geq t \geq 0), s \geq 0$. Η χρονική ανέλιξη ενός αξιογράφου $S_t, t \geq 0$ ακολουθεί την Γεωμετρική Κίνηση Brown με τιμή στην αρχή του χρόνου (όπου δημιουργείται το χαρτοφυλάκιο) S_0, ούτως ώστε μετά από t περιόδους (έτη) η τιμή του να είναι:

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \mu t}, t \geq 0.$$

Η $(S_t, t \geq 0)$ με βάση την δυναμική που δόθηκε συνοπτικά, αποδεικνύεται ότι ικανοποιεί την Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση:

$$dS_t = \mu S_t dt + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) S_t dW_t$$

Με $(W_t, t \geq 0) \sim_{\mathbb{P}} \mathrm{BM}(0,1)$.

Στην απλούστερη δυνατή μορφή της Αγοράς διατίθενται δύο είδη αξιογράφων, ένα ομόλογο και μια μετοχή. Με βάση αυτά, μπορεί κανείς να συνθέσει ένα χαρτοφυλάκιο με σύνθεση στο χρόνο t, $x_t = (a_t, b_t)$. Η **επενδυτική στρατηγική (trading strategy)** $(x_t, t \geq 0)$ αντιπροσωπεύει τις αντίστοιχες (πιθανώς κλασματικές) ποσότητες από τα διαφορετικά αξιόγραφα του χαρτοφυλακίου και αλλάζει στοχαστικά στον χρόνο, αντικατοπτρίζοντας την ανάγκη του κατόχου να αναπροσαρμόζει τα περιουσιακά του στοιχεία ώστε να ελαχιστοποιεί τις προσωρινές απώλειες ή να μεγαλώνει τα κέρδη με βάση τυχαία γεγονότα που συμβαίνουν στην Αγορά. Επομένως υποτίθεται ότι η x_t είναι (δισδιάστατη) **προβλέψιμη (predictable)** Στοχαστική Διαδικασία. Αυτό σημαίνει ότι η μεταβολή της επενδυτικής στρατηγικής εξαρτάται ντετερμινιστικά, από την γνώση του επενδυτή για τις τιμές των αξιογράφων την αμέσως προηγούμενη στιγμή.

Αν $\xi_t = (e^{rt}, S_t)$ το διάνυσμα της αξίας ενός ομολόγου και μιας μετοχής σε κάθε χρονική στιγμή που γίνεται καταγραφή τους, τότε το χαρτοφυλάκιο με επενδυτική στρατηγική x_t θα έχει αξία σε χρόνο $t \in [0, T]$ ίση με το εσωτερικό γινόμενο:

$$V(t) = x_t \cdot \xi_t = a_t e^{rt} + b_t S_t$$

Ορισμός 2.9 (Αυτοχρηματοδοτούμενο Χαρτοφυλάκιο) Έστω $x_t = (a_t, b_t)$ και $\xi_t = (e^{rt}, S_t)$ τα διανύσματα της σύνθεσης και της αξίας των τίτλων αντίστοιχα, ενός χαρτοφυλακίου, στον χρόνο $t > 0$. Το χαρτοφυλάκιο είναι αυτοχρηματοδοτούμενο (self-financing), αν η αξία του παραμένει σταθερή, κάθε φορά που ανανεώνεται η σύνθεσή του, δηλαδή ικανοποιείται η διαφορική εξίσωση:

$$dV_t = a_t de^{rt} + b_t dS_t$$

Ισοδύναμα χρησιμοποιείται και η παρακάτω Διαφορική Εξίσωση:

$$dx_t \cdot \xi_t = da_t \cdot e^{r(t)} + db_t \cdot S_t = 0$$

Σύμφωνα με αυτή, πωλώντας για παράδειγμα μια ποσότητα $-db_t > 0$ της μετοχής, το κέρδος που θα αποφέρει αυτή η επένδυση, τροφοδοτεί την αγορά da_t ομολόγων, ώστε το αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο να μην αποφέρει κέρδος/ζημία μεταξύ των χρονικών στιγμών t και $t + dt$.

Επιπλέον από τον ορισμό έπεται ότι δεν παρέχεται από κάποια εξωτερική πηγή κεφάλαιο, παρά μόνο από τις κινήσεις που εκτελούνται εντός αυτού με τα ήδη υπάρχοντα περιουσιακά στοιχεία. Αν συμβολίσουμε με V_t την αξία του χαρτοφυλακίου στον χρόνο t, τότε από τον Λογισμό του Itô, θα είναι αυτοχρηματοδοτούμενο αν ισοδύναμα ισχύει:

$$dV_t = x_t \cdot d\xi_t$$

Επομένως αυτή η απειροστή (τυχαία) μεταβολή στην αξία του, απορρέει από την απειροστή μεταβολή των τιμών των περιουσιακών στοιχείων.

Ορισμός 2.10 (Μέτρο Πιθανότητας Ουδέτερου Κινδύνου)

Έστω ένα μη-κενό σύνολο Ω, και ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}^*$. Θα λέγεται **Μέτρο Πιθανότητας Ουδέτερου Κινδύνου** (Risk Neutral Probability Measure) ως προς κάποια στοχαστική διαδικασία $S_t, t \geq 0$ αν ισχύει:

$$\mathbb{E}^*(S_t|\mathcal{F}_u) = e^{-r(t-u)} S_u,\ 0 \leq u < t$$

Αποδεικνύεται η παρακάτω απλή πρόταση που χαρακτηρίζει ένα μέτρο Πιθανότητας Ουδέτερου Κινδύνου. (Privault, (2013))

Πρόταση 2.11 **(i)** Ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ είναι Μέτρο Πιθανότητας Ουδέτερου Κινδύνου ως προς την $S_t, t \geq 0$, αν και μόνο αν, η προεξοφλημένη στοχαστική διαδικασία $X_t = e^{-rt}S_t$, $t \geq 0$ είναι $\mathbb{Q} - \mathrm{Martingale}$.
(ii) Επιπλέον αν εξασφαλίζεται η μοναδικότητα του $\mathbb{Q}$, η Αγορά λέγεται **πλήρης**.

2.4.2 Risk Neutral Pricing Formula

Ο τύπος των Black-Scholes-Merton έχει πλέον παγιωθεί και ο αντίκτυπος που δημιούργησε έχει διαπεράσει ολόκληρη την Επιστήμη των Οικονομικών Μαθηματικών, αλλάζοντας τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε και μελετάμε τις σύγχρονες Αγορές.

Όπως καταγράφεται σε εμπειρικές έρευνες, οι προτιμήσεις των επενδυτών ως προς τον κίνδυνο (risk preferences) δεν μπορούν να αποτελέσουν επαρκή προβλεπτικό παράγοντα που να εξηγεί την παρατηρούμενη μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής. Επομένως φαίνεται ότι αυτή η ανεξαρτησία της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης των Black-Scholes-Merton, από το αποδεκτό επίπεδο κινδύνου το οποίο είναι σε θέση να αναλάβουν, υφίσταται και στην λύση της, επιβάλλοντας έτσι ομοιομορφία στις προτιμήσεις των επενδυτών. Η "Ουδετερότητα ως προς στον Κίνδυνο" γίνεται ένα γόνιμο εργαλείο για την ανάλυση των ΠΧΠ.

Αυτό έχει ως συνέπεια στο μοντέλο των Black-Scholes-Merton, να δημιουργείται παράλληλα ένα άλλο πρότυπο της Αγοράς στο οποίο η επένδυση σε ένα αξιόγραφο με κίνδυνο (μετοχή) δεν ενέχει κάποιο ρίσκο.

Στο παρόν, δίνεται ο τύπος τιμολόγησης Ουδέτερου Κινδύνου για ένα ΠΧΠ (Risk Neutral Pricing Formula) σύμφωνα με την πιθανοθεωρητική Martingale προσέγγιση. Σε αντίθεση με την κλασική μέθοδο των Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων όπου η αξία του ΠΧΠ αναπαράγεται δυναμικά, η προσέγγιση που ακολουθείται στο παρόν μπορεί να θεωρηθεί πιθανοθεωρητική, διότι το πρόβλημα της τιμολόγησης, έγκειται εν μέρει στην εύρεση ενός διαφορετικού τρόπου (μέτρου πιθανότητας) με τον οποίο, αξιολογούμε την πιθανότητα των τυχαίων γεγονότων στην Αγορά. Το μέτρο πιθανότητας που υιοθετείται εκ των προτέρων, εκφράζει τις "πραγματικές" πιθανότητες και αναμενόμενες αξίες, εγκαταλείπεται χάριν ενός "εικονικού" μέτρου πιθανότητας, σύμφωνα με το οποίο η αναμενόμενη, προεξοφλημένη απόδοση του υποκειμένου αξιογράφου (εδώ μετοχής) εξισώνεται με την απόδοση του αντίστοιχου ομολόγου.

Το παρακάτω σημαντικό αποτέλεσμα, χαρακτηρίζει την λειτουργία μιας «ορθολογικής» Αγοράς δίνοντας ένα ισχυρό υπολογιστικό εργαλείο. Αναλυτική απόδειξη στην περίπτωση του μοντέλου διακριτού χρόνου, δίνεται π.χ. από τον Shiryaev, (1999).

Θεώρημα 2.12 (Θεμελιώδες Θεώρημα Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών) Μια Αγορά δεν παρουσιάζει την δυνατότητα βέβαιου κέρδους (arbitrage-free Market), αν και μόνο αν, επάγεται ένα Μέτρο Πιθανότητας Ουδέτερου Κινδύνου.

Στο επόμενο θεώρημα κατασκευάζεται ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης, το οποίο στην λήξη θα έχει αξία ίση με αυτή του ΠΧΠ, δηλαδή θα ισχύει $V_T = U_T$. Η ύπαρξη ενός μέτρου πιθανότητας Ουδέτερου Κινδύνου $\mathbb{Q}^*$ (**Θεώρημα του Girsanov**) δίνει στην προεξοφλημένη αξία του χαρτοφυλακίου στον χρόνο $t \in [0, T]$: ${V_t}^* = e^{-rt}V_t$, ορισμένες επιθυμητές ιδιότητες (για την ακρίβεια την καθιστά στοχαστική ανέλιξη του Itô και κατά συνέπεια μια στοιχηματική διαδικασία ως προς το μέτρο αυτό) με αναπαράσταση στην μορφή:

$${V_t}^* = V_0 + \sigma \int_0^t b_t\, S_t^* dW_t'$$

Όπου $W_t' \sim_{\mathbb{Q}^*} BM(0,1)$ και $S_t^* = e^{-rt}S_t$.

Αν συγκεντρώσουμε τους όρους εντός του ολοκληρώματος, η νέα ανέλιξη S_t^* ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dS_t^* = \sigma S_t^* dW_t'$$

όπου $W_t' = W_t + \Lambda t$ είναι μια μετατοπισμένη Κίνηση Brown.

Επομένως,

$${V_t}^* = V_0 + \int_0^t b_t\, dS_t^*$$

Η χρησιμότητα του Θεωρήματος του Girsanov έγκειται στο ότι εγγυάται την ύπαρξη ενός μέτρου πιθανότητας $\mathbb{Q}^*$, που είναι ισοδύναμο με το αρχικό, δηλαδή $d\mathbb{Q}^* = f_T d\mathbb{P}$ για κατάλληλη “πυκνότητα αλλαγής μέτρου” f_T και έχει την ιδιότητα να “άρει” την μετατόπιση της W'_t από την τυπική κίνηση Brown με κεντροποιημένες, και κανονικές προσαυξήσεις. Δεν θα δοθεί ιδιαίτερη έμφαση σε αυτό στα επόμενα.

Από την Πρόταση 2.11 η $S_t^*, t \geq 0$ είναι Martingale ως προς το $\mathbb{Q}^*$ και ισχύει ο ορισμός 2.10 για το $\mathbb{Q}^*$. Έτσι ισχύει ο χαρακτηρισμός της Αγοράς με βάση το Θεμελιώδες Θεώρημα 2.12 και άρα μπορεί να παραχθεί χωρίς ρίσκο, η αξία ενός οποιουδήποτε αξιογράφου το οποίο εξαρτάται από το αξιόγραφο S_t.

Από την άλλη, εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι η πληροφορία που δίνει η ανέλιξη W'_t ισοδυναμεί με την πληροφορία που δίνει η W_t ή και η S_t (άρα οι μελλοντικές ιστορίες αυτών συμπίπτουν), τότε η προεξοφλημένη αξία $U_t^* = e^{-rt}U_t$ της αναμενόμενης υπό το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}^*$, απόδοσης της τελικής αξίας του αξιογράφου U_T, ως προς την φυσική διήθηση του χώρου $(\mathcal{F}_t)_t$, δηλαδή $U_t = E^*(e^{-r(T-t)}U_T|\mathcal{F}_t)$, έχει μεταβολή στο $[0, t]$ που γράφεται στην μορφή (**Θεώρημα Αναπαράστασης Martingale**):

$$U_t^* = U_0 + \int_0^t Y_t \, dW'_t$$

Η στοχαστική διαδικασία $Y_t, t \geq 0$ είναι $(\mathcal{F}_t)_t$ – προσαρμοσμένη με βάση τις προκείμενες του Θεωρήματος. Η $(U_t^*)_t$ είναι στοιχηματική διαδικασία ως προς το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}^*$.

Έστω $V_0 = U_0$, ο επενδυτής στην αρχή έχει πλήρη γνώση για τις αξίες των αξιογράφων στην Αγορά και μπορεί να διαμορφώσει κατάλληλα το χαρτοφυλάκιο του, εκτελώντας κινήσεις όπως ανοικτή πώληση μιας ποσότητα της μετοχής, σύναψη δανείου και τα λοιπά.

Είναι φανερό ότι αν $b_t = \frac{Y_t}{\sigma S_t^*}$ είναι το στοχαστικό ποσό επένδυσης (είναι καλά ορισμένο εφόσον $S_t^* > 0$ σε κάθε χρονική στιγμή t) στην μετοχή τότε οι προεξοφλημένες αξίες είναι ίσες:

$$V_t^* = U_t^*$$

Από τις προϋποθέσεις λειτουργίας της Αγοράς και το θεώρημα 2.12, για να μην παρουσιάζεται δυνατότητα βέβαιου κέρδους με κατάλληλη αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου, προκύπτει ότι:

$$V_t = U_t, \forall t \in (0, T)$$

Όλη η παραπάνω συλλογιστική σκιαγραφεί τα κύρια σημεία της απόδειξης του παρακάτω βασικού Θεωρήματος. (π.χ. βλ. Geon, (2016), Privault, (2013), Shreve, (2004))

Θεώρημα 2.13 (Risk Neutral Pricing Formula) Θεωρούμε ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο με σύνθεση $x_t = (a_t, b_t), t \in [0, T]$, με αξία:

$$V_t = x_t \cdot \xi_t = a_t e^{rt} + b_t S_t, t \in [0, T]$$

και ένα ΠΧΠ Ευρωπαϊκού τύπου επί μιας μετοχής με ανέλιξη τιμής $S_t, t \geq 0$ (που δεν αποδίδει μερίσματα μέχρι την λήξη του) το οποίο έχει αξία στην λήξη C. Τότε η no-arbitrage αξία του ΠΧΠ στο χρόνο t δίνεται από τον τύπο:

$$U_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*(C|\mathcal{F}_t), \qquad t \in [0, T].$$

Το μέτρο πιθανότητας Ουδέτερου Κινδύνου $\mathbb{Q}^*$ είναι τέτοιο ώστε $d\mathbb{Q}^* = f_T d\mathbb{P}$ και $f_T = \exp\left(-\lambda B_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T\right)$.

Προκύπτει ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί Γεωμετρική Κίνηση Brown $S_t, t \geq 0 \sim GBM\left(r - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right)$ υπό το μέτρο $\mathbb{Q}^*$.

Στο πρώτο κεφάλαιο προτάθηκε η έκφραση $C = f(S_T) = (S_T - K)^+$ για την αξία ενός Ευρωπαϊκού τύπου Δικαιώματος Προαίρεσης στην λήξη. Ωστόσο ο τύπος μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε συνάρτηση που αναπαριστά την αξία ενός ΠΧΠ Ευρωπαϊκού τύπου στην λήξη. Στην ακόλουθη πρόταση συνοψίζεται ο τύπος τιμολόγησης ενός απλού Δικαιώματος Αγοράς, όπως δόθηκε από τους Black-Scholes-Merton. (π.χ. βλ. Geon, (2016), Privault, (2013), Shreve, (2004))

Πρόταση 2.14 (Δίκαιη Αξία ενός Δικαιώματος Αγοράς) Έστω ένα Ευρωπαϊκού τύπου Δικαίωμα Αγοράς, επί μιας μετοχής που δεν αποδίδει μερίσματα, με τιμή εξάσκησης K και χρόνο λήξης T. Η δίκαιη, no-arbitrage αξία του στον χρόνο $t \in [0, T]$ είναι ίση με:

$$c(t, S_t; K) = S_t \Phi(v) - e^{-r(T-t)} K \Phi\left(v - \sigma\sqrt{T - t}\right)$$

Η ποσότητα v είναι η:

$$v = \frac{r(T-t) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2} - \ln\left(\frac{K}{S_T}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Η πτητικότητα (volatility) της τιμής της μετοχής σ και το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο της αγοράς r είναι οι μόνες παράμετροι του μοντέλου. Εδώ Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής.

2.4.3 Σχόλια πάνω στον τύπο των Black και Scholes

Παρατήρηση 2.15 (Ιδιότητες της τιμής ενός δικαιώματος από τον τύπο των Black-Scholes)

Η ιδέα που βρίσκεται στον τρόπο τιμολόγησης του υποδείγματος Black-Scholes είναι ότι αν συγκεντρώσουμε σε ένα χαρτοφυλάκιο αξιόγραφα και σταθμίσουμε την σύνθεσή τους με κατάλληλα βάρη, υπό κάποιες γενικές προϋποθέσεις που μπορούμε να “χαλαρώσουμε”, τα κέρδη ή απώλειες που θα έχουμε από την μετοχή στο τέλος πολύ μικρών χρονικών περιόδων, υπερκαλύπτονται από την θέση που έχει ληφθεί ως προς το ΠΧΠ. Αυτό το γεγονός δείχνει ότι οριακά υπάρχει μια σχεδόν τέλεια συσχέτιση μεταξύ της μεταβολής της αξίας του χαρτοφυλακίου και της μεταβολής της τιμής της μετοχής. Έτσι σε κάθε ένα χρονικό παράθυρο $[t, t + dt]$ όπου ο κίνδυνος από την ταυτόχρονη κατοχή των δύο αυτών αξιογράφων (π.χ. μετοχή και Δικαίωμα Αγοράς) εκμηδενίζεται και ισχύει το μοντέλο αναλογίας $\partial c = \lambda \partial s$, η κατοχή ενός ομολόγου μπορεί να παραγάγει το κέρδος/ζημία από αυτές τις δύο θέσεις. Αυτή η προσαρμογή συμβαίνει μέχρι την λήξη του Δικαιώματος οδηγώντας στον τύπο τιμολόγησης. (π.χ. βλ. Hull, (2014))

Επανερχόμενοι στον τύπο των Black-Scholes, η no-arbitrage αξία ενός Δικαιώματος Αγοράς ως συνάρτηση του χρόνου και της τιμής της μετοχής $s = S_t$ δίνεται ως εξής:

$$c(t,s) = s\Phi(v) - e^{-t(T-t)}K\Phi(v - \sqrt{T-t})$$

Όπου $v = \frac{r(T-t) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2} - \ln\left(\frac{K}{S_t}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

Από την μελέτη της συμπεριφοράς της συνάρτησης $c(t,s)$ όπως μεταβάλλεται η τιμή s, προκύπτει η μέθοδος αντιστάθμισης Δέλτα (Delta Hedging) που αποσκοπεί στην αντιστάθμιση του κινδύνου που σχετίζεται με τις κινήσεις της s. Πιο συγκεκριμένα, αν δS η μεταβολή της τιμής της μετοχής και δc η αντίστοιχη μεταβολή της αξίας ενός Δικαιώματος Αγοράς επί αυτής, τότε από τον υπολογισμό του Δέλτα προκύπτει ότι:

$$\Delta_t = \frac{\partial c(t,s)}{\partial s} \approx \frac{\delta c}{\delta s}$$

Άρα,

$$\delta c \approx \Delta_t \delta s$$

Η short θέση λόγω της πώλησης Δ_t μεριδίων της μετοχής την στιγμή t, που βρίσκεται σε ένα προσεγγιστικό χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης, αντισταθμίζεται σχεδόν πλήρως από την κατοχή του Δικαιώματος. Η εύρεση του ποσού επένδυσης σε ομόλογα στο χαρτοφυλάκιο, σε κάθε στάδιο αναπροσαρμογής του, γίνεται με βάση την εξής επαγωγική, αναδρομική διαδικασία:

1. Ο χρόνος μέχρι την λήξη διαμερίζεται σε n υποδιαστήματα με άκρα $\mathcal{D} \coloneqq \left\{ t_i = \frac{T}{n} i | i = 0,1,\dots,n \right\}$.
2. Σε κάθε χρονική στιγμή επενδύεται στην μετοχή ποσό ίσο με το Δέλτα της αξίας του Δικαιώματος,

$$\Delta_{t_i} = b_{t_i}$$

   Επειδή το χαρτοφυλάκιο είναι αυτοχρηματοδοτούμενο, επενδύεται σε ομόλογα ποσό a_{t_i} σε κάθε $t_i \in \mathcal{D}$ καθώς:

$$\begin{aligned} dx_{t_i} \cdot \xi_{t_i} = 0 &\Leftrightarrow a_{t_i} e^{rt_i} + \Delta_{t_i} S_{t_i} = a_{t_{i-1}} e^{rt_i} + \Delta_{t_{i-1}} S_{t_i} \\ &\Leftrightarrow a_{t_i} = a_{t_i - 1} + e^{-rt_i} (\Delta_{t_{i-1}} - \Delta_{t_i}) S_{t_i} \end{aligned}$$

3. Η τελική αξία του χαρτοφυλακίου είναι σχεδόν ίση με την αξία του Δικαιώματος στην λήξη:

$$V_{t_n} = a_n e^{rt_n} + \Delta_{t_n} S_{t_n} = U_T$$

Με άλλα λόγια έχουμε ότι η ποσότητα Delta αφορά στην ευαισθησία του Δικαιώματος ως προς μικρές μεταβολές στην τιμή του υποκειμένου αξιογράφου. Στην πράξη μεγάλη μεταβλητότητα στις τιμές της μετοχής, συνεπάγεται υψηλό Δέλτα και αυτό οδηγεί σε όλο και περισσότερες αναπροσαρμογές του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης με στόχο την επιτήρηση του Δέλτα. Τα κόστη συναλλαγών που πολλές φορές δεν είναι μηδενικά επηρεάζουν το κόστος κατασκευής του χαρτοφυλακίου. Η παραπάνω δυναμική διαδικασία λέγεται αντιστάθμιση μέσω Δέλτα (Delta Hedging).

Όταν το Δέλτα είναι μηδενικό, η θέση του επενδυτή ως προς το Δικαίωμα είναι Ουδέτερη σε σχέση με το Δέλτα (Delta Neutral), επομένως η μεταβολή της τιμής της υποκείμενης μετοχής δεν επηρεάζει, ή έχει σχεδόν μηδενική συσχέτιση, με την μεταβολή της αξίας του Δικαιώματος.

Το ακόλουθο λήμμα βρίσκεται π.χ. στο βιβλίο (Hull, 2014).

Λήμμα 2.15 Το Delta ενός Δικαιώματος Αγοράς με απόδοση στην λήξη $\mathrm{f(x) = (x - K)^+}$ είναι για κάθε t:

$$\mathrm{Delta} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{s}} \mathrm{c(t,s)} = \Phi(\mathrm{v})$$

Για την κατανόηση της πιθανότητας $\Phi(\mathrm{v} - \sqrt{\mathrm{T - t}})$, έχουμε ότι αυτή δηλώνει την πιθανότητα εξάσκησης του Δικαιώματος σε έναν Κόσμο Ουδέτερου κινδύνου. Πράγματι καθώς προσεγγίζει το 0, τότε:

$$\mathrm{c(t,s)} \approx \mathrm{s}\Phi(\mathrm{v})$$

Δηλαδή η τιμή εξάσκησης K είναι απίθανο να πληρωθεί και το συμβόλαιο είναι πολύ εκτός-των-χρημάτων (deep-out-of-the-money).

Το Δέλτα μιας short θέσης σε ένα Δικαίωμα Αγοράς είναι αντίθετο από το Δέλτα από την long θέση. Ενώ το Δέλτα ενός Δικαιώματος Πώλησης ισούται με:

$$\Delta_{\mathrm{t}} = \frac{\partial \mathrm{p(t,s)}}{\partial \mathrm{s}} = \Phi(\mathrm{v}) - 1$$

Εν γένει το Delta καθώς και η ευρύτερη οικογένεια των δεικτών ευαισθησίας (Greeks) ενός Δικαιώματος είναι χρήσιμα ποσοτικά μεγέθη που αξιολογούν όχι μόνο την πορεία του αλλά και βοηθούν στην διαμόρφωση της μελλοντικής στρατηγικής και αξιολόγησης των προοπτικών του. (π.χ. βλέπε Haug, (2006)).

Στην αμέσως επόμενη παράγραφο εξάγεται εκ νέου η ταυτότητα μεταξύ ενός Δικαιώματος Αγοράς και του αντίστοιχου Δικαιώματος Πώλησης καθώς και της τιμής του υποκειμένου αξιογράφου και της προεξοφλημένης αξίας ενός ομολόγου στην λήξη, από την εφαρμογή του τύπου τιμολόγησης των Black και Scholes. Περισσότερες ταυτότητες που αφορούν τα Δικαιώματα Προαίρεσης καθώς και γενικεύσεις μπορεί να βρει κανείς π.χ. στο σύγγραμμα του Haug, (2006).

Παρατήρηση 2.16 (Put-Call Parity)

Έστω ένα ζεύγος δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου, Αγοράς και Πώλησης επί της ίδιας μετοχής (χωρίς μερίσματα) με τιμή εξάσκησης K και χρόνο λήξης T. Τότε ισχύει:

$$c(S_t, t; K) - p(S_t, t; K) = K \cdot e^{-r(T-t)} - S_t$$

Απόδειξη:

Η αξία του Δικαιώματος Πώλησης εξαρτάται από τον χρόνο και την τιμή της μετοχής S_t εκφράζεται μέσω της πρότασης 2.14 ως:

$$p(S_t, t; K) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*[(K - S_T)^+ | \mathcal{F}_t]$$

Άρα έχουμε,

$$\begin{aligned} c(S_t, t; K) - p(S_t, t; K) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*[(S_T - K)^+ | F_t] - e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*[(K - S_T)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*[(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*[S_T - K | \mathcal{F}_t] \\ &= S_t - e^{-r(T-t)} K \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει καθώς η $e^{-rt} S_t, t \geq 0$ είναι $\mathbb{Q}^*$-martingale, άρα $\mathbb{E}^*[e^{-rT} S_T | \mathcal{F}_t] = e^{-rt} S_t$, ενώ:

$$(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = \begin{cases} S_T - K \\ 0 \end{cases} - \begin{cases} 0 & , S_T \geq K \\ K - S_T & , K \geq S_T \end{cases} = S_T - K$$

Αναπτύσσοντας την αξία του Δικαιώματος Αγοράς παίρνουμε το εξής:

$$c(S_t, t; K) = S_t - e^{-r(T-t)} K + S_t \Phi(v) - e^{-r(T-t)} K \Phi\left(v - \sigma\sqrt{T-t}\right)$$

$$= S_t(\Phi(v) + 1) - e^{-r(T-t)} (\Phi\left(v - \sigma\sqrt{T-t}\right) + K)$$

Θεωρώντας $t = 0$ ο τύπος της no-arbitrage αξίας μπορεί να γραφεί σε μια πιο συμπαγή μορφή:

$$c = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2)$$

Όπου $\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r\pm\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$.

Παρατήρηση 2.17 (Εύρεση της δίκαιης αξίας Αμερικανικού τύπου Δικαιωμάτων Προαίρεσης)

Όπως ειπώθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, δεν συμφέρει να εξασκηθεί ένα δικαίωμα αγοράς Αμερικανικού τύπου πριν την ωρίμασή του (όταν δεν υπάρχουν μερίσματα). Επομένως η no-arbitrage αξία του ισούται με την no-arbitrage αξία του αντίστοιχου Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματος και δίνεται σε κλειστή, υπολογίσιμη μορφή στην Πρόταση 2.14.

Αντιθέτως, για ένα δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου, η εξάσκηση πριν από την λήξη του δικαιώματος ενδέχεται να είναι επικερδής για τον κάτοχο. Η εύρεση της αξίας του (η οποία είναι μεγαλύτερη από αυτή ενός αντίστοιχου Ευρωπαϊκού τύπου) μέσω κλειστού τύπου, είναι πιο σύνθετη διαδικασία και δεν μπορεί να δοθεί σε απλή, κλειστή μορφή.

Παρατήρηση 2.18 (Συμπεριφορά $\mathrm{c}(\mathrm{t}, \mathrm{s})$ κοντά στην λήξη του Δικαιώματος)

Εδώ εξετάζεται τι συμβαίνει οριακά, καθώς t πλησιάζει στον χρόνο λήξης T. Είναι σαφές ότι η αξία ενός Δικαιώματος Αγοράς μειώνεται (εκτός αν αυτό είναι πολύ εκτός-των-χρημάτων, deep-out-of-the-money). Αυτό επαληθεύεται καθώς για $t \longrightarrow T$:

$$v \longrightarrow \frac{\ln\left(\frac{S_T}{K}\right)}{0} = +\infty$$

Και,

$$\Phi(v), \Phi(v - \sqrt{T-t}) \longrightarrow \Phi(+\infty) = 1$$

Άρα η τιμή του μειώνεται,

$$c(t, s) \longrightarrow U_T = (S_T - K)_+$$

Παρατήρηση 2.19 Η τιμή της μετοχής S_t υπό το μέτρο πιθανότητας Ουδέτερου Κινδύνου $\mathbb{Q}^*$ θα ακολουθεί και πάλι Γεωμετρική Κίνηση Brown με διαφορετικές παραμέτρους:

$$S_t \sim_{\mathbb{Q}^*} \mathrm{GBM}\left(\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}, s^2 = \sigma^2\right)$$

Από τα περιγραφικά μέτρα της Γεωμετρικής Κίνησης Brown, υπολογίζεται άμεσα ότι στον "Κόσμο Ουδέτερου Κινδύνου", η αναμενόμενη απόδοση που θα έχει ισούται με αυτή ενός ομολόγου:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}(S_t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}ts^2} = e^{t\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{2}t\sigma^2} = e^{rt}$$

Κεφάλαιο 3

Δίκαιη Τιμολόγηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης με φράγματα

3.1 Εισαγωγή

Όπως παρουσιάστηκε στα προηγούμενα, τα Δικαιώματα Προαίρεσης με φράγματα είναι μια κατηγορία εξωτικών Δικαιωμάτων των οποίων η αξία εξαρτάται από την πορεία της τιμής της υποκείμενης μετοχής σε όλη την διάρκεια του συμβολαίου με βάση ένα σημειακό, τυχαίο γεγονός και διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:

- Στα knock-in που ενεργοποιούνται μόνον όταν η τιμή της μετοχής "χτυπήσει" ένα προκαθορισμένο φράγμα, έστω H και,
- Στα knock-out που απενεργοποιούνται και θεωρούνται μη-εξασκήσιμα στον χρόνο που απομένει μέχρι την λήξη, όταν η τιμή της μετοχής "χτυπήσει" ένα προκαθορισμένο φράγμα, έστω H.

Η αξία αυτών των Δικαιωμάτων στην λήξη έχει λίγο πιο σύνθετη μορφή από αυτή των τυπικών Δικαιωμάτων ενώ λόγω του επιπλέον όρου ενεργοποίησης ή απενεργοποίησης, παρέχουν επιπλέον προστασία και έχουν χαμηλότερο κόστος από τα δε. Παραδείγματος χάρη, ένα Up-and-Out Δικαίωμα Προαίρεσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί από επενδυτές που προβλέπουν στάσιμη ή ελαφρώς πτωτική συμπεριφορά της τιμής του υποκειμένου αξιογράφου, ή εν πάσει περιπτώσει μια πρόσκαιρη ανοδική συμπεριφορά να μην οδηγεί σε υπέρβαση ενός εκ των άνω ορίου. Αν σε αντίθετη περίπτωση, ο κάτοχος μιας ποσότητας 1000 μεριδίων μιας μετοχής, έχει μεγάλη βεβαιότητα ότι η τιμή της μετοχής δεν θα πέσει κάτω από ένα καθορισμένο επίπεδο σε διάστημα τριών μηνών, τότε μπορεί να εκδώσει ένα Down-and-Out Δικαίωμα Αγοράς επί αυτής με χρόνο λήξης τους τρεις μήνες (με κάλυψη αν την κατέχει, και χωρίς κάλυψη διαφορετικά -covered versus naked contract-). Έστω ότι την ημέρα σύναψης του συμβολαίου, η τιμή της μετοχής έχει διαμορφωθεί στα 250$ και ο κάτοχος του συμβολαίου συμφωνεί με τον αγοραστή ένα κάτω φράγμα 238$, στο οποίο δεν πέσει ποτέ η τιμή της μετοχής εντός του χρονικού διαστήματος, τότε ο πωλητής θα έχει εισπράξει ως κέρδος, το ασφάλιστρο (option's premium).

Τα Δικαιώματα Προαίρεσης με φράγμα, το πρώτο είδος αξιογράφων που άρχισε να συναλλάσσεται στην Αγορά πριν την σύσταση της Επιτροπής για την Ανταλλαγή Δικαιωμάτων Προαίρεσης του Σικάγο (Chicago Board of Options Exchange), αποτελούν αντικείμενο συναλλαγής κυρίως στην εξωχρηματιστηριακή Αγορά και υπάρχει μεγάλο πλήθος παραλλαγών των τυπικών Δικαιωμάτων με φράγματα που αφορούν σε διπλά φράγματα, Δικαιώματα με επιστροφή χρημάτων όταν γίνουν knock-out και άλλα. (Zhang, (1998)) Η Αγορά που έχει οργανωθεί γύρω από αυτά τα υπό συνθήκει Δικαιώματα Προαίρεσης σημειώνει ραγδαία ανάπτυξη τις τελευταίες δεκαετίες.

Είναι φανερό ότι τα Δικαιώματα με φράγματα, έχουν άμεση σχέση με τις ακραίες τιμές (extremal values) της κίνησης που εκτελεί η αξία της υποκείμενης μετοχής, και εξαρτώνται από την κατανομή πιθανότητας των μεγίστων/ ελαχίστων της σε ένα χρονικό διάστημα. Στο κεφάλαιο αυτό θα αποδειχθεί ότι υπάρχει κλειστός τύπος για την δίκαιη αξία ενός τυπικού Δικαιώματος Προαίρεσης με μονό φράγμα υιοθετώντας την βασική ιδέα της Risk Neutral Pricing Formula του προηγουμένου κεφαλαίου.

Εκμεταλλευόμενοι τις ισότητες που διατυπώθηκαν στην παράγραφο 1.6.2 μεταξύ των ενεργών και ανενεργών Δικαιωμάτων (In and Out Parities), η αξία του ενός απορρέει από αυτή του άλλου άμεσα. Υποθέτουμε τα εξής δύο:

Η τιμή της μετοχής $S_t, T \geq t \geq 0$ είναι μια Γεωμετρική Κίνηση Brown με συμπεριφορά που υπακούει στην δυναμική του απλού γραμμικού μοντέλου με σταθερή (ανεξάρτητη του χρόνου) τάση και σταθερή (ανεξάρτητη του χρόνου) πτητικότητα:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

όπου $W_t, T \geq t \geq 0$ είναι μια τυπική Κίνηση Brown στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, ως προς το μετρό πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου $\mathbb{Q}$. Άρα ισχύει:

$$S_t = S_0 e^{\left(\frac{\sigma^2}{2}+\mu\right)t+\sigma W_t}, T \geq t \geq 0$$

Ορίζεται και ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης με αξία $V_t, T \geq t \geq 0$ τέτοιο ώστε:

$$V_t = V_0 + \sigma \int_0^t b_t \, W_t dW_t$$

Η ανέλιξη V_t είναι $\mathbb{Q} -$ martingale.

Στα Δικαιώματα Προαίρεσης με φράγματα, η συνάρτηση απόδοσης στην λήξη έχει μια πιο σύνθετη μορφή που εμπλέκει το μέγιστο (ή το ελάχιστο) της Κίνησης:

$$C = g(S_T, M_T)$$

Αυτή η συνάρτηση δίνεται αναλυτικά σε κάθε περίπτωση στον πίνακα 1.3 του Πρώτου Κεφαλαίου.

Η προεξοφλημένη αξία ενός τέτοιου Δικαιώματος στον χρόνο $t = 0$ δίνεται από την μέση τιμή της g επί ενός συγκεκριμένου δισδιάστατου χωρίου D που θα καθοριστεί στα επόμενα:

$$e^{-rT}\mathbb{E}[g(S_T, M_T)] = e^{-rT} \iint_D g(x,\ y) f(x,\ y) dxdy$$

Ο υπολογισμός του απαιτεί την γνώση της πυκνότητας του μεγίστου της Κίνησης, καθώς και της από κοινού πυκνότητας της Κίνησης και του μεγίστου της, και κατανομή:

$$\mathbb{P}(S_T \leq s, M_T \leq m) = \int_{-\infty}^{m} \int_{-\infty}^{s} f(x, y) dxdy$$

3.2 Η αρχή της Ανάκλασης μιας Γεωμετρικής Κίνησης Brown

3.2.1 Μέγιστο, Τρέχον Μέγιστο και Χρόνος Πρώτου Χτυπήματος

Στην ενότητα αυτή θα γίνει μια σύντομη παρουσίαση κάποιων ποσοτήτων οι οποίες απορρέουν φυσιολογικά από την μελέτη μιας Κίνησης Brown και είναι αριθμητικά μέτρα που την συνοδεύουν. Συγκεκριμένα θα δοθούν υπολογισμοί που αφορούν στην συνάρτηση πιθανότητας του *τρέχοντος μεγίστου* και της από-κοινού συνάρτησης πιθανότητας μεταξύ του *τρέχοντος μεγίστου* και της ίδιας της Κίνησης Brown μέσω της Αρχής της Ανάκλασης.

Η Αρχή της Ανάκλασης είναι μια εφαρμογή της ισχυρής Μαρκοβιανής ιδιότητας που χαρακτηρίζει μια Κίνηση Brown. Σχετίζεται με την έννοια του *χρόνου διακοπής*. Αναφορικά με τους χρόνους διακοπής, αυτοί παρουσιάζουν ξεχωριστό ενδιαφέρον διότι συμπεριφέρονται σαν ντετερμινιστικοί χρόνοι, υπό μια έννοια, και πολλές ιδιότητες της Κίνησης Brown επεκτείνονται φυσιολογικά για να καλύψουν και αυτούς. Ένα κλασικό παράδειγμα χρόνου διακοπής είναι ο χρόνος εξάσκησης ενός Αμερικανικού τύπου Δικαιώματος Προαίρεσης πριν την λήξη του. Η απόφαση αυτή απορρέει από έναν *"λογικό" μηχανισμό απόφασης*, σύμφωνα με τον οποίο, επιλέγεται να διακοπεί η καταγραφή της κίνησης του υποκειμένου αξιογράφου (να εξασκηθεί το Δικαίωμα) με βάση την διαθέσιμη πληροφορία (π.χ. βλ. Χελιώτης, (2020)).

Ορισμός 3.1 (Μέγιστο και Τρέχον Μέγιστο) Έστω $S_t, 0 \leq t \leq T$ μια τυπική Κίνηση Brown. Τότε ορίζεται το <u>**μέγιστο**</u> αυτής σε όλο το χρονικό διάστημα $[0, T]$ ως η ανέλιξη:

$$M_T = \sup_{0 \leq t \leq T} S_t = \max_{0 \leq t \leq T} S_t$$

Και το <u>**τρέχον μέγιστο**</u> την παρούσα στιγμή t:

$$M_t = \sup_{0 \leq x \leq t} S_x = \max_{0 \leq x \leq t} S_x$$

Παρατηρείται ότι το supremum είναι και μέγιστο της κίνησης λόγω της συνέχειας της. Ισχύουν οι ανισότητες:

- $M_t \leq M_T$, $\forall t$ διότι η S_t είναι μη-αρνητική και η $\max_{0 \leq t} S_t$ είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου.
- $S_t \leq M_t$, $\forall t$ λόγω της μη-αρνητικότητας της S_t και των ιδιοτήτων της συνάρτησης μεγίστου.

Αν δοθεί ένα (γραμμικό) φράγμα για την τιμή S_t σε κάθε χρονική στιγμή τότε με βάση την πληροφορία που διαθέτουμε από την κίνηση και η οποία κωδικοποιείται στην φυσική διήθησή $\mathcal{F}_t$ της, μπορεί μεταξύ των άλλων να προσδιοριστούν τα εξής γεγονότα: (i) έχει επιτευχθεί άφιξη αυτού του φράγματος στο χρόνο t, (ii) η S_t βρισκόταν πάνω ή κάτω από αυτό, (iii) παρέμεινε σε εκείνη την περιοχή κατά χρόνο $0 \leq s \leq t$ και (iv) ξαναχτύπησε το φράγμα μια συγκεκριμένη στιγμή στην συνέχεια. Όλοι αυτοί οι χρόνοι που συνέβησαν τα γεγονότα αυτά, είναι $\mathcal{F}_t -$ μετρήσιμοι και λέγονται **χρόνοι διακοπής (stopping times).** Η χρησιμότητά τους έγκειται στο ότι μπορεί κανείς να πάρει μια απόφαση από την πληροφορία που διαθέτει έως εκείνη την στιγμή και να αναπροσαρμόσει το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης.

Ορισμός 3.2 Χρόνος Πρώτης άφιξης (First Hitting Time) Έστω ένα $\alpha > S_0$ και $S_t, t \geq 0$ μια τυπική Κίνηση Brown. Ορίζεται ως χρόνος Πρώτης άφιξης στο α ή Χρόνος Πρώτης Εισόδου της Κίνησης στο διάστημα $[\alpha, \infty)$, ο χρόνος διακοπής,

$$\tau_\alpha = \inf\{t \geq 0, S_t = \alpha\}$$

Ο Χρόνος Πρώτης Εισόδου της Κίνησης στο $[\alpha, \infty)$ υπεισέρχεται στην τελική αξία ενός οποιουδήποτε Δικαιώματος Προαίρεσης με φράγμα το α. Όταν δεν υπάρχει ένας τέτοιος χρόνος στο διάστημα παρατήρησης, τότε του δίνεται μια αυθαίρετα μεγάλη τιμή, δηλαδή $\tau_\alpha = \infty$.

Ισχύει ότι:

$$\mathbb{P}(\tau_\alpha < T) = \mathbb{P}(M_T \geq \alpha) \tag{1.1}$$

Στο σημείο αυτό είναι σαφές ότι αν υποτεθεί επαφή του φράγματος από την Κίνηση, δηλαδή $S_t = \alpha$ τότε ένα Δικαίωμα Προαίρεσης με φράγμα την τιμή αυτή, καθίσταται αυτομάτως ενεργό ή ανενεργό. Με δεδομένο λοιπόν ότι συνέβη παραβίαση του επιπέδου $x = \alpha$ κάποια στιγμή πριν την λήξη του συμβολαίου, τότε λόγω της συμμετρίας της Κίνησης Brown με μηδενική τάση (δηλαδή $S_t =_d - S_t \sim N(0, t)$), έχουμε ότι:

$$\mathbb{P}(S_T > \alpha \cap \tau_\alpha < T) = \mathbb{P}(S_T < \alpha \cap \tau_\alpha < T)$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_T < \alpha | \tau_\alpha < T) &= \frac{\mathbb{P}(S_T < \alpha \cap \tau_\alpha < T)}{\mathbb{P}(\tau_\alpha < T)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(S_T < \alpha \cap \tau_\alpha < T)}{\mathbb{P}(S_T > \alpha \cap \tau_\alpha < T) + \mathbb{P}(S_T < \alpha \cap \tau_\alpha < T)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Απ' όπου η πιθανότητα να χτυπηθεί το φράγμα κάποια στιγμή πριν την λήξη ισούται με:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_\alpha < T) &= 2\mathbb{P}(S_T < \alpha \cap \tau_\alpha < T) \\ &= 2\mathbb{P}(S_T < \alpha \cap M_T \geq \alpha) \\ &= 2\mathbb{P}(S_T > \alpha \cap M_T \geq \alpha) \end{aligned} \tag{1.3}$$

3.2.2 Από κοινού πυκνότητα πιθανότητας μιας Κίνησης Brown και του *μεγίστου* της

Έχοντας λοιπόν ένα αντικείμενο που έχει φαινόμενη Κίνηση Brown, η πιθανότητα να βρεθεί στην περιοχή πάνω από ένα σημείο α είναι της τάξης του 50%, αν γνωρίζουμε ότι είχε φτάσει μέχρι αυτό μια προηγούμενη στιγμή. Φυσικά με βάση τις ιδιότητες της Κίνησης Brown και τον τυχαίο μορφοκλασματικό χαρακτήρα της, είμαστε σχεδόν βέβαιοι ότι άπαξ και βρέθηκε στο α θα πάρει τιμές εκατέρωθέν του. Όμως μπορούμε να έχουμε κάτι περισσότερο από αυτό όπως διατυπώνεται στο επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 3.4 Αρχή της Ανάκλασης (Reflection Principle) Έστω $S_t, t \geq 0$ μια τυπική Κίνηση Brown σε έναν χώρο πιθανότητας και $\alpha > S_0$. Τότε ισχύει η σχέση:

$$\mathbb{P}(M_T \geq \alpha) = 2\mathbb{P}(S_T \geq \alpha) \tag{1.4}$$

<u>Απόδειξη</u>: Υπολογίζεται άμεσα μέσω της από κοινού πιθανότητας των $S_T,\ M_T$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_T \geq \alpha) &= \mathbb{P}(S_T \geq \alpha \cap M_T \geq \alpha) + \mathbb{P}(S_T \geq \alpha \cap M_T < \alpha)\\ &= \mathbb{P}(S_T \geq \alpha \cap M_T \geq \alpha) \underset{(1.3)}{=} \frac{1}{2}\mathbb{P}(\tau_\alpha < T) \underset{(1.1)}{=} \frac{1}{2}\mathbb{P}(M_T \geq \alpha)\end{aligned}$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι $M_T > S_T$ επομένως $S_T \geq \alpha \cap M_T < \alpha = \emptyset$. Καθώς η Κίνηση Brown είναι συνεχής έχουμε ότι τα ενδεχόμενα είναι ίσα: $S_T \geq \alpha = S_T > \alpha$, άρα με βάση την σχέση $\mathbb{P}(\tau_\alpha < T) = 2\mathbb{P}(S_T > \alpha \cap M_T \geq \alpha)$ επαληθεύεται και η τέταρτη ισότητα.

Επομένως, εφόσον $S_T \sim N(0, T)$ θα είναι:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_T \geq \alpha) &= 2\mathbb{P}(S_T \geq \alpha)\\ &= 2\mathbb{P}\left(\frac{S_T - 0}{\sqrt{T}} \geq \frac{\alpha - 0}{\sqrt{T}}\right)\\ &= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\alpha - 0}{\sqrt{T}}\right)\right) = 2\Phi\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{T}}\right)\end{aligned}$$

Από τον υπολογισμό της κατανομής του μεγίστου της Κίνησης και την Σχέση 1.1 η συνάρτηση πυκνότητας του Χρόνου Πρώτης Εισόδου στο α υπολογίζεται άμεσα.

Λήμμα 3.3 (Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας του Χρόνου Πρώτης Εισόδου)

Για τον Χρόνο Πρώτης Εισόδου μιας Κίνησης Brown τ_α έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f_{\tau_\alpha}(T) &= \frac{d}{dT}\mathbb{P}(\tau_\alpha < T) \\ &= \frac{d}{dT}\mathbb{P}(M_T \geq \alpha) = \frac{d}{dT}2\Phi\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{T}}\right) \\ &= \alpha T^{-\frac{3}{2}}\Phi\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{T}}\right) = \frac{\alpha}{T\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{\alpha^2}{2T}} \end{aligned}$$

Λόγω της ισχύος της Αρχής της Ανάκλασης, επιτρέπεται άμεσα ο υπολογισμός της από κοινού κατανομής της Κίνησης S_T με το μέγιστο M_T, που θα ήταν πιο δύσκολο έργο υπό άλλες συνθήκες. Συγκεκριμένα αυτό που δείχνεται είναι ότι στο χωρίο $D = \{(s, m): s \leq m, m \geq 0\}$ με τα διατεταγμένα ζεύγη τιμών του σημείου (S_T, M_T) μπορεί να προσδιοριστεί η κατανομή του με βάση τα ποσοστημόρια της κανονικής κατανομής.

Έστω το μονοπάτι που ακολουθεί η Κίνηση Brown $(S_t)_t$ και στον χρόνο τ_α έχει φτάσει στο φράγμα α ($S_{\tau_\alpha} = \alpha$). Τότε ορίζεται φυσιολογικά μια άλλη, προσαρτημένη στοχαστική διαδικασία με τον εξής τύπο:

$$\tilde{S}_t = \begin{cases} S_t & , t < \tau_\alpha \\ 2\alpha - S_t & , \tau_\alpha \leq t \leq T \end{cases}$$

Αυτή η στοχαστική διαδικασία $\left(\tilde{S}_t\right)_t$ ταυτίζεται με την αρχική, έως την στιγμή της Πρώτης Εισόδου και στην συνέχεια αποσπάται από αυτή ακολουθώντας την κατοπτρική τροχιά (ως προς την ευθεία $x = \alpha$). Αν η Κίνηση βρεθεί στην λήξη στο επίπεδο $S_T = s$, τότε προφανώς η ανάκλαση είναι στο επίπεδο $\tilde{S}_T = 2\alpha - s$.

Αποδεικνύεται το ακόλουθο βασικό λήμμα (π.χ. Privault, (2013).

Λήμμα 3.5 Έστω ένα ζεύγος αριθμών s, m με $0 \leq s \leq m$ και $0 < m$.

(i) Η από κοινού συνάρτηση κατανομής του μεγίστου στον χρόνο T, M_T, της Κίνησης κάτω από ένα άνω φράγμα m και της S_T δίνεται:

$$P(S_T \le s, M_T \le m) = \Phi\left(\frac{s}{\sqrt{T}}\right) - \Phi\left(-\frac{2m-s}{\sqrt{T}}\right)$$

(ii) Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας του στοιχείου (S_T, M_T) δίνεται ως εξής:

$$f_{(S_T,M_T)}(s,m) = \frac{2(2m-s)}{T\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{(2m-s)^2}{2T}\right)$$

<u>Απόδειξη</u>: (i) Το $\{S_T < s\}$ είναι ισοδύναμο με $\{\tilde{S}_T > 2m - s\}$ αν ισχύει ισοδύναμα η υπέρβαση του φράγματος $M_T > m$, και

$$\mathbb{P}(S_T < s, M_T > m) = \mathbb{P}(\tilde{S}_T > 2m - s, M_T > m) \tag{1.5}$$

Ισχύει η σχέση:

$$\mathbb{P}(S_T < s) = \mathbb{P}(S_T < s, M_T > m) + \mathbb{P}(S_T < s, M_T < m) \tag{1.6}$$

Χρησιμοποιώντας την 1.6 μέσω της 1.5 έπεται ότι:

$$\mathbb{P}(S_T < s, M_T < m) = \mathbb{P}(S_T < s) - \mathbb{P}(\tilde{S}_T > 2m - s, M_T > m)$$

Επομένως αφού $m > s$ και $\tilde{S}_T > 2m - s$ συνεπάγεται $M_T > m$:

$$\mathbb{P}(S_T < s, M_T < m) = \mathbb{P}(S_T < s) - \mathbb{P}(\tilde{S}_T > 2m - s)$$

Η ζητούμενη σχέση έπεται άμεσα.

Παίρνοντας την μεικτή παράγωγο ως προς m, s στην σχέση του (i) προκύπτει:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial m}\mathbb{P}(S_T \le s, M_T \le m) &= \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial m}\left[\Phi\left(\frac{s}{\sqrt{T}}\right) - \Phi\left(-\frac{2m-s}{\sqrt{T}}\right)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial m}\left[\Phi\left(\frac{s}{\sqrt{T}}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial m}\left[\Phi\left(-\frac{2m-s}{\sqrt{T}}\right)\right]\end{aligned}$$

Όμως η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται:

$$\frac{\partial}{\partial m}\left[\Phi\left(\frac{s}{\sqrt{T}}\right)\right] = 0$$

Καθώς η ποσότητα παραγώγισης είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής m, η οποία εκφράζει το μέγιστο της Κίνησης. Με βάση τους κανόνες παραγώγισης έπεται ότι:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial m}\left[\Phi\left(-\frac{2m-s}{\sqrt{T}}\right)\right] &= -\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{2}{\sqrt{T}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(2m-s)^2}{2T}}\right)\right] \\ &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi T}}\frac{\partial}{\partial s}\left(-\frac{(2m-s)^2}{2T}\right)e^{-\frac{(2m-s)^2}{2T}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi T}}\left(2\frac{(2m-s)}{2T}\right)e^{-\frac{(2m-s)^2}{2T}} \\ &= \frac{2(2m-s)}{T\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{(2m-s)^2}{2T}}\end{aligned}$$

■

3.2.3 Το μέγιστο μιας Κίνησης Brown με μη-μηδενική τάση

Στο τύπο τιμολόγησης Ουδέτερου Κινδύνου των Black-Scholes, παρουσιάστηκε ένα μέτρο πιθανότητας σύμφωνα με το οποίο, η προεξοφλημένη αξία του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης είναι Martingale ως προς αυτό, και υπολογίζεται μέσω ενός στοχαστικού ολοκληρώματος Itô μιας μετατοπισμένης κίνησης Brown. Η τελευταία είναι τυπική κίνηση Brown ως προς το μέτρο αυτό. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Girsanov, βρίσκεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του μεγίστου $X_T = \max\limits_{0\leq t\leq T} \hat{S}_t$ της Κίνησης Brown με τάση $\lambda \neq 0$ ανά μονάδα χρόνου:

$$\hat{S}_t = S_t + \lambda\, t \tag{1.7}$$

Θεώρημα 3.6 Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των $\hat{S}_T$ και X_T

Υπό το αρχικό μέτρο πιθανότητας του χώρου $\mathbb{P}$, το τυχαίο διάνυσμα των μεταβλητών $\left(\hat{S}_t\,,\,X_t\right)_t$ στον χρόνο T έχει πυκνότητα που δίνεται από τον τύπο:

$$f_{(\hat{S}_t\,,\,X_t)}(s,m) = \frac{2(2m-s)}{T\sqrt{2\pi T}}\exp\left(\lambda s - \frac{1}{2}\lambda^2 T - \frac{1}{2T}(2m-s)^2\right) \tag{1.8}$$

Στο χωρίο $D = \{(s,m): s \leq m, m \geq 0\}$ και είναι μηδενική παντού αλλού.

Απόδειξη(Shreve, (2004)): Έστω το εκθετικό Martingale:

$$Z_t = e^{-\lambda \hat{S}_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t} = e^{-\lambda S_t + \frac{1}{2}\lambda^2 t}, \quad 0 \leq t \leq T$$

Αυτό επάγει ένα νέο μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ ώστε για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \in \mathcal{F}$ στην σ-άλγεβρα του χώρου έχει πιθανότητα:

$$\widehat{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z_T d\mathbb{P}$$

Παρακάτω χρησιμοποιείται για τους υπολογισμούς των μέσων τιμών η ισοδύναμη μορφή της παραπάνω σχέσης:

$$\frac{1}{Z_T} d\widehat{\mathbb{P}} = d\mathbb{P} \tag{1.9}$$

Ορίζεται καλά διότι η $Z_T > 0$ είναι αντιστρέψιμη στο πεδίο ολοκλήρωσης D.

Σύμφωνα με το Θεώρημα του Girsanov, η $\left(\hat{S}_t\right)_t$ είναι μια τυπική Κίνηση Brown ως προς το μέτρο πιθανότητας $\widehat{\mathbb{P}}$, δηλαδή:

$$\hat{S}_t \sim_{\widehat{\mathbb{P}}} BM(0,1)$$

Επομένως η από κοινού πυκνότητα της $\hat{S}_T$ με το μέγιστό της X_T στην λήξη υπό το νέο μέτρο πιθανότητας $\widehat{\mathbb{P}}$, από το Λήμμα 3.5, θα γράφεται στην μορφή:

$$\hat{f}_{(\hat{S}_T, X_T)}(s, m) = \frac{2(2m - s)}{T\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{(2m - s)^2}{2T}\right)$$

εντός του κυρτού χωρίου D

Στην συνέχεια, για τον υπολογισμό της πυκνότητας του διανύσματος $\left(\hat{S}_T, X_T\right)$ τώρα κάτω από το αρχικό μέτρο πιθανότητας, εργαζόμαστε ως εξής. Έστω $(s, m) \in D$ και $A \coloneqq \left\{\hat{S}_T < s, X_T < m\right\}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\hat{S}_T < s, X_T < m\right) &= \mathbb{P}(A) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(I_A) \underset{(1.9)}{=} \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{P}}}\left(\frac{1}{Z_T}\mathbb{I}_A\right)\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{s} \int_{-\infty}^{m} e^{\lambda v - \frac{\lambda^2 T}{2}} \cdot \hat{f}_{(\hat{S}_T, X_T)}(v, u) du dv$$

Παίρνοντας την μεικτή παράγωγο ως προς (s, m) στην τελευταία προκύπτει η ζητούμενη συνάρτηση:

$$\frac{\partial^2}{\partial m\, \partial s} \mathbb{P}\left(\hat{S}_T < s, X_T < m\right) = e^{\lambda s - \frac{1}{2}\lambda^2 T} \cdot \hat{f}_{(\hat{S}_T, X_T)}(s, m) \qquad \blacksquare$$

Με βάση το Θεώρημα 3.6, μπορούμε να αποδείξουμε άμεσα το επόμενο λήμμα. Αυτό είναι το τελευταίο θεωρητικό αποτέλεσμα το οποίο παρατίθεται πριν την τιμολόγηση των Δικαιωμάτων Προαίρεσης με φράγματα. Η απόδειξη του είναι πιο μακροσκελής και βρίσκεται π.χ. στους (Shreve, (2004) και Geon, (2016)).

Λήμμα 3.7 Πυκνότητα Μεγίστου μιας Κίνησης Brown με μη-μηδενική τάση

Από την σχέση του Θεωρήματος 3.6:

$$f_{(\hat{S}_T, X_T)}(s, m) = e^{\lambda w - \frac{1}{2}\lambda^2 T} \cdot \hat{f}_{(\hat{S}_T, X_T)}(s, m)$$

προκύπτει ολοκληρώνοντας ως προς την μεταβλητή s, ότι η συνάρτηση κατανομής και η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας της X_T, υπό το αρχικό μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ είναι:

$$\mathbb{P}(X_T \leq m) = \Phi\left(\frac{m - \lambda T}{\sqrt{T}}\right) - e^{2\lambda m} \cdot \Phi\left(\frac{-m - \lambda T}{\sqrt{T}}\right), m \geq 0$$

$$f_{X_T}(m) = \frac{2}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \exp\left(-\frac{(m - \lambda T)^2}{2T}\right) - 2\lambda e^{2\lambda m} \cdot \Phi\left(\frac{-m - \lambda T}{\sqrt{T}}\right), m \geq 0$$

Και είναι ταυτοτικά μηδενική όταν $m < 0$.

3.3 Τιμολόγηση των βασικών Δικαιώματος Προαίρεσης με φράγμα

3.3.1 Δίκαιη Αξία ενός Up-and-Out Δικαιώματος Αγοράς

Με βάση το πλαίσιο που διαμορφώθηκε στις προηγούμενες παραγράφους είμαστε σε θέση να εξάγουμε έναν κλειστό τύπο (πιο σύνθετο από ένα αντίστοιχο vanilla Δικαίωμα) για κάθε Δικαίωμα Προαίρεσης με φράγμα, Ευρωπαϊκού τύπου επί μιας μετοχής που δεν αποδίδει μερίσματα καθ' όλη την διάρκεια ζωής του συμβολαίου. Θα πρέπει να δοθεί προσοχή στον τρόπο που τίθεται το φράγμα και ιδιαίτερα στην θέση του ως προς την τιμή εξάσκησης K. Στην περίπτωση για παράδειγμα ενός Up-and-Out Δικαιώματος Προαίρεσης, αν το φράγμα είναι μικρότερο της τιμής εξάσκησης $B < K$, τότε θα είναι εντός-των-χρημάτων (in-the-money) αλλά ταυτόχρονα ανενεργό με απόδοση στην λήξη μηδενική.

Έχοντας ότι η τιμή της μετοχής είναι $S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t} = S_0 e^{\sigma \widehat{W}_t}$, η στοχαστική διαδικασία $\widehat{W}_t$ είναι μια μετατοπισμένη Κίνηση Brown που έχει μέγιστο:

$$X_T = \max_{[0,T]} \widehat{W}_t$$

Για το μέγιστο της τιμής της μετοχής, η σχέση του με το X_T, υπολογίζεται εύκολα:

$$M_T = \max_{[0,T]} S_t = \max_{[0,T]} S_0 e^{\sigma \widehat{W}_t} = S_0 e^{\sigma \max\limits_{[0,T]} \widehat{W}_t} = S_0 e^{\sigma X_T}$$

Ένα Up-and-Out Δικαίωμα με τιμή εξάσκησης K και άνω φράγμα για την τιμή της υποκείμενης μετοχής $B > K$, θα γίνει ανενεργό αν $S_0 e^{\sigma X_T} > B$ και θα έχει απόδοση -κατά τα γνωστά- ίση με:

$$C = (S_T - K)^+ \mathbb{I}_{\left\{\max\limits_{[0,T]} S_t \leq B\right\}}$$

Προπαρασκευαστικά, αν $C = g(S_T, M_T) = g\left(S_0 e^{\sigma \widehat{W}_T}, S_0 e^{\sigma X_T}\right)$ η συνάρτηση απόδοσης στην λήξη (αλλιώς συνθήκη τερματισμού ή terminal condition, όταν εμπλέκεται η στοχαστική διαφορική εξίσωση των Black-Scholes) ενός ΠΧΠ τότε η παρούσα αναμενόμενη αξία του, σύμφωνα με την (1.8) του Θεωρήματος 3.6, και τον τύπο τιμολόγησης Ουδέτερου Κινδύνου Black-Scholes, θα δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} V &= e^{-rT} \mathbb{E}\left[g\left(S_0 e^{\sigma \widehat{W}_T}, S_0 e^{\sigma X_T}\right)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{y \vee 0}^{\infty} g(S_0 e^{\sigma y}, S_0 e^{\sigma x}) \left[\frac{2(2x - y)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\lambda y - \frac{1}{2}\lambda^2 T - \frac{(2x-y)^2}{2T}}\right] dx dy \end{aligned}$$

Συμβολίζεται με $z \vee 0 \coloneqq \max\{0, z\} \geq 0$. Επειδή η μεταβλητή ολοκλήρωσης $\hat{X}_T = x$ έχει περιορισμό $\hat{X}_T > (\widehat{W}_T \vee 0)$ και $\widehat{W}_T = y$, καθώς $y \in (-\infty, 0)$ τότε $x > (y \vee 0) = 0$. Αν $y \in (0, \infty)$ τότε προφανώς $y \vee 0 = y$ και άρα $x > y$. Επομένως το διπλό ολοκλήρωμα της παραπάνω αξίας διασπάται σε ένα άθροισμα δύο επιμέρους όρων:

$$V = \int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{\infty} g(S_0 e^{\sigma y}, S_0 e^{\sigma x}) \frac{2(2x-y)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\lambda y - \frac{1}{2}\lambda^2 T - \frac{(2x-y)^2}{2T}} dxdy + \int_{0}^{\infty}\int_{y}^{\infty} g(S_0 e^{\sigma y}, S_0 e^{\sigma x}) \frac{2(2x-y)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\lambda y - \frac{1}{2}\lambda^2 T - \frac{(2x-y)^2}{2T}} dxdy \tag{1.10}$$

Ακολουθεί το βασικό θεώρημα τιμολόγησης ενός Up-and-Out Δικαιώματος Αγοράς (βλ. Privault (2013)).

Θεώρημα 3.8. Όταν $K \leq B$ η δίκαιη αξία στον χρόνο $t \in [0, T]$ ενός Up-and-Out Δικαιώματος Αγοράς δίνεται αναλυτικά από τον ακόλουθο τύπο (αν ισχύει ότι $M_t < B$, διαφορετικά είναι 0):

$$\boxed{\begin{aligned} & S_t\left[\Phi\left(\delta_+^{T-t}\left(\frac{S_t}{K}\right)\right) - \Phi\left(\delta_+^{T-t}\left(\frac{S_t}{B}\right)\right) - \left(\frac{B}{S_t}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}\left(\Phi\left(\delta_+^{T-t}\left(\frac{B^2}{KS_t}\right)\right) - \Phi\left(\delta_+^{T-t}\left(\frac{B}{S_t}\right)\right)\right)\right] \\ & -e^{-r(T-t)}K\left[\Phi\left(\delta_-^{T-t}\left(\frac{S_t}{K}\right)\right) - \Phi\left(\delta_-^{T-t}\left(\frac{S_t}{B}\right)\right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{S_t}{B}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}\left(\Phi\left(\delta_-^{T-t}\left(\frac{B^2}{KS_t}\right)\right) - \Phi\left(\delta_-^{T-t}\left(\frac{B}{S_t}\right)\right)\right)\right] \end{aligned}}$$

Όπου ορίζεται η εξής ποσότητα:

$$\delta_{\pm}^{\tau}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log s + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right), \qquad \sigma > 0$$

<u>Απόδειξη</u>: Θεωρούμε την αξία στην λήξη $C = g(S_T, M_T)$ ενός Up-and-Out Δικαιώματος Αγοράς όπου η συνάρτηση απόδοσης:

$$g(x, y) = (x - K)^+ \mathbb{I}_{\{y \leq B\}}$$

Επομένως αναπτύσσοντας την δεσμευμένη μέση τιμή στον χρόνο t:

$$\begin{aligned}
e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[C|\mathcal{F}_t] &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[(S_T-K)^+\mathbb{I}_{\{M_T\le B\}}\middle|\mathcal{F}_t\right]\\
&= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[(S_T-K)^+\mathbb{I}_{\left\{\max\limits_{[t,T]} S_u\le B\right\}}|\mathcal{F}_t\right]\\
&= e^{-r(T-t)}\mathbb{I}_{\{M_t\le B\}}\mathbb{E}\left[(S_T-K)^+\mathbb{I}_{\left\{\max\limits_{[t,T]} S_u\le B\right\}}|\mathcal{F}_t\right]\\
&= e^{-r(T-t)}\mathbb{I}_{\{M_t\le B\}}\mathbb{E}\left[\left(x\frac{S_T}{S_t}-K\right)^+\mathbb{I}_{\left\{x\max\limits_{[t,T]}\frac{S_u}{S_t}\le B\right\}}\right]_{x=S_t}\\
&= e^{-r(T-t)}\mathbb{I}_{\{M_t\le B\}}\mathbb{E}\left[\left(x\frac{S_{T-t}}{S_0}-K\right)^+\mathbb{I}_{\left\{x\max\limits_{[0,T-t]}\frac{S_u}{S_0}\le B\right\}}\right]_{x=S_0}
\end{aligned}$$

Επειδή η δείκτρια $\mathbb{I}_{\{M_t\le B\}}$ είναι ανεξάρτητη της μελλοντικής ιστορίας $(\mathcal{F}_s)_{s\ge t}$, θεωρώντας τον μετασχηματισμό (αναστροφή) του χρόνου $\tau = T - t$, με βάση την Πρόταση 2.3.3 αρκεί να υπολογιστεί η εξής απλοποιημένη μέση τιμή:

$$\begin{aligned}
e^{-r\tau}\mathbb{E}[C] &= e^{-r\tau}\mathbb{E}\left[(S_\tau-K)^+\mathbb{I}_{\{M_\tau\le B\}}\right]\\
&= e^{-r\tau}\mathbb{E}\left[\left(S_0e^{\sigma\widehat{W}_\tau}-K\right)^+\mathbb{I}_{\{S_0e^{\sigma X_\tau}\le B\}}\right]\\
&= e^{-r\tau}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{y\vee 0}^{\infty}(S_0e^{\sigma y}-K)^+\mathbb{I}_{\{S_0e^{\sigma x}\le B\}}\,e^{\lambda w-\frac{1}{2}\lambda^2\tau}\hat{f}_{(\hat{S}_\tau,X_\tau)}(y,x)dx\right\}dy\\
&= e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{y\vee 0}^{\infty}(S_0e^{\sigma y}-K)^+\mathbb{I}_{\{S_0e^{\sigma x}\le B\}}\,e^{\lambda y-\frac{1}{2}\lambda^2\tau}\cdot\left(\frac{2(2x-y)}{\tau\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{(2x-y)^2}{2\tau}}\right)dx\right\}dy
\end{aligned}$$

Από την (1.10) το τελευταίο μετασχηματίζεται:

$$e^{-r\tau}\frac{2}{\tau\sqrt{2\pi\tau}}\int_{-\infty}^{0}\left\{\int_{0}^{\infty}(S_0e^{\sigma y}-K)^+\mathbb{I}_{\left\{x\le\sigma^{-1}\log\frac{B}{S_0}\right\}}(2x-y)e^{\left(\lambda y-\frac{1}{2}\lambda^2\tau-\frac{(2x-y)^2}{2\tau}\right)}dx\right\}dy$$

$$+e^{-r\tau}\frac{2}{\tau\sqrt{2\pi\tau}}\int_{0}^{\sigma^{-1}\log\frac{B}{S_0}}\left\{\int_{y}^{\infty}(S_0e^{\sigma y}-K)^+\mathbb{I}_{\left\{x\le\sigma^{-1}\log\frac{B}{S_0}\right\}}(2x-y)e^{\left(\lambda y-\frac{1}{2}\lambda^2\tau-\frac{(2x-y)^2}{2\tau}\right)}dx\right\}dy$$

$$= e^{-r\tau}\frac{2}{\tau\sqrt{2\pi\tau}}\int_{-\infty}^{0}\left\{\int_{0}^{\sigma^{-1}\log\frac{B}{S_0}}(S_0e^{\sigma y}-K)^{+}\mathbb{I}_{\left\{x\le\sigma^{-1}\log\frac{B}{S_0}\right\}}(2x-y)e^{\left(\lambda y-\frac{1}{2}\lambda^2\tau-\frac{(2x-y)^2}{2\tau}\right)}dx\right\}dy$$

$$+e^{-r\tau}\frac{2}{\tau\sqrt{2\pi\tau}}\int_{0}^{\sigma^{-1}\log\frac{B}{S_0}}\left\{\int_{y}^{\sigma^{-1}\log\frac{B}{S_0}}(S_0e^{\sigma y}-K)^{+}\mathbb{I}_{\left\{x\le\sigma^{-1}\log\frac{B}{S_0}\right\}}(2x-y)e^{\left(\lambda y-\frac{1}{2}\lambda^2\tau-\frac{(2x-y)^2}{2\tau}\right)}dx\right\}dy$$

Και τελικά έχουμε:

$$e^{-r\tau}\frac{2}{\tau\sqrt{2\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\sigma^{-1}\log\frac{B}{S_0}}\left\{\int_{y\vee 0}^{\sigma^{-1}\log\frac{B}{S_0}}(S_0e^{\sigma y}-K)^{+}\mathbb{I}_{\left\{x\le\sigma^{-1}\log\frac{B}{S_0}\right\}}(2x-y)e^{\left(\lambda y-\frac{1}{2}\lambda^2\tau-\frac{(2x-y)^2}{2\tau}\right)}dx\right\}dy$$

Όπου λόγω του περιορισμού $(S_0e^{\sigma y}-K)^{+}\ge 0$ ισχύει $y\ge\sigma^{-1}\log\frac{K}{S_0}$, ο φορέας της δείκτριας $\left\{x\le\sigma^{-1}\log\frac{B}{S_0}\right\}$ περιλαμβάνεται στα όρια του πεδίου ολοκλήρωσης, επομένως θα είναι:

$$e^{-r\tau}\frac{2}{\tau\sqrt{2\pi\tau}}\int_{\sigma^{-1}\log\frac{K}{S_0}}^{\sigma^{-1}\log\frac{B}{S_0}}\left\{\int_{y\vee 0}^{\sigma^{-1}\log\frac{B}{S_0}}(S_0e^{\sigma y}-K)(2x-y)e^{\left(\lambda y-\frac{1}{2}\lambda^2\tau-\frac{(2x-y)^2}{2\tau}\right)}dx\right\}dy$$

$$= e^{-r\tau-\frac{1}{2}\lambda^2\tau}\frac{2}{\tau\sqrt{2\pi\tau}}\int_{\sigma^{-1}\log\frac{K}{S_0}}^{\sigma^{-1}\log\frac{B}{S_0}}(S_0e^{\sigma y}-K)e^{\lambda y-\frac{y^2}{2\tau}}\left\{\int_{y\vee 0}^{\sigma^{-1}\log\frac{B}{S_0}}(2x-y)e^{\frac{2x(y-x)}{\tau}}dx\right\}dy$$

Ο λογάριθμος είναι $\log\left(\frac{B}{S_0}\right)>0$, διότι απαιτείται το φράγμα να είναι μεγαλύτερο της αρχικής τιμής $B>S_0$ (ειδάλλως το Δικαίωμα είναι αυτομάτως ανενεργό από την στιγμή της σύναψής του). Θέτοντας

$$a=y\vee 0,\qquad b=\sigma^{-1}\log\frac{B}{S_0},\qquad c=\sigma^{-1}\log\frac{K}{S_0}$$

Προκύπτει:

$$\int_a^b (2x-y)e^{\frac{2x(y-x)}{\tau}}dx = \int_a^b -\frac{\tau(2x-y)}{2}e^{\frac{2xy-2x^2}{\tau}}dx = -\frac{\tau}{2}e^{\frac{2xy-2x^2}{\tau}}\Big|_{x=a}^{x=b}$$
$$= \frac{\tau}{2}\left(e^{\frac{2a(y-a)}{\tau}} - e^{\frac{2b(y-b)}{\tau}}\right) = \frac{\tau}{2}\left(1 - e^{\frac{2b(y-b)}{\tau}}\right)$$

αφού $a(y-a) = (y \vee 0) \cdot (y - y \vee 0) = 0$. Επομένως,

$$e^{-r\tau-\frac{1}{2}\lambda^2\tau}\frac{2}{\tau\sqrt{2\pi\tau}}\int_c^b (S_0e^{\sigma y}-K)e^{\lambda y-\frac{y^2}{2\tau}}\left\{\int_a^b (2x-y)e^{\frac{2x(y-x)}{\tau}}dx\right\}dy$$
$$= e^{-\left(r+\frac{1}{2}\lambda^2\right)\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_c^b (S_0e^{\sigma y}-K)e^{\lambda y-\frac{y^2}{2\tau}}\left(1-e^{\frac{2b(y-b)}{\tau}}\right)dy$$
$$= e^{-\left(r+\frac{1}{2}\lambda^2\right)\tau}\frac{S_0}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_c^b e^{(\lambda+\sigma)y-\frac{y^2}{2\tau}}dy - e^{-\left(r+\frac{1}{2}\lambda^2\right)\tau}\frac{S_0}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_c^b e^{(\lambda+\sigma)y-\frac{y^2}{2\tau}+\frac{2b(y-b)}{\tau}}dy$$
$$-e^{-\left(r+\frac{1}{2}\lambda^2\right)\tau}\frac{K}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_c^b e^{\lambda y-\frac{y^2}{2\tau}}dy + e^{-\left(r+\frac{1}{2}\lambda^2\right)\tau}\frac{K}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_c^b e^{\lambda y-\frac{y^2}{2\tau}+\frac{2b(y-b)}{\tau}}dy$$

Οι εκθετικές ποσότητες εντός των τεσσάρων ολοκληρωμάτων με κατάλληλο μετασχηματισμό οδηγούν σε ποσοστιαία σημεία της Κανονικής κατανομής. Χρησιμοποιείται η σχέση:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_c^b e^{Ay-\frac{y^2}{2\tau}}dy = \frac{e^{\frac{A^2\tau}{2}}}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_c^b e^{-\frac{1}{2\tau}(y-A\tau)^2}dy$$
$$= e^{\frac{A^2\tau}{2}}\left(\Phi\left(\frac{-c+A\tau}{\sqrt{\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{-b+A\tau}{\sqrt{\tau}}\right)\right) \qquad (1.11)$$

Επομένως μέσω της (1.11) έχουμε διαδοχικά τις εξής τιμές για την μεταβλητή $A = \lambda+\sigma, \lambda+\sigma+\frac{2b}{\tau}, \lambda$:

$$e^{-r\tau}\mathbb{E}\left[(S_T-K)^+\mathbb{I}_{\{M_T\le B\}}\right]$$
$$= e^{-\left(r+\frac{1}{2}\lambda^2\right)\tau}\frac{S_0}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_c^b e^{(\lambda+\sigma)y-\frac{y^2}{2\tau}}dy - e^{-\left(r+\frac{1}{2}\lambda^2\right)\tau-\frac{2b^2}{\tau}}\frac{S_0}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_c^b e^{\left(\lambda+\sigma+\frac{2b}{\tau}\right)y-\frac{y^2}{2\tau}}dy$$

$$-e^{-\left(r+\frac{1}{2}\lambda^2\right)\tau}\frac{K}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_c^b e^{\lambda y-\frac{y^2}{2\tau}}dy+e^{-\left(r+\frac{1}{2}\lambda^2\right)\tau-\frac{2b^2}{\tau}}\frac{K}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_c^b e^{\left(\lambda+\sigma+\frac{2b}{\tau}\right)y-\frac{y^2}{2\tau}}dy$$

$$=S_0e^{\frac{(\lambda+\sigma)^2\tau}{2}-\left(r+\frac{1}{2}\lambda^2\right)\tau}\left(\Phi\left(\frac{-c+(\lambda+\sigma)\tau}{\sqrt{\tau}}\right)-\Phi\left(\frac{-b+(\lambda+\sigma)\tau}{\sqrt{\tau}}\right)\right)$$

$$-S_0e^{\frac{\left(\lambda+\sigma+\frac{2b}{\tau}\right)^2\tau}{2}-\left(r+\frac{1}{2}\lambda^2\right)\tau-\frac{2b^2}{\tau}}\left(\Phi\left(\frac{-c+\left(\lambda+\sigma+\frac{2b}{\tau}\right)\tau}{\sqrt{\tau}}\right)-\Phi\left(\frac{-b+\left(\lambda+\sigma+\frac{2b}{\tau}\right)\tau}{\sqrt{\tau}}\right)\right)$$

$$-Ke^{\frac{\lambda^2\tau}{2}-\left(r+\frac{1}{2}\lambda^2\right)\tau}\left(\Phi\left(\frac{-c+\lambda\tau}{\sqrt{\tau}}\right)-\Phi\left(\frac{-b+\lambda\tau}{\sqrt{\tau}}\right)\right)$$

$$+Ke^{\frac{\left(\lambda+\sigma+\frac{2b}{\tau}\right)^2\tau}{2}-\left(r+\frac{1}{2}\lambda^2\right)\tau-\frac{2b^2}{\tau}}\left(\Phi\left(\frac{-c+\left(\lambda+\sigma+\frac{2b}{\tau}\right)\tau}{\sqrt{\tau}}\right)-\Phi\left(\frac{-b+\left(\lambda+\sigma+\frac{2b}{\tau}\right)\tau}{\sqrt{\tau}}\right)\right)$$

Χάριν απλοποίησης, εισάγεται η ποσότητα που ορίστηκε στην διατύπωση του Θεωρήματος, $\delta_{\pm}^{\tau}$:

$$S_0\left(\Phi\left(\delta_{+}^{\tau}\left(\frac{S_0}{K}\right)\right)-\Phi\left(\delta_{+}^{\tau}\left(\frac{S_0}{B}\right)\right)\right)$$
$$-S_0e^{\frac{\left(\lambda+\sigma+\frac{2b}{\tau}\right)^2\tau}{2}-\left(r+\frac{1}{2}\lambda^2\right)\tau-\frac{2b^2}{\tau}}\left(\Phi\left(\delta_{+}^{\tau}\left(\frac{B^2}{KS_0}\right)\right)-\Phi\left(\delta_{+}^{\tau}\left(\frac{B}{S_0}\right)\right)\right)$$
$$-e^{-r\tau}K\left(\Phi\left(\delta_{-}^{\tau}\left(\frac{S_0}{K}\right)\right)-\Phi\left(\delta_{-}^{\tau}\left(\frac{S_0}{B}\right)\right)\right)$$
$$-Ke^{\frac{\left(\lambda+\sigma+\frac{2b}{\tau}\right)^2\tau}{2}-\left(r+\frac{1}{2}\lambda^2\right)\tau-\frac{2b^2}{\tau}}\left(\Phi\left(\delta_{-}^{\tau}\left(\frac{B^2}{KS_0}\right)\right)-\Phi\left(\delta_{-}^{\tau}\left(\frac{B}{S_0}\right)\right)\right)$$

Εκτελώντας τις απαραίτητες απλοποιήσεις στους εκθέτες και έχοντας ότι $\lambda=\frac{\mu}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}$ έπεται μετά από απλές πράξεις ο ζητούμενος τύπος.

3.3.2 Δίκαιη Αξία ενός Up-and-Out Δικαιώματος Πώλησης

Ο τύπος που εξάγεται με βάση την Πρόταση 1.8 δίνει την κλειστή μορφή της Δίκαιης αξίας στον χρόνο t για το αντίστοιχο Up-and-In Δικαίωμα Προαίρεσης Αγοράς. Στο επόμενο Θεώρημα δίνεται η Δίκαιη Αξία ενός Up-and-Out Δικαιώματος Πώλησης στον χρόνο t (βλ., Albanese & Campolieti (2006)). Η απόδειξη είναι παρόμοια με την παραπάνω και παραλείπεται.

Θεώρημα 3.9. Έστω ένα Δικαίωμα Πώλησης επί μιας μετοχής με τιμή εξάσκησης K, χρόνο λήξης T και άνω φράγμα B. Τότε η δίκαιη αξία του Δικαιώματος στον χρόνο t, αν $M_t \leq B$, δίνεται από τον τύπο:

Αν $B > K$

$$\boxed{\begin{aligned} &-S_t\Phi\left(-\delta_{+}^{T-t}\left(\frac{S_t}{K}\right)\right)+Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(-\delta_{-}^{T-t}\left(\frac{S_t}{K}\right)\right)\\ &+S_t\left(\frac{B}{S_t}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}\Phi\left(-\delta_{-}^{T-t}\left(\frac{B^2}{KS_t}\right)\right)\\ &-Ke^{-r(T-t)}\left(\frac{S_t}{B}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}\Phi\left(-\delta_{-}^{T-t}\left(\frac{B^2}{KS_t}\right)\right)\end{aligned}}$$

Αν $B \leq K$

$$\boxed{\begin{aligned} &-S_t\Phi\left(-\delta_{+}^{T-t}\left(\frac{S_t}{B}\right)\right)+Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(-\delta_{-}^{T-t}\left(\frac{S_t}{B}\right)\right)\\ &+S_t\left(\frac{B}{S_t}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}\Phi\left(-\delta_{-}^{T-t}\left(\frac{B}{S_t}\right)\right)\\ &-Ke^{-r(T-t)}\left(\frac{S_t}{B}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}\Phi\left(-\delta_{-}^{T-t}\left(\frac{B}{S_t}\right)\right)\end{aligned}}$$

3.3.3 Δίκαιη Αξία ενός Down-and-Out Δικαιώματος Αγοράς

Από τα Θεωρήματα 3.8, 3.9 εξάγεται η δίκαιη αξία για τις τέσσερεις βασικές κατηγορίες Δικαιωμάτων Προαίρεσης με Άνω Φράγμα. Στα επόμενα δύο θεωρήματα δίνεται η δίκαιη αξία για τις άλλες τέσσερεις κατηγορίες Δικαιωμάτων Προαίρεσης με Κάτω Φράγμα. Η αποδεικτική διαδικασία είναι παρεμφερής με αυτή που ακολουθήθηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.8 με την διαφορά ότι χρησιμοποιείται η από κοινού κατανομή της Κίνησης και του ελαχίστου της:

$$R_T = \min_{[0,T]} \hat{S}_t = \min_{[0,T]} (S_t + \lambda t)$$

Συμβολίζεται $m_T = \min_{[0,T]} S_t\,, S_t \sim BM(0,\sigma)$ το ελάχιστο μιας Κίνησης Brown χωρίς τάση.

Λήμμα 3.10. Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των $\hat{S}_T$ και R_T υπό το αρχικό μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$, δίνεται από τον τύπο:

$$f_{\hat{S}_T,R_T}(s,r) = \frac{2(s-2r)}{T\sqrt{2\pi T}} \exp\left(\lambda s - \frac{1}{2}\lambda^2 T - \frac{1}{2T}(2r-s)^2\right)$$

Στο χωρίο $D = \{(x,y): y \leq x, y \leq 0\}$ και παντού αλλού μηδενική.

Πρόκειται ουσιαστικά για συνάρτηση με παρόμοιο τύπο, όπως αυτή του Λήμματος 3.5 αλλά με διαφορετικό φορέα και το γεγονός αυτό αντανακλά την συμμετρία των Δικαιωμάτων Προαίρεσης με μονό άνω και των αντίστοιχων Δικαιωμάτων Προαίρεσης με μονό κάτω φράγμα, ως προς τα χωρία όπου γίνεται ενεργοποίηση ή απενεργοποίηση του καθενός. Λεπτομέρειες δίνονται από τους Albanese & Campolieti, (2006).

Θεώρημα 3.11. Έστω ένα Δικαίωμα Αγοράς επί μιας μετοχής με τιμή εξάσκησης K, χρόνο λήξης T και κάτω φράγμα B. Τότε η δίκαιη αξία του Δικαιώματος στον χρόνο t, αν το ολικό, τρέχον μέχρι την στιγμή αυτή είναι μεγαλύτερο του κάτω φράγματος: $m_t \geq B$, δίνεται από τον τύπο.

<u>Αν B ≤ K:</u>

$$\boxed{\begin{aligned} &S_t \Phi\left(\delta_+^{T-t}\left(\frac{S_t}{K}\right)\right) - e^{-r(T-t)} K \Phi\left(\delta_-^{T-t}\left(\frac{S_t}{K}\right)\right) \\ &-B\left(\frac{B}{S_t}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi\left(\delta_+^{T-t}\left(\frac{B^2}{KS_t}\right)\right) + e^{-r(T-t)} K \left(\frac{S_t}{B}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi\left(\delta_-^{T-t}\left(\frac{B^2}{KS_t}\right)\right) \end{aligned}}$$

<u>Αν B ≥ K:</u>

$$\boxed{\begin{aligned} &S_t \Phi\left(\delta_+^{T-t}\left(\frac{S_t}{B}\right)\right) - e^{-r(T-t)} K \Phi\left(\delta_-^{T-t}\left(\frac{S_t}{B}\right)\right) \\ &-B\left(\frac{B}{S_t}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi\left(\delta_+^{T-t}\left(\frac{B}{S_t}\right)\right) + e^{-r(T-t)} K \left(\frac{S_t}{B}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi\left(\delta_-^{T-t}\left(\frac{B}{S_t}\right)\right) \end{aligned}}$$

Αυτού του είδους τα Δικαιώματα λέγονται ανακλητά Bull συμβόλαια (**Callable Bull Contracts**) με B την τιμή ανάκλησης (call price).

3.3.4 Δίκαιη Αξία ενός Down-and-Out Δικαιώματος Πώλησης

Θεώρημα 3.12. Έστω ένα Δικαίωμα Πώλησης επί μιας μετοχής με τιμή εξάσκησης K, χρόνο λήξης T και κάτω φράγμα B. Τότε η δίκαιη αξία του Δικαιώματος στον χρόνο t, αν το ολικό, τρέχον μέχρι την στιγμή αυτή είναι μεγαλύτερο του κάτω φράγματος: $m_t \geq B$, δίνεται από τον τύπο:

<u>Αν B ≤ K:</u>

$$\boxed{\begin{aligned} &Ke^{-r(T-t)}\left[\Phi\left(\delta_-^{T-t}\left(\frac{S_t}{B}\right)\right)-\left(\frac{S_t}{B}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}\Phi\left(\delta_-^{T-t}\left(\frac{B}{S_t}\right)\right)-\Phi\left(\delta_-^{T-t}\left(\frac{S_t}{K}\right)\right)+\left(\frac{S_t}{B}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}\Phi\left(\delta_-^{T-t}\left(\frac{B^2}{KS_t}\right)\right)\right] \\ &\qquad + S_t\Phi\left(\delta_+^{T-t}\left(\frac{S_t}{K}\right)\right)-S_t\left(\frac{B}{S_t}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}\Phi\left(\delta_+^{T-t}\left(\frac{B^2}{KS_t}\right)\right)-S_t\Phi\left(\delta_+^{T-t}\left(\frac{S_t}{B}\right)\right) \\ &\qquad + S_t\left(\frac{B}{S_t}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}\Phi\left(\delta_+^{T-t}\left(\frac{B}{S_t}\right)\right) \end{aligned}}$$

Αν B ≥ K τότε η αξία του είναι μηδενική κατά τετριμμένο τρόπο, διότι αν το συμβόλαιο παραμείνει ενεργό μέχρι την λήξη του, είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη,

$$S_t > B\,, \forall t \Leftrightarrow \min S_t > B$$

Άρα η απόδοση του είναι $(K - S_T)^+ = 0$. Για την αναλυτική εύρεση της δίκαιης αξίας ενός Down-and-Out Δικαιώματος Πώλησης προτείνεται επίσης το βιβλίο των Albanese & Campolieti, (2006).

3.4 Μέτρα Ευαισθησίας Δικαιωμάτων Προαίρεσης με φράγμα

3.4.1 Μετατόπιση του Φράγματος

Τα συνήθη μέτρα της ευαισθησίας ως προς την μεταβολή των διαφόρων παραμέτρων (Greeks) για τα Δικαιώματα Προαίρεσης με φράγμα παρουσιάζουν μια ιδιομορφία. Στην περίπτωση ενός απλού, Ευρωπαϊκού τύπου Δικαιώματος Προαίρεσης, είναι δυνατόν να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης της αξίας του σε κάθε χρονική στιγμή και να επιτευχθεί δυναμική αντιστάθμιση Δέλτα από την παράλληλη κατοχή μεριδίων της υποκείμενης μετοχής. Όταν όμως υπάρχει ένα φράγμα ενεργοποίησης δημιουργούνται διαφόρων ειδών επιπλοκές. Την στιγμή $\tau_\alpha < T$, η αξία του Δικαιώματος έχει μια ουσιώδη ασυνέχεια. Επομένως, το Δέλτα του, που είναι ο ρυθμός μεταβολής της ως προς την τιμή της μετοχής, είναι ασταθές πολύ κοντά στο φράγμα ενώ δεν αποκλείεται να υπερβεί την μονάδα, πράγμα το οποίο δεν συμβαίνει στα απλά Δικαιώματα.

Παραδείγματος χάρη το Δέλτα ενός Down-and-In Δικαιώματος γίνεται απεριόριστα μεγάλο σε μια πολύ μικρή περιοχή του φράγματος. Πρακτικά, ένας επενδυτής για να συνθέσει το δυναμικό χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης με βάση την στρατηγική Δέλτα χρειάζεται ένα τεράστιο όγκο μεριδίων της μετοχής. Όταν επιτευχθεί είσοδος στο $(-\infty, \alpha)$ είναι σχεδόν σίγουρο ότι τα πλεονάζοντα μερίδια θα πωληθούν. Αυτό ενδεχομένως θα οδηγήσει σε υποτίμηση της τιμής της μετοχής και επιπλέον απώλειες. Στην πράξη επιτρέπεται μια μετατόπιση του φράγματος σε ένα προκαθορισμένο εύρος. Υπάρχουν διάφοροι παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν το μέγεθος της μετατόπισης του φράγματος (αναλυτικά παραδείγματα στον Weert, (2008)).

Η μετατόπιση του φράγματος (barrier shift) εισάγεται για να ελέγξουμε τις μεταβολές των μέτρων ευαισθησίας (Δέλτα, Γάμμα κ.λπ.) που είναι μεγαλύτερες και πιο ανεξέλεγκτες όταν υπάρχει ένα στατικό φράγμα.

Περισσότερες πληροφορίες για τα μέτρα ευαισθησίας των Δικαιώματα Προαίρεσης με κάτω φράγμα βρίσκονται στο βιβλίο Zhang (1998), Κεφάλαιο 10, παράγραφος 6.

Κεφάλαιο 4

Επαλήθευση των Θεωρητικών Αποτελεσμάτων μέσω Προσομοίωσης Monte Carlo

4.1 Εισαγωγή

4.1.1 Στατιστικές μέθοδοι Monte Carlo

Οι στατιστικές μέθοδοι Monte Carlo αποτελούν μια ευρεία κατηγορία από εντατικές υπολογιστικές διαδικασίες και αλγορίθμους, οι οποίες μιμούνται την συμπεριφορά σύνθετων (μη-γραμμικών, χαοτικών) ή και στοχαστικών συστημάτων. Χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση ποσοτήτων ντετερμινιστικών ή μη, για παράδειγμα στην εκτίμηση της μέσης τιμής μιας μεταβλητής του συστήματος. Εισάγοντας τυχαιότητα στα μοντέλα, οι στατιστικές μέθοδοι Monte Carlo, αποδεικνύεται ότι δίνουν αρκετά καλές εκτιμήσεις ακόμα και σε περιπτώσεις όπου τα μοντέλα των αναλυτικών μεθόδων κρίνονται ανεπαρκή.

Από την εκτέλεση πολλών, συνήθως ανεξάρτητων μεταξύ τους επαναλήψεων ενός πειράματος τύχης, υπό τις ίδιες συνθήκες και με ίδιες τιμές στις παραμέτρους, λόγω των Θεωρημάτων Σύγκλισης, θα καταγράφονται αποτελέσματα που με μεγάλη πιθανότητα συγκλίνουν σε μια θεωρητική τιμή. Τα στοχαστικά φαινόμενα μελετώνται μέσω αναπαραστάσεων τους οι οποίες πραγματοποιούνται μέσα σε μια "τεχνητή πραγματικότητα", συνήθως στο εικονικό περιβάλλον ενός Η/Υ, όπου δεν είναι ανέφικτο να παραχθεί ένα μεγάλο πλήθος τυχαίων σεναρίων με σχετικά μικρό κόστος. Αυτή η πειραματική διαδικασία, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, επιτρέπει να εξάγονται χρήσιμα εμπειρικά συμπεράσματα για το πως εξελίσσεται το φαινόμενο μελέτης καθώς και για τα ποσοτικά χαρακτηριστικά του.

Η μέθοδος Monte Carlo αν και εύκολα υλοποιήσιμη και ανθεκτική, αν χρησιμοποιηθεί στην απλή μορφή της (crude Monte Carlo method) δίνει εκτιμήτριες που συγκλίνουν με μικρή ταχύτητα. Παρόλο που η εκτιμήτρια δεν χρειάζεται διόρθωση μεροληψίας οριακά, έχει μια τυπική απόκλιση του σφάλματος της τάξης (π.χ. βλ. Korn, (2010)):

$$O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

Συνεπάγεται ότι η μέση ακρίβεια της απλής εκτιμήτριας Monte Carlo, δεν βελτιώνεται σημαντικά εκτός κι αν μεγαλώσει το πλήθος των πραγματοποιήσεων της προσομοίωσης αλλά με δυσανάλογα μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Κατά κανόνα, για κάθε ψηφίο που κερδίζεται στην ακρίβεια της εκτίμησης, απαιτείται ένα εκατονταπλάσιο πλήθος δοκιμών. Αυτό θεωρείται ως ένα κύριο μειονέκτημα της μεθόδου. Ωστόσο υπάρχουν διάφορες εφαρμοσμένες τεχνικές οι οποίες αποδεικνύεται ότι αυξάνουν την ταχύτητα σύγκλισης των αλγορίθμων σε συγκεκριμένα προβλήματα.

Τα στοιχειώδη δομικά συστατικά των στατιστικών μεθόδων Monte Carlo, είναι οι **ψευδοτυχαίοι αριθμοί**. Οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί είναι ακολουθίες αριθμών, των οποίων οι επόμενοι όροι τους, παράγονται ντετερμινιστικά με βάση συναρτήσεις αυτών των όρων που έχουν ήδη παραχθεί. Ωστόσο η απόκρυψη της χαρακτηριστικής αυτής συνάρτησης, κάνει δυσδιάκριτα τα όρια μεταξύ πραγματικά τυχαίων μετρήσεων –όπως προκύπτουν από την παρατήρηση διαφόρων φυσικών συστημάτων– και ψευδοτυχαίων αριθμών, καθώς πολλά στατιστικά κριτήρια τυχαιότητας ενδέχεται να αποτύχουν στην ορθή απόφαση ως προς την τυχαιότητα τους.

Η προσομοίωση Monte Carlo είναι ένα εκτενώς χρησιμοποιημένο εργαλείο διότι προσφέρει πλεονεκτήματα όπως ευκολία στην υλοποίηση του αλγορίθμου, αποφυγή λαθών, και παραγωγή πολλών τυχαίων σεναρίων. Κύρια ιδέα της είναι ότι μπορούμε να αντιμετωπίσουμε προβλήματα που αφορούν σε υπολογισμούς μέσων τιμών που είναι δύσκολο να γίνει αναλυτικά. Ο Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών και το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα εγγυώνται την σύγκλιση του αριθμητικού μέσου ανεξάρτητων και ισόνομων πειραματικών ποσοτήτων που προκύπτουν από Προσομοίωση Monte Carlo, στην μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την ίδια κατανομή με αυτές. Φυσικά αυτή η πειραματική μεθοδολογία φέρει και ορισμένες δυσχέρειες που είναι καλό να ληφθούν υπόψη εξαρχής.

4.1.2 Η προσομοίωση Monte Carlo στην μελέτη των στοχαστικών διαδικασιών

Το βασικό Χρηματοοικονομικό μοντέλο αποτίμησης της δίκαιης αξίας ενός ΠΧΠ ενέχει τον υπολογισμό της μέσης τιμής της εικόνας μιας στοχαστικής διαδικασίας μέσω κάποιας συνάρτησης $g(X) = g(\{X_t(\omega), t \in I\})$. Έστω ότι η ποσότητα:

$$\mu = \mathbb{E}(g(X)) < \infty$$

είναι σταθερή. Τότε αν προσομοιωθεί ένα μεγάλο πλήθος N, $N >> 0$ μονοπατιών της στοχαστικής διαδικασίας

$$X^k(\omega) = \{X_t^k(\omega), t \in I\}, \qquad 1 \leq k \leq N$$

θα ισχύει ότι ο εμπειρικός μέσος θα συγκλίνει σχεδόν βέβαια στο μ, δηλαδή καθώς $N \longrightarrow \infty$:

$$\bar{\mu}_k \underset{a.s.}{\longrightarrow} \mu$$

όπου $\bar{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X^i(\omega)$.

Το πρώτο πρόβλημα που συναντάται είναι ότι η Γεωμετρική Κίνηση Brown είναι μια συνεχής διαδικασία ενώ ο Η/Υ έχει πεπερασμένη μνήμη επομένως θα ήταν αδύνατον να συγκρατήσει όλες τις τιμές χωρίς να υποστεί υπερχείλιση. Στην πράξη όλες οι μοντελοποιήσεις θα γίνονται σε διακριτά σημεία $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ και ανάμεσα στις τιμές X_{t_i} και $X_{t_{i+1}}$ γίνεται γραμμική παρεμβολή. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει μια συνεχής τροχιά, η οποία θα προσεγγίζει μια Κίνηση Brown όσο πιο λεπτή είναι η διαμέριση $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ του χρονικού διαστήματος μέχρι την λήξη του συμβολαίου. Σε διάφορα υπολογιστικά περιβάλλοντα (όπως R, Matlab, Python κ.λπ.) υπάρχει μεγάλη ευχέρεια ως προς την παραγωγή ψευδοτυχαίων αριθμών από την ομοιόμορφη κατανομή που εκφράζει την πλήρη τυχαιότητα και την χρήση τους για την δειγματοληψία μιας πιο σύνθετης κατανομής.

Ο παρακάτω αλγόριθμος χρησιμοποιείται για την κατασκευή του βασικού αντικειμένου που χρειάζεται για την πιθανοθεωρητική μοντελοποίηση και απαιτεί μόνο την παραγωγή ψευδοτυχαίων αριθμών από την Κανονική κατανομή. Η προσομοίωση ενός μονοπατιού διακριτού χρόνου μιας Κίνησης Brown υλοποιείται από την παρακάτω διαδικασία:

- Θέτουμε την αρχική τιμή της Κίνησης X_0, π.χ. να συμπίπτει με την τιμή της υποκείμενης μετοχής την ημέρα σύναψης του συμβολαίου και ορίζεται $h = \frac{T}{n}$ το μήκος του χρονικού άλματος όπου γίνεται δειγματοληψία. Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε $h_i = t_{i+1} - t_i$ για διαφορετικού μήκους άλματα.

- Παραγωγή μιας $\varepsilon_t \sim N(0,1)$.
- Αρχικοποίηση των παραμέτρων της Κίνησης Brown, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.
- Έχοντας προσομοιώσει την τιμή την προηγούμενη χρονική στιγμή, έστω X_t, ισχύει η ισότητα σε επίπεδο κατανομής:

$$X_{t+1} = X_t + \mu h + \sigma\sqrt{h}\varepsilon_t \ , \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

Παράγεται επαναληπτικά η $Y_{t+1} = e^{X_{t+1}}$ μέχρι να ικανοποιηθεί η συνθήκη τερματισμού.

Συνεπώς από την εκτέλεση των παραπάνω βημάτων, παράγεται μια χρονοσειρά που είναι ισοδύναμη με την εξής:

$$Y_{t+1} = Y_t \cdot \exp(\mu h + \sigma\sqrt{h}\varepsilon_t) \, , \varepsilon_t \sim N(0,1) \tag{4.1}$$

Στο προσομοιωμένο δείγμα μονοπατιών μιας Κίνησης Brown, υπάρχει η δυνατότητα μέσω του υπολογιστικού πακέτου R, να ενσωματωθεί η συνθήκη αυτόματου τερματισμού της παραπάνω διαδικασίας όταν υπάρξει παραβίαση ενός φράγματος. Αυτό είναι απόλυτα συμβατό με το μαθηματικό πρότυπο των προσαρμοσμένων σε μελλοντική ιστορία στοχαστικών ανελίξεων. Καθώς παράγονται τιμές της Κίνησης στην ροή του χρόνου σε διακριτά σημεία, η πληροφορία που έχει παραχθεί από το κάθε σενάριο καθορίζει και την κατάσταση του ενδεχομένου, αν πραγματοποιήθηκε ή όχι, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη μελλοντική πληροφορία. Επομένως ο έλεγχος θα γίνεται μετά από την παραγωγή της επόμενης τιμής της Κίνησης, οπότε θα τερματίζεται το εκάστοτε σενάριο σε περίπτωση επαλήθευσης του κριτηρίου τερματισμού.

Να σημειωθεί στο σημείο αυτό, ότι η εκτέλεση της προσομοίωσης έγινε σε μηχανή με επεξεργαστή Dual-Core Intel Core i5, ταχύτητας 1.8 GHz, οπότε προκύπτουν οι καταγεγραμμένες μετρήσεις περάτωσης των υπολογιστικών διαδικασιών.

4.2 Εύρεση της αξίας των διαφόρων Δικαιωμάτων Προαίρεσης με φράγματα μέσω προσομοίωσης Monte Carlo

Στις υποπαραγράφους που ακολουθούν, θα χρησιμοποιηθεί ο απλός αλγόριθμος Monte Carlo για την εύρεση της αξίας των τεσσάρων Δικαιωμάτων Προαίρεσης με φράγματα που παρουσιάστηκαν στο τρίτο Κεφάλαιο. Συγκεκριμένα, μετά την παραγωγή N του πλήθους πραγματοποιήσεων τυχαίων μονοπατιών της τιμής του υποκείμενου αξιογράφου σε διακριτό χρόνο, εκτιμάται τόσο η αξία του Δικαιώματος από τα μονοπάτια που παρέμειναν ενεργά όσο και ένα 99% Διάστημα Εμπιστοσύνης για την εκτίμηση.

Θεωρώντας ολοένα και περισσότερες πραγματοποιήσεις, αυξάνεται δραματικά ο χρόνος εκτέλεσης του ίδιου του αλγορίθμου. Στην πράξη, συνιστάται να χρησιμοποιείται ένα επαρκές πλήθος προσομοιώσεων (ίσως επιλέγεται μετά από πειραματισμό), ώστε τα αποτελέσματα να έχουν σταθεροποιηθεί κοντά σε μια τιμή (χάνοντας βέβαια κάποιους βαθμούς ακρίβειας), τα πλάτη των Διαστημάτων Εμπιστοσύνης να είναι σχετικά μικρά και ο απαιτούμενος χρόνος να είναι σε εύλογα επίπεδα. Δηλαδή επιχειρείται να βρεθεί πειραματικά, μια “χρυσή τομή” της ποιότητας της εκτιμήτριας από την μια και του φορτίου που επωμίζεται το υπολογιστικό σύστημα λόγω της πολυπλοκότητας των υπολογισμών του αλγορίθμου από την άλλη.

Η εμπειρική εκτιμήτρια Monte Carlo είναι ο προεξοφλημένος μέσος όρος της απόδοσης στην λήξη, του αντίστοιχου απλού (vanilla) Δικαιώματος με βάση το προσομοιωμένο δείγμα. Αν

$$\left\{S_h^{(i)}, S_{2h}^{(i)}, \dots, S_{kh}^{(i)}\right\}, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

είναι n προσομοιωμένες τροχιές της τιμής του υποκείμενου αγαθού (διακριτοποιημένες σε k χρονικά σημεία $h, 2h, \dots, kh = T$) τότε για ένα Up-and-Out Δικαίωμα Αγοράς η δίκαιη αξία του εκτιμάται από τον τύπο

$$V_{MC} = e^{-rT}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(S_{kh}^{(i)} - K\right)^{+} \cdot 1\left(\max\left\{S_h^{(i)}, S_{2h}^{(i)}, \dots, S_{kh}^{(i)}\right\} < b\right)$$

όπου η παραπάνω δείκτρια χρησιμοποιείται για να μηδενίσει το τελικό κέρδος σε όσες τροχιές απενεργοποιήθηκε το δικαίωμα αγοράς αφότου πέρασαν πάνω από το φράγμα b μέχρι την λήξη T.

Έπειτα το αποτέλεσμα της διαδικασίας, συγκρίνεται με την ακριβή, θεωρητική τιμή του συμβολαίου όπως αυτή υπολογίζεται από τον αντίστοιχο αναλυτικό τύπο. Οι αντίστοιχοι χρόνοι εκτέλεσης που καταγράφονται στους πίνακες που παρατίθενται, έχουν μονάδα μέτρησης τα δευτερόλεπτα.

4.1.2 Δίκαιη Αξία ενός Up-and-Out Δικαιώματος αγοράς μέσω προσομοίωσης

Έστω ένα Up-and-Out Δικαίωμα αγοράς επί μιας μετοχής, η οποία δεν αποδίδει μερίσματα, με τα εξής χαρακτηριστικά: χρόνος λήξης $T = 1$, τιμή εξάσκησης $K = 90$ χρηματικές μονάδες, άνω φράγμα για όλες τις τιμές που θα λάβει μέχρι την λήξη, $B = 200$, αρχική τιμή στον χρόνο σύναψης $S_0 = 100$ και πτητικότητα που εκτιμάται (π.χ. από ιστορικά δεδομένα) $\sigma = 0.4$. Αν το ετήσιο, ονομαστικό επιτόκιο δανεισμού της Αγοράς είναι ίσο με $r = 3\%$, τότε στον πίνακα συνοψίζονται κάποια ενδεικτικά αποτελέσματα από την εκτίμηση της δίκαιης παρούσας αξίας του μέσω προσομοίωσης Monte Carlo. Επιπλέον, δίνονται διαδοχικά κάποιες τιμές, που αφορούν:

- Πλήθος χρονικών σημείων διακριτοποίησης τροχιών $k = 100, 500, 1000, 1500$.
- Πλήθος των προσομοιώσεων των τροχιών της Κίνησης $n = 5000, 10000$.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4-1

Αξία Up-and-Out Δικαιώματος Αγοράς μέσω προσομοίωσης Monte Carlo

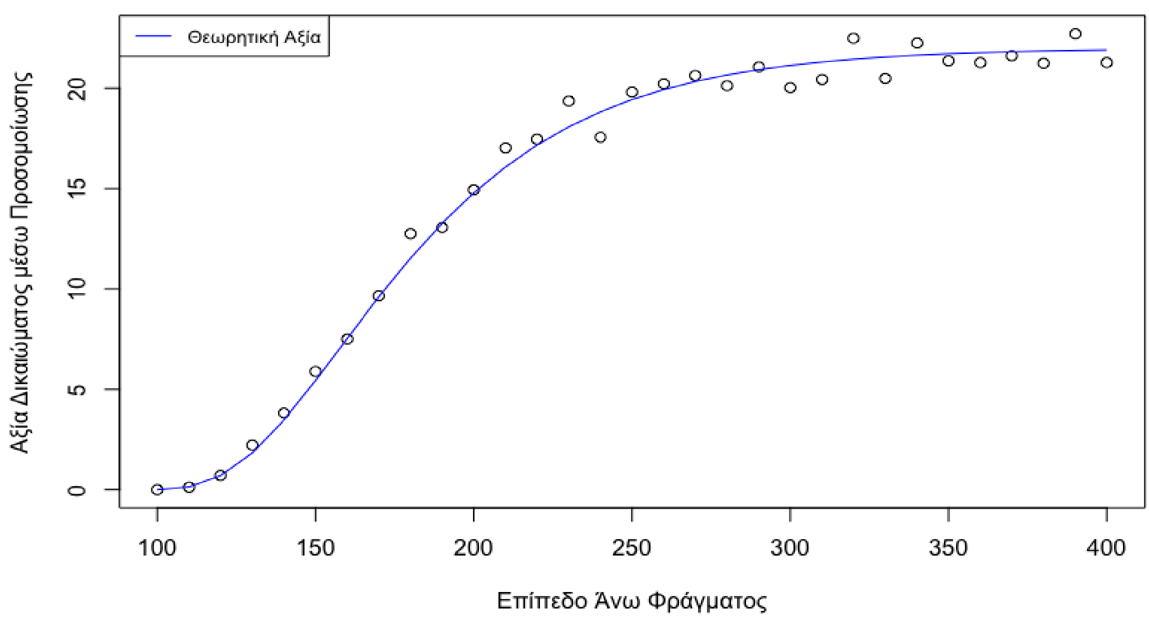
Πλήθος σημείων διακριτοποίησης	Πλήθος Προσομοιώσεων	Εκτιμώμενη Δίκαιη Αξία	Χρόνος Εκτέλεσης	Κάτω όριο 99%-Δ.ε.	Άνω όριο 99%-Δ.ε.
100	5000	15.53568	1.76	9.984281	22.449786
100	10000	15.79898	3.51	9.883835	22.047783
500	5000	15.26345	7.71	12.93563	18.31356
1000	5000	14.77922	15.84	13.67555	17.44280
500	10000	15.50077	16.14	13.04333	18.43176
1500	5000	15.66468	22.13	14.38408	17.46905
1000	10000	14.88068	30.61	13.86241	17.64960
1500	10000	14.63886	48.16	14.23848	17.31114
5000	5000	14.71718	70.84	14.67871	16.35034
10000	5000	14.6102	139.48	14.47415	15.63615
5000	10000	15.10726	152.94	14.72635	16.40834
10000	10000	14.74002	280.47	14.60467	15.77318

Διαπιστώνεται ότι οι πειραματικές τιμές βρίσκονται πολύ κοντά στην ακριβή θεωρητική τιμή που διαμορφώνεται στις 14.78566 μονάδες, με απόκλιση της τάξης 0.01 για πλήθος προσομοιώσεων $n = 5000$ και πλήθος σημείων διακριτοποίησης τουλάχιστον $k = 5000$.

Από στατιστικής σκοπιάς, οι δύο παράμετροι που αφορούν στο πλήθος των χρονικών σημείων διακριτοποίησης τροχιών και στο πλήθος προσομοιώσεων (διαφορετικών τροχιών), είναι καθοριστικές για την εμπιστοσύνη που πρέπει να έχουμε στις Monte Carlo εκτιμήσεις. Μάλιστα, από τα στοιχεία του πίνακα, εξάγεται το μοτίβο της συνέργειας αυτών των παραμέτρων: μεγάλο πλήθος σημείων διακριτοποίησης και μεγάλο πλήθος τροχιών δίνουν εκτιμήσεις με μικρή απόκλιση από την θεωρητική αξία και μικρά διαστήματα εμπιστοσύνης (επίπεδο σημαντικότητας 1%). Στο παρακάτω γράφημα απεικονίζονται τα ζεύγη τιμών του φράγματος και της αντίστοιχης εκτίμησης της αξίας ενός Up-and-Out Δικαιώματος αγοράς. Οι άλλες παράμετροι παραμένουν σταθερές, εκτός του φράγματος που παίρνει τιμές μεταξύ 100 και 400 με σταθερή απόσταση 10 μονάδες. Η καμπύλη με τις θεωρητικές αξίες ως προς τις διάφορες τιμές του φράγματος, παρουσιάζει μια σχετικά καλή προσαρμογή στο προσομοιωμένο δείγμα τιμών.

ΣΧΗΜΑ 1-1

Γράφημα της τιμής του Παραγώγου (up and out call) έναντι της αξίας του φράγματος



Επαληθεύεται γραφικά ότι αφήνοντας το επίπεδο του φράγματος να πλησιάσει την αρχική τιμή εκ των άνω, η αξία του Δικαιώματος αυτού μειώνεται μέχρι να γίνει σχεδόν μηδενική, ενώ όσο το φράγμα αυξάνεται η δίκαιη τιμή του barrier δικαιώματος θα συγκλίνει στην τιμή του αντίστοιχου vanilla δικαιώματος χωρίς barrier.

4.1.3 Δίκαιη Αξία ενός Up-and-Out Δικαιώματος πώλησης μέσω προσομοίωσης

Έστω ένα up-and-Out Δικαίωμα πώλησης επί μιας μετοχής η οποία δεν αποδίδει μερίσματα, με τα εξής χαρακτηριστικά: χρόνος λήξης $T = 1$, τιμή εξάσκησης $K = 130$ χρηματικές μονάδες, άνω φράγμα $B = 150$ για όλες τις τιμές που θα λάβει μέχρι την λήξη, αρχική τιμή στον χρόνο σύναψης $S_0 = 100$ και πτητικότητα που εκτιμάται (π.χ. από ιστορικά δεδομένα) $\sigma = 0.4$. Αν το ετήσιο, ονομαστικό επιτόκιο δανεισμού της Αγοράς είναι ίσο με $r = 3\%$, τότε στον πίνακα συνοψίζονται κάποια ενδεικτικά αποτελέσματα από την εκτίμηση της παρούσας αξίας του μέσω προσομοίωσης Monte Carlo. Συγκεκριμένα δίνεται διαδοχικά η αξία του Δικαιώματος, όταν οι παράμετροι της προσομοίωσης είναι:

- Πλήθος χρονικών σημείων διακριτοποίησης τροχιών $k = 100, 500, 1000, 1500, 1750, 2500, 3000, 5000$.
- Πλήθος των προσομοιώσεων των τροχιών της Κίνησης $n = 500, 750, 1200, 1500, 2000, 2500, 5000, 10000$.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4-2

Αξία Up-and-Out Δικαιώματος Πώλησης μέσω προσομοίωσης Monte Carlo (B>K)

Πλήθος σημείων διακριτοποίησης	**Πλήθος Προσομοιώσεων**	**Εκτιμώμενη Δίκαιη Αξία**	**Χρόνος Εκτέλεσης**	**Κάτω όριο 99%-Δ.ε.**	**Άνω όριο 99%-Δ.ε.**
100	500	31.75284	0.175	25.31855	40.12116
500	500	33.92419	0.778	31.59956	38.31511
1000	750	31.80729	2.075	30.46682	35.08512
1000	1200	31.56671	3.161	30.14710	34.90902
1500	1500	30.80542	5.939	29.83726	33.64992
1750	2000	32.13394	9.401	31.35791	34.86723
2500	2500	32.49244	16.025	31.98955	34.97442
3000	5000	32.79072	37.607	32.42880	35.14988
5000	10000	32.26956	155.073	32.20399	34.30063

Με βάση τα δεδομένα του Πίνακα 4-2,παρατηρείται ότι αυξάνοντας το πλήθος προσομοιώσεων και το πλήθος των σημείων διακριτοποίησης για ανεξάρτητες μεταξύ τους δοκιμές, υπάρχει εν γένει σύγκλιση των δύο ορίων των Διαστημάτων Εμπιστοσύνης. Η εκτιμώμενη αξία έχει μικρή απόκλιση από την θεωρητική που είναι 32.18559 χρηματικές μονάδες. Επομένως και σε αυτή την περίπτωση η προσομοίωση δίνει αποτελέσματα που συμφωνούν με τον κλειστό τύπο με πολύ μικρό περιθώριο σφάλματος.

Σε αντίθετη περίπτωση, όπου το φράγμα είναι κάτω από την τιμή εξάσκησης, όπως για παράδειγμα θεωρούνται ενδεικτικά οι τιμές: $B = 110$ για το κάτω φράγμα και $K = 120$ για την τιμή εξάσκησης έχουμε τα εξής:

ΠΙΝΑΚΑΣ 4-3

Αξία Up-and-Out Δικαιώματος Πώλησης μέσω προσομοίωσης Monte Carlo (B<K)

Πλήθος σημείων διακριτοποίησης	**Πλήθος Προσομοιώσεων**	**Εκτιμώμενη Δίκαιη Αξία**	**Χρόνος Εκτέλεσης**	**Κάτω όριο 99%-Δ.ε.**	**Άνω όριο 99%-Δ.ε.**
100	500	12.90468	0.207	7.072633	19.522736
500	500	13.3114	0.759	10.79708	16.63651
1000	750	12.69747	2.223	11.07777	15.09057
1000	1200	11.04142	3.275	9.495055	13.260314
1500	1500	11.67005	6.049	10.46412	13.58679
1750	2000	11.87741	9.68	10.77690	13.70137
2500	2500	12.44817	15.868	11.57134	14.08320
3000	5000	11.37211	38.14	10.62986	12.80703
5000	10000	11.20794	143.908	10.70419	12.39435

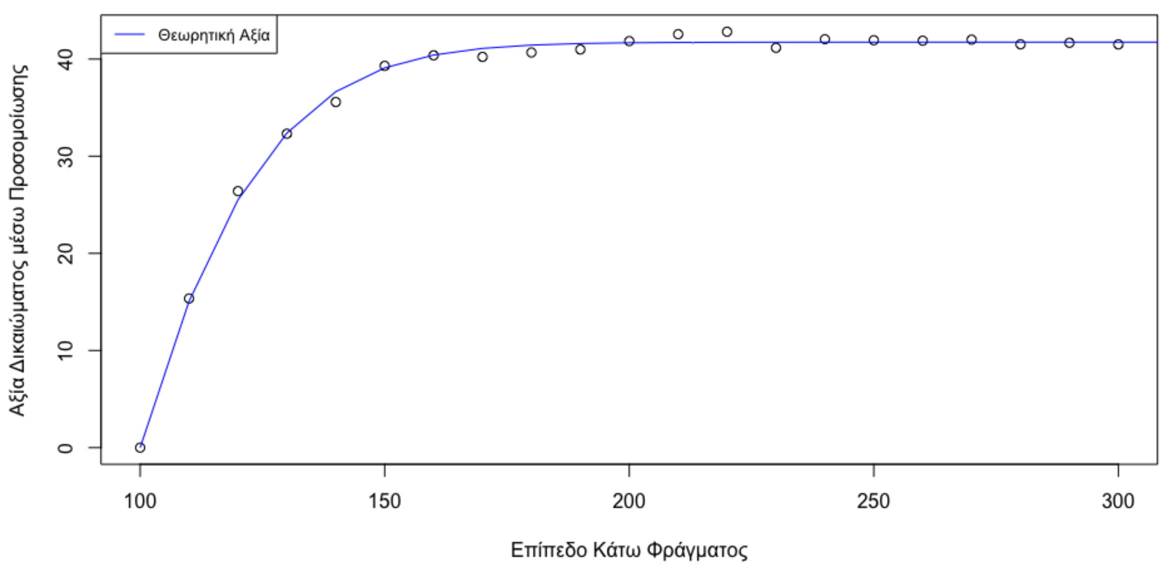
Η θεωρητική αξία του συμβολαίου στην περίπτωση αυτή υπολογίζεται σε 10.93584 χρηματικές μονάδες. Ήδη από τα αποτελέσματα της προσομοίωσης ενός σεναρίου, 1000 σημείων διακριτοποίησης του χρόνου και 1200 διαφορετικών τροχιών, υπάρχει απόκλιση της εκτιμώμενης αξίας από την θεωρητική, περίπου της τάξεως 0.11. Τα περισσότερα Διαστήματα Εμπιστοσύνης που καταγράφονται έχουν πλάτη μικρότερα των 5 μονάδων. Είναι εμφανές ότι η τιμή 10.93584 υπερεκτιμάται συστηματικά από την προσομοίωση, γεγονός που επαληθεύεται και από την ελαφριά μετατόπιση των Διαστημάτων Εμπιστοσύνης δεξιότερα από την θεωρητική αξία. Αυτό αναλύεται περισσότερο στην Παράγραφο 4.3.

Στο ακόλουθο σχήμα έγινε παραγωγή πολλών διαφορετικών εκτιμήσεων Monte Carlo της αξίας του Παραγώγου σε διακριτά σημεία του συνόλου τιμών του φράγματος. Ξεκινώντας από το

100 και φτάνοντας στο 400 με βήμα 10. Η τιμή εξάσκησης σταθεροποιήθηκε στις 110 μονάδες και οι υπόλοιπες παράμετροι δεν υπέστησαν καμία αλλαγή σε σχέση με εκείνες που δόθηκαν σε όλα τα προηγούμενα σενάρια. Στο γράφημα περιλαμβάνονται τα σημεία με συντεταγμένες τις τιμές αυτές του φράγματος σε σχέση με την εκτιμώμενη αξία. Επιπλέον στο ίδιο γράφημα, προσαρμόστηκε και η καμπύλη που αναπαριστά το πως εξελίσσεται η θεωρητική αξία του συμβολαίου στο ίδιο εύρος τιμών του φράγματος.

ΣΧΗΜΑ 1-3

Γράφημα της τιμής του Παραγώγου (Up-and-Out put) έναντι της αξίας του φράγματος



Διαπιστώνεται μια πολύ καλή προσαρμογή των σημείων γύρω από την καμπύλη. Περιλαμβάνει και τις δύο περιπτώσεις όπου το φράγμα ενδέχεται να μεταβάλλεται σε θέσεις αμφίπλευρες της τιμής εξάσκησης. Και εδώ διαπιστώνεται ότι όσο το φράγμα αυξάνεται η δίκαιη τιμή του barrier δικαιώματος συγκλίνει στην τιμή του αντίστοιχου vanilla χωρίς barrier.

4.1.4 Δίκαιη Αξία ενός Down-and-Out Δικαιώματος αγοράς μέσω προσομοίωσης

Έστω ένα Down-and-Out Δικαίωμα αγοράς επί μιας μετοχής, η οποία δεν αποδίδει μερίσματα, με τα εξής χαρακτηριστικά: χρόνος λήξης $T = 1$, τιμή εξάσκησης $K = 70$ χρηματικές μονάδες, κάτω φράγμα $B = 90$ για όλες τις τιμές που θα λάβει μέχρι την λήξη, αρχική τιμή στον χρόνο σύναψης $S_0 = 100$ και πτητικότητα που εκτιμάται (π.χ. από ιστορικά δεδομένα) $\sigma = 0.4$. Αν το ετήσιο, ονομαστικό επιτόκιο δανεισμού της Αγοράς είναι ίσο με $r = 3\%$, τότε στον πίνακα συνοψίζονται κάποια ενδεικτικά αποτελέσματα από την εκτίμηση της παρούσας αξίας του μέσω προσομοίωσης Monte Carlo. Συγκεκριμένα δίνεται διαδοχικά η αξία του Δικαιώματος, όταν οι παράμετροι της προσομοίωσης είναι:

- Πλήθος χρονικών σημείων διακριτοποίησης τροχιών $k = 100, 500, 1000, 1500, 1750, 2500, 3000, 5000$.
- Πλήθος των προσομοιώσεων των τροχιών της Κίνησης $n = 500, 750, 1200, 1500, 2000, 2500, 5000, 10000$.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4-4

Αξία Down-and-Out Δικαιώματος Αγοράς μέσω προσομοίωσης Monte Carlo (B>K)

Πλήθος σημείων διακριτοποίησης	**Πλήθος Προσομοιώσεων**	**Εκτιμώμενη Δίκαιη Αξία**	**Χρόνος Εκτέλεσης**	**Κάτω όριο 99%-Δ.ε.**	**Άνω όριο 99%-Δ.ε.**
100	500	20.60394	0.364	9.726294	32.736549
500	500	15.68567	1.708	11.96774	20.35899
1000	750	13.46298	2.627	10.86853	16.87745
1000	1200	14.25091	4.224	11.84996	17.51986
1500	1500	14.86046	6.498	12.81748	17.80858
1750	2000	15.51983	9.812	13.67827	18.30669
2500	2500	14.50048	18.151	13.00986	16.87430
3000	5000	13.9299	41.721	13.85605	17.39093
5000	10000	15.17382	144.162	14.28774	16.98412

Η θεωρητική αξία του συμβολαίου υπολογίζεται σε 14.43509 χρηματικές μονάδες, αρκετά κοντά στην εκτιμώμενη αξία μέσω προσομοίωσης, όταν $k >= 1000$ και $n >= 1200$, αν συνυπολογιστεί και το σφάλμα που υπεισέρχεται. Παρατηρείται ότι αυξάνοντας το πλήθος προσομοιώσεων και το πλήθος των σημείων διακριτοποίησης για ανεξάρτητες μεταξύ τους δοκιμές, υπάρχει εν γένει σύγκλιση των δύο ορίων των Διαστημάτων Εμπιστοσύνης. Σε όλα αυτά τα σενάρια, η θεωρητική αξία του συμβολαίου βρίσκεται εντός του Διαστήματος Εμπιστοσύνης.

Σε αντίθετη περίπτωση, όπου το φράγμα είναι κάτω από την τιμή εξάσκησης, όπως για παράδειγμα θεωρούνται ενδεικτικά οι τιμές: $B = 55$ για το κάτω φράγμα και $K = 70$ για την τιμή εξάσκησης έχουμε τα εξής:

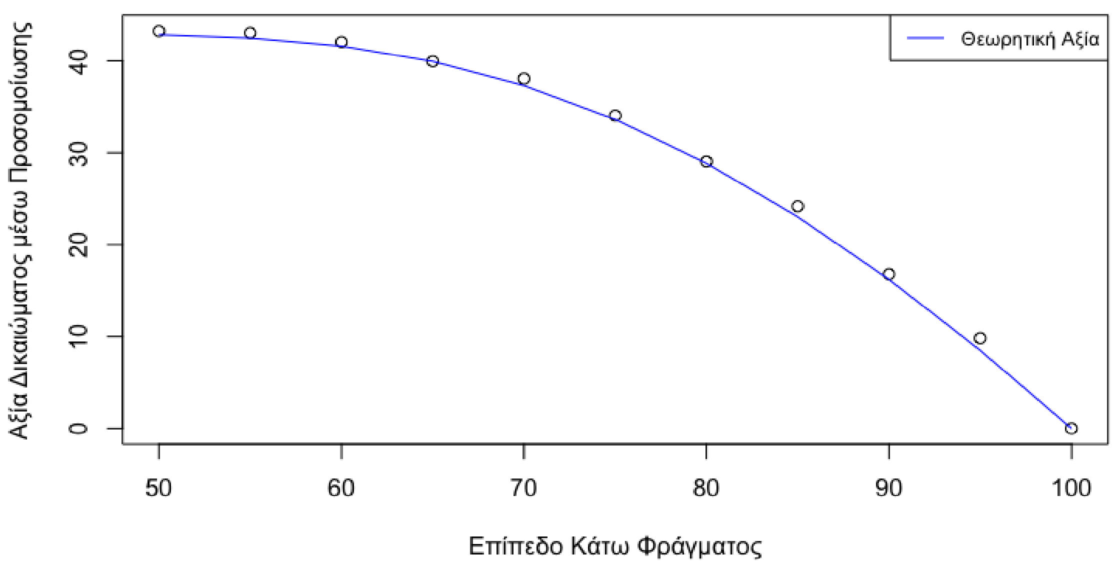
ΠΙΝΑΚΑΣ 4-5

Αξία Down-and-Out Δικαιώματος Αγοράς μέσω προσομοίωσης Monte Carlo (B<K)

Πλήθος σημείων διακριτοποίησης	**Πλήθος Προσομοιώσεων**	**Εκτιμώμενη Δίκαιη Αξία**	**Χρόνος Εκτέλεσης**	**Κάτω όριο 99%-Δ.ε.**	**Άνω όριο 99%-Δ.ε.**
100	500	34.57631	0.210	25.13043	46.12821
500	500	31.37217	0.981	28.28040	36.37479
1000	750	34.01409	2.545	31.92153	38.17842
1000	1200	33.71411	3.581	31.49432	37.98740
1500	1500	34.04907	7.297	32.46242	37.70962
1750	2000	34.17567	10.157	32.81028	37.62266
2500	2500	33.99154	17.265	33.02883	37.02464
3000	5000	34.34422	44.310	33.51616	37.26414
5000	10000	34.99804	139.005	34.63312	37.49466

ΣΧΗΜΑ 1-3

Γράφημα της τιμής του Παραγώγου (Down-and-Out call) έναντι της αξίας του φράγματος



Η θεωρητική αξία του συμβολαίου υπολογίζεται σε 34.75054 χρηματικές μονάδες. Μεταξύ των διαφόρων σεναρίων που δίνονται στον Πίνακα 4-5, η καλύτερη προσέγγιση της αξίας αυτής προκύπτει όταν οι παράμετροι έχουν τιμές $k = 5000$ και $n = 10000$. Το 99% διάστημα εμπιστοσύνης της εκτιμώμενης αξίας είναι το μικρότερο μεταξύ όλων. Ο χρόνος εκτέλεσης του σεναρίου αυτού είναι περίπου 2 λεπτά και 19 δευτερόλεπτα (σημαντικά μεγαλύτερος από τους υπολοίπους).

Στο παραπάνω γράφημα βρίσκονται:

- τα σημεία με συντεταγμένες τις τιμές του φράγματος μεταξύ 50 και 100 με βήμα 5 μονάδες και τις αντίστοιχες εκτιμήσεις της δίκαιης αξίας του Down-and-Out Δικαιώματος Αγοράς με τιμή εξάσκησης $K = 60$.
- Η καμπύλη με τις θεωρητικές αξίες όπως υπολογίζονται από τον τύπο της Παραγράφου 3.3.3.

Φαίνεται ότι σε αυτά τα σενάρια, τα θεωρητικά αποτελέσματα βρίσκονται πολύ κοντά με τα πειραματικά, δείχνοντας ότι ο αλγόριθμος δίνει καλές σημειακές εκτιμήσεις για διάφορες τιμές των παραμέτρων. Φυσικά υπάρχει πτωτική συμπεριφορά, όπως αναμένεται καθώς το φράγμα προσεγγίζει την τιμή εκ των κάτω και η αξία του συμβολαίου μειώνεται μέχρι να γίνει μηδενική.

Επαληθεύεται γραφικά ότι αφήνοντας το επίπεδο του φράγματος να πλησιάσει την αρχική τιμή εκ των κάτω, η αξία του Δικαιώματος αυτού μειώνεται μέχρι να γίνει σχεδόν μηδενική. Σε περίπτωση ισότητας του φράγματος με την τιμή εξάσκησης ($B = K$) που έχει τεθεί, επαληθεύεται ότι οι δύο τύποι, για $B > K$ και $B < K$, έχουν το ίδιο αποτέλεσμα.

4.1.5 Δίκαιη Αξία ενός Down-and-Out Δικαιώματος πώλησης μέσω προσομοίωσης

Έστω ένα Down-and-Out Δικαιώματος πώλησης επί μιας μετοχής η οποία δεν αποδίδει μερίσματα, με τα εξής χαρακτηριστικά: χρόνος λήξης $T = 1$, τιμή εξάσκησης $K = 105$ χρηματικές μονάδες, κάτω φράγμα για όλες τις τιμές που θα λάβει η μετοχή μέχρι την λήξη, $B = 50$, αρχική τιμή στον χρόνο σύναψης $S_0 = 100$ και πτητικότητα που εκτιμάται (π.χ. από ιστορικά δεδομένα) $\sigma = 0.4$. Αν το ετήσιο, ονομαστικό επιτόκιο δανεισμού της Αγοράς είναι ίσο με $r = 3\%$, τότε στον πίνακα συνοψίζονται κάποια ενδεικτικά αποτελέσματα από την εκτίμηση της παρούσας αξίας του μέσω προσομοίωσης Monte Carlo. Συγκεκριμένα δίνεται διαδοχικά η αξία του Δικαιώματος, όταν οι παράμετροι της προσομοίωσης είναι:

- Πλήθος χρονικών σημείων διακριτοποίησης τροχιών $k = 100, 500, 1000, 1500, 1750, 2500, 3000, 5000$.
- Πλήθος των προσομοιώσεων των τροχιών της Κίνησης $n = 500, 750, 1200, 1500, 2000, 2500, 5000, 10000$.

Στον πίνακα συνοψίζονται τα αποτελέσματα της αξίας του Δικαιώματος μέσω προσομοίωσης για τις παραπάνω τιμές των παραμέτρων, οι αντίστοιχες εκτιμήσεις των ορίων των 99% Διαστημάτων Εμπιστοσύνης σε κάθε σενάριο και οι αντίστοιχοι χρόνοι εκτέλεσης.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4-6

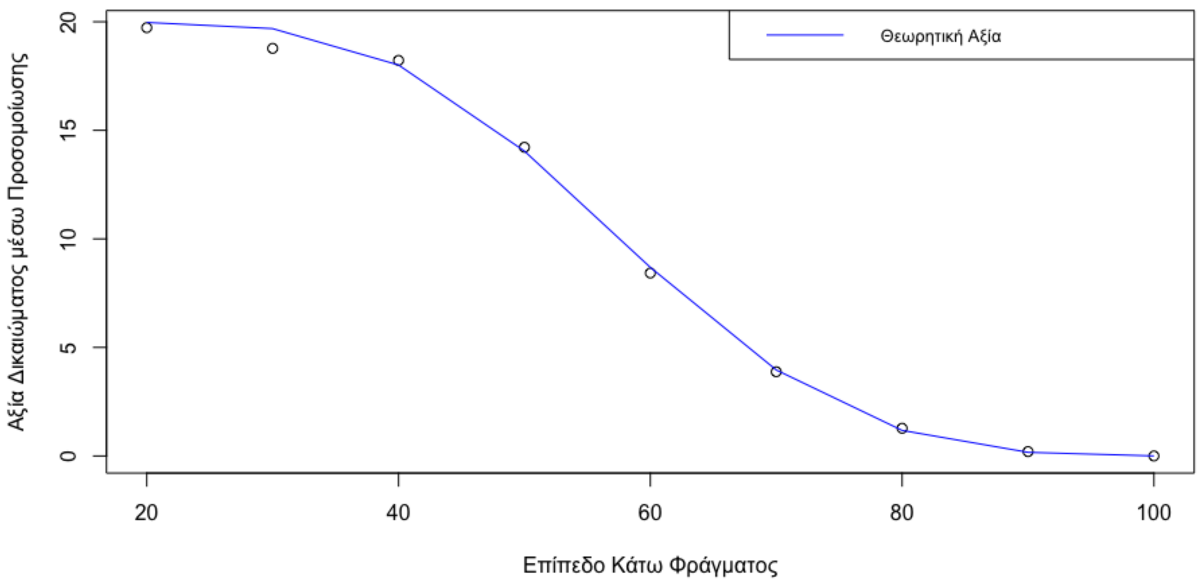
Αξία Down-and-Out Δικαιώματος Πώλησης μέσω προσομοίωσης Monte Carlo

Πλήθος σημείων διακριτοποίησης	**Πλήθος Προσομοιώσεων**	**Εκτιμώμενη Δίκαιη Αξία**	**Χρόνος Εκτέλεσης**	**Κάτω όριο 99%-Δ.ε.**	**Άνω όριο 99%-Δ.ε.**
100	500	12.59368	0.247	8.775016	17.179423
500	500	11.52576	0.720	10.11865	13.63490
1000	750	12.95223	2.034	12.00972	14.68365
1000	1200	11.85754	3.218	10.92516	13.51215
1500	1500	11.43942	5.842	10.74575	12.82985
1750	2000	11.92711	9.067	11.3263	13.2544
2500	2500	11.20044	19.959	10.75682	12.32626
3000	5000	11.4727	38.098	11.09897	12.54522
5000	10000	11.61907	129.162	11.40683	12.53901

Η θεωρητική αξία του συμβολαίου υπολογίζεται σε 11.53177 χρηματικές μονάδες. Επομένως υπάρχει μια αρκετά καλή εκτίμηση ήδη για $k = 500$ και $n = 500$ με 99% Διάστημα Εμπιστοσύνης πλάτους περίπου 3.5. Οι σημειακές εκτιμήσεις σε όλες τις περιπτώσεις βρίσκονται πολύ κοντά στην θεωρητική αξία και τα πλάτη των 99% Διαστημάτων Εμπιστοσύνης μειώνονται περίπου μέχρι το 1.5, όσο αυξάνονται οι τιμές των k, n.

ΣΧΗΜΑ 1-4

Γράφημα της τιμής του Παραγώγου (Down-and-Out put) έναντι της αξίας του φράγματος



4.3 Παρατηρήσεις

Λόγω της φύσης της προσομοίωσης, αναμένεται να υπάρχει μια απόκλιση μεταξύ των εκτιμήσεων της μεθόδου Monte Carlo και των θεωρητικών αποτελεσμάτων, η οποία εν μέρει οφείλεται στο **σφάλμα διακριτοποίησης του χρόνου**. Από την θεωρία αριθμητικών μεθόδων διακριτοποίησης είναι προφανές ότι η ακριβής λύση μιας εξίσωσης παραδείγματος χάριν, έχει μια διαφορά σε σχέση με την εκτίμηση που προκύπτει από μια επαναληπτική μέθοδο. Το μέγεθος αυτής επηρεάζεται σημαντικά από την μεταβολή της πυκνότητας των σημείων του πλέγματος στο οποίο διαμερίζεται το συνεχές πεδίο ορισμού της εξίσωσης.

Σφάλμα διακριτοποίησης αναμένεται να υπάρχει και στην εκτίμηση της αξίας των Δικαιωμάτων Προαίρεσης με φράγματα μέσω προσομοίωσης, λόγω της αναπαράσταση της κίνησης του υποκειμένου αξιογράφου στον Η/Υ ως μιας γραμμικής κατά διαστήματα συνάρτησης. Αυτή η απλούστευση του μοντέλου έχει κόστος αυτό το σφάλμα, διότι πολύ κοντά στο άνω φράγμα B με $S_{t_i} < S_{t_{i+1}} < B$ εντός του χρονικού διαστήματος (t_i, t_{i+1}) θεωρούμε στην προσομοίωση ότι $S_t < B, \forall t \in (t_i, t_{i+1})$ αλλά θεωρητικά ενδέχεται να σημειωθεί υπέρβαση του φράγματος από την Κίνηση συνεχούς χρόνου στο διάστημα αυτό. Επομένως είναι πιθανόν στην πράξη να παρατηρηθεί ότι δεν απενεργοποιούνται περισσότερα μονοπάτια, τα οποία να κάνουν στην λήξη το Δικαίωμα εσφαλμένα εξασκήσιμο.

Σημειώνεται ότι το σφάλμα διακριτοποίησης μπορεί να μειωθεί χωρίς να εξαλείφεται πλήρως, παίρνοντας ολοένα και λεπτότερη διαμέριση του $[0, T]$. Η αύξηση του μεγέθους του προσομοιωμένου δείγματος δίνει καλύτερη προσέγγιση, αλλά γίνεται σε βάρος του χρόνου υλοποίησης του αλγορίθμου.

Τέλος το δεύτερο σημαντικό σφάλμα (αβεβαιότητα) για την εκτίμηση, προέρχεται από το πεπερασμένο πλήθος των τυχαίων τροχιών που παράγονται και καλείται σφάλμα προσομοίωσης. Το σφάλμα αυτό μειώνεται όσο αυξάνεται το n.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Π1

Π1 Κώδικας Τιμολόγησης Δικαιωμάτων Προαίρεσης με φράγματα στην R

```
rm(list=ls())
###################### Monte Carlo price of Up and Out Call Option  ########################
# set the initial parameter values
T=1; sigma=0.4; n=5000; h=T/n; S0=100; B=200; K=90; r=0.03; mu=r-sigma^2/2;
t=seq(0,T,h); S=rep(1,n+1); k=5000; D=rep(0,k);
# Calculate fair price for different barriers
x=NULL
for (b in seq(100,200,10)){
  for(j in 1:k)
  {S[1]=S0;
  for(i in 1:n){S[i+1]=S[i]*exp(mu*h+sigma*h^0.5*rnorm(1,0,1))}
  D[j]=max(S[n+1]-K,0)*(max(S)<b);
  }
  x=c(x,exp(-r*T)*mean(D))
}
# calculate 99%-CI for MC estimate
s = sd(D); a=0.01;
za=qnorm(1-a/2,0,1);
ci=c(mean(D)-(s/n^0.5)*za,mean(D)+(s/n^0.5)*za)
ci

######### Black Scholes formula price of Up and Out Call Option ############
delta=function(tau,s,q){1/(sigma*T^0.5)*(log(s)+(r+q*sigma^2/2)*tau)}
C_UO = function(b){
  t=0; St=S0;
  S0*(pnorm(delta(T-t,St/K,1))-pnorm(delta(T-t,St/b,1))
     -(b/St)^(1+2*r/sigma^2)*(pnorm(delta(T-t,b^2/(K*St),1))-pnorm(delta(T-t,b/St,1))))-
    exp(-r*(T-t))*K*(pnorm(delta(T-t,St/K,-1))
                -pnorm(delta(T-t,St/b,-1))-(St/b)^(1-2*r/sigma^2)*
                  (pnorm(delta(T-t,b^2/(K*St),-1))-pnorm(delta(T-t,b/St,-1)))) }
C_UO(b=B)
# Barrier - MC value plot with theoretic Price curve
plot(seq(100,200,10), x, xlab = "Επίπεδο Άνω Φράγματος", ylab = "Αξία Δικαιώματος μέσω
Προσομοίωσης")
lines(seq(100,200,10),C_UO(seq(100,200,10)), col = "blue")
```

```
legend(100, 14, legend="Θεωρητική Αξία", col = "blue", lty=1, cex=0.8)


#################### Monte Carlo price of Up and Out Put Option ####################
# set the initial parameter values
T=1; sigma=0.4; n=1750; k=2000; h=T/n; B=110; K=120; r=0.03;
S0=100; mu=r-sigma^2/2; t=seq(0,T,h); S=rep(0,n+1); D=rep(0,k)
# Calculate fair price for different barriers
start_time = proc.time()
x=NULL
for (b in seq(200,100,-5)){
  for(j in 1:k){
    S[1]=S0;
    for(i in 1:n){
      S[i+1]=S[i]*exp(mu*h+sigma*sqrt(h)*rnorm(1))}
    D[j]=max(K-S[n+1],0)*(max(S)<b)
  }
  x=c(x,exp(-r*T)*mean(D))
}
proc.time()[3] - start_time[3]
# calculate 99%-CI for MC estimate
s = sd(D); a=0.01;
za=qnorm(1-a/2,0,1);
ci=c(mean(D)-(s/n^0.5)*za,mean(D)+(s/n^0.5)*za)
ci
ci[2]-ci[1]

######## Black Scholes formula price of Up and Out Put Option ###########
P_OU=function(B){
  t=0; St=S0;
  (B>K)*(
    -St*pnorm(-delta(T-t,St/K,1))+K*exp(-r*(T-t))*pnorm(-delta(T-t,St/K,-1))+
      St*(B/St)^(2*r/sigma^2+1)*pnorm(-delta(T-t,B^2/(St*K),1))-
      K*exp(-r*(T-t))*(B/St)^(2*r/sigma^2-1)*pnorm(-delta(T-t,B^2/(St*K),-1))
  )+
    (B<=K)*(
      -St*pnorm(-delta(T-t,St/B,1))+K*exp(-r*(T-t))*pnorm(-delta(T-t,St/B,-1))+
        St*(B/St)^(2*r/sigma^2+1)*pnorm(-delta(T-t,B/St,1))-
        K*exp(-r*(T-t))*(B/St)^(2*r/sigma^2-1)*pnorm(-delta(T-t,B/St,-1))
    )
}
P_OU(B)
# Barrier - Price plot with theoretic Price curve
b4=seq(200,100,-5)
```

```
plot(b4, x, xlab = "Επίπεδο Κάτω Φράγματος", ylab = "Αξία Δικαιώματος μέσω Προσομοίωσης")
lines(b4,P_OU(b4), col = "blue")
legend(120, 5, legend="Θεωρητική Αξία", col = "blue", lty=1, cex=0.8)

################## Monte Carlo price of Down and Out Call Option ####################
# set the initial parameter values
T=1; sigma=0.4; n=1500; k=5000; h=T/n; S0=100; B=50; K=30; r=0.03; mu=r-sigma^2/2;
t=seq(0,T,h); S=rep(0,n+1); D=rep(0,k)
# Calculate fair price for different barriers
x=NULL
start_time = proc.time()
for (b in seq(50,100,5)){
  for (j in 1:k){
    S[1]=S0;
    for (i in 1:n) {
      S[i+1]=S[i]*exp(mu*h+sigma*sqrt(h)*rnorm(1))
    }
    D[j]=max(S[n+1]-K,0)*(min(S)>b)
  }
  x=c(x,exp(-r*T)*mean(D))
}
proc.time()-start_time
# calculate 99%-CI for MC estimate
s = sd(D); a=0.01;
za=qnorm(1-a/2,0,1);
ci=c(mean(D)-(s/n^0.5)*za,mean(D)+(s/n^0.5)*za)
ci

########### Black Scholes formula price of Down and Out Call Option ############
C_DO=function(B){t=0; St=S0;
  (B<K)*(St*(pnorm(delta(T-t,St/K,1))) - exp(-r*(T-t))*K*pnorm(delta(T-t,St/K,-1))-
B*(B/St)^(2*r/sigma^2)*(pnorm(delta(T-t,B^2/(K*St),1))) + exp(-r*(T-t))*K*(St/B)^(1-
2*r/sigma^2)*(pnorm(delta(T-t,(B^2)/(K*St),-1))))+
    (B>=K)*(St*(pnorm(delta(T-t,St/B,1)))- exp(-r*(T-t))*K*pnorm(delta(T-t,St/B,-1))-
B*(B/St)^(2*r/sigma^2)*(pnorm(delta(T-t,B/St,1))) + exp(-r*(T-t))*K*(St/B)^(1-
2*r/sigma^2)*(pnorm(delta(T-t,B/St,-1))))}
# Barrier - MC value plot with theoretic Price curve
b0=seq(50,100,5)
plot(b0, x, xlab = "Επίπεδο Κάτω Φράγματος", ylab = "Αξία Δικαιώματος μέσω Προσομοίωσης")
lines(b0,C_DO(b0), col = "blue")
legend(50, 20, legend="Θεωρητική Αξία", col = "blue", lty=1, cex=0.8)

################# Monte Carlo price of Down and Out Put Option #####################
# set the initial parameter values
```

```
T=1; sigma=0.4; n=1500; k=1500; h=T/n; S0=100; K=110; B=50; r=0.03; mu=r-sigma^2/2;
t=seq(0,T,h); S=rep(0,n+1); D=rep(0,k);
# Calculate fair price for different barriers
start_time = proc.time()
x=NULL
for (b in seq(20,100,10)){
  for(j in 1:k){
    S[1]=S0;
    for(i in 1:n){S[i+1]=S[i]*exp(mu*h+sigma*sqrt(h)*rnorm(1))}
    D[j]=(min(S)>b)*max(K-S[n+1],0)
  }
  x=c(x,exp(-r*T)*mean(D))
}
proc.time()-start_time
# calculate 99%-CI for MC estimate
s = sd(D); a=0.01;
za=qnorm(1-a/2,0,1);
ci=c(mean(D)-(s/n^0.5)*za,mean(D)+(s/n^0.5)*za)
ci
ci[2]-ci[1]

######## Black Scholes formula price of Down and Out Put Option ############
P_DO=function(B){
  t=0; St=S0;
  K*exp(-r*(T-t))*(
    pnorm(delta(T-t,St/B,-1))-(B/St)^(2*r/sigma^2-1)*pnorm(delta(T-t,B/St,-1))
    -pnorm(delta(T-t,St/K,-1))+(B/St)^(2*r/sigma^2-1)*pnorm(delta(T-t,B^2/(St*K),-1))
  )+
    St*pnorm(delta(T-t,St/K,1))-St*(B/St)^(2*r/sigma^2+1)*pnorm(delta(T-t,B^2/(St*K),1))-
    St*pnorm(delta(T-t,St/B,1))+St*(B/St)^(2*r/sigma^2+1)*pnorm(delta(T-t,B/St,1))
}
P_DO(B)
# Barrier - Price plot with theoretic Price curve
b3=seq(20,100,10)
plot(b3, x, xlab = "Επίπεδο Κάτω Φράγματος", ylab = "Αξία Δικαιώματος μέσω Προσομοίωσης")
lines(b3,P_DO(b3), col = "blue")
legend(50, 20, legend="Θεωρητική Αξία", col = "blue", lty=1, cex=0.8)
########################################################################################
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

[1] Μπούτσικας, Μ., (2005). Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος "*Παράγωγα Χρηματο-οικονομικά Προϊόντα*", Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[2] Μπούτσικας, Μ., (2004). Σημειώσεις μαθήματος "*Μέθοδοι Προσομοίωσης και Στατιστικές Υπολογιστικές Τεχνικές*", Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[3] Χελιώτης, Δ. (2020), Σημειώσεις μαθήματος "*Εισαγωγή στον στοχαστικό λογισμό*", Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Ξένη

[1] Albanese C., G.Campolieti, (2006). *Advanced Derivatives Pricing and Risk Management*, Academic Press.

[2] Bodie, Z., Kane, A., Marcus, A. J., (2003). *Essentials of Investments*, McGraw-Hill.

[3] Cox, J. C., Rubinstein, M., (1985). *Options Markets*, Prentice Hall.

[4] Geon, G., (2016). *Stochastic Analysis for Finance with Simulations*, Springer.

[5] Haug, E., (1997). *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*, Irwin.

[6] Hull, J. C., (2014). *Options, Futures and Other Derivatives*. 9th edition.

[7] James, P., (2003). *Option Theory*, John Wiley & Sons Ltd.

[8] Joshi, M. S., (2003). *The concepts and practice of mathematical finance*, Cambridge University Press.

[9] Korn, R., Korn, E., Kroisandt, G., (2010). *Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance*. CRC Press.

[10] Kwok, Y.K., (2008). *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer, Second Edition.

[11] Le Gall, J.-F., (2013). *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, Berlin, Germany.

[12] Merton, R.C., (1973). Theory of Rational Option Pricing, *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183

[13] Privault, N., (2013). *Stochastic Finance, An Introduction with Market Examples*. CRC Press.

[14] Reiner, E., Rubinstein, M.,(1991). Breaking down the barriers. *Risk Magazine*, Vol. 4, Nr. 8.

[15] Shreve, S.E., (2004). *Stochastic Calculus for Finance. II.* Springer Finance. Springer-Verlag, New York. Continuous-time models.

[16] Weert, F., (2008). *Exotic Options Trading*. John Wiley & Sons Ltd.

[17] Zhang, P.G., (1998). *Exotic Options: A guide to second generation options*. World Scientific Publishing Co., Second Edition.