ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ:ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ

Π.Μ.Σ: ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ

Διπλωματική Εργασία

Θέμα : Το Γενικευμένο Διωνυμικό Μοντέλο Αποτίμησης Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Σπυρίδων Τσαγγαράς

Επιβλέπων καθηγητής : Επίκουρος Καθηγητής Νικόλαος Εγγλέζος

Τριμελής Επιτροπή : Καθηγητής Νικόλαος Κουρογένης

Επίκουρος Καθηγητής Νικόλαος Εγγλέζος

Επίκουρος Καθηγητής Μιχαήλ Ανθρωπέλος

Πειραιάς, Φεβρουάριος 2022

Το Γενικευμένο Διωνυμικό Μοντέλο Αποτίμησης Δικαιωμάτων Προαίρεσης
Σπυρίδων Τσαγγαράς

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική παρουσιάζουμε το γενικευμένο διωνυμικό μοντέλο των Cox, Ross, Rubinstein, ή χάριν συντομογραφίας GCRR, το οποίο μας βοηθάει να βελτιώσουμε την δομή του διωνυμικού πλέγματος έτσι ώστε η τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης στην εξέλιξη του χρόνου να γίνεται με τον αποτελεσματικότερο τρόπο.

Αρχικά, εισάγουμε βασικές έννοιες όπως το μοντέλο Black –Scholes και τα δικαιώματα προαίρεσης ενώ διεξάγουμε την ιστορική αναδρομή σχετικά με το πως προέκυψε και διαμορφώθηκε το διωνυμικό μοντέλο. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε βασικά χαρακτηριστικά για τα δικαιώματα προαίρεσης, ενώ αναλύουμε σε βάθος το διωνυμικό μοντέλο καθώς μέσω αυτού θα προχωρήσουμε στο γενικευμένο διωνυμικό μοντέλο το οποίο και είναι το αντικείμενο μελέτης της διπλωματικής. Εδώ γίνεται αναφορά σε κάποιες βασικές στοχαστικές διαδικασίες όπως η διαδικασία Markov, η διαδικασία Itô και η διαδικασία Weiner, οι οποίες αποτελούν βασικά εργαλεία στην επεξήγηση του μοντέλου του οποίου μελετάμε.

Ακολούθως, γίνεται η μελέτη του γενικευμένου διωνυμικού μοντέλου και των διαφόρων παραλλαγών του με τις αντίστοιχες αναλύσεις για τους ρυθμούς σύγκλισης αυτών. Στην μελέτη του μοντέλου αυτού χρησιμοποιούμε μια νέα παράμετρο λ την οποία και ονομάζουμε stretch parameter.

Τέλος, την σκυτάλη παίρνει η εμπειρική μελέτη στην οποία συγκρίνουμε τις συγκλίσεις των παραλλαγών του γενικευμένου διωνυμικού μοντέλου κατασκευάζοντας αντίστοιχους αλγορίθμους στην Matlab και παραθέτοντας τα αντίστοιχα γραφήματα. Στόχος της εμπειρικής μελέτης είναι να κατατάξουμε τα μοντέλα αυτά ως προς την αποδοτικότητά τους με βάση τα αριθμητικά τους αποτελέσματα στην Matlab.

Λέξεις Κλειδιά : Δικαιώματα προαίρεσης, Μοντέλο Black & Scholes, Διωνυμικό Μοντέλο CRR, Γενικευμένο Διωνυμικό Μοντέλο GCRR, μεταβλητή προέκτασης λ, αριθμητική ακρίβεια μοντέλων

Abstract

The purpose of the current thesis is the Generalized Binomial Option Pricing Model of Cox, Ross and Rubinstein or the GCCR. This model helps us to improve the structure of the binomial grid so the option pricing can become more efficient over time.

At first we introduce some important models such as Black – Scholes and the meaning of options. Additionally, we refer the history of the binomial model and the path of the final version that we are still using. Subsequently, we study some very important characteristics of options, and then we analyze the binomial model as this will be the start of our study about the generalized version that we presenting. Also, meanings such as the Wiener process, Markov process or Itô process are crucial to be led to our conclusion.

Secondly we study in deeo the generalized binomial model and the different types of it and also we study for each model the rate of convergence. Moreover the specific characteristic og this generalization is that we add an extra parameter λ called stretching parameter.

At last we study empirically the model we analyzed above theoretically. We create tables of convergence of the different of generalize model. For all the empirical part had been used the program called Matlab. The purpose of the empirical part was to study the model and the extensions of it for there efficiency and effectiveness.

Key Words: Options, Black & Scholes model, Binomial model CRR, Generalized Binomial Model GCRR, stretching parameter λ, numerical accuracy of models

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1. Δικαιώματα προαίρεσης και το μοντέλο των Black - Scholes

Αναλύοντας το ζήτημα της συγκεκριμένης εργασίας θα πρέπει να εισαγάγουμε και να περιγράψουμε κάποιες αρχικές και βασικές έννοιες οι οποίες θα παίξουν σημαντικό ρόλο και θα αναφερθούν παρακάτω. Αρχικώς θα αναφερθούμε στα δικαιώματα προαίρεσης ώστε να προχωρήσουμε αργότερα και στο διωνυμικό μοντέλο αποτίμησης τους. Την αρχή και το πρώτο μοντέλο αποτίμησης παρουσιάστηκε από τους Fischer Black & Myron Scholes (1973).

Το παραπάνω μοντέλο χαρακτηρίζεται το καταλληλότερο σε συνεχή χρόνο με τις τιμές που προσδιορίζουν το δικαίωμα να καθορίζονται αυστηρά. Ξεχωριστό και ιδιαιτέρας σημασίας χαρακτηριστικό για το μοντέλο αυτό αποτελεί ότι είναι ανεξάρτητο προσωπικών προτιμήσεων και βασίζεται στις αποτελεσματικές αγορές, δηλαδή, σε αγορές στις οποίες δεν υπάρχει το ενδεχόμενο για να υπάρξει ευκαιρία εξισορροπητικής κερδοσκοπίας.

Ένα ακόμα θετικό χαρακτηριστικό του είναι η ταχύτητα και το πόσο σύντομα αποτιμά ανεξαρτήτως πόσο μεγάλος είναι ο όγκος των δικαιωμάτων που θέλει ο επενδυτής να αποτιμήσει.

Βασικοί άξονες του μοντέλου αυτού είναι:

- Αναφέρεται κυρίως σε Ευρωπαϊκά δικαιώματα τα οποία όμως από την φύσης τους έχουν σαν ημερομηνία εξάσκησης την (Τ), δηλαδή, την ημερομηνία λήξης.
- Δεν υπάρχουν μερίσματα.
- Ύπαρξη σταθερής διακύμανσης.
- Δεν υπάρχουν φόροι και κόστη για τις υποκείμενες συναλλαγές.
- Οι τιμές για τα περιουσιακά στοιχεία που μελετούμε ακολουθούν την κανονική κατανομή Ν (μ,σ^2).
- Τα επιτόκια είναι σταθερά σε όλη την χρονική περίοδο.
- Ο δανεισμός για τους επενδυτές στο επιτόκιο γίνεται χωρίς την ύπαρξη κινδύνου.

- Μη ύπαρξη ευκαιρίας για εξισορροπητική κερδοσκοπία

- Οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων είναι συνεχείς και παρατηρείται μη ύπαρξη απότομων μεταβολών.

- Δυνατότητα ανοιχτής πώλησης των υποκείμενων παραγώγων (short selling).

Επικεντρώνοντας και πάλι στο μοντέλο για το οποίο αναφερθήκαμε και πριν, το διωνυμικό μοντέλο δηλαδή, θα πρέπει να τονίσουμε πως το συγκεκριμένο αυτό μοντέλο σχετίζεται με αυτό των Black – Scholes, ενώ η πρώτη μορφή του διωνυμικού μοντέλου δόθηκε από τον Wiliam Sharpe κατά το έτος 1978 με διάφορες αλλαγές και προσθήκες που προέκυψαν τα επόμενα έτη. Κατά τον Tian και το άρθρο του το 1999 θεμελιωτές του διωνυμικού μοντέλου υπήρξαν το 1979 οι John Cox, Mark Rubinstein και Stephen Ross, γνωστός καθηγητής χρηματοοικονομικών, χρηματο - οικονομολόγος και καθηγητής χρηματοοικονομικών αντίστοιχα. Χάριν συντομίας το συγκεκριμένο μοντέλο θα αναφέρεται και ως μοντέλο CRR.Το συγκεκριμένο μοντέλο είναι το πιο γνωστό και σημαντικό για την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης σε διακριτό χρόνο. Αναφερόμενοι στα δικαιώματα προαίρεσης μιλάμε για ένα δικαίωμα αγοράς (call option) ή ένα δικαίωμα πώλησης (put option). Τα δικαιώματα αυτά είναι ένα είδος παραγώγου. Αναλυτικότερα ένα call option δίνει σε αυτόν που το αγοράζει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση για να αγοράσει ένα υποκείμενο αγαθό σε μια τιμή η οποία έχει καθοριστεί από πριν, δηλαδή την στιγμή της αγοράς του δικαιώματος αυτού. Ενώ το δικαίωμα πώλησης δίνει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση στον συμβαλλόμενο να πουλήσει το υποκείμενο αγαθό στην τιμή στην οποία έχει καθοριστεί.

Το συγκεκριμένο μοντέλο χαρακτηρίζεται από μια σειρά πλεονεκτημάτων όπως:

- Απλή χρήση

- Σαφής κατανόηση των εννοιών της εξισορροπητικής κερδοσκοπίας (arbitrage), της αντιγραφής χαρτοφυλακίου (replication) και της αντιστάθμισης κινδύνου (hedging)

- Δυνατότητα αποτίμησης Αμερικάνικων δικαιωμάτων

- Γρήγορη σύγκλιση στην τιμή του μοντέλου Black – Scholes

Ένα σημαντικό σημείο που πρέπει να κρατήσουμε είναι ότι το διωνυμικό μοντέλο σε σχέση με το αντίστοιχο των Black – Scholes μπορεί να είναι πιο πολύπλοκο ωστόσο όσον αφορά τους υπολογισμούς είναι πιο ακριβές.

Προσεγγίζοντας σαν πρώτη επαφή το διωνυμικό μοντέλο θα μπορούσαμε να πούμε πως μέσω αυτού μπορούμε να υπολογίσουμε την θεωρητική αξία μιας " απόφασης " που θα πάρουμε στη πάροδο του χρόνου και η τιμή του παραγώγου κινείται πάνω ή κάτω, αντίστοιχα.

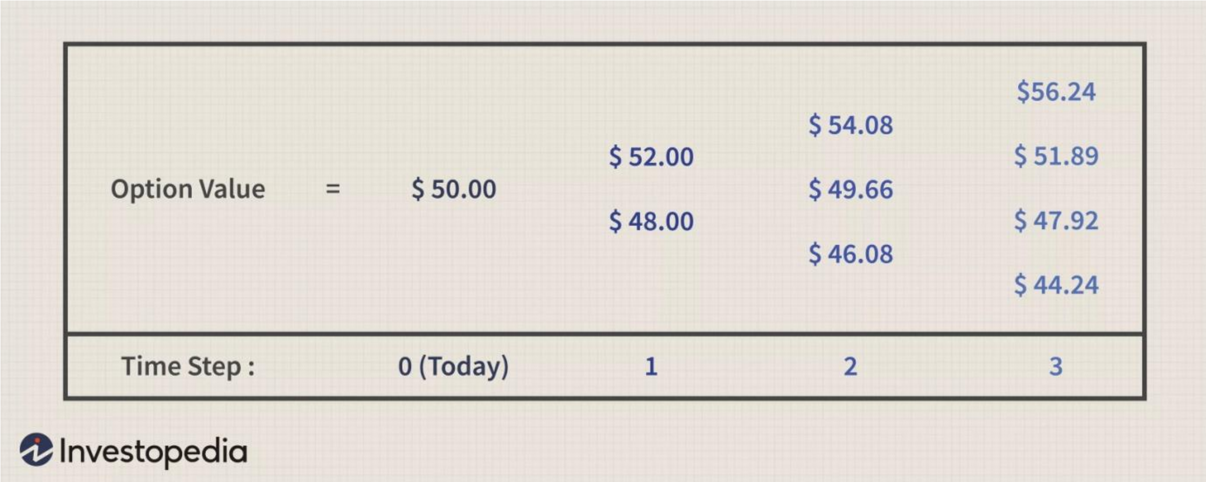
Το μοντέλο CRR το οποίο και αναφέραμε νωρίτερα απεικονίζεται με την δημιουργία ενός δέντρου με την υπόθεση πως η τιμή του περιουσιακού στοιχείου ακολουθεί τυχαίο περίπατο. Σημαντικό σημείο για το συγκεκριμένο μοντέλο είναι ότι το συγκεκριμένο μοντέλο μπορεί να αποτιμήσει δικαιώματα προαίρεσης που είναι γραμμένα πάνω σε ένα περιουσιακό στοιχείο το οποίο δίνει μέρισμα, όπως μια μετοχή. Μια αξιοσημείωτη παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι πως η τιμή από το διωνυμικό μοντέλο στο όριο προσεγγίζει την τιμή του μοντέλου των Black – Scholes όταν ο αριθμός των βημάτων είναι αυξανόμενος.

Μια αξιοσημείωτη παρατήρηση την οποία μπορούμε να κάνουμε για το μοντέλο CRR είναι πως βασίζεται στην υπόθεση ότι δεν υπάρχει εξισορροπητική κερδοσκοπία.
Στα παρακάτω βήματα θα παρουσιάσουμε τον τρόπο λειτουργίας του διωνυμικού μοντέλου :

- Δημιουργία δέντρου τιμών ξεκινώντας από την σημερινή χρονικής τιμή και καταλήγοντας στην καταληκτική ημερομηνία. Η κάθε χρονική στιγμή καλείται " κόμβος ". Ενώ η αρχική τιμή του περιουσιακού στοιχείου θα καλείται " κεντρικός κόμβος".

- Σε κάθε κόμβο αναλόγως και με την κίνηση του παραγώγου δεδομένων και συγκεκριμένων πιθανοτήτων κίνησης και επιτοκίου διαμορφώνονται και διαφορετικές τιμές για τα παράγωγα, τις οποίες συμβολίζουμε με S και υπολογίζονται από τον αντίστοιχο τύπο. Έτσι η τιμή του περιουσιακού στοιχείου μπορεί να κινηθεί είτε πάνω είτε κάτω.

Τα παραπάνω βήματα μπορούμε να τα δούμε σε ένα αριθμητικό παράδειγμα στο παρακάτω γράφημα :



Έχοντας παραπάνω ορίσει πως στο μοντέλο CRR οι κεντρικοί κόμβοι του δέντρου ορίζονται ως ο μεσαίος κόμβος σε μια χρονική περίοδο συμπεραίνουμε πως υπάρχουν ισάριθμοι κόμβοι πάνω και κάτω από αυτόν. Με βάση τα παραπάνω κατανοούμε πως η αρχική τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου είναι ένας κεντρικός κόμβος που δημιουργεί με τους άλλους κεντρικούς κόμβους μια οριζόντια γραμμή. Επειδή η τιμή του στοιχείου αυτού που αναφέραμε μετά από μια κίνηση είτε προς τα επάνω είτε προς τα κάτω που ακολουθείτε από μια κίνηση είτε προς τα επάνω είτε προς τα κάτω δεν μεταβάλλεται σχετικά με πριν μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα πως το μοντέλο CRR έχει μηδενική κλίση. Αυτή η παράμετρος κλίσης συμβολίζεται με το γράμμα λ και θα ισούται με μηδέν όπως είδαμε.

Για να τονίσουμε την σημαντικότητα της παραμέτρου κλίσης αξίζει να σημειώσουμε πως αυτή επηρεάζει την κίνηση της τιμής προς τα πάνω ή κάτω. Πιο συγκεκριμένα, αν έχουμε θετική παράμετρος κλίσης τόσο το δέντρο θα κλίνει προς τα επάνω δηλαδή θα παρατηρείτε μια μεγαλύτερη κίνηση της τιμής του περιουσιακού στοιχείου προς τα επάνω, ενώ μια αρνητική τιμή στην συγκεκριμένη παράμετρο θα παρασύρει την τιμή του στοιχείου περισσότερο προς τα κάτω.

Χαρακτηριστικό της επέκτασης του μοντέλου CRR είναι πως φαίνεται να συγκλίνει για κάθε οριστική τιμής της παραμέτρου κλίσης λ. Κύρια σημεία που προκύπτουν από την ευελιξία του μοντέλου είναι :

- Η καλύτερη προσαρμογή του δέντρου ώστε να μπορούμε με ακριβέστερο τρόπο να αποτιμούμε τυποποιημένα δικαιώματα προαίρεσης.

- Εφαρμογή μίας μεθόδου παρέκτασης, που χρησιμοποιείται για τη βελτίωση του ρυθμού σύγκλισης για διάφορους τύπους τυποποιημένων δικαιωμάτων προαίρεσης.

1.2. Ιστορική αναδρομή

Τα δικαιώματα προαίρεσης εδώ και χρόνια συναλλάσσονται στην αγορά εδώ και πολλά χρόνια. Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε μια σύντομη ιστορική αναδρομή σε αυτά. Συγκεκριμένα σε παγκόσμιο επίπεδο η πρώτη οργανωμένη προσπάθεια έγινε το 1973 και συγκεκριμένα στο Chicago όταν και λειτούργησε το πρώτο χρηματιστήριο παραγώγων στις 26 Απριλίου από το Chicago Board Option Exchange και το Chicago Mercantile Exchange.
Σε τοπικό επίπεδο στην Ελλάδα το Χρηματιστήριο Παραγώγων στην Αθήνα λειτούργησε πρώτη φορά το καλοκαίρι του 1999.

Οι πρωτοπόροι Fischer Black, Myron Scholes και Robert Merton (1973) προχώρησαν σε μια σημαντική ανακάλυψη και συγκεκριμένα το ομώνυμο μοντέλο Black & Scholes, το οποίο και αφορούσε την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης, που μέχρι και στις μέρες μας συνεχίζει να είναι υπόδειγμα όσον αφορά στην μελέτη για την εύρεση τιμών πάνω στα συγκεκριμένα δικαιώματα.

Την “σκυτάλη” της μελέτης και της έρευνας επί του συγκεκριμένου θέματος ανέλαβαν οι Cox, Ross και Rubinstein (1979), οι οποίοι και προχώρησαν στην ανάδειξη του ευρέως χρησιμοποιούμενου ομώνυμου μοντέλου. Χαρακτηριστικό του μοντέλου αυτού ήταν ότι αφορούσε την αποτίμηση των παραγώγων σε διακριτό χρόνο. Το μοντέλο αυτό είναι γνωστό κι ως το διωνυμικό μοντέλο το οποίο θα αποτελέσει και βάση της παρούσας εργασίας. Το μοντέλο αυτό όπως παρουσιάσαμε και παραπάνω μπορεί και να παρουσιαστεί και ως ένα δέντρο σύμφωνα με τις “κινήσεις” του οποίου μελετάτε η κίνηση της τιμής του υπό εξέταση περιουσιακού στοιχείου.

Οι Jarrow και Rudd (1983) προχώρησαν σε μια επέκταση του μοντέλου των CRR. Αρχικώς ανέπτυξαν ένα μοντέλο με παραμέτρους που είχαν πλήρη εξάρτηση από τον χρόνο και ήταν ίσες με όλες τις εκτιμήσεις των τιμών του δέντρου και αυξάνονται με το αντίστοιχο στιγμιότυπο της αύξησης της διαδικασίας Itô. Εν συνεχεία, εισήγαγαν ένα νέο τριωνυμικό μοντέλο στον φυσικό κόσμο, το οποίο είναι κατάλληλο για όλες τις στιγμές αξιολόγησης του δέντρου και ενισχύεται από την αντίστοιχη γεωμετρική κίνηση Brown.

Οι Hull και White (1990) πρότειναν μια νέα τροποποίηση της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών για την αποτίμηση των παραγώγων ασφαλείας. Η αναφερόμενη αυτή τροποποίηση μπορεί να βοηθήσει στην εκτίμηση παραγώγων ασφαλείας εξαρτωμένων από παραμέτρους κατάστασης. Μάλιστα επεκτείνοντας την λειτουργία του μπορούμε να δούμε πως βοηθά στην επίλυση προβλημάτων στην αποτίμηση παραγώγων με πολλές μεταβλητές κατάστασης.

Οι Kumitoto και Ikeda (1992) παρουσίασαν μια γενικευμένη μέθοδο για την αποτίμηση όσον αφορά τα ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης των οποίων η πληρωμή περιορίζεται από κυρτά όρια που καθορίζονται συμβατικά στη διαδικασία των τιμών των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων όταν ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown.

Ένα χρόνο αργότερα το άρθρο του Tian (1993) έκανε λόγο για ένα αποδοτικότερο αλγόριθμο που θα μπορούσε να συνεισφέρει δυναμικά στον υπολογισμό των συντελεστών ευαισθησίας (Greek Letters) για τα δικαιώματα προαίρεσης που των οποίων η αποτίμηση γίνεται μέσω του διωνυμικού δέντρου. Ακόμα σε αυτό το άρθρο αποτυπώνεται πως τα Greeks για τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμα με την διακριτή εκδοχή των Malliavin Greeks. Αυτό μπορεί να μας οδηγήσει να δείξουμε ότι τα Greeks συγκλίνουν στα Malliavin Greeks σε συνεχή χρόνο.

Στο παρασκήνιο το άρθρο των Leisen και Reimer (1996) το οποίο σε αρχικό στάδιο μελέτησε το πρόβλημα που αφορούσε την καθορισμό της τάξης σύγκλισης για την αποτίμηση στα αμερικάνικα δικαιώματα και συγκεκριμένα επικεντρώθηκε στις θέσεις πώλησης. Στην συνέχεια έγινε εκτενέστερη ανάλυση για την παρέκταση και τον έλεγχο της λεγόμενης τεχνικής “ Variante “, που αναφέρετε στην βελτίωση της σύγκλισης και εξηγεί τις σχετικές παγίδες.

Την ίδια χρονιά το άρθρο των Broadie και Detemple (1996) ανέπτυξε τα κατώτερα και τα ανώτερα όρια για τις τιμές των αμερικάνικων δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς και πώλησης που είναι γραμμένα σε περιουσιακά στοιχεία και πληρώνουν μερίσματα. Σε αυτό υπάρχουν δύο προσεγγίσεις τιμής, μια που βασίζεται στο κατώτατο όριο και έχει την διακριτική ονομασία LBA, και μια άλλη προσέγγιση βασιζόμενη και στα δύο όρια και ονομάζεται LUBA. Η LUBA έχει μέση ακρίβεια η οποία είναι συγκρίσιμη με το διωνυμικό δέντρο 1.000 βημάτων και με ταχύτητα υπολογισμού η οποία είναι αντίστοιχα συγκρίσιμη με το διωνυμικό δέντρο πάλι αλλά αυτή την φορά 50 βημάτων. Στο συγκεκριμένο άρθρο, ακόμα, έγινε εισαγωγή μια τροποποίησης της μεθόδου του διωνυμικού δέντρου, με την ονομασία BBSR, η οποία παρουσιάστηκε να είναι εξαιρετικά εύκολη στην χρήση και μάλιστα ιδιαιτέρως αποτελεσματική και αποδοτική. Ενώ τέλος, στο άρθρο αυτό έγινε μια εκτενής αξιολόγηση των μέχρι τότε μεθόδων που χρησιμοποιούνταν για τον υπολογισμό τιμών όσον αφορά τα αμερικάνικα δικαιώματα προαίρεσης.

Οι Heston και Zhou (1997) χαρακτήρισαν τον ρυθμό σύγκλισης του δικαιώματος προαίρεσης αλλά σε διακριτό χρόνο πολυεπίπεδων τιμών. Συγκεκριμένα μελέτησαν και έδειξαν πως ο ρυθμός σύγκλισης του δικαιώματος εξαρτάται από έναν παράγοντα, οποίος είναι η ομαλότητα της λειτουργία πληρωμής του δικαιώματος αυτού. Η ομαλότητα αυτή μάλιστα φάνηκε να είναι χαμηλότερη σχετικά με αυτό το οποίο υπήρχε σαν κοινή αίσθηση καθώς ο τρόπος λειτουργίας των πληρωμών είναι το λεγόμενο “ όλα ή τίποτα “ και δεν διαφοροποιούνται συνεχώς. Για να βελτιωθεί λοιπόν η ακρίβεια πρότειναν δύο μεθόδους. Η μια ήταν σχετικά με την προσαρμογή της λύσης διακριτού χρόνου πριν από τη λήξη, αλλά κι την εξομάλυνση της συνάρτησης πληρωμής, η οποία αποφέρει λύσεις που συγκλίνουν προς το αντίστοιχο όριο συνεχούς χρόνου στο μέγιστο δυνατό ρυθμό που απολαμβάνουν οι λειτουργίες ομαλής πληρωμής. Ενώ μια άλλη προσέγγιση που πρότειναν σχετιζόταν με πολυεθνικά μοντέλα συνδυάζοντας τις στιγμές μιας κανονικής κατανομής.

Ο P. Boyle (1998) με το άρθρο οδήγησε με την μελέτη του στην επέκταση του μοντέλου CRR. Ειδικότερα σκοπός της έρευνας και μελέτης του αποτέλεσε η απόδειξη πως η πληρωμή από τα δικαιώματα προαίρεσης εξαρτάται από παραπάνω από μια μεταβλητή. Πιο συγκεκριμένα, στο συγκεκριμένο άρθρο εξετάζεται η περίπτωση στην οποία το δικαίωμα προαίρεσης είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών κατάστασης, χωρίς ωστόσο να αποκλείεται το ενδεχόμενο να γίνεται επέκταση κι στην περίπτωση όπου έχουμε μεγαλύτερο αριθμό από δύο μεταβλητές κατάστασης.

Ο Kou (2003) υποστήριξε πως ένα δικαίωμα προαίρεσης που υπόκειται σε ένα φράγμα είναι μια σύμβαση παραγώγου που ενεργοποιείται ή απενεργοποιείται με την υπόθεση ότι η τιμή του υποκείμενου ξεπερνά ένα συγκεκριμένο όριο. Στα περισσότερα μοντέλα προϋποθέτετε η συνεχής παρακολούθηση του φραγμού αυτού που αναφέραμε. Ωστόσο θα πρέπει να αναφέρουμε πως στην πράξη το μεγαλύτερο μέρος των δικαιωμάτων στις αγορές παρακολουθείτε διακριτικά. Σε αντίθεση με τα συνεχής ομόλογα τους που δεν έχουν λύση κλειστής μορφής ούτε αριθμητική η τιμολόγηση είναι δύσκολη. Η μελέτη αυτή βασιζόμενη σε μια προσέγγιση των Broadie, Glasserman και Kou κάνει μια προέκταση για τα διακριτικά δικαιώματα προαίρεσης φραγμού καλύπτοντας τις περισσότερες περιπτώσεις και δίνοντας μια απλούστερη απόδειξη. Χαρακτηριστικά θα πρέπει να τονιστεί πως για την ανάλυση αυτή χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές των Siegmund, Yuh και Siegmund.

Αργότερα μελετήθηκε σε άρθρο του Walsh (2003) διεξοδικά η σύγκλιση του διωνυμικού δέντρου (το σχήμα είναι πρώτης τάξης). Αναλυτικότερα, βρίσκει τις σταθερές και αναφέρει πως είναι δυνατή η τροποποίηση της παρεκβολής Ricahrdson για να καταλήξουμε σε μια μέθοδο τάξης τριών ημίσεων. Ακόμα παρατηρήθηκε ότι το δέλτα που χρησιμοποιήθηκε στην αντιστάθμιση συγκλίνει με τον ίδιο ρυθμό. Αυτό αναλύεται με την ενσωμάτωση των δέντρων στο μοντέλο των Black – Scholes μέσω της ενσωμάτωσης του Skorokhod. Αξίζει να τονιστεί πως η τεχνική αυτή χρησιμοποιείτε σε πολύ γενικές περιπτώσεις.

Το άρθρο των Francine Diener και Marc Diener (2004) ανέλυσε διεξοδικά πως η τιμή του απλού Ευρωπαϊκού δικαιώματος που υπολογίζεται από ένα διωνυμικό δέντρο συγκλίνει στην τιμή των Black – Scholes όταν το χρονικό βήμα τείνει να γίνει μηδέν. Στο συγκεκριμένο άρθρο χαρακτηριστικό είναι πως η σύγκλιση είναι της τάξης 1/n και μάλιστα είναι ταλαντευόμενη. Αποδείχθηκε μάλιστα ότι αυτή την ταλαντευόμενη συμπεριφορά υπολογίζεται με την χρήση (ασύμπτωτα) των ολοκληρώσεων Laplace. Με τα παραπάνω λοιπόν φαίνεται πως όντως ο ρυθμός σύγκλισης είναι 1/n στην περίπτωση των συνήθων διωνυμικών μοντέλων αφότου εξαφανίζεται ο δεύτερος όρος.

Το άρθρο των Chang και Palmer (2006) αναλύει και αναφέρεται σε μια γενική τάξη των διωνυμικών μοντέλων με μια παραπάνω παράμετρο λ. Συγκεκριμένα το άρθρο έδειξε πως σε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς η διωνυμική τιμή συγκλίνει σε αυτή των Black – Scholes με συντελεστή 1/n, ενώ ακόμα έδωσε ένα τύπο επέκτασης του σφάλματος για τον συντελεστή 1/n. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως με κατάλληλες επιλογές στην τιμή του λ μπορούμε να αποδείξουμε πως η σύγκλιση είναι ομαλή στο ευέλικτο διωνυμικό μοντέλο του Tian αλλά και σε ένα νέο κεντρικό μοντέλο που προτείνει.

Ο Joshi (2007) σε άρθρο του προέκτεινε το μοντέλο του Black – Scholes και εισήγαγε μια νέα οικογένεια διωνυμικών δέντρων. Αναφερόμενοι στην συγκεκριμένη κατηγορία δένδρων, μπόρεσαν και απέδειξαν την ύπαρξη πλήρων ασυμπτωτικών επεκτάσεων για τις τιμές των ευρωπαϊκών απλών δικαιωμάτων προαίρεσης και ακόμα έδειξαν πως υπολογίζονται ρητά οι τρεις πρώτοι όροι.

Μέσω ειδικών περιπτώσεων μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα νέο δέντρο με συγκλίσεις τρίτης τάξης, το οποίο και αποδεικνύει την την εικασία των Leisen & Reimer ότι το δένδρο τους έχει δευτερεύουσα σύγκλιση.

Οι Chan, Joshi, Tang και Yang (2008) εξέτασαν την απόδοση των τιμών οκτώ τριωνυμικών και ενός διωνυμικού δέντρου. Μάλιστα η μελέτη αυτή αποδείχθηκε αργότερα αποτελεσματική σε είκοσι διαφορετικές μεθοδολογίες για την αποτίμηση αμερικάνικων δικαιωμάτων πώλησης. Η συγκεκριμένη λοιπόν μελέτη καταλήγει στο συμπέρασμα ότι το διωνυμικό δέντρο ταιριάζει με το τριωνυμικό δέντρου του άρθρου του Tian που η περικοπή, η παρέκταση και η ομαλότητα του Richardson έχουν καλύτερες επιδόσεις από τα τριωνυμικά δέντρα.

Το σχετικό άρθρο του Joshi (2009) μελέτησε 20 διαφορετικές μεθοδολογίες εφαρμογής για κάθε μια από τις 11 διαφορετικές επιλογές των παραμέτρων για τα διωνυμικά δέντρα, ενώ ακόμα στο συγκεκριμένο άρθρο έγινε κι η διερεύνηση για την ταχύτητα σύγκλισης όσον αφορά την αποτίμηση των αμερικάνικων δικαιωμάτων πώλησης.

Μέσω αυτών λοιπόν καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι αποτελεσματικότερες μέθοδοι εμπεριέχουν την χρήση περικοπής και παρέκτασης του Richardson ενώ κάποιες φορές συμπεριλαμβάνετε και η ομαλότητα. Ενώ ακόμα τα πιο αποτελεσματικά δέντρα είναι αυτά τα τρίτης τάξης του Tian που ταιριάζει με το δέντρο και ένα νέο δέντρο που είναι σχεδιασμένο με σκοπό να ελαχιστοποιεί τις ταλαντώσεις.

1.3. Περιγραφή της διπλωματικής

Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε εν συντομία στο διωνυμικό μοντέλο των Cox, Ross, Rubinstein που αποτέλεσε κι αποτελεί έως και τώρα το βασικό οδηγό μας και εργαλείο για την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, βασιζόμενοι και παίρνοντας βήμα από την έρευνα των Chung και Shih (2007), θα μελετηθεί το γενικευμένο διωνυμικό μοντέλο.

Στο κεφάλαιο 1 παραθέσαμε κάποιες βασικές έννοιες χρηματοοικονομικών οι οποίες θα είναι βασικά μας εργαλεία για την μετέπειτα έρευνα μα;. Ακόμα κάνουμε μια ιστορική αναδρομή από την οποία καταλήξαμε σήμερα να έχουμε ένα εύκολο και λειτουργικό τρόπο για την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Στην ιστορική αναδρομή βλέπουμε πως άρχισε η μελέτη για το διωνυμικό δέντρο από τους Cox, Ross, Rubinstein και πως στην συνέχεια άλλαξε και μελετήθηκε κατά την διάρκεια των ετών έως και σήμερα.

Στο επόμενο και συγκεκριμένα στο κεφάλαιο 2 θα θέσουμε το απαιτούμενο υπόβαθρο το οποίο θα χρειαστούμε. Λέγοντας υπόβαθρο εννοούμε την έννοια των δικαιωμάτων προαίρεσης, τους τύπου και τα βασικά χαρακτηριστικά τους. Στην συνέχεια του κεφαλαίου αυτού αναλύουμε κάποια βασικά πράγματα σχετικά με το διωνυμικό δέντρο το οποίο αποτελεί βάση της μελέτης μας. Ενώ τέλος προσθέτουμε μια ενότητα με τις στοχαστικές διαδικασίες που είναι χρήσιμα εργαλεία στην μελέτη του διωνυμικού μοντέλου αλλά και την προέκταση, που θέλουμε εμείς να κάνουμε στην παρούσα διπλωματική, στο γενικευμένο διωνυμικό μοντέλο.

Στο κεφάλαιο 3 θα παρουσιάσουμε το γενικευμένο διωνυμικό μοντέλο με την βοήθεια των Chung και Shih (2007) και όλο το θεωρητικό υπόβαθρο το οποίο αργότερα θα μας είναι χρήσιμο για μια αναλυτική εμπειρική μελέτη. Συγκεκριμένα βλέπουμε πως με την πρόσθεση μιας ακόμα μεταβλητής προέκτασης λ γενικεύουμε το διωνυμικό μοντέλο και τις αντίστοιχες προεκτάσεις τους που μελετήθηκαν κατά την πάροδο του χρόνου.

Στο κεφάλαιο 4, θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματικά μοντέλα προσαρμοσμένα στην μελέτη μας ώστε να παρουσιάσουμε πίνακες από την Matlab, μέσω της οποίας θα προχωρήσουμε στην εμπειρική μελέτη, την οποία και αναφέραμε για τα δικαιώματα προαίρεσης τόσο με την βοήθεια του διωνυμικού μοντέλου των Cox, Ross, Rubinstein όσο και του γενικευμένου διωνυμικού μοντέλου των Chung και Shih (2007).

Κεφάλαιο 2

Βασικές έννοιες των χρηματοοικονομικών μαθηματικών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε τις βασικές έννοιες χρηματοοικονομικών και θα δούμε διάφορα μοντέλα σχετικά με τα χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία, που θα είναι αρωγός στην μελέτη και έρευνας μας για το γενικευμένο διωνυμικό μοντέλο.

2.1. Δικαιώματα προαίρεσης

Ξεκινώντας με έναν ορισμό ως δικαίωμα προαίρεσης καλούμε μια συμφωνία, ή αλλιώς ένα συμβόλαιο, μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, ενός αγοραστή και ενός πωλητή, με την μεσολάβηση του Χρηματιστηρίου Παραγώγων. Με αυτή την συμφωνία ο αγοραστής έχει το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει, ή να πουλήσει αναλόγως με το είδος του δικαιώματος, από τον πωλητή. Αυτή η συναλλαγή μεταξύ των δύο προαναφερθέντων θα συμβεί για ένα υποκείμενο αγαθό Α, σε μια προκαθορισμένη τιμή Κ, κατά της διάρκεια της περιόδου Τα ή σε μια συγκεκριμένη στιγμή t. Το υποκείμενο αυτό αγαθό μπορεί να είναι μετοχή, χρηματιστηριακός δείκτης, συνάλλαγμα, και σε κάποιες σπανιότερες περιπτώσεις μπορεί να αναφερόμαστε και σε εμπόρευμα. Το δικαίωμα αυτό είναι πιο σύνθετο από τα ΣΜΕ (Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης) και από τα ΠΣ (Προθεσμιακά Συμβόλαια). Αυτό που αναφέραμε συμβαίνει διότι ο αγοραστής του δικαιώματος, γνωστός και ως holder, δεν είναι υποχρεωμένος να εξασκήσει το δικαίωμα αυτό που αγόρασε αλλά θα το κάνω μόνο αν οι συνθήκες είναι τέτοιες ώστε να τον συμφέρει να πραγματοποιήσει αυτή την κίνηση. Από την αντίπερα όχθη, ο πωλητής ή writer είναι υποχρεωμένος να συμβιβαστεί με την απόφαση του αγοραστή είτε αυτή τον συμφέρει ή όχι. Μέσω αυτής της ανάλυσης καταλαβαίνουμε πως ο αγοραστής έχει το “ πάνω χέρι “ κι για αυτό ο αγοραστής μπαίνει στην θέση να καταβάλει ένα αντίτιμο C, το οποίο καλείται ασφάλιστρο ή τιμή του δικαιώματος (option price). Αυτό το ασφάλιστρο καταβάλλεται από τον αγοραστεί στον πωλητή καθώς ο πωλητής επί της ουσίας αναλαμβάνει όλο το ρίσκο στην συναλλαγή μεταξύ τους. Τα δικαιώματα προαίρεσης λοιπόν χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

- Δικαίωμα αγοράς (call option) το οποίο δίνει το δικαίωμα σε όποιον το έχει να πάρει θέση αγοράς (long position) και να αγοράσει το συγκεκριμένο στοιχείο σε μελλοντική ημερομηνία και σε συγκεκριμένη τιμή.

- Δικαίωμα πώλησης (put option) το οποίο δίνει το δικαίωμα σε όποιον έχει την θέση αγοράς (long position) να πουλήσει το υποκείμενο στοιχείο σε μελλοντική ημερομηνία και σε συγκεκριμένη τιμή.

Κάποιες βασικές έννοιες που θα πρέπει να έχουμε κατά νου κατά την έρευνα μας θα είναι οι:

- Υποκείμενο αγαθό (asset) : Το υποκείμενο στοιχείο το οποίο διαπραγματεύεται μπορεί να είναι μια μετοχή, ένα αγαθό, ένας τίτλος ή ένας χρηματιστηριακός δείκτης.

- Τιμή εξάσκηση (exercise price) : Είναι η τιμή η οποία καθορίζεται την ημέρα που συμφωνείτε η συναλλαγή στην οποία ο κάτοχος του δικαιώματος αγοράς/πώλησης έχει το δικαίωμα να αγοράσει/ πουλήσει σε περίπτωση που εξασκήσει το δικαίωμα αυτό.

- Χρόνος μέχρι την λήξη (maturity) : Ο χρόνος μέσα στον οποίο θα γίνει η εξάσκηση του δικαιώματος. Ο χρόνος εξάσκησης του δικαιώματος καθορίζει και τον τύπο του. Δηλαδή αν το δικαίωμα εξασκηθεί στην λήξη του τότε το δικαίωμα είναι Ευρωπαϊκού τύπου (European option), ενώ αν εξασκηθεί κατά την διάρκεια και πριν την λήξη τότε το δικαίωμα είναι Αμερικάνικου τύπου (American option).

- Θέση (position) : Ο κάτοχος του δικαιώματος αυτού είναι υποχρεωμένος να αγοράσει ή να πουλήσει αναλόγως με την θέση που έχει λάβει (long ή short).

- Ασφάλιστρο (premium) : Το ποσό που πρέπει να καταβάλλει ο αγοραστής του δικαιώματος στο πωλητή ανεξαρτήτως της τελικής έκβασης της συναλλαγής, δηλαδή είτε εξασκηθεί το δικαίωμα ή όχι. Αυτό δίνεται σαν αντάλλαγμα για την παραχώρηση του δικαιώματος. Θα πρέπει να τονίσουμε εδώ πως το ποσό αυτό διαμορφώνεται αναλόγως με την “ κίνηση “ της αγοράς, δηλαδή την αγορά και την ζήτηση του συγκεκριμένου αγαθού.

- Μέγεθος συμβολαίου : Ο αριθμός των μεριδίων του υποκείμενου στοιχείου, που έχει το δικαίωμα ο κάτοχος να αγοράσει ή να πουλήσει.

Ο παρακάτω πίνακας που θα δούμε απεικονίζει τους παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή ενός δικαιώματος ανεξαρτήτως τύπου που λήγει μελλοντικά.

Μεταβλητή	**European call**	**European put**	**American call**	**American put**
Αξία υποκείμενου τίτλου	+	-	+	-
Τιμή εξάσκησης	-	+	-	+
Χρόνος μέχρι τη λήξη	?	?	+	+
Μεταβλητότητα	+	+	+	+
Επιτόκιο χωρίς κίνδυνο	+	-	+	-
Μερίσματα	-	+	-	+

Σημειώσεις: (+) : αύξηση της μεταβλητής αυτής προκαλεί την αύξηση της τιμής του δικαιώματος.

(-) : η αύξηση της τιμής στην μεταβλητή προκαλεί αντίστοιχα μείωση στην τιμή του δικαιώματος.

(?) : σημαίνει αβεβαιότητα για την μεταξύ τους σχέση

Πηγή John C.Hull,2017, σελ.232

Προχωρώντας την αναφορά μας στα δικαιώματα προαίρεσης μπορούμε να πούμε πως χωρίζονται σε τέσσερις κατηγορίες θέσεων που μπορούμε να πάρουμε :

- Θέση αγοράς σε δικαίωμα αγοράς ή long call
- Θέση αγοράς σε δικαίωμα αγοράς ή short call
- Θέση αγοράς σε δικαίωμα πώλησης ή long put
- Θέση πώλησης σε δικαίωμα πώλησης ή short put

Οι θέσεις αυτές που αναλύσαμε παραπάνω μπορούν να μας δώσουν την πληρωμή αλλά και το κέρδος το οποίο θα βγάλουμε από το Ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης στην λήξη του.

Συμβολίζοντας με K την τιμή εξάσκησης, με T το χρόνος λήξης και S την τιμή του υποκείμενου αγαθού στην λήξη μπορούμε να δούμε για παράδειγμα τι ισχύει για την περίπτωση ενός κατόχου θέσης αγοράς με ένα δικαίωμα αγοράς. Θα ισχύει λοιπόν ότι :

- $S_T > K$, τότε το δικαίωμα αυτό έχει την δυνατότητα να εξασκηθεί κι να προσφέρει κέρδος στον κάτοχο του $S_T - K$.

- $S_T < K$, τότε το δικαίωμα δεν έχει δυνατότητα εξάσκησης με κέρδος 0 για τον κάτοχο του.

Συμπερασματικά βλέπουμε ότι ένα δικαίωμα αγοράς τέτοιο στην λήξη του για τον αγοραστή η πληρωμή του είναι :

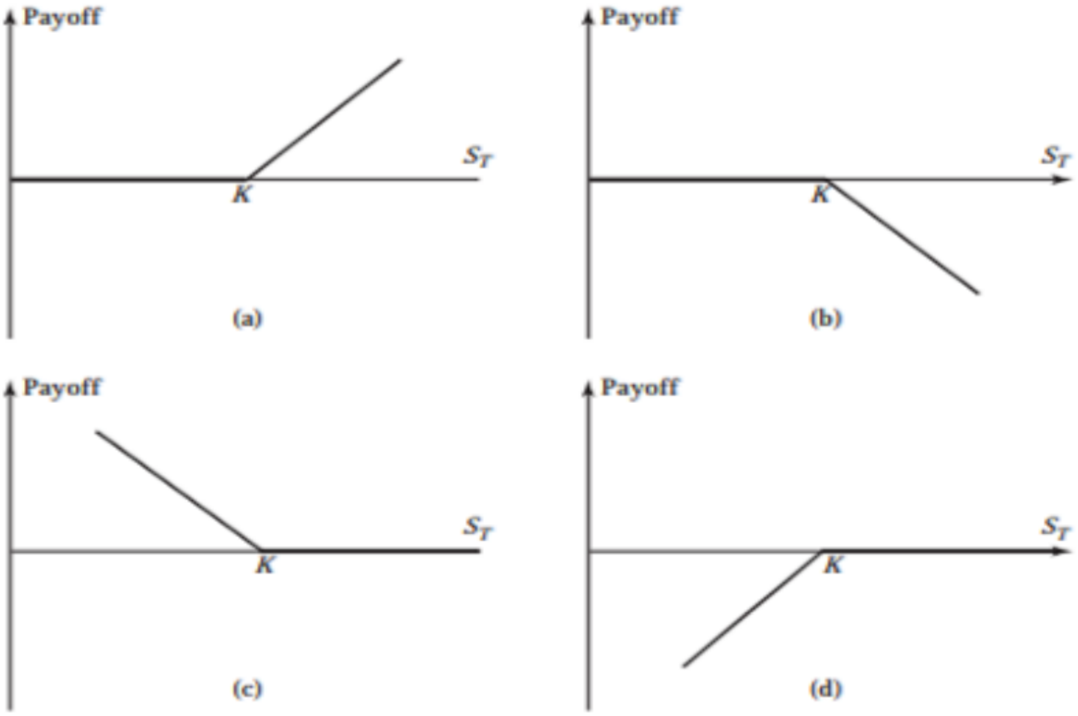
$$\text{Payoff} = \max\{S_T - K , 0\},$$

Η πληρωμή αυτή δείχνει την αξία του δικαιώματος και θα συμβολίζεται με f_{call}.
Αντίστοιχα το κέρδος από το δικαίωμα πώλησης για τον αγοραστή ια είναι :

$$(K - S_T) = \max\{K - S_T , 0\} = \begin{cases} K - S_T , & S_T < K \\ 0 , & S_T \geq K \end{cases}$$

Ενώ με τον συνυπολογισμό του ασφαλίστρου τελικά θα έχουμε $(K - S_T) - c$.

Παρακάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των πληρωμών ως συνάρτηση της τιμή του στοιχείου αναλόγως την θέση που λαμβάνουμε :



Πηγή John C.Hull,2017, σελ.213

Παρακάτω θα δούμε τα κριτήρια με τα οποία κάποιος επενδυτής θα οδηγηθεί στην απόφαση για να λάβει την κάθε θέση. Η άποψη του για την αγορά παίζει μεγάλο ρόλο. Επομένως :

- Αν πιστεύει ότι η τιμή του στοιχείου θα ανέβει αρκετά, τότε θα σκεφτεί να πάρει θέση αγοράς σε δικαίωμα αγοράς. Με αυτόν τον τρόπο θα πετύχει την πρόσβαση ρου στην άνοδο και να προστατευτεί στην περίπτωση της καθόδου.

- Αν πιστεύει πως η τιμή θα υποχωρήσει λίγο, τότε θα σκεφτεί να πάρει θέσει πώλησης σε ένα δικαίωμα αγοράς. Αυτό θα τον οδηγήσει στο να καρπωθεί το αντίτιμο με την ελπίδα ότι η τιμή δεν θα ανεβεί. Ωστόσο υπάρχει το ρίσκο, δηλαδή αν εξασκηθεί το δικαίωμα στην περίπτωση που η τιμή ανέβει. Θα μπορούσε να καλύψει παρόλα αυτά το ρίσκο αυτό με την αγορά μιας μετοχής.

- Αν πιστεύει πως η τιμή θα υποχωρήσει πολύ, τότε θα σκεφτεί να πάρει θέση αγοράς σε δικαίωμα πώλησης, Σε αυτή την περίπτωση το μέγιστο που θα μπορεί να χάσει είναι το αντίτιμο. Αλλιώς θα μπορούσε να δανειστεί την μετοχή και να την πουλήσει (να κάνει δηλαδή short – selling) .

- Αν πιστεύει ότι η τιμή θα έχει μια μικρή άνοδο τότε θα σκεφτεί να πάρει θέση πώλησης σε δικαίωμα πώλησης. Θα εισπράξει έτσι λοιπόν το αντίτιμο με την προσδοκία ότι η τιμή της μετοχής θα παραμείνει ίδια και δεν θα κινηθεί καθοδικά. Ωστόσο και σε αυτή την περίπτωση υπάρχει το ρίσκο από την έκθεση στον κίνδυνο αν τελικά η τιμή της μετοχής πέσει.

Οι δύο τύπου δικαιωμάτων που υπάρχουν είναι τα :

1. Αμερικάνικα

2. Ευρωπαϊκά

Δύο ακόμα παρατηρήσεις που πρέπει να κάνουμε είναι ότι ρα δικαιώματα ίδιου τύπου και επί του ίδιου τύπου λέγονται κλάση ή option class. Ακόμα τα δικαιώματα προαίρεσης τα οποία έχουμε την ίδια ημερομηνία λήξης Τα και την ίδια τιμή εξάσκησης Κ είναι γνωστά και ως σειρά δικαιωμάτων προαίρεσης ή option series.

Μια ακόμα διάκριση για τα δικαιώματα είναι με βάση την χρηματοροή, που προκαλούν την άμεση εξάσκηση τους σε σύγκριση με την τιμή εξάσκησης αλλά και την τιμή του στοιχείου το οποίο διαπραγματευόμαστε. Επομένως έχουμε τις εξής περιπτώσεις :

1) In the money : Θετικά χρηματοροή με άμεση εξάσκηση

2) At the money : Μηδενική χρηματοροή με άμεση εξάσκηση

3) Out of the money : Αρνητική χρηματοροή με άμεση εξάσκηση

Σε μια συνοπτική εικόνα παρακάτω φαίνονται οι χρηματοροές σε κάθε περίπτωση :

	Call Option	**Put Option**
In-the-money	S>K	S<K
At-the-money	S=K	S=K
Out-of-the-money	S<K	S>K

Σημείωση: S : τρέχουσα τιμή του περιουσιακού στοιχείου K : Τιμή Εξάσκησης.

Συμπερασματικά και με βάση τον πίνακα παραπάνω καταλήγουμε ότι ένα δικαίωμα :

I. Εξασκείται μόνο στην περίπτωση που είναι in the money

II. Η αξία του δικαιώματος ισούται με την εσωτερική αξία συν την χρονική αξία.

Εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε ότι εσωτερική αξία είναι για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης :

$$\max \{S - K , 0\} \qquad , \qquad \max \{K - S , 0\}$$

Επιπροσθέτως χρονική αξία είναι η αξία του δικαιώματος που διατηρείται αν αναβληθεί σε σχέση με την προκαθορισμένη η εξάσκηση του.

Αξία έχει να σημειώσουμε πως ο κάτοχος ενός Αμερικάνικου δικαιώματος που είναι in the money μπορεί να έχει μια θετική χρηματοροή αν το εξασκήσει αμέσως με αποτέλεσμα η αξία του δικαιώματος να είναι ίση με την εσωτερική του αξία.

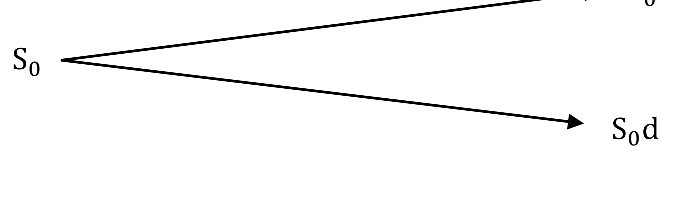
2.2 Το διωνυμικό μοντέλο - δέντρο

Πριν ξεκινήσουμε την ανάλυση μας σχετικά με το γενικευμένο διωνυμικό μοντέλο θα πρέπει να κάνουμε μια αναφορά στην “βάση”, δηλαδή από εκεί που ξεκίνησαν όλα, το κλασσικό διωνυμικό δέντρο. Ας ξεκινήσουμε από τον στόχο τον οποίο έχει το διωνυμικό μοντέλο κι ο οποίος είναι να καταφέρουμε να μοντελοποιήσουμε την κίνησης της τιμής του εκάστοτε περιουσιακού στοιχείου σε διακριτό χρόνο. Βασική προϋπόθεση του του μοντέλου είναι ότι ακολουθεί τυχαίο περίπατο. Αυτή η μέθοδος κατά βάση είναι αριθμητική. Η πιο απλή μορφή του δέντρου είναι το διωνυμικό δέντρο με δύο κλάδους και προβλέπει μόνο δύο “ δρόμους ” για την τιμή της μετοχής, την ανοδική και την καθοδική. Χρησιμοποιώντας αυτή την μέθοδο υποθέτουμε πως εφαρμόζουμε το μοντέλο σε έναν κόσμο χωρίς κίνδυνο. Θεωρείται μάλιστα ότι η τιμή της μετοχής την μηδενική χρονική στιγμή είναι ίση με S_0, ενώ στην λήξη η τιμή αυτή ισούται με S_T. Η τελευταία μάλιστα S_T θεωρείται τυχαία μεταβλητή καθώς δεν μπορούμε να ξέρουμε από τον χρόνο 0 πόσο θα είναι η πραγματική τιμή της.

Διωνυμικό δέντρο με ένα βήμα

Αρχικά υποθέτουμε ότι έχουμε ένα περιουσιακό στοιχείο όπως μια μετοχή η οποία δεν καταβάλλει μέρισμα καθ' όλη την διάρκεια μέχρι την λήξη του με τα ακόλουθα στοιχεία :

- Έχει αρχική τιμή S_0
- Ένα δικαίωμα γραμμένο πάνω σε αυτή την μετοχή που έχει τιμή f.
- Η ημερομηνία λήξης είναι η χρονική στιγμή T
- Κατά το χρονικό διάστημα αυτό του option η μετοχή μπορεί να κινηθεί κατά δύο τρόπους :
  - Προς τα επάνω σε S_0u με $u > 1$ και πληρωμή f_u
  - Προς τα κάτω με S_0d με $d < 1$ και πληρωμή f_d
- Η πληρωμή στην λήξη ενός δικαιώματος αγοράς για τον αγοραστή θα είναι :
  - Αν η τιμή της μετοχής πάει προς τα επάνω $\text{τότε } f_u = \max\{S_0u - K, 0\}$
  - Αν η τιμή της μετοχής πάει προς τα κάτω $\text{τότε } f_d = \max\{S_0d - K, 0\}$
- Η πληρωμή στην λήξη ενός δικαιώματος πώλησης για τον αγοραστή θα είναι :
  - Αν η τιμή της μετοχής πάει προς τα επάνω τότε $f_u = \max\{K - S_0u, 0\}$
  - Αν η τιμή της μετοχής πάει προς τα κάτω τότε $f_d = \max\{K - S_0d, 0\}$



Το παραπάνω διάγραμμα ξεκινά την χρονική στιγμή 0 και καταλήγει στην χρονική στιγμή Τ.

Προχωρώντας για να δούμε ποια είναι η τιμή του παραγώγου στον χρόνο $t = 0$ θα δημιουργήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο θα αποτελείται από μια μετοχή και το δικαίωμα το οποίο διαπραγματευόμαστε, το οποίο όμως δεν εμπεριέχει κίνδυνο. Φτιάχνουμε δηλαδή ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο έχει Δ σε αριθμό μετοχές (θέση αγοράς) και παίρνουμε την θέση πώλησης σε ένα δικαίωμα. Οπότε βλέπουμε ότι η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι :

$$\Pi = \Delta S - \mathrm{f}\,.$$

Πρωτύτερα αναφερθήκαμε στην μη ύπαρξη κινδύνου, αναλυτικότερα για να πετύχουμε ένα χαρτοφυλάκιο δίχως κίνδυνο θα πρέπει το αποτέλεσμα που έχουμε την χρονική στιγμή 0 να είναι το ίδιο με την χρονική στιγμή Τ κι ανεξάρτητο από το αν η μετοχή θα κινηθεί ανοδικά ή καθοδικά . Οπότε,

$$\Pi_u = \Pi_d \Rightarrow S_0 u - f_u = S_0 d - f_d$$

Και λύνοντας τελικά ως προς Δ καταλήγουμε στο εξής :

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0\,(u - d)} \qquad (\,2.1\,)$$

Το χαρτοφυλάκιο χωρίς κίνδυνο κερδίζει επιτόκιο r τέτοιο ώστε να ισχύει :

$$\Pi_T = \Pi_0 e^{rT} \Rightarrow \Delta S_0 u - f_u = (\Delta S_0 - f_0)e^{rT} \qquad (\,2.2\,)$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν την σχέση (2.1) στο αποτέλεσμα που μόλις βρήκαμε προκύπτει ότι :

$$f_0 = e^{-r\Delta t}[pf_u + (\,1 - p\,)f_d]$$

Όπου,

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \quad , \text{με } 0 \leq p \leq 1 \qquad (2.3)$$

Το p που είδαμε πριν λίγο ορίζεται ως η πιθανότητα με την οποία μπορεί να κινηθεί η μετοχή ανοδικά ενώ αντίστοιχα με $1 - p$ συμβολίζουμε την πιθανότητα με την οποία μπορεί η μετοχή να κινηθεί καθοδικά. Με την επιλογή του p αυτού λοιπόν είμαστε σε ουδέτερο κόσμο σε σχέση με τον κίνδυνο με επιτόκιο r. Μπορούμε λοιπόν τώρα να προχωρήσουμε στο ορισμό της αναμενόμενης τιμής της μετοχής στο $t = T$. Αυτή λοιπόν θα είναι :

$$E(S_T) = pS_0u + (1 - p)S_0d = pS_0(u - d) + S_0d$$

Και με βάση την προηγούμενη σχέση που ορίσαμε το p θα πάρουμε ότι :

$$E(S_T) = S_0e^{rT}$$

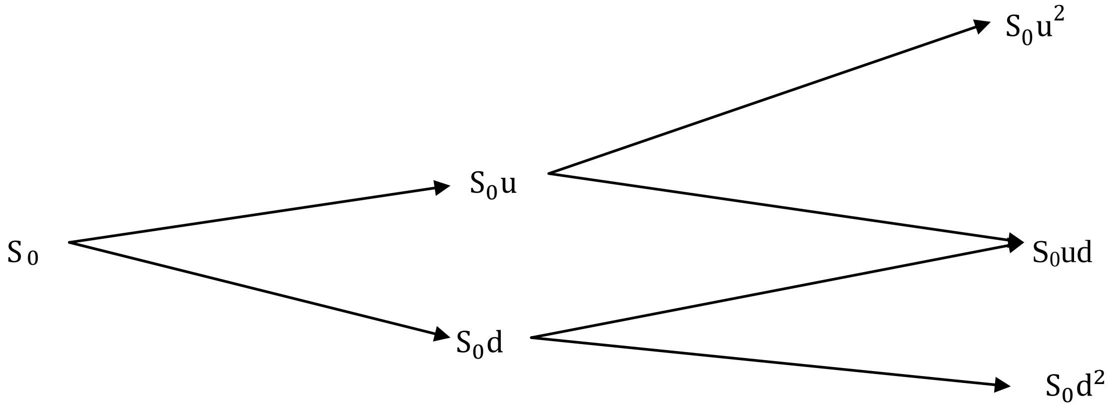
Γενικεύοντας τώρα ας δούμε τι γίνεται στην περίπτωση στην οποία έχουν δύο χρονικά βήματα κι όχι ένα όπως εξετάσαμε και αναλύσαμε έως τώρα. Στόχος μας κι πάλι θα είναι να βρούμε το f_0 μέσω διαδικασιών. Τα δεδομένα μας σε αυτή την περίπτωση θα είναι:

- Αρχική τιμή ίση με S_0

- Κατά τα χρονικά βήματα τα οποία περιγράφουμε η μετοχή μπορεί να κινηθεί είτε ανοδικά στην S_0u, με $u > 1$ και με πληρωμή f_u, είτε καθοδικά στην τιμή S_0d, με $d < 1$ και με πληρωμή f_d.

- Ακίνδυνο επιτόκιο ίσο με r

- Χρονικό βήμα σε κάθε στάδιο ίσο με Δt.



Το παραπάνω διάγραμμα ξεκινά στον χρόνο 0 και συνεχίζει στο t και τελειώνει στην χρονική στιγμή $2t$.

Η αξία του δικαιώματος σε κάθε κόμβο θα είναι :

- $f_u = e^{-r\Delta t}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}]$
- $f_d = e^{-r\Delta t}[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}]$
- $f_0 = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d]$

με το $p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u-d}$

Τελικά χρησιμοποιώντας τις δύο πρώτες σχέσεις στην τρίτη και αντικαθιστώντας θα καταλήξουμε στην σχέση :

$$f_0 = e^{-2r\Delta t}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}]$$

Τέλος θα πρέπει να τονίσουμε για ευκολία κατανόησης του τύπου πως οι αντίστοιχες τιμές p^2 , $2p(1-p)$, $(1-p)^2$ συμβολίζουν τις πιθανότητες να βρεθούμε αντίστοιχα στο πάνω, μεσαίο ή κάτω κόμβο.

2.3 Στοχαστικές διαδικασίες

Μέχρι τώρα είδαμε αναλυτικά σε διακριτό χρόνο την αποτίμηση ενός δικαιώματος προαίρεσης. Τώρα θα περάσουμε να δούμε και την αντίστοιχη ανάλυση και σε συνεχή χρόνο με το διωνυμικό μοντέλο ώστε να έχουμε μια ξεκάθαρη και πληρέστερη εικόνα. Ας ξεκινήσουμε με έναν ορισμό, στοχαστική διαδικασία ορίζουμε κάθε οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t) : t \in T\}$ πάνω σε έναν κοινό χώρο πιθανότητας.

Πρώτα θα εισάγουμε την έννοια της διαδικασίας Markov. Σαν ορισμό για την συγκεκριμένη διαδικασία είναι πως είναι ένα μαθηματικό σύστημα στο οποίο παρατηρείτε μεταβολή ανάμεσα στις καταστάσεις. Μπορούμε να πούμε πως δεν έχει μνήμη, δηλαδή δεν παίζουν ρόλο οι προηγούμενες μεταβολές σε σχέση με τις επόμενες. Οπότε το τι θα συμβεί στο μέλλον εξαρτάται και μόνο από την παρούσα κατάσταση. Η ιδιότητα αυτή της έλλειψης μνήμης κατά την διαδικασία αυτή ονομάζεται και χαρακτηριστικά “ μαρκοβιανή “. Αλυσίδα του Markov καλούμε μια σειρά από τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_n$, που είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και έχουν την ιδιότητα της διαδικασίας Markov που είδαμε προηγουμένως. Μπορούμε λοιπόν να δούμε πως :

$$\Pr(X_{n+1} = x \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \Pr(X_{n+1} = x \mid X_n = x_n)$$

Το σύνολο των τιμών Xi απαρτίζουν ένα σύνολο που διαφορετικά καλείται και ως χώρος καταστάσεων της αλυσίδας.

Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με την διαδικασία Wiener ή αλλιώς κίνηση Brown. Η διαδικασία αυτή αποτελεί μια κατηγορία από την διαδικασία Markov που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφό. Τώρα για να δούμε πως συμπεριφέρεται μια μεταβλητή z η οποία ακολουθεί την διαδικασία Wiener θα χρειαστεί να εκτιμήσουμε τις Δz. Για αυτές τις Δz θα πρέπει να ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες:

- Ισχύει η σχέση $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ (2.4)

  , όπου ε προκύπτει τυχαία από μια τυπική κανονική κατανομή.

- Οι τιμές των Δz σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα Δt είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Από τις παραπάνω ιδιότητες λοιπόν μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι οι Δz ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή ίση με το μηδέν και διακύμανση ίση με Δt. Ακόμα μέσω των ιδιοτήτων που αναφέραμε παραπάνω μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η Δz ακολουθεί διαδικασία Markov. Η μεταβολή τώρα στην τιμή της μεταβλητής z κατά την διάρκεια από την χρονική στιγμή 0 έως και την αντίστοιχη χρονική στιγμή T μπορούμε να την συμβολίσουμε με $z(T) - z(0)$, και θεωρείται σαν το άθροισμα των μεταβολών της τιμή του z στα μικρότερα χρονικά διαστήματα Δt. Αυτά τα μικρά διαστήματα μπορούμε να τα συμβολίσουμε και ως N, τέτοια ώστε να ισχύει :

$$N = \frac{T}{\Delta t}$$

με κατά συνέπεια :

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \qquad (2.5)$$

με ε_i να είναι μια τυχαία λήψη από την κανονική κατανομή με μέση τιμή ίση με 0 και διακύμανση ίση με 1 ή αλλιώς N (0,1).

Συνεχίζοντας την αναφορά μας και ανάλυση των παραπάνω ιδιοτήτων, μέσω της δεύτερης ιδιότητας γνωρίζουμε ότι τα ε_i είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.
Μέσω των τελευταίων δύο σχέσεων που δείξαμε δηλαδή της (2.4) και της (2.5) αποδεικνύεται ότι η διαφορά z (T) – z (0) ακολουθεί την κανονική κατανομή με τα κάτωθι χαρακτηριστικά :

- $E\,[z\,(T) - z\,(0)] = 0$
- $Var\,[z\,(T) - z(0)] = N\Delta t = T$

<u>Διαδικασία Weiner</u>

Ένα σημαντικό εργαλείο για την μοντελοποίηση της τιμής ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου που εξετάζουμε όπως είναι μια μετοχή είναι η διαδικασία Weiner. Μέσω αυτής της διαδικασίας το κυριότερο που επιτυγχάνουμε είναι μια μέση αναμενόμενη απόδοση διάφορη από το μηδέν ενώ καταλήγουμε κι σε μια διακύμανση η οποία είναι διάφορα από τον χρόνου λήξης του. Η γενική μορφή της διαδικασίας Weiner είναι η :

$$dx = adt + bdz$$

, όπου μέσω του πρώτου όρου συμπεραίνουμε πως η διαδικασία Weiner έχει τάση a ανά μια μονάδα χρόνου και μέσω του δευτέρου ότι προστίθεται θόρυβος ή αλλιώς μεταβλητότητα. Η ποσότητα αυτή που αναφέρουμε σαν θόρυβο συμβολίζεται με b.
Αν μιλήσουμε για ένα χρονικό διάστημα θα έχουμε πως :

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η Δx ακολουθεί κανονική κατανομή με :

- $E\,(\Delta x) = aT$
- $Var\,(\Delta x) = b^2T$

<u>Διαδικασία Itô</u>

Η συγκεκριμένη διαδικασία αποτελεί μια γενίκευση της προηγούμενης διαδικασίας που είδαμε πριν του Weiner. Συγκεκριμένα για να δούμε και την μορφή της εξίσωσης της διαδικασίας αυτής θα πρέπει να τονίσουμε ότι τα a και b αποτελούν συναρτήσεις των αντίστοιχων τυχαίων μεταβλητών x και t. Η μορφή της εξίσωσης λοιπόν θα είναι :

$$dx = a\,(x,t)dt + b\,(x,t)dz$$

Η παραπάνω σχέση σε ένα χρονικό διάστημα $[t,t + \Delta t]$ θα γίνει :

$$dx = a\,(x,t)\Delta t + b\,(x,t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

Η υπόθεση που γίνεται στην παραπάνω σχέση είναι πως τα ποσοστά μεταβολής και διακύμανσης είναι σταθερά σε όλη την διάρκεια από t έως και $t + \Delta t$.

Μια εύλογη σκέψη και υπόθεση που μπορούμε να κάνουμε για τις τιμές των μετοχών είναι πως ακολουθούν την διαδικασία του Weiner με σταθερούς τους όρους της τάσης και διακύμανσης. Κάτω από αυτή την προϋπόθεση και αν ίσχυε η παραπάνω υπόθεση που κάναμε τότε η αναμενόμενη απόδοση των επενδυτών θα ήταν ανεξάρτητη της τιμής της μετοχής, όπως και έχουμε από τον σταθερό αναμενόμενο όρο τάσης.
Αν συμβολίσουμε με S την τιμή της μετοχής, η τάση θα είναι το γινόμενο μS, όπου μ είναι η ποσοστιαία απόδοση της μετοχής και παραμένει σταθερό. Οπότε αν προχωρήσουμε στον υπολογισμό της τάσης σε χρονικό διάστημα Δt θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\mu S\Delta t$. Ακόμα αν κάνουμε μια ακόμα υπόθεση πως η μεταβολή της τιμής στο χρονικό διάστημα Δt τότε η διακύμανση θα είναι μηδενική. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα στο διάστημα $[0,t]$ λοιπόν θα έχουμε :

$$S = \mu S\Delta t \Rightarrow \frac{dS}{S} = \mu dt \Rightarrow S = S_0 e^{\mu t}$$

με S_0 να είναι η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $t = 0$.

Υποθέτοντας πως σ^2 είναι η διακύμανση της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής της υποκείμενης μετοχής τότε μπορούμε να δούμε πως στο διάστημα Δt η διακύμανση της μεταβολής της τιμής είναι $\sigma^2 S^2 \Delta t$. Με όλα τα παραπάνω λοιπόν οδηγούμαστε στο παρακάτω μοντέλο :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \Leftrightarrow \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \qquad (2.6)$$

Η παραπάνω σχέση η οποία είδαμε καλείται και γεωμετρική κίνηση του Brown. Η συγκεκριμένη κίνηση αποτελεί ίσως το πιο γνωστό και ευρέως χρησιμοποιημένο μοντέλο όσον αφορά την μελέτη για την κίνηση μιας μετοχής. Σε διακριτό χρόνο λοιπόν το μοντέλο αυτό θα πάρει την παρακάτω μορφή :

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \Leftrightarrow \frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \qquad (2.7)$$

, όπου το ε ακολουθεί την κανονική κατανομή Ν με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1, Ν (0,1) και το μέλος στα αριστερά μας δίνει την απόδοση της μετοχής σε Δt. Αναλυτικότερα, στο δεξιά μέρος το $\mu\Delta t$ συμβολίζει την τιμή που αναμένουμε να έχει η απόδοση. Ενώ το δεύτερο κομμάτι της άθροισης, δηλαδή το $\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$, συμβολίζει το στοχαστικό μέρος της απόδοσης. Η διακύμανση της απόδοσης, η οποία ταυτίζεται με αυτή του στοχαστικού μέρους ισούται με $\sigma^2\Delta t$. Τέλος σε ένα ακόμα συμπέρασμα που καταλήγουμε είναι πως το κλάσμα $\frac{\Delta S}{S}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με τα εξής χαρακτηριστικά :

- $E\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \mu\Delta t$
- $Var\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \sigma^2\Delta t$

<u>Λήμμα του Itô</u>

Ένα χρήσιμο εργαλείο για να καταφέρουμε να κάνουμε την σύνδεση μεταξύ της τιμής του δικαιώματος προαίρεσης και της αντίστοιχης του περιουσιακού στοιχείου είναι το Λήμμα του Itô.
Ας δούμε λοιπόν μια μεταβλητή x η οποία ακολουθεί την διαδικασία του Itô, τότε :

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

Αν τώρα υποθέσουμε μια συνάρτηση G που εξαρτάται τόσο από το x όσο και από το t τότε η G ακολουθεί την διαδικασία του Itô και θα πάρουμε την παρακάτω σχέση :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz \qquad (2.8)$$

, όπου $(\frac{\partial G}{\partial x})^2 b^2$ είναι ο ρυθμός διακύμανσης και $\left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x} b^2\right)$ είναι ο όρος τάσης. Το σημαντικότερο χαρακτηριστικό του λήμματος αυτού το οποίο το κάνει και τόσο ιδιαίτερο είναι πως καταφέρνει να συνδέσει τις τιμές των δικαιωμάτων με την αντίστοιχη τιμή του υποκείμενου αγαθού αλλά και τον χρόνο.

Ένα ακόμα χρήσιμο εργαλείο στην συγκεκριμένη μελέτη αποτελεί η λογαριθμοκανονική κατανομή. Ορίζουμε λοιπόν έναν λογάριθμο για την περιγραφή της τιμής του περιουσιακού στοιχείου. Αυτός θα είναι :

$$G = \ln S$$

με μερικές παραγώγους :

$$\frac{dG}{dS} = \frac{1}{S}\ ,\ \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = \frac{1}{S^2}\ ,\ \frac{dG}{dt} = 0$$

Με βάση λοιπόν τις παραπάνω μερικές παραγώγους αλλά και την σχέση (2.8) που δείξαμε παραπάνω καταλήγουμε ότι :

$$dG = d\ln S = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dz$$

Εδώ θα μας χρησιμεύσει άλλη μια φορά η παραπάνω θεωρία καθώς βλέπουμε από την σχέση πως είναι μια γενικευμένη διαδικασία Weiner με όρος τάσης ίσο με (μ - $\frac{\sigma^2}{2}$) και όρος διακύμανσης ίσο με σ^2.

Η μεταβολή μεταξύ των λογαρίθμων των τιμών του περιουσιακού στοιχείου μεταξύ των χρονικών στιγμών t και T είναι $G = \ln S_{t} - \ln S_t$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με :

- $E(G) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)$
- $Var(G) = \sigma 2(T - t)$

Επομένως θα έχουμε πως :

$$\ln S_T - \ln S_t \sim N\left[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)\ ,\ \sigma\sqrt{T - t}\right] \quad (2.9)$$

έτσι θα προκύψει τελικά πως :

$$\ln St \sim N[\ln St + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma\sqrt{T}) \quad (2.10)$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα πως η S_T ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή και έχει τα εξής χαρακτηριστικά :

- $E(ST) = St e^{\mu(T-t)}$
- $Var(ST) = {S_t}^2 e^{2\mu(T-t)}[e^{\sigma^2(T-t)} - 1)$

<u>Η εξίσωση των Back & Scholes</u>

Βάση για την συγκεκριμένη εξίσωση είναι η ύπαρξη ενός χαρτοφυλακίου το οποίο ωστόσο κατασκευάζεται στις συνθήκες μηδενικού κινδύνου. Μέσω των παρακάτω εξισώσεων συνεχούς και διακριτού χρόνου αντίστοιχα :

- $dS = \mu S\Delta t + \sigma S\Delta z$ ή $\Delta S = \mu S\Delta t + \sigma S\Delta z$ (2.10)
- $df = \frac{\partial f}{\partial s}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\Delta z$ ή $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial s}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\Delta z$ (2.11)

Καταλήγουμε στα παρακάτω συμπεράσματα :

- Η πρώτη λοιπόν μας δείχνει πώς το πως κινείται η τιμή του περιουσιακού στοιχείου που έχουμε επιλέξει να εξετάσουμε ακολουθεί την διαδικασία Itô.
- Η δεύτερη εξίσωση μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως η αξία του αντίστοιχου παραγώγου συνάδει με το λήμμα του Itô.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να δημιουργήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο θα αποτελείται από ένα περιουσιακό στοιχείο και από ένα παράγωγο που ικανοποιούν τις παραπάνω εξισώσεις. Μέσω λοιπόν των εξισώσεων αυτών καταλήγουμε πως θα κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο που θα έχει για το παράγωγο μια θέση πώλησης ενώ μια θέση αγοράς για $\frac{\partial f}{\partial S}$ μέρη του περιουσιακού στοιχείου. Έτσι η συνολική αξία που θα πάρουμε από το χαρτοφυλάκιο που κατασκευάσαμε θα είναι :

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S \qquad (2.12)$$

Τέλος αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.10) και (2.11) στην σχέση (2.12) προκύπτει ότι :

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t \qquad (2.13)$$

Από την παραπάνω εξίσωση λοιπόν μπορούμε να δούμε ότι η μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου είναι ανεξάρτητη από τον κίνδυνο καθώς δεν υπάρχει ο όρος Δz. Προχωρώντας την σκέψη μας μπορούμε να πούμε πως το χαρτοφυλάκιο συμπερασματικά θα αποδίδει το ίδιο με την απόδοση που θα μας δώσει το περιουσιακό στοιχείο στην περίπτωση που δεν έχουμε κίνδυνο. Στην περίπτωση που δεν προκύπτει η παραπάνω πρόταση θα παρατηρούσαμε στην αγορά πως θα υπήρχαν ευκαιρίες για εξισορροπητική κερδοσκοπία. Οπότε προκύπτει ότι :

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$$

Στη παραπάνω σχέση αν κάνω αντικατάσταση τις σχέσεις (2.12) και (2.13) θα προκύψει ότι :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} rS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \qquad (2.14)$$

Η παραπάνω σχέση λοιπόν καλείται και η εξίσωση των Black & Scholes.

<u>Αντιστάθμιση Δέλτα ή Delta Hedging</u>

Η αναφορά μας στο αντικείμενο της αντιστάθμισης θα ξεκινήσει με τον αντίστοιχο συντελεστή Δέλτα. Ο συντελεστής αυτός λοιπόν αναπαριστά τον ρυθμό μεταβολής για την τιμή του δικαιώματος σε σχέση με την αντίστοιχη τιμή από περιουσιακού στοιχείου. Αναπαριστά δηλαδή, την κλίση από την καμπύλη που προκύπτει από τις δύο προαναφερθείσες τιμές. Θα μπορούμε να πούμε ότι , $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$, δηλαδή η μεταβολή της τιμής του δικαιώματος προαίρεσης κατά κάποιες μονάδες μεταβάλλει την τιμή του περιουσιακού στοιχείου κατά Δ μονάδες των μονάδων αυτών.

Κεφάλαιο 3

Το γενικευμένο διωνυμικό μοντέλο αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης

Ύστερα από την εκτενή αναφορά που κάναμε για το διωνυμικό μοντέλο στο προηγούμενο κεφάλαιο θα προχωρήσουμε στην ανάλυση μιας εκ των πολλών επεκτάσεων που έγιναν πάνω στο μοντέλο των Cox, Ross, Rubinstein. Έτσι λοιπόν θα προχωρήσουμε σε μελέτη για τον εκτενέστερο, ακριβέστερο και αποτελεσματικότερο τρόπο αποτίμησης των τιμών των δικαιωμάτων προαίρεσης.

Ιστορικά παραδείγματα τροποποίησης του συγκεκριμένου μοντέλου αποτελούν :

- Των Broadie, Detemple και Heston, Zhou (1996-1997) οι οποίοι πρότειναν μοντέλα που αντικατέστησαν τις τερματικές τιμές του δέντρου με αυτές των Black & Scholes. Το πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι οι προκύπτουσες τιμές συγκλίνουν σε αυτές των τιμών Black – Scholes κι έτσι μπορεί να εφαρμοστεί η παρέκταση του Richardson και μάλιστα με μεγάλη ακρίβεια στα αποτελέσματα.

- Των Omberg, Leisen, Reimer , Figlewski, Gao ,Widdicks (1996) και πολλών άλλων.

Στην παρούσα εργασία λοιπόν θα εξετάσουμε ένα γενικευμένο μοντέλο των CRR προσθέτοντας ωστόσο και μια ακόμα μεταβλητή ελαστικότητας. Το μοντέλο CRR αποτελεί μια ειδική περίπτωση του γενικευμένου διωνυμικού μοντέλου με μεταβλητή ελαστικότητας (stretch parameter) να ισούται με 1. Εκτός των άλλων σαν παρατήρηση μπορούμε να αναφέρουμε πως αυτή η επιπλέον μεταβλητή – παράμετρος μας δίνει την δυνατότητα να κατανείμουμε έναν από τους τελικούς κόμβους στην τιμή εξάσκησης αλλά και να ορίσουμε ένα μέρος των κόμβων στις τιμές του φράγματος.

Το πλέγμα που έχει κατασκευαστεί και περιγράψαμε παραπάνω θα δούμε πως μας δίνει την δυνατότητα να βελτιώσουμε μέσω αυτού την αριθμητικά την διαδικασία τιμολόγησης των δικαιωμάτων προαίρεσης.

Στην συνέχεια της μελέτης μας θα δείξουμε πληροφορίες σχετικά με τον τρόπο σύγκλισης των τιμών των διωνυμικών μοντέλων.

Ακόμα βασιζόμενοι στα μοντέλα των Leisen και Reimer (1996) που απέδειξαν πως η σύγκλιση των τιμών αυτών είναι τάξης O (1/n) για το μοντέλο των CRR, και τα μοντέλα των

Jarrow και Rudd (1983) αλλά και του Tian (1993) θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε διεξοδικά την γενίκευση του διωνυμικού μοντέλου και να καταλήξουμε σε αναλυτικά και διεξοδικά συμπεράσματα γύρω από αυτό.

3.1 Το γενικευμένο διωνυμικό μοντέλο

Ξεκινώντας την μελέτη μας για το γενικευμένο διωνυμικό μοντέλο ας υποθέσουμε ότι η τιμή της μετοχής, που συμβολίζουμε με S, η οποία είναι ανεξάρτητη του κινδύνου και ότι ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown και δίνεται από τον τύπο :

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma dZ \qquad (2.15)$$

,όπου r είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου και z είναι η στιγμιαία μεταβλητότητα.

Υποθέτουμε τώρα πως θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα δικαίωμα προαίρεσης με χρόνος λήξης T. Σε ένα διωνυμικό δέντρο λοιπόν n περιόδων τα οποία βρίσκονται μεταξύ των χρονικών στιγμών 0 και T, ο χρόνος θα χωριστεί σε $\Delta T = \frac{T}{n}$. Αν λοιπόν, όπως και πριν, πάρουμε ότι S η τιμή της μετοχής τότε στο διωνυμικό δέντρο που εξετάζουμε είτε θα κινηθεί προς τα επάνω στην τιμή uS με πιθανότητα p, είτε προς τα κάνω στην τιμή dS με πιθανότητα $1 - p$. Για τα παραπάνω ισχύει $0 < d < e^{r\Delta t} < u$ και $0 < p < 1$.

Στο μοντέλο CRR βασικά μας εργαλεία σε πρώτο στάδιο για τον υπολογισμό των u, d, p είναι η μέση τιμή, διακύμανση και η σχέση $ud = 1$. Θα ισχύουν οι σχέσεις :

- $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$
- $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$
- $p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u-d}$

Για το μοντέλο GCRR μια παράμετρος λ ενσωματώνεται στο αντίστοιχο απλό μοντέλο CRR έτσι ώστε το πλέγμα του δέντρου να προσαρμόζεται με ευελιξία και ευκολία στα νέα δεδομένα. Με άλλα λόγια η συνθήκη $ud = 1$, την οποία χρησιμοποιούμε στο μοντέλο CRR, είναι “ λιγότερο σημαντική “ στο μοντέλο μας. Σαν αποτέλεσμα λοιπόν θα έχουμε πως το μοντέλο GCRR θα έχει έναν ακόμα βαθμό ελευθερίας ώστε να προκύψει η προσαρμογή του διωνυμικού μοντέλου που αναφέραμε προηγουμένως.

Πιο κάτω στο Θεώρημα 1 θα δούμε αποδείξουμε πως η κατανομή της τιμής του μοντέλου μας στην ημερομηνία λήξης T συγκλίνει στην κατανομή της τιμής των Black & Scholes όσο το n πηγαίνει στο άπειρο.

<u>Θεώρημα 1</u>

Στο μοντέλο GCRR η τιμές άλματος στην επόμενη κατάσταση καθώς και η πιθανότητα θα προκύπτουν από τους τύπους :

- $u = e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$
- $d = e^{-{}^{1}/_{\lambda}\sigma\sqrt{\Delta t}}$ (2.16)
- $p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$

, όπου λ>0 είναι η παράμετρος προέκτασης και προσδιορίζει την μορφή του διωνυμικού δέντρου. Ακόμα όταν $\Delta t \rightarrow 0$ ο αριθμός των n βημάτων που είδαμε προηγουμένως προσεγγίζει το άπειρο. Ενώ ακόμα οι τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης του GCRR μοντέλου συγκλίνουν στις τιμές των Black & Scholes για plain vanilla ευρωπαϊκά δικαιώματα. Όπου plain vanilla είναι η απλούστερη μορφή περιγραφής ενός περιουσιακού στοιχείου και μπορεί να εφαρμοστεί σε πολλές κατηγορίες χρηματοοικονομικών προϊόντων.

Απόδειξη

Στο μοντέλο GCRR ο αλγόριθμος του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου στον χρόνο Τα θα δίνεται από την σχέση :

$$\ln S_T = \ln S_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n ,$$

, όπου S_t είναι η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή t, και x_js, (j = 1, 2, 3,…, n) είναι τυχαίες μεταβλητές του διωνυμικού μοντέλου με u, d , p να δίνονται από τις προηγούμενες σχέσεις. Εφαρμόζοντας τις επεκτάσεις της σειράς Taylor στις εκθετικές συναρτήσεις του μοντέλου GCRR, μπορούμε να δούμε ότι όσο το $n \rightarrow \infty$ θα έχουμε ότι :

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-{}^{1}/_{\lambda}\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-{}^{1}/_{\lambda}\sigma\sqrt{\Delta t}}} \rightarrow \frac{1}{\lambda^2 + 1} + \frac{\lambda\,(r - {}^{\sigma^2}/_{2})\sqrt{\Delta t}}{\sigma\,(\lambda^2 + 1)} \qquad (2.17)$$

Συμπερασματικά λοιπόν όσο το Δt τείνει στο 0 η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής x_j θα συγκλίνει στην τιμή :

$$p\lambda\sigma\sqrt{\Delta t} + (1-p)\left(-\frac{\sigma\sqrt{\Delta t}}{\lambda}\right) = p\left[\lambda + \frac{1}{\lambda}\right]\sigma\sqrt{\Delta t} - \frac{\sigma\sqrt{\Delta t}}{\lambda} \rightarrow \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t \quad (2.18)$$

$$p\lambda^2\sigma^2\Delta t + (1-p)\frac{\sigma^2\Delta t}{\lambda^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2\Delta t^2 \rightarrow \sigma^2\Delta t\left[p\lambda^2 + (1-p)\frac{1}{\lambda^2}\right] \rightarrow \sigma^2\Delta t \quad (2.18)^*$$

Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα του Lindeberg – Levy, συμπεραίνουμε ότι :

$$\frac{\ln S_T - \ln S_0 - n\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t\right\}}{\sigma\sqrt{\Delta t}\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad (2.19)$$

Σαν αποτέλεσμα λοιπόν όσο το Δt τείνει στο 0 η τιμή της κατανομής του μοντέλου GCRR συγκλίνει στην λογαριθμοκανονική κατανομή,

$$\ln S_T \xrightarrow{d} N\left(\ln S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right) \quad (2.20)$$

Έτσι στην περίπτωση στων plain vanilla ευρωπαϊκών δικαιωμάτων όταν το Δt τείνει στο 0 οι τιμές του γενικευμένου διωνυμικού μοντέλου συγκλίνουν στις αντίστοιχες τιμές της φόρμουλας των Black – Scholes.

Το μοντέλο CRR είναι μια ειδική περίπτωση του GCRR μοντέλου το οποίο και μελετούμε αλλά με λ = 1. Το κλειδί του μοντέλου GCRR είναι ότι ο λογάριθμος των u, d δεν είναι απαραίτητα του ίδιου μεγέθους. Η ευελιξία του μοντέλου αυτού μας επιτρέπει να βελτιστοποιήσουμε το πλέγμα του δέντρου μας με τον επιθυμητό τρόπο για εμάς. Για παράδειγμα για να δώσουμε μια λογικά ακριβής τιμή, μπορούμε να αφήσουμε να λήξουν στον χρόνο λήξης στην κατάσταση in the money για deep out of the money δικαιώματα ακόμα και αν ο αριθμός των βημάτων είναι μικρός στο GCRR μοντέλο.

3.2 Είδη γενικευμένων διωνυμικών μοντέλων και ρυθμοί σύγκλισης

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε τα διάφορα διωνυμικά μοντέλα και τους ρυθμούς σύγκλισης των μοντέλων αυτών αλλά και το πώς να βελτιωθεί η σύγκλιση αυτή. Τα αποτελέσματα θα μας υποδείξουν ότι ο ρυθμός σύγκλισης του GCRR μοντέλου εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου λ. Όταν το λ = 1 στο CRR μοντέλο ένα μέρος των σφαλμάτων των τιμών, που είναι ενσωματωμένο στο διωνυμικό μοντέλο, εξαρτάται από την θέση των τελικών κόμβων γύρω από την τιμή εξάσκησης. Ας θέσουμε λοιπόν, $S_x = Su^m d^{n-m}$ ότι είναι ο πιο κοντινός κόμβος στην λήξη και η τιμή αυτή είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης, με m να είναι η μικρότερη τιμή που ικανοποιεί την σχέση $Su^m d^{n-m} > X$. Αν το n αυξάνεται, η λογαριθμική διαφορά μεταξύ δύο συνεχόμενων κόμβων ο λόγος $\ln(u/d)$ μειώνεται. Η μεταβλητή ε(n) τώρα ορίζεται σαν την λογαριθμική διαφορά μεταξύ της τιμής εξάσκησης και του από πάνω κόμβου, και σαν τύπο την γράφουμε ως :

$$\varepsilon(n) = \frac{\ln S_X - \ln X}{\ln S_X - \ln S_{X-1}} = \frac{\ln \left({}^{S_X}/_{X}\right)}{\ln\left(\frac{S_X}{S_{X-1}}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{S_X}{X}\right)}{\ln\left({}^{u}/_{d}\right)}, \qquad (2.21)$$

, όπου $S_{x-1} = Su^{m-1} d^{n-(m-1)}$ είναι η τιμή του τελικού κόμβου κάτω από την τιμή Sx. Έχοντας τώρα καθορίσει την θέση της μεταβλητής ε (n) μπορούμε να καταλήξουμε σε κάποια σαφέστερα συμπεράσματα μέσω του Θεωρήματος 2 παρακάτω.

<u>Θεώρημα 2</u>

Αν C_n και C_{BC} οι τιμές ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς στο GCRR διωνυμικό μοντέλο για n περιόδους και για συνεχή χρόνο αντίστοιχα, και με αποπληρωμή ίση με max $(S_T - X, 0)$. Θα έχουμε λοιπόν :

$$C_n = \begin{cases} C_{BS} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), & \lambda \neq 1 \\ C_{BS} + \frac{\beta\,(0.5-\varepsilon(n))^2}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right), & \lambda = 1 \end{cases} \qquad (2.22)$$

Όπου $\beta = -2Xe^{-rT}\varphi(d_2)\sigma\sqrt{T}$, και φ είναι η συνάρτηση πυκνότητας από μια τυπική κανονική κατανομή και $d_2 = (\ln(S/X) + (r - (\sigma^2/2)T)/\sigma\sqrt{T}$.
Η απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος είναι εύκολα κατανοητή κι μας παρέχει με πληροφορίες σχετικά για την δομή του ρυθμού σύγκλισης των γενικών διωνυμικών μοντέλων κι επισυνάπτεται στο άρθρο Generalized Cox-Ross-Rubinstein Binomial Models

των San-Lin Chung και Par-Ta Shih (2007) στο παράρτημα Α.1 και προς χάριν συντομίας δεν αναφέρεται αναλυτικά στην παρούσα διπλωματική εργασία.
Θα ξεκινήσουμε λοιπόν με μια γενική θεωρία της κανονικής προσέγγισης για την διωνυμική κατανομή που αναπτύχθηκε από τον Uspensky το 1937. Χρησιμοποιώντας την τυπική τεχνική ανάλυση, όπως και στις επεκτάσεις της σειράς Taylor, μπορεί κάνεις εύκολα να εξάγει τον ρυθμό σύγκλισης των δύο διωνυμικών προσεγγίσεων των δύο διωνυμικών κατανομών της φόρμουλας των Black & Scholes. Όλως παραδόξως αν και οι όροι του σφάλματος στις δύο διωνυμικές κατανομές γενικώς είναι της τάξης $O(1/\sqrt{n})$, ο ρυθμός σύγκλισης των διωνυμικών τιμών μπορεί να αγγίξει μια υψηλότερη τάξη $O(1/n)$ για συγκεκριμένα διωνυμικά μοντέλα, όπως αυτό των CRR και των Jarrow Rudd. Αυτό συμβαίνει διότι ο ρυθμός σύγκλισης του μοντέλου GCRR εξαρτάται σημαντικά από την ασυμπτωτική ιδιότητα της πιθανότητας p. Για παράδειγμα όταν $p = 0.5 + O(1/\sqrt{n})$ ο όρος του σφάλματος $(1 - 2p)/(6 - \sqrt{np\,(1-p)})$ της διωνυμικής προσέγγισης για την κανονική κατανομή συγκλίνει στο μηδέν με τάξη $O(1/n)$. Επιπλέον οι όροι σφάλματος με τάξη $O(1/\sqrt{n})$ σε δύο διωνυμικές προσεγγίσεις μπορούν να εξαλειφθούν όταν $p = 0{,}5 + O(1/\sqrt{n})$. Έτσι ο ρυθμός σύγκλισης για το μοντέλο CRR είναι τάξης $O(1/n)$.
Ο Widdicks το 2002 όρισε μια μεταβλητή θέσης Λ (n), σαν την διαφορά μεταξύ της τιμής εξάσκησης και της αντίστοιχης τιμής του προηγούμενου κόμβου, προσαρμοσμένη κατάλληλα στο πλέγμα. Η σχέση που μας δίνει την παραπάνω μεταβλητή είναι :

$$\Lambda\,(n) = \frac{S_x - X}{S_x - S_{x-1}}$$

Κατέληξαν λοιπόν στο συμπέρασμα ότι το n * σφάλματα του n μοιάζει με μια τετραγωνική συνάρτηση του Λ (n) και φτάνει σε ένα τοπικό μέγιστο σφάλμα Λ (n) = 0.5 στο CRR μοντέλο. Επειδή το $S_x - S_{x-1} = S_x\,(1 - \frac{d}{u})$ και ο φυσικός λογαριθμικός μετασχηματισμός είναι μονότονος μετασχηματισμός, ένα δεδομένο ε (n) στο Θεώρημα 2 έχει άμεση σύνδεση με ένα δεδομένο Λ (n) στον Widdicks.

Έτσι το Θεώρημα 2 βλέπουμε πως είναι συνεπές με τα αριθμητικά ευρήματα του Widdicks καθώς υποστηρίζει πως n* σφάλματα του n είναι μια τετραγωνική συνάρτηση του ε(n) και φτάνει σε ένα τοπικό μέγιστο σφάλμα όταν ε(n) = 0,5 στο CRR μοντέλο.

Όμοια όπως και το CRR μοντέλο, έτσι οι τιμές του διωνυμικού μοντέλου GCRR παρουσιάζουν την κοινώς παρατηρούμενη ταλαντευτική συμπεριφορά. Ωστόσο ο Tian (1999) έδειξε ότι οι διωνυμικές τιμές του μοντέλου CRR συγκλίνουν μονοτονικά στον τύπο των Black & Scholes με ρυθμό 1/n και μπορεί κανείς να ρυθμίσει με ακρίβεια τις τιμές των τελικών κόμβων ώστε σε ένα από αυτόν να ισούται με την τιμή εξάσκησης. Με βάση τα αποτελέσματα λοιπόν του Tian, διερευνούμε την κίνηση του ρυθμού σύγκλισης και τον ρυθμό της του μοντέλου GCRR όταν το δέντρο έχει σχεδιαστεί με τέτοιον τρόπο ώστε η τιμή εξάσκησης να βρίσκεται στο κέντρο μεταξύ των τελικών κόμβων. Προς χάριν συντομίας το προαναφερθέν μοντέλο το ονομάζουμε GCRR – XPC.

<u>Πόρισμα 1</u>

Αν στο GCRR διωνυμικό μοντέλο C_n και C_{BS} είναι οι τιμές ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς σε n περιόδους αλλά και σε συνεχή χρόνο αντίστοιχα, και τελική πληρωμή ίση με max (S_T – X, 0), τότε :

$$C_n = C_{BS} + O\,(1/n)$$

Από την απόδειξη του πορίσματος 1 μπορεί κανείς να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι ο ρυθμός σύγκλισης του μοντέλου GCRR – XPC εξαρτάται από την ασυμπτωτική ιδιότητα της παραμέτρου p. Στο GCRR- XPC μοντέλο έχουμε ότι p = 0.5 + O (1/n) και έτσι ο ρυθμός σύγκλισης είναι τάξης O (1/n).

Προς χάριν συντομίας η απόδειξη παραλείπετε και μπορούμε να την δούμε στο άρθρο των Chung και Shih (2007) στο Apendix A.2 αλλά θα πρέπει να ορίσουμε κάποιες μεταβλητές ώστε να γίνει ευκολότερα κατανοητή κι η χρήση των μοντέλων στην Matlab σε παρακάτω κεφάλαιο. Έτσι λοιπόν στο μοντέλο GCRR – XPC ορίζουμε πως το $X = Su^{n/2}d^{n/2}$ για n να είναι άρτιος αριθμός θα καταλήξουμε στην παρακάτω σχέση για το λ :

$$\lambda\,(n) = \frac{\ln(\frac{X}{S})}{\sigma\sqrt{nT}} + \frac{\sqrt{[\frac{2\ln(\frac{X}{S})}{\sigma\sqrt{nT}}]^2 + 4}}{2}$$

Ως αποτέλεσμα λοιπόν η απόδειξη μας οδηγεί στο να κατανοήσουμε τον λόγο για τον οποίο τα διωνυμικά μοντέλα των Jarrow και Rudd αλλά και του Tian είναι τάξης σύγκλισης O (1/n). Αυτό συμβαίνει γιατί όσο το n τείνει να πάει στο άπειρο η παράμετρος p ισούται με 0.5.

Ένας διαφορετικός τρόπος προσέγγισης για την βελτίωση του ρυθμού σύγκλισης του GCRR μοντέλου μας είναι η υιοθέτηση της τεχνικής εξομάλυνσης των Heston και Zhou. Οι Heston και Zhou λοιπόν απέδειξαν ότι αν η συνάρτηση πληρωμής είναι συνεχώς διαφοροποιήσιμη δευτέρας τάξης, τότε οι διωνυμικές τιμές συγκλίνουν σε αυτές των Black & Scholes με ρυθμό σύγκλισης 1/n και αυτός ο ρυθμός παραμένει σταθερός σε όλους τους κόμβους του διωνυμικού δέντρου. Τα αποτελέσματα αυτά είναι γενικά και μπορούν να εφαρμοστούν στο μοντέλο GCRR. Έτσι, χρησιμοποιούμε ορθογώνια τεχνική εξομάλυνσης των Heston και Zhou στο GCRR μοντέλο μας. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι ρυθμοί, οι τάξεις και η μονοτονία των συγκλίσεων σε κάθε περίπτωση μοντέλου ξεχωριστά.

Μοντέλο	**Ορισμός**	**Ρυθμός σύγκλισης**	**Μονοτονία συγκλίσεων**
GCRR	GCRR μοντέλο με σταθερό λ	O $(1/\sqrt{n})$	Μη μονότονη
CRR	Ειδική περίπτωση του GCRR με λ = 1	O (1/n)	Μη μονότονη
GCRR – XPC	GCRR μοντέλο με την τιμή εξάσκησης να είναι στο κέντρο των κόμβων	O (1/n)	Μονότονη
GCRR – HZ	GCRR με σταθερό λ, με την αποπληρωμή να ακολουθεί την ομαλοποιημένη θεωρία των Heston και Zhou (2000)	O $(1/\sqrt{n})$	Μονότονη
CRR – HZ	Ειδική περίπτωση GCRR – HZ με λ = 1	O (1/n)	Μονότονη
GCRR – TSP	GCRR με δύο παράμετρους προέκτασης λ και 1/λ σε περιττό και άρτιο χρόνο	O (1/n)	Μη μονότονη

Τέλος θα αναφερθούμε σε άλλη μια προέκταση του γενικευμένου διωνυμικού μοντέλου το GCRR – TSP. Αυτή η προέκταση λοιπόν είναι ένα μοντέλο GCRR δύο περιόδων όπου με δύο παραμέτρους λ και 1/λ να χρησιμοποιούνται την πρώτη και την δεύτερη περίοδο. Το βασικό χαρακτηριστικό του μοντέλου αυτού είναι ότι τα μεγέθη μετάβασης προς τα επάνω ή κάτω στο επόμενο βήμα καθορίζονται ανάλογα με το αν το χρονικό βήμα είναι σε περιττό ή ζυγό βήμα. Με αυτή την τροποποίηση η τιμή της μετοχής επιστρέφει στην αρχική της τιμή ύστερα από την κίνηση πάνω ή κάτω στο μοντέλο GCRR – TSP.
Η κατανομή των τιμών στην λήξη του μοντέλου GCRR πρέπει να διασφαλιστεί ότι συγκλίνει στην κατανομή τιμών στην λήξη του αντίστοιχου μοντέλου συνεχούς χρόνου με το n να τείνει στο άπειρο.

Θεώρημα 3

Αν υποθέσουμε ένα μοντέλο GCRR – TSP 2n περιόδων με παραμέτρους λ και 1/λ. Στην περίπτωση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος plain vanilla όταν το Δt τείνει στο μηδέν, οι τιμές του GCRR – TSP μοντέλου συγκλίνουν στις τιμές του τύπου των Black & Scholes.

Θεώρημα 4

Αν C_n και C_{DIC} είναι οι τιμές του διωνυμικού GCRR- TSP μοντέλου σε n περιόδους και συνεχή χρόνο αντίστοιχα ενός Ευρωπαϊκού down and in δικαίωμα [1] αγοράς και τελική πληρωμή $\max(S_T - X, 0)$ θα έχουμε :

$$C_n = C_{DIC} + O(1/n)$$

[1] Μια επιλογή down-and-in είναι ένας τύπος επιλογής φραγμού knock-in που καθίσταται βιώσιμη μόνο όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου πέσει σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο τιμής, που ονομάζεται τιμή φραγμού. Εάν η τιμή δεν πέσει στο επίπεδο φραγμού, η επιλογή δεν γίνεται ποτέ ενεργή και λήγει χωρίς αξία. Εάν η τιμή φτάσει στο όριο, το δικαίωμα προαίρεσης ενεργοποιείται και ενεργεί όπως κάθε άλλο δικαίωμα παρέχοντας στον κάτοχο το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να ασκήσει το δικαίωμα αγοράς ή πώλησης στην τιμή εξάσκησης κατά ή πριν από την ημερομηνία λήξης που καθορίζεται στη σύμβαση.

Κεφάλαιο 4

Εμπειρική Μελέτη

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε την χρησιμότητα του θεωρητικού υπόβαθρου που θέσαμε προηγουμένως καθώς αρχικά θα δούμε μοντέλα τα οποία δημιουργήσαμε στην γλώσσα προγραμματισμού Matlab σχετικά με την αποτίμηση των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και Αμερικάνικων δικαιωμάτων πώλησης στα παρακάτω μοντέλα :

- Κλασσικό διωνυμικό μοντέλο CRR
- Γενικευμένο διωνυμικό μοντέλο GCRR
- Γενικευμένο διωνυμικό μοντέλο GCRR – XPC

Για τα ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης θα πάρουμε πως το σφάλμα των τιμών είναι e (n), θα ισχύει ότι :

$$e(n) = C_n - C_{BS} \qquad (2.23)$$

, όπου C_n είναι η τιμή στο διωνυμικό μοντέλο και C_{BS} είναι η τιμή που προκύπτει από το μοντέλο των Black & Scholes. Ενώ ο ρυθμός του σφάλματος ορίζεται ως :

$$p(n) = e(n) / e(2n) \qquad (2.24)$$

Ο λόγος σφάλματος είναι ένα μέτρο για να βελτιώσουμε την ακρίβεια όσο ο αριθμός των χρονικών βημάτων διπλασιάζεται. Επομένως είναι σαφές ότι όταν ο αριθμός των χρονικών βημάτων διπλασιάζεται το σφάλμα στο μοντέλο τιμολόγησης GCRR –XPC είναι ακριβώς στο μισό. Επομένως ο ρυθμός σύγκλισης του μοντέλου αυτού είναι τάξης Ο (1/n), ο οποίος είναι και συνεπής. Ακόμα όσο ο αριθμός των βημάτων αυξάνεται , λόγος των σφαλμάτων κατά απόλυτη τιμή θα πρέπει να είναι πιο μεγάλος από την μονάδα. Τώρα συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις μπορούμε να βρούμε την τιμή Black & Scholes συναρτήσει του ρυθμού σφάλματος και των τιμών του διωνυμικού μοντέλου. Θα ισχύει λοιπόν :

$$p(N) = e(N) / e(2N) \rightarrow e(N) = p(N) * e(2N) \rightarrow C(N) - C_{BS} = p(N) * e(2N) \rightarrow C(N) - C_{BS} = p(N)\,[C(2N) - C_{BS}] \rightarrow C(N) - C_{BS} = p(N) * C(2N) - p(N) * C_{BS} \rightarrow C_{BS} = \frac{p(N)*C(2N) - C(N)}{p(N) - 1}.$$

Για τα αμερικάνικα δικαιώματα πώλησης η τιμής του σφάλματος μπορείς να υπολογιστεί από την διαφορά :

$$\varepsilon\ (N) = C\ (N) - C\ (2N) \qquad (2.25)$$

Ενώ ο λόγος των σφαλμάτων υπολογίζεται από τον τύπο :

$$p\ (2N) = \frac{[p(N) - 1]}{[p\ (2N) - 1]} * p\ (2N) \qquad (2.26)$$

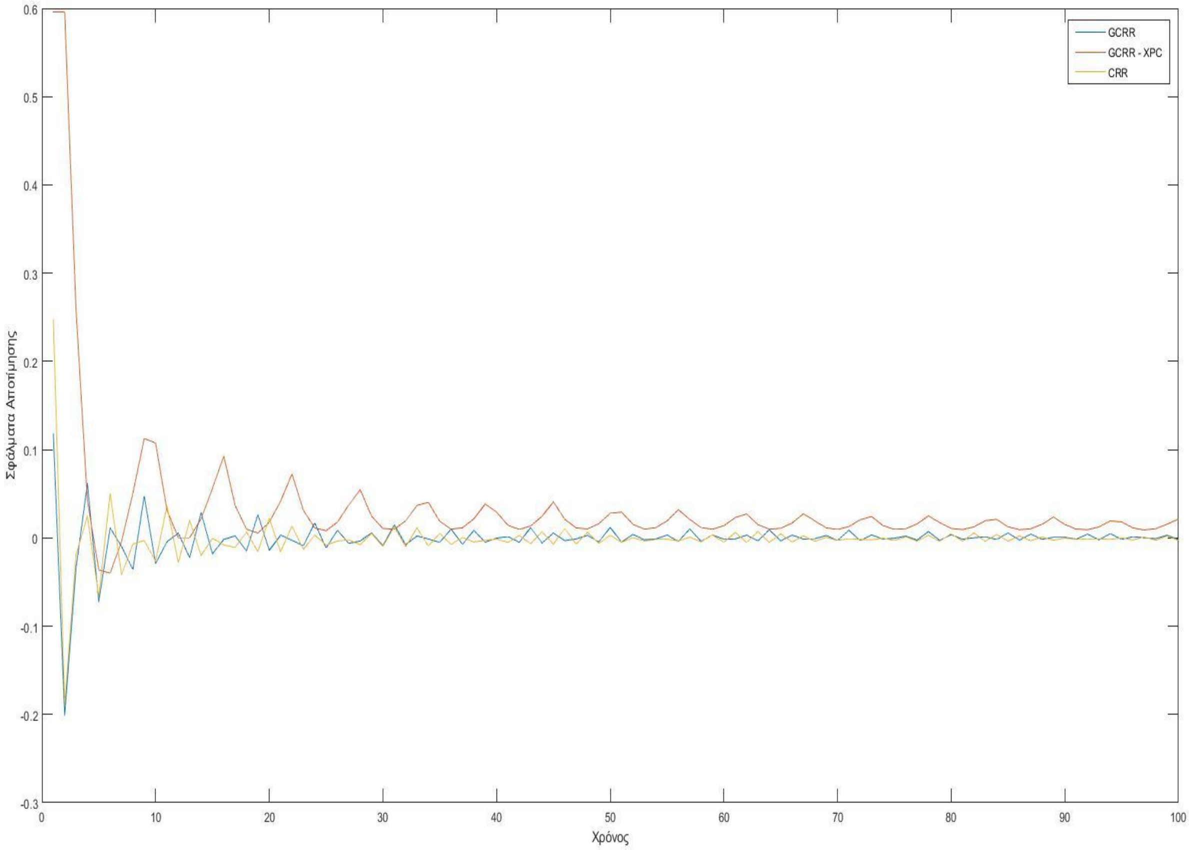
Ένα βασικό μας εργαλείο στην μελέτη μας αυτή αλλά και στην αριθμητική απεικόνιση της παραπάνω θεωρίας είναι η γλώσσα προγραμματισμού Matlab. Με την βοήθεια λοιπόν της συγκεκριμένης γλώσσας δημιουργήσαμε μοντέλα για τα CRR, GCRR , GCRR – XPC και καταλήξαμε στα αποτελέσματα τα οποία και παρίστανται στους παρακάτω πίνακες :

European call option									
	CRR			GCRR			GCRR -XPC		
N	**PRICE**	**ERROR**	**ERROR RATIO**	**PRICE**	**ERROR**	**ERROR RATIO**	**PRICE**	**ERROR**	**ERROR RATIO**
50	6,9230	0,0030	-	6,9142	--0,0118	-	6,8981	0,0279	-
100	6,9290	-0,0030	-1	6,9279	-0,0019	-	6,9046	0,0214	9,833333
200	6,9267	-0,0007	4,285714	6,9257	0,0003	0	6,9164	0,0096	0,285714
400	6,9257	0,0003	-2,33333	6,9260	0,0000	1,157895	6,9176	0,0084	7
800	6,9264	-0,0004	-0,75	6,9259	0,0001	0,95	6,9218	0,0042	0,5
1600	6,9261	-0,0001	4	6,9256	0,0004	0,869565	6,9224	0,0036	1,714286
3200	6,9259	0,0001	-1	6,9256	0,0004	1	6,9236	0,0024	0,411765
6400	6,9261	-0,0001	-1	6,9258	0,0002	1,095238	6,9243	0,0017	-
B-S	6,9260	-	-	6,9260	-	-	6,9260	-	-

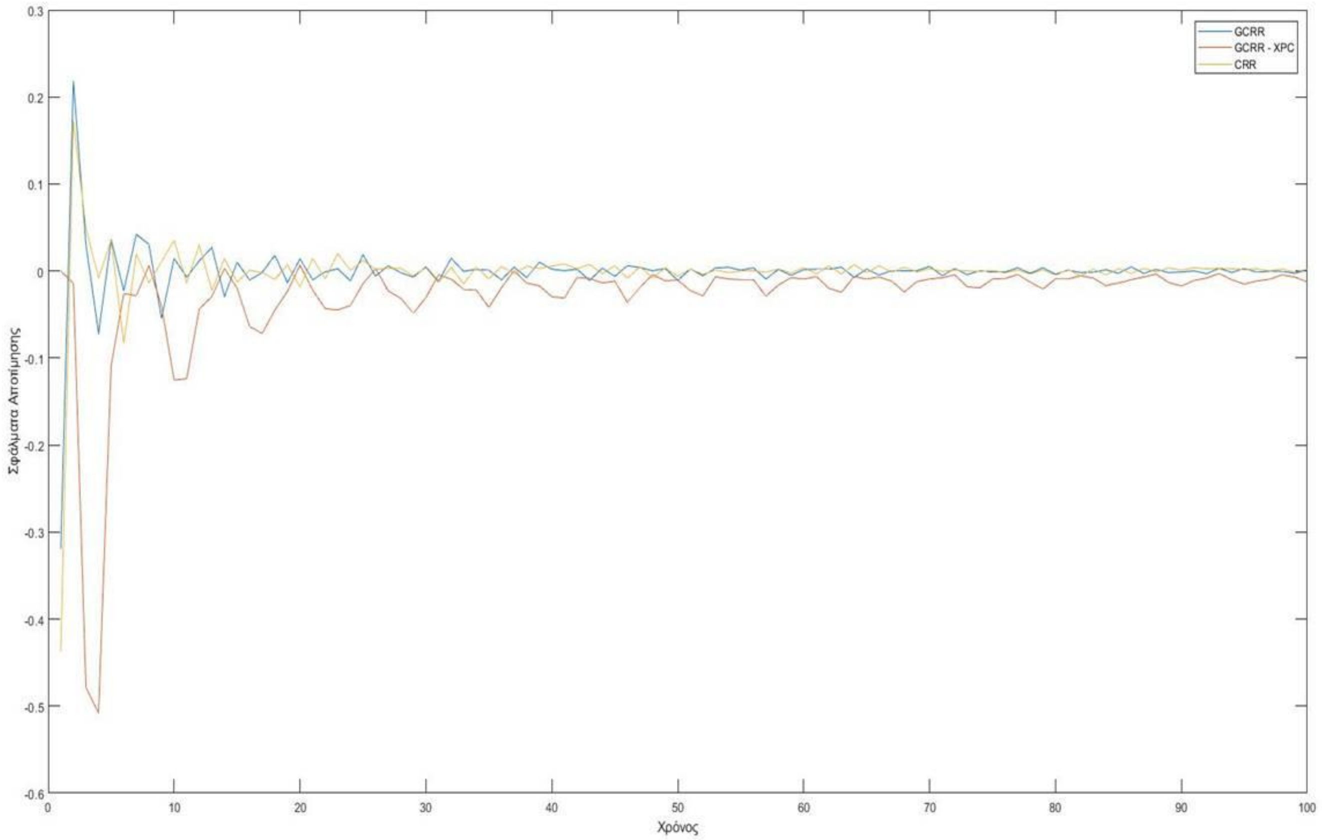
American put option									
	CRR			GCRR			GCRR -XPC		
N	**PRICE**	**ERROR**	**ERROR RATIO**	**PRICE**	**ERROR**	**ERROR RATIO**	**PRICE**	**ERROR**	**ERROR RATIO**
50	0,6213	-0,0059	-	0,6145	-0,0107	-	0,5846	-0,0105	-
100	0,6272	0,002	-2,95	0,6252	0,0014	-7,64286	0,5951	-0,0128	0,820312
200	0,6252	0,0006	3,333333	0,6238	-0,0003	-4,66667	0,6079	-0,0038	3,368421
400	0,6246	-0,0005	-1,2	0,6241	0	-	0,6117	-0,0048	0,791667
800	0,6251	0,0003	-1,66667	0,6241	0,0001	0	0,6165	-0,0021	2,285714
1600	0,6248	0,0002	1,5	0,624	-0,0001	-1	0,6186	-0,0018	1,166667
3200	0,6246	-0,0001	-2	0,6241	-0,0003	0,333333	0,6204	-0,0013	1,384615
6400	0,6247	-	-	0,6244	-	-	0,6217	-	-

Οι παραπάνω πίνακες δημιουργήθηκαν με τα δεδομένα πως η αρχική τιμή $S_0 = 50$, η τιμή εξάσκησης K = 45, το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r = 0,06, η λήξη επέρχεται μετά από T = 6 μήνες, και η τυπική απόκλιση σ = 0,2.

Παραθέτουμε τα διαγράμματα σφαλμάτων τόσο για τα ευρωπαϊκά δικαιώματα όσο και για τα αμερικάνικα δικαιώματα πώλησης κατά την πάροδο του χρόνου :



Διάγραμμα σφαλμάτων ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς συναρτήσει του χρόνου



Διάγραμμα σφαλμάτων αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης συναρτήσει του χρόνου

Τα συμπεράσματα τα οποία μπορούμε να εξάγουμε από τα παραπάνω αποτελέσματα των πινάκων που υπολογίστηκαν με τα μοντέλα μας στην Matlab μας οδηγούν αρχικά πως τα σφάλματα του μοντέλου CRR και του GCRR ΜΕ λ = 1,1 δεν μειώνονται μονότονα όσο το n αυξάνεται. Για παράδειγμα όταν το n = 6.400 το σφάλμα είναι ίσο με 0,000285 που είναι χειρότερο από την τιμή του σφάλματος όταν το n = 800. Αντιθέτως για το μοντέλο GCRR – XPC η τιμή των σφαλμάτων μειώνεται όσο το n αυξάνεται.

Ακόμα φαίνεται πως ο λόγος του σφάλματος του μοντέλου GCRR – XPC όσον αφορά τα ευρωπαϊκά δικαιώματα συγκλίνει μονότονα σε μια σταθερά όσο το n τείνει στο άπειρο.

Επίσης επειδή ο ρυθμός σύγκλισης του μοντέλου GCRR – XPC είναι υψηλότερης τάξης μεταξύ όλων των άλλων μοντέλων, οι αριθμητικές δοκιμές για την τελική απόδοση που κάνουμε βασίζονται όλες σε αυτό το συγκεκριμένο μοντέλο.

Ενώ αν συγκρίνουμε τις τιμές μεταξύ των μοντέλων βλέπουμε και στις δύο περιπτώσεις κατά συνθήκη είναι καλύτερο το GCRR. Συγκεκριμένα στα ευρωπαϊκά δικαιώματα το μοντέλο GCRR κυριαρχεί εν συγκρίσει με τα άλλα δύο μοντέλα λόγω της γρηγορότερης σύγκλισης του στην τιμή των Black & Scholes.Ενώ ακόμα στα αμερικάνικα δικαιώματα αν ελέγξουμε τα αποτελέσματα του πίνακα του οποίου έχουμε τις τιμές μας φαίνεται ότι υπερέχουν οι τιμές του μοντέλου GCRR σε σύγκριση με τα άλλα δύο μοντέλα όπως και στα προηγούμενα ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς.

Ενώ μια ακόμα παρατήρηση την οποία είναι ότι όταν ο αριθμός των χρονικών βημάτων αυξάνεται δέκα φορές για τη μέθοδο GCRR-XPC, το σφάλμα τιμολόγησης γίνεται ακριβώς το ένα δέκατο.

Μια τελευταία και βεβαίως σημαντική παρατήρηση την οποία μπορούμε να κάνουμε είναι ότι τόσο στην περίπτωση του in the money όσο και του at the money το μοντέλο GCRR είναι καλύτερο στην αποτίμηση που θέλουμε να κάνουμε. Ωστόσο μια ιδιαιτερότητα είναι πως το μοντέλο GCRR είναι καταλληλότερο και καλύτερο από τα άλλα δύο στην περίπτωση που είμαστε out of the money με ημερομηνία λήξης του δικαιώματος να είναι μετά από ένα έτος και η τιμή της μεταβλητής προέκτασης να ειναι 1,01.

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Κατά την πάροδο των ετών όσο μεγαλύτερη ήταν η έρευνα και η εξέλιξη της μελέτης των δικαιωμάτων προαίρεσης τόσο πιο σημαντική γινόταν και η ανάγκη για την έρευνα των τεχνικών αποτίμησης αυτών. Το ένα μοντέλο διαδεχόταν το άλλο με την εξέλιξη να έρχεται σαν φυσικό επόμενο της απαίτησης για ακριβέστερη αποτίμησης. Στο παρών άρθρο μελετήθηκε τόσο το διωνυμικό μοντέλο των Cox, Ross, Rubinstein (1979) το οποίο και αποτέλεσε βασικά εργαλείο για τις μετέπειτα έρευνες αλλά και το γενικευμένο διωνυμικό μοντέλο των Chung και Shih (2007).

Παραθέσαμε λοιπόν το θεωρητικό υπόβαθρο για το διωνυμικό μοντέλο ενώ και την θεωρία η οποία αναλύει το γενικευμένο διωνυμικό μοντέλο με την μεταβλητή προέκτασης που το τροποποιεί σε σχέση με το κλασσικό μοντέλο, και αποτελεί βάση για την συγκεκριμένη διπλωματική εργασία στο κομμάτι της εμπειρικής μελέτης. Αυτή η θεωρία θα μας βοηθήσει σημαντικά να δημιουργήσουμε τα ανάλογα μοντέλα στην γλώσσα προγραμματισμού Matlab.

Η εμπειρική μελέτη που προαναφέραμε και επακολούθησε την θεωρία την οποία παραθέσαμε αφορούσε την δημιουργία μοντέλων αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης για τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς και τα Αμερικάνικα δικαιώματα πώλησης τόσο για το διωνυμικό μοντέλο, το γενικευμένο διωνυμικό μοντέλο, όσο και για το γενικευμένο διωνυμικό μοντέλο GCRR – XPC.

Αρχικώς δημιουργήσαμε πίνακες με τις τιμές που βρήκαμε μέσω των μοντέλων, καθώς και τα σφάλματα αυτών για διάφορες τιμές πλήθους οι οποίες διπλασιάζονταν ανά βήμα.

Μέσω αυτών των πινάκων καταλήξαμε σε κάποια ακριβή συμπεράσματα μετά από την σύγκριση των τριών αυτών μοντέλων όσον αφορά τις τιμές και τα σφάλματα. Τελικά καταλήξαμε πως το καταλληλότερο μοντέλο είναι το GCRR για τα δικαιώματα προαίρεσης μετά την ανάλυση των αποτελεσμάτων μας.

Βιβλιογραφία

Άρθρα

1. Boyle, P.P., & Tian, Y.S. (1997). An explicit finite difference approach to the pricing of barrier options. Applied Mathematical Finance, 5, 17-43.

2. Boyle, P.P. (1998). A lattice framework for option pricing with two state variables. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 35, 1-12.

3. Broadie, M., Detemple, J. (1996). American option valuation: new bounds , approximations, and a comparison of existing methods. The Review of Financial Studies, volume 9, issue 4, p. 1211 – 1250.

4. Cox, J. C., Ross, S. A., &Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. Journal of Financial Economics, 7, 229-264.

5. Diener, F., Diener, M. (2004). Asymptotic of the Price Oscillations of a European Call Option in a Tree Model-Francine Mathematical Finance, Vol. 14, No. 2, 271-293.

6. Heston, S., & Zhou, G. F. (1997). On rate of convergence of discrete time contingent claims. Working paper, Olin School of Business, Washington University.

7. Hull, J. C., & White, A. (1990). Valuing derivative securities using the explicit finite difference method. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 25, 87-100.

8. Jarrow, R., Rudd, A. (1986). Option pricing. Journal of Banking & Finance, vol. 10, issue 1, 157-161.

9. Joshi, M.S. (2007). Achieving Higher Order Convergence for the Prices of European Options in Binomial Trees, University of Melbourne, Centre for Actuarial Studies.

10. Leisen, D., & Reimer, M. (1995). Binomial models for option valuation: Examining and improving convergence. Discussion paper No. B-309, Rheinische Friedrich-Wilhelms - Universitat Bonn.

11. Kou, S.G. (2003). On pricing of discrete barrier options. Statistica Sinica 13, 955–964.

12. Tian, Y. (1993). A modified lattice approach to option pricing. The Journal of Futures Markets, 13, 563-577.

13. Tian, Y. (1999). A flexible binomial option pricing model. Journal of Futures Markets, 19, 817–843.

14. J.Walsh, (2003). The rate of convergence of the binomial tree scheme. Finance and Stochastics, 7, 337–361

15. Chan, J-H., Joshi, M., Tang, R., Yang, C. (2008). Trinomial or binomial: accelerating American put option pricing on trees, to appear in Journal of Futures Markets.

16. Chang- Palmer, (2006). Smooth convergence in the binomial model.

17. Kunito, N. and Ikeda, M. (1992). Pricing options with curved boundaries. Math. Finance 2, 275-298.

Βιβλία

1. Hull, John C. Options, Futures, and Other Derivative Securities. 2nd edition, Chapter 14.

2. Θωμάς Πουφινάς - Χρήστος Φλώρος, Χρηματοοικονομικά Παράγωγα,Εκδ.Δίσιγμα,2014.

3. James C. Van Horne. Financial Management and Policy. 12th edition, Chapter 5.

Διπλωματικές Εργασίες

1. Ευθυμία Πασχάκη, Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης Με Ένα Ευέλικτο Διωνυμικό Μοντέλο, Φεβρουάριος 2020.

2. Ανδρέας Μπουζούκας, Option Valuation with a Modified Tree Method, Αύγουστος 2021.

Σημειώσεις Διδασκόντων

Το Γενικευμένο Διωνυμικό Μοντέλο Αποτίμησης Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Σπυρίδων Τσαγγαράς

1. Εγγλέζος Νικόλαος, Ειδικά Θέματα Ποσοτικών Μεθόδων στη Χρηματοοικονομική, Οκτώβριος 2021.
2. Εγγλέζος Νικόλαος, Παράγωγα Αξιόγραφα, Μάρτιος 2021.

Διαδικτυακές πηγές

1. https://www.investopedia.com/terms/b/binomialoptionpricing.asp

2. https://www.mathworks.com/

Παράρτημα

Κώδικες στην Matlab

1. Αποτίμηση Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς με το διωνυμικό μοντέλο CRR

```
function[price,lattice]=LatticeEurCall(S0,K,r,T,sigma,N)
deltaT=T/N;
u=exp(sigma*sqrt(deltaT)+(sigma^2*deltaT));
d=exp(-sigma*sqrt(deltaT)+(sigma^2*deltaT));
p=(exp(r*deltaT)-d)/(u-d);
lattice=zeros(N+1,N+1);
for j=0:N
 lattice(j+1,N+1)=max(0,S0*(u^j)*(d^(N-j))-K);
end
for i=N-1:-1:0
 for j=0:i
 lattice(j+1,i+1)=exp(-r*deltaT)*(p*lattice(j+2,i+2)+(1-p)*lattice(j+1,i+2));
 end
end
price=lattice(1,1);
```

2. Αποτίμηση Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς με το γενικευμένο διωνυμικό μοντέλο GCRR

```
function[price,lattice]=LatticeEurCall(S0,K,r,T,sigma,N,lamda)
deltaT=T/N;
u=exp (lamda*(sigma*sqrt(deltaT)));
d=exp (-(1/lamda)*(sigma*sqrt(deltaT)));
p=(exp(r*deltaT)-d)/(u-d);
lattice=zeros(N+1,N+1);
for j=0:N
 lattice(j+1,N+1)=max(0,S0*(u^j)*(d^(N-j))-K);
end
for i=N-1:-1:0
 for j=0:i
 lattice(j+1,i+1)=exp(-r*deltaT)*(p*lattice(j+2,i+2)+(1-p)*lattice(j+1,i+2));
 end
end
price=lattice(1,1);
```

3. Αποτίμηση Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς με το γενικευμένο διωνυμικό μοντέλο GCRR – XPC

```
function[price,lattice]=LatticeEurCall1(S0,K,r,T,sigma,N)
deltaT=T/N;
u=exp(sigma*sqrt(deltaT));
d=1/u;
x = (S0*u^(N/2)*d^(N/2));
lamda= (log(x/S0)/(sigma*sqrt(N*T))+(sqrt((2*log(x/S0)/sigma*sqrt(N*T))^2)+4)/2);
u=exp (lamda*(sigma*sqrt(deltaT)));
d=exp (-(1/lamda)*(sigma*sqrt(deltaT)));
p=(exp(r*deltaT)-d)/(u-d);
lattice=zeros(N+1,N+1);
for j=0:N
 lattice(j+1,N+1)=max(0,S0*(u^j)*(d^(N-j))-K);
end
for i=N-1:-1:0
 for j=0:i
 lattice(j+1,i+1)=exp(-r*deltaT)*(p*lattice(j+2,i+2)+(1-p)*lattice(j+1,i+2));
 end
end
price=lattice(1,1);
```

4. Αποτίμηση Αμερικάνικων δικαιωμάτων πώλησης με το διωνυμικό μοντέλο CRR

```
function[price,lattice]=LatticeAmericanPut(S0,K,r,T,sigma,N)
deltaT=T/N;
u=exp(sigma*sqrt(deltaT)+(sigma^2*deltaT));
d=exp(-sigma*sqrt(deltaT)+(sigma^2*deltaT));
p=(exp(r*deltaT)-d)/(u-d);
lattice=zeros(N+1,N+1);
for i=0:N
 for j=0:i
 lattice(j+1,N+1)=max(0,K-(S0*(u^j)*(d^(i-j))));
 end
end
for i=N-1:-1:0
 for j=0:i
 lattice(j+1,i+1)=max(max(0,K-(S0*(u^j)*(d^(i-j)))),exp(-r*deltaT)*(p*lattice(j+2,i+2)+(1-
p)*lattice(j+1,i+2)));
 end
end
price=lattice(1,1);
```

5. Αποτίμηση Αμερικάνικων δικαιωμάτων πώλησης με το γενικευμένο διωνυμικό μοντέλο GCRR

```
function[price,lattice]=LatticeEurCall(S0,K,r,T,sigma,N,lamda)
deltaT=T/N;
u=exp (lamda*(sigma*sqrt(deltaT)));
d=exp (-(1/lamda)*(sigma*sqrt(deltaT)));
p=(exp(r*deltaT)-d)/(u-d);
lattice=zeros(N+1,N+1);
for i=0:N
 for j=0:i
 lattice(j+1,N+1)=max(0,K-(S0*(u^j)*(d^(i-j))));
 end
end
for i=N-1:-1:0
 for j=0:i
 lattice(j+1,i+1)=max(max(0,K-(S0*(u^j)*(d^(i-j)))),exp(-r*deltaT)*(p*lattice(j+2,i+2)+(1-
p)*lattice(j+1,i+2)));
 end
end
price=lattice(1,1)
```

6. Αποτίμηση Αμερικάνικων δικαιωμάτων πώλησης με το γενικευμένο διωνυμικό μοντέλο GCRR – XPC

```
function[price,lattice]=LatticeEurCall1(S0,K,r,T,sigma,N)
deltaT=T/N;
u=exp(sigma*sqrt(deltaT));
d=1/u;
x = (S0*u^(N/2)*d^(N/2));
lamda= (log(x/S0)/(sigma*sqrt(N*T))+(sqrt((2*log(x/S0)/sigma*sqrt(N*T))^2)+4)/2);
u=exp (lamda*(sigma*sqrt(deltaT)));
d=exp (-(1/lamda)*(sigma*sqrt(deltaT)));
p=(exp(r*deltaT)-d)/(u-d);
lattice=zeros(N+1,N+1);
for i=0:N-1
 for j=0:i
 lattice(j+1,N)=max(0,K-(S0*(u^j)*(d^(i-j))));
 end
end
for i=N-1:-1:0
 for j=0:i
 lattice(j+1,i+1)=max(max(0,K-(S0*(u^j)*(d^(i-j)))),exp(-
r*deltaT)*(p*lattice(j+2,i+2)+(1-p)*lattice(j+1,i+2)));
 end
end
```

```
price=lattice(1,1);
```

7. Ενιαίο διάγραμμα σφαλμάτων αποτίμησης στα μοντέλα CRR, GCRR, GCRR - XPC σε σχέση με τα χρονικά βήματα

```
randn('state',0)
S0=50; K=45; r=0.06; T=0.5; sigma=0.2;
CRR=zeros(6400,1);
for i=1:6400;
CRR(i,1)=CRRMON(S0,K,r,T,sigma,i);
end

randn('state',0)
S0=50; K=45; r=0.06; T=0.5; sigma=0.2; lamda=1.1;
GCRR=zeros(6400,1);
for i=1:6400;
GCRR(i,1)=GCCRMON(S0,K,r,T,sigma,i,lamda);
end

randn('state',0)
S0=50; K=45; r=0.06; T=0.5; sigma=0.2;
GCRRXP=zeros(6400,1);
for i=1:6400
GCRRXP(i,1)=GCRRXPC(S0,K,r,T,sigma,i);
end

ERRORGCRRXPC=zeros(100,1);
for i=1:100
ERRORGCRRXPC(i,1)=blspric-GCRRXP(i,1);
end

ERRORGCRR=zeros(100,1);
for i=1:100
ERRORGCRR(i,1)=blspric-GCRR(i,1);
end

ERRORCRR=zeros(100,1);
for i=1:100
ERRORCRR=blspric-CRR(i,1);
end

plot(1:100,ERRORGCRR);
xlabel('Χρόνος')
ylabel('Σφάλματα Αποτίμησης')
hold on
```

```
plot(1:100,ERRORGCRRXP);
hold on
plot(1:100,ERRORCRR);
```